J. Antsov.
Kaika, 1922.

N. Shaposhnikov ja N. Valtsev.

Algebraliste ülesannete kogu.

II jagu.

Astmed ja juured, irratsionaalsed suurused, graafilisest kujutamisest ja funktsioonidest, ruutvõrrandid, kõrgema astme võrandid, määramatu analüüs, read, logaritmid, ühendlusõpetus, täiendusosa ja kordamisülesanded.

Tõlkinud ja täiendanud

K. R. Veski ja J. Grünthal.

TARTUS, 1921.

J. Kaarna raamatukaupluse kirjastus.

H. Laakmanni trükk, Tartus.

VII jagu.

Astmed ja juured.

§ 1. Üksliikmete aste.

Valemis $a^n=b$ nimetatakse suurust a astme aluseks, n—astmenäitajaks, aga b ehk temaga võrdset a^n nimetatakse a n-seks astmeks. b leidmist a ja n kaudu nimetatakse astme arvutamiseks.

Kui astmenäitaja n on positiivne täisarv, siis nimetatakse ka astet ennast positiivseks täisarvuliseks astmeks. Positiivset täisarvulist astet arvutada tähendab korrata astme alust tegurina nii mitu korda, kui mitu ühelist on astmenäitajas.

Näituseks: $a^3=a.a.a$, ehk: $a^n=a.a. \ . \ . \ . \ a$ (n korda).

Märgijuhised: Positiivse ehk negatiivse suuruse paarisarvuline aste on positiivne suurus; näit.: $(\pm a)^{2n}=+a^{2n}$. Positiivse ehk negatiivse suuruse üksikarvulisel astmel on sama märk. mis tema aluselgi; näit.: $(+a)^{2n+1}=+a^{2n+1}$, $(-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}$

1. lause: Korrutise aste võrdub tegurite astmete korrutisega; näit.: $(ab)^n=a^nb^n$.

2. lause: Murru aste võrdub murru liikmete astmete jagatisega; näit.: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

3. lause: Astme astme arvutamisel tarvis astmenäitajad korrutada; näit.: $(a^m)^n=a^{mn}$.

Üldjuhis: Et üksliikme astet arvutada, pannakse märgijuhise järele vastav märk, arvutatakse lahus iga teguri ja jagaja aste ja järjestatakse saadused korrutajatena või jagajatena samuti, kui nad olid antud üksliikmes.

Seejuures arvutatakse arvsuuruste astmed otsekohe, kuna aga täheliste avalduste juures kolmandat lauset tarvitatakse; näit: $\left(\frac{2a^2b^m}{3c^nd^3}\right)^3=\frac{8a^6b^{3m}}{27c^{3n}d^9}$.

Kui astmenäitaja on negatiivne täisarv, siis nimetatakse ka astet ennast negatiivseks täisarvuliseks astmeks. Iga suurus, mille astmenäitajaks on negatiivne arv, võrdub murruga, mille nimetajaks on 1 ja lugejaks sama suurus positiivse astmenäitajaga.

Näituseks: $a^{-2}=\frac{1}{a^2}$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

Negatiivsete astmete kohta on maksvad eespool-toodud märgijuhised, kolm lauset ja üksliikme astendamise üldjuhis. Näitused: $(\pm a)^{-2n}=+a^{-2n}$, $(\pm a)^{-2n-1}=\pm a^{-2n-1}$, $(ab)^{-n}=a^{-n}b^{-n}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{a^{-n}}{b^{-n}}$, $(a^{-m})^n=a^{-mn}$, $(a^m)^{-n}=a^{-mn}$, $(a^{-m})^{-n}=a^{mn}$.

1. $(\pm 2)^4$
2. $(\pm 5)^3$
3. $(\pm 10)^3$
4. $(\pm 100)^4$
5. 2^{-3}
6. 5^{-1}
7. $(-3)^{-2}$
8. $(-1)^{-5}$
9. $(-4)^{-3}$
10. $(-6)^{-1}$
11. $(-1)^{2n}$
12. $(-1)^{3n}$
13. $(2.3)^3$
14. $(5.7.3)^2$
15. $(ab)^4$
16. $(-ab)^3$
17. $(xyz)^7$
18. $(abc)^m$
19. $\left(\frac{a}{b}\right)^3$
20. $\left(\frac{n}{m}\right)^a$
21. $\left(-\frac{5}{7}\right)^2$
22. $\left(-1\frac{2}{3}\right)^3$
23. $(-0,2)^5$
24. $(-0,01)^4$
25. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$
26. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$
27. $(0,3)^{-3}$
28. $(0,02)^{-4}$
29. $\left(\frac{1}{a}\right)^{-3}$
30. $\left(\frac{c}{d}\right)^{-6}$
31. $(a^3)^2$
32. $(a^5)^4$
33. $(-a^2)^3$
34. $(-a^3)^6$
35. $(-a)^{2n}$
36. $(-a^5)^{2n-1}$
37. $(-a^2)^{-3}$
38. $(-a^7)^{-4}$
39. $(-a^m)^{-6}$
40. $(-a^3)^{-2n+1}$
41. $(a^{-3})^4$
42. $(a^{-5})^{-2}$
43. $(a^{-m})^{-n}$
44. $(a^m)^{-n}$
45. $[(-a)^3]^4$
46. $[(-a)^5]^3$
47. $[(-b)^5]^m$
48. $[(-b)^5]^{2n}$
49. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^{-1}$
50. $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^{-2}$
51. $\left[\left(-\frac{a}{b}\right)^3\right]^{-2}$
52. $\left[\left(-\frac{b}{a}\right)^5\right]^{-3}$
53. $[(-b)^{-3}]^{-2}$
54. $\left[\left(-\frac{1}{b}\right)^{-4}\right]^{-5}$
55. $(2a^3)^4$
56. $(5a^2b^3)^3$
57. $(6a^mb^n)^3$
58. $(2a^5b^n)^m$
59. $\left(\frac{2a}{bc}\right)^4$
60. $\left(\frac{4a^2c^5}{5b^3}\right)^3$
61. $\left(\frac{3}{4}c^7d^2f\right)^4$
62. $(-0,2a^pb)^5$
63. $(-1\frac{3}{4}a^{2m-1}b)^3$

64. $(-0{,}01a^{n-2}b^m)^6$ 65. $\left(\frac{2a^7b^8}{c^6d^n}\right)^5$

66. $\left(\frac{a^mb^n}{c^{p-1}}\right)^4$ 67. $\left(\frac{a^{2n}b^{n+2}}{c^{mn}}\right)^n$

68. $\left(\frac{a^{3m-1}}{b^{3m}}\right)^{3m+1}$ 69. $\left(-\frac{a^mb^{n+p}}{c^p}\right)^{2p}$

70. $\left(-\frac{a^{6n+1}}{b^{2n}c^{n+2}}\right)^{6n-1}$ 71. $(2a^3b^{-2}c^{-1})^2$

72. $(-\frac{2}{3}a^2b^{-1}c^3d^{-2})^{-2}$ 73. $(-0{,}5a^{-3}b^{-n}c^{n-1})^{-1}$

74. $(-0{,}04a^{m-1}b^{3-n}c^{-5})^{-2}$ 75. $\left[\left(\frac{a^2b^2}{c^3d^{-2}f}\right)^{-1}\right]^{-m}$

76. $\left[\left(\frac{a^{-m}b^n}{c^{m-n}}\right)^{-m}\right]^{-n}$ 77. $\left(\frac{a^3b^{-2}}{3cd^{-3}}\right)^3\cdot\left(\frac{3b^3c^{-2}}{a^5d}\right)^2$

78. $\left(\frac{a^2bd^2}{4c^2f^3}\right)^2:\left(-\frac{b^3d^3}{2c^3f^2}\right)^3$ 79. $\left(-\frac{a^2bx^3}{y^3}\right)^{2m-1}\cdot\left(-\frac{y^3}{ab^2x^3}\right)^{2m}$

80. $\left(\frac{4a^{n-1}b^3c^{3-x}}{9x^2y^{3n-2}z^6}\right)^2:\left(-\frac{2a^nb^2c^{2-x}}{3xy^{n-1}z^4}\right)^{-3}$

§ 2. Hulkliikme astendamine.

Hulkliikme ruut võrdub tema liikmete ruutude ja kõigi tema paarikaupa võetud liikmete kahekordsete korrutiste algebralise summaga. Et leida kõik need korrutised, tarvis korrutada iga liige iga temale järgneva liikmega ja saadud korrutised võtta kahekordselt. Näit.: $(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+$ $+2a(b+c+d)+2b(c+d)+2cd=a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+$ $+2ad+2bc+2bd+2cd.$

Hulkliikme kuup võrdub tema liikmete kuupide, iga liikme ruudu ja iga ülejäänud liikme kolmekordsete korrutiste ja kõigi liikmete kolmekaupa võetud kuuekordsete korrutiste algebralise summaga. Nende korrutiste kokkuseadmise üldviisid näidatakse algebra lõppkursuses ühendlusteteoorias.

Näitus: $(a+b+c+d)^3=a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2b+3a^2c+$ $+3a^2d+3b^2a+3b^2c+3b^2d+3c^2a+3c^2b+3c^2d+3d^2a+3d^2b+$ $+3d^2c+6abc+6abd+6acd+6bcd.$

Arvutada järgmised astmed:

81. $(a-b+c)^2$ 82. $(a^4+a^2-1)^2$

83. $(3a^2-2ab-b^2)^2$ 84. $(x^4-2ax^3+2a^2x-a^4)^2$

85. $(3a^{3x}+2a^{2x}+a^x+1)^2$ 86. $(a^{2n}+a^n-1-a^{-n})^2$

87. $\left(a^3-\frac{3}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2-\frac{1}{8}b^3\right)^2$ 88. $\left(x^n-\frac{1}{2}x^3+2\frac{1}{2}x^{-3}+\frac{4}{3}x^{-n}\right)^2$

89. $(a^4-2a^3+3a^2-2a+1)^2$ 90. $(a^x+2a^{x-1}-a^{x-2}-4a^{x-3}-5)^2$
91. $(a+b+c)^3$ 92. $(1-x+x^2)^3$
93. $(a^2-3a-1)^3$ 94. $(2a^2+ab-3b^2)^3$
95. $\left(x^2+2-\frac{3}{x}\right)^3$ 96. $\left(a^3b^2-\frac{4a^2}{b}-\frac{b}{2a^2}\right)^3$
97. $[(a-1)^2]^2$ 98. $[(2a-1)^3]^2$
99. $(a+2)^6$ 100. $(2a-3b)^6$
101. $(a+b+c+d)^3$ 102. $(x^3+x^2-x-1)^3$

Tõestada, kas vastavad teineteisele samasused:

103. $(x+y+z)^2+(x-y-z)^2+(2z-y)^2=2x^2+3y^2+6z^2$
104. $(a+b+c+d)^2+(a-b+c-d)^2+(a-2c)^2+(2b-d)^2=$ $=3(a^2+d^2)+6(b^2+c^2)$
105. $(a^2+b^2+c^2)(m^2+n^2+p^2)-(am+bn+cp)^2=(an-bm)^2+$ $+(ap-cm)^2+(bp-cn)^2$
106. $(x+y+z)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz=x^3+y^3+z^3$
107. $(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2=$ $=4(a^2+b^2+c^2)$
108. $(a+b+c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3+(a-b-c)^3=24abc$

109. Tõestada, et kui $A=a+b+c+d$, $B=a+b-c-d$, $C=a-b+c-d$, $D=a-b-c+d$ ja peale selle $ab(a^2+b^2)=$ $=cd(c^2+d^2)$, siis saame võrduse $AB(A^2+B^2)=CD(C^2+D^2)$.

110. Tõestada, et kui $a+b+c=-p_1$, $ab+ac+bc=p_2$ ja $abc=-p_3$ ja veel $a^2+b^2+c^2=s_2$, $a^3+b^3+c^3=s_3$, siis saame võrduse $s_3+p_1s_2=p_1p_2-3p_3$.

§ 3. Üksliikme juurimine.

Valem $\sqrt[n]{a}=x$ näitab, et $x^n=a$. Suurust a nimetatakse juuritavaks arvuks, n — juurenäitajaks, aga x ehk temaga võrdset $\sqrt[n]{a}$ — suuruse a n-seks juureks. x otsimist a ja n kaudu nimetatakse juurimiseks.

Antud astet juurida tähendab, leida suurus, mille antud aste võrdub juuritava arvuga; näituseks: $\sqrt[3]{a^3}=a$, sellepärast et $(a)^3=a^3$, ehk: $\sqrt[n]{a^n}=a$, sest $(a)^n=a^n$.

Märgijuhised: Positiivse arvu paarisarvulise astme juurel on kaks tähendust — positiivne ja negatiivne; näit.: $\sqrt[2n]{+a}=\pm\sqrt[2n]{a}$. Negatiivse arvu paarisarvulise astme juur on imaginaar-arv; $\sqrt[2n]{-a}$ on imaginaar-arv, kui a ise on absoluutselt (ilma märgita) võetud. Positiivse ja negatiivse arvu üksikarvulise astme juurel on juuritava arvu märk; näituseks:

$$\sqrt[2n+1]{+a}=+\sqrt[2n+1]{a}; \quad \sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}.$$

1. lause: Korrutise juur võrdub tegurite juurte korrutisega; näit.: $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.$

2. lause: Murru juur võrdub lugeja ja nimetaja juurte jagatisega; näit.: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

3. lause. Astme juurimisel jagatakse juuritava arvu astmenäitaja juurenäitajaga; näit.: $\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m.$

Üldjuhised: Et üksliiget juurida, pannakse märgijuhise järele märk, juuritakse antud aste igast korrutajast ja jagajast lahus ja järjestatakse saadused korrutajatena ja jagajatena samuti, nagu nad olid juuritavas üksliikmes. Selle juures leitakse juur arvkorrutajatest ja arvjagajatest otsekohe, kuna aga täheliste korrutajate ja jagajate juures tarvitatakse kolmandat lauset; näit.: $\sqrt[3]{\frac{27a^6b^3}{64c^{3n}d^{15}}}=\frac{3a^2b}{4c^nd^5}.$

Juurenäitaja võib olla ka negatiivne arv.

Negatiivse astme juur võrdub murruga, mille lugejaks on 1 ja nimetajaks positiivse astme juur samast suurusest; näit.:

$$\sqrt[-n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Negatiivse astme juurte kohta on maksvad samad laused ja üldjuhised, mis positiivse astme juurte kohta maksvad on.

Järgmistes näitustes leida juured esimese ja teise lause põhjal:

111. $\sqrt{144}$ **112.** $\sqrt{104.26}$

113. $\sqrt{50.18}$ **114.** $\sqrt{180.20}$

115. $\sqrt{\frac{48.3}{125.5}}$ **116.** $\sqrt{\frac{847.7}{216.6}}$

117. $\sqrt{17^2-8^2}$

118. $\sqrt{25^2-7^2}$

119. $\sqrt{\dfrac{15^2-1}{\sqrt{50^2-48^2}}}$

120. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{113^2-112^2}}{19^2-11^2}}$

Leida üksliikmete juur:

121. $\sqrt[6]{2^{12}}$

122. $\sqrt[3]{-a^6}$

123. $\sqrt[n]{a^{3n}}$

124. $\sqrt[n+2]{a^{3n+6}}$

125. $\sqrt[3]{8.3^3}$

126. $\sqrt[4]{16.81}$

127. $\sqrt{\dfrac{a^4}{9}}$

128. $\sqrt[5]{-\dfrac{a^{10}}{b^{15}}}$

129. $\sqrt[4]{a^{16}b^8c^4}$

130. $\sqrt[3]{-27a^{12}b^3}$

131. $\sqrt[-3]{27}$

132. $\sqrt[-2]{\dfrac{4}{9}}$

133. $\sqrt[3]{a^{-6}}$

134. $\sqrt[5]{-a^{-20}}$

135. $\sqrt[-5]{-\dfrac{1}{32}}$

136. $\sqrt[-n]{-\dfrac{1}{a^{5n}}}$

137. $\sqrt[4]{16a^{-4}b^{12}}$

138. $\sqrt[-3]{\dfrac{8}{125}a^{3n}b^{-6}}$

139. $\sqrt{6\frac{1}{4}a^6c^{4m}}$

140. $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}a^{8n}b^{16}}$

141. $\sqrt[3]{0{,}027a^{6n-3}b^{18}c^{-6}}$

142. $\sqrt[5]{-10^{10}a^{-20n}b^{5-15m}}$

143. $\sqrt{\dfrac{4^{-1}a^4b^{-6}}{9^{-1}c^8d^{-2}}}$

144. $\sqrt[3]{\dfrac{343a^{-15}b^{18}}{2^{-6}c^9d^{-3}}}$

145. $\sqrt[-2]{\dfrac{a^2b^{2n-6}c^{-2m}}{4d^{-6}f^{-4n+2}}}$

146. $\sqrt[-3]{-\dfrac{1000p^{12}q^{-6}r^{3n}}{27a^{-3m}b^9}}$

147. $\sqrt[9]{2^{36}a^{-40}b^7\dfrac{(a+b)^{27}}{a^{-4}b^{-11}}}$

148. $2ab^2\sqrt{2a^3bc^2\sqrt[3]{8a^3b^9c^6}}$

149. $\sqrt[-n]{\dfrac{(3a^3b^{-2})^{2n}a^{-(p+n)}b^{-(n+np)}c^n}{a^{-p}}}$

150. $3a^{5-n}b^{-4n}\sqrt[3]{\dfrac{27}{64}a^{-15}b^{3n}c^{6-3n}d^9}$

§ 4. Hulkliikme ruudu ja kuubi juurimine.

Juhis: Et leida hulkliikme ruutjuur, tarvis: korraldada antud hulkliige mingisuguse tähe alanevate ehk tõusvate astmete järge; leida ruutjuur korraldatud hulkliikme esimesest liikmest; saadakse ruutjuure esimene liige. Ruutjuure leitud liikme ruut lahutatakse hulkliikmest; saadakse esimene jääk. Selle jäägi esimene liige jagatakse ruutjuure kahekordse esimese liikmega; jagatises saadakse ruutjuure teine liige. Ruutjuure esimese liikme ruudu ja teise liikme algebraline summa korrutatakse ruutjuure teise liikmega ja saadud korrutis lahutatakse esimesest jäägist; saadakse teine jääk. Teise jäägi esimene liige jagatakse ruutjuure kahekordse esimese liikmega; jagatises saadakse ruutjuure kolmas liige. Ruutjuure kahekordse esimese, kahekordse teise liikme ja kolmanda liikme algebraline summa korrutatakse ruutjuure kolmanda liikmega ja korrutis lahutatakse teisest jäägist; saadakse kolmas jääk. Nõnda jätkatakse juurimist, kuni jäägis saadakse null (kui ruutjuurt üldse võimalik on juurida).

Muuta järgmised hulkliikmed nõnda, et neist võimalik oleks leida ruutjuur:

151. $x^2+2ax+b$

152. $a^2x^2-p^2x+q^2$

Leida kordajatele (koeffitsientidele) m ja n niisugused tähendused, et järgnevad hulkliikmed oleksid täisruudud:

153. $4a^2+mab+9b^2$

154. $x^4-4x^3+10x^2+mx+n$

155. Näidata, et kui $b=a^2+2c$, siis hulkliige x^4+2ax^3+ $+bx^2+2acx+c^2$ on täisruut.

156. Tõestada, et nelja järjestikuse naturaalarvu korrutis, kui teda liita 1-ga, on täisruut.

Järgnevate hulkliikmete ruutjuur leida:

157. $4a^4+12a^2b+9b^2$

158. $\frac{9}{16}a^2b^4-\frac{3}{5}a^3b^2+\frac{4}{25}a^4$

159. $x^{2n-2}y^2+4x^{2n-6}y^4-4x^{2n-4}y^3$

160. $\frac{1}{4}a^{2m}b^{-6}+0{,}09a^{2n}b^6+0{,}3a^{m+n}$

161. $4a^4-4a^3+5a^2-2a+1$

162. $1-8a-32a^3+16a^4+24a^2$
163. $25a^2b^2-8ab^3+6a^3b+16b^4+9a^4$
164. $\frac{13}{3}a^2b^2-2a^3b+\frac{1}{4}a^4+\frac{1}{9}b^4+\frac{4}{3}ab^3$
165. $2-2a^{-1}+a^{-4}+a^{-2}+a^2-2a^{-3}$
166. $\frac{4}{5a^3}+\frac{4}{9a^4}+\frac{9}{25a^2}-\frac{8}{5}-\frac{16}{9a}+\frac{16}{9}a^2$
167. $x^6-4x^5-2x^4+22x^3-11x^2-30x+25$
168. $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$
169. $52a^3b^3+9a^6-38a^4b^2-12a^5b+33a^2b^4-56ab^5+16b^6$
170. $x^4+10+25x^{-4}+16x^{-8}-4x^2-24x^{-6}-20x^{-2}$

Juhis: Et hulkliikme kuupjuurt leida, tarvis: korraldada antud hulkliige mõne tähe alanevate ehk tõusvate astmete järge. Leida kuupjuur korraldatud hulkliikme esimesest liikmest; saadakse kuupjuure esimene liige. Kuupjuure esimese liikme kuup hulkliikmest lahutada; saadakse esimene jääk. Selle jäägi esimene liige jagada kuupjuure esimese liikme kolmekordse kvadraadiga; jagatises saadakse kuupjuure teine liige. Esimesest jäägist lahutada kuupjuure esimese liikme ruudu ja teise liikme kolmekordne korrutis, kuupjuure esimese liikme ja teise liikme teise astme kolmekordne korrutis ja kuupjuure teise liikme kuup; saadakse teine jääk. Selle jäägi esimene liige jagada kuupjuure esimese liikme kolmekordse kvadraadiga; saadakse kuupjuure kolmas liige. Teisest jäägist lahutada kuupjuure kahe esimese liikme summa ruudu ja kolmanda liikme kolmekordne korrutis, kuupjuure kahe esimese liikme summa ja kolmanda liikme ruudu kolmekordne korrutis ja kolmanda liikme kuup; saadakse kolmas jääk. Nõnda jätkatakse kuupjuure leidmist, kuni lõppjäägiks on null (kui üldse võimalik on kuupjuurt leida).

Leida kordajatele (koeffitsientidele) m ja n niisugused tähendused, mis muudaksid järgnevad hulkliikmed täiskuupideks:

171. $125x^3-150x^2+mx+n$
172. x^3-3ax^2+mx-n
173. Määrata tingimused, mis muudaksid hulkliikme x^3+ax^2+bx+c täiskuubiks.
174. Missugune arv tarvis liita kolme naturaalarvu kasvatisele, et saada täiskuup?

Leida kuupjuur:

175. $64x^3-144x^2y+108xy^2-27y^3$
176. $189a^2b^{10}+343a^6-441a^4b^5-27b^{15}$
177. $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1$
178. $12a^2b^2+64-6a^4b^4-144ab-8a^6b^6+117a^2b^3-36a^5b^5$
179. $a^{30}+33a^{20}+66a^{10}-9a^{25}-63a^{15}-36a^5+8$
180. $x^9-3x^8+6x^7-10x^6+12x^5+10x^3-6x^2+3x-1-12x^4$

§ 5. Arvude ruutjuure leidmine.

Juhis: Rühmitame arvu numbrid paremalt poolt hakates kahenumbrilisteks rühmadeks, kusjuures viimases rühmas võib olla üks number. Leiame esimeses rühmas oleva arvu ruutjuure; saame ruutjuure esimese numbri. Esimese rühma arvust lahutame leitud ruutjuure ruudu; jäägi juurde toome alla teise rühma; saame esimese jäägi. Esimeses jäägis eraldame ühelised kümnelistest ja jagame kümneliste arvu kahekordse leitud juurega; saame kas ruutjuure teise numbri või jagatise, mis nõutavast suurem. Saadud jagatise kontrollimiseks kirjutame saadud jagatise paremalt poolt jagaja kõrvale ja korrutame saadud arvu sama jagatisega. Kui korrutis pole esimesest jäägist suurem, siis on ruutjuure teine number õige. Saadud korrutise lahutame esimesest jäägist ja toome järgmise rühma alla; saame teise jäägi. Teise jäägiga samuti talitades, kui esimesega, leiame ruutjuure kolmanda numbri jne.

Leida ruutjuur arvudest:

181. 576	182. 361	183. 1849
184. 608400	185. 1369	186. 28090000
187. 4624	188. 9409000000	189. 6561.10^4
190. 9604.10^6	191. 54756	192. 56169
193. 831744	194. 259081	195. 767376
196. 463761	197. 18225	198. 725904
199. 22562500	200. 942490000	201. 4562496
202. 9960336	203. 1014049	204. 4048144
205. 49126081	206. 56325025	207. 72692676
208. 89908324	209. 19749136	210. 37319881
211. 1226960784	212. 2831729796	213. 491971779649
214. 1024212817156		

Et lihtmurru juurt leida, tarvis leida lahus lugeja ja nimetaja juur. Enne juure leidmist on tarvis murd, kui võimalik' lühendada.

Kui kümnendmurrul paarisarv kümnendkohti on, siis leitakse tema ruutjuur samuti, kui täisarvudegi ruutjuur; tarvis ainult tähele panna, et kümnendmurru täisarvulise osa kohta tulevad ruutjuure numbrid kommaga eraldada.

Leida ruutjuur murdarvudest:

215. $\frac{49}{81}$	216. $2\frac{7}{9}$	217. $\frac{256}{2809}$
218. $\frac{441}{17424}$	219. $552\frac{1}{4}$	220. $10955\frac{1}{9}$
221. $\frac{343}{700}$	222. $\frac{867}{14283}$	223. 0,3364
224. 0,003969	225. 0,264196	226. 0,00008649
227. 2,3716	228. 15,0544	229. 0,0000258064
230. 40,998409		

§ 6. Ruutjuure ligikaudsed tähendused.

Irratsionaalarvud ehk umbarvud on lõpmatud, sellepärast pole võimalik nende täpsaid väärtusi leida; tuleb leppida nende ligikaudsete väärtustega.

Leida irratsionaalarvu ligikaudne väärtus kuni $\frac{1}{k}$ täpsuseni tähendab, leida arv, mis antud irratsionaalarvust lahku läheks vähema kui $\frac{1}{k}$ võrra.

Murdu $\frac{1}{k}$ nimetatakse ligikaudse väärtuse täpsuseks.

Et leida täisarvu ruutjuur täpsalt kuni 1, tarvis leida juur, nagu harilikult, ja peale seda saadud lõppjääk kõrvale jätta.

Et leida ruutjuur täpsalt kuni $\frac{1}{k}$, tarvis korrutada juuritav arv murrunimetaja k ruuduga, saadud korrutisest leida ruutjuur täpsalt kuni 1 ja saadus jagada k-ga.

Et leida ruutjuur täpsalt kuni 0,1, tarvis lõppjäägile paremale poole juurde kirjutada kaks nulli ja leida harilikule juurele lisaks veel üks number, mis kommaga eraldatakse.

Et leida ruutjuur täpsalt kuni 0,01, tarvis eelmise juhatuse järele harilikule juurele leida lisaks veel kaks numbrit, mis kommaga eraldatakse.

Et leida murru ligikaudne juur, tarvis kõige pealt murru nimetaja teha täisruuduks.

Leida järgmiste arvude ligikaudsed juured täpsalt kuni 1:

231. 969 **232.** 7269 **233.** 53780 **234.** 8130000

Leida järgmiste arvude ligikaudsed juured näidatud täpsusega:

235. $7\left(\text{kuni}\frac{1}{5}\right)$ **236.** $46\left(\text{kuni}\frac{1}{4}\right)$ **237.** $568\left(\text{kuni}\frac{1}{20}\right)$

238. $213\left(\text{kuni}\frac{1}{15}\right)$ **239.** $5\left(\text{kuni}\frac{1}{200}\right)$ **240.** $19\left(\text{kuni}\frac{1}{300}\right)$

Leida järgmiste arvude ligikaudsed juured ühe, kahe ja kolme kümnendmärgiga ja määrata nende ligikaudsete juurte täpsused:

241. 3	**242.** $\frac{5}{9}$	**243.** $\frac{5}{8}$	**244.** $\frac{7}{24}$
245. $3\frac{1}{5}$	**246.** $11\frac{4}{7}$	**247.** $7\frac{1}{12}$	**248.** $11\frac{5}{49}$
249. 74,12	**250.** 9,2647	**251.** 0,4	**252.** 6,72
253. 43,356	**254.** 0,008	**255.** 2,05347	**256.** 12,5
257. 64,25	**258.** 0,625	**259.** 0,23567897	**260.** 6,0005781

§ 7. Kuupjuurte leidmine.

Kuupide tabel: $1^3=1$; $2^3=8$; $3^3=27$; $4^3=64$; $5^3=125$; $6^3=216$; $7^3=343$; $8^3=512$; $9^3=729$.

Juhis: Rühmitame antud arvu numbrid paremalt poolt hakates kolmelisteks rühmadeks, kusjuures viimases rühmas võib üks või kaks numbrit olla. Leiame kuupjuure arvust, mida moodustab esimene rühm; saame kuupjuure esimese numbri. Leitud kuupjuure kuubi lahutame esimese rühma arvust; jäägi juurde toome alla teise rühma; saame esimese jäägi. Selles jäägis eraldame komma abil kaks viimast järku, s. o. kümnelised ja ühelised. Jäägi sajaliste arvu jagame leitud kuupjuure kolmekordse kvadraadiga; saame kas kuupjuure teise numbri või resultaadi, mis nõutavast suurem. Saadud jagatise kontrollimiseks kirjutame sama jagatise kolmekordse leitud kuupjuure juurde paremalt poolt, saadud arvu korrutame järelekatsutava jagatisega, korrutisega liidame leitud juure kolmekordse kvadraadi, mis sajaga korrutatud, ja saadud summa korrutame uuesti järelekatsutava jagatisega. Kui saadud korrutis pole esimesest jäägist suurem, siis sobib järelekatsutav jagatis kuupjuure teiseks numbriks. Peale nimetatud tehteid saadud arvu lahutame esimesest jäägist ja toome alla järgmise rühma; saame teise jäägi. Edasine tehete järjekord on samasugune, nagu eespool kirjeldatud.

Leida kuupjuur:

261. 4913	262. 32768	263. 21952
264. 74088	265. 132651	266. 551368
267. 753571	268. 884736000	269. 157464
270. 85184000	271. 3652264	272. 30959144
273. 8741816	274. 137388096	275. 539353144
276. 139798359	277. 622835864	278. 849278123
279. 134453795867	280. 15888972744	

Et lihtmurdu juurida, tarvis leida juur lahus murru lugejast ja nimetajast. Enne juure leidmist peab murdu tarbekorral lühendama.

Et kuupjuurt leida kümnendmurrust, mille kümnendkohtade arv on kolmega jagatav, tehakse just nii, kui kuupjuure leidmisel täisarvust, kusjuures ainult kümnendmurru täisarvulisele osale vastav kuupjuure osa kommaga eraldada tuleb.

Leida kuupjuur:

281. $\frac{27}{125}$	282. $\frac{343}{729}$	283. $15\frac{5}{8}$	284. $\frac{729}{1000000}$
285. $1\frac{1178}{2197}$	286. $72\frac{73}{216}$	287. 0,004096	288. 68,921
289. 0,000005832		290. 0,000030664297	

§ 8. Ligikaudsed kuupjuured.

Et leida täisarvu kuupjuur täpsalt kuni 1, tarvis juurida nagu harilikult ja lõppjääk kõrvale jätta.

Et leida kuupjuur täpsalt kuni $\frac{1}{k}$, tarvis juuritav arv korrutada murrunimetaja k kuubiga, leida saadud korrutise kuupjuur täpsalt kuni 1 ja jagada saadus k-ga.

Et leida kuupjuur täpsalt kuni 0,1, tarvis harilikule lõppjäägile juurde kirjutada kolm nulli ja leida harilikkudele kuupjuurt moodustavatele numbritele üks lisaks, mis kommaga eraldatakse.

Et leida kuupjuur täpsalt kuni 0,01, tarvis eelmise juhatuse järele leida kaks lisanumbrit, mis kommaga eraldatakse.

Et leida murru ligikaudne juur, tarvis kõige pealt murru nimetaja muuta täiskuubiks.

Leida järgmiste arvude kuupjuured näidatud täpsusega:

291. $4\left(\text{kuni } \frac{1}{5}\right)$ 292. $21\left(\text{kuni } \frac{1}{6}\right)$ 293. $2\left(\text{kuni } \frac{1}{100}\right)$

294. $40\left(\text{kuni } \frac{1}{25}\right)$ 295. $2\frac{1}{4}\left(\text{kuni } \frac{1}{10}\right)$ 296. $\frac{25}{9}\left(\text{kuni } \frac{1}{100}\right)$

297. $0{,}215\left(\text{kuni } \frac{1}{100}\right)$ 298. $0{,}36\left(\text{kuni } \frac{1}{100}\right)$ 299. $0{,}51364\left(\text{kuni } \frac{1}{10}\right)$

300. $0{,}00956\left(\text{kuni } \frac{1}{10^3}\right)$

VIII. jagu.

Irratsionaal-arvud.

§ 1. Juuremärgi alt väljaviimine ja juuremärgi alla viimine.

Kui juuritav arv seisab koos kahest tegurist nõnda, et ühest tegurist on võimalik juurt leida, teisest mitte, siis võib esimest tegurit juurida ja saadud ratsionaalarvu korrutada teise teguri irratsionaalse juurega. Niisugust algebralise avalduse teisendamist nimetatakse juuremärgi alt väljaviimiseks.

1. $\sqrt{8}$
2. $\sqrt{75}$
3. $\sqrt[8]{81}$
4. $\sqrt[3]{-108}$
5. $\sqrt[4]{48}$
6. $\sqrt[4]{1250}$
7. $\sqrt[5]{486}$
8. $\sqrt[5]{-224}$
9. $2\sqrt{405}$
10. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{243}$
11. $\sqrt[4]{a^8c^3}$
12. $\sqrt[5]{a^{15}b^6}$
13. $\sqrt[3]{x^4y^5}$
14. $\sqrt[4]{a^5b^6}$
15. $\sqrt{4a^4b}$
16. $\sqrt[3]{64x^6y^4}$
17. $3\sqrt{80c^4d^2}$
18. $2\sqrt{\frac{a^8}{4}}$
19. $\sqrt[3]{\frac{a^8}{b^9}}$
20. $\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^{18}}}$
21. $a\sqrt{\frac{0,54z}{a^2x^2}}$
22. $\sqrt[3]{\frac{-0,729m}{a^6}}$
23. $\sqrt{\frac{(a^2-2ab+b^2)y}{25}}$
24. $\sqrt{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}}$
25. $\sqrt[3]{\frac{(y^2-x^2)^4}{8(x+y)}}$
26. $a\sqrt[3]{\frac{b^8}{a_4}-\frac{b^5}{a_6}}$
27. $\sqrt[m]{2^{m+1}a^{5m}b^{m+n}c^{mp+1}}$
28. $x^2y.\sqrt[2r+1]{-x^{2r+2}y^{6r+5}z^2}$
29. $\frac{ac}{b}\cdot\sqrt[n]{3^{n+2}a^{n+5}b^{2n-1}c^{1-3n}}$
30. $5a^{-3}c^2x^3\sqrt[3]{108a^5b^{7n}c^{-4}d^6x^{-8}}$

Kui juuremärgi juures esineb tegurina ratsionaalarv, siis võib selle ratsionaalse teguri viia juuremärgi alla, võttes teda juure astmel ja korrutades siis juuritava arvuga. Seesugust teisendamist nimetatakse juuremärgi alla viimiseks.

31. $2\sqrt{3}$ 32. $6\sqrt{5}$ 33. $3\sqrt[3]{2}$

34. $5\sqrt[3]{3}$ 35. $2\sqrt[5]{5}$ 36. $a\sqrt{5}$

37. $x\sqrt[4]{2}$ 38. $5\sqrt[4]{a}$ 39. $-m\sqrt[3]{n}$

40. $-n^2\sqrt{a}$ 41. $3a\sqrt{ax}$ 42. $m^2\sqrt[3]{mn}$

43. $\frac{1}{2}\sqrt{a}$ 44. $\frac{x}{y}\sqrt[3]{y^2}$ 45. $-\frac{a}{b}\sqrt[3]{-\frac{b^4}{a^5}}$

46. $m\sqrt[5]{1-\frac{1}{m^5}}$ 47. $(m+n)\sqrt{\frac{1}{m^2-n^2}}$ 48. $2ac^3\sqrt[3]{3abc^2}$

49. $3a^nb.\sqrt[m]{3a^2b}$ 50. $3a^2c^3\sqrt[4]{2a^nb^{-3}}$

§ 2. Juurenäitaja ja juuritava arvu astmenäitaja koondamine ja samanimelised juured.

Juure väärtus ei muutu, kui juurenäitaja ja juuritava arvu astmenäitaja jagada ühe ja sama arvuga. See lause annab meile kaks järeldust:

1. Kui juurenäitajal ja juuritava arvu astmenäitajal on ühine tegur, siis võib neid selle teguriga lühendada.

2. Kui juurtel on isesugused juurenäitajad, siis võib neid juuri korrutades juurenäitajaid ja juuritava arvu astmenäitajaid vastavate täiendusteguritega ühenimelisteks (ühesuguste juurenäitajatega) teha.

Lühendada juurenäitajad ja juuritava arvu astmenäitajad:

51. $\sqrt[9]{a^6}$ 52. $\sqrt[8]{a^{10}b^{12}}$ 53. $\sqrt[3n]{a^{2n}b^{3n}}$

54. $\sqrt[mn]{a^{m}b^{2m}}$ 55. $\sqrt[6]{9a^4b^6}$ 56. $\sqrt[9]{27a^{3m}b^6}$

57. $\sqrt[12]{64a^4b^{2n}}$ 58. $\sqrt[6n]{\frac{16a^{10}b^{-6}}{9c^{18}}}$ 59. $\sqrt[12]{\frac{1000a^{-6}}{729b^9c^{-3}}}$

60. $\sqrt[-4]{a^{-8}b^{10}c^{-2}}$

Teha juured samanimelisteks:

61. $\sqrt[6]{a^5}$ ja $\sqrt[4]{a^3}$ 62. $\sqrt[3]{2a^2}$ ja $\sqrt[6]{ab^5}$

63. $\sqrt[3]{2a^2b}$ ja $\sqrt[4]{3a^3b}$ 64. $\sqrt[12]{\frac{3a^5}{b^3}}$ ja $\sqrt[9]{\frac{10b^2}{a}}$

65. $\sqrt[m^2]{\frac{3a^2}{bc^3}}$ ja $\sqrt[mn]{\frac{2ab^2}{c^3}}$ 66. $\sqrt[12]{a^2b^3}, \sqrt[4]{a}$ ja $\sqrt[8]{a^3}$

67. $\sqrt[6]{a^2b}$, $\sqrt[15]{a^3b^4}$ ja $\sqrt[50]{a^{10}b^{20}}$ 68. $\sqrt{\frac{x}{y}}$, $\sqrt[5]{\frac{y^3}{z^2}}$ ja $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}$

69. $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}}$ ja $\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$ 70. $\sqrt[n]{(a+b)^m}, \sqrt[n^2]{a^m}$ ja $\sqrt[nm]{\frac{a-b}{(a+b)^2}}$

§ 3. Juurte normaalkuju.

Juurel on normaalkuju, kui tema näitajat ei ole võimalik lühendada ja kui juuritav arv on kas täisarvuline üksliige, mille ühestki tegurist pole võimalik välja viia ratsionaalset juurt, või täisarvuline hulkliige, millest võimalik pole välja viia ratsionaalset juurt.

Igale juurele võib normaalkuju anda. Selleks tarvis tema juures ette võtta järgmised muutused:

1. Muuta juuritav arv üksliikmeks, kui see on võimalik ja seda veel pole tehtud.
2. Lühendada juurenäitajat ja juuritava arvu astmenäitajat.
3. Viia juuremärgi alt välja ratsionaalsed tegurid.
4. Kaotada murrunimetaja irratsionaalsus.

Et murrunimetajas irratsionaalsust kaotada, selleks korrutatakse murru lugejat ja nimetajat arvuga, mis muudab nimetaja täisastmeks, ja siis leitakse täisastmelisest nimetajast juur.

Teha juured normaalseteks:

71. $\frac{3xy^2}{2}\sqrt[3]{\frac{8}{xy}}$ 72. $a^2\sqrt{\frac{2ab^3}{3c^2d}}$

73. $\frac{1}{a}\sqrt[3]{a^8-a^6b^2}$ 74. $a^2\sqrt[4]{\frac{1}{a^3}-\frac{b}{a^4}}$

75. $5n^x\sqrt[3]{\frac{ab^5}{25n^{3x+1}}}$ 76. $\sqrt{\frac{18}{25a}-\frac{9b^2}{25a^3}}$

77. $\frac{c^{n-m}}{a^m}\sqrt[m+n]{\frac{a^{m^2-n^2}b^{3m+6n}}{c^{m+2n}}}$

78. $\frac{a+b}{a}\sqrt[3]{\frac{a^{13}-a^{12}b}{(a-b)^2}}$

79. $\frac{a}{c}\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{c^2}}$

80. $\frac{a}{2}\sqrt[4]{(a+1)(a^2-1)(1+2a+a^2)}$

§ 4. Sarnased juured.

Kui irratsionaalarvule on antud normaalkuju, siis nimetatakse ratsionaalset tegurit irratsionaalarvu kordajaks (koeffitsiendiks).

Juuri nimetatakse sarnasteks, kui neil on ühesugused juurenäitajad ja ühesugused juuritavad arvud, kuna nad kordajate ja sihimärkide poolest isesugused võivad olla. Et otsusele jõuda, kas juured on sarnased, tarvis nad normaalseteks teha.

Näidata, et juured on sarnased:

81. $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{12}$

82. $\sqrt{63}$ ja $\sqrt{28}$

83. $\sqrt[3]{54}$ ja $2\sqrt[3]{2}$

84. $\sqrt[4]{80}$ ja $\sqrt[4]{405}$

85 $\sqrt{18}$, $\sqrt{128}$ ja $\sqrt{32}$

86. $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{16}$ ja $\sqrt[3]{432}$

87. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ja $\sqrt{12}$

88. $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ja $\sqrt{\frac{2}{45}}$

89. $\frac{1}{4}\sqrt{0{,}2}$ ja $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

90. $\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$ ja $\sqrt[3]{\frac{9}{8}}$

91. $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ ja $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$

92. $\sqrt[3]{\frac{6}{25}-\frac{1}{4}}$ ja $\sqrt[3]{\frac{1}{27}-\frac{1}{32}}$

93. $\sqrt[6]{a^7b}$ ja $\sqrt[6]{a^{13}b^7}$

94. $\sqrt[3]{0{,}027xy^2}$ ja $\sqrt[3]{0{,}064\frac{x}{y}}$

95. $\sqrt{a-\frac{1}{a^2}}$ ja $\sqrt{\frac{a^3-1}{a^4}}$

96. $\sqrt{\frac{1}{b}-a}$ ja $\sqrt{\frac{bd^2-ab^2d^2}{c^2}}$

97. $\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a+b}\right)^3}$, $\sqrt{\frac{(a^2+b^2)^2}{a-b}}$ ja $\sqrt{a^3-a^2b}$

98. $\frac{x}{y}\sqrt{x^2y\left(\frac{x}{y}-1\right)}$, $x\sqrt{\frac{z}{xz-yz}}$ ja $\sqrt{\frac{4x}{y^2}-\frac{4}{y}}$

99. $\sqrt[3]{8a^5-16a^3b^2}$, $ab\sqrt[3]{\frac{1}{a}-\frac{2b^2}{a^3}}$ ja $\sqrt[3]{\frac{2}{a^3b}-\frac{1}{ab^3}}$

100. $\frac{x^2}{z}\sqrt[n]{x^{-3(n-1)}y^{2n+1}}$, $\frac{1}{xy}\sqrt[n]{x^{n+3}y^{n+1}}$ ja $(2x-y)\sqrt[n]{x^{3-n}y}$

§ 5. Juurte liitmine ja lahutamine.

Et juuri liita ja lahutada, ühendatakse nad isekeskis vastavate tehtemärkidega. Juurtele antakse normaalkuju ja taandatakse sarnased juured, kui neid on olemas. Taandamine seisab selles, et kirjutatakse sarnaste juurte kordajad (koeffitsiendid) nende märkidega sulgudesse, kuna aga ühine juuremärk kirjutatakse tegurina sulgmärgi taha. Ühine sulgudes olev kordaja lihtsustatakse harilikkude juhiste järele.

Juured liita ja lahutada:

101. $(5\sqrt{2}-4\sqrt[3]{3})+(3\sqrt{2}+6\sqrt[3]{3})$

102. $(10\sqrt[4]{7}+\sqrt[5]{3})-(5\sqrt[5]{3}+2\sqrt[4]{7})$

103. $(a\sqrt{b}-b\sqrt{c})-(3a\sqrt{b}-5b\sqrt{c})$

104. $(a\sqrt[5]{b^4}-2c\sqrt[4]{d})-(-5c\sqrt[4]{d}+3a\sqrt[5]{b^4})$

105. $\sqrt{2}+3\sqrt{32}+\frac{1}{2}\sqrt{128}-6\sqrt{18}$

106. $20\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}-2\frac{1}{2}\sqrt{180}$

107. $\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}-2\frac{1}{4}\sqrt[3]{40}+10\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{320}$

108. $\sqrt{\frac{45}{4}}-\sqrt{20}-5\sqrt{\frac{1}{18}}-\frac{1}{6}\sqrt{245}-\sqrt{\frac{49}{2}}$

109. $3\frac{1}{2}\sqrt{24}-\frac{\sqrt[3]{54}}{4}+2\frac{\sqrt{99}}{3}-1\frac{1}{2}\sqrt{44}+3\sqrt[3]{2}$

110. $5\sqrt{8}-8\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{4\frac{1}{2}}+6\sqrt{\frac{5}{3}-\frac{13}{9}}+\frac{4\sqrt{3}}{3}$

111. $\sqrt{a^3}+b\sqrt{a}-\sqrt{9a}$

112. $\sqrt[3]{27a^4}-3\sqrt[3]{8a}+\sqrt[3]{125a^7}$

113. $3\sqrt{125a^3b^2}+b\sqrt{20a^3}-\sqrt{500a^3b^2}$

114. $\frac{1}{a^2c}\sqrt{3a^8c^4d}-\frac{2}{ac^2}\sqrt{12a^6c^6d}-a^4c^2\sqrt{\frac{3d}{a^4c^2}}$

115. $5\sqrt[3]{x^2y^5}+4y^2\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}+\frac{4y}{x^2}\sqrt[3]{-x^8y^2}-6xy\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}}-\frac{3}{2}xy^2\sqrt[3]{-\frac{8}{xy}}$

116. $\sqrt{m^3-m^2n}-\sqrt{(m+n)(m^2-n^2)}-\sqrt{mn^2-n^3}$

117. $\sqrt{1-\frac{x}{2}}-3\sqrt{4-2x}-\sqrt{16-8x}+8\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{x}{8}}$

118. $(a^4-2b^4)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}-(a^2+b^2)\sqrt{(a+b)^3(a-b)}+\frac{b^2}{a-b}\sqrt{a^2b^4-b^6}$

119. $\frac{x}{2}\sqrt[4]{(1+2x+x^2)(x+1)(x^2-1)}-\sqrt[4]{x^5(1-x^{-1})}+\frac{1}{2}x^3\sqrt[4]{x^{-3}-x^{-4}}$

120. $\sqrt[3]{8x^9-8x^6y^3}+x\sqrt[3]{x^3y^3-x^6}+\sqrt[3]{1-x^3y^{-3}}+\frac{x^2}{y^2}\sqrt[3]{x^{-3}y^3-x^{-6}y^6}$

§ 6 Juurte korrutamine ja jagamine.

Et samanimelisi juuri korrutada, tarvis korrutada nende juuritavad arvud isekeskis ja saadud korrutisest leida samanimeline juur; näitus: $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

Et samanimelisi juuri jagada, tarvis jagatava juuritav arv jagada jagaja juuritava arvuga ja saadud jagatisest leida samanimeline juur; näit.: $\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Kui juurte näitajad on isesugused, siis tehakse juured enne korrutamist ja jagamist samanimelisteks ja jätkatakse tööd antud juhise järele.

Kui juurtel on kordajad (koeffitsiendid), siis korrutatakse või jagatakse viimased lahus ja saadus kirjutatakse ühise juuremärgi ette. Korrutada juured:

121. $\sqrt{3}.\sqrt{27}$ 122. $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{16}$

123. $3\sqrt[3]{18}.\frac{5}{6}\sqrt[3]{-6}$ 124. $\frac{1}{3}\sqrt[4]{27}.\frac{1}{9}\sqrt[4]{243}$

125. $\sqrt[3]{-108}.\sqrt[3]{50}.\sqrt[3]{40}$ 126. $2\sqrt[4]{32}.\sqrt[4]{216}.3\sqrt[4]{60}$

127. $(4\sqrt{8}+\frac{1}{12}\sqrt{12}-\frac{1}{4}\sqrt{32}).8\sqrt{32}$ 128. $(\sqrt[3]{9}-7\sqrt[3]{72}+6\sqrt[3]{1125}).4\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

129. $\left(3\sqrt{\frac{5}{6}}-5\sqrt{30}-2\sqrt{\frac{15}{2}}\right).2\sqrt{\frac{3}{2}}$ 130. $(2\sqrt{6}-3\sqrt{5}).(\sqrt{3}+2\sqrt{2})$

131. $(\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[3]{54}).\left(5\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$

132. $\left(3\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{12}-\sqrt{6}\right).\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-8\sqrt{\frac{3}{8}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

133. $\sqrt{a^3b}.\sqrt{a^5b^2}$

134. $a^2\sqrt[3]{2x}.\frac{1}{a}\sqrt[3]{4x}$

135. $2\sqrt[3]{25a^5}.3\sqrt[3]{15a^4}$

136. $3\sqrt{\frac{5a}{b^2}}.2\sqrt{\frac{4b^4}{5a^3}}$

137. $\frac{x}{a}\sqrt[3]{\frac{a^2}{x}}\cdot\frac{1}{4}a\sqrt[3]{\frac{8a}{x^4}}$

138. $\frac{12a^3}{5x^2}\sqrt[4]{\frac{a^7x}{32}}.\frac{10x^3}{3a^2}\sqrt[4]{\frac{4}{a^3x}}$

139. $a^{-3}b\sqrt[4]{a^3b^2}.2a^2\sqrt[4]{a^{-5}b^3}.\frac{1}{2}ab^{-2}\sqrt[4]{a^{10}b^7}$

140. $\sqrt[3]{\frac{3a^{-2}b^5}{5a^4b^{-2}}}.\sqrt[3]{\left(\frac{6a^{-2}}{5b^3}\right)^{-2}}\cdot\sqrt[3]{-60a^5b^2}$

141. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}$

142. $\left(a\sqrt[6]{\frac{a^4}{x^5}}+x\sqrt[6]{a^5x}-\sqrt[6]{\frac{x^4}{a^3}}\right)\cdot\sqrt[6]{\frac{x^3}{a^2}}$

143. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\cdot\left(\sqrt{ab}-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

144. $(\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{ab^2}).(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$

145. $\sqrt{3}.\sqrt[3]{2}$

146. $\sqrt[5]{\frac{3}{8}}.\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$

147. $\sqrt[6]{54}.\sqrt{6}.\sqrt[3]{2}$

148. $\sqrt[9]{\frac{9}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[6]{2}.\sqrt[12]{3}$

149. $(3\sqrt{10}-2\sqrt[3]{4}+6\sqrt[6]{25}).\sqrt[4]{2}$

150. $(2\sqrt[7]{10}+3\sqrt{2}-4\sqrt[3]{5})\cdot\sqrt[4]{10}$

151. $(3\sqrt{2}+4\sqrt[3]{3}).(\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3})$

152. $(6\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{32}).\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}-2\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\right)$

153. $\sqrt[4]{a^3b}.\sqrt[6]{ab^4}$

154. $3a^2b\sqrt{3bc}.5ab\sqrt[3]{2a^2c}$

155. $a^2\sqrt[4]{a^5b^2}.b\sqrt[3]{\frac{a^5}{b}}\cdot\sqrt[4]{a^6b^7}.ab\sqrt[3]{a^4b^7}$

156. $2a\sqrt[4]{a^5b^2}.\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^3}}.3b\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{ab}}$

157. $(\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[4]{b^2}-a\sqrt[6]{b^5}).a^2\sqrt{ab}$

158. $(\sqrt[5]{a^2}-\sqrt[3]{a^4}+a\sqrt{a^3}).-2a\sqrt[3]{a^2}$

159. $\left(a\sqrt[3]{b}-2b\sqrt[6]{\frac{1}{b}}\right).(a\sqrt[6]{b}+\sqrt[3]{b^2})$

160. $(\sqrt{a}+\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[4]{a^3}).(\sqrt{a}-\sqrt[12]{a^5})$

Jagada juured:

161. $\sqrt{28}:\sqrt{7}$

162. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

163. $\sqrt{\frac{12}{35}}:\sqrt{\frac{7}{5}}$

164. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{96}:3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

165. $(5\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{10}+15\sqrt[3]{16}):3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

166. $\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{90}+3\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{\frac{5}{6}}\right):-2\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$

167. $\sqrt{5a}:\sqrt{a}$

168. $\sqrt[3]{4a^8}:\sqrt[3]{2a^2}$

169. $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}$

170. $\sqrt[4]{\frac{8a^5}{3b}}:\sqrt[4]{\frac{6a}{b^3}}$

171. $(ab^2\sqrt{x}-x\sqrt{b}):\sqrt{bx}$

172. $(\sqrt[4]{a^3x^3}-x\sqrt[4]{a^3}-4a\sqrt[4]{ax^2}):\sqrt[4]{ax^3}$

173. $\left(2\sqrt[4]{x^3y}-3\sqrt[3]{\frac{xy^8}{2}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}\right):\frac{1}{xy}\sqrt[4]{x^3y^2}$

174. $\left(\frac{4x}{25}\sqrt[5]{\frac{x^2}{y}}+\frac{3x}{50y}\sqrt[5]{\frac{x^3}{y^4}}-\frac{x}{y}\sqrt[5]{x^4}\right):\frac{4x}{5y}\sqrt[5]{\frac{x^6}{y}}$

175. $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}):(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})$

176. $(\sqrt[3]{a^2b}-2\sqrt[3]{2ab^2}+b\sqrt[3]{4}):(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{2b})$

177. $(\sqrt[4]{8a^3}-b\sqrt[4]{27b^2}):(\sqrt[4]{2a}-\sqrt[4]{3b^2})$

178. $(a^2\sqrt[4]{a}+b^2\sqrt[4]{8b}):(\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{2b^3})$

179. $(x^2\sqrt[3]{x^2}+xy\sqrt[3]{xy}+y^2\sqrt[3]{y^2}):(x\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y})$

180. $\left(\frac{1}{y}\sqrt[5]{\frac{x^2}{y^3}}-xy\sqrt[5]{4xy}+2y\sqrt[5]{\frac{1}{2}x^2y^2}-\frac{1}{2}\sqrt[5]{\frac{2y^8}{x^2}}\right):\left(\sqrt[5]{\frac{x}{y^4}}+\sqrt[5]{2x^3y^3}-\sqrt[5]{\frac{y^4}{4x}}\right)$

181. $\sqrt[3]{9}:\sqrt{3}$

182. $\sqrt[5]{\frac{4}{5}}:2\sqrt{\frac{1}{400}}$

183. $(\sqrt[4]{6}-2\sqrt{3}+\sqrt[3]{6}):\frac{1}{2}\sqrt{6}$

184. $(\sqrt{3}-3\sqrt[3]{6}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{12}):\frac{3}{8}\sqrt[4]{3}$

185. $\sqrt{a}:\sqrt[3]{a^2}$

186. $\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt[6]{2a^3}$

187. $\sqrt{6a^5}:\sqrt[6]{27a^{-9}}$

188. $10a\sqrt{a}:\sqrt[3]{a^2}$

189. $6a^2\sqrt{3a^{-1}b}:2a^3\sqrt[3]{2ab^{-1}}$

190. $5x^2y:\sqrt[3]{25xy^4}$

191. $\frac{24a^5b^2}{d^2}\sqrt[5]{\frac{a^2b^7}{c^2}}:\frac{4a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^4b^7}{cd^5}}$

192. $(a^2b+ax^2)\sqrt[3n]{\frac{x}{a^{n-1}c^8}}:ax\sqrt[2n]{\frac{x^4}{a^nc^2}}$

193. $(x+y):\frac{1}{3}\sqrt{x^2-y^2}$

194. $(x^2-y^2):\frac{a}{x}\sqrt[3]{\frac{2a}{(x+y)^2}}$

195. $(\sqrt[4]{8a^6b^9}-ab\sqrt[6]{8a^4b^5}+ab^2\sqrt[4]{2a^4b}):\sqrt[4]{2b}$

196. $(\sqrt[9]{a^5b^4}-4a^3b\sqrt[4]{a^3b^2}+\frac{a^3}{b^4}\sqrt{ab}):\frac{a}{b^2}\sqrt[12]{ab^2}$

197. $(\sqrt[5]{8x^3}-3\sqrt{3}):(\sqrt[5]{2x}-\sqrt{3})$

198. $(2a\sqrt[3]{ax^2}-a\sqrt[6]{ax^5}-ax):(\sqrt[3]{a^2x}-\sqrt{ax})$

199. $(x^2\sqrt[4]{27xy^3}+2xy\sqrt{2xy}):(\sqrt[4]{3x^3y}+\sqrt{2xy})$

200. $(x^3y^{-3}-x^3-y^3+2xy\sqrt{xy}):(xy^{-1}\sqrt{xy^{-1}}+x\sqrt{x}-y\sqrt{y})$

§ 7. Juurte astendamine ja juurimine.

Et juurt astendada, tarvis juuritav avaldus astendada;

näit.: $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$.

Eelmist juhist võib järgmiselt lausestada: juure astendamisel jääb juurenäitaja muutuseta, aga juuritava arvu astmenäitaja korrutatakse antud astmenäitajaga. Kui juurenäitajal ja antud astmenäitajal on ühine tegur, siis võib neid näitajaid selle teguriga lühendada.

Kui antud juurel on kordaja (koeffitsient), siis astendatakse see kordaja lahus ja saadus kirjutatakse kordajana juure astme juurde.

Hulkliikmelisi avaldusi astendatakse üldjuhiste järele.

Astendada:

201. $(\sqrt[4]{a^3})^4$

202. $(\sqrt[3]{a^2})^2$

203. $(\sqrt[4]{2x^3})^5$

204. $(-a\sqrt[8]{a^2b^3})^7$

205. $(a^2x\sqrt[3]{3a^2x})^4$

206. $\left(-2a\sqrt[6]{\frac{3}{a^4}}\right)^4$

207. $(\sqrt[5]{(x-y)^2})^4$

208. $\left(\sqrt[4]{\frac{a^{-3}b^2}{a^{-2}b^8}}\right)^{-3}$

209. $(a^{-1}b^2\sqrt[3]{4a^nb^{-2}})^{-2}$ 210. $(\sqrt[n]{(x^2+y^2)^m})^{np}$

211. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ 212. $\left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)^2$

213. $(\sqrt[3]{4}+\sqrt{2})^2$ 214. $(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3$

215. $(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})^2$ 216. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10})^2$

217. $(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}})^2$ 218. $(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}})^2$

219. $\left(\frac{b}{4}\sqrt{ab}-\frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2$ 220. $(a\sqrt{a}+a\sqrt{2a})^3$

Et juurt juurida, tarvis juurte näitajad korrutada ja juuritav arv endiseks jätta.

Kui antud juurel on kordaja, siis viiakse see juuremärgi alla.

Juurida:

221. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$ 222. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}}$

223. $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$ 224. $\sqrt[4]{\sqrt{256a^{10}}}$

225. $\sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}$ 226. $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^4}}$

227. $\sqrt{\sqrt[4]{a^{10}b^2c^8}}$ 228. $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}.\sqrt{b}}$

229. $\sqrt{x^3\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}$ 230. $\sqrt{x\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}\sqrt{\frac{y}{x}}}}$

231. $\sqrt[4]{2x\sqrt[3]{2x^2y.3y\sqrt{3xy^3}}}$ 232. $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}x^4y^2\sqrt{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{4x}}}}$

233. $\sqrt[4]{20736}$ 234. $\sqrt[10]{59049}$ 235. $\sqrt[12]{4096}$ 236. $\sqrt[9]{262144}$

237. $\sqrt[4]{a^4+4a^3+6a^2+4a+1}$

238. $\sqrt[4]{16a^4-48a^3b+54a^2b^2-27ab^3+\frac{81}{16}b^4}$

239. $\sqrt[6]{x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+6xy^5+y^6}$

240. $\sqrt[6]{64x^{12}-96x^{10}+160x^8-20x^6+\frac{15}{4}x^4-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{64}}$

§ 8. Irratsionaalsuse kaotamine murru nimetajast.

Murru nimetajast kaotatakse irratsionaalsus sel teel, et nimetajat korrutatakse võimalikult lihtsa avaldusega, mis irratsionaalse nimetaja ratsionaalseks muudab; arusaadav, et sama avaldusega ka murru lugejat tuleb korrutada. Keerulisematel juhustel kaob nimetaja irratsionaalsus alles mitmekordse korrutajatarvitamise järele.

Irratsionaalsus nimetajast kaotada:

241. $\frac{a}{\sqrt{a}}$ 242. $\frac{m}{\sqrt{m^3}}$ 243. $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$

244. $\frac{m+n}{\sqrt{m-n}}$ 245. $\frac{4}{\sqrt{2}}$ 246. $\frac{3}{\sqrt[3]{6}}$

247. $\frac{6}{\sqrt[4]{8}}$ 248. $\frac{\sqrt[6]{49}}{\sqrt[3]{21}}$ 249. $\frac{a^2-b^2}{\sqrt[3]{a-b}}$

250. $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2-b^2}}$ 251. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ 252. $\frac{a}{1-\sqrt{a}}$

253. $\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ 254. $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ 255. $\frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}}$

256. $\frac{n}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ 257. $\frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ 258. $\frac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}$

259. $\frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ 260. $\frac{n}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$

§ 9. Irratsionaalsete kaks- ja hulkliikmete juurimine.

$a\pm\sqrt{b}$ kujulise avalduse ruutjuure leidmine (ruutjuurimine) on võimalik eeldusest välja minnes, et a^2-b on täisruut. Tõesti, oletades, et $\sqrt{a^2-b}=n$, on võimalik ka valem $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+n}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-n}{2}}$. Kui $\sqrt{b}$ juures on kordaja, siis tuleb see enne eelmise valemi tarvitamist juuremärgi alla viia.

Leida ruutjuur kaksliikmeist:

261. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 262. $\sqrt{6+4\sqrt{2}}$

263. $\sqrt{5-\sqrt{21}}$ 264. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

265. $\sqrt{4\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$ 266. $\sqrt{4\sqrt{5}-2\sqrt{15}}$

267. $\sqrt{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}$ 268. $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$

269. $\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 270. $\sqrt{2a^2+2\sqrt{a^4-b^2}}$

Leida ruut- ja kuupjuur hulkliikmeist:

271. $\sqrt{(4a+5b-4\sqrt{5ab})}$ 272. $\sqrt{(a^3+2ab\sqrt{ab}+b^3)}$

273. $\sqrt{(25-10\sqrt[4]{3}+\sqrt{3})}$ 274. $\sqrt{\left(4\sqrt[3]{9}+2\sqrt{3}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{3}\right)}$

275. $\sqrt{\left(a^2+a\sqrt{a}-\frac{13}{12}a-\frac{2}{3}\sqrt{a}+\frac{4}{9}\right)}$

276. $\sqrt{(4x\sqrt[3]{x}-4x\sqrt[3]{x^2y}+x^2\sqrt[3]{y^2}+y^4-4y^2\sqrt[3]{x^2}+2xy^2\sqrt[3]{y})}$

277. $\sqrt[3]{(a+3\sqrt[3]{a^2b}+3\sqrt[3]{ab^2}+b)}$

278. $\sqrt[3]{(2x\sqrt{2x}-6x\sqrt[3]{y^2}+3y\sqrt[6]{8x^3y^2}-y^2)}$

279. $\sqrt[3]{(ab^2\sqrt{a}+6ab^2\sqrt[12]{a^3b^4}+12ab^2\sqrt[3]{b^2}+8b^3\sqrt[4]{a^3})}$

280. $\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y^2}\sqrt{x}-\frac{2}{y}+\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{8y}{27x^3}\right)}$

§ 10. Kordamisnäitused.

Järgmised avaldused teisendada korrutisteks:

281. $\sqrt{ab}+\sqrt{a}$ 282. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}$ 283. $\sqrt{a+b}-\sqrt{a^2-b^2}$

284. $\sqrt{a^2-b^2}+a-b$ 285. $a^2-\sqrt[3]{b^2}$ 286. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[5]{4}$

287. $\sqrt[6]{a^5}+\sqrt[4]{a^3}$ 288. $a^2+\sqrt{a}-\sqrt[4]{a^3}$ 289. $a+b+2\sqrt{ab}$

290. $\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab^2}+b\sqrt[3]{b}$ 291. $a^2-\sqrt[5]{b^4}$ 292. $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b}$

293. $a^3-\sqrt[5]{b^3}$ 294. $a\sqrt{a}+b\sqrt{b}$ 295. $a-b$ 296. a^2+b

297. $a-\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{a^2b}-b$

298. $ab-a\sqrt{a}-\sqrt{ab}+b\sqrt{b}$

299. $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2b^2}-2a\sqrt[3]{b}$

300. $a\sqrt{ab}+2a\sqrt[4]{b^3}+b\sqrt{a}$

Järgmistele avaldustele anda kõige lihtsamad kujud:

301. $\dfrac{3}{5-\sqrt{5}}-\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}$

302. $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}-\dfrac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}-\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}$

303. $a\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-b\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}-\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

304. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)$

305. $\dfrac{a(x+a+\sqrt{x^2-a^2})}{x+a-\sqrt{x^2-a^2}}$

306. $\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\dfrac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$

307. $\sqrt{\dfrac{a+x^2}{2x}-\sqrt{a}}+\sqrt{\dfrac{a+x^2}{2x}+\sqrt{a}}$

308. $\sqrt{\dfrac{3x+a^3}{2a}+\sqrt{3ax}}-\sqrt{\dfrac{3x+a^3}{2a}-\sqrt{3ax}}$

309. $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt[4]{5}}-\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}-3}\right).\sqrt[3]{9-\sqrt{5}}$

310. $\left(\sqrt[6]{9-4\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}}\right).\sqrt[3]{1+2\sqrt{2}}$

311. $5a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}-2\sqrt{a^3\sqrt[4]{a^3}}+3\sqrt[-2]{a^{-5}\sqrt[4]{a^5}}-4a^2\sqrt[-4]{a\sqrt{\dfrac{1}{a}}}$

312. $(-4a\sqrt[3]{a^{-2}\sqrt{ax}})^3+\left(-10a\sqrt{x}.\sqrt[4]{\dfrac{1}{ax}}\right)^2-\left[5\left(\sqrt[3]{a\sqrt[-4]{\dfrac{a}{x}}}\right)^3\right]^2$

313. $\left\{\sqrt[12]{\left[\left(-\dfrac{a}{b}\right)^3\right]^{-4}}\cdot\sqrt[5]{\dfrac{a^2}{b^3}}:\sqrt[3]{\dfrac{a^8}{b^2}}\right\}^6$

314. $\left[\left(x\sqrt{\dfrac{a}{b^2x}}-\dfrac{x}{\sqrt{bx}}\right):\dfrac{\sqrt{x}}{b}-\sqrt{a}\right]:\sqrt[n]{\dfrac{1}{b^{-m}}}$

315. $\sqrt[-2]{\dfrac{1}{4}a^2\sqrt{\dfrac{a}{x}}}.\left[\dfrac{a}{2\sqrt{a}}.\dfrac{a}{2\sqrt{x}}:\left(\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{x}}.a^{-1}\sqrt{x}\right)^6\right]$

316. $\left[\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}}\right]^{-1} : \sqrt[-3]{\frac{3a\sqrt{a}}{2\sqrt{1-a^2}}}$

317. $\sqrt{3+\sqrt{5+\sqrt{3}-\sqrt{27+8\sqrt{4-2\sqrt{3}}}}}$

318. $\sqrt{6+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3-\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{128}}}}$

Leida järgmiste avalduste arvsuurused:

319. $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$, kui $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

320. $\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$, kui $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

§ 11. Murruliste näitajatega astmed ja juured.

Murrulise astmenäitajaga suurus pole midagi muud, kui juur, mille näitajaks on astmenäitaja nimetaja ja mille juuritavaks arvuks on antud astme alus astmenäitaja lugeja astmel.

$$\text{Näituseks: } a^{\frac{3}{5}}=\sqrt[5]{a^3}, \text{ ehk: } a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

Murrulise juurenäitajaga juur võrdub astmega, mille näitajaks on vastupidine juurenäitaja;

$$\text{näit.: } \sqrt[\frac{3}{2}]{a}=a^{\frac{2}{3}}, \text{ ehk: } \sqrt[\frac{m}{n}]{a}=a^{\frac{n}{m}}$$

Murruliste näitajatega astmete ja juurte kohta on maksvad samad juhised, mis maksavad täisarvuliste näitajatega astmete ja juurte kohta. Lõppsaadustes tarvis murrulised näitajad ära kaotada, sest et nad ainult tehete lihtsustamiseks ja näitajate üldistamiseks tarvitusele on võetud.

Juuremärgi asemele kirjutada murrulised astmenäitajad:

321. $\sqrt[3]{a^2}$ 322. $\sqrt[4]{a^{-3}}$ 323. $\sqrt[5]{a^{-3}b^4}$

324. $\sqrt[-2]{a^{-3}}$ 325. $\sqrt{a^2+b^2}$ 326. $\sqrt[-3]{\frac{a^3-b^3}{a^{-1}b^2}}$

Murruliste astmenäitajate asemel tarvitada juuremärke:

327. $a^{\frac{5}{6}}$ 328. $a^{-\frac{3}{4}}$ 329. $(a+b)^{\frac{2}{3}}$ 330. $3a^{-\frac{1}{2}}(a-b)^{\frac{3}{8}}$

Lihtsustada arvsuurused:

331. $4^{\frac{1}{2}}$ 332. $81^{\frac{3}{4}}$ 333. $16^{-\frac{5}{4}}$ 334. $(-8)^{\frac{2}{3}}$

335. $\left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}$ 336. $\left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$ 337. $(0{,}64)^{0{,}5}$ 338. $81^{-0{,}75}$

339. $8^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{4}}+9^{\frac{1}{2}}$ 340. $10^{0{,}5}+\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$

Arvutada järgmised tehted:

341. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{5}}.a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{3}}$ 342. $a^{\frac{7}{12}}b^{\frac{5}{6}}:a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}}$

343. $(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})$

344. $(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})$

345. $(a^{\frac{2}{3}}-b^{-\frac{5}{4}}):(a^{\frac{2}{9}}-b^{-\frac{5}{12}})$

346. $(a^{\frac{3n}{2}}+b^{-\frac{3n}{2}}):(a^{\frac{n}{2}}+b^{-\frac{n}{2}})$

347. $(a^{\frac{4}{3}}+4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}+16b^{\frac{4}{3}}):(a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})$

348. $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}+2b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}):(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}-c^{\frac{1}{4}})$

349. $(a^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}})^2$

350. $(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}})^3$

351. $\left[\left(a^{-\frac{3}{2}}b\right).\left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^3$

352. $$\sqrt{\frac{3a^{-\frac{7}{2}}b^8}{a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}\sqrt[4]{4a^{-10}b^6.\frac{1}{\left(a^{-\frac{1}{2}}b\right)^3}}}$$

353. $$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}$$

354. $$\sqrt{a^{\frac{3}{2}}b^{-2}-6^{\frac{3}{4}}b^{-\frac{1}{3}}+9b^{\frac{4}{3}}}$$

355. $\sqrt[\frac{2}{3}]{a\sqrt{b^3}.b^{-2}\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{\frac{1}{3}}b}}$

356. $\sqrt[0,4]{\frac{a^{-2}b^3\sqrt{2a^6b^{-3}}}{(\sqrt{a^{-5}b^3})^{\frac{4}{15}}}}$

357. $\left(\sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{\sqrt{a}}{b^2}}+\sqrt[\frac{2}{3}]{b\sqrt[3]{a}}\right)$

358. $\sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{4}{3}}+a-2a^{\frac{7}{6}}}$

359. $(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}):\left(\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^8}}}+\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^8}}}\right)$

360. $\sqrt[\frac{3}{2}]{a^2b\sqrt{b}-6a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{5}{4}}.+12ab\sqrt{a}-8ab^{\frac{3}{4}}}$

§ 12. Imaginaarsuurused.

Imaginaarsuuruseks nimetatakse negatiivse suuruse paarisarvulise astme juurt. Imaginaarsuuruste vastanditena nimetatakse harilikka suurusi reaalsuurusteks.

Imaginaarsuuruse kõige lihtsam kuju on $\sqrt{-1}$; teda tähendatakse lühidalt tähega i, nõnda et $\sqrt{-1}=i$.

Avalduse $\sqrt{-1}$ astmeid arvutades leiame: $(\sqrt{-1})^1=1$; $(\sqrt{-1})^2=-1$; $(\sqrt{-1})^3=-i$; $(\sqrt{-1})^4=1$. Kui astmenäitajaid järjekindlalt suurendada, siis hakkavad need neli saadust (i; —1; —i ja 1) perioodiliselt korduma. Võib tõendada, et i igasugune positiivne täisarvuline aste on nii suur kui i aste, mille näitajaks on jääk, mis saadakse, kui antud astmenäitaja jagada 4-ga. Näit.: $i^{26}=i^{4.6+2}=i^2=-1$; ehk: $i^{35}=i^{4.8+3}=i^3=-i$.

Igasugust $\sqrt{-a}$ kujulist imaginaarsuurust võib ette kujutada reaalsuuruse ja *i* korrutise näol; näit.: $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}=$ $=\sqrt{a}.i$.

Saadud imaginaararvu kuju nimetatakse tema normaalkujuks. Enne tehete toimetamist antakse imaginaarsuurustele normaalkuju.

$a+bi$ kujuline avaldus, milles a ja b on reaalsuurused, esitab kõige üldsemat algebralist suurust. Sellest avaldusest saab reaalsuurus, kui $b=0$. Avaldust $a+bi$ nimetatakse kompleksuuruseks ehk kompleksiks. Kahte $a+bi$ ja $a-bi$ kujulist kompleksuurust, s. o. kompleksuurusi, mis üksteisest lahku lähevad ainult imaginaarosa ees olevate märkide poolest, nimetatakse kaassuurusteks. Kompleksuuruste tehete teoorias tuleb tihti ette avaldus $\sqrt{a^2+b^2}$, mida kompleksi $a+bi$ **mooduliks** nimetatakse ja mida harilikult sümboolselt M-ga tähendatakse.

Kui kompleksarvudega tehteid toimetatakse, siis tarvis alati esialgu nende imaginaarosad normaalseteks teha.

Komplekside liitmisel ja lahutamisel liidetakse ehk lahutatakse isepäinis nende reaalosad ja isepäinis imaginaarosad. Näit.: $a+bi\pm(a_1\pm b_1i)=(a\pm a_1)+(b\pm b_1)i$.

Komplekside korrutamist toimetatakse üldjuhiste järele, kusjuures ainult silmas tuleb pidada, et $i^2=-1$. Sellepärast $(a+bi)(a_1+b_1i)=aa_1+a_1bi+ab_1i-bb_1=aa_1-bb_1+(a_1b+ab_1)i$.

Jagamine sünnib sel teel, et niihästi jagatav kui ka jagaja korrutatakse avaldusega, mis jagajaga kaasane. Selle korrutamise läbi muutub uus jagaja reaalsuuruseks, nimelt muutub ta endise jagaja mooduli ruuduks. Nõnda siis $(a+bi):(a_1+b_1i)=$
$$=\frac{(a+bi)(a_1-b_1i)}{a_1^2+b_1^2}=\frac{aa_1+bb_1}{M_1^2}+\frac{a_1b-ab_1}{M_1^2}i.$$

Komplekside ruudutamist ja kuubitamist toimetatakse tuntud valemite järele. Neid valemid tarvitades on kasulik esiteks ainult i astmed ära tähendada ja pärast seda nende astmete asemele lihtsamad, nendega võrdsed suurused panna.

Ruutjuurt leitakse valemite abil $\sqrt{a\pm bi}=\sqrt{\frac{M+a}{2}}\pm\sqrt{\frac{M-a}{2}}i$, kus M tähendab juuritava kompleksi moodulit. Saadud juurele võib ette kirjutada kas samad märgid, mis olid selles valemis kompleksi reaalsel ehk imaginaarsel osal, või vastupidised märgid.

361. $(\sqrt{-1})^6$
362. $(\sqrt{-1})^{21}$
363. $(\sqrt{-1})^7$
364. $(\sqrt{-1})^{56}$
365. i^{40}
366. i^{37}
367. i^{18}
368. i^{4n+2}
369. i^{4n-1}
370. i^{8n+5}

Lihtsustada imaginaarsed avaldused:

371. $\sqrt{-4}$
372. $\sqrt{-81}$
373. $\sqrt{-a^2}$
374. $\sqrt{-b^6}$
375. $\sqrt{-\frac{9}{4}}$
376. $\sqrt{-\frac{a^4}{b^8}}$

377. $\sqrt{-a}$ 378. $\sqrt{-9x}$ 379. $\sqrt{-a^2-b^2}$

380. $\sqrt{-x^2-y^2+2xy}$

Arvutada järgnevad tehted:

381. $\sqrt{-25}+\sqrt{-49}-\sqrt{-64}+\sqrt{-1}$

382. $3\sqrt{-4}+5\sqrt{-27}-3\sqrt{-16}-5\sqrt{-3}$

383. $3+2i+(4-3i)-[(8-5i)-(5+13i)]$

384. $a+bi-(2a-3bi)+[(a-4bi)+(5a-2bi)]$

385. $\sqrt{-16}.\sqrt{-9}$ 386. $\sqrt{-a}.\sqrt{-b}$

387. $i\sqrt{-x^2}$ 388. $\sqrt{a-b}.\sqrt{b-a}$

389. $(2-5i)(8-3i)$ 390. $(5+2\sqrt{-7}).(6-5\sqrt{-7})$

391. $(\sqrt{a}-\sqrt{-b}).(\sqrt{a}+3\sqrt{-b})$

392. $(3\sqrt{-5}-2\sqrt{-7}).(2\sqrt{-7}+3\sqrt{-5})$

393. $a:\sqrt{-a}$ 394. $\sqrt{-ax}:\sqrt{-x}$

395. $\dfrac{a^2+b^2}{a-bi}$ 396. $\dfrac{x-y}{x+yi}$

397. $\dfrac{4}{1+\sqrt{-3}}$ 398. $\dfrac{3-5i\sqrt{8}}{3+5i\sqrt{8}}$

399. $\dfrac{36-\sqrt{-2}}{2+3i\sqrt{2}}$ 400. $\dfrac{2-\sqrt{-7}}{3+\sqrt{-21}}$

401. $(a+bi)^2$ 402. $(3-\sqrt{-2})^2$

403. $\left(\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2$ 404. $(3\sqrt{-5}+2\sqrt{-1})^2$

405. $(2-3\sqrt{-2})^2$ 406. $\left(\dfrac{-1+2\sqrt{-2}}{2}\right)^2$

407. $(a-bi)^3$ 408. $(3+\sqrt{-2})^3$

409. $(\sqrt{-3}-2\sqrt{-1})^3$ 410. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^3$

411. $\sqrt{3+4\sqrt{-1}}$ 412. $\sqrt{-3-4i}$

413. $\sqrt{1+4\sqrt{-3}}$ 414. $\sqrt{2-3\sqrt{-5}}$

415. $\sqrt{20-4\sqrt{-11}}$ 416. $\sqrt{6+\sqrt{-13}}$

417. $\sqrt{\sqrt{-1}}$ 418. $\sqrt[8]{-1}$

419. Näidata, et kui n on 3[me] mitmekordne, siis

$$\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^n+\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^n=2$$

420. Näidata, et kui n on 2[ga] jagatav, siis

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n+\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n \text{ võrdub}$$

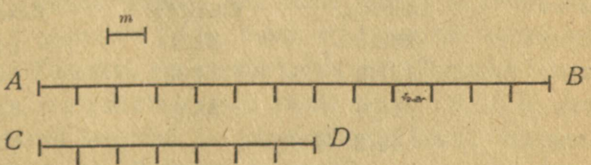
kas ± 2 või 0.

IX jagu.

Graafilise kujutamise ja funktsioonide sissejuhatus.

§ 1. Graafilise kujutamise mõiste.

Kui on tarvis jõgede pikkust, mägede kõrgust, sademete rohkust j.n.e. võrrelda, siis on selleks isesugune viis, mida nimetatakse tähendatud suuruste piltlikuks ehk graafiliseks kujutuseks. Et näituseks jõgede pikkusi võrrelda, selleks võetakse sirglõigud, millede pikkused suhtuvad nagu jõgede pikkused. Olgu antud võrrelda Pärnu jõe pikkus (130 klm.) Narva jõe pikkusega (70 klm.). Et nende jõgede pikkustele leida vastavalt sirglõike ehk arvjooni, millede pikkused oleksid samas vahekorras kui jõgede pikkused, tuleb valida mõõtühik, mis antud juhusel olgu näit. iga 10 klm. peale $^1/_2$ cm. Pärnu jõe arvjoone leidmiseks paneme $^1/_2$ cm. 13 korda sirgjoonele, kuna Narva jõe arvjoone leidmiseks mõõtühikut on tarvis sinna panna ainult 7 korda (joonis nr. 1). Siis saame jõgede pikkusi kujutavad arvjooned.



Joonis nr. 1.

Joonise nr. 1 arvjoon AB kujutab graafiliselt Pärnu jõe pikkust, CD aga — Narva jõe pikkust; sirglõik m on mõõtühikuks võetud.

Mitte üksi arvjoonte abil ei ole võimalik mitmesuguseid suurusi graafiliselt ehk piltlikult kujutada, vaid selleks võetakse abiks ka pinnad ja kehad. Viimasel korral võetakse mõõtüksuseks mingi ruut ehk kuup ja konstrueeritakse täisnelinurgad ehk kehad.

Seesugust piltlikku viisi tarvitatakse õige tihti võrdleva geograafia kursustes.

Järgnevad ülesanded graafiliselt lahendada:

1. Graafiliselt kujutada järgmiste jõgede pikkus: Keila jõgi 70 v., Kasari jõgi 75 v., Kunda jõgi 55 v., Väike Emajõgi (Pühajärvest Võrtsjärveni) 60 v. ja Suur Emajõgi 80 v.

2. Samuti kujutada järgnevate jõgede pikkusi: Mississippi 7000 klm., Leena 4600 klm., Aamur 4500 klm. ja Niilus 6000 klm.

3. Graafiliselt püstjoonte abil võrrelda järgnevate mägede kõrgus: Väike Munamägi 244 m., Megaste mägi 209 m.

4. Samuti võrrelda järgnevate mägede kõrgus: Ebavere mägi 480 jalga, Emu mägi 544 j. ja Kellavere m. 510 j.

5 Täisnelinurkade abil võrrelda Eesti vabrikutööliste arvu tööstusealade järele 1. jaan. 1920. a., iga 100 töölise peale üht ruutu millimeetripaberil mõõtüksuseks võttes, kui teada on, et nimetatud ajal oli tekstiiltööstuses 6000 töölist, puutööstuses 1000 t., paberitööstuses 1300 t., nahatööstuses 200 t., metallitööstuses 1800 t., keemiatööstuses (ilma viinavabrikuteta) 500 t., mineraalide ümbertööstuses 1200 t., toidu- ja maitseainete tööstuses 400 töölist.

6. Maakondade järele jagunevad Eesti raudteed järgmiselt:

Maakond	Riigiraudtee Laiarööp.	Riigiraudtee Kitsarööp.	Eraraudtee Kitsarööp.
Harju	138,3	31,3	94,0
Viru	191,3	7,5	—
Järva	15,0	48,6	46,0
Lääne	44,6	—	—
Pärnu	—	—	145,0
Viljandi	—	—	56,7
Tartu	126,2	—	—
Võru	119,4	—	—

Kujutada graafiliselt: 1) riigi laia- ja kitsarööpalise ja eraraudtee üldist pikkust; 2) sedasama üksikute maakondade järele.

7. Riigi- ja eraraudteede kilomeetrite arv iga 10000 elaniku kohta on Eestis järgmine:

Harju	13,25	Pärnu	15,69
Viru	15,13	Viljandi	6,36
Järva	20,46	Tartu	6,89
Lääne	5,77	Võru	14,13

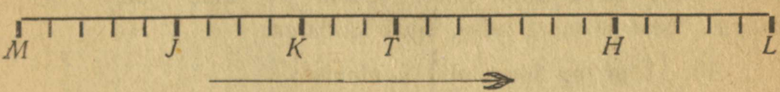
8. Ookeanidel on järgnevad pinnasuurused:

Suur ookean	175	miljonit	ruutkil.
Atlandi „	90	„	„
Lõuna-Jäämeri	19	„	„
Põhja „	15	„	„

§ 2. Koordinaadid sirgjoonel.

Olgu meil niisugune ülesanne: Aurulaeva omanik teeb tihti Tartust sõitusid Emajõel päri ja vastu voolu. Päri voolu on järgmised kohad: Haaslava 7 v. ja Luunja 12 v., kuna vastu voolu asuvad Kvistental 3 v., Jänese 7 v. ja Muuge 12 v. Tartust. Aurulaeva omanik tahtis omale plaani kokku seada, mille järele tal alati võimalik oleks üksikute kohtade kaugust leida.

Selleks kujutas ta Emajõe pikkuse sirgjoone abil.



Joonis nr. 2.

Kõik kohad Tartust päri voolu märkis ta linna kujutavast punktist *T* paremale poole, vastu voolu asuvad kohad aga pahemale poole *T* punkti, iga versta tarvis mõõtühsuseks $^1/_2$cm. võttes. Nii sai ta rea punkte (vaata joonis nr. 2) *M*, *J*, *K*, *T*, *H* ja *L*, mis kujutavad järgmisi jõe ääres asuvaid kohti: Muuge, Jänese, Kvistental, Tartu, Haaslava ja Luunja.

Nimetame antud punktide kauguse linna tähendavast T punktist nende punktide **koordinaatideks**, kuna linna tähendava *T* punkti **koordinaatide alguspunktiks** nimetame. Peale selle märgime punktide kaugused paremal pool alguspunkti (s. o. päri voolu) $+$ (pluss) märgiga, kuna $-$ (miinus) märgiga tähendame punktide kaugused pahemal pool alguspunkti (s. o. vastu voolu). Säherdune märkimine on sellepärast kasulik, et ütluses: „üks koht on +7 versta Tartust kaugel“, seisab mitte üksi koha kaugus Tartust, vaid ka siht, s. o. et antud koht on 7 v. Tartust pāri voolu. Peale selle, ühe koha kaugust määrates teisest kohast, ei saa me üksi verstade arvu, vaid ka sihi, s. o. kus pool miski koht antud kohast asub.

Näituseks leiame kauguse Haaslavast Luunjani. Selleks peame pāri voolu minema 12—7=5 versta. Siin näeme, et esimese koha kauguse leidmiseks teisest kohast peame teise koha kaugusest lahutama esimese koha kauguse. Olgu a_1 esimene ja a_2 teine koht; siis võime kaugust esimesest kohast teise kohani avaldada järgmise valemi abil: $x=a_2-a_1$.

Näitus: Leida kaugus Luunjast Muugeni. $a_1=12, a_2=-12$; $x=a_2-a_1=-12-12=-24$, s. o. Muuge asub Luunjast 24 versta vastu voolu.

Graafiliselt lahendada järgnevad ülesanded:

9. Raudteejaamade kaugus Tartust Tapa poole on (arvud on ümmargusemaks tehtud): Kärkna 11 klm., Voldi 21,5 klm., Kaarepera 35,5 klm., Jõgeva 47,3 klm. jne. ja Valga poole Nõo 15,3 klm., Elva 25,3 klm., Pritsu 35 klm. jne. Leida kaugus ühest jaamast teise, sihti näidates.

10. Ühe tee ääres olid L alevist:

koht A +9	klm. kaug.,	koht B +6	klm. kaug.
„ E —8	„ „	„ M +12	„ „
„ N —14	„ „	„ S —4	„ „

Leida graafiliselt kaugus M^{st} kuni E^{ni}, kaugus M kuni N, kaugus A kuni S jne.

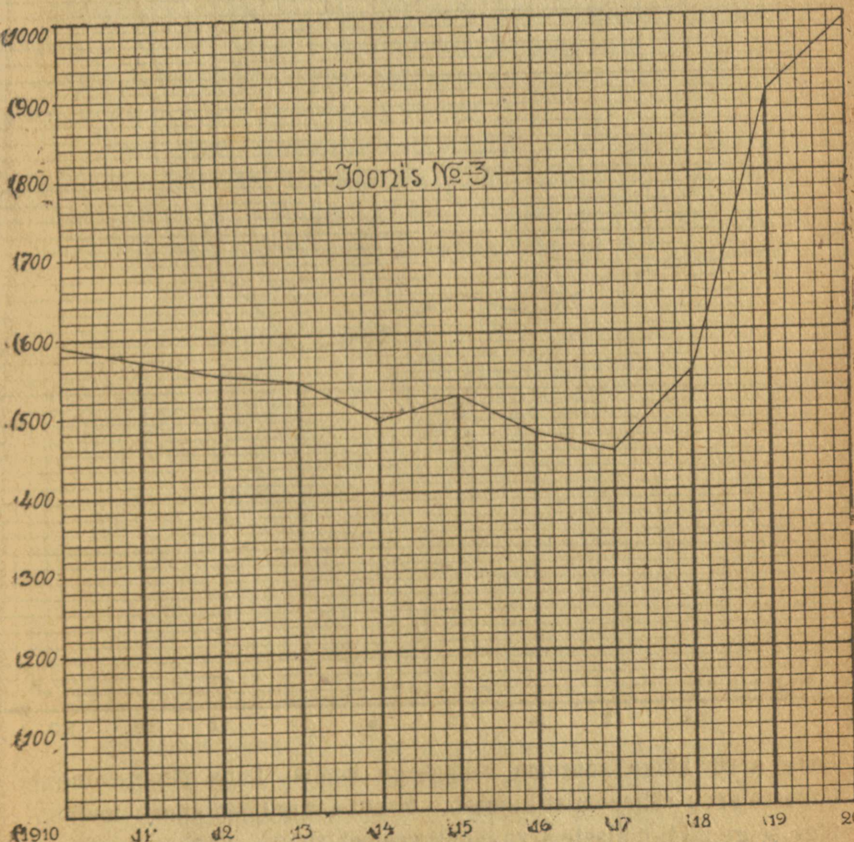
11. Täheteadlane nägi esimest langevat meteoori 7 min. enne keskööd, teist 3 m., kolmandat keskööl, neljandat 5 min. ja viiendat 8 min. pärast kesköõd. Graafiliselt leida aeg kahe mistahes meteoori langemise vahel.

12. Sõjaväljal valgustati öösi ümbrust raketitega. Keegi märkas, et öösi kella $^1/_2 11$ kuni kella 11 lasti raketid kell $10^{\underline{30}}$, $10^{\underline{35}}$, $10^{\underline{40}}$, $10^{\underline{43}}$, $10^{\underline{45}}$, $10^{\underline{48}}$, $10^{\underline{55}}$ ja kell 11. Leida aeg kahe mistahes raketilaskmise vahel.

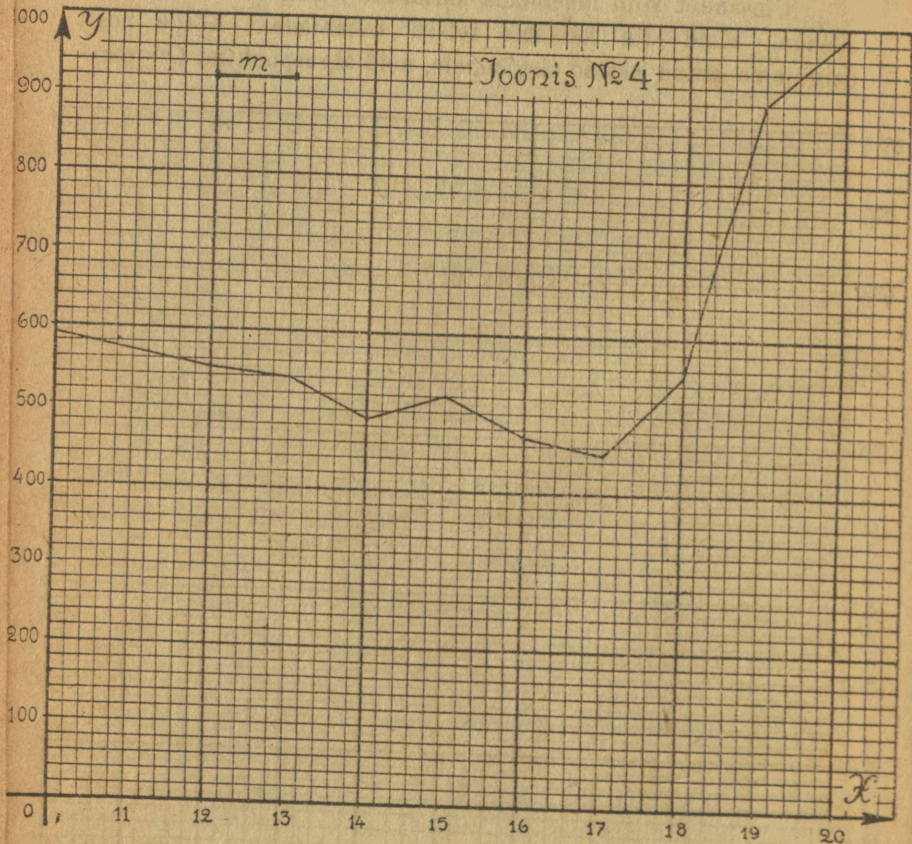
§ 3. Koordinaatide teljed.

Vaatame läbi järgmise ülesande. H. Treffneri asut. gümnaasiumis õppis 1910. a. kuni 1920. a. ümmargustes arvudes õpilasi: 590, 570, 550, 540, 590, 520, 470, 450, 550, 900 ja 990. Seada kokku graafiline kujutus õpilaste arvu muutuvustest nimetatud gümnaasiumis.

Ülesannet võib lahendada sarnaselt jõgede pikkuse võrdlemisega. Kuid siin katsume teisiti toimetada. Kõige pealt paigutame antud aastad sirgjoonele, neid alguspunktist O^{st} pare-



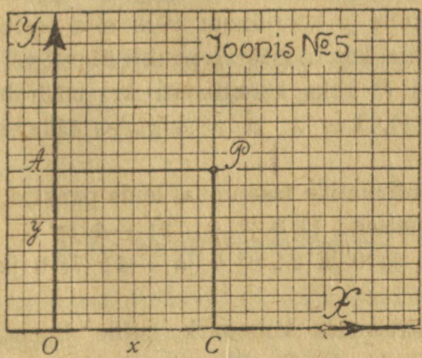
male poole seades, võttes iga aasta jaoks mõõtühsuseks $^1/_2$ cm. Õpilaste arvu võrdlemiseks aga tarvitame arvjoone, mille saame nii, kuis seda nägime jõgede pikkuste võrdlemisel. Ainuke vahe, et me neid ei sea enam rõhtsalt (horisontaalselt) üksteisega kõrvuti, vaid asendame igaühe vastava aasta kohta aastate joonele risti (perpendikulaarselt) tõmmatud joontele. Kui me õpilaste arvu võrdlevate joonte lõpupunktid järjekorras ühendame sirgetega, siis saame joone, mis kohati tõuseb aastate joonest kõrgemale, kohati aga läheneb viimasele (vaata joonis nr. 3). Kohad, kus ta kõrgemale tõuseb, satuvad ühte õpi-



laste arvu kõige suurema rohkusega koolis, kuna lähenemine õpilaste arvu vähenemist kujutab. Saadud murdjoon annab meile õige selge pildi õpilaste arvu muutuvustest 1910.—1920. a. kestes.

Punktid, mida ühendades murdjoone saime, võime õige lihtsalt teisiti saada. Selleks tuleb aastate joonele alguspunktist tõmmata ristjoon. Sellele joonele märgime nüüd õpilaste arvu, mõõtüksuseks $^1/_{10}$ mm. iga õpilase kohta võttes. Nüüd ei joonista me iga aasta jaoks õpilaste arvjoont eraldi, vaid otsime kohe nende joonte lõpupunktid, missugused nad omandavad, kui neid vastavate aastate kohta paigutataks. Selle lõpupunkti leiame ilma arvjoone paigutamiseta kahel viisil. Esiteks, iga aasta kohta loeme rõhtsast joonest ülespoole nii mitu korda $^1/_{10}$ mm., kui mitu õpilast oli sel aastal koolis. Ehk teisiti, otsime ristjoonel vastava punkti välja ja viime rööbiti (paralleelselt) rõhtjoonele vastava aasta kohta üle, kuhu me ta siis ka ära märgime (vaata joonis nr. 4). Mõlemal juhusel saame ühe ja sama punkti. Ja sel punktil on alati üks ja sama seis, üks ja sama kaugus kahest vastastikku risti seisvast joonest, kui aga mõõtüksused on vastavalt võrdsed võetud.

Neid kahte vastastikku risti seisvat joont, millede abil saab tasapinnal kindlasti ära määrata punkti seisukoha, nimetatakse **koordinaatide telgedeks**. Punkti, milles koordinaatide teljed lõikuvad, nimetatakse koordinaatide **alguspunktiks**.



Otsitavad punktid, mida sirgetega ühendades murdjoone saime, asuvad koordinaatide telgede vahel kindlas kauguses niihästi ühest kui ka teisest teljest. Kaugust rõhtsast ehk X **teljest** loetakse temale risti oleva ehk Y **telge** mööda, kuna kaugust Y teljest X telge mööda loetakse, alguspunktist alates. Näit. joonisel nr. 5 on punkti P kaugus X teljest ristjoon PC

ehk OA ja punkti P kaugus Y teljest — ristjoon AP ehk OC. OA ja OC on **punkti** P **koordinaadid**, kusjuures OA märgitakse x ja OC y tähega. Nii siis on punktil kaks koordinaati: x ja y. Teisi koordinaate ei või punkt P^1 olla, sest tal ei ole teistsugust kaugust antud telgedest kui $PC = OA = y$ ja $AP = OC = x$.

Kui aga koordinaadid on antud, siis tuleb üks neist võtta X, teine Y telge mööda, saadud punktidest telgedele tõmmata ristjooned, ja kus need üksteist lõikavad, seal on antud koordinaatidega määratud punkt. Millimeetripaberil ei ole tarvis ristjooni tõmmata, sest ruuduline paber ise näitab ristjoonte sihti. Teist punkti olla ei või, sest sirgjooned lõikuvad ainult ühes punktis. **Siit järgneb, et igal punktil tasapinnal on ainult kaks koordinaati antud telgede suhtes ehk, ümberpöördult, kaks koordinaati määravad tasapinnal ainult ühe punkti.**

Nii kui sirgjoonel koordinaadid võivad olla positiivsed või negatiivsed, võivad ka koordinaadid, mis määravad punkti tasapinnal, olla $+$ või $-$ märgiga. Koordinaat x võib olla $+$ ehk $-$ märgiga, selle järele, kas määrab ta punkti paremal või pahemal pool Y telge, kuna y koordinaat võib olla positiivne või negatiivne, selle järele, kas ta määrab punkti üleval või allpool X telge.

Et punkti P kaks koordinaati ära määrab, siis märgime seda nii: $P(x,y)$, kus x ja y sulgudes tähendavad punkti P koordinaate.

13. Koordinaatide tasapinnal leida punktid, millede koordinaadid on järgmised: 1) 3 ja 4; 2) —4 ja 7, 3) +3 ja —5; 4) —2 ja —7, 5) 0 ja 2; 6) 0 ja —4; 7) 6 ja 0, 8) —6 ja 0 ja 9) 0 ja 0.

14. Konstrueerida kolmnurk, mille tippude koordinaadid oleksid järgmised: 1) P_1 (2; 4), P_2 (—2; 5), P_3 (0; 8); 2) P_1 (6; —2), P_2 (—3; +2) ja P_3 (0; 5) jne.

15. Konstrueerida nelinurk, mille tippude koordinaadid on järgmised: 1) P_1 (0; 4), P_2 (3; 2), P_3 (3; —3), P_4 (0; 0); 2) P_1 (7; 7), P_2 (3; 2), P_3 (—4; —3), P_4 (—6; 4) jne.

16. Ühel päeval näitas termomeeter järgmiselt: kell 6 homm. —5°, kell 9 —2°, kell 12 +4°, kell 15 +7°, kell 18 +5°, kell 21 +2°.

Järgnevate ülesannete tarvis kokku seada graafika:

17. 1914. a. olid Tartus järgmised kuu keskmised temperatuurid: $-7,80^0$; $-0,97^0$; $-1,33^0$; $4,76^0$; $11,23^0$; $15,51^0$; $20,91^0$; $13,57^0$; $9,94^0$; $2,41^0$; $-1,17^0$; $0,01^0$.

18. 1915. a. olid kuu keskmised temperatuurid: $-7,09^0$; $-5,91^0$; $-7,87^0$; $3,66^0$; $8,94^0$; $12,71^0$; $17,13^0$; $14,76^0$; $10,06^0$; $2,56^0$; $-2,44^0$; $-9,38^0$.

19. 1914. a. olid järgmised kuu keskmised õhurõhumised: 749,61; 751,32; 747,66; 753,31; 755,18; 755,07; 753,22; 753,08; 750,63; 759,76; 753,41; 753,12.

20. 1915. a. olid kuu keskmised õhurõhumised: 747,69; 754,53; 749,46; 753,19; 754,62; 753,18; 751,46; 750,89; 749,99; 763,15; 750,36 ja 749,61.

21. Loomulik juurdekasv tuhande inimese kohta oli üksikutel aastatel 1892 kunni 1901. a. Järvamaal (N. Köstner: Rahvaarvu kasvamine Eestimaal): 10,4; 10,4; —1,1; 6,5; 11,2; 10,7; 13,1; 9,2; 9,9 ja 8,2.

22. H. Treffneri asut. gümnaasiumi lõpuklassis õppis aastast 1910—1920 õpilasi: 36, 34, 36, 40, 33, 44, 33, 33, 41, 40 ja 45.

23. Sarlakihaigusega poisi keha temperatuur oli esimesel päeval $40,3^0$ C. Järgnevail päevil muutus keha temperatuur $+1,4^0$; $-1,9^0$; $+0,3^0$; $-0,8^0$; $-0,7^0$; $+1,2^0$; $-0,6$; $-1,1^0$; $-0,7^0$ ja $-0,8^0$ võrra.

§ 4. Funktsiooni mõiste.

Meid ümbritsevas looduses on mitmesugused suurused üksteisega nii seotud, et ühe suuruse muutmine teise suuruse muutmise enesega kaasa toob. Et suuruste sidusust ja vastastikku muutuvust tundma õppida, selleks vaatame järgnevat näitust:

Olgu täisnelinurga üks külg a meetrit, teine külg b meetrit pikk. Vaatame, missuguses sidususes muutuvad antud täisnelinurga külje- ja pinnasuurused.

Täisnelinurga pind $x=a.b$.

Jäägu üks külg a muutmata ja võrdugu 4 meetriga. Anname teisele küljele järgemööda väärtused 1, 2, 3, 4 . . . meetrit.

Vaatame, missuguseid muutusi pinna suuruses toob ühe külje muutmine kaasa.

Kui $b=1$, siis $x=4.1=4$
„ $b=2$, „ $x=4.2=9$
„ $b=3$, „ $x=4.3=12$ jne.

Antud tingimustel on meil tegemist kolme suurusega. Üks neist suurustest on muutumata ehk jääv suurus, kuna kaks suurust muutub nii, et ühe suuruse muutmisega ka teine suurus vastavalt muutub. Need suurused on muutuvad suurused.

Suurust, mis teiste suuruste muutuvusest oleneb, nimetatakse olenevaks suuruseks ehk funktsiooniks, kuna seda muutuvat suurust, millest oleneb funktsioon, nimetatakse põhisuuruseks ehk argumendiks. Sidusust argumendi ja funktsiooni vahel nimetatakse funktsionaalseks sidususeks.

Et suurus y on teise suuruse x funktsioon, seda võime nii kirjutada: $y=f(x)$ ehk $y=F(x)$ jne., kus $f()$ ja $F()$ tähendavad y ja x funktsionaalset sidusust. Ühel juhusel on see sidusus ühe juhise abil korraldatud, teisel juhusel teise juhise abil. Ühel juhusel saame sidususe ühe algebralise valemi abil, teisel juhusel teise valemi abil. Näitusena võime vaadata ringjoone pikkuse ja raadiuse ning ringi pindala ja raadiuse funktsionaalset sidusust. Esimesel juhusel on üks sidusus $y=f(x)$, teisel juhusel teine $y_1=F(x)$. Funktsionaalne sidusus ringjoone pikkuse ja raadiuse vahel on korraldatud ühe juhise järele, kuna teine sidusus ringi pindala ja raadiuse vahel koguni teine on. Seda lahkuminevat sidusust tähendamegi isesuguselt. Kui tahame aga sidusust algebralise valemi abil avaldada, siis saame $y=2\pi r$ ja $y_1=\pi r^2$, kus 2π ja π on jääv suurus, kuna r on argument.

Ühes funktsioonis on argument esimesel astmel, teises aga — teisel astmel.

Funktsiooni, milles argument on esimesel astmel (esimese astme avaldus), nimetatakse esimese astme funktsiooniks. Kui aga argument on teisel astmel, siis nimetatakse teda teise astme funktsiooniks.

§ 5. Funktsiooni graafiline kujutamine.

Olgu antud ülesanne: Osteti x kanamuna, 2 marka tükk. Kui palju maksti kanamunade eest?

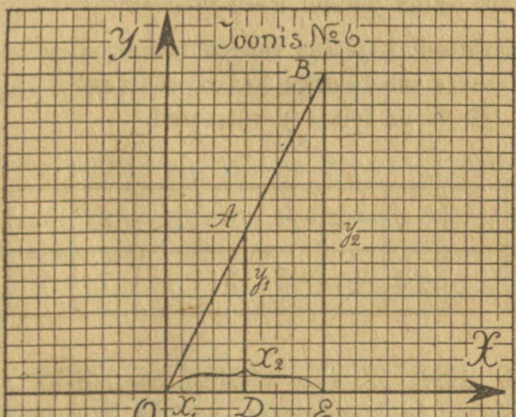
Maksti $y=2x$ marka.

Suurus 2 on jääv suurus, kuna x ja y on muutuvad, kusjuures y suurus oleneb täitsa x suurusest, sest kui mune rohkem ostetakse, siis tuleb ka rohkem maksta. Sellepärast on x— argument, y— funktsioon, kuna $y=2x$ on funktsionaalne sidusus ülesandes antud suuruste vahel.

Vaatame y muutuvust, kui x-le anname väärtused $x=0$, 1, 2, 3 jne., ja seame sellekohase tabeli kokku.

x	o	1	2	3	4	.	.
y	o	2	4	6	8	.	.

Et nüüd funktsiooni $y=2x$ graafiliselt kujutada, selleks vaatame tabelis antud x ja y väärtusi paaristikku, kui terve rea



punktide koordinaate. Tulevad ainult need punktid millimeetripaberil tähendada, nagu seda eespool nägime. Kui me need punktid ühendame järjestikku sirgjoonega, siis on punkte ühendav joon sirgjoon. Seda võib järgmiselt tõestada: Joonisest nr. 6 näeme, et punktide A ja B koordinaadid on vastavalt $AD=y_1$, $OD=x_1$ ja $BE=y_2$, $OE=y_2$. Et $y=2x$, sellepärast $y_1=2x_1$, $y_2=2x_2$ jne.

Esimest võrdust teise võrdusega jagades saame: $y_1:y_2=x_1:x_2$. Siis näeme, et $\triangle OAD^1$ ja $\triangle OBE^1$ on kaks vastavat külge proportsionaalsed, kuna nende vahel seisvad nurgad, kui täisnurgad, on võrdsed. Sellepärast on kolmnurgad sarnased ja $\sphericalangle BOE = \sphericalangle AOD$ ning sirgjoon BO satub ühte AO-ga, s. o. punktid O, A, B, jne. asuvad ühel sirgjoonel.

§ 6. Mõnede funktsioonide graafiline kujutus.

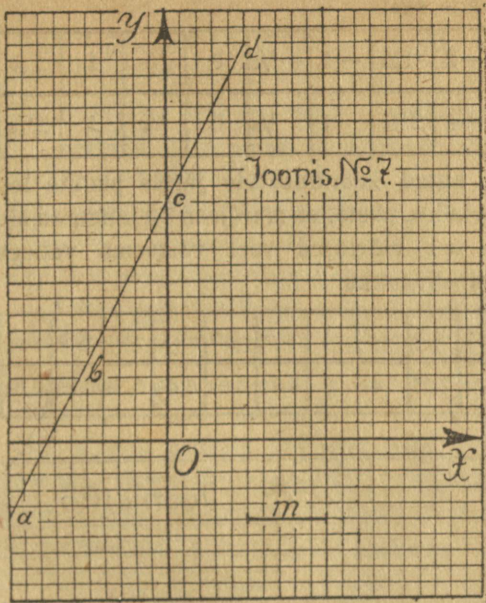
Näitus: Üks arv võrdub kahekordse teise arvuga plus 3. Olgu esimene arv y, teine arv x, siis võime kirjutada, et $y=2x+3$. Saadud funktsiooni võime üldisemal kujul kirjutada: $y=ax+b$, kus antud juhusel $a=2$ ja $b=3$.

Et graafiliselt kujutada saadud funksiooni $y=2x+3$, tuleb kõige pealt seada tabel kokku, kus x-i väärtuste —3, —1, —1,0 1, 2, 3 jne. järele on leitud y väärtused.

x	. .	—3	—2	—1	0	1	2	3	. .
y	. .	—3	—1	+1	3	5	7	9	. .

Tabelis antud x ja y väärtusi paaristikku vaatame kui terve rea punktide koordinaate, millede järel me millimeetripaberil nõutavad punktid leiame ja sirgjoontega ühendame. Saadud joon on jällegi sirgjoon (v. joonis nr. 7).

Samuti kujutatakse graafiliselt kõiki esimese astme funktsioone. Sirgjoone seisu määramiseks on tarvis ainult kaks punkti. Et graafiliselt kujutada esimese astme funktsiooni, mis sirgjoone annab, on tarvis ainult kaks punkti koordinaatide



järgi üles leida ja sirgjoonega ühendada. Saadud sirgjoon kujutabki graafiliselt esimese astme funktsiooni.

§ 7. Teise astme funktsiooni graafiline kujutamine.

Olgu meil tarvis graafiliselt kujutada lihtsat teise astme funktsiooni, näit. $y=x^2$ (üks arv y on teise arvu x·i ruut).

Seame niisamuti tabeli kokku, kus x väärtuste järgi leiame y väärtused:

x	.	.	—3	—2	—1	0	1	2	3	.	.
y	.	.	+9	+4	1	0	1	4	9	.	.

x ja y väärtused võtke paaristikku, kui terve rea punktide koordinaadid, mis teljestikul ära märkige.

Ühendades punktid järjestikku sirgjoontega, näete, et funktsiooni kujutav joon on murdjoon.

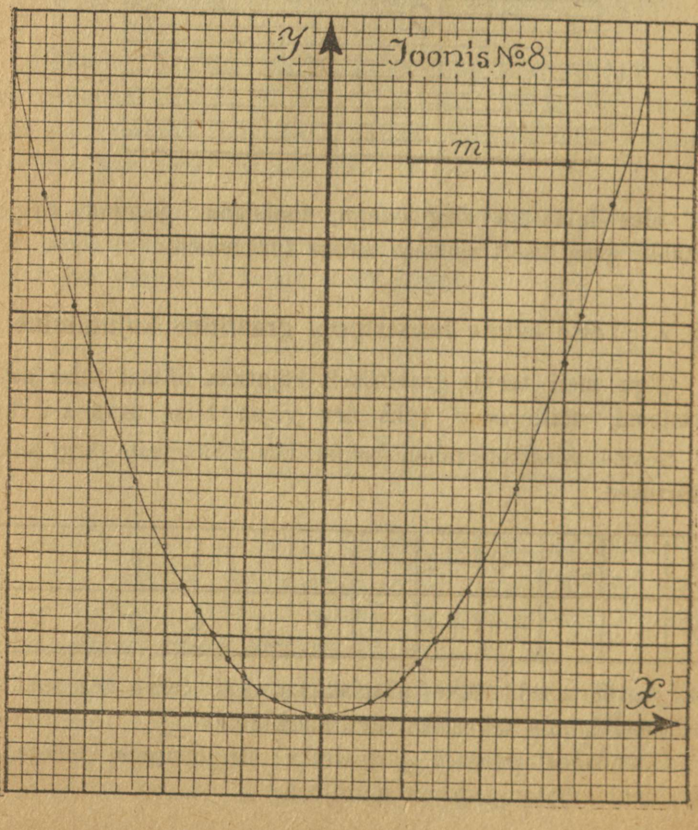
Andke aga x-ile väärtused -2, $-1^1/_2$, -1, $-^1/_2$, 0, $^1/_2$, 1, $1^1/_2$ jne., siis saate:

x	. .	-2	-1,5	-1	$-^1/_2$	0	$^1/_2$	1	1,5	2	. .
y	. .	$+4$	$2^1/_4$	1	$^1/_4$	0	$^1/_4$	1	$2^1/_4$	4	. .

Tabelis antud koordinaatide järele punkte leides ja sirgjoontega ühendades, näete, et murdjoon on kumeramaks muutunud.

Võtame x-i väärtused veel väiksema vahega ja seame sellekohase tabeli kokku:

x	. .	-2	-1,8	-1,6	-1,5	-1,2	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5	. .
y	. .	4	3,24	2,56	2,25	1,44	1	0,81	0,64	0,49	0,36	0,25	0,04	0	0,04	0,25	. .



Kui tabelis antud x ja y väärtused sajandiku piirides ümmargusemaks tehtud, võtame rea punktide koordinaatideks. Ühendades saadud punktid (v. joonis nr. 8) järjestikku, näeme, et saadud joon on kõverjoon. Positiivsete x-i väärtuste korral saame kõvera paremal pool Y telge, negatiivsete korral aga pahemal pool. Saadud teise astme funktsiooni kujutavat kõverjoont nimetatakse p a r a b o o l i k s.

24. Kujutada graafiliselt funktsioonid: a) $y=-x$, b) $y=3x$, c) $y=\frac{1}{3}x$, d) $y=x+2$, e) $y=2x-3$, f) $y=\frac{1}{2}x+2$, g) $y=\frac{2}{3}x+4$.

25. Kujutada graafiliselt funktsioonid: $y=2x+3$, $y=3x+5$ ja $y=4x-7$. Leida joonte lõikepunktide koordinaadid.

26. Eelmise ülesande taoliselt toimetada funktsioonidega: $y=3x-2$, $y=x+3$.

27. Joonistada sirged: $y=2x+3$, $y=3x+3$, $y=\frac{1}{2}x+3$ ja $y=\frac{2}{3}x+3$. Missugses punktis lõikavad need jooned Y telge?

28. Joonista sirged: $y=x-4$, $y=2x-6$, $y=\frac{1}{2}x+2$. Leida joonte ja X telje lõikepunktide koordinaadid.

29. Konstrueerida kolmnurgad, millede külgedeks on sirged: 1) $y=-0{,}25x$, $y=\frac{2}{3}x$ ja $y=\frac{2}{3}x+4$; 2) $y=\frac{2}{3}x+2\frac{1}{2}$, $y=2\frac{2}{3}x-6$ ja $y=-x+1$. Leida kolmnurga tippude koordinaadid.

30. Konstrueerida kolmnurgad, mille külgedeks on sirged: 1) $y=1{,}25x$, $y=-0{,}5x+3$ ja $y=-0{,}5x-5$. Leida kolmnurga tippude koordinaadid.

31. Kujutada graafiliselt teise astme funktsioonid: a) $y=-x^2$; b) $y=2x^2$, $y=-3x^2$; c) $y=2x^2+1$, $y=3x^2-2$ ja d) $y=x^2+2x$, $y=2x^2-4x$.

X jagu.

Teise astme vôrrandid.

§ 1. Arvuliste teise astme ehk ruutvõrrandite lahendus.

Teise astme ehk ruutvõrrandiks nimetatakse võrrandit, mis mitmesuguste arenduste ja muunduste tagajärjel annab kuju $ax^2+bx+c=0$.

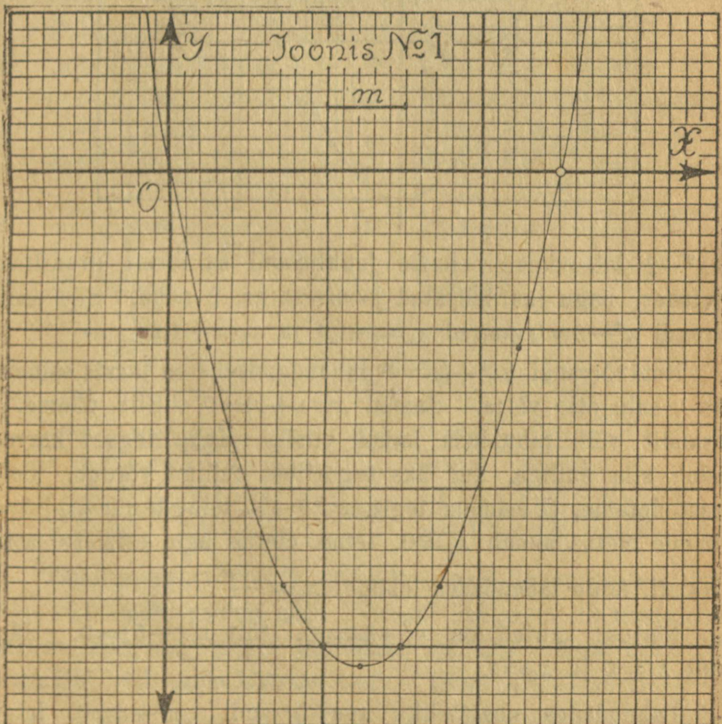
Viimast avaldust nimetatakse ruutvõrrandite üldkujuks. Suurusi a, b ja c nimetatakse võrrandi kordajateks. Kui kordajad on murrud, siis võib neid kergesti täisarvudeks muuta. Kordajat a võib alati lugeda positiivseks. Kui kordaja b või c juhuslikult võrdub nulliga, siis saame nõndanimetatud ebatäieliku ruutvõrrandi. Lahendada ruutvõrrandit tähendab leida kõik x juured ehk väärtused, mis muudavad antud võrrandi samasuseks. Igal ruutvõrrandil on ainult kaks juurt.

Enne kui ruutvõrrandi lahendamise valemit otsida, katsume graafilisel ehk geomeetrilisel teel tema juured leida. Siin tuleb meil tegemist teha funktsioonidega ja nende graafiliste kujutustega. Iga ruutvõrrandit võime avaldada funktsioonina. Kui võrrandis mõni kordaja on null, siis saame lihtsama ehk ebatäieliku võrrandi, mille lahendamisele asume. Olgu $c=0$. Siis on võrrand $ax^2+bx=0$, ehk funktsioonina: $y=ax^2+bx$. Et funktsiooni graafiliselt kujutada, tuleb võtta, nagu harilikult, kaks ühest punktist täisnurga all kulgevat (läbiminevat) sirget, kui koordinaatide X ja Y teljed millimeetripaberil.

Joone leidmiseks, mis vastaks funktsioonile $y=ax^2+bx$, ehk näituseks, arvuliselt võttes, $y=x^2-5x$, tuleb y väärtused vastavalt üles leida, kui x väärtused on —2, —1,0, +1, +1½, +2, +2½, +3, +4, +5, +6 jne. Saame järgmise tabeli:

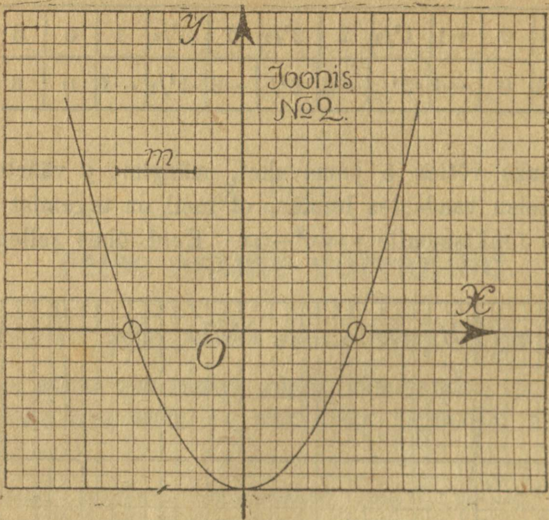
x	—2	—1	0	+1	1½	2	2½	3	3½	4	5	6		
y	+14	+6	0	—4	-5¼	—6	-6¼	—6	-5¼	—4	0	6		

Mõõduks võttes 5 joonevahet, märgime y väärtused üles. Punktide seisu vaadeldes leiame, et meil on tegemist kõveraga, mis vastab funktsioonile $y=x^2-5x$. Kuid ühes sellega saame



ka võrrandi $x^2-5x=0$ juured teada; tuleb ainult kõvera ja X telje lõikepunktide kaugus O punktist mõõdu abil ära lugeda. Antud joonisest näeme, et kõver lõikab X telge punktides, mille kaugus on O punktist 0 ja 5 mõõtu, sellega $x_1=0$ ja $x_2=5$.

Kordajaist võib nulliga võrduda b; siis saame võrrandi: $ax^2+c=0$. Näituseks võtame võrrandi: $x^2-2=0$. Funktsiooni



$y=x^2-2$ lahendame eelmise funktsiooni sarnaselt graafiliselt kujutades, nagu juurdelisatud joonisest nr. 2 näha. Siis saame võrrandi $x^2-2=0$ juured $x_1=-1,4$ ja $x_2=+1,4$.

Ruutvõrrandi $ax^2+bx=0$ lahendamiseks on tarvis esimeses osas x sulu ette võtta. Saame $x(ax+b)=0$. Siit näeme, et võrrandit võib rahuldada kahel viisil. Kahe teguri korrutis võrdub siis nulliga, kui üks teguritest nulliga võrdub. Sellepärast oletame, et esimene tegur $x=0$ ehk teine tegur $ax+b=0$. Esimene oletus annab $x_1=0$, teine oletus aga esimese astme võrrandi, mida lahendades leiame: $x_2=-\frac{b}{a}$.

Näitus: Antud on $x^2-5x=0$. Siit $x(x-5)=0$. Järjelikult $x_1=0$ ja $x_2=5$.

Lahendades ebatäieliku ruutvõrrandi $ax^2+c=0$, leiame kaks juhust: kordaja on positiivne või on negatiivne. Kuid selle peale vaatamata saab mõlemaid juhuseid ühesugusel kombel lahendada. Tuleb ainult c ühelt poolt võrdsusmärki teisele poole asetada, märki muutes. Võtame, näit., võrrandi: $4x^2-7=0$. Asetame -7 teisele poole võrdsusmärki, saame $4x^2=7$. Siit

$x^2=\frac{7}{4}$ ehk $x=\pm\sqrt{\frac{7}{4}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$. Järjelikult, $x_1=+\frac{\sqrt{7}}{2}$ ja $x_2=-\frac{\sqrt{7}}{2}$. Kui aga c on positiivne, siis ei muuda see asjaolu lahendamisviisi, ainult vastus saab imaginaarne. Näituseks võtame $3x^2+10=0$. Endiselt arendades saame esiteks $3x^2=-10$, siis $x^2=-\frac{10}{3}$, millest $x=\pm\sqrt{-\frac{10}{3}}$ ehk $x_1=+\sqrt{-\frac{10}{3}}$ ja $x_2=-\sqrt{-\frac{10}{3}}$. Sellega on vastused imaginaarsed.

Lahendada järgnevad ebatäielikud ruutvõrrandid. Märgiga * tähendatud võrrandid lahendada graafiliselt:

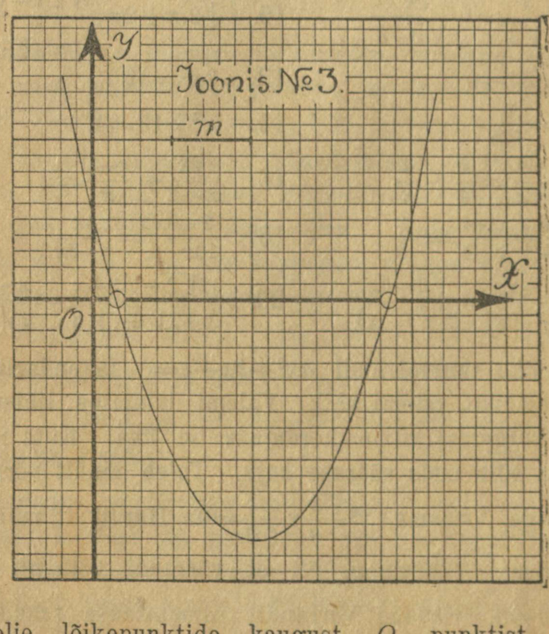
1*.	$x^2-7x=0$	2*.	$x^2+4x=0$
3*.	$7x^2-8x=5x^2-13x$	4*.	$5x^2+4x=11x^2-8x$
5.	$(2x+5)^2-(x-3)^2=16$	6.	$(2x+7)(7-2x)-x(x+2)=49$
7.	$\frac{x+5}{2x+1}=\frac{x+15}{3-x}$	8.	$\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-3}{x-2}=\frac{2x-3}{x-1}$
9.	$\frac{x\sqrt{3}}{x-2\sqrt{3}}=\frac{2x}{x\sqrt{3}-5}$	10.	$\sqrt[4]{2}.x+2=\frac{3\sqrt[4]{2}.x-\sqrt{5}.x-2}{\sqrt[4]{2}.x+1}$
11*.	$x^2-25=0$	12.	$9x^2=16$
13.	$\frac{5x^2}{6}=\frac{6}{125}$	14.	$x^2+13=4$
15.	$\frac{x}{6}+\frac{6}{x}=\frac{x}{4}+\frac{4}{x}$	16.	$\frac{2x}{x-2}+\frac{x-2}{x}=2$
17.	$\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=3\frac{1}{3}$	18.	$\frac{2-5x}{10x-5}=\frac{5x}{3-5x}$
19.	$\frac{5\sqrt{7}-2x}{\sqrt{7}-10x}=\frac{\sqrt{7}-4x}{2(\sqrt{7}-x)}$	20.	$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+x}{x+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{x-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-x}$

Täieliku ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendamine sünnib kõige lihtsamalt valemi abil. Valemi leidmine lihtsustub, kui otsitava kõrgema astme kordajaks on üks. Kuid igale ruutvõrrandile võib anda säärase kuju. Tuleb ainult võrrandi osad jagada a-ga. Saame $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$. Harilikult märgitakse $\frac{b}{a}$ tähega p ja $\frac{c}{a}$ tähega q, nii et võrrandi võib nii kirjutada: $x^2+px+q=0$. Saadud võrrandit nimetatakse taandatud võrrandiks. Alati ei ole hea igale võrrandile anda taandatud kuju, sest siis võivad kordajad p ja q muutuda murdelisteks.

Enne täieliku ruutvõrrandi lahendamist valemite abil katsume graafilisel teel juured leida. Näituseks olgu meil antud võrrand $x^2 - 4x + 1 = 0$. Teda võime kujutada funktsioonina $y = x^2 - 4x + 1$. Funktsiooni kujutava joone leidmiseks märgime x väärtused: —1, 0, 1, 2, 3, 4 ja 5 jne. Siis leiame y väärtused vastavalt +6, +1, —2, —3, —2, +1 ja +6, mida näitab meile näitlikult allpool märgitud tabel:

x	—1	0	+1	2	3	4	5
y	+6	+1	—2	—3	—2	+1	+6

Mõõduks jällegi võttes 5 joonevahet, märgime y punktid millimeetripaberile üles. Jällegi laseb punktide seis oletada, et meil on tegemist kõvera joonega, mida käega raskevõitu on joonistada, kuid lekaaliga ehk viirutiga (kõvera liinealiga) kaunis kerge. Võrrandi $x^2 - 4x + 1 = 0$ juured leiame, kui me kõvera



ja X telje lõikepunktide kaugust O punktist mõõduga mõõdame. Antud võrrandile leiame niiviisi $x_1 = 0{,}3$ ja $x_2 = 3{,}7$ (vaata joonis nr. 3).

Kõige pealt leiame taandatud teise astme võrrandi $x^2+px+q=0$ lahendamise valemi. Asetame q teisele poole võrdsusmärki: $x^2+px=-q$. Osa x^2+px võime vaadata kui avaldust $x^2+2\frac{p}{2}x$, millel puudub teise liikme ruut. Täiendame seda osa teise liikme ruuduga, siis tuleb mõlemaid võrduse osasid liita $\left(\frac{p}{2}\right)^2$; saame: $x^2+2\frac{p}{2}x+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2$. Esimene võrduse osa kujutab enesest kaksliikme summa ruutu:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Mõlemast võrduse osast ruutjuurt leides ja juuremärgiga ainult aritmeetilist juurt tähendades saame:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \text{ ehk } x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

sellega $x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$ ja $x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$.

Taandatud ruutvõrrandi üldne juur võrdub vastasmärgilise keskliikme poole kordajaga, pluss ehk miinus ruutjuur poole keskliikme kordaja ruudu ja vabaliikme vahest.

Nüüd jääb meil vaadata täieliku ruutvõrrandi $ax^2+bx+c=0$ lahendamise valemi leidmist. Antud võrrandi liikmeid a-ga jagades saame $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$.

Saadud võrrandile taandatud võrrandi lahendamise valemit tarvitades ja saadust teisendades saame: $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}=$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Üldne ruutvõrrandi juur võrdub murruga mille lugejaks on keskliikme vastasmärgiline kordaja, pluss ehk miinus ruutjuur keskliikme kordaja ruudu ja äärmiste kordajate neljakordse korrutise vahest, aga nimetajaks kahekordne esimese liikme kordaja.

Peale selle tuleks tähele panna erikujuliste ruutvõrrandite lahendamise valemid, mida kõiki võib arendada eelmisest valemist.

Olgu antud teise astme võrrand $ax^2+2\beta x+c=0$, milles keskliikme kordaja on paaris arv. Sel korral saame järgmise lahendamisvalemi:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-ac}}{a}.$$

Kui on antud taandatud teise astme võrrand $x^2+2\beta x+c=0$, mille keskliikme kordaja on jällegi paaris arv, siis saame järgmise lahendamisvalemi: $x=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-c}$.

Antud valemid ei tohi enne tarvitada, kui võrrand on teisendades muudetud lihtsaks, täisarvuliste kordajatega ja positiivse esimese kordajaga.

Tuleb alati meeles pidada, et kordajaid vaadatakse ja tarvitatakse ainult ühes nende märkidega.

Lahendada järgnevad täielikud ruutvõrrandid. Märgiga * tähendatud võrrandid lahendada graafiliselt:

21.* $x^2-6x+8=0$
22.* $x^2+12x+20=0$
23.* $x^2-4x-12=0$
24.* $x^2+2x-35=0$
25.* $x^2-7x+12=0$
26.* $x^2+x-6=0$
27.* $x^2-7x-18=0$
28. $x^2+3x-130=0$
29. $x^2-2x+10=0$
30. $x^2-6x+34=0$
31. $(x-1)(x-2)=6$
32. $(x-2)^2=2(3x-10)$
33. $4x^2-4x=3$
34. $9x^2-5=12x$
35. $2x^2-7x+3=0$
36. $4x^2+x-3=0$
37. $(2x-3)^2=8x$
38. $(3x+2)^2=3(x+2)$
39. $x^2-x+1=0$
40. $x^2+3x+9=0$

Teisendada ja lahendada järgnevad võrrandid:

41. $x^2-22x+25=2x^2-20x+1$
42. $2-8x+3x^2=-4+2x^2-3x$
43. $(3x-2)^2=8(x+1)^2-100$
44. $(3-x)(4-x)=2x^2-20x+48$
45. $\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+7\frac{3}{8}=8$
46. $\frac{x+1}{x-2}=\frac{3x-7}{x-1}$
47. $\frac{x-7}{2(x+3)}=\frac{x-6}{x+24}$

48. $\frac{x}{4}+\frac{2}{x}+\frac{(x+1)^2}{x}=\frac{(x+2)(x+1)}{x}$

49. $\frac{x+1}{3}+\frac{3(x-1)}{4}=(x-3)^2+1$

50. $\frac{3(3x-1)}{12x+1}=\frac{2(3x+1)}{15x+8}$

51. $\frac{(x-12)^2}{6}-\frac{x}{9}+\frac{x(x-9)}{18}=\frac{(x-14)^2}{2}+5$

52. $\frac{(x-20)(x-10)}{10}-\frac{(34-x)(40-x)}{2}+\frac{(30-x)(5-x)}{3}=0$

53. $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=2-\frac{x+4}{x+1}$

54. $\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x^2-9}=\frac{x+3}{3-x}-\frac{4+x}{3+x}$

55. $\frac{x}{2x-1}+\frac{25}{4x^2-1}=\frac{1}{27}-\frac{13}{1-2x}$

56. $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}-\frac{2x+13}{x+1}=0$

57. $\frac{1}{x^2-x-6}+\frac{2}{x^2+x-6}=\frac{4}{x^2-9}-\frac{2}{x^2-4}$

58. $\frac{x^2+10x}{x^4-1}+\frac{4}{x+1}=\frac{4x^2+21}{x^3+x^2+x+1}+\frac{1}{x^3-x^2+x-1}$

59. $\frac{x+6}{x-1}-\frac{x^2+17}{x^2+x+1}=\frac{x+36}{x^3-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}$

60. $\frac{12}{x^2+11x+30}-\frac{1}{x^2-11x+30}=\frac{20}{x^2+x-30}-\frac{15}{x^2-x-30}$

§ 2. Täheliste ruutvõrrandite lahendamine.

Täheliste ruutvõrrandite lihtsamaks muundamine ja nende lahendamine sünnib samade viisidega ja samade valemite järgi, mis on antud eelmises paragrahvis. Võrrand $ax^2+bx=0$ lahendatakse x sulu ette võtmise abil, kuna võrrand $ax^2+c=0$ lahendatakse nii, nagu eespool arvuliste kordajatega näitustes, s. o. ruutjuure leidmise abil. Täielikud ruutvõrrandid aga lahendatakse antud valemite järgi.

Lahendada ebatäielikud ruutvõrrandid:

61. $\frac{x-a}{a}=\frac{a}{x-a}$

62. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{a-x}{x-b}$

63. $\frac{a-x}{x}-\frac{x}{a+x}=\frac{a}{x}$

64. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}=\frac{a(3x+2a)}{x^2-a^2}$

65. $ax^2-b^3=a^3-bx^2$

66. $\frac{ax}{a+1}=\frac{a+1}{ax}$

67. $\frac{c}{ab}-2x^2=\frac{a}{b}x^2+\frac{b}{a}x^2$

68. $(x+13a)^2+9(x+3a)^2=4(x+10a)^2$

69. $\frac{2a+b+x}{x+2a-b}=\frac{x-2a+b}{2a+b-x}$

70. $\frac{x^2+2ax}{x^3-a^3}+\frac{x}{(x+a)^2-ax}=\frac{1}{x-a}$

Lahendada täielikud ruutvõrrandid:

71. $x^2-4ax+3a^2=0$

72. $x^2+2a^3x-35a^6=0$

73. $x^2-2ax+a^2-b^2=0$

74. $x^2+2bx-a^2+8ab-15b^2=0$

75. $2x^2-3ax-2a^2=0$

76. $6x^2+5ax+a^2=0$

77. $3b^2x^2+10abx+3a^2=0$

78. $20b^2x^2-9abx-20a^2=0$

79. $(mx+n)(nx-m)=0$

80. $ab(x^2+1)-(a^2+b^2)x=0$

81. $bx^2-a=(a-b)x$

82. $(a^2-b^2)x^2+ab=(a^2+b^2)x$

83. $x-\frac{1}{x}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$

84. $\frac{a}{a+x}+\frac{a-x}{x}=\frac{11}{10}$

85. $\frac{x+a}{x-a}-\frac{x+b}{x-b}=1$

86. $\frac{a+4b}{x+2b}-\frac{a-4b}{x-2b}=\frac{4b}{a}$

87. $\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0$

88. $\frac{x}{x+a}+\frac{2x}{x-a}=\frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$

89. $\frac{1}{a+b+x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$

90. $\frac{a(x-2)}{b}+\frac{a}{bx}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{b(x-2)}{a}$

91. $(a+b)(a-b)x^2=ab(2ax-ab)$

92. $x^2-\frac{cx}{a+b}-\frac{2c^2}{(a+b)^2}=0$

93. $\frac{2a+b-x}{2b+a-x}=\frac{a}{b}\cdot\frac{x+b}{x+a}$

94. $\frac{4a+3b-x}{4b+3a-x}=\frac{2a+b}{2b+a}\cdot\frac{2a+3b+x}{2b+3a+x}$

95. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

96. $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}=0$

97. $\frac{a+b-x}{a-b-x}=\frac{a-c+x}{a-c-x}$

98. $\frac{(a-x)(a-b)+(x-b)^2}{(a-x)^2+(2x-a-b)(x-b)}=\frac{49}{19}$

99. $\frac{a+c(a+x)}{a+c(a-x)}+\frac{a+x}{x}=\frac{a}{a-2cx}$

100. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$

§ 3. Ruutvõrrandite teooria tarvitamine lihtsamail juhuseil.

Taandatud võrrandi $x^2+px+c=0$ juured on reaalsed tingimusel, kui $p^2>4q$, ja võrdsed, kui $p^2=4q$, kuna nad on imaginaarsed, kui $p^2<4q$.

Samuti on üldise võrrandi $ax^2+bx+c=0$ juured reaalsed ja võrratud tingimusel, kui $b^2>4ac$, võrdsed, kui $b^2=4ac$, ja imaginaarsed, kui $b^2<4ac$.

Järgnevaid võrrandid lahendamata leida, missugustel on juured võrratud või võrdsed, reaalsed või imaginaarsed:

101. $x^2+6x+5=0$
102. $x^2-10x+25=0$
103. $x^2+4x+5=0$
104. $x^2+8x+25=0$
105. $x^2+2x-120=0$
106. $x^2+24x+144=0$
107. $12x^2+7x-12=0$
108. $4x^2-4x+13=0$
109. $25x^2+30x+9=0$
110. $2x^2-18x+65=0$

Taandatud võrrandi juurte summa võrdub vastasmärgilise kordajaga p ja nende korrutis võrdub q.

Üldise võrrandi juurte summa võrdub vastasmärgilise jagatisega $\frac{b}{a}$, aga nende korrutis võrdub $\frac{c}{a}$.

Toodud märkusi kasutades võib kindlaks teha reaalsete juurte märgid.

Järgnevaid ülesandeid lahendamata leida reaalsete juurte märgid:

111. $x^2-8x+15=0$
112. $x^2+4x-3=0$
113. $x^2-17x-60=0$
114. $x^2-5x+130=0$
115. $x^2-26x+169=0$
116. $x^2-3x-460=0$
117. $2x^2+5x+2=0$
118. $6x^2-5x-6=0$
119. $4x^2+2x+1=0$
120. $8x^2+4x-1=0$

Tarvitades ruutvõrrandi kordajate ja juurte vastastikku sidusust võib kokku seada võrrandi antud juurte abil. Selle juures saame võrrandi taandatud kujul. Kui aga kordajateks on murrud, siis neid täisarvudeks muutes saame võrrandi üldisel kujul.

Kokku seada võrrandid, kui juured on antud:

121. 2 ja 3
122. —4 ja 6
123. —5 ja 0
124. 3 ja —3
125. $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{4}$
126. $-\frac{2}{3}$ ja $-\frac{3}{2}$
127. $\sqrt{6}$ ja $-\sqrt{3}$
128. $4\pm\sqrt{3}$
129. $-3\pm\sqrt{-15}$
130. $1\pm\sqrt{-10}$
131. $3a, -2b$
132. $2a-b,\ a-2b$
133. $-\frac{a}{3}, \frac{a}{2}$
134. $a\pm b$
135. $\frac{a}{b}, \frac{b}{a}$

136. $\frac{a-b}{a+b}, 1$ 137. $\frac{ab}{a\pm b}$ 138. $\frac{b}{1-a}, \frac{a}{1-b}$

139. $a\pm\sqrt{b}$ 140. $\sqrt{a}\pm\sqrt{-b}$

Teise astme kolmliiget x^2+px+q saab alati lahutada teguriteks $(x-x_1)(x-x_2)$, kus x_1 ja x_2 on kolmliikme juured.

Kolmliiget ax^2+bx+c saab lahutada teguriteks $a(x-x_1)\times\times(x-x_2)$, mis endisest läheb lahku teguriga a.

Lahutada järgnevad kolmliikmed teguriteks:

141. $x^2-7x+12$ 142. $x^2+3x-108$

143. $6x^2+5x-6$ 144. $30x^2+37x+10$

145. $x^2-6x+11$ 146. $x^2+15x+44$

147. $x^2-ax-6a^2$ 148. $abx^2-2ax+a^2-b^2$

149. $x^2-ax-a\sqrt{b}-b$ 150. $abx^2-2a\sqrt{ab}.x+a^2-b^2$.

151. Oletades, et võrrandi $x^2+px+q=0$ juured on x_1 ja x_2, kokku seada võrrand, mille juured on $\frac{1}{x_1}$ ja $\frac{1}{x_2}$.

152. Kokku seada võrrand, mille juured oleksid m korda suuremad võrrandi $x^2+px+q=0$ juurtest.

153. Kokku seada võrrand, mille juured on $\frac{p}{2}$ võrra suuremad võrrandi $x^2+px+q=0$ juurtest.

154. Kokku seada võrrand, mille juured on võrrandi $x^2+px+q=0$ juurte summa ja juurte korrutis.

155. Avaldada võrrandi $x^2+px+q=0$ juurte ruutude summa kordajate p ja q läbi.

156. Avaldada sama võrrandi juurte kolmandate astmete summa.

157. Võrrandit $x^2-2x-15=0$ lahendamata leida tema juurte teiste ja kolmandate astmete summa.

158. Võrrandit $3x^2+7x+2=0$ lahendamata leida juurte teiste ja kolmandate astmete summa.

159. Lahendada võrrand $x^2-8x+q=0$, teades, et juurte teiste astmete summa on 34.

160. Lahendada võrrand $x^2+px+45=0$, teades, et juurte vahe ruut võrdub 144-ga.

161. Missugusel b tähendusel võrrandis $4x^2+bx+25=0$ on võrdsed juured?

162. Näidata, et kolmliige ax^2+bx+c muutub täieliseks ruuduks, kui $b^2=4ac$.

163. Missugustel c positiivsetel tähendustel on võrrandi $3x^2-18x+c=0$ juured reaalsed ja missugustel imaginaarsed?

164. Määrata võrrandi $ax^2+bx=0$ juured üldise valemi järele, mis lahendavad täielise võrrandi.

165. Leida võrrandist $x^2-6x+q=0$ see q tähendus, mil tema juured x_1 ja x_2 rahuldavad võrrandi $3x_1+2x_2=20$.

166. Mis tingimusel on kolmliige $(a-x)x^2-(a+b)x+a-b$ täielik ruut?

167. Missugused peavad olema võrrandis $ax^2+bx+c=0$ kordäjate märgid, et võrrandi mõlemad juured oleksid positiivsed?

168. Näidata, et võrrandi $x^2+px+q=0$ juured sel tingimusel, kui $p=k+\frac{q}{k}$, on ühismõõtsed, kui aga p, q ja k on ühismõõtsed.

169. Kuidas tuleb muundada mõlemaid võrrandi x^2+px+ $+q=0$ juuri, et nende juurte lugejad oleksid ratsionaalsed, kuna juur oleks nimetajas?

170. Eelmise muunduse abil näidata, et kui võrrandis $ax^2-bx+c=0$, kus b on absoluutne arv, kordaja a lõpmata väheneb, siis üks juurtest lõpmata suureneb, aga teine läheneb tähendusele $\frac{c}{b}$.

§ 4. Ruutvõrrandite kokkuseadmine.

Kui ülesande lahendamisel saame teise astme võrrandi, siis saame ülesande tundmatule üldse kaks väärtust. Kui need väärtused on reaalsed, siis lahendub ülesanne kahel viisil.

Võib juhtuda, et üks juurte väärtustest ei rahulda mõnda ülesande tingimust, mida, võib olla, otsekohe ei ole näidatud, kuid siiski mõeldakse. Sel juhusel jäetakse see juur kõrvale.

171. Täisnurkse kolmnurga kaatetite summa võrdub 17 jalaga, hüpotenuus 13 jal. Leida kaatetid.

171. Püstküliku (täisnelinurga) perimeeter on 42 jalga, diagonaal 15 jalga. Leida küljed.

172. Kolme järjestikuse arvu ruutude summa võrdub 365-ga. Leida arvud.

172. Kolme järjestikuse arvu ruutude summa võrdub 116-ga. Leida arvud.

173. Kahe ruudu pinnad suhtuvad kui 25:9; esimese külg on 10 jalga teisest pikem. Leida küljed.

173. Võrdhaarsete täisnurksete kolmnurkade pinnad suhtuvad kui 25:49; esimese külg on 14 jalga teisest lühem. Leida küljed.

174. Müüdi 120 marga eest mõni puud kraami; puuda hind markades on 2 võrra vähem puudade arvust. Mitu puuda müüdi?

174. Müüdi 270 marga eest mõni puud kraami; puuda hind markades on 3 võrra suurem puudade arvust. Mitu puuda müüdi?

175. Leida kahekümnendine (kahekohane) arv, teades, et üheliste arv otsitavas arvus on 2 võrra suurem kümnelistest ja et arvu korrutis ristsummaga on 144.

175. Leida kahekümnendine (kahekohane) arv, teades, et otsitavas arvus kümneliste arv on 2 võrra suurem üheliste arvust ja et arvu korrutis ristsummaga on 640.

176. Osteti 1 marga 30 p. eest mõni nael kahte sorti kraami, teist sorti 2 naela võrra rohkem kui esimest. Naela hinnaks oli nõndapalju pennisid, kui palju oli ostetud vastavat kraami naeltes. Mitu naela osteti kumbagi sorti?

176. Osteti 1 marga 17 p. eest mõni nael kahte sorti kraami, kusjuures teist sorti 3 naela võrra vähem oli kui esimest. Naela eest maksti nõndapalju pennisid, kui palju oli ostetud vastavat kraami naeltes. Mitu naela osteti kumbagi sorti?

177. Kas on niisugune täisnurkne kolmnurk võimalik, mille külgede pikkused avalduvad kolmes järjestikuses täisarvus?

177. Kas on niisugune täisnurkne kolmnurk võimalik, mille külgede pikkused avalduvad kolmes järjestikuses paaris ehk paarita arvus?

178. Teatavad inimesed pidid maksma kokku 72 marka, igaüks ühepalju. Oleks neid 3 võrra vähem olnud, siis oleks igaühel maksta tulnud 4 marga võrra rohkem. Kui palju neid oli?

178. Teatavad inimesed pidid maksma 60 marka. Oleks neid 3 võrra rohkem olnud siis oleks igaühel maksta tulnud 1 mark vähem. Kui palju neid oli?

179. Tasapinnal on mõned punktid nii, et igast paarist kulgeb ise-sirgjoon. Sirgjooni on 10. Kui palju on punkte?

179. Tasapinnal on mõned punktid nii, et igast paarist kulgeb ise-sirgjoon. Sirgjooni on 15. Kui palju on punkte?

180. Vesistu (veehäil) täidetakse 6 tunniga 2 toru abil. Esimene toru üksi täidab ta 5 tunni võrra rutemini kui teine toru üksi. Mitme tunniga võib kumbki toru üksi täita vesistu?

180. Vesistu (veehäil) täidetakse 3 tunni 36 m. jooksul kahe toru abil. Esimene toru täidab ta 3 tunni võrra rutemini kui teine toru üksi. Mitme tunniga võib kumbki toru üksi täita vesistu?

181. Keegi müüs uuri 39 marga eest ja sai nii mitu protsenti kasu, kui mitu marka maksis uur enesel. Kui palju maksis tal uur?

181. Keegi müüs uuri 24 marga eest ja sai nii mitu protsenti kahju, kui mitu marka maksis uur enesel. Kui palju maksis tal uur?

182. Kaupmees päris ühe kapitaali; sellest raiskas ta iga aasta nii mitu protsenti, kui suur oli kapitaalis sajamargaliste arv. Nelja aasta pärast jäi talle veel 400 marka. Kui suur oli kapitaal?

182. Kaupmees pani kapitaali kasvama ja sai iga aasta nii mitu protsenti kasu, kui suur oli kapitaalis sajamargaliste arv. 10 aasta pärast muutus kapitaal ühes kasuga 2640 margaks. Kui suur oli kapitaal?

183. Kas on niisugune hulknurk võimalik, millel oleks 10 diagonaali?

182. Kas on niisugune hulknurk võimalik, millel oleks 5 diagonaali?

184. Osteti kahte sorti kaupa, esimest 156 marga ja teist 210 marga eest. Teist sorti oli 3 puuda võrra rohkem kui esimest ja ta puud maksab marga võrra rohkem kui esimese sordi puud. Kui palju osteti kumbagi sorti?

184. Osteti kahte sorti kaupa, esimest 240 marga ja teist 320 marga eest. Esimest sorti oli 4 puuda võrra rohkem kui teist ja ta puud maksis 8 marga võrra vähem kui teise sordi puud. Kui palju otseti kumbagi sorti?

185. Kaks isikut sõidavad korraga ühest linnast teise. Esimene sõidab tunnis ühe kilomeetri võrra rohkem ja jõuab tund aega varemini kohale. Linnade kaugus on 56 klm. Mitu kilomeetrit sõidab kumbki tunnis?

185. Kaks isikut sõidavad ühel ajal linnadest A ja B teineteisele vastu. Esimene sõidab tunnis 2 kilomeetri võrra teisest rohkem ja jõuab B-sse 1 tund varemini kui teine A-sse. A ja B kaugus on 24 klm. Mitu kilomeetrit sõidab kumbki tunnis?

186. 820-margane võlg tasuti kahel aastapikkusel tähtajal, kusjuures kummagi aasta lõpul maksti 441 marka. Mitme protsendiga oli võlg tehtud?

186. 2100-margane võlg tasuti kahel aastapikkusel tähtajal, kusjuures kummagi aasta lõpul maksti 1210 marka. Mitme protsendiga oli võlg tehtud?

187. Võeti 2 töölist erineva palgaga. Esimene sai 48 marka, teine aga töötas esimesest 6 päeva vähem ja sai 27 marka. Kui esimene oleks töötanud nii mitu päeva kui teine ja teine nii mitu päeva kui esimene, siis nad oleksid saanud ühepalju palka. Mitu päeva töötas kumbki?

187. Võeti 2 töölist erineva palgaga. Esimene sai 45 marka, teine aga töötas esimesest 6 päeva rohkem ja sai 80 marka. Kui esimene oleks töötanud nii mitu päeva kui teine ja teine nii mitu päeva kui esimene, siis nad oleksid saanud ühepalju palka. Mitu päeva töötas kumbki?

188. Kahel kauplejal oli kokku 100 õuna. Nende müügist said nad ühepalju raha. Kui esimene oleks niipalju müünud kui teine, siis oleks saadud 180 marka, kui aga teine oleks müünud nii mitu kui esimene, siis oleks saadud 80 marka. Kui palju õunu oli kummalgi?

188. Kahel kauplejal oli 110 õuna. Nende müügist said nad ühepalju raha. Kui esimene oleks nii mitu õuna müünud

kui teine, siis oleks saadud 75 marka, kui aga teine oleks müünud nii mitu kui esimene, siis oleks saadud 108 marka. Mitu õuna oli kummalgi?

189. Tööle kaubeldi üheks ajaks 2 töölist erineva palgaga. Esimene lõpetas töö ühe päeva varemini ja sai 18 marka, teine lõpetas töö aga kolm päeva varemini ja sai 21 marka. Kui esimene oleks töötanud nii mitu päeva kui teine, aga teine nii mitu kui esimene, siis oleks teine saanud esimesest 13 marga võrra rohkem. Kui kauaks ajaks olid töölised kaubeldud?

189. Tööle kaubeldi üheks ajaks 2 töölist erineva palgaga. Esimene lõpetas töö 2 päeva varemini ja sai 27 marka, teine lõpetas 3 päeva varemini ja sai 30 marka. Kui esimene oleks töötanud nii mitu päeva kui teine ja teine nii mitu kui esimene, siis oleks teine saanud esimesest 3 marka vähem. Kui kauaks olid töölised kaubeldud?

190. Üks 8000-margalise kapitaali osa toob aastas 90 marka, teine 200 m. kasu. Mitme protsendiga olid mõlemad osad kasvamas, kui teine toob ühe protsendi võrra rohkem kasu kui esimene?

190. Üks 6000-margalise kapitaali osa toob aastas 240 marka, teine 100 marka kasu. Kui suur on kumbki kapitaali osa, kui esimene toob kasu ühe protsendi võrra teisest rohkem?

191. Sõiduriista esimese ratta ringjoon on tagumise ratta ringjoonest 4 korda suurem. Kui esimese ratta ringjoont vähendada kahe jala võrra, aga tagumise oma suurendada ühe jala võrra, siis teeks esimene ratas 120 jala ulatuses 18 tiiru tagumisest vähem. Leida kummagi ratta ringjoone pikkus?

191. Sõiduriista esimese ratta ringjoon on tagumise omast 3 korda suurem; kui esimese ratta ringjoont suurendada 3 jala, aga tagumise oma 2 jala võrra, siis teeks esimene ratas 108 jala ulatusel 15 tiiru tagumisest vähem. Leida kummagi ratta ringjoone pikkus?

192. A läks M linnast N linna ja käis päevas 12 klm. Kui ta oli 65 klm. ära käinud, hakkas temale N linnast B vastu tulema, käies iga päev $\frac{1}{30}$ M ja N linna vahelisest maast. Siis kohtas B nii mitmendal päeval A, kui mitu klm. ta päevas ära käis. Leida M ja N linna vahe?

192. A läks M linnast N linna ja käis 8 klm. päevas. Kui ta oli 27 klm. ära käinud, hakkas temale N linnast B vastu tulema, käies iga päev $\frac{1}{20}$ M ja N linna vahelisest maast. Siis kohtas B nii mitmendal päeval A, kui mitu klm. ta päevas ära käis. Leida M ja N linna vahe.

193. A-st välja sõitev kuller peab jõudma B-sse 5 tunniga Samal ajal sõidab C-st välja teine kuller, ja et esimesega ühel ajal B-sse jõuda, peab ta iga klm. $1^1/_4$ minutit rutemini ära sõitma kui esimene. C ja B vahemaa on 20 klm. võrra kaugem kui A ja B vahemaa. Leida A ja B kaugus.

193. A-st välja sõitev kuller peab jõudma B-sse 6 tunniga. Samal ajal sõidab C-st välja teine kuller, ja et esimesega ühel ajal B-sse jõuda, peab ta iga klm. 1 minuti võrra kauemini sõitma kui esimene. C ja B vahemaa on 12 klm. võrra vähem kui A ja B vahemaa. Leida viimane.

194. Kaks rongi läheneb teineteisele vastastikku linnadest A ja B, millede vahet on n klm. Nad võivad poole tee peal kokku saada, kui B linnast $1^1/_2$ tundi varemini välja sõidetaks. Kui aga mõlemad alustavad sõitu ühel ajal, siis on 6 tunni pärast rongide kaugus üks kümnendik endisest kaugusest. Mitu tundi tarvitab kumbki rong nende linnade vahemaa ärasõitmiseks?

194. Kaks rongi läheneb teineteisele vastastikku linnadest A ja B, millede vahet on n klm. Nad võivad poole tee peal kokku saada, kui B linnast $2^1/_2$ tundi hiljemini välja sõidetaks. Kui mõlemad sõidaksid välja ühel ajal, siis oleks 5 tunni pärast rongide kaugus üks kümnendik endisest kaugusest. Mitu tundi tarvitab kumbki rong nende linnade vahemaa ärasõitmiseks?

195. Kaks isikut läks A-st ja B-st välja teineteisele vastu. Kohtamisel selgus, et esimene oli 6 klm. võrra teisest rohkem käinud. Liikumist jätkates jõudis esimene B-sse 4 tunniga, teine A-sse 9 tunniga pärast kohtamist. Leida A ja B kaugus.

195. Kaks isikut läks A-st ja B-st välja teineteisele vastu. Kohtamisel selgus, et esimene oli 4 klm. võrra teisest vähem käinud. Liikumist jätkates jõudis esimene *B*-sse 4 tunni

48 m., aga teine A-sse 3 t. 20 m. pärast kohtamist. Leida A ja B kaugus.

196. Piiritusega täidetud riistast valati osa piiritust välja ja täideti veega; siis valati veel välja nii mitu pange kui enne ja täideti uuesti veega. Siis jäi riista veel 49 pange puhast piiritust. Riista mahub 64 pange. Kui palju valati esimesel ja teisel korral piiritust?

196. Piiritusega täidetud riistast valati osa piiritust välja ja täideti veega; siis valati veel välja nii mitu pange kui enne ja täideti uuesti veega. Siis jäi riista piiritust kolm korda vähem kui vett. Riista mahub 40 pange. Kui palju piiritust valati välja kummalgi korral?

197. Panka pandud kapitaal toob aastas 120 marka kasu; kapitaal ühes kasuga oli jäetud veel aastaks panka. Pärast seda muutus kapitaal ühes kasuga 2646 margaks. Kui suur oli kapitaal?

197. Kasutades kapitaali ühes ettevõttes sai kaupmees ta pealt 240 marka kasu. Niiviisi suurendatud kapitaali pani ta teise ettevõttesse, mis esimesest 20% võrra kasulikum oli. Kui suur oli kapitaal, kui ta teise ettevõtte lõpul muutus 3432 margaks?

198. Kaks isikut pani 200-margalise kapitaali kokku. Esimese osa oli ettevõttes 10 kuud, teise osa 15 kuud. Ettevõtte lõpetamisel sai esimene 130 marka, teine — 90 marka. Kui suur oli kummagi osa?

198. Kaks isikut pani 500-margalise kapitaali kokku. Esimese osa oli ettevõttes 15 kuud, teise osa — 6 kuud. Ettevõtte lõpetamisel sai kumbki 450 marka. Kui suur oli kummagi osa?

199. 20-pangene riist oli täidetud piiritusega. Sellest valatakse üks osa piiritust teise sama suurde riista, mis siis veega täidetakse. Saadud seguga täidetakse esimene riist. Siis valatakse esimesest riistast $6^2/_3$ pange teise; pärast seda oli mõlemas riistas ühepalju piiritust. Kui palju piiritust valati esimene kord esimesest riistast teise?

199. 30-pangene riist oli täidetud piiritusega. Sellest valatakse üks osa piiritust teisi sama suurde riista, mis siis veega täidetakse. Saadud seguga täidetakse esimene riist.

Siis valatakse esimesest riistast 12 pange teise; pärast seda oli esimeses riistas 2 pange piiritust vähem kui teises. Mitu pange piiritust valati esiti esimesest riistast teise?

200. 36 arssina ulatusel teeb sõiduriista esimene ratas 6 tiiru tagumisest rohkem. Kui mõlema ratta ringjoont suurendada 1 arss. võrra, siis teeb esimene ratas samal ulatusel 3 tiiru tagumisest rohkem. Leida kummagi ratta ringjoone pikkus?

200. 120 jala ulatusel teeb sõiduriista esimene ratas 2 tiiru tagumisest rohkem. Kui esimese ratta ringjoont vähendada 4 jala võrra ja tagumise oma suuurendada 5 jala võrra, siis teeb esimene ratas samal ulatusel 9 ringi tagumisest rohkem. Leida kummagi ratta ringjoone pikkus?

§ 5. Võrrandite astendamine ja juurimine.

Võrrandi mõlemaid osasid samal astmel võttes, saame uue võrrandi, mis pole kongruentne endise võrrandiga, sest et teda ei rahulda mitte üksnes antud võrrandi juured, vaid tal on veel lisajuured, mis antud võrrandit täiendavasse erivõrrandisse kuuluvad.

Kui võrrandi $A=B$ võtame teisel astmel, siis saame võrrandi $A^2=B^2$, ehk $A^2-B^2=0$. Viimane lahutub teguriteks: $(A+B)(A-B)=0$, kust $A+B=0$ ja $A-B=0$, ehk juured $A=B$ (antud juur) ja $A=-B$ (lisajuur).

Kui võrrandi $A=B$ võtame kolmandal astmel, siis saame uue võrrandi: $A^3=B^3$ ehk $A^3-B^3=0$. Teguriteks lahutades saame $(A-B)(A^2+AB+B^2)=0$ ehk $A-B=0$, kust $A=B$ (antud võrrand) ja $A^2+AB+B^2=0$ (lisavõrrand).

Kõik need märkused käivad ka kõrgemate astmete kohta.

Järgnevad võrrandid võtta teisel astmel ja leida saadud võrrandite juured, ühtlasi lisajuuri ära tähendades:

201. $x=2$	**202.** $2x=-3$
203. $x-5=0$	**204.** $x+4=1$
205. $x-7=-4x$	**206.** $x+\frac{13}{5}=-\frac{1}{10}$
207. $2x-5=6x$	**208.** $5x+\frac{3}{4}=-\frac{5}{2}+2x$
209. $ax+c=bx$	**210.** $ax+b=cx-d$

Järgnevad võrrandid võtta kolmandal astmel, leida saadud võrrandite juured, ühtlasi lisajuuri ära tähendades:

211. $x=1$ 212. $x=-2$ 213. $2x=3$
214. $3x=-4$ 215. $x+2=1$ 216. $2x-3=x$
217. $x=a$ 218. $x-b=a$ 219. $ax=-b$
220. $ax-b=cx$

Võrrandi astendamisest näeme, et võrrandi juurte arv tõuseb, kuna see võrrandi juurimisel ümberpöördud on — sel juhusel väheneb võrrandi juurte arv. Et antud võrrandi juuri leida, tuleb võtta mitte ainult juurimise abil saadud, vaid ka teda täiendav võrrand. Nii võrrandist $A^2=B^2$ ruutjuurt leides tuleb vaadelda mitte ainult võrrandit $A=B$, vaid ka teda täiendavat võrrandit $A=-B$.

Kolmanda astme juurt võrrandist $A^3=B^3$ leides tuleb arvutada mitte üksnes võrrand $A=B$, vaid ka teda täiendav võrrand $A^2+AB+B^2=0$.

Sedasama tuleb silmas pidada kõrgema astme võrranditest juurt leides.

Järgnevad võrrandid lahendada:

221. $x^2=9$ 222. $x^2=-4$
223. $x^2+a^2=0$ 224. $x^2-a^2=b^2$
225. $14x-x^2=33$ 226. $(x-1)(x-2)=6$
227. $x^2-2ax+a^2=b^2$ 228. $2x^2-2x=\frac{3}{2}$
229. $bx^2-(a-b)x=a$ 230. $(4x-3)^2=8x$

Järgnevad võrrandid lahendada:

231. $x^3=-1$ 232. $x^3=8$
233. $x^3+27=0$ 234. $x^3-a^3=0$

Lahendada võrrandid:

235. $x^4-16=0$ 236. $x^4+81=0$ 237. $x^6-64=0$
238. $x^6+729=0$ 239. $b^8x^8-a^8=0$ 240. $a^8x^8+b^8=0$

§ 6. Irratsionaalsete võrrandite lahendus.

Irratsionaalseks võrrandiks nimetatakse võrrandit, milles tundmatu on juuremärgi all. Seesuguse võrrandi arvutamiseks tuleb ta muuta võrrandiks, milles tundmatud ei ole juuremärgi all. See saadakse astendamisega üks ehk mitu korda järjestikku.

Enne astendamist tuleb võrrand teha nii lihtsaks, kui vähegi võimalik. Et paremini irratsionaalsest tundmatust avaldusest lahti saada, tuleb võrrand nii muundada, et see avaldus oleks üksliikmena ühel pool võrdsusmärki.

Et võrrandi astendamisega saame ka lisajuured, siis tuleb alati proovida, missugused juured kõlbavad antud võrrandile, saadud juurt tundmatu asemele pannes. Kui mõni juur ei rahulda antud võrrandit, siis kuulub ta lisavõrrandisse, mida nii mitu võib olla, mitmendasse astmesse me võrrandi astendasime. Lisavõrrandid on kerge kokku seada.

Irratsionaalsed võrrandid võivad olla ilma juureta, s. o. täitsa võimatud.

Näit. võrrandil $3-\sqrt{x}=4$ on ainult üks juur $x=1$, mis aga rahuldab mitte antud võrrandit, vaid teda täiendavat lisavõrrandit $3+\sqrt{x}=4$.

Lahendada irratsionaalsed võrrandid:

241. $5+\sqrt{6-x}=7$ 242. $\sqrt{5+\sqrt{x-4}}=3$

243. $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=1$ 244. $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+2}=8$

245. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$ 246. $2\sqrt{x+18}+\sqrt{4x-3}=15$

247. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}$ 248. $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{3x+4}$

249. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+12}}=1+x$ 250. $x=-2+\sqrt{4+x\sqrt{36+x^2}}$

251. $\frac{2}{x}+2=\sqrt{4+\frac{1}{x}\sqrt{64+\frac{144}{x^2}}}$ 252. $1-\frac{1}{x}=\sqrt{1-\frac{1}{x}\sqrt{4-\frac{7}{x^2}}}$

253. $\frac{5}{x+\sqrt{5+x^2}}-\frac{5}{x-\sqrt{5+x^2}}=6$ 254. $\frac{4}{x+\sqrt{4-x^2}}+\frac{4}{x-\sqrt{4-x^2}}=\frac{12}{7}$

255. $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2}$ 256. $\sqrt{5x-\frac{4}{\sqrt{3x+1}}}=\sqrt{3x+1}$

257. $\frac{\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x-1}}=2$ 258. $\frac{\sqrt{3x^2+1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{2x+1}}=\frac{2}{5}$

259. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

260. $\frac{x+1-\sqrt{2x+1}}{x+1+\sqrt{2x+1}}=\frac{\sqrt{2x+1}+1}{\sqrt{2x+1}-1}$

261. $x+\sqrt{2ax+x^2}=a$ 262. $\sqrt{x}+\sqrt{a-x}=\sqrt{a}$

263. $\sqrt{3x+a+2b}-\sqrt{3x+a-2b}=2\sqrt{x-a}$

264. $\sqrt{a-bx}+\sqrt{c-dx}=\sqrt{a+c-(b+d)x}$

265. $\sqrt{a+x}+\sqrt{2a+x}=\frac{a}{\sqrt{a+x}}$ **266.** $\sqrt{a+\sqrt{x}}-\sqrt{a-\sqrt{x}}=\sqrt{a}$

267. $\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-\sqrt{\frac{4}{a^2x^2}-\frac{7}{x^4}}}$ **268.** $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}$

269. $\frac{\sqrt{ax+b}+\sqrt{ax}}{1+\sqrt{ax-b}}=\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{ax}}{1-\sqrt{ax-b}}$

270. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}}=\frac{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-b}}$

XI jagu.

Kôrgema astme vôrrandid.

§ 1. Võrrandid ühe tundmatuga.

Kolmanda astme võrrandi üldkuju on $ax^3+bx^2+cx+d=0$. Kui võrrandi osad jagame a-ga, siis saame taandatud võrrandi järgmisel kujul: $x^3+px+qx+r=0$. Samuti on neljanda astme võrrandi üldkuju: $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ ja taandatult: $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$. Algebralised võrrandid kirjutatakse nii, et esimeses osas on kõik liikmed, kuna teise ossa jääb null.

Igal algebralisel võrrandil peab olema juur, kas või imaginaarne. Kõrgemas algebras tõestatakse seda mistahes astmelise võrrandi kohta. Seda põhiomadust tuleb teada, et teha sellest tähtsaid järeldusi.

Olgu antud taandatud kolmanda astme võrrand x^3+px^2+ $+qx+r=0$. Oletades, et α on selle võrrandi juur, s. o. et kui teda x asemele panna, siis muutub võrrandi esimene osa nulliks ja saame samasuse: $\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$. Kui x^3+px^2+qx+r jagaksime $x-\alpha$-ga siis saaksime jagatises $x^2+(\alpha+p)x+(\alpha^2+$ $+p\alpha+q)$, mille lihtsuse mõttes märgime x^2+hx+k, ja jääk oleks $\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r$, s. o. 0. Siit näeme, et võrrandi esimest osa alati saab jäägita jagada x ja võrrandi juure α vahega. Sellepärast võime antud võrrandi nii kirjutada: $(x-\alpha)(x^2+$ $+hx+k)=0$. Kui nüüd oletame, et kolmliikme x^2+hx+k juured, missuguseid peab olema kaks, on β ja γ, siis võime võrrandi järgmiselt kirjutada: $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$. Siit järgneb esiteks, et kõik kolm suurust α, β ja γ on võrrandi juured, ja teiseks, et esimene võrrandi osa lahutub kolmeks teguriks, millest igaüks on x ja juure vahe. Erajäreldusena saame sellest, et vaba liige r võrdub võrrandi juurte vastasmärgilise korrutisega, s. o. $r=-\alpha\beta\gamma$.

Samuti tuleb arutada neljanda astme võrrandi puhul. Võtame taandatud võrrandi $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ja oletame, et α on tema juur. Kui võrrandi esimest osa jagada $x-\alpha$-ga, siis saame jagatises kolmanda astme neliliikme, mida lüheduse pärast märgime: x^3+hx^2+kx+l, aga jäägis avalduse: $\alpha^4+p\alpha^3+$ $+q\alpha^2+r\alpha+s$, s. o. 0. Nii siis saab võrrandi esimest osa tervelt jagada $x-\alpha$-ga ja võrrandi enese võime järgmiselt kirjutada: $(x-\alpha)(x^3+hx^2+kx+l)=0$.

Eelmise põhjal lahutub kolmanda astme neliliige aga x ja juurte vahest koosseisvateks teguriteks. Neliliikme juuri tähendades β, γ ja δ, võime antud võrrandi kirjutada nii: $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0$. Siit järgneb esiteks, et suurused α, β, γ ja δ on võrrandi juured, ja teiseks, et neljanda astme võrrandi esimene osa lahutub teguriteks, millest igaüks on x ja võrrandi juure vahe. Peale telle näeme, et võrrandi vaba liige s võrdub võrrandi juurte samamärgilise korrutisega, s. o. $s=\alpha\beta\gamma\delta$.

Nõnda on igal täisarvulisel algebralisel võrrandil nii mitu juurt, mitmenda astme võrrand ta on. Erajuhustel võivad mõned juured ka üksteisega võrduda, — siis jääb muidugi isesuguste juurte arv vähemaks.

Kõrgema astme võrrandid arvutades leitakse kõige lihtsamini täisarvulised juured, kui neid on, siis murrulised, selle järele ühismõõdutud ja viimaks imaginaarsed. Üldse on säherduste võrrandite arvutamine nii raske, et isegi kõrgemas algebras vaadeldakse ainult kolmanda ja neljanda astme võrrandite üldist arvutamist, kuna kõrgema astme võrrandite jaoks on olemas mõningad viisid üksnes ligikaudsete arvuliste juurte leidmiseks.

Täisarvuliste juurte leidmiseks tähendame järgmist: kui on antud täisarvuliste kordajatega kolmanda astme võrrand $x^3+px^2+qx+r=0$, siis võivad tema täisarvulisteks juurteks olla vaba liikme r tegurid, positiivsed või negatiivsed. Nende tegurite arv on piiratud. Neid võib kõiki leida ja lihtsamatest peale hakates katsuda neid võrrandi x asemele panna. Kui on leitud säärane vabaliikme tegur α, mis rahuldab antud võrrandit, siis on meil üks juur käes. Antud võrrandit jagades $x-\alpha$-ga saame jagatises juba teise astme võrrandi, mida lahendades kaks ülejäänud juurt leiame. Olgu siinjuures tähendatud, et mõningaid taandatud täisarvuliste kordajatega kolmanda astme võrrandid saab õige lihtsalt lahendada. Tuleb ainult vaba liige lahutada kolmeks teguriks nii, et nende algebraline korrutis võrduks vaba liikmega, aga algebraline summa kordajaga teise astme tundmatu ees. Juured aga võrduvad nende vastasmärgiliste teguritega. Muidugi peab saadud juurt proovima, sest vahel laseb vaba liige end ka teisiti teguriteks lahutada, mis antud nõudeid samuti rahuldavad. Ülemaltähendatu on õige ainult sel korral, kui kõik juured on täisarvulised ratsionaalsed arvud.

Näitus: Antud on võrrand $x^3-2x+4=0$. Vaba liikme tegurid on ±1, ±2, ±4. Asemele pannes $+1$, -1, $+2$, -2 leiame, et -2 rahuldab võrrandi; sellepärast $x_1=-2$. Jagame antud võrrandi esimese osa $x+2$-ga ja võrrutame saadud jao nulliga. Saame võrrandi $x^2-2x+2=0$, mida lahendades leiame $x_2=1+i$, $x_3=1-i$.

Samuti kui täisarvuliste kordajatega 4. astme võrrandile $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ on leitud täisarvuline juur $x=\alpha$ ja taandades võrrandi järgmisel kujul: $x^3+hx^2+kx+l=0$, saavutame vähemalt võrrandi astme alanemise. Kui aga 4. astme võrrandis on kaks täisarvulist juurt $x=\alpha$ ja $x=\beta$, siis võime lahendada antud võrrandi nõnda: kasvatame isekeskis $x-\alpha$ ja $x-\beta$ ja saadud 2. astme trinoomiga jagame antud võrrandi esimese osa. Jagamisel saame täisarvulise jagatise mõnesuguse trinoomina x^2+mx+n, mida nulliga võrrutades saame abivõrrandi ülejäänud juurtega $x=\gamma$ ja $x=\delta$.

Näitus. Antud on võrrand $x^4+6x^3+6x^2-23x-42=0$. Vaba liikme tegurid on ±1, ±2, ±3, ±7, ±6, ±14, ±21, ±42. Neid järgemööda asemele pannes leiame, et antud võrrandi täisarvulised juured on $x_1=2$ ja $x_2=-3$. Leides teise juure lõpetame asemelepanemise. Korrutades isekeskis $(x-2)(x+3)$, saame x^2+x-6. Jagame antud võrrandi esimese osa saadud trinoomiga ja võrrutame jagatise nulliga. Saadud võrrandit $x^2+5x+7=0$ lahendades leiame $x_{3,4}=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{3}.i)$.

1. $x^3-3x=2$
2. $x^3+6=7x$
3. $x^3+x^2=x+1$
4. $x^3-5x^2=x-5$
5. $x^3+2x^2-2x+3=0$
6. $x^3+8x^2+15x+18=0$
7. $x^4+x^3=-2x+4$
8. $x^4+2x^3-13x^2-14x+24=0$
9. $x^4-2x^3-8x^2+19x-6=0$
10. $x^4+4x^3-22x^2-100x-75=0$

Et juba ühismõõtsete juurte leidmine võimata raske on, siis vaatame edaspidi ainult mõningaid kõrgema astme võrrandite vorme, millede arvutamine on elementaarse algebra piirides võimalik.

Lihtsam kõrgema astme võrranditest on 4. astme võrrand $ax^4+bx^2+c=0$. Teda nimetatakse bikvadraatseks ehk neljandaastmeseks võrrandiks. Teda lahendatakse nõnda: Oletame, et $x^2=z$. Saame 2. astme võrrandi $az^2+bz+c=0$, mida lahendades leiame 2 juurt: z_1 ja z_2. Peale selle tuleb veel lahendada kaks puudulikku 2. astme võrrandit $x^2=z_1$ ja $x^2=z_2$. Viimastest leiame kõik antud võrrandi 4 juurt ja näeme, et nad on paaristikku võrdsed, kuid vastasmärkidega.

Näitus. Võtame võrrandi $x^4-13x^2+36=0$. Oletades, et $x^2=z$, saame 2. astme võrrandi $z^2-13z+36=0$, kus $z_1=4$ ja $z_2=9$. Võrranditest $x^2=z_1$ ja $x^2=z_2$ saame $x=\pm\sqrt{4}$ ja $x=\pm\sqrt{9}$, ehk $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=3$ ja $x_4=-3$.

11. $x^4-5x^2+4=0$
12. $x^4+12x^2+32=0$
13. $5x^4+x^2-4=0$
14. $12x^4+x^2-6=0$

Bikvadraatse võrrandi kombel lahendatakse üldse niisugused võrrandid, milledes tundmatu on kahes liikmete rühmas, kusjuures üks rühm on teise ruut ehk eraldub teise ruudust mõne tuntud teguriga ehk jagajaga.

15. $(x^2-x)^2-(x^2-x)=2$
16. $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=24$

Selle kuju alla käivad vahel ka irratsionaalsed võrrandid. Neil juhustel tarvisminev võrrandi astendamine võib arvutamise lõpuks jääda.

Näitus. Võtame võrrandi $x^2-3x+\sqrt{x^2-3x+5}=7$. Teda võib kujutada nõnda: $x^2-3x+5+\sqrt{x^2-3x+5}=12$. Oletame, et $\sqrt{x^2-3x+5}=z$, siis saame 2. astme võrrandi $z^2+z-12=0$, mille juured on $z_1=3$ ja $z_2=-4$. Need kaks juurt on võimalikud ainult siis, kui ülesande tingimustel juurt $\sqrt{x^2-3x+5}$ võib võrrandis võtta kahe märgiga $\pm$. Kui aga juure väärtus võetakse absoluutse arvuna, siis on võimalik arvutus $\sqrt{x^2-3x+5}=3$, mis annab $x_1=4$ ja $x_2=-1$.

17. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}-3=0$ 18. $\sqrt{x-3}+6=5\sqrt[4]{x-3}$

19. $x^2+\sqrt{x^2-9}=21$

20. $3x^2+15x+2\sqrt{x^2+5x+1}=2$

Kergesti lahenduvad ka nõndanimetatud sümmeetrilised võrrandid $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, milledes liikmete kordajad, mis on võrrandi algusest ja lõpust ühekaugusel, on võrdsed.

Võrrandi lahendamiseks jagame teda x^2-ga; saame ax^2+ $+bx+c+\frac{b}{x}+\frac{a}{x^2}=0$; siis ühendame paaristikku ühesuguste kordajatega liikmed, kordajaid sulgude ette võttes: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+$ $+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$; viimaks oletame, et $x+\frac{1}{x}=z$, kusjuures $x^2+\frac{1}{x^2}$ asemele võib astuda z^2-2; sel kombel saame 2. astme võrrandi $az^2+bz+c-2a=0$. Viimast lahendades saame kaks juurt: z_1 ja z_2. Pärast seda tuleb lahendada kaks 2. astme võrrandit: $x^2-z_1x+1=0$ ja $x^2-z_2x+1=0$, mis saadakse asemelepanu-võrrandist ja mis näitavad, et sümmeetrilise võrrandi 4 juurt on paariviisi üksteisele vastupidised, sest et nende korrutised kahekaupa on võrdsed ühega.

21. $6x^4+5x^3-38x^2+5x+6=0$ 22. $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$

Samal kombel lahendatakse võrrand $ax^4\pm bx^3+cx^2\mp bx+a=0$, mis sümmeetrilisest võrrandist ühe kordaja märgi poolest lahku läheb. Sel korral tarvitatakse asemelepanuks $x-\frac{1}{x}=z$.

23. $4x^4-33x^3+33x+4=0$ 24. $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$.

Ebatäielikud võrrandid $ax^4\pm bx^3\pm bx-a=0$ lahendatakse kergesti teguriteks lahutamise abil.

25. $2x^4-5x^3+5x-2=0$ 26. $6x^4-5x^3-5x-6=0$

Viienda-astmelisel sümmeetrilisel võrrandil $ax^5+bx^4+cx^3+$ $+cx^2+bx+a=0$ on juur -1. Kui võrrandi esimesest osast kõrvaldame sulgude taha viies teguri $x+1$, siis saame 4. astme sümmeetrilise võrrandi. Sarnaselt lahendatakse võrrand ax^5+ $+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0$, mille juureks on 1.

27. $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$

28. $15x^5+34x^4+15x^3-15x^2-34x-15=0$

6. astme sümmeetriline võrrand $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+cx^2+$ $+bx+a=0$ ja temaga ühetaoline võrrand $ax^6+bx^5+cx^4+dx^3-$ $-cx^2+bx-a=0$ lahendatakse, niisama kui 4. astme sümmeetriline võrrand, jagades x^3-ga ja esimeses võrrandis $x+\frac{1}{x}$ asemele z ja teises võrrandis $x-\frac{1}{x}$ asemele z pannes, kusjuures selgub, et $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)=z(z^2-3)$ ja teiselt poolt $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)=z(z^2+3)$, mille järele saame lõpuks 3. astme võrrandi.

29. $x^6-10x^5+27x^4-20x^3+27x^2-10x+1=0$

30. $2x^6-x^5-8x^4+8x^2+x-2=0$

Kergesti lahendatavate võrrandite hulka loetakse veel kaheliikmelised võrrandid $x^n-a=0$ ja $x^n+a=0$, milledes a on absoluutne arv. Nende lahendamiseks võetakse esiteks $x=\sqrt[n]{a}.z$, mille tagajärjel antud võrrandid omandavad lihtsama kuju $z^n-1=0$ ja $z^n+1=0$. Need viimased lahendatakse esimese osa teguriteks lahutamise abil, ja saadud z väärtused kasvatatakse $\sqrt[n]{a}$-ga. Kergesti saab üldkujuline võrrand $ax^n\mp b=0$ taandatud kuju, kordaja a-ga jagamise teel, ja lahendatakse sellepärast samal viisil:

31. $x^3-27=0$ 32. $125x^3+8=0$ 33. $x^4-16=0$

34. $81x^4+4=0$ 35. $x^5-2=0$ 36. $2x^6+3=0$

Võrrand $ax^{2n}+bx^n+c=0$ taandatakse sel teel, et x^n asemele z pannakse, kaheks kaheliikmeliseks võrrandiks, mis muudab antud võrrandi teise astme võrrandiks ja võimaldab kaks z väärtust leida.

37. $x^6-3x^3+2=0$ 38. $(x-1)^6+16=10(x-1)^3$

39. $x^{\frac{6}{5}}+8=9\sqrt[5]{x^3}$ 40. $(x+2)^{\frac{6}{5}}-216=19\sqrt[5]{(x+2)^3}$

§ 2. Mitme tundmatuga võrrandid.

Võrranditesüsteemi $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+E=0$ ja $ax+by=c$ lahendamiseks, milledest üks on teisel ja teine esimesel astmel, avaldame y teisest võrrandist võetud x läbi ja asetame saadud avalduse $y=\frac{c-ax}{b}$ esimesse. Saame nõndanimetatud tuletatud teiseastmelise võrrandi $Mx^2+Nx+P=0$. Viimast lahendades saame kaks x_1 ja x_2 väärtust, mille paigutades y avaldusse saame vastavalt y_1 ja y_2.

41. $x^2-y^2=32$, $x-2y=2$
42. $2x^2-2xy+x=-9$, $2y-3x=1$
43. $x^2+6xy+8y^2=91$, $x+3y-10=0$
44. $x^2+2xy-4y^2-5x+4=0$, $x-y=2$

Kahe teiseastmelise võrrandi $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ ja $A_1x^2+B_1xy+C_1y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ lahendamiseks kõrvaldame esiteks mõlemast võrrandist näit. y teise astme. Selleks korrutame esimest võrrandit c_1-ga teist c-ga ning lahutame nad teineteisest. Saame abivõrrandi, mille lüheduse pärast märgime nii: $ax^2+bxy+dx+ey+f=0$. Et saadud võrrandis tundmatu y on esimesel astmel, siis avaldame ta x abil ratsionaalselt: $y=-\frac{ax^2+dx+f}{bx+c}$. Saadud y avalduse asetame ühte antud võrrandisse; siis saame x suhtes 4. astme tuletatud võrrandi. Kui viimane on lahendatud, siis saame neli x väärtust; neid y avaldusse asetades saame vastavalt neli y väärtust.

Arvutus muutub lihtsamaks juhusel, kui ühe tundmatu teine aste puudub teises võrrandis.

45. $x^2+3xy=18$, $xy+4y^2=7$
46. $x+y-x^2=0$, $3y-x-y^2=0$
47. $6x^2+xy-y^2-3x-4y=15$, $4xy-y^2-3x^2+15x-7y=18$
48. $3x^2+2xy+y^2=43$, $x^2+2xy+3y^2=33$
49. $x^2+xy+2y^2=74$, $2x^2+2xy+y^2=73$
50. $2x^2-5xy+2y^2=0$, $x^2-3xy+2y^2+x-5y=-6$

Et eespool-toodud üldine võrranditesüsteemi lahendusviis kaunis keeruline on, siis on kasulik läbi vaadata mõningad erivõtted võrrandite jaoks, mis ette tulevad iseäralisel kujul. Vaatame näituste varal mõned lahendusviisid.

Näitus 1. Antud on võrrandid $x+y=8$ ja $xy=15$. Võrrandite kuju näitab, et x ja y peale võib vaadata kui teise astme võrrandi $z^2-8z+15=0$ juurte peale. Viimase juured on 3 ja 5. Et mõlemaid juuri võib võtta x-na ja y-na, siis on antud võrranditesüsteemil järgmised juured: $x_1=3$, $y_1=5$ ja $x_2=5$, $y_2=3$.

Eelmise sarnaselt lahendatakse võrrandid $x-y=3$ ja $xy=10$. Tarvis ainult ajutiselt võtta $y=-z$.

Näitus 2. Võtame võrrandid $x+y=7$ ja $x^2+y^2=25$. Esimese nendest võtame teisel astmel ja lahutame tast teise, siis leiame korrutise $xy=12$. Teades tundmatute summat ja korrutist, võime leida tundmatud nii, nagu esimeses näituses.

Selletaoliselt võime lahendada võrrandid $x-y=2$ ja $x^2+y^2=74$.

Näitus 3. Antud on võrrandid $x^2-y^2=24$ ja $x-y=4$. Jagades esimest teisega, saame esimese astme võrrandi $x+y=6$, mis ühes teise antud võrrandiga määrab juured: $x_1=5$ ja $y_1=1$.

Näitus 4. Antud on võrrandid $x^2+y^2+xy=84$ ja $x+y+\sqrt{xy}=14$. Avaldame esimese võrrandi järgmiselt: $(x+y)^2-$ $-xy=84$ ja oletame, et $x+y=z$ ja $\sqrt{xy}=u$. Siis võtavad antud võrrandid kuju: $z^2-u^2=84$ ja $z+u=14$. Lahendades saadud võrrandid sel kombel, nagu näidatud kolmandas näituses, saame: $z=10$ ja $u=4$. Järjelikult $x+y=10$ ja $xy=16$, ja sellepärast on x ja y teise astme võrrandi $v^2-10v+16=0$ juured. Lahendades viimast leiame, et antud võrranditel on juured: $x_1=8$, $y_1=2$ ja $x_2=2$, $y_2=8$.

Näitus 5. Antud on võrrandid $x^2+y^2=25$ ja $xy=12$. Korrutades teist võrrandit 2-ga, liidame ta esimese juurde ja lahutame ta esimesest; saame: $(x+y)^2=49$ ja $(x-y)^2=1$, kus $x+y=\pm7$ ja $x-y=\pm1$. Sellepärast saame antud võrrandite juured järgnevatest esimese astme võrrandite süsteemidest:

$$x+y=7,\ x+y=7,\ x+y=-7;\ x+y=-7$$
$$x-y=1,\ x-y=-1,\ x-y=1;\ x-y=-1.$$

Lahendades saame: $x_1=4$, $y_1=3$; $x_2=3$, $y_2=4$; $x_3=-4$, $y_3=-3$; $x_4=-3$, $y_4=-4$.

Neid võrrandid oleks võinud lahendada iseäralise asemelepaneku abil, mida seletame järgnevas näituses.

Näitus 6. Võtame võrrandid $2xy-y^2=15$ ja $x^2+xy=36$, millede esimesed osad on samalaadsed teise astme avaldused. Oletame, et $y=ux$. Saame $x^2(2u-u^2)=15$ ja $x^2(1+u)=36$. Siit kaks x^2 avaldust leides ja võrdsusmärgiga ühendades, saame võrrandi $\frac{15}{2u-u^2}=\frac{36}{1+u}$ ehk $12u^2-19u+5=0$. Selle võrrandi juured on $u_1=\frac{5}{4}$ ja $u_2=\frac{1}{3}$. Esimese juurega arvutades saame $x^2=\frac{36}{1+u}=16$, s. o. $x=\pm 4$, järjelikult $y=ux=\pm 5$; teise juurega arvutades saame samuti $x^2=27$, s. o. $x=\pm 3\sqrt{3}$, ja $y=\pm\sqrt{3}$.

Näitus 7. Määrata täisnurkse kolmnurga küljed, teades, et perimeeter on 12 ja pind 6. Kaatetid x ja y-ga ja hüpotenuusi z-ga tähendades seame kokku kolm võrrandit:

$$x+y+z=12; \quad xy=12 \text{ ja } x^2+y^2=z^2$$

Paigutame esimeses võrrandis z teise ossa ja võtame mõlemad osad teisel astmel. Saame: $x^2+y^2+2xy=144-24z+z^2$, milles x^2+y^2 võime vahetada z^2-ga ja $2xy$ 24-ga; nii saame võrrandi, milles on ainult z.

Niiviisi leiame, et $z=5$. Võrranditest $x+y=7$ ja $xy=12$ leiame: $x_1=4$, $y_1=3$ ja $x_2=3$, $y_2=4$. Mõlemad juurtesüsteemid määravad ära ühe ja sama kolmnurga.

Näitus 8. Antud on järgnevate võrrandite süsteem: $x-y=2(1-z)$, $x^2-y^2=2(1-z^2)$, $5(x^4-y^4)=13(1-z^4)$. Võrrandid võib lihtsamaks teha. Selleks jätame esimese muutmata, teise jagame esimesega, aga kolmanda teisega. Saame: $x-y=2(1-z)$, $x+y=1+z$, $10(x^2+y^2)=13(1+z^2)$. Esimese kahe võrrandi abil avaldame x ja y z läbi ja saadud avaldused $x=\frac{3-z}{2}$ ja $y=\frac{3z-1}{2}$ asetame kolmandasse võrrandisse, mis omandab siis järgmise kuju: $2z^2-5z+2=0$. Kahte z väärtust määrates ja x ja y avaldusse asetades saame: $x_1=\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{5}{2}$, $z_1=2$ ja $x_2=\frac{5}{4}$, $y_2=\frac{1}{4}$, $z_2=\frac{1}{2}$.

Näitus 9. Leida geomeetrilise võrde (proportsiooni) liikmed, teades, et äärmiste summa on 12, sisemiste summa 9 ja kõigi liikmete ruutude summa on 145. Olgu otsitav võrre $x:y=z:u$. Seame kokku järgmised võrrandid: $x+u=12$, $y+z=9$, $x^2+y^2+z^2+u^2=145$ ja $xu=yz$.

Võrrandite lahendamiseks võtame neist kaks esimest teisel astmel ja liidame nad ning summast lahutame kolmanda võrrandi. Saame $2(xu+yz)=80$. Neljanda võrrandi põhjal leiame, et

$xu=yz=20$. Pärast seda leiame võrranditest $v^2-12v+20=0$ ja $w^2-9w+20=0$, et $x=10$, $u=2$, $y=5$ ja $z=4$. Neli juurtesüsteemi, mis võib siit saada, vastavad võrde liikmete neljale võimalikule vahetlusele.

Näitus 10. Antud on nelja võrrandi süsteem: $xy=zu$, $x+y+z+u=12$, $x^2+y^2+z^2+u^2=170$ ja $x^3+y^3+z^3+u^3=1764$. Võtame abitundmatud, oletades, et $x+y=v$, $z+u=w$ ja $xy=uz=t$.

Et endiste tundmatute asemele uusi panna, tähendame, et $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=v^2-2t$; $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=$ $=v^3-3vt$ ja $z^2+u^2=w^2-2t$, $z^3+u^3=w^3-3wt$. Esimest antud võrrandit muutmata jättes anname kolmele järgnevale järgmised vasted: $v+w=12$; $v^2+w^2-4t=170$, $v^3+w^3-3t(v+w)=1764$.

Nõnda on antud võrranditesüsteem lihtsamaks taandatud. Kuid kaks viimast saadud võrrandit võimaldavad edaspidise lihtsustamise. Nende võrrandite esimesele osale võib anda järgmise kuju: $(v+w)^2-2wv-4t$ ja $(v+w)^3-3vw(v+w)-3t(v+w)$ ehk esimese võrrandi põhjal: $12^2-2vw-4t$ ja $12^3-36vw-36t$. Esimest avaldust 170-ga ja teist 1764-ga võrrutades ja siis lihtsustades saame eelmise süsteemi asemel järgmise: $v+w=12$, $vw+2t=-13$, $vw+t=-1$.

Kahte viimast võrrandit arvutades leiame, et $t=-12$ ja $vw=11$.

Et $v+w=12$ ja $vw=11$, siis on nad (v ja w) teise astme võrrandi $s^2-12s+11=0$ juured, mis võrduvad: $v_1=1$, $w_1=11$ ja $v_2=11$, $w_2=1$. Teades v, w ja t, on võrranditest $x+y=v$, $y+z=w$ ja $xy=zu=t$ kerge leida otsitavad tundmatud. Niiviisi saame neli juurtesüsteemi: 12, —1, 4; —3; —1, 12, —3, 4; 4, —3, 12, —1; —3, 4, —1, 12.

51. $x+y=12$, $xy=35$
52. $x^2+y^2=13$, $x^2-y^2=5$
53. $x^2+y^2=74$, $x+y=12$
54. $x^2-y^2=32$, $x-y=4$
55. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{3}{2}$, $xy=80$
56. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$, $x+y=4$
57. $x^2+y^2=25$, $xy=12$
58. $x^2-xy+y^2=43$, $x-y=1$
59. $\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2}$, $x-y=6$
60. $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=10$, $\sqrt{xy}=16$
61. $x^2-y=7$, $x^2y=18$
62. $x^3-y^3=37$, $x-y=1$

63. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3}$, $x^2-y^2=8$

64. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=18$, $x+y=12$

65. $4x^2+9y^2=45$, $xy=3$

66. $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{5}{2}$, $x^2-y^2=3$

67. $x^3-y^3=19$, $x^2y-xy^2=6$

68. $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{5}{2}$, $x^2+y^2=20$

69. $x\sqrt{\frac{x}{y}}-y\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{65}{6}$, $x-y=5$

70. $x^2+y^2-xy=61$, $x+y-\sqrt{xy}=7$

71. $x+y=xy=x^2+y^2$

72. $x-y=x^2+y^2=x^3-y^3$

73. $x+y=5$, $x^4+y^4=97$

74. $x-y=3$, $x^5-y^5=33$

75. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{112}{9}$, $x+y=4$

76. $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{23}{4}$, $x-y=1$

77. $\sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2$, $x^2-8=2x(2y-3)$

78. $\sqrt{\frac{6x}{x+y}}+\sqrt{\frac{x+y}{6x}}=\frac{5}{2}$, $xy-x-y=9$

79. $x-y+\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}=\frac{20}{x+y}$, $x^2+y^2=34$

80. $x+y=144$, $\sqrt[3]{x+10}+\sqrt[3]{y+14}=12$

81. $xy=12$, $xz=6$, $y^2+z^2=20$

82. $xy=48$, $yz=54$, $zx=72$

83. $xy+yz=28$, $xz+yz=30$, $xy+xz=10$

84. $xy+xz+yz=27$, $x-y=6$, $y-z=3$

85. $x(x+y+z)=70$, $y(x+y+z)=28$, $z(x+y+z)=98$

86. $x+y+z=20$, $xyz=130$, $x-2y+z=5$

87. $x+y+z=12$, $xz+yz=35$, $x^2+y^2+z^2=50$

88. $x+y+z=7$, $x^2+y^2+z^2=21$, $yz=x^2$

89. $x^2+y^2=z^2$, $x+y+z=30$, $xy=60$

90. $x^2+z^2-y^2=1$, $x+y+z=3$, $y^2=xz$

91. $x+y+z=13$, $x^2+y^2+z^2=61$, $2yz=xy+xz$

92. $x^2+y^2+z^2=30$, $y^2=2xz+21$, $2x=z$

93. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=12$, $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=18$, $3y+10z=3$

94. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=5$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=6$, $\frac{3}{y}-\frac{1}{xz}=1$

95. $x+y+z=6$, $xy+xz+yz=11$, $xyz=6$

96. $x+y+z=0$, $xyz=30$, $x^2+y^2+z^2=38$

97. $u+x=5$, $y+z=9$, $u+y^2=28$, $x+z^2=18$

98. $u+x=10,\ y-z=1,\ yz=20,\ y^2+u^2=74$

99. $ux=yz,\ x+u=13,\ y+z=11,\ x^2+y^2+z^2+u^2=170$

100. $x^3+y^3+z^3+u^3=252,\ x+y=5,\ z+u=7,\ xy=uz$

Järgnevates ülesannetes kokku seada kaks võrrandit kahe tundmatuga ja need lahendada.

101. Leida täisnurkse kolmnurga küljed, teades, et perimeeter on 22 jalga ja pind 30 ruutjalga.

101. Leida püstküliku (täisnelinurga) küljed, teades, et diagonaal on 13 jalga ja perimeeter 34 j.

102. Leida täisnurkse kolmnurga kaatetid, teades, et nende suhe on $\frac{3}{4}$ ja kolmnurga pind 54 ruutj.

102. Leida täisnurkse kolmnurga kaatetid, teades, et hüpotenuus on 29 jalga ja pind 210 ruutj.

103. Püstküliku pind on 112 ruutj.; kahe kõrvukülje peale on konstrueeritud ruudud, millede pindade summa on 260 r. j. Leida küljed.

103. Püstküliku külgede suhe on 6. Nende külgede peale on konstrueeritud ruudud, millede pindade summa on 592 r. j. Leida küljed.

104. Kui kahe arvu korrutisega liita väiksem arv, siis saame 54. Kui sama korrutisega liita suurem arv, siis saame 56. Leida need arvud.

104. Kahe arvu korrutis on 9 võrra vähem viiekordsest suuremast arvust ja 16 võrra suurem viiekordsest vähemast arvust. Leida need arvud.

105. Kahekümnendise arvu numbrite korrutis on 3 korda vähem arvust enesest. Kui otsitava arvuga liita 18, siis saame arvu samade numbritega, kuid vastupidises järjes. Leida arv.

105. Kahekümnendise arvu numbrite korrutis on kaks korda suurem ristsummast. Kui otsitavast arvust lahutada 27, siis saame arvu samade numbritega, kuid vastupidises järjes. Leida arv.

106. Kahe positiivse täisarvu korrutis on kolm korda suurem nende summast, ja nende arvude ruutude summa võrdub 160-ga. Leida need arvud.

106. Kahe positiivse täisarvu korrutis on 10 korda suurem nende vahest, ja nende arvude ruutude summa võrdub 125-ga. Leida need arvud.

107. Trapetsi kõrgus on 18 jalga, tema pind on sama suur kui püstküliku pind, mis on konstrueeritud trapetsi alusele; kolmekordne ülemine alus, liidetud alumisega, on kõrgusest 4 korda suurem. Leida trapetsi alused.

107. Trapetsi pind on sama suur kui püstküliku pind, mis on konstrueeritud trapetsi alusele; trapetsi aluste vahe on 16 ja kõrgus 12 jalga. Leida alused.

108. Kahe arvu summa on 22, aga nende kolmandate astmete summa on 2926. Leida arvud.

108. Kahe arvu vahe on 3, aga nende kolmandate astmete vahe on 657. Leida arvud.

109. Leida murd, mille liikmete teiste astmete summa on 25, aga murru summa ümberpöördud murruga on $\frac{25}{12}$.

109. Leida murd, mille liikmete teiste astmete summa on 13, aga murd ise oleks $\frac{5}{6}$ võrra suurem ümberpöördud murrust.

110. Kahekümnendise arvu numbrite teiste astmete summa on 34; otsitava arvu korrutis arvuga, millel samad vastupidiselt järjestatud numbrid, on 1855. Leida arv.

110. Kahekümnendise arvu numbrite korrutis on 18; otsitava arvu korrutis arvuga, millel samad vastupidiselt järjestatud numbrid, on 2268. Leida arv.

111. Kahest linnast sõidab teineteisele vastu kaks reisijat. Nad saavad kokku nii mitme päeva pärast, millede arv võrdub päevas sõidetud kilomeetrite arvude vahega, ja siis selgub, et esimene oli ära sõitnud 216 klm. Linnade vahet on 396 klm. Mitu klm. sõidab kumbki päevas?

111. Kahest linnast sõidab ühes sihis teine teise järele kaks rändajat. Nad saavad kokku nii mitme päeva pärast, millede arv võrdub päevas sõidetud kilomeetrite arvude summaga, ja siis selgub, et teine oli ära sõitnud 525 klm. Linnade vahet on 175 klm. Mitu klm. sõidab kumbki päevas?

112. Üks kolmnurga külg on 39 jalga, teiste külgede summa on 66 jalga ja nurk viimaste vahel on 60°. Leida kolmnurga küljed.

112. Üks kolmnurga külg on 43 jalga, teiste külgede vahe on 22 jalga ja nurk viimaste vahel on 120^0. Leida küljed.

113. Kraami ühest kohast teise kandmiseks on palgatud töölised, kes kõik kraami 10 tunniga ära kannavad. Oleks töölisi 10 võrra rohkem ja igaüks kannaks tunnis 5 puuda rohkem, siis lõpeks töö 8 tunni pärast; oleks töölisi aga 20 võrra vähem ja igaüks kannaks tunnis 5 puuda vähem, siis lõpeks töö 15 tunni pärast. Kui palju oli palgatud töölisi ja mitu puuda kandis igaüks tunnis?

113. Kraami ühest kohast teise kandmiseks on palgatud töölised, kes kõik kraami 8 tunniga ära kannavad. Oleks töölisi 8 võrra rohkem ja igaüks kannaks tunnis 5 puuda vähem, siis lõpeks töö 7 tunni pärast; oleks töölisi aga 8 võrra vähem ja igaüks kannaks tunnis 11 puuda rohkem, siis lõpeks töö 9 tunni pärast. Kui palju oli palgatud töölisi ja mitu puuda kandis igaüks tunnis?

114. Kaks töölist lõpetas töö 12 tunniga. Oleks esimene teinud alguses poole sellest tööst ja teine ülejäänud osa, siis oleks kokku ära kulunud 25 tundi. Mitme tunni jooksul lõpetaks kumbki eraldi selle töö?

114. Kaks töölist lõpetas töö 20 tunniga. Oleks esimene teinud alguses kolmanda osa sellest tööst ja teine ülejäänud osa, siis oleks kokku ära kulunud 50 tundi. Mitme tunni jooksul lõpetaks kumbki eraldi selle töö?

115. Vesistusse läheb kaks toru; esimest mööda voolab vesi sisse, teise läbi välja. Mõlema toru koostöötamisel täituks vesistu 6 tunniga. Kui vähendada torude läbilõike-pinda nõnda, et esimene täidaks vesistu tunni võrra pikema aja jooksul ja teine tühjendaks ka tunni võrra kauemini, siis täituks vesistu mõlema koostöötamisel 12 tunniga. Mitme tunniga täidaks esimene toru ja tühjendaks teine vesistu?

115. Vesistusse läheb kaks toru; esimese läbi voolab vesi välja, teise läbi sisse. Mõlema toru koostöötamisel täitub vesistu 24 tunniga. Kui suurendada torude läbilõike-pinda nõnda, et esimene toru kahe tunni võrra rutemini tühjendaks, aga teine kahe tunni võrra rutemini täidaks vesistu, siis täituks vesistu mõlema toru koostöötamisel 12 tunniga. Mitme tunniga tühjendaks esimene ja täidaks teine toru vesistu?

116. Esimene ratas teeb 60 jala maa peal 10 tiiru vähem tagumisest. Kui esimese ratta ringjoont vähendada 2 jala võrra, tagumise oma aga suurendada 2 jala võrra, siis teeks esimene ratas sama maa peal 4 tiiru vähem tagumisest. Leida kummagi ratta ringjooned.

116. Tagumine ratas teeb 90 jala maa peal 5 tiiru rohkem esimesest. Kui tagumise ratta ringjoont vähendada 1 jala võrra, esimese oma aga suurendada 1 jala võrra, siis teeks tagumine ratas sama maa peal 9 tiiru rohkem esimesest. Leida kummagi ratta ringjooned.

117. Üks 10000-margalise kapitaali osa toob aastas 300, aga teine 240 m. kasu. Teine osa kannab ühe protsendi võrra rohkem kui esimene. Mitme protsendi peal on kumbki osa kasvamas?

117. Üks 8400-margalise kapitaali osa toob aastas 192 m. kasu, aga teine 360 m. kasu. Mitme protsendi peal on kumbki osa kasvamas, kui esimene osa kannab 2 protsendi võrra rohkem teisest?

118. Talumees müüs 10 setverti rukkid ja mõne setverdi otri 79 m. 50 p. eest. Rukki setverdist sai ta $1^1/_2$ m. vähem kui 2 setverdi otrade eest. Mõne aja pärast müüs ta jälle 15 setverti rukkid, aga otri 4 setverdi võrra rohkem kui enne ja võttis 1 marga iga rukki- ja odrasetverdi pealt rohkem. Kõige selle eest sai ta 147 marka. Kui palju otri müüdi esimesel korral ja mis hinnaga?

118. Talumees müüs 114 marga eest mõne setverdi rukkid ja 20 setverti kaeru, saades kaera setverdist 2 m. 40 p. vähem kui rukki setverdist. Mõne aja pärast müüs ta rukkid 3 setverdi võrra vähem kui enne, kaeru aga müüs ta 25 setv. ja võttis igast rukki ja kaera setverdist 60 penni rohkem. Kõige selle eest sai ta 132 marka. Kui palju rukkid müüdi esimesel korral ja mis hinnaga?

Järgnevates ülesannetes kokku seada rohkem kui kaks võrrandit vastava arvu tundmatutega.

119. Täisnurkse kolmnurga perimeeter on 208 jalga, kaatetite summa 30 jala võrra suurem hüpotenuusist. Leida kolmnurga küljed.

119. Täisnurkse kolmnurga perimeeter on 30 jalga, tema pind 30 ruutjalga. Leida küljed.

120. Leida täisnurkse kolmnurga küljed, teades, et kaatetite vahe on 1 jalg, aga ristjoon (perpendikulaar), mis on tõmmatud täisnurgast hüpotenuusile, on 2,4 jalga.

120. Leida täisnurkse kolmnurga küljed, teades, et perimeeter on 24 jalga ja perpendikulaar, mis on tõmmatud täisnurgast hüpotenuusile, on 4,8 jalga.

121. Kolm arvu moodustavad pideva aritmeetilise võrde; nende arvude summa on 54 ja korrutis 5760. Leida need arvud.

121. Kolm arvu moodustavad pideva aritmeetilise võrde; nende arvude summa on 12 ja ruutude summa 66. Leida need arvud.

122. Kolmekümnendise arvu numbrite summa on 11; samade numbrite ruutude summa on 45. Kui otsitavast arvust lahutada 198, siis saame arvu vastupidiselt järjestatud numbritega. Leida arv.

122. Kolmekümnendise arvu numbrite summa on 14; kümneliste number on keskmine geomeetriline sajaliste ja üheliste numbrite vahel. Kui otsitavaga liita 594, siis saame arvu vastupidiselt järjestatud numbritega. Leida see arv.

123. Täisnurkse rööptahuka (paralleelepipeedi) täispind on 192 ruutjalga; tema diagonaal on 13 jalga; üks aluse külgedest on 5 jala võrra suurem kahe ülejäänud mõõte summast. Leida mõõted.

123. Täisnurkse kolmnurga pind on 30 ruutjalga. Kui selle kolmnurga küljed võtta täisnurkse rööptahuka mõõdeteks, siis saame rööptahuka, mille ruumala oleks 780 kantjalga. Leida küljed.

124. Kolm arvu moodustavad pideva geomeetrilise võrde; nende arvude summa on 19 ja nende ruutude summa on 133. Leida arvud.

124. Kolm arvu moodustavad pideva geomeetrilise võrde; nende arvude summa on 39 ja korrutis on 1000. Leida arvud.

125. Kahel kauplejal oli kokku 100 õuna, mis nad ära müüsid isesuuruse hinnaga, ühepalju raha saades. Oleks esimene müünud niipalju kui teine, siis ta oleks saanud 1 m. 80 p.; oleks teine müünud niipalju kui esimene, siis ta oleks saanud 80 p. Kui palju õunu oli kummalgi ja mis hinnaga nad müüsid?

125. Kahel kauplejal oli kokku 120 õuna, mis nad ära

müüsid isesuguse hinnaga, ühepalju raha saades. Oleks esimene müünud niipalju kui teine, siis ta oleks saanud 4 m. 90 p.; oleks teine müünud niipalju kui esimene, siis ta oleks saanud 2 m. 50 p. Kui palju õunu oli kummalgi ja mis hinnaga nad müüsid?

126. Leida kolmekümnendine arv järgmistel tingimustel: otsitava arvu ja tema ristsumma suhe on 48; arvu numbrite korrutise ja arvu ristsumma suhe on $10\frac{2}{3}$; kümneliste number on teistele numbritele keskmine aritmeetiline.

126. Leida kolmekümnendine arv järgmistel tingimustel: otsitava arvu ja temale vastupidiselt järjestatud numbritega arvu suhe on $\frac{24}{13}$; arvu numbrite korrutise ja arvu ristsumma suhe on $\frac{8}{3}$; kümneliste number on teistele numbritele keskmine aritmeetiline.

127. Leida täisnurkse rööptahuka mõõted, teades, et kõikide mõõdete summa on 17 jalga, rööptahuka diagonaal 11 jalga ja ruumala 108 kantjalga.

127. Leida täisnurkse rööptahuka mõõted, teades, et kõikide mõõdete summa on 13 jalga, täis pindala 88 ruutjalga ja ruumala 32 kantjalga.

128. Neli arvu moodustavad aritmeetilise võrde, mille äärmiste liikmete korrutis on 18, aga sisemiste korrutis 30; kõikide liikmete ruutude summa on 146. Leida need arvud.

128. Neli arvu moodustavad aritmeetilise võrde, mille äärmiste liikmete ruutude summa on 41 ja sisemiste liikmete ruutude summa 45, aga kõikide liikmete korrutis on 360. Leida need arvud.

129. Neli arvu moodustavad geomeetrilise võrde, mille äärmiste liikmete summa on 24 ja sisemiste liikmete summa on 21, aga kõikide liikmete korrutis on 11664. Leida arvud.

129. Neli arvu moodustavad geomeetrilise võrde, mille äärmiste liikmete summa on 32 ja sisemiste liikmete summa on 40, aga kõikide liikmete ruutude summa on 1700. Leida arvud.

130. Leida neljakümnendine arv, mille äärmiste numbrite ruutude summa on 13 ja sisemiste numbrite ruutude summa on 85; tuhandeliste number on nii mitme võrra üheliste numbrist suurem, kui mitme võrra sajaliste number on kümneliste numbrist suurem. Kui otsitavast arvust lahutada 1089, siis saame arvu vastupidiselt järjestatud numbritega.

130. Leida neljakümnendine arv, mille äärmiste numbrite korrutis on 40 ja sisemiste korrutis 28; tuhandeliste number on nii mitme võrra üheliste numbrist vähem, kui mitme võrra sajaliste number on kümneliste numbrist vähem. Kui otsitava arvuga liita 3267, siis saame arvu vastupidiselt järjestatud numbritega.

XII jagu.

Määramatu analüüs.

Võrrandite uurimine.

§ 1. Võrratused.

Kumbagi võrratuse poolt võib ühe ja sama suuruse võrra suurendada või vähendada.

Ühesuguste märkidega võrratusi võib liita; summa on sama märgiga kui liidetavadki.

Isesuguste märkidega võrratusi võib üksteisest lahutada; vahe on sama märgiga kui vähendatavgi.

Kui antud võrratust korrutada ehk jagada positiivse arvuga, siis saab korrutis sama märgiga kui antud võrratus; võrratuse korrutamisest negatiivse arvuga saab antud võrratusele vastupidise märgiga võrratus.

Võrratuste korrutamisel ja jagamisel tarvis meeles pidada võrratuste definitsiooni ja märgijuhiseid. Sedasama tuleb meeles pidada ka võrratuste astendamisel ja juurimisel.

Järgmistes näitustes liita kaks antud võrratust:

1. $5>-3$, $8>5$
2. $2<5$, $-7<-3$
3. $x^2>a+1$, $2x>a-5$
4. $3x+y<2a+1$, $3y-2x<14-2a$

Järgmistes näitustes esimesest võrratusest teine lahutada:

5. $16>13$, $2<5$
6. $-8<-5$, $-2>-7$
7. $2x>b^2$, $a^2<9-x$
8. $(a-b)^2<2$, $(a+b)^2>8$

Võrratuste pooled antud teguriga korrutada:

9. $5>-2$ 5-ga
10. $-7<-5$ -2-ga
11. $a^2>b$ $-b$-ga
12. $a-1<b$ $-m$-ga

Võrratuste pooled antud arvuga jagada:

13. $-6<9$ 3-ga

14. $-15>-35$ -5-ga

15. $a^3<a^2$ $-a$-ga

16. $(a-b)^3>(a-b)^2$ $a-b$-ga

Korrutada võrratused:

17. $5>3,\ 7>2$

18. $2>-5,\ -3>-7$

19. $-3<5,\ -5<2$

20. $-13<-7,\ -9<-15$

Jagada võrratused:

21. $35<40,\ 7>5$

22. $-6<4,\ 3>2$

23. $-\frac{3}{4}>-\frac{14}{9},\ \frac{3}{2}<\frac{8}{3}$

24. $\frac{8}{5}>\frac{2}{3},\ -\frac{7}{15}<-\frac{2}{9}$

Tundmatut suurust leitakse võrratusest samade metoodide abil kui võrrandistki. Võrratuse arvutuse saadus on ka võrratus; sellepärast rahuldab võrratust määramatu hulk otsitava tähendusi.

Arvutada võrratused:

25. $x+4>2-3x$

26. $4(x-1)>2+7x$

27. $\frac{3x}{2}-\frac{3}{5}<4x-3$

28. $\frac{37-2x}{3}+9<\frac{3x-8}{4}-x$

29. $(x-1)^2+7>(x+4)^2$

30. $\frac{7-6x}{2}+12<\frac{8x+1}{3}-10x$

Missugune tähendus peab olema x-il, et järgmised avaldused oleksid positiivsed suurused?

31. $2x-16$

32 $5-3x$

33. $\frac{3}{8}x-4$

34. $\frac{x+1}{2}-2x+2\frac{1}{2}$

35. $\frac{5-x}{8}+\frac{3+2x}{4}$

Missugune tähendus peab olema x-il, et järgmised avaldused oleksid negatiivsed suurused?

36. $3x+15$

37. $7-14x$

38. $5-\frac{2}{3}x$

39. $\frac{x-2}{3}+\frac{x}{2}$

40. $\frac{3x-5}{2}-\frac{2x-1}{3}+2$

Kui üks ja sama otsitav peab rahuldama kahte ehk mitut võrratust, siis nimetatakse neid võrratusi **koguvõrratusteks**. Seesugusel korral arvutatakse iga võrratus lahus, s. o. leitakse otsitava piir igast võrratusest eraldi. Leitud piiride vaatlemisel võib selguda, et: piirid on 1) ühtivad, näit.: $x>a$ ja $x>b$, ehk 2) kahelt poolt piiravad, näit.: $x>a$ ja $x<b$, kusjuures a on väiksem suurus, ehk 3) vastolulised, kus x on suuremast suurusest suurem ja väiksemast suurusest vähem; näit.: $x>15$ ja $x<2$. Loomulik, et vastolulistes võrratustes ei või x-il ühtegi tähendust olla.

Arvutada koguvõrratused:

41. $2x>4x+6$ ja $4x+3<2x+1$
42. $3x+7>7x-9$ ja $x-3>-3x+1$
43. $5x-3>1+x$ ja $\frac{1}{2}-3x<\frac{2}{3}x-5$
44. $4x+7>2x+13$ ja $3x-18<2x+1$
45. $6x-7>5x-1$ ja $3x+6>8x-4$
46. $2(x-3)-1<5$ ja $\frac{3x}{8}-7>\frac{x}{12}$
47. $3x+2>x-2$, $x+15>6-2x$ ja $x-14<5x+14$
48. $3x-4<8x+6$, $15x+9<11x+50$ ja $2x-1>5x-4$

Missugune tähendus peab olema a-l, et järgnevad murrud oleksid positiivsed?

49. $\frac{2a-3}{3a-2}$ 50. $\frac{3a-8}{5-a}$ 51. $\frac{2-3a}{2a+7}$ 52. $\frac{3a-7}{2-5a}$

Missugune tähendus peab olema a-l, et järgmised murrud oleksid negatiivsed?

53. $\frac{8-3a}{7a-2}$ 54. $\frac{5a+8}{3a-7}$

55. Võrratuse $(a-b)^2>0$ põhjal tõestada, et kahe arvu ruutude summa on alati suurem kui nende arvude kahekordne korrutis.

56. Võrratuse $(a-b)^2>0$ põhjal tõestada, et kahe arvu geomeetriliste vastupidiste suhete summa on alati suurem kui 2.

57. Tõestada, et lihtmurd suureneb, kui tema liikmeid suurendada ühe ja sama positiivse arvu võrra.

58. Tõestada, et kahe arvu aritmeetiline keskmine on nende arvude geomeetrilisest keskmisest suurem.

59. Tõestada, et iga kolmnurga poolperimeeter on sama kolmnurga igast küljest suurem.

60. Tõestada, et iga kolmnurga paarikaupa võetud külgede korrutiste kahekordne summa on suurem kui sama kolmnurga külgede ruutude summa.

Teise astme võrratuste lahendamine põhjeneb kolmliikme ax^2+bx+c omadustel.

Kui kolmliikme ax^2+bx+c juured on isesugused reaalarvud, siis saame, neid juuri α ja β kaudu tähendades, valemi

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta),$$

millest on näha, et kui x tähendused on suuremast juurest suuremad ehk vähemast juurest vähemad, s. o. niisugused, mis muudavad tegurid $x-\alpha$ ja $x-\beta$ ühesuguste märkidega suurusteks, siis on kolmliikme märk ühesugune kordaja a märgiga; on aga x tähendused suuremast juurest vähemad ja vähemast juurest suuremad, s. o. niisugused, mis muudavad tegurid $x-\alpha$ ja $x-\beta$ vastasmärkidega suurusteks, siis on kolmliikme märk kordajal a märgile vastupidine. Sellest selgub, et kui kolmliikme juured on reaalsuurused, siis on võrratuses $ax^2+bx+c>$ >0 oleva x tähendus oma väärtuse poolest kolmliikme juurte väärtuse vahel tingimusel, kui $a<0$; on aga $a>0$, siis on x tähendus oma väärtuse poolest väljaspool juuri.

Kui ülemaltoodud kolmliikme juured on imaginaarsuurused, siis saame, oletades, et $\alpha=\lambda+\mu i$ ja $\beta=\lambda-\mu i$, endise valemi asemel

$$ax^2+bx+c=a[(x-\lambda)^2+\mu^2],$$

millest on näha, et sulgudes olev avaldus on positiivne x igasuguse reaalse tähenduse puhul; järjelikult on kolmliikme märk alati kordaja a märgiga ühesugune. Sellepärast, kui on võrratuses $ax^2+bx+c>0$ esineva kolmliikme juured imaginaarsuurused, siis võib x^1 tingimusel, et $a>0$, lõpmata palju tähendusi olla, kuna aga tingimusel, et $a<0$, võrratus võimatu on.

61. $x^2+4x+4>0$

62. $x^2+x-6>0$

63. $x^2-3x-10<0$

64. $x^2-6x+10>0$

65. $6-5x-6x^2<0$

66. $6x-5-5x^2>0$

67. $\dfrac{x-5}{x+3}>0$

68. $\dfrac{2x+5}{3-5x}>0$

69. $x^4-13x^2+36>0$

70. $20-25x^4-121x^2<0$

§ 2. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi uurimine.

Ühe tundmatuga esimese astme võrrandil on üks juur, mis võib olla positiivne, negatiivne, nulline, lõpmatu või määramatu. Iga juur rahuldab võrrandit ja vastab võrrandi kuju iseäraldustele.

Positiivne juur annab harilikult ülesande küsimusele rahuldava vastuse, ainult harukordadel ei tee ta seda mitte.

Kui võrrandi juur on negatiivne, siis saame, tehes x märgi vastupidiseks, absoluutselt endise juure, kuid vastasmärgiga. Negatiivne juur ei rahulda ülesande küsimust siis mitte, kui küsimus sisaldab absoluutse suuruse. Viimasel juhusel võime, muutes ülesandes mõne antud suuruse sihti, x ees märki muuta ja saame endise negatiivse juure asemel positiivse juure.

Nulline juur ei rahulda ülesande küsimust siis mitte, kui viimane oma sisu järele nullist erinevat vastust nõuab.

Lõpmatu juur ei vasta iialgi ülesande küsimuse peale täpsalt; ta võib ülesande küsimusele ainult kaudseks vastuseks olla.

Määramatu juur saadakse siis, kui võrrand x igasuguse tähenduse puhul samasuseks muutub; säherdune võrrand saadakse, kui ülesande tingimused ainult paistavad tingimustena, kuna aga tõepoolest mingisuguseid tingimusi ei ole.

Leida, missuguste a tähenduste puhul on järgnevatel võrranditel positiivsed juured.

71. $5(x-3)=3(3x-2a)$ **72.** $3(x+1)=4+ax$

73. $\frac{5}{3+x}=\frac{a}{x}$ **74.** $\frac{3}{x+1}=8-a$

Missugused tähendused peavad olema a-l, et järgnevatel võrranditel oleks negatiivne juur?

75. $7-a=\frac{2}{x-1}$ **76.** $\frac{3}{4x-a}=\frac{2}{ax-5}$

Järgnevate võrrandite juured on negatiivsed; muuta neid võrrandid nii, et neil oleksid positiivsed juured.

77. $4x-75=6(x-10)+85$ **78.** $5(3-7x)+4(3x-7)=35+x$

Järele katsuda, missugused peavad antud võrrandite tähtkordajate tähendused olema, et nende juured oleksid positiivsed, negatiivsed, nullised, lõpmatud ja määramatud.

79. $\frac{a}{a-x}=\frac{m}{n}$

80. $3ax+b=b(a+x)$

81. $ax+m=b(x+n)$

82. $\frac{px+m}{x+m}=\frac{a}{b}$

83. Kaks töölistesalka sai ühtekokku 120 m.; esimese salga iga tööline sai 7 m., teise salga iga tööline aga 5 m.; teises salgas oli kolm töölist rohkem kui esimeses. Mitu töölist oli kummaski salgas?

84. Leida kahekümnendine arv, milles kümneliste arv on üheliste arvust kaks korda vähem ja milles üheliste ja kümneliste arvu vahe võrdub 6?

85. Ühel õnnemängijal oli 250 m., teisel 100 m.; peale mõnda partiid oli esimesel raha 6 korda rohkem kui teisel. Kui palju kaotas esimene?

86. Osteti mõni nael jahu; kui nael oleks maksnud 8 m., siis oleks ostjal 12 m. üle jäänud; kui aga jahu nael oleks 6 m. maksnud, siis oleks ostjal 4 m. puudu tulnud. Kui palju jahu osteti?

87. Kahest sordist teest — 3 m. ja 5 m. nael — tarvis segada 12 naela segu, 2 m. 50 p. nael. Mitu naela peab kummastki sordist võtma?

88. Vesistusse on juhitud kolm toru; esimene võib vesistu täita 6 tunnis, teine 8 tunnis; kolmandast torust võib täidetud vesistu 3 tunniga tühjaks jooksta. Mitme tunni pärast saab tühi vesistu täis, kui kõik torud korraga töötavad?

89. Kauba veo eest makstakse töövoorimehele 1 m. iga puuda ja klm. pealt; pakkimiskulud on 3 m. iga puuda kohta. Kui kaugele võib vedada 3000 p. kaupa 6000 m. eest?

90. Kaks käskjalga lähevad A-st ja B-st ühel ajal välja ja sõidavad samas sihis läbi C, mis on B taga. A ja C kaugus on 50 klm., B ja C kaugus 40 klm. Esimene käskjalg sõidab 10 klm., teine 6 klm. tunnis. Kui kaugel C punkti taga saab esimene käskjalg teise kätte?

91. Isa on 50 a. 8 kuud ja poeg 12 a. 8 kuud vana. Mitme aasta pärast on isa pojast neli korda vanem?

92. Murru lugeja sünnitab $\frac{5}{8}$ tema nimetajast; kui lugejat liita 6-ga ja nimetajat 9-ga, siis muutub murd $\frac{2}{3}$-ks. Leida murd.

93. Missugune arv tarvis liita murru $\frac{5}{6}$ lugeja ja nimetajaga, et murd muutuks üheliseks?

94. Vesistusse on juhitud kolm toru; esimene neist täidab ta 8 ja teine 4 tunniga; kolmanda toru kaudu võib täidetud vesistu 2 t. 40 m. jooksul tühjaks saada. Mitme tunni pärast saab tühi vesistu täis, kui avada kõik torud korraga?

95. A-st ja B-st lähevad ühel ajal välja kaks teekäijat ja sammuvad ühes sihis. Esimene teekäija kõnnib 8 tundi päevas, minnes iga tund 5 klm., kuna aga teine 10 tundi päevas teel on ja iga tund 4 klm. ära käib. Mitme päeva pärast saab esimene teekäija teise kätte, kui A-st B-sse 75 klm. on?

96. Ühes viljasalves on 120 setverti kaeru, teises 180 setverti. Mitu korda 4 setverti peab lisama esimesesse salve ja mitu korda 2 setverti lisama teise salve, et esimeses salves oleks 2 korda rohkem kaeru kui teises?

97. Kahekümnendisel arvul, mille kümneliste arv on üheliste arvust kahe võrra suurem, on säärane omadus, et kui tema numbrid ümber paigutada. siis saadakse arv, mis otsitavast 18 võrra vähem. Leida arv.

98. Olgu antud 4 tükki kalevit. Teises on 3, kolmandas 5 ja neljandas 8 arssina võrra rohkem kui esimeses; neljandas ja esimeses ühtekokku on sama palju kalevit kui teises ja kolmandas ühtekokku. Mitu arssinat on igas tükis?

99. Leida arv järgmistel tingimustel: kui liita $\frac{3}{4}$ otsitava ja 20 summast $\frac{1}{12}$ osaga sama otsitava ja 300 summast, siis saadakse $\frac{5}{6}$ sama otsitava ja 48 summast.

100. Kaupmees ostis 55 apelsiini; ta valis neist 25 halvemat välja ja arvas, et kui ta nad kõik ära müüb, tükist 2 penni võrra alla oma hinna võttes, ja iga ülejäänud apelsiini eest müües 3 p. kasu saab, siis tõuseb tema kasu üldsumma terve ostangu pealt 40 penni peale. Kui palju maksis ta apelsiini tükist?

Leida antud murdude tõsised väärtused, tarvitades tähtede antud tähendusi:

101. $\frac{a^2-9}{a-3}$, kui $a=3$ 102. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$, kui $x=2$

103. $\frac{3a^2-3b^2}{5a+5b}$, kui $a=-b$ 104. $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2}$, kui $x=a$

105. $\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x-4}$, kui $x=1$

106. $\frac{2x^2+5x-3}{x^2+x-6}$, kui $x=-3$

107. $\frac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-ab-2b^2}$, kui $a=2b$

108. $\frac{3a^2-10ab+3b^2}{9a^2-6ab+b^2}$, kui $b=3a$

109. $\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}$, kui $x=1$

110. $\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x+2}$, kui $x=-2$

Lahendada ja uurida järgnevad üldkujulised ülesanded:

111. Üks tööline koob päevas a arssinat kangast, teine b arss. Esimene on juba kudunud m arss., teine n arss. Mitme päeva pärast peale juba tehtud tööd on töölistel ühepalju kangast kootud?

112. Isa on a, poeg b aastat vana. Mitme aasta pärast on isa pojast k korda vanem?

113. Vesistusse on juhitud kaks toru. Esimene täidab vesistu a tunnis, teine tühjendab ta b tunnis. Kui pika ajaga saab tühi vesistu täis, kui avada mõlemad torud?

114. Missugune arv tarvis liita murru $\frac{a}{b}$ liikmetega, et see murd muutuks $\frac{m}{n}$?

115. a panges vees sulatati b naela soola; kui palju vett on tarvis juurde lisada, et iga pange vee kohta tuleks m naela soola?

116. Sirgjoone MN kahest punktist A ja B on temale ristjooned tõmmatud. Sirgjoon PQ lõikab neist ristjoontest lõigud $AC=a$ ja $BD=b$, kuna aga $AB=d$. Leida sirgjoonte MN ja PQ lõikepunkti kaugus punktist A.

117. Lahutada arv a kaheks osaks nõnda, et esimese osa ja m korrutis liidetud teise osa ja n korrutisega võrduks esimese osa ja p korrutisega liidetud teise osa ja q korrutisega.

118. Kolmnurgas ABC on antud küljed $AB=c$, $AC=b$ ja $BC=a$. Tõmmates antud kolmnurga tipu C juures oleva välisnurga poolitaja ja märkides D-ga selle nurgapoolitaja ja külje AB lõikepunkti, leida AD pikkus.

119. Kaks käskjalga lähevad ühel ja samal ajal, liikudes ühtlaselt samas sihis M-ist N poole, esimene A-st läbi ja teine B-st läbi. Leida, kui kaugel A-st saavad mõlemad käskjalad kokku, kui on teada, et esimene sõidab tunnis a klm., teine b klm. ja et A-st B-ni on d klm.

120. Kaks käskjalga sõidavad *MN* sihis, kusjuures esimene a klm. ja teine b klm. tunnis edasi jõuab. Esimene neist sõitis teatud momendil A-st läbi, teine sõitis m tundi hiljemini B-st läbi, kusjuures $AB=d$ klm. Leida, mitme tunni pärast peale seda, kui esimene A-st läbi sõitis, saavad nad kokku.

§ 3. Kahe tundmatuga esimese astme võrrandite süsteemide uurimine.

Kahe võrrandi süsteemis on alati üks juur x ja üks juur y tähendusena.

Mõlemate juurte ilmutamata tähendustel on alati ühine nimetaja.

Kahe võrrandi lahendamisel pannakse tähele kahte oluliselt isesugust juhust — kui juurte ühine nimetaja erineb nullist ja kui ühine nimetaja võrdub nulliga.

Võrrandite süsteemi

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

mõlemate juurte ühine nimetaja leitakse, kui tundmatute kordajad ristamisi korrutatakse ja korrutised üksteisest lahutatakse; näit.: ab_1-a_1b.

Lugeja saadakse nimetajast sel teel, et otsitavate kordajate asemele kirjutatakse teatavas vastavuses tuntud (vabad) liikmed; näit.: $x=\frac{cb_1-c_1b}{ab_1-a_1b}$ ja $y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}$.

Kui juurte nimetaja ei võrdu nulliga, siis võivad juured olla kas mõlemad positiivsed, mõlemad negatiivsed või üks neist positiivne ja teine negatiivne, kuna aga erijuhusena ka nullised juured võivad saabuda. Seejuures pole võrranditel mingisuguseid tähelepanemise-väärt omadusi.

Juhusel, kui juurte nimetaja võrdub nulliga, on tähele panna, et kui üks lugeja on null, siis võrdub tingimata ka teine lugeja nulliga.

Kui juure nullise nimetaja juures lugejad pole mitte nullid, siis on juured lõpmatud. Antud võrrandid on siis inkongruentsed, s. o. nad räägivad üksteisele vastu. Selle juhuse tunnuseks on tundmatute teguritest kokkuseatud võrre $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$, kusjuures tuntud liikmed pole mitte nende kordajatega võrdelised (proportsionaalsed).

Kui nullise nimetaja juurel ka lugejad on nullid, siis muutuvad juured määramatuiks, s. o. nad avalduvad igasuguse suuruse kaudu. Antud võrrandid on siis samaväärsed, s. o. nende asemele võime panna ühe võrrandi ühe tundmatuga, mis piirabki otsitavate tähenduste arvu. Selle juhuse tunnuseks on võrre $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$.

121. Määrata, missuguste a tähenduste puhul on võrrandite $x+y=a$ ja $3x-2y=10$ süsteemil positiivsed juured.

122. Määrata, missuguste a tähenduste puhul on võrrandite $4x-3y=6$ ja $-5x+ay=8$ süsteemil negatiivsed juured.

123. Leida niisugune a tähendus, mille puhul võrrandite $3x-7y=15$ ja $6x+ay=60$ süsteemil pole juuri.

124. Leida niisugused a ja b tähendused, mille puhul võrrandite $ax-6y=15$ ja $4x+by=2$ süsteemil on lõpmata palju juuri.

125. Vesistusse on juhitud 2 toru; mõlemad täidavad teda. Kui esimene töötab 8 ja teine 5 minutit, siis saab vesistusse 30 pange vett; kui aga esimene töötab 12 ja teine 7 min., siis kogub 46 pange vett. Mitu pange vett jookseb kummagi toru kaudu? Ülesanne parandada.

126. Palgati 2 töölistesalka, esimeses 2 inimese võrra rohkem kui teises. Esimese salga iga tööline saab päevas 2 m, kuna teise salga iga tööline samal ajal ühe marga teenib. Teine salk saab päevas 10 marga võrra rohkem kui esimene. Mitu töölist on kummaski salgas? Ülesanne parandada.

127. Osteti määratud hinnaga mõni arssin riiet. Kui oleks ostetud 3 arss. võrra rohkem ja oleks makstud iga arssina eest 2 marga võrra vähem, siis oleks terve ostangu eest tulnud maksta 12 marga võrra vähem; samuti, oleks ostetud 6 arss. võrra vähem, kuid iga arssina eest oleks makstud 4 marga võrra rohkem, siis oleks terve ostang 12 marga võrra odavam tulnud. Mitu arssinat ja missuguse hinnaga osteti riiet?

128. Leida püstküliku küljed, teades, et kui suurendada ühte neist 6 ja teist 15 jala võrra, siis suureneb pindala 128 ruutjala võrra. Kui aga esimest külge vähendada 2 ja teist 5 jala võrra, siis väheneb pindala 25 ruutjala võrra.

129. Kaupmees, kellel on 2 sorti teed — a marka ja b marka nael, soovib saada m naela segu, c marka nael. Mitu naela peab ta kummastki sordist võtma?

130. Kaks käskjalga lähevad, ühtlaselt ühes sihis liikudes, üks a ja teine b klm. tunnis. Teataval momendil on esimene A-s ja teine B-s, millede kaugused kolmandast kohast O on $OA=c$ ja $OB=d$. Leida, kui kaugel O-st ja kui pika aja pärast peale ülemalnimetatud momenti saavad nad kokku?

§ 4. Teise astme ehk ruutvõrrandite uurimine.

Ruutvõrrandil on kaks juurt, mis üldjuhusel avalduvad irratsionaalarvudes ja mis isekeskis on kaasased, s. o. nad lähevad teineteisest lahku ainult ühise imaginaarosa ees olevate märkide poolest.

Ruutvõrrandi juured võivad olla kas reaalsed ja isesuurused ehk erijuhusel võrdsed, või imaginaarsed. See oleneb esiteks võrrandi kolmanda liikme märgist, kuid juhusel, kui see märk on positiivne, kõigi kolme liikme kordaja vahekorras.

Mõnikord on huvitav ruutvõrrandi lahendamisel lõplikkude juurte saamine juhusel, kui seda võrrand otsekohe oma iseloomu poolest ei anna. Selleks tarvis otsida niisugused võrrandi liikmete kordajad, et nad moodustaksid juureavalduse imaginaarosas täisruutse juuritava arvu (diskriminandi). Üldvõtteid selleks ei ole, kuid erijuhustena toome paar näitust. Antagu võrrand $3x^2-8x-a=0$, mille üldjuur võrduks $x=\frac{4\pm\sqrt{16+3a}}{3}$. Oletades, et $16+3a=m^2$, leiame, et $a=\frac{m^2-16}{3}$. Siit on näha, et andes m-le tähendused 4, 5, 6,..., võime a jaoks leida lõpmata palju täis- ja murdarvulisi tähendusi, mis omakord võimaldavad antud ruutvõrrandi lõpliku tähendusega juurte olemasolu.

Antagu teiseks võrrand $x^2+ax+25=0$, mille üldjuurele vastab valem $x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-100}}{2}$. Oletades, et $a^2-10^2=m^2n^2$, ja lahutades saadud võrdus kaheks: $a+10=m^2n$ ja $a-10=n$, saame: $a=\frac{m^2+1}{2}.n$ ja $10=\frac{m^2-1}{2}.n$, millest pärast n ärakaotamist võimaldub võrdus $a=\frac{m^2+1}{m^2-1}.10$. Anname m-le tähendused 2, 3, 4,..., saame niisuguse a väärtuse, mille puhul võrrandi juured on lõplikud.

Järgnevais ülesandeis leida a-le niisugused tähendused, et ülesannetele vastavate ruutvõrrandite juured oleksid 1) reaalsed, 2) positiivsed, 3) lõplikud ja täisarvulised.

131. Keegi ostis a marga eest viina. Oleks ta sama summa eest ostnud 4 pange vähem, siis oleks iga pang ühe marga võrra kallim tulnud. Kui palju viina ta ostis?

132. Vesistusse on juhitud 2 toru. Esimene neist täidab ta teatava aja jooksul, kuna aga teine täidetud vesistu tühjendamiseks kahe tunni võrra rohkem aega nõuab. Mõlemad torud olid avatud korraga, ja vesistu täitus a tunni pärast. Mitme tunniga võib esimene toru vesistu täita, kui ta üksi töötab?

133. Püstküliku kõrgus on a jala võrra alusest suurem, kuna ta pinnasuurus 30 ruutjalaga võrdub. Leida küljed.

134. Püstküliku perimeeter võrdub $2a$, pinnasuurus aga on 36 ruutjalga. Leida küljed.

Järgnevais ülesandeis leida tingimused, millal võrrandite juured oleksid reaalsed ja positiivsed, ja leida nende jaoks mõned lõplikud täisarvulised tähendused.

135. Leida 2 arvu, millede summa oleks a ja korrutis b.

136. Ruudu külg võrdub a-ga; joonestada antud ruudusse teine ruut, mille külg $=b$.

137. Keegi ostis kõige oma raha eest kaupa, mille ta otsekohe ära müüs, saades sealjuures m marka kasu. Saadud raha eest ostis ta sama kaupa ja müüs ta jälle ära endise hinnaga. Pärast seda oli tal n marka raha. Kui palju raha oli tal esialgu? Lahus läbi katsuda juhus, kui m on negatiivne.

138. Olgu antud ring, mille raadius R; väljaspool ringi asub punkt d kauguses keskpunktist. Tõmmata läbi antud punkti ringile niisugune lõikaja, mille sisemine (ringi sees olev) lõik võrduks ringi raadiusega.

Järgnevais võrrandites leida x-le niisugused reaaltähendused, millede juures ka y tähendused reaalsed oleksid:

139. $x^2+y^2-2xy+x=0$.

140. $2x^2-2xy+y^2+2x-4y+1=0$.

§ 5. Esimese astme määramatute võrrandite lahendamine.

Võrrandil $ax+by=c$ on lõpmata palju juurtepaare. Ühe tundmatu tähendus võib täiesti vabalt valitav olla; peale selle tundmatu kindlaksmääramist on ka teise tundmatu tähendus juba määratud.

Määramatu võrrandi lahendamine seisab mõlemate tundmatute võrrandit-rahuldavate täisarvuliste tähenduste otsimises. Et neid leida, ei pea lõplikult taandatud võrrandi tundmatute kordajatel a ja b ühiseid tegurid olema. Võrrandi $6x+9y=17$ tundmatud, näituseks, ei või ühel ja samal ajal täisarvuliste tähendustega olla.

Kui võrrandi täisarvuliste juurte tingimus on täidetud, siis avalduvad võrrandi $ax+by=c$ täisarvuliste juurte paarid vastavalt järgnevais valemites: $x=m\pm bt$ ja $y=n\mp at$, kus m ja n moodustavad juba tuntud juurtepaari, aga t on vabalt valitav täisarv. x-i valemis leidub võrrandis y-le vastav kordaja b ja y valemis on asetatud x-le vastav kordaja a. Üks neist kordajaist võetakse valemis vastupidise märgiga; sellepärast, kui võrrandis on tundmatuid sisaldavate liikmete märgid ühesugused, siis võetakse valemites t sisaldavad liikmed isesuguste märkidega, ja vastupidiselt.

Nagu ülemaltoodud valemitest näha, on viimaste leidmiseks tarvis ainult mingisugusel teel leida üks võrrandit rahuldav paar täisarvulisi juure, s. o. üks paar võrrandile vastavaid m ja n täisarvulisi tähendusi, kuna aga teised valemites esinevad suurused a, b ja t kas võrrandis antud või vabalt valitavad on. Sagedasti leitakse m ja n üks tähendustepaar täiesti juhuslikult, kuna aga üldiselt seda järgneva lause põhjal võib leida:

Kui võrrandis $ax+by=c$ mingisugune üks tundmatu avaldada teise tundmatu kaudu $x=\frac{c-by}{a}$ kujul ja y asemele panna kordamööda kõik järjestikused täisarvud 0 kuni $a-1$, siis on iga kord, kui võrrand otsitavate täisarvuliste tähenduste saamist üldse võimaldab, vähemalt üks juhus, kus x tähenduses olevat lugejat saab vastava nimetajaga jagada.

Ülemalnimetatud lause lubab järgmiselt toimetada: Avaldame võrrandis $9x-7y=-6$ tundmatu y, mille kordaja on väiksem, teise tundmatu x kaudu, saame $y=\frac{9x+6}{7}$; paneme x asemele tähendused 0 ja 6 piiris, kuni y jaoks täisarvulise tähenduse saame. Kui $x=4$, siis ongi $y=6$. Tähele pannes, et võrrandi tundmatute kordajad on käesoleval juhusel isesuguste märkidega, seame kokku otsitavate täisarvuliste tähenduste paaride valemid: $x=4+7t$ ja $y=6+9t$. Andes t-le vabalt valitavad positiivsed või negatiivsed täisarvulised tähendused, võime saada võrrandile lõpmata palju täisarvulisi juurtepaare.

Määramatut võrrandit võib ka järgmiselt lahendada. Võrrandis $5x-13y=36$ avaldame väiksema kordajaga tundmatu x teise tundmatu y kaudu, saame $x=\frac{36+13y}{5}$; eraldades saadud murrust täisarvulise osa, leiame $x=7+2x+\frac{1+3y}{5}$. Oletuse $\frac{1+3y}{5}=z$ tagajärjena saame: 1) täisarvulise valemi $x=7+2y+z$ ja 2) y ja z ühendava võrrandi, millest $y=z+\frac{2z-1}{3}$. Oletades edasi, et $\frac{2z-1}{3}=t$, leiame: 1) täisarvulise valemi $y=z+t$ ja 2) z ja t ühendava abivõrrandi, kus $z=t+\frac{t+1}{2}$. Analoogiliselt edasi toimetades saame oletusest $\frac{t+1}{2}=u$, et $z=t+u$ ja $t=2u-1$. Nüüd võime oletustele piiri panna, sest et ka viimane abivõrrand avaldub täisarvulise valemi $t=2u-1$ kaudu. Vastasel korral oleks endiselt edasi pidanud toimetama. Kõik täisarvulised valemid järjestame vastupidises järjes, viimastest alates, ja avaldame kõik otsitavad viimase tundmatu u kaudu, kuni lõpuks saame valemid $y=5u-2$ ja $x=13u+2$. Saadud valemid on aga samatüübilised, millest eespool jutt oli.

Harilikult otsitakse määramatute võrrandite lahendamisel positiivseid täisarvulisi juuri. Viimased on võimalikud, kui x ja y saadud avaldustele $x=13u+2$ ja $y=5u-2$ ette kirjutada, et nad positiivsed oleksid. Need ettekirjutused avalduvad võrratuste näol:

$$13u+2>0 \text{ ja } 5u-2>0.$$

Neist võrratustest olenevad võrrandi positiivsed täisarvulised juured.

Leida võrrandite täisarvulised juured asemelepanemiste kaudu:

141. $x+2y=7$ **142.** $y-5x=12$ **143.** $3x-5y=0$
144. $5x+8y=0$ **145.** $2x+3y=13$ **146.** $5y-7x=21$
147. $7x+13y=71$ **148.** $14x-9y=11$

Leida võrrandite täisarvulised juured järgse jagamise kaudu:

149. $2x+3y=7$ **150.** $3x-4y=11$ **151.** $5x+3y=6$
152. $7x-4y=3$ **153.** $7x+5y=12$ **154.** $5x-11y=4$
155. $11x+8y=73$ **156.** $11x-7y=-31$

Otsusele jõuda, kas on järgnevail võrranditel täisarvulisi positiivseid juuri:

157. $2x+6y=25$ **158.** $6x+11y=-48$
159. $8x+7y=3$ **160.** $9x-6y=17$
161. $10x+13y=16$ **162.** $13x-15y=45$
163. $8x+6y=12$ **164.** $15x-10y=25$

Leida võrrandite täisarvulised positiivsed juured:

165. $4x+11y=47$ **166.** $12x-7y=45$
167. $11x+18y=120$ **168.** $15x-49y=11$
169. $18x-35y=30$ **170.** $45x+27y=117$
171. $\frac{3x}{5}+\frac{2y}{3}=37$ **172.** $\frac{x+15y}{x-21}=-20.$
173. $\frac{3x-14}{2}=\frac{2y-0,5}{5}$ **174.** $\frac{9x-2\frac{3}{4}y-1}{7}=\frac{3x-y+1}{4}$

Leida kõige väiksemad positiivsed arvud, mis rahuldaksid võrrandid:

175. $17x-29y=100$ **176.** $13x-15y=2$
177. $52x+64y=388$ **178.** $16x-25y=1$
179. $41x-36y=187$ **180.** $9x+20y=547$

Lahendada järgnevad süsteemid, otsides täisarvulisi positiivseid juuri:

181. $2x-5y=5$; $2y-3z=1$ **182.** $8x-5y=6$; $7z+3y=13$
183. $3x+y+z=14$; $5x+3y+z=28$
184. $4x+y+3z=30$; $7x+y+6z=51.$

185. $x=5y+3=11z+7$.

186. $3x=8y+7=7z+4$

187. $x+2y+3z=20$; $3x+5y+4z=37$.

188. $2x+14y-7z=341$; $10x+4y+9z=473$

189. $x-2y-z=7$; $2y-3z+u=7$; $4z+x-u=2$.

190. $2x-y+5u=18$; $3y+z+2u=16$; $x+2y-2z=4$.

191. Lahutada arv 200 kaheks liidetavaks tingimusel, et üks neist annaks jagada jäägita 7-ga, teine 13-ga.

192. Mitmel ja missugusel viisil võib maksta 149 marka, tarvitades 3- ja 5-margalisi kassatähti?

193. Kahe arvu vahe on 10; leida need arvud, kui vähendatav on 8 ja lahutatav 17-ne mitmekordne (jagatav).

194. Mitmel ja missugusel viisil võib 3- ja 5-naelaliste pommidega 114-naelalise raskuse ära kaaluda?

195. Kaks salka töölisi sai ühtekokku 330 marka. Iga esimese salga tööline sai 16 marka, teise salga tööline 9 marka. Mitu töölist oli kummaski salgas?

196. Kahe murru summa on $\frac{19}{24}$, murdude nimetajad 12 ja 24 Leida murrud.

197. Mitu Vene viie- ja kahekopikalist vaskraha mahub arssinapikkusesse ritta, kui esimeste diameeter on $\frac{13}{16}$ ja teiste diameeter $\frac{5}{8}$ verssokit.

198. Murd $\frac{7}{18}$ võrdub kahe teise murru vahega, kusjuures viimaste murdude nimetajad on 9 ja 12. Leida need murrud.

199. 56- ja 84-proovilisest hõbedast tarvis sulatada 72-prooviline hõbe. Mitu täisnaela hõbedat tarvis võtta kummastki tükist?

200. Puhtast ja 60-kraadilisest piiritusest tahetakse segada 75-kraadiline piiritus. Mitu täispange peab selleks kummastki sordist võtma?

201. Missuguse x tähenduse puhul muutub murd $\frac{5x-1}{12}$ positiivseks paarisarvuks?

202. Leida niisuguste 5-e mitmekordsete arvude üldkuju, mida jagades 8-ga saame jäägis 1.

203. Missugune tähendus peab x-il olema, et murd $\frac{3-7x}{10}$ muutuks positiivseks arvuks, mida jagades 4-ga saame jäägis 3?

204. Leida üldkuju arvudele, mida jagades 3-ga saame jäägis 2 ja mida jagades 7-ga saame jäägis 3.

205. A-l on B-lt saada 25 marka. B-l on ainult 40 kolmemargalist kassatähte, kuna aga A-l ainult 12 kümnemargalist kassatähte on. Mitmel ja missugusel viisil võib A oma raha kätte saada?

206. Kütt saab iga märkiläinud paugu pealt 8 penni, kuid maksab iga kõrvalelastud paugu pealt ise 27 p. Lastes teatava arvu pauke, mis vähem kui 120, teenis ta 97 penni. Mitu pauku oli märki läinud ja mitu kõrvale lastud?

207. Õpilaste arv koolis on suurem kui 100 ja vähem kui 200. Kui nad pinkidele istuma panna kümnekaupa, siis jääb viimase pingi jaoks ainult 5 õpilast; istuks iga pingi peale 13 õpilast, siis jääks viimasele pingile ainult 7. Mitu õpilast on koolis?

208. Keegi ostis hobuseid ja härgi 1770 marga eest, iga hobuse eest läbistikku 31 m. ja iga härja eest 22 m. makstes. Ostetud hobuste arv on 10 mitmekordne. Mitu hobust ja mitu härga osteti?

209. On teada, et kui asetada ringjoonel järjestikku sama ringjoone kuuendikud ja kümnendikud osad vastupidises sihis, siis leitakse sama ringjoone viieteistkümnes osa. Missugustel viisidel võib ära eraldada otsitava osa, kui antud osade paigutamist järjest korratakse?

210. Ühel hammasrattal on 19, teisel 23 hammast. Hammasrataste pöörlemisel sattus esimese ratta esimene hammas teise ratta esimesse vahesse. Mitu täistiiru peavad tegema mõlemad rattad, et esimese ratta esimene hammas satuks jälle teise ratta esimesse vahesse, teise, kolmandasse jne. vahesse?

211. Lahutada arv 30 kolmeks liidetavaks nõnda, et kui liita esimese liidetava ja 7 korrutis, teise liidetava ja 19 korrutis ja kolmanda liidetava ja 38 korrutis, siis saame 745.

212. Kui palju peab võtma 82-, 66- ja 54-proovilist hõbedat, et saada 30 naela 72-proovilist hõbedat?

213. Leida kolmekümnendine arv, mille ristsumma võrdub 20-ga; kui sellest arvust lahutada 16 ja jääk jagada 2-ga, siis saadakse arv, mida moodustavad endised numbrid, kuid vastupidises järjes.

214. 120 riisi kolme sorti paberit müüdi 914 marga eest. Müües võeti esimese sordi eest $13^1/_2$ m., teise sordi eest $9^1/_2$ m. ja kolmanda sordi eest $3^3/_4$ m. riis. Kui palju paberit müüdi igast sordist?

215. Leida kolmekümnendine arv, mille ristsumma on 16. Kui see arv liita 99-ga, siis saab arv, mille moodustavad endised numbrid, kuid vastupidises järjes.

216. Leida kõige väiksem neist arvudest, mida jagades 3, 4 ja 5-ga saame jäägis vastavalt 1, 2 ja 3.

217. Leida üldkuju niisugustele 5-e mitmekordsetele arvudele, mida jagades 8, 11 ja 3-ga saame jäägis 1, 3 ja 1.

218. Leida kõige väiksem neist arvudest, mida jagades 5, 6, 7 ja 8-ga saame jäägid 3, 1, 0 ja 5.

219. Maksta 25 marka 2-, 3- ja 5-margaliste kassatähtedega.

220. Lahutada arv 2 kolme murru summaks, millede nimetajad oleksid 3, 6 ja 8.

XIII jagu.

Read.

§ 1. Aritmeetilised read.

Aritmeetiliseks reaks ehk progressiooniks nimetatakse rida väärtusi a, b, c,..., u ehk a_1, a_2, a_3,..., a_n, milles iga järgmine moodustatakse sel kombel, et eelmisele üks ja sama jääv suurus juurde liidetakse. Seda suurust nimetatakse rea vaheks. Kui rea vahe on positiivne, siis on rida tõusev, on vahe aga negatiivne, siis alanev ehk kahanev. Kui kolm suurust x, y, z moodustavad aritmeetilise rea, siis on nad seotud võrrandiga $y-x=z-y$, milles avaldub rea definitsioon.

Olgu rea esimene liige a (ehk a_1), vahe r (ehk d), liikmete arv n, viimane liige u (ehk a_n) ja summa s (ehk s_n); siis saame nende viie suuruse vahel kaks võrrandit:

$$u=a+r(n-1) \text{ ehk } a_n=a_1+d(n-1)$$

$$s=\frac{(a+u)n}{2} \text{ ehk } s_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

Teades nendest kolm suurust, võib välja arvata kaks ülejäänut.

1. Leida 15. liige ja 15 liikme summa reast 2, 5, 8, 11,...

1. Leida 20. liige ja 20 liikme summa reast 3, 7, 11, 15,...

2. Leida 18. liige ja 18 liikme summa reast —3, —5, —7, —9, . . .

2. Leida 13. liige ja 13 liikme summa reast —2, —6, —10, —14, . . .

3. Leida kahekümnendiste arvude summa 21 kuni 50, viimane ühes arvatud.

3. Leida kahekümnendiste arvude summa 36 kuni 60, viimane ühes arvatud.

4. Leida kõikide paarisarvude summa kuni 200, viimane ühes arvatud.

4. Leida kõikide paarita arvude summa kuni 175, viimane ühes arvatud.

5. Leida n liikme summa reast a, $2a—b$, $3a—2b$, . . .

5. Leida n liikme summa reast b, $2b—a$, $3b—2a$, . . .

6. Leida n-es paarita arv ja n paaritu arvu summa.

6. Leida n-es paarisarv ja n paarisarvu summa.

7. 3 ja 24 vahele panna 6 arvu nõnda, et otsitavad arvud antud arvudega moodustaksid aritmeetilise rea.

6. 17 ja 82 vahele panna 12 arvu nõnda, et nad antud arvudega moodustaksid aritmeetilise rea.

8. 27 ja —28 vahele panna 10 arvu nõnda, et nad antud arvudega moodustaksid aritmeetilise rea.

8. 17 ja —19 vahele panna 17 arvu nõnda, et nad antud arvudega moodustaksid aritmeetilise rea.

9. Leida n liikme summa reast, milles m-es liige on $2+3m$.

9. Leida n liikme summa reast, milles m-es liige on $3-2m$.

10. Leida rea n liikme summa, milles m-es liige on $a—2bm$.

10. Leida n liikme summa reast, milles m-es liige on $b+3am$.

Leida viimane liige ja summa, kui on antud esimene liige, vahe ja liikmete arv:

11. $a=7$, $r=4$, $n=13$; 11. $a=2$, $r=2$, $n=40$.

12. $a_1=56$, $d=—3$, $n=11$; 12. $a_1=63$, $d=—5$, $n=8$

Leida esimene liige ja summa, kui on antud viimane liige, vahe ja liikmete arv:

13. $u=149$, $r=7$, $n=22$; 13. $u=65$, $r=5$, $n=12$

14. $a_{40}=—22$, $d=—2$, $n=40$; 14. $a_{58}=13$, $d=—3$, $n=58$

Leida vahe ja liikmete arv, kui on antud esimene liige, viimane liige ja summa:

15. $a=2$, $u=87$, $s=801$; 15. $a=—13$, $u=27$, $s=77$.

16. $a_1=10$, $a_n=—9$, $s_n=10$; 16. $a_1=160$, $a_n=17$, $s_n=1062$.

Leida rea vahe ja liikmete summa, kui on antud esimene liige, viimane liige ja liikmete arv:

17. $a=3$, $u=63$, $n=16$; 17. $a=1$, $u=81$, $n=17$

18. $a_1=36$, $a_{15}=8$, $n=15$; 18. $a_1=169$, $a_{24}=8$, $n=24$

Leida viimane liige ja rea vahe, kui on antud esimene liige, liikmete arv ja summa:

19. $a=10$, $n=14$, $s=1050$; 19. $a=-40$, $n=20$, $s=-40$

20. $a_1=-45$, $n=31$, $s_{31}=0$; 20. $a_1=16$, $n=9$, $s_9=0$

Leida esimene liige ja vahe, kui on antud viimane liige, liikmete arv ja summa:

21. $u=21$, $n=7$, $s=105$; 21. $u=92$, $n=11$, $s=517$

22. $a_{16}=105$, $n=16$, $s_{16}=840$;

22. $a_{33}=-143$; $n=33$, $s_{33}=-2079$.

Leida liikmete arv ja summa, kui on antud esimene liige, vahe ja viimane liige:

23. $a=4$, $r=5$, $u=49$; 23. $a=1$, $r=3$, $u=22$

24. $a_1=14{,}5$, $d=0{,}7$, $a_n=32$; 24. $a_1=-28$, $d=7$, $a_n=28$.

Leida esimene ja viimane liige, kui on antud vahe, liikmete arv ja summa:

25. $r=6$, $n=10$, $s=340$; 25. $r=\frac{1}{3}$, $n=50$, $s=425$

26. $d=\frac{1}{2}$, $n=25$, $s_{25}=-75$; 26. $d=-\frac{3}{4}$, $n=33$, $s_{33}=-33$.

Leida liikmete arv ja viimane liige, kui on antud esimene liige, vahe ja summa:

27. $a=2$, $r=5$, $s=245$; 27. $a=40$, $r=-4$, $s=180$

28. $a_1=41$, $d=2$, $s_n=4784$; 28. $a_1=18$, $d=6$, $s_n=1782$.

Leida liikmete arv ja esimene liige, kui on antud vahe, viimane liige ja summa:

29. $r=3$, $u=29$, $s=155$; 29. $r=5$, $u=77$, $s=623$

30. $d=4$, $a_n=88$, $s_n=1008$; 30. $d=1\frac{1}{2}$, $a_n=45$, $s_n=682\frac{1}{2}$.

31. Rea kolmas liige on 25 ja kümnes liige on -3. Leida esimene liige ja vahe.

31. Rea viies liige on 13 ja üheksas liige on 19. Leida esimene liige ja vahe.

32. Leida kümne liikme summa, kui neljas liige on 10 ja seitsmes on 19.

32. Leida viieteistkümne liikme summa, kui viies liige on — 8 ja seitseteistkümnes on 28.

33. Rea neljas liige on 9 ja üheksas on — 6. Kui suur on liikmete arv, et nende summa oleks 54?

33. Rea kümnes liige on 4 ja üheksateistkümnes on — 32. Kui suur on liikmete arv, et nende summa oleks 180?

34. Rea kolmanda ja seitsmenda liikme summa on 4, aga teise ja neljateistkümnenda summa on — 8. Leida rida.

34. Rea neljanda ja kümnenda liikme summa on 44, aga teise ja viieteistkümnenda summa on 53. Leida rida.

35. Leida vahe reast, mille esimene liige on 100 ja kuue esimese liikme summa on viis korda suurem kuue järgneva liikme summast.

35. Leida esimene liige reast, mille vahe on 4 ja viie esimese liikme summa on 3 korda vähem viie järgneva liikme summast.

36. Kokku seada rida 1 kuni 21 nii, et kõigi liikmete summa suhtuks liikmete summasse 1 ja 21 vahel kui 11:9.

36. Kokku seada rida 1 kuni 29 nii, et kõigi liikmete summa suhtuks liikmete summasse 1 ja 29 vahel kui 4:3.

37. Rea esimene liige on 1; m esimese liikme summa suhtub n liikme summasse kui $m^2:n^2$. Leida rida.

37. Rea esimene liige on 2; m esimese liikme summa suhtub n liikme summasse kui $m(m+1):n(n+1)$. Leida rida.

38. Leida $m+n$ liikme summa reast, milles m-es liige on n ja n-es liige on m.

38. Leida $m-n$ liikme summa reast, milles m liikme summa on n ja n liikme summa on m.

39. Näidata, et kui a^2, b^2 ja c^2 moodustavad aritmeetilise rea, siis ka murrud $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$ ja $\frac{1}{a+b}$ nõndasamuti moodustavad aritmeetilise rea.

39. Näidata, et kui a, b ja c moodustavad aritmeetilise rea, siis võrdus $\frac{2}{9}(a+b+c)^3=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$ on õige.

40. Olgu S_1, S_2,..., S_k n liikme summad aritmeetilistest ridadest, millede esimesed liikmed on vastavalt 1, 2, 3,..., k ja vahed vastavalt 1, 3, 5,..., $2k-1$. Näidata, et $S_1+S^2+...+Sk=$ $=\frac{kn(kn+1)}{2}$.

40. Olgu S_1, S_2,... S_k n liikme summad aritmeetilistest ridadest, millede esimesed liikmed on vastavalt 1, 3, 5,... $2k-1$ ja vahed vastavalt võrdsed esimeste liikmetega. Näidata, et $S_1+S_2+...+S_k=\frac{n(n+1)}{2}.k^2$.

41. Leida rida, mille kolme esimese liikme summa on 15, aga nende korrutis 80.

41. Leida rida, mille kolme esimese liikme summa on 0, aga nende ruutude summa 50.

42. Leida rida, milles teise ja neljanda liikme summa on 16, aga esimese ja viienda liikme korrutis 28.

42. Leida rida, mille esimese ja viienda liikme summa on 12, aga teise ja neljanda liikme korrutis 32.

43. Töölised kaevasid kaevu, tingimusega, et esimese arssina sügavuse pealt makstakse 40 penni, iga järgmise pealt aga 15 p. rohkem. Mitu arssinat nad kaevasid, kui nad töö eest 16 m. 90 p. said?

43. Töölised kaevasid kaevu, tingimusega, et esimese arssina sügavuse pealt makstakse 25 penni, iga järgmise pealt aga 20 p. rohkem. Mitu arssinat nad kaevasid, kui nad töö eest 11 m. 25 penni said?

44. Keegi võlgnes 720 m., mida ta lubas tasuda järgukaupa, makstes igal järgneval kuul 10 marga võrra vähem kui eelmisel. Mitu marka maksis ta esimesel kuul ja mitme kuu jooksul tasus ta kõik võla, kui viimasel kuul maksis 40 m.?

44. Keegi võlgnes 1995 m., mida ta lubas tasuda järgukaupa, makstes igal järgneval kuul 5 marga võrra rohkem kui eelmisel. Mitu marka maksis ta esimesel kuul ja mitme kuu jooksul tasus ta kõik võla, kui viimasel kuul maksis 150 m.?

45. Kaks keha liigub teineteisele vastu kahest kohast, millede vahe on 153 jalga. Esimene läheb 10 jalga sekundis, teine esimeses sekundis 3 jalga, aga igas järgnevas sekundis 5 jala võrra rohkem kui eelmises. Mitme sekundi pärast saavad kehad kokku?

45. Kaks keha liigub teineteisele vastu kahest kohast, millede vahe on 200 jalga. Esimene läheb 12 jalga sekundis, teine esimeses sekundis 20 jalga, aga igas järgnevas sekundis 2 jala võrra vähem kui eelmises. Mitme sekundi pärast saavad kehad kokku?

46. Ühest kohast läheb välja kaks keha ühes sihis. Esimene keha läheb esimeses sekundis 1 jala ja igas järgnevas 2 jala võrra rohkem kui eelmises. Teine keha hakkab 3 sekundit hiljemini liikuma kui esimene ja läheb esimeses sekundis 12 jalga ja igas järgnevas ühe jala võrra rohkem kui esimeses. Mitme sekundi pärast puutuvad kehad kokku?

46. Ühest kohast liigub välja kaks keha ühes sihis. Esimene keha läheb esimeses sekundis 1 jala ja igas järgnevas 3 jala võrra rohkem kui eelmises. Teine keha hakkab 2 sekundit hiljemini liikuma kui esimene ja läheb esimeses sekundis 10 jalga ja igas järgnevas sekundis 2 jala võrra rohkem kui eelmises. Mitme sekundi pärast puutuvad kehad kokku?

47. Hulknurga järjekordsete sisemiste nurkade kraadide arv moodustab rea, mille vahe on 10. Hulknurga kõige väiksem nurk on 100^0. Mitu külge on hulknurgal?

47. Hulknurga järjekordsete sisemiste nurkade kraadide arv moodustab rea, mille vahe on 5. Hulknurga kõige väiksem nurk on 120^0. Mitu külge on hulknurgal?

48. On teada, et vabalt kukkuv keha kulgeb esimeses sekundis 16,1 jalga, igas järgnevas 32,2 jala võrra rohkem kui eelmises. Kui kaks keha hakkab kukkuma ühekõrguselt, üks 5 sekundi võrra teisest hiljemini, mitme sekundi pärast on nende vahe siis 724,5 jalga?

48. On teada, et vabalt kukkuv keha kulgeb esimeses sekundis 4,9 meetrit, igas järgnevas 9,8 meetri võrra rohkem kui eelmises. Kui kaks keha hakkavad kukkuma ühekõrguselt, üks 4 sekundi võrra teisest hiljemini, mitme sekundi pärast on nende vahe siis 274,4 meetrit?

49. Leida piir avaldusele $\frac{1}{n}\left[\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right]$, milles n on lõpmata suurenev täisarv.

49. Leida piir avaldusele $k[a+(a+k)+(a+2k)+....+(a+$ $+(n-1)k)]$, milles $k=\frac{b-a}{n}$ ja n on lõpmata suurenev täisarv.

50. Antud on kolmnurk ABC, milles alus $AC=b$ ja kõrgus $BD=h$. Jagame kõrguse n ühesuurusse ossa ja tõmbame jagamispunktidest rööpjooned alusele ja ehitame nende peale püstkülikud, mis asetsevad iga kahe lähise rööpjoone vahel. Leida kolmnurga pind, kui püstkülikute pindade summa piir.

50. Antud on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk ABC, mille kaatetid $AC=BC=b$. Punktist A kanname AC peale $AD=a$; tõmmates DE rööbiti BC-ga, lahutame kolmnurgast täisnurkse trapetsi $DEBC$. Leida selle trapetsi pind, kui püstkülikute pindade summa piir.

§ 2. Geomeetriline rida.

Geomeetriliseks reaks nimetatakse rida väärtusi $a, b, c, d, ... u$, ehk $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, milles iga järgmine moodustatakse sel teel, et korrutatakse eelmist ühe kindla alalise suurusega. Seda suurust nimetatakse rea t e g u r i k s (n i m e t a j a k s). Kui on rea tegur ühest suurem, siis on rida t õ u s e v, on ta aga ühest vähem, siis a l a n e v.

Kui kolm suurust x, y, z moodustavad geomeetrilise rea, siis on nad seotud võrrandiga $\frac{y}{x}=\frac{z}{y}$, milles avaldub rea definitsioon.

Olgu rea esimene liige a (ehk a_1), tegur q, liikmete arv n, viimane liige u (ehk a_n) ja liikmete korrutis p (ehk p_n), siis saame nende viie suuruse vahel kaks võrrandit:

$$u=aq^{n-1} \text{ ehk } a_n=a_1q^{n-1}$$

$$p=\sqrt{(au)^n} \text{ ehk } p_n=\sqrt{(a_1a_n)^n}$$

Need võrrandid on täiesti sarnased aritmeetilises reas tähendatud võrranditega ja eralduvad ainult tehete järgu tõusmisega.

Geomeetrilise rea summa määramiseks on kaks võrrandit, millest tõusva rea tarvis on:

$$s=\frac{uq-a}{q-1} \text{ ehk } s_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}$$

ja alaneva rea tarvis:

$$s=\frac{a-uq}{1-q} \text{ ehk } s_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$$

Viimane saadakse eelmisest murru märkide muutmise läbi.

51. Leida 10 liikme summa reast 10, 20, 40,...

51. Leida 8 liikme summa reast 5, 15, 45,...

52. Leida 7 liikme summa reast —4, 16, —64,...

52. Leida 10 liikme summa reast 3, —6, 12,...

53. Leida 8 liikme summa reast 3, —1, $\frac{1}{3}$,...

53. Leida 11 liikme summa reast —2, 1, $-\frac{1}{2}$,...

54. Leida 5 liikme summa reast $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1, $\sqrt{\frac{3}{2}}$,...

54. Leida 7 liikme summa reast $\sqrt{\frac{5}{6}}$, 1, $\sqrt{\frac{6}{5}}$,...

55. Leida n liikme summa reast $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$,...

55. Leida n liikme summa reast $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$,...

56. Leida n liikme summa reast $\sqrt{6}$, $3\sqrt{2}$, $3\sqrt{6}$,...

56. Leida n liikme summa reast $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 1,...

57. Leida 9 liikme korrutis reast $\frac{81}{8}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{9}{2}$,...

57. Leida 5 liikme korrutis reast $\frac{32}{125}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{8}{5}$,...

58. Leida 11 liikme korrutis reast $\frac{a}{b}$, $-\frac{b}{a}$, $\frac{b^3}{a^3}$,...

58. Leida 9 liikme korrutis reast $\frac{a^3}{b^2}$, —1, $\frac{b}{a^3}$,...

59. 47 ja 1269 vahele mahutada kaks arvu nõnda, et geomeetriline rida saaks.

59. 31 ja 496 vahele paigutada kolm arvu nõnda, et geomeetriline rida saaks.

60. $\frac{a}{b^2}$ ja $\frac{b}{a^2}$ vahele panna viis arvu nõnda, et geomeetriline rida saaks.

60. $\frac{b^2}{a^3}$ ja $\frac{a^2}{b^3}$ vahele panna üheksa arvu nõnda, et geomeetriline rida saaks.

61. Leida 6 liikme summa reast, milles m-es liige on 3.2^{m-1}.

61. Leida 5 liikme summa reast, milles m-es liige on 2.5^{m-1}.

62. Leida n liikme summa reast, milles m-es liige on $(-1)^m a^{m-1} b^{n-m+1}$.

62. Leida n liikme summa reast, milles m-es liige on $(-1)^m a^{n-m+1} b^{m-1}$.

Leida esimene liige ja summa (ehk korrutis), kui on antud viimane liige, liikmete arv ja rea tegur:

63. $u=128$, $q=2$, $n=7$; 63. $u=78125$, $q=5$, $n=8$

64. $a_5=\frac{2}{27}$, $q=-\frac{2}{3}$, $n=5$; 64. $a_6=-243$, $q=-\frac{3}{2}$, $n=6$

Leida tegur ja summa (või korrutis), kui on antud rea esimene ja viimane liige ja liikmete arv:

65. $a=3$, $u=12288$, $n=5$; 65. $a=8$, $u=10368$, $n=5$.

66. $a_1=81$, $a_6=-10\frac{2}{3}$, $n=6$; 66. $a_1=\frac{1}{64}$, $a_6=-\frac{16}{243}$, $n=6$.

Leida esimene ja viimane liige, kui on antud rea tegur, liikmete arv ja summa (või korrutis):

67. $q=2$, $n=7$, $s=635$; 67. $q=-2$, $n=8$, $s=85$.

68. $q=-\frac{1}{2}$, $n=8$, $p_8=\frac{1}{16}$; 68. $q=\frac{1}{3}$, $n=6$, $p_6=27$.

Leida liikmete arv ja summa (või korrutis), kui on antud esimene ja viimane liige ja rea tegur:

69. $a=3$, $q=2$, $u=96$; 69. $a=5$, $q=3$, $u=405$.

70. $a_1=9$, $q=\frac{2}{3}$, $a_n=\frac{32}{27}$; 70. $a_1=\frac{3}{8}$, $q=-4$, $a_n=96$.

Leida tegur ja liikmete arv, kui on antud rea esimene ja viimane liige ja summa (või korrutis):

71. $a=2$, $u=1458$, $s=2186$; 71. $a_1=1$, $n=2401$, $s=2801$

72. $a_1=3$, $a_n=96$, $p_n=288^3$; 72. $a_1=2$, $a_n=1458$, $p_n=2^3.3^9$.

Leida viimane liige ja liikmete arv, kui on teada rea esimene liige, tegur ja summa (või korrutis):

73. $a=7$, $q=3$, $s=847$; 73. $a=8$, $q=2$, $s=4088$.

74. $a_1=2$, $q=-3$, $p_n=-2^6.3^{15}$; 74. $a_1=3$, $q=-2$, $p_n=3^5.2^{10}$.

Leida rea esimene liige ja liikmete arv, kui on antud viimane liige, tegur ja summa (või korrutis):

75. $u=-216$, $q=-6$, $p=46656$;

75. $u=250$, $q=5$, $p=250000$.

76. $a_n=32768$, $q=4$, $s_n=43690$;

76. $a_n=1215$, $q=-3$, $s_n=915$.

Leida rea tegur ja viimane liige, kui on antud esimene liige, liikmete arv ja summa (või korrutis):

77. $a=15$, $n=4$, $p=1800^2$; 77. $a=12$, $n=4$, $p=3888^2$.

78. $a_1=12$, $n=3$, $s_n=372$; 78. $a_1=15$, $n=3$, $s_n=105$.

Leida rea tegur ja esimene liige, kui on antud viimane liige, liikmete arv ja summa (või korrutis):

79. $u=-\frac{32}{9}$, $n=6$, $p=-2^{15}.3^3$;

79. $n=-\frac{243}{2}$, $n=6$, $p=-2^9.3^{15}$.

80. $a_3=135$, $n=3$, $s_n=195$; 80. $a_3=8$, $n=3$, $s_n=14$.

81. Leida rida, mille esimene liige on 1, aga kolmanda ja viienda liikme summa on 90.

81. Leida rida, mille esimene liige on 3, aga seitsmenda ja neljanda liikme vahe on 168.

82. Rea esimese ja kolmanda liikme summa on 15, aga teise ja neljanda summa 30. Leida kümne liikme summa.

82. Rea kolmanda ja esimese liikme vahe on 24, aga viienda ja esimese liikme vahe on 624. Leida kuue liikme summa.

83. Leida neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise rea, kui on teada, et esimene arv on 36 võrra teisest suurem, aga kolmas 4 võrra neljandast suurem.

83. Leida neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise rea nii, et äärmiste liikmete summa on 27, aga sisemiste summa 18.

84. Leida kuueliikmeline rida, kui on teada, et kolme eelmise liikme summa on 112, aga kolme järgneva summa on 14.

84. Kuuest arvust seatagu kokku rida nõnda, et paarita liikmete summa on 455, aga paaris liikmete summa on 1365.

85. Kolm arvu moodustavad geomeetrilise rea; nende arvude summa on 26; kui neid arvusid liita vastavalt 1, 6 ja 3, siis saame arvud, mis moodustavad aritmeetilise rea. Leida arvud.

85. Kolm arvu moodustab aritmeetilise rea, nende arvude summa on 15; kui neid arvusid liita vastavalt 1, 4 ja 19, siis saame kolm arvu, mis moodustavad geomeetrilise rea. Leida arvud.

86. Kui neljast tundmata arvust, mis moodustavad aritmeetilise rea, lahutada vastavalt 2, 7, 9 ja 5, siis saame arvud, mis moodustavad geomeetrilise rea. Leida aritmeetilise rea liikmed.

86. Kui neljast tundmata arvust, mis moodustavad geomeetrilise rea, lahutada vastavalt 5, 6, 9 ja 15, siis saame arvud, mis moodustavad aritmeetilise rea. Leida geomeetrilise rea liikmed.

87. Näidata, et kui a, b, c ja d moodustavad geomeetrilise rea, siis on võrdus $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$ õige.

87. Näidata, et kui a, b, c ja d moodustavad geomeetrilise rea, siis on võrdus $(a-d)^2=(a-c)^2+(b-c)^2+(b-d)^2$ õige.

88. Näidata, et reas, milles liikmeid paarisarv, paarisliikmete ja paarita liikmete summade suhe on võrdne rea teguriga.

88. Näidata, et reas, milles liikmeid paarita arv, liikmete ruutude summa võrdub liikmete summaga, korrutatud paarita ja paaris liikmete summa vahega.

89. Leida m-es ja n-es liige reast, milles $(m+n)$-es liige on k ja $(m-n)$-es liige on l.

89. Leida n-es ja $(m+p)$-es liige reast, milles m-es liige on võrdne k-ga ja p-es liige võrdne l-ga.

90. Lihtsustada avaldus $a+2a^2+3a^3+\ldots+na^n$.

90. Lihtsustada avaldus $na+(n-1)a^2+(n-2)a^3+\ldots+a^n$.

Geomeetrilist rida, mille teguri absoluutne väärtus on ühest suurem ei saa lõpmata pikendada, sest sellel juhusel saavad viimane liige ja liikmete summa määramatuiks lõpmatuiks suurusiks. Kui aga rea teguri absoluutne väärtus on ühest vähem, siis võib saada rida liikmeid, millest viimane läheneb piiril nullile, ja selle tõttu saame valemist $s_n=\frac{a-uq}{1-q}$, kui n on lõpmatu suur, valemi $s=\frac{a}{1-q}$ lõpmatult alaneva rea summa jaoks.

Leida summade piir järgnevatele lõpmatult alanevatele ridadele:

91. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ 91. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$

92. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$ 92. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$

93. $\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}+\ldots$ 93. $\sqrt{5}+\sqrt{2\frac{1}{2}}+\sqrt{1\frac{1}{4}}+\ldots$

94. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{2}-\ldots$ 94. $\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-1+\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}-\ldots$

95. Kokku seada niisugune lõpmatult alanev rida, milles iga liige k korda suurem on temale järgnevatest kõikide liikmete summast.

95. Kokku seada niisugune lõpmatult alanev rida, milles iga liige k korda vähem on temale järgnevatest kõikide liikmete summast.

96. Määrata summa $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\ldots+\frac{1}{s_k}$, kus $s_1, s_2, \ldots s_k$ on lõpmatult alanevate ridade summad. Rea esimesed liikmed on 1, aga tegurid vastavalt $r, r^2, \ldots, r^k$, kusjuures $r<1$.

96. Määrata summa $\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}+\ldots+\frac{1}{s_k}$, kus $s_1, s_2, \ldots s_k$ on lõpmatult alanevate ridade summad. Ridade esimesed liikmed on 1, aga tegurid vastavalt $r^{-1}, r^{-2}, \ldots, r^{-k}$, kusjuures $r>1$:

97. Punkt C jagab lõigu AB pooleks, punkt D jagab AC pooleks, punkt E jagab CD pooleks, punkt F jagab DE pooleks, punkt G jagab EF pooleks jne. kuni lõpmatuseni. Leida jaotuspunkti piiriline kaugus punktist A.

97. Punkt C jagab lõigu AB pooleks, punkt D jagab BC pooleks, punkt E jagab CD pooleks, punkt F jagab DE pooleks, punkt G jagab EF pooleks jne. kuni lõpmatuseni. Leida jaotuspunkti piiriline kaugus punktist A.

98. Ruudu sisse, mille külg on a, on joonestatud teine ruut, mille tipud poolitavad antud ruudu külgi; saadud ruutu on samuti uus ruut joonestatud jne. Määrata piirid, millele lähenevad ruutude külgede ja pindade summad.

98. Korralikku kolmnurka, mille külg on a, on joonestatud teine korralik kolmnurk, mille tipud poolitavad antud kolmnurga külgi; saadud kolmnurka on samuti uus kolmnurk joones-

tatud jne. Määrata piirid, millele lähenevad kõigi kolmnurga külgede ja pindade summad.

99. Olgu antud korrapärane kolmnurk, mille külg on a; antud kolmnurga kolmest kõrgusest konstrueeritakse teine korrapärane kolmnurk; teise kolmnurga kolmest kõrgusest konstrueeritakse uus korrapärane kolmnurk jne. Määrata nende algebraliste summade piir, milledest esimeses korduvad järjestikku liidetavatena ja lahutatavatena perimeetrid, teises aga kolmnurkade pinnad.

99. Olgu antud ruut, mille diagonaal on a; antud ruudu külg võetakse teisele diagonaaliks, saadud ruudu külg kolmanda ruudu diagonaaliks jne. Määrata piirid nendel algebralistel summadel, milledest ühes perimeetrid aga teises ruutude pinnad korduvad järjestikku liidetavatena ja lahutatavatena.

100. Ringi oli joonestatud ruut, ruutu aga teine ring, millesse omakord jälle ruut jne. Määrata piiriline tähendus kõigi ringide ja kõigi ruutude pindade summadele.

100. Ringi oli joonestatud korrapärane kolmnurk, kolmnurka aga teine ring, millesse omakord jälle kolmnurk jne. Määrata piiriline tähendus kõigi ringide ja kõigi kolmnurkade pindade summadele.

§ 3. Lihtread, mis taanduvad ridadeks (progressioonideks).

Reaks nimetatakse avalduste jada, milles järgnev avaldus moodustatakse eelmisest ühe ja sama kindla seaduse järele.

Avaldusi, milledest rida koos seisab, nimetatakse tema liikmeteks ja märgitakse u_1, u_2..., u_n. Avaldus u_n kujutab rea üldliiget. Kui anda n-ile rida tähendusi 1, 2, 3..., siis saame kõik liikmed esimesest peale. n-liikmelise rea summa on s_n. Summa määramist nimetatakse rea summimiseks. Ridade summimisel ei ole üldisi seadusi ja ta on võimalik ainult erijuhustel.

Allpool järgnevates lihtsates näitustes määratakse ridade summasid, lahutades ridasid esiteks aritmeetilisteks ja geomeetrilisteks.

Kui tähendatud lahutamise võimalust ei ole märgata otsekohe kogu rea vaatlemise ajal, siis on tarvilik lähemalt vaadelda esiteks tema üldliiget ja viimase lahutamisest otsus teha kogu rea kohta.

Leida n liikme summa, kui n on paarita ehk paarisarv, ridadest, mis taanduvad (koonduvad) aritmeetiliseks reaks:

101. $1-3+5-7+\ldots$ 101. $2-4+6-8+\ldots$

102. $1-2+3-4+\ldots$ 102. $1+2-3-4+\ldots$

Leida n liikme summa ridadest, mis taanduvad geomeetriliseks reaks:

103. $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{9}{8}+\ldots\ldots+\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$

103. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{9}{8}+\ldots\pm\frac{2^{n-1}+1}{2^{n-1}}$

104. $3+2.3^2+3.3^2+4.3^4+\ldots+n.3^n$

104. $5+2.5^2+3.5^3+4.5^4+\ldots+n.5^n$

105. $1+\frac{2}{3}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$; 105. $1-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}-\frac{7}{8}+\ldots\pm\frac{2n-1}{2^{n-1}}$

106. $5+55+555+\ldots+\frac{5(10^n-1)}{9}$; 106. $7+77+777+\ldots+\frac{7(10^n-1)}{9}$

107. Põhjendudes samasusele $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$, paigutame temasse n asemele rea arvusid 1, 2, 3,..., n. Määrata esimeste n naturaalarvu ruutude summa.

107. Põhjendudes samasusele $n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$, paigutame n asemele rea arvusid 1, 2, 3,..., n. Määrata esimeste n naturaalarvu kuupide summa.

108. Leida n liikme summa reast, mille üldliige on $3n^2+2n$.

108. Leida n liikme summa reast, mille üldliige on $4n^3-3n$.

109. Leida n liikme summa reast $1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots$

109. Leida n liikme summa reast $1.2(a+1)+2.3(a+2)+$ $+3.4(a+3)+4.5(a+4)+\ldots$

XIV jagu.

Logaritmid ja nende tarvitamine.

§ 1. Üldised logaritmide omadused.

Kaks võrdust $y=a^x$ ja $x=Log_a y$ avaldavad ühte ja sama arvude vahekorda. y leidmine esimesest on astendamine; x leidmine teisest seisab astmenäitaja leidmises ehk logaritmimises. Viimases tehtes nimetatakse y arvuks, a logaritmi aluseks ja x arvu logaritmiks alusega a.

Logaritmiks nimetatakse astmenäitajat, millega on vaja astendada alus, et saada arv.

1. Missugusel arvul on alusega 2 logaritm 3?

1. Missugusel arvul on alusega 3 logaritm 2?

2. Missugusel arvul on alusega 9 logaritm $\frac{1}{2}$?

2. Missugusel arvul on alusega 8 logaritm $\frac{1}{3}$?

3. Missuguse aluse puhul on arvu 32 logaritm 5?

3. Missuguse aluse puhul on arvu 81 logaritm 4?

4. Missuguse alusega on arvu 4 logaritm $\frac{1}{3}$?

4. Missuguse alusega on arvu 9 logaritm $\frac{1}{2}$?

5. Leida arvu 16 logaritm, kui alus on 2.

5. Leida arvu 27 logaritm, kui alus on 3.

6. Leida 7 logaritm, kui alus on 81.

6. Leida 7 logaritm, kui alus on 49.

7. Missuguse aluse korral võrdub $lg 16$ 2-ga?

7. Missuguse aluse korral võrdub $lg 81$ 2-ga?

8. Leida x, teades, et $lg_4 x=3$.

8. Leida x, teades, et $lg_5 x=3$.

9. Missugusel arvul alusega 5 on logaritm -2?
9. Missugusel arvul alusega 3 on logaritm -3?

10. Leida $\frac{1}{8}$ logaritm, kui alus on 2.
10. Leida $\frac{1}{81}$ logaritm, kui alus on 3.

11. Leida 1024 logaritm, kui alused on 2, 4, 32.
11. Leida 729 logaritm, kui alused on 3, 9 ja 27.

12. Leida 81 logaritm, aluseks võttes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ ja $\frac{1}{81}$.
12. Leida 256 logaritm, aluseks võttes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{16}$.

13. Missugusel arvul alusega 8 on logaritm -3?
13. Missugusel arvul alusega 6 on logaritm -4?

14. Missuguse alusega on $\frac{1}{243}$ logaritm -5?
14. Missuguse alusega on $\frac{1}{64}$ logaritm -3?

15. Leida murru $\frac{1}{64}$ logaritm, aluseks võttes 2, 4 ja 8.
15. Leida murru $\frac{1}{729}$ logaritm, aluseks võttes 3, 9 ja 27.

16. Leida murru $\frac{1}{729}$ logaritm, aluseks võttes $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$.
16. Leida murru $\frac{1}{512}$ logaritm, aluseks võttes $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ ja $\frac{1}{8}$.

17. Alus on $\frac{3}{4}$; leida arvud, mille logaritmid on 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3.
17. Alus on $1\frac{1}{2}$; leida arvud, mille logaritmid on 0, 1, -1, 3, -3, 4, -4.

18. Alus on $2\frac{1}{2}$; leida arvude $\frac{2}{5}$, $6\frac{1}{4}$, 1, $\frac{8}{125}$ logaritmid.
18. Alus on $\frac{3}{5}$; leida arvude $\frac{5}{3}$, $2\frac{7}{9}$, 1, $\frac{27}{125}$ logaritmid.

19. Missuguste aluste puhul on arvu 125 logaritmid 3, 1, -3, -1?
19. Missuguste aluste puhul on arvu 343 logaritmid 3, -3, 1, -1?

20. Alusega 0,5 leida arvude 1, 4, 2, $\frac{1}{4}$, 8, $\frac{1}{8}$ logaritmid?
20. Alusega 0,2 leida arvude 1, 25, 5, 0,04, 125, 0,008 logaritmid?

21. Missugusel arvul alusega 3 on logaritm $\frac{3}{4}$?

21. Missugusel arvul alusega 2 on logaritm $\frac{2}{3}$?

22. Leida arvu 2 logaritm, aluseks võttes 5.

22. Leida arvu 5 logaritm, aluseks võttes 3.

23. Missuguse aluse korral on arvu 5 logaritm 2?

23. Missuguse aluse korral on arvu 3 logaritm 2?

24. Leida arvu 200 logaritm, aluseks võttes 10.

24. Leida arvu 60 logaritm, aluseks võttes 5.

25. Leida arv, mille logaritm aluse 8 puhul on $-\frac{3}{4}$.

25. Leida arv, mille logaritm aluse 25 puhul on $-\frac{2}{3}$.

26. Missuguse aluse puhul on 7 logaritm $-1\frac{1}{2}$?

26. Missuguse aluse puhul on 5 logaritm $-\frac{3}{4}$?

27. Alus on -8; leida arvud, mille logaritmid on -1, 3, -2, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$.

27. Alus on -81; leida arvud, mille logaritmid on 2, -1, -2, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$.

28. Leida arvude $-\frac{8}{27}$, $\frac{4}{9}$, $5\frac{1}{16}$ logaritmid, kui alus on $-\frac{2}{3}$.

28. Leida arvude $-\frac{1}{4}$, -2, -32, 64 logaritmid, kui alus on $-\frac{1}{8}$.

29. Leida arvu $\sqrt[5]{9}$ logaritm, aluseks võttes 3, 81, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{81}$.

29. Leida arvu $\sqrt[3]{49}$ logaritm, aluseks võttes 7, $\frac{1}{7}$, 49, $\frac{1}{343}$.

30. Missuguse aluse puhul on arvu $\sqrt{8}$ logaritmid $\frac{3}{4}$, -3, -1, $\frac{2}{3}$?

30. Missuguse aluse puhul on arvu $\sqrt[3]{25}$ logaritmid $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{2}$, -1, -2?

Lahendada järgnevad eksponentvõrrandid (milles tundmatud on tähestiku lõpust):

31. $10^{-x}=10000$

32. $\sqrt[3]{a^x}=\sqrt{a^{3x+2}}$

33. $16^x=\frac{1}{4}$

34. $\sqrt[1-x]{a^3}=\sqrt[3-x]{a^2}$

35. $\left(\frac{4}{9}\right)^z=\left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$

36. $\sqrt{a^{z-1}}\sqrt[3]{a^{2z-1}}\sqrt[4]{a^{2-3z}}=1$

37. $\left(\frac{1}{0,125}\right)^x=128$

38. $a^{(1-x)(x-2)}=\frac{1}{a^6}$

39. $\sqrt[x]{256}=4^x$

40. $2^z-2^{z-2}=3$

41. $2^{2x}.3^x=144$

42. $5^{x+1}+5^x=750$

43. $6^{2x+4}=3^{3x}.2^{x+8}$

44. $6^z+6^{z+1}=2^z+2^{z+1}+2^{z+2}$

45. $10^{(3-x)(4-x)}=100$

46. $\sqrt[a-u]{c^{b+u}}=\sqrt[a+u]{c^{b-u}}\sqrt[a^2-u^2]{c^2}$

47. $5^{1-x}=7^{x-1}$

48. $4^{\sqrt{x+1}}=64.2^{\sqrt{x+1}}$

49. $5^{(x^2+x-2)(3-x)}=1$

50. $a^{2u}+c^2=2ba^u$

Kui mingi arv moodustatakse antud arvudest korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise abil, siis moodustatakse selle arvu logaritm antud arvude logaritmist vastavalt alama järgu tehete: liitmise, lahutamise, kordamise ja jagamise abil.

Antud arvule logaritmi leidmist nimetatakse **logaritmimiseks**. Logaritmimist juhivad järgmised laused:

Korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga.

Jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega.

Astme logaritm võrdub astme aluse logaritmi ja astmenäitaja korrutisega.

Juure logaritm võrdub juuritava arvu logaritmi ja juurenäitaja jagatisega.

51. $lg6$ avaldada $lg2$ ja $lg3$ läbi.

51. $lg21$ avaldada $lg3$ ja $lg7$ läbi.

52. $lg1\frac{2}{3}$ avaldada $lg5$ ja $lg3$ läbi.

52. $lg2\frac{3}{5}$ avaldada $lg13$ ja $lg5$ läbi.

53. $lg125$ avaldada $lg5$ läbi.

53. $lg81$ avaldada $lg3$ läbi.

54. $lg\sqrt[4]{11}$ avaldada $lg11$ läbi.

54. $lg\sqrt[5]{2}$ avaldada $lg2$ läbi.

55. Kui logaritmi alus on 3, siis $lg81=4$ ja $lg243=5$. Millega võrdub $lg(81.243)$ ja $lg\frac{81}{243}$ sama aluse puhul?

55. Kui logaritmi alus on 2, siis $lg64=6$ ja $lg1024=10$. Millega võrdub $lg(1024.64)$ ja $lg\frac{64}{1024}$ sama aluse puhul?

56. Missuguste lihtarvude logaritmid on tarvis teada, et sama aluse korral leida 24, $\frac{125}{27}$, $\sqrt{38}$, $\sqrt[3]{\frac{7}{25}}$ logaritmid?

56. Missuguste lihtarvude logaritmid on tarvis teada, et sama aluse korral leida 18, $\frac{8}{25}$, $\sqrt[3]{50}$, $\sqrt[4]{\frac{9}{17}}$ logaritmid?

Järgnevates ülesannetes on tegemist kümnendlogaritmidega, s. o. logaritmidega alusega 10.

57. Teades, et $lg2=0,30103$, $lg3=0,47712$ ja $lg5=0,69897$, leida $lg6$, $lg15$, $lg30$, $lg10$, $lg1000$.

57. Teades, et $lg2=0,30103$, $lg5=0,69897$ ja $lg7=0,84510$, leida $lg14$, $lg35$, $lg50$, $lg100$, $lg10000$.

58. Eelmise ülesande andmete põhjal leida $lg2\frac{1}{2}$, $lg1\frac{2}{3}$, $lg\frac{2}{25}$, $lg0,6$, $lg0,016$.

58. Eelmise ülesande andmete põhjal leida $lg2\frac{4}{5}$, $lg\frac{2}{7}$, $lg\frac{5}{14}$, $lg0,07$, $lg0,0014$.

59. Leida $lg2$, $lg20$, $lg200$ ja samuti $lg15$, $lg150$, $lg1500$.

59. Leida $lg7$, $lg70$, $lg700$ ja samuti $lg35$, $lg350$, $lg3500$.

60. Leida $lg0,3$, $lg0,003$, $lg0,06$, $lg0,0006$.

60. Leida $lg0,2$, $lg0,002$, $lg0,14$, $lg0,0014$.

Logaritmida järgnevad avaldused:

61. $2ab$	**62.** $\frac{ab}{c}$	**63.** a^3b^2
64. $\frac{a^2}{b^3c^2}$	**65.** $2(a+b)$	**66.** $\frac{3}{a^2-b^2}$
67. $\frac{(a-b)^2c}{(a+b)d}$	**68.** $5a^2b\sqrt[3]{c}$	**69.** $\sqrt[5]{\frac{3a^3b}{c^4}}$

70. $5a\sqrt[3]{a^2(a-b)}$ 71. $\frac{2ab^3}{c\sqrt{d}}$ 72. $\frac{1}{a^n\sqrt{b}}$

73. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{5}}$ 74. $\sqrt{2\sqrt{6\sqrt{15}}}$ 75. $\sqrt[3]{\frac{a^2b}{\sqrt[5]{c^3}}}$

76. $\frac{a^{-\frac{3}{4}}b^2}{c^{-\frac{1}{5}}}$ 77. $\sqrt{\frac{24\sqrt{2\sqrt{3}}}{\sqrt[3]{4\sqrt{6}}}}$ 78. $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}\sqrt[-2]{\frac{a}{b}}}$

79. $lg(\sqrt[5]{a^4})^{\sqrt[3]{a^2}}$ 80. $lg\frac{\sqrt{(a+b)^{2lg(a-b)}}}{\sqrt{(a-b)^{lg(a+b)}}}$

Kui mõne arvu logaritm on avaldatud antud arvude logaritmidest liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise abil, siis on võimalik otsitavat arvu leida antud arvude kaudu vastavalt kõrgema järgu tehete abil.

Arvu leidmist antud logaritmide varal nimetatakse **potentseerimiseks**. Potentseerimist juhivad järgnevad laused:

Arvude logaritmide summa võrdub samade arvude korrutise logaritmiga.

Kahe arvu logaritmide vahe võrdub esimese ja teise arvu jagatise logaritmiga.

Logaritmi ja arvu korrutis võrdub niisuguse astme logaritmiga, mille astmenäitaja võrdub korrutajaga.

Logaritmi ja arvu jagatis võrdub niisuguse juure logaritmiga, mille juurenäitaja on jagaja.

Märkus: Kõigis järgnevais ülesandeis tähendab sümbool lg kümnendlogaritme, kuna aga Lg kümnest erinevate alustega logaritme tähendab.

Potentseerimise abil lahendada järgnevad võrrandid:

81. $Lgx=Lg7-Lg3+Lg2$ 82. $Lgx=3Lg5+2Lg3$

83. $Lgx=\frac{3}{5}Lg11-\frac{2}{7}Lg5$ 84. $Lgx=2Lg13-\frac{2}{5}Lg2-\frac{4}{3}Lg7$

Logaritmide järele kokku seada avaldused:

85. $3Lga+2Lgb-4Lgc$ 86. $\frac{2}{5}Lg(a+b)-\frac{3}{4}Lg(a-b)$

87. $Lg(a+x)-\frac{2}{3}(2Lga+\frac{3}{4}Lgb)$ 88. $\frac{1}{p}\left[(n-1)Lga-\frac{2}{p}Lgb\right]+\frac{n}{2}Lgc$

89. $-3Lga+\frac{1}{3}\left[Lg(a+b)+\frac{2}{5}Lg(a-b)-Lgb-\frac{1}{2}Lgc\right]$

90. $\frac{m}{n}\left\{-\frac{3}{2}Lga+2Lgz+\frac{2}{5}\left[Lg(a-2z)-3(Lga-Lgb)\right]\right\}$

Lahendada logaritmimise abil järgnevad võrrandid:

91. $x^x=x$ 92. $x^{lgx}=10$ 93. $x^{lgx}=100x$

94. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$ 95. $\sqrt[3]{x^{lgx-1}}=100$ 96. $10^x=\sqrt[x]{5}$

Potentseerides lahendada võrrandid:

97. $lgx=1-lg3$ 98. $Lg_aLg_ax=Lg_am+Lg_an$

99. $92^{lgx}=778688$ 100. $Lg_aLg_ax=Lg_aLg_am-Lg_an$

§ 2. Kümnendlogaritmid.

Arvu 1 kümnendlogaritm on 0. 10-ne positiivsete astmete, s. o. 10, 100, 1000,... kümnendlogaritmid on vastavalt 1, 2, 3,..., milledest igaühes on nii mitu positiivset ühelist, kui mitu nulli on vastavas arvus.

10-ne negatiivsete astmete, s. o. 0,1, 0,01, 0,001,... kümnendlogaritmid on vastavalt —1, —2, —3,..., milledest igaühes on nii mitu negatiivset ühelist, kui mitu nulli on vastavas kümnendmurrus, 0 tervet kaasa arvatud.

Teiste ühismõõtsete arvude kümnendlogaritmid, s. o. logaritmid alusega 10, on irratsionaalsed murrud. Need logaritmid arvutatakse ligikaudselt, harilikult ühe sajatuhandiku täpsusega, s. o. viiekümnendise kümnendmurruna; näit. $lg3=0,47712$. Logaritmid võivad ka teise täpsusega arvutatud olla, sest logaritmid võivad ka kolme-, nelja- ja seitsmekümnendised kümnendmurrud olla.

Üldiselt võttes seisab logaritm kahest osast koos: täisosast, mida nimetatakse karakteristikuks, ja murdosast ehk mantissist.

Arvust 1 suuremate arvude logaritmid on positiivsed, kuna nad vähematel arvudel negatiivsed on. Viimasel juhusel antakse logaritmile iseäraline kuju: murdosa tehakse positiivseks ja karakteristik negatiivseks. Näit. $lg0,05=\bar{2},69897$, kus märk — numbri 2 peal tähendab, et karakteristik on negatiivne, kuna järgnev mantiss on positiivne.

Kui mõnel juhusel logaritmi mantiss muutub negatiivseks, siis on talle kerge anda teist kuju, tehes mantiss positiivseks, aga karakteristik negatiivseks. Selleks on tarvis karakteristikuga liita —1 ja mantissiga +1. Näit. $lg\frac{3}{5}=lg3-lg5=$ $=0{,}47712-0{,}69897=-0{,}22185$. Et selle logaritmi mantiss positiivseks teha, liidame karakteristikuga —1 ja mantissiga +1. $\overset{-1+1}{-0{,}22185}=-1+(1-0{,}22185)=-1+0{,}77815=\bar{1}{,}77815$. Logaritmi mantiss jäetakse alati positiivseks.

M a n t i s s i o m a d u s e d. Mantissi väärtus oleneb ainult arvu numbritest, aga mitte koma seisukohast ja jääb muutmata, kui koma paremale ehk pahemale poole viime.

Näitus: $lg0{,}05=lg5.10^{-2}=lg5-2=0{,}69897-2=\bar{2}{,}69897$ ehk $lg0{,}005=lg5.10^{-3}=lg5-3=\bar{3}{,}69897$.

K a r a k t e r i s t i k u o m a d u s e d. Karakteristik oleneb täitsa koma seisukohast.

I g a t ä i s- e h k s e g a - a r v u l o g a r i t m i k a r a k t e r i s t i k s i s a l d a b e n e s e s n i i m i t u ü h e l i s t, k u i m i t u n u m b r i t o n v a s t a v a a r v u t ä i s o s a s i l m a ü h e t a.

Näitus: $lg1000>lg567>lg100$

$3>lg567>2$; sellepärast

$lg567=2+$ murdosa.

I g a k ü m n e n d m u r r u l o g a r i t m i k a r a k t e r i s t i k s i s a l d a b e n e s e s n i i m i t u n e g a t i i v s e t ü h e l i s t, k u i m i t u n u l l i o n v a s t a v a k ü m n e n d m u r r u a l g u l, n u l l t e r v e t k a a s a a r v a t u d, k u n a v a s t a v m a n t i s s p o s i t i i v n e o n.

Sest $lg0{,}05=lg5.10^{-2}=lg5+lg10^{-2}=0{,}69897-2=\bar{2}{,}69897$.

101. Teades, et $lg2=0{,}30103$, leida arvude 20, 200, 0,2 ja 0,00002 logaritmid.

101. Teades, et $lg3=0{,}47712$, leida arvude 300, 3000, 0,03 ja 0,0003 logaritmid.

102. Teades, et $lg5=0{,}69897$, leida arvude 2,5, 500, 0,25 ja 0,005 logaritmid.

102. Teades, et $lg7=0{,}84510$, leida arvude 0,7, 4,9, 0,049 ja 0,0007 logaritmid.

103. Teades, et *lg* 3=0,47712 ja *lg*7=0,84510, leida arvude 210, 0,021, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{9}$ ja $\frac{3}{49}$ logaritmid.

103. Teades, et *lg*2=0,30103 ja *lg*7=0,84510, leida arvude 140, 0,14, $\frac{2}{7}$, $\frac{7}{8}$ ja $\frac{2}{49}$ logaritmid.

104. Teades, et *lg*3=0,47712 ja *lg*5=0,69897, leida arvude 1,5, $\frac{3}{5}$, 0,12, $\frac{5}{9}$ ja 0,36 logaritmid.

104. Teades, et *lg*5=0,69897 ja *lg*7=0,84510, leida arvude 3,5, $\frac{5}{7}$, 0,28, $\frac{5}{49}$ ja 1,96 logaritmid.

Ühe-, kahe-, kolme- ja neljakümnendise arvu logaritmi leiame otsekohe logaritmide tabelist, kusjuures tabelis on antud ainult arvu logaritmi murdosa ehk mantiss, kuna karakteristik arvu täisosa numbritest ühe võrra vähem tuleb võtta.

Kui aga arvus on üle nelja numbri, siis tuleb logaritmi leidmiseks täiendustehteid teha.

Et leida suurema kui neljakümnendise arvu logaritm, selleks otsime tabelist antud arvu esimesele neljale numbrile vastava arvu jaoks mantissi, siis korrutame mantisside tabelivahe antud arvu ülejäänud numbritega ja korrutises jätame ära paremalt poolt nii mitu numbrit, kui mitu neid antud arvus ära jäeti, ja korrutis liita mantissi viimaste numbritega; karakteristik tuleb võtta eelmise seletuse järele.

Kui otsitakse logaritmi järele arvu ja see logaritm on otsekohe leida tabelist, siis leitakse otsitava arvu numbrid otsekohe tabelist, aga arvu täisosa määratakse karakteristiku iseloomu järele.

Kui antud logaritmi ei ole tabelis, siis tuleb arvu leidmiseks täiendustehteid teha. Et leida arv, mis vastaks antud logaritmile, mille mantissi aga ei ole tabelis, on tarvis leida lähem väiksem mantiss ja temale vastav arv; siis korrutame antud ja leitud mantisside vahe 10-ga ja jagame korrutise tabeli vahega. Saadud jagatise numbrid kirjutame ennemalt saadud arvule paremale poole juurde. Arvu täisosa tuleb karakteristiku järele ära määrata.

105. Leida arvude 8, 141, 954, 420, 640, 1235, 3907, 3010; 18,43; 2,05; 900,1; 0,73; 0,0028, 0,1008, 0,00005 logaritmid.

105. Leida arvude 15, 154, 837, 510, 5002, 1309, 8900, 8,315, 790,7, 0,09, 0,6745, 0,000745, 0,04257, 0,00071 logaritmid.

106. Leida logaritmid arvudele: 2174,6; 1445,7; 2169,5; 8437,2; 46,472; 6,2853; 0,78938; 0,054294; 631,074; 2,79556; 0,747428; 0,00237158.

106. Leida logaritmid arvudele: 2578,4; 1323,6; 8170,5; 6245,3; 437,65; 87,268; 0,059372; 0,84938; 62,5475; 131,037; 0,593946; 0,00234261.

107. Leida arvud, mis vastaksid logaritmidele: 3,16227; 3,59207; 2,93318; 0,41078; 1,60065; $\bar{2}$,75686; $\bar{3}$,23528; $\bar{1}$,79692; $\bar{4}$,87806; $\bar{5}$,14613.

107. Leida arvud, mis vastaksid logaritmidele: 3,07372; 3,69205; 1,64904; 2,16107; 0,70364; $\bar{1}$,31952; $\bar{4}$,30814; $\bar{3}$,00087; $\bar{2}$,69949; $\bar{6}$,57978.

108. Leida arvud, mis vastaksid logaritmidele: 3,57686; 3,16340; 2,40359; 1,09817; 4,49823; $\bar{2}$,83882; $\bar{1}$,50060; $\bar{3}$,30056; $\bar{1}$,17112; $\bar{4}$,25100.

108. Leida arvud, mis vastaksid logaritmidele: 3,33720; 3,09875; 0,70093; 4,04640; 2,94004; $\bar{1}$,41509; $\bar{2}$,32649; $\bar{4}$,14631; $\bar{3}$,01290; $\bar{5}$,39003.

Arvust 1 suuremate arvude logaritmid on positiivsed ja on karakteristiku ja mantissi aritmeetiline summa. Sellepärast toimetatakse tehted nendega tavaliste aritmeetika seaduste järele.

Arvust 1 vähemate arvude logaritmid on negatiivsed ja kujutavad negatiivse karakteristiku ja positiivse mantissi algebralist summat. Sellepärast toimetatakse tehted nendega algebraliste seaduste järele, mis veel täiendatakse negatiivsete logaritmide taandamisega normaalsesse kujusse. Negatiivse logaritmi normaalne kuju on see, kus karakteristik on negatiivne täisarv, aga mantiss positiivne lihtmurd.

Et negatiivsele logaritmile anda noormaalne kuju, tuleb karakteristik liita —1-ga; see suurendab tema absoluutset väärtust ühe võrra; saadus tuleb võtta negatiivseks karakteristikuks. Siis liidame negatiivse mantissi positiivse ühega — ja saadud algebraline summa ongi positiivne mantiss. Näit., $-2,57928=$ $=\bar{3},42072$.

Et normaalses kujus olevale logaritmile anda endine tõeline negatiivne väärtus, tuleb negatiivset karakteristikut vähendada ühe võrra ja saadus võtta negatiivse logaritmi karakteristikuks, kuna negatiivse logaritmi mantissi saamiseks liidame positiivse mantissi negatiivse ühelisega. Näit., $\bar{4},57406=-3,42594$.

109. Anda normaalne kuju logaritmidele: $-2,69537$; $-4,21293$; $-0,54225$; $-1,68307$: $-3,53820$; $-5,89990$.

109. Anda normaalne kuju logaritmidele: $-3,21729$; $-1,73273$; $-5,42936$; $-0,51395$; $-2,43780$; $-4,22990$.

110. Leida tõeline väärtus logaritmidele: $\bar{1},33278$, $\bar{3},52793$; $\bar{2},95426$; $\bar{4},32725$; $\bar{1},39420$; $\bar{5},67990$.

110. Leida tõeline väärtus logaritmidele: $\bar{2},45438$; $\bar{1},73977$; $\bar{3},91243$; $\bar{5},12912$; $\bar{2},83770$; $\bar{4},28990$.

Algebraliste tehete kohta negatiivsete logaritmidega maksavad järgmised juhised:

Et liita logaritmi, millel on normaalkuju, on tarvis eraldi liita positiivne mantiss ja eraldi negatiivne karakteristik. Kui mantisside liitmisest saame täisarvu, siis tuleb see positiivne täisarv liita karakteristikuga. Näit. $3,89573+\bar{2},78452=1_1,68025=$ $=2,68025$; $\bar{1},54978+\bar{2},94963=\bar{3}_1,49941=\bar{2},49941$.

Et lahutada normaalkujulist logaritmi, selleks on tarvis tema mantiss lahutada ja karakteristiku absoluutne väärtus liita. Kui lahutatav mantiss on suurem, siis liidame vähendatava karakteristikuga -1, aga mantissiga $+1$. Näit., $2,53798-$ $-\bar{3},84582=1_1,53798-\bar{3},84582=4,69216$. $\bar{2},22689-\bar{1},64853=$ $=\bar{3}_1,22689-\bar{1},64853=\bar{2},57836$.

Et normaalkujulist logaritmi positiivse arvuga korrutada, tuleb karakteristikut ja mantissi eraldi korrutada. Kui mantissi korrutamisel saadakse ka positiivne täisarvuline osa, siis liidame ta karakteristikuga. Selle läbi muutub karakteristiku absoluutne väärtus. Näit., $\bar{2},53729.5=\overline{10}_2,68645=\bar{8},68645$.

Et normaalkujulist logaritmi negatiivse arvuga korrutada, tuleb ta enne negatiivseks muuta ja pärast korrutisele normaalkuju anda.

Et normaalkujulist logaritmi positiivse täisarvuga jagada, tuleb logaritmi karakteristik ja mantiss eraldi jagada. Kui karakteristikut ei saa täpsalt jagada antud arvuga, siis tuleb temaga liita nii mitu negatiivset ühte, et teda antud arvuga saaks ilma jäägita jagada. Et aga logaritmi väärtus ei muutuks, tuleb ka mantissiga sama palju positiivseid ühelisi liita. Näit., $\bar{3},79432 : 5 = -3+0,79432 : 5 = -5+2,79432 : 5 = -1+0,55886 = \bar{1},55886$.

Et normaalkujulist logaritmi jagada negatiivse arvuga, on tarvis jagatav muuta negatiivseks ja jagatisele anda normaalkuju.

Järgnevad ülesanded arvutada logaritmide tabeli abil; lihtsamatel juhustel saadust harilikkude tehtesoodudega proovida.

111. $311.25,6$ **112.** $758.0,53$

113. $6603:213$ **114.** $3,264:0,078$

115. $23,5^2$ **116.** $0,028^3$

117. $\sqrt{12,5}$ **118.** $\sqrt[3]{0,052}$

119. $\frac{438,6.2,138}{25,58}$ **120.** $\frac{0,045.7,513}{2,071.0,864}$

121. $\sqrt[10]{34,567}$ **122.** $\sqrt[9]{0,06432}$

123. $5\sqrt[11]{3,1866}$ **124.** $\frac{109}{716}\sqrt{\frac{75}{93}}$

125. $1,04^{100}$ **126.** $\sqrt[100]{100}$

127. $\sqrt[7]{0,098756^3}$ **128.** $\sqrt{\left(\frac{27}{2939}\right)^5}$

129. $\left(8,53\sqrt[10]{10}\right)^{\frac{2}{3}}$ **130.** $\left(\frac{38}{27}\right)^{0,07}\left(\frac{51}{43}\right)^{0,03}$

131. $\sqrt{145,27^2-124,49^2}$ **132.** $\sqrt{0,006\sqrt{0,17624}}$

133. $\sqrt[6]{8-\sqrt[5]{10}}$ **134.** $\sqrt[5]{0,4293\sqrt{\frac{19}{34}}}$

135. $\sqrt{11,367-\sqrt[3]{16,729}}$ **136.** $\frac{1}{0,7345^3.0,164^2}$

137. $\sqrt[10]{2,1663-\sqrt[11]{4919,6}}$ **138.** $\frac{1}{0,239^3+0,083^5}$

139. $\sqrt[3]{0,054\sqrt[3]{0,0003617}}$ 140. $\sqrt[16]{\dfrac{43+5\sqrt[3]{268}}{\sqrt{17}}}$

Lahendada järgnevad eksponentvõrrandid:

141. $5^x=17$ 142. $10^x=200$

143. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=8$ 144. $2^{3x}=100$

145. $10^x=\sqrt[x]{2}$ 146. $3.2^x=4\sqrt[x]{9}$

147. $5^{2x}=0,1$ 148. $\sqrt[x]{1,3713}=\sqrt[10]{10}$

149. $3^x-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$

150. $7^{x-1}+7^{x-2}+7^{x-3}=5^{x-1}+5^{x-2}+5^{x-3}$

Tabelite abil lahendada:

151. $\dfrac{0,0045.7,5132}{2,0719.0,864}$ 152. $\dfrac{3,5216^3.0,027^2}{0,21785}$

153. $\sqrt[9]{\dfrac{8}{7}\sqrt[6]{54321}}$ 154. $\dfrac{0,0875}{9,8304}\sqrt{\dfrac{78}{0,007615}}$

155. $\sqrt{\dfrac{17569}{111,11}}-\sqrt[3]{\dfrac{67685}{1,2365}}$ 156. $\dfrac{8,36\sqrt{0,0067254}}{0,96578\sqrt[3]{0,000035746}}$

157. $\dfrac{87,285^2.\sqrt[10]{75,846}}{\sqrt[3]{-3,055}}$ 158. $\sqrt[5]{\dfrac{0,03425\sqrt[7]{136}}{0,00034}}$

159. $\sqrt[10]{\dfrac{27+3\sqrt[20]{1,4762}}{\sqrt[5]{11}}}$ 160. $\sqrt{0,859^3+5\sqrt[3]{11}}$

161. $(0,0009)^{0,0009}$ 162. $(0,0376)^{0,0376}$

163. $\sqrt[13]{2,459^{6,3}+8,74^{2,3}}$ 164. $\sqrt[7,062]{0,4275}$

165. $(0,513)^{\sqrt[5]{0,69837}}$ 166. $\sqrt[7]{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt[3]{11}}{3^{0,561}}}$

167. $\sqrt[-3,2]{(6,263+\sqrt[3]{-4,94623})^5}$ 168. $\sqrt[9]{(\sqrt[4]{0,723}+\sqrt[1,6]{1,23794})^{-2}}$

169. $\dfrac{\sqrt[5]{0{,}8\sqrt[3]{0{,}7-(1{,}2686)^{-2}}}}{\sqrt[20]{0{,}0874968^3}}$ 170. $\dfrac{\sqrt[4]{1{,}2-(1{,}2368)^{-0{,}72}}}{(\sqrt[5]{0{,}423286}-0{,}87)^2}$

171. Leida korrapärase kolmnurga pinnasuurus, kui kolmnurga külg on 58,327 meetrit.

171. Leida korrapärase kolmnurga külg, kui kolmnurga pinnasuurus on 8567,3 ruutm.

172. Leida ringi raadius, kui ringi pind on 3,8 ruutjalga.

172. Leida kera raadius, kui kera pind on 78,5 ruutjalga.

173. Leida kuubi diagonaal, kui kuubi täispind on 0,78954 ruutarssinat.

173. Leida kuubi diagonaalse lõike pind, kui kuubi ruumala on 0,29738 kantarss.

174. Leida koonuse küljepind, kui moodustaja on 0,2138 jalga ja kõrgus 0,0925 jalga.

174. Kui suur on koonuse ruumala, kui moodustaja on 0,9134 j. ja aluse raadius 0,04278 jalga.

175. Kui suur on geomeetrilise rea 15. liige, kui esimene liige on $2^3/_5$ ja tegur on 1,75?

175. Kui suur on geomeetrilise rea esimene liige, kui 11. liige on 649,5 ja tegur 1,58?

176. Kui suur on tegurite a^2, a^3, a^5,... arv, et nende korrutis võrduks antud arvuga p? Leida niisugune a väärtus, et 10 teguri korrutis võrduks 100-ga.

176. Kui suur oleks tegurite a^2, a^6, a^{10},... arv, et nende korrutis võrduks antud arvuga p? Leida niisugune a väärtus, et 5 teguri korrutis võrduks 10-ga.

177. Geomeetrilise rea tegur on 1,075, rea 10 liikme summa on 2017,8. Leida esimene liige.

177. Geomeetrilise rea tegur on 1,029; 20 liikme summa on 8743,7. Leida 20. liige.

178. Avaldada geomeetrilise rea liikmete arv antud esimese liikme a, viimase liikme u ja teguri q läbi; siis, andes a-le ja u-le mistahes arvulised väärtused, valida q nõnda, et a oleks mingisugune täisarv.

178. Avaldada geomeetrilise rea liikmete arv antud esimese liikme a, viimase liikme u ja teguri q läbi; siis, andes

u-le ja q-le mistahes arvulised väärtused, valida a nõnda, et n oleks mingisugune täisarv.

179. Leida tegurite a^b, a^{b^2}, a^{b^3},... arv nii, et nende korrutis oleks p. Missugune peab olema p väärtus, kui $a=0,5$, $b=0,9$ ja tegurite arv oleks 10?

179. Leida tegurite $a^{\sqrt{b}}$, a^b, $a^{b\sqrt{b}}$,... arv nii, et nende korrutis oleks p. Missugune on p väärtus, kui $a=0,2$, $b=2$ ja tegurite arv on 10?

180. Avaldada geomeetrilise rea liikmete arv antud esimese liikme a, viimase liikme u ja kõikide liikmete korrutise p läbi, siis, andes a-le ja p-le mistahes arvulise väärtuse, valida u ja q nõnda, et n oleks mingisugune täisarv.

180. Avaldada geomeetrilise rea liikmete arv antud esimese liikme a, viimase liikme u ja kõikide liikmete korrutise p läbi, siis, andes u-le ja p-le mistahes arvulised tähendused, valida a ja q nõnda, et n oleks mingisugune täisarv.

Lahendada järgnevad ülesanded, kus võimalik — ilma tabelita, kus mitte — tabeliga.

181. $5^{2x}-5^x=600$ **182.** $3^{2x+5}=3^{x+2}+2$

183. $\sqrt{0,35^x}=0,00007882$ **184.** $\sqrt[x-1]{4096}=2\sqrt[x]{32768}$

185. $5.\sqrt[x+2]{3125^{x+1}}=\sqrt[x+3]{15625^{x+2}}$ **186.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt[4]{3})^{3x-4}$

187. $\frac{lgx}{1-lg2}=2$ **188.** $1-lg5=\frac{1}{3}(lg\frac{1}{2}+lgx+\frac{1}{3}lg5)$

189. $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{-0,3}=2,2753$ **190.** $(2,23-1,2x)^{-0,36907}=12,8$

191. $5x+2y=100, lgx-lgy=lg1,6$ **192.** $lgx+lgy=7$, $lgx-lgy=5$.

193. $14^x=63y$, $17^x=87y$ **194.** $x^y=y^x$, $x^2=y^3$

195. $x^{x+y}=y^{12}$, $y^{x+y}=x^3$ **196.** $0,4^{x+y}=\left(\frac{2}{5}\right)^3$, $1,4^{x-y}=1,6565$

197. $x^{\sqrt{y}}=y$, $y^{\sqrt{y}}=x^4$ **198.** $x^{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=y^4$, $y^{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x$

199. $x^y=243$, $\sqrt[y]{1024}=\left(\frac{2}{3}x\right)^2$ **200.** $3^y.\sqrt[x]{64}=36$, $5^y.\sqrt[x]{512}=200$

§ 3. Liitprotsendid.

Liitprotsentidega ülesannete arvutamisel tuleb tegemist teha peaasjalikult arvuga $q=\frac{100+p}{100}=1+r$, mis näitab, kui suureks muutub kasvava kapitaali üksus (1 mark) ajaüksusel (näit., aasta kestusel), arvates $p^0/_0$ saja pealt. Et teada saada, kui suureks muutub kapitaal a, kandes $p^0/_0$, esimese, teise, kolmanda jne. aasta lõpuks, seame kokku avaldused aq, aq^2, aq^3 jne. Üldvalem on $A=aq^t$, kus A on lõpukapitaal. Kui aeg t, mille peale kapitaal kasvama pannakse, on segamurd $\tau+\alpha$, kus τ on tervete aastate arv ja α on murd, mis näitab mõningat aasta osa, siis muutub α ajal üks mark kapitaalist $1+\alpha r$, ja sellega saame endise valemi asemele üldisema valemi $A=aq^\tau(1+\alpha r)$. Tähendatud valem on maksev sel korral, kui liitprotsendid arvatakse ainult tervete aastate eest, aga aasta osade eest lihtprotsendid. Kasuraha p loetakse harilikult 100 pealt, kuid võib arvata ka mõne teise arvu, näit. n pealt; siis üldistuks põhivalem veel enam sellega, et võttes $r=\frac{p}{n}$ saame $q=\frac{n+p}{n}$.

201. Kui suureks muutub 8 aasta jooksul 246-margaline kapitaal, kui ta on panka pandud 5-$^0/_0$ga?

202. Missugune kapitaal muutub 20 aasta jooksul 8000-margaliseks kapitaaliks, kui ta on panka pandud $6^0/_0$-ga?

203. Mitme aasta jooksul muutub 20728-margaline kapitaal $4^1/_2{}^0/_0$-ga 50000-marg. kapitaaliks?

204. Mitme protsendiga muutub 2498,6-marg. kapitaal 12 aasta jooksul 4000-marg. kapitaaliks?

205. Kui palju tuleb võlgu võtta $4^0/_0$-ga, et 7622,66-marg. veksel $10^3/_4$ a. peale vastu anda?

206. Mitme protsendiga peab kapitaal hoiul olema, et ta 10 aasta jooksul kasvaks kahekordseks?

207. Keegi andis 8000 m. võlgu ja sai selle eest veksli 3 a. peale, kusjuures ta võlgnikuga tingimuse tegi, et protsendiraha, $1^1/_4{}^0/_0$-ga, iga 3 kuu pärast kapitaalile juurde arvataks. Kui suure summa peale sai ta veksli?

208. Mitme aasta jooksul saab kapitaal neljakordseks, kui ta on kasvamas $6^1/_4{}^0/_0$-ga?

209. Mitme protsendiga tuleb 20728 m. kasvama panna, et ta 20 aasta jooksul muutuks kapitaaliks, mis $5^0/_0$-ga 2500 m. aastas sisse toob?

210. Mitme aasta jooksul muutub 6%-ga kasvav 9000-marg. kapitaal nõnda suureks, kui 15 aastat 4%-ga kasvav 8443-marg. kapitaal?

211. Kui iga aasta algul hoiule viia a marka $p\%$-ga, kui suur kapitaal korjub siis t aasta lõpuks?

212. Keegi pani $p\%$-ga panka a marka ja peale selle iga aasta lõpul veel b marka. Kui suur kapitaal korjub t aasta jooksul?

213. Kui suur kapitaal korjub 10 aasta jooksul, kui iga aasta algul panka panna 200 m. 5%-ga?

214. Missugune kapitaal korjub 15 aasta jooksul, kui iga aasta lõpul panka panna 5000 m. $4\frac{1}{2}\%$-ga?

215. Kui palju peab panka panema iga aasta algul 6%-ga, et 30 aasta jooksul korjuks 29916 m.?

216. Kui palju peab panka panema iga aasta lõpul $4\frac{3}{4}\%$-ga, et 25 aasta jooksul kasu saaks 12358 m.?

217. Kui iga aasta algul panka panna 1200 m. 6%-ga, siis mitme aasta jooksul korjuks 16770-marg. kapitaal?

218. Kui iga aasta lõpul panka panna 1000 m. 8%-ga, siis mitme aasta jooksul korjuks 5865,65-marg. kapitaal?

219. Keegi pani hoiule 15600 m. 5%-ga. Iga aasta lõpul võttis ta välja 600 m. Kui palju jäi panka 10 aasta pärast?

220. Keegi pani panka 4%-ga hoiule 3600 m. ja iga aasta lõpul 300 m. Kui suur kapitaal on tal 17 a. pärast?

221. Võlg A marka $p\%$-ga tasuti t aasta jooksul, makstes iga aasta lõpul a marka. Missugune on side nende arvude vahel?

222. Kui suur summa tuleks iga aasta tasuda, et 10 a. jooksul tasa saada 3680,4-marg. võlg, mis 6% andis?

223. Kui suur võlg 4%-ga on võimalik tasuda 5 a. jooksul, makstes iga aasta 857,36 m.?

224. Mitme aasta jooksul on võimalik tasuda 20270-marg. võlg 5%-ga, makstes iga aasta 2625 m.?

225. Mitme täisaasta jooksul ja kui suure järelmaksuga on võimalik tasuda 5000-marg. võlg 6%-ga, kui iga aasta maksta 450 m.?

226. Missugune kapitaal a on tarvis panna s aastaks panka $p^0/_0$-ga, et pärast seda aega t aasta jooksul iga aasta lõpul saada b marka kasu?

227. Missugune kapitaal on tarvis panna 15 a. peale panka $5^0/_0$-ga, et pärast seda 20 a. jooksul temast sissetulekut saada 1000 m. aastas?

228. Missugune summa tuleb iga aasta algul viia panka $6^1/_2{}^0/_0$-ga 12 a. jooksul, et siis 8 aasta pärast saada korraga 30000 m.?

229. Kui kaua peab 9634-marg. kapitaal $4^0/_0$-ga kasvama, et kapitaali omanik pärast otsitavat tähtaega saaks iga aasta lõpuks 25 aasta jooksul 2000 m.?

230. Keegi pani 20 aasta jooksul iga aasta lõpul panka 900 m. $4^1/_2{}^0/_0$-ga ja kogus niisuguse kapitaali, mis võimaldas temale iga aasta lõpuks saada järgnevate 15 aasta jooksul paiukit. Kui suur oli see paiuk?

XV jagu.

Täiendavad peatükid.

§ 1. Kõige suurem ühine jagaja ja kõige väiksem kordne.

Leida kahe hulkliikme kõige suurem ühine jagaja:

1. $3x^3-22x^2+30x+27$ ja $x^2-8x+15$
2. $30a^3+45a^2-10a-15$ ja $20a^2+26a-6$
3. $36x^4-54x^3+78x^2+18x-30$ ja $18x^3-9x^2+18x+45$
4. $2a^4+3a^3x-9a^2x^2$ ja $12a^4x-34a^3x^2+28a^2x^3-6ax^4$
5. $20a^6b+24a^4b^3-52a^5b^2$ ja $5a^3b^2+15a^5-30a^4b-10a^2b^3$
6. $3a^3x^3-6a^4x^2+3a^2x^4-3a^5x-6a^6$ ja $8a^5+2a^3x^2-8a^4x+4a^2x^3$
7. $90a^2b+60a^4b-130a^3b-20ab$ ja $18ac+12a^5c+42a^3c-$ $-18a^4c-54a^2c$
8. $36a^2b^3c^2+24a^5c^2-12a^3b^2c^2-24a^4bc^2-36ab^4c^2$ ja $54a^4c^4-$ $-108ab^3c^4-81a^2b^2c^4+72a^3bc^4$
9. $x^3+(a+1)x^2-(a^2+2a)x+a^2-a^3$ ja $2x^2-(2a-1)x-a$
10. $x^4-(a+3)x^3+(3a+2)x^2-2(a+3)x+6a$ ja $x^3-(a+4)x^2+$ $+(4a+3)x-3a$

Leida kolme hulkliikme kõige suurem ühine jagaja:

11. $a^3-2a^2b-4ab^2+8b^3$, $a^3-12ab^2+16b^3$ ja $a^3-4a^2b-4ab^2+$ $+16b^3$
12. $3x^3-7x^2y+5xy^2-y^3$, $x^2y+3xy^2-3x^3-y^3$ ja $3x^3+5x^2y+$ $+xy^2-y^3$

Leida kahe hulkliikme kõige väiksem kordne:

13. $4a^3-4a^2-a+1$ ja $3a^2-5a+2$
14. $4a^3+4a^2+3a+9$ ja $2a^3-5a^2-2a+15$
15. $x^3-6x^2+11x-6$ ja $x^3-9x^2+26x-24$
16. $3a^3-7a^2b+5ab^2-b^3$ ja $a^2b+3ab^2-3a^3-b^3$

17. $6x^3+5x^2-23x+5$ ja $18x^3-18x^2-14x+4$
18. $6x^3-5x^2y-27xy^2+5y^3$ ja $3x^3+14x^2y+14xy^2-3y^3$

Leida kolme hulkliikme kõige väiksem kordne:

19. $x^3-19x-30$, $x^3-15x-50$ ja $x^2-2x-15$
20. x^3-7x-6, $3x^3-5x^2-16x+12$ ja $3x^3-8x^2-5x+6$

§ 2. Ühendused.

21. Kokku seada permutatsioonid (vahetlused) kolmest elemendist.

22. Kokku seada variatsioonid (teisendlused) neljast elemendist kolmekaupa.

23. Variatsioonide kaudu kokku seada permutatsioonid kolmest elemendist.

24. Kokku seada kõik võimalikud variatsioonid neljast elemendist.

25. Kokku seada kõik võimalikud kombinatsioonid (ühendlused) neljast elemendist.

26. Kombinatsioonide kaudu kokku seada kõik võimalikud variatsioonid kolmest elemendist.

27. Avaldada suurused V_7^3, P_5 ja C_6^4 aritmeetiliselt.

28. Avaldada suurused P_8, V_{13}^7 ja C_{21}^6 aritmeetiliselt.

29. Leida variatsioonide arv $n+1$ elemendist $k-1$ kaupa.

30. Leida variatsinoonide arv $m+n$ elemendist $m-n+1$ kaupa.

31. Murdudele ühiseid lugejaid leides proovida võrdused $C_9^3=C_9^6$ ja $C_{12}^7=C_{12}^5$.

32. Ühiste tegurite ja jagajate sulgudest väljaviimise kaudu järele proovida võrdused $C_6^4+C_6^3=C_7^4$ ja $C_{10}^6+C_{10}^5=C_{11}^6$.

33. Leida kombinatsioonide arv $n+2$ elemendist $k-1$ kaupa.

34. Leida kombinatsioonide arv $m-n$ elemendist $n+1$ kaupa.

35. Mitmel viisil võib neli inimest ühe laua ümber istuma panna?

36. Mitmel viisil võib kokku õmmelda neljavärvilised lindid seitsmest isevärvilisest lindist?

37. Mitmel viisil võib 9 kandidaadist välja valida neli isikut neljaks isesuguseks ametiks?

38. Mitu sirgjoont võib tõmmata läbi kümne punkti, kui need nii on asetatud, et ühegi kolme punkti läbi sirgjoont ei saa tõmmata?

39. Mitme elemendi variatsioonide arv on 210, kui elemente varieeritakse kahe kaupa?

40. Mitu elementi peab olema, et variatsioonide arv nelja kaupa oleks 12 korda suurem kui variatsioonide arv 2 kaupa?

41. Kombinatsioonide arv n elemendist 3 kaupa on 5 korda väiksem kui kombinatsioonide arv $n+2$ elemendist 4 kaupa. Leida n.

42. Kombinatsioonide arv $2n$ elemendist $n+1$ kaupa suhtub kombinatsioonide arvusse $2n+1$ elemendist $n-1$ kaupa nõnda, kui 3 suhtub 5-de. Leida n.

43. Näidata, et paarisarvuliste kombinatsioonide arvu otsekohene määramine pole midagi muud kui aritmeetilise rea summimine.

44. Mitu 1-ga, 12-ga ja 123-ga algavat arvu on arvu 12345 numbrite permutatsioonide seas?

45. Mitu a-d, mitu a-d ja b-d mittesisaldavat avaldust on 10 tähe a, b, c,... 4 kaupa võetud kombinatsioonide seas?

46. Mitu a-d, mitu a-d ja b-d sisaldavat avaldust on 12 tähe a, b, c,... 5 kaupa võetud variatsioonide seas?

47. Mitu h teatavat tähte sisaldavat avaldust on n tähest k kaupa kokkuseatud kombinatsioonide seas?

48. Mitu h teatavat tähte sisaldavat avaldust on n tähest k kaupa kokkuseatud variatsioonide seas?

49. Missuguste ja mitme k tähenduse puhul püsib võrratus $C_n^{k-1} < C_n^k$?

50. Näidata, et kui n on paarisarv, siis kombinatsioonide $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$ reas on keskmine kõige suurem.

§ 9. Newtoni binoom.

Leida järgnevate kaksliikmete ehk binoomide korrutis lühendatud teel:

51. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

52. $(x-1)(x+3)(x-4)(x+5)$

53. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$
54. $(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6)$

Leida binoomide read:

55. $(a+b)^6$ 56. $(a-b)^7$ 57. $(a+1)^9$
58. $(1-a)^8$ 59. $(a+b^2)^5$ 60. $(a-2b)^8$
61. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$ 62. $\left(\sqrt[3]{2a}-\sqrt[3]{3b}\right)^5$

63. Leida binoomi $(a-b)^9$ rea 5. liige.

64. Leida binoomi $(a-b)^{14}$ rea keskmine liige.

65. Leida binoomi $(x+a)^{19}$ reas need liikmed, milles esinevad suurus a^8 ja suurus x^8.

66. Binoomi $(x^2-ax)^{24}$ reas leida liikmed, millede kordaja on kombinatsioonide arv 18 kaupa.

67. Binoomi $(\sqrt{z}+\sqrt[3]{z})^9$ reas leida liige, mis pärast lihtsustamist sisaldab tähe z neljandal astmel.

68. Binoomi $\left(\frac{2z}{a^2}+\frac{a}{z}\right)^8$ reas leida liige, milles puudub z.

69. Binoomi $(\sqrt{1+z}-\sqrt{1-z})^n$ rea kolmanda liikme kordaja võrdub 78. Leida viies liige.

70. Binoomi $[z\sqrt[3]{z}+z^{-1,8(6)}]^n$ rea teise ja kolmanda liikme kordajate summa võrdub 78. Leida z mittesisaldav liige.

§ 4. Ahelmurrud.

Muuta järgnevad ahelmurrud harilikkudeks murdudeks:

71. (2,1,2,3,2) 72. (2,3,1,1,12) 73. (0,2,1,4,3,2)
74. (0,3,1,1,2,14) 75. (a,b,a,b,a) 76. $(0,x,3x,x,2x)$
77. $(a-1,a,a+1,a)$ 78. $(0,x-1,x-2,x+3,x-2)$

Muuta järgnevad harilikud murrud ahelmurdudeks:

79. $\frac{117}{55}$ 80. $\frac{151}{45}$ 81. $\frac{117}{139}$ 82. $\frac{47}{64}$
83. $\frac{239}{99}$ 84. $\frac{137}{52}$ 85. $\frac{71}{193}$ 86. $\frac{76}{123}$
87. $\frac{a^4+2a^2+1}{a^3+a-1}$ 88. $\frac{x^4+x^2-1}{x^3+x^2+x+1}$

Järgnevad murrud muuta harilikkudeks murdudeks, mis omakord ahelmurru harilikul kujul avaldada:

89. (1,—2,—1,—2) 90. (2,—3,4,—5)

Leida järgnevate ahelmurdude lähismurrud ja näidata nende lähismurdude vea piirid:

91. $\frac{99}{239}$ 92. $\frac{685}{126}$ 93. $\frac{55}{89}$ 94. $\frac{1264}{465}$

95. $\frac{3370}{399}$ 96. $\frac{479}{6628}$ 97. $\frac{1702}{3919}$ 98. 3,1415926.

Leida lõpmatute ahelmurdude lähismurrud ja näidata nende lähismurdude vea piirid:

99. $(1,3,5,7,9,11,\ldots.)$ 100. $(0,10,100,1000,\ldots.)$

Järgnevad juured muuta ahelmurdudeks:

101. $\sqrt{2}$ 102. $\sqrt{3}$ 103. $\sqrt{20}$ 104. $\sqrt{7}$

105. $\sqrt{19}$ 106. $\sqrt{31}$ 107. $\sqrt{a^2+1}$ 108. $\sqrt{a^2+2a}$

109. $\sqrt{a^2-1}$ 110. $\sqrt{a^2-2a}$

Järgnevad murrud avaldada irratsionaalsete avaldustena:

111. $(4, 8, 8, 8,\ldots)$ 112. $(3, 1, 6, 1, 6,\ldots)$

113. $(0,2,3,2,3,2,3,\ldots)$ 114. $(4,1,3,1,8,1,3,1,8,\ldots)$

115. $(2,1,1,3,1,1,3,\ldots)$ 116. $(a,2,2a,2,2a,\ldots)$

Lahendada järgnevad määramatud võrrandid, otsides täisarvulisi juuri:

117. $8x+13y=1$ 118. $9x-14y=3$

119. $23x+16y=2$ 120. $7x-11y=1$

121. $49x+34y=6$ 122. $17x-19y=23$

123. $55x+34y=20$ 124. $149x-344y=25$

Lahutada ahelmurdudeks ja leida ligikaudselt järgnevad logaritmid:

125. $72^x=432$ 126. $50^x=500$

Lahutades ahelmurdudeks leida järgnevate võrrandite reaaljuured ligikaudselt:

127. $x^3-2x-5=0$ 128. $x^3+x^2+x-1=0$

129. Näidata, et avaldust $\sqrt{a^2+b}$ võib lahutada ahelmurruks: $\left(\begin{matrix} b, & b, & b\ldots \\ a, 2a, & 2a, & 2a,\ldots \end{matrix}\right)$.

130. Leida ja tõestada murru $\left(\begin{matrix} b_1, b_2, b_3, \ldots \\ a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \end{matrix}\right)$ lähismurru leidmise seadus.

§ 5. Kõige väiksemate ja kõige suuremate tähenduste leidmine.

131. Leida kolmliikme ax^2+bx+c kõige väiksem tähendus, kui x-le anda igasugused reaalsed väärtused ja kui a on positiivne.

132. Arv a lahutada kaheks liidetavaks nõnda, et nende liidetavate korrutis oleks kõige suurem.

133. Leida neist püstkülikutest, mille pind võrdub antud pinnasuurusega k^2, see, mille perimeeter $2p$ oleks kõige väiksem.

134. Leida neist püstkülikutest, mille diagonaal võrdub antud diagonaaliga c, see, mille perimeeter $2p$ on kõige suurem.

135. Leida neist täisnurksetest rööptahukatest (parralleelepipeedidest), mille maht võrdub antud mahuga n^3, see, mille täispind $2k^2$ on kõige väiksem.

136. Leida neist täisnurksetest rööptahukatest, mille diagonaal võrdub antud diagonaaliga c, see, mille täispind $2k^2$ on kõige suurem.

137. Andes x-le igasugused reaalväärtused ja teades, et $n^2>4mp$, leida murru $\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx+p}$ kõige suurem ja kõige väiksem tähendus.

138. Leida murru $\frac{8x^2+4x+11}{2x^2+2}$ kõige suurem ja kõige väiksem tähendus.

139. Leida murru $\frac{2x^2-7x+3}{x^2-7x+12}$ kõige suurem ja kõige väiksem tähendus.

140. Leida murru $\frac{x^2-5}{2x+4}$ kõige suurem ja kõige väiksem tähendus.

§ 6. Määramatute tegurite viis.

141. Leida niisugune esimese astme kaksliige $ax+b$, mis tingimustel $x=1$ ja $x=2$ muutub vastavalt -2 ja 1-ks.

142. Leida hulkliikmete $2x^4-5x^3-3x^2+15x-7$ ja x^2-3 jagatis ja jääk, tehe ise tegemata jättes.

143. Leida hulkliikme $x^6-15x^5+81x^4-185x^3+162x^2-60x+8$ kolmanda astme juur.

144. Leida hulkliikme $8x^6-36x^4+41x^2-18$ kolmanda astme juur ja juurimisel saadud jääk.

145. Murd $\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}$ lahutada niisuguste murdude summaks, millede nimetajateks oleks antud nimetaja kolm tegurit.

146. Lahutada murd $\frac{x^3-x+2}{x^4-5x^2+4}$ niisuguste murdude summaks, millede nimetajateks oleks antud nimetaja neli tegurit.

147. Tuletada tingimus, mille täitmisel hulkliige $4x^4-4ax^3+4bx^2+2acx+c^2$ moodustab x suhtes hulkliikme teise astme ruudu.

148. Lahutada avaldus $2x^2-10xy+15y+x-6$ kaheks x ja y suhtes esimese astme teguriks.

149. Tuletada tingimus, mille täitmisel, korrutades mingisugust ühte võrrandit antud võrranditest $ax+by+c=0$ ja $a_1x+b_1y+c_1=0$ mingisuguse teguriga k ja neid siis liites, saame võrrandi, mis samaväärne võrrandiga $a_2x+b_2y+c_2=0$.

150. Teisendada kolmliige $5x^2-4xy+25y^2$ kaksliikme $(ax+by)^2+(x+cy)^2$ kujulise ruutude summa näol.

§ 7. Arvutamiskava üldomadused

151. Arv 327 avaldada viiekavas.

152. Leida arv, mis seitsmekavas avaldub $(2504)_7$ kujul.

153. Kirjutada kolmekümnendise arvu üldkuju 12-kavas.

154. Leida arv, mille 11-kavas kirjutatud kahe numbri summa on 18 ja mis muutub vastupidiselt järjestatud numbritega samakavaliseks arvuks, kui temaga liita arv $(19)_{11}$.

155. Vabalt valitud alusel kirjutada arvu 3052 kuju ja leida see ainus kitsendus, millele vabalt valitud alus peab alluma.

156. Missugusel alusel tarvis avaldada arv 1463, et ta omandaks kuju 2005?

157. Teha tehted $(7253)_8+(4562)_8$ ja $(12132)_5-(4341)_5$.

158. Teha tehted $(27)_9 . (34)_9$ ja $(758)_{11} : (32)_{11}$.

159. Näidata, et 12321-kujuline arv on täisruut ja 1030301-kujuline arv on täiskuup igasugusel alusel.

160. Leida arvude 1122 ja 1326 ühine kõige suurem jagaja ja kõige väiksem kordne vabalt valitaval alusel.

Kordamisülesanded.

1. Kokku seada ühe otsitavaga ruutvõrrand, kui teada on, et üks tema juurtest on $\frac{a}{b}$, aga teine $\frac{a^2-b^2}{7a}$ ja et a ja b on võrrandite $a^3-b^3=27ab$ ja $a-b=12$ juured.

2. Müüdi taskukell a marga eest, kusjuures saadi nii mitu protsenti kasu, kui mitu marka maksis taskukell müüjal enesel. Arvul a on järgmised omadused: 1) ta on kahekümnendine (kahekohane), 2) kui teda jagada teda moodustavate numbrite korrutisega, siis saab jagatises 1 ja jäägis 26, 3) kui tema numbrid ümber paigutada ja saadud arv jagada tema numbrite korrutisega, siis saab jagatises 2 ja jäägis 5. Mitu marka maksis taskukell esialgselt?

3. Kaupmees ostis teed ja kohvi, makstes kõige ostangu eest nii mitu marka, kui mitu ühelist on võrrandi $\sqrt[3]{x+45}-\sqrt[3]{x-16}=1$ positiivses juures. Ostetud tee müüs ta 55 marga ja kohvi 27 marga eest. Müües sai kaupmees tee pealt nii mitu protsenti kasu, kui mitu protsenti ta kohvi pealt kahju sai. Kui palju maksis kaupmees ise tee eest ja kui palju kohvi eest?

4. Kaks raudteerongi sõidavad kahest linnast, millede kaugus on 360 klm., teineteisele vastu. Kui teine rong hakkab sõitma $1^1/_2$ tundi varem kui esimene, siis jõuavad nad teineteisele vastu poole tee peal. Sõidavad aga rongid välja ühel ja samal ajal, siis nii mitme tunni pärast, kui mitu ühelist on avalduses $\sqrt{26-\sqrt{5}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$, võrdub nende vahemaa $\frac{1}{4}$-ga esialgsest kaugusest. Leida raudteerongide kiirus.

5. Olgu antud võrrand $10x^2-19x+6=0$. Teda mitte lahendades kokku seada niisugune 4-da astme võrrand, et tema kaks juurt oleksid võrdsed antud võrrandi kahe juurega, aga kaks ülejäänud juurt võrduksid antud võrrandi juurte vastupidiste suurustega.

6. Arv a lahutada kaheks osaks nõnda, et nende jagatiste summa, mis saadakse, kui esimene osa jagada teise osaga ja teine osa jagada esimese osaga, võrduks b. Seejuures on teada, et arvudel a ja b on omadus vastavalt muuta hulkliikmeid $a^4+6a^3+11a^2+3a+31$ ja $b^4+8b^3+4b^2-49b+38$ täisruutudeks.

7. Kahe marga eest osteti kahte liiki postmarke — a penni ja p penni tükk. Mitu postmarki osteti kummastki liigist, kui teada on, et arvud a ja b rahuldavad võrrandid $\sqrt[a-b]{a+b}=2\sqrt{3}$ ja $(a+b).2^{b-a}=3$?

8. Leida kaks positiivset täisarvu, teades, et üks neist on nelja ja teine viie kordne (mitmekordne) ja et nende summa on niisugune kahekümnendine arv, mille mõlemate järguüheliste korrutis on 12 ja mille mõlemate järguüheliste summa, liidetud samade järguüheliste ruutude summaga, võrdub 32.

9. Keegi andis a marka kasu kandma hariliku protsendiga; teadmata aja pärast muutus see kapitaal ühes kasurahaga 436 margaks. Oleks sama kapitaal antud kasu kandma ühe protsendi võrra odavama protsendiga, kuid ühe aasta võrra pikemaks ajaks, siis oleks ta muutunud 442 margaks. Kui kauaks ja mitme protsendiga oli kapitaal antud kasu kandma, kui teada on, et a on 100 kordne ja jagades teda 17-ga saame jäägis 9?

10. Hariliku protsendiga kasu kandma antud kahe kapitaali summa võrdub kõige väiksema neljakümnendise arvuga, mis, olles 200 kordne, 23-ga jagatult annab jäägis 21. Protsentide summa võrdub

$$\sqrt{3^{1,5}+\sqrt[3]{830584}+3\sqrt{7-4\sqrt{3}}}.$$

Esimesest kapitaalist saadi 112 marka kasuraha, teisest 72 marka. Leida kapitaalid ja kummagi kapitaali protsent.

11. Täisnurkse kolmnurga külgede pikkused sünnitavad aritmeetilise rea. Kolmnurga pinnasuurus võrdub $10^{\frac{1}{2}-lg_{10}0{,}375\sqrt{10}}$ ruuttolliga. Leida küljed.

12. Kui lahutada avaldus $4(ad+bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2$ esimese astme algteguriteks, saadud algtegurid liita summaks, milles võtta $a=100$, $b=161$, $c=200$ ja $d=134$, siis on asemelepanu resultaat 2 korda suurem kui aritmeetilise rea liikmete summa, mille esimene liige on 11, aga vahe 3. Mitmest liikmest seisab rida koos?

13. Aritmeetilise rea esimene liige võrdub arvuga, mille logaritm alusel $\sqrt[3]{9}$ on 1,5. Kui selle rea kolme esimese liikme korrutis jagada järgemööda igaühega neist liikmeist, siis on saadud jagatiste summa 299. Leida selle rea 10 esimese liikme summa.

14. Aritmeetilise rea esimene liige võrdub suurema, aga sama rea vahe väiksema võrrandi $x^{2lg3x-1{,}5lgx}=\sqrt{10}$ reaaljuurega. Mitu liiget, esimesest hakates, on tarvis võtta, et nende summa võrduks $\sqrt[3]{498677257}$?

15. Täisnurkse rööptahuka kolm mõõdet (dimensiooni) sünnitavad geomeetrilise rea. Diagonaal võrdub $\sqrt{481}$ m.; täispinna suurus on 888 ruutmeetrit. Leida mõõted.

16. Arv 1729 lahutada kuueks osaks nõnda, et iga osa suhe temale järgnevasse osasse oleks murru $\frac{2n^2+16n+30}{4n-n^2+21}$ tõeline väärtus, kusjuures $n=-3$.

17. Tarvis teada, missugused 9 kordsed arvud, kui neid jagada aritmeetilise rea 21-se liikmega, annavad jäägis sama rea 9-da liikme, kui on teada, et reas on 33 positiivset liiget ja et äärmiste liikmete korrutis on 80, aga rea vahe on võrrandi $\frac{1}{x}+4=\sqrt{16+\sqrt{\frac{64}{x^2}+\frac{9}{x^4}}}$ juur.

18. Arv, mis 272 võrra on suurem kui positiivne ruutjuur temast enesest, tarvis lahutada kaheks osaks nõnda, et ühte saaks jagada niisuguse aritmeetilise rea esimese ja teist viimase liikmega, mille kaks rea otstest ühekaugusel seisvat kõrvuliiget on $11\frac{1}{5}$ ja $11\frac{4}{5}$, aga liikmete arv võrdub suurema äärmise liikmega.

19. Kahe arvu a ja b vahele on suletud 13 aritmeetilist keskarvu ja 13 geomeetrilist keskarvu. Esimese arvurühma kuues liige võrdub teise arvurühma seitsmenda liikmega. Leida a ja b suhe.

20. Arv 456 on lahutatud kolmeks liidetavaks, mis sünnitavad geomeetrilise rea. Kui kolmandast liidetavast lahutada esimene, siis võrdub saadud vahe niisuguse aritmeetilise rea liikmete arvuga, mille esimene liige on 0,01, kolmas liige 0,1 ja liikmete summa 322,5. Leida liidetavad.

21. Tõusva geomeetrilise rea teine ja viies liige on vastavalt võrdsed võrrandi $x^2-105x+1944=0$ juurtega. Mitu liiget esimesest hakates on tarvis võtta, et nende summa võrduks kõige väiksema täisarvuga, mida jagades 29-ga saame jäägis 8 ehk mida jagades 41-ga saame jäägis 6?

22. Alaneva aritmeetilise rea seitsmes ja viiesteistkümnes liige võrduvad vastavalt võrrandi $lg_{10}(x-5)-\frac{1}{2}lg_{10}(3x-20)=$ $=0,30103$. Mitu liiget, esimesest hakates, on tarvis võtta, et nende summa võrduks kõige väiksema arvuga neist täisarvudest, mida jagades 25-ga saame jäägis 6 ehk mida jagades 47-ga saame jäägis 43?

23. Kolme arvu summa võrdub võrrandi $lg_{10}\sqrt{x+10}-$ $-0,47712=1-\frac{1}{2}lg_{10}(x-1)$ positiivse juurega. Need kolm arvu sünnitavad tõusva aritmeetilise rea, esimese, teise ja viienda liikme ja ühes sellega ka vastavalt geomeetrilise rea esimese, teise ja kolmanda liikme. Leida arvud.

24. Leida kõige väiksem arv kõigist neist täisarvudest, mida jagades tõusva aritmeetilise rea 1-se, 2-se ja 3-da liikmega saame jäägis vastavalt tõusva geomeetrilise rea 1-se, 2-se ja 3-da liikme. Peale selle on veel teada, et aritmeetilise rea kolme esimese liikme summa on 57, ja kui aritmeetilise rea ülemaltoodud liikmetest lahutada vastavalt geomeetrilise rea ülemaltoodud liikmed, siis saab 9, 16 ja 19.

25. Kahe tundmatu arvu aritmeetiline keskmine võrdub murru $\frac{2n^2+3n-35}{2n^2+18n+40}$ tõelise väärtusega, kusjuures $n=-5$; samade tundmatute geomeetriline keskmine võrdub $10^{1-lg 1,333\ldots}$. Leida need arvud.

26. Arvude a ja b vahele on suletud mõned aritmeetilised keskmised. Teades, et nende kõigi aritmeetiliste keskmiste summa suhtub kahe viimase aritmeetilise keskmise summasse kui 7:2 ja et a ja b rahuldavad võrrandid $2^a-3.2^{\frac{a-3}{2}}=26$ ja $b-a=2^a$, leida aritmeetiliste keskmiste arv.

27. Lahendada positiivsetes täisarvudes määramatu võrrand $ax+ny=c$, kus a on säärase lõpmata alaneva rea esimene liige, mille tegur (nimetaja) $(2,5)^{-1}$ ja summa 5 on; n on niisuguse aritmeetilise rea liikmete arv, mille äärmised liikmed on 1,125 ja 8,875 ja summa 85; c võrdub võrrandi $z^2-74z-935=0$ suurema juurega.

28. Lahendada positiivsetes täisarvudes määramatu võrrandi $ax+by=2c$, kus kordaja a võrdub niisuguse lõpmata alaneva rea viienda liikmega, mille esimese liikme logaritm alusel $\sqrt[4]{15^3}$ on 5,333... ja mille iga liige on 6,5 korda suurem kui kõigi temale järgnevate liikmete summa; b võrdub arvude $\sqrt{3}$ ja $\sqrt[3]{2}$ vahele suletud 12-ne geomeetrilise keskmise korrutisega; c võrdub võrrandi $lg(c+150)^2+lg(c-150)^2=10$ positiivse juurega.

29. Kellelgi oli 2795 marka; selle summa lahutas ta kaheks osaks. Esimesest osast sai ta nii mitu protsenti kasu, kui mitu ühelist sisaldab võrrandi $\frac{\sqrt{x+18}-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+18}+\sqrt{x-3}}=(2,333\ldots)^{-1}$ juur, teise osa protsent võrdub aga säärase lõpmatult alaneva rea liikmete summaga, mille kõik liikmed on positiivsed, esimene liige 2 ja kolmas liige $\frac{98}{121}$. Üldse saadi 170 marka kasu. Leida kapitaali osad.

30. Koos töötades võib kaks töömeest terve töö ära teha nii mitme tunniga, kui suur on niisuguse lõpmata alaneva rea summa, mille kõik liikmed on positiivsed, kolme esimese liikme summa 1,39 ja kolmanda liikme logaritm $2(lg 3-1)$. Esi-

mene töömees võib üksinda töötades selle töö ära teha 3 tunni võrra kiiremini kui teine töömees üksinda töötades. Kui palju aega kulub kummalgi töömehel ära, et tööd üksinda lõpetada?

31. Liitprotsente kandes muutus 1540-margaline kapitaal 6536 m. 40 p. nii mitme aasta pärast, kui mitu ühelist on võrrandi $73(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})=9(x+x^{-1})$ positiivses täisarvulises juures. Mitu protsenti kandis kapitaal?

32. Keegi andis hoiule 12000 marka 3,5 liitprotsendiga, kusjuures kasuraha arvati kapitaali juurde iga aasta lõpul. Hoiukassa ise aga andis hoiulepandud summa välja 6 liitprotsendiga, kasuraha iga poolaasta lõpul kapitaali juurde arvates. Kui palju teenib hoiukassa ülemaltoodud summa pealt 12 aasta jooksul?

33. Alaneva aritmeetilise rea üheksas ja üksteistkümnes liige rahuldavad võrrandi $\frac{1}{2}lg2+lg\sqrt{x^2+4x+5}=\frac{1}{2}[lg(x^2-4x+5)+1]$. Kõigi liikmete summa, esimesest hakates, võrdub arvuga $10^{1-lg0,08(3)}$. Leida liikmete arv.

34. Aritmeetilise rea üldine n-es liige võrdub avaldusega $7n-6$. Kõigi liikmete summa s rahuldab võrrandi $lg(s-4)-lg(\frac{s}{17}+8)=lg(s-104)-1$. Leida liikmete arv.

35. 23400 marka laenati tingimusega, et võlg tasutaks iga aasta lõpul makstava 4044-margalise kustutise näol. Kui oleks laenatud 40030 marka sama liitprotsendiga ja iga aasta lõpul makstav kustutis oleks endiseks jäänud, siis oleks laenu lõpulikuks tasumiseks kaks korda rohkem aega ära kulunud. Mitmeks aastaks ja mitme protsendiga tehti laen?

36. Laenati tundmatu summa 3,5% tingimusel, et laen ühes protsentidega ühe aasta pärast ära tasutaks. Laenu kätte saades viis laenaja ta kohe panka, mis 5% aastas maksis ja kus protsendiraha iga kolme kuu pärast kapitaalile juurde arvati. Leida kapitaal, teades, et laenaja maksis aasta pärast võla ära ja sai sellest operatsioonist 441 marka puhast kasu.

37. Kaks arvu a ja b on seotud võrrandiga $lga-lgb+4lg2=lg(a-b)-lg3$. Nende kahe arvu korrutamisel tehti viga, mis selles seisis, et osakorrutiste liitmisel kirjutati tuhan-

deliste kohale arv, mis õigest arvust ühe võrra väiksem oli. Selle vea tagajärjel saadi, vigast korrutist väiksema teguriga jagades, niisugune jagatis, mis suuremast tegurist 12 võrra väiksem, kusjuures jääk $\frac{1}{14}$-ku tegurite a ja b vahega võrdub. Leida korrutatavad arvud?

38. Vesistu (veehäil) täitub kolme toru kaudu a tunni jooksul. Et vesistut ainult esimese toru kaudu täita, selleks kulub 0,8(3) ajast, mille jooksul teine toru üksinda töötades vesistu võib täita, kuna aga kolmandal torul samaks otstarbeks b tunni võrra rohkem aega ära kulub kui esimesel torul. Teades, et arvud a ja b on seotud võrranditega $lga-2lg2=2lg3-$ $-lg(b+4)$ ja $\sqrt{\frac{a+b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{a+b}}=2,1(6)$, leida, mitme tunni jooksul võib iga toru, töötades üksikult, täita vesistu.

39. Töömees maksab iga nädala algul laenu- ja hoiuühisusesse 3 marka. Ühisus maksab 4% ja arvab protsendiraha kapitaalile juurde iga poolaasta lõpul. Mitme aasta pärast kasvab töömehe summa 1469 margaks?

40. Keegi andis hoiule 5 liitprotsendiga summa, mille markade arv võrdub võrrandi $\sqrt[3]{x+96}-\sqrt[3]{x-200}=2$ positiivse juurega. Iga paarituarvulise aasta lõpul võttis ta hoiult a marka, kuid iga paarisarvulise aasta lõpul andis ta hoiule a marka. Kahekümnenda aasta lõpul oli tal hoiul 768 marka 30 penni, missuguses summas ka viimane sissemaks sisaldub. Leida summa a.

---

41. Kolme korrapärase hulknurga külgede arvud sünnitavad geomeetrilise rea, kuna nende külgede arvude summa 37 on. Kui igas hulknurgas tõmmata kõik diagonaalid, mis võimalik, siis võrdub viimaste arv 185-ga. Leida iga hulknurga külgede arv.

42. Leida kombinatsioonide arv $n+3$ elemendist $k+1$ kaupa tingimusel, et n ja k rahuldaksid võrrandid $nk(n-k)=30$ ja $n^3-k^3=117$.

43. Leida piirid, millede vahel sisalduks murru $\frac{3x^2-5x+6}{2x^2-3x+5}$ väärtus x-i igasuguse reaalarvulise tähenduse maksvusel.

44. Leida binoomi $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ reas liige, milles sisalduks x^3, teades, et astmenäitaja n võrdub avalduse $y+\frac{64}{y}$ kõige väiksema väärtusega sel juhusel, kui y asemele ainult reaalarvulisi tähendusi tarvitada.

45. Kui otsitav arv avaldada 13-kavas, siis on ta kolmekümnendine arv, mille keskmine number on 0. Kui sama arv avaldada 11-kavas, siis avaldub ta samade numbritega, kuid tema numbrid on endise arvu numbritele vastupidiselt kirjutatud. Leida otsitav.

46. Teades, et $x—7$ on kolmliikmete x^2+mx+n ja x^2+px+q kõige suurem ühine jagaja, leida samade kolmliikmete kõige väiksem ühine kordne, andes m-le ja p-le vabalt valitavaid tähendusi ja leida ühise kordse eriavaldus, kui $m=—5$ ja $p=—3$.

47. Lahutada arv 8 kahe reaalsuuruse summaks ja, võttes nende suuruste poolvahe abiotsitavaks, teostada algteguriteks lahutamine nõnda, et liidetavate suuruste viiendate astmete summa oleks kõige väiksem, ja leida see summa.

48. Murd $\frac{12x^3+2x^2+10x+1}{6x^2+x+2}$ on lahutatud ahelmurruks ja kokku seatud kõik selle ahelmurru lähismurrud. Arv, mis võrdne eelviimase lähismurru lugejaga, kui $x=5$, lahutada kaheks osaks nõnda, et esimene neist oleks jagatav 37-ga, aga teine, jagatuna 49-ga annaks jäägis 14.

49. Otsitav arv, mis 11-ne mitmekordne, avaldub 9-kavas nelja numbriga, milledest kaks pahempoolset on kumbki 3, aga kolmas number, pahemalt poolt arvates, on kolme võrra viimasest numbrist vähem. Leida, missuguses kavas avaldub otsitav arv 10103 kujul.

50. Kui aakri ja tiinu suhet kujutav arv, mis lihtmurd on, muuta ahelmurruks ja kokku seada kõik lähismurrud, siis leiame, et lähismurdude arv on paarisarv ja et viimase x ja eelviimase y nimetajad rahuldavad võrrandid $x=37y—19$ ja $2^{\left(y-\frac{x}{98}\right)^2-16\left(y-\frac{x}{98}\right)-15,5}=2\sqrt{2}$. Mitu ruutsülda ja ruutjalga sisaldub aakris?

51. Arv, mis võrdne binoomi $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}\right)^6$ rea ratsionaalsete liikmete summaga, jagada kaheks osaks nõnda, et üks neist oleks jagatav tõusva aritmeetilise rea esimese ja teine sama rea teise liikmega, kui teada on, et rea kümne esimese liikme summa võrdub 255 ja esimese liikme korrutis kümnenda liikmega on 114.

52. Jagada $\sqrt[3]{7414875}$ kolmeks osaks, mis sünnitaksid geomeetrilise võrde (proportsiooni), mille esimene liige oleks viimasest liikmest binoomi $\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}+\sqrt[7]{x^5}\right)^{10}$ rea x esimest astet sisaldava liikme kordaja võrra suurem.

53. Leida neljast liikmest koosseisev aritmeetiline rida, kus esimese ja neljanda liikme korrutis võrdub võrrandi $x^{1+lgx}=0{,}001^{-\frac{2}{3}}$ suurema juurega, aga teise ja kolmanda liikme ruutude summa võrdub perioodilise murru (8, 16, 16, 16, . . .) piiri teise astmega.

54. Leida kolmeliikmeline geomeetriline rida, mille liikmete summa võrdub võrrandi $\frac{3x+2}{5}:\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}\right)=\frac{x}{19}+20$ juurega, aga samade liikmete korrutis on niisugune neljakümnendine arv, mis väheneb 3249 võrra, kui tema üheliste järgus seisev number 2 maha tõmmata ja ta sama arvu ette paigutada.

55. Avaldada suurus $\sqrt{m+\frac{1}{25}n}$ ahelmurru kujul, kui teada on, et m on hulkliikmete $x^3+6x^2+11x+6$ ja $x^3+9x^2+26x+24$ kõige väiksema ühise kordse x^3 sisaldava liikme kordaja (koeffitsient), kuna aga n on binoomi $(\sqrt[3]{z}+\sqrt{z^{-1}})^{26}$ rea z^7 sisaldava liikme kordaja.

56. Avaldada $\sqrt{a-b-c}$ ahelmurru kujul, kui teada on, et a on binoomi $(\sqrt[7]{x^5}+x^{-1}\sqrt{x^{-1}})^{16}$ rea x^7 sisaldava liikme kordaja, b võrdub kõige väiksema täisarvuga, mida jagades 23 ja 15 saame jäägis vastavalt 14 ja 8, kuna aga c lõpmata alaneva rea $\sqrt{2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\ldots$ summa piiriga võrdne on.

57. Lahendada määramatu võrrand $ax+by=c$, milles $a=\sqrt[3]{32768}$, b on võrdne niisuguse geomeetrilise rea kolmanda liikmega, mille kõik liikmed on positiivsed, teine liige esimesest $3\frac{1}{3}$ võrra suurem ja neljanda ja esimese liikme vahe $43\frac{1}{3}$, kuna c võrdub binoomi $(z\sqrt{z}+2\sqrt[3]{\frac{1}{z}})^7$ rea selle liikme kordajaga, milles esineb z viies aste.

58. Kaks kivitöölist ehitasid, tervete tööpäevade kaupa vaheldamisi töötades, müüri. Kui esimene kivitööline oleks üksinda töötanud, siis oleks võinud ta müüri ehitamise lõpetada niisuguse arvu päevadega, mis võrdne on kahe võrrandi $x^4-47x^3+89x^2+47x-90=0$ ja $x^4-43x^3-88x^2-89x-45=0$ üldise positiivse juurega. Teine kivitööline oleks lahus töötades võinud ehitada sama müüri niisuguse arvu päevadega, mis võrdub binoomi $(\sqrt[3]{u^2}+u^{-0,888\ldots})^7$ rea u-st mitteoleneva liikmega. Mitu päeva töötas kumbki kiviraiuja?

59. Aritmeetilise rea kolmas liige võrdub kahekümnendise arvuga, mille üheliste arv on kümneliste arvust viie võrra suurem ja mis avaldub 36 kujul, kui kava aluseks võtta ülemalnimetatud üheliste arv. Rea kümnes liige võrdub kõige väiksema täisarvuga, mida jagades 8 ja 11-ga saame jäägis vastavalt 3 ja 6. Mitu liiget, esimesest hakates, on tarvis võtta, et nende summa võrduks binoomi $(1+\sqrt[3]{3,4})^{11}$ rea neljanda liikmega?

60. Leida kõigi nende kolmekümnendiste arvude summa, mida jagades a-ga saame jäägis b ja mida jagades c-ga saame jäägis nulli, teades, et a võrdub binoomi $(\sqrt[3]{u^2}+u^{-10})^{16}$ rea säärase liikme kordajaga, mis u-st ei olene, b võrdub hulkliikmete $12x^5+10x^2-8x+6$ ja $3x^4-2x^3-5x^2+4x+2$ kõige suurema ühise jagaja x^2 sisaldava liikme kordajaga, kuna aga c perioodilise ahelmurru $(3,3,6,3,6,\ldots)$ piiri ruuduga võrdub.

Vastused.

VII jagu.

§ 4. **151.** $a=\sqrt{b}$. **152.** $p^2=2aq$. **153.** $m=12$. **154.** $m=-12$, $n=9$. **158.** $\frac{3}{4}ab^2-\frac{2}{5}a^2$. **160.** $\frac{a^m}{2b^3}+0{,}3a^nb^3$. **161.** $2a^2-a+1$. **163.** $3a^2-ab+4b^2$. **164.** $\frac{1}{2}a^2-2ab+\frac{1}{3}b^2$. **165.** $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}-a$. **166.** $\frac{2}{3a^2}+\frac{3}{5a}-\frac{4a}{3}$. **167.** x^3-2x^2-3x+5. **168.** $(x-y)^3$. **169.** $3a^3-2a^2b-7ab^2+4b^3$. **170.** $x^2-2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}$. **171.** $m=60$, $n=-8$. **172.** $m=3a^2$, $n=a^3$. **173.** $3b=a^2$, $27c=a^3$. **174.** Keskmine võetud arvudest. **175.** $4x-3y$. **177.** x^2+x+1. **178.** $4-3ab-2a^2b^2$. **179.** $a^{10}-3a^5+2$. **180.** x^3-x^2+x-1.

§ 5. **181.** 24. **182.** 19. **183.** 43. **184.** 780. **185.** 37. **186.** 5300. **187.** 68. **188.** 97000. **189.** 8100. **190.** 98000. **191.** 234. **192.** 237. **193.** 912. **194.** 509. **195.** 876. **196.** 681. **197.** 135. **198.** 852. **199.** 4750. **200.** 30700. **201.** 2136. **202.** 3156. **203.** 1007. **204.** 2012. **205.** 7009. **206.** 7505. **207.** 8526. **208.** 9482. **209.** 4444. **210.** 6109. **211.** 35028. **212.** 53214. **213.** 701407. **214.** 1012034. **215.** $\frac{7}{9}$. **216.** $\frac{5}{3}$. **217.** $\frac{16}{53}$. **218.** $\frac{7}{44}$. **219.** $23\frac{1}{2}$. **220.** $104\frac{2}{3}$. **221.** 0,7. **222.** $\frac{17}{69}$. **223.** 0,58. **224.** 0,063. **225.** 0,816. **226.** 0,0074. **227.** 2,81. **228.** 9,12. **229.** 0,00508. **230.** 6,403.

§ 7. **261.** 17. **262.** 32. **263.** 28. **264.** 42. **265.** 51 **266.** 82. **267.** 91. **268.** 96. **269.** 54. **270.** 440. **271.** 154. **272.** 314. **273.** 206. **274.** 306. **275.** 814. **276.** 519. **277.** 854. **278.** 947. **279.** 5123. **280.** 2514. **281.** $\frac{3}{5}$. **282.** $\frac{7}{9}$. **283.** $2\frac{1}{2}$.

284. 0,09. **285.** $1\frac{2}{13}$. **286.** $4\frac{1}{6}$. **287.** 0,16. **288.** 4,1. **289.** 0,018.
290. 0,0313.

VIII jagu.

§ 5. **105.** $-\sqrt{2}$. **106.** $129\sqrt{5}$. **107.** $22\sqrt[3]{5}$. **108.** $-1\frac{2}{3}\sqrt{5}-$
$-4\frac{1}{3}\sqrt{2}$. **109.** $7\sqrt{6}+2\frac{1}{4}\sqrt[3]{2}-\sqrt{11}$. **110.** $10\frac{1}{2}\sqrt{2}-1\frac{1}{3}\sqrt{3}$.
113. $7ab\sqrt{5a}$. **114.** $-4a^2c\sqrt{3d}$. **115.** $2y\sqrt[3]{x^2y^2}$. **116.** $-2n\sqrt{m-n}$.
117. $-2\frac{1}{2}\sqrt{4-2x}$. **118.** 0. **119.** $\frac{2x^2-x}{2}\sqrt[4]{x-1}$. **120.** $x^2\sqrt[3]{x^3-y^3}$.

§ 6. **127.** $448+5\frac{1}{3}\sqrt{6}$. **128.** 68. **129.** $-33\sqrt{5}$. **131.** 84.
132. $-\sqrt{2}$. **140.** $-ab^5\sqrt[3]{25}$. **142.** $\frac{a}{x}\sqrt[3]{ax^2}+x\sqrt[6]{a^3x^4}-\frac{x}{a}\sqrt[6]{ax}$.
144. $a\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{a}$. **148.** $\sqrt[36]{1152}$. **149.** $3\sqrt[4]{200}-2\sqrt[12]{2048}+6\sqrt[12]{5000}$.
151. $6-10\sqrt[6]{72}-8\sqrt[3]{9}$. **152.** $11\sqrt[3]{4}-15\sqrt[6]{2}$. **156.** $6ab\sqrt[12]{a^{11}b^{10}}$.
157. $a^3\sqrt[6]{ab^3}-2a^2b\sqrt{a}-a^3b\sqrt[6]{a^3b^2}$. **158.** $2a^3-2a^2\sqrt[15]{a}-2a^4\sqrt[6]{a}$.
159. $(a^2-2b)\sqrt{b}-ab$. **160.** $a+a\sqrt[4]{a}-a\sqrt[12]{a}-\sqrt[12]{a^{11}}$. **165.** $3\frac{1}{3}-2\sqrt[3]{20}+$
$+10\sqrt[3]{4}$. **166.** $\frac{1}{4}\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}$. **172.** $\sqrt{a}-\sqrt[4]{a^2x}-\frac{4a}{x}\sqrt[4]{x^3}$.
174. $\frac{y}{5x}\sqrt[5]{x}+\frac{3}{40xy}\sqrt[5]{x^2y^2}-\frac{5}{4x}\sqrt[5]{x^3y}$. **175.** $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$. **176.** $\sqrt[3]{ab}-\sqrt[3]{2b^2}$.
177. $\sqrt{2a}+\sqrt[4]{6ab^2}+b\sqrt{3}$. **178.** $a\sqrt{a}-\sqrt[4]{2a^3b^3}+b\sqrt{2b}$. **179.** $x\sqrt[3]{x}-$
$-\sqrt[3]{x^2y^2}+y\sqrt[3]{y}$. **180.** $\frac{1}{y}\sqrt[5]{xy}-\sqrt[5]{2x^3y^3}+\frac{1}{2x}\sqrt[5]{8x^4y^4}$. **193.** $\frac{3}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}$.
194. $\frac{x(x^2-y^2)}{2a^2}\sqrt[3]{4a^2(x+y)^2}$. **195.** $ab^2\sqrt{2a}-ab\sqrt[12]{8a^8b^7}+a^2b^2$.
196. $\frac{b^2}{a}\sqrt[36]{a^{17}b^{10}}-4a^2b^3\sqrt[3]{a^2b}+\frac{a^2}{b^2}\sqrt[12]{a^5b^4}$. **197.** $\sqrt[5]{4x^2}+\sqrt{3}.\sqrt[5]{2x}+3$.
198. $2\sqrt[3]{a^2x}+\sqrt{ax}$. **199.** $x\sqrt{3xy}-x\sqrt[4]{12xy^3}+2xy$. **200.** $\frac{x}{y^2}\sqrt{xy}-$
$-x\sqrt{x}+y\sqrt{y}$.

§ 7. **211.** $5-2\sqrt{6}$. **212.** $8\frac{1}{4}+2\sqrt{2}$. **213.** $2+2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[6]{2}$.
214. $3\sqrt{3}-18\sqrt[3]{2}+12\sqrt[6]{432}-16$. **215.** $11-2\sqrt{6}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}$.
216. $48-12\sqrt{10}-12\sqrt{5}+20\sqrt{2}$. **217.** 10. **218.** 8. **219.** $\frac{ab^3}{16}+$ $+\frac{4}{a}-b\sqrt{b}$. **220.** $a^4\sqrt{a}(7+5\sqrt{2})$. **231.** $\sqrt[24]{2^8 3^3 x^{11} y^7}$. **232.** $\frac{3x^2y}{4}\sqrt[8]{x}$.
233. 12. **234.** 3. **235.** 2. **236.** 4. **237.** $a+1$. **238.** $2a-\frac{3b}{2}$.
239. $x+y$. **240.** $2x^2-\frac{1}{2}$.

§ 8. **243.** $\sqrt[3]{a}$. **246.** $\frac{1}{2}\sqrt[3]{36}$. **247.** $3\sqrt[4]{2}$. **248.** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$.
249. $(a+b)\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **250.** $\frac{1}{a+b}\sqrt[3]{(a^2-b^2)^2}$. **251.** $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$.
252. $\frac{a(1+\sqrt{a})}{1-a}$. **255.** $\sqrt{(1-a)(1+\sqrt{a})}$. **256.** $\frac{n(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}$.
258. $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7})$. **259.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **260.** $n\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}\,(3-$ $-2\sqrt{2})(2-\sqrt[6]{72}+\sqrt[3]{9})$.

§ 9. **263.** $\frac{1}{2}(\sqrt{14}-\sqrt{6})$. **266.** $\sqrt[4]{45}-\sqrt[4]{5}$. **267.** $\frac{1}{2}(\sqrt{10}+\sqrt{2})$.
268. $3+\sqrt{2}$. **269.** $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **270.** $\sqrt{a^2+b}+\sqrt{a^2-b}$. **271.** $2\sqrt{a}-\sqrt{5b}$.
273. $5-\sqrt[4]{3}$. **274.** $2\sqrt[3]{3}+\frac{1}{2}\sqrt[6]{3}$. **275.** $a+\frac{1}{2}\sqrt{a}-\frac{2}{3}$. **276.** $2\sqrt[3]{x^2}-$ $-x\sqrt[3]{y}-y^2$. **277.** $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$. **278.** $\sqrt{2x}-\sqrt[3]{y^2}$. **279.** $\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}+2b\sqrt[4]{a}$.
280. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}-2\frac{\sqrt[3]{y}}{3x}$.

§ 10. **281.** $\sqrt{a}(\sqrt{b}+1)$. **283.** $\sqrt{a+b}(1-\sqrt{a-b})$.
285. $(a+\sqrt[3]{b})(a-\sqrt[3]{b})$. **287.** $\sqrt[4]{a^3}(\sqrt[12]{a}+1)$. **288.** $\sqrt{a}(a\sqrt{a}+1-\sqrt[4]{a})$.
289. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$. **290.** $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b^2})^2$. **291.** $(a+\sqrt[5]{b^2})(\sqrt{a}+\sqrt[5]{b})(\sqrt{a}-\sqrt[5]{b})$.
292. $(\sqrt[3]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[4]{b})$. **293.** $(a-\sqrt[5]{b})(a^2+a\sqrt[5]{b}+\sqrt[5]{b^2})$. **294.** $(\sqrt{a}+$ $+\sqrt{b})(a-\sqrt{ab}+b)$. **295.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ ehk $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2}+$

$+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$ jne. 296. $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b})(a\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^2b}+\sqrt[3]{b^2})$. 299. $\sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a}-$ $-\sqrt[3]{b})^2$. 300. $\sqrt{ab}.(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})^2$. 301. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 302. 1. 303. $\sqrt{a^2-b^2}$. 304. $\sqrt{1-x}$. 305. $x+\sqrt{x^2-a^2}$. 306. $\frac{4a}{x^2}\sqrt{a^2-x^2}$. 307. $\frac{1}{x}\sqrt{2ax}$. 308. $a\sqrt{2}$. 309. $2\sqrt[3]{(3-\sqrt[4]{5})^2(3+\sqrt[4]{5})}$. 310. $\frac{1}{2}\sqrt[8]{7}$. 311. $2a\sqrt[8]{a^7}$. 312. $11a\sqrt{ax}$. 313. $\frac{b^6}{a^{10}}\sqrt[5]{a^2b^2}$. 314. $-\sqrt[2n]{b^{n-2m}}$. 315. $\frac{a^2}{2x^2}\sqrt[4]{ax^3}$. 316. $\sqrt[3]{\frac{2a}{1+a}}$. 317. 2. 318. $\sqrt{3}+1$. 319. 1. 320. $a+b$.

§ 11. 334. 4. 335. $1\frac{1}{5}$. 336. $\frac{4}{9}$. 339. 5. 340. -52. 343. $a+b+\sqrt{ab}$. 345. $\sqrt[9]{a^4}+\frac{\sqrt[9]{a^2}}{\sqrt[12]{b^5}}+\frac{1}{\sqrt[6]{b^5}}$. 346. $a^n-\sqrt{\frac{a^n}{b^n}}+\frac{1}{b^n}$. 347. $\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+4\sqrt[3]{b^2}$. 348. $\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}$. 349. $a^3+b\sqrt[3]{a}+b^3-$ $-2a\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}+2ab\sqrt{ab}-2b^2\sqrt[6]{a}$. 351. $\frac{b^6}{a^4}$. 352. $\frac{b^4}{a^3}\sqrt{\frac{3\sqrt[4]{2b}\sqrt{b}}{\sqrt[24]{a^7}}}$. 353. $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. 354. $\frac{\sqrt{a^3}}{a}-3\sqrt[3]{b^2}$. 355. $\frac{1}{a^2b^2\sqrt{a}\sqrt[4]{b}}$. 356. $2\sqrt[4]{2}.a^4b^2\sqrt[6]{a}.\sqrt[4]{b^3}$. 357. $ab^3+\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{b^3}2\sqrt[6]{a^5b}$. 358. $a^2-3a\sqrt{a}\sqrt[3]{a}+$ $+3a\sqrt[3]{a^2}-a\sqrt{a}$. 359. ab. 360. $(\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b}-2\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b})^2$.

§ 12. 383. $4+17i$. 384. $5a-2bi$. 385. -12. 389. $1-46i$. 390. $100-13\sqrt{7}.i$. 391. $a+3b+2\sqrt{ab}.i$. 393. $-\sqrt{a}.i$. 395. $a+bi$. 397. $1-\sqrt{3}.i$. 399. $3-5\sqrt{2}.i$. 401. a^2-b^2+2abi. 403. $\frac{-1+\sqrt{3}.i}{2}$. 405. $-14-12\sqrt{2}.i$. 407. $a^3-3ab^2-(3b^2b-b^3)i$. 409. $(26-15\sqrt{3})i$. 411. $2+i$. 412. $1-2i$. 413. $2+\sqrt{3}i$. 414. $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i$. 415. $\sqrt{12}-\sqrt{2}.i$. 416. $\frac{1}{2}(\sqrt{26}+\sqrt{2}.i)$. 417. $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 418. $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{\sqrt{2}+1}+\sqrt{\sqrt{2}-1}.i)$.

X jagu.

§ 1. **9.** $0;\ \sqrt{3}$. **10.** $0; -\frac{1}{2}\sqrt{10}$. **15.** $\pm 2\sqrt{6}$. **16.** $\pm 2.i$.
17. ± 8. **18.** $\pm\frac{1}{5}\sqrt{6}$. **19.** $\pm\frac{1}{2}\sqrt{7}$. **20.** $\pm\sqrt{11}$. **29.** $1\pm 3i$.
30. $3\pm 5i$. **31.** $4; -1$. **32.** $6;\ 4$. **33.** $1\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}$. **34.** $1\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}$.
35. $3;\ \frac{1}{2}$. **36.** $\frac{3}{4}; -1$. **37.** $4\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}$. **38.** $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{6}$. **39.** $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}$.
40. $\frac{-3\pm 3\sqrt{3}.i}{2}$. **41.** $-6;\ 4$. **42.** $2;\ 3$. **43.** $24;\ 4$. **44.** $9;\ 4$.
45. $1\frac{1}{2}; -\frac{5}{6}$. **46.** $5;\ 1\frac{1}{2}$. **47.** $12;\ 11$. **48.** 2. **49.** $5;\ 2\frac{1}{12}$.
50. $\frac{2}{3}; -\frac{13}{21}$. **51.** $18;\ 15{,}8$. **52.** $30;\ 305$. **53.** $2; -1$. **54.** $1; -1\frac{1}{4}$.
55. $13; \frac{1}{2}$. **56.** $5;\ 1\frac{1}{5}$. **57.** $5; -4$. **58.** 4. **59.** $2; -\frac{7}{9}$.
60. $10;\ 8$.

§ 2. **61.** $0;\ 2a$. **62.** $\pm\sqrt{ab}$. **63.** $0; -\frac{a}{2}$. **64.** $0; -\frac{3a}{2}$.
65. $\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}$. **66.** $\pm\frac{a+1}{a}$. **67.** $\pm\frac{\sqrt{c}}{a+b}$. **68.** $\pm 5a$.
69. $\pm\sqrt{4a^2+b^2}$. **70.** $\pm a$. **71.** $3a;\ a$. **72.** $-7a^3;\ 5a^3$. **73.** $a\pm b$.
74. $a-5b;\ 3b-a$. **75.** $2a; -\frac{a}{2}$. **76.** $-\frac{a}{3}; -\frac{a}{2}$. **77.** $-\frac{3a}{b}$;
$-\frac{a}{3b}$. **78.** $\frac{5a}{4b}; -\frac{4a}{5b}$. **79.** $\frac{m}{n}; -\frac{n}{m}$. **80.** $\frac{a}{b};\ \frac{b}{a}$. **81.** $\frac{a}{b}; -1$.
82. $\frac{a}{a+b};\ \frac{b}{a-b}$. **83.** $\frac{a}{b}; -\frac{b}{a}$. **84.** $\frac{2}{3}a; -\frac{5}{7}a$.
85. $\frac{3a-b\pm\sqrt{9a^2+b^2-10ab}}{2}$. **86.** $a\pm 2b$. **87.** $-\frac{a}{2}(3\pm\sqrt{3})$. **88.** $\frac{a}{2}$;
$-\frac{5a}{6}$. **89.** $-a;\ -b$. **90.** 1. **91.** $\frac{ab}{a\pm b}$. **92.** $\frac{2c}{a+b}; -\frac{c}{a+b}$.
93. $a; b$. **94.** $a; b$. **95.** $\frac{a+b}{2(a-b)^2}(a^2+b^2\pm\sqrt{a^4-4a^3b+10a^2b^2-4ab^3+b^4})$.
96. $\frac{1}{3}(a+b+c)\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}$. **97.** $\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b(c-a)}}{2}$.
98. $\frac{5a+3b}{8};\ \frac{3a+5b}{8}$. **99.** $-a;\ \frac{a(c+1)}{c(2c+3)}$.
100. $\frac{ab+ac+bc\pm\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-a^2bc-ab^2c-abc^2}}{a+b+c}$.

§ 3. 151. $qx^2+px+1=0$. 152. $x^2+mpx+m^2q=0$. 153. $4x^2+4q-p^2=0$. 155. p^2-2q. 156. $p(3q-p^2)$. 157. 34; 98. 158. $4\frac{1}{9}$; $-8\frac{1}{27}$. 159. 3; 5. 160. 3 ja 15 ehk —15 ja —3. 161. 10. 165. —16. 166. $a=3b$ ehk $b=3a$.

§ 4. 171. 5; 12. 172. 10; 11; 12. 173. 15; 25. 174. 12. 175. 24. 176. 7. 177. 3; 4; 5. 178. 9. 179. 5. 180. 10. 181. 30. 182. 2000 ehk 500. 183. Võimatu. 184. Esimest sorti 39 ehk 12. 185. 7. 186. 5. 187. 24 ja 18. 188. 40 ja 60. 189. 10. 190. 3 ja 4. 191. Tagumise ratta ümbermõõt 3 ehk $1\frac{1}{2}$ jalga. 192. 390 ehk 150. 193. 60. 194. 12; 15. 195. 30. 196. 8 ja 7. 197. 2400. 198. 120 ja 80. 199. 10. 200. 2 ja 3.

§ 5. 231. -1; $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. 232. 2; $-1\pm\sqrt{3}.i$. 233. -3; $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}.i)$. 234. a; $\frac{a}{2}(-1\pm\sqrt{3}.i)$. 235. ±2; $\pm2i$. 236. $\frac{3\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$; $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$. 237. ±2; $1\pm\sqrt{3}.i$. $-1\pm\sqrt{3}.i$. 238. $\pm3i$; $\pm3\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}}$. 239. $\pm\frac{a}{b}$; $\pm\frac{a}{b}i$; $\frac{a\sqrt{2}}{2b}(1\pm i)$; $\frac{a\sqrt{2}}{2b}(-1\pm i)$. 240. $\pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}}$; $\pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}}$.

§ 6. 241. 2. 242. 20. 243. —1. 244. 7. 245. 6. 246. 7. 247. 4. 248. 4. 249. 0; 2. 250. 0; $2\frac{1}{2}$. 251. 2. 252. 2. 253. ±2. 254. 3; $-\frac{2}{3}$. 255. 81. 256. 5. 257. 2; $2\frac{1}{2}$. 258. 4; $-\frac{10}{27}$. 259. 0; $\frac{25}{16}$. 260. $-\frac{2}{3}$. 261. $\frac{a}{4}$. 262. 0; a. 263. $\pm\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+2b^2}$. 264. $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$. 265. $-\frac{2a}{3}$. 266. $\frac{3a^2}{4}$. 267. $2a$. 268. 0; $\pm a$. 269. $\frac{1\pm\sqrt{1+4b^2}}{2a}$. 270. $\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{4}\sqrt{2}$.

XI jagu.

§ 1. 1. 2; —1. 2. 1; 2; —3. 3. —1; ±1. 4. ±1; 5. 5. —3; $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. 6. —6; $-1\pm\sqrt{2}.i$. 7. 1; —2; $\pm\sqrt{2}.i$. 8. 1;

-2; 3; -4. **9.** 2; -3; $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. **10.** -1; -3; ±5. **11.** ±2; ±1. **12.** $\pm2i$; $\pm2\sqrt{2}.i$. **13.** $\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\pm i$. **14.** $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.i$. **15.** 2; -1; $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **16.** 1; -4; $\frac{-3\pm\sqrt{15}.i}{2}$. **17.** 1; $-\frac{27}{8}$. **18.** 84; 19. **19.** $\pm3\sqrt{2}$. **20.** 0; -5. **21.** 2; $\frac{1}{2}$; -3; $-\frac{1}{3}$. **22.** 2; $\frac{1}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$. **23.** $4\pm\sqrt{17}$; $\frac{1}{8}(1\pm\sqrt{65})$. **24.** 2; $-\frac{1}{2}$; -3; $-\frac{1}{3}$. **25.** 2; $\frac{1}{2}$; ±1. **26.** $\frac{3}{2}$; $-\frac{2}{3}$; $\pm i$. **27.** -1; 2; $\frac{1}{2}$; $-2\pm\sqrt{3}$. **28.** 1; $-\frac{5}{3}$; $-\frac{3}{5}$; $\frac{-1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **29.** $2\pm\sqrt{3}$; $3\pm2\sqrt{2}$; $\pm i$. **30.** ±1; 2; $\frac{1}{2}$; -1. **31.** 3; $\frac{-3(1\pm\sqrt{3}.i)}{2}$. **32.** $-\frac{2}{5}$; $\frac{1\pm\sqrt{3}.i}{5}$. **33.** ±2; $\pm2i$. **34.** $\frac{1\pm i}{3}$; $\frac{-1\pm i}{3}$. **35.** $\sqrt[5]{2}$; $\frac{\sqrt[5]{2}}{4}(\sqrt{5}-1\pm\sqrt{10+2\sqrt{5}}.i)$; $\frac{\sqrt[5]{2}}{4}(-\sqrt{5}-1\pm\sqrt{10-2\sqrt{5}}.i)$. **36.** $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}i$; $\pm\sqrt[6]{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}}$. **37.** 1; $\frac{-1\pm\sqrt{3}.i}{2}$; $\sqrt[3]{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{3}.i}{\sqrt[3]{4}}$. **38.** 3; $\pm\sqrt{3}.i$; $\sqrt[3]{2}+1$; $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(-1\pm\sqrt{3}.i)+1$. **39.** 32; $16(-1\pm\sqrt{3}.i)$; 1; $\frac{-1\pm\sqrt{3}.i}{2}$. **40.** 241; $\frac{243}{2}(-1\pm\sqrt{3}.i)-2$; -34; $14\pm16\sqrt{3}.i$.

§ 2*. **41.** 6; $-7\frac{1}{3}$. **42.** ±3. **43.** 1; 19. **44.** 3; 4. **45.** ±3; ±12. **46.** 0; 2, $\pm\sqrt{2}$. **47.** 3; 2. **48.** ±3; $\pm\frac{8}{3}\sqrt{3}$. **49.** ±3; ±8. **50.** 4; 2; 1. **51.** 7; 5. **52.** ±3. **53.** 7; 5. **54.** 6. **55.** ±20. **56.** 2. **57.** ±3; ±4. **58.** 7; -6. **59.** 8; 2. **60.** 4; 64. **61.** ±3; $\pm\sqrt{2}.i$. **62.** 4; -3. **63.** ±3; $\pm i$. **64.** 8; 4. **65.** ±3; $\pm\frac{3}{2}$. **66.** ±2; $\pm i$. **67.** 3; -2. **68.** $\pm3\sqrt{2}$. **69.** 9; -4. **70.** 4; 9; $4\pm\sqrt{15}$. **71.** 0; $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{3}.i)$. **72.** 0; 1; 1. **73.** 3; 2; $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{151}.i)$. **74.** 2; 1; $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{19}.i)$. **75.** 3; 1; $2\left(1\pm\sqrt{\frac{19}{7}}\right)$.

*) x-i väärtused on näidatud.

76. 2; $\frac{1}{3}$; $\frac{1 \pm \sqrt{41}}{10}$. **77.** 4; 2. **78.** 6; -3; $\frac{12 \pm 3\sqrt{39}}{23}$. **79.** ± 5. **80.** 333; 115. **81.** $x = \pm 3$, $y = \pm 4$: $z = \pm 2$. **82.** $x = \pm 8$; $y = \pm 6$; $z = \pm 9$. **83.** $x = \pm 1$; $y = \pm 4$; $z = \pm 6$. **84.** $x = 9$, $+1$; $y = 3$, -5; $z = 0$, -8. **85.** $x = \pm 5$; $y = \pm 2$; $z = \pm 7$. **86.** $x = 13$, 2; $y = 5$; $z = 2$, 13. **87.** $x = 4$, 3, $\frac{5 \pm \sqrt{23}.i}{2}$; $y = 3$, 4, $\frac{5 \mp \sqrt{23}.i}{2}$; $z = 5$, 5, 7. **88.** $x = 2$, 2; $y = 4$, 1; $z = 1$, 4. **89.** $x = 5$, 12; $y = 12$, 5; $z = 13$. **90.** $x = 1$, $\frac{7 \pm \sqrt{15}.i}{2}$; $y = 1$, -4; $z = 1$, $\frac{7 \mp \sqrt{15}.i}{2}$. **91.** $x = 4$, 4, 9; $y = 6$, 3, $2 \pm \sqrt{14}.i$; $z = 3$, 6, $2 \mp \sqrt{14}.i$. **92.** $x = \pm 1$; $y = \pm 5$; $z = \pm 2$. **93.** $x = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$; $z = \frac{1}{5}$, $\frac{1}{4}$. **94.** $x = \frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$; $y = \frac{1}{3}$, $-\frac{1}{5}$; $z = \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$. **95.** $x = 3$, 3, 2, 2, 1, 1; $y = 1$, 2, 3, 1, 2, 3; $z = 2$, 1, 1, 3, 3, 2. **96.** $x = 5$, 5, -2, -2, -3, -3; $y = -3$, -2, 5, -3, -2, 5; $z = -2$, -3, -3, 5, 5, -2. **97.** $x = 2$, -7; $y = 5$, 4; $z = 4$, 5; $u = 3$, 12. **98.** $x = 3$, 17, $10 \mp \sqrt{58}$; $y = 5$, -4; $z = 4$, -5; $u = \pm 7$, $\pm \sqrt{58}$. **99.** $x = 10$, 3; $y = 6$, 5; $z = 5$, 6; $u = 3$, 10. **100.** $x = 3$, 2; $y = 2$, 3; $z = 6$, 1; $u = 1$, 6. **101.** 5 ja 6. **102.** 9 ja 12. **103.** 14 ja 8. **104.** 8 ja 6 ehk -7 ja -9. **105.** 24. **106.** 12 ja 4. **107.** 12 ja 36. **108.** 13 ja 9. **109.** $\frac{3}{4}$ ehk $\frac{4}{3}$. **110.** 35 ehk 53. **111.** 36 ja 30. **112.** 21 ja 45. **113.** 80 tööl. ja 45 puuda. **114.** 20 ja 30 ehk 30 ja 20. **115.** 2 ja 3. **116.** 12 ja 4. **117.** 5 ja 6. **118.** 7 setv. $3\frac{1}{2}$ marka setv. ehk 29 setv. $1\frac{13}{14}$ marka setv. **119.** 80, 39, 89. **120.** 3, 4, 5. **121.** 20, 18, 16. **122.** 452. **123.** 3, 4, 12. **124.** 4, 6, 9. **125.** 40 õuna 3 marka tükk ja 60 õuna 2 marka tükk. **126.** 864. **127.** 2, 6, 9. **128.** 9, 5, 6, 2. **129.** 18, 9, 12, 6. **130.** 3762.

XII jagu.

§ 1. 25. $x > -\frac{1}{2}$. 26. $x < -2$. 27. $x > \frac{24}{25}$. 28. $x > 56$. 29. $x < -\frac{4}{5}$. 30. $x < -3\frac{1}{2}$. 31. $x > 8$. 32. $x < 1\frac{2}{3}$. 33. $x > 10\frac{2}{3}$. 34. $x < 2$. 35. $x > -3\frac{2}{3}$. 36. $x < -5$. 37. $x > \frac{1}{2}$. 38. $x > 7\frac{1}{2}$.

39. $x<\frac{4}{5}$. **40.** $x<\frac{1}{5}$. **41.** $x<-3$. **42.** $1<x<4$. **43.** $x>\frac{3}{2}$. **44.** $3<x<19$. **45.** Inkongruentsed. **46.** Inkongruentsed. **47.** $x>-2$. **48.** $-2<x<1$. **49.** $a<\frac{2}{3}$ ehk $a>\frac{3}{2}$. **50.** $2\frac{2}{3}<a<5$.

51. $-3\frac{1}{2}<a<\frac{2}{3}$. **52.** $\frac{2}{5}<a<2\frac{1}{3}$. **53.** $a<\frac{2}{7}$ ehk $a>2\frac{2}{3}$.

54. $-1\frac{3}{5}<a<2\frac{1}{3}$. **61.** $x \lessgtr -2$. **62.** $x>2$ ehk $x<-3$.

63. $-2<x<5$. **64.** x vabalt valitav. **65.** $x>\frac{2}{3}$ ehk $x<-\frac{1}{2}$. **66.** Võimatu. **67.** $x>5$ ehk $x<-3$. **68.** $-2\frac{1}{2}<x<\frac{3}{5}$. **69.** $x>3$ ehk $x<-3$. **70.** $x>\frac{2}{5}$ ehk $x<-\frac{2}{5}$.

§ 2. **71.** $a>2\frac{1}{2}$. **72.** $a<3$. **73.** $0<a<5$. **74.** $5<a<8$. **75.** $9>a>7$. **76.** $a<2\frac{2}{3}$ ehk $a>7\frac{1}{2}$. **83.** Võimatu. **84.** Võimatu. **85.** -50. **86.** Tarvis parandada. **87.** Võimatu. **88.** Tarvis parandada. **89.** Võimatu. **90.** Tarvis parandada. **91.** 0. **92.** Võimatu. **93.** ∞. **94.** Võimatu. **95.** Võimatu. **96.** Võimatu. **97.** 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. **98.** Määramatu. **99.** Igasugune arv. **100.** Määramatu. **101.** 6. **102.** $\frac{1}{4}$. **103.** $-1\frac{1}{5}b$.

104. $\frac{3a}{2}$. **105.** $\frac{4}{5}$. **106.** $\frac{7}{5}$. **107.** 0. **108.** ∞. **109.** $-\frac{1}{2}$.

110. -1. **111.** $\frac{n-m}{a-b}$. **112.** $\frac{a-bk}{k-1}$. **113.** $\frac{ab}{b-a}$. **114.** $\frac{an-bm}{m-n}$.

115. $\frac{b-am}{m}$. **116.** $\frac{ad}{a-b}$. **117.** $\frac{a(q-n)}{m-n+q-p}$. **118.** $\frac{bc}{b-a}$. **119.** $\frac{ad}{a-b}$.

120. $\frac{d-bm}{a-b}$.

§ 3. **121.** $a>3\frac{1}{3}$. **122.** $-4<a<3\frac{3}{4}$. **123.** $a=-14$.

124. $a=30, b=-\frac{4}{5}$. **125.** 5 ja -2. **126.** -12 ja -14. **127.** $\frac{0}{0}$.

128. Inkongruentsed võrrandid. **129.** $\frac{m(c-b)}{a-b}$, $\frac{m(a-c)}{a-b}$.

130. $\frac{ad-bc}{a-b}$, $\frac{d-c}{a-b}$.

§ 4. **131.** $a=3, 8, 15, \ldots$ **132.** $a=\frac{3}{2}, 4, 7\frac{1}{2}, \ldots$

133. $a=1, 7, 13, \ldots$ **134.** $a=13, 15, 20, \ldots$ **135.** $0<b<\frac{a^2}{4}$.

136. $b^2<a^2<2b^2$. **137.** $n>4m$. **138.** $d>\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **139.** $x<0$. **140.** $-1<x<3$.

§ **5.** **165.** $x=9$, $y=1$. **166.** $x=9$, 16,....; $y=9$, 21.... **167.** $x=6$, $y=3$. **168.** $x=4$, 53,....; $y=1$, 16,.... **169.** $x=25$, 60....; $y=12$, 30,.... **170.** $x=2$, $y=1$. **171.** $x=5$, 15, 25, 35, 45, 55; $y=51$, 42, 33, 24, 15, 6. **172.** $x=0$, 5, 10, 15, 20; $y=28$, 21, 14, 7, 0. **173.** $x=7$, 11,....; $y=9$, 24,.... **174.** $x=1$, 5,....; $y=1$, 16..... **175.** $x=11$, $y=3$. **176.** $x=14$, $y=12$. **177.** $x=5$, $y=2$. **178.** $x=11$, $y=7$. **179.** $x=23$, $y=21$. **180.** $x=23$, $y=17$. **181.** $x=15$, 30, 45,.... $y=5$, 11, 17,....; $z=3$, 7, 11,..... **182.** $x=2$, $y=2$, $z=1$. **183.** $x=0$, 1, 2, 3; $y=7$, 6, 5, 4; $z=7$, 5, 3, 1. **184.** $x=7$, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0; $y=2$, 3, 4; 5, 6, 7, 8, 9; $z=0$, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. **185.** $x=18$, 73,....; $y=3$, 14,...., $z=1$, 6,.... **186.** $x=13$, 69,....; $y=4$, 25,....; $z=5$, 29,..... **187.** $x=2$, $y=3$, $z=4$. **188.** $x=34$, 27, 20, 13, 6; $y=22$, 26, 30, 34, 38; $z=5$, 11, 17, 23, 29. **189.** $x=8$, $y=0$, $z=1$, $u=10$. **190.** $x=8$, $y=3$, $z=5$, $u=1$. **191.** 70 ja 130 ehk 161 ja 39. **192.** Kümnel viisil. **193.** $136t-24$ ja $136t-34$. **194.** Seitse ehk lõpmatu arv juuri. **195.** 15 ja 10 ehk 6 ja 26. **196.** $\frac{1}{12}$ ja $\frac{17}{24}$, ehk $\frac{2}{12}$ ja $\frac{15}{24}$,...., ehk $\frac{9}{12}$ ja $\frac{1}{24}$. **197.** 2 ja 23 ehk 12 ja 10. **198.** Esimese lugejad 5, 8,...., teise lugejad 2, 6,.... **199.** 3:4 suhtes. **200.** 3:5. **201.** $5+24t$. **202.** $40t+25$. **203.** $-21-40t$. **204.** $17+21t$. **205.** 15 ja 2, ehk 25 ja 5, ehk 35 ja 8. **206.** 29 ja 5, ehk 56 ja 13, ehk 83 ja 21. **207.** 175. **208.** 50 ja 10. **209.** $1+3t$ ja $1+5t$. **210.** Esimesel juhusel suhtuvad tiirude arvud kui 23:19, teisel juhusel juured 6, 29,.... ja 5, 24,....; kolmandal juhusel juured 12, 35,.... ja 10, 29,.... **211.** 6, 11 ja 13. **212.** Esimest sorti 18, 15 ehk 12; teist 3, 10 ehk 17. **213.** 974. **214.** 1, 79 ja 40, ehk 24, 40, 56, ehk 47, 1 ja 72. **215.** 394, 475, 556, 637 ehk 718. **216.** 58. **217.** $1320t+25$. **218.** 133. **219.** 4, 4, 1, ehk 1, 6, 1, ehk 3, 3, 2, ehk 6, 1, 2, ehk 2, 2, 3, ehk 1, 1, 4. **220.** Esimese lugejad 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, teise 7, 4, 1, 5, 2, 3, 1, kolmanda 4, 8, 12, 4, 8, 4, 4.

XIII jagu.

§ 1. **1.** 44 ja 345. **2.** —37 ja —360. **3.** 1065. **4.** 10100. **5.** $\frac{(n+1)a-(n-1)b}{2}n$. **6.** $2n-1$ ja n^2. **7.** $d=3$. **8.** $d=-5$. **9.** $\frac{(3n+7)n}{2}$. **10.** $[a-b(n+1)]n$. **11.** $u=55$, $s=403$. **12.** $a_{11}=26$, $s_{11}=451$. **13.** $a=2$, $s=1661$. **14.** $a_1=56$, $s_{40}=680$. **15.** $r=5$, $n=18$. **16.** $d=-1$, $n=20$. **17.** $r=4$ ja $s=528$. **18.** $d=-2$, $s_{15}=330$. **19.** $r=10$, $u=140$. **20.** $d=3$, $a_{31}=45$. **21.** $a=9$, $r=2$. **22.** $a_1=0$, $d=7$. **23.** $n=10$, $s=265$. **24.** $n=26$, $s_{26}=604{,}5$. **25.** $a=7$, $u=61$. **26.** $a_1=-9$, $a_{25}=3$. **27.** $n=10$, $u=47$. **28.** $n=52$, $a_{52}=143$. **29.** $n=10$, $a=2$. **30.** $n=21$ ehk 24, $a_1=8$ ehk —4. **31.** $a=33$, $r=-4$. **32.** 145. **33.** 4 ehk 9. **34.** 10, 8, 6,.... **35.** — 10. **36.** $r=2$, $n=11$. **37.** 1, 3, 5. **38.** $\frac{1}{2}(m+n)(m+n-1)$. **41.** 2, 5, 8 ehk 8, 5, 2. **42.** 2, 5, 8 ehk 14, 11, 8. **43.** 13. **44.** 120 m. 9 p. **45.** 6. **46.** 5 ehk 12. **47.** 8 ehk 9. **48.** 2. **49.** $\frac{1}{2}$.

§ 2. **51.** 10230. **52.** —13108. **53.** $\frac{1640}{729}$. **54.** $\frac{5}{2}+\frac{19}{12}\sqrt{6}$. **55.** $\frac{8}{3}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$. **56.** $\frac{\sqrt{6}[(\sqrt{3})^n-1]}{\sqrt{3}-1}$. **57.** 512. **58.** $\left(\frac{b}{a}\right)^{99}$. **59.** $q=3$. **60.** $\sqrt{\frac{b}{a}}$. **61.** 189. **62.** $\frac{b}{a+b}\cdot[(-1)^n a^n b^{k-n}-b^k]$. **63.** $a=2$, $s=254$, $p=2^{28}$. **64.** $a_1=\frac{3}{8}$, $s_5=\frac{55}{216}$, $p_5=\frac{1}{6^5}$. **65.** $q=8$, $s=14043$, $p=(192)^5$. **66.** $q=-\frac{2}{3}$, $s_6=44\frac{1}{3}$, $p_6=-(27.32)^3$. **67.** $a=5$, $u=320$. **68.** $a_1=8$, $a_8=-\frac{1}{16}$. **69.** $n=6$, $s=189$, $p=3^6.2^{15}$. **70.** $n=6$, $s_6=24\frac{17}{27}$, $p_6=\frac{2^{15}}{3^3}$. **71.** $q=3$, $n=7$. **72.** $q=2$, $n=6$. **73.** $u=567$, $n=5$. **74.** $a_6=-486$, $n=6$. **75.** $a=1$ ehk —6, $n=4$ ehk 3. **76.** $a_1=2$, $n=8$. **77.** $q=2$, $u=120$. **78.** $q=-6$ ehk 5, $a_3=432$ ehk 300. **79.** $q=-\frac{2}{3}$, $a=27$. **80.** $q=3$ ehk $-\frac{3}{4}$, $a_1=15$ ehk 240. **81.** $q=\pm 3$, $\pm\sqrt{10}.i$. **82.** 3069. **83.** 27, —9, 3, —1 ehk 54, 18, 6, 2. **84.** 64, 32, 16, 8, 4, 2. **85.** 2, 6, 18 ehk 18, 6, 2. **86.** 5, 13, 21, 29.

89. $a_m\sqrt{kl}$, $a_n=k\sqrt[2n]{\left(\frac{l}{k}\right)^m}$. 90. $\frac{na^{n+1}}{a-1}-\frac{a(a^n-1)}{(a-1)^2}$. 91. 2. 92. $\frac{3}{4}$. 93. $\frac{3}{2}\sqrt{6}$. 94. $\frac{16+11\sqrt{2}}{7}$. 95. Esimene liige vabalt valitav, nimetaja aga võrdub $\frac{1}{1+k}$. 96. $k-\frac{r(1-r^k)}{1-r}$. 97. $\frac{1}{3}$AB. 98. $4a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$ ja $2a^2$. 99. $6a(2-\sqrt{3})$ ja $\frac{1}{7}a^2\sqrt{3}$. 100. $2\pi r^2$ ja $4r^2$.

§ 3. 101. $-n(-1)^n$. 102. $\frac{1-(-1)^n(2n+1)}{4}$. 103. $n+1-\frac{1}{2^{n-1}}$. 104. $\frac{3}{4}[1+(2n-1).3^n]$. 105. $6-\frac{2n+3}{2^{n-1}}$. 106. $5.[\frac{10}{81}(10^n-1)-\frac{n}{9}]$. 107. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. 108. $\frac{1}{2}n(n+1)(2n+3)$. 109. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+3a-2)$. 110. $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

XIV jagu.

§ 1. 21. $\sqrt[4]{27}$. 22. Ligikaudu $\frac{3}{7}$. 23. $\sqrt{5}$. 24. Ligikaudu 2, 3. 25. $\frac{1}{8}\sqrt[4]{8}$. 26. $\frac{1}{7}\sqrt[3]{7}$. 28. 3, 2, -4. 29. $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{10}$. 30. 4, $\frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{4}\sqrt{2}$, $4.\sqrt[4]{2}$. 31. -4. 32. $-\frac{6}{7}$. 33. $-\frac{1}{2}$. 34. 7. 35. $2\frac{1}{2}$. 36. $\frac{4}{5}$. 37. $2\frac{1}{3}$. 38. 4 ehk -1. 39. ± 2. 40. 2. 41. 2. 42. 3. 43. 4. 44. 0. 45. 2 ehk 5. 46. $\frac{1}{a+b}$. 47. 1. 48. 35. 49. 1, -2 ehk 3. 50. $lg_a(b\pm\sqrt{b^2-c^2})$. 67. $2lg(a-b)+lgc-lg(a+b)-lgd$. 69. $\frac{1}{5}lg3+3lga+lgb-4lgc)$. 72. $-lga-\frac{1}{n}lgb$. 74. $\frac{1}{8}(6lg2+3lg3+lg5)$. 77. $\frac{11}{24}(2lg2+lg3)$. 78. 0. 79. $2lg2-lg5+\frac{2}{3}lga+lglga$. 80. $lglg(a+b)+lglg(a-b)-lg2$. 81. $4\frac{2}{3}$. 82. 1125. 83. $\frac{\sqrt[5]{11^8}}{\sqrt[7]{5^2}}$. 84. $\frac{169}{7\sqrt[5]{4}\sqrt[3]{7}}$. 85. $\frac{a^3b^3}{c^4}$.

87. $\dfrac{a+x}{a\sqrt[3]{ab\sqrt{b}}}$. **89.** $\dfrac{1}{a^3}\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)\sqrt[5]{(a-b)^3}}{b\sqrt{c}}}$. **90.** $\sqrt[n]{\left(\dfrac{(bz^2\sqrt[5]{b(a-2z)^2}}{a^2\sqrt[10]{a^7}}\right)^m}$.

91. 1. **92.** 10 ehk $\frac{1}{10}$. **93.** 100 ehk $\frac{1}{10}$. **94.** 1, 0 ehk 4.

95. 1000 ehk $\frac{1}{100}$. **96.** $\pm\sqrt{lg5}$. **97.** $3\frac{1}{3}$. **98.** a^{mn}. **99.** 1000. **100.** $\sqrt[n]{m}$.

§ 2. **111.** 7961,6. **112.** 401,74. **113.** 31. **114.** 41,846. **115.** 552,25. **116.** 0,000021952. **117.** 3,5355. **118.** 0,37325. **119.** 36,659. **120.** 0,18894. **121.** 1,4252. **122.** 0,7372. **123.** 5,5555. **124.** 0,13762. **125.** 50,466. **126.** 1,0471. **127.** 0,37077. **128.** 0,00068129. **129.** 4,8674. **130.** 1,0295. **131.** 74,87. **132.** 0,050188. **133.** 1,3631. **134.** 0,79668. **135.** 0,814. **136.** 93,832. **137.** 0,46763. **138.** 73,207. **139.** 0,15669. **140.** 1,2644. **141.** 1,7604. **142.** 2,30103. **143.** —5,1286. **144.** 1,7237. **145.** 0,54866. **146.** 2 ehk —1,585. **147.** Võimatu. **148.** 1,3713. **149.** —0,43683. **150.** 1,1899. **151.** 0,0188865. **152.** 0,146143. **153.** 1,24203. **154.** 0,90084. **155.** —25,3944. **156.** 21,55. **157.** —8094,66. **158.** 2,8946. **159.** 1,33496. **160.** 3,42838. **161.** 0,9937. **162.** 0,88396. **163.** 1,596. **164.** 0,88662. **165.** 0,537275. **166.** —0,88852. **167.** 0,093428. **168.** 0,85119. **169.** 1,16327. **170.** 2974,75. **171.** 4419,4. **172.** 1,0998. **173.** 0,62831. **174.** 0,1289. **175.** 6569,43. **176.** 1,0471. **177.** 142,62. **178.** $\dfrac{lgu-lga}{lgq}+1$. **179.** 0,0171904. **180.** $\dfrac{2lgp}{lga+lgu}$. **181.** 2. **182.** —2. **183.** 18. **184.** 3 ehk —5. **185.** 3. **186.** 2. **187.** 25. **188.** $\dfrac{16}{\sqrt[3]{5}}$. **189.** 2,345. **190.** 1,8575. **191.** 16 ja 10. **192.** 1000000 ja 10. **193.** 1,6624 ja 1,2745. **194.** $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ ja $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. **195.** 4 ja 2 ehk 9 ja —3. **196.** $2\frac{1}{4}$ ja $\frac{3}{4}$. **197.** 2 ja 4. **198.** 1 ja 1 ehk 16 ja 4. **199.** 3 ja 5. **200.** 2 ja 3.

§ 3. **201.** 363 m. 47 p. **202.** 2493 m. 94 p. **203.** 20. **204.** 4%. **205.** 5000. **206.** 7.18. **207.** 8304 m. **208.** 22 a. 10 k. 12 p. **209.** $4^1/_2$%. **210.** 9. **211.** $\dfrac{aq(q^t-1)}{q-1}$. **212.** $aq^t+\dfrac{b(q^t-1)}{q-1}$.

213. 2641 m. 40 p. **214.** 103946. **215.** 356 m. 85 p. **216.** 267 m. 86 p. **217.** 10. **218.** 5. **219.** 17864 m. 10 p. **220.** 14118 m. 60 p. **221.** $Aq^t=\frac{a}{q-1}(q^t-1)$. **222.** 500. **223.** 3816 m. 20 p. **224.** 10. **225.** 18 a. ja 363 m. **226.** $aq^{s+t}=\frac{b}{q-1}(q^t-1)$. **227.** 5994 m. 60 p. **228.** 979 m. 82 p. **229.** 30. **230.** 2629 m. 40 p.

XV jagu.

§ 1. **1.** $x-3$. **2.** $2a+3$. **3.** $3(2x^2-3x+5)$. **4.** $a(2a-3x)$. **5.** a^3-2a^2b. **6.** $a^2(x+2a)$. **7.** $2a(2a^2-3a+1)$. **8.** $3ac^2(2a^2-3b^2)$. **9.** $x-a$. **10.** $(x-3)(x-a)$. **11.** $a-2b$. **12.** $3x-y$. **13.** $12a^4-20a^3+5a^2+5a-2$. **14.** $(4a^3+4a^2+3a+9)(a^2-4a+5)$. **15.** $(x^3-6x^2+11x-6)(x-4)$. **16.** $(a-b)(a^2b+3ab^2-3a^3-b^3)$. **17.** $2(3x+2)(6x^3+5x^2-23x+5)$. **18.** $(x+3y)(6x^3-5x^2y-27xy^2+5y^3)$. **19.** $(x^3-19x-30)(x^2+5x+10)$. **20.** $(x^3-7x-6)(3x-2)$.

§ 2. **35.** 24. **36.** 840. **37.** 3024. **38.** 45. **39.** 15. **40.** 6. **41.** 14 ehk 3. **42.** 7. **44.** 24; 6; 2 **45.** C_9^3; C_8^2. **46.** A_{11}^4; A_{10}^3. **47.** C_{n-h}^{k-h}. **48.** A_{n-h}^{k-h}. **49.** $k<\frac{n+1}{2}$; $\frac{n-1}{2}$ ehk $\frac{n}{2}$.

§ 3. **63.** $126a^5b^4$. **64.** $-3432a^7b^7$. **65.** $C_{19}^8a^8x^{11}$ ja $C_{19}^8a^{11}x^8$. **66.** $C_{24}^6a^6x^4$ ja $C_{24}^6a^{18}x^{30}$. **67.** $84z^4$. **68.** $\frac{1120}{a^4}$. **69.** $715(1+z)^4(1-z)^2\sqrt{1+z}$. **70.** 792.

§ 4. **75.** $\frac{a^3b^2+4a^2b+3a}{a^2b^2+3ab+1}$. **76.** $\frac{6x^3+5x}{6x^4+7x^2+1}$. **77.** $\frac{a^4+2a^2-a+1}{a^3+a^2+2a}$. **78.** $\frac{x^3-x^2-6x+8}{x^4-2x^3-4x^2+15x-13}$. **87.** $(a,a-1,a+1,a)$. **88.** $(x-1,x+1,x-1,x+1)$. **89.** $(0,1,1,1,2)$. **90.** $(1,1,1,1,2,1,4)$. **91.** $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{39}{70}, \frac{99}{239}$. **94.** $2, 3, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{7}, \frac{87}{32}, \frac{106}{39}, \frac{193}{71}, \frac{1264}{465}$. **96.** $0, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{6}{83}, \frac{43}{595}, \frac{479}{6628}$. **101.** $(1,2,2,...)$. **102.** $(1,1,2,1,2,...)$. **103.** $(4,2,8,2,8,...)$. **104.** $(2,1,1,1,4,1,1,1,4,...)$. **105.** $(4,2,1,3,1,2,8,2,1,3,1,2,8,\ldots)$. **106.** $(5,1,1,3,5,3,1,1,10,1,1,3,5,3,1,1,10,\ldots)$. **107.** $(a,2a,2a,...)$. **108.** $(a,1,2a,1,2a,...)$. **109.** $[a-1,1,2(a-1),1,2(a-1),...]$. **110.** $[a-2,1,2(a-2),1,2(a-2),...]$. **111.** $\sqrt{17}$.

112. $\sqrt{15}$. **113.** $\frac{\sqrt{15}-3}{2}$. **114.** $\sqrt{23}$. **115.** $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$. **116.** $\sqrt{a^2+a}$.
117. $5-13t$, $8t-3$. **118.** $14t-9$, $9t-6$. **119.** $14-16t$, $23t-20$.
120. $11t+8$, $7t+5$. **121.** $34t-20$, $29-49t$. **122.** $19t+17$, $17t+14$. **123.** $22-34t$, $55t-35$. **124.** $344t+141$, $149t+61$.
125. (1,2,2,1,1,2,2,...). **126.** (1,1,1,2,3,9,...). **127.** (2,10,1,1,...).
128. (0,1,1,3,...).

§ 5. 131. $\frac{4ac-b^2}{4a}$. **132.** $\frac{a}{2}$. **133.** Ruut. **134.** Ruut.
135. Kuup. **136.** Kuup. **137.** Väiksem ja suurem juur hulkliikme $(n^2-4mp)z^2+[4(ap+cm)-2bn]z+b^2-4ac$ juurtest.
138. Kõige suurem 6, kõige väiksem $3\frac{1}{2}$. **139.** Ei ole. **140.** Ei ole.

§ 6. **141.** $3x-5$. **143.** x^2-5x+2. **144.** Juur $2x^2-3$, jääk $6x^4-13x^2+9$. **145.** $\frac{5}{6x}-\frac{26}{15(x+3)}+\frac{9}{10(x-2)}$. **146.** $\frac{1}{3(1-x)}+$ $+\frac{2}{3(1+x)}+\frac{1}{3(x-2)}-\frac{2}{3(x+2)}$. **147.** $a^2=4(b+c)$. **148.** $(x-5y+$ $+2)(2x-3)$. **149.** $(a_2b-ab_2)(a_1c_2-a_2c_1)=(a_2c-ac_2)(a_1b_2-a_2b_1)$.
150. $(2x-3y)^2+(x+4y)^2$ ehk $(2x+\frac{7}{5}y)^2+(x-\frac{24}{5}y)^2$, veel $(-2x+$ $+3y)^2+(x+4y)^2$ ehk $(-2x-\frac{7}{5}y)^2+(x-\frac{24}{5}y)^2$.

§ 7. **151.** $(2302)_5$. **152.** 935. **153.** $144a+12b+c$. **154.** 98.
155. $3a^3+5a+2$; $a>5$. **156.** 9. **157.** $(14035)_3$; $(2241)_5$. **158.** $(1050)_9$; $(24)_{11}$. **159.** Ruutjuur 111, kuupjuur 101. **160.** (102); (14586).

Kordamisülesanded.

1. $3x^2-13x+12=0$ ja $4x^2-19x+12=0$. **2.** 40. **3.** 44 ja 36 ehk 50 ja 30. **4.** 30 ja 24. **5.** $60x^4-304x^3+497x^2-$ $-304x+60=0$. **6.** 5 ja 5. **7.** 5 ja 33, ehk 10 ja 26, ehk 15 ja 19, ehk 20 ja 12, ehk 25 ja 5. **8.** 4 ja 30, ehk 24 ja 10, ehk 8 ja 35, ehk 28 ja 15. **9.** 2 aastaks $4\frac{1}{2}$%-ga. **10.** Kapitaalid 2800 ja 1200 ehk 1600 ja 2400; protsent 4 ja 6 ehk 7 ja 3. **11.** 2 t., $2\frac{2}{3}$ t. ja $3\frac{1}{3}$ t. **12.** 17. **13.** 390 ehk —735.
14. 61. **15.** 16, 12 ja 9. **16.** Esimene osa $10\frac{2}{3}$, viimane

$1041\frac{2}{3}$. **17.** 36, 162, 288 jne. **18.** 273 ja 16, ehk 161 ja 128, ehk 49 ja 240. **19.** 1 ehk $\frac{9}{16}$. **20.** 96, 144 ja 216, ehk 392, —448 ja 512. **21.** 5. **22.** 21 ehk 22. **23.** 2, 6 ja 18. **24.** 1941. **25.** $4\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2}$. **26.** 7. **27.** 17 ja 2 ehk 0 ja 5. **28.** 10 ja 5 ehk 37 ja 1. **29.** 1085 ja 1710. **30.** 2 ja 5. **31.** 5,5. **32.** 6264 m. 70 p. **33.** 10 ehk 12. **34.** 8. **35.** 7 aastaks 5%-ga. **36.** 27562 m. 50 p. **37.** 196 ja 84. **38.** 10, 12 ja 15. **39.** 8. **40.** 416 m. **41.** 9, 12, 16. **42.** 56. **43.** 1 ja $1\frac{16}{31}$. **44.** $8008x^3$. **45.** 852. **46.** $x^3—x^2—34x—56$. **47.** 2048. **48.** 222 ja 553. **49.** 7. **50.** 888 ruutsülda 48 ruutj. **51.** 21 ja 112, ehk 45 ja 88, ehk 69 ja 64, ehk 93 ja 40, ehk 117 ja 16. **52.** 135, 45 ja 15. **53** 1, 4, 7 ja 10, ehk —10, —7, —4 ja —1. **54.** 12, 18 ja 27 ehk 27, 18 ja 12. **55.** (4,1,3,1,8,1,3,1,8,....). **56.** (5,1,10,1,10,....). **57.** 5 ja 8. **58.** 36 ja 7, ehk 27 ja 14, ehk 18 ja 21, ehk 9 ja 28. **59.** 11. **60.** 3135.

Sisu.

VII jagu. Astmed ja juured.

VIII jagu. Irratsionaal-arvud.

IX jagu. Graafilise kujutamise ja funktsioonide sissejuhatus.

X jagu. Teise astme võrrandid.

XI jagu. Kõrgema astme võrrandid.

XII jagu. Määramatu analüüs.

Võrrandite uurimine.

XIII jagu. Read.

XIV jagu. Logaritmid ja nende tarvitamine.

XV jagu. Täiendavad peatükid.

Lôppsôna.

„Algebraliste ülesannete kogu“ II jao praeguses väljaandes, võrreldes tema endise venekeelse väljaandega, on tähelepanemiseväärt järgmised muutused:

1) Kõik paralleelsed arvulised näitused kui ka vähem tähtsad paralleelsed sõnalised ülesanded on välja jäetud;

2) et õpperaamat tulevase Eesti kooli nõuetele vastaks, on teda täiendatud „Graafilise kujutamise ja funktsioonide sissejuhatusega“ (IX jagu), mis endise raamatu jagude arvu ühe võrra suurendab, ja

3) on teoreetilist seletust paljudes kohtades kergendamise mõttes muudetud, kuna aga ülesanded, mis alles on jäetud, sisuliselt endised on.

Matemaatika oskussõnu tarvitades on silmas peetud peaasjalikult Tartu ülikooli matemaatikakomisjonis väljatöötatud ja II matemaatikakongressi poolt vastuvõetud oskussõnu.

Loeme oma kohuseks siinkohal tõsist tänu avaldada lektor J. V. Veskile, kes käsikirja keeleliselt läbi vaatas.

Käesolev õpperaamat püüab Eesti kooli nõudeid rahuldada, vähemalt seni, kuni õppekavad kindlaks määratud ja neile õppekavadele vastavad algupärased tööd ilmuvad.

Autorid.

Tartus, 1. aug. 1921. a.

Trükivead.

Lhk. 1	6 rida	ülevalt	võrandi	asemel	peab olema	võrrandi.
„ 31	15 „	alt	1	asemel		*i.*
„ 39	3 „	„	$^1/_2$	„		1.
„ 142	§ 9			„		§ 3.