GERHARD RÄGO

# Matemaatika tööraamat

## keskkoolidele

# Algebra

### 2. klassi kursus

K. O.-Ü. «Loodus», Tartus

GERHARD RĂGO

# Matemaatika tőőraamat
## keskkoolidele

## Algebra

2. klassi kursus



K. O.-Ü. «Loodus», Tartus
1928

Keeleline korrektor: Tartu Ülikooli eesti keele lektor J. V. Veski
Tehniline korrektor: M. Bekker



Ed. Bergmann'i trükk, Tartus

# Sisukord.

## Peatükk VIII: Polünoomid.



## Peatükk IX: Murrud.



## Peatükk X: Lineaarsed võrrandid.



## Peatükk XI: Ruutolenevus.

## Peatükk VIII.

# Polünoomid.

### Harjutis XXIX:

Binoomide korrutamine.

1. Mänguplatsi laiendamise otstarbel suurendati tema $a$-meetrilist pikkust 1 m võrra ja tema $b$-meetrilist laiust 2 m võrra. Valmista joonis, mis kujutaks mänguplatsi enne ja pärast tema suurendamist. Avalda pindala endine väärtus, tema uus väärtus ja leia tekkinud pinna kasv.

2. Kirjastus soovib valmistada raamatu uue trüki teises formaadis. Leheküljel on praegu keskmiselt $r$ rida, igas reas $t$ tähte. Kuidas muutub tähtede hulk leheküljel, kui ridade arvu suurendada 2 võrra, tähtede arvu reas aga vähendada 5 võrra?

3. Toiduainete kaupmees ostab apelsine kasti viisi, makstes keskmiselt $s$ senti apelsini eest. Kastis olevast $a$ apelsinist on 4 rikkes. Et ostu kulu tasa teha ja väikest summat teenida, paneb kaupmees tükihinnale 6 senti juurde. Kui suur on apelsinide müügist saadud puhaskasu?

4. Ristküliku-taolise heinamaa-tüki mõõted on $m$ ja $n$ meetrit. Äärte soostumise tõttu vähenevad heinamaa tuluspinna mõõted vastavalt 3 ja 5 meetri võrra. Valmista joonis ja leia viimaselt tuluspinna kao suurus. Kontrolli saadus arvutamise teel.

**5.** Arenda järgmised binoomide korrutised:

| | |
|---|---|
| $1^0$. $(x+1)(x+2)$ | $6^0$. $(f-5)(f+4)$ |
| $2^0$. $(x+2)(x+3)$ | $7^0$. $(g-6)(g-7)$ |
| $3^0$. $(x-1)(x+3)$ | $8^0$. $(h+8)(h-11)$ |
| $4^0$. $(x+5)(x-2)$ | $9^0$. $(i-9)(i+12)$ |
| $5^0$. $(x-2)(x-3)$ | $10^0$. $(k+11)(k-11)$ |

**6.** Rakenda binoomide korrutamise eeskiri järgmiste korrutiste arvutamiseks, tegureid kohaselt kujutades summana või vahena:

| | |
|---|---|
| $1^0$. $96 \cdot 97$ | $5^0$. $499 \cdot 505$ |
| $2^0$. $102 \cdot 105$ | $6^0$. $12\frac{1}{2} \cdot 12\frac{1}{3}$ |
| $3^0$. $104 \cdot 99$ | $7^0$. $15{,}5 \cdot 16{,}5$ |
| $4^0$. $198 \cdot 203$ | $8^0$. $9{,}7 \cdot 10{,}3$ |

**7.** Savinõude põletamise ahi tarvitab kütet $k$ kg tunnis. Kui palju kütteainet tarvitab ahi ühe täite põletamiseks, mis kestab $t$ tundi? Mitme kilogrammi võrra muutub tarvitatud kütteaine hulk, kui põletamistemperatuuri tõstes kulutatakse tunnis 100 kg võrra rohkem kütet kui ennem, ühes sellega aga lühendatakse põletamisaega 30 tunni võrra?

**8.** Ristküliku-taolise plaadi valamiseks valmistatud vormi pikkus on $p$ mm ja laius $l$ mm. Jahtumisel kokku tõmbudes väheneb valatud plaadi pikkus 0,3 mm võrra ja laius 0,2 mm võrra. Mille võrra väheneb jahtumisel plaadi pindala?

**9.** Vabrikusaaduste turutingimuste halvenemisel on vabriku juhatus sunnitud oma toodangut kokku tõmbama. Ta lühendab oma tööliste 8-tunnilist tööpäeva $t$ tunni võrra ja vähendab 40-sendilist töötunni tasu $s$ sendi võrra. Mille võrra muutub sel puhul töölise päevateenistus?

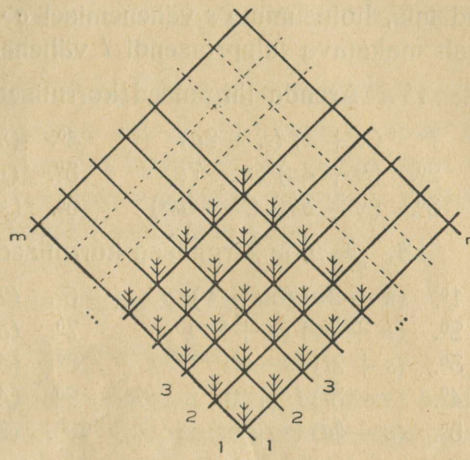
**10.** Ametnikkude palkade tõstmine on kulusid suurendamata ainult sel teel võimalik, et ametnikkude arvu vähendatakse. Ametkond koondab oma 7 direktori koosseisu $i$ isiku võrra, suurendades nende praegust 300-kroonilist töötasu kuus $k$ krooni võrra. Kui suur on selle juures saavutatud kokkuhoid $K$?

Näiteid:

| $i$ | $k$ | $K$ |
|---|---|---|
| 1 | 50 | |
| 2 | 30 | |

| $i$ | $k$ | $K$ |
|---|---|---|
| 1 | 75 | |
| 2 | 120 | |

**11.** Noormetsa istanduses (joonis 26) esineb $m$ peenart, $n$ puud peenral. Istanduse laiendamise otstarbel lisati eelmistele peenardele 30 uut juurde ja pikendati kõiki peenraid, istutades igale pikendile 20 uut puud. Arvuta istanduse puude arvu kasv.



Joonis 26.

**12.** Arenda järgmised korrutised:

1⁰. $\left(u+\frac{1}{2}\right)\left(u+\frac{1}{3}\right)$ 4⁰. $(p+3)(p-0{,}5)$

2⁰. $\left(v-\frac{2}{3}\right)\left(v+\frac{5}{6}\right)$ 5⁰. $(q-1{,}5)(q+2{,}4)$

3⁰. $\left(w-2\right)\left(w-\frac{3}{4}\right)$ 6⁰. $(r-3{,}5)(r-4{,}8)$

7⁰. $(2+x)(5-x)$ 10⁰. $(e+1)(2{,}6-e)$

8⁰. $(6-y)(y-7)$ 11⁰. $(0{,}8+f)(f-2{,}5)$

9⁰. $(7-z)(z+8)$ 12⁰. $(5{,}6-g)(2{,}1+g)$

**13.** Ruudukujulise kummitüki külg on $x$ cm pikk. Kummit venitatakse ühes sihis $a$ cm võrra, teises sihis $b$ cm võrra. Kui suure pindala katab kummi peale venitamist? Määra pindala kasv.

**14.** Mille võrra muutub lennu tee, kui lennu kiirust $k$ vähendada $\varkappa$ võrra, lennu aega $t$ aga suurendada $\tau$ võrra?

**15.** Mil määral mõjustab raamatu trüki koguhinda trüki suuruse ($n$ eksemplari) tõstmine $\nu$ võrra ja raamatu hinna $h$ vähendamine $\eta$ võrra?

**16.** Mis suuruse võrra väheneb hoiusummalt saadud tulu, hoiusumma $s$ vähenemisel $\sigma$ võrra ja hoiusumma pealt makstava tuluprotsendi $t$ vähenemisel $\tau$ võrra?

**17.** Arenda järgmised korrutised:

| | |
|---|---|
| 1°. $(x+a)(x-2a)$ | 4°. $(n-x)(2n+x)$ |
| 2°. $(x+4a)(x+7a)$ | 5°. $(p+x)(p-x)$ |
| 3°. $(x-3m)(x-5m)$ | 6°. $(x-2q)(q+x)$ |

**18.** Arenda järgmised korrutised:

| | |
|---|---|
| 1°. $(u+2v)(3u-v)$ | 6°. $(2z+5)(3z+1)$ |
| 2°. $(u+5v)(u+9v)$ | 7°. $(3z+4)(2z-5)$ |
| 3°. $(s+2t)(s-t)$ | 8°. $(5f-2)(2f-3)$ |
| 4°. $(s-3t)(s+t)$ | 9°. $(4g-5)(g+3)$ |
| 5°. $(s-5t)(s+5t)$ | 10°. $(2h-3k)(3h+2k)$ |

**19.** Kolme ristküliku mõõted on vastavalt

$a$ sülda $b$ jalga ja $x$ sülda $y$ jalga,
$m$ jalga $n$ tolli ja $r$ jalga $s$ tolli,
$e$ cm $f$ mm ja $g$ cm $h$ mm.

Arenda nende pindalade avaldised.

**20.** Kaupmees ostis $a$ tosinat $b$ üksikpaari nuge hinnaga $m$ krooni $n$ senti paar. Arenda tema arve avaldis.

**21.** Rätsep ostis $i$ jardi $j$ jalga inglise püksiriiet, hinnaga £ $a:b:$— jard. Arenda tema arve suurus.

**22.** Täisnurkse kolmnurga kaatetite mõõtmisel on saadud nende väärtustena $a$ m ja $b$ m vigadega vastavalt mitte üle $\pm\alpha$ m ja $\pm\beta$ m.

Missuguste rajade vahel peitub kolmnurga pind? Kui lai on selle pinna määramatuse piirkond?

Kujuta ülesandes nimetatud suurused joonisel.

23. Katsepõllu pindala on $S$ m$^2$ suur, veaga mitte üle $\pm s$ m$^2$. Pindühikul 1 m$^2$ kasvab keskmiselt $K$ rukkikõrt, veaga mitte üle $\pm 2k$ kõrt ($k$ kõrt on taimede lugemise vea-ühik). Missuguste rajade vahel peitub katsepõllul kasvavate rukkitaimede tõeline hulk? Kui lai on nende rajade vahe?

24. Missuguste rajade vahel asub tankitäie bensiini kaal, kui tanki ruumala on $R$ dm$^3$ veaga mitte üle $\pm 5r$ dm$^3$ ja 1 dm$^3$ bensiini kaalub $K$ kg veaga mitte üle $\pm 3k$ kg ($r$ dm$^3$ ja $k$ kg on vastavate suuruste vea-ühikud)? Kui lai on leitud kaalurajade vahe?

## Harjutis XXX:

Arvutamise abivalemid.

1. Ruudukujulise vasklesta külg $a$ mm paisub soojenemisel 1 mm võrra. Kui suureks paisub lesta pind? Kui suur on paisumisel tekkinud pinna kasv? Kujuta kõik nimetatud suurused joonisel.

2. Sama ülesanne ruudu kokkutõmbumise kohta jahtumisel.

3. Ruudukujulise maatüki külje mõõtmine andis $x$ jalga, veaga kuni $\pm\frac{1}{2}$ jalga.

Missuguste rajade vahel asub maatüki pind?

Kui lai on selle pinna määramatuse piirkond?

Kujuta kõik nimetatud suurused joonisel.

4. Kuubi serv $a$ mm paisub soojenemisel $x$ mm võrra. Kui suureks paisub kuubi tahk?

Määra tahu pinna kasv.

Kujuta nõutud suurused joonisel.

**5.** Sama ülesanne kuubi kokkutõmbumise kohta jahtumisel.

**6.** Arenda järgmiste avaldiste ruudud:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. $x+1$ | 6⁰. $7-z$ | 11⁰. $2p+1$ |
| 2⁰. $x-2$ | 7⁰. $10+z$ | 12⁰. $3q-4$ |
| 3⁰. $x-3$ | 8⁰. $z+a$ | 13⁰. $2r+5$ |
| 4⁰. $x+4$ | 9⁰. $n-z$ | 14⁰. $4s+7t$ |
| 5⁰. $x+5$ | 10⁰. $z-z$ | 15⁰. $3u-5v$ |

**7.** Arenda järgmiste avaldiste ruudud:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. $x+\frac{1}{2}$ | 6⁰. $u-\frac{1}{3}$ | 11⁰. $2f+\frac{1}{2}g$ |
| 2⁰. $\frac{3}{4}-x$ | 7⁰. $v+1{,}2$ | 12⁰. $\frac{1}{3}h-\frac{3}{5}k$ |
| 3⁰. $x+1{,}5$ | 8⁰. $0{,}9-w$ | 13⁰. $ij-5$ |
| 4⁰. $x-0{,}7$ | 9⁰. $1-\frac{1}{2}s$ | 14⁰. $mp+nq$ |
| 5⁰. $x+0{,}1$ | 10⁰. $\frac{2}{3}t+6$ | 15⁰. $ax-3by$ |

**8.** Arvuta järgmised väärtused tarvitades kohaselt summa ja vahe ruudu valemeid:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. $32^2$ | 4⁰. $502^2$ | 7⁰. $199^2$ |
| 2⁰. $41^2$ | 5⁰. $29^2$ | 8⁰. $503^2$ |
| 3⁰. $73^2$ | 6⁰. $98^2$ | 9⁰. $990^2$ |

**9.** Arvuta järgmised väärtused, tarvitades kohaselt summa ja vahe ruudu valemeid:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. $(7\frac{1}{2})^2$ | 3⁰. $(4\frac{2}{3})^2$ | 5⁰. $(17{,}9)^2$ |
| 2⁰. $(3\frac{1}{3})^2$ | 4⁰. $(13{,}1)^2$ | 6⁰. $(29{,}8)^2$ |

**10.** Näita, et

$$(a+\frac{1}{2})^2=a(a+1)+\frac{1}{4}$$

ja arvuta järgmised väärtused, seda valemit kohaselt rakendades:

| | | |
|---|---|---|
| 1°. $(4\frac{1}{2})^2$ | 3°. $(14\frac{1}{2})^2$ | 5°. $(19,5)^2$ |
| 2°. $(9\frac{1}{2})^2$ | 4°. $(6,5)^2$ | 6°. $(30,5)^2$ |

**11.** Näita, et

$$(10k+5)^2 = 100k(k+1)+25.$$

Arvuta järgmised ruudud, seda valemit kohaselt rakendades:

$$35^2, \quad 45^2, \quad 75^2, \quad 95^2.$$

**12.** Arvuta ruutude pindalad, millede küljed on:

| | |
|---|---|
| 1°. $s$ sülda $j$ jalga | 3°. $m$ meetrit $d$ detsimeetrit |
| 2°. $j$ jalga $t$ tolli | 4°. $k$ kilomeetrit $m$ meetrit. |

**13.** Kuubi serva $s$ mõõtmisel on tehtud viga $\sigma$. Mil määral mõjustab see viga kuubi täispinna arvutamise saadust?

**14.** Kera raadiuse $r$ mõõtmisel on tehtud viga $\varrho$. Mil määral mõjustab see viga kera pinna arvutamise saadust?

**15.** Ümmarguse püstsilindri telglõikeks on ruut. Selle külje õige väärtus on $2a$, kuna mõõtmise täpsusetuse tõttu saadi tema jaoks suurem väärtus $2a + \alpha$. Mil määral mõjustab tehtud viga silindri külgpinna suuruse arvutamise saadust? — mil määral täispinna väärtust? Kujuta mõlema pinna kasvud joonisel laotuses.

**16.** Ümmarguse metallkoonuse mõõted: põhja raadius $r$ cm ja kõrgus $h$ cm tõmbuvad peale valamist jahtumisel kokku vastavalt $\varrho$ cm ja $\eta$ cm võrra. Mille võrra väheneb sel puhul koonuse külgpind? — mille võrra täispind?

Kujuta mõlema pinna kaod joonisel laotuses.

**17.** Keha langeb tühjuses $t$ sekundi vältel $4{,}9t^2$ meetrit. Kui suur viga tekib halvemal juhul langemistee arvutamisel, kui langemisaeg on teada veaga kuni $\pm\frac{1}{2}$ sekundit?

**18.** Villase riide mõõted tõmbuvad vanutamisel kokku, vähenedes $p$ % võrra. Mille võrra väheneb riide pind, kui tema algpikkus on 20 meetrit ja alglaius 1,2 meetrit?

**19.** Kirjuta järgmised avaldised, kui võimalik, täisruutudena:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1⁰. | $x^2+6x+9$ | 6⁰. | $16-8u+u^2$ |
| 2⁰. | $x^2-2x+4$ | 7⁰. | $36+12v+v^2$ |
| 3⁰. | $x^2+14x+49$ | 8⁰. | $1-4w+w^2$ |
| 4⁰. | $x^2-12x+25$ | 9⁰. | $s^2-2s-1$ |
| 5⁰. | $x^2-16x+64$ | 10⁰. | $t^2+18t+81$ |

**20.** Kirjuta järgmised avaldised, kui võimalik, täisruutudena:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1⁰. | $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}$ | 6⁰. | $4f^2+4f+1$ |
| 2⁰. | $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$ | 7⁰. | $9g^2-12g+4$ |
| 3⁰. | $x^2-0{,}2x+0{,}01$ | 8⁰. | $h^2-6ah+9a^2$ |
| 4⁰. | $x^2-2{,}6x+1{,}69$ | 9⁰. | $i^2-4ik+4k^2$ |
| 5⁰. | $x^2-0{,}8x-0{,}16$ | 10⁰. | $25l^2-90cl+9c^2$ |

**21.** Arenda järgmised avaldised:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1⁰. | $(x+1)(x-1)$ | 6⁰. | $(a+\frac{2}{3})(a-\frac{2}{3})$ |
| 2⁰. | $(x+3)(x-3)$ | 7⁰. | $(b-1{,}9)(b+1{,}9)$ |
| 3⁰. | $(x+7)(x-7)$ | 8⁰. | $(6+c)(6-c)$ |
| 4⁰. | $(x-10)(x+10)$ | 9⁰. | $(11-d)(d+11)$ |
| 5⁰. | $(x+13)(x-13)$ | 10⁰. | $(0{,}8+e)(e-0{,}8)$ |

**22.** Kirjuta järgmised avaldised korrutistena:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1⁰. | $x^2-4$ | 6⁰. | $16z^2-9a^2$ |
| 2⁰. | $1-x^2$ | 7⁰. | $25u^2-36v^2$ |
| 3⁰. | $y^2-9$ | 8⁰. | $81u^2-v^2$ |
| 4⁰. | $25-y^2$ | 9⁰. | $16-121s^2t^2$ |
| 5⁰. | $49-4z^2$ | 10⁰. | $49t^2-25a^2s^2$ |

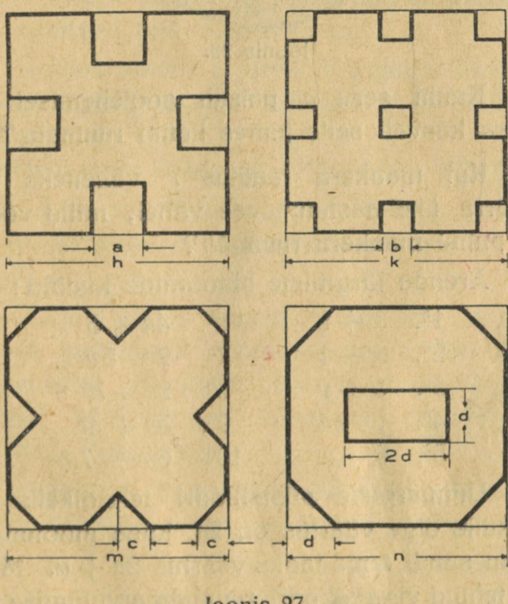
**23.** Rakenda ruutude vahe valem järgmiste väärtuste arvutamiseks:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. $31^2 - 29^2$ | 4⁰. $121^2 - 119^2$ | 7⁰. $103 \cdot 97$ |
| 2⁰. $71^2 - 69^2$ | 5⁰. $15{,}1^2 - 14{,}9^2$ | 8⁰. $215 \cdot 185$ |
| 3⁰. $101^2 - 99^2$ | 6⁰. $1{,}64^2 - 1{,}36^2$ | 9⁰. $973 \cdot 1027$ |

**24.** Esita järgmised avaldised korrutistena, soovi korral sulud, kus olemas, enne avades:

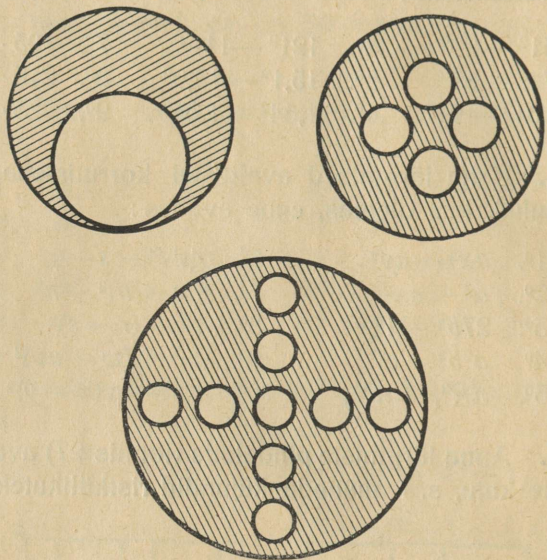
| | |
|---|---|
| 1⁰. $ax^2 - ay^2$ | 6⁰. $4s^3t^2 - s$ |
| 2⁰. $a^3 - ax^2$ | 7⁰. $(m+n)^2 - n^2$ |
| 3⁰. $27b^2 - 12a^2$ | 8⁰. $r^2 - (r-s)^2$ |
| 4⁰. $a^2b^2 - c^2$ | 9⁰. $w^2 - (w - uv)^2$ |
| 5⁰. $\pi R^2_1 - \pi R^2_2$ | 10⁰. $ax^2 - a(x-y)^2$ |

**25.** Anna järgmiste pindalade (joonis 27) avaldistele korrutiste kuju, s. t. muunda kujundid ristkülikuteks:




Joonis 27.

**26.** Ehita ristkülikud, mis pindvõrdsed järgmiste kujunditega (joonis 28):



Joonis 28.

**27.** Kuubi serv $a$ paisub soojenemisel $\alpha$ võrra. Mille võrra kasvab selle juures kuubi ruumala?

**28.** Kui maakera raadius $r$ väheneks jahtumise tõttu $\varrho$ võrra ühe aastatuhande vältel, mille võrra väheneks sel puhul maakera ruumala?

**29.** Arenda järgmiste binoomide kuubid:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1^0$. | $x+2$ | $6^0$. | $4u+3$ |
| $2^0$. | $x-1$ | $7^0$. | $2-5v$ |
| $3^0$. | $3+y$ | $8^0$. | $2s-a$ |
| $4^0$. | $y-4$ | $9^0$. | $3s+4t$ |
| $5^0$. | $5-z$ | $10^0$. | $6m-7n$ |

**30.** Ümmarguse püstsilindri telglõikeks on ruut. Viimase külje õige väärtus on $2a$, kuna mõõtmise täpsusetuse tõttu saadi tema jaoks väärtus $2a+\alpha$. Mil määral mõjustab tehtud viga silindri ruumala arvutamise saadust?

**31.** Kera raadiuse mõõtmisel on leitud tema väärtusena $r$ cm veaga mitte üle $\pm\varrho$ cm. Missuguste rajade vahel peitub kera ruumala? Kui suur on kera ruumala määramatuse piirkond?

**32.** Kuubi serva $s$ mõõtmisel on tehtud viga $p$ %. Mil määral mõjustab see viga kuubi ruumala arvutamise saadust?

## Harjutis XXXI:

Arvutamise põhiseaduste ja abivalemite rakendamine aritmeetikas.

Eelmärkus. Järgmistes ülesannetes tuleb iga toimingut põhjendada vastava põhiseaduse või abivalemiga.

**1.** On antud kaks arvu $a$ ja $b$.

1°. Näita, et nende summa ja nende vahe liitmine annab vähendatava arvu kahekordse.

2°. Näita, et nende vahe lahutamine nende summast annab lahutatava arvu kahekordse.

**2.** Tõesta väide: et arvu $N$ jagada korrutisega $pq$, võib teda jagada esiteks teguriga $p$ ja selle jagamise tulemust teguriga $q$.

Näited: $N = 6324$; $pq = 12$. $N = 87318$; $pq = 63$.

**3.** Olgu antud kaks kahekohalist arvu üldkujul. Arenda nende korrutis ja kontrolli saadus mõnel arvulisel näitel.

**4.** Kirjuta mingi kolmekohaline arv, mille numbrid väheneksid pahemalt paremale poole järjest 1 võrra. Pööra numbrite järjekord. Lahuta antud ja saadud arv teineteisest. Ma väidan, et saadus on 198. Näita, et asi on nõnda igal juhul.

**5.** Näita, et täisarvudest koosneva aritmeetilise rea $m$-da ja $n$-da liikme vahe on arvu $(m-n)$ kordne.

**6.** Näita, et jagamisel tekkiv jääk ei muutu, kui jagatavat suurendada jagaja kordsega.

7. Tõesta lause: kui jagatav ja jagaja korrutada ühe ja sama teguriga, siis ei muutu sel puhul jagatis mitte, jääk aga korrutub ennenimetatud teguriga.

8. Tõesta väited:

1⁰. Kahe paaritu arvu summa on ikka paarisarv.

2⁰. Kahe paaritu arvu vahe on ikka paarisarv.

3⁰. Kahe paaritu arvu korrutis on ikka paarituarv.

9. Olgu $N_1$ mingi kahekohaline arv. Muutes tema numbrite järjekorda saame uue kahekohalise arvu $N_2$. Näita, et vahe $N_1 - N_2$ on alati jaguv 9-ga.

10. Näita, et

$$(n+1)^2 = n^2 + [n + (n+1)].$$

See valem annab võimaluse saada arvu ruutu liitmise teel, kui eelkäiva arvu ruut on teada.

Näide. Teades, et $70^2 = 4900$, koosta ruutude tabel: $71^2, 72^2, 73^2, \ldots 80^2$.

11. Olgu kahekohalise arvu numbrid $p$ ja $q$. Arenda tema ruut. Kontrolli saaduse maksvus numbrite $p$ ja $q$ eriväärtustel 7 ja 9.

12. Tõesta väide: kui arvu kirjutis lõpeb numbriga 5, siis lõpeb arvu ruudu kirjutis 25-ga.

13. Tõesta väide: kui arvu kirjutis lõpeb märkidega 2, 3, 7 või 8, siis ei saa ta olla ruutarv.

14. Näita, et kahe arvu summa ruut pole kunagi väiksem kui nende arvude neljakordne korrutis.

15. Näita, et kahe arvu ruutude summa pole kunagi väiksem kui nende arvude kahekordne korrutis.

16. Mis on suurem: kas kahe arvu ruutude summa või sama kahe arvu summa ruut? Arvesta arvude märke.

**17.** Näita, et iga täisarvu ruut on ühe võrra suurem kui kahe temaga kõrvuti seisva täisarvu korrutis.

**18.** Näita, et iga kahe teineteisele järgneva täisarvu ruutude vahe on võrdne sama kahe arvu summaga.

**19.** Tõesta lause: kui kaks arvu erinevad teineteisest $d$ üksuse võrra, siis nende ruutude vahe on arvu $d$ kordne.

**20.** Tõesta väited:

1°. Iga kahe teineteisele järgneva paarituarvu ruutude vahe jagub 8-ga.

2°. Iga kahe teineteisele järgneva paarisarvu ruutude vahe jagub 4-ga.

**21.** Näita, et iga kolme üksteisele järgneva paarituarvu ruutude summa muutub 1 lisamisel arvuks, mis jagub 12-ga.

**22.** Tekkigu arvu $a$ jagamisel arvuga $b$ jagatis $p$ ja jääk $r$ ($r < b$). Tekkigu arvu $p$ jagamisel arvuga $c$ jagatis $q$ ja jääk $s$. Näita, et siis arvu $a$ jagamisel korrutisega $bc$ tekib jääk $bs + r$.

Arvulised näited: $a = 3275$; $b = 3$; $c = 4$.
$a = 7851$; $b = 4$; $c = 5$.

**23.** Andku arv $a$ jagamisel arvuga 7 jäägi $j$. Tõesta, et siis annab arv $a^2$ jagamisel 7-ga sama jäägi, mis arv $j^2$, ja $a^3$ sama jäägi, mis $j^3$.

**24.** Sama lause jagamise kohta arvudega 3, 9, 11 ja üldse iga arvuga $d$.

N ä i t e i d. Määra ühelt poolt otseselt, teiselt poolt kaudselt — eelmise lause põhjal — jäägid, mida annab arv $19^3$ jagamisel 9-ga ja arv $459^2$ jagamisel 17-ga.

**25.** Tõesta lause: iga paarituarv on arvu 4 kordne lisandiga kas $+1$ või $-1$.

**26.** Näita, et iga kahe paarituarvu ruutude vahe jagub 8-ga.

27. Tõesta lause: iga paarituarvu ruut jätab jagamisel 8-ga jäägi 1.

28. Olgu $N_1$ mingi kahekohaline arv. Muutes tema numbrite järjekorda saame uue kahekohalise arvu $N_2$. Näita, et $N^2_1 - N^2_2$ on ikka jaguv 99-ga.

## Harjutis XXXII:

Tehted polünoomidega.

1. Tähistades arvu 10 tähega $k$ saame

$$100 = 10^2 = k^2, \qquad 1000 = 10^3 = k^3,$$

ja võime kirjutada:

$$74 = 7k + 4, \qquad 529 = 5k^2 + 2k + 9$$
$$1345 = k^3 + 3k^2 + 4k + 5.$$

Kujuta samal viisil arvud:

25, 81, 392, 476, 917,
1011, 3752, 8531, 9072.

2. Missuguseid arve kujutavad avaldised:

$$k + 3, \qquad k^2 + 3k + 4, \qquad k^3 + 4k^2 + 2k + 9$$

kui tähte $k$ mõistetakse 10-ne tähisena?

3. Missuguseid arve kujutavad avaldised

$$i + 1, \qquad i^2 + 5i + 2, \qquad i^3 + i^2 + i + 1$$

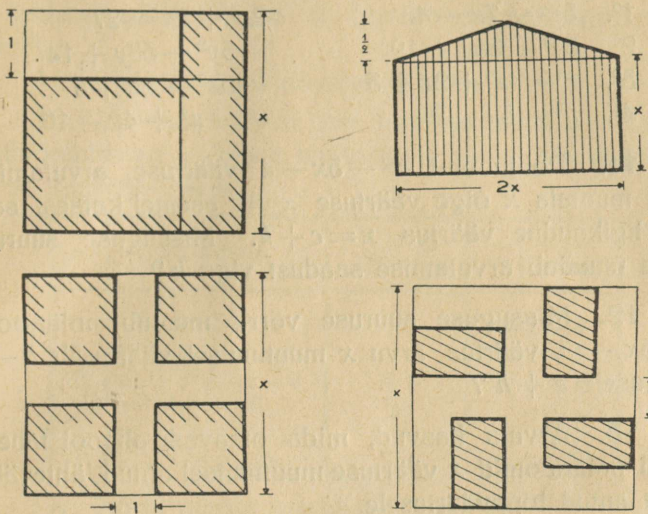
kui $i = 5$? — kui $i = 12$? — kui $i = 20$?

4. Tähistades 1 tosina tähega $t$ saame 1 grossi tähisena $t^2$. Avalda järgmised hulgad sümboli $t$ kaudu:

7 tosinat 3 üksikasja,
1 gross 5 tosinat 6 üksikasja,
12 grossi 1 tosin 2 üksikasja.

5. Laual seisab silinder, mille põhja raadius on $r$ dm ja moodustaja on 3 dm. Avalda pinna suurus, mis silindril võimalik näha.

**6.** Avalda järgmisel joonisel 29 kujutatud 4 pindala joonisel antud mõõteis.




Joonis 29.

**7.** Kuubi serv 1 dm paisus soojenedes $s$ dm võrra. Kui suur on uus kuubi ruumala?

**8.** Korralda polünoomid 1⁰—4⁰ muutuja alanevate astmete järgi, polünoomid 5⁰—8⁰ muutujate kasvavate astmete järgi:

| | |
|---|---|
| 1⁰. $1+2x^2-3x$ | 5⁰. $-4p-5p^3+6p^2+1$ |
| 2⁰. $7y-5+y^2$ | 6⁰. $7q-8+3q^2-5q^3$ |
| 3⁰. $z^2+6-5z$ | 7⁰. $4r^3+2r-3r^2-7$ |
| 4⁰. $-1+20u^2-9u$ | 8⁰. $s^3-2s^2+s-4$ |

**9.** Liida järgmised ridades 1⁰. kuni 4⁰. seisvad polünoomid ja koonda, kui võimalik, saadus:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. $x^2+6x+5$ | $x^2-6x+11$ | $x-15$ |
| 2⁰. $y^2-13y-40$ | $2y^2+15y+39$ | $2y+3$ |
| 3⁰. $6z^2-23z+12$ | $z^2-7z+7$ | $3z^2+29z-19$ |
| 4⁰. $5u^2-13u+24$ | $-4u^2+15u-19$ | $-u^2-u-4$ |

**10.** Lahuta teisel veerul seisev polünoom vastavast esimesel veerul seisvast ja koonda saadus:

| | | |
|---|---|---|
| $1^0$. | $3x^2 - 7x - 48$ | $2x^2 + 3x - 27$ |
| $2^0$. | $5y^2 - 53y + 19$ | $-5y^2 - 38y + 14$ |
| $3^0$. | $z^3 - 4z^2 + 2z + 3$ | $-5z^2 - 2z + 3$ |
| $4^0$. | $u^3 + 5u - 9$ | $u^3 - u^2 + 4u - 10$ |

**11.** Polünoomi $x^2 - 3x - 4$ väärtuse arvutamisel võeti muutuja $x$ õige väärtuse $x = c$ asemel katsest saadud ligikaudne väärtus $x = c + h$. Missuguse suuruse võrra muudab arvutamise saadust viga $h$?

**12.** Missuguse suuruse võrra muutub polünoomi $1 - 5x - x^2$ väärtus arvu $x$ muutumisel väärtuselt $a - h$ väärtusele $a + h$?

**13.** Arvuta kasvud, mida omavad allpool tabelis antud polünoomid $x$ väärtuse muutumisel antud lähteväärtuselt antud lõppväärtusele.

| Nr | Polünoom | $x$-i lähte-väärtus | $x$-i lõpp-väärtus |
|---|---|---|---|
| $1^0$. | $x^2 + 4x - 7$ | $+3$ | $+3 + h$ |
| $2^0$. | $x^2 - 5x + 8$ | $-2$ | $-2 + k$ |
| $3^0$. | $x^2 + x - 1$ | $a$ | $a + \alpha$ |
| $4^0$. | $11 - 7x - x^2$ | $b$ | $b - \beta$ |
| $5^0$. | $-4 + 3x - x^2$ | $c - \gamma$ | $c + \gamma$ |

**14.** Näita otsese arendamise teel, et

$$\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right\} =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca).$$

Anna rida arvulisi näiteid.

Mispärast ei ole avaldis

$$a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)$$

iialgi negatiivne?

**15.** Avalda kinnise kuubilise kasti kaal, kui väliselt mõõdetud serva pikkus on $s$ cm, seina paksus 2 cm ja seinamaterjali tihedus 10 (grammides kuupsentimeetri kohta).

Anna nõutav kaal arendatud kujul.

**16.** Arvuta kasvud, mis omandavad allpool antud polünoomid $x$-i väärtuse muutumisel antud lähteväärtuselt antud lõppväärtusele.

| Nr | Polünoom | $x$-i lähteväärtus | $x$-i lõppväärtus |
|---|---|---|---|
| 1°. | $x^3 - 4x + 5$ | $+2$ | $+2+h$ |
| 2°. | $x^3 - 3x^2 + 2x - 7$ | $-1$ | $-1+k$ |
| 3°. | $x^3 - x^2 + 5x - 9$ | $+3$ | $+3-j$ |
| 4°. | $1 - 5x^2 - x^3$ | $a$ | $a+\alpha$ |
| 5°. | $6 - x + 2x^2 - x^3$ | $b-\beta$ | $b$ |
| 6°. | $x - 3x^2 + 5x^3$ | $c-\gamma$ | $c+\gamma$ |

**17.** Näita otsese arendamise teel, et

$$\frac{1}{3}\left\{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3\right\}=$$

$$=ab\,(b-a)+bc\,(c-b)+ca\,(a-c).$$

Anna rida arvulisi näiteid.

**18.** Anna järgmistele korrutistele võimalikult lihtne kuju:

1°. $2x \cdot x$
2°. $3x^2 \cdot (-5x)$
3°. $(-4ax)(+0{,}6x^2)$
4°. $(-1{,}7ax^2)(-8a)$
5°. $(+6{,}5bt^2)(-4c^2t)$
6°. $(-1{,}2cu^2v)(+10c^2uv^2)$

**19.** Anna järgmistele jagatistele võimalikult lihtne kuju:

1°. $8x:4$
2°. $(-15x^2):3x$
3°. $(+1{,}4x^3):(+7x^2)$
4°. $(-3{,}5az^2):(-5z)$
5°. $(+4{,}5a^2z):0{,}9\,az$
6°. $\pi r^2h:2\pi rh$

**20.** Arenda järgmised korrutised:

1°. $(a+2b)\cdot 3a$
2°. $(3a-4b)(-5a^2)$
3°. $(5a+7b)(+2ab)$
4°. $(x^2-x+1)(-2x)$
5°. $(x^2-5x-6)(+0{,}3x)$
6°. $(3x^2+10x-21)(-0{,}5ax)$

**21.** Arenda järgmised jagatised:

1⁰. $(12x + 15) : 3$ 3⁰. $(x^3 - 2x^2 - 4x) : (-0{,}5x)$
2⁰. $(9x^2 - 6x) : (+6x)$ 4⁰. $(2x^3 - 3x^2) : (-4x^2)$

**22.** Igas reas 1⁰—6⁰ seisab kaks avaldist. Arenda nende korrutis ja koonda saadus.

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. | $x^2 + 2x + 1$ | $x - 1$ |
| 2⁰. | $x^2 - 5x + 6$ | $x + 2$ |
| 3⁰. | $x^2 - 3x - 10$ | $x - 3$ |
| 4⁰. | $2x^2 - 3x + 7$ | $4x + 5$ |
| 5⁰. | $3x^2 + 4x - 5$ | $2x - 3$ |
| 6⁰. | $1 - 9x + 20x^2$ | $1 - 3x$ |

**23.** Kujuta arvud 964 ja 75 polünoomidena, võttes $10 = k$, $10^2 = k^2$, $10^3 = k^3$; korruta ühelt poolt antud arvud, teiselt poolt saadud polünoomid ja veendu tulemuste samasuses.

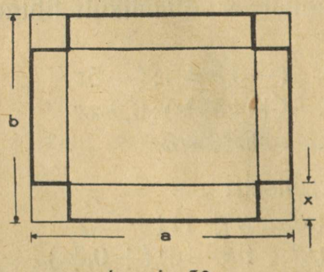
Sama ülesanne arvude puhul

11 ja 111, 29 ja 395.

**24.** Korruta

| polünoom | polünoomiga |
|---|---|
| $i^2 + 3$ | $4i + 5$ |
| $i^2 - i + 1$ | $3i - 2$ |
| $5i^2 - 7i - 3$ | $i - 1$ |

ja kontrolli saadus, asendades andmeisse ja tulemustesse mingi $i$ eriväärtus, näit. $i = 2$, või $i = 3$, või $i = 11$.




Joonis 30.

**25.** Ristküliku-kujulise papitüki nurkadesse on tehtud ruudukujulised väljalõiked (joonis 30). Avalda karbi ruumala, mida saab valmistada papitükist, murdes teda joonisel märgitud joonte järgi. Arenda saadud avaldis juhul $a = 4$, $b = 3$.

**26.** Silindri läbimõõt 5 cm paisub soojenedes $\delta$ cm võrra, silindri kõrgus 10 cm samal ajal $2\delta$ cm võrra. Avalda silindri ruumala kasv. Arenda leitud avaldis.

**27.** Koonuse raadius 3 cm ja kõrgus 10 cm tõmbuvad jahtumisel $\alpha$ cm võrra kokku. Mille võrra väheneb sel puhul koonuse ruumala? Anna nõutud suurus arendatud kujul.

**28.** Täisnurkse neljakandilise püstprisma mõõdete väärtused on cm-tes $3-\alpha$, $4+\alpha$ ja $5-\alpha$. Kui suure vea tekitab nende väärtuste ümmardamine väärtusteks 3, 4 ja 5 prisma ruumala arvutamisel?

**29.** Jaga

| | avaldis | avaldisega |
|---|---|---|
| 1⁰. | $x^2-5x+6$ | $x+3$ |
| 2⁰. | $x^2+3x-10$ | $x-2$ |
| 3⁰. | $x^2-13x+36$ | $x-4$ |
| 4⁰. | $x^2-x-12$ | $x+3$ |
| 5⁰. | $x^2-7x-98$ | $x-14$ |
| 6⁰. | $x^2-33x+272$ | $x-17$ |
| 7⁰. | $x^3-6x^2+5x+12$ | $x-4$ |
| 8⁰. | $x^3-1$ | $x^2+x+1$ |
| 9⁰. | $x^3+8$ | $x^2-2x+4$ |
| 10⁰. | $x^3-19x+30$ | $x^2-5x+6$ |

**30.** Kujuta arvud 347 ja 29 polünoomidena, võttes $10=k$, $10^2=k^2$, $10^3=k^3$; jaga arvud ja jaga polünoomid ja veendu resultaatide identsuses.

Sama ülesanne arvupaaride kohta 987 ja 54, 3459 ja 589, 7005 ja 608.

**31.** Kujutades liitühikuid 10, 100, 1000, 10 000 jne. lühemalt $k$, $k^2$, $k^3$, $k^4$ jne., kirjuta järgmised arvud polünoomidena:

45321, 70403, 111111, 678190, 1230456.

Liida kolm esimest arvu, liida kolm vastavat polünoomi ja veendu, et mõlemad saadused on kooskõlas.

Lahuta viimasest arvust eelviimane, lahuta vastavad polünoomid ja veendu, et saadused on kooskõlas.

**32.** Tähistades arvu 10 tähega $k$ ja järgnevaid liitühikuid 100, 1000 jne. $k$ astmetega, kujuta arvud 123 ja 9876 tähe $k$ polünoomidena.

Korruta ja jaga suurem antud arvudest väiksemaga, toimeta samad operatsioonid vastavate polünoomidega ja veendu saaduste kooskõlas.

Kontrolli mõlemat jagamist jagatava, jagaja, jagatise ja jäägi põhisideme abil.

**33.** Olgu arvu $N$ numbrid pahemalt poolt paremale $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-2}, a_{n-1}$.

Mitmekohaline on see arv?

Tähistades arvu 10 tähega $k$, kujuta arv $N$ tähe $k$ polünoomina.

## Harjutis XXXIII:

Arvude ja avaldiste jaguvus.

**1.** Tõesta otsese jagamise teel järgmised väited:

1°. Iga täisarv, mis esineb kahe teise arvu ruutude vahena, jagub nii nende arvude summaga kui ka nende arvude vahega.

2°. Iga täisarv, mis esineb kahe teise arvu kuupide summana, jagub selle kahe arvu summaga.

3°. Iga täisarv, mis esineb kahe teise arvu kuupide vahena, jagub selle kahe arvu vahega.

Anna iga lause jaoks rida arvulisi näiteid.

**2.** Tõesta järgmised laused:

1°. Kui kaks arvu jaguvad kolmandaga, siis jagub selle viimasega ka kahe esimese summa.

2°. Kui kaks arvu jaguvad kolmandaga, siis jagub selle viimasega ka kahe esimese vahe.

3°. Kui kahe arvu summa ja üks liidetavaist jaguvad kolmandaga, siis jagub selle viimasega ka teine liidetav.

**3.** Tõesta järgmised laused:

1°. Kui arv jagub 2-ga, siis jaguvad tema ühelised 2-ga.

2°. Kui arvu ühelised jaguvad 2-ga, siis jagub 2-ga ka arv ise.

3°. Kui arv jagub 5-ga, siis on tema ühelised kas 0 või 5.

4°. Kui arvu ühelisteks on 0 või 5, siis jagub arv 5-ga.

5°. Kui arv jagub 10-ga, siis on tema ühelised 0.

6°. Kui arvu ühelisteks on 0, siis jagub arv 10-ga.

**4.** Tõesta järgmised laused:

1°. Kui arv jagub 4-ga, siis jagub 4-ga ka arvu kirjutise kahekohaline lõpp (kümnelised ühes ühelistega).

2°. Kui arvu kirjutise kahekohaline lõpp (kümnelised ühes ühelistega) jagub 4-ga, siis jagub 4-ga ka arv ise.

3°. ja 4°. Samad laused jagumise kohta 25-ga.

5°. Kui arv jagub 100-ga, siis lõpeb tema kirjutis vähemalt kahe nulliga.

6°. Kui arvu kirjutis lõpeb vähemalt kahe nulliga, siis jagub ta 100-ga.

**5.** Tõesta järgmised väited:

1°. Arv $N$ on jaguv arvuga 4, kui seda on liht-ühikute ja kahekordse kümneliste summa.

2°. Arv $N$ on jaguv arvuga 8, kui seda on liht-ühikute, kahekordse kümneliste ja neljakordse sajaliste summa.

3°. Arv $N$ on jaguv arvuga 6, kui seda on liht-ühikute ja kõigi teiste numbrite neljakordsete summa.

**6.** Olgu $a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1, a_0$ arvu $N$ numbrid, nõnda et

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Tõesta väited:

1°. Kui arvu $N$ numbrite summa

$$S = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0$$

jagub 3-ga, siis jagub 3-ga ka arv $N$ ise ja ümberpöördult.

$2^0$. Kui arvu $N$ numbrite summa $S$ jagub 9-ga, siis jagub 9-ga ka arv $N$ ise ja ümberpöördult.

**7.** Olgu arvu $N$ numbrid ühelistest alates $a_0, a_1, \ldots a_n$. Olgu arvul $M$ samad numbrid, ainult ümberpöördud järjekorras. Näita, et arv $N—M$ on alati jaguv 9-ga.

**8.** Olgu arvu $N$ numbrid ühelistest alates $a_0, a_1, \ldots a_n$. Moodustame paarituarvulistel kohtadel seisvate numbrite summa

$$S_1 = a_0 + a_2 + \ldots$$

ja paarisarvulistel kohtadel seisvate numbrite summa

$$S_2 = a_1 + a_3 + \ldots$$

Tõesta väide:

Kui arv $S_2—S_1$ on jaguv 11-ga, siis on seda ka arv $N$ ja ümberpöördult.

**9.** Andku kaks arvu jagamisel 3-ga jäägid $j$ ja $k$. Näita, et nende arvude summa annab siis jagamisel 3-ga sama jäägi, mis jääkide summagi $j + k$.

Koosta ja tõesta samasugused laused jagamise kohta arvudega 9, 11 ja üldse iga arvuga $d$.

Toimeta järgmised liitmised ja kontrolli saadusi võrdjääksuse-lause põhjal (näiteks jagajatel 9 ja 11):

$1^0$. $\begin{array}{r} 378 \\ +\ 696 \\ \hline \end{array}$ $2^0$. $\begin{array}{r} 1753 \\ +\ 4298 \\ \hline \end{array}$ $3^0$. $\begin{array}{r} 98563 \\ +\ 7938 \\ \hline \end{array}$ $4^0$. $\begin{array}{r} 678901 \\ +\ 567899 \\ \hline \end{array}$

**10.** Andku kaks arvu jagamisel 3-ga jäägid $j$ ja $k$. Näita, et nende arvude vahe annab siis jagamisel 3-ga sama jäägi, mis jääkide vahegi $j—k$. Koosta ja tõesta samasugused laused jagamise kohta arvudega 9, 11 ja üldse iga arvuga $d$.

Leia järgmised vahed ja kontrolli saadusi praegu tõestatud võrdjääksuse-lause põhjal:

$1^0.\ \begin{array}{r} 345 \\ -198 \\ \hline \end{array}$ $2^0.\ \begin{array}{r} 4567 \\ -2898 \\ \hline \end{array}$ $3^0.\ \begin{array}{r} 10432 \\ -7654 \\ \hline \end{array}$ $4^0.\ \begin{array}{r} 234056 \\ -78901 \\ \hline \end{array}$

**11.** Andku kaks arvu jagamisel arvuga 3 jäägid $j$ ja $k$. Näita, et selle kahe arvu korrutis annab siis jagamisel 3-ga sama jäägi, mis jääkide korrutiski $jk$.

Koosta ja tõesta samasugused laused jagamise kohta arvudega 9, 11, ja üldse iga arvuga $d$.

Toimeta järgmised korrutamised ja kontrolli saadus praegu tõestatud võrdjääksuse-lause põhjal:

| | |
|---|---|
| $1^0.\ 43 \cdot 87$ | $4^0.\ 637 \cdot 2976$ |
| $2^0.\ 96 \cdot 478$ | $5^0.\ 8053 \cdot 70019$ |
| $3^0.\ 111 \cdot 759$ | $6^0.\ 5971 \cdot 98765$ |

**12.** Tekkigu arvu $a$ jagamisel arvuga $b$ jagatis $q$ ja jääk $r$, nõnda et $a = bq + r$. Andku kolm viimast arvu $b$, $q$ ja $r$ jagamisel 3-ga vastavalt jäägid $j$, $k$ ja $h$. Näita, et arv $a$ annab siis jagamisel 3-ga sama jäägi, mis summagi $jk + h$.

Koosta ja tõesta samasugused laused jagajate kohta 9, 11 ja 101 ja üldse iga jagaja $d$ kohta.

Toimeta järgmised jagamised ja kontrolli saadused viimase lause poolt pakutud võimaluste abil:

| | |
|---|---|
| $1^0.\ 378 : 28$ | $4^0.\ 91005 : 735$ |
| $2^0.\ 9453 : 276$ | $5^0.\ 730011 : 5721$ |
| $3^0.\ 40592 : 953$ | $6^0.\ 1020304 : 90807$ |

**13.** Olgu $n$ mistahes täisarv. Näita, et arv

$$N = n(n+1)(2n+1)$$

on jaguv 2-ga ja 3-ga igal $n$-i väärtusel.

Näpunäide: rakenda korrutise võrdjääksuse-lause.

**14.** Olgu $a$ ja $b$ mistahes 2 täisarvu. Näita, et arv

$$N = ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$$

on jaguv 2-ga, 3-ga ja 5-ga.

Näpunäide: rakenda korrutise võrdjääksuse-lause.

**15.** Kirjuta endale kõik arvud 2-st kuni 100-ni. Kustuta, lähtudes 2-est, iga teine arv; kustuta, lähtudes esimesest ülejäänust 3, iga kolmas arv; kustuta, lähtudes järgmisest ülejäänust 5, iga viies arv jne. Ülejäänud 3, 5, 7, 11 jne. on algarvud. Põhjenda väide. («E r a t o s t h e n e s'e sõel» 230. a. ümber e. Kr.)

**16.** Kirjuta kõik arvud 1-st kuni 100-ni nende algarvuliste tegurite korrutistena, tehes tarvilisi arvutusi peast.

**17.** Kirjuta järgmised arvud nende algarvuliste tegurite korrutistena:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1⁰. 102 | 3⁰. 130 | 5⁰. 210 | 7⁰. 315 |
| 2⁰. 108 | 4⁰. 165 | 6⁰. 252 | 8⁰. 549 |

**18.** Kirjuta järgmised arvud nende algtegurite korrutistena:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. 627 | 5⁰. 981 | 9⁰. 3075 |
| 2⁰. 715 | 6⁰. 999 | 10⁰. 4536 |
| 3⁰. 729 | 7⁰. 1331 | 11⁰. 4851 |
| 4⁰. 891 | 8⁰. 1430 | 12⁰. 7623. |

**19.** Esita järgmised avaldised korrutistena, rakendades arvutamise põhiseadusi:

| | |
|---|---|
| 1⁰. $14x + 7$ | 5⁰. $10ax^2 - 12a^2x$ |
| 2⁰. $3 - 15z$ | 6⁰. $ip^2 - 3jp^2$ |
| 3⁰. $4u + 8a$ | 7⁰. $m^3 + 5cm^2$ |
| 4⁰. $v^2 - 6cv$ | 8⁰. $9h^2k^3 - 15h^3k^2$ |

**20.** Esita järgmised avaldised korrutistena, liikmeid kohaselt rühmitades:

| | |
|---|---|
| 1⁰. $x^2 + 5x + ax + 5a$ | 5⁰. $6x^2 - 13x + 6xy - 13y$ |
| 2⁰. $x^2 - ax - 3x + 3a$ | 6⁰. $x^3 + x^2 + x + 1$ |
| 3⁰. $z^2 - az + 7z - 7a$ | 7⁰. $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$ |
| 4⁰. $5z - 5h + ah - az$ | 8⁰. $3x^3 - 7x^2 - 9x + 21$ |

**21.** Esita järgmised avaldised korrutistena, rakendades arvutamise abivalemeid:

| | |
|---|---|
| 1⁰. $x^2+10x+25$ | 5⁰. $1-6v+9v^2$ |
| 2⁰. $x^2-8x+16$ | 6⁰. $1-a^2w^2$ |
| 3⁰. $u^2-36$ | 7⁰. $c^2x^2-16$ |
| 4⁰. $64u^2-49v^2$ | 8⁰. $9-6nz+n^2z^2$ |

**22.** Ühes korvis on 28 õuna, teises 42 pirni. Mitmele isikule saaks neid jaotada nõnda, et igaüks saaks võrdpalju õunu ja võrdpalju pirne? Kui suur on maksimaalne isikute hulk, mille puhul on säärane jagamine veel võimalik?

**23.** Ühe nööri pikkus on 12 jalga, teise oma 20 jalga. Kui suur on pikem nöörilõik, mis peitub nii esimeses kui teises nööris täisarv kordi?

Sama ülesanne arvude puhul 28 ja 40, 100 ja 210 ja 130 ja 78.

**24.** Ühes klassis on 24 õpilast, teises 40. Kui suured on maksimaalsed rühmad, milledeks saab jaotada nii esimese kui teise klassi õpilasi, kõigis rühmades ühepalju õpilasi?

**25.** Leia peast järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute suurem ühine tegur:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. 8 ja 12 | 6⁰. 45 ja 63 | 11⁰. 4, 12 ja 20 |
| 2⁰. 10 ja 24 | 7⁰. 27 ja 42 | 12⁰. 9, 27 ja 36 |
| 3⁰. 18 ja 27 | 8⁰. 65 ja 85 | 13⁰. 7, 14 ja 18 |
| 4⁰. 14 ja 22 | 9⁰. 54 ja 72 | 14⁰. 10, 25 ja 40 |
| 5⁰. 52 ja 68 | 10⁰. 84 ja 96 | 15⁰. 8, 12 ja 13 |

**26.** Leia järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute suurem ühine tegur:

| | |
|---|---|
| 1⁰. 112 ja 176 | 6⁰. 121, 154 ja 165 |
| 2⁰. 132 ja 364 | 7⁰. 102, 136 ja 170 |
| 3⁰. 308 ja 392 | 8⁰. 144, 162 ja 198 |
| 4⁰. 360 ja 450 | 9⁰. 264, 360 ja 600 |
| 5⁰. 468 ja 624 | 10⁰. 104, 525 ja 712 |

**27.** Leia igas reas 1⁰—6⁰ antud avaldistele kõrgema-astmeline ühine tegur.

1°. $a^3$ ja $a^2x + ax^2$
2°. $5(a + x)^2$ ja $10(a^2 - x^2)$
3°. $x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 1$ ja $5x - 5$
4°. $9 - x^2$, $x^2 + 6x + 9$ ja $2x + 6$
5°. $36x^2 - 60x^2 + 25$, $25 - 36x^2$, $5 + 6x$
6°. $3x + 1$, $3x + 3$, $9x^2 + 6x + 1$.

**28.** Leia lühema nööri pikkus, mida saab lõigata nii 12 kui 15 tolli pikkusteks lõikudeks.

**29.** Kui suur on minimaalne kuulide arv, mille puhul neid on võimalik korraldada rühmiti 14, 15, 21 ja 35 kuuli rühmas?

**30.** Kooli õpilaste hulk on säärane, et neid saab täpsalt rühmitada 4-, 6-, 9-, 12-, 15-, 24-, 40- ja 90-nekaupa.

Kui suur on minimaalne õpilaste hulk, mille puhul on seesugune rühmitus võimalik?

**31.** Leia peast järgmiste arvupaaride ja arvukolmikute väiksem ühiskordne:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1°. | 6 ja 15 | 6°. | 2, 5 ja 7 |
| 2°. | 9 ja 12 | 7°. | 3, 4 ja 10 |
| 3°. | 18 ja 20 | 8°. | 5, 12 ja 15 |
| 4°. | 30 ja 45 | 9°. | 7, 10 ja 12 |
| 5°. | 16 ja 100 | 10°. | 8, 12 ja 20 |

**32.** Leia järgmiste arvude väiksem ühiskordne:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1°. | 14, 20, 28 ja 30 | 6°. | 42, 56 ja 98 |
| 2°. | 12, 28, 35 ja 40 | 7°. | 54, 72 ja 126 |
| 3°. | 12, 20, 36 ja 54 | 8°. | 504, 686 ja 1890 |
| 4°. | 18, 24, 32 ja 48 | 9°. | 720, 945 ja 3969 |
| 5°. | 12, 18, 96 ja 144 | 10°. | 240, 810 ja 6300 |

**33.** Kaks ülesannet Kreeka antoloogiast (100. a. ümber p. Kr.):

1°. Igaühel 3-st graatsiast on sama palju õunu. Nad kohtavad üheksat muuši ja jaotavad muist õunu viimastele, nii et lõpuks on kõigil jälle võrdpalju tükke. Mitu õuna oli kolmel graatsial?

$2^0$. Igaühel 9-st muusist on samapalju pärgi. Kohates 3-me graatsiat jaotavad nad muist pärgi viimastele, nii et lõpuks on kõigil võrdpalju tükke. Mitu pärga oli muusidel?

**34.** Leia igas reas $1^0$—$4^0$ antud avaldistele madalama-astmeline ühiskordne:

$1^0$. $ax$, $a^2 + ax$ ja $ax + x^2$

$2^0$. $3x^2 - 48$, $2x - 8$ ja $x^2 + 8x + 16$

$3^0$. $x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 4$ ja $5x - 10$

$4^0$. $x^2 - 2x + 1$, $x^2 + 2x + 1$ ja $x^2 - 1$

**35.** Sama probleem ülesandes 27, $1^0$—$6^0$ antud polünoomide puhul.

# Peatükk IX.

# Murrud.

## Harjutis XXXIV:

Murdavaldisi.

1. Õpilane ostis $p$ raamatut paberit, saades $q$ lehte peale kauba ja makstes ostu eest $s$ senti. Kui kallis tuli keskmiselt leht paberit?

2. Kaupmees ostis $a$ tosinat $b$ üksikpaari nuge ja kahvleid, makstes nende eest $m$ krooni $n$ senti. Kui kallis on noa-kahvli paar?

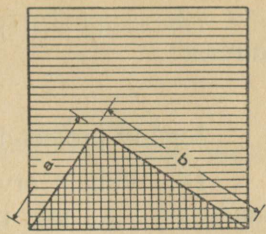
3. Perenaine ostis $p$ pakki tikke, saades peale kauba $q$ karpi ja makstes arve $k$ krooni $s$ senti. Kui kallis tuleb keskmiselt karp tikke?

4. Kaupmees segas $a$ naela kohvi hinnaga $p$ senti nael ja $b$ naela kohvi hinnaga $q$ senti nael. Missugune on segu naela omahind?

5. Põranda värvimine maksis $a$ krooni. Kui kallis tuleb keskmiselt ruutmeetri värvimine, kui põranda mõõted on $p$ ja $q$ meetrit?

6. Maja ehitus maksis $k$ krooni. Kui kallis tuleb keskmiselt 1 kuupmeeter tema ruumist, kui maja mõõted on $a$, $a$ ja $b$ meetrit?

7. Täisnurkse kolmnurga kujuline plastiliinlest, mille mõõted $a$ ja $b$ ja paksus $c$, muundatakse ruudukujuliseks, võttes küljeks kolmnurga hüpotenuusi (joonis 31 järgmisel leheküljel). Kui paks tuleb ruudukujuline lest?




Joonis 31.

Eelmärkus. Iga järgmise ülesande lahendamisel nimeta iga toimingu puhul põhitõde, mis õigustab toimingut.

**8.** Valisin arvu. Korrutasin teda arvuga $a$ ja sain korrutisena $b$. Mis arvu ma valisin?

**9.** Kui ristküliku aluses on $b$ mõõtühikut, kõrguses $h$ mõõtühikut, siis on pindalas $S$ vastavaid ruutühikuid $bh$:

$$S = bh.$$

See on valem ristküliku pindala arvutamiseks, kui on teada tema alus ja kõrgus.

Anna valem kõrguse arvutamiseks, kui on teada alus ja pindala, ja aluse arvutamiseks, kui on teada kõrgus ja pindala.

**10.** Risttahuka ruumala $V$ avaldub tema pikkuse, laiuse ja kõrguse mõõdetes $a$, $b$ ja $h$ kujus

$$V = abh.$$

See on valem $V$ arvutamiseks, kui on teada $a$, $b$ ja $h$.

Anna valem $h$ arvutamiseks, kui on teada $V$, $a$ ja $b$.

**11.** Täisnurkse kolmnurga pindala

$$S = \frac{1}{2} ab,$$

kus $a$ ja $b$ tähendavad kaateteid.

Avalda üks kaatetitest pindala ja teise kaateti kaudu.

**12.** Koonuse ruumala $V$ avaldub tema põhipinna $S$ ja kõrguse $h$ kaudu järgmiselt:

$$V = \frac{1}{3} Sh.$$

Anna valem koonuse kõrguse arvutamiseks, kui on teada $V$ ja $S$.

13. Kapital $k$ krooni toob $t$ aasta kestel $p^0/_0$ korral intresse

$$i = k\frac{p}{100}t.$$

Avalda protsendi määr $p$ suuruste kaudu $i$, $k$ ja $t$.

14. Valisin arvu; korrutasin teda arvuga $m$, lisasin saadusele $n$ ja sain oma toimingute lõpptulemusena arvu $p$. Mis arvu ma valisin?

15. Kaks arvu $a$ ja $b$, nende jagatis $q$ ja jääk $r$ on seotud võrdusega

$$a = bq + r.$$

Avalda $q$ suurustes $a$, $b$, $r$.

16. Valisin arvu; korrutasin teda arvuga $u$, lahutasin saadusest arvu $v$ ja sain nende toimingute lõpptulemusena arvu $w$. Mis arvu ma valisin?

17. Püramiidi tippude koguhulk olgu $T$; tema servade hulk olgu $S$. Näita, et

$$2(T-1) = S.$$

Avalda tippude hulk $T$ servade arvu $S$ kaudu.

18. Avalda sidemest

$$a(x-b) = c$$

suurus $x$ arvude $a$, $b$ ja $c$ kaudu.

19. 4 suurust $a$, $b$, $c$ ja $x$ on seotud tingimusega:

$$ax + b = bc.$$

Avalda suurus $x$ arvude $a$, $b$ ja $c$ kaudu.

20. Kolm suurust $s$, $t$ ja $x$ on seotud tingimusega:

$$sx + st = 3t.$$

Avalda siit

1°. $x$ suuruste $s$ ja $t$ kaudu;
2°. $s$ „ $t$ ja $x$ „ ;
3°. $t$ „ $s$ ja $x$ „ .

21. Jalgratta-sõitja lähtub mäkkesõidul kiirusega $u$ meetrit sekundis. Pingutuse kahanemisel väheneb kiirus iga sekund suuruse võrra $w$ meetrit sekundis. Sellega

toimub sõit $t$ sekundi lõpul peale tõusmise algust kiirusega
$$v = u - wt.$$

Avalda siit:

1°. lähtekiirus $u$, kui on teada $v$, $w$ ja $t$;

2°. kiiruse sekundiline kahanemine $w$, kui on teada $u$, $v$ ja $t$;

3°. aeg $t$, kui on teada $u$, $v$ ja $w$.

**22.** Kui aritmeetilise rea esimest liiget tähistada $a$, viimast $v$, vahet $d$ ja liikmete arvu $n$, siis on
$$v = a + (n - 1)d.$$

Avalda siit:

1°. suurus $a$, kui on teada $v$, $n$ ja $d$;

2°. suurus $d$, kui on teada $v$, $a$ ja $n$;

3°. suurus $n$, kui on teada $v$, $a$ ja $d$.

**23.** Kui tähistada aritmeetilise rea esimest liiget $a$, viimast $v$, liikmete arvu $n$ ja summat $s$, siis on
$$s = \frac{n(a+v)}{2}.$$

Avalda siit:

1°. arv $n$, kui on teada $s$, $a$ ja $v$;

2°. arv $a$, kui on teada $s$, $n$ ja $v$;

3°. arv $v$, kui on teada $s$, $n$ ja $a$.

**24.** Trapetsi pindala
$$S = \frac{1}{2}(a + b)h,$$
kus $a$ ja $b$ on rööbikud küljed ja $h$ on kõrgus.

Avalda külg $b$ külje $a$, kõrguse $h$ ja pindala $S$ kaudu.

**25.** Määra suurused $x$, $y$ ja $z$ allpool-antud sidemeist, põhjendades igat arvutamise sammu vastava põhitõega.

| | |
|---|---|
| 1°. $mx = n + 2m$ | 6°. $ay - b = cy - d$ |
| 2°. $ax - b = b$ | 7°. $a = b(2 + 3y)$ |
| 3°. $ax + b = a$ | 8°. $c(w + z) = e$ |
| 4°. $2p + rx = 5q$ | 9°. $c(w + nz) = e$ |
| 5°. $py - qy = r$ | 10°. $p = q(1 + kz)$ |

**26.** Kapital $k$ krooni kasvab $t$ aasta kestel protsendimäära $p$ puhul suuruseni

$$K = k + \frac{kpt}{100}.$$

1°. Avalda suurus $k$ suurustes $K$, $p$ ja $t$.

2°. Avalda suurus $p$ suurustes $k$, $K$ ja $t$.

3°. Avalda suurus $t$ suurustes $k$, $K$ ja $p$.

**27.** Püramiidi aluseks on ruut, mille külg on $a$. Kui püramiidi kõrgust tähistada tähega $h$, siis avaldub püramiidi ruumala $V$ kujus

$$V = \frac{1}{3} a^2 h.$$

Avalda siit $h$, kui on teada $V$ ja $a$.

**28.** Koonuse täispind

$$S = \pi r^2 + \pi r l,$$

kus $r$ tähendab põhja raadiust, $l$ moodustajat.

Avalda siit moodustaja $l$, teades suurusi $S$ ja $r$.

Mis annab distributiivsuse-seaduse rakendamine lõpptulemusele?

**29.** Silindri täispind

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h,$$

kus $r$ on põhja raadius ja $h$ kõrgus.

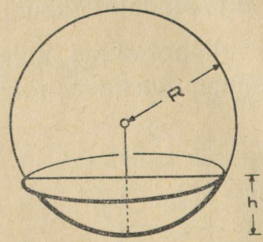
Avalda kõrgus $h$, kui on teada $S$ ja $r$.

Mis annab distributiivsuse-seaduse rakendamine lõpptulemusele?

**30.** Kerasegmendi (teetassi) ruumala (joonis 32)

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h).$$

Kui suur peab olema kera raadius $R$, et temast saaks ära lõigata segment sügavusega $h$ ja ruumalaga $V$?



Joonis 32.

## Harjutis XXXV:

Tehted murdudega.

**1.** Taanda, kus võimalik, järgmised murrud:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^0$. | $\frac{4}{6}$ | $\frac{12}{16}$ | $\frac{10}{15}$ | $\frac{28}{42}$ | $\frac{18}{48}$ | $\frac{24}{36}$ |
| $2^0$. | $\frac{16}{40}$ | $\frac{12}{64}$ | $\frac{14}{35}$ | $\frac{24}{56}$ | $\frac{28}{72}$ | $\frac{21}{63}$ |
| $3^0$. | $\frac{15}{18}$ | $\frac{24}{78}$ | $\frac{33}{88}$ | $\frac{28}{32}$ | $\frac{14}{49}$ | $\frac{27}{72}$ |
| $4^0$. | $\frac{40}{88}$ | $\frac{24}{54}$ | $\frac{35}{63}$ | $\frac{88}{121}$ | $\frac{30}{84}$ | $\frac{24}{70}$ |
| $5^0$. | $\frac{27}{63}$ | $\frac{40}{96}$ | $\frac{39}{91}$ | $\frac{60}{84}$ | $\frac{42}{72}$ | $\frac{84}{220}$ |
| $6^0$. | $\frac{57}{243}$ | $\frac{115}{320}$ | $\frac{117}{130}$ | $\frac{132}{143}$ | $\frac{112}{176}$ | $\frac{308}{392}$ |

**2.** Taanda järgmised murrud:

$1^0$. $\frac{6a}{8b}$

$2^0$. $\frac{15a^2}{35ab}$

$3^0$. $\frac{26ab^2}{65a^2b}$

$4^0$. $\frac{48a^2bc}{72abc^2}$

$5^0$. $\frac{63mn^2p^3}{81m^3n^2p}$

$6^0$. $\frac{45p^2}{48mnp^3}$

$7^0$. $\frac{56m^3n^3}{84m^2n^2p^2}$

$8^0$. $\frac{156mn^2p^3}{182mn^2p}$

**3.** Taanda järgmised murrud:

$1^0$. $\frac{4a^2b - 2ab^2}{6a^2b^2}$

$2^0$. $\frac{9abc}{3a^2b - 6b^2c}$

$3^0$. $\frac{4ax^2 - 8bx^2}{3ay - 6by}$

$4^0$. $\frac{8ax - 12ay}{6bx - 9by}$

$5^0$. $\frac{a^2 - b^2}{4a^2 + 4ab}$

$6^0$. $\frac{3x^2 + 6xy}{x^2 - 4y^2}$

$7^0$. $\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$

$8^0$. $\frac{x^2 - 25}{x^2 - 10x + 25}$

**4.** Taanda järgmised murrud:

1°. $\frac{-x}{a-x}$ 5°. $\frac{4-p^2}{p+2}$

2°. $\frac{a-b}{b^2-a^2}$ 6°. $\frac{m^2-2mn+n^2}{n-m}$

3°. $-\frac{7-x}{x^2-49}$ 7°. $-\frac{-f-g}{f^2+2fg+g^2}$

4°. $\frac{2l-k}{k^2-4l^2}$ 8°. $\frac{r^2-s^2}{s^2-2sr+r^2}$

**5.** Korralda reas 1°—10° seisvad murrud suuruse järgi.

1°. $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ 6°. $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{9}{10}$ $\frac{5}{12}$

2°. $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{10}$ 7°. $\frac{1}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{13}{25}$

3°. $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{6}$ 8°. $\frac{2}{3}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{11}{12}$ $\frac{19}{20}$

4°. $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{5}{4}$ 9°. $\frac{6}{11}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{8}{13}$ $\frac{9}{14}$

5°. $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{7}{10}$ 10°. $\frac{11}{17}$ $\frac{10}{16}$ $\frac{9}{15}$ $\frac{8}{14}$

**6.** Kujuta järgmised liigmurrud sega-arvudena:

1°. $\frac{13}{6}$ 3°. $\frac{59}{8}$ 5°. $\frac{72}{10}$ 7°. $\frac{129}{17}$ 9°. $\frac{383}{45}$

2°. $\frac{44}{7}$ 4°. $\frac{63}{9}$ 6°. $\frac{85}{11}$ 8°. $\frac{256}{24}$ 10°. $\frac{628}{63}$

**7.** Kujuta järgmised murdavaldised sega-avaldistena, eraldades neist jagamise teel täisosa:

1°. $\frac{4x+1}{2x-3}$ 4°. $\frac{x^3-49x}{x^2-8x+7}$

2°. $\frac{5x-3}{x+1}$ 5°. $\frac{x^3-7x^2+12x}{x^2-6x+9}$

3°. $\frac{x^2+9x+20}{x^2+7x+10}$ 6°. $\frac{x^3-5x^2-2x+6}{x^2+9x-10}$

**8.** Kujuta järgmised sega-arvud liigmurdudena:

1⁰. $6\frac{3}{5}$ 3⁰. $5\frac{11}{12}$ 5⁰. $15\frac{3}{14}$ 7⁰. $32\frac{3}{16}$

2⁰. $7\frac{8}{9}$ 4⁰. $12\frac{7}{10}$ 6⁰. $19\frac{7}{18}$ 8⁰. $10\frac{19}{24}$

**9.** Kujuta järgmised sega-avaldised murdavaldistena:

1⁰. $m-\frac{f}{g}$ 5⁰. $\frac{3x}{1+x}-4$

2⁰. $\frac{a^2}{x}+5x$ 6⁰. $x-3+\frac{1}{x+2}$

3⁰. $4-\frac{a^2}{x^2}$ 7⁰. $\frac{2}{x-5}-x-2$

4⁰. $\frac{1}{1+x}+2$ 8⁰. $1+\frac{2ax}{a^2+x^2}$

**10.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1⁰. $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ 5⁰. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 9⁰. $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}$

2⁰. $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$ 6⁰. $\frac{1}{f}-\frac{1}{g}$ 10⁰. $\frac{1}{5a}-\frac{1}{7b}$

3⁰. $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$ 7⁰. $\frac{1}{a}-\frac{1}{x}$ 11⁰. $\frac{1}{4m}+\frac{1}{5n}$

4⁰. $\frac{1}{5}-\frac{1}{8}$ 8⁰. $\frac{1}{b}+\frac{1}{y}$ 12⁰. $\frac{1}{3}-\frac{1}{8u}$

**11.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1⁰. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$ 4⁰. $\frac{1}{p+3q}-\frac{1}{2p-q}$

2⁰. $\frac{1}{y-2}-\frac{1}{y-3}$ 5⁰. $\frac{1}{5a-3b}+\frac{1}{2a-b}$

3⁰. $\frac{1}{2u-v}-\frac{1}{2u+v}$ 6⁰. $\frac{1}{2f+7}-\frac{1}{3f+10}$

**12.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1⁰. $\frac{2}{3}+\frac{1}{7}$ 5⁰. $\frac{3}{a}+\frac{2}{b}$ 9⁰. $\frac{a}{2b}+\frac{c}{d}$

2⁰. $\frac{5}{6}-\frac{3}{5}$ 6⁰. $\frac{9}{10m}+\frac{1}{n}$ 10⁰. $\frac{2f}{3g}-\frac{1}{5h}$

3⁰. $\frac{2}{3}+\frac{7}{8}$ 7⁰. $\frac{2}{5p}-\frac{4}{7q}$ 11⁰. $\frac{u}{7}-\frac{2}{v}$

4⁰. $\frac{5}{8}-\frac{2}{5}$ 8⁰. $\frac{11}{4x}-\frac{4}{11y}$ 12⁰. $\frac{m}{4}-\frac{6}{7n}$

**13.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+3}$

2°. $\frac{5}{y-4}-\frac{6}{y+5}$

3°. $\frac{4}{x+2y}+\frac{5}{2x-y}$

4°. $\frac{2}{2z+3w}-\frac{3}{3z+2w}$

5°. $\frac{u}{u-2v}-\frac{v}{2u-v}$

6°. $\frac{2r}{4r+5s}-\frac{3s}{r-3s}$

**14.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$

2°. $\frac{8}{15}+\frac{2}{5}$

3°. $\frac{5}{8}-\frac{1}{2}$

4°. $\frac{9}{10}-\frac{4}{5}$

5°. $\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$

6°. $\frac{1}{a}+\frac{2}{ab}$

7°. $\frac{5}{a^2}-\frac{4}{a^2b^2}$

8°. $\frac{7}{4x^3}-\frac{3}{x^2}$

9°. $\frac{10}{7p^2q}+\frac{6}{p^2}$

10°. $\frac{2}{xy}-\frac{3}{5xy^2}$

**15.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{ab}{(a+b)(a-b)}+\frac{a}{a+b}$

2°. $\frac{2}{c-d}+\frac{c+2d}{(c+d)(c-d)}$

3°. $\frac{f-g}{f+g}+\frac{2g^2}{(f+g)^2}$

4°. $\frac{1}{k^2}-\frac{i^2}{k^2(k-i)^2}$

**16.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{1}{6}+\frac{3}{10}$

2°. $\frac{7}{15}-\frac{3}{20}$

3°. $\frac{5}{6}+\frac{7}{15}$

4°. $\frac{11}{12}-\frac{5}{14}$

5°. $\frac{7}{9}+\frac{11}{21}$

6°. $\frac{17}{28}-\frac{11}{35}$

7°. $\frac{19}{30}+\frac{11}{18}$

8°. $\frac{22}{25}-\frac{7}{15}$

9°. $\frac{11}{26}-\frac{4}{39}$

10°. $\frac{3}{35}+\frac{17}{42}$

**17.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{5}{8x} - \frac{1}{6y}$

2°. $\frac{3}{12a} + \frac{4}{15ab}$

3°. $\frac{7}{16a^2} - \frac{9}{24ab}$

4°. $\frac{3a}{14x^2y} - \frac{5b}{21xy^2}$

5°. $\frac{m}{18x^3} + \frac{2n}{30x^2y}$

6°. $\frac{4p}{15u^3} - \frac{5q}{18uv^2}$

**18.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{5e+f}{(e+f)(e-f)} - \frac{4e-f}{(e+f)^2}$

2°. $\frac{g+2}{(g-5)(g+6)} - \frac{g-3}{(g-5)(g-1)}$

3°. $\frac{7h+1}{h^2-1} + \frac{4h-3}{h^2+2h+1}$

4°. $\frac{2}{i^2+i} + \frac{3}{i^2-1}$

**19.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a}$

2°. $\frac{a+b}{u-v} - \frac{b-a}{v-u}$

3°. $\frac{a-t}{a^2-t^2} - \frac{1}{t-a}$

4°. $\frac{4w+20}{49-w^2} + \frac{12}{w+7}$

5°. $\frac{x}{a-6} - \frac{ax+2x}{36-a^2}$

6°. $\frac{c-x}{c+x} - \frac{4cx}{x^2-c^2}$

**20.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$

2°. $\frac{5}{6} - \frac{3}{8} + \frac{7}{12}$

3°. $\frac{9}{10} + \frac{11}{15} - \frac{7}{20}$

4°. $1 - \frac{1}{12} + \frac{8}{15} - \frac{3}{8}$

5°. $2 - \frac{3}{14} + \frac{17}{21} - \frac{29}{35}$

6°. $\frac{14}{15} - \frac{3}{20} - \frac{1}{35} + \frac{1}{2}$

7°. $3 - \frac{41}{52} - \frac{19}{39}$

8°. $1 - \frac{29}{52} - \frac{7}{360}$

**21.** Toimeta järgmised liitmised ja lahutamised:

1°. $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} - \frac{1}{abc}$

2°. $\frac{1}{a^2} - \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2} - 4$

3°. $\frac{3}{c^2d} + \frac{1}{c} - \frac{1}{d} - \frac{3}{cd^2}$

4°. $\frac{f}{g} + \frac{g}{f} - \frac{1}{fg} - 2$

**22.** Toimeta järgmised korrutamised ja taanda, kus võimalik, saadus:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| $1^0.$ | $\frac{3}{4}\cdot 8$ | $\frac{5}{6}\cdot 24$ | $\frac{7}{12}\cdot 60$ | $\frac{11}{15}\cdot 45$ |
| $2^0.$ | $\frac{7}{8}\cdot 12$ | $\frac{4}{9}\cdot 6$ | $\frac{9}{10}\cdot 25$ | $\frac{13}{18}\cdot 27$ |
| $3^0.$ | $\frac{5}{12}\cdot 20$ | $\frac{7}{16}\cdot 12$ | $\frac{19}{25}\cdot 30$ | $\frac{3}{14}\cdot 35$ |
| $4^0.$ | $21\cdot\frac{5}{7}$ | $39\cdot\frac{11}{13}$ | $40\cdot\frac{5}{8}$ | $85\cdot\frac{12}{17}$ |
| $5^0.$ | $65\cdot\frac{19}{30}$ | $78\cdot\frac{7}{12}$ | $30\cdot\frac{23}{42}$ | $56\cdot\frac{9}{16}$ |
| $6^0.$ | $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}$ | $\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}$ |
| $7^0.$ | $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}$ | $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$ | $\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{9}$ | $\frac{3}{10}\cdot\frac{15}{16}$ |
| $8^0.$ | $\frac{7}{12}\cdot\frac{24}{35}$ | $\frac{5}{9}\cdot\frac{27}{55}$ | $\frac{11}{13}\cdot\frac{65}{22}$ | $\frac{17}{15}\cdot\frac{25}{6}$ |
| $9^0.$ | $\frac{14}{15}\cdot\frac{10}{21}$ | $\frac{18}{35}\cdot\frac{77}{24}$ | $\frac{55}{42}\cdot\frac{28}{15}$ | $\frac{60}{22}\cdot\frac{77}{144}$ |
| $10^0.$ | $1\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{14}$ | $3\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{15}$ | $\frac{11}{12}\cdot 4\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{16}\cdot 7\frac{1}{9}$ |

$11^0.$ $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{15}$ $12^0.$ $\frac{7}{8}\cdot\frac{20}{49}\cdot\frac{35}{13}$ $13^0.$ $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{2}{3}$

$14^0.$ $12\cdot\frac{7}{16}\cdot\frac{11}{21}$ $15^0.$ $20\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{16}$ $16^0.$ $52\cdot\frac{5}{48}\cdot\frac{12}{13}$

**23.** Toimeta järgmised korrutamised ja taanda, kus võimalik, saadus:

$1^0.$ $6\cdot\frac{a}{3}$ $3^0.$ $12\cdot\frac{3a^2}{4}$ $5^0.$ $\frac{3a}{5b}\cdot\frac{10b}{21c}\cdot\frac{7c}{4a}$

$2^0.$ $20c\cdot\frac{4ab}{5c}$ $4^0.$ $\frac{ab}{6}\cdot\frac{3a}{4b}$ $6^0.$ $\frac{8a^2}{21b^2}\cdot\frac{14b}{5c}\cdot\frac{c^2}{4a^2}$

**24.** Toimeta järgmised korrutamised ja taanda, kus võimalik, saadus:

$1^0.$ $\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{3a}{x^2-a^2}$ $3^0.$ $\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{5x}{x^2-1}$

$2^0.$ $\frac{x^2-1}{4}\cdot\frac{12}{x-1}$ $4^0.$ $\frac{2}{3(z+2)}\cdot\frac{z^2-4}{8}$

5°. $\frac{az - a^2}{2z} \cdot \frac{6z}{5a}$ 8°. $\frac{s^2 + 3s}{7t} \cdot \frac{14t^2}{s^2 - 9}$

6°. $\frac{9 - z^2}{3z} \cdot \frac{z}{3 + z}$ 9°. $\frac{4r^2 + 8r}{3r + 9} \cdot \frac{15r + 45}{14r^2 + 28r}$

7°. $\frac{u^2 - 4v^2}{8u} \cdot \frac{12u^2}{2u - 4v}$ 10°. $\frac{5p(p - q)}{3r(p + q)} \cdot \frac{3(p + q)^2}{5(p^2 - q^2)}$

**25.** Toimeta järgmised jagamised ja taanda, kus võimalik, saadus:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
|---|---|---|---|---|
| 1°. | $\frac{12}{35} : 6$ | $\frac{14}{15} : 7$ | $\frac{18}{49} : 9$ | $\frac{36}{55} : 12$ |
| 2°. | $\frac{2}{3} : 5$ | $\frac{6}{7} : 11$ | $\frac{3}{8} : 4$ | $\frac{7}{16} : 3$ |
| 3°. | $\frac{15}{16} : 10$ | $\frac{28}{33} : 35$ | $\frac{63}{50} : 14$ | $\frac{52}{105} : 39$ |
| 4°. | $28 : \frac{7}{5}$ | $16 : \frac{8}{10}$ | $20 : \frac{4}{5}$ | $64 : \frac{16}{15}$ |
| 5°. | $18 : \frac{30}{91}$ | $25 : \frac{15}{7}$ | $42 : \frac{56}{45}$ | $63 : \frac{18}{55}$ |
| 6°. | $\frac{2}{3} : \frac{4}{7}$ | $\frac{3}{5} : \frac{6}{12}$ | $\frac{5}{16} : \frac{15}{21}$ | $\frac{14}{9} : \frac{35}{11}$ |
| 7°. | $\frac{7}{12} : \frac{30}{24}$ | $\frac{4}{9} : \frac{5}{21}$ | $\frac{3}{10} : \frac{14}{15}$ | $\frac{15}{16} : \frac{26}{40}$ |
| 8°. | $\frac{5}{24} : \frac{35}{12}$ | $\frac{27}{55} : \frac{3}{22}$ | $\frac{24}{65} : \frac{12}{91}$ | $\frac{4}{9} : \frac{8}{27}$ |
| 9°. | $1\frac{14}{15} : \frac{29}{45}$ | $5\frac{11}{14} : \frac{18}{35}$ | $3\frac{5}{12} : \frac{5}{16}$ | $9\frac{3}{8} : \frac{15}{24}$ |
| 10°. | $2\frac{3}{5} : 6\frac{1}{2}$ | $4\frac{3}{8} : 2\frac{3}{16}$ | $5\frac{4}{9} : 4\frac{2}{3}$ | $7\frac{7}{8} : 5\frac{1}{4}$ |

**26.** Toimeta järgmised jagamised ja taanda, kus võimalik, saadus:

1°. $\frac{b^2}{a} : 3a$ 6°. $\frac{x^2 - ax}{4a} : \frac{x}{8a^2}$

2°. $\frac{16b}{a^2} : 4b^3$ 7°. $\frac{2x - 4}{5a} : \frac{x - 2}{15a^2}$

3°. $5a^3 : \frac{15a^2}{7b}$ 8°. $\frac{a^2 - x^2}{ax} : \frac{a + x}{a^2x^2}$

4°. $8\frac{a^2}{b^2} : \frac{4b}{3a}$ 9°. $\frac{(m + n)^2}{4m - 4n} : \frac{6m + 6n}{m - n}$

5°. $\frac{3a^2x}{4by^2} : \frac{4bx^2}{5a^2y}$ 10°. $\frac{p^2 + pq}{rx + sx} : \frac{p^3 + p^2q}{rx^3 + sx^3}$

**27.** Anna järgmistele murdudele võimalikult lihtne kuju:

1°. $\dfrac{1-\dfrac{b}{a}}{a+b}$ 5°. $\dfrac{n-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$

2°. $\dfrac{1+c}{1+\dfrac{1}{c}}$ 6°. $\dfrac{1+\dfrac{1}{m-1}}{1-\dfrac{1}{m+1}}$

3°. $\dfrac{x+\dfrac{x}{2}}{x-\dfrac{x}{2}}$ 7°. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{1}{abc}}$

4°. $\dfrac{\dfrac{a^2-4b^2}{27}}{a-2b}$ 8°. $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}}$

**28.** Avalda järgmistes näidetes suurte tähtedega märgitud suurused, rakendades murdude võrdumise tingimust:

1°. $\frac{1}{W}=\frac{1}{u}-\frac{1}{v}$ 4°. $\frac{1}{S}=1-\frac{p}{q}$

2°. $\frac{2}{R}=\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$ 5°. $\frac{1}{T}=\frac{p}{q}+r$

3°. $\frac{1}{U}=\frac{2}{s}+\frac{3}{t}$ 6°. $\frac{1}{V}=\frac{2}{r}-pq$

**29.** Anna järgmistes näidetes suurte tähtedega märgitud suurustele asendamiseks võimalikult kohane kuju:

1°. $C=\frac{1}{8a}-\frac{c}{12b}$ 4°. $\frac{1}{W}=uv(\frac{1}{u}+\frac{1}{v})$

2°. $\frac{1}{D}=\frac{ab}{c}+a$ 5°. $S=\frac{u}{v}(1-\frac{v^2}{u^2})$

3°. $\frac{2}{E}=\frac{2f}{g}-\frac{g}{2f}$ 6°. $T=(u-v):(\frac{u^2}{v^2}-1)$

**30.** Anna järgmistes näidetes suurte tähtedega märgitud suurustele asendamiseks võimalikult kohane kuju:

$1^0.\ \frac{1}{T}=\frac{2w}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}$ $3^0.\ \frac{1}{S}=\frac{1-\frac{u^2}{v^2}}{u+v}$

$2^0.\ R=\frac{a^2}{1-\frac{u^2}{4v^2}}$ $4^0.\ W=\frac{\frac{u}{v}}{\frac{u^2}{v^2}-c^2}$

## Harjutis XXXVI:

Ülesandeid tehete harjutamiseks murd- ja täisavaldistega.

**1.** Arvu $\pi$ katseliseks määramiseks veeretatakse ketast, mille läbimõõt on $d$ cm, laual lineaali äärt mööda ja leitakse ketta ümbermõõduna $c$ cm. Et ketas veeremisel pisut libises, on leitud ümbermõõdu pikkus kuni $\gamma$ cm suurem või väiksem tõelisest. Kui suur on $\pi$ määramise resultaadi kõikumispiirkond?

**2.** $1^0$. Kaks ristküliku-taolise põrandaga ruumi on vaheseina eemaldamise teel kokku lastud üheks ruumiks. Määra selle pikkus, teades, et ennemalt nimetatud ruumide pindalad on $S_1$ ja $S_2$ ja nende laiused vastavalt $l_1$ ja $l_2$.

$2^0$. Sama ülesanne eeldusel, et esimese ruumi pindala on $S$, teise oma $kS$.

$3^0$. Sama ülesanne eeldusel, et esimese ruumi pindala on $S$ ja laius $l$, teise pindala $mS$ ja laius $nl$.

**3.** Kaks jalgrattasõitjat sõidavad ringikujulist teed mööda; üks neist tee sisemisel äärel, mille raadius on $r$ m, teine — tee välimisel äärel, mille raadius on $R$ m. Üks pedaali pööre viib esimest $p$ m edasi, teist $P$ m. Sõitjad algavad liikumist ühtaegu.

$1^0$. Kui suur on pedaali pöörete arvu vahe esimesel ja teisel sõitjal ühe ringi puhul? — $n$ ringi puhul?

$2^0$. Mitme ringi puhul saab nimetatud pöörete vahe võrdseks $v$-ga?

$3^0$. Mitu korda on pedaali pöörete hulk esimesel sõitjal suurem kui teisel ühe ringi puhul? — $n$ ringi puhul?

4. $l$ mm pikale kruvile mahub $k$ keeret tõusu puhul $h$ mm. Mille võrra muutub keerete hulk tõusu vähenemisel 1 mm võrra? — tõusu suurenemisel 2 mm võrra?

5. Linnavalitsus on sunnitud tõstma vee praegust hinda $H$ senti hektoliitri eest $h$ sendi võrra. Kooli eelarves on vee kuludena ette nähtud $K$ krooni. Mitme hektoliitri võrra peab kool veetarvet vähendama, et veemaks ei tõuseks üle eelarves ettenähtud piiri?

6. Jalgratta kummi lõdvenemisel õhu kao tagajärjel väheneb tagumise, vedava ratta läbimõõt $d$ cm suuruse võrra $\delta$ cm. Mitu pedaali lisapööret on selle tõttu tarvis kauguse 100 m katmiseks?

7. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul $q$ liitrit minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutiline and 5 liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni mahuks lugeda $v$ liitrit?

Kuidas kujuneks ajakasv, kui veevärgi minutiline and kahaneks mitte 5-e, vaid $d$ liitri võrra?

8. Ülemere-õhusõidul mõeldakse katta otseteed kaugust $s$ km, lennates maksimaalse kiirusega $v$ kilomeetrit tunnis. Kui palju mõjustab lennuaega kauguse suurenemine $u$ km võrra eksimise tõttu õigest lennusihist?

Kui palju mõjustaks lennuaega lennukiiruse ülehindamine suuruse võrra $w$ kilomeetrit tunnis?

9. Taeval sageli esinevad pilvede read kujutavad suurte õhulainete harju, mille temperatuur on nõnda madal, et vee-aur muutub tihedaks uduks. Lendur, sõites risti üle pilvede rea, loeb vahemikus $v$ kilomeetrit $r$ pilverida. Kui suur on laine pikkus? Mille võrra muutub laine pikkus arvu $r$ suurenemisel $a$ võrra?

10. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega $v$ meetrit sekundis. Olgu jõevoolu kiirus $w$ meetrit sekundis. Kui palju aega kulub ujujal enam ära ujumiseks kaugusele $k$ m vastuvett, kui ujumiseks sama kaugusele pärivett?

Kui palju aega kulub ära ujujal, et ujuda $k$ m vastuvett ja tagasi pärivett kuni lähtekohani?

**11.** Pudelitäie õli puhaskaal on $a$ grammi veaga mitte üle $\pm\alpha$ grammi; sama pudelitäie vee puhaskaal on $b$ grammi veaga mitte üle $\pm\beta$ grammi. Missuguste rajade vahel peitub õli erikaalu tõeline väärtus? Kui palju lähevad need rajad teineteisest lahku?

**12.** Heli levimise kiiruse määramiseks mõõdeti kaugus helisignaali saate- ja vastuvõttejaama vahel ja aeg, mis tarvis heli levimiseks esimesest jaamast teise. Kaugusena leiti $s$ km veaga mitte üle $\pm\sigma$ km, ajana $t$ sek, veaga mitte üle $\pm\tau$ sek. Missugune on heli levimise kiiruse alammäär, missugune tema ülemmäär? Kui lai on heli kiiruse määramatuse piirkond?

**13.** $V$ cm$^3$ vedelikku kallatakse silindrist, mille põhja raadius $R$ cm, silindrisse, mille põhja raadius on $r$ cm.

1$^0$. Mitme cm võrra tõuseb sel puhul vee pind?

2$^0$. Mitme cm võrra tõuseks pind, kui ülevalamisel $\frac{1}{n}$ kogu vedeliku hulgast juhuliselt maha kallataks?

**14.** Kauguse kasvamisel 2, 3, 4, . . . $r$ kordselt (valguseallikast arvates) väheneb valguse tugevus 4, 9, 16, . . . $r^2$ kordselt. Olgu valguse tugevus kaugusel 1 valguseallikast tähistatud tähega $J$. Mille võrra väheneb valguse tugevus üleminekul kauguselt $r$ kaugusele $r+\varrho$?

**15.** Teraskera läbimõõt temperatuuril 0$^0$ on võrdne $d$ cm, temperatuuril 15$^0$ paisumise tõttu $(d+\delta)$ cm. Kera kaal on $k$ g. Mille võrra muutub terase tihedus tema soojenemisel 0$^0$ kuni 15$^0$?

**16.** Aine erikaal näitab, mitu grammi kaalub 1 cm$^3$ ainet. Tammepuust kuubi serva pikkusena leiti $a$ cm veaga kuni $\pm\alpha$ cm ja kuubi kaaluna $k$ g, veaga kuni $\pm\varkappa$ grammi. Missuguses vahemikus peitub tammepuu erikaal? Kui suur on tammepuu erikaalu määramatuse piirkond?

**17.** Kerakujuline tinast püssikuul kaalub $k$ grammi veaga kuni $\pm \varkappa$ grammi. Varbsirkliga tema läbimõõtu määrates leiti sellena $d$ mm veaga kuni $\pm \delta$ mm. Missugustes rajades peitub tina erikaal? Kui suur on selle erikaalu määramatuse piirkond?

**18.** Maja veevärgi basseini täitmiseks on tööl kaks pumpa. Esimene neist annab $l_1$ liitrit $s_1$ sekundi jooksul, teine $l_2$ liitrit $s_2$ sekundi jooksul.

1°. Mitu liitrit sekundis annavad mõlemad pumbad, töötades ühiselt?

2°. Kui palju aega kulub basseini täitmiseks mõlema pumba töötamisel basseini $b$-liitrilisel mahutusel?

3°. Kui palju aega kulub selleks, et esimene pump annaks $h_1$ liitrit, teine, töötades esimese järel, $h_2$ liitrit?

4°. Mille võrra läheb see aeg lahku ajast, mis tarvilik, et mõlemad pumbad, töötades ühiselt, annaksid $(h_1 + h_2)$ liitrit?

**19.** Ankeetlehtede laialisaatmine kooliõpilaste vanematele nõuab $H$ aadressi kirjutamist, ümbriku kinnikleepimist ja margiga varustamist. Kooli asjaajajal kuluks selleks tööks $a$ tundi. Asja kiirustamiseks võtab ta endale abiks õpilase; viimane lõpetaks töö, üksinda töötades, $b$ tunni vältel $(b > a)$.

1°. Kui kiiresti saaks tööd lõpetada, kui kooli asjaajaja töötaks ühiselt õpilasega?

2°. Kui kiiresti jõuaks töö lõpule, kui asjaajaja võtaks endale abiks 2 võrdsete võimetega õpilast?

3°. Kui kiiresti jõuaks töö lõpule, kui asjaajaja töötab vilumata õpilasest 2 korda kiiremalt ja tal on 3 õpilast abiks?

**20.** Metsatüki puumassi iga-aastane kasv moodustab $\frac{m}{n}$ massi algväärtuses'. Möödunud sügisel hinnati metsatüki puumassi $H$ kantmeetriga. Kui suureks kasvab puumass selle aasta sügiseks? — järgmise aasta sügiseks? — ületuleva aasta sügiseks?

Anna valemid nõutud suuruste arvutamiseks esiteks võimalikult lühikeses kujus, teiseks arendatult.

Näide. $H=1000$; $m=2$; $n=11$. Määra nõutud suurused.

**21.** Koduveini valmistamisel kaob käärimise aegu iga kuu jooksul $\frac{m}{n}$ sellest veinihulgast, mis on kuu alul. Kui palju veini saab $V$ liitrist marjamahla-lahusest, kui käärimine kestab 3 kuud?

Mille võrra alaneb käärimispudelis veini pind selle 3 kuu jooksul, kui arvata pudel silindriks põhipinnaga $S$ cm²?

---

**22.** Ämblik, kelle keha pikkus 15 mm, ehitab endale võrgukaare kahe puu vahele, mis seisavad teineteisest 2 m eemal. Inimene, kelle keha 160 cm pikk, on ehitanud laiema sillakaare, mis katab 200 m. Kumb katab suhteliselt suurema vahe?

**23.** Võimleja, kelle keha pikkus 160 cm, hüppab 4,8 m, heinaritsikas kehapikkusega 25 mm hüppab 1 m, 2 mm kehapikkusega kirp hüppab 20 cm. Kes neist kolmest hüppab suhteliselt kõige kaugemale?

**24.** Viimase rahvalugemise järgi 1922. a. oli Eestis meessoost elanikke 523 981, naissoost elanikke 586 557. Anna nende arvude suhte jaoks rida ligikaudseid väärtusi ümmargustes arvudes ja määra igal juhul, kas lähendus annab kujutatava suuruse liiaga või puudusega.

**25.** A. 1922 toimetatud rahvalugemise järgi oli Eestis elanikke 1 110 538, neist linnaelanikke 266 457. Anna nende arvude suhte jaoks rida ligikaudseid väärtusi ümmargustes arvudes ja määra igal puhul, kas lähendus annab kujutatava suuruse liiaga või puudusega.

**26.** 1⁰. Keegi taandab murdu, nagu näidatud:

$\frac{a+x}{b+x}=\frac{a+1}{b+1}$, teades andmeist, et $a \neq b$.

Missugusel ainsal $x$-i väärtusel on saadus juhuliselt õige?

$2^0$. Keegi taandab murdu, nagu näidatud:

$\frac{a+x}{b+x}=\frac{a}{b}$, teades andmeist, et $a \neq b$.

Missugusel ainsal $x$-i väärtusel on saadus juhuliselt õige?

$3^0$. Kui suur on taandamissaaduste viga ülesandeis $1^0$ ja $2^0$?

**27.** Näita, et avaldis $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ei ole võrdne ei murruga $\frac{1}{a+b}$ ega murruga $\frac{2}{a+b}$.

**28.** Rakendades murdude võrdumise tingimust avalda

| | sidemest | suurus | | sidemest | suurus |
|---|---|---|---|---|---|
| $1^0$. | $\frac{I}{E}=\frac{1}{R+r}$ | $r$ | $3^0$. | $\frac{P}{2Q}=\frac{R}{R-r}$ | $R$ |
| $2^0$. | $\frac{I}{R}=\frac{c}{R+1}$ | $R$ | $4^0$. | $\frac{F-1}{G+2}=\frac{R+r}{R+r}$ | $R$ |

**29.** Rakendades murdude omadusi tõesta järgmised väited:

Kui $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$,

siis:

$1^0$. $\frac{a+b}{b}=\frac{p+q}{q}$ $\qquad$ $3^0$. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{p+q}{p-q}$

$2^0$. $\frac{a-b}{b}=\frac{p-q}{q}$ $\qquad$ $4^0$. $\frac{a+nb}{a-nb}=\frac{p+nq}{p-nq}$

**30.** Lahenda järgmised «kolmlause-ülesanded», tähistades tundmatut $x$-ga ja rakendades murdude võrdumise tingimust:

$1^0$. 3 naela suhkrut maksab 56 senti. Kui palju maksab 5, 8, 14 naela?

$2^0$. 5 võrdosavat töömeest sillutasid tänava 12 päevaga. Mitu päeva oleks kulunud töö lõpuleviimiseks, kui tööl oleks olnud 4, 9, 13 sama osavat töömeest?

Ülesandeid mõtlemiseks:

**31.** 1°. 10 töölist ehitavad asuniku maja elamisvalmiks 4 kuuga. Mitu töölist oleks tarvis, et sama maja ehitada elamisvalmiks 1 kuuga? — 1 nädalaga? — 1 päevaga?

2°. Keskkooli kursus kestab 5 aastat à 36 töönädalat, 30 töötundi nädalas. Mitu töötundi peaks nädala kohta määrama, et sama kursust omandada 3 aastaga? — 1 aastaga?

**32.** Linna kaks osa asuvad üks ühel pool, teine teisel pool jõge. Mõlemad linnaosad on ühendatud $n$ silla kaudu. Neist ülekäijate 1-sendilisest sillamaksust saab linn aastas $k$ krooni sissetulekut. Linna sissetulekute lisa-allikate otsimisel pani nõunik Tarkpea ette veel üks sild juurde ehitada, eelarvestades ehituskulusid $l$ krooniga. Avalda linna saadav tulu pärast nõunik Tarkpea projekti teostumist.

## Peatükk X.

# Lineaarsed võrrandid.

### Harjutis XXXVII:

Lineaarseid võrrandeid.

**1.** Lahenda järgmised võrrandid:

1°. $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=9$

2°. $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11$

3°. $\frac{2x}{3}+\frac{5x}{6}=18$

4°. $\frac{3x+4}{8}-\frac{4-x}{12}=2$

5°. $\frac{3x+5}{7}-1=\frac{x+3}{6}$

6°. $\frac{3y}{5}+\frac{y+2}{6}=y-2$

7°. $4y+\frac{6y}{7}=\frac{3y+2}{2}+46$

8°. $\frac{3}{y}-\frac{1}{2}=\frac{1}{y}$

9°. $\frac{1}{4y}+\frac{1}{7y}=\frac{33}{14}$

10°. $\frac{1}{y}+\frac{2}{y-1}=\frac{8}{y(y-1)}$

**2.** Lahenda järgmised võrrandid:

1°. $\frac{3r}{2r-5}=\frac{8}{11}$

2°. $\frac{s+2}{s-5}=\frac{8}{15}$

3°. $\frac{14-3t}{13}=\frac{4t-5}{10}$

4°. $\frac{19-3u}{7}=\frac{5u+23}{2}$

5°. $\frac{2(4v-1)}{5}=\frac{3(28-5v)}{4}$

6°. $\frac{17}{4w-3}=\frac{13}{2w+3}$

7°. $\frac{x^2}{x-4}=x-6$

8°. $\frac{x+1}{x-1}=\frac{2x-5}{2x-7}$

9°. $\frac{2z}{z-2}-\frac{z+2}{z}=1$

10°. $\frac{z}{z-3}-\frac{z}{z+3}=\frac{4}{z^2-9}$

**3.** Lahenda järgmised võrrandid tähe $x$ suhtes:

1°. $(x-b)(a+b)=(x+b)(a-b)$

2°. $a(a-x)=b(b+x)$

3°. $a(x-a)-b(x-2a)=b^2$

4°. $x(a-x)-a^2=x(b-x)-b^2$

5°. $a(a-x)=2ab-b(x+b)$

4. Lahenda järgmised võrrandid tähe $x$ suhtes:

1⁰. $\frac{x}{a} = \frac{m}{n}$ 6⁰. $\frac{a}{x} + \frac{b}{x} = c$

2⁰. $\frac{x}{c} + 1 = \frac{m}{n}$ 7⁰. $\frac{1}{x-a} = \frac{2}{a}$

3⁰. $\frac{x}{a} + \frac{c}{b} = 1$ 8⁰. $\frac{x-a}{a} = \frac{c-b}{b}$

4⁰. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$ 9⁰. $\frac{x-a}{b} = \frac{x-b}{a}$

5⁰. $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{1}{ab}$ 10⁰. $\frac{a+x}{b} + \frac{b-x}{a} = 2$

5. Lahenda järgmised võrrandid tähe $x$ suhtes:

1⁰. $\frac{ax+b}{c} - \frac{bx+c}{d} = 1$ 5⁰. $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{m}{n}$

2⁰. $\frac{a(a-x)}{b} - \frac{b(b+x)}{a} = 2x$ 6⁰. $\frac{x+a}{x} = \frac{x}{x-b}$

3⁰. $x - \frac{ax}{a+b} = \frac{ab}{a-b} - \frac{b^2x}{a^2-b^2}$ 7⁰. $\frac{a-x}{b-x} = \frac{x}{b+x}$

4⁰. $\frac{ax-1}{bx} + \frac{bx-1}{ax} = 2$ 8⁰. $\frac{a+x}{a-2x} = \frac{a-x}{a+2x}$

6. Rukkisaagi äpardumise tõttu tõusis leivahind möödunud aasta hinnaga võrreldes 2 senti naela pealt. Selle tagajärjel tuli nüüd 8-naelaline leivapäts sama palju maksma kui möödunud aastal 10-naelaline. Kui kallis on leiva nael?

7. Õpperaamatu trükkimine pidi lõpetatama koolitöö alguseks, milleni oli veel 35 tööpäeva aega. 3 laduja töötamisel oleks töö parajasti õigel ajal valmis saanud. 10 päeva peale töö algust puhkes ladujate streik, mis kestis 6 päeva. Mitu ladujat tuleb juurde võtta, et tööga õigel ajal valmis saada?

8. Seltsi põhikirja muutmiseks on põhikirja järgi tarvis vähemalt $\frac{2}{3}$ liikmete häältest. Praegusest 35-st liikmest soovivad alkoholikeelu paragrahvi muutmist 9 liiget. Mitu oma mõtteosalist peavad nad seltsi liikmeks laskma vastu võtta, et oma tahet teostada?

9. Leia kaks teineteisele järgnevat täisarvu, niisugust, et nende ruutude vahe oleks 29.

10. Kaks teineteisele järgnevat täisarvu rahuldavad tingimust, et $\frac{3}{4}$ suuremast on 2 ühiku võrra suurem kui $\frac{5}{7}$ väiksemast. Mis arvud need on?

11. Mis arvu peab lahutama murru $\frac{19}{25}$ lugejast ja nimetajast, et sel viisil tekkinud murd taanduks $\frac{1}{2}$-le?

12. Missugune arv tuleks lahutada murru $\frac{17}{13}$ lugejast ja nimetajast, et sel viisil tekkinud murrul peale taandamist esineks nimetajana eelmine lugeja ja lugejana eelmine nimetaja?

13. Oli antud ülesanne jaotada teatud arv pooleks ja edasi esimene pool kolmeks, teine viieks osaks ja liita saadused. Mõeldes kiiremini eesmärgile jõuda, jaotas poiss antud arvu neljaks. Saaduse võrdlusel vastusega selgus, et seitse ühikut on puudus. Mis arv oli antud?

14. Kaupmees Orav mahutab oma vaba raha osaühisus «Tulu» aktsiatesse, millest ta ostab 20 tükki 100-kroonilist kursiga 95. Aktsiad ei too esimesed 2 aastat mingit tulu, tõusevad aga 3-dal aastal turu seisukorra muutudes hinnas 112 krooni peale, missuguse hinnaga nad realiseeritakse. Mitu % tulu on kandnud aktsiatesse mahutatud kapital?

Kas kõik andmed on tarvilikud ülesande lahendamiseks?

15. Kui palju vaske peab lisama 8 grammile puhtale kullale, et saada 75-protsendiline (750-prooviline) sulatis?

16. Kui palju vett tuleb juurde valada liitrile 80 %-list äädikalahust, et saada 30 %-line lahus?

17. N. n. «puhas piiritus» sisaldab tegelikult 5 % vett. Kui palju vett peab juurde valama liitrile puhtale piiritusele, et saada valgeviina kangusega lahus (48 %)?

18. Kaupmees märgib oma kauba müügihinnad teatud % kõrgemalt omahinda. «Odava nädala» puhul müüb ta oma kaupu 12 % hinna-alandusega, arvates seda märgitud hindadest, ja saab sel puhul ikkagi 5 % tulu (omahinnaga võrreldes). Mis hinnaga märgib ta asja, mille omahind on $a$ krooni?

19. Suurema läbimüügi saavutamiseks alandab kaubamaja hooaja kauba müügihinda 2,5 % võrra. Mitme % võrra peab läbimüük tõusma, et brutto-sissetulek, hoolimata hinna-alandusest, ometi 1 % võrra tõuseks?

20. Risttahuka-kujuline tükk puud mõõdetega 60, 30 ja 5 cm kaalub 8,2 kg. Kui suur on selle puu erikaal? Kui sügavale vajub puutükk vette, ujudes oma laiemal küljel?

21. Telliskivi mõõted on 25, 12 ja 6,5 cm; põletatud savi erikaal 1,6. Kui sügavale vajuks kivi elavhõbedasse (erikaal 13,6), ujudes oma laiemal küljel?

22. Kui raske peaks olema korgipakk (korgi erikaal 0,24), et ta parajasti kannaks vee peal 70 kg kaaluvat meest?

23. Jalgrattasõitja tarvitab 20-kilomeetriliseks sõiduks lähemale raudteejaamale harilikult 1 tund 40 minutit. Ühel seesugusel sõidul lõhkes teekonna lõpuosal ratta voolik. Selle tõttu tuli viimane osa teest käia jala, kiirusega $4\frac{1}{2}$ km tunnis, mis kaasa tõi hilinemise 30 minuti võrra. Kus kohal sündis vooliku lõhkemine?

24. Kaks rongi vajavad 3 sekundit teineteisest möödasõiduks, kui sõidusuunad on vastupidised, ja 35 sekundit, kui sõidusuunad on ühesugused. Mitu korda on ühe rongi kiirus teise omast suurem?

25. Kell 12 seisavad mõlemad kella osutid teineteise üle. Millal sünnib see uuesti? Millal moodustavad nad täisnurga? — millal sirgestatud nurga?

26. Teevahe ringi keskkohast ringini, täistiir ringi mööda ja tagasi keskkohta on võrdne $c$ cm. Kui pikk on ringi raadius?

27. Tööstuse meister saab töötunni tasuks $a$ krooni iga 42 töötunni eest nädalas ja $b$ krooni iga ületunni eest. Mitu tundi peab ta töötama, et saada nädala tasuks $c$ krooni?

28. Kooli lõpetades astub noormees teenistusse, saades kuus palka $a$ krooni. Oma sissetulekust kulutab ta päevas äraelamisele keskmiselt $b$ krooni ja tarvitab igakuulise puhta ülejäägi palgast õppimisvõlgade $v$ krooni tasumiseks. Mitme kuu järel on võlad tasutud?

29. Huvireisija rahatagavara Eesti Valgas on $a$ krooni; $b$ krooni eest ostab ta pileti Läti-Šveitsi (Sigulda'sse) ja tagasi, ja vahetab ülejäänud raha Läti lattideks kursiga 1 latt $\doteq$ 0,7 krooni. Kui palju aega võib huvireisija veeta Lätis, kui arvestada tema jooksvaid kulusid keskmiselt $c$ latiga päevas?

30. Toa tapeetimiseks tarvis olevate $a$ rulli tapeti ja $b$ rulli bordi eest maksti $k$ krooni. Kui kallis on rull tapetit eeldusel, et bordi rulli hind moodustab $\frac{2}{3}$ tapeti rulli hinnast?

31. Küünla pikkus on $l$ cm. Ta põleb kiirusega $k$ cm tunnis. Mis suuruse võrra peaks vähenema küünla põlemise kiirus, et küünla eluiga pikeneks $t$ tunni võrra?

32. Puuvilja-kaupmees ostab turult $a$ õuna hinnaga $b$ senti paar, saades $c$ õuna pealekauba. Mis hinnaga peab kaupmees müüma õuna tükimüügis, et saada 5 % tulu?

33. On ostetud $a$ asja hinnaga $h$ krooni tükk. Asjade koguhulgast on $b$ tükki müügiks kõlbmatuks osu-

tunud. Müügil on saadud $p$ % tulu. Kui kallilt on müüdud üksikasi?

**34.** On ostetud $a$ apelsini hinnaga $h$ krooni tosin ja $b$ apelsini hinnaga $k$ krooni tosin. Nende üksikmüügil on saadud $p$ % tulu. Kui suur on keskmiselt apelsini müügihind?

**35.** Kaks jõe süvendajat töötavad üks päri voolu liikudes jõesuu poole, teine jõesuust alates vastu voolu liikudes. Esimene viiks, üksinda töötades, süvendamistöö lõpule $n$ päeva jooksul, teine $m$ päeva jooksul. Peale $s$ päeva ühist tööd läks esimene masinatest rikke, mille tõttu töö lõpetas teine üksinda. Kui palju aega kulus tal selleks?

**36.** Kaupmees saab saadetise kaupa:

$a_1$ kg hinnaga $h_1$ kilo eest
ja $a_2$ kg „ $h_2$ „ „

Veokuluna tuli maksta $k$ krooni. Kuidas jagub see summa mõlemale kaubaliigile,

1°. kui jaotada veokulu võrdeliselt kauba kaaluga?
2°. kui jaotada veokulu võrdeliselt kauba hinnaga?

## Harjutis XXXVIII:

Täiendavaid ülesandeid lineaarsete võrrandite alalt.

**1.** Matkaja tuleb õpilasterühmale vastu ja küsib, mitu neid on. Temale vastab rühma juht: „Võta meie arv kahekordselt, korruta siis 3-ga ja jaga 4-ga; kui veel mind juurde arvad, saab kokku parajasti sada.“ Mitu õpilast oli? (Alcuin, 735—804.)

**2.** 3 sõpra on võitnud teatud summa raha; esimene saab $\frac{1}{7}$ sellest, teine $\frac{1}{4}$, kolmas saab 17 kuldnat, mis järele jäid. Mis summa raha olid sõbrad võitnud? (Riese, 1524.)

**3.** Kui päriti Pythagoras'elt, mitu õpilast tal on, vastas ta: „Pool osa minu õpilasist uurib matemaatikat, neljandik looduslugu, seitsmes osa õpib vaikimist ning peale nende on mul veel 3 päris väikest poissi." Mitu õpilast tal oli? (Schwenter, 1636.)

4. Demochares elas $\frac{1}{4}$ oma elust poisikesena, $\frac{1}{5}$ noormehena, $\frac{1}{3}$ täisealise mehena ja puhkab 13 aastat oma tööst. Kui vana ta on? (Metrodorus, a. 300 ümber.)

5. Laiskleja on alates 18. eluaastast $\frac{3}{8}$ oma ajast maganud, $\frac{1}{16}$ söönud ja joonud, $\frac{1}{4}$ jalutanud, $\frac{3}{16}$ mängusid mänginud, $\frac{1}{16}$ kiiktoolis haigutanud ja ikkagi 2 aastat töötanud. Kui vanalt ta suri? (Heis, 1880.)

6. Lootoslillede hulgast ohverdati jumal Siva'le $\frac{1}{3}$, Vishnu'le $\frac{1}{5}$, Päikesele $\frac{1}{6}$, Bhavani'le $\frac{1}{4}$. Ülejäänud 6 lille sai austamisvääriline õpetaja. Kui palju oli lilli? (Bhaskara, a. 1150 ümber.)

7. Mesilasteparvest asus $\frac{1}{5}$ kadamba õitele, $\frac{1}{3}$ silindha õitele. Kolmekordne nende osade vahe lendas kutaja õitele; ainult üks mesilane jäi järele, hõljudes õhus üles ja alla, meelitatuna jasmiini ja pandaani magusast lõhnast. Palju mesilasi oli parves? (Bhaskara, a. 1150 ümber.)

8. Kolm matkajat on kokku leppinud kokku tulla Pühajärve võõrastemajas ja seal endale telefoni teel ette tellinud verikäkkisid. Esimene sinna jõudev matkaja sööb $\frac{1}{3}$ valmispanduist ja läheb järvele sõudma. Järgmine, olles teadmatuses eelmise siinviibimisest, sööb $\frac{1}{3}$ laual olevaist käkkidest ja läheb parki jalutama. Kolmas matkaja, kes ilmub viimasena, ei tea, et esimesed kaks juba seal olnud, sööb $\frac{1}{3}$ laual olevaist käkkidest ja saab nüüd väljas

kahe teisega kokku, kus eksitus selgub. Jäägi ülelugemine näitab, et veel on 8 käkki järel. Kui palju oli neid valmis pandud?

9. Kolm rüütlit palusid Tšehhi kuninganna Libussa kätt. Ta lubas sellele neist mehele minna, kes lahendab järgmise mõistatise: „Neiu korvis on teatud arv ploome; neist annab ta oma esimesele kosilasele poole ja veel ühe ploomi lisaks, teisele poole ülejäänuist ja veel lisaks 2 ploomi ja kolmandale poole ülejäänuist ja viimased kolm, mis veel korvi jäänud. Mitu ploomi oli korvis?" (Ühest vanemast ülesannetekogust.)

10. Kinosaali mahub 600 inimest. Saali viib 1 suur uks ja 3 väiksemat tagavara-ust õnnetuse juhuks. Täis saal tühjeneb suure ukse kaudu 8 minutiga, iga väikese ukse kaudu 16 minutiga. Kui palju aega kuluks saali tühjenemiseks õnnetuse juhul kõigi uste lahtiolekul, eeldusel, et inimesed ei tekita kabuhirmus surumisel ummistust?

11. Veekogus töötab 4 purskkaevu; esimese töötamisel täituks ta ühe päevaga, teise töötamisel 2-ga, kolmanda töötamisel 3-ga ja neljanda töötamisel 4-ga. Kui kiiresti ta täitub, kui tööl on kõik neli toru korraga? (Maximus Planudes, 1350.)

12. Lõvi sööks mahamurtud lamba 1 tunniga ära, hunt 4-ja ja koer 6-ga. Kui kiiresti sööksid nad lamba ära, asudes tema kallale ühiselt, oletades, et nad omavahel kisklema ei lähe? (Widman, 1489.)

13. Laev sõidab Suurest Väinast (Sund) Riiga, Lätimaale. Tal on 3 purje. Suuremaga jõuab ta 2 nädalaga pärale, keskmisega 3-ga ja väiksemaga 4-ga. Küsitakse: millal jõuab ta Riiga, kui kõik 3 purje üles tõmmata? (Faulhaber, 1614.)

14. Vedurijuht näeb oma praegusest asukohast kaugusel *s* mäeseina — tunneli algust. Antud vile kaja jõuab

mäeseinalt vedurijuhi kõrvu $t$ sekundit pärast vile andmist. Avalda aeg $t$ kauguse $s$, helikiiruse $v$ ja veduri kiiruse $w$ kaudu.

Arvuta siit $w$, kui teada on $s$, $v$ ja $t$;
„ „ $v$, „ „ „ $s$, $w$ ja $t$;
„ „ $s$, „ „ „ $v$, $w$ ja $t$.

**15.** Ühisettevõtte kaks osanikku A ja B mahutasid ettevõttesse kapitalid, mis suhtuvad kui $a:b$. Ettevõttesse tuleb juurde kolmas osanik C kapitaliga $c$ krooni. Et kokku lepitakse ettevõtte kapitali mitte suurendada, siis saavad A ja B koos $c$ krooni tagasi ja töötavad siit peale ühiselt C-ga kolmekesi ühesuguste osakapitalidega edasi. Kuidas tuleb jaotada summa $c$ krooni A ja B vahel? Mis kapitalid mahutasid A ja B alguses ettevõttesse?

**16.** Ühiseks eineks annab Cassius 7 ja Sempronius 8 vaagnat sööki ühe ja sama vaagnaväärtusega. Einest võtab ka Titus osa, tasudes esimesele kahele võrdeliselt vaagnate arvuga 14 ja 16 seeklit. Sempronius pole nõus ja nõuab kohtulikku otsust. Kuidas see peaks kõlama? (L e o n a r d o P i s a n o, 1202.)

**17.** Üks vana arvutusmõistatis:

Rikas setu oli oma surma puhuks korralduse teinud, et tema vanem poeg saaks $\frac{1}{2}$ osa tema hobustest, keskmine $\frac{1}{3}$ ja noorem $\frac{1}{9}$. Surres oli setul 17 hobust, kõik suurepärased. Pojad ei saanud jagamisülesandega hakkama. Nähes neil tekkinud raskust, astus nende juurde mustlane, kaasa tuues oma poolpimeda, lonkava hobuse ja lausus: „Annan teile oma hobuse lisaks ja jaotan teile hobused isa soovi kohaselt kätte.“ Pojad olid nõus. Mustlane andis vanemale pojale oma hobuse ja 8 isa pärandusest, keskmisele 6 ja nooremale 2. Jäi järele 1 suurepärane hobune, millega mustlane minema ratsutas. Kas mustlane pettis setu poegi?

## Harjutis XXXIX:

### Lineaarsete võrrandite süsteeme.

**1.** Lahenda järgmised võrrandite süsteemid:

1⁰. $x = 2y$
$x + 3y = 15$

2⁰. $y = 5x$
$3x + y = 16$

3⁰. $x = 4y$
$2x - 7y = 16$

4⁰. $2x = 3y$
$10x - y = 21$

5⁰. $y = 3x + 2$
$2x + 3y = 1$

6⁰. $x = -y + 3$
$5x + 8y = 24$

7⁰. $y = 2x - 5$
$10x - y = 14$

8⁰. $x = 4 - \frac{1}{2}y$
$4x + 5y = 4$

**2.** Lahenda järgmised võrrandite süsteemid:

1⁰. $x - 3y = 0$
$5x + 7y = 11$

2⁰. $4x - y = 0$
$10x - 3y = 2$

3⁰. $3x + 2y = 0$
$7x + 5y = 2$

4⁰. $x - y = 1$
$4x - 5y = 7$

5⁰. $x + 2y = 4$
$9x + 13y = 21$

6⁰. $3x - y = 1$
$5x + 3y = -3$

7⁰. $2x - 3y = 9$
$5x - 7y = 25$

8⁰. $x - \frac{1}{2}y = 1$
$10x - 3y = 2$

**3.** Lahenda järgmised võrrandite süsteemid:

1⁰. $x + y = 8$
$3x + y = 14$

2⁰. $2x + y = 17$
$x - y = 7$

3⁰. $4x + 3y = 31$
$x + 2y = 14$

4⁰. $2x + 5y = 29$
$5x + 2y = -1$

5⁰. $3x - 7y = 27$
$x - 4y = 19$

6⁰. $4x - 3y = 0$
$6x + 15y = 13$

7⁰. $0,8x + 0,3y = 1,7$
$0,2x - 1,0y = 0,2$

8⁰. $0,6x + 0,5y = 1,0$
$1,5(x - y) = 4,7$

9⁰. $1,4x + 0,3y = -2,7$
$1,0x + 0,9y = -1,0$

10⁰. $0,4x - 1,5y = 5,9$
$2,0x + 1,2y = 0,5$

**4.** Lahenda järgmised võrrandite süsteemid:

$1^0.\quad x+y=m,\quad x-y=n$

$2^0.\quad ax+by=c,\quad x+y=1$

$3^0.\quad ax+by=m,\quad cx+dy=n$

$4^0.\quad x=py+q,\quad y=ax+b$

$5^0.\quad ax+y=a^2,\quad y=x+1$

$6^0.\quad px+qy=(p+q)^2,\quad px-qy=p^2-q^2$

$7^0.\quad a^2x+y=a^3,\quad (a+1)x+1=y$

$8^0.\quad ax-by=a^2,\quad (b-a)x+ay=b^2$

**5.** Lahenda järgmised võrrandite süsteemid:

$1^0.\quad \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=3,\quad x-y=9$

$2^0.\quad \frac{y}{4}-\frac{x}{3}=1\frac{1}{2},\quad y-\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

$3^0.\quad \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3\frac{3}{4},\quad \frac{x}{3}+y=10\frac{2}{3}$

$4^0.\quad \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1,\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=2$

$5^0.\quad \frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=14\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}y-\frac{2}{3}x=5\frac{2}{3}$

$6^0.\quad \frac{3x-y}{2}+x=y,\quad \frac{x+3y}{3}-y=1$

$7^0.\quad \frac{x+7}{2}+y=9,\quad \frac{y+15}{3}+x=11$

$8^0.\quad \frac{1-2x}{3}+4y=13,\quad x+\frac{5+8y}{5}=1$

**6.** Anna järgmistele võrrandite süsteemidele normaalkuju ja lahenda nad:

$1^0.\quad \frac{h+5}{8}-\frac{k+4}{11}=0,\quad 3(h-1)+2(k+4)=28$

$2^0.\quad \frac{3m+5}{7}=\frac{2m+n}{5},\quad 2(2-m)+3(n+7)=20$

$3^0.\quad \frac{2p-3q}{4}=\frac{5p-8q}{9},\quad 3(p-q)-2(2p-3q)=1$

$4^0.\quad \frac{5}{x+2}+\frac{4}{y-2}=0,\quad 3(x-1)+(y+3)=7$

$5^0.\quad \frac{2}{u-3}-\frac{9}{2v+3}=0,\quad 13(u-v)-7v=5$

$6^0.\quad \frac{12}{8-s}+\frac{5}{t-5}=0,\quad 15(s+5)-2(t+7)=1$

7. Maakera ja Veenus tiirlevad ümber päikese ligikaudu ringides. Ajal, mil nad teineteisele kõige lähemal, on nende vaheline kaugus ümmarguselt 40 miljonit km; ajal, mil nad teineteisest kõige kaugemal, on nende vahe 260 miljonit km. Kui suured on nende rändtähtede kaugused päikesest?

8. Emajõel ühendust pidav aurik liigub päri vett kiirusega 15 km tunnis, vastu vett kiirusega 9 km tunnis. Määra auriku kiirus seisvas vees ja jõe veevoolu kiirus.

9. Lennuk lendas päri tuult kiirusega 165 km tunnis, vastu tuult kiirusega 115 km tunnis. Määra lennuki kiirus vagusa ilma korral. Mis kiirusega puhus tuul?

10. Kaks asunikku $M$ ja $N$ käivad kohut nende kruntide vahele kiiluna ulatuva 5 ha suuruse heinamaa pärast. Kui vaidluse all olev heinamaa lisada $M$ krundile, saab $M$ krunt võrdseks $\frac{5}{6}$-ga $N$ omast; kui aga see heinamaa lisada $N$ krundile, saab viimase krunt $\frac{7}{4}$ korda suuremaks kui $M$ oma. Leia neist andmeist $M$ ja $N$ kruntide suurused.

11. Õpilane-naljahammas vastas küsimusele, kui vana ta on, lausega: „Kuus aastat tagasi oli isa minust 3 korda vanem, kuue aasta pärast on ta minust 1,8 korda vanem."

Kas saab neist andmeist määrata nõutud vanadust?

12. Kahe arvu vahe on 10. Väiksema kahekordne ja suurema kolmekordne annavad liitmisel 145. Mis arvud nad on?

13. Arvu kümneliste ja üheliste numbrite summa on 9. Kui numbrite järjekorda muuta, tekib arv, mis on eelmisest 27 võrra väiksem. Mis arvudest on jutt?

14. Kahekohalise arvu numbrid vahetavad oma kohad, kui arvule lisada 9 ühikut. Kui nõnda saadud arvule lisada lähtearvu kahekordne, siis tekib summana 111. Leia arv.

**15.** Klassis on 32 õpilase jaoks 20 pinki, muist kaheistmelised, muist üheistmelised. Palju on neid, palju teisi?

**16.** Minul on paunas kokku 11 raha, muist 10-, muist 5-kroonilised, kogusummas 95 krooni. Mitu raha on 10-, mitu 5-kroonilist?

**17.** Õpilase rahahoiu-karpi oli ühe kuu jooksul kogunenud 35 raha, muist kolmesendilised, muist viiesendilised, kogusummas 1,75 krooni. Mitu oli kolme-, mitu viiesendilist raha?

**18.** 12 sidrunit ja 10 apelsini maksavad 7,38 krooni, 10 sidrunit ja 12 apelsini maksavad 7,80 krooni? Leia sidruni ja apelsini hind.

**19.** Kaks matkajat ostavad endale kioskist toidumoona oma teekonnaks: esimene 2 tahvlit šokolaadi ja 5 apelsini, makstes 2,4 krooni; teine — 3 tahvlit šokolaadi ja 2 apelsini, makstes 1,95 krooni. Kui palju maksis tahvel šokolaadi, kui palju apelsini tükk?

**20.** Kivitööliste rühm, milles 15 mees- ja 8 naistöölist, teenis päevas 69,6 krooni; samal ajal teenis teine rühm, milles 12 mees- ja 5 naistöölist, saades sama töötasu, 51,9 krooni. Leia neist andmeist mees- ja naistöölise päevane töötasu.

**21.** 2 naela kohvi ja 5 naela sigureid maksavad 5 krooni; 3 naela sama sorti kohvi ja 8 naela sigureid 7,7 krooni. Mis on kohvi ja sigurite naela hinnaks?

**22.** Koolijuhataja ostab omale talvekorteri jaoks 5 sülda ahjupuid ja 3 sülda pindu (laua-ääri), makstes kõige eest 127 krooni. Samal ajal võtab ta oma suvekorteri jaoks 1 sülla ahjupuid ja 2 sülda pindu, makstes 38 krooni. Leia neist andmeist küttepuude ja pindade sülla hind.

**23.** Mitu naela peab võtma 1. sorti kohvi hinnaga 1,60 krooni nael ja 2. sorti kohvi hinnaga 1,20 krooni nael, et saada 40 naela segu omahinnaga 1,30 krooni nael?

**24.** 4 naela võid ja 2,5 naela juustu maksavad 6,8 krooni. Kui võinaela hind oleks tõusnud 10 sendi võrra ja juustu hind oleks langenud 16 sendi võrra, siis võiks kulutatud summa eest osta täpsalt sama hulga võid ja juustu, mis ennemaltki. Kas saab määrata või ja juustu naela hinda?

**25.** Asunik mahutab osa oma 6000-kroonilisest kapitalist majapidamisse, kus ta kõigest $4\%$ tulu saab, ja paigutab ülejääva osa panka $8\%$-ga, osi seejuures nõnda valides, et kogutulu vastaks $6{,}5\%$ määrale. Missugused peab ta kapitali osad valima?

**26.** Klass õpilasi ostab ühiselt raamatu loteriipileteid. Raamatusse kuuluvale piletile langeb suurem võit. Arvutamine näitab, et võidu jaotamisel tuleb 22 krooni puudu, kui igale õpilasele määrata 8 krooni, ja jääb 12 krooni üle, kui igale õpilasele anda 7 krooni. Mitu õpilast on klassis ja kui suur on võidusumma?

**27.** Keegi heategija määrab laste varjupaigas asuvatele lastele jõulupühade kingiks teatud summa raha. Kui määrata igale lapsele 1 kroon, jääb kingitud summast 17 krooni järele, kui määrata 1,20 krooni — tuleb jagamisel 11,6 krooni puudu. Mitu last on varjupaigas ja mis summa on nende heaks määratud?

**28.** Autobus sõidab harilikult Tartu-Võru vahe 69 km 3 tunni 50 minutiga. Ühel sõidul kaotas juht rikkes oleva mootori uuesti tööle seadmiseks 35 minutit; suurendades kiirust 4,2 km võrra tunnis jõudis ta ometi õigel ajal sihtkohale. Missuguse kiirusega harilikult liigub autobus ja kui kaugel sihtkohast sündis mootori rike?

**29.** Leia murd, mis taanduks 1-ks lugeja suurendamisel 1 võrra ja $\frac{1}{2}$-ks — nimetaja suurendamisel 3 võrra.

**30.** Kui murru lugejat ja nimetajat suurendada 1 võrra, siis taandub ta $\frac{4}{5}$-ks; kui lugejat ja nimetajat vähendada 1 võrra, siis taandub ta $\frac{3}{4}$-ks. Leia murd.

31. Kahekohaline arv annab jagamisel ta numbrite summaga jagatise 8 ja jäägi 7, jagamisel numbrite vahega jagatise 11 ja jäägi 5. Mis kahekohaline arv see on?

32. Kaks tigu asuvad kõrgel puul kohtadel, millede vaheline kaugus on 18 jalga. Kui nad sõbralikult teineteisele vastu roniksid, siis kohtuksid nad 1,5 tunni järel; kui nad teineteist hakkaksid taga ajama, jõuaks kiirem neist aeglasemale 9 tunni pärast järele. Mis kiirusega roomavad tigud?

33. Kaks koormat tasakaalustuvad kangil, kui asetada neid toest arvates kaugustele 8 ja 7 dm. Kui mõlemat koormat suurendada 4 kilo võrra, tasakaalustuvad nad vastavalt kaugustel 16 ja 15 dm. Kui rasked on koormad?

34. Tamme- ja punapuust pildiraamide hinnad suhtuvad kui 2 : 5. Pilt tammepuu-raamis maksab 55 krooni, sama pilt punapuust raamis 70 krooni. Kui kallis on pilt, kui kallid on raamid?

## Harjutis XL:

Täiendavaid ülesandeid lineaarvõrrandite ja nende süsteemide alalt.

1. Kaks vaatlejat asuvad peale tuult ja alla tuult kaugustel $a$ ja $b$ kilomeetrit kahurist. Esimene kuuleb mürtsu $n$ sekundit, teine $m$ sekundit peale laskmist. Arvuta neist andmeist tuule ja heli kiirused.

2. Üks mees lausub teisele: „Anna mulle 1 sent, siis on mul nõndapalju, kui sinul üle jääb“. Teine vastab: „Anna sina mulle 1 sent, siis on mul kaks kord nõndapalju, kui sinul üle jääb.“ Kui palju raha oli kummalgi? (Riese, 1524.)

3. Muul ja eesel sammusid raskesti koormatult turule. Muul kurtis oma seltsilisele õiglusetut koormamist: „Kui sina annaksid minule 1 mõõdu oma koormast, saaks minu koorem sinu omast kahekorra suuremaks; kui mina

annaksin omast ühe mõõdu sinule, oleks meil võrdpalju kanda." Arvutaja, ütle, mis koormad olid neil kanda? (Olla antud ülesandena Aleksandria ülikoolis, ligi 300 a. e. Kr.)

**4.** Poisil oli 2 korda rohkem õdesid kui vendi ja igal õel oli sama palju vendi kui õdesid. Mitu last oli peres?

**5.** Jaota 100 leiba 10 inimesele nõnda, et 3 neist saavad kokku kahekordse leivahulga teiste saadud hulgaga võrreldes. (Ahmes, 1700 e. Kr.)

**6.** Arv lahutub kaheks teguriks. Kui esimest suurendada 5 võrra, teist vähendada 5 võrra, siis väheneb arv omakord 5 võrra. Kui sellevastu esimest tegurit vähendada 5 võrra, teist tegurit suurendada 5 võrra, siis väheneb arv ise 45 võrra. Kas saab leida arvu?

**7.** Poiss palgatakse 1. maist 10. septembrini maale karjaseks, lubades temale tasuna prii ülalpidamine, 60 krooni ja üks ülikond riiet. Terviselistel põhjustel pidi poiss lahkuma kohalt 10. augustil ja sai tasuks lubatud ülikonna riiet ja 30 krooni. Kui kallilt hinnati ülikond?

**8.** N. n. «valgevask» on punase vase ja tsingi sulatis. On teada, et vee sees kaotab punane vask 0,11 oma kaalust, tsink aga 0,14. Valgevase-tükk kaalub õhus 2,5 kg, vees 2,2 kg. Kui palju on tas punast vaske, kui palju tsinki?

**9.** Linnavolikogus on enamiku ja vähemiku häälte suhe 3:2. Väike neljaliikmeline keskerakond läheb enamikult vähemikule üle, mille tõttu häälte suhe nüüd 8:7. Mitu liiget on linnavolikogus?

**10.** Spordiseltsi aasta-aruanne näitab puudujääki, mis kokkuleppel ühiselt kaetakse. Kui iga liige annab selleks 2 krooni, jääb ikka veel 7 krooni puudu; kui iga liige annab 2,5 krooni, jääb 5 krooni järgmiseks aastaks üle. Kui suur on puudujääk?

11. Kui hernepeenral paigutada vardad iga 25 cm tagant, siis tuleks puudu 57 varrast; kui neid paigutada 35 cm tagant, jääks neid üle 19. Arvuta peenra pikkus ja tagavaras olevate varraste arv.

12. Ema saatis tütre poodi käsuga, osta 3 naela suhkrut ja 5 naela riisi, andes kaasa ostu koguhinnana 2,10 krooni. Eksikombel ostis tütar poest 5 naela suhkrut ja 3 naela riisi, saades kaasavõetud rahast tagasi 20 senti. Kui kallis oli suhkru ja riisi nael?

13. Rahvapeo einelauapidaja tellib peoks limonaaditehaselt suurema vaadi kuremarja-jooki, mille hind 22 senti toop, ja väiksema vaadi linnasekalja, mille hind 8 senti toop, koguhinnaga 58,40 krooni. Saadetise kohalejõudmisel selgus, et tellimise täitmisel on eksikombel suurem vaat täidetud kaljaga, väiksem kuremarja-joogiga, mille tõttu arve on 8,4 krooni võrra väiksem kui arvatud. Leia neil andmeil kuremarja-joogi ja linnasekalja toopide arv.

14. Keskmise suurusega raamatu nahkköide maksis praeguses rahas arvates enne sõda 80 senti. Et materjalide hind nüüd endisega võrreldes kahekordne, tööhind aga kolmekordne, siis maksab sama köide praegu 2 krooni 10 senti. Määra materjali ja köitmistöö hind enne ja pärast sõda.

15. Õmblusmasinate hinda tõstis neid valmistav firma 130 krooni pealt 155 krooni peale, põhjendusega, et materjalid on 10%, tööhind 22% tõusnud. Kui kalliks oleks läinud õmblusmasin, kui ainult tööhind oleks kasvanud nimetatud määra võrra?

16. Poodnik müüb õunu hinnaga, mis annab talle 20% kasu. Tema võistleja puuvilja-kaupmees ostab neid suurel arvul, saades sel viisil tüki 2 sendi võrra odavamalt. Müües õunu 2 sendi võrra odavamalt kui esimene, saab ta ikkagi 30% tulu. Kui palju maksab õun esimesel kaupmehel?

**17.** Jaota 100 leiba 5-le isikule nõnda, et nende saadud leivahulgad moodustavad aritmeetilise rea ja mõlemad esimesed saavad kokku $\frac{1}{7}$ sellest, mis kolm viimast ühtekokku. (A h m e s, 1700 a. e. Kr.)

**18.** Kaks viinakaupmeest sõidavad linna; ühel on 64 nõu, teisel 20 nõu viina, samas suuruses ja sama hinnaga nagu esimeselgi. Et kummalgi pole kaasas küllalt raha tolli äratasumiseks, siis õiendatakse tollitamine sel teel, et esimene kaupmees annab 5 nõu viina ja 40 krooni, teine 2 nõu, saades aga veel 40 krooni tagasi. Kui kallis on nõu viina ja kui suur on nõu pealt tollimaks? (Ühest vanast ülesannetekogust.)

---

# Peatükk XI.

# Ruutolenevus.

## Harjutis XLI:

Ruutolenevus $y = x^2$.

**1.** Tabel sisaldab $m$ veergu ja sama palju ridu. Iga rea ja veeru lõikekohal seisab üks anne. Mitu annet $a$ on üldse tabelis?

Kujuta arvu $a$ käik arvu $m$ muutudes vahemikus $m = 2$ kuni $m = 6$.

**2.** Võrk koosneb $n$ rõhtsihis ja $n$ püstsihis niidist. Mitu sõlme $s$ on võrgus?

Kujuta arvu $s$ käik arvu $n$ muutudes vahemikus $n = 2$ kuni $n = 10$.

**3.** Peol on $n$ noormeest ja just sama palju neidusid. Mitu isesugust abielupaari $p$ võiks kombineerida neist noormeestest ja neidudest?

**4.** Klassis on $n$ õpilast. Nad lepivad kokku omavahel oma päevapilte vahetada, nii et igaühel oleks enese ja kõigi oma klassikaaslaste pildid. Mitu pildi-äratõmmet $p$ peab päevapiltnik valmistama?

Kujuta äratõmmete hulga $p$ käik õpilaste arvu $n$ muutudes 19-st kuni 38-ni.

**5.** Kujuta mm-paberil 10 ruutu, mille küljed oleks 1, 2, 3, . . . 9 ja 10 cm. Joonis näitab ruudu pinna suurenemiskäiku ruudu külje muutudes.

Kujuta sama nähtuse käik püstlõik-kujutise viisil.

**6.** Kujuta funktsioonide

$$y = x \text{ ja } z = x^2$$

käik vahemikus $x = -2$ kuni $x = +2$, võttes $x$-i väärtused iga 0,4 tagant.

Seleta joonisele tuginedes, milles erinevad mõlema funktsiooni käigud: võrdle $y$ ja $z$ väärtusi $x$-i väärtustel $0, -1, +1$; võrdle $y$ ja $z$ väärtusi $x$-i väärtustel vahemikus

$$-2 < x < -1 \qquad 0 < x < +1$$
$$-1 < x < 0 \qquad +1 < x < +2$$

Leia, kus funktsioonid omavad väiksemat, kus suuremat väärtust; kus kasvavad, kus vähenevad; mis märgid on nende väärtustel.

**7.** Ruudu külg on $a$ cm pikk. Arvuta ruudu pindala $S$ vahemikus $a = 0$ kuni $a = 3$, võttes $a$ väärtused iga 0,3 tagant. Arvutamissaadused korralda tabelisse.

Kujuta ruudu pindala käik külje muutudes ülalnimetatud vahemikus. Määra graafiliselt ruudu pindala $a$-väärtustel

$$0{,}9; \quad 1{,}3; \quad 1{,}8; \quad 2{,}7$$

ja kontrolli saadus arvutamise teel.

**8.** Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kaatet on $a$ cm pikk. Avalda tema pindala $T$ kaateti kaudu. Kuidas saada pindala $T$ käigu kujutis eelmise ülesande joonisest?

**9.** Võrdkülgse kolmnurga pindala $U$ avaldub tema külje $a$ kaudu kujul

$$U = 0{,}43a^2.$$

Kuidas saada ruudu pindala $S = a^2$ muutumise graafikust graafik, mis kujutaks kolmnurga pindala $U$ muutumise käiku?

**10.** Arvuta ringi pindalade tabel vahemikus $r = 0$ kuni $r = 10$, võttes $r$ väärtused iga 0,5 tagant, ja kujuta ringi pindala käik raadiuse muutudes.

Määra joonisest ringi pindalad, mis vastavad $r$ väärtustele

3,8; 4,4; 5,3; 6,9; 7,8; 8,3; 9,7.

Arvuta ringi pindalad, mis vastavad samadele $r$ väärtustele, tarvitades interpolatsiooni teed tabelis.

Arvuta samad pindalad otseselt ja koosta ennemini leitud saaduste vigade tabel.

**11.** Seebimulli raadius omandab mulli ülespuhumisel järjest väärtused

0,2 . . . 0,6 . . . 1,0 . . . 2,4 . . . 3,8 . . . 4,9 . . . 5,5 cm.

Arvuta mulli pind $S = 4\pi r^2$ ja kujuta tema käik raadiuse kasvades.

Leia joonisest seebimulli pind järgmistel raadiuse väärtustel: 1,7; 2,9; 3,2; 4,3; 5,2. Kontrolli saadused arvutamise teel.

**12.** Teraskõis, mille läbimõõt on $d$ tolli, kannab katkemiskindlalt koormat kuni $K$ tonni, kus

$$K = 7{,}11 d^2.$$

Sõnasta valemi mõte.

Arvuta koorma ülimmäärade tabel köie läbimõõtudele vastavalt:

$$\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \text{ tolli.}$$

Leia koorma ülimmäärad läbimõõtudel $\frac{3}{16}, \frac{7}{16}, \frac{5}{8}$ tolli, tarvitades interpolatsiooni teed tabelis.

Määra samad suurused otsese arvutamise teel ja leia ennemalt saadud väärtuste vead.

**13.** Keha langeb $t$ sekundi lõpuks sügavusele

$$s = 4{,}9\, t^2,$$

kus $s$ on mõõdetud meetrites. Koosta langemisteede tabel, võttes ajad iga $\frac{1}{3}$ sekundi tagant vahemikus 0 kuni 3 sekundit.

Määra interpolatsiooni teel langemisteed väärtustele

$$t = \frac{3}{4}, \ 1\frac{2}{5}, \ 2\frac{5}{6}.$$

Leia saaduste vead.

**14.** Anna valem, mille järgi saab ümber arvutada

1°. pindu $S$ ruutsüldades pindadeks $J$ ruutjalgades;
2°. „ $J$ ruutjalgades „ $T$ ruuttollides;
3°. „ $S$ ruutsüldades „ $A$ ruutarssinates;
4°. „ $A$ ruutarssinates „ $M$ ruutmeetrites;
5°. „ $T$ ruut-tollides „ $S$ ruutsüldades.

**15.** Olgu mingi kuju pindala $S$. Kuidas ta avaldub, kui mõõtühikuks võetakse endise asemel ruut, mille külg on $\frac{1}{n}$ endise ruudu küljest?

**16.** Avalda ruudutaolise plaadi mass tema paksuse 1, serva $s$ ja aine tiheduse $t$ kaudu.

Mis sünnib plaadi massiga tiheduse kasvamisel 2, 3, 4,... kordseks? — mis serva kasvamisel 2, 3, 4,... kordseks?

**17.** Auto mootori «hobusejõudude» arvu $H$ määratakse ligikaudu maksva valemi põhjal

$$H = 0{,}4nd^2,$$

kus $n$ on mootori silindrite arv ja $d$ on nende seesmine läbimõõt tollides.

Kuidas muutub arv $H$ silindrite hulga $n$ kasvamisel 2, 3, 4, ... kordseks? — kuidas läbimõõdu $d$ kasvamisel 2, 3, 4, ... kordseks?

**18.** Teemandi väärtust võib lugeda ligikaudu võrdeliseks tema kaalu ruuduga. Avalda side teemandi kaalu $k$, tema väärtuse $v$ ja tema kaaluühiku «karaadi» hinna $h$ vahel.

Selgita valemi mõtet arvuliste näidetega.

**19.** Jõelaeva mootori tarvitatud bensiinihulk $h$ on võrdeline sõiduajaga $t$ ja võrdeline sõidukiiruse $v$ ruuduga. Olgu teada, et mootor tarvitab tunni kohta, kiirusel 15 km-it tunnis, bensiini 12 liitrit. Anna side suuruste $h$, $t$ ja $v$ vahel.

Selgita sideme mõtet arvuliste näidetega.

**20.** Olgu töötunni tasu $m$ senti. Olgu teatud töö valmistamiseks eelarvestatud aeg $A$ tundi; olgu töö tegelikult lõpetatud varemalt, aja vältel $a$ tundi ($a < A$). Preemiasüsteemilise töötasu puhul makstakse siis

töötasu $a$ tunni eest $am$ senti,

sellele lisaks preemia $am\left(1 - \frac{a}{A}\right)$ senti,

s. o. kokku $am\left(2 - \frac{a}{A}\right)$ senti.

Avalda preemiasüsteemil saadav tööstuse omaniku tulu ja anna leitud avaldisele võimalikult lihtne kuju.

Näide. Olgu sentides $m = 40$ ja $A = 10$. Arvuta neil andmeil preemiate tabel, võttes $a$ vahemikus 7-est kuni 10-ni iga $\frac{1}{4}$ tunni tagant. Kujuta preemia käik $a$ muutumisel 7-st kuni 10-ni. Kujuta samal joonisel töötasu ja tulu käigud samas vahemikus.

**21.** Kolmnurga küljed on 2, 3 ja 4 cm. Kuidas muutub kolmnurga pindala tema külgede kasvamisel 2-, 3-, 4-, . . . $k$-kordseks?

Küsimuse otsustamiseks joonista vastavad kolmnurgad, mõõda nende kõrgused ja koosta tabel:

| $k$ | Alus $a$ | Kõrgus $h$ | Pindala $S$ |
|---|---|---|---|
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| . | | | |
| . | | | |
| . | | | |

Kujuta saadud $k$-$S$-tabeli andmed graafiliselt. Kas joonis laseb oletada võrdelist olenevust $k$ ja $S$ vahel? Kas pole $k^2$ ja $S$ võrdelised? Selle otsustamiseks valmista uus joonis vastavalt $k^2$-$S$-tabelile. Kui $k^2$ ja $S$ osutuvad võrdelistena, siis määra võrdetegur, tarbekorral vaatlusi tasandades.

Anna valemina arvude $S$ ja $k^2$ side.

**22.** Vaatlused, mis teatud nähtuse käigu jälgimisel tehtud, on annud järgmise rea kokkukuuluvaid andmeid:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2,2 | 3,5 | 4,1 | 4,9 | 5,3 | 6,1 | 6,8 | 7,7 |
| $y$ | 4,81 | 12,2 | 16,7 | 23,9 | 28,0 | 37,4 | 46,0 | 59,6 |

Kujuta andmed graafiliselt. Kas võib oletada $x$ ja $y$ võrdelist olenevust? — $x^2$ ja $y$ võrdelist olenevust? Küsimuse otsustamiseks kujuta graafiliselt $x^2$-$y$-tabeli väärtused, rakenda niitproov ja tasanda tarbekorral andmed. Kui võimalik, määra võrdetegur ja anna valemina $x$ ja $y$ vaheline side.

**23.** Sama ülesanne andmete korral:

1°.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 5,5 | 6,7 | 7,5 | 8,9 | 10,2 | 12,5 | 13,6 | 15,4 |
| $v$ | 30,4 | 45,0 | 56,3 | 79,2 | 104 | 156 | 186 | 237 |

2°.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 | 1,1 | 1,2 |
| $t$ | 0,23 | 0,37 | 0,50 | 0.62 | 0,78 | 0,99 | 1,23 | 1,46 |

3°.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0,9 | 1,4 | 1,8 | 2,3 | 2,9 | 3,2 | 3,8 | 4,5 |
| $q$ | 0,78 | 1,98 | 3,20 | 5,30 | 8,3 | 10,3 | 14,5 | 20,4 |

**24.** Vaatlused, mis tehtud teatud nähtuse uurimisel, on annud järgmise rea kokkukuuluvaid andmeid:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 0,9 | 1,5 | 1,9 | 2,3 | 2,8 | 3,5 | 4,9 | 5,7 |
| $y$ | 0,19 | 0,54 | 0,86 | 1,27 | 1,89 | 2,94 | 5,75 | 7,80 |

Kujuta andmed graafiliselt. Kas võib oletada $x$ ja $y$ võrdelist olenevust? — lineaarset olenevust? — $x^2$ ja $y$ võrdelist olenevust? Küsimuse otsustamiseks kujuta graafiliselt $x^2$-$y$-tabeli andmed, rakenda niitproov ja tasanda tarbekorral andmed. Kui võimalik, määra võrdetegur ja anna valemina $x$ ja $y$ vaheline side.

**25.** Sama ülesanne andmete puhul:

1°.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 2,4 | 3,1 | 3,8 | 4,3 | 4,9 | 5,4 | 6,3 | 6,9 |
| $v$ | 6,8 | 11,6 | 17,2 | 22,0 | 28,6 | 35,1 | 47,5 | 56,9 |

2°.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s$ | 4,2 | 4,6 | 5,0 | 5,4 | 5,8 | 6,2 | 6,6 | 7,0 |
| $t$ | 14,1 | 17,0 | 19,9 | 23,3 | 26,9 | 30,9 | 34,8 | 39,0 |

## Harjutis XLII:

Ruutolenevuse $y = x^2$ pööre $x = \sqrt{y}$.

**1.** Kui pika peab võtma ruudukujulise udupiltide näitelina külje, et lina pindala oleks vähemalt 4 m²? — 5 m²? — 9 m²? — 12 m²?

Kui nõutavat arvu täpsalt ei leidu, anna kaks teineteisele järgnevat täisarvu, mis rahuldavad nõude ligikaudu. Poolita arvude vahemik ja katsu, kuidas rahuldab nõude arvude aritmeetiline keskmine. Rakenda võtet korduvalt, määrates iga sammu järel saaduse vea ülemmäära.

**2.** Kui võrdkülgse kolmnurga pindala on 200 cm², kui suur on tema külg?

**3.** Ringi raadius on 5,7 cm. Kui suur on selle ringiga pindvõrdse ruudu külg?

Joonista mõlemad kujundid õigeis mõõtudes.

**4.** Ristküliku mõõted on 5 ja 9 cm.

1°. Kui suur on selle ristkülikuga pindvõrdse ruudu külg?

2°. Kui suur on selle ristkülikuga pindvõrdse korrapärase kolmnurga külg?

3°. Kui suur on selle ristkülikuga pindvõrdse ringi raadius?

Kujuta kõik 4 kujundit õigeis mõõtudes.

**5.** Valmista endale arvude 1, 2, 3, ... 100 ruutude tabel.

1°. Määra täisarvud, mis rahuldavad allpool-antud nõudeid, kui võimalik — täpsalt, kui mitte — siis ligikaudu, veaga väiksemaga kui 1:

$$x^2 = 25 \qquad y^2 = 29 \qquad z^2 = 34$$
$$u^2 = 40 \qquad v^2 = 64 \qquad w^2 = 77$$
$$r^2 = 81 \qquad s^2 = 85 \qquad t^2 = 92$$

2°. Leia arvud, mis rahuldavad nõudeid

$$a^2 = 7 \qquad b^2 = 19 \qquad c^2 = 23$$

esiteks veaga alla ühte, siis, tarvitades lähisväärtuste vahemiku poolitamise võtet — veaga alla 0,5.

3°. Sama teed kaks korda käies rahulda nõuded

$$c^2 = 5 \qquad d^2 = 12 \qquad e^2 = 27$$

veaga mitte üle 0,25.

4°. Sama teed kolm korda käies rahulda nõuded

$$f^2 = 6 \qquad g^2 = 15 \qquad h^2 = 26$$

veaga mitte üle 0,125.

**6.** Tarvitades ennemalt koostatud ruutude tabelit ja rakendades korduvalt interpolatsioonivõtet

1°. rahulda nõuded

$$x^2 = 21{,}4 \qquad y^2 = 40{,}7 \qquad z^2 = 72{,}8$$

veaga mitte üle 0,1;

2°. rahulda nõuded

$$u^2 = 32{,}5 \qquad v^2 = 59{,}2 \qquad w^2 = 76{,}2$$

veaga mitte üle 0,01;

3°. rahulda nõuded

$$r^2 = 3 \qquad s^2 = 7 \qquad t^2 = 13$$

veaga mitte üle 0,001.

Kontrolli saaduste headus saaduste ruututõstmise teel, kõiki üleliigseid märke ära jättes.

**7.** Tarvitades interpolatsiooni võtet

$1^0$. rahulda nõuded

$j^2 = 185 \qquad k^2 = 382 \qquad l^2 = 811$

veaga mitte üle 0,01;

$2^0$. rahulda nõuded

$m^2 = 1893 \qquad n^2 = 4576 \qquad p^2 = 7299$

veaga mitte üle 0,1.

**8.** Olgu $a$ mingi positiivne arv. Tähendagu $x$ mingi $\sqrt{a}$ lähisväärtust puudusega. Siis on murd $\frac{a}{x}$ üks $\sqrt{a}$ lähisväärtustest liiaga. Moodustades aritmeetilise keskmise saame uue $\sqrt{a}$ lähisväärtuse $y$. Sellest võib endist teed käies tuletada uue $\sqrt{a}$ lähisväärtuse $z$. Protsessi jätkates võime sel teel saada $\sqrt{a}$ lähisväärtusi nii täpsaid kui tahame.

Rakenda võte nõuete rahuldamiseks

$a^2 = 0{,}83 \qquad b^2 = 0{,}59 \qquad c^2 = 0{,}19$

$e^2 = 0{,}092 \qquad f^2 = 0{,}053 \qquad g^2 = 0{,}026$

veaga mitte üle 0,01.

**9.** Eesti Vabariigi üldpinnast on

| | | | |
|---|---|---|---|
| põllumaad . . . . | 23% | metsamaad . . . | 21% |
| heinamaad . . . | 24% | ebaproduktiivset | |
| karjamaad . . . . | 17% | maad . . . . . | 15% |

Kujuta kogu maa-ala ja tema osad kasutuse järgi ruutudena ühes ja samas mõõtkavas.

**10.** Järgmine tabel annab mõnede Euroopa riikide maapinna suuruse tuhandeis ruutkilomeetrites:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Belgia . . . . . | 30,4 | Soome . . . . | 335,5 |
| Eesti . . . . . . | 47,6 | Prantsuse . . . | 551,0 |
| Läti . . . . . . | 65,7 | Vene . . . . . . | 4603,4 |
| Ungari . . . . . | 92,7 | | |

Kujuta kõigi nende maade pinnad ruutudena ühes ja samas mõõtkavas.

**11.** Järgmine tabel annab mõnede Euroopa riikide rahva-arvud miljonites:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Belgia . . . . . . | 7,5 | Soome . . . . . | 3,4 |
| Eesti . . . . . . | 1,1 | Prantsuse . . . . | 39,2 |
| Läti . . . . . . . | 1,6 | Vene . . . . . | 101,7 |
| Ungari . . . . . | 7,9 | | |

Kujuta kõigi nende maade elanikkude hulgad ringi pindadena ühes ja samas mõõtkavas.

**12.** Toa pikkus on 6,5 m, laius 4,8 m. Arvuta lühem kaugus mingist toa nurgast vastasnurgani.

**13.** Järgmises tabelis on antud võrdhaarse kolmnurga 2 lineaarset elementi 3-st: $a$ — alus, $b = c$ — haar, $h$ — kõrgus. Arvuta kolmas puuduv element ja kontrolli saadus, ehitades kolmnurk andmeist ja mõõtes otsitav element.

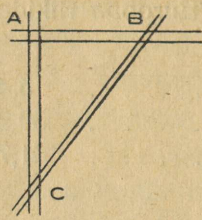
| Nr | $a$ | $b = c$ | $h$ |
|---|---|---|---|
| 1⁰. | 24,6 | 31,5 | |
| 2⁰. | 42,7 | | 15,3 |
| 3⁰. | | 69,8 | 37,6 |

| Nr | $a$ | $b = c$ | $h$ |
|---|---|---|---|
| 4⁰. | 0,62 | 0,93 | |
| 5⁰. | 0,78 | | 0,12 |
| 6⁰. | | 0,81 | 0,49 |

**14.** Järgmises tabelis on antud täisnurkse kolmnurga 2 lineaarset elementi. Arvuta kolmas puuduv element ja kontrolli saadus, ehitades kolmnurk andmeist ja mõõtes otsitav element.

| Nr | Kaatet $a$ | Kaatet $b$ | Hüpotenuus $c$ |
|---|---|---|---|
| 1⁰. | 1 | 3 | |
| 2⁰. | 2 | 3 | |
| 3⁰. | 3,5 | 7,3 | |
| 4⁰. | 9,4 | 18,8 | |
| 5⁰. | 21,7 | 30,9 | |

| Nr | Kaatet $a$ | Kaatet $b$ | Hüpotenuus $c$ |
|---|---|---|---|
| 6⁰. | 5,2 | | 8,3 |
| 7⁰. | | 6,9 | 9,1 |
| 8⁰. | 11,4 | | 17,5 |
| 9⁰. | | 0,9 | 2,3 |
| 10⁰. | 0,4 | 0,7 | |



Joonis 33.

**15.** Kolm teed lõikuvad, moodustades täisnurkse kolmnurga (joonis 33): $AB = 5{,}6$ km; $AC = 9{,}3$ km. Mille võrra on otsene tee kohast $C$ kohta $B$ lühem kaudsest $CAB$? Kui palju aega võidab jalakäija, valides omale $A$ ja $B$ vahe ärakäimiseks lühema tee, kui lugeda tema liikumise kiiruseks 4,8 km tunnis?

**16.** Kaks teed moodustavad lõikumisel täisnurga. Selle tipult sammub üht teed mööda matkaja kiirusega 75 meetrit minutis, teine teist teed mööda — kiirusega 60 meetrit minutis. Kui kaugel on matkajad teineteisest, otsesihis arvatud, kümme minutit pärast teekonna algamist?

**17.** Toa mõõted on 8 m, 5 m ja 3 m. Kui pikk on suurem teivas, mis murdmatult tuppa mahub?

**18.** Kui 3 kümnesendilist raha kokku sulatada ja üheks sama paksusega rahaks valada, missugune oleks siis selle viimase läbimõõt?

**19.** Olgu kaalude õlgadel pisut lahkuminevad pikkused $l_1$ ja $l_2$. Olgu kaalutava keha õige kaal $k$. Keha asetamisel õla $l_1$ kausile olgu saadud keha kaaluna $k_1$, õla $l_2$ kausile — $k_2$. Näita, et siis $k = \sqrt{k_1 k_2}$.

Näide. $k_1 = 28{,}5$; $k_2 = 28{,}7$; määra $k$.

**20.** Majaperemees müüb oma maja, mille hind 10 000 krooni, vaheltkaupleja kaudu uuele omanikule 12 000 krooni eest. Nii esimene peremees kui vaheltkaupleja saavad kumbki $x\,\%$ tulu. Kui suur on see tuluprotsent?

**21.** Pangad lisavad oma hoiuletoojate kapitalidele iga aasta lõpuarve tegemisel aasta vältel kogunenud intressid juurde; nõnda kannab järgmisel aastal protsente mitte ainult põhikapital, vaid ka sellest esimese aasta jooksul saadud intressid. Missuguse protsendimäära puhul kasvab 2 aasta kestes

1°. kapital 1000 krooni 1100 krooni suuruseni
2°. „ 1000 „ 1200 „ „
3°. „ 1000 „ 1300 „ „
4°. „ 1000 „ 1400 „ „
Kas on niisuguse kasvamise puhul intressid võrdelised protsendimääradega?

**22.** Mul on tükk väga peent traati, mille läbimõõdu määramiseks on käepärast olevad abinõud liiga jämedad. Tarviliku läbimõõdu määran ma kaudselt: võtan 100 meetrit traati, keeran ta kokku ja paigutan mõõtklaasi vee sisse. Vee pinna tõus vastab mahule 1,5 cm³. Määra traadi läbimõõt.

**23.** Olgu teatud suuruse tõeline väärtus $v_0$, tema jaoks mõõtmisel saadud väärtus $v$, mõõtmisviga $w$ ($w > 0$, või $w < 0$, või juhuliselt $w = 0$), nõnda et $v = v_0 + w$.
Katse kordamisel saame:
$v_1 = v_0 + w_1$, $v_2 = v_0 + w_2$, $v_3 = v_0 + w_3, \ldots v_n = v_0 + w_n$.

1°. Võrduste liitmine annab

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = n \cdot v_0 + (w_1 + w_2 + \ldots + w_n).$$

Et muist vigu $>0$, muist $<0$, siis võib arvata, et liitmisel vead tunduvalt vastastikku kattuvad (kompenseeruvad), nii et

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n \approx 0,$$

sellega $$v_0 \approx \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}.$$

Sõnasta tulemus.

2°. Anna selle tulemuse põhjal eeskiri juhuliste mõõtmisvigade ligikaudseks arvutamiseks mõõtmissaadustest.

3°. Suurust $\overline{w} = \sqrt{\frac{w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_n^2}{n}}$ nimetatakse «keskmiseks ruut-veaks». Sõnasta eeskiri tema arvutamiseks.

4°. Mida tihedamalt koonduvad mõõtmissaadused oma aritmeetilise keskmise ümber, seda parem on nende k o o s k õ l a; mida hõredamalt — seda halvem on see kooskõla. Mõõtmissaaduste kooskõla headust hinnatakse suuruse $\bar{w}$ abil; mida väiksem see $\bar{w}$, seda parem on mõõtmissaaduste kooskõla.

Selle selgituseks olgu järgmine näide:

Näide. Kolm õpilast mõõdavad kooliõues kaugust kahe puu vahel: 1. õpilane teraspaelaga, 2. — mõõtlatiga, 3. — meeter-mõõtsirkliga. Iga õpilane toimetab mõõtmist 5 korda. 1., 2., ja 3. õpilase mõõtmissaadused on vastavalt meetrites:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 20,4 | 20,4 | 20,5 | 20,4 | 20,3 |
| 19,9 | 20,6 | 20,7 | 19,8 | 21,3 |
| 18,8 | 20,9 | 21,2 | 19,5 | 22,4 |

Määra iga arvurea jaoks aritmeetiline keskmine, rea andmete hälbed sellest, hälvete ruutude summa, keskmine hälvete ruut ja keskmine ruut-viga.

Kujuta ülalseisva kolme rea andmed kolmel rööbikul teljel; kujuta aritmeetilised keskmised; märgi hälbed, hinda silma järgi mõõtmissaaduste kooskõla; kujuta kolmel rööbikul lõigul keskmised ruut-vead.

**24.** 1°. Samad küsimused, mis viimases näites, arvuridade puhul:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1587 | 1578 | 1569 | 1565 | 1582 | 1573 |
| 1545 | 1570 | 1576 | 1583 | 1596 | 1583 |
| 1474 | 1617 | 1625 | 1575 | 1532 | 1623 |

2°. Samad küsimused arvuridade puhul:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 469 | 482 | 489 | 487 | 489 | 463 |
| 472 | 475 | 483 | 487 | 475 | 489 |
| 483 | 480 | 479 | 478 | 476 | 482 |

**25.** 1°. Mõõda viiel korral meetrilatiga kaugus kooli õue väravast koolimaja pea-sissekäiguni. Määra leitud arvurea jaoks mõõtmissaaduste aritmeetiline keskmine, mõõtmissaaduste kõikumispiirkond, üksikmõõtmise arvatav viga, mõõtmisrea keskmine ruut-viga ja kujuta andmed ning arvutatud suurused graafiliselt.

Korda tööd, toimetades mõõtmist sirklikujulise meetripuuga; — toimetades mõõtmist sammudega; — toimetades mõõtmist mõõtpaelaga.

2°. Võta mõni suurem puuleht (vahtra- või kastanileht näiteks). Kopeeri tema ümbermõõt mm-paberile ja määra neljal korral lehe pindala ruudukeste loendamise teel. Määra lehe arvatav pindala ja uuri loendamissaaduste kooskõla.

3°. Arvuta klassitoa ruumala 4 korral, määrates klassi mõõteid, lähtudes iga kord isesugusest nurgast. Leia saadustest klassi arvatav ruumala ja hinda selle arvutamissaaduste kooskõla.

**26.** Joonista võimalikult hoolsalt funktsiooni $y = x^2$ graafik $x$-$y$-teljestikus, vahemikus $-2 \leqslant x \leqslant +2$, võttes andmed iga 0,2 tagant.

Kasutades samu andmeid kujuta $y$-$x$ — teljestikus funktsiooni käik $x = \sqrt{y}$ vahemikus $0 \leqslant y \leqslant 4$. Mitu $y$-väärtust vastab antud $x$-väärtusele? Mitu $x$-väärtust vastab antud $y$-väärtusele?

**27.** Maapinna kumeruse tõttu laieneb silmapiir, mida kõrgemale tõuseme. Silmapiiri raadiuse $r$ sidet vaatekoha kõrgusega $h$ näitab ligikaudu maksev valem

$$r = 2{,}5\sqrt{h},$$

kus $h$ on antud meetrites ja $r$ on arvatud kilomeetrites.

1°. Kui kaugele saab näha selge ilmaga Tallinna Oleviste kiriku tornist ($h = 139$)? — Eiffel'i tornist Pariisis ($h = 300$)?

2°. Auriku signaal-latern asub mastil 20 m kõrgusel üle veepinna. Missugusest kaugusest alates on võimalik signaalituld paremal juhul näha (selge ilm, vaikne meri)?

3°. Sõjalaeva helgiheitja asub 35 m kõrgusel üle merepinna. Kui suure pinna laeva ümber saab ta öösi valgustada vaenlase otsimiseks?

**28.** Tõmbe suurust vabriku korstnas mõõdetakse seal valitseva õhu- ja suitsu-voolu kiirusega. Seda kiirust arvutatakse valemi järgi

$$v = c\sqrt{h}$$

kus $c$ on arvuline tegur ja $h$ korstna kõrgus. Kuidas muutub kiirus $v$, korstna kõrguse kasvades $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$ ja 3 kordseks?

**29.** Viipuri (pendli) võnkumisaega $T$ määrab valem:

$$T = 2\sqrt{l},$$

kus $l$ tähendab viipuri pikkust.

Täida tabel:

| $l$ | 0 | 0,4 | 0,9 | 1,6 | 2,5 | 3,6 | 4,9 | 6,4 | 8,1 | 10,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | | | | | | | | | | |

ja kujuta saadud andmetele tuginedes võnkumisaja $T$ käik viipuri pikkuse muutudes.

**30.** Vabalt langeva keha kiirus $v$ kaugusel $s$ langemise lähtekohast määratakse valemi järgi:

$$v = 4{,}4\sqrt{s},$$

kus kauguse mõõduks on meeter, kiiruse mõõduks meeter sekundis.

Arvuta selle valemi põhjal puuduvad väärtused tabelis:

| $s$ | 0 | 0,7 | 1,2 | 2,3 | 3,5 | 4,9 | 6,3 | 7,8 | 8,8 | 10,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | | | | | | | | | | |

Kujuta graafiliselt langemiskiiruse $v$ käik kauguse $s$ funktsioonina. Määra saadud joonisest puuduvad väärtused järgmises tabelis:

| $s$ | 1,9 | 3,1 | 4,0 | 5,7 | 8,2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | | | | | |

Kontrolli saadusi numbriliselt.

**31.** Heli kiiruse $v$ olenemine õhu temperatuurist $t$ väljendub valemi kaudu

$$v = 20{,}1\sqrt{273 + t},$$

kus $v$ ühikuks on meeter sekundis.

Valitsegu maapinnal kesksuve kuumus $t = +35^0$, ülal sulgpilvede piirkonnas temperatuur $t = -25^0$. Kujuta heli kiiruse muutumise käik temperatuuride vahemikus $t = -25^0$ kuni $t = +35^0$.

## Harjutis XLIII:

Üldine ruutolenevus $y = ax^2 + bx + c$.

**1.** Telefoni-keskjaama lülitustahvlil leidub $n$ juhtmeotsa. Mitu isesugust ühendust $u$ võib üldse anda keskjaam?

Kujuta arvu $u$ käik arvu $n$ muutudes rajades $n = 3$ kuni $n = 20$.

**2.** Õpilaste spordiringis on $n$ liiget. Mitmel viisil $e$ saab valida esimeest, kui selleks võib olla iga liige? Mitmel viisil $j$ saab valida esimeest ja kirjatoimetajat, kui nendeks võib olla iga ringi liige?

Kujuta ühes ja samas teljestikus arvude $e$ ja $j$ käik $n$ muutumisel rajast $n = 2$ kuni $n = 18$.

**3.** Avalda esimese $n$ lihtarvu summa $s$, arvuta $n$-$s$-tabel ja valmista $n$-$s$-diagramm rajades $n = 2$ kuni $n = 12$.

**4.** Hulknurgal on $k$ külge. Mitu diagonaali $d$ on tal?

Koosta $k$-$d$-tabel vahemikus $k = 3$ kuni $k = 10$ ja kujuta arvu $d$ käik arvu $k$ muutudes.

**5.** Ruutdetsimeetri mudeli külg peaks olema võrdne 1 dm-ga. Mudeli valmistaja on külje tasandamisel eksinud $\alpha$ dm võrra, kus $\alpha$ on väike murd. Kui suur on tõeliselt mudeli pind $S$? Missuguse vea $\beta$ mudeli pinnasuuruses tingib külje puhul tehtud viga $\alpha$?

6. Ringikujulise plaadi läbimõõt toa temperatuuril on 1 dm; päikesepaistel paisudes kasvab ta väärtuseni $(1+\delta)$ dm. Kui suur on plaadi pind peale paisumist? Arvuta ringi pinna kasv $\sigma$ läbimõõdu kasvu $\delta$ funktsioonina.

7. Toa temperatuuril on ristküliku-taolise kristall-lesta mõõted 2 ja 3 cm. Soojenedes paisuvad mõlemad mõõted suuruse võrra $\alpha$ cm, kus $\alpha$ on väike murd.

Kujuta lesta pindala $S$ käik $\alpha$ muutudes rajades $-0{,}1 < \alpha < +0{,}1$. Kas negatiivne $\alpha$ on tegelikult võimalik?

8. Seebimulli ülespuhumisel kasvab mulli läbimõõt oma lähteväärtusest 3 cm väärtuseni $(3+\delta)$ cm. Kujuta mulli pinna $S$ käik $\delta$ muutumisel rajades $-2 < \delta < +2$.

9. Eestisse veetakse aastas apelsine tollivabalt $a$ kg. Võib arvata, et $x$ sendi suurune tollimaks kg pealt vähendaks ostetavat apelsinide hulka $5x\,\%$ võrra. Missugune oleks riigi sissetulek apelsinide tollist? Kujuta selle sissetuleku käik $x$-i funktsioonina. Leia joonisest, missugusel $x$-i väärtusel oleks riigi sissetulek kõige suurem.

10. Taksiauto bensiinikulu võib lugeda võrdeliseks sõidukiiruse ruuduga. Proovisõidul selgus, et 1 km kohta, kiiruse puhul 20 km tunnis, kulub 25 sendi eest bensiini. Olgu sõidutaks 35 senti kilomeetri pealt. Näita, et sõidukiiruse puhul $x$ km tunnis on autojuhi tunniteenistus

$$35x - \frac{25}{400}x^2.$$

11. Koosta funktsiooni

$$y = x^2 + px + q$$

$x$-$y$-väärtuste tabel, võttes $x$-i väärtused antud rajades iga 0,5 tagant või tarbekorral veel tihedamalt. Saadud andmete põhjal valmista $x$-$y$-diagramm. Kirjelda sellele tuginedes funktsiooni $y$ käik.

| Nr | $x^2+px+q$ | $x$-vahemik |
|---|---|---|
| $1^0$. | $x^2$ | $-5 \leqslant x \leqslant +5$ |
| $2^0$. | $x^2+2$ | $-5 \leqslant x \leqslant +5$ |
| $3^0$. | $x^2-3$ | $-5 \leqslant x \leqslant +5$ |
| $4^0$. | $x^2-4x$ | $-3 \leqslant x \leqslant +6$ |
| $5^0$. | $x^2+0{,}5$ | $-2 \leqslant x \leqslant +3$ |
| $6^0$. | $-x^2$ | $-5 \leqslant x \leqslant +5$ |

| Nr | $x^2+px+q$ | $x$-vahemik |
|---|---|---|
| $7^0$. | $x^2-2x-3$ | $-3 \leqslant x \leqslant +5$ |
| $8^0$. | $x^2-x-6$ | $-5 \leqslant x \leqslant +5$ |
| $9^0$. | $x^2+6x+5$ | $-8 \leqslant x \leqslant +3$ |
| $10^0$. | $1+x-x^2$ | $-3 \leqslant x \leqslant +4$ |
| $11^0$. | $x^2+7x+18$ | $-6 \leqslant x \leqslant +1$ |
| $12^0$. | $x^2-4x+5$ | $-2 \leqslant x \leqslant +6$ |

**12.** Määra eelmises ülesandes tehtud jooniste abil $x$-i väärtused, millel $y$ omandab väärtused

$$y = +3{,}0;\quad +2{,}0;\quad +1{,}5;\quad +1{,}0;\quad +0{,}5;$$
$$0;\quad -0{,}5;\quad -1{,}0;\quad -1{,}5;\quad -2{,}0.$$

Kontrolli saaduse headus, asendades saadus $y$ avaldusse.

## Harjutis XLIV:

Ruutvõrrandeid.

**1.** Võrrandi $x^2+px+q=0$ lahendid on samad mis võrrandi $x^2=-px-q$ omadki; nendeks on $x$-id, milledel funktsioonid

$$y_2 = x^2 \text{ ja } y_1 = -px-q$$

omandavad võrdsed väärtused. Sellega on võrrandi

$$x^2+px+q=0$$

lahenditeks parabooli $y_2=x^2$ ja sirge $y_1=-px-q$ ühistäppide abstsissid.

Leia, kasutades seda märkust, järgmiste võrrandite lahendid graafilisel teel. Kontrolli saaduse headus, asendades lahendid võrrandi pahemasse ossa.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $1^0$. | $x^2-4x+3=0$ | $6^0$. | $x^2-2x+4=0$ |
| $2^0$. | $x^2-10x+21=0$ | $7^0$. | $x^2-x-3=0$ |
| $3^0$. | $x^2+7x+10=0$ | $8^0$. | $x^2-0{,}8x=0$ |
| $4^0$. | $x^2+x-2=0$ | $9^0$. | $x^2-3=0$ |
| $5^0$. | $x^2-3x-4=0$ | $10^0$. | $x^2+0{,}4x-3{,}7=0$ |

2. Leia eelmises ülesandes seletatud graafilise võtte abil järgmiste võrrandite lahendid ja kontrolli saadused asendamise teel:

| | |
|---|---|
| 1°. $x^2-0{,}9x-2{,}2=0$ | 6°. $x^2-1{,}5x+4{,}0=0$ |
| 2°. $x^2-1{,}2x-5{,}6=0$ | 7°. $x^2-2{,}0x+3{,}4=0$ |
| 3°. $x^2-0{,}5x-3{,}1=0$ | 8°. $x^2-3{,}5x+1{,}1=0$ |
| 4°. $x^2+0{,}8x-2{,}7=0$ | 9°. $x^2-2{,}6x-2{,}2=0$ |
| 5°. $x^2+1{,}2x-4{,}3=0$ | 10°. $x^2-0{,}7x-3{,}5=0$ |

3. Täienda järgmised avaldised täie ruuduni:

| | |
|---|---|
| 1°. $a^2+4a$ | 6°. $f^2+3f$ |
| 2°. $b^2-6b$ | 7°. $g^2-5g$ |
| 3°. $c^2-10c$ | 8°. $h^2+h$ |
| 4°. $d^2+14d$ | 9°. $i^2-\frac{2}{3}i$ |
| 5°. $e^2-22e$ | 10°. $k^2-\frac{1}{2}k$ |

4. Lahenda järgmised ruutvõrrandid, tarvitades täiendamise võtet täie ruuduni:

| | |
|---|---|
| 1°. $x^2-4x=-3$ | 6°. $p^2-p-30=0$ |
| 2°. $y^2-2y=24$ | 7°. $q^2-5q+8=0$ |
| 3°. $z^2-6z=16$ | 8°. $r^2-7r+10=0$ |
| 4°. $u^2+8u=-15$ | 9°. $s^2+s+3=0$ |
| 5°. $v^2-12v=13$ | 10°. $t^2-3t+5=0$ |

5. Lahenda järgmised ruutvõrrandid $x^2+px+q=0$, tarvitades tundmatu teisendamise võtet $x=X-\frac{p}{2}$, ja kontrolli saadused:

| | |
|---|---|
| 1°. $x^2+4x-21=0$ | 6°. $x^2+4x-45=0$ |
| 2°. $x^2-3x-18=0$ | 7°. $x^2+2x-63=0$ |
| 3°. $x^2+6x-16=0$ | 8°. $x^2+12x+35=0$ |
| 4°. $x^2-11x+24=0$ | 9°. $x^2-3x-130=0$ |
| 5°. $x^2-13x-14=0$ | 10°. $x^2-20x+51=0$ |

6. Leia järgmiste ruutvõrrandite lahendid veaga alla 0,01, tarvitades lahendamisvalemit, ja kontrolli saadused:

| | |
|---|---|
| 1°. $x^2+2x-17=0$ | 6°. $u^2-3u+1=0$ |
| 2°. $x^2-6x+5=0$ | 7°. $u^2+5u-6=0$ |
| 3°. $y^2-6y+12=0$ | 8°. $v^2-v+7=0$ |
| 4°. $y^2+8y+11=0$ | 9°. $v^2-11v+8=0$ |
| 5°. $z^2-14z-15=0$ | 10°. $w^2+9w-4{,}75=0$ |

**7.** Leia järgmiste ruutvõrrandite lahendid veaga alla 0,01, tarvitades lahendamisvalemit, ja kontrolli saadused asendamise teel:

| | |
|---|---|
| 1°. $2x^2+11x-6=0$ | 6°. $4a^2-7a+3=0$ |
| 2°. $3y^2+2y-8=0$ | 7°. $6b^2+13b+19=0$ |
| 3°. $2z^2-9z+4=0$ | 8°. $3c^2-4c-5=0$ |
| 4°. $3u^2+u-2=0$ | 9°. $d^2-10d+6=0$ |
| 5°. $5v^2-3v+1=0$ | 10°. $e^2-13e+11=0$ |

**8.** 1°. Kahe teineteisele järgneva täisarvu korrutis on 306. Mis arvud need on?

2°. Kahe teineteisele järgneva paarisarvu korrutis on 168. Mis arvud need on?

3°. Kahe teineteisele järgneva paarituarvu korrutis on 899. Mis arvud need on?

4°. Kahe teineteisele järgneva täisarvu ruutude summa on 145. Mis arvud need on?

**9.** Jaota arv 11 kahte niisugusesse ossa, et nende osade ruutude summa oleks 65.

**10.** 1°. Kahe arvu vahe on 32; nende korrutis 420. Mis arvud need on?

2°. Kahe arvu summa on 30; nende korrutis 221. Mis arvud need on?

3°. Kahe arvu vahe on 4; samade arvude ruutude summa on 170. Mis arvud need on?

**11.** Kahest arvust on üks sajast niipalju suurem, kui teine on sajast väiksem. Arvude korrutis on 9879. Mis arvud need on?

**12.** Jaota lõik, mille pikkus on 12 cm, kahte ossa nõnda, et neile osadele ehitatud ristküliku pindala oleks

$1^0$. 27 cm² $3^0$. 36 cm²
$2^0$. 12 cm² $4^0$. 50 cm²

**13.** Jaga lõik, mille pikkus 20 cm, kahte ossa nõnda, et suurema osa jagatis kogu lõiguga on sama, mis väiksema osa jagatis suurema osaga.

**14.** Kas on olemas kolm teineteisele järgnevat täisarvu, mis oleksid täisnurkse kolmnurga külgede mõõtarvudeks?

**15.** Üks täisnurkse kolmnurga kaatetitest on 7 ühiku võrra suurem kui teine. Hüpotenuus on 13 ühikut pikk. Leia kaatetid.

**16.** Ristküliku ümbermõõt on 86 dm, tema pindala 456. Missugused on tema küljed?

**17.** Ringi raadius on $r$. Mis lisandi peab talle andma, et ringi pind tõuseks kahekordseks, eelmisega võrreldes?

**18.** Romaani akna võlvi raadius $r$ määratakse tema laiusest $2s$ ja kõrgusest $h$ valemi abil:

$$h^2 - 2hr + s^2 = 0.$$

Kui suure kõrguse $h$ annaks raadius $r = 2{,}0$ m ja laius $2s = 1{,}6$ m?

**19.** Tasapinnale on joonistatud sirgete rägastik, milles ei leidu paralleelseid sirgeid. Lõikepunktide loendamisel leiti neid 120. Mitu sirget oli joonistatud?

**20.** Pidusöögi-toast kuuldub kõrvaltuppa 231 klaaside kokkulöömist. Oletades, et iga piduline iga teisega on klaasi kokku löönud, määra pidusöögist osavõtjate arv.

**21.** $1^0$. Mitu lihtarvu 1, 2, 3, . . . peab vähemalt võtma, et nende summa ületaks arvu 1000?

$2^0$. Mitu paarituarvu 1, 3, 5, 7, . . . peab vähemalt võtma, et nende summa ületaks 500?

**22.** 1°. Iluaia mõõted on 25 ja 30 m. Mis suuruse võrra peaks suurendama tema mõlemaid mõõte, et aia pinna suurust tõsta 1000 ruutmeetrini?

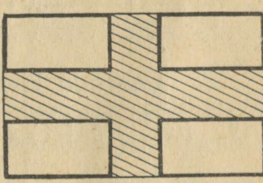
2°. Ruudutaolise maatüki mõõted lasevad endid suurendada kasutamata maa-ala juurdevõtmisel vastavalt 30 ja 20 sülla võrra; seejuures kasvaks maatükk 9 vakamaani. Kui suur oli maatükk?

**23.** Kui risttahuka taolise paku servi suurendada vastavalt 3, 4 ja 5 cm võrra, saab ta kuubitaoliseks ja kasvab tema ruumala 2470 $cm^3$ võrra. Leia risttahuka mõõted.

**24.** 1°. Põllu mõõted on 170 ja 110 sülda. Kui laia riba peab põllu äärest maha niitma, et niidetud riba moodustaks 2 vakamaad?

2°. Kui laia riba peab ära lõikama ruudukujulise lesta ümbert, et ülejääv ruut võrduks $\frac{1}{2}$-ga eelmisest?

**25.** Aed on 80 korda 120 ruutsülda suur. Pikuti ja risti minevate teede alla (joonis 34) tahetakse võtta osa pinnast, kuid mitte suurem kui $\frac{1}{20}$ kogu aia maa-alast. Kui suure võib valida maksimaalselt tee laiuse?



Joonis 34.

**26.** Ruudutaolise plekitüki nurkadest on välja lõigatud 4 ruutu, küljega 4 cm. Ülejäänud osa murtakse kokku lahtiseks karbiks. Kui suur peab plekitükk olema, et karbi ruumala oleks 100 $cm^3$?

Mis % plekist läheb karbi valmistamisel kaduma?

**27.** Ristküliku-taolisel papitükil, mille pikkus on 2 korda suurem tema laiusest, lõigatakse nurkadest ruudud ära küljega 5 cm. Murdes ülejääv osa kohaselt kokku, saadakse õõnes karp ruumalaga 840 $cm^3$. Kui suured on papitüki mõõted?

28. Majaperemees $M$ müüs aineliste raskuste tõttu oma maja naabrile $N$ 5000 krooni eest, saades teatud % kahju. Aasta pärast, ainelise seisukorra paranemisel, ostab ta maja uuelt omanikult tagasi, kusjuures uus omanik nõuab sama % kasu. Müügi- ja tagasiostu-operatsioonil kaotab $M$ kokku 800 krooni. Mis protsendimäär oli tulu arvutamise aluseks?

## Harjutis XLV:

Täiendavaid ülesandeid ruutvõrrandite alalt.

**1.** Lahenda järgmised võrrandid:

$1^0.\ x+\frac{1}{x}=2\frac{1}{12}$ $\qquad 4^0.\ \frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{3}{2}$

$2^0.\ 1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=0$ $\qquad 5^0.\ \frac{1}{x+6}+\frac{2x+1}{3}=2$

$3^0.\ \frac{1}{x+1}=\frac{x+1}{x}$ $\qquad 6^0.\ \frac{x+3}{2}+\frac{2}{x+3}=\frac{10}{3}$

**2.** Lahenda järgmised võrrandid:

$1^0.\ bx^2+(b+c)x+c=0$ $\qquad 4^0.\ \frac{x-a}{x-b}+\frac{x+a}{x+b}=1$

$2^0.\ 2ax^2+(a-2)x-1=0$ $\qquad 5^0.\ \frac{c}{x-d}+\frac{d}{x-c}=2$

$3^0.\ nx+\frac{b}{x}=na+\frac{b}{a}$ $\qquad 6^0.\ \frac{a}{ax-b}=\frac{bx-a}{b}$

**3.** Oja ääres, mille laius 4 m, kasvas pappel. Torm on ta murdnud 3 m kõrguselt, nii et latv just risti üle oja teisele kaldale ulatub. Kui kõrge oli pappel? (Bhaskara, a. 1150 ümber.)

**4.** Ruudutaolise tiigi keskpaigas kasvab pilliroovarreke, mille veepealne osa on just 1 jalg pikk. Kui selle roo tipp tõmmati tiigi külje keskkohta, puutus tipp just veepinda. Tiigi küljeks on 10 jalga. Kui sügav on tiik? (Tsin Kiu Tschaou, umbes 2600 a. e. Kr.)

5. 13 jalga pikk redel seisab seina ääres, nii et tema alumine ots on seinast 5 jalga eemal. Kui palju langeb redeli ülem ots seina mööda alla, kui alumist otsa tõmmata veel 7 jala võrra seinast eemale? (15. sajandist pärit olevast käsikirjast.)

6. Võõrastetoa põrandat, mille kuju on ristkülik ja mõõted $4\frac{1}{2}$ ja 6 m, tahetakse katta vaibaga nõnda, et vaiba ümber jääks igast küljest ühelaiune riba vabaks, vaip aga kataks parajasti $\frac{1}{2}$ põranda pinnast. Kui suur peab vaip olema?

7. Ahvikarja kaheksas osa, ruudus võetud, hüppas murul, mängust rõõmu tundes; 12 ülejäänud ahvi istus lobisedes künkal. Kui suur oli ahvikari? (Bhaskara, 1150. a. ümber.)

8. Koopas istus peidus rida ahve, nimelt ruutu võetud vahe karja viienda osa ja 3 vahel; võis näha ainult ühte ahvi, kes puu otsa oli roninud. Mitu ahvi oli karjas? (Bhaskara, 1150. a. ümber.)

9. Kaitseliidu-peoks müüdi kokku 530 piletit. Neist oli muist nummerdatud, muist nummerdamata platsidele määratud; esimesed olid 0,70 krooni kallimad kui teised. Esimeste müük andis 156 krooni, teiste müük 200 krooni. Kui kallid olid piletid?

10. Trükitööliste streigi alul oli streigi toetuskassas 3600 krooni. Kui sellest maksta igale streikijale toetuseks 30 krooni nädalas, siis jätkuks raha parajasti, et streik saaks kesta ettekavatsetud aja. Kui aga arvata, et ka viimase veel töötava trükikoja 6 töölist kaasa tulevad, siis peaks sama toetuse puhul streik nädal varemalt lõpetatama. Mitu streikijat arvestati?

11. Kaks sõidukit sõidavad kahe alevi vahet, mis võrdne 21,6 km. Kuna esimese kiirus on 1 ühiku (kilomeeter tunnis) võrra suurem teise omast, siis käib ta

nimetatud vahe 18 minuti võrra lühema aja jooksul ära kui teine. Mis kiirustega liiguvad sõidukid?

12. Jalgrattasõitja reisi-ettevalmistused nõudsid 10 minutit enam aega, kui oli kavatsetud. Et jõuda õigel ajal sihtkohale, mille kaugus lähtekohast on 20 km, pidi sõitja suurendama harilikku sõidukiirust $\frac{1}{2}$ ühiku võrra (arvates ühikuks kiirust kilomeeter tunnis). Mis kiirusega liigub sõitja?

13. Kahe alevi vaheline kaugus on postiteed kaudu 24 km, kitsast külateed kaudu 15 km. Autobus ja hobusõiduk asuvad ühel ajal teele; esimene valib pikema, kuid parema tee, teine lühema, kuid halvema. Et autobus tunnis 11 km võrra pikema maa ära käib kui hobusõiduk, jõuab ta sihtjaama 28 minutit varemalt kui sõiduk. Mis kiirusega liigub auto?

14. «Eesti Kala» müügiühing ostab Peipsil kalasuitsetisest teatud arvu suitsuiheseid, makstes 42 krooni. Halva transpordikorralduse tõttu on müügikohale jõudmisel 4 ihest rikke läinud. Müües ülejäänud 0,4 krooni võrra kallimalt ostuhinnast, saadakse kogu müügist ometi 8,4 krooni kasu. Mitu ihest on ostetud ja mis hinnaga?

15. Raudteejaama veetorni bassein täitub peapumba kaudu 3,5 tunni võrra kiiremalt kui tagavara-pumba kaudu. Mõlema pumba töötades täitub bassein 6 tunni jooksul. Leia aeg, mis tarvilik basseini täitumiseks peapumba kaudu.

16. Rühm noorseppi suvitab Toila rannal. Kulude eelarvestus näitab järgmist: kui toitu võtta pansioonist, läheks rühma ülalpidamine nädalas maksma 151,2 krooni; kui aga toitu valmistada ise, oleks võimalik nädalas kokku hoida 2,10 krooni inimese pealt; selle tagajärjel saab samade kulude puhul anda nädalaks ülalpidamine enestele kui ka külla kutsutud 2 läti noorkarutapjale, ikkagi veel kokku hoides 25,2 krooni külaliste sõidukulude katteks. Kui palju oli noorseppi?

**17.** Tühjuses ülespaisatud keha liigub seaduse järgi:

$$s = v_0 t - 4{,}9t^2,$$
$$v = v_0 - 9{,}8t,$$

kus $t$ tähendab aega katse algusest arvates, $v_0$ ülespaiskamise kiirust, $s$ ärakäidud tee pikkust, $v$ kiirust ajahetkel $t$.

Lahenda järgmised ülesanded eeldusel, et pikk terav nool liigub õhus takistamatult, tähendab, samuti kui tühjuses.

1°. Vibu nool paisatakse püstsihis üles lähtekiirusega 20 meetrit sekundis. Millal jõuab ta oma püstlennu piirile? Kui kõrgel asub see viimane?

2°. Mis kiirusega jõuab nool vabal langemisel tagasi maapinnale?

3°. Mis ajal asub nool kõrgusel 15 m üle maapinna? Anna vastusele seletus.

**18.** Tilgakujuline keha langeb õhus peaaegu takistamatult, s. t. samuti, kui ta langeks tühjuses. Katsed näitavad, et langemine tühjuses toimub seaduse järgi:

$$s = 4{,}9t^2,$$

kus $t$ tähendab aega sekundites, $s$ — ärakäidud teed meetrites.

Kaevanduse šahti sügavuse määramiseks lastakse sinna langeda maapinnalt tilgakujuline tükk seatina. Kui sügav on šaht, kui tinatüki löök šahti põhja vastu tuli kuuldavale 5,4 sekundit pärast katse algust ja heli kiirus õhus on 340 meetrit sekundis.

**19.** Käia raadius väheneb kulumise tagajärjel järkjärgult, kuna laius sel puhul muutumatuks jääb. Milleni väheneb tahu raadius ajaks, mil pool tahku on maha hõõrdunud?

**20.** Klaasist täiskerast, mille raadius on 4 cm, puhutakse üles õõnes kera, mille seina paksus on 2 cm. Kui suur on õõnsa kera sise-, kui suur tema välisraadius?

## Harjutis XLVI:

### Ruutvõrrandi lahendite omadused.

**1.** Lahenda järgmised ruutvõrrandid, rakendades korrutise nulliks taandumise tingimust:

| | |
|---|---|
| 1⁰. $x(x-1)=0$ | 4⁰. $x^2-11x=0$ |
| 2⁰. $(x-2)(x-3)=0$ | 5⁰. $2x^2+3x=0$ |
| 3⁰. $(x-5)(x+7)=0$ | 6⁰. $9x^2-1=0$. |

**2.** Kirjuta ruutvõrrandid, mille lahenditeks on:

| | | |
|---|---|---|
| 1⁰. $+2$ ja $+5$ | 5⁰. $+\frac{1}{2}$ ja $+\frac{1}{3}$ | 9⁰. $a+b$ ja $a-b$ |
| 2⁰. $-3$ ja $+4$ | 6⁰. $-\frac{4}{5}$ ja $+\frac{2}{3}$ | 10⁰. $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ |
| 3⁰. $-3$ ja $-7$ | 7⁰. $+1,7$ ja $-0,9$ | 11⁰. $\frac{a}{b^2}$ ja $\frac{b^2}{a}$ |
| 4⁰. $-5$ ja $0$ | 8⁰. $-0,8$ ja $-0,3$ | 12⁰. $ma^2$ ja $nb^2$ |

**3.** Leia järgmiste ruutvõrrandite lahendid veaga alla 0,01 ja kontrolli saadused, rakendades võrrandi lahendite põhiomadusi:

| | |
|---|---|
| 1⁰. $2x^2-3x-20=0$ | 6⁰. $11x^2-42x-2=0$ |
| 2⁰. $3x^2+4x-8=0$ | 7⁰. $7x^2+11x-6=0$ |
| 3⁰. $4x^2+6x+1=0$ | 8⁰. $5x^2-3x-4=0$ |
| 4⁰. $3x^2-6x+1=0$ | 9⁰. $6+11x-2x^2=0$ |
| 5⁰. $3x^2-2x-5=0$ | 10⁰. $7+2x-3x^2=0$ |

**4.** Lahuta, kus võimalik, järgmised trinoomid teguriteks:

| | |
|---|---|
| 1⁰. $x^2+4x-5$ | 6⁰. $3x^2-7x+4$ |
| 2⁰. $x^2-6x+17$ | 7⁰. $5x^2-6x-2$ |
| 3⁰. $x^2-8x-20$ | 8⁰. $4x^2-5x+3$ |
| 4⁰. $x^2-7x+6$ | 9⁰. $6x^2-11x+5$ |
| 5⁰. $x^2-3x+5$ | 10⁰. $7x^2+12x+5$ |

**5.** Määra järgmiste võrrandite puhul, ilma neid lahendamata, kas on lahendeid olemas. Edasi, kas lahendid on teineteisest erinevad või ühtelangevad? Kas lahendid on ratsionaalsed või irratsionaalsed? — kas täis- või murdarvulised? Mis märgid on lahenditel?

| | |
|---|---|
| $1^0$. $x^2-4x-5=0$ | $6^0$. $7+3x-2x^2=0$ |
| $2^0$. $x^2-6x+9=0$ | $7^0$. $3x^2-7x+4=0$ |
| $3^0$. $x^2-x+2=0$ | $8^0$. $4x^2-12x+9=0$ |
| $4^0$. $x^2-8x+15=0$ | $9^0$. $2x^2-5x+32=0$ |
| $5^0$. $x^2-x+\frac{1}{4}=0$ | $10^0$. $5x^2+6x-8=0$ |

**6.** Kirjuta võrrandid, mille lahendid oleksid

$1^0$. võrrandi $x^2-6x-55=0$ lahendite kolmekordsed;

$2^0$. võrrandi $x^2-1{,}3x-7{,}14=0$ lahendite kümnekordsed;

$3^0$. võrrandi $x^2-8x-33=0$ lahendite kümnendikud;

$4^0$. võrrandi $x^2+8x-84=0$ lahendite pooled.

**7.** $1^0$. Olgu ruutvõrrandi $x^2+px+q=0$ lahendid $x_1$ ja $x_2$. Missuguse ruutvõrrandi lahenditeks on $mx_1$ ja $mx_2$?

$2^0$. Olgu ruutvõrrandi

$$ax^2+bx+c=0$$

lahendid $\frac{n_1}{m}$ ja $\frac{n_2}{m}$. Missuguse ruutvõrrandi lahenditeks on arvud $n_1$ ja $n_2$?

$3^0$. Olgu võrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendid murrukujulised: $\frac{n_1}{2a}$ ja $\frac{n_2}{2a}$. Missugust ruutvõrrandit rahuldavad arvud $n_1$ ja $n_2$?

**8.** Järgmiste võrrandite vaatlemisel on üks lahend vaevata näha. Määra teine lahend ja kontrolli saadus, tuginedes ainult ruutvõrrandi lahendite põhiomadustele:

$1^0$. $(x-1)(x-2)=(a-1)(a-2)$

$2^0$. $a(x^2-1)=x(a^2-1)$

$3^0$. $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$

$4^0$. $px^2-qx=p+q$

$5^0$. $(p+2q)x^2+px=2(p+q)$

9. Näita, et võrrandi

$$ax^2 - ax + c = 0$$

lahendite summa on alati 1.

10. Missuguse kordaja $n$ eriväärtuse puhul on võrrandil $2x^2 + nx + 5 = 0$ võrdsed lahendid?

11. Olgu teada, et võrrandi

$$x^2 - px + q = 0$$

lahenditeks on kaks teineteisele järgnevat täisarvu. Näita, et sel korral $p^2 = 4q + 1$.

12. Avalda tingimus, mille puhul võrrandi $mx + n = 0$ lahend on ühtlasi võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendiks.

13. Võta järgmised võrrandid teisele astmele ja leia sel puhul juurdetulevad lisalahendid:

| | |
|---|---|
| 1°. $x - 3 = 0$ | 4°. $ax + b = c$ |
| 2°. $x + 4 = 5$ | 5°. $ax + c = x$ |
| 3°. $2x - 3 = 7$ | 6°. $ax + c = bx - d$ |

Näiteid mõtlemiseks:

Kas on ülesandeis 14—16 antud tõestused siduvad?

14. 1°. Olgu $x = n$,
siis $nx = n^2$;
ikka on $x^2 = x^2$;
sellega $x^2 - nx = x^2 - n^2$,
ehk $x(x - n) = (x + n)(x - n)$,
kust $x = x + n$.
Nüüd oli aga $x = n$;
sellega $n = n + n$;
tähendab $n = 2n$,
ehk $1 = 2$.

2°. On tõsi, et $16 - 36 = 25 - 45$,
samuti, et $16 - 36 + \frac{81}{4} = 25 - 45 + \frac{81}{4}$.
Siit $\left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2$,
ehk $4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$,
ehk $4 = 5$.

**15.** 1⁰. Olgu $a < b$, nii et $a = b + c$;
siis on $a^2 = ab + ac$
ja $ab = b^2 + bc$,
kust $a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc$,
ehk $a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$,
tähendab $a(a - b - c) = b(a - b - c)$,
ehk $a = b$,

s. t. kaks võrratut arvu $a$ ja $b$ on võrdsed.

2⁰. Olgu $a$ ja $b$ mingi kaks arvu ja olgu $a + b = 2c$;
siis on $(a + b)(a - b) = 2c(a - b)$,
ehk $a^2 - b^2 = 2ac - 2cb$,
ehk teisiti $a^2 - 2ac = b^2 - 2cb$,
kust $a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2cb + c^2$,
millest järgneb $(a - c)^2 = (b - c)^2$,
s. t. $a - c = b - c$
ehk $a = b$,

s. t. iga kaks vabalt etteantud arvu $a$ ja $b$ on võrdsed.

**16.** 1⁰. Olgu $x - 1 = 2$, s. t. $x = 3$;
siis on vale, et $x + 9 = 2$,
samuti, et $(x + 9)(x - 3) = 2(x - 3)$,
ja on vale, et $x^2 + 4x - 21 = 0$;
jagades vahega $x - 7$ näeme, et
peab vale olema võrdus $x - 3 = 0$,
s. t., on vale, et $x = 3$,
aga ometi oli algusest peale $x = 3$.

2⁰. Olgu $x - 1 = 2$;
siis on $(x - 1)(x - 5) = 2(x - 5)$,
s. t. $x^2 - 6x + 5 = 2x - 10$.
Et $x - 7 = x - 7$,
siis saame lahutades $x^2 - 7x + 12 = x - 3$,
või, jagades vahega $x - 3$:
$$x - 4 = 1,$$
s. t. $x = 5$.

Asetades see arv lähtevõrdusesse, saame
$$5 - 1 = 2,$$
s. t. $2 = 4$.

**Hind 1 kr. 40 s.**