A. BORKVELL

MATEMAATILISE ANALÜÜSI KURSUS

II

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS

A-22333 IV

ALBERT BORKVELL

MATEMAATILISE ANALÜÜSI KURSUS

II OSA

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1960

VIII peatükk

READ

§ 1. Arvread; nende koonduvus ja hajuvus. Olgu antud lõpmatu arvjärjend

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

Kui selle arvjärjendi kõik liikmed ühendame plussmärgiga, siis saame sümboolse kuju

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1}$$

mida nimetatakse konstantsete liikmetega lõpmatuks reaks ehk lühidalt arvreaks, kus $u_1, u_2, u_3, \ldots$ on selle rea liikmed; u_n on rea üldliige.

Sümbolit (1) ei saa mõista niisuguse hariliku summana, mida mõistetakse aritmeetikas lõpliku arvu liidetavate puhul. Et rääkida rea (1) summast kui niisugusest, selleks tuleb hariliku summa mõistet üldistada ja laiendada lõpmatule arvule liidetavatele. Selleks võtame n liikme summa järgmiselt:

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

mis on lõplik suurus ja mida nimetatakse rea (1) osasummaks. Kui siin n omab väärtusi 1, 2, 3, ..., siis saame osasummade lõpmatu järjendi

$$s_1, s_2, s_3, \ldots \tag{2}$$

Kui nüüd $n \to \infty$ puhul s_n omab mingit lõplikku piirväärtust s, s. o.

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

siis ütleme, et rida (1) koondub ja tema summaks on s, mille puhul kirjutame

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Esitatud määrangu järgi on rea (1) koonduvuse tingimus samaväärne sellega, et rea osasummade järjend (2) omaks min-

git kindlat lõplikku piirväärtust s, mis on ühtlasi rea (1) summaks.

Kui aga $n \to \infty$ puhul s_n ei oma kindlat lõplikku piirväärtust, siis ütleme, et rida (1) h a j u b. Selle järgi, kas hajuva rea osasummad piiramatult kasvavad ja saavad suuremaks kuitahes suurest etteantud arvust või võnguvad kahe tõkke vahel, läheneb rea summa lõpmatusele või real puudub kindel summa, mille puhul rida nimetatakse v õ n k u v a k s h a j u v a k s r e a k s.

Elementaaralgebra kursusest teame, et lõpliku geomeetrilise rea

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \ldots,\ aq^{n-1}$$

liikmete summa

$$s_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Kui siin $n \to \infty$, siis saame lõpmatu geomeetrilise rea

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n. \qquad (3)$$

Kui saadud reas $|q| < 1$, siis kujutab see rida lõpmata kahanevat geomeetrilist rida, mille summa

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right) = \frac{a}{1-q},$$

sest $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Seega lõpmata kahaneva geomeetrilise rea liikmetest moodustatud rida kujutab koonduvat rida, mille summa on $\frac{a}{1-q}$, kus a on rea esimene liige ja q on rea tegur.

Kui aga geomeetrilises reas (3) on $|q| > 1$, siis $n \to \infty$ puhul $q^n \to \infty$ ning seega real puudub summa, mida kirjutame sümboolse võrdusena

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}\left(1 - \lim_{n\to\infty} q^n\right) = \infty.$$

Sel juhul geomeetriline rida on hajuv.

Kui $q = 1$, siis geomeetriline rida (3) on samuti hajuv, sest tal puudub summa, s. o.

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = a + a + a + \ldots = \lim_{n\to\infty} na = \infty,$$

kui $a \neq 0$.

Kui $q = -1$, siis saame rea

$$a - a + a - a + \ldots,$$

mille osasummad on vaheldumisi a ja 0, millest nähtub, et rida on hajuv ja nimelt võnkuv.

Nagu järgmistes paragrahvides näeme, esineb rea koonduvuse ja hajuvuse kindlakstegemiseks mitmesuguseid tunnuseid, kuid koonduva rea summa täpse väärtuse leidmiseks üldised tunnused puuduvad ning seega ridade summa täpse väärtuse saamine on enamasti praktiliselt võimatu. Kui aga mõne rea summa täpse väärtuse leidmine on võimalik, siis tuleb iga rea puhul kasutada omaette erilist võtet. Nii näiteks rea

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\ \dots$$

summa võime leida sel teel, et esitame selle rea osasumma s_n iga liikme samasuse

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

järgi kahe murru vahena, s. o.

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \dots\ +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

mille piirväärtus, kui $n\to\infty$, on

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Seega antud rida koondub ja tema summa on võrdne ühega, s. o.

$$1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ \dots\ +\frac{1}{n(n+1)}+\ \dots$$

Kui rea summa täpse väärtuse leidmine tekitab raskusi, siis võib paljude praktiliste juhtude puhul kasutada summa ligikaudset väärtust, mida võimaldab rea osasumma s_n, kui n nõuetekohaselt valida.

Meid huvitab peamiselt arvridade koonduvuse küsimus, sest koonduvaid lõpmatuid ridu saab paljudel juhtudel matemaatilistes arvutustes rakendada samuti nagu lõplikke summasid. Seepärast vaatleme järgmistes paragrahvides peamiselt neid omadusi, tunnuseid ja tingimusi, mis võimaldavad määrata, kas vaadeldav arvrida koondub või hajub.

§ 2. Koonduvate ridade omadusi. 1) Kui koonduva rea

$$u_1+u_2+\ \dots\ +u_n+\ \dots$$

summa on s ja n liikme osasumma on s_n, siis nimetatakse vahet

$$s-s_n=R_n$$

antud rea jäägiks. Kuna siin

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots$$

ja

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

siis peaks lõplike summade eeskujul ilmnema, et

$$R_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}.$$

Et saadud võrdus kehtiks lõpmatu rea puhul, selleks oletame, et

$$\sum_{k=1}^{p} u_{n+k} = \sigma_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

kus $\sigma_p = s_{n+p} - s_n$. Kuna konstantse n ja $p \to \infty$ puhul $s_{n+p} \to s$, siis seega suurusel σ_p on olemas piirväärtus, kui $p \to \infty$, mis on võrdne rea jäägiga $s - s_n = R_n$. Et aga suuruse σ_p määrangu järgi tema piirväärtuseks on rea $\sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}$ summa, siis seega see rida koondub ja tema summaks on R_n. Järelikult koonduva rea puhul võime kirjutada

$$s = s_n + R_n \quad (n \geqslant 1),$$

kus

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

ja

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+k} + \ldots$$

Sellest käsitluskäigust ilmneb otseselt koonduva rea järgmine omadus: kui rida on koonduv, siis koondub ka selle rea iga jääk, ja ümberpöördult, kui rea jääk on koonduv, siis koondub ka rida, sest rea osasumma kui lõplik suurus ei mõjusta rea koonduvust.

2) Koonduva rea

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

jäägi R_n piirväärtus on null, kui $n \to \infty$, s. o.

$$\lim_{n \to \infty} R_n = 0.$$

Et koonduva rea puhul

$$R_n = s - s_n,$$

siis, minnes üle piirile, kui $n \to \infty$, saame

$$\lim_{n \to \infty} R_n = s - \lim_{n \to \infty} s_n = s - s = 0.$$

Sellest nähtub, et koonduva rea jääk R_n on lõpmata kahanev suurus, kui $n \to \infty$. See tähendab, et saame kuitahes väikese eteantud positiivse arvu ε puhul määrata naturaalarvu $m = m(\varepsilon)$ nõnda, et rea jäägi absoluutväärtus saab ja jääb iga $n \geqslant m$ puhul väiksemaks kui tähendatud ε, s. o.

$$|R_n| < \varepsilon, \text{ kui } n \geqslant m(\varepsilon).$$

3) Koonduva rea

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

üldliikme u_n piirväärtus on null, kui $n \to \infty$, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Kui esitame n liikme summa kujul

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_{n-1} + u_n,$$

millest

$$u_n = s_n - s_{n-1},$$

kusjuures antud rea summa olgu s, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s \text{ ja } \lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

siis

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

Tulemusest nähtub, et koonduva rea liikmete järjend läheneb alati nullile, kui $n \to \infty$. See tingimus on tarvilik, kuid mitte piisav, et rida oleks koonduv, sest rida võib olla ka hajuv, kui see tingimus on täidetud. Nii näiteks nn. harmooniline rida*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

nagu järgmises paragrahvis näeme, on hajuv, kuigi on täidetud tingimus

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

---

* Arvu c nimetatakse arvude a ja b harmooniliseks keskmiseks, kui

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

nimetatakse harmooniliseks seepärast, et iga tema liige, alates teisest liikmest, on talle eelneva ja järgneva liikme harmooniline keskmine.

4) Rea

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

koonduvuse tarviliku ja piisava tingimuse määrab järgmine tunnus: kui saame kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul valida naturaalarvu $m = m(\varepsilon)$ nõnda, et iga $n \geqslant m$ puhul kehtib võrratus

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon,$$

kus p on meelevaldne naturaalarv, siis on rida koonduv.

Et siin

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

ja

$$s_{n+p} = u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+p},$$

siis võime esitatud võrratuse kirjutada ka järgmiselt:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

Et näidata nimetatud tingimuse tarvilikkust, selleks oletame, et antud rida on koonduv ja tema summa on s. Andes ette kuitahes väikese $\varepsilon > 0$, võime siis võtta n nii suure, et oleks

$$|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |s_{n+p} - s| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Siis järelikult

$$s_{n+p} - s_n = (s_{n+p} - s) + (s - s_n),$$

mille absoluutväärtus

$$|s_{n+p} - s_n| = |(s_{n+p} - s) - (s_n - s)| \leqslant$$

$$\leqslant |s_{n+p} - s| + |s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Seega on iga koonduva rea puhul tähendatud tingimus täidetud.

Näitame nüüd, et ka ümberpöördult, kui see tingimus on täidetud, siis rida koondub. Selleks kirjutame võrratuse

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

teisiti:

$$-\varepsilon < s_{n+p} - s_n < \varepsilon$$

ehk

$$s_n - \varepsilon < s_{n+p} < s_n + \varepsilon,$$

mis ütleb, et teatavast indeksist n alates asetsevad kõik osasummad s_{n+p} kahe kindla tõkke $s_n - \varepsilon$ ja $s_n + \varepsilon$ vahel. Seega ei saa

rea summaks olla lõpmatus. Samuti ei saa rida olla võnkuv, sest siis peaks ka osasummade järjend

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots, s_{n+p}, \ldots$$

olema võnkuv ning tema liikmed ei saaks asetseda kahe arvu $s_n - \varepsilon$ ja $s_n + \varepsilon$ vahel, mis võivad saada teineteisele kuitahes lähedaseks, kui valida ε küllalt väike. Järelikult peab rida olema koonduv. Võrratus

$$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$$

ehk

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

on seega ühtlasi rea koonduvuse piisavaks tingimuseks. Tähendab, et rida oleks koonduv, on tarvilik ja piisav, et

$$\lim_{n \to \infty} (s_{n+p} - s_n) = 0$$

ehk

$$\lim_{n \to \infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}) = 0.$$

Siit ilmneb nüüd otseselt, et ka

$$|R_n| < \varepsilon, \text{ kui } n \geqslant m(\varepsilon), \text{ ehk } \lim_{n \to \infty} R_n = 0$$

on samuti rea koonduvuse tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks.

5) K u i r i d a

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

k o o n d u b j a t e m a s u m m a o n s, s i i s k o o n d u b k a r i d a

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots,$$

k u s a o n m i s t a h e s k o n s t a n t n e t e g u r, j a t e m a s u m m a o n $a \cdot s$.

Et lõpliku n puhul

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n$$

ja

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n = \\ = a(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = a \cdot s_n,$$

siis viimasest võrdusest, kui $n \to \infty$, saame

$$\lim_{n \to \infty} (a \cdot s_n) = a \cdot \lim_{n \to \infty} s_n = a \cdot s,$$

millest nähtub, et rida

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots$$

koondub ja tema summa on $a \cdot s$.

Siit nähtub ühtlasi, et koonduva rea liikmeid võime korrutada ühe ja sama arvuga või ümberpöördult, tuua ühise teguri (nagu lõpliku arvu liikmetega rea puhulgi) sulgude ette, s. o.

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots = \\ = a(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots)$$

ehk

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

6) Kui read

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

ja

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

koonduvad ja nende summad on vastavalt s ja σ, siis koonduvad ka read

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots$$

ja nende summad on vastavalt $s \pm \sigma$.

Et lõpliku n puhul

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = s_n$$

ja

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n = \sigma_n$$

ning

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) = s_n \pm \sigma_n,$$

siis viimasest võrdusest, kui $n \to \infty$, saame

$$\lim_{n\to\infty} (s_n \pm \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} s_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n = s \pm \sigma,$$

millest nähtub, et read

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots$$

koonduvad ja nende summad on vastavalt $s \pm \sigma$.

§ 3. Positiivsete liikmetega read. Ridade teoorias omavad olulist tähtsust lõpmatud read, millede liikmed on ühe ja sama märgiga. Käesolevas paragrahvis vaatleme positiivsete (ehk üldiselt õigemini mittenegatiivsete) liikmetega ridu, nende koonduvuse ja hajuvuse tunnuseid.

Teoreem 1: Positiivsete liikmetega rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

koondub, kui n liikme osasumma

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

jääb väiksemaks kui lõplik suurus M kuitahes suure n puhul.

Et siin rea kõik liikmed on positiivsed (mittenegatiivsed), siis osasummade järjend

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$$

on mittekahanev, s. o.

$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant \ldots,$$

ja et kõik need osasummad on tõkestatud, jäädes väiksemaks kui lõplik suurus M, siis peab summal s_n olema (I osa, § 16) lõplik piirväärtus s, kui $n \to \infty$. Järelikult on rida koonduv. Seega positiivsete (mittenegatiivsete) liikmetega rea koonduvuse piisavaks tingimuseks on, et rea osasummad oleksid tõkestatud. See tingimus osutub ka tarvilikuks, sest kui rida koondub ja tema summa on s, siis osasummad jäävad ikka väiksemaks kui s ja järelikult ka väiksemaks kui lõplik suurus M, kus $M \geqslant s$.

Teoreem 2: Kui positiivsete liikmetega rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

koondub, siis koondub ka positiivsete liikmetega rida

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

kui $v_n \leqslant u_n$, kus $n = 1, 2, 3, \ldots$

Olgu koonduva rea

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

summa s ning lõpliku n puhul

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

ja

$$\sigma_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Eeldusest $v_n \leqslant u_n$ järeldub, et iga n puhul $\sigma_n \leqslant s_n$, kusjuures σ_n on kasvav suurus. Kuitahes suure n puhul jääb selle võrratuse parempoolne osa (s_n) ikka väiksemaks kui s, s. o. $s_n < s$. Järelikult jääb ka $\sigma_n < s$ ja seega (eelmise teoreemi põhjal) on rida

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

koonduv.

Ümberpöördult, kui positiivsete liikmetega rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

hajub, siis hajub ka positiivsete liikmetega rida

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

kui $v_n \geqslant u_n$, sest kui viimane rida ei hajuks, vaid koonduks, siis peaks ka esimene rida käesoleva teoreemi põhjal koonduma.

Käsitletud teoreemi põhjal saame antud positiivsete liikmetega rea koonduvust või hajuvust kindlaks määrata võrdlemise teel mingi teise tuntud positiivsete liikmetega koonduva või hajuva reaga. Seepärast nimetame seda rea koonduvuse või hajuvuse määramise võtet v õ r d l e m i s m e e t o d i k s.

M ä r k u s: Rea koonduvuse määramise võrdlemismeetod jääb kehtivaks ka siis, kui tingimus $v_n \leqslant u_n$ pole täidetud kõikide indeksite n puhul, vaid alates mingist indeksist n (§ 2, p. 1).

Et näidata harmoonilise rea

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

hajuvust, selleks võrdleme teda mõne teise positiivsete liikmetega hajuva reaga, mille kõik liikmed on väiksemad kui harmoonilise rea vastavad liikmed. Asendame harmoonilises reas esimesed 9 liiget igaühe $\frac{1}{10}$-ga, järgmised 90 liiget igaühe $\frac{1}{100}$-ga, edasised 900 liiget igaühe $\frac{1}{1000}$-ga jne.; saame

$$\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{99}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\ldots+\frac{1}{999}\right)+\ldots>$$
$$>\frac{9}{10}+\frac{90}{100}+\frac{900}{1000}+\ldots=\lim_{n\to\infty}\frac{9n}{10}=\infty.$$

Järelikult, kui harmoonilise rea liikmetele vastavate väiksemate liikmetega rea summa on ∞, siis seda enam on harmoonilise rea summa ∞. Seega harmooniline rida hajub.

Seevastu nn. h ü p e r h a r m o o n i l i n e r i d a

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots,$$

kus $k>1$, koondub. Viimase rea koonduvuses võime veenduda, kui võrdleme teda mõne teise positiivsete liikmetega koonduva reaga, mille kõik liikmed on suuremad kui hüperharmoonilise rea vastavad liikmed. Asendame hüperharmoonilises reas esimesed 9 liiget igaühe 1-ga, järgmised 90 liiget igaühe $\frac{1}{10^k}$-ga, edasised 900 liiget igaühe $\frac{1}{100^k}$-ga jne.; saame

$$\left(1+\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{9^k}\right)+\left(\frac{1}{10^k}+\frac{1}{11^k}+\ldots+\frac{1}{99^k}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{100^k}+\frac{1}{101^k}+\ldots+\frac{1}{999^k}\right)+\ldots<$$

$$<9+\frac{9}{10^{k-1}}+\frac{9}{10^{2(k-1)}}+\ldots=\frac{9}{1-\frac{1}{10^{k-1}}}.$$

Et viimane lõpmata kahanev geomeetriline rida on koonduv, kui $k>1$, siis osutub koonduvaks ka vastavate väiksemate liikmetega hüperharmooniline rida

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots$$

Kui aga selles reas $k<1$, siis rida hajub, sest siis selle rea liikmed, alates teisest liikmest, on suuremad kui harmoonilise rea vastavad liikmed.

Teoreem 3 (d'Alembert'i * tunnus): Positiivsete liikmetega rida

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$$

koondub, kui teatavast liikmest alates

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q<1.$$

Et eelduse järgi teatavast liikmest, näiteks liikmest u_m alates, kus $m\leqslant n$, on $u_{n+1}\leqslant qu_n$, siis järelikult

$$u_m=u_m$$
$$u_{m+1}\leqslant qu_m$$
$$u_{m+2}\leqslant qu_{m+1}\leqslant q^2u_m$$
$$u_{m+3}\leqslant qu_{m+2}\leqslant q^3u_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_{m+k}\leqslant qu_{m+k-1}\leqslant q^ku_m$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

s. o. liikmest u_m alates on antud rea liikmed võrdsed või väiksemad kui vastavad liikmed reas

$$u_m+qu_m+q^2u_m+\ldots+q^ku_m+\ldots$$

Viimane rida kui lõpmata kahanev geomeetriline rida, kus $0<q<1$, on koonduv ja tema summa on $\frac{u_m}{1-q}$. Seega eelmise teoreemi põhjal rida

$$u_m+u_{m+1}+\ldots+u_{m+k}+\ldots$$

---

* Jean le Rond d'Alembert'i (1717—1783) teostes leiavad käsitlust ridade teooria, diferentsiaalvõrrandid, matemaatiline füüsika ja teoreetiline mehaanika.

ja järelikult ka rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

on koonduv, sest lõpliku arvu liikmete summa

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{m-1}$$

ei mõjusta rea koonduvust.

Kui aga tähendatud reas

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1,$$

siis rida hajub, sest sel juhul rea liikmed kas kasvavad monotoonselt või on üksteisega võrdsed.

D'Alembert'i tunnus

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant q < 1$$

on piisav, kuid mitte tarvilik tingimus rea koonduvuseks: rida koondub alati, kui see tingimus on täidetud, kuid mõni rida võib ka siis koonduda, kui see tingimus pole täidetud. Näiteks rida

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

on koonduv, sest siin juba esimesest liikmest alates

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

Harmoonilise rea

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

puhul ei ole d'Alembert'i tunnus

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \leqslant q < 1$$

täidetud, sest siin ei saa määrata kindlat konstantset suurust q. Siin võime ikka n valida nii suure, et $\frac{n}{n+1}$ jääb q ja 1 vahele ning võib saada ühele nii lähedaseks, kui me iganes soovime. Seega d'Alembert'i tunnus ei näita, kas harmooniline rida koondub või hajub.

Me teame, et hüperharmooniline rida

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

koondub, kuid d'Alembert'i tunnus

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\leqslant q<1$$

pole siin täidetud, sest siin võime samuti n valida nii suure, et $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$ jääb ikka q ja 1 vahele ning võib saada ühele nii lähedaseks, kui me iganes soovime.

J ä r e l d u s: Kui d'Alembert'i tunnuse puhul piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lambda,$$

siis rida koondub, kui $\lambda<1$, ja hajub, kui $\lambda>1$. Tõepoolest, kui $\lambda<1$ puhul võtta $\varepsilon>0$ nii väike, et ka $\lambda+\varepsilon<1$, siis $n\to\infty$ puhul $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\lambda$ ja järelikult küllalt suure n puhul on $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\lambda+\varepsilon$, mis ütleb, et tõestatud teoreemi järgi rida on koonduv. Kui aga $\lambda>1$ ja $\varepsilon>0$ võtta nii väike, et ka $\lambda-\varepsilon>1$, siis $n\to\infty$ puhul $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\lambda$ ja järelikult küllalt suure n puhul $\frac{u_{n+1}}{u_n}>\lambda-\varepsilon$, mis ütleb, et tõestatud teoreemi järgi rida on hajuv. Kui aga $\lambda=1$, siis võib rida koonduda või hajuda, mida ei saa d'Alembert'i tunnuse järgi kindlaks määrata, vaid tuleb kasutada mingit muud rea koonduvuse või hajuvuse tunnust.

Teoreem 4 (Cauchy tunnus): P o s i t i i v s e t e l i i k m e t e g a r i d a

$$u_1+u_2\ldots+u_n+\ldots$$

k o o n d u b, k u i t e a t a v a s t l i i k m e s t a l a t e s

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1.$$

Et eelduse järgi teatavast liikmest, näiteks liikmest u_m alates, kus $m\leqslant n$, on $u_n\leqslant q^n$, siis

$$\begin{aligned}
&u_m\leqslant q^m\\
&u_{m+1}\leqslant q^{m+1}\\
&u_{m+2}\leqslant q^{m+2}\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&u_{m+k}\leqslant q^{m+k}\\
&\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

s. o. liikmest u_m alates on antud rea liikmed võrdsed või väiksemad kui vastavad liikmed reas

$$q^m + q^{m+1} + q^{m+2} + \ldots + q^{m+k} + \ldots,$$

mis on lõpmata kahanev geomeetriline rida, mille summa on $\frac{q^m}{1-q}$.

Et lõpmata kahanev geomeetriline rida on koonduv, siis on ka rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

koonduv.

Kui aga

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1,$$

siis rida hajub.

Näiteks rea

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \ldots$$

koonduvust on lihtne kindlaks teha Cauchy tunnuse järgi:

$$\sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} < \frac{1}{2} < 1.$$

Cauchy tunnus (nagu d'Alembert'i tunnuski) on samuti piisav, kuid mitte tarvilik tingimus rea koonduvuse määramiseks.

Järeldus: Kui Cauchy tunnuse puhul piirväärtus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda,$$

siis analoogiliselt d'Alembert'i tunnuse järeldusele saame näidata, et rida koondub, kui $\lambda < 1$, ja hajub, kui $\lambda > 1$. Kui aga $\lambda = 1$, siis võib rida koonduda või hajuda, mida ei saa Cauchy tunnuse järgi kindlaks määrata, vaid tuleb kasutada mingit muud rea koonduvuse või hajuvuse tunnust.

Teoreem 5 (Cauchy integraaltunnus): Kui rea

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

liikmed kujutavad mingi monotoonselt kahaneva positiivse funktsiooni $f(x)$ väärtusi argumendi x täisarvuliste väärtuste puhul, s. o.

$$u_1 = f(1),\ u_2 = f(2),\ \ldots,\ u_n = f(n),\ \ldots,$$

siis rida koondub, kui koondub päratu integraal

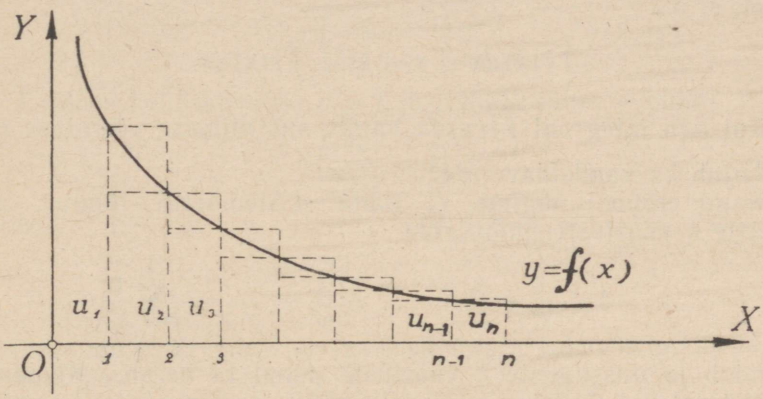
$$\int_1^\infty f(x)\,dx,$$

ja hajub, kui see integraal hajub.

Selle teoreemi tõestuseks vaatleme kujundit, mis on piiratud langeva kõveraga $y = f(x)$, X-teljega ning kahe ordinaadiga $u_1 = f(1)$ ja $u_n = f(n)$, kus n on meelevaldne positiivne täisarv (joon. 1). Selle kujundi pindala vahemikus 1-st n-ni määrab integraal

$$\int_1^n f(x)\,dx.$$

Jaotame kujundi jaotuspunktidega $x = 1, 2, 3, \ldots, n$ ühelaiusteks ribadeks, mis on ülaltpoolt piiratud kõvera $y = f(x)$ kaar-



Joon. 1.

tega, ning joonestame igale ribale vastava puudu- ja ülejäägiga ristküliku. Nende ristkülikute pindalade summad määravad arvuliselt rea n liikme summa s_n järgmiselt:

$$u_2 + u_3 + \ldots + u_n = s_n - u_1,$$
$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = s_n - u_n,$$

kus nüüd

$$s_n - u_1 < \int_1^n f(x)\,dx < s_n - u_n,$$

millest ühelt poolt

$$s_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx$$

ja teiselt poolt

$$s_n > u_n + \int_1^n f(x)\,dx > \int_1^n f(x)\,dx,$$

s. o.

$$\int_1^n f(x)\,dx < s_n < u_1 + \int_1^n f(x)\,dx.$$

Kui seejuures päratu integraal

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,dx=\int_1^\infty f(x)\,dx$$

koondub, siis s_n on tõkestatud ja omab piirväärtust s, kui $n\to\infty$. Järelikult rida koondub ja tema summa s asetseb lõplike väärtuste

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad \text{ja} \quad u_1+\int_1^\infty f(x)\,dx$$

vahel, s. o.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx<s<u_1+\int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Kui aga integraal $\int_1^\infty f(x)\,dx$ hajub, siis viimase võrratuse põhjal hajub ka vaadeldav rida.

Nagu eespool nägime, ei näita d'Alembert'i tunnus, missuguste k väärtuste puhul rida

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots+\frac{1}{n^k}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$$

koondub ja missuguste k väärtuste puhul ta hajub. Kasutades aga käesolevat Cauchy integraaltunnust, saame nõutava vastuse. Siin oleks vastavaks inteegritavaks funktsiooniks $\frac{1}{x^k}$, mille puhul

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^k}=\begin{cases}\left[\dfrac{x^{1-k}}{1-k}\right]_1^\infty, & \text{kui } k\neq 1,\\ [\ln x]_1^\infty, & \text{kui } k=1.\end{cases}$$

Siit nähtub, et kui $k>1$, siis integraal koondub ja järelikult koondub ka vaadeldav rida. Kui aga $k\leqslant 1$, siis integraal hajub ja järelikult hajub ka rida.

Kui vaadeldavas hüperharmoonilises reas võtta näiteks $k=6$, siis päratu integraal

$$\int_1^\infty\frac{dx}{x^6}=\left[-\frac{1}{5x^5}\right]_1^\infty=0{,}2$$

ning rea summa s asetseb seega 0,2 ja $1+0{,}2=1{,}2$ vahel. Kuna aga hüperharmoonilisest reast nähtub otseselt, et rea summa peab olema suurem kui 1, siis saame määrata kitsama vahemiku, milles asetseb summa s väärtus, ja nimelt

$$1<s<1{,}2.$$

Teoreem 6 (Raabe* tunnus): Positiivsete liikmetega rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

koondub, kui teatavast liikmest alates

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant r > 1, \tag{1}$$

ja hajub, kui

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \leqslant 1. \tag{2}$$

Eelduse kohaselt olgu $r > 1$ ja küllalt suure n puhul

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) \geqslant r,$$

millest

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{r}{n}.$$

Võtame mingi arvu r_1, mis asetseb 1 ja r vahel, s. o. $1 < r_1 < r$, ja avaldise

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r_1} - 1}{\frac{1}{n}},$$

mille piirväärtuseks, kui $n \to \infty$, saame (kasutades l'Hôpitali meetodit)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r_1} - 1}{\frac{1}{n}} = r_1.$$

Et $r_1 < r$, siis küllalt suure n puhul

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r_1} - 1}{\frac{1}{n}} < r$$

ehk

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r_1} < 1 + \frac{r}{n}.$$

---

* Joseph Raabe (1801—1859) — saksa matemaatik; oli professoriks Zürichi polütehnilises instituudis; oma töödes käsitles funktsioonide teooria probleeme ja ridadesse puutuvaid küsimusi.

Seega

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \geqslant 1 + \frac{r}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{r_1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{r_1},$$

mille kirjutame järgmiselt:

$$n^{r_1} \cdot u_n > (n+1)^{r_1} \cdot u_{n+1}.$$

Saadud võrratusest nähtub, et korrutis $n^{r_1} \cdot u_n$ kahaneb üleminekul n-lt $(n+1)$-le; järelikult jääb see korrutis tõkestatuks, kui $n \to \infty$. Seega leidub niisugune arv c, et

$$n^{r_1} \cdot u_n < c \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

millest

$$u_n < c \cdot \frac{1}{n^{r_1}}.$$

Et $r_1 > 1$, siis rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{r_1}}$ (kui hüperharmooniline rida) koondub. Järelikult (teoreemi 2 põhjal) koondub ka rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

Teisel juhul saame võrratusest (2)

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leqslant \frac{n+1}{n}$$

ehk

$$nu_n \leqslant (n+1)u_{n+1},$$

millest nähtub, et korrutis nu_n ei kahane üleminekul n-lt $(n+1)$-le. Kui siin oletame, et näiteks $n_0 u_{n_0} = c$, siis $n \geqslant n_0$ puhul on $nu_n \geqslant c$ ja seega

$$u_n \geqslant c \cdot \frac{1}{n}.$$

Et aga harmooniline rida $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajub, siis (teoreemi 2 põhjal) hajub ka rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

J ä r e l d u s: Kui Raabe tunnuse puhul piirväärtus

$$\lim_{n \to \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lambda,$$

siis analoogiliselt d'Alembert'i tunnuse järeldusele saame näidata, et rida koondub, kui $\lambda > 1$, ja hajub, kui $\lambda < 1$. Kui aga $\lambda = 1$,

siis võib rida koonduda või hajuda, mida ei saa Raabe tunnuse järgi kindlaks määrata, vaid tuleb kasutada mingit muud rea koonduvuse või hajuvuse tunnust.

Näiteks hüperharmoonilise rea

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

koonduvust saame kindlaks määrata ka Raabe tunnuse järgi, sest

$$n\left[\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}}-1\right]=2+\frac{1}{n}>2>1.$$

§ 4. Vahelduvate märkidega read. Kui lõpmatus reas kõik liikmed ei ole positiivsed, vaid nende hulgas esineb lõplik arv negatiivseid liikmeid, millede summa on samuti lõplik suurus, siis tuleb rea koonduvust või hajuvust kindlaks määrata ülejäänud mittenegatiivsete liikmetega rea koonduvuse ja hajuvuse tunnuste järgi, sest lõpliku arvu negatiivsete liikmete summa ei mõjusta rea koonduvust.

Kui lõpmatus reas märgid liikmete ees järk-järgult vahelduvad, siis nimetatakse seda rida vahelduvate märkidega reaks, mida kirjutame järgmiselt:

$$u_1-u_2+\ldots+u_{2k-1}-u_{2k}+\ldots,$$

kus kõik u-d on positiivsed (mittenegatiivsed). Vahelduvate märkidega rea koonduvuse tunnuse määrab järgmine

teoreem (Leibniz'i tunnus): Vahelduvate märkidega rida

$$u_1-u_2+\ldots+u_{2k-1}-u_{2k}+\ldots$$

koondub, kui mistahes indeksi $n\geqslant 1$ puhul $u_n\geqslant u_{n+1}$ ja $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Siin iga lõpliku $k\geqslant 2$ puhul osasummade

$$s_{2k}=u_1-u_2+\ldots+u_{2k-1}-u_{2k}$$

ja

$$s_{2k-2}=u_1-u_2+\ldots+u_{2k-3}-u_{2k-2}$$

vahe on eelduse järgi

$$s_{2k}-s_{2k-2}=u_{2k-1}-u_{2k}\geqslant 0,$$

millest järeldub, et paarisarvuliste indeksitega osasummade järjend

$$s_2, s_4, \ldots, s_{2k}, \ldots$$

on mittekahanev. Teiselt poolt märgime osasumma s_{2k} järgmiselt:

$$s_{2k}=u_1-(u_2-u_3)-\ldots-(u_{2k-2}-u_{2k-1})-u_{2k},$$

millest nähtub, et s_{2k} ei ületa lõplikku suurust u_1, s. o.

$$s_{2k} \leqslant u_1,$$

sest viimase võrduse paremal poolel kõik lahutatavad on mittenegatiivsed. Seega paarisarvuliste indeksitega osasummade mittekahanev järjend

$$s_2, s_4, \ldots, s_{2k}, \ldots$$

on tõkestatud ja järelikult omab piirväärtust s, kui $k \to \infty$, s. o.

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s.$$

Sama piirväärtust omab ka paarituarvuliste indeksitega osasummade järjend

$$s_1, s_3, \ldots, s_{2k-1}, \ldots,$$

sest

$$s_{2k-1} = s_{2k} + u_{2k}$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} s_{2k} + \lim_{k\to\infty} u_{2k}.$$

Et siin

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k} = s \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} u_{2k} = 0,$$

siis ka

$$\lim_{k\to\infty} s_{2k-1} = s.$$

Seega vahelduvate märkidega rea koonduvuse piisavaks tingimuseks on, et iga $n \geqslant 1$ puhul $u_n \geqslant u_{n+1}$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Teame, et harmooniline rida

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

hajub, kuid vastav vahelduvate märkidega rida

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

koondub, sest siin Leibniz'i tunnus on täidetud, s. o.

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \quad \text{ja} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

J ä r e l d u s: Kui võtta vahelduvate märkidega rea tundmatu summa s asemele osasumma s_n, siis on selle osasumma erinevus rea summast ehk absoluutne viga ikka väiksem kui rea jäägi R_n esimese liikme absoluutväärtus. Et eelneva järgi

$$0 < s_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k} < u_1,$$

siis

$$0 < \lim_{k\to\infty} s_{2k} \leqslant \lim_{k\to\infty} [u_1 - (u_2 - u_3) - \ldots - \\ -(u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}] < u_1,$$

s. o.

$$0 < s < u_1.$$

Rea jääk

$$R_n = \pm (u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots).$$

Tähistame siin

$$\sigma = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots,$$

mis kujutab samuti vahelduvate märkidega rida, kus esimeseks liikmeks on u_{n+1}, ja järelikult

$$0 < \sigma < u_{n+1}.$$

Et $\sigma = |R_n| = |s - s_n|$, siis

$$|s - s_n| < u_{n+1}.$$

Näiteks vahelduvate märkidega rea

$$\frac{1}{10} - \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} - \frac{4}{10^4} + \ldots$$

osasumma

$$s_3 = \frac{1}{10} - \frac{2}{10^2} + \frac{3}{10^3} = 0{,}083$$

annab selle rea summa s ligikaudse väärtuse, mille absoluutse vea ülemmääraks on $\frac{4}{10^4} = 0{,}0004$.

§ 5. Absoluutselt ja tingimisi koonduvad read. Vaatleme nüüd ridu, millede liikmed võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed (mittepositiivsed), ja näitame, kuidas nende ridade koonduvuse küsimust taandada vastavate positiivsete liikmetega ehk liikmete absoluutväärtustest moodustatud ridade koonduvuse küsimusele. Selleks tõestame järgmised teoreemid.

Teoreem 1: Rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

koondub, kui selle rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \qquad (2)$$

koondub.

Et siin $u_n \leqslant |u_n|$ ja seega

$$0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

ning eelduse järgi rida (2) on koonduv, siis on ka (§ 2, p. 5 põhjal) rida $2\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ koonduv ja järelikult (§ 3, teoreemi 2 põhjal) koondub ka positiivsete (mittenegatiivsete) liikmetega rida

$$(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+(u_3+|u_3|)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|),$$

millest lahutades koonduva rea (2) saame rea (1), s. o.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+|u_n|)-\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

mis on (§ 2, p. 6 põhjal) koonduv rida. Sel juhul ütleme, et rida (1) koondub a b s o l u u t s e l t.

Definitsioon: *Rida nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui selle rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida koondub.*

Näiteks vahelduvate märkidega rida

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$$

koondub absoluutselt, sest selle rea absoluutväärtustest moodustatud rida

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

koondub ja tema summa on $e-1$ (I osa, § 22, p. 1). Kuid näiteks vahelduvate märkidega rida

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

koondub ka, kuid mitteabsoluutselt, sest selle rea absoluutväärtustest moodustatud rida

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

(kui harmooniline rida) hajub.

Teoreem 2: K o o n d u v a s r e a s v õ i b l i i k m e d r ü h m i t a d a, j ä t t e s l i i k m e t e j ä r j e s t u s e e n d i s e k s.

Võtame koonduva rea

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (1)$$

ja rühmitame tema liikmed järgmiselt:

$$(u_1+u_2+\ldots+u_i)+(u_{i+1}+u_{i+2}+\ldots+u_j)+$$
$$+(u_{j+1}+u_{j+2}+\ldots+u_k)+\ldots, \qquad (2)$$

kus esimese sulgavaldise loeme selle rea esimeseks liikmeks, teise sulgavaldise loeme teiseks liikmeks jne.

Olgu $s_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ rea (1) osasummad ja σ_n rea (2) osasummad, kus

$$\sigma_1 = s_i, \; \sigma_2 = s_j, \; \sigma_3 = s_k, \; \ldots$$

Rea (2) osasummade järjend

$$\sigma_1, \; \sigma_2, \; \sigma_3, \; \ldots$$

moodustab osa rea (1) osasummade järjendist

$$s_i, \; s_j, \; s_k, \; \ldots$$

Seega mõlemad osasummade järjendid omavad üht ja sama piirväärtust, millega on ka teoreem tõestatud.

Ümberpöördult pole see teoreem üldiselt kehtiv, sest näiteks rida

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

koondub ja tema summa on 0, kuid rida

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

hajub.

Absoluutselt koonduva rea kohta kehtib Dirichlet'* poolt püstitatud

teoreem 3: Absoluutselt koonduva rea liikmete teisiti järjestamisel rea summa ei muutu.

a) Lähtume esiteks positiivsete (mittenegatiivsete) liikmetega reast

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

mis koondub ja mille summa on s. Selle rea liikmeid ümber paigutades saame samade positiivsete liikmetega teisiti järjestatud rea

$$u_1' + u_2' + \ldots + u_n' + \ldots \qquad (2)$$

Võtame rea (2) n liikme osasumma s_n'. Selle osasumma liidetavad $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ satuvad ikka rea (1) m liikme osasummasse s_m, kui m võtta küllalt suur. Siis on muidugi

$$u_1' + u_2' + \ldots + u_n' \leqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_m,$$

s. o.

$$s_n' \leqslant s_m \leqslant s,$$

sest m kasvamisel s_m ei kahane ega ületa oma piirväärtust s. Et reas (2) n kasvamisel osasumma s_n' samuti ei kahane ja on tõkestatud, siis peab ta omama lõplikku piirväärtust s', s. o.

$$\lim_{n \to \infty} s_n' = s' \leqslant s.$$

Ümberpöördult, kui oletame, et rea (2) summa on s', ja võtame

---

* Peter Dirichlet (1805—1859) — saksa matemaatik.

rea (1) n liikme osasumma s_n, mille liidetavad $u_1, u_2, \ldots, u_n$ satuvad rea (2) m liikme osasummasse s_m', kui m võtta küllalt suur, siis saame eelnevale analoogilise arvutamisega, et

$$s \leqslant s'.$$

Järelikult $s' = s$, mis ütleb, et positiivsete liikmetega teisiti järjestatud rida (2) koondub ja tema summa on s.

b) Edasi, olgu nüüd rida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

absoluutselt koonduv ja olgu tema summa s. Rea liikmeid ümber paigutades saame samade liikmetega teisiti järjestatud rea

$$u_1' + u_2' + \ldots + u_n' + \ldots \tag{4}$$

Et rida (3) on absoluutselt koonduv, siis

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = S \tag{3'}$$

ning eelöeldu (p. a) põhjal koondub ka rida

$$|u_1'| + |u_2'| + \ldots + |u_n'| + \ldots, \tag{4'}$$

mille summa on samuti S. Seega (teoreemi 1 põhjal) rida (4) koondub absoluutselt.

Näitame, et rea (4) summa on s. Selleks liidame read (3) ja (3'), s. o.

$$(u_1 + |u_1|) + (u_2 + |u_2|) + (u_3 + |u_3|) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|),$$

mis (§ 2, p. 6 põhjal) on positiivsete (mittenegatiivsete) liikmetega koonduv rida, sest

$$0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2u_n.$$

Saadud rea summa on $s + S$. Sama summat omab (p. a põhjal) ka rida

$$(u_1' + |u_1'|) + (u_2' + |u_2'|) + (u_3' + |u_3'|) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n' + |u_n'|).$$

Rea (4) summa on seega

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n' = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n' + |u_n'|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n'| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + |u_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = s.$$

Tähendab, absoluutselt koonduva rea liikmete summa jääb muutumatuks, sõltumatult sellest, kuidas me rea liikmeid järjestame ja liidame. Lõpmatu mitteabsoluutselt koonduva rea summa aga võib mõnikord muutuda, kui me rea liikmeid teisiti järjestame. Samuti võib mitteabsoluutselt koonduv rida liikmete teisiti järjestamisel muutuda hajuvaks reaks.

Võtame näiteks mitteabsoluutselt koonduva rea

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

ja korrutame selle rea kõiki liikmeid $\frac{1}{2}$-ga, s. o.

$$\frac{1}{2}s = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots,$$

mida eelmise reaga liites saame

$$\frac{3}{2}s = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Viimases reas esinevad kõik esimese rea liikmed, kuid teisiti järjestatult. Siit näeme, et teisiti järjestatud liikmetega rea summa ei ole enam s, vaid $\frac{3}{2}s$.

Koonduvat rida, mille liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida ei ole koonduv, nimetatakse *tingimisi koonduvaks* reaks. Nagu toodud näitest nähtub, võib tingimisi koonduva rea summa sõltuda liikmete järjestusest.

Teoreem 4: *Kui read*

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{1}$$

ja

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \tag{2}$$

koonduvad absoluutselt ja nende summad on vastavalt s ja σ, siis koondub absoluutselt ka nende ridade liikmete kõikidest võimalikest korrutistest $u_i v_j (i, j = 1, 2, 3, \dots)$ mistahes järjekorras moodustatud rida ja tema summa on $s\sigma$.

Olgu ridade (1) ja (2) liikmete kõikidest võimalikest korrutistest $u_i v_j (i, j = 1, 2, 3, \dots)$ mistahes järjekorras moodustatud rida

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots \tag{3}$$

Näitame kõigepealt, et rida (3) koondub absoluutselt. Selleks võtame rea (3) liikmete absoluutväärtustest moodustatud rea

$$|w_1| + |w_2| + \dots + |w_n| + \dots, \tag{3'}$$

mille n liikme osasumma olgu S_n, s. o.

$$S_n = |w_1| + |w_2| + \dots + |w_n|.$$

Osasumma S_n koosneb liikmetest $|u_i v_j|$, millede indeksite i ja j hulgast suurima indeksi tähistame tähega m. Kui nüüd korru-

tame omavahel ridade (1) ja (2) liikmete absoluutväärtustest moodustatud osasummad

$$A_m = |u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|$$

ja

$$B_m = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|,$$

siis selle korrutise liikmete hulgas esinevad osasumma S_n kõik liikmed $|u_i v_j|$. Seega

$$S_n \leqslant A_m B_m.$$

Et read (1) ja (2) koonduvad absoluutselt, siis osasummad A_m ja B_m on tõkestatud. Võrratus $S_n \leqslant A_m B_m$ aga näitab, et ka osasumma S_n on tõkestatud ja seega (§ 3, teoreemi 1 põhjal) rida (3′) koondub. Järelikult koondub ka rida (3), ja nimelt absoluutselt.

Näitame, et rea (3) summaks on $s\sigma$. Et rida (3) on absoluutselt koonduv, siis võime tema summa leidmiseks (teoreemide 2 ja 3 põhjal) liikmeid $u_i v_j (i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ paigutada ja rühmitada ükskõik missuguses järjekorras. Rühmitame rea (3) liikmed kui korrutised $u_i v_j$ järgmiselt: esimeseks rühmaks võtame liikme $u_1 v_1$, mille suurim indeks on 1; teise rühma koondame liikmed, millede suurim indeks on 2, s. o. liikmed $u_1 v_2$, $u_2 v_2$, $u_2 v_1$; kolmandasse rühma koondame liikmed, millede suurim indeks on 3, s. o. liikmed $u_1 v_3$, $u_2 v_3$, $u_3 v_3$, $u_3 v_2$, $u_3 v_1$ jne. Võttes niimoodi rühmitatud rea (3) osasumma, kus viimase rühma liikmete suurimaks indeksiks on m, näeme, et see osasumma kujutab korrutiste $u_i v_j (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ summat ja on võrdne korrutisega $s_m \sigma_m$, s. o.

$$\begin{aligned} s_m \sigma_m = {} & u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1) + \\ & + (u_1 v_3 + u_2 v_3 + u_3 v_3 + u_3 v_2 + u_3 v_1) + \ldots + \\ & + (u_1 v_m + u_2 v_m + \ldots + u_m v_m + \ldots + u_m v_2 + u_m v_1), \end{aligned}$$

kus

$$s_m = u_1 + u_2 + \ldots + u_m$$

ja

$$\sigma_m = v_1 + v_2 + \ldots + v_m.$$

Et $m \to \infty$ puhul $s_m \to s$ ja $\sigma_m \to \sigma$, siis viimati rühmitatud rea (3) osasumma läheneb $m \to \infty$ puhul $s\sigma$-le, s. o.

$$\lim_{m \to \infty} s_m \sigma_m = \lim_{m \to \infty} s_m \cdot \lim_{m \to \infty} \sigma_m = s\sigma.$$

Et rida (3) koondub absoluutselt, siis seega saadud piirväärtus $s\sigma$ on ühtlasi rea (3) summaks.

Tõestatud teoreemi nimetatakse absoluutselt koonduvate ridade

(1) ja (2) korrutamise teoreemiks. Nende ridade korrutiseks on rida (3), mida paljudel juhtudel kasutatakse kujul

$$s\sigma = u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + (u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1) +$$
$$+ \ldots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_{n-1}v_2 + u_nv_1) + \ldots \quad (4)$$

Märkus: Saab näidata, et valem (4) jääb kehtivaks ka sel juhul, kui üks ridadest (1) või (2) koondub absoluutselt ja teine tingimisi. Kui aga mõlemad read koonduvad tingimisi, siis võib valem (4) osutuda kehtetuks ning nende ridade korrutis muutuda hajuvaks reaks. Nii näiteks on vahelduvate märkidega mitteabsoluutselt koonduvate ridade

$$\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \ldots$$

ja

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

korrutise n-s rühm üldliikmena valemi (4) järgi

$$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{1}\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{n-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{n-2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}\sqrt[3]{1}}\right),$$

mille iga üksikliikme absoluutväärtus on suurem kui $\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ ning seega rühma kui üldliikme absoluutväärtus on suurem kui

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

millest järeldub, et valemis (4) n-s rühm üldliikmena ei lähene nullile ning seega antud ridade korrutis muutub hajuvaks reaks.

§ 6. Kompleksliikmetega read. Olgu read

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (1)$$

ja

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \quad (2)$$

koonduvad ning nende summad vastavalt s ja σ, kusjuures kompleksliikmetega rea esitame kujul

$$(u_1 + v_1i) + (u_2 + v_2i) + \ldots + (u_n + v_ni) + \ldots, \quad (3)$$

kus $i = \sqrt{-1}$, ja vaatleme selle rea koonduvuse küsimust.

Kompleksliikmetega rida (3) nimetatakse koonduvaks reaks, kui tema osasumma

$$(u_1 + v_1i) + (u_2 + v_2i) + \ldots + (u_n + v_ni) =$$
$$= (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) + (v_1 + v_2 + \ldots + v_n)i = s_n + \sigma_ni$$

$n \to \infty$ puhul omab lõplikku piirväärtust $s + \sigma i$, mis on kompleksliikmetega rea (3) summaks. See tähendab, et kompleksliikmetega rida (3) on koonduv, kui rea kompleksliikmete reaalosadest ja imaginaarosade koefitsientidest moodustatud read (1) ja (2) mõlemad koonduvad. Et ridade (1) ja (2) summad on vastavalt s ja σ, siis kompleksliikmetega rea summa on kompleksarv $s + \sigma i$, s. o. kui

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s \text{ ja } \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sigma,$$

siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n i) = s + \sigma i.$$

Kompleksliikmetega koonduva rea liikmed lähenevad alati nullile, kui $n \to \infty$, sest kui

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0 \text{ ja } \lim_{n \to \infty} v_n = 0,$$

siis ka

$$\lim_{n \to \infty} (u_n + v_n i) = 0.$$

Märkus: Kompleksarvu $a + bi$ geomeetriliseks esitamiseks tuleb võtta tasapinnal punkt koordinaatidega a ja b või sirglõik r koordinaadistiku algusest kuni selle punktini. Sirglõigu r pikkust nimetatakse kompleksarvu $a + bi$ absoluutväärtuseks ehk mooduliks ja tähistatakse

$$r = |a + bi| = |\sqrt{a^2 + b^2}|.$$

Kompleksliikmetega rea koonduvuse kohta kehtib järgmine **teoreem:** Kompleksliikmetega rida

$$(u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) + \ldots + (u_n + v_n i) + \ldots$$

koondub, kui selle rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$|u_1 + v_1 i| + |u_2 + v_2 i| + \ldots + |u_n + v_n i| + \ldots$$

koondub.

Et siin

$$|u_n| \leqslant |\sqrt{u_n^2 + v_n^2}| = |u_n + v_n i|$$

ja

$$|v_n| \leqslant |\sqrt{u_n^2 + v_n^2}| = |u_n + v_n i|,$$

siis, kui rida

$$|u_1 + v_1 i| + |u_2 + v_2 i| + \ldots + |u_n + v_n i| + \ldots$$

koondub, koonduvad (§ 3, teoreemi 2 põhjal) ka read

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots$$

ja

$$|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| + \ldots,$$

nii et järelikult read

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

ja

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

koonduvad absoluutselt, mis kompleksliikmetega rea koonduvuse definitsiooni põhjal ütlebki, et rida

$$(u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) + \ldots + (u_n + v_n i) + \ldots$$

koondub.

Sel juhul, kui kompleksliikmetega rea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida koondub, ütleme, et kompleksliikmetega rida koondub absoluutselt.

§ 7. Funktsionaalsed read. Kui lõpmatu rea

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

liikmed ei ole konstantsed suurused, vaid on sõltumatu muutuja x funktsioonid, s. o.

$$u_1 = \varphi_1(x),\ u_2 = \varphi_2(x),\ \ldots,\ u_n = \varphi_n(x),\ \ldots,$$

mis on teatavas vahemikus üheselt määratud, siis nimetatakse neist funktsioonidest moodustatud lõpmatut rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

muutuvate liikmetega reaks ehk funktsionaalseks reaks. Funktsionaalne rida võib mõnede x väärtuste puhul koonduda ja teiste x väärtuste puhul hajuda. Punkti x, milles funktsionaalne rida koondub, nimetatakse selle rea koonduvuspunktiks, ja vastavalt punkti, milles funktsionaalne rida hajub, nimetatakse selle rea hajuvuspunktiks. Kui funktsionaalne rida koondub vahemiku $a \leqslant x \leqslant b$ igas punktis, siis ütleme, et see rida koondub vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$. Vahemik $a \leqslant x \leqslant b$ on seega funktsionaalse rea koonduvusvahemikuks.

Näiteks funktsionaalne rida

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

kujutab x iga väärtuse puhul geomeetrilist rida, mille iga liige on määratud vahemikus $-\infty < x < +\infty$, kuid selle rea koon-

duvusvahemikuks on $-1 < x < 1$. Hajuvusvahemikuks on siis $|x| \geqslant 1$.

Kui vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ funktsionaalne rida koondub, siis selles vahemikus rea summa esitab mingisugust x funktsiooni $f(x)$, s. o.

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

Funktsionaalse rea liikmed võivad olla määratud teatava vahemiku mistahes punktis, kuid rea summa $f(x)$ on määratud ainult rea koonduvuspunktides.

Tähistame funktsionaalse rea n liikme summa sümboliga $f_n(x)$, s. o.

$$f_n(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x),$$

mida analoogiliselt arvridade juhule nimetame funktsionaalse rea osasummaks. Kui funktsionaalne rida koondub punktis x, siis funktsionaalse rea summa $f(x)$ ei ole muud kui osasummade järjendi

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

piirväärtus ehk piirfunktsioon, kui $n \to \infty$, s. o.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Analoogiliselt arvrea jäägile nimetame koonduva funktsionaalse rea summa $f(x)$ ja osasumma $f_n(x)$ vahet

$$f(x) - f_n(x) = R_n(x)$$

funktsionaalse rea jäägiks. Kui x omab vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ mingit kindlat väärtust, siis saame (§ 2, p. 2 põhjal) kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul määrata naturaalarvu m nõnda, et koonduva funktsionaalse rea osasummale

$$f_n(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)$$

järgneva jäägi

$$R_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots$$

absoluutväärtus võib saada iga $n \geqslant m$ puhul väiksemaks kui tähendatud ε, s. o.

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

mis on samaväärne võrdusega

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0.$$

Naturaalarv m, mis sõltub x-st nõnda, et kehtib võrratus

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

iga $n \geqslant m$ puhul, võib omada erinevate x väärtuste puhul ka erinevaid väärtusi. Kui aga vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ iga x väärtuse puhul m omab ikka üht ja sama väärtust, nii et (sõltumatult x-st) kehtib võrratus

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

kui ainult $n \geqslant m$, siis ütleme, et funktsionaalne rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

koondub vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt. Tähendab, funktsionaalse rea koonduvuse ja ühtlase koonduvuse erinevus seisab selles, et koonduvuse puhul naturaalarv m sõltub x-st, kuid ühtlase koonduvuse puhul ei sõltu.

Definitsioon: *Koonduvat funktsionaalset rida*

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

nimetatakse vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt koonduvaks reaks, kui on võimalik kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul määrata (x-st sõltumatut) naturaalarvu m nõnda, et $n \geqslant m$ puhul rea jäägi absoluutväärtus jääb väiksemaks kui ε, s. o.

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

mis kehtib x iga väärtuse puhul vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.

Et vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ saame erinevate x väärtuste puhul funktsionaalsest reast erinevad arvread, siis indeks m, millest alates $|R_n(x)| < \varepsilon$, on iga arvrea puhul isesugune. Kui funktsionaalses reas annaksime x-le lõpliku arvu väärtusi, siis saaksime ka lõpliku arvu arvridu, millede puhul igast x väärtusest on tingitud vastav m väärtus. Sel juhul saaksime lõpliku arvu erinevaid naturaalarve m. Võttes neist suurima m väärtuse, saaksimegi niisuguse liikme, millest alates kehtiks võrratus $|R_n(x)| < \varepsilon$ kõigi lõpliku arvu x väärtuste puhul. Et aga funktsionaalse rea koonduvusvahemik $a \leqslant x \leqslant b$ sisaldab mitte lõpliku arvu x väärtusi, vaid neid väärtusi on lõpmata palju, siis tuleb leida tingimused, mille puhul funktsionaalne rida oleks ühtlaselt koonduv vahemiku $a \leqslant x \leqslant b$ igas punktis. Selleks tõestame teoreemi, mis määrab vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ funktsionaalse rea ühtlase koonduvuse tunnuse.

Teoreem 1: Selleks, et funktsionaalne rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

oleks vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt koonduv, on tarvilik ja piisav, et kuitahes väikese $\varepsilon > 0$ puhul saab määrata x-st sõltumatu naturaalarvu m nõnda, et $n \geqslant m$ puhul kehtib võrratus

$$|\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots + \varphi_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

kus p on mistahes naturaalarv ja x on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.

Kui antud funktsionaalne rida koondub vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt, siis $n \geqslant m$ ja meelevaldse naturaalarvu p puhul

$$R_n(x) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ja } R_{n+p}(x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ning seega

$$|R_{n+p}(x) - R_n(x)| \leqslant |R_{n+p}(x)| + |R_n(x)| < \varepsilon,$$

s. o.

$$|R_{n+p}(x) - R_n(x)| < \varepsilon,$$

mis määrab funktsionaalse rea ühtlase koonduvuse tunnuse tarvilikkuse.

Et funktsionaalse rea jääk

$$R_n(x) = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(x),$$

siis juhul, kui võrratus

$$|\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots + \varphi_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

kehtib meelevaldse naturaalarvu p ja vahemiku $a \leqslant x \leqslant b$ mistahes punkti x puhul, on

$$|R_n(x)| \leqslant \varepsilon,$$

mis järelikult tuleneb teoreemis ülesseatud tingimusest iga $\varepsilon > 0$ ja küllalt suure n puhul. Sellest nähtub, et funktsionaalne rida koondub ühtlaselt. Sellega on ühtlasi tõestatud funktsionaalse rea ühtlase koonduvuse tunnuse piisavus.

Konkreetsetel juhtudel võib funktsionaalsete ridade ühtlase koonduvuse kindlaksmääramiseks kasutada võrdlemisi lihtsat, Weierstrassi poolt esitatud tunnust.

Teoreem 2 (Weierstrassi tunnus): Kui vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ funktsionaalse rea

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

liikmete absoluutväärtused ei ületa koonduva positiivsete liikmetega arvrea

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

vastavaid liikmeid, siis rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

koondub vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt ja ka absoluutselt.

Et eelduse järgi arvrida

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

koondub, siis saab määrata niisuguse naturaalarvu m, et $n \geqslant m$ puhul rea jääk

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < \varepsilon,$$

kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv. Siis on ka funktsionaalse rea

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

jäägi absoluutväärtus

$$\begin{aligned} |R_n(x)| = |\varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots| \leqslant \\ \leqslant |\varphi_{n+1}(x)| + |\varphi_{n+2}(x)| + \ldots \leqslant \\ \leqslant u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tähendab, kui $n \geqslant m$, siis vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ iga x väärtuse puhul kehtib võrratus

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

millest nähtub, et antud funktsionaalne rida koondub vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt. Sel juhul on antud funktsionaalne rida ka absoluutselt koonduvaks reaks.

Näiteks funktsionaalne rida

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots \qquad (1)$$

koondub x iga väärtuse puhul absoluutselt ja ühtlaselt.

Et näidata, et see funktsionaalne rida koondub ühtlaselt, selleks võrdleme teda arvreaga

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots, \qquad (2)$$

mis koondub kui hüperharmooniline rida. Siis koondub ka funktsionaalse rea (1) liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida

$$\frac{|\sin x|}{1^2} + \frac{|\sin 2x|}{2^2} + \ldots + \frac{|\sin nx|}{n^2} + \ldots,$$

mille liikmed x iga väärtuse puhul ei ületa hüperharmoonilise rea (2) vastavaid liikmeid. Seega antud funktsionaalne rida (1) koondub Weierstrassi tunnuse järgi x iga väärtuse puhul ühtlaselt (ja ka absoluutselt).

Edasi tekib küsimus, kas funktsionaalse rea

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

koonduvusvahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, milles kõik rea liikmed on pidevad x funktsioonid, on ka rea summa $f(x)$ pidev x funktsioon.

Nagu selgub, võib funktsionaalse rea koonduvusvahemikus rea summa $f(x)$ olla mõnikord pidevaks funktsiooniks ja mõnikord katkevaks funktsiooniks, vaatamata sellele, et rea kõik liikmed selles vahemikus on pidevad x funktsioonid. Näitame, et kui vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ funktsionaalne rida koondub ühtlaselt, siis on funktsionaalse rea summa $f(x)$ selles vahemikus pidev x funktsioon.

Teoreem 3: Vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ühtlaselt koonduv rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots,$$

mille liikmed on pidevad x funktsioonid, kujutab selles vahemikus samuti pidevat x funktsiooni.

Oletame, et vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

koondub ühtlaselt ja tema summa on $f(x)$. Analoogiliselt arvrea summale (§ 2, p. 1) kirjutame siin

$$f(x) = f_n(x) + R_n(x),$$

kus

$$f_n(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)$$

ja

$$R_n(x) = \varphi_{n+1}(x) + \varphi_{n+2}(x) + \ldots$$

Andes ette kuitahes väikese positiivse arvu ε, saame rea ühtlase koonduvuse tõttu määrata niisuguse naturaalarvu m, et $n \geqslant m$ puhul kehtib ikka võrratus

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Anname vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ argumendile x kasvu Δx ja kirjutame funktsiooni kasvu järgmiselt:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f_n(x + \Delta x) + R_n(x + \Delta x) - f_n(x) - R_n(x) =$$
$$= [f_n(x + \Delta x) - f_n(x)] + [R_n(x + \Delta x) - R_n(x)];$$

siis

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| \leqslant |f_n(x + \Delta x) - f_n(x)| +$$
$$+ |R_n(x + \Delta x)| + |R_n(x)|,$$

kusjuures vahemikus $a \leqslant x + \Delta x \leqslant b$ on $n \geqslant m$ puhul samuti

$$|R_n(x + \Delta x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Et $f_n(x)$ kui lõpliku arvu pidevate funktsioonide summa on pidev funktsioon, siis küllalt väikese δ puhul on ka

$$|f_n(x+\Delta x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

kui ainult $|\Delta x| < \delta$. Järelikult on $|\Delta x| < \delta$ puhul

$$|f(x+\Delta x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

mis näitab, et funktsioon $f(x)$ on pidev vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.

Et funktsionaalse rea ühtlane koonduvus on oluline rea summa pidevuse määramisel, siis vaatleme funktsionaalset rida

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots + \frac{x^2}{(1+x^2)^n} + \ldots,$$

mille liikmed on pidevad x funktsioonid.

See rida kujutab $x \neq 0$ puhul lõpmata kahanevat geomeetrilist rida, mille teguriks on $\frac{1}{1+x^2} < 1$ ja summaks

$$f(x) = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1.$$

Et antud funktsionaalse rea liikmed on $x = 0$ puhul võrdsed nulliga, siis ka $f(0) = 0$. Kuid $x \neq 0$ puhul $f(x) = 1$. Seega niisuguses vahemikus, mis sisaldab nulli, näiteks vahemikus $-1 \leqslant x \leqslant 1$, on funktsioon $f(x)$ katkev. Katkevus tekib seetõttu, et selles vahemikus rida ei koondu ühtlaselt. Valides ε kuitahes väikese $(0 < \varepsilon < 1)$ ja võttes naturaalarvu m kuitahes suure, saame ikka võtta x väärtuse niivõrd lähedase nullile, et

$$R_m(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^{m+1}} + \frac{x^2}{(1+x^2)^{m+2}} + \ldots = \frac{1}{(1+x^2)^m} > \varepsilon.$$

§ 8. Funktsionaalsete ridade inteegrimine ja diferentsimine. Koonduvate funktsionaalsete ridade inteegrimise ja diferentsimise võimalikkuse kohta tõestame kaks järgmist üldist teoreemi.

Teoreem 1: Kui pidevatest funktsioonidest moodustatud rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

koondub ühtlaselt vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ja tema summa on $f(x)$, siis koondub ka integraalrida

$$\int_a^x \varphi_1(x)\,dx + \int_a^x \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x \varphi_n(x)\,dx + \ldots$$

ja tema summa on $\int_a^x f(x)\,dx$, s. o.

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x \varphi_1(x)\,dx + \int_a^x \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x \varphi_n(x)\,dx + \ldots,$$

kus ülemine inteegrimisraja x jääb vahemikku a-st b-ni.

Et antud funktsionaalse rea liikmed on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidevad x funktsioonid, siis on ka rea osasumma

$$f_n(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x)$$

selles vahemikus pidev. Samas vahemikus on funktsioon $f(x)$ pidev rea ühtlase koonduvuse tõttu (§ 7, teoreem 3). Et $f(x)$ ja $f_n(x)$ on pidevad vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, siis on ka nende vahe $f(x) - f_n(x) = R_n(x)$ pidev selles vahemikus. Järelikult kõik kolm funktsiooni $f(x)$, $f_n(x)$ ja $R_n(x)$ omavad vahemikus a-st b-ni pidevaid integraale, mille puhul võime kirjutada

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f_n(x)\,dx + \int_a^x R_n(x)\,dx,$$

kus ülemine inteegrimisraja x jääb vahemikku a-st b-ni.

Et integraalarvutuse keskväärtuse teoreemi (I osa, § 71, p. 1) põhjal

$$\int_a^x R_n(x)\,dx = (x - a)\,R_n(\xi),$$

kus $a < \xi < x$, siis

$$\int_a^x f(x)\,dx = \int_a^x f_n(x)\,dx + (x - a)\,R_n(\xi),$$

kusjuures ülemise inteegrimisraja x erinevate väärtuste puhul omab ka ξ erinevaid väärtusi. Et funktsionaalse rea ühtlase koonduvuse tõttu, kui $n \to \infty$, on $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, siis on ka $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(\xi) = 0$ ja seega

$$\int_a^x f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(x)\,dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\int_a^x \varphi_1(x)\,dx + \int_a^x \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x \varphi_n(x)\,dx\right] =$$

$$= \int_a^x \varphi_1(x)\,dx + \int_a^x \varphi_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x \varphi_n(x)\,dx + \ldots,$$

millest nähtub, et ühtlaselt koonduvat funktsionaalset rida

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

on võimalik liikmeti inteegrida, kusjuures inteegritud rida jääb samuti koonduvaks reaks, mille summa on $\int_a^x f(x)\,dx$.

Märkus: Saadud integraalrida on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ka ühtlaselt koonduv, sest kui tähistame integraalrea jäägi sümboliga $r_n(x)$, siis

$$r_n(x) = \int_a^x [f(x) - f_n(x)]\,dx = \int_a^x R_n(x)\,dx,$$

kus $R_n(x)$ on antud funktsionaalse rea jääk, ja kui valime n küllalt suure, on tõestatud teoreemi järgi $|R_n(x)| < \varepsilon$ ning seega vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ iga x väärtuse puhul kehtib võrratus

$$|r_n(x)| \leqslant \int_a^x |R_n(x)|\,dx \leqslant (x-a)\varepsilon \leqslant (b-a)\varepsilon,$$

mis ütleb, et integraalrida koondub ühtlaselt vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$.

Teoreem 2: Kui funktsionaalne rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

koondub vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ ja tema summa on $f(x)$ ning selle rea liikmete tuletistest moodustatud rida

$$\varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \ldots + \varphi_n'(x) + \ldots$$

koondub ühtlaselt samas vahemikus, siis on tuletatud rea summa võrdne funktsiooni $f(x)$ tuletisega $f'(x)$.

Kui tuletatud rida koondub ühtlaselt vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$, siis tema summa on selles vahemikus mingi pidev x funktsioon, mida tähistame sümboliga $\psi(x)$. Seega

$$\psi(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \ldots + \varphi_n'(x) \ldots$$

ning eelmise teoreemi põhjal

$$\int_a^x \psi(x)\,dx = \int_a^x \varphi_1'(x)\,dx + \int_a^x \varphi_2'(x)\,dx + \ldots + \int_a^x \varphi_n'(x)\,dx + \ldots =$$
$$= [\varphi_1(x) - \varphi_1(a)] + [\varphi_2(x) - \varphi_2(a)] + \ldots +$$
$$+ [\varphi_n(x) - \varphi_n(a)] + \ldots = f(x) - f(a),$$

s. o.

$$\int_a^x \psi(x)\,dx = f(x) - f(a),$$

kus x kuulub vahemikku a-st b-ni. Diferentsime viimase võrduse mõlemaid pooli x järgi; saame

$$\psi(x) = f'(x),$$

millest nähtub, et tuletatud rea summa on $f'(x)$, s. o.

$$f'(x) = \varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) + \ldots + \varphi_n'(x) + \ldots$$

Tähendab, vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ koonduv funktsionaalne rida on liikmeti diferentsitav siis, kui tuletatud rida kujutab selles vahemikus ühtlaselt koonduvat rida. Teoreemi 1 põhjal on siis ka funktsionaalne rida

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

ühtlaselt koonduv rida.

Teoreemides 1 ja 2 esitatud ühtlase koonduvuse nõue ridade liikmeti inteegrimiseks ja diferentsimiseks on p i i s a v, kuid m i t t e t a r v i l i k, sest mõnikord saab koonduvat rida liikmeti inteegrida või diferentsida, kui ühtlase koonduvuse nõue ei ole täidetud. Näiteks pidevate liikmetega funktsionaalne rida

$$x^2 + (x^4 - x^2) + (x^6 - x^4) + \ldots + (x^{2n} - x^{2n-2}) + \ldots$$

koondub vahemikus $-1 \leqslant x \leqslant 1$, kuid mitte ühtlaselt, sest tema summa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } -1 < x < 1 \\ 1, & \text{kui } x = \pm 1 \end{cases}$$

on katkev punktides $x = \pm 1$. Et ühelt poolt summa $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} x^{2n}$ on inteegritav, s. o.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 0,$$

ja teiselt poolt

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{-1}^{1} (x^4 - x^2)\,dx + \int_{-1}^{1} (x^6 - x^4)\,dx + \ldots$$

$$+ \int_{-1}^{1} (x^{2n} - x^{2n-2})\,dx + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2n-1}\right) + \ldots,$$

mille summa

$$s = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{2n+1} = 0,$$

siis järelikult

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx + \int_{-1}^{1} (x^4 - x^2)\,dx + \int_{-1}^{1} (x^6 - x^4)\,dx +$$

$$+ \ldots + \int_{-1}^{1} (x^{2n} - x^{2n-2})\,dx + \ldots,$$

vaatamata sellele, et antud rida ei koondu vahemikus $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ühtlaselt.

§ 9. Astmerida. Funktsionaalset rida

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

mille iga liige koosneb konstantse suuruse ja sõltumatu muutuja x täisastme korrutisest, nimetatakse a s t m e r e a k s. Konstantseid suurusi $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nimetatakse astmerea koefitsientideks.

Astmerida võib koonduda või hajuda x iga väärtuse puhul või koonduda ainult teatavas lõplikus vahemikus. Teeme kõigepealt kindlaks, missuguste x väärtuste puhul astmerida koondub ja missuguste x väärtuste puhul ta hajub. Selleks tõestame järgmised teoreemid.

Teoreem 1 (Abeli * teoreem): K u i a s t m e r i d a

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

k o o n d u b $x = x_0$ $(\neq 0)$ p u h u l, s i i s o n a s t m e r i d a a b s o l u u t s e l t k o o n d u v k õ i g i n e n d e x v ä ä r t u s t e p u h u l, m i s r a h u l d a v a d v õ r r a t u s t $|x| < |x_0|$.

Et eelduse järgi rida

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots \qquad (1)$$

koondub, siis $a_n x_0^n \to 0$, kui $n \to \infty$, ja järelikult leidub niisugune arv M, et

$$|a_n x_0^n| < M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

mille puhul

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n \right| < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n,$$

millest nähtub, et astmerea liikmete absoluutväärtustest moodustatud rea

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots \qquad (2)$$

liikmed on väiksemad kui lõpmata kahaneva geomeetrilise rea

$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots$$

vastavad liikmed, kus $|x| < |x_0|$, s. o. $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Et viimane rida on koonduv, siis koondub ka (§ 3, teoreemi 2 põhjal) rida (2)

---

* N i e l s H e n r i k A b e l (1802—1829) ja E v a r i s t e G a l o i s (1811—1832) tõestasid esimestena, et algebralised võrrandid, mille aste on suurem kui 4, pole üldiselt algebraliselt lahendatavad. Abel pani aluse ka elliptiliste funktsioonide integraalide üldisele teooriale, kus teatavad funktsioonid kannavad praegu Abeli funktsioonide nimetust.

ning (§ 7, teoreemi 2 põhjal) astmerida (1) koondub $|x| < |x_0|$ puhul absoluutselt.

Abeli teoreemi geomeetriline tähendus seisab selles, et kui astmerida koondub arvsirge punktis x_0, siis igas punktis, mis on punktile 0 lähemal kui x_0, koondub astmerida absoluutselt.

Iga astmerida koondub $x = 0$ puhul, sest kõik rea liikmed peale esimese on selles punktis nullid. Seega punkt $x = 0$ kuulub ikka ja alati astmerea koonduvusvahemikku. Punkt $x = 0$ võib olla ka ainsaks punktiks, milles astmerida koondub. Nii näiteks astmerida

$$1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^nx^n + \ldots$$

koondub ainult punktis $x = 0$, sest kui $x \neq 0$, siis $n > \frac{1}{|x|}$ puhul

$$|n^nx^n| = |nx|^n > 1,$$

millest nähtub, et rea üldliige ei lähene nullile, kui $n \to \infty$. Seega antud astmerida hajub, kui $x \neq 0$, ja koondub ainult punktis $x = 0$.

Astmerida võib koonduda ka iga lõpliku x väärtuse puhul. Nii näiteks astmerida

$$1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^3} + \ldots + \frac{x^n}{n^n} + \ldots$$

koondub iga lõpliku x väärtuse puhul, sest kui võtta $n > 2|x|$, siis

$$\left|\frac{x}{n}\right|^n = \frac{|x^n|}{n^n} < \frac{1}{2^n},$$

mis ütleb, et antud astmerea liikmete absoluutväärtused on teatavast liikmest alates väiksemad kui vastavad liikmed lõpmata kahanevas geomeetrilises reas

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Seega viimane astmerida koondub (§ 3, teoreemi 2 põhjal) iga lõpliku x väärtuse puhul.

Kuid peale selle võib esineda astmeridu, mis koonduvad teatavate x väärtuste puhul ja hajuvad ülejäänute puhul. Sel juhul rea koonduvusvahemik kujutab koonduvuspunktide tõkestatud hulka, sest kui x_0 on rea hajuvuspunktiks, siis teoreemi 1 kohaselt astmerida peab hajuma iga niisuguse x puhul, mille puhul $|x| > |x_0|$, ja seega iga koonduvuspunkt peab rahuldama võrratust $|x| \leqslant |x_0|$, millest nähtub, et rea koonduvuspunktide hulk on tõkestatud.

Teoreem 2: Iga astmerea jaoks on olemas niisugune arv r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$, et rida koondub absoluutselt, kui $|x| < r$, ja hajub, kui $|x| > r$.

Olgu r astmerea koonduvuspunktide hulga ülemtõkkeks. Väidame, et astmerida koondub absoluutselt, kui $|x| < r$, ja järelikult (r määrangu tõttu) hajub, kui $|x| > r$. Oletame, et $|x| < r$; siis $r - |x| = \alpha > 0$. Et r on astmerea koonduvuspunktide hulga ülemtõke, siis leidub niisugune koonduvuspunkt x', et $x' > r - \alpha = |x|$. Seega oleme tõestanud, et x on punktiks, milles astmerida koondub absoluutselt.

Tähendab, kui $x \neq 0$ ja $x \neq \infty$, siis ikka ja alati on olemas niisugune $r > 0$, et astmerida koondub absoluutselt, kui $|x| < r$, ja hajub, kui $|x| > r$. Vahemik $-r < x < r$ on astmerea absoluutse koonduvuse vahemikuks, kusjuures konstantset suurust r nimetatakse astmerea koonduvusraadiuseks.

Nagu näeme, on astmerea absoluutse koonduvuse vahemiku keskpunktiks $x = 0$, kusjuures see vahemik võib esitada nii ühtainsat punkti $x = 0$ kui ka hõlmata tervet arvsirget. Kui koonduvusraadius $r = \infty$, siis astmerida koondub absoluutselt x iga lõpliku väärtuse puhul. Kui $r = 0$, siis ka $x = 0$, mille puhul astmerida koondub ja tema summaks on rea esimene liige a_0; iga $x \neq 0$ puhul niisugune rida hajub. Kui aga $|x| = r$, siis astmerida võib koonduda või hajuda mõlemas punktis $x = -r$ ja $x = r$ või koonduda ainult ühes või teises punktis. Et neis tõkkepunktides rea koonduvuse või hajuvuse määramiseks puudub vastav tunnus, siis tuleb neis punktides rea koonduvust või hajuvust määrata katselisel teel.

Nagu näeme, tuleb astmerea koonduvusvahemiku määramiseks leida koonduvusraadius r ja siis uurida rea käitumist (küsimust, kas ta koondub või hajub) punktides $x = -r$ ja $x = r$. Vaatleme siinjuures üht tunnust, mille järgi saab väga paljudel juhtudel kindlaks määrata astmerea koonduvusraadiuse r. Selle tunnuse määrab

teoreem 3: Kui astmereas

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

kahe teineteisele järgneva koefitsiendi jagatise absoluutväärtus $\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|$ omab piirväärtust r, kui $n \to \infty$, siis on astmerida absoluutselt koonduv kõigis neis punktides, milledes $|x| < r$.

Teoreemi tõestamiseks võtame rea (1) üldliikme ja temale eelneva liikme jagatise absoluutväärtuse kujul

$$\left|\frac{a_n x^n}{a_{n-1} x^{n-1}}\right| = \frac{|x|}{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|}$$

ja oletame, et

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = r.$$

Siis d'Alembert'i tunnuse järgi rida koondub absoluutselt, kui

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right|} = \frac{|x|}{r} < 1,$$

millest

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = r.$$

Seega $|x| < r$ ehk $-r < x < r$ on astmerea absoluutse koonduvuse vahemik, kus r on rea koonduvusraadiuseks. Kui $|x| > r$, siis astmerida hajub.

Näiteks: a) Astmerida

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

koondub absoluutselt x iga lõpliku väärtuse puhul, sest selle rea koonduvusraadius

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

b) Astmerida

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ (\pm)\ \ldots$$

koondub absoluutselt vahemikus $-1 < x < 1$, sest

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1.$$

Kui siin $x = 1$, siis rida koondub tingimisi (kui vahelduvate märkidega rida, milles liikmete absoluutväärtused monotoonselt kahanedes lähenevad nullile). Kui aga $x = -1$, siis rida muutub negatiivseks harmooniliseks reaks, mis hajub. Seega antud rea koonduvusvahemikuks on poollahtine vahemik $-1 < x \leqslant 1$.

c) Astmerida

$$1 + x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^nx^n + \ldots$$

koondub ainult punktis $x = 0$, sest

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{e}\cdot 0 = 0.$$

Olles kindlaks teinud astmerea (1) koonduvusvahemiku $(-r, r)$, kus r on koonduvusraadius, vaatleme edasi, kas astmerida koondub selles vahemikus ühtlaselt või ei koondu ühtlaselt. Juba geomeetriline rida

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

mille koonduvusvahemik on $(-1, 1)$, näitab, et astmerea koonduvusvahemik ei tarvitse olla ühtlase koonduvuse vahemikuks, sest selle rea jääk

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$n \to \infty$ puhul läheneb küll nullile, kui $-1 < x < 1$, kuid seejuures $n \to \infty$ ja $x \to 1$ puhul rea jääk $R_n(x) \to \infty$, s. o. küllalt suure n puhul $R_n(x)$ võib saada kuitahes suureks, kui x valida küllalt lähedane ühele. Seega antud geomeetrilise rea koonduvus vahemikus $(-1, 1)$ ei ole ühtlane. Kui aga vahemik koos oma algus- ja lõpp-punktiga asetseb astmerea koonduvusvahemikus, siis selles vahemikus koondub astmerida ühtlaselt, mida näitab

teoreem 4: Kui astmerea

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (1)$$

koonduvusraadius on r ja $0 < r_1 < r$, siis astmerida koondub ühtlaselt vahemikus $-r_1 \leqslant x \leqslant r_1$.

Et eelduse järgi $r_1 < r$, siis punktis $x = r_1$ rida

$$a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_1^2 + \ldots + a_n r_1^n + \ldots$$

koondub absoluutselt. Et aga $|x| \leqslant r_1$ puhul

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n| r_1^n,$$

siis (§ 7, teoreemi 2 põhjal) astmerida (1) koondub ühtlaselt vahemikus $|x| \leqslant r_1$ ehk $-r_1 \leqslant x \leqslant r_1$.

Järeldus 1: Astmerea (1) summa on pidev koonduvusvahemiku igas sisemises punktis.

Et astmerea (1) ühtlase koonduvuse vahemik koos oma algus- ja lõpp-punktiga asetseb absoluutse koonduvuse vahemikus, siis sellest saame viimase teoreemi ja § 7 teoreemi 3 põhjal järeldada, et astmerea (1) summa on pidev koonduvusvahemiku igas sisemises punktis.

Järeldus 2: Koonduvusvahemiku igas sisemises punktis on astmerida (1) liikmeti inteegritav, s. o.

$$\int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \qquad (2)$$

kus $f(x)$ on rea (1) summa.

Teame (§ 8, teoreem 1, märkus), et rida (2) koondub ühtlaselt igas vahemikus, milles koondub ühtlaselt rida (1), ja järelikult igas vahemikus, mis kuulub rea (1) koonduvusvahemikku, millest järeldub, et koonduvusvahemiku igas sisemises punktis on astmerida (1) liikmeti inteegritav.

Teoreem 5: Astmerida esitab funktsiooni, millel on koonduvusvahemikus kuitahes kõrget järku tuletised, kusjuures tuletatud read esitavad samas vahemikus koonduvaid astmeridu.

Võtame astmerea

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots , \qquad (1)$$

mis koondub vahemikus $-r < x < r$, ja tuletatud rea

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots , \qquad (2)$$

mis kujutab samuti astmerida. Et näidata, et tuletatud rida (2) koondub samuti vahemikus $-r < x < r$ ja tema summa on $f'(x)$, selleks võtame rea (1) koonduvusvahemikus $-r < x < r$ vabalt mingi punkti $x = x_0$ ja valime arvud x_1 ja x_2 nõnda, et

$$|x_0| < x_1 < x_2 < r.$$

Siis vahemikus $-x_1 \leqslant x \leqslant x_1$ on tuletatud rea (2) üldliikme absoluutväärtus

$$n|a_nx^{n-1}| \leqslant n|a_n| \cdot x_1^{n-1} = \frac{n|a_n| \cdot x_2^n}{x^2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1},$$

kus $n = 1, 2, 3, \ldots$ Et arvrida

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_nx_2^n + \ldots$$

(Abeli teoreemi järgi) koondub, siis $a_nx_2^n \to 0$, kui $n \to \infty$, ja järelikult iga $n \geqslant 0$ puhul leidub niisugune arv M, et $|a_n| \cdot x_2^n \leqslant M$. Seega $|x| \leqslant x_1$ puhul

$$n|a_nx^{n-1}| \leqslant \frac{n|a_n| \cdot x_2^n}{x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} \leqslant n\frac{M}{x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1},$$

kus $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja $\frac{x_1}{x_2} < 1$. Järelikult tuletatud rea (2) liikmed ei ületa vastavaid liikmeid reas

$$\frac{M}{x_2} + 2\frac{M}{x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) + 3\frac{M}{x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \ldots + n\frac{M}{x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1} + \ldots ,$$

mis koondub, sest d'Alembert'i tunnuse järgi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\frac{M}{x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n}{n\frac{M}{x_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_1}{x_2} < 1.$$

Seega (§ 3, teoreemi 2 järgi) tuletatud rida (2) koondub samuti vahemikus $-x_1 \leqslant x \leqslant x_1$, ja nimelt absoluutselt. Et aga siin võime x_1 valida kuitahes lähedase r-le, siis tuletatud rea (2) koonduvusraadius ϱ ei ole väiksem kui r, s. o. $\varrho \geqslant r$. Seega (teoreemi 4 järgi) tuletatud rida (2) koondub ühtlaselt vahemikus $-x_1 \leqslant x \leqslant x_1$, kui $0 < x_1 < r$. Sel juhul võime (§ 8, teoreemi 2 põhjal) ütelda, et vahemikus $-r < x < r$ astmerea (1) summa $f(x)$ omab tuletist $f'(x)$, mis on tuletatud rea (2) summaks. Edasi näitame, et tuletatud rea (2) koonduvusraadius $\varrho = r$. See tuleneb sellest, et astmerida (1), mis saadakse tuletatud rea (2) inteegrimisel rajades 0-st x-ni, peab (teoreemi 4, järelduse 2 järgi) koonduma vahemikus $-\varrho < x < \varrho$, kus nüüd $\varrho \leqslant r$. Kuna varem nägime, et $\varrho \geqslant r$, siis järelikult peab olema $\varrho = r$. Seega tuletatud rida (2) koondub samas vahemikus $-r < x < r$, milles koondub astmerida (1).

Väljaspool seda vahemikku, s. o. $|x| > r$, on tuletatud astmerida (2) hajuv, sest kui väidaksime, et ta $|x| > r$ puhul koondub, siis peaks (§ 8, teoreemi 2 põhjal) $|x| > r$ puhul koonduma ka astmerida (1) (kui integraalrida), mis ei vasta aga koonduvusvahemiku suhtes ülesseatud nõuetele.

Rakendades analoogilist tõestust tuletatud astmerea (2) suhtes, saame teise tuletatud astmerea

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + \ldots + (n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

ning samuti kolmanda tuletatud astmerea

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \ldots$$

jne., mis koonduvad ikka ja alati samas vahemikus $-r < x < r$.

Tähendab, astmerida võime koonduvusvahemiku piirides liikmeti diferentsida nii mitu korda, kui me iganes soovime.

§ 10. Taylori ja Mac-Laurini read. Eelmises paragrahvis uurisime astmerida ja tegime kindlaks tema koonduvusvahemiku ning vaatlesime ühtlasi tema summa omadusi. Käesolevas paragrahvis käsitleme vastupidist ülesannet, ja nimelt: kas antud funktsiooni $f(x)$ on võimalik arendada niisuguseks astmereaks, et $f(x)$ esitaks teatavas vahemikus selle rea summat. See on aga võimalik ainult siis, kui funktsioonil $f(x)$ on olemas vaadeldava vahemiku igas punktis kuitahes kõrget järku tuletised.

Oletame, et funktsioon $f(x)$ on arendatav astmereaks, s. o.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

kus $f(x)$ tähendab rea summat rea koonduvusvahemikus $-r < x < r$, milles funktsioonil $f(x)$ on olemas kuitahes kõrget järku tuletised. Siis selles vahemikus (§ 9, teoreemi 5 põhjal) x iga väärtuse puhul kehtivad võrdused

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \ldots + (n-1)nx^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + \ldots + (n-2)(n-1)nx^{n-3} + \ldots$$

. . . . . .

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots na_n + 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n(n+1)a_{n+1}x + \ldots$$

. . . . . .

Et $f(x)$ on vahemikus $-r < x < r$ pidev x funktsioon, siis — andes argumendile x kasvu Δx — saame

$$f(x+\Delta x) = a_0 + a_1(x+\Delta x) + a_2(x+\Delta x)^2 + \\ + a_3(x+\Delta x)^3 + \ldots + a_n(x+\Delta x)^n + \ldots$$

Avades sulud ja rühmitades rea liikmed Δx astmete järgi, saame

$$f(x+\Delta x) = [a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots]_0 +$$

$$+ \left[a_1 + \binom{2}{1}a_2x + \binom{3}{1}a_3x^2 + \ldots + \binom{n}{1}a_nx^{n-1} + \ldots\right]_1 \Delta x +$$

$$+ \left[a_2 + \binom{3}{2}a_3x + \binom{4}{2}a_4x^2 + \ldots + \binom{n}{2}a_nx^{n-2} + \ldots\right]_2 \Delta x^2 +$$

$$+ \left[a_3 + \binom{4}{3}a_4x + \binom{5}{3}a_5x^2 + \ldots + \binom{n}{3}a_nx^{n-3} + \ldots\right]_3 \Delta x^3 +$$

. . . . . .

$$+ \left[a_n + \binom{n+1}{n}a_{n+1}x + \binom{n+2}{n}a_{n+2}x^2 + \ldots\right]_n \Delta x^n + \ldots$$

Võrreldes saadud andmeid eelmistega, näeme, et

$$[]_0 = f(x),\ []_1 = f'(x),\ []_2 = \frac{f''(x)}{2!},\ []_3 =$$

$$= \frac{f'''(x)}{3!}, \ldots, []_n \frac{f^{(n)}(x)}{n!}, \ldots$$

Paigutades need väärtused sulgavaldiste asemele, saame lõpmatu rea

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(x)}{3!}\Delta x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n + \ldots,$$

mida nimetatakse T a y l o r i r e a k s.

Lugedes Taylori reas x konstantseks suuruseks a ja Δx muutuvaks suuruseks x, võime selle rea esitada astmereana kujul

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \ldots$$

ehk

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n(x),$$

kus $R_n(x)$ tähendab rea jääki, s. o.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}x^{n+1} + \frac{f^{(n+2)}(a)}{(n+2)!}x^{n+2} + \ldots,$$

mille väärtus jääkliikmena Lagrange'i järgi on (I osa, § 52)

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kus $0 < \Theta < 1$ ning $a + \Theta x$ asetseb a ja $a + x$ vahel.*

Kui $n \to \infty$ puhul Taylori rea jääkliikme piirväärtus on null, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0,$$

siis saame funktsiooni $f(a+x)$ arendiks Taylori rea lõpmatu astmereana

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a}{n!}x^n + \ldots,$$

milles konstantsed suurused

$$f(a),\ f'(a),\ \frac{f''(a)}{2!},\ \frac{f'''(a)}{3!},\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ \ldots$$

on Taylori rea koefitsiendid.

Edasi vaatleme, millal on tingimus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$$

täidetud. See tingimus on täidetud siis, kui vahemikus $a < \xi < a + x$ arvjärjend

$$|f(\xi)|,\ |f'(\xi)|,\ \ldots,\ |f^{(n)}(\xi)|,$$

on tõkestatud, s. o. kui leidub niisugune positiivne arv M, et

$$|f(\xi)| < M,\ |f'(\xi)| < M,\ \ldots,\ |f^{(n)}(\xi)| < M,\ \ldots$$

* Cauchy järgi esineb jääkliige kujul

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{n!}(1-\Theta)^n x^{n+1}, \quad (0 < \Theta < 1).$$

Määrame siin niisuguse täisarvu k, et oleks

$$k \leqslant x < k+1,$$

mille puhul jääkliikmele võime anda kuju

$$\frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1} = f^{(n+1)}(a+\Theta x)\cdot\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= f^{(n+1)}(a+\Theta x)\cdot\frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\frac{x}{k}\cdot\frac{x}{k+1}\cdot\frac{x}{k+2}\cdots\frac{x}{n+1}.$$

Et siin

$$|f^{(n+1)}(a+\Theta x)| < M$$

ja

$$\left|\frac{x}{k+1}\right| = q < 1,\ \left|\frac{x}{k+2}\right| < q < 1,\ \ldots,\ \left|\frac{x}{n+1}\right| < q < 1,$$

siis

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}\right| < M\cdot\frac{|x^k|}{k!}\cdot q^{n+1-k} = N\cdot q^{n+1-k},$$

kus $N = M\cdot\frac{|x^k|}{k!}$ on lõplik positiivne suurus. Et $0 < q < 1$, siis n piiramatul kasvamisel q^{n+1-k} läheneb nullile ja seega

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1} = 0.$$

Siit järeldub ühtlasi, et x iga lõpliku väärtuse puhul

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

Võrdusest

$$f(a+x) - \left[f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n\right] = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}\,x^{n+1}$$

nähtub otseselt, et kui $n \to \infty$ puhul jääkliikme piirväärtus on null, siis Taylori rida koondub funktsiooniks $f(a+x)$. Kui aga jääkliikme piirväärtus on nullist erinev lõplik suurus, siis Taylori rida samuti koondub, kuid mitte funktsiooniks $f(a+x)$. Kui jääkliikmel puudub lõplik piirväärtus, siis Taylori rida hajub. Seega Taylori rida esitab funktsiooni $f(a+x)$ ainult nende x väärtuste puhul, mille puhul jääkliikme piirväärtus on null, kui $n \to \infty$. Järelikult funktsioon $f(a+x)$ on arendatav Taylori reaks

$$f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \ldots,$$

kui selle rea koonduvusvahemikus $n \to \infty$ puhul jääkliikme piirväärtus on null.

Kui eespool leitud Taylori valemis

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \frac{f'''(a)}{3!}x^3 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

võtta $a = 0$, siis valem omandab kuju

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \\ + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Kui viimases valemis $n \to \infty$ puhul jääkliikme piirväärtus on null, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = 0,$$

siis saame funktsiooni $f(x)$ arendiks lõpmatu astmerea

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots,$$

mis kannab Mac-Laurini rea nime. Konstantsed suurused

$$f(0),\ f'(0),\ \frac{f''(0)}{2!},\ \frac{f'''(0)}{3!},\ \ldots,\ \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

on Mac-Laurini rea koefitsiendid. Nagu näeme, on funktsioon $f(x)$ arendatav Mac-Laurini reaks ainult siis, kui ta omab iga järku tuletist $x = 0$ puhul. Mac-Laurini rida kui Taylori rea lihtsamat erijuhtu kasutatakse harilikult funktsioonide ridadeks arendamisel, kui ainult funktsioon on arendatav Mac-Laurini reaks.

§ 11. Funktsioonide ridadeks arendamine. 1) Eksponentfunktsiooni

$$f(x) = e^x$$

kõik tuletised on

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = \ldots = e^x,$$

millest, asendades x nulliga, saame

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = \ldots = 1.$$

Paigutades need väärtused Mac-Laurini ritta, leiame eksponentfunktsiooni e^x arendirea

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

mis, nagu eespool (§ 9, teoreem 3) nägime, on koonduv x iga lõpliku väärtuse puhul. Et siin

$$f^{(n+1)}(\Theta x) = e^{\Theta x},$$

mille väärtus asetseb 1 ja e^x vahel, siis lõpliku x puhul jääkliikme $R_n(x)$ piirväärtus on võrdne nulliga, kui $n \to \infty$, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = 0,$$

sest $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$.

Kui saadud arendireas võtta $x = 1$, siis

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2{,}71828\ldots$$

esitab loomulike logaritmide alust (I osa, § 22, p. 1).

Eksponentfunktsiooni e^x arendirida võime kasutada näiteks integraali $\int \dfrac{e^x}{x}\,dx$ arvutamisel. Arendame siin e^x reaks, jagame x-ga ja inteegrime; saame

$$\int \frac{e^x}{x}\,dx = \int \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}{x}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \ldots\right) dx =$$

$$= \ln|x| + x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} + \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \ldots + c,$$

mis koondub vahemikes $-\infty < x < 0$ ja $0 < x < \infty$, sest (§ 9, teoreemi 3 järgi)

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n-1)\cdot(n-1)!}}{\frac{1}{n\cdot n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n-1} = \infty$$

ning $\ln|x|$ puhul peab olema $|x| > 0$.

2) Siinus- ja koosinusfunktsiooni

$$f(x) = \sin x, \qquad f(x) = \cos x$$

puhul

$f(x) = \sin x,$	$f(0) = 0$	$f(x) = \cos x,$	$f(0) = 1$
$f'(x) = \cos x,$	$f'(0) = 1$	$f'(x) = -\sin x,$	$f'(0) = 0$
$f''(x) = -\sin x,$	$f''(0) = 0$	$f''(x) = -\cos x,$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = -\cos x,$	$f'''(0) = -1$	$f'''(x) = \sin x,$	$f'''(0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \sin x,$	$f^{(4)}(0) = 0$	$f^{(4)}(x) = \cos x,$	$f^{(4)}(0) = 1$
. . . . .		. . . . .	

Paigutades need väärtused Mac-Laurini ritta, saame vastavalt siinus- ja koosinusrea

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

mis koonduvad (§ 9, teoreemi 3 põhjal) x iga lõpliku väärtuse puhul, sest mõlema rea jääkliikme piirväärtus, kui $n \to \infty$, on võrdne nulliga, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(2n+1)}(\Theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos \Theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1} = 0$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(2n)}(\Theta x)}{(2n)!} x^{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos \Theta x}{(2n)!} x^{2n} = 0.$$

Siinus- ja koosinusfunktsiooni arendiridu võime kasutada näiteks integraalide $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ja $\int \frac{\cos x}{x} dx$ leidmiseks, samuti nagu seda tegime eespool $\int \frac{e^x}{x} dx$ arvutamisel.

3) Et logaritmfunktsiooni suhtes oleks rakendatav Mac-Laurini rida, selleks võtame logaritmfunktsiooni kujul

$$f(x) = \ln (1 + x),$$

mis väldib lõpmatuse, kui $x = 0$. Siin

$$f(x) = \ln (1 + x), \quad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad f'''(0) = 1 \cdot 2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \quad f^{(4)}(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3$$

. . . . . .

Asetades need väärtused Mac-Laurini ritta, saame

$$\ln (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

mis koondub absoluutselt vahemikus $-1 < x < 1$, sest

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n-1}}{\frac{1}{n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n}{n-1} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 1 + \frac{1}{n-1} \right| = 1.$$

Jääkliikmest

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

nähtub, et $n \to \infty$ puhul jääkliige läheneb nullile ka siis, kui $x = 1$. See ütleb, et ka $x = 1$ puhul rida koondub. Seega rea koonduvusvahemik on $-1 < x \leqslant 1$.

Saadud rea abil võime leida arvude loomulikke logaritme, kui x on väike arv, mis asetseb vahemikus $-1 < x \leqslant 1$. Kui näiteks $x = 1$, siis

$$\ln(1+x) = \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Nagu eespool (I osa, § 58, p. 4) nägime, tuleks selle rea kasutamisel $\ln 2$ jaoks ühe õige kümnendkoha saamiseks võtta vähemalt rea 10 liiget ja kolme õige kümnendkoha saamiseks 1000 liiget.

Et rea kaudu loomuliku logaritmi väärtuse leidmisel jõuda rutemini eesmärgile, selleks teisendame saadud rida. Kui

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

mis koondub vahemikus $-1 < x \leqslant 1$, siis, paigutades x asemele $-x$, saame

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

mis koondub vahemikus $-1 \leqslant x < 1$. Kui esimesest reast lahutame teise, siis saame uue rea

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right),$$

mis koondub vahemikus $-1 < x < 1$. Tähistades siin

$$x = \frac{1}{2v+1},$$

millest

$$1 + x = \frac{2v+2}{2v+1},\ 1 - x = \frac{2v}{2v+1},$$

ning asetades need väärtused viimasesse ritta, saame

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \frac{v+1}{v} = \ln (v+1) - \ln v =$$

$$= 2\left[\frac{1}{2v+1} + \frac{1}{3(2v+1)^3} + \frac{1}{5(2v+1)^5} + \ldots\right]$$

ehk

$$\ln (v+1) = \ln v + 2\left[\frac{1}{2v+1} + \frac{1}{3(2v+1)^3} + \frac{1}{5(2v+1)^5} + \ldots\right],$$

mis koondub, kui $v > 0$. Saadud rea abil on kerge leida arvude naturaallogaritme. Kui siin $v = 1$, siis

$$\ln 2 = \ln 1 + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \ldots\right).$$

Viimase rea abil $\ln 2$ ühe õige kümnendkoha saamiseks piisab rea esimesest liikmest ja kolme õige kümnendkoha saamiseks piisab rea kolmest esimesest liikmest, s. o.

$$\ln 2 \approx \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4}\right) \approx 0{,}693.$$

Kui $\ln 2$ on teada, saame leida $\ln 3$, s. o.

$$\ln 3 = \ln 2 + 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \ldots\right) \approx$$

$$\approx 0{,}693 + 2(0{,}2 + 0{,}0026 + 0{,}00006 + \ldots) \approx 1{,}098.$$

Kolme õige kümnendkoha leidmiseks piisab siin rea kahest liikmest.

Liitarvu logaritmi võime leida tema tegurite logaritmide kaudu, kui need on teada, näiteks

$$\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 \approx 1{,}791.$$

Murru logaritmi leidmisel toimime analoogiliselt, näiteks

$$\ln \frac{16}{9} = \ln 16 - \ln 9 = 4 \ln 2 - 2 \ln 3 \approx 0{,}595.$$

4) Kui funktsioon kujutab binoomi astet

$$f(x) = (1+x)^m,$$

kus m on nullist erinev reaalarv, siis selle funktsiooni reaks arendamiseks leiame funktsiooni ja tema tuletiste väärtused $x = 0$ puhul, s. o.

$$f(x) = (1+x)^m \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = m(1+x)^{m-1} \qquad f'(0) = m$$
$$f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2} \qquad f''(0) = m(m-1)$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3} \qquad f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

millede asetamisel Mac-Laurini ritta saame

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots,$$

mis kujutab Newtoni binoomi arendirida lõpmatu reana, kui m ei ole positiivne täisarv. See rida koondub vahemikus $-1 < x < 1$, sest

$$|x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\binom{m}{n-1}}{\binom{m}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{m-n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\frac{m}{n}-1+\frac{1}{n}}\right| = 1.$$

Kui siin m on positiivne täisarv, siis funktsiooni $(1+x)^m$ kõik tuletised alates $m+1$ tuletisest on võrdsed nulliga ning lõpmatu arendirea asemele saame m-astme polünoomi, mis kujutab elementaaralgebrast teada olevat Newtoni binoomivalemit.

5) Arkustangensfunktsiooni

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

reaks arendamiseks diferentsime funktsiooni, s. o.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1},$$

mille kui binoomi astme arendame Newtoni valemi järgi lõpmatuks astmereaks

$$f'(x) = (1+x^2)^{-1} = 1 + \binom{-1}{1}x^2 + \binom{-1}{2}x^4 + \binom{-1}{3}x^6 + \ldots =$$
$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

mis koondub $|x| < 1$ puhul. Inteegrides seda tuletatud funktsiooni rajades 0-st x-ni, kui $|x| < 1$, saame arkustangensi arendi astmereana

$$f(x) = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

mis koondub absoluutselt vahemikus $-1 < x < 1$. Saadud rida koondub Leibniz'i tunnuse järgi ka $x = -1$ ja $x = 1$ puhul. Seega selle rea koonduvusvahemik on $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Et $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, siis

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

võimaldab π arvutamist kuitahes suure täpsusega. Selle rea abil π väärtuse leidmiseks teatava täpsusega tuleks aga võtta väga palju liikmeid. Et saada valemit, mis võimaldaks kiiremini arvutada π väärtust, lähtume suurusest

$$y = \operatorname{arctg} \frac{1}{5}$$

ja arvutame vahe

$$4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \frac{\pi}{4} = 4y - \frac{\pi}{4}.$$

Et siin

$$\operatorname{tg} y = \frac{1}{5},$$

siis

$$\operatorname{tg} 2y = \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg}^2 y} = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

ja

$$\operatorname{tg} 4y = \frac{2 \operatorname{tg} 2y}{1 - \operatorname{tg}^2 2y} = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119},$$

järelikult

$$\operatorname{tg}\left(4y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4y - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4y \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Seega

$$4y - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{239}$$

ja

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239},$$

millest

$$\pi = 16 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{239}.$$

Saadud valem võimaldab kergesti π arvutamist suure täpsusega, sest arkustangensi argumendid $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{239}$ on siin väikesed arvud.

6) Integraale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \quad \text{ja} \quad \int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$

kus $0 < k^2 < 1$ ja $0 \leqslant x < 1$, nimetatakse vastavalt esimest ja teist liiki elliptilisteks integraalideks. Arv k on elliptilise integraali moodul. Elliptilisi integraale saame leida inteegritava funktsiooni reaks arendamise teel. Kasutades binoomi arendit, saame

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6x^6 + \ldots$$

ja

$$\sqrt{1-k^2x^2} = 1 - \frac{1}{2}k^2x^2 - \frac{1}{2\cdot 4}k^4x^4 - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6x^6 - \ldots,$$

mis koonduvad, kui $|x| < 1$. Korrutades nende ridade liikmeid avaldisega $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, saame esimest liiki elliptilise integraali reana

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2 \int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4 \int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6 \int_0^x \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots$$

ja teist liiki elliptilise integraali reana

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}k^2 \int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- \frac{1}{2\cdot 4}k^4 \int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6 \int_0^x \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots;$$

viimaste ridade liikmetes esinevaid funktsioone saame inteegrida valemi (I osa, § 74, p. 11)

$$\int_0^x \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{1}{n}x^{n-1} + \frac{n-1}{n(n-2)}x^{n-3} + \right.$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)(n-4)}x^{n-5}+\ldots+\frac{(n-1)(n-3)\ldots5\cdot3}{n(n-2)(n-4)\ldots4\cdot2}x\Big]+$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots3\cdot1}{n(n-2)(n-4)\ldots4\cdot2}\cdot\arcsin x$$

järgi, kui n on paarisarv.

Kasutades aga tähendatud elliptiliste integraalide leidmiseks asendusmeetodit ja tähistades

$$x=\sin\alpha,\quad dx=\cos\alpha d\alpha,$$

kus $\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, saame elliptilisi integraale esitada trigonomeetrilisel kujul

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

ja

$$\int_0^x\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^\alpha\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha,$$

kus α nimetatakse elliptilise integraali a m p l i t u u d i k s. Kasutades uute inteegritavate funktsioonide suhtes Newtoni valemit, saame

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\sin^4\alpha+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\alpha+\ldots$$

ja

$$\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}=1-\frac{1}{2}k^2\sin^2\alpha-\frac{1}{2\cdot4}k^4\sin^4\alpha-$$

$$-\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}k^6\sin^6\alpha-\ldots$$

ning seega

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^\alpha\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}=$$

$$=\int_0^\alpha d\alpha+\frac{1}{2}k^2\int_0^\alpha\sin^2\alpha d\alpha+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}k^4\int_0^\alpha\sin^4\alpha d\alpha+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}k^6\int_0^\alpha\sin^6\alpha d\alpha+\ldots$$

ja

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^\alpha \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \int_0^\alpha d\alpha - \frac{1}{2}k^2\int_0^\alpha \sin^2\alpha\,d\alpha - \frac{1}{2\cdot 4}k^4\int_0^\alpha \sin^4\alpha\,d\alpha -$$

$$- \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\int_0^\alpha \sin^6\alpha\,d\alpha - \ldots$$

Et leida näiteks ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

pikkust, selleks avaldame

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

mille tuletis

$$y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$

ning võtame neljakordse veerandellipsi pikkuse

$$s = \int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+y'^2}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\,dx =$$

$$= \frac{4}{a}\int_0^a \sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}\,dx,$$

oletades, et $a > b$. Tähistame siin

$$x = a\sin\alpha, \quad dx = a\cos\alpha\,d\alpha,$$

mille puhul uued inteegrimisrajad on vastavalt $\alpha = 0$ ja $\alpha = \frac{\pi}{2}$, ning seega

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\alpha}\,d\alpha =$$

$$= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \alpha}\, d\alpha = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \alpha}\, d\alpha =$$

$$= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \alpha - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \sin^4 \alpha - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \sin^6 \alpha - \right.$$

$$\left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} e^8 \sin^8 \alpha - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} e^{10} \sin^{10} \alpha - \ldots \right) d\alpha =$$

$$= 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \ldots\right],$$

sest paarisarvulise n puhul (I osa, § 74, p. 12)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \alpha\, d\alpha = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Kasutades saadud rea nelja esimest liiget, s. o.

$$s \approx 2\pi a \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{e^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5}\right] =$$

$$= 2\pi a \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6\right),$$

saame leida ellipsi pikkuse arvulise väärtuse kahe õige kümnendkohaga, kui ellipsi numbriline ekstsentrisus e ei ole väga lähedane ühele, s. o. $e < 0{,}8$.

§ 12. Kompleksarvu eksponentsiaalkuju ja Euleri valemid. Nagu eelmises paragrahvis nägime, koondub eksponentfunktsiooni arendirida

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

iga reaalse lõpliku x väärtuse puhul. Asendades siin x imaginaarmuutujaga xi, kus $i = \sqrt{-1}$, saame (§ 6 põhjal) samuti koonduva rea

$$e^{xi} = 1 + xi + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) +$$

$$+ i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right),$$

kus nüüd esimene sulgavaldis väljendab $\cos x$ ja teine sulgavaldis $\sin x$ väärtust, s. o.

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x.$$

Samal viisil saame, et $-xi$ puhul

$$e^{-xi} = \cos x - i \sin x.$$

Saadud valemites x esineb kompleksarvu argumendina, kusjuures mooduliks on 1. Kui üldiselt kompleksarvu mooduliks on r ja argumendiks φ, siis võime eelöeldu põhjal kompleksarvu $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ esitada kujul

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{\varphi i},$$

mis näitab, et iga kompleksarvu on võimalik esitada ka arvu e kaudu, kui on teada kompleksarvu moodul ja argument. Saadud kuju $re^{\varphi i}$ nimetatakse kompleksarvu eksponentsiaalkujuks.

Et siinuse ja koosinuse perioodiks on 2π, s. o.

$$\sin \varphi = \sin(\varphi + 2k\pi), \quad \cos \varphi = \cos(\varphi + 2k\pi),$$

kus $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, siis

$$re^{\varphi i} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r\,[\cos(\varphi + 2k\pi) +$$

$$+ i \sin(\varphi + 2k\pi)] = re^{(\varphi + 2k\pi)i},$$

s. o.

$$e^{\varphi i} = e^{\varphi i + 2k\pi i}.$$

Kasutades kompleksarvu eksponentsiaalkuju, saame arvutada kompleksarvu $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ loomuliku logaritmi, mis on samuti kompleksarv, sest kui tähistame

$$\ln[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)] = \alpha + \beta i,$$

siis

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha} \cdot e^{\beta i} = e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta).$$

Et kompleksarvude võrdsuse definitsiooni järgi $e^{\alpha} = r$, millest $\alpha = \ln r$, ja $\beta = \varphi + 2k\pi$, siis

$$\ln[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)] = \ln r + (\varphi + 2k\pi)i,$$

millest nähtub, et kompleksarvu logaritm kujutab mitmest funktsiooni.

Kui logaritmitav kompleksarv esineb algebralisel kujul $a + bi$, siis

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

ja

$$\ln(a+bi) = \ln\sqrt{a^2+b^2} + \left(\operatorname{arctg}\frac{b}{a} + 2k\pi\right)i.$$

Kui $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, siis — võttes $k = 0$ — saame

$$\ln[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \ln r + \varphi i$$

ja

$$\ln(a+bi) = \ln\sqrt{a^2+b^2} + i\operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Sellest arvutuskäigust ilmneb, et kompleksarvude vallas omavad ka negatiivsed arvud logaritme. Näiteks, kui $k = 0$, on

$$\ln(-1) = \ln[1\cdot(\cos\pi + i\sin\pi)] = \pi i,$$

sest $\ln r = \ln 1 = 0$. Imaginaarühiku i loomulik logaritm on

$$\ln i = \ln\left[1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}i.$$

Lahendades eespool saadud võrdused

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x,$$

$$e^{-xi} = \cos x - i\sin x$$

kui võrrandid $\sin x$ ja $\cos x$ suhtes, saame

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = \frac{\operatorname{sh} xi}{i},\quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \operatorname{ch} xi,$$

mis kannavad Euleri* valemite nime. Euleri valemid määravad trigonomeetriliste funktsioonide seose hüperboolsete funktsioonidega.

Kui Euleri valemites siinuse ja koosinuse argumendiks võtta reaalmuutuja x asemel imaginaarmuutuja xi, siis

$$\sin xi = i\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i\operatorname{sh} x,$$

$$\cos xi = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

millest nähtub, et imaginaarmuutuja siinus on imaginaarne, kuid imaginaarmuutuja koosinus on reaalne.

---

* Leonhard Euler (1707—1783) oli Peterburi Teaduste Akadeemia liige. Ta on kirjutanud umbes 800 teaduslikku tööd, kusjuures rohkem kui 650 nendest on kirjutatud Peterburis ja avaldatud Peterburi Teaduste Akadeemia toimetistes. Euleri tähtsamad tööd matemaatika alal käsitlevad diferentsiaal- ja integraalarvutust, mistõttu Eulerit võib Newtoni ja Leibniz'i kõrval lugeda üheks diferentsiaal- ja integraalarvutuse rajajaks.

§ 13. Harjutusülesandeid.

Kas alljärgnevad read koonduvad või hajuvad?

1. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\ldots$

3. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$

4. $\frac{1}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{3^2}{3^3}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

5. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{3\cdot 6\cdot 9\ldots 3n}+\ldots$

6. $\frac{1!}{a+1}+\frac{2!}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{n!}{(a+1)\ldots(a+n)}+\ldots$

7. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

8. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln^2 n}+\ldots$

Kas alljärgnevad read koonduvad absoluutselt või tingimisi?

9. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

10. $1-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$

11. $\frac{\sin\alpha}{2}-\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{2^3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin n\alpha}{2^n}+\ldots$

Määrata alljärgnevate ridade üldliige ja leida nende ridade summa:

12. $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$

13. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$

14. $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\frac{1}{16\cdot 21}+\ldots$

15. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots$

Määrata alljärgnevate astmeridade koonduvusvahemik:

16. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\ldots$

17. $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots$

18. $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{8}+\ldots$

19. $1+x+2!x^2+3!x^3+\ldots$

20. $\frac{x}{\ln 2}-\frac{x^2}{\ln 3}+\frac{x^3}{\ln 4}-\frac{x^4}{\ln 5}+\ldots$

Arendada alljärgnevad funktsioonid astmeridadeks ja määrata nende koonduvusvahemik:

21. $y=\frac{1}{1+x}$

22. $y=\frac{1}{(1-x)^2}$

23. $y=\sqrt{1+x}$

24. $y=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

25. $y=\frac{a+x}{b+x}$

26. $y=a^x$

27. $y=\sin(x+a)$

28. $y=\arcsin x$

29. $y=\arccos x$

30. $y=e^{\cos x}$.

Leida ridade abil järgmiste loomulike logaritmide väärtused (kolme kümnendkohaga):

31. $\ln 3$

32. $\ln 5$

33. $\ln 12$

34. $\ln 36$

35. $\ln\frac{1}{8}$

36. $\ln\frac{16}{25}$.

37. Leida π väärtus kuue kümnendkohaga.

Arvutada ridade abil järgmised integraalid:

38. $\int \frac{e^x}{x^2}dx$

39. $\int \frac{dx}{\ln x}$

40. $\int \frac{\sin x}{x^2}dx$

41. $\int \frac{\cos x}{x^2}dx$

42. $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

43. $\int_0^x \sqrt{1+x^3}\,dx$

44. $\int_0^x \frac{\arcsin x}{x}dx$

45. $\int_0^1 x^x dx$.

IX peatükk

MITME MUUTUJA FUNKTSIOONID JA NENDE RAKENDUSI

§ 14. Kahe muutuja funktsioon, tema geomeetriline vaste ja määramispiirkond. Paljude nähtuskäikude uurimisel tuleb vaadelda suurusi, mis sõltuvad mitte ühest, vaid kahest, kolmest jne. üksteisest sõltumatust muutuvast suurusest ehk argumendist. Nii näiteks koonuse ruumala valem

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

näitab, et koonuse ruumala V sõltub kahest teineteisest sõltumatust muutuvast suurusest ehk kahest argumendist — koonuse põhja raadiusest r ja koonuse kõrgusest h, kusjuures r võib muutuda vahemikus $0 < r < +\infty$ ja h võib muutuda samuti vahemikus $0 < h < +\infty$. Teades sõltumatute muutujate r ja h väärtusi, saame selle valemi järgi kindlaks määrata koonuse vastava ruumala V. Koonuse ruumala V on seega põhja raadiuse r ja kõrguse h funktsioon, s. o.

$$V = f(r, h).$$

Samuti gaasi ruumala V on Mendelejev-Clapeyroni* valemi

$$V = c\frac{t}{p} = f(t, p)$$

järgi kahe teineteisest sõltumatu muutuja ehk kahe argumendi — temperatuuri t ja rõhu p — funktsioon, kus c kui võrdetegur on konstantne suurus.

---

* Dmitri Ivanovitš Mendelejev (1834—1907) — XIX sajandi suurim vene keemik. Mendelejev töötas Peterburi Ülikoolis dotsendina aastail 1857—1860 ja seejärel professorina kuni 1890. aastani. Alates 1893. aastast, kuni oma surmani oli ta Peterburi Kaalude ja Mõõtude Koja juhatajaks. Avaldas keemia alal põhjapaneva tähtsusega teaduslikke töid. Maailmakuulus on tema keemiliste elementide perioodsuse süsteem.

Benoit Pierre Émile Clapeyron (1799—1864) — prantsuse insener ja füüsik. Oli aastail 1820—1830 professoriks Peterburi Teedeinseneride Instituudis; 1830. aastast alates Peterburi Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige ja 1858. aastast alates Pariisi Teaduste Akadeemia liige.

Vaatleme üldiselt kahe teineteisest sõltumatu muutuja ehk kahe argumendi x ja y funktsiooni

$$z = f(x, y),$$

kus argumentide x ja y väärtuspaaride hulk $\{x, y\}$ kujutab geomeetriliselt mingit punktide hulka XY-tasapinnal nõnda, et selles punktide hulgas igale x ja y väärtusele vastab reaalne z väärtus. See punktide hulk on argumentide x ja y m u u t u m i s p i i r k o n n a k s, milles funktsioon z on defineeritud ehk määratud. Seega argumentide x ja y muutumispiirkond on ühtlasi funktsiooni $z = f(x, y)$ m ä ä r a m i s p i i r k o n n a k s.

Definitsioon: *Kahe sõltumatu muutuja ehk argumendi x ja y funktsiooniks nimetatakse niisugust kolmandat suurust z, mille määramispiirkonnas argumentide igale väärtuspaarile vastab suuruse z kindel väärtus.*

Funktsiooni $z = f(x, y)$ väärtust, mis vastab argumentide väärtustele $x = x_0$ ja $y = y_0$, tähistame sümboliga $f(x_0, y_0)$. Kui näiteks

$$z = 2x^2 + y^2 - 10,$$

siis

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 - 10$$

ning $x = 2$ ja $y = 3$ puhul

$$f(2, 3) = 2 \cdot 4 + 9 - 10 = 7.*$$

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ argumente x ja y võime ruumilises ristkoordinaadistikus vaadelda kui XY-tasapinna punkti P koordinaate (joon. 2), kusjuures funktsiooni määramispiirkonnas punkti $P(x, y)$ nimetame funktsiooni $z = f(x, y)$ a r g u m e n t p u n k t i k s. Funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas vastab argumentpunktile $P(x, y)$ punkt $M(x, y, z)$ ruumis, kus x on abstsissiks, y ordinaadiks ja z aplikaadiks. Kui argumentpunktil $P(x, y)$ on XY-tasapinnal kindel muutumispiirkond, milles funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud, siis punkti P pideval liikumisel selles tasapinnalises piirkonnas kujundavad funktsiooni $f(x, y)$ väärtustele vastavad punktid ruumis teatava pinna, mis kujutab funktsiooni $z = f(x, y)$ muutumiskäiku ruumis. Järelikult funktsioon $z = f(x, y)$ kujutab ühtlasi p i n n a v õ r r a n d i t. Seega funktsiooni $z = f(x, y)$ graafikuks ehk geomeetriliseks vasteks on pind, mis kujutab niisuguste punktide geomeetrilist kohta, millede abstsissid ja ordinaadid on vastavalt sõltumatute muutujate x ja y väärtused ning aplikaadid on funktsiooni z vastavad väärtused.

---

* Mõnikord tähistatakse ka järgmiselt:

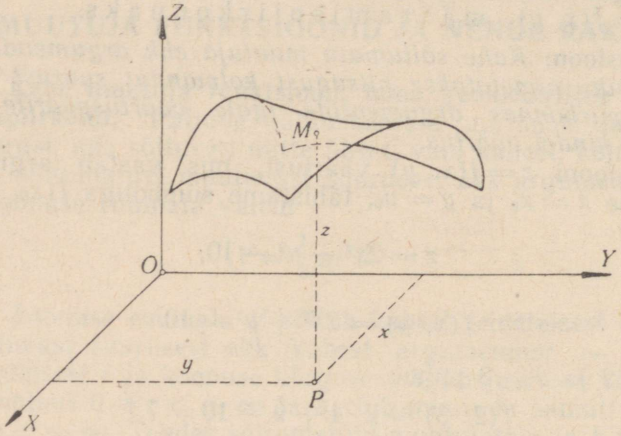
$$[z]_{\substack{x=2\\y=3}} = [2x^2 + y^2 - 10]_{\substack{x=2\\y=3}} = 7.$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ võime vaadelda ka kui argumentpunkti $P(x, y)$ funktsiooni, mida sel juhul tähistame järgmiselt:

$$z = f(P).$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ ehk $z = f(P)$ nimetame *ilmutatud funktsiooniks*. Kahe sõltumatu muutujaga *ilmutamata funktsiooni* üldiseks kujuks on

$$F(x, y, z) = 0.$$



Joon. 2.

Kahe muutuja funktsioon võib olla ühene või mitmene. Kui näiteks võrranditest

$$x^2 + y^2 - z = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

ilmutame z (kui funktsiooni), saame

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{ja} \quad z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

kus esimene z on ühene ja teine z on kahene x ja y funktsioon. Viimane võrdus kujutab kaht ühest funktsiooni

$$z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad \text{ja} \quad z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Funktsioonidest

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{ja} \quad z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

esimene omab reaalset väärtust iga argumentpunkti $P(x, y)$

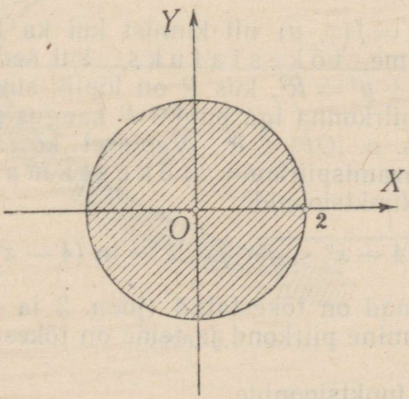
puhul, kus x võib muutuda vahemikus $-\infty < x < +\infty$ ja y võib muutuda samuti vahemikus $-\infty < y < +\infty$. Selle funktsiooni määramispiirkonnaks on seega XY-tasapind, mille puhul ütleme, et funktsioon $z = x^2 + y^2$ on defineeritud ehk määratud tervel XY-tasapinnal. Teise funktsiooni reaalseid väärtusi aga määravad ainult need argumentpunktid, mille puhul $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geqslant 0$, s. o. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. Seega selle funktsiooni määramispiirkonnaks XY-tasapinnal on ellipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ pind ja ainult sellel pinnal on funktsioon $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ määratud.

Neist näidetest ilmneb, et funktsiooni $z = f(x, y)$ argumentpunkti muutumispiirkonnaks ehk funktsiooni määramispiirkonnaks võib olla terve XY-tasapind või teatav osa XY-tasapinnast, kusjuures viimasel juhul argumentpunkti muutumispiirkonna äärjoone punktides funktsioon võib olla määratud või mitte. Kui argumentpunkti muutumispiirkonna äärjoone punktides funktsioon on määratud, nagu toodud näiteist teise puhul, siis nimetame seda piirkonda funktsiooni k i n n i s e k s määramispiirkonnaks. Kui aga argumentpunkti muutumispiirkonna äärjoone punktides funktsioon ei ole määratud, siis ütleme, et funktsiooni määramispiirkond on l a h t i n e. Nii näiteks funktsioonide

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \text{ja} \quad z = \ln(4 - x^2 - y^2)$$

puhul on esimesel juhul

$$4 - x^2 - y^2 \geqslant 0 \quad \text{ehk} \quad x^2 + y^2 \leqslant 4,$$

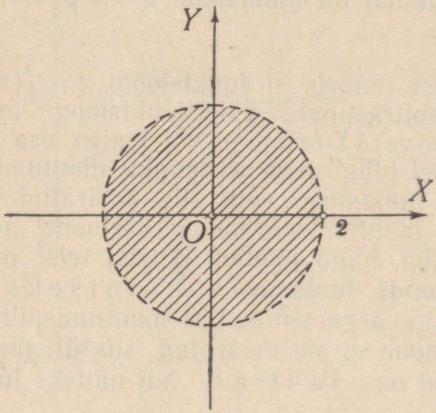


Joon. 3.

millest nähtub, et selle funktsiooni määramispiirkond XY-tasapinnal on kinnine piirkond, mis kujutab punktide hulka ringis ja ringjoonel (ringi äärjoonel), mille keskpunkt asetseb koordinaattelgede nullpunktis ja raadius on 2 (joon. 3). Teise funktsiooni puhul aga

$$4 - x^2 - y^2 > 0 \quad \text{ehk} \quad x^2 + y^2 < 4,$$

mis näitab, et selle funktsiooni määramispiirkond XY-tasapinnal on lahtine piirkond, mis kujutab punktide hulka ainult ringi $x^2 + y^2 = 4$ sees (joon. 4).



Joon. 4.

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ kinnine ja lahtine määramispiirkond on analoogilised vastavalt ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ kinnisele ja lahtisele vahemikule, milles funktsioon $f(x)$ on määratud.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nii kinnist kui ka lahtist määramispiirkonda nimetame tõkestatuks, kui seda piirkonda saab sulgeda ringi $x^2 + y^2 = R^2$, kus R on lõplik suurus, nii et funktsiooni määramispiirkonna iga punkti P kaugus nullpunktist O on väiksem kui R, s. o. $|OP| < R$. Vastasel korral on funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkond tõkestamatu. Nii näiteks eespool esitatud funktsioonide

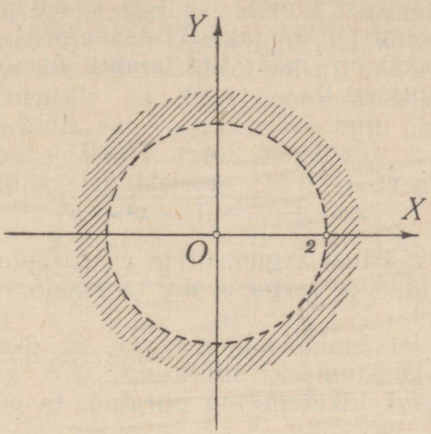
$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \text{ja} \quad z = \ln (4 - x^2 - y^2)$$

määramispiirkonnad on tõkestatud (joon. 3 ja 4). Esimene neist on tõkestatud kinnine piirkond ja teine on tõkestatud lahtine piirkond.

Kuid näiteks funktsioonide

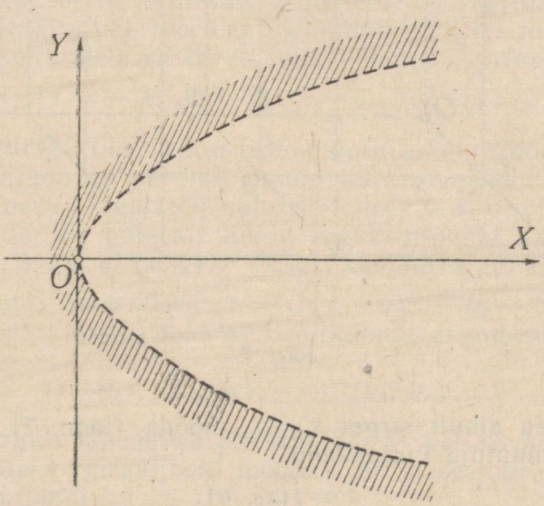
$$z = \ln (x^2 + y^2 - 4) \quad \text{ja} \quad z = \ln (y^2 - 2x)$$

määramispiirkonnad on tõkestamatud, sest esimese funktsiooni puhul $x^2 + y^2 - 4 > 0$ ning seega funktsiooni määramispiirkond kujutab punktide hulka väljaspool ringjoont $x^2 + y^2 = 4$ (joon. 5)



Joon. 5.

ja teise funktsiooni puhul $y^2 - 2x > 0$ ning seega funktsiooni määramispiirkond kujutab punktide hulka väljaspool parabooli $y^2 = 2x$ (joon. 6). Mõlema funktsiooni määramispiirkondadeks on siin tõkestamatud lahtised piirkonnad.



Joon. 6.

Funktsioon

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

ehk ilmutatult

$$z = \pm \sqrt{-x^2 - y^2}$$

omab reaalset väärtust ainult $x = 0$ ja $y = 0$ puhul. Sel juhul funktsiooni määramispiirkonnaks XY-tasapinnal on punkt (0, 0) ja seega funktsioon on määratud ainult ühes punktis, milles funktsiooni väärtus on 0.

Funktsioon

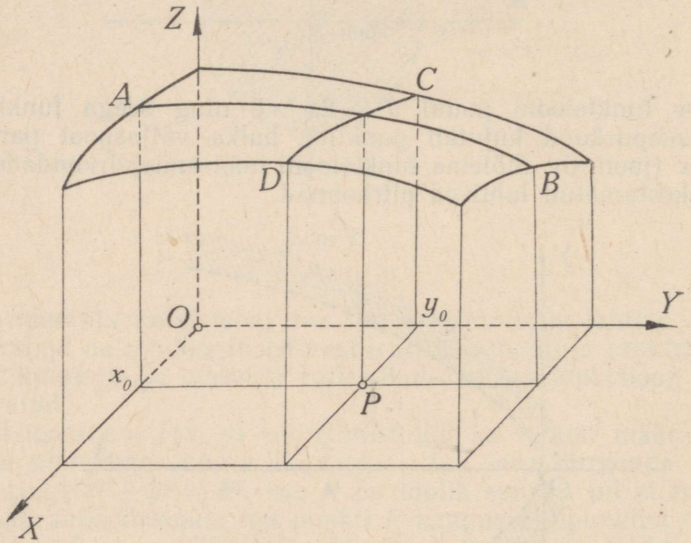
$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

ehk ilmutatult

$$z = \pm \sqrt{-1 - x^2 - y^2}$$

ei oma reaalset väärtust argumentide x ja y mingisuguste reaalsete väärtuste puhul ja seega ei ole ta reaalarvude vallas määratud.

Kui oletame, et funktsiooni $z = f(x, y)$ üks argumentidest, näiteks x, jääb konstantseks suuruseks, s. o. $x = x_0$, siis argumentpunkti $P(x, y)$ liikumine on piiratud: ta võib siis XY-tasa-



Joon. 7.

pinnal liikuda ainult sirget $x = x_0$ mööda (joon. 7). Sel juhul saame ühe muutuja funktsiooni

$$z = f(x_0, y).$$

Tingimus $x = x_0$ tähendab geomeetriliselt, et võrrandiga $z = f(x, y)$ esitatud pind on lõigatud tasapinnaga $x = x_0$, mille puhul lõikes tekib joon AB, mille ortogonaalprojektsiooni YZ-tasapinnal esitab võrrand $z = f(x_0, y)$.

Analoogiliselt, kui y jääb konstantseks suuruseks, s. o. $y = y_0$, siis argumentpunkt $P(x, y)$ võib liikuda XY-tasapinnal ainult sirget $y = y_0$ mööda ja võrrand $z = f(x, y_0)$ esitab graafiliselt lõikejoone CD ortogonaalprojektsiooni XZ-tasapinnal.

Nagu ühe muutuja funktsiooni, nii ka kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ esitamisviisideks on: a) analüütiline kuju valemina, b) argumentide ja funktsiooni väärtuste tabel ning c) funktsiooni graafik ehk geomeetriline kuju pinnana. Argumentide ja funktsiooni väärtuste tabel esineb siin kahe käiguga tabelina. Näiteks funktsiooni $z = x^2 - 2y$ puhul

x \ y	1	2	3	4	...
1	−1	−3	−5	−7	...
2	2	0	−2	−4	...
3	7	5	3	1	...
...	...	...	...	...	...

kus esimeses veerus esinevad argumendi x väärtused, esimeses reas argumendi y väärtused ja ülejäänud lahtrites neile argumentide väärtuspaaridele vastavad funktsiooni z väärtused, s. o.

$$f(1, 1) = -1, \quad f(1, 2) = -3, \quad f(2, 1) = 2, \ldots$$

§ 15. Piirväärtus. 1) Kui kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas pidevalt muutuvad argumendid x ja y piiramatult lähenevad kindlatele suurustele a ja b, s. o. $x \to a$ ja $y \to b$, siis seega ühtlasi pidevalt liikuv argumentpunkt (x, y) läheneb punktile (a, b), s. o. $(x, y) \to (a, b)$, kusjuures punktide (x, y) ja (a, b) kaugus teineteisest $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \to 0$. Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas argumentpunkt (x, y) läbib punkte

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots,$$

mis järk-järgult lähenevad punktile (a, b) kas sirget või kõverat mööda (näiteks spiraaljoont mööda), nii et seejuures funktsiooni väärtuste järjendi

$$f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), \ldots, f(x_n, y_n), \ldots$$

piirväärtuseks on arv A, kui $n \to \infty$, s. o.

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = A,$$

sõltumatult sellest, missugust punktide järjendit mööda lähenetakse punktile (a, b), siis ütleme, et arv A on funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks $x \to a$ ja $y \to b$ puhul, ning kirjutame

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A.$$

Kui punkt (a, b) asetseb funktsiooni määramispiirkonna äärjoonel, siis argumentpunkt (x, y) läbib punktile (a, b) lähenedes ikka ja alati ainult punkte, mis asetsevad funktsiooni määramispiirkonnas.

Analoogiliselt ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse definitsioonile võime kahe muutuja funktsiooni piirväärtust võrratuste abil defineerida järgmiselt: *Arv A on funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuseks $x \to a$ ja $y \to b$ puhul, kui iga $\varepsilon > 0$ jaoks saab määrata niisuguse positiivse arvu δ, et võrratus*

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon \qquad (1)$$

kehtib iga x ja y paari puhul, mis rahuldab võrratust

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$$

ning seega ühtlasi võrratusi

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{ja} \quad 0 < |y - b| < \delta.$$

Geomeetriliselt tähendab see, et pinna $z = f(x, y)$ punktide aplikaadid peavad erinema arvust A absoluutväärtuselt vähem kui ε võrra iga argumentpunkti (x, y) puhul, mis asub ringis, mille raadiuseks on δ, või sirgete $x = a \pm \delta$ ja $y = b \pm \delta$ poolt moodustatud ruudus, peale punkti (a, b) enda, mida nimetame p i i r p u n k t i k s.

Oluline on siin, et võrratus (1) peab kehtima alati, kui punkt (x, y) asub punktile (a, b) lähemal kui δ. Samuti on oluline, et võrratus (1) kehtiks punkti (a, b) küllalt väikeses ümbruses, mida nimetame δ-ü m b r u s e k s, nii et seejuures võrratuses (1) võiks $\varepsilon > 0$ võtta kuitahes väikese. Suurus δ sõltub ε-st nagu ühe muutuja funktsiooni puhulgi: ε vähenemisel väheneb ka δ.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetame tema määramispiirkonnas t õ k e s t a t u k s, kui saame määrata niisuguse positiivse arvu M, et määramispiirkonnas iga x ja y väärtuse puhul

$$|f(x, y)| \leqslant M.$$

Kui aga mistahes suure arvu M puhul saab funktsiooni määramispiirkonnas näidata punkti (x, y), nii et

$$|f(x, y)| > M,$$

siis nimetame funktsiooni $f(x, y)$ t õ k e s t a m a t u k s.

Kui $x \to \infty$ ja $y \to \infty$, kuid seejuures funktsioon $f(x, y)$ on ja

jääb tõkestatuks ning piiramatult läheneb lõplikule suurusele A, siis tähistame funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuse järgmiselt:

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} f(x, y) = A.$$

See tähendab, et kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul leidub ikka niisugune arv $N > 0$, et võrratus

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

kehtib igas argumentpunktis (x, y), mille koordinaadid rahuldavad võrratusi $|x| > N$ ja $|y| > N$.

Kui funktsioon $f(x, y)$ on tõkestamatu ja $(x, y) \to (a, b)$ puhul läheneb lõpmatusele, siis tähistame

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f(x, y) = \infty.$$

See tähendab, et iga $K > 0$ puhul saame määrata piirpunktile (a, b) niisuguse δ-ümbruse, et võrratus

$$|f(x, y)| > K$$

kehtib δ-ümbruse igas argumentpunktis (x, y).

Kasutades ühe muutuja funktsioonide puhul rakendatud mõttekäike, saab näidata, et kõik piirväärtuse põhiteoreemid, mis kehtivad ühe muutuja funktsioonide puhul, jäävad püsima ka kahe muutuja funktsioonide puhul. Nimelt: funktsioonide $f_1(x, y)$ ja $f_2(x, y)$ summa (vahe), korrutise või jagatise piirväärtus on võrdne vastavalt nende funktsioonide piirväärtuste summaga (vahega), korrutisega või jagatisega, s. o. kui

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_1(x, y) = A_1 \quad \text{ja} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_2(x, y) = A_2,$$

siis

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] = \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_1(x, y) \pm \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_2(x, y) = A_1 \pm A_2,$$

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} [f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] = \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_1(x, y) \cdot \lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_2(x, y) = A_1 \cdot A_2,$$

$$\lim_{\substack{x\to a \\ y\to b}} \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_1(x, y)}{\lim\limits_{\substack{x\to a \\ y\to b}} f_2(x, y)} = \frac{A_1}{A_2},$$

kusjuures kahel esimesel juhul funktsioonide arv ei pruugi olla piiratud kahega ning viimasel juhul $A_2 \neq 0$.

2) Eespool vaadeldud kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ piirprotsessis argumentpunkti (x, y) lähenemisel piirpunktile (a, b)

argumendid x ja y üheaegselt lähenesid vastavalt a-le ja b-le. Kuid võib esineda ka niisuguseid funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtusi, mis saadakse mitte x ja y üheaegsel muutumisel ja lähenemisel vastavalt a-le ja b-le, vaid nende muutumisel teineteise järel, s. o. enne $x \to a$ ja alles siis $y \to b$, või ümberpöördult. Sel juhul loeme funktsiooni $f(x, y)$ piirprotsessis enne ühe või teise argumendi konstantseks suuruseks, mille puhul saame funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtusena ühe muutuja funktsiooni, ja siis leiame selle ühe muutuja funktsiooni piirväärtuse (kui ainult need piirväärtused on olemas). Kui näiteks loeme funktsiooni $f(x, y)$ piirprotsessis y konstantseks suuruseks ja x muutuvaks suuruseks, siis on $x \to a$ puhul funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtus (kui see on olemas)

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y).$$

See on funktsiooni $f(x, y)$ esimene piirväärtus, mida vaatleme edasi kui y funktsiooni. Kui nüüd $y \to b$, siis funktsiooni $f(x, y)$ teine piirväärtus on

$$\lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y).$$

Samal viisil võime toimida ümberpöördud järjekorras, s. o. kui funktsiooni $f(x, y)$ piirprotsessis loeme x konstantseks suuruseks ja y muutuvaks suuruseks, siis $y \to b$ puhul on esimene piirväärtus (kui see on olemas)

$$\lim_{y \to b} f(x, y) = \psi(x),$$

mis kujutab x funktsiooni, ja teine piirväärtus, kui $x \to a$, on

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y).$$

Piirväärtusi

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y)$$

nimetatakse korduvateks piirväärtusteks. Need korduvad piirväärtused ei tarvitse igakord olla omavahel võrdsed ega ka võrdsed piirväärtusega

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y).$$

Nii on see näiteks funktsiooni

$$f(x, y) = \frac{3x + y - x^2 - y^2}{x + y}$$

puhul, kui võtta $a = 0$ ja $b = 0$. Sellel funktsioonil puudub piirväärtus, kui üheaegselt $x \to 0$ ja $y \to 0$, kuid mõlemad korduvad

piirväärtused on olemas ja erinevad teineteisest, sest

$$\varphi(y) = \lim_{x \to 0} f(x, y) = 1 - y$$

ja

$$\lim_{y \to 0} \varphi(y) = \lim_{y \to 0} (1 - y) = 1$$

ning

$$\psi(x) = \lim_{y \to 0} f(x, y) = 3 - x$$

ja

$$\lim_{x \to 0} \psi(x) = \lim_{x \to 0} (3 - x) = 3,$$

s. o.

$$\lim_{y=0} \lim_{x \to 0} f(x, y) = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x, y) = 3.$$

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ korduva piirväärtuse kohta kehtib järgmine

teoreem: Kui funktsioonil $f(x, y)$ on olemas $x \to a$ ja $y \to b$ puhul piirväärtus A, s. o.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A,$$

ja korduva piirväärtuse esimene (lõplik) piirväärtus

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y) \quad \text{või} \quad \lim_{y \to b} f(x, y) = \psi(x),$$

siis on korduv piirväärtus võrdne A-ga, s. o.

$$\lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A.$$

Teoreemi tõestamiseks oletame, et A, a ja b on lõplikud suurused. Vastavalt funktsiooni $f(x, y)$ piirväärtuse definitsioonile leidub etteantud $\varepsilon > 0$ puhul ikka niisugune $\delta > 0$, et kehtib võrratus

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

kui $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$. Siis ka $|x - a| < \delta$ ja $|y - b| < \delta$. Fikseerides y niisugusena, et oleks täidetud võrratus $|y - b| < \delta$, ja võttes $x \to a$ puhul piirväärtuse

$$\lim_{x \to a} f(x, y) = \varphi(y),$$

saame

$$|\varphi(y) - A| \leqslant \varepsilon,$$

s. o.

$$A = \lim_{y \to b} \varphi(y) = \lim_{y \to b} \lim_{x \to a} f(x, y).$$

Analoogiliselt saame tõestada, et ka

$$A = \lim_{x \to a} \psi(x) = \lim_{x \to a} \lim_{y \to b} f(x, y).$$

§ 16. Pidevus. Kui kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas loeme $P_0(x_0, y_0)$ kindlaks punktiks, siis ütleme samuti nagu ühe muutuja funktsiooni $f(x)$ puhul, et kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on pidev punktis $P_0(x_0, y_0)$, kui $f(x_0, y_0)$ on lõplik suurus ja argumentpunkti $P(x, y)$ lähenemisel punktile $P_0(x_0, y_0)$ ükskõik missugust teed mööda lähenevad funktsiooni $f(x, y)$ vastavad väärtused ikka ühele ja samale piirväärtusele $f(x_0, y_0)$, s. o.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

ehk

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Niisiis, et funktsioon $f(x, y)$ oleks pidev punktis (x_0, y_0), selleks 1) peab ta olema määratud punktis (x_0, y_0) ja selle punkti ümbruses (s. o. δ-ümbruses), 2) peab ta omama $x \to x_0$ ja $y \to y_0$ puhul piirväärtust ning 3) see piirväärtus peab olema võrdne funktsiooni väärtusega punktis (x_0, y_0).

Kui aga vähemalt üks neist funktsiooni $z = f(x, y)$ pidevuse määramise kolmest eritingimusest pole täidetud, siis ütleme, et funktsioon $z = f(x, y)$ on katkev punktis (x_0, y_0). Nii näiteks murdfunktsioonid

$$z = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad z = \frac{1}{x - y}$$

on katkevad punktides, milledes murdude nimetajad saavad nulliks. Esimene neist funktsioonidest on katkev punktis, kus $x = 0$ ja $y = 0$, s. o. punktis $(0, 0)$, mis on selle funktsiooni katkevuspunktiks, ja teine funktsioon on katkev igas punktis, mis asetseb sirgel $y = x$. Seda sirget võime seega nimetada funktsiooni katkevussirgeks.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ loeme teatavas piirkonnas pidevaks, kui ta on pidev igas punktis, mis asetseb selles piirkonnas.

Kui nüüd funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas vabalt võetud punkti P koordinaadid on x ja y ning tema ümbruses samas piirkonnas võetud punkti koordinaadid on $x + \Delta x$ ja $y + \Delta y$, *kus* Δx *ja* Δy on vastavalt argumentide x ja y kasvud, siis võime öelda, et funktsioon $z = f(x, y)$ on pidev punktis

$P(x, y)$, kui ta omab seal lõplikku väärtust ja andes ette kuitahes väikese positiivse suuruse ε, saame määrata teise positiivse suuruse $\delta = \delta(\varepsilon)$ nõnda, et funktsiooni kasvu $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ suhtes kehtib võrratus

$$|\Delta z| = |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

kui $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} < \delta$, s. o. $|\Delta x| < \delta$ ja $|\Delta y| < \delta$, mis ütleb, et argumentide kasvude Δx ja Δy lähenemisel nullile peab ka vastav funktsiooni kasv Δz lähenema nullile. See tähendab, et

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y),$$

mis on funktsiooni $z = f(x, y)$ pidevuse tunnuseks tema määramispiirkonna mistahes punktis (x, y).

Siin võib δ olla funktsiooni $z = f(x, y)$ pidevuspiirkonna iga punkti jaoks isesugune: ta võib sõltuda mitte ainult ε-st, vaid ka x-st ja y-st. Kui aga funktsiooni pidevuspiirkonna iga punkti jaoks, sõltumatult x-st ja y-st, saab antud $\varepsilon > 0$ puhul määrata ühe ja sama positiivse δ väärtuse, siis nimetame funktsiooni $z = f(x, y)$ pidevust selles piirkonnas ühtlaseks.

Tähendab, *funktsiooni $z = f(x, y)$ nimetatakse tema määramispiirkonnas ühtlaselt pidevaks, kui selles piirkonnas iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub ikka niisugune $\delta > 0$, et selle piirkonna mistahes kahe teineteisele küllalt lähedal seisva argumentpunkti (x', y') ja (x'', y'') suhtes kehtib võrratus*

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon,$$

kui ainult $r = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta$ *ehk* $|x' - x''| < \delta$ *ja* $|y' - y''| < \delta$.

Kasutades ühe muutuja pidevate funktsioonide puhul rakendatud mõttekäike, saame tõestada, et ka kahe muutuja pidevate funktsioonide summa (vahe), korrutis ja jagatis on samuti pidevad funktsioonid, kui ainult viimasel juhul jagaja ei ole võrdne nulliga.

Me nimetasime funktsiooni $f(x, y)$ pidevaks punktiks (x_0, y_0), kui

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

See tähendab, et funktsioon $f(x, y)$ läheneb väärtusele $f(x_0, y_0)$, kui argumentpunkt (x, y) oma muutumispiirkonnas ükskõik missugust teed mööda läheneb punktile (x_0, y_0), s. o. kui üheaegselt $x \to x_0$ ja $y \to y_0$. Kui seejuures X- ja Y-teljega paralleelses sihis üksteise järel $x \to x_0$ ja $y \to y_0$, siis tekib korduv piirväärtus, mis on võrdne funktsiooni väärtusega punktis (x_0, y_0), s. o.

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$$

või

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,\ y) = \lim_{x\to x_0} f(x,\ y_0) = f(x_0,\ y_0).$$

Siit nähtub, et kui funktsioon $f(x,\ y)$ on pidev punktis $(x_0,\ y_0)$ üheaegsel x ja y lähenemisel vastavalt x_0-le ja y_0-le, siis on ta ka pidev selles punktis kummagi argumendi x ja y eraldi lähenemisel vastavalt x_0-le ja y_0-le. Kuid ümberpöördult ei tarvitse see olla õige. Nii on näiteks funktsioon

$$f(x,\ y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

punktis (0, 0) katkev, kuid eraldi kummagi argumendi järgi on see funktsioon pidev, sest

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,\ y) = \lim_{y\to 0} f(0,\ y) = 0 = f(0;\ 0)$$

või

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,\ y) = \lim_{x\to 0} f(x,\ 0) = 0 = f(0,\ 0).$$

§ 17. Pidevate funktsioonide omadusi. Asume kahe muutuja pideva funktsiooni $z = f(x,\ y)$ omaduste vaatlemisele. Nende omaduste kindlakstegemiseks ja esitamiseks tõestame kõigepealt kaks järgmist teoreemi.

Teoreem 1: Igast punktide järjendist

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \ldots,\ (x_n,\ y_n),\ \ldots, \tag{1}$$

millede koordinaadid iga n puhul rahuldavad tingimust

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} < K \qquad (K = \text{konst.}), \tag{2}$$

saame alati eraldada punktide osajärjendi, millel on lõplik piirpunkt.

Teoreemis esitatud tingimusest (2) järeldub, et järjendis (1) esinevate punktide abstsisside järjend

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

(kui arvjärjend) on tõkestatud. Kasutades Bolzano-Weierstrassi teoreemi (I osa, § 28), saame punktide järjendist (1) eraldada punktide osajärjendi

$$(x_{n_1},\ y_{n_1}),\ (x_{n_2},\ y_{n_2}),\ \ldots,\ (x_{n_k},\ y_{n_k}),\ \ldots, \tag{3}$$

milles punktide abstsisside järjendi

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \ldots,\ x_{n_k},\ \ldots$$

piirväärtuseks, kui $k \to \infty$, on mingi lõplik arv ξ, s. o.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

Et järjendi (3) punktid rahuldavad samuti tingimust (2), s. o.

$$\sqrt{x_{n_k}^2 + y_{n_k}^2} < K,$$

siis seega punktide ordinaatide järjend

$$y_{n_1}, y_{n_2}, \ldots, y_{n_k}, \ldots$$

on tõkestatud. Kasutades jälle Bolzano-Weierstrassi teoreemi, saame punktide järjendist (3) eraldada punktide osajärjendi

$$(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}), (x_{n_{k_2}}, y_{n_{k_2}}), \ldots, (x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}), \ldots, \quad (4)$$

milles punktide ordinaatide järjendi

$$y_{n_{k_1}}, y_{n_{k_2}}, \ldots, y_{n_{k_i}}, \ldots$$

piirväärtuseks, kui $i \to \infty$, on mingi lõplik arv η, s. o.

$$\lim_{i\to\infty} y_{n_{k_i}} = \eta,$$

kusjuures osajärjendi (4) punktide abstsisside järjendi

$$x_{n_{k_1}}, x_{n_{k_2}}, \ldots, x_{n_{k_i}}, \ldots$$

piirväärtuseks, kui $i \to \infty$, jääb endine piirväärtus ξ, s. o.

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_{k_i}} = \xi.$$

Seega punktide järjendi (4) piirpunktiks on lõplik punkt (ξ, η).

Teoreem 2: Kui punktid

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$$

asetsevad kinnises piirkonnas, kusjuures $x_n \to \xi$ ja $y_n \to \eta$, siis samas piirkonnas asetseb ka piirpunkt (ξ, η).

Tähistame teoreemis nimetatud kinnise piirkonna sümboliga $\overline{S}$. Teoreemi tõestamiseks väidame vastupidiselt, et piirpunkt (ξ, η) ei asetse piirkonnas $\overline{S}$. Võttes vabalt $\delta > 0$, võime tingimuste $x_n \to \xi$ ja $y_n \to \eta$ kohaselt kirjutada, et

$$|x_n - \xi| < \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad \text{ja} \quad |y_n - \eta| < \frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

milledest saame, et

$$\sqrt{(x_n-\xi)^2+(y_n-\eta)^2}<\sqrt{\frac{\delta^2}{2}+\frac{\delta^2}{2}}=\delta.$$

See tähendab, et alates mingist indeksist kõik punktid punktide hulgast $\{x_n, y_n\}$ satuvad punkti (ξ, η) vabalt võetud ümbrusse, s. o. δ-ümbrusse. Seega sellesse vabalt võetud δ-ümbrusse satub nii punkte, mis asetsevad piirkonnas $\bar{S}$, kui ka punkte, mis asetsevad väljaspool seda piirkonda. Et aga eelduse järgi kõik punktid punktide hulgast $\{x_n, y_n\}$ asetsevad piirkonnas $\bar{S}$, siis peab piirpunkt (ξ, η) asetsema vähemalt selle piirkonna äärjoonel, mille punktid kuuluvad samuti piirkonda $\bar{S}$. Seega vastuväide on vale ja järelikult piirpunkt (ξ, η) peab asetsema kinnises piirkonnas $\bar{S}$.

Võttes aluseks esitatud teoreemid, võime asuda kahe muutuja pideva funktsiooni $z=f(x, y)$ omaduste vaatlemisele.

1) Kui funktsioon $f(x, y)$ on pidev tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$, siis on ta selles piirkonnas nii alt kui ka ülalt tõkestatud.

Kui funktsioon $f(x, y)$ on nii alt kui ka ülalt tõkestatud, siis leidub ikka niisugune alamtõke m ja ülemtõke M, et piirkonna igas punktis (x, y) on

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M.$$

Väidame vastupidiselt, et funktsioon ei ole näiteks ülalt tõkestatud. Sel juhul iga naturaalarvu n puhul leidub kinnises piirkonnas $\bar{S}$ punkt (x_n, y_n), milles

$$|f(x_n, y_n)|>n.$$

Teoreemi 1 põhjal saame siis punktide järjendist

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n), \ldots$$

eraldada punktide osajärjendi

$$(x_{n_1}, y_{n_1}), (x_{n_2}, y_{n_2}), \ldots, (x_{n_k}, y_{n_k}), \ldots,$$

mille piirpunktiks on lõplik punkt (ξ, η), mis asetseb (teoreemi 2 põhjal) piirkonnas $\bar{S}$. Et eelduse kohaselt $f(x, y)$ on pidev piirkonna $\bar{S}$ igas punktis ja seega ka punktis (ξ, η), siis

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) \to f(\xi, \eta)$$

ehk

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}, y_{n_k})=f(\xi, \eta),$$

mis on aga vastuolus esitatud võrratusega

$$|f(x_n, y_n)| > n.$$

Seega tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$ peab funktsioon $f(x, y)$ olema ülalt tõkestatud.

Analoogiliselt saame näidata, et tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$ on funktsioon $f(x, y)$ ka alt tõkestatud.

2) Kui funktsioon $f(x, y)$ on pidev tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$, siis asetsevad selles piirkonnas ikka niisugused punktid (ξ_1, η_1) ja (ξ_2, η_2), milledes funktsiooni väärtused $f(\xi_1, \eta_1)$ ja $f(\xi_2, \eta_2)$ esitavad vastavalt funktsiooni $f(x, y)$ suurimat ja väiksemat väärtust piirkonnas $\bar{S}$.

Eelmise omaduse põhjal on funktsioon $f(x, y)$ tõkestatud. Olgu M funktsiooni $f(x, y)$ täpne ülemtõke ja m täpne alamtõke, s. o.

$$M = \sup \{f(x, y)\} \text{ ja } m = \inf \{f(x, y)\},$$

kus M ja m on lõplikud suurused. Et esitatud omadus kehtiks, selleks tuleb näidata, et kinnises piirkonnas $\bar{S}$ leiduvad niisugused punktid (ξ_1, η_1) ja (ξ_2, η_2), milledes

$$f(\xi_1, \eta_1) = M \text{ ja } f(\xi_2, \eta_2) = m.$$

Selle omaduse tõestamiseks väidame vastupidiselt, et piirkonnas $\bar{S}$ ei leidu niisugust punkti (ξ_1, η_1), mille puhul kehtiks võrdus $f(\xi_1, \eta_1) = M$. Siis piirkonna $\bar{S}$ igas punktis on

$$f(x, y) < M,$$

mille puhul funktsiooni $f(x, y)$ väärtused ei küüni täpse ülemtõkkeni M. Vaatleme sel juhul abifunktsiooni

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{M - f(x, y)},$$

milles nimetaja $M - f(x, y)$ ei saa nulliks võrratuse $f(x, y) < M$ tõttu. Seega funktsioon $\varphi(x, y)$ on pidev piirkonnas $\bar{S}$, sest funktsioon $f(x, y)$ on eelduse järgi pidev selles piirkonnas, ja järelikult eelmise omaduse põhjal tõkestatud, mis on aga võimatu, sest kui M on määrangu järgi funktsiooni $f(x, y)$ väärtuste täpne ülemtõke, siis leidub arvule M kuitahes lähedasi funktsiooni $f(x, y)$ väärtusi, milledele vastavad ilmselt kuitahes suured funktsiooni $\varphi(x, y)$ väärtused, mille puhul $\varphi(x, y)$ ei saa olla tõkestatud. Seega vastuväide on vale ja järelikult piirkonnas $\bar{S}$ leidub punkt (ξ_1, η_1), milles $f(\xi_1, \eta_1) = M$ on funktsiooni $f(x, y)$ suurimaks väärtuseks.

Et funktsioonil $f(x, y)$ on olemas tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$ ka väikseim väärtus $f(\xi_2, \eta_2) = m$, selle tõestamiseks väidame samuti vastupidiselt, et piirkonnas $\bar{S}$ ei leidu niisugust punkti (ξ_2, η_2), mille puhul $f(\xi_2, \eta_2) = m$. Sel juhul piirkonna $\bar{S}$ igas punktis on

$$f(x, y) > m.$$

Võttes siin abifunktsiooniks

$$\psi(x, y) = \frac{1}{f(x, y) - m},$$

saame analoogiliselt eelnevale tõestada, et piirkonnas $\bar{S}$ leidub punkt (ξ_2, η_2), milles $f(\xi_2, \eta_2) = m$ on funktsiooni $f(x, y)$ väikseimaks väärtuseks.

3) Kui funktsioon $f(x, y)$ on pidev tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$, siis on tema pidevus selles piirkonnas ühtlane.

Tõestame selle omaduse vastuväiteliselt. Oletame, et tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$ funktsiooni $f(x, y)$ pidevus ei ole ühtlane. See tähendab, et selles piirkonnas $\varepsilon > 0$ puhul ei leidu niisugust arvu $\delta > 0$, mis esines ühtlase pidevuse definitsioonis (§ 16). Sel juhul, missugune ka ei oleks $\delta > 0$, leidub piirkonnas $\bar{S}$ ikka kaks niisugust argumentpunkti (x', y') ja (x'', y''), et $r = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta$ ning seega ühtlasi $|x' - x''| < \delta$ ja $|y' - y''| < \delta$, kuid siiski

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \geqslant \varepsilon,$$

sest kui võtta positiivsete arvude järjend

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$$

nõnda, et $\delta_n \to 0$, kui $n \to \infty$, siis leidub eespoolöeldu põhjal iga δ_n jaoks piirkonnas $\bar{S}$ ikka kaks niisugust argumentpunkti (x_n', y_n') ja (x_n'', y_n''), et $(n = 1, 2, 3, \ldots$ puhul) on $\sqrt{(x_n' - x_n'') + (y_n' - y_n'')} < \delta_n$ ning seega ühtlasi $|x_n' - x_n''| < \delta_n$ ja $|y_n' - y_n''| < \delta_n$, kuid

$$|f(x_n', y_n')) - f(x_n'', y_n'')| \geqslant \varepsilon,$$

mida rahuldavad järjendites

$$(x_1', y_1'), (x_2', y_2'), \ldots, (x_n' y_n'), \ldots$$

ja

$$(x_1'', y_1''), (x_2'', y_2''), \ldots, (x_n'', y_n''), \ldots$$

esinevate punktide koordinaadid.

Vaatleme näiteks esimest neist punktide järjenditest. Et selle järjendi kõik punktid asetsevad piirkonnas $\bar{S}$, siis järelikult on see punktide järjend tõkestatud. See tähendab, et iga n puhul

$$\sqrt{x_n^2 + y_n^2} < K,$$

kus K on konstantne suurus. Teoreemi 1 järgi saame siis sellest punktide järjendist eraldada punktide osajärjendi

$$(x_{n_1}', y_{n_1}'), (x_{n_2}', y_{n_2}'), \ldots, (x_{n_k}', y_{n_k}'), \ldots,$$

millel on lõplik piirpunkt (ξ, η), s. o.

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}', y_{n_k}') = (\lim_{k\to\infty} x_{n_k}', \lim_{k\to\infty} y_{n_k}') = (\xi, \eta),$$

kus (ξ, η) asetseb (teoreemi 2 põhjal) piirkonnas $\bar{S}$. Tingimusest $\sqrt{(x_n' - x_n'')^2 + (y_n' - y_n'')^2} < \delta_n$ järeldub, et ka teisest punktide järjendist eraldatud punktide osajärjendil

$$(x_{n_1}'', y_{n_1}''), (x_{n_2}'', y_{n_2}''), \ldots, (x_{n_k}'', y_{n_k}''), \ldots$$

on samuti piirpunktiks (ξ, η), s. o.

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k}'', y_{n_k}'') = (\lim_{k\to\infty} x_{n_k}'', \lim_{k\to\infty} y_{n_k}'') = (\xi, \eta).$$

Et eelduse järgi funktsioon $f(x, y)$ on piirkonnas $\bar{S}$ pidev, siis

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}', y_{n_k}') = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}', \lim_{k\to\infty} y_{n_k}') = f(\xi, \eta)$$

ja

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}'', y_{n_k}'') = f(\lim_{k\to\infty} x_{n_k}'', \lim_{k\to\infty} y_{n_k}'') = f(\xi, \eta),$$

milledest nähtub, et

$$\lim_{k\to\infty}[f(x_{n_k}', y_{n_k}') - f(x_{n_k}'', y_{n_k}'')] = 0,$$

mis on aga vastuolus võrratusega

$$|f(x_n', y_n') - f(x_n'', y_n'')| \geqslant \varepsilon$$

ja seega ka võrratusega

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| \geqslant \varepsilon.$$

Järelikult funktsiooni $f(x, y)$ pidevus tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$ on ühtlane.

Märkus 1: Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkond

ei ole kinnine, siis võivad esitatud pidevate funktsioonide omadused mitte kehtida. Need omadused ei kehti näiteks funktsiooni

$$f(x, y) = \ln (4 - x^2 - y^2)$$

puhul. See funktsioon on pidev tõkestatud lahtises piirkonnas $x^2 + y^2 < 4$ (§ 14, joon. 4), kuid ta ei ole selles piirkonnas tõkestatud, sest argumentpunkti lähenemisel äärjoonele läheneb funktsiooni väärtus piiramatult $-\infty$-le. See tähendab, et kuitahes väikese $\delta > 0$ puhul leidub äärjoone läheduses alati kaks niisugust piirkonna punkti (x', y') ja (x'', y''), et

$$r = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2} < \delta$$

puhul $|f(x', y') - f(x'', y'')|$ võib saada kuitahes suureks.

Märkus 2: Kõiki käesolevas ja eelmistes paragrahvides esitatud kahe muutuja funktsiooni ning selle piirväärtuse ja pidevuse definitsioone ning pidevate funktsioonide omadustesse puutuvaid eeskirju saab analoogiliste võtetega üle kanda ja laiendada kolme, nelja jne. muutuja funktsioonidele (muidugi ilma geomeetrilise tõlgenduseta, välja arvatud kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ määramispiirkond, mis on kolmemõõtmeline ruum või selle osa, kusjuures see ruumiosa võib olla kinnine või lahtine, tõkestatud või tõkestamatu).

Et kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ tõlgendame geomeetriliselt kolmemõõtmelises ruumis, siis sellele analoogiliselt ütleme, et n muutuja funktsiooni

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

kus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on üksteisest sõltumatud muutujad ehk argumendid ja $n \geqslant 3$, tõlgendame teoreetiliselt $(n+1)$-mõõtmelises ruumis, kusjuures argumentpunkti $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ muutumispiirkond ehk funktsiooni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ määramispiirkond on n-mõõtmeline ruum või selle osa.

§ 18. Nivoojooned. Ettekujutuse kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ muutumiskäigust ja sellele funktsioonile vastava pinna punktide kaugusest vastavatest argumentpunktidest, samuti pinna reljeefist või kujust võime saada ka sel teel, et lõikame funktsioonile vastavat pinda tasapindadega, mis on paralleelsed XY-tasapinnaga, ja kanname lõikumisel tekkinud lõikejoonte projektsioonid XY-tasapinnale, s. o. argumentpunkti tasapinnale.

Kui oletame, et $z = z_0$, mis on konstantne suurus, siis saame funktsionaalse seose kahe muutuja x ja y vahel, s. o.

$$z_0 = f(x, y),$$

mis väljendab nüüd pinna $z = f(x, y)$ ja tasapinna $z = z_0$ lõikejoone projektsiooni XY-tasapinnal. Seda lõikejoone projektsiooni XY-tasapinnal nimetatakse funktsiooni $z = f(x, y)$ nivoojoo-

neks. Nivoojoone igas punktis on funktsiooni väärtus konstantne suurus z_0. Seega funktsiooni $z = f(x, y)$ nivoojooneks XY-tasapinnal nimetatakse niisugust joont, mille igas punktis funktsioon omab konstantset väärtust.

Nivoojooned, mis vastavad mitmesugustele z väärtustele, moodustavad funktsiooni $z = f(x, y)$ nivoojoonte parve. Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ nivoojoonte parve saamiseks antakse z-le väärtusi

$$\ldots, -3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h, \ldots,$$

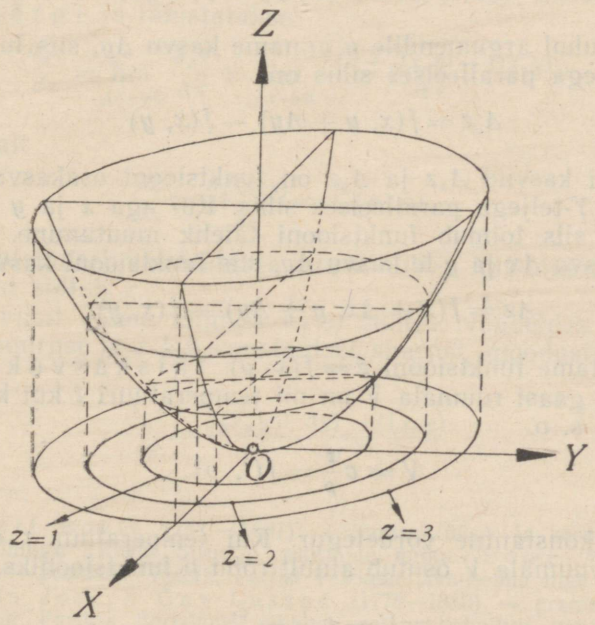
kus $h > 0$, siis nimetatakse saadavat nivoojoonte parve ühtlaseks.

Mida väiksem on h, seda paremini iseloomustab ühtlane nivoojoonte parv funktsiooni $z = f(x, y)$ muutumiskäiku ja ühtlasi funktsioonile vastavat pinda.

Seal, kus ühtlase parve nivoojooned XY-tasapinnal tihenevad, on funktsiooni $z = f(x, y)$ muutumiskäik kiirem, ja seal, kus nad harvenevad, on funktsiooni muutumiskäik aeglasem. Vastavalt sellele on pinna tõus (või langus) suurem või väiksem. Seega ühtlase parve nivoojoonte tihedus võib anda ettekujutuse funktsiooni $z = f(x, y)$ muutumiskäigust ja olla ühtlasi funktsioonile vastava pinna tõusu või languse mõõduks.

Näiteks pöördparaboloidi

$$z = x^2 + y^2$$



Joon. 8.

ühtlast nivoojoonte parve XY-tasapinnal kujutavad kontsentrilised ringjooned keskpunktiga koordinaattelgede nullpunktis (joon. 8, kus z-le on antud väärtused 0, 1, 2, 3, ...)

Eelnevale analoogiline arutlus näitab, et kui kolme muutuja funktsioonis

$$u = f(x, y, z)$$

võtta $u = u_0$, siis konstantse u_0 puhul

$$u_0 = f(x, y, z)$$

esitab funktsiooni $u = f(x, y, z)$ n i v o o p i n d a. See on pind, mille igas punktis kolme muutuja funktsioonil on üks ja sama väärtus u_0.

§ 19. Osatuletised. Võtame funktsiooni $z = f(x, y)$, mis on mingis (lahtises) piirkonnas kahe sõltumatu suuruse x ja y pidev funktsioon.

Kui selles funktsioonis y vaadelda kui konstantset suurust ja ainult x lugeda muutuvaks suuruseks või x vaadelda kui konstantset suurust ja y lugeda muutuvaks suuruseks, siis nii ühel kui ka teisel juhul toimub funktsiooni osaline muutumine. Kui esimesel juhul argumendile x anname kasvu Δx, siis funktsiooni kasv Y-teljega paralleelses sihis on

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y);$$

kui teisel juhul argumendile y anname kasvu Δy, siis funktsiooni kasv Y-teljega paralleelses sihis on

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Funktsiooni kasvud $\Delta_x z$ ja $\Delta_y z$ on funktsiooni osakasvud vastavalt X- ja Y-teljega paralleelses sihis. Kui aga x ja y mõlemad muutuvad, siis toimub funktsiooni täielik muutumine. Kui x-le anname kasvu Δx ja y-le kasvu Δy, siis funktsiooni kasv on

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

mida nimetame funktsiooni $z = f(x, y)$ t ä i s k a s v u k s.

Näiteks gaasi ruumala V on nii temperatuuri t kui ka rõhu p funktsioon, s. o.

$$V = c\frac{t}{p} = f(t, p),$$

kus c on konstantne võrdetegur. Kui temperatuur t on püsiv, siis gaasi ruumala V osutub ainult rõhu p funktsiooniks, s. t.

$$V = c\frac{t}{p} = \frac{c_1}{p},$$

mis väljendab Boyle-Mariotte'i* seadust: gaasi ruumala on pöördvõrdeline rõhuga. Selle seaduse graafiliseks kujuks on risthüperbool, nn. Mariotte'i kõver. Kui rõhk p on konstantne, siis gaasi ruumala V osutub ainult temperatuuri t funktsiooniks, s. t.

$$V = c\frac{t}{p} = c_2 t,$$

mis väljendab Gay-Lussac'i** seadust: kõikide gaaside termiline ruumpaisumiskoefitsient on üks ja sama $\left(c_2 = \frac{1}{273}\right)$. Mõlemal juhul toimub siin gaasi ruumala osaline muutumine. Gaasi ruumala täielik muutumine toimub siis, kui muutuvad koraga mõlemad argumendid: temperatuur t ja rõhk p.

Kui üldiselt kahe muutuja pidevas funktsioonis

$$z = f(x, y)$$

y loeme konstantseks suuruseks, siis võime z vaadelda kui ühe muutuja x pidevat funktsiooni ja moodustada kasvude suhte

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Kui see kasvude suhe omab piirväärtust, kui $\Delta x \to 0$, siis nimetatakse seda piirväärtust funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletiseks x järgi ja tähistatakse

$$\frac{d_x z}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

ehk lühemalt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y),$$

sest diferentsimisel vaadeldakse siin ainult x kui muutuvat suurust, millest sõltub z.

Samal viisil võime toimida ka y suhtes, vaadeldes teda kui muutuvat suurust ja x kui konstantset suurust, moodustades kasvude suhte

$$\frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

---

* Robert Boyle (1627—1691) — inglise füüsik ja keemik; kuulus Kuningliku Ühingu (Royal Society) asutajate hulka. Edme Mariotte (1620—1684) — prantsuse füüsik, Pariisi Teaduste Akadeemia liige.

** Louis Joseph Gay-Lussac (1778—1850) — prantsuse füüsik ja keemik; oli Pariisis Sorbonne'i ülikooli ja polütehnilise instituudi professoriks.

ja avaldades $\Delta y \to 0$ puhul funktsiooni $z = f(x, y)$ *osatuletise* y *järgi*, s. o.

$$\frac{d_y z}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

ehk

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y).$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$ on omakorda x ja y funktsioonid, mis võivad samuti olla pidevad funktsiooni määramispiirkonnas.

Näiteks kahe muutuja funktsiooni

$$z = 3x^2 + 2xy - 5y^2$$

osatuletised x ja y järgi on

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x + 2y \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 10y.$$

Gaasi ruumala väljendava funktsiooni

$$V = c\frac{t}{p}$$

osatuletised temperatuuri t ja rõhu p järgi on

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{c}{p} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{ct}{p^2}.$$

Ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ tuletisest $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ kõneldakse nüüd kui *harilikust tuletisest*. Osatuletiste arvutamine ei kujuta hariliku tuletise arvutamisega võrreldes midagi oluliselt uut.

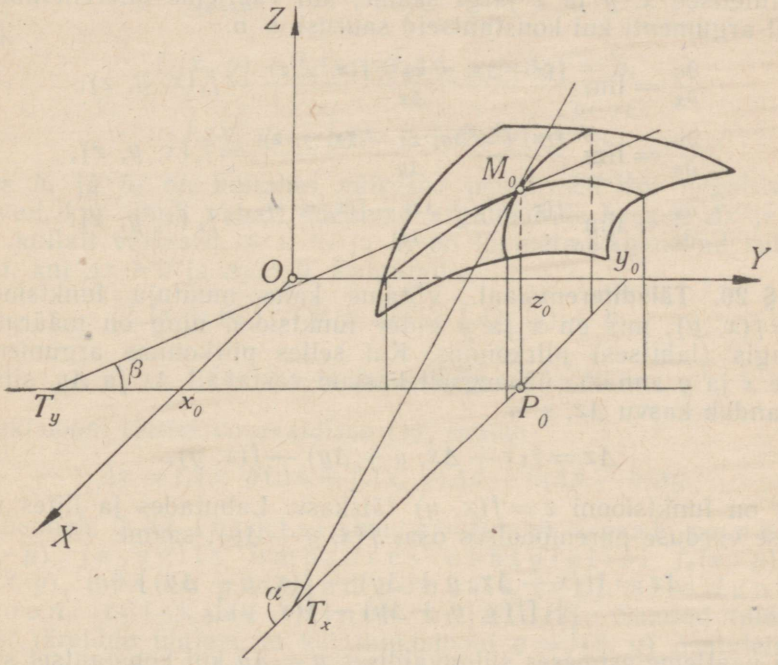
Mõnikord märgitakse osatuletiste tähiseid $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$ ka kujul $f_x'(x, y)$ ja $f_y'(x, y)$, kuid osatuletiste puhul pole ülemised kriipsud olulised, sest alumised indeksid juba näitavad, mille järgi on funktsioon diferentsitud.

Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on määratud teatavas piirkonnas ja seejuures argumentpunkt (x, y), milles funktsioonil on osatuletised $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$, asub selle piirkonna äärjoonel, siis tuleb murdude

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

piirile minekul, kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$, ikka mõista, et punktid $(x + \Delta x, y)$ ja $(x, y + \Delta y)$ jäävad kogu aeg tähendatud piirkonda.

Siin konstantse $y = y_0$ puhul $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ väljendab funktsiooni $z = f(x, y_0)$ muutumise keskmist kiirust X-teljega paralleelses sihis vahemikus x-st kuni $(x + \Delta x)$-ni ja konstantse $x = x_0$ puhul $\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ väljendab funktsiooni $z = f(x_0, y)$ muutumise keskmist kiirust Y-teljega paralleelses sihis vahemikus y-st kuni $(y + \Delta y)$-ni. Osatuletist $f_x(x, y_0)$ võime vaadelda kui funktsiooni $z = f(x, y)$ muutumise lokaalset kiirust x suhtes punktis (x, y_0) ja osatuletist $f_y(x_0, y)$ kui funktsiooni $z = f(x, y)$



Joon. 9.

muutumise lokaalset kiirust y suhtes punktis (x_0, y). Seega osatuletised $f_x(x, y_0)$ ja $f_y(x_0, y)$ näitavad, missugune on funktsiooni $z = f(x, y)$ muutumise lokaalne kiirus punktis, mis liigub kas X- või Y-teljega paralleelses sihis.

Geomeetriliselt tähendavad funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletiste $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$ väärtused $x = x_0$ ja $y = y_0$ puhul, s. o. $f_x(x_0, y_0)$ ja $f_y(x_0, y_0)$, niisuguste nurkade tõuse (joon. 9), mis kõverpinna $z = f(x, y)$ ning tasapindade $y = y_0$ ja $x = x_0$ lõikejoonte puutujad M_0T_x ja M_0T_y punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (või nende

puutujate projektsioonid vastavalt XZ- ja YZ-tasapinnal) moodustavad X- ja Y-telje positiivse suunaga, s. o.

$$f_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}(M_0T_x, OX) = \operatorname{tg}\alpha$$

ja

$$f_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}(M_0T_y, OY) = \operatorname{tg}\beta.$$

Analoogiliselt eelnevale saame leida kolme, nelja jne. muutuja pideva funktsiooni osatuletised. Näiteks kolme muutuja funktsiooni

$$u = f(x, y, z)$$

osatuletised x, y ja z järgi saame, kui vaatleme diferentsimisel kaht argumenti kui konstantseid suurusi, s. o.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} = f_x(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y} = f_y(x, y, z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z} = f_z(x, y, z).$$

§ 20. Täisdiferentsiaal. Võtame kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$, mis on x ja y pidev funktsioon ning on määratud mingis (lahtises) piirkonnas. Kui selles piirkonnas argumentidele x ja y anname üheaegselt kasvud vastavalt Δx ja Δy, siis z omandab kasvu Δz, s. o.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

mis on funktsiooni $z = f(x, y)$ täiskasv. Lahutades ja liites viimase võrduse parempoolses osas $f(x, y+\Delta y)$, saame

$$\Delta z = [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] + [f(x, y+\Delta y) - f(x, y)].$$

Kui vaatleme esimeses sulgavaldises $y+\Delta y$ kui konstantset suurust ja teises sulgavaldises x kui konstantset suurust, siis võime neis sulgavaldistes esinevate vahede suhtes rakendada ühe muutuja funktsiooni puhul käsitletud diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi (I osa, § 47), s. o.

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x \cdot f_x(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y)$$

ja

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot f_y(x, y+\Theta_2\Delta y),$$

kus $0 < \Theta_1 < 1$ ja $0 < \Theta_2 < 1$ ning $f_x(x+\Theta_1\Delta x, y+\Delta y)$ ja $f_y(x, y+\Theta_2\Delta y)$ tähendavad osatuletisi x ja y järgi, sest meil on

tegemist kahe muutuja funktsiooniga. Funktsiooni täiskasvu saame esitada siis järgmiselt:

$$\Delta z = f_x(x + \Theta_1 \Delta x,\ y + \Delta y)\Delta x + f_y(x,\ y + \Theta_2 \Delta y)\Delta y. \qquad (1)$$

Kui oletada, et funktsiooni $z = f(x,\ y)$ määramispiirkonna igas punktis osatuletised $f_x(x,\ y)$ ja $f_y(x,\ y)$ on samuti x ja y pidevad funktsioonid, siis

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_x(x + \Theta_1 \Delta x,\ y + \Delta y) = f_x(x,\ y)$$

ja

$$\lim_{\Delta y \to 0} f_y(x,\ y + \Theta_2 \Delta y) = f_y(x,\ y)$$

ehk

$$f_x(x,\ y) - f_x(x + \Theta_1 \Delta x,\ y + \Delta y) = h_1$$

ja

$$f_y(x,\ y) - f_y(x,\ y + \Theta_2 \Delta y) = h_2,$$

kus h_1 ja h_2 on kuitahes väikesed positiivsed või negatiivsed arvud, kui ainult vabalt võetavad argumentide kasvud Δx ja Δy on küllalt väikesed, s. t. h_1 ja h_2 on lõpmata kahanevad suurused, kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$. Paigutades

$$f_x(x + \Theta_1 \Delta x,\ y + \Delta y) = f_x(x,\ y) - h_1$$

ja

$$f_y(x,\ y + \Theta_2 \Delta y) = f_y(x,\ y) - h_2$$

funktsiooni täiskasvu avaldisse (1), saame

$$\Delta z = f_x(x,\ y)\Delta x + f_y(x,\ y)\Delta y - h_1 \Delta x - h_2 \Delta y. \qquad (2)$$

Tähendab, kui funktsioon $z = f(x,\ y)$ omab punktis $(x,\ y)$ ja selle ümbruses osatuletisi $f_x(x,\ y)$ ja $f_y(x,\ y)$, mis on pidevad punktis $(x,\ y)$, siis funktsiooni täiskasv esineb kujul (2). Saadud tulemusest järeldub ühtlasi, et kui funktsiooni $z = f(x,\ y)$ osatuletised on pidevad x ja y funktsioonid, siis on ka funktsioon ise pidev x ja y funktsioon, sest kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$, siis ka $\Delta z \to 0$, s. o.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$$

Funktsioon $z = f(x,\ y)$ on diferentsitav punktis $(x,\ y)$, kui funktsiooni täiskasvu saab esitada kujul (2), kus $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$ puhul h_1 ja h_2 on lõpmata kahanevad suurused. See tähendab, et kui funktsioon $z = f(x,\ y)$ omab punktis $(x,\ y)$ ja selle ümbruses osatuletisi $f_x(x,\ y)$ ja $f_y(x,\ y)$, mis on pidevad punktis $(x,\ y)$, siis on $f(x,\ y)$ diferentsitav selles punktis.

Funktsioon $z = f(x,\ y)$, mis on diferentsitav punktis $(x,\ y)$,

on ikka ja alati pidev selles punktis, sest $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$ puhul ka $\Delta z \to 0$. Kuid ümberpöördult pole see alati õige: funktsioon võib küll teatavas punktis olla pidev ja omada seal lõplikku väärtust, kuid ta võib siiski olla selles punktis mittediferentsitav.

Kui funktsioon $z = f(x, y)$ on diferentsitav määramispiirkonna igas punktis, siis ütleme, et funktsioon on diferentsitav selles piirkonnas.

Kui meil on tegemist kahe muutuja funktsiooniga $z = f(x, y)$, millel on olemas pidevad osatuletised $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$, ja kui x väärtus on teada veaga Δx ja y väärtus veaga Δy, siis küllalt väikese Δx ja Δy puhul funktsiooni absoluutne viga

$$\Delta z \approx f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

ning relatiivne viga

$$\frac{\Delta z}{z} \approx \frac{f_x(x, y)}{f(x, y)}\Delta x + \frac{f_y(x, y)}{f(x, y)}\Delta y.$$

Kui Δx ja Δy tähendavad x ja y maksimaalseid vigu, siis z maksimaalse vea saamiseks peame võtma osatuletiste absoluutväärtused, s. o.

$$\Delta z = |f_x(x, y)|\Delta x + |f_y(x, y)|\Delta y,$$

kusjuures relatiivne viga

$$\frac{\Delta z}{z} = \left|\frac{f_x(x, y)}{f(x, y)}\right|\Delta x + \left|\frac{f_y(x, y)}{f(x, y)}\right|\Delta y.$$

Kui näiteks koonuse põhja diameeter D on mõõdetud maksimaalse veaga ΔD ja kõrgus H maksimaalse veaga ΔH, siis koonuse ruumala

$$V = f(D, H) = \frac{1}{12}\pi D^2 H$$

jaoks saame maksimaalse vea

$$\Delta V = |f_D(D, H)|\Delta D + |f_H(D, H)|\Delta H = \frac{1}{12}\pi D^2 H\left(2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H}\right),$$

kusjuures relatiivne viga

$$\frac{\Delta V}{V} = 2\frac{\Delta D}{D} + \frac{\Delta H}{H}.$$

Et ühe muutuja funktsiooni $y = f(x)$ kasv väljendus avaldisena (I osa, § 31)

$$\Delta y = f'(x)\Delta x - h\Delta x,$$

kus $h \to 0$, kui $\Delta x \to 0$, kusjuures funktsiooni diferentsiaaliks oli

$$dy = f'(x)\Delta x,$$

siis analoogiliselt ühe muutuja funktsiooni diferentsiaalile nimetame avaldisi $f_x(x, y)\Delta x$ ja $f_y(x, y)\Delta y$ kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ **osadiferentsiaalideks** ja avaldist

$$f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta x,$$

kui funktsioon $z = f(x, y)$ on diferentsitav punktis (x, y), sama funktsiooni **täisdiferentsiaaliks**. Tähistades kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali sümboliga dz, saame

$$dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

ja

$$\Delta z = dz - h_1\Delta x - h_2\Delta y,$$

millest

$$dz = \Delta z + h_1\Delta x + h_2\Delta y.$$

Analoogiliselt ühe muutuja funktsioonile (I osa, § 31) nimetame kahe muutuja funktsiooni argumentide x ja y (kui sõltumatute muutujate) diferentsiaalideks dx ja dy vastavaid argumentide kasve Δx ja Δy, s. o.

$$dx = \Delta x \quad \text{ja} \quad dy = \Delta y,$$

mistõttu võime avaldada funktsiooni $z = f(x, y)$ osadiferentsiaale järgmisel kujul:

$$d_x z = f_x(x, y)dx = \frac{\partial z}{\partial x}dx, \qquad d_y z = f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaal on siis

$$dz = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ehk

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

ehk veel lühemal kujul

$$dz = d_x z + d_y z.$$

Nagu näeme, on funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaal võrdne osadiferentsiaalide summaga.

Analoogiliselt eelnevale on võimalik näidata, et kui kolme muutuja funktsiooni

$$u = f(x, y, z)$$

täiskasvu saame esitada kujul

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z - h_1\Delta x - h_2\Delta y - h_3\Delta z,$$

kus h_1, h_2 ja h_3 on lõpmata kahanevad suurused, kui $\Delta x \to 0$,

$\Delta y \to 0$ ja $\Delta z \to 0$, siis funktsiooni täisdiferentsiaal

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

kus

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,dx = d_x u, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = d_y u, \qquad \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = d_z u$$

on osadiferentsiaalideks. Samuti ilmneb, et kui üldiselt n muutuja funktsiooni

$$w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_n)$$

täiskasvu saame esitada kujul

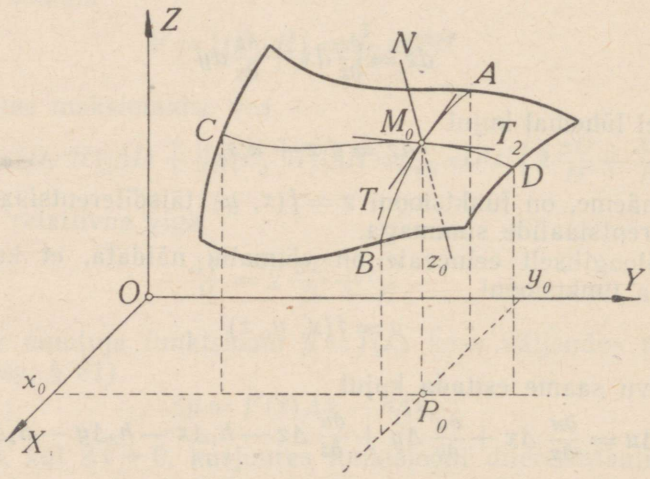
$$\Delta w = \frac{\partial w}{\partial x_1}\,\Delta x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\,\Delta x_2 + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial w}{\partial x_n}\,\Delta x_n - h_1\Delta x_1 - h_2\Delta x_2 - \ldots - h_n\Delta x_n,$$

kus $h_1, h_2, \ldots, h_n$ on lõpmata kahanevad suurused, kui $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, siis funktsiooni täisdiferentsiaal

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n}\,dx_n.$$

§ 21. Puutujatasapind ja pinna normaal. Olgu kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ vaadeldavas piirkonnas pidev. Võtame selles piirkonnas argumentpunkti $P_0(x_0, y_0)$, millele vastab funktsioonile $z = f(x, y)$ vastaval kõverpinnal punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (joon. 10). Lõikame kõverpinda tasapindadega $y = y_0$ ja $x = x_0$. Nende tasapindade lõikejooned kõverpinnaga on vastavalt AB ja



Joon. 10.

CD, millede lõikepunktiks on $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Tõmbame neile lõikejoontele punktis M_0 puutujad M_0T_1 ja M_0T_2, mis on paralleelsed vastavalt XZ- ja YZ-tasapinnaga. Puutujad M_0T_1 ja M_0T_2 määravad tasapinna, mida nimetatakse kõverpinna $z = f(x, y)$ puutujatasapinnaks punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$, kusjuures punkt M_0 on tasapinna ja kõverpinna puutepunktiks.

Tuletame puutujatasapinna võrrandi, kui puutepunktiks on $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Analüütilisest geomeetriast teame, et punkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$ läbiva tasapinna üldvõrrand esineb kujul

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

ehk

$$z - z_0 = -\frac{A}{C}(x - x_0) - \frac{B}{C}(y - y_0).$$

Saadud võrrandis valime A, B ja C nii, et $-\frac{A}{C}$ kujutaks puutuja M_0T_1 ja X-telje vahelise nurga tõusu ning $-\frac{B}{C}$ kujutaks puutuja M_0T_2 ja Y-telje vahelise nurga tõusu. Siis (§ 19 põhjal)

$$-\frac{A}{C} = \operatorname{tg}(M_0T_1, OX) = f_x(x_0, y_0)$$

ja

$$-\frac{B}{C} = \operatorname{tg}(M_0T_2, OY) = f_y(x_0, y_0)$$

ning puutujatasapinda esitab võrrand

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

ehk

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

kusjuures puutujat M_0T_1 määravad võrrandid

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) \text{ ja } y = y_0$$

ning puutujat M_0T_2 määravad võrrandid

$$z - z_0 = f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \text{ ja } x = x_0.$$

Kõverpinna normaaliks punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nimetatakse puutujatasapinnale tõmmatud perpendikulaari läbi punkti M_0, s. o. sirget M_0N. Kasutades tasapinna ja sirge ristseisu tingi-

must *, võime kirjutada kõverpinna $z = f(x, y)$ normaali võrrandi, kui normaal läbib punkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$, s. o.

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Kui normaali suunanurgad X-, Y- ja Z-telje positiivse suunaga on vastavalt α, β ja γ, siis normaali suunakoosinusi võime esitada kujul

$$\cos\alpha = \frac{f_x(x_0, y_0)}{\pm\sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2 + 1}},$$

$$\cos\beta = \frac{f_y(x_0, y_0)}{\pm\sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2 + 1}},$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2 + 1}}.$$

Puutujatasapinna ja normaali võrrandeid võime esitada ka järgmiselt:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ja

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1},$$

kusjuures osatuletiste $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ all tuleb nüüd mõista nende väärtusi $x = x_0$ ja $y = y_0$ puhul, s. o. $\frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x_0, y_0)$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x_0, y_0)$.

Näiteks pöördparaboloidi

$$z = x^2 + y^2$$

puhul

$$f_x(x, y) = 2x \text{ ja } f_y(x, y) = 2y$$

---

* Analüütilisest geomeetriast on teada, et tasapinna

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

ja sirge

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

ristseisu tingimuseks on

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}.$$

ning paraboloidi punktis (x_0, y_0, z_0) on

$$f_x(x_0, y_0) = 2x_0 \quad \text{ja} \quad f_y(x_0, y_0) = 2y_0.$$

Asetades need osatuletiste väärtused puutujatasapinna võrrandisse, saame

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ehk

$$z + z_0 = 2(x_0x + y_0y) + 2(z_0 - x_0^2 - y_0^2).$$

Et aga punkt (x_0, y_0, z_0) asetseb paraboloidil, siis

$$z_0 - x_0^2 - y_0^2 = 0$$

ja seega antud pöördparaboloidi puutujatasapinna võrrandi saame esitada kujul

$$z + z_0 = 2(x_0x + y_0y),$$

kus x_0, y_0 ja z_0 on puutepunkti koordinaadid.

Normaali võrrand on siis

$$\frac{x - x_0}{2x_0} = \frac{y - y_0}{2y_0} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

§ 22. Täisdiferentsiaali geomeetriline tähendus. Võtame kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ ja vaatleme tema täisdiferentsiaali dz geomeetrilist tähendust koos osadiferentsiaalide d_xz ja d_yz geomeetrilise tähendusega. Ühe muutuja funktsiooni diferentsiaali geomeetrilise tähenduse puhul oli meil tegemist kõvera puutujaga teatavas kõvera punktis, kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali geomeetrilise tähenduse puhul aga tuleb meil tegemist teha kõverpinna puutujatasapinnaga teatavas kõverpinna punktis.

Oletame, et funktsioon $z = f(x, y)$ on diferentsitav argumentpunktis $P_0(x_0, y_0)$ ja argumentpunktile vastav punkt kõverpinnal on $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (joon. 11). Argumentide x_0 ja y_0 diferentsiaalidele dx ja dy vastavad kõverpinnal kaared M_0M_1 ja M_0M_2, mis esitavad vastavalt kõverpinna $y = f(x, y)$ ning tasapindade $y = y_0$ ja $x = x_0$ lõikejooni. Tõmbame nendele kaartele punktis M_0 puutujad M_0T_1 ja M_0T_2. Need puutujad (kui punktis M_0 lõikuvad sirged) määravad tasapinna, mis on kõverpinnale $z = f(x, y)$ puutujatasapinnaks punktis M_0, kusjuures punkt M_0 on puutepunktiks. Edasi tõmbame punktist M_0 sirglõigud M_0A_1 ja M_0A_2, mis on paralleelsed vastavalt X- ja Y-teljega. Siis

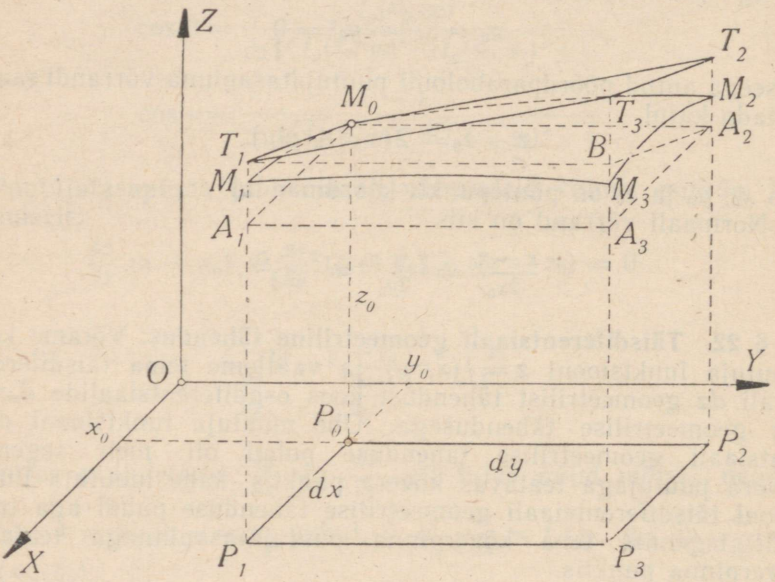
$$M_0A_1 = P_0P_1 = \Delta x = dx,$$
$$M_0A_2 = P_0P_2 = \Delta y = dy,$$
$$A_1M_1 = \Delta_x z, \quad A_2M_2 = \Delta_y z,$$
$$A_1T_1 = d_x z, \quad A_2T_2 = d_y z.$$

Sirglõikudele P_1P_3 ja P_2P_3 vastavad kõverpinnal kaared M_1M_3 ja M_2M_3, mis esitavad vastavalt kõverpinna $z = f(x, y)$ ning tasapindade $x = x_0 + dx$ ja $y = y_0 + dy$ lõikejooni. Kui tõmbame A_1A_3 paralleelselt Y-teljega, siis A_2A_3 on paralleelne X-teljega ning A_3M_3 kujutab funktsiooni $z = f(x, y)$ täiskasvu, s. o.

$$A_3M_3 = \Delta z.$$

Sirge P_3M_3 lõikab puutujatasapinda punktis T_3, kusjuures nüüd A_3T_3 kujutab funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaali, s. o.

$$A_3T_3 = dz,$$



Joon. 11.

sest kui tõmmata punktist T_1 sirglõik T_1B paralleelselt Y-teljega, siis sirglõik A_3T_3 jaguneb kaheks osaks ja nimelt

$$A_3T_3 = A_3B + BT_3,$$

kus nüüd

$$A_3B = A_1T_1 = d_xz, \quad BT_3 = A_2T_2 = d_yz$$

ning seega

$$A_3T_3 = dz = d_xz + d_yz.$$

Et (§ 20 järgi)

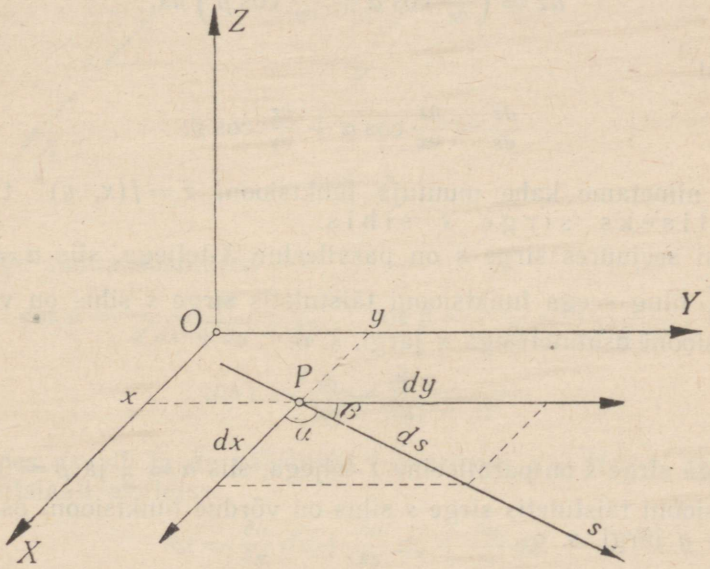
$$dz = A_3T_3 = A_3M_3 + M_3T_3 = \Delta z + M_3T_3 = \\ = \Delta z + h_1\Delta x + h_2\Delta y = \Delta z + h_1dx + h_2dy,$$

siis järeldub siit, et sirglõik

$$M_3T_3 = h_1dx + h_2dy$$

kujutab geomeetriliselt funktsiooni $z = f(x, y)$ täiskasvu Δz lineaarset (positiivset või negatiivset) pikendust kuni puutujatasapinnani, mille puutepunktiks kõverpinnal on punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

§ 23. Täistuletis. 1) Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletisi x ja y järgi $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ võime ühtlasi vaadelda kui funktsiooni tuletisi vastavalt X- ja Y-teljega paralleelses sihis.



Joon. 12.

Funktsioon $z = f(x, y)$ ise aga võib olla diferentsitav XY-tasapinnal asetseva mistahes sirge s sihis (joon. 12), kusjuures argumentpunkti $P(x, y)$ liikumisel seda sirget mööda argumentide diferentsiaalid dx ja dy pole enam teineteisest sõltumatud, vaid on seotud võrdustega

$$dx = ds \cos \alpha, \qquad dy = ds \cos \beta,$$

kus α ja β on sirge s suunanurgad, mis on konstantsed suurused. Siis sirge s diferentsiaal

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

ja sirge suunakoosinused

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Oletame, et funktsioon $z = f(x, y)$ on punktis (x, y) diferentsitav, s. o. omab täisdiferentsiaali

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Asetades sellesse täisdiferentsiaali avaldisse eespool märgitud dx ja dy väärtused, saame täisdiferentsiaali avaldada kujul

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\right) ds,$$

millest

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

mida nimetame kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ **täistuletiseks sirge s sihis.**

Kui seejuures sirge s on paralleelne X-teljega, siis $\alpha = 0$ ja $\beta = \frac{\pi}{2}$ ning seega funktsiooni täistuletis sirge s sihis on võrdne funktsiooni osatuletisega x järgi, s. o.

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Kui aga sirge s on paralleelne Y-teljega, siis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ja $\beta = 0$ ning funktsiooni täistuletis sirge s sihis on võrdne funktsiooni osatuletisega y järgi, s. o.

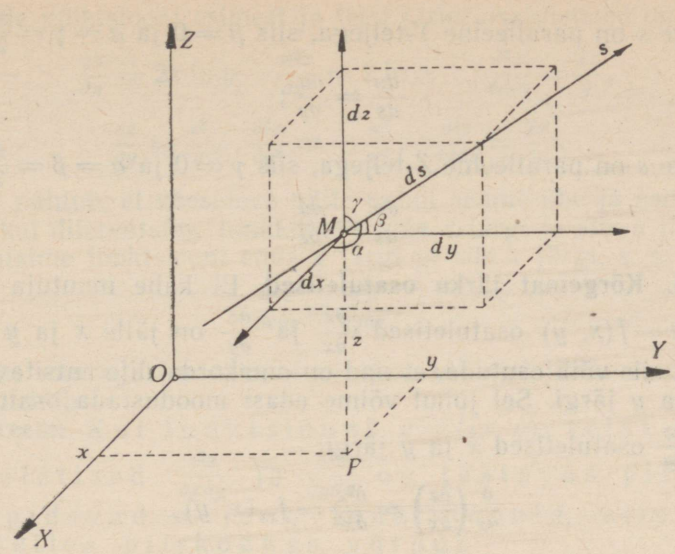
$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

2) Et kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ osatuletisi x, y ja z järgi võime samuti vaadelda kui funktsiooni tuletisi vastavalt X-, Y- ja Z-teljega paralleelses sihis, siis argumentpunkti $M(x, y, z)$ liikumisel mingit ruumilist sirget s mööda (joon. 13), mille suunanurgad on α, β ja γ, saame argumentide x, y ja z diferentsiaalid märkida järgmiselt:

$$dx = ds\cos\alpha, \quad dy = ds\cos\beta, \quad dz = ds\cos\gamma,$$

kus sirge s diferentsiaal

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$



Joon. 13.

ja sirge suunakoosinused

$$\cos\alpha = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},\quad \cos\beta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}.$$

Asetades dx, dy ja dz väärtused funktsiooni $u = f(x, y, z)$ täisdiferentsiaali avaldisse

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz,$$

saame antud funktsiooni täisdiferentsiaali avaldada kujul

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) ds,$$

millest saame kolme muutuja funktsiooni täistuletise sirge s sihis

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

Erijuhul, kui sirge s on paralleelne X-teljega, siis $\alpha = 0$ ja $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$ ning

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x};$$

kui sirge s on paralleelne Y-teljega, siis $\beta = 0$ ja $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$ ning

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial y};$$

kui sirge s on paralleelne Z-teljega, siis $\gamma = 0$ ja $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ ning

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

§ 24. Kõrgemat järku osatuletised. Et kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ on jälle x ja y funktsioonid, siis võib osutuda, et nad on omakorda diferentsitavad nii x kui ka y järgi. Sel juhul võime edasi moodustada osatuletiste $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ osatuletised x ja y järgi:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y),$$

mida nimetatakse funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletisteks. Esimene neist osatuletiste sümbolitest tähendab, et funktsioon $z = f(x, y)$ on kaks korda järgemööda diferentsitud x järgi, teine tähendab, et funktsioon on enne diferentsitud y järgi ja siis x järgi, kolmas tähendab, et funktsioon on enne diferentsitud x järgi ja siis y järgi, ning neljas tähendab, et funktsioon on kaks korda järgemööda diferentsitud y järgi.

Analoogiliselt võime leida funktsiooni $z = f(x, y)$ kolmandat järku osatuletised

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

ning edasi neljandat, viiendat jne., üldse n-järku osatuletised

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2} \partial y^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^n z}{\partial x \partial y^{n-1}}, \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

kui ainult neile eelnevad osatuletised on diferentsitavad x ja y funktsioonid.

Kui näiteks

$$z = x^2 \ln y,$$

siis selle funktsiooni esimest ja teist järku osatuletised on

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ln y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \ln y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2x}{y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2x}{y},$$

millest nähtub, et käesoleva näite puhul saame ühe ja sama tulemuse, kui diferentsime funktsiooni enne x järgi ja siis y järgi või diferentsime funktsiooni enne y järgi ja siis x järgi, s. o.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletiste kohta kehtib

teoreem: Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ teist järku osatuletised $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ on teatavas piirkonnas pidevad x ja y funktsioonid, siis kehtib selles piirkonnas võrdus

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Selle teoreemi tõestamiseks võtame vaadeldavas piirkonnas punktid (x, y), $(x + \Delta x, y)$, $(x, y + \Delta y)$ ja $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ning koostame avaldise

$$A = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - \\ - f(x, y + \Delta y) + f(x, y),$$

kus tähistame

$$\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

mida vaatleme kui x funktsiooni. Siis

$$\varphi(x + \Delta x) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)$$

ja

$$A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x),$$

mis diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi (I osa, § 47) järgi on

$$A = \Delta x \cdot \varphi'(x + \Theta_1 \Delta x),$$

kus $0 < \Theta_1 < 1$. Et aga

$$\varphi'(x) = f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y),$$

mis omakorda diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi põhjal on

$$\varphi'(x) = \Delta y \cdot f_{xy}(x, y + \Theta_2 \Delta y),$$

kus $0 < \Theta_2 < 1$, siis

$$\varphi'(x + \Theta_1 \Delta x) = \Delta y \cdot f_{xy}(x + \Theta_1 \Delta x, y + \Theta_2 \Delta y)$$

ja

$$A = \Delta x \cdot \Delta y \cdot f_{xy}(x + \Theta_1 \Delta x,\ y + \Theta_2 \Delta y).$$

Tähistame teiselt poolt

$$\psi(y) = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y),$$

mida vaatleme nüüd kui y funktsiooni. Siis näeme, et ka

$$A = \psi(y + \Delta y) - \psi(y),$$

millest leiame analoogiliselt eelnevale, rakendades diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi, et

$$A = \Delta x \cdot \Delta y \cdot f_{yx}(x + \Theta_4 \Delta x,\ y + \Theta_3 \Delta y),$$

kus $0 < \Theta_3 < 1$ ja $0 < \Theta_4 < 1$. Seega

$$f_{xy}(x + \Theta_1 \Delta x,\ y + \Theta_2 \Delta y) = f_{yx}(x + \Theta_4 \Delta x,\ y + \Theta_3 \Delta y),$$

kust piirile minnes, kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$, saame osatuletiste pidevuse tõttu

$$f_{xy}(x,\ y) = f_{yx}(x,\ y)$$

ehk

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

§ 25. Kõrgemat järku täisdiferentsiaal. Kahe muutuja funktsiooni $z = f(x,\ y)$ täisdiferentsiaal oli

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

mida nimetame nüüd esimest järku täisdiferentsiaaliks. Oletades, et funktsioon $z = f(x,\ y)$ omab ühtlasi teist, kolmandat jne., üldse n-järku pidevaid osatuletisi, saame moodustada ka funktsiooni kõrgemat järku täisdiferentsiaalid. Et esimest järku täisdiferentsiaalis argumentide diferentsiaalid dx ja dy on vabalt võetavad, siis võime diferentsimisel neile vaadata kui konstantsetele suurustele. Järelikult teist järku täisdiferentsiaal (kui esimest järku diferentsiaali diferentsiaal) on siis

$$d^2 z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\,dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2,$$

sest $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$. Kolmandat järku täisdiferentsiaal on

$$d^3z = d(d^2z) = d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\right)dx +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2\right)dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^2 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}dxdy + \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}dy^2\right)dx +$$

$$+ \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^2\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3,$$

sest $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ ja $\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$. Analoogiliselt jätkates saame induktiivsel teel näidata, et kahe muutuja funktsiooni n-järku täisdiferentsiaal esineb üldiselt kujul

$$d^n z = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}dx^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}dx^{n-1}dy +$$

$$+ \binom{n}{2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}dx^{n-2}dy^2 + \ldots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}dy^n,$$

mille parempoolne osa kujutab v o r m i l t binoomi astme arendirida, kus

$$\binom{n}{0}, \quad \binom{n}{1}, \quad \binom{n}{2}, \quad \ldots, \quad \binom{n}{n}$$

on binomiaalsed koefitsiendid. Seega võime funktsiooni $z = f(x, y)$ n-järku täisdiferentsiaalile anda järgmise sümboolse kuju:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^n f(x, y).$$

Analoogiliselt saame leida kolme, nelja jne. muutuja funktsiooni kõrgemat järku täisdiferentsiaalid. Näiteks kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ n-järku täisdiferentsiaal avaldub sümboolsel kujul järgmiselt:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz\right)^n f(x, y, z).$$

Tähendab, kui mitme muutuja funktsioon omab kuni n-järku pidevaid osatuletisi (n-järk kaasa arvatud), siis on funktsioonil olemas ka n-järku täisdiferentsiaal.

§ 26. Kõrgemat järku täistuletis. Kui kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$, mille täistuletis sirge s sihis on

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

omab kuni n-järku pidevaid osatuletisi, siis funktsiooni kõrgemat järku täistuletised sirge s sihis on

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\right)\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta\right)\cos\beta =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\alpha + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\cos\beta\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\alpha + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos\beta\right)\cos\beta =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\beta,$$

$$\frac{d^3z}{ds^3} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\beta\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\beta\right)\cos\alpha +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\cos^2\beta\right)\cos\beta =$$

$$= \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}\cos^2\beta\right)\cos\alpha +$$

$$+ \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\cos\alpha\cos\beta + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\cos^2\beta\right)\cos\beta =$$

$$= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\cos^3\alpha + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\cos^2\alpha\cos\beta + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\cos\alpha\cos^2\beta + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\cos^3\beta$$

ja üldiselt

$$\frac{d^n z}{ds^n} = \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\cos^n\alpha + \binom{n}{1}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\cos^{n-1}\alpha\cos\beta +$$

$$+ \binom{n}{2}\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\cos^{n-2}\alpha\cos^2\beta + \ldots + \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\cos^n\beta,$$

mida võime samuti esitada sümboolsel kujul

$$\frac{d^n z}{ds^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\cos\beta\right)^n f(x, y).$$

Samal viisil leiame kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ n-järku täistuletise sirge s sihis, mille sümboolne kuju on

$$\frac{d^n u}{ds^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\cos\gamma\right)^n f(x, y, z),$$

kus $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ on ruumilise sirge s konstantsed suunakoosinused.

§ 27. Liitfunktsiooni diferentsimine. 1) Võtame funktsiooni

$$y = f(u, v),$$

mis on määratud piirkonnas $\overline{S}$, kusjuures u ja v on omakorda x pidevad funktsioonid, s. o. $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$, mis on x järgi diferentsitavad mingis (lahtises) vahemikus, milles x muutumisel punkt (u, v) jääb piirkonda $\overline{S}$. Seega $y = f(u, v)$ on kahe abimuutuja u ja v kaudu väljenduv ühe muutuja x funktsioon, ja nimelt liitfunktsioon, s. o.

$$y = f[\varphi(x), \psi(x)].$$

Näitame, et kui funktsioon $y = f(u, v)$ omab pidevaid osatuletisi $\frac{\partial y}{\partial u}$ ja $\frac{\partial y}{\partial v}$ ning $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$ on x järgi diferentsitavad, siis on ka liitfunktsioon $y = f(u, v)$ x järgi diferentsitav.

Et vaadeldavas vahemikus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$ on pidevad funktsioonid, kusjuures x muutumisel muutuvad ka u ja v ning ühtlasi ka y, siis x kasvamisel Δx võrra u ja v muutuvad vastavalt Δu ja Δv võrra, s. o.

$$u + \Delta u = \varphi(x + \Delta x), \qquad v + \Delta v = \psi(x + \Delta x),$$

ning u ja v üheaegsel muutumisel Δu ja Δv võrra y muutub Δy võrra, mis on funktsiooni täiskasv, s. o.

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v),$$

mida võime (§ 20 järgi) esitada kujul

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v - h_1\Delta u - h_2\Delta v,$$

kus h_1 ja h_2 on lõpmata kahanevad suurused, kui $\Delta u \to 0$ ja $\Delta v \to 0$. Jagades viimase võrduse mõlemad pooled Δx-ga, saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\Delta v}{\Delta x} - h_1\frac{\Delta u}{\Delta x} - h_2\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

mille piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$ ja seega ühtlasi $\Delta u \to 0$ ja $\Delta v \to 0$, mille puhul ka $h_1 \to 0$ ja $h_2 \to 0$, on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}.$$

Avaldis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$, on liitfunktsiooni $y = f(u, v)$ täistuletis. Liitfunktsiooni täisdiferentsiaal on siis

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv,$$

kus $\frac{\partial y}{\partial u}\,du$ ja $\frac{\partial y}{\partial v}\,dv$ on osadiferentsiaalid.

Võrreldes saadud täisdiferentsiaali eespool (§ 20) esineva kahe sõltumatu muutuja funktsiooni täisdiferentsiaaliga, näeme, et funktsiooni $y = f(u, v)$ täisdiferentsiaal on ikka üks ja sama, vaatamata sellele, kas u ja v sõltuvad mõnest kolmandast muutujast või on nad ise sõltumatud muutujad, kusjuures esimesel juhul mõistame vaid du ja dv all funktsioonide u ja v diferentsiaale. Siin esineb samuti nagu ühe muutuja funktsiooni puhulgi täisdiferentsiaali kuju invariantsus.

Võtame näiteks eksponentsiaal-astmefunktsiooni

$$y = u^v,$$

kus u ja v on x funktsioonid, s. o. $u = \varphi(x) > 0$ ja $v = \psi(x)$. Selle funktsiooni täisdiferentsiaal

$$dy = vu^{v-1}du + u^v \ln u\,dv,$$

sest

$$\frac{\partial y}{\partial u} = vu^{v-1}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u^v \ln u,$$

ja täistuletis

$$\frac{dy}{dx} = vu^{v-1}\frac{du}{dx} + u^v \ln u \frac{dv}{dx},$$

mis on samane juba varem (I osa, § 36, p. 4) leitud tuletisega.

Kui $u = \varphi(x) = x$, kus x on sõltumatuks muutujaks, kuid $v = \psi(x)$ on mingisugune x funktsioon, siis $du = dx$ ja

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

milles osatuletis $\frac{\partial y}{\partial x}$ leitakse eeldusel, et v on konstantne suurus, kuid täistuletis $\frac{dy}{dx}$ arvutatakse eeldusel, et funktsioon $v = \psi(x)$ muutub koos x muutumisega.

Ühe muutuja liitfunktsiooni $y = f(u, v)$, kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$, teist järku täistuletise leidmiseks diferentsime x järgi esimest järku täistuletist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

arvestades seejuures, et osatuletised $\frac{\partial y}{\partial u}$ ja $\frac{\partial y}{\partial v}$ on omakorda x liitfunktsioonid. Diferentsides saame

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{dv}{dx}\right)\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}\right)\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2},$$

kusjuures teist järku täisdiferentsiaal

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}dudv + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial y}{\partial u}d^2u + \frac{\partial y}{\partial v}d^2v.$$

Kui siin u ja v oleksid sõltumatud muutujad, siis vabalt valitavate du ja dv puhul $d^2u = 0$ ja $d^2v = 0$ ning teist järku täistuletise ja samuti ka teist järku täisdiferentsiaali kaks viimast liiget oleksid võrdsed nulliga (§ 25).

Antud liitfunktsiooni kolmandat järku täistuletise saamiseks diferentsime x järgi teist järku täistuletist; saame

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\partial^3 y}{\partial u^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + \frac{\partial^3 y}{\partial u^2 \partial v}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{dv}{dx} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} +$$

$$+ 2\frac{\partial^3 y}{\partial u^2 \partial v}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{dv}{dx} + 2\frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v^2}\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v^2}\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^3 y}{\partial v^3}\left(\frac{dv}{dx}\right)^3 +$$

$$+ \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{d^3v}{dx^3} =$$

$$= \frac{\partial^3 y}{\partial u^3}\left(\frac{du}{dx}\right)^3 + 3\frac{\partial^3 y}{\partial u^2 \partial v}\left(\frac{du}{dx}\right)^2\frac{dv}{dx} + 3\frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v^2}\frac{du}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial^3 y}{\partial v^3}\left(\frac{dv}{dx}\right)^3 + 3\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + 3\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{dv}{dx}\frac{d^2v}{dx^2} +$$

$$+ 3\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}\frac{d^2v}{dx^2}\right) + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{d^3u}{dx^3} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{d^3v}{dx^3},$$

kusjuures kolmandat järku täisdiferentsiaal

$$d^3y = \frac{\partial^3 y}{\partial u^3}du^3 + 3\frac{\partial^3 y}{\partial u^2 \partial v}du^2dv + 3\frac{\partial^3 y}{\partial u \partial v^2}dudv^2 +$$

$$+ \frac{\partial^3 y}{\partial v^3}dv^3 + 3\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}dud^2u + 3\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}dvd^2v +$$

$$+ 3\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}(d^2udv + dud^2v) + \frac{\partial y}{\partial u}d^3u + \frac{\partial y}{\partial v}d^3v.$$

Jätkates analoogiliselt diferentsimist, saame leida neljandat, viiendat jne., üldse n-järku täistuletisi ja täisdiferentsiaale.

Analoogiliselt saame leida ka kolme ja rohkema abimuutujaga liitfunktsiooni täistuletisi ja täisdiferentsiaale, kui abimuutujad on kõik ühe ja sama sõltumatu muutuja funktsioonid. Kui näiteks kolme abimuutujaga liitfunktsioonis $y = f(u, v, w)$ on u, v ja w pidevad x funktsioonid, milledel on olemas tuletised, siis selle liitfunktsiooni täistuletis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{dx}$$

ja täisdiferentsiaal

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw,$$

kusjuures teist järku täistuletis on

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}\frac{dw}{dx}\right)\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{dv}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}\frac{dw}{dx}\right)\frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial w \partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial w \partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}\frac{dw}{dx}\right)\frac{dw}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{d^2w}{dx^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}\frac{du}{dx}\frac{dw}{dx} + 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}\frac{dv}{dx}\frac{dw}{dx} +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{d^2w}{dx^2}$$

ja teist järku täisdiferentsiaal

$$d^2y = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}dv^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}dw^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}dudv + 2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial w}dudw +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}dvdw + \frac{\partial y}{\partial u}d^2u + \frac{\partial y}{\partial v}d^2v + \frac{\partial y}{\partial w}d^2w.$$

2) Oletame, et

$$z = f(u, v)$$

on abimuutujate u ja v kaudu väljenduv kahe sõltumatu muutuja x ja y pidev ja diferentsitav liitfunktsioon, kus $u = \varphi(x, y)$ ja $v = \psi(x, y)$. Kui selle liitfunktsiooni diferentsimisel x vaatleme kui muutuvat suurust, y aga loeme konstantseks suuruseks, siis võime selle funktsiooni diferentsimisel toimida analoogiliselt eespool käsitletud ühe muutuja liitfunktsiooni diferentsimisele, ainult selle erinevusega, et sealsete harilike tuletiste ja täistuletiste asemel peame käesoleval juhul võtma osatuletised x järgi.

Selle liitfunktsiooni osatuletis x järgi on siis

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kui diferentsimisel vaatleme y muutuva suurusena ja x konstantse suurusena, siis ilmneb samal viisil, et liitfunktsiooni osatuletis y järgi

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Teist järku osatuletiste $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ leidmiseks diferentsime saadud esimest järku osatuletisi, milledes $\frac{\partial z}{\partial u}$ ja $\frac{\partial z}{\partial v}$ on omakorda x ja y liitfunktsioonid.

Diferentsides x järgi esimest neist osatuletistest, saame teist järku osatuletise x järgi, s. o.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 +$$
$$+2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2};$$

diferentsides y järgi teist neist osatuletistest, saame teist järku osatuletise y järgi, s. o.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Teist järku osatuletise $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ saamiseks võime diferentsida esimest osatuletist y järgi või teist osatuletist x järgi. Mõlemal juhul saame

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} +$$
$$+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} +$$
$$+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

§ 28. Ilmutamata funktsiooni diferentsimine. 1) Kui y on x (või x on y) ilmutamata funktsioon, mida määrab võrrand

$$F(x, y) = 0,$$

siis funktsiooni diferentsimiseks pole vaja iga kord võrrandist ilmutada üht või teist muutujat, vaid diferentsimist võib teostada funktsiooni $F(x, y)$ osatuletiste $F_x(x, y)$ ja $F_y(x, y)$ kaudu, mis peavad olema teatavas piirkonnas pidevad x ja y funktsioonid. Sel juhul võime funktsiooni diferentsimiseks kasutada eespool (§ 20) esitatud funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaali valemit

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

mille järgi käesoleval juhul võime kirjutada, et

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\,dy.$$

Kui võrrandis $F(x, y) = 0$ vaatleme y kui x funktsiooni, s. o. $y = f(x)$, mis on x järgi diferentsitav, siis võrrandi vasakut poolt võime vaadelda kui ühe muutuja x liitfunktsiooni, mille puhul

$$F[x, f(x)] = 0$$

ja järelikult ka ta tuletis

$$\frac{dF(x, y)}{dx} = \frac{dF[x, f(x)]}{dx} = 0$$

ning seega ühtlasi

$$dF(x, y) = dF[x, f(x)] = 0.$$

Järelikult

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ehk

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)\,\frac{dy}{dx} = 0,$$

mis on ilmutamata funktsiooni y diferentsimise valem, kui ilmutamata funktsiooni määrab võrrand $F(x, y) = 0$. Sellest valemist saame ilmutamata funktsiooni tuletise

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

ehk lühidalt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

kui tähistame $F_x(x, y) = F_x$ ja $F_y(x, y) = F_y$. Saadud valemil on mõte ainult siis, kui vastavas punktis (x, y) on $F_y \neq 0$.

Teise tuletise $\frac{d^2y}{dx^2}$ leidmiseks kirjutame eespool saadud diferentsimise valemi vasaku poole, mida vaatleme kui x, y ja y' funktsiooni, järgmiselt:

$$F_x + F_y \frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, y'),$$

kui ainult $F_y \neq 0$. Diferentsides võrrandit $\varphi(x, y, y') = 0$, leiame, et

$$\varphi_x dx + \varphi_y dy + \varphi_{y'} dy' = 0$$

ehk

$$\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} + \varphi_{y'} \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

kus

$$\varphi_x = F_{xx} + F_{xy} \frac{dy}{dx}, \quad \varphi_y = F_{xy} + F_{yy} \frac{dy}{dx}, \quad \varphi_{y'} = F_y,$$

millede asetamisel eelmisse võrdusse saame

$$F_{xx} + 2F_{xy} \frac{dy}{dx} + F_{yy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \quad (A)$$

Paigutades $\frac{dy}{dx}$ väärtuse

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

võrdusse (A), leiame ilmutamata funktsiooni y teise tuletise

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

Kolmanda tuletise $\frac{d^3y}{dx^3}$ leidmiseks kirjutame kaks korda diferentsitud funktsiooni järgmiselt:

$$F_{xx} + 2F_{xy} \frac{dy}{dx} + F_{yy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_y \frac{d^2y}{dx^2} = \psi(x, y, y', y''),$$

kus oletuse kohaselt $F_y \neq 0$. Diferentsides võrrandit $\psi(x, y, y', y'') = 0$, saame:

$$\psi_x + \psi_y \frac{dy}{dx} + \psi_{y'} \frac{d^2y}{dx^2} + \psi_{y''} \frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

kus

$$\psi_x = F_{xxx} + 2F_{xxy} \frac{dy}{dx} + F_{xyy} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{xy} \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\psi_y = F_{xxy} + 2F_{xyy}\frac{dy}{dx} + F_{yyy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{yy}\frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\psi_{y'} = 2F_{xy} + 2F_{yy}\frac{dy}{dx}, \qquad \psi_{y''} = F_y.$$

Viimaste asetamisel eelmisse võrdusse saame

$$F_{xxx} + 3F_{xxy}\frac{dy}{dx} + 3F_{xyy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_{yyy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 +$$
$$+ 3\left(F_{xy} + F_{yy}\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + F_y\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

millest võime leida ilmutamata funktsiooni kolmanda tuletise $\frac{d^3y}{dx^3}$ kui paigutame $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ asemele nende eespool leitud väärtused.

Jätkates analoogilist arvutust, võime leida vaadeldava ilmutamata funktsiooni neljanda, viienda jne. tuletise.

Kui aga võrrandis $F(x, y) = 0$ vaatleme x kui y funktsiooni, s. o. $x = g(y)$, mis on y järgi diferentsitav, siis võrrandi vasakut poolt võime vaadelda kui ühe muutuja y liitfunktsiooni, mille puhul

$$F[g(y), y] = 0.$$

Sel juhul saaksime eelnevale analoogiliselt, et

$$F_y + F_x\frac{dx}{dy} = 0,$$

millest funktsiooni x esimene tuletis

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x},$$

ja teistkordsel diferentsimisel

$$F_{yy} + 2F_{xy}\frac{dx}{dy} + F_{xx}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + F_x\frac{d^2x}{dy^2} = 0, \qquad (B)$$

millest teine tuletis

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_x^3},$$

kus nüüd endise tingimuse $F_y \neq 0$ asemel peab olema vastavas punktis (x, y) tingimuseks $F_x \neq 0$.

2) Võtame võrrandi

$$F(x, y, z) = 0,$$

milles z vaatleme kui x ja y ilmutamata funktsiooni. Et leida

siin z osatuletist x järgi, selleks loeme funktsiooni diferentsimisel y konstantseks suuruseks ja z vaatleme kui x funktsiooni. Siis saame

$$F_x + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

millest

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z},$$

kus F_x ja F_z all mõistame vastavalt osatuletisi $F_x(x, y, z)$ ja $F_z(x, y, z)$. Osatuletis $\frac{\partial z}{\partial x}$ omab ikka lõplikku väärtust, kui $F_z \neq 0$. Osatuletise $\frac{\partial z}{\partial y}$ leiame analoogiliselt, s. o.

$$F_y + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

millest

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Teist järku osatuletiste $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ leidmiseks diferentsime võrrandeid

$$F_x + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{ja} \quad F_y + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Diferentsides esimest võrrandit x järgi ja teist võrrandit y järgi, saame vastavalt

$$F_{xx} + 2F_{xz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + F_{zz} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + F_z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

ja

$$F_{yy} + 2F_{yz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + F_{zz} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + F_z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

milledest pärast $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ väärtuste asendamist leiame teist järku osatuletised $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, s. o.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2F_{xz}F_xF_z - F_{xx}F_z^2 - F_{zz}F_x^2}{F_z^3}$$

ja

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2F_{yz}F_yF_z - F_{yy}F_z^2 - F_{zz}F_y^2}{F_z^3}.$$

Teist järku osatuletise $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ leidmiseks diferentsime võrrandit

$$F_x + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

y järgi, vaadeldes diferentsimisel x kui konstantset suurust, või diferentsime võrrandit

$$F_y + F_z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

x järgi, vaadeldes diferentsimisel y kui konstantset suurust. Mõlemal juhul saame

$$F_{xy} + F_{xz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \left(F_{yz} + F_{zz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial z}{\partial x} + F_z \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

millest pärast $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ väärtuste asendamist leiame teist järku osatuletise $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, s. o.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(F_{xz} F_y + F_{yz} F_x - F_{xy} F_z) F_z - F_x F_y F_{zz}}{F_z^3}.$$

§ 29. Ilmutamata funktsiooni osatuletiste rakendusi. 1) Et võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud ilmutamata funktsiooni y tuletis

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

määrab funktsioonile vastava kõvera tõusu vaadeldavas punktis, näiteks punktis (x_0, y_0), siis selles punktis kõvera puutuja võrrand on

$$y - y_0 = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} (x - x_0)$$

ehk

$$F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0,$$

kus nüüd x ja y on puutujal asetseva jooksva punkti koordinaatideks. Kõvera normaali punktis (x_0, y_0) esitab siis võrrand

$$y - y_0 = \frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)} (x - x_0)$$

ehk

$$F_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Näiteks ellipsi võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

puhul

$$F_x = \frac{2x}{a^2} \quad \text{ja} \quad F_y = \frac{2y}{b^2}$$

ning ellipsit esitava funktsiooni tuletis on seega

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Ellipsi tõus punktis (x_0, y_0) on siis $-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ ja ellipsi puutuja võrrand

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) = 0$$

ehk

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}.$$

Et punkt (x_0, y_0) asetseb ellipsil, siis

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1,$$

mille puhul ellipsi puutuja võrrandi saame esitada kujul

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Ellipsi normaali punktis (x_0, y_0) määrab võrrand

$$\frac{y_0}{b^2}(x - x_0) - \frac{x_0}{a^2}(y - y_0) = 0$$

ehk

$$\frac{y_0 x}{b^2} - \frac{x_0 y}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} x_0 y_0.$$

2) Võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud ilmutamata funktsiooni y maksimumi ja miinimumi leidmiseks võtame funktsiooni tuletise $\frac{dy}{dx}$ ja võrrutame selle nulliga, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = 0,$$

kus nüüd $F_x = 0$, kui ainult $F_y \neq 0$. Lahendame võrrandisüsteemi

$$F(x, y) = 0, \quad F_x(x, y) = 0$$

x ja y suhtes ja võtame siis need x ja y väärtused, mille puhul $F_y \neq 0$. Nende x ja y väärtuste puhul $\frac{dy}{dx} = 0$.

Kui nende x ja y väärtuste puhul funktsiooni teine tuletis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_y^3} < 0,$$

s. o.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} < 0,$$

(sest $F_x = 0$), siis on funktsioonil maksimum, ja kui

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} > 0,$$

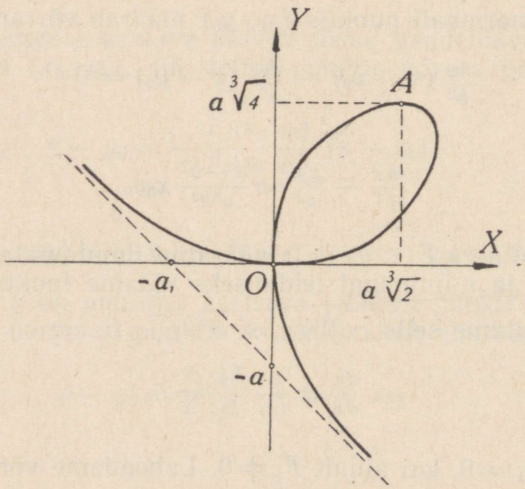
siis on funktsioonil miinimum. Kui aga

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} = 0,$$

s. o. $F_{xx} = 0$, siis on funktsioonile vastaval kõveral käänupunkt, kui ainult (§ 28, p. 1)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{F_{xxx}}{F_y} \neq 0,$$

s. o. kui $F_{xxx} \neq 0$. Kui aga $F_{xxx} = 0$, siis tuleb küsimus lahendada kõrgemat järku tuletiste kaudu.



Joon. 14.

Võtame näiteks Cartesiuse lehe võrrandi

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

kus $a > 0$ (joon. 14). Selle võrrandiga määratud ilmutamata funktsiooni y maksimumi või miinimumi leidmiseks võtame osatuletise x järgi ja võrdutame selle nulliga, s. o.

$$F_x = 3x^2 - 3ay = 0.$$

Lahendades võrrandisüsteemi

$$\left.\begin{aligned} x^3 + y^3 - 3axy &= 0 \\ x^2 - ay &= 0 \end{aligned}\right\}$$

x ja y suhtes, leiame ühe lahendi

$$x = a\sqrt[3]{2},\ y = a\sqrt[3]{4},$$

mille puhul

$$F_y = 3y^2 - 3ax = 3a^2\sqrt[3]{2} \neq 0.$$

Et leitud x ja y väärtuste puhul funktsiooni teine tuletis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{xx}}{F_y} = -\frac{6x}{3y^2 - 3ax} = -\frac{2}{a} < 0,$$

siis $y = a\sqrt[3]{4}$ on funktsiooni maksimum. Maksimumpunkt on seega

$$A(a\sqrt[3]{2},\ a\sqrt[3]{4}).$$

Võrrandisüsteemi teine lahend on

$$x = y = 0,$$

mille puhul

$$F_y = 3y^2 - 3ax = 0.$$

Siit nähtub, et punktis (0, 0) ei ole antud funktsioon diferentsitav, mille puhul me ei loe punkti (0, 0) funktsioonile vastava kõvera maksimum- ega ka miinimumpunktiks, kuigi punkt (0, 0) esitab kõvera ühe haara miinimumpunkti. Punkti (0, 0) nimetame kõvera k a h e k o r d s e k s p u n k t i k s; selles punktis kõver lõikab iseennast.

3) Kui kõvera võrrand esineb ilmutamata kujul $F(x, y) = 0$, siis kõvera kõverusraadiuse leidmiseks paigutame funktsiooni esimest ja teist järku tuletised, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{ja} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_y^3},$$

kõverusraadiuse avaldisse (I osa, § 59, p. 1)

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

saame

$$\varrho = \frac{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2},$$

kusjuures kõvera kõverus

$$k = \frac{1}{\varrho} = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kus vähemalt üks osatuletistest F_x või F_y ei ole võrdne nulliga.

Et leida näiteks ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kõverusraadius punktis $x = a$, milles $y = 0$, selleks leiame osatuletiste väärtused selles punktis, s. o.

$$F_x = \frac{2x}{a^2} = \frac{2}{a}, \qquad F_y = \frac{2y}{b^2} = 0,$$

$$F_{xx} = \frac{2}{a^2}, \qquad F_{yy} = \frac{2}{b^2}, \qquad F_{xy} = 0,$$

millede asetamisel kõverusraadiuse valemisse saame

$$\varrho = \frac{\left(\frac{4}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{2}{b^2} \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{b^2}{a},$$

kusjuures ellipsi kõverus tähendatud punktis on

$$k = \frac{a}{b^2},$$

mis on ellipsi maksimaalne kõverus, kui $a > b$.

4) Võtame võrrandi $F(x, y, z) = 0$ ja sellele võrrandile vastaval kõverpinnal punkti (x_0, y_0, z_0). Kasutades $x = x_0$, $y = y_0$ ja $z = z_0$ puhul osatuletiste $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ väärtusi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z},$$

kus $F_x = F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y = F_y(x_0, y_0, z_0)$ ja $F_z = F_z(x_0, y_0, z_0)$ peavad olema lõplikud suurused, võime paragrahvis 21 leitud puutujatasapinna ja normaali võrrandid

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

ja

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}$$

esitada järgmiselt:

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

ja

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z},$$

kus vähemalt üks osatuletistest F_x, F_y või F_z ei ole võrdne nulliga. Siin F_x, F_y ja F_z on normaali sihiteguriteks, kusjuures normaali suunakoosinused on

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

Et määrata näiteks ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

puutujatasapinna ja normaali võrrandid, kui puutepunktiks on (x_0, y_0, z_0), selleks võtame osatuletised

$$F_x = \frac{2x}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y}{b^2}, \quad F_z = \frac{2z}{c^2},$$

millede väärtused puutepunktis on

$$F_x = \frac{2x_0}{a^2}, \quad F_y = \frac{2y_0}{b^2}, \quad F_z = \frac{2z_0}{c^2}.$$

Nende asetamisel puutujatasapinna võrrandisse

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$

saame ellipsoidi puutujatasapinna võrrandi

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

ehk

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

Et punkt (x_0, y_0, z_0) asetseb ellipsoidil, siis

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1,$$

mille puhul ellipsoidi puutujatasapinna võrrandi saame esitada kujul

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

Ellipsoidi normaali võrrandi, kui puutepunktiks on (x_0, y_0, z_0), leiame, kui paigutame F_x, F_y ja F_z väärtused normaali võrrandisse

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z};$$

saame

$$\frac{x - x_0}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y - y_0}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{z - z_0}{\frac{z_0}{c^2}},$$

kus $\frac{x_0}{a^2}$, $\frac{y_0}{b^2}$ ja $\frac{z_0}{c^2}$ on ellipsoidi normaali sihitegurid.

§ 30. Iseärased punktid. Tasapinnalise kõvera $F(x, y) = 0$ punkti, milles

$$F_x(x, y) = 0 \text{ ja } F_y(x, y) = 0,$$

nimetatakse singulaarseks ehk iseäraseks punktiks, mille puhul ei saa kujundada üht ja ainult üht kindlat puutuja tõusu $\frac{dy}{dx}$ või $\frac{dx}{dy}$. Kui aga kõvera punktis vähemalt üks osatuletistest F_x või F_y ei ole võrdne nulliga, siis puutuja omab selles punktis kindlat tõusu $\frac{dy}{dx}$ või $\frac{dx}{dy}$ ja kõvera punkt on seega harilikuks punktiks, milles kõveral on üks ja ainult üks puutuja. Kõvera iseäraste punktide olemasolu üldtunnust esitavad seega võrrandid

$$F_x(x, y) = 0 \text{ ja } F_y(x, y) = 0.$$

See tähendab, et kõvera iseäraste punktide leidmiseks tuleb võtta kõverat esitava funktsiooni $F(x, y) = 0$ osatuletised x ja y järgi

ning võrrutada need nulliga. Kui nüüd võrrandite $F_x = 0$ ja $F_y = 0$ mõni lahend rahuldab kõvera võrrandit $F(x, y) = 0$, siis sellele lahendile vastav punkt asetseb kõveral ja on seega kõvera iseäraseks punktiks.

Oletame, et funktsioonil $F(x, y) = 0$, mis esitab algebralist kõverat, on vaadeldavas punktis nii esimest kui ka teist järku pidevad osatuletised F_x, F_y, F_{xx}, F_{yy} ja F_{xy}, kusjuures vähemalt üks teist järku osatuletistest ei ole võrdne nulliga. Kui nüüd vaadeldavas punktis $F_x = 0$ ja $F_y = 0$, siis selles punktis kõvera puutuja tõus omab määramata kuju $\frac{0}{0}$, sest

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{0}{0} \quad \text{ja} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{F_y}{F_x} = \frac{0}{0}.$$

Sel juhul diferentsime kõvera võrrandit $F(x, y) = 0$ kaks korda, mille puhul saame (§ 28, p. 1)

$$F_{xx} + 2F_{xy}\frac{dy}{dx} + F_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + F_y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

või

$$F_{yy} + 2F_{xy}\frac{dx}{dy} + F_{xx}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + F_x\frac{d^2x}{dy^2} = 0,$$

mis käesoleval juhul kujutavad funktsiooni tuletise $\frac{dy}{dx}$ või $\frac{dx}{dy}$ suhtes ruutvõrrandeid

$$F_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2F_{xy}\frac{dy}{dx} + F_{xx} = 0 \qquad \text{(A)}$$

või

$$F_{xx}\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 2F_{xy}\frac{dx}{dy} + F_{yy} = 0, \qquad \text{(B)}$$

sest $F_y = 0$ ja $F_x = 0$.

Kui $F_{yy} \neq 0$, siis — lahendades ruutvõrrandi (A) tuletise $\frac{dy}{dx}$ suhtes — saame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{xy} \pm \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}}{F_{yy}},$$

ja kui $F_{xx} \neq 0$, siis — lahendades ruutvõrrandi (B) tuletise $\frac{dx}{dy}$ suhtes — saame

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-F_{xy} \pm \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}}{F_{xx}},$$

milledest leiame kõvera puutuja tõusu $\frac{dy}{dx}$ või $\frac{dx}{dy}$ kaks väär-

tust, mis ütleb, et kõvera iseärases punktis esineb kõveral kaks puutujat, millede puhul iseärane punkt on kõvera kahekordseks punktiks.

Kõvera iseärases punktis puutujate tõusud $\frac{dy}{dx}$ või $\frac{dx}{dy}$ võivad olla: 1) reaalsed ja isesuurused, 2) imaginaarsed (kompleksarvud) või 3) reaalsed ja võrdsed, olenevalt ruutvõrrandi (A) või (B) diskriminandist $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}$, mis võib olla suurem või väiksem kui null või võrdne nulliga.

1) Kui vaadeldavas punktis $F_x = 0$ ja $F_y = 0$ puhul ruutvõrrandi (A) diskriminant

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0,$$

siis on ruutvõrrandi lahendid reaalsed ja isesuurused ning puutuja tõus $\frac{dy}{dx}$ omab seega kaht erinevat reaalset väärtust, millest nähtub, et vaadeldav punkt on kõvera iseäraseks punktiks. Kõveral on selles iseärases punktis kaks isesihilist puutujat. See tähendab, et kõvera harud, lõigates teineteist, läbivad iseärase punkti kahes eri sihis. Seda iseärast punkti nimetatakse kahekordseks sõlmpunktiks, sest selles punktis saab tõmmata kõverale (s. o. kõvera harudele) kaks isesihilist puutujat. Kahekordse sõlmpunkti eritunnuseks on seega

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0,$$

kus vähemalt osatuletised F_{xy} või F_{xx} ja F_{yy} ei ole võrdsed nulliga.

Võtame näiteks lemniskaadi, mille võrrand on

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Lemniskaadi iseärase punkti leidmiseks võtame osatuletised x ja y järgi ning võrrutame need nulliga, s. o.

$$F_x = 4x(x^2 + y^2) - 4a^2x = 0,$$
$$F_y = 4y(x^2 + y^2) + 4a^2y = 0,$$

millede lahend $x = 0$ ja $y = 0$ rahuldab lemniskaadi võrrandit. Et funktsiooni teist järku osatuletiste väärtused punktis (0, 0) on

$$F_{xx} = 12x^2 + 4y^2 - 4a^2 = -4a^2,$$
$$F_{yy} = 4x^2 + 12y^2 + 4a^2 = 4a^2,$$
$$F_{xy} = 8xy = 0,$$

siis

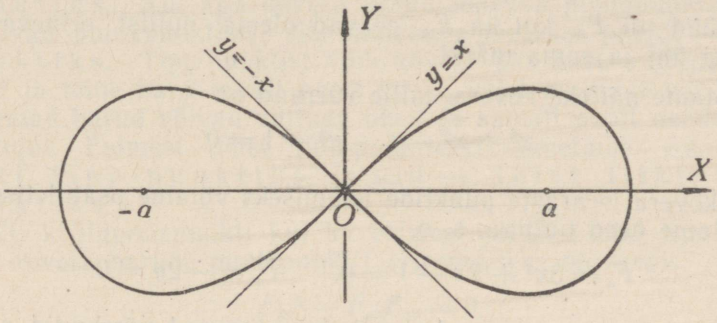
$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 16a^4 > 0,$$

millest nähtub, et lemniskaadil on nullpunktis kahekordne sõlmpunkt (joon. 15). Selles sõlmpunktis on puutujate tõusud

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-F_{xy} \pm \sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy}}}{F_{yy}} = \frac{\pm 4a^2}{4a^2} = \pm 1,$$

mille puhul lemniskaadi puutujad sõlmpunktis moodustavad koordinaattelgedega 45°-sed nurgad ja nende võrrandid on seega

$$y = \pm x.$$



Joon. 15.

Kui kahekordse sõlmpunkti puhul $F_{xx} = 0$ ja $F_{yy} = 0$, kuid $F_{xy} \neq 0$, siis ruutvõrranditest (A) ja (B) nähtub, et $\frac{dy}{dx} = 0$ ja $\frac{dx}{dy} = 0$, mis ütleb, et selles sõlmpunktis üks puutuja on paralleelne X-teljega ja teine puutuja on paralleelne Y-teljega või nad langevad koordinaattelgedega ühte, nagu esineb eelmises paragrahvis esitatud Cartesiuse lehe

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

puhul (joon. 14), kus nullpunkt (0, 0) on kõvera kahekordseks sõlmpunktiks, milles

$$F_{xx} = 6x = 0, \quad F_{yy} = 6y = 0, \quad F_{xy} = -3a \neq 0,$$

ning üks puutuja langeb ühte X-teljega ja teine puutuja Y-teljega.

2) Kui vaadeldavas punktis $F_x = 0$ ja $F_y = 0$ puhul ruutvõrrandi (A) diskriminant

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0,$$

siis on ruutvõrrandi lahendid imaginaarsed (kaaskompleksarvud) ning puutuja tõus $\frac{dy}{dx}$ omab seega kaht erinevat imaginaarset

väärtust, millest nähtub, et vaadeldav punkt on kõvera iseäraseks punktiks. Et puutuja tõus selles iseärases punktis ei oma reaalset väärtust, siis puuduvad kõveral iseärases punktis reaalsed puutujad. Iseärane punkt on siis kahe imaginaarse puutuja või kõvera kahe imaginaarse haru reaalseks lõikepunktiks, mis on seega kahekordne punkt. Niisugust kahekordset iseärast punkti nimetatakse *isoleeritud* ehk *eraldatud* punktiks; selle punkti eritunnuseks on

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0,$$

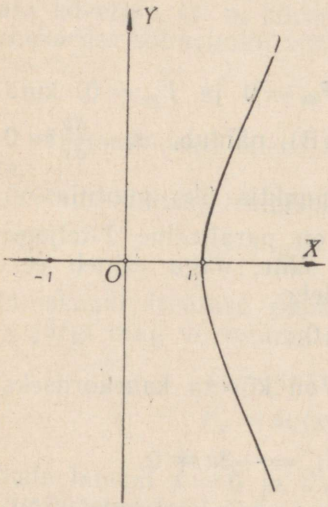
kus nüüd nii F_{xx} kui ka F_{yy} peavad olema nullist erinevad ja omama üht ja sama märki.

Võtame näiteks kõvera, mille võrrand on

$$x^3 + x^2 - x - y^2 - 1 = 0.$$

Selle kõvera iseäraste punktide leidmiseks võtame osatuletised ja võrrutame need nulliga, s. o.

$$F_x = 3x^2 + 2x - 1 = 0, \qquad F_y = -2y = 0.$$



Joon. 16.

Lahendades viimased võrrandid x ja y suhtes, näeme, et leitavatest x ja y väärtustest $x = -1$ ja $y = 0$ rahuldavad kõvera võrrandit ja on seega kõvera iseärase punkti koordinaatideks. Nende x ja y väärtuste puhul

$$F_{xx} = 6x + 2 = -4,$$
$$F_{yy} = -2, \quad F_{xy} = 0$$

ja seega

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = -8 < 0,$$

millest nähtub, et punkt (—1, 0) on kõvera eraldatud punktiks (joon. 16).

Ilmutades käesolevast kõvera võrrandist y, saame

$$y = \pm\sqrt{(x+1)^2(x-1)},$$

millest nähtub otseselt, et x-le võib anda väärtusi vahemikus $1 \leqslant x < +\infty$ ja punktis $x = -1$, et y omaks reaalseid väärtusi.

3) Kui vaadeldavas punktis $F_x = 0$ ja $F_y = 0$ puhul ruutvõrrandi (A) diskriminant

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0,$$

siis ruutvõrrandi lahendid on reaalsed ja võrdsed ning puutuja tõus $\frac{dy}{dx}$ omab seega kaht võrdset reaalset väärtust, millest nähtub, et vaadeldav punkt on kõvera iseäraseks punktiks. Iseärane punkt on siis kahekordseks punktiks, milles kõveral on kaks ühtelangevat puutujat. See tähendab, et kõvera harudel on iseärases punktis üks ja sama siht, s. o. iseärane punkt on kõvera harude puutepunktiks. Kõvera harud võivad siin läbida puutepunkti või lõppeda puutepunktis. Kui kõvera harud läbivad puutepunkti, siis nimetame seda kahekordset iseärast punkti kooldumispunktiks. Kui aga kõvera harud lõpevad puutepunktis (ehk väljuvad puutepunktist), siis nimetame iseärast punkti tipp-punktiks. Tipp-punktist võib kõvera üks haru väljuda ühelt poolt ja teine haru teiselt poolt nende ühist puutujat või kõvera mõlemad harud võivad väljuda ühelt ja samalt poolt nende ühist puutujat. Esimest neist tipp-punktidest nimetame esimest liiki tipp-punktiks ja teist — teist liiki tipp-punktiks.

Nii kooldumispunkti kui ka esimest ja teist liiki tipp-punkti (kui kõvera harude puutepunkti) eritunnuseks on seega

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0,$$

kus vähemalt üks osatuletistest F_{xx} või F_{yy} ei ole võrdne nulliga.

a) Kõvera

$$x^4 + 2x^2y - x^2y^2 - y^2 = 0$$

iseäraste punktide saamiseks leiame osatuletised ja võrrutame need nulliga; saame võrrandisüsteemi

$$F_x = 4x^3 + 4xy - 2xy^2 = 0,$$
$$F_y = 2x^2 - 2x^2y - 2y = 0,$$

mille lahend $x = 0$ ja $y = 0$ rahuldab kõvera võrrandit. Nende x ja y väärtuste puhul teist järku osatuletiste väärtused on

$$F_{xx} = 12x^2 + 4y - 2y^2 = 0,$$
$$F_{yy} = -2x^2 - 2 = -2,$$
$$F_{xy} = 4x - 4xy = 0$$

ning seega

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0,$$

millest nähtub, et punkt (0, 0) on kõvera iseäraseks punktiks. Seda kõvera punkti läbivate puutujate tõus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_{xy}}{F_{yy}} = 0,$$

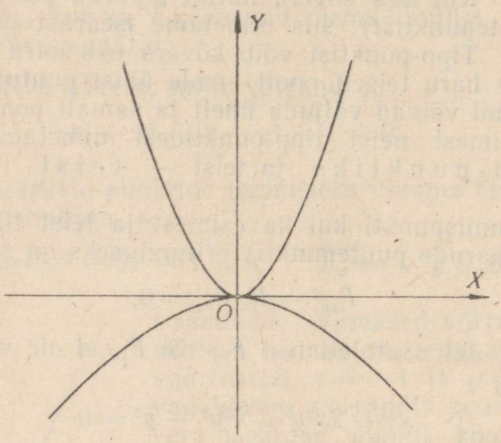
mis näitab, et mõlemad puutujad langevad ühte X-teljega

(joon. 17), s. o. X-telg on kõvera harude ühiseks puutujaks punktis (0, 0). Kõvera harude puutepunkt on siin kooldumispunktiks, sest kõvera harud läbivad seda punkti.

Et iseärane punkt on siin kooldumispunktiks, nähtub ka kõvera võrrandist, kui ilmutame sellest võrrandist y, s. o.

$$y = \frac{x^2 \pm x^2\sqrt{x^2+2}}{x^2+1},$$

milles x-le võib anda mistahes positiivseid või negatiivseid väärtusi.



Joon. 17.

b) Kõvera

$$x^3 - 7x^2 + 12x + 2xy - y^2 - 8 = 0$$

iseäraste punktide saamiseks leiame osatuletised ja võrrutame need nulliga; saame võrrandisüsteemi

$$F_x = 3x^2 - 14x + 12 + 2y = 0,$$
$$F_y = 2x - 2y = 0.$$

Et selle võrrandisüsteemi lahend $x = 2$ ja $y = 2$ rahuldab kõvera võrrandit, siis seega punkt (2, 2) on kõvera iseäraseks punktiks. Selles punktis

$$F_{xx} = 6x - 14 = -2, \qquad F_{yy} = -2, \qquad F_{xy} = 2$$

ning seega

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0,$$

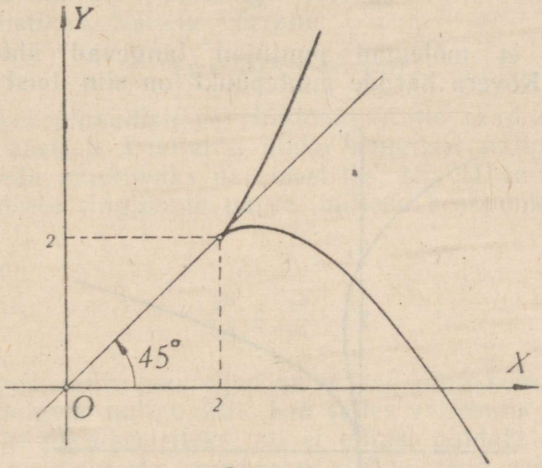
millest nähtub, et iseärane punkt (2, 2) on kõvera harude puutepunktiks, milles kõvera puutujate tõus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_{xv}}{F_{yy}} = 1.$$

Seega kõvera harude ühine puutuja moodustab X-telje positiivse suunaga 45°-se nurga (joon. 18) ja ta võrrand on

$$y = x.$$

Kõvera harude puutepunkt on siin esimest liiki tipp-punktiks, millest kõvera üks haru väljub ühelt poolt ja teine haru teiselt poolt nende ühist puutujat.



Joon. 18.

Et iseärane punkt on siin esimest liiki tipp-punktiks, nähtub ka kõvera võrrandist, kui ilmutada sellest y, s. o.

$$y = x \pm (x-2)\sqrt{x-2},$$

milles x-le ei või anda väärtusi, mis on väiksemad kui 2. Punkt, milles $x = 2$, on seega x väärtuste algpunktiks, s. o. kõvera harude tipp-punktiks. Et siin ühise puutuja igas punktis on $y = x$, siis kõvera ilmutatud võrrandist nähtub, et $x > 2$ puhul on kõvera ühe haru punktide ordinaadid alati suuremad ja teise haru punktide ordinaadid alati väiksemad kui ühise puutuja vastavate punktide ordinaadid. See aga näitab, et tipp-punktist kõvera üks haru väljub ühelt poolt ja teine haru teiselt poolt nende ühist puutujat ja seega iseärane punkt on esimest liiki tipp-punktiks.

c) Kõveral

$$x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$$

on nullpunktis iseärane punkt ja nimelt kõvera harude puutepunkt, sest selles punktis

$$F_x = 2x - 2y^2 = 0, \quad F_y = -4xy + 4y^3 - 5y^4 = 0$$

ja

$$F_{xx} = 2, \quad F_{yy} = -4x + 12y^2 - 20y^3 = 0, \quad F_{xy} = -4y = 0$$

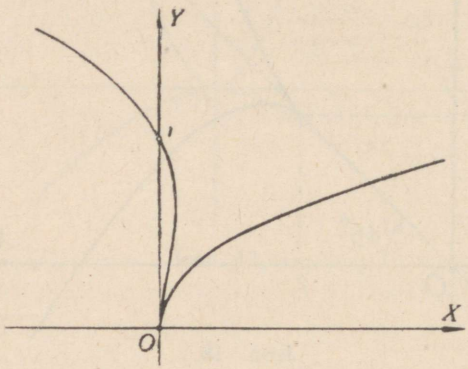
ning seega

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0.$$

Kõvera puutujate tõus selles punktis Y-telje suhtes on

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{F_{xy}}{F_{xx}} = 0,$$

mis näitab, et mõlemad puutujad langevad ühte Y-teljega (joon. 19). Kõvera harude puutepunkt on siin teist liiki tipp-



Joon. 19.

punktiks, millest kõvera mõlemad harud väljuvad ühelt ja samalt poolt nende ühist puutujat (Y-telge).

Et iseärane punkt on siin teist liiki tipp-punktiks, nähtub ka kõvera võrrandist, kui ilmutada sellest x, s. o.

$$x = y^2(1 \pm \sqrt{y}),$$

milles y-le ei või anda negatiivseid väärtusi ja tipp-punktiks on seega kõvera harude algpunkt (0, 0). Et vahemikus $0 \leqslant y < 1$ on x mõlemad väärtused ikka ühe ja sama märgiga (käesoleval juhul positiivsed), siis selles vahemikus kõvera mõlemad harud (väljudes nullpunktist) lähevad ühelt ja samalt poolt nende ühist puutujat (Y-telge) ja seega iseärane punkt on teist liiki tipp-punktiks.

Kõigi eespool käsitletud juhtude puhul olid kõverate iseära-

sed punktid kahekordseteks punktideks. Nad olid saadud eeldusel, et vähemalt üks teist järku osatuletistest F_{xx}, F_{yy} või F_{xy} ei ole võrdne nulliga. Kui aga vaadeldavas kõvera punktis oleks

$$F_{xx} = F_{yy} = F_{xy} = 0,$$

siis tuleks võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud ilmutamata funktsiooni y (või x) diferentsimist jätkata ja funktsioonile vastava kõvera iseärase punkti olemasolu kindlaks määrata kõrgemat järku osatuletiste kaudu, mille puhul võivad esineda kolme-, nelja- jne. kordsed punktid.

§ 31. Mähisjooned. Tasapinnalise kõvera võrrandis esinevad peale jooksva punkti koordinaatide x ja y ikka mingisugused konstantsed suurused, milledest sõltub kõvera kuju ja asend koordinaadistikus. Näiteks võrrand

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

esitab ristkoordinaadistikus ringjoont, mille raadiuseks on r ja keskpunkt asetseb X-teljel a ühiku kaugusel nullpunktist. Kui siin a lugeda muutuvaks parameetriks, siis tähendatud võrrand esitab võrdsete ringjoonte parve, millede keskpunktid asetsevad X-teljel.

Võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

esitab ellipsit, mille poolteljed on a ja b ning keskpunkt asetseb koordinaattelgede nullpunktis. Kui selles võrrandis a ja b lugeda muutuvateks parameetriteks, nii et ellipsi pindala $S = \pi ab$ jääb kogu aeg konstantseks suuruseks, siis võrrand esitab pindvõrdsete ellipsite parve, millede keskpunktid asetsevad koordinaattelgede nullpunktis.

Tähistame üldiselt kõverate parve võrrandi, milles esineb peale jooksva punkti koordinaatide x ja y muutuv parameeter a, järgmiselt:

$$F(x, y, a) = 0.$$

Kahe muutuva parameetriga a ja b kõverate parve võrrand on siis

$$F(x, y, a, b) = 0.$$

Võrrand $F(x, y, a) = 0$ kujutab kindla a väärtuse puhul üht kindlat kõverat, muutuva a väärtuse puhul aga kõverate parve. Kui kõverate parve võrrand sisaldab ühe muutuva parameetri, siis nimetame kõverate parve *ühe parameetriliseks*; kui ta sisaldab kaks muutuvat parameetrit, s. o. $F(x, y, a, b) = 0$, siis nimetame teda *kahe parameetriliseks* jne.

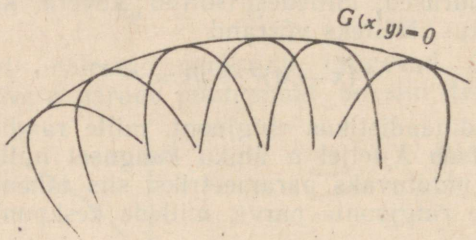
Vaatleme ühe ja kahe muutuva parameetriga kõverate parve võrrandeid

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{ja} \quad F(x, y, a, b) = 0.$$

1) Üheparameetrilise kõverate parve puhul, mida esitab võrrand

$$F(x, y, a) = 0,$$

võib esineda joon, mis oma igas punktis puudutab vähemalt üht parve kõverat. Seda joont nimetatakse kõverate parve **mähisjooneks**. Mähisjooni võib kõverate parvel olla ka rohkem kui üks.



Joon. 20.

Oletame, et kõverate parvel $F(x, y, a) = 0$ on olemas mähisjoon (joon. 20), mida esitavad parameetrilised võrrandid

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Neid võrrandeid on ikka võimalik valida nõnda, et parameetri t väärtus, mille puhul saadakse punkt (x, y) mähisjoonel, langeks ühte võrrandis $F(x, y, a) = 0$ esineva parameetri a väärtusega, mille puhul saadakse parve kõver, mis puudutab mähisjoont punktis (x, y). Seega mähisjoone parameetrilistes võrrandites võib võtta $t = a$, s. o.

$$x = x(a), \quad y = y(a).$$

Et kõverate parve kõvera ja mähisjoone ühises punktis langevad nende puutujad ühte, siis puutujate tõusud, mis saadakse kõverate parve võrrandist $F(x, y, a) = 0$ ja mähisjoone võrranditest $x = x(a)$ ja $y = y(a)$, peavad olema võrdsed. Kui oletada, et funktsioonid $F(x, y, a)$, $x(a)$ ja $y(a)$ on diferentsitavad, siis selles ühises puutepunktis kõverate parve kõvera puutuja tõus

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y, a)}{F_y(x, y, a)}$$

ja mähisjoone puutuja tõus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(a)}{x'(a)},$$

milledest nähtub, et kõverate parve kõvera ja mähisjoone ühises puutepunktis kehtib võrdus

$$\frac{y'(a)}{x'(a)} = -\frac{F_x(x, y, a)}{F_y(x, y, a)}$$

ehk

$$F_x(x, y, a)x'(a) + F_y(x, y, a)y'(a) = 0,$$

kus vähemalt üks osatuletistest $F_x(x, y, a)$ või $F_y(x, y, a)$ ei ole võrdne nulliga.

Et oletuse kohaselt võrrandid $x = x(a)$ ja $y = y(a)$ esitavad kõverate parve mähisjoont, mis peab igas punktis puudutama üht parve kõverat, siis seega parameetrilistes võrrandites esinevad koordinaadid x ja y peavad rahuldama kõverate parve võrrandit, s. o.

$$F[x(a), y(a), a] = 0,$$

mida diferentsides saame

$$F_x(x, y, a)x'(a) + F_y(x, y, a)y'(a) + F_a(x, y, a) = 0,$$

kus $x = x(a)$ ja $y = y(a)$. Et eelneva järgi

$$F_x(x, y, a)x'(a) + F_y(x, y, a)y'(a) = 0,$$

siis sellest järeldub, et ka

$$F_a(x, y, a) = 0,$$

mida peavad rahuldama kõverate parve ja mähisjoone ühiste punktide (puutepunktide) koordinaadid. Järelikult mähisjoonel asetsevate punktide koordinaadid x ja y peavad rahuldama võrrandeid

$$F(x, y, a) = 0, \qquad F_a(x, y, a) = 0.$$

Elimineerides viimastest võrranditest üks kord y ja teine kord x, saame mähisjoone parameetrilised võrrandid kasutatud kujul

$$x = x(a), \qquad y = y(a).$$

Kui aga elimineerime parameetri a, siis saame mähisjoone võrrandi ilmutamata kujul

$$G(x, y) = 0.$$

Mähisjoon võib tekkida ainult siis, kui kõverate parve võrrand $F(x, y, a) = 0$ on parameetri a suhtes vähemalt teiseastmeline,

sest kui kõverate parve võrrand on parameetri a suhtes lineaarne, siis ta omab üldiselt kuju

$$\varphi(x, y) + a\psi(x, y) = 0,$$

mida a järgi diferentsides saame

$$\psi(x, y) = 0,$$

mille järeldusena siis ka

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Sel juhul võrrand $\varphi(x, y) + a\psi(x, y) = 0$ esitab geomeetriliselt kõverate kimpu, mis läbivad üht ja sama punkti, mis on kõverate $\varphi(x, y) = 0$ ja $\psi(x, y) = 0$ lõikepunktiks.

Eespool esineva ringjoonte parve võrrand oli

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2,$$

kus a loeme muutuvaks parameetriks. Selle ringjoonte parve mähisjoone võrrandi leiame, kui võtame osatuletise parameetri a järgi ja võrrutame selle nulliga, s. o.

$$F_a = -2(x - a) = 0,$$

millest

$$a = x.$$

Paigutame saadud a väärtuse ringjoonte parve võrrandisse a asemele; saame võrrandi

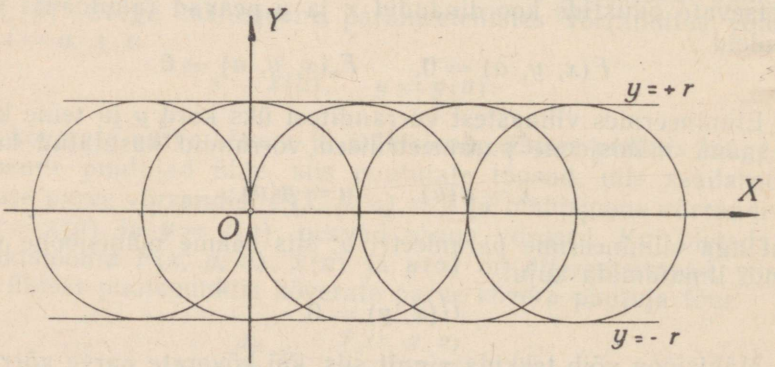
$$y^2 = r^2$$

ehk

$$y = \pm r,$$

mis esitab kaht X-teljega rööbikut sirget. Need sirged on ringjoonte parve mähisjooned (joon. 21), sest $x = a$ ja $y = \pm r$ puhul vähemalt üks osatuletistest x või y järgi ei ole võrdne nulliga, s. o.

$$F_x = 2(x - a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_y = 2y = \pm 2r \neq 0.$$



Joon. 21.

2) Kui aga kõverate parve $F(x, y, a) = 0$ kõvera vaadeldavas punktis

$$F_x(x, y, a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_y(x, y, a) = 0,$$

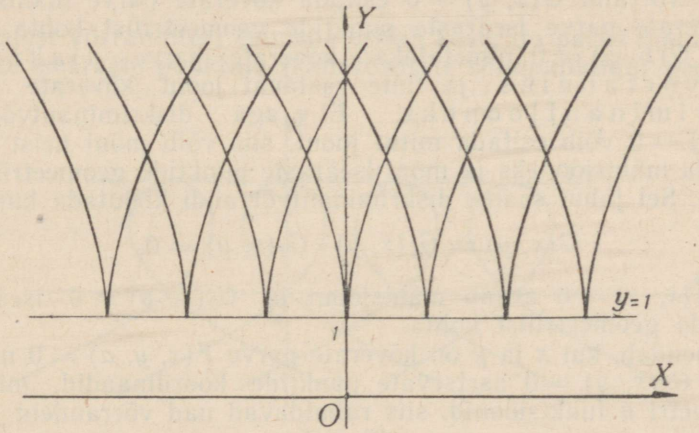
siis vaadeldav punkt on (§ 30 põhjal) kõvera singulaarseks ehk iseäraseks punktiks. Kui nüüd võrranditest

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_a(x, y, a) = 0$$

saadud x ja y väärtused $x = x(a)$ ja $y = y(a)$ rahuldavad võrrandeid

$$F_x(x, y, a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_y(x, y, a) = 0$$

ja seejuures vähemalt üks teist järku osatuletistest F_{xx}, F_{yy} või F_{xy} ei ole võrdne nulliga, siis parameetrilistest võrranditest saadud võrrand $G(x, y) = 0$ esitab kahekordsete iseäraste punktide geomeetrilist kohta.



Joon. 22.

Vaatleme näiteks kõverate parve võrrandit

$$(x + a)^2 - (y - 1)^3 = 0,$$

kus a on muutuvaks parameetriks. Siin osatuletis parameetri a järgi on

$$F_a = 2(x + a) = 0,$$

millest

$$a = -x.$$

Paigutame saadud a väärtuse kõverate parve võrrandisse a asemele; saame võrrandi

$$-(y - 1)^3 = 0$$

ehk

$$y - 1 = 0,$$

mis esitab X-teljega rööbikut sirget. See sirge on kõverate parve iseäraste punktide (esimest liiki tipp-punktide) geomeetriliseks kohaks (joon. 22), sest $x = -a$ ja $y = 1$ puhul

$$F_x = 2(x + a) = 0, \qquad F_y = -3(y - 1)^2 = 0,$$

kusjuures mitte kõik teist järku osatuletised $x = -a$ ja $y = 1$ puhul pole võrdsed nulliga, s. o.

$$F_{xx} = 2, \quad F_{yy} = -6(y - 1) = 0, \quad F_{xy} = 0.$$

3) Nagu eespool nägime, võib võrranditest

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_a(x, y, a) = 0$$

saadav võrrand $G(x, y) = 0$ esitada kõverate parve mähisjoont ja kõverate parve iseäraste punktide geomeetrilist kohta. Võrrandit $G(x, y) = 0$ nimetatakse kõverate parve *diskriminantvõrrandiks* ja talle vastavat joont kõverate parve *diskriminantjooneks*. Et aga diskriminantvõrrand $G(x, y) = 0$ võib esitada mitut joont, siis võib mõni neist joontest olla mähisjooneks ja mõni iseäraste punktide geomeetriliseks kohaks. Sel juhul saame diskriminantvõrrandi kirjutada kujul

$$G(x, y) = G_1(x, y) \cdot G_2(x, y) = 0,$$

kus $G_1(x, y) = 0$ esitab mähisjoont ja $G_2(x, y) = 0$ iseäraste punktide geomeetrilist kohta.

Tähendab, kui x ja y on kõverate parve $F(x, y, a) = 0$ mähisjoonel $G_1(x, y) = 0$ asetsevate punktide koordinaadid, mis on parameetri a funktsioonid, siis rahuldavad nad võrrandeid

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_a(x, y, a) = 0,$$

kuid seejuures vähemalt üks osatuletistest $F_x(x, y, a)$ ja $F_y(x, y, a)$ ei ole võrdne nulliga.

Samuti, kui $G_2(x, y) = 0$ esitab kõverate parve $F(x, y, a) = 0$ iseäraste punktide geomeetrilist kohta ning x ja y on nende iseäraste punktide koordinaadid, mis on parameetri a funktsioonid, siis rahuldavad nad võrrandeid

$$F(x, y, a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_a(x, y, a) = 0$$

ning ühtlasi ka võrrandeid

$$F_x(x, y, a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_y(x, y, a) = 0.$$

Sellest järeldub, et kõverate parve võrrandi $F(x, y, a) = 0$ diskriminantvõrrand $G(x, y) = 0$ võib sisaldada nii mähisjoone kui ka iseäraste punktide geomeetrilise koha võrrandeid.

Samuti võib juhtuda, et diskriminantvõrrand $G(x, y) = 0$ esitab joont, mis on ühtlasi nii kõverate parve mähisjooneks kui ka iseäraste punktide geomeetriliseks kohaks.

a) Kõverate parve

$$(x - a)^2 + y^2(y - 1) = 0$$

puhul on osatuletis parameetri a järgi

$$F_a = -2(x - a) = 0,$$

kust

$$a = x,$$

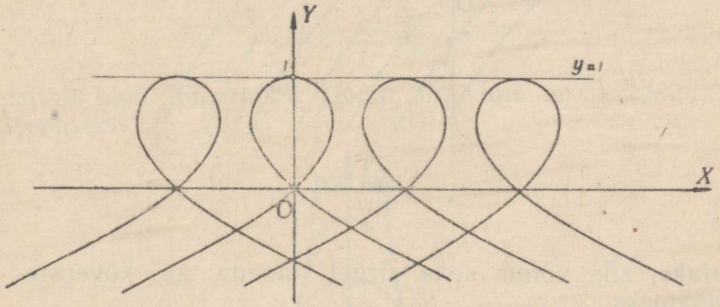
mille asetamisel kõverate parve võrrandisse saame diskriminantvõrrandi

$$y^2(y - 1) = 0,$$

millest

$$y - 1 = 0, \quad y = 0.$$

Viimastest võrranditest esimene esitab kõverate parve mähisjoont ja teine iseäraste punktide (kahekordsete sõlmpunktide) geomeet-



Joon. 23.

rilist kohta (joon. 23), sest esimesel juhul, kui $x = a$ ja $y = 1$, ei ole mõlemad osatuletised x ja y järgi võrdsed nulliga, s. o.

$$F_x = 2(x - a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_y = 3y^2 - 2y = 1,$$

kuid teisel juhul, kui $x = a$ ja $y = 0$, on mõlemad osatuletised võrdsed nulliga, kusjuures teist järku osatuletised ei ole kõik võrdsed nulliga.

b) Kõverate parve

$$(x - a)^3 - y^2 = 0$$

puhul on osatuletis parameetri a järgi

$$F_a = -3(x - a)^2 = 0,$$

kust

$$a = x,$$

mille asetamisel kõverate parve võrrandisse saame diskriminantvõrrandi

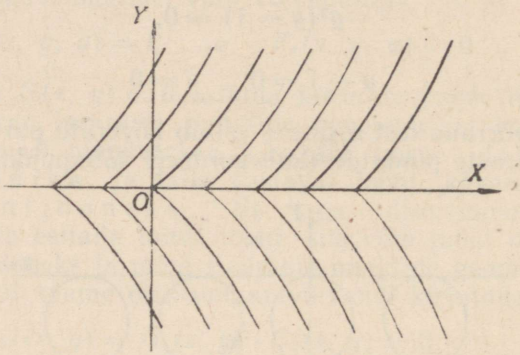
$$y = 0.$$

Viimane võrrand esitab X-teljega ühte langevat sirget, mis on kõverate parve iseäraste punktide (esimest liiki tipp-punktide) geomeetriliseks kohaks (joon. 24), sest siin $x = a$ ja $y = 0$ puhul on

$$F_x = 3(x - a) = 0 \quad \text{ja} \quad F_y = -2y = 0,$$

kusjuures teist järku osatuletised ei ole kõik võrdsed nulliga.

Et käesoleval juhul kõverate parve iseäraste punktide geomeetrilist kohta esitav sirge $y = 0$ on kõverate parve ühiseks



Joon. 24.

puutujaks, siis võime seda sirget lugeda ka kõverate parve mähisjooneks.

4) Kui kõverate parve võrrandis esineb kaks muutuvat parameetrit a ja b, s. o.

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

kusjuures parameetrid a ja b on seotud lisatingimusega

$$\varphi(a, b) = 0,$$

siis võime lisatingimust esitavast võrrandist ühe parameetri väljendada teise parameetri kaudu ja seega kõverate parve võrrandit käsitleda kui ühe muutuva parameetriga võrrandit.

Võtame ellipsite parve, mida esitab võrrand

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kus a ja b on muutuvateks parameetriteks ning lisatingimuseks

on ellipsite konstantne pindala $S = \pi ab$. Paigutame $b = \frac{S}{\pi a}$ ellipsite parve võrrandisse b asemele; saame

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\pi^2 a^2 y^2}{S^2} = 1,$$

mida võime nüüd vaadelda kui ühe muutuva parameetriga ellipsite parve võrrandit. Võttes siin osatuletise parameetri a järgi, saame

$$F_a = -\frac{2x^2}{a^3} + \frac{2\pi^2 a y^2}{S^2} = 0,$$

millest

$$a^2 = \pm \frac{Sx}{\pi y},$$

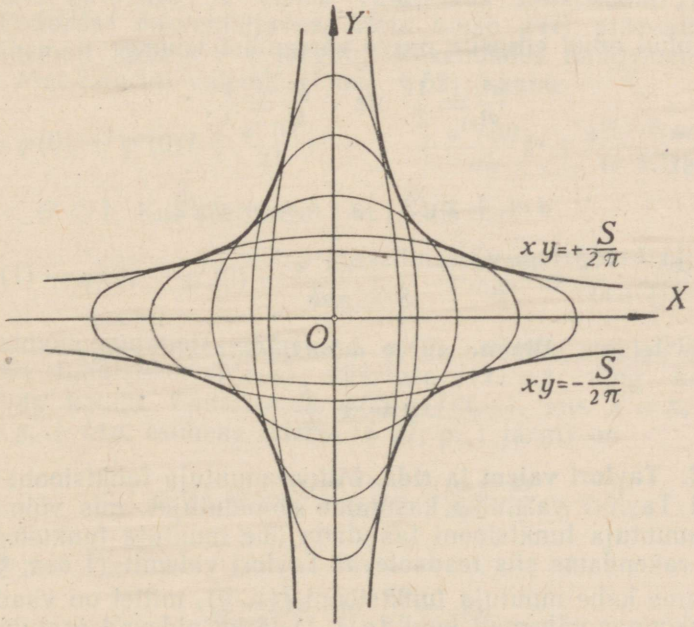
ja asetades a^2 väärtuse võrrandisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\pi^2 a^2 y^2}{S^2} = 1,$$

saame diskriminantvõrrandi

$$xy = \pm \frac{S}{2\pi},$$

mis esitab kaht hüperbooli (joon. 25), mis on ellipsite parve mähisjoonteks.



Joon. 25.

Kui kahe muutuva parameetriga kõverate parve võrrandist ühe või teise parameetri elimineerimine tekitab raskusi, siis võime nii kõverate parve võrrandis kui ka parameetreid lisatingimusena siduvas võrrandis üht parameetrit vaadelda kui teise parameetri funktsiooni ja diferentsida mõlemaid võrrandeid kui ilmutamata funktsioone, kusjuures kõverate parve võrrandis esinevaid koordinaate x ja y tuleb diferentsimisel vaadelda kui konstantseid suurusi.

Öeldu põhjal võime ellipsite parve võrrandis

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ja parameetreid a ja b lisatingimusena siduvas võrrandis

$$S=\pi ab$$

parameetrit b vaadelda kui parameetri a ilmutamata funktsiooni. Neid funktsioone diferentsides saame

$$\frac{x^2}{a^3}+\frac{y^2}{b^3}\cdot\frac{db}{da}=0 \quad \text{ja} \quad b+a\cdot\frac{db}{da}=0.$$

Ilmutades viimasest võrrandist $\frac{db}{da}$ ja asetades selle väärtuse eelmisse võrrandisse, saame

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2},$$

mille puhul nüüd ellipsite parve võrrandist leiame

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2},$$

milledest

$$a=\pm x\sqrt{2} \quad \text{ja} \quad b=\pm y\sqrt{2}.$$

Neid a ja b väärtusi võrrandisse

$$S=\pi ab$$

asetades leiame ellipsite parve mähisjoonte võrrandid

$$xy=\pm\frac{S}{2\pi}.$$

§ 32. Taylori valem ja rida. Mitme muutuja funktsiooni arendamisel Taylori valemiks kasutame abimuutujat, mis võimaldab mitme muutuja funktsiooni taandada ühe muutuja funktsiooniks, millele rakendame siis teadaolevat Taylori valemit (I osa, § 52).

Võtame kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$, millel on vaadeldavas piirkonnas vähemalt kuni $(n+1)$-järku pidevad osatuletised.

Valides selles piirkonnas argumentpunkti (x_0, y_0) ja andes x_0-le kasvu Δx ja y_0-le kasvu Δy, saame $f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$, mille arendame Taylori valemiks Δx ja Δy astmete järgi.

Võtame abimuutujaks t, tähistades

$$x = x_0 + t\Delta x \quad \text{ja} \quad y = y_0 + t\Delta y;$$

kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ saame siis kirjutada kujul

$$f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),$$

kus nüüd kindlaksmääratud x_0, y_0, Δx ja Δy puhul x ja y on abimuutuja t lineaarsed funktsioonid ja viimase võrduse parem pool kujutab seega ühe muutuja t liitfunktsiooni, s. o.

$$f(x, y) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) = \varphi(t).$$

Saadud funktsioon $\varphi(t)$ on määratud vahemikus $0 \leqslant t \leqslant 1$, sest kui $t = 0$, siis

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0),$$

ja kui $t = 1$, siis

$$\varphi(1) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y).$$

See tähendab, et t muutumisel 0-st 1-ni argumentpunkt (x, y) liigub sirglõiku mööda punktist (x_0, y_0) kuni punktini $(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y)$ ja selles vahemikus funktsiooni $f(x, y)$ $(n+1)$-kordse diferentsitavuse tõttu omab $\varphi(t)$ pidevaid tuletisi vähemalt kuni $n+1$ järguni. Rakendades funktsiooni $\varphi(t)$ suhtes Mac-Laurini valemit (I osa, § 52), saame

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{\varphi''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{\varphi^{(n+1)}(\Theta t)}{(n+1)!}t^{n+1},$$

kus $0 < \Theta < 1$. Kui seejuures $t = 1$, siis

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\Theta)}{(n+1)!}. \quad (1)$$

Avaldame tuletiste väärtused $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ..., $\varphi^{(n)}(0)$ ja $\varphi^{(n+1)}(\Theta)$ funktsiooni $f(x, y)$ väärtuse $f(x_0, y_0)$ ning kasvude Δx ja Δy kaudu. Funktsiooni $\varphi(t) = f(x, y)$, kus $x = x_0 + t\Delta x$ ja $y = y_0 + t\Delta y$, esimene tuletis (§ 27, p. 1 järgi) on

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Et siin

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x \quad \text{ja} \quad \frac{dy}{dt} = \Delta y,$$

siis

$$\varphi'(t) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\Delta y.$$

Teise tuletise (kasutades ühtlasi sümboolset tähistusviisi) saame kujul

$$\varphi''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\Delta y\right]\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\Delta y\right]\Delta y = \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\,\Delta x + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}\,\Delta y\right]\Delta x + \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\,\Delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,\Delta y\right]\Delta y = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\,\Delta x^2 + 2\,\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\,\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\,\Delta y^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^2 f(x,y).$$

Diferentsimist analoogiliselt jätkates leiame, et

$$\varphi'''(t) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}\,\Delta x^3 + 3\,\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}\,\Delta x^2 \Delta y + 3\,\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}\,\Delta x \Delta y^2 +$$

$$+ \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}\,\Delta y^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^3 f(x,y).$$

Täieliku matemaatilise induktsiooni meetodi abil — üleminekuga n-lt $(n+1)$-le — saab näidata, et üldiselt kehtib valem

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n}\,\Delta x^n + \binom{n}{1}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-1}\partial y}\,\Delta x^{n-1}\Delta y +$$

$$+ \binom{n}{2}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-2}\,\partial y^2}\,\Delta x^{n-2}\Delta y^2 + \ldots + \binom{n}{n}\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n}\,\Delta y^n =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^n f(x,y),$$

kus kõik osatuletised on võetud punktis (x, y), s. o. punktis $(x_0 + t\Delta x,\ y_0 + t\Delta y)$.

Kui $t = 0$, siis $x = x_0$ ja $y = y_0$ ning

$$\varphi^{(k)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^k f(x_0, y_0),$$

kus $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ ja kõik osatuletised on võetud punktis (x_0, y_0). Kui $t = \Theta$, kus $0 < \Theta < 1$, siis

$$\varphi^{(n+1)}(\Theta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y),$$

kus kõik osatuletised on võetud punktis $(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)$,

mis asetseb punktide (x_0, y_0) ja $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ vahelisel sirglõigul.

Asetades saadud $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$, ..., $\varphi^{(n)}(0)$ ja $\varphi^{(n+1)}(\Theta)$ väärtused valemisse (1), saame

$$\varphi(1) = f(x, y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) =$$

$$= f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^2 f(x_0, y_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^n f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)$$

ehk lühidalt

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^k f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y),$$

mida nimetatakse T a y l o r i v a l e m i k s kahe muutuja funktsiooni puhul, kusjuures viimane liige

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y) =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\partial^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)}{\partial x^{n+1-k} \partial y^k} \Delta x^{n+1-k} \Delta y^k = R_n$$

on Taylori valemi j ä ä k l i i k m e k s.

Kui Taylori valemis Δx ja Δy on küllalt väikesed, siis saame näidata, et nende Δx ja Δy väärtuste puhul jääkliikme R_n absoluutväärtus on ikka väiksem kui talle eelneva liikme absoluutväärtus. Selleks tähistame

$$\frac{\partial^n f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} = \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} + h_k,$$

kus $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Siin iga h_k on lõpmata kahanev suurus, sest kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$, siis ka iga $h_k \to 0$. Edasi esitame jääkliikme R_n jääkliikme R_{n-1} kaudu järgmiselt:

$$R_n = R_{n-1} - \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^n f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^n f(x_0+\Theta\Delta x, y_0+\Theta\Delta y) -$$

$$- \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^n f(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f(x_0+\Theta\Delta x,\ y_0+\Theta\Delta y)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Delta x^{n-k}\Delta y^k -$$

$$- \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f(x_0,\ y_0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Delta x^{n-k}\Delta y^k =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{\partial^n f(x_0,\ y_0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Delta x^{n-k}\Delta y^k + h_k\Delta x^{n-k}\Delta y^k\right] -$$

$$- \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f(x_0,\ y_0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Delta x^{n-k}\Delta y^k = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h_k\Delta x^{n-k}\Delta y^k.$$

Jagame saadud võrduse mõlemad pooled (alguse ja lõpu) jääkliikme R_n ees oleva liikmega; saame

$$\frac{R_n}{\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f(x_0,\ y_0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Delta x^{n-k}\Delta y^k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h_k\Delta x^{n-k}\Delta y^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f(x_0,\ y_0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Delta x^{n-k}\Delta y^k},$$

kus nüüd võrduse parema poole lugeja on kõrgemat järku lõpmata kahanev suurus kui nimetaja, sest kui võtame lugejas kõikide h_k asemel nende maksimaalse absoluutväärtuse, s. o. $\max|h_k|$, ja toome selle sulgude ette, ning nimetajas kõikide $\frac{\partial f^n(x_0,\ y_0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}$ asemel nende nullist erineva minimaalse absoluutväärtuse, mis on mingi positiivne arv A, ja toome selle samuti sulgude ette, siis

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}h_k\Delta x^{n-k}\Delta y^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f(x_0,\ y_0)}{\partial x^{n-k}\partial y^k}\Delta x^{n-k}\Delta y^k}\right| < \frac{\max|h_k|}{A},$$

mille piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$ ning seega ühtlasi $\max h_k \to 0$, on võrdne nulliga. See aga näitab, et küllalt väikese Δx ja Δy puhul on Taylori valemi jääkliikme R_n absoluutväärtus

väiksem kui talle eelneva liikme absoluutväärtus, s. o.

$$|R_n| < \left| \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^{n-k} \partial y^k} \Delta x^{n-k} \Delta y^k \right|$$

ehk (sümboolsel kujul)

$$|R_n| < \left| \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y \right)^n f(x_0, y_0) \right|.$$

Kui nüüd kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ omab punktis (x_0, y_0) ja selle ümbruses kuitahes kõrget järku osatuletisi ja seejuures jääkliikme piirväärtus on null, kui $n \to \infty$, siis saame funktsiooni $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ arendada Δx ja Δy astmete järgi lõpmatuks reaks

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y \right)^n f(x_0, y_0),$$

mida nimetame Taylori reaks kahe muutuja funktsiooni puhul.

Kui Taylori reas võtame $x_0 = 0$ ja $y_0 = 0$ ning Δx ja Δy asemele paigutame x ja y, siis saame kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ arendiks Mac-Laurini rea, s. o.

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left[\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} y \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} y^2 \right] + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot y \right)^n f(0, 0),$$

mis määrab funktsiooni $f(x, y)$ arendi x ja y astmete järgi.

Kahe muutuja funktsiooni, mida saab tema määramispiirkonnas arendada koonduvaks Mac-Laurini reaks, nimetatakse selles piirkonnas analüütiliseks funktsiooniks. Tähendab, kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ on analüütiliseks funktsiooniks siis, kui 1) ta on oma määramispiirkonna igas punktis piiramatult diferentsitav, s. o. omab kuitahes kõrget järku osatuletisi, ning 2) jääkliikme piirväärtus on määramispiirkonna igas punktis võrdne nulliga, kui $n \to \infty$. Esimene neist tingimustest võimaldab moodustada Mac-Laurini rea ja teine tingimus garanteerib rea koondumise lähtefunktsiooniks.

Kolme, nelja jne. muutuja funktsiooni puhul võime Taylori ja Mac-Laurini rea saamiseks analoogiliselt eelnevale kasutada

abimuutujat. Nii näiteks saame kolme muutuja funktsiooni $f(x, y, z)$ Taylori reaks arendamisel

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \Delta z \right)^n f(x_0, y_0, z_0)$$

ja Mac-Laurini reaks arendamisel

$$f(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot z \right)^n f(0, 0, 0).$$

Et arendada näiteks kahe muutuja funktsioon

$$f(x, y) = \sin(x + y)$$

lõpmatuks astmereaks (Mac-Laurini reaks), selleks leiame osatuletised

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \cos(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = -\sin(x + y),$$

$$\frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial y^3} = -\cos(x + y)$$

jne. Kui $x = 0$ ja $y = 0$, siis

$$f(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 f(0, 0)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f(0, 0)}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f(0, 0)}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 f(0, 0)}{\partial y^3} = -1$$

jne., millede paigutamisel Mac-Laurini ritta saame

$$\sin(x + y) = x + y - \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) +$$

$$+ \frac{1}{5!}(x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5) - \ldots =$$

$$= x + y - \frac{1}{3!}(x + y)^3 + \frac{1}{5!}(x + y)^5 - \ldots =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n - 1)!}(x + y)^{2n-1}.$$

Märgime siinjuures, et seda rida oleks võinud saada ka lihtsalt $\sin x$ reaksarendusest x asendamisel $(x+y)$-ga.

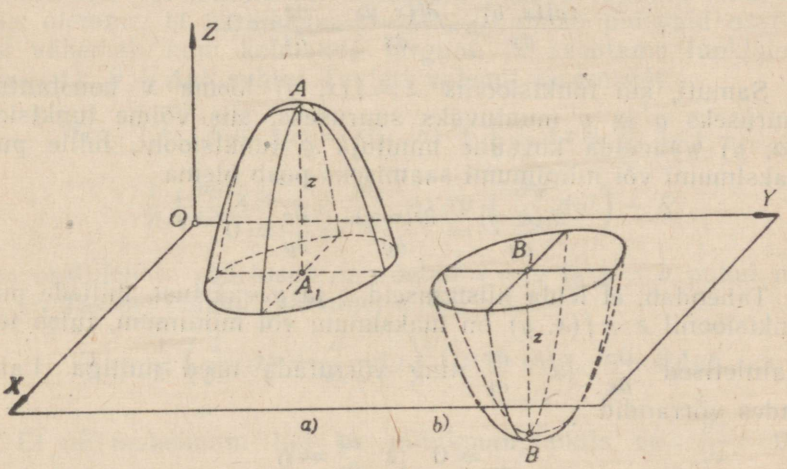
§ 33. Ekstreemväärtused. 1) Oletame, et kahe muutuja funktsioon $z=f(x, y)$ on teatavas piirkonnas diferentsitav ja omab selle piirkonna punktis (a, b) ekstreemväärtust, s. o. kas maksimumi või miinimumi. Funktsioon $z=f(x, y)$ omab punktis (a, b) maksimumi, kui kõigi küllalt väikeste argumentide kasvude Δx ja Δy puhul kehtib võrratus

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a, b)<0,$$

ja miinimumi, kui

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y)-f(a, b)>0.$$

Selle mõiste geomeetriline interpretatsioon on järgmine: kui funktsioon $z=f(x, y)$ esitab XYZ-teljestikus pinda, siis selle



Joon. 26.

pinna kumeral osal võib olla maksimumpunkt ja nõgusal osal miinimumpunkt (oletusel, et XY-tasapind on põhitasapinnaks). Pinna maksimumpunkt A (joon. 26, *a*), mille aplikaadi väärtus $z=f(a, b)$ on funktsiooni maksimumiks, on kumeral pinnal tema ümbruses asetsevate punktidega võrreldes kõige kõrgemal, s. o. tema aplikaat on teiste tema ümbruses asetsevate punktide aplikaatidest väärtuselt suurem. Pinna miinimumpunkt B (joon. 26, *b*), mille aplikaadi väärtus $z=f(a, b)$ on funktsiooni miinimumiks, on nõgusal pinnal tema ümbruses asetsevate punktidega võrreldes kõige madalamal, s. o. tema aplikaat on teiste tema ümbruses asetsevate punktide aplikaatidest väärtuselt väiksem.

Kõik tasapinnad, mis on risti põhitasapinnaga ja läbivad maksimumpunkti A, lõikavad pinda kõveraid mööda, millede ühise punkti maksimaalne aplikaat $z = A_1A$. Samuti kõik tasapinnad, mis on risti põhitasapinnaga ja läbivad miinimumpunkti B, lõikavad pinda kõveraid mööda, millede ühise punkti minimaalne aplikaat $z = B_1B$.

Oletame, et kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$ on diferentsitav ja tal on maksimum või miinimum punktis (a, b), s. o. $f(a, b)$. Kui nüüd funktsioonis $f(x, y)$ loeme y konstantseks suuruseks b ja x muutuvaks suuruseks, siis võime funktsiooni $f(x, b)$ vaadelda kui ühe muutuja x funktsiooni, mille puhul maksimumi või miinimumi saamiseks peab olema

$$\frac{df(x, b)}{dx} = 0,$$

s. o.

$$\frac{df(x, b)}{dx} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Samuti, kui funktsioonis $z = f(x, y)$ loeme x konstantseks suuruseks a ja y muutuvaks suuruseks, siis võime funktsiooni $f(a, y)$ vaadelda kui ühe muutuja y funktsiooni, mille puhul maksimumi või miinimumi saamiseks peab olema

$$\frac{df(a, y)}{dy} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Tähendab, et leida niisuguseid x ja y väärtusi, millede puhul funktsioonil $z = f(x, y)$ on maksimum või miinimum, tuleb leida osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ ning võrrutada need nulliga. Lahendades võrrandid

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

x ja y suhtes, leiame otsitavad reaalsed x ja y väärtused, millede puhul funktsioon saab kas maksimumiks või miinimumiks (kui ainult funktsioonil on maksimum või miinimum). Seega $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ on funktsiooni $z = f(x, y)$ maksimumi ja miinimumi olemasolu tarvilikuks tunnuseks, mille puhul puutujatasapind on nii maksimum- kui ka miinimumpunktis paralleelne XY-tasapinnaga, sest tema võrrand (§ 21 järgi) omab siis kuju $z - z_0 = 0$. Punkti, milles funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ on võrdsed nulliga, s. o. milles puutujatasapind on paralleelne XY-tasapinnaga, nimetatakse s t a t s i o n a a r s e k s p u n k t i k s.

Saadud tarvilikkuse tunnusest järeldub otseselt, et kahe

muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemväärtuste puhul on ka funktsiooni täisdiferentsiaal võrdne nulliga, s. o.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0,$$

kus dx ja dy kui sõltumatute muutujate diferentsiaalid võivad omada vabalt võetavaid väärtusi.

Saadud tunnus on tarvilik, kuid mitte piisav funktsiooni $z = f(x, y)$ maksimumi või miinimumi olemasolu määramiseks. Kui $x = a$ ja $y = b$ on võrrandite

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

lahendid, mille puhul funktsioon $z = f(x, y)$ võib saada kas maksimumiks või miinimumiks, siis funktsiooni $z = f(x, y)$ maksimumi või miinimumi olemasolu piisava tunnuse määramiseks oletame, et funktsioon $z = f(x, y)$ omab pidevaid osatuletisi vähemalt kuni kolmanda järguni, ja kasutame funktsiooni $f(a + \Delta x, b + \Delta y)$ suhtes Taylori valemit järgmiselt:

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b) + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y\right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Delta y^2\right) + R_2,$$

kus osatuletiste väärtused on võetud $x = a$ ja $y = b$ puhul ning R_2 on Taylori valemi jääkliige, s. o.

$$R_2 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \Delta y\right)^3 f(a + \Theta \Delta x, b + \Theta \Delta y).$$

Et nii maksimum- kui ka miinimumpunktis on $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, siis selles punktis, kui $x = a$ ja $y = b$, omandab Taylori valem kuju

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Delta y^2\right) + R_2,$$

kus vahe $f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ peab olema maksimumi puhul negatiivne ja miinimumi puhul positiivne, kui Δx ja Δy on küllalt väikesed. Kui aga vahe $f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b)$ märk muutub, siis ei ole funktsioonil maksimumi ega ka miinimumi.

Et küllalt väikese Δx ja Δy puhul on Taylori valemi jääkliikme R_2 absoluutväärtus ikka väiksem kui talle eelneva liikme

absoluutväärtus (§ 32), siis sõltub vahe $f(a+\Delta x,\ b+\Delta y)-f(a,\ b)$ märk ainult ruutkolmliikme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y^2 \qquad (C)$$

märgist. See ruutkolmliige kujutab funktsiooni $z=f(x,\ y)$ teist järku täisdiferentsiaali d^2z (§ 25).

Oletades, et ruutkolmliikmes (C) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\neq 0$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\neq 0$, saame seda ruutkolmliiget esitada järgmiselt:

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Delta x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Delta y\right)^2-\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]\Delta y^2}{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \qquad (C')$$

ehk

$$\frac{\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Delta y+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Delta x\right)^2-\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]\Delta x^2}{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}, \qquad (C'')$$

millest nähtub, et vahe $f(a+\Delta x,\ b+\Delta y)-f(a,\ b)$ märk sõltub ühtlasi

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\text{või } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

märkidest. Ruutkolmliikme teisendid (C′) (C″) näitavad, et $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ omavad ikka üht ja sama märki, sest (C′) ja (C″) omavad sama märki, mida omab ruutkolmliige (C).

Kui ruutkolmliikme teisendites $x=a$ ja $y=b$ puhul

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0 \quad \left(\text{ehk } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0\right),$$

siis on avaldise (C′) ehk (C″) lugeja positiivne ja avaldis (C′) ehk (C″) ise negatiivne, s. o. ruutkolmliige (C) on negatiivne ja seega on negatiivne ka vahe $f(a+\Delta x,\ b+\Delta y)-f(a,\ b)$, mis näitab, et $f(a,\ b)$ on funktsiooni $z=f(x,\ y)$ maksimumiks. Siit nähtub ühtlasi, et funktsiooni maksimumi puhul funktsiooni teist järku diferentsiaal $d^2z<0$.

Kui

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0 \quad \left(\text{ehk } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}>0\right),$$

siis on avaldis (C′) ehk (C″) positiivne, s. o. ruutkolmliige (C) on positiivne ja seega on positiivne ka vahe $f(a+\Delta x,\ b+\Delta y)-f(a,\ b)$, mis näitab, et $f(a,\ b)$ on funktsiooni $z=f(x,\ y)$ miinimumiks. Funktsiooni miinimumi puhul on funktsiooni teist järku täisdiferentsiaal $d^2z>0$.

Kui

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0,$$

siis võib avaldise (C′) ehk (C″) lugeja olla nii positiivne kui negatiivne, millest nähtub, et ruutkolmliige (C) ja ühtlasi ka vahe $f(a + \Delta x,\ b + \Delta y) - f(a,\ b)$ muudab märki, mille puhul funktsioonil ei ole maksimumi ega miinimumi. Et siin vabalt võetava Δx ja Δy puhul on vahe $f(a + \Delta x,\ b + \Delta y) - f(a,\ b)$ mõnikord suurem kui null, mõnikord väiksem kui null ja mõnikord võrdne nulliga, siis ütleme, et pinna $z = f(x,\ y)$ punkt, milles

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \text{ ning } \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0,$$

on nn. s a d u l p u n k t i k s.

Kui aga

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

siis jääb küsimus lahtiseks ja seda tuleks Taylori valemis esinevate kõrgemat järku osatuletiste kaudu edasi uurida, et näha, kas funktsioonil on maksimum või miinimum või ei ole ühte ega teist. Me piirdume aga siinkohal kolme esimese juhuga, mis võimaldavad küllaldaselt oluliste probleemide puhul leida kahe muutuja funktsiooni maksimumi või miinimumi.

Kokku võttes võime märkida, et kui funktsioonil $z = f(x,\ y)$ on tema määramispiirkonnas esimest ja teist järku pidevad osatuletised

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

siis funktsiooni ekstreemväärtuste leidmiseks tuleb esimest järku osatuletised võrrutada nulliga, s. o.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

lahendada need võrrandid x ja y suhtes ning paigutada leitud x ja y reaalväärtused avaldisse

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Kui seejuures

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0,$$

siis on funktsioonil ekstreemum, nimelt: kui $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0$ (ehk $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$), siis on funktsioonil maksimum, ja kui $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0$ (ehk

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0$), siis on funktsioonil miinimum. Need on kahe muutuja funktsiooni maksimumi ja miinimumi olemasolu piisavad tunnused.

Kui aga

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0,$$

siis ei ole funktsioonil maksimumi ega miinimumi, vaid esineb sadulpunkt.

Kui mõnel erijuhul on

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

siis jääb küsimus lahtiseks ja seda tuleks, nagu eespool juba öeldud, edasi uurida.

a) Võtame näiteks elliptilise paraboloidi võrrandi

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} - 2,$$

kus $p > 0$ ja $q > 0$. Siin

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{p} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{q} = 0,$$

milledest $x = 0$ ja $y = 0$. Siis $z = -2$. Et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{p} > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{q} > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

siis

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{pq} < 0,$$

mis näitab, et $z = -2$ on elliptilist paraboloidi esitava funktsiooni miinimum. Elliptilise paraboloidi miinimumpunkt on seega (joon. 27)

$$B(0,\ 0,\ -2).$$

b) Hüperboolse paraboloidi võrrandi

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} - 2$$

puhul

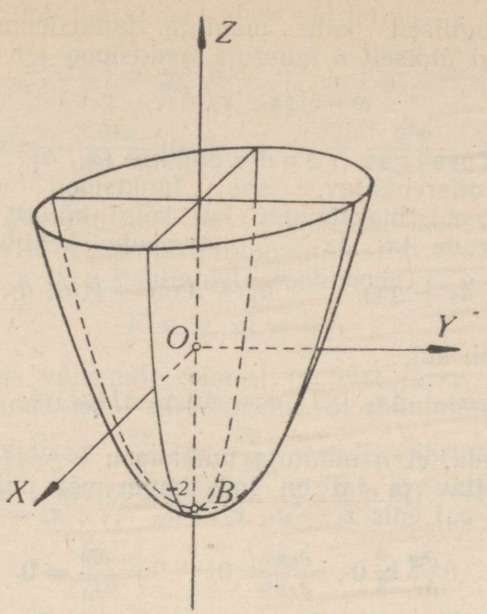
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{p} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{q} = 0,$$

millest $x = 0$ ja $y = 0$ ning $z = -2$. Et siin

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{p} > 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{q} < 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

siis

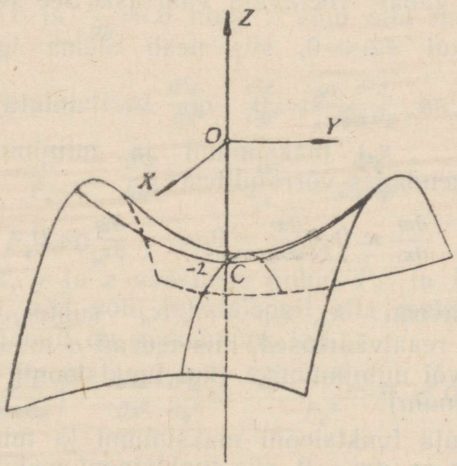
$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{pq} > 0,$$



Joon. 27.

millest nähtub, et hüperboolsel paraboloidil ei ole maksimumega ka miinimumpunkti, vaid esineb sadulpunkt (joon. 28)

$$C(0,\ 0,\ -2).$$



Joon. 28.

2) Analoogiliselt kahe muutuja funktsioonile $z = f(x, y)$ ütleme, et kui üldiselt n muutuja funktsioon

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

on n-mõõtmelise ruumi punktis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ja selle ümbruses diferentsitav, siis funktsioon omab punktis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ maksimumi, kui kõigi küllalt väikeste argumentide kasvude $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ puhul kehtib võrratus

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) < 0,$$

ja miinimumi, kui

$$f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n) > 0.$$

Kui oletada, et n muutuja funktsioon $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on diferentsitav ja tal on maksimum või miinimum punktis $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, siis $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$ puhul

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial w}{\partial x_n} = 0.$$

Järelikult, et leida $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtused, mille puhul funktsioonil $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on maksimum või miinimum, tuleb võtta osatuletised ja võrrutada need nulliga. Siis ka

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

kus $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$ kui sõltumatute muutujate diferentsiaalid võivad omada vabalt võetavaid väärtusi. See tähendab ümberpöördult, et kui $dw = 0$, siis peab olema iga $\frac{\partial w}{\partial x_k} = 0$, kus $k = 1, 2, \ldots, n$. $\frac{\partial w}{\partial x_k} = 0$ on n muutuja funktsiooni $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maksimumi ja miinimumi tarvilikuks tunnuseks. Lahendades võrranditest

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial w}{\partial x_n} = 0$$

koosneva süsteemi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suhtes, leiame need $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reaalväärtused, mis teevad n muutuja funktsiooni maksimumiks või miinimumiks (kui funktsioonil üldse on maksimum või miinimum).

Et n muutuja funktsiooni maksimumi ja miinimumi tarvilikuks tunnuseks on $dw = 0$, siis funktsiooni maksimumi ja miinimumi piisava tunnusena teist järku diferentsiaal d^2w peab

omama üht ja sama märki, kas pluss või miinus, s. o.

$$d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \ldots + \frac{\partial^2 w}{\partial x_n^2} dx_n^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_3} dx_1 dx_3 + \ldots + \frac{\partial^2 w}{\partial x_{n-1} \partial x_n} dx_{n-1} dx_n\right) \leqq 0,$$

ja nimelt: kui $d^2w < 0$, siis on funktsioonil maksimum. ja kui $d^2w > 0$, siis on funktsioonil miinimum.

3) Kui z on x ja y ilmutamata funktsioon, s. o.

$$F(x, y, z) = 0,$$

millel on olemas vähemalt esimest ja teist järku pidevad osatuletised, siis funktsiooni maksimumi või miinimumi leidmiseks asendame osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ nende väärtustega ilmutamata funktsiooni osatuletiste kaudu (§ 28, p. 2), võrrutades need nulliga, s. o.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = 0,$$

kus nüüd

$$F_x = 0 \text{ ja } F_y = 0,$$

kui ainult $F_z \neq 0$. Lahendame võrranditest

$$F = 0, \; F_x = 0, \; F_y = 0$$

koosneva süsteemi x, y ja z suhtes ja võtame siis need x, y ja z väärtused, millede puhul $F_z \neq 0$. Nende x, y ja z väärtuste puhul on $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ja $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ ning z võib olla maksimumiks või miinimumiks.

Teist järku osatuletised $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ja $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ on siis (§ 28, p. 2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{F_{xx}}{F_z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{F_{yy}}{F_z}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{F_{xy}}{F_z},$$

sest $F_x = 0$ ja $F_y = 0$.

Kui leitud x, y ja z väärtuste puhul F_{xx} ja F_{yy} omavad üht ja sama märki, siis võib funktsioonil olla maksimum või miinimum. Funktsioonil on maksimum, kui

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{F_{xy}^2 - F_{xx} F_{yy}}{F_z^2} < 0,$$

s. o.

$$F_{xy}^2 - F_{xx} F_{yy} < 0,$$

ning seejuures

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{F_{xx}}{F_z} < 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{F_{yy}}{F_z} < 0$$

ehk

$$\frac{F_{xx}}{F_z} > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{F_{yy}}{F_z} > 0,$$

s. o. kui F_z omab sama märki, mis F_{xx} ja F_{yy}, ja funktsioonil on miinimum, kui

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0$$

ning

$$\frac{F_{xx}}{F_z} < 0 \quad \text{ja} \quad \frac{F_{yy}}{F_z} < 0,$$

s. o. kui F_z märk on vastupidine F_{xx} ja F_{yy} märgile. Kui F_{xx} ja F_{yy} on erinevate märkidega või vähemalt üks neist on võrdne nulliga, siis

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0,$$

mille puhul funktsioonil ei ole maksimumi ega ka miinimumi, vaid esineb sadulpunkt. Kui aga

$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0,$$

siis jääb küsimus lahtiseks ja seda tuleks kõrgemate osatuletiste kaudu edasi uurida.

Näiteks ellipsoidi esitava funktsiooni

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

maksimumi või miinimumi leidmiseks võtame osatuletised F_x ja F_y ning võrrutame need nulliga, s. o.

$$F_x = \frac{2x}{a^2} = 0 \quad \text{ja} \quad F_y = \frac{2y}{b^2} = 0,$$

millest $x = 0$ ja $y = 0$ ning $z = \pm c$. Et nende x, y ja z väärtuste puhul

$$F_z = \frac{2z}{c^2} = \pm\frac{2}{c}, \quad F_{xx} = \frac{2}{a^2}, \quad F_{yy} = \frac{2}{b^2}, \quad F_{xy} = 0,$$

siis

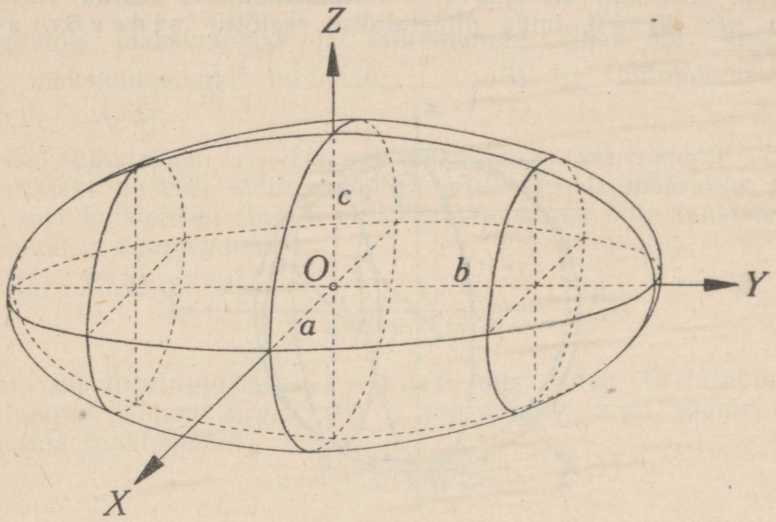
$$F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = -\frac{4}{a^2b^2} < 0$$

ning

$$\frac{F_{xx}}{F_z} = \pm\frac{c}{a^2} \gtrless 0 \quad \text{ja} \quad \frac{F_{yy}}{F_z} = \pm\frac{c}{b^2} \gtrless 0,$$

millest nähtub, et $z = +c$ on funktsiooni maksimumiks ja $z = -c$ on funktsiooni miinimumiks (joon. 29).

§ 34. Tinglik ekstreemum. Eelmises paragrahvis vaatlesime funktsiooni ekstreemväärtusi, mille suhtes ei olnud esitatud mingisuguseid lisatingimusi peale nõude, et argumentpunkt jääks määratud piirkonda. Seepärast nimetame neid ekstreemväärtusi funktsiooni absoluutseteks ehk tingimusteta ekstreemväärtusteks. Kuid tihtipeale võib esineda ka niisuguseid ekstreemväärtuste ülesandeid, mis on seotud teatavate lisatingi-



Joon. 29.

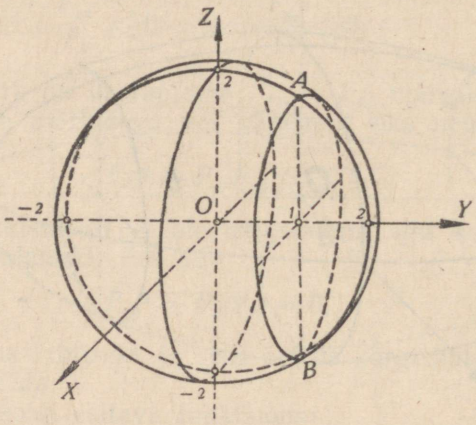
mustega. Kui funktsiooni ekstreemväärtuste määramiseks on üles seatud lisatingimused, siis nimetame neid ekstreemväärtusi funktsiooni relatiivseteks ehk tinglikeks ekstreemväärtusteks.

Kui näiteks kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas (XY-tasapinnal) esineb joon, mille võrrand on $\varphi(x, y) = 0$, ja on vaja leida funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemväärtusi ainult nende argumentpunktide puhul, mis kuuluvad joonele $\varphi(x, y) = 0$, siis on need ekstreemväärtused funktsiooni $z = f(x, y)$ tinglikeks ekstreemväärtusteks. Need on funktsiooni $z = f(x, y)$ tinglikud maksimumid või miinimumid joonel $\varphi(x, y) = 0$.

Definitsioon: *funktsiooni $z = f(x, y)$ tinglikuks ekstreemumiks tema määramispiirkonnas asetseva joone $\varphi(x, y) = 0$ punktis (x_0, y_0) nimetatakse funktsiooni väärtust $f(x_0, y_0)$, mis on suurem või väiksem kõikidest teistest funktsiooni $f(x, y)$ väär-*

tustest, mis on võetud punkti (x_0, y_0) *kuitahes väikeses ümbruses joonel* $\varphi(x, y) = 0$ *asetsevates punktides.*

See definitsioon ütleb, et argumentpunkti (x, y) liikumine funktsiooni $z = f(x, y)$ määramispiirkonnas on piiratud: ta võib liikuda ainult joont $\varphi(x, y) = 0$ mööda, mille puhul võib siis tekkida funktsiooni $z = f(x, y)$ tinglik ekstreemum, kus lisatingimuseks on $\varphi(x, y) = 0$. Sel juhul ei saa funktsiooni $z = f(x, y)$ tingliku ekstreemumi leidmisel x ja y enam vaadelda sõltumatute muutujatena, vaid neid tuleb vaadelda teineteisest sõltuvatena, sest nad on omavahel funktsionaalselt seotud võrrandiga $\varphi(x, y) = 0$, mida nimetatakse seetõttu s i d e v õ r r a n d i k s.



Joon. 30.

1) Oletame, et sidevõrrandist $\varphi(x, y) = 0$ on võimalik ilmutada üht või teist muutujat, näiteks y, s. o. $y = \psi(x)$, mis on diferentsitav funktsioon. Paigutades selle y väärtuse funktsiooni avaldisse $z = f(x, y)$, saame ühe muutuja funktsiooni

$$z = f[x, \psi(x)] = \Phi(x),$$

mille ekstreemväärtused ongi funktsiooni $z = f(x, y)$ tinglikeks ekstreemväärtusteks joonel $\varphi(x, y) = 0$.

Et leida näiteks kerapinda esitava funktsiooni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

tinglikud ekstreemväärtused joonel $y - 1 = 0$, selleks ilmutame z, s. o.

$$z = \pm \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

ja paigutame $y = 1$ viimasesse avaldisse y asemele; saame ühe muutuja funktsioonid

$$z = \pm \sqrt{3 - x^2},$$

millede ekstreemväärtused on vastavalt

$$z_{max} = +\sqrt{3},\ z_{min} = -\sqrt{3},$$

mis on ühtlasi funktsiooni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

tinglikuks maksimumiks ja miinimumiks (joon. 30), kusjuures maksimumpunkt on $A(0,\ 1,\ \sqrt{3})$ ja miinimumpunkt $B(0,\ 1,\ -\sqrt{3})$.

Kui funktsiooni $z = f(x,\ y)$ absoluutse ekstreemumi argumentpunkt asetseb sidevõrrandiga $\varphi(x,\ y) = 0$ määratud joonel, siis funktsiooni tinglik ekstreemum langeb ühte funktsiooni absoluutse ekstreemumiga.

Kui näiteks funktsiooni

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

puhul on lisatingimuseks $x - y = 0$, mis esitab XY-tasapinnal nullpunkti läbivat sirget, siis y asendamisel x-ga saame ühe muutuja funktsioonid

$$z = \pm \sqrt{4 - 2x^2},$$

millede ekstreemväärtused on vastavalt

$$z_{max} = 2,\ z_{min} = -2,$$

mis on ühtlasi funktsiooni $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ nii tinglikuks kui ka absoluutseks maksimumiks ja miinimumiks, sest absoluutse ekstreemumi argumentpunkt (0, 0) asetseb sidevõrrandiga $x - y = 0$ esitatud sirgel.

2) Analoogiliselt kahe muutuja funktsioonile võime leida üldiselt n muutuja funktsiooni

$$w = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$$

tingliku ekstreemumi, kui $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ on üksteisega funktsionaalses sõltuvuses k lisatingimuse ehk sidevõrrandi

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0,\\
&\varphi_2(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0
\end{aligned}$$

kaudu, kus $k < n$. Kui viimastest sidevõrranditest on võimalik avaldada k muutujat, näiteks $x_1, x_2, \ldots, x_k$, ülejäänud $n - k$ muutuja $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ kaudu, s. o.

$$x_1 = \psi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$
$$x_2 = \psi_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_k = \psi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$

siis asetame need väärtused funktsiooni

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

muutujate $x_1, x_2, \ldots, x_k$ asemele, mille puhul saame $n - k$ sõltumatu muutuja $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ funktsiooni

$$w = \Phi(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$

mille ekstreemumid võime leida eelmises paragrahvis käsitletud viisil. Need ekstreemumid on ühtlasi funktsiooni

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tinglikeks ekstreemumiteks.

3) Eespool käsitletud n muutuja funktsiooni tinglike ekstreemväärtuste leidmise viis lisatingimusi esitava k sidevõrrandi puhul nõuab alati k muutuja avaldamist ülejäänud $n - k$ muutuja kaudu. Üldiselt on aga lisatingimusi esitavate sidevõrrandite lahendamine k muutuja suhtes seotud teatavate, mõnikord isegi ületamatute raskustega. Sel põhjusel võime n muutuja funktsiooni tinglike ekstreemväärtuste leidmiseks kasutada Lagrange'i määramata tegurite võtet, mille puhul pole vaja avaldada üht, teist, kolmandat jne. muutujat ülejäänud muutujate ilmutatud funktsioonina.

Et kasutada Lagrange'i meetodit n muutuja funktsiooni

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tingliku ekstreemumi leidmiseks, kui $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on üksteisega funktsionaalses sõltuvuses k lisatingimuse ehk sidevõrrandi

$$\varphi_1(x_1\ x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0$$

kaudu, kus $k < n$, selleks leiame funktsiooni $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ täisdiferentsiaali

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial w}{\partial x_n} dx_n$$

ja diferentsime ühtlasi lisatingimusi esitavaid funktsioone, s. o.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Korrutades viimase võrrandisüsteemi iga võrrandi vastavalt määramata teguriga $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ ja liites siis saadud võrdused funktsiooni täisdiferentsiaaliga dw, saame

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1}\right) dx_1 +$$

$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2}\right) dx_2 +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right) dx_n.$$

Olgu tegurid $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valitud nõnda, et viimati saadud võrduse parema poole sulgavaldised sõltuvate muutujate diferentsiaalide $dx_1, dx_2, \ldots, dx_k$ ees muutuksid nulliks. Siis dw esineb sõltumatute muutujate diferentsiaalide $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \ldots, dx_n$ lineaarse funktsioonina

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial x_{k+1}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+1}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+1}} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+1}}\right) dx_{k+1} +$$

$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x_{k+2}} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{k+2}} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{k+2}} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_{k+2}}\right) dx_{k+2} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n}\right) dx_n.$$

Et nüüd funktsioonil oleks ekstreemum, selleks peavad muutujate väärtused olema niisugused, et vabalt võetavate $dx_{k+1}, dx_{k+2}, \ldots, dx_n$ puhul $dw = 0$ (§ 33, p 2). Siis on muidugi ka sulgavaldised nende diferentsiaalide ees võrdsed nulliga. Seega saame võrrandisüsteemi

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_2} = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0,$$

mis kujutab (eelmise paragrahvi põhjal) funktsiooni

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_k \varphi_k$$

absoluutse ekstreemumi olemasolu tarvilikku tunnust. Siit järeldub nüüd, et funktsiooni

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tingliku ekstreemumi punkt on ühtlasi funktsiooni

$$F = w + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_k \varphi_k$$

statsionaarseks punktiks, kui funktsiooni $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lisatingimusteks on

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \ldots, \quad \varphi_k = 0.$$

Sellest arvutuskäigust nähtub, et nende $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtuste leidmiseks, mis määravad funktsiooni

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tingliku ekstreemumi, kui lisatingimusteks on

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= 0, \end{aligned}$$

tuleb koostada abifunktsioon

$$F = w + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_k \varphi_k$$

ja võtta selle abifunktsiooni osatuletised $x_1, x_2, \ldots, x_n$ järgi, võrrutades need nulliga, s. o.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0.$$

Lahendades saadud n võrrandit koos lisatingimusi esitava k sidevõrrandiga

$$\varphi_1 = 0, \ \varphi_2 = 0, \ldots, \ \varphi_k = 0$$

muutujate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja tegurite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ suhtes, leiame otsitavad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtused, mille puhul w võib saada tinglikuks ekstreemumiks.

Tinglik ekstreemväärtus esineb enamasti niisuguste ülesannete puhul, mille iseloomust saab otseselt järeldada, kas leitud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtused määravad funktsiooni

$$w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tingliku maksimumi või miinimumi. Kahtluse korral tuleb aga uurida funktsiooni teist järku täisdiferentsiaali d^2w märki, arvestades seejuures ühtlasi ülesseatud lisatingimusi.

Leiame näiteks võrdsete perimeetritega kolmnurkadest maksimaalse pindalaga kolmnurga. Kui antud perimeetriks on $2p$, siis selle kaudu kolmnurga pindala S on

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

kus x, y ja z on kolmnurga külgede pikkused, mis on seotud lisatingimusega

$$x + y + z = 2p,$$

kusjuures $0 < x < p$, $0 < y < p$ ja $0 < z < p$. Et kolmnurga pindala S maksimaalsele väärtusele vastab S^2 maksimaalne väärtus, siis konstantse p puhul võime kolmnurga maksimaalse pindala leidmise üle viia funktsiooni

$$w = \frac{S^2}{p} = (p-x)(p-y)(p-z)$$

maksimumi leidmisele tingimusel, et

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z - 2p = 0.$$

Koostame nüüd abifunktsiooni

$$F = w + \lambda(x + y + z - 2p),$$

millest saame võrrandid

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -(p-y)(p-z) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -(p-x)(p-z) + \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -(p-x)(p-y) + \lambda = 0,$$

mida koos võrrandiga

$$x + y + z - 2p = 0$$

lahendades leiame, et

$$x = y = z = \frac{2}{3}p,$$

kusjuures $\lambda = \frac{p^2}{9}$. Seega otsitav maksimaalse pindalaga kolmnurk on võrdkülgne.

§ 35. Harjutusülesandeid.

Leida funktsioonide määramispiirkonnad:

1. $z = \ln(y^2 - 2x + 4)$
2. $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$
3. $z = \ln xy$
4. $z = \ln x + \ln y$
5. $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$
6. $z = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$
7. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{\ln \frac{1}{x^2+y^2}}$
8. $u = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}$.

Leida funktsioonide piirväärtused:

9. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+4} - 2}$
10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1} - 1}{x - y}$
11. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 0}} \frac{\sin xy}{y}$
12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{1 - \cos^2 x^2 y^2}{x^4 y^4}$.

Määrata funktsioonide katkevuskohad:

13. $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$
14. $z = \frac{1}{x - y}$
15. $z = \frac{x}{x^2 - y^2}$
16. $z = \frac{x^2 + 4y}{x^2 - 4y}$.

Missuguseid pindu esitavad funktsioonid:

17. $z = 2x + 3y - 6$
18. $z = x^2 + y^2$
19. $z = x^2 - y^2$
20. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Joonestada funktsioonide nivoojooned:

21. $z = x + y$
22. $z = x - y^2$
23. $z = \frac{x}{y}$
24. $z = xy$
25. $z = \frac{y - x^2}{x^2}$
26. $z = x\sqrt{y - 1}$.

Leida funktsioonide esimest ja teist järku osatuletised:

27. $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
28. $z = \frac{xy}{x+y}$
29. $z = \operatorname{ctg} \frac{x}{y}$
30. $z = \arcsin \frac{x}{y}$
31. $z = \ln(x^2 + y^2)$
32. $z = e^x \sin y + e^y \sin x$
33. $z = \ln(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$
34. $u = \sin(x + y + z)$
35. $u = \ln(x + y + z)$
36. $u = e^x \ln \frac{y}{z}$.

Leida funktsioonide täisdiferentsiaalid:

37. $z = y \ln x$

38. $z = y^{\ln x}$

39. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

40. $u = x^2 + y^2 + z^2$

41. $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

42. $u = z^{xy}$.

43. Leida funktsiooni $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ täisdiferentsiaali väärtus, kui $x = 3$, $y = 4$, $\Delta x = 0{,}1$ ja $\Delta y = 0{,}2$.

44. Leida funktsiooni $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ täisteletis punktis $P(3, 1)$ suuna järgi, mis viib sellest punktist punkti $P_1(6, 5)$.

45. Leida funktsiooni $z = \operatorname{arctg} xy$ täisteletis punktis $P(1, 1)$ esimese koordinaatnurga bisektori suuna järgi.

46. Leida funktsiooni $u = xy^2 + z^2 - xyz$ täisteletis punktis $M(1, 1, 2)$ suuna järgi, mis moodustab koordinaattelgedega vastavalt nurgad $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ ja $\gamma = 60°$.

47. Leida funktsiooni $u = xyz$ täisteletis punktis $M(5, 1, 2)$ suuna järgi, mis viib sellest punktist punkti $M_1(9, 4, 14)$.

Leida ilmutamata funktsioonide esimest ja teist järku tuletised:

48. $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$

49. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

50. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0$

51. $x - \operatorname{tg} y = 0$

52. $y - \cos(x + y) = 0$

53. $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$.

54. Leida kõvera

$$x^3 + 3x^2 - xy - 2y^2 - 8y^3 = 0$$

iseärane punkt ja puutujad selles punktis.

55. Leida kõvera

$$x^3 - x^2 - y^2 = 0$$

iseärane punkt.

56. Leida kõvera

$$x^6 - x^4 + y^2 = 0$$

iseärane punkt.

57. Leida kõvera

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$$

iseärane punkt.

58. Leida kõvera

$$x^4 - 6x^2y - 3xy^2 + 9y^2 = 0$$

iseärane punkt.

59. Leida kõvera

$$(x-y)^2-(x-3)^2(x-2)=0$$

iseärased punktid ja puutujad neis punktides.

60. Leida sirgete parve

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

mähisjoone võrrand, kui α on muutuvaks parameetriks.

61. Leida sirgete parve

$$y=kx+\frac{p}{2k}$$

mähisjoone võrrand, kui k on muutuvaks parameetriks.

62. Leida ringjoonte parve mähisjoone võrrand, kui ringide diameetriteks on parabooli $y^2=2px$ kõõlud, mis on paralleelsed Y-teljega.

63. Leida ringjoonte parve mähisjoone võrrand, kui ringjooned läbivad nullpunkti ja nende keskpunktid asetsevad hüperboolil $x^2-y^2=a^2$.

64. Leida kõverate parve

$$(x-a)^2-y^2+y^4=0$$

mähisjoon ja iseäraste punktide geomeetriline koht.

65. Leida sirgete parve

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$$

mähisjoone võrrand, kui α ja p on muutuvateks parameetriteks ning sirgete parve sirglõigud koordinaattelgede vahel omavad üht ja sama pikkust a.

66. Leida ellipsite parve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

mähisjoone võrrand, kui a ja b on muutuvateks parameetriteks, millede summa on konstantne suurus s.

67. Leida funktsiooni

$$z=x^2y+xy^2+xy$$

ekstreemumid.

68. Leida funktsiooni

$$z=x^3+y^3-3xy$$

ekstreemumid.

69. Leida funktsiooni

$$z = \sin x + \sin y + \sin (x + y)$$

ekstreemumid piirkonnas

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

70. Kujundada ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

maksimaalse ruumalaga risttahukas.

71. Leida funktsiooni

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

tinglik ekstreemum, kui sidevõrrandiks on $x + y = 2$.

72. Leida funktsiooni

$$z = xy$$

tinglik ekstreemum, kui sidevõrrandiks on $x^2 + y^2 = 1$.

73. Leida kõvera

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

punkt, mis asub kõige lähemal koordinaattelgede nullpunktile.

74. Leida ühekattese hüperboloidi

$$x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6 = 0$$

puutujatasapind ja normaal punktis (2, —2, 3).

75. Leida ellipsoidi

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 = 0$$

puutujatasapind, mis on paralleelne tasapinnaga

$$x - y + 2z = 0.$$

X peatükk

RUUMILINE KÕVER

§ 36. Kõvera puutuja ja normaaltasapind. Kaks pinda, mida esitavad kahe muutuja pidevad funktsioonid

$$z = f(x, y), \quad z = g(x, y)$$

ehk ilmutamatult

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

määravad ruumis joone, mis on nende pindade lõikejooneks. Et aga läbi ruumilise joone on võimalik kujundada kuitahes palju pindu, siis võime valida joone määrajateks kaks niisugust silindrilist pinda, mis projekteerivad joont kahele koordinaattasapinnale, näiteks XY- ja XZ-tasapinnale. Tähendatud silindriliste pindade võrrandite leidmiseks elimineerime võrranditest $F(x, y, z) = 0$ ja $G(x, y, z) = 0$ üks kord z ja teine kord y; saame

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x),$$

mis määravad sama vaadeldava joone ruumis. Viimastest võrranditest nähtub, et ruumilise kõvera määramisel tuleb y ja z vaadelda kui x funktsioone. Kui seejuures x omakorda vaadelda kui mingi muutuva parameetri t funktsiooni, s. o. $x = x(t)$, siis viimati saadud võrranditest nähtub, et ka y ja z on sama muutuva parameetri t funktsioonid, s. o.

$$y = \varphi[x(t)] = y(t) \quad \text{ja} \quad z = \psi[x(t)] = z(t).$$

Seega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

on ruumilise kõvera parameetrilisteks võrranditeks.

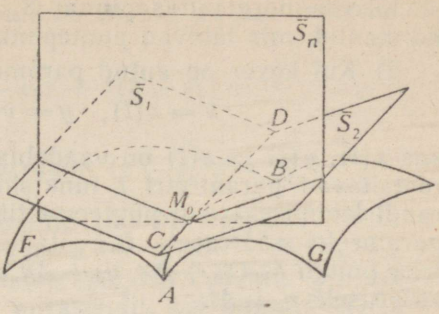
1) Võtame kaks pinda, mida esitavad võrrandid

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{ja} \quad G(x, y, z) = 0,$$

kusjuures funktsioonid F ja G omavad pidevaid osatuletisi x, y ja z järgi. Võrrandid $F(x, y, z) = 0$ ja $G(x, y, z) = 0$ määravad

ruumis joone, mis on nende pindade lõikejooneks AB (joon. 31). Lõikejoone AB puutujaks punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ on tähendatud pindade puutujatasapindade $\overline{S_1}$ ja $\overline{S_2}$ lõikejoon CD, kusjuures M_0 on puutujatasapindade ühiseks puutepunktiks. Nende puutujatasapindade võrrandid on vastavalt (§ 29, p. 4)

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0$$



Joon. 31.

ja

$$G_x(x - x_0) + G_y(y - y_0) + G_z(z - z_0) = 0,$$

mis esitavad ühtlasi lõikejoont CD. Andes viimastele võrranditele kanoonilise kuju, saame

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & G_y \\ F_z & G_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & G_z \\ F_x & G_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & G_x \\ F_y & G_y \end{vmatrix}},$$

mis seega kujutab võrranditega

$$F(x, y, z) = 0 \text{ ja } G(x, y, z) = 0$$

määratud kõvera puutuja võrrandit, kui puutepunktiks on $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Osatuletiste F_x, F_y, F_z, G_x, G_y ja G_z väärtused on siin võetud $x = x_0$, $y = y_0$ ja $z = z_0$ puhul, millede puhul vähemalt üks kanoonilise võrrandi determinantidest (kui puutuja sihitegurites) ei ole võrdne nulliga.

Tasapinda $\overline{S_n}$, mis läbib puutepunkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ja on risti puutujaga CD, nimetatakse võrranditega

$$F(x, y, z) = 0 \text{ ja } G(x, y, z) = 0$$

määratud ruumilise kõvera n o r m a a l t a s a p i n n a k s punktis M_0. Puutuja CD ja normaaltasapinna $\overline{S_n}$ ristseisu tingimuse põhjal võime esitada normaaltasapinna võrrandi kujul

$$\begin{vmatrix} F_y & G_y \\ F_z & G_z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} F_z & G_z \\ F_x & G_x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & G_x \\ F_y & G_y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0$$

ehk

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & F_x & G_x \\ y - y_0 & F_y & G_y \\ z - z_0 & F_z & G_z \end{vmatrix} = 0.$$

Kõvera normaaltasapinnal $\overline{S_n}$ asetsevad kõvera puutuja kõik normaalid, mis läbivad puutepunkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2) Kui kõver on antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

kus $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ on vaadeldavas piirkonnas pidevad ja diferentsitavad parameetri t funktsioonid, siis kõvera puutuja võrrandi leidmiseks, kui puutepunktiks on $M_0(x_0, y_0, z_0)$, mis vastab parameetri väärtusele t_0, võtame punkti M_0 ümbruses kõveral teise punkti $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$, mis vastab parameetri väärtusele $t_0 + \Delta t$.

Punkte $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ja $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ läbiv sirge omab võrrandit

$$\frac{x - x_0}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{y - y_0}{(y_0 + \Delta y) - y_0} = \frac{z - z_0}{(z_0 + \Delta z) - z_0}$$

ehk

$$\frac{x - x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y - y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z - z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Et puutujat punktis M_0 võime vaadelda kui punkte M_0 ja M_1 läbiva sirge piirasendit, kui punkt M_1 piiramatult läheneb kõverat mööda punktile M_0, siis funktsioonide $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ pidevuse tõttu $\Delta t \to 0$ puhul ka $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ ja $\Delta z \to 0$ ning

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Sirge piirasend punktis M_0 omab siis võrrandit

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}}$$

ehk

$$\frac{x - x_0}{dx} = \frac{y - y_0}{dy} = \frac{z - z_0}{dz},$$

mis on parameetriliste võrranditega antud ruumilise kõvera puutuja võrrand, kui puutepunktiks on $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Tähistades siin puutuja suunakoosinused tähtedega a_1, b_1 ja c_1, saame nende väärtused

$$a_1 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$b_1 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$c_1 = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

kus $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$.

Kõvera normaaltasapinna punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ määrab siis võrrand

$$\dot{x}(x - x_0) + \dot{y}(y - y_0) + \dot{z}(z - z_0) = 0$$

ehk

$$(x - x_0)dx + (y - y_0)dy + (z - z_0)dz = 0.$$

§ 37. Kõvera kooldumistasapind ja binormaal. Ruumilise kõvera kooldumistasapinnaks punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nimetatakse kõvera punkte $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ja $M_2(x_2, y_2, z_2)$ läbiva tasapinna piirasendit, kui punktid M_1 ja M_2 piiramatult lähenevad kõverat mööda punktile M_0. Kõvera puutuja punktis M_0 asetseb seega kooldumistasapinnal.

Olgu kõver antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

kusjuures funktsioonid $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ on pidevad ja omavad esimest ja teist järku pidevaid tuletisi. Vastaku kõvera punktid $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ja $M_2(x_2, y_2, z_2)$ vastavalt parameetri t väärtustele t_0, t_1 ja t_2. Võtame tasapinna võrrandi

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

milles valime koefitsiendid A, B, C ja D nii, et võrrandile vastav tasapind läbiks punkte M_0, M_1 ja M_2. Selleks peavad nende punktide koordinaadid rahuldama tasapinna võrrandit, s. o.

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D &= 0, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0. \end{aligned}$$

Võtame parameetri t funktsiooni

$$F(t) = Ax(t) + By(t) + Cz(t) + D,$$

mis samuti omab esimest ja teist järku pidevat tuletist ja muutub parameetri väärtustel t_0, t_1 ja t_2 nulliks, s. o.

$$F(t_0) = 0, \quad F(t_1) = 0, \quad F(t_2) = 0.$$

Kui funktsioon $F(t)$ muutub nulliks parameetri väärtustel t_0, t_1 ja t_2, siis Rolle'i teoreemi (I osa, § 46) põhjal peab funktsiooni tuletis $F'(t)$ muutuma nulliks vähemalt parameetri t kahe väärtuse puhul, milledest üks asetseb t_0 ja t_1 ning teine t_1 ja t_2 vahel. Olgu need parameetri väärtused t_3 ja t_4, mille puhul $F'(t_3) = 0$ ja $F'(t_4) = 0$, kus $t_0 < t_3 < t_1$, $t_1 < t_4 < t_2$. Et aga $F'(t_3) = 0$ ja $F'(t_4) = 0$, siis peab sama Rolle'i teoreemi põhjal funktsiooni teine tuletis $F''(t)$ vähemalt parameetri t ühe väärtuse puhul muutuma nulliks. Olgu see parameetri väärtus t_5, mille puhul $F''(t_5) = 0$, kus $t_3 < t_5 < t_4$.

Et nüüd A, B ja C kujutaksid kooldumistasapinda esitava võrrandi koefitsiente, selleks laseme punkte M_1 ja M_2 piiramatult läheneda kõverat mööda punktile M_0. Siis $t_1 \to t_0$ ja $t_2 \to t_0$ ning seega ühtlasi ka $t_3 \to t_0$, $t_4 \to t_0$ ja $t_5 \to t_0$. Sel juhul saame, et

$$F(t_0) = Ax(t_0) + By(t_0) + Cz(t_0) + D = 0,$$
$$F'(t_0) = Ax'(t_0) + By'(t_0) + Cz'(t_0) = 0,$$
$$F''(t_0) = Ax''(t_0) + By''(t_0) + Cz''(t_0) = 0.$$

Et aga kooldumistasapind läbib punkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$, siis saame tema võrrandi esitada kujul

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

kusjuures koefitsiendid A, B ja C saame määrata võrranditest

$$\frac{A}{C} x'(t_0) + \frac{B}{C} y'(t_0) + z'(t_0) = 0,$$

$$\frac{A}{C} x''(t_0) + \frac{B}{C} y''(t_0) + z''(t_0) = 0.$$

Lahendades viimased võrrandid $\frac{A}{C}$ ja $\frac{B}{C}$ suhtes, saame

$$\frac{A}{C} = \frac{y'(t_0)z''(t_0) - z'(t_0)y''(t_0)}{x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)} = \frac{\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}},$$

$$\frac{B}{C} = \frac{z'(t_0)x''(t_0) - x'(t_0)z''(t_0)}{x'(t_0)y''(t_0) - y'(t_0)x''(t_0)} = \frac{\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z}}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}},$$

millede asetamisel võrrandisse

$$\frac{A}{C}(x - x_0) + \frac{B}{C}(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

saame kooldumistasapinna võrrandi punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

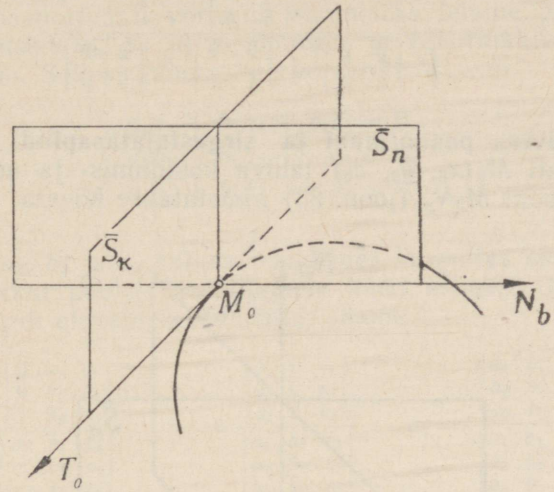
$$\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}(z - z_0) = 0,$$

mis on samane võrdusega

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \dot{x} & \ddot{x} \\ y - y_0 & \dot{y} & \ddot{y} \\ z - z_0 & \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} = 0,$$

kus funktsioonide $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ esimest ja teist järku tuletiste väärtused on võetud $t = t_0$ puhul.

Punktis M_0 on kõvera kooldumistasapind $\overline{S_k}$ risti kõvera normaaltasapinnaga $\overline{S_n}$ (joon. 32), sest normaaltasapind $\overline{S_n}$ on risti puutujaga M_0T_0, mis asub kooldumistasapinnal $\overline{S_k}$. Järelikult peab normaal- ja kooldumistasapinna suhtes kehtima ristseisu tingimus, s. o.



Joon. 32.

$$\dot{x}\begin{vmatrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{vmatrix}+\dot{y}\begin{vmatrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{vmatrix}+\dot{z}\begin{vmatrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{vmatrix}=0.$$

Punkti M_0 läbivat sirget M_0N_b, mis on risti kooldumistasapinnaga $\overline{S_k}$, nimetatakse kõvera b i n o r m a a l i k s punktis M_0. Et punktis M_0 kõvera kooldumistasapind $\overline{S_k}$ on risti normaaltasapinnaga $\overline{S_n}$, siis järelikult binormaal M_0N_b on samuti risti kõvera puutujaga M_0T_0 punktis M_0. Et kõvera binormaal punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ on risti kooldumistasapinnaga, siis saame nende ristseisu tingimuse kohaselt binormaali võrrandi kujul

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{vmatrix}}.$$

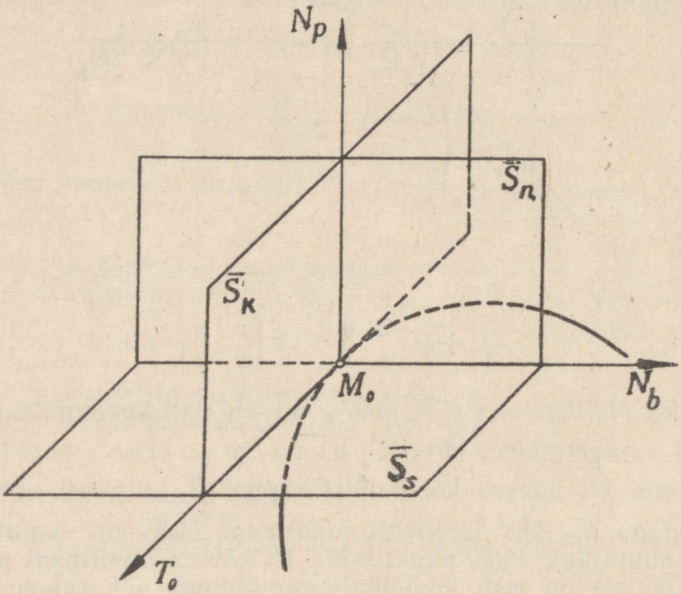
Tähistades binormaali suunakoosinused tähtedega a_2, b_2 ja c_2, saame nende väärtused

$$a_2=\frac{\begin{vmatrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{vmatrix}^2}},$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}}.$$

§ 38. Kõvera peanormaal ja sirgestajatasapind. Ruumilise kõvera punkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$ läbiva kooldumis- ja normaaltasapinna lõikejoont M_0N_p (joon. 33) nimetatakse kõvera peanormaaliks punktis M_0. Peanormaal M_0N_p on seega risti nii kõvera puutujaga M_0T_0 kui ka binormaaliga M_0N_b punktis M_0. Sellest ilmneb, et punktis M_0 kõvera puutuja, binormaal ja peanormaal on üksteisega risti. Kui puutuja suunakoosinused on a_1, b_1 ja c_1, binormaali suunakoosinused a_2, b_2 ja c_2 ning peanormaali suunakoosinused a_3, b_3 ja c_3, siis puutuja ja peanormaali ning binormaali ja peanormaali ristseisu tingimuse kohaselt



Joon. 33.

$$a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0 \quad \text{ja} \quad a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0,$$

kusjuures $a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1$.

Olgu kõver antud parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

kusjuures funktsioonid $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ on pidevad ja omavad esimest ja teist järku pidevaid tuletisi.

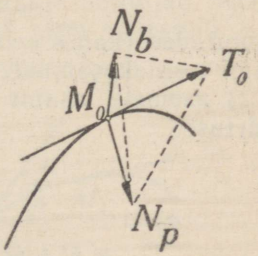
Kõvera peanormaali võrrandi saamiseks leiame peanormaali suunakoosinused a_3, b_3 ja c_3 puutuja ja binormaali suunakoosinuste kaudu. Selleks lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned} a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 &= 0, \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0, \\ a_3a_3 + b_3b_3 + c_3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

tundmatute a_3, b_3 ja c_3 suhtes, vaadeldes seejuures süsteemi võrrandite vasakul poolel üksikliikmete kõiki esimesi tegureid kui tundmatute ees olevaid koefitsiente; saame

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad c_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Kui loeme puutuja, binormaali ja peanormaali lõigud M_0T_0, M_0N_b ja M_0N_p võrdseks ühiklõiguga (joon. 34), siis võime puutuja, binormaali ja peanormaali suunakoosinusi arvuliselt vaadelda kui nende lõikude projektsioonide pikkusi X-, Y- ja Z-teljel. Punktid M_0, T_0, N_b ja N_p kujutavad siis niisuguse tetraeedri tippe, mille ruumala V moodustab $\frac{1}{6}$ kuubi ruumalast, mille serv on võrdne ühe lineaarse mõõtühikuga ehk mille ruumala on võrdne ühe kuupmõõtühikuga.*



Joon. 34.

---

* Analüütilisest geomeetriast on teada, et kui tetraeedri tipud on (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) ja (x_4, y_4, z_4), siis tetraeedri ruumala

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix},$$

kus determinandi veergude elemendid väljendavad arvuliselt tetraeedri servade projektsioonide pikkusi vastavalt X-, Y- ja Z-teljel.

Seega tähendatud tetraeedri ruumala

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6},$$

millest nähtub, et võrrandisüsteemi determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1.$$

Seega

$$a_3 = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - c_1b_2,$$

$$b_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = c_1a_2 - a_1c_2,$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2.$$

Paigutades (kahes eelmises paragrahvis leitud) puutuja ja binormaali suunakoosinuste väärtused vastavalt a_1, b_1 ja c_1 ning a_2, b_2 ja c_2 asemele, saame peanormaali suunakoosinuste a_3, b_3 ja c_3 väärtused:

$$a_3 = \frac{\dot{y}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} - \dot{z}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}},$$

$$b_3 = \frac{\dot{z}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} - \dot{x}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}},$$

$$c_3 = \frac{\dot{x}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix} - \dot{y}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}}.$$

Punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ on kõvera peanormaali võrrand seega

$$\frac{x-x_0}{\dot{y}\begin{vmatrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{vmatrix}-\dot{z}\begin{vmatrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\dot{z}\begin{vmatrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{vmatrix}-\dot{x}\begin{vmatrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\dot{x}\begin{vmatrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{vmatrix}-\dot{y}\begin{vmatrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{vmatrix}},$$

kus funktsioonide $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ esimest ja teist järku tuletiste väärtused on võetud $t=t_0$ puhul.

Punkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$ läbivat tasapinda $\overline{S}_s$ (joon. 33), mis on risti kõvera peanormaaliga M_0N_p, nimetatakse kõvera sirgestajatasapinnaks punktis M_0. Sirgestajatasapind on seega risti nii kooldumis- kui ka normaaltasapinnaga punktis M_0. Sirgestajatasapinna ja peanormaali ristseisu tingimuse kohaselt võime esitada kõvera sirgestajatasapinna võrrandi kujul

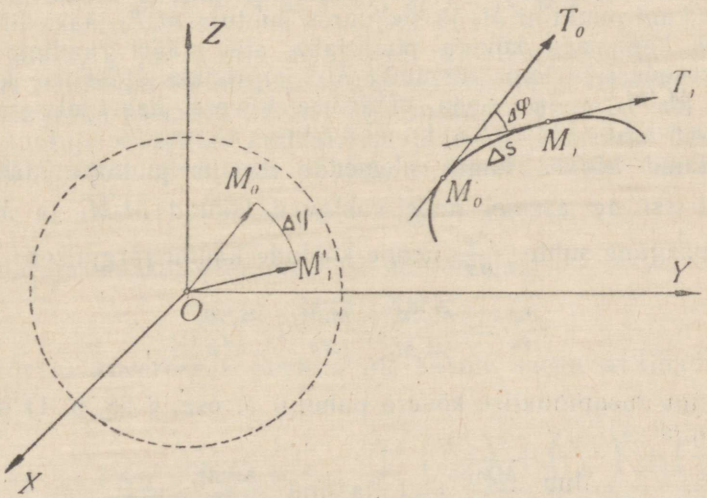
$$\left(\dot{y}\begin{vmatrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{vmatrix}-\dot{z}\begin{vmatrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{vmatrix}\right)(x-x_0)+\left(\dot{z}\begin{vmatrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{vmatrix}-\dot{x}\begin{vmatrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{vmatrix}\right)(y-y_0)+$$

$$+\left(\dot{x}\begin{vmatrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{vmatrix}-\dot{y}\begin{vmatrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{vmatrix}\right)(z-z_0)=0.$$

§ 39. Kõvera kõverus ja kõverusraadius. 1) Oletame, et ruumilist kõverat esitavad parameetrilised võrrandid

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),$$

kus $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ omavad vähemalt esimest ja teist järku pidevaid tuletisi. Võtame sellel kõveral punkti $M_0(x_0, y_0, z_0)$, mis vastab parameetri t väärtusele t_0, ja tema ümbruses kõveral teise punkti $M_1(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)$, mis vastab parameetri väärtusele $t_0+\Delta t$. Neis punktides joonestame puutujad M_0T_0 ja M_1T_1 (joon. 35), millede suunakoosinused olgu vastavalt a_1, b_1



Joon. 35.

ja c_1 ning $a_1 + \Delta a_1$, $b_1 + \Delta b_1$ ja $c_1 + \Delta c_1$, kusjuures $M_0M_1 = \Delta s$ on kõvera kaare element ja $\Delta\varphi$ on nurk puutujate M_0T_0 ja M_1T_1 vahel. Suhet $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ nimetame kõvera kaare M_0M_1 keskmiseks kõveruseks.

Kui laseme punkti M_1 kõverat mööda piiramatult läheneda punktile M_0, siis $\Delta s \to 0$ ja $\Delta\varphi \to 0$. Kui nüüd $\Delta s \to 0$ puhul suhe $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ omab lõplikku piirväärtust

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds} = k,$$

siis see piirväärtus väljendab ruumilise kõvera kõverust punktis M_0, kusjuures kõveruse pöördväärtuse absoluutväärtus $\left|\frac{ds}{d\varphi}\right| = \varrho$ on ruumilise kõvera kõverusraadiuseks punktis M_0.

Et leida kõverat esitavate parameetriliste võrrandite ja nende tuletiste kaudu punktis M_0 kõvera kõverust k ja kõverusraadiust ϱ määravaid valemeid, selleks joonestame abivahendina kera, mille keskpunkt on koordinaatelgede nullpunktis ja mille raadius on 1, s. o. ühikkera (joon. 35). Tõmbame kera keskpunktist raadiuse OM_0', mis on paralleelne ja samasuunaline puutujaga M_0T_0, ja raadiuse OM_1', mis on paralleelne ja samasuunaline puutujaga M_1T_1. Siis vastab kõvera punktile M_0 sfääri punkt M_0' ja kõvera teisele punktile M_1 sfääri punkt M_1' ning kõvera kaare elemendile $M_0M_1 = \Delta s$ vastab sfäärilise kaare element $M_0'M_1' = \Delta\varphi$. See tähendab, et kui punkt M_0 liiguks antud kõverat mööda kuni punktini M_1 ja seejuures puutuja M_0T_0 jääks liikuvas punktis kogu aeg kõvera puutujaks, siis sfääri raadius OM_0' nihkuks edasi ja tema otspunkt M_0' kujundaks sfärilise kõvera kaare $M_0'M_1' = \Delta\varphi$. Seda sfärilise kõvera kaart nimetatakse puutuja sfääriliseks indikatrissiks.

Võtame kõvera kaare elemendi Δs ja puutuja sfärilise indikatrissi $\Delta\varphi$ asemel neile vastavad kõõlud $\overline{M_0M_1}$ ja $\overline{M_0'M_1'}$ ning märgime suhte $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ nende kõõlude kaudu järgmiselt:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{\overline{M_0'M_1'}}{\overline{M_0M_1}} \cdot \frac{\overline{M_0M_1}}{\Delta s} : \frac{\overline{M_0'M_1'}}{\Delta\varphi}.$$

Siin nagu tasapinnalise kõvera puhulgi (I osa, § 58, p. 1) saame näidata, et

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\overline{M_0M_1}}{\Delta s} = 1 \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\overline{M_0'M_1'}}{\Delta\varphi} = 1$$

ning seega (kui piirväärtus on olemas)

$$\lim_{M_0M_1 \to 0} \frac{\overline{M_0'M_1'}}{\overline{M_0M_1}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}.$$

Et raadius OM_0' on puutujaga M_0T_0 samasuunaline ja tema pikkus on 1, siis puutuja suunakoosinused a_1, b_1 ja c_1 on ühtlasi punkti M_0' ristkoordinaadid. Punkti M_1' ristkoordinaadid on siis $a_1 + \Delta a_1$, $b_1 + \Delta b_1$ ja $c_1 + \Delta c_1$.

Kõõlude $\overline{M_0M_1}$ ja $\overline{M_0'M_1'}$ pikkused on siin

$$\overline{M_0M_1} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

ja

$$\overline{M_0'M_1'} = \sqrt{\Delta a_1^2 + \Delta b_1^2 + \Delta c_1^2},$$

kusjuures

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \frac{\overline{M_0M_1}}{\Delta s} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$$

ja

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \cdot \frac{\overline{M_0'M_1'}}{\Delta \varphi} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a_1}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_1}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c_1}{\Delta t}\right)^2},$$

millede piirväärtused, kui $\Delta t \to 0$, on

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

ja

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\left(\frac{da_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_1}{dt}\right)^2},$$

sest kui x, y ja z, mis määravad ruumilise kõvera, on parameetri t pidevad funktsioonid, mis eelduse järgi omavad esimest ja teist järku pidevaid tuletisi, siis on ka a_1, b_1 ja c_1, mis määravad puutuja sfäärilise indikatrissi, pidevad ja t järgi diferentsitavad. Saadud võrdustest nähtub, et kõvera kaare diferentsiaal

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

ja puutuja sfäärilise indikatrissi diferentsiaal

$$d\varphi = \sqrt{da_1^2 + db_1^2 + dc_1^2}.$$

Kõvera kõverust k punktis M_0 saame seega avaldada järgmiselt:

$$k = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{da_1^2 + db_1^2 + dc_1^2}}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{da_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_1}{dt}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

Et punktis M_0 kõvera puutuja suunakoosinused on (§ 36, p. 2)

$$a_1 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}, \quad b_1 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}, \quad c_1 = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}},$$

siis

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{\dot{z}(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})-\dot{y}(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{db_1}{dt} = \frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})-\dot{z}(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dc_1}{dt} = \frac{\dot{y}(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})-\dot{x}(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ja

$$\left(\frac{da_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{db_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dc_1}{dt}\right)^2 =$$

$$= \frac{(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})^2+(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})^2+(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^2} =$$

$$= \frac{\left|\begin{matrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{matrix}\right|^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^2}.$$

Seega kõvera kõverus k punktis M_0 on

$$k = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\sqrt{\left|\begin{matrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{matrix}\right|^2}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ja kõverusraadius ϱ punktis M_0

$$\varrho = \frac{ds}{d\varphi} \frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\left|\begin{matrix}\dot{y} & \ddot{y}\\ \dot{z} & \ddot{z}\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}\dot{z} & \ddot{z}\\ \dot{x} & \ddot{x}\end{matrix}\right|^2+\left|\begin{matrix}\dot{x} & \ddot{x}\\ \dot{y} & \ddot{y}\end{matrix}\right|^2}}.$$

Kõverusraadiuse väärtus on lõplik suurus, kui vähemalt üks ruutjuure tähise all esinevatest determinantidest ei ole võrdne nulliga. Võttes lugejas ja nimetajas esinevate ruutjuurte väärtused plussmärgiga, saame nii kõvera kõveruse kui ka kõverusraadiuse väärtuse alati positiivse suurusena.

2) Kui lugeda kõvera kaar s parameetriks, s. o.

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s),$$

siis lihtsustuvad kõvera kõverust ja kõverusraadiust määravad valemid. Sel juhul puutuja suunakoosinused on

$$a_1 = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{ds} = x'(s),$$

$$b_1 = \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dy}{ds} = y'(s),$$

$$c_1 = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dz}{ds} = z'(s)$$

ja nende tuletised s järgi

$$\frac{da_1}{ds} = x''(s), \quad \frac{db_1}{ds} = y''(s), \quad \frac{dc_1}{ds} = z''(s).$$

Et

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1,$$

siis ka

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 + z'(s)^2 = 1,$$

mida s järgi diferentsides saame

$$x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) + z'(s)z''(s) = 0.$$

Seega vaadeldavas punktis kõvera kõverust määrav valem omandab lihtsama kuju

$$k = \frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{\begin{vmatrix} y'(s) & y''(s) \\ z'(s) & z''(s) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'(s) & z''(s) \\ x'(s) & x''(s) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix}^2} =$$

$$= \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2},$$

kusjuures kõverusraadius

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}}.$$

Kui parameetriks on kõvera kaar s, siis kõvera punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$, mis vastab parameetri väärtusele s_0, binormaali võrrand (§ 37) omandab kuju

$$\frac{x - x_0}{x''(s_0)} = \frac{y - y_0}{y''(s_0)} = \frac{z - z_0}{z''(s_0)}$$

ning kooldumistasapinna võrrand

$$x''(s_0)(x - x_0) + y''(s_0)(y - y_0) + z''(s_0)(z - z_0) = 0.$$

Peanormaali võrrandiks (§ 38) on sel juhul

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'(s_0) & y''(s_0) \\ z'(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z'(s_0) & z''(s_0) \\ x'(s_0) & x''(s_0) \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'(s_0) & x''(s_0) \\ y'(s_0) & y''(s_0) \end{vmatrix}}$$

ja sirgestajatasapinna võrrandiks

$$\begin{vmatrix} y'(s_0) & y''(s_0) \\ z'(s_0) & z''(s_0) \end{vmatrix} (x-x_0) + \begin{vmatrix} z'(s_0) & z''(s_0) \\ x'(s_0) & x''(s_0) \end{vmatrix} (y-y_0) +$$

$$+ \begin{vmatrix} x'(s_0) & x''(s_0) \\ y'(s_0) & y''(s_0) \end{vmatrix} (z-z_0) = 0.$$

§ 40. Kõveruse keskpunkt. Kõveruse keskpunkt $K(\xi, \eta, \zeta)$ ruumilise kõvera punkti $M(x, y, z)$ suhtes asetseb peanormaalil kõvera nõgususe poolel ϱ ühiku kaugusel punktist M. Kõveruse keskpunkt asetseb seega kooldumistasapinnal. Kooldumistasapinnal asetsev ringjoon, mille keskpunktiks on K ja raadiuseks ϱ ja mis läbib punkti M, on kõvera k õ v e r u s r i n g j o o n punkti M suhtes.

Et leida parameetriliste võrranditega

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

määratud kõvera kõveruse keskpunkt $K(\xi, \eta, \zeta)$ punkti $M(x, y, z)$ suhtes, selleks võtame punktide K ja M vahelise kauguse (kui kõverusraadiuse) ruutu väljendava valemi

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Et punktid K ja M asetsevad peanormaalil, siis peavad nende punktide koordinaadid rahuldama peanormaali võrrandit, s. o.

$$\frac{x-\xi}{l} = \frac{y-\eta}{m} = \frac{z-\zeta}{n},$$

kus peanormaali sihitegurid

$$l = \dot{y}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} - \dot{z}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}, \quad m = \dot{z}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} - \dot{x}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix},$$

$$n = \dot{x}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix} - \dot{y}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}.$$

Paigutame peanormaali võrrandist $y-\eta$ ja $z-\zeta$ väärtused

$$y-\eta = \frac{m}{l}(x-\xi) \quad \text{ja} \quad z-\zeta = \frac{n}{l}(x-\xi)$$

kõverusraadiuse ruutu väljendavasse valemisse; saame

$$\varrho^2 = (x-\xi)^2 + \frac{m^2}{l^2}(x-\xi)^2 + \frac{n^2}{l^2}(x-\xi)^2,$$

millest

$$\xi = x - \frac{\varrho l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Et $\frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ on peanormaali suunakoosinus a_3, siis kõveruse keskpunkti abstsiss

$$\xi = x - \varrho a_3.$$

Analoogilise võttega saame leida kõveruse keskpunkti teised koordinaadid (ordinaadi ja aplikaadi) peanormaali suunakoosinuste b_3 ja c_3 kaudu, s. o.

$$\eta = y - \varrho b_3,\ \zeta = z - \varrho c_3.$$

Peanormaali suunakoosinused a_3, b_3 ja c_3 on samad mis puutuja sfäärilise indikatrissi punktis $M'(a_1, b_1, c_1)$ indikatrissile tõmmatud puutuja suunakoosinused, kui ainult indikatrissi puutuja on peanormaaliga samasuunaline. Kui siin kõvera kaar s lugeda parameetriks, s. o.

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s),$$

siis punktis $M(x, y, z)$ kõvera puutuja suunakoosinused a_1, b_1 ja c_1 on kaare s järgi (§ 39, p. 2)

$$a_1 = x'(s),\ b_1 = y'(s),\ c_1 = z'(s).$$

Vastavalt sellele on punktis $M'(a_1, b_1, c_1)$ sfäärilise indikatrissi puutuja suunakoosinused a_3, b_3 ja c_3 kaare φ järgi

$$a_3 = \frac{da_1}{d\varphi},\ b_3 = \frac{db_1}{d\varphi},\ c_3 = \frac{dc_1}{d\varphi}.$$

Et kõverusraadius punktis M on $\varrho = \left|\frac{ds}{d\varphi}\right|$, siis peanormaali suunakoosinusi a_3, b_3 ja c_3 saame esitada kõvera kaare s kaudu järgmiselt:

$$a_3 = \varrho \frac{da_1}{ds},\ b_3 = \varrho \frac{db_1}{ds},\ c_3 = \varrho \frac{dc_1}{ds}$$

ehk (§ 39, p. 2)

$$a_3 = \varrho x''(s),\ b_3 = \varrho y''(s),\ c_3 = \varrho z''(s).$$

Sel juhul kõvera kõveruse keskpunkti koordinaadid on

$$\xi = x - \varrho^2 x''(s),\ \eta = y - \varrho^2 y''(s),\ \zeta = z - \varrho^2 z''(s)$$

ehk

$$\xi = x - \frac{x''(s)}{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2},$$

$$\eta = y - \frac{y''(s)}{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2},$$

$$\zeta = z - \frac{z''(s)}{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2},$$

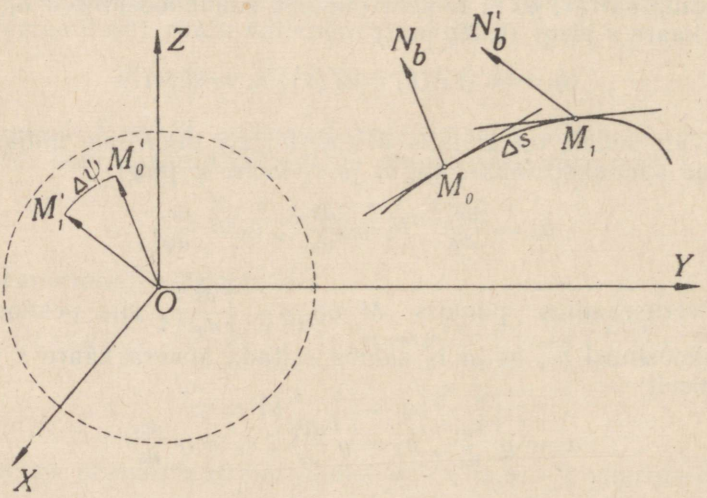
sest (§ 39, p. 2)

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}}.$$

§ 41. Kõvera vääne ja väänderaadius. Oletame, et ruumilist kõverat esitavad vaadeldavas piirkonnas parameetrilised võrrandid

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

kus $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$ omavad esimest, teist ja kolmandat järku pidevaid tuletisi. Vastaku selles piirkonnas parameetri t väärtusele t_0 kõveral punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ja parameetri väärtusele $t_0 + \Delta t$ punkt $M_1(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z)$. Joonestame nendele punktidele vastavad binormaalid M_0N_b ja M_1N_b' (joon. 36),



Joon. 36.

millede vaheline nurk olgu $\Delta\psi$. Kui binormaali M_0N_b suunakoosinused on a_2, b_2 ja c_2, siis binormaali M_1N_b' suunakoosinused on $a_2 + \Delta a_2$, $b_2 + \Delta b_2$ ja $c_2 + \Delta c_2$. Edasi joonestame ühikkera, mille keskpunkt on nullpunktis. Tõmbame kera keskpunktist raadiuse

OM_0', mis on paralleelne ja samasuunaline binormaaliga M_0N_b, ja raadiuse OM_1', mis on paralleelne ja samasuunaline binormaaliga M_1N_b'. Siis vastab kõvera punktile M_0 sfääri punkt M_0' ja kõvera punktile M_1 sfääri punkt M_1' ning kõvera kaare elemendile $M_0M_1 = \Delta s$ vastab sfäärilise kaare element $M_0'M_1' = \Delta\psi$, mis on binormaali sfääriliseks indikatrissiks. Suhet $\frac{\Delta\psi}{\Delta s}$ nimetame kõvera kaare M_0M_1 keskmiseks väändeks.

Kui nüüd punkt M_1 piiramatult läheneb kõverat mööda punktile M_0, siis läheneb ka punkt M_1' piiramatult binormaali sfäärilist indikatrissi mööda punktile M_0', s. o. kui $\Delta s \to 0$, siis ka $\Delta\psi \to 0$. Kui seejuures $\Delta s \to 0$ puhul suhe $\frac{\Delta\psi}{\Delta s}$ omab lõplikku piirväärtust $\frac{d\psi}{ds}$, siis nimetame seda piirväärtust ruumilise kõvera väändeks punktis M_0, kusjuures väände pöördväärtuse absoluutväärtus $\left|\frac{ds}{d\psi}\right|$ on ruumilise kõvera väänderaadiuseks punktis M_0.

Et raadius OM_0' on binormaaliga M_0N_b samasuunaline ja tema pikkus on 1, siis binormaali suunakoosinused a_2, b_2 ja c_2 on ühtlasi punkti M_0' ristkoordinaadid. Punkti M_1' ristkoordinaadid on siis $a_2 + \Delta a_2$, $b_2 + \Delta b_2$ ja $c_2 + \Delta c_2$. Binormaali sfäärilise indikatrissi elemendile $\Delta\psi$ vastab siin kõõl

$$\overline{M_0'M_1'} = \sqrt{\Delta a_2^2 + \Delta b_2^2 + \Delta c_2^2},$$

kusjuures

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta t} \cdot \frac{\overline{M_0'M_1'}}{\Delta\psi} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a_2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b_2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c_2}{\Delta t}\right)^2},$$

mille piirväärtus (eelmise paragrahvi kohaselt)

$$\frac{d\psi}{dt} = \sqrt{\left(\frac{da_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{dt}\right)^2},$$

kusjuures

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Seega kõvera väänet punktis M_0 saame väljendada järgmiselt:

$$\frac{d\psi}{ds} = \frac{\sqrt{\left(\frac{da_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{db_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{dt}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

Kui kõvera kaar s lugeda parameetriks, s. o.

$$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s),$$

siis

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

ja kõvera vääne

$$\frac{d\psi}{ds} = \sqrt{\left(\frac{da_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{ds}\right)^2}.$$

Et parameetri s puhul kõverusraadius kaare s funktsioonina on (§ 39, p. 2)

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}}$$

ja binormaali suunakoosinused

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} y'(s) & y''(s) \\ z'(s) & z''(s) \end{vmatrix}}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}} = \varrho\,[y'(s)z''(s) - y''(s)z'(s)],$$

$$b_2 = \frac{\begin{vmatrix} z'(s) & z''(s) \\ x'(s) & x''(s) \end{vmatrix}}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}} = \varrho\,[z'(s)x''(s) - z''(s)x'(s)],$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix}}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}} = \varrho\,[x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)],$$

siis

$$\frac{da_2}{ds} = \frac{d\varrho}{ds}\,[y'(s)z''(s) - y''(s)z'(s)] +$$
$$+ \varrho\,[y'(s)z'''(s) - y'''(s)z'(s)] =$$
$$= \frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix} y'(s) & y''(s) \\ z'(s) & z''(s) \end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix} y'(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z'''(s) \end{vmatrix},$$

$$\frac{db_2}{ds} = \frac{d\varrho}{ds}\,[z'(s)x''(s) - z''(s)x'(s)] +$$
$$+ \varrho\,[z'(s)x'''(s) - z'''(s)x'(s)] =$$
$$= \frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix} z'(s) & z''(s) \\ x'(s) & x''(s) \end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix} z'(s) & z'''(s) \\ x'(s) & x'''(s) \end{vmatrix},$$

$$\frac{dc_2}{ds} = \frac{d\varrho}{ds}\,[x'(s)y''(s) - x''(s)y'(s)] +$$
$$+ \varrho\,[x'(s)y'''(s) - x'''(s)y'(s)] =$$
$$= \frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix} x'(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y'''(s) \end{vmatrix}.$$

Et binormaali ja peanormaali suunakoosinuste suhtes kehtib võrdus

$$a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = 0,$$

kusjuures (§ 40)

$$a_3 = \varrho x''(s),\ b_3 = \varrho y''(s),\ c_3 = \varrho z''(s),$$

siis

$$a_2x''(s) + b_2y''(s) + c_2z''(s) = 0.$$

Diferentsides võrdust

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1$$

parameetri s järgi, saame

$$a_2\frac{da_2}{ds} + b_2\frac{db_2}{ds} + c_2\frac{dc_2}{ds} = 0,$$

millest nähtub, et $\frac{da_2}{ds}$, $\frac{db_2}{ds}$ ja $\frac{dc_2}{ds}$ on võrdelised teist järku tuletistega $x''(s)$, $y''(s)$ ja $z''(s)$, s. o.

$$\frac{da_2}{ds} = \lambda x''(s),\quad \frac{db_2}{ds} = \lambda y''(s),\quad \frac{dc_2}{ds} = \lambda z''(s),$$

kus λ on võrdeteguriks. Seega

$$\lambda x''(s) = \frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix} y'(s) & y''(s) \\ z'(s) & z''(s) \end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix} y'(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z'''(s) \end{vmatrix},$$

$$\lambda y''(s) = \frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix} z'(s) & z''(s) \\ x'(s) & x''(s) \end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix} z'(s) & z'''(s) \\ x'(s) & x'''(s) \end{vmatrix},$$

$$\lambda z''(s) = \frac{d\varrho}{ds}\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) \\ y'(s) & y''(s) \end{vmatrix} + \varrho\begin{vmatrix} x'(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y'''(s) \end{vmatrix}.$$

Korrutades esimese võrduse mõlemad pooled $x''(s)$-ga, teise võrduse mõlemad pooled $y''(s)$-ga ja kolmanda võrduse mõlemad pooled $z''(s)$-ga ning liites tulemused, saame

$$\lambda[x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2] =$$

$$= \varrho\left[\begin{vmatrix} y'(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z'''(s) \end{vmatrix}x''(s) + \begin{vmatrix} z'(s) & z'''(s) \\ x'(s) & x'''(s) \end{vmatrix}y''(s) + \begin{vmatrix} x'(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y'''(s) \end{vmatrix}z''(s)\right] =$$

$$= -\varrho\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z''(s) & z'''(s) \end{vmatrix},$$

millest (§ 40)

$$\lambda = -\varrho^3\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}.$$

Et

$$\left(\frac{da_2}{ds}\right)^2 = \lambda^2 x''(s)^2,\ \left(\frac{db_2}{ds}\right)^2 = \lambda^2 y''(s)^2,\ \left(\frac{dc_2}{ds}\right)^2 = \lambda^2 z''(s)^2,$$

siis nende summa

$$\left(\frac{da_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{ds}\right)^2 = \lambda^2[x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2] = \frac{\lambda^2}{\varrho^2}.$$

Seega kõvera vääne

$$\frac{d\psi}{ds} = \sqrt{\left(\frac{da_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{db_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dc_2}{ds}\right)^2} = \frac{\lambda}{\varrho} =$$

$$= -\varrho^2 \begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}$$

ehk

$$\frac{d\psi}{ds} = -\frac{\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}}{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}$$

ja väänderaadius

$$r = \left|\frac{ds}{d\psi}\right| = -\frac{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}{\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}}.$$

Saadud valemites osutub determinandi väärtus positiivseks, kui kõver on väänatud paremale poole, ja negatiivseks, kui kõver on väänatud vasakule poole. Järelikult parempoolse väände puhul saame vaadeldavas kõvera punktis kõvera vääne väärtuse negatiivse suurusena ja vasakpoolse väände puhul positiivse suurusena. Kuid me võime nii kõvera vääne kui ka väänderaadiuse väärtust igal juhul määrata absoluutväärtusena, võttes selleks determinandi väärtuse selle märgiga, mille puhul nii kõvera vääne kui ka väänderaadiuse väärtus osutub positiivseks.

Kui ruumilist kõverat esitavad mistahes parameetri t funktsioonid, s. o.

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

mis omavad esimest, teist ja kolmandat järku pidevaid tuletisi, siis punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ kõvera vääne leidmiseks tähistame

$$x'(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}},$$

$$y'(s) = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{s}},$$

$$z'(s) = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{\dot{z}}{\dot{s}},$$

kus nüüd teist ja kolmandat järku tuletised on (I osa, § 42)

$$x''(s) = \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\dot{s}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{s}}{\dot{s}^3} = \frac{\ddot{x}}{\dot{s}^2} - \frac{\dot{x}\ddot{s}}{\dot{s}^3},$$

$$y''(s) = \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\dot{s}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{s}}{\dot{s}^3} = \frac{\ddot{y}}{\dot{s}^2} - \frac{\dot{y}\ddot{s}}{\dot{s}^3},$$

$$z''(s) = \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\dot{s}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{s}}{\dot{s}^3} = \frac{\ddot{z}}{\dot{s}^2} - \frac{\dot{z}\ddot{s}}{\dot{s}^3}$$

$$x'''(s) = \frac{\dot{s}(\dot{s}\dddot{x} - \dot{x}\dddot{s}) - 3\ddot{s}(\dot{s}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{s})}{\dot{s}^5} =$$

$$= \frac{\dddot{x}}{\dot{s}^3} - \frac{3\ddot{s}\ddot{x}}{\dot{s}^4} + \frac{(3\ddot{s}^2 - \dot{s}\dddot{s})\dot{x}}{\dot{s}^5},$$

$$y'''(s) = \frac{\dot{s}(\dot{s}\dddot{y} - \dot{y}\dddot{s}) - 3\ddot{s}(\dot{s}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{s})}{\dot{s}^5} =$$

$$= \frac{\dddot{y}}{\dot{s}^3} - \frac{3\ddot{s}\ddot{y}}{\dot{s}^4} + \frac{(3\ddot{s}^2 - \dot{s}\dddot{s})\dot{y}}{\dot{s}^5},$$

$$z'''(s) = \frac{\dot{s}(\dot{s}\dddot{z} - \dot{z}\dddot{s}) - 3\ddot{s}(\dot{s}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{s})}{\dot{s}^5} =$$

$$= \frac{\dddot{z}}{\dot{s}^3} - \frac{3\ddot{s}\ddot{z}}{\dot{s}^4} + \frac{(3\ddot{s}^2 - \dot{s}\dddot{s})\dot{z}}{\dot{s}^5}.$$

Paigutades saadud väärtused eespool leitud kõvera väände valemis esineva determinandi elementide $x'(s)$, $x''(s)$, $x'''(s)$ jne. asemele ja arvestades ühtlasi determinantide omadusi, näeme, et

$$\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z''(s) & z'''(s) \end{vmatrix} = \frac{1}{\dot{s}^6} \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} & \dddot{z} \end{vmatrix}.$$

Et

$$\dot{s}^6 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3$$

ja kõvera väände valemi nimetaja

$$x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2 = \frac{1}{\varrho^2} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3},$$

siis parameetriliste võrranditega

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$$

määratud kõvera väänet vaadeldavas kõvera punktis määrab valem

$$\frac{d\psi}{ds} = -\frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2},$$

kusjuures vänderaadius

$$r = -\frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} & \dddot{z} \end{vmatrix}}.$$

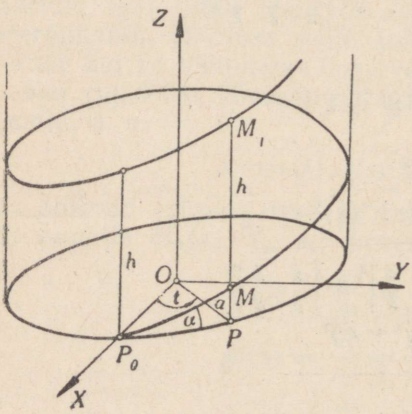
Kui siinjuures

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} & \dddot{z} \end{vmatrix} = 0,$$

siis on ka kõvera vääne igas tema punktis võrdne nulliga. Sel juhul kõver asetseb ühel ja samal tasapinnal, ja nimelt kooldumistasapinnal, mis on ühiseks tasapinnaks kõvera iga punkti puhul.

Kui aga ruumiline kõver ei asetse ühel ja samal tasapinnal, siis ütleme, et kõveral on kahekordne kõverus, kusjuures kõvera vääne on siis kõvera teiseks kõveruseks.

§ 42. Kruvijoon. 1) Kui punkt $M(x, y, z)$ liigub silindrilisel pinnal nõnda, et translatoorne ja rotatoorne liikumine on ühtlane, siis tekib ruumiline kõver, mida nimetatakse harilikuks kruvijooneks. Kui seejuures XYZ-teljestikus Z-telg võtta ringsilindri sümmeetriateljeks ehk kesksirgeks, siis on kruvijoone põhiprojektsiooniks XY-tasapinnal ringjoon, mille raadius olgu a (joon. 37). Tähendab, kui punkt $M(x, y, z)$ liigub kruvijoont mööda, siis tema projektsioon $P(x, y)$ liigub tähendatud ringjoont mööda. Et punkti M translatoorne ja rotatoorne liikumine on ühtlane, siis puutuja kruvijoone igas punktis moodustab XY-tasapinnaga ühe ja sama nurga α ja järelikult ka Z-teljega ühe ja sama nurga $\frac{\pi}{2} - \alpha$.



Joon. 37.

Käesoleval joonisel esineb parempoolse käiguga kruvijoon, mille algpunktiks X-telje positiivsel osal on punkt P_0. Valime parameetriks t nurga, mille raadius a moodustab X-telje positiivse suunaga, s. o. $\widehat{P_0OP} = t$. Siis

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t$$

ja punkti M vertikaalne nihe $z = ct$, kus c on konstantseks võrdeteguriks, sest z kasvab võrdeliselt nurgaga t, s. o. $\frac{z}{t} = c$. Kui punkt M teeb täispöörde, s. o. liigub punktist M punkti M_1, siis nurk t kasvab 2π võrra ja z omandab kasvu $2\pi c = h$, mis on kruvijoone käigu kõrguseks. Et $h = 2\pi a \operatorname{tg}\alpha$, siis

$$c = \frac{h}{2\pi} = a\operatorname{tg}\alpha \text{ ja } z = at\operatorname{tg}\alpha.$$

Kruvijoone parameetrilised võrrandid on seega

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at\operatorname{tg}\alpha,$$

kus a on kruvijoone projektsiooni raadius ja $\operatorname{tg}\alpha$ on kruvijoone tõus.

2) Võtame näitena käsitletud kruvijoone ja leiame selle kruvijoone puutuja ja normaaltasapinna, binormaali ja kooldumistasapinna, peanormaali ja sirgestajatasapinna võrrandid ning kruvijoone kõveruse ja väände väärtused. Selleks diferentsime kruvijoont esitavaid parameetrilisi võrrandeid

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at\operatorname{tg}\alpha,$$

saades

$$\dot{x} = -a\sin t,\ \dot{y} = a\cos t,\ \dot{z} = a\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\ddot{x} = -a\cos t,\ \ddot{y} = -a\sin t,\ \ddot{z} = 0,$$
$$\dddot{x} = a\sin t,\ \dddot{y} = -a\cos t,\ \dddot{z} = 0,$$

ja asetame need väärtused eelmistes paragrahvides leitud vastavatesse valemitesse.

Kruvijoone puutujat punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$, mis vastab parameetri t väärtusele t_0, määrab seega võrrand

$$\frac{x - x_0}{-\sin t_0} = \frac{y - y_0}{\cos t_0} = \frac{z - z_0}{\operatorname{tg}\alpha}$$

ja normaaltasapinda võrrand

$$(x - x_0)\sin t_0 - (y - y_0)\cos t_0 - (z - z_0)\operatorname{tg}\alpha = 0,$$

kusjuures puutuja suunakoosinused on

$$a_1 = -\frac{\sin t_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = -\cos \alpha \sin t_0,$$

$$b_1 = \frac{\cos t_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \cos \alpha \cos t_0,$$

$$c_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sin \alpha,$$

millest nähtub samuti, et puutuja moodustab Z-teljega konstantse nurga.

Kruvijoone binormaal punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ on

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ a\operatorname{tg}\alpha & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} a\operatorname{tg}\alpha & 0 \\ -a\sin t_0 & -a\cos t_0 \end{vmatrix}} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} -a\sin t_0 & -a\cos t_0 \\ a\cos t_0 & -a\sin t_0 \end{vmatrix}},$$

s. o.

$$\frac{x-x_0}{\operatorname{tg}\alpha \sin t_0} = \frac{y-y_0}{-\operatorname{tg}\alpha \cos t_0} = \frac{z-z_0}{1}$$

ehk

$$\frac{x-x_0}{\sin t_0} = \frac{y-y_0}{-\cos t_0} = \frac{z-z_0}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

ning kooldumistasapinna võrrand

$$(x-x_0)\sin t_0 - (y-y_0)\cos t_0 + (z-z_0)\operatorname{ctg}\alpha = 0,$$

kusjuures binormaali suunakoosinused on

$$a_2 = \frac{\sin t_0}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \sin \alpha \sin t_0,$$

$$b_2 = -\frac{\cos t_0}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = -\sin \alpha \cos t_0,$$

$$c_2 = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 \alpha}} = \cos \alpha,$$

millest nähtub, et kruvijoone binormaal moodustab Z-teljega samuti konstantse nurga.

Kruvijoone peanormaal punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ on

$$\frac{x-x_0}{a\cos t_0 \begin{vmatrix} -a\sin t_0 & -a\cos t_0 \\ a\cos t_0 & -a\sin t_0 \end{vmatrix} - a\operatorname{tg}\alpha \begin{vmatrix} a\operatorname{tg}\alpha & 0 \\ -a\sin t_0 & -a\cos t_0 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{y-y_0}{a\operatorname{tg}\alpha \begin{vmatrix} a\cos t_0 & -a\sin t_0 \\ a\operatorname{tg}\alpha & 0 \end{vmatrix} + a\sin t_0 \begin{vmatrix} -a\sin t_0 & -a\cos t_0 \\ a\cos t_0 & -a\sin t_0 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{z - z_0}{-a \sin t_0 \begin{vmatrix} a \operatorname{tg} \alpha & 0 \\ -a \sin t_0 & -a \cos t_0 \end{vmatrix} - a \cos t_0 \begin{vmatrix} a \cos t_0 & -a \sin t_0 \\ a \operatorname{tg} \alpha & 0 \end{vmatrix}},$$

s. o.

$$\frac{x - x_0}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos t_0} = \frac{y - y_0}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \sin t_0} = \frac{z - z_0}{0}$$

ehk

$$\frac{x - x_0}{\cos t_0} = \frac{y - y_0}{\sin t_0} = \frac{z - z_0}{0},$$

ja sirgestajatasapinna võrrand

$$(x - x_0) \cos t_0 + (y - y_0) \sin t_0 = 0,$$

kusjuures peanormaali suunakoosinused on

$$a_3 = \cos t_0; \quad b_3 = \sin t_0, \quad c_3 = 0.$$

Punktis $M_0(x_0, y_0, z_0)$ kruvijoone kõverus

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{a^3 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{a}$$

ja vääne

$$\frac{1}{r} = -\frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2} =$$

$$= -\frac{a^3 \operatorname{tg} \alpha}{a^4 (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{a},$$

millest nähtub, et kruvijoone igas punktis on kruvijoone kõverusel ja väändel konstantne väärtus, kusjuures kruvijoone vääne on parempoolne.

Siit ilmneb ühtlasi, et kruvijoone väände ja kõveruse suhte absoluutväärtus määrab kruvijoone tõusu, s. o.

$$\left| \frac{\varrho}{r} \right| = \operatorname{tg} \alpha.$$

§ 43. Harjutusülesandeid.

1. Leida võrranditega

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 = 9, \quad 3x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

esitatud kõvera puutuja ja normaaltasapind punktis $(1, -1, 2)$.

2. Leida võrranditega

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad z = 4 \sin \frac{t}{2}.$$

esitatud kõvera puutuja ja normaaltasapind, kui $t = \pi$.

3. Leida võrranditega

$$x^3 - y = 0, \quad x^2 - z = 0$$

esitatud kõvera puutuja, mis on paralleelne sirgega

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{12} = \frac{z-5}{4}.$$

4. Leida võrranditega

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

esitatud kõvera kooldumistasapind ja binormaal ning sirgestajatasapind ja peanormaal, kui $t = 2$.

5. Leida võrranditega

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t, \quad z = e^t$$

esitatud kõvera kõverusraadius.

6. Leida võrranditega

$$x = \frac{1}{2} \sin^2 t, \quad y = \frac{1}{2} (t + \sin t \cos t), \quad z = \sin t$$

esitatud kõvera väänderaadius.

7. Näidata, et võrranditega

$$x = t \cos^2 t, \quad 2y = t \sin^2 t, \quad 3z = t + 1$$

esitatud kõver kuulub tasapinnaliste kõverate hulka.

XI peatükk

MITMEKORDSED INTEGRAALID

§ 44. Määratud integraal parameetri funktsioonina. 1) Olgu kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ pidev piirkonnas, mis on määratud tingimustega

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ ja } c \leqslant y \leqslant d.$$

See tähendab, et $f(x, y)$ on pidev tõkestatud kinnises ristkülikulises piirkonnas $[a, b; c, d]$. Kui valime vahemikus $[c, d]$ y-le mingi kindla väärtuse, siis muutub $f(x, y)$ ühe muutuja x pidevaks funktsiooniks vahemikus $[a, b]$ ning selle funktsiooni integraali

$$\int_a^b f(x, y)\,dx$$

väärtus sõltub valitud y väärtusest. Et vahemikus $[c, d]$ võime valida mistahes y väärtuse, millest sõltub integraali väärtus, siis seega võime integraali vaadelda kui y funktsiooni, mis on määratud vahemikus $[c, d]$. Tähistame selle funktsiooni sümboliga $\varphi(y)$, nii et

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

Muutuvat suurust y, millest sõltub inteegritav funktsioon $f(x, y)$, kuid mida inteegrimisel vaadeldakse kui fikseeritud kindlat suurust, nimetatakse muutuvaks parameetriks ja funktsiooni $\varphi(y)$ parameetri y funktsiooniks.

Näitame, et $\varphi(y)$ on vahemikus $[c, d]$ pidev y funktsioon, kui inteegritav funktsioon $f(x, y)$ on pidev inteegrimismuutuja x ja parameetri y iga väärtuse puhul, mis asetsevad vastavalt vahemikes $[a, b]$ ja $[c, d]$.

Võtame vahemikus $[c, d]$ punktid y ja $y + \Delta y$, millede puhul

$$\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) = \int_a^b f(x, y + \Delta y)\,dx - \int_a^b f(x, y)\,dx =$$

$$= \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\,dx$$

ning (I osa, § 70, p. 7, järeldus 3)

$$|\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)| \leqslant \int_a^b |f(x, y+\Delta y) - f(x, y)|\, dx.$$

Et eelduse järgi funktsioon $f(x, y)$ on pidev tõkestatud kinnises piirkonnas $[a, b; c, d]$, siis selles piirkonnas funktsiooni $f(x, y)$ pidevus on ühtlane (§ 17, p. 3), mille tõttu saame kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul määrata teise positiivse arvu δ nõnda, et selles piirkonnas punktide (x, y) ja $(x, y+\Delta y)$ puhul kehtib võrratus

$$|f(x, y+\Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

kui nende punktide kaugus teineteisest $|\Delta y| < \delta$. Seega

$$|\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)| \leqslant \int_a^b |f(x, y+\Delta y) - f(x, y)|\, dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon$$

ehk

$$\lim_{\Delta y \to 0} [\varphi(y+\Delta y) - \varphi(y)] = 0,$$

millest nähtub, et $\varphi(y)$ on vahemikus $[c, d]$ parameetri y pidev funktsioon.

Kui siin inteegritav funktsioon $f(x, y)$ omab piirkonnas $[a, b; c, d]$ parameetri y järgi ühtlasi pidevat osatuletist $f_y(x, y)$, siis diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi põhjal

$$f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = \Delta y \cdot f_y(x, y+\Theta\Delta y),$$

kus $0 < \Theta < 1$, ja seega

$$\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \int_a^b \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\, dx =$$

$$= \int_a^b f_y(x, y+\Theta\Delta y)\, dx.$$

Et funktsiooni $f_y(x, y)$ pidevuse tõttu saame kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul määrata teise positiivse arvu δ nõnda, et võrratus

$$|f_y(x, y+\Delta y) - f_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

kehtib ikka iga Δy puhul, kui $|\Delta y| < \delta$, kusjuures $y+\Delta y$ kuulub

vahemikku $[c, d]$, siis seda enam

$$|f_y(x, y + \Theta\Delta y) - f_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

s. o.

$$f_y(x, y) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f_y(x, y + \Theta\Delta y) < f_y(x, y) + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ja seega

$$\int_a^b f_y(x, y)dx - \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx < \int_a^b f_y(x, y + \Theta\Delta y)dx < \int_a^b f_y(x, y)dx + \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx$$

ehk

$$\int_a^b f_y(x, y)dx - \varepsilon < \int_a^b f_y(x, y + \Theta\Delta y)dx < \int_a^b f_y(x, y)dx + \varepsilon,$$

millest järeldub, et

$$\varphi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \int_a^b f_y(x, y + \Theta\Delta y)dx = \int_a^b f_y(x, y)dx.$$

Sellest nähtub, et parameetri y funktsiooni $\varphi(y)$, mis on kujutatud määratud integraalina $\int_a^b f(x, y)dx$, võime diferentsida nii, et diferentsime parameetri y järgi inteegritavat funktsiooni $f(x, y)$, s. o.

$$\varphi'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx.$$

Kui käesoleval juhul integraali

$$\int_a^b f(x, y)dx$$

ülemise inteegrimisraja b loeme muutuvaks suuruseks x, siis saame analoogiliselt eelnevale näidata, et integraal

$$\int_a^x f(x, y)dx = \varphi(x, y)$$

kujutab vahemikes $a \leqslant x \leqslant b$ ja $c \leqslant y \leqslant d$ ülemise raja x ja parameetri y pidevat funktsiooni. Diferentsides seda funktsiooni parameetri y järgi, saaksime analoogiliselt eelnevale, et

$$\varphi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_a^x f(x, y)dx = \int_a^x \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}dx,$$

kusjuures

$$\varphi_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(x, y)dx = f(x, y).$$

2) Kui integraalis

$$\int_a^b f(x, y)\,dx,$$

kus inteegritav funktsioon $f(x, y)$ on piirkonnas $[a, b; c, d]$ inteegrimismuutuja x ja parameetri y pidev funktsioon, inteegrimisrajad sõltuvad parameetrist y, s. o.

$$a = \varphi_1(y), \quad b = \varphi_2(y),$$

mis on vahemikus $[c, d]$ pidevad y funktsioonid, siis integraal

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx = \varphi[y, \varphi_1(y), \varphi_2(y)] = \Phi(y)$$

kujutab inteegritava funktsiooni ning ülemise ja alumise inteegrimisraja kaudu parameetri y liitfunktsiooni. See on samuti vahemikus $[c, d]$ pidev y funktsioon, sest kui y ja $y + \Delta y$ kuuluvad vahemikku $[c, d]$, siis

$$\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y) = \int_{\varphi_1(y+\Delta y)}^{\varphi_2(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\,dx - \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

Esitades selle võrduse esimese integraali kujul

$$\int_{\varphi_1(y+\Delta y)}^{\varphi_2(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\,dx = \int_{\varphi_1(y+\Delta y)}^{\varphi_1(y)} f(x, y + \Delta y)\,dx + \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y + \Delta y)\,dx + \int_{\varphi_2(y)}^{\varphi_2(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\,dx,$$

saame

$$\Phi(y + \Delta y) - \Phi(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\,dx - \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\,dx + \int_{\varphi_2(y)}^{\varphi_2(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\,dx.$$

Et $\Delta y \to 0$ puhul viimase võrduse paremal poolel esimese integraali rajad jäävad konstantseteks suurusteks, siis (p. 1 põhjal)

$$\lim_{\Delta y \to 0} \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]\,dx = 0$$

ning rakendades kahe viimase integraali suhtes integraalarvutuse keskväärtuse teoreemi (I osa, § 71, p. 1), saame

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_1(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\,dx = \Delta\varphi_1 \cdot f[\varphi_1(y) + \Theta_1 \Delta\varphi_1, y + \Delta y],$$

$$\int_{\varphi_2(y)}^{\varphi_2(y+\Delta y)} f(x, y + \Delta y)\,dx = \Delta\varphi_2 \cdot f[\varphi_2(y) + \Theta_2 \Delta\varphi_2, y + \Delta y],$$

kus $\Delta\varphi_1 = \varphi_1(y+\Delta y) - \varphi_1(y)$ ja $\Delta\varphi_2 = \varphi_2(y+\Delta y) - \varphi_2(y)$ ning $0 < \Theta_1 < 1$ ja $0 < \Theta_2 < 1$, kusjuures $\varphi_1(y) + \Theta_1\Delta\varphi_1$ asetseb $\varphi_1(y)$ ja $\varphi_1(y+\Delta y)$ vahel ning $\varphi_2(y) + \Theta_2\Delta\varphi_2$ asetseb $\varphi_2(y)$ ja $\varphi_2(y+\Delta y)$ vahel. Et funktsioonide $\varphi_1(y)$ ja $\varphi_2(y)$ pidevuse tõttu $\Delta y \to 0$ puhul $\Delta\varphi_1 \to 0$ ja $\Delta\varphi_2 \to 0$, siis järelikult

$$\lim_{\Delta y \to 0} \{\Delta\varphi_1 \cdot f[\varphi_1(y) + \Theta_1\Delta\varphi_1,\ y+\Delta y]\} = 0$$

ja

$$\lim_{\Delta y \to 0} \{\Delta\varphi_2 \cdot f[\varphi_2(y) + \Theta_2\Delta\varphi_2,\ y+\Delta y]\} = 0$$

ning seega ühtlasi

$$\lim_{\Delta y \to 0} [\Phi(y+\Delta y) - \Phi(y)] = 0,$$

millest nähtub, et $\Phi(y)$ on vahemikus $[c, d]$ parameetri y pidev funktsioon.

Kui siin inteegrimisrajad $\varphi_1(y)$ ja $\varphi_2(y)$ kui parameetri y funktsioonid on diferentsitavad vahemikus $[c, d]$ ning inteegritav funktsioon $f(x, y)$ omab piirkonnas $[a, b; c, d]$ pidevat osatuletist $f_y(x, y)$, siis eelneva põhjal

$$\frac{\Phi(y+\Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}\, dx -$$

$$- f[\varphi_1(y) + \Theta_1\Delta\varphi_1,\ y+\Delta y]\ \frac{\Delta\varphi_1}{\Delta y} + f[\varphi_2(y) + \Theta_2\Delta\varphi_2,\ y+\Delta y]\ \frac{\Delta\varphi_2}{\Delta y}$$

ja

$$\Phi'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Phi(y+\Delta y) - \Phi(y)}{\Delta y} =$$

$$= \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y}\, dx - f[\varphi_1(y),\ y]\varphi_1'(y) + f[\varphi_2(y),\ y]\varphi_2'(y).$$

millest nähtub, et funktsioon

$$\Phi(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,\ y)\, dx$$

on esitatud tingimuste kohaselt diferentsitav vahemikus $[c, d]$.

3) Integraali

$$\int_a^b f(x,\ y)\, dx$$

käsitlemisel oletasime kogu aeg, et inteegrimisrajad a ja b on

lõplikud suurused. Oletame nüüd, et ülemine inteegrimisraja $b \to \infty$, s. o.

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^\infty f(x, y)dx,$$

kusjuures eeldame ühtlasi, et see integraal iga y väärtuse puhul vahemikus $[c, d]$ koondub. See integraal kujutab siis vahemikus $[c, d]$ mingit parameetri y funktsiooni, mida tähistame

$$\varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx.$$

Näitame, et $\varphi(y)$ kujutab vahemikus $[c, d]$ pidevat y funktsiooni, kui tähendatud integraal iga vaadeldava y väärtuse puhul selles vahemikus koondub ühtlaselt. See tähendab, et kuitahes väikese etteantud positiivse arvu ε puhul saame määrata niisuguse positiivse arvu $A_0 > a$, et iga $A \geqslant A_0$ ja iga y $(c \leqslant y \leqslant d)$ puhul kehtib võrratus

$$\left|\int_A^\infty f(x, y)dx\right| < \varepsilon,$$

siis nimetame integraali $\int_a^\infty f(x, y)dx$ ühtlaselt koonduvaks vahemikus $[c, d]$.

Olgu nüüd $\varepsilon > 0$ kuitahes väike ja valime A_0 niivõrd suure, et

$$\left|\int_{A_0}^\infty f(x, y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (c \leqslant y \leqslant d)$$

ja samuti ka

$$\left|\int_{A_0}^\infty f(x, y + \Delta y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (c \leqslant y + \Delta y \leqslant d).$$

Et eelneva (p. 1) järgi integraal $\int_a^{A_0} f(x, y)dx$ kujutab vahemikus $[c, d]$ pidevat y funktsiooni, siis küllalt väikese Δy puhul

$$\left|\int_a^{A_0} [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Et aga

$$\varphi(y + \Delta y) - \varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y + \Delta y)dx - \int_a^\infty f(x, y)dx =$$

$$= \int_a^{A_0} f(x, y + \Delta y)dx + \int_{A_0}^\infty f(x, y + \Delta y)dx -$$

$$- \int_a^{A_0} f(x, y)dx - \int_{A_0}^\infty f(x, y)dx,$$

siis

$$|\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)| \leqslant \left|\int_a^{A_0}[f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)]dx\right| +$$

$$+\left|\int_{A_0}^{\infty} f(x,\ y+\Delta y)dx\right| + \left|\int_{A_0}^{\infty} f(x,\ y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

s. o.

$$\lim_{\Delta y\to 0}[\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)]=0,$$

millest nähtub, et $\varphi(y)$ kujutab vahemikus $[c,\ d]$ pidevat y funktsiooni. Seega päratu integraali $\int_a^{\infty} f(x,\ y)dx$ ühtlane koonduvus on funktsiooni $\varphi(y)$ pidevuse piisavaks tingimuseks.

Kui seejuures inteegritav funktsioon $f(x,\ y)$ omab piirkonnas $[a,\ b;\ c,\ d]$ parameetri y järgi pidevat osatuletist $f_y(x,\ y)$ ning integraalid

$$\int_a^{\infty} f(x,\ y)dx \quad \text{ja} \quad \int_a^{\infty} f_y(x,\ y)dx$$

koonduvad vahemikus $[c,\ d]$ ühtlaselt, siis

$$\frac{\varphi(y+\Delta y)-\varphi(y)}{\Delta y} = \int_a^{\infty} \frac{f(x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)}{\Delta y}\,dx$$

ja $\Delta y \to 0$ puhul

$$\varphi'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^{\infty} f(x,\ y)dx = \int_a^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Samadel tingimustel saame näidata, et ka

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{b} f(x,\ y)dx = \int_{-\infty}^{b} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx$$

ja

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,\ y)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Näiteks muutuva parameetri $y>0$ puhul

$$\int_0^{\infty} e^{-xy}dx = \left[-\frac{e^{-xy}}{y}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{y},$$

mida y järgi $n-1$ korda diferentsides saame

$$\int_0^\infty e^{-xy}x^{n-1}dx = \frac{(n-1)!}{y^n}.$$

Kui siin $y=1$, siis

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = (n-1)!,$$

mis väljendab Γ-funktsiooni väärtust, kui n on positiivne täisarv (I osa, § 80, p. c).

§ 45. Kahekordne integraal. 1) Kui kahe muutuja funktsioon $z=f(x, y)$ on piirkonnas, mis on määratud tingimustega

$$a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,$$

pidev x ja y funktsioon, siis on eelmise paragrahvi põhjal integraal $\int_a^b f(x, y)dx$ vahemikus $c \leqslant y \leqslant d$ pidev y funktsioon $\varphi(y)$, mida võime y järgi inteegrida c-st d-ni, s. o.

$$\int_c^d \varphi(y)dy,$$

millest, asendades $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y)dx$, saame

$$\int_c^d [\int_a^b f(x, y)dx]dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx,$$

mida nimetame kahekordseks integraaliks. See on konstantsete inteegrimisrajadega kahekordne määratud integraal, kus integraal rajades a-st b-ni on sisemiseks ja integraal rajades c-st d-ni välimiseks integraaliks. Siin tuleb funktsiooni $f(x, y)$ esiteks inteegrida x järgi rajades a-st b-ni, vaadeldes inteegrimisel y kui konstantset suurust, ja siis saadavat avaldist kui y funktsiooni inteegrida y järgi rajades c-st d-ni.

Samadel kaalutlustel võime öelda, et integraal $\int_c^d f(x, y)dy$ on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidev x funktsioon $\psi(x)$, mida võime x järgi inteegrida rajades a-st b-ni, s. o.

$$\int_a^b \psi(x)dx,$$

millest, asendades $\psi(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, saame kahekordse integraali ümberpöördud inteegrimise järjekorras

$$\int_a^b [\int_c^d f(x, y)dy]dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

kus nüüd integraal rajades c-st d-ni on sisemiseks ja integraal rajades a-st b-ni välimiseks integraaliks. Siin tuleb funktsiooni $f(x, y)$ esiteks inteegrida y järgi rajades c-st d-ni, vaadeldes inteegrimisel x kui konstantset suurust, ja siis saadavat avaldist kui x funktsiooni inteegrida x järgi rajades a-st b-ni.

Saab näidata, et konstantsete inteegrimisrajade a ja b ning c ja d puhul on ikka

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy, \qquad (1)$$

kui $f(x, y)$ on x ja y pidev funktsioon piirkonnas $[a, b; c, d]$.

Võrduse (1) tõestamiseks võtame kahekordsed integraalid

$$\int_c^y dy \int_a^b f(x, y)\,dx \quad \text{ja} \quad \int_a^b dx \int_c^y f(x, y)\,dy,$$

milledes ülemine inteegrimisraja d on asendatud muutuva suurusega y, mis asetseb vahemikus $c \leqslant y \leqslant d$. Seega kujutavad nii esimene kui ka teine kahekordne integraal ülemise raja y funktsioone. Arvutame nende tuletised y järgi. Esimese kahekordse integraali sisemine integraal kujutab (§ 44, p. 1 põhjal) pidevat y funktsiooni, s. o.

$$\int_a^b f(x, y)\,dx = \varphi(y),$$

ja järelikult

$$\frac{d}{dy} \int_c^y dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \frac{d}{dy} \int_c^y \varphi(y)\,dy = \varphi(y).$$

Teise kahekordse integraali sisemine integraal kujutab (§ 44, p. 1 põhjal) vaadeldavais vahemikes x ja ülemise raja y pidevat funktsiooni, s. o.

$$\int_c^y f(x, y)\,dy = \psi(x, y),$$

kus nüüd

$$\psi_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \int_c^y f(x, y)\,dy = f(x, y)$$

ning

$$\int_a^b \psi_y(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, y)\,dx = \varphi(y).$$

Tulemusest nähtub, et mõlemad kahekordsed integraalid (kui y funktsioonid) omavad võrdseid tuletisi ning seega võivad erineda teineteisest ainult konstantse liikme poolest. Kui aga $y = c$, siis mõlemad integraalid saavad nulliks, mis ütleb, et mõlemad

integraalid on võrdsed iga y väärtuse puhul, mis asetseb vahemikus $c \leqslant y \leqslant d$. Seega

$$\int_c^y dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^y f(x, y)\,dy. \qquad (2)$$

Kui $y = d$, siis võrdusest (2) järeldub otseselt võrdus (1).

Kahekordset integraali tähistatakse mõnikord ka järgmiselt:

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy,$$

kus nüüd inteegritavas avaldises esimene diferentsiaal dx kuulub sisemise integraali $\int_a^b$ juurde ja teine diferentsiaal dy kuulub välimise integraali $\int_c^d$ juurde.

Saadud võrdus

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy$$

näitab, et konstantsete inteegrimisrajadega kahekordse määratud integraali leidmisel inteegrimise järjekord (nagu diferentsimise järjekordki) pole oluline, s. o. võime funktsiooni $f(x, y)$ inteegrida enne x järgi ja siis y järgi või enne y järgi ja siis x järgi. Praktiliselt valime inteegrimise järjekorra muidugi nõnda, et inteegrimine toimuks lihtsamalt.

Näiteks

$$\int_1^2 dy \int_0^3 (x^2 + y^2 - 2xy + 1)\,dx = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 - x^2y + x\right]_0^3 dy =$$

$$= \int_1^2 (9 + 3y^2 - 9y + 3)\,dy = \left[12y + y^3 - \frac{9}{2}y^2\right]_1^2 = 5\frac{1}{2};$$

inteegrides teises järjekorras, saame sama tulemuse, s. o.

$$\int_0^3 dx \int_1^2 (x^2 + y^2 - 2xy + 1)\,dy = \int_0^3 \left[x^2y + \frac{y^3}{3} - xy^2 + y\right]_1^2 dx =$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 - 3x + \frac{10}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{10}{3}x\right]_0^3 = 5\frac{1}{2}.$$

Kui konstantsete inteegrimisrajadega kahekordses integraalis saab inteegrimismuutujaid x ja y eraldada nii, et inteegritava funktsiooni üheks teguriks oleks inteegrimismuutujat x sisaldav

avaldis ja teiseks teguriks oleks inteegrimismuutujat y sisaldav avaldis, siis võib x sisaldava avaldise koos dx-ga paigutada ühe integraali alla ja y sisaldava avaldise koos dy-ga paigutada teise integraali alla ja siis leida kahe ühekordse integraali korrutise, nagu näiteks

$$\int_0^1 dy \int_0^2 \frac{x^2 dx}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} \cdot \int_0^2 x^2 dx = \left[\operatorname{arctg} y\right]_0^1 \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

2) Kui funktsioon $f(x, y)$ on pidev iga $x \geqslant a$ puhul ja igal y väärtusel, mis asetseb vahemikus $[c, d]$, ning seejuures päratu integraal $\int_a^\infty f(x, y)dx$ koondub ühtlaselt vahemikus $[c, d]$, siis päratu integraal kujutab selles vahemikus pidevat y funktsiooni $\varphi(y)$ (§ 44, p. 3), s. o.

$$\varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y)dx$$

ning

$$\int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)dx.$$

Neil tingimustel kehtib samuti võrdus

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

sest kui võtame mistahes $A > a$, siis

$$\varphi(y) = \int_a^A f(x, y)dx + \int_A^\infty f(x, y)dx$$

ja

$$\int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d dy \int_a^A f(x, y)dx + \int_c^d dy \int_A^\infty f(x, y)dx.$$

Et eelneva (p. 1) järgi

$$\int_c^d dy \int_a^A f(x, y)dx = \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)dy,$$

siis võime eelmise võrduse kirjutada järgmiselt:

$$\int_c^d \varphi(y)dy - \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_A^\infty f(x, y)dx.$$

Kui nüüd kuitahes väikese $\varepsilon > 0$ puhul võtame A niivõrd suure, et vahemikus $[c, d]$ iga y puhul

$$\left|\int_A^\infty f(x, y)dx\right| < \frac{\varepsilon}{d-c},$$

siis

$$\left|\int_c^d \varphi(y)\,dy - \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)\,dy\right| = \left|\int_c^d dy \int_A^\infty f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Seega

$$\int_c^d \varphi(y)\,dy = \lim_{A\to\infty} \int_a^A dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy,$$

millest järeldub, et

$$\int_c^d dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Samuti, kui funktsioon $f(x, y)$ on pidev $x \geqslant a$ ja $y \geqslant c$ puhul ning päratud integraalid

$$\int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad \text{ja} \quad \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

koonduvad ühtlaselt, siis kujutavad nad vastavalt pidevaid funktsioone

$$\varphi(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad \text{ja} \quad \psi(x) = \int_c^\infty f(x, y)\,dy.$$

Kui siin kahekordsetest päratutest integraalidest

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx \quad \text{ja} \quad \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy$$

üks omab lõplikku väärtust, siis omab sama väärtust ka teine integraal, s. o.

$$\int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx = \int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy.$$

Oletame, et esimene neist integraalidest omab mingit lõplikku väärtust. Siis eelneva järgi iga $A > a$ puhul

$$\int_a^A dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^A f(x, y)\,dx.$$

Selle võrduse paremal poolel integraal $\int_a^A f(x, y)\,dx$ kui inteegritav funktsioon on pidev y funktsioon (§ 44, p. 1) ja $A \to \infty$ puhul

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x, y)\,dx = \int_a^\infty f(x, y)\,dx,$$

mis eelduse järgi on pidev ja inteegritav x järgi a-st ∞-ni. Et oletuse kohaselt esimene päratu integraal omab lõplikku väärtust, siis sama väärtust omab ka teine päratu integraal, sest

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy = \int_c^\infty dy \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x, y)\,dx,$$

s. o.

$$\int_a^\infty dx \int_c^\infty f(x, y)\,dy = \int_c^\infty dy \int_a^\infty f(x, y)\,dx.$$

Võtame näitena kahekordse integraali

$$\int_0^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy} dy$$

ja inteegrime seda enne x järgi ja siis y järgi, s. o.

$$\int_{\alpha}^{\beta} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left[-\frac{e^{-xy}}{y} \right]_0^{\infty} dy = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y} = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

Inteegrides sama integraali enne y järgi ja siis x järgi, saame

$$\int_0^{\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} e^{-xy} dy = \int_0^{\infty} \left[-\frac{e^{-xy}}{x} \right]_{\alpha}^{\beta} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx.$$

Mõlemaid tulemusi võrreldes näeme, et viimati saadud ühekordne päratu integraal

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \ln \frac{\beta}{\alpha}.$$

3) Kahekordset integraali võime paljudel juhtudel rakendada abivahendina ka harilike ehk ühekordsete integraalide leidmiseks. Näiteks integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

väärtuse leidmiseks võime kasutada kahekordset integraali.

Kõigepealt esitame selle integraali kujul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

sest inteegritav funktsioon on paarisfunktsioon, ja tähistame

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = I,$$

eeldades, et see integraal koondub ja omab lõplikku väärtust I. Võtame uueks inteegrimismuutujaks t nõnda, et $x = at$, kus a on mistahes positiivne arv; siis $dx = a\,dt$ ja

$$I = \int_0^{\infty} a e^{-a^2 t^2} dt,$$

kus inteegrimisrajad jäävad endisteks. Korrutame saadud võrduse mõlemad pooled avaldisega e^{-a^2}, s. o.

$$I e^{-a^2} = \int_0^{\infty} a e^{-a^2(1+t^2)} dt,$$

mida inteegrime nüüd α järgi rajades 0-st ∞-ni; saame

$$I\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}dt,$$

kus I kui määratud integraali väärtus on konstantne suurus. Et siin

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = I,$$

siis

$$I^2 = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}dt.$$

Kui muudame saadud kahekordses integraalis inteegrimise järjekorra (p. 2), s. o.

$$I^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2(1+t^2)}d\alpha,$$

ja tähistame

$$\alpha^2(1+t^2) = z,$$

siis

$$\alpha d\alpha = \frac{dz}{2(1+t^2)}$$

ja

$$I^2 = \int_0^\infty dt \int_0^\infty \frac{e^{-z}dz}{2(1+t^2)} = \int_0^\infty \left[-\frac{e^{-z}}{2(1+t^2)} \right]_0^\infty dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\Big[\operatorname{arctg} t \Big]_0^\infty = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

millest

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ning

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Selle ühekordse integraali kaudu saame nüüd kergesti leida ka lõpmatute rajadega kahekordse integraali

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

väärtuse, s. o.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = \pi.$$

4) Kui kahekordses integraalis

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx$$

inteegrimisrajad c ja d on konstantsed suurused, kuid a ja b sõltuvad y-st ja on seega y funktsioonid, s. o.

$$a = \varphi_1(y), \qquad b = \varphi_2(y),$$

siis kahekordses integraalis

$$\int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx$$

inteegrimise järjekorra vahetus pole enam võimalik, vaid inteegrimist tuleb teostada kindlas järjekorras, ja nimelt enne tuleb leida integraalfunktsioon

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx = \Phi(y)$$

ja siis inteegrida saadud integraalfunktsiooni y järgi rajades c-st d-ni, s. o.

$$\int_c^d \Phi(y)\,dy.$$

Samuti, kui inteegrimisrajad a ja b on konstantsed suurused ning c ja d on x funktsioonid, s. o.

$$c = \psi_1(x), \quad d = \psi_2(x),$$

siis tuleb kahekordses integraalis

$$\int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy$$

enne leida integraalfunktsioon

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy = \Psi(x)$$

ja siis inteegrida saadud integraalfunktsiooni x järgi rajades a-st b-ni, s. o.

$$\int_a^b \Psi(x)\,dx.$$

Näiteks:

a) $$\int_{-1}^{1} dy \int_{y-1}^{2y} (2x - y + 1)\,dx = \int_{-1}^{1} \left[x^2 - xy + x\right]_{y-1}^{2y} dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (2y^2 + 2y)\,dy = \left[\frac{2}{3}y^3 + y^2\right]_{-1}^{1} = 1\frac{1}{3}.$$

b) $\int_1^2 dx \int_x^{3x} \ln \frac{x}{y}\, dy = \int_1^2 dx \int_x^{3x} (\ln x - \ln y)\, dy =$

$$= \int_1^2 [y \ln x - y \ln y + y]_x^{3x} dx = -\int_1^2 (3x \ln 3 + x)\, dx =$$

$$= -\left[\frac{3}{2} x^2 \ln 3 + \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = -\left(\frac{9}{2} \ln 3 + \frac{3}{2}\right) \approx -6{,}3.$$

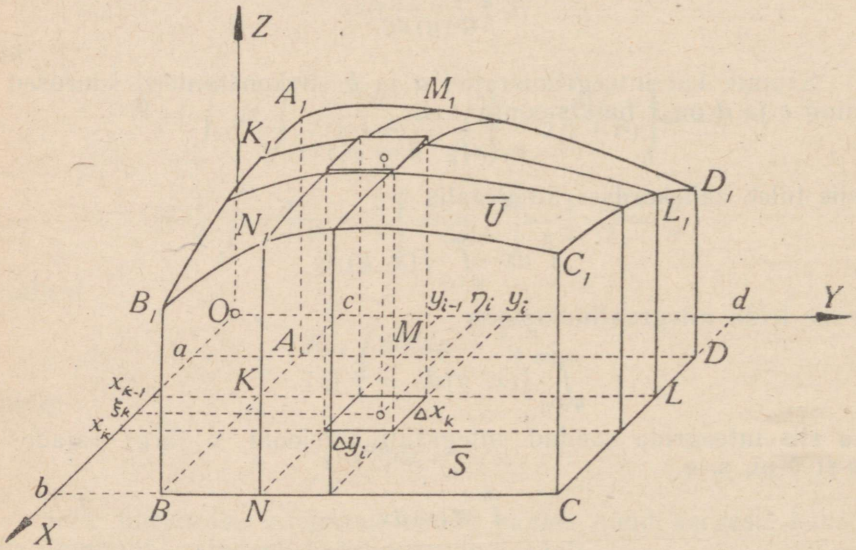
§ 46. Prismaatilise keha ruumala. Olgu kahe muutuja funktsioon

$$z = f(x, y),$$

mis esitab geomeetriliselt XYZ-teljestikus pinda, piirkonnas, mida määravad tingimused

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

ühene ja pidev x ja y funktsioon. Oletame esialgselt (arvutuse lihtsustamise mõttes), et tähendatud piirkonna igas punktis on $f(x, y) > 0$, mis ütleb, et pinna $z = f(x, y)$ vaadeldav osa asetseb ülalpool XY-tasapinda, s. o. aplikaatide positiivsel poolel.



Joon. 38.

Tingimustele $a \leqslant x \leqslant b$ ja $c \leqslant y \leqslant d$ vastab geomeetriliselt XY-tasapinnal ristkülik $ABCD$ (joon. 38), mille küljed on paralleelsed X- ja Y-telgedega ning pindala

$$S = (b - a)(d - c).$$

Seega ristküliku $ABCD$ pind on piirkonnaks, milles funktsioon $f(x, y)$ on ühene ja pidev. Tähistame selle piirkonna sümboliga $\overline{S}$.

Tõmbame läbi ristküliku $ABCD$ külgede tasapinnad, mis on risti XY-tasapinnaga. Siis moodustub keha $ABCDD_1C_1B_1A_1$, mida piirab altpoolt ristkülik $ABCD$ ja ülaltpoolt kõverpind $z = f(x, y)$.

Nimetame seda keha p r i s m a a t i l i s e k s k e h a k s, mille ruumala V, nagu allpool näeme, määrab funktsiooni $f(x, y)$ kahekordne integraal.

Jaotame vahemiku a-st b-ni jaotuspunktidega

$$a = x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad x_n = b$$

n osavahemikuks, nii et

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

ja vahemiku c-st d-ni jaotuspunktidega

$$c = y_0, \quad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{m-1}, \quad y_m = d$$

m osavahemikuks, nii et

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

ning tõmbame neist jaotuspunktidest X- ja Y-teljele paralleelsed jooned, mis jaotavad ristküliku $ABCD$ nm väikeseks ristkülikuks. Iga niisuguse väikese ristküliku pindala on siis

$$\Delta S_{ki} = (x_k - x_{k-1})(y_i - y_{i-1}) = \Delta x_k \Delta y_i,$$

kus $k = 1, 2, \ldots, n$ ja $i = 1, 2, \ldots, m$. Kui võtame ristkülikus, mille pindala on ΔS_{ki}, punkti (ξ_k, η_i) nõnda, et $x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k$ ja $y_{i-1} \leqslant \eta_i \leqslant y_i$, siis vastab sellele punktile funktsiooni $f(x, y)$ väärtus $f(\xi_k, \eta_i)$, mis esitab pinnal $z = f(x, y)$ asetseva vastava punkti aplikaati, kusjuures

$$f(\xi_k, \eta_i)\Delta x_k \Delta y_i$$

väljendab niisuguse neljatahulise prisma ruumala, mille kõrguseks on $f(\xi_k, \eta_i)$ ning alumise ja ülemise põhja pindalaks $\Delta x_k \Delta y_i$. Piirkonnas $\overline{S}$ kõik nm neljatahulist prismat moodustavad polüeedri, mille ruumala on

$$\begin{aligned} V_{nm} = {} & f(\xi_1, \eta_1)\Delta x_1 \Delta y_1 + f(\xi_2, \eta_1)\Delta x_2 \Delta y_1 + \ldots + f(\xi_n, \eta_1)\Delta x_n \Delta y_1 + \\ & + f(\xi_1, \eta_2)\Delta x_1 \Delta y_2 + f(\xi_2, \eta_2)\Delta x_2 \Delta y_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_2)\Delta x_n \Delta y_2 + \\ & \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ & + f(\xi_1, \eta_m)\Delta x_1 \Delta y_m + f(\xi_2, \eta_m)\Delta x_2 \Delta y_m + \ldots + f(\xi_n, \eta_m)\Delta x_n \Delta y_m = \\ = {} & \Delta y_1 \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_1)\Delta x_k + \Delta y_2 \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_2)\Delta x_k + \ldots + \\ & + \Delta y_m \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_m)\Delta x_k = \sum_{i=1}^{m} \Delta y_i \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_i)\Delta x_k. \end{aligned}$$

Seda avaldist nimetatakse funktsiooni $f(x, y)$ kahekordseks integraalsummaks, kusjuures $\sum_{k=1}^{n}$ on sisemiseks ja $\sum_{i=1}^{m}$ välimiseks integraalsummaks. Kui sisemises integraalsummas

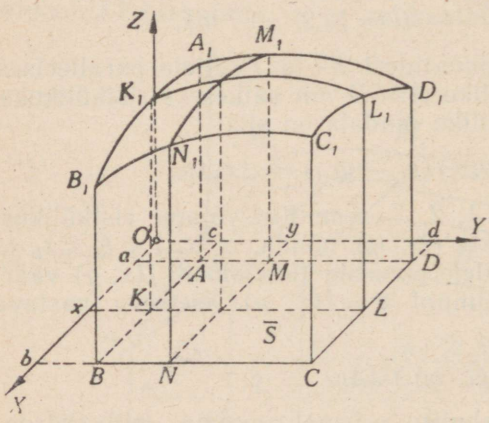
$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_i)\Delta x_k$$

lugeda η_i konstantseks suuruseks, siis osutub see ühe muutuja funktsiooni $f(x, \eta_i)$ integraalsummaks, mille piirväärtus, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega ühtlasi $n \to \infty$, on (I osa, § 69)

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_i)\Delta x_k = \int_a^b f(x, \eta_i)\,dx,$$

kus inteegrimine toimub vahemikus a-st b-ni kindla $y = \eta_i$ puhul x järgi piirkonnas $\bar{S}$ X-teljega paralleelsel joont mööda, näiteks MN mööda (joon. 39), mis asetseb X-teljest $y = \eta_i$ ühiku kaugusel. Sel juhul saame prismaatilise keha lõikepinna MNN_1M_1, mis on paralleelne XZ-tasapinnaga ja mille pindala on

$$\int_a^b f(x, \eta_i)\,dx = \varphi(\eta_i),$$



Joon. 39.

mida võime nüüd vahemikus $[c, d]$ vaadelda kui parameetri η_i pidevat funktsiooni (§ 44, p. 1). Välimine integraalsumma

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta y_i \int_a^b f(x, \eta_i)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \varphi(\eta_i)\Delta y_i$$

väljendab nüüd vahemikus $[c, d]$ niisuguste kihtide ruumalade summat, kus kihtide põhjadeks on $\varphi(\eta_i)$ ja kõrgusteks Δy_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, m)$. Selle integraalsumma piirväärtus, kui $\max \Delta y_i \to 0$ ja seega $m \to \infty$, on integraal rajades c-st d-ni, mis määrab prismaatilise keha ruumala V, s. o.

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_c^d \varphi(y)\,dy = V. \qquad (1)$$

Ümberpöördud järjekorras, kui tähistame eespool esineva polüeedri ruumala järgmiselt:

$$V_{nm} = \Delta x_1 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_1, \eta_i)\Delta y_i + \Delta x_2 \sum_{i=1}^{m} f(\xi_2, \eta_i)\Delta y_i + \ldots +$$

$$+ \Delta x_n \sum_{i=1}^{m} f(\xi_n, \eta_i)\Delta y_i = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{i=1}^{m} f(\xi_k, \eta_i)\Delta y_i,$$

kus $\sum_{i=1}^{m}$ on funktsiooni $f(x, y)$ sisemiseks ja $\sum_{k=1}^{n}$ välimiseks integraalsummaks, siis vahemikus c-st d-ni esimene inteegrimine toimub kindla $x = \xi_k$ puhul y järgi piirkonnas $\bar{S}$ Y-teljega paralleelsel joont mööda, näiteks KL mööda, mis asetseb Y-teljest $x = \xi_k$ ühiku kaugusel. Sel juhul saame prismaatilise keha lõikepinna KLL_1K_1, mis on paralleelne YZ-tasapinnaga ja mille pindala on

$$\lim_{\max \Delta y_i \to 0} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_k, \eta_i)\Delta y_i = \int_c^d f(\xi_k, y)\,dy = \psi(\xi_k),$$

mida võime vahemikus $[a, b]$ analoogiliselt eelnevale vaadelda kui parameetri ξ_k pidevat funktsiooni.

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \int_c^d f(\xi_k, y)\,dy = \sum_{k=1}^{n} \psi(\xi_k)\Delta x_k$$

väljendab vahemikus $[a, b]$ niisuguste kihtide ruumalade summat, kus kihtide põhjadeks on $\psi(\xi_k)$ ja kõrgusteks Δx_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Selle integraalsumma piirväärtus, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja seega $n \to \infty$, on integraal rajades a-st b-ni, mis määrab samuti prismaatilise keha ruumala V, s. o.

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_a^b \psi(x)\,dx = V. \qquad (2)$$

Tulemustest (1) ja (2) nähtub, et eelmises paragrahvis käsitletud kahekordsete integraalide võrdsus

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy$$

ilmneb ka kahekordse integraali geomeetrilisest tõlgendusest, kui ainult inteegrimisrajad a ja b ning c ja d on konstantsed suurused.

Nagu näeme, on käesoleval juhul ristküliku $ABCD$ pind $\bar{S}$ inteegritava funktsiooni $f(x, y)$ inteegrimispiirkonnaks. Et inteegrimispiirkonnaks XY-tasapinnal on ristküliku $ABCD$ pind $\bar{S}$, siis tähistatakse kahekordset integraali ka järgmiselt:

$$V = \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy = \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dS,$$

kus inteegritav avaldis $f(x, y)\,dS = f(x, y)\,dxdy$ on kahekordse

integraali ehk ruumala V element, kusjuures $dS = dxdy$ on inteegrimispiirkonna $\bar{S}$ pinnaelemendiks.

Et kahekordse integraali geomeetrilise tõlgenduse puhul inteegrimispiirkond on tasapinnaline, siis nimetatakse kahekordset määratud integraali ka p i n d i n t e g r a a l i k s, kusjuures ühekordne ehk harilik määratud integraal, mille inteegrimisvahemikuks on sirglõik, on siis l i n e a a r i n t e g r a a l.

Kui inteegrimispiirkonna $[a, b; c, d]$ igas punktis $f(x, y) = 1$, siis esitab kahekordne integraal sellele piirkonnale ehitatud niisuguse risttahuka ruumala, mille kõrguseks on 1. Et niisuguse risttahuka ruumala V arvuline väärtus on ühtlasi inteegrimispiirkonna pindala S arvuliseks väärtuseks, siis saame pindala S määrata ka kahekordse integraali abil, ja nimelt

$$S = \int_c^d \int_a^b dxdy = (b - a)(d - c).$$

§ 47. Kahekordse integraali omadusi. Nagu selles paragrahvis näeme, kehtivad kahekordse integraali puhul samad omadused, mis esinevad ühekordse ehk hariliku määratud integraali puhulgi.

1) F u n k t s i o o n i d e

$$z = f_1(x, y) \quad \text{ja} \quad z = f_2(x, y)$$

s u m m a (v a h e) k a h e k o r d n e i n t e g r a a l o n v õ r d n e n e n d e f u n k t s i o o n i d e k a h e k o r d s e t e i n t e g r a a l i d e s u m m a g a (v a h e g a), s. o.

$$\iint_{\bar{S}} [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]dxdy =$$

$$= \iint_{\bar{S}} f_1(x, y)dxdy \pm \iint_{\bar{S}} f_2(x, y)dxdy.$$

Et funktsioonide $f_1(x, y)$ ja $f_2(x, y)$ summa (vahe) kahekordne integraal on kahekordse integraalsumma

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{i=1}^{m} [f_1(\xi_k, \eta_i) \pm f_2(\xi_k, \eta_i)]\Delta y_i$$

piirväärtus, kusjuures funktsioonide väärtused $f_1(\xi_k, \eta_i)$ ja $f_2(\xi_k, \eta_i)$ on võetud osapiirkonna $\overline{\Delta S_{ki}}$ ühes ja samas punktis (ξ_k, η_i), siis see kahekordne integraalsumma on võrdne kahekordsete integraalsummade summaga (vahega)

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{i=1}^{m} f_1(\xi_k, \eta_i)\Delta y_i \pm \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{i=1}^{m} f_2(\xi_k, \eta_i)\Delta y_i.$$

Piirile minekul, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja $\max \Delta y_i \to 0$, järeldub siit otseselt ülaltähendatud võrdus.

Analoogiliselt saame näidata, et kui piirkonnas $\bar{S}$ on n funktsiooni

$$z = f_1(x, y),\ z = f_2(x, y),\ \ldots,\ z = f_n(x, y)$$

ühesed ja pidevad, siis nende funktsioonide algebralise summa kahekordne integraal

$$\iint\limits_{\bar{S}} [f_1(x, y) + f_2(x, y) + \ldots + f_n(x, y)]\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\bar{S}} f_1(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{\bar{S}} f_2(x, y)\,dxdy + \ldots + \iint\limits_{\bar{S}} f_n(x, y)\,dxdy.$$

2) Kui kahekordse integraali puhul inteegritavas funktsioonis sisaldub konstantne tegur k, siis võime selle teguri tuua kahekordse integraali ette, sest

$$\int_a^b dx \int_c^d kf(x, y)\,dy = \int_a^b kdx \int_c^d f(x, y)\,dy = k \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

3) Kui inteegrimispiirkond $\bar{S}$ on jaotatud kaheks piirkonnaks $\bar{S}_1$ ja $\bar{S}_2$, siis

$$\iint\limits_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{\bar{S}_1+\bar{S}_2} f(x, y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\bar{S}_1} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{\bar{S}_2} f(x, y)\,dxdy.$$

Kui funktsiooni $f(x, y)$ inteegrimispiirkonda $\bar{S}$ määravad tingimused

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ ja } c \leqslant y \leqslant d,$$

siis vastava prismaatilise keha ruumala

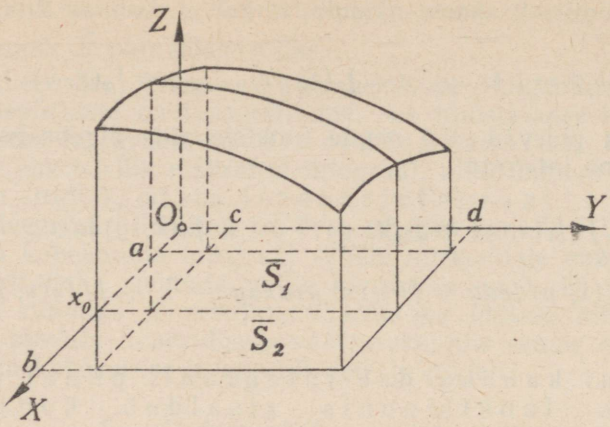
$$V = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Kasutades viimase ühekordse integraali puhul teadaolevat omadust (I osa, § 70, p. 3), valime vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ punkti $x = x_0$ nii, et piirkonda $\bar{S}_1$ määravad tingimused (joon. 40)

$$a \leqslant x \leqslant x_0 \text{ ja } c \leqslant y \leqslant d$$

ning piirkonda $\bar{S}_2$ määravad tingimused

$$x_0 \leqslant x \leqslant b \text{ ja } c \leqslant y \leqslant d.$$



Joon. 40.

Siis võime kirjutada, et

$$V = \int_a^b \psi(x)\,dx = \int_a^{x_0} \psi(x)\,dx + \int_{x_0}^b \psi(x)\,dx =$$

$$= \int_a^{x_0} dx \int_c^d f(x,\ y)\,dy + \int_{x_0}^b dx \int_c^d f(x,\ y)\,dy,$$

mis on identne võrdusega

$$\iint\limits_{\bar{S}} f(x,\ y)\,dxdy = \iint\limits_{\bar{S}_1} f(x,\ y)\,dxdy + \iint\limits_{\bar{S}_2} f(x,\ y)\,dxdy,$$

kus $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$.

4) Kui funktsioonid $f(x,\ y)$ ja $g(x,\ y)$ on inteegritavad piirkonnas $\bar{S}$ ja selle piirkonna igas punktis $f(x,\ y) \leqslant g(x,\ y)$, siis

$$\iint\limits_{\bar{S}} f(x,\ y)\,dxdy \leqslant \iint\limits_{\bar{S}} g(x,\ y)\,dxdy.$$

Et piirkonna $\bar{S}$ igas punktis on $f(x,\ y) \leqslant g(x,\ y)$, siis ka nende funktsioonide integraalsummade igas osapiirkonnas $\Delta\bar{S}_{ki}$ vabalt valitud ühises punktis $(\xi_k,\ \eta_i)$ on $f(\xi_k,\ \eta_i) \leqslant g(\xi_k,\ \eta_i)$ ja järelikult

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{i=1}^{m} f(\xi_k,\ \eta_i)\,\Delta y_i \leqslant \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \sum_{i=1}^{m} g(\xi_k,\ \eta_i)\,\Delta y_i.$$

Piirile minekul, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja $\max \Delta y_i \to 0$, järeldub siit ülaltähendatud omadus.

Järeldus 1: Kui inteegrimispiirkonna $\bar{S}$ igas punktis $\varphi(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant \psi(x, y)$, siis nende funktsioonide inteegritavuse puhul

$$\iint_{\bar{S}} \varphi(x, y)\,dxdy \leqslant \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy \leqslant \iint_{\bar{S}} \psi(x, y)\,dxdy.$$

Järeldus 2: Et funktsiooni $f(x, y)$ absoluutväärtuse puhul on

$$-|f(x, y)| \leqslant f(x, y) \leqslant |f(x, y)|,$$

siis funktsiooni $f(x, y)$ inteegritavuse puhul piirkonnas $\bar{S}$ on

$$-\iint_{\bar{S}} |f(x, y)|\,dxdy \leqslant \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy \leqslant \iint_{\bar{S}} |f(x, y)|\,dxdy,$$

mis on samaväärne võrratusega

$$\left|\iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy\right| \leqslant \iint_{\bar{S}} |f(x, y)|\,dxdy.$$

5) Kui funktsioon $f(x, y)$ on pidev tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$, siis selles piirkonnas leidub vähemalt üks punkt (ξ, η), milles

$$\iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy = Sf(\xi, \eta).$$

Et funktsioon $f(x, y)$ on pidev tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$, siis on ta selles piirkonnas nii altpoolt kui ka ülaltpoolt tõkestatud (§ 17, p. 1), mille puhul leidub niisugune alamtõke m ja ülemtõke M, et piirkonna igas punktis

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M$$

ning eelmise omaduse (järelduse 1) põhjal

$$m \iint_{\bar{S}} dxdy \leqslant \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy \leqslant M \iint_{\bar{S}} dxdy$$

ehk

$$mS \leqslant \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy \leqslant MS,$$

millest

$$m \leqslant \frac{1}{S} \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy \leqslant M.$$

Järelikult

$$\frac{1}{S} \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy = \mu,$$

kus μ on mingi arv m ja M vahel, s. o. $m \leqslant \mu \leqslant M$.

Olgu piirkonnas $\bar{S}$ punktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) niisugused, et neis punktides

$$m = f(x_1, y_1) \text{ ja } M = f(x_2, y_2).$$

Ühendame punktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) tervenisti piirkonnas $\bar{S}$ paikneva pideva joonega, mille parameetrilised võrrandid olgu

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),$$

kusjuures punktid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) saadakse $t = t_1$ ja $t = t_2$ puhul. Funktsioon $f[x(t), y(t)]$ kujutab siis parameetri t pidevat funktsiooni. Et selle joonlõigu otspunktides (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) funktsioon $f[x(t), y(t)]$ omab vastavalt väikseimat ja suurimat väärtust m ja M, siis funktsiooni pidevuse tõttu leidub vahemikus $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ vähemalt üks niisugune t väärtus t_0 (I osa, § 71, p. 1), mille puhul $f[x(t_0), y(t_0)] = \mu$. Kui tähistame $x(t_0) = \xi$ ja $y(t_0) = \eta$, siis $f(\xi, \eta) = \mu$ ja seega

$$\frac{1}{S} \iint\limits_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy = f(\xi, \eta),$$

millest kahekordne integraal

$$\iint\limits_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy = Sf(\xi, \eta).$$

Saadud valem väljendab kahekordse integraali keskväärtuse teoreemi.

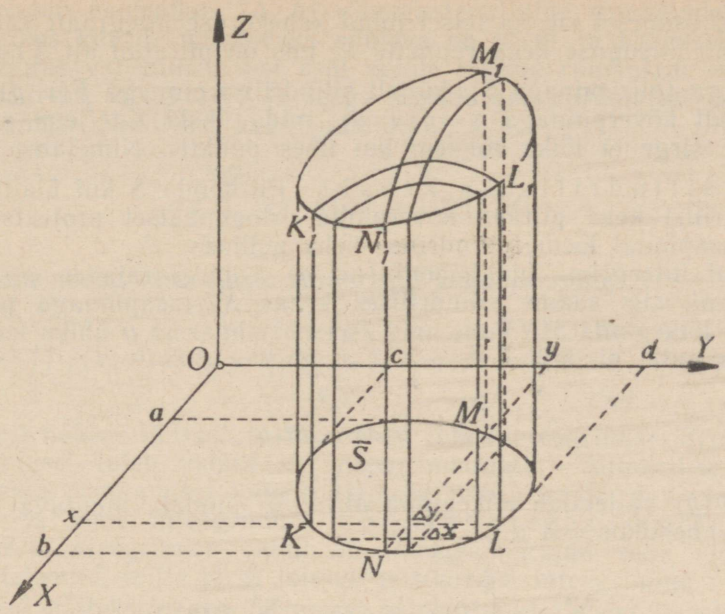
Analoogiliselt saame tõestada (vt. I osa, § 71, p. 2), et kui tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$ funktsioonid $f(x, y)$ ja $g(x, y)$ on pidevad ja selles piirkonnas $g(x, y)$ säilitab märki, siis

$$\iint\limits_{\bar{S}} f(x, y)g(x, y)\,dxdy = g(\xi, \eta) \iint\limits_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy,$$

mis väljendab kahekordse integraali üldistatud keskväärtuse teoreemi.

§ 48. Silindrilise keha ruumala. 1) Kui funktsiooni $z = f(x, y)$ inteegrimispiirkond $\bar{S}$ on piiratud kinnise kõveraga $F(x, y) = 0$ (joon. 41), nii et ükski sirge MN, mis on paralleelne X-teljega, ei lõika inteegrimispiirkonna äärjoont rohkem kui kahes punktis, siis võrrand $F(x, y) = 0$ kujutab abstsissi x suhtes kahest funktsiooni. Ilmutades võrrandist $F(x, y) = 0$ abstsissi x, saame selle jaoks kaks väärtust $x = \varphi_1(y)$ ja $x = \varphi_2(y)$. Inteegrime funktsiooni $f(x, y)$ x järgi MN mööda, s. o. äärjoone punktist M, milles olgu $x = \varphi_1(y)$, kuni äärjoone punktini N, milles on siis $x = \varphi_2(y)$. Saame

$$\int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx = \Phi(y),$$



Joon. 41.

mille inteegrimine y järgi toimub siis c-st d-ni, s. o. rajades, milles X-teljega paralleelsed kõvera puutujad lõikavad Y-telge:

$$\int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx = \int_c^d \Phi(y)\,dy.$$

Samuti, kui funktsiooni $z = f(x, y)$ inteegrimispiirkond $\bar{S}$ on piiratud kinnise kõveraga $F(x, y) = 0$, nii et ükski sirge KL, mis on paralleelne Y-teljega, ei lõika inteegrimispiirkonna äärjoont rohkem kui kahes punktis, siis võrrand $F(x, y) = 0$ kujutab ordinaadi y suhtes kahest funktsiooni. Ilmutades võrrandist $F(x, y) = 0$ ordinaadi y, saame selle jaoks kaks väärtust $y = \psi_1(x)$ ja $y = \psi_2(x)$. Inteegrime funktsiooni $f(x, y)$ y järgi KL mööda, s. o. äärjoone punktist K, milles olgu $y = \psi_1(x)$, kuni äärjoone punktini L, milles on siis $y = \psi_2(x)$. Saame

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy = \Psi(x),$$

mille inteegrimine x järgi toimub siis a-st b-ni, s. o. rajades, milles Y-teljega paralleelsed kõvera puutujad lõikavad X-telge:

$$\int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_a^b \Psi(x)\,dx.$$

Nii esimesel kui ka teisel juhul kahekordse integraali väärtus määrab niisuguse keha ruumala V, mis on piiratud alt XY-tasapinnaga (piirkonnaga $\bar{S}$), küljelt silindrilise pinnaga $F(x, y) = 0$ ja ülalt kõverpinnaga $z = f(x, y)$, mida ükski Z-teljega paralleelne sirge ei lõika rohkem kui ühes punktis. Nimetame seda keha silindriliseks kehaks. Piirkonda $\bar{S}$ kui ülaltpoolt silindrilist keha piirava kõverpinna ortogonaalset projektsiooni XY-tasapinnal loeme silindrilise keha põhjaks.

Kui inteegrime funktsiooni $f(x, y)$ x järgi rajades $\varphi_1(y)$-st $\varphi_2(y)$-ni, siis saame silindrilises kehas XZ-tasapinnaga paralleelse lõikepinna MNN_1M_1, mis asetseb viimasest y ühiku kaugusel ja mille pindala

$$\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx = \Phi(y),$$

kus $\Phi(y)$ väljendab lõikepinna MNN_1M_1 pindala muutuvat suurust vahemikus c-st d-ni; edasi,

$$\sum_{c \leqslant y \leqslant d} \Delta y \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx = \sum_{c \leqslant y \leqslant d} \Phi(y)\Delta y$$

väljendab vahemikus $[c, d]$ niisuguste kihtide ruumalade summat, kus kihtide muutuvaks põhjaks on $\Phi(y)$ ja kõrguseks Δy. Vahemikus c-st d-ni nende kihtide ruumalade summa piirväärtus, kui $\Delta y \to 0$ ja seejuures kihtide arv piiramatult kasvab, on silindrilise keha ruumala V, s. o.

$$\int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx = \int_c^d \Phi(y)\,dy = V.$$

Ümberpöördult, kui inteegrime funktsiooni $f(x, y)$ y järgi rajades $\psi_1(x)$-st $\psi_2(x)$-ni, siis saame silindrilises kehas YZ-tasapinnaga paralleelse lõikepinna KLL_1K_1, mis asetseb viimasest x ühiku kaugusel ja mille pindala

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy = \Psi(x),$$

kus $\Psi(x)$ väljendab lõikepinna KLL_1K_1 pindala muutuvat suurust vahemikus a-st b-ni, ja

$$\sum_{a \leqslant x \leqslant b} \Delta x \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy = \sum_{a \leqslant x \leqslant b} \Psi(x)\Delta x$$

väljendab vahemikus $[a, b]$ niisuguste kihtide ruumalade summat, kus kihtide muutuvaks põhjaks on $\Psi(x)$ ja kõrguseks Δx, kusjuures vahemikus a-st b-ni nende kihtide ruumalade summa piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$ ja seega kihtide arv piiramatult kasvab, on samuti silindrilise keha ruumala V, s. o.

$$\int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy = \int_a^b \Psi(x)\,dx = V.$$

Tähendab, käsitletava silindrilise keha ruumala

$$V = \iint_{\bar{S}} f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

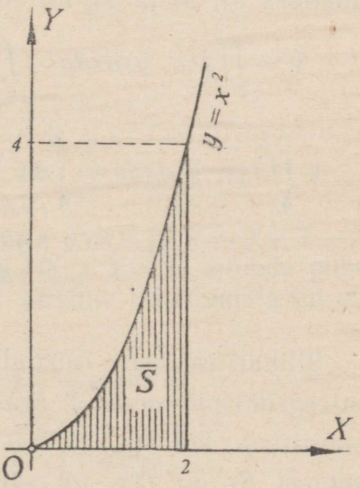
millest nähtub ühtlasi, et käesoleval juhul inteegrimise järjekorra muutmisel tuleb muuta ka inteegrimisrajad. Silindrilise keha ruumala arvutamisel toimub esimene inteegrimine *muutuvates* ja teine inteegrimine *konstantsetes* rajades. Siin esimese inteegrimise puhul on inteegrimisrajad selle muutuja funktsioonid, mille järgi toimub teistkordne inteegrimine.

Kui näiteks esineb järgmiste inteegrimisrajadega kahekordne integraal:

$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y)\,dy,$$

siis inteegrimise järjekorra muutmiseks tuleb muuta ka inteegrimisrajad. Inteegrimispiirkonnaks $\bar{S}$ on siin pinnaosa, mis on piiratud X-teljega, sirgega $x = 2$ ja paraboliga $y = x^2$ (joon. 42). Et selles piirkonnas esimene inteegrimine toimub rajades $y = 0$ kuni $y = x^2$ ja teine inteegrimine toimub rajades $x = 0$ kuni $x = 2$, siis inteegrimise järjekorra muutmisel peab esimene inteegrimine toimuma samas inteegrimispiirkonnas rajades $x = \sqrt{y}$ kuni $x = 2$ ja teine inteegrimine rajades $y = 0$ kuni $y = 4$. Seega

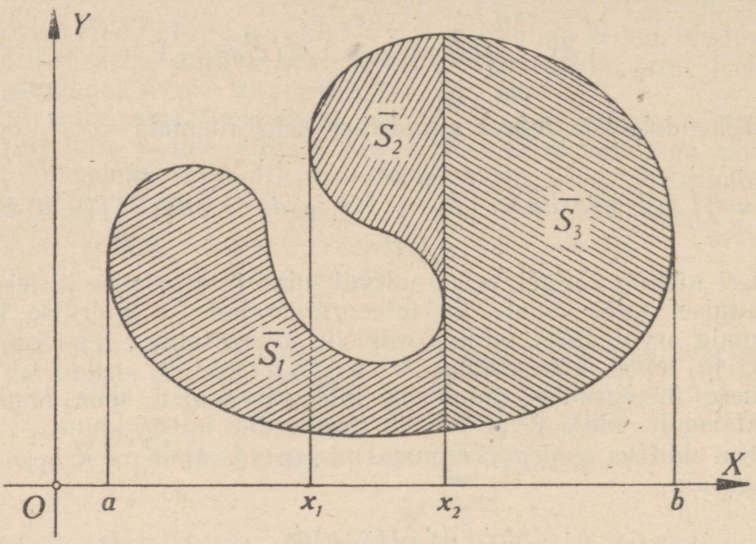
$$\int_0^2 dx \int_0^{x^2} f(x, y)\,dy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y)\,dx.$$



Joon. 42.

2) Kui kahekordse integraali inteegrimispiirkonnal on niisugune kuju, et ühe või teise koordinaatteljega paralleelsed sirged lõikavad inteegrimispiirkonna äärjoont roh-

kem kui kahes punktis, siis tuleb inteegrimispiirkond jaotada niisugusteks osapiirkondadeks, et ühe või teise koordinaatteljega paralleelsed sirged ei lõikaks ühegi osapiirkonna äärjoont rohkem kui kahes punktis. Näiteks joonisel 43 esinev kahekordse



Joon. 43.

integraali inteegrimispiirkond $\bar{S}$, milles esimene inteegrimine toimub y järgi, on jaotatud vastavalt öeldule kolmeks osapiirkonnaks $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ ja $\bar{S}_3$, nii et

$$V = \iint\limits_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{\bar{S}_1} f(x, y)\,dxdy + \iint\limits_{\bar{S}_2} f(x, y)\,dxdy +$$

$$+ \iint\limits_{\bar{S}_3} f(x, y)\,dxdy = \int\limits_{a}^{x_3} dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\,dy + \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{\psi_3(x)}^{\psi_4(x)} f(x, y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{x_2}^{b} dx \int\limits_{\psi_5(x)}^{\psi_6(x)} f(x, y)\,dy.$$

Silindrilise keha ruumala V saame positiivse suurusena, kui inteegrimispiirkonna $\bar{S}$ igas punktis $f(x, y) > 0$, ja negatiivse suurusena, kui $f(x, y) < 0$. Kui inteegrimispiirkonna $\bar{S}$ osapiirkonnas $\bar{S}_1$ on $f(x, y) > 0$ ja ülejäänud osapiirkonnas $\bar{S}_2$ on $f(x, y) < 0$, siis silindrilise keha ruumala V tõelise suuruse piir-

konnas $S = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$ määrab kahekordsete integraalide vahe piirkonnas $\bar{S}_1$ ja $\bar{S}_2$, s. o.

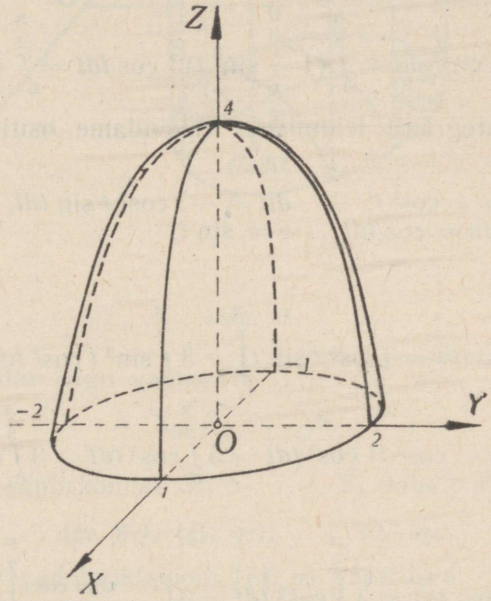
$$V = \iint\limits_{\bar{S}_1} f(x, y)\,dxdy - \iint\limits_{\bar{S}_2} f(x, y)\,dxdy.$$

Näiteks leiame paraboloidiga

$$z = 4 - 4x^2 - y^2$$

ja XY-tasapinnaga piiratud keha ruumala.

Inteegrimispiirkonnaks $\bar{S}$ on siin ellipsi $4x^2 + y^2 = 4$ pind (joon. 44). Et paraboloidi võrrand kujutab paarisfunktsiooni, siis



Joon. 44.

võime sisemise integraali rajadeks võtta $y = 0$ ja $y = 2\sqrt{1 - x^2}$ ning välimise integraali rajadeks $x = 0$ ja $x = 1$, millede puhul saame veerandi otsitavast ruumalast. Otsitav täisruumala on siis

$$V = 4 \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2\sqrt{1-x^2}} (4 - 4x^2 - y^2)\,dy =$$

$$= 4 \int\limits_0^1 \left[4y - 4x^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{2\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= 4\int_0^1 \left(\frac{16}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{16}{3}x^2\sqrt{1-x^2}\right)dx =$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}(1-x^2)\,dx = \frac{64}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx.$$

Edasi kasutame saadud ühekordse integraali arvutamiseks inteegrimise asendusmeetodit, tähistades

$$x = \sin t,\ dx = \cos t dt,$$

mille puhul uued inteegrimisrajad on $t = 0$ ja $t = \frac{\pi}{2}$. Tähendab,

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt.$$

Viimase integraali leidmiseks rakendame ositi inteegrimist, võttes

$$u = \cos^3 t, \qquad du = -3\cos^2 t \sin t dt,$$
$$dv = \cos t dt, \qquad v = \sin t;$$

saame

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = [\cos^3 t \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt =$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^2 t dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt,$$

millest

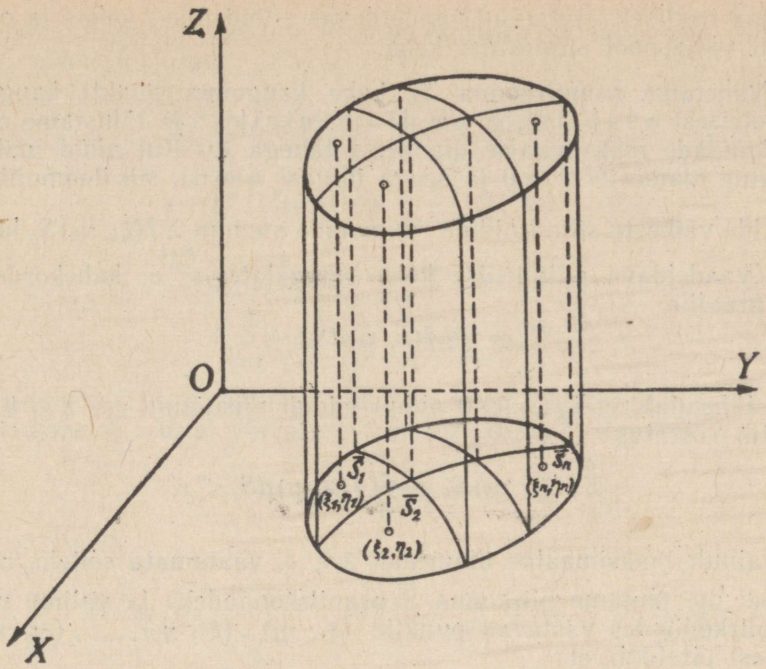
$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 3\left[\frac{t - \sin t \cos t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{4}$$

ja järelikult otsitav ruumala

$$V = \frac{64}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{64}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{16}{3}\cdot\frac{3\pi}{4} = 4\pi.$$

3) Üldiselt võime silindrilise (samuti ka prismaatilise) keha ruumala arvutada järgmiselt. Jaotame tõkestatud kinnise piirkonna S, milles kahe muutuja funktsioon $f(x, y)$ on pidev, kõveratega (või sirgetega) n osapiirkonnaks (joon. 45)

$$S_1, S_2, \ldots, S_n,$$



Joon. 45.

millede pindalad olgu vastavalt

$$S_1, S_2, \ldots, S_n.$$

Valime igas osapiirkonnas $\bar{S}_1, \bar{S}_2, \ldots, \bar{S}_n$ vabalt punktid

$$(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n),$$

milledele vastavad funktsiooni $f(x, y)$ väärtused

$$f(\xi_1, \eta_1), f(\xi_2, \eta_2), \ldots, f(\xi_n, \eta_n),$$

ja moodustame korrutiste summa

$$f(\xi_1, \eta_1)S_1 + f(\xi_2, \eta_2)S_2 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)S_k. \quad (1)$$

Seda summat nimetame funktsiooni $f(x, y)$ integraalsummaks piirkonnas $\bar{S}$.

Kui piirkonna $\bar{S}$ igas punktis on $f(x, y) \geqslant 0$, siis kujutab integraalsumma (1) niisuguste silindriliste kehakeste ehk väikeste silindroidide ruumalade summat, millede kõrgusteks on $f(\xi_k, \eta_k)$ ning alumisteks ja ülemisteks põhjadeks S_k, kus $k = 1, 2, \ldots, n$. Üldjuhul nende väikeste silindroidide ülemised

põhjad osaliselt asetsevad vaadeldavas silindrilises kehas ja osaliselt väljaspool silindrilist keha.

Nimetame osapiirkonna $\bar{S}_k$ kahe kaugeima punkti kaugust teineteisest o s a p i i r k o n n a d i a m e e t r i k s* ja tähistame osapiirkondade maksimaalse diameetri tähega λ. Kui nüüd maksimaalne diameeter $\lambda \to 0$ ja seega ühtlasi $n \to \infty$, siis loomulikult kõikide väikeste silindroidide ruumalade summa $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S_k$ läheneb vaadeldava silindrilise keha ruumalale, s. o. kahekordsele integraalile

$$\iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS.$$

See tähendab, et iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub niisugune arv $\delta > 0$, et kehtib võrratus

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S_k - \iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS \right| < \varepsilon,$$

kui ainult maksimaalne diameeter $\lambda < \delta$, vaatamata sellele, mismoodi me jaotame piirkonna $\bar{S}$ osapiirkondadeks ja valime neis osapiirkondades vastavad punktid $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_n, \eta_n)$. Sellest järeldub, et

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S_k = \iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS.$$

Näitame, et viimane võrdus kehtib, kui $f(x, y)$ on pidev tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$. Integraalide aditiivsuse põhjal (§ 47, p. 3)

$$\iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS = \iint_{\bar{S}_1} f(x, y)\, dS + \iint_{\bar{S}_2} f(x, y)\, dS + \ldots + \iint_{\bar{S}_n} f(x, y)\, dS.$$

Rakendades selle võrduse parempoolsete integraalide suhtes kahekordse integraali keskväärtuse teoreemi (§ 47, p. 5), saame

$$\iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS = f(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1) S_1 + f(\bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2) S_2 + \ldots + f(\bar{\xi}_n, \bar{\eta}_n) S_n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) S_k, \qquad (2)$$

mis väljendab samuti integraalsummat, kus punktid $(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)$ ei ole enam vabalt valitavad, vaid integraali keskväärtuse kohaselt fik-

---

* Näiteks ringi diameeter esitatud mõttes on võrdne ringi hariliku diameetriga, ellipsi diameeter on võrdne ellipsi fokaaltelje pikkusega, ristküliku diameeter on võrdne ristküliku diagonaali pikkusega jne.

seeritud kindlad punktid. Kasutades integraalsummasid (1) ja (2), võime kirjutada, et

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S_k - \iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S_k - \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k) S_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} [f(\xi_k, \eta_k) - f(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)] S_k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k, \eta_k) - f(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)| S_k.$$

Funktsiooni $f(x, y)$ ühtlase pidevuse tõttu leidub iga $\varepsilon > 0$ puhul niisugune $\delta > 0$, et võrratusest $\lambda < \delta$ järeldub võrratus

$$|f(\xi_k, \eta_k) - f(\bar{\xi}_k, \bar{\eta}_k)| < \frac{\varepsilon}{S}$$

ja järelikult

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S_k - \iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS\right| < \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{S} S_k = \frac{\varepsilon}{S} \sum_{k=1}^{n} S_k = \varepsilon,$$

millest nähtub, et kehtib võrdus

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) S_k = \iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS.$$

Sellest tulemusest järeldub, et integraalsummat (1) piirkonnas $\bar{S}$ võime vaadelda kui kahekordse integraali $\iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dS$ ligikaudset väärtust, saades seega ühtlasi vastava silindrilise keha ruumala ligikaudse väärtuse, kusjuures ruumala absoluutne viga läheneb nullile, kui kõikide osapiirkondade diameetrid lähenevad nullile, s. o. kui $\lambda \to 0$.

4) Kui funktsioon

$$F(x, y, z) = 0$$

esitab geomeetriliselt kinnist kõverpinda nõnda, et iga seda kõverpinda läbiv Z-teljega paralleelne sirge lõikab teda ikka kahes punktis M_1 ja M_2 (joon. 46), siis, ilmutades antud funktsioonist z, saame selle jaoks kaks väärtust

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y),$$

kusjuures kõverpinna punkte $M_1(x, y, f_1)$ eraldab punktidest $M_2(x, y, f_2)$ temal asuv kõver C, mille igas punktis puutujatasapind on risti XY-tasapinnaga. Kõvera C projektsioon XY-tasapin-

nal on kõver C_1, mis on kõverpinna $F(x, y, z) = 0$ projektsiooni $\bar{S}$ äärjooneks, mille võrrandi

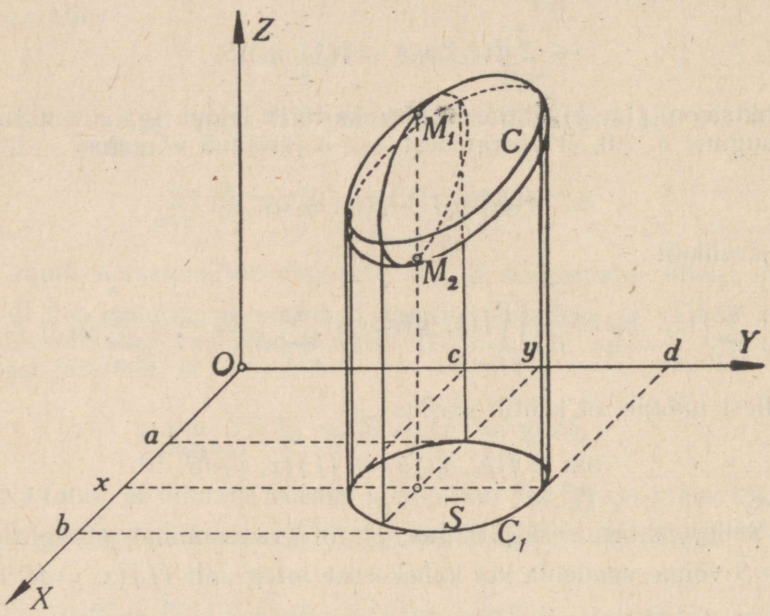
$$\Phi(x, y) = 0$$

leiame võrranditest

$$F(x, y, z) = 0 \text{ ja } F_z(x, y, z) = 0$$

z elimineerimise teel.

Kui $f_1(x, y) > f_2(x, y)$, siis $z = f_1(x, y)$ esitab kinnise kõver-



Joon. 46.

pinna $F(x, y, z) = 0$ ülemist osa ja $z = f_2(x, y)$ alumist osa ning kahekordsed integraalid

$$V_1 = \iint\limits_{\bar{S}} f_1(x, y)\,dxdy \quad \text{ja} \quad V_2 = \iint\limits_{\bar{S}} f_2(x, y)\,dxdy$$

määravad piirkonnale $\bar{S}$ ehitatud püstsilindriliste kehade ruumalad, milledest esimene on ülaltpoolt piiratud pinnaga $z = f_1(x, y)$ ja teine on ülaltpoolt piiratud pinnaga $z = f_2(x, y)$. Järelikult on kinnise kõverpinnaga $F(x, y, z) = 0$ piiratud keha ruumala

$$V = \iint\limits_{\bar{S}} f_1(x, y)\,dxdy - \iint\limits_{\bar{S}} f_2(x, y)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\bar{S}} [f_1(x, y) - f_2(x, y)]\,dxdy =$$

$$= \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} [f_1(x, y) - f_2(x, y)]dx = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} [f_1(x, y) - f_2(x, y)]dy,$$

kus funktsioone $\varphi_1(y)$ ja $\varphi_2(y)$ ning $\psi_1(x)$ ja $\psi_2(x)$ määrab võrrand $\Phi(x, y) = 0$.

Näiteks ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ruumala leidmiseks ilmutame z, s. o.

$$z = \pm \frac{c}{ab} \sqrt{b^2(a^2 - x^2) - a^2y^2}.$$

Kui arvestada $\frac{1}{8}$ ellipsoidi ruumala, mille inteegrimispiirkonnaks XY-tasapinnal on veerand ellipsi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

pinda, kus $x \geqslant 0$ ja $y \geqslant 0$, siis funktsiooni z inteegrimine Y-teljega paralleelset sirget mööda toimub rajades $y = 0$ kuni $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ja X-telge mööda rajades $x = 0$ kuni $x = a$. Ellipsoidi täisruumala on siis

$$V = \frac{8c}{ab} \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{b^2(a^2 - x^2) - a^2y^2}\, dy =$$

$$= \frac{8c}{a^2b} \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{b^2(a^2 - x^2) - a^2y^2}\, d(ay) =$$

$$= \frac{8c}{a^2b} \int_0^a dx \left[\frac{ay}{2} \sqrt{b^2(a^2 - x^2) - a^2y^2} + \frac{b^2(a^2 - x^2)}{2} \arcsin \frac{ay}{b\sqrt{a^2 - x^2}} \right]_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \frac{8c}{a^2b} \int_0^a dx \frac{b^2(a^2 - x^2)}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi bc}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \frac{2\pi bc}{a^2} \left[a^2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{4}{3} \pi abc.$$

Erijuhul, kui $a = b = c$, saame kera ruumala

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

kus a on kera raadius.

§ 49. Kahekordse integraali teisendamine. 1) Kahekordse integraali mõistet saame üldistada integraali teisendamisel endistelt inteegrimismuutujatelt uutele inteegrimismuutujatele ülemineku teel, mis võimaldab ühtlasi paljudel juhtudel kahekordse integraali väärtuse hõlpsamat leidmist.

Võtame kahekordse integraali

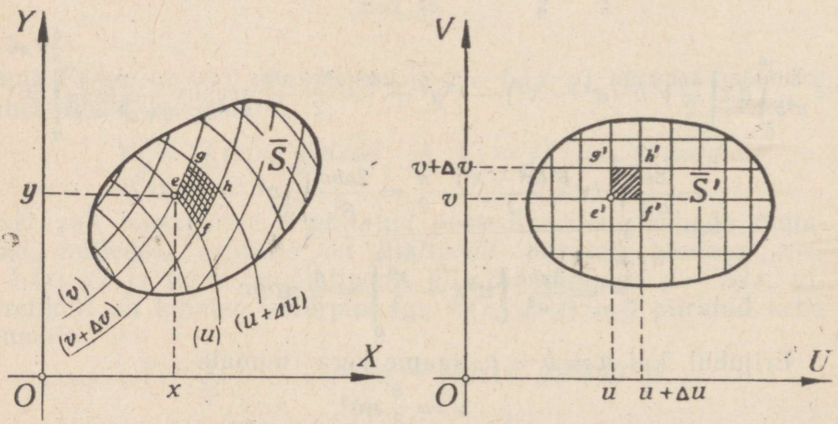
$$\iint\limits_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy,$$

kus inteegritav funktsioon on pidev tõkestatud kinnises piirkonnas $\bar{S}$. Selle integraali teisendamiseks asendame inteegrimismuutujad x ja y uute inteegrimismuutujatega u ja v nõnda, et

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \tag{1}$$

kusjuures u ja v kujutavad geomeetriliselt punkti (u, v) ristkoordinaate UV-tasapinnal ning x ja y punkti (x, y) ristkoordinaate XY-tasapinnal. Võtame UV-tasapinnal kinnise piirkonna $\bar{S}'$ nõnda, et piirkonna $\bar{S}'$ igale punktile (u, v) vastab kindel punkt (x, y) piirkonnas $\bar{S}$ (joon. 47), nii et piirkonna $\bar{S}'$ sisemisele punktile vastab piirkonna $\bar{S}$ sisemine punkt ja piirkonna $\bar{S}'$ äärjoone punktile piirkonna $\bar{S}$ äärjoone punkt. Kui piirkonna $\bar{S}'$ erinevatele punktidele (u, v) vastavad piirkonna $\bar{S}$ erinevad punktid (x, y), nii et iga üksik punkt (x, y) vastab ainult ühele punktile (u, v), siis on võrrandid (1) üheselt lahendatavad u ja v suhtes ning u ja v kujutavad omakorda üheseid x ja y funktsioone, s. o.

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{2}$$



Joon. 47.

Seega valemid (1) määravad piirkonna $\bar{S}'$ teisenduse piirkonnaks $\bar{S}$ ja valemid (2) vastupidiselt piirkonna $\bar{S}$ teisenduse piirkonnaks $\bar{S}'$. Nii kujuneb piirkondade $\bar{S}$ ja $\bar{S}'$ vahel vastavus, mida nimetame nende piirkondade **üksühene ks vastavuseks**, kusjuures funktsioone (1) ja (2) nimetame siis **üksühesteks funktsioonideks**.

Oletame, et funktsioonid (1) ja (2) ei ole ainult pidevad, vaid omavad vastavalt piirkonnas $\bar{S}'$ ja $\bar{S}$ ka pidevaid esimest järku osatuletisi, millede pidevus on seega ühtlane (§ 17, p. 3). Siis piirkonna $\bar{S}$ mistahes punktis (x, y) argumentide diferentsiaalidele

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv$$

vastavad piirkonna $\bar{S}'$ vastavas punktis (u, v) kindlad du ja dv väärtused, s. o.

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx & \frac{\partial x}{\partial v} \\ dy & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}, \qquad dv = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & dx \\ \frac{\partial y}{\partial u} & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}},$$

ja samuti ümberpöördult, kusjuures determinanti

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = D$$

nimetatakse **funktsionaaldeterminandiks**.

Näitame, et determinant $D \neq 0$. Selleks võtame funktsioonid

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v)$$

ja oletame, et u ja v on omakorda uute muutujate ξ ja η pidevad ja diferentsitavad funktsioonid

$$u = u(\xi, \eta), \quad v = v(\xi, \eta).$$

Siis x ja y muutuvad ξ ja η liitfunktsioonideks:

$$x = x[u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)], \quad y = y[u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)].$$

Et liitfunktsioonide diferentsimise juhiste (§ 27, p. 2) kohaselt

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta},$$

siis nendest osatuletistest moodustatud determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

on võrdne kahe determinandi korrutisega:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

Tagasi minnes uutelt muutujatelt ξ ja η endistele muutujatele x ja y, s. o. võttes $\xi = x$ ja $\eta = y$, saame

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

millest nähtub, et funktsioonisüsteemide (1) ja (2) funktsionaaldeterminandid kujutavad vastastikku pöördväärtusi ning kummagi süsteemi funktsionaaldeterminant ei ole võrdne nulliga. Seega piirkonna S' igas punktis funktsionaaldeterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

ja järelikult osatuletiste pidevuse tõttu piirkonnas S' omab ikka üht ja sama märki.

Kui jagame piirkonna S' koordinaattelgedele paralleelsete joontega ristkülikulisteks osapiirkondadeks, milledest üldiselt üks on $(e'f'h'g')$, siis vastab sellele piirkonnas S kõverjoontega piiratud osapiirkond $(efhg)$, sest kui loeme u ja v parameetrilisteks suurusteks, mis võivad omada mistahes konstantseid väärtusi, siis niisuguste u ja v puhul võrrandid

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

esitavad kaht kõverate parve, mis jagavad piirkonna S kõverate

kaartega piiratud osapiirkondadeks, kusjuures (x, y) kujutab nende kahe kõverate parve lõikepunkte. Sel juhul nimetame u ja v tähendatud lõikepunktide kõverjoonelisteks koordinaatideks. Seega u ja $u + \Delta u$ ning v ja $v + \Delta v$ puhul võrrandid esitavad piirkonnas $\overline{S}$ kõveraid, mida tähistame vastavalt sümbolitega (u) ja $(u + \Delta u)$ ning (v) ja $(v + \Delta v)$ (vt. joon. 47). Need kõverad moodustavad osapiirkonna $(efhg)$. Et kõvera kaare diferentsiaal on võrdne kaarele vastava kõõlu diferentsiaaliga, siis küllalt väikese Δu ja Δv puhul asendame osapiirkonna $(efhg)$ kõverjoonelised äärjooned neile vastavate kõõludega, saades parallelogrammi, mille tipud on

$$e \equiv (x, y),\ f \equiv (x_1, y_1),\ g \equiv (x_2, y_2),\ h \equiv (x_3, y_3).$$

Analüütilisest geomeetriast teame, et selle parallelogrammi pindala ΔS kui kahekordse kolmnurga pindala tippude e, f ja g koordinaatide kaudu on võrdne determinandi

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x \\ y_1 - y & y_2 - y \end{vmatrix}$$

absoluutväärtusega. Tähistades

$$x_1 - x = \Delta_1 x,\ x_2 - x = \Delta_2 x,\ y_1 - y = \Delta_1 y,\ y_2 - y = \Delta_2 y,$$

saame

$$\Delta S = \begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_2 x \\ \Delta_1 y & \Delta_2 y \end{vmatrix},$$

kusjuures piirkonna S pinnaelement on siis

$$dS = \begin{vmatrix} d_1 x & d_2 x \\ d_1 y & d_2 y \end{vmatrix},$$

kus $d_1 x$ ja $d_1 y$ tähendavad funktsioonide $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$ diferentsiaale konstantse v puhul ning $d_2 x$ ja $d_2 y$ tähendavad nende funktsioonide diferentsiaale konstantse u puhul. Et konstantse v puhul

$$d_1 x = \frac{\partial x}{\partial u}\, du,\quad d_1 y = \frac{\partial y}{\partial u}\, du$$

ja konstantse u puhul

$$d_2 x = \frac{\partial x}{\partial v}\, dv,\quad d_2 y = \frac{\partial y}{\partial v}\, dv,$$

siis

$$dS = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}\, du & \frac{\partial x}{\partial v}\, dv \\ \frac{\partial y}{\partial u}\, du & \frac{\partial y}{\partial v}\, dv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = D\, du\, dv = D\, dS',$$

millest ilmneb ühtlasi, et pidevate pindalade S ja S' puhul on

$$\lim_{\Delta S' \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'} = \frac{dS}{dS'} = D.$$

Võttes determinandi D absoluutväärtuse, saame

$$dS = |D| du dv = |D| dS'$$

ja järelikult

$$\iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dx dy = \iint_{\bar{S}'} f[x(u, v), y(u, v)]\, |D| du dv,$$

mis ongi kahekordse integraali teisendamise valem.

Sellest tulemusest nähtub, et piirkonnas $\bar{S}$ funktsiooni $f(x, y)$ kahekordne integraal on võrdne uute muutujate u ja v funktsiooni $f[x(u, v), y(u, v)]|D|$ kahekordse integraaliga piirkonnas $\bar{S}'$, kusjuures piirkonna $\bar{S}'$ pinnaelemendiks on $dS' = du dv$ ning piirkonna $\bar{S}$ uueks pinnaelemendiks $dS = |D| du dv$.

Samuti ka

$$\int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y)\, dy = \int_\alpha^\beta du \int_{\mu_1(u)}^{\mu_2(u)} f[x(u, v), y(u, v)]\, |D| dv,$$

kus teisendatud kahekordse integraali inteegrimisrajad α ja β ning $\mu_1(u)$ ja $\mu_2(u)$ tuleb valida vastavalt uute inteegrimismuutujate geomeetrilisele tähendusele, kusjuures ülemised inteegrimisrajad on ikka suuremad vastavatest alumistest inteegrimisrajadest.

Kui siinjuures inteegrimispiirkonna $\bar{S}$ igas punktis on $f(x, y) = 1$, siis teisendatud kahekordne integraal määrab inteegrimispiirkonna pindala S arvulise väärtuse uute inteegrimismuutujate u ja v kaudu, s. o.

$$S = \iint_{\bar{S}'} |D| du dv = \int_\alpha^\beta du \int_{\mu_1(u)}^{\mu_2(u)} |D| dv.$$

2) Kahekordse integraali

$$\iint_{\bar{S}} f(x, y)\, dx dy$$

leidmiseks võetakse paljudel juhtudel uuteks inteegrimismuutujateks polaarkoordinaadid r ja φ, s. o.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

kus raadiusvektor r võib muutuda 0-st ∞-ni ja polaarnurk φ võib muutuda 0-st 2π-ni. Et siin

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi,$$

siis funktsionaaldeterminant

$$D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

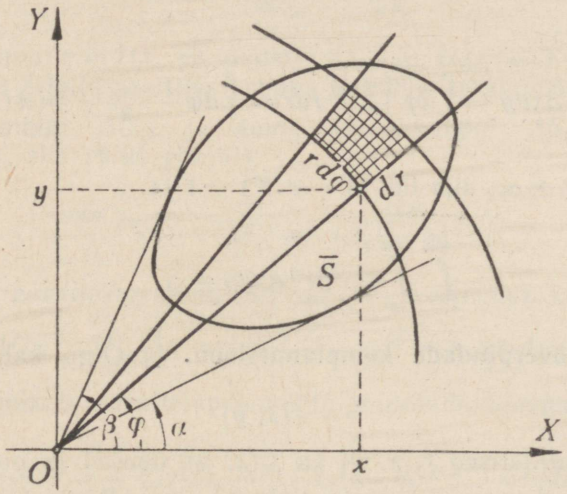
ja inteegrimispiirkonna $\bar{S}$ pinnaelement

$$dS = rdrd\varphi.$$

Et konstantse r puhul võrrandid

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

esitavad ringjooni, millede keskpunktid on nullpunktis, ja konstantse φ puhul nullpunktist väljuvaid sirgeid, siis sellest järeldub, et dS kujutab pinnaelementi, mis on piiratud kahe ringi kaa-



Joon. 48.

rega, mis asetsevad kahe nullpunktist väljuva sirge vahel (joon. 48), kusjuures dr tähendab raadiuse diferentsiaali ja $rd\varphi$ ringi kaare diferentsiaali. Seega on siin

$$\iint\limits_{\bar{S}} f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_{\bar{S}'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,rdrd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,rdr.$$

Kui siinjuures inteegrimispiirkonna $\bar{S}$ igas punktis on

$f(x, y) = 1$, siis teisendatud kahekordne integraal määrab pindala S arvulise väärtuse polaarkoordinaatide r ja φ kaudu, s. o.

$$S = \iint\limits_{\bar{S}'} r dr d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} r dr.$$

Et leida näiteks kahekordse integraali

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

väärtus, kus inteegrimispiirkonnaks on terve XY-tasapind, selleks asendame x ja y polaarkoordinaatidega r ja φ ning oletame, et inteegrimispiirkonnaks $\bar{S}$ on ring lõpliku raadiusega R. Siis

$$e^{-(x^2+y^2)} = e^{-(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)} = e^{-r^2}$$

ja

$$\iint\limits_{\bar{S}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R e^{-r^2} r dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{1 - e^{-R^2}}{2} = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Kui nüüd $R \to \infty$, siis $\lim\limits_{R\to\infty} (1 - e^{-R^2}) = 1$ ja

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi.$$

§ 50. Kõverpindade komplanatsioon. 1) Olgu kahe muutuja funktsioon

$$z = f(x, y)$$

ja tema osatuletised $f_x(x, y)$ ja $f_y(x, y)$ ühesed ja pidevad ristkülikulises piirkonnas $\bar{S}$, mille küljed on paralleelsed X- ja Y-telgedega (§ 46, joon. 38). Selles piirkonnas $z = f(x, y)$ esitab kõverpinda U, mille projektsiooniks XY-tasapinnal on siis piirkond $\bar{S}$. Kõverpinna pindala U arvulise väljenduse saamiseks jagame piirkonna $\bar{S}$ X- ja Y-telgedele paralleelsete sirgetega ristkülikulisteks osapiirkondadeks, millede pindalad on $\Delta S_{ki} = \Delta x_k \Delta y_i$, kus $k = 1, 2, \ldots, n$ ja $i = 1, 2, \ldots, m$. Igale osapiirkonnale $\Delta \bar{S}_{ki}$ vastab kõverpinna $z = f(x, y)$ teatav osa. Märgime osapiirkonnas $\Delta \bar{S}_{ki}$ punkti (ξ_k, η_i), millele vastab tähendatud kõverpinna osal punkt aplikaadiga $f(\xi_k, \eta_i)$. Selles punktis kujundame puutujatasapinna, mille kaldenurk XY-tasapinnaga olgu γ_{ki}. Puutujatasapind lõikab osapiirkonnale $\Delta \bar{S}_{ki}$ ehitatud prismaatilist tulpa

parallelogrammi mööda, millega asendame vastava kõverpinna osa. Kui selle parallelogrammi pindala tähistame sümboliga ΔU_{ki}, siis piirkonna $\bar{S}$ kõikidele osapiirkondadele vastavate parallelogrammide pindalade summa U_{nm} kujutab kahekordset integraalsummat, s. o.

$$U_{nm} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \Delta U_{ki},$$

mis n ja m piiramatul kasvamisel ja seega iga ΔU_{ki} piiramatul kahanemisel läheneb kõverpinna $\bar{U}$ pindala väärtusele U.

Et kaldpinna projektsioon on võrdne kaldpinna pindala ja kaldenurga koosinuse korrutisega, siis käesoleval juhul parallelogrammi pindala

$$\Delta U_{ki} = \frac{\Delta S_{ki}}{\cos \gamma_{ki}} = \frac{\Delta x_k \Delta y_i}{\cos \gamma_{ki}}.$$

Et kõverpinna $z = f(x, y)$ punktis $[\xi_k, \eta_i, f(\xi_k, \eta_i)]$ kõverpinna normaali ja Z-telje positiivse suuna vaheline teravnurk on võrdne parallelogrammi $\Delta \bar{U}_{ki}$ ja tema projektsiooni $\Delta \bar{S}_{ki}$ vahelise nurgaga γ_{ki}, siis (§ 21 põhjal)

$$\cos \gamma_{ki} = \frac{1}{\sqrt{f_x(\xi_k, \eta_i)^2 + f_y(\xi_k, \eta_i)^2 + 1}}$$

ning seega parallelogrammi pindala ΔU_{ki} väljendub kujul

$$\Delta U_{ki} = \sqrt{f_x(\xi_k, \eta_i)^2 + f_y(\xi_k, \eta_i)^2 + 1}\ \Delta x_k \Delta y_i,$$

kusjuures kõikide parallelogrammide pindalade summa on siis

$$U_{nm} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \sqrt{f_x(\xi_k, \eta_i)^2 + f_y(\xi_k, \eta_i)^2 + 1}\ \Delta x_k \Delta y_i,$$

mille piirväärtus, kui $\max \Delta x_k \to 0$ ja $\max \Delta y_i \to 0$, on kahekordne integraal

$$\iint_{\bar{S}} \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}\, dx dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_c^d \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}\, dy =$$

$$= \int_c^d dy \int_a^b \sqrt{f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2 + 1}\, dx,$$

mis määrab kõverpinna $\bar{U}$ pindala U arvulise väärtuse; inteegrimispiirkonnaks $\bar{S}$ on siin ristkülik mõõtmetega $b - a$ ja $d - c$.

Tähistades

$$f_x(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = p \quad \text{ja} \quad f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

saame kõverpinna pindala U väljendavale kahekordsele integraalile anda lühidalt kuju

$$U = \int_a^b dx \int_c^d \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dy = \int_c^d dy \int_a^b \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx.$$

Kui kõverpinna U projektsioon S XY-tasapinnal (inteegrimispiirkond) on piiratud kinnise kõveraga $F(x, y) = 0$ (joon. 41), mida nii X- kui ka Y-teljega paralleelsed sirged ei lõika rohkem kui kahes punktis, siis esimest korda y ja teist korda x järgi inteegrimisel on inteegrimisrajad c ja d muutuja x funktsioonid, s. o. $c = \psi_1(x)$ ja $d = \psi_2(x)$, ning a ja b on konstantsed suurused, esimest korda x ja teist korda y järgi inteegrimisel aga on inteegrimisrajad a ja b muutuja y funktsioonid, s. o. $a = \varphi_1(y)$ ja $b = \varphi_2(y)$, ning c ja d on konstantsed suurused. Sel juhul kõverpinna pindala

$$U = \iint_S \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx dy =$$

$$= \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dy = \int_c^d dy \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx.$$

Kõverpinna pindala arvutamist nimetatakse k õ v e r p i n n a k o m p l a n a t s i o o n i k s.

Et leida näiteks pinnaosa, mille kõverpinnast $z^2 = 2xy$ eraldavad tasapinnad $x = a$, $y = b$ ja $z = 0$, selleks võtame funktsiooni $z = \sqrt{2xy}$ osatuletised x ja y järgi, s. o.

$$p = \sqrt{\frac{y}{2x}} \quad \text{ja} \quad q = \sqrt{\frac{x}{2y}},$$

kusjuures

$$0 \leqslant x \leqslant a \quad \text{ja} \quad 0 \leqslant y \leqslant b.$$

Seega otsitav pindala

$$U = \int_0^a dx \int_0^b \sqrt{\frac{y}{2x} + \frac{x}{2y} + 1}\, dy = \int_0^a dx \int_0^b \sqrt{\frac{y^2 + x^2 + 2xy}{2xy}}\, dy =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b \frac{x + y}{\sqrt{2xy}}\, dy = \int_0^a dx \left\{ \frac{x}{\sqrt{2x}} \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2x}} \int_0^b \sqrt{y}\, dy \right\} =$$

$$= \int_0^a dx \left\{ \frac{x}{\sqrt{2x}} \left[2\sqrt{y} \right]_0^b + \frac{1}{\sqrt{2x}} \left[\frac{2}{3} y\sqrt{y} \right]_0^b \right\} =$$

$$= \sqrt{2b} \int_0^a \sqrt{x}\, dx + \frac{b\sqrt{2b}}{3} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \sqrt{2b} \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^a + \frac{b\sqrt{2b}}{3} \left[2\sqrt{x} \right]_0^a =$$

$$= \frac{2}{3} a\sqrt{2ab} + \frac{2}{3} b\sqrt{2ab} = \frac{2}{3} (a+b)\sqrt{2ab}.$$

2) Kui asendame kõverpinna

$$z = f(x, y)$$

suurust piirkonnas S väljendavas valemis

$$U = \iint_S \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dxdy$$

x ja y uute inteegrimismuutujatega u ja v nõnda, et

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v),$$

siis on ka z uute muutujate u ja v liitfunktsioon, s. o.

$$z = f[x(u, v), y(u, v)] = z(u, v).$$

Kõverpinda esitavad siis funktsioonid

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

kus x, y ja z on abimuutujate ehk parameetrite u ja v pidevad funktsioonid. Kui anname siin parameetrile u kindla väärtuse, siis x, y ja z kujutavad ainult ühe muutuja v funktsioone ja esitavad seega pinnal asetsevat kõverat, mida nimetame pinna p a r a m e e t r i l i s e k s j o o n e k s (u). Analoogiliselt saame kindla v ja muutuva u puhul pinna parameetrilise joone (v). Andes üks kord u-le ja teine kord v-le rea kindlaid väärtusi, saame kaks parve parameetrilisi jooni, mis katavad pinda võrgukujuliselt. Pinna punktid, mis on kindlate u ja v väärtuste puhul määratud viimaste võrranditega, on seega parameetriliste joonte lõikepunktid. Sel juhul nimetame u ja v tähendatud lõikepunktide k õ v e r j o o n e l i s t e k s k o o r d i n a a t i d e k s.

Diferentsides funktsiooni

$$z = f[x(u, v), y(u, v)],$$

saame

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + q\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = p\frac{\partial x}{\partial v} + q\frac{\partial y}{\partial v},$$

kus $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ ja $\frac{\partial y}{\partial v}$ on funktsioonide $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$ osatuletised. Saadud võrranditest leiame p ja q, s. o.

$$p = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{A}{D}, \quad q = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{B}{D},$$

kus ühine nimetaja D kujutab eelmises paragrahvis käsitletud funktsionaaldeterminanti. Rakendades eelmises paragrahvis esinevat kahekordse integraali teisendusvalemit, saame

$$U = \iint\limits_{\bar{S}} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dxdy = \iint\limits_{\bar{S}'} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, |D|\, dudv =$$

$$= \iint\limits_{\bar{S}'} \sqrt{A^2 + B^2 + D^2}\, dudv,$$

kus

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

3) Kui x ja y asemel võtta uuteks inteegrimismuutujateks polaarkoordinaadid r ja φ, s. o.

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

siis

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \sin\varphi \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & r\cos\varphi \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \frac{\partial z}{\partial r} \\ -r\sin\varphi & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix}$$

ja

$$A^2 + B^2 + D^2 = \left(r\cos\varphi\,\frac{\partial z}{\partial r} - \sin\varphi\,\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 +$$

$$+ \left(\cos\varphi\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} + r\sin\varphi\,\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + (r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi)^2 =$$

$$= r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

ning seega piirkonnas $\bar{S}$ kõverpinna pindala

$$U = \iint\limits_{\bar{S}'} \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, drd\varphi.$$

§ 51. Kolmekordne integraal. 1) Kui kolme muutuja funktsioon $u = f(x, y, z)$ on piirkonnas, mis on määratud tingimustega

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \quad e \leqslant z \leqslant h,$$

pidev x, y ja z funktsioon, siis inteegrides teda z järgi rajades e-st h-ni ning vaadeldes inteegrimisel x ja y kui konstantseid suurusi, saame (analoogiliselt § 45, p. 1 käsitletud arvutusele), et

$$\int_e^h f(x, y, z)\,dz = \varphi(x, y),$$

kus nüüd $\varphi(x, y)$ on piirkonnas, mida määravad tingimused

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d,$$

pidev x ja y funktsioon. Edasi inteegrime saadud funktsiooni y järgi rajades c-st d-ni, vaadeldes inteegrimisel x kui konstantset suurust; saame

$$\int_c^d dy \int_e^h f(x, y, z)\,dz = \int_c^d \varphi(x, y)\,dy = \psi(x),$$

kus $\psi(x)$ on vahemikus $a \leqslant x \leqslant b$ pidev x funktsioon. Viimast funktsiooni inteegrime x järgi rajades a-st b-ni; saame

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x, y, z)\,dz = \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Avaldist

$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x, y, z)\,dz$$

nimetame funktsiooni $f(x, y, z)$ kolmekordseks määratud integraaliks.

Analoogiliselt kahekordse integraali väärtuse leidmisele saab näidata, et ka kolmekordse integraali väärtuse leidmisel pole oluline inteegrimise järjekord, kui ainult inteegrimisrajad a ja b, c ja d ning e ja h on konstantsed suurused. Inteegrimise järjekorra määravad siin integraalide kuus võimalikku järjestust.

Geomeetriliselt vastab tingimustele

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \quad e \leqslant z \leqslant h$$

XYZ-teljestikus risttahukas, mille tahud on paralleelsed XY-, XZ- ja YZ-tasapindadega ning ruumala on

$$V = (b - a)(d - c)(h - e),$$

kus $b - a$, $d - c$ ja $h - e$ on risttahuka mõõtmed. Seega risttahukas on piirkonnaks V, milles $f(x, y, z)$ on pidev x, y ja z funktsioon.

Jaotame vahemiku a-st b-ni jaotuspunktidega

$$a = x_0, \; x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_{n-1}, \; x_n = b$$

n osavahemikuks, nii et

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

vahemiku c-st d-ni jaotuspunktidega

$$c = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}, y_m = d$$

m osavahemikuks, nii et

$$\Delta y_i = y_i = y_{i-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

ja vahemiku e-st h-ni jaotuspunktidega

$$e = z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{l-1}, z_l = h$$

l osavahemikuks, nii et

$$\Delta z_j = z_j - z_{j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

ning tõmbame läbi nende jaotuspunktide XY-, XZ- ja YZ-tasapinnaga paralleelsed tasapinnad, mis jaotavad risttahuka nml väikeseks risttahukaks. Iga niisuguse risttahuka ruumala on siis

$$\Delta V_{kij} = (x_k - x_{k-1})(y_i - y_{i-1})(z_j - z_{j-1}) = \Delta x_k \Delta y_i \Delta z_j,$$

kus $k = 1, 2, \ldots, n$, $i = 1, 2, \ldots, m$ ja $j = 1, 2, \ldots, l$. Kui võtame risttahukas, mille ruumala on ΔV_{kij}, punkti (ξ_k, η_i, ζ_j) nõnda, et

$$x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k, \; y_{i-1} \leqslant \eta_i \leqslant y_i, \; z_{j-1} \leqslant \zeta_j \leqslant z_j,$$

siis vastab sellele punktile funktsiooni $f(x, y, z)$ väärtus $f(\xi_k, \eta_i, \zeta_j)$, millele ei saa kolmemõõtmelises ruumis enam anda geomeetrilist tõlgendust. Arvestades paragrahvis 46 käsitletud kahekordset integraalsummat, saame käesoleval juhul moodustada kolmekordse integraalsumma

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_k, \eta_i, \zeta_1)\Delta x_k \Delta y_i \Delta z_1 + \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_k, \eta_i, \zeta_2)\Delta x_k \Delta y_i \Delta z_2 + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} f(\xi_k, \eta_i, \zeta_l)\Delta x_k \Delta y_i \Delta z_l = \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l} f(\xi_k, \eta_i, \zeta_j)\Delta x_k \Delta y_i \Delta z_j,
\end{aligned}$$

mille piirväärtus, kui $\max \Delta x_k \to 0$, $\max \Delta y_i \to 0$ ja $\max \Delta z_j \to 0$, on (analoogiliselt kahekordse integraali geomeetrilisele tõlgendusele) funktsiooni $f(x, y, z)$ kolmekordne integraal

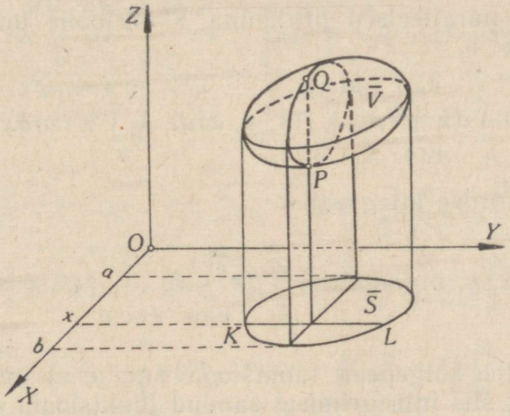
$$\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x, y, z)\,dz = \iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_V f(x, y, z)\,dV,$$

kus inteegrimispiirkonnaks on risttahukas, mille ruumala on V. Avaldis $f(x, y, z)dV = f(x, y, z)dxdydz$ on kolmekordse inte-

graali element, kusjuures $dV = dxdydz$ on inteegrimispiirkonna $\bar{V}$ element.

Et käesoleval juhul saame moodustada kolmekordse integraalsumma kuues võimalikus järjestuses, siis sellest järeldub samuti, et inteegrimise järjekord ei muuda kolmekordse integraali väärtust, kui ainult inteegrimisrajad a ja b, c ja d ning e ja h on konstantsed suurused.

2) Kui funktsiooni $u = f(x, y, z)$ inteegrimispiirkond $\bar{V}$, milles funktsioon $f(x, y, z)$ on lõplik ja pidev, on piiratud kinnise kõverpinnaga $F(x, y, z) = 0$ (joon. 49), siis tuleb arvestada x, y ja z vahekordi inteegrimispiirkonnas $\bar{V}$. Kui inteegrimispiirkonnas $\bar{V}$ näiteks ükski Z-teljega paralleelne sirge PQ ei lõika inteegrimispiirkonna pinda $F(x, y, z) = 0$ rohkem kui kahes punktis, siis võrrand $F(x, y, z) = 0$ kujutab aplikaadi z suhtes kahest



Joon. 49.

funktsiooni. Ilmutades võrrandist $F(x, y, z) = 0$ aplikaadi z, saame sellele kaks väärtust $z = \varphi_1(x, y)$ ja $z = \varphi_2(x, y)$. Inteegrime funktsiooni $f(x, y, z)$ aplikaadi z järgi PQ mööda, s. o. pinna punktist P, milles $z = \varphi_1(x, y)$, kuni pinna punktini Q, milles $z = \varphi_2(x, y)$. Saame

$$\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz = \Phi(x, y).$$

Et kahe muutuja x ja y funktsiooni inteegrimispiirkond asub XY-tasapinnal, siis käesoleval juhul funktsiooni $\Phi(x, y)$ inteegrimispiirkonnaks on piirkonna $\bar{V}$ projektsioon $\bar{S}$ XY-tasapinnal. Kui seejuures ükski Y-teljega paralleelne sirge KL ei lõika piir-

konna S äärjoont rohkem kui kahes punktis, siis saame võrranditest

$$F(x, y, z) = 0 \text{ ja } F_z(x, y, z) = 0$$

aplikaadi z elimineerimise teel ordinaadile y kaks väärtust $y = \psi_1(x)$ ja $y = \psi_2(x)$. Funktsiooni $\Phi(x, y)$ inteegrimine y järgi toimub siis piirkonnas $\bar{S}$ Y-teljega paralleelset sirget KL mööda, mis asetseb Y-teljest x ühiku kaugusel. Inteegrides funktsiooni $\Phi(x, y)$ ordinaadi y järgi punktist K, milles olgu $y = \psi_1(x)$, punktini L, milles on siis $y = \psi_2(x)$, saame

$$\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \Phi(x, y)dy = \Psi(x),$$

mille inteegrimine abstsissi x järgi toimub rajades a-st b-ni, milles Y-teljega paralleelsed piirkonna $\bar{S}$ äärjoone puutujad lõikavad X-telge, s. o.

$$\int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz = \int_a^b \Psi(x)dx.$$

Seega kolmekordse integraali

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

leidmiseks tuleb kõigepealt funktsiooni $f(x, y, z)$ inteegrida aplikaadi z järgi, siis inteegrimisel saadud funktsiooni $\Phi(x, y)$ ordinaadi y järgi ja lõpuks teistkordsel inteegrimisel saadud funktsiooni $\Psi(x)$ abstsissi x järgi.

Kolmekordse integraali geomeetrilisest tõlgendusest nähtub, et inteegrimispiirkonnal on siin ruumiline kuju. Seepärast nimetatakse kolmekordset integraali ka r u u m i n t e g r a a l i k s.

Analoogiliselt kahekordse integraali omaduste tõestamiskäigule (§ 47) saame näidata, et samad omadused kehtivad ka kolmekordse integraali puhul.

Leiame näiteks kerapinnaga $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ piiratud poolkera raskuspunkti (x_0, y_0, z_0), kui $z \geqslant 0$. Selle poolkera sümmeetrilisuse tõttu Z-telje suhtes asetseb raskuspunkt Z-teljel, mille puhul $x_0 = y_0 = 0$ ning (I osa, § 89, p. 1 järgi)

$$z_0 = \frac{\int z dV}{\int dV}.$$

Et siin $dV = dxdydz$, siis

$$z_0 = \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz} = \frac{\int_0^R z dz \int_{\psi_1(z)}^{\psi_2(z)} dy \int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} dx}{\int_0^R dz \int_{\psi_1(z)}^{\psi_2(z)} dy \int_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} dx},$$

kus

$\varphi_1(y, z) = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$ ja $\varphi_2(y, z) = +\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$

ning

$$\psi_1(z) = -\sqrt{R^2 - z^2} \text{ ja } \psi_2(z) = +\sqrt{R^2 - z^2}.$$

Et käesoleval juhul on tegemist integraalide jagatisega, siis võime alumisteks inteegrimisrajadeks võtta $\varphi_1(y, z) = 0$ ja $\psi_1(z) = 0$ ning seega leida poolkera raskuspunkti aplikaadi

$$z_0 = \frac{\int_0^R z dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} dx}{\int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} dx} = \frac{\int_0^R z dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dy}{\int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} dy} =$$

$$= \frac{\int_0^R z dz \left[\frac{y}{2}\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} + \frac{R^2 - z^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}}}{\int_0^R dz \left[\frac{y}{2}\sqrt{R^2 - y^2 - z^2} + \frac{R^2 - z^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - z^2}} \right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}}} =$$

$$= \frac{\int_0^R z \frac{R^2 - z^2}{4} dz}{\int_0^R \frac{R^2 - z^2}{4} dz} = \frac{\int_0^R z(R^2 - z^2) dz}{\int_0^R (R^2 - z^2) dz} = \frac{\left[\frac{R^2 z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^R}{\left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R} = \frac{3}{8} R.$$

Kui inteegrimispiirkonna V igas punktis on $f(x, y, z) = 1$, siis esitab kolmekordne integraal ruumala V arvulist väärtust, s. o.

$$V = \iiint_V dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dz.$$

Et leida näiteks ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ruumala, selleks ilmutame z, s. o.

$$z = \pm \frac{c}{ab} \sqrt{b^2(a^2 - x^2) - a^2 y^2}.$$

Kui arvestada $\frac{1}{8}$ ellipsoidi ruumala, mida loeme inteegrimispiirkonnaks, kus $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ ja $z \geqslant 0$, siis funktsiooni z inteegrimine Z-teljega paralleelset sirget mööda toimub rajades $z = 0$ kuni $z = +\frac{c}{ab}\sqrt{b^2(a^2 - x^2) - a^2y^2}$, inteegrimine Y-teljega paralleelset sirget mööda rajades $y = 0$ kuni $y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ ning inteegrimine X-telge mööda rajades $x = 0$ kuni $x = a$. Ellipsoidi täisruumala on siis

$$V = 8\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\frac{c}{ab}\sqrt{b^2(a^2-x^2)-a^2y^2}} dz =$$

$$= \frac{8c}{ab}\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{b^2(a^2 - x^2) - a^2y^2}\,dy =$$

$$= \frac{8c}{a^2b}\int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{b^2(a^2 - x^2) - (ay)^2}\,d(ay) =$$

$$= \frac{8c}{a^2b}\int_0^a dx \left[\frac{ay}{2}\sqrt{b^2(a^2 - x^2) - a^2y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2(a^2 - x^2)}{2} \arcsin \frac{ay}{b\sqrt{a^2 - x^2}}\right|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$= \frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi abc.$$

§ 52. Kolmekordse integraali teisendamine. Kolmekordse integraali

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z)\,dxdydz$$

teisendamiseks asendame inteegrimismuutujad x, y ja z uute inteegrimismuutujatega u, v ja w nõnda, et

$$x = x(u, v, w),\ y = y(u, v, w),\ z = z(u, v, w)$$

oleksid piirkonnas $\bar{V}'$, mis on piirkonnaga $\bar{V}$ üksüheses vastavu-

ses, pidevad ja omaksid pidevaid esimest järku osatuletisi. Siis ümberpöördult

$$u = u(x, y, z),\ v = v(x, y, z),\ w = w(x, y, z).$$

XYZ-koordinaadistikus võetud piirkonnale $\bar{V}$ vastab siin UVW-koordinaadistikus piirkond $\bar{V}'$ nõnda, et piirkonna $\bar{V}$ igale punktile (x, y, z) vastab piirkonnas $\bar{V}'$ kindel punkt (u, v, w) ja ümberpöördult. Seega piirkonna $\bar{V}'$ mistahes punktis antud dx, dy ja dz väärtustele

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv + \frac{\partial x}{\partial w}\,dw,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv + \frac{\partial y}{\partial w}\,dw,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv + \frac{\partial z}{\partial w}\,dw$$

vastavad piirkonnas $\bar{V}'$ kindlad du, dv ja dw väärtused

$$du = \frac{\begin{vmatrix} dx & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ dy & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ dz & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{D},\quad dv = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & dx & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & dy & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & dz & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}}{D},$$

$$dw = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & dx \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & dy \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & dz \end{vmatrix}}{D},$$

kus funktsionaaldeterminant (analoogiliselt kahekordse integraali teisendusele)

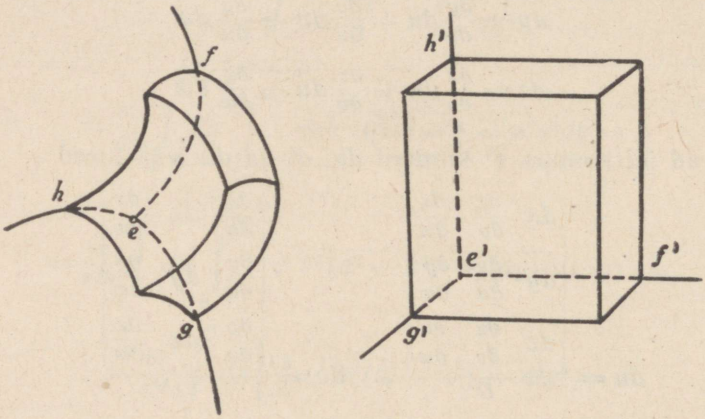
$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$$

ja omab temas esinevate osatuletiste pidevuse tõttu piirkonnas $\bar{V}'$ ikka üht ja sama märki.

Kui jagada piirkond $\bar{V}'$ koordinaattasapindadele paralleelsete tasapindadega risttahukalisteks osapiirkondadeks, milledest üldiselt üks on $(e'f'g'h')$ (joon. 50), siis vastab sellele piirkonnas $\bar{V}$ kõverpindadega piiratud osapiirkond $(efgh)$, sest kui lugeda u, v ja w parameetrilisteks suurusteks, mis võivad omada mistahes konstantseid väärtusi, siis nende väärtuste puhul võrrandid

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

esitavad kolme kõverpindade parve, mis jagavad piirkonna $\bar{V}$ kõverpindadega piiratud osapiirkondadeks, kusjuures (x, y, z) kujutab nende kolme kõverpindade parve lõikejoonte lõikepunkte,



Joon. 50.

mille kõverjooneliseteks koordinaatideks on siis u, v ja w. Seega u ja $u + \Delta u$ puhul võrrandid esitavad piirkonnas $\bar{V}$ ühe parve kaht naaberkõverpinda, v ja $v + \Delta v$ puhul teise parve kaht naaberkõverpinda ning w ja $w + \Delta w$ puhul kolmanda parve kaht naaberkõverpinda, mis moodustavad osapiirkonna $(efhg)$. Küllalt väikese Δu, Δv ja Δw puhul võime osapiirkonda $(efhg)$ vaadelda kui rööptahukat, mille ruumala ΔV on võrdne niisuguse kuuekordse tetraeedri ruumalaga, mille tippudeks on e, f, h ja g. Seega tippude

$$e \equiv (x, y, z), \; f \equiv (x_1, y_1, z_1), \; g \equiv (x_2, y_2, z_2) \text{ ja } h \equiv (x_3, y_3, z_3)$$

koordinaatide kaudu

$$\Delta V = \begin{vmatrix} x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \\ y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ z_1 - z & z_2 - z & z_3 - z \end{vmatrix}.$$

Tähistades

$$x_1 - x = \Delta_1 x, \quad x_2 - x = \Delta_2 x, \quad x_3 - x = \Delta_3 x,$$
$$y_1 - y = \Delta_1 y, \quad y_2 - y = \Delta_2 y, \quad y_3 - y = \Delta_3 y,$$
$$z_1 - z = \Delta_1 z, \quad z_2 - z = \Delta_2 z, \quad z_3 - z = \Delta_3 z,$$

saame

$$\Delta V = \begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_2 x & \Delta_3 x \\ \Delta_1 y & \Delta_2 y & \Delta_3 y \\ \Delta_1 z & \Delta_2 z & \Delta_3 z \end{vmatrix},$$

kusjuures piirkonna V ruumielement on

$$dV = \begin{vmatrix} d_1 x & d_2 x & d_3 x \\ d_1 y & d_2 y & d_3 y \\ d_1 z & d_2 z & d_3 z \end{vmatrix},$$

kus $d_1 x$, $d_1 y$ ja $d_1 z$ kujutavad funktsioonide

$$x = x(u, v, w), \; y = y(u, v, w), \; z = z(u, v, w)$$

diferentsiaale konstantse v ja w puhul; $d_2 x$, $d_2 y$ ja $d_2 z$ kujutavad nende funktsioonide diferentsiaale konstantse u ja w puhul ning $d_3 x$, $d_3 y$ ja $d_3 z$ kujutavad nende funktsioonide diferentsiaale konstantse u ja v puhul. Et konstantse v ja w puhul

$$d_1 x = \frac{\partial x}{\partial u} du, \quad d_1 y = \frac{\partial y}{\partial u} du, \quad d_1 z = \frac{\partial z}{\partial u} du,$$

konstantse u ja w puhul

$$d_2 x = \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad d_2 y = \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad d_2 z = \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

ning konstantse u ja v puhul

$$d_3 x = \frac{\partial x}{\partial w} dw, \quad d_3 y = \frac{\partial y}{\partial w} dw, \quad d_3 z = \frac{\partial z}{\partial w} dw,$$

siis

$$dV = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial x}{\partial w} dw \\ \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial w} dw \\ \frac{\partial z}{\partial u} du & \frac{\partial z}{\partial v} dv & \frac{\partial z}{\partial w} dw \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} du dv dw =$$

$$= D du dv dw = D dV',$$

millest nähtub, et

$$\lim_{\Delta V' \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta V'} = \frac{dV}{dV'} = D.$$

Võttes funktsionaaldeterminandi absoluutväärtuse $|D|$, saame

$$dV = |D| \, du dv dw = |D| \, dV'.$$

ja seega

$$\iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\bar{V}'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]\,|D|\,dudvdw,$$

mis väljendab kolmekordse integraali teisendusvalemit. Saadud valemist nähtub, et funktsiooni $f(x, y, z)$ kolmekordne integraal piirkonnas $\bar{V}$ võrdub uute muutujate u, v ja w funktsiooni

$$f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]\,|D|$$

kolmekordse integraaliga piirkonnas $\bar{V}'$, kusjuures piirkonna $\bar{V}'$ ruumielemendiks on $dV' = dudvdw$ ja piirkonna $\bar{V}$ uueks ruumielemendiks $dV = |D|dudvdw$.

Samuti ilmneb ka, et

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta du \int\limits_{\mu_1(u)}^{\mu_2(u)} dv \int\limits_{\nu_1(u, v)}^{\nu_2(u, v)} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]\,|D|\,dw,$$

kus teisendatud kolmekordse integraali inteegrimisrajad α ja β, $\mu_1(u)$ ja $\mu_2(u)$ ning $\nu_1(u, v)$ ja $\nu_2(u, v)$ tuleb valida vastavalt uute inteegrimisrajade geomeetrilisele tähendusele, kusjuures ülemised inteegrimisrajad on ikka suuremad kui vastavad alumised inteegrimisrajad.

Kui siinjuures inteegrimispiirkonna $\bar{V}$ igas punktis $f(x, y, z) = 1$, siis teisendatud kolmekordne integraal määrab inteegrimispiirkonna ruumala V arvulise väärtuse uute inteegrimismuutujate u, v ja w kaudu, s. o.

$$V = \iiint\limits_{\bar{V}'} |D|dudvdw = \int\limits_\alpha^\beta du \int\limits_{\mu_1(u)}^{\mu_2(u)} dv \int\limits_{\nu_1(u, v)}^{\nu_2(u, v)} |D|dw.$$

§ 53. Kolmekordne integraal silindrilistes ja sfäärilistes koordinaatides. 1) Teisendame kolmekordset integraali

$$\iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z)\,dxdydz,$$

võttes uuteks inteegrimismuutujateks silindrilised koordinaadid r, φ ja z (joon. 51), s. o.

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$

kus r ja φ on ruumilise punkti M projektsiooni P polaarkoordinaadid ning z on punkti M aplikaat. Siin r võib muutuda 0-st

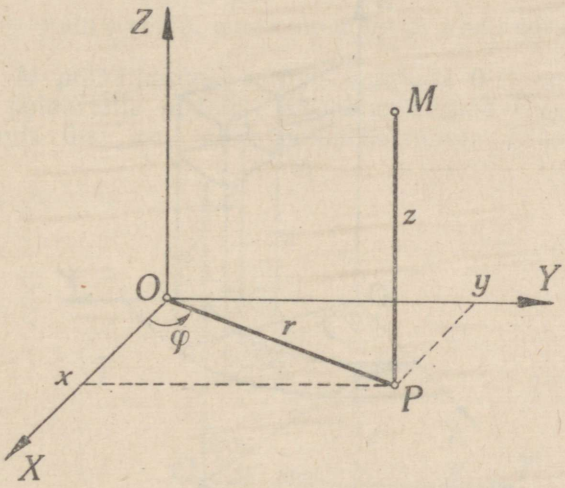
∞-ni, φ võib muutuda 0-st 2π-ni ja z võib muutuda $-\infty$-st $+\infty$-ni.

Rakendades siin eelmises paragrahvis esinevaid osatuletiste valemeid, saame

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$



Joon. 51.

kus nüüd funktsionaaldeterminant

$$D = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Inteegrimispiirkonna $\overline{V}$ ruumielement on seega

$$dV = rdrd\varphi dz.$$

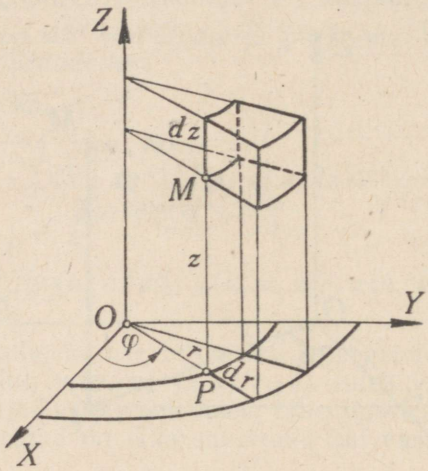
Et konstantse r puhul võrrandid $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ja $z = z$ esitavad silindrilisi pindu, ja nimelt ringsilindreid, millede sümmeetriateljeks on Z-telg, konstantse φ puhul Z-telge mööda lõikuvaid pooltasapindu ning konstantse z puhul tasapindu, mis on paralleelsed XY-tasapinnaga, siis sellest ilmneb, et dV kujutab ruumielementi, mis on piiratud kahe silindrilise pinnaga ja nelja tasapinnaga, milledest kaks on perpendikulaarsed ja kaks

on paralleelsed XY-tasapinnaga (joon. 52). Seega kehtib siin järgmine teisendus:

$$\iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\bar{V}'} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,rdrd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} rdr \int\limits_{\nu_1(r,\varphi)}^{\nu_2(r,\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz.$$

Kui siinjuures inteegrimispiirkonnaks on silindri ruumala,



Joon. 52.

kus $r \leqslant R$ ja $0 \leqslant z \leqslant h$, siis on saadud kolmekordse integraali inteegrimisrajad konstantsed suurused, ja nimelt

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} rdr \int\limits_{0}^{h} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\,dz,$$

mille väärtus ei sõltu inteegrimise järjekorrast.

Kui inteegrimispiirkonna $\bar{V}$ igas punktis $f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z = 1$, siis teisendatud kolmekordne integraal määrab ruumala V arvulise väärtuse silindriliste koordinaatide r, φ ja z kaudu järgmiselt:

$$V = \iiint\limits_{\bar{V}'} rdrd\varphi dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} rdr \int\limits_{\nu_1(r,\varphi)}^{\nu_2(r,\varphi)} dz.$$

Kui siin võtta silindri põhja raadiuseks R ja kõrguseks h, siis selle silindri ruumala

$$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr \int_0^h dz = 2\pi \cdot \frac{R^2}{2} \cdot h = \pi R^2 h.$$

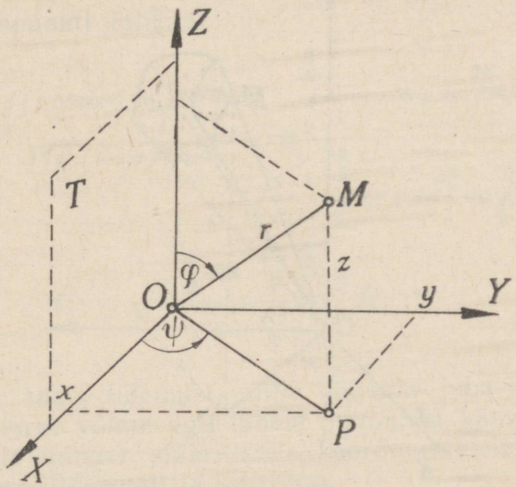
2) Võtame kolmekordses integraalis

$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

uuteks inteegrimismuutujateks sfäärilised koordinaadid r, φ ja ψ, mis on ristkoordinaatidega seotud järgmiselt (joon. 53):

$$x = r \sin\varphi \cos\psi,\quad y = r \sin\varphi \sin\psi,\quad z = r \cos\varphi,$$

kus punkti M polaarkaugus r võib muutuda 0-st ∞-ni, polaarnurk φ kui polaartelje (Z-telje) ja polaarkauguse r vaheline nurk võib muutuda 0-st π-ni ning polaartasapinna T ja punkti M



Joon. 53.

läbiva, XY-tasapinnaga perpendikulaarse tasapinna vaheline kahetahuline polaarnurk ψ võib muutuda 0-st 2π-ni. Et siin

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin\varphi \cos\psi,\quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = r \cos\varphi \cos\psi,\quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -r \sin\varphi \sin\psi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi \sin\psi,\quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos\varphi \sin\psi,\quad \frac{\partial y}{\partial \psi} = r \sin\varphi \cos\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \cos\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -r \sin\varphi,\quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = 0,$$

siis funktsionaaldeterminant

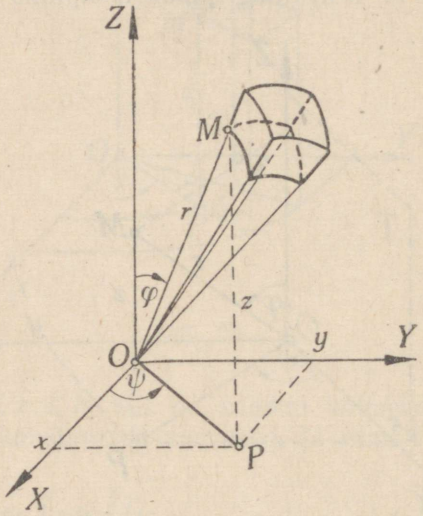
$$D = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & -r\sin\varphi\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= r^2\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\psi & \cos\varphi\cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & \cos\varphi\sin\psi & \cos\psi \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\varphi,$$

sest viimast determinanti kolmanda veeru elementide järgi alamdeterminantideks arendades näeme, et tema väärtus on 1. Inteegrimispiirkonna $\bar{V}$ ruumielement on siis

$$dV = r^2\sin\varphi\, dr d\varphi d\psi.$$

Et konstantse r puhul võrrandid $x = r\sin\varphi\cos\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$ ja $z = r\cos\varphi$ esitavad kerapindu, millede keskpunktid on nullpunktis, konstantse φ puhul koonilisi pindu, mil-



Joon. 54.

lede tipud on nullpunktis ja sümmeetriateljeks on Z-telg, ning konstantse ψ puhul Z-telge mööda lõikuvaid pooltasapindu, siis sellest järeldub, et dV kujutab ruumielementi, mis on piiratud kahe kerapinnaga, kahe koonilise pinnaga ja kahe tasapinnaga (joon. 54). Seega kehtib siin järgmine teisendus:

$$\iiint_{\bar{V}} f(x, y, z)\, dx dy dz =$$

$$= \iiint_{\bar{V}'} f(r\sin\varphi\cos\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\varphi)\, r^2\sin\varphi\, dr d\varphi d\psi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sin\varphi\, d\varphi \int_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} d\psi \int_{\nu_1(\varphi,\psi)}^{\nu_2(\varphi,\psi)} f(r\sin\varphi\cos\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\varphi)\, r^2 dr.$$

Leiame näiteks poolkera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ raskuspunkti (x_0, y_0, z_0), kui $z \geqslant 0$. Siin poolkera sümmeetrilisuse tõttu Z-telje suhtes $x_0 = y_0 = 0$ ja

$$z_0 = \frac{\int z dV}{\int dV}.$$

Üleminekul sfäärilistele koordinaatidele on $z = r\cos\varphi$ ja

$$dV = dxdydz = r^2\sin\varphi\, dr d\varphi d\psi,$$

kusjuures

$$0 \leqslant r \leqslant R,\quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi.$$

Seega raskuspunkti aplikaat

$$z_0 = \frac{\iiint_{\bar{V}} r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi\, dr d\varphi d\psi}{\iiint_{\bar{V}} r^2\sin\varphi\, dr d\varphi d\psi} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{R} r^3 dr}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{R} r^2 dr} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{R^4}{4}}{1\cdot 2\pi\cdot\frac{R^3}{3}} = \frac{3}{8}R,$$

mis kujutab sama tulemust, mille leidsime juba eespool (§ 51, p. 2). Seejuures võime aga tähele panna, et käesoleva arvutuskäiguga (üle minnes sfäärilistele koordinaatidele) leiame otsitava tulemuse lihtsamalt ja kiiremini.

Kui inteegrimispiirkonna $\bar{V}$ igas punktis on

$$f(r\sin\varphi\cos\psi,\ r\sin\varphi\sin\psi,\ r\cos\varphi) = 1,$$

siis teisendatud kolmekordne integraal määrab ruumala V arvulise väärtuse sfääriliste koordinaatide r, φ ja ψ kaudu järgmiselt:

$$V = \iiint_{\bar{V}'} r^2\sin\varphi\, dr d\varphi d\psi = \int_{\alpha}^{\beta} \sin\varphi\, d\varphi \int_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} d\psi \int_{\nu_1(\varphi,\psi)}^{\nu_2(\varphi,\psi)} r^2 dr.$$

Järelikult, kui kera raadius on R, siis kera ruumala

$$V = \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{R} r^2 dr = 2 \cdot 2\pi \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

§ 54. Üldine n-kordne integraal. 1) Lähtudes kahe- ja kolmekordse määratud integraali nii analüütilisest kui ka geomeetrilisest tõlgendusest ja põhimõisteist, saame laiendada inteegrimist üldse n muutuja funktsiooni

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

inteegrimisele, oletades, et n muutuja funktsioon on lõplik ja pidev n-mõõtmelise ruumi piirkonnas $\overline{W}$. Inteegrides seda n muutuja funktsiooni järk-järgult muutujate $x_1, x_2, \ldots, x_n$ järgi kindlaksmääratud järjekorras ja vastavates rajades, saame üldiselt n-kordse määratud integraali

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n =$$
$$= \underset{\overline{W}}{\int\int\cdots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n,$$

mis on n-kordse integraalsumma

$$\Sigma\Sigma\cdots\Sigma f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta x_n$$

piirväärtus, kui iga vahemiku a_k-st b_k-ni ($k = 1, 2, \ldots, n$) osavahemike arv $\to \infty$, nii et seejuures iga vahemiku a_k-st b_k-ni osavahemik $\to 0$. Käesolevalt järjestatud n-kordse integraali inteegrimisrajad a_1 ja b_1 on konstantsed suurused, kuid $a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ võivad olla konstantsed suurused või nende inteegrimismuutujate funktsioonid, mille järgi pole veel inteegritud, s. o.

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \ldots \int_{\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_n.$$

2) Kui n-kordses integraalis

$$\underset{\overline{W}}{\int\int\cdots\int} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

võtame uuteks inteegrimismuutujateks $u_1, u_2, \ldots, u_n$ nõnda, et

$$x_1 = x_1(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$

$$x_2 = x_2(u_1, u_2, \ldots, u_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_n(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

oleksid piirkonnas $\overline{W}$ pidevad funktsioonid, mis omaksid pidevaid esimest järku osatuletisi, siis analoogiliselt kahe- ja kolmekordsele integraalile saame näidata, et kui piirkonnas $\overline{W}'$ funktsionaaldeterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

siis antud n-kordne integraal teisendub kujule

$$\underset{\overline{W}'}{\int\int\cdots\int} f[x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots, x_n(u_1, \ldots, u_n)]\,|D|\,du_1 du_2 \ldots du_n.$$

Samuti ka

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} dx_2 \ldots \int_{\varphi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}^{\psi_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n =$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} du_1 \int_{\mu_1(u_1)}^{\nu_1(u_1)} du_2 \ldots \int_{\mu_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})}^{\nu_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1})} f[x_1(u_1, \ldots, u_n), \ldots,$$
$$x_n(u_1, \ldots, u_n)]\,|D|\,du_n,$$

kus ülemised inteegrimisrajad on alati suuremad kui vastavad alumised inteegrimisrajad.

§ 55. Harjutusülesandeid.

1. Arvutada kahekordsed integraalid:

a) $\int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} dx dy$

b) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 dx dy}{1+y^2}$

c) $\int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$

d) $\int_0^a dx \int_x^{\sqrt{2a^2-x^2}} dy$

e) $\int_{-1}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} (4 - 2x - y)\,dx$

f) $\int_1^2 dy \int_y^{2y} (x+y) \ln x\, dx.$

2. Muuta kahekordsetes integraalides

a) $\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y)\,dy$, b) $\int_0^2 dy \int_0^{2y} f(x, y)\,dx$, c) $\int_0^1 dx \int_0^{+\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$

inteegrimise järjekord.

3. Näidata, et

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y)\,dy + \int_0^1 dy \int_0^y f(x, y)\,dx = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy.$$

4. Inteegrida funktsioon $z = x^2 + y^2$ piirkonnas, mis on piiratud X-teljega ning sirgetega $y = x$ ja $x = 2a$.

5. Leida pindadega

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad x = \pm 1, \quad y = \pm 1, \quad z = 0$$

piiratud prismaatilise keha ruumala.

6. Leida koordinaattasapindadega ning pindadega

$$z = x^2 + y^2 + 1, \quad x = 2 \text{ ja } y = 3$$

piiratud keha ruumala.

7. Leida pindadega

$$z^2 = xy, \quad x = a, \quad y = b \text{ ja } z = 0$$

piiratud keha ruumala.

8. Leida koordinaattasapindadega ja tasapinnaga

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

piiratud püramiidi ruumala.

9. Leida elliptilise silindriga

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ning tasapindadega

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = 0 \text{ ja } z = 0$$

piiratud keha ruumala.

10. Leida kera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

ruumala osa, mis jääb üle, kui kerast eraldada silindrite

$$x^2 + y^2 - ax = 0 \text{ ja } x^2 + y^2 + ax = 0$$

ruumiosad, mis asuvad keras.

11. Leida silindrite

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ ja } \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ühine ruumala.

12. Leida silindrilise keha ruumala, kui selle keha aluseks on ring

$$x^2+y^2-2ax=0$$

ja ta on ülaltpoolt piiratud elliptilise paraboloidiga

$$x^2+y^2-2az=0.$$

13. Leida silindrilise keha ruumala, kui selle keha põhjaks on ring

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

ja ta on ülaltpoolt piiratud hüperboolse paraboloidiga

$$xy=cz.$$

14. Leida koonilise pinnaga

$$z=a-\sqrt{x^2+y^2}$$

ja tasapindadega

$$x-z=0 \quad \text{ja} \quad x=0$$

piiratud keha ruumala.

15. Leida keha ruumala, kui see keha on piiratud pindadega

$$x^2(y^2-x^2)=a^2z^2 \quad \text{ja} \quad y^2=ax,$$

kus $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ ja $z \geqslant 0$.

16. Leida silindrilise keha ruumala, kui selle keha põhjaks XY-tasapinnal on lemniskaadi

$$r^2=a^2\cos 2\varphi$$

pindala ja ta on ülaltpoolt piiratud kerapinnaga

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

17. Arvutada kolmekordne integraal

$$\int_2^3 \int_2^x \int_2^y \frac{(2x-3)(2y-3)(2z-3)\,dx\,dy\,dz}{(x^2-3x+3)(y^2-3y+3)(z^2-3z+3)}.$$

18. Leida kahekordse integraali abil parabooliga

$$y^2=4x+4$$

ja sirgega

$$x+y-2=0$$

piiratud kujundi pindala.

19. Leida kahekordse integraali abil Y-telje ning kõverate

$$y = \sin x \text{ ja } y = \cos x$$

vahelise kujundi pindala.

20. Leida kahekordse integraali abil astroidi

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

ja sirge

$$x + y = a$$

vahelise kujundi pindala.

21. Leida kahekordse integraali abil paraboolide

$$y^2 = 2px,\ y^2 = 3px,\ x^2 = 2qy \text{ ja } x^2 = 3qy$$

vahelise kujundi pindala.

22. Leida kerapinna

$$x^2 + y^2 + z^2 = 100$$

osa, mis asub tasapindade

$$x + 8 = 0 \text{ ja } x - 6 = 0$$

vahel.

23. Leida kerapinna

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

osa, mis jääb üle, kui kerapinnast eraldada silindrites

$$x^2 + y^2 - ax = 0,\ x^2 + y^2 + ax = 0$$

asuvad osad.

24. Leida kerapinna

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

osa, mis asub silindris

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kus $a > b$.

25. Leida kerapinna

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

osa, mis asub koonuses

$$x^2 - y^2 + z^2 = 0.$$

26. Leida kerapinna

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

osa, mis asub paraboloidis

$$2x^2 + 2y^2 = 3az.$$

27. Leida võrrandiga

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

määratud pinna pindala.

28. Leida kõverpinna

$$(9z^2 - 4x^3 - 4y^3)^2 = 64x^3y^3$$

osa, mida sellest kõverpinnast eraldavad tasapind

$$x + y - 1 = 0$$

ja paraboolne silinder

$$x^2 - x - y - 1 = 0.$$

XII peatükk

TÄISDIFERENTSIAALIDE INTEEGRIMINE

§ 56. Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali inteegrimine. Kui kahe muutuja funktsioon

$$z = f(x, y)$$

ning selle osatuletised $\frac{\partial z}{\partial x}$ ja $\frac{\partial z}{\partial y}$ on argumentpunkti (x, y) muutumispiirkonnas pidevad x ja y funktsioonid, siis selle funktsiooni täisdiferentsiaal

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

ehk

$$dz = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

kus

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y) \text{ ja } \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y).$$

Kui peale selle ka teist järku osatuletised

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ ja } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

on tähendatud piirkonnas pidevad x ja y funktsioonid, siis kehtib võrdus (§ 24)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ümberpöördult, kui esineb diferentsiaalavaldis

$$dz = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

kus P ja Q on argumentpunkti (x, y) muutumispiirkonnas pidevad x ja y funktsioonid, mis omavad ühtlasi pidevaid osatuletisi $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$, kusjuures

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

siis on inteegrimise teel ikka võimalik moodustada kahe muutuja funktsioon $z = f(x, y)$, mille täisdiferentsiaaliks on antud diferentsiaalavaldis.

Tõestuseks oletame, et funktsioonide P ja Q muutumispiirkonna igas punktis kehtib võrdus

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Moodustame funktsiooni $P(x, y)$ integraalfunktsiooni

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx,$$

kus x_0 on vabalt võetav konstantne suurus, mis ei sõltu y-st. Saadud integraalfunktsioon $F(x, y)$ on vaadeldavas piirkonnas pidev x ja y funktsioon (§ 44, p. 1), mille osatuletis x järgi on $P(x, y)$, s. o.

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y).$$

Diferentsides integraalfunktsiooni $F(x, y)$ muutuja y järgi, leiame, et

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\,dx =$$

$$= [Q(x, y)]_{x_0}^{x} = Q(x, y) - Q(x_0, y).$$

Funktsiooni $F(x, y)$ täisdiferentsiaal on siis

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\,dy =$$
$$= P(x, y)dx + [Q(x, y) - Q(x_0, y)]dy.$$

Saadud diferentsiaalavaldise viimast liiget $Q(x_0, y)dy$ võime vaadelda kui integraalfunktsiooni

$$G(x_0, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy$$

diferentsiaali, sest

$$dG(x_0, y) = \frac{\partial G(x_0, y)}{\partial y}\,dy = Q(x_0, y)dy,$$

kusjuures integraali alumiseks rajaks on vabalt võetud konstantne suurus y_0. Siis

$$d[F(x, y) + G(x_0, y)] = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Tähistades

$$F(x, y) + G(x_0, y) = f(x, y),$$

näeme, et $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ kujutab kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ täisdiferentsiaali siis, kui P ja Q on vaadeldavas piirkonnas pidevad x ja y funktsioonid, mis omavad pidevaid osatuletisi $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ nõnda, et selle piirkonna igas punktis kehtib võrdus

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Tähendab, diferentsiaalavaldis

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

on inteegritav, kui on täidetud tingimus

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

mida nimetame antud diferentsiaalavaldise inteegritavuse tingimuseks. Et siin

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx, \quad G(x_0, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy,$$

siis integraalfunktsiooni $z = f(x, y)$ leiame valemi

$$z = \int_{x_0}^{x} P(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy$$

järgi.

Kui diferentsiaalavaldise

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

puhul on täidetud ülaltähendatud inteegritavuse tingimus, siis leiame eelnevale analoogilist arvutuskäiku rakendades, et integraalfunktsiooni $z = f(x, y)$ saab väljendada ka valemiga

$$z = \int_{y_0}^{y} Q(x, y)dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx.$$

Näiteks diferentsiaalavaldis

$$\frac{xdx}{(x+y)^2} - \frac{x^2dy}{y(x+y)^2}$$

kujutab täisdiferentsiaali, sest

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{(x+y)^2}\right] = -\frac{2x}{(x+y)^3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{x^2}{y(x+y)^2}\right] = -\frac{2x}{(x+y)^3}.$$

Et siin

$$\int_{x_0}^{x} P(x,\ y)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{(x+y)^2} = \left[\ln(x+y) + \frac{y}{x+y}\right]_{x_0}^{x} =$$

$$= \ln\frac{x+y}{x_0+y} + \frac{y}{x+y} - \frac{y}{x_0+y}$$

ja

$$\int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\,dy = \int_{y_0}^{y} \frac{-x_0^2\,dy}{y(x_0+y)^2} = \left[\ln\frac{x_0+y}{y} - \frac{x_0}{x_0+y}\right]_{y_0}^{y} =$$

$$= \ln\frac{y_0(x_0+y)}{y(x_0+y_0)} - \frac{x_0}{x_0+y} + \frac{x_0}{x_0+y_0},$$

siis funktsioon, mille täisdiferentsiaaliks on antud diferentsiaalavaldis, on nende integraalfunktsioonide summa, s. o.

$$z = \int_{x_0}^{x} P(x,\ y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\,dy =$$

$$= \ln\frac{x+y}{y} + \frac{y}{x+y} + \ln\frac{y_0}{x_0+y_0} - \frac{y_0}{x_0+y_0}$$

ehk

$$z = \ln\frac{x+y}{y} + \frac{y}{x+y} + c,$$

kus

$$c = \ln\frac{y_0}{x_0+y_0} - \frac{y_0}{x_0+y_0}.$$

Kasutades teist valemit, mille puhul

$$\int_{y_0}^{y} Q(x,\ y)\,dy = \int_{y_0}^{y} \frac{-x^2\,dy}{y(x+y)^2} = \left[\ln\frac{x+y}{y} - \frac{x}{x+y}\right]_{y_0}^{y} =$$

$$= \ln\frac{y_0(x+y)}{y(x+y_0)} - \frac{x}{x+y} + \frac{x}{x+y_0}$$

ja

$$\int_{x_0}^{x} P(x,\ y_0)\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{(x+y_0)^2} = \left[\ln(x+y_0) + \frac{y_0}{x+y_0}\right]_{x_0}^{x} =$$

$$= \ln\frac{x+y_0}{x_0+y_0} + \frac{y_0}{x+y_0} - \frac{y_0}{x_0+y_0},$$

saame otsitava funktsiooni

$$z = \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx =$$

$$= \ln \frac{x+y}{y} - \frac{x}{x+y} + \ln \frac{y_0}{x_0+y_0} + \frac{x_0}{x_0+y_0},$$

mis on identne eespool saadud funktsiooniga

$$z = \ln \frac{x+y}{y} + \frac{y}{x+y} + \ln \frac{y_0}{x_0+y_0} - \frac{y_0}{x_0+y_0}$$

ehk

$$z = \ln \frac{x+y}{y} + \frac{y}{x+y} + c.$$

§ 57. Kolme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali inteegrimine. Kui kolme muutuja funktsioon.

$$u = f(x, y, z)$$

ning selle osatuletised $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ ja $\frac{\partial u}{\partial z}$ on argumentpunkti (x, y, z) muutumispiirkonnas pidevad x, y ja z funktsioonid, siis selle funktsiooni täisdiferentsiaal

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz$$

ehk

$$du = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

kus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Kui peale selle ka teist järku osatuletised

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

on tähendatud piirkonnas pidevad x, y ja z funktsioonid, siis kehtivad võrdused

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Ümberpöördult, kui esineb diferentsiaalavaldis

$$du = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

kus P, Q ja R on argumentpunkti (x, y, z) muutumispiirkonnas pidevad x, y ja z funktsioonid, mis omavad ühtlasi pidevaid osatuletisi

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y},$$

kusjuures

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

siis on inteegrimise teel ikka võimalik moodustada kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$, mille täisdiferentsiaaliks on antud diferentsiaalavaldis.

Oletame, et funktsioonide P, Q ja R muutumispiirkonna igas punktis kehtivad võrdused

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Moodustame funktsiooni $P(x, y, z)$ integraalfunktsiooni

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx,$$

kus x_0 on vabalt võetav konstantne suurus, mis ei sõltu y-st ega ka z-st. Saadud integraalfunktsioon $F(x, y, z)$ on nagu kahe muutuja funktsioongi vaadeldavas piirkonnas pidev x, y ja z funktsioon, mille osatuletis x järgi on $P(x, y, z)$, s. o.

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} = P(x, y, z).$$

Diferentsides integraalfunktsiooni $F(x, y, z)$ muutujate y ja z järgi, leiame, et

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial y}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q(x, y, z)}{\partial x}\,dx =$$

$$= [Q(x, y, z)]_{x_0}^{x} = Q(x, y, z) - Q(x_0, y, z),$$

$$\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P(x, y, z)}{\partial z}\,dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R(x, y, z)}{\partial x} =$$

$$= [R(x, y, z)]_{x_0}^{x} = R(x, y, z) - R(x_0, y, z).$$

Funktsiooni $F(x, y, z)$ täisdiferentsiaal on siis

$$dF(x, y, z) = \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z} dz =$$
$$= P(x, y, z)dx + [Q(x, y, z) - Q(x_0, y, z)]dy +$$
$$+ [R(x, y, z) - R(x_0, y, z)]dz =$$
$$= P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz -$$
$$- [Q(x_0, y, z)dy + R(x_0, y, z)dz].$$

Edasi, vaadeldes inteegrimisel z kui konstantset suurust, moodustame funktsiooni $Q(x_0, y, z)$ integraalfunktsiooni

$$G(x_0, y, z) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy,$$

kus y_0 on vabalt võetav konstantne suurus, mis ei sõltu z-st. See integraalfunktsioon on vaadeldavas piirkonnas pidev y ja z funktsioon, mille osatuletis y järgi on $Q(x_0, y, z)$, s. o.

$$\frac{\partial G(x_0, y, z)}{\partial y} = Q(x_0, y, z).$$

Diferentsides funktsiooni $G(x_0, y, z)$ muutuja z järgi, saame

$$\frac{\partial G(x_0, y, z)}{\partial z} = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q(x_0, y, z)}{\partial z} dy = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial R(x_0, y, z)}{\partial y} dy =$$
$$= [R(x_0, y, z)]_{y_0}^{y} = R(x_0, y, z) - R(x_0, y_0, z).$$

Funktsiooni $G(x_0, y, z)$ täisdiferentsiaal on siis

$$dG(x_0, y, z) = \frac{\partial G(x_0, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial G(x_0, y, z)}{\partial z} dz =$$
$$= Q(x_0, y, z)dy + [R(x_0, y, z) - R(x_0, y_0, z)]dz,$$

millest

$$Q(x_0, y, z)dy + R(x_0, y, z)dz = dG(x_0, y, z) + R(x_0, y_0, z)dz.$$

Selle diferentsiaalavaldise parema poole viimast liiget $R(x_0, y_0, z)dz$ võime vaadelda kui integraalfunktsiooni

$$H(x_0, y_0, z) = \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz$$

diferentsiaali

$$dH(x_0, y_0, z) = \frac{\partial H(x_0, y_0, z)}{\partial z} dz = R(x_0, y_0, z)dz,$$

kusjuures alumine inteegrimisraja z_0 on vabalt võetav konstantne suurus. Siis

$$Q(x_0, y, z)dy + R(x_0, y, z)dz = d[G(x_0, y, z) + H(x_0, y_0, z)]$$

ja

$$d[F(x, y, z] + G(x_0, y, z) + H(x_0, y_0, z)] = \\ = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Tähistades

$$F(x, y, z) + G(x_0, y, z) + H(x_0, y_0, z) = f(x, y, z),$$

näeme, et diferentsiaalavaldis

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

kujutab kolme muutuja funktsiooni $f(x, y, z)$ täisdiferentsiaali siis, kui P, Q ja R on vaadeldavas piirkonnas pidevad x, y ja z funktsioonid, mis omavad pidevaid osatuletisi

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}$$

nõnda, et selle piirkonna igas punktis kehtivad võrdused

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},$$

mis on ühtlasi diferentsiaalavaldise

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

inteegritavuse tingimusteks. Et siin

$$F(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx, \quad G(x_0, y, z) = \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy,$$

$$H(x_0, y_0, z) = \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz,$$

siis integraalfunktsiooni $u = f(x, y, z)$ leiame valemi

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)dz$$

järgi.

Kui diferentsiaalavaldise

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

puhul on täidetud ülaltähendatud inteegritavuse tingimused, siis leiame eelnevale analoogilist arvutuskäiku rakendades, et integraalfunktsiooni $u = f(x, y, z)$ saab väljendada ka valemiga

$$u = \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x, y_0, z)dz + \int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx.$$

Üldse saab käesoleval juhul integraalfunktsiooni $u = f(x, y, z)$ väljendavas valemis integraale järjestada kuuel võimalikul viisil.

Näiteks diferentsiaalavaldis

$$(y^2 + yz)\,dx + (2xy + xz)\,dy + (xy + 4z^3)\,dz$$

kujutab mingi funktsiooni täisdiferentsiaali, sest

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x.$$

Siin

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y, z)\,dx = \int_{x_0}^{x} (y^2 + yz)\,dx = xy^2 + xyz - x_0y^2 - x_0yz,$$

$$\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y, z)\,dy = \int_{y_0}^{y} (2x_0y + x_0z)\,dy = x_0y^2 + x_0yz - x_0y_0^2 - x_0y_0z,$$

$$\int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, z)\,dz = \int_{z_0}^{z} (x_0y_0 + 4z^3)\,dz = x_0y_0z + z^4 - x_0y_0z_0 - z_0^4,$$

millede summa

$$u = xy^2 + xyz + z^4 - x_0y_0^2 - x_0y_0z_0 - z_0^4$$

ehk

$$u = xy^2 + xyz + z^4 + c$$

esitab funktsiooni, mille täisdiferentsiaaliks on antud diferentsiaalavaldis.

§ 58. Harjutusülesandeid.

Leida järgmiste täisdiferentsiaalide integraalfunktsioonid:

1. $dz = (3x^2 + 8xy)\,dx + (4x^2 + 3y^2)\,dy$
2. $dz = \left[\frac{1}{x} - \frac{y^2}{(x-y)^2}\right]dx + \left[\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{1}{y}\right]dy$
3. $dz = \left(y + \frac{2y^3}{x^4 - y^4}\right)dx + \left(x - \frac{2xy^2}{x^4 - y^4}\right)dy$
4. $dz = \left(y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy$
5. $dz = (2x \sin y - y^2 \sin x)\,dx + (x^2 \cos y + 2y \cos x)\,dy$
6. $dz = yx^{y-1}dx + (x^y \ln x + 2y)\,dy$
7. $dz = \left(x + 2x \ln\frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y} - 1\right)dy$
8. $du = \frac{adx}{z} + \frac{bdy}{z} - \frac{ax + by}{z^2}dz$

9. $du = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$

10. $du = [2xy^2 + 2\cos(2x+3y+4z)]dx +$
$+ [2yx^2 + 3\cos(2x+3y+4z)]dy +$
$+ [3z^2 + 4\cos(2x+3y+4z)]dz$

11. $du = \frac{ydx}{\sqrt{x}} + (2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2})dy + \frac{2y^3dz}{\sqrt[3]{z}}$.

XIII peatükk

JOONINTEGRAALID

§ 59. Joonintegraali määramine. 1) Kui diferentsiaalavaldis

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

ei kujuta täisdiferentsiaali, siis pole olemas ka niisugust kahe sõltumatu muutuja x ja y funktsiooni, mille diferentsiaaliks oleks $Pdx + Qdy$. Kui aga siinjuures x ja y on teineteisega funktsionaalses sõltuvuses, nii et neid saab vaadelda kui ühe parameetri t funktsioone, s. o.

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

mis on näiteks vahemikus $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$ koos tuletistega $x'(t)$ ja $y'(t)$ ühesed ja pidevad, kusjuures $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ on parameetrile t vastavate x ja y väärtuste puhul samuti ühesed ja pidevad, siis

$$dx = x'(t)dt,\ dy = y'(t)dt$$

ja

$$P(x, y)dx = P[x(t), y(t)]x'(t)dt,$$
$$Q(x, y)dy = Q[x(t), y(t)]y'(t)dt$$

ning antud diferentsiaalavaldis omandab kuju

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$
$$= \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt,$$

mis esitab nüüd ühe muutuja funktsiooni diferentsiaali, mida on võimalik inteegrida rajades t_0-st t_n-ni.

Et parameetrilistele võrranditele

$$x = x(t),\ y = y(t)$$

vastab geomeetriliselt XY-tasapinnal mingi kõver L (joon. 55), millel funktsioonid $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ muutuvad pidevalt, oma-

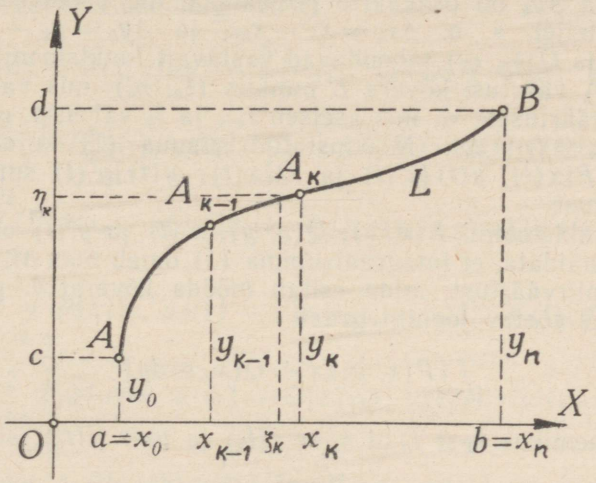
des lõplikke väärtusi, siis — kui funktsioonid $P[x(t), y(t)]x'(t)$ ja $Q[x(t), y(t)]y'(t)$ on inteegritavad rajades t_0-st t_n-ni — tähistame nende funktsioonide summa integraali järgmiselt:

$$\int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt =$$

$$= \int_{AB} [P(x, y)dx + Q(x, y)dy]$$

ehk lühidalt

$$\int_L (Pdx + Qdy),$$



Joon. 55.

mida nimetatakse joonintegraaliks mööda tasapinnalist kõverat L punktist A punktini B, kus

$$\int_L Pdx = \int_{t_0}^{t_n} P[x(t), y(t)]x'(t)dt$$

ja

$$\int_L Qdy = \int_{t_0}^{t_n} Q[x(t), y(t)]y'(t)dy.$$

Mööda kõverat L inteegrimise alguspunktiks on siin punkt A koordinaatidega $a = x(t_0)$ ja $c = y(t_0)$ ning lõpp-punktiks punkt B koordinaatidega $b = x(t_n)$ ja $d = y(t_n)$. Kõver L on inteegrimistee, mille käigust sõltub joonintegraali väärtus.

Näitame, et joonintegraali saab analoogiliselt lineaarsele määratud integraalile vaadelda kui teatava integraalsumma piirväärtust. Selleks jaotame kõvera L (joon. 55) jaotuspunktidega

$$A(x_0, y_0), A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \ldots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), B(x_n, y_n),$$

mis vastaku parameetri t väärtustele

$$t_0,\ t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{n-1},\ t_n,$$

n osakaareks. Võtame igal osakaarel vabalt punkti $(\xi_k,\ \eta_k)$, kus $k = 1, 2, 3, \ldots, n$, ja moodustame summa

$$\sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k,\ \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\ \eta_k)\Delta y_k], \tag{1}$$

kus Δx_k ja Δy_k on osakaarte projektsioonide pikkused vastavalt X- ja Y-teljel, s. o. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ja $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, ning $P(\xi_k,\ \eta_k)$ ja $Q(\xi_k,\ \eta_k)$ tähendavad vastavalt funktsioonide $P(x,\ y)$ ja $Q(x,\ y)$ väärtusi kõvera L punktis $(\xi_k,\ \eta_k)$, mis vastab parameetri t väärtusele τ_k, mis asetseb t_{k-1} ja t_k vahel, s. o. osavahemikus $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Moodustatud summa (1) kujutab funktsioonide $P[x(t),\ y(t)]x'(t)$ ja $Q[x(t),\ y(t)]y'(t)$ summa integraalsummat.

Kui funktsioonid $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$, $x'(t)$ ja $y'(t)$ on pidevad, siis saab näidata, et integraalsumma (1) omab $\max \Delta t_k \to 0$ puhul lõplikku piirväärtust, mida esitab mööda kõverat L punktist A punktini B võetav joonintegraal

$$\int_L [P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy]. \tag{2}$$

Et vahemikus t_0-st t_n-ni $x_k = x(t_k)$ ja $y_k = y(t_k)$, siis

$$\Delta x_k = x(t_k) - x(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t)dt$$

ja

$$\Delta y_k = y(t_k) - y(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} y'(t)dt.$$

Kuna punkt $(\xi_k,\ \eta_k)$ asetseb k-ndal osakaarel, siis

$$\xi_k = x(\tau_k) \quad \text{ja} \quad \eta_k = y(\tau_k),$$

kus $t_{k-1} \leqslant \tau_k \leqslant t_k$. Seega saame integraalsumma (1) esitada kujul

$$\sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k,\ \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\ \eta_k)\Delta y_k] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{P[x(\tau_k),\ y(\tau_k)] \int_{t_{k-1}}^{t_k} x'(t) + Q[x(\tau_k),\ y(\tau_k)] \int_{t_{k-1}}^{t_k} y'(t)\}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[x(\tau_k),\ y(\tau_k)]x'(t) + Q[x(\tau_k),\ y(\tau_k)]y'(t)\}dt.$$

Et teiselt poolt

$$\int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt,$$

siis võime kirjutada joonintegraali (2) ja integraalsumma (1) vahe absoluutväärtuse järgmiselt:

$$\left|\int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] - \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k]\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \{P[x(\tau_k), y(\tau_k)]x'(t) + Q[x(\tau_k), y(\tau_k)]y'(t)\}dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |P[x(t), y(t)] - P[x(\tau_k), y(\tau_k)]| \cdot |x'(t)|\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |Q[x(t), y(t)] - Q[x(\tau_k), y(\tau_k)]| \cdot |y'(t)|\, dt.$$

Et funktsioonid $P[x(t), y(t)]$ ja $Q[x(t), y(t)]$ on eelduse järgi kinnises vahemikus t_0-st t_n-ni pidevad ja seega ka ühtlaselt pidevad, siis saame selles vahemikus kuitahes väikese $\varepsilon > 0$ puhul valida kõik Δt_k nii väikesed, et

$$|P[x(t), y(t)] - P[x(\tau_k), y(\tau_k)]| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$|Q[x(t), y(t)] - Q[x(\tau_k), y(\tau_k)]| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega joonintegraali (2) ja integraalsumma (1) vahe absoluutväärtus

$$\left|\int_L - \sum_{k=1}^{n}\right| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |x'(t)|\, dt + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |y'(t)|\, dt =$$

$$= \varepsilon \int_{t_0}^{t_n} \{|x'(t)| + |y'(t)|\}dt = \varepsilon K,$$

kus K on konstantne suurus. Järelikult $\left|\int_L - \sum_{k=1}^{n}\right| \to 0$, kui

$\max \Delta t_k \to 0$, ja seega

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k] =$$

$$= \int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy],$$

kus inteegrimistee L tähendab kasvavate t väärtuste puhul suunatud kõverat, mida nimetame seetõttu ka orienteeritud kõveraks.

Kui orienteeritud inteegrimisteed määravad parameetrilised võrrandid on

$$x = x(t), \qquad y = y(t),$$

siis eespoolöeldust ilmneb, et joonintegraali väärtuse leidmiseks tuleb ristkoordinaatides esinev joonintegraal muuta harilikuks lineaarseks integraaliks, milles inteegrimismuutujaks on parameeter t, s. o.

$$\int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt.$$

See tähendab, et joonintegraali inteegritavas avaldises tuleb x, y, dx ja dy avaldada parameetri t ja selle diferentsiaali dt kaudu ning seda teisendatud avaldist inteegrida rajades t_0-st t_n-ni, kus parameetri t väärtus t_0 vastab inteegrimistee L alguspunktile A ja t_n vastab inteegrimistee L lõpp-punktile B.

Joonintegraal leiab olulist rakendust füüsikaliste probleemide, eriti töö mõistega seoses olevate probleemide käsitlemisel, kusjuures joonintegraal esineb ka kujul

$$\lim_{\max \Delta s_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta s_k = \int_L f(x, y)ds,$$

kus ds tähendab kõvera L kaare elementi. Selle integraali arvutamiseks tuleb temasse paigutada kõvera L võrranditest $x = x(t)$ ja $y = y(t)$ ning $ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$.

Erijuhul, kui joonintegraali inteegrimismuutujad x ja y on funktsionaalses seoses nõnda, et $y = y(x)$ või ümberpöördult $x = x(y)$ on pidevad ja ühesed funktsioonid, siis saame joonintegraali otseselt muuta harilikuks lineaarseks integraaliks, milles inteegrimismuutujaks on kas x või y. Vaatleme näitena joonintegraali

$$\int_L (y^2dx + x^2dy),$$

kui inteegrimistee L kujutab parabooli $y^2 = 4x$ kaart nullpunktist kuni parabooli punktini (1, 2) (joon. 56). Et siin inteegrimis-

teed L esitab ühene funktsioon $y = +2\sqrt{x}$, mille diferentsiaal $dy = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, siis seega, kui minna üle lineaarsele integraalile ja võtta inteegrimismuutujaks x, on inteegrimisrajad

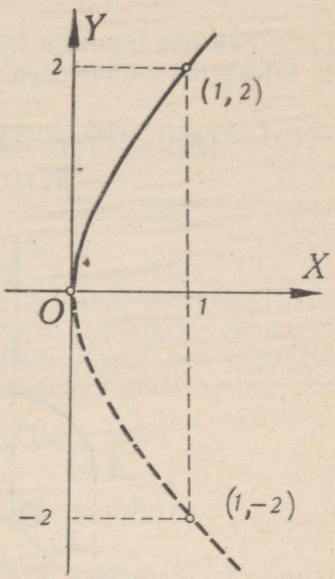
$x = 0$ ja $x = 1$, s. o.

$$\int_L (y^2dx + x^2dy) =$$

$$= \int_0^1 \left(4xdx + x^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \int_0^1 (4x + x\sqrt{x})dx =$$

$$= \left[2x + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2\frac{2}{5}.$$



Joon. 56.

Arvutades antud joonintegraali sama paraboolset inteegrimisteed mööda nullpunktist kuni punktini (1, 2), kui inteegrimismuutujaks on y, kus $x = \frac{y^2}{4}$ ja $dx = \frac{y}{2}dy$, ning minnes üle lineaarsele integraalile, mille puhul inteegrimisrajadeks on $y = 0$ ja $y = 2$, saame sama tulemuse, s. o.

$$\int_L (y^2dx + x^2dy) = \int_0^2 (y^2 \cdot \frac{y}{2}dy + \frac{y^4}{16}dy) =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^3}{2} + \frac{y^4}{16}\right)dy = \left[\frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{80}\right]_0^2 = 2\frac{2}{5}.$$

2) Kui diferentsiaalavaldis

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

ei kujuta täisdiferentsiaali, kuid x, y ja z on üksteisega funktsionaalses sõltuvuses, nii et neid saab vaadelda kui parameetri t funktsioone, s. o.

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

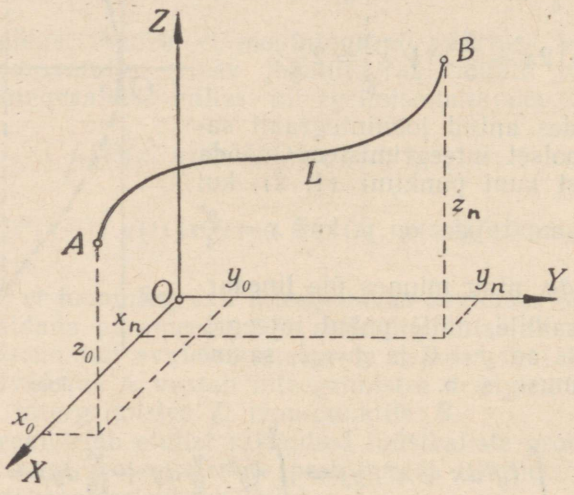
mis on vahemikus $t_0 \leqslant t \leqslant t_n$ koos tuletistega $x'(t)$, $y'(t)$ ja $z'(t)$ ühesed ja pidevad, kusjuures P, Q ja R on parameetrile t

vastavate x, y ja z väärtuste puhul samuti ühesed ja pidevad, siis antud diferentsiaalavaldis omandab kuju

$$\{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + \\ + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt,$$

mis esitab ühe muutuja funktsiooni diferentsiaali, mida on võimalik inteegrida rajades t_0-st t_n-ni, s. o.

$$\int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + \\ + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt.$$



Joon. 57.

Et parameetrilistele võrranditele

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

vastab geomeetriliselt XYZ-teljestikus ruumiline kõver L (joon. 57), millel funktsioonid P, Q ja R muutuvad pidevalt, omades lõplikke väärtusi, siis võime analoogiliselt joonintegraalile mööda tasapinnalist kõverat tähistada joonintegraali mööda ruumilist kõverat L järgmiselt:

$$\int_L [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] = \\ = \int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) + \\ + R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt.$$

Ühtlasi saame näidata, et

$$\lim_{\max \Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k + R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k] =$$
$$= \int_L [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz],$$

mille kirjutame lühidalt

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz),$$

kus inteegrimistee L alguspunktiks on $A[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ ja lõpp-punktiks $B[x(t_n), y(t_n), z(t_n)]$.

§ 60. Joonintegraali omadusi. Vaatleme joonintegraali peamisi omadusi, mis on järgmised.

1) Joonintegraalist kui eelmises paragrahvis käsitletud integraalsumma piirväärtusest nähtub otseselt, et inteegrimistee suuna muutus, s. o. inteegrimine punktist B punktini A, muudab integraali ees oleva märgi vastupidiseks, sest sel juhul kõik integraalsumma liikmed omavad vastupidist märki, ning seega

$$\int_{AB} (Pdx + Qdy) = -\int_{BA} (Pdx + Qdy)$$

ehk

$$\int_{+L} (Pdx + Qdy) = -\int_{-L} (Pdx + Qdy),$$

kus $P = P(x, y)$ ja $Q = Q(x, y)$ ning L tähendab tasapinnalist kõverat.

Samuti ka

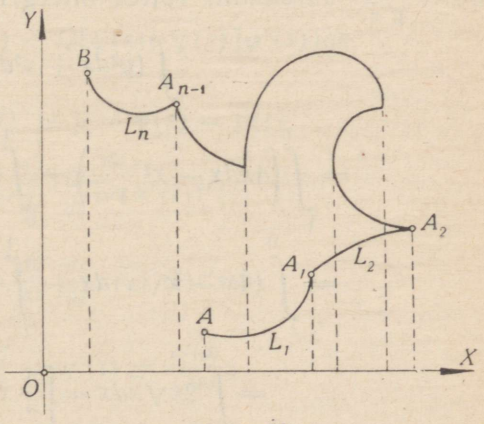
$$\int_{+L} (Pdx + Qdy + Rdz) = -\int_{-L} (Pdx + Qdy + Rdz),$$

kus $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ ja $R = R(x, y, z)$ ning L tähendab ruumilist kõverat.

2) Kui joonintegraali

$$\int_L (Pdx + Qdy)$$

tasapinnaline inteegrimistee L koosneb mitmest kaarest, näiteks kaartest $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (joon. 58), milledel P ja Q on pidevad x ja y funktsioonid, kuid kaarte ühenduspunktides $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ võib esineda kaks erinevat puutujat, siis võime moodustada



Joon. 58.

n joonintegraali inteegrimisteedega $L_1, L_2, \ldots, L_n$, mida esitavad pidevad ja ühesed funktsioonid, saades

$$\int_{L_1}(Pdx+Qdy),\ \int_{L_2}(Pdx+Qdy),\ \ldots,\ \int_{L_n}(Pdx+Qdy),$$

millede summaks on antud joonintegraal, s. o.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}(Pdx+Qdy)=\int_{L}(Pdx+Qdy),$$

kus $L=L_1+L_2+\ldots+L_n$, arvestades seejuures orienteeritud inteegrimisteid punktidest A, A_1, A_2, $\ldots$, A_{n-1} punkti B suunas.

Samasugune on olukord ka ruumilise inteegrimistee L tükeldamise puhul, s. o.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}(Pdx+Qdy+Rdz)=\int_{L}(Pdx+Qdy+Rdz),$$

kus $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ ja $R=R(x, y, z)$.

Kui näiteks eelmises paragrahvis vaadeldud joonintegraali

$$\int_{L}(y^2dx+x^2dy)$$

inteegrimistee L on sama parabooli $y^2=4x$ kaar punktist (1, —2) kuni punktini (1, 2) (joon. 56), siis vahemikus $0\leqslant x\leqslant 1$ parabooli võrrand kujutab kahest funktsiooni, s. o. $y=+2\sqrt{x}$ ja $y=-2\sqrt{x}$. Seega tuleb inteegrimistee L jaotada kaheks osaks: punktist (1, —2) kuni nullpunktini, missuguse kaare igas punktis $y=-2\sqrt{x}$ ja $dy=-\frac{dx}{\sqrt{x}}$, ning nullpunktist kuni punktini (1, 2), missuguse kaare igas punktis $y=2\sqrt{x}$ ja $dy=\frac{dx}{\sqrt{x}}$. Järelikult, võttes inteegrimismuutujaks x, saame

$$\int_{L}(y^2dx+x^2dy)=$$

$$=\int_{1}^{0}\left(4xdx-x^2\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)+\int_{0}^{1}\left(4xdx+x^2\frac{dx}{\sqrt{x}}\right)=$$

$$=\int_{1}^{0}(4x-x\sqrt{x})dx+\int_{0}^{1}(4x+x\sqrt{x})dx=$$

$$=\int_{0}^{1}2x\sqrt{x}dx=\left[\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}\right]_{0}^{1}=\frac{4}{5}.$$

Kui aga inteegrimismuutujaks võtta y, siis on funktsioon $x = \frac{y^2}{4}$ vahemikus $-2 \leqslant y \leqslant 2$ ühene ning seega lineaarse integraali inteegrimine toimub rajades $y = -2$ ja $y = 2$. Et siin punktist (1, —2) kuni punktini (1, 2) parabooli kaare igas punktis $dx = \frac{ydy}{2}$, siis

$$\int_L (y^2dx + x^2dy) = \int_{-2}^{2} \left(\frac{y^3}{2}dy + \frac{y^4}{16}dy\right) = \left[\frac{y^4}{8} + \frac{y^5}{80}\right]_{-2}^{2} = \frac{4}{5}.$$

3) Joonintegraal

$$\int_L (Pdx + Qdy)$$

omab ikka üht ja sama väärtust, vaatamata sellele, kuidas me valime inteegrimisteed L esitavad parameetrilised võrrandid. Kui eespool vaadeldud mistahes parameetri t asemel võtta uueks parameetriks kaare pikkus s nõnda, et

$$t = t(s)$$

on vahemikus $s_0 \leqslant s \leqslant s_n$ pidev ja omab ühtlasi pidevat tuletist $t'(s)$, siis inteegrimistee L uued parameetrilised võrrandid on

$$x = x(t) = x[t(s)] = \varphi(s)$$

ja

$$y = y(t) = y[t(s)] = \psi(s),$$

mis on vahemikus $s_0 \leqslant s \leqslant s_n$ pidevad ja omavad pidevaid tuletisi $\varphi'(s)$ ja $\psi'(s)$, kusjuures s omab $t = t_0$ ja $t = t_n$ puhul vastavalt väärtusi s_0 ja s_n. Joonintegraali väärtust väljendab sel juhul eespool leitud määratud integraaliga analoogiline integraal

$$\int_{s_0}^{s_n} \{P[\varphi(s), \psi(s)]\varphi'(s) + Q[\varphi(s), \psi(s)]\psi'(s)\}ds,$$

sest kui

$$x = \varphi(s) = x(t) \text{ ja } y = \psi(s) = y(t),$$

siis

$$\varphi'(s) = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = x'(t)t'(s)$$

ja

$$\psi'(s) = \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = y'(t)t'(s),$$

milledest

$$x'(t) = \frac{\varphi'(s)}{t'(s)} \text{ ja } y'(t) = \frac{\psi'(s)}{t'(s)},$$

ja et

$$dt = t'(s)ds,$$

siis asendades leiame, et

$$\int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt =$$
$$= \int_{s_0}^{s_n} \{P[\varphi(s), \psi(s)]\varphi'(s) + Q[\varphi(s), \psi(s)]\psi'(s)\}ds,$$

millest nähtub, et joonintegraali väärtus ei sõltu inteegrimisteed L määravate parameetriliste võrrandite kujust.

Analoogiliselt eelnevale saame näidata, et sama olukord kehtib ka ruumilise inteegrimistee L puhul, s. o. joonintegraali

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz)$$

puhul, kui $t = t(s)$ ja

$$x = x(t) = x[t(s)] = \varphi(s),$$
$$y = y(t) = y[t(s)] = \psi(s),$$
$$z = z(t) = z[t(s)] = \zeta(s)$$

ning seega

$$\int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t), y(t), z(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t), z(t)]y'(t) +$$
$$+ R[x(t), y(t), z(t)]z'(t)\}dt =$$
$$= \int_{s_0}^{s_n} \{P[\varphi(s), \psi(s), \zeta(s)]\varphi'(s) + Q[\varphi(s), \psi(s), \zeta(s)]\psi'(s) +$$
$$+ R[\varphi(s), \psi(s), \zeta(s)]\zeta'(s)\}ds.$$

61. Greeni valem. 1) Oletame, et $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ ning nende osatuletised $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ on XY-tasapinnal teatavas piirkonnas pidevad x ja y funktsioonid ning selles piirkonnas joonintegraali

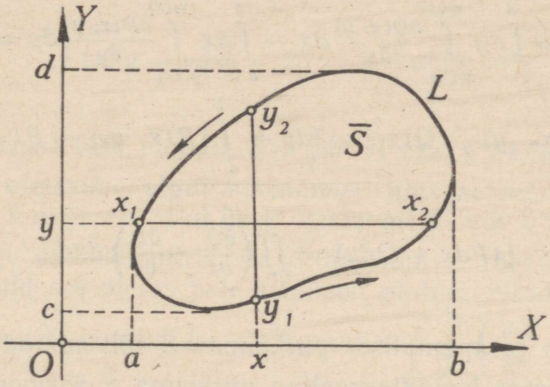
$$\int_L (Pdx + Qdy)$$

inteegrimistee L on kinnine kõver, mis ei lõika iseennast (joon. 59). Kinnise kõvera kui inteegrimistee L loeme orienteerituks ehk positiivses suunas kulgevaks, kui punkt liigub sellel kõveral kellaosuti liikumisele vastupidises suunas, s. o. kui inteegrimisteega piiratud piirkond $\bar{S}$ jääb inteegrimistee suunast ikka v a s a k u l e poole, nagu näitavad joonisel märgitud nooled. Et siin inteegrimistee L kujutab kinnist kõverat, siis võime joonintegraali arvutamisel inteegrimistee alguspunktiks lugeda kõvera mistahes punkti. Märgime x äärmised väärtused a ja b ning y äärmised väärtused c ja d, mida x ja y omavad kõveral L asetsevates punktides. Oletame, et käesoleval juhul vahemikus a-st b-ni iga sirge, mis on paralleelne Y-teljega, lõikab inteegrimis-

teed L ainult kahes punktis (x, y_1) ja (x, y_2), kus $y = y_1(x)$ ja $y = y_2(x)$ ning $y_2 > y_1$; samuti ka vahemikus c-st d-ni iga sirge, mis on paralleelne X-teljega, lõikab inteegrimisteed L ainult kahes punktis (x_1, y) ja (x_2, y), kus $x = x_1(y)$ ja $x = x_2(y)$ ning $x_2 > x_1$.

Et vahemikus a-st b-ni orienteeritud inteegrimistee L alumise osa igas punktis (x, y_1) on dx positiivne ja ülemise osa igas punktis (x, y_2) on dx negatiivne, siis seega

$$\int_L P(x, y)dx = \int_a^b [P(x, y_1) - P(x, y_2)]dx,$$



Joon. 59.

kus inteegrimistee L on esitatud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} x = x \\ y = y_1(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x \\ y = y_2(x). \end{cases}$$

Et vahemikus c-st d-ni orienteeritud inteegrimistee L vasakpoolse osa igas punktis (x_1, y) on dy negatiivne ja parempoolse osa igas punktis (x_2, y) on dy positiivne, siis

$$\int_L Q(x, y)dy = \int_c^d [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]dy,$$

kus inteegrimistee L on esitatud parameetriliste võrranditega

$$\begin{cases} y = y \\ x = x_1(y), \end{cases} \qquad \begin{cases} y = y \\ x = x_2(y). \end{cases}$$

Neist tulemustest ilmneb, et joonintegraal kinnist orienteeritud inteegrimisteed L mööda

$$\int_L [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] =$$

$$= \int_a^b [P(x, y_1) - P(x, y_2)]dx + \int_c^d [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]dy.$$

Sama tulemuse annab ka kahekordne integraal

$$\iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

kus $\bar{S}$ on tasapinnaline inteegrimispiirkond, mille äärjooneks on joonintegraali inteegrimistee L, sest

$$\iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_{\bar{S}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy - \iint\limits_{\bar{S}} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} dx - \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy =$$

$$= \int\limits_c^d [Q(x_2, y) - Q(x_1, y)]dy + \int\limits_a^b [P(x, y_1) - P(x, y_2)]dx.$$

Järelikult

$$\int\limits_L (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

mis määrab tasapinnalises piirkonnas $\bar{S}$ tähendatud kahekordse integraali seose joonintegraaliga piirkonna $\bar{S}$ äärjoont L mööda, kui ainult P ja Q ning $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ on piirkonnas $\bar{S}$ ja selle äärjoonel L pidevad x ja y funktsioonid.* Saadud valem kannab Greeni** valemi nime.

Kui näiteks

$$P = -y, \; Q = x,$$

siis Greeni valemi

$$\int\limits_L (Pdx + Qdy) = \iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

järgi

$$\int\limits_L (xdy - ydx) = 2 \iint\limits_{\bar{S}} dxdy = 2S,$$

---

* Joonintegraali mööda kinnist inteegrimisteed L tähistatakse ka järgmiselt:

$$\oint (Pdx + Qdy),$$

kui inteegrimine toimub kellaosuti liikumisele vastupidises suunas.

** George Green (1793—1841) — inglise matemaatik, kes oma teostes käsitles joon-, pind- ja ruumintegraalide mitmesuguseid teisendamisvalemeid, mis leiavad laialdast rakendamist mehaanikas, füüsikas ja tehnikas. Vaadeldav Greeni valem kujutab Stokes'i poolt esitatud üldisema valemi (§ 66) erijuhtu.

millest pindala S joonintegraali kaudu on

$$S = \frac{1}{2} \int_L (x\,dy - y\,dx),$$

kus L on piirkonna $\bar{S}$ äärjooneks.

Kui inteegrimisteeks on näiteks Cartesiuse lehe äärjoon

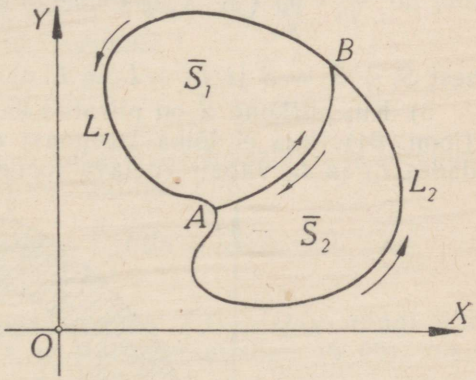
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

siis

$$\int_L (x\,dy - y\,dx) = 2S = 2 \cdot \frac{3}{2} a^2 = 3a^2,$$

sest Cartesiuse lehe pindala $S = \frac{3}{2} a^2$ (I osa, § 84, p. 3, c).

2) Me oletasime algul arvutamise lihtsuse mõttes, et vahemikes a-st b-ni ja c-st d-ni ükski vastavalt Y- või X-teljega paralleelne sirge ei lõika piirkonna $\bar{S}$ äärjoont L rohkem kui kahes punktis, kuid see oletus pole sisuliselt oluline. Need paralleelsed sirged võivad kahekordse integraali $\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy$ inteegrimispiirkonna $\bar{S}$ äärjoont L kui joonintegraali $\int (P\,dx + Q\,dy)$ inteegrimisteed lõigata ka rohkem kui kahes punktis. Selle tõestuseks jaotame piirkonna $\bar{S}$ niisugusteks osapiirkondadeks, et nii Y- kui ka X-teljega paralleelsed sirged ei lõika saadud osapiirkondade äärjooni rohkem kui kahes punktis. Võtame näiteks piirkonna $\bar{S}$ (joon. 60), mille äärjoont L mõni Y-teljega paralleelne sirge lõikab rohkem kui kahes punktis. Selle piirkonna saame joonega AB jaotada kaheks osapiirkonnaks $\bar{S}_1$ ja $\bar{S}_2$ nõnda, et ükski Y- või X-teljega paralleelne sirge ei lõika nende osapiirkondade äärjooni rohkem kui kahes punktis. Osapiirkondade $\bar{S}_1$ ja $\bar{S}_2$ orienteeritud äärjooned on siis $L_1 + AB$ ja $L_2 + BA$, kus $L_1 + L_2 = L$. Nende osapiirkondade puhul võime eelneva põhjal



Joon. 60.

kirjutada, et

$$\iint\limits_{\bar{S}_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{L_1+AB}(Pdx+Qdy)=$$

$$=\int\limits_{L_1}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{AB}(Pdx+Qdy)$$

ja

$$\iint\limits_{\bar{S}_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{L_2+BA}(Pdx+Qdy)=$$

$$=\int\limits_{L_2}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{BA}(Pdx+Qdy)=$$

$$=\int\limits_{L_2}(Pdx+Qdy)-\int\limits_{AB}(Pdx+Qdy),$$

millede summa

$$\iint\limits_{\bar{S}_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy+\iint\limits_{\bar{S}_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=$$

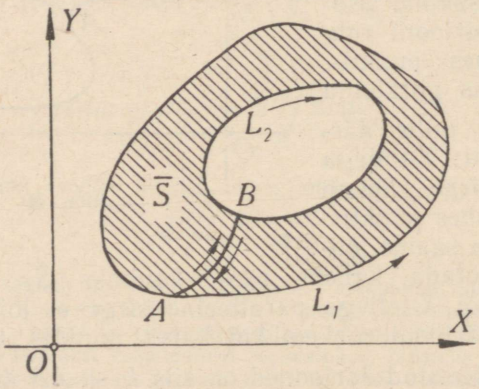
$$=\int\limits_{L_1}(Pdx+Qdy)+\int\limits_{L_2}(Pdx+Qdy)$$

kujutab Greeni valemit

$$\iint\limits_{\bar{S}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\limits_{L}(Pdx+Qdy),$$

sest $\bar{S}_1+\bar{S}_2=\bar{S}$ ja $L_1+L_2=L$.

3) Kui piirkond $\bar{S}$ on piiratud kahe kinnise kõveraga L_1 ja L_2 (joon. 61), mis ei lõika iseennast ega ka teineteist, siis, ühendades L_1 ja L_2 vabalt võetava joonega AB, näeme, et orienteeri-



Joon. 61.

tud integrimisteeks on $L_1 + AB + L_2 + BA$ ning seega

$$\iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{L_1} (Pdx + Qdy) +$$

$$+ \int\limits_{AB} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{L_2} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{BA} (Pdx + Qdy) =$$

$$= \int\limits_{L_1} (Pdx + Qdy) + \int\limits_{L_2} (Pdx + Qdy) =$$

$$= \int\limits_{L_1+L_2} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{L} (Pdx + Qdy),$$

kus L tähendab piirkonna $\bar{S}$ mõlema orienteeritud äärjoone summat. Seega igal juhul kehtib Greeni valem

$$\iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{L} (Pdx + Qdy),$$

kui ainult P ja Q ning $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ on piirkonnas $\bar{S}$ ja selle äärjoonel L pidevad x ja y funktsioonid, kusjuures L võib koosneda mitmest iseseisvast kinnisest orienteeritud kõverast, mis ei lõika üksteist ega ka iseennast.

4) Kui piirkonna $\bar{S}$ ja selle äärjoone L igas punktis funktsioonid $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ ühes osatuletistega $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ on pidevad ja peale selle rahuldavad tingimust

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

siis on Greeni valemis esineva kahekordse integraali ja järelikult ka joonintegraali väärtus võrdne nulliga, s. o.

$$\iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{L} (Pdx + Qdy) = 0.$$

Sel juhul kujutab diferentsiaalavaldis $Pdx + Qdy$ mingi kahe muutuja funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaali (§ 56), nii et

$$P = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ ja } Q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ning

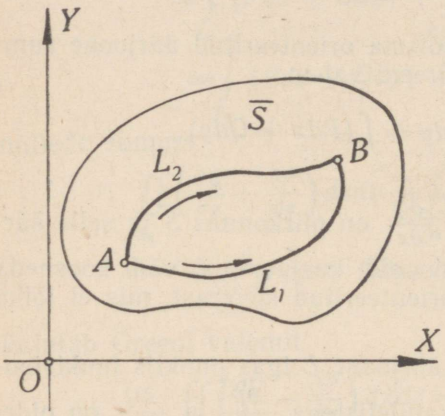
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

kus funktsioon $z = f(x, y)$ on P ja Q kohta kehtivate eelduste kohaselt samuti pidev piirkonnas $\bar{S}$.

§ 62. Täisdiferentsiaali joonintegraal. 1) Kui tasapinnalises piirkonnas $\overline{S}$, milles funktsioonid $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ ning nende osatuletised $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ on ühesed ja pidevad, ühendada punktid A ja B kõvera kaarega L, siis joonintegraali

$$\int_L (Pdx + Qdy)$$

väärtus sõltub üldiselt peale inteegrimistee otspunktide A ja B veel inteegrimisteest L. Kui aga peale selle tähendatud piirkonnas $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, mis ütleb, et $Pdx + Qdy$ kujutab mingi funktsiooni täisdiferentsiaali, siis joonintegraali väärtus ei sõltu punktide A ja B vahelisest inteegrimisteest, vaid ainult inteegrimistee otspunktidest A ja B.



Joon. 62.

Selle tõestamiseks ühendame piirkonnas $\overline{S}$ asetsevad punktid A ja B kahe vabalt võetava inteegrimisteega L_1 ja L_2 (joon. 62), mis ei lõika teineteist ja asetsevad tervenisti piirkonnas $\overline{S}$. Siis eelmiste paragrahvide (§§ 60 ja 61) põhjal võime kirjutada, et

$$\int_{AL_1B} (Pdx + Qdy) - \int_{AL_2B} (Pdx + Qdy) =$$
$$= \int_{AL_1B} (Pdx + Qdy) + \int_{BL_2A} (Pdx + Qdy) =$$
$$= \int_{AL_1BL_2A} (Pdx + Qdy) = 0,$$

millest

$$\int_{L_1} (Pdx + Qdy) = \int_{L_2} (Pdx + Qdy),$$

kus L_1 ja L_2 on suunatud punktist A punkti B poole või ümberpöördult. Saadud võrdusest nähtub, et täisdiferentsiaali joonintegraal ei sõltu inteegrimisteest, vaid ainult viimase otspunktide A ja B asukohast piirkonnas $\overline{S}$. Kui punkti A koordinaadid on (x_1, y_1) ja punkti B koordinaadid (x_2, y_2), siis käesoleval juhul võime joonintegraali tähistada ka järgmiselt:

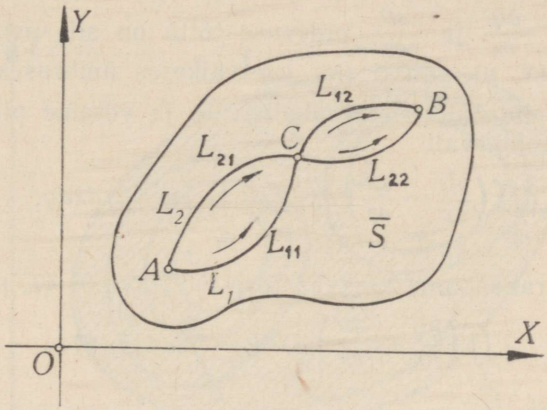
$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (Pdx + Qdy).$$

Sama tulemuse saame ka siis, kui piirkonnas $\bar{S}$ asetsevaid punkte A ja B ühendavad inteegrimisteed L_1 ja L_2 lõikavad teineteist, sest kui L_1 ja L_2 lõikuvad punktis C (joon. 63), siis jaguneb L_1 osadeks L_{11} ja L_{12} ning L_2 jaguneb osadeks L_{21} ja L_{22}, millede puhul eelneva järgi võime kirjutada, et

$$\int_{L_{11}} (Pdx + Qdy) = \int_{L_{21}} (Pdx + Qdy)$$

ja

$$\int_{L_{12}} (Pdx + Qdy) = \int_{L_{22}} (Pdx + Qdy),$$



Joon. 63.

millede summa

$$\int_{L_{11}} (Pdx + Qdy) + \int_{L_{12}} (Pdx + Qdy) =$$
$$= \int_{L_{21}} (Pdx + Qdy) + \int_{L_{22}} (Pdx + Qdy),$$

s. o.

$$\int_{L_1} (Pdx + Qdy) = \int_{L_2} (Pdx + Qdy),$$

kus L_1 ja L_2 kujutavad inteegrimisteid A-st B-ni või ümberpöördult B-st A-ni.

Seega tingimus $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ on piisav selleks, et piirkonnas $\bar{S}$ punktist A punktini B võetud joonintegraali väärtus ei sõltuks inteegrimisteest, vaid ainult punktide A ja B asukohast piirkonnas $\bar{S}$.

Tingimuse $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ tarvilikkuse tõestamiseks väidame vastupidiselt, et piirkonna $\bar{S}$ mingis punktis (x_0, y_0) vahe

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = f(x, y)$$

on nullist erinev, näiteks positiivne, kuid piirkonnas $\bar{S}$ iga kinnise kõvera L puhul

$$\int_L (P dx + Q dy) = 0$$

ehk Greeni valemi järgi selle kõveraga L piiratud piirkonnas

$$\iint_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Osatuletiste $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ja $\frac{\partial P}{\partial y}$ pidevuse tõttu on siis nende osatuletiste vahe $f(x, y)$ punkti (x_0, y_0) väikeses ümbruses positiivne. Tähistame selle ümbruse sümboliga $\bar{S}_0$ ja võtame piirkonnas $\bar{S}_0$ kahekordse integraali

$$\iint_{\bar{S}_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\bar{S}_0} f(x, y) dx dy,$$

mille kohta rakendame keskväärtuse teoreemi (§ 47, p. 5)

$$\iint_{\bar{S}_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = S_0 \cdot f(\xi, \eta),$$

kus (ξ, η) on mingi punkt piirkonnas $\bar{S}_0$. Et selles piirkonnas $f(\xi, \eta) > 0$, siis ka

$$\iint_{\bar{S}_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy > 0,$$

mis on aga vastuolus sellega, et piirkonnas $\bar{S}_0$ ja selle äärjoonel peab olema (§ 61, p. 4)

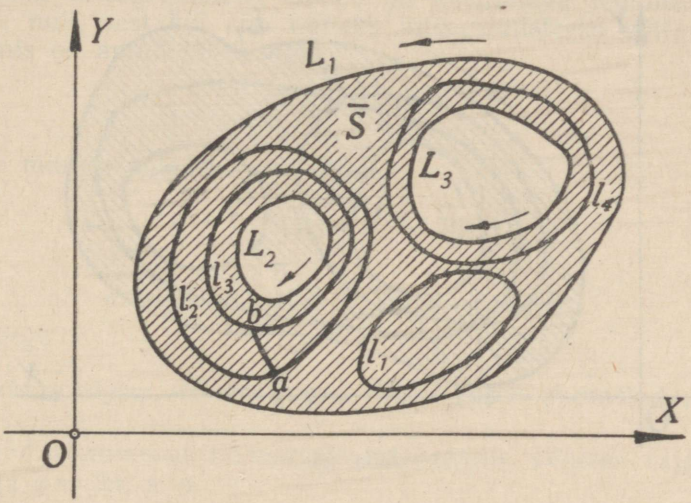
$$\iint_{\bar{S}_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Seega tingimus $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ on tarvilik selleks, et piirkonnas $\bar{S}$ punktist A punktini B võetud joonintegraali väärtus ei sõltuks inteegrimisteest.

Tähendab, kui piirkond $\bar{S}$ on kinnine piirkond, mille igas punktis funktsioonid $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ koos osatuletistega $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ on määratud ja pidevad ning rahuldavad tingimust $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, siis selles piirkonnas võetud kahe punkti A ja B vahelised erinevad inteegrimisteed, mis asetsevad tervenisti piirkon-

nas $\overline{S}$, määravad joonintegraali $\int (P dx + Q dy)$ ühe ja sama väärtuse. Sel juhul inteegrimisteede vahelises piirkonnas ei esine t ü h i k u i d, milledes funktsioonid $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ ning nende osatuletised $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ei ole määratud.

2) Kui piirkond $\overline{S}$ on piiratud näiteks kolme äärjoonega L_1, L_2 ja L_3 (joon. 64) ja selles piirkonnas võtame kinnise joonega l_1 piiratud piirkonna, milles ei esine tühikuid, siis sel juhul saame eespoolöeldu põhjal rakendada Greeni valemit ja joonintegraal kõverat l_1 mööda on võrdne nulliga. Kui aga võtame kinnise



Joon. 64.

joonega l_2 või l_3 piiratud piirkonna, milles esineb tühik, siis ei ole Greeni valem enam rakendatav ning joonintegraali väärtus kõverat l_2 või l_3 mööda on üldiselt nullist erinev. Näitame, et sel juhul joonintegraalid mööda kinnisi inteegrimisteid l_2 ja l_3 on võrdsed. Kui ühendame l_2 ja l_3 joonega ab, siis tekib äärjoontega l_2, ab ja l_3 piiratud piirkond, milles ei esine tühikut ja mille suhtes on seega rakendatav Greeni valem. Joonintegraal mööda äärjoont $l_2 + ab + l_3 + ba$ on siis null, s. o.

$$\underset{\rightarrow}{\int_{l_2}} + \int_{ab} + \underset{\leftarrow}{\int_{l_3}} + \int_{ba} = 0,$$

kus äärjoonte l_2 ja l_3 suund on võetud nõnda, et nendevaheline piirkond jääb nende suunast vasakule poole, s. o. l_2 suund on võetud kellaosuti liikumisele vastupidises suunas ja l_3 suund

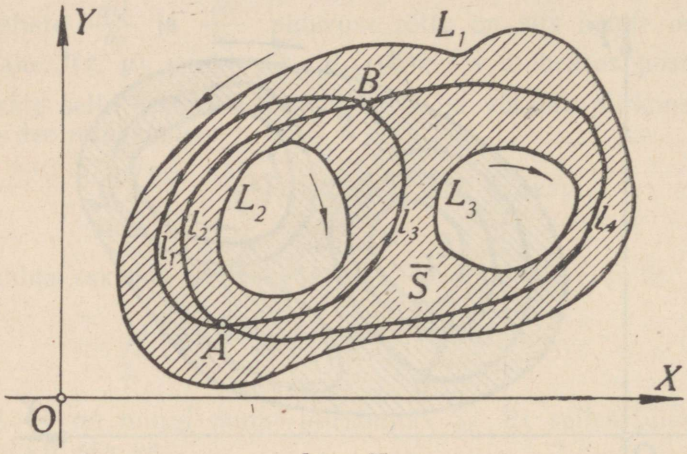
kellaosuti liikumise suunas. Muutes inteegrimisteede l_3 ja ba suunad, saame (§ 60, p. 1)

$$\int\limits_{l_2}^{\rightarrow} - \int\limits_{l_3}^{\rightarrow} = 0,$$

millest

$$\int\limits_{l_2} (Pdx + Qdy) = \int\limits_{l_3} (Pdx + Qdy),$$

kus joonintegraalid mööda kinnisi inteegrimisteid l_2 ja l_3 on võetud kellaosuti liikumisele vastupidises suunas (või ümberpöör-



Joon. 65.

dult). Seega iga kinnise inteegrimistee puhul, mis on tõmmatud piirkonna $\bar{S}$ äärjoonega L_2 piiratud tühiku ümber, omab joonintegraal konstantset väärtust. Analoogiliselt ilmneb, et iga kinnise inteegrimistee (näiteks l_4) puhul, mis on tõmmatud piirkonna $\bar{S}$ äärjoonega L_3 piiratud tühiku ümber, omab joonintegraal samuti konstantset väärtust, mis võib olla nii nullist kui ka mööda l_2 (või l_3) võetud joonintegraali väärtusest erinev.

Eespoolöeldust järeldub, et kui piirkond $\bar{S}$ on piiratud näiteks kolme äärjoonega L_1, L_2 ja L_3 (joon. 65), siis joonintegraali väärtus inteegrimisteed Al_1B mööda on võrdne joonintegraali väärtusega inteegrimisteed Al_2B mööda, kuid ei tarvitse olla võrdne joonintegraali väärtusega inteegrimisteed Al_3B või Al_4B mööda.

a) Võtame näiteks joonintegraali

$$\int (ydx + xdy),$$

kus $P = y$ ja $Q = x$, mis on määratud tervel XY-tasapinnal, kusjuures $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$. Selles joonintegraalis esinev diferent-

siaalavaldis kujutab funktsiooni $z = xy$ täisdiferentsiaali, sest $dz = ydx + xdy$. Seega on antud joonintegraali väärtus XY-tasapinnal kaht mistahes punkti (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) ühendavaid inteegrimisteid mööda ikka üks ja sama, ja nimelt võrdne nende punktide koordinaatide korrutiste vahega $x_2y_2 - x_1y_1$, sest

$$\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (ydx + xdy) = [xy]_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} = x_2y_2 - x_1y_1.$$

Kinnist inteegrimisteed mööda on käsitletava joonintegraali väärtus null, sest kui siin näiteks inteegrimisteeks võtta ringjoon, mis on antud võrrandiga

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

siis üle minnes polaarkoordinaatidele

$$x = r \cos \varphi \text{ ja } y = r \sin \varphi,$$

saame

$$dx = -r \sin \varphi d\varphi \text{ ja } dy = r \cos \varphi d\varphi$$

ning seega

$$ydx + xdy = -r^2 \sin^2 \varphi d\varphi + r^2 \cos^2 \varphi d\varphi = r^2 \cos 2\varphi d\varphi,$$

kus nüüd üleminekul lineaarsele integraalile viimase rajad on $\varphi = 0$ ja $\varphi = 2\pi$, s. o.

$$\int_L (ydx + xdy) = r^2 \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = r^2 \left[\frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

b) Joonintegraalis

$$\int \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

on $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ ja $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$, mille suhtes kehtiv tingimus $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ ütleb, et $\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ kujutab täisdiferentsiaali, ja nimelt funktsiooni $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ täisdiferentsiaali, sest viimast funktsiooni diferentsides saame inteegritava avaldise, s. o.

$$dz = -\frac{\frac{ydx}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{\frac{dy}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{xdy}{x^2 + y^2} - \frac{ydx}{x^2 + y^2}.$$

Et nullpunktis, kus $x = 0$ ja $y = 0$, ei ole funktsioonid P ja Q ning nende osatuletised $\frac{\partial P}{\partial y}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial x}$ määratud, siis iga kinnist inteegrimisteed mööda ümber selle punkti on joonintegraali väärtused nullist erinevad ja võrdsed. Kui inteegrimisteeks L on näiteks ringjoon, mille keskpunkt on nullpunktis, siis — üle minnes polaarkoordinaatidele — saame

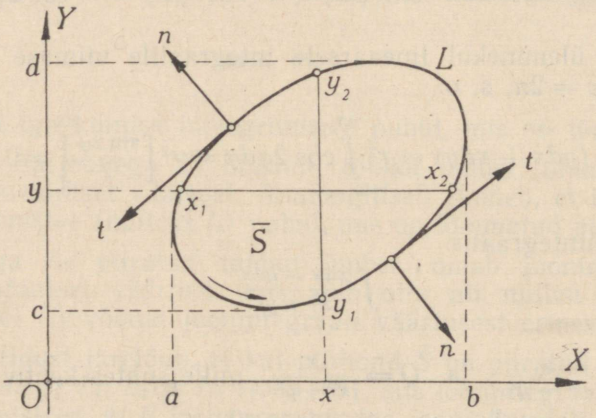
$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos^2 \varphi\, d\varphi + r^2 \sin^2 \varphi\, d\varphi}{r^2} = d\varphi$$

ja seega

$$\int_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi,$$

millest nähtub, et antud integraali väärtus ei sõltu ringi raadiusest r. See tähendab, et antud joonintegraal omab ikka üht ja sama nullist erinevat väärtust 2π, kui inteegrimisteeks võtta nullpunkti ümbritsev mistahes ringjoon või üldiselt mistahes kinnine kõver.

§ 63. Gaussi valem. Oletame, et $P(x, y)$ ja $Q(x, y)$ ning nende osatuletised $\frac{\partial P}{\partial x}$ ja $\frac{\partial Q}{\partial y}$ on tasapinnalises piirkonnas $\overline{S}$ ja selle äärjoonel L ühesed ja pidevad x ja y funktsioonid. Olgu



Joon. 66.

x äärmised väärtused a ja b ning y äärmised väärtused c ja d, mida x ja y omavad piirkonnas $\overline{S}$ ja selle äärjoonel L (joon. 66). Lõigaku vahemikus c-st d-ni iga sirge, mis on paralleelne X-teljega, piirkonna $\overline{S}$ äärjoont L mitte rohkem kui kahes punktis (x_1, y) ja (x_2, y), kus $x = x_1(y)$ ja $x = x_2(y)$ ning $x_2 > x_1$, ja

vahemikus a-st b-ni iga sirge, mis on paralleelne Y-teljega, selle piirkonna äärjoont samuti mitte rohkem kui kahes punktis (x, y_1) ja (x, y_2), kus $y = y_1(x)$ ja $y = y_2(x)$ ning $y_2 > y_1$.

Võtame piirkonnas $\bar{S}$ kahekordsed integraalid

$$\iint\limits_{\bar{S}} \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdy \quad \text{ja} \quad \iint\limits_{\bar{S}} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdy.$$

Siin esimene kahekordne integraal, kui sisemine inteegrimine toimub piirkonna $\bar{S}$ äärjoont L lõikavat X-teljega paralleelset sirget mööda punktist $x_1(y)$ punktini $x_2(y)$, on (§ 61, p. 1 järgi)

$$\iint\limits_{\bar{S}} \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx =$$

$$= \int\limits_c^d dy[P(x_2, y) - P(x_1, y)] = \int\limits_L P(x, y)\, dy,$$

sest vahemikus c-st d-ni orienteeritud äärjoone L vasakpoolse osa igas punktis (x_1, y) on dy negatiivne ja parempoolse osa igas punktis (x_2, y) on dy positiivne.

Teine kahekordne integraal, kui sisemine inteegrimine toimub piirkonna $\bar{S}$ äärjoont L lõikavat Y-teljega paralleelset sirget mööda punktist $y_1(x)$ punktini $y_2(x)$, on

$$\iint\limits_{\bar{S}} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx[Q(x, y_2) - Q(x, y_1)] = -\int\limits_L Q(x, y)\, dx,$$

sest vahemikus a-st b-ni orienteeritud äärjoone L alumise osa igas punktis (x, y_1) on dx positiivne ja ülemise osa igas punktis (x, y_2) on dx negatiivne. Nende kahekordsete integraalide summa väljendub seega joonintegraali kaudu järgmiselt:

$$\iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_L (Pdy - Qdx),$$

kus vasakpoolses kahekordses integraalis dx ja dy tähendavad positiivseid suurusi, kuid parempoolses joonintegraalis dx ja dy tähendavad nii suuruselt kui ka märgilt kaare elemendi ds projektsioone vastavalt X- ja Y-teljel. Sama tulemuse saaksime ka siis, kui X- või Y-teljega paralleelne sirge lõikaks piirkonnas $\bar{S}$ äärjoont L rohkem kui kahes punktis.

Kui tõmbame äärjoone L mistahes punktist (x, y) puutuja t, mille suund ühtib äärjoone suunaga, ja samast punktist v ä l i s n o r m a a l i n, s. o. normaali, mis on suunatud piirkonnast $\bar{S}$ väljapoole, siis näeme, et selles punktis on ikka

$$dx = ds \cos (\widehat{x, t}) = -ds \cos (\widehat{y, n}) = -ds \cos \beta,$$
$$dy = ds \sin (\widehat{x, t}) = +ds \cos (\widehat{x, n}) = +ds \cos \alpha,$$

kus kaare diferentsiaal ds tähendab positiivset suurust ning $(\widehat{x, n}) = \alpha$ ja $(\widehat{y, n}) = \beta$ on nurgad, mida välisnormaal n moodustab vastavalt X- ja Y-telje positiivse suunaga. Asetades need dx ja dy väärtused joonintegraali, saame eespool esinevale kahekordse integraali ja joonintegraali seosele anda järgmise kuju:

$$\iint\limits_{\bar{S}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{L} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds,$$

mida nimetatakse G a u s s i* v a l e m i k s. Gaussi valem näitab, et kahekordset integraali piirkonnas $\bar{S}$ saame teisendada piirkonna $\bar{S}$ äärjoont L mööda võetud joonintegraaliks.

Kui α ja β lugeda nurkadeks, mida kinnise kõvera L s i s e n o r m a a l, s. o. normaal, mis on suunatud piirkonda $\bar{S}$, moodustaks vastavalt X- ja Y-telje positiivse suunaga, siis tuleks joonintegraali ette miinusmärk.

§ 64. Harjutusülesandeid.

1. Leida joonintegraali $\int\limits_{L} (x + y) dx$ väärtus, kui inteegrimisteeks on: a) sirglõik otspunktidega (0, 0) ja (2, 2); b) parabooli $y = \frac{x^2}{2}$ kaar punktist (0, 0) kuni punktini (2, 2).

2. Leida joonintegraali $\int\limits_{L} [(x + y) dx - xdy]$ väärtus, kui inteegrimisteeks on: a) sirglõik otspunktidega (0, 0) ja (4, 2); b) murdjoon punktist (0, 0) kuni punktini (2, 0) ja sealt edasi kuni punktini (4, 2).

---

* K a r l F r i e d r i c h G a u s s (1777—1855) — saksa omaaegne suurim matemaatik; oli professoriks ja tähetorni juhatajaks Göttingenis. Gauss tegeles kõikide tolle aja matemaatika aladega, eriti algebra, geomeetria ja taevamehaanikaga; ta tõestas algebra põhiteoreemi ja lõi vähimruutude meetodi. Käesolevas paragrahvis esitatud Gaussi valem kujutab M. V. Ostrogradski poolt leitud üldisema valemi (§ 67) erijuhtu.

3. Leida joonintegraali $\int_L \left(x - \frac{1}{y}\right) dy$ väärtus, kui inteegrimisteeks on parabooli $y = x^2$ kaar punktist (1, 1) kuni punktini (2, 4).

4. Leida joonintegraali $\int_L (xdy - ydx)$ väärtus, kui inteegrimisteeks on kõvera $y = x^3$ kaar punktist (—1, —1) kuni punktini (2, 8).

5. Leida joonintegraali $\int_L [(x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy]$ väärtus, kui inteegrimisteeks on ellips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

6. Leida integraali $\int_{(0,0)}^{(3,6)} (4x \sin^2 ydx + y \cos^2 2xdy)$ väärtus, kui inteegrimisteeks on sirglõik.

7. Leida integraali $\int_{(0,0)}^{(1,1)} [xydx + (y - x)dy]$ väärtus, kui inteegrimistee määravad kõverad: a) $y = x^2$; b) $y^2 = x$; c) $y = x^3$.

8. Antud on punktid $A(a, 0, 0)$, $B(a, a, 0)$ ja $C(a, a, a)$. Leida joonintegraali $\int_L (ydx + zdy + xdz)$ väärtus, kui inteegrimisteeks on: a) sirglõik OC; b) murdjoon $OABC$.

9. Leida joonintegraali $\int_L (yzdx + z\sqrt{a^2 - y^2}dy + xydz)$ väärtus, kui inteegrimisteeks on kruvijoon

$$x = a \cos t,\ y = a \sin t,\ z = \frac{ct}{2\pi}$$

punktist $z = 0$ kuni punktini $z = c$.

10. Leida integraali $\int_{(1,1,1)}^{(4,4,4)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ väärtus, kui inteegrimisteeks on sirglõik.

11. Miks integraali $\int_L (ydx + xdy)$ väärtus ei sõltu inteegrimisteest?

12. Leida joonintegraali abil Descartes'i lehe $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ pindala. (Teha asendus $y = xt$, kus t on parameetriks.)

13. Leida joonintegraali abil ellipsi $x = a \cos t$ ja $y = b \sin t$ pindala.

14. Leida joonintegraali abil astroidi $x = a \cos^3 t$ ja $y = a \sin^3 t$ pindala.

XIV peatükk

PINDINTEGRAALID

§ 65. Pindintegraali määramine. 1) Eespool käsitletud joonintegraali mõistest ilmneb, et kui kahe muutuja funktsiooni $f(x, y)$ inteegrimispiirkonnaks XY-tasapinnal on kõverjoon L, mida määrab võrrand $F(x, y) = 0$, millest $y = y(x)$, mis on vahemikus $[a, b]$ ühene ja pidev x funktsioon, või $x = x(y)$, mis on vahemikus $[c, d]$ ühene ja pidev y funktsioon, siis

$$\int_a^b f[x, y(x)]dx = \int_L f(x, y)dx$$

ja

$$\int_c^d f[x(y), y]dy = \int_L f(x, y)dy.$$

Analoogiliselt võime arutleda, et kui kolme muutuja funktsiooni $f(x, y, z)$ inteegrimispiirkonnaks XYZ-teljestikus on kõverpind $\bar{U}$, mida määrab võrrand $F(x, y, z) = 0$, millest $z = z(x, y)$ ja mille projektsiooniks XY-tasapinnal on tasapinna osa $\bar{S}$, milles $z = z(x, y)$ on ühene ja pidev x ja y funktsioon, siis kahekordne integraal

$$\iint_{\bar{S}} f[x, y, z(x, y)]dS = \iint_{\bar{S}} f[x, y, z(x, y)]dxdy =$$

$$= \iint_{\bar{U}} f(x, y, z)dxdy,$$

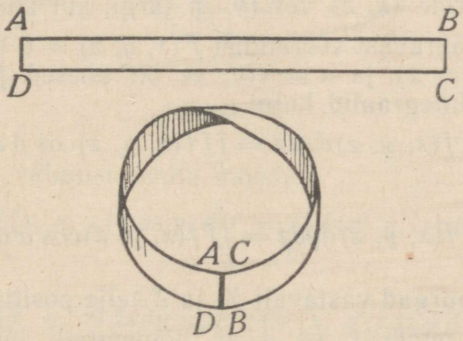
kus nüüd viimases integraalis inteegrimispiirkond $\bar{U}$ on kõverpinna $F(x, y, z) = 0$ osa, mille projektsiooniks XY-tasapinnal on $\bar{S}$. Seda integraali nimetatakse pindintegraaliks, s. o. mööda kõverpinda $\bar{U}$ kulgevaks integraaliks.

Kui pindintegraalis $z =$ konst., siis inteegrimine toimub mööda tasapinda, mis on paralleelne XY-tasapinnaga. Sel juhul pindintegraal muutub harilikuks kahekordseks integraaliks.

Kui XYZ-teljestikus kõverpind $\bar{U}$ on antud võrrandiga $F(x, y, z) = 0$, millest $z = z(x, y)$ on pidev ja ühene x ja y funktsioon ning seejuures Z-telg on suunatud vertikaalselt ülespoole, siis võime kõnelda pinna ülemisest ja alumisest poolest. Seega kõverpind $\bar{U}$ kui inteegrimispiirkond esitab kahepoolset pinda. Kui aga antud võrrand $F(x, y, z) = 0$ esitab mingi keha kinnist kõverpinda, siis võime kõnelda ka kõverpinna välimisest pinnast, mis on pööratud kehast väljapoole, ja samuti sisemisest pinnast, mis on pööratud keha sisemuse poole. Kinnise kõverpinna jooksvast punktist tõmmatud normaali loeme välisnormaaliks, kui ta on suunatud kõverpinnast väljapoole, ja sisenormaaliks, kui ta on suunatud kinnise kõverpinna sisemusse.

Kõverpinna $\bar{U}$ (lahtise või kinnise) loeme kahepoolseks, kui selle kõverpinna mingist punktist M tõmmatud normaalile anname kindla suuna, nii et punkti M liikumisel iga kõverpinnal $\bar{U}$ võetud kinnist kontuuri mööda, mis ei lõika pinna äärjoont (kui see on olemas), normaal tuleb tagasi lähtepunkti M ja omab seal endist suunda.

Kui aga normaal, liikudes kõverpinnal võetud kinnist kontuuri mööda, tuleb tagasi lähtepunkti ja selles punktis normaali suund osutub vastupidiseks, siis nimetatakse niisugust kõverpinda ühepoolseks pinnaks. Ühepoolse pinna klassikaliseks näiteks on nn. Möbiuse* leht. Möbiuse lehe ehk paela võime saada paberiribast $ABCD$ (joon. 67), mille liimime kokku rõngaks, pöörates riba otsi teineteise suhtes 180° võrra, nii et punkt A ühtiks punktiga C ja punkt B punktiga D. Ühepoolseid pindu me siin ei vaatle, vaid käsitleme inteegrimispiirkondadena ainult kahepoolseid pindu.



Joon. 67.

* August Ferdinand Möbius (1790—1868) — saksa matemaatik; oli professoriks ja tähetorni juhatajaks Leipzigis.

2) Kui võtame funktsiooni $f(x, y, z)$ inteegrimispiirkonna $\overline{U}$ projektsioonil $\overline{S}$ pinnaelemendi $dS = dxdy$, siis vastab sellele pinnaelemendile kõverpinna $\overline{U}$ punktis (x, y, z) pinnaelement dU, kusjuures

$$dS = dU \cdot \cos(\widehat{z, n}) = dU \cdot \cos\gamma,$$

kus $(\widehat{z, n}) = \gamma$ väljendab nurka Z-telje positiivse suuna ja piirkonna $\overline{U}$ punktist (x, y, z) ühele või teisele poole kõverpinda $\overline{U}$ suunatud normaali n vahel. Kui kõverpinda $\overline{U}$ esitab võrrand $F(x, y, z) = 0$, millest on võimalik ilmutada z, s. o. $z = z(x, y)$, mis on piirkonnas $\overline{S}$ ühene ja pidev x ja y funktsioon, siis

$$\iint\limits_{\overline{S}} f[x, y, z(x, y)]dS = \iint\limits_{\overline{S}} f[x, y, z\ (x, y)]dxdy =$$
$$= \iint\limits_{\overline{U}} f(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{\overline{U}} f(x, y, z)\cos\gamma\, dU,$$

kus viimases pindintegraalis kõverpinna element dU on ikka positiivne suurus, kuid $\cos\gamma$ (sõltuvalt normaali suunast) võib olla kas positiivne või negatiivne.

Samuti on võimalik näidata, et kui inteegrimine toimuks muutujate paaride (x, z) või (y, z) järgi, kui ainult inteegrimispiirkonda $\overline{U}$ määravast võrrandist $F(x, y, z) = 0$ ilmutatud funktsioonid $y = y(x, z)$ ja $x = x(y, z)$ on ühesed ja pidevad, siis saaksime pindintegraalid kujul

$$\iint\limits_{\overline{U}} f(x, y, z)dxdz = \iint\limits_{\overline{U}} f(x, y, z)\cos\beta\, dU$$

ja

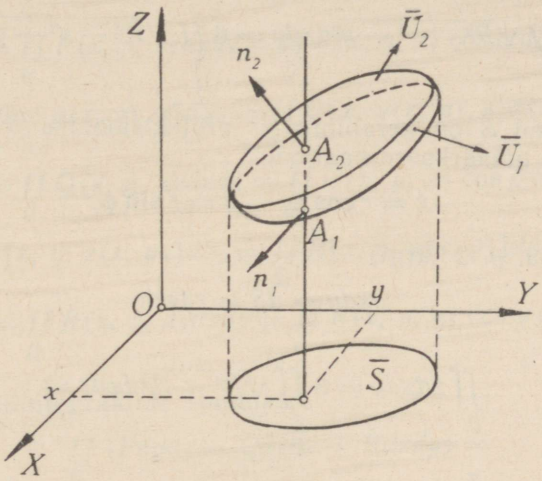
$$\iint\limits_{\overline{U}} f(x, y, z)dydz = \iint\limits_{\overline{U}} f(x, y, z)\cos\alpha\, dU,$$

kus β ja α on nurgad vastavalt Y- ja X-telje positiivse suuna ning kõverpinna $\overline{U}$ punktist (x, y, z) tõmmatud kindlaksmääratud suunaga normaali n vahel.

Kui pindintegraali $\iint\limits_{\overline{U}} f(x, y, z)dxdy$ inteegrimispiirkond $\overline{U}$ on kinnine piirkond, mille projektsiooniks XY-tasapinnal on piirkond $\overline{S}$, ja selles piirkonnas iga sirge, mis on paralleelne Z-teljega, lõikab piirkonda $\overline{U}$ kahes punktis, näiteks punktides A_1 ja A_2 (joon. 68), siis tuleb piirkond U jaotada kaheks piirkonnaks $\overline{U}_1$ ja $\overline{U}_2$ nõnda, et piirkonnas $\overline{S}$ iga sirge, mis on paralleelne Z-teljega, lõikaks kumbagi piirkonda ainult ühes punktis. Kui sel juhul inteegrimispiirkonnaks võtta välimine või sisemine pind, siis

määrab pindintegraal $\iint\limits_{\bar{U}} f(x, y, z)\,dxdy$ sisuliselt kaks erinevat pindintegraali, sõltuvalt sellest, missugust kõverpinna $\bar{U}$ osa mööda — kas $\bar{U}_1$ või $\bar{U}_2$ mööda — toimub inteegrimine. Nagu nähtub jooniselt 68, kus n on välisnormaaliks ning seega inteegrimine toimub välimist pinda mööda, on pindintegraal kinnise piirkonna ülemise osa välimist pinda mööda

$$\iint\limits_{\bar{U}_2} f(x, y, z)\cos\gamma_2\,dU_2 = \iint\limits_{\bar{U}_2} f(x, y, z)\,dxdy$$



Joon. 68.

ja alumise osa välimist pinda mööda

$$\iint\limits_{\bar{U}_1} f(x, y, z)\cos\gamma_1\,dU_1 = \iint\limits_{\bar{U}_1} f(x, y, z)\,dxdy$$

ning seega

$$\iint\limits_{\bar{U}} f(x, y, z)\,dxdy = \iint\limits_{\bar{U}} f(x, y, z)\cos\gamma\,dU =$$

$$= \iint\limits_{\bar{U}_2} f(x, y, z)\cos\gamma_2\,dU + \iint\limits_{\bar{U}_1} f(x, y, z)\cos\gamma_1\,dU_1 =$$

$$= \iint\limits_{\bar{U}_2} f(x, y, z)\,dxdy - \iint\limits_{\bar{U}_1} f(x, y, z)\,dxdy.$$

Kui näiteks pindintegraali

$$\iint\limits_{\bar{U}} z\,dxdy$$

inteegrimispiirkonnaks $\bar{U}$ on kerapinna

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

välimine pind, mille ülemist osa $\overline{U}_2$ esitab

$$z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

ja alumist osa $\overline{U}_1$ esitab

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

siis

$$\iint\limits_{\overline{U}} z\,dxdy = \iint\limits_{\overline{S}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy - \iint\limits_{\overline{S}} -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy =$$

$$= 2\iint\limits_{\overline{S}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 8\iint\limits_{\frac{\overline{S}}{4}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy,$$

kus ringipind $\overline{S}$ on kerapinna $\overline{U}$ projektsiooniks XY-tasapinnal. Üle minnes polaarkoordinaatidele:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

saame (§ 49, p. 2 järgi)

$$dxdy = dS = rd\varphi dr$$

ja

$$\iint\limits_{\overline{U}} z\,dxdy = 8\iint\limits_{\frac{\overline{S}}{4}} \sqrt{R^2 - r^2}\,rd\varphi dr =$$

$$= 8\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^R r\sqrt{R^2 - r^2}\,dr = 8\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

mis väljendab kera ruumala valemit, kui kera raadiuseks on R.

3) Et pindintegraalide rakendustes esineb enamikul juhtudel kõverpinnalises piirkonnas $\overline{U}$ võetud kolme pindintegraali summa, kusjuures üks neist integraalidest on võetud (y, z) järgi, teine (x, z) järgi ja kolmas (x, y) järgi, siis vaatleme kolme funktsiooni

$$P(x, y, z), \quad Q(x, y, z), \quad R(x, y, z),$$

mis on ruumilises piirkonnas $\overline{V}$ pidevad x, y ja z funktsioonid. Võtame selles ruumilises piirkonnas $\overline{V}$ kõverpinnalise inteegrimispiirkonna $\overline{U}$, mida määrab võrrand $F(x, y, z) = 0$, nii et

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y)$$

on pidevad ja ühesed funktsioonid vastavalt piirkondades $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ ja $\overline{S}_3$, mis kujutavad kõverpinna $\overline{U}$ projektsioone vastavalt YZ-,

XZ- ja XY-tasapinnal. Olgu α, β ja γ nurgad, mida ühele või teisele poole kõverpinda $\bar{U}$ suunatud normaal n piirkonna $\bar{U}$ punktis (x, y, z) moodustab vastavalt X-, Y- ja Z-telje positiivse suunaga, s. o.

$$\alpha = (\widehat{x, n}), \quad \beta = (\widehat{y, n}), \quad \gamma = (\widehat{z, n}).$$

Siis võime eespoolöeldu põhjal kirjutada, et

$$\iint\limits_{\bar{S}_1} P[x(y, z), y, z]dS_1 = \iint\limits_{\bar{S}_1} P[x(y, z), y, z]dydz =$$

$$= \iint\limits_{\bar{U}} P(x, y, z)dydz = \iint\limits_{\bar{U}} P(x, y, z) \cos\alpha \, dU,$$

$$\iint\limits_{\bar{S}_2} Q[x, y(x, z), z]dS_2 = \iint\limits_{\bar{S}_2} Q[x, y(x, z), z]dxdz =$$

$$= \iint\limits_{\bar{U}} Q(x, y, z)dxdz = \iint\limits_{\bar{U}} Q(x, y, z) \cos\beta \, dU,$$

$$\iint\limits_{\bar{S}_3} R[x, y, z(x, y)]dS_3 = \iint\limits_{\bar{S}_3} R[x, y, z(x, y)]dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\bar{U}} R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{\bar{U}} R(x, y, z) \cos\gamma \, dU.$$

Saadud pindintegraalide summat

$$\iint\limits_{\bar{U}} (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy) =$$

$$= \iint\limits_{\bar{U}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dU,$$

kus $dydz = \cos\alpha \, dU$, $dxdz = \cos\beta \, dU$ ja $dxdy = \cos\gamma \, dU$, nimetatakse mööda kõverpinda $\bar{U}$ kulgevaks üldiseks pindintegraaliks.

Üldises pindintegraalis on α, β ja γ nurgad, mida kindlaksmääratud suunaga normaal kõverpinna $\bar{U}$ jooksvas punktis (x, y, z) moodustab vastavalt X-, Y- ja Z-telje positiivse suunaga. Kui siin kõverpinna normaali suund muuta vastupidiseks, siis $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ja $\cos\gamma$ märgid muutuvad samuti vastupidiseks, kuid koosinuste absoluutväärtused ei muutu. Seega

$$\iint\limits_{\bar{U}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dU =$$

$$= \iint\limits_{\underline{U}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dU,$$

kus $\bar{U}$ ja $\underline{U}$ tähendavad ühe ja sama inteegrimispiirkonna (kui kõverpinna) erinevaid pooli.

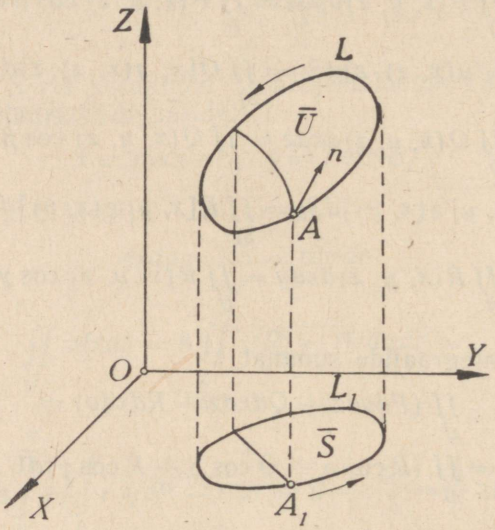
§ 66. Stokes'i valem. Oletame, et ruumilises piirkonnas $\bar{V}$ funktsioonid

$$P(x, y, z), \quad Q(x, y, z), \quad R(x, y, z)$$

ning nende osatuletised

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y}$$

on pidevad x, y ja z funktsioonid. Võtame piirkonnas $\bar{V}$ mingi kõverpinna $\bar{U}$, mida määrab võrrand $F(x, y, z) = 0$ ja mille äär-



Joon. 69.

jooneks on kinnine kõver L. Kõverpinna $\bar{U}$ projektsiooniks XY-tasapinnal on piirkond $\bar{S}$ äärjoonega L_1 (joon. 69). Kõverpinna $\bar{U}$ võtame niisugusena, et tema projektsiooni piirkonnas $\bar{S}$ ükski Z-teljega paralleelne sirge ei lõikaks pinda $\bar{U}$ rohkem kui ühes punktis. Kõverpinna $\bar{U}$ äärjoone L loeme ühtlasi joonintegraali

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz)$$

kinniseks inteegrimisteeks, mille positiivse suuna määrame nõnda, et inteegrimisteega L piiratud pind $\bar{U}$ jääb inteegrimistee suunast ikka vasakule poole. Tähendab, kui punkt A liigub pinna $\bar{U}$ äär-

joont L mööda positiivses suunas, siis punkti A projektsioon XY-tasapinnal A_1 liigub pinna $\bar{S}$ äärjoont L_1 mööda samuti positiivses suunas. Seega

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz)$$

tähendab joonintegraali mööda orienteeritud kinnist ruumilist kõverat L.

Olgu kõverpinna $\bar{U}$ projektsiooni piirkonna $\bar{S}$ ja selle äärjoone L_1 igas punktis $z = z(x, y)$ [mis saadakse võrrandist $F(x, y, z) = 0$] ühene ja pidev x ja y funktsioon. Siis saame ülaltähendatud joonintegraali teisendada niisuguseks joonintegraaliks, mille inteegrimisteeks on tasapinnaline kinnine kõver, ja nimelt inteegrimistee L projektsioon XY-tasapinnal L_1. Selleks asendame z funktsioonides P, Q ja R tema väärtusega $z(x, y)$, kusjuures

$$dz = pdx + qdy,$$

kus $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ja $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Sel juhul diferentsiaalavaldis $Pdx + Qdy + Rdz$ väljendub kahe muutuja kaudu, ja nimelt jooksva punkti A projektsiooni A_1 koordinaatide x ja y kaudu, mille puhul joonintegraali inteegrimisteeks on tasapinnaline kinnine kõver L_1, s. o.

$$\begin{aligned}
&\int_L [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] = \\
&= \int_{L_1} \{P[x, y, z(x, y)]dx + Q[x, y, z(x, y)]dy + \\
&\quad + R[x, y, z(x, y)](pdx + qdy)\} = \\
&= \int_{L_1} \{[P(x, y, z(x, y)) + pR(x, y, z(x, y))]dx + \\
&\quad + [Q(x, y, z(x, y)) + qR(x, y, z(x, y))]dy\} = \\
&= \int_{L_1} [P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy],
\end{aligned}$$

kus

$$\begin{aligned}
P_1(x, y) &= P[x, y, z(x, y)] + pR[x, y, z(x, y)], \\
Q_1(x, y) &= Q[x, y, z(x, y)] + qR[x, y, z(x, y)].
\end{aligned}$$

Et saadud joonintegraal on Greeni valemi järgi

$$\int_{L_1} (P_1dx + Q_1dy) = \iint_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y}\right) dxdy$$

ja

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial z} + R\frac{\partial p}{\partial y} + p\left(\frac{\partial R}{\partial y} + q\frac{\partial R}{\partial z}\right), \\
\frac{\partial Q_1}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial x} + p\frac{\partial Q}{\partial z} + R\frac{\partial q}{\partial x} + q\left(\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial R}{\partial z}\right),
\end{aligned}$$

siis nende vahe

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}-p\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),$$

sest

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},$$

ja joonintegraal ruumilist kinnist kõverat L mööda

$$\int_L (Pdx+Qdy+Rdz)=$$

$$=\iint_{\bar{S}}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)-p\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-q\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\right]dxdy,$$

kus inteegrimispiirkond $\bar{S}$ kujutab kõverpinna $\bar{U}$ projektsiooni XY-tasapinnal.

Edasi tõmbame kõverpinnale $\bar{U}$ (näiteks punktis A) jooksva normaali n, mis on suunatud nõnda, et ta moodustaks Z-telje positiivse suunaga teravnurga. Siis selle normaali suunakoosinused (§ 21 järgi) on

$$\cos\,\widehat{(x,n)}=\cos\alpha=\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\cos\,\widehat{(y,n)}=\cos\beta=\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

$$\cos\,\widehat{(z,n)}=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}},$$

kus ruutjuur tuleb võtta plussmärgiga.

Et peale selle pinnaelement (§ 50, p. 1)

$$dU=\sqrt{p^2+q^2+1}\,dxdy,$$

siis seega

$$-pdxdy=\cos\alpha\,dU,$$
$$-qdxdy=\cos\beta\,dU,$$
$$dxdy=\cos\gamma\,dU,$$

millede asetamisel viimasesse kahekordsesse integraali saame dU tõttu mööda kõverpinda $\bar{U}$ kulgeva pindintegraali. Seega saame antud joonintegraali väljendada pindintegraali kaudu järgmiselt:

$$\int_L (Pdx+Qdy+Rdz)=\iint_{\bar{U}}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dU,$$

mida nimetatakse Stokes'i* valemiks. See valem leiab sagedast kasutamist teoreetilises füüsikas.

Et (§ 65, p. 3)

$$\cos\alpha\, dU = dydz, \quad \cos\beta\, dU = dxdz, \quad \cos\gamma\, dU = dxdy,$$

siis saame Stokes'i valemile anda ka kuju

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_{\bar{U}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\right].$$

Stokes'i valem näitab, et joonintegraali kõverpinnalise piirkonna $\bar{U}$ äärjoont L mööda saame teisendada pindintegraaliks, kus inteegrimispiirkonnaks on $\bar{U}$.

Kui Stokes'i valemis

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

siis on saadud pindintegraali ja ühtlasi ka joonintegraali väärtus võrdne nulliga, s. o.

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz) = 0.$$

Sel juhul diferentsiaalavaldis $Pdx + Qdy + Rdz$ kujutab mingi kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ täisdiferentsiaali (§ 57).

Kui Stokes'i valemis $z =$ konst., siis normaal n on paralleelne Z-teljega, mille puhul

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 1$$

ja

$$dU = dS = dxdy$$

ning Stokes'i valem taandub Greeni valemiks

$$\int_{L_1} (Pdx + Qdy) = \iint_{\bar{S}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

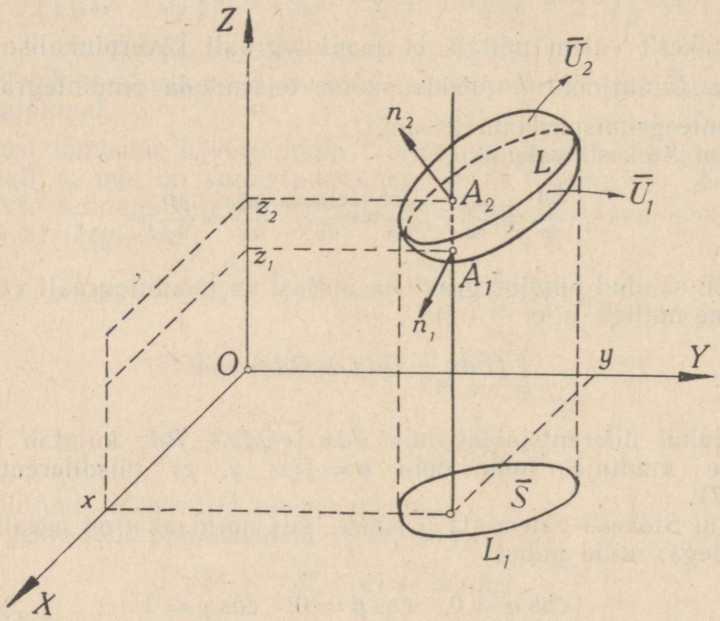
Seega Greeni valem kujutab Stokes'i valemi erijuhtu.

---

* George Gabriel Stokes (1819—1903) — inglise füüsik ja matemaatik, oli professoriks Cambridge'i ülikoolis. Stokes'il on erilisi teeneid teoreetilise füüsika ja selle matemaatiliste rakenduste arendamise alal.

§ 67. Ostrogradski valem. Võtame ruumilise piirkonna $\bar{V}$, mis on piiratud kinnise pinnaga $\bar{U}$, ja oletame, et funktsioonid $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ ja $R(x, y, z)$ koos osatuletistega $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ja $\frac{\partial R}{\partial z}$ on selles piirkonnas ja selle pinnal ühesed ja pidevad x, y ja z funktsioonid. Võtame piirkonnas $\bar{V}$ ruumintegraalid

$$\iiint_{\bar{V}} \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz, \quad \iiint_{\bar{V}} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz, \quad \iiint_{\bar{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz.$$



Joon. 70.

ja vaatleme kolmandat integraali

$$\iiint_{\bar{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz.$$

Moodustame silindrilise pinna, mis projekteerib piirkonna $\bar{V}$ XY-tasapinnale, saades projektsiooniks tasapinnalise piirkonna $\bar{S}$ (joon. 70). See silindriline pind puudutab kinnist kõverpinda $\bar{U}$ joont L mööda, mis jagab pinna $\bar{U}$ kaheks osaks: alumiseks osaks $\bar{U}_1$, mille võrrand olgu $z = z_1(x, y)$, ja ülemiseks osaks $\bar{U}_2$,

mille võrrand olgu $z = z_2(x, y)$, kusjuures $z_1(x, y)$ ja $z_2(x, y)$ on ühesed ja pidevad funktsioonid. Pindade $\bar{U}_1$ ja $\bar{U}_2$ projektsiooniks XY-tasapinnal on samuti piirkond $\bar{S}$ äärjoonega L_1. Iga piirkonnas $\bar{S}$ võetud sirge, mis on paralleelne Z-teljega, lõikab nii alumist osa $\bar{U}_1$ kui ka ülemist osa $\bar{U}_2$ ainult ühes punktis.

Kui siin inteegrimine toimub z järgi, s. o. Z-teljega paralleelset sirget mööda, mis lõikab pinda $\bar{U}$ punktides $A_1[x, y, z_1(x, y)]$ ja $A_2[x, y, z_2(x, y)]$, milledest esimene asetseb alumisel kõverpinna osal $\bar{U}_1$ ja teine asetseb ülemisel kõverpinna osal $\bar{U}_2$, siis

$$\iiint_{\bar{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_{\bar{V}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz =$$

$$= \iint_{\bar{V}} [R(x, y, z_2) - R(x, y, z_1)]\, dxdy.$$

Edasi tõmbame punktidest A_1 ja A_2 pindadele $\bar{U}_1$ ja $\bar{U}_2$ vastavalt välisnormaalid n_1 ja n_2, kusjuures normaal n_1 moodustab Z-telje positiivse suunaga nürinurga, mille puhul

$$dxdy = -\cos(\widehat{z_1, n_1})\, dU_1 = -\cos\gamma_1\, dU_1,$$

ja normaal n_2 moodustab Z-telje positiivse suunaga teravnurga, mille puhul

$$dxdy = +\cos(\widehat{z_2, n_2})\, dU_2 = \cos\gamma_2\, dU_2,$$

kus dU_1 ja dU_2 on kõverpinna $\bar{U}$ vastavate osade $\bar{U}_1$ ja $\bar{U}_2$ elemendid. Arvestades iga välisnormaali n ja kõverpinna $\bar{U}$ iga elementi dU, saame käsitletava ruumintegraali esitada pindintegraali kaudu järgmiselt:

$$\iiint_{\bar{V}} \frac{\partial R}{\partial z}\, dxdydz = \iint_{\bar{U}} [R(x, y, z_1)\cos(\widehat{z_1, n_1})\, dU_1 +$$

$$+ R(x, y, z_2)\cos(\widehat{z_2, n_2})\, dU_2] =$$

$$= \iint_{\bar{U}} R(x, y, z)\cos(\widehat{z, n})\, dU = \iint_{\bar{U}} R(x, y, z)\cos\gamma\, dU.$$

Analoogiliselt leiaksime, et ka

$$\iiint_{\bar{V}} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dxdydz = \iint_{\bar{U}} Q(x, y, z)\cos\beta\, dU$$

ja

$$\iiint_{\bar{V}} \frac{\partial P}{\partial x}\, dxdydz = \iint_{\bar{U}} P(x, y, z) \cos \alpha\, dU,$$

kus $(\widehat{y, n}) = \beta$ ja $(\widehat{x, n}) = \alpha$.

Saadud võrdusi liites saame

$$\iiint_{\bar{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint_{\bar{U}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)\, dU,$$

mida nimetatakse O s t r o g r a d s k i v a l e m i k s.

Et

$$\cos \alpha\, dU = dydz, \quad \cos \beta\, dU = dxdz, \quad \cos \gamma\, dU = dxdy,$$

siis saame Ostrogradski valemile anda ka kuju

$$\iiint_{\bar{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint_{\bar{U}} (Pdydz + Qdxdz + Rdxdy).$$

Ostrogradski valem näitab, et ruumintegraali piirkonnas $\bar{V}$ saame teisendada piirkonna $\bar{V}$ pinda $\bar{U}$ mööda võetavaks pindintegraaliks.

Kui Ostrogradski valemis $P = x$, $Q = y$ ja $R = z$, siis

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = 1$$

ja

$$\iint_{\bar{U}} (xdydz + ydxdz + zdxdy) = 3 \iiint_{\bar{V}} dxdydz = 3V,$$

millest ruumala V pindintegraali kaudu on

$$V = \frac{1}{3} \iint_{\bar{U}} (xdydz + ydxdz + zdxdy),$$

kus $\bar{U}$ on ruumilise piirkonna $\bar{V}$ pinnaks.

§ 68. Harjutusülesandeid.

1. Leida pindintegraali

$$\iint\limits_{\bar{U}} z dx dy$$

väärtus, kui inteegrimispiirkonnaks $\bar{U}$ on ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

välimine pind.

2. Leida pindintegraali

$$\iint\limits_{\bar{U}} z^2 dx dy$$

väärtus, kui inteegrimispiirkonnaks $\bar{U}$ on ellipsoidi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

sisemine pind.

3. Leida pindintegraali

$$\iint\limits_{\bar{U}} (x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy)$$

väärtus, kui inteegrimispiirkonnaks $\bar{U}$ on niisuguse kuubi välimine pind, mille moodustavad tasapinnad $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$ ja $z=1$.

4. Teisendada pindintegraal

$$\iint\limits_{\bar{U}} (x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy)$$

kolmekordseks integraaliks, kui $\bar{U}$ on kinnine piirkond.

5. Leida pindintegraali

$$\iint\limits_{\bar{U}} (x^3 dy dz + y^3 dx dz + z^3 dx dy)$$

väärtus, kui inteegrimispiirkonnaks $\bar{U}$ on niisuguse püramiidi välimine pind, mille moodustavad tasapinnad $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$ ja $z=0$.

XV peatükk

KOMPLEKSFUNKTSIOONID JA NENDE RAKENDUSI

§ 69. Kompleksfunktsioon ja selle tuletis. Kompleksmuutujas $z = x + yi$ on x ja y teineteisest sõltumatud reaalmuutujad. Kompleksmuutuja z saab nulliks, kui $x = 0$ ja $y = 0$, ning lõpmatuks, kui vähemalt x või y tõkestamatult kasvab. Kompleksmuutuja z esitab geomeetriliselt punkti XY-tasapinnal, kus X-telg on reaalteljeks ja Y-telg on imaginaarteljeks. Me nimetame seda arvtasapinda ühtlasi ka z-tasapinnaks ehk komplekstasapinnaks.

Kompleksmuutuja $z = x + yi$ funktsiooni

$$f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ehk lühidalt

$$f(z) = u + vi,$$

kus u ja v on reaalsed x ja y funktsioonid, nimetame *kompleksfunktsiooniks*.

Kompleksfunktsiooni $f(z)$ pidevust teatavas piirkonnas defineeritakse tingimusega

$$|\Delta f(z)| = |\Delta(u + vi)| = |\Delta u + i\Delta v| = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} \to 0,$$

kui

$$|\Delta z| = |\Delta(x + yi)| = |\Delta x + i\Delta y| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0,$$

s. o. $|\Delta f(z)| \to 0$ täpselt siis, kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$ puhul $|\Delta u| \to 0$ ja $|\Delta v| \to 0$. See tähendab, et $f(z)$ on pidev defineeritud mõttes, kui $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on vaadeldavas piirkonnas pidevad kahe muutuja reaalfunktsioonid.

Kompleksfunktsiooni tuletise $f'(z)$ all mõistame piirväärtust, millele läheneb murd

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta(u + vi)}{\Delta(x + yi)} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y},$$

kus

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y),$$
$$\Delta v = v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y),$$

kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$ ja seega ühtlasi $\Delta z \to 0$. Vaatame, missugustel tingimustel kompleksfunktsioon $f(z)$ omab tuletist $f'(z)$. Et siin x ja y on teineteisest sõltumatud, siis on ka nende kasvud Δx ja Δy teineteisest sõltumatud ning seega piirprotsessi puhul lähenevad teineteisest sõltumatult nullile. See tähendab, et murd $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, kui $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$, võib omada määramatult palju piirväärtusi. Et murd $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ei oma $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$ puhul kindlat piirväärtust, siis — nagu allpool näeme — võib murd $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ omada $\Delta x \to 0$ ja $\Delta y \to 0$ puhul kindlat piirväärtust ainult sel juhul, kui on täidetud teatavad tingimused.

Oletame, et kompleksfunktsioonis

$$f(z) = u + vi$$

funktsioonid $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on teatavas piirkonnas ühesed ja pidevad ning omavad seal pidevaid osatuletisi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$. Lähenegu peale selle Δx ja Δy nullile nõnda, et ikka kehtib võrdus $\Delta y = k\Delta x$ ja seega $dy = kdx$, kus k on mingi vabalt võetud konstantne suurus. Et kahe muutuja funktsioonide $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ täisdiferentsiaalid on (§ 20)

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy$$

ja

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy,$$

siis käesoleval juhul, asendades $dy = kdx$, saame

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y}$$

ja

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y}$$

ning seega

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} + i\frac{\Delta v}{\Delta x}}{1 + ki} = \frac{\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}}{1 + ki} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + k\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{1 + ki}.$$

Saadud piirväärtus on vabalt võetud arvust k sõltumatu ainult siis, kui lugeja sisaldab ühe tegurina nimetajas esineva avaldise

$1 + ki$. Et aga $1 + ki$ muutub $k = i$ puhul nulliks, siis järelikult muutub ka lugeja $k = i$ puhul nulliks, s. o.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

ehk

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0.$$

Kui aga kompleksarv on võrdne nulliga, siis peavad tema reaalosa ja imaginaarosa kordaja olema võrdsed nulliga, s. o.

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

milledest

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

mida nimetatakse Cauchy-Riemanni* diferentsiaalvõrranditeks.

Kui kompleksfunktsiooni

$$f(z) = u + vi$$

puhul kehtivad Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandid, siis iga k puhul

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} + k\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{1 + ki} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot (1 + ki) - i\frac{\partial u}{\partial y} \cdot (1 + ki)}{1 + ki} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

ehk

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Seega näeme, et kompleksfunktsiooni tuletise olemasolu tarvilikuks tingimuseks on Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandite kehtivus.

Näitame, et Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandite kehtivus on ühtlasi ka tuletise olemasolu piisavaks tingimuseks. Selleks oletame, et kehtivad Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandid, ja laseme Δx ja Δy läheneda nullile nõnda, et $\Delta y = k\Delta x$, kus k on

---

* Bernhard Riemann (1826—1866) — saksa matemaatik, kellel on erilisi teeneid arvu- ja funktsiooniteooria arendamise alal.

mistahes konstantne arv. Et u ja v on pidevad x ja y funktsioonid, siis diferentsiaalarvutuse keskväärtuse teoreemi põhjal

$$\Delta u = u(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - u(x,\ y) =$$
$$= \Delta x \cdot u_x(x + \Theta_1 \Delta x,\ y + \Theta_1 \Delta y) + \Delta y \cdot u_y(x + \Theta_1 \Delta x,\ y + \Theta_1 \Delta y),$$
$$\Delta v = v(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - v(x,\ y) =$$
$$= \Delta x \cdot v_x(x + \Theta_2 \Delta x,\ y + \Theta_2 \Delta y) + \Delta y \cdot v_y(x + \Theta_2 \Delta x,\ y + \Theta_2 \Delta y),$$

kus $0 < \Theta_1 < 1$ ja $0 < \Theta_2 < 1$. Tähistame lihtsuse mõttes

$$x + \Theta_1 \Delta x = x_1,\ y + \Theta_1 \Delta y = y_1,$$
$$x + \Theta_2 \Delta x = x_2,\ y + \Theta_2 \Delta y = y_2$$

ja vastavalt

$$u(x_1,\ y_1) = u_1,\ u(x_2,\ y_2) = u_2,$$
$$v(x_1,\ y_1) = v_1,\ v(x_2,\ y_2) = v_2;$$

siis

$$\Delta u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \Delta y,$$
$$\Delta v = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \Delta x + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \Delta y.$$

Et oletuse kohaselt ka

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial y_2},\ \frac{\partial v_2}{\partial y_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

siis

$$\Delta v = -\frac{\partial u_2}{\partial y_2} \Delta x + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta y$$

ja

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} =$$
$$= \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x + \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \Delta y + i \left(-\frac{\partial u_2}{\partial y_2} \Delta x + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta y \right)}{\Delta x + i \Delta y} =$$
$$= \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + i \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} =$$
$$= \frac{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i \frac{\partial u_2}{\partial y_2} \right) \Delta x + i \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} =$$
$$= \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + i \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) k}{1 + ki},$$

kus $\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$ on mistahes konstantne arv. Piirile minekul, kui $\Delta x \to 0$, siis $x_1 \to x$ ja $x_2 \to x$, ja kui $\Delta y \to 0$, siis $y_1 \to y$ ja $y_2 \to y$. Et eelduse järgi funktsioonid u ja v koos osatuletistega $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial u}{\partial y}$ on pidevad, siis $u_1 \to u$ ja $u_2 \to u$ ning järelikult

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\frac{\partial u_2}{\partial y_2} + i\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)k}{1 + ki} =$$

$$= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)k}{1 + ki} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

millest nähtub, et Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandite kehtivus on ühtlasi kompleksfunktsiooni tuletise olemasolu piisavaks tunnuseks.

Pidevat kompleksfunktsiooni $f(z) = u + vi$, mille puhul kehtivad Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandid, nimetatakse analüütiliseks funktsiooniks.

§ 70. Kompleksintegraali mõiste. Kui inteegrimismuutujaks on reaalmuutuja x, siis on meil tegemist hariliku integraaliga ehk reaalintegraaliga $\int f(x)dx$. Määratud reaalintegraali inteegrimistee on sirglõik reaal- ehk X-teljel, mille otspunktidest sõltub integraali väärtus. Kui aga inteegrimismuutujaks on kompleksmuutuja $z = x + yi$, mis esitab punkte XY-tasapinnal, kus X-telg on reaalteljeks ja Y-telg imaginaarteljeks, siis ütleme, et meil on tegemist kompleksintegraaliga $\int f(z)dz$.

Näitame, et kompleksintegraali $\int f(z)dz$ väärtus ei sõltu XY-tasapinnal punkte $z_1 = x_1 + y_1 i$ ja $z_2 = x_2 + y_2 i$ ühendavast inteegrimisteest, kui on täidetud teatavad tingimused. Oletame, et kompleksfunktsioonis

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funktsioonid $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on tasapinnalises piirkonnas $\overline{S}$ ühesed ja pidevad ning omavad selles piirkonnas pidevaid osatuletisi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$, millede puhul kehtivad Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandid

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

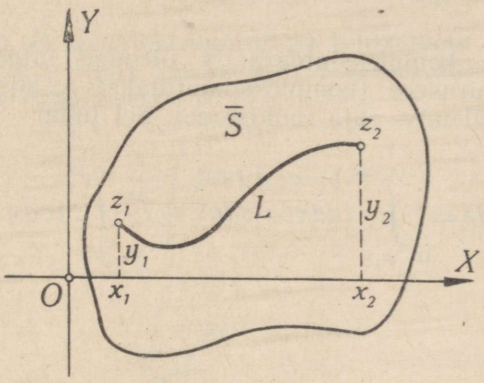
Fikseerides piirkonnas $\overline{S}$ punktid $z_1 = x_1 + y_1 i$ ja $z_2 = x_2 + y_2 i$ (joon. 71), ühendame need mingi kõveraga L, mis asetseb samuti piirkonnas $\overline{S}$.

Et siin $dz = dx + idy$, siis funktsiooni $f(z)$ integraal kõverat L mööda on

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + vi)(dx + idy) =$$

$$= \int_L [(u + vi)dx + (-v + ui)dy] =$$

$$= \int_L (udx - vdy) + i \int_L (vdx + udy),$$



Joon. 71.

kus viimaste joonintegraalide väärtused ei sõltu inteegrimisteest L, vaid on määratud inteegrimistee otspunktidega z_1 ja z_2, sest joonintegraali $\int(udx - vdy)$ suhtes kehtib eelduse järgi võrdus (§ 62, p. 1)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ja joonintegraali $\int(vdx + udy)$ suhtes kehtib võrdus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Järelikult kompleksintegraali $\int f(z)dz$ väärtus ei sõltu piirkonnas $\bar{S}$ võetud inteegrimisteest L, vaid ainult inteegrimistee otspunktidest z_1 ja z_2, kui funktsioonid u ja v on piirkonnas $\bar{S}$ ühesed ja pidevad ning omavad selles piirkonnas pidevaid osatuletisi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ ja $\frac{\partial v}{\partial y}$, millede puhul kehtivad Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandid.

Seega võime seda kompleksintegraali tähistada järgmiselt:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz =$$

$$= \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x_2,\,y_2)} (v\,dx + u\,dy).$$

Kui loeme kompleksintegraalis ülemise inteegrimisraja z_2 muutuvaks suuruseks (kompleksmuutujaks) z, siis esitab kompleksintegraal ülemise raja funktsiooni. Sel juhul

$$\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (v\,dx + u\,dy),$$

kusjuures

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (u\,dx - v\,dy) = u, \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (u\,dx - v\,dy) = -v$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (v\,dx + u\,dy) = v, \quad \frac{\partial}{\partial y} \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (v\,dx + u\,dy) = u,$$

milledest nähtub, et

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (u\,dx - v\,dy) = \frac{\partial}{\partial y} \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (v\,dx + u\,dy)$$

ja

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (v\,dx + u\,dy) = -\frac{\partial}{\partial y} \int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (u\,dx - v\,dy).$$

Muutuva ülemise rajaga kompleksintegraali diferentsides saame

$$\frac{d}{dz}\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = \frac{\partial}{\partial x}\int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (u\,dx - v\,dy) + i\,\frac{\partial}{\partial x}\int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (v\,dx + u\,dy) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (v\,dx + u\,dy) - i\,\frac{\partial}{\partial y}\int_{(x_1,\,y_1)}^{(x,\,y)} (u\,dx - v\,dy) = u + vi = f(z),$$

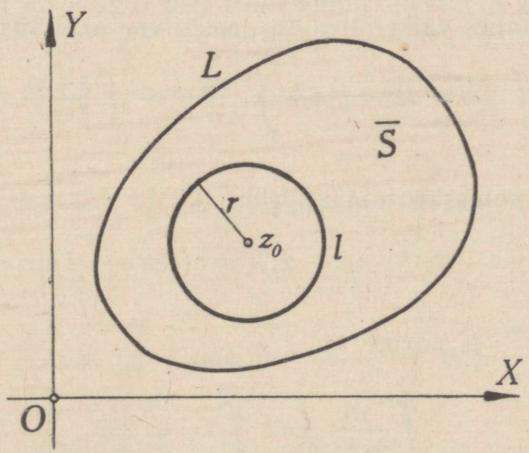
millest nähtub, et kompleksmuutujaga funktsiooni integraali diferentsimisel kehtib sama seadus mis reaalmuutujaga funktsiooni integraali diferentsimiselgi, s. o.

$$\frac{d}{dz}\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = f(z)$$

ja järelikult

$$d\int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = f(z)\,dz.$$

§ 71. Cauchy integraalvalem. 1) Olgu kompleksmuutujaga funktsioon $f(z)$ piirkonnas $\overline{S}$ ühene ja pidev ning olgu z_0 mingi punkt selles piirkonnas (joon. 72). Siis on funktsioon $\frac{f(z)}{z - z_0}$ nimetatud piirkonnas samuti ühene ja pidev, välja arvatud ainult



Joon. 72.

punkt z_0, milles funktsiooni väärtus saab lõpmatuks (muidugi oletusel, et $f(z)$ ei sisalda tegurit $z - z_0$). Punkti, milles funktsiooni väärtus saab lõpmatuks, nimetatakse funktsiooni p o o l u s e k s. Punkt z_0 on seega funktsiooni $\frac{f(z)}{z - z_0}$ poolus. Analüütilist funktsiooni, mis ei oma vaadeldavas piirkonnas poolust, vaid on selles piirkonnas ühene ja pidev, nimetatakse h o l o m o r f s e k s f u n k t s i o o n i k s. Kui aga funktsioon omab vaadeldavas piirkonnas poolust, siis nimetatakse teda m e r o m o r f s e k s f u n k t s i o o n i k s. Funktsioon $\frac{f(z)}{z - z_0}$ on seega meromorfne funktsioon, kui punkt z_0 kuulub vaadeldavasse piirkonda.

Kui joonestame punktist z_0 raadiusega r ringjoone l, mis asetseb piirkonnas $\bar{S}$, siis on joonintegraali $\int \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ väärtus piirkonna $\bar{S}$ äärjoont L mööda sama mis ringjoont l mööda (§ 62, p. 2), s. o.

$$\int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_l \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Et $f(z)$ on pidev funktsioon, siis võime raadiuse r valida nii väikese, et iga selles ringis asetseva punkti z puhul vahe

$$f(z) - f(z_0) = \xi + \eta i$$

absoluutväärtus

$$|f(z) - f(z_0)| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < \varepsilon,$$

kus ε on kuitahes väike etteantud positiivne arv. Siis

$$\int_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \int_l \frac{dz}{z - z_0} + \int_l \frac{\xi + \eta i}{z - z_0} dz.$$

Üle minnes polaarkoordinaatidele:

$$z - z_0 = (x - x_0) + (y - y_0)i = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{\varphi i},$$

kus $dz = rie^{\varphi i} d\varphi$, näeme, et

$$\int_l \frac{dz}{z - z_0} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i$$

ja

$$\left|\int_l \frac{\xi+\eta i}{z-z_0}\,dz\right| = \left|i\int_0^{2\pi}(\xi+\eta i)\,d\varphi\right| = \left|\int_0^{2\pi}(\xi i-\eta)\,d\varphi\right| <$$

$$< \int_0^{2\pi}\sqrt{\xi^2+\eta^2}\,d\varphi < 2\pi\varepsilon,$$

millest nähtub, et integraali $\int_l \frac{\xi+\eta i}{z-z_0}$ absoluutväärtus võib saada nii väikeseks, kui me iganes soovime. Järelikult joonintegraali $\int \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$ väärtus piirkonna $\bar{S}$ äärjoont L mööda on

$$\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0),$$

millest

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz,$$

mida nimetatakse Cauchy integraalvalemiks.

Cauchy integraalvalemist nähtub, et holomorfse funktsiooni $f(z)$ väärtust piirkonna $\bar{S}$ sisepunktis z_0 saame avaldada väärtuste kaudu, mida funktsioon omab piirkonna $\bar{S}$ äärjoonel L.

Joonintegraali inteegrimistee omaduste põhjal võime Cauchy integraalvalemis äärjoone L asendada punkti z_0 ümbritseva mistahes kinnise kõveraga, mis peab ainult asetsema piirkonnas $\bar{S}$. Kui niisuguseks kõveraks on ringjoon mistahes raadiusega r, siis

$$z - z_0 = re^{\varphi i}, \quad dz = rie^{\varphi i}\,d\varphi$$

ja

$$f(z_0) = u_0 + v_0 i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(u+vi)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\varphi + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi,$$

kus

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\varphi \text{ ja } v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v\,d\varphi$$

on ringjoont mööda u ja v keskväärtused, mis vastavad punktile z_0.

2) Eespool nägime, et $\frac{f(z)}{z-z_0}$ on meromorfne funktsioon, millel on piirkonnas $\bar{S}$ üks ja ainult üks poolus $z=z_0$. Kui $\frac{f(z)}{g(z)}$ on meromorfne funktsioon, millel on piirkonnas $\bar{S}$ n poolust $z_1, z_2, \ldots, z_n$, siis

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)},$$

oletusel, et $f(z)$ ei sisalda ühtki nimetaja $g(z)$ tegurit. Et

$$\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}=\frac{A_1}{z-z_1}+\frac{A_2}{z-z_2}+\ldots+\frac{A_n}{z-z_n},$$

kus iga

$$A_k=\frac{1}{g'(z_k)}\ (k=1, 2, \ldots, n),$$

siis

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{1}{g'(z_1)}\cdot\frac{f(z)}{z-z_1}+\frac{1}{g'(z_2)}\cdot\frac{f(z)}{z-z_2}+\ldots+\frac{1}{g'(z_n)}\cdot\frac{f(z)}{z-z_n}.$$

Inteegrides seda meromorfset funktsiooni piirkonna $\bar{S}$ äärjoont L mööda (kasutades selleks Cauchy integraalvalemit), saame

$$\int_L\frac{f(z)}{g(z)}dz=\frac{1}{g'(z_1)}\int_L\frac{f(z)}{z-z_1}dz+\frac{1}{g'(z_2)}\int_L\frac{f(z)}{z-z_2}dz+\ldots+$$

$$+\frac{1}{g'(z_n)}\int_L\frac{f(z)}{z-z_n}dz=2\pi i\left[\frac{f(z_1)}{g'(z_1)}+\frac{f(z_2)}{g'(z_2)}+\ldots+\frac{f(z_n)}{g'(z_n)}\right],$$

kus iga $f(z_k)\neq 0$ ja iga $g'(z_k)\neq 0$, sest oletuse kohaselt nii $f(z)$ kui ka $g'(z)$ ei sisalda tegurit $z-z_k$.

§ 72. Kompleksintegraali rakendusi. Kompleksintegraali käsitlus võimaldab tihtipeale reaalintegraali väärtuse leidmist, kui valida piirkonna $\bar{S}$ äärjoon — kui inteegrimistee — nõnda, et äärjoone mõni osa langeks ühte reaalteljega, s. o. X-teljega. Inteegrimistee ülejäänud osad valitakse siis paralleelsetena X- ja Y-teljega või poolringjoontena nii, et kompleksfunktsioonil ei esineks piirkonnas $\bar{S}$ poolust, s. o. et kompleksfunktsioon oleks piirkonnas $\bar{S}$ holomorfne. Kui inteegrimistee osad on paralleelsed X- või Y-teljega, siis neid osateid mööda inteegrides võime kompleksmuutuja $z=x+yi$ imaginaar- või reaalosa vaadelda kui konstantset suurust ja z funktsiooni asemele võtta vastavalt x või y funktsiooni ning dz asemele dx või idy. Kui aga inteeg-

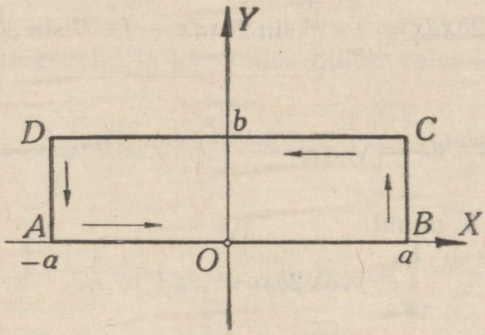
rimistee osa on poolringjoon, mis toetub X-teljele nõnda, et koordinaattelgede nullpunkt on ringi keskpunktiks, siis seda poolringjoont mööda inteegrides võime kompleksmuutuja $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ või $z = re^{\varphi i}$ moodulit r (kui ringi raadiust) vaadelda kui konstantset suurust ja z funktsiooni asemele võtta ainult ühe muutuja funktsiooni, ja nimelt argumendi φ funktsiooni; dz asemele tuleb siis võtta $r(-\sin\varphi + i\cos\varphi)d\varphi$ või $rie^{\varphi i}d\varphi$.

Seda mõttekäiku aitavad selgitada järgmised näited.

a) Kompleksmuutujaga funktsioon

$$f(z) = e^{-z^2}$$

on holomorfne tervel komplekstasapinnal, s. o. XY-tasapinnal. Seega on selle funktsiooni integraal iga kinnist joont mööda



Joon. 73.

null. Võtame niisuguseks kinniseks jooneks ristküliku $ABCD$ (joon. 73). Siis

$$\int\limits_{(ABCDA)} e^{-z^2}dz = \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx + \int\limits_{0}^{b} e^{-(z+yi)^2}idy +$$

$$+ \int\limits_{a}^{-a} e^{-(x+bi)^2}dx + \int\limits_{b}^{0} e^{-(-a+yi)^2}idy = 0.$$

Kui laseme siin a absoluutväärtusel piiramatult kasvada, s. o. $|a| \to \infty$, siis saadud võrduse neljast viimasest integraalist esimene saab võrdseks $\sqrt{\pi}$-ga (§ 45, p. 3), s. o.

$$\lim_{a\to\infty} \int\limits_{-a}^{a} e^{-x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi};$$

teine ja neljas integraal koonduvad nulliks, kui $|a| \to \infty$, sest inteegritavad funktsioonid $e^{-(a+yi)}$ ja $e^{-(-a+yi)}$ saavad nulliks, kui $|a| \to \infty$ (I osa, § 70, p. 4); kolmas integraal on

$$\lim_{a\to\infty} \int_a^{-a} e^{-(x+bi)^2}dx = \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-(x+bi)^2}dx =$$

$$= e^{b^2} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-x^2}e^{-2bxi}dx = -e^{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}(\cos 2bx - i \sin 2bx)dx =$$

$$= -e^{b^2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bxdx - i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin 2bxdx\right] =$$

$$= -e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bxdx,$$

sest $e^{-x^2}\sin 2bx$ on paaritu funktsioon ja seega

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\sin 2bxdx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}\sin 2bxdx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\sin 2bxdx = 0.$$

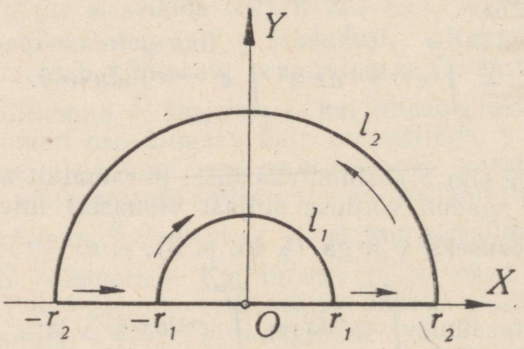
Tähendab,

$$\int_{(ABCDA)} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi} - e^{b^2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bxdx = 0,$$

millest reaalse x puhul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2bxdx = e^{-b^2}\sqrt{\pi}.$$

b) Funktsioon $\frac{e^{zi}}{z}$ on holomorfne tervel XY-tasapinnal peale nullpunkti, milles ta saab lõpmatuks. Võtame siin piirkonna $\overline{S}$ nõnda, et temasse ei satuks nullpunkt. Selleks valime inteegrimisteeks L poolringjooned l_1 ja l_2, millede raadiused on vastavalt r_1 ja r_2, ning sirglõigud X-teljel $-r_2$-st $-r_1$-ni ja r_1-st r_2-ni (joon. 74). Siis orienteeritud inteegrimisteed mööda



Joon. 74.

$$\int_L \frac{e^{zi}}{z}\,dz = \int_{-r_2}^{-r_1} \frac{e^{xi}}{x}\,dx + \int_{l_1} \frac{e^{zi}}{z}\,dz +$$

$$+ \int_{r_1}^{r_2} \frac{e^{xi}}{x}\,dx + \int_{l_2} \frac{e^{zi}}{z}\,dz = 0.$$

Kui laseme r_1 piiramatult kahaneda ja r_2 piiramatult kasvada, s. o. $r_1 \to 0$ ja $r_2 \to \infty$, siis

$$\lim_{\substack{r_1\to 0\\ r_2\to\infty}} \int_{-r_2}^{-r_1} \frac{e^{xi}}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{xi}}{x}\,dx, \quad \lim_{\substack{r_1\to 0\\ r_2\to\infty}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{e^{xi}}{x}\,dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{xi}}{x}\,dx.$$

Liites need integraalid ja kasutades Euleri valemit (§ 12), saame

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{xi}}{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{xi}}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{xi}}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x + i \sin x}{x}\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

sest $\frac{\cos x}{x}$ on paaritu funktsioon ja seega

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0.$$

Esimese joonintegraali (l_1 mööda) suhtes kasutame kompleksmuutuja trigonomeetrilist kuju

$$z = r_1 (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

millest konstantse r_1 puhul

$$dz = r_1(-\sin \varphi + i \cos \varphi)\,d\varphi = r_1 i (\cos \varphi + i \sin \varphi)\,d\varphi$$

ning seega

$$\int_{l_1} \frac{e^{zi}}{z}\,dz = i \int_{\pi}^{0} e^{r_1 i (\cos \varphi + i \sin \varphi)}\,d\varphi.$$

Et $r_1 \to 0$ puhul inteegritava funktsiooni piirväärtus

$$\lim_{r_1 \to 0} e^{r_1 i (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = 1,$$

siis

$$i \int_{\pi}^{0} d\varphi = -\pi i.$$

Teise joonintegraali (l_2 mööda) puhul

$$z = r_2(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

ja

$$dz = r_2 i \,(\cos \varphi + i \sin \varphi) d\varphi$$

ning

$$\int_{l_2} \frac{e^{zi}}{z} dz = i \int_{0}^{\pi} e^{r_2 i (\cos \varphi + i \sin \varphi)} d\varphi .$$

Et $r_2 \to \infty$ puhul inteegritava funktsiooni piirväärtus

$$\lim_{r_2 \to \infty} e^{r_2 i (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \lim_{r_2 \to \infty} e^{-r_2 (\sin \varphi - i \cos \varphi)} =$$

$$= \lim_{r_2 \to \infty} e^{-r_2 \left[\cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right]} = 0,$$

siis

$$i \int_{0}^{\pi} 0 \cdot d\varphi = 0.$$

Seega

$$\int_{L} \frac{e^{zi}}{z} dz = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx - \pi i = 0,$$

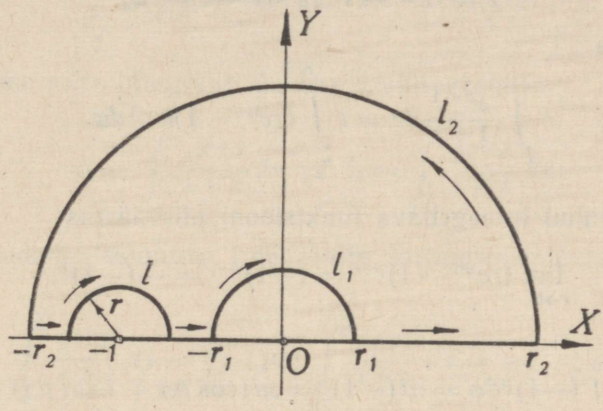
millest reaalse x puhul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

Et $\frac{\sin x}{x}$ on paarisfunktsioon, siis

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

c) Funktsioon $\frac{z^{p-1}}{1+z}$, kus $0 < p < 1$, on holomorfne XY-tasapinnal peale punktide $z = -1$ ja $z = 0$, milledes ta saab lõpmatuks. Eraldame need punktid piirkonnast $\overline{S}$. Selleks joonestame punktist $z = -1$ raadiusega r poolringjoone l ning punktist $z = 0$ raadiusega r_1 ja r_2 poolringjooned l_1 ja l_2 (joon. 75), nii et inteegrimistee L koosneks X-telje osadest $-r_2$-st $(-1-r)$-ni, $(-1+r)$-st $-r_1$-ni ja r_1-st r_2-ni ning poolringjoontest l, l_1 ja l_2. Siis orienteeritud inteegrimisteed mööda



Joon. 75.

$$\int_L \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = \int_{-r_2}^{-1-r} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_l \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz + \int_{-1+r}^{-r_1} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx +$$

$$+ \int_{l_1} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz + \int_{r_1}^{r_2} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_{l_2} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = 0.$$

Kui siin $r \to 0$, $r_1 \to 0$ ja $r_2 \to \infty$, siis

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r_2\to\infty}} \int_{-r_2}^{-1-r} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx,$$

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ r_1\to 0}} \int_{-1+r}^{-r_1} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx,$$

$$\lim_{\substack{r_1\to 0\\ r_2\to\infty}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx,$$

millede summa

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx.$$

Joonintegraalide puhul mööda inteegrimisteid l, l_1 ja l_2 rakendame polaarkoordinaate. Esimese joonintegraali puhul

$$z = re^{\varphi i} - 1 \quad \text{ja} \quad dz = rie^{\varphi i}\,d\varphi$$

ning seega

$$\int_{l} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = i \int_{\pi}^{0} (re^{\varphi i} - 1)^{p-1}\,d\varphi.$$

Et $r \to 0$ puhul inteegritava funktsiooni piirväärtus

$$\lim_{r\to 0} (re^{\varphi i} - 1)^{p-1} = (-1)^{p-1} = -(-1)^{p},$$

siis

$$-i \int_{\pi}^{0} (-1)^{p}\,d\varphi = \pi i (-1)^{p} = \pi i (\cos p\pi + i \sin p\pi) =$$

$$= -\pi (\sin p\pi - i \cos p\pi).$$

Teise ja kolmanda joonintegraali puhul

$$z = r_1 e^{\varphi i} \quad \text{ja} \quad dz = r_1 i e^{\varphi i}\,d\varphi,$$
$$z = r_2 e^{\varphi i} \quad \text{ja} \quad dz = r_2 i e^{\varphi i}\,d\varphi$$

ning seega

$$\int_{l_1} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = i \int_{\pi}^{0} \frac{r_1^{p} e^{p\varphi i}}{1 + r_1 e^{\varphi i}}\,d\varphi$$

ja

$$\int_{l_2} \frac{z^{p-1}}{1+z}\,dz = i \int_{0}^{\pi} \frac{r_2^{p} e^{p\varphi i}}{1 + r_2 e^{\varphi i}}\,d\varphi.$$

Kui siin $r_1 \to 0$ ja $r_2 \to \infty$, siis inteegritavate funktsioonide piirväärtused on

$$\lim_{r_1\to 0} \frac{r_1^{p} e^{p\varphi i}}{1 + r_1 e^{\varphi i}} = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{r_2\to\infty} \frac{r_2^{p} e^{p\varphi i}}{1 + r_2 e^{\varphi i}} = 0,$$

millede puhul joonintegraalid saavad nulliks. Seega

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx - \pi\,(\sin p\pi - i\cos p\pi) = 0,$$

millest reaalse x puhul

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \pi\,(\sin p\pi - i\cos p\pi).$$

Jaotame selle integraali kaheks osaintegraaliks

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx \quad \text{ja} \quad I_2 = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx$$

ning muudame esimeses integraalis inteegrimismuutuja märgi; saame

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = (-1)^{p-1} \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx = -(-1)^p I_3 =$$

$$= -(\cos p\pi + i\sin p\pi) I_3,$$

kus

$$I_3 = \int_{0}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx.$$

Siis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = I_1 + I_2 = -(\cos p\pi + i\sin p\pi) I_3 + I_2 =$$

$$= \pi\,(\sin p\pi - i\cos p\pi),$$

s. o.

$$-(\cos p\pi + i\sin p\pi) I_3 + I_2 = \pi\,(\sin p\pi - i\cos p\pi)$$

ehk

$$I_2 - I_3\cos p\pi - iI_3\sin p\pi = \pi\sin p\pi - i\pi\cos p\pi,$$

millest kompleksarvude võrdsuse definitsiooni põhjal

$$I_2 - I_3\cos p\pi = \pi\sin p\pi$$

ja

$$I_3\sin p\pi = \pi\cos p\pi.$$

Viimastest võrdustest saame

$$I_3 = \frac{\pi \cos p\pi}{\sin p\pi} = \frac{\pi}{\operatorname{tg} p\pi}$$

ja

$$I_2 = \pi \sin p\pi + \frac{\pi \cos p\pi}{\operatorname{tg} p\pi} = \frac{\pi}{\sin p\pi},$$

millest nähtub, et reaalse x puhul

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{ja} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1-x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{tg} p\pi},$$

kui $0 < p < 1$.

XVI peatükk

DIFERENTSIAALVÕRRANDID

§ 73. Diferentsiaalvõrrandi mõiste. Võrrandit, milles esinevad peale sõltumatu muutuja (või sõltumatute muutujate) ja tundmatu funktsiooni ka nende diferentsiaalid või funktsiooni tuletised, nimetatakse *diferentsiaalvõrrandiks*.

Ühe sõltumatu muutujaga diferentsiaalvõrrandit, nagu näiteks võrrandit

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0,$$

kus y on otsitav x funktsioon ja kus esinevad harilikud tuletised, nimetatakse *harilikuks* diferentsiaalvõrrandiks.

Kui aga diferentsiaalvõrrandis esinevad funktsiooni osatuletised, nagu näiteks võrrandis

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

kus z on x ja y funktsioon, siis nimetatakse seda võrrandit *osatuletistega* diferentsiaalvõrrandiks. Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandid (§ 69)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ ja } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

kus $u = u(x, y)$ ja $v = v(x, y)$, on osatuletistega diferentsiaalvõrrandid.

Meie vaatleme käesolevas peatükis ainult harilikke diferentsiaalvõrrandeid ja nimetame neid edaspidi lühidalt diferentsiaalvõrranditeks.

Diferentsiaalvõrrandis esinevate tuletiste kõrgeim järk määrab ühtlasi diferentsiaalvõrrandi järgu. Kui diferentsiaalvõrrandis esineva kõrgeima tuletise järk on n, siis nimetatakse seda võrrandit n-järku diferentsiaalvõrrandiks. Näiteks

$$(2x - 3y) - x\frac{dy}{dx} = 0$$

ehk

$$(2x - 3y)\,dx - x\,dy = 0$$

on esimest järku diferentsiaalvõrrand ning

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 8x^3$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x$$

on teist järku diferentsiaalvõrrandid. Need on esimest ja teist järku lineaarsed diferentsiaalvõrrandid, sest y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ on siin esimeses astmes.

Harilikke esimest ja teist järku diferentsiaalvõrrandeid kirjutame üldiselt järgmiselt:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0 \text{ ja } F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$$

ning analoogiliselt n-järku diferentsiaalvõrrandit:

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

kusjuures n-järku lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldkuju on

$$P_0(x)\,\frac{d^ny}{dx^n} + P_1(x)\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\,\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} +$$

$$+ \ldots + P_{n-1}(x)\,\frac{dy}{dx} + P_n(x)\,y = Q(x),$$

kus

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

on esimeses astmes ja

$$P_0(x),\ P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ Q(x)$$

on sõltumatu muutuja x pidevad funktsioonid (või konstantsed suurused).

§ 74. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi kujundamine. Võtame võrrandi

$$\Phi(x,\ y,\ c) = 0, \qquad (1)$$

milles peale muutujate, s. o. peale sõltumatu muutuja x ja funktsiooni y esineb veel muutuv parameeter c. Andes parameetrile c teatavaid väärtusi, saame võrrandi järgi geomeetriliselt

vastavad kõverad. Seega võrrand (1) esitab geomeetriliselt kõverate parve, kus c on parve parameetriks. Diferentsides võrrandit (1), saame (§ 28, p. 1 järgi)

$$\Phi_x(x, y, c) + \Phi_y(x, y, c)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (2)$$

Elimineerides võrranditest (1) ja (2) parameetri c, saame esimest järku diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

mida rahuldab nüüd võrrandiga (1) antud funktsioon y. See tähendab, et kui avaldame võrrandist (1) funktsiooni y, s. o.

$$y = \varphi(x, c),$$

võtame tuletise

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x, c)$$

ja asetame leitud y ja $\frac{dy}{dx}$ väärtused diferentsiaalvõrrandisse

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

saab viimase vasak pool samaselt nulliks, sõltumatult parameetrist c.

Võrrandit (1) nimetame diferentsiaalvõrrandi $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ **üldintegraaliks**, kusjuures diferentsiaalvõrrandi lahenditeks on kõik funktsioonid $y = \varphi(x, c)$, mis saadakse parameetrile c antavate väärtuste puhul võrrandist (1). Seepärast nimetatakse ilmutatud funktsiooni $y = \varphi(x, c)$ diferentsiaalvõrrandi **üldlahendiks** *.

Võrrandit $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ nimetatakse ka selle kõverate parve diferentsiaalvõrrandiks, mida esitab üldintegraal (1). Parameetri c teatavate väärtuste puhul nimetatakse üldintegraaliga (1) esitatud kõverate parve kõveraid diferentsiaalvõrrandi $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$ **integraalkõverateks**.

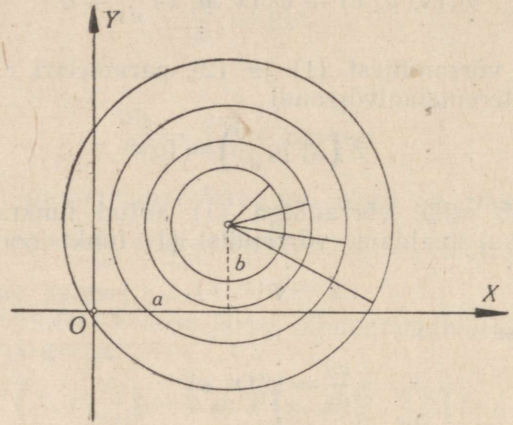
---

* Viimasel ajal tehakse võrduste $\Phi(x, y, c) = 0$ ja $y = \varphi(x, c)$ nimetustes vahet, nimetades $\Phi(x, y, c) = 0$ diferentsiaalvõrrandi üldintegraaliks ja $y = \varphi(x, c)$ üldlahendiks (A. K. Vlassov, V. V. Stepanov, A. F. Bermant). Kuid mitmed teised (nagu N. N. Luzin) samastavad need nimetused, nimetades nii $\Phi(x, y, c) = 0$ kui ka $y = \varphi(x, c)$ diferentsiaalvõrrandi üldintegraaliks ehk üldlahendiks.

Võtame näiteks ringjoonte parve võrrandi

$$\Phi(x, y, c) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0,$$

kus keskpunkti koordinaadid a ja b on konstantsed suurused,



Joon. 76.

kuid raadius c on muutuv parameeter (joon. 76). Vastava diferentsiaalvõrrandi saamiseks leiame osatuletised x ja y järgi

$$\Phi_x = 2(x-a), \quad \Phi_y = 2(y-b),$$

millede asetamisel võrrandisse

$$\Phi_x + \Phi_y \frac{dy}{dx} = 0$$

saame otseselt diferentsiaalvõrrandi

$$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0$$

ehk

$$(x-a)dx + (y-b)dy = 0,$$

mille üldintegraaliks on

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0,$$

mis esitab joonisel märgitud ringjoonte parve.

Diferentsiaalvõrrandi iga üksik integraal või lahend, mis saadakse üldintegraalist või üldlahendist parameetri c kindla väärtuse puhul, on vastavalt diferentsiaalvõrrandi eriintegraal või erilahend.

Diferentsiaalvõrrandi eriintegraal või erilahend peab vastama teatavatele algtingimustele. Kui näiteks $x = x_0$ puhul $y_{x=x_0} = y_0$, kus x_0 ja y_0 on algväärtusteks, siis alg-

tingimuseks on $y_0 = y_{x=x_0}$. See tähendab, et üldintegraalist eriintegraali või erilahendi saamiseks tuleb algväärtuste x_0 ja y_0 kaudu leida niisugune y, et oleks täidetud algtingimus $y_0 = y_{x=x_0}$. Selleks asendame üldintegraalis (1) $x = x_0$ ja $y = y_0$; saame

$$\Phi(x_0, y_0, c) = 0,$$

mis kujutab võrrandit ühe tundmatuga c. Kui see võrrand omab üht ja ainult üht lahendit $c = c_0$, siis määravad algväärtused x_0 ja y_0 ühe eriintegraali

$$\Phi(x, y, c_0) = 0$$

või erilahendi

$$y = \varphi(x, c_0),$$

mis esitab geomeetriliselt üht ja ainult üht integraalkõverat, mis XY-tasapinnal läbib punkti (x_0, y_0).

Tähendab, diferentsiaalvõrrandi erilahend saadakse üldlahendist parameetrile c niisuguse väärtuse andmisega, mis rahuldab antud algtingimust. Võib juhtuda, et mõned algväärtused ei võimalda parameetri c väärtuse leidmist. Kui näiteks diferentsiaalvõrrandi üldintegraaliks on

$$y^2 - cx = 0,$$

mis esitab geomeetriliselt paraboolide parve, siis algväärtuste $x_0 = 0$ ja $y_0 = 0$ puhul saaksime $0 - c \cdot 0 = 0$, mis kehtib iga c puhul, s. o. kõik paraboolid läbivad nullpunkti. Seega algväärtuste $x_0 = 0$ ja $y_0 = 0$ puhul diferentsiaalvõrrandil puudub ühene erilahend.

Nagu pärastpoole (§ 82) näeme, võib esineda ka juhtumeid, kus mõni diferentsiaalvõrrand omab niisuguseid üksikuid integraale, mida ei saa tuletada üldintegraalist, ükskõik missuguseid väärtusi me üldintegraalis esinevale parameetrile ka annaksime. Niisuguseid integraale nimetatakse diferentsiaalvõrrandi singulaarseteks ehk iseärasteks integraalideks.

Diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks on vaja leida tema üldintegraal või üldlahend ja samuti iseärased integraalid, kui viimased on olemas. Diferentsiaalvõrrandi lahendamist nimetatakse ka tema inteegrimiseks.

Meie ei hakka tõestama diferentsiaalvõrrandi lahendi olemasolu ja selle ühesust *, vaid asume otsekohe teatavate lihtsamate, kuid praktiliselt tähtsamate diferentsiaalvõrrandite tüüpide käsitlemisele, kus võrrandi lahendamine taandub üksikute määramata integraalide arvutamisele, nn. üksikutele kvadratuuridele, mis võimaldavad otseselt üldintegraali või üldlahendi leidmise.

* Vastava tõestuse leiab lugeja raamatust В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1950, гл. II, § 1.

§ 75. Diferentsiaalvõrrandi lahendamine muutujate eraldamise teel. Võtame lihtsaima esimest järku diferentsiaalvõrrandi, milles ilmselt puudub otsitav funktsioon y, s. o.

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ehk tuletise suhtes ilmutatult

$$\frac{dy}{dx} = f(x).$$

Selle võrrandi lahendamine seisab $f(x)dx$ integraali leidmises, sest siin

$$dy = f(x)dx,$$

millest

$$y = \int f(x)dx + c = \varphi(x) + c,$$

mis on selle diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

Kui aga esimest järku diferentsiaalvõrrandis ilmselt puudub argument x, s. o.

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ehk tuletise suhtes ilmutatult

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

siis otsitava funktsiooni $y = \varphi(x)$ leidmiseks eeldame, et on olemas ka tema pöördfunktsioon $x = \psi(y)$. Lugedes nüüd y argumendiks ja x otsitavaks funktsiooniks, võime kirjutada

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)},$$

eeldades siinjuures, et vaadeldavas vahemikus $f(y) \neq 0$. Siis

$$dx = \frac{dy}{f(y)},$$

mida inteegrides saame

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + c = \psi(y) + c,$$

mis on antud diferentsiaalvõrrandi üldintegraaliks, millest võime ümberpöördult leida võrrandi üldlahendi

$$y = \varphi(x - c).$$

Esitades näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y}$$

kujul

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

ja inteegrides, saame üldintegraali

$$x = c - \sqrt{r^2 - y^2}$$

ehk

$$(x - c)^2 + y^2 - r^2 = 0,$$

mis esitab geomeetriliselt konstantse raadiusega ringjoonte parve, mille keskpunktid asetsevad X-teljel.

Kui esimest järku diferentsiaalvõrrandis esinevad nii sõltumatu muutuja x kui ka otsitav funktsioon y, s. o.

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

milles on võimalik muutujaid x ja y eraldada nõnda, et selles võrrandis ainult x sisaldavaid tegureid saab (korrutamise ja jagamise teel) viia dx juurde ja ainult y sisaldavaid tegureid dy juurde, siis saame võrrandi üht poolt kujutada x funktsioonina ühes diferentsiaaliga dx ja teist poolt y funktsioonina ühes diferentsiaaliga dy, saades seega üldiselt

$$f_1(x)\,dx = f_2(y)\,dy,$$

mida on võimalik lahendada kahe kvadratuuri abil. Et niimoodi saadud võrduse mõlemad pooled kujutavad võrdseid diferentsiaale, siis nende integraalid võivad teineteisest erineda ainult inteegrimiskonstandi poolest, s. o.

$$\int f_1(x)\,dx = \int f_2(y)\,dy + c.$$

Kui siin vastavad integraalid on $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(y)$, siis diferentsiaalvõrrandi üldintegraal on

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(y) = c$$

ehk lühidalt

$$\Phi(x,\ y) = c,$$

milles esinevad kõik lahendid, mis esitavad teatavat kõverate parve ehk integraalkõveraid.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$x(1 - y^2)\,dx + y(1 + x^2)\,dy = 0$$

üldlahendi leidmiseks on võimalik muutujaid eraldada, s. o. tuua kõik x sisaldavad tegurid dx juurde ja kõik y sisaldavad tegurid dy juurde, saades seega

$$\frac{x\,dx}{1+x^2}+\frac{y\,dy}{1-y^2}=0,$$

mida inteegrides leiame

$$\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\ln(1-y^2)=\frac{1}{2}\ln c$$

ning seega antud diferentsiaalvõrrandi üldintegraal on

$$\frac{1+x^2}{1-y^2}=c,$$

mis esitab geomeetriliselt ellipsite parve, kui $c>1$, sest siin ellipsite pooltelgede määrajateks on $\sqrt{c-1}$ ja $\sqrt{\frac{c-1}{c}}$.

§ 76. Homogeenne diferentsiaalvõrrand. Kui esimest järku diferentsiaalvõrrandi

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0$$

kõik liikmed on samamõõtmelised, siis nimetatakse seda võrrandit homogeenseks. Sel juhul saab diferentsiaalvõrrandist funktsiooni tuletist avaldada muutujate suhte funktsioonina, s. o.

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Kuna diferentsiaalvõrrandi homogeensus ilmneb sellest, et funktsioonide $P(x,\ y)$ ja $Q(x,\ y)$ kõik liikmed on x ja y suhtes samamõõtmelised, siis see tähendab, et kui mõlemad muutujad x ja y korrutame mingi arvuga t, nii et x asemele võtame tx ja y asemele ty, siis

$$P(tx,\ ty)=t^mP(x,\ y)\ \text{ja}\ Q(tx,\ ty)=t^mQ(x,\ y),$$

kus astendajat m nimetatakse funktsioonide $P(x,\ y)$ ja $Q(x,\ y)$ homogeensuse näitajaks, mis on ühtlasi ka diferentsiaalvõrrandi homogeensuse näitaja. Näiteks võrrandid

$$(2x-y)\,dx-(x-5y)\,dy=0$$

ja

$$(xy-y^2)\,dx-(x^2-2xy)\,dy=0$$

on homogeensed diferentsiaalvõrrandid, kusjuures esimese võrrandi homogeensuse näitaja on 1 ja teise võrrandi homogeensuse näitaja on 2.

Üldjuhul pole homogeenses diferentsiaalvõrrandis võimalik

muutujaid eraldada, kuid muutujaid saame eraldada, kui teeme asenduse $y = xt$, mille tuletis

$$\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}.$$

Asetades need väärtused homogeensesse diferentsiaalvõrrandisse

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

saame

$$t + x\frac{dt}{dx} = f(t),$$

milles on võimalik muutujaid t ja x eraldada, s. o.

$$\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}.$$

Viimast võrrandit inteegrides leiame t, s. o.

$$t = \varphi(x, c),$$

milles asendame $t = \frac{y}{x}$; saame

$$y = x \cdot \varphi(x, c),$$

mis kujutab nüüd homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendit.

Me eeldame siin muidugi, et $f(t) - t \neq 0$, sest kui oleks $f(t) = t$, s. o. $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

milles saame otseselt muutujaid eraldada ja mille üldlahend on $y = cx$, mis esitab geomeetriliselt nullpunkti läbivate sirgete parve.

Näiteks homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$(2x - y)\,dx - (x - 5y)\,dy = 0$$

üldintegraali leidmiseks võtame

$$y = xt \text{ ja } dy = tdx + xdt.$$

Neid väärtusi diferentsiaalvõrrandisse asetades saame

$$(2x - xt)\,dx - (x - 5xt)\,(tdx + xdt) = 0,$$

millest muutujaid eraldades

$$\frac{5t - 1}{5t^2 - 2t + 2}\,dt + \frac{dx}{x} = 0$$

ja inteegrides

$$\int \frac{5t-1}{5t^2-2t+2}\,dt + \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\ln c$$

leiame

$$\frac{1}{2}\ln(5t^2-2t+2) + \ln x = \frac{1}{2}\ln c$$

ehk

$$\ln(5t^2-2t+2) + \ln x^2 = \ln c$$

ja

$$5x^2t^2 - 2x^2t + 2x^2 = c.$$

Asendades $t = \frac{y}{x}$, saame üldintegraali

$$5y^2 - 2xy + 2x^2 = c,$$

mis esitab geomeetriliselt ellipsite parve, kui $c > 0$.

§ 77. Homogeenseiks taanduvad diferentsiaalvõrrandid. 1). Kui diferentsiaalvõrrand esineb kujul

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,dx + (a_2x + b_2y + c_2)\,dy = 0,$$

mis ei ole homogeenne, siis on teda üldiselt võimalik homogeenseks teisendada, tehes asenduse

$$x = u + a,\ y = v + b,$$

kus a ja b on konstantsed suurused, mis tuleb valida nii, et võrrand muutuks homogeenseks. Et siin

$$dx = du,\ dy = dv,$$

siis asendades saame

$$[a_1(u+a) + b_1(v+b) + c_1]\,du + \\ + [a_2(u+a) + b_2(v+b) + c_2]\,dv = 0$$

ehk

$$(a_1u + b_1v + a_1a + b_1b + c_1)\,du + \\ + (a_2u + b_2v + a_2a + b_2b + c_2)\,dv = 0,$$

mis muutub homogeenseks, kui

$$a_1a + b_1b + c_1 = 0,$$
$$a_2a + b_2b + c_2 = 0.$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi a ja b suhtes, saame

$$a = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \qquad b = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Need a ja b väärtused muudavad antud diferentsiaalvõrrandi homogeenseks, kui ainult $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Seega saadud homogeenne diferentsiaalvõrrand on

$$(a_1u + b_1v)du + (a_2u + b_2v)dv = 0,$$

mida saab lahendada eelmises paragrahvis esitatud võttega.

Näiteks diferentsiaalvõrrand

$$(x + y - 2)dx + (x - y + 4)dy = 0$$

ei ole homogeenne. Võrrandi homogeenseks muutmiseks tähistame

$$x = u + a, \; y = v + b,$$

millest

$$dx = du, \; dy = dv.$$

Paigutame need väärtused antud diferentsiaalvõrrandisse; saame

$$(u + v + a + b - 2)du + (u - v + a - b + 4)dv = 0.$$

Et viimane võrrand muutuks homogeenseks, selleks tuleb a ja b valida nii, et

$$\begin{aligned} a + b - 2 &= 0, \\ a - b + 4 &= 0. \end{aligned}$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi a ja b suhtes, leiame, et

$$a = -1, \; b = 3.$$

Antud võrrand muutub homogeenseks, kui võtame $x = u - 1$ ja $y = v + 3$. Asendades saame diferentsiaalvõrrandi

$$(u + v)du + (u - v)dv = 0,$$

mis on homogeenne. Selle lahendamiseks võtame $v = ut$, mille diferentsiaal

$$dv = tdu + udt.$$

Asendamisel ja muutujate eraldamisel omandab võrrand kuju

$$\frac{t-1}{t^2-2t-1}dt + \frac{du}{u} = 0,$$

mida inteegrides saame

$$\frac{1}{2}\ln(t^2 - 2t - 1) + \ln u = \frac{1}{2}\ln c_1$$

ehk

$$(t^2 - 2t - 1)u^2 = c_1.$$

Saadud võrduses asendame $t = \frac{v}{u}$:

$$v^2 - 2uv - u^2 = c_1.$$

Edasi, asendades $u = x + 1$ ja $v = y - 3$, saame

$$(y-3)^2 - 2(x-1)(y-3) - (x+1)^2 = c_1$$

ehk

$$x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y + c = 0,$$

kus $c = c_1 + 14$. Saadud üldintegraal esitab geomeetriliselt hüperboolide parve.

2) Diferentsiaalvõrrandit

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$$

võime eespool käsitletud asendusega homogeenseks muuta ainult siis, kui võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1a + b_1b + c_1 = 0 \\ a_2a + b_2b + c_2 = 0 \end{cases}$$

lahendis nimetaja $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Kui aga $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ehk

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k,$$

millest $a_1 = a_2k$ ja $b_1 = b_2k$, siis nende asendamisel diferentsiaalvõrrand omandab kuju

$$(ka_2x + kb_2y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0,$$

mille puhul teeme asenduse

$$a_2x + b_2y = t,$$

millest

$$dy = \frac{dt - a_2dx}{b_2},$$

saades seega diferentsiaalvõrrandi

$$(kt + c_1)dx + (t + c_2)\frac{dt - a_2dx}{b_2} = 0,$$

milles saame muutujad eraldada. Muutujate eraldamisel omandab võrrand kuju

$$\frac{(t + c_2)dt}{a_2(t + c_2) - b_2(kt + c_1)} = dx,$$

mille lahendame nüüd otseselt inteegrimise teel.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$$

üldintegraali leidmiseks tähistame

$$x + y = t,$$

millest

$$dy = dt - dx.$$

Asendades ja eraldades muutujad, saame

$$\frac{2t-1}{t-2}\,dt = dx$$

ehk

$$\left(2 + \frac{3}{t-2}\right) dt = dx.$$

Inteegrides leiame, et

$$2t + 3\ln(t-2) = x + c.$$

Paigutades t asemele $x + y$, saame antud diferentsiaalvõrrandi üldintegraali

$$2(x+y) + 3\ln(x+y-2) = x + c$$

ehk

$$x + 2y + 3\ln(x+y-2) = c.$$

§ 78. Esimest järku lineaarne diferentsiaalvõrrand. Diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x),$$

milles otsitav funktsioon ja selle tuletis on esimeses astmes ning $P(x)$ ja $Q(x)$ on sõltumatu muutuja x pidevad funktsioonid, nimetatakse esimest järku lineaarseks diferentsiaalvõrrandiks. Selle võrrandi üldlahendi leidmiseks esitame siin kaks meetodit, ja nimelt Jean Bernoulli* poolt antud meetodi, mis võimaldab antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi teisendada kaheks niisuguseks diferentsiaalvõrrandiks, milledes saame muutujad eraldada, ning Lagrange'i poolt antud meetodi, mille puhul kasutame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = 0$$

---

* Jean (Johann) Bernoulli (1667—1748) töötas eriti diferentsiaalvõrrandite alal ja koos oma venna Jacques (Jakob) Bernoulli'ga (1654—1705) pani aluse variatsioonarvutusele. Jacques Bernoulli saavutas teatavaid tulemusi diferentsiaal- ja integraalarvutuse geomeetriliste rakenduste alal ja on ühtlasi klassikalise tõenäosusteooria rajajaid oma teosega «Ars conjectandi». Jean Bernoulli poeg Daniel Bernoulli (1700—1782) — üks esimestest Peterburi Teaduste Akadeemia liikmetest — kuulus hüdrodünaamika ja gaaside kineetilise teooria rajajate hulka.

üldlahendit, mille leiame otseselt muutujate eraldamise teel, kui $Q(x) = 0$.

1) Bernoulli meetod. Otsime funktsiooni y kahe funktsiooni korrutisena

$$y = uv,$$

kus u ja v on tundmatud x funktsioonid, kusjuures üks neist funktsioonidest on vabalt valitav, kuid teine sõltub sääraselt esimesest, et nende korrutis rahuldab lineaarset diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x).$$

Võtame korrutisfunktsiooni $y = uv$ tuletise

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ning paigutame y ja $\frac{dy}{dx}$ jaoks saadud väärtused lineaarsesse diferentsiaalvõrrandisse; saame

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uv \cdot P(x) = Q(x)$$

ehk

$$u\frac{dv}{dx} + v\left[\frac{du}{dx} + u \cdot P(x)\right] = Q(x),$$

milles nüüd u olgu valitud nõnda, et

$$\frac{du}{dx} + u \cdot P(x) = 0$$

ja seega järelikult

$$u\frac{dv}{dx} = Q(x).$$

Esimeses võrrandis muutujaid eraldades

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx$$

ja inteegrides saame

$$\ln u = -\int P(x)dx,$$

millest

$$u = e^{-\int P(x)dx}.$$

Inteegrimiskonstanti ei tarvitse siin võtta, sest meil tuleb leida

ainult üks u, mis rahuldaks võrrandit

$$\frac{du}{dx} + u \cdot P(x) = 0.$$

Kuigi kasutaksime siin inteegrimiskonstanti, langeks ta lõppsaadusest ikkagi välja.

Paigutades teises võrrandis

$$u \frac{dv}{dx} = Q(x)$$

u asemele saadud väärtuse ja eraldades muutujad, leiame, et

$$dv = Q(x) e^{\int P(x) dx} dx.$$

Viimast võrdust inteegrides saame

$$v = \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + c.$$

Seega antud lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = uv = e^{-\int P(x) dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + c \right].$$

Näiteks lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

üldlahendi leidmiseks tähistame

$$y = uv,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx},$$

ja antud diferentsiaalvõrrand omandab pärast asendamist kuju

$$u \frac{dv}{dx} + v \left[\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} \right] = x.$$

Nüüd leiame u tingimusel, et

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0 \text{ ehk } \frac{du}{u} = \frac{dx}{x},$$

mida inteegrides saame

$$\ln u = \ln x,$$

millest

$$u = x.$$

Teise teguri v leiame võrrandist

$$u\frac{dv}{dx} = x,$$

milles u on asendatud x-ga, s. o.

$$dv = dx.$$

Inteegrides viimast võrdust, saame

$$v = x + c.$$

Seega antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = uv = x(x + c)$$

ehk

$$y = x^2 + cx.$$

Saadud üldlahend esitab geomeetriliselt nullpunkti läbivate paraboolide parve, millede sümmeetriateljed on paralleelsed Y-teljega, kusjuures parve parameeter c väljendub vastava parabooli tõusuna nullpunktis.

2) L a g r a n g e'i m e e t o d. Võtame lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x)$$

asemel diferentsiaalvõrrandi, milles $Q(x) = 0$, s. o.

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = 0.$$

Viimases võrrandis muutujaid eraldades saame

$$\frac{dy}{y} + P(x)dx = 0.$$

Saadud võrrandit inteegrides leiame, et

$$\ln y + \int P(x)dx = \ln C,$$

millest

$$y = Ce^{-\int P(x)dx},$$

mis ongi selle võrrandi üldlahend.

Asendame saadud üldlahendis vabalt võetava konstandi C niisuguse x funktsiooniga, et see üldlahend muutuks lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x)$$

üldlahendiks. Olgu $C = C(x)$ niisugune, et

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}$$

oleks $Q(x) \not\equiv 0$ puhul antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks. Viimast funktsiooni diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Paigutame y ja $\frac{dy}{dx}$ väärtused diferentsiaalvõrrandisse

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x);$$

saame

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x)$$

ehk

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,dx} = Q(x),$$

millest

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}$$

ja

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + c.$$

Paigutades saadud $C(x)$ väärtuse võrrandisse

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx},$$

saame käsitletava lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\,dx + c\right].$$

Näiteks lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$$

üldlahendi leidmiseks võtame homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$$

ja leiame muutujate eraldamise ning inteegrimise teel selle võrrandi üldlahendi, s. o.

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},\ \ln y = \ln x + \ln C,\ y = Cx.$$

Tähistame $C = C(x)$; siis

$$y = xC(x)$$

ja

$$\frac{dy}{dx} = C(x) + xC'(x),$$

mida algvõrrandisse paigutades saame

$$C(x) + xC'(x) - C(x) = x$$

ehk

$$C'(x) = 1,$$

mille integraal on

$$C(x) = x + c.$$

Seega antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = x^2 + cx.$$

Võtame veel lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$$

ja kasutame tema üldlahendi leidmiseks otseselt valemit

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c\right],$$

kus

$$P(x) = -\frac{2}{x+1} \text{ ja } Q(x) = (x+1)^2.$$

Et siin

$$\int P(x)dx = -2\int \frac{dx}{x+1} = -2\ln(x+1),$$

siis

$$e^{-\int P(x)dx} = e^{2\ln(x+1)} = e^{\ln(x+1)^2} = (x+1)^2$$

ja

$$e^{\int P(x)dx} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

ning

$$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c = \int dx + c = x + c.$$

Seega antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = (x+1)^2(x+c).$$

3) Lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x)$$

erilahendi võime saada, kui võtame üldlahendis esinevad integraalid määratud integraalidena nõnda, et ülemiseks inteegrimisrajaks on muutuv suurus x ja alumiseks inteegrimisrajaks vabalt valitav konstantne suurus x_0, s. o.

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} \left[\int_{x_0}^{x} Q(x) e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} \cdot dx + c \right].$$

Kui $y_{x=x_0} = y_0$ loeme funktsiooni y algväärtuseks, s. o. kui $x = x_0$ puhul $y = y_0$, siis — paigutades muutuva ülemise raja asemele $x = x_0$ — näeme, et integraalid muutuvad nulliks ja inteegrimiskonstant c saab võrdseks funktsiooni y väärtusega y_0, s. o. $c = y_0$, kui $x = x_0$, ning erilahend on seega

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} \left[\int_{x_0}^{x} Q(x) e^{\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx} dx + y_0 \right].$$

Saadud erilahend määrab geomeetriliselt algtingimuse $y_{x=x_0} = y_0$ puhul ühe ja ainult ühe integraalkõvera, mis läbib punkti (x_0, y_0).

§ 79. Bernoulli võrrand. Diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = y^n \cdot Q(x),$$

milles $n \neq 0$ ega 1, nimetatakse Bernoulli võrrandiks. Vastasel korral, kui n oleks 0 või 1, siis oleks tegemist lineaarse diferentsiaalvõrrandiga.

Bernoulli võrrandi lahendamiseks esitame samuti nagu eelmises paragrahvis esineva lineaarse võrrandi puhulgi funktsiooni y kahe funktsiooni korrutisena

$$y = uv,$$

millest saame

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Paigutades need y ja $\frac{dy}{dx}$ väärtused Bernoulli võrrandisse, saame

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + uv \cdot P(x) = u^n v^n Q(x)$$

ehk

$$u\frac{dv}{dx}+v\left[\frac{du}{dx}+u\cdot P(x)\right]=u^nv^nQ(x),$$

millest leiame u tingimusel, et

$$\frac{du}{dx}+u\cdot P(x)=0.$$

Lahendades selle võrrandi, leiame, et

$$u=e^{-\int P(x)\,dx},$$

mille paigutamisel võrrandisse

$$u\frac{dv}{dx}=u^nv^nQ(x)$$

saame

$$\frac{dv}{dx}=e^{(1-n)\int P(x)\,dx}v^nQ(x),$$

mis muutujate eraldamisel omandab kuju

$$\frac{dv}{v^n}=Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx.$$

Inteegrides seda võrrandit, saame

$$\frac{v^{1-n}}{1-n}=\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx+c_1,$$

millest

$$v=\left[(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx+c\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Seega Bernoulli võrrandi üldlahend on

$$y=uv=e^{-\int P(x)\,dx}\left[(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx+c\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=\frac{y^2\ln x}{x}$$

kujutab Bernoulli võrrandit, kus

$$P(x)=\frac{1}{x},\quad Q(x)=\frac{\ln x}{x},\quad n=2.$$

Siin

$$e^{-\int P(x)\,dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

ja

$$(1-n)\int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)\,dx}\,dx + c =$$

$$= -\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx + c = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c.$$

Seega käsitletava diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = \frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c\right)^{-1}$$

ehk

$$y = \frac{1}{\ln x + cx + 1}.$$

§ 80. Funktsiooni või argumendi suhtes ilmutatavad diferentsiaalvõrrandid. Eespool käsitletud juhtudel vaatlesime niisuguseid esimest järku diferentsiaalvõrrandeid, milledest saime ilmutada tuletise $\frac{dy}{dx}$, kuid praktiliselt ei ole see iga kord võimalik, nagu näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$2\frac{dy}{dx}\ln\frac{dy}{dx} - y = 0$$

puhul. Niisugusel juhul ilmutame diferentsiaalvõrrandist kas funktsiooni y või argumendi x ja lahendame siis võrrandi teatava teisendamisvõttega.

1) Oletame, et diferentsiaalvõrrandist

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

saab ilmutada funktsiooni y, s. o.

$$y = f\left(x,\ \frac{dy}{dx}\right).$$

Tähistame siin $\frac{dy}{dx} = p$; siis

$$y = f(x,\ p).$$

Viimast funktsiooni diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = f_x(x,\ p) + f_p(x,\ p)\,\frac{dp}{dx},$$

millest

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - f_x(x,p)}{f_p(x,p)},$$

kus nüüd parem pool kujutab x ja p funktsiooni, s. o.

$$\frac{dp}{dx} = \psi(x,\ p).$$

Kui siin x loeme argumendiks ja p funktsiooniks, siis viimast võrrandit võime vaadelda kui tuletise suhtes ilmutatud diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahendi (kui see on võimalik) leiame eespool käsitletud võtete abil, saades

$$p = \varphi(x, c).$$

Asetades saadud p väärtuse võrrandisse

$$y = f(x, p)$$

p asemele, saame

$$y = f[x, \varphi(x, c)],$$

mis ongi diferentsiaalvõrrandi üldlahend.

Et lahendada näiteks diferentsiaalvõrrandit

$$2\frac{dy}{dx}\ln\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

selleks ilmutame temast y ja tähistame $\frac{dy}{dx} = p$; siis

$$y = 2p \ln p.$$

Diferentsides saadud funktsiooni x järgi, saame

$$\frac{dy}{dx} = (2 \ln p + 2)\frac{dp}{dx}.$$

Muutujate eraldamisel omandab viimane võrrand kuju

$$\frac{2(\ln p + 1)}{p}\,dp = dx,$$

mida inteegrides leiame, et

$$(\ln p + 1)^2 = x + c,$$

millest

$$p = e^{\sqrt{x+c}-1}.$$

Asetades p väärtuse võrrandisse

$$y = 2p \ln p,$$

saame antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = 2(\sqrt{x + c} - 1)e^{\sqrt{x+c}-1}.$$

Kirjeldatud lahendamisviisi puhul lihtsustub tihti integraalkõverate geomeetriline käsitlus, kui diferentsiaalvõrrandi üldlahendile anname parameetrilise kuju, s. o. jätame x ja y avaldatuks parameetri p kaudu. Vaadeldud diferentsiaalvõrrandi üldlahend parameetrilisel kujul on

$$x = (\ln p + 1)^2 - c, \quad y = 2p \ln p,$$

mille järgi integraalkõverate käsitlus osutub ilmselt lihtsamaks kui eelmise üldlahendi järgi, kus koordinaadid x ja y on otseselt omavahel funktsionaalses seoses.

2) Oletame, et diferentsiaalvõrrandist

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right)=0$$

saab ilmutada argumendi x, s. o.

$$x=f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right).$$

Tähistame $\frac{dy}{dx}=p$; siis

$$x=f(y,\ p).$$

Diferentsides seda funktsiooni y järgi, saame

$$\frac{dx}{dy}=f_y(y,\ p)+f_p(y,\ p)\,\frac{dp}{dy},$$

millest

$$\frac{dp}{dy}=\frac{1-pf_y(y,p)}{pf_p(y,p)}$$

ehk

$$\frac{dp}{dy}=\psi(y,\ p),$$

kus nüüd y vaatleme kui argumenti ja p kui funktsiooni ning võrrandit kui tuletise suhtes ilmutatud diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend olgu

$$p=\varphi(y,\ c).$$

Seega diferentsiaalvõrrandi üldintegraaliks on funktsioon

$$x=f[y,\ \varphi(y,\ c)].$$

Ilmutades näiteks diferentsiaalvõrrandist

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=x+y\,\frac{dy}{dx}$$

x ja tähistades $\frac{dy}{dx}=p$, saame

$$x=y\sqrt{1+p^2}-yp.$$

Diferentsides seda funktsiooni y järgi

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{1+p^2}-p+\left(\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}-y\right)\frac{dp}{dy},$$

eraldades muutujad

$$\frac{p\,dp}{1+p^2}+\frac{dy}{y}=0$$

ja inteegrides viimast võrrandit, saame

$$\frac{1}{2}\ln(1+p^2)+\ln y=\ln c$$

ehk

$$\sqrt{1+p^2}=\frac{c}{y},$$

millest

$$p=\frac{\sqrt{c^2-y^2}}{y}.$$

Paigutades kahest viimasest võrdusest $\sqrt{1+p^2}$ ja p väärtused võrrandisse

$$x=y\sqrt{1+p^2}-yp,$$

saame antud diferentsiaalvõrrandi üldintegraali

$$x=c-\sqrt{c^2-y^2}$$

ehk

$$x^2+y^2-2cx=0,$$

mis esitab geomeetriliselt nullpunkti läbivate ringjoonte parve, mille keskpunktid asetsevad X-teljel, mis nähtub võrrandi kinnisest kujust

$$(x-c)^2+y^2=c^2.$$

§ 81. Lagrange'i võrrand. Funktsiooni y suhtes ilmutatud diferentsiaalvõrrandit

$$y=x\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)+\psi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

kus φ ja ψ on diferentsitavad funktsioonid, nimetatakse L a g r a n g e'i v õ r r a n d i k s.

Kui selles võrrandis tähistame $\frac{dy}{dx}=p$, siis omandab võrrand kuju

$$y=x\varphi(p)+\psi(p),$$

mida diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(p)+[x\varphi'(p)+\psi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Vaadeldes siin p argumendina ja x funktsioonina, saame viimase võrrandi esitada kujul

$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)};$$

see on lineaarne diferentsiaalvõrrand, mille üldlahendi võime leida paragrahvis 78 esitatud võtetega, kui $p - \varphi(p) \neq 0$.

Olgu selle lineaarse diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$x = f_1(p, c),$$

mille paigutamisel võrrandisse

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

saame

$$y = f_1(p, c)\varphi(p) + \psi(p) = f_2(p, c).$$

Lagrange'i võrrandi üldlahendit esitavad seega parameetrilised võrrandid

$$x = f_1(p, c), \; y = f_2(p, c).$$

Kui neist parameetrilistest võrranditest on võimalik elimineerida p, siis saame Lagrange'i võrrandi üldintegraali

$$\Phi(x, y, c) = 0.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrand

$$y = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

kujutab Lagrange'i võrrandit. Kui tähistame $\frac{dy}{dx} = p$, siis omandab võrrand kuju

$$y = xp^2 - p^2,$$

mida x järgi diferentsides saame

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + (2px - 2p)\frac{dp}{dx}$$

ehk

$$1 = p + (2x - 2)\frac{dp}{dx},$$

millest

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2x}{p-1} = \frac{2}{p-1},$$

mis on lineaarne diferentsiaalvõrrand, kus

$$P(p) = \frac{2}{p-1}, \; Q(p) = \frac{2}{p-1},$$

ja mille üldlahend on (§ 78)

$$x = e^{-2\int \frac{dp}{p-1}} \left[\int \frac{2}{p-1} e^{2\int \frac{dp}{p-1}} dp + c_1 \right],$$

s. o.

$$x = \frac{p^2 - 2p + c_1}{(p-1)^2}$$

ehk (kui tähistame $c_1 = 1 + c^2$)

$$x = 1 + \frac{c^2}{(p-1)^2}.$$

Antud diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leiame, kui avaldame viimasest võrrandist p, s. o.

$$p = \frac{\sqrt{x-1} + c}{\sqrt{x-1}},$$

ja asetame p väärtuse lähtevõrrandisse

$$y = xp^2 - p^2;$$

saame

$$y = (\sqrt{x-1} + c)^2.$$

§ 82. Clairaut' võrrand. Lagrange'i võrrandis oli tingimuseks, et $p \neq \varphi(p)$, kus $p = \frac{dy}{dx}$. Kui aga $p = \varphi(p)$, siis Lagrange'i võrrand omandab kuju

$$y = xp + \psi(p)$$

ehk

$$y = x\frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

mis kannab C l a i r a u t' * v õ r r a n d i nime.

Clairaut' võrrandi lahendame võttega, mis on analoogiline Lagrange'i võrrandi lahendamisviisiga. Diferentsides Clairaut' võrrandit, saame

$$\frac{dy}{dx} = p + [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx}.$$

Et siin $\frac{dy}{dx} = p$, siis

$$[x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0,$$

---

* A l e x i s C l a u d e C l a i r a u t (1713—1765) — prantsuse matemaatik ja astronoom, tegeles diferentsiaalvõrrandite teooria, diferentsiaalgeomeetria ja taevamehaanika küsimustega.

mis koosneb nüüd kahest võrrandist

$$\frac{dp}{dx} = 0 \text{ ja } x + \psi'(p) = 0.$$

Esimese võrrandi lahendiks on

$$p = c.$$

Asetades selle p väärtuse Clairaut' võrrandisse, saame muutuva parameetriga c esimese astme funktsiooni

$$y = cx + \psi(c),$$

mis on Clairaut' võrrandi üldlahendiks. Siit nähtub ühtlasi, et Clairaut' võrrandi üldlahendi võime saada otsekohe, kui asendame Clairaut' võrrandis tuletise $\frac{dy}{dx}$ parameetriga c. Clairaut' võrrandi integraalkõverateks on sirgete parv, mille tõus on vastavalt võrdne parameetriga c.

Võtame teise võrrandi

$$x + \psi'(p) = 0.$$

Et otsitav funktsioon y peab rahuldama Clairaut' võrrandit, siis selle funktsiooni leidmiseks tuleb elimineerida p võrranditest

$$y = xp + \psi(p) \text{ ja } x + \psi'(p) = 0,$$

saades seega x ja y vahelise funktsionaalse seose

$$\Psi(x, y) = 0,$$

mis on samuti Clairaut' võrrandi integraaliks, milles puudub parameeter c.

Graafik, mida esitab võrrand $\Psi(x, y) = 0$, ei ole sirgjoon, vaid kõver, sest puutuja tõus $p = \frac{dy}{dx}$ on siin parameetriks, mis ei oma ainult üht ja sama konstantset väärtust. Et puutepunkti asukoha muutumine sellel graafikul tingib puutuja tõusu muutumise, siis see graafik ei või kujutada sirgjoont. Sellest järeldub, et Clairaut' võrrandi integraali $\Psi(x, y) = 0$ ei ole võimalik saada võrrandi üldlahendist $y = cx + \psi(c)$, kuigi annaksime parameetrile c mistahes väärtusi. Clairaut' võrrandi integraal $\Psi(x, y) = 0$ on seega s i n g u l a a r s e k s ehk i s e ä r a s e k s integraaliks, mis esitab geomeetriliselt sirgete parve $y = cx + \psi(c)$ mähisjoont, s. o. sirgete parve kõverjoonelist ühispuutujat.

Ainult erijuhtudel võib mingi teise diferentsiaalvõrrandi (mitte Clairaut' võrrandi) iseärane integraal ühtida ka teatava eriintegraaliga.

Et üldiselt mähisjoone võrrand saadakse võrranditest (§ 31, p. 1)

$$\Phi(x,\ y,\ c) = 0 \text{ ja } \Phi_c(x,\ y,\ c) = 0$$

parameetri c elimineerimise teel, siis Clairaut' võrrandi integraali $\Psi(x,\ y) = 0$ kui mähisjoone võrrandi võime saada samuti võrranditest

$$y = cx + \psi(c) \text{ ja } x + \psi'(c) = 0,$$

milledes p on asendatud c-ga, kui elimineerime neist võrranditest parameetri c, sest siin

$$\Phi(x,\ y,\ c) = cx + \psi(c) - y = 0$$

ja

$$\Phi_c(x,\ y,\ c) = x + \psi'(c) = 0,$$

kusjuures viimane võrrand kujutab võrrandit, mis on saadud eelmisest võrrandist (kui Clairaut' võrrandi üldintegraalist) selle diferentsimisel parameetri c järgi.

Näiteks diferentsiaalvõrrand

$$y = xp - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

kus $p = \frac{dy}{dx}$ ja a on konstantne suurus, kujutab Clairaut' võrrandit. Diferentsides seda võrrandit x järgi, saame

$$\frac{dy}{dx} = p + \left[x - \frac{a}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}\right]\frac{dp}{dx}$$

ehk

$$\left[x - \frac{a}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}\right]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Saadud võrrandist nähtub, et

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

millest $p = c$ ja üldlahend on seega

$$y = cx - \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}},$$

mis esitab sirgete parve.

Võttes võrrandi

$$x - \frac{a}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}} = 0$$

ja paigutades siit saadava x väärtuse

$$x = \frac{a}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}$$

algvõrrandisse, saame

$$y = -\frac{ap^3}{(1+p^2)\sqrt{1+p^2}}.$$

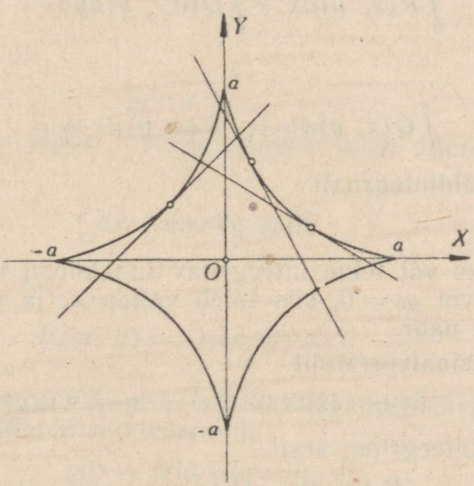
Et elimineerida kahest viimasest võrrandist p, selleks viime mõlema võrrandi mõlemad pooled astmesse $\frac{2}{3}$ ja siis liidame saadused; saame antud diferentsiaalvõrrandi iseärase integraali kujul

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

mille graafikuks on astroid (joon. 77), mis on sirgete parve

$$y = cx - \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$$

mähisjooneks.



Joon. 77.

§ 83. Täisdiferentsiaaliga võrrand. Kui diferentsiaalvõrrandis

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

on $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$, siis kujutab selle võrrandi vasak pool mingi funktsiooni $\Phi(x, y)$ täisdiferentsiaali (§ 56). Sel juhul

saame seda diferentsiaalvõrrandit inteegrida otseselt, muutujaid eraldamata, kasutades selleks valemit (§ 56)

$$\Phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy$$

või

$$\Phi(x, y) = \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx,$$

milledes esinevad muidugi meelevaldsed inteegrimiskonstandid, milledega võime ühendada neid konstantseid liikmeid, mis sisaldavad vabalt valitavaid konstantseid alumisi inteegrimisrajasid x_0 ja y_0. Leides esitatud integraalid, saame käsitletava diferentsiaalvõrrandi üldintegraali

$$\Phi(x, y) = c.$$

Et siin alumised konstantsed inteegrimisrajad x_0 ja y_0 on vabalt valitavad, siis võib neid paljudel juhtudel nii valida, et $x_0 = 0$ ja $y_0 = 0$, millede puhul täisdiferentsiaaliga võrrandi üldintegraali leiame lihtsamalt valemi

$$\int_{0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{0}^{y} Q(0, y)\,dy = c$$

või

$$\int_{0}^{y} Q(x, y)\,dy + \int_{0}^{x} P(x, 0)\,dx = c$$

järgi, saades üldintegraali

$$\Phi(x, y) = c.$$

Kui aga üks või teine inteegritav funktsioon katkeb punktis, milles $x_0 = 0$ või $y_0 = 0$, siis tuleb valida x_0 ja y_0 jaoks mingi muu väärtuste paar.

a) Diferentsiaalvõrrandit

$$(2x + 6xy - 1)\,dx + (3x^2 + 2y + 1)\,dy = 0$$

saab otseselt inteegrida, sest

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = 6x.$$

Siin võime võtta alumisteks inteegrimisrajadeks $x_0 = 0$ ja $y_0 = 0$; siis

$$P(x, y) = 2x + 6xy - 1 \text{ ja } Q(0, y) = 2y + 1.$$

Inteegrides

$$\int_{0}^{x} (2x + 6xy - 1)\,dx + \int_{0}^{y} (2y + 1)\,dy = c$$

saame üldintegraali

$$x^2 + 3x^2y - x + y^2 + y = c.$$

b) Diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{y}{x}dx + \ln x dy = 0$$

saab otseselt inteegrida, sest

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = \frac{1}{x},$$

kuid siin ei saa alumiseks inteegrimisrajaks võtta $x_0 = 0$, sest sel juhul $Q(0, y) = \ln 0 = -\infty$, millel pole mõtet. Siin võime kõige otstarbekohasemalt võtta $x_0 = e$ ja $y_0 = 0$; siis

$$\int_e^x \frac{y}{x}dx + \int_0^y \ln e dy = c,$$

s. o.

$$\left[y \ln x\right]_e^x + \left[y\right]_0^y = c,$$

ning üldintegraal on

$$y \ln x = c.$$

§ 84. Inteegriv tegur. Nagu nägime, saab diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{y}{x}dx + \ln x dy = 0$$

otseselt inteegrida, sest

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = \frac{1}{x}.$$

Kui aga korrutame selle diferentsiaalvõrrandi mõlemad pooled x-ga, siis saame diferentsiaalvõrrandi

$$ydx + x \ln x dy = 0,$$

mida ei saa enam otseselt inteegrida, sest kui

$$P(x, y) = y \text{ ja } Q(x, y) = x \ln x,$$

siis

$$P_y(x, y) = 1 \text{ ja } Q_x(x, y) = \ln x + 1,$$

s. o.

$$P_y(x, y) \neq Q_x(x, y).$$

Siit järeldame, et viimast diferentsiaalvõrrandit saaksime otseselt inteegrida ainult siis, kui me selle diferentsiaalvõrrandi mõlemad pooled korrutaksime teguriga $\frac{1}{x}$.

Samuti ei saa näiteks diferentsiaalvõrrandit

$$\left(\frac{x^2}{y} - y\right) dx + 2x dy = 0$$

otseselt inteegrida, sest kui

$$P(x, y) = \frac{x^2}{y} - y \text{ ja } Q(x, y) = 2x,$$

siis

$$P_y(x, y) = -\frac{x^2}{y^2} - 1 \text{ ja } Q_x(x, y) = 2,$$

s. o.

$$P_y(x, y) \neq Q_x(x, y).$$

Kui aga korrutame antud võrrandi mõlemad pooled teguriga $\frac{y}{x^2}$, siis saame diferentsiaalvõrrandi kujul

$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx + \frac{2y}{x} dy = 0,$$

mida on võimalik otseselt inteegrida, sest nüüd

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = -\frac{2y}{x^2}.$$

Tekib küsimus, kas diferentsiaalvõrrandit

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0,$$

mille vasak pool ei kujuta mingi funktsiooni täisdiferentsiaali ja mida ei saa seega otseselt inteegrida, on alati võimalik muuta niisuguseks, et teda saab otseselt inteegrida, kui me võrrandi mõlemad pooled korrutame teatava teguriga $\mu(x, y)$, mida nimetatakse diferentsiaalvõrrandi inteegrivaks teguriks.

Kui diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

vasak pool ei kujuta mingi funktsiooni täisdiferentsiaali ning diferentsiaalvõrrand pole seega otseselt inteegritav, siis tuleb leida niisugune inteegriv tegur $\mu(x, y)$, millega korrutatult diferentsiaalvõrrand muutub otseselt inteegritavaks, s. o. võrrandiks

$$P(x, y)\mu(x, y) dx + Q(x, y)\mu(x, y) dy = 0$$

ehk lühemalt

$$P\mu dx + Q\mu dy = 0,$$

mille vasak pool kujutab mingi meile tundmatu funktsiooni $\Phi(x, y)$ täisdiferentsiaali, s. o.

$$d\Phi(x, y) = \mu P dx + \mu Q dy.$$

Kui inteegriv tegur on leitud, siis antud diferentsiaalvõrrandi üldintegraaliks on

$$\Phi(x, y) = c.$$

Viimast võrdust diferentsides saame

$$\Phi_x(x, y)dx + \Phi_y(x, y)dy = 0,$$

millest

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\Phi_x(x, y)}{\Phi_y(x, y)}.$$

Et antud diferentsiaalvõrrandi järgi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

siis

$$\frac{\Phi_x(x, y)}{\Phi_y(x, y)} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

ehk

$$\frac{\Phi_x(x, y)}{P(x, y)} = \frac{\Phi_y(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Korrutades diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

mõlemad pooled avaldisega $\frac{\Phi_x(x, y)}{P(x, y)}$, saame

$$\Phi_x(x, y)dx + Q(x, y)\frac{\Phi_x(x, y)}{P(x, y)}dy = 0.$$

Et siin

$$\frac{\Phi_x(x, y)}{P(x, y)} = \frac{\Phi_y(x, y)}{Q(x, y)},$$

siis

$$\Phi_x(x, y)dx + \Phi_y(x, y)dy = 0,$$

mis kujutab nüüd otseselt inteegritavat diferentsiaalvõrrandit, kusjuures

$$\frac{\Phi_x(x, y)}{P(x, y)} = \frac{\Phi_y(x, y)}{Q(x, y)} = \mu(x, y)$$

on diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

inteegrivaks teguriks. Sellest nähtub, et inteegriv tegur on alati olemas, kuid me ei tea, missugune ta on, sest kui $\Phi(x, y)$ on teadmata, siis on ka $\mu(x, y)$ teadmata.

Kui diferentsiaalvõrrandi

$$P\mu dx + Q\mu dy = 0$$

vasak pool on tundmatu funktsiooni $\Phi(x, y)$ täisdiferentsiaaliks, siis

$$\frac{\partial}{\partial y}(P\mu) = \frac{\partial}{\partial x}(Q\mu),$$

s. o.

$$\mu P_y + P\mu_y = \mu Q_x + Q\mu_x$$

ehk

$$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x - P\mu_y,$$

mis kujutab μ suhtes osatuletistega diferentsiaalvõrrandit, mille lahend määrab käsitletava diferentsiaalvõrrandi inteegriva teguri μ.

Et vältida osatuletistega diferentsiaalvõrrandi lahendamist, selleks vaatleme siinjuures ainult üksikuid inteegriva teguri leidmise erijuhtumeid, lähtudes võrrandist

$$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x - P\mu_y,$$

mis on ühtlasi tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks, et μ oleks diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

inteegrivaks teguriks.

1) Kui diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

inteegriv tegur on ainult ühe muutuja, näiteks x funktsioon, s. o. $\mu(x)$, siis võrrandis

$$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x - P\mu_y$$

on

$$\mu_x = \frac{d\mu}{dx} \text{ ja } \mu_y = 0$$

ning seega saame hariliku diferentsiaalvõrrandi

$$\mu(P_y - Q_x) = Q\frac{d\mu}{dx}$$

ehk

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}.$$

Viimase võrrandi vasakul poolel puudub y, järelikult puudub y ka paremal poolel, s. o. ka parem pool on ainult x funktsioon või erijuhul konstantne suurus. Tähendab, kui diferentsiaalvõrrandi inteegriv tegur on ainult x funktsioon, siis $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ ei sõltu y-st, ja ümberpöördult, kui $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ ei sõltu y-st, siis on olemas niisugune inteegriv tegur $\mu(x)$, mis on ainult x funktsioon. Selle inteegriva teguri leidmiseks eraldame muutujad

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}dx$$

ja inteegrime

$$\ln \mu = \int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx + \ln c,$$

millest

$$\mu(x) = ce^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx},$$

kus $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ peab olema x funktsioon. Võttes näiteks $c = 1$, saame ühe kindla inteegriva teguri

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx}.$$

Kui diferentsiaalvõrrandi inteegriv tegur oleks ainult y funktsioon, s. o. $\mu(y)$, siis leiaksime analoogiliselt, et

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P}dy}.$$

Näiteks: a) Diferentsiaalvõrrand

$$2(y^3 + 1)dx + 3xy^2dy = 0$$

pole otseselt inteegritav. Tema inteegriv tegur on ainult x funktsioon, sest

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{6y^2 - 3y^2}{3xy^2} = \frac{1}{x}.$$

Järelikult

$$\mu = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x,$$

mis on inteegrivaks teguriks, kui $c = 1$. Korrutades antud diferentsiaalvõrrandi mõlemad pooled selle inteegriva teguriga, saame otseselt inteegritava diferentsiaalvõrrandi

$$2x(y^3 + 1)dx + 3x^2y^2dy = 0,$$

kus nüüd

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = 6xy^2.$$

b) Diferentsiaalvõrrandi

$$(xy^2 - y^3)dx + (1 - xy^2)dy = 0$$

inteegriv tegur, nagu näeme, ei ole ainult x funktsioon, sest

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{2xy - 3y^2 + y^2}{1 - xy^2} = \frac{2y(x - y)}{1 - xy^2},$$

kuid ta on ainult y funktsioon, sest

$$\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{-y^2 - 2xy + 3y^2}{xy^2 - y^3} = -\frac{2}{y}.$$

Tähendab,

$$\mu = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = e^{-2\ln y} = \frac{1}{y^2}$$

on selle diferentsiaalvõrrandi inteegrivaks teguriks, millega korrutades saame otseselt inteegritava diferentsiaalvõrrandi kujul

$$(x - y)dx + \left(\frac{1}{y^2} - x\right)dy = 0,$$

kus nüüd

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = -1.$$

2) Kui diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

inteegriv tegur on korrutise xy funktsioon, s. o. $\mu(xy) = \mu(z)$, siis võrrandis

$$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x - P\mu_y$$

on

$$\mu_x = y\frac{d\mu}{dz} \text{ ja } \mu_y = x\frac{d\mu}{dz}$$

ning seega

$$\mu(P_y - Q_x) = (yQ - xP)\frac{d\mu}{dz},$$

millest

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{yQ - xP}\,dz.$$

Viimast võrdust inteegrides saame

$$\ln \mu = \int \frac{P_y - Q_x}{yQ - xP}\,dz + \ln c,$$

millest

$$\mu(xy) = \mu(z) = ce^{\int \frac{P_y - Q_x}{yQ - xP}\,dz}.$$

Kui $c = 1$, siis üks inteegriv tegur on

$$\mu(xy) = \mu(z) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{yQ - xP}\,dz},$$

kus $\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP}$ peab olema korrutise $xy = z$ funktsioon.

Sel viisil võib lahendada näiteks diferentsiaalvõrrandit

$$(y + xy^2)\,dx + (x - x^2y)\,dy = 0,$$

mille vasak pool ei kujuta täisdiferentsiaali. Tähistades $xy = z$, näeme, et

$$\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} = \frac{(1 + 2xy) - (1 - 2xy)}{y(x - x^2y) - x(y + xy^2)} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{z}$$

ja inteegriv tegur on (kui $c = 1$)

$$\mu = e^{-2\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{x^2y^2}.$$

Korrutades diferentsiaalvõrrandi mõlemad pooled selle inteegriva teguriga, saame

$$\left(\frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x}\right)dx + \left(\frac{1}{xy^2} - \frac{1}{y}\right)dy = 0,$$

kus nüüd

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = -\frac{1}{x^2y^2}.$$

Et inteegritavad funktsioonid ei muutuks lõpmatuks, selleks

võtame $x_0 = 1$ ja $y_0 = 1$ ning inteegrime

$$\int_1^x \left(\frac{1}{x^2 y} + \frac{1}{x}\right) dx + \int_1^y \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right) dy = c_1,$$

millest saame antud diferentsiaalvõrrandi üldintegraali kujul

$$\ln \frac{x}{y} - \frac{1}{xy} = c,$$

kus $c = c_1 - 1$.

3) Kui diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

inteegriv tegur on jagatise $\frac{y}{x}$ funktsioon, s. o. $\mu\left(\frac{y}{x}\right) = \mu(z)$, siis võrrandis

$$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x - P\mu_y$$

on

$$\mu_x = -\frac{y}{x^2}\frac{d\mu}{dz} \text{ ja } \mu_y = \frac{1}{x}\frac{d\mu}{dz}$$

ning seega

$$\mu(P_y - Q_x) = -\left(\frac{y}{x^2}Q + \frac{1}{x}P\right)\frac{d\mu}{dz},$$

millest

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{x^2(Q_x - P_y)}{yQ + xP}dz,$$

mida inteegrides saame

$$\ln \mu = \int \frac{x^2(Q_x - P_y)}{yQ + xP}dz + \ln c,$$

millest

$$\mu\left(\frac{y}{x}\right) = \mu(z) = ce^{\int \frac{x^2(Q_x - P_y)}{yQ + xP}dz}.$$

Kui võtame $c = 1$, siis inteegrivaks teguriks on

$$\mu\left(\frac{y}{x}\right) = \mu(z) = e^{\int \frac{x^2(Q_x - P_y)}{yQ + xP}dz},$$

kus $\frac{x^2(Q_x - P_y)}{yQ + xP}$ peab olema jagatise $\frac{y}{x} = z$ funktsioon.

Näiteks diferentsiaalvõrrandit

$$\left(\frac{3y^2}{x} - \frac{y}{x^2} + 2y\right)dx + \left(\frac{8y^2}{x} + \frac{1}{x} + 3y\right)dy = 0$$

saab lahendada, tähistades $\frac{y}{x} = z$; siis

$$\frac{x^2(Q_x - P_y)}{yQ + xP} = \frac{x^2\left[\left(-\frac{8y^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) - \left(\frac{6y}{x} - \frac{1}{x^2} + 2\right)\right]}{y\left(\frac{8y^2}{x} + \frac{1}{x} + 3y\right) + x\left(\frac{3y^2}{x} - \frac{y}{x^2} + 2y\right)} = -\frac{x}{y} = -\frac{1}{z}$$

ja inteegriv tegur on

$$\mu = e^{-\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{z} = \frac{x}{y}.$$

Korrutades antud diferentsiaalvõrrandi mõlemad pooled selle inteegriva teguriga, saame

$$\left(3y - \frac{1}{x} + 2x\right)dx + \left(8y + \frac{1}{y} + 3x\right)dy = 0,$$

kus nüüd

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = 3.$$

Viimast võrrandit otseselt inteegrides, kui $x_0 = 1$ ja $y_0 = 1$, saame

$$\int_1^x \left(3y - \frac{1}{x} + 2x\right)dx + \int_1^y \left(8y + \frac{1}{y} + 3\right)dy = c_1,$$

millest leiame diferentsiaalvõrrandi üldintegraali kujul

$$x^2 + 3xy + 4y^2 + \ln\frac{y}{x} = c,$$

kus $c = c_1 + 8$.

4) Kui diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

inteegriv tegur on ruutude summa $x^2 + y^2$ funktsioon, s. o. $\mu(x^2 + y^2) = \mu(z)$, siis võrrandis

$$\mu(P_y - Q_x) = Q\mu_x - P\mu_y$$

on

$$\mu_x = 2x\frac{d\mu}{dz} \text{ ja } \mu_y = 2y\frac{d\mu}{dz}$$

ning seega

$$\mu(P_y - Q_x) = 2(xQ - yP)\frac{d\mu}{dz},$$

millest

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{2(xQ - yP)}\,dz.$$

Inteegrides

$$\ln \mu = \frac{1}{2}\int \frac{P_y - Q_x}{xQ - yP}\,dz + \ln c$$

saame

$$\mu(x^2 + y^2) = \mu(z) = ce^{\frac{1}{2}\int \frac{P_y - Q_x}{xQ - yP}\,dz}.$$

Kui võtame $c = 1$, siis inteegrivaks teguriks on

$$\mu(x^2 + y^2) = \mu(z) = e^{\frac{1}{2}\int \frac{P_y - Q_x}{xQ - yP}\,dz},$$

kus $\frac{P_y - Q_x}{xQ - yP}$ peab olema ruutude summa $x^2 + y^2 = z$ funktsioon.

Kui diferentsiaalvõrrandi inteegriv tegur oleks ruutude vahe $x^2 - y^2$ funktsioon, s. o. $\mu(x^2 - y^2) = \mu(z)$, siis leiaksime analoogiliselt, et

$$\mu(x^2 - y^2) = \mu(z) = e^{\frac{1}{2}\int \frac{P_y - Q_x}{xQ + yP}\,dz},$$

kus $\frac{P_y - Q_x}{xQ + yP}$ peab olema ruutude vahe $x^2 - y^2 = z$ funktsioon.

Käsitletud võttega saame lahendada näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - x)\,dx + (\sqrt{x^2 + y^2} - y)\,dy = 0.$$

Siin on

$$\frac{P_y - Q_x}{xQ - yP} = \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{x(\sqrt{x^2 + y^2} - y) - y(\sqrt{x^2 + y^2} - x)} = -\frac{1}{x^2 + y^2} = -\frac{1}{z}$$

ja inteegriv tegur on

$$\mu = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

millega korrutamisel diferentsiaalvõrrand muutub otseselt inteegritavaks, s. o.

$$\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dx + \left(1 - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0,$$

kus nüüd

$$P_y(x, y) = Q_x(x, y) = \frac{xy}{2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Viimase diferentsiaalvõrrandi inteegrimiseks võtame $x_0 = 1$ ja $y_0 = 0$, s. o.

$$\int_1^x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dx + \int_0^y \left(1 - \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right) dy = c_1,$$

millest saame üldintegraali

$$x + y - \sqrt{x^2+y^2} = c$$

ehk

$$2xy - 2c(x+y) + c^2 = 0,$$

kus $c = c_1 + 2$.

5) Piirdume siin eespooltoodud inteegriva teguri leidmise võtetega. Nende võtete puhul tuleb iga kord leida vahe

$$\pm [P_y(x, y) - Q_x(x, y)].$$

Kui see vahe on võrdne nulliga, siis kujutab diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

vasak pool juba täisdiferentsiaali. On aga see vahe nullist erinev, siis tuleb vaadata, kas

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} \text{ on } x \text{ funktsioon},$$

$$\frac{Q_x - P_y}{P} \text{ „ } y \text{ „}$$

$$\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} \text{ „ } xy \text{ „}$$

$$\frac{x^2(Q_x - P_y)}{yQ + xP} \text{ „ } \frac{y}{x} \text{ „}$$

$$\frac{P_y - Q_x}{xQ - yP} \text{ „ } x^2 + y^2 \text{ „}$$

$$\frac{P_y - Q_x}{xQ + yP} \text{ „ } x^2 - y^2 \text{ „}$$

Kui diferentsiaalvõrrandi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

inteegriva teguri leidmine allub ühele neist juhtumeist, siis võime leida inteegriva teguri μ, millega korrutatud diferentsiaalvõrrandit saame otseselt inteegrida.

§ 85. Isogonaalsed ja ortogonaalsed trajektoorid. Kui kõverate parve

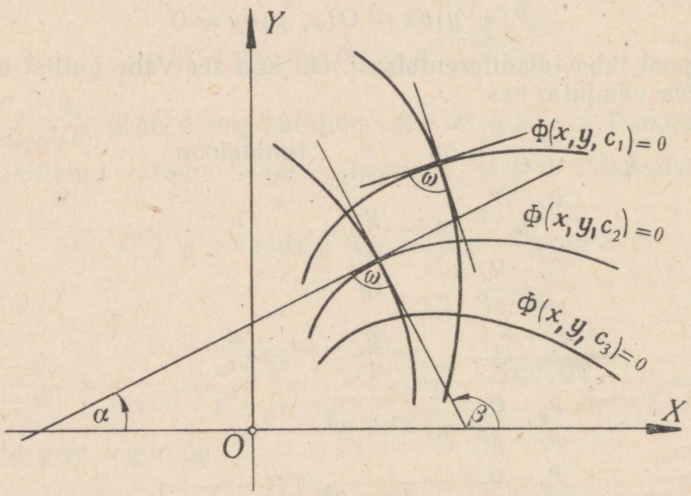
$$\Phi(x, y, c) = 0$$

iga kõverat lõikab ühe ja sama nurga ω all mingi teise kõverate parve iga kõver, siis nimetatakse teise parve kõveraid esimese kõverate parve isogonaalseteks trajektoorideks. See on isogonaalsete trajektooride parv. Erijuhul, kui $\omega = 90°$, nimetatakse teise parve kõveraid ortogonaalseteks trajektoorideks, mis moodustavad ortogonaalsete trajektooride parve.

Isogonaalsete trajektooride võrrandi leidmiseks võtame antud kõverate parve võrrandi $\Phi(x, y, c) = 0$ ja kujundame talle vastava diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

mille üldintegraaliks on $\Phi(x, y, c) = 0$, mis esitab leitud diferentsiaalvõrrandi integraalkõveraid. Nende integraalkõverate mistahes punkti (x, y) peab läbima isogonaalne trajektoor ja moodustama integraalkõveraga nurga ω (joon. 78). Kui integraal-



Joon. 78.

kõvera tõusunurk punktis (x, y) on α ja isogonaalse trajektoori tõusunurk samas punktis on β, siis $\beta = \alpha + \omega$ ja

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \omega) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\omega}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\omega}.$$

Et $\operatorname{tg}\omega$ on antud suurus ja

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

siis

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{f(x, y) + \operatorname{tg}\omega}{1 - f(x, y)\operatorname{tg}\omega},$$

mis määrab nüüd isogonaalse trajektoori mistahes punkti koordinaatide ja selles punktis tõmmatud puutuja tõusu vahelise funktsionaalse seose. Seega on ta isogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrand. Tähistame siin tõusu $\operatorname{tg}\beta = \frac{dy}{dx}$ ja $\operatorname{tg}\omega = k$; siis isogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrand omandab kuju

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + k}{1 - kf(x, y)},$$

mille üldintegraal esitab isogonaalseid trajektoore, mis lõikumisel iga kõveraga parvest $\Phi(x, y, c)$ moodustavad ühe ja sama nurga ω.

Viimasest võrdusest nähtub, et isogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrandi saamiseks tuleb antud kõverate parve diferentsiaalvõrrandis $f(x, y)$ asendada avaldisega $\frac{f(x, y) + k}{1 - kf(x, y)}$, kus k on antud parve kõverate ja isogonaalsete trajektooride vahelise nurga tangens.

Et ortogonaalsete trajektooride puhul $\omega = 90°$ ja $\beta = \alpha + 90°$, siis

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + 90°) = -\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

ning seega ortogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrand esineb kujul

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

Tähendab, ortogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrandi saamiseks tuleb antud kõverate parve diferentsiaalvõrrandis $f(x, y)$ asendada tema pöördväärtusega, mis on võetud vastupidise märgiga, s. o. $-\frac{1}{f(x, y)}$.

Leiame näiteks paraboolide parve

$$y^2 = 2cx$$

ortogonaalsete trajektooride võrrandi.

Antud paraboolide parve diferentsiaalvõrrand on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2c}}{2\sqrt{x}} = \frac{y}{2x}.$$

Ortogonaalsete trajektooride diferentsiaalvõrrandi leidmiseks asendame $\frac{y}{2x}$ avaldisega $-\frac{2x}{y}$; saame

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

ehk

$$2xdx + ydy = 0,$$

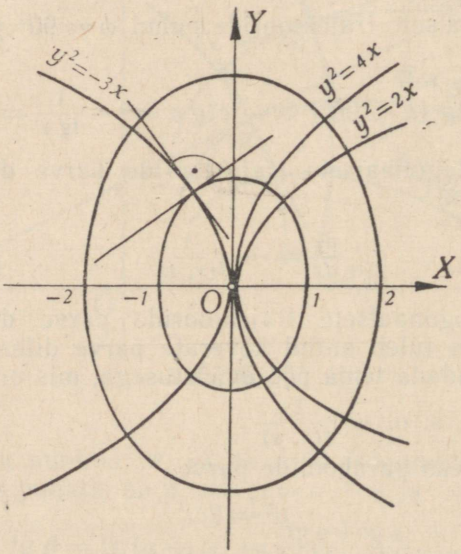
mille üldintegraal

$$x^2 + \frac{y^2}{2} = c$$

kujutab antud paraboolide parve ortogonaalsete trajektooride võrrandit. Saadud ortogonaalsete trajektooride võrrand esitab geomeetriliselt ellipseid keskpunktiga koordinaattelgede nullpunktis, fookustega Y-teljel ning pooltelgedega $\sqrt{c}$ ja $\sqrt{2c}$, kui $c > 0$ (joon. 79).

Sama paraboolide parve $y^2 = 2cx$ isogonaalsete trajektooride diferentsiaalvõrrand, kui näiteks $\omega = 45°$, on

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{2x} + 1}{1 - \frac{y}{2x}} = \frac{2x + y}{2x - y}$$



Joon. 79.

ehk

$$(2x + y)\,dx - (2x - y)\,dy = 0,$$

mis kujutab homogeenset diferentsiaalvõrrandit. Lahendades selle homogeense diferentsiaalvõrrandi, leiame antud paraboolide parve isogonaalsete trajektooride võrrandi

$$\frac{1}{2}\ln(2x^2 - xy + y^2) - \frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2y - x}{x\sqrt{7}} = c.$$

§ 86. Diferentsiaalvõrrandi graafiline lahendamine. Esimest järku diferentsiaalvõrrand

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

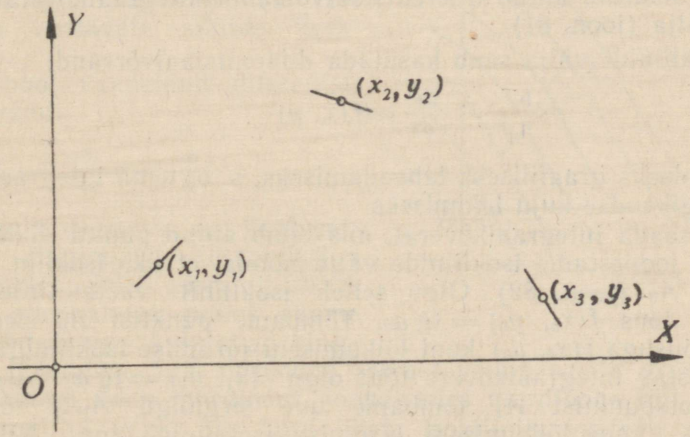
kujutab geomeetriliselt funktsionaalset seost integraalkõvera mistahes punkti koordinaatide x ja y ning integraalkõvera puutuja tõusu $\frac{dy}{dx}$ vahel selles punktis. Et siin funktsioon $f(x, y)$ väljendab integraalkõvera puutuja tõusu punktis (x, y), siis võime selles punktis joonestada integraalkõvera puutuja ilma integraalkõvera kuju teadmata. Andes muutujaile x ja y väärtusi

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ (x_3, y_3),\ \ldots,$$

saame vastavates punktides integraalkõverate puutujate tõusud

$$f(x_1, y_1),\ f(x_2, y_2),\ f(x_3, y_3),\ \ldots$$

ja järelikult ka vastavad puutujad (joon. 80). Niisuguste puutujatega võime täita kogu tasapinna, kus siis tekib nn. integraalkõverate s i h t i d e v ä l i.



Joon. 80.

Integraalkõverate sihtide välja võime kujutada ka nõnda, et märgime tasapinnal integraalkõverate need punktid, milledes integraalkõverate puutujate tõusunurk α on üks ja sama. Siis saame $f(x, y) = \operatorname{tg} \alpha$, mis esitab punktide geomeetrilist kohta, mille iga punkti läbiva integraalkõvera puutuja tõus on konstantne suurus. See punktide geomeetriline koht moodustab joone, mida nimetatakse integraalkõverate sihtide välja i s o k l i i n i k s. Nii saame isokliinide välja. Joonestades näiteks isokliinid, millede võrrandid on

$$f(x, y) = 0,\ f(x, y) = 1,\ f(x, y) = 2,\ \ldots,$$

saame rea kõveraid (või erijuhul sirgeid), millede punktides integraalkõverate tõus on teada, ja seega võime saada integraalkõverate sihtide välja.

Kui näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

puhul võtame α väärtuseks

$$30°,\ 60°,\ 90°,\ 120°,\ 150°,\ 180°,$$

siis $\operatorname{tg} \alpha$ väärtused on vastavalt

$$\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3},\ \infty,\ -\sqrt{3},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0$$

ning isokliinide võrrandid

$$y = -\sqrt{3}x,\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y = 0,\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ y = \sqrt{3}x,\ x = 0,$$

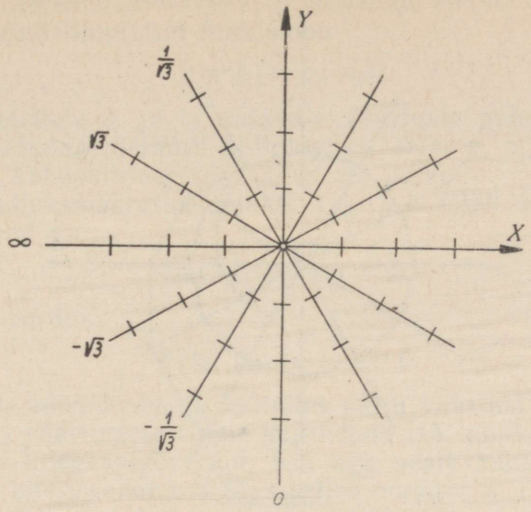
mis esitavad nullpunkti läbivaid sirgeid, millede punktid võimaldavad määrata antud diferentsiaalvõrrandi integraalkõverate sihtide välja (joon. 81).

Isokliinide välja saab kasutada diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ligikaudseks graafiliseks lahendamiseks, s. o. tema integraalkõverate ligikaudse kuju leidmiseks.

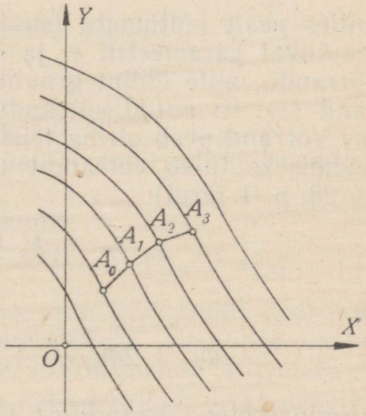
Et saada integraalkõverat, mis läbib antud punkti $A_0(x_0, y_0)$, selleks joonestame isokliinide välja nõnda, et üks isokliin läbiks punkti A_0 (joon. 82). Olgu sellele isokliinile vastav integraalkõvera tõus $f(x_0, y_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$. Tõmbame punktist A_0 sirglõigu A_0A_1 tõusuga $f(x_0, y_0)$ kuni lõikumiseni järgmise isokliiniga, millele vastav integraalkõvera tõus olgu $f(x_1, y_1) = \operatorname{tg} \alpha_1$. Sirglõigu A_0A_1 otspunktist A_1 tõmbame uue sirglõigu A_1A_2 tõusuga $f(x_1, y_1)$ kuni lõikumiseni järgmise isokliiniga jne. Niimoodi saame murdjoone $A_0A_1A_2\ldots$, mis on otsitava integraalkõvera



Joon. 81.

ligikaudseks kujuks. Saadud joon on seda lähedasem otsitavale integraalkõverale, mida tihedam on kasutatud isokliinide väli.

Et küllalt tiheda isokliinide välja joonestamine on üldiselt väga palju aega nõudev töö, siis on soovitatav täpsema integraalkõvera saamiseks tõmmata murdjoone $A_0A_1A_2\ldots$ iga lüli kahe teineteisele järgneva isokliini vahel mitte ühele isokliinile vastava sihiga, vaid mõlemale isokliinile vastavate sihtide keskmisega.

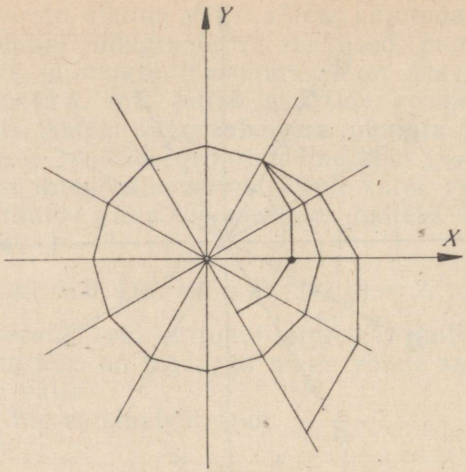


Joon. 82.

Eespool vaadeldud diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

integraalkõverateks on kontsentrilised ringjooned keskpunktiga nullpunktis. Selle võrrandi graafilise lahendamise puhul saame murdjooned, mis kujutavad ringjoonte lähendusi. Iga ringjoone asemel võime saada graafilisel lahendamisel kolm murdjoont, joonestades murdjoone lüli mingi kahe isokliini vahel üks kord ühele isokliinile vastava sihiga, teine kord teisele isokliinile vastava sihiga ja kolmas kord mõle-



Joon. 83.

male isokliinile vastavate sihtide keskmisega (joon. 83); viimane murdjoon kujutab otsitava ringjoone kui integraalkõvera kõige täpsemat lähendust.

§ 87. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi kujundamine. 1) Võtame võrrandi

$$\Phi(x,\ y,\ c_1,\ c_2) = 0, \tag{1}$$

milles peale sõltumatu muutuja x ja funktsiooni y esineb kaks muutuvat parameetrit c_1 ja c_2, ja leiame niisuguse diferentsiaalvõrrandi, mille üldintegraaliks on antud kahe parameetriga võrrand (1). Et antud võrrandis esineb kaks parameetrit, siis otsitav võrrand peab olema teist järku diferentsiaalvõrrand. Viimase leidmiseks tuleb võrrandit (1) diferentsida kaks korda, saades (§ 28, p. 1 järgi)

$$\Phi_x + \Phi_y \frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

ja

$$\Phi_{xx} + 2\Phi_{xy}\frac{dy}{dx} + \Phi_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \Phi_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0. \tag{3}$$

Elimineerides võrranditest (1), (2) ja (3) parameetrid c_1 ja c_2, saame teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x,\ y, \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

mille üldintegraaliks on kahe parameetriga võrrand

$$\Phi(x,\ y,\ c_1,\ c_2) = 0,$$

kusjuures diferentsiaalvõrrandi üldlahendit esitab viimasest võrrandist saadud ilmutatud funktsioon

$$y = \varphi(x, c_1, c_2).$$

Parameetritele c_1 ja c_2 antavate väärtuste puhul esitab teist järku diferentsiaalvõrrandi üldintegraal $\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$ geomeetriliselt kaheparameetrilist kõverate parve.

Kui kindlaksmääratud punkti (x_0, y_0) läbib integraalkõver, mille võrrand on

$$\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0,$$

siis kehtib võrdus

$$\Phi(x_0, y_0, c_1, c_2) = 0,$$

kus c_1 ja c_2 võivad omada kuitahes palju väärtusi. Seega vastavalt c_1 ja c_2 väärtustele võime kujundada läbi punkti (x_0, y_0) kuitahes palju integraalkõveraid. Kui aga peale punkti (x_0, y_0) on veel antud integraalkõvera tõus selles punktis, s. o. y_0', siis kehtivad võrdused

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x_0, y_0, c_1, c_2) &= 0 \\ \Phi_x(x_0, y_0, c_1, c_2) + \Phi_y(x_0, y_0, c_1, c_2) y_0' &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Kui see võrrandisüsteem omab c_1 ja c_2 suhtes ainult üht lahendit

$$c_1 = \varphi_1(x_0, y_0, y_0') \text{ ja } c_2 = \varphi_2(x_0, y_0, y_0'),$$

siis saame läbi punkti (x_0, y_0) kujundada ainult ühe integraalkõvera, mille võrrand on

$$\Phi[x, y, \varphi_1(x_0, y_0, y_0'), \varphi_2(x_0, y_0, y_0')] = 0$$

ehk lühemalt

$$\Phi_0(x, y, x_0, y_0, y_0') = 0,$$

mis kujutab teist järku diferentsiaalvõrrandi eriintegraali algväärtustega x_0, y_0 ja y_0'.

a) Kui ringjooni esitavas võrrandis

$$\Phi(x, y, c_1, c_2) = (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 - r^2 = 0$$

raadius r lugeda konstantseks suuruseks, keskpunkti koordinaadid c_1 ja c_2 aga muutuvateks parameetriteks, siis tuleb vastava diferentsiaalvõrrandi leidmiseks antud ringjoonte võrrandit kui ilmutamata funktsiooni diferentsida kaks korda. Selleks arvutame nõutavad osatuletised

$$\Phi_x = 2(x - c_1),\ \Phi_y = 2(y - c_2),\ \Phi_{xx} = 2,\ \Phi_{xy} = 0,\ \Phi_{yy} = 2,$$

millede asetamisel võrranditesse

$$\Phi_x + \Phi_y \frac{dy}{dx} = 0$$

ja

$$\Phi_{xx} + 2\Phi_{xy}\frac{dy}{dx} + \Phi_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \Phi_y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

saame

$$(x - c_1) + (y - c_2)\frac{dy}{dx} = 0$$

ja

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y - c_2)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Parameetrite c_1 ja c_2 elimineerimiseks avaldame viimasest võrrandist

$$y - c_2 = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

mille asetamisel eelviimasesse võrrandisse saame

$$x - c_1 = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \cdot \frac{dy}{dx},$$

ning lõpuks, paigutades saadud $x - c_1$ ja $y - c_2$ väärtused lähtevõrrandisse, leiame otsitava teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2} - r^2 = 0$$

ehk

$$\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 - r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = 0,$$

mis on võrdsete ringjoonte kaheparameetrilise parve diferentsiaalvõrrandiks.

b) Kui võtame näiteks võrrandi

$$y = c_1 \cos nx - c_2 \sin nx,$$

kus c_1 ja c_2 on parameetriteks, siis saame kaks korda diferentsides

$$\frac{dy}{dx} = -c_1 n \sin nx - c_2 n \cos nx$$

ja

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c_1 n^2 \cos nx + c_2 n^2 \sin nx =$$

$$= -n^2(c_1 \cos nx - c_2 \sin nx).$$

Et siin viimase võrduse sulgavaldis $c_1 \cos nx - c_2 \sin nx = y$, siis saame otseselt otsitava teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0,$$

mille üldlahendiks on kahe parameetriga funktsioon

$$y = c_1 \cos nx - c_2 \sin nx.$$

Kahe parameetriga võrrand $\Phi(x, y, c_1, c_2) = 0$ võimaldab ainult siis tuletada teist järku diferentsiaalvõrrandit, kui parameetrid c_1 ja c_2 pole ühendatavad üheks parameetriks. Vastasel korral saaksime diferentsimise ja parameetrite elimineerimise teel esimest järku diferentsiaalvõrrandi.

Näiteks võrrand

$$y^2 - 2c_1xy - c_2x^2 = 0$$

ei esita teist järku diferentsiaalvõrrandi üldintegraali, sest parameetrid c_1 ja c_2 on siin ühendatavad üheks parameetriks ning seega antud võrrand on identne võrdusega

$$y = cx,$$

mille saame y ilmutamisel eelmisest võrrandist, s. o.

$$y = c_1x + \sqrt{c_1^2x^2 + c_2x^2} = x(c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_2}) = cx,$$

kus $c = c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_2}$.

Diferentsides näeme samuti, et antud kahe parameetriga võrrand ei esita teist järku diferentsiaalvõrrandi üldintegraali. Diferentsime seda võrrandit ainult üks kord ja elimineerime võrranditest

$$y^2 - 2c_1xy - c_2x^2 = 0$$

ja

$$c_1y + c_2x + (c_1x - y)\frac{dy}{dx} = 0$$

näiteks c_2; saame

$$\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)(c_1x - y) = 0,$$

mis annab kaks võrrandit

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0 \text{ ja } c_1x - y = 0,$$

milledest esimene on esimest järku diferentsiaalvõrrand ja teine on selle esimest järku diferentsiaalvõrrandi üldintegraal.

Tähendab, kui kahe parameetriga võrrand esitab teist järku diferentsiaalvõrrandi üldintegraali, siis peavad parameetrid olema teineteisest sõltumatud.

2) Analoogiliselt jätkates võime saada kolmandat, neljandat jne., üldiselt n-järku diferentsiaalvõrrandi

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right)=0$$

ehk

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0$$

n parameetriga võrrandist

$$\Phi(x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)=0,$$

milles ükski parameeter pole teisega ühendatav. Diferentsides viimast võrrandit n korda ja elimineerides saadud võrranditest järk-järgult parameetrid $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$, saame n-järku diferentsiaalvõrrandi

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0.$$

Võrrand

$$\Phi(x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n)=0$$

on siis n-järku diferentsiaalvõrrandi

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0$$

üldintegraaliks, mis rahuldab seda diferentsiaalvõrrandit.

Parameetritele $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ antavate väärtuste puhul esitab n-järku diferentsiaalvõrrandi üldintegraal

$$\Phi(x,\ y,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_n)=0$$

geomeetriliselt n-parameetrilist kõverate parve.

Analoogiliselt teist järku diferentsiaalvõrrandi eriintegraali määramisviisile võime saada n-järku diferentsiaalvõrrandi eriintegraali üldintegraalist algväärtuste $x_0,\ y_0,\ y_0',\ y_0'',\ \ldots,\ y_0^{(n-1)}$ kaudu kindlaksmääratud parameetrite $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ väärtuste puhul. Peale selle aga võib n-järku diferentsiaalvõrrand omada ka singulaarseid ehk iseäraseid integraale, mis pole tuletatavad üldintegraalist.

§ 88. Teist järku diferentsiaalvõrrandid, milledes ilmselt puudub argument või tundmatu funktsioon. Kui teist järku diferentsiaalvõrrandis ilmselt puudub argument või tundmatu funktsioon, s. o.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f\left(y,\ \frac{dy}{dx}\right) \text{ või } \frac{d^2y}{dx^2}=f\left(x,\ \frac{dy}{dx}\right),$$

siis üldlahendi leidmiseks kujutatakse teist järku diferentsiaalvõrrandit teatavate teisenduste kaudu esimest järku diferentsiaalvõrrandina, kusjuures viimase diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks on siis

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(y, c_1) \quad \text{või} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, c_1),$$

mida nimetatakse teist järku diferentsiaalvõrrandi *esimeseks integraaliks*. Esimene integraal kujutab omakorda esimest järku diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend

$$y = \varphi_2(x, c_1, c_2) .$$

on teist järku diferentsiaalvõrrandi *teiseks integraaliks*, mis on ühtlasi teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

1) Kui teist järku diferentsiaalvõrrandis ilmselt puudub argument x, s. o.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right),$$

siis tähistame $\frac{dy}{dx} = p$ ning seega

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

kus nüüd p vaatleme kui y funktsiooni, mis on omakorda x funktsioon. Järelikult on p argumendi x liitfunktsioon. Paigutades $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ uued tähised diferentsiaalvõrrandisse, saame

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p),$$

mis kujutab nüüd esimest järku diferentsiaalvõrrandit, kus p on y funktsioon. Lahendades leiame

$$p = \varphi_1(y, c_1),$$

mis on teist järku diferentsiaalvõrrandi esimene integraal. Et aga $p = \frac{dy}{dx}$, siis saame jälle esimest järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(y, c_1),$$

mille üldlahend

$$y = \varphi_2(x, c_1, c_2)$$

on ühtlasi käsitletava teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

Analoogiliselt toimime, kui teist järku diferentsiaalvõrrandis peale argumendi x puudub ka funktsiooni esimene tuletis, s. o.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(y).$$

Võtame näiteks teist järku diferentsiaalvõrrandi

$$(y+1)\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

milles ilmselt puudub argument x. Selle võrrandi lahendamiseks tähistame

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ ja } \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy},$$

millede paigutamisel teist järku diferentsiaalvõrrandisse saame esimest järku diferentsiaalvõrrandi

$$(y+1)p\frac{dp}{dy} - p^2 = 0.$$

Muutujaid eraldades

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y+1}$$

ja inteegrides

$$\ln p = \ln(y+1) + \ln c_1$$

saame

$$p = c_1(y+1)$$

ehk

$$\frac{dy}{y+1} = c_1 dx,$$

mille integraal

$$\ln(y+1) = c_1 x + \ln c_2$$

määrab ühtlasi antud teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = c_2 e^{c_1 x} - 1.$$

2) Kui teist järku diferentsiaalvõrrandis ilmselt puudub tundmatu funktsioon y, s. o.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right),$$

siis tähistame

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ ja } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

millede paigutamisel teist järku diferentsiaalvõrrandisse saame

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p),$$

mis kujutab nüüd esimest järku diferentsiaalvõrrandit, kus p on x funktsioon. Lahendades viimase võrrandi, leiame esimese integraali

$$p = \varphi_1(x, c_1)$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x, c_1),$$

mille üldlahend

$$y = \varphi_2(x, c_1, c_2)$$

on ühtlasi käsitletava teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

Analoogiliselt toimime, kui teist järku diferentsiaalvõrrandis peale tundmatu funktsiooni puudub ka argument x, s. o.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$(1 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} = 0$$

lahendamiseks tähistame

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ ja } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx},$$

millede paigutamisel diferentsiaalvõrrandisse saame selle võrrandi kujul

$$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} - 2xp = 0.$$

Muutujaid eraldades

$$\frac{dp}{p} = \frac{2x\,dx}{1 + x^2}$$

ja inteegrides

$$\ln p = \ln(1 + x^2) + \ln c_1$$

saame

$$p = c_1(1 + x^2)$$

ehk

$$dy = c_1(1 + x^2)\,dx,$$

mille integraal

$$y = c_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + c_2$$

määrab antud teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendi.

§ 89. Diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine. 1) Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

üldlahendi leidmiseks tuleb teda järk-järgult inteegrida, kasutades n-kordset kvadratuuri:

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)\,dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int \varphi_1(x)\,dx + C_1 x + C_2 = \varphi_2(x) + C_1 x + C_2,$$

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int \varphi_2(x)\,dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 =$$

$$= \varphi_3(x) + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3,$$

. . . . . .

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_{n-1}(x) + \frac{C_1}{(n-2)!}x^{n-2} + \frac{C_2}{(n-3)!}x^{n-3} + \ldots + C_{n-2}x + C_{n-1},$$

$$y = \varphi_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

Kirjutades $\frac{C_1}{(n-1)!}$ asemele c_1, $\frac{C_2}{(n-2)!}$ asemele c_2 jne., saame üldlahendi kujul

$$y = \varphi_n(x) + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1}x + c_n,$$

mis iga $c_1, c_2, \ldots, c_n$ väärtuse puhul rahuldab antud n-järku diferentsiaalvõrrandit, kui ainult $f(x)$ on pidev funktsioon.

2) Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

lahendamiseks tähistame

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = z;$$

siis

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{dz}{dx}$$

ja antud diferentsiaalvõrrand teisendub esimest järku diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{dz}{dx} = f(x, z),$$

mille üldlahend on

$$z = \varphi_1(x, c_1),$$

mis kujutab nüüd $(n-1)$-järku diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \varphi_1(x, c_1),$$

mille üldlahendi leiame $n-1$ kvadratuuri abil, s. o.

$$y = \varphi_n(x, c_1) + c_2 x^{n-2} + c_3 x^{n-3} + \ldots + c_{n-1} x + c_n.$$

Analoogiliselt toimime, kui diferentsiaalvõrrand esineb kujul

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{x}\frac{d^3 y}{dx^3}$$

lahendamiseks tähistame

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = z;$$

siis

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{dz}{dx}$$

ja võrrand omandab kuju

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$$

ehk

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},$$

millest inteegrides saame

$$\ln z = \ln x + \ln C_1$$

ehk

$$z = C_1 x,$$

s. o.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = C_1 x,$$

ja kolme kvadratuuri abil leiame

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3,$$

$$y = \frac{C_1}{24} x^4 + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4.$$

Tähistades $\frac{C_1}{24} = c_1$, $\frac{C_2}{2} = c_2$, $C_3 = c_3$ ja $C_4 = c_4$, saame üldlahendi kujul

$$y = c_1 x^4 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4.$$

3) Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

lahendamiseks tähistame

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = z;$$

siis

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{dz}{dx} \text{ ja } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^2 z}{dx^2}$$

ning antud diferentsiaalvõrrand teisendub teist järku diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = f\left(z, \frac{dz}{dx}\right),$$

milles ilmselt puudub argument x. Selle teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend on (§ 88, p. 1 järgi)

$$z = \varphi_2(x, c_1, c_2),$$

mis kujutab nüüd $(n-2)$-järku diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \varphi_2(x, c_1, c_2),$$

mille üldlahendi leiame $n-2$ kvadratuuri abil, s. o.

$$y = \varphi_n(x, c_1, c_2) + c_3x^{n-3} + c_4x^{n-4} + \ldots + c_{n-1}x + c_n.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

lahendamiseks tähistame

$$\frac{dy}{dx} = z;$$

siis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} \text{ ja } \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^2z}{dx^2}$$

ning võrrand teisendub teist järku diferentsiaalvõrrandiks

$$\frac{d^2z}{dx^2}(1 + z^2) - 2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 0,$$

milles ilmselt puudub argument. Edasi tähistame

$$\frac{dz}{dx} = p \text{ ja } \frac{d^2z}{dx^2} = p\frac{dp}{dz};$$

siis

$$p\frac{dp}{dz}(1 + z^2) - 2zp^2 = 0.$$

Muutujaid eraldades

$$\frac{dp}{p} = \frac{2z\,dz}{1 + z^2}$$

ja inteegrides

$$\ln p = \ln(1 + z^2) + \ln c_1$$

saame

$$p = c_1(1 + z^2)$$

ehk

$$\frac{dz}{1 + z^2} = c_1\,dx,$$

mille integraal on

$$\operatorname{arctg} z = c_1x + c_2,$$

kust

$$z = \operatorname{tg}(c_1x + c_2)$$

ehk

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(c_1 x + c_2).$$

Viimast võrrandit inteegrides saame antud kolmandat järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = c_3 - \frac{1}{c_1} \ln \cos(c_1 x + c_2).$$

§ 90. Kõrgemat järku lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandid. Diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2(x) \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x) y = 0,$$

milles otsitav funktsioon y ja tema tuletised on esimeses astmes ning $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ on sõltumatu muutuja x pidevad funktsioonid (või konstantsed suurused), nimetatakse *n-järku lineaarseks homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks*, sest selle võrrandi vasak pool on homogeenne funktsiooni y ja tema tuletiste suhtes (nad kõik on esimeses astmes). Kõrgeimat järku tuletise koefitsiendi võtame võrdseks ühega.*

Enne kui asume lineaarsete homogeensete diferentsiaalvõrrandite lahendamisele, esitame mõned üldised seisukohad ja teoreemid, mis on vajalikud nende võrrandite üldlahendi leidmisel. Selleks võtame kõigepealt kasutusele kahe funktsiooni lineaarse sõltumatuse mõiste.

Definitsioon: *Kaht funktsiooni $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ nimetatakse lineaarselt sõltumatuteks, kui nende suhe ei ole konstantne suurus.* Teiste sõnadega tähendab see, et funktsioonid $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on lineaarselt sõltumatud, kui ei saa valida konstantseid suurusi k_1 ja k_2, mis ei ole üheaegselt nullid, niisugustena, et lineaarne kombinatsioon $k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x)$ oleks samaselt võrdne nulliga. Kui aga mõnede k_1 ja k_2 väärtuste puhul on $k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x) = 0$, siis on funktsioonide suhe $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = -\frac{k_1}{k_2}$ (kui $k_2 \neq 0$) konstantne suurus ja üks funktsioon saadakse teisest selle korrutamisel konstantse suurusega. Sel juhul on funktsioonid $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ teineteisest *lineaarselt sõltuvad*.

Analoogiliselt eelnevale ütleme, et üldiselt n funktsiooni

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$$

on lineaarselt sõltumatud, kui ei saa valida konstantseid suurusi

---

* Kui kõrgeimat järku tuletise koefitsient oleks ühest erinev konstantne suurus või sõltumatu muutuja x funktsioon, siis — jagades diferentsiaalvõrrandi kõik liikmed selle koefitsiendiga — saaksime ikka esitatud kuju.

$k_1, k_2, \ldots, k_n$, mis ei ole kõik üheaegselt nullid, niisugustena, et lineaarne kombinatsioon

$$k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x) + \ldots + k_n\varphi_n(x)$$

oleks samaselt võrdne nulliga. Kui aga

$$k_1\varphi_1(x) + k_2\varphi_2(x) + \ldots + k_n\varphi_n(x) = 0,$$

kus vähemalt üks konstantsetest suurustest $k_1, k_2, \ldots, k_n$ on nullist erinev, siis on funktsioonid $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ lineaarselt sõltuvad. Sel juhul saab neist funktsioonidest igaüht (kui tema ees olev koefitsient ei ole null) avaldada ülejäänud funktsioonide lineaarse kombinatsioonina. Kui näiteks $k_n \neq 0$, siis

$$\varphi_n(x) = -\frac{k_1}{k_n}\varphi_1(x) - \frac{k_2}{k_n}\varphi_2(x) - \ldots - \frac{k_{n-1}}{k_n}\varphi_{n-1}(x).$$

Edasi tõestame teoreemi, millele toetume edaspidi esinevate teoreemide tõestamisel. See teoreem kannab Ostrogradski nime.

Ostrogradski teoreem: Kui $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on teist järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

erilahendid, siis determinant

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = W_2(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P_1(x)dx},$$

kus

$$W_2(x_0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}.$$

Et eelduse järgi $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on diferentsiaalvõrrandi (1) lahendid, siis rahuldavad nad seda võrrandit, s. o.

$$\varphi_1''(x) + P_1(x)\varphi_1'(x) + P_2(x)\varphi_1(x) = 0,$$
$$\varphi_2''(x) + P_1(x)\varphi_2'(x) + P_2(x)\varphi_2(x) = 0.$$

Korrutades neist võrranditest esimese $\varphi_2(x)$-ga ja teise $\varphi_1(x)$-ga ning lahutades siis teisest esimese, saame

$$[\varphi_1(x)\varphi_2''(x) - \varphi_2(x)\varphi_1''(x)] + P_1(x)[\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)] = 0,$$

kus nüüd teine sulgavaldis kujutab kaherealist determinanti

$W_2(x)$ ja esimene sulgavaldis selle tuletist $\frac{dW_2(x)}{dx}$, sest

$$\frac{dW_2(x)}{dx} = \varphi_1'(x)\varphi_2'(x) + \varphi_1(x)\varphi_2''(x) - \varphi_2'(x)\varphi_1'(x) - \\ - \varphi_2(x)\varphi_1''(x) = \varphi_1(x)\varphi_2''(x) - \varphi_2(x)\varphi_1''(x).$$

Tähendab,

$$\frac{dW_2(x)}{dx} + P_1(x)W_2(x) = 0,$$

millest

$$\frac{dW_2(x)}{W_2(x)} = -P_1(x)dx.$$

Inteegrides viimast võrdust x_0-st x-ni, saame

$$\ln \frac{W_2(x)}{W_2(x_0)} = -\int_{x_0}^{x} P_1(x)dx,$$

millest

$$W_2(x) = W_2(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} P_1(x)dx}.$$

Saadud võrdusest nähtub, et kui $W_2(x_0) = 0$, siis on ka $W_2(x) = 0$. Kui aga $W_2(x_0) \neq 0$, siis $W_2(x)$ ei saa ühegi x väärtuse puhul nulliks, sest saadud võrduse parema poole teine tegur on iga x väärtuse puhul nullist erinev.

Determinanti $W_2(x)$ nimetatakse Wronski* determinandiks. See on kaherealine Wronski determinant.

Teoreem 1: Kui $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on teist järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

lineaarselt sõltumatud erilahendid, siis Wronski determinant

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Selle teoreemi tõestamiseks väidame vastupidiselt, et mingi x väärtuse $x = x_0$ puhul, mis kuulub diferentsiaalvõrrandi (1) koefitsientide $P_1(x)$ ja $P_2(x)$ pidevuspiirkonda, on $W_2(x_0) = 0$. Siis

---

* Jozef Wronski (1778—1853) — poola filosoof ja matemaatik, kes püüdis põhjendada filosoofiat matemaatika abil.

on Ostrogradski teoreemi järgi ka $W_2(x) = 0$. Sel juhul on funktsioonide suhte $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}$ tuletis

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}\right] = \frac{\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)^2} = \frac{W_2(x)}{\varphi_1(x)^2} = 0,$$

millest järeldub, et $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = \text{konst}$. Et aga funktsioonid $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on eelduse järgi lineaarselt sõltumatud, siis nende suhe ei saa olla konstantne suurus ning seega $W_2(x) \neq 0$.

Teoreem 2: Kui $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on teist järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

lineaarselt sõltumatud erilahendid, siis võrrandi üldlahend on võrdne erilahendite lineaarse kombinatsiooniga

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \qquad (2)$$

kus c_1 ja c_2 on meelevaldsed konstantsed suurused.

Kõigepealt näitame, et funktsioon (2) rahuldab iga c_1 ja c_2 puhul diferentsiaalvõrrandit (1) ja on seega selle võrrandi lahendiks. Selleks võtame tuletised

$$\frac{dy}{dx} = c_1\varphi_1'(x) + c_2\varphi_2'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = c_1\varphi_1''(x) + c_2\varphi_2''(x)$$

ja paigutame y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused võrrandi (1) vasakusse poolde; saame

$$\begin{aligned} &c_1\varphi_1''(x) + c_2\varphi_2''(x) + P_1(x)[c_1\varphi_1'(x) + c_2\varphi_2'(x)] + \\ &+ P_2(x)[c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)] = \\ &= c_1[\varphi_1''(x) + P_1(x)\varphi_1'(x) + P_2(x)\varphi_1(x)] + \\ &+ c_2[\varphi_2''(x) + P_1(x)\varphi_2'(x) + P_2(x)\varphi_2(x)], \end{aligned}$$

kus nüüd viimase võrduse paremal poolel nurksulgudes esinevad avaldised kujutavad tulemust, mis saadakse vastavalt funktsioonide $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ ning nende tuletiste asetamisel diferentsiaalvõrrandi (1) vasakusse poolde. Et $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on eelduse järgi diferentsiaalvõrrandi (1) erilahendid, siis seega mõlemad sulgavaldised on võrdsed nulliga. Sellest järeldubki, et funktsioon (2) rahuldab diferentsiaalvõrrandit (1) ja on seega selle võrrandi lahendiks.

Edasi veendume, et funktsioon (2) on ühtlasi diferentsiaalvõrrandi (1) **üldlahendiks**. Selleks oletame, et funktsioonide $P_1(x)$ ja $P_2(x)$ pidevuspiirkonnas mingi x väärtuse $x = x_0$ puhul funktsiooni y algväärtuseks on $y_{x=x_0} = y_0$ ja $y'_{x=x_0} = y_0'$. Näitame, et sel eeldusel saame funktsioonide $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ jaoks valida niisugused c_1 ja c_2, et funktsioon (2) rahuldab tähendatud algväärtusi. Seega peab olema

$$y_0 = c_1\varphi_1(x_0) + c_2\varphi_2(x_0),$$
$$y_0' = c_1\varphi_1'(x_0) + c_2\varphi_2'(x_0),$$

milledest

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & \varphi_2(x_0) \\ y_0' & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & \varphi_2(x_0) \\ y_0' & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}}{W_2(x_0)},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & y_0 \\ \varphi_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & \varphi_2(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \varphi_2'(x_0) \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x_0) & y_0 \\ \varphi_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W_2(x_0)},$$

kus võrrandisüsteemi determinant (kui Wronski determinant) $W_2(x_0) \neq 0$ ning seega c_1 ja c_2 omavad kindlaid lõplikke väärtusi. See tähendabki, et funktsioon (2) kujutab ühtlasi diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendit.

Kui erilahendid $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on lineaarselt sõltuvad, s. o. $\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = k = \text{konst.}$ ehk $\varphi_2(x) = k\varphi_1(x)$, siis funktsioon

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = (c_1 + kc_2)\varphi_1(x) = c\varphi_1(x)$$

sõltub ainult ühest meelevaldsest konstantsest suurusest c. Sel juhul funktsioon (2) ei saa olla teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendiks.

Lineaarselt sõltumatuid erilahendeid $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ nimetatakse diferentsiaalvõrrandi (1) **fundamentaallahenditeks**, mis moodustavad diferentsiaalvõrrandi lahendite **fundamentaalsüsteemi**.

Tähendab, teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmiseks on vaja teada selle võrrandi fundamentaallahendeid.

Analoogiliselt jätkates võime eespool käsitletud Ostrogradski teoreemi ja teisi teoreeme üle kanda n-järku lineaarsele homogeensele diferentsiaalvõrrandile

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = 0$$

ja näidata, et n-realine Wronski determinant

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \dots & \varphi_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

kui $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ on selle võrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid, ning tõestada, et võrrandi üldlahendiks on

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x),$$

kus c_1, c_2, ..., c_n on meelevaldsed konstantsed suurused.*

Teoreem 3: Kui teist järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \qquad (1)$$

üks erilahend $\varphi_1(x)$ on teada, siis sellest lineaarselt sõltumatu teine erilahend on

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{\varphi_1(x)^2}\,dx.$$

Selle teoreemi tõestamiseks teeme asenduse

$$y = \varphi_1(x)\cdot u,$$

kus u on x mingi tundmatu funktsioon, mille valime nõnda, et $\varphi_1(x)u$ esitaks diferentsiaalvõrrandi (1) lahendit ja nimelt üldlahendit. Võtame funktsiooni $y = \varphi_1(x)u$ esimese ja teise tuletise, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = u\varphi_1'(x) + \varphi_1(x)\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u\varphi_1''(x) + 2\varphi_1'(x)\frac{du}{dx} + \varphi_1(x)\frac{d^2u}{dx^2}$$

ja asetame y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused võrrandisse (1); saame

$$[\varphi_1''(x) + P_1(x)\varphi_1'(x) + P_2(x)\varphi_1(x)]u +$$
$$+ \varphi_1(x)\frac{d^2u}{dx^2} + 2\varphi_1'(x)\frac{du}{dx} + P_1(x)\varphi_1(x)\frac{du}{dx} = 0.$$

---

* Põhjaliku tõestuse nende teoreemide kohta leiab lugeja raamatust: В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1950, гл. V, § 2.

Et $\varphi_1(x)$ on eelduse järgi diferentsiaalvõrrandi (1) erilahend, siis nurksulgudes esinev avaldis on võrdne nulliga, mille puhul u leidmiseks saame võrrandi

$$\varphi_1(x)\frac{d^2u}{dx^2}+2\varphi_1'(x)\frac{du}{dx}+P_1(x)\varphi_1(x)\frac{du}{dx}=0.$$

Kui tähistame

$$\frac{du}{dx}=z \quad \text{ja} \quad \frac{d^2u}{dx^2}=\frac{dz}{dx},$$

siis omandab viimane võrrand kuju

$$\varphi_1(x)\frac{dz}{dx}+2\varphi_1'(x)z+P_1(x)\varphi_1(x)z=0,$$

milles saame muutujad eraldada, s. o.

$$\frac{dz}{z}+\left[\frac{2\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}+P_1(x)\right]dx=0.$$

Inteegrides leiame

$$\ln z+2\ln\varphi_1(x)+\int P_1(x)\,dx=\ln c_2$$

ehk

$$\ln z=\ln\frac{c_2}{\varphi_1(x)^2}-\int P_1(x)\,dx,$$

millest

$$z=\frac{c_2}{\varphi_1(x)^2}\cdot e^{-\int P_1(x)dx}$$

ja seega

$$\frac{du}{dx}=\frac{c_2}{\varphi_1(x)^2}\cdot e^{-\int P_1(x)dx}.$$

Viimast võrdust inteegrides saame

$$u=c_2\int\frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{\varphi_1(x)^2}\,dx+c_1$$

ehk

$$\frac{y}{\varphi_1(x)}=c_2\int\frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{\varphi_1(x)^2}\,dx+c_1,$$

millest üldlahend

$$y=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_1(x)\int\frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{\varphi_1(x)^2}\,dx,$$

kus avaldis

$$\varphi_1(x)\int\frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{\varphi_1(x)^2}dx=\varphi_2(x)$$

on diferentsiaalvõrrandi (1) teine erilahend, mis on esimesest lineaarselt sõltumatu.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x+1}{x}\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=0$$

üks erilahend on $\varphi_1(x)=e^x$, sest ta rahuldab antud võrrandit. Teine erilahend on siis (valemi järgi)

$$\varphi_2(x)=\varphi_1(x)\int\frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{\varphi_1(x)^2}dx=$$

$$=e^x\int\frac{e^{\int\frac{x+1}{x}dx}}{e^{2x}}dx=e^x\int\frac{e^{x+\ln x}}{e^{2x}}dx=$$

$$=e^x\int\frac{e^{\ln x}}{e^x}dx=e^x\int\frac{x\,dx}{e^x}=$$

$$=e^x\left(-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=-(x+1).$$

Järelikult antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y=c_1e^x-c_2(x+1).$$

Ümberpöördult, kui üheks erilahendiks võtta $\varphi_1(x)=-(x+1)$, siis teine erilahend on

$$\varphi_2(x)=-(x+1)\int\frac{e^{\int\frac{x+1}{x}dx}}{(x+1)^2}dx=$$

$$=-(x+1)\int\frac{e^{x+\ln x}}{(x+1)^2}dx=-(x+1)\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx=$$

$$=-(x+1)\left(-\frac{xe^x}{x+1}+e^x\right)=-e^x$$

ning üldlahend

$$y=-c_1(x+1)+c_2e^x,$$

mis on identne eespool saadud üldlahendiga.

Teoreem 4: Kui n-järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+P_n(x)y=0 \qquad (3)$$

üks erilahend on teada, siis võime selle võrrandi taandada $(n-1)$-järku homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks.

Olgu $\varphi_1(x)$ teadaolev erilahend. Tähistame siin

$$y = \varphi_1(x) \int z\,dx,$$

kus z on mingi x funktsioon. Siis

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1(x)z + \varphi_1'(x)\int z\,dx,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi_1(x)\frac{dz}{dx} + 2\varphi_1'(x)z + \varphi_1''(x)\int z\,dx,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi_1(x)\frac{d^2z}{dx^2} + 3\varphi_1'(x)\frac{dz}{dx} + 3\varphi_1''(x)z + \varphi_1'''(x)\int z\,dx,$$

. . . . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \varphi_1(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + n\varphi_1'(x)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + \frac{n(n-1)}{2!}\varphi_1''(x)\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}} +$$

$$+ \ldots + n\varphi_1^{(n-1)}(x)z + \varphi_1^{(n)}(x)\int z\,dx.$$

Asetades funktsiooni ja tema tuletiste väärtused diferentsiaalvõrrandisse (3) ja jagades võrrandi mõlemad pooled $\varphi_1(x)$-ga, saame $(n-1)$-järku homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}} + F_1(x)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}} + F_2(x)\frac{d^{n-3}z}{dx^{n-3}} + \ldots + F_{n-1}(x)z = 0, \quad (4)$$

kus

$$F_1(x) = n\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + P_1(x),$$

$$F_2(x) = \frac{n(n-1)}{2}\frac{\varphi_1''(x)}{\varphi_1(x)} + (n-1)P_1(x)\frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)} + P_2(x),$$

. . . . . .

$$F_{n-1}(x) = n\frac{\varphi_1^{(n-1)}(x)}{\varphi_1(x)} + (n-1)P_1(x)\frac{\varphi_1^{(n-2)}(x)}{\varphi_1(x)} +$$

$$+ (n-2)P_2(x)\frac{\varphi_1^{(n-3)}(x)}{\varphi_1(x)} + \ldots + P_{n-1}(x),$$

kusjuures integraali $\int z\,dx$ sisaldav liige on võrdne nulliga, sest selle koefitsient

$$\varphi_1^{(n)}(x) + P_1(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + P_2(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \ldots +$$
$$+ P_n(x)\varphi_1(x) = 0,$$

kus $\varphi_1(x)$ on diferentsiaalvõrrandi (3) erilahend. Seega

$$y = \varphi_1(x)\int z\,dx$$

määrab n-järku homogeense diferentsiaalvõrrandi (3) üldlahendi, kui meil on teada $(n-1)$-järku homogeense diferentsiaalvõrrandi (4) üldlahend z.

Kui $(n-1)$-järku homogeense diferentsiaalvõrrandi (4) lineaarselt sõltumatud erilahendid on

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1},$$

siis n-järku diferentsiaalvõrrandi (3) erilahendid on

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi_1(x) \int z_1 dx,$$
$$\varphi_3(x) = \varphi_1(x) \int z_2 dx, \quad \ldots, \quad \varphi_n(x) = \varphi_1(x) \int z_{n-1} dx,$$

mis on samuti lineaarselt sõltumatud, sest kui oleks

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_1(x) \int z_1 dx + c_3\varphi_1(x) \int z_2 dx + \ldots + c_n\varphi_1(x) \int z_{n-1} dx = 0,$$

s. o.

$$c_1 + c_2 \int z_1 dx + c_3 \int z_2 dx + \ldots + c_n \int z_{n-1} dx = 0,$$

siis saaksime diferentsides, et

$$c_2 z_1 + c_3 z_2 + \ldots + c_n z_{n-1} = 0,$$

mis on võimatu, sest erilahendid $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ on eelduse järgi lineaarselt sõltumatud funktsioonid. Seega määravad need erilahendid üldlahendi

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_1(x) \int z_1 dx + c_3\varphi_1(x) \int z_2 dx + \ldots + c_n\varphi_1(x) \int z_{n-1} dx.$$

Näiteks kolmandat järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x^3}y = 0$$

üks erilahend on $\varphi_1(x) = x^2$. Seega võime siin tähistada

$$y = x^2 \int z dx,$$

mille kolm tuletist on

$$\frac{dy}{dx} = x^2 z + 2x \int z dx,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^2 \frac{dz}{dx} + 4xz + 2 \int z dx,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^2 \frac{d^2z}{dx^2} + 6x \frac{dz}{dx} + 6z.$$

Asetades funktsiooni ja tema tuletiste väärtused antud diferent-

siaalvõrrandisse, saame teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{5}{x}\frac{dz}{dx} + \frac{4}{x^2}z = 0.$$

Saadud teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandi üks erilahend on $z_1 = x^{-2}$, mille puhul tähistame

$$z = x^{-2}\int u dx,$$

kus u on mingi x funktsioon. Võtame viimase funktsiooni kaks tuletist

$$\frac{dz}{dx} = x^{-2}u - 2x^{-3}\int u dx,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = x^{-2}\frac{du}{dx} - 4x^{-3}u + 6x^{-4}\int u dx$$

ning asetame funktsiooni ja saadud tuletiste väärtused teist järku homogeensesse võrrandisse; saame esimest järku diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} = 0 \quad \text{ehk} \quad \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0,$$

mille üldlahend on

$$u = \frac{C_1}{x}.$$

Siis teist järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$z = x^{-2}\int \frac{C_1}{x} dx = x^{-2}(C_1 \ln x + C_2)$$

ja antud kolmandat järku diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = x^2 \int x^{-2}(C_1 \ln x + C_2)dx =$$
$$= -C_1 x \ln x - (C_1 + C_2)x + C_3 x^2.$$

Tähistades $-C_1 - C_2 = c_1$, $C_3 = c_2$ ja $-C_1 = c_3$, saame üldlahendi kujul

$$y = x(c_1 + c_2 x + c_3 \ln x).$$

§ 91. Kõrgemat järku lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid. Diferentsiaalvõrrand

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = Q(x),$$

milles $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$ ja $Q(x)$ on mistahes pidevad x funktsioonid (või konstantsed suurused), on *n-järku lineaarne mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand*. Kui selles võrrandis võtta $Q(x) = 0$, siis nimetatakse võrrandit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = 0$$

mittehomogeensele diferentsiaalvõrrandile *vastavaks homogeenseks võrrandiks*.

Et leida mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend, selleks tuleb enne leida talle vastava homogeense võrrandi üldlahend, sest mittehomogeense võrrandi üldlahendit saab kujutada selle võrrandi mingi erilahendi ja vastava homogeense võrrandi üldlahendi summana.

Teoreem: *Teist järku lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = Q(x) \tag{1}$$

üldlahendit saab esitada kujul

$$y = \varphi(x) + \psi(x), \tag{2}$$

kus $\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$ *on vastava homogeense võrrandi üldlahend ja* $\psi(x)$ *on mittehomogeense võrrandi mingi erilahend.*

Võtame funktsiooni (2) esimese ja teise tuletise

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) + \psi'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi''(x) + \psi''(x)$$

ning asetame y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused võrrandi (1) vasakusse poolde; saame

$$\varphi''(x) + \psi''(x) + P_1(x)[\varphi'(x) + \psi'(x)] + P_2(x)[\varphi(x) + \psi(x)] =$$
$$= [\varphi''(x) + P_1(x)\varphi'(x) + P_2(x)\varphi(x)] +$$
$$+ [\psi''(x) + P_1(x)\psi'(x) + P_2(x)\psi(x)].$$

Et $\varphi(x)$ on mittehomogeensele võrrandile (1) vastava homogeense võrrandi üldlahend, siis esimestes nurksulgudes esinev avaldis on võrdne nulliga, ja et $\psi(x)$ on eelduse järgi mittehomogeense võrrandi (1) erilahend, siis teistes nurksulgudes esinev avaldis on võrdne funktsiooniga $Q(x)$. Järelikult funktsioon $y = \varphi(x) + \psi(x)$ on diferentsiaalvõrrandi (1) lahendiks, kus esinevad meelevaldsed konstantsed suurused c_1 ja c_2, milledest sõltub $\varphi(x)$. Neid konstantseid suurusi on ikka võimalik valida niisugustena, et nad rahuldaksid mistahes algväärtusi, mida saame näidata paragrahvis 90 (teoreem 2) käsitletud viisil.

Seega funktsioon $y = \varphi(x) + \psi(x)$ kujutab ühtlasi diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendit.

Analoogiliselt saab näidata, et n-järku mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = Q(x)$$

üldlahendiks on

$$y = \varphi(x) + \psi(x),$$

kus $\varphi(x)$ on vastava homogeense võrrandi üldlahend, s. o.

$$\varphi(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

ja $\psi(x)$ mittehomogeense võrrandi mingi erilahend.

Mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendi $\psi(x)$ ja järelikult ka üldlahendi saame alati leida, kui on teada mittehomogeensele võrrandile vastava homogeense võrrandi üldlahend.

1) Olgu teist järku mittehomogeensele diferentsiaalvõrrandile

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = Q(x) \tag{1}$$

vastava homogeense võrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0 \tag{3}$$

üldlahend

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

kus $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on fundamentaallahendid. Vaatleme nn. meelevaldsete konstantide variatsiooni meetodit diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendi leidmiseks; selleks näitame, et parameetreid c_1 ja c_2 on võimalik asendada niisuguste x funktsioonidega $C_1(x)$ ja $C_2(x)$, et funktsioon

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x)$$

rahuldaks mittehomogeenset diferentsiaalvõrrandit (1) ja kujutaks ühtlasi selle võrrandi üldlahendit.

Valime funktsioonid $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ nõnda, et y tuletises

$$\frac{dy}{dx} = C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x) + C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x)$$

oleks

$$C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0$$

ning seega

$$\frac{dy}{dx} = C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x).$$

Kui see tingimus on täidetud, siis teine tuletis

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1(x)\varphi_1''(x) + C_2(x)\varphi_2''(x) + C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x).$$

Asetades nüüd y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ väärtused mittehomogeensesse diferentsiaalvõrrandisse (1), saame

$$\begin{gathered} C_1(x)\varphi_1''(x) + C_2(x)\varphi_2''(x) + C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) + \\ + P_1(x)[C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x)] + \\ + P_2(x)[C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x)] = Q(x) \end{gathered}$$

ehk

$$\begin{gathered} C_1(x)[\varphi_1''(x) + P_1(x)\varphi_1'(x) + P_2(x)\varphi_1(x)] + \\ + C_2(x)[\varphi_2''(x) + P_1(x)\varphi_2'(x) + P_2(x)\varphi_2(x)] + \\ + C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = Q(x). \end{gathered}$$

Et $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on homogeense diferentsiaalvõrrandi (3) fundamentaallahendid, siis seega viimases võrduses sulgavaldised on võrdsed nulliga. Järelikult

$$C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = Q(x).$$

Selle arvutuse tulemusena saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = Q(x), \end{cases}$$

mida $C_1'(x)$ ja $C_2'(x)$ suhtes lahendades leiame, et

$$C_1'(x) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2(x) \\ Q(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}} = -\frac{\varphi_2(x)Q(x)}{W_2(x)}$$

ja

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & 0 \\ \varphi_1'(x) & Q(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix}} = \frac{\varphi_1(x)Q(x)}{W_2(x)}.$$

Siin $C_1'(x)$ ja $C_2'(x)$ omavad ikka lõplikke väärtusi, sest (§ 90, teoreemi 1 põhjal) Wronski determinant $W_2(x) \neq 0$.

Inteegrides funktsioone $C_1'(x)$ ja $C_2'(x)$, leiame

$$C_1(x) = -\int \frac{\varphi_2(x)Q(x)}{W_2(x)}\,dx = \psi_1(x) + c_1$$

ja

$$C_2(x) = \int \frac{\varphi_1(x)Q(x)}{W_2(x)}\,dx = \psi_2(x) + c_2,$$

millede asetamisel funktsiooni

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x)$$

saame mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendi

$$y = [\psi_1(x) + c_1]\varphi_1(x) + [\psi_2(x) + c_2]\varphi_2(x) =$$
$$= c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \psi_1(x)\varphi_1(x) + \psi_2(x)\varphi_2(x)$$

ehk lühidalt

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \psi(x),$$

kui tähistame

$$\psi(x) = \psi_1(x)\varphi_1(x) + \psi_2(x)\varphi_2(x),$$

mis on ühtlasi diferentsiaalvõrrandi (1) üheks erilahendiks.

Näiteks diferentsiaalvõrrandile

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1+x^2}{1-x^2}y = \frac{x}{1-x^2}$$

vastava homogeense võrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{4x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{1+x^2}{1-x^2}y = 0$$

üks fundamentaallahend on

$$\varphi_1(x) = \frac{\sin x}{1-x^2}$$

ja teine fundamentaallahend (eelmises paragrahvis esitatud valemi järgi)

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)\int \frac{e^{-\int P_1(x)\,dx}}{\varphi_1(x)^2}\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{1-x^2}\int \frac{e^{\int \frac{4x\,dx}{1-x^2}}}{\left(\frac{\sin x}{1-x^2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \frac{\sin x}{1-x^2}\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{1-x^2}.$$

Homogeense võrrandi üldlahend on seega

$$y = c_1\frac{\sin x}{1-x^2} - c_2\frac{\cos x}{1-x^2}.$$

Mittehomogeense võrrandi üldlahendi leidmiseks võtame

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x),$$

kus

$$\varphi_1(x) = \frac{\sin x}{1-x^2} \quad \text{ja} \quad \varphi_2(x) = -\frac{\cos x}{1-x^2},$$

millede tuletised

$$\varphi_1'(x) = \frac{(1-x^2)\cos x + 2x\sin x}{(1-x^2)^2}$$

ja

$$\varphi_2'(x) = \frac{(1-x^2)\sin x - 2x\cos x}{(1-x^2)^2}$$

ning Wronski determinant

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

Funktsioonid $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ on seega

$$C_1(x) = -\int \frac{\varphi_2(x)Q(x)}{W_2(x)}\,dx = \int \frac{\frac{\cos x}{1-x^2}\cdot\frac{x}{1-x^2}}{\frac{1}{(1-x^2)^2}}\,dx =$$

$$= \int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x + c_1$$

ja

$$C_2(x) = \int \frac{\varphi_1(x)Q(x)}{W_2(x)}\,dx = \int \frac{\frac{\sin x}{1-x^2}\cdot\frac{x}{1-x^2}}{\frac{1}{(1-x^2)^2}}\,dx =$$

$$= \int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x + c_2.$$

Asetades saadud $C_1(x)$ ja $C_2(x)$ väärtused funktsiooni

$$y = C_1(x)\,\frac{\sin x}{1-x^2} - C_2(x)\,\frac{\cos x}{1-x^2},$$

saame antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = \frac{c_1\sin x - c_2\cos x + x}{1-x^2},$$

kus erilahend $\psi(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

2) Kolmandat, neljandat jne., üldse n-järku mittehomogeense

diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = Q(x)$$

üldlahendi võime leida analoogiliselt teist järku mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmisele, kasutades meelevaldsete konstantide variatsiooni meetodit. Selleks tuleb enne leida mittehomogeensele diferentsiaalvõrrandile vastava homogeense võrrandi üldlahend

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

kus $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ on homogeense võrrandi fundamentaallahendid (lineaarselt sõltumatud erilahendid). Asendame parameetrid c_1, c_2, ..., c_n vastavalt niisuguste x funktsioonidega $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$, et nende tuletised $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$ rahuldaksid võrrandisüsteemi

$$\begin{aligned}
C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n(x) &= 0,\\
C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n'(x) &= 0,\\
C_1'(x)\varphi_1''(x) + C_2'(x)\varphi_2''(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n''(x) &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) &= 0,\\
C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) &= Q(x),
\end{aligned}$$

mille lahendamisel $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$ suhtes Wronski determinant (kui võrrandisüsteemi determinant)

$$W_n(x) = \begin{vmatrix}
\varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x)\\
\varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x)
\end{vmatrix} \neq 0.$$

Leides $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$, saame inteegrimisel

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \int C_1'(x)\,dx = \psi_1(x) + c_1,\\
C_2(x) &= \int C_2'(x)\,dx = \psi_2(x) + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
C_n(x) &= \int C_n'(x)\,dx = \psi_n(x) + c_n,
\end{aligned}$$

millede asetamisel funktsiooni

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + C_n(x)\varphi_n(x)$$

saame n-järku lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \psi(x),$$

kus

$$\psi(x) = \psi_1(x)\varphi_1(x) + \psi_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + \psi_n(x)\varphi_n(x).$$

§ 92. Konstantsete koefitsientidega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid. Diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0,$$

kus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on reaalsed konstantsed suurused, nimetatakse konstantsete koefitsientidega lineaarseks homogeenseks diferentsiaalvõrrandiks. Selle n-järku diferentsiaalvõrrandi üldlahendi saamiseks tuleb leida tema n lineaarselt sõltumatut erilahendit ehk fundamentaallahendit $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$; üldlahend on (§ 90, teoreem 2)

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x).$$

1) Võtame konstantsete koefitsientidega teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_2 y = 0. \qquad (1)$$

Selle diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks tähistame

$$y = e^{\lambda x},$$

kus λ on konstantne suurus, ja vaatame, kas saab λ valida nii, et funktsioon $e^{\lambda x}$ rahuldaks diferentsiaalvõrrandit (1). Võtame tuletised

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x} \quad \text{ja} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

ning asetame funktsiooni ja tema tuletiste väärtused diferentsiaalvõrrandisse (1); saame

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0.$$

Saadud võrdusest ilmneb, et funktsioon $y = e^{\lambda x}$ rahuldab diferentsiaalvõrrandit (1) siis, kui λ on ruutvõrrandi

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

lahendiks. Seda ruutvõrrandit nimetatakse teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandi (1) karakteristlikuks võrrandiks.

Karakteristlik võrrand, nagu näeme, saadakse homogeensest diferentsiaalvõrrandist, kui $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{dy}{dx}$ ja y asemele paigutatakse vastavalt λ^2, λ ja $\lambda^0 = 1$.

Karakteristlikul võrrandil kui ruutvõrrandil on kaks lahendit λ_1 ja λ_2, mis võivad olla reaalsed (erinevad või võrdsed) või imaginaarsed (kompleksarvud).

a) Olgu karakteristliku võrrandi lahendid λ_1 ja λ_2 erinevad reaalarvud. Sel juhul on funktsioonid $e^{\lambda_1 x}$ ja $e^{\lambda_2 x}$ diferentsiaalvõrrandi (1) lineaarselt sõltumatud erilahendid, sest nende suhe

$$e^{\lambda_1 x} : e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{konst.}$$

Järelikult karakteristliku võrrandi erinevate reaalsete lahendite λ_1 ja λ_2 puhul on diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahend

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

lahendid on $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$. Seega diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Mittetäieliku teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2 y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 - n^2 = 0$$

lahendid on $\lambda_1 = n$ ja $\lambda_2 = -n$ ning diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}.$$

b) Kui diferentsiaalvõrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendid on kompleksarvud, siis on nad koefitsientide a_1 ja a_2 reaalsuse tõttu ühtlasi kaaskompleksarvud, s. o. $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ja $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, ning homogeense diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendiks on

$$y = C_1 e^{(\alpha+\beta i)x} + C_2 e^{(\alpha-\beta i)x} = e^{\alpha x}\left(C_1 e^{\beta x i} + C_2 e^{-\beta x i}\right).$$

Et Euleri valemite järgi (§ 12)

$$e^{\beta x i} = \cos \beta x + i \sin \beta x \quad \text{ja} \quad e^{-\beta x i} = \cos \beta x - i \sin \beta x,$$

siis, paigutades need väärtused eelmisse võrdusse $e^{\beta xi}$ ja $e^{-\beta xi}$ asemele, saame üldlahendi kompleksfunktsioonina

$$y = e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos\beta x + i(C_1 - C_2)\sin\beta x].$$

Näitame, et seda üldlahendit saab esitada ka kujul, milles ei esine imaginaarseid suurusi. Selleks näitame, et kui mingi kompleksfunktsioon $y = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ rahuldab diferentsiaalvõrrandit (1), siis on $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ mõlemad selle võrrandi lahenditeks. Võttes kompleksfunktsiooni $y = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ esimese ja teise tuletise ning paigutades kompleksfunktsiooni ja tema tuletiste väärtused diferentsiaalvõrrandisse (1), saame

$$[\varphi_1''(x) + i\varphi_2''(x)] + a_1[\varphi_1'(x) + i\varphi_2'(x)] + \\ + a_2[\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)] = 0$$

ehk

$$[\varphi_1''(x) + a_1\varphi_1'(x) + a_2\varphi_1(x)] + i[\varphi_2''(x) + \\ + a_1\varphi_2'(x) + a_2\varphi_2(x)] = 0.$$

Viimane kompleksavaldis saab olla võrdne nulliga ainult siis, kui tema reaal- ja imaginaarosa on võrdsed nulliga. Seega

$$\varphi_1''(x) + a_1\varphi_1'(x) + a_2\varphi_1(x) = 0$$

ja

$$\varphi_2''(x) + a_1\varphi_2'(x) + a_2\varphi_2(x) = 0,$$

mis näitab, et nii $\varphi_1(x)$ kui ka $\varphi_2(x)$ rahuldab diferentsiaalvõrrandit (1) ja võrrandi üldlahendiks on seega

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x),$$

kus ei esine imaginaarseid suurusi.

Esitatud tõestuse järgi rahuldavad funktsioonid $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin\beta x$ diferentsiaalvõrrandit (1). Need on diferentsiaalvõrrandi lineaarselt sõltumatud erilahendid, sest nende suhe ei ole konstantne suurus. Seega saame üldlahendi esitada kujul

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x),$$

milles ei esine imaginaarseid suurusi.

Diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

puhul näiteks on karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

lahendid kompleksarvud: $\lambda_1 = 1 + 2i$ ja $\lambda_2 = 1 - 2i$. Seega selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = e^x(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Mittetäieliku diferentsiaalvõrrandi (§ 87, p. 1, b)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 + n^2 = 0$$

lahendid on imaginaarsed: $\lambda_1 = ni$ ja $\lambda_2 = -ni$, millede puhul selle diferentsiaalvõrrandi üldlahend esineb kujul

$$y = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx.$$

c) Kui diferentsiaalvõrrandi (1) karakteristliku võrrandi lahendid on võrdsed, s. o. $\lambda_1 = \lambda_2$, mida tähistame λ-ga, siis esineb ainult üks erilahend, ja nimelt $e^{\lambda x}$. Sel juhul leiame diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendi paragrahvis 90 (teoreem 3) esitatud üldise juhise järgi, tähistades

$$y = ue^{\lambda x},$$

mille puhul saame

$$e^{\lambda x}\frac{d^2u}{dx^2} + 2\lambda e^{\lambda x}\frac{du}{dx} + a_1 e^{\lambda x}\frac{du}{dx} = 0,$$

ehk

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (2\lambda + a_1)\frac{du}{dx} = 0,$$

sest $e^{\lambda x} \neq 0$. Siin $2\lambda + a_1 = 0$, sest 2λ kujutab karakteristliku võrrandi (kui ruutvõrrandi) võrdsete lahendite summat, mis on võrdne $-a_1$-ga. Järelikult

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

millest

$$u = c_1 + c_2x$$

ning üldlahend esineb kujul

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2x),$$

kus fundamentaallahenditeks on $e^{\lambda x}$ ja $xe^{\lambda x}$, mis on teineteisest lineaarselt sõltumatud.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

lahendid on võrdsed, s. o. $\lambda = 2$. Järelikult diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = e^{2x}(c_1 + c_2 x).$$

2) Analoogiliselt teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi leidmisele võime leida konstantsete koefitsientidega kolmandat, neljandat jne., üldse n-järku homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (2)$$

üldlahendi. Siin $e^{\lambda x}$ on samuti selle diferentsiaalvõrrandi üheks erilahendiks, kui λ on vastava karakteristliku võrrandi

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0 \qquad (3)$$

lahendiks.

a) Kui karakteristliku võrrandi (3) lahendid $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on reaalsed ja üksteisest erinevad, siis diferentsiaalvõrrandi (2) lineaarselt sõltumatud erilahendid on $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}$ ja üldlahend on (§ 90, teoreem 2)

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x},$$

kus $c_1, c_2, \ldots, c_n$ on meelevaldsed konstantsed suurused.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

lahendid on reaalsed ja erinevad, s. o. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ja $\lambda_3 = -2$, millede puhul antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x}.$$

b) Kui aga karakteristliku võrrandi (3) kõik lahendid on kahekaupa kaaskompleksarvud, s. o.

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i, \quad \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i, \quad \ldots, \quad \lambda_{2k-1,2k} = \alpha_k \pm \beta_k i,$$

kus n on paarisarv $2k$, siis diferentsiaalvõrrandi (2) lineaarselt sõltumatud erilahendid on

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x \quad \text{ja} \quad e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,$$

$$e^{\alpha_2 x}\cos\beta_2 x \quad \text{ja} \quad e^{\alpha_2 x}\sin\beta_2 x, \ldots, e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x \quad \text{ja} \quad e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x,$$

millede puhul üldlahend esineb kujul

$$y = e^{\alpha_1 x}(c_1\cos\beta_1 x + c_2\sin\beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(c_3\cos\beta_2 x + c_4\sin\beta_2 x) + \\ + \ldots + e^{\alpha_k x}(c_{2k-1}\cos\beta_k x + c_{2k}\sin\beta_k x).$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + 18\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 125y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 18\lambda^2 - 20\lambda + 125 = 0$$

lahendid on kompleksarvud ja nimelt: $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$ ja $\lambda_{3,4} = -3 \pm 4i$. Seega selle diferentsiaalvõrrandi fundamentaallahendid on $e^x\cos 2x$ ja $e^x\sin 2x$ ning $e^{-3x}\cos 4x$ ja $e^{-3x}\sin 4x$, millede puhul üldlahend on

$$y = e^x(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x) + e^{-3x}(c_3\cos 4x + c_4\sin 4x).$$

c) Kui karakteristliku võrrandi (3) kõik lahendid on reaalsed ja võrdsed, s. o. $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda$, siis on diferentsiaalvõrrandi (2) lineaarselt sõltumatuteks erilahenditeks $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ $x^2e^{\lambda x}$, $\ldots$, $x^{n-1}e^{\lambda x}$ ning üldlahend esineb kujul

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_nx^{n-1}),$$

milles tegurina esineva polünoomi aste on ühe võrra väiksem diferentsiaalvõrrandi järgust või karakteristliku võrrandi lahendi kordsusest.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$$

lahendid on võrdsed, s. o. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, mille puhul erilahendid on e^x, xe^x ja x^2e^x ning järelikult üldlahend

$$y = e^x(c_1 + c_2x + c_3x^2).$$

d) Kui karakteristliku võrrandi (3) vasak pool, kus $n = 2k$, kujutab kordset ruuttegurit, s. o.

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)^k = 0,$$

mille lahendid on kordsed kompleksarvud $(\alpha \pm \beta i)^k$, siis diferentsiaalvõrrandi (2) lineaarselt sõltumatuteks erilahenditeks on $e^{\alpha x}\cos \beta x$ ja $e^{\alpha x}\sin \beta x$, $xe^{\alpha x}\cos \beta x$ ja $xe^{\alpha x}\sin \beta x$, $x^2e^{\alpha x}\cos \beta x$ ja $x^2e^{\alpha x}\sin \beta x$, ..., $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos \beta x$ ja $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin \beta x$, millede puhul üldlahendile saame anda kuju

$$y = e^{\alpha x}[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x + x(c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + \\ + x^2(c_5 \cos \beta x + c_6 \sin \beta x) + \ldots + x^{k-1}(c_{2k-1} \cos \beta x + \\ + c_{2k} \sin \beta x)] = e^{\alpha x}[(c_1 + c_3 x + c_5 x^2 + \ldots + c_{2k-1}x^{k-1})\cos \beta x + \\ + (c_2 + c_4 x + c_6 x^2 + \ldots + c_{2k}x^{k-1})\sin \beta x].$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 14\frac{d^2y}{dx^2} - 20\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 14\lambda^2 - 20\lambda + 25 = 0$$

lahendid on kahekaupa kahekordsed, s. o. $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = 1 \pm 2i$, millede puhul fundamentaallahendid on $e^x \cos 2x$ ja $e^x \sin 2x$ ning $xe^x \cos 2x$ ja $xe^x \sin 2x$. Üldlahend on siis

$$y = e^x[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + x(c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x)].$$

Viiendat järku homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^5y}{dx^5} - \frac{d^4y}{dx^4} + 4\frac{d^3y}{dx^3} + 28\frac{d^2y}{dx^2} + 35\frac{dy}{dx} + 13y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 4\lambda^3 + 28\lambda^2 + 35\lambda + 13 = 0$$

lahenditest on kolm omavahel võrdsed, s. o. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, ja kaks lahendit on kaaskompleksarvud, s. o. $\lambda_{4,5} = 2 \pm 3i$. Antud diferentsiaalvõrrandi fundamentaallahendid on siis võrdsete λ-de puhul e^{-x}, xe^{-x} ja x^2e^{-x} ning kompleksete λ-de puhul $e^{2x}\cos 3x$ ja $e^{2x}\sin 3x$. Üldlahend on sel juhul

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) + e^{2x}(c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x).$$

3) Konstantsete koefitsientidega teist, kolmandat jne., üldse n-järku lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_ny = Q(x)$$

üldlahendi saamiseks tuleb enne leida vastava homogeense võrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = 0$$

üldlahend

$$y = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x)$$

ja siis meelevaldsete konstantide variatsiooni meetodil (vt. § 91, p. 2) või määramata koefitsientide meetodil (vt. § 93) leida mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahend $\psi(x)$, mille puhul saame selle võrrandi üldlahendi

$$y = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x) + \psi(x).$$

Leiame näiteks konstantsete koefitsientidega kolmandat järku mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{d^2 y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = e^{2x}$$

üldlahendi, kasutades selleks meelevaldsete konstantide variatsiooni meetodit. Sellele võrrandile vastava homogeense võrrandi üldlahend on (p. 2, a)

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-2x},$$

kus fundamentaallahendid on

$$\varphi_1(x) = e^x, \quad \varphi_2(x) = e^{2x}, \quad \varphi_3(x) = e^{-2x}$$

ning nende esimesed ja teised tuletised

$$\begin{aligned} &\varphi_1'(x) = e^x, \quad \varphi_2'(x) = 2e^{2x}, \quad \varphi_3'(x) = -2e^{-2x}, \\ &\varphi_1''(x) = e^x, \quad \varphi_2''(x) = 4e^{2x}, \quad \varphi_3''(x) = 4e^{-2x}. \end{aligned}$$

Koostame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} + C_3'(x)e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} - 2C_3'(x)e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x)e^x + 4C_2'(x)e^{2x} + 4C_3'(x)e^{-2x} = e^{2x}. \end{cases}$$

Seda võrrandisüsteemi $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ ja $C_3'(x)$ suhtes lahendades leiame, et

$$C_1'(x) = -\frac{e^x}{3}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{4}, \quad C_3'(x) = \frac{e^{4x}}{12},$$

millede integraalid on

$$C_1(x) = -\frac{e^x}{3} + c_1, \quad C_2(x) = \frac{x}{4} + c_2, \quad C_3(x) = \frac{e^{4x}}{48} + c_3.$$

Asetades saadud $C_1(x)$, $C_2(x)$ ja $C_3(x)$ väärtused funktsiooni

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} + C_3(x)e^{-2x},$$

saame antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = \left(-\frac{e^x}{3} + c_1\right)e^x + \left(\frac{x}{4} + c_2\right)e^{2x} + \left(\frac{e^{4x}}{48} + c_3\right)e^{-2x}$$

ehk

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + e^{2x}\left(\frac{x}{4} - \frac{5}{16}\right).$$

§ 93. Määramata koefitsientide meetodi kasutamine. 1) Kui konstantsete koefitsientidega n-järku lineaarses mittehomogeenses diferentsiaalvõrrandis

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_ny = Q(x)$$

$a_n \neq 0$ ja võrrandi parem pool esineb k-astme polünoomina, s. o.

$$Q(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \ldots + A_k,$$

kus k võib olla väiksem, võrdne või suurem kui n, siis saab näidata, et selle diferentsiaalvõrrandi üks erilahend, mida tähistame $\psi(x)$-ga, on samuti mingisugune k-astme polünoom, s. o.

$$\psi(x) = B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k,$$

kus $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k$ on tundmatud koefitsiendid. Nende tundmatute koefitsientide ja seega ühtlasi erilahendi $\psi(x)$ leidmiseks võime kasutada määramata koefitsientide meetodit. Selleks diferentsime seda erilahendit nii mitu korda, kui suur on diferentsiaalvõrrandi järk, ja paigutame siis erilahendi $\psi(x)$ ja tema tuletiste $\psi'(x), \psi''(x), \ldots, \psi^{(n)}(x)$ väärtused diferentsiaalvõrrandisse vastavalt funktsiooni y ja selle tuletiste $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ asemele.

Et nüüd $\psi(x)$ oleks diferentsiaalvõrrandi erilahendiks, s o. et ta muudaks võrrandi vasaku poole võrdseks parema poolega, selleks peavad saadud võrduse vasaku ja parema poole samaastmeliste argumentide koefitsiendid olema võrdsed. Võrrutades vastavad koefitsiendid, saame võrrandisüsteemi $k+1$ võrrandiga ja $k+1$ tundmatuga $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k$. Lahendades selle võrrandisüsteemi $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k$ suhtes ja paigutades nende väärtused erilahendisse $\psi(x)$, saame ühtlasi antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahendi

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \psi(x),$$

kus $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ on mittehomogeensele võrrandile vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi fundamentaallahendid.

Näiteks diferentsiaalvõrrandile

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^2 - 8$$

vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

lahendid on $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ja $\lambda_3 = -2$ ning seega homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x}.$$

Et antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi parem pool kujutab teise astme polünoomi, siis on ka selle võrrandi erilahend $\psi(x)$ teiseastmeline, s. o.

$$\psi(x) = B_0x^2 + B_1x + B_2,$$

kus B_0, B_1 ja B_2 on tundmatud koefitsiendid. Et antud diferentsiaalvõrrand on kolmandat järku võrrand, siis võtame erilahendi esimese, teise ja kolmanda tuletise, s. o.

$$\psi'(x) = 2B_0x + B_1,\ \psi''(x) = 2B_0,\ \psi'''(x) = 0.$$

Paigutame erilahendi ja tema tuletiste väärtused antud diferentsiaalvõrrandisse vastavalt y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ja $\frac{d^3y}{dx^3}$ asemele; saame (korraldades liikmed x astmete järjekorras)

$$4B_0x^2 - (8B_0 - 4B_1)x - (2B_0 + 4B_1 - 4B_2) = x^2 - 8,$$

kus nüüd

$$4B_0 = 1,\ 8B_0 - 4B_1 = 0,\ 2B_0 + 4B_1 - 4B_2 = 8,$$

mida lahendades leiame, et

$$B_0 = \frac{1}{4},\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = -\frac{11}{8}.$$

Seega antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{11}{8}.$$

2) Kui eespool käsitletud n-järku diferentsiaalvõrrandi parem pool $Q(x)$ kujutab samuti k-astme polünoomi, s. o.

$$Q(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \ldots + A_k,$$

kuid võrrandi vasakul poolel $a_n = 0$, siis diferentsiaalvõrrandis ilmselt puudub y, mille puhul võrrand omab kuju

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} = Q(x).$$

Otsitavat erilahendit $\psi(x)$ ei saa sel juhul määrata k-astme polünoomina, sest kui siin rakendada määramata koefitsientide meetodit, siis pärast polünoomi tuletiste paigutamist diferentsiaalvõrrandisse puudub võrrandi vasakul poolel liige, mis sisaldab x^k, kuid võrrandi paremal poolel see liige esineb, mistõttu pole võimalik vasaku ja parema poole võrdsus. Et seda puudust kõrvaldada, tuleb otsida diferentsiaalvõrrandi erilahendit $\psi(x)$ polünoomina, mille aste on ühe võrra suurem kui k, sest kui tähistame siin $\frac{dy}{dx} = z$, siis diferentsiaalvõrrand omandab kuju

$$\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + a_1 \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + a_2 \frac{d^{n-3} z}{dx^{n-3}} + \ldots + a_{n-1} z = Q(x),$$

mille erilahendiks z on eelmise punkti järgi k-astme polünoom

$$B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + B_2 x^{k-2} + \ldots + B_k.$$

Et siin erilahend z on k-astme funktsioon, siis võrdusest $\frac{dy}{dx} = z$ järeldub otseselt, et algvõrrandi erilahend $\psi(x)$ on $(k+1)$-astme funktsioon, mida võime esitada kujul

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x(B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + B_2 x^{k-2} + \ldots + B_k) = \\ &= B_0 x^{k+1} + B_1 x^k + B_2 x^{k-1} + \ldots + B_k x, \end{aligned}$$

milles puudub nüüd vaba liige, mida pole aga tarviski, sest diferentsimisel see niikuinii kaoks. Tundmatud koefitsiendid B_0, B_1, B_2, ..., B_k leitakse siin analoogiliselt eelnevale määramata koefitsientide meetodi abil.

Kui peale $a_n = 0$ ka $a_{n-1} = 0$, $a_{n-2} = 0$, ..., $a_{n-m+1} = 0$, siis diferentsiaalvõrrandis ilmselt puuduvad y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, .., $\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$ ning võrrand esineb kujul

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-m} \frac{d^m y}{dx^m} = Q(x).$$

Sel juhul tuleb eelmise arvutuse kohaselt otsida diferentsiaalvõrrandi erilahendit polünoomina, mille aste on m võrra suurem kui k, s. o.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= x^m(B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + B_2 x^{k-2} + \ldots + B_k) = \\ &= B_0 x^{m+k} + B_1 x^{m+k-1} + B_2 x^{m+k-2} + \ldots + B_k x^m, \end{aligned}$$

kus tundmatud koefitsiendid B_0, B_1, B_2, ..., B_k leitakse samuti määramata koefitsientide meetodiga. Viimases $(m+k)$-astme polünoomis puuduvad liikmed, milledes x astendajad on väiksemad kui m. Nende liikmete järele pole ka vajadust, sest diferentsimisel nad niikuinii kaoksid.

Näiteks diferentsiaalvõrrandile

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 5\frac{d^2y}{dx^2} = 150x^4 - 90x^2 + 72x - 37$$

vastava homogeense võrrandi karakteristliku võrrandi

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 = 0$$

lahendid on $\lambda_{1,2} = 0$ ja $\lambda_3 = 5$, millede puhul homogeense võrrandi üldlahend on

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{5x}.$$

Antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendi $\psi(x)$ leidmiseks tuleb siin tähistada

$$\psi(x) = x^2(B_0x^4 + B_1x^3 + B_2x^2 + B_3x + B_4) = \\ = B_0x^6 + B_1x^5 + B_2x^4 + B_3x^3 + B_4x^2,$$

mille tuletised on

$$\psi'(x) = 6B_0x^5 + 5B_1x^4 + 4B_2x^3 + 3B_3x^2 + 2B_4x,$$
$$\psi''(x) = 30B_0x^4 + 20B_1x^3 + 12B_2x^2 + 6B_3x + 2B_4,$$
$$\psi'''(x) = 120B_0x^3 + 60B_1x^2 + 24B_2x + 6B_3.$$

Asetades $\psi''(x)$ ja $\psi'''(x)$ väärtused antud mittehomogeensesse diferentsiaalvõrrandisse $\frac{d^2y}{dx^2}$ ja $\frac{d^3y}{dx^3}$ asemele ning korraldades liikmed x astmete järjekorras, saame

$$-150B_0x^4 + (120B_0 - 100B_1)x^3 + (60B_1 - 60B_2)x^2 + \\ + (24B_2 - 30B_3)x + (6B_3 - 10B_4) = 150x^4 - 90x^2 + 72x - 37,$$

kus nüüd võrrandisüsteemi

$$\left.\begin{aligned} -150B_0 &= 150 \\ 120B_0 - 100B_1 &= 0 \\ 60B_1 - 60B_2 &= -90 \\ 24B_2 - 30B_3 &= 72 \\ 6B_3 - 10B_4 &= -37 \end{aligned}\right\} \text{ lahendades saame } \left\{\begin{aligned} B_0 &= -1 \\ B_1 &= -\frac{6}{5} \\ B_2 &= \frac{3}{10} \\ B_3 &= -\frac{54}{25} \\ B_4 &= \frac{601}{250}. \end{aligned}\right.$$

Seega antud diferentsiaalvõrrandi erilahend

$$\psi(x) = x^2\left(-x^4 - \frac{6}{5}x^3 + \frac{3}{10}x^2 - \frac{54}{25}x + \frac{601}{250}\right)$$

ning üldlahend

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^{5x} - x^6 - \frac{6}{5}x^5 + \frac{3}{10}x^4 - \frac{54}{25}x^3 + \frac{601}{250}x^2.$$

3) Kui konstantsete koefitsientidega mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_ny = Q(x)$$

parem pool $Q(x)$ esineb eksponentfunktsiooni ja polünoomi korrutisena, s. o.

$$Q(x) = e^{\alpha x}Q_k(x) = e^{\alpha x}(A_0x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \ldots + A_k),$$

ja seejuures eksponentfunktsiooni $e^{\alpha x}$ astendajas olev konstantne suurus α ei ole võrdne karakteristliku võrrandi

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

ühegi lahendiga, siis selle diferentsiaalvõrrandi üldlahendi võime leida analoogiliselt eelmise võttega, kasutades erilahendi $\psi(x)$ leidmiseks määramata koefitsientide meetodit ja tähistades

$$\psi(x) = e^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k),$$

mille diferentsimisel ja $\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$, ..., $\psi^{(n)}(x)$ paigutamisel algvõrrandisse leiame otsitavad koefitsiendid B_0, B_1, B_2, ..., B_k.

Kui aga eksponentfunktsiooni $e^{\alpha x}$ astendajas esinev konstantne suurus α on karakteristliku võrrandi m-kordseks lahendiks, s o.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_m = \alpha,$$

siis selleks, et erilahend ja tema tuletised muudaksid mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi samasuseks, tuleb polünoomi $Q_k(x)$ aste võtta m võrra suurem kui k, s o.

$$\psi(x) = x^me^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k) =$$
$$= e^{\alpha x}(B_0x^{m+k} + B_1x^{m+k-1} + B_2x^{m+k-2} + \ldots + B_kx^m).$$

Näiteks diferentsiaalvõrrandile

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 8\frac{d^2y}{dx^2} + 21\frac{dy}{dx} - 18y = e^{3x}(12x^2 - 11)$$

vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 21\lambda - 18 = 0$$

lahendid on $\lambda_1 = 2$ ja $\lambda_{2,3} = 3$. Seega üldlahend

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x} + \psi(x).$$

Et siin eksponentfunktsiooni $e^{\alpha x}$ astendajas $\alpha = 3$, mis on ühtlasi karakteristliku võrrandi kahekordseks lahendiks, siis tuleb siin tähistada

$$\psi(x) = e^{3x} x^2 (B_0 x^2 + B_1 x + B_2),$$

mille tuletised on

$$\psi'(x) = e^{3x}(3B_0x^4 + 4B_0x^3 + 3B_1x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x^2 + 2B_2x),$$
$$\psi''(x) = e^{3x}(9B_0x^4 + 24B_0x^3 + 9B_1x^3 + 12B_0x^2 + 18B_1x^2 + 9B_2x^2 + 6B_1x + 12B_2x + 2B_2),$$
$$\psi'''(x) = e^{3x}(27B_0x^4 + 108B_0x^3 + 27B_1x^3 + 108B_0x^2 + 81B_1x^2 + 27B_2x^2 + 24B_0x + 54B_1x + 54B_2x + 6B_1 + 18B_2).$$

Asetades $\psi(x)$, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$ ja $\psi'''(x)$ väärtused antud diferentsiaalvõrrandisse vastavalt y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ja $\frac{d^3y}{dx^3}$ asemele, saame

$$12B_0x^2 + (24B_0 + 6B_1)x + 6B_1 + 2B_2 = 12x^2 - 11,$$

kus nüüd

$$12B_0 = 12, \quad 24B_0 + 6B_1 = 0, \quad 6B_1 + 2B_2 = -11,$$

mida lahendades leiame, et

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -4, \quad B_2 = \frac{13}{2}.$$

Seega antud diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x} + e^{3x} x^2 \left(x^2 - 4x + \frac{13}{2}\right).$$

4) Kui konstantsete koefitsientidega diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = Q(x)$$

parem pool kujutab funktsiooni

$$Q(x) = e^{\alpha x} Q_k(x) \cos \beta x$$

või

$$Q(x) = e^{\alpha x} Q_k(x) \sin \beta x,$$

kus

$$Q_k(x) = A_0x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \ldots + A_k$$

ning α ja β on niisugused, et $\alpha \pm \beta i$ ei ole antud mittehomogeensele diferentsiaalvõrrandile vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi lahendid, siis saab analoogiliselt eelnevale näidata, et konstantsete koefitsientidega mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahend on

$$\psi(x) = e^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k)\cos \beta x +$$
$$+ e^{\alpha x}(D_0x^k + D_1x^{k-1} + D_2x^{k-2} + \ldots + D_k)\sin \beta x,$$

kus $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_k$ ja $D_0, D_1, D_2, \ldots, D_k$ on tundmatud koefitsiendid, mis leitakse määramata koefitsientide meetodi abil.

Kui aga α ja β on niisugused, et $\alpha \pm \beta i$ on karakteristliku võrrandi lahendid, siis erilahend on

$$\psi(x) = xe^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k)\cos \beta x +$$
$$+ xe^{\alpha x}(D_0x^k + D_1x^{k-1} + D_2x^{k-2} + \ldots + D_k)\sin \beta x$$

ning m-kordsete lahendite $\alpha \pm \beta i$ puhul

$$\psi(x) = x^m e^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k)\cos \beta x +$$
$$+ x^m e^{\alpha x}(D_0x^k + D_1x^{k-1} + D_2x^{k-2} + \ldots + D_k)\sin \beta x.$$

Kui diferentsiaalvõrrandi parem pool esineb kujul

$$Q(x) = e^{\alpha x}[Q_i(x)\cos \beta x + Q_j(x)\sin \beta x],$$

kus

$$Q_i(x) = A_0x^i + A_1x^{i-1} + A_2x^{i-2} + \ldots + A_i$$

ja

$$Q_j(x) = C_0x^j + C_1x^{j-1} + C_2x^{j-2} + \ldots + C_j$$

ning seejuures $\alpha \pm \beta i$ ei ole vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi lahendid, siis antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendit $\psi(x)$ tuleb otsida valemi

$$\psi(x) = e^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k)\cos \beta x +$$
$$+ e^{\alpha x}(D_0x^k + D_1x^{k-1} + D_2x^{k-2} + \ldots + D_k)\sin \beta x$$

järgi, kus k on võrdne suuremaga arvudest i ja j. Kui aga $\alpha \pm \beta i$ on karakteristliku võrrandi m-kordsed lahendid, siis erilahend

$$\psi(x) = x^m e^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k)\cos \beta x +$$
$$+ x^m e^{\alpha x}(D_0x^k + D_1x^{k-1} + D_2x^{k-2} + \ldots + D_k)\sin \beta x.$$

Tundmatud koefitsiendid B_0, B_1, B_2, ..., B_k ja D_0, D_1, D_2, ..., D_k leitakse määramata koefitsientide meetodi abil.

Näiteks diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}(x^2 + 1)\cos x$$

puhul, kus $k = 2$, $\alpha = -1$ ja $\beta = 1$, on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi lahendid $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ning homogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend on

$$y = e^x(c_1 + c_2x).$$

Antud mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahendi $\psi(x)$ määrab siin funktsioon

$$\psi(x) = e^{-x}(B_0x^2 + B_1x + B_2)\cos x + e^{-x}(D_0x^2 + D_1x + D_2)\sin x,$$

mille tuletised on

$$\psi'(x) = e^{-x}[(-B_0 + D_0)x^2 + (2B_0 - B_1 + D_1)x + (B_1 - B_2 + D_2)]\cos x + e^{-x}[(-B_0 + D_0)x^2 + (-B_1 + 2D_0 - D_1)x + (-B_2 + D_1 - D_2)]\sin x,$$

$$\psi''(x) = e^{-x}[-2D_2x^2 + (4D_0 - 2D_1)x + (2B_0 - 2B_1 + 2D_1 - 2D_2)]\cos x + e^{-x}[2B_0x^2 + (2B_0 - 4D_0)x + (-2B_0 + 2B_1 + 2D_0 - 2D_1)]\sin x.$$

Asetades $\psi(x)$, $\psi'(x)$ ja $\psi''(x)$ väärtused antud diferentsiaalvõrrandisse vastavalt y, $\frac{dy}{dx}$ ja $\frac{d^2y}{dx^2}$ asemele, saame

$$[(3B_0 - 4D_0)x^2 + (-4B_0 + 3B_1 + 4D_0 - 4D_1)x + (2B_0 - 4B_1 + 3B_2 + 2D_1 - 4D_2)]\cos x + [(4B_0 + 3D_0)x^2 + (2B_0 + 2B_1 - 6D_0 + 3D_1)x + (-2B_1 + 4B_2 + 2D_0 - 4D_1 + 3D_2)]\sin x = (x^2 + 1)\cos x,$$

kus nüüd

$$(3B_0 - 4D_0)x^2 + (-4B_0 + 3B_1 + 4D_0 - 4D_1)x + (2B_0 - 4B_1 + 3B_2 + 2D_1 - 4D_2) = x^2 + 1,$$

$$(4B_0 + 3D_0)x^2 + (2B_0 + 2B_1 - 6D_0 + 3D_1)x + (-2B_1 + 4B_2 + 2D_0 - 4D_1 + 3D_2) = 0,$$

milledest saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 3B_0 - 4D_0 = 1 \\ -4B_0 + 3B_1 + 4D_0 - 4D_1 = 0 \\ 2B_0 - 4B_1 + 3B_2 + 2D_1 - 4D_2 = 1 \\ 4B_0 + 3D_0 = 0 \\ 2B_0 + 2B_1 - 6D_0 + 3D_1 = 0 \\ -2B_1 + 4B_2 + 2D_0 - 4D_1 + 3D_2 = 0, \end{cases}$$

mida lahendades leiame, et

$$B_0 = \frac{3}{25}, \quad B_1 = -\frac{36}{425}, \quad B_2 = -\frac{667}{10625},$$

$$D_0 = -\frac{4}{25}, \quad D_1 = -\frac{146}{425}, \quad D_2 = -\frac{3444}{10625}.$$

Seega antud diferentsiaalvõrrandi erilahend on

$$\psi(x) = e^{-x}\left(\frac{3}{25}x^2 - \frac{36}{425}x - \frac{667}{10625}\right)\cos x + \\ + e^{-x}\left(-\frac{4}{25}x^2 - \frac{146}{425}x - \frac{3444}{10625}\right)\sin x$$

ja üldlahend

$$y = e^x(c_1 + c_2x) + \frac{e^{-x}}{10625}[(1275x^2 - 900x - 667)\cos x - \\ - (1700x^2 + 3650x + 3444)\sin x].$$

§ 94. Diferentsiaalvõrrandite rakendusi füüsikalistes ülesannetes. 1) Leida t sekundi möödumisel vabalt langeva keha kiirus v, kui keha mass on m ja õhutakistus kv, kus k on konstantne võrdetegur.

Kehale mõjuvate jõudude summa on $mg - kv$, kusjuures Newtoni teise seaduse järgi

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

mis kujutab esimest järku diferentsiaalvõrrandit, milles muutujaid eraldades saame

$$\frac{mdv}{mg - kv} = dt.$$

Inteegrides saadud võrrandit

$$\int_0^v \frac{mdv}{mg - kv} = \int_0^t dt,$$

sest keha langemise algmomendil $v = 0$ ja $t = 0$, saame

$$-\frac{m}{k}\Big[\ln(mg - kv)\Big]_0^v = \Big[t\Big]_0^t$$

ehk

$$\frac{mg - kv}{mg} = e^{-\frac{k}{m}t},$$

millest leiame keha langemise kiiruse ajamomendil t, s. o.

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Kui siin algkiiruseks võtta $v = v_0$, siis

$$-\frac{m}{k}\Big[\ln(mg - kv)\Big]_{v_0}^v = \Big[t\Big]_0^t$$

ehk

$$\frac{mg - kv}{mg - kv_0} = e^{-\frac{k}{m}t},$$

millest langeva keha kiirus

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + v_0 e^{-\frac{k}{m}t},$$

mis on ühtlasi antud esimest järku diferentsiaalvõrrandi erilahend algtingimusel, et keha langemise algmomendi $t = 0$ puhul on algkiirus v_0.

2) Leida kõver, mille puhul nullpunktist väljunud kiired on pärast kõveralt peegeldumist paralleelsed X-teljega.

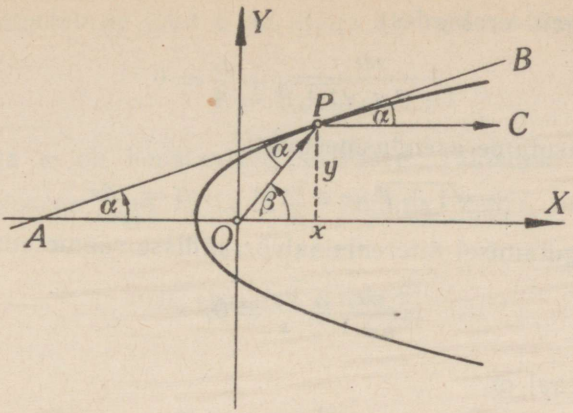
See on klassikaline näide homogeense diferentsiaalvõrrandi rakendamise kohta.

Peegeldugu nullpunktist väljunud kiir OP kõvera punktist P sirget PC mööda, mis on paralleelne X-teljega (joon. 84). Tõmbame kõverale punktis P puutuja AB. Et kiire langemisnurk $\widehat{APO}$ on võrdne peegeldumisnurgaga $\widehat{CPB}$, mis on ühtlasi võrdne puutuja AB tõusunurgaga α, siis nullpunktist väljunud kiire OP tõusunurk $\beta = 2\alpha$. Et siin

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} \quad \text{ja} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{y}{x}$$

ning

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$



Joon. 84.

siis

$$\frac{y}{x} = \frac{2\frac{dy}{dx}}{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ehk

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} - y = 0,$$

mis kujutab teise astme homogeenset diferentsiaalvõrrandit.

Lahendades saadud homogeense võrrandi tuletise $\frac{dy}{dx}$ suhtes, s. o.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

ehk

$$dy = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}\,dx,$$

ja tähistades $\frac{y}{x} = t$, kusjuures $dy = xdt + tdx$, saame

$$xdt + tdx = \frac{-1 \pm \sqrt{1+t^2}}{t}\,dx$$

ehk (muutujaid eraldades)

$$\frac{tdt}{1+t^2 \mp \sqrt{1+t^2}} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Edasi kasutame asendusmeetodit:

$$\pm \sqrt{1+t^2} = z \quad \text{ja} \quad tdt = zdz,$$

millede paigutamisel diferentsiaalvõrrandisse saame

$$\frac{dz}{z-1} + \frac{dx}{x} = 0,$$

mille integraal on

$$\ln(z-1) + \ln x = \ln c,$$

s. o.

$$x(z-1) = c$$

ehk

$$x(\pm \sqrt{1+t^2} - 1) = c.$$

Asendades $t = \frac{y}{x}$, saame

$$x\left(\pm \sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}} - 1\right) = c$$

ehk

$$\pm \sqrt{x^2+y^2} - x = c,$$

millest leiame üldlahendi

$$y^2 = 2cx + c^2 = 2c\left(x + \frac{c}{2}\right),$$

kus c on mistahes konstantne nullist erinev suurus.

Saadud üldlahend esitab graafiliselt paraboolide parve haripunktiga $\left(-\frac{c}{2}, 0\right)$ ja ühise fookusega nullpunktis. Pöörates üht neist paraboolidest ümber X-telje, saame pöördparaboloidi ehk nn. paraboolse peegli. Selle peegli nõgusalt pinnalt peegelduvad fookusest väljunud kiired paralleelselt X-teljega ja ümberpöördult: X-teljega paralleelsed kiired koonduvad pärast peegeldumist fookusse (nullpunkti).

3) Leida elektrivoolu tugevus i ajamomendil t vooluringis, mille takistus on r ja induktiivsus L.

Elektromotoorne jõud E on ajaga t järgmises funktsionaalses seoses:

$$E = E_m \sin \omega t,$$

kus E_m ja ω on konstantsed suurused. Takistuse r puhul on elektromotoorne jõud ri ja $L\frac{di}{dt}$ summa, kus L on vooluringi induktiivsus, s. o.

$$E_m \sin \omega t = ri + L\frac{di}{dt}$$

ehk

$$\frac{di}{dt} + \frac{r}{L} i = \frac{E_m}{L} \sin \omega t,$$

mis kujutab esimest järku lineaarset diferentsiaalvõrrandit, mille üldlahend (§ 78 järgi) on

$$i = e^{-\frac{r}{L}t}\left(\frac{E_m}{L}\int e^{\frac{r}{L}t} \sin \omega t dt + c\right).$$

Ositi inteegrides saame

$$i = e^{-\frac{r}{L}t}\left(E_m e^{\frac{r}{L}t} \cdot \frac{r \sin \omega t - L\omega \cos \omega t}{r^2 + L^2\omega^2} + c\right) =$$

$$= \frac{E_m}{r^2 + L^2\omega^2} (r \sin \omega t - L\omega \cos \omega t) + ce^{-\frac{r}{L}t}.$$

Kui ajamomendil $t = 0$ on ka $i = 0$, siis

$$c = \frac{E_m L\omega}{r^2 + L^2\omega^2}$$

ja erilahend

$$i = \frac{E_m}{r^2 + L^2\omega^2}\left(r \sin \omega t - L\omega \cos \omega t + L\omega e^{-\frac{r}{L}t}\right).$$

4) Leida keha liikumise seadus, kui keha, mille mass on m, liigub horisontaalsel tasapinnal, kusjuures õhutakistus on kv, kus k on konstant ja v on keha liikumise kiirus.

Keha liikumisel horisontaalsel tasapinnal on jõud $ma = m\frac{d^2s}{dt^2}$,

kus a tähendab keha liikumise kiirendust, suunalt vastupidine õhutakistusele $kv = k\frac{ds}{dt}$, s. o.

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k\frac{ds}{dt},$$

mis kujutab teist järku diferentsiaalvõrrandit, kus ilmselt puudub keha liikumisel ärakäidud tee pikkust väljendav funktsioon s ja ühtlasi ka aega väljendav argument t. Et siin

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt},$$

siis

$$m\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Viimane võrrand omandab muutujate eraldamisel kuju

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}dt.$$

Inteegrides seda võrrandit, saame

$$\ln v = -\frac{k}{m}t + \ln c_1,$$

millest leiame keha liikumise kiiruse

$$v = c_1 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Parameetri c_1 määramiseks fikseerime keha liikumise algtingimuse: kui keha liikumise algmomendi $t = 0$ puhul $v = v_0$, kus v_0 on keha liikumise algkiirus, siis $c_1 = v_0$ ja keha liikumise kiirus

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Et $v = \frac{ds}{dt}$, siis

$$ds = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}dt,$$

mida inteegrides saame keha liikumisel ärakäidud tee pikkuse

$$s = v_0 \int e^{-\frac{k}{m}t}dt + c_2 = c_2 - \frac{v_0 m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Parameetri c_2 määramiseks fikseerime veel keha liikumise

teise algtingimuse: kui keha liikumise algmomendi $t = 0$ puhul $s = 0$, siis $c_2 = \frac{v_0 m}{k}$ ja ärakäidud tee pikkus

$$s = \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right),$$

mis on ühtlasi antud teist järku diferentsiaalvõrrandi erilahend algtingimustel, et liikumise algmomendi $t = 0$ puhul $s = 0$ ja $v = v_0$.

Selle erilahendi leidmiseks võime kasutada ka määratud integraale. Et kiirus muutub siin v_0-st v-ni, kui aeg muutub 0-st t-ni, siis

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

ehk

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{k}{m}t,$$

millest

$$v = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Et tee pikkus muutub 0-st s-ni, kui aeg muutub 0-st t-ni, siis

$$\int_0^s ds = v_0 \int_0^t e^{-\frac{k}{m}t}\, dt$$

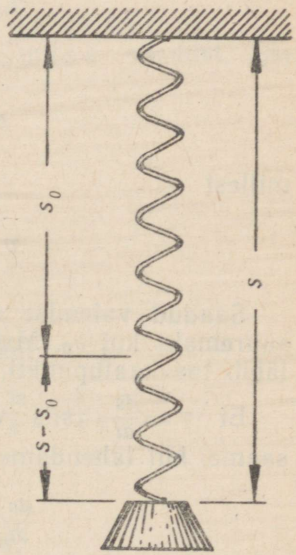
ehk

$$s = \frac{v_0 m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

5) Leida vedru võnkumise seadus, kui vedru otsas on koormis, mille mass on m, ja vedru pikkus venitamatult on s_0.

Koormise võnkumise korral tekib vedru deformatsioon $s - s_0$ (joon. 85). Seega ühtlasi tekib ka vedru pikkuse muutumisele vastassuunaline elastsusjõud

$$F = -k(s - s_0),$$



Joon. 85.

mis püüab vedru tasakaalustada. Teiselt poolt Newtoni teise seaduse järgi

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Seega

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -k(s - s_0),$$

kus võrdetegur $k > 0$. Et saadud diferentsiaalvõrrandis ilmselt puudub argument t, siis tähistame

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds},$$

mille paigutamisel diferentsiaalvõrrandisse saame

$$mv\frac{dv}{ds} = -k(s - s_0),$$

mida inteegrides leiame vedru võnkumise kiiruse v, mis muutub v_0-st v-ni, kui vedru pikkus muutub s_0-st s-ni, sest võnkumise momendil, mil koormis läbib tasakaalupunkti, on deformatsioon 0 ja kiirus v_0, s. o.

$$m\int_{v_0}^{v} v\,dv = -k\int_{s_0}^{s}(s - s_0)\,ds$$

ehk

$$m\left[\frac{v^2}{2}\right]_{v_0}^{v} = -k\left[\frac{(s - s_0)^2}{2}\right]_{s_0}^{s},$$

millest

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(s - s_0)^2}.$$

Saadud valemist nähtub, et kiirus v ei või kunagi saada suuremaks kui v_0. Maksimaalväärtust omab kiirus siis, kui keha läbib tasakaalupunkti, s. o. kui deformatsioon on 0, siis $v = v_0$.

Et $v = \frac{ds}{dt}$, siis vedru võnkumisel ärakäidud tee pikkuse saame, kui lahendame diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(s - s_0)^2},$$

kus vedru pikkus muutub s_0-st s-ni, kui võnkumise aeg muutub

0-st t-ni, s. o.

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}(s - s_0)^2}} = \int_0^t dt$$

ehk

$$\left[\sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{s - s_0}{v_0}\right)\right]_{s_0}^{s} = \left[t\right]_0^t,$$

millest

$$\arcsin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{s - s_0}{v_0}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t$$

ja

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{s - s_0}{v_0} = \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right),$$

kust saame vedru võnkumisel ärakäidud tee pikkuse

$$s = s_0 + v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

ehk

$$s = s_0 + A \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

mis esitab harmoonilise võnkumise seadust, kus amplituud

$$A = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}}$$

ja täisvõnke periood

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Kõige suurem on deformatsioon siis, kui

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t = \frac{\pi}{2} \text{ ehk } t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{T}{4},$$

s. o.

$$s - s_0 = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} = A.$$

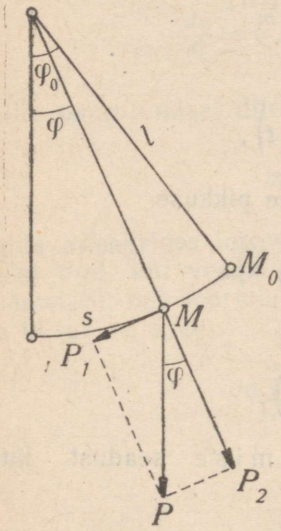
Diferentsides harmoonilist võnkumist väljendavat funktsiooni aja järgi, saame kiiruse

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{2\pi A}{T} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T},$$

ning diferentsides viimast funktsiooni aja järgi, saame kiirenduse

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 A}{T^2} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

6) Leida pendli võnkumise seadus, arvestades õhutakistust, mis on võrdeline pendli liikumise kiirusega.



Joon. 86.

Olgu pendli mass m ja algasend punktis M_0, kusjuures vastav hälve on φ_0 (joon. 86). Asetsegu pendli mass oma liikumise teel vabalt võetud punktis M, kusjuures hälve on φ ja sellele vastav teepikkus s. Lahutame punktis M raskusjõu $P = mg$, mis on suunatud vertikaalselt allapoole, kaheks komponendiks: $P_1 = mg \sin \varphi$ ja $P_2 = mg \cos \varphi$. Pendli liikumist mõjutavad puutujasihiline jõud $mg \sin \varphi$ ja õhutakistus $k\frac{ds}{dt}$, kus k on õhutakistusest sõltuv võrdetegur. Newtoni teist seadust rakendades võime seega kirjutada

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin \varphi - k\frac{ds}{dt}$$

ehk

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{ds}{dt} + g \sin \varphi = 0.$$

Et $s = l\varphi$, kus l on pendli pikkus, siis

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{kl}{m}\frac{d\varphi}{dt} + g \sin \varphi = 0.$$

Oletades, et pendli võnkumise amplituud on väike, võtame $\sin \varphi$ asemel nurga φ, mille puhul saame viimase võrrandi esitada konstantsete koefitsientidega teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandina, s. o.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{k}{m}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

kus nurk φ on aja t funktsioon.

Saadud diferentsiaalvõrrandi karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l} = 0$$

lahendid on

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4m^2} - \frac{g}{l}}.$$

Et õhutakistusest sõltuv tegur k on väga väike arv, siis on $\frac{k^2}{4m^2} < \frac{g}{l}$ ja seega on karakteristliku võrrandi lahendid kompleksarvud, s. o.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm i\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}} = \alpha \pm \beta i;$$

järelikult diferentsiaalvõrrandi üldlahend (§ 92, p. 1, b järgi) on

$$\varphi = e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$

Määrame parameetrid c_1 ja c_2. Kui $t = 0$, siis $\varphi = \varphi_0$. Asetades need väärtused üldlahendisse, saame

$$c_1 = \varphi_0.$$

Parameetri c_2 määramiseks võtame tuletise

$$\frac{d\varphi}{dt} = e^{\alpha t}(-c_1\beta \sin \beta t + c_2\beta \cos \beta t) + \\ + \alpha e^{\alpha t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t).$$

Kui siin $t = 0$ ja $c_1 = \varphi_0$, siis $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ning

$$0 = c_2\beta + \varphi_0\alpha,$$

millest

$$c_2 = -\frac{\varphi_0\alpha}{\beta} = \frac{\varphi_0 k}{2m\sqrt{\frac{g}{l} - \frac{k^2}{4m^2}}}.$$

Asetades c_1 ja c_2 väärtused üldlahendisse, saame

$$\varphi = \varphi_0 e^{\alpha t}\left(\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t\right).$$

Et $\varphi = \frac{s}{l}$, siis

$$s = l\varphi_0 e^{\alpha t}\left(\cos \beta t - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t\right)$$

ehk

$$s = l\varphi_0 e^{-\frac{kt}{2m}}\left[\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{k}{2m\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}}\cdot\sin\left(t\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}\right)\right],$$

mis määrab pendli võnkumise seaduse, kui arvestada õhutakistust.

Kui õhutakistust mitte arvestada, siis $k=0$ ja

$$s = l\varphi_0\cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Pendli täisvõnke perioodi T saamiseks vaatleme, millal pendli liikumise kiirus muutub nulliks, s. o. $\frac{ds}{dt}=0$. Selleks diferentsime funktsiooni

$$s = l\varphi_0 e^{\alpha t}\left(\cos\beta t-\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right),$$

saades

$$\frac{ds}{dt} = l\varphi_0 e^{\alpha t}\left(-\beta\sin\beta t-\alpha\cos\beta t\right)+$$

$$+\alpha l\varphi_0 e^{\alpha t}\left(\cos\beta t-\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right),$$

milles asendame $\frac{ds}{dt}=0$ ja $t=T$; saame

$$0 = -l\varphi_0 e^{\alpha T}\left(\beta+\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\sin\beta T,$$

s. o.

$$\sin\beta T = 0,$$

millest

$$\beta T = 2\pi$$

ja täisvõnke periood

$$T=\frac{2\pi}{\beta}$$

ehk

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}-\frac{k^2}{4m^2}}}.$$

Kui aga õhutakistust mitte arvestada, siis

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 95. Harjutusülesandeid.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid muutujate eraldamise teel:

1. $(1 + x)y^2dx + (1 - y)x^2dy = 0$
2. $e^x dx - (1 + e^x)dy = 0$
3. $2x(1 + e^y)dx - e^y(1 + x^2)dy = 0$
4. $\sin x \cos y dx + \cos x \sin y dy = 0$
5. $(1 + x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2y^2 = 0.$

Lahendada homogeensed diferentsiaalvõrrandid:

6. $(10x + 8y)dx + (7x + 5y)dy = 0$
7. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$
8. $(x^2 + xy + y^2)dx + x^2dy = 0$
9. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$
10. $y(y^3 - 2x^3)dx + x(x^3 - 2y^3)dy = 0$
11. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = 0.$

Lahendada homogeenseiks taanduvad diferentsiaalvõrrandid:

12. $(2x - y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$
13. $(3y - 2x - 7)dx + (4x - 5y + 13)dy = 0$
14. $(x + 7y + 2)dx - (3x + 5y + 6)dy = 0$
15. $(4x + 3y - 1)dx + (3x + 2y + 1)dy = 0$
16. $(x - 2y + 9)dx - (3x - 6y + 19)dy = 0$
17. $(2x + 3y - 1)dx - (4x + 6y + 1)dy = 0.$

Lahendada lineaarsed diferentsiaalvõrrandid:

18. $\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$
19. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = -x$
20. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{1 + x} = (1 + x)^3$
21. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^x$
22. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1 + x} = \frac{\cos x}{1 + x}$
23. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$

24. $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1+x^2} = \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$

25. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid Bernoulli valemi järgi:

26. $\frac{dy}{dx} + 2y = y^3$

27. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2$

28. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1+x^2} = \frac{x^2y^2}{1+x^2}$

29. $\frac{dy}{dx} + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$

30. $\frac{dy}{dx} + 2y \operatorname{tg} x = y^2 \operatorname{ctg} x$.

Lahendada diferentsiaalvõrrandid, ilmutades neist funktsiooni y või argumendi x:

31. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y = 0$

32. $4\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} - x = 0$

33. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$.

Lahendada Lagrange'i ja Clairaut' võrrandite tüüpi diferentsiaalvõrrandid ja leida iseärased lahendid:

34. $y = x\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

35. $y = x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

36. $y = x\frac{dy}{dx} - a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

37. $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

38. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2} - y = 0$

39. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x+1)\frac{dy}{dx} + y = 0$

40. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} + e^x = 0$.

Lahendada täisdiferentsiaalidega võrrandid:

41. $e^y dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0$

42. $\left(3 - \frac{2x}{y}\right) dx + \left(\frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^2}\right) dy = 0.$

43. $\frac{2x}{y^3}\,dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

Lahendada diferentsiaalvõrrandid inteegriva teguri abil:

44. $(x^2 + y^2 - 2x)\,dx + 2y\,dy = 0.$
45. $2xy\,dx + (y^2 + 3x^2)\,dy = 0$
46. $(x^2y + y + 1)\,dx + (x + x^3)\,dy = 0.$
47. $y(xy + 1)\,dx - x\,dy = 0$
48. $y(x^2 - y^2 + a^2)\,dx - x(x^2 - y^2 - a^2)\,dy = 0$
49. $y(1 - xy \ln x)\,dx + x\,dy = 0$
50. $(x \sin y + y \cos y)\,dx + (x \cos y - y \sin y)\,dy = 0.$

Leida kõverate parvede ortogonaalsed trajektoorid:

51. $x^2 + y^2 + 2cy = 0.$
52. $x^3y^3 = c$
53. $x^2 + y^2 - 2cx - 1 = 0$
54. $y^2(2c - x) - x^3 = 0$
55. $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0.$

Lahendada teist järku diferentsiaalvõrrandid, milledes ilmselt puudub argument või tundmatu funktsioon:

56. $\frac{d^2y}{dx^2} - x - \sin x = 0$

57. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{dy}{dx} = 0$

58. $y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

59. $(y - 1)\,\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

60. $2y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 1 = 0.$

Lahendada konstantsete koefitsientidega homogeensed diferentsiaalvõrrandid:

61. $\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 6y = 0.$

62. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 34y = 0$

63. $\frac{d^2y}{dx^2} - 12\frac{dy}{dx} + 36y = 0$

64. $\frac{d^3y}{dx^3} - 5\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} - 4y = 0$

65. $\frac{d^3y}{dx^3} + 3a\frac{d^2y}{dx^2} + 3a^2\frac{dy}{dx} + a^3y = 0$

66. $\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0.$

Lahendada konstantsete koefitsientidega mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid:

67. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x^2$

68. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x + 2$

69. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x} + x - 1.$

70. $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \cos x.$

71. $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} = 6x + e^{-x}$

72. $\frac{d^4y}{dx^4} + 5\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3\sin x$

73. $\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{d^2y}{dx^2} + 16\frac{dy}{dx} - 12y = e^{2x}(8x^2 + 15x + 23)$

74. $\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \cos x$

75. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = x^2e^{-x}\cos x.$

Lahendada lineaarsed diferentsiaalvõrrandid:

76. $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3}{x^2}\frac{dy}{dx} - \frac{8}{x^3}y = 0$

77. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$

78. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = x$

79. $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y = x^3 + 3x.$

80. Õhus, mille temperatuur on 20°, langeb aine temperatuur 20 minuti jooksul 100°-lt 60°-le. Mitme minuti pärast on aine temperatuur 30°, kui aine temperatuuri muutumine õhus on võrdeline aine ja õhu temperatuuri vahega?

81. Püssikuul tungib 10 cm paksusse lauda kiirusega 400 m/sek ja väljub lauast 0,0005 sekundi pärast. Leida kuuli kiirus lauast väljumise momendil, kui laua takistus on võrdeline kuuli kiiruse kuubiga.

82. 100-kilogrammise koguraskusega langevarjuri langemise kiirus õhus on 5 m/sek. Leida langevarju raadius, kui õhutakistus lugeda võrdeliseks langemise kiiruse ruuduga, kusjuures võrdetegur $k = 0{,}8084 \cdot \frac{S}{R}$, kus S on langevarju suurringi pindala ruutmeetrites ja R on langevarjuri raskus kilogrammides.

83. Keha, mille mass on m, liigub horisontaalsel tasapinnal algkiirusega v_0. Määrata keha liikumise seadus, kui õhutakistus kv^2 on võrdeline keha liikumise kiiruse ruuduga.

84. Keha, mille mass on m, vajub vees algkiirusega $v_0 = 0$. Määrata keha liikumise seadus, kui veetakistus kv on võrdeline keha vajumise kiirusega.

HARJUTUSÜLESANNETE VASTUSED

§ 13

1. Hajub.
2. Koondub.
3. Hajub.
4. Koondub.
5. Koondub.
6. Koondub, kui $a > 1$.
7. Hajub.
8. Koondub.
9. Koondub tingimisi.
10. Koondub absoluutselt.
11. Koondub absoluutselt.
12. $s = \frac{1}{4}$.
13. $s = \frac{1}{2}$.
14. $s = \frac{1}{5}$.
15. $s = 2$.
16. $-1 \leqslant x < 1$.
17. $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
18. $-1 \leqslant x < 1$.
19. $x = 0$.
20. $-1 < x \leqslant 1$.

21. $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
22. $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$
23. $1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \ldots$
24. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \ldots$
25. $\frac{a}{b} - \frac{a-b}{b^2}x + \frac{a-b}{b^3}x^2 - \frac{a-b}{b^4}x^3 + \ldots$
26. $1 + x \ln a + \frac{x^2 \ln^2 a}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 a}{3!} + \ldots$
27. $\sin a + x \cos a - \frac{x^2}{2!} \sin a - \frac{x^3}{3!} \cos a + \frac{x^4}{4!} \sin a + \ldots$
28. $x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$
29. $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$.
30. $e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{14x^6}{6!} + \ldots\right)$.
31. 1,099.
32. 1,609.
33. 2,485.
34. 3,584.
35. —2,079.
36. —0,446.
37. 3,141593.
38. $\ln x + \frac{x-1}{x} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3!} + \frac{x^3}{3 \cdot 4!} + \ldots + c; \quad (x > 0)$.
39. $\ln \ln x + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3 \cdot 3!} + \frac{\ln^4 x}{4 \cdot 4!} + \ldots + c; \quad (x > 1)$.
(Märkus: teha asendus $\ln x = z$.)
40. $\ln x - \frac{x^2}{2 \cdot 3!} + \frac{x^4}{4 \cdot 5!} - \frac{x^6}{6 \cdot 7!} + \ldots + c; \quad (x > 0)$.

41. $-\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{3\cdot 4!}-\frac{x^5}{5\cdot 6!}+\ldots+c;\quad (x\neq 0)$.

42. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^9}{9}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{13}}{13}+\ldots;\ |x|<1$.

43. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^{10}}{10}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{x^{13}}{13}+\ldots;\ |x|<1$.

44. $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3^2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7^2}+\ldots$

45. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\ldots$

(Märkus: viimases harjutusülesandes inteegritav funktsioon x^x esitada kujul $e^{x\ln x}$, see arendada reaks ja siis inteegrida ositi funktsioone kujul $x^n\ln^n x$).

§ 35

1. Piirkond väljaspool parabooli $y^2=2x-4$.
2. I ja IV kvadrandi koordinaatnurkade bisektorite $y=\pm x$ vaheline piirkond.
3. I ja III kvadrant: $\left.\begin{matrix}x>0\\y>0\end{matrix}\right\}$ ja $\left.\begin{matrix}x<0\\y<0\end{matrix}\right\}$.
4. I kvadrant: $x>0$ ja $y>0$.
5. Piirkond parabooli $y=x^2$ parempoolse haara ja X-telje positiivse suuna vahel $(x\geqslant 0)$.
6. XY-tasapind, välja arvatud punktid ringjoonel $x^2+y^2=1$.
7. Ringjoon $x^2+y^2=1$.
8. I oktant: $x>0$, $y>0$ ja $z>0$.
9. 4. 10. 0. 11. 2. 12. 1.
13. (0, 0).
14. Koordinaatnurga bisektor $y=x$.
15. Koordinaatnurkade bisektorid $y=\pm x$.
16. Parabool $x^2=4y$.
17. Tasapind, mis lõikab koordinaattelgi punktides $x=3$, $y=2$ ja $z=-6$.
18. Pöördparaboloid, mille haripunkt on koordinaattelgede nullpunktis ja sümmeetriateljeks on Z-telg.
19. Hüperboolne paraboloid sadulpunktiga koordinaattelgede nullpunktis.
20. Pöördkoonus, mille tipp on koordinaattelgede nullpunktis ja sümmeetriateljeks on Z-telg.
21. Paralleelsete sirgete parv $x+y=a$.
22. Paraboolide parv $y^2=x-a$.
23. Nullpunkti läbivate sirgete parv $y=ax$.
24. Hüperboolide parv $xy=a$.
25. Paraboolide parv $y=ax^2$.
26. Kõverate parv $y=\frac{a^2}{x}+1$.
27. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}$.
28. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{2xy}{(x+y)^3}$.
29. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{y\sin\frac{x}{y}-x\cos\frac{x}{y}}{y^3\sin^3\frac{x}{y}}$.
30. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x}{(y^2-x^2)\sqrt{y^2-x^2}}$.
31. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2(y^2-x^2)}{(y^2+x^2)^2}$.

32. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^x \cos y + e^y \cos x$.

33. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{\sin^2(x+y)}$.

34. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$.

35. $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{(x+y+z)^2}$.

36. $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{e^x}{y^2}$.

37. $dz = \frac{y}{x}\,dx + \ln x\,dy$.

38. $dz = y^{\ln x}\left(\frac{\ln y}{x}\,dx + \frac{\ln x}{y}\,dy\right)$.

39. $dz = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$.

40. $du = 2(xdx + ydy + zdz)$.

41. $du = \frac{x^2 - yz}{x^2 y}\,dx + \frac{y^2 - xz}{y^2 z}\,dy + \frac{z^2 - xy}{z^2 x}\,dz$.

42. $du = z^{xy-1}(yz \ln z dx + xz \ln z dy + xy dz)$.

43. 0,52. 44. 0. 45. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. 46. 1. 47. $7\frac{7}{13}$.

48. $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-a}{y-b}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{(y-b)^3}$.

49. $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b^2(a^2y^2 - b^2x^2)}{a^4 y^3}$.

50. $\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y\sqrt[3]{x^2y} + x\sqrt[3]{xy^2}}{3x^2y}$.

51. $\frac{dy}{dx} = \cos^2 y$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin 2y \cos y$.

52. $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\cos(x+y)}{[1+\sin(x+y)]^3}$.

53. $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{y^2}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{y(1+y^2)}$.

54. Sõlmpunkt (0, 0); puutujad $x - y = 0$, $3x + 2y = 0$.

55. Isoleeritud punkt (0, 0).

56. Kooldumispunkt (0, 0).

57. Esimest liiki tipp-punkt (0, 0).

58. Teist liiki tipp-punkt (0, 0).

59. Sõlmpunkt (3, 3); puutujad $2x - y - 3 = 0$, $y = 3$.

60. $x^2 + y^2 = p^2$.

61. $y^2 = 2px$.

62. $y^2 = 2p(p + x)$.

63. $(x^2 + y^2)^2 - 4a^2(x^2 - y^2) = 0$.

64. Mähisjooned $y \pm 1 = 0$; sõlmpunktide geomeetriline koht $y = 0$.

65. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

66. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = s^{\frac{2}{3}}$.

67. Maksimumpunkt $A\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)$; sadulpunkt $C(0, 0, 0)$.

68. Miinimumpunkt $B(1, 1, -1)$; sadulpunkt $C(0, 0, 0)$.

69. Maksimumpunkt $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

70. $V_{max} = \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

71. $z_{min} = 2$.

72. $z_{max} = \frac{1}{2}$; $z_{min} = -\frac{1}{2}$.

73. $P_{1,\,2,\,3,\,4} = \left(\pm\frac{a}{2\sqrt{2}}, \pm\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)$.

74. $x + 4y + 3z - 3 = 0$; $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{3}$.

75. $2x - 2y + 4z \mp \sqrt{22} = 0$.

§ 43.

1. $\frac{x-1}{8} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-2}{7}$; $8x + 10y + 7z - 12 = 0$.

2. $\frac{x-\pi}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{0}$; $x - \pi = 0$.

3. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-8}{12} = \frac{z-4}{4}$.

4. $3x - 12y + 12z - 4 = 0$; $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-\frac{8}{3}}{4} = \frac{z-2}{-4}$;

$12x - 15y - 18z + 28 = 0$; $\frac{x-4}{-4} = \frac{y-\frac{8}{3}}{5} = \frac{z-2}{6}$.

5. $\varrho = \frac{3e^t}{\sqrt{2}}$. 6. $r = 2\cos t$. 7. $\frac{1}{r} = 0$.

§ 55

1. a) $(e-1)^2$;
   b) $\frac{\pi}{12}$;
   c) $\ln\frac{25}{24}$;
   d) $\frac{\pi a^2}{4}$;
   e) 4π;
   f) $16\ln 2 - 6\frac{1}{36} \approx 5{,}06$.

2. a) $\int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y)\,dx$;
   b) $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^2 f(x, y)\,dy$;
   c) $\int_0^1 dy \int_0^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx$.

4. $5\frac{1}{3}a^4$.
5. $13\frac{1}{3}$.
6. 32.
7. $\frac{4}{9}ab\sqrt{ab}$.
8. $\frac{abc}{6}$.
9. $\frac{abc}{3}$.
10. $1\frac{7}{9}a^3$.
11. $5\frac{1}{3}abc$.
12. $1\frac{1}{2}\pi a^3$.

13. $\frac{\pi abr^2}{c}$.

14. $\frac{2}{9}a^3$.

15. $\frac{2}{105}a^3$.

16. $\frac{a^3}{9}(3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$.

17. $\frac{\ln^3 3}{6}$.

18. $21\frac{1}{3}$.

19. $\sqrt{2} - 1$.

20. $a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{32}\right)$.

21. $\frac{pq}{3}$.

22. 280π.

23. $8a^2$.

24. $8a^2 \arcsin \frac{b}{a}$.

25. $2\pi a^2$.

26. $2\pi a^2$.

27. $\frac{\pi^2 a^2}{2}$.

28. $5\frac{1}{3}$.

§ 58

1. $z = x^3 + 4x^2y + y^3 + c$.
2. $z = \ln \frac{x}{y} + \frac{xy}{x - y} + c$.
3. $z = xy + \frac{1}{2}\ln \frac{x - y}{x + y} - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) + c$.
4. $z = xy + \sqrt{x^2 + y^2} + c$.
5. $z = x^2 \sin y + y^2 \cos x + c$.
6. $z = x^y + y^2 + c$.
7. $z = x^2 \ln \frac{x}{y} + \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - y + c$.
8. $u = \frac{ax + by}{z} + c$.
9. $u = xy + xz + yz + c$.
10. $u = x^2y^2 + z^3 + \sin(2x + 3y + 4z) + c$.
11. $u = 2\sqrt{xy} + 3y^2\sqrt[3]{z^2} + c$.

§ 64

1. a) 4; b) $3\frac{1}{3}$.
2. a) 8; b) 4.
3. $\frac{14}{3} - \ln 4$.
4. $7\frac{1}{2}$.
5. $\pi(a^2 - b^2)$.
6. 18.
7. a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{17}{30}$; c) $-\frac{1}{20}$.
8. a) $\frac{3}{2}a^2$; b) a^2.
9. 0.
10. $3\sqrt{3}$.
11. Sellepärast, et $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.
12. $\frac{3}{2}a^2$.
13. πab.
14. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

§ 68

1. $\frac{4}{3}\pi abc$. 2. 0. 3. 3.

4. $2\iiint\limits_{V}(x+y+z)\,dxdydz$. 5. $\frac{3}{20}$.

§ 95

1. $\frac{x+y}{xy}+\ln\frac{y}{x}=c$.
2. $y=\ln c(1+e^x)$.
3. $\frac{1+x^2}{1+e^y}=c$.
4. $\cos x\cos y=c$.
5. $y=ce^{\sqrt{1+x^2}}$
6. $(x+y)^2(2x+y)^3=c$.
7. $x^2+y^2=cx$.
8. $x=(x+y)\ln cx$.
9. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln y=c$.
10. $x^3+y^3=cxy$.
11. $y^2=2x^2\ln cx$.
12. $x^2-xy+y^2+x-y=c$.
13. $(y-x-3)(5y-2x-9)^2=c$.
14. $x+5y+2=c(x-y+2)^4$.
15. $x-3y+8\ln(x-2y+1)=c$.
16. $2x-3y+8\ln(x-2y+1)=c$.
17. $7x-14y-3\ln(14x+21y-1)=c$.
18. $y=(1+x^2)(x+c)$.
19. $y=x^2(c-\ln x)$.
20. $2y=(1+x)^4+c(1+x)^2$.
21. $y=e^x\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{c}{x}$.
22. $y=\frac{\sin x+c}{1+x}$.
23. $y=\sin x+c\cos x$.
24. $y=\frac{c-\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$.
25. $y=(x+\sqrt{1+x^2})(\arcsin x+c)$.
26. $y^2\left(ce^{4x}+\frac{1}{2}\right)=1$.
27. $xy(c-\ln x)=1$.
28. $y=\frac{2\sqrt{1+x^2}}{c-x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$.
29. $4ye^{2x^2}=(x^2+c)^2$.
30. $\ln(\sin x)-\frac{\sin^2 x}{2}+\frac{\cos^2 x}{y}+c=0$.
31. $x=2p+\frac{4}{3}p^3+c;\quad y=p^2+p^4$.
32. $x=4p^3-3p^2+2p;\quad y=3p^4-2p^3+p^2+c$.
33. $y^2=c(2x-c)$.
34. $y=cx+c^2;\quad x^2+4y=0$.
35. $y=cx+\frac{1}{c};\quad y^2-4x=0$.
36. $y=cx-a\sqrt{1+c^2};\quad x^2+y^2=a^2$.
37. $y=cx+\sqrt{1-c^2};\quad y^2-x^2=1$.
38. $y=c^2+cx-\frac{x^2}{4};\quad x^2+2y=0$.

39. $y = c(x+1) - c^2$; $4y = (x+1)^2$.

40. $y = ce^x + \frac{1}{c}$; $y^2 = 4e^x$.

41. $xe^y - y^2 = c$.

42. $3x - \frac{x+1}{y} = c$.

43. $\frac{x^2}{y} - \frac{1}{y} = c$.

44. $\mu = e^x$; $e^x(x^2+y^2) = c$.

45. $\mu = y^2$; $x^2y^3 + \frac{y^5}{5} + c$.

46. $\mu = \frac{1}{1+x^2}$; $xy + \operatorname{arctg} x + c$.

47. $\mu = \frac{1}{y^2}$; $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = c$.

48. $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$; $x^2 + y^2 - cxy - a^2 = 0$.

49. $\mu = \frac{1}{x^2y^2}$; $\frac{\ln^2 x}{2} - \frac{1}{xy} = c$.

50. $\mu = e^x$; $e^x(x \sin y + y \cos y - \sin y) = c$.

51. $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$.

52. $x^2 - y^2 = C$.

53. $x^2 + y^2 - 2Cy + 1 = 0$.

54. $(x^2+y^2) - C(2x^2+y^2) = 0$.

55. $(x^2+y^2)^2 - 2Cxy = 0$.

56. $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + c_1x + c_2$.

57. $y = \frac{1}{12}(x+c_1)^3 + c_2$.

58. $y = c_2e^{c_1x}$.

59. $y = 1 - \frac{1}{c_1x + c_2}$.

60. $4c_1(y - c_1) = (x - c_2)^2$.

61. $y = c_1e^x + c_2e^{6x}$.

62. $y = e^{-3x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)$.

63. $y = e^{6x}(c_1 + c_2x)$.

64. $y = c_1e^x + e^{2x}(c_2 + c_3x)$.

65. $y = e^{-ax}(c_1 + c_2x + c_3x^2)$.

66. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$.

67. $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$.

68. $y = e^{2x}(c_1 + c_2x) + \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{8}x + 1$.

69. $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + \frac{1}{10}e^{2x} + \frac{1}{2}x - 1$.

70. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + \frac{1}{8} \cos x$.

71. $y = c_1 + c_2x + e^{-x}(c_3 + x) + x^3 - 3x^2$.

72. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x - \frac{x}{2} \cos x$.

73. $y = c_1e^{3x} + e^{2x}\left(c_2 + c_3x - 27x^2 - \frac{31}{6}x^3 - \frac{2}{3}x^4\right)$.

74. $y = c_1e^{-2x} + e^x(c_2 \cos x + c_3 \sin x) - \frac{e^x}{4} \cos x$.

75. $y = e^{-x}(c_1 + c_2x) + e^{-x}(4x \sin x - x^2 \cos x + 6 \cos x)$.

76. $y = c_1 \cos(2 \ln x) + c_2 \sin(2 \ln x) + c_3x^2$.

77. $y = (c_1 + c_2 \ln x)x + \frac{c_3}{x}$.

78. $y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x) + \frac{x}{2}$.

79. $y = (c_1 + c_2x + c_3 \ln x)x + \frac{x^3}{4} - \frac{3}{2}x \ln^2 x$.

80. 60 min. 81. $133\frac{1}{3}$ m/sek. 82. 3,92 m.

83. $v = \frac{mv_0}{m + kv_0t}$; $s = \frac{m}{k} \ln\left(1 + \frac{kv_0t}{m}\right)$.

84. $s = \frac{m^2g}{k^2}\left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1\right) + \frac{mgt}{k}$.

VALEMITE TABEL

Read

Harmooniline rida:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Hüperharmooniline rida:

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{4^k}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k},$$

kus $k>1$.

Rea $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ koonduvuse tarvilik tingimus:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0.$$

Rea $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ koonduvuse tarvilik ja piisav tingimus:

$$\lim_{n\to\infty}R_n=0,$$

kus R_n on rea jääk.

D'Alembert'i tunnus (positiivsete liikmetega rea koonduvuse määramiseks):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q<1.$$

Cauchy tunnus (positiivsete liikmetega rea koonduvuse määramiseks):

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q<1.$$

Raabe tunnus (positiivsete liikmetega rea koonduvuse määramiseks):

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant r>1.$$

Cauchy integraaltunnus (positiivsete liikmetega rea koonduvuse määramiseks): kui rea liikmed kujutavad monotoonselt kahaneva positiivse funktsiooni $f(x)$ väärtusi argumendi x täisarvuliste väärtuste puhul ja $\int_1^\infty f(x)\,dx$ koondub, siis koondub ka rida ja tema summa asetseb $\int_1^\infty f(x)\,dx$ ja $u_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx$ vahel, s. o.

$$\int_1^\infty f(x)\,dx < s < u_1 + \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Leibniz'i tunnus (vahelduvate märkidega rea koonduvuse määramiseks):

$$u_n \geqslant u_{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Astmerea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absoluutse koonduvuse vahemik:

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| = r.$$

Taylori rida:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + \frac{f''(x)}{2!}\Delta x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}\Delta x^n + \ldots$$

või

$$f(a+x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \ldots$$

Taylori rea jääkliige Lagrange'i järgi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ja Cauchy järgi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\Theta x)}{n!}(1-\Theta)^n x^{n+1},$$

kus $0 < \Theta < 1$.

Mac-Laurini rida:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

ja jääkliige

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

kus $0 < \Theta < 1$.

Funktsioonide reaksarendusi:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = 2{,}71828\ldots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad (-1 < x \leqslant 1);$$

$$\ln(v+1) = \ln v + 2\left[\frac{1}{2v+1} + \frac{1}{3(2v+1)^3} + \frac{1}{5(2v+1)^5} + \ldots\right],$$

kus $v > 0$;

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \ldots, \quad (-1 < x < 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad (-1 < x < 1);$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = 0{,}785\ldots;$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots, \quad (-1 < x < 1);$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x.$$

Elliptilised integraalid:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} +$$

$$+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\int_0^x \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} + \ldots;$$

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2}k^2\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}} -$$

$$- \frac{1}{2\cdot 4}k^4\int_0^x \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\int_0^x \frac{x^6dx}{\sqrt{1-x^2}} - \ldots$$

Kompleksarvu eksponentsiaalkuju:

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{\varphi i},$$

kus φ on antud radiaanmõõdus ja

$$e^{\varphi i} = e^{\varphi i + 2k\pi i}.$$

Euleri valemid:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = \frac{\operatorname{sh} xi}{i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = \operatorname{ch} xi$$

ehk

$$\sin xi = i\,\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = i\operatorname{sh} x, \quad \cos xi = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

Mitme muutuja funktsioonid

Funktsiooni $z = f(x, y)$ osatuletised:

$$\frac{d_x z}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = f_x(x, y);$$

$$\frac{d_y z}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} =$$

$$= \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ täisdiferentsiaalid:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy;$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy\right)^n f(x, y).$$

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ täisdiferentsiaalid:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz;$$

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial}{\partial z}\cdot dz\right)^n f(x, y, z).$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ täistuletised sirge s sihis:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta;$$

$$\frac{d^n z}{ds^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\cos\beta\right)^n f(x, y),$$

kus α ja β on sirge s suunanurgad.

Funktsiooni $u = f(x, y, z)$ täistuletised sirge s sihis:

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma;$$

$$\frac{d^n u}{ds^n} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\cos\alpha + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\cos\beta + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\cos\gamma\right)^n f(x, y, z),$$

kus α, β ja γ on sirge s suunanurgad.

Pinna $z = f(x, y)$ puutujatasapind ja normaal:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0;$$

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1},$$

kus x_0, y_0 ja z_0 on puutepunkti koordinaadid, ning normaali suunakoosinused

$$\cos\alpha = \frac{f_x(x_0, y_0)}{\pm\sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2 + 1}};$$

$$\cos\beta = \frac{f_y(x_0, y_0)}{\pm\sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2 + 1}};$$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\pm\sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2 + 1}}.$$

Pinna $F(x, y, z) = 0$ puutujatasapind ja normaal:

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) + F_z(z - z_0) = 0;$$

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z},$$

kus $F_x = F_x(x_0, y_0, z_0)$, $F_y = F_y(x_0, y_0, z_0)$ ja $F_z = F_z(x_0, y_0, z_0)$, ning normaali suunakoosinused

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

Liitfunktsiooni $y = f(u, v)$, kus $u = \varphi(x)$ ja $v = \psi(x)$, tuletis ja diferentsiaal:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx};$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv.$$

Liitfunktsiooni $z = f(u, v)$, kus $u = \varphi(x, y)$ ja $v = \psi(x, y)$, osatuletised:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud ilmutamata funktsiooni tuletised:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

Võrrandiga $F(x, y, z) = 0$ määratud ilmutamata funktsiooni osatuletised:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2F_{xz}F_xF_z - F_{xx}F_z^2 - F_{zz}F_x^2}{F_z^3};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2F_{yz}F_yF_z - F_{yy}F_z^2 - F_{zz}F_y^2}{F_z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{(F_{xz}F_y + F_{yz}F_x - F_{xy}F_z)F_z - F_xF_yF_{zz}}{F_z^3}.$$

Kõvera $F(x, y) = 0$ puutuja ja normaal:

$$F_x(x - x_0) + F_y(y - y_0) = 0;$$
$$F_y(x - x_0) - F_x(y - y_0) = 0,$$

kus x_0 ja y_0 on puutepunkti koordinaadid ning $F_x = F_x(x_0, y_0)$ ja $F_y = F_y(x_0, y_0)$.

Võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud ilmutamata funktsiooni ekstreemväärtused:

$$\left.\begin{aligned} F &= 0 \\ F_x &= 0 \end{aligned}\right\} \ (F_y \neq 0), \qquad \begin{aligned} &\text{kui } -\frac{F_{xx}}{F_y} < 0, \text{ siis on max;} \\ &\text{„ } -\frac{F_{xx}}{F_y} > 0, \text{ „ „ min;} \end{aligned}$$

kui $F_{xx} = 0$ ja $F_{xxx} \neq 0$, siis on käänupunkt.

Kõvera $F(x, y) = 0$ kõverus:

$$k = \frac{2F_{xy}F_xF_y - F_{xx}F_y^2 - F_{yy}F_x^2}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Kõvera $F(x, y) = 0$ iseärased punktid:

$$\left.\begin{matrix} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{kui } F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0, & \text{siis on sõlmpunkt;} \\ \text{,, } F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0, & \text{,, ,, isoleeritud punkt;} \\ \text{,, } F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0, & \text{,, ,, kooldumis- või tipp-punkt.} \end{matrix}$$

Kõverate parve $F(x, y, a) = 0$ mähisjoon:

$$\left.\begin{matrix} F = 0 \\ F_a = 0 \end{matrix}\right\} (F_x \neq 0 \text{ või } F_y \neq 0),\ G(x, y) = 0.$$

Kõverate parve $F(x, y, a) = 0$ iseäraste punktide geomeetriline koht:

$$\left.\begin{matrix} F = 0 \\ F_a = 0 \end{matrix}\right\} (F_x = 0 \text{ ja } F_y = 0),\ G(x, y) = 0.$$

Taylori valem funktsiooni $z = f(x, y)$ puhul:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^2 f(x_0, y_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^n f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^k f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y).$$

Mac-Laurini rida funktsiooni $z = f(x, y)$ puhul:

$$f(x, y) = f(0, 0) + \left[\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}y\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y^2}y^2\right] + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot y\right)^n f(0, 0).$$

Funktsiooni $z = f(x, y)$ ekstreemum:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= 0\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0\end{aligned}\right\},\ \text{kui}\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0\ \text{ja}\ \begin{cases}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} < 0, \text{ siis on max;}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} > 0, \text{ siis on min;}\end{cases}$$

$$\text{kui}\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} > 0, \text{ siis on sadulpunkt.}$$

Funktsiooni $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ekstreemum:

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial w}{\partial x_n} = 0;$$

kui $d^2w < 0$, siis on max,
„ $d^2w > 0$, „ „ min.

Võrrandiga $F(x, y, z) = 0$ määratud ilmutamata funktsiooni ekstreemum:

$$\left.\begin{aligned}F &= 0\\ F_x &= 0\\ F_y &= 0\end{aligned}\right\},\ \text{kui}\ F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0\ \text{ja}\ F_z \begin{cases}\text{on sama märgiga mis } F_{xx} \text{ ja } F_{yy}, \text{ siis on max;}\\ \text{on } F_{xx} \text{ ja } F_{yy} \text{ märgile vastupidise märgiga, siis on min;}\end{cases}$$

kui $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0$, siis on sadulpunkt.

Funktsiooni $z = f(x, y)$ tinglik ekstreemum, kui sidevõrrandiks on $\varphi(x, y) = 0$:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0,\ \ \varphi(x, y) = 0;$$

kui sidevõrrandist saab ilmutada y, s. o. $y = \psi(x)$, siis

$$z = f[x, \psi(x)] = \Phi(x),$$

mille ekstreemum on funktsiooni $z = f(x, y)$ tinglikuks ekstreemumiks.

Funktsiooni $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tinglik ekstreemum, kui sidevõrranditeks on

$$\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0:$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = w + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_k\varphi_k,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0,\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,\ \varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0,\ \ldots,\ \varphi_k = 0;$$

kui sidevõrranditest saab ilmutada $x_1, x_2, \ldots, x_k$, s. o.

$$x_1 = \psi_1(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$
$$x_2 = \psi_2(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_k = \psi_k(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$

siis

$$w = \Phi(x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$

mille ekstreemum on funktsiooni $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tinglikuks ekstreemumiks.

Ruumiline kõver

Kõvera $F(x, y, z) = 0$ ja $G(x, y, z) = 0$ puutuja ja normaaltasapind:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & G_y \\ F_z & G_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_z & G_z \\ F_x & G_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & G_x \\ F_y & G_y \end{vmatrix}};$$

$$\begin{vmatrix} F_y & G_y \\ F_z & G_z \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} F_z & G_z \\ F_x & G_x \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & G_x \\ F_y & G_y \end{vmatrix}(z - z_0) = 0,$$

kus $F_x = F_x(x_0, y_0, z_0), \ldots, G_z = G_z(x_0, y_0, z_0)$.

Kõvera $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$ puutuja ja normaaltasapind:

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}} = \frac{y - y_0}{\dot{y}} = \frac{z - z_0}{\dot{z}};$$

$$\dot{x}(x - x_0) + \dot{y}(y - y_0) + \dot{z}(z - z_0) = 0,$$

kus $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$ ja $\dot{x} = x'(t_0)$, $\dot{y} = y'(t_0)$, $\dot{z} = z'(t_0)$, ning puutuja suunakoosinused

$$\cos\alpha_1 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}; \quad \cos\beta_1 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}};$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}.$$

Kõvera $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$ kooldumistasapind ja binormaal:

$$\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}(z - z_0) = 0;$$

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}},$$

kus binormaali suunakoosinused

$$\cos\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}},$$

$$\cos\beta_2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}},$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}}.$$

Kõvera $x = x(s)$, $y = y(s)$ ja $z = z(s)$ kooldumistasapind ja binormaal:

$$x''(s_0)(x - x_0) + y''(s_0)(y - y_0) + z''(s_0)(z - z_0) = 0;$$

$$\frac{x - x_0}{x''(s_0)} = \frac{y - y_0}{y''(s_0)} = \frac{z - z_0}{z''(s_0)}.$$

Kõvera $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$ peanormaal ja sirgestajatasapind:

$$\frac{x - x_0}{\dot{y}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} - \dot{z}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\dot{z}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} - \dot{x}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\dot{x}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix} - \dot{y}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}};$$

$$\left(\dot{y}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} - \dot{z}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}\right)(x - x_0) + \left(\dot{z}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} - \dot{x}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}\right)(y - y_0) +$$

$$+ \left(\dot{x}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix} - \dot{y}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}\right)(z - z_0) = 0,$$

kus peanormaali suunakoosinused

$$\cos\alpha_3 = \frac{\dot{y}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix} - \dot{z}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}};$$

$$\cos\beta_3 = \frac{\dot{z}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix} - \dot{x}\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}};$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{\dot{x}\begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix} - \dot{y}\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}}.$$

Kõvera $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$ kaare pikkus:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Kõvera $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$ kõverusraadius:

$$\varrho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}}.$$

Kõvera $x = x(s)$, $y = y(s)$ ja $z = z(s)$ kõverusraadius:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}}.$$

Kõvera $x = x(t)$, $y = y(t)$ ja $z = z(t)$ väänderaadius:

$$r = -\frac{\begin{vmatrix} \dot{y} & \ddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{z} & \ddot{z} \\ \dot{x} & \ddot{x} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \ddot{x} & \dddot{x} \\ \dot{y} & \ddot{y} & \dddot{y} \\ \dot{z} & \ddot{z} & \dddot{z} \end{vmatrix}}.$$

Kõvera $x = x(s)$, $y = y(s)$ ja $z = z(s)$ väänderaadius:

$$r = -\frac{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}{\begin{vmatrix} x'(s) & x''(s) & x'''(s) \\ y'(s) & y''(s) & y'''(s) \\ z'(s) & z''(s) & z'''(s) \end{vmatrix}}.$$

Kruvijoon:

$$x = a \cos t, y = a \sin t, \quad z = at \operatorname{tg} \alpha$$

(a = kruvijoone projektsiooni raadius; t = nurk, mille raadius moodustab X-telje positiivse suunaga; α = kruvijoone tõusunurk).

Punktis (x_0, y_0, z_0) kruvijoone puutuja ja normaaltasapind:

$$\frac{x - x_0}{-\sin t_0} = \frac{y - y_0}{\cos t_0} = \frac{z - z_0}{\operatorname{tg} \alpha};$$

$$(x - x_0) \sin t_0 - (y - y_0) \cos t_0 - (z - z_0) \operatorname{tg} \alpha = 0,$$

kus puutuja suunakoosinused

$$\cos \alpha_1 = -\cos \alpha \sin t_0, \quad \cos \beta_1 = \cos \alpha \cos t_0, \quad \cos \gamma_1 = \sin \alpha;$$

binormaal ja kooldumistasapind:

$$\frac{x-x_0}{\sin t_0}=\frac{y-y_0}{-\cos t_0}=\frac{z-z_0}{\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$(x-x_0)\sin t_0-(y-y_0)\cos t_0+(z-z_0)\operatorname{ctg}\alpha=0,$$

kus binormaali suunakoosinused

$$\cos\alpha_2=\sin\alpha\sin t_0,\quad \cos\beta_2=-\sin\alpha\cos t_0,\quad \cos\gamma_2=\cos\alpha;$$

peanormaal ja sirgestajatasapind:

$$\frac{x-x_0}{\cos t_0}=\frac{y-y_0}{\sin t_0}=\frac{z-z_0}{0};$$

$$(x-x_0)\cos t_0+(y-y_0)\sin t_0=0,$$

kus peanormaali suunakoosinused

$$\cos\alpha_3=\cos t_0,\ \cos\beta_3=\sin t_0,\ \cos\gamma_3=0;$$

kõverus- ja väänderaadius:

$$\varrho=\frac{a}{\cos\alpha},\quad r=-\frac{a}{\sin\alpha};$$

kruvijoone tõus:

$$\operatorname{tg}\alpha=\left|\frac{\varrho}{r}\right|.$$

Mitmekordsed integraalid

Kahekordne integraal (prismaatilise keha ruumala):

$$V=\iint\limits_S f(x,\ y)\,dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,\ y)\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx.$$

Kahekordse integraali omadusi:

$$\iint\limits_S [f_1(x,\ y)\pm f_2(x,\ y)]\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_S f_1(x,\ y)\,dxdy\pm\iint\limits_S f_2(x,\ y)\,dxdy;$$

$$\iint\limits_S kf(x,\ y)\,dxdy=k\iint\limits_S f(x,\ y)\,dxdy;$$

$$\iint\limits_S f(x,\ y)\,dxdy=\iint\limits_{S_1+S_2} f(x,\ y)\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{S_1} f(x,\ y)\,dxdy+\iint\limits_{S_2} f(x,\ y)\,dxdy,$$

Kahekordse integraali keskväärtuse teoreem:

$$\iint\limits_{\bar{S}} f(x,\ y)\,dxdy = Sf(\xi,\ \eta).$$

Silindrilise keha ruumala:

$$V = \iint\limits_{\bar{S}} f(x,\ y)\,dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,\ y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,\ y)\,dy.$$

Ellipsoidi ruumala:

$$V = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Kahekordse integraali teisendamine $[x = x(u,\ v),\quad y = y(u,\ v)]$:

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} du \int\limits_{\mu_1(u)}^{\mu_2(u)} f[x(u,\ v),\ y(u,\ v)]\,|D|dv,$$

kus funktsionaaldeterminant

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0;$$

kui $x = r\cos\varphi$ ja $y = r\sin\varphi$, siis

$$\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,rdr,$$

kus $D = r$.

Kõverpinna $z = f(x,\ y)$ komplanatsioon (pindala U):

$$U = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx,$$

kus $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ ja $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$;

kui $c = \psi_1(x)$ ja $d = \psi_2(x)$ või $a = \varphi_1(y)$ ja $b = \varphi_2(y)$, siis

$$U = \iint\limits_{\bar{S}} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\,dx;$$

kui $x = x(u, v)$ ja $y = y(u, v)$, siis

$$U = \iint\limits_{\bar{S}} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\bar{S}'} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, |D|\, dudv = \iint\limits_{\bar{S}'} \sqrt{A^2 + B^2 + D^2} dudv,$$

kus

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Kolmekordne integraal:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_e^h f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z)\, dV;$$

$$\iiint\limits_{\bar{V}} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Kolmekordse integraali teisendamine [$x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$]:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta du \int\limits_{\mu_1(u)}^{\mu_2(u)} dv \int\limits_{\nu_1(u, v)}^{\nu_2(u, v)} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]\, |D|\, dw,$$

kus funktsionaaldeterminant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0;$$

silindriliste koordinaatide r, φ ja z puhul $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ja $z = z$ ning

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} r\, dr \int\limits_{\nu_1(r, \varphi)}^{\nu_2(r, \varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, dz,$$

kus $D = r$; sfääriliste koordinaatide r, φ ja ψ puhul $x = r \sin \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \sin \psi$ ja $z = r \cos \varphi$ ning

$$\int_a^b dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy \int_{\varphi_1(x,\,y)}^{\varphi_2(x,\,y)} f(x,\ y,\ z)\,dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sin \varphi\, d\varphi \int_{\mu_1(\varphi)}^{\mu_2(\varphi)} d\psi \int_{\nu_1(\varphi,\,\psi)}^{\nu_2(\varphi,\,\psi)} f(r \sin \varphi \cos \psi,\ r \sin \varphi \sin \psi,\ r \cos \varphi)\, r^2 dr,$$

kus $D = r^2 \sin \varphi$.

Täisdiferentsiaalide inteegrimine

Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali $dz = P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy$ inteegrimisvalem:

$$z = \int_{x_0}^{x} P(x,\ y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y)\,dy =$$

$$= \int_{y_0}^{y} Q(x,\ y)\,dy + \int_{x_0}^{x} P(x,\ y_0)\,dx,$$

kui $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Kolme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali $du = P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz$ inteegrimisvalem:

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x,\ y,\ z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,\ y,\ z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,\ y_0,\ z)\,dz,$$

kui $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$ ja $\dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y}$.

Joonintegraalid

$$\int_L P(x,\ y)\,dx = \int_{t_0}^{t_n} P[x(t),\ y(t)]\,x'(t)\,dt;$$

$$\int_L [P(x,\ y)\,dx + Q(x,\ y)\,dy] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t),\ y(t)]\,x'(t) + Q[x(t),\ y(t)]\,y'(t)\}\,dt;$$

$$\int_L [P(x,\ y,\ z)\,dx + Q(x,\ y,\ z)\,dy + R(x,\ y,\ z)\,dz] =$$

$$= \int_{t_0}^{t_n} \{P[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,x'(t) + Q[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,y'(t) +$$

$$+ R[x(t),\ y(t),\ z(t)]\,z'(t)\}\,dt.$$

Joonintegraali omadusi:

$$\int_{AB}(Pdx+Qdy)=-\int_{BA}(Pdx+Qdy),$$

kus $P=P(x, y)$ ja $Q=Q(x, y)$;

$$\int_{BA}(Pdx+Qdy+Rdz)=-\int_{BA}(Pdx+Qdy+Rdz),$$

kus $P=P(x, y, z)$, $Q=Q(x, y, z)$ ja $R=R(x, y, z)$;

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}(Pdx+Qdy)=\int_{L}(Pdx+Qdy)$$

ja

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{L_k}(Pdx+Qdy+Rdz)=\int_{L}(Pdx+Qdy+Rdz),$$

kus $L=L_1+L_2+\ldots+L_n$;

$$\int_{L}[P(x, y)dx+Q(x, y)dy]=$$

$$=\int_{t_0}^{t_n}\{P[x(t), y(t)]x'(t)+Q[x(t), y(t)]y'(t)\}dt=$$

$$=\int_{S_0}^{S_n}\{P[\varphi(s), \psi(s)]\varphi'(s)+Q[\varphi(s), \psi(s)]\psi'(s)\}ds.$$

Greeni valem:

$$\int_{L}(Pdx+Qdy)=\iint_{S}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy,$$

kus $P=P(x, y)$ ja $Q=Q(x, y)$.

Joonintegraali $\int_{L}(Pdx+Qdy)$ väärtus ei sõltu inteegrimisteest, kui

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Gaussi valem:

$$\iint_{S}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\int_{L}(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds,$$

kus α ja β on nurgad, mida kindlaksmääratud suunaga normaal kinnise inteegrimistee L jooksvas punktis (x, y) moodustab vastavalt X- ja Y-telje positiivse suunaga.

$$\iint\limits_{\overline{U}} (P dydz + Q dxdz + R dxdy) =$$

$$= \iint\limits_{\overline{U}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dU,$$

kus $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$ ja $R = R(x, y, z)$ ning α, β ja γ on nurgad, mida kindlaksmääratud suunaga normaal kõverpinna $\overline{U}$ jooksvas punktis (x, y, z) moodustab vastavalt X-, Y- ja Z-telje positiivse suunaga.

Stokes'i valem:

$$\int\limits_{L} (P dx + Q dy + R dz) =$$

$$= \iiint\limits_{\overline{U}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dU = \iint\limits_{\overline{U}} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \right].$$

Ostrogradski valem:

$$\iiint\limits_{\overline{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz =$$

$$= \iint\limits_{\overline{U}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dU =$$

$$= \iint\limits_{\overline{U}} (P dydz + Q dxdz + R dxdy).$$

Kompleksfunktsioonid

Kompleksfunktsiooni üldkuju:

$$f(z) = f(x + yi) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Kompleksfunktsiooni tuletis:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandid:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Kompleksintegraal:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u\,dx - v\,dy) + i \int_L (v\,dx + u\,dy)$$

ehk

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (u\,dx - v\,dy) + i \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} (v\,dx + u\,dy).$$

Kompleksintegraali tuletis ja diferentsiaal:

$$\frac{d}{dz} \int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = f(z); \quad d \int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = f(z)\,dz.$$

Cauchy integraalvalem:

$$\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = 2\pi i f(z_0)$$

ja üldistatud kujul:

$$\int_L \frac{f(z)}{g(z)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{g'(z_1)} \int_L \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz + \frac{1}{g'(z_2)} \int_L \frac{f(z)}{z - z_2}\,dz + \ldots + \frac{1}{g'(z_n)} \int_L \frac{f(z)}{z - z_n}\,dz =$$

$$= 2\pi i \left[\frac{f(z_1)}{g'(z_1)} + \frac{f(z_2)}{g'(z_2)} + \ldots + \frac{f(z_n)}{g'(z_n)} \right].$$

Päratuid reaalintegraale:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\,dx = e^{-b^2} \sqrt{\pi};$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi;$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1 + x}\,dx = \frac{\pi}{\sin px}; \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1 - x}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{tg} px},$$

kus $0 < p < 1$.

Lineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = Q(x)$$

üldlahend:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + c\right].$$

Bernoulli võrrandi

$$\frac{dy}{dx} + y \cdot P(x) = y^n \cdot Q(x)$$

üldlahend:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[(1-n) \int Q(x) e^{(1-n)\int P(x)dx} dx + c\right]^{\frac{1}{1-n}}.$$

Lagrange'i võrrand:

$$y = x \cdot \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Clairaut' võrrandi

$$y = x \frac{dy}{dx} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

üldlahend:

$$y = cx + \psi(c)$$

ja iseärane integraal:

$$\left.\begin{aligned} y &= cx + \psi(c) \\ x &+ \psi'(c) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ ehk } \Psi(x, y) = 0.$$

Diferentsiaalvõrrandi $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ inteegrivaid tegureid:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}; \quad \mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy};$$

$$\mu(xy) = \mu(z) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} dz}; \quad \mu\left(\frac{y}{x}\right) = \mu(z) = e^{\int \frac{x^2(Q_x - P_y)}{yQ + xP} dz};$$

$$\mu(x^2 + y^2) = \mu(z) = e^{\frac{1}{2}\int \frac{P_y - Q_x}{xQ - yP} dz};$$

$$\mu(x^2 - y^2) = \mu(z) = e^{\frac{1}{2}\int \frac{P_y - Q_x}{xQ + yP} dz}.$$

Kõverate parve diferentsiaalvõrrandile $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ vastava ortogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{f(x, y)}$$

ja isogonaalsete trajektooride parve diferentsiaalvõrrand:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y) + k}{1 - k \cdot f(x, y)},$$

kus k on integraalkõvera ja isogonaalse trajektoori vahelise nurga tangens.

Diferentsiaalvõrrandite

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \text{ ja } \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

lahendamiseks asendus:

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ ja } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Diferentsiaalvõrrandite

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \text{ ja } \frac{d^2y}{dx^2} = f(y)$$

lahendamiseks asendus:

$$\frac{dy}{dx} = p \text{ ja } \frac{d^2y}{dx^2} = p\frac{dp}{dy}.$$

Kui teist järku lineaarse homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = 0$$

üks fundamentaallahend on $\varphi_1(x)$, siis teine fundamentaallahend on

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) \int \frac{e^{-\int P_1(x)dx}}{\varphi_1(x)^2} dx.$$

Teist järku lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1(x)\frac{dy}{dx} + P_2(x)y = Q(x)$$

üldlahend leitakse meelevaldsete konstantide variatsiooni meetodi abil:

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = Q(x); \end{cases}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\varphi_2(x)Q(x)}{W_2(x)}\,dx = \psi_1(x) + c_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{\varphi_1(x)Q(x)}{W_2(x)}\,dx = \psi_2(x) + c_2,$$

kus $\varphi_1(x)$ ja $\varphi_2(x)$ on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi fundamentaallahendid, millede Wronski determinant

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

ning seega mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \psi(x),$$

kus erilahend

$$\psi(x) = \psi_1(x)\varphi_1(x) + \psi_2(x)\varphi_2(x).$$

Lineaarse mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x)y = Q(x)$$

üldlahend leitakse meelevaldsete konstantide variatsiooni abil:

$$\begin{aligned} &C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n(x) = 0, \\ &C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n'(x) = 0, \\ &C_1'(x)\varphi_1''(x) + C_2'(x)\varphi_2''(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n''(x) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ &C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = Q(x), \end{aligned}$$

kus $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi fundamentaallahendid; võrrandisüsteemi lahendamisel leitakse $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$, kusjuures Wronski determinant

$$W_n(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

ning

$$C_1(x) = \int C_1'(x)\,dx = \psi_1(x) + c_1,$$
$$C_2(x) = \int C_2'(x)\,dx = \psi_2(x) + c_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_n(x) = \int C_n'(x)\,dx = \psi_n(x) + c_n,$$

millede puhul mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi üldlahend

$$y = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \psi(x),$$

kus erilahend

$$\psi(x) = \psi_1(x)\varphi_1(x) + \psi_2(x)\varphi_2(x) + \ldots + \psi_n(x)\varphi_n(x).$$

Kui konstantsete koefitsientidega teist järku homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_2y = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

lahendid λ_1 ja λ_2 on:

a) reaalsed ja erinevad, siis üldlahend

$$y = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x};$$

b) reaalsed ja võrdsed, siis

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2x);$$

c) komplekssed $(\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i)$, siis

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x).$$

Kui konstantsete koefitsientidega homogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_ny = 0$$

karakteristliku võrrandi

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

lahendid $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ on:

a) reaalsed ja erinevad, siis üldlahend

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c_n e^{\lambda_n x};$$

b) reaalsed ja võrdsed, siis

$$y = e^{\lambda x}(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1});$$

c) kompleksed ja erinevad ($\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i$, $\lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \pm \beta_2 i$, $\ldots$, $\lambda_{2k-1,\,2k} = \alpha_k \pm \beta_k i$, kus $n = 2k$), siis

$$y = e^{\alpha_1 x}(c_1 \cos \beta_1 x + c_2 \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x}(c_3 \cos \beta_2 x + c_4 \sin \beta_2 x) + \\ + \ldots + e^{\alpha_k x}(c_{2k-1} \cos \beta_k x + c_{2k} \sin \beta_k x);$$

d) kompleksed ja kordsed [$(\alpha \pm \beta i)^k$, kus $n = 2k$], siis

$$y = e^{\alpha x}[(c_1 + c_3 x + c_5 x^2 + \ldots + c_{2k-1} x^{k-1}) \cos \beta x + \\ + (c_2 + c_4 x + c_6 x^2 + \ldots + c_{2k} x^{k-1}) \sin \beta x].$$

Konstantsete koefitsientidega mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = Q(x)$$

üldlahend:

$$y = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x) + \psi(x),$$

kus $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\ldots$, $\varphi_n(x)$ on vastava homogeense diferentsiaalvõrrandi fundamentaallahendid ja $\psi(x)$ on mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi erilahend, mis leitakse meelevaldsete konstantide variatsiooni meetodi või määramata koefitsientide meetodi abil.

Määramata koefitsientide meetodi kasutamine mittehomogeense diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_n y = Q(x)$$

erilahendi $\psi(x)$ määramisel:

1) kui $Q(x) = A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + A_2 x^{k-2} + \ldots + A_k$ ja

a) $a_n \neq 0$, siis

$$\psi(x) = B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + B_2 x^{k-2} + \ldots + B_k;$$

b) $a_n = 0$, siis

$$\psi(x) = x(B_0 x^k + B_1 x^{k-1} + B_2 x^{k-2} + \ldots + B_k);$$

c) $a_n = 0,\ a_{n-1} = 0,\ a_{n-2} = 0,\ \ldots,\ a_{n-m+1} = 0$, siis

$$\psi(x) = x^m(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k);$$

2) kui $Q(x) = e^{\alpha x}(A_0x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \ldots + A_k)$ ja

a) α ei ole karakteristliku võrrandi lahend, siis

$$\psi(x) = e^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k);$$

b) α on karakteristliku võrrandi lahend, siis

$$\psi(x) = xe^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k);$$

c) α on karakteristliku võrrandi m-kordne lahend, siis

$$\psi(x) = x^me^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k);$$

3) kui $Q(x) = e^{\alpha x}(A_0x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \ldots + A_k)\cos\beta x$

või $Q(x) = e^{\alpha x}(A_0x^k + A_1x^{k-1} + A_2x^{k-2} + \ldots + A_k)\sin\beta x$

või $Q(x) = e^{\alpha x}(A_0x^i + A_1x^{i-1} + A_2x^{i-2} + \ldots + A_i)\cos\beta x +$

$+ e^{\alpha x}(C_0x^j + C_1x^{j-1} + C_2x^{j-2} + \ldots + C_j)\sin\beta x$ ja

a) $\alpha \pm \beta i$ ei ole karakteristliku võrrandi lahendid, siis

$$\psi(x) = e^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k)\cos\beta x +$$
$$+ e^{\alpha x}(D_0x^k + D_1x^{k-1} + D_2x^{k-2} + \ldots + D_k)\sin\beta x,$$

kus k on võrdne suuremaga arvudest i ja j;

b) $\alpha \pm \beta i$ on karakteristliku võrrandi lahendid, siis

$$\psi(x) = xe^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k)\cos\beta x +$$
$$+ xe^{\alpha x}(D_0x^k + D_1x^{k-1} + D_2x^{k-2} + \ldots + D_k)\sin\beta x;$$

c) $\alpha \pm \beta i$ on karakteristliku võrrandi m-kordsed lahendid, siis

$$\psi(x) = x^me^{\alpha x}(B_0x^k + B_1x^{k-1} + B_2x^{k-2} + \ldots + B_k)\cos\beta x +$$
$$+ x^me^{\alpha x}(D_0x^k + D_1x^{k-1} + D_2x^{k-2} + \ldots + D_k)\sin\beta x.$$

AINEREGISTER

A

Abel 41
Abeli teoreem 41
Absoluutne ekstreemum 159
— koonduvus 24
Algtingimused 336
Algväärtused 336, 381, 384
Amplituud 59
Analüütiline funktsioon 147, 318
Argumentpunkt 67
Arkustangensfunktsioon reana 56
Arvrida 3
Astmerida 41

B

Bernoulli 345
Bernoulli meetod 346
— võrrand 351
Binoomi aste reana 56
Binormaal 175
Boyle 89
Boyle-Mariotte'i seadus 89

C

Cartesiuse leht 120—121
Cauchy integraaltunnus 16
— integraalvalem 323
— jääkliige 49
— tunnus 15
Cauchy-Riemanni diferentsiaalvõrrandid 316
Clairaut 358
Clairaut' võrrand 358
Clapeyron 66

D

D'Alembert 13
D'Alembert'i tunnus 13
Diferentsiaalvõrrand 333
Dirichlet 25
Diskriminantjoon 138
Diskriminantvõrrand 138
δ-ümbrus 74

E

Eksponentfunktsioon reana 51
Ekstreemväärtused 149—159
Elektrivoolu tugevus 428—429
Ellipsi normaal 119
— puutuja 119
Ellipsite parve mähisjooned 141
Ellipsoidi normaal 124
— puutujatasapind 124
— ruumala 231, 248
Elliptilised integraalid 58
Elliptilise integraali amplituud 59
— — moodul 58
Eraldatud punkt 128
Eriintegraal 336
Erilahend 336
Esimene integraal 385
Euler 63
Euleri valemid 63

F

Fundamentaallahend 396
Fundamentaalsüsteem 396
Funktsionaaldeterminant 233, 249, 259
Funktsionaalne rida 31
Funktsiooni poolus 322

G

Galois 41
Gauss 298
Gaussi valem 298
Gay-Lussac 89
Gay-Lussac'i seadus 89
Green 286
Greeni valem 286

H

Hajuvuspunkt 31
Harilik diferentsiaalvõrrand 333
— punkt 124
— tuletis 90
Harmooniline keskmine 7
— rida 7, 12
— võnkumine 433

Holomorfne funktsioon 322
Homogeenne diferentsiaalvõrrand 340, 392, 409
Homogeensuse näitaja 340
Hüperharmooniline rida 12

I

Ilmutamata funktsiooni diferentsimine 114—118
Inteegrimispiirkond 215
Inteegrimistee 275
Inteegritavuse tingimus 266, 271
Inteegriv tegur 364
Integraali ühtlane koonduvus 202
Integraalkõver 335
Iseärane integraal 337, 359
— punkt 124
Isogonaalsed trajektoorid 374
Isokliin 378
Isoleeritud punkt 128

J

Joonintegraal 275
Joonintegraali sõltumatus inteegrimisteest 290
Jääkliige 49, 145

K

Kahe käiguga tabel 73
Kahekordne integraal 204
— kõverus 192
— punkt 121
— sõlmpunkt 126
Kahekordse integraali keskväärtuse teoreem 220
Kaheparameetriline kõverate parv 133
Kahepoolne pind 301
Karakteristlik võrrand 409
Katkevussirge 78
Keskmine kõverus 180
— vääne 187
Keskväärtuse teoreem 220
Kinnine määramispiirkond 69
Kolmekordne integraal 243
Komplanatsioon 240
Kompleksarvu absoluutväärtus (moodul) 30
— eksponentsiaalkuju 62
Kompleksfunktsioon 314
Kompleksintegraal 318
Kooldumispunkt 129
Kooldumistasapind 173
Koonduvuspunkt 31
Koonduvusraadius 43
Koonduvusvahemik 31
Koosinusfunktsioon reana 53
Korduv piirväärtus 76
Kruvijoon 192
Kõvera normaal 118
— puutuja 118, 172
Kõverate parv 87, 335
— parve parameeter 335
Kõverjoonelised koordinaadid 235, 241, 250
Kõverpinna komplanatsioon 240
— normaal 97
Kõverus 122, 180
Kõveruse keskpunkt 184
Kõverusraadius 122, 180
Kõverusringjoon 184

L

Lagrange'i jääkliige 49
— meetod 348
— võrrand 356
Lahtine määramispiirkond 69
Leibniz'i tunnus 21
Lineaarintegraal 216
Lineaarne diferentsiaalvõrrand 334, 345
— sõltumatus 392
Logaritmfunktsioon reana 54
Lokaalne kiirus 91
Lõpmatu rida 3

M

Mac-Laurini rida 51, 147
Mariotte 89
Mariotte'i kõver 89
Meelevaldsete konstantide variatsiooni meetod 404
Mendelejev 66
Mendelejev-Clapeyroni valem 66
Meromorfne funktsioon 322
Mittehomogeenne diferentsiaalvõrrand 342, 403
Moodul 30, 58
Mähisjoon 134
Määramata koefitsientide meetod 417
Määramispiirkond 67
Möbius 301
Möbiuse leht 301

N

Nivoojooned 87
Nivoopind 88
n-kordne integraal 258
n-mõõtmeline ruum 86, 156, 258
Normaal 97, 123
Normaaltasapind 171

O

Orienteeritud kõver 278
Ortogonaalsed trajektoorid 374
Osadiferentsiaal 95
Osakasv 88

Osasumma 3
Osapiirkonna diameeter 228
Osatuletis 89
Osatuletistega diferentsiaalvõrrand 333
Ostrogradski teoreem 393
— valem 312

P

Paraboolne peegel 428
Parameeter 197
Parameetriline joon 241
Peanormaal 176
Pendli võnkumise seadus 434
Pidevus 78
Piirpunkt 74
Piirväärtus 73—77
Pindintegraal 300
Pinna normaal 97, 123
— võrrand 67
Poolus 322
Prismaatiline keha 213
Puutepunkt 97
Puutuja 118, 172
Puutujatasapind 97, 123

R

Raabe 19
Raabe tunnus 19
Rea absoluutne koonduvus 24
— jääk 6
— tinglik koonduvus 27
— ühtlane koonduvus 33
Relatiivne ekstreemum 159
Ridade korrutamine 27—29
Riemann 316
Ruumintegraal 246

S

Sadulpunkt 153
Sfääriline indikatriss 180
Sidevõrrand 160
Sihtide väli 377
Siinusfunktsioon reana 53
Silindriline keha 222
Singulaarne integraal 337, 359
— punkt 124
Sirgestajatasapind 179
Sisemine integraal 204
Sisenormaal 298
Statsionaarne punkt 150
Stokes 309
Stokes'i valem 309
Sõlmpunkt 126

T

Tarvilik ja piisav tingimus (rea koondumiseks) 8
Tarvilik tingimus (rea koondumiseks) 7
Taylori rida 48, 147
— valem 145
Teine integraal 385
Tinglik ekstreemum 159
— koonduvus 27
Tingimusteta ekstreemum 159
Tipp-punkt 129
Trajektoorid 374
Tõkestatud (tõkestamatu) funktsioon 74
— — määramispiirkond 70
Täisdiferentsiaal 95
Täisdiferentsiaali inteegrimise valemid 266, 271, 362
Täiskasv 88
Täistuletis 102

V

Vahelduvate märkidega rida 21
Variatsioonimeetod 404
Vedru võnkumise seadus 431
Võnkuv rida 4
Võrdlemismeetod 12
Välimine integraal 204
Välisnormaal 298
Väänderaadius 187
Vääne 187

W

Weierstrassi tunnus 34
Wronski 394
Wronski determinant 394

Ü

Üheparameetriline kõverate parv 133
Ühepoolne pind 301
Ühtlane koonduvus 33, 202
— kõverate parv 87
— pidevus 79
Üksühene vastavus 233
Üksühesed funktsioonid 233
Üldine pindintegraal 305
Üldintegraal 335
Üldlahend 335

SISUKORD

VIII peatükk

Read

§ 1. Arvread; nende koonduvus ja hajuvus 3
§ 2. Koonduvate ridade omadusi 5
§ 3. Positiivsete liikmetega read 10
§ 4. Vahelduvate märkidega read 21
§ 5. Absoluutselt ja tingimisi koonduvad read 23
§ 6. Kompleksliikmetega read 29
§ 7. Funktsionaalsed read 31
§ 8. Funktsionaalsete ridade inteegrimine ja diferentsimine 37
§ 9. Astmerida 41
§ 10. Taylori ja Mac-Laurini read 47
§ 11. Funktsioonide ridadeks arendamine 51
§ 12. Kompleksarvu eksponentsiaalkuju ja Euleri valemid 61
§ 13. Harjutusülesandeid 64

IX peatükk

Mitme muutuja funktsioonid ja nende rakendusi

§ 14. Kahe muutuja funktsioon, tema geomeetriline vaste ja määramispiirkond 66
§ 15. Piirväärtus 73
§ 16. Pidevus 78
§ 17. Pidevate funktsioonide omadusi 80
§ 18. Nivoojooned 86
§ 19. Osatuletised 88
§ 20. Täisdiferentsiaal 92
§ 21. Puutujatasapind ja pinna normaal 96
§ 22. Täisdiferentsiaali geomeetriline tähendus 99
§ 23. Täistuletis 101
§ 24. Kõrgemat järku osatuletised 104
§ 25. Kõrgemat järku täisdiferentsiaal 106
§ 26. Kõrgemat järku täistuletis 108
§ 27. Liitfunktsiooni diferentsimine 109
§ 28. Ilmutamata funktsiooni diferentsimine 114
§ 29. Ilmutamata funktsiooni osatuletiste rakendusi 118
§ 30. Iseärased punktid 124
§ 31. Mähisjooned 133
§ 32. Taylori valem ja rida 142
§ 33. Ekstreemväärtused 149
§ 34. Tinglik ekstreemum 159
§ 35. Harjutusülesandeid 166

X peatükk

Ruumiline kõver

§ 36. Kõvera puutuja ja normaaltasapind 170
§ 37. Kõvera kooldumistasapind ja binormaal 173
§ 38. Kõvera peanormaal ja sirgestajatasapind 176
§ 39. Kõvera kõverus ja kõverusraadius 179
§ 40. Kõveruse keskpunkt 184
§ 41. Kõvera vääne ja väänderaadius 186
§ 42. Kruvijoon 192
§ 43. Harjutusülesandeid 196

XI peatükk

Mitmekordsed integraalid

§ 44. Määratud integraal parameetri funktsioonina 197
§ 45. Kahekordne integraal 204
§ 46. Prismaatilise keha ruumala 212
§ 47. Kahekordse integraali omadusi 216
§ 48. Silindrilise keha ruumala 220
§ 49. Kahekordse integraali teisendamine 232
§ 50. Kõverpindade komplanatsioon 238
§ 51. Kolmekordne integraal 243
§ 52. Kolmekordse integraali teisendamine 248
§ 53. Kolmekordne integraal silindrilistes ja sfäärilistes koordinaatides . 252
§ 54. Üldine *n*-kordne integraal 258
§ 55. Harjutusülesandeid 259

XII peatükk

Täisdiferentsiaalide inteegrimine

§ 56. Kahe muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali inteegrimine 264
§ 57. Kolme muutuja funktsiooni täisdiferentsiaali inteegrimine . . . 268
§ 58. Harjutusülesandeid 272

XIII peatükk

Joonintegraalid

§ 59. Joonintegraali määramine 274
§ 60. Joonintegraali omadusi 281
§ 61. Greeni valem 284
§ 62. Täisdiferentsiaali joonintegraal 290
§ 63. Gaussi valem 296
§ 64. Harjutusülesandeid 298

XIV peatükk

Pindintegraalid

§ 65. Pindintegraali määramine 300
§ 66. Stokes'i valem 306
§ 67. Ostrogradski valem 310
§ 68. Harjutusülesandeid 313

XV peatükk

Kompleksfunktsioonid ja nende rakendusi

§ 69. Kompleksfunktsioon ja selle tuletis 314
§ 70. Kompleksintegraali mõiste 318
§ 71. Cauchy integraalvalem 321
§ 72. Kompleksintegraali rakendusi 324

XVI peatükk

Diferentsiaalvõrrandid

§ 73. Diferentsiaalvõrrandi mõiste 333
§ 74. Esimest järku diferentsiaalvõrrandi kujundamine 334
§ 75. Diferentsiaalvõrrandi lahendamine muutujate eraldamise teel . . . 338
§ 76. Homogeenne diferentsiaalvõrrand 340
§ 77. Homogeenseiks taanduvad diferentsiaalvõrrandid 342
§ 78. Esimest järku lineaarne diferentsiaalvõrrand 345
§ 79. Bernoulli võrrand 351
§ 80. Funktsiooni või argumendi suhtes ilmutatavad diferentsiaalvõrrandid 353
§ 81. Lagrange'i võrrand 356
§ 82. Clairaut' võrrand 358
§ 83. Täisdiferentsiaaliga võrrand 361
§ 84. Inteegriv tegur 363
§ 85. Isogonaalsed ja ortogonaalsed trajektoorid 374
§ 86. Diferentsiaalvõrrandi graafiline lahendamine 377
§ 87. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandi kujundamine 380
§ 88. Teist järku diferentsiaalvõrrandid, milledes ilmselt puudub argument või tundmatu funktsioon 384
§ 89. Diferentsiaalvõrrandi järgu alandamine 388
§ 90. Kõrgemat järku lineaarsed homogeensed diferentsiaalvõrrandid . . 392
§ 91. Kõrgemat järku lineaarsed mittehomogeensed diferentsiaalvõrrandid 402
§ 92. Konstantsete koefitsientidega lineaarsed diferentsiaalvõrrandid . . 409
§ 93. Määramata koefitsientide meetodi kasutamine 417
§ 94. Diferentsiaalvõrrandite rakendusi füüsikalistes ülesannetes . . . 425
§ 95. Harjutusülesandeid 437
Harjutusülesannete vastused 442
Valemite tabel 450
Aineregister 474

Борквель, Альберт Александрович
КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА II

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja R. Toming
Tehniline toimetaja I. Vahtre
Korrektorid P. Hiie ja M. Sepp

Ladumisele antud 26. II 1959. Trükkimisele antud 30. XII 1959. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 30,0. Arvutuspoognaid 22,75. Trükiarv 2500. MB-10276. Tellimise nr. HH-870. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19.

Hind rbl. 9.40.

2—2

Trükivigu

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema
7	5. alt	$\frac{1}{-}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$	$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
77	10. ülalt	$\lim_{y=0}$	$\lim_{y\to 0}$
83	12. ülalt	väiksemat	väikseimat
111	8. alt	$\frac{\partial y}{du}$	$\frac{\partial y}{\partial u}$
112	12. alt	$\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\,dudv$	$2\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v}\,dudv$
157	13. ülalt	$-\frac{F_y}{F_z}$	$-\frac{F_y}{F_z}$
303	6. alt	dU	dU_2
313	12. alt	$(x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy)$	$(xdydz+ydxdz+zdxdy)$
419	13. ülalt	$a_{n-1}{}^z$	$a_{n-1}{}^z$

Tell. 870.

Rbl. 9.40

A-22333
1+

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00310549 3