Tartu Ülikool

Sotsiaalteaduste valdkond

Haridusteaduste instituut

Õppekava: Põhikooli mitme aine õpetaja

Maarja Sõrmus

MATEMAATILINE PROBLEEMILAHENDAMINE GÜMNAASIUMIS

Magistritöö

Juhendajad: prof Margus Pedaste

PhD Külli Kori

Tartu 2018

Sisukord

Sissejuhatus

Kuigi mõnede inimeste jaoks seostub matemaatika millegi keerulise ja raskega, siis oma ala entusiastid on öelnud, et matemaatika ei ole ainult õppeaine, vaid see on erinevate sümbolite ja seoste keel, mis lihtsustab kõike (Saxena, Shrivastava, & Bhardwaj, 2016). Sajandeid on matemaatika õpetamise juures olnud keskseteks teemadeks algebra ja geomeetria, kuid kiire tehnoloogia areng on viinud selleni, et üha enam suureneb vajadus toetada õpetamisega loomingulisust ja leidlikkust ning seetõttu on matemaatiline probleemilahendus muutumas keskseks teemaks matemaatikas (Harks, Klieme, Hartig, & Leiss, 2014). Halmos (1980) on isegi öelnud, et probleemilahendus on matemaatika süda.

Matemaatika-, loodusteaduste- ja tehnoloogiaalast pädevust defineeritakse gümnaasiumi riiklikus õppekavas kui „suutlikkust kasutada matemaatikale ja loodusteadustele omast keelt, sümboleid, meetodeid ja mudeleid, lahendades erinevaid ülesandeid kõigis elu- ja tegevusvaldkondades; mõista loodusteaduste ja tehnoloogia tähtsust ning mõju igapäevaelule, loodusele ja ühiskonnale; mõista teaduse ja tehnoloogiaga seotud piiranguid ja riske; teha tõenduspõhiseid otsuseid erinevates eluvaldkondades; kasutada uusi tehnoloogiaid loovalt ja uuendusmeelselt" (Gümnaasiumi riiklik õppekava, 2014). Matemaatika-, loodusteaduste- ja tehnoloogiaalane pädevus koosneb kolmest komponendist ning teaduskirjanduses on neid enamasti käsitletud eraldi. Ka PISA (*Program for International Student Assessment*) 2015. aasta tulemuste analüüsis on koos kirjeldatud loodusteaduste- ja tehnoloogiaalast kirjaoskust ning matemaatikat on võetud eraldi osana (PISA 2015 Eesti…, 2016; PISA 2015 Results ..., 2015). Käesoleva töö raames keskendutakse eelnimetatud üldpädevusest matemaatika pädevusele.

Protseduurilised teadmised ja oskused tähendavad, et teatakse vajalikke algoritme ja strateegiaid, mis on olulised konkreetsete eesmärkide saavutamisel (Byrnes & Wasik, 1991). Protseduurilised teadmised ja oskused (arvutamisalgoritmid, reeglid, valemid, teisenduste seosed jt) omandatakse enamasti kordamise, mehaanilise õppimise ja harjutamisega matemaatikatundides (Palu, 2015). Uurimused näitavad, et matemaatika õpikutes keskendutakse enam protseduurilistele oskustele kui probleemilahendusele ning õpikud on oluline osa matemaatika õpetamisel, olles tihti peamiseks allikaks, mille alusel õpetaja planeerib tunde ja tunnis toimuvat (Brehmer, Ryve, & Van Steenbrugge, 2016). Ka Yu & Singh (2018) on välja toonud, et traditsiooniliselt keskenduvad õpetajad õpilaste protseduuriliste oskuste arendamisele.

PISA 2012. aasta tulemuste analüüsis on välja toodud, et Eesti õpilased on väga head matemaatika rakendajad etapis, kus pearõhk on olemasoleva matemaatilise mudeli lahendamisel, kuid tunduvalt nõrgemad on õpilaste tulemused matemaatika rakendusvõimaluste nägemises, vastava mudeli koostamises ja saadud matemaatilise tulemuse tõlgendamises igapäevaelu kontekstis (PISA 2012 Eesti…, 2013). Kuna kirjanduse kohaselt on matemaatiline probleemilahendus üks olulisi teemasid matemaatilise pädevuse arendamisel, siis käesolevas töös on fookuses just matemaatiline probleemilahendusoskus.

Autorile teadaolevalt ei ole testi, millega hinnata Eesti õpilaste matemaatilise probleemilahenduse taset gümnaasiumis ning sellest tulenevalt on käesoleva töö eesmärk luua teoreetilise ülevaate põhjal test, mida rakendada gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse oskuse hindamisel ning läbi selle analüüsida Eesti gümnaasiumiastme õpilaste oskust koos põhjendustega lahendada probleemülesandeid matemaatika kontekstis. Testi koostamiseks uuriti süstemaatiliselt teemakohast teaduskirjandust. Loodud testiga, mida lahendasid valimisse kuulunud Eesti 10. klassi õpilased ajavahemikus jaanuar – aprill 2018, saab tutvuda käesoleva töö lisas 1.

Magistritöö koosneb neljast suuremast osast, mis omakorda jagunevad alapeatükkideks. Esimeses peatükis kirjeldatakse teoreetilisi lähtekohti ning mõisteid, mis kerkivad esile seoses matemaatilise probleemilahendusega ning millest saadud informatsiooni kasutati testi koostamise protsessis. Teises osas kirjeldatakse uurimuse metoodikat. Kolmandas osas tuuakse välja uurimuses saadud tulemused ning neljandas osa on arutelu uurimuse käigus saadud tulemuste põhjal.

1. Töö teoreetiline raamistik

1.1 Matemaatilise probleemilahenduse definitsioon ning olulisus

Kvaliteetne haridus peab kaasama õpilasi aktiivselt õppima ja juhtima õpilastes elus vajalike väärtuste kujunemist (Surya, Putri, & Mukhtar, 2017). Matemaatika õpetamise üks peamisi eesmärke on arendada inimeste intellektuaalseid võimeid ning probleemilahendus on üks olulisemaid elemente matemaatika õpetamisel (Puran, Behzadi, Shahvarani, & Lotfi, 2017).

Baumert'i kohaselt on matemaatika üks viiest põhilisest pädevusest, mis loovad üldhariduse (Baumert, 2002, viidatud, Neumann et al., 2013 j). Viidates George Pólyale on Passmore (2007) välja toonud, et matemaatika õppekava eesmärk keskkoolis peaks olema õpetada noori inimesi mõtlema. Mõtlemise juures peab inimene kasutama mõtlemisprotsessi tõhusalt ja tähendusrikkalt (Onal, Inan, & Bozkurt, 2017). PISA 2015. aasta aruande kohaselt hõlmab matemaatiline kirjaoskus enese võimet näha matemaatika vahenditega lahenduvaid elulisi probleeme ja oskust sõnastada need matemaatika keeles; oskust lahendada saadud matemaatiline mudel ja suutlikkust tõlgendada saadud matemaatilist probleemi elulises kontekstis (PISA 2015 Eesti…, 2016).

Probleemilahendamise mõiste osas on erinevaid lähenemisi kuid ühtset definitsiooni ei ole. Kõige üldisemas definitsioonis kirjeldatakse probleemilahendamist kui katset leida väljund siis, kui ei ole teada meetod, millega seda saavutada (Schoenfeld, 2013). Probleemilahendus on protsess, mis on oluline matemaatika ning matemaatilise hariduse jaoks (Savic, 2016), sest matemaatilise probleemilahenduse protsessi käigus luuakse seos teada olevate ning otsitavate väärtuste vahel (Mwei, 2017). Schoenfeld'i (2013) kohaselt on eesmärk lahendada probleem ning selle saavutamiseks on vajalik teadmiste olemasolu ning olenevalt kontekstist ka sotsiaalne kaasatus. Matemaatilist probleemilahendust võib mõista kui tavaelulise probleemi tõlkimist matemaatika keelde, seejärel loodud matemaatilise probleemi lahendamist, kasutades matemaatilisi tööriistu ning lõpuks tulemuse hindamist tavaelu kontekstis (Baumert, 2002, viidatud, Neumann et al., 2013 j). On leitud, et matemaatiline probleemilahendus sisaldab interpretatsiooni ja probleemi analüüsi ning samuti ka arusaamist sellest, milliseid arvutuslikke protsesse on vaja teostada (Krawec, 2014).

Akadeemilised saavutused matemaatikas on suuresti mõjutatud õpilase motivatsioonist ja kaasatusest õppeprotsessis (Gasco & Villarroel, 2014). Õpetamise eesmärk on suurendada õppimisvõimet ning efektiivsed õpetajad ei ole mitte ainult teadmiste pakkujad vaid samuti nad õpetavad õpilastele, kuidas kasutada saadud teadmisi efektiivselt (Hassan-Nejad et al., 2015). Õpetamise peamine eesmärk peab olema see, kuidas muuta matemaatika huvitavaks ja selliseks, et õpilased naudiksid matemaatika õppimist, mitte ainult akadeemilise protsessi saavutamiseks, vaid ka selleks, et avastada uusi nippe ja meetodeid ning peamiselt seetõttu, et nad seostaksid matemaatilisi probleeme või õpiku ülesandeid ka igapäevaelu situatsioonidega (Saxena, Shrivastava, & Bhardwaj, 2016). Selleks, et õpitav oleks õpilasele tähenduslik, peaks õpetaja alustama õpilase seisukohast tulenevalt probleemi lahenduse selgitusega, mitte eeldama, et õpilane jagab õpetaja arusaama matemaatilisest probleemilahendusest (Sakshaug & Wohlhuter, 2010). Selleks, et mõista matemaatilisi seoseid, tuginevad õpilased enda kogemustele (Yee, 2017). Sellest tulenevalt peaksid õpetajad enam suunama õpilastele ülesandeid selliselt, et õpilastel tekiksid seosed tavaelu kontekstis.

Puran, Behzadi, Shahvarani, & Lotfi (2017) on teema edasiarendusena lisanud, et loovaid ja innovaatilisi inimesi vajatakse enam ning seetõttu peaksid õpetajad aitama õpilastel arendada enda oskusi ja tugevusi ning mis kõige tähtsam – pöörama tähelepanu loomingulisusele probleemilahenduses. Viidates Pólyale on Passmore (2007) välja toodud, et kui õpetaja esitleb probleemi, mida lahendama hakatakse, siis tuleks alustada sellest, et õpilased esmalt pakuvad, mis võiks lahenduseks tulla, sest seejärel on õpilasel ka sisemine huvi teada saada, kas tema pakutud vastus osutus õigeks või mitte. Pólya (2001) on ka öelnud, et kui õpilane ei saa aru või tal puudub huvi, siis pole see mitte alati tema enda süü: ülesanne olgu hästi valitud, mitte liiga raske ega mitte liiga kerge, see peab olema loomulik ja huvitav ning teatud määral tuleb kulutada aega ka selle loomulikule ja huvitavale esitamisele. Käesoleva töö aluseks olevas testis küsiti õpilastelt arvamust lahendatud ülesannete kohta, et hinnata kas mõni ülesanne vajaks testis välja vahetamist tulenevalt huvi puudumisest.

Mariam Ar Rahmah (2017) on samuti välja toonud, et inimeste vahel, kes omavad oskust ja võimet mõelda kriitiliselt, süstemaatiliselt, loogiliselt ning loovalt, toimub tihe konkurents igapäevaelus. Selle edasiarendusena on samad autor välja toodud, et sellistele kriteeriumitele vastavate inimeste kujundamine on teostatav läbi hariduse ja eriti matemaatilise hariduse, mis pakub õpilastele oskuse mõista, ennast väljendada, suhestuda, mõtestada, lahendada probleeme, mõelda loogiliselt ja süstemaatiliselt, hinnata kriitiliselt ning mõelda loovalt. Loovust matemaatikas võib vaadelda omakorda kui sünteesi neljast komponendist (Mann, Chamberlin, & Graefe, 2017):

1) voolavus kui oskus genereerida palju mõtteid, võimalusi ja võimalikke lahenduskäike probleemi lahendamisel;
2) paindlikkus kui oskus ühele probleemile läheneda mitmest erinevast vaatenurgast;
3) originaalsus kui oskus luua uusi lahendusi;
4) detailirohkus kui oskus läheneda probleemile sügavamalt ning täpsemalt.

Schoenfeld (2013) on kirjutanud, et inimene, kes hakkas tööle ja lahendas probleemi, ei ole enam sama inimene, kui see, kes alustas probleemi lahendamisega, sest hakates lahendama järgmist probleemi, teab ta juba rohkem kui enne. Uurimused näitavad, et õpilased, kellel on kõrgemad metakognitiivsed oskused, omavad ka kõrgemaid matemaatilise probleemilahendamise oskusi (Özcan, 2016). Hastuti et al. (2016) on samuti viidanud sellele, et metakognitsioon ja probleemilahendus on tihedalt seotud. Metakognitsioon probleemilahenduses aitab probleemi lahendajal tuvastada probleemid, mis vajavad lahendamist; vaadata tagasi, mis täpsemalt probleemid on; ja paremini mõista kuidas saavutada tulemus või lahendus (Kuzle, 2013). Beigie (2008) on välja toonud, et läbi probleemilahenduse saavad õpilased süvendada enda arusaamisi matemaatilistest kontseptsioonidest kasutades selleks matemaatika rakendamist tavaelulistele probleemidele. Matemaatiline modelleerimine on kui mõlemasuunaline tõlkeprotsess tavaelu ja matemaatika vahel (Blum & Borromeo Ferri, 2009). Samad autorid on mõtet edasi arendanud ning välja toonud, et matemaatiline modelleerimine on selleks, et aidata õpilastel paremini maailma mõista, toetada matemaatika õppimist, aidata kaasa matemaatilise kompetentsuse arenemisele ja adekvaatse pildi tekkimisele matemaatikast.

1.2 Probleemilahendus aritmeetikas

Õpilased võivad olla kinni uskumuses, et probleemid matemaatikas lahendatakse otsese arvutamise vahendusel (Stacey & MacGregor, 1999). Aritmeetikas probleemide lahendamine on arvutamine teada olevate numbriliste väärtustega kuni jõutakse tulemini. Algebras on suhted kirjeldatud nii teadaolevate kui tundmatute väärtustega ning samaväärsed seosed on neist tuletatud kuni probleemi lahenduse saavutamiseni (Stacey & MacGregor, 1999).

Uurimuste kohaselt kalduvad õpilased nägema matemaatikat suuresti kui arvutuslikku protsessi ning uskuma, et matemaatilised probleemid peaksid olema lahendatavad vähem kui viie minutiga ja sealjuures on neil raskusi leidmaks matemaatika rakendamist väljaspool kooli (Martin & Gourley-Delaney, 2014). Samas on Westwood (2011) öeldud, et matemaatiliste probleemide lahendamine viib õpilased omandama olulist oskust – kuidas mõelda, mis kandub edasi ka väljapoole matemaatika klassiruumi.

Õpilased peaksid omandama pädevuse lahendada matemaatilisi probleeme selleks, et mõista matemaatika olulisust igapäevaelus, elukeskkonnas ning teaduses (Kaiser, 2007). Lisaks sellele võib välja tuua, et arvutid on suutelised tegema üha rohkem protsesse ning seeläbi on vajalik enam mõista probleemide lahendamise viise, mida rakendada arvutiprogrammide abil.

Hakates lahendama algebra ülesandeid, on õpilaste esmane soov lahendada neid ülesandeid asendades tundmatud väärtused tähtedega ning luues võrrandisüsteemid, mille abil loodetakse valitud meetodiga lahenduseni jõuda (Stacey & MacGregor, 1999). Gasco & Villarroel (2014) on välja toonud neli peamist raskust, mis tekivad õpilastel minnes üle aritmeetikalt algebrale:

1) probleem opereerimisel tundmatute väärtustega;
2) probleem mõistmaks tähtede kasutamist tundmatute väärtuste tähistamisel;
3) kalduvus tõlgendada võrdusmärki tulemuspõhise indikaatorina (tehte vastuse näitajana), mitte aga suuruste vahelise suhestumise näitajana;
4) keerukus, mis on seotud verbaalse formuleerimise muutmisel võrrandiks.

1.3 Matemaatilise probleemilahenduse dimensioonid

Erinevad autorid alates Pólyast on välja toonud mitmeid nägemusi matemaatilise probleemilahenduse dimensioonidest. Newman on välja toonud, et matemaatiliste probleemide lahendamisel on viis etappi (Abdullah, 2015):

1) ülesandest probleemi välja lugemine;
2) matemaatiliselt ülesandest aru saamine;
3) matemaatilise lahendusmeetodi valimine;
4) ülesande matemaatiline lahendamine;
5) ülesandele vastuse formuleerimine.

Samas Pólya (2001) kohaselt võib välja tuua neli probleemi lahendamise etappi:

1) ülesandest arusaamine;
2) lahenduskäigu planeerimine;
3) lahenduskäigu teostamine tulenevalt planeeritust;
4) tagasivaade lahenduskäigule.

PISA 2012. aasta tulemuste juures on välja toodud järgmised pädevuste rühmad (PISA 2012 Eesti…, 2013):

1) matemaatiliselt lahenduva situatsiooni äratundmine ja matemaatiline formuleerimine;
2) matemaatiliste mõistete, protseduuride, meetodite ja arutluste valdamine;
3) matemaatiliste tulemuste tõlgendamine, rakendamine ja hindamine.

Galbraith (2007), Haines et al (2001), Kaiser (2007), Maaß (2007) ja Neumann et al. (2013) alusel võib välja tuua viis matemaatilise probleemilahenduse etappi:

1) probleemi leidmine kontekstist;
2) probleemi matemaatiline modelleerimine;
3) probleemi lahendamise strateegia valimine;
4) valitud strateegia rakendamine;
5) tulemuste tõlgendamine (matemaatilises ja tavaelulises kontekstis lahenduse realistlikkuse ja headuse hindamine).

Käesolevas töös on testi koostamisel aluseks võetud viimasena kirjeldatud viiest etapist koosnev probleemilahenduse mudel, sest sisu poolest võtavad kõik eelnevad mudelid arvesse samasid näitajaid, kuid nagu on näha tabelis 1, siis viimasena toodud mudel on koostatud sümbioosina erinevatest nägemustest ning seetõttu pakub selle osas lisa uurimisvõimaluse. Ka Newmani mudel vastab samadele punktidele, kuid tema mudel ei rõhuta, et antud vastust tuleks tõlgendada ka tavaelulises kontekstis.

Tabel 1. Viiedimensioonilise probleemilahenduse alus

Galbraith (2007)	Haines et al (2001)	Kaiser (2007)	Maaß (2007)	Neumann et al. (2013)	Töös kasutatav mudel
Probleemi leidmine tavaelu kontekstis	Tavaelulise probleemi leidmine	Tavaelulise eesmärgi selgitamine	Probleemist aru saamine		Probleemi leidmine kontekstist
Probleemi matemaatiline sõnastamine	Matemaatilise mudeli loomine	Probleemi täpne formuleerimine	Matemaatilise mudeli loomine tavaelulisest mudelist	Matemaatiline uurimine	Probleemi matemaatiline modelleerimine
Lahendusprotsessi formuleerimine		Parameetrite, muutujate määramine mudelis, matemaatiline protsessi kirjeldus		Tehniliste oskuste ja võimete uurimine, matemaatiline argumentatsioon, mudeli modelleerimine	Probleemi lahendamise strateegia valimine
Matemaatiline lahendusprotsess	Matemaatiline lahendamine	Probleemi graafiline esitamine, lahendamine	Probleemide lahendamise loodud matemaatilise mudeli baasil	Matemaatiline lahendamine	Valitud strateegia rakendamine
Lahenduse hindamine, interpretatsioon	Tulemuste interpreteerimine, hindamine	Tagasi tavaelulise probleemi poole liikumine, lahenduse interpreteerimine tavaelu kontekstis	Matemaatiliste tulemuste interpreteerimine tavaelu kontekstis, tulemuste hindamine	Esinduslike vormide kasutamine	Tulemuste tõlgendamine (matemaatilises ja tavaelulises kontekstis lahenduse realistlikkuse ja headuse hindamine)

1.4 Uurimuse eesmärk ja uurimisküsimused

Tulenevalt eelnevast on käesoleva uurimuse eesmärk luua test, mida saab rakendada gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse oskuse hindamisel ning läbi selle analüüsida Eesti gümnaasiumiastme õpilaste oskust lahendada probleemülesandeid koos põhjendustega matemaatika kontekstis.

Eesmärgi saavutamiseks loodi esmalt teoreetiline ülevaade ja koostati test ning seejärel hinnati selle rakendatavust. Rakendatavuse hindamise püstitati kaks uurimisküsimust:

1) Millised teoreetiliselt eristatavad dimensioonid on empiiriliselt eristatavad gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse taseme hindamisel?
2) Milline on Eesti gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse tase?

2. Metoodika

2.1 Valim

Matemaatikaalase pädevuse hindamise mudelit rakendatakse projekti „Üldpädevuste arendamine gümnaasiumis" raames. Uuringus kasutati süstemaatilist kihtvalimit. Uuringu populatsiooni moodustasid Eesti kõigi gümnaasiumite kõik 10. klassid, kes alustasid õpinguid 2017. aasta sügisel. Valimi moodustamisel võeti aluseks haridussilm.ee andmebaasist tabel Õpilaste arv üldhariduse päevases õppevormis kooli ja klassi lõikes 2015/2016. Andmebaasist tehti väljavõte 11. detsembril 2016. Koolide valimisse võtmiseks kasutati nelja kriteeriumi (Üldpädevuste arendamine gümnaasiumis, 2016):

1) kooli tüüp: kaasati gümnaasiumid, keskkoolid, filiaalid ja täiskasvanute gümnaasiumid (välistati algkoolid, kutseõppeasutused, põhikoolid);
2) kooli liik: kaasati tava ja täiskasvanute gümnaasium (välistati üks kool hariduslike erivajadustega õpilastele);
3) õpilaste arv 2015/2016 õppeaastal: kaasati koolid, milles oli 10. klassis õpilasi vähemalt 10 (välistati 14 kooli);
4) kooli õppekeelte hulgas on ka eesti keel (välistati kaks kooli, kus ainsaks õppekeeleks on inglise keel).

Eelnevalt kirjeldatud kriteeriumitele vastas 144 kooli, milles õppis 10. klassis kokku 7487 õpilast.

Edasiseks koolide väljavalimiseks kasutati järgmiseid võtteid (Üldpädevuste arendamine gümnaasiumis, 2016):

1) koostati koolide valikuks 3x2 gruppi nende asukoha ja suuruse alusel:

a. 3 asukoha tunnust: suurlinna ehk Tallinna ja Tartu koolid, muude linnade koolid, muud koolid;
b. 2 suuruse tunnust: 10. klassi õpilaste arvult asukohagrupi keskmisest suuremad ja väiksemad koolid;

2) järjestati moodustatud kuues grupis koolid juhuslikult;
3) valiti igast grupist valimisse üks kool.

Matemaatilise probleemilahenduse testi täitis 17 kooli 10. klassi õpilased ning pärast korrektuuride tegemist tulenevalt poolikutest vastustest, jäid valimisse 376 õpilase lahendused. Valimisse kuuluvad koolid katavad pea kogu Eesti – on nii linna- kui maakoole. Valimisse kuuluvatest õpilastest 62.77% olid tüdrukud.

2.2 Mõõtevahend

Käesolevas töös on mõõtevahendiks loodud test. Testi formaadi loomisel on aluseks võetud Singapuris kasutatav matemaatilise probleemilahenduse vorm, mis omakorda baseerub Pólya mudelil formaalsel vormil (Leong et al., 2014). Töös ei kasutata hindamise alusena Pólya mudelit, vaid ülesannete hindamisel kasutatud peatükis 1.3 toodud viie dimensioonilist mudelit. Iga ülesande küsimused on jaotatud Pólya mudeli kohaselt nelja suuremasse gruppi, millest esimeses käsitletakse probleemist arusaamist, teises lahenduskäigu planeerimist, kolmandas lahenduskäigu teostamist ning neljandas tulemuste hindamist. Õpilastele saadetud testis on kokku neli ülesannet, mis igaüks jaguneb veel 9 küsimuseks. Küsimused on omakorda jaotatud ära dimensioonideks, mida kasutatakse käesoleva töö aluseks olevas dimensioonide mudelis ning seda kajastab tabel 2. Erandiks on iga ülesande küsimused 1.1 ja 1.2, mis ei lähe dimensioonide arvestusse, kuna tegemist on autori jaoks tagasiside küsimustega tulevaste ülesannete loomisel.

Tabel 2. Testi küsimuste jagunemine dimensioonideks

Küsimus	Dimensioon 1	Dimensioon 2	Dimensioon 3	Dimensioon 4	Dimensioon 5
1.3	x				
2.1			x		
3.1		x			
3.2				x	
3.3				x	
3.4				x	
4					x

Ülesannete juures on arvestatud, et ülesannete teemad peavad katma teadmisi, mis õpilastel on selleks hetkeks ka omandatud – küsimustikke hakati täitma alates jaanuarist 2018, mil 10. klassi teemad olid läbitud umbes poole ulatuses. Matemaatilise probleemilahenduse ülesannete koostamisel lähtuti sellest, et esimene ülesanne oleks õpilastele lihtsamini arusaadav selleks, et motiveerida neid ka järgmiste ülesannete lahendamisel.

Esialgses testis oli viis ülesannet, millest esimene kätkes ajaühikute teisendamist, teine juurdekasvu ja kolmas tundmatu avaldamist läbi erinevate võrrandite kombineerimise. Neljas ülesanne kätkes jada arvutamist ning viiendas ülesandes tuli analüüsida laenu otstarbekuse osas.

Kvaliteedi tõstmiseks viidi 31.10.2017 läbi testi proovilahendamine Tartus Jaan Poska Gümnaasiumi 10. klassi õpilastega. Lahendamiseks oli neil aega 50-55 minutit ning 31st vastanust 13 ei jõudnud lahendustega viienda ülesande juurde. Neli õpilast ei jõudnud etteantud aja jooksul kahe viimase ülesande juurde. Sellest tulenevalt otsustati, et ülesannete arvu vähendatakse nelja ülesandeni. Samuti oli õpilastel probleeme kaalude ülesande lahendamisega (ülesanne kolm) ning sellest tulenevalt sai lisatud teada oleva väärtusena ka ühe puuvilja mass, et lihtsustada õpilaste arvutusi. Neljas ülesanne vahetati täiesti välja, sest õpilased said sellest aru kahte moodi ning täpsemate selgituste lisamine ülesandele oleks andnud enamuse lahenduskäigust. Uus neljas ülesanne kuulub tõenäosuse valdkonda.

Käesolevas uurimuses kasutatud testi esimesed kolm ülesannet jäid temaatika poolest muutmata ning neljas ülesanne kätkeb endast tõenäosuse temaatikat – õpilastele saadetud test on lisas 1.

2.3 Andmekogumine ja andmeanalüüs

Andmekogumiseks kasutati paralleelselt elektroonilist keskkonda ja paberkandjal esitamist. Esmane testi lahendamine Jaan Poska Gümnaasiumis toimus paberkandjal ning seda seetõttu, et kooli poolt oli lihtsam organiseerida lahendamist paberkandjal, sest see ei seadnud kasutatavale klassiruumile piiranguid. Paberkandjal esitamise üheks eesmärgiks oli saada õpilastelt tagasisidet, kuidas nende meelest on mugavam matemaatika ülesandeid lahendada. Lahenduste juurde lisatud kommentaaride põhjal jätkati ülesannete lahendamist nii paberkandjal kui elektroonilises keskkonnas, sest õpilastelt saadud tagasiside põhjal selgus, et matemaatiliste tehete teostamiseks eelistatakse paberit.

Põhiandmekogumine toimus ajavahemikul jaanuar 2018 – aprill 2018. Selleks kasutati Tartu Ülikooli LimeSurvey keskkonda ning kui õpilased kasutasid arvutuste tegemiseks ka lisapaberit, saatsid koolid õpilaste lahenduslehed kas paberkandjal või skänneritult käesoleva töö autorile.

LimeSurvey keskkonnas alustati testi täitmist 778 korda, millest kasvõi osalise lahenduseni jõuti 543 korral. 56 lahendust jäeti valimist välja, sest lahendatud oli ainult üks ülesanne neljast. 9 lahendust jäeti valimist välja seetõttu, et sama inimene oli jätnud lahendamise teadmata põhjusel pooleli ning hiljem täitnud terve testi uuesti. Samuti jäeti valimist välja need, kelle puhul oli juurde kirjutatud, et ülesanne lahendatud paberil, kuid paberkandjal lahendust ei laekunud ning kooli poole pöördudes ei olnud koolile neid lahenduspabereid jäänud. Sellest tulenevalt puudus võimalus hinnata nende ülesannete lahenduskäiku.

Andmete paremaks analüüsimiseks määrati igale ülesandele järgmised koodid:

1. Iga ülesanne sai eraldi tähise – A tähistab ülesannet üks, B tähistab ülesannet kaks, C tähistab ülesannet kolm ja D tähistab ülesannet neli.
2. Küsimused numbriga 13 tähistavad probleemist arusaamist.
3. Küsimused numbriga 21 tähistavad probleemi lahendamise strateegia valimist.
4. Küsimused numbriga 31 on jaotatud kaheks – ühelt poolt on seal dimensioon, mis kätkeb matemaatilist modelleerimist, teiselt poolt on seal dimensioon, mis kätkeb endas valitud strateegia rakendamist.
5. Küsimused numbriga 32, 33, 34 tähistavad strateegia rakendamist.
6. Küsimused numbriga 41 tähistavad tulemuste tõlgendamist.

Iga ülesande eest oli võimalik saada maksimaalselt 18 punkti. Küsimused A/B/C/D13, A/B/C/D32, A/B/C/D33 ja A/B/C/D34 andsid maksimaalselt kaks punkti, küsimused A/B/C/D21 andsid maksimaalselt ühe punkti ning ülejäänud küsimused andsid maksimaalselt kolm punkti igaüks.

Töid hinnati algselt läbivalt üle kõigi ülesannete, et saada ülevaade, kuidas õpilased on töid lahendanud. Pärast esimese 100 töö hindamist vaadati hindamismudel uuesti üle selleks, et olla veendunud lahenduste õiglases ja ühtses hindamises. Seejärel hakati lahendusi kontrollima ülesannete kaupa selleks, et ülesanded oleksid hinnatud samade kriteeriumite alusel. Seejuures viidi jooksvalt kokku elektrooniliselt esitatud lahendused ning paberkandjal laekunud lahendused.

Kui 100 tööd oli hinnatud, siis selgus, et neljanda ülesande juurde ei olnud ajapuudusele viidates jõudnud 22 õpilast. Lisaks sellele olid 23 õpilast ilma põhjenduseta jätnud neljanda ülesande lahendamata; 24 õpilast olid kirjutanud ülesande juurde, et nad ei oska seda lahendada. See tähendab, et sajast õpilasest 69% ei olnud neljandat ülesannet lahendanud ning sellest tulenevalt otsustati neljas ülesanne edasisest analüüsist välja jätta.

Teiseks kvaliteedi tõstmise meetodiks kasutati käesolevas töös kaaskodeerimist, mis pärast hindamismudeli täpsustamist kaaskodeerijale saavutas enam kui 85%-lise kattuvuse.

Dimensioonide eristuvuse kontrollimiseks on tehtud kinnitav faktoranalüüs ning seejärel uuriv faktoranalüüs statistikaprogrammiga Mplus (Muthén & Muthén, 1998–2012). Mudeli headuse hindamiseks kasutati järgmiseid näitajaid: *comparative fit index* (CFI) (Bentler, 1990), *standardized root mean square residual* (SRMR) (Jöreskog & Sörbom, 1989) ja *root mean square error of approximation* (RMSEA) (Browne & Cudeck, 1993). Hooper, Coughlan ja Mullen (2008) põhjal loeti mudel heaks, kui CFI väärtus oli 0,9 või suurem, SRMR väärtus 0,08 või väiksem ning RMSEA väärtus 0,08 või väiksem. Ülejäänud probleemilahenduse tasemete kirjelduse analüüsid on läbi viidud kasutades tabeltöötlusprogrammi MS Excel.

3. Tulemused

3.1 Faktoranalüüs matemaatilise probleemilahenduse dimensioonide eristamiseks

Tulemuste hindamiseks tehti algselt kinnitav faktoranalüüs teooriast tulenevate dimensioonide põhjal. Mudeli headuse näitajad olid CFI=0,480, RMSEA=0,146, SRMR=0,123, millest ükski näitaja ei ole piisavalt hea. Seejärel teostati uuriv faktoranalüüs, millega võrreldi 1-5 faktoriga mudelit ning iga mudeli headuse näitajad on tabelis 3. Erinevate faktorite arvudega mudelite võrdlemisel leiti, et neli faktorit kirjeldaks tulemusi kõige paremini.

Tabel 3. Uuriva faktoranalüüsi tulemused

Mudel	CFI **≥.90**	RMSEA **<0.08**	SRMR **<0.08**
1 faktor	0,480	0,146	0,123
2 faktorit	0,732	0,111	0,076
3 faktorit	0,886	0,079	0,053
4 faktorit	0,936	0,064	0,039
5 faktorit	0,965	0,051	0,035

CFI, RMSEA, SRMR tulemuste põhjal sobib nii nelja- kui viiefaktoriline mudel, kuid viiefaktorilise mudeli puhul jääks ühte faktorisse ainult üks tunnus (küsimus A41). Sellest tulenevalt on faktoranalüüsi puhul jätkatud neljafaktorilise mudeliga.

Tabelis 4 on toodud uuriva faktoranalüüsi tulemused, neljafaktorilise mudeli puhul, mis kajastab, kuidas testi ülesannete küsimuste faktoritesse jagunemist. Esimese faktori alla kuuluvad küsimused, mis kätkevad endas esimese ülesande lahenduskäiku, esialgselt planeeritud lahenduse ja reaalselt läbi viidud lahenduse võrdlust ning saadud tulemuste interpretatsiooni. Teise faktori alla kuuluvad küsimused, mis kätkevad endas teise ülesande lahenduskäiku, matemaatilist modelleerimist, esialgselt planeeritud lahenduse ja reaalselt läbi viidud lahenduse võrdlust ning saadud tulemuste interpreteerimist. Kolmanda faktori alla kuulub kolme ülesande küsimus, mis puudutab uuritava väärtuse leidmist, esimese ja teise ülesande küsimust planeeritava lahenduskäigu kohta ja esimese ülesande küsimus matemaatilise modelleerimise osas. Neljanda faktori alla jäävad kolmanda ülesande küsimused välja arvatud küsimus, mis puudutab otsitavat väärtuse nimetamist.

Tabel 4. Neljafaktorilise mudeli faktorlaadungid

Küsimus	Faktor 1	Faktor 2	Faktor 3	Faktor 4
A13 (D1)			0,401	
A21 (D3)			0,346	
A31 (D2)			0,330	
A31 (D4)	0,884			
A32 (D4)	0,281			
A41 (D5)	0,848			
B13 (D1)			0,281	
B21 (D3)			0,377	
B31 (D2)		0,586		
B31 (D4)		0,917		
B32 (D4)		0,640		
B41 (D5)		0,764		
C13 (D1)			0,240	
C21 (D3)				0,451
C31 (D2)				0,529
C31 (D4)				0,919
C32 (D4)				0,724
C41 (D5)				0,842

Uuriva faktoranalüüsi tulemusena eristus eraldi faktorina iga ülesande lahenduskäik (A/B/C31), lahenduskäigu ja planeeritava lahenduskäigu võrdlus (A/B/C32) ning tulemuste analüüs (A/B/C41), mis omakorda juhib tähelepanu sellele, et kuigi ülesannete küsimuste formaat oli sama, siis ülesannete omavaheline erinevus tuli selgelt esile.

3.2 Matemaatilise probleemilahendamise tase

Kogu testi eest oli võimalik saada kokku maksimaalselt 54 punkti. Parim tulemus oli 53 punkti, samas oli õpilasi, kes said kogu testi eest 0 punkti. 0 punkti puhul oli tegemist õpilastega, kes täitsid testi kommentaaride ja repliikidega, mis ei puudutanud ülesande lahendust, kuid kogu test sai täidetud. Testi tulemused üle kõigi ülesannete olid keskmise väärtusega 24,57 punkti (SD=10,26), mis teeb keskmiseks tulemuseks 45,5% maksimaalsest tulemusest. 376 õpilase lahendustest 25 tulemust olid suurema punktide skooriga kui 40 punkti. Võttes aluseks keskmise väärtuse leidmise standardhälbe, siis tuleb ka selgelt välja see, et testi tulemused on varieeruvad.

Üheks testi küsimuseks, mida ei hinnatud punktidega, oli õpilaste hinnang ülesandele, et saada tagasisidet õpilaste arvamusest ülesannete kohta. Õpilaste hinnanguid kajastab tabel 5. Õpilased said valida loendist nelja valiku vahel – huvitav, igav, segadusse ajav, väljakutset esitav.

Tabel 5. Õpilaste hinnangud testi ülesannetele (protsentuaalselt)

Hinnang	1. ülesanne	2. ülesanne	3. ülesanne
Huvitav	19,54%	22,48%	16,14%
Igav	17,86%	23,95%	13,00%
Segadusse ajav	37,18%	22,06%	34,30%
Väljakutset esitav	25,42%	31,51%	36,55%
Kokku	100,00%	100,00%	100,00%

Nagu tabelist 5 võib näha, siis õpilaste hinnangul on nii kõige huvitavam kui ka kõige igavam ülesanne kaks, samas kui kõige enam väljakutset esitavamaks peeti ülesannet kolm. Esimese ülesande juures on vastus „segadusse ajav“ ootuspärane, sest selles ülesandes on taotluslikult esitatud rohkem andmeid kui ülesande lahendamise seisukohast on vaja.

Tabelis 6 on toodud kogu testi tulemused dimensiooniti. Käesolevas töö tulemustes avaldus, et õpilased kalduvad nägema matemaatikat suuresti kui arvutuslikku protsessi, mis tuli välja küsimuse juures, mis kätkes endas lahenduskäigu planeerimist. Üks tüüpilisemaid vastuseid sellele küsimusele oli „*kirjutan välja andmed ning seejärel arvutan*“.

Tabel 6. Testi tulemused dimensiooniti

Dimensiooniti	D1	D2	D3	D4	D5
Minimaalne punktide arv	0	0	0	0	0
Maksimaalne punktide arv	2	1	3	3	3
Keskmine	1,02	0,41	1,45	1,08	1,01
Standardhälve	0,70	0,49	1,25	1,04	1,14

Ülesannete lahenduste ülevaade on toodud tabelis 7. Üldiselt võib lahenduste alusel öelda, et õpilased leiavad ülesannetest uuritava väärtuse ning enamasti teavad kasutatavat valemit, kuid nõrgem on õpilaste oskus interpreteerida saadud tulemusi tavaelu kontekstis või enne ülesande lahendamist kirjeldada sõnaliselt planeeritava ülesande lahendusetappe ilma lahendust läbi tegemata.

Ülesande 1 puhul on näha, et keskmine ülesande eest saadud punktide arv oli 12,8 (SD=4,25). Ülesande juures põhiliseks veaks oli see, et õpilased teisendasid aega vääralt – 2,48 tundi võrdsustati 2 tunni ja 48 minutiga ning seetõttu interpreteeriti saadud tulemust valesti.

Teise ülesande osas on näha, et keskmine saadud punktide arv on 8,03 (SD=5,26) ning kolmanda ülesande osas on keskmine saadud punktide arv 3,7 (SD=4,57). Samas tuleb märkida, et kõikide ülesannete juures on vähemalt üks õpilane saanud maksimaalse punktide arvu.

Kolmanda ülesande puhul on 36,44% valimisse jäänud õpilastest kirjutanud, et nad ei oska seda ülesannet lahendada. Ülesanne oma olemuselt ei nõua kõrgeid matemaatilisi eelteadmisi või oskusi, vaid avaldades kolmandalt kaalult tundmatu (viinamari) läbi teadaolevate kaalude ning seejärel lisades selle tundmatu valemina järgmisele kaalule (teisele kaalule), leitakse kirsi mass ning edasi on ülesanne kergesti lahendatav.

Võttes fookusesse testi kolme ülesande temaatikaid, siis esimesed kaks ülesannet võimaldavad õpilastel läheneda ülesandele arvutuslikult numbripõhiselt, samas kui kolmas ülesanne nõuab arvude asemel tähiste kasutamist. Kui vaadelda tabelis 7 toodud ülesandeid mediaanide põhjal, siis tuleb samuti välja, et ennekõike on esimesel ülesandel lahendused maksimaalse lähedased ning kolmandal ülesandel ei küüni ükski küsimus selleni.

Tabel 7. Testi tulemused ülesannete põhiselt

Ülesanne 1	A13 (D1)	A21 (D3)	A31 (D2)	A31 (D4)	A32 (D4)	A33 (D4)	A34 (D4)	A41 (D5)	A kokku
Minimaalne	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Maksimaalne	2	3	1	3	2	2	2	3	18
Keskmine	1,10	2,12	0,64	1,95	1,56	1,83	1,74	1,86	12,78
Standardhälve	0,63	1,11	0,48	1,22	0,69	0,56	0,58	1,15	4,25
Mediaan	1	3	1	3	2	2	2	2	14
Ülesanne 2	**B13 (D1)**	**B21 (D3)**	**B31 (D2)**	**B31 (D4)**	**B32 (D4)**	**B33 (D4)**	**B34 (D4)**	**B41 (D5)**	**B kokku**
Minimaalne	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Maksimaalne	2	3	1	3	2	2	2	3	18
Keskmine	1,07	1,45	0,35	1,05	1,07	1,22	1,08	0,84	8,03
Standardhälve	0,60	1,24	0,48	1,06	0,96	0,97	0,92	0,84	5,26
Mediaan	1	2	0	1	2	2	1	1	9
Ülesanne 3	**C13 (D1)**	**C21 (D3)**	**C31 (D2)**	**C31 (D4)**	**C32 (D4)**	**C33 (D4)**	**C34 (D4)**	**C41 (D5)**	**C kokku**
Minimaalne	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Maksimaalne	2	3	1	3	2	2	2	3	18
Keskmine	0,89	0,78	0,24	0,41	0,31	0,42	0,38	0,30	3,72
Standardhälve	0,85	1,00	0,43	1,01	0,70	0,80	0,75	0,75	4,57
Mediaan	1	0	0	0	0	0	0	0	2

Tabelis 8 on toodud ülesannete tulemused dimensiooniti, et võrrelda, kuidas koostatud test täitis enda eesmärki. Nagu tabelist näha, siis iga järgmise ülesandega on dimensiooniti tulemus madalam, seejuures standardhälve püsib stabiilsena dimensioonides küllaltki sarnasel tasemel.

Tabel 8. Testi ülesannete tulemused dimensiooniti

	D1	D2	D3	D4	D5
Ülesanne 1					
Minimaalne punktide arv	0	0	0	0	0
Maksimaalne punktide arv	2	1	3	3	3
Keskmine	1,10	0,64	2,12	1,71	1,86
Standardhälve	0,63	0,48	1,12	0,82	0,70
Ülesanne 2					
Minimaalne punktide arv	0	0	0	0	0
Maksimaalne punktide arv	2	1	3	3	3
Keskmine	1,07	0,35	1,45	1,10	0,84
Standardhälve	0,60	0,48	1,24	0,98	0,84
Ülesanne 3					
Minimaalne punktide arv	0	0	0	0	0
Maksimaalne punktide arv	2	1	3	3	3
Keskmine	0,89	0,24	0,78	0,38	0,30
Standardhälve	0,85	0,43	1,00	0,82	0,75

4. Arutelu

Käesolevas töös võeti uurimise alla kaks uurimisküsimust:

1) Millised teoreetiliselt eristatavad dimensioonid on empiiriliselt eristatavad gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse taseme hindamisel?
2) Milline on Eesti gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse tase?

Teoreetiliselt eeldatud dimensioone kinnitava faktoranalüüsiga ei leitud ning see vajab edasist uurimist. Uuriva faktoranalüüsi tulemusena eristus eraldi faktorina iga ülesande lahenduskäik, lahenduskäigu ja planeeritava lahenduskäigu võrdlus ning tulemuste analüüs, mis omakorda juhib tähelepanu sellele, et kuigi ülesannete küsimuste formaat oli sama, siis ülesannete omavaheline erinevus tuli selgelt esile. See omakorda peaks tekitama diskussiooni, kas järgmiste testide koostamisel lähtuda ka ülesannete teemade osas ühtsemast joonest ning valida kõik lahendatavad ülesanded sama fookusega. See võib viia aga selleni, et kui õpilane ei oska ühte kindlat tüüpi ülesandeid, siis võib tekkida olukord, et hinnatakse tema tulemust üheplaaniliselt. Selleks oleks vaja pikema aja jooksul kasutada samal alusel erinevates teemades olevaid ülesandeid.

Läbivalt ülesandeid hõlmava küsimusena tuli välja faktoranalüüsist ainult küsimus, mis käsitleb uuritava väärtuse välja toomist. Sellest võib järeldada, et ülesannete fookuspunkt ei jäänud õpilastele tabamata ning läheb kokku ka Galbraith (2007), Haines et al (2001), Kaiser (2007), Maaß (2007) ja Neumann et al. (2013) põhjal avalduva dimensiooniga.

Vastust teisele uurimisküsimusele Eesti õpilaste matemaatilise probleemilahendamise taseme kohta ei saa ühest vastust koostatud testi tulemuste põhjal anda. Seda seetõttu, et taolisi ülesandeid peaksid õpilased lahendama pikema perioodi jooksul erinevatest teemadest ülesandeid, et tekiks võrdlusmoment. Praegusel juhul ei saa tulemuste põhjal väita, et õpilased on nõrgad matemaatilise probleemilahenduse osas, sest võib-olla olid ülesanded liiga keerulised.

Siinjuures toon välja ka selle, et üks õpilane kirjutas kommentaarina „*ma julgen siin niimoodi kirjutada, sest te ei saa teada kes ma olen*" – väide, mis sisuliselt ei pea paika, sest kõik lahendajad märkisid ära enda nime ning kooli.

Pólya (2001) on välja toonud, et õpilastele pakutavad ülesanded peaksid neile huvi pakkuma ning sellest tulenevalt uuriti testis neljase valikuvõimalusega õpilaste hinnangut ülesandele. Ülesanne 2 puhul võib eeldada, et juurdekasvuprotsendi leidmine on õpilaste jaoks tuttav ja eluliselt huvitav teema, mis võib mõjutada nende arvamust ülesande huvitavuse osas, kuid samas lahenduskäiku poolest on igav, sest kätkeb endas mitmeid arvutusi, mis ei nõua loomingulist lähenemist. Testi küsimuse puudusena võib välja tuua, et õpilasel oli võimalik valida ainult ette antud nelja valiku vahel, mis ei võimaldanud kombineeritud vastust esitada ning samuti jättis õpilase ilma võimalusest hinnang kirjalikult formuleerida lähtuvalt enda seisukohast.

Nagu tulemustes sai välja toodud, oli testi keskmise punktide arv 24,57 (SD=10,26), kuid võttes vaatluse alla standardhälbe suuruse, siis on näha, et hajuvus on suur. Selle selgeks näiteks on kool X, kus testi lahendas 13 õpilast ning pannes tulemused pingeritta, siis kaks õpilast saavutasid väga kõrge tulemuse (üks 53 punkti ja teine 50 punkti) ning kolmas õpilane sai 22 punkti ehk siis kokkuvõttes selle konkreetse kooli puhul ei ole võimalik aritmeetilist keskmist adekvaatselt välja tuua.

Korhonen, Nyroos, Jonsson, & Eklöf (2018) on välja toonud, et uuringud näitavad igas vanuses õpilaste seas probleemina testi sooritamise ärevust, kuid käesoleva töö puhul eeldab autor õpilaste kirjutatud kommentaaride põhjal, et õpilastel ei tekkinud testi sooritamise ärevust, sest nad teadsid, et test ei ole nende jaoks hindeline. Seda näitab ka see, et oli mitmeid lahendusi, mis olid punktiskooriga 0.

Sarnaselt Martin & Gourley-Delaney (2014) välja toodule avaldus ka käesolevas uuringus see, et õpilased kalduvad nägema matemaatikat suuresti kui arvutuslikku protsessi ning see tuli eriti välja küsimuse juures, mis kätkes endas lahenduskäigu planeerimist. Ka sarnaselt

PISA 2012. aasta aruandes toodule avaldus käesoleva töö tulemustes, et õpilased leiavad ülesannetest uuritava väärtuse ning enamasti teavad kasutatavat valemit, kuid nõrgem on õpilaste oskus interpreteerida saadud tulemusi tavaelu kontekstis või enne ülesande lahendamist kirjeldada sõnaliselt planeeritava ülesande lahendusetappe ilma lahendust läbi tegemata.

Ülesande üks vastuste analüüsis eristusid teistest täiskasvanute gümnaasiumi õpilased, kes leidsid, et kui nad jääksid bussist maha, siis kutsuksid autoga sõbra järele. See kattub ka Yee (2017) öelduga, mille kohaselt õpilased tuginevad enda kogemustel, ning täiskasvanud õppijate puhul on kogemuste pagas suurem.

Vaadeldes kolme ülesande temaatikaid, siis Martin & Gourley-Delaney (2014) kirjutatuga on kooskõlas see, et õpilastel tulid paremini välja esimesed kaks ülesannet, mis võimaldavad õpilastel läheneda ülesandele arvutuslikult numbripõhiselt, samas kui kolmas ülesanne nõuab arvude asemel tähiste kasutamist. Lithner (2004) on välja toonud, et uurimused kirjeldavad kuidas õpilased keskenduvad sellele, et jätta meelde lahenduseks vajalikke protseduure, kuid kõrvale jäetakse kesksed punktid, milleks see teema vajalik on või kuidas selle baasil järeldada. Seda näitab ka testi esimene ülesanne, kus õpilased oskavad protseduuriliselt välja arvutada 2,48 tundi, kuid seejärel teisendavad vastuse valesti tundideks ja minutiteks ning seeläbi teevad valed järeldused.

4.1 Uurimuse piirangud ja soovitused edaspidiseks

Käesoleva uurimuse juures on vaatluse alt välja jäetud ajahetk, mil õpilased testi lahendasid. Ackerman & Kanfer (2009) on uurinud seda, kuidas testide sooritajad väsivad kui tegemist on pika testiga. Ka selles uurimuses oli mitmeid õpilasi, kes kirjutasid, et nad on väsinud ning nad ei suuda mõelda. Samuti oli mitmeid, kes viitasid tühjale kõhule. Praeguse uurimuse juures ei olnud võimalik töö autoril ise läbi viia testi ning läbiviimise ajahetk jäi kooli enda otsustada. Samuti ei vaadelda õpilaste motiveeritust testi täita, mis Silm, Must, & Täht (2013) kohaselt võib olla olulise tähendusega. Võttes arvesse, et kogu projekti raames täitsid õpilased koos taustaandmetega 12 erinevat küsimustikku/testi ning nimekirjas oli matemaatiline probleemilahendamine viimane, siis võib see omada tähtsust.

Edaspidi võib ülesannetes enam rõhku panna sellele, et õpilased ei teeks liigselt ümardamisi – teise ülesande juures tekkis olulisi erinevusi vastustes kui ümardada ühelisteni – või jätta juurdekasvu protsent ümardatult sajandikeni. Sellest tulenevalt tuli lahenduste parandamisel olla paindlikum.

Samuti võib edaspidi ülesannete koostamisel enam lähtuda gümnaasiumi riiklikust õppekavast, sealjuures arvestades sellega, et teatud kursuseid kitsa matemaatika valinud õpilased ei läbi.

Üheks olulisemaks soovituseks on see, et efektiivsema hindamise tagamiseks tuleks leida viis, kuidas saaks ülesandeid automatiseeritult hinnata, sest intensiivselt ülesannete parandamisega järjest tegeledes kulus selleks suurusjärgus enam kui 200 tundi, mis ei väljenda kogu tööde parandamise kulunud aega, sest parandamisprotsess hakkas pihta.

Kokkuvõte

Matemaatiline probleemilahendamine on üks oluline üldpädevus, kuid selle arendamise kohta on vähe infot, sest pole laialt kasutatavaid ja tuntud mõõtvahendeid selle hindamiseks. Käesoleva töö eesmärk oli luua test, mida saab rakendada gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse oskuse hindamisel ning läbi selle analüüsida Eesti gümnaasiumiastme õpilaste oskust lahendada probleemülesandeid koos põhjendustega matemaatika kontekstis.

Eesmärgi saavutamiseks loodi esmalt teoreetiline ülevaade ja koostati test ning seejärel hinnati selle rakendatavust. Rakendatavuse hindamise püstitati kaks uurimisküsimust:

1) Millised teoreetiliselt eristatavad dimensioonid on empiiriliselt eristatavad gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse taseme hindamisel?
2) Milline on Eesti gümnaasiumiastme õpilaste matemaatilise probleemilahenduse tase?

Käesoleva töö raames töötati välja neljast ülesandest koosnev test gümnaasiumi õpilaste matemaatilise probleemilahenduse hindamiseks. Testi kasutatavust õpilaste hindamisel ja matemaatilise probleemilahenduse dimensioonide eristamisel kontrolliti valimiga, mille moodustasid 376 10. klassi õpilast üle Eesti. Uurimistulemuste hindamisel rakendati kinnitavat faktoranalüüsi ning uurivat faktoranalüüsi, samuti tehti analüüs dimensiooniti ning ülesannete lõikes.

Teoreetiliselt eeldatud dimensioone kinnitava faktoranalüüsiga ei leitud ning see vajab edasist uurimist. Uuriva faktoranalüüsi tulemusena eristus eraldi faktorina iga ülesande lahenduskäik, lahenduskäigu ja planeeritava lahenduskäigu võrdlus ning tulemuste analüüs. Uurides Eesti 10. klassi õpilaste matemaatilise probleemilahenduse oskust selgus, et õpilased leiavad ülesannetest uuritava väärtuse ning enamasti teavad kasutatavat valemit, kuid nõrgem on õpilaste oskus interpreteerida saadud tulemusi tavaelu kontekstis või enne ülesande lahendamist kirjeldada sõnaliselt planeeritava ülesande lahendusetappe ilma lahendust läbi tegemata.

Matemaatiline probleemilahendamine on oskus, mida saab rakendada ka teistes ainetes. Ajal, mil arvutid teevad suure hulga tööd inimeste eest ära, on vaja inimesi, kes on suuteliselt loominguliselt ja innovaatiliselt probleeme lahendama, suunamaks arvutite tööd efektiivselt ning tulemuslikult.

Summary: Mathematical Problem Solving in High School

Mathematical problem-solving is an important general competence. However, information about developing this competence is scarce, as there are no widely used and generally familiar instruments to assess it. The objective of this thesis was to create a test that could be used for assessing upper secondary school students' mathematical problem-solving skills and, through that, analyse Estonian upper secondary school students' problem-solving skills along with reasoning ability in the context of mathematics.

To meet this objective, first, a theoretical overview was compiled and a test was created, and then then the applicability of the test was evaluated. To evaluate the applicability, two research questions were formulated:

1) Which theoretically distinguishable dimensions are empirically distinguishable in assessing upper secondary school students' level of mathematical problem-solving skills?
2) What is the level of Estonian upper secondary school students' mathematical problem-solving skills?

For the purposes of this thesis, a test consisting of 4 tasks was created for assessing upper secondary school students' mathematical problem-solving skills. The applicability of the test for assessing students and distinguishing dimensions of mathematical problem-solving was checked by a sample that consisted of 376 tenth grade students across Estonia. In the evaluation of the study results, confirmative factor analysis and exploratory factor analysis were used; also, analyses across dimensions and across tasks were performed.

Confirmative factor analysis did not identify any theoretically presumed dimensions, which requires further investigation. As a result of exploratory factor analysis, the solution process, comparison of the solution process and planned solution process and analysis of the results of each task were distinguished as separate factors. Investigation of Estonian tenth grade students' mathematical problem-solving skills revealed that students can identify the value under investigation in the given task and mostly know which formula to use, but they show more weakness in the skill of interpreting the obtained results in the context of everyday life or verbally describing the stages of solving the task before going through the actual solution process.

Mathematical problem-solving is a skill that can also be applied to other subjects. Times where computers do a huge amount of work for humans call for people who are able to solve

problems creatively and innovatively in order to effectively and productively guide the work of computers.

Tänusõnad

- Tänan oma suurepäraseid juhendajaid, kolleege ja õppejõude abi ning suunamise eest.
- Tänan enda perekonda, kes mõistis ja toetas mind pingelistel aegadel.
- Tänan enda kursusekaaslasi, kelle pingutused ja sihikindlus motiveeris ka mind enam pingutama.
- Tänan Tartu Ülikooli sihtasutust käesoleva töö valmimise toetamise eest Tartu Raefondi stipendiumiga.

Autorsuse kinnitus

Kinnitan, et olen koostanud ise käesoleva lõputöö ning toonud korrektselt välja teiste autorite ja toetajate panuse. Töö on koostatud lähtudes Tartu Ülikooli haridusteaduste instituudi lõputöö nõuetest ning on kooskõlas heade akadeemiliste tavadega.

Maarja Sõrmus

31.05.2018

Kasutatud kirjandus

Abdullah, A. H., Abidin, N. L. Z., Ali, M. (2015). Analysis of Students' Errors in Solving Higher Order Thinking Skills (HOTS) Problems for the Topic of Fraction. *Asian Social Science*, *11*(2).

Ackerman, P. L., & Kanfer, R. (2009). Test length and cognitive fatigue: An empirical examination of effects on performance and test-taker reactions. *Journal of Experimental Psychology: Applied*, *15*(2), 163–181. https://doi.org/10.1037/a0015719

Beigie, D. (2008). Integrating Content to Create Problem-Solving Opportunities. *Mathematics Teaching in the Middle School. 13*(6), 352–360.

Bentler, P. M. (1990). Comparative fit indexes in structural models. Psychological Bulletin, 107, 238–246.

Blum, W., Barromeo Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?. *Journal of Mathematical Modelling and Application*. Vol 1 nr 1 (p 45-58)

Brehmer, D., Ryve, A., & Van Steenbrugge, H. (2016). Problem Solving in Swedish Mathematics Textbooks for Upper Secondary School. *Scandinavian Journal of Educational Research*, *60*(6), 577–593.

Browne, M, W, & Cudeck, R. (1993). Alternate ways of assessing model fit. In: Bollen KA, Long JS (eds), Testing structural equation models, Newbury Park, CA: Sage, pp 136–162.

Byrnes, J. P., & Wasik, B. A. (1991). Role of conceptual knowledge in mathematical procedural learning. *Developmental Psychology*, 27(5), 777-786.

Galbraith, P. (2007). Dreaming a 'possible dream': more windmills to conquer. Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S. (Edit) *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. (p 44-62) Chichester UK: Horwood Publishing.

Gasco, J., & Villarroel, J.-D. (2014). The Motivation of Secondary School Students in Mathematical Word Problem Solving. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *12*(1), 83–106.

Gümnaasiumi riiklik õppekava (2014). Riigi Teataja I, 29.08.2014, 21. Külastatud aadressil https://www.riigiteataja.ee/akt/129082014021

Halmos P. (1980). The heart of mathematics. *The American Mathematical Monthly*. 87(7), 519–524.

Harks, B., Klieme, E., Hartig, J., & Leiss, D. (2014). Separating Cognitive and Content Domains in Mathematical Competence. *Educational Assessment*, *19*(4), 243–266.

Hassan-Nejad, E., Behzadi, M. H., Shahvarani, A., Rostamy-Malkhalifeh, M. (2015). A Comparison between Cooperation Learning Method and Traditional Teaching Method with the Aim to Improve the Ability of Solving Math Problems. *Mathematics Education Trends and Reserarch*, 1(2015), 43-49.

Hastuti, I. D., Nusantara, T., Subanji, & Susanto, H. (2016). Constructive Metacognitive Activity Shift in Mathematical Problem Solving. *Educational Research and Reviews*, *11*(8), 656–667.

Hooper, D., Coughlan, J. & Mullen, M. (2008). Structural equation modelling: guidelines for de-termining model fit. Articles: 2.

Jöreskog, K. & Sörbom, D. (1989). LISREL 7 – A guide to the program and applications (2nd ed.), Chicago, IL: SPSS.

Kaiser, G. (2007). Modelling and modelling competencies in school. Haines, C., Galbraith, P., Blum, W., Khan, S. (Edit) *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. (p 110-129) Chichester UK: Horwood Publishing.

Korhonen, J., Nyroos, M., Jonsson, B., & Eklöf, H. (2018). Additive and multiplicative effects of working memory and test anxiety on mathematics performance in grade 3 students. *Educational Psychology*, *38*(5), 572–595. https://doi.org/10.1080/01443410.2017.1356449

Krawec, J. l. (2014). Problem Representation and Mathematical Problem Solving of Students of Varying Math Ability. *Journal of Learning Disabilities*, *47*(2), 103–115. https://doi.org/10.1177/0022219412436976

Kuzle, A. (2013). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 20–40.

Leong, Y.H., Tay, E.G., Quek, K.S., Toh, T.L., Toh, P.C., Jaguthsing, D., Ho, F.H., Romina, A.S.Y. (Editors). (2014). Making Mathematics More Practical: Implementation in the Schools. Singapore : World Scientific.

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *The Journal of Mathematical Behavior*, *23*(4), 405–427. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.003

Mann, E. L., Chamberlin, S. A., & Graefe, A. K. (2017). The Prominence of Affect in Creativity: Expanding the Conception of Creativity in Mathematical Problem Solving. R. Leikin & B. Sriraman (Edit), *Creativity and Giftedness: Interdisciplinary Perspectives from Mathematics and Beyond* (lk 57–73). Berlin: Springer-Verlag Berlin.

Mariam Ar Rahmah. (2017). Inductive-Deductive Approach to Improve Mathematical Problem Solving for Junior High School. *Journal of Physics: Conference Series*, *812*(1), 1.

Martin, L., & Gourley-Delaney, P. (2014). Students' images of mathematics. *Instructional Science*, *42*(4), 595–614. https://doi.org/10.1007/s11251-013-9293-2

Muthén, L. K. & Muthén, B. O. (1998–2012). Mplus user's guide. Seventh Edition. Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.

Mwei, P. K. (2017). Problem Solving: How Do In-Service Secondary School Teachers of Mathematics Make Sense of a Non-Routine Problem Context? *International Journal of Research in Education and Science*, *3*(1), 31–41.

Neumann, I., Duchhardt, C., Grüßing, M., Heinze, A., Knopp, E., & Ehmke, T. (2013). Modeling and assessing mathematical competence over the lifespan. *Modellierung und Erfassung mathematischer Kompetenz über die Lebensspanne.*, *5*(2), 80.

Onal, H., Inan, M., & Bozkurt, S. (2017). A Research on Mathematical Thinking Skills: Mathematical Thinking Skills of Athletes in Individual and Team Sports. *Journal of Education and Training Studies*, *5*(9), 133–139.

Palu, A. (2015, 12.juuni). Eluline matemaatikaõpetus ehk Kuidas tõsta põhikooliõpilaste matemaatikapädevust. *Õpetajate Leht*. Külastatud aadressil http://opleht.ee/2015/06/eluline-matemaatikaopetus-ehk-kuidas-tosta-pohikooliopilaste-matemaatikapadevust/

Passmore, T. (2007). Polya's legacy: Fully forgotten or getting a new perspective in theory and practice? *Australian Senior Mathematics Journal*, *21*(2), 44–53.

PISA 2012 Eesti tulemused. (2013). Külastatud aadressil https://www.hm.ee/sites/default/files/pisa_2012_eesti_tulemused.pdf

PISA 2015 Collaborative problem-solving framework. (2017). Külastatud aadressil https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Collaborative%20Problem%20Solving%20Framework%20.pdf

PISA 2015 Eesti tulemused. (2016). Külastatud aadressil https://www.hm.ee/sites/default/files/pisa_2015_final_veebivaatamiseks_0.pdf

PISA 2015 Results. Excellence and Equity in Education. (2015). Volume I. Külastatud aadressil http://www.keepeek.com/Digital-Asset-Management/oecd/education/pisa-2015-results-volume-i_9789264266490-en#.WEbNSmQrJjQ#page80

PISA 2015 tulemuste infomaterjal. (2016). Külastatud aadressil https://www.hm.ee/sites/default/files/pisa_kokkuvotlik_infomaterjal.pdf

Pólya, G. (2001). *Kuidas seda lahendada*. Tõlkinud Ülo Kaasik. Tallinn: Valgus.

Puran, R., Behzadi, M. H., Shahvarani, A., & Lotfi, F. H. (2017). The Effects of Training and Other Factors on Problem Solving in Students. *European Journal of Contemporary Education*, *6*(3), 448–460.

Sakshaug, L. E., & Wohlhuter, K. a. (2010). Journey toward Teaching Mathematics through Problem Solving. *SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS*, (8), 397.

Savic, M. (2016). Mathematical Problem-Solving via Wallas' Four Stages of Creativity: Implications for the Undergraduate Classroom. *Mathematics Enthusiast*, *13*(3), 255–278.

Saxena, R., Shrivastava, K., & Bhardwaj, R. (2016). Teaching Mathematical Modeling in Mathematics Education. *Journal of Education and Practice*, *7*(11), 34–44

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on Problem Solving Theory and Practice. *Mathematics Enthusiast*, *10*(1/2), 9–34.

Silm, G., Must, O., & Täht, K. (2013). Test-Taking Effort as a Predictor of Performance in Low-Stakes Tests. *TRAMES: A Journal of the Humanities & Social Sciences*, *17*(4), 433–448. https://doi.org/10.3176/tr.2013.4.08

Stacey, K., & MacGregor, M. (1999). Learning the Algebraic Method of Solving Problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149–167. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00026-7

Surya, E., Putri, F. A., & Mukhtar. (2017). Improving Mathematical Problem-Solving Ability and Self-Confidence of High School Students through Contextual Learning Model. *Journal on Mathematics Education*, *8*(1), 85–94.

Westwood, P. (2011). The problem with problems: Potential difficulties in implementing problem-based learning as the core method in primary school mathematics. *Australian Journal of Learning Difficulties*, *16*(1), 5–18. https://doi.org/10.1080/19404158.2011.563475

Özcan, Z. Ç. (2016). The relationship between mathematical problem-solving skills and self-regulated learning through homework behaviours, motivation, and metacognition. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(3), 408–420. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1080313

Üldpädevuste arendamine gümnaasiumis. (2016). Hange number 172364 pakkumus.

Yee, S. P. (2017). Students' and Teachers' Conceptual Metaphors for Mathematical Problem Solving. *School Science and Mathematics*, *117*(3), 146–157.

Yu, R., & Singh, K. (2018). Teacher support, instructional practices, student motivation, and mathematics achievement in high school. *The Journal of Educational Research*, *111*(1), 81–94. https://doi.org/10.1080/00220671.2016.1204260

Lisad

Lisa 1 Test „Matemaatiline probleemilahendamine“

Matemaatiline probleemilahendamine

Käesolev töö koosneb neljast ülesandest. Ülesanded on erineva raskusastmega ning neid on võimalik lahendada erinevate strateegiatega. Leia see, mis sobib Sinu meelest kõige paremini. Põhjendada enda valikuid, et ka hindaja saaks aru Sinu lahenduskäigust.

Kui kasutad ülesande lahendamisel lisapaberit, siis ära unusta kirjutada juurde ülesande numbrit ning punkti, mille juurde Sinu kirjutatu kuulub. Kui lisalehel ei ole ülesande numbrit ning vastatud küsimuse numbrit, käsitletakse lisalehel kirjutatut kui mustandipaberit, mida hindamisel ei arvestata.

Ülesanne nr 1 - bussiliiklus

Ülesande tekst

Jaana soovib reede õhtul sõita Tallinnast Otepääle. Selleks, et Otepääle koju jõuda, tuleb tal sõita bussiga Tartusse ning seejärel järgmise bussiga Otepääle. Buss A hakkab kell 18.00 Tallinnast Tartu poole sõitma keskmise kiirusega 75 km/h. Buss B hakkab Tartust sõitma 20.45. Tartust Otepääle sõidab buss 50 minutit. Otepää-Tartu vahemaa on 42 km. Tartu ja Tallinna vahemaa on 186 km. Tallinna ja Otepää vaheline lühim vahemaa on 214 km. Viimane buss Otepääle väljub 20.45. Kas Jaana jõuab reedel koju? Põhjenda oma arvamust.

1. **Probleemist aru saamine**
   1.1. Sinu hinnang ülesandele. (tõmba sobivale joon alla)
   igav väljakutset esitav segadusse ajav huvitav

   1.2. Mis koht (kohad) ülesandest on raskesti mõistetav(ad) või millele pead eraldi tähelepanu pöörama?

   1.3. Mis on ülesande uuritav väärtus ehk mis teemale/teemadele ülesanne keskendub?

2. **Lahenduskäigu planeerimine**
   2.1. Kirjelda lühidalt enda planeeritava lahenduskäigu etappe.

3. **Lahenduskäik**
   3.1. Lahenda ülesanne. Soovi korral võid lahenduse vormistada paberil. Kui lahendad ülesande paberil, siis kirjuta tekstikasti: „Ülesanne lahendatud paberil“.

   3.2. Võrdle tehtud lahenduskäiku ning algselt planeeritut. Milline on nende ühisosa ning mis on erinev?

3.3. Kas pidid mingeid lahendusetappe korrigeerima või uuesti läbi tegema? Kui jah, siis milliseid?

3.4. Hinda enda valitud strateegia otstarbekust. Kas seda ülesannet oleks saanud lahendada teisiti – kuidas?

4. Tulemuste tõlgendamine

Kirjuta välja vastus ülesandes otsitavale probleemile. Mida saab sellest järeldada? Hinda saadud tulemuse realistlikkust igapäevaelu kontekstis.

Ülesanne nr 2 - elanikkond

Ülesande tekst

Tabelis on toodud erinevate Eesti linnade elanike arvud aastatel 2012-2017.

	Tallinn	Narva	Pärnu	Tartu	Võru
2012	403 862	60 454	40 664	99 558	12 947
2013	406 059	59 888	40 366	99 518	12 782
2014	411 063	59 049	40 005	98 449	12 571
2015	413 782	58 375	39 784	97 332	12 458
2016	423 420	58 204	39 828	93 687	12 430
2017	426 538	57 130	39 620	93 124	12 167

Leia Tartu ja Tallinna elanikkonna juurdekasvu protsent vaadeldaval perioodil kummagi linna kohta. Anna hinnang saadud tulemusele. Milline võiks olla Tallinna ja Tartu elanike arv aastal 2025 kui elanikkonna muutus jätkuks sarnaselt eelnevale perioodile?

1. Probleemist aru saamine

1.1. Sinu hinnang ülesandele. (tõmba sobivale joon alla)

igav väljakutset esitav segadusse ajav huvitav

1.2. Mis koht (kohad) ülesandest on raskesti mõistetav(ad) või millele pead eraldi tähelepanu pöörama?

1.3. Mis on ülesande uuritav väärtus ehk mis teemale/teemadele ülesanne keskendub?

2. Lahenduskäigu planeerimine

2.1. Kirjelda lühidalt enda planeeritava lahenduskäigu etappe.

3. Lahenduskäik

3.1. Lahenda ülesanne. Soovi korral võid lahenduse vormistada paberil. Kui lahendad ülesande paberil, siis kirjuta tekstikasti: „Ülesanne lahendatud paberil“.

3.2. Võrdle tehtud lahenduskäiku ning algselt planeeritut. Milline on nende ühisosa ning mis on erinev?

3.3. Kas pidid mingeid lahendusetappe korrigeerima või uuesti läbi tegema? Kui jah, siis milliseid?

3.4. Hinda enda valitud strateegia otstarbekust. Kas seda ülesannet oleks saanud lahendada teisiti – kuidas?

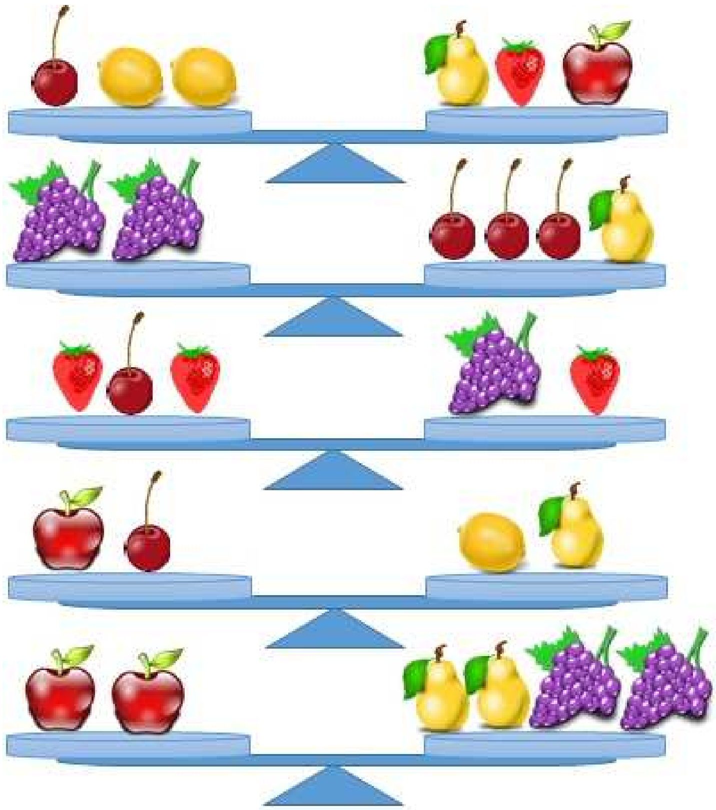
4. Tulemuste tõlgendamine

Kirjuta välja vastus ülesandes otsitavale probleemile. Mida saab sellest järeldada? Hinda saadud tulemuse realistlikkust igapäevaelu kontekstis.

Ülesanne nr 3 - kaalud

Ülesande tekst

On teada, et maasikas kaalub 27 grammi ja pirn 36 grammi. Leia iga marja/puuvilja mass.



1. **Probleemist aru saamine**
   1.1. Sinu hinnang ülesandele. (tõmba sobivale joon alla)
   igav väljakutset esitav segadusse ajav huvitav

   1.2. Mis koht (kohad) ülesandest on raskesti mõistetav(ad) või millele pead eraldi tähelepanu pöörama?

   1.3. Mis on ülesande uuritav väärtus ehk mis teemale/teemadele ülesanne keskendub?

2. **Lahenduskäigu planeerimine**
   2.1. Kirjelda lühidalt enda planeeritava lahenduskäigu etappe.

3. Lahenduskäik

3.1. Lahenda ülesanne. Soovi korral võid lahenduse vormistada paberil. Kui lahendad ülesande paberil, siis kirjuta tekstikasti: „Ülesanne lahendatud paberil“.

3.2. Võrdle tehtud lahenduskäiku ning algselt planeeritut. Milline on nende ühisosa ning mis on erinev?

3.3. Kas pidid mingeid lahendusetappe korrigeerima või uuesti läbi tegema? Kui jah, siis milliseid?

3.4. Hinda enda valitud strateegia otstarbekust. Kas seda ülesannet oleks saanud lahendada teisiti – kuidas?

4. Tulemuste tõlgendamine

Kirjuta välja vastus ülesandes otsitavale probleemile. Mida saab sellest järeldada? Hinda saadud tulemuse realistlikkust igapäevaelu kontekstis.

Ülesanne nr 4 - Eksam

Ülesande tekst

Manfredil on tulemas algebra ja geomeetria eksam. Eksamil on 15 piletit, millest igal on kirjas üks teoreem. Kuna Manfred on ajahädas, siis jõuab ta eksamiks ära õppida 5 teoreemi. Leia tõenäosus, et võttes juhuslikult

1) kaks piletit, saab Manfred mõlemad piletid, millel kirjutatud teoreemi ta oskab;
2) kaks piletit, saab Manfred vähemalt ühe sellise pileti, millel kirjutatud teoreemi ta oskab.

1. Probleemist aru saamine

1.1. Sinu hinnang ülesandele. (tõmba sobivale joon alla)

igav väljakutset esitav segadusse ajav huvitav

1.2. Mis koht (kohad) ülesandest on raskesti mõistetav(ad) või millele pead eraldi tähelepanu pöörama?

1.3. Mis on ülesande uuritav väärtus ehk mis teemale/teemadele ülesanne keskendub?

2. Lahenduskäigu planeerimine

2.1. Kirjelda lühidalt enda planeeritava lahenduskäigu etappe.

3. Lahenduskäik

3.1. Lahenda ülesanne. Soovi korral võid lahenduse vormistada paberil. Kui lahendad ülesande paberil, siis kirjuta tekstikasti: „Ülesanne lahendatud paberil“.

3.2. Võrdle tehtud lahenduskäiku ning algselt planeeritut. Milline on nende ühisosa ning mis on erinev?

3.3. Kas pidid mingeid lahendusetappe korrigeerima või uuesti läbi tegema? Kui jah, siis milliseid?

3.4. Hinda enda valitud strateegia otstarbekust. Kas seda ülesannet oleks saanud lahendada teisiti – kuidas?

4. Tulemuste tõlgendamine

Kirjuta välja vastus ülesandes otsitavale probleemile. Mida saab sellest järeldada? Hinda saadud tulemuse realistlikkust igapäevaelu kontekstis.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Maarja Sõrmus,

(sünnikuupäev 15.03.1986)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Matemaatiline probleemilahendus gümnaasiumis“, mille juhendajateks on Külli Kori ja Margus Pedaste,

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 31.05.2018