



ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического анализа

ТЕОРЕМЫ О МНОЖИТЕЛЯХ СУММИРУЕМОСТИ ДЛЯ
МЕТОДОВ $A^{\alpha\beta}$

(дипломная работа)

Исполнитель: М.Тяхт, студ. мат. V к.

Руководитель: С.Барон, доц., канд.
физ.-мат. наук

Тарту 1971

ВВЕДЕНИЕ

Возникновение теории множителей суммируемости относится к началу нынешнего столетия, со времени опубликования теоремы Дедекинда - Адамара (см. [I], стр. 146) и первых её обобщений.

Теорему Дедекинда - Адамара стали обобщать для рядов, суммируемых методом Чезаро целочисленного порядка, различные авторы. Возникшая на базе этого теория получила название теории множителей суммируемости.

Первые важные обобщения теорем Дедекинда - Адамара получены в 1907-1909 гг. Они принадлежат Бору [9, 10], Харди [13, 14] и Бромвичу. При этом они находили лишь достаточные условия.

Параллельно с развитием теории множителей суммируемости простых рядов развивалась аналогичная теория для двойных рядов. Однако, поскольку понятие сходимости для двойной последовательности богаче (см. § I), чем понятие сходимости для простой последовательности, то теоремы простых рядов имеют несколько аналогов в теории двойных рядов. Все же для двойных рядов развивалась лишь теория множителей сходимости. Так в 1917 г. Харди [14], в 1925 г. Муром [18], в 1918 г. Кожима [16], и в 1936 г. Гамильтоном [11], соответственно разным видам сходимости двойных рядов обобщена теорема Дедекинда - Адамара. Для доказательства своих теорем все эти авторы пользовались непосредственным методом.

В 1938 г. вышла из печати монография Мура [19], посвящённая множителям сходимости. В ней Мур излагает все известные в то время результаты о множителях сходимости в области простых и кратных рядов. В своей монографии Мур даёт дальнейшее обобщение

ние своей теоремы, пользуясь для доказательства методом обратного преобразования. После выхода в свет монографии Мура проблемой множителей суммируемости кратных рядов почти не занимались. В то же время исследования по множителям суммируемости простых рядов интенсивно продолжались.

Главная задержка в обобщении теорем для двойных рядов заключалась по-видимому в отсутствии простого метода для доказательства необходимости условий искомого теорем. Такой метод нашёл проф. Г.Ф.Кангро [5], давший необходимые условия для множителей суммируемости рядов относительно широкого класса методов суммирования.

Рассмотрим теперь нормальный метод суммирования $A = (a_{mnkl})$. Пусть $A = A' \circ A''$, т.е. $(a_{mnkl}) = (a'_{mk} \cdot a''_{nl})$ и обратные матрицы факторов A' и A'' имеют соответственно $\alpha + 2$ и $\beta + 2$ отличных от нуля диагонали, т.е.

$$\begin{aligned} \eta'_{mk} &= 0, \text{ если } k < m - \alpha - 1 \\ \eta''_{nl} &= 0, \text{ если } l < n - \beta - 1. \end{aligned} \quad (0, I)$$

соответствующий метод будем обозначать через $A^{\alpha\beta}$. Такими методами являются, например, метод Чезаро $C^{\alpha\beta}$ порядка $\alpha, \beta = 0, 1, \dots$ и метод Рисса $R^{\alpha\beta} = P^\alpha \circ P^\beta$ порядка $\alpha, \beta = 1, 2, \dots$, так как их обратные матрицы удовлетворяют условию (0.1). Доказательство см. в работах Барон [15], стр. 79, Тюрину [8], стр. 91 и Рассель [20], стр. 426.

В настоящей работе обобщаются теоремы 1 и 2 статьи [4] на двойные ряды. Используя метод обратного преобразования находим необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости
ТИПОВ

$$(A_2^{\alpha\beta}, B) , (A_2^{\alpha\beta}, B_c) , (A_2^{\alpha\beta}, B_2) ;$$

$$(A_c^{\alpha\beta}, B) , (A_c^{\alpha\beta}, B_c) , (A_c^{\alpha\beta}, B_2) ;$$

$$(A_b^{\alpha\beta}, B) , (A_b^{\alpha\beta}, B_c) , (A_b^{\alpha\beta}, B_2) .$$

Полученные результаты применяем затем к методу Чезаро.

Прежде чем перейти к следующему параграфу заметим, что достаточные условия для множителей суммируемости типа $(A_2^{\alpha\beta}, B_\omega)$, где $\omega = c, b, 2$ в несколько ином, чем в данной работе, виде были найдены Линнамяги [17].

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛЕММЫ

Пусть дан ряд¹

$$\sum_{k, \ell} \varepsilon_{k\ell} u_{k\ell} \quad (I.1)$$

причем известно, что ряд

$$\sum_{k, \ell} u_{k\ell} \quad (I.2)$$

суммируем некоторым методом A .

Говорят, что числа ε_{mn} являются множителями суммируемости типа² (A_2, B_ω) если ряд (I.1) является B_ω -суммируемым для любого A_2 -суммируемого ряда (I.2). Аналогично определяются множители суммируемости других типов.

Двойная последовательность $\{S_{mn}\}$ называется сходящейся (в смысле Прингсхейма), если существует³

$$\lim_{m, n} S_{mn} = S.$$

По определению предела, это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся индекс N такой, что при $m, n > N$ выполняется неравенство

$$|S_{mn} - S| < \varepsilon.$$

Двойная последовательность $\{S_{mn}\}$ называется ограниченно сходящейся (коротко ℓ -сходящейся), если $\{S_{mn}\}$ сходится и ограничена.

Двойная последовательность $\{S_{mn}\}$ называется регулярно

¹ Если пределы изменения индексов на указаны, то предполагается $k, \ell = 0, 1, \dots$

² Здесь и в дальнейшем $\omega = c, mc, \dots$

³ Запись $\lim_{m, n} S_{mn} = S$ понимаем как $\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = S$.

сходящейся (коротко τ -сходящейся), если существуют все пределы

$$\lim_{m,n} S_{mn}, \quad \lim_m S_{mn}, \quad \lim_n S_{mn}.$$

Каждая τ -сходящаяся последовательность является и ν -сходящейся.

Пусть задан нормальный, треугольный, факторизуемый метод $B = (\beta_{mnk\ell}) = (\beta'_{mk} \cdot \beta''_{n\ell})$, где факторы $B' = (\beta'_{mk})$ и $B'' = (\beta''_{n\ell})$ являются регулярными методами суммирования для простых рядов, т.е. выполнены условия (см. [1], стр. 17):

$$\lim_m \beta'_{mk} = \lim_n \beta''_{n\ell} = 1,$$

$$\beta_{mnk\ell} = \beta'_{mk} \cdot \beta''_{n\ell} = O(1).$$

Но так как⁴ (см. [1], стр. 45)

$$v_{mnk\ell} = \Delta_{k\ell} \beta_{mnk\ell},$$

то

$$v_{mnk\ell} = v'_{mk} \cdot v''_{n\ell} = O(1).$$

Используя теорему Кожима - Шура (см. [1], теорема I.I) получаем

$$\sum_{k,\ell=0}^{n,n} |v_{mnk\ell}| = O(1).$$

Л е м м а I.I. Если метод $A = (a_{nk})$ является нормальным и $a_{n0} = 1$, то

$$\eta_n = \delta_{n0},$$

где

$$\eta_n = \sum_{k=0}^n \eta_{nk}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. [1], стр. 51.

Л е м м а I.2. Пусть метод A сохраняет τ -сходимость и

⁴ Здесь и в дальнейшем обозначено

$$\Delta_{\mu\nu} = \Delta_{\mu}(\Delta_{\nu} \Sigma_{\mu\nu}) = \varepsilon_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu, \nu+1} - \varepsilon_{\mu+1, \nu} + \varepsilon_{\mu+1, \nu+1}$$

$B = (\beta_{\mu\nu})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{m, n} \beta_{\mu\nu} = 1 \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots).$$

Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа (A_2, B) необходимо выполнение условия

$$\varepsilon_{mn} = O(1). \quad (A)$$

Доказательство см. [6], стр. 9.

§ 2. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ТИПА (A_2, B_ω)

2.1. Неэффективные условия для множителей суммируемости типа (A_2, B_ω)

Пусть задано матричное преобразование

$$U''_{mn} = \sum_{k, \ell=0}^{m, n} a_{mnk\ell} U'_{k\ell} \quad (a)$$

последовательности в последовательность. Тогда справедливы следующие леммы.

Л е м м а 2.1. Для того, чтобы матричное преобразование (а) существовало и переводило все регулярно сходящиеся последовательности в сходящиеся, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} |a_{mnp\mu\nu}| < M \quad (m, n \geq N) \quad (b_1)$$

$$\lim_{m, n} a_{mnp\mu\nu} = a_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots) \quad (d_1)$$

$$\left. \begin{aligned} &] \lim_{m, n} \sum_{\mu=0}^m a_{mnp\mu\nu} \quad (v=0, 1, \dots) \\ &] \lim_{m, n} \sum_{\nu=0}^n a_{mnp\mu\nu} \quad (\mu=0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} (d_2)$$

$$] \lim_{m, n} \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} a_{mnp\mu\nu} \quad (d_3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. Гамильтон [12], теорема 9, Кожима [15], стр. 13, Куль [7], теорема 7.

Л е м м а 2.2. Для того, чтобы матричное преобразование (а) существовало и переводило все регулярно сходящиеся последо-

вательности в ограниченно сходящиеся, необходимо и достаточно выполнение условий (d_1) , (d_2) , (d_3) и кроме того

$$\sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} |\alpha_{m\mu\nu}| < M \quad (m, n = 0, 1, \dots)_n \quad (c_1)$$

Доказательство см. Гамильтон [12], теорема 18, Куль [7], теорема 8.

Л е м м а 2.3. Для того, чтобы матричное преобразование (а) существовало и переводило все регулярно сходящиеся последовательности в регулярно сходящиеся, необходимо и достаточно выполнение условий (d_1) , (d_2) , (d_3) , (c_1) и, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \exists \lim_m a_{m\mu\nu} &= a_{\mu\nu}^n & (\mu, \nu, n = 0, 1, \dots) \\ \exists \lim_n a_{m\mu\nu} &= a_m^{\mu\nu} & (\mu, \nu, m = 0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} (f_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \exists \lim_m \sum_{\mu=0}^m a_{m\mu\nu} & & (\nu, n = 0, 1, \dots) \\ \exists \lim_n \sum_{\nu=0}^n a_{m\mu\nu} & & (\mu, m = 0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} (f_2)$$

Доказательство см. Гамильтон [12], теорема 132, Кошма [15], теорема VII, Куль [7], теорема 9.

В нашем случае из регулярной сходимости последовательности

$$\{u'_{k\ell}\}, \quad (2.1)$$

где

$$u'_{k\ell} = \sum_{\mu, \nu=0}^{k, \ell} d_{k\ell\mu\nu} u_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

должна вытекать сходимость (соответственно τ -сходимость и ν -сходимость) последовательности

$$u''_{mn} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} \beta_{m\mu\nu} \varepsilon_{\mu\nu} u_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Из формулы (2.2) получим

$$u_{\mu\nu} = \sum_{k, \ell=0}^{\mu, \nu} \eta_{\mu\nu k\ell} u'_{k\ell}.$$

Подставим полученное выражение в (2.3), тогда

$$u'_{mn} = \sum_{k, \ell=0}^{m, n} c_{mk\ell} u'_{k\ell}, \quad (2.4)$$

где

$$c_{mk\ell} = \sum_{\mu, \nu=k, \ell}^{m, n} \beta_{m\mu\nu} \eta_{\mu\nu k\ell} \varepsilon_{\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Таким образом, вопрос о нахождении множителей суммируемости данного типа мы свели к исследованию некоторого матричного преобразования последовательности в последовательность. Применяя леммы 2.1, 2.2 и 2.3 мы можем найти необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типа (A_2, B_ω) . Оказывается, что часть условий уже выполнена. Для того, чтобы показать это, введем обозначения

$$H \varepsilon_{mn} = \sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+1, n+\beta+1} \eta_{\mu\nu mn} \varepsilon_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

$$H' \varepsilon_{mn} = \sum_{\mu=m}^{m+1} \eta_{\mu mn} \varepsilon_{\mu n}, \quad (2.7)$$

$$H'' \varepsilon_{mn} = \sum_{\nu=n}^{n+\beta+1} \eta_{m\nu n} \varepsilon_{m\nu}. \quad (2.8)$$

Для методов класса $A^{\alpha\beta}$ имеем

$$c_{mk\ell} = \sum_{\mu, \nu=k, \ell}^{k+\alpha, \ell+\beta+1} \beta_{m\mu\nu} \eta_{\mu\nu k\ell} \varepsilon_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Тогда, учитывая регулярность факторов метода B , условия A , получим

$$\lim_{m, n} c_{mk\ell} = \lim_{m, n} \sum_{\mu, \nu=k, \ell}^{k+\alpha, \ell+\beta+1} \beta_{m\mu\nu} \eta_{\mu\nu k\ell} \varepsilon_{\mu\nu} = H \varepsilon_{k\ell},$$

т.е. условие (d_1) .

Для проверки условия (d_2) предположим сначала, что $d_{mnoo} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m c_{mkle} &= \sum_{k=0}^m \sum_{\mu, \nu=k, e}^{m, n} \beta_{m\mu\nu} \eta_{\mu\nu k e} \epsilon_{\mu\nu} = \\ &= \sum_{\nu=e}^n \sum_{\mu=0}^m \beta_{m\mu\nu} \eta''_{\mu e} \eta'_{\mu} \epsilon_{\mu\nu} = \sum_{\nu=e}^n \beta_{mno\nu} \eta''_{\nu e} \epsilon_{o\nu}, \end{aligned}$$

так как на основе леммы I.I $\eta'_{\mu} = \delta_{\mu o}$. Переходя к пределу и учитывая регулярность факторов метода B, условие (A) и ограничение (O.I) получим

$$\begin{aligned} \lim_{m, n} \sum_{k=0}^m c_{mkle} &= \lim_{m, n} \sum_{\nu=e}^n \beta_{mno\nu} \eta''_{\nu e} \epsilon_{o\nu} = \\ &= \sum_{\nu=e}^{e+\beta+1} \eta''_{\nu e} \epsilon_{o\nu} = d'_{oo} H \epsilon''_{oe}, \end{aligned}$$

т.е. условие (d'_2) выполнено. Аналогично доказывается, что и условие (d''_2) выполнено.

Учитывая, что $d_{mnoo} = 1$ получим

$$\sum_{k, e=0}^{m, n} c_{mkle} = \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} \beta_{m\mu\nu} \eta_{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} = \beta_{mnoo} \epsilon_{oo}.$$

Переходя к пределу при $m, n \rightarrow \infty$ получим

$$\lim_{m, n} \sum_{k, e=0}^{m, n} c_{mkle} = \lim_{m, n} \beta_{mnoo} \epsilon_{oo} = \epsilon_{oo},$$

т.е. условие (d_3) .

Покажем, что условие (f_1) также выполнено. Действительно, учитывая условие (A), регулярность факторов метода B и условие

(0.1) получим

$$\begin{aligned} \lim_m c_{mnk\ell} &= \lim_m \sum_{\mu, \nu=k, \ell}^{m, n} \beta_{m\mu\nu} \eta_{\mu\nu k\ell} \varepsilon_{\mu\nu} = \\ &= \sum_{\mu, \nu=k, \ell}^{k+\beta+1, n} \beta''_{n\nu} \eta_{\mu\nu k\ell} \varepsilon_{\mu\nu} = \\ &= \sum_{\nu=\ell}^{\ell+\beta+1} \beta''_{n\nu} \alpha''_{\nu\nu} \eta''_{\nu\ell} H \varepsilon_{\nu\nu}. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что (f_1^e) также выполнено.

Так как

$$\sum_{k=0}^m c_{mnk\ell} = \sum_{\nu=\ell}^{\ell+\beta+1} \beta_{m\nu\nu} \eta''_{\nu\ell} \varepsilon_{\nu\nu},$$

то переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} \lim_m \sum_{k=0}^m c_{mnk\ell} &= \lim_m \sum_{\nu=\ell}^{\ell+\beta+1} \beta'_{m0} \beta''_{n\nu} \eta''_{\nu\ell} \varepsilon_{\nu\nu} = \\ &= \sum_{\nu=\ell}^{\ell+\beta+1} \beta''_{n\nu} \eta''_{\nu\ell} \varepsilon_{\nu\nu}, \end{aligned}$$

т.е. условие (f_2') . Аналогично проверяется выполнение условия (f_2^e) .

В итоге нами доказана следующая

Т е о р е м а 2.1. Пусть $d_{mn00} = 1$ и факторы метода B нормальны и регулярны. Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(A_2^{\alpha\beta}, B)$, необходимо и достаточно выполнение условий (A) и

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |c_{mnk\ell}| = O(1) \quad (m, n \geq N) \quad (\bar{b}_2)$$

а чтобы были множителями суммируемости типов $(A_2^{\alpha\beta}, B_\beta)$ и

(A_n^{ω}, B_n) — условия (A) и

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |c_{mnk\ell}| < M$$

$$(m, n = 0, 1, \dots). \quad (\bar{c}_i)$$

Может показаться, что этим наша проблема о множителях суммируемости типа (A_n^{ω}, B_n) уже решена. Однако полученные нами условия не являются эффективными, так как практически их трудно проверить. В следующем пункте мы найдём эффективные необходимые и достаточные условия.

2.2. Эффективные необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типа $(A_2^{\omega}, B_{\omega})$

Найдём эффективные необходимые условия для множителей суммируемости типа $(A_2^{\omega}, B_{\omega})$. На основе леммы I.2. за одно из необходимых условий можно взять условие (A). Так как условия, необходимые для множителей суммируемости типа (A_e, B) являются также необходимыми для множителей суммируемости типа (A_2, B) , то за необходимое условие можно взять следующее

$$\varepsilon_{mn} = O(\alpha_{mnpq} \beta_{mnpq}^{-1}), \quad (B)$$

ибо, как показано в [17], это условие является необходимым для множителей суммируемости типа (A_e^{ω}, B) .

Ранее мы показали, что

$$\lim_{m,n} c_{mnke} = H \varepsilon_{ke}.$$

На основе (\bar{b}_1) получим отсюда следующее необходимое условие

$$\sum_{k,e} |H \varepsilon_{ke}| < \infty. \quad (C)$$

Действительно, на основе (\bar{b}_1) для любых $p, q = 0, 1, \dots$ получим

$$\sum_{k,e=0}^{p,q} |c_{mnke}| = O(1).$$

Переходя к пределу при $m, n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{m,n} \sum_{k,e=0}^{p,q} |c_{mnke}| = \sum_{k,e=0}^{p,q} |H \varepsilon_{ke}| = O(1).$$

Последнее равносильно условию (C).

Из условия (\bar{b}_1) получим, что справедливо следующее условие

$$\sum_{k=0}^m |c_{mnkn}| = O(1) \quad (m, n \geq N), \quad (2.10)$$

Найдём предел, учитывая (0.1)

$$\begin{aligned} \lim_n c_{mnkn} &= \lim_n \sum_{\mu=k}^m \beta_{m\mu n} \eta_{\mu kn} \epsilon_{\mu n} = \\ &= \beta''_{nn} \sum_{\mu=k}^{k+n-1} \eta_{\mu kn} \epsilon_{\mu n} = \beta''_{nn} H' \epsilon_{kn} \end{aligned}$$

А тогда переходя в (2.10) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_n \sum_{k=0}^p |c_{mnkn}| = \sum_{k=0}^p |\beta''_{nn} H' \epsilon_{kn}| = O(1) \quad (n \geq N)$$

Следовательно необходимо

$$\beta''_{nn} \sum_m |H' \epsilon_{mn}| = O(1) \quad (n \geq N) \quad (2.11)$$

Убедимся, что в (2.11) можно взять $N = 0$. Для этого достаточно показать, что ряд сходится и тогда, когда $n < N$. Применяя условие (С) к методу $X = A^k \circ E$ находим, если взять $e = n$,

$$\sum_{k=0}^m |\alpha''_{nn} H' \epsilon_{kn}| = O(1)$$

Следовательно, если $n < N$ то можно заключить отсюда, что

$$\sum_k |H' \epsilon_{ke}| < \infty$$

Следовательно, необходимо условие:

$$\beta''_{nn} \sum_m |H' \epsilon_{mn}| = O(1) \quad (C_1)$$

Аналогично, взяв в условии (\bar{C}_1) индекс $k = m$ и применяя для (С) метод $Y = E \circ A^{\alpha\beta}$ получаем следующее необходимое условие

$$\beta'_{mm} \sum_n |H'' \epsilon_{mn}| = O(1) \quad (C_2)$$

Для нахождения других необходимых условий рассмотрим выражение

$$c_{mnke} = \sum_{\mu, \nu=k, e}^{k+n, e+n} \beta_{m\mu\nu} \eta_{\mu\nu ke} \epsilon_{\mu\nu}$$

Применим к нему преобразование Абеля - Харди, которое возьмем в виде

$$\sum_{k, l=0}^{m, n} \varepsilon_{kl} U_{kl} = \sum_{k, l=0}^{m, n} (\Delta_{kl} \varepsilon_{kl}) U_{kl} + \sum_{k=0}^m (\Delta_k \varepsilon_{k, n+1}) U_{kn} +$$

$$+ \sum_{l=0}^n (\Delta_l \varepsilon_{m+1, l}) U_{ml} + \varepsilon_{m+1, n+1} U_{mn}$$

Тогда получаем

$$c_{mnkl} = h_{mnkl} + e_{mnkl} + g_{mnkl} + f_{mnkl},$$

где

$$h_{mnkl} = \sum_{\mu, \nu=k, l}^{k+l+1, l+1} \beta_{mn\mu\nu} \sum_{x, \lambda=k, l}^{\mu, \nu} \eta_{x\lambda kl} \varepsilon_{x\lambda},$$

$$e_{mnkl} = \sum_{\mu=k}^{k+l+1} \Delta_{\mu} \beta_{mn\mu, l+1} \sum_{x, \lambda=k, l}^{\mu, l+1} \eta_{x\lambda kl} \varepsilon_{x\lambda},$$

$$g_{mnkl} = \sum_{\nu=l}^{l+1} \Delta_{\nu} \beta_{mn, k+l+\nu, \nu} \sum_{x, \lambda=k, l}^{k+l+\nu, \nu} \eta_{x\lambda kl} \varepsilon_{x\lambda},$$

$$f_{mnkl} = \beta_{mn, k+l+1, l+1} \sum_{x, \lambda=k, l}^{k+l+1, l+1} \eta_{x\lambda kl} \varepsilon_{x\lambda}.$$

Рассмотрим эти величины более подробно. Начнём с h_{mnkl} . Применяя преобразование Абеля - Харди, получаем

$$h_{mnkl} = h_{mnkl}^{(1)} + h_{mnkl}^{(2)} + h_{mnkl}^{(3)} + h_{mnkl}^{(4)},$$

где

$$h_{mnkl}^{(1)} = \sum_{\mu, \nu=k, l}^{k+l+1, l+1} \Delta_{\mu\nu} \beta_{mn\mu\nu} \sum_{s, t=k, l}^{\mu, \nu} \sum_{x, \lambda=k, l}^{s, t} \eta_{x\lambda kl} \varepsilon_{x\lambda},$$

$$h_{mnkl}^{(2)} = \sum_{\mu=k}^{k+l+1} \Delta_{\mu} \beta_{mn\mu, l+1} \sum_{s, t=k, l}^{\mu, l+1} \sum_{x, \lambda=k, l}^{s, t} \eta_{x\lambda kl} \varepsilon_{x\lambda},$$

$$h_{mn\kappa\epsilon}^{(3)} = \sum_{\nu=\epsilon}^{\nu+\beta+1} \Delta_{\nu} v_{mn\kappa+\epsilon+2,\nu} \sum_{\substack{\kappa+\epsilon+1, \nu \\ s,t=\kappa,\epsilon}} \sum_{\substack{s,t \\ \kappa,\lambda=\kappa,\epsilon}} \eta_{\kappa\lambda\kappa\epsilon} \epsilon_{\kappa\lambda},$$

$$h_{mn\kappa\epsilon}^{(4)} = v_{mn\kappa+\epsilon+2,\epsilon+\beta+2} \sum_{s,t=\kappa,\epsilon}^{\kappa+\epsilon+1,\epsilon+\beta+1} \sum_{\kappa,\lambda=\kappa,\epsilon}^{\kappa,\epsilon} \eta_{\kappa\lambda\kappa\epsilon} \epsilon_{\kappa\lambda}.$$

Введём теперь следующие обозначения :

$$G \epsilon_{mn} = \sum_{\substack{\mu,\nu=m,n \\ m+\epsilon+1, n+\beta+1}} (m+\epsilon+2-\mu)(n+\beta+2-\nu) \eta_{\mu\nu mn} \epsilon_{\mu\nu}, \quad (2.12)$$

$$G' \epsilon_{mn} = \sum_{\mu=m}^{m+\epsilon+1} (m+\epsilon+2-\mu) \eta_{\mu mn} \epsilon_{\mu n}, \quad (2.13)$$

$$G'' \epsilon_{mn} = \sum_{\nu=n}^{n+\beta+1} (n+\beta+2-\nu) \eta_{m\nu mn} \epsilon_{m\nu}, \quad (2.14)$$

$$L' \epsilon_{mn} = \sum_{\substack{\mu,\nu=m,n \\ m+\epsilon+1, n+\beta+1}} (m+\epsilon+2-\mu) \eta_{\mu\nu mn} \epsilon_{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

$$L'' \epsilon_{mn} = \sum_{\substack{\mu,\nu=m,n \\ m+\epsilon+1, n+\beta+1}} (n+\beta+2-\nu) \eta_{\mu\nu mn} \epsilon_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Пусть метод В удовлетворяет условиям

$$v_{m+n, n, m+n} = O(v_{mnmn}), \quad (2.17)$$

$$v_{m, n+1, m, n+1} = O(v_{mnmn}), \quad (2.18)$$

$$\sum_{\kappa,\epsilon=0}^{m,n} |v_{\kappa\epsilon\kappa\epsilon}^{-1} \Delta_{\kappa\epsilon} v_{mn\kappa\epsilon}| = O(1). \quad (2.19)$$

Справедлива следующая

Л е м м а 2.4. Из условий (2.17) и (2.18) следует для любых фиксированных $p, q = 0, 1, \dots$ справедливость соотношение

$$v_{mnmn}^{-1} = O(v_{m+r, n+q, m+r, n+q}^{-1}). \quad (2.20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия (2.17) и (2.18) можно записать в виде

$$v_{m+1, n, m+1, n}^{-1} = \mathcal{O}(v_{m+1, n, m+1, n}^{-1}),$$

$$v_{m+1, n, m+1, n}^{-1} = \mathcal{O}(v_{m, n+1, m, n+1}^{-1}).$$

А тогда можно записать следующие равенства

$$\begin{aligned} v_{m+1, n, m+1, n}^{-1} &= \mathcal{O}(v_{m+1, n, m+1, n}^{-1}) = \mathcal{O}(v_{m+e, n, m+e, n}^{-1}) = \dots = \mathcal{O}(v_{m+r, n, m+r, n}^{-1}) = \\ &= \mathcal{O}(v_{m+r, n+1, m+r, n+1}^{-1}) = \dots = \mathcal{O}(v_{m+r, n+q, m+r, n+q}^{-1}), \end{aligned}$$

т.е. получили (2.20).

Дадим выражениям для $h_{m, n, k, l}$ несколько иной, более удобный для дальнейших рассуждений, вид. Изменяя порядок суммирования, учитывая условия (8), затем ограничение (2.20), получим

$$\begin{aligned} h_{m, n, k, l}^{(1)} &= \sum_{\mu, \nu=k, l}^{\kappa+1, \beta+1} \Delta_{\mu\nu} v_{m, n, \mu\nu} \sum_{\alpha, \lambda=k, l}^{\mu, \nu} (\mu-\alpha+1)(\nu-\lambda+1) \eta_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda} = \\ &= \mathcal{O}(1) \sum_{\mu, \nu=k, l}^{\kappa+1, \beta+1} |\Delta_{\mu\nu} v_{m, n, \mu\nu}| \sum_{\alpha, \lambda=k, l}^{\mu, \nu} |\eta_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda}| = \\ &= \mathcal{O}(1) \sum_{\mu, \nu=k, l}^{\kappa+1, \beta+1} |\Delta_{\mu\nu} v_{m, n, \mu\nu}| \sum_{\alpha, \lambda=k, l}^{\mu, \nu} |\eta_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda} v_{\alpha\lambda}^{-1} \alpha_{\alpha\lambda} \lambda_{\alpha\lambda}| = \\ &= \mathcal{O}(1) \sum_{\mu, \nu=k, l}^{\kappa+1, \beta+1} |v_{\mu\nu}^{-1} \Delta_{\mu\nu} v_{m, n, \mu\nu}| \sum_{\alpha, \lambda=k, l}^{\mu, \nu} |\eta_{\alpha\lambda} \varepsilon_{\alpha\lambda} \alpha_{\alpha\lambda} \lambda_{\alpha\lambda}| = \\ &= \mathcal{O}(1) \sum_{\mu, \nu=k, l}^{\kappa+1, \beta+1} |v_{\mu\nu}^{-1} \Delta_{\mu\nu} v_{m, n, \mu\nu}| \sum_{\alpha, \lambda=0}^{\mu-\kappa, \nu-l} \mathcal{D}_{\alpha\lambda} = \\ &= \mathcal{O}(1) \sum_{\alpha, \lambda=0}^{\alpha+1, \beta+1} \mathcal{D}_{\alpha\lambda} \sum_{\mu, \nu=\alpha+\kappa, \lambda+l}^{\kappa+1, \beta+1} |v_{\mu\nu}^{-1} \Delta_{\mu\nu} v_{m, n, \mu\nu}|, \end{aligned}$$

где

$$D_{x\lambda} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |d_{x+k, \lambda+k, x+k, \lambda+k} \eta_{x+k, \lambda+k, k}|.$$

Изменяя порядок суммирования $h_{mnk\ell}^{(2)}$, учитывая (2.14), а затем (2.17), получим

$$\begin{aligned} h_{mnk\ell}^{(2)} &= \sum_{\mu=k}^{k+\ell+1} \Delta_{\mu} v_{m\mu, \ell+\beta+\varepsilon} \sum_{x, \lambda=k, \ell}^{\mu, \ell+\beta+\varepsilon} (\mu-x+1)(\ell+\beta+\varepsilon-\lambda) \eta_{x\lambda k\ell} \varepsilon_{x\lambda} = \\ &= O(1) \sum_{\mu=k}^{k+\ell+1} |v_{n, \ell+\beta+\varepsilon}''| \Delta_{\mu} v'_{m\mu} \left| \sum_{x=k}^{\mu} |d'_{xk} \eta'_{xk} G''_{xk\ell}| \right| = \\ &= O(1) \sum_{\mu=k}^{k+\ell+1} |v_{n, \ell+\beta+\varepsilon}''| \Delta_{\mu} v'_{m\mu} \left| \sum_{x=0}^{\mu-k} D_{x0} |G''_{x+k, \ell}| \right| = \\ &= O(1) \sum_{\mu=k}^{k+\ell+1} |v_{n, \ell+\beta+\varepsilon}''| v'_{\mu\mu} \Delta_{\mu} v'_{m\mu} \left| \sum_{x=0}^{\mu-k} D_{x0} |\beta'_{x+k, x+k} G''_{x+k, \ell}| \right| = \\ &= O(1) \sum_{x=0}^{\ell+1} |\beta'_{x+k, x+k} G''_{x+k, \ell}| \sum_{\mu=x+k}^{k+\ell+1} |v'_{\mu\mu} \Delta_{\mu} v'_{m\mu}| |v_{n, \ell+\beta+\varepsilon}''|. \end{aligned}$$

Аналогично рассуждая, получаем для $h_{mnk\ell}^{(3)}$ следующее выражение:

$$\begin{aligned} h_{mnk\ell}^{(3)} &= \sum_{v=\ell}^{\ell+\beta+1} \Delta_v v_{m\mu, k+\ell+2, v} \sum_{x, \lambda=k, \ell}^{k+\ell+2, v} (v-\lambda+1)(k+\ell+2-x) \eta_{x\lambda k\ell} \varepsilon_{x\lambda} = \\ &= O(1) \sum_{\lambda=0}^{\beta+1} |\beta''_{\lambda+\ell, \lambda+\ell} G'_{k, \lambda+\ell}| \sum_{v=\lambda+\ell}^{\ell+\beta+1} |v''_{vv} \Delta_v v''_{nv}| |v'_{m, k+\ell+2}|. \end{aligned}$$

Изменяя порядок суммирования, получим

$$h_{mnk\ell}^{(4)} = v_{m\mu, k+\ell+2, \ell+\beta+2} \sum_{x, \lambda=k, \ell}^{k+\ell+2, \ell+\beta+2} (k+\ell+2-x)(\ell+\beta+2-\lambda) \eta_{x\lambda k\ell} \varepsilon_{x\lambda} =$$

$$= v_{m, k+2, l+2} \varepsilon_{kl}.$$

Рассмотрим теперь e_{mkl} . Применяя преобразование Абеля, получим

$$e_{mkl} = e_{mkl}^{(1)} + e_{mkl}^{(2)},$$

где

$$e_{mkl}^{(1)} = \beta_{n, l+2}'' \sum_{\mu=k}^{k+1} \Delta_{\mu} v'_{m\mu} \sum_{s=k}^{\mu} \sum_{x, \lambda=k, e}^{s, l+1} \eta_{x\lambda k e} \varepsilon_{x\lambda},$$

$$e_{mkl}^{(2)} = \beta_{n, l+2}'' v'_{m, k+2} \sum_{s=k}^{k+1} \sum_{x, \lambda=k, e}^{s, l+1} \eta_{x\lambda k e} \varepsilon_{x\lambda}.$$

Учитывая (2.8) и условие (2.17), получим

$$\begin{aligned} e_{mkl}^{(1)} &= \theta(1) \sum_{\mu=k}^{k+1} |\Delta_{\mu} v'_{m\mu}| \sum_{x=0}^{\mu-k} \mathcal{D}_{x0} |H^{\varepsilon_{x+k, e}}| = \\ &= \theta(1) \sum_{\mu=k}^{k+1} |v'_{m\mu}| \Delta_{\mu} v'_{m\mu} \sum_{x=0}^{\mu-k} \mathcal{D}_{x0} |v'_{x+k, x+k} H^{\varepsilon_{x+k, e}}|. \end{aligned}$$

Изменяя порядок суммирования, учитывая затем (2.15), получим

$$\begin{aligned} e_{mkl}^{(2)} &= \beta_{n, l+2}'' v'_{m, k+2} \sum_{x, \lambda=k, e}^{k+1, l+1} (k+2-x) \eta_{x\lambda k e} \varepsilon_{x\lambda} = \\ &= \beta_{n, l+2}'' v'_{m, k+2} L^{\varepsilon_{kl}}. \end{aligned}$$

Проводя аналогичные рассуждения для g_{mkl} и учитывая (2.7), (2.18) и (2.16) получим

$$g_{mkl} = g_{mkl}^{(1)} + g_{mkl}^{(2)},$$

где

$$\begin{aligned} g_{mkl}^{(1)} &= \beta'_{m, k+2, e} \sum_{v=e}^{e+1} \Delta_v v''_{mv} \sum_{s=e}^v \sum_{x, \lambda=k, e}^{k+1, s} \eta_{x\lambda k e} \varepsilon_{x\lambda} = \\ &= \theta(1) \sum_{v=e}^{e+1} |v''_{mv}| \Delta_v v''_{mv} \sum_{\lambda=0}^{v-e} \mathcal{D}_{0\lambda} |v''_{\lambda+e, \lambda+e} H^{\varepsilon_{k, \lambda+e}}|, \end{aligned}$$

$$g_{mnkl}^{(2)} = \beta'_{m, k+l+2} v''_{n, l+\beta+2} \sum_{s=0}^{k+l+1} \sum_{\lambda=0, s}^{k+l+1, s} \eta_{\lambda k l s} \varepsilon_{\lambda} =$$

$$= \beta'_{m, k+l+2} v''_{n, l+\beta+2} L'' \varepsilon_{kl}.$$

И наконец

$$f_{mnkl} = \beta_{m, k+l+2, l+\beta+2} H_{nkl}.$$

Для нахождения других эффективных необходимых условий рассмотрим метод $X = A' \circ E$, где A' - фактор метода A , а E - метод сходимости. Тогда ввиду включения $X_2 \subset A_2^{k, \beta}$ (см. [7], стр. 21 и 29), условия, необходимые для множителей суммируемости типа (X_2, B) , подавно необходимы и для множителей суммируемости типа $(A_2^{k, \beta}, B)$.

Учитывая то, что метод Чезаро $(C, 0)$ есть метод сходимости (см. [1], стр. 67), получаем для метода X следующее выражение матрицы c_{mnkl} :

$$c_{mnkl} = \sum_{\mu, \nu=0, l}^{k+l+1, l+\beta} \beta_{m\mu\nu} \eta'_{\mu k} A_{\nu, l}^{-2} \varepsilon_{\mu\nu} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{k+l+1} \beta'_{m\mu} \eta'_{\mu k} \Delta_l(\beta'_{nl} \varepsilon_{kl}).$$

Приступим теперь к нахождению необходимых условий. Учитывая условие (b_1) можно записать

$$\sum_{k=0}^m |c_{mnkl}| = O(1) \quad (m, n \geq N) \quad (2.21)$$

Для метода X имеем

$$c_{mnkl} = \beta''_{nl} \sum_{\mu=0}^{k+l+1} \beta'_{m\mu} \eta'_{\mu k} \varepsilon_{\mu l}.$$

Проводя рассуждения, аналогичные как в [4], стр. 167-168, получаем тождество

$$c_{mnkn} = h'_{mnkn} + \beta''_{nn} \beta'_{m, k+2} H \epsilon_{kn} + \beta'_{nn} v'_{m, k+2} G \epsilon_{kn}, \quad (2.21a)$$

где

$$h'_{mnkn} = \beta''_{nn} \sum_{\mu=k}^{k+2} \Delta_{\mu} v'_{m\mu} \sum_{\chi=k}^M (\mu-\chi+1) \eta'_{\chi k} \epsilon_{kn}.$$

Учитывая условие (B), ограничения (2.17) и (2.19), получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m |h'_{mnkn}| &= O(1) |\beta''_{nn}| \sum_{k=0}^m \sum_{\mu=k}^{k+2} |\Delta_{\mu} v'_{m\mu}| \sum_{\chi=0}^M |\eta'_{\chi k} \alpha_{\chi n k n} \beta^{-1}_{\chi n k n}| = \\ &= O(1) \sum_{\mu=0}^{L+1} \sum_{k=0}^m |v'_{\mu+k, \mu+k} \Delta_{\mu} v'_{m, \mu+k}| \sum_{\chi=0}^M |\alpha''_{nn}| D_{\chi 0} = O(1). \end{aligned}$$

Учитывая регулярность фактора B' и условие (C_1) получаем, что и сумма второго слагаемого в тождестве (2.21a) ограничена. А тогда, учитывая (2.21) получаем следующее необходимое условие

$$\beta''_{nn} \sum_{k=0}^m |v'_{m, k+2} G \epsilon_{kn}| = O(1) \quad (m, n \geq N), \quad (G')$$

Аналогично рассуждая, взяв метод $Y = E \ominus A''^{\beta}$ и используя условие

$$\sum_{e=0}^n |c_{mne}| = O(1),$$

получаем следующее необходимое условие

$$\beta'_{nn} \sum_{e=0}^n |v''_{n, e+2} G \epsilon_{me}| = O(1) \quad (m, n \geq N). \quad (G'')$$

Покажем, что в полученных условиях можно взять $N = 0$. Взяв метод $X = A'' \ominus E$, подставляя вместо $G \epsilon_{mn}$ его выражение и учитывая (B), получим

$$\beta''_{nn} \sum_{k=0}^N |v'_{m, k+2} \sum_{\mu=k}^{k+2} (\mu+2-\mu) \eta'_{\mu k} \epsilon_{kn}| =$$

$$= O(1) |\beta''_{nn}| \sum_{k=0}^N |\beta'_{m, k+2}| \sum_{\mu=k}^{k+1} |(k+2-\mu) \eta'_{\mu k} \beta''_{\mu\mu}| =$$

$$= O(1) \sum_{k=0}^N |\beta'_{m, k+2}| \sum_{\mu=0}^{k+1} D_{\mu 0} |\beta''_{\mu\mu}| = O(1).$$

Аналогично рассуждая, взяв метод $Y = E \circ A''^{\beta}$, и рассматривая условия (G^e) , получаем что можно взять $N = 0$.

Для нахождения дальнейших необходимых условий воспользуемся тождеством

$$c_{mnk\ell} = h_{mnk\ell}^{(1)} + h_{mnk\ell}^{(2)} + h_{mnk\ell}^{(3)} + e_{mnk\ell}^{(1)} +$$

$$+ g_{mnk\ell}^{(2)} + v_{m, k+2, \ell} \beta_{n, \ell+r} \theta_{k\ell} + \beta''_{n, \ell+r} v'_{m, k+2, \ell} L'_{k\ell} +$$

$$+ \beta'_{m, k+2, \ell} v''_{n, \ell+r} L''_{k\ell} + \beta'_{m, k+2, \ell} \beta''_{n, \ell+r} H_{k\ell}$$
(2.22)

вытекающим по ходу доказательства.

Запишем теперь условие (G^1) в виде

$$\sum_{k, \ell=0}^{p, q} |c_{mnk\ell}| = O(1) \quad (m, n \geq N).$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{k, \ell=0}^{\infty, n} |c_{k\ell}^n| = O(1) \quad (n \geq N),$$
(2.23)

где обозначено

$$c_{k\ell}^n = \lim_m c_{mnk\ell}.$$

Аналогично, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, \infty} |c_m^{k\ell}| = O(1) \quad (m \geq N).$$
(2.24)

Найдём пределы из тождества (2.22):

$$c_{k\ell}^n = g_{mnk\ell}^{(1)} + v_{n, \ell+r}'' L''_{k\ell} + \beta''_{n, \ell+r} H_{k\ell},$$
(2.25)

где

$$g_{mnk\ell}^{(1)} = O(1) \sum_{\nu=e}^{\ell+\beta+r} |\beta''_{\nu\nu} \Delta_{\nu} v''_{n\nu}| \sum_{\lambda=0}^{\nu-\ell} D_{\lambda 0} |\beta''_{\lambda+\ell, \lambda} H'_{k, \lambda+\ell}|.$$

и

$$c_{m\ell}^{k\ell} = e_{m\ell}^{(1)} + v'_{m, k+\ell+2} L' \varepsilon_{k\ell} + \beta'_{m, k+\ell+2} H \varepsilon_{k\ell}, \quad (2.26)$$

где

$$e_{m\ell}^{(1)} = \theta(1) \sum_{\mu=k}^{k+\ell+1} |v'_{\mu k} \Delta_{\mu} v'_{m\mu}| \sum_{\chi=0}^{k-k} \mathcal{D}_{\chi 0} |v'_{\chi+k, \chi+k} H \varepsilon_{\chi+k, \ell}|.$$

При вычислении пределов мы учитывали регулярность факторов метода В

Используя только что найденные пределы учитывая (2.23), (2.24), условия (C), (C₁), (C₂), ограничение (2.19) и регулярность факторов метода В получим следующие необходимые условия

$$\sum_{k, \ell=0}^{\infty, n} |v''_{n, \ell+\beta+2} L'' \varepsilon_{k\ell}| = \theta(1) \quad (n \geq N), \quad (L')$$

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, \infty} |v'_{m, k+\ell+2} L' \varepsilon_{k\ell}| = \theta(1) \quad (m \geq N) \quad (L'')$$

Ввиду регулярности факторов метода В получаем, что в полученных условиях можно взять $N = 0$. Возьмём ещё такое условие

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |v_{m, k+\ell+2, \ell+\beta+2} G \varepsilon_{k\ell}| = \theta(1). \quad (G)$$

Необходимость условия (G) мы докажем позднее.

Теперь докажем, что условия (A), (B), (C), (C₁), (C₂), (G'), (G''), (G), (L') и (L'') являются достаточными, т.е. справедливо утверждение теоремы 2.1, если на метод В наложить некоторые ограничения. Покажем, что выполняется условие (c₁), ибо тогда условие (b₁) по-прежнему выполнено.

Будем оценивать каждый член тождества (2.22) в отдельности. Учитывая найденные ранее выражения, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k, \ell=0}^{m, n} |h_{m\ell}^{(1)}| &= \theta(1) \sum_{k, \ell=0}^{m, n} \sum_{\chi, \lambda=0}^{2n, \beta+1} \mathcal{D}_{\chi\lambda} \sum_{\mu, \nu=\chi+\ell, \lambda+\ell}^{k+\ell+1, \ell+\beta+1} |v'_{\mu\nu} \Delta_{\mu\nu} v_{m\mu\nu}| = \\ &= \theta(1) \sum_{\chi, \lambda=0}^{2n, \beta+1} \mathcal{D}_{\chi\lambda} \sum_{\mu, \nu=\chi, \lambda}^{2n, \beta+1} \sum_{k, \ell=0}^{m, n} |v'_{\mu+k, \nu+\ell, \mu+k, \nu+\ell} \Delta_{\mu\nu} v_{m, \mu+k, \nu+\ell}| = \end{aligned}$$

$$= O(1),$$

ввиду (2.19).

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |h_{mnk\ell}^{(2)}| = O(1) \sum_{\mu=0}^{k+1} \sum_{\nu=0}^m |v_{\mu+k, \mu+k}^{\nu-1} \Delta_{\mu} v_{m, \mu+k}^{\nu}| \sum_{x=0}^k \sum_{\ell=0}^n |v_{n, \ell-\nu+2}^{\nu}|.$$

$$|\beta_{x+k, x+k}^{\nu} G_{x+k, \ell}^{\nu}| = O(1),$$

ввиду факторизуемости метода B , условий (2.19) и (6').

Аналогично рассуждая и учитывая (6') получим

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |h_{mnk\ell}^{(3)}| = O(1).$$

Далее

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |e_{mnk\ell}^{(4)}| = O(1) \sum_{\nu=0}^m \sum_{\mu=k}^{k+\nu} |v_{\mu, \mu}^{\nu-1} \Delta_{\mu} v_{m, \mu}| \sum_{x=0}^{k-\nu} |v_{x+k, x+k}^{\nu} H_{x+k, \ell}^{\nu}| = O(1),$$

ввиду (2.19) и условия (C₂).

Аналогично ввиду (2.19) и (C₁) получаем

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |g_{mnk\ell}^{(5)}| = O(1).$$

Учитывая условия (C), (L'), (L''), (G) и тождество (2.22) получаем

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |c_{mnk\ell}| = O(1).$$

Необходимость условия (G) непосредственно следует из тождества (2.22) ввиду необходимости условия (C').

В итоге нами доказана

Т е о р е м а 2.2. Пусть $\alpha_{m\nu\nu} = 1$ и метод A сохраняет τ -сходимость. Пусть факторы метода B нормальны и регулярны.

Пусть выполнены условия (2.17), (2.18), (2.19). Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(A_2^{\omega}, B_{\omega})$, необходимо и достаточно выполнение условий (B), (C), (C_1) , (C_2) , (G') , (G^2) , (G), (L') и (L^2) .

§ 3. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ
ТИПА $(A_{\xi}^{\omega}, B_{\omega})$

Целью данного параграфа является нахождение эффективных точных условий (т.е. необходимых и достаточных условий) для множителей суммируемости типа $(A_{\xi}^{\omega}, B_{\omega})$.

Л е м м а 3.1. Матричное преобразование (α) переводит все ν -сходящиеся последовательности в ν -сходящиеся тогда и только тогда, если выполнены условия (c_1) , (d_1) , (d_3) и, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} \lim_{m,n} \sum_{\mu=0}^m |a_{m\mu\nu} - a_{\mu\nu}| = 0 & \quad (\nu = 0, 1, \dots) \\ \lim_{m,n} \sum_{\nu=0}^n |a_{m\mu\nu} - a_{\mu\nu}| = 0 & \quad (\mu = 0, 1, \dots) \end{aligned} \right\} (d_4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. Гамильтон [12], теорема 20, Куль [7], стр. 21.

Л е м м а 3.2. Матричное преобразование (α) переводит все ν -сходящиеся последовательности в сходящиеся тогда и только тогда, если выполнены условия (b_1) , (d_1) , (d_3) и (d_4) .

Д о к а з а т е л ь с т в о см. Гамильтон [12], теорема II, Куль [7], стр. 21.

л е м м а 3.3. Матричное преобразование (α) переводит все ν -сходящиеся последовательности в ϵ -сходящиеся тогда и только тогда, если выполнены условия (c_1) , (d_1) , (d_3) , (d_4) , (f_1) , (f_3) и

$$\lim_m \sum_{\mu=0}^m |a_{m\mu\nu} - a_{\mu\nu}^n| = 0 \quad (\mu, n = 0, 1, \dots) \quad (f_4')$$

$$\lim_n \sum_{\nu=0}^n |a_{m\eta\nu} - a_m^{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, m=0, 1, \dots). \quad (f_4^s)$$

Доказательство см. Гамильтон [12], теорема 134, Куль [7], стр. 21.

Л е м м а 3.4. Для того, чтобы матричное преобразование

$$u'_n = \sum_{\kappa=0}^n a_{n\kappa} u_\kappa,$$

примененное к классу последовательностей, для которых $\lim_n u_n = 0$, было регулярным, необходимо и достаточно выполнение условий

$$1^0 \quad \lim_n a_{nn} = 0,$$

$$2^0 \quad \sum_{\kappa} |a_{n\kappa}| = O(1/n).$$

Доказательство см. [1], стр. 13-14.

Как было показано в § 2 для класса методов $A^{4\beta}$ условия (d_1) , (d_3) , (f_1) , (f_2) выполнены, если $a_{m\eta\nu} = 1$. Следовательно, леммы 3.1 - 3.3 приобретают более простой вид.

Имеет место следующая основная

Т е о р е м а 3.1. Пусть $a_{m\eta\nu} = 1$ и метод A сохраняет b -сходимость. Пусть факторы метода B нормальны и регулярны. Пусть выполнены условия (2.17), (2.18), (2.19). Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(A_{\varepsilon}^{4\beta}, B_{\omega})$ необходимо и достаточно выполнение условий (B) , (C) , (C_1) , (C_2) , (G^1) , (G^2) , (G) , (L^1) , (L^2) и кроме того

$$\lim_m \beta'_{mm} H'' \varepsilon_{mn} = 0, \quad \lim_n \beta''_{nn} H' \varepsilon_{nn} = 0, \quad (H)$$

$$\lim_n \sum_{\kappa=0}^n |v''_{n, \kappa\kappa+1} L'' \varepsilon_{\kappa\kappa}| = 0, \quad (L^3)$$

$$\lim_m \sum_{\kappa=0}^m |v'_{m, \kappa\kappa+1} L' \varepsilon_{\kappa\kappa}| = 0, \quad (L^4)$$

а для множителей суммируемости типа $(A_{\varepsilon}^{4\beta}, B_2)$ вдобавок к ним ещё следующие

$$\left. \begin{aligned} \lim_m \sum_{k=0}^m |v'_{m, k+k+2} \beta \varepsilon_{k\ell}| &= 0 \\ \lim_n \sum_{\ell=0}^n |v''_{n, \ell+\beta+\ell} \beta \varepsilon_{k\ell}| &= 0 \end{aligned} \right\} (G_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_m \sum_{k=0}^m |v'_{m, k+k+2} \beta' \varepsilon_{k\eta}| &= 0 \\ \lim_n \sum_{\ell=0}^n |v''_{n, \ell+\beta+\ell} \beta'' \varepsilon_{m\ell}| &= 0 \end{aligned} \right\} (G_2)$$

$$\lim_m \beta'_{m\eta} \beta'' \varepsilon_{m\eta} = \lim_n \beta''_{n\eta} \beta' \varepsilon_{m\eta} = 0, \quad (G_3)$$

$$\lim_m \frac{\beta_{m\eta\eta\eta}}{\alpha_{m\eta\eta\eta}} \varepsilon_{m\eta} = \lim_n \frac{\beta_{m\eta\eta\eta}}{\alpha_{m\eta\eta\eta}} \varepsilon_{m\eta} = 0. \quad (D)$$

Доказательство. Необходимость. Учитывая доказательство теоремы 2.2 нам остаётся доказать необходимость условий (H), (L³), (L⁴), (G₁), (G₂), (G₃), (D).

Необходимость условия (D) для множителей суммируемости типа (A₂, B₂) доказана Кангро (см. [5], формула (43^c)). Необходимость условий (H) следует из теоремы 13 статьи Кангро [5].

Докажем сначала необходимость условий (L³) и (L⁴). Для этого воспользуемся необходимым по лемме 3.1 условием

$$\lim_{m, n} \sum_{k=0}^m |c_{m\eta k\ell} - c_{k\ell}| = 0.$$

По теореме о двойном и повторном пределах получаем

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |c_m^{k\ell} - c_{k\ell}| = 0. \quad (3.1)$$

Проводя аналогичные рассуждения для условия

$$\lim_{m, n} \sum_{\ell=0}^n |c_{m n \ell} - c_{\ell \ell}| = 0,$$

получаем следующее необходимое условие

$$\lim_n \sum_{\ell=0}^n |c_{\ell \ell}^n - c_{\ell \ell}| = 0. \quad (3.2)$$

Теперь по формуле (2.25) имеем

$$c_{\ell \ell}^n = g_{n \ell \ell}^{(1)} + v_{n, \ell+2}'' L' \varepsilon_{\ell \ell} + \beta_{n, \ell+2}'' H \varepsilon_{\ell \ell},$$

где

$$g_{n \ell \ell}^{(1)} = O(1) \sum_{\nu=\ell}^{\ell+\beta+1} |v_{\nu \nu}^{n-1} \Delta_{\nu} v_{n \nu}''| \sum_{\lambda=0}^{\nu-\ell} \Delta_{\lambda} |v_{\lambda+\ell, \lambda+\ell}'' H' \varepsilon_{\ell, \lambda+\ell}|.$$

Используя второе из условий (H), регулярность фактора B'' , условие (2.19) и лемму 3.4, получаем

$$\lim_n \sum_{\ell=0}^n |g_{n \ell \ell}^{(1)}| = 0.$$

Учитывая условие (C) регулярность фактора B'' , признак Вейерштрасса и теорему о возможности предельного перехода под знаком суммы, получим

$$\lim_n \sum_{\ell=0}^n |(\beta_{n, \ell+2}'' - 1) H \varepsilon_{\ell \ell}| = 0.$$

Используя условие (3.2) получим тогда следующее необходимое условие

$$\lim_n \sum_{\ell=0}^n |v_{n, \ell+2}' L' \varepsilon_{\ell \ell}| = 0.$$

т.е. условие (L^3) . Аналогично доказывается необходимость условия (L^4) .

Используем теперь условие (χ_4') , т.е.

$$\lim_m \sum_{\kappa=0}^m |c_{m \kappa \ell} - c_{\ell \ell}^m| = 0.$$

При $\ell = n$ получим отсюда

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |c_{mnkn} - c_{kn}^n| = 0, \quad (3.3)$$

(2.21a)

Из тождества находим

$$\lim_m c_{mnkn} = \beta''_{nn} H' \varepsilon_{kn}$$

Учитывая условие (C_1) , признак Вейерштрасса, регулярность фактора B' , теорему о возможности перехода к пределу под знаком суммы, получим

$$\lim_m \beta''_{nn} \sum_{k=0}^m |(\beta'_{m, k+2} - 1) H' \varepsilon_{kn}| = 0.$$

Далее

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m |h'_{mnkn}| &= \nu(2) \sum_{k=0}^m \sum_{\mu=k}^{k+1} |\Delta_{\mu} b'_{m\mu}| \left| \sum_{x=k}^{\mu} |d'_{xk} \eta'_{xk} \frac{\beta_{xknkn}}{d_{xknkn}} \varepsilon_{xkn} d_{nn} b'_{xkn}| \right| = \\ &= \nu(2) \sum_{\mu=0}^{k+1} \sum_{k=0}^m |b'_{k\mu, k\mu} \Delta_{\mu} b'_{m, \mu\mu}| \left| \sum_{x=0}^{\mu} d_{x0} \left| \frac{\beta_{xknknkn}}{d_{xknknkn}} \varepsilon_{xknkn} \right| \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при $m \rightarrow \infty$, ввиду (2.17), регулярности фактора B' , (2.19) и условия (D') , применяя лемму 3.4. А тогда учитывая 3.3 и тождество (2.21a) получим следующее необходимое условие

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |b'_{m, k+2} G' \varepsilon_{kn}| = 0,$$

т.е. условие (G_2') . Аналогично доказывается необходимость условия (G_2) . Ввиду включения $X_e^{d\beta} \subset A_e^{c\beta}$ эти условия являются необходимыми для множителей суммируемости типа $(A_e^{d\beta}, B_e)$. Необходимость условий (G_1) докажем позднее. Для доказательства необходимости условий (G_3) нам понадобится

Л е м м а 3.5. Пусть A — метод, сохраняющий b -сходимость, и $B = (\beta_{mn\mu\nu})$ — такой нормальный метод, что $\beta_{mn\mu\nu} =$

$= \beta'_{m\mu} \cdot \beta''_{n\nu}$ и $\lim_m \beta'_{m\mu} = \lim_n \beta''_{n\nu} = 1$. Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа (A_2, B_2) , необходимо выполнение условий

$$\lim_n \varepsilon_{mn} = 0 \quad (m = 0, 1, \dots) \quad (3.4)$$

$$\lim_m \varepsilon_{mn} = 0 \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (3.5)$$

Доказательство см. [6], стр. 17.

Запишем теперь найденное на стр. 20 выражение

$$c_{mnk\ell} = \beta''_{nn} \sum_{\mu=k}^{k+\ell+1} \beta'_{m\mu} \eta'_{\mu k} \varepsilon_{\mu n}$$

Используя лемму 3.5 и регулярность фактора B'' найдём

$$\lim_n c_{mnk\ell} = 0 \quad (3.6)$$

Теперь, первое слагаемое тождества (2.21a) стремится к нулю, ввиду (3.4). Второе слагаемое стремится к нулю, ввиду условия (H). А тогда, учитывая (3.6) получаем необходимое условие

$$\lim_n \beta''_{nn} G \varepsilon_{kn} = 0.$$

Аналогично доказывается необходимость условия (G_3') .

Достаточность. Учитывая доказательство теоремы 2.2, нам остаётся показать, что данные необходимые условия влекут за собой выполнение условий (d_4) и (f_4) леммы 3.1-3.3. Начнём с условия (d_4') . Воспользуемся тождеством (2.22). Получаем

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |h_{mnk\ell}^{(1)}| = \lim_{m,n} \sum_{\lambda, \lambda=0}^{\ell+1, \ell+1} \mathcal{D}_{\lambda\lambda} \sum_{\mu, \nu=k, \lambda}^{\ell+1, \ell+1} \sum_{\kappa=0}^m |\beta'_{\mu+k, \nu+\ell, \mu+k, \nu+\ell} \Delta_{\mu\nu} \beta_{m\mu+k, \nu+\ell}| = 0,$$

при $n \rightarrow \infty$, ввиду (2.19) и регулярности факторов метода B .

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |h_{mnk\ell}^{(2)}| = \lim_{m,n} \sum_{\mu=0}^{\ell+1} \sum_{\kappa=0}^m |\beta_{\mu+k, \mu+k}^{\ell+1} \Delta_{\mu} \beta'_{m, \mu+k}| \sum_{\kappa=0}^{\ell} |\beta''_{n, \ell+\kappa+1}|.$$

$$|\beta'_{\mu+k, \mu+k} G \varepsilon_{\mu+k, \ell}| = 0.$$

при $n \rightarrow \infty$. Теперь для третьего слагаемого тождества (2.22) получим

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |h_{mike}^{(3)}| = \lim_{m,n} \sum_{\lambda=0}^{\beta+1} \sum_{k=0}^m |\beta'_{m,k+\lambda+e} G'_{\epsilon_{k,\lambda+e}}| \cdot \sum_{\nu=\lambda+e}^{\epsilon+\beta+1} |\beta''_{\nu\nu} \Delta_{\nu} \beta''_{n\nu}| = 0$$

при $n \rightarrow \infty$, ввиду регулярности фактора B'' и условия (G') . Далее

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |h_{mike}^{(4)}| = \lim_{m,n} \beta''_{n,\epsilon+\beta+e} \sum_{k=0}^m |\beta'_{m,k+\lambda+e} \beta \epsilon_{k,e}| = 0$$

ввиду регулярности фактора B'' и условия (G) .

Для четвертого слагаемого имеем

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |e_{mike}^{(4)}| = \lim_m \sum_{\mu=0}^{\alpha+1} \sum_{k=0}^m |\beta'^{\alpha+1}_{\mu+k,\mu+k} \Delta_{\mu} \beta'_{m,\mu+k}| \cdot \sum_{x=0}^k |\beta'_{x+k,x+k} H'_{\epsilon_{x+k,e}}|$$

Ввиду условий (H) , регулярности фактора B' , условия (2.19) получаем на основе леммы 3.4, что

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |e_{mike}^{(4)}| = 0$$

Для пятого слагаемого находим

$$\lim_{m,n} \sum_{k=0}^m |g_{mike}^{(5)}| = \lim_{m,n} \sum_{\nu=0}^{\epsilon+\beta+1} |\beta''_{\nu\nu} \Delta_{\nu} \beta''_{n\nu}| \sum_{k=0}^m \sum_{\lambda=0}^{\nu-e} \rho_{0\lambda} |\beta''_{\lambda+e,\lambda+e} H'_{\epsilon_{k,\lambda+e}}| = 0$$

ввиду регулярности фактора B'' и (C_1) .

Учитывая условие (C) , регулярность фактора B' , признак Вейерштрасса и теорему о возможности предельного перехода под знаком суммы получаем для девятого слагаемого

$$\lim_{m,n} \beta''_{n,\epsilon+\beta+e} \sum_{k=0}^m |(\beta'_{m,k+\lambda+e} - 1) H \epsilon_{k,e}| = 0$$

Учитывая (L^4) , получаем, что и сумма седьмого слагаемого в тождестве (2.22) стремится к нулю. И наконец, для восьмого слагаемого получаем ввиду (L^4) и регулярности B .

$$\lim_{m, n} \beta'_{m, k+2} v''_{n, r+2} \sum_{k=0}^m L'' \varepsilon_{k\ell} = 0.$$

Аналогично проверяется выполнение условия (d_4^e) .

Для проверки выполнения условия (f_4^1) снова воспользуемся тождеством (2.22). Получим

$$\begin{aligned} c_{m k \ell} - c_{k \ell}'' &= h_{m k \ell}^{(1)} + h_{m k \ell}^{(2)} + h_{m k \ell}^{(3)} + e_{m k \ell}^{(1)} + \\ &+ g_{m k \ell}^{(1)} + v_{m, k+2, r+2} \theta \varepsilon_{k \ell} + \beta''_{n, r+2} v'_{m, k+2} L' \varepsilon_{k \ell} + \\ &+ (\beta'_{m, k+2} - 1) v''_{n, r+2} L'' \varepsilon_{k \ell} + \beta''_{n, r+2} (\beta'_{m, k+2} - 1) H \varepsilon_{k \ell}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$g_{m k \ell}^{(1)} = O(1) |\beta'_{m, k+2} - 1| \sum_{\nu=0}^{r+2} |v_{\nu \nu}^{-1} \Delta_{\nu} v'_{n \nu}| \sum_{\lambda=0}^{\nu-\ell} D_{\lambda} |v_{\lambda+\ell, \lambda+\ell}'' H' \varepsilon_{k, \lambda+\ell}|$$

Запишем теперь первое слагаемое тождества (3.7) в следующем виде (ср. стр. 17)

$$\begin{aligned} h_{m k \ell}^{(1)} &= O(1) \sum_{\mu, \nu=k, \ell}^{k+2, r+2} |v_{\mu \nu}^{-1} \Delta_{\mu \nu} v_{m \mu \nu}| \sum_{\kappa, \lambda=k, \ell}^{\mu, \nu} |\eta_{\kappa \lambda} \varepsilon_{\frac{\beta_{\kappa \lambda \kappa \lambda}}{\alpha_{\kappa \lambda \kappa \lambda}}} \varepsilon_{\kappa \lambda}| = \\ &= O(1) \sum_{\mu, \nu=k, \ell}^{k+2, r+2} |v_{\mu \nu}^{-1} \Delta_{\mu \nu} v_{m \mu \nu}| \sum_{\kappa, \lambda=0}^{\mu-\kappa, \nu-\ell} D_{\kappa \lambda} \left| \frac{\beta_{\kappa+\kappa, \lambda+\ell, \kappa+\kappa, \lambda-\ell}}{\alpha_{\kappa+\kappa, \lambda+\ell, \kappa+\kappa, \lambda-\ell}} \varepsilon_{\kappa+\kappa, \lambda+\ell} \right|. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Учитывая условие (D) , регулярность фактора B' и условие (2.19), получаем на основе леммы 3.4

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |h_{m k \ell}^{(1)}| = 0.$$

Учитывая (G_3) , регулярность фактора B' , условие (2.19) и лемму

3.4, получаем

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |h_{mnk}^{(2)}| = 0.$$

По условию (G_2) и (G_1) получаем

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |h_{mnk}^{(3)}| = 0, \quad \lim_m v_{n, e+\beta+2}'' \sum_{k=0}^m |v_{m, k+\alpha+2}' \theta \varepsilon_k| = 0.$$

Ввиду условий (H) , регулярности фактора B' , условия (2.19) и леммы 3.4, получим

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |e_{mnk}^{(1)}| = 0.$$

Учитывая признак Вейерштрасса, условия (C) и (L') , теорему о возможности предельного перехода под знаком суммы, получим

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |\beta_{n, e+\beta+2}'' (\beta_{m, k+\alpha+2}' - 1) H \varepsilon_k| = 0,$$

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |(\beta_{m, k+\alpha+2}' - 1) v_{n, e+\beta+2}'' L' \varepsilon_k| = 0.$$

Далее

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |g_{mnk}^{(1)}| = \lim_m \sum_{\nu=0}^{\beta+1} \sum_{\lambda=0}^{\nu} \sum_{k=0}^m |(\beta_{m, k+\alpha+2}' - 1) D_{\beta \lambda} \beta_{n, e, \lambda}'' H \varepsilon_{k, \lambda}| = 0,$$

по той же причине, ввиду регулярности фактора B' и условия (C_1) .

И наконец, ввиду (L'') , получаем

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |\beta_{n, e+\beta+2}'' v_{m, k+\alpha+2}' L' \varepsilon_k| = 0.$$

Необходимость условий (G_1) следует из тождества (3.7) ввиду необходимости условий (χ_4) . Теорема доказана.

§ 4. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ТИПА $(A_0^{\omega}, B_{\omega})$

Найдём точные условия для множителей суммируемости типа $(A_0^{\omega}, B_{\omega})$. Для решения этой задачи нам понадобятся следующие леммы.

Л е м м а 4.1. Для того, чтобы матричное преобразование (а) существовало и переводило все ограниченные последовательности в сходящиеся необходимо и достаточно выполнение условий (b_i) , (d_i) и, кроме того,

$$\lim_{m, n} \sum_{\mu, \nu=0}^{m, n} |a_{m\mu\nu} - a_{\mu\nu}| = 0. \quad (d_5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. Гамильтон [12], теорема 12.

Л е м м а 4.2. Для того, чтобы матричное преобразование (а) существовало и переводило все ограниченные последовательности в β -сходящиеся необходимо и достаточно выполнение условий (c_i) , (d_i) и (d_5) .

Д о к а з а т е л ь с т в о см. Гамильтон [12], теорема 21.

Л е м м а 4.3. Для того, чтобы матричное преобразование (а) существовало и переводило все ограниченные последовательности в γ -сходящиеся необходимо и достаточно выполнение условий (c_i) , (d_i) , (d_5) , (f_1) и (f_4) .

Д о к а з а т е л ь с т в о см. Гамильтон [12], теорема 135.

Л е м м а 4.4. Для того, чтобы матричное преобразование (а) переводило все последовательности класса ⁵ $\gamma\sigma\gamma\pi$ в сходящиеся к

⁵ Здесь $\gamma\sigma\gamma\pi$ означает класс последовательностей $\{u_{k\epsilon}\}$, удовлетворяющих условию $\gamma\text{-}\lim_{m, n} u_{k\epsilon} = 0$

нулю последовательности необходимо и достаточно выполнение условий (b_1) и

$$\lim_{m,n} \alpha_{m\mu n\nu} = 0 \quad (\mu, \nu = 0, 1, \dots). \quad (\bar{d}_1)$$

Доказательство см. Гамильтон [12], теорема 25.

Справедлива следующая

Теорема 4.1. Пусть $\alpha_{m\nu\nu} = 1$ и метод A сохраняет ограниченность. Пусть факторы метода B нормальны и регулярны. Пусть выполнены условия (2.17), (2.18), (2.19). Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(A_0^{\lambda\beta}, B_\omega)$ необходимо и достаточно выполнение условий (b) , (c) , (c_1) , (c_2) , (G') , (G'') , (G) , и кроме того (G_3) и

$$\left. \begin{aligned} \lim_n \beta''_{nn} \sum_m |H'\varepsilon_{mn}| &= 0 \\ \lim_m \beta'_{mm} \sum_n |H''\varepsilon_{mn}| &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (H_1)$$

$$r\text{-}\lim_{m,n} \frac{\beta_{mnmn}}{\alpha_{mnmn}} \varepsilon_{mn} = 0 \quad (D_1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_n \sum_{k,\ell=0}^{\infty, n} |v''_{n, \ell+r+\ell} L''\varepsilon_{k\ell}| &= 0 \\ \lim_m \sum_{k,\ell=0}^{m, \infty} |v'_{m, k+\ell+\ell} L'\varepsilon_{k\ell}| &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (L_1)$$

$$\lim_{m,n} \sum_{k,\ell=0}^{m,n} |v_{m, k+\ell+\ell, \ell+r+\ell} G\varepsilon_{k\ell}| = 0 \quad (G_4)$$

а для множителей суммируемости типа $(A_0^{\lambda\beta}, B_2)$ вдобавок к ним ещё (G_3) и (G_2) .

Доказательство. Необходимость. Учитывая дока-

зательство теоремы 3.1 нам остаётся доказать необходимость условий (G_3) , (H_1) , (D_1) , (L_1) и (G_4) . Необходимость условия (G_3) доказывается аналогично, как и в теореме 3.1, используя следующую лемму.

Л е м м а 4.5. Пусть A — метод, сохраняющий ограниченность и $B = (\beta_{mn})$ — треугольный метод, удовлетворяющий условию

$$\lim_{m,n} \beta_{mn} = 1.$$

Тогда для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа (A, B) , необходимо выполнение условий (3.4), (3.5) и

$$\lim_{m,n} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. [6], лемма 9.

Докажем теперь необходимость условий (D_1) , ибо необходимость условий (H_1) доказана Кангро (см. [5], теорема I2). Рассмотрим метод $X = A \circ E$. Для этого метода имеем

$$c_{mnk} = \beta'_{mkn} \eta'_{mn} \varepsilon_{mn}.$$

По лемме 4.5 получаем необходимое для $\varepsilon_{mn} \in (X, B)$ условие

$$\lim_n c_{mnk} = 0.$$

Аналогично, рассматривая метод $Y = E \circ A^\beta$ получаем следующее необходимое условие

$$\lim_m c_{mnk} = 0.$$

Полученные условия являются необходимыми также и для множителей суммируемости типа (A^β, B) . Ввиду полученных условий и формулы (42a) статьи Кангро [5], заключаем, что необходимо

$$2 - \lim_{m,n} c_{mnk} = 0,$$

т.е. условие (D_1) .

Для доказательства необходимости условий (L_1) воспользуемся условием (d_5) :

$$\lim_{m,n} \sum_{k,e=0}^{m,n} |c_{mnke} - c_{ke}| = 0.$$

По определению предела это можно записать $\forall \varepsilon > 0 \exists N$

$$\sum_{k, l=0}^{p, q} |c_{mnkl} - c_{kl}| < \varepsilon, \quad m, n > N$$

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ получим следующее необходимое условие

$$\lim_n \sum_{k, l=0}^{\infty, n} |c_{kl}^n - c_{kl}| = 0. \quad (4.1)$$

Аналогично получаем

$$\lim_m \sum_{k, l=0}^{m, \infty} |c_m^{kl} - c_{kl}| = 0. \quad (4.2)$$

Рассмотрим теперь тождество (2.25). Учитывая условие (H_1') , регулярность фактора B'' и лемму 3.4, получим

$$\lim_n \sum_{k, l=0}^{\infty, n} |g_{nkl}^{(1)}| = 0.$$

Учитывая регулярность фактора B'' , признак Вейерштрасса и теорему о возможности предельного перехода под знаком суммы, получим ввиду (С)

$$\lim_n \sum_{k, l=0}^{\infty, n} |(\beta_{n, l+1}'' - 1) H \varepsilon_{kl}| = 0.$$

А тогда из (2.25) ввиду (4.1) получим следующее необходимое условие

$$\lim_n \sum_{k, l=0}^{\infty, n} |v_{n, l+1}'' L'' \varepsilon_{kl}| = 0.$$

Аналогично доказывается необходимость условия (L_1') . Необходимость условия (G_1) будет доказана позднее.

Достаточность. Учитывая доказательство теорем 2.2 и 3.1, нам остаётся лишь показать выполнение условия (d_5) . Воспользуемся тождеством (2.22). Учитывая условие (D_1) , регулярность факторов метода B , условие (2.19) и лемму 4.4, получим

$$\lim_{m, n} \sum_{k, \ell=0}^{m, n} |h_{mnk\ell}^{(1)}| = 0.$$

Далее получаем

$$\sum_{k, \ell=0}^{m, n} |h_{mnk\ell}^{(2)}| = O(1) \sum_{\mu=0}^m \sum_{\nu=k}^{k+\ell+1} |v_{\mu\mu}^{\mu-1} \Delta_{\mu} v'_{m\mu}| \sum_{\kappa=0}^{m-k} D_{\kappa 0} \sum_{\ell=0}^n |v''_{n, \ell+\beta+\ell} \cdot \beta'_{k+\kappa, k+\kappa} G''_{k+\kappa, \ell}|.$$

Рассмотрим это как матричное преобразование (для каждого конкретного n)

$$u'_m = \sum_{k=0}^m a_{mk} u_k,$$

где

$$a_{mk} = \sum_{\mu=0}^{k+1} |v_{\mu+k, \mu+k}^{\mu-1} \Delta_{\mu} v'_{m, \mu+k}| \sum_{\kappa=0}^k D_{\kappa 0},$$

$$u_k = \sum_{\ell=0}^n |v''_{n, \ell+\beta+\ell} \beta'_{k+\kappa, k+\kappa} G''_{k+\kappa, \ell}|.$$

Учитывая условия (G_2^i) , (G_3^x) , регулярность фактора B' , (2.19) и лемму 3.4, получим

$$\lim_{m, n} \sum_{k, \ell=0}^{m, n} |h_{mnk\ell}^{(2)}| = 0.$$

Аналогично, учитывая (G_1^i) , (G_3^x) , регулярность фактора B'' , (2.19) и лемму 3.4, получаем

$$\lim_{m, n} \sum_{k, \ell=0}^{m, n} |h_{mnk\ell}^{(3)}| = 0,$$

Учитывая условия (C_1) , (C_2) , (H_1) , регулярность факторов метода B , а также (2.19) и лемму 3.4, получим

$$\lim_{m,n} \sum_{k,l=0}^{m,n} |e''_{mnkl}| = 0$$

и

$$\lim_{m,n} \sum_{k,l=0}^{m,n} |g''_{mnkl}| = 0.$$

Учитывая регулярность факторов метода B , признак Вейерштрасса, условие (C) и теорему о возможности предельного перехода под знакам суммы, получим

$$\lim_{m,n} \sum_{k,l=0}^{m,n} |(\beta_{mn,kl,2} - 1) H \varepsilon_{kl}| = 0,$$

Учитывая далее (L_1) и (G_4) , получаем, что условие (d_5) лемм 4.1 - 4.3 выполнено.

Необходимость условия (G_4) следует из тождества (2.22) ввиду необходимости (d_5) . Теорема доказана.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ К МЕТОДУ ЧЕЗАРО

5.1. Множители суммируемости типа $(C_e^{\alpha, \beta}, B_\omega)$

Целью настоящего параграфа является получение точных условий для множителей суммируемости путём применения теорем §§ 2-4 к методу Чезаро. Покажем, что в случае метода Чезаро некоторые необходимые условия уже выполнены.

Л е м м а 5.1. Из условий (A) и

$$\sum_{m,n} (m+1)^\alpha (n+1)^\beta |\Delta_{mn}^{\alpha, \beta} \varepsilon_{mn}| < \infty \quad (5.1)$$

для любых $0 < \kappa, \ell \leq \alpha, \beta$ следует

$$\Delta_{mn}^{\kappa, \ell} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\kappa} (n+1)^{-\ell}] \quad (m, n = 0, 1, \dots)$$

Доказательство см. [6], стр. 22.

Л е м м а 5.2. Из условий

$$\beta''_{nn} \sum_m (m+1)^\alpha |\Delta_m^{\alpha, \beta} \varepsilon_{mn}| = O[(n+1)^{-\beta}]$$

и

$$\beta''_{nn} \varepsilon_{nn} = O[(n+1)^{-\beta}] \quad (5.2)$$

следует для $0 \leq \kappa \leq \alpha$

$$\beta''_{nn} \Delta_m^\kappa \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\kappa} (n+1)^{-\beta}]$$

← а из условий

$$\beta'_{mm} \sum_n (n+1)^\beta |\Delta_n^{\alpha, \beta} \varepsilon_{mn}| = O[(m+1)^{-\alpha}]$$

и

$$\beta'_{mm} \varepsilon_{mm} = O[(m+1)^{-\alpha}] \quad (5.3)$$

для $0 \leq \rho \leq \beta$ следует

$$\beta'_{mn} \Delta_n^{\epsilon} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha} (n+1)^{-\epsilon}].$$

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1б в работе [6], если $(n+1)^{-\delta}$ заменить на β''_{nn} и $(m+1)^{-\delta}$ заменить на β'_{mm} .

Л е м м а 5.3. Из условий (A) и (5.1) вытекает для всех $0 < \kappa \leq \alpha+1$ и $0 < \epsilon \leq \beta$

$$\sum_m (m+1)^{\kappa-1} |\Delta_{mn}^{\kappa \epsilon} \varepsilon_{mn}| = O[(n+1)^{-\epsilon}],$$

а для всех $0 < \kappa \leq \alpha$ и $0 < \epsilon \leq \beta+1$

$$\sum_n (n+1)^{\epsilon-1} |\Delta_{mn}^{\kappa \epsilon} \varepsilon_{mn}| = O[(m+1)^{-\kappa}].$$

Доказательство см. [6], стр. 21

Условие (B) принимает следующий вид

$$\varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha} (n+1)^{-\beta} \nu_{mnn}]. \quad (\bar{B})$$

В случае метода $C^{\alpha, \beta}$ имеем

$$H \varepsilon_{mn} = \sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+\alpha+1, n+\beta+1} A_m^{\alpha} A_n^{\beta} A_{\mu-m}^{-\alpha-2} A_{\nu-n}^{-\beta-2} \varepsilon_{\mu\nu} = A_m^{\alpha} A_n^{\beta} \Delta_{mn}^{\alpha+\beta+1} \varepsilon_{mn},$$

$$H' \varepsilon_{mn} = \sum_{\mu=m}^{m+\alpha+1} A_m^{\alpha} A_n^{\beta} A_{\mu-m}^{-\alpha-2} \varepsilon_{\mu n} = A_m^{\alpha} A_n^{\beta} \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn},$$

$$H'' \varepsilon_{mn} = A_m^{\alpha} A_n^{\beta} \Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}$$

Необходимые условия (C), (C₁) и (C₂) примут следующий вид:

$$\sum_{m, n} (m+1)^{\alpha} (n+1)^{\beta} |\Delta_{mn}^{\alpha+\beta+1} \varepsilon_{mn}| < \infty, \quad (\bar{C})$$

$$\beta''_{nn} \sum_m (m+1)^{\alpha} |\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn}| = O[(n+1)^{-\beta}], \quad (\bar{C}_1)$$

$$\beta'_{mn} \sum_n (n+1)^\beta |\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn}| = \mathcal{O}[(m+1)^{-\alpha}] \quad (\bar{C}_2)$$

Покажем, что остальные необходимые условия теоремы 2.2 выполнены. Действительно, на основе формулы (15.17) работы [1] получим

$$\begin{aligned} G\varepsilon_{mn} &= A_m^\alpha A_n^\beta \sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+\alpha+1, n+\beta+1} (m+\alpha+2-\mu)(n+\beta+2-\nu) A_{\mu-m}^{-\alpha-2} A_{\nu-n}^{\beta-2} \varepsilon_{\mu\nu} = \\ &= A_m^\alpha A_n^\beta [\Delta_{mn}^{\alpha+1, \beta+1} \varepsilon_{mn} + (\beta+1) \Delta_{mn}^{\alpha, \beta} + (\alpha+1) \Delta_{mn}^{\alpha, \beta+1} \varepsilon_{mn} + \Delta_{mn}^{\alpha, \beta} \varepsilon_{mn}]. \end{aligned}$$

Первый член этого выражения ограничен на основе (\bar{C}) , ко второму и третьему применим лемму 5.3 и к последнему лемму 5.1. Следовательно, получаем

$$G\varepsilon_{mn} = \mathcal{O}(1).$$

А тогда

$$\sum_{k, l=0}^{m, n} |b_{mn, k+\alpha+2, l+\beta+2} G\varepsilon_{kl}| = \mathcal{O}(1) \sum_{k, l=0}^{m, n} |b_{mn, k+\alpha+2, l+\beta+2}| = \mathcal{O}(1).$$

Находим далее

$$\begin{aligned} G'\varepsilon_{mn} &= A_m^\alpha A_n^\beta \sum_{\mu=m}^{m+\alpha+1} (m+\alpha+2-\mu) A_{\mu-m}^{-\alpha-2} \varepsilon_{\mu n} = \\ &= A_m^\alpha A_n^\beta [\Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} + (\alpha+1) \Delta_m^\alpha \varepsilon_{mn}], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G''\varepsilon_{mn} &= A_m^\alpha A_n^\beta \sum_{\nu=n}^{n+\beta+1} (n+\beta+2-\nu) A_{\nu-n}^{\beta-2} \varepsilon_{m\nu} = \\ &= A_m^\alpha A_n^\beta [\Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn} + (\beta+1) \Delta_n^\beta \varepsilon_{mn}]. \end{aligned}$$

Применим лемму 5.2, учитывая, что для множителей суммируемости типа $(C_2^{\alpha\beta}, B_\omega)$ необходимыми являются условия (5.2) и (5.3).

Доказательство этого утверждения аналогично [6], стр. 14, если вместо $(n+1)^{-\delta}$ взять β''_{nn} и вместо $(m+1)^{-\delta}$ взять β'_{mm} . Тогда на основе (\bar{C}_1) и (5.2) получим

$$\beta''_{nn} G' \varepsilon_{mn} = O(1).$$

А тогда

$$\beta''_{nn} \sum_{k=0}^m |v'_{m, k+d+e} G' \varepsilon_{kn}| = O(1) \sum_{k=0}^m |v'_{m, k+d+e}| = O(1),$$

ввиду регулярность фактора B'' .

Аналогично, учитывая (\bar{C}_2) , (5.3) и регулярность фактора B'' , получаем

$$\beta'_{mm} \sum_{e=0}^n |v''_{n, e+p+e} G'' \varepsilon_{me}| = O(1).$$

Наконец

$$L' \varepsilon_{mn} = \sum_{\mu, \nu=m, n}^{m+d+1, n+\beta+1} (m+d+e-\mu) A_m^d A_{\mu-m}^{-d-2} A_n^\beta A_{\nu-n}^{-\beta-2} \varepsilon_{\mu\nu} =$$

$$= A_m^d A_n^\beta \sum_{\mu=m}^{m+d+1} (m+d+e-\mu) A_{\mu-m}^{-d-2} \Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{\mu n} =$$

$$= A_m^d A_n^\beta \left[\Delta_{mn}^{d+1, \beta+1} \varepsilon_{mn} + (d+1) \Delta_{mn}^{d, \beta+1} \varepsilon_{mn} \right],$$

$$L'' \varepsilon_{mn} = A_m^d A_n^\beta \left[\Delta_{mn}^{d+1, \beta+1} \varepsilon_{mn} + (\beta+1) \Delta_{mn}^{d+1, \beta} \varepsilon_{mn} \right].$$

Из условия (\bar{C}) и леммы 5.3 заключаем, что

$$\sum_{e=0}^n |L' \varepsilon_{ke}| = O(1)$$

и

А тогда

$$\sum_{k, l=0}^{m, \infty} |v'_{m, k+l+e} L' \varepsilon_{kl}| = O(12) \sum_{k=0}^m |v'_{m, k+l+e}| = O(12),$$

$$\sum_{k, l=0}^{\infty, n} |v''_{n, k+l+e} L'' \varepsilon_{kl}| = O(12).$$

В итоге у нас получилась (ср. [17], теорема 4 или [6], теорема 5.

Т е о р е м а 5.1. Пусть метод B нормален, регулярен и удовлетворяет условиям (2.17), (2.18), (2.19). Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа (c_2^{dA}, B_ω) необходимо и достаточно выполнение условий (\bar{B}) , (\bar{C}) , (\bar{C}_1) и (\bar{C}_2) .

5.2. Множители суммируемости типа $(C_{\sigma}^{\alpha, \beta}, B_{\omega})$

Л е м м а 5.4. Из условий (A) и (\bar{C}) для всех $0 < \sigma \leq \alpha + 1$ и $0 < \tau \leq \beta$ следует

$$\lim_n (n+1)^{\tau} \sum_m (m+1)^{\sigma-1} |\Delta_{mn}^{\sigma, \tau} \varepsilon_{mn}| = 0,$$

а для всех $0 < \sigma \leq \alpha$ и $0 < \tau \leq \beta + 1$

$$\lim_m (m+1)^{\sigma} \sum_n (n+1)^{\tau-1} |\Delta_{mn}^{\sigma, \tau} \varepsilon_{mn}| = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. [2], лемма 5.

Л е м м а 5.5. Из условий (A) и (\bar{C}) для любых $0 < \sigma, \tau \leq \alpha, \beta$

вытекает

$$z\text{-}\lim_{m,n} (m+1)^{\sigma} (n+1)^{\tau} \Delta_{mn}^{\sigma, \tau} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. [2], лемма 6.

Условия (H) принимают в данном случае следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \lim_m \beta'_{mn} (m+1)^{\alpha} \Delta_n^{\beta+1} \varepsilon_{mn} &= 0 \\ \lim_n \beta''_{mn} (n+1)^{\beta} \Delta_m^{\alpha+1} \varepsilon_{mn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (H)$$

Покажем сначала, что условия (L^3) и (L^4) выполнены.

Действительно, рассматривая выражение для $L'' \varepsilon_{mn}$ и применяя к первому члену условие (\bar{C}) , а ко второму лемму 5.4, получаем

$$\lim_n L'' \varepsilon_{mn} = 0.$$

А тогда на основе регулярности фактора B'' и леммы 3.4 получаем, что условие (L^3) выполнено. Аналогично доказывается выполнение условия (L^4) .

Переходя к случаю множителей суммируемости типа $(C_{\sigma}^{\alpha, \beta}, B_{\omega})$ заметим прежде всего, что условия (D) принимают следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \lim_m \beta'_{mn} (m+1)^{\alpha} \varepsilon_{mn} &= 0 \\ \lim_n \beta''_{mn} (n+1)^{\beta} \varepsilon_{mn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (D)$$

Покажем теперь, что и условия (G_1) , (G_2) и (G_3) также выполнены. Действительно, рассматривая выражение для $G\varepsilon_{mn}$ и применяя к первому члену условие (\bar{C}) , ко второму и третьему лемму 5.4 и к последнему лемму 5.5 заключаем, что

$$\lim_m G\varepsilon_{mn} = 0.$$

Аналогично заключаем, что

$$\lim_n G\varepsilon_{mn} = 0.$$

А тогда на основе регулярности факторов метода B и леммы 3.4 заключаем, что условия (G_1) выполнены.

Рассмотрим теперь выражение для $G'\varepsilon_{mn}$ и $G''\varepsilon_{mn}$. Для проверки выполнения условий (G_2) и (G_3) нам понадобится следующая

Л е м м а 5.6. Из условий (A) , (\bar{C}) , (3.4) и (3.5) для $0 \leq \kappa, \ell \leq \alpha, \beta$ следует

$$z\text{-}\lim_{m,n} (m+1)^\kappa (n+1)^\ell \Delta_{mn}^{\kappa\ell} \varepsilon_{mn} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о см. [6], лемма I8.

Рассмотрим теперь $G'\varepsilon_{mn}$. Учитывая, что (см. [6], стр. 7)

$$\Delta_{mn}^{\kappa 0} \varepsilon_{mn} = \Delta_m^\kappa \varepsilon_{mn},$$

запишем заключение леммы 5.6 в виде

$$\lim_m (m+1)^\alpha \Delta_m^\alpha \varepsilon_{mn} = 0, \tag{5.4}$$

$$\lim_n (n+1)^\beta \Delta_n^\beta \varepsilon_{mn} = 0. \tag{5.5}$$

Учитывая условия (\bar{D}) и (\bar{E}) можно записать

$$\lim_m \beta'_{mn} (m+1)^\alpha \Delta_n^\beta \varepsilon_{mn} = 0, \tag{5.6}$$

$$\lim_n \beta''_{mn} (n+1)^\beta \Delta_m^\alpha \varepsilon_{mn} = 0. \tag{5.7}$$

Применяя к первому члену $G'\varepsilon_{mn}$ условия (\bar{C}_1) и (\bar{H}^2) , а ко второму (5.4) и (5.7) получаем

$$\lim_m G' \varepsilon_{mn} = 0 \quad (5.8)$$

$$\lim_n \beta''_{nn} G' \varepsilon_{mn} = 0.$$

Аналогично рассуждая, получим

$$\lim_m \beta'_{mm} G'' \varepsilon_{mn} = 0, \quad (5.9)$$

$$\lim_n G'' \varepsilon_{mn} = 0,$$

Следовательно (G_3) выполнено. Учитывая далее (5.8), регулярность фактора B' и лемму 3.4, получим

$$\lim_m \sum_{k=0}^m |b'_{m, k+1} G' \varepsilon_{ke}| = 0.$$

Аналогично можно показать справедливость (G_2^e) . В итоге нами доказана (ср. [6], теорема 6).

Т е о р е м а 5.2. Пусть метод B нормален, регулярен и удовлетворяет условиям (2.17), (2.18) и (2.19). Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типа $(C_{\varepsilon}^{\lambda, \beta}, B)$ и $(C_{\varepsilon}^{\lambda, \beta}, B_e)$ необходимо и достаточно выполнение условий (B) , (\bar{C}) , (\bar{C}_1) , (\bar{C}_2) , (\bar{H}) , а в случае $(C_{\varepsilon}^{\lambda, \beta}, B_2)$ — (B) , (\bar{C}) , (\bar{C}_1) , (\bar{C}_2) и (\bar{D}) .

5.3. Множители суммируемости типа $(C_0^{\alpha, \beta}, B_\omega)$

Л е м м а 5.7. Из условий (A) и (H_1) для всех $0 < \sigma \leq \alpha$ вытекает

$$z\text{-}\lim_{m, n} \beta''_{mn} (m+1)^\alpha (n+1)^\beta \Delta_m^\sigma \varepsilon_{mn} = 0,$$

для всех $0 < \tau \leq \beta$

$$z\text{-}\lim_{m, n} \beta'_{mn} (m+1)^\alpha (n+1)^\tau \Delta_n^\tau \varepsilon_{mn} = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы в несколько иной формулировке полностью совпадает с доказательством леммы I9 работы [6], если в ней величины $(n+1)^{-\delta}$ заменить на β''_{nn} , а $(m+1)^{-\delta}$ заменить на β'_{mm} .

Покажем, что в случае метода Чезаро некоторые условия теоремы 4.1 выполнены. Условия (H_1) и (D_1) примут в нашем случае вид

$$\left. \begin{aligned} \lim_n \beta''_{nn} (n+1)^\beta \sum_m (m+1)^\alpha |\Delta_m^{\alpha+\beta} \varepsilon_{mn}| &= 0 \\ \lim_m \beta'_{mm} (m+1)^\alpha \sum_n (n+1)^\beta |\Delta_n^{\alpha+\beta} \varepsilon_{mn}| &= 0 \end{aligned} \right\} (\bar{H}_1)$$

$$z\text{-}\lim_{m, n} \beta'_{mm} (m+1)^\alpha (n+1)^\beta \varepsilon_{mn} = 0 \quad (\bar{D}_1)$$

Покажем вначале, что условие (G_3) теоремы 4.1 выполнено. Для того воспользуемся ранее найденными выражениями для $G'\varepsilon_{mn}$ и $G''\varepsilon_{mn}$. Учитывая лемму 5.7 и условия (\bar{H}_1) получаем

$$\lim_m \beta'_{mm} G''\varepsilon_{mn} = 0, \quad \lim_n \beta''_{nn} G'\varepsilon_{mn} = 0.$$

Рассмотрим теперь $L'\varepsilon_{mn}$. К первому члену применим условие (\bar{C}) , ко второму лемму 5.4. Получим

$$\lim_k \sum_{\ell=0}^k |L'\varepsilon_{k\ell}| = 0.$$

Учитывая доказательство теоремы 5.1, регулярность фактора и лемму 3.4, получим

$$\lim_m \sum_{k,\ell=0}^{m,\infty} |v'_{m,k+\ell+2} L'\varepsilon_{k\ell}| = 0.$$

Аналогично доказывается выполнение условия (L'_1) .

Убедимся теперь, что и условие (G_4) выполнено. Опять воспользуемся найденным ранее выражением для $G\varepsilon_{mn}$. К первому члену применим условие (\bar{C}) , к последнему лемму 5.5. К третьему и второму применим лемму 5.4. Получим

$$2 - \lim_{m,n} G\varepsilon_{mn} = 0.$$

А тогда ввиду регулярности факторов метода B и леммы 4.4 получим

$$\lim_{m,n} \sum_{k,\ell=0}^{m,n} |v_{mn,k+\ell+2,\ell+r+2} G\varepsilon_{k\ell}| = 0.$$

В итоге нами доказана (ср. [6], теорема 7)

Т е о р е м а 5.3. Пусть метод B нормален, регулярен и удовлетворяет условиям (2.17), (2.18) и (2.19). Для того, чтобы числа ε_{mn} были множителями суммируемости типов $(C_{\sigma}^{\alpha\beta}, B)$, $(C_{\sigma}^{\alpha\beta}, B_1)$ и $(C_{\sigma}^{\alpha\beta}, B_2)$ необходимо и достаточно выполнение условий (\bar{B}) , (\bar{H}_1) и (\bar{D}_1) .

ЛИТЕРАТУРА

1. Б а р о н С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
2. Б а р о н С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом Чезаро вещественного порядка. Уч. зап. Твртуск. ун-та, 1961, 102, 91-117.
3. Б а р о н С., Множители суммируемости для двойных рядов, суммируемых или ограниченных методом взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129, 225-240.
4. Б а р о н С., Теоремы о множителях суммируемости для методов A^x . Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, 253, 165-178.
5. К а н г р о Г., О множителях суммируемости для двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, 46, 3-42.
6. К а н г р о Г., Б а р о н С., Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, 73, 3-49.
7. К у л л ь И., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, 62, 3-59.
8. Т ю р н и у Х., Множители суммируемости для методов Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 90-105.
9. В о h r, Н., Bidrag til de Dirichlet'ske Raekker's Theorie. Kopenhagen, 1910.
10. В о h r, Н., Sur la serie de Dirichlet. C.r. Acad. sci., 1909, 148, 75-80.
11. Н а m i l t o n, H.I., On transformations of Double Series. Bull. Amer. Math. Soc., 1936, 42, 275-283.
12. Н а m i l t o n, H.I., Transformations of Multiple Sequences. Duke Math. J., 1936, 2, 29-60.
13. Н а r d y, G.H., Generalisation of a theorem in the Theory of divergent series. Proc. London Math. Soc., 1907, 2, 6, 255-264.

14. H a r d y, G.H., On the convergence of certain multiple series. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1917, 19, 86-95.
15. K o j i m a, T., On the Theory of Double Sequences. Tôhoku Math. J., 1922, 21, 3-14.
16. K o j i m a, T., Theorems on double series. Tôhoku Math. J., 1920, 17, 213-220.
17. L i n n a m ä g i, S., Menetluste klassi $A^{\alpha\beta}$ summeeruvustegurid. Tartu Riiklik Ülikool, 1969 (diplomitöö).
18. M o o r e, C.N., On the Convergence Factors in Multiple Series. Trans. Amer. Math. Soc., 1927, 29, 227-238.
19. M o o r e, C.N., Summable Series and Convergence Factors. New York, 1938.
20. R u s s e l, D.C., Note on Convergence Factors. Tôhoku Math. J., 1966, 18, 414-428.

TEOREEMID SUMMEERUVUSTEGURITEST

MENETLUSTE $A^{\alpha\beta}$ JAOKS

Resiimee

Olgu antud normaalne faktoriseeruv menetlus $A = (d_{mn\ell})$. Olgu menetluse $A = A' \circ A''$ faktorite $A' = (d'_{m\kappa})$ ja $A'' = (d''_{n\ell})$ pöördmatriksites $(\eta'_{m\kappa})$ ja $(\eta''_{n\ell})$ vastavalt $\alpha + 2$ ja $\beta + 2$ nullist erinevat diagonaali. Olgu B suvaline normaalne ja regulaarne menetlus, mis rahuldab tingimusi (2.17), (2.18) ja (2.19).

Antud töös üldistatakse artiklis [4] harilike ridade jaoks saadud tulemusi kahekordsetele ridadele. Leitakse summeeruvustegurid

$$(A_2^{\alpha\beta}, B), \quad (A_2^{\alpha\beta}, B_\ell), \quad (A_2^{\alpha\beta}, B_2),$$

$$(A_\ell^{\alpha\beta}, B), \quad (A_\ell^{\alpha\beta}, B_\ell), \quad (A_\ell^{\alpha\beta}, B_2),$$

$$(A_0^{\alpha\beta}, B), \quad (A_0^{\alpha\beta}, B_\ell), \quad (A_0^{\alpha\beta}, B_2).$$

tüüpi. Saadud tulemusi rakendatakse Cesaro menetlusele.

Summeeruvustegurite leidmiseks kasutatakse pöördteisenduse meetodit.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
ВВЕДЕНИЕ	
§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ЛЕММЫ	4
§ 2. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ТИПА $(A_2^{4\beta}, B_\omega)$	7
2.1. Неэффективные условия для множителей суммируемости типа $(A_2^{4\beta}, B_\omega)$	7
2.2. Эффективные необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типа $(A_2^{4\beta}, B_\omega)$	13
§ 3. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ТИПА $(A_2^{4\beta}, B_\omega)$	26
§ 4. МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ТИПА $(A_0^{4\beta}, B_\omega)$	35
§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ К МЕТОДУ ЧЕЗАРО	41
5.1. Множители суммируемости типа $(C_2^{4\beta}, B_\omega)$	41
5.2. Множители суммируемости типа $(C_2^{4\beta}, B_\omega)$	46
5.3. Множители суммируемости типа $(C_0^{4\beta}, B_\omega)$	49
ЛИТЕРАТУРА	51
РЕЗЮМЕ	53