40997.-

Ueber die

Bestimmung der Bahn eines Planeten

aus drei vollständigen Beobachtungen.

Eine zur Erlangung des

DOCTORGRADES

verfasste und mit Bewilligung

der hochverordneten physiko-mathematischen Facultät

der Kaiserlichen Universität zu Dorpat

zur öffentlichen Vertheidigung bestimmte Abhandlung

von

Friedr. Wilh. Berg,

Mag. Astron.

Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1871.

Gedruckt mit Genehmigung der physico-mathematischen Facultät der Universität Dorpat.

№ 19.

Professor C. Grewingk,
Decan der physico-mathemat. Facultät.

1.

Die Vorzüglichkeit einer Vorschrift zur numerischen Ermittelung irgend welcher Grösse, muss beurtheilt werden, erstens nach der Sicherheit, zweitens aber auch nach der Leichtigkeit, mit der diese Vorschrift die gewünschte Grösse giebt. Je grösser Sicherheit und Bequemlichkeit der Vorschrift sind, für desto vorzüglicher und vollendeter wird die Vorschrift gelten können. Hierbei begreife ich unter Leichtigkeit und Bequemlichkeit der Anwendung nicht nur Das, dass alle vorkommenden Ausdrücke so bequem wie möglich sich berechnen lassen müssen, sondern auch Das, dass der Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln auf ein Minimum zurückgeführt sei.

Im Folgenden habe ich mich nun bemüht zur Ermittelung für die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen, eine solche Sammlung von Formeln zu geben, bei der die eben bezeichneten Gesichtspunkte so viel wie möglich berücksichtigt sind. Zum Schlusse habe ich dann diesen neuen Gang der Berechnung durch dasselbe Beispiel erläutert, an dem auch *Hansen* seine Methode zur Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers geprüft hat.

2.

Nach dem Vorgange von *Gauss*, geht man bei der Bestimmung der Bahn eines die Sonne umkreisenden Körpers bekanntlich von der Bedingung aus, dass alle Punkte dieser Bahn und der Sonnenmittelpunkt in einer Ebene liegen müssen, einer Bedingung, die aus der Theorie der Centralbewegung folgt. Durch diese Bedingung erhält man nämlich practisch brauchbare Ausdrücke zur Bestimmung der Abstände des Himmelskörpers von der Erde. Sind aber die Abstände des unbekannten Himmelskörpers von der Erde, für drei Zeitmomente bekannt, so bietet die Berechnung der die Gestalt und Lage der Bahn bestimmenden Stücke, der sogenannten Bahnelemente weiter keine Schwierigkeit. Deshalb soll auch in der folgenden Untersuchung von dieser Bedingung ausgegangen werden.

3.

Sind x, y, z die rechtwinklichen, heliocentrischen Coordinaten irgend eines Ortes des unbekannten Himmelskörpers, so wird die Bedingung, dieser Ort und der Sonnenmittelpunkt, der Anfangspunkt der Coordinaten, sollen in einer Ebene liegen, ausgedrückt durch

$$Ax + By + Cz = o. \tag{1}$$

Soll nun ein zweiter und dritter Ort desselben Himmelskörpers in derselben Ebene liegen, so müssen die Coordinaten dieser Oerter die vorstehende Gleichung befriedigen. Dadurch erhält man für die drei Planetenörter

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= o \\ Ax' + By' + Cz' &= o \\ Ax'' + By'' + Cz'' &= o. \end{aligned} \tag{2}$$

Bestimmt man aus den beiden ersten Gleichungen die Verhältnisse $A : B$ und $C : B$, und substituirt dieselben in die dritte, so resultirt eine Gleichung die ausdrückt: die drei Planetenörter und der Sonnenmittelpunkt liegen in einer Ebene. Diese Gleichung lautet

$$(y'z - yz')\,x'' + (z'x - zx')\,y'' + (x'y - xy')\,z'' = o. \tag{3}$$

Bezeichnet man die doppelte Fläche des durch den Sonnenmittelpunkt und die beiden ersten Planetenörter gebildeten Dreiecks, durch (r, r'), wo r der Radius vector des ersten und r' der des zweiten Ortes sein möge, dann ist

$y'z - yz' =$ der Projection von (r, r') auf die yz Ebene
$z'x - zx' =$ „ „ „ „ „ „ xz „
$x'y - xy' =$ „ „ „ „ „ „ xy „

und bezieht man die Bahnebene auf die xy Ebene, als Fundamentalebene, durch die Neigung i und die Knotenlänge $\varepsilon - \Omega$, so erhält man (conf. *Gauss*, theoria motus. c. c. Art. 111)

$$\begin{aligned} y'z - yz' &= (rr') \sin(\varepsilon - \Omega) \sin i \\ xz' - x'z &= (rr') \cos(\varepsilon - \Omega) \sin i \\ xy' - x'y &= (rr') \cos i \end{aligned} \tag{4}$$

und ordnet man, unter Beibehaltung der vorstehenden Bezeichnung, die Gleichung (3) erstens nach x, zweitens nach y, und drittens nach z, so kommt

$$\begin{aligned} (r'r'')\,x - (rr'')\,x' + (rr')\,x'' &= o \\ (r'r'')\,y - (rr'')\,y' + (rr')\,y'' &= o \\ (r'r'')\,z - (rr'')\,z' + (rr')\,z'' &= o \end{aligned} \tag{5}$$

wobei r'' den Radius vector des dritten Planetenortes bezeichnet.

Die Möglichkeit der Anwendung dieser Gleichungen zur Bestimmung der Abstände des Himmelskörpers von der Erde, die in den Ausdrücken der Coordinaten die einzigen unbekannten Grössen sind, beruht nun darauf, dass man den numerisch grössten Theil der Quantitäten $(r'r'')$, (rr'') und (rr'), mit Hilfe des zweiten *Kepler*'schen Gesetzes, durch die Zwischenzeiten ausdrücken kann. Durch genäherte Werthe der Abstände kann man dann für diese Quantitäten genauere Werthe finden. Dadurch ist zugleich der Gang zur genauen Bestimmung der Abstände gegeben.

4.

Es seien für den beobachteten Himmelskörper, entsprechend den Beobachtungszeiten t, t' und t''

$\alpha\ \alpha'\ \alpha''$ die drei geocentrischen AR oder Längen
$\beta\ \beta'\ \beta''$ „ „ „ Dec. oder Breiten
$\rho\ \rho'\ \rho''$ „ „ Abstände vom Erdmittelpunkte,

und bezeichnen

$$A\ A'\ A'' \quad B\ B'\ B'' \quad R\ R'\ R''$$

ähnliche Grössen für die Erde, in Bezug auf den Sonnenmittelpunkt, so kann man den rechtwinklichen, heliocentrischen Coordinaten die Form

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\beta \cos(\alpha - \varepsilon) + R \cos B \cos(A - \varepsilon) \\ y &= \rho \cos\beta \sin(\alpha - \varepsilon) + R \cos B \sin(A - \varepsilon) \\ z &= \rho \sin\beta + R \sin B \end{aligned} \tag{6}$$

geben, wobei ε einen völlig willkürlichen Winkel bezeichnet.

Die Ebene xy fällt nun entweder mit der Ebene der Ekliptik oder der des Aequators zusammen, jenachdem Längen und Breiten oder AR. und Decl. genommen werden.

Substituirt man nun die Ausdrücke (6) und die ähnlichen für $x', y', z', x'', y'', z''$ in die Gleichungen (5) und setzt hierbei

$$\rho_{,} = \rho \cos\beta \qquad \rho'_{,} = \rho' \cos\beta' \qquad \rho''_{,} = \rho'' \cos\beta''$$
$$R_{,} = R \cos B \qquad R'_{,} = R' \cos B' \qquad R''_{,} = R'' \cos B''$$

(7) $$\frac{(r'r'')}{(rr'')} = f \qquad \frac{(rr')}{(rr'')} = f''$$

so kommt

$$f\rho_{,} \cos(\alpha-\varepsilon) - \rho_{,}' \cos(\alpha'-\varepsilon) + f''\rho_{,}'' \cos(\alpha''-\varepsilon) =$$
$$R_{,}' \cos(A'-\varepsilon) - f R_{,} \cos(A-\varepsilon) - f'' R_{,}'' \cos(A''-\varepsilon)$$

(8) $$f\rho_{,} \sin(\alpha-\varepsilon) - \rho_{,}' \sin(\alpha'-\varepsilon) + f''\rho_{,}'' \sin(\alpha''-\varepsilon) =$$
$$R_{,}' \sin(A'-\varepsilon) - f R_{,} \sin(A-\varepsilon) - f'' R_{,}'' \sin(A''-\varepsilon)$$

$$f\rho_{,} \operatorname{tang} {}_{,}\beta - \rho_{,}' \operatorname{tang} {}_{,}\beta' + f''\rho_{,}'' \operatorname{tang} {}_{,}\beta'' =$$
$$R_{,}' \operatorname{tang} B' - f R_{,} \operatorname{tang} B - f'' R_{,}'' \operatorname{tang} B''.$$

Wird die erste der vorstehenden Gleichungen multiplicirt mit

$$\operatorname{tang} {}_{,}\beta \sin(\alpha''-\varepsilon) - \operatorname{tang} {}_{,}\beta'' \sin(\alpha-\varepsilon)$$

die zweite mit $\operatorname{tang} {}_{,}\beta'' \cos(\alpha-\varepsilon) - \operatorname{tang} {}_{,}\beta \cos(\alpha''-\varepsilon)$

die dritte mit $\sin(\alpha-\alpha'')$

so giebt die Addition der Produkte

(9) $$\mathfrak{D}.\rho_{,}' = \mathfrak{B}' R_{,}' - f\mathfrak{B} R_{,} - f''\mathfrak{B}'' R_{,}''$$

wobei gesetzt ist

(10) $$\mathfrak{D} = \operatorname{tang} {}_{,}\beta \sin(\alpha''-\alpha') + \operatorname{tang} {}_{,}\beta' \sin(\alpha-\alpha'') + \operatorname{tang} {}_{,}\beta'' \sin(\alpha'-\alpha)$$
$$\mathfrak{B}^{\nu} = \operatorname{tang} B^{\nu} \sin(\alpha-\alpha'') + \operatorname{tang} {}_{,}\beta'' \sin(A^{\nu}-\alpha) + \operatorname{tang} {}_{,}\beta \sin(\alpha''-A^{\nu}).$$

Setzt man nun

$$\operatorname{tang} {}_{,}\beta = \sin(\alpha-K) \operatorname{tang} I$$
$$\operatorname{tang} {}_{,}\beta'' = \sin(\alpha''-K) \operatorname{tang} I$$
$$\operatorname{tang} {}_{,}\beta^{0} = \sin(\alpha'-K) \operatorname{tang} I$$
$$\operatorname{tang} B^{0\nu} = \sin(A^{\nu}-K) \operatorname{tang} I$$

so geht die Gleichung (9) über in

(11) $$\frac{\sin({}_{,}\beta'-{}_{,}\beta^{0})}{\cos {}_{,}\beta^{0} \cos {}_{,}\beta'}\rho_{,}' = R_{,}' \frac{\sin(B^{0\prime}-B')}{\cos B^{0\prime} \cos B'} - f R_{,} \frac{\sin(B^{0}-B)}{\cos B^{0} \cos B} - f'' R_{,}'' \frac{\sin(B^{0\prime\prime}-B'')}{\cos B^{0\prime\prime} \cos B''}.$$

5.

Nach bekannten Entwickelungen, die zumeist von *Lagrange* *) herrühren, kann man die doppelten Dreiecksflächen (rr'), $(r'r'')$, (rr'') folgendermassen ausdrücken

*) *Lagrange* Mécanique analytique, troisième édition par *J. Bertrand*. Paris 1853—55. tome II. pag. 28—31. Die l. c. im Art. 28 gegebene Reihe für T ist fehlerhaft; das dritte Glied dieser Reihe ist mit s und nicht mit s^2 zu multipliciren.

$$(rr') = \theta''\sqrt{p}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\frac{\theta''^2}{r'^3} - \tfrac{1}{4}\frac{\theta''^3}{r'^4}\frac{dr'}{kdt} + \ldots\right\}$$
$$(r'r'') = \theta\sqrt{p}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\frac{\theta^2}{r'^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\theta^3}{r'^4}\frac{dr'}{kdt} + \ldots\right\} \qquad (12)$$
$$(rr'') = \theta'\sqrt{p}\left\{1 - \tfrac{1}{6}\frac{\theta'^2}{r'^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\theta'^2(\theta-\theta'')}{r'^4}\frac{dr'}{kdt} + \ldots\right\}$$

hierbei ist p der halbe Parameter der Planetenbahn, k die *Gauss*'sche Constante und

$$\theta = k(t''-t') \qquad \theta' = k(t''-t) \qquad \theta'' = k(t'-t).$$

Aus diesen Ausdrücken erhält man nun

$$f = \frac{\theta}{\theta'}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\frac{\theta''(\theta+\theta')}{r'^3} + \tfrac{1}{4}\frac{\theta''(\theta''^2+\theta'\theta''-\theta^2)}{r'^4}\frac{dr'}{kdt} \ldots\right\}$$
$$(13)$$
$$f'' = \frac{\theta''}{\theta'}\left\{1 + \tfrac{1}{6}\frac{\theta(\theta'+\theta'')}{r'^3} - \tfrac{1}{4}\frac{\theta(\theta^2+\theta\theta''-\theta''^2)}{r'^4}\frac{dr'}{kdt} \ldots\right\}.$$

Wie man sieht, so sind die zweiten Glieder in den vorstehenden Klammerausdrücken von der Ordnung k^2, und da k klein ist, und zwar hat man $k = 0{,}01720209895$, so könnte man für f und f'', als erste Näherungswerthe, die Quotienten $\theta : \theta'$ und $\theta'' : \theta'$ nehmen, dann könnte aus (11) das unbekannte ρ', bestimmt werden. Aber zur Bestimmung des ρ' aus (11) können die Verhältnisse $\theta : \theta'$ und $\theta'' : \theta'$ nicht als Näherungswerthe von f und f'' angesehen werden, denn da in der Gleichung (11), die Coefficenten von $R_{,}$, $R_{,}'$ und $R_{,}''$ in Bezug auf k von Nullter Ordnung sind, $\sin({}_{,}\beta'-{}_{,}\beta^{0})$ aber, wie ich gleich zeigen will, von zweiter Ordnung, so erzeugt ein Fehler von der Ordnung k^2 in f und f'', in ρ' einen Fehler von der Ordnung Null, und da ρ' in Bezug auf k von der Ordnung Null ist, so kann der gefundene Werth von ρ' nicht einmal für einen Näherungswerth gelten. Man ist also genöthigt die mit r'^3 dividirten Glieder in den Ausdrücken für f und f'' mitzunehmen. Dadurch aber erscheinen in der Gleichung (11) die beiden unbekannten ρ' und r'. Diese beiden hat nun *Gauss* zuerst von einer Unbekannten abhängig gemacht, indem er das von der Sonne, der Erde und dem unbekannten Himmelskörper gebildete Dreieck betrachtete.

6.

Um die Ordnung von $\sin({}_{,}\beta'-{}_{,}\beta^{0})$ zu bestimmen, betrachte ich das von den drei Planetenörtern und dem Pole der Fundamentalebene

(Aequatorpol oder Ekliptikpol) gebildete Viereck. Hierbei bezeichne ich den Bogen grössten Kreises zwischen dem ersten und zweiten Planetenorte durch m_3, den zwischen dem ersten und dritten durch m_2 und den zwischen dem zweiten und dritten durch m_1. Verbindet man den zweiten Planetenort durch einen grössten Kreis mit dem Pole, so ist dasjenige Stück dieses grössten Kreises, das zwischen dem Pole und der Seite m_2 liegt, gleich $90 - \beta^0$. Nun sieht man, dass das Dreieck, dessen Seiten m_1, m_2 und m_3 sind, mit dem Dreiecke, dessen Seiten $90 - \beta$, $90 - \beta''$ und m_2 sind, auf einerlei Basis, nämlich m_2 stehn; für solche Dreiecke verhalten sich aber die sphärischen Moduli*), wie die Sinusse der Höhen der Dreiecke. Darnach hat man sofort

$$\sin m_1 . \sin m_3 . \sin (m_1, m_3) : \cos \beta \cos \beta'' \sin (\alpha'' - \alpha) = \sin (\beta^0 - \beta') : \cos \beta^0$$

also

$$\sin (\beta^0 - \beta') = \frac{\sin m_1 \sin m_3 \sin (m_1, m_3) \cos \beta^0}{\cos \beta . \cos \beta'' \sin (\alpha'' - \alpha)} . \tag{14}$$

Aus den das eben bezeichnete Viereck zusammensetzenden Dreiecken ergiebt sich leicht, dass $\sin m_1$ und $\sin m_3$ in Bezug auf k von gleicher Ordnung sind mit $\sin (\alpha'' - \alpha')$ und $\sin (\alpha' - \alpha)$ und da man setzen kann

$$\alpha'' = \alpha' + \theta \frac{d\alpha'}{kdt} + \tfrac{1}{2} \theta^2 \frac{d^2\alpha'}{(kdt)^2} + \ldots$$

$$\alpha = \alpha' - \theta'' \frac{d\alpha'}{kdt} + \tfrac{1}{2} \theta''^2 \frac{d^2\alpha'}{(kdt)^2} - \ldots .$$

so erkennt man bald, dass $\sin m_1$, $\sin m_3$ als auch $\sin (\alpha'' - \alpha)$ von erster Ordnung sind, wenn k als eine Grösse erster Ordnung angesehen wird.

Um die Ordnung von $\sin (m_1, m_3)$ zu erhalten, bemerke man dass

$$\sin m_1 \sin m_3 \sin (m_1 m_3) = 2 \varDelta$$

ist, wenn $\varDelta^2$ folgendes Produkt bezeichnet

$$\sin \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2 + m_3) \sin \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2 - m_3) \sin \tfrac{1}{2} (m_2 + m_3 - m_1) \sin \tfrac{1}{2} (m_1 + m_3 - m_2)$$

und da, wie man leicht nachweisen kann, die drei ersten Sinusse in dem vorstehenden Produkte von erster Ordnung sind, der vierte dagegen von dritter, so ist also $\sin (m_1, m_3)$ von erster Ordnung und damit ergiebt sich, dass $\sin (\beta^0 - \beta')$ von zweiter Ordnung ist.

*) Das Produkt aus den Sinussen zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks in den Sinus des eingeschlossenen Winkels, nennt Herr Prof. *Minding*, und wohl mit grossem Rechte, den Modul des sphärischen Dreiecks, oder einfach den sphärischen Modul. Da der Beweis des ausgesprochenen Satzes gar keine Schwierigkeiten bietet, so übergehe ich ihn, der Kürze wegen.

Es ist deshalb irrig, wenn *Encke* diese Grösse als von dritter Ordnung angiebt. (Conf. Berl. Jahrbuch für 1854 pag. 355.)

Der Coefficient $\mathfrak{D}$ dagegen ist eine Grösse dritter Ordnung da

$$\mathfrak{D} = \sin (\alpha'' - \alpha) \frac{\sin (\beta' - \beta^0)}{\cos \beta^0 \cos \beta'} \tag{15}$$

und man sieht aus diesem sofort, dass $\mathfrak{D} = o$ wird, wenn die drei Planetenörter in einem grössten Kreise liegen.

7.

Zur weitern Umformung der Gleichung (11) setze ich

$$\begin{aligned} f &= \frac{\theta}{\theta'} \frac{\eta'}{\eta} = \frac{\theta}{\theta'} \left\{ 1 + \frac{Z}{r'^3} \right\} \\ f'' &= \frac{\theta''}{\theta'} \frac{\eta'}{\eta''} = \frac{\theta''}{\theta'} \left\{ 1 + \frac{Z''}{r'^3} \right\} \end{aligned} \tag{16}$$

wo demnach

$$Z = r'^3 \left\{ \frac{\eta'}{\eta} - 1 \right\} \qquad Z'' = r'^3 \left\{ \frac{\eta'}{\eta''} - 1 \right\} \tag{17}$$

gesetzt ist, und in erster Näherung nimmt man

$$Z = \tfrac{1}{6} \theta'' (\theta + \theta') \qquad Z'' = \tfrac{1}{6} \theta (\theta' + \theta''). \tag{18}$$

Führt man nun die vorstehenden Werthe in die Gleichung (11), die ich Kürze halber so schreibe

$$a \rho_\prime' = b' - f b - f'' b'' \tag{19}$$

ein, und setzt man

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left(b' - \frac{\theta}{\theta'} b - \frac{\theta''}{\theta'} b'' \right) &= c \\ \frac{1}{a} \left(b \frac{\theta}{\theta'} Z + b'' \frac{\theta''}{\theta'} Z'' \right) &= d \end{aligned} \tag{20}$$

so kommt

$$\rho_\prime' = c - \frac{d}{r'^3} . \tag{21}$$

Bei den aufeinanderfolgenden Näherungen, in denen die Z nach und nach verbessert werden, hat man also nur d neu zu berechnen, und c nur dann, wenn man die Beobachtungszeiten wegen der Aberration verbessert hat.

Nimmt man das Dreieck, Sonne, Erde und beobachteter Himmelskörper, und nennt den äussern Winkel an der Erde φ', den innern am Planeten ψ', so bekommt man

$$\rho' = \frac{R' \sin (\varphi' - \psi')}{\sin \psi'} \qquad r' = \frac{R' \sin \varphi'}{\sin \psi'} \tag{22}$$

und setzt man

$$(23)\qquad \begin{aligned} R' \cos \beta' \sin \varphi' &= \gamma \sin \gamma' \\ R' \cos \beta' \cos \varphi' + c &= \gamma \cos \gamma' \end{aligned}$$

so geht (21) über in

$$(24)\qquad \sin(\psi' - \gamma') = \frac{d \sin \gamma' . \sin \psi'^4}{(R' \sin \varphi')^4 \cos \beta'},$$

und man hat es immer in seiner Gewalt den Winkel γ' so zu bestimmen, dass $d . \sin \gamma'$ positiv wird.

Man braucht also γ garnicht zu bestimmen, und γ' bleibt durch alle Näherungen hindurch ungeändert, wofern nicht c geändert wird, welches letztere aber nur dann geändert wird, wenn man die Verbesserung der Zeiten wegen der Aberration vornimmt. Anders gestaltet es sich bei *Gauss*, *Encke* und *Hansen*.

8.

Aus der Gleichung (24) muss nun der Winkel ψ' bestimmt werden, der dann mit vermittelst der Ausdrücke (22) r' und ρ' finden lässt.

Die Bestimmung des Winkels ψ' geschieht am besten durch Versuche, bei denen man folgenden Gang einhält.

Man nehme für das ψ' rechts irgend einen Werth $\psi'_{,}$, der aber, wie aus (22) folgt, stets kleiner sein muss als φ', so wird man im Allgemeinen, wenn der angenommene Werth nicht der wahre ist, links $\psi'_{,,}$ erhalten. Zugleich berechne man die Aenderung von $\psi'_{,,}$, wenn $\psi'_{,}$ um $1''$ sich ändert.

Sei nun die erstere $h . 1''$, wenn $\psi'_{,}$ um $1''$ sich geändert hat, und ist

$$\psi'_{,} + x''$$

der wahre Werth, so muss nahe

$$\psi'_{,,} + h x'' = \psi'_{,} + x''$$

sein, also

$$(25)\qquad x'' = \frac{\psi'_{,,} - \psi'_{,}}{1 - h}$$

aus der dann das unbekannte x gefunden wird.

Nach dieser Formel habe ich folgendes Beispiel berechnet:

Es sei $\quad \log m = 0{,}4803493 \qquad \gamma' = 13^0\, 34'\, 54'', 13$

und die zu lösende Gleichung laute

$$(26)\qquad \sin(\psi' - \gamma') = m \sin \psi'^4.$$

Ich beginne die Rechnung mit $\psi'_{,} = 18^0$ und finde nacheinander

$$\begin{aligned} \psi'_2 &= 13^0\, 42'\, 6'',10 \text{ hierbei war } h = 0{,}3395 \\ \psi'_3 &= 14\;\; 12\;\; 19{,}89 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} = 0{,}1561 \\ \psi'_4 &= 14\;\; 12\;\; 38{,}24 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} = 0{,}1733 \end{aligned}$$

womit die Rechnung beendet ist, da der letzte Werth der gesuchte ist.

Die Anzahl der Wiederholungen hängt hauptsächlich von der Genauigkeit der Grösse h ab, die man deshalb, um die Rechnung abzukürzen, so genau wie möglich bestimmen muss.

Denselben Gedanken habe ich auch mit Vortheil bei der Bestimmung der excentrischen Anomalie aus der mittlern, durch die *Kepler*sche Gleichung, angewandt. Zur bessern Beurtheilung setze ich ein vollständig berechnetes Beispiel her. Es sei die mittlere Anomalie $= 45^0$ und $\log e = 4{,}7641513$. Durch eine leichte Rechnung im Kopfe findet man, dass man 57^0 als ersten Näherungswerth für die excentrische Anomalie nehmen kann. Die weitere Rechnung gestaltet sich nun so.

	Nach *Gauss*		Formel (25)	
log sin 57°	9,9235914 . . λ = 13,67		9,9235914 . . . + 1″	
	4,7641513		4,7641513	
	4,6877427 . . . μ 89		4,6877427 . . 7441	
	48723″,98		48723″,98	4,13 h = 0,15
	13° 32′ 3″,98		13° 32′ 3″,98	
	45		45	
	58 32 3, 98		58 32 3, 98	
	57		57	
	1 32 3, 98		1 32 3, 98	
5523,98. $\frac{13,67}{75,33}$		0° 16′ 42″,43	$\frac{5523,98}{0,85}$ =	1° 48′ 18″,80
		58 32 3, 98		57
		58 48 46, 41		58 48 18, 80

Mit den letzten Werthen wird nun die Rechnung wiederholt. Es ergab sich

	9,9322102 . . . λ = 12,73	9,9321751 . . . + 1″
	4,7641513	4,7641513
	4,6963615 . . . μ = 87	4,6963264 . . . 3277
also		
	13° 48′ 20″,59	13° 48′ 16″,57 16″,72 h = 0,15
	58 48 20, 59	58 48 16, 57
	58 48 46, 41	58 48 18, 80
	− 25, 82	2, 23
	$-25'',82\,\frac{12{,}73}{74{,}27} = -4'',43$	$-\frac{2{,}23}{0{,}85} = -2'',62$

und damit werden die neuen Werthe

$$58^0\, 48'\, 16'',16 \qquad\qquad 58^0\, 48'\, 16'',18.$$

Der wahre Werth lautet genau wie der rechts.

9.

Bevor ich weiter gehe, will ich erst die zur Bildung der Gleichung (24) nothwendigen Formeln zusammenstellen. Hierbei nehme ich die Ebene der Ekliptik zur Fundamentalebene.

Zuerst berechne man

$$\theta = k(t'' - t'), \quad \theta' = k(t'' - t), \quad \theta'' = k(t' - t)$$
$$Z = \tfrac{1}{6}\theta''(\theta + \theta'), \quad Z'' = \tfrac{1}{6}\theta(\theta' + \theta''),$$

hierauf φ' aus (conf. *Gauss* theoria motus. c. c. Art. 136)

$$\operatorname{tang}\omega' = \frac{\operatorname{tang}\beta'}{\sin(\alpha' - A')} \qquad \operatorname{tang}\varphi' = \frac{\operatorname{tang}(\alpha' - A')}{\cos\omega'}$$

und zwar so, dass $\cos\varphi'$ gleiches Zeichen habe mit $\cos(\alpha' - A')$, und φ' kleiner als 180^0 sei.

Nun bestimme man K, $\operatorname{tang} I$ und $\operatorname{tang}\beta^0$ aus

$$\sin(\alpha - K)\operatorname{tang} I = \operatorname{tang}\beta$$
$$\cos(\alpha - K)\operatorname{tang} I = \frac{\operatorname{tang}\beta'' - \operatorname{tang}\beta\cos(\alpha'' - \alpha)}{\sin(\alpha'' - \alpha)}$$
$$\operatorname{tang}\beta^0 = \sin(\alpha' - K)\operatorname{tang} I,$$

wodurch Alles gegeben ist, um die Coefficienten a, c und d zusammensetzen zu können. Diese Coefficienten lauten

$$a = \frac{\operatorname{tang}\beta' - \operatorname{tang}\beta^0}{\operatorname{tang} I}$$

$$c = \frac{1}{a}\left\{R'\sin(A' - K) - \frac{\theta}{\theta'}R\sin(A - K) - \frac{\theta''}{\theta'}R''\sin(A'' - K)\right\}$$

$$d = \frac{1}{a}\left\{\frac{\theta}{\theta'}R\sin(A - K)Z + \frac{\theta''}{\theta'}R''\sin(A'' - K)Z''\right\}.$$

Bestimmt man nun den Winkel γ' aus

$$R'\cos\beta'\sin\varphi' = \gamma\sin\gamma'$$
$$R'\cos\beta'\cos\varphi' + c = \gamma\cos\gamma'$$

und zwar so, dass $d\sin\gamma'$ positiv wird, und bildet man

$$m = \frac{d\sin\gamma'}{(R'\sin\varphi')^4\cos\beta'}$$

so ist Alles gegeben, um an die Lösung der Gleichung

$$\sin(\psi' - \gamma') = m\sin\psi'^4$$

gehen zu können.

Bis zur Zusammenstellung der letzten Gleichung muss man nach den *Hansen*'schen Formeln 41 Mal, nach den *Encke*'schen 37 Mal, und nach den vorstehenden 33 Mal in die Logarithmentafeln eingehen. Dabei ändern sich in den aufeinanderfolgenden Näherungen bei *Encke*

4 Grössen, bei *Hansen* auch 4 und in den vorstehenden Formeln höchstens drei, c, d und γ'.

10.

Ehe ich weiter gehe, will ich erst die Ausnahmefälle anführen, in denen die vorgeschlagenen Formeln, entweder garnicht angewandt werden können, oder sich vereinfachen.

Die vorstehenden Formeln können garnicht angewandt werden, erstens wenn der dritte Planetenort mit dem ersten zusammenfällt, und zweitens, wenn ausser $a = o$ auch noch $K = A'$ ist, d. h. wenn die drei Planetenörter und der mittlere Erdort in einem grössten Kreise liegen. Im letztern Falle giebt die Gleichung (9) einfach

$$\frac{f''}{f} = \frac{R\sin(A' - A)}{R''\sin(A'' - A')}, \tag{27}$$

und die Bahn bleibt unbestimmbar.

In dem ersten Falle, wenn also $\alpha = \alpha''$ und $\beta = \beta''$ ist, bleiben von den drei Gleichungen (8) nur zwei als brauchbar nach, aus denen direct nur ρ' bestimmt werden kann, und ρ und ρ'' nur dann, wenn man die Bahn als Parabel voraussetzt.

Befindet sich der Himmelskörper in einer Beobachtung mit der Sonne in Opposition und dabei in der Ekliptik, so haben die Beobachtungsfehler auf die in die Rechnung eingehenden Quantitäten grossen Einfluss, weshalb in solchen Fällen die Bahn auch nur unsicher bestimmt werden kann.

Sind alle Breiten gleich Null, so bleiben von den Gleichungen (8) nur die beiden ersten stehen, die dann aber nicht mehr genügen, die drei ρ zu bestimmen.

Ist nur $a = o$, so hat man einfach

$$\left(c - \frac{d}{r'^3}\right)a = o \tag{28}$$

aus der dann r' besimmt werden kann.

Doch auf diesen letzten Fall will ich näher eingehen, weil derselbe mir Gelegenheit giebt, auf Etwas aufmerksam zu machen, was man bisher noch nicht berührt hat.

Setzt man

$$\mathfrak{A} = \operatorname{tang}\beta'\sin(A - \alpha'') + \operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha' - A) + \operatorname{tang}B\sin(\alpha'' - \alpha')$$
$$\mathfrak{B} = \operatorname{tang}\beta''\sin(A - \alpha) + \operatorname{tang}\beta\sin(\alpha'' - A) + \operatorname{tang}B\sin(\alpha - \alpha'')$$
$$\mathfrak{C} = \operatorname{tang}\beta\sin(A - \alpha') + \operatorname{tang}\beta'\sin(\alpha - A) + \operatorname{tang}B\sin(\alpha' - \alpha)$$

und lässt $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ in $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{A}'', \mathfrak{B}'', \mathfrak{C}''$ übergehen, wenn man für A und B, das eine Mal A' und B', und das andere Mal A'' und B'' setzt, so ergeben sich aus den Gleichungen (8)

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} f(\mathfrak{D}.\rho_{,} + \mathfrak{A} R_{,}) - \mathfrak{A}' R_{,}' + f''\mathfrak{A}'' R_{,}'' &= o \\ f\mathfrak{B} R_{,} - (\mathfrak{D}.\rho_{,}' + \mathfrak{B}' R_{,}') + f''\mathfrak{B}'' R_{,}'' &= o \\ f\mathfrak{C} R_{,} - \mathfrak{C}' R_{,}' + f''(\mathfrak{D}\rho_{,}'' + \mathfrak{C}'' R_{,}'') &= o \end{aligned}$$

wobei alle Buchstaben die frühere Bedeutung haben.

Liegen nun die drei Planetenörter in einem grössten Kreise, so ist $\mathfrak{D} = o$, die vorstehenden Gleichungen lauten alsdann

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} f\mathfrak{A} R_{,} - \mathfrak{A}' R_{,}' + f''\mathfrak{A}'' R_{,}'' &= o \\ f\mathfrak{B} R_{,} - \mathfrak{B}' R_{,}' + f''\mathfrak{B}'' R_{,}'' &= o \\ f\mathfrak{C} R_{,} - \mathfrak{C}' R_{,}' + f''\mathfrak{C}'' R_{,}'' &= o. \end{aligned}$$

Aus je zweien dieser Gleichungen ergiebt sich nun, unter Vernachlässigung der Erdbreiten,

$$\frac{f}{f''} = \frac{R'' \sin(A''-A')}{R \sin(A'-A)},$$

setzt man demnach

$$\begin{aligned} F &= R' R'' \sin(A''-A') : R R''. \sin(A''-A) \\ F'' &= R R' \sin(A'-A) : R R''. \sin(A''-A), \end{aligned}$$

wobei also F und F'', dieselbe Bedeutung für die Erdbahn haben, wie f und f'' für die Planetenbahn, so erhält man

$$\frac{f}{f''} = \frac{F}{F''}.$$

Zur Bestimmung des r' kann nun jede einzelne der drei Gleichungen (B) angewandt werden. Nimmt man die mittlere, so kommt

$$r'^3 (\mathfrak{N} - 1) = Z''$$

wobei gesetzt worden ist

$$\mathfrak{N} = \frac{\theta' F'' \mathfrak{B}' R'}{\theta''(F\mathfrak{B} R + F''\mathfrak{B}'' R'')}.$$

Demnach hat man in diesem Falle, in den aufeinanderfolgenden Annäherungen, nur Z'' zu verbessern.

11.

Nachdem auf diese Weise φ'', und durch die Ausdrücke (22) r' und ρ' gefunden worden sind, so berechnet man nach den Ausdrücken (16) f und f'', und geht dann an die Bestimmung von ρ und ρ'', für die ich sogleich die nöthigen Formeln ableiten will.

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen (8) erst $\rho_{,}''$ und dann $\rho_{,}$, so kommt

$$f\,\rho_{,} = \rho_{,}' \frac{E}{E'} + \frac{\tan\beta''}{E'} \left\{ R' \sin(\varepsilon - A') - f R \sin(\varepsilon - A) - f'' R'' \sin(\varepsilon - A'') \right\}$$

$$f''\rho_{,}'' = \rho_{,}' \frac{E''}{E'} - \frac{\tan\beta}{E'} \left\{ R' \sin(\varepsilon - A') - f R \sin(\varepsilon - A) - f'' R'' \sin(\varepsilon - A'') \right\} \tag{29}$$

wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} E &= \tan\beta' \sin(\alpha'' - \varepsilon) - \tan\beta'' \sin(\alpha' - \varepsilon) \\ E' &= \tan\beta \sin(\alpha'' - \varepsilon) - \tan\beta'' \sin(\alpha - \varepsilon) \\ E'' &= \tan\beta \sin(\alpha' - \varepsilon) - \tan\beta' \sin(\alpha - \varepsilon) \end{aligned} \tag{30}$$

gesetzt worden ist. Hierbei ist zu bemerken, dass der Winkel ε völlig willkürlich ist, und dass man in jede der beiden Gleichungen (29) einen andern Werth für ε setzen kann. Aber von dieser Freiheit mache ich keinen Gebrauch, sondern setze in beiden Gleichungen

$$\varepsilon = A''$$

dann erhält man

$$\begin{aligned} \rho_{,} &= \rho_{,}' . \frac{\mathfrak{C}}{f.\mathfrak{C}'} - \frac{\tan\beta'' R \sin(A''-A)}{\mathfrak{C}'} \left\{ 1 - \frac{F}{f} \right\} \\ \rho_{,}'' &= \rho_{,}' . \frac{\mathfrak{C}''}{f''\mathfrak{C}'} + \frac{\tan\beta R \sin(A''-A)}{\mathfrak{C}'} \left\{ 1 - \frac{F}{f} \right\} . \frac{f}{f''} \end{aligned} \tag{31}$$

wobei gesetzt ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= \tan\beta' \sin(\alpha'' - A'') - \tan\beta'' \sin(\alpha' - A'') \\ \mathfrak{C}' &= \tan\beta \sin(\alpha'' - A'') - \tan\beta'' \sin(\alpha - A'') \\ \mathfrak{C}'' &= \tan\beta \sin(\alpha' - A'') - \tan\beta' \sin(\alpha - A'') \end{aligned} \tag{32}$$

und

$$F = \frac{R' \sin(A''-A')}{R \sin(A''-A)}. \tag{33}$$

Es ist zu bemerken, dass

$$\mathfrak{C}' = \sin(\alpha'' - \alpha) \sin(A'' - K) \tan I. \tag{34}$$

Nach der Bestimmung des Winkels φ'', verlangt die Berechnung von $\rho_{,}$ und $\rho_{,}''$ durch die Formeln (31) noch 14 Mal in die log-trig. Tafeln einzugehen, während man nach den *Hansen*'schen Formeln noch 26 Mal und nach den *Encke*'schen Formeln noch 22 Mal in die Tafeln eingehen muss.

Da die drei ρ die Grundlage der weitern Rechnung bilden, so ist es unumgänglich nothwendig, dieselben zu controliren. Dieses geschieht am zweckmässigsten durch eine der drei Gleichungen (8).

12.

Um nun bei Z und Z'' die Verbesserungen eintreten zu lassen, bedarf es der Kenntniss der Bewegung des Planeten in seiner Bahn. Diese erhält man am schnellsten auf folgende Art.

Seien a, a'' und b, b'' die heliocentrischen Längen und Breiten des ersten und dritten Planetenortes, so erhält man dieselben aus folgenden Formeln (*Hansen*, Ueber die Bestimm. der Bahn etc. pag. 119, und *Gauss*, th. m. c. c. art. 62)

$$
\begin{aligned}
& r \cos b \sin (a - \alpha) = R \sin (\alpha - A) \\
& r \cos b \cos (a - \alpha) = R \cos (\alpha - A) + \rho, \\
(35) \qquad & r \sin b = \rho, \operatorname{tang} \beta \\
& r'' \cos b'' \sin (a'' - \alpha'') = R'' \sin (\alpha'' - A'') \\
& r'' \cos b'' \cos (a'' - \alpha'') = R'' \cos (\alpha'' - A'') + \rho,'' \\
& r'' \sin b'' = \rho,'' \operatorname{tang} \beta''.
\end{aligned}
$$

und nennt man $2v'$ den Winkel zwischen r und r'', so erhält man denselben aus

$$(36) \qquad \sin 2v' = \frac{\cos b'' \sin (a'' - a)}{\sin c}$$

nachdem

$$\operatorname{tang} c = \frac{\sin (a'' - a)}{\cos b \operatorname{tang} b'' - \sin b \cos (a'' - a)}$$

berechnet worden ist, wobei c immer kleiner als 180° genommen werden muss.

Etwas rascher erhält man den Winkel v' aus (*Hansen*, l. c.)

$$(37) \qquad \sin v'^2 = \sin \tfrac{1}{2} (a'' - a)^2 \cos b \cos b'' + \sin \tfrac{1}{2} (b'' - b)^2$$

die auf bekannte Weise aus der ohne Schwierigkeit sich ergebenden Gleichung

$$\cos 2v' = \sin b \sin b'' + \cos b \cos b'' \cos (a'' - a)$$

abgeleitet wird.

Bezeichnet ferner $2v$ den Winkel zwischen r' und r'' und $2v''$ den zwischen r und r', so wird (*Gauss*, th. m. c. c. art. 144)

$$
\begin{aligned}
& \sin 2v = r \sin 2v' . \frac{f}{r'} \\
(38) \qquad & \\
& \sin 2v'' = r'' \sin 2v' . \frac{f''}{r'} .
\end{aligned}
$$

Die Winkel v, v' und v'', die man durch die Bedingung $2v + 2v'' = 2v'$ controlirt, werden nun gebraucht um Z und Z'' zu verbessern.

13.

Diese Verbesserung hat *Gauss* auf die Lösung einer cubischen Gleichung zurückgeführt, *Encke* auf die Berechnung einer Reihe und *Hansen* auf die eines Kettenbruches. Hier will ich nun auch einen Kettenbruch entwickeln, der aber das Problem etwas schärfer löst, als der *Hansen*'sche Bruch.

Setzt man nach den oben angenommenen Bezeichnungen

$$\eta' = \frac{\theta' \sqrt{p}}{r r'' \sin 2v'}, \qquad (39)$$

dann wird nach *Gauss* (theoria motus c. c. art. 88)

$$
\begin{aligned}
& \frac{\eta'^2}{\mu'} (\eta' - 1) = \frac{2g' - \sin 2g'}{\sin g'^3} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (40) \\
& \frac{\eta'^2}{2\mu'} = \frac{1}{\lambda' - \cos g'}
\end{aligned}
$$

wobei g' die halbe Differenz zwischen der excentrischen Anomalie des ersten Planetenortes und der des dritten bezeichnet, und

$$\mu'^2 = \frac{\theta'^2}{(2\sqrt{r r''} . \cos v')^3} \qquad \lambda' = \frac{r + r''}{2\sqrt{r r''} . \cos v'} \qquad (41)$$

gesetzt worden ist.

Aus den beiden Gleichungen (40) muss nun g' eliminirt werden, damit eine Gleichung zur Bestimmung des η' resultire. Diese Elimination habe ich nun folgendermassen ausgeführt.

Aus den von *Gauss* in seiner berühmten Abhandlung *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha . \beta}{1 \gamma} + \ldots$ niedergelegten Untersuchungen, ergiebt sich leicht,

$$\frac{ng' - \sin ng'}{n . \sin g'} = F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \sin g'^2) - F(\tfrac{1}{2}(1+n) \tfrac{1}{2}(1-n), \tfrac{3}{2}, \sin g'^2) \qquad (42)$$

wenn $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ die Reihe

$$1 + \frac{\alpha . \beta .}{1 . \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \beta (\beta+1)}{1 . 2 . \gamma . (\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha . (\alpha+1)(\alpha+2) \beta (\beta+1)(\beta+2)}{1 . 2 . 3 . \gamma . (\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots .$$

bezeichnet.

Für $n = 2$ erhält man aus (42)

$$\frac{2g' - \sin 2g'}{\sin g'^3} = \tfrac{4}{3} F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{5}{2}, \sin g'^2)$$

oder führt man die Reihenentwickelung aus,

$$\frac{2g' - \sin 2g'}{\sin g'^3} = \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{5} \sin g'^2 + \tfrac{3}{14} \sin g'^4 + \tfrac{5}{36} \sin g'^6 + \tfrac{35}{352} \sin g'^8 + \tfrac{63}{832} \sin g'^{10} + \ldots \qquad (43)$$

Aus der zweiten Gleichung (40) ergiebt sich aber

(44) $$\sin g'^2 = \delta'^2 + \frac{4\mu'\lambda'}{\eta'^2} + \frac{4\mu'^2}{\eta'^4}$$

wenn

$$\delta'^2 = \lambda'^2 - 1$$

gesetzt wird, und eliminirt man nun $\sin g'$ aus (43) mit Hülfe von (44), und vernachlässigt man die Glieder achter Ordnung, so erhält man

(45) $$\begin{aligned} \eta'^2(\eta'-1) = {} & \tfrac{4}{3}\mu' + \tfrac{8}{5}\lambda'\frac{\mu'^2}{\eta'^2} + \tfrac{64}{35}\frac{\mu'^3}{\eta'^4} \\ & - \tfrac{2}{5}\delta'^2\mu' - \tfrac{12}{7}\lambda'\delta'^2\frac{\mu'^2}{\eta'^2} \\ & + \tfrac{3}{14}\delta'^4\mu'. \end{aligned}$$

Durch Umkehrung ergiebt sich hieraus

(46) $$\begin{aligned} \eta' = 1 + \tfrac{4}{3}\mu' + {} & \frac{72\lambda' - 160}{45}\mu'^2 + \frac{17408 - 11088\lambda'}{945}\mu'^3 \\ & - \tfrac{2}{5}\delta'^2\mu' + \frac{112 - 180\lambda'}{105}\delta'^2\mu'^2 \\ & + \tfrac{3}{14}\delta'^4\mu' \end{aligned}$$

und dieser Ausdruck ist richtig bis auf Grössen achter Ordnung exclusive. Aus (41) und (44) ergiebt sich leicht, dass μ' von zweiter und δ' von erster Ordnung ist.

Nun setze ich

(47) $$\mu' = x\,h' + y\,\delta'^2 h'$$

und nimmt man

$$x = \tfrac{1}{10} \qquad y = \tfrac{3}{100}$$

so fallen in dem Ausdrucke (46) zwei Glieder vierter Ordnung fort und die Glieder der höhern Ordnungen bekommen Coefficienten, die sehr viel kleiner sind als die Einheit. Um noch ein drittes Glied vierter Ordnung fortzuschaffen, das durch die Substitution von (47) in (46) hervorgebracht ist, setze ich

(48) $$h' = p' + \frac{20 - 9\lambda'}{75}p'^2$$

dann geht der Ausdruck (46) über in

(49) $$\eta' = 1 + \tfrac{4}{30}p' + P''$$

wo P'' eine kleine Grösse sechster Ordnung bezeichnet.

Vernachlässigt man P'', so kann man (49) in einen Kettenbruch umformen, und zwar erhält man

(50) $$\eta' = 1 + A'.\cfrac{a'}{1 + \cfrac{a'}{1 + \cfrac{a'}{1 + \text{etc.}}}}$$

wobei

$$A' = \frac{10}{20 - 9\lambda'}, \qquad a' = \frac{20 - 9\lambda'}{9}\cdot\frac{\mu'}{\tfrac{7}{12} + \tfrac{1}{4}\lambda'^2} \tag{51}$$

gesetzt worden ist.

Führt man *Hansen's* Bezeichnung ein, also

$$\mu' = m' \qquad \lambda' = 1 + 2\,l'$$

wobei l' eine Grösse zweiter Ordnung ist, und nimmt man

$$\lambda' = 1 \qquad \lambda'^2 = 1 + 4\,l'$$

so erhält man aus (50) den *Hansen*'schen Kettenbruch

$$\eta' = 1 + \tfrac{10}{11}.\cfrac{\tfrac{11}{9}h'}{1 + \cfrac{\tfrac{11}{9}h'}{1 + \cfrac{\tfrac{11}{9}h'}{1 + \text{etc.}}}} \tag{52}$$

wobei gesetzt ist

$$h' = \frac{m'}{\tfrac{5}{6} + l'}.$$

Durch eine andere Form für μ', die auch einige Glieder sechster Ordnung fortschaffte, erhielten die Grössen A' und a' des Bruches (50) die Werthe

$$A' = \frac{10}{20 - 9\lambda'}, \qquad a' = \frac{(20 - 9\lambda')\,560\,\mu'}{3(881 + 618\lambda'^2 - 99\lambda'^4)}. \tag{53}$$

Mit den hier abgeleiteten Kettenbrüchen habe ich nun das zweite Beispiel der Theoria motus c. c. berechnet, und mit den Werthen

$$t'' - t = 70{,}775375 \qquad 2v' = 22^\circ\,32'\,7'',67$$

$$\text{lor}\ r = 0{,}3630960 \qquad \log r'' = 0{,}3369536$$

ergiebt sich

mit den *Encke*'schen Formeln . . . . $\log \eta'$	= 0,0096636
„ „ *Gauss*'schen „	= 0,0096643
„ „ *Hansen*'schen „	= 0,0096644
„ dem Kettenbruche (50) (51)	= 0,0096669
„ „ „ (50) (53)	= 0,0096680

und der wahre Werth lautet 0,0096839.

Nimmt man im Ausdrucke (46) alle Glieder sechster Ordnung mit, so ergiebt sich $\log \eta' = 0{,}0096740$.

Um die Anwendung des Kettenbruches (50) (51) für eine noch grössere Zwischenzeit zu zeigen, so habe ich auch das dritte Beispiel der Theoria motus berechnet. Ich finde für

$$\log r = 0{,}4323934 \qquad \log r' = 0{,}4114726$$

$$\log \theta'' = 0{,}3624066 \qquad v'' = 15^\circ\,42'\,59'',22$$

$$\log \eta'' = 0{,}0211322$$

während der *Hansen*'sche Bruch 0,0211081 und *Gauss* 0,0211074 geben. In dritter Hypothese findet *Gauss* 0,0212751.

Dabei gestaltet sich die Rechnung nach dem Kettenbruche (50) (51) wie folgt.

Mit	$\log \mu''$	8,6055676	$\log \lambda''$	0,0166737
finde ich	$\log \Delta''$	9,9728423	$\log \alpha''$	8,7473882
und nun ergab sich		8,7473882		
Zech's Add. Tafeln		0,0236216		
		8,7237666		
„ „		0,0224027		
		8,7249855		
„ „		0,0224641		
		8,7249241		
„ „		0,0224610		
		8,7249272		
„ „		0,0224612		
		8,7249270 = der Grenze		
		9,9728423		
		8,6977693		

Zech's Add. Tafeln $\log \gamma'' = 0{,}0211322$.

Aehnlich dem Kettenbruche (50) (51) lauten die für γ und γ''.

14.

Mit γ, γ' und γ'' werden nun Z und Z'' berechnet, und hierauf die Gleichung (24) von Neuem zusammengestellt.

Zur nochmaligen Auflösung der Gleichung (24) lässt sich aus der im Art. 8 gegebenen Methode eine einfache Vorschrift ableiten, die ich nun auseinandersetzen will.

Sei ψ'_0 der früher gefundene Werth und $\psi'_0 + \Delta\psi'$ der jetzt gesuchte, so kann man setzen

$$\log \sin(\psi'_0 + \Delta\psi' - \gamma') = \log \sin(\psi'_0 - \gamma') + \alpha . \Delta\psi'$$

wo α die Zunahme von $\log \sin(\psi'_0 - \gamma')$ für eine Aenderung von $1''$ in ψ'_0, bezeichnet; ähnlich wird sein

$$4 \log \sin(\psi'_0 + \Delta\psi') = 4 \log \sin \psi'_0 + 4\beta . \Delta\psi'$$

und setzt man

$$\sin(\psi'_0 + \Delta\psi' - \gamma') = m . \Delta m . \sin(\psi'_0 + \Delta\psi')^4 \tag{54}$$

wo m das frühere m bezeichnet, so erhält man

$$\Delta\psi' = \frac{\log \Delta m}{\alpha - 4\beta} . \tag{55}$$

15.

In den Formeln (31) hat, wie man sieht, der Factor $\sin(\alpha'' - \alpha)$ grossen Einfluss auf die Bestimmung des ρ und ρ'', und da es vorkommen kann, namentlich bei Kometen, dass die Bewegung in Länge sehr klein ist, und also Beobachtungsfehler auf $\alpha'' - \alpha$ einen grossen Einfluss haben werden, so ist es in solchen Fällen von Vortheil von dem Factor $\sin(\alpha'' - \alpha)$ sich befreien zu können. Dazu liefert in den Formeln (29) der Winkel ε das Mittel, indem man demselben einen solchen Werth geben kann, dass der Factor $\sin(\alpha'' - \alpha)$ aus diesen Gleichungen verschwindet.

Ich setze

$$\varepsilon = \alpha - 90^\circ$$

dann erhält man

$$\left.\begin{aligned} f . \rho_{,} &= \rho_{,}' \frac{E}{E'} + N \operatorname{tang} \beta'' \\ f'' . \rho_{,}'' &= \rho_{,}' \frac{E''}{E'} - N \operatorname{tang} \beta \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

wobei gesetzt worden ist

$$\left.\begin{aligned} E &= \operatorname{tang} \beta' \cos(\alpha'' - \alpha) - \operatorname{tang} \beta'' \cos(\alpha' - \alpha) \\ E' &= \operatorname{tang} \beta \cos(\alpha'' - \alpha) - \operatorname{tang} \beta'' \\ E'' &= \operatorname{tang} \beta \cos(\alpha' - \alpha) - \operatorname{tang} \beta' \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

$$N = \frac{1}{E'} \left\{ f R \cos(\alpha - A) - R' \cos(\alpha - A') + f'' R'' \cos(\alpha - A'') \right\} .$$

16.

Wenn man in der Rechnung endlich so weit gekommen ist, dass die neuen Z und Z'' sich nicht mehr von den der Rechnung zu Grunde gelegten unterscheiden, dann kann man zur Berechnung der Bahnelemente übergehen. Diese Berechnung wird am schnellsten und sichersten durch die Formeln ausgeführt, die in der Theoria motus c. c. in den Art. 88, 95 und 96 vorkommen, und die ich nun mittheilen will.

Bezeichnen ε und ε'' die der ersten und dritten Beobachtung entsprechenden excentrischen Anomalien, ω und ω'' die denselben Beobachtungen entsprechenden wahren Anomalien, so hat man nach Art. 8

der Theoria motus c. c., wenn a die halbe grosse Axe, e ($= \sin\varphi$) die Excentricität bezeichnet und r und r'' die frühere Bedeutung haben,

$$
\text{(A)}\qquad
\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{\tfrac{r}{a}} &= \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon\sqrt{1+e}\\
\cos\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{\tfrac{r}{a}} &= \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\sqrt{1-e}\\
\sin\tfrac{1}{2}\omega''\sqrt{\tfrac{r''}{a}} &= \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon''\sqrt{1+e}\\
\cos\tfrac{1}{2}\omega''\sqrt{\tfrac{r''}{a}} &= \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon''\sqrt{1-e}
\end{aligned}
$$

aus welchen leicht erhalten werden

$$1)\quad \cos v'\sqrt{\frac{rr''}{aa}} = \cos g' - e\cos G'$$

$$2)\quad \sin v'\sqrt{\frac{rr''}{aa}} = \cos\varphi\sin g'$$

wobei v' die frühere Bedeutung hat, also $2v' = \omega'' - \omega$, und

$$2g' = \varepsilon'' - \varepsilon \qquad 2G' = \varepsilon'' + \varepsilon$$

gesetzt worden ist.

Aus den kekannten Formeln

$$r = a - ae\cos\varepsilon, \qquad r'' = a - ae\cos\varepsilon''$$

ergiebt sich leicht

$$3)\quad r'' - r = 2ae\sin g'\sin G'$$

$$4)\quad r'' + r = 2a - 2ae\cos g'\cos G'.$$

Bestimmt man nun den Winkel G' durch eine Combination von 1), 3) und 4), und zwar durch

$$\operatorname{tang} G' = \frac{3)}{4)\cos g' - 1)}$$

oder da

$$\frac{r'' + r}{2\sqrt{rr''}\cos v'} = \lambda'$$

ist, aus

$$(58)\qquad \operatorname{tang} G' = \frac{\frac{r''-r}{r''+r}\lambda'\sin g'}{\lambda'\cos g' - 1}$$

wobei g' gegeben ist durch

$$(59)\qquad \sin\tfrac{1}{2}g' = \sqrt{\frac{\mu'}{\eta'^2} + \frac{1-\lambda'}{2}},$$

so erhält man die Elemente a und e aus 2) und 3), also

$$
(60)\qquad
\begin{aligned}
a\sin\varphi &= \frac{r''-r}{2\sin g'\sin G'}\\
a\cos\varphi &= \frac{\sin v'}{\sin g'}\sqrt{rr''}.
\end{aligned}
$$

Aus den vorstehenden Gleichungen ersieht man zugleich, dass der Quadrant von G' so gewählt werden muss, dass das Produkt $a\sin\varphi$ positiv wird.

Der Bruch im Zähler der Formel (58) könnte durch eine Tangente ersetzt werden, es ist aber vortheilhafter ihn in dieser Form zu berechnen, da aus der Berechnung von λ', der $\log(r''+r)$ schon bekannt ist, und zur Bestimmung von $a\sin\varphi$ der $\log(r''-r)$ doch verlangt wird.

Man controlirt die Elemente a und φ durch die Formel

$$a\cos\varphi^2 = \left(\frac{\eta' rr''\sin 2v'}{\theta'}\right)^2,$$

die sich aus der dritten Gleichung (12) ergiebt.

Bezeichnet man die den beiden äussersten Beobachtungen entsprechenden mittlern Anomalien mit M und M'', so hat man

$$M = \varepsilon - e\sin\varepsilon$$

$$M'' = \varepsilon'' - e\sin\varepsilon''$$

aus denen durch Addition erhalten wird

$$M' = G' - \sin\varphi\cos g'\sin G'.\ 206264'',8. \qquad (61)$$

wobei M' die der Zeit $\frac{1}{2}(t+t'')$ entsprechende mittlere Anomalie bezeichnet.

Die mittlere tägliche Bewegung n, erhält man schliesslich aus

$$n = \frac{206264'',8\, k}{a\sqrt{a}}. \qquad (62)$$

17.

Die die Lage der Planetenbahn im Raume bestimmenden Stücke, also ☊, i und $\bar\omega$, die Knotenlänge, die Neigung nnd den Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten, findet man nun aus

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} i\sin(\alpha - ☊) &= \operatorname{tang} b\\
\operatorname{tang} i\cos(\alpha - ☊) &= \frac{\operatorname{tang} b'' - \cos(\alpha''-\alpha)\operatorname{tang} b}{\sin(\alpha''-\alpha)} \qquad (63)\\
\bar\omega &= \tfrac{1}{2}(u''+u) - H'
\end{aligned}
$$

nachdem u, u'', die den beiden äussersten Beobachtungen entsprechenden Argumente der Breite, und H' aus

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tang} u &= \operatorname{tang}(\alpha - ☊)\sec i\\
\operatorname{tang} u'' &= \operatorname{tang}(\alpha'' - ☊)\sec i
\end{aligned}
\qquad (64)
$$

$$\sin H' = \frac{\sin G'\sin v'}{\sin g'} \qquad (65)$$

bestimmt worden sind, wobei H' in demselben Quadranten zu nehmen ist, in dem G' liegt.

Die Ableitung der Gleichungen (63) und (64) bietet garkeine Schwierigkeit dar, und die Gleichung (65) ergiebt sich aus den Gleichungen (A) des vorhergehenden Artikels. Aus diesen Gleichungen erhält man nämlich

$$\sin \tfrac{1}{2}(\omega''+\omega) \sqrt{\frac{rr''}{aa}} = \sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon''+\varepsilon)\cos\varphi$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(\omega''-\omega) \sqrt{\frac{rr''}{aa}} = \sin \tfrac{1}{2}(\varepsilon''-\varepsilon)\cos\varphi$$

und da nun

$$2\varphi' = \varepsilon''-\varepsilon \qquad 2G' = \varepsilon''+\varepsilon$$

$$2v' = \omega''-\omega \qquad 2H' = \omega''+\omega$$

so ergiebt sich durch Division der ersten Gleichung durch die zweite, die Gleichung (65).

Man controlirt die Elemente Ω, i und ω am schnellsten durch

$$u''-\omega = H'+v'$$

$$u-\omega = H-v'.$$

Die Perihellänge ergiebt sich nun aus

(66) $$\pi = \omega + \Omega.$$

18.

Mit den in den Art. 9, 10 und 12 vorgeschlagenen Formeln habe ich nun dasselbe Beispiel berechnet, das auch *Hansen* zur Prüfung seiner Formeln berechnet hat.

Die Grundlagen der Rechnung bilden die folgenden Oerter der Euterpe.

1853	α	β	A	$\log R$
Nov. 12,432133	50° 42′ 43″,5	−2° 9′ 20″,5	50° 27′ 38″,1	9,995195
Dec. 2,433406	46 10 48, 0	−1 45 58, 6	70 41 34, 1	9,993596
22.373477	44 23 19, 8	−1 16 29, 0	90 58 38, 4	9,992739

Damit finde ich nun

$$\log \theta = 9{,}535308 \quad \log \theta' = 9{,}837003 \quad \log \theta'' = 9{,}536639$$

$$\log Z = 8{,}771361 \qquad \log Z'' = 8{,}770473$$

$$\varphi' = 24^\circ\ 34'\ 20'',7$$

$$\log \sin \varphi' = 9{,}618930 \qquad \log \cos \varphi' = 9{,}958772$$

$$K = -144^\circ\ 34'\ 53'',6 \qquad \log \operatorname{tang} I = 9{,}154452$$

$$\log a = 8{,}467778_n \quad \log c = 0{,}073287 \quad \log d = 0{,}030677$$

$$\gamma' = 11^\circ\ 8'\ 30'',5 \qquad \log m = 0{,}866871.$$

Vergleicht man die beiden letzten Werthe mit den entsprechenden bei *Hansen*, so ergiebt sich, dass γ' vollständig mit dem *Hansen*'schen Werthe übereinstimmt, für $\log m$ giebt dagegen *Hansen* 0,867098. Da der in dritter Näherung gefundene Werth von $\log m$ grösser ist als der vorstehende *Hansen*'sche, so könnte man sich zu dem Schlusse berechtigt fühlen, die *Hansen*'sche Methode sei convergenter. Dieser Schluss ist aber ganz irrig, was ich gleich zeigen will.

Nach Seite 86 und 97 der *Hansen*'schen Abhandlung (Ueber die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen) hat man

$$K\rho_I' = \frac{A+BP}{1+P} - C + \frac{A+BP}{1+P}\,\frac{Q}{2r'^3}\left\{1 + \frac{(A-B)(P-1)}{3(A+BP)}\right\}$$

wobei nach den von mir gebrauchten Bezeichnungen

$$K = \mathfrak{D} \quad C = -\mathfrak{B}'R' \quad A = -\mathfrak{B}R \quad B = -\mathfrak{B}''R''$$

und ferner

$$P = \frac{\theta''}{\theta} \qquad Q = \theta.\theta''$$

gesetzt worden ist.

Nun setzt *Hansen* in erster Hypothese für

$$\tfrac{1}{2}Q\left\{1 + \frac{(A-B)(P-1)}{3(A+BP)}\right\}$$

einfach $\frac{1}{2}Q$. Dadurch wird also für diesen Factor zu viel oder zu wenig genommen, jenachdem der Bruch in der Klammer negativ oder positiv ist, und man sieht somit, dass ein und dieselbe Ursache in einem Falle günstig und in einem andern Falle ganz ungünstig wirken wird. In dem hier gewählten Beispiele ist dieser Bruch negativ, und berücksichtigt man ihn, was jedenfalls geschehen muss, um consequent zu sein, so erhält man den Logarithmus des ganzen Factors gleich 8,770686 und damit wird auch nach den *Hansen*'schen Formeln $\log m = 0{,}866871$. Setzt man für den Factor einfach $\frac{1}{2}Q$, so wird der Logarithmus des Factors 8,770917. Führt man die *Hansen*'sche Hypothese (die eigentlich von *Gauss* stammt) in meine Formel ein, so ergiebt sich sogleich $\log m = 0{,}867102$, also der Wahrheit noch näher, als der *Hansen*'sche Werth.

Was die Grösse a betrifft, so ziehe ich es vor, dieselbe in der Form zu berechnen, wie ich es im Art. 9 vorschlage. Rechnet man nach *Encke's* Angabe, so erhält man $\log a = 8{,}467568_n$. Diese Differenz hat ihren Ursprung darin, dass man den $\log\sin(\beta'-\beta^0)$ nicht scharf genug erhalten kann.

Die fernere Rechnung, bei der ich $\log m = 0{,}866871$ beibehalten habe, gestaltet sich nun so.

Es wird $\psi' = 11^\circ\ 54'\ 20'',375$

$$\log \rho' = 0{,}020094 \quad \log \rho_,' = 0{,}019888 \quad \log r' = 0{,}298025$$

und um die Vergleichung mit den *Hansen*'schen Resultaten fortsetzen zu können, so verbessere ich die Zeiten wegen der Aberration nicht, was auch *Hansen* unterlässt.

Die Ausdrücke (31) werden nun

$$\rho_, = \rho_,' \frac{(9{,}714859)}{f} - (0{,}042566_n) \left\{1 - \frac{(9{,}725640)}{f}\right\}$$

$$\rho_,'' = \rho_,' \frac{(9{,}706305)}{f''} + (0{,}270871_n) \left\{1 - \frac{(9{,}725640)}{f}\right\} \frac{f}{f''}$$

wobei die eingeklammerten Zahlen Logarithmen bedeuten.

Ferner erhält man

$$\log f'' = 9{,}702891 \qquad \log f = 9{,}701567$$
$$\log \rho_, = 0{,}007120 \qquad \log \rho_,'' = 0{,}064885$$
$$a = 50^\circ\ 35'\ 17'',0 \qquad a'' = 65^\circ\ 38'\ 22'',8$$
$$b'' = -1\quad 5\quad 34,\ 9 \qquad b'' = -0\quad 45\quad 3,\ 7$$
$$\log r = 0{,}302307 \qquad \log r'' = 0{,}294724$$
$$2v'' = 7^\circ\ 28'\ 20'',1 \quad v' = 7^\circ\ 31'\ 36'',35 \quad 2v = 7^\circ\ 34'\ 52'',8$$
$$\log \eta'' = 0{,}001079 \quad \log \eta' = 0{,}004367 \quad \log \eta = 0{,}001101$$

und damit werden die verbesserten Z und Z''

$$\log Z = 8{,}771941 \qquad \log Z'' = 8{,}774868.$$

Mit den letzten beiden Werthen wird nun die Rechnung wiederholt.

Hierbei ergab sich

$$\log m = 0{,}870353, \quad \Delta\psi' = \frac{3482}{1171} = 29'',73, \quad \psi' = 11^\circ\ 54'\ 50'',105,$$
$$\log \rho' = 0{,}019519 \quad \log \rho_,' = 0{,}019313 \quad \log r' = 0{,}297728$$
$$\log f'' = 9{,}702931 \qquad \log f = 9{,}701578$$
$$\log \rho_, = 0{,}006511 \qquad \log \rho_,'' = 0{,}064304$$
$$a = 50^\circ\ 35'\ 16'',7 \qquad a'' = 65^\circ\ 39'\ 21'',8$$
$$b = -1\quad 5\quad 32,\ 2 \qquad b'' = -0\quad 45\quad 2,\ 1$$
$$\log r = 0{,}301998 \qquad \log r'' = 0{,}294406$$
$$2v'' = 7^\circ\ 28'\ 50'',20 \quad v' = 7^\circ\ 32'\ 6'',04 \quad 2v = 7^\circ\ 35'\ 22'',21.$$
$$\log \eta' = 0{,}004376.$$

Mit den letzten Werthen habe ich nun die Elemente berechnet und gefunden

$$\log a = 0{,}369760$$
$$\varphi = 9^\circ\ 35'\ 2'',8$$
$$n = 989'',38$$
$$i = 1^\circ\ 36'\ 1'',6$$
$$\Omega = 93\ \ 37\ \ 4{,}6$$
$$\pi = 85\ \ 25\ \ 57{,}2$$

und die Epoche der mittlern Anomalie für 1853 Dec. 2,40281

$$340^\circ\ \ 29'\ \ 27'',0.$$

19.

Um den hier befolgten Rechnungsgang mit dem *Hansen*'schen, in Bezug auf Convergenz, besser vergleichen zu können, so füge ich noch folgende Zusammenstellung bei.

Nach *Hansen* ist

	$\log \rho_,$	$\log \rho_,''$	$\log r$	$\log r''$
in erster Näherung	0,007056,	0,064834,	0,302274,	0,294696
in zweiter „	0,006504	0,064308	0,301994	0,294408
	552	526	280	288

und nach den hier gefundenen Werthen ist

in erster Näherung	0,007120	0,064885	0,302307	0,294724
in zweiter „	0,006511	0,064304	0,301998	0,294406
	609	581	309	318.

Für die Winkel hat man, nach *Hansen*,

	ψ'	$2v$	v'	$2v''$
in erster Näherung	11° 54′ 23″,0	7° 34′ 54″,8	7° 31′ 38″,9	7° 28′ 22″,8
in zweiter „	11 54 49, 9	7 35 21, 5	7 32 5, 8	7 28 49, 9
	26, 9	26, 7	26, 9	27, 1

und hier wurde gefunden

in erster Näherung	11 54 20, 4	7 34 52, 8	7 31 36, 4	7 28 20, 1
in zweiter „	11 54 50, 1	7 35 22, 2	7 32 6, 0	7 28 50, 2
	29, 7	29, 4	29, 6	30, 1.

Dabei habe ich die ganze Rechnung auch nur mit sechsstelligen Logarithmen geführt.

Aus dieser Zusammenstellung ergiebt sich demnach, dass durch die hier vorgeschlagenen Formeln eine grössere Convergenz erlangt wird, als durch die *Hansen*'schen Ausdrücke.

Um auch eine Vergleichung meiner Methode mit der *Gauss*'schen (in der Bearbeitung, wie sie *Encke* im Berliner Jahrbuche für 1854 gegeben hat) zu geben, so habe ich auch das von *Encke* gewählte Beispiel berechnet, und die folgende Zusammenstellung giebt in erster und dritter Reihe, die von *Encke* in erster und zweiter Näherung gefundenen Werthe, während die zweite Reihe, die durch die hier gegebenen Formeln in erster Näherung gefundenen Werthe enthält.

v'	$\log m$	ζ''
13° 34′ 54″,13	0,4803403	14° 12′ 38″,24
34 56, 23	0,4821211	12 52, 00
35 4, 52	0,4808856	12 54, 20

$\log r'$	$\log \rho_1'$	$\log f$	$\log f''$
0,3950737	0,1805822	9,7369000	9,6576827
0.3949593	0,1803984	9,7368931	9,6576912
0.3949410	0,1803690	9,7368917	9,6576931.

Da nun zur weitern Rechnung nur die vier letzten Werthe gebraucht werden, so ist auch hier die grössere Convergenz, auf der Seite der hier vorgeschlagenen Methode. Hierbei muss ich noch folgendes bemerken, dass die Grössen K, tang I und α, bei geringer geocentrischen Bewegung des Planeten, durch die im Art. 9 gegebenen Ausdrucke genauer erhalten werden können, als durch die *Encke*'schen Formeln. Folgende Zusammenstellung zeigt dieses deutlich

	K	$\log \operatorname{tang} I$	$\log \alpha$
Encke's Werth	234° 49′ 53″,15	9,9686905	7,3025269
hiergefund. „	53, 28	9,9686911	7,3245119.

Wilna, im November 1870.

Thesen.

1) Die Berechnung einer parabolischen Bahn aus drei Beobachtungen, unterliegt keiner Schwierigkeit, in der einen Beobachtung mag die Rectascension oder die Declination fehlen.
2) Die Ableitung eines Differentialquotienten, wie sie *Lagrange* in seiner *Théorie des fonctions analytiques* vorträgt, ist nicht strenge.
3) Bei astrophotometrischen Beobachtungen ist die Vergleichung der Sterne ausser dem Bilde, der Vergleichung im Bilde vorzuziehen.
4) Zu Längenbestimmungen sind Mondhöhen den Monddistanzen vorzuziehen.
5) Es ist noch nicht bewiesen, dass der Kernschatten eines Sonnenfleckens dem Sonnencentrum näher liege, als der Halbschatten desselben.
6) Der in den Lehrbüchern der Physik angegebene Werth des absoluten Nullpunktes der Wärme, hat keine wissenschaftliche Bedeutung.
7) Die Berechnung der Abstände eines Himmelskörpers von der Erde, nach der hier gegebenen Vorschrift ist kürzer als nach der *Olbers*'schen Methode.
8) Die Einrichtung unseres Sonnensystems ist nicht constant.
9) Die Verkürzung der Umlaufszeit des *Encke*'schen Cometen um die Sonne, durch Gesammtanziehung aller Planetoiden zu erklären, ist nicht möglich.