TPI

# Kõrgem matemaatika

# I

Tallinn
1969

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT
Matemaatika kateeder

# KÕRGEM MATEMAATIKA

Programm, metoodilised juhendid ja kontrolltööde ülesanded

Kaugõppeteaduskonna I kursuse üliõpilastele

Koostanud
E.Etverk, A.Lõhmus, M.Seeru, P.Kass, A.Garšnek

Tallinn
1969

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
Кафедра математики

# ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ПРОГРАММА, МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ
для студентов-заочников I курса

Составители
Э. Этверк, А. Лыхмус, М. Сеэру, П. Касс, А. Гаршнек

На эстонском языке



Vastutav toimetaja A. Jaanson

Trükkimisele antud 4.IX 69. Paber 60x84, 1/16
Trükipg. 4,5. Tingpg. 4,19. Tiraaž 1500
TPI rotaprint, Tallinn, Pikk jalg 14, tell. 341
Tasuta

## A. ÜLDISI MÄRKMEID

Käesolev õppevahend on mõeldud kõigile TPI kaugõppeteaduskonna mehaanika, elektrotehnika, energeetika ja ehituse erialade I kursuse üliõpilastele, välja arvatud raadiotehnika ja automaatika erialad.

Õppeaasta esimesel semestril tuleb programmist läbi töötada I osa (analüütiline geomeetria, vektoralgebra, determinandid ja maatriksid), teisel semestril II osa kuni mitme muutuja funktsioonideni (sissejuhatus matemaatilisse analüüsi ja diferentsiaalarvutus).

Kõrvuti teoreetilise materjali läbitöötamisega tuleb iga teema juures lahendada küllaldane hulk harjutus- ja näidisülesandeid kas õpikust või vastavatest ülesannete kogudest. Mõnede teemade läbitöötamisel mitte lasta end eksitusse viia asjaolust, et vastavat küsimust on juba käsitletud keskkoolikursuses. Kõrgemas matemaatikas käsitletakse neid küsimusi põhjalikumalt ja suurema matemaatilise rangusega, mistõttu pealiskaudne suhtumine taoliste küsimuste (teemade) läbitöötamisse on lubamatu.

Esimesel kursusel on kõrgemas matemaatikas ette nähtud neli kodust kontrolltööd. Kontrolltööde ülesanded on antud käesolevas brošüüris. Kontrolltööd tuleb teha iseseisvalt. Enne ülesannete lahendamisele asumist tuleb töötada läbi vastav teoreetiline materjal ja lahendada harjutusülesandeid. Iga üliõpilane lahendab kontrolltööks need ülesanded, mille järjekorranumber lõpeb sama numbriga, millega lõpeb tema õpinguraamatu number (näit. üliõpilane, kelle õpinguraamatu number on 691939, lahendab tööks nr.1 ülesanded 9, 19, 29, 39, 49 ja 59). Kodused kontrolltööd vormistatakse kaugõppeteaduskonna üliópilaste kontrolltööde vormistamise ja esitamise juhendis ettenähtud kujul ning saadetakse hiljemalt allpool toodud tähtaegadeks kaugóppeteaduskonna dekanaati:

kontrolltöö nr.1 . . . . 15.novembriks,
kontrolltöö nr.2 . . . . 15.detsembriks,
kontrolltöö nr.3 . . . . 15.märtsiks,
kontrolltöö nr.4 . . . . 1.maiks.

Hilisemad tööd võidakse jätta arvesse võtmata. Töödes tuleb anda ülesannete tekstid ja lahenduskäigu küllalt üksikasjaline seletus. Arvestatult tagastatud kontrolltööd tuleb hoida alles ja esitada eksamile tulles eksamineerijale.

Eksamil nõutakse programmi kõigi küsimuste teadmist ja oskust rakendada neid teadmisi ülesannete lahendamisel. Teoreemid, definitsioonid ja reeglid tuleb sõnastada arusaamisega ning täpselt, selgitavad joonised teha korralikult. Üliópilase teadmisi saab tunnistada ainult siis programmi nóuetele vastavaiks, kui kóik ülalloetletud tingimused on täidetud.

## B. KIRJANDUS *

1. Н.В. Ефимов, Краткий курс аналитической геометрии, Москва 1965.

---

*) Tekstis on loetletud kirjandus antud autori nimega ja loetelu järjekorranumbriga järgmiselt: Jefimov [1], Privalov [2], Piskunov [6], Petersen-Roos [12] jne. Eriti olulised programmi materjali läbitöötamiseks on kirjandusest [1] või [2], [6], [12] ja [4], [8], [9] ning [10] - esimesed kolm on põhiõpikud ja viimased neli konspektid kaugüliõpilastele.

2. И.И. Привалов, Аналитическая геометрия, Москва 1953-1962.

3. М.Я. Выгодский, Аналитическая геометрия, Москва 1963.

4. E.Etverk, Vektorarvutus ja ruumi analüütiline geomeetria, TPI, Tallinn 1967.

5. А. Гаршнек, Аналитичесная геометрия в векторном изложении, методические указания для студентов, ТПИ, Таллин 1963.

6. N.Piskunov, Diferentsiaal- ja integraalarvutus I, Tallinn 1965.

7. G.Kangro, Matemaatiline analüüs I, Tallinn 1965.

8. H.Roos, Funktsioonid ja nende graafikud, TPI, Tallinn 1966.

9. E.Etverk, Piirväärtus ja pidevus, TPI, Tallinn 1966.

10. H.Roos, Diferentsiaalarvutus, TPI, Tallinn 1966.

11. A.Lóhmus, Arvutuspraktikumi juhend, TPI, Tallinn 1968.

12. I.Petersen, H.Roos, Kõrgema matemaatika ülesannete kogu I, Tallinn 1962.

## C. PROGRAMM JA METOODILISED JUHENDID

Et kergendada metoodiliste juhendite kasutamist programmi materjali läbitöötamisel, on juhendid antud programmi iga üldteema (raami sees koos vastavate alateemadega) kohta eraldi vahetult vastava teema järel. Käsitletakse vaid programmi neid lõike, millede puhul esineb tavaliselt kõige rohkem raskusi.

# I. Analüütiline geomeetria. Vektoralgebra.

## Determinandid. Maatriksid

### 1. Analüütiline geomeetria tasapinnal

Rist- ja polaarkoordinaadid, põhiülesanded. Koordinaatide teisendamine.

Joone võrrandi mõiste, joone parameetrilised võrrandid. Näiteid joontest ja nende võrranditest.

Sirgjoone võrrandi mitmesugused kujud. Põhiülesanded sirgjoone kohta. Teist järku joonte kanoonilised võrrandid. Teist järku joonte põhilised omadused.

Teist järku joone üldvõrrand; selle uurimine juhul, kui võrrandis puudub korrutist xy sisaldav liige.

Alustades tööd analüütilise geomeetria kursusega, peab üliõpilane kõigepealt teadma, et analüütilises geomeetrias punkt määratakse tema koordinaatide abil, mistõttu väljend "leida punkt" tähendab ikka "leida punkti koordinaadid".

Tuleb meeles pidada, et analüütilise geomeetria ülesannete lahendamisel tuleb kõik otsitavad suurused leida vastavatest valemitest arvutamise teel, mitte aga jooniselt mõõtmise teel. Joonis on ainult vahendiks andmete ja otsitavate suuruste vaheliste seoste kergemaks leidmiseks.

Lõigu mõiste juures on oluline eristada lõigu suurust ja pikkust. Lõigu suurus on tema vastava märgiga võetud pikkus (märk määratakse vastavalt telje suunale). Lõigu suuruse mõistega on seotud nii lõigu projektsiooni mõiste kui ka punkti ristkoordinaatide mõiste.

Lõigu jaotamisel antud suhtes tuleb teada, et lõikude suhe võib olla ka negatiivne. Sel juhul jaotav punkt asetseb lõigu pikendusel, mistõttu lõik esimesest punktist jaotava punktini ja lõik jaotavast punktist teise antud punktini on vastandsuunalised.

N ä i d e 1. Leida punkt M, mis jaotab lõigu AB suhtes -3:1, kui A(3;-2) ja B(5;2).

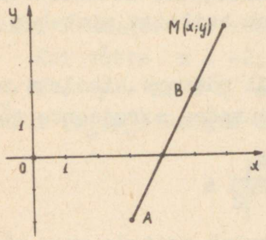
Lahendus. Et $\lambda = \frac{AM}{MB} = -3$, siis valemite

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad \text{ja} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$ kohaselt jaotava punkti M koordinaadid on

$$x = \frac{3 - 3 \cdot 5}{1 - 3} = \frac{-12}{-2} = 6,$$

$$y = \frac{-2 - 3 \cdot 2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

Seega nõutud punkt on M(6;4).




Joon. 1.

Joont xy-tasapinnal esitab üldiselt kahe tundmatuga võrrand, mis väljendab seost seda joont määravate andmete ja joone mistahes punkti koordinaatide x ja y vahel. Seejuures tuleb meeles pidada, et kahe tundmatuga võrrand esitab ainult siis (reaalset) joont, kui sel võrrandil leidub reaalseid lahendeid. Näiteks võrrand

$$x^2 + y^2 = -4$$

ei esita mingit joont (ega punkti) xy-tasapinnal, sest sel võrrandil ei ole ühtki reaalset lahendit, ja võrrand

$$x^2 + y^2 = 0$$

esitab ainult üht punkti (0;0), sest tal on ainult üks reaalne lahend (arvud 0 ja 0).

Eelnevaga seoses tuleb silmas pidada, et "leida joon" tähendab "leida joone võrrand".

Sirgjoone käsitlemisel tuleb veenduda, et ristkoordinaadistikus iga sirgjoon on esitatav esimese astme võrrandiga sirgjoone suvalise punkti koordinaatide x ja y suhtes. Samuti vastupidi: iga esimese astme võrrand tundmatute x ja y suhtes kujutab ristkoordinaadistikus tasapinnal mingit sirgjoont.

Oluline on osata siduda sirgjoone võrrandi erinevaid kujusid: normaalvõrrand, võrrand telglõikudes, võrrand tõusu ja algordinaadi järgi ning üldvõrrand. Sirgjoone tõus k avaldub üldvõrrandist $ax + by + c = 0$ seosega $k = -\frac{a}{b}$. Tuleb silmas pidada, et mitte iga sirgjoont pole võimalik esitada võrrandiga telglõikudes (kui sirgjoon läbib koordinaatide alguspunkti või on paralleelne ühega koordinaattelgedest) ega võrrandiga tõusu ja algordinaadi järgi (kui sirgjoon on paralleelne y-teljega). Normaalvõrrandiga on esitatav mistahes sirgjoon.

Kahe sirgjoone vastastikuse asendi määrame kindlaks nendevahelise nurga $\varphi$ tangensi abil, kasutades sirgjoonte tõuse $k_1$ ja $k_2$:

$$\tan \varphi = \pm \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} .$$

Kui ülesandel on mitu lahendit, tuleb esitada need kõik.

N ä i d e 2. Kolmnurk on antud tippudega A(3;5), B(-3;3) ja C(5;-8). Leida tipust C tõmmatud mediaani ristsirge, mis läbib mediaani aluspunkti.

Lahendus. Kõigepealt leiame mediaani aluspunkti D, s.o. külje AB keskpunkti:

$$x_D = \frac{3 - 3}{2} = 0, \qquad y_D = \frac{5 + 3}{2} = 4,$$

seega on D(0;4). Otsitava ristsirge saame leida antud punkti D antud tõusuga k läbiva sirgjoonena. Tõusu k leidmiseks on aga vaja teada mediaani tõusu.

Mediaani võrrand (punkte C ja D läbiv sirgjoon) on

$\frac{x - 5}{0 - 5} = \frac{y + 8}{4 + 8}$ ehk $12x + 5y - 20 = 0$, millest mediaani tõus $k_1 = -\frac{12}{5}$. Seega $k = -\frac{1}{k_1}$ (ristseisust) ehk $k = \frac{5}{12}$ ja otsitud ristsirge võrrand on

$$y - 4 = \frac{5}{12} x$$

ehk üldkujul $5x - 12y + 48 = 0$.

N ä i d e 3. Ruudu kaks külge asetsevad sirgetel $3x + 4y + 22 = 0$ ja $3x + 4y - 13 = 0$. Arvutada ruudu pindala.

Lahendus. Kuna antud sirgjoonte tõusud $k_1 = k_2 = -\frac{3}{4}$, siis on sirgjooned paralleelsed. Seega ruudu külje pikkus võrdub nende sirgjoonte vahelise kaugusega, mille leidmiseks määrame esimesel sirgjoonel vabalt ühe punkti P ja leiame selle punkti P kauguse teisest sirgjoonest.

Kui võtta $x = -2$, siis saame esimesest võrrandist $-3 \cdot 2 + 4y + 22 = 0$ ehk $4y = -16$ ja $y = -4$, seega $P(-2;-4)$. Punkti $(x_o;y_o)$ kaugus sirgjoonest $ax + by + c = 0$ on

$$d = \left| \frac{ax_o + by_o + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| .$$

Antud juhul $d = \left| \frac{3\cdot(-2) + 4(-4) - 13}{\sqrt{9 + 16}} \right| = \left| \frac{-35}{5} \right| = 7$

ja otsitud pindala

$$S = d^2 = 49.$$

N ä i d e 4. Leida sirgjoonte $6x - 2y + 5 = 0$ ja $10x - 10y + 29 = 0$ lõikepunkti läbiva ning esimese sirgjoonega nurga $\varphi = \frac{\pi}{4}$ moodustava sirgjoone võrrand.

Lahendus. Lahendame ülesande lõikepunkti leidmata, kasutades sirgjoonte kimbu võrrandit. Otsitav sirgjoon kuulub kimpu

$$6x - 2y + 5 + \lambda(10x - 10y + 29) = 0$$

ehk

$$(6 + 10\lambda)x - (2 + 10\lambda)y + 5 + 29\lambda = 0.$$

Avaldame otsitava sirgjoone tõusu:

$$k = \frac{6 + 10\lambda}{2 + 10\lambda} = \frac{3 + 5\lambda}{1 + 5\lambda} .$$

Et otsitav sirgjoon moodustab esimese sirgjoonega, mille tõus $k_1 = 3$, nurga $\frac{\pi}{4}$, siis nendevahelise nurga tangens on

$$\frac{\frac{3 + 5\lambda}{1 + 5\lambda} - 3}{1 + 3\cdot\frac{3 + 5\lambda}{1 + 5\lambda}} = \tan\frac{\pi}{4}$$

ehk

$$\frac{3 + 5\lambda - 3 - 15\lambda}{1 + 5\lambda + 9 + 15\lambda} = 1.$$

Arvutades siit $\lambda$, saame $\frac{-\lambda}{1 + 2\lambda} = 1$ ehk $\lambda = -\frac{1}{3}$,

seega otsitud sirgjoone võrrand on

$$(6 - \frac{10}{3})x - (2 - \frac{10}{3})y + (5 - \frac{29}{3}) = 0$$

ehk

$$4x + 2y - 7 = 0.$$

Teist järku joontest vaatleme esmalt ringjoont; hiljem osutub ta ellipsi erijuhtumiks, kui $a = b = R$. Peab oskama koostada ringjoone kanoonilist võrrandit.

N ä i d e 5. Leida ringjoon, mille keskpunkt asetseb punktis $C(5;4)$ ja mis lõikab sirgest $x + 2y - 3 = 0$ kõõlu pikkusega 8.

Lahendus. Otsitava ringjoone võrrand on

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = r^2,$$

kus raadius $r$ on tundmatu. Et $CD$ kui punkti $C$ kaugus antud sirgest on

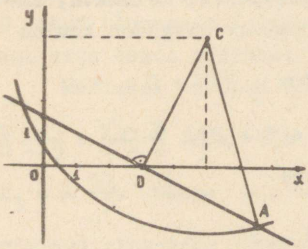
$$CD = \frac{1\cdot5 + 2\cdot4 - 3}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

ja $AD$ kui pool antud kõõlust on 4, siis Pütagorase teoreemi järgi

$$r^2 = AC^2 = DC^2 + DA^2 = 20 + 16 = 36.$$

Otsitavaks ringjoone võrrandiks on seega

$$(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 36$$



Joon. 2.

ehk

$$x^2 + y^2 - 10x - 8y + 5 = 0.$$

Teist järku joonte käsitlemisel tuleb eriti silmas pidada pooltelgede $a$ ja $b$ ning fookuste vahelise poole kauguse $c$

vahelisi seoseid ellipsi ja hüperbooli juhul. Samas on vaja osata kasutada ellipsi ja hüperbooli ekstsentrilisuse mõistet ja avaldist $\varepsilon = \frac{c}{a}$ (mitte unustada, et ellipsi puhul $\varepsilon < 1$, hüperbooli puhul aga $\varepsilon > 1$ ning et ekstsentrilisuse väärtusest $\frac{5}{2}$ järeldub esialgu ainult, et $c = 5k$ ja $a = 2k$, vt. näide 7).

Ülesannete lahendamisel tuleb sageli kasutada punkti joonel asetsemise tingimust, mille kohaselt antud punkti koordinaadid rahuldavad selle joone võrrandit. Ellipsi korral tuleb veel arvestada asjaolu, et tema fookused asetsevad pikemal teljel, mille pikkuse tähistame 2a. Seega alati on $a > b$, ning kui suuremaks osutub nimetaja selles liikmes, milles esineb $y^2$, siis asetsevad fookused y-teljel või sellega paralleelsel joone sümmeetriateljel.

N ä i d e 6. Leida ellipsi $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ pooltelјed, ekstsentrilisus ja fookuste koordinaadid.

Lahendus. Kirjutame võrrandi ümber kanoonilisel kujul $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$, millest $a = 3$ ja $b = 2$. Leiame $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$ ja $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Fookused asetsevad antud ellipsil y-teljel, seega nende koordinaadid on $F_1(0;-\sqrt{5})$ ja $F_2(0;\sqrt{5})$.

N ä i d e 7. Leida hüperbooli kanooniline võrrand, kui tema fookuste vaheline kaugus on 20 ja asümptootide võrrandid on $4y \pm 3x = 0$.

Lahendus. Asümptootide võrrandid kirjutame kujul $y = \pm \frac{3}{4}x$, millest $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ (sest üldkujul on asümptootide võrrandid $y = \pm \frac{b}{a} x$).

Et hüperbooli korral $c^2 = a^2 + b^2$ ja antud ülesandes $c = 10$ ning asümptootide tõusust $b = 3k$, $a = 4k$, siis

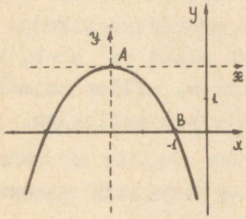
$$16k^2 + 9k^2 = 100, \text{ millest } k = 2 \text{ ja } a = 8,\ b = 6.$$

Seega hüperbooli võrrand on $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

N ä i d e 8. Leida parabooli kanooniline vórrand, kui parabooli tipp asetseb punktis A(−3;2), tema telg on paralleelne y-teljega ja parabool läbib punkti B(−1;0).

Lahendus. Punktide A ja B asendist telgede suhtes järeldub, et parabooli harud on suunatud allapoole. Viime telgede rööplükkega koordinaatide alguspunkti punkti A. Vastavad üleminekuvalemid on: $X = x + 3$, $Y = y - 2$. Uues koordinaadistikus on otsitava vórrandi üldkuju $X^2 = -2pY$. Läheme tagasi vanade koordinaatide juurde, siis

$$(x + 3)^2 = -2p(y - 2).$$




Joon. 3.

Parameetri p määramiseks kasutame asjaolu, et punkt B asetseb paraboolil, tema koordinaadid peavad rahuldama parabooli vórrandit:

$$(-1 + 3)^2 = -2p(0 - 2) \quad \text{ehk} \quad p = 1.$$

Parabooli kanooniline vórrand on

$$(x + 3)^2 = -2(y - 2).$$

Üldkujul see vórrand on $x^2 + 6x + 2y + 5 = 0$.

Kui on vaja teisendada teist järku joone vórrandit üldkujult kanoonilisele (antud juhul, kui vórrandis puudub liige korrutisega $xy$), on kóige lihtsam kasutada täisruudu eraldamise vótet. Näidet selle kohta vt. Petersen-Roosi ülesannete kogust § 3, näide VI.

---

Teoreetilise osa óppimiseks tuleb läbi töötada järgmised peatükid Jefimovist [1]: I, II, III, IV, V (välja arvatud §-d 27, 29, 33, 34, 37, 38), VI § 42; vói

Privalovist [2] peatükid I, II, III, IV §-d 1 – 7, paragrahvidest 8 ja 9 ainult ekstsentrilisus, V §-d 1 – 6.

Garśnekil [5] vastab sellele aineosale jagu Аналитическая геометрия на плоскости (lk. 3 - 70).

Ülesannete lahendamiseks kasutada Petersen-Roosi ülesannete kogu I osa [12], kus leidub ka teoreemide ja valemite kogu ning rida näiteid ülesannete lahendamisest. Iga teooriaküsimuse kohta lahendada piisavalt ülesandeid, mis valida paragrahvidest 1, 2 ja 3 (ellipsi ja hüperbooli juhtjoont käsitlemata).

Kolmanda paragrahvi ülesannetest mitte lahendada ülesandeid 231 - 243, samuti näidet XIII. Enne iseseisvale ülesannete lahendamisele asumist lahendada läbi vastava paragrahvi ees leiduvad näited.

## 2. Determinandid ja lineaarvórrandite süsteemid

Determinandid, nende póhiomadused.

Lineaarvórrandite süsteemid. Crameri reegel. Homogeensed lineaarvórrandite süsteemid, mille determinant vórdub nulliga.

Kóige üldisem determinandi elemendi tähistusviis on $a_{ik}$, kus indeksid i ja k näitavad vastavalt rida ja veergu, milles element asetseb. Nii saab kolmerealist determinanti kirjutada kujul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Mingi elemendi $a_{ik}$ miinoriks $M_{ik}$ nimetatakse seda üks järk madalamat determinanti, mis jääb, kui antud determinandist kustutada rida ja veerg, milles vastav element asub.

Nii on elemendile $a_{23}$ vastav miinor $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Elemendi $a_{ik}$ miinori $M_{ik}$ korrutamisel teguriga $(-1)^{i+k}$ saadakse selle elemendi algebraline täiend (ehk alamdeterminant) $A_{ik}$. Niisiis

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik} .$$

Näiteks $A_{23} = (-1)^5 \cdot M_{23} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ .

Determinandi oluliseks omaduseks on, et determinandi mingi rea (vói veeru) elementide ja nende alamdeterminantide korrutiste summa on võrdne determinandi D endaga:

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = D$$

või

$$a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + a_{3k}A_{3k} = D.$$

See omadus on eriti vajalik kõrgemat järku (järk suurem kui kolm) determinantide arvutamiseks, kusjuures determinanti teisendatakse eelnevalt determinandi ülejäänud omaduste põhjal nii, et võetavasse ritta (veergu) jääks ainult üks nullist erinev element.

N ä i d e 9. Arvutada determinant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -2(4 + 25 + 10 + 2) = -2 \cdot 41 = -82.$$

(Esimese veeru elementidega on liidetud neljanda veeru elemendid, siis neljanda veeru elementidega −2-kordsed teise veeru elemendid ja siis determinant arendatud kolmanda rea elementide järgi. Vastava summa ainus nullist erinev liidetav on teise veeru elemendi 1 korrutis oma alamdeterminandiga.)

Kui aga determinandi mingi ühe rea (veeru) elemente korrutada mingi teise rea (veeru) vastavate elementide alamdeterminantidega, siis korrutiste summa on null, kuna ta annab determinandi, milles kahe rea (veeru) elemendid on vastavalt võrdsed.

Lineaarvõrrandite süsteemide lahendamiseks on otstarbekas kasutada maatrikseid, mille kohta vaata viiendat teemat (lk. 21).

---

Teise teema käsitlus on Jefimovi [1] õpiku lisas (lk. 205 - 227) ja Privalovi [2] õpiku VI peatükis. Petersen-Roosi ülesannete kogust [12] lahendada paragrahvist 4 näited I, II, III, VII ja VIII ning ülesanded, välja arvatud 259 ja 262 - 267.

## 3. Vektoralgebra

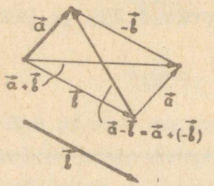
**Vektorid tasapinnal ja ruumis. Vektorite lineaarne kombinatsioon, lineaarne sõltumatus. Baas; vektori lahutamine antud baasivektorite sihilisteks komponentideks.**

**Vektorite skalaarkorrutis, vektorkorrutis ja segakorrutis. Skalaarkorrutise, vektorkorrutise ja segakorrutise põhiomadused ja avaldamine vektorite koordinaatides.**

Vektori mõistet rakendatakse laialdaselt mehaanikas, füüsikas, elektrotehnikas ja teistes rakenduslikes distsipliinides. Vektoriaalsed suurused on jõud, kiirus, kiirendus, elektromagnetiline induktsioon, elektrivälja pinge, polarisatsioonivektor jt. Seetõttu tuleb vektoralgebrale pühendada suurt tähelepanu. Samuti on vektoreid kasutades võimalik tunduvalt lihtsamalt esitada rida analüütilise geomeetria küsimusi, milles võib veenduda programmi neljandat teemat käsitledes (vaata samuti Garšnek [5]).

Kõigepealt on tarvilik kindlalt omandada vabavektori mõiste. Vektor on täielikult iseloomustatud oma sihi, suuna ja suurusega (vektori pikkus ehk moodul), kusjuures tema rakenduspunkt võib olla suvaline. Nii on kahe vektori $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ summat ning vahet (vastavalt definitsioonidele) lihtne esitada geomeetriliselt kui nendele vektoritele ehitatud rööpküliku diagonaalvektoreid (joon. 4).

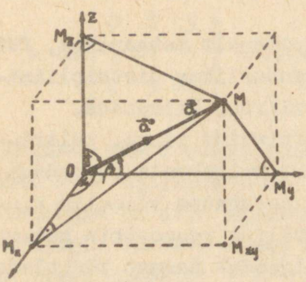
Tähtis on mõista kirjutiste $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ja $\vec{a} = \{3;-2;1\}$ samaväärsust. Liidetavaid $3\vec{i}$, $-2\vec{j}$ ja $\vec{k}$ nimeta-




Joon. 4.

takse vektori $\vec{a}$ komponentideks koordinaattelgede sihiliste ühikvektorite $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ baasil; kordajad 3, -2 ja 1 on vektori $\vec{a}$ koordinaadid, mis geomeetriliselt on vektori $\vec{a}$ projektsioonid koordinaattelgedel.

Paljudel juhtudel tuleb vektoritega opereerides vektori $\vec{a}$ asemel kasutada selle vektori suuna ühikvektorit $\vec{a}^{\,o}$. Vaatleme vektorit $\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, mille sihinurki (nurgad vektori kandja ja koordinaattelgede vahel) tähistame vastavalt $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$. Vektori $\vec{a}$ koordinaadid $a_x$, $a_y$ ja $a_z$ kui vektori $\vec{a}$ projektsioonid koordinaattelgedel avalduvad järgmiselt (vt. kolmnurki $\triangle MOM_x$, $\triangle MOM_y$, $\triangle MOM_z$ joon. 5):




Joon. 5.

$$a_x = \text{proj}_x\vec{a} = a\cos\alpha,$$
$$a_y = \text{proj}_y\vec{a} = a\cos\beta,$$
$$a_z = \text{proj}_z\vec{a} = a\cos\gamma.$$

Seega vektori $\vec{a}$ sihikoosinuste avaldised on

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a} \quad \text{ja}$$
$$\cos\gamma = \frac{a_z}{a}.$$

Võttes nüüd vektori, mille koordinaatideks on vektori $\vec{a}$ sihikoosinused, s.o. vektori $\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\} = \left\{\frac{a_x}{a}; \frac{a_y}{a}; \frac{a_z}{a}\right\} = \frac{1}{a}\{a_x; a_y; a_z\} = \frac{\vec{a}}{a} = \vec{a}^{\,o}$, näeme, et see on vektori $\vec{a}$ suuna ühikvektor $\vec{a}^{\,o}$. Kuna $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, on lihtne kontrollida, et sihikoosinused rahuldavad alati tingimust $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Vektoreid tuleb kirja panna korrektselt. Tehete puhul vektoritega peetagu rangelt silmas, et kahe vektori $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis $\vec{a}\cdot\vec{b}$ on arv $ab\cos\varphi$, vektorkorrutis $\vec{a}\times\vec{b}$ aga kolmas vektor $\vec{c}$, kusjuures avaldisega $ab\sin\varphi$ avaldub vaid selle vektori pikkus c ($\varphi$ – nurk vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ vahel). Kahe vektori skalaarkorrutise ja vektorkorrutise mõisted peavad olema kindlalt omandatud.

N ä i d e 10. Olgu antud vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ punktidega A(4;0;5) ja B(7;1;3) ning vektor $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. Leida vektorite $\vec{a}$ ja $\vec{b}$ skalaarkorrutis ja vektorkorrutis.

Lahendus. Leiame vektori $\vec{a}$ koordinaadid, lahutades vektori lõpp-punkti koordinaatidest vektori alguspunkti vastavad koordinaadid:

$$\vec{a} = \{7 - 4;\ 1 - 0;\ 3 - 5\} = \{3;1;-2\}$$

ehk

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}.$$

Vastavalt skalaar- ja vektorkorrutisele koordinaatides saame:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot3 + 1\cdot(-1) + (-2)\cdot(-1) = 9 - 1 + 2 = 10$$

ja

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \{-3;\ -3;\ -6\} = -3\{1;\ 1;\ 2\}$$

ehk

$$\vec{a}\times\vec{b} = -3(\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}).$$

---

Programmi selle osa omandamiseks tuleb läbi töötada Etverki konspektist [4] I peatükk ning Jefimovi õpikust [1] peatükid VII, VIII, IX ja X. Privalovi [2] õpikus leidub see materjal II osa peatükkides I ja II, kusjuures II peatüki paragrahv 16 on kohustuslik elektrotehnika eriala üliõpilastele, teistele soovitav. Garšneki konspektis [5] on see materjal osa Аналитическая геометрия на плоскости paragrahvides 1, 2 ja 3.

Ülesandeid lahendada Petersen-Roosi [12] ülesannete kogu viiendast paragrahvist.

## 4. Analüütiline geomeetria ruumis

Ruumi punkti ristkoordinaadid. Põhiülesanded. Koordinaattelgede paralleellüke.

Pinna võrrandi mõiste. Silinderpinna võrrand, kui pinna moodustajad on paralleelsed ühega koordinaattelgedest. Ruumijoone võrrand, ruumijoone parameetrilised võrrandid. Pinna parameetrilised võrrandid. Näited.

Tasapinna võrrand vektor- ja koordinaatkujul. Ruumisirge võrrandid vektor- ja koordinaatkujul. Põhiülesanded tasapinna ja sirgjoone kohta.

Teist järku pindade kanoonilised võrrandid.

Teist järku pinna üldvõrrandi mõiste. Üldvõrrandi uurimine juhul, kui võrrandis puuduvad liikmed korrutistega xy, xz ja yz.

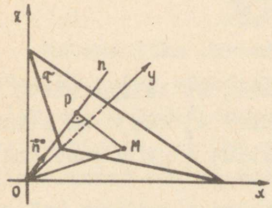
Kõigepealt tuleb kindlalt meelde jätta, et mistahes lineaarne võrrand ühe, kahe või kolme tundmatuga, kui viimased tähendavad ruumipunkti koordinaate, esitab ruumi analüütilises geomeetrias mingit tasapinda, ja vastupidi, iga tasapinna võrrandiks on mingi lineaarne võrrand. Nii esitab võrrand $ax + by + c = 0$ ruumigeomeetrias z-teljega paralleelset tasapinda, mitte aga sirgjoont. Sirgjoont võib ruumis analüütiliselt esitada kas võrrandiga vektorkujul, kanooniliste võrranditega, parameetriliste võrranditega või nende tasapindade võrrandite paariga, millede lõikejooneks on vaadeldav sirgjoon.

Ruumigeomeetria analüütilisel käsitlemisel tuleb pidevalt kasutada vektoralgebrat. Näitame, kuidas viimase abil on lihtne tuletada tasapinna võrrandit normaalkujul. Selleks kasutame ühe vektori projektsiooni teise vektori sihil. Vektoralgebrast on teada, et vektori $\vec{a}$ projektsioon vektori $\vec{b}$ sihil avaldub kujul

$$\mathrm{proj}_b\, \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}^o .$$

Olgu antud tasapind $\tau$, millele tõmbame koordinaatide alguspunktist ristsirge ehk normaali n. Tähistades nurgad, mille normaal moodustab koordinaattelgedega, tähtedega $\alpha$, $\beta$ ja $\gamma$, saame normaalisihilise ühikvektori kujul $\vec{n}^o = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$. Loeme veel teadaolevaks normaali lóigu pikkuse koordinaatide alguspunktist tasapinnani $\tau$:

$$|OP| = p.$$




Joon. 6.

Vótame tasapinnal $\tau$ vabalt ühe punkti $M(x;y;z)$, mille kohavektor on $\overrightarrow{OM} = \{x;y;z\}$, ning vaatleme vektori $\overrightarrow{OM}$ projektsiooni normaalil. Kóikide tasapinna $\tau$ punktide (ja ainult nende) projektsiooniks normaalil on P, seega

$$\text{proj}_n \overrightarrow{OM} = p \quad \text{ehk} \quad \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n}^o = p,$$

mis koordinaatide kaudu väljakirjutatuna annabki tasapinna vórrandi normaalkujul:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

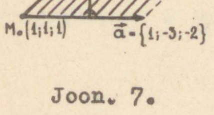
(Analoogiliselt saab tuletada ka sirgjoone normaalvórrandi tasapinnal.)

Eriti laialdaselt rakendatakse kahe vektori vektorkorrutist. Vaatleme siin näitena ülesannet punkti ja sirgjoone vahelise kauguse leidmisest ruumis. Selle ülesande lahenduskäigus lahendame sisuliselt ka rööpküliku pindala leidmise ülesande.

N ä i d e 11. Leida punkti A(1;2;3) kaugus sirgjoonest

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{-2}.$$

<u>Lahendus</u>. Otsitava kauguse leiame rööpküliku kórgusena selle rööpküliku pindala ja aluse kaudu:




Joon. 7.

$$d = \frac{S}{a} = \frac{|\overrightarrow{M_oA} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

$$\overrightarrow{M_oA} = \{0;1;2\},$$

$$\overrightarrow{M_oA} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \{4;2;-1\}$$ ja seega punkti A kaugus antud sirgest

$$d = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2}}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \sqrt{1,5}.$$

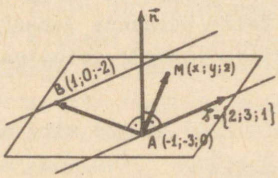
Seda ülesannet saab lahendada ka nii, et leiame antud sirgjoonega ristuva tasapinna läbi punkti A, seejärel sirgjoone ja tasapinna lóikepunkti B. Punktide A ja B vaheline kaugus ongi otsitavaks kauguseks.

N ä i d e 12. Leida paralleelseid sirgeid

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{1} \quad \text{ja} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$$

läbiva tasapinna vórrand.

Lahendus. Nóutud vórrandi vóib saada lähtudes asjaolust, et tasapind läbib ükskóik kumma sirgjoone antud punkti ja on risti nende punktide vahelise vektori ning sirgjoonte sihivektori vektorkorrutisega.




Joon. 8.

Veel lihtsam on aga vórrandit kirja panna lähtudes tingimusest, et sirgjoonte antud punkte ühendav vektor $\overrightarrow{AB} = \{2;3;-2\}$, sirgjoonte sihivektor $\vec{s}$ ja vektor ühe sirgjoone antud punktist tasapinna suvalise punktini M, s.o. $\overrightarrow{AM} = \{x+1;\ y+3;\ z\}$ peavad olema komplanaarsed.

Järelikult

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ehk

$$(x+1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (y+3)\left(-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) + z\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

millest

$$9(x+1) - 6(y+3) = 0$$

ja lõpuks

$$3x - 2y - 3 = 0.$$

Matemaatika rakendustes kui ka kõrgema matemaatika järgnevas kursuses etendavad suurt osa teist järku silinderpinnad, mille moodustajad on paralleelsed ühe koordinaatteljega. Tuleb meeles pidada, et kui pinna võrrandis puudub üks koordinaat, siis võrrand esitab silinderpinda, mille moodustajad on paralleelsed puuduvale koordinaadile vastava teljega.

Silinderpindade võrrandeid ei tohi segi ajada teist järku joonte võrranditega tasapinnal. Nii esitab võrrand $y^2 = -6x$ paraboolset silindrit, mille moodustajad on paralleelsed z-teljega ja juhtjooneks on parabool

$$\begin{cases} y^2 = -6x, \\ z \;\; = 0 \end{cases}$$

(kui antud silindri ja xy-tasapinna lõikejoon).

Uurides II järku pindade kuju lõigete meetodil, on tarvis peale nende pindade, mida on uuritud raamatus, uurida veel teisi, konkreetse võrrandiga antud pindu. Ilma selleta ei ole võimalik skitseerida võrrandiga antud pinda, kuid see oskus on hilisemates rakendustes väga oluline.

---

Materjali selle teema kohta leidub Jefimovi [1] õpiku peatükkides XI, XII ja XIII või Privalovi [2] õpiku II osa peatükkides III, IV, V ja VI (välja arvatud §-d 2 ja 3) ning Etverki [4] konspekti II peatükis. Garšneki [5] konspektis on see teema osas Аналитическая геометрия в трехмерном пространстве. Ülesandeid leidub Petersen-Roosi [12] ülesannete kogu paragrahvides 6 ja 7.

## 5. Maatriksid

Maatriksi mõiste, tehted maatriksitega. Maatriksi astak. Ruutmaatriksid. Ruutmaatriksi omavektorid ja omaväärtused, tema karakteristlik võrrand.

Lineaarteisendused lineaarses vektorruumis, nende teisenduste vektoriaal-maatrikskuju; rakendamine ristkoordinaadistiku teisendamisel.

Maatriksarvutust kasutatakse paljudes distsipliinides (elektrotehnika teoreetilised alused, raadiotehnika jm.). Alustades tutvumist maatriksitega, tuleb korrata determinantide teooriat.

Ka võrrandisüsteemide lahendamiseks on otstarbekas rakendada maatriksarvutust. Näit. võimaldab Gaussi meetod lahendada nii homogeenseid kui ka mittehomogeenseid süsteeme, sõltumata võrrandite ja tundmatute arvust.(Vt. Lõhmus [11], II peatükk.)

Maatriksiks nimetatakse ristküliku- (erijuhul ruudu-) kujulist tabelit, mille elementidena vaatleme võrrandisüsteemi tundmatute kordajaid. Lahendamise idee Gaussi meetodi korral seisneb selles, et maatriks teisendatakse diagonaalkujule, s.t. kõik elemendid allpool peadiagonaali (vasakust ülanurgast algav diagonaal) teisendatakse nullideks. Maatriksi teisendamine toimub mõnevõrra analoogiliselt determinandi teisendamisega.

On lubatud:

$1^{\circ}$ maatriksi kahe rea ümberpaigutamine,

$2^{\circ}$ maatriksi ühe rea kõigi elementide korrutamine või jagamine ühe ja sama nullist erineva arvuga,

$3^{\circ}$ maatriksi ühe rea elementidega teise rea vastavate elementide ühe ja sama arvu kordsete liitmine.

Kui lineaarvõrrandite süsteemi maatriks on teisendatud diagonaalkujule, siis kirjutame süsteemi uuesti välja. Saadud süsteemi lahendamine järkjärgulise asendamise teel ei valmista enam mingeid raskusi.

Tuleb peatuda veel mõningatel momentidel, mis võivad esineda maatriksi teisendamisel ja süsteemi lahendamisel.

Kui maatriksi teisendamisel üks rida muutub nullideks, siis tähendab see seda, et vastav võrrand süsteemis on ülejäänute lineaarseks kombinatsiooniks (s.t. on saadud nendest võrranditest võrrandeid mingite konstantidega korrutades ja omavahel liites). Selline võrrand lahendi määramisel mingit osa ei etenda.

Kui diagonaalmaatriksi järgi uuesti süsteemi välja kirjutades selgub, et viimane rida annab võrrandi

$$0 \cdot x_i = b_k,$$

kus $b_k \neq 0$, siis süsteem on vastuoluline ja temal lahend puudub.

Kui diagonaalmaatriksi järgi uuesti süsteemi välja kirjutades selgub, et võrrandeid on vähem kui tundmatuid, siis jääb osa tundmatuid vabaks (võime tähistada neid $c_i$) ja süsteemil on lõpmata palju lahendeid, mis avalduvad konstantide $c_i$ kaudu.

Lahendades Gaussi meetodil homogeenseid süsteeme, me vabaliikmeid, s.t. nullveergu, maatriksisse ei kanna. Kui maatriksi viimisel diagonaalkujule võrrandite arv jääb võrdseks tundmatute arvuga, siis on süsteemil ainus lahend – null-lahend. Kui aga võrrandite arv on väiksem tundmatute arvust, siis on süsteemil lahendeid lõpmata palju.

N ä i d e 13. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Maatriksi teisendamise huvides kirjutame esimese võrrandi (kus $x_1$ kordaja pole 1) kõige viimaseks. Süsteemi laiendatud maatriks on siis

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \end{matrix}\right\|.$$

Maatriksi elementide nulliks teisendamist alustatakse alati esimesest veerust, edasi teisendatakse nullideks teise veeru vastavad elemendid jne. Selleks teeme tehteid ridadega.

Esimese veeru elementide nullideks teisendamiseks teeme järgmised tehted:

(III rida) - (I rida),
(IV rida) - 2(I rida).

Sellega saame maatriksi:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & -7 & -2 \end{matrix}\right\|.$$

II veeru elementide nullideks teisendamiseks teeme tehted:

(III rida) - (II rida),
(IV rida) - (III rida).

Saame

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Jagame kolmanda rea elemendid (-9)-ga ja jätame nullide rea kirjutamata. Nullide rida ütleb seda, et süsteemi esimene võrrand on ülejäänute lineaarne kombinatsioon ja lahendamisel mingit osa ei etenda. Tõepoolest tähelepanelikumal vaatlemisel leiame, et I võrrandi saab II ja IV võrrandi vastavate poolte liitmisel.

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|.$$

Kirjutame diagonaalmaatriksi järgi uuesti süsteemi:

$$\begin{cases} x_1 + \qquad 5x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Nagu näeme, on süsteemis võrrandeid vähem kui tundmatuid. Järelikult on süsteemil lõpmata palju lahendeid. Jätame tundmatu $x_4$ vabaks, võttes $x_4 = C$, kus C on mis tahes konstant, ja lahendame viimase süsteemi. Lahendiks saame:

$$x_1 = 2C - 3, \; x_2 = 5, \; x_3 = 1 - C, \; x_4 = C.$$

Võrrandisüsteemide lahenduvuse üle saab otsustada süsteemi maatriksi ja laiendatud maatriksi astakute võrdlemise teel (lahenduvuseks peavad need astakud olema võrdsed). Maatriksi astaku mõiste selgitamiseks vaata Petersen-Roos [12] lk.59 - 60 § 4 ning sama paragrahvi näiteid IV ja V.

Elektronarvutite rakendamise seisukohalt on oluline lineaarvõrrandite süsteemi lahendamine maatrikskujul.

Olgu antud lineaarvõrrandite süsteem

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{cases}$$

Kasutades maatrikseid

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} \quad \text{ja} \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix},$$

saame süsteemi kirjutada maatrikskujul järgmiselt

$$AX = B.$$

Eeldusel, et maatriksi A determinant $D \neq 0$, saame leida maatriksi A pöördmaatriksi $A^{-1}$ valemi järgi

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{Vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Vmatrix},$$

kus $A_{ik}$ on elemendile $a_{ik}$ vastav alamdeterminant. Korrutame võrduse $AX = B$ mõlemaid pooli teguriga $A^{-1}$:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Et $A^{-1}A = E$, kus $E$ on ühikmaatriks, siis

$$X = A^{-1}B.$$

Seega tuleb lineaarvõrrandite süsteemi lahendamiseks maatrikskujul leida süsteemi maatriksi $A$ pöördmaatriks $A^{-1}$ ja korrutada sellega vabaliikmete veeru maatriks $B$ vasakult.

N ä i d e 14. Leida tasapindade

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ 5x + 4y + 3z &= 22, \\ 10x + 5y + z &= 23 \end{aligned}$$

lõikepunkti koordinaadid.

<u>Lahendus</u>. Lahendame süsteemi maatrikskujul. Kirjutame maatriksid

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 6 \\ 22 \\ 23 \end{Vmatrix}.$$

Arvutame maatriksi $A$ determinandi $D$ ja pöördmaatriksi $A^{-1}$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 10 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A^{-1} = \begin{Vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Kasutades seost $X = A^{-1}B$, saame

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 11 & -4 & 1 \\ -25 & 9 & -2 \\ 15 & -5 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6 \\ 22 \\ 23 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 11\cdot 6 - 4\cdot 22 + 1\cdot 23 \\ -25\cdot 6 + 9\cdot 22 - 2\cdot 23 \\ 15\cdot 6 - 5\cdot 22 + 1\cdot 23 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Vmatrix} .$$

Seega kolme tasapinna lóikepunkt on (1;2;3).
Lineaarteisenduste kohta vaatame järgmist näidet.

N ä i d e 15. Antud on lineaarteisendus

$$\begin{aligned} x' &= 3x - y - z \\ y' &= 2x + y + 2z \\ z' &= x + 3y - 2z. \end{aligned}$$

Leida pöördteisendus.

Lahendus. Kirjutame antud lineaarteisenduse sümboolsel maatrikskujul

$$X' = AX,$$

kus

$$A = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{Vmatrix}, \quad X' = \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix} \quad \text{ja} \quad X = \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} .$$

Arvutame maatriksi A determinandi

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -35 \ (\neq 0).$$

Leiame maatriksi A pöördmaatriksi

$$A^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{8}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{35} \\ -\frac{6}{35} & \frac{1}{7} & \frac{8}{35} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{Vmatrix} .$$

Korrutades vórduse $X' = AX$ mólemaid pooli pöördmaatriksiga $A^{-1}$, saame:

$$A^{-1}X' = A^{-1}AX$$

ehk

$$X = A^{-1}X'.$$

Antud lineaarteisenduse korral

$$\begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{8}{35} & \frac{1}{7} & \frac{1}{35} \\ -\frac{6}{35} & \frac{1}{7} & \frac{8}{35} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{Vmatrix},$$

millest saame otsitava pöördteisenduse:

$$x = \frac{8}{35}x' + \frac{1}{7}y' + \frac{1}{35}z'$$

$$y = -\frac{6}{35}x' + \frac{1}{7}y' + \frac{8}{35}z'$$

$$z = -\frac{1}{7}x' + \frac{2}{7}y' - \frac{1}{7}z'.$$

---

Maatriksarvutuse kohta leidub üksikasjaline käsitlus Võgodski [3] õpikus. Maatriksi teisendamise ja Gaussi skeemi rakendamise kohta vaata kirjanduse loetelus [11] all nimetatud juhendist teist peatükki ja juba eespool märgitud neljandat paragrahvi Petersen-Roosi ülesannete kogust [12].

Viimati mainitust lahendada näited IV, V ja VI ning ülesannetest 159 - 267. Ülesannete 260 ja 261 lahendamiseks kasutada pöördmaatriksit vastavalt näitele 14.

## II. Sissejuhatus matemaatilisse analüüsi.

### Diferentsiaalarvutus

#### 6. Ühe muutuja funktsioon

Reaalmuutuja funktsioon, selle määramispiirkond. Funktsiooni määramisviise. Funktsiooni geomeetriline kujutamine. Funktsiooni graafik, selle konstrueerimine paralleellükke ja mõõtühiku muutmise teel. Elementaarfunktsioonid.

Arvujada piirväärtus. Funktsiooni piirväärtus. Põhiteoreemid piirväärtuste arvutamiseks. Lõpmatult vähenevad ja lõpmatult suurenevad suurused. Piirväärtuse olemasolu tunnus: 1) monotoonse jada puhul, 2) monotoonse funktsiooni puhul (ilma tõestuseta).

Piirväärtused $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ ja $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$.

Lõpmatult vähenevate suuruste võrdlemine. Ekvivalentsed lõpmatult vähenevad suurused.

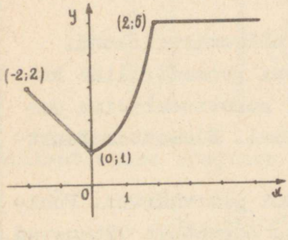
Funktsiooni pidevus punktis ja vahemikus. Tehted pidevate funktsioonidega. Kinnises vahemikus pidevate funktsioonide omadusi (ilma tõestuseta).

Funktsiooni mõiste on matemaatilise analüüsi põhimõiste, mis tehtagu endale hästi selgeks. Alati pole võimalik kahe suuruse vahelist sõltuvust väljendada meile tuntud matemaatiliste tehete abil. See ei tähenda aga, et nende vahel sõltuvus puudub. Sageli võib funktsioon oma määramispiirkonna erinevates osades olla esitatud erinevate avaldistega. Nii on funktsioon

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & \text{kui } -2 \leq x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{kui } 0 < x < 2, \\ 5, & \text{kui } 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

esitatud kolme erineva avaldisega oma määramispiirkonnas $-2 \leq x < +\infty$ ehk poolkinnises vahemikus $[-2, +\infty)$. Tegemist on siin aga üheainsa funktsiooniga, mille graafik on joonisel 9 ja mille muutumispiirkonnaks ehk väärtuste hulgaks on kinnine vahemik $1 \leq y \leq 5$ ehk $[1, 5]$.

Asjaolu, et punkt (reaalarv) x kuulub lahtisesse vahemikku ehk lihtsalt vahemikku, pannakse üldjuhul kirja kas kujul $x \in (a,b)$ või võrratuste abil $a < x < b$. Kinnise vahemiku ehk lõigu korral $x \in [a,b]$ või $a \leq x \leq b$.




Joon. 9.

Nii funktsiooni määramispiirkonna (näites $-2 \leq x < +\infty$) kui ka väärtuste hulga (näites $1 \leq y \leq 5$) moodustavad nimetud arvud. Seda tuleb eriti silmas pidada trigonomeetriliste funktsioonide korral. Näiteks mõistetakse funktsiooni $\sin x$ puhul argumendi x all nurga suurust radiaanmõõdus, mitte kraadides. Seega on funktsiooni $f(x) = \sin x$ määramispiirkonnaks kõigi reaalarvude hulk $-\infty < x < +\infty$ ehk $(-\infty, +\infty)$, funktsiooni väärtuste hulgaks on aga lõik $[-1,1]$, sest $-1 \leq \sin x \leq 1$ ehk lühidalt $|\sin x| \leq 1$.

Kuna paljudes trigonomeetrilistes tabelites on nurkade suurused antud kraadides, siis selgitame meeldetuletuseks trigonomeetrilise funktsiooni väärtuse arvutamist radiaanmõõdus antud argumendi väärtuse puhul järgmise näitega.

N ä i d e 16. Leida $\sin x$, kui $x = 5$.

Lahendus. Teisendame kõigepealt radiaanmõõdus antud nurga kraadimõõtu: $360^\circ$ on radiaanides $2\pi \approx 2 \cdot 3{,}1416 \approx 6{,}2832$; $90^\circ$ on radiaanides $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$; $270^\circ$ on radiaanides $3 \cdot \frac{\pi}{2} \approx$ $\approx 3 \cdot 1{,}5708 \approx 4{,}7124$.

Et $4{,}7124 < 5 < 6{,}2832$, siis on antud nurk neljanda veerandi nurk ja erineb täispöördest $6{,}2832 - 5 = 1{,}2832$ võrra.

Koolis kasutusel olevatest V.M.Bradise tabelitest (XVI. Radiaanmõõt) leiame, et nurk 1,2832 on $73^\circ 31'$. Seega

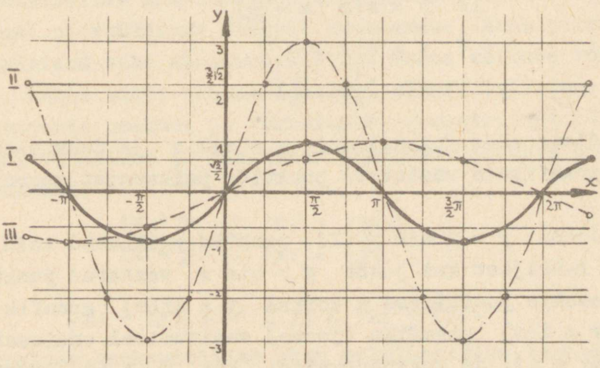
$$\sin 5 = \sin (360^\circ - 73^\circ 31') = -\sin 73^\circ 31' = -0{,}9589.$$

Üheks oluliseks küsimuseks funktsioonide käsitlemisel on funktsiooni graafiku joonestamine. Siin on vaja selgitada, kas vaadeldav funktsioon on paarisfunktsioon, s.t. kas $f(-x) = f(x)$ (sel juhul on tema graafik sümmeetriline ordinaattelje suhtes), või paaritufunktsioon, s.t. $f(-x) = -f(x)$ (sel juhul on tema graafik sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes). Funktsioonide rakenduslikust seisukohast pakuvad erilist huvi nn. perioodilised funktsioonid, mis $x$ iga väärtuse puhul täidavad tingimust $f(x) = f(x + c)$, kus väikseimat sellist arvu $c > 0$ nimetatakse perioodiks. Perioodilised funktsioonid kirjeldavad näiteks mitmesuguseid võnkumisi ja nende tüüpilisteks näideteks on trigonomeetrilised funktsioonid, eelkõige $\sin x$ ja $\cos x$.

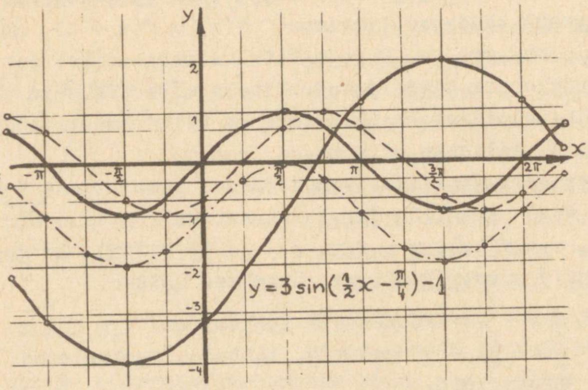
Funktsiooni graafiku joonestamisel peab oskama funktsiooni $y = f(x)$ graafiku järgi joonestada funktsioonide $y = Af(x)$, $y = f(kx)$, $y = f(x-a)$ ja $y = f(x)+b$ graafikuid. Vaatleme neid konstruktsioone järgmises näites.

N ä i d e 17. Joonestada funktsiooni $y = 3\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}) - 1$ graafik, lähtudes funktsiooni $y = \sin x$ graafikust.

Lahendus. Vaadeldava näite korral $A = 3$, $k = \frac{1}{2}$, $a = \frac{\pi}{4}$ ja $b = -1$. Vaatleme algul eraldi ülaltoodud nelja juhtu ja liidame nad lõpuks nõutud graafikuks.




Joon. 10.




Joon. 11.

I $y = \sin x$,

II $y = 3 \sin x$,

III $y = \sin \frac{1}{2}x$,

IV $y = \sin (x - \frac{\pi}{4})$,

V $y = \sin x - 1$,

$y = 3 \sin (\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}) - 1.$

Võrdleme nüüd funktsiooni $y = \sin x$ ja funktsioonide II – V graafikute vastavate punktide paiknemist koordinaadistikus.

a. Joone $y = 3 \sin x$ (II) punktid paiknevad kolm korda kaugemal x-teljest kui joone $y = \sin x$ vastavad punktid. Seega saadakse positiivse A korral $y = Af(x)$ graafik funktsiooni $y = f(x)$ graafiku (joone) venitamisel ordinaattelje sihis, kui $A > 1$, ja kokkusurumisel, kui $0 < A < 1$ (vastavalt A korda). Funktsiooni $y = -Af(x)$ graafik on sümmeetriline funktsiooni $y = Af(x)$ graafikuga x-telje suhtes.

b. Joone $y = \sin \frac{1}{2}x$ (III) punktid paiknevad y-teljest kaks korda kaugemal kui joone $y = \sin x$ vastavad punktid.

Seega saadakse funktsiooni $y = f(kx)$ graafik joone $y = f(x)$ venitamisel abstsisstelje sihis, kui $0 < k < 1$, ja kokkusurumisel, kui $k > 1$ (vastavalt k korda). Funktsioonide $y = f(kx)$ ja $y = f(-kx)$ graafikud on sümmeetrilised y-telje suhtes.

c. Joone $y = \sin (x - \frac{\pi}{4})$ (IV) punktid paiknevad joone $y = \sin x$ vastavatest punktidest $\frac{\pi}{4}$ ühiku vórra paremal. Seega saadakse funktsiooni $y = f(x - a)$ graafik joone $y = f(x)$ x-telje sihilisel nihutamisel a ühiku vórra paremale, kui $a > 0$, ja vasakule, kui $a < 0$.

d. Joone $y = \sin x - 1$ (V) punktid paiknevad joone $y = \sin x$ vastavatest punktidest ühe ühiku vórra allpool. Seega saadakse funktsiooni $y = f(x) + b$ graafik joone $y = f(x)$ nihutamisel y-telje sihis b ühiku vórra üles, kui $b > 0$, ja alla, kui $b < 0$.

Funktsiooni $y = 3 \sin (\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}) - 1$ graafik saadakse $y = \sin x$ graafikust kóike seda arvesse vóttes.

Perioodilise funktsiooni $y = A \sin (\omega t + \varphi_0)$ (harmooniline vónkumine, kus argumendiks on aeg t) korral nimetame suurust A amplituudiks, $\omega$ sageduseks ja $\varphi_0$ algfaasiks.

Matemaatilise analüüsi edasine óppimine ei ole móeldav funktsiooni piirväärtuse móistet omandamata. Kuna piirväärtus on defineeritud vahe absoluutväärtuse kohta käivate vórratuste kaudu, tuleb hästi teada reaalarvu absoluutväärtuse móistet, vórratuste omadusi ja vórratuste geomeetrilist tólgendust.

Eriti vajalikud on järgmised absoluutväärtuste kohta käivad vórratused:

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$
$$|x - y| \geq |x| - |y|$$

ja

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Vórratuse geomeetrilise sisu selgitamiseks vaatleme järgmist näidet.

N ä i d e 18. Mida esitab geomeetriliselt vórratus $|x - 5| < 3$?

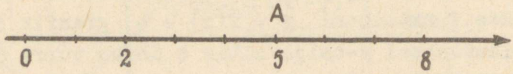
Lahendus. Arvu absoluutväärtuse kohta käiva võrratuse võib alati asendada selle arvu enda kohta käiva kahe võrratusega

$$-3 < x - 5 < 3.$$

Liites võrratuste kõikide pooltega arvu 5, jäävad võrratused kehtima:

$$-3 + 5 < x - 5 + 5 < 3 + 5 \quad \text{ehk} \quad 2 < x < 8;$$

tulemust saab graafiliselt kujutada x-telje punktide hulgana punktide 2 ja 8 vahel:




Joon. 12.

Seega esitab võrratus $|x - 5| < 3$ arvteljel lahtist vahemikku (2,8), mis ulatub arvule 5 vastavast punktist A kolme ühiku võrra vasakule ja paremale, kusjuures vahemiku otspunktid 2 ja 8 võrratust ei rahulda. Öeldakse ka, et võrratus $|x - 5| < 3$ määrab punkti 5 ümbruse raadiusega 3.

Kui peale antud võrratuse peaks kehtima veel võrratus $0 < |x - 5|$, siis on välja arvatud ka vahemiku keskpunkt A, sest viimast võrratust rahuldavad suuruse x kõik väärtused peale väärtuse $x = 5$, mille korral $|x - 5| = 0$.

Funktsiooni piirväärtuse paremaks tundmaõppimiseks on kasulik eelnevalt vaadelda arvujada piirväärtust.

N ä i d e 19. Leida arvujada $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n+1}, \ldots$ piirväärtus. Missugusest n väärtusest alates erinevad jada liikmed piirväärtusest vähem kui $10^{-4}$ võrra?

Lahendus. On selge, et iga n väärtuse korral on $\frac{n-1}{n+1} < 1$, kuid võttes n väärtused küllalt suured, erinevad jada vastavad liikmed arvust 1 küllalt vähe (vähem kui kuitahes väikese etteantud positiivse arvu $\varepsilon > 0$ võrra, kusjuures meie näites $\varepsilon = 10^{-4}$). Seda asjaolu väljendatakse võrdusega

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} = 1$$

ehk antud arvujada piirväärtuseks on arv 1.

Missugusest n väärtusest alates erinevad jada liikmed arvust 1 vähem kui $10^{-4}$ võrra?

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| < 10^{-4},$$

$$\left|\frac{n-1-n-1}{n+1}\right| < 10^{-4};$$

kuna $n>0$, siis $\frac{2}{n+1} < 10^{-4}$, millest

$$n + 1 > \frac{2}{10^{-4}}$$

ehk

$$n > 20000 - 1,$$
$$n > 19999.$$

Seega on nõutud tingimus täidetud alates 20000-ndast liikmest.

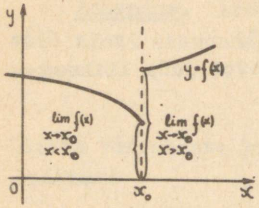
Funktsiooni f(x) piirväärtuse $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ korral ei ole oluline, et $x_0$ kuuluks funktsiooni määramispiirkonda, tema ümbrus (nii vasak- kui parempoolne) peab aga kuuluma funktsiooni määramispiirkonda, sest suuruse x väärtuste lähenemine arvule $x_0$ võib toimuda nii vasakult kui ka paremalt, s.o. kasvades või kahanedes. Kui arv $x_0$ aga kuulub f(x) määramispiirkonda, pole omakorda oluline, kas $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ või $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq A$, sest piirväärtuse määramisel tulevad kõne alla ainult need argumendi väärtused, mis erinevad väärtusest $x_0$ (seejuures kuitahes vähe).

Piirväärtuse $\lim_{x\to x_0} f(x)$ olemasolu korral pole oluline, kas $x\to x_0$ vasakult või paremalt poolt ($x<x_0$ või $x>x_0$). Kui aga piirväärtuse määramisel argument võib omandada ainult väärtusi $x<x_0$ või $x>x_0$, kõneldakse ühepoolsest piirväärtusest (vastavalt vasak- või parempoolsest piirväärtusest, joonis 13).

Funktsioonil on piirväärtus $\lim_{x \to x_0} f(x)$ kohal $x_0$ siis ja ainult siis, kui tal on sellel kohal mólemapoolsed piirväärtused, kusjuures need piirväärtused on vórdsed:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

See mólemapoolne ühine piirväärtus ongi $\lim_{x \to x_0} f(x)$.




Joon. 13.

Vasakpoolset piirväärtust tähistatakse tavaliselt kujul $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ ja parempoolset kujul $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$. Joonisel 13 esitatud funktsioonil puudub piirväärtus kohal $x_0$, see punkt $x = x_0$ on funktsiooni hüppekohaks.

Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse pidevaks kohal $x_0$, kui $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Kui funktsioon $f(x)$ ei ole kohal $x_0$ pidev, siis nimetatakse punkti $x = x_0$ antud funktsiooni katkevuskohaks (joon. 13). Piskunovi [6] ópikus nimetatakse kórvaldatavat katkevuskohta ja hüppekohta ühiselt I liiki katkevuskohaks.

Pidevuse móistel on oluline koht diferentsiaal- ja integraalarvutuses. Seetóttu tuleb pidevuse kohta lahendada hulgaliselt näiteid nii Petersen-Roosi ülesannete kogust [12] kui ka Piskunovi [6] õpikust.

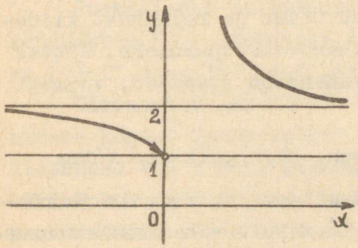
N ä i d e 20. Leida funktsiooni $y = 1 + 2^{\frac{1}{x}}$ katkevuspunktid ja määrata nende liik.

Lahendus. Punktis $x = 0$ pole vaadeldav funktsioon määratud, see on ainus katkevuskoht. Leiame ühepoolsed piirväärtused, kui $x \to 0$ vasakult ($x < 0$ ehk $x \to -0$) ja paremalt ($x > 0$ ehk $x \to +0$) poolt.

$$\lim_{x \to -0} (1 + 2^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \to +0} \left(1 + \frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}\right)$$ (sest $x < 0$ puhul on astendaja $\frac{1}{x}$ negatiivne),

seega

$$\lim_{x \to -0} (1 + 2^{\frac{1}{x}}) = 1 + \frac{1}{2^{\infty}} = 1.$$




Joon. 14.

Kui $x \to +0$, siis $x > 0$, seega astendaja $\frac{1}{x}$ on positiivne ning

$$\lim_{x \to +0} (1 + 2^{\frac{1}{x}}) = 1 + 2^{\infty} = \infty.$$

Järelikult on punktis $x = 0$ vaadeldud funktsiooni lõpmatuskoht (joon. 14).

Lõpmatult vähenevate suuruste korral tuleb teada suurusjärgu mõistet ja lõpmatult vähenevate suuruste ekvivalentsuse mõistet. Olulised on järgmised ekvivalentsete lõpmatult vähenevate suuruste paarid: $\sin x$ ja $x$, $\tan x$ ja $x$ ning $\ln(1 + x)$ ja $x$, kui $x \to 0$ (Piskunov [6], II ptk. § 6, selle paragrahvi näide 1 ja näide 6 paragrahvist 9).

Lõpmatult vähenevate suuruste järgu selgitamiseks vaatleme ühte näidet.

N ä i d e 21. Kuubi serva pikkus on x. Näidata, et serva pikkuse suurenemisel $\Delta x$ võrra ruumala suureneb ligikaudu $3x^2 \Delta x$ võrra.

Lahendus. Ruumala suurenemine avaldub kujul

$$\Delta V = (x + \Delta x)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis $3x^2 \Delta x \to 0$, $3x(\Delta x)^2 \to 0$ ja $(\Delta x)^3 \to 0$, kusjuures

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x(\Delta x)^2}{3x^2 \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x} = 0$$

ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^3}{3x(\Delta x)^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{3x} = 0.$$

Seega on kõik kolm liidetavat lõpmatult vähenevad suurused, kui $\Delta x \to 0$, sealjuures on aga teine liidetav esimese suhtes ja kolmas liidetav teise suhtes kõrgemat järku lõpmatult vähenev suurus. Seetõttu nimetatakse esimest liidetavat esimest järku, teist liidetavat teist ja kolmandat liidetavat kolmandat järku lõpmatult vähenevaks suuruseks. Jättes kõrvale kõrgemat järku lõpmatult vähenevad suurused, võimegi võtta $\Delta V \approx 3x^2 \Delta x$.

Kui oleks vajalik suurem täpsus, siis peaksime võtma $\Delta V \approx 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2$. Sel juhul ütleme, et ruumala juurdekasv on määratud kuni teist järku lõpmatult vähenevate suurusteni.

Lõpmatult vähenevatel suurustel on terve rida olulisi omadusi. Eriti vajalik piirväärtuste käsitlemisel ja ka diferentsiaalarvutuses on järgmine omadus:

<u>Teoreem</u>. Kui funktsioonil $f(x)$ on olemas lõplik piirväärtus $A$ argumendi $x \to a$, siis funktsiooni $f(x)$ saab avaldada piirväärtuse $A$ ja ühe $x \to a$ puhul lõpmatult väheneva suuruse $\alpha(x)$ summana, s.t.

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

Ja ümberpöördult: kui $f(x) = A + \alpha(x)$, kus $A$ on konstantne ja $\alpha(x)$ on $x \to a$ puhul lõpmatult vähenev suurus, siis

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

---

Selle teema materjal funktsioonide ja nende graafikute kohta leidub Roosi konspektis [8] paragrahvides 2 ja 3, Piskunovi õpiku [6] I peatüki paragrahvides 6 - 9 ja III peatüki paragrahvides 11 (kuni märkus 1 kaasa arvatud), 13 (kuni näide 4 kaasa arvatud), 14 (ilma teoreemideta), 16, 17 ning elektrotehnika erialadele ka paragrahvis 19 (ilma viimase lõiguta). Kangro [7] õpikus on see materjal I peatükis paragrahvides 3 ja 4 ning III peatükis paragrahvis 10. Lõhmuse [11] juhendis laiendab seda teemat I peatükk.

Materjal reaalarvu ja absoluutväärtuse kohta leidub Piskunovi [6] õpiku I peatüki paragrahvides 1 - 5, Roosi konspekti [8] esimeses paragrahvis ja Kangro õpiku [7] I peatüki paragrahvides 1 ning 2.

Funktsiooni piirväärtust ja pidevust käsitletakse Etverki konspektis [9], Piskunovi õpiku [6] II peatükis ja Kangro õpiku [7] II ning III peatükis.

Ülesandeid lahendada vastavalt Petersen-Roosi [12] ülesannete kogust kaheksandast paragrahvist näited I - IV ning ülesanded 454 - 579, Piskunovi õpiku [6] ülesannetest I peatüki kohta ja Petersen-Roosi [12] ülesannete kogu üheksandast paragrahvist (koos näidetega) ning Piskunovi õpiku [6] ülesannetest II peatüki kohta.

## 7. Tuletis ja diferentsiaal. Funktsiooni uurimine

Funktsiooni tuletise mõistele viivaid ülesandeid. Tuletise definitsioon. Tuletise geomeetriline ja mehaaniline tõlgendus. Funktsiooni graafiku puutuja ja normaali võrrandid. Funktsiooni pidevus ja diferentseeruvus.

Tuletise leidmise põhieeskirjad.

Funktsiooni diferentsiaal kui tema juurdekasvu peaosa. Diferentsiaali geomeetriline tõlgendus. Liitfunktsiooni diferentsiaal, diferentsiaali kuju invariantsus.

Kõrgemat järku tuletised ja diferentsiaalid. Teise tuletise mehaaniline tõlgendus.

Parameetrilisel kujul antud funktsioon, selle tuletis.

Rolle'i ja Lagrange'i teoreem. Taylori valem, selle jääkliige Lagrange'i järgi.

Funktsiooni kasvamine ja kahanemine, kasvamise ning kahanemise tarvilikud ja piisavad tingimused.

Funktsiooni ekstreemum. Ekstreemumi tarvilik tingimus. Ekstreemumi piisavad tingimused. Lõigul pideva funktsiooni suurim ja vähim väärtus sellel lõigul (absoluutsed ektreemumid).

Funktsiooni graafiku kumerus ja nõgusus ning käänupunktid.

L'Hôpitali reegel, selle kasutamine piirväärtuste arvutamiseks.

Funktsiooni graafiku asümptoodid.

Matemaatilise analüüsi põhimõiste - tuletis defineeritakse kui teatava muutuva suuruse piirväärtus. Kõrvuti tuletise mõistega tuleb selgeks teha ka diferentsiaali mõiste neid omavahel ära segamata. Koos tuletise mõistega ja selle mehaanilise ning geomeetrilise tõlgendusega tuleb kindlalt omandada diferentseerimistehnika (s.t. tuletiste leidmise oskus). Selleks on vaja teada elementaarsete põhifunktsioonide tuletisi, summa, korrutise ja jagatise tuletisi, liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja. Samuti on vaja osata ilmutamata kujul ja parameetrilisel kujul antud funktsioone diferentseerida (Piskunov [6], III ptk., §-d 11 ja 18). Laialdaselt kasutatakse funktsioonide diferentseerimisel ka nn. logaritmilist tuletist: enne leitakse diferentseeritava funktsiooni $y = f(x)$ naturaallogaritm ja siis otsitav tuletis $y' = y\cdot(\ln y)'$ (vt. § 12, III ptk. [6]).

Peamist rõhku diferentseerimisoskuse omandamisel tuleb pöörata liitfunktsioonide diferentseerimisele.

N ä i d e 22. Leida funktsiooni $f(x) = \ln \tan e^{-3x}$ tuletis.

<u>Lahendus</u>. Vastavalt liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirjale

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = (\ln \tan e^{-3x})' = \frac{1}{\tan e^{-3x}} \cdot (\tan e^{-3x})' =$$

$$= \frac{1}{\tan e^{-3x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{-3x}} \cdot e^{-3x} \cdot (-3) = -\frac{3\, e^{-3x}}{\sin e^{-3x} \cdot \cos e^{-3x}} =$$

$$= -\frac{6\, e^{-3x}}{\sin 2e^{-3x}} .$$

Tuletise lõppavaldisele anda võimalikult lihtne kuju, kusjuures suuremate vilumuste omandamisel diferentseerimises leitakse kõik vahepealsed tuletised kohe, ilma neid eelnevalt sümboolselt välja kirjutamata; seega näite 22 korral

$$f'(x) = \frac{1}{\tan e^{-3x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{-3x}} \cdot e^{-3x} \cdot (-3) = \text{jne.}$$

Järgneva integraalarvutuse jaoks on tarvilik diferentsiaali kuju invariantsus, mis tähendab seda, et funktsiooni diferentsiaali avaldise kuju ei sõltu sellest, kas argumendiks on sõltumatu muutuja või mingi teise argumendi funktsioon.

Kui $f(x) = f[u(x)]$ on diferentseeruv, siis

$$\frac{df(x)}{dx} = f'_u\,[u(x)] \cdot u'(x)$$

ja

$$df(x) = f'_u\,[u(x)] \cdot u'(x)\,dx.$$

Tähistades nüüd sisemise funktsiooni $u(x) \equiv v$, on $u'(x)\,dx = dv$ ja

$$df = f'(v)\,dv.$$

Nii võib selle omaduse põhjal funktsiooni $f(x) = \cos(\ln\sqrt{x})$ diferentsiaali lühidalt kirjutada kujul

$$df(x) = -\sin(\ln\sqrt{x})\,d(\ln\sqrt{x}),$$

kusjuures vajaduse korral võib selles avaldises diferentsiaali $d(\ln\sqrt{x})$ asendada avaldisega $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2x}\,dx.$

Taylori valemi mõtet ei tule näha mitte funktsioonide formaalses asendamises Taylori polünoomiga, vaid võimaluses arvutada funktsiooni ligikaudseid väärtusi kuitahes suure täpsusega.

N ä i d e 23. Arvutada $\sqrt{5}$ ligikaudne väärtus, kasutades funktsiooni $\sqrt{x}$ arendit Taylori valemi põhjal punkti $x = 4$ ümbruses.

<u>Lahendus</u>. Piirdume Taylori valemis esimese nelja liikmega, siis [leides eelnevalt $\sqrt{x}$ esimest kuni neljandat järku tuletiste väärtused kohal $x = 4$; näit. $(\sqrt{x})''_{x=4} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'_{x=4} =$

$$= \left(-\frac{1}{4x\sqrt{x}}\right)_{x=4} = -\frac{1}{2^5}\Big]$$ saame

$$\sqrt{x} = 2 + \frac{x-4}{1!}\cdot\frac{1}{2^2} - \frac{(x-4)^2}{2!}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{(x-4)^3}{3!}\cdot\frac{3}{2^8} - \frac{(x-4)^4}{4!}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^4\sqrt{\xi^7}},$$

milles jääkliige $R_3$ Lagrange'i järgi on:

$$R_3 = -\frac{(x-4)^4}{4!}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^4\sqrt{[4+\theta(x-4)]^7}}, \text{ kus } 0<\theta<1.$$

Seega

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} - \frac{5}{2^7\sqrt{(4+\theta)^7}}$$

ja võttes arvesse, et

$$\frac{5}{2^7}\cdot\frac{1}{\sqrt{(4+\theta)^7}} < \frac{5}{2^7}\cdot\frac{1}{\sqrt{4^7}} = \frac{5}{2^{14}} \approx 0{,}0003,$$

saame tulemuseks

$$\sqrt{5} = 2{,}2363 \pm 0{,}0003.$$

Taylori valemist on näha, et absoluutse vea ülemmäär 0,0003 tuleb võtta ainult märgiga miinus ja nii saame $\sqrt{5}$ arvulise väärtuse $\sqrt{5} = 2{,}2360$ täpsusega $10^{-4}$.

Kokkuvõttena tuletise rakendustest funktsiooni uurimisel vaatleme näite kaudu funktsiooni uurimise ja graafiku konstrueerimise üldskeemi.

N ä i d e 24. Uurida funktsiooni $y = \frac{x^3}{3-x^2}$ ja skitseerida selle graafik.

Lahendus. 1. Leida funktsiooni määramispiirkond, katkevuspunktid (kui neid leidub) ja pidevuspiirkond.

Antud funktsioon on määratud kogu x-teljel, välja arvatud punktid, kus $3 - x^2 = 0$, s.o. punktid $x = \pm\sqrt{3}$. Need on ka ainsad katkevuspunktid. Seega funktsiooni määramispiirkond koosneb kolmest vahemikust

$$(-\infty, -\sqrt{3}), \quad (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \quad (\sqrt{3}, \infty),$$

mis moodustavad ühtlasi funktsiooni pidevuspiirkonna.

2. Uurida, kas funktsioon on perioodiline, kas ta on paaris- või paaritu funktsioon.

Funktsioon ei ole perioodiline, kuid on paaritu, sest $f(-x) = -f(x)$. Järelikult funktsiooni graafik on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes ja piisab, kui edasi uurime teda ainult argumendi väärtustel $x \geq 0$.

3. Leida funktsiooni nullkohad ja märgi säilitamise piirkonnad.

$y = 0$, kui $x = 0$, s.t. graafik läbib koordinaatide alguspunkti. Kui $x > 0$, siis $y$ märk muutub, kui muutub nimetaja $3 - x^2$ märk. Seega

kui $0 < x < \sqrt{3}$, siis $y > 0$;

kui $\sqrt{3} < x < +\infty$, siis $y < 0$.

4. Leida funktsiooni graafiku asümptoodid.

Püstasümptoodiks on sirge $x = \sqrt{3}$ nii ühes kui teises suunas, sest

$$\lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty; \qquad \lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty.$$

Kaldasümptoodiks on sirge $y = kx + b$,

$$\text{kus } k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{(3 - x^2)x} = -1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{3 - x^2} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 3x - x^3}{3 - x^2} = 0,$$

s.t. $y = -x$.

Uurime veel, kas graafik asetseb all- või pealpool asümptooti. Selleks moodustame avaldise $\delta = y - (kx + b)$. Antud juhul

$$\delta = \frac{x^3}{3 - x^2} + x = \frac{3x}{3 - x^2},$$

s.t.

$$\delta > 0, \text{ kui } \begin{cases} x > 0 \\ 3 - x^2 > 0 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x < 0 \\ 3 - x^2 < 0. \end{cases}$$

Nende süsteemide lahendamisel näeme, et $\delta > 0$, kui $-\infty < x < -\sqrt{3}$ ja $0 < x < \sqrt{3}$. Järelikult selles piirkonnas on funktsiooni graafik asümptoodi peal. Ülejäänud määramispiirkonnas on funktsiooni graafik allpool asümptooti.

5. Leida funktsiooni ekstreemumid ja monotoonsuspiirkonnad.

Avaldame y':

$$y' = \frac{3x^2(3 - x^2) + 2x \cdot x^3}{(3 - x^2)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{(3 - x^2)^2} = \frac{x^2(9 - x^2)}{(3 - x^2)^2}.$$

Leida punktid, kus võib leiduda ekstreemum:

$y' = 0$, kui $x = 0$ või $x = \pm 3$;

$y'$ puudub, kui $x = \pm\sqrt{3}$, kuid neis punktides funktsioon ei ole defineeritud.

Koostame abitabeli, võttes $x \geq 0$:

| $x$ | 0 | $0 < x < \sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3} < x < 3$ | 3 | $3 < x < +\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | 0 | + | ei eksist. | + | 0 | − |
| $y$ | 0 | ↗ | ei eksist. | ↗ | max | ↘ |

Tabelist loeme, et funktsioon kasvab piirkonnas $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, 3)$ ja kahaneb vahemikus $(3, +\infty)$. Funktsioonil on maksimum kohal $x = 3$, kusjuures $f_{max}(3) = -\frac{9}{2}$, seega graafiku sümmeetria tõttu miinimum kohal $x = -3$ ja $f_{min}(-3) = \frac{9}{2}$.

6. Leida funktsiooni kumerus- ja nõgususpiirkonnad ning käänupunktid.

Avaldame y" ja leiame punktid, kus $y'' = 0$ või puudub:

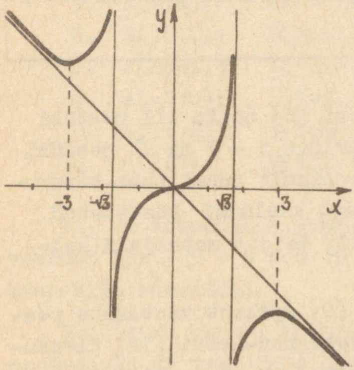
$$y'' = \frac{6x(x^2 + 9)}{(3 - x^2)^3};$$

$y'' = 0$, kui $x = 0$, ega eksisteeri, kui $x = \pm\sqrt{3}$.

Koostame abitabeli

| $x$ | $-\sqrt{3}<x<0$ | $0$ | $0<x<\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}<x<+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | ei eksist. | $-$ |
| $y$ | | käänup. | | ei eksist. | |

Tabelist on näha, et funktsiooni graafik on kumer vahemikes $(-\sqrt{3},0)$ ja $(\sqrt{3},+\infty)$, nógus vahemikes $(-\infty,-\sqrt{3})$ ja $(0,\sqrt{3})$ ning käänupunkt on punktis $(0;0)$.



Joon. 15.

7. Joonestada funktsiooni graafik.

Saadud andmete póhjal saame joonisel 15 kujutatud graafiku. Kui graafiku joonestamisel osutub, et andmeid on vähe, siis arvutame lisaks funktsiooni väärtused mónes punktis (neis, kus graafiku käik pole selge).

---

Seitsmenda teema materjal leidub Roosi konspekti [10] paragrahvides 1, 2 ja 4 (paragrahvist 4 punktid 1 - 4). Piskunovi [6] ópikus on see materjal III peatükis, välja arvatud paragrahvid 26 ja 27, ning peatükkides IV ja V. Kangro [7] ópikus on vastav materjal IV peatükis, paragrahvi 18 punktides 1 ja 2 ning V peatükis paragrahvides 15 - 17.

Ülesandeid lahendada Piskunovi [6] ópiku nimetatud peatükkide kohta antud ülesannete hulgast ja Petersen-Roosi [12] ülesannete kogust: kümnendast paragrahvist näited I - III, VI, VIII - X, XII, XIII ning ülesanded 681 - 750, 767 - 802, 807 - 812, 819 - 854; üheteistkümnendast paragrahvist näited II - IV, VI - XII ning ülesanded 855 - 857, 861 - 890, 894 - 910 ja 916 - 1022.

## 8. Skalaarse argumendi vektorfunktsioon. Kóverus

Skalaarse argumendi vektorfunktsioon. Hodograaf. Piirväärtus, pidevus. Joone vórrand vektorites. Vektorfunktsiooni tuletis, selle geomeetriline ja mehaaniline tähendus. Vektorfunktsiooni diferentsiaal. Ruumijoone puutuja vórrand.

Tasapinnalise joone kóverus, kóverusraadius, kóverusringjoon ja kóveruskeskpunkt. Evoluudi ja evolvendi móiste. Ruumijoone kóveruse móiste.

Nóutav materjal leidub Piskunovi [6] ópiku III peatüki paragrahvis 26, VI peatüki paragrahvides 1 - 7 ja IX peatüki paragrahvides 1 - 4 (paragrahvist 4 ainult ruumijoone kóveruse móiste). Kangro ópikus [7] on neid küsimusi käsitletud paragrahvis 18. Roosi konspektis [10] leidub materjali kolmandas paragrahvis.

Ülesandeid lahendada Piskunovi [6] ópikust vastavate peatükkide vastavate osade kohta ning Petersen-Roosi [12] ülesannete kogu kümnendast paragrahvist näited IV, V ja ülesanded 751 - 766, 786, 803 - 805, 813, 817, 818. Veel on soovitav lahendada sama kogu II osa paragrahvist 16 näited I - IV ja ülesanded 1819 - 1825, 1830, 1833, 1835.

# D. KONTROLLTÖÖDE ÜLESANDED

## Kontrolltöö nr.1

Ülesandeis 1 - 10 on antud kolmnurga ABC kaks tippu A ja B ning mediaanide lóikepunkt M. Tuleb leida:

1) külje AB vórrand;
2) tipu C koordinaadid;

3) tipust C tõmmatud kõrgussirge võrrand;

4) tipust C tõmmatud kõrguse pikkus;

5) kolmnurga pindala;

6) nurk A radiaanides (täpsusega kuni 0,01).

1. A(-1;-1); B(3;2); M(1;1).
2. A(0;-5); B(2;1); M(1;0).
3. A(-2;-2); B(1;-3); M(2;-1).
4. A(-6;2); B(4;2); M(2;6).
5. A(8;4); B(-4;12); M(12;4).
6. A(10;0); B(5;2); M(8;-2).
7. A(2;-3); B(-3;-1); M(-1;-4).
8. A(-2;0); B(3;0); M(-1;2).
9. A(3;-2); B(0;2); M(-1;-2).
10. A(7;1); B(1;7); M(4;1).

11. On antud täisnurkse võrdhaarse kolmnurga hüpotenuusi võrrand $3x - y + 5 = 0$ ning täisnurga tipp C(4;-1). Leida kaatetite võrrandid.

12. Leida punkti A(8;6) läbiva sirge võrrand nii, et sirge moodustaks II veerandis koos telgedega kolmnurga pindalaga 12.

13. Kolmnurga tipud on A(-2;0), B(6;6) ja C(1;-4). Leida tipust A tõmmatud nurgapoolitaja pikkus.

14. On antud võrdhaarse kolmnurga kahe haara võrrandid $3x - y + 5 = 0$ ja $x - 3y - 7 = 0$. Leida aluse võrrand teades, et ta läbib punkti (1;2).

15. On antud kolmnurga kahe külje võrrandid $x + 2y + 6 = 0$ ja $4x - 7y + 19 = 0$ ning kõrguste lõikepunkt H(2;1). Leida kolmanda külje võrrand.

16. On antud kolmnurga kahe kõrguse võrrandid $5x + 3y - 4 = 0$ ja $3x + 8y + 13 = 0$ ning tipp A(-4;-5). Leida kolmnurga külgede võrrandid.

17. On antud ruudu kahe külje võrrandid $5x + 12y - 10 = 0$ ja $5x + 12y + 29 = 0$. Leida tema ülejäänud kahe külje võrrandid tingimusel, et üks neist sirgeist läbib punkti P(-3;5).

18. Kolmnurga kahe külje võrrandid on $2x - 3y + 5 = 0$ ja $x - y + 3 = 0$ ning mediaanide lõikepunkt on $M(-2;1)$. Leida kolmanda külje võrrand.

19. On antud kolmnurga üks tipp $A(4;-1)$ ning üht ja sama tippu läbivad kõrgussirge ja mediaani võrrandid vastavalt $2x - 3y + 12 = 0$ ja $2x + 3y = 0$. Leida kolmnurga külgede võrrandid.

20. Kolmnurga üks tipp on $A(4;-1)$ ning kahe nurgapoolitaja võrrandid on $x - 1 = 0$ ja $x - y - 1 = 0$. Leida külgede võrrandid.

<u>Ülesandeis 21 - 30</u> on vaja tuletada joone võrrand, määrata joone nimetus ja teha joonis.

21. Leida joon, millel asuvad punkti $(4;0)$ läbivatele sirgetele punktist $(0;0)$ tõmmatud ristsirgete aluspunktid.

22. Leida joon, mille iga punkti kauguste ruutude vahe punktidest $(5;3)$ ja $(-4;3)$ on 25.

23. Leida joon, mille iga punkti kaugused punktidest $(0;0)$ ja $(5;0)$ suhtuvad nagu 2:1.

24. Ringjoones $x^2 + y^2 = 25$ vaatleme kõõle, mille pikkus on 8. Leida joon, millel asuvad nende kõõlude keskpunktid.

25. Leida joon, mille iga punkt on sirgest $x + 4 = 0$ kaks korda kaugemal kui punktist $A(-1;0)$.

26. Leida joon, millel asuvad x-telge puudutavate ja punkti $(9;3)$ läbivate ringjoonte keskpunktid.

27. Leida joon, mille iga punkt on punktist $A(-8;1)$ kaks korda kaugemal kui sirgest $x = -2$.

28. Leida joon, mille iga punkti kaugused ordinaatteljest ja punktist $A(2;0)$ on võrdsed.

29. Leida joon, mille iga punkti kaugused punktidest $A(5;-1)$ ja $B(0;4)$ on võrdsed.

30. Leida joon, mille punktide kaugused punktist $A(2;0)$ ja sirgest $5x + 8 = 0$ suhtuvad nagu 5:4.

Ülesandeis 31–40 on antud joone võrrand polaarkoordinaatides. Tuleb: 1) leida selle joone punktid, mis vastavad muutuja $\varphi$ väärtustele vahemikust $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ sammuga $\frac{\pi}{8}$; 2) joonestada antud joon, ühendades leitud punktid pideva joonega; 3) leida antud joone võrrand ristkoordinaatides (võttes koordinaattelgede alguspunktiks pooluse ning lugedes x-telje ühtivaks polaarteljega.

31. $\rho = \frac{6}{2 + \cos\varphi}$.

32. $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$.

33. $\rho = 4(1 + \cos\varphi)$.

34. $\rho = 2\cos^2 2\varphi$.

35. $\rho = \frac{1}{6 + 3\cos\varphi}$.

36. $\rho = 3(1 + \sin\varphi)$.

37. $\rho = 3\cos 2\varphi$.

38. $\rho = \frac{2}{3 + \sin\varphi}$.

39. $\rho = 3\sin^2 2\varphi$.

40. $\rho = \sin\varphi + \cos\varphi$.

41. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$ puutujad, mis läbivad koordinaatide alguspunkti.

42. Leida ellipsi võrrand teades, et ellipsi fookused, millede vaheline kaugus on 12, asuvad ordinaatteljel sümmeetriliselt koordinaatide alguspunkti suhtes ja ekstsentrilisus $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

43. Kui pikk on ellipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ diameeter[*], mis on risti hüperbooli $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ esimest koordinaatveerandit läbiva asümptoodiga?

44. Parabool lõikub abstsissteljega punktides (–2;0) ja (4;0), ordinaatteljega punktis (0;–8). Parabooli sümmeetriatelg on paralleelne ordinaatteljega. Leida parabooli võrrand ja tema haripunkti koordinaadid.

45. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ puutujad punktides, kus ringjoon lõikub y-teljega

---

[*] Diameeter on keskpunkti läbiv kõõl.

46. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ puutujad, mis on paralleelsed sirgega $4x - 3y - 6 = 0$.

47. Punktist A(1;6) on tõmmatud puutujad ringjoonele $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. Leida nende puutujate võrrandid.

48. Leida punkti N(6;9) läbiva hüperbooli võrrand, kui tema asümptootide võrrandid on $y = \pm\frac{5}{3}x$.

49. Horisondi suhtes teravnurga all visatud kivi liikumisteeks on parabool. Kivi kukkus 16 m kaugusele algasendist. Leida kivi liikumistee võrrand ning parameeter teades, et kivi liikumisel suurim kõrgus oli 12 m.

50. Rombi külg on 5 ja kõrgus 4,8. Rombi kaht vastastippu läbib ellips, mille fookused asuvad ülejäänud kahes tipus. Koostada ellipsi võrrand, kui rombi diagonaalid asuvad koordinaattelgedel.

<u>Ülesandeis 51 - 60</u> koordinaattelgede paralleellükke abil a) teisendada antud teist järku joone võrrand kanoonilisele kujule ning määrata joone liik; b) teisendada antud hüperbooli võrrand kujule $XY = k$ ning leida asümptootide võrrandid. Mõlemas ülesandes kujutada joonisel antud joon koos vana ja uue koordinaatteljestikuga.

51. a) $y = 6x^2 + 4x + 9$; b) $y = \frac{3x-2}{2x+1}$.

52. a) $4x^2 + 3y^2 + 8x - 12y = 0$; b) $y = \frac{4(x+6)}{x+2}$.

53. a) $4y^2 - x - 8y + 7 = 0$; b) $y = \frac{3x+7}{x+1}$.

54. a) $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$; b) $y = \frac{1+4x}{x-3}$.

55. a) $4x^2 + 4y^2 + 2x - 5y - 2 = 0$; b) $y = \frac{3-2x}{5-3x}$.

56. a) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$; b) $y = \frac{5x-3}{2x+6}$.

57. a) $x^2 + 6x - 2y + 1 = 0$; b) $y = \frac{4+3x}{x}$.

58. a) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$; b) $y = \frac{3x-3}{2x+5}$.

59. a) $y^2 + 4x - y = 0$; b) $y = \frac{2x + 5}{2x - 7}$.

60. a) $x^2 + 2y^2 - 2x + 12y + 11 = 0$; b) $y = \frac{2x - 3}{4x + 1}$.

## Kontrolltöö nr. 2

Ülesandeis 61 - 70 on antud püramiidi $A_1A_2A_3A_4$ tipud. Kasutades vektoralgebrat, tuleb leida:

1) servade $A_1A_2$ ja $A_1A_4$ vaheline nurk;
2) tahu $A_1A_2A_3$ pindala;
3) vektori $\overrightarrow{A_1A_3}$ projektsioon vektori $\overrightarrow{A_1A_4}$ sihil;
4) püramiidi ruumala;
5) tipust $A_4$ tõmmatud kõrguslõigu pikkus;
6) võrrand tasapinnale, millel asuvad tipud $A_1$, $A_2$ ja $A_3$;
7) tipust $A_4$ tõmmatud kõrgussirge kanoonilised võrrandid.

61. $A_1(-1,3,0)$, $A_2(4,5,-2)$, $A_3(1,-1,6)$, $A_4(6,1,5)$.
62. $A_1(-2,1,2)$, $A_2(1,3,2)$, $A_3(3,2,7)$, $A_4(4,0,0)$.
63. $A_1(1,-3,-7)$, $A_2(5,4,2)$, $A_3(5,8,0)$, $A_5(3,4,-1)$.
64. $A_1(1,-2,1)$, $A_2(-2,1,0)$, $A_3(2,2,5)$, $A_4(3,1,-2)$.
65. $A_1(-1,7,7)$, $A_2(-5,0,-2)$, $A_3(-1,4,2)$, $A_4(-3,0,1)$.
66. $A_1(4,5,-2)$, $A_2(-1,3,0)$, $A_3(6,1,5)$, $A_4(1,-1,6)$.
67. $A_1(5,9,4)$, $A_2(7,5,2)$, $A_3(10,7,6)$, $A_4(6,5,1)$.
68. $A_1(2,2,5)$, $A_2(3,1,2)$, $A_3(1,-2,1)$, $A_4(-2,1,0)$.
69. $A_1(0,-8,-7)$, $A_2(0,-1,-4)$, $A_3(4,3,0)$, $A_4(2,-1,-1)$.
70. $A_1(3,2,7)$, $A_2(4,0,0)$, $A_3(-2,1,2)$, $A_4(1,3,2)$.

Ülesandeis 71 - 80 on antud punkt A ning sirge (a). Leida:

1) tasapind, mis läbib punkti A ja sirget (a);
2) sirge, mis läbib punkti A ning lõikab sirget (a) ja on sellega risti.

71. (a) $\frac{x}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 1}{-1}$, A(1,0,3).

72. (a) $\frac{x+1}{2} = y = \frac{z-2}{3}$, A(2,3,1).

73. (a) $\frac{x+4}{-6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-5}{2}$, A(-2,3,0).

74. (a) $\frac{x+1}{2} = \frac{5-y}{5} = z - 3$, A(4,-2,5).

75. (a) $\frac{x-7}{3} = \frac{y-5}{2} = z - 1$, A(2,0,2).

76. (a) $\frac{x-5}{2} = \frac{y-1}{2} = z + 2$, A(3,-1,2).

77. (a) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{10} = \frac{z+3}{-10}$, A(1,10,-10).

78. (a) $\frac{x+1}{2} = -y = \frac{z-2}{3}$, A(2,-1,3).

79. (a) $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{3} = -z$, A(2,1,5).

80. (a) $x = \frac{3-y}{2} = \frac{z+2}{2}$, A(-1,2,3).

Ülesandeis 81 - 90 tuleb näidata, et antud kolm tasapinda lóikuvad ühes punktis, ja leida selle lóikepunkti koordinaadid.

81. $2x - 3y + z = 2$; $x + 5y - 4z = -5$; $4x + y - 3z = -4$.

82. $2x + 2y + z = 2$; $x - y + z = 0$; $3x + 4y + 2z = 3$.

83. $x + y - 2z = -5$; $3x - y + z = 4$; $2x + 2y + 5z = 8$.

84. $3x + 2y + z = 4$; $x - 3y - z = 4$; $6x + 5y + 3z = 8$.

85. $x + y - z = 1$; $8x + 3y - 6z = 2$; $-4x - y + 3z = -3$.

86. $3x + y - z = 4$; $x - y + 2z = 1$; $4x + y + z = 5$.

87. $2x - 3y + 2z = -8$; $x + 2y + z = 3$; $5x + y - z = 5$.

88. $3x + 4y + 2z = -10$; $5x + 2y + 3z = -2$; $2x - 2y + 5z = 0$.

89. $x + 2y + 2z = 3$; $2x + 3y + 5z = 10$; $3x + 7y + 4z = 3$.

90. $7x + 2y + 3z = 15$; $5x - 3y + 2z = 15$; $10x - 11y + 5z = 36$.

Ülesandeis 91 - 100 tuleb uurida, kas antud süsteem on lahenduv või mitte; lahenduvuse korral leida üldlahend.

91. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$

92. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 17, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$

93. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

94. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

95. $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 12, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

96. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 10x_1 - x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

97. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$

98. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

99. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 13, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$

100. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ 6x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

Ülesandeis 101 - 110 leida antud lineaarteisenduse pöördteisendus.

101. $\begin{cases} x'_1 = 2x_1 - 3x_2 + 2x_3, \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x'_3 = 5x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$

102. $\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3, \\ x'_2 = 6x_1 + 7x_2 + x_3, \\ x'_3 = 9x_1 + x_2 + 8x_3. \end{cases}$

103. $\begin{cases} x'_1 = -x_1 + 3x_2 - 2x_3, \\ x'_2 = -4x_1 + x_2 + 2x_3, \\ x'_3 = 3x_1 - 4x_2 + 5x_3. \end{cases}$

104. $\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + 3x_2 - 8x_3, \\ x'_2 = 6x_1 + 9x_2 + x_3, \\ x'_3 = 2x_1 + x_2 + 8x_3. \end{cases}$

105. $\begin{cases} x_1' = -x_1 + 8x_2 - 2x_3, \\ x_2' = -4x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ x_3' = 3x_1 - 8x_2 + 5x_3. \end{cases}$ 106. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 3x_2 + 4x_3, \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - 5x_3, \\ x_3' = -3x_1 + 5x_2 + x_3. \end{cases}$

107. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 5x_2 - 3x_3, \\ x_2' = x_1 - x_2 - x_3, \\ x_3' = 7x_1 + 4x_3. \end{cases}$ 108. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 5x_3, \\ x_2' = x_1 + x_2 + x_3, \\ x_3' = 3x_2 - 6x_3. \end{cases}$

109. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 - 5x_3, \\ x_2' = 7x_1 + x_2 + 4x_3, \\ x_3' = 6x_1 + 4x_2 - 7x_3. \end{cases}$ 110. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 - x_3, \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 - 2x_3, \\ x_3' = 3x_1 - 2x_2 + 4x_3. \end{cases}$

Ülesandeis 111 - 120 on antud kahe pinna lóikejoon. Määrata kummagi antud pinna ja nende lóikejoone nimetus ning esitada see lóikejoon ühe silindrilise pinna ja tasapinna kaudu. Skitseerida antud teist järku pind.

111. $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{25} = 1, \\ y - 3 = 0. \end{cases}$ 112. $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 2y, \\ z + 3 = 0. \end{cases}$

113. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6z = 0, \\ x - 2 = 0. \end{cases}$ 114. $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1, \\ y - 8 = 0. \end{cases}$

115. $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{9} = -1, \\ z - 5 = 0. \end{cases}$ 116. $\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{5} = y, \\ x - 5 = 0. \end{cases}$

117. $\begin{cases} \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{4} = 4, \\ z - 6 = 0. \end{cases}$ 118. $\begin{cases} \frac{x^2}{5} - y^2 + \frac{z^2}{3} = -1, \\ y - 5 = 0. \end{cases}$

119. $\begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{6} = 2z, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$ 120. $\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 1, \\ x - 6 = 0. \end{cases}$

## Kontrolltöö nr. 3

Ülesandeis 121 - 130 tuleb leida iga antud funktsiooni määramispiirkond ja kujutada see arvteljel.

121. a) $y = \dfrac{2x^2 - 3}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$; b) $y = \dfrac{3}{2} \arccos \dfrac{4 - 7x}{2}$.

122. a) $y = \dfrac{\log (1 + x)}{x - 1}$; b) $y = \dfrac{2}{5} \arcsin \dfrac{5x - 2}{3}$.

123. a) $y = \dfrac{\log (1 + 3x)}{\sqrt{x^2 - 4x}}$; b) $y = 5 \arcsin \dfrac{4 - 2x}{3}$.

124. a) $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{3 + x}}$; b) $y = \dfrac{4}{7} \arccos \dfrac{12 - 5x}{6}$.

125. a) $y = \dfrac{\sqrt[5]{x + 3} - \sqrt{x + 5}}{\log x}$; b) $y = \dfrac{1}{4} \arcsin \dfrac{2 - 3x}{4}$.

126. a) $y = \log \dfrac{x + 5}{2x - 1}$; b) $y = \dfrac{1}{6} \arccos \dfrac{4x + 3}{-3}$.

127. a) $y = \dfrac{\sqrt{16 - x^2}}{x^2 - 2x - 8}$; b) $y = \log (x^2 - 4x + 3)$.

128. a) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x^2 + 2}}{2x^2 + 3x - 2}$; b) $y = \log \dfrac{7x - 5}{1 - 2x}$.

129. a) $y = \dfrac{2^{-x}}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$; b) $y = \log (7 - 6x - x^2)$.

130. a) $y = \dfrac{\log (8 - x)}{x^2 - 8x + 12}$; b) $y = \dfrac{\arctan (4x - 5)}{\arcsin (4x - 5)}$.

Ülesandeis 131 - 140 tuleb leida iga antud funktsiooni muutumispiirkond selle pöördfunktsiooni määramispiirkonna kaudu.

131. a) $y = x^2 - x - 2$; b) $y = \sqrt{3 - \log x}$.

132. a) $y = \log(3 - 4x^2)$; b) $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$.

133. a) $y = \dfrac{x^3}{1 - x^3}$; b) $y = e^{\frac{1}{x+1}}$.

134. a) $y = \dfrac{1}{2^{3x+1}}$; b) $y = \log_3(2 - \sqrt{x})$.

135. a) $y = 1 + 2\tan\frac{3x}{2}$; b) $y = \sqrt{\log_2(x - 1)}$.

136. a) $y = 2\arctan\dfrac{2x - 1}{x + 1}$; b) $y = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x^2 + 1}}$.

137. a) $y = 1 - 2x - x^2$; b) $y = \cos\sqrt{x^2 - 4}$.

138. a) $y = \sqrt{\cos x + 1}$; b) $y = 2\cot\sqrt{x^2 - 4}$.

139. a) $y = \arccos^2\left(\frac{x}{2} - 1\right)$; b) $y = \frac{2}{5}\sin\sqrt[3]{x}$.

140. a) $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$; b) $y = 1 - 2^{-x}$.

Ülesandeis 141 - 150 tuleb määrata iga antud funktsiooni katkevuspunktid (kui neid leidub) ja skitseerida funktsiooni graafik.

141. a) $y = |1 - x| - |1 + x|$;
b) $y = 2(x - 1)^3$;
c) $y = 1 + 3\sin\frac{x}{2}$;
d) $y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & \text{kui } x \le -2, \\ 2-x, & \text{kui } -2 < x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{kui } x \ge 3; \end{cases}$
e) $y = \arcsin(x - 2)$.

142. a) $y = 2x + \dfrac{|x|}{x}$;
b) $y = \arccos\frac{x}{5}$;
c) $y = 4\sin 2x - 1$;
d) $y = \begin{cases} x - 1, & \text{kui } |x| < 1, \\ 1 - x^2, & \text{kui } |x| \ge 1; \end{cases}$
e) $y = 2\log(-x)$.

143. a) $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$;

b) $y = \pi - \arccos x$;

c) $y = \sin 2(x - \frac{\pi}{4}) + 3$;

d) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{kui } x < -1, \\ 2^x, & \text{kui } |x| \leq 1, \\ 4-x, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$

e) $y = 2 - \sqrt[3]{x}$.

144. a) $y = |x^2 - 1|$;

b) $y = \frac{1}{2}\log(-2x)$;

c) $y = 3 + 2\cos\frac{x}{3}$;

d) $y = \begin{cases} |x|, & \text{kui } x < 0, \\ \arcsin x, & \text{kui } 0 \leq x < 1, \\ 3 - x^2, & \text{kui } x > 1; \end{cases}$

e) $y = \frac{x+1}{x-1}$.

145. a) $y = 2 + |\sin x|$;

b) $y = \frac{1-x}{1+x}$;

c) $y = 3\cos 2x - 1$;

d) $y = \begin{cases} \arctan(-x), & \text{kui } x \leq 0; \\ -(x-1)^2, & \text{kui } 0 < x < 2, \\ \frac{1}{2}(x-4), & \text{kui } x \geq 2; \end{cases}$

e) $x = -\log(x - 3)$.

146. a) $y = |2 - x| - |x|$;

b) $y = 1 - 2^x$;

c) $y = \cos(2x + \frac{\pi}{2}) - 2$;

d) $y = \begin{cases} \frac{4}{x}, & \text{kui } |x| > 2, \\ -\frac{1}{2}x^2, & \text{kui } |x| \leq 2; \end{cases}$

e) $y = \tan\frac{x}{2}$.

147. a) $y = |x + 1| - |x - 2|$;

b) $y = 2\arcsin\frac{x}{3}$;

c) $y = -\cos\frac{x-1}{2}$;

d) $y = \begin{cases} -x-4, & \text{kui } x \leq -1; \\ x^3-2, & \text{kui } -1 < x < 2, \\ -x+4, & \text{kui } x \geq 2; \end{cases}$

e) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.

148. a) $y = \log|x + 1|$;

b) $y = \sqrt{(x-1)^3}$;

c) $y = 2\sin(3x + \frac{3}{4}\pi)$;

d) $y = \begin{cases} 6 + x, & \text{kui } x \leq -1, \\ 2x^2 + 3, & \text{kui } -1 < x < 0, \\ 2x, & \text{kui } x \geq 0; \end{cases}$

e) $(y + 1)x = 6$.

149. a) $y = 2|x| - x + 1$;

b) $y = 1 - 3^{x-3}$;

c) $y = \frac{5}{3}\cos\frac{3}{5}x$;

d) $y = \begin{cases} \operatorname{arccot} x, & \text{kui } x < 0, \\ \frac{1}{2}(x^2 - 2), & \text{kui } 0 \le x < 3, \\ 3 - x, & \text{kui } x \ge 3; \end{cases}$

e) $y = \frac{x}{2x - 5}$.

150. a) $y = -\frac{1}{2}x^3$;

b) $y = \sqrt{3 - x}$;

c) $y = \sin 2(x + \frac{\pi}{4}) + 3$;

d) $y = \begin{cases} \arcsin(x + 2), & \text{kui } x < -2, \\ \sqrt{4 - x^2}, & \text{kui } |x| \le 2, \\ \frac{1}{2}x - 2, & \text{kui } x > 2; \end{cases}$

e) $y = \frac{2}{|x - 1|}$.

Ülesandeis 151 - 160 tuleb leida piirväärtused L'Hôpitali reeglit kasutamata.

151. a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x + 3}{x - 2}\right)^{3x}$.

152. a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 4x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x + 2) - \ln 2}{x}$.

153. a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x + 1}{x + 5}\right)^{1-2x}$.

154. a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{7 + 2x - x^2}}{x^2 - 2x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 \sin x}{(1 - \cos x)^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)^{x^2+1}$.

155. a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$.

156. a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x^2+2}{x^3-4x^2+3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x-2}\right)^{2x}$.

157. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^3+8}{3x^5+3x^4+2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{3x^2-1}\right)^{x^2+5}$.

158. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5-4x^4+x^3-2x^2+1}{2x^5+3x^3-4x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{2}}{\sin^2 2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{3x}$.

159. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3+3x^2-7}-x\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{3-2x}$.

160. a) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x-3}-\sqrt{3}}{x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x-8}{5x}\right)^{3x+6}$.

Ülesandeis 161 - 170 tuleb leida antud funktsioonide tuletised.

161. a) $y = \dfrac{2x^3 + 3}{x - \sqrt{x^2 - 4}}$;

b) $y = \tan 2x + \frac{2}{3}\tan^3 2x + \frac{1}{5}\tan^5 2x$;

c) $y = \arctan \dfrac{4 \sin x}{3 + 5 \cos x}$;

d) $y = (\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-2}}$;

e) $2^{x+y}(x^2 - 2) = x^3 + 7$.

162. a) $y = \dfrac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}$;

b) $y = \ln \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$;

c) $y = \sqrt{x^2 - a^2} - \arccos \frac{a}{x}$;

d) $y = (\frac{x + 8}{x - 2})^x$;

e) $y = x e^y + e$.

163. a) $y = \dfrac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2}$;

b) $y = \arcsin \dfrac{2x^3}{1 + x^5}$;

c) $y = (\mathrm{ch}\, 2x - \mathrm{ch}\, 2)^3$;

d) $y = x^{-x} \cdot 2^x \cdot x^2$;

e) $xy = \arctan \frac{x}{y}$.

164. a) $y = \dfrac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln^2 x}$;

b) $y = \arccos \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2}$;

c) $y = x - \ln\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)$;

d) $y = 3^{\frac{x}{\ln x}}$;

e) $\sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \dfrac{y}{x}$.

165. a) $y = \dfrac{\sqrt{1 + x^3}}{\sqrt[3]{(1 + x)^2} - 1}$;

b) $y = \arccos \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$;

c) $y = \ln \tan \dfrac{x}{2} - \cot x \cdot \ln(1 + \sin x) - x$;

d) $y = 10^{x \tan x}$;

e) $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = \ln 2$.

166. a) $y = \dfrac{2 \cos^2 (\ln x)}{x}$;

b) $y = \sqrt{\dfrac{2^x}{1 - 2^x}}$;

c) $y = -\sqrt{2} \arctan \dfrac{\tan x}{\sqrt{2}} - x$;

d) $y = x^{\arcsin x}$;

e) $y \cdot e^y = e^{x^2}$.

167. a) $y = \ln \dfrac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{\sqrt{1 + x^2} - 1}$;

b) $y = \sqrt{1 + \tan^2 x + \tan^4 x}$;

c) $y = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$;

d) $y = 2x^{\ln x - 1}$;

e) $x \sin y - \cos y + \sin 2y = 0$.

168. a) $y = \arctan \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$;

b) $y = \frac{1}{2} \tan^2 (\sin x) + \ln \cos (\sin x)$;

c) $y = 10^{1 - \cos^3 4x}$;

d) $y = \sqrt[x]{(x + 1)^3}$;

e) $x^3 + y^3 = (x - 1)^3$.

169. a) $y = \dfrac{\tan^2 \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

b) $y = \arccos (2e^{2x} - 1)$;

c) $y = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cot x} + \dfrac{\cos^2 x}{1 + \tan x}$;

d) $y = (1 + \frac{2}{x})^x$;

e) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

170. a) $y = \arctan \dfrac{2x^4}{1 - x^8}$;

b) $y = \sin^2 (\dfrac{1 - \ln x}{x})$;

c) $y = \dfrac{x^a}{a^x} + e^{\ln a}$;

d) $y = x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$;

e) $y^3 = \dfrac{x - y}{x + y}$.

Kontrolltöö nr. 4

Ülesandeis 171 - 180 tuleb leida $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$.

171. a) $y = \sqrt{\ln x}$; b) $x = e^t \sin t$, $y = e^{-t} \cos t$.

172. a) $y = x \arctan (1+\sqrt{x}) + \ln (x+2\sqrt{x}+2) - \sqrt{x}$; b) $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$.

173. a) $y = \cot \pi x + \frac{\cos \pi x}{2 \sin^3 \pi x}$; b) $x = \ln t$, $y = \frac{1}{t}$.

174. a) $y = \frac{3}{5} \sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + \sqrt{3}$; b) $x = \frac{2t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{2\sqrt{3}\,t}{1+t^2}$.

175. a) $y = (x^2 + 1) \arctan^2 x - 2x \arctan x + \ln (1+x^2)$; b) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^3 + 1)$.

176. a) $y = 2^{x \cos x}$; b) $x = at \cos t$, $y = at \sin t$.

177. a) $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$; b) $x = \frac{1}{3} \cos^3 2t$, $y = \frac{2}{3} \sin^3 2t$.

178. a) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$; b) $x = \frac{1 + \ln t}{t^2}$, $y = \frac{3 + 2 \ln t}{t}$.

179. a) $y = \frac{6x^2}{1+x^6}$; b) $x = 2 \ln \cot \frac{t}{2}$, $y = \tan \frac{t}{2} + \cot \frac{t}{2}$.

180. a) $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1)$; b) $x = \arccos \sqrt{t}$, $y = \sqrt{t - t^2}$.

Ülesandeis 181 - 190 leida nurk, mille all lõikuvad antud jooned ja teha skemaatiline joonis.

181. $x^2 + y^2 = 4y$ ja $y^2 = -2x$.

182. $y = \frac{1}{1 + x^2}$ ja $x^2 + y^2 = y + \frac{3}{4}$.

183. $2y = x^2$ ja $2y = 8 - x^2$.

184. $x^2 - y^2 = a^2$ ja $x^2 + y^2 = 3a^2$.

185. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ ja $x + y = 3$.

186. $y = (x - 2)^2$ ja $y = -x^2 + 6x - 4$.

187. $x^2 + y^2 = 8$ ja $y = -\sqrt{x + 2}$.

188. $y = \frac{x + 1}{x - 3}$ ja $y = \frac{6}{7 - x}$.

189. $y = \sin \frac{x}{2}$ ja $y = \cos \frac{x}{2}$.

190. $2y = x^3$ ja $x^2 - 4x + y = 0$.

Ülesandeis 191 - 200 uurida funktsiooni diferentsiaalarvutuse meetoditega ja joonestada tema graafik (vt. juhendist näide 24).

191. a) $y = \frac{x^3}{3 - x^3}$; b) $y = x^2 \ln x$.

192. a) $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$; b) $y = \ln \frac{3 - x}{3 + x}$.

193. a) $y = \frac{8}{x^2 - 4}$; b) $y = \frac{e^x}{x}$.

194. a) $y = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$; b) $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

195. a) $y = x^2 + \frac{2}{x}$; b) $y = x - 2 \operatorname{arccot} x$.

196. a) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$; b) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$.

197. a) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 - x - 6}$; b) $y = \ln x - \ln (x - 1)$.

198. a) $y = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$; b) $y = e^{-x^2}$.

199. a) $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$; b) $y = xe^{\frac{2}{x}} + 1$.

200. a) $y = \dfrac{x^2}{1 + x}$; b) $y = 2e^{x^2-2x}$.

Ülesandeis 201 - 210 tuleb funktsiooni diferentsiaali abil arvutada antud suuruse ligikaudne väärtus.

201. arcsin 0,49.
202. $\sqrt{120}$.
203. ln 1,2.
204. tan $44^\circ$.
205. Kera ruumala, kui kera raadius on 3,07.
206. $e^{-0,2}$.
207. arctan 0,97.
208. sin $58^\circ$.
209. $\sqrt[4]{80}$.
210. arccos (-0,95).

**211. Risttahukakujuline pealt lahtine paak, mille põhjaks on ruut, mahutab 100 l. Leida selle paagi minimaalne täispindala.**

**212. Täisnurkne kolmnurk ümbermõõduga 1 dm pöörleb ümber ühe kaateti. Leida teise kaateti pikkus, juhul kui tekkinud pöördkeha ruumala on maksimaalne.**

**213. Leida ümber sfääri, mille raadius on R, kujundatud minimaalse külgpindalaga koonuse telglõike tipunurk.**

**214. Ringikujulisest plekitükist, mille raadius on 15 cm, lõigatakse välja sektor ja keeratakse lehtriks. Milline peab olema sektori kesknurk, et lehter oleks mahutavuselt suurim?**

**215. Aken on kujult ristkülik, mille peale on asetatud võrd-**

külgne kolmnurk. Akna ümbermõõt on 4 m. Leida akna ristkülikukujulise osa mõõtmed eeldusel, et akna pindala on maksimaalne.

216. Kuidas suhtuvad kera ja temasse kujundatud maksimaalse täispindalaga koonuse ruumalad?

217. Poolringi on kujundatud trapets, mille üheks aluseks on poolringi diameeter D. Leida trapetsi alusnurk eeldusel, et trapetsi pindala oleks võimalikult suur.

218. Täisnurksesse kolmnurka, mille hüpotenuus on 4 cm ja üks teravnurk $60^\circ$, on kujundatud ristkülik nii, et kaks külge asuvad kolmnurga kaatetitel. Leida, milliste mõõtmete korral on ristküliku pindala suurim.

219. Kaks teed lõikuvad $120^\circ$ nurga all. Neid mööda sõidavad teede lõikumiskoha suunas teineteisele vastu kaks autot kiirusega 60 $\frac{km}{t}$. Kui üks auto jõuab teede lõikumiskohta, siis on teine sellest veel 12 km kaugusel. Leida, mitme minuti pärast on autode kaugus teineteisest minimaalne ja kui suur on see kaugus.

220. Ristkülikukujulise papitüki nurkadest lõigatakse ära ruudukujulised tükid ja ülejäänud osa kleebitakse kokku pealt lahtiseks karbiks. Papitüki mõõtmed on a cm ja b cm. Leida äralõigatavate ruutude küljepikkused eeldusel, et saadud karbi ruumala on võimalikult suur.

## E. KÜSIMUSI ENESEKONTROLLIKS

Järgmised enesekontrolliks mõeldud küsimused annavad lahendajale põgusa ülevaate programmi olulisematest teemadest. Need küsimused pole mõeldud eksamipileti küsimusteks, milleks nad on liiga kitsad, küll aga võidakse neid esitada eksamil lisaküsimustena pileti põhiküsimustele. Viimased võetakse programmis loetletud teemade hulgast.

I

1. Kuidas leida lõigu AB pikendusel üle punkti B punkt C nii, et lõik AC = k AB ?

2. Kuidas avaldub kolmnurga pindala kolmnurga tippude koordinaatide kaudu?

3. Kuidas arvutatakse kahe punkti vaheline kaugus?

4. Mis on joone võrrand?

5. Kuidas kontrollida, kas antud punkt asetseb antud joonel?

6. Kuidas tuletada sirgjoone üldvõrrandist sirgjoone võrrandi erikujud?

7. Kuidas avaldub sirgjoone üldvõrrandist sirgjoone tõus?

8. Kuidas kontrollida kahe sirgjoone ristseisu ja paralleelsust?

9. Kuidas sirgjoone üldvõrrandist tuletada normaalvõrrand ja milleks seda võrrandit kasutada?

10. Kuidas on punkti polaarkoordinaadid seotud tema ristkoordinaatidega?

11. Mida esitab geomeetriliselt võrrand $x^2 + y^2 = x$ ?

12. Mis on parabooli fokaallaius?

13. Kuidas iseloomustab ellipsi ja hüperbooli ekstsentrilisus neid jooni?

14. Mis on murdlineaarse funktsiooni graafikuks? Kuidas see joon paikneb koordinaattelgede suhtes?

15. Milles seisneb täisruudu eraldamise võte ja kuidas seda kasutatakse teist järku joone üldvõrrandi uurimisel?

16. Kuidas avaldub kolmandat järku determinant teise veeru elementide ja neile vastavate alamdeterminantide kaudu?

17. Millal on homogeensel lineaarvõrrandite süsteemil ka null-lahendist erinevaid lahendeid?

18. Mis on vabavektor?

19. Missuguste andmetega on vektor üheselt määratud?

20. Mis on kahe vektori liitmise, lahutamise ja mingi vektori skalaariga korrutamise tulemused?

21. Kuidas paikneb koordinaadistikus vektor, mille koordinaadid on 2, -3 ja 0 ?

22. Mis on ühikvektor?

23. Kuidas koordinaadid on seotud selle vektori sihiga?

24. Mis on kahe vektori skalaarkorrutis?

25. Kuidas avaldub kahe vektori ristseisu tingimus nende vektorite koordinaatides?

26. Kuidas avaldub ühe vektori projektsioon mingi teise vektori sihil?

27. Mis on kahe vektori vektorkorrutis?

28. Kuidas leida kahe vektori vektorkorrutist nende vektorite koordinaatides?

29. Mis on kolme vektori segakorrutis?

30. Millal on kolm vektorit komplanaarsed?

31. Kuidas tõlgendada segakorrutist geomeetriliselt?

32. Kuidas avaldub kolmnurga pindala vektorkujul?

33. Mida esitab lineaarne võrrand ruumis?

34. Mis on tasapinna suvalise punkti (x;y;z) koordinaatide kordajateks tasapinna üldvõrrandis $ax + by + cz + d = 0$?

35. Kuidas leida punkti kaugust tasapinnast?

36. Kuidas leida kahe tasapinna lõikejoone parameetrilisi võrrandeid?

37. Kuidas leitakse nurk sirgjoone ja tasapinna vahel?

38. Kuidas vektorkorrutist kasutades leida ruumipunkti kaugust sirgjoonest?

39. Kuidas leida punkti projektsiooni antud tasapinnal? antud sirgel?

40. Millist teist järku pinda esitab teise astme võrrand, mis sisaldab ainult kaks pinna suvalise punkti koordinaati?

41. Mis on maatriksi astak ja kuidas seda leida?

42. Kuidas toimub maatriksite korrutamine?

43. Kuidas toimub maatriksi viimine diagonaalkujule?

## II

44. Millal öeldakse, et kahe muutuva suuruse vahel on olemas funktsionaalne sõltuvus?

45. Kuidas selgitada, kas antud funktsioon on paarisfunktsioon või paaritu funktsioon?

46. Mida tähendab funktsiooni perioodilisus?

47. Mis on funktsiooni määramispiirkond ja millised on määramispiirkonna liigid?

48. Mis on elementaarfunktsioon?

49. Mis on reaalarvu absoluutväärtus?

50. Mida tähendab võrratus $|x - a| < b$ geomeetriliselt?

51. Millal leidub monotoonsel jadal piirväärtus? Millal leidub tõkestatud jadal piirväärtus?

52. Kuidas avaldada naturaallogaritmi kümnendlogaritmi kaudu ja vastupidi?

53. Mida tähendab graafiliselt asjaolu, et arv A on funktsiooni f(x) piirväärtuseks, kui argument $x \to a$ ?

54. Millega võrduvad piirväärtused $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$, $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ ja $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ ?

55. Missugust suurust nimetatakse lõpmatult vähenevaks suuruseks?

56. Kuidas on seotud muutuv suurus oma lõpliku piirväärtuse ja ühe lõpmatult väheneva suurusega?

57. Millal on funktsioon antud punktis pidev?

58. Missugust katkevust nimetatakse kõrvaldatavaks?

59. Mis on ühepoolne piirväärtus?

60. Mida võib öelda pidevate funktsioonide summa, korrutise, jagatise ja liitfunktsiooni pidevuse kohta?

61. Millised omadused on kinnises vahemikus pideval funktsioonil?

62. Kuidas defineeritakse funktsiooni tuletist?

63. Millised on tuletise leidmise eeskirjad?

64. Kuidas diferentseerida liitfunktsiooni?

65. Mis on funktsiooni tuletise geomeetriline tähendus?

66. Kuidas leida parameetrilisel kujul antud funktsiooni esimest, teist jne. tuletist?

67. Kuidas on seotud funktsiooni ja tema pöördfunktsiooni tuletised?

68. Mis on funktsiooni diferentsiaal?

69. Mida tähendab funktsiooni diferentsiaal geomeetriliselt?

70. Milles seisneb diferentsiaali kuju invariantsus?

71. Kuidas avaldub funktsiooni juurdekasv $\Delta f$ tema diferentsiaali kaudu?

72. Kuidas on seotud funktsiooni pidevus ja diferentseeruvus?

73. Mis on Rolle'i ja Lagrange'i väärtusteoreemide geomeetriline sisu?

74. Kuidas kasutada L'Hôpitali reeglit piirväärtuste leidmisel?

75. Mida nimetatakse funktsiooni ekstreemumiteks?

76. Kuidas tóestada esimese tuletise kaudu antud ekstreemumi olemasolu piisavaid tingimusi?

77. Mis on funktsiooni graafiku asümptoodid ja kuidas toimub nende leidmine?

78. Missuguses seoses on funktsiooni graafik selle funktsiooni Taylori polünoomi graafikuga?

79. Milline on Taylori valemi jääkliikme kuju Lagrange'i järgi?

80. Kuidas avalduvad joonele $y = f(x)$ punktis $x = x_0$ tómmatud puutuja ja normaali vórrandid?

81. Kuidas avaldub joone kaare diferentsiaal, kui joon on esitatud parameetriliste vórranditega?

82. Kuidas arvutada joone kóverust joone antud punktis?

S i s u k o r d



Heaks kiidetud kateedri
koosolekul 23.IV 69.

Tasuta