



*Im Auftrage des Landeslehrer
Senats vom 25. Septbr 1884 zur
Gebrauch in den Schulen des Landes
zugelassen.*

Leitfaden *ja fieds*
Heinrichs

zum

Unterricht in den Elementen der Arithmetik

und

Buchstabenrechnung.

Von

G. Schmidt,

Inspector an der Kreisschule zu Bauske.

Mitau.

Druck und Verlag von G. Sieslad.

1884.

Pf.-s ped

Leitfaden

zum

Unterricht in den Elementen der Arithmetik

und

Buchstabenrechnung.

Von

G. Schmidt,

Inspector an der Kreissschule zu Bauske.

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
90794

A. 1
—•—•—•—•—

21341

Mitau.

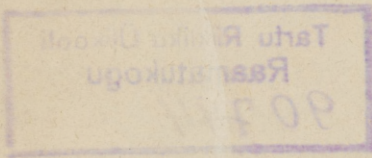
Druck und Verlag von E. Sieslack.

1884.

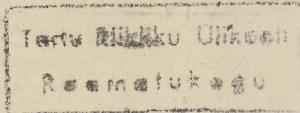
Zeitungen

Unterricht in den Elementen der
Arithmetik

Дозволено цензурою. — Г. Рига, 19-го Марта 1884 г.



Est. A



17046

Vorwort.

Mit vorliegendem Leitfaden hat der Verfasser den Versuch unternommen, die an Kreissschulen und ähnlichen Lehranstalten vorzutragenden Definitionen und Rechnungsregeln der Arithmetik und Buchstabenrechnung nach Möglichkeit derartig zu vereinigen, daß sich diese beiden Unterrichtszweige gegenseitig stützen und ergänzen. Vielleicht wäre auch die Zeit gekommen, beide Rechnungsarten, selbst auf einer elementareren Stufe, im innigeren Zusammenhange zu betreiben und dieselben nicht so ängstlich zu trennen, als es jetzt noch häufig geschieht. Es erscheint dieses um so nothwendiger, als die in den mittleren Klassen geübte systematische Betreibung der Geometrie bei Darstellung der Beweise der algebraischen Rechnungen kaum entbehren kann, wie beim Satze von den Winkeln an Parallellinien, der Winkelsumme im Dreieck u. a., abgesehen davon, daß durch frühzeitiger möglich gemachte Anwendung von Formeln aus der Geometrie und Physik sich fesselndere Aufgaben bilden ließen, und den Schülern hierdurch frühe ein praktisches und anschauliches Ziel ihrer Mühe nahe gerückt wird.

Wenn nun auch der Lehrplan der Kreissschulen dem durchzunehmenden Pensum in der Mathematik seine ge-

hörigen Grenzen gesteckt hat, so läßt sich doch nicht einsehen, warum nicht im Laufe eines 4jährigen Curſus die Anwendung der Logarithmen, einer durchweg praktischen Rechnung, namentlich bei Zinſeszins- und Rentenberechnungen, gelehrt werden könnte; der Verfasser hat es daher nicht unterlassen wollen, den Abschnitten über die Grundoperationen auch die Lehre von den Kettenbrüchen, Logarithmen und Progressionen hinzuzufügen, damit das Buch, vergönnt es die Zukunft, auch an mittleren Gymnasialklassen Verwendung finde. Manchem Leser dürften die Factorentafel der Zahlen von 1—1000, ferner die Potenzen und Wurzeln aller Zifferigen Zahlen, und namentlich die Tabellen für in- und ausländisches Münz-, Maß- und Gewichtswesen zur Bequemlichkeit gereichen, ferner auch die bei den bürgerlichen Rechnungsarten angedeuteten Winke Gelegenheit bieten, althergebrachte Aufgaben mit zweckentsprechenderen moderneren zu vertauschen. Zum letztern Zwecke hat der Verfasser die Absicht, diesem Leitfaden eine kurze Aufgabensammlung folgen zu lassen. Endlich lag es nicht im Plane dieses Lehrbuches alle Regeln mit den nöthigen Beweisen zu versehen, da dieselben am besten der ausführlichen mündlichen Erläuterung überlassen bleiben.



I. Einleitung.

1) Die Dinge werden am allgemeinsten verglichen und unterschieden 1) nach ihrer Beschaffenheit, 2) nach ihrer Größe.

2) Gleichartige Dinge haben in ihren einzelnen Theilen gleiche Beschaffenheit; — gleiche Dinge haben neben gleicher Beschaffenheit auch gleiche Größe.

3) Die Mathematik untersucht nur die Dinge nach ihrer Größe und sieht von der besonderen Beschaffenheit der Theile ab.

4) Jede mathematische Größe läßt sich in kleinere und immer kleinere Theile zerlegen, welche unter einander und mit dem Ganzen gleichartig sind.

5) Die Größen werden untersucht entweder nach dem Raum, den sie einnehmen (in der Geometrie), oder nach ihrer Quantität, d. h. Anzahl der gleichartigen Theile (in der Arithmetik).

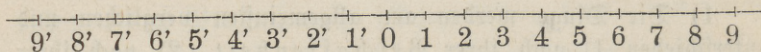
6) Die Menge der gleichartigen Theile einer Größe wird angegeben durch die Zahl. Einer dieser Theile heißt Einheit.

7) Geht man von der Einheit, deren Zeichen 1 sei, aus und setzt zu derselben noch eine Einheit, nennt die erhaltene Vielheit „zwei“ (2) und fährt in dieser Weise mit Zufügung einer Einheit fort, so gelangt man zu der Reihe der ganzen natürlichen (positiven) Zahlen und zu dem Begriff des Zählens.

8) Nimmt man dagegen von der Einheit eine 1 hinweg, von der hierdurch erhaltenen Grenze des natürlichen Zahlensgebiets (deren Symbol die Null [0] ist) wiederum eine 1 u. s. w., so gelangt man, rückwärts fortschreitend, zu einer der obigen

entgegengesetzten Zahlenreihe, welche man die negative nennt.

9) Zur Bezeichnung der Vielheit mehrerer Einheiten bedient man sich der Ziffern, deren es neun giebt, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; beide Zahlenreihen geben, wenn man die Null als Anfangspunkt von zwei sich nach entgegengesetzter Seite erstreckenden Strahlen ansieht, folgendes Bild, darin die Symbole für die negativen Zahlen mit Accenten bezeichnet sind.



Diese Punktreihe bietet, wie man sogleich bemerkt, Räume, welche nicht durch Zahlen ausgefüllt sind, d. h. es entspricht nicht jedem Punkte einer Geraden auch eine Zahl. In welcher Weise diese Intervalle ausgefüllt werden, wird weiterhin gezeigt werden. Zur Unterscheidung pflegt man den rechts von der Null befindlichen Größen das Zeichen +, den links befindlichen — vorzusetzen.

10) Nimmt man nur auf die Anzahl der Einheiten einer Größe Rücksicht und sieht von dem Vorzeichen + oder — ab so nennt man diesen Werth den Absolutwerth der betrachteten Zahl. Beachtet man das Vorzeichen, so erhält die Zahl sogleich einen relativen Werth und kann nur im Gegensatz zu einer Größe anderer Bedeutung gedacht werden. Von —5 ist z. B. der Absolutwerth 5 Einheiten, der relative 5 negative Einheiten.

11) Steht bei einer Zahl kein Vorzeichen, so hat man sie als positiv anzusehen. Soll eine Zahl als zweideutig hingestellt werden, so setzt man ± vor, z. B. ± 8 (sowohl positiv als negativ).

12) Die Art und Weise der Zusammensetzung von willkürlich angenommenen Einheiten zu einem Ganzen, nennt man Zahlenform.

13) Die Arithmetik lehrt die Verbindung der Zahlenformen, die Ableitung neuer Zahlenformen aus gegebenen und die Vergleichung derselben in Ansehung ihrer Bedeutung. Der Ueber-

gang von einer Zahlenform zu einer neuen wird vermittelt durch eine arithmetische Operation.

14) Soll angedeutet werden, daß 2 Zahlenformen einander an Werth gleich sind, so verbindet man beide durch das Gleichheitszeichen = und nennt die Verbindung eine Gleichung, jede Zahlenform für sich aber Seite dieser Gleichung.

15) Zwei Zahlenformen, welche nicht gleichen Werth besitzen, können durch das Ungleichheitszeichen \neq verbunden werden. Daß die eine Seite größer, beziehlich kleiner als die andere ist, wird durch die Zeichen $>$ (größer) und (kleiner) $<$ bezeichnet, z. B. $8 > 5$; $3 < 7$.

16) Wenn von 2 Größen die eine im Vergleich mit der andern so klein ist, daß man sie der Null fast gleich achten kann, so nennt man diese Größen mit Beziehung auf einander unendlich klein und unendlich groß. Eine unendlich kleine Größe wird in gewissen Fällen oft der Ogleich gesetzt, eine unendlich große durch das Zeichen ∞ bezeichnet. So ist ein Zoll eine unendlich kleine Größe gegen die Länge der ganzen Erdoachse. Alle anderen Größen im Gegensatz zu den eben beschriebenen heißen endliche.

17) Man unterscheidet ferner zwischen beständigen und veränderlichen Größen. Eine beständige (constante) Größe ist eine solche, welche unter allen Umständen einen bestimmten, festen unveränderlichen Werth beibehält (Erläuterung der Zahl π). Eine veränderliche (variabele) Größe hat einen unbestimmten Werth und begreift ohne Ausnahme alle Werthe in sich; sie kann ins Unendliche zu- oder abnehmen und das ganze Zahlengebiet durchlaufen.

18) Nähert sich eine veränderliche Größe bei ihrer Zu- oder Abnahme einem festen Werthe, über den sie nicht hinausgeht, so heißt dieser die Grenze derselben (Grenzwert, limes). Derartige veränderliche Größen sind z. B. die Entfernung der Erde von der Sonne, die Quecksilberhöhe im Barometer oder Thermometer. Bestimmt wird eine veränderliche Größe dadurch, daß man ihr einen bestimmten Werth beilegt.

19) Legt man einer Zahl eine gewisse Bezeichnung bei, so heißt sie benannt, z. B. 5 Pfund, 4 Fuß; im andern Falle

unbenannt. Ungleich benannte Größen sind z. B. 5 Pfd 4 Pfund; 8 Zoll 2 Linien.

20) Arithmetische Grundoperationen sind: 1) Numeration, 2) Addition, 3) Subtraction, 4) Multiplication, 5) Division. Hierzu kommen späterhin 6) die Potenzirung, 7) die Radicirung, 8) die Logarithmirung.

II. Numeration.

21) Zur Darstellung aller möglichen Zahlen und Zahlenformen bedient man sich, wie bereits erwähnt, gewisser Symbole (Zahlenzeichen), welche man Ziffern nennt.

22) Den Subbegriff aller nach demselben Gesetze aus der Einheit abgeleiteten Zahlen nennt man ein Zahlensystem.

23) Jedes Zahlensystem hat seine besondere Grundzahl oder Basis, welche eine gewisse Anzahl von Einheiten in sich begreift. Im Fortschreiten in der Zahlenreihe sieht man diese Basis wiederum als eine Einheit an und zwar als eine Einheit nächsthöherer Ordnung, verbindet eben so viel Einheiten dieser höheren Ordnung zu einer Einheit von noch höherer Ordnung und fährt in diesem Bildungsgesetze fort, soweit es nothwendig erscheint. Zur Basis kann eine jede ganze natürliche Zahl, die Einheit selbst natürlich ausgenommen, gewählt werden.

24) Das allgemein gebräuchliche Zahlensystem ist das dekadische, dessen Basis Zehn ist.

25) Nach welchem Systeme auch die Zahlen gebildet werden, stets richtet man sich nach dem Gesetze der Größenfolge, d. h. es geht von links nach rechts gerechnet die größere Zahl der kleineren voran. Die Schreibweise ist horizontal. (Supta-position).

26) Im dekadischen System stellt also die Zahl Zehn einen Complex von 10 Einheiten (der Oten Ordnung) vor. Die Grundzahl 10 ist selbst Einheit der 1. Ordnung. So fortgehend

erhält man folgendes Schema für die Einheiten des dekadischen Systems.

10 Einh. der Otten Ordn. bilden 1 Einh. der 1. Ordn., geschrieben 10
 " " " 1 " " " " " " 2. " " 100
 " " " 1 " " " " " " 3. " " 1000
 u. s. w.

Die 1ziffr. Zahlen befinden sich also zwischen den Grenzen 0 u. 10
 " 2 " " " " " " " " 10 " 100
 " 3 " " " " " " " " 100 " 1000
 u. s. w.

Man nennt

die 1ziffrigen Zahlen Einer	die 5ziffrigen Zahlen Zehntausender
" 2 " " Zehner " 6 " " Hunderttausender	
" 3 " " Hunderter " 7 " " Millionier	
" 4 " " Tausender " 8 " " Zehnmillionier.	

27) Um eine Zahl zu schreiben, beachte man folgende Regeln:

- Die Millionier werden mit 7 Ziffern, die Billionier mit 13, die Trillionier mit 19 Ziffern geschrieben u. s. w.
- Auf die Millionier folgen 2 Classen mit je 2 Ordnungen und je 3 Ziffern.
- Die Einer jeder Classe werden vor den Zehnern ausgesprochen, worauf beim Dictiren von Zahlen zu achten ist.
- In der 1. Classe steht was vor „tausend“ gehört wird, d. h. Hunderttausende, Zehntausende und Tausende. In der 2. Classe stehen darauf der Reihe nach Hunderte, Zehner und Einer.
- Soll eine Zahl, z. B. 12, als Hunderter ausgedrückt werden, so schreibt man davor eine Null, also 012; 4 Zehner als Tausender geschrieben 0040, d. h. man muß also, wo keine Einheiten der Tausender, Hunderter u. s. w. genannt werden, Ergänzungen durch Nullen vornehmen.

28) Diese Regeln lassen sich auch folgendermaßen zusammenfassen: Man schreibt die einzelnen Ziffern, durch welche die Anzahl der in einer beliebigen Zahl enthaltenen Einheiten der verschiedenen Ordnungen angegeben wird, nach der Folge der

unter der Columne der Zehner untergemerkt werden, (im Sinn behalten). Ebenso bestimmt man die Summe der Zehner und schreibt als Summe wieder nur die letzte Ziffer hin, während die erste, welche Hunderte vorstellt bei Addition der Hunderter hinzugefügt werden muß. In dieser Weise setzt man die Addition fort, bis sämtliche Vertikalcolumnen addirt sind.

<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">6</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">9</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">4</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">7</td><td></td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">0</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">5</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">9</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td style="padding: 2px;">(3)</td><td style="padding: 2px;">(3)</td><td style="padding: 2px;">(3)</td><td style="padding: 2px;">(2)</td><td></td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">9</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">5</td></tr> </table>	3	8	5	4	6	9	8	3	4			5	8	7		3	8	4	2	0		4	0	8	5		6	9	5	3	(3)	(3)	(3)	(2)		9	8	4	2	5	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="padding: 2px;">9</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">9</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">6</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">9</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">4</td><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">7</td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px;">9</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">8</td><td></td></tr> <tr><td></td><td style="padding: 2px;">9</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">5</td><td style="padding: 2px;">7</td><td style="padding: 2px;">9</td><td></td></tr> <tr style="border-top: 1px solid black;"><td style="padding: 2px;">(2)</td><td style="padding: 2px;">(4)</td><td style="padding: 2px;">(4)</td><td style="padding: 2px;">(3)</td><td style="padding: 2px;">(3)</td><td style="padding: 2px;">(4)</td><td style="padding: 2px;">(4)</td><td></td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">2</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">6</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">0</td><td style="padding: 2px;">8</td><td style="padding: 2px;">3</td><td style="padding: 2px;">4</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td style="padding: 2px;">3</td></tr> </table>	9	8	5	3	7	6	8	4	9	3	7	6	8	7	5	6		4	8	7	6	3	5	9		7	6	5	4	2	8	7		9	8	7	6	7	8			9	8	3	5	7	9		(2)	(4)	(4)	(3)	(3)	(4)	(4)		2	0	6	8	0	8	3	4								3
3	8	5	4	6																																																																																																													
9	8	3	4																																																																																																														
	5	8	7																																																																																																														
3	8	4	2	0																																																																																																													
	4	0	8	5																																																																																																													
	6	9	5	3																																																																																																													
(3)	(3)	(3)	(2)																																																																																																														
9	8	4	2	5																																																																																																													
9	8	5	3	7	6	8	4																																																																																																										
9	3	7	6	8	7	5	6																																																																																																										
	4	8	7	6	3	5	9																																																																																																										
	7	6	5	4	2	8	7																																																																																																										
	9	8	7	6	7	8																																																																																																											
	9	8	3	5	7	9																																																																																																											
(2)	(4)	(4)	(3)	(3)	(4)	(4)																																																																																																											
2	0	6	8	0	8	3	4																																																																																																										
							3																																																																																																										

32) Das zweite Beispiel lehrt eine Erleichterung des Addirens. Während des Addirens einer Columne macht man bei jeder Ziffer, bei welcher 10 oder über 10 gezählt wird, einen Punkt und zählt bloß den Ueberschuß über 10 zu der vorigen Summe hinzu, wodurch man nur einziffrige Zahlen im Gedächtnisse zu addiren hat. Die zuletzt erhaltene einziffrige Zahl schreibt man als Summe der berechneten Columne hin, addire aber zu der nächstfolgenden Columne so viel Einer hinzu, als man in der vorigen Columne Punkte gemacht hatte.

33) Gleiche Größen zu gleichen addirt, geben gleiche Summen.

Ist $a+b=c+d$	$9+6=10+5$
$m+n=p+q$	$3+4=1+6$

so ist $a+b+m+n=c+d+p+q$	$9+3+6+4=10+1+5+6$
	oder $22=22$

34) Die Summe mehrerer Größen bleibt unverändert, wenn auch die Reihenfolge der Summanden geändert wird.

$a+b+c+d = a+c+b+d = a+d+b+c$
$10+4+3 = 10+3+4 = 4+10+3 = 4+3+10 = 17$

IV. Subtraction.

35) Subtrahiren heißt: zu 2 Zahlen, dem Minuend und Subtrahend, eine dritte Zahl, Rest oder Differenz genannt, finden, welche mit dem Subtrahend addirt, ebensoviel beträgt als der Minuend. Das Zeichen der Subtraction ist der horizontale Strich. — (minus). Vor demselben steht der M., hinterdrein der S.

36) Um eine Zahl von einer anderen zu subtrahiren, ordne man beide wie bei der Addition, mache darunter einen Strich und ziehe jede Ziffer des Subtrahends von der darüber stehenden Ziffer des Minuends ab. Die erhaltene Zahl wird als gesuchter Rest unter den Strich geschrieben und zwar unter derselben Columne.

$$\begin{array}{r} 78935 \\ 54323 \\ \hline 24612 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 803976 \\ 703843 \\ \hline 100133 \end{array}$$

37) Ist die Minuenduziffer kleiner als diejenige des Subtrahends, so vermindert man die nächste Minuenduziffer um eine Einheit, bezeichnet dieses Verfahren mit einem Punkt, (Borgen), und addirt zu dem zu kleinen Minuend 10 Einheiten (warum?), worauf die Subtraction sich ausführen läßt.

$$\begin{array}{r} ^{10} ^{10} ^{10} ^{10} \\ 3. \overline{5} \overline{9} \overline{6} \overline{4} \overline{3} \\ ^{15} ^{15} ^{13} ^{13} \\ \hline 2 \end{array}$$

Rest 9 0 8 7 9

38) Die eben gegebene Regel ist aber nicht brauchbar, falls die nächstfolgende Ziffer des Minuends eine Null ist. In diesem Falle geht man nach links zu über die Null oder die Nullen hinweg und borgt bei der ersten bedeutenden Ziffer eine Einheit, betrachtet aber beim Vorwärtsrechnen die Nullen, über welche man hinweg gegangen als Neunen.

$$\begin{array}{r} ^{10} ^{10} ^{10} ^{10} ^{10} ^{10} \\ 7. \overline{0} \overline{0} \overline{8} \overline{5} \overline{3} \overline{0} \overline{6} \\ ^9 ^9 ^{18} ^{12} ^9 ^{16} \\ \hline 4 \end{array}$$

Erläuterung!

Rest 2 0 1 9 0 5 9 8

39) Gleiche Größen von gleichen Größen subtrahirt, geben gleiche Differenzen.

$$a = b + c$$

$$20 = 13 + 7$$

$$m = p + q$$

$$9 = 7 + 2$$

$$a - m = (b - p) + (c - q)$$

$$11 = 6 + 5$$

40) Bildung und Ableitung der aufeinanderfolgenden Differenzreihen, wenn ein Reihe von Zahlen gegeben ist.

V. Multiplication.

41) Tafel des Einsundeins und des Einmaleins.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

42) Multipliciren heißt: eine Zahl, den Multiplificandus, so oft zu sich selbst addiren, als eine andere Zahl, der Multiplikator, Einheiten enthält; oder — zu 2 gegebenen Zahlen, dem Multiplificandus und Multiplikator, eine dritte Zahl, das Product suchen, welche ebenso aus dem Multiplificandus entsteht, wie der Multiplikator aus der positiven Einheit.

Das Zeichen der Multiplication ist das liegende Kreuz \times (mal).

43) Multiplicand und Multiplikator nennt man in Bezug auf das Product auch Factoren des letztern. Zum Multiplificandus wählt man gewöhnlich die größere Zahl; — der Multiplikator muß stets eine unbenannte Zahl sein.

44) Stellt man sich vor, daß 2 Buchstaben gewisse Zahlen bedeuten, so betrachtet man sie als multiplicirt, wenn sie nach ihrer alphabetischen Folge neben einander geschrieben werden.

$$a=9; b=7; a \times b = ab = 9 \times 7 = 63$$

45) Um eine mehrziffrige Zahl mit einer einziffrigen zu multipliciren, multiplicirt man die in dem Multiplificanden erhaltenen Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. mit dem gegebenen Multiplikator und bildet die Summe der erhaltenen Partialproducte.

$$\begin{aligned} 3856 \times 7 &= (3000 + 800 + 50 + 6) \times 7 \\ &= 3000 \times 7 + 800 \times 7 + 50 \times 7 + 6 \times 7 \\ &= 21000 + 5600 + 350 + 42 \\ &= 26992 \end{aligned}$$

Schema in abgef. Form.	7
	26992
	534

46) Um eine Zahl mit irgend einer dekadischen Einheit 10, 100, 1000 u. s. w. zu multipliciren, hängt man derselben nur soviel Nullen an, als der Multiplikator Nullen hat.

$$23 \times 100 = 2300; 851 \times 10000 = 8510000$$

47) Mit Hinweglassung der Nullen ergibt sich also für das Beispiel 44

3856		
<u> 7</u>		
42	oder falls man die	3856
35	einer höherer Ordnung	<u> 7</u>
56	sogleich zum folgenden	26992
<u>21</u>	Producte hinzufügt.	534
26992		

48) Um eine mehrziffrige Zahl mit einer mehrziffrigen zu multipliciren, multiplicirt man den Multiplicanden mit einer jeden einzelnen Ziffer des Multiplicators der Reihe nach von den Einern anfangend und addirt die Partialproducte.

$4893 \times 765 = 4893 \times (700 \times 60 \times 5)$	
$4893 \times 700 = 3725100$	$4893 \times 5 = 24465$
$4893 \times 60 = 293580$	oder $4893 \times 60 = 293580$
$4893 \times 5 = 24465$	$4893 \times 700 = 3425100$
Totalprodukt 3743145	3743145
	4895
	<u>765</u>
mit Weglassung der Nullen	24465
	29358
	<u>34251</u>
	3743145

49) Eine Vertauschung des Multiplicandus mit dem Multiplicator bringt im Producte keine Veränderung hervor.

$365 \times 432 = 730 + 10950 + 146000 = 157680$	}	ab = ba
$432 \times 365 = 2160 + 25920 + 129600 = 157680$		

50) Sind mehrere Zahlen a, b, c, d mit einander zu multipliciren, so bildet man erst das Product ab, multiplicirt dasselbe darauf mit c, das nun erhaltene mit d u. s. w. wobei die Folge der Factoren beliebig abgeändert werden kann.

a. b. c. d = ab. c. d = abc. d = abcd
9. 8. 7. 2 = 72. 7. 2 = 504. 2 = 1008
9. 8. 7. 2 = 9. 2. 56 = 9. 112 = 1008
9. 7. 2. 8 = 9. 7. 16 = 63. 16 = 1008

51) Gleiche Größen mit gleichen Größen multiplicirt ergeben gleiche Producte.

$$\begin{array}{r} \text{Ist } a = b \\ \quad c = d \\ \hline ac = bd \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 + 4 = 5 + 2 \\ \quad 6 = 6 \\ \hline 18 + 24 = 30 + 12 \\ \quad 42 = 42 \end{array}$$

52) Bemerkungen über die Gesetzmäßigkeit der Zahlen-columnen in den Tafeln des Einsundeins und des Einmaleins. Bildung umfangreicherer Productentafeln. Multiplicationen mit dem Rechenbrett.

VI. Division.

53) Dividiren heißt: zu 2 Zahlen, dem Dividendus und Divisor, eine dritte Zahl, den Quotienten, suchen, welche mit dem Divisor multiplicirt ebensoviel ausmacht, wie der Dividendus; — oder untersuchen, wie oft von einer Zahl, dem Dividend, eine andere Zahl, der Divisor, subtrahirt werden kann.

Das Zeichen der Division ist ein : (Kolon), welches rechts vom Dividend, also links vom Divisor gesetzt werden muß. Man deutet die Division auch durch einen Horizontalstrich an, über welchen der Dividend und unter welchen der Divisor geschrieben wird.

$$18 : 6 = \frac{18}{6}$$

54) Soll eine mehrziffrige Zahl durch eine einziffrige Zahl dividirt werden, so dividirt man die in dem Dividenden enthaltenen Einer, Zehner, Hunderter u. s. w. durch den gegebenen Divisor und addirt die Partialquotienten.

$$\begin{aligned} 547488 : 8 &= (500000 + 40000 + 7000 + 400 + 80 + 8) : 8 \\ &= \frac{500000}{8} + \frac{40000}{8} + \frac{7000}{8} + \frac{400}{8} + \frac{80}{8} + \frac{8}{8} \\ &= 62500 + 5000 + 875 + 50 + 10 + 1 \\ &= 68436 \end{aligned}$$

$\begin{array}{r} 345 \mid 4.3.00215 \mid 10000 \\ \underline{3450000} \\ 345 \mid 8.50215 \mid 2000 \\ \underline{690000} \\ 345 \mid 16.0215 \mid 400 \\ \underline{138000} \\ 345 \mid 22.215 \mid 60 \\ \underline{20700} \\ 345 \mid 15.15 \mid 4 \\ \underline{1380} \\ 135 \text{ Rest.} \end{array}$	$\begin{array}{r} 345 \mid 4.3.00215 \mid 10000 \\ \underline{3450000} \\ 8.50215 \quad 2000 \\ \underline{690000} \\ 16.0215 \quad 400 \\ \underline{138000} \\ 22.215 \quad 60 \\ \underline{20700} \\ 15.15 \quad 4 \\ \underline{1380} \\ 135 \text{ Rest.} \end{array}$
--	--

$$345 \mid 4.3.00215 \mid 12464$$

$$\begin{array}{r} 345 \\ \underline{8.50} \\ 690 \\ \underline{16.02} \\ 1380 \\ \underline{22.21} \\ 2070 \\ \underline{15.15} \\ 1380 \\ \underline{135} \end{array}$$

57) Die Probe für die richtig ausgeführte Division besteht darin, daß die Multiplication des Quotienten mit dem Divisor und die Hinzufügung des etwa vorhandenen Restes zu diesem Producte, den Dividendus ergeben muß.

Für das obige Beispiel ist $(12464 \times 345) + 135 = 4300215$.

58) Gleiche Größen durch gleiche dividirt, geben gleiche Quotienten.

$$\begin{array}{l} \text{Ist } m = n \\ \quad p = q \\ \hline \text{so muß } \frac{n}{p} = \frac{n}{q} \text{ sein.} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 300 + 12 = 150 + 162 \\ \quad \quad \quad 6 \quad = \quad 6 \\ \hline \frac{300}{6} + \frac{12}{6} = \frac{150}{6} + \frac{162}{6} \\ 50 + 2 = 25 + 27 = 52. \end{array}$$

59) Eine Zahl sei gegeben. Man multiplicire oder dividire dieselbe durch eine andere; das erhaltene Product behandle man ebenso, indem man die Multiplication, bez. Division mit der zweiten gegebenen Zahl durchführt; man erhält sodann eine Folge von Zahlen, welche eine gewisse Regelmäßigkeit des Zu- oder Abnehmens aufweisen.

1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 Producte gebildet durch Multipl. mit 3.

2048, 1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 1
Quotienten, gebildet durch Division mit 2. Solche Zahlenreihen heißen „geometrische Progressionen.“

VII. Parenthesenrechnungen.

60) Sind beliebig viele Zahlen durch die Operationszeichen (+) (−) (×) (:) mit einander verbunden, so können dieselben zu einer einzigen Zahl vereinigt werden. Nur befolge man die Regel, die durch das (×) oder (:) verbundenen Größen erst durch wirkliche Ausführung dieser Operationen zu vereinigen, ehe die Addition und Subtraction vorgenommen wird.

Man drückt diese Regel kurz so aus: „Multiplication und Division gehen vor Addition und Subtraction.“

$$9 + 4 \cdot 5 - 3 + 8 : 2 = 9 + 20 - 3 + 4 = 30$$

$$5 + 16 : 4 - 3 \cdot 2 + 6 : 3 = 5 + 4 - 6 + 2 = 5.$$

61) Wenn eine Verbindung mehrerer Zahlen nur als eine Größe betrachtet werden soll, pflegt man dieselbe in eine Parenthese (Klammer) einzuschließen, wobei nicht selten innerhalb der Hauptparenthese noch Nebenparenthesen vorkommen.

$$23 + (8 \cdot 7 - 5 \cdot 3) \dots \text{2gliedrig}$$

$$125 - [9 + 5(3 + 4 \cdot 2)] + 19 \dots \text{3gliedrig}$$

wobei auf die übereinstimmende Form der correspondirenden Parenthesenzeichen zu achten ist.

62) Die Anzahl der Glieder einer solchen Zahlenreihe ist so groß als die Anzahl der durch das Plus oder Minus von einander getrennten Größen. Auf die vorhandenen Multiplikations- oder Divisionszeichen wird nicht Rücksicht genommen.
 $20 + 5 - 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 : 3 + 10 = 20 + 5 - 12 + 10 + 10 \dots$ 5gliedrig.

63) Nicht selten steht vor oder hinter einer Parenthese eine Zahl ohne Zeichen. In diesem Falle hat man sich den Werth der in der Parenthese befindlichen Größen mit der außerhalb stehenden Zahl multiplicirt zu denken. Man erhält auch dasselbe Resultat, wenn man den bei der Parenthese befindlichen Multiplikator mit jeder innerhalb der Parenthese befindlichen Größe multiplicirt.

$$4(12 + 5 \cdot 2 - 4) = 4(12 + 10 - 4) = 4 \cdot 18 = 72$$

$$4[13 + 2(8 + 4 - 3) - 2] = 4[13 + 2 \cdot 9 - 2] = 52 + 72 - 8 = 116.$$

64) Ganz das Nämliche gilt auch von einer Größe, welche durch das Divisionszeichen mit einem Klammerausdruck verbunden ist.

$$(18 + 12 - 15) : 3 = \frac{18}{3} + \frac{12}{3} - \frac{15}{3} = 6 + 4 - 5 = 5; \quad \frac{15}{3} = 5.$$

65) Ist eine Zahl mit einem Klammerausdruck durch ein Plus verbunden, so kann die Klammer fortgelassen werden, ohne daß der Werth des Ganzen sich ändert.

$$13 + (8 + 4 - 3) = 13 + 8 + 4 - 3 = 13 + 9 = 22.$$

$$10 + 3 \cdot 2 + [10 + (5 \cdot 2 - 8) + 7 - 3] = 10 + 6 + 10 + 10 - 8 + 7 - 3 = 64.$$

66) Haben die Glieder einer Zahlenreihe nur das Zeichen Plus, bez. Minus, so ist auch das Resultat der Vereinigung positiv, bez. negativ.

$$\left. \begin{array}{l} 8 + 7 + 5 + 3 = +23 \\ -3 - 4 - 7 - 9 = -23 \end{array} \right\} \text{Beisp.: Einnahme und Ausgabe.}$$

Anmerkung. Am Anfange pflegt man einer positiven Zahl kein Plus vorzusetzen.

67) Kommen in der Zahlenverbindung Glieder mit verschiedenen Zeichen vor, so läßt sich die Rechnung dadurch vereinfachen, daß man die Summe aller positiven Größen, darauf

die Summe aller Minusgrößen bildet, die kleinere Summe von der größern subtrahirt und dem Reste das Zeichen der größern Summe beilegt.

$$12 + 8 - 4 + 7 - 6 + 9 - 5.$$

$$= (12 + 8 + 7 + 9) - (6 + 4 + 5) = 36 - 15 = 21.$$

68) Steht vor einer Parenthese ein Minuszeichen, so kann dasselbe nur dann fortgelassen werden, wenn man allen Gliedern innerhalb der Parenthese das entgegengesetzte Zeichen giebt, d. h. Plus in Minus und Minus in Plus verwandelt.

$$20 - (+3 + 8 - 9 + 4) = 20 - 3 - 8 + 9 - 4 = 14$$

$$100 - [+20 - 10 - (-10 + 6 + 3) 2] = 100 - (20 - 10 - (-20 + 12 + 6)).$$

$$= 100 - (20 - 10 + 20 - 12 - 6) = 100 - 20 + 10 - 20 + 12 + 6 = 128 - 40 = 88.$$

69) Enthält jede innerhalb einer Parenthese befindliche Zahl einen gemeinsamen Factor, so kann derselbe herausgehoben d. h. vor die Parenthese als Multiplikator gesetzt werden.

$$(8 \cdot 3 + 5 \cdot 3 - 6 \cdot 3) = (8 + 5 - 6) 3 = 7 \cdot 3 = 21.$$

$$(72 : 4 + 24 - 30) = (18 + 24 - 30) = 6(3 + 4 - 5) = 6 \cdot 2 = 12.$$

VIII. Eigenschaften der Zahlen.

70) Multiplicirt man eine beliebige Zahl z mit a , so ist das Product az ein Vielfaches sowohl von z als von a . Beide Größen a und z heißen Factoren des Productes az . Da außerdem das Product az sowohl durch a als durch z ohne nachbleibenden Rest dividirt oder „gemessen“ werden kann, so heißen a und z Maaße der Zahl az .

71) Hat eine Zahl nur sich selbst oder die Einheit zum Maaße, so nennt man sie Primzahl. Solche Zahlen sind z. B. 5, 7, 13.

72) Zahlen, welche hingegen Vielfache von andern Zahlen sind, heißen zusammengesetzte und zwar, weil sie durch Multiplication zweier oder mehrerer Factoren gebildet oder

zusammengesetzt gedacht werden können. Dergleichen sind $15 = 3 \times 5$; $18 = 2 \times 3 \times 3$.

73) Alle Glieder der Zahlenreihe zerfallen demnach in Primzahlen und zusammengesetzte.

74) Um zu entscheiden, ob eine Zahl Primzahl oder zusammengesetzt ist, muß untersucht werden, ob sie sich in Factoren zerlegen läßt. Sind die Factoren einer Zahl sämmtlich Primzahlen, so nennt man letztere Primfactoren.

75) Um aus der natürlichen Zahlenreihe die Primzahlen auszuscheiden, verfährt man folgendermaßen: Man schreibt alle ungeraden Zahlen der Reihe nach von 3 an auf, streicht jede dritte hinter der 3, also 6, 9 u. s. w., überhaupt die Vielfachen der 3 aus, geht nun auf 5 über, streicht die Vielfachen der 5, also 10, 15, 20 aus und fährt so fort mit 7, 11, 12 u. s. w. Die ausgestrichenen sind sämmtlich zusammengesetzte Zahlen. Diese Regel heißt nach ihrem Erfinder „cribrum Eratosthenis“ (Sieb des Eratosthenes).

3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25		
27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49		
51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71	73	75	77
79	81	83	85	87	89	91	93	95	97	99			

76) Die 1., 3., 5., 7. u. s. w. Zahl der natürlichen Zahlenreihe nennt man ungerade, die 2., 4., 6. . . Zahl heißen gerade Zahlen. Jede gerade Zahl läßt sich durch die Form $2n$ und jede ungerade durch die Form $2n+1$ ausdrücken. Eine Formel zur Darstellung der Primzahlen oder eine Formel zur Auffindung z. B. der 100sten Primzahl ist nicht gefunden. (Von Fermat wurde irrthümlicherweise behauptet, daß die Formel $2^n + 1$ wenn n eine Potenz von 2 ist, nur Primzahlen ergebe. Indessen ist z. B. $2^{32} + 1 = 4294967297$ keine Primzahl, da sie durch 641 theilbar. (Ueber den Begriff Potenz siehe diesen Abschnitt).

77) Um irgend eine zusammengesetzte Zahl in ihre Primfactoren zu zerlegen, dividire man sie durch die Reihe der aufeinanderfolgenden Primzahlen und zwar, wofern es möglich,

mit 2 anfangend, so oft es angeht, hierauf durch 3, so oft es angeht, darauf durch 5 u. s. w. Sämmtliche Divisore und der letzte Quotient, der selbst eine Primzahl ist, stellen sodann die Primfactoren der gegebenen Zahl vor, z. B.: Es soll 55440 zerlegt werden.

$$\begin{array}{r|l|l}
 2 & 55440 & 27720 \\
 2 & 27720 & 13860 \\
 2 & 13860 & 6930 \\
 2 & 6930 & 3465 \\
 \hline
 3 & 3465 & 1155 \\
 3 & 1155 & 385 \\
 5 & 385 & 77 \\
 7 & 77 & 11 \\
 \hline
 & & 77
 \end{array}$$

$$\text{Also } 55440 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

78) Zur Erleichterung dieses Verfahrens wendet man mit Vortheil die Regeln über die Theilbarkeit an.

Es ist nämlich eine Zahl dividirbar ohne nachbleibenden Rest (theilbar)

- a. durch 2, wenn die letzte Ziffer gerade ist,
- b. durch 3, wenn die Summe der Ziffern (Quersumme) durch 3 aufgeht,
- c. durch 4, wenn die beiden letzten Ziffern durch 4 aufgehen,
- d. durch 5, wenn die letzte Ziffer eine Null oder 5 ist,
- e. durch 6, wenn die Zahl durch 3 aufgeht und die letzte Ziffer gerade ist,
- f. durch 7.

Man multiplicirt die Anfangs-Ziffer mit 3 und addirt die nächstfolgende andere Ziffer hinzu. Diese Summe multiplicirt man wieder mit 3 und addirt die nächstfolgende u. s. w. Hier muß 7 so oft weggelassen werden als es angeht.

$$\begin{aligned}
 3514 &= (3 \times 3 + 5) = 14 \\
 &(14 \times 3 + 1) = 43 \\
 &(43 \times 3 + 4) = 133 \\
 &133 = 19 \\
 &\underline{\quad 7}
 \end{aligned}$$

- g. durch 8,
wenn die 3 letzten Ziffern durch 8 aufgehen,
h. durch 9,
wenn die Quersumme durch 9 theilbar,
i. durch 10, wenn die letzte Ziffer eine Null ist,
k. durch 11,
wenn die Differenz aus der Quersumme der geraden und ungeraden Stellen durch 11 ohne Rest aufgeht, oder falls diese Differenz 0 ist,
l. durch 7, 11, 13.

Man theilt die gegebene Zahl in dreiziffrige Gruppen und bildet die Differenz aus der Summe der geraden und ungeraden Gruppen. Ist diese Differenz durch 7, 11, 13 theilbar, so ist es auch die ganze Zahl.

Gegeben 7850843

$$\begin{array}{c} \text{(1)} \quad \text{(2)} \quad \text{(3)} \\ 7 \mid 850 \mid 843 \end{array}$$

$$1) \quad 7 \quad 2) \quad 850$$

$$3) \quad \underline{843}$$

$$850$$

$$\underline{850}$$

0 also theilbar durch 7, 11, und 13.

Gegeben 2 | 353 | 847 | 302

$$1) \quad 2$$

$$2) \quad 353$$

$$3) \quad \underline{847}$$

$$4) \quad \underline{302}$$

$$849$$

$$\underline{655}$$

$$\underline{655}$$

7 | 194 | 27 nicht theilbar durch 7

$$\underline{14}$$

$$54$$

11 | 194 | 17 nicht theilbar durch 11

$$\underline{11}$$

$$84$$

13 | 194 | 14 nicht theilbar durch 13

$$\underline{13}$$

$$64$$

- m. ist überhaupt eine Zahl theilbar durch eine andere, so ist sie auch theilbar durch die Factoren der letztern: So ist z. B. 360 theilbar durch 60, also auch durch 2, 3, 4, 5, 6, 10,
- n. ist umgekehrt eine Zahl durch mehrere Primzahlen theilbar, so ist sie es auch durch das Product derselben. So ist 360 theilbar durch 2, 3, 5 also auch durch $2 \times 3 \times 5 = 30$.
- o. Die letztere Regel angewandt auf die Theilbarkeit durch 14, 15, 22, 25, 33, 44, u. f. w.
- p. Theilbarkeit durch 13, 17, 19.

Man multiplicirt die Anfangsziffer der zu untersuchenden Zahl mit 3, 7, 9 (da 13, 17, 19 bez. um 3, 7, 9 größer als 10 sind), zieht das Product von dem nächstgrößern Vielfachen von 13, 17 oder 19 ab, addirt die folgende Ziffer u. f. w., und untersucht den Rest.

493259

$$3 \times 4 = 12; 13 - 12 = 1; 1 + 9 = 10$$

$$3 \times 10 = 30; 39 - 30 = 9; 9 + 3 = 12$$

$$3 \times 12 = 36; 39 - 36 = 3; 3 + 2 = 5$$

$$3 \times 5 = 15; 18 - 15 = 3; 3 + 5 = 8$$

$$8 \times 3 = 24; 26 - 24 = 2; 2 + 9 = 11$$

die Zahl geht also durch 13 nicht auf.

17481

$$1 \times 9 = 9; 19 - 9 = 10; 10 + 7 = 17$$

$$17 \times 9 = 153; 171 - 153 = 18; 18 + 4 = 22$$

$$22 \times 9 = 198; 209 - 198 = 11; 11 + 8 = 19$$

$$19 \times 9 = 171; 171 - 171 = 0; 0 + 1 = 7$$

$$1 \times 9 = 9; 19 - 9 = 10$$

also nicht theilbar durch 19.

- q. Theilbarkeit durch 101, 1001, 10001 u. f. w.

Man theilt die Zahl von rechts nach links in Gruppen, deren jede eine Stelle weniger hat, als der Divisor, also 2 Stellen bei 101, 3 Stellen bei 1001, zieht die Summe der geraden Gruppen von der Summe der ungeraden ab und untersucht die Differenz.

1.	2.	3.	4.	5.	6.
35	67	89	72	38	56

$$35 + 89 + 38 = 162$$

$$67 + 72 + 56 = 195$$

$$195 - 162 = 33 \text{ also die Zahl nicht theilbar durch } 101.$$

r. Anwendung der Neunerprobe bei den 4 Species in ganzen Zahlen.

79) Das Symbol für das Product zweier Zahlen a und b ist die Productenform ab; a und b heißen in Bezug auf die letztere ein Factorenpaar. Setzt man $p = ab$, so ist auch $\frac{p}{a} = b$; $\frac{p}{b} = a$ und man gelangt durch Division auf die Quotientenform. a und b sind also Maaße der Zahl p. Giebt es eine andere Zahl q, zu welcher a und b nicht Maaße sind, so giebt es auch eine Zahl r, welche zu dem Product ab hinzu addirt oder davon subtrahirt, jene Zahl q hervorbringt. Man drückt diese Beziehung so aus

$$q = ab \pm r \dots (a)$$

und nennt r den Rest der Zahl q. Aus (a) folgt $\frac{q \mp r}{a} = b$.

80) Sind 2 Zahlen q und r so beschaffen, daß ihre Summe oder Differenz durch eine dritte Zahl b ohne Rest theilbar ist, so nennt man q und r congruent nach dem Theiler b. Dieselbe Zahl b heißt Modul von q und r. Diese Zahlencongruenz wird bezeichnet

$$q \equiv r \pmod{b}; \quad 39 \equiv 4 \pmod{7}.$$

81) Eine Zahl, welche in mehreren gegebenen Zahlen ohne Rest aufgeht, nennt man „gemeinsames Maaß“ der gegebenen Zahlen. Das kleinste gemeinsame Maaß wird der kleinste Factor sein, den jene Zahlen enthalten

6, 15, 12, 27 haben den kleinsten gem. Factor 3.

Ebenso ist das größte gemeinsame Maaß der größte gemeinschaftliche Factor der gegebenen Zahlen.

82) Um zu mehreren gegebenen Zahlen das größte gemeinschaftliche Maaß zu finden, zerlege man erstere in ihre Prim-

factoren und bilde das Product derjenigen Factoren, welche allen Zahlen gemeinschaftlich angehören.

$$24, 36, 56, 84, 104.$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \mid 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \mid 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \mid$$

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \mid 104 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13.$$

Da der Factor 2 in jeder Factorenreihe höchstens zweimal vorkommt, 3, 7, 13 aber nicht gemeinschaftlich sind, so ist das größte Maaß $2 \cdot 2 = 4$.

83) Sind nur 2 Zahlen gegeben, so findet sich das größte gemeinsame Maaß am raschesten durch die Kettendivision. Man dividirt die kleinere Zahl in die größere, den Rest in den vorigen Divisor, den zweiten Rest in den vorigen Divisor und fährt so fort, bis die Division aufgeht. Der letzte Divisor stellt das gesuchte Maaß vor. Ist der letzte Divisor 1, so haben die Zahlen kein gemeinsames Maaß.

117 und 336

$$117 \mid 336 \mid 2$$

$$\underline{234}$$

$$102 \mid 117 \mid 1$$

$$\underline{102}$$

$$15 \mid 102 \mid 6$$

$$\underline{90}$$

$$12 \mid 15 \mid 1$$

$$\underline{12}$$

$$3 \mid 12 \mid 4$$

$$\underline{12}$$

Das gesuchte Maaß
also die Zahl 3.

84) Eine Zahl von der Beschaffenheit, daß mehrere gegebene Zahlen in derselben ohne Rest aufgehen, heißt „gemeinsames Vielfache“ dieser Zahlen. Unter den unzählig vielen Zahlen, welchen diese Eigenschaft zukommt, giebt es eine, welche „kleinstes Vielfache“ genannt wird. Es ist dieses das Product aus den höchsten Potenzen der von einander verschiedenen, den gegebenen Zahlen angehörenden Primfactoren.

Gegeben 12, 18, 24, 28, 36, 48, 56,

da 12, 18, 24, 28 bereits in den übrigen als Factoren ent-

halten sind, berücksichtigt man dieselben nicht und sucht nur das Vielfache zu 36, 48, 56

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 & | & 48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 & | & 56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 & | \\ &= 2^2 \cdot 3^2 & & = 2^4 \cdot 3 & & = 2^3 \cdot 7 & \\ &= 4 \cdot 9 & & = 16 \cdot 3 & & = 8 \cdot 7. & \end{aligned}$$

Da hier 4 und 8 in 16 aufgehen, so ist das gesuchte kleinste Vielfache offenbar

$$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 16 \cdot 9 \cdot 7 = 1008.$$

Man findet auch das gemeinsame kleinste Vielfache auf folgende Weise. Gegeben

$$10, 8, 12, 14, 22, 30, 42, 35, 80, 33.$$

Nach Weglassung derjenigen Zahlen, welche bereits Factoren anderer sind (hier 10, 8). Dividirt man die Reihe

$$12, 14, 22, 30, 42, 35, 80, 33$$

durch die auf einander folgenden Primzahlen, von der niedrigsten anfangend, sofern mindestens 2 durch eine derselben theilbare Zahlen in der Reihe sich befinden, bis man auf lauter theilfremde Zahlen kommt

$$\begin{array}{l} (12, 14, 22, 30, 42, 35, 80, 33 \\ 2 \underline{(6, 7, 11, 15, 21, 35, 40, 33)} \\ 2 \underline{(3, 15, 35, 21, 20, 33)} \\ 3 \underline{(5, 35, 7, 20, 33)} \\ 5 \underline{(7, 4, 11)} \end{array}$$

mithin das gesuchte Vielfache gleich dem Product aus sämtlichen Divisoren und den nachgebliebenen Zahlen, hier also $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 4 = 18480$.

85) Alle Maaße einer Zahl, mit Ausnahme der Zahl selbst, heißen aliquote Theile der Zahl. Vollkommene Zahlen nennt man solche, welche der Summe ihrer aliquoten Theile gleich sind. So sind die aliquoten Theile von 48 offenbar 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24.

$$\left. \begin{array}{l} 6 = 1 + 2 + 3 \\ 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \end{array} \right\} \text{vollkommene Zahlen.}$$

Ist n eine beliebige ganze Zahl, so findet man alle vollkommenen Zahlen nach der Formel $2^n(2^{n+1}-1)$ falls $(2^{n+1}-1)$ eine Primzahl bedeutet.

Für $n = 6$ ist z. B. $2^{n+1}-1 = 127$ eine Primzahl, also $127 \times 2^6 = 127 \times 64 = 8128$ eine vollkommene Zahl. Mangelhafte und überschießende Zahlen.

86) Eine Zahl, welche ein Maaß zweier anderer Zahlen ist, ist auch stets ein Maaß der Summe oder Differenz jener beiden Zahlen.

3 ist z. B. ein M. von 12 und von 18, also auch von $12 + 18 = 30$ und $18 - 12 = 6$.

87) Jede zusammengesetzte Zahl läßt sich darstellen durch die Form: $Z = a^n b^m c^p \dots$

und es beträgt die Summe der Maaße sodann

$$S = \left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1} \right) \left(\frac{b^{m+1}-1}{b-1} \right) \left(\frac{c^{p+1}-1}{c-1} \right) \dots$$

Für 360 ist z. B. $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

$$a = 2; m = 3; b = 3; n = 2; c = 5; p = 1$$

$$S = \left(\frac{2^4-1}{2-1} \right) \left(\frac{3^3-1}{3-1} \right) \left(\frac{5^2-1}{5-1} \right) = 15 \cdot 13 \cdot 6 = 1170.$$

88) Amicable Zahlen nennt man solche, deren Maaßsummen einander gleich sind.

$$\left. \begin{array}{l} 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ 366 = 2 \cdot 3 \cdot 61 \end{array} \right\} S = 576.$$

89) Es sei hier noch die Neunerprobe für die Multiplication erwähnt. Man dividirt sowohl den Multiplicandus als den Multiplikator durch 9 und bemerkt die Reste. Dieselben werden mit einander sodann multiplicirt und durch 9 dividirt. Der erhaltene Rest muß mit dem Reste des durch 9 dividirten Productes übereinstimmen, falls dies Product richtig war.

Anmerkung. Machen die Fehler in einer oder mehreren Stellen des Productes ein Vielfaches von 9 aus, so ist die Probe nicht entscheidend.

90) Primzahlen und Factorentafel der Zahlen von 1—1000.

1	—	43	—	85	5. 17	127	—
2	—	44	2 ² . 11	86	2. 43	128	2 ⁷
3	—	45	3 ² . 5	87	3. 29	129	3. 43
4	2 ²	46	2. 23	88	2 ³ . 11	130	2. 5. 13
5	—	47	—	89	—	131	—
6	2. 3	48	2 ⁴ . 3	90	2. 3 ² . 5	132	2. 61
7	—	49	7 ²	91	13. 7	133	7. 19
8	2 ³	50	2. 5 ²	92	2 ² . 23	134	2. 67
9	3 ²	51	3. 17	93	3. 31	135	3 ³ . 5
10	2. 5	52	2 ² . 13	94	2. 47	136	2 ³ . 17
11	—	53	—	95	5. 19	137	—
12	2 ² . 3	54	2. 3 ³	96	2 ⁵ . 3	138	2. 3. 23
13	—	55	5. 11	97	—	139	—
14	2. 7	56	2 ³ . 7	98	2. 7 ²	140	2 ² . 5. 7
15	3. 5	57	3. 19	99	3 ² . 11	141	3. 47
16	2 ⁴	58	2. 29	100	2 ² . 5 ²	142	2. 71
17	—	59	—	101	—	143	11. 13
18	2. 3 ²	60	2 ² . 3. 5	102	2. 3. 17	144	2 ⁴ . 3 ²
19	—	61	—	103	—	145	5. 29
20	2 ² . 5	62	2. 31	104	2 ³ . 13	146	2. 73
21	3. 7	63	3 ² . 7	105	3. 5. 7	147	3. 7 ²
22	2. 11	64	2 ⁶	106	2. 53	148	2 ² . 37
23	—	65	5. 13	107	—	149	—
24	2 ³ . 3	66	2. 3. 11	108	2 ² . 3 ³	150	2. 3. 5 ²
25	5 ²	67	—	109	—	151	—
26	2. 13	68	2 ² . 17	110	2. 5. 11	152	2 ³ . 19
27	3 ³	69	3. 23.	111	3. 37	153	3 ² . 17
28	2 ² . 7	70	2. 5. 7	112	2 ⁴ . 7	154	2. 7. 11
29	—	71	—	113	—	155	5. 31
30	2. 3. 5	72	2 ³ . 3 ²	114	2. 3. 19.	156	2 ² . 3. 13
31	—	73	—	115	5. 23	157	—
32	2 ⁵	74	2. 37	116	2 ² . 29	158	2. 79
33	3. 11	75	3. 5 ²	117	3 ² . 13	159	3. 53
34	2. 17	76	2 ² . 19	118	2. 59	160	2 ⁵ . 5
35	5. 7	77	7. 11	119	7. 17	161	7. 23
36	2 ² . 3 ² .	78	2. 3. 13	120	2 ³ . 3. 5	162	2. 3 ⁴
37	—	79	—	121	11 ²	163	—
38	2. 19	80	2 ⁴ . 5	122	2. 61	164	2 ² . 41
39	3. 13	81	3 ⁴	123	3. 41	165	5. 3. 11
40	2 ³ . 5	82	2. 41	124	2 ² . 31	166	2. 83
41	—	83	—	125	5 ³	167	—
42	2. 3. 7	84	2 ² . 3. 7	126	2. 3 ² . 7	168	2 ³ . 3. 7

169	13^2	212	$2^2 \cdot 53$	255	$3 \cdot 5 \cdot 17$	298	$2 \cdot 149$
170	$2 \cdot 5 \cdot 17$	213	$3 \cdot 71$	256	2^8	299	$13 \cdot 23$
171	$3^2 \cdot 19$	214	$2 \cdot 107$	257	—	300	$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$
172	$2^4 \cdot 43$	215	$5 \cdot 43$	258	$2 \cdot 3 \cdot 43$	301	—
173	—	216	$2^3 \cdot 3^3$	259	$37 \cdot 7$	302	$2 \cdot 151$
174	$2 \cdot 3 \cdot 29$	217	31	260	$2^2 \cdot 5 \cdot 13$	303	$3 \cdot 101$
175	$5^2 \cdot 7$	218	$2 \cdot 109$	261	$3^2 \cdot 29$	304	$2^4 \cdot 19$
176	$2^4 \cdot 11$	219	$3 \cdot 73$	262	$2 \cdot 131$	305	$5 \cdot 61$
177	—	220	$2^2 \cdot 5 \cdot 11$	263	—	306	$2 \cdot 3^2 \cdot 17$
178	$2 \cdot 89$	221	$13 \cdot 17$	264	$2^2 \cdot 67$	307	—
179	—	222	$2 \cdot 111$	265	$5 \cdot 53$	308	$2^2 \cdot 7 \cdot 11$
180	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	223	—	266	$2 \cdot 7 \cdot 19$	309	$3 \cdot 103$
181	—	224	$2^5 \cdot 7$	267	$3 \cdot 89$	310	$2 \cdot 5 \cdot 31$
182	$2 \cdot 7 \cdot 13$	225	$3^2 \cdot 5^2$	268	$2^2 \cdot 67$	311	—
183	$3 \cdot 61$	226	$2 \cdot 113$	269	—	312	$2^3 \cdot 3 \cdot 13$
184	$2^4 \cdot 3^2$	227	—	270	$2 \cdot 3^3 \cdot 5$	313	—
185	$3 \cdot 37$	228	$2^2 \cdot 3 \cdot 19$	271	—	314	$2 \cdot 157$
186	$2 \cdot 3 \cdot 31$	229	—	272	$2^4 \cdot 17$	315	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$
187	$11 \cdot 17$	230	$2 \cdot 5 \cdot 23$	273	$3 \cdot 7 \cdot 13$	316	$2^2 \cdot 79$
188	$2^2 \cdot 47$	231	$3 \cdot 7 \cdot 11$	274	$2 \cdot 137$	317	—
189	$3^2 \cdot 7$	232	$2^3 \cdot 29$	275	$5^2 \cdot 11$	318	$2 \cdot 3 \cdot 53$
190	$2 \cdot 5 \cdot 19$	233	—	276	$2^2 \cdot 3 \cdot 23$	319	$29 \cdot 11$
191	—	234	$2 \cdot 3^2 \cdot 13$	277	—	320	$2^6 \cdot 5$
192	$2^6 \cdot 3$	235	$5 \cdot 47$	278	$2 \cdot 139$	321	$3 \cdot 107$
193	—	236	$2^2 \cdot 59$	279	$3^2 \cdot 31$	322	$2 \cdot 7 \cdot 23$
194	$2^2 \cdot 47$	237	$3 \cdot 79$	280	$2^3 \cdot 5 \cdot 7$	323	$19 \cdot 17$
195	$3 \cdot 5 \cdot 13$	238	$2 \cdot 7 \cdot 17$	281	—	324	$2^2 \cdot 3^4$
196	$2^2 \cdot 7^2$	239	—	282	$2 \cdot 3 \cdot 47$	325	$5^2 \cdot 13$
197	—	240	$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	283	—	326	$2 \cdot 163$
198	$2 \cdot 3^2 \cdot 11$	241	—	284	$2^2 \cdot 71$	327	$3 \cdot 109$
199	—	242	$2 \cdot 11^2$	285	$3 \cdot 5 \cdot 19$	328	$2^3 \cdot 41$
200	$2^3 \cdot 5$	243	3^5	286	$2 \cdot 11 \cdot 13$	329	$7 \cdot 47$
201	$3 \cdot 67$	244	$2^2 \cdot 61$	287	—	330	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$
202	$2 \cdot 101$	245	$5 \cdot 7^2$	288	$2^5 \cdot 3^2$	331	—
203	$7 \cdot 29$	246	$2 \cdot 3 \cdot 41$	289	—	332	$2^2 \cdot 83$
204	$2^2 \cdot 3 \cdot 17$	247	$19 \cdot 13$	290	$2 \cdot 5 \cdot 29$	333	$3^2 \cdot 37$
205	$5 \cdot 41$	248	$2^3 \cdot 31$	291	$3 \cdot 97$	334	$2 \cdot 167$
206	$2 \cdot 103$	249	$3 \cdot 83$	292	$2^2 \cdot 73$	335	$5 \cdot 67$
207	$3^2 \cdot 23$	250	$2 \cdot 5^3$	293	—	336	$2^4 \cdot 3 \cdot 7$
208	$2^4 \cdot 13$	251	—	294	$2 \cdot 3 \cdot 7^2$	337	—
209	$11 \cdot 19$	252	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$	295	$5 \cdot 59$	338	$2 \cdot 13^2$
210	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$	253	$11 \cdot 23$	296	$2^3 \cdot 37$	339	$3 \cdot 113$
211	—	254	$2 \cdot 127$	297	$3^3 \cdot 11$	340	$2^2 \cdot 5 \cdot 17$

341	11. 31	384	2 ⁷ . 3	427	7. 61	470	2. 5. 47
342	2. 3 ² . 19	385	5. 7. 11	428	2 ² . 107	471	3. 157
343	—	386	2. 193	429	3 ³ . 17	472	2 ³ . 59
344	2 ³ . 43	387	3 ² . 43	430	2 ⁵ . 43	473	11. 43
345	3. 5. 23	388	2 ² . 97	431	—	474	2. 3. 79
346	2. 173	389	—	432	2 ⁴ . 3 ³	475	5 ² . 19
347	—	390	2. 3. 5. 13	433	—	476	2 ² . 7. 17
348	2 ² . 3. 29	391	17. 23	434	2. 7. 31	477	3 ² . 53
349	—	392	2 ³ . 7 ²	435	3. 5. 31	478	2. 239
350	2. 5 ² . 7	393	3. 131	436	2 ² . 109	479	—
351	3 ³ . 13	394	2. 197	437	19. 23	480	2 ⁵ . 3. 5
352	2 ⁵ . 11	395	5. 79	438	2. 3. 73	481	13. 37
353	—	396	2 ² . 3 ² . 11	439	—	482	2. 241
354	2. 177	397	—	440	2 ³ . 5. 11	483	3. 7. 23
355	5. 71	398	2. 199	441	3 ² . 7 ²	484	2 ² . 11 ²
356	2 ² . 89	399	3. 7. 19	442	2. 13. 17	485	5. 97
357	3. 7. 17	400	2 ⁴ . 5 ²	443	—	486	2. 3 ⁵
358	2. 179	401	—	444	2 ² . 111	487	—
359	—	402	2. 3. 67	445	5. 89	488	2 ³ . 61
360	2 ³ . 3 ² . 5	403	13. 31	446	2. 223	489	3. 163
361	19 ²	404	2 ² . 101	447	3. 149	490	2. 5. 7 ²
362	2. 181	405	3 ⁴ . 5	448	2 ⁶ . 7	491	—
363	3. 11 ²	406	2. 7. 29	449	—	492	2 ² . 3. 41
364	2 ² . 7. 13	407	11. 37	450	2. 3 ² . 5 ²	493	17. 29
365	5. 73	408	2 ³ . 3. 17	451	11. 41	494	2. 13. 19
366	2. 3. 61	409	—	452	2 ² . 113	495	3 ² . 5. 11
367	—	410	2. 5. 41	453	3. 151	496	2 ⁴ . 31
368	2 ⁴ . 23	411	3. 137	454	2. 227	497	7. 71
369	3 ² . 41	412	2 ² . 103	455	5. 7. 13	498	2. 3. 83
370	2. 5. 37	413	7. 59	456	2 ³ . 3. 19	499	—
371	7. 53	414	2. 3 ² . 23	457	—	500	2 ² . 5 ³
372	2 ² . 3. 31	415	5. 83	458	2. 229	501	3. 167
373	—	416	2 ⁵ . 13	459	3 ³ . 17	502	2. 251
374	2. 11. 17	417	3. 139	460	2 ² . 5. 23	503	—
375	3. 5 ³	418	2. 11. 19	461	—	504	2 ³ . 3 ² . 7
376	2 ³ . 47	419	—	462	2. 3. 7. 11	505	5. 101
377	13. 29	420	2 ² . 3. 5. 7	463	—	506	2. 11. 23
378	2. 3 ³ . 7	421	—	464	2 ⁴ . 29	507	3. 13 ²
379	—	422	2. 211	465	3. 5. 31	508	2 ² . 127
380	2 ² . 5. 19	423	3 ² . 47	466	2. 233	509	—
381	3. 127	424	2 ³ . 53	467	—	510	2. 3. 5. 17
382	2. 191	425	5 ² . 17	468	2 ² . 3 ² . 1	511	7. 73
383	—	426	2. 3. 71	469	7. 67	512	2 ⁹

513	$3^3 \cdot 19$	556	$2^2 \cdot 139$	599	—	642	$2 \cdot 3 \cdot 107$
514	$2 \cdot 257$	557	—	600	$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	643	—
515	$5 \cdot 103$	558	$2 \cdot 3^2 \cdot 31$	601	—	644	$2^2 \cdot 7 \cdot 23$
516	$2^2 \cdot 3 \cdot 43$	559	$13 \cdot 43$	602	$2 \cdot 7 \cdot 43$	645	$3 \cdot 5 \cdot 43$
517	$11 \cdot 47$	560	$2^4 \cdot 5 \cdot 7$	603	$3^2 \cdot 67$	646	$2 \cdot 17 \cdot 19$
518	$2^2 \cdot 127$	561	$3 \cdot 11 \cdot 17$	604	$2^2 \cdot 151$	647	—
519	$3 \cdot 173$	562	$2 \cdot 281$	605	$5 \cdot 11^2$	648	$2^3 \cdot 3^4$
520	$2^3 \cdot 5 \cdot 13$	563	—	606	$2 \cdot 3 \cdot 101$	649	$11 \cdot 59$
521	—	564	$2^2 \cdot 3 \cdot 47$	607	—	650	$2 \cdot 5^2 \cdot 13$
522	$2 \cdot 3^2 \cdot 29$	565	$5 \cdot 113$	608	$2^5 \cdot 19$	651	$3 \cdot 7 \cdot 31$
523	—	566	$2 \cdot 283$	609	$3 \cdot 7 \cdot 29$	652	$2^2 \cdot 163$
524	$2^2 \cdot 131$	567	$3^4 \cdot 7$	610	$2 \cdot 5 \cdot 61$	653	—
525	$3 \cdot 5^2 \cdot 7$	568	$2^3 \cdot 71$	611	$13 \cdot 47$	654	$2 \cdot 3 \cdot 109$
526	$2 \cdot 263$	569	—	612	$2^2 \cdot 3 \cdot 61$	655	$5 \cdot 131$
527	$17 \cdot 31$	570	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19$	613	—	656	$2^4 \cdot 41$
528	$2^4 \cdot 3 \cdot 11$	571	—	614	$2 \cdot 307$	657	$3^2 \cdot 73$
529	23^2	572	$2^2 \cdot 11 \cdot 13$	615	$3 \cdot 5 \cdot 41$	658	$2 \cdot 7 \cdot 47$
530	$2 \cdot 5 \cdot 53$	573	$3 \cdot 191$	616	$2^3 \cdot 7 \cdot 11$	659	—
531	$3 \cdot 177$	574	$2 \cdot 7 \cdot 41$	617	—	660	$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$
532	$2^2 \cdot 7 \cdot 19$	575	$5^2 \cdot 23$	618	$2 \cdot 3 \cdot 103$	661	—
533	$13 \cdot 41$	576	$2^6 \cdot 3^2$	619	—	662	$2 \cdot 331$
534	$2 \cdot 3 \cdot 89$	577	—	620	$2^2 \cdot 5 \cdot 31$	663	$3 \cdot 13 \cdot 17$
535	$5 \cdot 107$	578	$2 \cdot 17^2$	621	$3^3 \cdot 23$	664	$2^3 \cdot 83$
536	$2^3 \cdot 67$	579	$3 \cdot 193$	622	$2 \cdot 311$	665	$5 \cdot 7 \cdot 19$
537	$3 \cdot 179$	580	$2^2 \cdot 5 \cdot 29$	623	$7 \cdot 89$	666	$2 \cdot 3^2 \cdot 37$
538	$2 \cdot 269$	581	$7 \cdot 83$	624	$2^4 \cdot 3 \cdot 13$	667	$23 \cdot 29$
539	$7^2 \cdot 11$	582	$2 \cdot 3 \cdot 97$	625	5^4	668	$2^2 \cdot 167$
540	$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$	583	$11 \cdot 53$	626	$2 \cdot 313$	669	$3 \cdot 223$
541	—	584	$2^3 \cdot 73$	627	$3 \cdot 11 \cdot 19$	670	$2 \cdot 5 \cdot 67$
542	$2 \cdot 271$	585	$5 \cdot 3^2 \cdot 13$	628	$2^2 \cdot 157$	671	$11 \cdot 61$
543	$3 \cdot 181$	586	$2 \cdot 293$	629	$17 \cdot 37$	672	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$
544	$2^5 \cdot 17$	587	—	630	$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	673	—
545	$5 \cdot 109$	588	$2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$	631	—	674	$2 \cdot 337$
546	$2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$	589	$19 \cdot 31$	632	$2^3 \cdot 79$	675	$3^3 \cdot 5^2$
547	—	590	$2 \cdot 5 \cdot 59$	633	$3 \cdot 211$	676	$2^2 \cdot 13^2$
548	$2^2 \cdot 137$	591	$3 \cdot 197$	634	$2 \cdot 317$	677	—
549	$3^2 \cdot 61$	592	$2^4 \cdot 37$	635	$5 \cdot 127$	678	$2 \cdot 3 \cdot 113$
550	$2 \cdot 5^2 \cdot 11$	593	—	636	$2^2 \cdot 3 \cdot 53$	679	$7 \cdot 97$
551	$19 \cdot 29$	594	$2 \cdot 3^3 \cdot 11$	637	$7^2 \cdot 13$	680	$2^3 \cdot 5 \cdot 17$
552	$2^3 \cdot 3 \cdot 23$	595	$5 \cdot 7 \cdot 17$	638	$2 \cdot 11 \cdot 29$	681	$3 \cdot 227$
553	$7 \cdot 79$	596	$2^2 \cdot 149$	639	$3^2 \cdot 71$	682	$2 \cdot 11 \cdot 31$
554	$2 \cdot 277$	597	$3 \cdot 199$	640	$2^7 \cdot 5$	683	—
555	$3 \cdot 5 \cdot 37$	598	$2 \cdot 13 \cdot 23$	641	—	684	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 19$

685	5. 137	728	$2^3. 7. 13$	771	3. 257	814	2. 11. 37
686	$2. 7^3$	729	3^6	772	$2^2. 193$	815	5. 163
687	3. 229	730	2. 5. 73	773	—	816	$2^4. 3. 17$
688	$2^4. 43$	731	17. 43	774	$2. 3^2. 43$	817	19. 43
689	13. 53	732	$2^2. 3. 61$	775	$5^2. 31$	818	2. 409
690	2. 3. 5. 23	733	—	776	$2^3. 97$	819	$3^2. 7. 13$
691	—	734	2. 367	777	3. 7. 37	820	$2^2. 5. 41$
692	$2^2. 173$	735	$3. 5. 7^2$	778	2. 389	821	—
693	$3^2. 7. 11$	736	$2^5. 23$	779	19. 41	822	2. 3. 137
694	2. 347	737	11. 67	780	$2^2. 3. 5. 13$	823	—
695	5. 139	738	$2. 3^2. 41$	781	11. 71	824	$2^3. 103$
696	$2^3. 3. 29$	739	—	782	$2. 17. 23$	825	$3. 5^2. 11$
697	17. 41	740	$2^2. 5. 37$	783	$3^3. 29$	826	$2. 7. 59$
698	2. 349	741	3. 13. 19	784	$2^4. 7^2$	827	—
699	3. 233	742	2. 7. 53	785	5. 157	828	$2^2. 3^2. 23$
700	$2^2. 5^2. 7$	743	—	786	2. 3. 131	829	—
701	—	744	$2^3. 3. 31$	787	—	830	2. 5. 83
702	$2. 3^3. 13$	745	$5^2. 29$	788	$2^2. 197$	831	3. 277
703	19. 37	746	2. 373	789	3. 263	832	$2^6. 13$
704	$2^6. 11$	747	$3^2. 83$	790	$2. 5. 79$	833	$7^2. 17$
705	3. 5. 47	748	$2^2. 11. 17$	791	7. 113	834	2. 3. 139
706	2. 353	749	7. 107	792	$2^3. 3^2. 11$	835	5. 167
707	7. 101	750	$2. 3. 5^3$	793	13. 61	836	$2^2. 11. 19$
708	$2^2. 177$	751	—	794	2. 397	837	$3^3. 31$
709	—	752	$2^4. 47$	795	3. 5. 53	838	2. 419
710	2. 5. 71	753	3. 251	796	$2^2. 199$	839	—
711	$3^2. 79$	754	2. 13. 29	797	—	840	$2^3. 3. 5. 7$
712	$2^3. 89$	755	5. 151	798	$2. 3. 7. 19$	841	29. 29
713	23. 31	756	$2^2. 3^3. 7$	799	17. 47	842	2. 421
714	2. 3. 7. 17	757	—	800	$2^5. 5^2$	843	3. 281
715	$5. 3^2. 17$	758	2. 379	801	$3^2. 89$	844	$2^2. 211$
716	$2^2. 179$	759	3. 11. 23	802	2. 401	845	$5. 13^2$
717	3. 239	760	$2^3. 5. 19$	803	11. 73	846	$2. 3^2. 47$
718	2. 359	761	—	804	$2^2. 3. 67$	847	$7. 11^2$
719	—	762	2. 3. 127	805	5. 7. 23	848	$2^4. 53$
720	$2^4. 3^2. 5$	763	7. 109	806	2. 13. 31	849	3. 283
721	7. 103	764	2. 2. 191	807	3. 269	850	$2. 5^2. 17$
722	$2. 19^2$	765	$3^2. 5. 17$	808	$2^3. 101$	851	23. 37
723	3. 241	766	2. 383	809	—	852	$2^2. 3. 71$
724	$2^2. 181$	767	13. 59	810	$2. 3^4. 5$	853	—
725	$5^2. 29$	768	$2^3. 3$	811	—	854	2. 7. 61
726	$2. 3. 11^2$	769	—	812	$2^2. 7. 29$	855	$3^2. 5. 19$
727	—	770	2. 5. 7. 11	813	3. 271	856	$2^3. 107$

857	—	893	19. 47	929	—	965	5. 193
858	2. 3 ³ . 17	894	2. 3. 149	930	2. 3. 5. 31	966	2. 3. 7. 23
859	—	895	5. 179	931	7 ² . 19	967	—
860	2 ⁶ . 48	896	2 ⁷ . 7	932	2 ² . 233	968	2 ³ . 11 ²
861	3. 7. 41	897	3. 13. 23	933	3. 311	969	3. 17. 19
862	2. 431	898	2. 449	934	2. 467	970	2. 5. 97
863	—	899	—	935	5. 11. 17	971	—
864	2 ⁵ . 3 ³	900	2 ² . 3 ² . 5 ²	936	2 ³ . 3 ² . 13	972	2 ² . 3 ⁵
865	5. 173	901	17. 53	937	—	973	7. 139
866	2. 433	902	2. 11. 41	938	2. 7. 67	974	2. 487
867	3. 289	903	3. 7. 43	939	3. 313	975	3. 5 ² . 13
868	2 ² . 7. 31	904	2 ³ . 113	940	2 ² . 5. 47	976	2 ⁴ . 61
869	11. 79	905	5. 181	941	—	977	—
870	2. 3. 5. 29	906	2. 3. 151	942	2. 3. 157	978	2. 3. 163
871	13. 67	907	—	943	23. 41	979	11. 89
872	2 ³ . 109	908	2 ² . 227	944	2 ⁴ . 59	980	2 ² . 5. 7 ²
873	3 ² . 97	909	3 ² . 101	945	3 ³ . 5. 7	981	3 ² . 109
874	2. 19. 23	910	2. 5. 7. 13	946	2. 11. 43	982	2. 491
875	5 ³ . 7	911	—	947	—	983	—
876	2 ² . 3. 73	912	2 ⁴ . 3. 19	948	2 ² . 3. 79	984	2 ³ . 3. 41
877	—	913	11. 83	949	13. 73	985	5. 197
878	2. 439	914	2. 457	950	2. 5 ² . 19	986	2. 17. 29
879	3. 293	915	3. 5. 61	951	3. 317	987	3. 7. 47
880	2 ⁴ . 5. 11	916	2 ² . 229	952	2 ³ . 7. 17	988	2 ² . 13. 19
881	—	917	7. 131	953	—	989	23. 43
882	2. 3 ² . 7 ²	918	2. 3 ³ . 17	954	2. 3 ² . 53	990	2. 3 ² . 5. 11
883	—	919	—	955	5. 191	991	—
884	2 ² . 13. 17	920	2 ³ . 5. 23	956	2 ² . 239	992	2 ⁵ . 31
885	3. 5. 59	921	3. 307	957	3. 11. 29	993	3. 331
886	2. 443	922	2. 461	958	2. 479	994	2. 7. 71
887	—	923	13. 71	959	7. 137	995	5. 199
888	2 ³ . 111	924	2 ² . 3. 7. 11	960	2 ⁶ . 3. 5	996	2 ² . 3. 83
889	7. 127	925	5 ² . 37	961	31. 31	997	—
890	2. 5. 89	926	2. 463	962	2. 13. 37	998	2. 499
891	9 ² . 11	927	3 ² . 103	963	3 ² . 107	999	3 ³ . 37
892	2 ² . 223	928	2 ⁵ . 29	964	2 ² . 241	1000	2 ³ . 5 ³ .

IX. Die gemeinen Brüche.

91) Denkt man sich die Einheit in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, so heißt ein jeder Theil ein Stammbruch. Die Vielfachen der Stammbrüche nennt man abgeleitete Brüche.

92) Zur Bezeichnung eines Bruches wählt man die Quotientenform $\frac{a}{b}$. Die Zahl b , Nenner genannt, gibt an, in wieviel gleiche Theile die Einheit getheilt worden, a heißt der Zähler, und drückt die Anzahl der genommenen Theile aus.

93) Jeder Bruch bedeutet zweierlei: $\frac{3}{4}$ besagt 1) daß von 3 Ganzen der 4. Theil genommen ist; 2) daß man $\frac{1}{4}$ dreimal nimmt.

94) Die Stammbrüche werden an Werth um so kleiner, in je mehr gleiche Theile das Ganze getheilt worden ist.

Die Ableitung anderer Brüche aus den Stammbrüchen wird in der Weise vorgenommen, daß man die Zähler derselben die ganze Reihe der natürlichen Zahlen durchlaufen läßt.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \dots$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, \dots$$

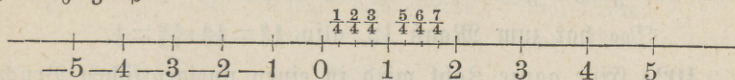
$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{4}{4}, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}, \dots \text{ u. s. w.}$$

Vergleicht man in diesen Brüchen den Zähler und Nenner, so findet man drei Gruppen: 1) solche Brüche, deren Zähler gleich dem Nenner oder doch ein Vielfaches des Nenners sind, wie $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{2}$, $\frac{6}{3}$; 2) solche, deren Zähler kleiner als der Nenner, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ und 3) deren Zähler größer als der Nenner ist, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$. . .

95) Brüche, deren Zähler kleiner als der Nenner ist, heißen ächte (Werth kleiner als 1). Ist der Zähler größer als der Nenner, so heißt der Bruch unächt (Werth größer als 1). Stimmen Zähler und Nenner überein, oder ist der Zähler ein Vielfaches des Nenners, so nennt man den Bruch uneigentlich $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{5}$ (Werth gleich einer ganzen Zahl).

96) Da jeder Bruch ein Theil einer ganzen Zahl ist, so nennt man die Brüche auch gebrochene Zahlen. Denkt man sich die Zwischenräume des Wilses § 9 in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, so rücken die Punkte einander näher, obgleich eine continuirliche Linie noch nicht zu Stande kommt, wie groß auch die Anzahl der Theile angenommen wird. Ueber

die Ausfüllung der noch vorhandenen Zwischenräume siehe „Wurzelgrößen“



97) Wie leicht einzusehen, wächst der Werth eines Bruches, wenn der Zähler zunimmt oder der Nenner abnimmt; der Werth nimmt ab, wenn der Nenner zunimmt oder der Zähler abnimmt.

$$\left. \begin{array}{l} 7/12 < 8/12 < 9/12 < 10/12 < 12/12 \dots\dots\dots \\ 7/12 < 7/11 < 7/10 < 7/9 < 7/7 \dots\dots\dots \\ 7/12 > 6/12 > 5/12 > 4/12 > 1/12 \dots\dots\dots \\ 7/12 > 7/13 > 7/14 > 7/21 > 7/49 \dots\dots\dots \end{array} \right\}$$

98) Da ein unächter Bruch größer als 1 oder als eine ganze Zahl ist, so läßt er sich als gemischte Zahl, d. h. als Ganzes mit nebenstehendem ächten Bruche darstellen. Man hat nur den Nenner in den Zähler zu dividiren; der Rest ist der Zähler, der Divisor der Nenner des anzuhängenden ächten Bruches. (Ausscheidung der Ganzen).

$$9/4 = 8/4 + 1/4 = 2 1/4; \quad 17/3 = 3 \mid 17 \mid 3 = 5 2/3.$$

$$\frac{15}{2}$$

99) Um eine gemischte Zahl in einen unächten Bruch zu verwandeln oder dieselbe einzurichten, hat man die ganze Zahl mit dem Nenner zu multipliciren, den Zähler hinzufügen und unter die erhaltene Summe als Zähler denselben Nenner zu setzen.

$$3 3/4 = \frac{3 \times 4 + 3}{4} = 15/4; \quad 4 2/5 = 4 + 2/5 = \frac{20}{5} + \frac{2}{5} = 22/5.$$

100) Der Werth eines Bruches bleibt ungeändert, wenn man Zähler und Nenner desselben mit derselben Zahl multiplicirt.

$$3/5 = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20} = \frac{12 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{24}{40}$$

Diese Verwandlung nennt man „Erweiterung der Brüche.“

101) Der Werth eines Bruches wird auch nicht geändert, wenn Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividirt werden (Heben der Brüche).

$$\frac{24}{60} = \frac{24:2}{60:2} = \frac{12}{30} = \frac{12:2}{30:2} = \frac{6}{15} = \frac{6:3}{15:3} = \frac{2}{5}.$$

Ein Bruch wird gehoben, wenn man Zähler und Nenner durch das größte gemeinsame Maaß derselben dividirt.

148

$\frac{14}{60}$ hat zum Maaß 12, also $\frac{48}{60} = \frac{48}{60} : \frac{12}{12} = \frac{4}{5}$.

102) Eine ganze Zahl wird in einen uneigentlichen Bruch mit vorgeschriebenem Nenner verwandelt, wenn man dieselbe mit dem gegebenen Nenner multiplicirt, dieses Product zum Zähler nimmt und den gegebenen Nenner untersetzt.

4 in Fünftel zu verwandeln $= \frac{4 \times 5}{5} = \frac{20}{5}$.

Verwandlung eines uneigentlichen Bruches in eine ganze Zahl!

103) Ein Bruch wird in einen andern Bruch mit gegebenem Nenner verwandelt, wenn man den Nenner des Bruches in den gegebenen Nenner dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem Zähler des Bruches multiplicirt.

$\frac{3}{5}$ zu Zwanzigstel, also $\frac{3}{5} = \frac{x}{20}$; $\frac{20}{5} = 4$ also $x = \frac{4 \times 3}{20} = \frac{12}{20}$.

104) Wenn der Nenner des gegebenen Bruches nicht in den vorgeschriebenen Nenner aufgeht, so wird der Zähler des gesuchten Bruches selbst ein Bruch.

$\frac{3}{4}$ in Fünfzehntel; $\frac{3}{4} = \frac{\frac{15}{15} \times 3}{15} = \frac{45}{15} = \frac{11 \frac{1}{4}}{15}$.

Derartige Bruchformen heißen Doppelbrüche oder gebrochene Brüche.

105) Brüche heißen gleichnamig, wenn sie gleiche Nenner haben. Sind mehrere Brüche gleichnamig zu machen, so sucht man zu den Nennern das kleinste gemeinsame Vielfache (den Generalnenner) und bringt die gegebenen Brüche nach § 84 auf die Benennung des Vielfachen.

$\frac{3}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{3}{4}$... die Nenner haben das kleinste Vielfache 120. $\frac{120}{8} = 15$; $\frac{120}{6} = 20$; $\frac{120}{15} = 8$; $\frac{120}{4} = 30$; daher die gleichnamigen Brüche $\frac{3 \cdot 15}{120}$, $\frac{5 \cdot 20}{120}$, $\frac{11 \cdot 8}{120}$, $\frac{3 \cdot 30}{120}$ oder $\frac{45}{120}$, $\frac{100}{120}$, $\frac{88}{120}$, $\frac{90}{120}$.

106) Diejenigen Brüche von gleichen Nennern haben den größern Werth, welche die größern Zähler haben. Um ungleichnamige Brüche nach ihrer Größe zu ordnen, macht man sie erst gleichnamig, und ordnet die Zähler sodann nach ihrer Größe.

$$\frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{5}{12}; \frac{3}{8}; \frac{3}{10};$$

$$\frac{80}{120}, \frac{90}{120}, \frac{60}{120}, \frac{50}{120}, \frac{45}{120}, \frac{36}{120},$$

$$\frac{90}{120}, \frac{80}{120}, \frac{60}{120}, \frac{50}{120}, \frac{45}{120}, \frac{36}{120}.$$

107) Addition der Brüche.

- a. Gleichnamige Brüche werden addirt, wenn man unter die Summe der Zähler denselben Nenner setzt.

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{5+3+1+7}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

- b. Sind die Brüche ungleichnamig, so macht man sie nach § 105 gleichnamig und verfährt ebenso, wie in der vorigen Weise. Als Nenner setzt man natürlich den Hauptnenner unter die Summe der Zähler. Beträgt diese Summe mehr als die Einheit, so scheidet man die Ganzen aus und addirt dieselben zu den etwa noch vorkommenden Ganzen.

2520

B. 1)	$3\frac{3}{5}$	$= \frac{15}{5} \frac{3}{5}$	<u>5, 12, 8, 9, 10, 14, 3, 6, 20</u>
	$8\frac{5}{12}$	$= \frac{10}{5} \frac{5}{12}$	2) <u>12, 8, 9, 14, 20</u>
	$7\frac{7}{8}$	$= \frac{22}{5} \frac{7}{8}$	2) <u>6, 4, 9, 7, 10</u>
	$2\frac{4}{9}$	$= \frac{11}{5} \frac{2}{9}$	3) <u>3, 2, 9, 7, 5</u>
	$7\frac{3}{10}$	$= \frac{75}{5} \frac{3}{10}$	<u>2, 3, 7, 5</u>
	$4\frac{11}{14}$	$= \frac{198}{5} \frac{11}{14}$	Der Generalnenner also
	$\frac{1}{3}$	$= \frac{84}{5} \frac{1}{3}$	2. 2. 3. 2. 3. 7. 5 = 2520
	$5\frac{5}{6}$	$= \frac{210}{5} \frac{5}{6}$	
	$10\frac{9}{20}$	$= \frac{1134}{5} \frac{9}{20}$	
	<u>5</u>		

$$51 \quad \frac{12697}{2520} = 5\frac{97}{2520} \text{ also die Summe } 51\frac{97}{2520}.$$

B. 2) $2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + 5\frac{5}{6} + 2\frac{3}{8} + 1\frac{9}{10} = 2\frac{60}{120} + 3\frac{30}{120} + 5\frac{100}{120} + 2\frac{45}{120} + 1\frac{108}{120} = 15\frac{1}{40}$

Horizontale und vertikale Anordnung bei Addition der Brüche!

108) Subtraction der Brüche.

- a. Sind die Brüche gleichnamig, so subtrahirt man den Zähler des Subtrahenden von dem Zähler des Minuenden und schreibt unter diese Differenz den gemeinschaftlichen Nenner. Sind die Brüche ungleichnamig, so bringt man sie zuvor auf gleiche Benennung;

$$1\frac{3}{15} - \frac{7}{15} = \frac{13-7}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}; 8 - \frac{7}{10} = 7\frac{10}{10} - \frac{7}{10} = 7\frac{10-7}{10} = 7\frac{3}{10}$$

- b. Ist ein Bruch von einer ganzen Zahl zu subtrahiren, so borge man von den Ganzen eine Eins, drücke dieselbe durch den Nenner des Subtrahendus aus und verfare wie oben.

109) Multiplication der Brüche.

- a. Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man dessen Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt und den Nenner unverändert beibehält.

$$\frac{4}{5} \times 8 = \frac{4 \cdot 8}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}.$$

Zuweilen lassen sich Multiplikator und Nenner durch eine Zahl heben:

$$2\frac{3}{4} \times 6 = 1\frac{1}{4} \times 6 = \frac{11 \cdot 6}{4} = \frac{11 \cdot 3}{2} = 16\frac{1}{2}.$$

- b. Das Product zweier oder mehrerer Brüche ist ein Bruch, dessen Zähler gleich dem Producte aller Zähler und dessen Nenner dem Producte aller Nenner gleich ist.

$$\frac{3}{8} \cdot 1\frac{6}{20} = \frac{3 \cdot 16}{8 \cdot 20} = \frac{3 \cdot 2}{20} = \frac{3}{10}$$

$$1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{1}{4} \cdot 4\frac{1}{5} = 3\frac{2}{3} \cdot 7\frac{2}{3} \cdot 13\frac{3}{4} \cdot 21\frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 21}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1911}{40} = 47\frac{31}{40}.$$

110) Division der Brüche.

- a. Unter dem reciproken Werthe einer Zahl versteht man diejenige Zahl, welche mit der ersteren multiplicirt zum Product 1 giebt.

$$3 \text{ h. } \frac{1}{3} \text{ rec. Werthe } \frac{1}{3}; 2\frac{3}{4} \text{ h. } \frac{4}{11}$$

$$3 \times \frac{1}{3} = 1 \qquad 2\frac{3}{4} \times \frac{4}{11} = 1.$$

- b. Um Brüche oder ganze Zahlen durch einen Bruch zu dividiren, bringt man Dividendus und Divisor auf gleiche Benennung und dividirt die Zähler durch einander.

$$2\frac{1}{2} : 8 = \frac{5}{2} : 8 = \frac{5}{2} : \frac{16}{2} = \frac{5}{16}$$

$$3\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2} = \frac{15}{4} : \frac{5}{2} = \frac{15}{4} : \frac{10}{4} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$4 : 1\frac{1}{3} = 4 : \frac{4}{3} = \frac{12}{3} : \frac{4}{3} = \frac{12}{4} = 3.$$

- c. Die Division läßt sich in eine Multiplication verwandeln, wenn man den gegebenen Dividendus mit dem reciproken Werthe des Divisors multiplicirt.

$$3\frac{1}{3} : 4 = \frac{10}{3} : 4 = \frac{10}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$5 : 2\frac{1}{4} = 5 : \frac{9}{4} = 5 \times \frac{4}{9} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}$$

$$10\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3} = \frac{21}{2} : \frac{10}{3} = \frac{21}{2} \times \frac{3}{10} = \frac{63}{20} = 3\frac{3}{20}.$$

d. Zuweilen wird die Division nicht ausgeführt, sondern nur angedeutet, was auf Doppelbrüche führt.

$3 : \frac{4}{5} = \frac{3}{\frac{4}{5}}$ Der Zähler eine ganze Zahl, der Nenner ein Bruch

$\frac{2}{3} : 5 = \frac{\frac{2}{3}}{5}$ " Nenner " " " " Zähler " "

$\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}}$ Zähler und Nenner Brüche.

X. Decimalbrüche.

111) Ein Product aus lauter gleichen Factoren heißt Potenz; der gleiche Factor Grundzahl und die Anzahl der Factoren Exponent.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81; 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$$

3 Grundzahl; 4 Exponent; 81 die Potenz.

112) Ist der gleiche Factor ein Stammbruch, so gebraucht man eine ähnliche Bezeichnung

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}.$$

Statt 2^3 hier als Nenner zu belassen, schreibt man auch, um die Potenz eines Bruches ähnlich derjenigen einer ganzen Zahl auszudrücken 2^{-3} , indem man auf negative Exponenten übergeht. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist eine Bezeichnung für einen Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner dieselbe Grundzahl ist, aber mit positivem Exponenten.

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = (\frac{1}{10})^4 = 10^{-4}$$

$$\text{ebenso } \frac{3}{100} = 3 \cdot \frac{1}{100} = 3(\frac{1}{10})^2 = 3 \cdot 10^{-2}.$$

113) Mit Hilfe der genannten Sätze läßt sich die Zerlegung jeder ganzen Zahl, sowie jeder gemischten Zahl, deren Nenner 10 oder eine Potenz von 10 ist als Summe von Vielfachen von Potenzen der Grundzahl 10 darstellen.

$$4567 = 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 0 = 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

$$25 \frac{365}{1000} = \frac{25365}{1000} = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{1}{1000}$$

$$= 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Anmerkung. Eine Potenz mit dem Exponenten 0 bedeutet stets 1.

114) Ein Decimalbruch ist ein Bruch, dessen Zähler eine jede beliebige Zahl, dessen Nenner aber 10 oder eine Potenz der 10 ist.

$$34 \frac{56}{100}$$

Man pflegt den Nenner indessen nicht hinzuzuschreiben, sondern nur den Zähler, welchen man durch ein Komma von den Ganzen trennt; also 34,56.

115) Man schreibt demnach die Decimalbrüche nicht in der Form eines gemeinen Bruches, sondern setzt nur den Zähler hin und scheidet von demselben von rechts nach links soviel Ziffern durch ein Komma ab, als der Nenner Nullen hinter der 1 hat. Auf der linken Seite des Zählers ergänzt man, falls es nöthig ist, eine hinreichende Anzahl von Nullen.

$$\frac{3389}{100} = 33,89 = 33 \frac{89}{100}; \frac{23}{100000} = 0,00023.$$

Anmerkung. Aussprechen der Decimalbrüche!

116) Die Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen Decimalbruch wird folgendermaßen ausgeführt. Dem Zähler hänge man soviel Nullen an, als der Decimalbruch Stellen erhalten soll, dividire den Nenner in den Zähler, und streiche im Quotienten von rechts nach links soviel Stellen durch ein Komma ab, als erst Nullen angehängt wurden.

$$3\frac{5}{4} \text{ auf 2 Stellen } 4 \mid 3500 \mid 8,75;$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ \hline \end{array}$$

$$30$$

$$\hline 28$$

$$20$$

$$20$$

$$\frac{5}{8} \text{ auf 4 Stellen } 8 \mid 50000 \mid 0,625.$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \hline \end{array}$$

$$20$$

$$\hline 16$$

$$40$$

$$40$$

117) Geht die Division, wie in den oben angeführten Beispielen auf, so heißt der Decimalbruch geschlossen; im

anderen Falle wird der Quotient, d. h. der gesuchte Decimalbruch unendlich. Einige unendliche Decimalbrüche weisen eine gewisse Gesetzmäßigkeit auf: es wiederholen sich nämlich die Decimalstellen vom Komma ab nach einer bestimmten Reihenfolge (Periode) oder die Periode tritt erst später ein. Hiernach unterscheidet man rein periodische und gemischt periodische Decimalbrüche. Diejenigen unendlichen Decimalbrüche, welche keine Periode bilden, nennt man Irrationalzahlen.

$$\frac{104}{333} = 333 \mid \frac{104}{333} \mid 0,(312) \text{ Wiederholung vom Komma an}$$

1040

999

410

333

770

666

104

$$\frac{113}{990} = 900 \mid 1130 \mid 0,1(14)(14)\dots \text{ Wiederholung von der 2. Stelle.}$$

990

1400

990

4100

3600

140

118) Soll ein geschlossener Decimalbruch in einen gemeinen Bruch verwandelt werden, so läßt man aus ersterem das Komma fort und betrachtet die auf diese Weise erhaltene ganze Zahl als Zähler des gesuchten gemeinen Bruches; zum Nenner aber setze man eine 1 und soviel Nullen, als der Decimalbruch Stellen hatte.

$$3,1416 = \frac{31416}{10000} = 3 \frac{708}{5000} = 3 \frac{354}{2500} = 3 \frac{177}{1250}$$

Anmerkung. Nicht selten läßt sich der erhaltene gemeine Bruch heben, was zu versuchen man nicht unterlasse.

119) Ist der Decimalbruch unendlich ohne Wiederholung, (irrational), so läßt sich ein gemeiner Bruch finden, welcher

jenem Werthe näherungsweise entspricht und zwar ist dieser Näherungswertb um so genauer, je mehr Stellen man zum Zähler annimmt. Das Verwandlungsverfahren ist dasselbe wie für einen geschlossenen Decimalbruch. Man stellt die Decimalbrüche dieser Art gewöhnlich 5—7ziffrig dar

$$0,3245132\dots\dots\dots\frac{3}{10} \text{ oder genauer } \frac{32}{100} \text{ od. g. } \frac{324}{1000}$$

$$\text{od. g. } \frac{3245}{10000} \text{ oder genauer } \frac{32451}{100000} \text{ u. f. w.}$$

120) Um einen rein periodischen Decimalbruch in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, nimmt man eine Periode zum Zähler an und setzt zum Nenner soviel Neunen, als die Periode Stellen hatte

$$0,(234)\dots\dots\dots\frac{234}{999} = \frac{26}{111}$$

121) Die Regel zur Verwandlung gemischt periodischer Decimalbrüche in gemeine ist folgende: Man multiplicirt den gegebenen Bruch mit einer solchen Potenz von 10, daß das Komma hinter der ersten Periode zu stehen komme, hierauf mit einer solchen Potenz von 10, daß das Komma vor der ersten Periode stehe, nehme die Differenz der erhaltenen Decimalbrüche zum Zähler und die Differenz der Multiplicatoren zum Nenner des gesuchten gemeinen Bruches.

$$0,3(41) \qquad 341,(41)\dots\dots \text{ wurde multiplicirt mit } 1000$$

$$\qquad \qquad \qquad 3,(41)\dots\dots \text{ " " " " } 10$$

$$\text{Differenz } 338 \qquad \dots\dots\dots 990$$

$$0,3(41) = \frac{338}{990} = \frac{169}{495}$$

122) Bricht man den Decimalbruch bei irgend einer Stelle ab und verwandelt ihn in einen gemeinen Bruch, so heißt letzterer ein Näherungswertb. Derjenige gemeine Bruch, welcher dem Decimalbruche vollständig entspricht, wird Gesamtwertb des Decimalbruches genannt. Ein Decimalbruch hat also soviel Näherungswertbe, als er Stellen hat, weniger einen.

1) Der geschlossene Decimalbruch $0,2341$ hat die Näherungswertbe

$$N_1 = \frac{2}{10}; N_2 = \frac{23}{100}; N_3 = \frac{234}{1000} \text{ und den Gesamtwertb } G = \frac{2341}{10000}$$

2) Der rein periodische Decimalbruch $0, (213)$

$$N_1 = \frac{2}{10}; N_2 = \frac{21}{100}; N_3 = \frac{213}{1000}; \text{ u. f. w.}$$

3) Der gemischte periodische Decimalbruch $0,34(5)$

$$N_1 = \frac{3}{10}; N_2 = \frac{34}{100}; N_3 = \frac{345}{1000}; N_4 = \frac{3455}{10000} \text{ u. f. w.}$$

123) Der Hauptnutzen des Rechnens in Decimalbrüchen besteht 1. darin, daß sich alle gemeinen Brüche, wenn ihre Nenner auch noch so groß sind und von einander abweichen, leicht gleichnamig machen lassen, 2. daß, wie in Nachfolgendem gezeigt werden wird, sich mit Decimalbrüchen ebenso wie mit ganzen Zahlen rechnen läßt.

124) Addition der Decimalbrüche.

a. Jedem Decimalbrüche können, ohne Veränderung seines Werthes, auf der rechten und linken Seite beliebig viele Nullen angehängt werden.

$$10,83 = 010,83 = 10,8300.$$

b. Um Decimalbrüche zu addiren ordnet man dieselben vertikal so, daß die Ziffern gleicher Ordnung unter einander zu stehen kommen und daß die Kommas ebenfalls in gerader Linie sich befinden, ersetzt die fehlenden Decimalstellen, sofern es nothwendig erscheint, durch Nullen, führt jetzt die Addition wie in ganzen Zahlen aus und setzt in der Summe das Komma genau unter die Kommas der Summanden.

$$0,34 + 12,123 + 8,215 + 9,83541 + 3,03 + 400,0251 = 433,56851.$$

c. Sind unter den zu addirenden Decimalbrüchen auch periodische, so ist die Summe nur näherungsweise richtig. Hierbei müssen 3 Fälle unterschieden werden. Entweder sind die periodischen Decimalbrüche größer als der wahre Werth und dann ist der begangene Fehler in der Summe höchstens $+\frac{s}{2 \cdot 10^n}$ wo n die Anzahl der periodischen Brüche und s die Anzahl der Decimalstellen bedeutet, oder es sind die n Brüche kleiner als der wahre Werth, in welchem Falle die Fehlergrenze $-\frac{s}{2 \cdot 10^n}$ beträgt. Sind die periodischen

Decimalbrüche theils zu klein, theils zu groß, so heben sich die Fehler bei der Addition auf.

0,345	}	also die Summe 31,2625 und die begangenen Fehler höchstens $+ \frac{3}{2 \cdot 10^4} = \frac{3}{20000} = 0,00015$ also die Summe 31,26265.
2,1231 zu klein		
3,1499 zu klein		
8,308 zu klein		
17,2456		
0,0909		

125) Subtraction der Decimalbrüche.

- a. Man ordnet die Brüche wie bei der Addition, ergänzt die fehlenden Stellen durch Nullen und setzt in der Differenz das Komma unter die Kommas des Minuendus und Subtrahendus. Die Ausführung des Subtraction findet ganz ebenso wie bei ganzen Zahlen statt

$$\begin{array}{r} 3,428 \\ 1,350 \\ \hline 2,078 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 30,08000 \\ 18,25385 \\ \hline 11,82615 \end{array}$$

- b. Sind die beiden Decimalbrüche zu groß oder zu klein, so ist auch die Differenz fehlerhaft.

Die Grenze des Fehlers beträgt hier wegen

$$\frac{1}{2 \cdot 10^p} + \frac{1}{2 \cdot 10^p} = \frac{1}{10^p}$$

also entweder additiv oder subtractiv.

z. B. 13,090 zu klein

4,238 zu klein

8,852 zu klein

daher der Fehler $+ \frac{1}{10^5} = + \frac{1}{10000}$, der Rest also 8,853.

126) Multiplication der Decimalbrüche.

- a. Man multiplicirt die Decimalbrüche wie ganze Zahlen und scheidet im Producte von rechts nach links soviel Stellen durch ein Komma ab, als beide Factoren zusammen Decimalstellen enthielten.

Bringt man beide Decimalbrüche auf die Form $\frac{a}{10^p}$ und $\frac{b}{10^q}$ so ist $\frac{a}{10^p} \times \frac{b}{10^q} = \frac{ab}{10^{p+q}}$; es müssen also $p+q$ Decimalstellen abgeschnitten werden.

$$3,345 \times 41,25 = \frac{3345}{1000} \times \frac{4125}{100} = \frac{13798125}{100000} = 137,98125.$$

- b. Ein Decimalbruch wird mit einer Potenz von 10 multiplicirt, wenn das Komma von seiner Stelle ab um soviel Nullen

nach rechts weiter gerückt wird, als die Potenz Nullen hat.
 $3,456 \times 1000 = 3456$; $0,2 \times 1000 = 2000$ (Nullenergänzung).

- c. Für fehlerhafte gemischte Decimalbrüche beträgt die Fehlergrenze wegen

$$(B \pm F) (b \pm f) = Bb \pm Bf + Ff \pm Fb$$

$$= \frac{B}{2 \cdot 10^s} + \frac{b}{2 \cdot 10^t} + \frac{1}{2 \cdot 10^t} \times \frac{1}{2 \cdot 10^s} \text{ wo } s \text{ und } t \text{ die}$$

Anzahl der Stellen bedeuten = $\frac{B \cdot 10^t + b \cdot 10^s}{2 \cdot 10^{s+t}} + \frac{1}{4 \cdot 10^{s+t}}$

- d. Die Multiplication zweier Decimalbrüche kann auch in abgekürzter Weise vorgenommen werden und zwar in dem Falle, wenn das Product weniger Decimalstellen haben soll, als die Factoren zusammen enthalten. Man beginnt hier die Multiplication bei der höchsten Stelle des Multiplcators, durchstreicht rechts die Stelle des Multiplcandus, bei welcher man angefangen hat und giebt auch in der ersten Reihe die Stellung des Kommas an. Die folgenden Multiplicationsreihen fangen in derselben Verticalreihe des Products an, indem man die Producte für die nächst niedere Stelle des Multiplcandus bildet und die Anfangsziffern beiderseits durchstreicht. Zur größern Genauigkeit addirt man beim Anfange diejenige Zahl hinzu, welche aus der Multiplication der vorigen im Sinne behalten worden.

(27,2425 \times 4,96785) auf 3 Stellen

$$\begin{array}{r} 27,242 \mid 5 \\ 4,967 \mid 85 \\ \hline 108,970 \\ 24,518 \\ 1,634 \\ 190 \\ 21 \\ \hline 135,33(3) \end{array}$$

- e. Will man beim Decimalbruchrechnen bei einer gewissen Stelle stehen bleiben, so berechne man jedenfalls auch die folgende Ziffer. Ist diese kleiner als 5, so läßt man die letzte Ziffer ungeändert; ist die folgende gleich oder größer als 5, so vergrößert man die letzte beibehaltene Ziffer um 1.

$$= 0,3722 \text{ od. } 0,372 \text{ od. } 0,37$$

$$\text{od. } 0,4; 0,8975 \text{ abgekürzt} = 0,898 \text{ od. } 0,9$$

127) Division der Decimalbrüche.

- a. Ein Decimalbruch wird durch 10 oder eine Potenz von 10 dividirt, wenn das Komma von rechts nach links um soviel Stellen fortgerückt wird, als die Potenz Nullen hat, wobei zuweilen Nullenergänzungen gemacht werden müssen.

$$3,56 : 100 = 0,0356; 183,4 : 100 = 1,834.$$

- b. Um einen Decimalbruch durch einen Decimalbruch zu dividiren, multiplicire man den Divisor mit einer solchen Potenz von 10, daß er zu Ganzen gemacht werde; in diesem Falle muß das Komma im Dividendus um soviel Stellen weiter von links nach rechts gerückt werden, als es im Divisor geschieht. Reichen die Stellen im Dividend nicht aus, so hat man Nullen zu ergänzen. Nun dividirt man wie in ganzen Zahlen und achtet darauf, an der rechten Stelle im Quotienten das Komma zu setzen.

$$0,345 : 0,05$$

$$0,05 \mid 0,345 \mid \times 100$$

$$5 \mid 34,5 \mid 6,9$$

$$\underline{30}$$

$$45$$

$$\underline{45}$$

$$138,34 : 0,346$$

$$0,346 \mid 138,34 \mid \times 1000$$

$$346 \mid 138340 \mid = 399,82 \dots$$

$$\underline{1038}$$

$$3454$$

$$\underline{3114}$$

$$3400$$

$$\underline{3114}$$

$$2860$$

$$\underline{2768}$$

$$920$$

$$\underline{692}$$

$$228 \dots$$

Nachdem so die Erweiterung des Dividendus und Divisors vorgenommen ist, hat man also den erhaltenen Decimalbruch nur durch eine ganze Zahl zu dividiren.

- c. Ist der Divisor ein periodischer Decimalbruch, darin mehrere Stellen wiederkehren, so kann man ihn durch Multiplication mit 99, 999... von der Periode befreien. Rathsamer ist es indessen, lieber die Division in gemeinen Brüchen durchzuführen.

$$\begin{aligned} 0,345 : 0,0(6) &= (0,345 \times 99) : 6 = (0,345 \times 33) : 2 \\ &= 11,385 : 2 = 5,6925. \end{aligned}$$

- d. Enthält der Divisor viele Decimalstellen und soll der Quotient nur auf eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen berechnet werden, so kann die abgekürzte Division angewendet werden, indem bei jeder neuen Multiplication mit einer höhern Stelle des Divisors angefangen und die nächst niedere fortgelassen wird.

$$0,256363636 : 0,621621621$$

$$621621621 \mid 256363636 \mid = 0,41241107$$

$$\underline{248648648}$$

$$6216216 \mid 7714988$$

$$\underline{6216216}$$

$$621621 \mid 1498772$$

$$\underline{1243243}$$

$$62162 \mid 255529$$

$$\underline{248648}$$

$$6216 \mid 6881$$

$$\underline{6216}$$

$$621 \mid 665$$

$$\underline{622}$$

$$62 \mid 43$$

$$6 \mid 43$$

Man dividirt wie gewöhnlich, streicht aber nach jedesmaliger Multiplication, ehe der folgende Quotient gesucht wird, aus dem Divisor die niedrigste Stelle ab, bei jeder

folgenden Multiplication addirt man zur niedrigsten Stelle das vom Producte der weggestrichenen Stelle, in den darauf folgenden Quotienten im Sinne Verbliebene hinzu, wobei man die Correction anzubringen nicht unterlasse, falls der erste Theil dieses Productes ≥ 5 ist. Ist im Quotienten irgendwo 0 zu nehmen, so hängt man dem Dividend keine Nullen an, sondern streicht dafür aus dem Divisor die niedrigste Stelle weg und dividirt weiter wie angegeben.

XI. Kettenbrüche.

128) Unter einem Kettenbruche versteht man einen Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, dessen Nenner ebenfalls aus einer ganzen Zahl und einem Bruche gebildet ist u. s. w.

$$\frac{1}{3+1} \frac{1}{4+1} \frac{1}{2+1} \frac{1}{5}$$

129) Sind alle Zähler gleich der Einheit, so heißt der K. ein gemeiner; treten als Zähler auch andere Zahlen auf, so nennt man ihn allgemein; der K. heißt ferner ächt, wenn am Anfange die ganze Zahl fehlt; ist dieselbe vorhanden, so hat man einen gemischten Kettenbruch. Die ganze Zahl mit dem danebenstehenden Bruche heißt ein Glied des Kettenbruches oder „Partialbruch.“ Falls die Reihe der Glieder bei einem Gliede schließt, so ist der K. endlich oder geschlossen. Wiederholen sich die Nenner nach einer bestimmten Folge vom ersten Nenner ab oder von einer spätern Stelle, so heißt der K. rein, beziehungsweise gemischt periodisch. Die letztern Kettenbrüche sind unendlich. Wie irrationale Decimalbrüche vorkommen, so auch irrationale Kettenbrüche.

Beispiele! $\frac{2+1}{\frac{2+1}{3}}$ $\frac{1}{\frac{2+1}{\frac{4+1}{3}}}$ $\frac{1}{\frac{2+1}{\frac{3+1}{2+1}}}$ $\frac{1}{\frac{2+1}{\frac{1+1}{\frac{3+1}{4+1}}}}$

$3+\dots$

$\frac{4+1}{\frac{3+1}{4+\dots}}$

130) Zur Verwandlung eines gemeinen Bruches in einen K. führt man die behufs Auffuchung des gemeinsamen Maaßes gelehrte Kettendivision mit Zähler und Nenner durch, wobei eine Reihe von Quotienten erhalten wird, welche man nach derselben Reihe zu Nennern des gesuchten K. setzt, zu Zählern aber überall 1 annimmt.

$$\begin{array}{r}
 39 \mid 123 \mid 3 \\
 \underline{117} \\
 6 \mid 39 \mid 6 \\
 \underline{36} \\
 3 \mid 6 \mid 2 \\
 \underline{6}
 \end{array}
 \qquad
 \frac{39}{123} = \frac{1}{\frac{3+1}{6+1}} \cdot \frac{123}{39} = 3 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}$$

131) Um einen geschlossenen K. in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, führt man zuerst die beiden letzten Glieder durch Einrichten auf einen gemeinen Bruch zurück, dividirt in 1, richtet wieder die zuletzt vorkommende gemischte Zahl ein, dividirt in 1 und setzt dieses Verfahren so lange fort, bis man zum Anfang, d. h. auf den formgemäßen gemeinen Bruch gelangt ist.

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{\frac{3+1}{1+1}} = \frac{1}{\frac{4+1}{1+1}} = \frac{1}{\frac{10+1}{4+2}} = \frac{1}{\frac{1+1}{3+1}} = \frac{1}{\frac{1+21}{3+86}} = \frac{1}{\frac{2+107}{3+86}} = \frac{1}{\frac{407}{921}} = \frac{407}{921}$$

132) Derjenige gemeine Bruch, aus dessen Verwandlung der K. entsteht, heißt der Gesamtwertb des K. Jeder andere Bruch, welcher durch Zusammenfassung der beiden ersten, 3 ersten u. s. w. mit Weglassung der übrigen Partialbrüche aus dem so abgekürzten K. entsteht, heißt Näherungswertb. Das erste Glied stellt den ersten Näherungswertb, das Reductionsresultat der 2 ersten Partialbrüche den zweiten Näherungswertb vor. Ungerade Näherungswertbe heißen der 1., 3., 5. . . , gerade der 2., 4., 6. . . Näherungswertb. Jeder K. von n Glieder hat n - 1 Näherungswertbe.

Folgender Kettenbruch hat z. B.

$$9 \text{ Glieder und den Gesamtwertth } \frac{516901}{740785}$$

$$\frac{1}{1+1} \cfrac{2+1}{3+1} \cfrac{4+1}{5+1} \cfrac{6+1}{7+1} \cfrac{8+1}{9}$$

$$\text{N I.} = \frac{1}{1+1} = 1$$

$$\text{N VI.} = \frac{1}{1+1} \cfrac{2+1}{3+1} \cfrac{4+1}{5+1} \cfrac{6+1}{7+1} \cfrac{8+1}{9} = \frac{972}{1393}$$

$$\text{N II.} = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{N III.} = \frac{1}{1+1} \cfrac{2+1}{3} = \frac{7}{10}$$

$$\text{N VII.} = \frac{1}{1+1} \cfrac{2+1}{3+1} \cfrac{4+1}{5+1} \cfrac{6+1}{7} = \frac{6804}{9761}$$

$$\text{N IV.} = \frac{1}{1+1} \cfrac{2+1}{3+1} \cfrac{4+1}{4} = \frac{30}{43}$$

$$\text{N V.} = \frac{1}{1+1} \cfrac{2+1}{3+1} \cfrac{4+1}{5} = \frac{157}{225}$$

$$\text{N VIII.} = \frac{56660}{81201}$$

133) Der wahre Werth eines \mathfrak{K} . liegt immer zwischen 2 auf einanderfolgenden Näherungswertthen desselben. Zähler und Nenner eines Näherungswertthes haben kein gemeinsames Maß.

Berechnet man aus dem \mathfrak{K} . $\frac{1}{1+1} \cfrac{2+1}{1+1} \cfrac{3+1}{1+1} \cfrac{4+1}{2}$

die Näherungswertthe, so finden sich

$$\text{N I.} = 1; \text{N II.} = \frac{2}{3}; \text{N III.} = \frac{3}{4}; \text{N IV.} = \frac{1^4}{1^3};$$

$$\text{N V.} = \frac{1^4}{1^3}; \text{G} = \frac{39}{53}$$

und macht man dieselben gleichnamig

$$N I. \frac{60420}{60420}; N II. \frac{40280}{60420}; N III. \frac{45515}{60420}; N IV. \frac{44308}{60420};$$

$$N V. \frac{44520}{60420}; = G \frac{44460}{60420}$$

woraus durch Vergleichung hervorgeht, daß

$$N I. > G; N II. < G; N III. > G; N IV. < G; N V. > G.$$

134) Aus demselben Beispiele geht ferner hervor, daß die späteren Näherungswerte dem wahren Werte des \mathfrak{K} . näher kommen, als die vorhergehenden.

$$\text{Es ist z. B. } N V. - G = \frac{60}{60420}; N III. - G = \frac{855}{60420}.$$

135) Die Differenz von 2 aufeinanderfolgenden Näherungswerten eines \mathfrak{K} . ist ein Stammbruch, dessen Nenner aus dem Producte der Nenner beider Näherungswerte zusammengesetzt ist.

Aus letztem Beispiel folgt

$$N III. - N II. = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$N III. - N IV. = \frac{3}{4} - \frac{11}{15} = \frac{45}{60} - \frac{44}{60} = \frac{1}{60} = \frac{1}{4 \cdot 15} \text{ u. s. w.}$$

136) Die Theorie der quadratischen Gleichungen lehrt die Verwandlung eines periodischen Kettenbruches in eine Irrationalzahl.

Man setzt z. B. $\frac{1}{2+1 \overline{3+x}} = x$; also durch Zurückführung

$$x = \frac{7+2x}{3+x} \text{ oder } 3x + x^2 = 7 + 2x \text{ oder } x^2 + x = 7$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = 7 + \frac{1}{4} = \frac{29}{4}$$

$$x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{29}$$

$$x = \frac{1}{2} (\sqrt{29} - 1) \text{ der Werth von } \frac{1}{2+1 \overline{3+1 \overline{2+1 \overline{3+\dots}}}}$$

XII. Theilbruchreihen.

137) Unter einer Theilbruchreihe versteht man eine Reihe von Stammbrüchen, welche durch das Pluszeichen mit einander verbunden sind und darin jeder Nenner ein Vielfaches des

Nenners des vorhergehenden Bruches ist. Jeder Bruch ist also ein aliquoter Theil der vorausgegangenen Brüche.

Die allgemeine Form einer solchen Theilbruchreihe ist

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \frac{1}{abcd} + \dots$$

a, b, c, d ganze Zahlen bedeuten müssen.

138) Senachdem die Anzahl der Glieder einer Theilbruchreihe begrenzt oder unbegrenzt ist, unterscheidet man endliche und unendliche Theilbruchreihen. Kehren die Zahlen im Nenner nach einer bestimmten Ordnung wieder, so nennt man die Theilbruchreihe periodisch. Rein und gemischt periodische Theilbruchreihen.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{2.3.5.6} + \frac{1}{2.3.5.6.10} \text{ endlich oder geschlossen}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.2} + \frac{1}{2.3.2.3} + \dots \text{ rein periodisch}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.5} + \frac{1}{2.3.5.3} + \frac{1}{2.3.5.3.5} + \dots \text{ gemischt periodisch.}$$

139) Um einen gemeinen Bruch in eine Theilbruchreihe, d. h. in eine Summe von lauter Stammbrüchen aufzulösen, dividirt man den Zähler in den Nenner (es muß ein ächter Bruch sein) vergrößert aber den Quotienten um eine Einheit, wodurch der Subtrahend größer wird als der Minuend. Nachdem die Subtraction in umgekehrter Weise ausgeführt worden ist, dividirt man den Rest in den vorigen Dividend, vergrößert den Quotienten wieder um 1, subtrahirt abermals, verfährt mit dem zweiten Rest nach derselben Weise und so fort, bis die Division aufgeht. Nun ist die Theilbruchreihe gleich einer Summe von Brüchen, deren Zähler sämmtlich 1 sind und deren Nenner so gebildet werden, daß der Nenner des ersten Bruches gleich dem ersten Quotienten, der Nenner des zweiten Bruches gleich dem Producte der 2 ersten Quotienten, der Nenner des dritten Bruches gleich dem Producte der 3 ersten Quotienten und so fort, der Nenner des letzten Bruches gleich dem Producte allen Quotienten.

Ist z. B. $\frac{123}{17}$ zu verwandeln; so scheidet man die Ganzen aus $7\frac{4}{17}$

$$4 \mid 17 \mid 5$$

Die Theilbruchreihe heißt also

$$\frac{20}{3 \mid 17 \mid 6} \quad 7 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 17}$$

$$\frac{18}{1 \mid 17 \mid 17}$$

Ebenso erhält man aus dem gemeinen

Brüche $\frac{53}{74}$ die Reihe:

$$\frac{17}{2 \mid 2 \cdot 3 \mid 2 \cdot 3 \cdot 4 \mid 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \mid 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \mid 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 13 \mid 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 19 \mid 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 13}$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 19} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 37}$$

140) Der Gesamtwertth aller Theilbrüche ist gleich der Summe derselben, die hier leicht berechnet werden kann. Bricht man die Reihe an einer beliebigen Stelle ab, und vereinigt die vorausgegangenen Brüche, so erhält man einen Näherungswertth.

Aus der Theilbruchreihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 10}$$

N 1. = $\frac{1}{2}$

N 2. = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 1$

N 3. = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

N 4. = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{4}{3}$

N 5. = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} = \frac{81}{60} = \frac{27}{20}$

G = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + \frac{1}{600} = \frac{811}{600}$

Hier sind die ersten Näherungswertthe gänzlich unbrauchbar.

141) Eine periodische Theilbruchreihe kann folgendermaßen entstehen:

$\frac{21}{29}$ gibt verwandelt

$$21 \mid 29 \mid 2$$

$$\frac{42}{13 \mid 29 \mid 3}$$

$$\frac{39}{10 \mid 29 \mid \text{statt 3 hier 5 genommen}}$$

$$\frac{50}{21 \mid 29 \mid 2 \text{ u. f. w.}}$$

$$\frac{42}{21 \mid 29 \mid 2 \text{ u. f. w.}}$$

$$\frac{21}{29} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

142) Um eine periodische Theilbruchreihe zu summiren, zerlegt man sie in so viel Reihen als die Periode Ziffern hat

$$R. 1) \frac{1}{2} + \frac{1}{60} + \frac{1}{1800} + \dots \quad 1, 4, 7 \text{ u. s. w. Glied}$$

$$R. 2) \frac{1}{6} + \frac{1}{180} + \frac{1}{5400} + \dots \quad 2, 5, 8 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{Glied}$$

$$R. 3) \frac{1}{30} + \frac{1}{900} + \frac{1}{27000} + \dots \quad 3, 6, 9 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{Glied}$$

Derartige Reihen werden summirt nach der Formel $s = \frac{a}{1-e}$ wo a das Anfangsglied und e die Zunahme, (den Exponenten) hier $\frac{30}{30}$ bedeutet. Da nun dieser Exponent für alle drei Reihen derselbe ist; so ist

$$s' + s'' + s''' = \frac{a}{1-e} + \frac{a'}{1-e} + \frac{a''}{1-e} = \frac{a + a' + a''}{1-e} \quad \text{oder die gesuchte Summe.}$$

$$S = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{30}\right) : \left(1 - \frac{1}{30}\right) = \frac{21}{30} \cdot \frac{30}{29} = \frac{21}{29}$$

143) Hat die Reihe noch vorperiodische Glieder, so behandelt man sie in folgender Weise

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2.5.3} + \frac{1}{2.5.3.4} + \frac{1}{2.5.3.4.3} + \frac{1}{2.5.3.4.3.4} + \dots \quad 2, 5 \text{ vorperiodisch}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2.5} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4.3} + \frac{1}{3.4.3.4} + \dots\right) \frac{1}{2.5}$$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36} + \frac{1}{144} + \dots\right)$ da $\frac{1}{10}$ Factor jedes Gliedes der Reihe

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) : \left(1 - \frac{1}{12}\right)\right] = \frac{71}{110}$$

144) Vergleichung des Näherungswerthes eines 1. in einen Decimalbruch; 2. in einen Kettenbruch; 3. in eine Theilbruchreihe verwandelten gemeinen Bruches.

Gegeben z. B. $\frac{117}{160}$

$$\frac{117}{160} = 0,73125$$

$$\frac{117}{160} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.3} + \frac{1}{2.3.3.7} + \frac{1}{2.3.3.7.8} + \frac{1}{2.3.3.7.8.10}$$

$$\frac{117}{160} = \frac{1}{1+1}$$

$$\frac{2+1}{1+1}$$

$$\frac{1+1}{2+1}$$

$$\frac{1+1}{1+1}$$

$$\frac{1+1}{1+1}$$

$$\frac{2+1}{2}$$

$$\frac{2}{2}$$

	Decimalbruch.	Kettenbruch.	Theilbruchreihe.
Näherungen.	0,7000000	1,0000000...	0,5000000
	0,7300000	0,6666666	0,6666666
	0,7310000	0,7500000...	0,7333333...
	0,7312000	0,7272727...	0,7301586...
	0,7312500	0,7333333....	0,7311507....
	0,7312500	0,7288461...	0,7312500
	0,7312500	0,7313431	0,7312500

145) Um die lästige Wiederholung der Nenner einer Theilbruchreihe zu vermeiden, setzt man, da jeder Bruch ein aliquoter Theil des Nachbarbruches ist, den Werth des ersten = a, den Werth des zweiten = b, den Werth des dritten = c u. s. w.

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{2.5.3} + \frac{1}{2.5.3.4} + \frac{1}{2.5.3.4.3} + \frac{1}{2.5.3.4.3.10}$; daher abgekürzter geschrieben

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{3}d + \frac{1}{10}e.$$

XIII. Rechnung in entgegengesetzten Größen.

146) Außer den in den vorhergehenden Abschnitten behandelten Rechnungen in absoluten oder positiven Zahlen gibt es ferner Rechnungen, in welchen auch die § 8 angeführten negativen Größen auftreten. Dieselben können ebenfalls wie die positiven ganz oder gebrochen sein. Positive und negative Größen heißen entgegengesetzte; erstere erhalten zur Kennzeichnung das Zeichen +, letztere das Zeichen —.

Beispiele für solche Größen sind: Einnahme und Ausgabe, Wärme- und Kältegrade am Thermometer, Fortschritt und Rückschritt.

147) Alle Größenverbindungen werden eingetheilt 1. in Monome oder eingliedrige Ausdrücke z. B.: $3 \times 4 : 2$; ferner $(5 - 2) : 3\frac{1}{2}$.

Alle Verbindungen von Zahlen, die nicht durch plus oder minus, sondern nur durch das Multiplications- oder Divisionszeichen

mit einander verbunden sind, sind demnach Monome; 2. Binome, Trinome, Polynome (zweigliedrige, dreigliedrige, vielgliedrige Größen) sind Verbindungen von Monomen durch das Additions- und Subtractionzeichen.

$$3 \times 4 - 6 : 2 \text{ Binom; } \quad 12 : 2 + \frac{3}{4} - 9\frac{1}{2} \text{ Trinom;}$$

$$(18 - 2) 3 + \frac{4\frac{1}{2} \cdot 5}{6} - (8\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2}) 3 + 11 \text{ u. s. w. Polynom.}$$

148) Eine Größe, welche mehrmals zu sich selbst addirt werden soll, kann abgekürzt bezeichnet werden. Man setzt statt $3 + 3 + 3 + 3 = 4 \cdot 3$ oder $2x + 2x + 2x = 6x$. Diese Zahl, die die Anzahl gleicher Summanden angiebt, heißt Coefficient. Der Coefficient 1 wird nicht hingeschrieben; es ist $3 = 1 \cdot 3$; ebenso $x = 1 \cdot x$.

149) Unter Absolutwerth einer Zahl versteht man die Anzahl der Einheiten derselben, also die Zahl selbst, ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen. So ist der Absolutwerth sowohl von $+10$ als -10 zehn Einheiten.

150) Verwandelt man das Zeichen $+$ einer Größe in ein $-$ und das $-$ in ein $+$, so nennt man diese Operation Zeichenumkehrung. Auf das \times und $:$ bezieht sich diese Erklärung nicht. Soll von einer Zahl das Entgegengesetzte gedacht werden, so setzt man derselben ein minus vor.

$$-(+4) = -4; \quad -(-6) = +6.$$

151) Daß eine Zahl zweideutig ist, bezeichnet man mit beiden Zeichen, $+7$ } kann sowohl positiv als negativ sein.
 -7 }

Zahlen von gleichen Vorzeichen nennt man einstimmig; solche, die aber auf gleiche Weise gebildet sind, wobei Zeichen und Coefficient verschieden sein können, nennt man gleichartig;

$$+2 \cdot 5 \text{ und } +3 \cdot 6 \text{ sind einstimmig,}$$

$$+3 \cdot 10^4 \text{ und } -5 \cdot 10^4 \text{ sind gleichartig.}$$

152) Stellt man sich unter einem Buchstaben einen gewissen unveränderlichen Zahlenwerth vor, so gelten die für Zahlenrechnungen gegebenen Vorschriften auch für das Rechnen mit Buchstaben.

Ist z. B. $a = 3$ und $b = 2$, so ist $2a + 3b = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 6 + 6 = 12$. Buchstabenverbindungen, deren Gesamtwert zu berechnen ist, nennt man Formeln.

153) Unter Reduction eines Ausdrucks versteht man die Umwandlung desselben in einen einfacheren Ausdruck, so aber, daß der Werth der Formel hierdurch nicht verändert werde. $3a + 4a + 5b + 3b = 7a + 8b$.

154) Entgegengesetzte Größen werden addirt, wenn man sie folgendermaßen behandelt: 1. ordnet man die gleichartigen Größen mit dem vorstehenden Zeichen vertikal unter einander; 2. bildet man die Summe der Coefficienten aus den positiven Größen und setzt darunter die Summe der negativen Größen; 3. zieht man die kleinere Summe von der größern ab und giebt dem Rest das Vorzeichen der größern Summe.

$3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10 + 11 \cdot 10^2 - 18 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 - 8 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10 + 15 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10 - 9 \cdot 10^2 + 14 \cdot 10^4$ und geordnet:

$$\begin{array}{r}
 - 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 \\
 - 8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 11 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 \\
 + 8 \cdot 10^4 - 18 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 \\
 + 14 \cdot 10^4 + 15 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 \\
 \qquad \qquad \qquad - 9 \cdot 10^2 + 16 \cdot 10 \\
 \hline
 + 22 \cdot 10^4 + 22 \cdot 10^3 + 15 \cdot 10^2 + 23 \cdot 10 \quad \text{Summe der positiven Größen.} \\
 - 13 \cdot 10^4 - 18 \cdot 10^3 - 13 \cdot 10^2 - 6 \cdot 10 \quad \text{" " negativen " " } \\
 \hline
 + 9 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 17 \cdot 10
 \end{array}$$

Anmerkung: Die Addition entgegengesetzter Größen verlangt also auch die Kenntniß der Subtraction. Ungleichstimmige Größen von gleichem Absolutwerth heben sich bei der Addition auf; so geben $+ 3 \cdot 2^4$ und $- 3 \cdot 2^4$ zum Resultat 0.

155) Um entgegengesetzte Größen von einander zu subtrahiren, sucht man eine Differenz, welche zum Subtrahenden addirt, eben soviel beträgt als der Minuend.

$$\begin{array}{r}
 + 12 \quad - 12 \quad + 12 \quad - 12 \\
 + 3 \quad - 3 \quad - 3 \quad + 3 \\
 \hline
 + 9 \quad - 9 \quad + 15 \quad - 15
 \end{array}$$

156) Da die Subtraction der Addition entgegengesetzt ist und man mit entgegengesetzten Größen zu rechnen hat, so ist es einerlei, ob man den Subtrahenden mit unverändertem Zeichen vom Minuend abzieht, oder den Subtrahenden mit umgekehrtem Vorzeichen zum Minuend addirt:

$$\left. \begin{array}{r} + 12 \\ + 3 \\ + 9 \end{array} \right\} \text{subtrahirt} = \left. \begin{array}{r} + 12 \\ - 3 \\ + 9 \end{array} \right\} \text{addirt.}$$

Die Differenz wird demnach gefunden, wenn man sämtliche Vorzeichen in den Gliedern des Subtrahenden umkehrt, und diese so veränderten Größen zu dem Minuenden addirt.

$$\begin{array}{r} + 5a - 6b + 5c \text{ Minuend} \\ - 8a + 3b + c \text{ Subtrahend} \\ \hline \end{array}$$

und nach vorgenommener Umkehrung

$$\left. \begin{array}{r} + 5a - 6b + 5c \\ + 8a - 3b - c \end{array} \right\} \text{Addenden.}$$

$$13a - 9b + 4c \text{ Differenz.}$$

157) Man subtrahirt ein Polynom von einem Monom, Binom u., wenn das Polynom mit umgekehrten Zeichen seiner Glieder zum Minuenden addirt wird.

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 \\ + 2 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 - 9 \cdot 10 + 8 \\ \hline - 2 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 - 6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8 \end{array}$$

158) Einstimmige Größen geben bei der Multiplication ein positives, ungleichstimmige ein negatives Product:

$$\begin{array}{ll} (+ 3) \cdot (+ 4) = + 12; & (- 3) \cdot (- 4) = + 12. \\ (+ 3) \cdot (- 4) = - 12; & (- 3) \cdot (+ 4) = - 12. \end{array}$$

159) Sind mehr als 2 Factoren gegeben, so bestimmt man ob die Anzahl der negativen Factoren gerade oder ungerade ist. Im ersteren Falle ist das Product positiv, im zweiten negativ.

$$(+3) \cdot (+2) \cdot (-3) \cdot (-10) = (+6) \cdot (-3) \cdot (-10) = (-18) \cdot (-10) = +180$$

$(-5) \cdot (-4) \cdot (-6) \cdot (+2)$ hat 3 negative Factoren, also das Product -240 .

160) Sind zwei oder mehrere Buchstaben mit einander zu multipliciren, so setzt man sie einfach neben einander und berücksichtigt nur die alphabetische Reihenfolge.

$$(-a) \cdot (+b) \cdot (-d) \cdot (-x) = -abdx.$$

Wenn unter den Factoren einer derselben mehrfach wiederkehrt, so läßt sich derselbe im Product unter der Form einer Potenz ausdrücken.

$$(+2a)(+3a)(-5b)(-2c)(+10bc) = +600aabbcc = 600a^2b^2c^2$$

161) Ein Polynom wird mit einem Monom multiplicirt, wenn man jedes Glied des Polynoms mit dem zum Multiplikator gewählten Monom multiplicirt.

$$\begin{aligned} (+3ab - 4ac + 2bc) \times +5abc &= +15a^2b^2c - 20a^2bc^2 + 10ab^2c^2 \\ (-3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 - 4) \cdot 4 \cdot 10 &= -12 \cdot 10^3 + 12 \cdot 10^2 - 16 \cdot 10 \\ &= -12000 + 1200 - 160 \\ &= 10960 \end{aligned}$$

162) Ein Polynom wird mit einem Monom multiplicirt, wenn man jedes Glied des Multiplicandus mit jedem Gliede des Multiplikators durchmultiplicirt, und die etwa im Product erhaltenen gleichartigen Größen durch Addition vereinigt.

$$\begin{aligned} (5ab + 3aa - 2bb) \times (4a - 3b) &= 20aab + 12aaa - 8abb - 15abb \\ &\quad - 9aab + 6bbb \\ &= 12a^3 + 11a^2b - 23ab^2 + 6b^3 \\ + 4 &- 5 + 8 - 9 + 2 = 0 \\ + 5 &- 3 + 2 = 4 \\ \hline + 20 &- 25 + 40 - 45 + 10 \\ - 12 &+ 15 - 24 + 27 - 6 \\ + 8 &- 10 + 16 - 18 + 4 \\ \hline + 16 &- 20 + 32 - 36 + 8 = 0 \end{aligned}$$

166) Geht die Division nicht auf, so kann man den Quotienten irgendwo abbrechen, muß aber zu demselben einen Bruch hinzusetzen, dessen Zähler der letzte Rest und dessen Nenner der Divisor ist.

$$2x - 3z \mid 4xy - 6xyz + 9yz \mid = 2y - 3yz.$$

$$\begin{array}{r} 4xy \qquad \qquad \qquad + 9yz \\ \hline - 6xyz + 15yz \\ \hline - 6xyz \qquad \qquad \qquad + 9yz \\ \hline 15yz + 9yz \end{array}$$

$$\frac{15yz + 9yz}{2x - 3z}$$

also der Quotient $2y - 3yz + \frac{15yz + 9yz}{2x - 3z}$

167) Bricht man den Quotienten nicht ab, so gelangt man zu einer sogenannten „unendlichen Reihe.“

$$2 + x \mid 4 + xx \mid 2 - x + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{8} + \frac{x^6}{16} \dots$$

$$\begin{array}{r} 4 \qquad \qquad \qquad + 2x \\ \hline - 2x + x^2 \\ \hline - 2x - x^2 \\ \hline 2x^2 \\ \hline 2x^2 + x^3 \\ \hline - x^3 \\ \hline - x^3 - \frac{x^4}{2} \\ \hline + \frac{x^4}{2} \end{array}$$

Ueber die Bestimmung des Dividendus und Divisors, aus dem eine solche gesetzmäßige fortschreitende Reihe entstanden ist, siehe „Progressionen.“

XIII. Potenziren der Zahlen.

168) Unter Potenz einer Zahl versteht man das Product, welches erhalten wird, wenn die gegebene Zahl (Basis genannt) eine bestimmte Anzahl von Malen (soviel als der Exponent angiebt) mit sich selbst multiplicirt wird.

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$; 3 Basis; 4 Exponent; 81 die Potenz.

Durch den Exponenten wird der Grad der Potenz bestimmt. Die zweite Potenz nennt man Quadrat, die dritte Cubus, die vierte heißt Biquadrat, alle übrigen höhere Potenzen-Gleichnamig heißen Potenzen, wenn sie gleiche Exponenten haben, gleichartig wenn sie gleiche Basis und gleiche Exponenten haben, wobei die Coefficienten verschieden sein können; Potenzen deren Grundzahlen gleich, deren Exponenten verschieden sind, heißen gleichbasische.

Die 1 Potenz von 4 ist $4^1 = 4$

Das Quadrat „ 4 „ $4^2 = 16$

Der Cubus „ 4 „ $4^3 = 64$

Das Biquadrat „ 4 „ $4^4 = 256$ u. f. w.

3^5 und 5^6 sind gleichnamige Potenzen

4. 2^4 und $3 \cdot 2^4$ sind gleichartige Potenzen

3. 2^3 „ 5. 2^5 „ gleichbasische Potenzen.

169) Potenzen können durch Addition und Subtraction nur zusammengezogen werden wenn sie gleichartig sind.

$$1) (5 \cdot 3^4 + 8 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^4 - 7 \cdot 3^4) = (5 + 8 + 9 - 7) 3^4 = 15 \cdot 3^4$$

$$2) (\frac{1}{2} \cdot 10^3 - \frac{1}{4} \cdot 10^3 + \frac{1}{12} \cdot 10^3 - \frac{1}{3} \cdot 10^3) = (\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{3}) \cdot 10^3 = 0 \cdot 10^3 = 0$$

$$3) 3 \cdot 5^2 - (4 \cdot 5^2 + 8 \cdot 5^2 - 6 \cdot 5^2) = 3 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5^2 + 6 \cdot 5^2 = (3 - 4 - 8 + 6) 5^2 = -3 \cdot 5^2$$

170) Multiplication von Potenzen.

a. Gleichbasische Potenzen werden mit einander multiplicirt, wenn man dieselbe Basis mit der Summe der Exponenten der Factoren potenzirt.

$$1) 2 \cdot 5^3 \times 3 \cdot 5^4 = (2 \times 3) 5^{3+4} = 6 \cdot 5^7$$

$$2) \frac{1}{2} \cdot 10^3 \times \frac{3}{4} \cdot 10^2 \times \frac{2}{3} \cdot 10^4 = (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}) 10^{3+2+4} = \frac{1}{4} \cdot 10^9 = \frac{1000000000}{4} = 250000000.$$

b. Gleichnamige Potenzen werden mit einander multiplicirt, wenn man das Product der Grundzahlen mit dem gemeinsamen Exponenten potenzirt.

$$1) 3^5 \times 4^5 = (3 \cdot 4)^5 = 12^5$$

$$2) \frac{1}{10} \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3^3 \cdot \frac{4}{5} \cdot 4^3 \cdot \frac{5}{4} \cdot 2^3 = (\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4}) 10^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 2^3 \\ = \frac{1}{20} \cdot (10 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2)^3 = \frac{240^3}{20}$$

Folgendes Beispiel zur Multiplication von Polynomen.

$$3) (3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 3^2 - 2 \cdot 2^3)(2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 4^3 - 5 \cdot 3^4) \\ = 6 \cdot 4^2 \cdot 5^2 + 8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 - 4 \cdot 2^3 \cdot 5^2 + 9 \cdot 4^2 \cdot 4^3 + 12 \cdot 3^2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 2^3 \cdot 4^3 \\ 15 \cdot 4^2 \cdot 3^4 - 20 \cdot 3^2 \cdot 3^4 + 10 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \\ = 6 \cdot 20^2 + 8 \cdot 15^2 - 4 \cdot 2^3 \cdot 5^2 + 9 \cdot 4^5 + 12 \cdot 3^2 \cdot 4^3 - 6 \cdot 8^3 - 15 \cdot 4^2 \cdot 3^4 \\ - 20 \cdot 3^6 + 10 \cdot 2^3 \cdot 3^4 \\ = 6 \cdot 400 + 8 \cdot 225 - 4 \cdot 8 \cdot 25 + 9 \cdot 1024 + 12 \cdot 9 \cdot 64 - 6 \cdot 512 - \\ 15 \cdot 16 \cdot 81 - 20 \cdot 729 - 10 \cdot 8 \cdot 81 \\ = 2400 + 1800 - 800 + 9216 + 6912 - 3072 - 19440 - \\ 14580 - 6480 \\ = (2400 + 1800 + 9216 + 6912) - (800 + 3072 + 19440 + \\ 14580 + 6480) \\ (20328 - 31412) = -11084.$$

171) Gleichbasische Potenzen werden durch einander dividirt, wenn man dieselbe Basis mit der Differenz aus dem Exponenten des Dividendus und Divisors potenzirt.

$$1) 5 \cdot 10^4 : 3 \cdot 10^3 = \frac{5}{3} \cdot 10^{4-3} = \frac{5}{3} \cdot 10$$

$$2) \frac{1}{2} \cdot 3^7 : \frac{2}{3} \cdot 3^4 = \frac{3}{4} \cdot 3^{7-4} = \frac{3}{4} \cdot 3^3$$

Anmerkung 1. Sind die Exponenten des Dividendus und Divisors gleich, so erhält der Quotient den Exponenten Null. Jede Potenz mit dem Exponenten Null hat den Werth des vorstehenden Coefficienten.

$$8 \cdot 4^3 : 2 \cdot 4^3 = \frac{8}{2} \cdot 4^{3-3} = 4 \cdot 4^0 = 4 \cdot 1 = 4$$

$$7 \cdot 10^3 : 3 \cdot 10^3 = \frac{7 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^3} = \frac{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot 10^{3-3} = \frac{7}{3} \cdot 10^0 = \frac{7}{3} \cdot 1 = \frac{7}{3}$$

Anmerkung 2. Falls der Exponent des Divisors größer ist als derjenige des Dividendus, so erhält der Quotient einen negativen Exponenten. Eine Potenz mit negativem Exponenten ist aber gleich einem Bruche, dessen Zähler dem Coefficienten der Potenz, und dessen Nenner derselben Basis mit positiv genommenen Exponenten gleich ist.

$$4. 5^6 : 2. 5^8 = \frac{4}{2} \cdot 5^{6-8} = 2 \cdot 5^{-2} = \frac{2}{5^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 10^2 : \frac{3}{4} \cdot 10^5 &= (\frac{1}{2} : \frac{3}{4}) 10^{2-5} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} = \frac{2}{3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \\ &= \frac{2}{3 \cdot 10^3} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-3} = \frac{2}{3000} \end{aligned}$$

b. Gleichnamige Potenzen dividirt man durch einander, wenn man den Quotienten der Grundzahlen mit dem gemeinsamen Exponenten potenzirt.

$$1) 8^5 : 4^5 = (\frac{8}{4})^5 = 2^5 = 64$$

$$2) 3 \cdot 10^4 : 2 \cdot 2^4 = \frac{3}{2} \cdot (\frac{10}{2})^4 = \frac{3}{2} \cdot 5^4$$

c. Die Differenz zweier gleichnamigen Potenzen ist stets durch die Differenz ihrer Grundzahlen (welche auch selbst Potenzen sein können) ohne Rest theilbar.

$$\frac{10^6 - 4^6}{10 - 4} = 10^5 + 10^4 \cdot 4^1 + 10^3 \cdot 4^2 + 10^2 \cdot 4^3 + 10 \cdot 4^4 + 4^5$$

$$10 - 4 \mid 10^6 - 4^6 \mid = 10^5 + 10^4 \cdot 4^1 + 10^3 \cdot 4^2 + 10^2 \cdot 4^3 + 10^1 \cdot 4^4 + 4^5$$

$$\frac{4^1 \cdot 10^5 - 4^6}{4^1 \cdot 10^5 \mp 10^4 \cdot 4^2}$$

$$+ 10^4 \cdot 4^2 - 4^6$$

$$+ 10^4 \cdot 4^2 \mp 10^3 \cdot 4^3$$

$$10^3 \cdot 4^3 - 4^6$$

$$10^3 \cdot 4^3 \mp 10^2 \cdot 4^4$$

$$10^2 \cdot 4^4 - 4^6$$

$$10^2 \cdot 4^4 \mp 10 \cdot 4^5$$

$$10 \cdot 4^5 - 4^6$$

$$10 \cdot 4^5 - 4^6$$

Es ist aber

$$\frac{10^6 - 4^6}{10 - 4} = \frac{1000000 - 4096}{10 - 4}$$

$$= \frac{995904}{6}$$

$$= 159984$$

$$= 159984$$

und dieselbe Zahl 159984 erhält man auch durch Summation der Glieder des Quotienten.

d. Die Differenz zweier Potenzen ist auch durch die Summe der Grundzahlen theilbar, falls die Exponenten der Potenzen im Zähler gerade Zahlen sind

$$\frac{10^4 - 2^4}{10 + 2} = 10^3 - 10^2 \cdot 2 + 10 \cdot 2^2 - 2^3$$

- e. Endlich ist die Summe zweier Potenzen mit ungeraden Exponenten auch stets durch die Summe ihrer Grundzahlen theilbar. Es ist

$$\frac{3^5 + 2^5}{3 + 2} = 3^4 - 3^3 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^3 + 2^4$$

wie man sich durch Ausführung der Division leicht überzeugen kann.

172) Potenziren der Potenzen.

- a. Eine Potenz wird mit einer Zahl potenziert, wenn man ihren Exponenten mit der gegebenen Zahl potenziert, d. h. sämtliche Exponenten mit einander multiplicirt.

$$(3^2)^3 = 3^{2 \cdot 3} = 3^6$$

$$(2^2)^3)^4 = 2^{2 \cdot 3 \cdot 4} = 2^{24}$$

- b. Die Potenz einer positiven Zahl ist stets positiv, ob der Exponent gerade oder ungerade ist; die Potenz einer negativen Zahl ist positiv, falls der Exponent gerade, negativ, falls er ungerade ist.

$$(+3)^2 = +9; (+10)^3 = +1000$$

$$(-3)^2 = +9; (-10)^3 = -1000$$

- c. Die Potenz eines Bruches, darin Zähler und Nenner kein gemeinsames Maaß haben, ist selbst ebenfalls ein Bruch derselben Art (reducirter Bruch)

$$(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}; (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}; (\frac{3}{4})^4 = \frac{81}{256} \text{ u. s. w.}$$

173) Potenziren von Binomen und Polynomen.

- a. Erhebung in's Quadrat. Das Quadrat einer mehrtheiligen Größe besteht aus der Summe der Quadrate aller Theile und aus den doppelten Producten eines jeden Theiles in der Summe aller vorhergehenden Theile.

Durch Ausführung der Multiplication findet man aus $(1832)^2$

$$1000 + 800 + 30 + 2$$

$$1000 + 800 + 30 + 2$$

$$1000^2 + 800 \cdot 1000 + 30 \cdot 1000 + 2 \cdot 1000 + 800^2 + 800 \cdot 30 + 800 \cdot 2 + 30^2 + 30 \cdot 2$$

$$+ 800 \cdot 1000 + 30 \cdot 1000 + 2 \cdot 1000 \quad + 800 \cdot 30 + 800 \cdot 2 \quad + 30 \cdot 2 + 2^2$$

$$1000^2 + 2 \cdot 800 \cdot 1000 + 2 \cdot 30 \cdot 1000 + 2 \cdot 2 \cdot 1000 + 800^2 + 2 \cdot 800 \cdot 30 + 2 \cdot 800 \cdot 2 + 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2$$

oder anders geordnet.

$$1000^2 + 800^2 + 30^2 + 2^2 + 2(800 + 30 + 2)1000 + 2(30 + 2)800 + 2 \cdot 30 \cdot 2$$

Nennt man die 4 Größen a, b, c, d der Reihe nach, so ergibt sich die allgemeine Form

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2(b+c+d)a + 2(c+d)b + 2cd$$

Für eine zweitheilige Größe ist daher das Quadrat von $(a+b)$ gleich $a^2 + b^2 + 2ab$, d. h. gleich der Summe aus den Quadraten beider Theile und dem doppelten Producte derselben. Um z. B. das Quadrat von 47 zu berechnen, setzt man

$$47 = 40 + 7 = a + b$$

$$\left. \begin{array}{r} a^2 = 1600 \\ b^2 = 49 \\ 2ab = 560 \\ \hline 2209 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{od. } 2ab = 560 \\ b^2 = 49 \\ \hline 2209 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{oder mit Weglassung} \\ \text{der überfl. Nullen u.} \\ \text{Hinausrückung nach} \\ \text{rechts um eine Stelle} \end{array} \right\} \begin{array}{r} a^2 = 16 \\ 2ab = 56 \\ b^2 = 49 \\ \hline 2209 \end{array}$$

In dieser Weise können auch mehrziffrige Zahlen quadriert werden

$$3725 = 3000 + 700 + 20 + 5 = a + b + c + d$$

$$\left. \begin{array}{r} a^2 = 9000000 \\ 2ab = 4200000 \\ b^2 = 490000 \\ 2(a+b)c = 148000 \\ c^2 = 400 \\ 2(a+b+c)d = 37200 \\ d^2 = 25 \\ \hline 13875625 \end{array} \right\} \begin{array}{r} 9 \\ 42 \\ 49 \\ 148 \\ 4 \\ 3720 \\ 25 \\ \hline 13875625 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Quadrate} \\ \text{der} \\ \text{einfachen} \\ \text{Zahlen!} \end{array} \right\}$$

b. Erhebung zum Cubus. Der Cubus eines Polynoms ist die Summe 1. aus den Cuben aller einzelnen Glieder; 2. aus den 3fachen Producten eines jeden Theils in das Quadrat der Summe aller vorhergehenden Glieder; 3. aus den 3fachen Producten des Quadrats eines jeden Theils in die Summe aller vorhergehenden Glieder.

$$(a)^3 = a^3$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3(a+b)c^2 + 3(a+b)c^2$$

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3(a+b)c^2 + 3(a+b)^2c + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2$$

Es ist demnach $1^3 = 1$; $2^3 = 8$; $3^3 = 27$; $4^3 = 64$; $5^3 = 125$;
 $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $8^3 = 512$; $9^3 = 729$.

$$72 = 70 + 2 = a + b$$

$$a^3 = 343000$$

$$b^3 = 8$$

$$3a^2b = 29400$$

$$3ab^2 = 840$$

$$\underline{373248}$$

oder mit
 Weglassung
 der
 Nullen

$$a^3 = 343$$

$$3a^2b = 294$$

$$3ab^2 = 84$$

$$b^3 = 8$$

$$\underline{373248}$$

und für eine dreigliedrige Größe $728 = 700 + 20 + 8 = a + b + c$

$$a^3 = 343$$

$$3a^2b = 294$$

$$3ab^2 = 84$$

$$b^3 = 8$$

$$3(a+b)^2c = 124416$$

$$3(a+b)c^2 = 13824$$

$$c^3 = 512$$

$$\underline{385828352}$$

* 174) Zur Berechnung höherer Potenzen zwei- und mehr-
 gliedriger Ausdrücke (zwei- und mehrziffriger Zahlen) macht man
 Anwendung von dem binomischen und polynomischen Satze,
 welche der Vollständigkeit wegen hier angeführt sein mögen,
 wenn auch nur behufs mechanischer Anwendung dieser Formeln.

Es ist nämlich stets, welche Zahlen a und b auch vorstellen,

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + n \frac{(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + n \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 + \dots + b^n$$

$$a^{n-3}b^3 + n \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4}b^4 + \dots + b^n$$

wo n einen beliebigen ganzzahligen Exponenten bedeutet.

Ebenso ist

$$(a + b + c + d + \dots)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}(b + c + d + \dots) +$$

$$n \frac{(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}(b + c + d \dots)^2 + \dots + (b + c + d + \dots)^n$$

Es ist z. B. $(a + b + c + d)^5 = a^5 + 5a^4b + 5a^4c + 5a^4d + 10a^3b^2 + 20a^3bc + 20a^3bd + 10a^3c^2 + 20a^3cd + 10a^3d^2 + 10a^2b^3 + 30a^2b^2c + 30a^2b^2d + 30a^2bc^2 + 60a^2bcd + 30a^2bd^2 + 10a^2c^3 + 30a^2c^2d + 30a^2cd^2 + 10a^2d^3 + 5ab^4 + 20ab^3c + 20ab^3d + 30ab^2c^2 + 60ab^2cd + 30ab^2d^2 + 20abc^3 + 60abc^2d + 60abcd^2 + 20abd^3 + 5ac^4 + 20ac^3d + 30ac^2d^2 + 20acd^3 + 5ad^4 + b^5 + 5b^4c + 5b^4d + 10b^3c^2 + 20b^3cd + 10b^3d^2 + 10b^2c^3 + 30b^2c^2d + 30b^2cd^2 + 10b^2d^3 + 5bc^4 + 20bc^3d + 30bc^2d^2 + 20bcd^3 + 5bd^4 + c^5 + 5c^4d + 10c^3d^2 + 10c^2d^3 + 5cd^4 + d^5.$

175) Quadrate und Cuben der Zahlen von 1—100.

Zahlen.	Quadrate.	Cuben.	Zahlen.	Quadrate.	Cuben.
1	1	1	28	784	21952
2	4	8	29	841	24389
3	9	27	30	900	27000
4	16	64	31	961	29791
5	25	125	32	1024	32768
6	36	216	33	1089	35937
7	49	343	34	1156	39304
8	64	512	35	1225	42875
9	81	729	36	1296	46656
10	100	1000	37	1369	50653
11	121	1331	38	1444	54872
12	144	1728	39	1521	59319
13	169	2197	40	1600	64000
14	196	2744	41	1681	68921
15	225	3375	42	1764	74088
16	256	4096	43	1849	79507
17	289	4913	44	1936	85184
18	324	5832	45	2025	91125
19	361	6859	46	2116	97336
20	400	8000	47	2209	103823
21	441	9261	48	2304	110592
22	484	10648	49	2401	107649
23	529	12167	50	2500	125000
24	576	13824	51	2601	132651
25	625	15625	52	2704	140608
26	676	17576	53	2809	148877
27	729	19683	54	2916	157464

Zahlen.	Quadrate.	Cuben.	Zahlen.	Quadrate.	Cuben.
55	3025	166375	78	6084	474552
56	3136	175616	79	6241	493039
57	3249	185193	80	6400	512000
58	3364	195112	81	6561	531441
59	3481	205379	82	6724	551368
60	3600	216000	83	6889	571789
61	3721	226981	84	7056	592704
62	3844	238328	85	7225	614125
63	3969	250047	86	7396	636056
64	4096	262144	87	7569	658503
65	4225	274625	88	7744	681472
66	4356	287496	89	7921	704967
67	4489	300763	90	8100	729000
68	4624	314432	91	8281	753571
69	4761	328509	92	8464	778688
70	4900	343000	93	8649	804357
71	5041	357911	94	8836	830584
72	5184	373248	95	9025	857375
73	5329	389017	96	9216	884736
74	5476	405224	97	9409	912673
75	5625	421875	98	9604	941192
76	5776	438976	99	9801	970299
77	5929	456533	100	10000	1000000

XV. Radiciren der Zahlen.

176) Eine Zahl radiciren heißt zu derselben einen Factor suchen, der gewisse Mal (soviel als der Wurzelexponent angibt) mit sich selbst multiplicirt, die gegebene Zahl (den Radicanden) hervorbringt. Dieser Factor heißt Wurzel (radix).

5. 5. 5. = 125; also ist 5 die 3te Wurzel aus 125, angedeutet durch $\sqrt[3]{125} = 5$.

Ebenso ist $\sqrt[4]{10000} = 10$.

Es ist hier der Radicand 10000, 4 der Wurzelexponent und 10 die gesuchte Wurzel.

177) Der Wurzelexponent bestimmt den Grad der Wurzel. Man nennt die Wurzeln des zweiten, dritten, und vierten Grades Quadrat-, Cubik- und Biquadratwurzeln, alle übrigen höhere Wurzeln. Alle mit einem Wurzelzeichen versehene Zahlen heißen Wurzelgrößen; letztere heißen gleichnamig oder gleichartig, jenachdem nur die Wurzelexponenten allein oder Wurzelexponenten und Radicanden übereinstimmen.

$$\sqrt[2]{9}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[4]{16}.$$

$$\sqrt[3]{27} \text{ und } \sqrt[3]{125} \text{ sind gleichnamig}$$

$$2 \sqrt[2]{16} \text{ und } 5 \sqrt[2]{16} \text{ sind gleichartig.}$$

178) Die vor dem Wurzelzeichen etwa stehende Zahl bedeutet, daß der Werth der Wurzelgröße mit dieser Zahl multiplicirt gedacht werden soll.

$$5 \sqrt[3]{27} = 5 \times 3 = 15.$$

179) Potenziren und Radiciren sind entgegengesetzte Rechnungen und heben sich gegenseitig auf. Eine Zahl bleibt un geändert, wenn man sie mit einem Exponenten potenzirt und die erhaltene Potenz mit demselben Exponenten radicirt.

$$\sqrt[3]{27} = 3; \text{ also } \sqrt[3]{(3)^3} = 3.$$

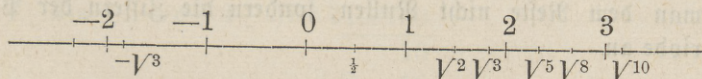
Es ist ferner einerlei, ob man die Potenzirung des Radicanden vorher vornimmt und dann die Wurzelausziehung, oder zuerst die Wurzel aus dem Radicanden zieht, und darauf mit dem Radicanden-Exponenten potenzirt.

$$\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{64} = 4 = \sqrt[3]{(8)^2} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4.$$

180) Soll die Wurzelgröße überhaupt einen Sinn haben, so muß der Wurzelexponent eine ganze positive Zahl sein. Alle ungeraden Wurzeln aus positiven Zahlen sind positiv.

$$\sqrt[3]{+8} = +2.$$

Alle geraden Wurzeln aus positiven Zahlen sind zweideutig; d. h. sie können sowohl positiv als negativ sein $\sqrt{+25} = \pm 5$, denn $(+5)^2 = +25$ und $(-5)^2 = 25$; alle ungeraden Wurzeln aus negativen Zahlen sind negativ. $\sqrt[3]{-8} = -2$; alle geraden Wurzeln aus negativen Zahlen sind unmöglich, denn $\sqrt{-4}$ ist weder $+2$ noch -2 . Letztere Wurzelgrößen nennt man imaginäre Größen. Wurzeln, welche weder durch eine ganze Zahl, noch durch einen Bruch ausgedrückt werden können, heißen Irrationalzahlen. Mit Hülfe derselben kann erst das ganze Zahlengebiet durch eine Gerade (Zahlenlinie) vorstellig gemacht und können die Lücken, von denen früher die Rede war, ausgefüllt werden.



181) Ausziehung der Quadratwurzel.

- a. Da das Quadrat einer 1ziffrigen Zahl 1 und 2ziffrig, das Quadrat einer 2ziffrigen Zahl 3 und 4ziffrig ist, so ist umgekehrt die Wurzel aus einer zweiziffrigen Zahl 1ziffrig, die Wurzel aus einer 4 und 3ziffrigen Zahl 2ziffrig und überhaupt die Wurzel einer $(2n-1)$ oder $2n$ ziffrigen Zahl stets n ziffrig. Um also die Anzahl der Ziffern der Wurzel einer Zahl zu erfahren, theilt man dieselbe von rechts

nach links in Ziffrige Gruppen ab und zählt nach, wieviel solcher Gruppen vorhanden.

$$\sqrt{3 \mid 85 \mid 67 \mid 93 \mid 45} \text{ ist 5ziffrig.}$$

- b. Wie nun die Potenz einer Zahl dadurch gefunden wurde, daß man die Producte a^2 , $2ab$, b^2 , $2(a+b)c$, c^2 u. s. w. bildete und dieselben summirte, so findet man umgekehrt die Quadratwurzel, wenn diese Producte nach und nach von der gegebenen Zahl subtrahirt werden, und zwar so lange, bis kein Rest übrig bleibt.
- c. Ist die gegebene Zahl ein Decimalbruch, so muß die Gruppenabtheilung vom Komma ab nach rechts für die Decimalstellen und nach links für die Ganzen vorgenommen werden, wobei rechts soviel Nullen ergänzt werden können, als es die Länge der Wurzel erfordert.
- d) Geht die Wurzelrechnung nicht auf, so ist die Wurzel eine Irrationalzahl. In diesem Falle bricht man bei einer Decimalstelle ab, der begangene Fehler ist dann kleiner, als eine Einheit von der Ordnung der letztern Decimalstelle. Ist der Radicand ein periodischer Decimalbruch, so hängt man dem Reste nicht Nullen, sondern die Ziffern der Periode an.
- e. Die Wurzel aus einem gemeinen Bruche wird gezogen, wenn derselbe entweder in einen Decimalbruch verwandelt und darauf radicirt wird, oder auch indem man die Quadratwurzel aus dem Zähler durch die Quadratwurzel aus dem Nenner dividirt.

$$\sqrt{1\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{7}.$$

$$\sqrt{6\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}.$$

f. Die Ausziehung der Quadratwurzel erhellet am besten aus einem Beispiel:

$$\begin{array}{r}
 1) \sqrt{15\ 02\ 29\ 10\ 88\ 36} = \left. \begin{array}{l} a = 360000 \\ b = 80000 \\ c = 7000 \\ d = 500 \\ e = 90 \\ f = 4 \end{array} \right\} 387594 \\
 a^2 = 9\ 00\ 00\ 00\ 00\ 00 \\
 \hline
 60229108836 \\
 2ab = 48000000000 \\
 \hline
 1229108836 \\
 b^2 = 64000000 \\
 \hline
 5829108836 \\
 2(a+b)c = 532000000 \\
 \hline
 509108836 \\
 c^2 = 4900000 \\
 \hline
 460108836 \\
 2(a+b+c)d = 387000000 \\
 \hline
 73108836 \\
 d^2 = 250000 \\
 \hline
 72858836 \\
 2(a+b+c+d)e = 69750000 \\
 \hline
 3108836 \\
 e^2 = 8100 \\
 \hline
 3100736 \\
 2(a+b+c+d+e)f = 3100720 \\
 \hline
 16 \\
 f^2 = 16
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2) \sqrt{58\ 52\ 25} = 765 \\
 a^2 = 49
 \end{array}$$

$$2a = 14\ | \ 95$$

$$2ab = \frac{84}{112}$$

$$b^2 = \frac{36}{152}$$

$$2(a+b) = 152\ | \ 762$$

$$2(a+b)c = \frac{760}{25}$$

$$c^2 = 25$$

wo die Nullen
weggelassen worden sind.

	a	b	c	d
3)	$\sqrt{76 \mid 66 \mid 75 \mid 36} = 8756$			
				64
	167	1266		
		1169		
	1745	9775		
		8725		
	17506	105036		
		105036		

Im dritten Beispiel sind die Ausdrücke $2ab + b^2$, $2(a+b)c + c^2$ u. s. w. sogleich abgezogen, statt $2ab$ und b^2 nach einander. Nach diesem Muster rechnet sich am bequemsten.

- g. Zur näherungsweise Ausziehung der Quadratwurzel aus einer Zahl, welche kein vollständiges Quadrat ist, zerlegt man sie in die Summe zweier Größen, von denen die erste ein vollständiges Quadrat und die zweite gegen die erste möglichst klein ist, und benutzt die Formel

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}; \quad \sqrt{50} = \sqrt{49 + 1} = 7 + \frac{1}{49 \cdot 2} = 7 \frac{1}{98} = \frac{687}{98}$$

- h. Benutzung der Kettenbrüche zur Ausziehung der Quadratwurzel aus einer unvollständigen Quadratzahl.
- i. Die Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom läßt sich nicht selten durch die Summe oder Differenz zweier Quadratwurzeln ausdrücken;

Es ist nämlich stets

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b}} \pm \sqrt{\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b}}$$

und umgekehrt für die Vereinigung zweier Wurzelbinome

$$\sqrt{p + \sqrt{q}} \pm \sqrt{p - \sqrt{q}} = \sqrt{2(p \pm \sqrt{p^2 - q})}$$

Es ist unter Benutzung der ersten Formel

$$\begin{aligned} \sqrt{120 + 140\sqrt{5}} &= \sqrt{120 + \sqrt{8000}}; \quad a = 120; \quad b = 8000; \\ &\quad a^2 = 14400 \\ &= \sqrt{\frac{120}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{14400 - 8000}} + \sqrt{\frac{120}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{14400 - 8000}} \\ &= \sqrt{60 + 40} + \sqrt{60 - 40} = \sqrt{100} + \sqrt{20} = 10 + \sqrt{20}. \end{aligned}$$

und unter Benutzung der zweiten Formel

$$\begin{aligned} & \sqrt{5 + \sqrt{3}} + \sqrt{5 - \sqrt{3}}; p=5; q=3. \\ & \sqrt{5 + \sqrt{3}} + \sqrt{5 - \sqrt{3}} = \sqrt{2(5 + \sqrt{25 - 3})} \\ & = \sqrt{10 + 2\sqrt{22}}. \end{aligned}$$

- k. Eine Quadratwurzel-Größe kann nicht selten einfacher dargestellt werden, wenn es nämlich gelingt den Radicanden in 2 Factoren zu zerlegen, von denen der eine ein vollständiges Quadrat ist. Zieht man aus diesem Factor wirklich die Wurzel aus und multiplicirt dieselbe mit dem etwa vorhandenen Coefficienten, läßt aber den andern Factor unter dem Wurzelzeichen, so wird der Werth der Wurzelgröße nicht geändert.

$$\begin{aligned} 3\sqrt{20} &= 3\sqrt{4 \cdot 5} = 3\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{1 \cdot 25}} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{25} \cdot \frac{3}{5}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

182) Ausziehung der Cubikwurzel.

- a. Aus der Tabelle § 175 ist ersichtlich, daß die Cuben 1ziffriger Zahlen 1, 2 und 3ziffrig, die Cuben 2ziffriger Zahlen 4, 5 und 6ziffrig sind. Die Anzahl der Ziffern der Cubikwurzel einer Zahl wird demnach gefunden werden, wenn man letztere von rechts nach links in 3ziffrige Gruppen abtheilt und die Anzahl der Gruppen sucht.

$$\sqrt[3]{30 \mid 254 \mid 869} \text{ die Cubikwurzel ist 3ziffrig.}$$

- b. Da $(a+b+c+d+\dots)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + \dots$

so zieht man aus einer Zahl die Cubikwurzel, wenn man diese Zahl als dritte Potenz der gesuchten Wurzel ansieht und nun nach einander die Ausdrücke $a^2, 3a^2b, 3ab^2, b^3$ u. s. w. von derselben subtrahirt.

- c. Ueber die Ausziehung der Cubikwurzel aus gemeinen oder Decimalbrüchen gilt dasselbe, was bei der Ausziehung der Quadratwurzel über diesen Gegenstand gesagt worden.
- d. Um die Cubikwurzel näherungsweise für eine gegebene Zahl, welche kein vollständiger Cubus ist, zu finden, zerlegt man die Zahl in die Summe zweier Zahlen, von welchen die erste ein vollständiger Cubus, die zweite aber gegen die erste möglichst klein ist.

Die Wurzel findet sich demnach mittelst der Formel:

$$\sqrt{a^3 + b} = a + \frac{b}{3a^2}; \quad \sqrt{67} = \sqrt{64 + 3} = 8 + \frac{3}{16} = 8\frac{3}{16}.$$

183) Zur Ausziehung höherer Wurzeln müßte man sich der Formel § 174 des binomischen Satzes, bedienen, was in dessen der weitläufigen Rechnung wegen nicht geschieht. Näherungsweise findet man höhere Wurzeln nach den Formeln

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[a]{a^4 + b} &= a + \frac{b}{4a^3} \\ \sqrt[a]{a^5 + b} &= a + \frac{b}{5a^4} \text{ u. s. w.} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{wo } b \text{ gegen } a \text{ möglichst} \\ \text{klein sein muß.} \end{array}$$

Enthält der Wurzelexponent einer höhern Wurzelgröße nur die Primfactoren 2 und 3, so läßt sich die Wurzel durch wiederholte Quadrat- und Cubikwurzelausziehung berechnen.

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{124} &= \sqrt[3]{\sqrt[2]{124}} \\ \sqrt[8]{30} &= \sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{30}}} \end{aligned}$$

184) Nur gleichartige Wurzelgrößen können durch Addition, bez. Subtraction ihrer Coefficienten vereinigt werden. Sind sie nicht gleichartig, so sucht man sie gleichartig zu machen, wie aus folgenden Beispielen erhellt.

$$\begin{aligned} 1) \sqrt{18} - \sqrt{8} &= \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \\ &= (3-2) \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \sqrt[3]{108} + 2\sqrt[3]{162} - 4\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{27 \cdot 4} + 2\sqrt[3]{27 \cdot 6} - \\
 & 4\sqrt[3]{27 \cdot 3} = 3\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{6} - 12\sqrt[3]{3}. \\
 3) \quad & \sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{16} + 5\sqrt[4]{32} = \sqrt[3]{4 \cdot 6} + 3\sqrt[3]{8 \cdot 2} + \\
 & 5\sqrt[4]{16 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{6} + 6\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[4]{2}. \\
 4) \quad & 7\sqrt[3]{9} + 8\sqrt[3]{9} - 4\sqrt[3]{9} - 6\sqrt[3]{9} = 7\sqrt[3]{9} + 8\sqrt[3]{9} \\
 & 4\sqrt[3]{9} - 6\sqrt[3]{9} = (7 + 8 - 4 - 6)\sqrt[3]{9} = 5\sqrt[3]{9}. \\
 5) \quad & 2\sqrt[3]{18} + 6\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{3} - 2\sqrt[3]{24} + 3\sqrt[3]{192} = 2\sqrt[3]{18} + \\
 & 2\sqrt[3]{18} + \sqrt[3]{24} - 2\sqrt[3]{24} + 6\sqrt[3]{24} = (2 + 2)\sqrt[3]{18} + (1 - 2 + 6) \cdot \\
 & \sqrt[3]{24} = 4\sqrt[3]{18} + 5\sqrt[3]{24} = 12\sqrt[3]{2} + 10\sqrt[3]{3}.
 \end{aligned}$$

wo keine Zusammenziehung möglich.

185) Multiplication der Wurzelgrößen.

- a. Gleichnamige Wurzelgrößen werden mit einander multiplicirt, wenn man das Product der Radicanden mit demselben Wurzelexponenten radicirt.

$$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{4 \cdot 2 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}.$$

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2} = \sqrt[3]{144} = 12.$$

- b. Gleichartige Wurzelgrößen werden mit einander multiplicirt, wenn man das Product der Radicanden mit demselben Wurzelexponenten radicirt.

$$3\sqrt[3]{2} \times 4\sqrt[3]{2} = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24.$$

Ist die Anzahl der Factoren gerade, so fällt das Quadratwurzelzeichen fort, bei 3 Factoren das Cubikwurzelzeichen u. s. w.

$$3\sqrt[3]{3} \times 4\sqrt[3]{3} = 4 \cdot 3 (\sqrt[3]{3})^2 = 36.$$

$$4\sqrt[3]{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt[3]{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt[3]{2} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (\sqrt[3]{2})^3 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

- c. Sind die Wurzelgrößen ungleichartig, so muß man sie erst vor der Ausführung der Multiplication gleichnamig machen.

Hierzu benutzt man den Satz, daß eine Wurzelgröße unverändert bleibt, wenn man ihren Wurzelexponenten und Radicanden-Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

$$2\sqrt[3]{2} \cdot 3\sqrt[2]{3} = 2\sqrt[6]{2^2} \cdot 3\sqrt[6]{3^3} = 2\sqrt[6]{4} \cdot 3\sqrt[6]{27} = 6\sqrt[6]{108}.$$

Man hat also sämmtliche Wurzelexponenten auf das kleinste gemeinsame Vielfache zu bringen.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt[2]{3} \cdot \frac{2}{3}\sqrt[3]{2} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[4]{2} &= \frac{1}{2}\sqrt[12]{3^6} \cdot \frac{2}{3}\sqrt[12]{2^4} \cdot \frac{3}{4}\sqrt[12]{2^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \\ &\sqrt[12]{3^6 \cdot 2^4 \cdot 2^3} = \frac{1}{4}\sqrt[12]{729 \cdot 16 \cdot 8} = \frac{1}{4}\sqrt[12]{93312}. \end{aligned}$$

d. Jede Wurzelgröße läßt sich als Potenz mit gebrochenem Exponenten darstellen; der Radicand wird Basis und der Exponent ist ein Bruch, dessen Zähler dem Radicanden-Exponenten (selbst wenn er auch 1 ist) und dessen Nenner dem Wurzelexponenten gleich ist. Solche Potenzen heißen Bruchpotenzen und man darf mit ihnen nach den für Potenzen aufgestellten Regeln rechnen.

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt[4]{3^3} = 3^{\frac{3}{4}}.$$

e. Mehrgliedrige Wurzelausdrücke werden multiplicirt, wenn jedes Glied des Multiplicators mit jedem Gliede des Multiplicandus multiplicirt wird und die gleichartigen Wurzelgrößen hernach vereinit werden.

$$\begin{aligned} &(\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{5})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{9} + 4\sqrt{6} - 6\sqrt{15} - 3\sqrt{6} - 6\sqrt{4} + 9\sqrt{10} + 4\sqrt{15} + \\ &\quad 8\sqrt{10} - 12\sqrt{25} \\ &= 6 + 4\sqrt{6} - 6\sqrt{15} - 3\sqrt{6} - 12 + 9\sqrt{10} + 4\sqrt{15} + 8\sqrt{10} - 60 \\ &= (6 - 12 - 60) + (4 - 3)\sqrt{6} + (4 - 6)\sqrt{15} + (9 + 8)\sqrt{10} \\ &= -66 + \sqrt{6} - 2\sqrt{15} + 17\sqrt{10}. \end{aligned}$$

186) Division der Wurzelgrößen.

a. Gleichnamige Wurzelgrößen werden durch einander dividirt, wenn man den Quotienten aus dem Radicanden des Dividendus und Divisors mit demselben Wurzelexponenten radicirt.

$$6\sqrt[3]{8} : 2\sqrt{2} = \frac{6}{2}\sqrt[3]{\frac{8}{2}} = 3\sqrt[3]{4} = 6.$$

b. Sind die Wurzelgrößen ungleichnamig, so mache man sie vor der Ausführung der Division gleichnamig.

$$6\sqrt[3]{3} : 3\sqrt[2]{2} = 6\sqrt[6]{3^2} : 3\sqrt[6]{2^3} = 6\sqrt[6]{9} : 3\sqrt[6]{8} = {}^{6/3}\sqrt[6]{9/8} = 2\sqrt[6]{9/8}.$$

$$\sqrt[3]{10} : \sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^4} : \sqrt[12]{10^3} = \sqrt[12]{10000} : \sqrt[12]{1000} = \sqrt[12]{\frac{10000}{1000}} = \sqrt[12]{10}.$$

c. Sind die Wurzelgrößen gleichartig, so ist der Quotient gleich dem Quotienten der Coefficienten aus Dividendus und Divisor.

$$10\sqrt[5]{2} : 2\sqrt[5]{2} = 10/2 = 5.$$

d. Ein mehrgliedriger Wurzelausdruck wird durch eine ein-gliedrige Wurzelgröße dividirt, wenn jedes Glied des Divi-dendus durch den Divisor dividirt wird.

$$\begin{aligned} (\sqrt[4]{3} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[2]{3}) : \sqrt[2]{2} &= (\sqrt[12]{3^3} - \sqrt[12]{3^4} + \sqrt[12]{3^6}) : \sqrt[12]{2^6} \\ &= (\sqrt[12]{27} - \sqrt[12]{81} + \sqrt[12]{729}) : \sqrt[12]{64} \\ &= \sqrt[12]{\frac{27}{64}} - \sqrt[12]{\frac{81}{64}} + \sqrt[12]{\frac{729}{64}} = \sqrt[4]{\frac{3}{4}} - \sqrt[4]{\frac{3}{4}\sqrt[3]{3}} + \sqrt[2]{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt[8]{8} + \sqrt[12]{12} - \sqrt[10]{10}) : \sqrt[2]{2} &= \sqrt[8]{\frac{8}{2}} + \sqrt[12]{\frac{12}{2}} - \sqrt[10]{\frac{10}{2}} = \sqrt[4]{4} + \\ &\sqrt[6]{6} - \sqrt[5]{5} = 2 + \sqrt[6]{6} - \sqrt[5]{5}. \end{aligned}$$

e. Nicht selten treten im Nenner eines Bruches eine oder mehrere Wurzelgrößen auf. Dieselben müssen durchaus beseitigt werden. (Rationalmachung des Nenners.) Ist der Nenner ein Wurzelmonom, so multiplicirt man Zähler und Nenner des Bruches mit demselben Wurzelmonom, wodurch im Nenner das Wurzelzeichen fortfällt.

$$1) \frac{\sqrt{3} + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3} + 5\sqrt{5} - 3\sqrt{2})\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{6} + 5\sqrt{10} - 3\sqrt{4}}{2\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{6} + 5\sqrt{10} - 6}{4}$$

$$2) \sqrt[3]{8} : \sqrt[6]{13} = \sqrt[6]{\frac{3}{13}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[6]{13}} = \frac{\sqrt[3]{8} \sqrt[6]{13}}{6/13} =$$

$$\frac{\sqrt[9]{52}}{6/13} = {}^{13/6}\sqrt[9]{52} = \sqrt[13/16]{13} = \frac{1}{4}\sqrt[13]{13}.$$

f. Ist der Nenner ein Binom, so multiplicirt man Zähler und Nenner, je nachdem letzterer die Differenz oder Summe zweier Irrationalzahlen ist, beziehungsweise mit der Summe oder Differenz jener Größen.

$$1) \frac{3}{2+\sqrt{3}} = \frac{3(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{6-3\sqrt{3}}{4-3} = 6-3\sqrt{3}.$$

$$2) \frac{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})}{(3\sqrt{5}-2\sqrt{3})(3\sqrt{5}+2\sqrt{3})} =$$

$$\frac{6\sqrt{15}+9\sqrt{10}+4\sqrt{9}+6\sqrt{6}}{45-12} = \frac{2}{11}\sqrt{15} + \frac{3}{11}\sqrt{10} + \frac{4}{11} + \frac{2}{11}\sqrt{6}.$$

g. Ist der Nenner ein Polynom, so muß dieselbe Reducionsregel mehrmals angewendet werden.

$$\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{5})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{5})}{6(5+2\sqrt{6})}$$

$$= \frac{(3\sqrt{2}+2\sqrt{3})(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}+\sqrt{5})(5-2\sqrt{6})}{6(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=6}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{3}{6}\sqrt{6} - \frac{1}{8}\sqrt{15} - 1.$$

187) Man radicirt Wurzelgrößen, wenn man die Wurzel-
exponenten multiplicirt, und mit dem erhaltenen Producte den
Radicanden radicirt.

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3 \cdot 4]{3} = \sqrt[12]{3}$$

$$\sqrt[4]{\frac{3}{2\sqrt{3}\sqrt{2}}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2\sqrt{6}}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2\sqrt{2 \cdot 3}}} = \sqrt[4]{\frac{3}{2\sqrt{6}}} = \sqrt[24]{2304}$$

188) Folgendes Beispiel lehrt die Rationalisirung eines Bruches, darin im Nenner auch Cubikwurzeln vorkommen. (Gleichungen mit mehreren Unbekannten).

$$\frac{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{32}}{2 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{32}} = x + y \sqrt[3]{2} + z \sqrt[3]{32} = x + y \sqrt[3]{2} + 2z \sqrt[3]{4}.$$

Beiderseits mit dem Nenner multiplicirt.

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{32} &= 2x + x \sqrt[3]{2} + x \sqrt[3]{32} + 2y \sqrt[3]{2} + y \sqrt[3]{4} + \\ &\quad y \sqrt[3]{64} + 2z \sqrt[3]{32} + z \sqrt[3]{64} + z \sqrt[3]{1024} \\ &= 2x + x \sqrt[3]{2} + 2x \sqrt[3]{4} + 2y \sqrt[3]{2} + y \sqrt[3]{4} + 4y + 4z \sqrt[3]{4} + 4z + 8z \sqrt[3]{2} \\ &= 2x + 4y + 4z + (x + 2y + 8z) \sqrt[3]{2} + (2x + y + 4z) \sqrt[3]{4}. \end{aligned}$$

Nun setzt man

$$2x + 4y + 4z = 1 \dots\dots (1)$$

$$x + 2y + 8z = 1 \dots\dots (2)$$

$$2x + y + 4z = 2 \dots\dots (3)$$

$$2x + 4y + 4z = 1 \dots\dots (1)$$

$$2x + 4y + 16z = 2 \dots\dots (2)$$

$$2x + y + 4z = 2 \dots\dots (3)$$

(1) von (2) und (1) von (3) subtrahirt.

$$12z = 1; z = \frac{1}{12}$$

$$3y = -1; y = -\frac{1}{3} = -\frac{4}{12}$$

$$x - \frac{8}{12} + \frac{8}{12} = 1; x = \frac{12}{12}$$

Demnach der rationalisirte Bruch

$$\frac{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}{2 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}} = \frac{12 - 4\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}{12} = \frac{6 - 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{6}$$

189) Wurzeln der Zahlen von 1—100.

Zahlen.	Quadratwurzel.	Cubikwurzel.	Zahlen.	Quadratwurzel.	Cubikwurzel.
1	1,0000	1,0000	40	6,3246	3,4200
2	1,4142	1,2599	41	6,4031	3,4482
3	1,7321	1,4422	42	6,4807	3,4760
4	2,0000	1,5874	43	6,5574	3,5034
5	2,2361	1,7100	44	6,6332	3,5303
6	2,4495	1,8171	45	6,7082	3,5569
7	2,6458	1,9129	46	6,7823	3,5830
8	2,8284	2,0000	47	6,8557	3,6088
9	3,0000	2,0801	48	6,9282	3,6342
10	3,1623	2,1544	49	7,0000	3,6593
11	3,3166	2,2240	50	7,0711	3,6840
12	3,4641	2,2894	51	7,1414	3,7084
13	3,6056	2,3513	52	7,2111	3,7325
14	3,7417	2,4101	53	7,2801	3,7563
15	3,8730	2,4662	54	7,3485	3,7798
16	4,0000	2,5198	55	7,4162	3,8030
17	4,1231	2,5713	56	7,4833	3,8259
18	4,2426	2,6207	57	7,5498	3,8485
19	4,3589	2,6684	58	7,6158	3,8709
20	4,4721	2,7144	59	7,6811	3,8930
21	4,5826	2,7589	60	7,7460	3,9149
22	4,6904	2,8020	61	7,8102	3,9365
23	4,7958	2,8439	62	7,8740	3,9579
24	4,8990	2,8845	63	7,9373	3,9791
25	5,0000	2,9240	64	8,0000	4,0000
26	5,0990	2,9625	65	8,0623	4,0207
27	5,1962	3,0000	66	8,1240	4,0412
28	5,2915	3,0366	67	8,1854	4,0615
29	5,3852	3,0723	68	8,2462	4,0817
30	5,4772	3,1072	69	8,3066	4,1016
31	5,5678	3,1414	70	8,3666	4,1213
32	5,6569	3,1748	71	8,4261	4,1408
33	5,7446	3,2075	72	8,4853	4,1602
34	5,8310	3,2396	73	8,5440	4,1793
35	5,9161	3,2711	74	8,6023	4,1983
36	6,0000	3,3019	75	8,6603	4,2172
37	6,0828	3,3322	76	8,7178	4,2358
38	6,1644	3,3620	77	8,7750	4,2543
39	6,2450	3,3912	78	8,8318	4,2727

Zahlen.	Quadratwurzel.	Cubikwurzel.	Zahlen.	Quadratwurzel.	Cubikwurzel.
79	8,8882	4,2908	90	9,4868	4,4814
80	8,9443	4,3089	91	9,5394	4,4979
81	9,0000	4,3267	92	9,5917	4,5144
82	9,0554	4,3445	93	9,6437	4,5307
83	9,1104	4,3621	94	9,6954	4,5468
84	9,1652	4,3795	95	9,7468	4,5629
85	9,2195	4,3968	96	9,7980	4,5789
86	9,2736	4,4140	97	9,8489	4,5947
87	9,3274	4,4310	98	9,8995	4,6104
88	9,3808	4,4480	99	9,9499	4,6261
89	9,4340	4,4647	100	10,0000	4,6416

XIV. Logarithmiren der Zahlen.

190) Der Gedanke, alle positiven ganzen, gebrochenen und irrationalen Zahlen als Potenzen einer und derselben Basis darzustellen, führt auf die Logarithmenrechnung. Alle Logarithmen zusammen bezogen auf ein und dieselbe Grundzahl, nennt man ein Logarithmensystem. Als Grundzahl der gewöhnlichen Logarithmen ist die Grundzahl des dekadischen Zahlensystems 10 angenommen.

$$10^4 = x; \quad x^3 = 1000; \quad 10^x = 100$$

$$x = 10000; \quad x = 10; \quad x = 2.$$

191) Unter dem gemeinen Logarithmen einer Zahl versteht man den Exponenten, zu welchem die Basis 10 erhoben werden muß, um jene Zahl als Potenz hervorzubringen.

Für die Basis 10 sind zum Beispiel die Logarithmen von 10, 100, 1000 u. s. w.

$$10^x = 10; \quad x = 1; \quad \log. 10 = 1$$

$$10^x = 100; \quad x = 2; \quad \log. 100 = 2$$

$$10^x = 1000; \quad x = 3; \quad \log. 1000 = 3 \text{ u. s. w.}$$

$$10^x = 1; \quad x = 0; \quad \log. 1 = 0.$$

Und für die echten Brüche

$$10^x = \frac{1}{10}; \quad x = -1; \quad \log. \frac{1}{10} = -1$$

$$10^x = \frac{1}{100}; \quad x = -2; \quad \log. \frac{1}{100} = -2 \text{ u. s. w.}$$

192) Wie die folgenden Sätze zeigen werden, besteht der Nutzen des Rechnens mit Logarithmen darin, daß sich Multiplicationen durch Additionen, Divisionen durch Subtractionen, Potenzirungen durch Multiplicationen und Radicirungen durch Divisionen ausführen lassen.

193) Der Logarithme eines Productes ist gleich der Logarithmensumme der Factoren des Productes. Es seien für irgend 2 Zahlen die Logarithmen so bestimmt, daß

$$\log. M = p; \log. N = q, \text{ so ist}$$

$$\left. \begin{array}{l} 10^p = M \\ 10^q = N \end{array} \right\} \text{ nach der Definition}$$

also $10^{p+q} = MN$ und beiderseits der Logarithme genommen
 $p+q = \log.(MN) = \log. M + \log. N$; Es ist z. B. $\log. 12 = \log. 4 + \log. 3$.

194) Der Logarithmus eines Bruches ist gleich der Differenz aus den Logarithmen des Zählers und des Nenners.

$$10^p = M$$

$$10^q = N$$

$$\frac{10^{\widehat{p+q}}}{N} = \frac{M}{N} \text{ und die Logarithmen genommen}$$

$\widehat{p-q}$

$$p-q = \log. \left(\frac{M}{N} \right) = \log. M - \log. N; \log. \frac{8}{3} = \log. 8 - \log. 3.$$

195) Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Producte aus dem Exponenten und dem Logarithmen der Basis.

$$10^p = M$$

$$(10^p)^e = M^e = 10^{pe}$$

$$\log. (M^e) = pe = e \log. M; \text{ z. B.}$$

$$\log. 9^8 = 8 \log. 9.$$

196) Der Logarithmus einer Wurzelgröße ist gleich dem Logarithmen des Radicanden, dividirt durch den Wurzel-exponenten.

$$10^p = M$$

$$\sqrt[10]{10^p} = \sqrt[10]{M} = M^{\frac{1}{10}}$$

$$\log. \left(\sqrt[10]{M} \right) = \log. M^{\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} \log. M$$

$$\log. \left(\sqrt[10]{M} \right) = \frac{p}{10} = \frac{\log. M}{10}; \log. \sqrt[4]{20} = \frac{\log. 20}{4}.$$

197) Ganze Zahlen sind nur die Logarithmen dekadischer Einheiten. Es ist der Logarithme einer der Zahlen, 10, 100, 1000 u. s. w. (§ 198) gleich der Anzahl der Nullen dieser Potenzen von 10

$$\log. 1 = 0, \log. 10 = 1, \log. 100 = 2, \log. 1000 = 3$$

und zwar ist der Logarithme positiv oder negativ, je nachdem der Numerus ganzzahlig oder Stammbruch einer dekadischen Einheit ist

$$\log. \frac{1}{10} = -1, \log. \frac{1}{100} = -2, \log. \frac{1}{1000} = -3 \text{ u. s. w.}$$

198) Die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen sind gleich der Summe der Logarithmen ihrer Primfactoren. Man hat also zur Herstellung einer Logarithmentafel nur nöthig, die Logarithmen aller Primzahlen zu kennen. Es ist $\log. 42 = \log. (3 \cdot 2 \cdot 7) = \log. 3 + \log. 2 + \log. 7$.

Die Logarithmen aller Zahlen, die nicht dekadische Einheiten sind, sind Irrationalzahlen und werden als Decimalbrüche, welche bei einer beliebigen Stelle abgebrochen werden, dargestellt. Die Ganzen (0 mitgerechnet) eines solchen Logarithmen nennt man die Charakteristik; alle Decimalstellen zusammen Mantisse.

199) Die Berechnung des Logarithmen einer Zahl gestaltet sich ziemlich einfach mit Hülfe der Kettenbrüche, wie aus folgendem Beispiel hervorgeht.

Gesucht wird Log. 2.

1) $10^x = 2$; x ein ächter Bruch; $x = \frac{1}{a}$

$$10^{\frac{1}{a}} = 2; 10 = 2^a; 2^3 = 8; 2^4 = 16; a = 3 + \frac{1}{b}$$

2) $2^3 + \frac{1}{b} = 10$ oder $2^3 \cdot 2^{\frac{1}{b}} = 10$; $2^{\frac{1}{b}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$ oder $2 = (\frac{5}{4})^b$
 $(\frac{5}{4})^1 = \frac{5}{4}$; $(\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}$; $(\frac{5}{4})^3 = \frac{125}{64}$; $(\frac{5}{4})^4 = \frac{625}{256}$;
 b zwischen 3 und 4. $b = 3 + \frac{1}{c}$

$$2 = (\frac{5}{4})^{3 + \frac{1}{c}} = (\frac{5}{4})^3 (\frac{5}{4})^{\frac{1}{c}}; (\frac{5}{4})^{\frac{1}{c}} = 2 : \frac{125}{64} = \frac{128}{125};$$

$$(\frac{128}{125})^1 = \frac{128}{125};$$

$$c \text{ zwischen } 1 \text{ und } 2; c = 1 + \frac{1}{d}. (\frac{128}{125})^{1 + \frac{1}{d}} = \frac{5}{4}.$$

Geht man in dieser Weise vorwärts, so ergibt sich der un-

$$\text{endliche Kettenbruch } x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

und nach gehöriger Berechnung von noch mehr Gliedern und Verwandlung in einen Decimalbruch

$$x = 0,30103 \dots$$

200) Es ist $10^{-1} = 0,1$, $10^{-2} = 0,01$, $10^{-3} = 0,001$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$ u. s. w. Es haben also die Logarithmen aller 4ziffrigen Zahlen zur Kennziffer 3, die 3ziffrigen 2, die 2ziffrigen 1; ferner sind die Logarithmen aller ächten Decimalbrüche negativ und ihre Charakteristik hat soviel Einheiten, als Nullen in ununterbrochener Reihenfolge nach dem Komma folgen. Die Charakteristik von 0,00254 ist also -2 .

201) Um aber negative Logarithmen zu vermeiden, stellt man sich dieselben dar mit positiver Mantisse und negativer Charakteristik (hinterdreingesezt) als Differenz:

Sst z. B. ein Log. $-0,34528$ so addirt man $+1$ u. erhält $+0,65472 - 1$.

Es ist der Logarithmus eines ächten Decimalbruches also eine Differenz, deren erster Theil ein positiver ächter Decimalbruch ist und deren zweiter Theil, die Charakteristik, soviel Einheiten enthält, als der Figur des Decimalbruches Nullen vorangehen, die Null für die Ganzen mitgerechnet.

$$\log. 0,004 = \log. 4 - \log. 1000 = 0,60206 - 3$$

$$\log. 0,0003 = \log. 3 - \log. 10000 = 0,47712 - 4.$$

202) Wenn zwei ganze Zahlen oder Decimalbrüche nur durch die Stellung ihres Kommas von einander verschieden sind, so unterscheiden sich die Logarithmen nur durch ihre Kennziffern, während ihre Mantissen übereinstimmen.

$$\log 2030 = 2,30749, \log. 2,03 = 0,30745$$

$$\log. 20,3 = 1,30749, \log. 0,0203 = 0,30749 - 2.$$

Anmerkung. Vorzug des Logarithmenstems mit der Basis 10.

203) Negative Zahlen haben keine Logarithmen; kommen aber in einem Zahlenausdrucke negative Größen vor, so kann man für dieselben wie für positive Zahlen die Logarithmen nehmen, wobei man einem solchen Lgr. ein (n) hinterdrein sezt. Da irgend ein Ausdruck, in welchem negative Factoren vorkommen, positiv oder negativ ist, je nachdem die Anzahl der negativen Factoren gerade oder ungerade, so braucht man nur, nachdem die logarithmische Berechnung wie gewöhnlich gethan ist, nach-

zusehen, ob die Anzahl der auftretenden (n) gerade oder ungerade ist; im ersten Falle ist das Resultat positiv, im letztern negativ.

Es ist $(-a)^3 \cdot b^2 - c$ logarithmisch zu nehmen.

$$(-a)^3 (b^2) (-c) = -a^3 \cdot b^2 \cdot -c = +a^3 b^2 c; \log. a^3 b^2 c = 3 \log. a + 2 \log. b + \log. c. \text{ Ebenso ist } (-a) (-b) (-c) = -abc$$

$$\log. (-abc) = \log. a (n) + \log. b (n) + \log. c (n)$$

und da 3 Mal hier das Zeichen (n) vorkommt, ist das Product d. h. die zu der Summe der 3 Logarithmen gehörige Zahl negativ.

204) Uebungen im Aufschlagen der Logarithmen zu jeder Zahl und Auffuchung des Numerus zu jedem Logarithmen mit Hilfe einer Logarithmentafel. (Schlömilch, 5stellige Logarithmen.)

205) Nicht selten werden die sogenannten natürlichen Logarithmen gebraucht. Die Basis derselben wird mit e bezeichnet und hat näherungsweise den Werth 2,71828 und deren natürlicher Logarithme ist = 1. Um den natürlichen Logarithmen einer Zahl zu erhalten, multiplicirt man den gewöhnlichen Logarithmen mit 2,30258 oder dividirt ihn durch $\log. 2,71828 = 0,43429$ (Modulus).

$${}^{10} \log. 5 = 0,69897; \text{ }^e \log. \text{ nat. } 5 = 1,60943.$$

206) Um den natürlichen Logarithmen einer Zahl rasch ohne Tafel zu erhalten, summire man einige Glieder der unendlichen Reihe

$$\log. z = 2 \left[\frac{1}{1} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^5 + \frac{1}{7} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^7 + \dots \right]$$

und multiplicirt denselben, falls man auf gemeine Logarithmen übergehen will, wie oben erwähnt mit 0,43429.

207) Historisches über die Logarithmen.

XVII. Proportionen.

A. Arithmetische.

208) Ein arithmetisches Verhältniß wird bestimmt, wenn man bei der Vergleichung zweier Größen untersucht, um wieviel Einheiten die eine Größe die andere übertrifft. Beide Größen heißen hier Glieder (Vorder- und Hinterglied) und die Zahl, welche angiebt, um wieviel das eine Glied größer

als das andere, wird Differenz genannt. 8—5 (ausgesprochen 8 zu 5, hat die Differenz 3).

209) Wie findet man das Vorderglied aus Hinterglied und Differenz? Wie findet man das Hinterglied aus Vorderglied und Differenz? Wie findet man die Differenz aus Vorderglied und Hinterglied?

210) Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Differenzen haben. Verbindet man zwei gleiche arithmetische Verhältnisse durch das Gleichheitszeichen, so heißt eine solche Verbindung eine arithmetische Proportion.

10 — 4 = 18 — 12 (Äußere und innere Glieder, homologe Glieder).

211) Sind die beiden mittleren Glieder einer solchen Proportion einander gleich, so heißt sie „stetig.“

$$10 - 8 = 8 - 6.$$

212) Eine Proportion heißt steigend oder fallend, je nachdem das Hinterglied größer als das zugehörige Vorderglied ist oder nicht.

$$7 - 3 = 9 - 5 \text{ fallende } \mathbb{P}. \quad 2 - 5 = 4 - 7 \text{ steigende } \mathbb{P}.$$

213) In jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der mittlern der Summe der äußern Glieder gleich.

$$a - b = c - d \quad u \text{ sei die Differenz.}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = b + u \\ d = c - u \end{array} \right\} \text{ addirt.}$$

$$a + d = b + c.$$

214) Beliebige viele arithmetische Proportionen können durch Addition der gleichstelligen Glieder zu einer Proportion vereinigt werden.

$$9 - 5 = 20 - 16$$

$$7 - 4 = 13 - 10$$

$$\text{folglich } 16 - 9 = 33 - 26.$$

215) Bestimmung irgend eines Gliedes, wenn die 3 andern Glieder gegeben sind (durch Addition und Subtraction).

$$\left. \begin{array}{l} a - b = c - x; \quad x = b + c - a \\ a - b = x - d; \quad x = a + d - b \\ a - x = c - d; \quad x = a + d - c \\ x - b = c - d; \quad x = b + c - d \end{array} \right\} \begin{array}{l} 10 - 5 = 8 - x \\ x = 5 + 8 - 10 = 3 \end{array}$$

216) Ist die Proportion stetig, so findet man das unbekanntere mittlere Glied (das arithmetische Mittel), wenn man die beiden äußeren Glieder addirt und die Summe durch zwei dividirt.

$$\begin{array}{rcl} a - x = x - b & 9 - x = x - 13 \\ 2x = a + b & 2x = 9 + 13 = 22 \\ x = \frac{a + b}{2} & x = 11 \end{array}$$

217) Das arithmetische Mittel mehrerer Zahlen wird erhalten, wenn man die Summe derselben durch ihre Anzahl dividirt. Die Zahlen seien z. B. 9, 7, 5, 4, 3, 2; ihr Mittel ist demnach

$$m = \frac{9 + 7 + 5 + 4 + 3 + 2}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

(Thermometer- und Barometer-Beobachtungen.)

B. Geometrische Proportionen.

218) Ein geometrisches Verhältniß wird bestimmt, wenn bei der Vergleichung zweier Größen (Glieder) untersucht wird, wievielmal das erste Glied größer ist, als das andere. Diese gesuchte Verhältnißzahl heißt der Quotient des Verhältnisses.

$$\overset{e}{\curvearrowright} \quad \overset{4}{\curvearrowright}$$

$$a : b; \quad 12 : 3.$$

Bestimmung des Quotienten aus Vorder- und Hinterglied?
Bestimmung des Vordergliedes aus Quotient und Hinterglied?
Bestimmung des Hintergliedes aus Quotient und Vorderglied?

$$\begin{array}{rcl} 15 : 9 & 12 : x & x : 9 \\ e = \frac{5}{3} & e = \frac{1}{2} & e = \frac{2}{3} \\ & x = 24 & x = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6. \end{array}$$

219) Geometrische Verhältnisse sind gleich, wenn sie gleiche Quotienten haben. Verbindet man 2 gleiche Verhältnisse dieser

Art durch das Gleichheitszeichen, so bilden diese Glieder eine geometrische Proportion.

$$12 : 3 = 8 : 2; \text{ also } 4 = 4.$$

220) Sind die beiden mittleren Glieder einander gleich, so heißt die Proportion eine stetige.

$$16 : 8 = 8 : 4.$$

221) Die Proportion heißt steigend oder fallend, je nachdem das Hinterglied größer oder kleiner als das Vorderglied ist. Wird irgend ein Verhältniß so geändert, daß man Vorder- und Hinterglied mit einander vertauscht, so heißt das jetzt entstandene Verhältniß dem ursprünglichen umgekehrt.

$a : b = c : d$; Bildet man die reciproken Werthe, so ist

$$\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = \frac{1}{c} : \frac{1}{d} \text{ oder}$$

$$b : a = d : c.$$

222) Eine Proportion heißt fortschreitend oder zusammenhängend, wenn dieselbe aus vielen Verhältnissen besteht, darin das Hinterglied des einen dem Vordergliede des andern stets gleich ist.

$$\text{Ist } a : b = m : n$$

$$b : c = n : p$$

$$c : d = p : q, \text{ so kann man setzen}$$

$a : b : c : d = m : n : p : q$, eine fortschreitende Proportion.

223) In jeder geometrischen Proportion ist das Product der mittleren Glieder dem Producte der äußern gleich.

$a : b = c : d$ und ist q der Quotient, so ist auch

$$\left. \begin{array}{l} a = bq \\ d = \frac{c}{q} \end{array} \right\} \text{ multiplicirt}$$

$$ad = bq \cdot \frac{c}{q} = b \cdot c.$$

224) Mit Hülfe des letzten Satzes findet man das unbekannte Glied einer Proportion, sofern 3 Glieder gegeben sind.

Ist $a : b = c : x$, so muß sein $3 : 7 = 5 : x$

$$ax = bc$$

$$3x = 35$$

$$x = \frac{bc}{a}$$

$$x = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}.$$

225) Das mittlere Glied einer stetigen geometrischen Proportion (geometrische Mittel) ist gleich der Quadratwurzel aus dem Producte beider äußern Glieder.

$$3 : x = x : 27$$

$$p : x = x : q$$

$$x^2 = 81$$

$$x^2 = p \cdot q$$

$$x = \sqrt{81} = 9$$

$$x = \sqrt{p \cdot q}$$

226) Wie sich aus jeder Proportion eine Gleichung bilden läßt, so auch aus jeder Gleichung umgekehrt eine Proportion. Man zerlegt beide Seiten der Gleichung in je zwei Factoren und wählt die Factoren der einen Seite zu äußern, die der andern zu innern Gliedern der Proportion.

$$48 = 48$$

$$m : p = n : q$$

$$12 \times 4 = 16 \times 3 \text{ also}$$

$$mq = np \text{ und umgekehrt}$$

$$12 : 16 = 3 : 4$$

$$m : p = n : q \text{ oder}$$

$$m : n = p : q.$$

227) Aus jeder Proportion lassen sich durch bloße Umstellung der Glieder 7 andere ableiten.

$$a : b = c : d$$

$$4 : 5 = 8 : 10$$

$$a : c = b : d$$

$$4 : 8 = 5 : 10$$

$$b : d = a : c$$

$$5 : 10 = 4 : 8$$

$$b : a = d : c$$

$$5 : 4 = 10 : 8$$

$$c : a = d : b$$

$$8 : 4 = 10 : 5$$

$$c : d = a : b$$

$$8 : 10 = 4 : 5$$

$$d : b = c : a$$

$$10 : 5 = 8 : 4$$

$$d : c = b : a$$

$$10 : 8 = 5 : 4$$

228) Eine Proportion bleibt richtig, wenn man jedes Glied oder auch je ein Vorder- und das zugehörige Hinterglied oder auch die beiden ersten oder die beiden letzten Glieder mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

$$\begin{array}{l}
 a : b = c : d \qquad 4 : 5 = 8 : 10 \\
 1) ap : bp = cp : dp \text{ oder auch} \quad 8 : 10 = 16 : 20 \text{ oder} \\
 2) ap : b = cp : d \text{ oder} \quad 8 : 5 = 16 : 10 \text{ oder} \\
 3) a : b = cp : dp \quad \frac{8}{4} : 5 = \frac{16}{4} : 10 \\
 \frac{a}{q} : \frac{b}{q} = \frac{c}{q} : \frac{d}{q} \text{ oder} \quad 2 : 5 = 4 : 10 \\
 \frac{a}{q} : b = \frac{c}{q} : d \text{ u. f. w.}
 \end{array}$$

229) Eine Proportion bleibt auch richtig, wenn man jedes Glied mit derselben Zahl potenzirt oder radicirt.

$$\begin{array}{l}
 m : n = p : q, \text{ so ist} \qquad a : b = c : d \\
 m^t : n^t = p^t : q^t \qquad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d} \\
 m^t q^t = n^t p^t \text{ oder} \qquad \sqrt[n]{ad} = \sqrt[n]{bc} \text{ oder} \\
 (mq)^t = (np)^t \text{ oder} \qquad ad = bc \\
 \sqrt[t]{(mq)^t} = \sqrt[t]{(np)^t} \text{ oder} \qquad 4 : 9 = 16 : 36 \\
 mq = np. \qquad \sqrt{4} : \sqrt{9} = \sqrt{16} : \sqrt{36} \\
 \qquad \qquad \qquad 2 : 3 = 4 : 6.
 \end{array}$$

230) Durch Multiplication der gleichstelligen Glieder können mehrere Proportionen zu einer vereinigt werden.

$$\begin{array}{l}
 a : b = c : d \\
 m : n = b : q \\
 u : v = x : y \\
 \hline
 amu : bnv = cbx : dqy \\
 amudqy = bnvcbx
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 ad = bc \\
 mq = nb \\
 uy = vx \\
 \hline
 admquy = benbvx \\
 \text{wie links.}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} a : b = c : d \\ m : n = b : q \\ u : v = x : y \end{array}} \right\} \text{ multiplicirt.}$$

231) Sind die Quotienten aller Verhältnisse einander gleich, so kann die Vereinigung mehrerer Proportionen zu einer auch durch Addition der gleichstelligen Glieder vollzogen werden.

$$\begin{array}{l}
 a : b = c : d \\
 ma : mb = mc : md \\
 na : nb = nc : nd \\
 \hline
 (a + ma + na) : (b + mb + nb) = (c + mc + nc) : (d + md + nd) \text{ oder}
 \end{array}$$

$$a(1+m+n) : b(1+m+n) = c(1+m+n) : d(1+m+n)$$

$$ad(1+m+n)^2 = bc(1+m+n)^2$$

$$ad = bc.$$

232) Dividirt man die gleichstelligen Glieder zweier Proportionen durch einander, so bilden die Quotienten ebenfalls eine richtige Proportion.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ m : n = p : q \\ \hline \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{c}{p} : \frac{d}{q} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 : 3 = 4 : 6 \\ 4 : 5 = 8 : 10 \\ \hline \frac{2}{4} : \frac{3}{5} = \frac{4}{8} : \frac{6}{10} \text{ oder} \\ \frac{bc}{np} = \frac{ad}{mq} \text{ wie leicht einzusehen.} \quad \frac{1}{2} : \frac{3}{5} = \frac{1}{2} : \frac{3}{5}. \end{array}$$

233) In jeder geometrischen Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum ersten oder zweiten Gliede, wie die Summe oder die Differenz des 3. und 4. Gliedes zum 3. oder 4. Gliede.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ (a + b) : a = (c + d) : c \\ (a + b) : b = (c + d) : d \\ (a - b) : a = (c - d) : c \\ (a - b) : b = (c - d) : d \\ \text{also auch} \\ a : c = (a + b) : (c + d) \\ (a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d) \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 : 3 = 15 : 9 \\ 8 : 5 = 24 : 15 \\ 8 : 3 = 24 : 9 \\ 2 : 5 = 6 : 15 \\ 2 : 3 = 6 : 9 \\ 8 : 2 = 24 : 6 \\ 8 : 24 = 5 : 15 \\ \text{u. f. w.} \\ \text{u. f. w.} \end{array}$$

234) In jeder geometrischen Proportion verhält sich das Quadrat der Summe der beiden ersten, zum Quadrat der Summe der beiden letzten Glieder, wie das Product der beiden ersten zum Product der beiden letzten Glieder.

$$\begin{array}{l} a : b = c : d \\ (a + b)^2 : (c + d)^2 = ab : cd \\ (a + b) : (c + d) = a : c \\ (a + b)^2 : (c + d)^2 = a^2 : c^2 = b^2 : d^2 \\ \qquad \qquad \qquad = ab : cd \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2 : 3 = 4 : 6 \\ 25 : 100 = 6 : 24 \end{array}$$

235) In jeder stetigen Proportion verhält sich das erste Glied zum vierten, wie das Quadrat des erstern zum Quadrat des zweiten Gliedes.

$$a : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : b \qquad 4 : 8 = 8 : 16$$

$$a : b = a^2 : (\sqrt{ab})^2 \text{ oder} \qquad 4 : 16 = 16 : 64$$

$$a : b = a^2 : ab = a : b$$

236) In jeder fortschreitenden Proportion verhält sich die Gliedersumme der linken Seite zu der Gliedersumme der rechten Seite wie ein Vorderglied zu seinem homologen Hintergliede.

$$a : b : c : d = m : n : p : q$$

$$(a + b + c + d) : (m + n + p + q) = a : m = b : n \text{ u. s. w.}$$

C. Harmonische Proportionen.

237) Eine harmonische Proportion besteht zwischen 4 Zahlen, wenn die Differenz der beiden ersten sich zur Differenz der beiden letzten Glieder verhält, wie das erste Glied zum vierten. Sind die 4 Zahlen hier a, b, c, d , so muß

$$(a - b) : (c - d) = a : d \text{ stattfinden.}$$

Das „verhält sich zu“ kann hier zur Unterscheidung durch \div angedeutet werden.

$$\text{Es ist z. B. } 20 \div 15 = 5 \div 4$$

$$(20 - 15) : (5 - 4) = 20 : 4 \text{ oder}$$

$$5 : 1 = 20 : 4$$

238) Die vierte harmonische Proportionale zu 3 Zahlen wird gefunden, wenn man das Product aus der 1. und 3. Zahl durch die Differenz aus der doppelten ersten Zahl und der zweiten theilt.

$$(a - b) : (c : x) = a : x$$

$$a(c - x) = x(a - b)$$

$$ac - ax = ax - bx$$

$$x = \frac{ac}{2a - b}$$

$$20, 16, 12, x$$

$$x = \frac{20 \cdot 12}{2 \cdot 20 - 16} = \frac{240}{24} = 10.$$

239) Sind die mittlern Glieder einer harmonischen Proportion einander gleich, so heißt sie eine stetige. Sind die beiden äußern Glieder einer solchen stetigen Proportion p und q , so findet man das unbekannte mittlere Glied (das harmonische Mittel), wenn das doppelte Product beider Zahlen $2pq$ durch ihre Summe $p + q$ dividirt wird.

$$\begin{aligned} p \div x &= x \div q & 30 \div x &= x \div 20 \\ (p-x):(x-q) &= p:q & x &= \frac{2 \cdot 30 \cdot 20}{30 + 20} = \frac{1200}{50} \\ p(x-q) &= q(p-x) & x &= 24. \\ x &= \frac{2pq}{p+q} \end{aligned}$$

240) Das geometrische Mittel zweier Zahlen ist das geometrische Mittel zwischen dem arithmetischen und harmonischen Mittel derselben.

$$\frac{a+b}{2} : \sqrt{ab} = \sqrt{ab} : \frac{2ab}{a+b}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{2ab}{a+b}\right) = (\sqrt{ab})^2$$

$$ab = ab.$$

241) Geht aus dem vorigen Satze hervor, daß das harmonische Mittel zweier Zahlen das kleinste der drei Mittel ist?

Wie beweist man diesen Satz direct?

242) Die reciproken Glieder einer stetigen arithmetischen Proportion bilden eine stetige harmonische Proportion.

$$a \div \frac{2ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} \div b \qquad \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{3}{16}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{a+b}{2ab} = \frac{a+b}{2ab} - \frac{1}{b} \qquad 16 \div 8 = 8 \div \frac{16}{3}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2(a+b)}{2ab} = \frac{a+b}{ab} \qquad 8 = \left(2 \cdot 16 \cdot \frac{16}{3}\right) : \left(16 + \frac{16}{3}\right).$$

243) Der vorige Satz kann umgekehrt werden.

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a+b}{2} - b$$

$$\frac{1}{a} \div \frac{2}{a+b} = \frac{2}{a+b} \div \frac{1}{b} \quad \text{also}$$

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{2}{a+b}\right) : \left(\frac{2}{a+b} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} \quad \text{oder}$$

$$\left(\frac{a+b-2a}{a(a+b)}\right) \frac{1}{b} = \left(\frac{2b-a-b}{b(a+b)}\right) \frac{1}{a}$$

$$\frac{b-a}{ab(a+b)} = \frac{b-a}{ab(a+b)}$$

244) Sind 3 Zahlen a, b, c , stetig arithmetisch proportionirt, so bilden die Producte ab, ac, bc eine stetige harmonische Proportion.

Ist $a - \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a+b) : b$, so ist auch

$$\frac{a}{2}(a+b) \div ab = ab \div \frac{b}{2}(a+b) \quad \text{oder}$$

$$\left[\frac{a}{2}(a+b) - ab\right] : \left[ab - \frac{b}{2}(a+b)\right] = a : b \quad \text{wovon man sich leicht überzeugen kann.}$$

245) In jeder stetigen harmonischen Proportion verhält sich das Product der beiden ersten Glieder zum Product der beiden letzten Glieder, wie die Differenz der beiden ersten zur Differenz der beiden letzten Glieder.

Ist $a \div \frac{2ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} \div b$, so findet auch statt

$$\left(a - \frac{2ab}{a+b}\right) : \left(\frac{2ab}{a+b} - b\right) = a \cdot \frac{2ab}{a+b} : b \cdot \frac{2ab}{a+b} \quad \text{oder}$$

$$(a^2 - ab) : (ab - b^2) = a : b.$$

XVIII. Progressionen.

A. Arithmetische.

246) Eine Reihe von Zahlen, darin jedes Glied das arithmetische Mittel zwischen dem vorhergehenden und nächstfolgenden ist, heißt eine arithmetische Progression.

$$1 - 4 - 7 - 10 - 13 - 16.$$

Die erste Zahl heißt das Anfangsglied (a); die Zahl, um welche das folgende und jedes folgende Glied größer oder kleiner ist, als das vorhergehende, heißt Differenz (d) der Progression. Letztere ist fallend oder steigend, je nachdem die Glieder allmählig ab- oder zunehmen.

$$1 - 4 - 7 - 10 - 13 \dots \text{steigend } a=1 ; d=3$$

$$10 - 9 - 8 - 7 - 6 \dots \text{fallend } a=10 ; d=1.$$

Die Anzahl der Glieder kann eine begrenzte oder unbegrenzte sein. Endliche und unendliche Reihen.

247) Da die Differenz einer arithmetischen Progression von Glied zu Glied constant ist, so ist

$$\text{das 1ste Glied.} \dots \dots a = a$$

$$\text{" 2te " " } \dots \dots a + d = a + 1 d$$

$$\text{" 3 " " " } \dots \dots a + d + d = a + 2 d$$

$$\text{" 4 " " " } \dots \dots a + d + d + d = a + 3 d.$$

Ist das n te Glied das letzte und bezeichnet man den Werth desselben durch t , so ist $t = a + (n - 1) d$.

Für die Reihe $2, 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, \dots$ ist das 100ste Glied $t = 2 + 99\frac{1}{4} = 101\frac{1}{4}$.

248) Um die Summe aller Glieder einer solchen Reihe zu finden, setzt man

$s = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (t-d) + t$ und rückwärts

$s = t + (t-d) + (t-2d) + \dots + (a+d) + a.$

Addirt man beide Reihen, so findet sich

$2s = (a+t) + (a+t) + (a+t) + \dots n$ mal oder

$2s = (a+t)n$

$s = (a+t) \frac{n}{2}$

die Summe einer arithmetischen Progression ist gleich dem Producte aus der halben Gliederanzahl in die Summe des ersten und letzten Gliedes.

Für die Reihe $3 - 8 - 13 - 18 - 23 \dots$

ist $a=3$; $d=5$; und für $n=100$

$t=498$

$s = (3 + 498) 50 = 25050.$

249) Wenn zwischen je zwei Gliedern einer arithmetischen Reihe eine bestimmte Anzahl (m) neue Glieder so eingeschaltet werden sollen, daß die nun entstehende Reihe ebenfalls eine arithmetische Progression bilden soll, so findet man die Differenz, wie leicht einzusehen, nach der Formel:

$$d' = \frac{d}{m+1}.$$

Sind z. B. in der Reihe $1, 2, 3, 4 \dots$ zwischen je zwei benachbarte Glieder 5 neue Glieder einzuschalten (zu interpoliren); so ist

$d' = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6}$ und demnach die neue Reihe

$1, 1\frac{1}{6}, 1\frac{2}{6}, 1\frac{3}{6}, 1\frac{4}{6}, 2, 2\frac{1}{6}, 2\frac{2}{6}$ u. f. w.

250) Folgende Formeln geben die Berechnung von 2 Größen der Progression, wenn drei gegeben sind.

Gegeben.	Gef.	Formeln.	Gegeben.	Gef.	Formeln.
a, d, n	t =	$a + (n-1)d$	a, d, t	n =	$\frac{t-a}{d} + 1$
a, d, s		$-\frac{d}{2} \pm \sqrt{2ds + \left(a - \frac{d}{2}\right)^2}$	a, d, s		$\frac{d-2a}{2d} \pm \sqrt{\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2}$
a, n, s		$\frac{2s-an}{n}$	a, t, s		$2s : (a+t)$
d, n, s		$\frac{s}{n} + \frac{d}{2}(n-1)$	d, t, s		$\frac{2t+d}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2t+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}}$
a, d, n	s =	$\frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$	d, n, t	a =	$\frac{t - (n-1)d}{n} - \frac{d}{2}(n-1)$
a, d, t		$\frac{1}{2}(a+t) + \frac{(a+t)(t-a)}{2d}$	d, n, s		$\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(t + \frac{d}{2}\right)^2 - 2ds}$
a, n, t		$\frac{n}{2}(a+t)$	d, t, s		$\frac{2s-nt}{n}$
d, n, t		$\frac{n}{2}[2t - d(n-1)]$	n, t, s		
a, n, t	d =	$\frac{(t-a):(n-1)}{(2s-2an):(n-1)n}$			
a, n, s		$\frac{(t+a)(t-a) : [2s-t-a]}{(2nt-2s) : n(n-1)}$			
a, t, s					
n, t, s					

B. Geometrische Progressionen.

251) Eine geometrische Progression ist eine Reihe von Zahlen, darin jede das geometrische Mittel ist zwischen der vorhergehenden und nächstfolgenden. 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Die Zahl, welche anzeigt, wie viel Mal jedes folgende Glied größer oder kleiner ist, als das vorhergehende, heißt hier Exponent. Je nachdem der Exponent größer oder kleiner als 1 ist, heißt die Progression steigend oder fallend.

252) Es sei das erste Glied einer solchen Progression a, der Exponent e und die Gliederanzahl n so ist

- das 1. Glied. a
- " 2. " ae¹
- " 3. " aee = ae²
- " 4. " ae²e = ae³ u. somit das letzte Glied od. das nte
t = aeⁿ⁻¹

das 8. Glied der Reihe 4, 12, 36 ist nach dieser Formel

$$t = 4 \cdot 3^{7} = 4 \cdot 2187 = 8748.$$

253) Die Summe einer geometrischen Progression findet sich in folgender Weise

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \dots + ae^{n-1} \dots \dots \dots (1)$$

$$es = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \dots + ae^{n-1} + ae^n \dots \dots (2)$$

$$s = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 + \dots + ae^{n-1} + a \dots \dots (3)$$

Subtrahirt man (3) von (2), so ist $s = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1}$

Ist aber $e < 1$, also ein ächter Bruch, so ist e^n um fo mehr < 1 ; demnach die Summe einer fallenden Progression $s = \frac{a(1 - e^n)}{1 - e}$ und falls die Progression unbegrenzt ist, so daß e^n sich der Null nähert, die Summe einer solchen unendlichen fallenden Progression

$$s'' = \frac{a}{1 - e} \text{ Für } a = 1; e = \frac{1}{10}; n = \infty \text{ ist z. B. } s'' = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1 : \frac{9}{10} = \frac{10}{9} = 1 \frac{1}{9}$$

254) Sollen zwischen je 2 auf einander folgende Glieder einer geometrischen Progression m neue Glieder derartig eingeschaltet werden, daß die Reihe auch jetzt noch geometrisch erscheint, so ist als Interpolationsexponent anzunehmen $e' = \sqrt[m+1]{e}$ In der Reihe 1, 16, 256. u. f. w. sollen 3 Glieder eingeschaltet werden; demnach $e' = \sqrt[4]{16} = 2$ und die neue Reihe 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. u. f. w.

255) Formel zur Berechnung von 2 Gliedern, falls 3 gegeben sind.

Gegeben.	Gef.	Formeln.	Gegeben.	Gef.	Formeln.
a, e, n		ae^{n-1}	a, n, t		$\sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$
a, e, s	t =	$[a + (e-1)s] : e$	a, n, s	e =	$e^n - \frac{se}{a} + \frac{s-a}{a} = 0$
a, n, s		$t(s-t)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$	a, t, s		$(s-a) : (s-t)$
e, n, s		$(e-1)se^{n-1} : (e^n - 1)$	n, t, s		$e^n - \frac{s}{s-t}e^{n-1} + \frac{t}{s-t} = 0$
a, e, n			$a(e^n - 1) : (e-1)$	a, e, t	
a, e, t	s =	$(et - a) : (e-1)$	a, e, s	n =	$\frac{\log [a + (e-1)s] - \log a}{\log e}$
a, n, t		$(t^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}) : (t^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}})$	a, t, s		$\frac{\log t - \log a}{\log (s-a) - \log (s-t)} + 1$
e, n, t		$t(e^n - 1) : (e-1)e^{n-1}$	e, t, s		$\frac{\log t - \log [et - (e-1)s]}{\log e} + 1$
e, n, t			$t : e^{n-1}$		
e, n, s	a =	$(e-1)s : (e^n - 1)$			
e, t, s		$et - (e-1)s$			
n, t, s		$a(s-a)^{n-1} - t(s-t)^{n-1} = 0$			

B. Harmonische Progressionen.

256) Ist in einer Zahlenreihe jedes Glied das harmonische Mittel des vorhergehenden und nachfolgenden Gliedes, so heißt die Reihe harmonisch. Auch diese kann steigend, fallend, endlich oder unendlich sein.

257) Sind die 2 ersten Glieder einer solchen Reihe a und b , so findet sich die dritte harmonische Proportionale x .

$$(a - b) : (b - x) = a : x$$

$$a(b - x) = x(a - b)$$

3) $x = ab : (2a - b)$ und als 4. Glied

$$\left(b - \frac{ab}{2a - b}\right) : \left(\frac{ab}{2a - b} - y\right) = b : y$$

4) $y = ab : (3a - 2b)$

Geht man in derselben Weise weiter, so findet sich

5) $z = ab : (4a - 3b)$ und als letztes Glied für n Glieder

$$t = ab : [(n - 1)a - (n - 2)b] = \frac{ab}{b + (n - 1)(a - b)}$$

Für die harmonische Reihe 100, 80, $66\frac{2}{3}$ ist

$a = 100$; $b = 80$; das 20. Glied $t = 8000 : (2000 - 1520) = 16\frac{2}{3}$.

258) Durch Umformung folgt aus der letzten Formel

$$n = [ab + t(a - 2b)] : t(a - b)$$

$$a = bt(n - 2) : [t(n - 1) - b]$$

$$b = ta(n - 1) : [a + t(n - 2)].$$

259) Die Summe einer harmonischen Progression ist, wenn die beiden ersten Glieder a und b sind, gleich folgender Reihe

$$s = a + b + \frac{ab}{2a - b} + \frac{ab}{3a - 2b} + \dots + \frac{ab}{(n - 1)a - (n - 2)b}$$

$$= a + b + ab \left(\frac{1}{2a - b} + \frac{1}{3a - 2b} + \dots + \frac{1}{(n - 1)a - (n - 2)b} \right)$$

wo, wie ersichtlich, der in der Parenthese befindliche Ausdruck ebenfalls eine harmonische Stammbruchreihe vorstellt.

Die Summe einer solchen harmonischen Stammbruchreihe läßt sich nicht durch einen geschlossenen Ausdruck wiedergeben, sondern ist selbst wieder eine Reihe, und zwar falls $n = (\infty)$ eine unendliche fallende. Summirt man einige Anfangsglieder dieser Summenreihe, so erhält man einen brauchbaren Näherungswert.

Die Form der Reihe ist einfacher

$$\frac{1}{p+q} + \frac{1}{2p+q} + \frac{1}{3p+q} + \dots + \frac{1}{np+q} \dots n \text{ Glieder}$$

und deren Summe beträgt

$$s = C + \frac{1}{p} \ln(pn+q) + \frac{1}{2(pn+q)} - \frac{A p}{2(pn+q)^2} + \frac{B p^3}{2(pn+q)^4} - \frac{C p^5}{4(pn+q)^6} + \frac{D p^7}{8(pn+q)^8} - \dots$$

und hierin ist die beständige Größe

$$C = -\frac{1}{p} \ln q - \frac{1}{2q} + \frac{A}{2q^2} - \frac{B p^3}{4q^4} + \frac{C p^5}{6q^6} - \dots$$

wobei die Buchstaben A, B, C, D die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen bedeuten und folgende Werthe haben (7 Decimalen):

A = 0,1666666	E = 0,0757575
B = 0,0333333	F = 0,2531135
C = 0,0238095	G = 0,1666666
D = 0,0333333	H = 7,0921568.

Das vor den Ausdrücken vorkommende l bedeutet den natürlichen Logarithmen des Zahlenwerths.

So ist z. B. die Summe von 1000 Gliedern der Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 7,48497 \dots$$

und von 100000 Gliedern derselben Reihe = 14,3927262 \dots

Bemerkungen zu den arithm. und harmonischen Progressionen.

a. Wenn man eine beliebige Zahl nacheinander durch die Glieder einer arithmetischen Reihe dividirt, so bilden die aufeinanderfolgenden Quotienten eine harmonische Reihe.

Ist die Zahl p z. B. getheilt durch

$a, b, 2b - a, 3b - 2a, \dots$ so erscheint

$$\frac{p}{a}, \frac{p}{b}, \frac{p}{2b - a}, \dots$$

Für $p = 1; a = 1; b = 2$ erhält man

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

b. Die reciproken Glieder einer arithmetischen Reihe bilden eine harmonische Reihe und umgekehrt.

$a, a + d, a + 2d, \dots$ arithm. Reihe

gibt umgekehrt

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a + d}, \frac{1}{a + 2d}, \dots \text{ eine harm. R.}$$

wie man sich leicht überzeugen kann; denn es ist

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a + d} \right) : \left(\frac{1}{a + d} - \frac{1}{a + 2d} \right) = \frac{1}{a} : \frac{1}{a + 2d}.$$

XIX. Gleichungen.

260) Man nennt Gleichung die Verbindung zweier Ausdrücke von gleichem Werthe mit Hülfe des Gleichheitszeichens (=). Beide Ausdrücke heißen die Seiten und die durch Plus oder Minus getrennten einzelnen Theile Glieder derselben.

$$3 + 4 - 2 = 8 + 3 - 6 \dots \text{sechsgliedrig.}$$

261) Die Gleichungen zerfallen einerseits in analytische und algebraische, anderseits in bestimmte und unbestimmte.

262) In jeder analytischen Gleichung ist die eine Seite eine bloße Umformung (Transformation) der andern. Alle vorhergegangenen Rechnungen lehrten demnach die Zurückführung analytischer Gleichungen, darin die eine Seite gegeben war, auf die einfachste Form.

$$a = 3.5 + 8 : 2 = 19$$

$$a = \log. 100 + \log. 4 = \log. 400 = 2,60206.$$

263) Jede algebraische Gleichung enthält eine oder mehrere unbekannte Größen, deren Werth nach gewissen Regeln aus den bekannten Größen berechnet werden muß.

$$3 + x = 7; x = 4$$

$$12 - x = 4 + x; x = 4.$$

264) Eine Gleichung ist identisch, wenn ihre Seiten nur bekannte Größen enthalten, und ihrem Werthe nach mit einander übereinstimmen.

$$3 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 3\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2.$$

265) Die Auflösung einer algebraischen Gleichung geht darauf aus, für die unbekannte Größe einen solchen Werth zu finden, welcher an ihre Stelle gesetzt (substituirt), die Gleichung identisch macht. Die Unbekannten werden mit den letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z bezeichnet.

$$5 + x = 13 \text{ also } x = 8$$

$$5 + 8 = 13 \text{ identisch.}$$

266) Nachdem die Unbekannte in der 1. 2. oder 3. Potenz auftritt, unterscheidet man Gleichungen vom ersten, zweiten und dritten Grade.

$$2 + x = 3x + 9 \text{ einfache Gleichung}$$

$$4x^2 + 3x = 20 \text{ quadratische „}$$

$$2x^3 + 5x = 18 \text{ cubische „}$$

Alle Gleichungen, darin die Unbekannte mit noch höherem Exponenten vorkommt, heißen höhere Gleichungen.

267) Die Auflösung einer jeden Gleichung verlangt, daß die Unbekannte mit positivem Vorzeichen ohne Coefficienten in der ersten Potenz allein auf der einen Seite nachbleibt, während alle bekannten Größen, oder der gesuchte Werth der Unbekannten, auf der andern Seite stehen müssen.

268) Zur Auflösung einer einfachen Gleichung hat man nach und nach folgende Umformungen vorzunehmen:

a. Kommen Parenthesen vor, so müssen dieselben durch Ausföhrung der Rechnung beseitigt werden.

$$\left(\frac{3}{4} - 2x\right) 5 - \frac{3}{8} = 3x \left(2 - \frac{1}{4}\right) \text{ oder}$$

$$5 \cdot \frac{3}{4} - 5 \cdot 2x - \frac{3}{8} = 3x \cdot 2 - 3x \cdot \frac{1}{4} \text{ oder}$$

$$\frac{15}{4} - 10x - \frac{3}{8} = 6x - \frac{3x}{4}.$$

- b. Befindet sich die Unbekannte als Nenner, so muß jedes Glied der Gleichung mit diesem unbekanntem Nenner multiplicirt werden

$$\frac{3}{2x} + 4 = \frac{2}{x} - 6 \text{ und mit } 2x \text{ multiplicirt}$$

$$\frac{3}{2x} \cdot 2x + 4 \cdot 2x = \frac{2}{x} \cdot 2x - 6 \cdot 2x \text{ oder}$$

$$3 + 8x = 4 - 12x.$$

- c. Die Unbekannte darf nicht unter einem Wurzelzeichen stehen. Zur Beseitigung der Wurzelzeichen (Rationalisirung) müssen Potenzserhebungen der rationalen Glieder, welche allein auf der einen Seite nur stehen dürfen, vorgenommen werden.

$$\sqrt{x+4} - 2 = x \text{ oder } \sqrt{x+4} = x + 2 \text{ oder}$$

$$(\sqrt{x+4})^2 = (x+2)^2 \text{ oder endlich}$$

$$x + 4 = x^2 + 4x + 4.$$

Kommt mehr als eine Wurzelgröße vor, so muß dieses Verfahren wiederholt werden. Erst nachdem die Gleichung von diesen Wurzelgrößen befreit ist, läßt sich der Grad derselben erkennen.

- d. Finden sich unter den Gliedern der Gleichung Brüche, so werden dieselben beseitigt, wenn sämtliche Glieder mit dem Hauptnenner multiplicirt werden.

$$\frac{3}{4}x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}x - \frac{5}{6} \dots \text{Hauptnenner } 12$$

$$\frac{3}{4}x \cdot 12 + \frac{1}{3} \cdot 12 = \frac{1}{2}x \cdot 12 - \frac{5}{6} \cdot 12 \text{ oder}$$

$$9x + 8 = 6x - 10.$$

- e. Finden sich nach Wegschaffung der Nenner auf beiden Seiten gleiche Glieder mit gleichen Vorzeichen, so können dieselben beiderseits weggelassen werden.

$$4x - 5 + 3 - 2x = 3 + 4x + 12 - 8$$

$$-5 - 2x = 12 - 8.$$

- f. Jedes Glied läßt sich mit entgegengesetztem Zeichen von der einen nach der andern Seite bringen (transponiren). Man transponirt, um die unbekanntn Größen allein auf der einen Seite, die bekannten auf der andern zu erhalten.

$$13x + 4 - 5 = 5x + 8 - 2x \text{ oder}$$

$$13x + 4 - 5 - 5x + 2x = 8 \text{ oder}$$

$$13x - 5x + 2x = 8 - 4 + 5.$$

- g. Nach ausgeführter Transposition vereinige man die gleichartigen Glieder, sowohl die unbekanntn einerseits als die bekannten anderseits.

$$13x - 5x + 2x = 8 - 4 + 5$$

$$(13 - 5 + 2)x = 4 + 5$$

$$10x = 9.$$

- h. Hat der Coefficient der Unbekanntn schließlich ein negatives Vorzeichen, so beseitigt man dasselbe durch beiderseitige Multiplication mit der negativen Einheit (-1); oder — was dasselbe bedeutet — man kann sämtliche Vorzeichen der Glieder einer Gleichung umkehren.

$$-5x = 8 + 13 \dots \times -1$$

$$+5x = -8 - 13$$

$$5x = -21.$$

- k. Um endlich die Unbekannte in der geforderten Weise zu erhalten, dividirt man beide Seiten durch den Coefficienten der Unbekanntn.

$$5x = -21$$

$$\frac{5x}{5} = -\frac{21}{5} \text{ oder } x = -\frac{21}{5}.$$

1. Um sich von der Richtigkeit der Auflösung zu überzeugen, setzt man den berechneten Werth von x an Stelle der Unbekannten in die vorgelegte Gleichung, wodurch beide Seiten identisch werden müssen.

$$5x + 9 = 2x + 18 \dots x = 3$$

$$5 \cdot 3 + 9 = 2 \cdot 3 + 18$$

$$24 = 24.$$

269) Die Auflösung der Gleichungen beruht, wie aus den gegebenen Regeln hervorgeht, auf dem Satze, daß Gleiches mit Gleichem auf gleiche Art verbunden, wieder Gleiches hervorbringen muß.

270) Kommt in einer Gleichung nur eine Unbekannte vor, so läßt sich dieselbe nach dem oben gezeigten Verfahren berechnen; eine solche Gleichung ist demnach durch Berechnung der Unbekannten bestimmt. Kommt dagegen mehr als eine Unbekannte vor, so heißt die Gleichung eine unbestimmte, z. B. $6x + 7y = 33$.

271) Sucht man aus einer derartigen unbestimmten Gleichung die eine Unbekannte z. B. y , so lassen sich eine unzählige Menge von zusammengehörenden (correspondirenden) Werthen der Unbekannten angeben, welche die Gleichung identisch machen, da jedem gesetzten bestimmten Werthe von x auch ein bestimmtes y entspricht. Um die Anzahl dieser Auflösungen zu beschränken, ist daher die Bedingung aufgestellt, daß x und y , überhaupt alle Unbekannten einer Gleichung, in ganzen positiven Zahlen angegeben werden sollen.

Aus $6x + 7y = 33$ folgt

$$y = \frac{33 - 6x}{7} \text{ woraus z. B. außer vielen Bruchwerthen}$$

für x und y noch die Werthe $x = 2$,
 $y = 3$ in ganzen Zahlen sich ergeben.

272) Eine unbestimmte Gleichung ist nur dann durch ganzzahlige Werthe für die Unbekannten auflösbar, wenn die Coefficienten der Unbekannten relative Primzahlen sind.

$$2x + 4y = 17$$

$$y = \frac{17 - 2x}{4} = \frac{17}{4} - \frac{1}{2}x.$$

Ist x ganzzahlig, z. B. $=4$, so wird y ein Bruch, nämlich $\frac{9}{4}$ u. s. w.

Eine unbestimmte Gleichung wird am einfachsten mit Hilfe der Kettenbrüche gelöst, und zwar in folgender Weise:

a. Man drückt zunächst die Coefficienten durch möglichst kleine ganze Zahlen aus, nachdem dieselben auf die allgemeine Form $ax \pm by = \pm c$ gebracht ist.

$$-21x + 39y + 9 = 6x - 12y + 60 \text{ oder}$$

$$-21x - 6x + 39y + 12y = 60 - 9$$

$$-27x + 51y = 54$$

$$27x - 51y = -54 \text{ oder div. durch 3}$$

$$9x - 17y = -18.$$

b. Nun bildet man einen gemeinen Bruch, dessen Zähler der Coefficient von x und dessen Nenner derjenige von y ist, und verwandelt denselben in einen Kettenbruch, worauf man die Näherungswerte des letztern bestimmt. Es sei zunächst $9x - 17y = 1$ aufzulösen.

$$\frac{9}{17} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{8}}} \text{ also } N_1 = 1; N_2 = \frac{1}{2}.$$

c. Hierauf zieht man von dem Bruche $\frac{9}{17}$ den letzten Näherungswert ab, so ergibt sich für das obige Beispiel

$$\frac{9}{17} - \frac{1}{2} = \frac{9 \cdot 2 - 17 \cdot 1}{34} = \frac{1}{34} \text{ oder}$$

$9 \cdot 2 - 17 \cdot 1 = 1$; und nachdem man diese Gleichung mit der angegebenen in Uebereinstimmung bringt, folgt $x=2$; $y=1$.

d. Ist die bekannte Größe nicht gleich der Einheit, z. B.

$$25x - 9y = 13$$

so löse man zuerst die Gleichung $25x - 9y = 1$ auf und multiplicire die erhaltenen Werthe für x und y hernach mit 13.

$$\frac{25}{9} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} \quad N_1 = 2; N_2 = 3; N_3 = \frac{11}{4}$$

$$\frac{25}{9} - \frac{11}{4} = \frac{25 \cdot 4 - 9 \cdot 11}{36} = \frac{1}{36}$$

$$25 \cdot 4 - 9 \cdot 11 = 1, \text{ woraus } x=4, y=11$$

und nach Multiplication mit 13 demnach $x=52, y=143$.

e. Um noch andere ganzzahlige Werthe für x und y aufzufinden, welche der Gleichung $ax + by = c$ genügen, berechne man nach der angegebenen Weise zunächst 2 correspondirende x und y . Dieselben seien $x = m$, $y = n$, und setze

$$x = m + bz, \quad y = n - az, \quad \text{für die Form } ax + by = c$$

$$x = p + bz, \quad y = q + az, \quad \text{für die Form } ax - by = \pm c$$

wo z jede beliebige ganze, sowohl positive als negative Zahl bedeuten kann. Alle so berechneten Werthe für x und y befriedigen die Gleichung ebenfalls.

273) Ist eine Gleichung mit 3 Unbekannten zur Auflösung vorgelegt, so z. B. $2x + 3y - 4z = 25$, so bringt man sie auf die Form $3y - 4z = 25 - 2x$, setzt für x irgend einen passenden Werth, z. B. $x = 1$, wodurch man auf

$$3y - 4z = 23$$

kommt und nach der früheren Regel $y = 9$ und $z = 1$ findet.

274) Sind 2 Gleichungen mit je 3 Unbekannten gegeben,

$$\text{z. B. (1) } 22x + 3y - 4z = 16 \quad \text{. . (2) } 17x - 3y + 5z = 28$$

so multiplicirt man jede Gleichung mit einer solchen Zahl, daß die Coefficienten derjenigen Unbekannten, welche noch nicht gleiche Coefficienten haben, gleich gemacht werden, und scheidet diese Unbekannten durch Addition oder Subtraction beider Gleichungen aus (Elimination). Multiplicirt man (2) mit 4 und (1) mit 5, so erhält man

$$\left. \begin{array}{l} 110x + 15y - 20z = 80 \\ 68x - 12y + 20z = 112 \end{array} \right\} \text{ addirt}$$

(3) $178x + 3y = 192$, welche Gleichung wie früher aufgelöst wird. Mittelfst der Werthe von x und y folgt

$$z = \frac{22x + 3y - 16}{4}.$$

275) Es können ferner 2 Gleichungen mit 4 Unbekannten gegeben sein. Nach der Regel des vorigen § scheidet man hier die eine Unbekannte aus, und kommt so auf eine Gleichung mit 3 Unbekannten, welche sich nach § 273 gleichfalls auflösen läßt.

Zur Übung:

$$1) 5x + 7y = 31$$

$$2) 9x - 13y = -3$$

$$3) \left. \begin{array}{l} 6u + 7v + 8w = 39 \\ 2u - 9v - 7w = -37 \end{array} \right\}$$

$$4) 2x + 3y + 4u - 5v = 0$$

$$3x - 4y - 5u + 7v = 8.$$

XX. Ungleichungen.

276) Ein Ausdruck a welcher einen größern Werth als ein anderer b besitzt, bildet mit dem zweiten eine Ungleichung, welche geschrieben wird

entweder $a > b$ oder $b < a$.

Die für Gleichungen aufgestellten Sätze gelten aber nur für das Rechnen mit Ungleichungen in sehr beschränktem Maße. Ungleichungen heißen gleichstimmig, wenn sie nur das Zeichen $>$ oder $<$ allein enthalten; kommen dagegen beide Zeichen vor, so heißen sie ungleichstimmig, wie z. B. $a > b$ und $c < d$.

277) Gleichstimmige Ungleichungen mit einander oder mit Gleichungen addirt, geben eine gleichstimmige Ungleichung derselben Art

$$9 > 4$$

$$8 > 3$$

$$\hline 17 > 7$$

$$3 < 5$$

$$2 = 2$$

$$\hline 5 < 7$$

278) Gleiches von Ungleichem subtrahirt giebt Ungleiches derselben Art. Ungleichstimmige Ungleichungen von einander subtrahirt, geben Ungleichungen von der Art des Minuends.

$$10 > 7$$

$$4 = 4$$

$$\hline 6 > 3$$

$$10 = 10$$

$$5 > 3$$

$$\hline 5 < 7$$

$$9 > 4$$

$$2 < 3$$

$$\hline 7 > 1$$

$$\begin{array}{r}
 5 < 8 \\
 2 = 2 \\
 \hline
 3 < 6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 = 8 \\
 4 < 6 \\
 \hline
 4 > 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5 < 12 \\
 4 > 2 \\
 \hline
 1 < 10
 \end{array}$$

279 Gleichstimmige Ungleichungen von einander subtrahirt geben Unbestimmtes.

$$\begin{array}{r}
 20 > 15 \\
 11 > 10 \\
 \hline
 9 > 5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 20 > 19 \\
 11 > 10 \\
 \hline
 9 = 9
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 14 < 20 \\
 3 < 18 \\
 \hline
 11 > 2
 \end{array}$$

280 Ungleiches mit positivem Gleichen multiplicirt, gibt Ungleiches derselben Art, mit negativem Gleichen multiplicirt aber Ungleiches entgegengesetzter Art.

$$\begin{array}{r}
 9 > 5 \\
 +3 = +3 \\
 \hline
 +27 > +15
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 < 5 \\
 +4 = +4 \\
 \hline
 +8 < +20
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5 > 3 \\
 -2 = -2 \\
 \hline
 -10 < -6
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8 < 10 \\
 -5 = -5 \\
 \hline
 -40 > -50
 \end{array}$$

281 Positiv Ungleiches mit positiv Ungleichen derselben Art multiplicirt, gibt Ungleiches derselben Art. Ungleichstimmige Ungleichungen multiplicirt geben Unbestimmtes.

$$\begin{array}{r}
 10 > 5 \\
 5 > 3 \\
 \hline
 50 > 15
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5 < 8 \\
 2 < 3 \\
 \hline
 10 < 24
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 10 > 4 \\
 2 < 8 \\
 \hline
 20 < 32
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10 > 5 \\
 4 > 8 \\
 \hline
 40 = 40
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3 < 7 \\
 5 > 4 \\
 \hline
 15 < 28
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 10 > 8 \\
 -5 < -3 \\
 \hline
 -50 < -24
 \end{array}$$

282 Jede Ungleichung kann noch bestehen, wenn die Glieder mit -1 multiplicirt werden; — es kehrt sich aber hierbei das Ungleichheitszeichen um.

$$\begin{array}{r}
 +8 > +5 \text{ also} \\
 -8 < -5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 -10 < +3 \\
 +10 > -3
 \end{array}$$

283 Positiv Ungleiches durch positives oder negatives Gleiches dividirt, gibt bez. Ungleiches derselben oder entgegengesetzten Art.

$$\begin{array}{r}
 +20 > +16 \\
 4 = 4 \\
 \hline
 +5 > +4
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 +20 > +16 \\
 -2 = -2 \\
 \hline
 -10 < -8
 \end{array}$$

284) Positiv Ungleiches durch positiv Ungleiches dividirt, gibt Ungleiches von der Art des Dividendus oder Unbestimmtes, je nachdem die Ungleichungen ungleichstimmig oder gleichstimmig sind.

$$\begin{array}{r} 12 > 8 \\ 3 > 2 \\ \hline 4 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 > 8 \\ 4 > 2 \\ \hline 3 < 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12 > 8 \\ 3 < 4 \\ \hline 4 > 2 \end{array}$$

285 Positiv Ungleiches mit einer ganzen Zahl potenziert, gibt Ungleiches derselben Art oder der entgegengesetzten, je nachdem der Exponent positiv oder negativ ist.

$$\begin{array}{llll} 4 > 3 & 2 < 3 & 3 > 2 & 5 > 3 \\ 4^2 > 3^2 & 2^2 < 3^2 & 3^2 > 2^2 & 5^{-3} < 3^{-3} \\ 4^3 > 3^3 & 2^3 < 3^3 & (\frac{1}{3})^2 < (\frac{1}{2})^2 & \frac{1}{125} < \frac{1}{27} \end{array}$$

286) Positiv Ungleiches durch eine ganze Zahl radicirt, gibt Ungleiches derselben oder entgegengesetzter Art, je nachdem der Exponent positiv ist oder negativ.

$$\begin{array}{lll} 16 > 9 & 25 < 36 & 100 > 64 \\ \sqrt{16} > \sqrt{9} & \sqrt{25} < \sqrt{36} & \sqrt{100^{-1}} < \sqrt{64^{-1}} \\ 4 > 3 & 5 < 6 & \frac{1}{10} < \frac{1}{8} \end{array}$$

XXI. Zahlensysteme.

287) Man nennt „Zahlensystem“ die Methode, alle Zahlen mit gewissen einfachen Zifferzeichen schreiben zu können.

288) Die Zahlen gehen in einer arithmetischen Reihe vorwärts, deren Differenz die Einheit ist. Bildet man aus dieser Reihe eine geometrische, indem man ebenfalls mit 1 anfängt und irgend eine andere Zahl zum Exponenten wählt, so erhält man die Einer der höhern Ordnung in demjenigen Zahlensystem, welches durch den Exponenten angegeben wird.

289) Setzt man z. B. als Basis (Grundzahl) die 10, so entsteht folgende Reihe

$$1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 \text{ u. s. w.} \\ = 1, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 \dots$$

oder da $1 = 10^0$ noch übersichtlicher

$$10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 \dots$$

Dieses sind die Einheiten des dekadischen Zahlensystems. Diese Einheiten können nun noch Coefficienten erhalten, wodurch die Möglichkeit geboten ist, auch die zwischen diesen Einheiten befindlichen Zahlen ebenfalls als eine Summenreihe Vielfacher von Potenzen der Grundzahl (im dekadischen System die 10) darzustellen.

$$\begin{aligned} \text{Es ist z. B. } 83456 &= 8.10000 + 3.1000 + 4.100 + 5.10 + 6.1 \\ &= 8.10^4 + 3.10^3 + 4.10^2 + 5.10^1 + 6.10^0 \end{aligned}$$

und falls man einen Decimalbruch hat und sich negativer Exponenten bedient

$$\begin{aligned} 24,526 &= 2.10 + 4.1 + \frac{5}{10} + \frac{2}{100} + \frac{6}{1000} \\ &= 2.10^1 + 4.10^0 + 5.10^{-1} + 2.10^{-2} + 6.10^{-3} \end{aligned}$$

290) Was die 10 für das dekadische System, sei jetzt g für irgend ein anderes Zahlensystem und a, b, c . . . seien die Coefficienten der Potenzen von g, welche aber nicht über den Werth (g-1) hinausgehen sollen. Alsdann läßt sich irgend eine Zahl nach dem gtheiligen System folgendermaßen ausdrücken:

$$z = ag^{n-1} + bg^{n-2} + cg^{n-3} + \dots + pg^1 + qg^0.$$

291) Die Anzahl der Einheiten der als Basis angenommenen Zahl bestimmt den Namen des Zahlensystems und die Größe der Coefficienten.

In der Dyadik ist g=2 u. sind d. Coefficienten 0, 1

" "	Triadik	" g=3	" "	" "	" "	0, 1, 2
" "	Tetradik	" g=4	" "	" "	" "	0, 1, 2, 3
" "	Pentadik	" g=5	" "	" "	" "	0, 1, 2, 3, 4
" "	Hexadik	" g=6	" "	" "	" "	0, 1, 2, 3, 4, 5
" "	Dekadik	" g=10	" "	" "	" "	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
					u. f. w.	

292) Dekadische Zahlen, geschrieben in anderen Systemen.

g=10	}	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
g=2		10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010
g=4	}	1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21
g=5		1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14

293) Zerlegung der Zahlen verschiedener Systeme nach Potenzen ihrer Grundzahl.

$$116_{(10)} = 1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

$$431_{(5)} = 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0$$

294) Um eine dekadische Zahl nach einem beliebigen andern System zu schreiben, dividirt man mit der Basis des letztern in die gegebene Zahl und merkt sich den Rest. Darauf dividirt man in den Quotienten wieder mit der Basis und vermerkt gleichfalls den Rest. So setzt man die Division fort, bis man auf einen Quotienten stößt, welcher kleiner ist als die gegebene Basis.

Die dekadische Zahl 923586 sei z. B. tetradisch zu schreiben.

4(923586)230896	Rest 2
4(230896)57724	" 0
4(57724)14431	" 0
4(14431)3607	" 3
4(3607)901	" 3
4(901)225	" 1
4(225)56	" 1
4(56)14	" 0
4(14)3	" 2

Nun schreibt man den letzten Quotienten zuerst und reihet an denselben nach rechts hin die erhaltenen Reste in umgekehrter Reihenfolge, versehen mit den successiv auf einander folgenden Exponenten

$$923586_{(10)}$$

$$= 3 \cdot 4^9 + 2 \cdot 4^8 + 0 \cdot 4^7 + 1 \cdot 4^6 + 1 \cdot 4^5 + 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 0 \cdot 4^1 + 2 \cdot 4^0$$

$$= 3201133002_{(4)}.$$

295) Die eben gegebene Regel geht hervor aus nachfolgender Entwicklung, wie leicht einzusehen ist:

$$\text{Es ist } 93354623_{(10)}$$

$$= 13431335451_{(6)}$$

$$= 16392437.6 + 1$$

$$= 2732072.6^2 + 5.6^1 + 1$$

$$= 455243.6^3 + 4.6^2 + 5.6^1 + 1$$

$$= 75875.6^4 + 5.6^3 + 4.6^2 + 5.6^1 + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= 12645 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 1 \\
 &= 2107 \cdot 6^6 + 3 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 1 \\
 &= 351 \cdot 6^7 + 1 \cdot 6^6 + 3 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 1 \\
 &= 58 \cdot 6^8 + 3 \cdot 6^7 + 1 \cdot 6^6 + 3 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 1 \\
 &= 9 \cdot 6^9 + 4 \cdot 6^8 + 3 \cdot 6^7 + 1 \cdot 6^6 + 3 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 1 \\
 &= 1 \cdot 6^{10} + 3 \cdot 6^9 + 4 \cdot 6^8 + 3 \cdot 6^7 + 1 \cdot 6^6 + 3 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 5 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 1.
 \end{aligned}$$

296) Um umgekehrt eine nach dem gtheiligen System geschriebene Zahl nach dem dekadischen zu schreiben, zerlegt man dieselbe nach Potenzen der Grundzahl g und addirt die Summanden

$$324_{(5)} = 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 75 + 10 + 4 = 89_{(10)}$$

$$123456_{(7)} = 1 \cdot 7^5 + 2 \cdot 7^4 + 3 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 6 \cdot 7^0$$

$$= 16807 + 4802 + 1029 + 196 + 35 + 6 = 22875_{(10)}$$

297) Beispiele von Additionen in andern Zahlensystemen

a) 110100 dyadisch 11101101 1011110 1110110 1011111 101011 111111 110101 100001 111001 10010	b) 12031 23021 31020 32220 10231 20320 11232 <hr style="width: 50%; margin-left: 0;"/> Summe 1000121
--	---

Summe 1101011111

298) Beispiele von Subtractionen

0 0 10 0 10 10 10 10 0 10 1 1 . 1 . 0 1 . 0 0 0 0 0 1 . 0 1 1 0 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 0	dyadisch.
<hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>	
1 1 1 0 0 1 1 0 1 1 1	
1 2 1 10 10 10 10 11	
2 3 . 2 . 0 0 0 0 1 3 3 2 3	
1 3 3 3 2 2 1 3 2 2 1 2	
<hr style="width: 80%; margin: 0 auto;"/>	
3 2 0 1 1 2 2 1 1 1 1	

299) Zahlwörter und Zahlzeichen.

Deutsche Zahlwörter.	Arabische Bez.	Lateinische Zahlwörter.	Römische Bez.	Griechische Zahlwörter.	Griech. Bez.
Eins	1	unus	I	εἷς	α'
Zwei	2	duo	II	δύο	β'
Drei	3	tres	III	τρεις	γ'
Vier	4	quattuor	IV	τέτταρες	δ'
Fünf	5	quinque	V	πέντε	ε'
Sechs	6	sex	VI	ἕξ	ς'
Sieben	7	septem	VII	ἑπτά	ζ'
Acht	8	octo	VIII	ὀκτώ	η'
Neun	9	novem	IX	ἐννέα	θ'
Zehn	10	decem	X	δέκα	ι'
Elf	11	undecim	XI	ἑνδεκά	ια'
Zwölf	12	duodecim	XII	δώδεκα	ιβ'
Dreizehn	13	tredecim	XIII	τρεις καὶ δέκα	ιγ'
Vierzehn	14	quattuordecim	XIV	τέτταρες καὶ δέκα	ιδ'
Fünfzehn	15	quindecim	XV	πεντεκαίδεκα	ιε'
Sechzehn	16	sedecim	XVI	ἑκκαίδεκα	ις'
Siebenzehn	17	septendecim	XVII	ἑπτακαίδεκα	ις'
Achtzehn	18	duodeviginti	XVIII	ὀκτωκαίδεκα	ιη'
Neunzehn	19	undeviginti	XIX	ἐννεακαίδεκα	ιθ'
Zwanzig	20	viginti	XX	εἴκοσι	κ'
Dreißig	30	triginta	XXX	τριακόντα	λ'
Vierzig	40	quadraginta	XL	τετταράκοντα	μ'
Fünfzig	50	quinguinta	L	πεντήκοντα	ν'

XXII. Verwandlungen.

300) Alle im Handel und Wandel vorkommenden und zum Austausch geeigneten Dinge repräsentiren einen bestimmten Werth; d. h. sie können für eine gewisse Summe Geldes erstanden werden. Man bezieht die im Verkehr coursirenden Münzen auf den Werth des reinen Goldes oder Silbers (Gold- und Silberwährung). Jeder Staat bedient sich seiner besonderen Münzen, welche aus Gold Silber und Kupfer (jetzt auch Nickel geprägt werden). Die edeln Metalle verarbeitet man nicht rein, sondern setzt ihnen Kupfer zu. Jede geprägte Gold- oder Silbermünze hat aus diesem Grunde einen äußeren Werth (Schrot), welcher durch die Wage angegeben wird und einen innern Werth (Korn) d. h. einen bestimmten Gehalt an feinem Metall. Die letztere Bestimmung geschieht nach Mark und zwar rechnet man beim Silber 1 Mark = 16 Loth und beim Golde 1 M. = 24 Karat.

301) Unter Münzfuß versteht man die gesetzliche Vorschrift über das Verhältniß des Feingehaltes zum gemachten Zusatz und die Abstufung der verschiedenen Münzen eines Landes unter sich. Jeder Staat hat bis hierzu noch seinen besonderen Münzfuß und seine besonderen Münzenbenennungen. Indessen ist, da es schwierig den Münzen das gesetzliche Gewicht an Korn zu geben, eine kleine Abweichung vom Normalmünzfuß zulässig, welche Remedium genannt wird.

302) Form der Münzen. Avers. Revers. Legende. Handschrift. Numismatik.

303) Unter Parivergleichung versteht man die Vergleichung der Gold- und Silbermünzen nach dem Feingehalte. Dieses sogenannte reelle Pari bleibt aber nicht constant, sondern hängt von politischen und commerziellen Verhältnissen ab, so daß in Folge derselben die eine Münzsorte im Vergleich mit einer andern bald höher, bald niedriger steht. Dieses Verhältniß der Münzen zweier Staaten gegen einander nennt man Cours und drückt ihn in Procenten aus, wie z. B. 100 Rbl. = 213 Mark. Der Cours ist al pari, wenn er mit dem reellen Pari übereinstimmt; eine Geldsorte steht unter pari, wenn Abzüge gemacht werden müssen.

304) Man unterscheidet schließlich fingirtes und reelles Geld. Ersteres ist nicht vorhanden, sondern hat nur einen angenommenen Werth, wie z. B. *U.* Sterling, Schilling Banko. Sämmtliche coursirenden Münzen stellen das reelle Geld vor.

305) Münztabelle.

		Mark.	Pfg.		
Rußland.	1 Imperial = 10 Rbl.;	} ehemals			
	1 Ducaten = 3 Rbl.				
	1 Silberrubel = 100 Kopeken				
	= 200 Groschen			3	24
Deutschland.	10 Mark in Gold				
	20 Mark in Gold				
	1 Mark = 100 Pfennige				
	1 Thaler preussisch = 30 Silberggr.				
England.	1 Krone = 5 Shilling =				
	60 Pence = 240 Farthings .			5	80
	1 <i>£</i> . Sterling à 20 Shilling . .			20	35
	1 Shilling = 12 Pence				
	1 Guinee = 21 Shilling	21	35		
Türkei.	1 Piafter = 40 Para		18		
	1 Medjidie = 20 Piafter	3	60		
Holland.	1 Gulden = 100 Cents = 20 Stüber				
	= 40 Grot = 320 Pf.			1	70
	1 Ducaten = 20 Piafter			9	60
	1 Wilhelmsd'or	16	60		
Belgien.	1 Brabanter Kronenthaler	4	60		
	1 Souveraind'or	28	—		
Frankreich und Schweiz.	1 Napoleond'or = 20 Francs. . .	16	25		
	1 Louisd'or	20	35		
	1 Franc = 100 Centimes	—	80		
	1 Sou = 5 Centimes; 1 Livre = 20 Sous				
Oestreich.	1 Ducaten	9	60		
	1 Gulden = 100 Kreuzer	2	—		
	8 Gulden= und 4 Guldenstücke				

Italien.	1 Zechine	9	60
	1 Lira = 100 Centesimi	—	80
Spanien.	1 Duro = 20 Reales	4	25
	1 Escudo = 10 Reales	2	10
	1 Onza	65	45
	1 Pezeta = 100 Centaros	—	80
Portugal.	1 Milreis = 1000 Reis	4	55
	1 Krone	45	45
Griechenland.	1 Drachma = 100 Lepta	—	80
Hamburg.	1 Thaler = 3 Mark = 48 Schilling Banco = 96 Groot.	3	
Schweden.	1 Krone = 100 Dere	1	13
	1 Carolin	8	—
Norwegen.	1 Speciesthaler = 5 Ort	4	50
	1 Ort = 24 Schilling.		
Dänemark.	1 Reichsthaler = 6 Mark = 96 Schilling	2	29
	1 Christiansd'or	16	65
	1 Frederiksd'or	16	65
	1 Ducaten	9	55
China.	1 Taël = 1000 Kesch	6	—
	1 Bund = 500 Kesch		
Japan.	1 Kobang = 4 Bus	5	60
	1 Bu = 100 Cents	1	40
	1 Rio = 3 Bus	4	20
	1 Yen = 100 Cents	4	20
Nord- America.	1 Dollar = 100 Cents	4	20
	1 Eagle = 10 Dollar	42	—

306) Der Werth der im Verkehr gebräuchlichen Dinge hängt ab 1) von der Qualität, 2) vom Volumen, 3) vom Gewicht.

307) Die Bestimmung der Qualität ist größtentheils Sache der Erfahrung oder Beobachtung, weniger der Rechnung. Unter spezifischem Gewicht, dessen Bestimmung sehr häufig zur Prüfung der Qualität vorgenommen wird, versteht man das Verhältniß des Gewichtes eines Raumtheiles irgend eines Stoffes zu dem Gewichte desselben Raumtheiles Wasser.

308) Spezifische Gewichte einiger Körper (feste und flüssige).

Bernstein 1, 075	Wein 0, 9—1, 04
Butter 0, 942	Salzsäure 1, 20—1, 80
Gaoutschouc 0, 934	Salpetersäure 1, 19—1, 50
Eis 0, 916	Conc. Schwefelsäure 1, 85
Elfenbein 1, 825	Kupfer 8, 78
Fensterglas 2, 642	Nickel 8, 47
Birkenholz 0, 738	Quecksilber 13, 598
Ebenholz 1, 187	Silber 10, 51
Eichenholz 0, 650	Gold 19, 36
Fichtenholz 0, 550	Zink 7, 9
Holzkohle 0, 28—0, 44	Zinn 7, 291
Kalkstein 2, 70	Messing 7, 6—8, 8
Marmor 2, 8	Porcellan 2, 319
Blei 11, 35	Schwefel 2, 072
Schmiedeeisen 7, 788	Steinkohle 1, 15—1, 50
Guß Eisen 7, 20	Steinsalz 2, 14—2, 41
Gußstahl 7, 919	Talg 0, 942
Bier 1, 023—1, 034	Wachs 0, 96
Milch 1, 02—1, 04	Ziegel 1, 4—2, 2
Provinceroel 0, 915	Zucker 1, 606
Seewasser 1, 02—1, 04	Aether 0, 733

Alcohol	0,8346	bei 15° Cels.	und 90 %
	0,8645	" " "	80 "
	0,9141	" " "	60 "
	0,9348	" " "	50 "
	0,9523	" " "	40 "

309) Volumen eines Körpers nennt man die Größe des Raumes, den er einnimmt ohne Rücksicht auf seine Gestalt. Veränderlichkeit des Volumens desselben Körpers bei verschiedener Temperatur. Die Größe des Körpers muß durch ein bestimmtes Maß ausgedrückt werden.

310) Unter Maß versteht man diejenige Einheit, durch welche verschiedene große Körper mit einander verglichen werden. Man bringt nur gleichartige Dinge in messende Vergleichung z. B. Jahre, Wochen werden durch Stunden; Meilen, Werst, Faden durch Fuß gemessen. Hierbei werden Linien in Längenmaß-, Flächen im Flächenmaß-, Körper in Cubikmaßeinheiten angegeben.

311) Unter Gewicht versteht man den durch gewisse Einheiten, als Pfund, Loth, Gramm u. s. w. gemessenen Druck, den die Körper auf die Waagschale ausüben. Als Längeneinheit dient ein Meter, der zehnmillionste Theil eines Erdquadranten (Viertelmeridians) und als fast allgemein angenommene Gewichtseinheit das Gramm, welches das Gewicht eines Würfels reinen Wassers von + 4 Grad Celsius (wobei Wasser am dichtesten ist) von 1 Centimeter Länge, Höhe und Breite.

312) Zur Ausmessung von Flüssigkeiten bedient man sich der Hohlmaße, welche durch Míchung bestimmt werden. Dergleichen Maße bedient man sich auch zum Messen feinkörniger Körper, als Getreide, Mehl, Salz u. s. w. Für praktische Zwecke sind dieselben ausreichend, für wissenschaftliche nicht hinreichend genau. Volumenbestimmung mittelst geometrischer Formeln.

313) Normalmaß und Normalgewicht. Masse und Dichtigkeit der Körper.

314) Maß- und Gewichtstabelle.

Staaten.	Längenmaße.	Flächenmaße.	Hohlmaße.
Frankreich.	1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter = 0,1 Dekameter = 0,01 Hektometer = 0,001 Kilometer 1 Meile = 10000 Meter = 1 Myriameter 1 Toise = 6 alte Fuß 1 Fuß = 12 Zoll 1 Zoll = 12 Linien 1 Fuß = 0,324839 Meter 1 Elle = 1,187694 Meter	1 Hektare = 100 Ares 1 Are = 100 □ Meter 1 Myriare = 10 Hektaren	1 Stere = 10 Hektoliter 1 Hektoliter = 100 Liter 1 Liter = 1 Cubikdecimeter
Rußland.	1 Werst = 500 Saschen 1 Saschen = 7 Fuß 1 Fuß = 12 Zoll 1 Zoll = 12 Linien 1 Saschen = 3 Arschin 1 Arschin = 16 Werschok 1 Werst = 1066,78 Meter	1 Dessätine = 2400 □ Faden = 10925 □ Meter 1 □ Faden = 49 □ Fuß = 9 □ Arschin	1 Botschka = 40 Wedro 1 Wedro = 10 Kruschken

Staaten.	Längenmaße.	Flächenmaße.	Hohlmaße.
Deutschland.	Metermaß wie in Frankreich	Metermaß wie in Frankreich	1 Scheffel = 50 Liter 1 Faß = 100 Liter 1 Schoppen = 1/2 Liter
England.	1 Meile = 8 Furlongs = 2/3 deutsche Meile = 5280 Fuß 1 Furlong = 40 Ruthen 1 Ruthe = 5 1/2 Yards 1 Fathom = 2 Yards 1 Yard = 3 Fuß = 36 Zoll	1 Acre = 160 □ Ruthen = 4046,7 □ Meter	1 Bushel = 8 Gallons 1 Quarter = 8 Bushels 1 Bushel = 2 Peaks 1 Peak = 2 Gallons 1 Gallon = 4,54346 Liter
Oestreich.	1 Meile = 24000 Fuß = 7586,663 Meter 1 Fuß = 12 Zoll = 0,31611 Meter 1 Elle = 2,465 Fuß 1 Klafter = 6 Fuß 1 Ruthe = 10 Fuß	1 Joch = 1600 □ Klafter = 5755,48 □ Meter	1 Eimer = 40 Maß 1 Maß = 4 Seidel 1 Seidel = 2 Pfiff 1 Maß = 1,415 Liter

Staaten.	Längenmaße.	Flächenmaße.	Hohlmaße.
Griechenland.	1 Stadion = 1000 Pisi 1 Pisi = 1 Meter	1 Stremma = 1000 □ Pisi	1 Kothlis = 10 Mystra 1 Mystra = 10 Kubris 1 Kubri = 0,001 Liter
Hamburg.	1 Fuß = 3 Palmen 1 Palme = 4 Zoll 1 Klafter = 6 Fuß 1 Elle = 2 Fuß 1 Fuß = 0,28642 Meter 1 Marschruthe = 14 Fuß 1 Geestruthe = 16 Fuß	1 Morgen = 600 □ Ruthen 1 Scheffel = 200 □ Geestruthen	1 Fuder = 6 Dhm 1 Dhm = 4 Anker = 5 Eimer 1 Eimer = 4 Viertel 1 Viertel = 2 Stübchen 1 Stübchen = 2 Kannen 1 Kanne = 2 Quartier 1 Quartier = 2 Dessel 1 Stübchen = 3,61022 Liter
Preußen.	1 Meile = 24000 Fuß = 7532,485 Meter 1 Ruthe = 12 Fuß = 144 Zoll 1 Elle = 25,5 Zoll 1 Lachter = 80 Zoll 1 Fuß = 0,31385 Meter	1 Morgen = 180 □ Ruthen = 7532,485 □ Meter	1 Fuder = 4 Dyhost = 6 Dhm 1 Dhm = 2 Eimer 1 Eimer = 2 Anker 1 Anker = 30 Quart 1 Quart = 64 Cubikzoll = 1,145 Liter 1 Tonne = 100 Quart

Staaten.	Längenmaße.	Flächenmaße.	Hohlmaße.
Lübeck.	1 Ruthe = 16 Fuß 1 Elle = 2 Fuß 1 Fuß = 12 Zoll = 0,2879 Meter		1 Fuder = 4 Orhoft 1 Orhoft = 1½ Ohm 1 Ohm = 20 Viertel 1 Viertel = 2 Stübchen 1 Stübchen = 2 Rannen 1 Ranne = 2 Quartier 1 Quartier = 2 Planken 1 Planke = 2 Ort
Sachsen.	1 Meile = 32000 Fuß = 9062,08 Meter 1 Lachter = 2 Meter 1 Elle = 2 Fuß 1 Ruthe = 15½ Fuß 1 Fuß = 12 Zoll = 0,28319 Meter	1 Acker = 300 □ Ruthen = 553423 □ Meter	1 Gebräue = 12 Rufen 1 Rufe = 2 Faß 1 Faß = 2 Viertel 1 Viertel = 2 Tonnen 1 Tonne = 105 Rannen 1 Ranne = 2 Mäffel = 0,93654 Liter
Schweiz.	1 Meile = 2 Wegstunden 1 Elle = 2 Fuß 1 Fuß = 10 Zoll = 0,3 Meter 1 Ruthe = 10 Fuß	1 Suchert = 400 □ Ruthen = 3600 □ Meter	1 Ohm = 4 Eimer 1 Eimer = 25 Maß 1 Maß = 4 Schoppen = 1½ Liter 1 Zuber = 15 Liter

Staaten.	Längenmaße.	Flächenmaße.	Hohlmaße.
Schweden.	1 Meile = 600 Farnar 1 Farnn. = 3 Alnar 1 Alnar = 2 Fot 1 Fot = 12 Berktum 1 Ruthe = 16 Fot 1 Fuß = 0,2969 Meter	1 Tunnland = 2 Spannland 1 Spannland = 16 Koppland 1 Koppland = 3½ Kannland 1 Tunnland = 4936,41 □ Meter	1 Foder = 2 Pepor 1 Pepor = 2 Orhufuden 1 Orhuf. = 1½ Ohm 1 Ohm = 4 Anker 1 Anker = 15 Kannen 1 Kanne = 2 Stop 1 Tunne = 48 Kannen 1 Kanne = 2,61718 Liter
Nord-Amerika.	Wie in England	Wie in England	Wie in England
Portugal und Spanien.	Wie in Frankreich	Wie in Frankreich	Wie in Frankreich
Dänemark.	Wie in Preußen	Wie in Preußen	Wie in Preußen
Aegypten und Türkei.	1 Picq Stambuli = 0,687 Meter 1 Picq Endash = 0,638 Meter		1 Darribba = 2 Ardeb 1 Ardeb = 271 Liter

Staaten.	Getreidemaße.	Gewichtseinheiten.	Besondere Maße.
Frankreich.	1 Kiloliter = 10 Hektoliter (Tonneau) (Setier) 1 Setier = 10 Boisseau 1 Boisseau = 10 Pintez	1 Kilogramm = 1000 Gramm 1 Gramm = 10 Decigramm = 100 Centigramm = 1000 Milligramm = dem Gewichte eines Liters 1 Quintal = 100 Kilogramm 1 Tonne = 1000 " " 1 Pfund = 0,5 " "	1. Altes Livl. Getreidemaß. 1 Last = 48 Lof Weizen, Gerste = 45 Lof Roggen = 60 " Hafer, Erbsen 1 Last Salz = 18 Tonnen rigisch = 18 Liespfund 1 Häringstonne = 96 rig. Stof 1 Korntonne = 108 rig. Stof. 1 Salztonne = 106 ³ / ₄ rig. Stof 1 Last Kalk, Theer, Häringe = 12 Tonnen 1 Last Weizen = 16 Tschetwert 1 " Roggen = 15 " " 1 " Hafer = 20 " " 1 Tschetwert = 3 Lof 1 Dszmina = 1 Lof 3 Rülmit 2 ¹ / ₄ Rülmit = 1 Tschetwert 1 Garnez = 2 ¹ / ₂ Stof
Rußland.	1 Tschetwert = 2 Dszmina 1 Dszmina = 4 Tschetwert 1 Tschetwert = 8 Garnez	1 Berkowiz = 10 Pud 1 Pud = 40 Pfund 1 Pfund = 96 Solotnik 1 Solotnik = 96 Doli 1 Schiffspfund = 20 Liespf. 1 Liespfund = 20 Pfund 1 Pfund = 32 Loth	

Staaten.	Getreidemaße.	Gewichtseinheiten.	Besondere Maße.
England.	1 Last = 2 Tonnen 1 Tonne = 5 Quarters 1 Quarter = 8 Bushels	1 Tonne = 20 Centner 1 Centner = 8 Stein 1 Stein = 14 Pfund 1 Pfund = 453, 5976 Gramm	2. Altes Längenmaß. 1 Faden = 6 Fuß = 3 Ellen 1 Elle = 2 Fuß 1 Fuß = 12 Zoll
Deutschland.	Wie in Frankreich	Wie in Frankreich	3. Flächenmaß.
Oestreich.	1 Muth = 30 Mezen 1 Meze = 16 Maafel 1 Maafel = 4 Futtermaafel 1 Futtermaafel = 2 Becher	1 Centner = 5 Stein 1 Stein = 20 Pfund 1 Pfund = 32 Loth = 560,012 Gramm	1 Dessätine = 2400 □ Saschen = 29400 □ Ellen = 117600 □ Fuß englisch 1 □ Werst = 104 ¹ / ₆ Dessätinen 1 Dessätine = 2,94 Loffstellen livl. = 2,986 Loffstellen kurländisch 1 Loffstelle = 10000 □ Ellen.
Griechenland.	wie das Hohlmaß	1 Tonne = 10 Talenten 1 Talent = 100 Minen 1 Mine = 1500 Drachmen 1 Drachme = 10 Obolen = 1 Gramm 1 Obolus = 10 Gran	

Staaten.	Getreidemaße.	Gewichtseinheiten.	Besondere Maße.
Hamburg.	1 Faß = 2770,742 Cub. Zoll = 54,9615 Liter	1 Centner = 112 Pfund	4. Zeitmaß. 1 Säculum = 100 Jahre
	1 Wispel = 10 Scheffel	1 altes Pfund = 32 Loth = 484,170 Gramm	1 Decennium = 10 Jahre
	1 Scheffel = 2 Faß	1 Schiffpfund = 2½ Centner = 20 Liespfund	1 Lustrum = 5 Jahre
	1 Faß = 2 Himten	1 neues Pfund = 10 Neuloth	1 Jahr = 2 Semester = 4 Quartale = 3 Tertiale
	1 Himten = 4 Spiet.	1 Neuloth = 10 Quint	1 Jahr = 12 Monate = 52 Wochen = 365 Tage (366)
Lübeck.	1 Last = 8 Drömt	1 Pfund = 32 Loth = 484,725 Gramm	1 Monat = 30 Tage (31) = 4 Wochen
	1 Drömt = 3 Tonnen		1 Tag = 24 Stunden
	1 Tonne = 4 Scheffel		1 Stunde = 60 Minuten
	1 Scheffel = 4 Faß = 35,586 Liter		1 Minute = 60 Sekunden
			1 Woche = 6 Arbeitstage
Preußen.	1 Wespel = 24 Scheffel	1 alter Centner = 110 Pfund	5. Papiermaß.
	1 Scheffel = 16 Mezen = 54,9615 Liter	1 Schifflast = 4000 Pfund	1 Ballen = 10 Ries
	1 Klafter Holz = 108 Cubikfuß	1 Pfund = 2 Mark	1 Ries = 20 Buch
	= 3,3389 Cubikmeter	1 Mark = 16 Loth	1 Buch = 24 Bogen Schreibpapier
		1 Loth = 4 Quent	" " = 25 " Druckpapier
	1 Quent = 4 Grän		
	1 Pfund = 467,711 Gramm		

Staaten.	Getreidemaße.	Gewichtseinheiten.	Besondere Maße.
Sachsen.	1 Wespel = 2 Malter 1 Malter = 12 Scheffel 1 Scheffel = 4 Viertel = 103,8287 Liter 1 Viertel = 4 Mezen 1 Meze = 4 Mäßchen	1 Centner = 100 Neupfund = 5 Stein 1 Neupfund = 30 Loth = 300 Quent = 3000 Cent = 30000 Korn = 1/2 Kilogramm	6. Fellwerk. 1 Zimmer = 4 Decher 1 Decher = 10 Stück
Schweden.	1 Tonne = 2 Spann 1 Spann = 16 Koppen 1 Koppe = 1 3/4 Rannen 1 Ranne = 2 Stop	1 Schiffpfund = 20 Liespf. 1 Liespf. = 20 Schalspfund 1 Schalspfund = 32 Loth = 425,3395 Gramm 1 Centner = 120 Pfund	1 Packen = 20 Rollen 1 Rolle = 6 Fell 8. Gezähltes Maß.
Schweiz.	1 Malter = 10 Viertel 1 Viertel = 10 Immi	1 Centner = 10 Stein 1 Stein = 10 Pfund 1 Pfund = 32 Loth = 500 Gramm 1 Pfund = 10 Zehning 1 Zehning = 10 Centaß 1 Centaß = 10 Defaß 1 Defaß = 10 Aß	1 Großtaufend = 1200 Stück 1 Groß = 144 Stück 1 Grobthundert = 120 Stück 1 Schock = 60 Stück 1 Band = 30 Stück 1 Mandel = 15 Stück 1 Duzend = 12 Stück 1 Stieg = 20 Stück

Staaten.	Getreidemaße.	Gewichtseinheiten.	Besondere Maße.
Nord-America.	Wie in England	Wie in England	9. Apothekergewicht. 1 Pfund = 12 Unzen 1 Unze = 8 Drachmen 1 Drachme = 3 Skrupel 1 Skrupel = 20 Gran
Dänemark.	Wie in Preußen	Wie in Preußen	10. Gradmaß. 1 geographische Meile = 15 Grad 1 Grad = 60 Minuten = 3600 Secunden
Portugal und Spanien.	wie das Hohlmaß	1 Quintal = 4 Arrobas 1 Arroba = 32 Arratels 1 Arratel = 16 Oncas 1 Onca = 24 Scrupulos 1 Scrup. = 24 Groas 1 Arratel = 459 Gramm	

315) Je nachdem einer Zahl eine Bedeutung beigelegt ist oder nicht, nennt man sie benannt oder unbenannt. So ist z. B. 3 *℔*. eine benannte, 3 aber eine unbenannte Zahl.

316) Benannte Zahlen sind ferner gleichbenannt, wie 8 *℔*. + 5 *℔*. + 4 *℔*. oder ungleich benannt, wie 3 *℔*. 4 Loth + 5 Loth.

317) Unter Resolviren benannter Zahlen versteht man die Verwandlung der Einheiten höherer Benennung ungleich benannter Zahlen in Einheiten niedriger Benennung. Diese Verwandlung wird durch Multiplication vermittelt. Es sei gegeben z. B.

3 Berkowez zu verwandeln in *℔*.

$$3 \text{ Berk.} = 3 \times 10 \text{ Pud} = 3 \times 10 \times 40 \text{ } \ell. = 1200 \text{ } \ell.$$

Sind Zahlen verschiedener Benennung vorhanden, so beginnt man die Resolution bei der höchsten, indem man ihre Einheiten mit der Verhältnißzahl derselben zu der nächst niedrigeren Benennung multiplicirt und die etwa gegebene Benennung derselben Art hinzuaddirt und so fortfährt, bis man zu derjenigen Benennung gelangt ist, welche gewünscht wird, z. B.

$$\begin{aligned} 2 \text{ Jahre } 241 \text{ Tage } 7 \text{ Stunden } 41 \text{ Minuten} &= x \text{ Minuten} \\ &= (2 \times 365. + 241) \text{ Tage } 7 \text{ Stunden } 41 \text{ Minuten} \\ &= [(2 \times 365 + 241) 24 + 7] \text{ Stunden } 41 \text{ Minuten} \\ &= [(2 \times 365 + 241) 24 + 7] 60 + 41 \text{ Minuten} = 1398701 \text{ Min.} \end{aligned}$$

Steht bei der höhern Benennung ein Bruch, so muß derselbe an der Resolution ebenfalls theilnehmen.

$$\begin{aligned} 4\frac{1}{3} \text{ Werst} = x \text{ Werschoc} &= (4\frac{1}{3} \times 500) \text{ Saschen} = \frac{1}{3} \times 500 \\ &= \frac{1}{3} \times 500 \times 3 \text{ Arschin} = \frac{1}{3} \times 500 \times 3 \times 16 \text{ Werschoc} = 104000 \\ &\text{Werschoc.} \end{aligned}$$

318) Die Aufgabe der Reduction besteht in der Verwandlung gegebener Einheiten niedrigerer Benennung in solche höherer Benennung.

319) Jede höhere Benennung enthält eine gewisse Menge von Einheiten der niedrigeren. Die Anzahl der Einheiten einer niedrigeren Benennung, welche eine Einheit der höheren ausmachen, nennt man Reductionszahl. So ist z. B. für Werst und Saschen die Reductionszahl 500.

320) Die bei der Reduction auftretenden Fälle sind folgende:

a) es sind nur Einheiten der niedrigeren Sorte gegeben; wieviel Einheiten einer höhern Sorte betragen dieselben?

x Liespfund = 38464 Loth

$$38464 \text{ Loth} = {}^3\frac{8}{3}\frac{4}{2}{}^6{}^4 \mathcal{L} = 1202 \mathcal{L} = {}^1\frac{2}{3}\frac{0}{0}{}^2 \mathcal{L}\mathcal{L} = 60\frac{1}{10} \mathcal{L}\mathcal{L}.$$

x Jahr = 9856984 $\frac{3}{4}$ Minuten

$$\begin{aligned} 9856984\frac{3}{4} \text{ Minuten} &= 164283\frac{1}{4}\frac{9}{0} \text{ Stunden} = (164283\frac{1}{4}\frac{9}{0} : 24) \text{ Tage} \\ &= 6845\frac{7}{5}\frac{3}{5}\frac{9}{0} \text{ Tage} = (6845\frac{7}{5}\frac{3}{5}\frac{9}{0} : 365) \text{ Jahre} = 18,7 \text{ Jahre.} \end{aligned}$$

b) x Grade sind gleich 4 Minuten 32 Sekunden; also Einheiten höherer und niedrigerer Sorte gegeben.

1 Grad = 1 . 60 Minuten = 60 . 60 = 3600 Sekunden

$$\begin{aligned} 4 \text{ Minuten } 32 \text{ Sekunden} &= (4 \times 60 + 32) \text{ Sekunden} = 272 \text{ Sekunden} \\ &= \frac{2}{3}\frac{7}{6}\frac{2}{0} \text{ Grad} = 0,07(5) \text{ Grad.} \end{aligned}$$

x Ballen = 4 Ries 5 Buch 20 $\frac{1}{2}$ Bogen

$$1 \text{ Ballen} = 10 \text{ Ries} = 10 . 20 \text{ Buch} = 10 . 20 . 24 \text{ Bogen} = 4800 \text{ Bogen}$$

$$4 \text{ Ries } 5 \text{ Buch } 20\frac{1}{2} \text{ Bogen} = (4 . 20 + 5) \text{ Buch } 20\frac{1}{2} \text{ Bogen}$$

$$= (4 . 20 + 5) 24 + 20\frac{1}{2} \text{ Bogen} = 2060\frac{1}{2} \text{ Bogen}$$

$${}^4\frac{1}{2}{}^2{}^1 \text{ Bogen} = {}^4\frac{1}{2}{}^2{}^1 : 4800 = \frac{4}{3}\frac{1}{6}\frac{2}{0}\frac{1}{0} \text{ Ballen} = 0,429 \text{ Ballen.}$$

321) Falls also nur Einheiten einer niedern Benennung gegeben sind, so dividirt man, um dieselben in Einheiten höherer Benennung zu verwandeln, mit der Reductionszahl in die gegebene. Der etwa bleibende Rest gehört der niedern Benennung an, und läßt sich als Bruch der höhern ausdrücken. Ist die gesuchte Benennung noch entfernter, so wendet man dieses Verfahren mehrmals an oder man dividirt sogleich die Einheiten der gegebenen durch die Reductionszahl zwischen der gegebenen und gesuchten Benennung.

322) Ist die gegebene Zahl mehrfach benannt, so hat man dieselbe erst zu der niedrigsten Benennung zu resolviren und darauf nach der vorigen Regel die Reduction auf die höhere Benennung vorzunehmen. (Beispiel b.)

323) Hat die Zahl der niedrigsten Benennung noch einen Bruch neben sich, so verwandelt man nach der Resolution die erhaltene gemischte Zahl in einen unächten Bruch und dividire denselben durch die Resolutionenzahl der gegebenen niedrigsten und der gesuchten höchsten Benennung.

324) Unter Reduction versteht man ferner auch die Verwandlung der gegebenen Münzen, Maße oder Gewichte des einen Landes in Münze, Maß und Gewicht, wie dieselben in einem andern Lande üblich sind.

Wieviel Fuß russisch sind 10 hamburger lange Ellen?

1 lange Elle = 2,4 Fuß hamburgisch = $2,4 \times 0,28642$ Meter = 0,687408 Meter

1 Fuß russisch = 0,30479 Meter; demnach

$0,687408 \times 10 : 0,30479 = \frac{687408}{30479} = 22,5 \dots$ Fuß russisch.

XXIII. Species in benannten Zahlen.

325) Addition.

a) Gleichbenannte Zahlen werden wie unbenannte addirt und die Summe, falls nothwendig, auf eine höhere Benennung reducirt.

25 <i>℥</i> .		32 <i>℞</i> op.	
14 "		39 "	
18 "		74 "	
34 "		48 "	
19 "		95 "	
110 <i>℥</i> .		100 288 2	
40 110 2		200	
80		88	2 <i>℞</i> bl. 88 <i>℞</i> op.
30	2 <i>℞</i> bl 30 <i>℥</i> .		

b) Sind ungleichbenannte Zahlen zu addiren, so ordnet man die gleichbenannten zunächst untereinander, beginnt dann die Addition bei den Summanden der niedrigsten Benennung, reducirt die Summe auf die nächst höhere Benennung, zählt den Quotienten (welcher Einheiten der nächst näheren vorstellt) zu den Summanden der nächst höheren zu und verfährt mit dieser Summe ebenso, bis sämtliche Benennungen addirt sind.

Beispiel:

4 Werst + 300	Saschen + 2	Arschin + 10 $\frac{1}{4}$	Werchof	12
3 " + 150	" + 1	" + 13 $\frac{3}{4}$	"	3
5 " + 420	" + 1	" + 10 $\frac{1}{3}$	"	9
7 " + 230	" + 2	" + 12 $\frac{2}{3}$	"	4
2 " + 180	" + 1	" + 15 $\frac{1}{2}$	"	8
(2)	(3)	(3)	(2)	6

21 Werst 500	1283	2	3	10	3	16	62	3	$\frac{30}{12}$	$= 2\frac{1}{2}$
	1000			9		48			12	

283 Sacchen 1 Arschin 14 $\frac{1}{2}$ Werchof.

Beispiel:

2 $\frac{2}{3}$ Pud + 20 $\frac{1}{2}$ U. + 9 $\frac{2}{5}$ Berkowetz + 3 $\frac{3}{4}$ U. + 2 Pud 8 $\frac{1}{2}$ U.
 + 10 Berkowetz 2 $\frac{1}{2}$ Pud.

2 $\frac{2}{3}$ Pud	= 0 Berk.	2 Pud	26 $\frac{2}{3}$ U.	}	wo nun,
20 $\frac{1}{2}$ U.	= 0 " 0 "	20 $\frac{1}{2}$ "	20 $\frac{1}{2}$ "		wie im vorigen
9 $\frac{2}{5}$ Berk.	= 9 " 4 "	0 "	0 "		Beispiel,
3 $\frac{3}{4}$ U.	= 0 " 0 "	3 $\frac{3}{4}$ "	3 $\frac{3}{4}$ "		die Addition
2 Pud 8 $\frac{1}{2}$ U.	= 0 " 2 "	8 $\frac{1}{2}$ "	8 $\frac{1}{2}$ "		ausgeföhrt
10 Berk. 2 $\frac{1}{2}$ Pud	= 10 " 2 "	20 "	20 "	werden kann.	

326) Subtraction.

Nach gefchehener richtigen Anordnung, wie bei der Addition, wird die Subtraction ebenfalls bei der niedrigsten Benennung angefangen.

3 Jahre	$\frac{12}{16}$ Monate	5. Tage	$\frac{24}{29}$	6. Stunden	$\frac{60}{66}$	7 $\frac{1}{2}$ Minuten	4
2 "	6 "	4 "	12 "	12 "	30 $\frac{3}{4}$ "	"	2
							6
							3

0 Jahre 10 Monate 0 Tage 17 Stunden 36 $\frac{3}{4}$ Minuten $\frac{3}{4}$

Anmerkung: Reichen die Einheiten des Minuends nicht aus, um die Subtraction zu vollziehen, so lege man eine von dem Minuend der nächsthöhern Benennung geborgte Einheit hinzu.

2. Meilen	7. Werst	5.00 Sacchen	3. Arschin	16 Werchof.
1 "	4 "	300 "	2 "	13 "
0 Meilen	2 Werst	100 Sacchen	0 Arschin	3 Werchof.

327) Multiplication.

- a) Ist der Multiplicator eine ganze Zahl, so hat man jede Benennung des Multiplicandus mit der ganzen Zahl zu multipliciren, wobei man bei der niedrigsten Benennung beginnt und gehörig nach ausgeführter Multiplication reducirt.

(5 Tschw. 1 Dsm. 3 Tschwf. $4\frac{1}{2}$ Garnez) . 7

Anordnung:

5 Tschw. 1 Dsm. 3 Tschwf. $4\frac{1}{2}$ Garnez
 7 7 7 7

35 7 21 $\frac{63}{2} : 8 = \frac{63}{16} = 3\frac{15}{16}$ Tsch. oder

6 6 3

41 Tw. 2 | 13 | 6 4 | 24 | 6 $31\frac{1}{2} : 8 = 3$ Tsch. $7\frac{1}{2}$ Garnez.

12 24

1 Dsm. 0 Tschwf.

Also das Product 41 Tschw. 1 Dsm. $7\frac{1}{2}$ Garnez.

- b) Ist der Multiplicator ein Bruch, so resolvirt man den Multiplicandus auf seine niedrigste Benennung, multiplicirt alsdann und reducirt das erhaltene Product so weit es angeht.

(5 Ballen 4 Ries 2 Buch $7\frac{1}{2}$ Bogen) \times 53

5 Ballen

\times 10

50

+ 4 128536 Bogen = 5772 Buch 18 Bogen.

54 Ries

= 188 Ries 12 Buch 18 Bogen.

\times 20

= 28 Ballen 8 Ries 12 Buch 18 Bog.

1080

+ 2

1082 Buch

\times 24

4328

2164

25968

+ $7\frac{1}{2}$

25975 $\frac{1}{2}$ Bogen

$\frac{51951}{2} \times \frac{16}{3} = \frac{831216}{6} = 138536$ Bogen

328) Division.

- a) Ist der Divisor eine ganze Zahl, so dividirt man die höchste Benennung des Dividendus durch den Divisor, resolvirt den etwa erhaltenen Rest auf die nächste niedere Benennung, dividirt darauf wieder, verfährt mit dem zweiten Reste ebenso wie früher und setzt die Division fort, bis man auf die niedrigste Benennung gekommen ist.

1. Beispiel:

(8 Botſcha 7 Wedro 6 Kruschf. $10\frac{1}{2}$ Tschf.) : 3.

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 8} \mid 2 \text{ Botſcha.} \\ \underline{6} \\ 2 \\ \times 40 \\ \underline{80} \\ 7 \\ 3 \overline{) 87} \mid 29 \text{ Wedro} \\ \underline{6} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 3 \overline{) 6} \mid = 2 \text{ Kruschfen.} \\ 3 \overline{) 21} \mid = 7 = 3\frac{1}{2} \text{ Tschf.} \\ \underline{2} \end{array}$$

2. Beispiel:

(4 Ruthe 7 Fuß 8 Zoll 10 Linien) : 3

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 4} \mid 1 \text{ Ruthe} \\ \underline{1 \times 12 + 7 = 19} \text{ Fuß} \\ 3 \overline{) 19} \mid 6 \text{ Fuß} \\ \underline{18} \\ 1 \times 12 + 8 = 20 \text{ Zoll} \\ 3 \overline{) 20} \mid = 6 \text{ Zoll} \\ \underline{18} \\ 2 \times 12 + 10 = 34 \text{ Lin.} \\ 3 \overline{) 34} \mid 11\frac{1}{3} \text{ Linien.} \\ \underline{33} \end{array}$$

Quotient:

1 Ruthe 6 Fuß 6 Zoll $11\frac{1}{3}$ Lin.

- b) Ist der Divisor ein Bruch, so multiplicirt man den Dividendus mit dem Nenner des Bruches, und dividirt das erhaltene Product durch den Zähler; d. h. man verwandelt die Divisions- in eine Multiplications-Aufgabe, oder resolvirt den Dividendus, führt sodann die Division aus und reducirt den erhaltenen Quotienten.

(41 Jahre 5 Monate 6 Tage $7\frac{1}{2}$ Stunden) : $\frac{3}{4}$ =

(41 " 5 " 6 " $7\frac{1}{2}$ ") $\times \frac{4}{3}$

41 Jahre 5 Monate 6 Tage $7\frac{1}{2}$ Stunden
 $\times 4$ $\times 4$ $\times 4$ $\times 4$

165 Jahre 12 | 20 | 1 25 Tage 24 | 30 | 1

$\frac{12}{8}$ Monate $\frac{24}{6}$ Stunden

(165 Jahre 8 Monate 25 Tage 6 Stunden) : 3

4 | 165 | 55 Jahre

$\frac{15}{15}$

$\frac{15}{15}$

$\frac{15}{15}$

3 | 8 | 2 Monate Der gefuchte Quotient ist demnach:

$\frac{6}{2}$ 55 Jahre 2 Monate 28 Tage 10 Stunden.

$\frac{2}{2}$

$\frac{30 + 25}{30 + 25}$

3 | 85 | 28 Tage

$\frac{6}{25}$

$\frac{25}{24}$

$\frac{24}{1}$

$\frac{24 + 6}{24 + 6}$

3 | 30 | 10 Stunden

$\frac{30}{30}$

Beispiel 2.

Wieviel Anker sind der fünfte Theil von 2 Anker 2 Wedro $9\frac{1}{2}$ Stof?

2 Anker 2 Wedro $9\frac{1}{2}$ Stof sind = $89\frac{1}{2}$ Stof

$89\frac{1}{2}$ Stof : 5 = $\frac{179}{2} : 5 = \frac{179}{10} = 17,9$ Stof

1 Anker = 30 Stof

$17,9 : 30 = 0,596\dots$ Anker

= 7 Wedro $7\frac{9}{10}$ Stof.

XXIV. Einfache Regelbetrie.

329) Die Aufgabe der einfachen Regelbetrie besteht in der Berechnung einer unbekanntes Größe aus drei gegebenen Bekannten.

330) Je zwei der 4 Größen sind von gleicher Benennung und stehen zu einander in einer gewissen Beziehung. Sie sind gerade proportional, wenn bei Zu- oder Abnahme des einen Verhältnisses auch die des andern gleichzeitig zu- oder abnehmen muß; sie sind umgekehrt (indirect) proportional, wenn sie in solchem Zusammenhange stehen, daß das eine Verhältniß abnimmt, wenn das andere zunimmt, oder das eine zunimmt, wenn das andere abnimmt.

Waare und Preis sind direct proportional; denn je mehr Waare, um so höher der Preis.

Arbeiterzahl und die erforderliche Zeit sind indirect proportional.

Druck und Dichtigkeit sind gerade proportional.

Dichtigkeit und Volumen indirect proportional u. s. w.

331) Das Verhältniß von zwei benannten Zahlen kann auf ein Verhältniß zweier unbenannten Zahlen stets zurückgeführt werden, vorausgesetzt daß sie durch gleiche Benennung ausgedrückt werden können. Es verhalten sich z. B.

$$5 \text{ U.} : 3 \text{ U.} = 5 : 3$$

$$(4 \text{ L. U. } 4 \text{ U.}) : 20 \text{ Loth}$$

$$= 2688 \text{ Loth} : 20 \text{ Loth} = 2688 : 20 = 672 : 5.$$

332) Schließt man von dem Preise mehrerer Gewichtseinheiten einer Waare auf den Preis einer Gewichtseinheit zurück, so nennt man dieses Verfahren „Zurückgehen auf die Einheit“ oder „den Schluß auf Eins“.

$$8 \text{ U.} \text{ kosten } 40 \text{ Kop.}; \text{ also } 1 \text{ U.} = \frac{40}{8} = 5 \text{ Kop.}$$

333) Je nachdem man aus den 4 Größen einer Regelbetrie-Aufgabe je 2 richtige Verhältnisse bildet und dieselben zu einer Proportion verbindet, aus welcher die 4te unbekanntes Größe berechnet wird, oder je nachdem man nach Zurückgehen auf die Einheit von letzterer wieder auf eine andere Mehrheit zurück-

geht, unterscheidet man Regelbeträge mittelst „Proportions-“ oder „Schlußrechnung“.

334) Um eine Regelbetragsaufgabe nach der Schlußrechnung (durch Raisonnement) zu berechnen, setzt man die gegebenen Glieder einander gleich und schreibt darunter das Frageglied gleich x an, geht nun aus dem Gegebenen auf die Einheit zurück und von dieser auf das Frageglied.

$$9 \text{ U.} = 63 \text{ Kop.}$$

$$13 \text{ U.} = x.$$

$$4 \text{ Pud } 9 \text{ U.} = 338 \text{ Rbl. wieviel}$$

$$5 \text{ Pud } 4 \text{ U.} = x.$$

$$9 \text{ U. kosten } 63 \text{ Kop.}; \text{ also}$$

$$1 \text{ U. kostet } \frac{63}{9} = 7 \text{ Kop. u. demnach}$$

$$13 \text{ U.} = 7 \cdot 13 = 91 \text{ Kop.}$$

$$169 \text{ U.} = 338 \text{ Rbl.}$$

$$1 \text{ U.} = \frac{338}{169} = 2 \text{ Rbl.}; \text{ also}$$

$$5 \text{ P. } 4 \text{ U.} = 204 \text{ U.} = 204 \cdot 2 \text{ R.} = 408 \text{ R.}$$

Sind Brüche vorhanden, so muß auf die Einheiten derselben, d. h. auf die Stammbrüche zurückgegangen werden.

$$\left. \begin{array}{l} 3\frac{3}{4} \text{ U.} = 2,40 \text{ Kop.} \\ 4\frac{1}{3} \text{ U.} = x \end{array} \right\} \text{ oder}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1\frac{3}{4} \text{ U.} = 2,40 \text{ Kop.} \\ 1\frac{2}{3} \text{ U.} = x \end{array} \right\} \text{ oder}$$

$$1\frac{3}{4} \text{ U.} = 2,40 \text{ Kop.}$$

$$\frac{1}{4} \text{ U.} = \frac{2,40}{15} \text{ oder } 15 \times \text{weniger}$$

$$\frac{3}{4} = 1 = \frac{4}{4} \text{ U.} = \frac{2,40 \cdot 4}{15} \text{ oder } 4 \times \text{mehr.}$$

$$\frac{1}{3} \text{ U.} = \frac{2,40 \cdot 4}{15 \cdot 3} \text{ oder } 3 \times \text{weniger}$$

$$\text{also } 1\frac{2}{3} \text{ U.} = \frac{2,40 \cdot 4 \cdot 13}{15 \cdot 3}, 13 \times \text{mehr}$$

demnach

$$4\frac{1}{3} \text{ U.} = 2,77\frac{1}{3} \text{ Kop.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \text{ U. } 4\frac{1}{4} \text{ Loth} = 5\frac{1}{2} \text{ Rbl.} \\ 1 \text{ U. } 8\frac{2}{5} \text{ Loth} = x \end{array} \right\} \text{ oder}$$

$$\left. \begin{array}{l} 68\frac{1}{4} \text{ Loth} = 5\frac{1}{2} \text{ Rbl.} \\ 40\frac{2}{5} \text{ Loth} = x \end{array} \right\} \text{ oder}$$

$$68,25 \text{ Loth} = 5,50 \text{ Rbl.}$$

$$40,40 \text{ Loth} = x$$

$$68,25 \text{ Loth} = 5,50 \text{ Rbl.}$$

$$1 \text{ Loth} = \frac{5,50}{68,25} \text{ Rbl.}$$

$$40,40 \text{ Loth} = \frac{5,50 \cdot 40,40}{68,25} \text{ Rbl. oder}$$

$$1 \text{ fl. } 8\frac{2}{5} \text{ Loth} = 3,25 \text{ Rbl.}$$

335) Falls die Verhältnisse einander entgegengesetzt sind, so schließe man folgendermaßen:

$$30 \text{ Arbeiter} = 40 \text{ Tage}$$

$$50 \text{ Arbeiter} = x \quad "$$

$$30 \text{ Arbeiter} = 40 \text{ Tage}$$

$$1 \text{ Arbeiter} = 40 \cdot \frac{30}{50} \text{ T., } 40 \times \text{ mehr}$$

$$50 \text{ Arbeiter} = \frac{40 \cdot 30}{50} \text{ T., } 50 \times \text{ weniger}$$

$$= 24 \text{ Tage.}$$

336) Wenn das Regelbetriebsexempel mittelst der Proportionslehre herausgerechnet werden soll, so setzt man aus je zwei der gleichartigen Dinge ein Verhältniß zusammen, und bildet aus beiden Verhältnissen eine geometrische Proportion, aus welcher die 4te unbekannte Größe sich finden läßt. Hierbei beachte man folgende Regeln: 1) Sind die gegebenen Größen direct proportional, so setzt man an: Erstes Glied der Angabe zum ersten Gliede der Frage, wie das zweite Glied der Angabe zum unbekanntem Gliede. 2) Sind die Größen indirect proportional, so setzt man: 1. Glied der Frage zum 1. Gliede der Angabe, wie das zweite Glied der Angabe zum Unbekannten (x).

$$\begin{array}{l} 4 \text{ fl.} = 68 \text{ Kop.} \\ 11 \text{ fl.} = x \quad " \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4 \text{ fl.} = 68 \text{ Kop.} \\ 11 \text{ fl.} = x \quad " \end{array}} \right\} \text{ direct.} \quad \begin{array}{l} 10 \text{ Arbeiter} = 50 \text{ Tage} \\ 20 \text{ Arbeiter} = x \quad " \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 10 \text{ Arbeiter} = 50 \text{ Tage} \\ 20 \text{ Arbeiter} = x \quad " \end{array}} \right\} \text{ indirect}$$

$$4 \text{ fl.} : 11 \text{ fl.} = 68 \text{ Kop.} : x \text{ oder } 20 : 10 = 50 : x \text{ oder}$$

$$4 : 11 = 68 : x \text{ oder verkürzt } 2 : 10 = 5 : x$$

$$1 : 11 = 17 : x \quad 1 : 5 = 5 : x$$

$$x = 11 \cdot 17 = 1,87 \text{ Kop.} \quad x = 25 \text{ Tage.}$$

337) Sind die Glieder mit Brüchen behaftet, so schaffe man die Nenner derselben durch Multiplication mit dem Generalnenner fort.

$$\left. \begin{array}{l} 4\frac{1}{2} \text{ W.} = 2\frac{1}{6} \text{ Mbl.} \\ 3\frac{3}{4} \text{ W.} = x \end{array} \right\} \text{ oder } \begin{array}{l} 8 \text{ Arbeiter} = 6\frac{2}{3} \text{ Wochen} \\ x \text{ Arbeiter} = 10\frac{2}{3} \text{ Wochen} \end{array}$$

$$\frac{9\frac{1}{2} \text{ W.} = 13\frac{1}{6} \text{ Mbl.}}{15\frac{1}{4} \text{ W.} = x} \quad \frac{10\frac{2}{3} : 6\frac{2}{3} = 8 : x \text{ oder}}{32\frac{2}{3} : 20\frac{2}{3} = 8 : x \text{ oder}}$$

$$\frac{9\frac{1}{2} : 15\frac{1}{4} = 13\frac{1}{6} : x \text{ oder}}{27\frac{1}{6} : 15\frac{1}{4} = 13\frac{1}{6} : x \text{ oder}} \quad \frac{32 : \frac{20}{3} = 24 : x \text{ oder}}{96 : 20 = 24 : x}$$

$$27 : \frac{15}{4} = 13 : x \quad x = \frac{20 \cdot 24}{96} = 5 \text{ Arbeiter.}$$

$$27 : 15 = 13 : 4x$$

$$x = \frac{15 \cdot 13}{108} = 1\frac{29}{36} \text{ Mbl.}$$

XXV. Zusammengesetzte Regelbetrie.

338) In der einfachen Regelbetrie bezieht man das 3. und 4. Glied auf ein Verhältniß zwischen dem 1. und 2. Gliede. Hängt aber der Werth des Verhältnisses, darin die Unbekannte sich befindet, von mehreren vorhergegebenen Verhältnissen ab, so führt die Berechnung der gegebenen Größen auf die sogenannte zusammengesetzte Regelbetrie.

339) Eine solche Aufgabe der Regelbetrie läßt sich ebenfalls durch die Schlußrechnung oder mittelst Proportionalrechnung lösen und zwar zunächst so, daß man die Rechnung mit mehreren Verhältnissen auf die Berechnung einer einfachen Regelbetriaufgabe zurückführt.

340) Regelbetrie durch Schlußrechnung.

Aufgabe: 20 Handlager schöpfen einen rechteckigen Teich von 18' Länge und 12' Breite in 4 Tagen aus; wie lange wird das Ausschöpfen eines gleich tiefen Teiches von 16' Länge und 14' Breite währen, wenn 24 Leute die Arbeit unternehmen? (die Kraft aller Arbeiter wird als gleich angenommen, desgleichen die Geschwindigkeit ihrer Leistungen).

20 Arbeiter	4 Tage	18' Länge = 4 Tage	12' Breite = 4 T.
24 " x "	" "	16' " = x "	14' " = x "
20 Arbeiter	4 Tage	18' Länge = 4 Tage	12' Breite = 4 T.
1 " 4. 20 T.		1' " = $\frac{4}{18}$ "	1' " = $\frac{4}{12}$ "
24 " $\frac{4.20}{24}$ T.		16' " = $\frac{4.16}{18}$ T.	14' " = $\frac{4.14}{12}$ T.

werden die Einzelsösungen für jede Angabe sein. Um nun den Werth des einen Verhältnisses auf das andere zu übertragen, setzt man:

$$\begin{array}{r}
 18 \text{ Länge} = \frac{4 \cdot 20}{24} \\
 1 \quad \quad = \frac{4 \cdot 20}{24 \cdot 18} \\
 16 \quad \quad = \frac{16 \cdot 4 \cdot 20}{24 \cdot 18} \\
 x = 14' \text{ Br.} = \frac{14 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 20}{24 \cdot 18 \cdot 12} = 3^{37/81} \text{ T.}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 12' \text{ Breite} = \frac{16 \cdot 4 \cdot 20}{24 \cdot 18} \\
 12' \text{ Breite} = \frac{16 \cdot 4 \cdot 20}{24 \cdot 18} \\
 1' \quad \quad = \frac{16 \cdot 4 \cdot 20}{24 \cdot 18 \cdot 12}
 \end{array}$$

341) Die Aufgaben der zusammengesetzten Regelbetrie erheischen folgende Form des Ansatzes:

50 Rinder weid. 1 Ackerfeld v. 800 □ Fd. ab in 8 Tag. bei 4 Weidestund.

60 " " 1 " " 600 □ " " " x " " 3 "

Wie lange können 60 Rinder bei 3 Stunden Weide von einem Felde von 600 □ Faden gefüttert werden?

50 Rinder 8 Tage

1 Rind 8. 50 Tage

60 " $\frac{8 \cdot 50}{60}$ " indirectes Verhältniß

800 □ Faden $\frac{8 \cdot 50}{60}$ Tage

1 □ " $\frac{8 \cdot 50}{60 \cdot 800}$ Tage

600 □ " $\frac{8 \cdot 50 \cdot 600}{60 \cdot 800}$ Tage directes Verhältniß

$$\begin{array}{l}
 4 \text{ Weidestunden} \quad \frac{8 \cdot 50 \cdot 600}{60 \cdot 800} \text{ Tage} \\
 1 \quad " \quad \frac{8 \cdot 50 \cdot 600 \cdot 4}{60 \cdot 800} \text{ Tage} \\
 3 \quad " \quad \frac{8 \cdot 50 \cdot 600 \cdot 4}{60 \cdot 800 \cdot 3} \text{ Tage indir. Verhältniß.}
 \end{array}$$

$$x = \frac{600 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 4}{800 \cdot 60 \cdot 3} = \frac{600}{800} \cdot \frac{50}{60} \cdot \frac{4}{3} \cdot 8 = 6\frac{2}{3} \text{ Tage.}$$

Aus diesem Beispiele ergibt sich demnach als mechanische Regel: Man multiplicirt das über der Frage stehende Glied mit dem aus je zwei der gleichartigen Glieder gebildeten Verhältnissen, nachdem man vorher bestimmt hat, ob dieselben fallend oder steigend sind.

342) Basedowscher Säulenansatz:

Hiernach schreibt man die Angabe auf die linke, die Frage auf die rechte Seite eines Vertikalstrichs und nennt dieses den unberichtigten Ansatz. Berichtigt wird er, wenn man Alles Andere als gleich annimmt und diejenigen Größen, welche mit der gesuchten Größe gerade proportional sind, links und rechts des Strichs gegeneinander vertauscht, die mit der Unbekannten aber indirect proportionalen Zahlen stehen läßt. Obige Aufgabe würde nach dieser Regel folgendermaßen gerechnet werden:

8 Tage	x Tage	8	x
50 Rinder	60 Rinder	50	60
800 Faden	600 Faden	600	800
4 Stück	3 Stück	4	3
		4 · 5	3x
		x =	6 $\frac{2}{3}$ Tag.

Hierbei werden diejenigen Zahlen gehoben, welche durch einerlei Zahl theilbar sind.

343) Um die Probe zu machen, ob richtig gerechnet worden, nimmt man ein anderes Glied der Frage als Unbekannte an und bezieht die gegebenen Angaben nunmehr auf diese Unbekannte, wobei die ursprüngliche Unbekannte resultiren muß.

344) Um eine Aufgabe der zusammengesetzten Regelbetr. mittelst Proportionen zu lösen, ordnet man unter der Angabe die Frage, d. h. die gleichartigen Glieder unter einander, und verfährt wie in der folgenden Aufgabe, so in allen übrigen:

400 Mann Soldaten reichen bei 3 Mahlzeiten täglich mit 3600 \mathcal{L} . Brod 10 Tage aus, wie viel \mathcal{L} . Brod haben 600 Mann auf 6 Tage bei täglich 4 Mahlzeiten nöthig?

400 Mann 3600 \mathcal{L} . 3 Mahlz. 10 Tage
600 " x " 4 " 6 "

Je mehr Mann, um so mehr Brod, das

Verhältniß steigend 400 : 600 = 3600 : u

Je mehr Mahlzeiten, um so mehr Brod,

das Verhältniß steigend 3 : 4 = u : v

Je weniger Tage, um so weniger Brod,

das Verhältniß fallend 10 : 6 = v : x

Und indem man die Proportionen vereinigt:

$(400 \cdot 3 \cdot 10) : (600 \cdot 4 \cdot 6) = 3600 : x$

$$x = \frac{600 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3600}{400 \cdot 3 \cdot 10} = 4320 \mathcal{L} \text{ Brod.}$$

345) Kommen in der Aufgabe Brüche vor, so kann die Multiplication derselben mit den andern Factoren vermieden werden, wenn man die Nenner als Divisore ansieht und sie auf die entgegengesetzte Seite der Säule setzt.

10 Steinhauer pflastern eine Straße von 400 Faden Länge und $4\frac{1}{2}$ Faden Breite in $8\frac{1}{2}$ Tagen, wenn sie täglich 8 Stunden arbeiten und verbrauchen dabei 240000 Cubik-Fuß Steine. Wie viel Stunden täglich müssen 18 Leute arbeiten, um eine Straße von 360 Faden Länge und $3\frac{1}{2}$ Faden Breite mit 280000 Cubik-Fuß zu pflastern, wenn sie in zwanzig Tagen fertig sein wollen?

10 St. 400 Fd. Länge $4\frac{1}{2}$ Fd. Breite 240000 Cub. $' 8\frac{1}{2}$ Tag. 8 St.
18 " 360 " " $3\frac{1}{3}$ " " 280000 " 20 " x "

Je mehr Arbeiter, um so weniger Zeit	10 : 18	= 8 : u
Je länger die Straße, um so mehr Zeit	400 : 360	= u : v
Je schmaler, um so weniger Zeit	$4\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$	= v : w
Je mehr Steine, um so mehr Zeit	240000 : 280000	= w : z
Je mehr Tage, um so weniger Stunden	20 : $8\frac{1}{2}$	= z : x

$$x = \frac{18.360.10\frac{1}{3}.280000.17\frac{1}{2}.8}{10.400.9\frac{1}{2}.240000.20} = \frac{18.360.10.280000.17.8.2}{10.400.9.240000.20.3.2} = 4^{19\frac{1}{25}} \text{ St.}$$

Anmerkung. Man unterlasse nicht die Verhältnisse, sofern es angeht, durch kleinere Zahlen auszudrücken.

XXVI. Zeitrechnung.

346) Die Aufgabe der Zeitrechnung ist eine dreifache: Es soll 1) der Anfang, 2) die Dauer und 3) das Ende eines Ereignisses angegeben werden. Anfang und Ende werden bezeichnet durch ein gegebenes Datum, z. B.: Luther wurde den 10. November 1483 geboren. Hierbei zeigt die Jahreszahl 1483 nicht an, daß seit Anfang unserer Zeitrechnung, d. h. seit Christi Geburt 1483, sondern nur 1482 volle Jahre bis zur Geburt Luthers verfloßen waren. Da das Ereigniß am 10. November stattfand, so waren außer 1482 vollen Jahren noch 10 volle Monate und 9 volle Tage verfloßen. Uebersetzung des Datums in verfloßene Zeit, und umgekehrte Uebungen.

347) Erklärung des Kalenders. Alter und neuer Styl. Ungleichheit der Monatslängen. Die Tages- und Nachtlängen in den verschiedenen Monaten. Zeitgleichung.

348) Zeitrechnung im Alterthum. Tageseintheilung bei andern Völkern.

349) Osternberechnung nach Gauß. Bewegliche Feste.

Bezeichnet J das laufende Jahr des Jahrhunderts und sind a, b, c, d, e die kleinsten Reste der Divisionen $\frac{J+14}{19}$;

$\frac{4}{J}$; $\frac{J+1}{7}$; $\frac{19a+23}{30}$ und $\frac{2(b+2c+3d+2)}{7}$, so fällt Ostern auf den $(22+d+e)$ ten März oder den $(d+e-9)$ ten April.

So findet man z. B. für das Jahr 1890, $a=4$; $b=2$; $c=1$; $d=9$; $e=3$; demnach Ostern den 3ten April neuen oder den 15ten April alten Stils.

350) Die Dauer eines Ereignisses wird gefunden, wenn man die bis zum Anfang verfllossene Zeit von der bis zum Ende verfllossenen subtrahirt.

Luther starb den 18. Februar 1546. Wie alt wurde er?

1545. Jahre $\frac{12}{13}$ Monat 17 Tage

1482 " 10 " 9 "

62 Jahre 3 Monate 8 Tage.

351) Der Anfang wird berechnet, wenn die Dauer von der bis zum Ende verfllossenen Zeit subtrahirt wird. Jemand starb, nachdem er ein Alter von 46 Jahren 5 Monaten 2 Tagen $15\frac{1}{2}$ Stunden erreicht hatte, den 23. August 1834 um $\frac{1}{4}$ Uhr Morgens. Wann war derselbe geboren?

1833 Jahre 7 Mon. 22. Tage $\frac{24}{27}$ Stunden 30 Min.

46 " 5 " 2 " 15 " 30 "

1787 Jahre 2 Mon. 19 Tage 12 Stunden — Min.

Im Jahre 1788 den 20. März 12 Uhr Mittags.

352) Das Ende des Ereignisses wird gefunden, wenn die Dauer zum Anfange addirt wird. Jemand wurde 1846 den 7ten October $5\frac{1}{2}$ Uhr Nachmittags geboren und heirathete, als er 26 Jahre 8 Monate 18 Tage alt war. An welchem Datum war die Trauung?

1845 Jahre 9 Mon. 6 Tage 17 Stunden 30 Min.

26 " 8 " 18 " — " — "

1872 J. $\frac{12}{5}$ $\frac{17}{5}$ Mon. 24 Tage 17 Stunden 30 Min.

1873 den 25. Juni $5\frac{1}{2}$ Uhr Nachmittags.

XXVII. Zinsrechnung.

353) Eine Summe Geldes, welche eine Person auf eine festgesetzte Zeit verleiht, wird Capital und die Vergütung, welche dieselbe für die Benutzung des Capitals erhält, wird Zins, Renten genannt. Der Ausleiher heißt Gläubiger (Creditor) der Empfänger Schuldner (Debitor). Die Zinsen werden stets auf 100 Münzeinheiten für ein Jahr berechnet und angegeben, was man Zinsfuß oder Procente (%) nennt. Der landesübliche Zinsfuß schwankt zwischen 4—10 Procent.

354) Zahlt der Schuldner nach Ablauf eines jeden Jahres seine Zinsen dem Creditor, so nennt man diese Summe „einfache Zinsen“ und die Berechnung derselben „einfache Zinsrechnung.“

Bezeichnet man das ausgeliehene Capital mit a , den Zinsfuß mit p , ferner die Anzahl der Jahre, welche das Capital benutzt wird, mit n und die Summe aller Jahreszinsen mit z , so folgt nach der zusammengesetzten Regelbetri:

100 Rbl. geben p Rbl. in 1 Jahr ($a > 100$)
 a " " x " " n "

$$100 : a = p : z$$

$$1 : n = z : x$$

$x = \frac{apn}{100}$ und da das x die Zinsen bezeichnet, somit

die Hauptformel zur Berechnung der Zinsen

$$1) z = \frac{apn}{100}$$

355) Man hat bei der Zinsrechnung auf 4 Umstände zu achten: 1) auf die Größe des Darlehns (a); 2) auf den Zinsfuß (p); 3) auf die Zinsen (z) und 4) auf die Zeit (n). Sind 3 dieser Elemente gegeben, läßt sich das 4. finden. Durch Umformung der obigen Formel (1) nach a und n und p folgt sogleich:

$$2) a = \frac{100z}{pn} \quad 3) p = \frac{100z}{an} \quad 4) n = \frac{100z}{ap}$$

356) Beispiele zur Anwendung der eben aufgestellten Formeln. Berechnung von Aufgaben der Zinsrechnung mittelst Schlußrechnung. Wie groß sind die Zinsen von 3600 Rubel zu 6% in $4\frac{1}{2}$ Jahren?

100 Rubl. geben 6 in 1 Jahr

1 " giebt $\frac{6}{100}$ in 1 Jahr

3600 " geben $\frac{6 \cdot 3600}{100}$ in 1 Jahr.

3600 Rubl. geben $\frac{6 \times 3600}{100} \cdot \frac{9}{2}$, in $4\frac{1}{2}$ Jahren also 972 Rubl.

357) Zahlt man die Zinsen nicht jährlich, sondern nach Ablauf der ganzen Darlehnszeit sämtliche Zinsen nebst dem Capitale zurück, so nennt man dieses den Endwerth des Capitales (k) im Gegensatz zu dem Anfangswerthe (a). Die 4 Formel zwischen Zeit, Zinsfuß, Anfangs- und Endwerth ergeben sich folgendermaßen:

Die Zinsen des Capitals a betragen zu p Procent in n Jahren $z = \frac{anp}{100}$ daher der gesuchte Endwerth

$$5) k = a + \frac{anp}{100} = \frac{a}{100}(100 + np) \text{ und durch Umformung nach a, n, p,}$$

$$6) a = 100 k : (100 + np)$$

$$7) p = \frac{100}{an} (k - a) \qquad 8) n = \frac{100}{ap} (k - a)$$

358) Der Anfangswerth eines Capitals ist stets kleiner als der Endwerth; also hat eine Summe, welche erst nach Ablauf mehrerer Jahren auszahlfähig ist, nur einen Nominalwerth; wieviel ihr Werth aber jetzt beträgt oder wieviel für dieselbe jetzt gezahlt werden kann, zeigt die Formel (6). Soll dieser Werth a gleich ausgezahlt werden, so muß dem Empfänger ein Abzug gemacht werden, welcher Disconto genannt wird. Dasselbe beträgt, wie leicht einzusehen ist:

$$9) d = k - \frac{100 k}{100 + np} = \frac{knp}{100 + np}$$

dieses Disconto heißt das Hoffmannsche, die 3 andern Formeln zwischen d , k , n , p und a sind:

$$10) d = \frac{a}{100} (100 + np) - a = \frac{anp}{100}; k = \frac{d(np + 100)}{np}$$

$$11) n = 100 d : p (k - d)$$

$$12) p = 100 d : n (k - d).$$

Jemand soll bei seiner Mündigkeit ein Capital von 10000 R. antreten; umständehalber muß dieses Anrecht früher, 12 Jahre vor dem 21ten Jahr verkauft werden; wieviel kann jetzt gezahlt werden und wie groß ist der Verlust, wenn der Zinsfuß 5 zu Grunde gelegt wird?

$$\text{Nach (6) ist } a = \frac{100 \times 10000}{100 + 9 \times 5} = \frac{10000}{145} = 6896 \text{ Rbl. } 55 \text{ Kop.}$$

$$\text{" (9) " } d = \frac{100000 \times 9 \times 5}{100 + 9 \times 5} = \frac{450000}{145} = 3103 \text{ " } 45 \text{ "}$$

XXVIII. Rabattrechnung.

359) Das Wort Rabatt bedeutet einen Abzug. Im kaufmännischen Verkehre werden die Waaren bald auf Credit, bald gegen Baarzahlung bezogen; erlaubt der Verkäufer dem Käufer im Falle der Baarzahlung oder aus andern Gründen einen bestimmten Abzug, so sagt man, er habe einen Rabatt bewilligt. Wiederverkäufer beanspruchen stets einen Rabatt. Dieser Abzug kann auf zweierlei Art berechnet werden: 1) erhält der Käufer entweder auf je 100 Rbl. Einkauf einer Waare eine Zulage von 5 Rbl. (5 Procent Rabatt auf Hundert) oder 2) für 100 Rbl. Einkauf zahlt der Käufer nur 95 Rbl. (5 Procent Rabatt in Hundert).

360) Beträgt der Rabatt auf Hundert p und derjenige in 100 Rbl. = q , so wird 1) abgelassen von $(100 + p)$ Rbl. p Rbl. und 2) von 100 Rbl. — p Rbl. Soll in beiden Fällen der gleichvielte Theil abgelassen werden, so besteht die Proportion:

$$p : q = (100 + p) : 100 \text{ woraus}$$

$$1) p = \frac{100 q}{100 - q}$$

$$2) q = \frac{100 p}{100 + p}$$

361) Es seien a Rbl. 1) mit p Procent auf 100 Rbl. 2) mit p Procent in 100 Rbl. Rabatt zahlbar. Nach den Discontoformeln ist.

$$R I = \frac{ap}{100 + p}; R II = \frac{ap}{100}$$

$$\text{u. } R II - R I = \left(\frac{ap}{100}\right) - \left(\frac{ap}{100 + p}\right) = \frac{ap^2}{(100 + p)100}; \text{ also } R II > R I$$

Der zweite Rabatt d. h. derjenige in 100 ist für den Käufer vortheilhafter.

Ist z. B. $a = 2000$ Rbl.; $p = 15\%$ (welcher in Buchhandel meist gerechnet wird) so ist

$$R I = 260,87 \text{ Kop.}; R II = 300 \text{ Rbl.}$$

362) Die wirkliche Zahlung beträgt demnach in beiden Fällen

$$Z I = a - \frac{ap}{100 + p} = \frac{100 a}{100 + p}$$

$$Z II = a - \frac{ap}{100} = \frac{a}{100} (100 - p)$$

Ein Buchhändler bezieht von einem andern 600 Exemplare eines Buches, zu dem Ladenpreise zu 75 Kop. mit 12% Rabatt in Hundert. Wie viel hat der Käufer dem Verleger zu zahlen? Der Ladenpreis ist $600 \times 75 = 450$ Rbl.

$$\text{daher } Z II = \frac{450}{100} (100 - 12) = 390 \text{ Rbl.}$$

363) Unter dem Ausdrucke Spesen versteht man in kaufmännischen Verkehr Auslagen oder Unkosten oder auch Verluste an Gewicht. Je nach Umständen werden für die Spesen 1—5 Procent angerechnet, und zwar ganz wie der bei der Rabattrechnung entweder auf Hundert oder in Hundert. Eine Waare

ist 150 Rbl. pro Pud gekauft; wegen Transports und Gewichtsverlustes werden beim Wiederverkauf 20 Procent Spesen berechnet, wieviel muß der Verkäufer beanspruchen?

$$s = 150 \times \frac{120}{100} = 180 \text{ Rbl.}$$

364) Die von dem Käufer bezogene Waare wird nach Brutto- oder Nettogewicht berechnet. Unter Brutto versteht man die Waare mit Einschluß dessen, worin sie gepackt ist. Das Gewicht des Packwerks, als Kiste, Emballage u. pflegt man „Tara“ zu nennen. Nettogewicht ist das Gewicht der Waare mit Abrechnung der Tara und unter Gutgewicht versteht man eine dem Käufer vom Verkäufer als Ersatz für gewisse Verluste zugestandene Vergütung nicht in Geld, sondern in Waare.

XXIX. Zinseszinsrechnung.

365) Werden die Zinsen eines ausgeliehenen Capitals nicht am Ende des Jahres zurückgezahlt, sondern zum Capitale zur weitem Verzinsung hinzugeschlagen (capitalisirt), desgleichen die Zinsen des folgenden Jahres und sofort bis zum Ablaufe der festgesetzten Zeit, so steht das Capital auf Zinseszins aus.

Das ursprünglich ausgeliehene Capital heißt der Anfangswert (a), und das zu p Procent n Jahre lang auf Zinseszins ausgestandene Capital (k) der Endwert.

366) Wie groß wird der Endwert von a Rbl., welche n Jahre zu p Procent auf Zinseszins ausstehen?

Am Ende des 1sten Jahres ist $k^1 = a + \frac{ap}{100} = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$

100 Rbl. geben p Rbl.

$$a \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad \text{''} \quad \text{x} \quad \text{''}$$

$$x = \frac{pa \left(1 + \frac{p}{100}\right)}{100} = \frac{ap}{100} \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

daher am Ende des zweiten Jahres

$$a \left(1 + \frac{p}{100}\right) + \frac{ap}{100} \left(1 + \frac{p}{100}\right) = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$$

ebenso am Ende des dritten Jahres $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$

und am Ende des n Jahres $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$; also die Grundformel

der Zinseszinsrechnung $k = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$.

Wieviel betragen 6000 Rbl. zu 5 Procent nach 4 Jahren?

$$a = 6000; p = 5; n = 4.$$

So oft 100 Rbl. in 6000 Rbl. enthalten sind, hat man am Ende des ersten Jahres 105; so oft in dem, was daraus entsteht, 100 Rbl. enthalten sind, hat man am Ende des 2. Jahres wieder 105; demnach durch wiederholte Anwendung der einfachen Regelbetri

x Rbl.	=	6000 Rbl.
100	"	105
100	"	105
100	"	105
100	"	105
100	"	105
k = 7293 Rbl. 3 Kop.		

367) Setzt man den Ausdruck, der für jedes beliebige p berechnet werden kann

$\left(1 + \frac{p}{100}\right) = z$ (Zinseszinsfuß), so geht die Grundformel über in

$$1) k = az^n \text{ und durch Umformung}$$

$$2) a = \frac{k}{z^n}$$

$$3) z = \sqrt[n]{\frac{k}{a}} \text{ woraus } p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{k}{a}} - 1 \right)$$

Für diejenigen, welche im Rechnen mit Logarithmen geübt sind, bietet sich die Möglichkeit, die Potenzirungen und Radi-

cirungen, welche hier oft sehr weitläufig sind, in bequemer Weise auszuführen. Aus (1) folgt:

$$1) \log k = \log a + n \log z$$

$$2) \log a = \log k - n \log z$$

$$3) \log z = (\log k - \log a) : n$$

$$4) n = (\log k - \log a) : \log z$$

wo nun auch n berechnet werden kann.

$$\text{Einem } p = 6 \text{ entspricht } z = 1 + \frac{6}{100} = 1,06$$

$$\text{„ } p = 5\frac{3}{4} \text{ „ „ „} = 1,0575$$

$$\text{„ } p = 5 \text{ „ „ „} = 1,05$$

$$\text{„ } p = 4\frac{1}{2} \text{ „ „ „} = 1,045$$

$$\text{„ } p = 4 \text{ „ „ „} = 1,04$$

368) Der Unterschied zwischen dem Endwerth (k) und dem Anfangswerthe (a) eines auf Zinseeszins stehenden Capitals wird das Leibniz'sche Disconto genannt. Es ist hier

$$5) D = k - a = k - \frac{k}{z^n} = \frac{k}{z^n}(z^n - 1)$$

und auch

$$6) D = az^n - a = a(z^n - 1)$$

$$7) a = d : (z^n - 1)$$

$$8) z = \sqrt[n]{\frac{d+a}{a}}$$

Die
Discontoformeln.

369) Zuweilen wird am Ende eines jeden Jahres zur rascheren Vergrößerung des Endwerths des auf Zinseeszins ausgeliehenen Capitals eine bestimmte Summe b hinzugefügt.

Das Capital a wächst auf az^n in n Jahren

„ „ b „ nach geometrischer Progression in

$(n-1)$ Jahren auf $\frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$; demnach der Gesamtwert

$$9) k = az^n + \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

und falls das Capital alljährlich um b vermindert wird

$$10) k = az^n - \frac{b(z^n - 1)}{z - 1}$$

Aus (9) folgt durch Umformung

$$11) a = \left[k - \frac{b(z^n - 1)}{z - 1} \right] : z^n$$

$$12) b = (k - az^n)(z - 1) : (z^n - 1)$$

$$13) n = \log. [k(z - 1) + b] - \log. [a(z - 1) + b] : \log. z.$$

370) Beispiele über Anwendung der Zinseszinsrechnung bei Abschätzung der Bevölkerungsvermehrung, des Wachstums von Wäldern, des Hypotheken- und Pfandwesens u. s. w.

XXX. Rentenrechnung.

371) Unter Rente begreift man eine alljährlich oder in andern regelmäßigen Zeitabschnitten zahlbare oder zu empfangende bestimmte Summe Geldes. Rentenzahler und Rentier. Vorschuß- und Nachschußweise gezahlte Renten. Leibrenten. Das Capital, durch dessen Anlegung sich Jemand den Empfang einer bestimmten Jahresrente erwirbt, heißt Einfaß oder Miße.

372) Der Endwerth (k) einer Rente r ist die Summe, welche entsteht, daß die n Jahr zu zahlende Rente r zum Zinsfuß p auf Zinseszins, desgleichen die Rente r ebenso (n - 1) Jahre, (n - 2) Jahre u. s. w. aussteht und diese Endwerthe alle vereinigt werden. Der Baarwerth (a) der Rente aber ist der Rest, welcher nachbleibt, wenn das Disconto vom Endwerthe in Abzug gebracht wird.

Da die Endwerthe der Rente in geometrischer Progression abnehmen, so folgt aus

$$k = rz^{n-1} + rz^{n-2} + rz^{n-3} + \dots + rz + r$$

$$1) k = \frac{r(z^n - 1)}{z - 1}$$

$$2) a = \frac{r(z^n - 1)}{z^n(z - 1)}$$

und daher das Disconto

$$3) d = k - a = \frac{r(z^n - 1)}{z - 1} - \frac{r(z^n - 1)}{z^n(z - 1)} = \frac{r(z^n - 1)^2}{z^n(z - 1)}$$

$$4) r = \frac{k(z - 1)}{z^n - 1}$$

$$5) r = \frac{az^n(z - 1)}{z^n - 1}$$

$$6) n = \frac{\log. [k(z - 1) + r] - \log. r}{\log. z} \quad 7) n = \frac{\log. r - \log. [r - a(z - 1)]}{\log. z}$$

Soll die Rente nach Ablauf eines jeden Jahres progressiv um s erhöht werden, so wird der Endwerth derselben um so bedeutender, nämlich

$$8) k = \frac{r(z^n - 1)}{z - 1} + \frac{s}{z - 1} \left(\frac{z^n - 1}{z - 1} - n \right)$$

373) Beispiele aus dem Hypotheken- und Creditwesen. Tilgungsfonds. Verwandlung des Endwerths einer geliehenen Summe in jährliche Abschlagszahlungen.

XXXI. Gesellschafts- oder Repartitionsrechnung.

374) Diese Rechnung lehrt die rechtmäßige Vertheilung von Summen unter Personen, welche sich zu einem Unternehmen, wobei entweder Gewinn oder Verlust stattgefunden, vereinigt haben. Dieselbe findet namentlich ihre Anwendung im Handel, bei Steuervertheilungen, Berechnung von Miethzinsen, Sparcassendividenden und Erbschaftsantheilen, Einquartierungen, endlich auch bei gewissen Aufgaben der Chemie (Stöchiometrische Aufgaben).

375) Berücksichtigt man bei der Vertheilung außer den Einlagen nur noch Gewinn oder Verlust, so heißt die Gesellschaftsrechnung „einfach“; — kommen noch andere Angaben in Betracht, als Zeit des Entstehens der Einlage, Zins, Verwaltungskosten, so gehören dergl. Aufgaben zu der zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung.

376) In allen Repartitionsrechnungen kommt es auf die Theilung einer Zahl (Gewinn oder Verlust) nach gegebenen Verhältnißzahlen an. Dieselben sind in der Aufgabe bereits fertig gegeben oder müssen aus gewissen Angaben (Daten) berechnet werden.

377) Einlage bedeutet im kaufmännischen Leben diejenige Summe, welche jeder Theilnehmer zu einem gemeinsamen Unternehmen hergiebt. Die mit allen Einlagen zusammen durch Spekulation erworbene oder verlorene Summe heißt Gewinn, bez. Verlust.

378) Gewinn und Verlust werden durch gewisse Ursachen bedingt. Die Umstände, welche das Eintreffen eines Ereignisses veranlassen, können nicht mit Gewißheit vorausgesehen werden, weil sie meist veränderlicher Natur sind. Günstige Umstände nennt man „Chancen“, alle Umstände zusammen „Zufall“.

379) Unter Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines Ereignisses versteht man das Verhältniß der Chancenanzahl zu der Anzahl aller Umstände, welche das Eintreffen beeinflussen. Haben von 100 gleichzeitig auslaufenden Schiffen 7 Schiffbruch gelitten, so ist die Wahrscheinlichkeit eines jeden Schiffes für eine glückliche Fahrt $\frac{93}{100}$ gewesen. Semehr sich dieser Bruch der Einheit nähert, um so mehr geht die Wahrscheinlichkeit in Gewißheit über.

380) Das Product aus dem erwarteten Gewinn und der Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, nennt man den Vortheil oder die mathematische Hoffnung des Theilnehmers am Geschäfte. Der Gegensatz ist die mathematische Furcht, d. h. das Product aus Wahrscheinlichkeit und etwa eintreffendem Verlust.

381) Nach der vorhergegangenen Erklärung ist der Werth des gehofften Vortheils ungewiß und zwar hängt derselbe ab von der Höhe der gewagten Summe und der Wahrscheinlichkeit mit derselben zu gewinnen; d. h. es ist

$$H = W \cdot G.$$

Nimmt man indessen auf all die Umstände Rücksicht, welche die Wichtigkeit der gewagten Summe für den Unternehmer erhöhen oder verringern, als die Größe seines Vermögens, das Verhältniß der angelegten Summe zu demselben, seine Erfahrung im Handel und Wandel, seine Arbeitskraft, so kann nicht der ganze Werth der gewagten Summe in Rechnung gebracht werden, sondern nur ein relativer oder moralischer Werth. Dieser moralische Werth der Erwartung eines Gewinnes, d. h. die moralische Hoffnung ist gleich dem Producte aus der Wahrscheinlichkeit des Gewinnes, dem Logarithmen des Quotienten aus dem durch den Gewinn vergrößerten Vermögen und dem ursprünglichen und einer constanten Größe, welche vom Orte, wo das

Geschäft unternommen, von der Zeit und andern Umständen abhängt; — d. h. es ist:

$$H' = W \cdot \log \frac{V}{v}. \text{ Const.}$$

382) Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich über die moralische Hoffnung eines Gewinnes folgende Lehrsätze begründen: (Meyer).

- a. Ein Spiel oder eine Wette, selbst wenn sie nach den Regeln der Unparteilichkeit geordnet sind, erweisen sich als moralisch nachtheilig.
- b. Der moralische Werth einer Summe ist kleiner, wenn sie einen Gewinn, als wenn sie einen Verlust vorstellt.
- c. Der Werth eines Einsatzes bei einem Wagniß ist so zu bestimmen, daß der etwa entstehende Nachtheil im Vergleich zum Vermögen des Unternehmers unmerklich klein ausfalle.
- d. Es ist moralisch vortheilhaft, eine von einem ungewissen Ereigniß abhängende Summe zu versichern.

383) Vereinigen sich nunmehr zu einem Geschäfte mehrere Personen, so gilt über die Vertheilung von Gewinn oder Verlust folgende Regel der mathematischen Billigkeit. Es muß sich die Einlage aller Personen zum Gewinn oder Verlust aller verhalten, wie die Einlage jedes Einzelnen zum Gewinn oder Verlust jedes Einzelnen.

Es mögen z. B. 4 Personen die Einlagen a, b, c, d, mit welchen sie die Summe g gewonnen, gemacht haben. Man bestimme den Gewinn jedes Theilnehmers.

Die Summe aller Einlagen ist $s = a + b + c + d$; demnach der Regel gemäß:

$$\left. \begin{array}{l} s : g = a : A ; A = ag : s \\ s : g = b : B ; B = bg : s \\ s : g = c : C ; C = cg : s \\ s : g = d : D ; D = dg : s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{die gesuchten} \\ \text{Antheile.} \end{array}$$

Hiernach ergibt sich folgende praktische Regel: Man addire sämtliche Verhältnißzahlen (Einlagen), dividire ihre Summe in den Gewinn (Verlust) und multiplicire den erhaltenen Quotienten (Theilungsquotienten) mit jeder Verhältnißzahl.

Beispiel: 3 Kaufleute legen zu einem gemeinsamen Geschäfte Geld zusammen, und zwar giebt A 1500; B 4500; C 3000 Rbl., womit sie 20% der Gesamteinlage gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen betrug für A $\frac{2}{3}$; B $\frac{5}{6}$; C $\frac{3}{4}$. Wie groß waren die mathematischen Hoffnungen der Unternehmer?

Hier ist $s = 1500 + 4500 + 3000 = 9000$ und der Gewinn $g = \frac{9000}{100} \times 20 = 1800$ Rbl.; der Theilungsquotient beträgt demnach

$q = \frac{1800}{9000} = \frac{1}{5}$; daher die mathematische Hoffnung

daß A = $1500 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = 200$ } welche Summen gegen die gemachten Ein-
 " B = $4500 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = 750$ } lagen, falls die Zeit bis zur Abwicklung des
 " C = $3000 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} = 450$ } Geschäftes nicht lang war, groß erscheinen.

384) Es kann vorkommen, daß die Verhältniszahlen nicht sogleich fertig gegeben sind, sondern aus gewissen Angaben erst bestimmt werden müssen. 4 Personen sollen sich z. B. in eine Summe G so theilen, daß sich die Antheile folgendermaßen verhalten: A : B = m : n; B : C = p : q; C : D = s : t; wieviel erhielt jeder?

So oft A m hat, erhält B n Theile, folglich

" " 1 " " " $\frac{n}{m}$ " ; ferner

" " B p " " C q " also

" " " 1 " " " $\frac{q}{p}$ 1 ist aber

" " $\frac{n}{m}$ " " C $\frac{q}{p} \cdot \frac{n}{m}$; ebenso

" " C s " " D t ; mithin

" " C 1 " " " $\frac{t}{s}$; und da

" $\frac{qn}{pm}$ " " " $\frac{t}{s} \cdot \frac{qn}{pm}$

Die Verhältniszahlen sind also der Reihe nach, bezogen auf diejenige des A als Einheit

$$A = 1; B = \frac{n}{m}; C = \frac{nq}{pm}; D = \frac{tqn}{spm} \text{ und die Summe derselben}$$

$$= 1 + \frac{n}{m} + \frac{nq}{pm} + \frac{tqn}{spm} = \frac{spm + pmn + snq + tqn}{spm}; \text{ also der}$$

Theilungsquotient $q = \text{amps} : (spm + pmn + snq + tqn)$, mit dessen Hilfe sich nun die einzelnen Theile nach der obigen Regel leicht finden lassen.

385) Es kommt ferner vor, daß außer dem Pflichttheil, einem Theilnehmer oder mehreren derselben für gewisse Mähen noch Extrasummen bewilligt oder auch Abzüge gemacht werden. In diesem Falle muß die Summe derselben erst von der Gesammtmasse in Abzug gebracht und darauf erst der Rest nach der Repartitionsregel vertheilt werden.

4 Personen sollen sich in g Rbl. so theilen, das A) $\frac{m}{n}$ Theil und noch a Rbl., B) $\frac{p}{q}$ weniger b Rbl.; C) $\frac{s}{t}$ und c Rbl.; D) $\frac{u}{v}$ weniger d Rbl. erhält. Wie groß sind hier die Anthteile?

Die Verhältnißzahlen sind:

$$\left. \begin{array}{l} A \dots \frac{m}{n} + a \\ B \dots \frac{p}{q} - b \\ C \dots \frac{s}{t} + c \\ D \dots \frac{u}{v} - d \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Die Vergütungen nebst den Abzügen machen} \\ f = a - b + c - d, \\ \text{welche Summe, falls sie positiv ist, abgezogen} \\ \text{und, falls sie negativ ist, zu } g \text{ hinzugefügt} \\ \text{werden muß.} \end{array}$$

Es ist demnach $g' = g \pm (a - b + c - d)$; die Summe der Verhältnißzahlen ist

$$s = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} + \frac{s}{t} + \frac{u}{v} = \frac{mqtv + pntv + snqv + nuqt}{nqtv}$$

und der Theilungsquotient

$$q = nqtvg' : (mqtv + pntv + snqv + nuqt)$$

Derselbe wird mit jeder Verhältnißzahl multiplicirt und von dem erhaltenen Producte der Abzug subtrahirt, oder die Vergütung hinzuaddirt.

XXXII. Kettenrechnung.

388) Die Kettenrechnung lehrt Münz-, Maß- und Gewichtseinheiten des einen Staates in solche eines andern Landes zu verwandeln. Diefelbe ist demnach gleichsam eine erweiterte Reduction. Rechnungsregel des van Rees.

389) Oft sind in einer Aufgabe der Kettenrechnung nicht alle diejenigen Angaben vorhanden, derer es zur Berechnung der Fragegröße bedarf; — alsdann müssen die fehlenden Zwischenglieder aus den Reductionstabellen entnommen werden.

390) Die Rechnung wird folgendermaßen durchgeführt: Man ziehe einen Vertikalstrich, setze oben links das unbekannte Glied x und rechts daneben die zu reducirende Größe und setze ferner darauf, daß jedes obere Glied, welches sich rechts befindet, mit dem darunter links befindlichen in Bezug auf Benennung übereinstimme. Die Kette ist geschlossen, wenn das letzte Glied unten rechts mit dem unbekanntem Anfangsglied gleiche Benennung hat. Darauf dividire man um x zu finden, das Product aller rechts befindlichen Glieder durch das Product der links befindlichen, nachdem man wo es anging, zuerst gehoben.

Beispiel:

Ein Stück Seidenzeug kostet in Lyon 800 Francs und hat eine Länge von 80 Meter. Wieviel kommt die russische Arschin zu stehen, wenn die Zahlung über Deutschland geleistet wird?

(1500 Arschin = 1066,78 Meter; 3 Francs = 2 Mark; 210 Mark = 100 Rbl.)

x Kop.	1 Arschin
1500 M.	1066,78 Meter
80 M.	800 Francs
3 F.	2 Mark
210 M.	100 Rbl.
1 Rbl.	100 Kop.
x	
	$1066,78 \times 800 \times 2 \times 100 \times 100$
	$1500 \times 80 \times 3 \times 210$
	$x = 237,06 \text{ Kop.}$

391) Einkaufs- und Verkaufspreis. Zuschlag der im Handel zu verdienenden Procente. Zuschlag der Spesen. Einfache und zusammengesetzte Kettenrechnungen.

392) Probe der Kettenrechnung ähnlich wie bei der zuf. Regelbetri, indem man irgend ein anderes Glied als Unbekannte annimmt.

XXXIII. Alligationsrechnung.

393) Die im Handel vorkommenden Waaren derselben Art haben nicht immer den gleichen Werth, weil derselbe von der Qualität, d. h. von der Güte der Sorte abhängt. So schwankt z. B. der Preis des Zuckers; indessen ist Havanna unter allen Umständen billiger als Raffinade, 60grädiger Alkohol billiger als 90grädiger.

394) Nicht selten ist der Fabrikant oder Verkäufer gezwungen eine Mischung von Waaren derselben Art, aber verschiedener Qualität, vorzunehmen. Die Berechnung der Quantitäten der erforderlichen Bestandtheile führt auf die Vermischungsrechnung.

395) Die Aufgabe der Vermischungsrechnung besteht also in der Angabe der Regeln, nach welchen Mischungen von Metallen, Getränken zum Zweck der Herstellung einer Mittelsorte vorzunehmen sind, und wie der Preis des Gemenges nach dem Gesetze der Billigkeit aus dem Preise der einzelnen Bestandtheile zu berechnen ist.

396) Die Aufgaben dieser Art lassen sich in zwei Abtheilungen bringen:

- a) Den Preis der Mischung zu finden, sofern der Preis der Ingredienzien angegeben ist,
- b) falls verschiedene Sorten mit verschiedenen Preisen gegeben sind, solche Mengenverhältnisse der einzelnen Sorten zu einander zu finden, daß die Mittelsorte einen bestimmten Werth erhält.

397) Hinweis auf nothwendige und erlaubte Mischungen. Verfälschungen.

398) Die Gewichte der zu mischenden Theile müssen sämmtlich in derselben Benennung ausgedrückt werden; das Gleiche gilt auch von den Preisangaben.

399) Werden Metalle durch Zusammenschmelzung gemischt, so heißt das entstandene Gemenge Legirung. Das Gold ist in reinem Zustande zu weich und dehnbar, um zu dauerhaften Gegenständen verarbeitet zu werden, daher versetzt man es mit Silber oder Kupfer (weiße oder rothe Legirung).

400) Da der Werth des Silbers und Kupfers gegen denjenigen des Goldes, ebenso des Kupfers gegen Silber gering anzuschlagen ist, bringt man den Werth der Zusätze zu dem theuren Metall nicht in Rechnung, sondern nur das Gewicht derselben.

401) Die Hälfte eines alten Cölnischen Handelspfundes heißt eine Mark. Eine Mark reinen Goldes hat 24 Karat, eine Mark Silbers 16 Loth. 22karätiges Gold bedeutet, daß auf 22 Theile reinen Goldes 2 Karat Zusatz gemacht sind; desgleichen hat 14löthiges Silber auf 16 Loth Gewicht nur 14 Loth Feingehalt. Deutsches Reichsgesetz Carl V.

402) In Rußland dienen als Gewichtseinheiten für die edlen Metalle Pfund, Solotnik, Doli. 1 \mathcal{L} . reines Gold hat 96 Solotnik, daher sagt man, es sei von der 96. Probe. Gold oder Silber von der 72. Probe hat also auf 72 Solotnik Feingehalt 24 Solotnik Zusatz.

403) Das Verhältniß der Probehaltigkeit zur Löthigkeit ist demnach $96 : 16 = 6 : 1$ und dasjenige zur Karätigkeit $96 : 24 = 4 : 1$, wobei aber Rücksicht darauf zu nehmen ist, daß das Cölnner \mathcal{L} . nicht dem russischen gleich ist.

404) Es ist gesetzlich angeordnet, daß Gold nur herab bis zur 56. Probe, Silber nicht unter der 84. Probe verarbeitet werde. Legirungen dagegen, wie die des Neusilbers, Neugoldes, meist aus Zinn, Kupfer und Nickel bestehend, sind der gesetzlichen Controle nicht unterworfen. Aufgabe der Probirkammer. Lösungsmittel für die edlen Metalle. Vergoldung und Ver-silberung.

405) Soll aus verschiedenen Gewichtstheilen und Qualitäten einer Waare ein Gemenge hergestellt werden, dessen Werth zu ermitteln ist, so multiplicirt man das Gewicht jedes Bestandtheiles mit seinem Preise, addirt diese Producte und dividirt die Summe durch das Gesamtgewicht der Mischung.

Es seien z. B. zu mischen:

20	Stof	Alkohol	zu	40%	800
30	"	"	"	60	1800
50	"	"	"	80	4000
100	Stof Mischung, darin.....		6600%		also in	
1	"	"	"			66%

und falls man zu dieser Mischung 10 Stof Wasser setzt, sind in 110 Stof Mischung 6000% enthalten; mithin 1 Stof =

$$= \frac{6600}{110} = 60\%.$$

406) Die Quantitäten zweier Sorten seien gleich, die Qualitäten aber verschieden. Es wird das Verhältniß der Mischungsgewichte beider Sorten gesucht, wenn das entstandene Gemenge eine Mittelsorte zu festgesetztem Preise vorstellen soll. Aus Gold von der 64. und 84. Probe soll solches von der 70. Probe zusammengesmolzen werden; wieviel ist von beiden Sorten zu nehmen?

Man nimmt in diesem Falle die Differenz der mittleren und niedrigen Sorte als Verhältnißzahl für die bessere und die Differenz der bessern und mittlern als Verhältnißzahl für die schlechtere Sorte; demnach auf $84 - 70 = 14$ Sol. von der 64. Probe kommen $70 - 64 = 6$ Sol. von der 84. Probe.

Es koste z. B. eine Gewichtseinheit der bessern Sorte m und der schlechtern Sorte n Rbl. Da die Verhältnißzahlen unbekannt sind, so setze man x U. von der bessern, y von der schlechtern Sorte. Die Mischung wiegt demnach $(x + y)$ U. und kostet $(mx + ny)$ Rbl. Ist nun der Preis von 1 U. des Gemenges q , so setzt man $(x + y) : (mx + ny) = 1 : q$; woraus

$$\frac{mx + ny}{x + y} = q \text{ oder}$$

$$mx + ny = qx + qy \text{ oder } (m - q)x = (q - n)y; \text{ d. h.}$$

$(m - q) : (q - n) = y : x$ folgt, wie obige Regel behauptete.

407) Verlangt man eine gewisse Menge dieser Mischung, z. B. a \mathcal{L} , so theilt man a nach dem Verhältniß $(m - q) : (q - n)$, man muß daher nehmen $\frac{a(m - q)}{m - n}$ von der einen und $\frac{a(q - n)}{m - n}$ von der andern Sorte.

Es sollen z. B. 20 Solotnik 18karätiges Gold aus 12karätigem und 20karätigen hergestellt werden, so ist

$$20 \text{ Sol. } \left. \begin{array}{l} 18 \\ 12 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 20 - 18 = 2 \text{ vom } 12\text{f.} \\ 18 - 12 = 6 \text{ " } 20\text{f.} \end{array} \left. \begin{array}{l} 2 \\ 6 \end{array} \right\} \text{ oder } \frac{1}{3} \left\{ \begin{array}{l} 1.5 = 5 \text{ Sol. } 12\text{f.} \\ 3.5 = 15 \text{ " } 20 \text{ " } \end{array} \right.$$

$$\frac{4 \overline{) 20} | 5}{\underline{20}}$$

Anmerkung. Die Mischungsgewichte können durch ihr gemeinsames Maß verkleinert werden.

408) Werden nur 2 Sorten gemengt, so giebt es nur eine Auflösung, denn die Aufgabe ist eine bestimmte. Sind aber mehr Sorten gegeben, so läßt die Aufgabe oft eine Menge von Auflösungen zu, indessen beschränkt man diese Anzahl dadurch, daß man ganzzahlige Mischungsgewichte sucht. Es sollen aus Alkohol von 40, 48, 64 und 80 Grad 280 Stof 60grädiger Alkohol gemischt werden. Wieviel Stof ist von jeder Sorte zu nehmen?

Man ordnet die Sorten, auch die Mittelsorte, vertikal nach ihrem Werthe unter einander, sucht nun die Verhältnißzahlen der bessern Sorten durch Bildung der Differenzen aus der mittlern und der schlechtern Sorten, ebenso bildet man die Verhältnißzahlen für die schlechtern Sorten, durch Differenz der mittlern von den bessern Sorten. Man berücksichtige demnach die Umkehrung der Reihenfolge der Sorten bei Aufschreibung der Verhältnißzahlen.

$$\begin{array}{r}
 80 \\
 64 \\
 200 \text{ Stof} \begin{array}{l} \text{à } 60 \\ 48 \\ 40 \end{array} \\
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 80 - 60 = 20 \text{ à } 40\% \\
 64 - 60 = 4 \text{ à } 48 \text{ " } \\
 60 - 48 = 12 \text{ à } 64 \text{ " } \\
 60 - 40 = 20 \text{ à } 80 \text{ " }
 \end{array} \right\} \begin{array}{l}
 20 \\
 4 \\
 12 \\
 20
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 5 \times 20 = 100 \text{ Stof} \text{ à } 40^\circ \\
 1 \times 20 = 20 \text{ " } \text{ à } 48^\circ \\
 3 \times 20 = 60 \text{ " } \text{ à } 64^\circ \\
 5 \times 20 = 100 \text{ " } \text{ à } 80^\circ
 \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{r}
 14 \mid 280 \mid 20 \\
 \hline
 280
 \end{array}$$

409) Lösung derartiger Aufgaben durch unbestimmte Gleichungen.

Aus 3 Sorten einer Waare zu 15, 13 und 12 Kop. das \mathcal{A} . sollen 100 \mathcal{A} . einer Mischung zu 14 Kop. das \mathcal{A} . gefertigt werden. Wieviel ganze \mathcal{A} . müssen von jeder Sorte genommen werden?

Seien es für die entsprechenden Sorten $x, y, z \mathcal{A}$. so hat man

$$x + y + z = 100$$

$$15x + 13y + 12z = 1400$$

Eliminirt man hier x , so folgt

$2y + 3z = 100$, welche Gleichung auf die Auflösungsformeln

$$\begin{array}{l}
 y = -100 + 3q \\
 z = 100 - 2q
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} y \\ z \end{array}} \right\} \text{führt, also}$$

q	y	z	x
34	2	32	66
35	5	30	65
36	8	28	64
40	20	20	60

u. s. w.

410) Es seien jetzt 28 \mathcal{A} . einer Mischung aus Sorten zu $\frac{1}{2}$ Rbl., $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$ und 4 Rbl. zu fertigen, so daß jedes \mathcal{A} . 2 Rbl. koste.

$$x + y + u + v = 28. \dots (1)$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}u + 4v = 64. \dots (2).$$

Multipliziert man (1) mit 40, so folgt

$$40x + 40y + 40u + 40v = 1120$$

$$15x + 15y + 28u + 40v = 640, \text{ woraus}$$

$$35x + 25y + 12u = 480. \dots (3) \text{ folgt; sonach}$$

$$u = \frac{480 - 35x - 25y}{12} = 40 - 2x - 2y - \frac{11x + y}{12}$$

Setzt man jetzt $11x + y = 12n$

$$y = 12n - 11x$$

nimmt für n und x passende ganzzahlige Werthe an, berücksichtigt außerdem, daß y , u , v , x , so beschaffen sein müssen, daß ihre Summe 28 ausmacht, so lassen sich eine Anzahl correspondirender Mischungsgewichte auffinden. Läßt man für n auch Brüche zu, so hat man z. B.

$$\text{Für } n = 3; x = 2; y = 14; u = 5; v = 7.$$

XXXIV. Anhang.

Einiges über kaufmännische Ausdrücke und Beziehungen.

411) Alles, was dem Handel unterliegt und einen materiellen Werth repräsentirt, wird mit dem Ausdruck „Waare“ bezeichnet. Insofern aber die Waaren nicht sämmtlich im eigenen Lande producirt, sondern aus andern Ländern, ja Welttheilen herbeigeschafft werden müssen, werden bei Fixirung des Verkaufspreises, zu dem Preise der Waare an Ort und Stelle noch die Unkosten des Transportes, etwaige Beschädigungen und dergleichen hinzugeschlagen. Solche Unkosten, welche auch bei Anlegung von Capitalien von den Banken für die Mühe der Verzinsung, Verwaltung u. s. w. erhoben werden, bezeichnet man allgemein durch den Ausdruck „Spesen“. Um aber den Spesensatz zu normiren, berechnet man denselben wie den Rabatt entweder auf oder in 100.

Es kauft Jemand z. B. 9 Pud Waare mit $7\frac{1}{2}\%$ Spesen für 350 Rbl., — wie theuer muß er das \mathcal{L} . verkaufen, um 20% zu verdienen?

Nach dem Kettenatz gerechnet, ergeben sich

x Kop.	1 \mathcal{L} .
40 \mathcal{L} .	1 Pud.
9 Pud	350 Rbl.
100	107 $\frac{1}{2}$ Rbl.
100	120
x / 1,34 Rbl.	

412) Nicht selten werden auch Spesen berechnet, wenn eine Zahlung nicht comptant, d. h. rechtzeitig, haar, einfließt, sondern verschoben wird; in diesem Falle werden sie „pro anno“ von 100 gerechnet. Derartige Aufgaben werden nach den Regeln der einfachen Zinsrechnung behandelt.

413) Ueber Rabatt ist bei Gelegenheit der Zinsrechnung bereits gehandelt worden.

414) Jede Waare muß verpackt werden, damit der Transport sie nicht beschädige. Diese Verpackung heißt „Emballage“ und das Gewicht der Waare nebst Verpackung „Bruttogewicht.“ Das Gewicht der Waare allein nennt man „Netto“ und um dieses zu erhalten, muß demnach vom Brutto das Gewicht der Emballage, Tara genannt, subtrahirt werden. Unter „Netto“ versteht man nebenbei auch den Preis, von welchem kein Rabatt mehr bewilligt wird. Gutgewicht (veraltet) heißt ein Erfaß, den der Verkäufer dem Käufer für etwa nicht ganz genau aufgegebenes Gewicht oder aus anderen Gründen vor Abschluß des Kaufes bewilligt.

415) Sehr häufig werden Waaren gegen Waaren, namentlich bei überseeischem Handel, ausgetauscht. Dieser Austausch heißt Baratt; — zu Grunde gelegt werden die Werthe beider Waaren, bezogen auf einen festgesetzten Cours.

416) Die Kaufleute fertigen sich über ihr Waarenlager ein Register an, und zwar mit Angabe des Werthes der Gewichtseinheit und versenden diesen „Preis=Courant“ an ihre Abnehmer.

417) Wird eine Waare vom Käufer nicht baar bezahlt und erscheint derselbe dem Verkäufer sicher, d. h. nach Ablauf einer Zeit zahlungsfähig, so gestattet er ihm „Credit.“ Die schulden Summe wird als Conto des Käufers in das Contobuch des Geschäftes eingetragen und dabei stets das Datum des Kaufes, Gewicht und Preis der Waare aufs sorgfältigste und gewissenhafteste gleich nach Ausreichung der Waare notirt. Nach Ablauf der gestatteten Zahlungsfrist, sendet der Creditor dem Debitor eine Rechnung, d. h. einen wortgetreuen Auszug aus dem Contobuch über die gelieferten Waaren, und falls letzterer die Zahlung nicht leisten kann, nennt man ihn insolvent. Sämmtliche Contis nebst der Waareinnahme werden auf der linken Seite eines besonderen Buches, des Hauptbuches, als Einnahme und die aus dieser Einnahme bestrittenen Ausgaben auf der rechten Seite eingetragen. Die Berechnung des Unter-

schiedes zwischen Einnahme- und Ausgabe, welche gewöhnlich am letzten (ultimo) eines jeden Monats vorgenommen wird, heißt das Ziehen der Bilanz. Uebersteigen die Ausgaben die Einnahmen von Monat zu Monat, so tritt ein Zeitpunkt ein, wo die Ausgaben nicht mehr gedeckt werden können, weil Credit und Baareinnahmen erschöpft sind, und der Besitzer des Geschäftes muß sich als insolvent bekennen. Man nennt das Schließen eines Geschäftes aus solchen Gründen „Fällissement oder Bankerott.“

418) Einmal im Laufe eines Jahres wenigstens nimmt der Kaufmann eine Inventur seiner Waarenvorräthe vor. Es wird zu irgend einer Zeit das Gewicht der vorhandenen Waaren bestimmt, diesem Gewichte dasjenige der im Laufe des nächsten Jahres angeschafften Waaren hinzuaddirt, und das Gewicht der nach einem Jahre noch vorhandenen Vorräthe subtrahirt. Hierauf vergleicht man die Einnahmen und Ausgaben des ganzen Jahres unter Berücksichtigung des noch vorhandenen Vorrathes (Inventars), wobei eine Uebereinstimmung zwischen den verkauften Waaren und der erzielten Einnahme nachgewiesen werden muß.

Die Einnahme eines Geschäftes, d. h. Baarzahlung und Contis ohne Rücksicht auf die Ausgaben, nennt man „Geschäftsumsatz.“

419) Während die Gewichts- und Maßeinheiten der im Preis-Courant verzeichneten Waaren unverändert bleiben, sind die Preise gewissen periodischen Schwankungen unterworfen, so daß sie häufig geändert werden müssen. Dieses wechselnde Steigen und Sinken derselben für dieselbe Quantität Waare hängt von mancherlei Umständen ab, von der Größe der Nachfrage, der Concurrrenz, der Güte u. dergl.

420) Insofern es häufig vorkommt, daß ein Geschäftsmann seine Waaren aus anderen, zuweilen sehr entlegenen Ländern herbeiholen muß (Importgeschäft), kommt er in den Fall Geldsendungen nach jenen Handelsorten vornehmen zu müssen. Baares Geld zu expediren ist in mancher Beziehung unbequem und unsicher, verursacht Mehrausgaben, dazu wird hier übliches

Geld anderswo nicht acceptirt. Aus diesem Grunde ist der Wechsel (cambium) ein für den Geschäftsfortgang unentbehrliches Verkehrsmittel geworden. Unter demselben versteht man eine schriftliche Anweisung, durch welche der Aussteller desselben (Traffant) sich verpflichtet, nach Ablauf einer gewissen Frist oder nach Präsentation desselben eine darauf angegebene Summe Geldes (Remesse) zu zahlen.

421) Form der Wechsel. Caution. Bedeutung des Ausdrucks „an die Ordre.“ Aviso. Verfallszeit. Respit-Tage. Wechselprotest durch die Behörde.

422) Wenn ein von dem Geschäftsmanne direct ausgestellter Wechsel an einem anderen Handelsplatze keine Gültigkeit hat, so ist derselbe gezwungen, sich einen zu kaufen. Derartige Geschäfte vermitteln die Bankhäuser. Soll Jemand zum Empfange der auf dem Wechsel bezeichneten Summe bevollmächtigt werden, d. h. wird der Wechsel einem Andern übertragen (cedirt), so wird auf der Rückseite nach vorschriftsmäßiger Form darüber eine Bemerkung gemacht. (Indossament.) Indossant und Indossat.

423) Sonach bilden die Wechsel eine Art Waare. Die Preise der Wechsel nennt man Course, und diese steigen und sinken wie die Preise anderer Waaren. Unveränderlich ist die Summe, welche auf dem Wechsel angegeben ist (Valuta), veränderlich aber der Werth dieser Summe und zwar in dem Falle, wenn er in einem andern Staate acceptirt werden soll. Die Kettenregel lehrt, wie das Münzsystem irgend eines Staates in dasjenige eines andern mit Hülfe der Reductionstabellen verwandelt wird. Da diese Reductionszahlen aber selbst schwanken, so werden allwöchentlich oder täglich die Preis-Courante der Wechsel oder Münzsorten publicirt (Coursestand). Sind z. B. 210 Mark = 100 Rbl., so gilt eine Mark nahezu $47\frac{1}{2}$ Kop.

424) Unter Wechselarbitrage versteht man die Berechnung der Course verschiedener Staaten oder Handelsplätze auf einen Ort, um zu erfahren, welcher Cours als der vortheilhafteste erscheint.

425) System der Sparcassen. Giro- und Zettelbanken. Ausgabe von Banknoten und Creditbilleten. Grund- und Reservecapitalien. Zinstragende Papiere. Coupons. Privat- und Reichsbanken.

426) Versicherungsgesellschaften und deren Einrichtung. Policen.

427) Actienunternehmungen. Bedeutung der Actien. Dividende.

428) Commissions- und Comptoirgeschäfte.

429) Bedeutung des Zollsystems.



Inhaltsangabe.

A. Rechnungen in unbenannten Zahlen.

	Seite.
I. Einleitung. Erklärungen	1
II. Numeration	4
III. Addition	6
IV. Subtraction	8
V. Multiplication	9
VI. Division	12
VII. Parenthesenrechnungen	15
VIII. Eigenschaften der Zahlen	17
IX. Die gemeinen Brüche	31
X. Decimalbrüche	37
XI. Kettenbrüche	46
XII. Theilbruchreihen	49
XIII. Rechnung mit entgegengesetzten Größen	53
XIV. Potenzirung	59
XV. Radicirung	67
XVI. Logarithmirung	82
XVII. Proportionen	86
XVIII. Progressionen	96
XIX. Gleichungen	103
XX. Ungleichungen	110
XXI. Zahlensysteme	112

B. Rechnungen in benannten Zahlen.

XXII. Verwandlungen. Resolution und Reduction	118
XXIII. Species in benannten Zahlen	135
XXIV. Einfache Regelbetri	140
XXV. Zusammengesetzte Regelbetri	143
XXVI. Zeitrechnung	147
XXVII. Zinsrechnung	149
XXVIII. Rabattrechnung	151
XXIX. Zinsezinsrechnung	153
XXX. Rentenrechnung	156
XXXI. Repartitionsrechnung	157
XXXII. Kettenrechnung	163
XXXIII. Alligationsrechnung	164
XXXIV. Anhang	170

