

A-17388

Duplum

A. VIHMAN

# MATEMAATIKA ÔPIK

VI KLASSILE

*RK*

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“ • 1948



Duplum

A. VIHMAN

MATEMAATIKA  
ÕPIK

VI KLASSILE

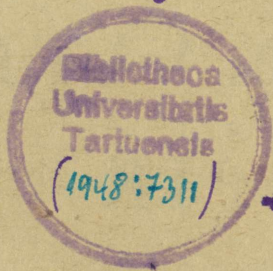
~~3303~~

*RK*

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1948

2



25351

A-17388

# ALGEBRA.

## Peatükk I.

### Algebralise sümboolika alged.

#### § 1. Algebra nimi.

Nimetus algebra on tekkinud IX sajandi algusest pärineva tähtsa araabiakeelse matemaatika õpperaamatu nimest, milles esineb sõna  $a l - d \check{z} a b r$ .

Sõna  $a l - d \check{z} a b r$  tähendab eesti keeles võrdlemist.

Meie ajal nimetatakse algebraks matemaatika osa, mis käsitleb arvude omadusi ja vahekordi üldiste sümboolite abil.

#### § 2. Täht arvu tähisena.

Lauset „ristküliku pindala võrdub aluse ja kõrguse korrutisega“ saame hoopis lühemalt avaldada, kui selles lauses esinevaid arve, mis väljendavad pindala, alust ja kõrgust, tähistame tähtedega  $S$ ,  $a$  ja  $b$ . Eelmise lause võime kirjutada siis lühidalt

$$S = a \cdot b.$$

Me ütleme, et ristküliku pindala lause on väljendatud nüüd algebra lühikirjas.

Et algebras sagedasti arve tähistatakse tähtedega, siis tuntakse algebrat ka tähtarvutuse nime all.

Näitena lahendame mõned ülesanded, kus arvude tähistena esinevad tähed.

Ülesanne 1. Arvutada summa

$$24 + a, \text{ kui } a = 16.$$

Lahendus. Kui  $a = 16$ ,

$$\text{siis } 24 + a = 24 + 16 = 40.$$

Ülesanne 2. Kirjutada algebra lühikirjas: arvude  $a$  ja 3 vahe.

Vastus. Arvude  $a$  ja 3 vahe on  $a - 3$ .

Ülesanded.

Arvutada järgmised summad:

- |    |                         |    |                             |
|----|-------------------------|----|-----------------------------|
| 1. | $1 + a$ , kui $a = 3$   | 1. | $b + 4,2$ , kui $b = 0,8$   |
|    | $3 + a$ , kui $a = 5$   |    | $b + 0,1$ , kui $b = 4,7$   |
|    | $5 + a$ , kui $a = 11$  |    | $b + 7,4$ , kui $b = 6,6$   |
|    | $13 + a$ , kui $a = 27$ |    | $b + 11,8$ , kui $b = 5,8$  |
|    | $19 + a$ , kui $a = 81$ |    | $b + 37,3$ , kui $b = 27,7$ |

Arvutada järgmised vahed:

- |    |                         |    |                           |
|----|-------------------------|----|---------------------------|
| 2. | $c - 7$ , kui $c = 7$   | 2. | $7 - c$ , kui $c = 6,4$   |
|    | $c - 3$ , kui $c = 4$   |    | $8 - c$ , kui $c = 0,8$   |
|    | $c - 10$ , kui $c = 13$ |    | $10 - c$ , kui $c = 2,9$  |
|    | $c - 17$ , kui $c = 22$ |    | $11 - c$ , kui $c = 9,7$  |
|    | $c - 33$ , kui $c = 41$ |    | $35 - c$ , kui $c = 29,5$ |

Arvutada järgmised korrutised:

- |    |                             |    |                              |
|----|-----------------------------|----|------------------------------|
| 3. | $4 \cdot m$ , kui $m = 3$   | 3. | $m \cdot 1,5$ , kui $m = 8$  |
|    | $7 \cdot m$ , kui $m = 7$   |    | $m \cdot 0,9$ , kui $m = 9$  |
|    | $9 \cdot m$ , kui $m = 1$   |    | $m \cdot 2,4$ , kui $m = 0$  |
|    | $13 \cdot m$ , kui $m = 0$  |    | $m \cdot 7,5$ , kui $m = 12$ |
|    | $17 \cdot m$ , kui $m = 10$ |    | $m \cdot 3,6$ , kui $m = 5$  |

Arvutada järgmised jagatised:

4.  $\frac{x}{4}$ , kui  $x = 1,2$

$\frac{x}{5}$ , kui  $x = 0$

$\frac{x}{10}$ , kui  $x = 0,1$

$\frac{x}{16}$ , kui  $x = 6,4$

$\frac{x}{25}$ , kui  $x = 1,0$

4.  $\frac{6}{x}$ , kui  $x = 3$

$\frac{8}{x}$ , kui  $x = 8$

$\frac{12}{x}$ , kui  $x = 60$

$\frac{5,2}{x}$ , kui  $x = 1,3$

$\frac{7,5}{x}$ , kui  $x = 0,75$

5. Kirjutada algebra lühikirjas:

arvu  $a$  ja seitsme summa;

kümne ja arvu  $b$  vahe;

kolme ja arvu  $c$  korrutis;

üheksa kümnendikku arvust  $d$ ;

arvu  $e$  ja kaheksa jagatis.

5. Kirjutada matemaatiliste sümbolite abil:

arvude  $x$  ja  $\frac{1}{2}$  summa;

arvude  $\frac{2}{3}$  ja  $n$  korrutis;

arvu 1 jagatis arvuga  $a$ ;

arvude  $a$  ja  $b$  poolsumma;

arvude  $m$  ja  $n$  poolvahe.

Ülesanne 3. Elektrienergia tarvitamise eest maks-  
takse  $a$  rubla põhimaksu kuus ja lisaks sellele  $b$  rubla iga  
tarvitatud kilovatt-tunni eest. Kui suur on kuu elektriarve,  
kui kuu jooksul tarvitati elektrienergiat  $c$  kilovatt-tundi?

Lahendus. Kui 1 kilovatt-tunni eest on maksta  $b$   
rubla, siis  $c$  kilovatt-tunni eest tuleb maksta  $b \cdot c$  rubla;  
koos põhimaksuga on siis maksta  $a + b \cdot c$  rubla.

Vastus. Kuu elektriarve on  $a + b \cdot c$  rubla.

Ülesanne 4. Klassis on tööl  $t$  õpilast; haiguse tõttu  
puudub  $h$  õpilast. Mitu protsenti õpilasist on haiged?

L a h e n d u s. Tervete õpilaste arv on  $t$ ,  
haigete „ „ „  $h$ ,  
seega kõikide õpilaste arv kokku on  $t + h$ .

Et teada saada, mitu protsenti õpilasist on haiged, jagame esiteks arvu  $h$  arvuga  $t + h$ , saame

$$\frac{h}{t + h},$$

ning korrutame saaduse 100-ga:

$$\frac{h}{t + h} \cdot 100 = \frac{100 \cdot h}{t + h}.$$

V a s t u s. Haigeid õpilasi on  $\frac{100 \cdot h}{t + h}$  %.

6. Aasta nädalad jagunevad koolis töönädalaiks ja puhkenädalaiks. Olgu esimeste arv  $t$ , teiste arv  $p$ ; kokku on neid aastas 52. Avaldada see tõsiasi algebra lühikirjas.

6. Kauba netokaal  $N$  koos taarakaaluga  $T$  annab kauba brutokaalu  $B$ . Avaldada see tõsiasi algebra lühikirjas.

7. Kauba juurdehindlus  $j$  leitakse, lahutades kauba müügihindnast  $m$  kauba omahind  $h$ . Avaldada see tõsiasi algebra lühikirjas.

7. Pioneeride salgas on  $p$  poeglast ja  $t$  tütarlast. Mitu pioneeri on salgas?

8. Kahes paralleelklassis on kummaski  $p$  õpilast. Et üks klass on ruumilt teisest klassist suurem, siis viiakse teisest klassist esimesse  $q$  õpilast üle. Mitu õpilast on nüüd ühes ja mitu teises klassis?

8. Klassi õpilaste nimekirjas seisab  $n$  õpilast. Kui palju on neid klassis, kui puudub 2 õpilast? kui puudub 7 õpilast? kui puudub  $m$  õpilast?

9. Olen praegu  $v$ -aastane. Kui vana ma olen viie aasta pärast? Kui vana  $a$  aasta pärast? Kui vana ma olin  $b$  aasta eest?

9. Olgu  $n$  täisarv. Missugune arv seisab tema järel täisarvude reas? tema ees?

10. Kell on  $m$  minuti pärast 23. Mitu minutit on jäänud keskööni?

10. Kell on  $n$  minuti pärast 13. Mitu minutit on möödunud keskpäevast?

11. Võistluskatse sooritas rahuldavalt  $k\%$  katsele ilmunud kandidaatidest. Mitu  $\%$  kandidaatidest ei sooritanud katset rahuldavalt?

11. Seemneradest ei idanenud  $i\%$ . Mitu  $\%$  teradest idanes?

12. Kirjutada  $1\%$  arvust  $a$ ,  $7\%$  arvust  $b$ ,  $p\%$  arvust  $c$ .

12. Leida  $p\%$  arvust  $a$ .

13. Mitu protsenti moodustab arv  $a$  arvust  $b$ ?

13. Mitu  $\%$  moodustab arv  $s$  arvust  $t$ ?

• 14. Leida arv, millest  $4\%$  on  $a$ .

14. Leida arv, millest  $m\%$  on  $n$ .

15. Mitu minutit on  $a$  tundi?

15. Mitu sekundit on  $b$  minutit?

16. Töömehe kaheksatunnise tööpäeva teenistus on  $t$  rubla. Kui suur on tema nädalateenus?

16. Isa maksab kuus korda nädalas ilmuva „Rahva Hääle“ numbri eest  $s$  kop. ja kord nädalas ilmuva „Sirbi ja Vasara“ eest  $t$  kop. Kui palju maksab isa nädalas nende ajalehtede eest kokku?

17. Mitu päeva on  $n$  nädalat ja  $p$  päeva?

17. Mitu kopikat on  $a$  rubla? Mitu kopikat on  $a$  rubla ja  $b$  kopikat?

18. Munapaar maksab  $n$  rubla. Kui palju maksab  $m$  paari mune?

18. Rong sõidab  $v$  kilomeetrit tunnis. Mitu kilomeetrit sõidab rong  $t$  tunniga?

19. Kolhoosi aias on tomativäljal  $p$  peenart. Avaldada tomatitaimede koguarv teades, et igal peenral kasvab  $t$  taime.

19. Tööline teenis tunnis 2 rubla. Ta töötas  $m$  päeva,  $n$  tundi päevas. Kui palju teenis tööline selle aja jooksul?

20. Kirjutussulg maksab  $s$  kop. Mitu sulge saab osta ühe rubla eest?

20. Automatkal sõideti  $s$  km, kusjuures kulus  $b$  liitrit bensiini. Mitu liitrit bensiini kulus ühe kilomeetri sõitmisel?

21. Rong kulges kahe jaama vahelise tee  $s$  km  $t$  tunniga. Missuguse kiirusega ta liikus?

21. Auto kiirusemõõtja näitab kiirust  $v$  km tunnis. Kilomeetripostilt on näha, et sõidu lõppkohani jääb veel  $s$  kilomeetrit. Kui palju aega kulub sihtkohale jõudmiseks, kui edasisõit toimub endise kiirusega?

22. 400 grammi kohvi eest maksti  $s$  rubla. Mitu rubla maksab selle kohvi kilogramm?

22. Sportlasel kulus  $n$  meetri ujumiseks aega  $s$  sekundit. Mitu meetrit ujub ta keskmiselt sekundis? Kui palju jõuab ta edasi 1 minutiga?

23.  $a$  kg jahu maksab  $b$  rubla. Kui palju maksab  $c$  kg sedasama jahu?

23.  $r$  kg rauast saab valmistada  $n$  naela. Mitu samaugust naela saab valmistada  $s$  kg rauast?

24. Klassile ostetud 20 õpiku eest maksti  $N$  rubla. Mitu rubla maksab õpik?

24. Mitu jardi on  $j$  jalga  $t$  tolli, kui 1 jard on 3 jalga ehk 36 tolli?

25. Vennal on  $a$  sulge ja õel  $b$  sulge. Nad jaotavad suled endi vahel nii, et kumbki saab ühepalju. Mitu sulge on nüüd kummalgi?

25. Kooli esimesse klassi võeti vastu  $p$  poeglast ja  $t$  tütarlast. Kooli vastuvõetud õpilased jaotati kahte paralleelklassi nii, et kummaski klassis oli ühepalju õpilasi. Mitu õpilast sai kumbagi klassi?

26. Võru valla Väimela küla akadeemik Viljamsi nime-  
lise põllumajandusliku artelli  $N$  liikmest on mehi  $m$ . Mitu  
protsenti artelli liikmetest on mehed?

26. Klassis oli aasta lõpul  $N$  õpilast. Neist läks  $p\%$   
järgmisse klassi üle. Avaldada klassikursuse mittelõpetanud  
õpilaste arv.

27. ETKVL-i kauplus sai saadetise sisuga:

$a$  kg kuivatatud õunu hinnaga  $f$  rbl. kg

$b$  „ „ pirne „  $g$  „ „

$c$  „ „ ploome „  $h$  „ „

Mitu rubla maksis saadetus?

27. Küla kooperatiivile toodi koorem kaupa:

$a$  kasti naelu, iga kast  $s$  kg

$b$  kotti soola, iga kott  $t$  kg

$c$  vaati petrooleumi, kaaluga  $u$  kg vaat.

Mitu kg sai kooperatiiv kaupa?

28. Toa pikkus on  $a$  meetrit, laius  $b$  meetrit ja kõrgus  
 $c$  meetrit. Kui suur on toa ruumala?

28. Kahe karbi mõõted on detsimeetrites:

suuremal sisemised mõõted  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,

väiksemal välimised mõõted  $f$ ,  $g$ ,  $h$ .

Kui palju jääb suuremasse karpi vaba ruumi, kui  
temasse paigutada sinna mahtuv väiksem?

### § 3. Matemaatilised märgid.

Matemaatilised märgid on tähised, mida kasutatakse  
matemaatikas sõnade asemel mõtete täpseks ja võimalikult  
kiireks kirjapanekuks.

Suursi ja arve märgime numbritega ja ladina või  
kreeka keele tähtedega, näiteks

$7$ ;  $8$ ;  $a$ ;  $b$ ;  $c$ ;  $\alpha$ ;  $y$ ;  $N$ ;  $\alpha$ ;  $\beta$ .

Arve väljendavaid numbreid ja tähti nimetame arvtähisteks.

Matemaatilisi märke nimetatakse ka matemaatilisteks sümbooliteks.

Matemaatilistest märkidest on kõige tuttavamad tehete märgid.

Allpool on esitatud mõned matemaatilised märgid ja nende tähendused, s. o. sõnad, mida need märgid asendavad:

Märk	Märgiga asendatavad sõnad
+	pluss; liita
-	miinus; lahutada
.	korda; korrutada
:	jagada
=	on võrdne; võrdub; on
≈	on ligikaudu võrdne
≠	ei ole võrdne
>	on suurem kui
<	on väiksem kui

Märke kirjutise lühendamiseks kasutatakse ka igapäevases elus; nii kirjutatakse

sõna	meeter	asemel	märk	m
„	gramm	„	„	g
„	naelsterling	„	„	£
„	dollar	„	„	\$
„	läbimõõt	„	„	∅.

Punkt korrutamismärgina kirjutatakse poole rea kõrgusele.

Kahe tähe vahel, sageli ka numbrilise teguri ja tähe vahel, jäetakse korrutamispunkt ära.

Nii tähendab  $Nx$  sama, mis  $N \cdot x$ , ja  $3,8u$  sama, mis  $3,8 \cdot u$ .

## § 4. Algebraalne avaldis.

Algebraaliseks avaldiseks nimetame kogu arvtähiseid, mis on isekeskis ühendatud tehtemärkidega.

Näiteks on

$$t + p, \quad 12k, \quad \frac{7}{22}u, \quad 2n - 1$$

algebraalised avaldised.

Ka üksikarve, nagu  $7$ ,  $a$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $N$ , loeme algebraalisteks avaldisteks.

## § 5. Kordaja.

Korrutises esinevat numbrilist tegurit nimetame koefitsiendiks ehk kordajaks.

Tavaliselt kirjutatakse kordaja teiste tegurite ette. Nii on avaldistes  $12k$ ,  $3n$ ,  $\frac{7}{22}u$  kordajaiks arvud  $12$ ,  $3$  ja  $\frac{7}{22}$ .

**Kordaja 1 jäetakse kirjutamata.**

Nii kirjutame avaldise  $1 \cdot bc$  asemel lihtsalt  $bc$ .

**Näide 1.** Olgu võrdkülgse kolmnurga külje pikkus  $a$  cm; selle kolmnurga ümbermõõt on siis  $a + a + a$  cm ehk  $3 \cdot a$  cm ehk  $3a$  cm. Siit näeme, et

$$a + a + a = 3a.$$

**Näide 2.** Kui ruudu külje pikkus on  $b$  cm, siis ruudu ümbermõõt on  $b + b + b + b$  cm ehk  $4 \cdot b$  cm ehk  $4b$  cm. Nii võime kirjutada, et

$$b + b + b + b = 4b.$$

Avaldistes  $3a$  ja  $4b$  on kordajateks  $3$  ja  $4$ . Need on täisarvulised kordajad.

Täisarvuline kordaja näitab, mitu korda kordajale järgnevat avaldist tuleb võtta liidetavana.

Kui  $a$  tähendab mingit arvu, siis lühiduse otstarbel kirjutame

summa $a + a$	asemel $2 \cdot a$	ehk $2a$
„ $a + a + a$	„ $3 \cdot a$	„ $3a$
„ $a + a + a + a + a$	„ $5 \cdot a$	„ $5a$
„ $a + a + a + b + b$	„ $3a + 2b$ .	

Selle eeskujul mõistame kirjutist  $100a$  summana, milles arv  $a$  on võetud liidetavana 100 korda.

Näide 3. Kui võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt on  $\ddot{u}$  cm, siis selle kolmnurga külje pikkus on  $\frac{\ddot{u}}{3}$  cm ehk  $\frac{1}{3}\ddot{u}$  cm.

Näide 4. Kui ruudu ümbermõõt on  $p$  cm, siis ruudu külje pikkus on  $\frac{p}{4}$  cm ehk  $\frac{1}{4}p$  cm. Sama ruudu kolme külje pikkus on kokku  $\frac{3}{4}p$  cm ehk  $0,75p$  cm.

Avaldistes  $\frac{1}{3}\ddot{u}$ ,  $\frac{1}{4}p$  ja  $0,75p$  on koefitsiendid murdarvulised.

Murdarvuline kordaja näitab, missugune osa tuleb võtta kordajale järgnevast avaldisest.

Näidistena lahendame järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Kirjutada avaldis  $c + c + c + d + d + d + d + d$  võimalikult lühidalt.

Lahendus.

$$c + c + c + d + d + d + d + d = 3c + 5d.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

29.  $a + a + a + a$

$$b + b + b + b + b + b + b$$

$$m + m + m + m + n + n + n$$

$$x + x + x + y + y + y$$

$$u + u + u + v + v + v + v$$

$$\begin{aligned}
 29. \quad & ab + ab + ab \\
 & bc + bc + bc + bc + bc \\
 & ax + ax + by + by + by + by \\
 & mn + mn + mn + mn + pq \\
 & kl + kl + ab + ab + ab
 \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Kirjutada avaldis  $3ax + 2by$  kordajata.

Lahendus.

$$3ax + 2by = ax + ax + ax + by + by.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised kordajata:

30.	$5a$	$3cx$	$2d + 5c$
	$3p$	$4fy$	$3ab + 4xy$
30.	$6d$	$2cpt$	$3uv + 2ke$
	$2h$	$3cdx$	$4ax + by + 3cz$

Ülesanne 3. Märkida matemaatiliste sümbolitega arvu  $a$  kahekordse ja arvu  $b$  vahe.

Lahendus. Arvu  $a$  kahekordne on  $2a$ , seega arvu  $a$  kahekordse ja arvu  $b$  vahe on  $2a - b$ .

Ülesanded.

30. Märkida matemaatiliste sümbolitega:

- arvu  $a$  seitsmekordne;
- arvu  $b$  kümnekordne;
- arvu  $c$  pool;
- arvu  $d$  kolm kümnendikku;
- arvu  $e$  seitsekümmend kuus sajandikku.

31. Kirjutada sõnadeta:

- arvude  $m$  ja  $n$  korrutise kahekordne;
- arvude  $p$  ja  $q$  jagatise viiekordne;
- arvude  $2s$  ja  $3t$  summa;
- arvude  $4u$  ja  $17v$  vahe;
- arvude  $2x$  ja  $9z$  jagatis.

32. Märkida matemaatiliste sümbolite abil:  
 arvu  $x$  ja arvu  $y$  kahekordse summa;  
 arvu  $u$  kolmekordse ja arvu  $v$  vahe;  
 arvu  $a$  kahekordse ja arvu  $b$  kolmekordse  
 summa;  
 arvu  $m$  neljakordse ja arvu  $n$  seitsmekordse  
 vahe;  
 arvu  $p$  poole ja arvu  $q$  kolmandiku summa.

32. Märkida matemaatiliste sümbolite abil:  
 arvude  $x$  ja  $y$  korrutise kolmekordne;  
 arvude  $a$  ja  $b$  jagatise kolm viiendikku;  
 arvude  $m$  ja  $n$  korrutise neljakordse ja arvu  $z$   
 seitsmekordse summa;  
 arvude  $p$  ja  $q$  jagatise ja arvu  $z$  kolmekordse  
 vahe;  
 arvude  $r$  ja  $s$  korrutise kahekordse ja samade  
 arvude jagatise vahe.

Ülesanne 4. Sõnastada avaldis:

$$3a + \frac{1}{4}b.$$

Lahendus.  $3a + \frac{1}{4}b$  on arvu  $a$  kolmekordse ja arvu  
 $b$  neljandiku summa.

Ülesanded.

Sõnastada järgmised avaldised ja ka nendega antud  
 arvutamise-eeskirjad:

33.	$a + b$	$\frac{3}{4}d$	$3a + 7b$
	$a + b + c$	$5,8b$	$a - \frac{1}{3}b$
33.	$9b$	$a + 3b$	$12a - 1,2c$
	$\frac{1}{3}c$	$4a + c$	$0,12a + 0,88b$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$\begin{array}{ll}
 34. & 2a - a & 7k - k - k \\
 & 5b - 2b & 11m - m - m \\
 & 7c - 3c & 16n - 2n - n \\
 & 10d - 9d & 23p - p - 4p \\
 & 13e - 4e & 30q - 10q - q
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 34. & ab + ab + ab - 2ab & p + p + p - q \\
 & 3cd + cd - 3cd & r + 2r + 3r - 4s \\
 & 5fg - fg - fg & s + s + s - 2s - 1 \\
 & 9hk - hk - hk - hk & 5t - t - 2t - 2t + 3 \\
 & 12mn + 3mn - 2mn - mn & 2u + u + u - 3u - u
 \end{array}$$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$\begin{array}{ll}
 35. & 2a + a & 3q + 2q \\
 & 4x + x & 5r + 5r \\
 & 6m + m & 8s + 3s \\
 & 3n + n + n & 10t + t + t \\
 & 8p + p + p + p & 7u + u + u + u
 \end{array}$$

Ülesanne 5. Kirjutada avaldis  $\frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{3a}{5}$  võimalikult lühidalt.

Lahendus.

$$\frac{a}{5} + \frac{a}{5} + \frac{3a}{5} = \frac{1}{5}a + \frac{1}{5}a + \frac{3}{5}a = \frac{5}{5}a = a.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$\begin{array}{ll}
 35. & \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a & \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}b \\
 & \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}b & \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}y \\
 & 1,2a + 5,6a - 5,8a & 0,2x + 1,8x - x \\
 & \frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} & \frac{t}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t}{2} \\
 & 1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}x & \frac{2a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{4a}{3}
 \end{array}$$

## § 6. Arvu ruut. Arvu kuup.

Näide 1. Ruudukujuline põrand kaetakse malelaua sarnaselt ruudukujuliste parkettkividega. Mahtugu nii põranda pikkusse kui ka laiusse  $a$  kivi. Siis mahub põrandale

$$a \cdot a \text{ ehk } aa$$

kivi. Korrutise  $aa$  kirjutame kujul  $a^2$ .

Üldiselt: kui pikkusühik mahub ruudu küljesse  $a$  korda, siis ruudu pindala on  $a^2$  vastavat ruutühikut.

Seetõttu avaldist  $a^2$  loetakse  $a$  r u u t.

Näide 2. Mahtugu kuubi servasse  $a$  pikkusühikut. Täidame kuubi kuupühikutega, see on kuupidega, mille serva pikkus on 1 pikkusühik. Kuubi põhi kattub siis  $a \cdot a$  ruutühikuga; selles põhjal asetsevas kihis on seega  $a \cdot a$  kuupühikut; kihte on  $a$ , seega on kuubis kuupühikuid kokku

$$a \cdot a \cdot a = a \cdot a^2.$$

Korrutise  $a \cdot a \cdot a$  ehk  $a \cdot a^2$  kirjutame kujul  $a^3$ .

Niisiis: kui pikkusühik mahub kuubi servasse  $a$  korda, siis kuubi ruumala on  $a^3$  vastavat kuupühikut.

Seepärast avaldist  $a^3$  loetakse  $a$  k u u p.

## § 7. Aste.

Ülal kirjutasime

korrutise  $a \cdot a$  ehk  $aa$  lühemalt  $a^2$

ja korrutise  $a \cdot a \cdot a$  ehk  $aaa$  lühemalt  $a^3$ .

Kirjutame selle eeskujul korrutise  $a \cdot a \cdot a \cdot a$  ehk  $aaaa$  lühemalt  $a^4$  ja üldiselt  $n$  võrdsest tegurist koosneva korrutise  $a \cdot a \cdot a \cdots a$  ehk  $aaa \cdots a$  lühemalt  $a^n$ .

Arve  $a^2, a^3, a^4, \dots, a^n$  nimetame arvu  $a$  teiseks, kolmandaks, neljandaks,  $\dots$ ,  $n$ -endaks astmeks. Seega:

arvu  $a$   $n$ -es aste on korrutis, milles on  $n$  võrdset tegurit  $a$ .

Avaldises  $a^n$  nimetame arvu  $a$  astendatavaks ehk astme aluseks, arvu  $n$  — astendajaks.

Astendaja näitab, mitu korda alus tuleb võtta tegurina.

Astendaja 1 jäetakse kirjutamata.

Arv  $a^1$  on arvu  $a$  esimene aste; me loeme ta võrdseks arvu  $a$  enesega.

Astme leidmist nimetame astendamiseks.

Ülesanne 1. Kirjutada järgmised korrutised astmetena:

$$1. a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$

$$2. \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

Lahendus.

$$1. a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$$

$$2. \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised korrutised astmetena:

36.	$8 \cdot 8$	$25 \cdot 25$	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$5 \cdot 5 \cdot 5$
	$10 \cdot 10$	$40 \cdot 40$	$6 \cdot 6 \cdot 6$	$3 \cdot 3 \cdot 3$
	$a \cdot a$	$c \cdot c$	$m \cdot m \cdot m$	$n \cdot n \cdot n$
	$b \cdot b$	$y \cdot y$	$k \cdot k \cdot k$	$p \cdot p \cdot p$
	$x \cdot x$	$t \cdot t$	$u \cdot u \cdot u$	$r \cdot r \cdot r$
36.	$2 \cdot 2$	$5 \cdot 5 \cdot 5$	$0,2 \cdot 0,2$	
	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$	$x \cdot x$	
	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5$	$b \cdot b \cdot b \cdot b$	
	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$d \cdot d \cdot d \cdot d$	$c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c$	
	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$a \cdot a \cdot a$	$0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1$	

Kirjutada järgmised korrutised astmetena:

$$37. \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \quad \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$$

$$37. \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

Ülesanne 2. Arvutada järgmised astmed:

$$1. \quad 0,2^3$$

$$2. \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2.$$

Lahendus.

$$1. \quad 0,2^3 = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 = 0,008$$

$$2. \quad \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 6} = \frac{25}{36}.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised astmed:

38.	$2^5$	$2^{10}$	38.	$0,8^2$	$0,08^2$
	$3^3$	$4^3$		$0,1^4$	$0,3^2$
	$10^4$	$10^5$		$0,01^3$	$0,001^2$
	$12^3$	$25^2$		$1^{13}$	$1^{10}$
	$60^2$	$60^3$		$0^2$	$0^5$

Arvutada järgmised astmed:

39.	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{4}{5}\right)^2$	$\left(\frac{3}{8}\right)^2$	$\left(\frac{7}{10}\right)^2$
39.	$\left(\frac{1}{2}\right)^5$	$\left(\frac{1}{3}\right)^6$	$\left(\frac{5}{8}\right)^3$	$\left(\frac{9}{10}\right)^3$

Ülesanne 3. Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$1. \quad n \cdot n + n \cdot n + n \cdot n$$

$$2. \quad uuvvv + uuvvv.$$

Lahendus.

$$1. \quad n \cdot n + n \cdot n + n \cdot n = n^2 + n^2 + n^2 = 3n^2$$

$$2. \quad uuvvv + uuvvv = u^2v^3 + u^2v^3 = 2u^2v^3.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

- |     |   |     |                     |
|-----|---|-----|---------------------|
| 40. | $c \cdot c + c \cdot c$   | 40. | $aa + aa + aa$      |
|     | $m \cdot m \cdot m + m \cdot m \cdot m + m \cdot m \cdot m$             |     | $bbb + bbb$         |
|     | $a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a$                                     |     | $xx + xx + xx + xx$ |
|     | $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b + a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$ |     | $abb + abb$         |
|     | $a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$             |     | $aaaaxx + aaaaxx$ . |

Ülesanne 4. Kirjutada järgmised avaldised astendajateta:

1.  $a^4$
2.  $5^3 + 5^3$ .

Lahendus.

1.  $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$
2.  $5^3 + 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \cdot 5$ .

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised astendajateta:

- |     |       |       |         |                              |
|-----|-------|-------|---------|------------------------------|
| 41. | $2^2$ | $e^3$ | $0,6^3$ | $\left(\frac{1}{3}\right)^2$ |
|     | $3^3$ | $x^5$ | $0,8^2$ | $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ |
| 41. | $5^3$ | $k^4$ | $0,4^3$ | $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ |
|     | $2^5$ | $z^3$ | $0,1^5$ | $\left(\frac{5}{6}\right)^4$ |

Kirjutada järgmised avaldised astendajateta:

- |     |             |     |                      |
|-----|-------------|-----|----------------------|
| 42. | $2^3 + 2^3$ | 42. | $2^2 + 2^2 + 2^2$    |
|     | $2^4 + 2^4$ |     | $2^3 + 2^3 + 2^3$    |
|     | $3^2 + 3^2$ |     | $3^2 + 3^2 + 3^2$    |
|     | $3^3 + 3^3$ |     | $1^4 + 1^4 + 1^4$    |
|     | $5^2 + 5^2$ |     | $10^3 + 10^3 + 10^3$ |

Ülesanne 5. Kirjutada järgmised avaldised kordajateta ja astendajateta:

1.  $4b$
2.  $a^4$
3.  $3a^2$ .

Lahendus.

1.  $4b = b + b + b + b$
2.  $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$
3.  $3a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a$ .

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised kordajateta ja astendajateta:

43. $3a$	$5c$	43. $4a$	$2m$
$b^3$	$d^5$	$a^2$	$n^3$
$2mm$	$4aa$	$2a^3$	$3x^2$
$x^2 + x^2 + x^2$	$b^3 + b^3$	$3b^3$	$2t^3$
$3nnn$	$2vvv$	$4x^2$	$3y^3$

## § 8. Sulud.

Ülesanne. Avaldada üldkujul kahe järjestikuse täisarvu korrutis.

Lahendus. Tähistame väiksema kahest kõnesolevast täisarvust tähega  $N$ ; sellele järgnev täisarv on siis  $N + 1$ . Kui kirjutaksime need arvud kõrvuti ja paigutaksime punkti korrutamismärgina nende vahele, saaksime

$$N \cdot N + 1.$$

Nüüd näeme, et selles avaldises on esimeseks tehteks korrutamine, teiseks liitmine; seega nõuab see avaldis esmalt arvu  $N$  korrutamist arvuga  $N$  ja siis arvu  $1$  liitmist esmalt saadud korrutisega. Niisugune lahendus on aga vastuolus ülesande sisuga. Selle asjaolu märkimiseks, et siin esmalt

tuleb toimetada arvude  $N$  ja  $1$  liitmine ja siis alles saadud summa korrutamine arvuga  $N$ , võetakse summa  $N + 1$  sulgudesse; nii saame oma ülesande õige lahendusena avaldise

$$N \cdot (N + 1).$$

Erijuhul, kui  $N$  on näiteks arv  $7$ , tähendab

$$\text{avaldis } N \cdot (N + 1) \quad \text{arvu } 7 \cdot 8 \quad \text{ehk } 56,$$

$$\text{avaldis } N \cdot N + 1 \text{ aga} \quad \text{arvu } 7 \cdot 7 + 1 \text{ ehk } 50.$$

Sellest arutlusest näeme, et avaldises

**sulgudega märgitakse tehete sooritamise järjekorda.**

Et ära hoida kahtlust selle kohta, missuguses järjekorras sooritada avaldises märgitud tehted, on kokku lepitud järgmiselt:

Kui avaldises ei esine sulgusid, tuleb esmalt sooritada astendamised, siis korrutamised ja jagamised ning viimaks liitmised ja lahutamised selles järjekorras, milles esinevad märgid pluss ja miinus. Kui avaldises esineb sulgusid, tuleb kõigepealt sooritada need tehted, mida nõuavad sulgudes olevad tehtemärgid; kui see on toimunud, tuleb edasi käia käesoleva kokkuleppe esimese osa järgi.

Näide. Avaldis

$$a + bc^2 - \frac{m}{n}$$

sisaldab järgmise arvutamise eeskirja: „Leida arvu  $c$  ruut; korrutada saadus arvuga  $b$ ; jagada arv  $m$  arvuga  $n$ ; liita korrutis arvuga  $a$ ; lahutada summast varemini saadud jagatis.“

Seevastu avaldis

$$a + b(c^2 - \frac{m}{n})$$

esitab hoopis teistsuguse nõude: „Leida arvu  $c$  ruut; jagada arv  $m$  arvuga  $n$ ; lahutada esimesest saadusest teine; korrutada tulemus arvuga  $b$ ; liita saadus arvuga  $a$ .“

Avaldis

$$(a + bc)^2 - \frac{m}{n}$$

nõuab veel hoopis midagi muud: „Korrutada arvud  $b$  ja  $c$ ; liita saadud korrutis arvuga  $a$ ; arvutada leitud summa ruut; jagada arv  $m$  arvuga  $n$ ; lahutada jagatis eelmisest tulemusest.“

Ülesanne 1. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

$$1. (14 - 6) \cdot 2 + 3 \cdot (5 + 4)$$

$$2. 2\frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(4 - 2\frac{1}{2}\right).$$

Lahendus.

$$1. (14 - 6) \cdot 2 + 3 \cdot (5 + 4) = 8 \cdot 2 + 3 \cdot 9 = 16 + 27 = 43.$$

$$\begin{aligned} 2. 2\frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(4 - 2\frac{1}{2}\right) &= 2\frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{2}{6} + \frac{5}{6}\right) - \frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2} = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{13}{6} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{65}{12} - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{65}{12} - \frac{6}{12} = \frac{59}{12} = 4\frac{11}{12}. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

$$\begin{aligned} 44. \quad &20 + 3 \cdot 4 - 2 \\ &(20 + 3) \cdot (4 - 2) \\ &20 + (3 \cdot 4 - 2) \\ &(20 + 3) \cdot 4 - 2 \\ &20 + 3 \cdot (4 - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 44. \quad &39 - 4 \cdot 7 - 3 \\ &(39 - 4) \cdot (7 - 3) \\ &39 - (4 \cdot 7 - 3) \\ &(39 - 4) \cdot 7 - 3 \\ &39 - 4 \cdot (7 - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45. \quad &(47 + 9) \cdot 4 + 9 \cdot 4 \\ &(47 + 9 \cdot 4 + 9) \cdot 4 \\ &47 + 9 \cdot (4 + 9 \cdot 4) \\ &47 + 9 \cdot (4 + 9) \cdot 4 \\ &(47 + 9) \cdot (4 + 9) \cdot 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 45. \quad &8 \cdot \frac{192 - 67}{50} \\ &\frac{209 + 416}{25} \cdot \frac{1}{17 - 12} \\ &\frac{240}{1 + 8} \cdot \frac{38 + 32}{29 - 15} \\ &\frac{2 \cdot (4 + 6)}{37 - 12} - \frac{4}{8 - 3} \\ &\frac{24 + 36}{(9 - 8) \cdot 5} - \frac{6 \cdot (101 - 92)}{(13 + 14) \cdot 2} \end{aligned}$$

$$46. \left(1\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2}\right) \cdot 15$$

$$\left(2\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}\right) \cdot 3$$

$$\left(4\frac{1}{3} + 2\frac{1}{5}\right) \cdot 1\frac{1}{2}$$

$$\left(4\frac{1}{8} - 2\frac{1}{2}\right) \cdot 8$$

$$\left(8\frac{1}{4} - 3\frac{2}{3}\right) \cdot 3\frac{1}{3}$$

$$46. 2 \cdot \left(15 - 2\frac{3}{4}\right) + 3 \cdot \left(12 - 4\frac{3}{4}\right)$$

$$3 \cdot \left(25\frac{1}{2} - 17\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(30 - 25\frac{3}{5}\right)$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(16\frac{1}{3} - 10\frac{3}{4}\right) - \left(2\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(14\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3} \cdot \left(2\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

$$1\frac{1}{2} \cdot \left(20 - 15\frac{3}{4}\right) - \frac{5}{6} \cdot \left(3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{4}\right)$$

Ülesanne 2. Arv  $n$  on täisarv. Avaldada selle arvu ja täisarvude reas temale eelneva arvu jagatis.

Lahendus. Täisarvude reas seisab arvu  $n$  ees arv, mis on arvust  $n$  ühe võrra väiksem, see on arv  $n - 1$ . Nõutav jagatis on seega

$$\frac{n}{n-1}.$$

Ülesanded.

47. Avaldada ristküliku ümbermõõt  $u$  tema pikkuse  $p$  ja laiuse  $l$  kaudu võimalikult väheste tehetega.

47. Olgu ristküliku pool ümbermõõtu  $p$  sentimeetrit, üks ristküliku külgedest  $x$  sentimeetrit. Avaldada ristküliku pindala.

48. Arv  $n$  on täisarv. Avaldada selle arvu ja täisarvude reas temale järgneva arvu korrutis.

48. Arv  $n$  on täisarv. Arvutada nende kahe arvu korrutis, mis seisavad täisarvude reas üks arvu  $n$  ees ja teine tema järel.

49. Koolitöö kestab aastas  $N$  nädalat; muu osa aastast on puhkeaeg. Töö ajal loeb õpilane  $a$  raamatut nädalas, puhkeajal aga  $b$  raamatut nädalas. Kui palju raamatuid loeb õpilane aastas?

49. Kaks matkajat alustavad ühtaegu teekonda ühest ning samast kohast ja liiguvad ühes ning samas suunas,

esimene kiirusega  $m$  kilomeetrit tunnis, teine kiirusega  $n$  kilomeetrit tunnis. Kui kaugel on nad teineteisest  $t$  tunni pärast?

50. Akna kõrgus on  $a$  meetrit ja  $b$  sentimeetrit; akna laius on  $x$  sentimeetrit. Avaldada akna pindala.

50. Meeter riiet maksab  $a$  rubla ja  $b$  kopikat. Kui palju maksab  $n$  meetrit seda riiet?

Ülesanne 3. Sõnastada nõue, mis matemaatilises lühikirjas on avaldatud järgmiselt:

$$(a + b) : (a - b).$$

Lahendus. Esiteks tuleb arvutada arvude  $a$  ja  $b$  summa, siis tuleb arvutada nende arvude vahe ning viimaks tuleb leitud summa jagada vahega.

Ülesanded.

Sõnastada nõuded, mis matemaatilises lühikirjas avalduvad järgmiselt:

$$51. \quad \begin{array}{lll} 2(a - 1) & a(2a + 3) & (a + 1)^2 \\ 7(b + 2) & b : (a + 2c) & 2(b - 5)^2 \end{array}$$

$$51. \quad \begin{array}{lll} \frac{1}{3}(a - c)b & ab : (2a + b) & b(a + b)^2 \\ \frac{a(a + b)}{4} & \frac{a}{b} \cdot (4a + 5b) & c^3(a - b) \end{array}$$

### § 9. Avaldise numbriline väärtus.

Ülesanne 1. Kui suur on kolmnurga pindala, kui tema alus on 16 sentimeetrit ja kõrgus 28 sentimeetrit?

Lahendus. Kui kolmnurga alus on  $a$  sentimeetrit ja kõrgus on  $h$  sentimeetrit, siis tema pindala on

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$$

ruutsentimeetrit. Antud juhul  $a = 16$  ja  $h = 28$ , seega otsitav pindala on

$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 28 = 8 \cdot 28 = 224$$

ruutsentimeetrit.

Arv 224 on avaldise  $\frac{1}{2} \cdot a \cdot h$  numbriline väärtus, kui  $a = 16$  ja  $h = 28$ .

Ülesanne 2. Arvutada trapetsi pindala, kui tema alused on 9 ja 11 sentimeetrit ja kõrgus 8 sentimeetrit.

Lahendus. Kui trapetsi alused on  $a$  sentimeetrit ja  $b$  sentimeetrit ja kõrgus  $h$  sentimeetrit, siis selle trapetsi pindala on

$$\frac{a+b}{2} \cdot h$$

ruutsentimeetrit. Antud ülesandes  $a = 9$ ,  $b = 11$  ja  $h = 8$ , seega on otsitav pindala

$$\frac{9+11}{2} \cdot 8 = \frac{20}{2} \cdot 8 = 10 \cdot 8 = 80$$

ruutsentimeetrit.

Arv 80 on avaldise  $\frac{a+b}{2} \cdot h$  numbriline väärtus, kui  $a = 9$ ,  $b = 11$  ja  $h = 8$ .

Ülesanne 3. Määrata avaldise

$$\frac{2pq}{(p+q)^2}$$

numbriline väärtus, kui  $p = 1,2$  ja  $q = 5,6$ .

Lahendus. Kirjutame avaldises tähtede asemele antud arvud, siis saame

$$\frac{2pq}{(p+q)^2} = \frac{13,44}{46,24} = \frac{1344}{4624} = \frac{84}{289} \approx 0,29.$$

$2,4 \cdot 5,6$	$6,8 \cdot 6,8$	$840 : 289 = 0,29$
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
144	544	578
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
120	408	2620
<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>	<hr style="width: 100%;"/>
13,44	46,24	2601
		<hr style="width: 100%;"/>
		$19 < \frac{289}{2}$

Vastus.  $\frac{2pq}{(p+q)^2} \approx 0,29.$

Kokkuvõttes:

selleks, et saada avaldise numbrilist väärtust temas esinevate tähtede antud väärtustel, asetame avaldisele need väärtused tähtede asemele ja toimetame nendega tehted õiges järjekorras, nagu avaldises esinevad tehtemärgid ja sulud seda nõuavad.

Ülesanded.

Arvutada järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

52.  $a + 2\frac{1}{2}$ , kui  $a = 1$   
 $\frac{3}{4} + c$ , kui  $c = \frac{1}{4}$   
 $q + q$ , kui  $q = 0,4$   
 $z - 10$ , kui  $z = 10,1$   
 $L - L$ , kui  $L = 5$

52.  $5x$ , kui  $x = 3$   
 $2\frac{1}{2}f$ , kui  $f = 4$   
 $11N$ , kui  $N = 11$   
 $0,7p$ , kui  $p = 10$   
 $9D$ , kui  $D = 0$

Arvutada järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

53.  $\frac{4B - 1}{3}$ , kui  $B = 4$   
 $\frac{10 - 2g}{12}$ , kui  $g = 1$   
 $\frac{m + 10}{25}$ , kui  $m = 20$

53.  $\frac{Q - 2}{Q}$ , kui  $Q = 2$   
 $\frac{21 + 5r}{r}$ , kui  $r = 3$   
 $\frac{7u - 10}{u}$ , kui  $u = 2$

Arvutada:

54.  $a^2$ , kui  $a = 3$   
 $f^3$ , kui  $f = 4$   
 $H^4$ , kui  $H = 0$   
 $u^2$ , kui  $u = \frac{1}{2}$   
 $x^3$ , kui  $x = \frac{3}{4}$

54.  $l^5$ , kui  $l = 2$   
 $p^3$ , kui  $p = 0,4$   
 $R^3$ , kui  $R = 1,8$   
 $t^4$ , kui  $t = \frac{3}{10}$   
 $w^5$ , kui  $w = \frac{6}{7}$

Arvutada:

55.  $3A^2$ , kui  $A = 4$

$\frac{d^3}{10}$ , kui  $d = 5$

$\frac{22R^2}{7}$ , kui  $R = 14$

55.  $\frac{100}{f^2}$ , kui  $f = 8$

$\frac{1000}{s^3}$ , kui  $s = 10$

$\frac{2}{5u^2}$ , kui  $u = 0,1$

Arvutada järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

56.  $a + 2b$ , kui  $a = 1$  ja  $b = \frac{1}{2}$

$3f - 4g$ , kui  $f = 3$  ja  $g = 1$

56.  $7pq + 2$ , kui  $p = 0$  ja  $q = 1$

$0,2uv - 1$ , kui  $u = 2$  ja  $v = 10$

Allpool on toodud 10 avaldist. Arvutada nende numbrilised väärtused tähtede antud väärtustel:

57.  $\begin{cases} 3c + d \\ c = 0,3; d = 0,5 \end{cases}$

58.  $\begin{cases} 3(c + d) \\ c = 0,3; d = 0,5 \end{cases}$

59.  $\begin{cases} am - n \\ a = 7; m = 7; \\ n = 6 \end{cases}$

60.  $\begin{cases} a(m - n) \\ a = 7; m = 7; \\ n = 6 \end{cases}$

61.  $\begin{cases} \frac{p+q}{p-q} \\ p = 2,7; q = 2,5 \end{cases}$

57.  $\begin{cases} v^2 + s^2 \\ v = \frac{1}{2}; s = 2 \end{cases}$

58.  $\begin{cases} 3p^2 - 2q^3 \\ p = 1; q = \frac{1}{2} \end{cases}$

59.  $\begin{cases} a(c^2 - a) \\ a = 0,5; c = 1,2 \end{cases}$

60.  $\begin{cases} \frac{u^2}{1+v^2} \\ u = 5; v = 3 \end{cases}$

61.  $\begin{cases} \frac{x^3}{x^2 - a^2} \\ x = 3; a = 2 \end{cases}$

Sageli on tarvis teada ühe ja sama avaldise numbrilisi väärtusi tähe mitmel eri väärtusel. Sel puhul korraldame kogu arvutamistöö kindla plaani ehk skeemi järgi. See hõlbustab tööd, aitab hoiduda vigadest ja kergendab tunduvalt tulemuste kontrollimist. Skeemi kasutamist selgitagu järgmine näide.

Näide. Arvutame avaldise

$$\frac{1 + 2n}{(n - 1)^2}$$

väärtused  $n$ -i täisarvuliste väärtuste jaoks vahemikus 2-st 8-ni. Tulemused arvutame kahe kohaga pärast komä.

Töö korraldame nii, nagu nähtub allpoolseisvast tabelskeemist; säärane tabel täidetakse alati veergude kaupa, mitte ridade kaupa.

$n$	$2n$	$1 + 2n$	$n - 1$	$(n - 1)^2$	$\frac{1 + 2n}{(n - 1)^2}$
2	4	5	1	1	5,00
3	6	7	2	4	1,75
4	8	9	3	9	1,00
5	10	11	4	16	0,69
6	12	13	5	25	0,52
7	14	15	6	36	0,42
8	16	17	7	49	0,35

Ülesanded.

62. Arvutada avaldise  $12 - t$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $t$  täisarvuliste väärtustele 6-st 12-ni. Töö korraldada kaheveerulise skeemi järgi.

62. Arvutada avaldise  $3x - 2$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvuliste väärtustele 1-st 8-ni. Töö korraldada kohase skeemi järgi.

63. Arvutada avaldise  $2(x - 1)$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvuliste väärtustele 1-st 5-ni. Töö korraldada kohase skeemi järgi.

63. Arvutada avaldise  $3n(n+1)$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $n$ -i täisarvulistele väärtustele 0-st kuni 10-ni.

64. Arvutada avaldise  $x^2 + 2x$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele 1-st kuni 10-ni.

64. Arvutada avaldise  $x(x+3)$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele 0-st kuni 12-ni.

65. Arvutada avaldise  $\frac{1+2n}{n}$  numbrilised väärtused, võttes  $n$ -i väärtused 1-st kuni 6-ni iga 1 takka.

65. Arvutada avaldise  $\frac{2+3n}{n}$  numbrilised väärtused, võttes  $n$ -i väärtused 2-st kuni 12-ni iga 2 takka.

66. Arvutada avaldise  $2m+3$  numbrilised väärtused, võttes  $m$ -i väärtused 0-st kuni 5-ni iga 0,5 takka.

66. Arvutada avaldise  $4x+2$  numbrilised väärtused, võttes  $x$ -i väärtused 0-st kuni 6-ni iga 0,5 takka.

67. Arvutada avaldise  $5x+4$  numbrilised väärtused, võttes  $x$ -i väärtused 0-st kuni 4-ni iga 0,2 takka.

67. Arvutada avaldise  $10x-2$  numbrilised väärtused, võttes  $x$ -i väärtused 1-st kuni 7-ni iga 0,4 takka.

Teades, et

$$a = 24, b = 4, c = 5, d = 2 \text{ ja } h = 1,$$

leida järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

$$\begin{aligned} 68. \quad & a - (bc - d) - h \\ & a - b(c - d) - h \\ & (a - b)c - d - h \\ & a - (bc - d - h) \\ & a - b(c - d - h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 68. \quad & a - bc + (d - h) \\ & a - b(c - d) + h \\ & a - bc + b(d - h) \\ & (a - b)(c - d) - h \\ & (a - bc) - d - h \end{aligned}$$

§ 10.  $n$ -es paarisarv ja  $n$ -es paaritu arv.  $a$  kümmet ja  $b$  ühte sisaldava arvu üldine kuju.

Ülesanne 1. Linnades nummerdatakse majad tänava ühel poolel paarisarvuliste numbritega 2, 4, 6, ..., tänava teisel poolel paarituarvuliste numbritega 1, 3, 5, ... Mis-sugust numbrit kannab  $n$ -es maja tänava ühel poolel, mis-sugust numbrit  $n$ -es maja tänava teisel poolel?

Lahendus. Tänavaga ühel poolel kannab

	esimene	teine	kolmas ...	maja
numbrit	2	4	6	...
ehk	$2 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	...

Seega  $n$ -es maja kannab numbrit

$$2 \cdot n.$$

Tänavaga teisel poolel kannab

	esimene	teine	kolmas	...	maja
numbrit	1	3	5	...	...
ehk	$2 \cdot 1 - 1$	$2 \cdot 2 - 1$	$2 \cdot 3 - 1$	...	...

Seega  $n$ -es maja kannab numbrit

$$2 \cdot n - 1.$$

Oma arutluste tulemuse võime lühidalt kokku võtta nõnda:

$$\begin{aligned} n\text{-es paarisarv on } & 2n, \\ n\text{-es paaritu arv on } & 2n - 1. \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Kirjutusmaterjali ostuarve tasutakse  $a$  kümnekopikalise ja  $b$  ühekopikalise rahaga. Kui suur on ostuarve?

Lahendus.

1 kümnekopikaline on väärt	10 kopikat,
$a$ kümnekopikalist on väärt	$a \cdot 10$ kopikat
ehk, muutes tegurite järjekorda,	$10 \cdot a$ kopikat.

Kokku  $a$  kümnekopikalist ja  $b$  ühekopikalist raha on väärt

$$10 \cdot a + b$$

kopikat. Seega on ostuarve suurus leitud.

Oma arutluste tulemuse võime lühidalt kokku võtta nõnda:

arv, mis koosneb  $a$  kümnest ja  $b$  ühest, avaldub kujul

$$10a + b.$$

Ülesanded.

Kui suur on

69.	8-s paarisarv?	69.	6-s paaritu arv?
	13-s paarisarv?		15-s paaritu arv?
	10-s paaritu arv?		12-s paarisarv?
	25-s paaritu arv?		17-s paarisarv?
	30-s paarisarv?		50-s paaritu arv?

Kirjutada alljärgnevad arvud kujul  $10a + b$ :

70.	25	234	70.	38	375
	32	567		72	893
	17	3456		19	2345

## § 11. Valem.

Valemiks nimetame matemaatilistes sümbolites kirjutatud juhust, mille järgi andmeist arvutatakse otsitav.

Näiteks juhise „arvu  $S$  saamiseks tuleb arv  $a$  korrutada arvuga  $k$  ning saadud korrutis jagada arvuga 2“ kirjutame valemina

$$S = \frac{a \cdot k}{2}.$$

Seda loeme lühidalt nii: „ $S$  on võrdne  $a$  ja  $k$  poole korrutisega“.

Valem koosneb ikka kahest osast: vasakul pool võrdusmärgi seisab otsitava tähis; paremal pool võrdus-

märki seisavad andmete tähised, mis on isekeskis ühendatud tehtemärkidega; need märgid näitavad, mida peab andmetega tegema, et saada otsitavat.

**Ülesanne.** Kolmnurga küljed on  $a$ ,  $b$  ja  $c$ . Andavalem kolmnurga pool-ümbermõõdu  $p$  arvutamiseks.

**Lahendus.** Leiame esiteks kolmnurga ümbermõõdu; selleks arvutame külgede summa:

$$a + b + c.$$

Pool-ümbermõõdu leidmiseks jagame külgede summa arvuga 2, saame

$$\frac{a + b + c}{2}.$$

**Vastus.** Kolmnurga pool-ümbermõõdu valem on

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

**Ülesanded.**

71. Olgu kolmnurga ümbermõõt märgitud tähega  $u$ ; olgu kolmnurga kaks külge  $a$  ja  $b$ . Andavalem kolmnurga kolmanda külje arvutamiseks.

71. Kolhoosi ristkülikukujulise põllu ümbermõõt on  $p$ , ristküliku pikkus on  $a$ . Andavalem selle põllu laiuse arvutamiseks.

72. Kolhoos müüs Teraviljasalvele  $a$  kg rukist hinnaga  $b$  kop. kg ja  $c$  kg nisu hinnaga  $d$  kop. kg. Andavalem rahasumma arvutamiseks, mille kolhoos sai vilja müügist.

72. Õpilane ostis  $a$  vihikut hinnaga  $b$  kop. tükk ja  $c$  sulge hinnaga  $d$  kop. tükk. Andavalem rahasumma arvutamiseks, mille õpilane maksis vihikute ja sulgede eest kokku.

73. Mööblikauplusest ostetakse laud hinnaga  $l$  rubla ja 12 tooli hinnaga  $t$  rubla tool. Andavalem.

73. Rong koosneb vedurist ja  $n$  vagunist. Vedur kaalub  $P$  tonni, vagun  $Q$  tonni. Anda valem rongi kogukaalu arvutamiseks.

74. Ristkülikukujulisele ehituskruundile, mille mõõted on  $u$  ja  $v$  meetrit, ehitati maja, põhipindalaga  $a$  ruutmeetrit. Anda valem õue ja aia jaoks kasutada jäänud maa pindala arvutamiseks.

74. Raamatu lehekülje mõõted on  $p$  cm ja  $l$  cm ning kirjaga kaetud pindala mõõted on  $k$  cm ja  $n$  cm. Anda valem raamatu lehekülje tekstivaba pindala arvutamiseks.

75. Ristkülik mõõdetega  $p$  ja  $q$  meetrit on oma diagonaaliga lõigatud pooleks. Anda valem tekkinud kolmnurkade pindalade arvutamiseks.

75. Ruut külje pikkusega  $a$  cm on oma diagonaaliga jaotatud pooleks. Anda valem tekkinud kolmnurkade pindalade arvutamiseks.

76. Kuubi serva pikkus on  $a$  cm. Anda kuubi täispindala valem.

76. Tuletada valem värvi hulga arvutamiseks, mis on tarvilik toa seinte värvimiseks, teades, et põranda mõõted on  $p$  ja  $l$  meetrit, toa kõrgus  $k$  meetrit ja et  $1 \text{ m}^2$  värvimiseks kulub  $v$  liitrit värvi. (Akende ja uste pindalad jäägu maha arvamata.)

77. Raudteejaama risttahukakujulise veepaagi põhja mõõted on  $a$  ja  $b$  meetrit. Veepind seisis esiti  $h$  cm allpool normaalset taset ja tõusis pumba töötades  $k$  cm üle normaalse taseme. Anda valem paaki pumbatud veehulga arvutamiseks.

77. Raamat on  $p$  millimeetrit paks; kaane paksus on  $q$  millimeetrit. Raamatus on  $n$  lehte. Anda raamatu paberi paksuse valem.

Allpool on toodud valemid mõnede suuruste arvutamiseks ja selleks vajalikud andmed. Leida need suurused.

$$78. \begin{cases} P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot k \\ a = 15, k = 8 \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} Q = \frac{a+b}{2} \cdot k \\ a = 4, b = 8, k = 6 \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} V = \frac{1}{3} \cdot P \cdot h \\ P = 6, h = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} S = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \\ \pi = 3,14, r = 8 \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} l = \frac{K}{V} \\ K = 222,5, V = 25 \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} T = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r) \\ \pi = 3\frac{1}{7}, r = 6, h = 4 \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} P = \pi \cdot r^2 \\ \pi = \frac{22}{7}, r = 10 \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} G = \frac{T^2}{4\pi^2 l} \\ T = 1, \pi = 3,14, l = 4 \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} S = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \\ \pi = 3,14, r = 5, h = 8 \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} h = \frac{V}{\pi a^2} \\ V = 10, \pi = \frac{22}{7}, a = 2 \end{cases}$$

## § 12. Arvude kujutamine sirgel.

Sageli on kasulik kujutada arve sirgjoone lõikudena; seejuures lõigu pikkusega iseloomustatakse arvu suurust.

Kujutame nii näiteks arvud

3, 7 ja 12.

Selleks võtame sirge joone (joonis 1), valime temal mingi punkti, märgime selle kriipsukesega ja kirjutame selle juurde tähe  $O$ . Valime sobiva pikkusühiku, näiteks 5 mm, ja kanname sirgele, lähtudes punktist  $O$ , järgmised lõigud:

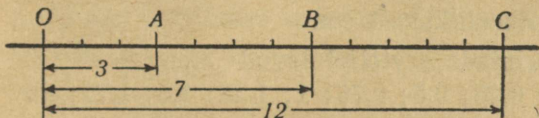
$$OA = 3 \cdot 5 \text{ mm}, OB = 7 \cdot 5 \text{ mm}, OC = 12 \cdot 5 \text{ mm}.$$

Lõigud  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$  kujutavad siis antud arve 3, 7 ja 12. Neil lõikudel on ühine alguspunkt  $O$ .

Seega on igaüks neist lõikudest määratud niipea, kui on teada tema lõpp-punkt. Et juba need lõpp-punktid  $A$ ,  $B$  ja  $C$  oma asukohaga alguspunkti suhtes määravad lõikude  $OA$ ,  $OB$  ja  $OC$  pikkused, s. o. 3, 7 ja 12 ühikut, siis ütleme sageli ka, et

punktid	$A$	$B$	$C$
kujutavad arve	3	7	12

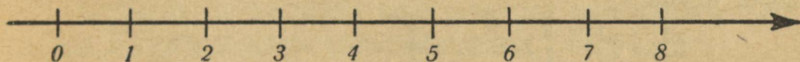
ehk teisiti:



Joonis 1.

arvud 3, 7 ja 12 on kujutatud punktidega  $A$ ,  $B$  ja  $C$ . Seepärast kirjutatakse arvtelje tähistele  $A$ ,  $B$  ja  $C$  asemele harilikult otsekohe vastavad arvud 3, 7 ja 12.

Sirget, millel kujutame arve, nimetame arvteljeks. Arvteljel arve kujutavate lõikude ühist alguspunkti nimetame nullpunktiks. Kujutamiseks valitud pikkusühikut nimetame kujutusühikuks.



Joonis 2.

### Kokkuvõttes:

selleks, et kujutada joonisel mingit arvu, näiteks arvu  $a$ , võtame mingi sirge arvteljeks; märgime sellel teljel nullpunkti  $O$ ; valime sobiva pikkusega kujutusühiku; lähtudes nullpunktist kanname teljele lõigu, mille pikkus on  $a$  ühikut; selle lõigu lõpp-punkt kujutabki siis arvu  $a$ .

Arvtelge koos temal kujutatud täisarvudega nimetatakse täisarvude astmikuks. Joonisel 2 näeme täisarvude astmikku kujutusühikuga 10 mm.

Ülesanded.

83. Kujutusühik on 10 mm. Kui pikk lõik kujutab arvu  
2 5 7 12 19?
83. Kujutusühik on 20 mm. Kui pikk lõik kujutab arvu  
 $2\frac{1}{2}$   $3\frac{3}{4}$   $4\frac{4}{5}$  5,6 7,2 10,9?
84. Kujutada arvteljel arvud  
0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4,  
võttes kujutusühikuks 1 cm.
84. Kujutada arvteljel arvud  
0; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2,  
võttes kujutusühikuks 2 cm.
85. Kujutada arvteljel arvud  
10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90; 100,  
võttes kujutusühikuks 1 mm.
85. Kujutada joonisel arvud  
10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50,  
võttes kujutusühikuks 2 mm.
86. Joonestada astmik ühikuga 20 mm ja kujutada sellel arvud  
 $3\frac{1}{2}$ ;  $1\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{4}$ ; 0,5;  $1\frac{3}{4}$ .
86. Joonestada püstsihis astmik ühikuga 12 mm ja kujutada sellel arvud  
9; 4; 6; 8,2; 14;  $5\frac{3}{4}$ ; 7; 13; 0; 1.
87. Kujutada arvteljel arvud  
0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8.
87. Kujutada arvteljel arvud  
0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0; 1,2; 1,4; 1,6.
88. Kujutada arvteljel arvud  
50; 100; 150; 200; 250; 300; 350; 400.

88. Kujutada arvteljel arvud

40; 80; 120; 160; 200; 240; 280; 320.

89. Kujutusühik on 2 mm. Missuguseid arve kujutavad lõigud

82 mm, 137 mm, 168 mm, 226 mm?

89. Kujutusühik on 100 mm. Missuguseid arve kujutavad lõigud

13 mm, 47 mm, 98 mm, 128 mm?

90. Arvu 382 soovitakse kujutada lõiguna. Kasutada on selleks 200 mm pikkune riba paberit. Kui pikk tuleb valida kujutusühik?

90. Arvu 0,0825 soovitakse kujutada lõiguna. Kasutada on selleks 150 mm pikkune riba paberit. Kui pikk tuleb valida kujutusühik?

### § 13. Avaldise numbriliste väärtuste graafiline kujutamine.

Ülesanne. On antud avaldis

$$\frac{1}{2}x(x-1).$$

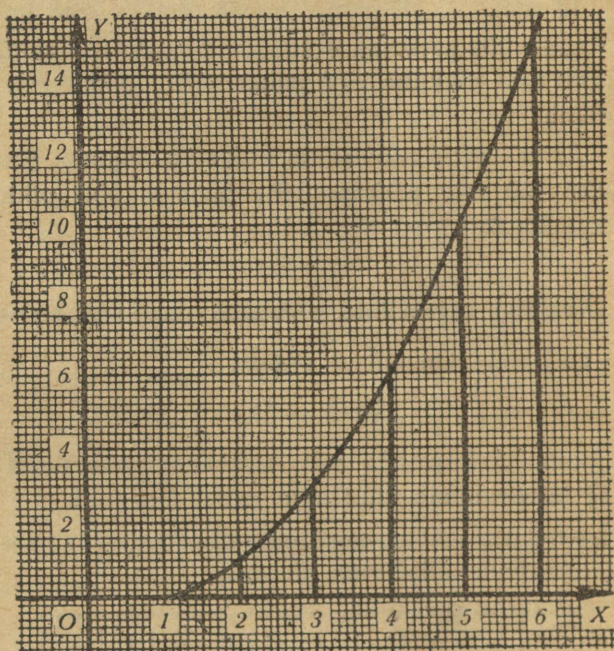
Arvutada ja kujutada selle avaldise numbrilised väärtused  $x$ -i täisarvuliste väärtuste puhul 1-st 6-ni.

Lahendus. Kõnesolevate numbriliste väärtuste arvutamise toimetame allseisvas skeemis:

$x$	$x-1$	$x(x-1)$	$\frac{1}{2}x(x-1)$
1	0	0	0
2	1	2	1
3	2	6	3
4	3	12	6
5	4	20	10
6	5	30	15

Lühiduse mõttes märgime antud avaldise üheainsa tähega  $y$ . Kokkukuuluvad  $x$ -i ja  $y$ -i väärtused leiduvad meie skeemis ikka samas reas:

$x$ -i väärtusele	1	vastab $y$ -i väärtus	0
„ „	2	„ „ „	1
„ „	3	„ „ „	3
	jne.		



Joonis 3.

Kõnesolevate  $x$ -i ja  $y$ -i väärtuste kokkukuuluvust saame esitada näitlikult järgmiselt (joonis 3): võtame lehe millimeeterpaberit; valime ühe seal leiduvaist sirgeist  $x$ -teljeks; valime sellel mingi punkti  $O$  alguseks; valime sobiva

pikkusühiku, näiteks 1 cm, ja kujutame  $x$ -i väärtused tuntud viisil punktidega  $x$ -teljel; need punktid tähistame vastavalt numbritega 1, 2, 3, 4, 5, 6. Läbi punkti  $O$  joonestame sirge risti  $x$ -teljega; selle sirge nimetame  $y$ -teljeks. Punktidest 1, 2, 3, 4, 5, 6 joonestame sirged rööbiti  $y$ -teljega; valime paraja pikkusühiku, näiteks 0,5 cm, ja kanname praegu nimetatud sirgeile lõigud 0, 1, 3, 6, 10, 15. Need lõigud kujutavad antud avaldise numbrilisi väärtusi, mis vastavad avaldises esineva tähe antud väärtustele. Saadud lõikude lõpp-punktid ühendame võimalikult ladusa kõveraga. See kõver kujutab avaldise  $y$  väärtuse muutumist  $x$ -i muutudes.

Kokkuvõttes:

Selleks, et kujutada avaldise  $y$  väärtuse muutumist  $x$ -i muutudes, võtame mõne sirge  $x$ -teljeks ja märgime sellel teljel alguse  $O$ . Sellest punktist tõmbame sirge risti eelmisega ja nimetame selle sirge  $y$ -teljeks. Valides kohase pikkusühiku kujutame  $x$ -i väärtused  $x$ -teljel punktidenä; saadud punktidest tõmbame sirged rööbiti  $y$ -teljega; valides sobiva pikkusühiku kujutame neil sirgeil  $y$ -i väärtused lõikudena; läbi saadud lõikude lõpp-punktide joonestame kõvera; see kõver kujutab avaldise  $y$  väärtuse muutumist  $x$ -i muutudes.

Ülesanded.

91. Kujutada graafiliselt avaldise  $2x + 1$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i väärtustele 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11 ja 12.

91. Kujutada graafiliselt avaldise  $3x - 3$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i väärtustele 1;  $1\frac{1}{2}$ ; 2;  $2\frac{1}{2}$ ; 3;  $3\frac{1}{2}$ ; 4;  $4\frac{1}{2}$  ja 5.

92. Kujutada graafiliselt avaldise  $\frac{x+3}{x}$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele 1-st 5-ni.

92. Kujutada graafiliselt avaldise  $\frac{x+2}{x-1}$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele 2-st 10-ni.

93. Kujutada graafiliselt avaldise  $x(10 - x)$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele 0-st 10-ni.

93. Kujutada graafiliselt avaldise  $\frac{1}{2}x(x - 1)$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele 1-st 5-ni.

94. Kujutada graafiliselt avaldise  $2x - 1$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele 1-st kuni 10-ni.

94. Kujutada graafiliselt avaldise  $3x + 1$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele 0-st kuni 6-ni.

95. Kujutada graafiliselt avaldise  $10 - x^2$  numbrilised väärtused, võttes  $x$ -i väärtused 0-st kuni 3-ni iga 0,5 takka.

95. Kujutada graafiliselt avaldise  $10 - 0,5x^2$  numbrilised väärtused, võttes  $x$ -i väärtused 0-st kuni 4-ni iga 0,5 takka.

#### § 14. Statistiliste andmete graafiline kujutamine.

On nähtusi, mille tundmaõppimine nõuab palju vaatlusandmeid, näiteks antud maakoha ööpäeva, kuu või aasta keskmine õhutemperatuur, sademete hulk antud maakohas mingis ajavahemikus, mingi haiguse kulg, mingi arstimi tervistav mõju, tööstustoodangu kasv meie maal, jne.

Mõnikord teostab vaatlusi ja registreerib vaatlusandmeid üks isik pikema aja vältel. Mõne nähtuse uurimiseks registreerivad vaatlusandmeid suur hulk isikuid eri vaatluskohtades.

Niisugust massilist vaatlusandmete registreerimist ja uurimist nimetame statistika ks, vaatlusandmeid endid aga statistilisteks andmeteks ehk statistilisteks arvudeks.

Kui statistilisi andmeid soovitakse näitlikult esitada, siis on kõige hõlpsam seda teha joonise abil. Need andmed kujutatakse joonisel kas joonlõikudena, ristkülikutena või mõnel muul viisil ning saadakse sel teel nimetatud andmete graafiline kujutis ehk graafik.

Sisuliselt toimub statistiliste andmete graafiline kujutamine avaldise numbriliste väärtuste graafilise kujutamise eeskujul. Statistiliste andmete graafiline kujutamine on avaldise numbriliste väärtuste graafilisest kujutamisest selle poolest lihtsam, et siin on andmed, mida peame graafilisel kujutama, juba valmis antud, ei ole vaja nende väärtusi arvutamise teel leida, nagu seda pidime tegema avaldise numbriliste väärtuste saamiseks.

Andmete kujutamisel saadud graafikuid liigitatakse diagrammideks ja kulgkõverateks.

Graafikut nimetame diagrammiks, kui seal andmed on kujutatud näiteks joonlõikudena või ristkülikutena ehk tulpadena.

On joonisel andmed kujutatud joonlõikudena, siis nimetame joonist joondiagrammiks; kui aga andmed joonisel on esitatud ristkülikutena ehk tulpadena, siis kannab joonis tulpdiaagrammi nime.

Kui joondiagrammis joonlõikude otspunktid ühendatakse kõverjoonega, nagu me seda tegime avaldise numbriliste väärtuste graafilisel kujutamisel, siis nimetame saadud joonist kulgkõveraks.

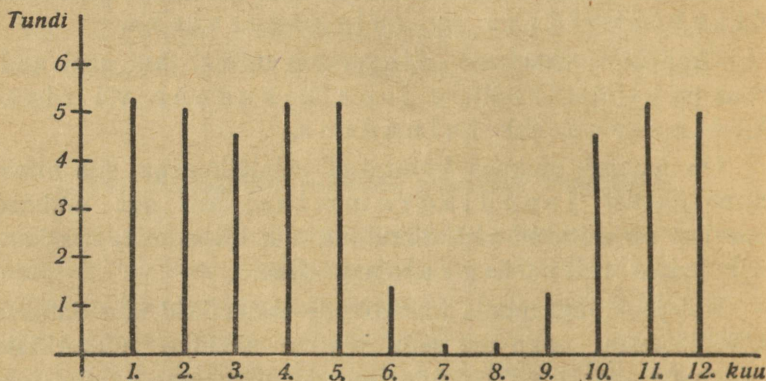
Kulgkõverat on sobiv graafilise kujutisena kasutada näiteks temperatuuri, õhurõhu või mõne muu sellelaadilise nähtuse kulgemise kujutamisel. Kõverjoone asemel joonestatakse kulgkõvera joonisel sageli murdjoon, näiteks haiglates kehatemperatuuri mõõtmisel, kuigi see matemaatilisest seisukohast ei ole õigustatud. Mõnikord saame graafilisel kujutamisel kõverjoone asemel sirgjoone.

Vaatame nüüd lähemalt, kuidas diagramme koostatakse. Selgitame seda mõne ülesande abil.

Ülesanne 1. Ühel õppeaastal toimetatud uurimine näitas, et keskmiselt puudus üks keskkooli õpilane koolist tunde:

septembris	1,2	veebruaries	4,9
oktoobris	4,4	märtsis	4,4
novembris	5,0	aprillis	5,1
detsembris	4,8	mais	5,0
jaanuaris	5,2	juunis	1,2

Kujutada need andmed joondiagrammis. Saadud joonise järgi määrata, missuguses kuus on õpilase koolist puudumise tundide arv kõige suurem, missuguses kõige väiksem.



Joonis 4.

L a h e n d u s. Rõhtsal teljel märgime kuud, võttes kuusid kujutavate kriipsukeste vahed nii laiad, nagu lubab kasutada oleva jooniselehe laius. Iga kriipsukese kohalt joonestame püstsuunas, s. o. rõhtsa teljega risti seisva joonlõigu, mille pikkus kujutab koolist puudunud tundide arvu vastavas kuus. Andmetest näeme, et kõige suurem puudu-

miste arv on 5,2, seega võime kujutusühikuks püstsuunas valida näiteks pikkuse 1 cm (joonis 4).

Joonisel leiame kergesti, et koolist puudumise tundide arv on kõige suurem jaanuarikuus, kõige väiksem juuni- ja septembrikuus. Ka suvine õppetöö vaheaeg peegeldub meie diagrammis.

#### Ülesanded.

96. Maailma pikimad jõed ja nende pikkused on järgmised:

Mississippi	6970 km	Jenissei	4010 km
Amazonas	5500 „	Leena	5014 „
Nilus	6500 „	Doonau	2860 „
Huangho	4100 „	Dnepr	2139 „
Ob	5300 „	Sõr-Darja	2865 „
Volga	3694 „	Amu-Darja	2200 „
Amuur	4478 „	Uural	2400 „
Kongo	4600 „		

Esitada nende jõgede pikkused joondiagrammis.

96. Esitada graafiliselt Eesti NSV mägede kõrgused:

Väike-Munamägi	204 m	Sürgavere mägi	128 m
Ebavere mägi	146 „	Holstre mägi	116 „
Emumägi	166 „	Kärstna mägi	136 „
Kellavere mägi	156 „	Rutumägi	146 „
Kuremägi	95 „	Suur-Munamägi	317 „
Meegaste mägi	214 „	Tsälbamägi	292 „
Kuutse mägi	217 „	Vällamägi	282 „
Harimägi	211 „		

97. Esitada graafiliselt Nõukogude Liidu kõrgeimate mäetippude kõrgused. Need on järgmised:

Elbrus	5633 m
Kazbek	5043 „

Stalini mäetipp	7495 m
Beluhha (Altais)	4670 „
Alages (Kaukasuses)	4000 „
Jamantau (Uuralis)	1639 „
Roman-Koš (Krimmis)	1543 „

97. Inimese poolt saavutatud kõrgused ja nende saavutajad on järgmised:

Norton ja Somervoll	1924. a.	8 570 m
Neuenhafen (lennukil)	1929. „	12 740 „
Swain (lennukil)	1936. „	15 220 „
Piccard (õhupalliga)	1932. „	16 200 „
Adam (lennukil)	1937. „	16 440 „
Pezzi (lennukil)	1938. „	17 070 „
Nõukogude Liidu (stratostaat „Osoaviahim“ I)	1934. „	22 000 „

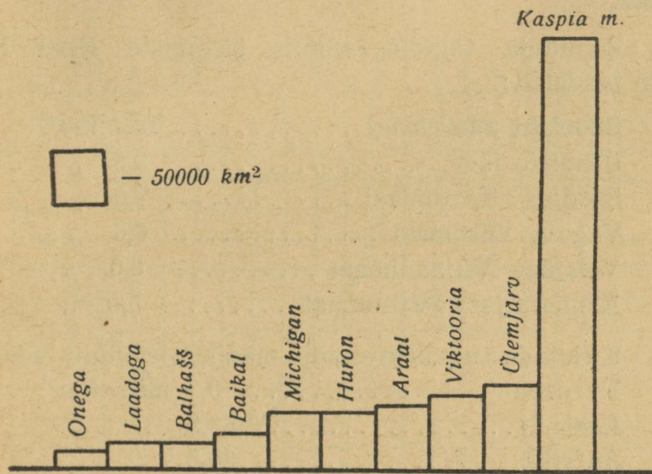
Kujutada need kõrgused joondiagrammis.

Ülesanne 2. Kujutada graafiliselt tulpdiagrammis suurimate järvede pindalad. Need pindalad on järgmised:

Kaspia meri .....	436 000 km <sup>2</sup>
Ülemjärv .....	83 000 „
Viktooria järv .....	66 000 „
Araali järv .....	64 500 „
Huroni järv .....	59 500 „
Michigani järv .....	58 100 „
Baikal .....	34 200 „
Balhaši järv .....	18 400 „
Laadoga .....	18 100 „
Onega .....	9 800 „

Lahendus. Valime tulba laiuseks 1 cm. Teeme joonise nii, et tema kõrgus ei ületaks 10 cm, seega ei tohiks

kõige suurema ristküliku pindala ületada 10 cm<sup>2</sup> ehk 1000 mm<sup>2</sup>. Ristkülik pindalaga 1000 mm<sup>2</sup> peaks kujutama kõige suurema järve, nimelt Kaspia mere pindala, s. o. 436 000 km<sup>2</sup>. Nii peaks 1 mm<sup>2</sup> kujutama joonisel pindala 436 km<sup>2</sup>. Et aga arvutamine ümmarguste arvudega on kergem, siis kujutagu 1 mm<sup>2</sup> joonisel pindala 500 km<sup>2</sup>.



Joonis 5.

Jagades iga antud pindala arvuga 500, saame järvede suurusi kujutavate ristkülikute pindalad mm<sup>2</sup>-tes järgmiselt:

Onega	9 800 km <sup>2</sup>	—	19,6 mm <sup>2</sup>	≈	20 mm <sup>2</sup>	
Laadoga	18 100	„	36,2	„	≈	40 „
Balhašš	18 400	„	36,8	„	≈	40 „
Baikal	34 200	„	68,2	„	≈	70 „
Michigan	58 100	„	116,2	„	≈	120 „ = 1,2 cm <sup>2</sup>
Huron	59 500	„	119	„	≈	120 „ = 1,2 „
Araal	64 500	„	129	„	≈	130 „ = 1,3 „
Viktooria	66 000	„	132	„	≈	130 „ = 1,3 „

Ülemjärv 83 000 km<sup>2</sup> — 166 mm<sup>2</sup> ≈ 170 mm<sup>2</sup> = 1,7 cm<sup>2</sup>  
 Kaspia  
 meri 436 000 „ — 872 „ ≈ 870 „ = 8,7 „

Joonestades vastavad ristkülikud, saame joonisel 5 kujutatud tulpdiagrammi.

#### Ülesanded.

98. Kujutada tulpdiagrammis järgmiste Eesti NSV järvede pindalad:

Suurlaht Saaremaal .....	14,4 km <sup>2</sup>
Ülemiste järv .....	9,3 „
Saadjärv Tartumaal .....	7,0 „
Vagula Võrumaal .....	6,6 „
Veisjärv Viljandimaal .....	6,0 „
Ermistu järv Pärnumaal .....	5,0 „

98. Kujutada tulpdiagrammis maailmajagude pindalad:

Euroopa .....	9,7 milj. km <sup>2</sup>
Aasia .....	43,9 „ „
Aafrika .....	30,3 „ „
Austraalia ja Okeania ....	9,0 „ „
Põhja-Ameerika .....	24,5 „ „
Lõuna-Ameerika .....	18,3 „ „
Antarktis .....	14,3 „ „

Ülesanne 3. Ühe kevadise öö-päeva temperatuuri vaatlused andsid järgmise tulemuse:

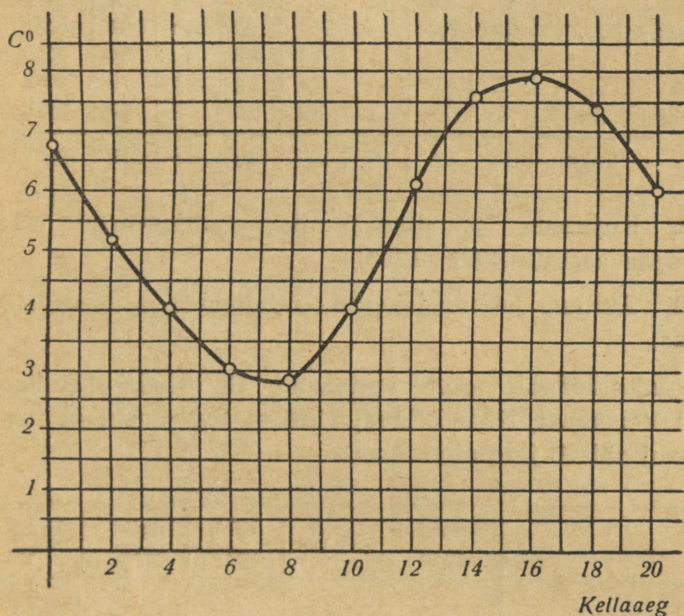
Kellaaeg	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Temperatuur °C	6,8	5,2	4,0	3	2,8	4	6,2	7,6	8	7,4	6

Joonestada nende andmete järgi temperatuuri kulgkõver.

Kui kõrge oli sel päeval temperatuur kell 9?

Lahendus. Võtame rõhtsirge kellaaegade teljeks ning ühe tunni kujutiseks lõigu pikkusega 0,5 cm.

Püstteljel kujutame temperatuurid, võttes seal kujutusühikuks 1 cm. Temperatuure kujutavate joonlõikude otspunktid ühendame kõverjoonega. Nii saame alljärgneva temperatuuri kulgkõvera:



Joonis 6.

Selleks, et saada vastus küsimusele, kui kõrge oli temperatuur kell 9, vaatame, kui pikk on kella 9-le vastavast punktist kuni kõverjooneni joonestatud püstlõik. Näeme, et selle pikkus on 3,2 ühikut. Seega võib arvata, et kell 9 oli temperatuur 3,2 kraadi.

## Ülesanded.

Raudteevõrgu arengut näitab järgmine tabel (raudteeli-  
nide kogupikkus 1000-tes km-tes):

	1830	1840	1850	1860	1870	1880	1890	1900	1936
Euroopa . . . . .	0,3	3,9	24	52	105	169	224	284	415
Ameerika . . . . .	0,02	4,7	15	54	93	175	331	402	625
Aasia . . . . .	—	—	—	1	8	16	34	60	166
Aafrika . . . . .	—	—	—	0,4	2	5	9	20	74
Austraalia . . . . .	—	—	—	0,4	2	8	19	24	49
Kokku	0,3	8,6	39	108	210	373	617	790	1329

99. Kujutada joondiagrammis raudteevõrgu areng  
Euroopas aastail 1830—1936.

99. Esitada joondiagrammis raudteevõrgu areng Aust-  
raalias.

Raudteerongide eksploatatsiooni Oktoobrirevolutsiooni-  
eelsel Venemaal, NSV Liidus; USA-s, Inglismaal ja Prantsus-  
maal näitab järgmine tabel:

	Venemaa 1913	NSVL	USA 1939	Inglis- maa	Prantsus- maa
Kaubarongi keskmine kaal tonnides . . .	570	1300	1700	350	600
Rongide liikluse kesk- mine aastatihedus (1000 rongi 1 km tee kohta) . . . .	6	11	4	21	10
Keskmine last 1 km tee kohta (milj. tonn/km) . . . . .	1,2	4,5	1,5	0,9	0,8

100. Kujutada graafiliselt joendiagrammis kaubarongi keskmine kaal tsaari-Venemaal, NSV Liidus, USA-s, Inglismaal ja Prantsusmaal.

100. Kujutada graafiliselt ühel ja samal joonisel rongide liikluse keskmine aastatihedus ja keskmine last 1 km tee kohta tsaari-Venemaal, NSV Liidus, USA-s, Inglismaal ja Prantsusmaal.

101. Kujutada graafiliselt murdjoone abil raudteeliinide kogupikkuse kulg maailmas.

Missuguses ajavahemikus arenes maailma raudteevõrk kõige jõudsamini?

Millal kasvas raudteeliinide kogupikkus rohkem, kas 1880.—1890. a. või 1890.—1900. a.?

101. Kujutada graafiliselt raudteeliinide areng Aafrikas. Määrata saadud graafiku järgi raudteeliinide ligikaudne kogupikkus Aafrikas 1865. a., 1875. a., 1930. a.

102. Alljärgnev tabel näitab inimese peaju kaalu kasvamist vanusega:

Vanus aastates	0	1	2	3	4	5	7	10	15	20
Peaju kaal g-des	330	800	945	1050	1095	1148	1180	1235	1282	1325

Kujutada graafiliselt inimese peaju kaalu kulg.

Määrata saadud graafikust peaju kaal 6-nda, 8-nda, 9-nda, 12-nda, 17-nda eluaasta lõpul.

Millal kasvab inimese peaju rohkem, kas esimestel eluaastatel või vanemas eas?

102. Kevadisel hommikupoolel mõõdeti temperatuuri iga tunni tagant ning saadi järgmised andmed:

Kellaaeg	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Temperatuur °C sooja	0	1,8	3	3,8	4,6	5,1	6,2	7,6	10

Esitada temperatuuri kulg graafiliselt kõverjoone abil.

Määrata graafikust temperatuur kell 7.30, 10.30, 11.15.

103. Rahva tulud NSV Liidus kuni 1936. aastani miljardites rublades olid järgmised:

Aasta	1921	1928	1932	1936
Rahva tulud	8	25	45,5	86

Esitada need andmed murdjoon-diagrammis.

103. Alljärgnev tabel näitab põlevkivitoodangu kasvu kohtlas:

Aasta	1936	1941	1946	1950
Kaevanduse keskmine päevatoodang tonnides	90	280	540	1000

Esitada need andmed murdjoon-diagrammis.

104. Joonis 7 näitab vee erikaalu muutumist temperatuuri muutumisel.

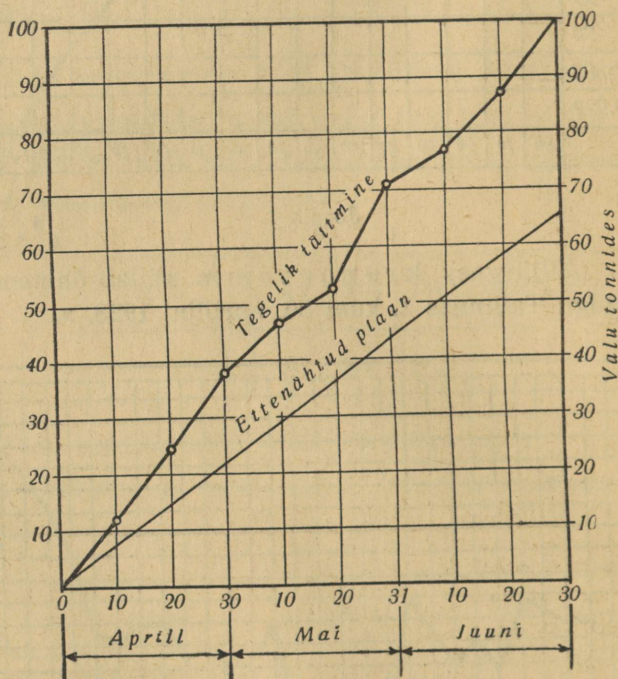
Millisel temperatuuril on vee erikaal parajasti 1?

Kui suur on vee erikaal temperatuuril 0°, 1°, 8°, 9°, 14°?



Mis kuupäeval oli õhu temperatuur kõige madalam? Millal oli kõige soojem päev? Millal oli temperatuuri lange mine kõige järsem?

105. Ühe Tallinna masinaehitustehase valutsehhi kvar tali graafik oli järgmine:

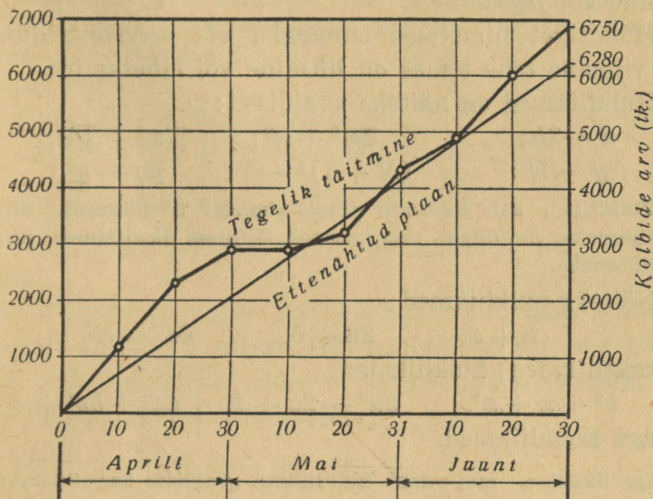


Joonis 9.

Kuidas valutsehh oma plaani täitis? Kui palju oli plaan ületatud 20. aprilliks? 20. maiks? 31. maiks? 30. juuniks?

105. Otsustada juunis 10 toodud graafiku järgi, kuidas masinaehitustehase valutsehh täitis kvartaliplaani kol bide valamise alal.

Kuidas oli plaan täidetud 30. aprilliks? 20. maiks? 10. juuniks? 30. juuniks?



Joonis 10.

### § 15. Üksliige. Hulkliige. Hulkliikme koondamine.

Üksliikmed on niisugused avaldised, milles viimane tehe ei ole liitmine ega lahutamine.

Üksliikmed ehk monoomid on näiteks avaldised:

$$a^2, \quad 3a^2b, \quad 0,7a \cdot 0,5cx^2, \quad N \cdot (N + 1),$$

$$\left(\frac{2a}{b}\right)^3, \quad \frac{0,5n}{7x^2}, \quad \frac{a+2}{5m}, \quad \frac{n^2}{(n+5)^3}.$$

Üksliikmetest koostatud summad ja vahed kannavad ühist nimetust hulkliige. Seega:

**hulkliikmed** on niisugused avaldised, milles viimane tehe on kas liitmine või lahutamine.

Seega ainult viimane tehe avaldises määrab, kas avaldis on üksliige või hulkliige.

Üksliiget nimetame korrutiseks, astmeks või jagatiseks sedamööda, kas viimane tehe temas on korrutamine, astendamise või jagamine.

Hulkliiget nimetame summaks või vaheks sedamööda, kas viimane tehe temas on liitmine või lahutamine.

Hulkliikmed on näiteks avaldised:

$$\begin{array}{lll} a + 2b; & 3m^2 + n^2; & 7cd + 4f^2; \\ f^2g - h^3; & (N + 1)^2 - 7; & pq - q^2. \end{array}$$

Hulkliiget, mis koosneb ainult kahest üksliikmest, nimetame kaksliikmeks; hulkliiget, mis koosneb kolmest üksliikmest, nimetame kolmeliikmeks.

Näiteks hulkliikmed

$$a + x, \quad 2a + b, \quad 4a^2 - x^2$$

on kaksliikmed; hulkliikmed

$$b^2 + x + x^2, \quad 3u^2 - 2a + 1, \quad az^2 + bz^2 + c$$

on aga kolmeliikmed.

Iga üksliige, mis esineb hulkliikme avaldises kas liidetavana või lahutatavana, on selle hulkliikme liige.

Näiteks on hulkliikme  $5p^2 + 6pq - 1\frac{2}{3}q^2$  liikmeiks avaldised

$$5p^2, \quad 6pq \quad \text{ja} \quad 1\frac{2}{3}q^2.$$

Üksliikmeid, mis erinevad ainult kordajailt, nimetame sarnaseiks.

Niisugusteks on näiteks üksliikmed

$$a^3b^2c, \quad \frac{1}{2}a^3b^2c, \quad 10a^3b^2c,$$

samuti

$$5 \frac{p^2}{mn}, \quad 0,6 \frac{p^2}{mn}, \quad \frac{1}{2} \frac{p^2}{mn}.$$

Kui hulkliikmes esineb sarnaseid liikmeid, siis on võimalik tema kirjutist lühendada, asendades mitme sarnase liikme summa või kahe sarnase liikme vahe üheainsa liikmega. Nii on

$$15a - 4a + a = 11a + a = 12a.$$

Toimingu üksikuid samme loeme nii: viisteist  $a$  miinus neli  $a$  on üksteist  $a$ ; üksteist  $a$  pluss üks  $a$  on kaksteist  $a$ .

Toimingut, millega hulkliikmes mitme sarnase liikme summa või kahe sarnase liikme vahe asendatakse üheainsa liikmega, nimetame hulkliikme koondamiseks.

Näited.

$$1. \quad 9cx - 5cx + 8cx - 9cx = 3cx.$$

$$2. \quad 10Nh^2 + Nh^2 - 7Nh^2 - 3Nh^2 = Nh^2.$$

$$3. \quad \left(\frac{a}{x}\right)^3 + 2\frac{a^2}{x} + 3\frac{a^2}{x} - \left(\frac{a}{x}\right)^3 - 7 = 5\frac{a^2}{x} - 7.$$

$$4. \quad 5ab + 3ab + 7cd - 2ab - 4cd = 6ab + 3cd.$$

Ülesanded.

106. Allpool on antud rida avaldisi. Nimetada iga avaldise puhul viimasena esinev tehe; määrata, kas avaldis on summa, vahe, korrutis, jagatis või aste, ja otsustada, kas avaldis on üksliige või hulkliige.

1. $a + bc$	2. $r - (s + t)$	3. $\frac{a + b}{m - n}$
$a(b + c)$	$fg - hk$	$\frac{h(c - d)}{p + q}$
$pq - r$	$l : m + n$	$(a + 2)^2$
$(a - b)c$	$\frac{a + x}{c}$	$a^3 - 5a$
$l : (m + n)$	$7(ab + uv)$	$a^3 - c(b^2 - d^2)$

106. Allpool järgneb rida avaldisi. Selgitada, missugused neist on üksliikmed, missugused on hulkliikmed.

1. $3m + 11$	2. $n(4m + n^2)$	3. $\frac{t - g}{M}$
$4pq$	$u^2 - v^2$	$\frac{100p}{q + p}$
$\frac{3a + b}{2c}$	$(ab + cd)^2$	$\frac{h}{k} - l$
$x^2 + 6x$	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$x^2 - 5x + 9$
$4f - g$	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$a^2 - mn b^2$

Liita järgmised avaldised ja kirjutada saadus üksliikmena:

107.  $4b$  ja  $7b$

$8,1c$  ja  $5,4c$

$\frac{3}{7}d$  ja  $1\frac{1}{7}d$

$4\frac{5}{6}g$  ja  $\frac{29}{30}g$

$\frac{3}{4}h$  ja  $0,25h$

107.  $m$ ,  $2m$  ja  $7m$

$0,9n$ ,  $3n$ , ja  $5,4n$

$\frac{1}{3}p$ ,  $\frac{3}{8}p$  ja  $1\frac{7}{12}p$

$3q$ ,  $\frac{3}{2}q$  ja  $\frac{2}{3}q$

$\frac{1}{2}r$ ,  $3r$  ja  $6\frac{5}{6}r$

Lahutada esimesest avaldisest teine ja kirjutada saadus üksliikmena:

108.  $4u$ ;  $2\frac{7}{8}u$

$3\frac{4}{5}v$ ;  $1\frac{1}{3}v$

$10w$ ;  $\frac{7}{10}w$

$N$ ;  $\frac{7}{12}N$

$7\frac{1}{2}h$ ;  $6\frac{4}{5}h$

108.  $x$ ;  $0,75x$

$4y$ ;  $3,42y$

$7,85z$ ;  $0,99z$

$3\frac{1}{3}i$ ;  $2\frac{1}{2}i$

$5\frac{4}{5}m$ ;  $m$

Koondada järgmised hulkliikmed:

109. 1.  $2a + 4a + 6a$   
 $3d + 5d + 4d$   
 $8x + 4x + 3x$   
 $9k + 3k + k$   
 $17e + 3e + 8e$

2.  $9p - 6p + 2p$   
 $6r - 4r + 5r$   
 $8a - 3a - 4a$   
 $4y + 5y - 7y$   
 $7t - 6t + t$

109. 1.  $0,7m + 0,6m$   
 $3,2p + 2,3p + 1,5p$   
 $0,5s + 8s + 0,8s$   
 $1,5t + 2,3t + 0,4t$   
 $8q + 3,4q + 5,7q$

2.  $4,4b + 3,1b - 7b$   
 $2,7z - 2,5z - 0,1z$   
 $3d - 1,8d - 1,1d$   
 $5,6h + 3,3h - h$   
 $k + 0,2k - 0,8k$

$$\begin{aligned}
 110. \quad & a + 5a - 2a + 7b + 3b \\
 & 16x - 11x + t + 3t - 2t \\
 & 15s + 13r + 7r - 9s - 9r \\
 & 12p - 3p + 8q - 3q + p \\
 & 13y + 19z - 4z - 7y - 5z
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 110. \quad & 7a + a + 2 \\
 & 4c - 3c + 1 \\
 & 6r + 3r + 1 \\
 & 3b + 3 + 12b \\
 & 4d + 1 - 3d
 \end{aligned}$$

Koondada järgmised hulkliikmed:

$$\begin{aligned}
 111. \quad & a^2 + a^2 \\
 & a^2 + a^2 + a^2 \\
 & a^3 + a^3 \\
 & x^3 + x^3 + x^3 \\
 & x^2 + x^2 + x^2 + x^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 111. \quad & 8x^3 + x^3 \\
 & 2,5z^2 + 0,5z^2 \\
 & 7y^3 - 4y^3 \\
 & 2\frac{1}{3}e^3 - 1\frac{2}{3}e^3 \\
 & 1,7c^2 - 1,3c^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 112. \quad & a^2 + a^2 + a^2 + b^2 + b^2 \\
 & n^3 + m^3 + n^3 + m^3 + n^3 + m^3 \\
 & m^2 + m^3 + m^3 + m^3 + m^3 \\
 & x^2 + y^3 + x^2 + y^3 + y^3 + x^2 \\
 & u^3 + u^3 + v^4 + v^4 + v^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 112. \quad & 4a^2 + 6a^2 + 5a^3 + 3a^3 \\
 & 8b^3 + 6b^2 + 7b^3 + 4b^2 \\
 & 9x^2 + 5y^2 + 3x^2 - 4y^2 \\
 & 3m^2 + m^2 - 1 - 3m^2 \\
 & 7r^3 - 3r^3 + r^3 + 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 113. \quad & 8ab + 3ab - 7ab \\
 & 12mn + 11mn - 6mn \\
 & 9pq - 5pq - 3pq \\
 & 3rs + 5rs - 7rs \\
 & 4ik - 3ik + ik
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 113. \quad & 7\frac{m}{n} + 2\frac{m}{n} - 8\frac{m}{n} \\
 & 4\frac{rs}{t} - 3\frac{rs}{t} + 2\frac{rs}{t} \\
 & 0,1\frac{k^2}{p} + 0,8\frac{k^2}{p} - 0,9\frac{k^2}{p} \\
 & 5\frac{x}{u} + 2\frac{x}{u} + 4\frac{z}{v} + 3\frac{z}{v} \\
 & 9\frac{a}{b} + 4\frac{a}{b} + 8\frac{b}{a} + 7\frac{b}{a}
 \end{aligned}$$

$$114. \quad 6ab - 1,7ab + 2,8ab - 5,3 \\ 7cd + 7cd + 7cd - 12cd \\ 4gh + 9gh - 11gh + gh + 24 \\ 5a^2 + 7a^2 - 6a^2 - a^2 - 5a^2 + 17 \\ pq^2 + 7pq^2 - 7,4pq^2 + 0,6pq^2$$

$$114. \quad 2x^2 + 1,8x^2 + 5,3xy - 0,1x^2 \\ 6z^3 + 10z^3 - 7z^3 - 7z^3 - 12 \\ x^2 + 13z^5 + 5x^2 - 9z^3 - 3x^2 + 1 \\ \frac{pq}{r} + 4\frac{pq}{r} - 0,7\frac{pq}{r} \\ 8\frac{x^2}{z} + 8,8\frac{x^2}{z} - 0,8\frac{x^2}{z}$$

### § 16. Hulkliikme korraldamine.

On hakatud vahet tegema ühe- ja samatähelise teguri astmetest koosnevate hulkliikmete ja teiste hulkliikmete vahel, sest esimesed omavad matemaatikas erilist tähtsust.

Ühe- ja samatähelise teguri astmetest koosnevad hulkliiget nimetame polünoomiks.

Näiteks avaldised

$$x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 7x - 2 \quad \text{ja} \quad 8 - y + 2y^2 + y^2$$

on polünoomid.

Kolmest üksliikmest koosnevad polünoomi nimetame trinoomiks.

Näiteks

$$x^2 - 3x + 4, \quad 1 + x + x^2 \quad \text{ja} \quad 3u^2 - u + 1$$

on trinoomid.

Kahest üksliikmest koosnevad polünoomi nimetame binoomiks.

Näiteks avaldised

$$1 - x, \quad x + 2, \quad y + 3, \quad y^2 - y$$

on binoomid.

Võime öelda, et trinoom on ühe- ja samatähelise teguri astmetest koosnev kolmeliige ja binoom on ühe- ja samatähelise teguri astmetest koosnev kaksliige.

Ülevaatlikkuse otstarbel on viisiks kirjutada polünoome nii, et neis liikmed esineksid kasvavate või kahanevate astendajate järjekorras.

Näiteis

$$1 + \frac{1}{2}z, \quad H - 3H^2 + H^3, \quad w + 2w^3 + 3w^5 - w^7$$

on polünoomid korraldatud kasvavate astendajate järjekorras.

Märkus. Korraldatud polünoomidena esinevad kõik kümnendsüsteemis kirjutatud arvud. Näiteks tähendab kirjutis

25371

õietj polünoomi

$$2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 1.$$

Lühiduse otstarbel on arvude märkimisviisis ära jäetud kümne astmed ja tehtmärgid. Missuguse kümne astme juurde kuuluvad kirjutises 25371 kordajad 2, 5, 3, 7, 1, seda näitab nende kordajate koht arvu 25371 kirjutises: paremalt vasakule poole seisavad esimesel kohal ühed, teisel kohal kümned ( $10^1$ ), kolmandal kohal sajad ( $10^2$ ), neljandal kohal tuhanded ( $10^3$ ) jne.

Ülesanded.

Korraldada järgmised polünoomid temas esineva tähe kasvavate astendajate järgi:

115.  $x^2 + 4 - 4x$   
 $2y + 1 + y^2$   
 $5 - 9z^2 - 6z$   
 $8u^2 - 5u + 12$   
 $N^3 - 4N + 1$

115.  $1 - 11v^3 + v + 3v^2$   
 $- 7p + 24p^3 - p^2 - 10$   
 $- 13q^2 - 4q + 6 + 5q^3$   
 $r^3 - 3r - 3r^2 + 1$   
 $m^4 - m^2 + 1 - 7m$

Korraldada järgmised polünoomid temas esineva tähe kahanevate astendajate järgi:

$$\begin{aligned}
 116. \quad & 1 + 3x^2 - 2x \\
 & 8y - 6 + y^2 \\
 & z^2 + 7 - 3z \\
 & -1 + 15u^2 - 7u \\
 & 10 - t + 4t^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 116. \quad & -4v - 9v^3 + 5v^2 + 1 \\
 & 5p - 3 + 8p^2 - 7p^3 \\
 & 4q^3 + q - 12q^2 - 2 \\
 & r^3 + r - 13 - 3r^2 \\
 & -2s^5 + 3s^3 - 7s + 2
 \end{aligned}$$

Missuguseid arve väljendavad alljärgnevad polünoomid?

$$\begin{aligned}
 117. \quad & 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3 \\
 & 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 10 + 1 \\
 & 8 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 2 \\
 & 9 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10 + 6 \\
 & 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 117. \quad & 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 2 \\
 & 2 \cdot 10^4 + 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 5 \\
 & 6 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 7 \\
 & 2 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10 + 9 \\
 & 5 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3
 \end{aligned}$$

Kirjutada järgmised arvud polünoomidena:

118.	29	11	2222
	542	111	5780
118.	89700	50203	20039
	50027	756340	50300

### § 17. Algebralised teisendused.

Hulkliikme koondamisel muutub hulkliikme väline kuju, mitte aga hulkliikme numbriline väärtus: igasuguse väärtuse asetamisel tähe asemele hulkliikme algkujusse ja hulk-

liikme koondatud kujusse saame ikka ühe ja sellesama tule-  
muse. Asetades näiteks võrduses

$$15a - 4a + a = 12a$$

tähe  $a$  asemele väärtuse 4, saame vasakul

$$15a - 4a + a = 15 \cdot 4 - 4 \cdot 4 + 4 = 60 - 16 + 4 = \\ = 44 + 4 = 48$$

ja paremal  $12a = 12 \cdot 4$ , s. o. samuti 48.

**Toiminguid, mille puhul muutub küll algebralise avaldise kuju, mitte aga tema numbriline väärtus, nimetame algebralisteks teisendus-  
dusteks.**

Teisenduse tulemust kontrollime sageli sel teel, et asetame avaldise lähtekujusse ja teisendatud kujusse tähtede asemele ühed ja samad arvud; kui saame võrdsed tulemused, siis võib arvata, et teisendus on sooritatud õigesti.

Algebraliste avaldiste teisendamise peaeesmärgiks on nende avaldiste lihtsustamine. Näites

$$15a - 4a + a = 12a$$

esineva avaldise numbrilise väärtuse arvutamine tema lähteku-  
ju järgi nõuab 4 tehet, lõppkuju järgi toimub see aga üheainsa tehtega.

Hulkliikme koondamine on algebraliste teisenduste üks eriliik; hiljem tutvume veel muude teisendustega.

## § 18. Ülesandeid kordamiseks.

119.  $m$  kilogrammist vasest saab valmistada  $s$  meetrit traati. Mitu kilogrammi vaske on vaja  $r$  meetri traadi valmistamiseks?

119. Petrooleumi tagavarast jätkub mootorile  $t$  päevaks, kui ta töötab  $a$  tundi päevas. Mitmeks päevaks jätkub samast tagavarast, kui mootor töötab  $b$  tundi päevas?

120. Maja pikkus on  $a$  meetrit ja kõrgus  $b$  meetrit. Maja esiküljel on 8 akent mõõdetega  $c$  ja  $d$  meetrit. Anda valem selle värvihulga arvutamiseks, mis on vajalik maja

esikülje värvimiseks, kui ruutmeetri värvimiseks kulub  $\frac{1}{2}$  kilogrammi värvi.

120. Kuubikujulises karbis on 10 puust kuupi. Karbi serva pikkus on  $a$  sentimeetrit, puust kuubi serva pikkus on  $x$  sentimeetrit. Mitu kuupsentimeetrit vaba ruumi on karbis?

Kirjutada matemaatiliste sümbolite abil arv, milles on

121.  $a$  kümmet;  
 $b$  sada;  
 $c$  kümmet ja 3 ühte;  
 $f$  sada ja  $g$  kümmet;  
 $p$  sada,  $q$  kümmet ja  $r$  ühte.

121.  $x$  kümmet ja  $y$  ühte;  
 $a$  sada ja  $b$  ühte;  
 $m$  sada,  $n$  kümmet ja  $k$  ühte;  
 $u$  tuhandet ja  $v$  sada;  
 $t$  tuhandet,  $u$  sada,  $v$  kümmet ja  $r$  ühte.

122. Arvu numbrid on  $b$  ja  $a$  (vasakult paremale luges). Avaldada see arv.

Missuguse arvu saame, kui muudame numbrite  $a$  ja  $b$  järjekorra?

122. Arvu kümnete number on  $x$  ja ühtede number on  $y$ . Avaldada see arv.

Missuguse arvu saame, kui muudame numbrite järjekorra?

123. Arv  $p$  on paarisarv. Missugused 2 arvu seisavad tema järel paarisarvude reas? Missugused 2 arvu seisavad tema ees?

123. Arv  $a$  on paaritu arv. Missugused 2 paaritud arvu seisavad tema ees? Missugused 2 paaritud arvu seisavad tema järel?

124. Sirges joones seisab  $N$  telegraafiposti; kahe järjekohase posti vahe on  $a$  meetrit. Kui suur on kaugus esimese ja viimase telegraafiposti vahel?

124. Sirges reas seisab  $n$  poissi; kahe naabri vaheline kaugus on  $x$  meetrit. Kui kaugel on esimene poiss viimasest?

Sõnastada järgmiste avaldistega antud arvutamiseeskirjad:

125. $1,3as + 2,4c$	$a^2$	$3a^3$
$\frac{1}{2}ab + \frac{2}{5}bc$	$3a^2$	$2a^3 - 5b^3$
125. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$	$b^2 - a^2$	$0,5a^3 + 0,25b^2$
$3\frac{b}{a} - \frac{a}{b}$	$5a^2 + 4b^2$	$3a^3 - 7ab^2$

126. Arvutada järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

$3c + 1$ , kui $c = 2$	$5h - \frac{5}{7}$ ,	kui $h = \frac{1}{7}$
$4 + 2D$ , kui $D = 5$	$0,3M + 0,5$ ,	kui $M = 10$
$\frac{1}{2}f - 1$ , kui $f = 10$	$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}$ ,	kui $x = 7$

126. Arvutada järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

$ab^2$ ,	kui $a = 0,1$ ja $b = 7$
$3p^2q$ ,	kui $p = 2$ ja $q = \frac{1}{4}$
$0,1F^2G^2$ ,	kui $F = 4$ ja $G = 5$
$\frac{3}{4}c^2u^3$ ,	kui $c = 2$ ja $u = \frac{1}{2}$
$\frac{7P}{11D^2}$ ,	kui $P = 10$ ja $D = 3$

Koondada järgmised avaldised:

$$\begin{aligned}127. \quad & 4a + 3b - 1,9a + 0,5b - 1,6b \\ & 3,4m + 0,4n - 0,1n - 1,8m + 0,3n \\ & 1,8k + 7i + 1,9k - 3,5i \\ & 5,1f + 4,5g - 3,5g - 4,1f \\ & 2,8s + 1,9t - 1,8s + 0,1t - 2t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}127. \quad & 1\frac{1}{3}c + c + 4d + \frac{1}{3}c - \frac{2}{3}c \\ & l + 1\frac{3}{4}l + m - 2\frac{1}{4}l - \frac{1}{2}m \\ & 2\frac{5}{6}p + q + 3\frac{1}{6}q - \frac{2}{3}p - 1\frac{1}{2}q \\ & 4 + 2s + 7s - 9s - \frac{3}{5}t \\ & 3u - u + 7 - 1\frac{7}{8}u - 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}128. \quad & 7a^2 + 3bc + 3a^2 - 2cb - 9a^2 \\ & 10m^3 - 3m^2 + 5m + 7m - 11m \\ & 9n^3 + 5np - 3np - n + 1 \\ & 13r^2s - 10r^2s - 2sr^2 - sr^2 \\ & 17t^3 - 13t^2t - 4tt^2 + ttt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}128. \quad & 9\frac{1}{2}a^2bx + 7\frac{1}{3}ab^2x - \frac{1}{2}xa^2b - 3\frac{1}{3}xab^2 \\ & 7cdu - 3ucd + dcu - cud \\ & 10m^2np + 5mn^2p + mnp^2 - 9m^2np \\ & 5\frac{a}{2x} + 3\frac{a}{2x} - 7\frac{a}{2x} - \frac{a}{2x} \\ & 1 + \frac{c^2}{u} + 5\frac{c^2}{u} - 6\frac{c^2}{u}\end{aligned}$$

## Peatükk II.

### Arvutamise põhiseadused.

#### § 19. Loendamise tulemuse ühesus.

Nii kogu arvutamine kui ka algebraliste avaldiste teisendamine tugineb vähestele tõdedele, mille üldnimeks on arvutamise põhiseadused. Nende seaduste käsitlemise rajame silmanähtavale tõsiasjale, et

antud kogus olevate esemete loendamise tulemus ei olene esemete loendamise viisist,

kui loendamisel pole ühtki eset vahele jäetud ega ühtki eset arvestatud enam kui üks kord.

Seda tõsiasja, nimelt loendamistulemuse ühesust, nime-tame edaspidi loendamisaksioomiks.

Esemete arv mingis kogus on ikka täisarv. Et selles peatükis me tegeleme ainult esemete kogudega, siis siin kõik arvutähised  $a, b, c, \dots, m, n, \dots$  tähendavad ikka täisarve.

Kõik täisarvud moodustavad täisarvude rea

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, n+1, n+2, \dots$$

Täisarvude real pole lõppu.

Aritmeetika õpetab, kuidas antud arvudest  $a$  ja  $b$  saada võimalikult vähese vaevaga nende summat, vahet, korrutist ja jagatist, see on arve

$$a+b, \quad a-b, \quad a \cdot b \quad \text{ja} \quad a:b.$$

Põhilise tähtsusega tehnilisteks abinõudeks nende arvude määramisel on liitmistabel ja korrutamistabel.

**Arvude**

$$a + b, a - b, a \cdot b \text{ ja } a : b$$

leidmist arvude  $a$  ja  $b$  järgi nimetame lühidalt arvutamiseks.

Arvutamise üksiksammude põhjendamine toimub arvutamise põhiseaduste varal.

## § 20. Liitmise põhiseadused.

Ülesanne 1. VI<sup>a</sup> klassis on  $a$  õpilast, VI<sup>b</sup> klassis on  $b$  õpilast. Õpilaste vähesuse tõttu kummaski klassis ühendatakse need üheksainsaks VI klassiks. Kui suur on õpilaste arv selles klassis?

Lahendus. Nõutava arvu võime leida kahel viisil: kas liites  $a$  õpilasega  $b$  õpilast, see annab

$$a + b$$

õpilast, või liites  $b$  õpilasega  $a$  õpilast, see annab

$$b + a$$

õpilast. Et mõlemal juhul on loendatud ühed ja samad õpilased, siis on loendamiseksioomi järgi

$$a + b = b + a.$$

Viimase võrduse sisu võime sõnastada nii:

summa ei olene liidetavate järjekorrast.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame liidetavate vahetuvuse seaduseks (ehk, võõrkeelse nimetusega, liitmise kommutatiivsuse seaduseks).

$$\text{Näide. } 8 + 3 + 67 = 67 + 3 + 8 = 70 + 8 = 78.$$

(vahetuvuse seaduse põhjal)

## Ülesanded.

Määrata järgmised summad kõige kergemal viisil:

$$\begin{array}{lll} 129. & 7 + 9 + 51 & 279 + 8 + 1 & 9 + 8 + 91 \\ & 1 + 2 + 19 & 3 + 8 + 197 & 1 + 5 + 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 129. & 37 + 7 + 3 & 135 + 18 + 5 & 12 + 18 + 134 \\ & 48 + 6 + 2 & 189 + 23 + 11 & 375 + 9 + 25 \end{array}$$

Ülesanne 2. Isa surma puhul pärib perekond kindlustussumma  $a$  rubla ning sellele lisaks hoiukassas oleva hoiusumma  $b$  rubla ühes juurdekasvanud intressiga  $c$  rubla. Kui suur on pärandi koguväärtus?

Lahendus. Nõutava väärtuse võime arvutada kahel viisil: esiteks sel teel, et leiame kogu hoiukassast saada oleva raha, see on rublades

$$b + c,$$

ja liidame selle kindlustussummaga; see annab rublades

$$a + (b + c);$$

teiseks võime pärandi koguväärtuse arvutada sel teel, et kindlustussummaga liidame hoiusumma, see annab rublades

$$a + b,$$

ja tulemusega liidame hoiusumma intressi, see annab rublades

$$(a + b) + c.$$

Et kumbki pärandi arvutuse viis loendamisaksiooni järgi annab sama tulemuse, siis peab olema kehtiv võrdus:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Viimase võrduse sisu võime sõnastada nõnda:

selle asemel, et arvuga liita kahe teise arvu summa, võib selle arvuga liita esimese liidetava ja tulemusega teise liidetava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame summa liitmise seaduseks (ehk, võõrkeelse nimetusega, liitmise assotsiatiivsuse seaduseks).

Ülesanne 3. Hääletamisel saab üks kandidaat  $a$  häält, mis kõik kehtivaks loetakse; teine kandidaat saab  $b$  häält, millest aga  $c$  häält kehtetuks loetakse rikutud hääletamisedeliste tõttu. Kui palju on kandidaadid saanud kehtivaid hääli?

Lahendus. Nõutava häältehulga võib arvutada kahel viisil: loendades teise kandidaadi suhtes kehtivad hääled, mida on  $b - c$ , ja liites need esimesele kandidaadile antud häältega, leiame

$$a + (b - c);$$

või jälle: loendades kõik antud hääled, mida on  $a + b$ , ja lahutades neist  $c$  kehtetut häält, leiame

$$(a + b) - c.$$

Et kehtivate häälte hulga loendamise tulemus ei olene häälte loendamise viisist, siis peab olema

$$a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Viimase võrduse sisu võime sõnastada nii:

selle asemel, et arvuga liita kahe teise arvu vahe, võib selle arvuga liita vähendatava ja tulemusest lahutada lahutatava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame vahe liitmise seaduseks.

Avaldises  $(a + b) + c$  märgivad sulud sama tehete järjekorda, milles tehted on märgitud avaldises  $a + b + c$ ; samuti avaldises  $(a + b) - c$  märgivad sulud sama tehete järjekorda, milles tehted on märgitud avaldises  $a + b - c$ . Seejärel võime kirjutada, et

$$a + (b + c) = a + b + c$$

ja

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Kokkuvõttes:

sulgudes seisva summa või vahe liitmisel võib sulud ära jätta.

Sulgude ärajätmist avaldises nimetatakse ka sulgude avamiseks.

Näited.

1.  $573 + 65 = 573 + 60 + 5 = 633 + 5 = 638.$

(summa liitmise seaduse põhjal)

2.  $899 + 4175 = 4175 + 899 = 4175 + (900 - 1) =$

(vahetuvuse seaduse põhjal)

$$= 4175 + 900 - 1 = 5075 - 1 = 5074.$$

(vahe liitmise seaduse põhjal)

3.  $3n + (m - 2n) + (n - m) =$

$$= 3n + m - 2n + n - m = 2n.$$

Ülesanded.

130. Arvutada peast järgmised summad, valides selleks kohaseim tee:

$462 + 37$

$39 + 0 + 171$

$\frac{1}{4} + 4\frac{1}{8} + \frac{1}{4}$

$43 + 136$

$17 + 34 + 126$

$\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$30 + 574$

$2,33 + 4,67$

$\frac{3}{8} + 4\frac{5}{8} + 3\frac{1}{4}$

130. Arvutada peast järgmised summad, valides selleks kohaseim tee:

$634 + 99$

$596 + 1379$

$693 + 2747$

$98 + 768$

$78 + 824$

$1408 + 398$

$3454 + 197$

$359 + 5367$

$996 + 998$

Avada sulud järgmistes avaldistes ja anda saadustele võimalikult lihtne kuju:

<p>131. <math>a + (a + 2)</math>  <math>a + (3a + 1)</math>  <math>4a + (5 + a)</math>  <math>5a + (17a + 4a)</math>  <math>15a + (1 + 16a)</math></p>	<p>131. <math>63 + (7x + 11) + 19x</math>  <math>(3x + 8x) + 14 + 5x</math>  <math>(10 + x) + (5x + 11)</math>  <math>(x + 12) + (16x + 1)</math>  <math>3x + (9 + x) + 6x</math></p>
--	---

Avada sulud järgmistes avaldistes ja anda saadustele võimalikult lihtne kuju:

<p>132. <math>2a + (a + b)</math>  <math>5f + (3f + 2g)</math>  <math>h + (9h + 4i)</math>  <math>7k + (l + 3k)</math>  <math>12m + (3n + 8m)</math></p>	<p>132. <math>4b + (b + 9)</math>  <math>3d + (4d + e)</math>  <math>11i + (5i + 4)</math>  <math>H + (1 + 7H)</math>  <math>3p + (16 + 6p)</math></p>
--	--

Avada sulud järgmistes avaldistes ja anda saadustele võimalikult lihtne kuju:

<p>133. <math>5a + (3a - 8)</math>  <math>a + (4a - a)</math>  <math>3a + (8a - 5a)</math>  <math>(7a - 9a) + 4a</math>  <math>(10a - a) + 3a</math></p>	<p>133. <math>(1 + 6x) + (12x - 7x)</math>  <math>(4x + 9) + (7x - 3)</math>  <math>(17x + 5) + (1 - 13x)</math>  <math>(11x + 8) + (12x - x)</math>  <math>(19x - 3x) + (13x - 7x)</math></p>
--	--

Kirjutada järgmised avaldised sulgudeta ja koondada tulemused:

<p>134. <math>(5x + 4) + 4x</math>  <math>(7a - 2b) + a</math>  <math>5 + (4 + 3c)</math>  <math>(2a + 3b + c) + 8a</math>  <math>4f + (8f - g)</math></p>	<p>134. <math>(a + b) + (3a + 2b) + a</math>  <math>(4 + c) + (5c - 2) + c</math>  <math>(4,2D + 0,8) + (1,2 - 0,7D)</math>  <math>\left(1\frac{1}{2}h + \frac{3}{4}k\right) + \left(2\frac{1}{2}h + \frac{1}{4}k\right)</math>  <math>(m - 0,5p) + (m - 1,5p)</math></p>
--	---

Avada sulud järgmistes avaldistes ja anda saadustele võimalikult lihtne kuju:

$$\begin{aligned}
 135. \quad & 5a + (a - b) \\
 & 3b + (4b - 2c) \\
 & c + (9c - 3d) \\
 & 8d + (e - d) \\
 & 7f + (5e - 3f)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 135. \quad & a + (2a - 3x) \\
 & 3b + (b - 15y) \\
 & 2c + (5c - 12z) \\
 & 7d + (2u - d) \\
 & 9f + (4v - 2f)
 \end{aligned}$$

## § 21. Lahutamise põhiseadused.

Ülesanne 1. Töötaja palgast  $a$  rubla peetakse kinni tasumata maks  $b$  rubla ja viivitusraha  $c$  rubla. Kui suur summa kuulub väljamaksmisele?

Lahendus. Nõutava summa võib arvutada kahel viisil: esiteks sel teel, et maksu ja viivitusraha liidame, mis annab  $(b + c)$  rubla, ja tulemuse lahutame palgast; nii saame rublades

$$a - (b + c).$$

Teiseks võiksime palgast kõigepealt lahutada maksu, mis annab  $(a - b)$  rubla, ja tulemusest veel lahutada viivitusraha; nii saame rublades

$$(a - b) - c.$$

Et kummalgi arvutusviisil loendamisaksioomi järgi saame sama tulemuse, siis peab olema õige võrdus:

$$a - (b + c) = (a - b) - c.$$

Viimase võrduse sõnastame nii:

selle asemel, et arvust lahutada kahe teise arvu summa, võib sellest arvust lahutada ühe liidetava ja tulemusest lahutada teise liidetava.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame summa lahutamise seaduseks.

Näide.

$$\begin{aligned} 483 - 56 &= 483 - (50 + 6) = (483 - 50) - 6 = \\ &\quad \text{(summa lahutamise seaduse põhjal)} \\ &= 433 - 6 = 427. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Arvutada peast:

136.	338 — 235	136.	474 — 387
	73 — 38		825 — 405
	546 — 236		1000 — 375
	498 — 124		139 — 69
	307 — 137		74 — 58

Ülesanne 2. Kiirarvutuse võistlusel hinnatakse parima ja nõrgima töö tulemused vastavalt  $a$  ja  $b$  punktiga ( $a > b$ ); viimasest  $b$  punktist kustutatakse töö välise külje puudulikkuse tõttu veel  $c$  punkti. Mitme punkti võrra ületab parim töö nõrgima?

Lahendus. Nõutava arvu võib määrata kahel viisil: esiteks sel teel, et leiame nõrgima töö lõpphinnangu, see on  $(b - c)$  punkti, ja lahutame selle parima töö hinnangust; nii saame

$$a - (b - c);$$

teine tee nõutava arvu saamiseks on see, et eeskätt leiame esialgsete hinnangute vahe, see on  $a - b$  punkti; pannes

tähele, et siin oleme lahutanud liigselt  $c$  punkti, parandame varemini leitud vahet selle  $c$  punkti liitmisega; see annab

$$(a - b) + c.$$

Et kummalgi arvutusviisil loendamisaksioomi järgi saame sama tulemuse, siis peab olema kehtiv võrdus:

$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

Selle võrduse võime sõnastada nii:

selle asemel, et arvust lahutada kahe teise arvu vahe, võib sellest arvust lahutada vähendatava ja liita tulemusega lahutatava.

Praegu sõnastatud tõsiasja nimetame vahe lahutamise seaduseks.

Avaldis  $(a - b) - c$  tähendab sedasama, mis avaldis  $a - b - c$ ; samuti tähendab avaldis  $(a - b) + c$  sedasama, mis avaldis  $a - b + c$ . Seega võime kirjutada:

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c.$$

Kokkuvõttes:

summa või vahe lahutamisel võib sulud ära jätta, kui muuta sulgudes olevate liikmete ees märgid vastupidisteks, see on kirjutada märgi + asemele märk - ja märgi - asemele märk +.

Näited.

$$\begin{aligned} 1. \quad 1347 - 298 &= 1347 - (300 - 2) = \\ &\quad \text{(vahe lahutamise seaduse põhjal)} \\ &= 1347 - 300 + 2 = 1047 + 2 = 1049. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad 5p - (2p - 3q) - (3p + q) &= \\ &= 5p - 2p + 3q - 3p - q = 2q. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Arvutada peast:

137.	652 — 199	137.	348 — 299
	374 — 180		743 — 290
	549 — 398		867 — 493
	1256 — 99		959 — 98
	3470 — 1900		2462 — 1800

Avada sulud järgmistes avaldistes ja anda saadustele võimalikult lihtne kuju:

138.	1. $2y - (y + 3)$	2. $12x - (12z + 8x)$
	$4y - (13 + 3y)$	$7 - (3x + 2z)$
	$15y - (3y + 7y)$	$14x + z - (z + x)$
	$16 + 18y - (10y + 5)$	$(13x + 2) - (9x + z)$
	$8y + 9 - (4 + 8y)$	$23x + 17z - (22x + 15z)$

138.	1. $3a - (a + b)$	2. $3a + 1 - (2a + 7)$
	$9b - (4b + 2a)$	$10 + 5b - (2b + 3)$
	$6c - (2c + 3d)$	$4m - (3 + 2m) - m$
	$12e - (3e + 5f)$	$4n - (20 + 2n) + 20$
	$7g - (4h + 2g)$	$10p - 1 - (3 + 5p)$

Anda järgmistele avaldistele võimalikult lihtne kuju:

139.	1. $6p - (p - 1)$	2. $12q - (9q - q)$
	$p - (3 - 4p)$	$(8q + 2) - (7q - 2)$
	$2p + 3 - (2p - 3)$	$3p + 2q - (2q - p)$
	$1 + 6p - (5p - 4)$	$10 + 4p + 7q - (10 - 5q)$
	$7 + p - (p - 3)$	$(q - 1) - (q - 1) + 2p$

Anda järgmistele avaldistele võimalikult lihtne kuju:

139.	1. $4a - (b - a)$	2. $12m - (8m - 3) - 4m$
	$5b - (2b - 3c)$	$4n - (3n - 11) - 10$
	$8c - (4c - 7d)$	$32p - (15p - 5) - 17$
	$5d - (e - d)$	$3q + 10 - (8 - 2q)$
	$10f - (g - 2f)$	$14 - (6r - 10) - 17$

Lihtsustada järgmised avaldised, tuginedes liitmise ja lahutamise põhiseadustele:

$$\begin{array}{ll}
 140. & 2,5 + (1,4a - 0,7) \\
 & 4,2b - (3,7b - 1,6) \\
 & c + 7,7 + (3,5c + 2,8) \\
 & 4d + 1 - (0,3d + 0,9) \\
 & (2,3f + 3,8) - (0,1f - 4,2)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 140. & g + \left(\frac{1}{2}g - \frac{1}{3}\right) \\
 & \left(h + \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{8}h - \frac{1}{3}\right) \\
 & \frac{4}{5}k - 2 + \left(4\frac{1}{5}k - h\right) \\
 & \frac{13}{16}u + 1 + \left(1\frac{1}{8}u - \frac{5}{8}\right) \\
 & (v - 1) - \left(\frac{5}{6}v - 1\right)
 \end{array}$$

Avada sulud järgmistes näidetes ja koondada saadused:

$$\begin{array}{ll}
 141. & 5 - 1\frac{1}{4}a + (2 - 2\frac{1}{3}a) \\
 & 7\frac{1}{4}b + (1\frac{2}{5}b + 1) - 6\frac{7}{10}b \\
 & 2\frac{1}{3}c - (1\frac{2}{3}c + 2) + \frac{1}{3}c \\
 & 3\frac{1}{2}d - (1\frac{2}{3}d + 1) - d \\
 & (4\frac{5}{9}l - 1) - (2 + 2\frac{2}{3}l)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 141. & 7 + (3h + 1\frac{4}{5}) + \frac{1}{2}h \\
 & 1\frac{5}{6}i + (3 - \frac{8}{9}i) + 4 \\
 & 4\frac{1}{5}k - 4 - (3\frac{7}{10}k - 1) \\
 & (\frac{3}{4}l + 5) - (2 - 3\frac{1}{2}l) \\
 & (1\frac{1}{2}m - \frac{3}{4}n) - (\frac{5}{6}m - n)
 \end{array}$$

## § 22. Korrumtamise põhiseadused.

Ülesanne 1. Ruudulise paberi leheküljel leiame lehe pikkusel  $a$  ruutu, lehe laiusel  $b$  ruutu. Mitu ruutu on leheküljel?

Lahendus. Nõutava ruutude arvu saab määrata kahel viisil: esiteks nii, et me ruute loendame ridade viisi: igas reas  $b$  ruutu, ridu on  $a$ , seega ruutude arv on

$$a \cdot b;$$

teiseks võime aga ruute loendada ka veergude viisi: igas veerus  $a$  ruutu, veerge on  $b$ , seega ruutude arv on

$$b \cdot a.$$

Et kummalgi viisil loendamisaksioomi järgi saame sama arvu ruute, siis peab olema õige võrdus:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

See tähendab, et

**korrutis ei olene tegurite järjekorrast.**

Kõnesolevat tõsiasja nimetame tegurite vahetuvuse seaduseks (ehk korrutamise kommutatiivsuse seaduseks).

Ülesanne 2. Tellised on laotud üksteise ligi virna, mille pikkuses on  $b$  kivi, laiuses  $c$  kivi, kõrguses  $a$  kivi. Kui suur on kivide arv virnas?

Lahendus. Nõutavat arvu saab määrata esiteks sel teel, et loendame kive rõhtsate kihtide viisi: kihis on  $b \cdot c$  kivi, kihte on  $a$ , seega kive on

$$a \cdot (b \cdot c).$$

Teiseks võime kive loendada aga ka laiuti — ridade viisi: reas on  $c$  kivi, ridu on  $a \cdot b$ , seega kive on

$$(a \cdot b) \cdot c.$$

Et nii üks kui teine kivide arvu määramise viis annab loendamisaksioomi põhjal sama tulemuse, siis peab olema õige võrdus:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

**Kokkuvõttes:**

selle asemel, et korrutada arvu kahe arvu korrutisega, võib arvu korrutada ühe teguriga ja saaduse korrutada teise teguriga.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame korrutise korrutamise seaduseks (ehk korrutamise assotiativiivsuse seaduseks).

Näited.

$$1. \quad 38 \cdot 14 \cdot 5 = 5 \cdot 14 \cdot 38 = 70 \cdot 38 = 2660.$$

(tegurite vahetuvuse seaduse põhjal)      (korrutise korrutamise seaduse põhjal)

$$2. \quad 3a \cdot 4b \cdot 2a = 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b = 3 \cdot 8 \cdot a^2 \cdot b = 24a^2b.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised korrutised, otstarbekohaselt kasutades tegurite vahetuvuse seadust ja korrutise korrutamise seadust:

$$142. \quad 2 \cdot 378 \cdot 5 \qquad 5 \cdot 321 \cdot 6 \qquad 8 \cdot 147 \cdot 5$$

$$142. \quad 346 \cdot 5 \cdot 4 \qquad 17 \cdot 18 \cdot 5 \qquad 12 \cdot 5 \cdot 94$$

Rakendades korrutise korrutamise seadust anda järgmised korrutised võimalikult lihtsal kujul:

$$143. \quad 2 \cdot (5 \cdot 17) \qquad 2 \cdot (3 \cdot a) \qquad \frac{4}{5} \cdot (20 \cdot a^2)$$

$$4 \cdot (25 \cdot 39) \qquad 3 \cdot (5 \cdot x) \qquad \frac{7}{8} \cdot (32 \cdot c^2)$$

$$143. \quad 4 \cdot (0,75 \cdot 9) \qquad 12 \cdot (5 \cdot n) \qquad 3\frac{7}{15} \cdot \left(\frac{5}{13} \cdot b^2z\right)$$

$$8 \cdot \left(12\frac{1}{2} \cdot 0,08\right) \qquad 25 \cdot (6 \cdot p) \qquad \frac{9}{16} \cdot \left(2\frac{2}{3} \cdot h^2u^2\right)$$

Kirjutada järgmised korrutised võimalikult väheste sümbolitega:

$$144. \quad a \cdot a^2 \qquad 2a \cdot a^2 \qquad (2x) \cdot (5x)$$

$$a^2 \cdot a \qquad 5b^2 \cdot b^2 \qquad (5y) \cdot (7y)$$

$$144. \quad a^3 \cdot a \qquad 3\frac{1}{2}d^3 \cdot 4d \qquad (6u) \cdot (6u)$$

$$a^2 \cdot a^2 \qquad 8e^3 \cdot \frac{3}{4}e^2 \qquad \left(2\frac{1}{2}v\right) \cdot (4v^2)$$

Rakendades korrutamise põhiseadusi kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

145. $5a \cdot 4b$	$s \cdot 12 \cdot 5q \cdot a$	$7df \cdot 3cb$
$v \cdot 2wu$	$4k \cdot 25h \cdot 3i$	$14 \cdot lr \cdot \frac{1}{7}mg$
145. $5 \cdot (4 \cdot 6a)$	$x \cdot (ax)$	$4n^2 \cdot (0,5m^2 \cdot n)$
$12 \cdot (7a \cdot b)$	$7p \cdot (4p^2 \cdot q)$	$15az \cdot \left(\frac{1}{5}az \cdot z\right)$

Ülesanne 3. Väliskaubanduse osakonnal on tasuda oma kaubavarustajale Poolas kaks arvet  $a$  zlotti ja  $b$  zlotti. Kui palju läheb baasil maksma nende arvete tasumine rublades, kui zlott maksab  $c$  rubla?

Lahendus. Nõutava summa võib arvutada kahel viisil: esiteks võib määrata kogu võla suuruse zlottides, see on

$$a + b,$$

ja hiljem arvutada see summa ümber rubladesse, see annab

$$(a + b) \cdot c.$$

Teiseks võib määrata kummagi arve suuruse rublades, see annab

$$a \cdot c \text{ ja } b \cdot c,$$

ja siis mõlemad tulemused liita; see annab kokku rublades

$$a \cdot c + b \cdot c.$$

Et kummagi arvutusviisi puhul loendamisaksiooni järgi saame sama rahasumma, siis peab olema õige võrdus:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

ehk, muutes tegurite järjekorra,

$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b.$$

Oma arutluse tulemuse võime sõnastada nõnda:

selle asemel, et summa korrutada mingi arvuga, võib korrutada sama arvuga eraldi iga liidetava ja liita saadused.

Kõnesolevat tõsiasja nimetame summa korrutamise seaduseks (ehk korrutamise distributiivsuse seaduseks).

Ülesanne 4. Töötaja kuupalk on  $a$  rubla, millest maha arvatakse  $b$  rubla riigilaenu arvel. Kui suur on  $c$  kuu eest töötajale väljamakstud teenistustasu?

Lahendus. Nõutava tasu võime arvutada kahel viisil. Esiteks sel teel, et leiame töötajale tegelikult väljamakstava kuupalga, see on rublades

$$a - b,$$

ja selle vahe korrutame kuude arvuga; see annab rublades

$$c \cdot (a - b).$$

Teiseks võime määrata kogu  $c$  kuu jooksul teenitud palga, see on rublades

$$c \cdot a,$$

siis leida sama aja kohta mahaarvatava riigilaenu, see on rublades

$$c \cdot b,$$

ja viimaks esimesest korrutisest lahutada teise; see annab rublades

$$c \cdot a - c \cdot b.$$

Et nii üks kui ka teine arvutusviis annab loendamisaksioomi järgi sama tulemuse, siis peab olema

$$c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b.$$

See võrdus ütleb:

selle asemel, et vahe korrutada mingi arvuga, võib selle arvuga korrutada eraldi vähendatava ning lahutatava ja lahutada esimesest saadusest teine.

Kõnesolevat tõsiasi nimetame vahe korrutamise seaduseks.

Näited.

$$1. \quad 27 \cdot 5 = 5 \cdot 27 = 5 \cdot (20 + 7) = 5 \cdot 20 + 5 \cdot 7 = 135.$$

(tegurite vahetuvuse seaduse põhjal)                      (summa korrutamise seaduse põhjal)

$$2. \quad 46 \cdot 98 = 46 \cdot (100 - 2) = 46 \cdot 100 - 46 \cdot 2 =$$

(vahe korrutamise seaduse põhjal)

$$= 4600 - 92 = 4508.$$

Ülesanded.

Arvutada peast järgmised korrutised ja põhjendada arvutamise üksikud sammud korrutamise põhiseadustega:

$$146. \quad 17 \cdot 15$$

$$39 \cdot 13$$

$$275 \cdot 31$$

$$146. \quad 44 \cdot 12$$

$$125 \cdot 88$$

$$63 \cdot 105$$

Arendada järgmised korrutised:

$$147. \quad 6 \cdot \left(3 + \frac{1}{3}\right) \quad 147. \quad 8(a + 3) \quad 148. \quad 10(0,3k + 1)$$

$$4 \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right) \quad 9(1 + b) \quad 7(3 + 0,2m)$$

$$5 \cdot \left(1 + \frac{2}{5}\right) \quad 4(c + 2) \quad 9(5 + 1,7n)$$

$$9 \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right) \quad 6(d + 3) \quad 2(9p + p)$$

$$4 \cdot \left(3 + \frac{1}{4}\right) \quad 5(1,2 + e) \quad 7(0,1 + 0,3q)$$

$$148. \quad 8 \cdot \left(2 - \frac{1}{2}\right) \quad 149. \quad 6(x - 1) \quad 149. \quad 2(6a - x)$$

$$6 \cdot \left(5 - \frac{2}{3}\right) \quad 3(y - 4) \quad 9(2b - 3y)$$

$$10 \cdot \left(7 - \frac{3}{5}\right) \quad 8(7 - z) \quad 18(2c - 7)$$

$$12 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \quad 16\left(u - \frac{1}{2}\right) \quad 6(7d - 1,5u)$$

$$15 \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right) \quad 20\left(\frac{3}{4} - v\right) \quad 4(2,5v - 1,25w)$$

Avada sulud järgmistes avaldistes:

150.	$a \cdot (3b + 2)$	$a(2a - 1)$	$5x(3a - 2b)$
	$a \cdot (7 - b)$	$x(4x - 7a)$	$\frac{1}{3}x(3a - 9b)$
150.	$x \cdot (3a - 4b)$	$2a(3b - 2)$	$1,8v(0,2v - 0,5w)$
	$a \cdot (6b + a)$	$3a(a - 5b)$	$0,1w(w - \frac{1}{2}w)$

Rakendades summa korrutamise seadust korrutada:

151. summa  $x + 3$  arvuga 4  
vahe  $2z - 4$  arvuga 5  
summa  $4x - 3z$  arvuga 3  
summa  $5x + z$  arvuga 9  
vahe  $x - 7z$  arvuga 7

151. vahe  $5 - 3x$  arvuga 3  
summa  $1 + \frac{1}{3}x$  arvuga 6  
summa  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}z$  arvuga 12  
vahe  $5x - 2z$  arvuga 0,4  
vahe  $0,5z - 1,8x$  arvuga 0,5

### § 23. Jagamise põhiseadused.

Ülesanne 1. Klassile on tarvis osta  $a$  poognat paberit hinnaga  $b$  kop. poogen. Mitu kop. on maksta igal õpilasel, kui klassis on  $c$  õpilast?

Lahendus. Ülesande võime lahendada kahel viisil. Esiteks nii, et arvutame, kui palju maksab paber kokku. Selleks korrutame arvud  $a$  ja  $b$ , saame  $ab$ .

Saadud kopikate arvu  $ab$  jagame klassi õpilaste arvuga  $c$ . Nii leiame, et kopikate arv, mis igal õpilasel tuleb maksta, on

$$\frac{ab}{c}.$$

Selle ülesande võime lahendada aga ka nii, et arvutame esiteks, mitu poognat paberit saab iga õpilane. See poognate arv on

$$\frac{a}{c}.$$

Et nüüd teada saada, mitu kop. tuleb igal õpilasel maksta, selleks korrutame poogna hinna  $b$  kop. poognate arvuga  $\frac{a}{c}$ ; nii näeme, et igal õpilasel on maksta

$$\frac{a}{c} \cdot b$$

kopikat.

Esimese arvutuse tulemus on  $\frac{ab}{c}$  kop., teise arvutuse tulemus on  $\frac{a}{c} \cdot b$  kopikat.

Et need tulemused väljendavad üht ja sama kopikate arvu, mis tuleb maksta igal õpilasel, siis peab kehtima võrdus

$$\frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b.$$

Selles võrduses peituva lause sõnastame lühidalt nii:

selle asemel, et jagada korrutis mingi arvuga, võib jagada selle arvuga korrutise ühe teguri ja tulemuse korrutada teise teguriga.

Kõnesolevat lauset nimetame korrutise jagamise seaduseks.

Näited.

$$1. \quad \frac{700}{25} = \frac{7 \cdot 100}{25} = 7 \cdot \frac{100}{25} = 7 \cdot 4 = 28.$$

(korrutise jagamise  
seaduse põhjal)

$$2. \quad (12ab) : b = 12a \cdot \frac{b}{b} = 12a \cdot 1 = 12a.$$

Ülesanded.

Anda järgmised jagatised võimalikult lihtsal kujul:

152.	$(237 \cdot 6) : 3$	$(8 \cdot a) : 4$	$7m : m$
	$(16 \cdot 125) : 4$	$(15 \cdot b) : 3$	$ab : b$
152.	$(28 \cdot 98) : 14$	$(6 \cdot d) : 6$	$3fg : f$
	$(18 \cdot 5\frac{1}{2}) : 9$	$(23 \cdot e) : 23$	$10hk : k$

Ülesanne 2. Asutise töötajaskond otsustas Suure Isamaasõja ajal saata rindesõdureile  $a$  rubla eest raamatuid ja  $b$  rubla eest ajakirju. Mitu rubla tuleb maksta igal töötajal, kui töötajate arv asutises on  $c$ ?

Lahendus. Küsime esiteks, kui palju maksavad raamatud ja ajakirjad kokku; leiame, et

$$a + b$$

rubla. Nüüd küsime, kui palju on maksta igal töötajal. Selle arvutamiseks jagame rublade arvu  $a + b$  töötajate arvuga  $c$ , ning saame

$$\frac{a + b}{c}$$

Selle ülesande võime aga lahendada ka teisiti, nimelt küsides esmalt, mitu rubla on igal töötajal maksta raamatute eest. Leiame, et

$$\frac{a}{c}$$

rubla. Nüüd arvutame, mitu rubla on igal töötajal maksta ajakirjade eest; saame

$$\frac{b}{c}$$

rubla.

Igal töötajal on siis kokku maksta

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

rubla.

Et arvutamise viis ei saa mõjutada arvutamise tulemust, siis peavad nii ühel kui teisel viisil saadud tulemused olema võrdsed, seega

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Analoogilise arutlusega leiame, et

$$\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Mõlemad viimased võrdused võime kirjutada lühemalt ühe võrdusena

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Eelmises võrduses peituvad laused:

selle asemel, et jagada summa mingi arvuga, võib jagada selle arvuga kummagi liidetava ja liita tulemused;

selle asemel, et jagada vahe mingi arvuga, võib jagada selle arvuga vähendatava ning lahutatava ja lahutada esimesest tulemusest teine.

Praegu sõnastatud tõsiasju nimetame vastavalt summa ja vahe jagamise seadusteks.

Näited.

$$1. \quad \frac{4575}{15} = \frac{4500 + 75}{15} = \frac{4500}{15} + \frac{75}{15} =$$

(summa jagamise  
seaduse põhjal)

$$= \frac{45 \cdot 100}{15} + 5 = \frac{45}{15} \cdot 100 + 5 = 3 \cdot 100 + 5 = 305.$$

(korrutise jagamise  
seaduse põhjal)

$$2. \quad (12x + 9y) : 3 = 12x : 3 + 9y : 3 = 4x + 3y.$$

Ülesanded.

Rakendades summa ja vahe jagamise seadust arvutada järgmised jagatised võimalikult lihtsalt:

- |      |  |      |                             |
|------|--|------|-----------------------------|
| 153. | $(5 \cdot 6 + 4 \cdot 6) : 6$                      | 153. | $(21p - 14) : 7$            |
|      | $(8 \cdot 7 + 9 \cdot 8) : 8$                      |      | $(18 - 6q) : 6$             |
|      | $(4 \cdot 5 + 4 \cdot 9) : 2$                      |      | $(3r - 20) : 4$             |
|      | $(7 \cdot \frac{1}{2} + 14 \cdot \frac{1}{2}) : 7$ |      | $(4s - 18) : 8$             |
|      | $(22 \cdot 0,5 + 11 \cdot 0,4) : 11$               |      | $(4t - 3) : 12$             |
| 154. | $(4 \cdot 7 - 3 \cdot 7) : 7$                      | 154. | $(3,5 - 1,4h) : 0,7$        |
|      | $(5 \cdot 23 - 15 \cdot 5) : 5$                    |      | $(0,6k - 1,6) : 0,2$        |
|      | $(8 \cdot 11 - 8 \cdot 3) : 8$                     |      | $(7,5 - 4,5e) : 0,5$        |
|      | $(10 \cdot \frac{3}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2}) : 5$ |      | $(2,4m - 5,4) : 9$          |
|      | $(12 \cdot 0,9 - 8 \cdot 0,2) : 4$                 |      | $(0,2 - 2,6n) : 2$          |
| 155. | $(8a + 12) : 4$                                    | 155. | $(\frac{1}{2}x + 7) : 2$    |
|      | $(15b + 45) : 15$                                  |      | $(\frac{1}{3}y - 3) : 3$    |
|      | $(3,5 + 7c) : 7$                                   |      | $(3,2 - \frac{1}{2}z) : 8$  |
|      | $(1,6 + 2d) : 8$                                   |      | $(\frac{3}{4}u - 4,2) : 6$  |
|      | $(8e + 6,4) : 16$                                  |      | $(3\frac{1}{3}v - 20) : 10$ |

Ülesanne 3. Rannakaitse sai  $a$  kahurimürsku. Rannas on  $b$  patareid, igas patareis  $c$  kahurit. Mitu mürsku jätkub saadetisest igale kahurile?

Lahendus. Rannakaitse  $b$  patareil on kokku  $b \cdot c$  kahurit.

Jagades mürskude arvu  $a$  korrutisega  $bc$  leiame, et iga kahur saab

$$\frac{a}{bc}$$

mürsku.

Sama ülesande võime lahendada veel teisel viisil, nimelt arutledes nõnda:

Saadetis sisaldab  $a$  mürsku; sellest saab iga patarei

$$\frac{a}{b}$$

mürsku.

Et igas patareis on  $c$  kahurit, siis jätkub igale kahurile

$$\frac{a}{b} : c$$

mürsku.

Tulemused peavad olema võrdsed, seega

$$\frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c.$$

Viimast võrdust nimetame korrutisega jagamise seaduseks, mida võib sõnastada nõnda:

selleks, et jagada arvu korrutisega, võib arvu jagada esimese teguriga ja saaduse teise teguriga.

Näited.

$$1. \quad \frac{2400}{120 \cdot 4} = \frac{2400}{120} : 4 = \frac{20}{4} = 5.$$

(korrutisega jagamise  
seaduse põhjal)

$$2. \quad \frac{36ax}{2a} = \frac{36ax}{2} : a = 18ax : a = 18x.$$

Ülesanded.

Lihtsustada järgmised avaldised:

$$156. \quad \frac{1200}{60 \cdot 4} \quad \frac{24a}{6a} \quad \frac{15ax}{15x}$$

$$360 : (6 \cdot 12) \quad 420 : (7 \cdot 3) \quad 16m : 2m$$

$$156. \quad \frac{4725}{5 \cdot 9} \quad \frac{3an}{an} \quad \frac{26x}{13x}$$

$$484 : (11 \cdot 2) \quad 30mn : 15n \quad 8ax : 2ax$$

Eespool oleme näidanud arvutamise põhiseaduste kehtivust täisarvude vallas. Hiljem näeme, et need seadused jäävad kehtima ka murdarvude puhul. Näiteks

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}$$

ja

$$\frac{3}{4} (12 + 28) = \frac{3}{4} \cdot 12 + \frac{3}{4} \cdot 28.$$

Iga arvutamise põhiseadust on võimalik avaldada ka heli viisil: üks kord eespool toodud võrdusega, teine kord vahe- tades selles võrduses pooled; näiteks ühtaegu võrdusega

$$a - (b - c) = a - b + c$$

on kehtiv võrdus

$$a - b + c = a - (b - c);$$

ühtaegu võrdusega

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

on kehtiv võrdus

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Arvutamise põhiseadused on aluseks nii numbrilisele arvutamisele kui ka avaldiste teisendamisele.

## § 24. Täht tundmatu arvu tähisena.

Tundmatu arvu märkimine tähega kergendab paljude ülesannete lahendamist.

N ä i d e. Ema ja tütar istutasid kapsataimi. Ema istutas 3 korda rohkem kui tütar. Kokku istutasid nad 1136 taime. Mitu taime istutas tütar?

Me kasutame tähte tundmatu arvu märkimiseks ning lahendame ülesande nõnda: tähistame tütre istutatud taimede arvu mingi tähega, näiteks tähega  $x$ . Et ema istutas 3 korda rohkem taimi kui tütar, siis on ema poolt istutatud taimede arv  $3x$ . Kokku istutasid nad siis  $x + 3x$  taime; see summa on aga teada, nimelt 1136. Tähendab

$$\begin{array}{l} \text{ehk} \quad x + 3x = 1136 \\ \quad \quad \quad 4x = 1136. \end{array}$$

Selles võrduses  $x$  on tundmatu ehk otsitav.

Meie võrdus ütleb, et neli  $x$  on 1136; üks  $x$  on siis neli korda väiksem, seega

$$x = \frac{1136}{4} = 284.$$

Niisiis tütar istutas 284 taime.

M ä r k u s. Tundmatuid tähistatakse tavaliselt tähestiku viimaste tähtedega, näiteks  $x, y, z, s, t, u, v$ , selleks võib aga kasutada ka iga muud tähte.

Ü l e s a n n e 1. Suurendades arvu 12 korda saame 84. Leida arv.

L a h e n d u s. Tähistades otsitava arvu tähega  $a$ , võib ülesande kirjutada lühidalt järgmiselt:

$$12 \cdot a = 84.$$

Arvu  $a$  leidmiseks jagame 84 12-ga, saame

$$a = \frac{84}{12} = 7.$$

V a s t u s. Otsitav arv on 7.

### Ülesanded.

Allpool järgneb rida ülesandeid. Tähistada otsitav arv mingi tähega. Kirjutada selle tähe abil ülesanne sõnadeta ja leida vastus.

157. Korrutades arvu arvuga 7 saan 28. Leida arv.  
Jagades arvu arvuga 13 saan 3. Leida arv.  
Lahutades arvust arvu 9 saan 9. Leida arv.  
Liites arvuga arvu 11 saan 11. Leida arv.  
Lahutades arvu arvust 13 saan 1. Leida arv.
157. Suurendades arvu 5 korda saan 20. Leida arv.  
Suurendades arvu 5 võrra saan 13. Leida arv.  
Vähendades arvu 8 võrra saan 9. Leida arv.  
Vähendades arvu 8 korda saan 9. Leida arv.  
Vähendades arvu 4 võrra saan 7. Leida arv.

Ülesanne 2. Missugune peab olema tähe  $x$  väärtus, et kehtiks võrdus

$$x - 10 = 15?$$

Lahendus. Võrdusest näeme, et otsitava arvu  $x$  ja arvu 10 vahe on 15. Arv  $x$  on siin vähendatav, 10 on vähendaja ja vahe on 15. Me teame, et vähendatava saame, kui liidame vahe vähendajaga.

Seega

$$x = 15 + 10 = 25.$$

Vastus:

$$x = 25.$$

### Ülesanded.

Missuguste tähe  $x$  väärtuste puhul kehtivad järgmised võrdused?

- |      |           |             |            |
|------|-----------|-------------|------------|
| 158. | $3x = 9$  | $8x = 72$   | $14x = 0$  |
|      | $2x = 12$ | $11x = 121$ | $2x = 2$   |
| 158. | $4x = 20$ | $21x = 7$   | $6x = 15$  |
|      | $6x = 0$  | $10x = 1$   | $16x = 36$ |

Missuguste  $z$ -i väärtuste puhul on kehtivad järgmised võrdused?

159.	$\frac{1}{5}z = 6$	$\frac{z}{7} = 3$	$\frac{1}{2}z = 0,1$
	$\frac{1}{2}z = 7$	$\frac{z}{4} = 6$	$\frac{1}{7}z = 0,7$
	$\frac{1}{6}z = 8$	$\frac{z}{15} = 0$	$\frac{1}{20}z = 1,5$
	$\frac{1}{10}z = 1$	$\frac{z}{12} = 5$	$\frac{1}{16}z = 3,5$

159. Missuguste sümbole  $u$  ja  $s$  väärtuste puhul on kehtivad järgmised võrdused?

$u + 2 = 7$	$3 + u = 9$	$15 = 9 + u$
$u + 7 = 15$	$8 + u = 16$	$u = 15 + 11$
$u + 5 = 9$	$6 + u = 11$	$23 = 18 + u$
$u + 3 = 4$	$3 + u = 5$	$19 + u = 32$
$u + 8 = 12$	$9 + u = 17$	$17 = 10 + u$
$s - 6 = 3$	$5 - s = 1$	$17 - s = 0$
$s - 2 = 9$	$9 - s = 7$	$8 = 9 - s$
$s - 3 = 1$	$8 - s = 5$	$10 = s - 11$
$s - 5 = 3$	$2 - s = 2$	$15 - s = 6$
$s - 4 = 6$	$7 - s = 6$	$9 = 16 - s$

### § 25. Võrrand.

Ülesanne. Kolme arvu summa on 44. Teine arv on esimesest 2 võrra suurem; kolmas arv on esimesest 5 korda suurem. Kui suur on esimene arv?

Lahendus. Tähistame esimese arvu tähega  $x$ ; siis ülesande põhjal teine arv on .....  $x + 2$  ja kolmas arv on .....  $5x$ .

Ülesandes on antud, et nende arvude summa on 44, seega, liites arvud  $x$ ,  $x + 2$  ja  $5x$ , võime kirjutada võrduse:

$$x + x + 2 + 5x = 44.$$

Selle võrduse abil leiame nüüd otsitava  $x$  järgmiselt:

Koondades sarnased liikmed, saame

$$7x + 2 = 44;$$

siit

$$7x = 44 - 2,$$

$$7x = 42,$$

$$x = 6.$$

Kontrollime, kas meie tulemus on õige: kui esimene arv on 6, siis teine, 2 võrra suurem arv peab olema 8; kolmas arv, mis ülesande järgi on esimesest arvust 5 korda suurem, on siis  $5 \cdot 6 = 30$ . Nende arvude summa on

$$6 + 8 + 30 = 44,$$

nagu ülesande tingimuste järgi peab olema. Seega meie lahendus on õige.

**V a s t u s.** Esimene arv on 6.

Eelmise ülesande lahendamisel leidsime otsitava arvu võrduse

$$x + x + 2 + 5x = 44$$

kaudu.

**Võrdust, mille kaudu määratakse otsitav, nimetame võrrandiiks.**

Igal võrrandil on vasak pool ja parem pool; esimene seisab võrdusmärgi ees, teine võrdusmärgi järel.

**Otsitava arvatatud väärtust nimetame võrrandi lahendiks.**

**Võrrandi lahendi leidmist nimetame võrrandi lahendamiseks.**

Leitud lahendi kõlblikkuse proovimiseks — lahendi kontrollimiseks — asetame selle lahendi otsitava asemele nii võrrandi vasakusse kui ka paremasse poolde; kui tulemused on võrdsed, on tegemist õige lahendiga, vastasel korral mitte. Esimesel juhul ütleme, et asetatav arv

ra huldab võrrandit, teisel juhul, et ta võrrandit ei  
ra hulda. Nii näeme, et

võrrandil	on lahend	sest
$\frac{2u}{u-1} = \frac{8}{3}$	$u = 4,$	$\frac{2 \cdot 4}{4-1} = \frac{8}{3}.$

Näide 1. Lahendame võrrandi

$$0,2x = 6.$$

Me näeme, et otsitav  $x$  esineb tegurina korrutises  $0,2 \cdot x$ , kusjuures korrutise väärtus on 6. Teguri väärtuse saame, kui korrutise jagame teise teguriga; niisiis

$$x = 6 : 0,2 = 60 : 2 = 30.$$

Kontroll: kui  $x = 30$ , siis  $0,2x = 0,2 \cdot 30 = 6$ . Et antud võrrandi parem pool on ka 6, siis meie lahend on õige.

**Ulesanded.**

Lahendada järgmised võrrandid:

<p>160. <math>0,4y = 12</math>  <math>0,7y = 35</math>  <math>0,1y = 28</math>  <math>0,8y = 24</math>  <math>0,6y = 18</math></p>	<p>160. <math>0,31y = 0,93</math>  <math>0,17y = 6,8</math>  <math>4,2y = 0,21</math>  <math>5,3y = 0,106</math>  <math>6,5y = 1,3</math></p>
<p>161. <math>\frac{2}{3}x = 6</math>  <math>\frac{4}{5}x = 8</math>  <math>\frac{3}{4}x = 9</math>  <math>\frac{8}{11}x = 32</math>  <math>\frac{5}{13}x = 5</math></p>	<p>161. <math>1\frac{4}{7}z = 22</math>  <math>6\frac{1}{5}z = 93</math>  <math>7\frac{3}{8}z = 0</math>  <math>9\frac{1}{4}z = 185</math>  <math>2\frac{2}{5}z = 48</math></p>

Näide 2. Lahendame võrrandi

$$3u - 2 = 7.$$

Arutame küsimust nõnda:  $3u - 2 = 7$ , tähendab  $3u$  on 2 võrra suurem kui 7, seega ta on  $7 + 2$  ehk 9; niisiis  $3u = 9$ ; üks  $u$  on 3 korda väiksem, seega  $u = 3$ .

Kontroll: kui  $u = 3$ , siis võrrandi vasak pool  $3u - 2 = 3 \cdot 3 - 2$  ehk  $9 - 2$  ehk 7; et võrrandi parem pool on ka 7, on arv 3 tõesti antud võrrandi lahendiks.

Näide 3. Lahendame võrrandi

$$\frac{2}{5}t + 13 = 21.$$

Arutame nii:  $\frac{2}{5}t + 13 = 21$ , järelikult  $\frac{2}{5}t$  on 13 võrra 21-st väiksem, seega  $21 - 13$  ehk 8; niisiis  $\frac{2}{5}t = 8$ . Kui  $\frac{2}{5}$  arvust on 8, siis arv on  $8 : \frac{2}{5} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ . Seega

$$t = 20.$$

Kontroll: kui  $t = 20$ , siis võrrandi vasak pool  $\frac{2}{5}t + 13 = \frac{2}{5} \cdot 20 + 13$  ehk  $8 + 13$  ehk 21; et võrrandi parema poole väärtus on samuti 21, on leitud lahend kindlasti õige.

Ülesanded.

Lahendada järgmised võrrandid:

162.  $x + 2,2 = 9$   
 $x + 0,6 = 6$   
 $x - 11,6 = 2$   
 $x - 5,7 = 9$   
 $x - 3,4 = 1,6$

162.  $y + 0,4 = 3,1$   
 $1,9 - y = 1,5$   
 $4,1 - y = 4,1$   
 $7,5 + y = 9,2$   
 $8,4 - y = 5,9$

$$\begin{aligned}
 163. \quad & 3 + z = 4,7 \\
 & 7 - z = 1,2 \\
 & 0,4 - z = 0,2 \\
 & z + 4,1 = 8,3 \\
 & z - 2,9 = 3,1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 163. \quad & 3n + 1 = 4 \\
 & 7n - 5 = 30 \\
 & 11n + 7 = 51 \\
 & 4n - 19 = 17 \\
 & 5n - 2 = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 164. \quad & 6p + 17 = 17 \\
 & 8p - 2 = 22 \\
 & 10p - 19 = 81 \\
 & 7p + 5 = 47 \\
 & 17p + 12 = 80
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 164. \quad & 7q + 8 = 8 \\
 & 2q + 1 = 3 \\
 & 8q - 5 = 11 \\
 & 10q - 9 = 1 \\
 & 6q - 11 = 7
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 165. \quad & 2x + 4x + 5x = 33 \\
 & x + 9x - 2x = 32 \\
 & 4x + 7x + x = 72 \\
 & x + 3x - 2x = 32 \\
 & 14x - 8x - x = 35
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 165. \quad & 5x - 2x + 7x + 2 = 32 \\
 & x + 9x - 5x + 11 = 41 \\
 & 3x - x + 4x - 8 = 4 \\
 & 2,7x + x - 1,3x + 4,2 = 9 \\
 & 1,7x + 2,9x - 5,2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 166. \quad & 5x + 2x - 4x = 36 \\
 & 4x - x + 19x = 22 \\
 & 63 = 2x + 3x + 4x \\
 & 121 = 3x + 7x + x \\
 & 10x + x + 24x = 105
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 166. \quad & \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + x = 19 \\
 & x + 3x + 1,5x = 55 \\
 & \frac{5}{6}x + \frac{2}{3}x = 18 \\
 & 4x + 0,75x + 2,25x = 112 \\
 & 2,04x + 0,68x + 1,28x = 100
 \end{aligned}$$

167. Kahe arvu summa on 108. Üks arv on teisest 3 korda suurem. Kui suur on väiksem arv?

167. Kahe arvu summa on 129. Üks arv on teisest 2 korda suurem. Kui suur on väiksem arv?

168. Õel ja vennal on kokku 78 rubla, õel on 12 rubla rohkem kui vennal. Mitu rubla on vennal?

168. Kahes laekas on kokku 152 rubla. Esimeses on 27 rubla rohkem kui teises. Mitu rubla on teises?

169. Kolhoosi esimehe kohale oli üles seatud 2 kandidaati; valimisel sai üks neist 12 häält enam kui vastaskandidaat. Äraantud hääli oli kokku 74. Mitu häält sai vastaskandidaat?

169. Kahele töölisele määrati eriliselts hoolda töötamise eest preemiad, kokku 500 rubla. Vanem tööline sai 50 rubla enam kui noorem. Mitu rubla sai noorem tööline?

170. Ristsõnamõistatuse tabelis on 144 ruutu, valgeid ruute 10 tükki enam kui musti. Mitu musta ruutu on tabelis?

170. Pudeli rohu maksab 1,10 rubla. Rohi on rubla võrra pudelist kallim. Kui palju maksab rohi?

171. Kahe järjestikuse täisarvu summa on 255. Kui suur on väiksem arv?

171. Kahe järjestikuse täisarvu summa on 277. Kui suured on need arvud?

172. Kolme järjestikuse täisarvu summa on 87. Milline on kõige väiksem neist kolmest arvust?

172. Nelja järjestikuse täisarvu summa on 154. Kui suur on kõige väiksem arv?

173. Isa on praegu 54 aastat vana. Üheksa aasta pärast on isa pojast 3 korda vanem. Kui vana on poeg praegu?

173. Ema on praegu 56 aastat vana. Kaheksa aasta pärast on ema tütrest 4 korda vanem. Kui vana on tütar praegu?

174. Vastumäge kodukohast kooli käimine nõuab kaks korda rohkem aega kui allamäge koolist koju. Tee edasitagasi käimiseks kulub 30 minutit. Kui palju aega nõuab käimine kodust kooli?

174. Kaks poissi võttis endale kohustuse puhastada lumest kinnituisanud kõnnitee. Töö lõpul selgus, et esimene oli puhastanud kõnniteed 11, teine 17 sammu pikkuselt. Kuidas peaksid poisid jaotama neile tubli töö eest antud 14 rubla?

175. Kolmes vaasis on kokku 24 lille, kusjuures kahes esimeses on ühepalju lilli, aga kolmandas vaasis on 3 lille võrra rohkem kui kummaski eelmises. Mitu lille on igas vaasis?

175. Kolmel taldrikul on kokku 30 õuna. Teisel taldrikul on 2 õuna rohkem kui esimesel ja kolmandal on 4 õuna rohkem kui esimesel. Mitu õuna on igal taldrikul?

176. Kooliraamatukogus on kolmel riivil kokku 180 raamatut. Alumisel on 2 korda rohkem ja keskmisel on 3 korda rohkem kui ülemisel riivil. Mitu raamatut on ülemisel riivil?

176. Korteriühingute „Tare“, „Kolle“ ja „Kodu“ majades elab kokku 360 elanikku, kusjuures „Kolde“ majas elab 2 korda rohkem ja „Tare“ majas 3 korda rohkem elanikke kui „Kodu“ majas. Mitu elanikku elab „Kodu“ majas?

177. Tekstiilkäitis tootis riidet veebruaris 5300 meetrit rohkem kui jaanuaris ja märtsis 4000 meetrit rohkem kui veebruaris. Kui suur oli toodang igas kuus, kui kvartali toodang oli 294 200 meetrit?

177. Tallinna Paberivabriku viie aasta toodangu plaan on toodangut 3 250 000 rbl. väärtuses. Viisaastaku esimesel aastal oli vabriku toodangu väärtus 790 000 rbl. Kui suur peab olema iga järgneva aasta toodangu väärtus, et vabrik saaks täita oma viie aasta plaani 4 aastaga?

178. Poisid läksid jõkke suplema. Kui 8 neist teisele kaldale ujus ja siinpoolsele kaldale jäänuist veel pool üle jõe ujus, siis selgus, et üle jõe ununud poisse oli 2 korda rohkem kui siinpoolsel kaldal olevaid poisse. Mitu poissi läks jõkke suplema?

178. Kastist, mis oli kartuleid täis, oli kesknädalaks ära kulunud 12 kg, laupäevaks oli ära tarvitatud veel  $\frac{1}{4}$  ülejäägist. Nüüd oli kastis kartuleid 2 kg võrra rohkem kui ära oli tarvitatud. Mitu kilogrammi kartuleid oli kastis esialgu?

179. Metsatööde brigaad pidi plaani järgi iga päev 50 m<sup>3</sup> puid üles töötama. Brigaad töötas üles iga päev aga 56 m<sup>3</sup> puid ja lõpetas töö seetõttu 3 päeva enne tähtaega, ületades plaani seejuures 120 m<sup>3</sup> võrra. Mitu m<sup>3</sup> puid pidi brigaad plaani järgi üles töötama?

179. Viktor Kingissepa nimeline kolhoos Saaremaal pidi plaani järgi seemendama iga päev 40 ha. Kuid artell seemendas iga päev 52 ha ja lõpetas seetõttu külvitöö 2 päeva enne tähtaega, seemendades seejuures 4 ha üle plaani. Mitu ha seemendas artell?

### § 26. Ülesandeid kordamiseks.

Määrata järgmised summad, vahed, korrutised ja jagatised kõige kergemal viisil:

180. $27 + 4 + 96$	$12\left(\frac{3}{4} \cdot 7 + \frac{3}{4} \cdot 9\right)$
$\frac{7}{12} + 1\frac{1}{12} + \frac{5}{12}$	$(0,6 \cdot 13 - 0,6 \cdot 9) \cdot \frac{1}{4}$
$993 + 10 + 997$	$(42 \cdot 3\frac{1}{3}) : 7 - (56 \cdot 2\frac{1}{7}) : 8$
$8 \cdot 19 \cdot 25$	$(19 \cdot \frac{4}{5} - 13 \cdot \frac{4}{5}) : 6$
$0,5 \cdot 33 \cdot 40$	$(24 \cdot 0,7 - 17 \cdot 0,7) : 0,7$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult väheste sümboolitega:

180. $6ab + a(5 - 3b)$	$2\frac{2}{5}g - 2\left(1\frac{1}{5}g - \frac{3}{5}f\right)$
$5cd - c(2d + 4e)$	$12\frac{3}{4}h - 3\left(2\frac{1}{2} - \frac{5}{12}h\right)$
$m(3n - 5p) - 2mp$	$1\frac{3}{5}k - 3\left(1 - \frac{4}{15}k\right)$
$4pq - q(5 - 4p)$	$2\frac{1}{3} - 5\left(1\frac{2}{5} - 3l\right)$
$r(8s - 3t) + rt$	$4\frac{1}{5}m + \frac{4}{5}\left(2m + 1\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
181. \quad & a(3 + 2b) + b(5 + 3a) \\
& x(7 + 5a) - a(3x + 4) \\
& m(2n - 3) - n(5 - 4m) \\
& r(3 - 4s) - s(7 + 2r) \\
& p(8 - 3x) - r(3 - p) \\
& 0,4(0,4h + 1) - 0,2(0,2 - 2,6h) \\
& 0,3(0,3 - 4k) - 0,2(0,1 - 6k) \\
& 0,8(5n + 2) + 0,7(0,1 - n) \\
& 0,1(8c + 1) - 0,6(2 - 0,5c) \\
& 0,5(3f - 2) - 0,4(3f - 5)
\end{aligned}$$

Lihtsustada järgmisi avaldisi niipalju kui võimalik:

$$\begin{aligned}
181. \quad & 15 + 3(a - 4) \\
& 4(a + 3) - 2a + 7 \\
& 6a - 5(a - 4) \\
& 7(3a - 1) - 5(a - 3) \\
& 11a + 4(6a + 2) - 3(2a - 1) \\
& 2(3x + 5) + 3(x - 4) - 2x \\
& 6(2x - 3y) + 4(2x + 5y) \\
& 7(x + 3) - 5(x - y) - 14 \\
& 8(3p + 2q + 1) - 6(2p + q - 2) \\
& 5(p + 2q + 6) + 5(3p - q - 5)
\end{aligned}$$

Lahendada järgmised võrrandid:

$$\begin{array}{ll}
182. \quad \frac{1}{2}x = 3 & 5H + 3H = 1 \\
\frac{y}{14} = 0,5 & 13k - 9k = 0 \\
z + \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3} & 6D - D = 5 \\
16 - u = 3 & \frac{m}{2} + \frac{m}{3} = 4 \\
2\frac{4}{9} - v = 1\frac{1}{3} & m + \frac{m}{2} = 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
182. \quad & 3(2x + 5) = 27 \\
& 4(y - 2) + 3y = 13 \\
& 8(2 + z) + 3(5 + 4z) = 31 \\
& 25u - 6 - (15u + 4) = 0 \\
& 5v - (14 - 2v) = 35 \\
& 9m - (6m - 14) - (m + 5) = 19 \\
& 7(4n + 6) - 5(5n + 2) = 38 \\
& 6p + 17 - (3p + 8) = 27 \\
& 2q + 30 - (18 - 6q) - 4 = 16 \\
& 63 + 42(x - 1) = 105
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
183. \quad & 4s + 19 + (2s - 7) = 15 \\
& 23 + 9t - (8 + 6t) = 16 \\
& 11u + (16 + 19u) - (7u + 10) = 7 \\
& (7 + 10v) + 3v + 6 - (13 - 15v) = 0 \\
& 4x - (3x - 16) - 5 + (9x - 11) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
183. \quad & 5x + (3x - 8) + 20 = 16 \\
& 24 - (9 + 7y) + 10y = 14 \\
& 12z + (17 + 20z) - (8z + 11) = 12 \\
& (8 + 11u) + 6 - (14 - 16u) + 4u = 0 \\
& 5v - (4v - 17) - 5 + (10v - 12) = 0
\end{aligned}$$

### Peatükk III.

## Positiivsed ja negatiivsed arvud.

### § 27. Vastassuurused.

Näide. Õpilase tulude-kulude raamatus leiame järgmised märkmed möödunud nädalal olnud tulude ja kulude kohta:

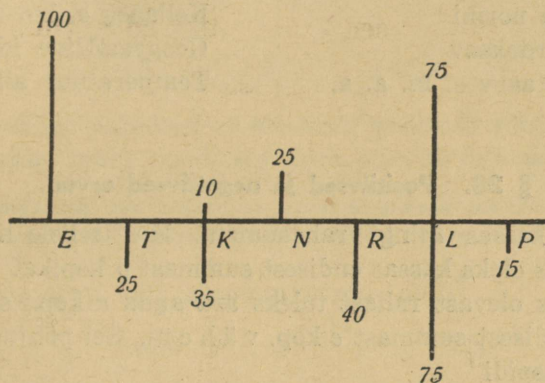
Päev	E	T	K	N	R	L	P
Tulu kopikat	100		10	25		75	
Kulu kopikat		25	35		40	75	15

Esitame need andmed näitlikult joonisel.

Üks võimalikkudest viisidest selleks on järgmine: võtame vabalt mõne sirgjoone (joonis 11), märgime sellel võrdsete vahemikkude järel rea punkte ja valime need nädalapäevade kujutisteks, tähistades neid järjest tähtedega *E*, *T*, ... Neist punktidest tõmbame püstsirged ja kujutame viimaseil kohaselt valitud mõodus tulud näiteks ülespoole suunatud lõikudena, kulud aga vastassuunas, see on allapoole suunatud lõikudena. Töö tulemusena esineb joonisel kujutatud pilt. Selles peegeldub õpilase tulude-kulude käik kõigis üksikasjus: sealt näeme esimesel pilgul, mis päevadel esines

vaid tulu, mis päevadel vaid kulu, mis päeval tulu oli kuluga tasakaalus, mis päevadel kulu oli ülekaalus.

Suuruste paare, nagu tulu ja kulu, varandus ja võlg, kahju ja kasu, välja- ja sisseveetud kauba hulk, nimetame vastassuurusteks. Sääraste suurusepaaridena esinevad veel alakaal ja ülekaal, temperatuuri sooja- ja külma- kraadid, kõrgused ülalpool ja allpool merepinda, aastaarvud enne ja pärast meie ajaarvamise algust jm.



Joonis 11.

Enamik suurusi, näiteks linna elanikkude arv, ringjoone pikkus, keha kaal, keha ruumala jt., esinevad üksiksuurustena — neil puudub vastassuurus.

Vastassuuruste paar tekib mingi üksiksuuruse väärtuse kõikumisest ühele ja teisele poole tema mingist kindlast väärtusest. Näiteks temperatuuri kõikumisel üle ja alla nullpunkti tekivad vastassuuruste paarina sooja- ja külma- kraadid; inimese kehakaalu kõikumine alla- ja ülespoole normaalkaalust annab vastassuuruste paarina alakaalu ja ülekaalu.

Et vastassuuruste paar tekib mingi suuruse kõikumisest kahele poole oma mingist kindlast väärtusest, siis nime-

tame vastassuuruste paari suurusi ka poolsusega suursteks.

### Ülesanded.

Allpool on nimetatud rida poolsusega suurusi. Nimetada igaihe vastassuurus.

184. Sissetulek	184. Kõrgus üle merepinna
Võit	Geograafiline lõunalaius
Alla normi	Kellaaeg e. l.
Juurdekasv	Geograafiline idapikkus
Aastaarv e. m. a. a.	Temperatuur alla nulli

### § 28. Positiivsed ja negatiivsed arvud.

Olgu kassas mingi rahasumma. Kui sellele lisanduks  $b$  kop., siis oleks kassas endisest summast  $b$  kopikat enam; kui kassas olevast rahast tuleks ära anda  $c$  kop., siis oleks kassas endisest summast  $c$  kop. vähem. Sel põhjusel asendame edaspidi

kirjutise:	kirjutisega:
sissetulek $b$ kopikat	$+b$ kop.
väljaminek $c$ kopikat	$-c$ kop.
juurdehindlus $m$ rubla	$+m$ rubla
mahahindlus $n$ rubla	$-n$ rubla
sooja $p$ kraadi	$+p$ kraadi
külma $q$ kraadi	$-q$ kraadi

Neis kirjutisis märk pluss asendab meil sõnu: sissetulek, juurdehindlus, sooja; märk miinus aga sõnu: väljaminek, mahahindlus, külma. Järelikult  $+$  ja  $-$  ei ole siin tehtemärgid, nagu tavaliselt, vaid suuruse poolsusemärgid.

Me ütleme, et sümbolid nagu

$$-8, \quad -3\frac{3}{5}, \quad -12,7$$

kujutavad negatiivseid arve.

Eristamise otstarbel nimetame meile seni tuntud loomulikke arve positiivseteks arvudeks. Kui kirjutises tahame positiivsete ja negatiivsete arvude eristamist rõhutada, siis varustame positiivsed arvud märgiga pluss ja kirjutame

$$+5, \quad +7\frac{1}{2}, \quad +11,4.$$

Kui erilist vajadust ei ole arvu poolsuse rõhutamiseks, siis jäetakse märk positiivse arvu ette kirjutamata.

Kui positiivse või negatiivse arvu kirjutises jätame ära tema märgi, siis saame selle arvu absoluutväärtuse.

Näiteks arvu  $+7\frac{1}{2}$  absoluutväärtus on  $7\frac{1}{2}$ ,

„  $-3,8$  „ „  $3,8$ .

Lühemalt kirjutame viimaseid sõnastusi nii:

$$|+7\frac{1}{2}| = 7\frac{1}{2},$$

$$|-3,8| = 3,8.$$

Ühe ja sama absoluutväärtusega positiivseid ja negatiivseid arve nimetame teineteise vastasaruudeks.

Nii on näiteks arvu  $+3$  vastasaruuks  $-3$ .

Positiivseid ja negatiivseid arve nimetame ühise nimetusega relatiivseteks arvudeks.

Relatiivse arvu absoluutväärtust võime nüüd seletada järgmiselt:

positiivse arvu absoluutväärtus võrdub selle arvu endaga; negatiivse arvu absoluutväärtus võrdub selle arvu vastasaruuga.

Kui võimaliku volestimõistmise pärast on vaja näidata, et märgid  $+$  ja  $-$  on arvu poolsusemärgid, mitte tehtmärgid, siis võetakse sümbolid

$$+b \quad -c \quad +m \quad -n \quad +p \quad -q$$

sulgudesse:

$$(+b) \quad (-c) \quad (+m) \quad (-n) \quad (+p) \quad (-q).$$

Sulgudega kirjutusviisi kasutame igal juhul, kui märgid pluss ja miinus esinevad kõrvuti tehtmärgina ja poolsusemärgina. Näiteks kirjutises

$$-7 + (+3) + (-2) - (+5) - (-1)$$

teine ja neljas pluss ning esimene, teine ja viies miinus on poolsusemärgid; seevastu esimene ja kolmas pluss ning kolmas ja neljas miinus on tehtmärgid.

#### Ülesanded.

Kirjutada järgmised suurused matemaatiliste sümbolitega:

- |   |   |
|---|---|
| <p>185. Kaks kraadi sooja<br/>Kolmsada meetrit<br/>üle merepinna<br/>Sada rubla sissetulekut<br/><br/>Kümnerublane võit<br/>Aasta 47 e. m. a. a.</p>                        | <p>185. Viis kraadi külma<br/>Nelikümmend meetrit<br/>allpool merepinda<br/>Viis rubla väljaminekut<br/><br/>Üheksarublane kaotus<br/>Aasta 1938 p. m. a. a.</p>      |
| <p>186. Kolmeprotsendiline<br/>juurdekasv<br/>Seitseteist rubla maha-<br/>hindlust<br/>Kaks tundi enne kesk-<br/>ööd<br/>Põhjalaius 60 kraadi<br/>Läänepikkus 27 kraadi</p> | <p>186. Kaheprotsendiline kadu<br/><br/>Kaksteist rubla juurde-<br/>hindlust<br/>Viis tundi pärast kesk-<br/>ööd<br/>Lõunalaius 20 kraadi<br/>Idapikkus 13 kraadi</p> |

## § 29. Relatiivsete arvude järjestus suuruse järgi.

Ülesanne. Laskevõistlusel saavutas

- õpilane Karu 15 punkti alla klassi keskmist,  
 „ Mänd 4 punkti üle klassi keskmise,  
 „ Väli klassi keskmise,  
 „ Susi 18 punkti üle klassi keskmise,  
 „ Kask 7 punkti alla klassi keskmist.

Järjestada need õpilased nende laskeosavuse paremuse järgi.

Lahendus. On selge, et kasvava paremuse järjekord on see:

Karu	Kask	Väli	Mänd	Susi
15 p. alla keskmist	7 p. alla keskmist	ei üle ega alla keskmist	4 p. üle keskmise	18 p. üle keskmise

Märgime Välja taseme, mille suhtes punktid on loetud üle ja alla olevateks, sümboliga 0. Tarvitame alla-keskmise sümboliks märki —, üle-keskmise sümboliks märki +. Siis saame kõnesolevad võistlustulemused kirjutada lühidalt kujul:

Karu	Mänd	Väli	Susi	Kask
—15	+4	0	+18	—7

või, järjestatult kasvava paremuse järgi:

Karu	Kask	Väli	Mänd	Susi
—15	—7	0	+4	+18.

Seega tuleb pidada kehtivaks võrratuste rida:

$$-15 < -7 < 0 < +4 < +18.$$

Üldistades eelmist mõttekäiku ütleme nõnda:

iga negatiivne arv on väiksem igast positiivsest; kahest positiivsest arvust on see suurem, millel on suurem absoluutväärtus; kahest negatiivsest arvust on see suurem, millel on väiksem absoluutväärtus; null on suurem igast negatiivsest arvust ja väiksem igast positiivsest arvust.

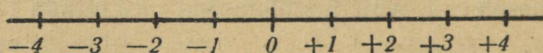
Ülesanded.

Järjestada allantud arvud nende suuruse järgi, alates kõige väiksemaga:

187.  $+4; +7; 0; +12; +1; +0,5; +9\frac{1}{2}; +14; +2; +20$   
187.  $-12; -15; -7; -8; -9; 0; -1; -4,6; -14,2;$   
 $-11$   
188.  $+4; -5; +6; -7; -8; +15; -3,7; +2; +3,6;$   
 $-11$   
188.  $0; 4; 6; -18; -4\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -2; -1,5; -3,7$

### § 30. Relatiivsete arvude astmik.

Eriti ülevaatliku pildi suuruse järgi järjestatud positiivsetest ja negatiivsetest arvudest saame järgmisel viisil võtame arvtelje (joonis 12), valime sellel mingi punkti



Joonis 12.

nullpunktiks ning sellest punktist lähtudes kanname teljele kujutusühiku 1, 2, 3, ... korda nii paremale kui ka vasakule poole. Saadud lõikude lõpud märgime kriipsukestega ja kirjutame nende juurde  $+1, +2, +3, \dots$  nullist paremale poole liikudes ja  $-1, -2, -3, \dots$  nullist vasakule poole liikudes. Nii saame relatiivsete arvude skaala ehk astmiku. Seda astmikku vaadeldes näeme, et arvude suu-

rem-väiksem-olemise tunnust võime nüüd sõnastada lühidalt nii:

kahest arvust on see suurem, millele vastav kriips astmikul asetseb teise omast paremal pool.

Positiivsete ja negatiivsete arvude astmiku tuntuimaks näiteks on termomeetri skaala. See seisab harilikult püsti. Kahest temperatuurist on see kõrgem, millele vastav kriips termomeetri skaalal asetseb kõrgemal.

**Ülesanded.**

Kujutada järgmised arvud arvteljel:

189.  $-10$ ;  $-8$ ;  $-6$ ;  $-4$ ;  $-2$ ;  $0$ ;  $+2$ ;  $+4$   
189.  $+0,4$ ;  $+0,3$ ;  $+0,2$ ;  $+0,1$ ;  $-0,1$ ;  $-0,2$ ;  $-0,3$   
190.  $+5$ ;  $-2$ ;  $-1$ ;  $+3$ ;  $+2,5$ ;  $-0,5$ ;  $-4$ ;  $-5$   
190.  $+2,5$ ;  $+2$ ;  $+1,5$ ;  $+1$ ;  $+0,5$ ;  $-0,5$ ;  $-1$ ;  $-1,5$

### § 31. Relatiivsete arvude liitmine.

**Ülesanne.** Mängitakse õnnemängu. Esimene voor lõppes võiduga 9 punkti ja selle võiduga liitus teises voorus võit 4 punkti. Kui suur on kogu võit?

**Lahendus.** On selge, et kogu võit on  $9 + 4$  ehk 13 punkti: võit 9 punkti koos võiduga 4 punkti on sama, mis võit 13 punkti.

Samal viisil võiksime kirjutada, et võit 9 punkti koos kaotusega 4 punkti on sama, mis võit 5 punkti, ja edasi, et kaotus 9 punkti koos võiduga 4 punkti on sama, mis kaotus 5 punkti, ning lõpuks, et kaotus 9 punkti koos kaotusega 4 punkti on sama, mis kaotus 13 punkti.

Kirjutades need laused matemaatilises lühikirjas saame:

$$(+9) + (+4) = (+13)$$

$$(+9) + (-4) = (+5)$$

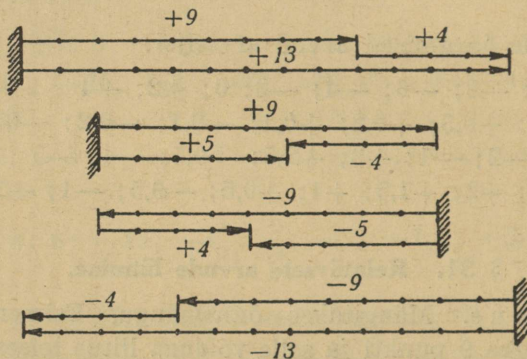
$$(-9) + (+4) = (-5)$$

$$(-9) + (-4) = (-13).$$

Jättes mitte-hädavajalikud sulud lühiduse mõttes ära, kirjutame ülaltoodud summade veeru nii:

$$\begin{aligned}
 +9 + (+4) &= +13 \\
 +9 + (-4) &= +5 \\
 -9 + (+4) &= -5 \\
 -9 + (-4) &= -13.
 \end{aligned}$$

Kujutades andmed suunaga löikudena, võiksime need tulemused ka kohe jooniselt ära lugeda (joonis 13).



Joonis 13.

Andmete päritolu arvestamata sõnastame tulemuse üldkujul nõnda:

kahe sama märgiga arvu summal on sama märk, mis liidetavailgi; tema absoluutväärtus on liidetavate absoluutväärtuste summa;

kahe erineva märgiga arvu summal on selle liidetava märk, millel on suurem absoluutväärtus; tema absoluutväärtus on liidetavate absoluutväärtuste vahe.

Sooritates arvude liitmist graafiliselt joonisel 13 näeme, et kirjutis

$$\begin{aligned}
 +9 + (+4) &\text{ tähendab sedasama, mis } 9 + 4 \\
 +9 + (-4) &\text{ „ „ „ } 9 - 4 \\
 -9 + (+4) &\text{ „ „ „ } -9 + 4 \\
 -9 + (-4) &\text{ „ „ „ } -9 - 4
 \end{aligned}$$

ehk üldiselt:

$$a + (+b) = a + b$$

$$a + (-b) = a - b.$$

Seega liitmisel

märkide paar  $+$  ( $+$ ) asendub ainsa märgiga  $+$ ,

„ „  $+$  ( $-$ ) „ „ „  $-$ .

Näited.

1.  $+19 + (+7) = +19 + 7 = +26.$

2.  $-31 + (-9) = -31 - 9 = -40.$

3.  $-4x + (-13x) = -4x - 13x = -17x.$

Ülesanded.

Arvutada järgmised summad:

191.  $+3 + (+5)$

$$+4 + (+3)$$

$$+7 + (+2)$$

$$+13 + (+6)$$

$$+8 + 0$$

191.  $-2 + (-5)$

$$-7 + (-4)$$

$$-1 + (-5)$$

$$-2 + (-7)$$

$$-11 + (-1)$$

192.  $+5 + (-9)$

$$+7 + (-7)$$

$$-10 + (+3)$$

$$-10 + (+12)$$

$$-12 + (-8)$$

192.  $+3 + (-4)$

$$-1 + (-5)$$

$$+3 + (-7)$$

$$-2 + (+5)$$

$$0 + (-6)$$

193.  $-2\frac{1}{5} + (-3\frac{1}{3})$

$$+6\frac{3}{10} + (-5\frac{4}{5})$$

$$+7\frac{5}{12} + (-2\frac{1}{8})$$

$$-\frac{9}{80} + (+\frac{9}{80})$$

$$-\frac{19}{120} + (+\frac{47}{150})$$

193.  $-5\frac{3}{4} + (-8\frac{5}{6})$

$$-2\frac{1}{8} + (+4\frac{7}{12})$$

$$+5\frac{2}{5} + (+3\frac{2}{3})$$

$$+\frac{5}{782} + (-\frac{5}{782})$$

$$-\frac{5}{66} + 0$$

Määrata järgmiste avaldiste väärtused:

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| 194. $-23,81 + (+14,75)$ | 194. $-9345 + (-6583)$    |
| $+7,49 + (-6,23)$        | $+534 + (+1765)$          |
| $+15,87 + (+18,34)$      | $+643 + (-379)$           |
| $-5,62 + (-1,96)$        | $-3194 + (+2439)$         |
| $-53,14 + (-13,67)$      | $-645 + (-1237)$          |
| 195. $-14 + (-8) + (+2)$ | 195. $-18 + (-12) + (-4)$ |
| $+7 + (+9) + (-4)$       | $+8 + (+10) + (-3)$       |
| $+15 + (-18) + (+3)$     | $+14 + (-19) + (+2)$      |
| $-23 + (-42) + (-17)$    | $-24 + (-46) + (+18)$     |
| $-19 + (+21) + (-50)$    | $-20 + (+22) + (-37)$     |

### § 32. Relatiivsete arvude lahutamine.

Ülesanne. Maapinnal näitab termomeeter  $+13^{\circ}$ , lennukil õhus aga  $+4^{\circ}$ . Kui suur on esimese ja teise temperatuuri vahe?

Lahendus. Otsitav vahe on

$$+13 - (+4)$$

kraadi. Küsimus nõuab niisuguse arvu  $x$  leidmist, mis  $+4$ -ga liites annaks  $+13$ :

$$+4 + x = +13.$$

Proovimise teel leiame, et otsitavaks arvuks on  $+9$ ; tõepoolest  $+4 + (+9) = +13$ . Seega:

$$+13 - (+4) = +9.$$

Samale tulemusele jõuame eriti kergelt, kui vaatleme termomeetri skaalat (joonis 14); tõepoolest

$$+13 - (+4) = +9.$$

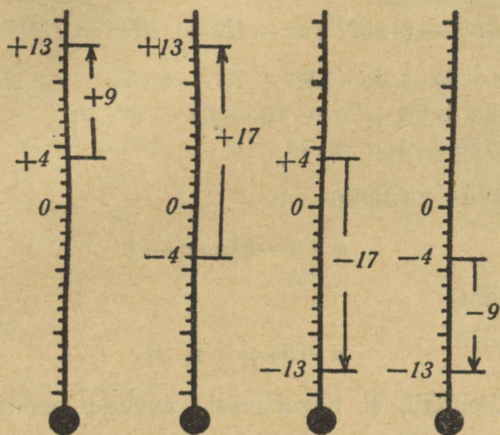
Analoogiliselt leiame termomeetri skaalal, et

$$+13 - (-4) = +17,$$

ja edasi, et

$$-13 - (+4) = -17,$$

$$-13 - (-4) = -9.$$



Joonis 14.

Sooritades arvude lahutamist näeme, et kirjutis

$$+13 - (+4) \text{ tähendab sedasama, mis } 13 - 4$$

$$+13 - (-4) \quad , \quad , \quad , \quad 13 + 4$$

$$-13 - (+4) \quad , \quad , \quad , \quad -13 - 4$$

$$-13 - (-4) \quad , \quad , \quad , \quad -13 + 4$$

ehk üldiselt:

$$a - (+b) = a - b$$

$$a - (-b) = a + b.$$

Seega lahutamisel

märkide paar  $- (+)$  asendub ainsa märgiga  $-$ ,

” ”  $- (-)$  ” ” ”  $+$ .

Näited.

1.  $+25 - (+17) = 25 - 17 = +8$
2.  $-31 - (-16) = -31 + 16 = -15$
3.  $-4 + 7 - 2 - 3 + 8 = 7 + 8 - 4 - 2 - 3 = 15 - 9 = 6$
4.  $-4N^2 - (-5N^2) = -4N^2 + 5N^2 = N^2$
5.  $3a + 5a - 4a - 3a + 7a - 9a = 3a + 5a + 7a - 4a - 3a - 9a = 15a - 16a = -a$

Vahetades võrduses

$$a + (-b) = a - b$$

pooled, saame

$$a - b = a + (-b).$$

See tähendab, et negatiivsete arvude kasutamisele võtmisel

arvu lahutamist saab ikka asendada tema vastasarvu liitmisega, teiste sõnadega,

iga vahet võib vaadelda summana.

See tõsiasi võimaldab tunduvat kokkuhoidu lausete sõnastusis, sest kaob vajadus summa ja vahe juhu eristamiseks.

Kõiki hulkkliikmeid vaatleme edaspidi summadena; esinevaid märke pluss ja miinus loeme liikmete juurde kuuluvaiks.

Selle kokkuleppe põhjal on hulkkliikmes

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 7$$

liikmeiks (liidetavaiks) avaldised

$$+x^3 \quad -5x^2 \quad +6x \quad -7.$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised vahed:

$$196. \quad \begin{aligned} &+5 - (+2) \\ &+3 - (+1) \\ &+7 - 0 \\ &+8 - (-1) \\ &+10 - (-3) \end{aligned}$$

$$196. \quad \begin{aligned} &-3 - (+3) \\ &-7 - (+2) \\ &-1 - (-3) \\ &-2 - (-7) \\ &-11 - (-5) \end{aligned}$$

$$197. \quad \begin{aligned} &+12 - (-7) \\ &+8 - (-11) \\ &-12 - (-12) \\ &-10 - (+6) \\ &+12 - (+4) \end{aligned}$$

$$197. \quad \begin{aligned} &+3 - (-4) \\ &-1 - (-6) \\ &+3 - (-7) \\ &-2 - (+5) \\ &0 - (-2) \end{aligned}$$

$$198. \quad \begin{aligned} &-\frac{2}{3} - 0 \\ &-3\frac{7}{8} - \left(-1\frac{1}{2}\right) \\ &+5\frac{7}{8} - \left(-\frac{2}{3}\right) \\ &-8\frac{1}{2} - \left(+3\frac{2}{5}\right) \\ &-3\frac{47}{150} - \left(+\frac{19}{120}\right) \end{aligned}$$

$$198. \quad \begin{aligned} &-4\frac{1}{5} - \left(-3\frac{1}{3}\right) \\ &-2\frac{7}{10} - \left(+8\frac{3}{5}\right) \\ &+9\frac{1}{12} - \left(+2\frac{1}{8}\right) \\ &-\frac{196}{485} - \left(-\frac{196}{485}\right) \\ &0 - 0 \end{aligned}$$

Määrata järgmiste avaldiste väärtused:

$$199. \quad \begin{aligned} &2 - 5 - 1 + 4 - 8 + 0 \\ &-3 + 3 + 5 - 7 - 1 - 9 \\ &0 - 4 + 9 - 17 - 3 + 8 \\ &7 - 13 - 5 - 1 + 20 + 1 \\ &-2 + 8 - 10 - 11 + 7 + 2 \end{aligned}$$

$$199. \quad \begin{aligned} &-8 - 4 + 15 + 6 - 11 - 4 \\ &10 + 1 - 15 - 8 + 10 + 7 \\ &-5 + 15 + 2 - 13 + 8 + 10 \\ &-11 + 15 + 9 - 2 - 3 - 4 \\ &3 - 10 - 6 + 11 + 7 - 8 \end{aligned}$$

Koondada järgmised avaldised:

<p>200. <math>2x - x + 4x</math>  <math>-3x + 6x - x</math>  <math>7y - 8y - y</math>  <math>3 + y - 9y</math>  <math>z - 12z + 5z</math></p>	<p>200. <math>w + 14w - 15</math>  <math>-8 + 7w - 3w</math>  <math>1,5p - 2,9p + 3,7p</math>  <math>p - 8,9p + 4,5p</math>  <math>-q + 4,7q - 1,6q</math></p>
<p>201. <math>z - z - 3z</math>  <math>0 - 5u - 4u + 9u</math>  <math>-u - 13u + 11u</math>  <math>8v + 5v - 17v</math>  <math>4 - 7v + 3v</math></p>	<p>201. <math>+2,1q - 9,5q - 7,5q</math>  <math>-4 + 3m - 7u - 5m + 8u</math>  <math>h + 15k - 9k - 22k + 14h</math>  <math>7s - t - 8s + 3t - 10</math>  <math>x + 2y + 3z - 3x - 2y - x</math></p>

202.  $2x - 3x + 7x - 4y + y$   
 $x - 9x + 12x + 11y - 5y$   
 $4x - 3x + 1,5x + 2z - 2z$   
 $1,6x - 0,8x + z + 3,7z - 6,4z$   
 $3x - 2x - x - z - 3z + 4z$

202.  $13a - 5a - 13a + b$   
 $11a - 7a - 11a + 2b$   
 $11x - 7x - 4x + a$   
 $7x - 11\frac{2}{3}x + 3\frac{1}{2}x - 2\frac{5}{6}x + y$   
 $-0,27c + 0,23c + 0,4d - 0,3d$

Määrata järgmiste avaldiste väärtused:

<p>203. <math>+7631 - (+898)</math>  <math>+4925 - (-2163)</math>  <math>-310 - (+1934)</math>  <math>-9999 - (+4837)</math>  <math>-1846 - (-879)</math></p>	<p>203. <math>+16,23 - (+12,73)</math>  <math>+45,6 - (-14,51)</math>  <math>-23,00 - (-13,87)</math>  <math>-74,8 - (+17,16)</math>  <math>+56,69 - (+9,81)</math></p>
---	---

$$\begin{aligned}
 204. \quad & +5 - (+3) + (-8) \\
 & +5 - (-3) + (+7) \\
 & -2 - 0 + (-6) \\
 & +7 + 0 - (-8) \\
 & -11 - (+9) + (+4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 204. \quad & +12 - (-7) + (+2) \\
 & -10 + (-6) - (+4) \\
 & 0 - (+8) - (-7) \\
 & 0 - (+5) + (-19) \\
 & +12 + (-7) - (-2)
 \end{aligned}$$

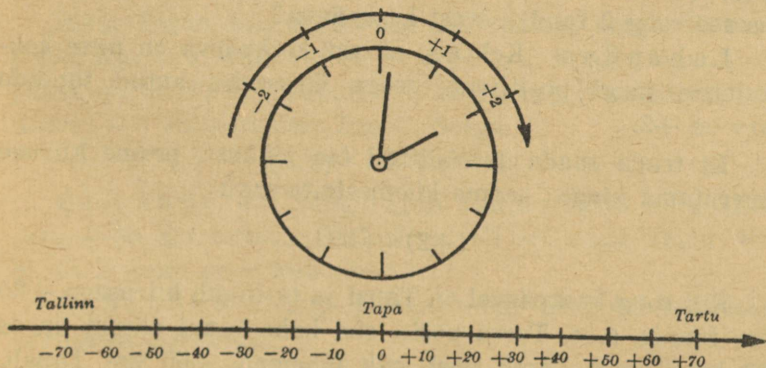
Lahendada järgmised võrrandid:

$$\begin{aligned}
 205. \quad & x + (+3) = +7 \\
 & y - (-5) = -12 \\
 & z - (-7) = +3 \\
 & u + (-1) = -14 \\
 & v + (+13) = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 205. \quad & t + (-4) = 0 \\
 & H - (+16) = -11 \\
 & I + (-5) = -5 \\
 & K + (-19) = +19 \\
 & N - (+8) = +8
 \end{aligned}$$

### § 33. Relatiivsete arvude korrutamine.

Aja mõõtmisel lepitakse kokku selle ajamomendi suhtes, millest hakatakse aegu lugema; nimetame säärase momendi



Joonis 15.

aja nullpunktiks. Ajalooliseks aja nullpunktiks on meie ajaarvamise algus. Aegu ühe öö-päeva ulatuses mõõtes on ots'arbekohane võtta aja nullpunktiks kas kesköö või kesk-päeva moment. Allpool on võetud nullpunktiks keskpäev.

Ajad enne ja pärast aja nullpunkti moodustavad vastassuuruste paari. Lepime kokku, et ajavahemikud enne aja nullpunkti on negatiivsed ja pärast aja nullpunkti — positiivsed.

Vaatleme rongi liikumist näiteks Tallinn-Tartu liinil. Võtame rongi liikumisel ärasõidetud kilomeetrite arvutamisel nullpunktiks Tallinna ja Tartu vahel asetseva Tapa jaama. Loeme liikumise suuna Tallinnast Tartu poole positiivseks, vastassuuna — negatiivseks. Kui meile nüüd öeldakse, et rong liigub kiirusega —50 kilomeetrit tunnis, siis on meil teada, et rong liigub 50-kilomeetrise tunnikiirusega Tartust Tallinna poole. Või kui meile öeldakse, et rong on Tapalt +70 km eemal, siis mõistame seda nii, et rong on Tapalt 70 km Tartu pool.

Ülesanne 1. Rong liigub Tallinn-Tartu liinil kiirusega +30 kilomeetrit tunnis. Keskpäeval on ta Tapal. Kus on see rong 2 tundi pärast keskpäeva?

Lahendus. Kellaaeg pärast keskpäeva on meie kokkuleppe järgi positiivne, seega ülesandes antud tundide arv on +2.

Et teada saada ärasõidetud tee pikkust, peame kiiruse korrutama ajaga; saame kilomeetrite arvu

$$(+2) \cdot (+30).$$

Kui rong keskpäeval on Tapal ja ta liigub kiirusega +30 km tunnis, s. o. Tartu poole, siis kahe tunni pärast on ta 60 km Tapalt Tartu pool, ehk lühemalt +60 km Tapalt. Seega

$$(+2) \cdot (+30) = +60.$$

Ülesanne 2. Rong liigub Tallinn-Tartu liinil kiirusega +30 km tunnis. Keskpäeval oli ta Tapal. Kus oli see rong 2 tundi enne keskpäeva?

Lahendus. Meie kokkuleppe põhjal on nüüd ülesandes antud tundide arv —2. Ärasõidetud tee pikkuse saamiseks peame leidma korrutise

$$(-2) \cdot (+30).$$

Kui rong liigub kiirusega +30 km tunnis, seega Tartu poole, ja keskpäeval oli ta Tapal, siis ta pidi olema 2 tundi enne keskpäeva Tapalt Tallinna pool, ja nimelt 60 km kaugusel Tapalt, teisiti öeldes —60 km Tapalt.

Seega

$$(-2) \cdot (+30) = -60.$$

Ülesanne 3. Rong liigub Tallinn-Tartu liinil kiirusega —30 km tunnis. Keskpäeval on rong Tapal. Kus on see rong 2 tundi pärast keskpäeva?

Lahendus. Rongi asukoha määramiseks peame nüüd arvutama korrutise

$$(+2) \cdot (-30).$$

Rong liigub kiirusega —30 km tunnis, seega Tallinna poole. Kui ta keskpäeval oli Tapal, siis 2 tundi pärast keskpäeva on ta 60 km Tapalt Tallinna pool, lühemalt väljendades —60 km kaugusel Tapalt. Seega

$$(+2) \cdot (-30) = -60.$$

Ülesanne 4. Rong liigub Tallinn-Tartu liinil kiirusega —30 km tunnis. Keskpäeval oli see rong Tapal. Kus oli ta 2 tundi enne keskpäeva?

Lahendus. Nüüd peame rongi asukoha leidmiseks arvutama korrutise

$$(-2) \cdot (-30).$$

Rong liigub nüüd Tartu-Tallinna suunas. Kui ta keskpäeval oli Tapal, siis kaks tundi enne keskpäeva pidi ta olema 60 km Tapalt Tartu pool, lühemalt öeldes +60 km Tapalt, seega

$$(-2) \cdot (-30) = +60.$$

Jättes kõrvale andmete päritolu, mõistame edaspidi alati

$$\begin{array}{ll} \text{korrutist } (+2) \cdot (+30) & \text{arvuna } +60; \\ \text{,, } (-2) \cdot (+30) & \text{,, } -60; \\ \text{,, } (+2) \cdot (-30) & \text{,, } -60; \\ \text{,, } (-2) \cdot (-30) & \text{,, } +60. \end{array}$$

Üldiselt sõnastame relatiivsete arvude korrutamise juhise nii:

kahe arvu korrutis on positiivne, kui tegurid on ühe ja sama märgiga; kahe arvu korrutis on negatiivne, kui tegurid on erinevate märkidega;

korrutise absoluutväärtus võrdub tegurite absoluutväärtuste korrutisega.

Relatiivsete arvude korrutise märkimisel asetame tegurid alati sulgudesse. Korrutamise tulemuse kirjutises jätame sulud ära.

N ä i t e d.

1.  $(-2) \cdot (-10\frac{1}{2}) = +2 \cdot \frac{21}{2} = +21.$
2.  $(+0,05) \cdot (-7,2) = -0,36.$
3.  $(-a) \cdot (+a^2) = -a^3.$
4.  $(-b) \cdot (+2b) \cdot (-4b^2) \cdot (-b^3) =$   
 $= -(b \cdot 2b \cdot 4b^2 \cdot b^3) = -8b^7.$

Ülesanded.

Arvutada järgmised korrutised:

206.	$(+3) \cdot (+2)$	206.	$(-4) \cdot (-6)$
	$(-3) \cdot (-4)$		$(+2) \cdot (+5)$
	$(+5) \cdot (-2)$		$(-7) \cdot (-1)$
	$(+7) \cdot 0$		$(+3) \cdot (-9)$
	$(+1) \cdot (+8)$		$(-3) \cdot (-3)$

$$\begin{aligned}
207. \quad & (+3) \cdot (-5) \\
& 0 \cdot (-7) \\
& (+4) \cdot (+2) \\
& (+5) \cdot (-4) \\
& (+7) \cdot (-8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
207. \quad & (-8) \cdot (-9) \\
& (+5) \cdot (-7) \\
& (+7) \cdot (+7) \\
& (-11) \cdot (-4) \\
& (-8) \cdot (-8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
208. \quad & (-9) \cdot \left(+\frac{2}{3}\right) \\
& \left(-\frac{5}{6}\right) \cdot (-12) \\
& \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-1\frac{2}{3}\right) \\
& \left(-2\frac{1}{3}\right) \cdot \left(+\frac{6}{7}\right) \\
& \left(-1\frac{1}{100}\right) \cdot \left(+1\frac{1}{10}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
208. \quad & 0 \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) \\
& (-4) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \\
& \left(-\frac{2}{7}\right) \cdot (+14) \\
& \left(+2\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \\
& \left(-\frac{16}{21}\right) \cdot \left(-\frac{35}{64}\right)
\end{aligned}$$

Määrata järgmiste avaldiste väärtused:

$$\begin{aligned}
209. \quad & (+2) \cdot (+3) \cdot (-4) \\
& (+3) \cdot (-5) \cdot (-1) \\
& (-3) \cdot (-4) \cdot (-5) \\
& (-7) \cdot (-2) \cdot (-3) \\
& (-2) \cdot (+4) \cdot (+9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
209. \quad & -5 \cdot (-7) \cdot 8 \\
& -10 \cdot (-8) \cdot 4 \\
& 5 \cdot (-6) \cdot 0 \\
& -4 \cdot 8 \cdot (-7) \\
& -9 \cdot 0 \cdot (-15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
210. \quad & \left(-\frac{1}{2}\right) (-2) (-1) \\
& (-3) (+4) (-1) \\
& (-1) (-1) (-1) (-1) \\
& (+2) (+2) (-2) \\
& (-1) (-1) (-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
210. \quad & (-2) (-2) (-2) \\
& \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) (-4) \\
& (-5) (-2) (-1) \cdot 0 \\
& (-15) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2) \\
& \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6) (-2)
\end{aligned}$$

211.	$\left(+\frac{3}{5}\right)(-10)\left(-\frac{1}{10}\right)$ $(-2) \cdot 0,5 \cdot (-1)$ $(-3) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-2) \cdot (-1)$ $(-5)(-1)(+1)(-1)$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (-8)(-1)$	211.	$(-3)\left(-\frac{1}{3}\right)(-4)$ $0,01(-0,1)(-1)$ $(-3)(+6)\left(-\frac{1}{6}\right)(-2)$ $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 6a$ $\frac{1}{3} \cdot (-6)(-2y)$
------	---	------	---

### § 34. Relatiivsete arvude astendamise.

Eelmises paragrahvis leitud korrutamiseeskirju rakendame ka astendamisel.

Näited.

$$(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = +81$$

$$(+7)^2 = (+7) \cdot (+7) = +49$$

$$(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = (+25) \cdot (+5) = +125$$

$$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = (+16) \cdot (-4) = -64$$

$$(+a)^2 = +a^2 \qquad (-a)^2 = +a^2$$

$$(+a)^3 = +a^3 \qquad (-a)^3 = -a^3$$

Eriti leiame, et

$$(-1)^2 = +1 \qquad (-1)^3 = -1$$

$$(-1)^4 = +1 \qquad (-1)^5 = -1$$

ja üldiselt, et

$$(-1)^{2n} = +1 \qquad (-1)^{2n-1} = -1.$$

Samuti leiame, et iga astendaja  $n$  puhul on

$$(+a)^n = a^n$$

ja

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}.$$

Näeme, et

positiivse arvu aste on alati positiivne; negatiivse arvu paarisarvulise astendajaga aste on positiivne; negatiivse arvu paarituarvulise astendajaga aste on negatiivne.

Märkus. Paneme tähele, et  $-2^2 = -4$ , mitte aga  $+4$ , sest  $-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$ .

Ülesanded.

Arvutada järgmised astmed:

- |      |                     |      |                      |      |                     |      |                     |
|------|---------------------|------|----------------------|------|---------------------|------|---------------------|
| 212. | $(+11)^4$           | 212. | $(-6)^5$             | 213. | $(+10)^1$           | 213. | $(-1)^6$            |
|      | $(-38)^2$           |      | $(-1)^7$             |      | $(-13)^3$           |      | $(+1)^{10}$         |
|      | $(-0,7)^4$          |      | $(+1,3)^3$           |      | $(-0,5)^4$          |      | $(-1,1)^5$          |
|      | $(+3\frac{1}{3})^2$ |      | $(-\frac{4}{9})^3$   |      | $(+1\frac{1}{6})^4$ |      | $(-7\frac{1}{3})^3$ |
|      | $(-1\frac{3}{4})^3$ |      | $(+\frac{11}{12})^2$ |      | $(-2\frac{2}{3})^2$ |      | $(+4\frac{1}{2})^3$ |
| 214. | $(-3)^2$            | 214. | $(-8)^2$             | 215. | $(-0,9)^2$          | 215. | $(-1,1)^2$          |
|      | $(-4)^3$            |      | $(+5)^3$             |      | $(-1,3)^2$          |      | $(+0,11)^2$         |
|      | $(+6)^2$            |      | $(-10)^1$            |      | $(+0,2)^4$          |      | $(-2,1)^3$          |
|      | $(-7)^3$            |      | $(-4)^5$             |      | $(-3,5)^2$          |      | $(+2,01)^2$         |
|      | $(-1)^4$            |      | $0^6$                |      | $(-4,1)^2$          |      | $(-5,2)^2$          |

Arvutada järgmised avaldised:

- |      |   |      |  |
|------|---|------|--|
| 216. | $(-2)^3 \cdot 3^2$                          | 216. | $0,07^4 \cdot 10^2$                        |
|      | $4^3 \cdot 10^5$                            |      | $(-0,1)^7 \cdot 8^5$                       |
|      | $(-2)^{10} \cdot 10^4$                      |      | $0,3^4 \cdot 0,4^3$                        |
|      | $(-\frac{1}{2})^5 \cdot 8^2$                |      | $(-3\frac{1}{3})^4 \cdot (4\frac{1}{2})^3$ |
|      | $-3^2$                                      |      | $-(2\frac{1}{2})^2$                        |
| 217. | $(-3)^2 - (-2)^3 + (-1)^{10}$               |      |  |
|      | $5^2 + (-8)^2 - (-1)^9$                     |      |  |
|      | $-3^2 - 2^3 + (-4)^3$                       |      |  |
|      | $-2 \cdot (-1)^3 + (-0,1)^3 \cdot 3$        |      |  |
|      | $(-5)^2 \cdot 4^2 - (0,2)^2 \cdot (-0,3)^2$ |      |  |

$$\begin{aligned}
217. \quad & \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot (-3)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \\
& 0,02^3 \cdot (-10)^3 - (-10)^4 \\
& \left(2\frac{1}{2}\right)^3 - \left(3\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-2\frac{1}{4}\right)^2 \\
& 7^{10} \cdot 0 - (-5)^9 \cdot 0 \\
& 0,5^3 + 0,25^2 - 0,75^2
\end{aligned}$$

### § 35. Relatiivsete arvude jagamine.

Olgu  $a$  ja  $b$  kaks poolsusega arvu. Nende jagatisena mõistame niisugust arvu  $x$ , mis korrutamisel arvuga  $b$  annab arvu  $a$ , teiste sõnadega arvu  $x$ , mille puhul

$$b \cdot x = a.$$

Arvu  $x$  märgi peab valima nõnda, et korrutis  $bx$  saaks arvu  $a$  märgi: kui  $b$  ja  $a$  on ühe ja sama märgiga, peab  $x$  olema märgiga  $+$ , vastasel korral märgiga  $-$ .

Seega

jagatis on positiivne, kui jagatav ja jagaja on ühe ja sama märgiga; jagatis on negatiivne, kui jagatav ja jagaja on erinevate märkidega arvud;

jagatise absoluutväärtus on jagatava ja jagaja absoluutväärtuste jagatis.

Relatiivsete arvude jagatise märkimisel jagamismärgiga „:“ asetame jagatava ja jagaja alati sulgudesse; jagatise märkimisel murrujoone abil pole sulud vajalikud. Jagamise tulemuse kirjutises jätame sulud ära.

Näited.

$$(+35) : (+7) = +5$$

$$(+35) : (-7) = -5$$

$$(-35) : (+7) = -5$$

$$(-35) : (-7) = +5$$

$$\frac{-7}{+10} = -0,7$$

$$\frac{+3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{-12}{-28} = +\frac{3}{7}$$

Ülesanded.

Arvutada järgmised jagatised:

$$\begin{aligned}
 218. \quad & (+6) : (+3) \\
 & (+7) : (+1) \\
 & (+72) : (+9) \\
 & (+18) : (+6) \\
 & 0 : (+5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 218. \quad & (-4) : (+2) \\
 & (-12) : (+3) \\
 & (-18) : (+9) \\
 & (-20) : (-4) \\
 & (-48) : (-6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 219. \quad & (+63) : (-7) \\
 & (-1) : (-1) \\
 & (+24) : (-4) \\
 & (-12) : (+12) \\
 & (-49) : (+7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 219. \quad & (-81) : (-9) \\
 & 0 : (-7) \\
 & (+1) : (-1) \\
 & (-27) : (+3) \\
 & (-40) : (+5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 220. \quad & \left(-\frac{1}{6}\right) : \left(+\frac{3}{4}\right) \\
 & 0 : \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 & \left(-3\frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{5}{6}\right) \\
 & \left(-4\frac{6}{11}\right) : \left(+1\frac{7}{33}\right) \\
 & \left(+15\frac{7}{24}\right) : (-367)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 220. \quad & 0 : \left(+\frac{3}{4}\right) \\
 & (-28) : \left(+7\frac{3}{7}\right) \\
 & \left(-6\frac{4}{5}\right) : (-2) \\
 & \left(-5\frac{1}{6}\right) : \left(+4\frac{1}{9}\right) \\
 & \left(-100\frac{2}{3}\right) : \left(-21\frac{4}{7}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 221. \quad & \frac{+16}{-4} \\
 & \frac{-24}{+3} \\
 & \frac{-63}{-9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 221. \quad & \frac{+18}{-2} \\
 & \frac{-35}{-7} \\
 & \frac{-32}{-16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 222. \quad & \frac{-121}{11} \\
 & \frac{15}{-1} \\
 & \frac{-64}{-10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 222. \quad & \frac{72}{-8} \\
 & \frac{-100}{-25} \\
 & \frac{0}{15}
 \end{aligned}$$

223. Õhu temperatuur talvehommikul oli  $-12^{\circ}$  ning tõusis keskpäevaks  $4^{\circ}$  võrra. Kui kõrge oli temperatuur keskpäeval?

223. Öhtul oli temperatuur  $-15^{\circ}$  ning langes öö jook-  
sul  $5^{\circ}$  võrra. Milline oli temperatuur hommikul?

224. Inimese keha temperatuur on umbes  $+37^{\circ}$ . Kõige  
madalam temperatuur, mis looduses üldse võib olla, on  
 $-273^{\circ}$ .

Arvutada inimese keha temperatuuri ja madalaima tem-  
peratuuri vahe.

224. Elavhõbe tahkub temperatuuril  $-39^{\circ}$ , piiritus aga  
temperatuuril  $-112^{\circ}$ . Kui suur on elavhõbeda ja piirituse  
tahkumistemperatuuride vahe?

225. Kevadisel päeval mõõdeti temperatuuri iga tunni  
tagant ja saadi järgmised andmed:

$-4,5^{\circ}$ ;  $-3,2^{\circ}$ ;  $-1,2^{\circ}$ ;  $-0,4^{\circ}$ ;  $+0,1^{\circ}$ ;  $+1,2^{\circ}$ ;  $+1,6^{\circ}$ ;  $+1,4^{\circ}$ ;  
 $+0,8^{\circ}$ ;  $+0,2^{\circ}$ ;  $-0,4^{\circ}$ .

Arvutada selle päeva keskmine temperatuur.

225. Aprillikuu päevade keskmised temperatuurid olid  
ühel aastal järgmised:

$+2^{\circ}$ ;  $+2,6^{\circ}$ ;  $+2,5^{\circ}$ ;  $+3^{\circ}$ ;  $+4^{\circ}$ ;  $+0,7^{\circ}$ ;  $+2^{\circ}$ ;  $+1^{\circ}$ ;  $+4^{\circ}$ ;  
 $-2,2^{\circ}$ ;  $-4,5^{\circ}$ ;  $-4^{\circ}$ ;  $-3,4^{\circ}$ ;  $-2,1^{\circ}$ ;  $+3^{\circ}$ ;  $+1^{\circ}$ ;  $+1^{\circ}$ ;  $+1,9^{\circ}$ ;  
 $+0,9^{\circ}$ ;  $+0,1^{\circ}$ ;  $-0,5^{\circ}$ ;  $-0,8^{\circ}$ ;  $-1,2^{\circ}$ ;  $-2,4^{\circ}$ ;  $-1,7^{\circ}$ ;  $-0,2^{\circ}$ ;  
 $0^{\circ}$ ;  $+1,4^{\circ}$ ;  $+7^{\circ}$ ;  $+11^{\circ}$ .

Arvutada selle kuu keskmine temperatuur.

### § 36. Arvuvalla laiendamine negatiivsete arvudega.

Pole raske veenduda, et positiivsete arvude vallas keh-  
tivad arvutamise põhiseadused kehtivad ka positiivsete ja  
negatiivsete arvude vallas, kui mõista seal summat,  
vahet, korrutist ja jagatist nii, nagu neid eespool seletasime.

Õeldu põhjal võime vaadelda negatiivseid arve mitte  
mingi omaette arvuliigina, vaid positiivsete arvude valla  
loomuliku laiendina. Positiivsed ja negatiivsed arvud moo-  
dustavad koos relatiivsete arvude valla.

Arvuvalla laiendamine negatiivsete arvudega nähtub eriti piltlikult arvteljel. Positiivsed arvud asetsevad nullist ühel pool. Teine pool arvsirgest oli seni arvudest tühi, nüüd tulevad sinna negatiivsed arvud.

### § 37. Null.

Relatiivsete arvude valda kuuluvaks loeme ka arvu 0. Oma omadustelt erineb ta tunduvalt kõigist teistest arvudest. Leiame kõigepealt, et igasuguse arvu  $a$  puhul

$$\begin{aligned} a + 0 &= a & a - 0 &= a \\ 0 + a &= a & 0 - a &= -a. \end{aligned}$$

Olgu nüüd  $a$  mõni täisarv. Siis korrutamise definitsiooni järgi

$$a \cdot 0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{a \text{ liidetavat}}$$

ehk

$$a \cdot 0 = 0.$$

Siit järeldub, et

$$0 : a = 0.$$

Olgu  $a$  murdarv  $\frac{m}{n}$ . Võttes nullist ühe  $n$ -ndiku ja siis  $m$  niisugust näeme, et võrdus

$$a \cdot 0 = 0$$

jääb kehtima ka murdarvulise  $a$  puhul. Samuti jääb tehtud eeldusel kehtima võrdus

$$0 : a = 0.$$

Avaldisel  $0 \cdot a$  korrutamise definitsiooni järgi pole mõtet. Lepime kokku mõista selle sümboliga sedasama, mis sümboliga  $a \cdot 0$ . Siis oleks tegurite vahetuvuse seadus kehtiv ka nulli puhul ja oleks

$$0 \cdot a = 0.$$

Küsime lõpuks, mida tähendab sümbol

$$a : 0?$$

Jagamise definitsiooni järgi sümbol  $a : 0$  nõuab niisuguse arvu  $x$  leidmist, mis korrutamisel nulliga annaks arvu  $a$ . Niisugust arvu  $x$  aga ei leidu: tõepoolest, missuguse väärtuse ka annaksime  $x$ -le, ikka on

$$0 \cdot x = 0$$

ja mitte  $a$ , nagu nõutakse. Sellest järeldub, et sümbolil  $a : 0$  pole mõtet, ja seepärast

nulliga jagada ei saa.

### § 38. Ülesandeid kordamiseks.

Joonestada astmik ühikuga 20 mm ja kujutada sellel arvud

$$\begin{array}{cccccc} 226. & +2\frac{1}{2} & -1,5 & +\frac{3}{4} & -0,7 & -3\frac{1}{4} \\ 226. & -3,5 & -2\frac{1}{4} & +\frac{1}{4} & +0,8 & +2,75 \end{array}$$

Arvutada järgmised astmed:

$$\begin{array}{cccc} 227. & (-0,4)^2 & -(-93)^2 & -29^2 & (-1\frac{4}{5})^2 \\ 227. & -(-1)^4 & -(+4)^3 & (-3\frac{1}{2})^2 & -(1\frac{1}{4})^3 \end{array}$$

Anda järgmistele avaldistele võimalikult lihtne kuju:

$$\begin{array}{l} 228. \quad 21u - 18(u - 7) \\ \quad (-15)(8v - 2) + 120v \\ \quad (-48)(1 - 3t) - 22 \\ \quad 32p + (-2)(18p - 4) \\ \quad 18q - (3 - 7q)(-2) \\ 228. \quad 6(3i - 4k) + (-2)(3i - 6k) \\ \quad (-2)(7k - 9i) + 4(7i - 9k) \\ \quad 8(6i + 12m) + (-5)(4m + 27i) \\ \quad (2m - 9n) \cdot 3 + (5m - 7n) \cdot 4 \\ \quad (10n - 17p)(-2) - (9 + 6n) \cdot 8 \end{array}$$

229. Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$\begin{aligned} & -3R + (-12R) \\ & -5h^2 + (-27h^2) + (-11h^2) \\ & -2abx + (-abx) + (-14abx) \\ & -7Q - (-10Q) - (+8Q) \\ & 3uv - (+13uv) - (-7uv) - (+uv) \end{aligned}$$

229. Koondada järgmised avaldised:

$$\begin{aligned} & a^2z^3 + a^2z^3 - 4c^4z - a^2z^3 - 3c^4z \\ & 2Q^4 + 5Q^3 + Q^2 - 1 - Q^4 - 7Q^3 - Q^2 \\ & 3\frac{1}{2}mv^2 + 2\frac{1}{3}n^2u - 2\frac{1}{2}mv^2 + 1\frac{2}{3}n^2u - n^2u \\ & abc + 2a^2 + 6b^3 + c^2 - abc - 2a^2 - 5b^3 - c^2 - a \\ & h^2g^3x + 3hg^2x^2 - 7hg^2x^2 - h^2g^3x + hgx^3 \end{aligned}$$

230. Arvutada avaldise  $4 - 0,25x^2$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele  $-8$ -st  $+8$ -ni. Saadud väärtused kujutada graafiliselt.

230. Arvutada hulkkliikme  $x^2 + x - 20$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $x$ -i täisarvulistele väärtustele  $-5$ -st  $+4$ -ni. Saadud väärtused kujutada graafiliselt.

Lahendada järgmised võrrandid:

231.  $x + 2 = 1$

$$x + 7 = 12$$

$$5 + x = 2$$

$$8 + x = 7$$

$$4 + x = 4$$

231.  $x + 6 = 0$

$$x - 3 = -1$$

$$x - 11 = -5$$

$$x - 15 = -17$$

$$x - 13 = 0$$

232.  $x - 17 = 58$

$$x - 5 = 0$$

$$x + 59 = 104$$

$$x + 9 = 0$$

$$5 + x = 12$$

232.  $1 = 1 - x$

$$83 = x + 75$$

$$3 = 2 - x$$

$$0 = x + 2,5$$

$$3,8 - x = -0,5$$

233.  $5x + 4 = 19$

$7 - 2x = 5$

$-1 = 7x + 6$

$8x - 5 = 0$

$\frac{x}{2} + 2 = 10$

233.  $4x + 3 = 3x + 3$

$22x = 23x - 11$

$1 = -\frac{2}{3}x - 7$

$\frac{1}{4}x = -2 + 1$

$37 = 25 + \frac{6}{11}x$

234.  $\frac{1}{3}x = -1$

$\frac{x}{5} = -5$

$\frac{x}{-2} = -3$

$\frac{-x}{4} = -2$

$-\frac{x}{10} = -1$

234.  $\frac{-3}{4}x = -3$

$-\frac{5}{7}x = 15$

$\frac{8}{-13}x = -8$

$\frac{1}{10}x = -18$

$-\frac{7}{15}x = -14$

235.  $x - 4(2,5x - 2) + 3(2x + 4) + 6 = 5$

$9(7x - 6) + 7(8x - 5) - 6(9x - 8) - 11 = 0$

235.  $5x - (2x - 0,5) - 7(x + 0,5) + 3(7x - 6) - 13 = 0$

$3(13 - x) - 0,5(3x - 12) + 2(10 - x) = 0$

Arvutada järgmiste avaldiste numbrilised väärtused:

236.  $3p - \frac{15}{q}$ , kui  $p = 0$  ja  $q = -3$

$a^2 - x^2$ , kui  $a = 1$  ja  $x = 10$

$\frac{a^3 - a^2b + 3ab^2 - 27}{2}$ , kui  $a = -3$  ja  $b = \frac{1}{2}$

$\frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} + \frac{6x^3 - 4}{1 + x - x^2}$ , kui  $x = -\frac{2}{3}$

$\frac{1 + x^2}{(1 + xy)^2 + (x + y)^2}$ , kui  $x = -\frac{1}{2}$  ja  $y = -\frac{1}{3}$

236.  $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ , kui  $m = 2$  ja  $n = -3$

$h^2 - hk + k^2$ , kui  $h = 4$  ja  $k = -3$

$\frac{a^3 + a^2b + ab^2 - 15}{3}$ , kui  $a = -1$  ja  $b = \frac{1}{4}$

$\sqrt{\frac{1+a-a^2}{1-a+a^2} + \frac{6a^3+4}{1-a+a^2}}$ , kui  $a = -\frac{3}{4}$

$\frac{1-x^2}{(1-xy)^2 - (x-y)^2}$ , kui  $x = -\frac{1}{2}$  ja  $y = -\frac{1}{3}$

## Peatükk IV.

### Täisavaldised.

#### § 39. Üksliikmete korrutamine.

Olgu antud korrutada kaks ühe ja sama arvu astet, näiteks avaldis  $a^m$  avaldisega  $a^n$ . Tuletades meelde nende avaldiste tähendust, saame

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tegurit}}$$

Paremal pool seisvate tegurite koguarv on  $m + n$ ; seega võib nende tegurite korrutist kirjutada lühemalt kujul  $a^{m+n}$ ; järelkult

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Näeme, et

ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse.

Näited.

1.  $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$ .
2.  $x \cdot x^3 = x^{1+3} = x^4$ .
3.  $u \cdot u^2 \cdot u^3 = u^{1+2+3} = u^6$ .

Olgu antud korrutada üksliikmed  $5a^2x^3$  ja  $-7ax^4$ . Nõutav korrutis on

$$5a^2x^3 \cdot (-7ax^4).$$

Tegurite vahetuvuse seaduse põhjal võime seda kirjutada ka nii:

$$5 \cdot (-7) \cdot a^2 \cdot a \cdot x^3 \cdot x^4$$

ja edasi korrutise korrutamise seaduse põhjal:

$$[5 \cdot (-7)] \cdot [a^2 \cdot a] \cdot [x^3 \cdot x^4]$$

ehk

$$(-35) \cdot (a^3) \cdot (x^7)$$

ehk lühemalt

$$-35a^3x^7.$$

Seda mõttekäiku üldistades võime sõnastada üksliikmete korrutamisejuhise lühidalt nõnda:

üksliikmete korrutamisel kordajad korrutuvad ja ühesuguste tähttegurite astendajad liituvad.

N ä i d e.

$$\begin{aligned} (-3abx^2) \cdot \left(-2\frac{1}{3}a^2x^3\right) &= (-3) \cdot \left(-2\frac{1}{3}\right) \cdot a^3bx^5 = \\ &= \left(3 \cdot \frac{7}{3}\right)a^3bx^5 = 7a^3bx^5. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

- |                         |                         |                              |
|-------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 237. $4 \cdot 5c$       | 237. $7A \cdot AB$      | 238. $p \cdot 2p \cdot 3q$   |
| $f \cdot 9f$            | $3cD \cdot 8DE$         | $12pqr \cdot \frac{3}{4}qr$  |
| $2h \cdot 7k$           | $3r^2 \cdot 0,2s^2$     | $6f^2h \cdot 8fh^2$          |
| $3pq \cdot q$           | $0,9hk^2 \cdot 2h$      | $3ax \cdot 2bx \cdot cx$     |
| $3uv \cdot 5v$          | $4N^2 \cdot 9Nu$        | $u^2v \cdot v^2w \cdot w^2u$ |
| 238. $x^2 \cdot x$      | 239. $x^3 \cdot x^3$    | 239. $x^5 \cdot x^4$         |
| $y \cdot y^2 \cdot y^4$ | $y^2 \cdot y \cdot y^3$ | $y^3 \cdot y \cdot y$        |
| $2z^2 \cdot 3z^3$       | $3z \cdot 7z^3$         | $7z^2 \cdot z^7$             |
| $8u^3 \cdot 8u^3$       | $0 \cdot u^2 \cdot 14$  | $6u^3 \cdot 4u^4$            |
| $a^2v^3 \cdot a^3v$     | $av^3 \cdot a^4v^2$     | $a^2v^3 \cdot av$            |

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

<p>240. <math>(-3a)(-4b^2)(-a)</math>  <math>2a^2 \cdot (-a)(-b)</math>  <math>(-a)(-b)(-2a)</math>  <math>(+x)(-3b)(-2c)</math>  <math>(-2)(-3a)(-4b)</math></p>	<p>240. <math>(-\frac{2}{3}x)(-\frac{3}{2}y)</math>  <math>(-x) \cdot 0 \cdot (-5x^2)</math>  <math>(-4x^2)(-7x) \cdot \frac{1}{7}y</math>  <math>(0,3x^2)(-\frac{1}{3}x)</math>  <math>(-0,4y^2) \cdot 5y^2</math></p>
---	---

241.  $0,3a \cdot 0,3a \cdot (-\frac{1}{100}b)$   
 $(-0,5a)(-0,2a) \cdot 10ab^2$   
 $(-4x)(-\frac{1}{2}y)(-\frac{1}{4}xy^3)$   
 $(-3x)(+3x)(-3x^2)$   
 $(-0,5a)(+2ab)(-c)$

241.  $0,5x^3 \cdot 0,5x^3$   
 $(-0,3a)(-b)(-c)$   
 $(+1,2x)(-5)(-y)$   
 $(-\frac{2}{3}a)(+\frac{2}{3}b)(-9ab)$   
 $(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}x)(+\frac{2}{3}z)$

<p>242. <math>12h^2 \cdot \frac{3}{4}h</math>  <math>\frac{1}{2}n \cdot 16nx^3</math>  <math>16c^3z^2 \cdot cz^3</math>  <math>0,1a^2s \cdot 10as^4</math>  <math>0,1k^3t^2 \cdot 0,1kt^3</math></p>	<p>242. <math>3\frac{1}{3}h \cdot \frac{3}{10}h^4</math>  <math>1\frac{3}{4}n^4x \cdot 1\frac{1}{7}nx^6</math>  <math>0,2c^3 \cdot 0,5cx^4</math>  <math>0,8a^3s^3 \cdot 2,5a^2s</math>  <math>0,9k^2t \cdot 9,1k^3t^2</math></p>
--	---

## § 40. Üksliikmete jagamine.

Olgu antud jagada kaks sama alusega astet, näiteks avaldis  $a^m$  avaldisega  $a^n$ . Olgu astendaja  $m$  suurem astendajast  $n$  ehk sümbolites:  $m > n$ , siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Tõepoolest, korrutades kontrolliks jagatist jagajaga, saame

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m,$$

nagu peab olema.

Seega: kui  $m > n$ , siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Tulemuse võime lühidalt sõnastada nõnda:

ühe ja sama arvu astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas.

Jagatis  $a^m : a^m = 1$  igasuguse astendaja  $m$  puhul.

Olgu antud jagada üksliige  $-28a^5b^3x$  üksliikmega  $-4a^2b^3$ . Rakendame korrutisega jagamise juhust:

jagame jagatava eeskätt jagaja esimese teguriga  $-4$ ; saame  $7a^5b^3x$ ; jagame saaduse teise teguriga  $a^2$ ; see annab  $7a^3b^3x$ ; jagame selle saaduse kolmanda teguriga  $b^3$ ; see annab lõppsaadusena  $7a^3x$ .

Seda mõttekäiku üldistades võime üksliikmete jagamise juhise sõnastada lühidalt nõnda:

üksliikme jagamisel kordajad jagatakse ja ühesuguste täheliste tegurite astendajad lahutatakse.

N ä i d e.

$$3cN^2u^5 : (-4N^2u^3) = -\frac{3}{4}cu^2.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

243.	$a^4 : a^2$	243.	$q^6 : q^4$
	$c^3 : c^3$		$N^8 : N^5$
	$x^4 : x$		$u^{10} : u^9$
	$t^5 : t^2$		$v^3 : v$
	$S^8 : S^8$		$y^7 : y^4$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

244.	$12a^2 : 3$	244.	$21p^2q^3 : 7pq^2$
	$28b^3 : b$		$5a^2u^3 : 5au^2$
	$32c^2 : 8c^2$		$pq^2r^3 : qr^2$
	$18i^4 : 6i^3$		$30i^3m^5n^3 : 10i^2m^3$
	$6,4u^5 : 1,6u^3$		$63N^3c^5u^7 : 9Nc^3u^5$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

245.	$18m : 6$	245.	$112mv : 7m$
	$85h : 17$		$36ax : 9a$
	$576g : 24$		$80rR^2 : 24rR$
	$26u^2 : 13$		$27mn^2 : 3mn$
	$42z^3 : 7z$		$18p^3q : 36p^2q$
246.	$39n^5 : 3n$	246.	$3uvw : 12uw$
	$a^3 : a^3$		$11a^3b^2z : 66ab^2$
	$28f^2 : 14f$		$25h^2k^3l : 10hk^2$
	$0 : 19k$		$16c^3d^2u : 32c^3du$
	$25i : 5i$		$0,2k^3l^4m^2 : 0,5k^2l^3m$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

247.	$\frac{x^6}{x^2}$	247.	$\frac{a^2b}{ab}$	248.	$\frac{5c^2v}{10c^2v}$	248.	$\frac{-27ab^2c^3}{18bc^2}$
	$\frac{a^4}{a^4}$		$\frac{-28u^2}{42u}$		$0$		$48c^3d^4$
	$\frac{-z^{12}}{z^8}$		$\frac{14a^2x^2}{196a^2x}$		$\frac{4d^2w}{7N^2u^3}$		$\frac{-11c^2d^2}{-72a^4h^5}$
					$\frac{35N^2u^2}{35N^2u^2}$		$\frac{56a^3h}{56a^3h}$

## § 41. Üksliikmete astendamine.

Olgu antud astendada avaldis  $a^m$  arvuga  $n$ .  
Astme definitsiooni kohaselt kirjutame

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m}_n$$

$n$  tegurit

Meelde tuletades, et ühe ja sellesama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse, leiame, et

$$(a^m)^n = a^{m + m + m + \dots + m}.$$

Summa  $m + m + m + \dots + m$ , kus esineb  $n$  võrdset liidetavat ja iga liidetav on  $m$ , võime kirjutada lühemalt  $nm$ .  
Seega

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Tulemuse võime sõnastada lühidalt nõnda:  
astme astendamisel astendajad korrutatakse.

Näited.

$$(x^2)^3 = x^6 \qquad (u^3)^5 = u^{15}$$

Olgu antud astendada korrutis  $ab$  arvuga  $n$ .  
Astme definitsiooni järgi on

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdots ab}_n$$

$n$  tegurit

Rakendades tegurite vahetuvuse ja korrutise korrutamise seadust näeme, et

$$(ab)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_n$$

$n$  tegurit                       $n$  tegurit

ehk

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Tulemuse võime sõnastada lühidalt nõnda:  
korrutise astendamisel astendatakse tema iga tegur.

N ä i d e. Leida üksliikme  $-3ab^2c^3$  neljas aste.

Eelmist juhust rakendades saame

$$\begin{aligned}(-3ab^2c^3)^4 &= (-3)^4 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4 = \\ &= +81 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot c^{12}\end{aligned}$$

ehk lühemalt

$$(-3ab^2c^3)^4 = 81a^4b^8c^{12}.$$

**Ülesanded.**

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult väheste sümboolitega:

$$\begin{aligned}249. \quad &(2^2)^3 \\ &(1^5)^4 \\ &[(-1)^2]^3 \\ &[(-5)^2]^2 \\ &[(-3)^2]^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}249. \quad &(a^2)^3 \\ &(b^3)^2 \\ &-(c^4)^2 \\ &(d^2)^5 \\ &-(e^3)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}250. \quad &(-s^2)^3 \\ &-(-t^3)^2 \\ &(+u^3)^4 \\ &\left(-\frac{v}{2}\right)^2 \\ &-\left(-\frac{w}{10}\right)^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}250. \quad &\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]^2 \\ &\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\right]^2 \\ &(-0,6^2)^3 \\ &[(-1,2)^2]^2 \\ &(-2,6^2)^2\end{aligned}$$

Kirjutada järgmised astmed sulgudeta:

$$\begin{aligned}251. \quad &(2a)^2 \\ &(3b)^3 \\ &(0,2c)^2 \\ &(1,5d)^3 \\ &(7,1e)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}251. \quad &(5x^3)^2 \\ &(3y^2)^3 \\ &(2z^3)^5 \\ &(4u^3)^3 \\ &(6v^4)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 252. \quad & (-6h)^2 \\
 & (-k^2)^3 \\
 & (-3i^2)^2 \\
 & (-4m)^3 \\
 & (-7n^3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 252. \quad & (x^2)^2 \\
 & (-u)^2 \\
 & (3v^2)^3 \\
 & -(-7z^4)^2 \\
 & (Q^2q)^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 253. \quad & (x^3)^4 \\
 & (-u^2)^3 \\
 & (-4v^3)^2 \\
 & (-10z^2)^3 \\
 & (-Qq^3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 253. \quad & (x^2)^5 \\
 & (-u)^2 \\
 & (-2v^3)^3 \\
 & (-2z^2)^5 \\
 & (-2Q^2q^4)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 254. \quad & (2a^2b)^3 \\
 & (4mn^2)^2 \\
 & (3p^2q^3)^4 \\
 & (rst^2)^5 \\
 & (7a^2x^5)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 254. \quad & (3h^4k)^3 \\
 & (-4k^5l)^5 \\
 & (2i^4m^3)^4 \\
 & (-0,5m^5n^2)^2 \\
 & (-0,4pq^2)^3
 \end{aligned}$$

## § 42. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine.

Hulkliikmete liitmine ja lahutamine tugineb liitmise ja lahutamise põhiseadustele. Nende tehete sooritamise viis on näha järgmisist näiteist.

Näited.

- $$\begin{aligned}
 1. \quad & (x^3 + 2x^2 + 5x - 1) + (x^3 - 2x^2 - 2x + 1) = \\
 & = x^3 + 2x^2 + 5x - 1 + x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = \\
 & = 2x^3 + 3x.
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 2. \quad & (u^3 - 5u + 7) - (u^3 - 3u^2 + 6) = \\
 & = u^3 - 5u + 7 - u^3 + 3u^2 - 6 = 3u^2 - 5u + 1.
 \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}
 3. \quad & (5ax^2 + 3bz^2 - 7abc) + (bz^2 - 5ax^2 + 6abc) = \\
 & = 5ax^2 + 3bz^2 - 7abc + bz^2 - 5ax^2 + 6abc = \\
 & = 4bz^2 - abc.
 \end{aligned}$$

Neid näiteid arvestades sõnastame hulkliikme liitmiseks ja lahutamiseks järgmise juhise:

avaldisele hulkliiget liites kirjutatakse sellele avaldisele juurde hulkliikme liikmed koos nende liikmete märkidega;

avaldisest hulkliiget lahutades kirjutatakse sellele avaldisele juurde hulkliikme liikmed vastupidiste märkidega.

Nii esimesel kui ka teisel juhul, kui võimalik, koondatakse tulemus.

Mõnikord on otstarbekohasem kirjutada liidetavad ja lahutatavad hulkliikmed üksteise alla nii, et sarnased liikmed esineksid s a m a s v e e r u s. Puuduvate astmete koht jäetakse tühjaks. Võtte on sama, mida rakendatakse arvude liitmisel ja lahutamisel, selle vahega, et ülekanded ja laenamised jäävad ära.

Näited.

1.	4035	$4k^3$		$+ 3k + 5$
	+ 720	+	$7k^2 + 2k$	
	43			$4k + 3$
	4798			$4k^3 + 7k^2 + 9k + 8$
2.	75938		$7k^4 + 5k^3 + 9k^2 + 3k + 8$	
	— 30708	—	$3k^4$	$+ 7k^2 + 8$
	45230		$4k^4 + 5k^3 + 2k^2 + 3k$	

Ülesanded.

Lihtsustada järgmised avaldised:

255.  $(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + y^2)$   
 $(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 2ab + b^2)$

255.  $(ny^2 + 2nyz + z^2) - (ny^2 + 2nyz + ny^2)$   
 $(x^3 + 3cx^2 + c^3) - (x^3 - 3c^2x + c^3)$

Liita järgmised polünoomid ja koondada saadus:

$$\begin{aligned} 256. \quad & x^2 + 5x + 6 \\ & x^2 - 5x + 12 \\ & x - 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 256. \quad & y^2 - 13y - 30 \\ & 3y^2 + 16y + 29 \\ & 4y + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 257. \quad & 4u^2 - 17u + 32 \\ & -4u^2 + 14u - 18 \\ & -u^2 - 14u - 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 257. \quad & v^5 - 3v^3 + 2 \\ & 2v^3 - 2v + 1 \\ & v^3 + 2v - 3 \end{aligned}$$

Lahutada igas reas teises veerus seisev polünoom vastavast esimeses veerus seisvast ja koondada saadus:

$$\begin{aligned} 258. \quad & 2x^2 - 5x - 37 \\ & 7y^2 - 35y + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x - 13 \\ & -7y^2 - 27y + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 258. \quad & u^3 + 6u - 7 \\ & v^5 + 3v^3 - 2v^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & u^3 - u^2 + 5u - 1 \\ & 3v^4 + 3v^3 - 2v^2 + 6 \end{aligned}$$

### § 43. Hukliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega.

Hukliikme korrutamine üksliikmega taandub summa korrutamise seaduse rakendamisel üksliikmete korrutamisele.

Hukliikme jagamine üksliikmega taandub summa jagamise seaduse rakendamisel üksliikmete jagamisele.

Näited.

1.  $(+5x^2) \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x - 1) =$   
 $= 5x^5 - 20x^4 + 15x^3 - 5x^2.$
2.  $(-4ab^2x) \cdot (5a^2x + 3bx^2 - 7ab) =$   
 $= -20a^3b^2x^2 - 12ab^3x^3 + 28a^2b^3x.$
3.  $(35Nu^3 - 14N^2u^2 + 7N^3u) : (-7Nu) =$   
 $= -5u^2 + 2Nu - N^2.$

Kokkuvõttes võime sõnastada järgmise juhise:

hukliikme korrutamisel üksliikmega korrutame selle üksliikmega hukliikme iga liikme ja liidame tulemused.

Analoogiline eeskiri kehtib hulkliikme jagamise kohta üksliikmega:

hulkliikme jagamisel üksliikmega jagame selle üksliikmega hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.

Näited.

$$1. (4ax^3 + 12abx^2 - 8abcx) : 4ax = \\ = x^2 + 3bx - 2bc.$$

$$2. (2\frac{4}{5}N^4u^4 + 10\frac{1}{2}N^3u^3 - 16\frac{1}{3}N^2u^2) : 7Nu^2 = \\ = \frac{2}{5}N^3u^2 + 1\frac{1}{2}N^2u - 2\frac{1}{3}N.$$

Ülesanded.

Avada sulud järgmistes avaldistes:

$$259. 5a \cdot (4a^2 + 2)$$

$$7b \cdot (b^2 - x)$$

$$Q^2 \cdot (2q - Q)$$

$$6y \cdot (2y^2 - ab)$$

$$3h \cdot (h^3 - a^2h)$$

$$259. \frac{1}{2}u^2(6v + 2u)$$

$$1,4v(5v^2 - 1)$$

$$0,6(8cz^2 + z^3)$$

$$10mn(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{5}ng^2)$$

$$14p^2(\frac{3}{7}pq^2 - \frac{1}{2}q^2v)$$

$$260. (a + b + c) \cdot (-ab)$$

$$(2a - 3b - 4c) \cdot (+2c)$$

$$(-x^3 + 2x^5 - 3x^7) \cdot (-3x^2)$$

$$(x^2 - 5x + 6) \cdot 0,2x^3$$

$$(m^2 - 3mn + n^2) \cdot (-mn)$$

$$260. (2ax + 3by - 4cz) \cdot (-1)$$

$$(x^2 + y^2 - xy) \cdot (-ax^2)$$

$$(m - mn + np) \cdot (-3mnp)$$

$$(2au + 3bv - 4cw) \cdot \frac{5}{12}abc$$

$$(0,1hx^2 + 10h^2x) \cdot 0,1hx$$

Arendada järgmised jagatised:

261.  $(6Q - 4) : 2$   
 $(15z - 12) : 3$   
 $(28u + 21v) : 7$   
 $(7pq + 7) : 7$   
 $(81r^2 + 63) : 9$

261.  $(m + 2mn) : m$   
 $(5x^2 - 2x) : x$   
 $(4n^2 + 3cn) : n$   
 $(y^3 + y^2 + y) : y$   
 $(4z^4 - 2z^2 + z) : z$

262.  $(6hg - 3g^2) : 3g$   
 $(12ax - 20a^2) : 4a$   
 $(18x^2 - 6x) : 6x$   
 $(2Q^3 - Qq) : 2Q$   
 $(3r^4 - 4r) : 4r$

262.  $(13m^2n - 3mn^2) : 5hk$   
 $(15h^3k - 25hk^2) : 5hk$   
 $(z^5 + z^3 + z^2) : z^2$   
 $(14c^5 + 98c^4d) : 14c^3$   
 $(35u^4 - 20u^2) : 5u^2$

263.  $(m^2 - m) : (-m)$   
 $(hk - kl) : (+k)$   
 $(9x^2 - 6x) : (-3x)$   
 $(14y^2 - 42y) : (-7y)$   
 $(18w^3 - 45w) : (-9w)$

263.  $(2z^3 - 3z^2) : (-4z^2)$   
 $(u^4 - 2u^3 - 3u^2) : (+0,5u^2)$   
 $(av^4 - bv^4) : (-v^3)$   
 $(20ap^2q^3 - 12bpq^2) : (-4pq^2)$   
 $(32N^2u^3 - 40N^3u^2) : (-8N^2u^2)$

§ 44. Ülesandeid kordamiseks.

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

264.  $n \cdot n^2 \cdot n^3$   
 $T^3 \cdot T^4 \cdot T^2$   
 $q^2 \cdot q^4 \cdot q^6$   
 $R^2 \cdot R^2 \cdot R^2$   
 $x^4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot x$

264.  $8a^2b \cdot 7bc^2$   
 $6p^5q \cdot 7q^5$   
 $2hu \cdot 3hu^2 \cdot 4hu^3$   
 $4F^2G^3 \cdot 4F^2G^3$   
 $3ax^2 \cdot 3ax^2 \cdot 3ax^2$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

265.	$b \cdot (-a) \cdot (-a)$	265.	$(-4n^2) \cdot 3n^3 \cdot (-n^2)$
	$-3c \cdot (-c) \cdot 2c^2$		$(-7m^3) \cdot (+2mn) \cdot (-m^2n)$
	$(-2b) \cdot (-d)$		$2R^2 \cdot (-3r) \cdot 5r \cdot R$
	$(-d) \cdot (-3d^2) \cdot 2d$		$-9ay^3 \cdot (-a^2y) \cdot (-1)$
	$h \cdot (-h^2k) \cdot kl$		$-0,1p^2q \cdot (-10pq^2) \cdot (-pq)$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsal kujul:

266.	$(-212a) : 4$	266.	$(-75)ay^2 : (-15ay)$
	$(-16b) : 4$		$(+217a^2v) : (-7a^2)$
	$(-36cd) : 9$		$(-91p^2q^2) : 13pq$
	$(-56u) : (+8u)$		$(-5z^4) : (-5z^4)$
	$(-72gh) : (-18g)$		$(+a^3b^2c) : (-5a^2b)$
267.	$-(-3p^3)^3$	267.	$(-2u)^3(-u^2v)^4$
	$(-13)^2(-q)^4$		$-(+1\frac{2}{3})^2(-\frac{1}{3}pq^2)^2$
	$(-1)(-2r^2)^6$		$(-0,7)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (0,2ax)^2$
	$(-1)^3 \cdot (-3s)^2$		$(+0,1)^2 \cdot (-1)^4 \cdot (100by)^2$
	$(-2)^4 \cdot (-5t^2)^2$		$(+0,2)^3 \cdot (-10c^2z)^3$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

268.	$(-N) \cdot 3N^2$	268.	$4x^4 \cdot 5x^2 \cdot (-2x^6)$
	$a^{13} : a^9$		$(0,3v^2)^5$
	$(-4m)^3$		$(-2cw)^3 : (-w)^2$

Teostada järgmised liitmised ja lahutamised ning koondata saadused:

269.  $(7h^2 + 3h^2) - (2h + 1)$   
 $(15f^3 - 10f^3) + (3f^2 - 2)$   
 $(4H^2 - 2H^3 + H) - (4H^3 + 6H^2 + H - 5)$   
 $(Q^3 - 2Q^2 + 12Q - 7) - (20Q^2 - 11Q + 3)$   
 $7r^3 - (6r^3 - r^2 - 2r + 3)$

$$\begin{aligned}
269. \quad & u^3 - (u^3 - 1 - u^2 - 5u + 1) \\
& (3v^4 - v^2 - 1) - 3(v^4 - v^2 + 1) \\
& 2(x^5 - 3x^3 + 1) - 3(1 - x^3 - x) \\
& y^4 - (y^3 - 2y^2 - 1) - (2y^2 - 1) \\
& 7z^5 - (z^4 - z^3 - 2z - 1)
\end{aligned}$$

Arendada järgmised korrutised:

$$\begin{array}{ll}
270. \quad (2a + b) \cdot 3b & 270. \quad (x^2 - x + 1)(-3x) \\
(4a - 3b)(-4a^2) & (x^2 - 6x - 5)(+0,4x) \\
(2a + 7b)(+2ab) & (5x^2 + 7x - 12)(-0,5ax) \\
(4a - 6) \cdot \frac{1}{6} ab & (3x^2 - x + 4)(-\frac{1}{2}x^2) \\
(a^2 - 8b) \cdot (-\frac{3}{4}ab^2) & (10x^2 - 5x + 1)(-\frac{3}{10}ax^3)
\end{array}$$

Kirjutada järgmised avaldised sulgudeta ja murrujooneteta:

$$\begin{array}{l}
271. \quad (x^2 - xy) : x \\
(x^5 - 7x^3) : x^3 \\
(34a^3x^2 - 51a^2x^3) : 17ax \\
(15c^2x^4 - 20cx^5) : 5cx^4 \\
(21d^3u^5 - 28d^5u^3) : 7d^3u^3 \\
271. \quad (36x^2 - 60ax + 84a^2) : 12 \\
(12a^2b - 6a^2b^2 + ab^3) : 3ab \\
(15h^5 + 4h^4 - 2h^3) : 5h^3 \\
(10N^3 + N^2) : 5N^2 \\
(21u^3 - 35u^2) : (-7u^2)
\end{array}$$

## Peatükk V.

### Arvutamise abivalemid.

#### § 45. Kaksliikmete korrutamine.

Olgu antud kaksliikmed  $a + b$  ja  $c + d$ . Nende korrutis on

$$(a + b) \cdot (c + d).$$

Et saada seda korrutist sulgudeta avaldisena ehk arendatud kujul, rakendame summa korrutamise seadust:

$$m \cdot (c + d) = mc + md.$$

Kõnesoleval juhul  $m = a + b$ . Seega

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d.$$

Rakendades viimase võrduse paremal poolel uuesti sama seadust, saame

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Samal viisil saame

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - ad - bd$$

ja

$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Tulemuse sõnastame nõnda:

kaksliikmete korrutise arendamiseks korrutame ühe kaksliikme kummagi liikme teise kaksliikme kummagi liikmega ja liidame saadused.

$$236. \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}, \text{ kui } m = 2 \text{ ja } n = -3$$

$$h^2 - hk + k^2, \text{ kui } h = 4 \text{ ja } k = -3$$

$$\frac{a^3 + a^2b + ab^2 - 15}{3}, \text{ kui } a = -1 \text{ ja } b = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1+a-a^2}{1-a+a^2} + \frac{6a^3+4}{1-a+a^2}, \text{ kui } a = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1-x^2}{(1-xy)^2 - (x-y)^2}, \text{ kui } x = -\frac{1}{2} \text{ ja } y = -\frac{1}{3}$$

## Peatükk IV.

### Täisavaldised.

#### § 39. Üksliikmete korrutamine.

Olgu antud korrutada kaks ühe ja sama arvu astet, näiteks avaldis  $a^m$  avaldisega  $a^n$ . Tuletades meelde nende avaldiste tähendust, saame

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_m \text{ tegurit} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n \text{ tegurit}$$

Paremal pool seisvate tegurite koguarv on  $m + n$ ; seega võib nende tegurite korrutist kirjutada lühemalt kujul  $a^{m+n}$ ; järelikult

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Näeme, et

ühe ja sama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse.

Näited.

1.  $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$ .
2.  $x \cdot x^3 = x^{1+3} = x^4$ .
3.  $u \cdot u^2 \cdot u^3 = u^{1+2+3} = u^6$ .

Olgu antud korrutada üksliikmed  $5a^2x^3$  ja  $-7ax^4$ . Nõutav korrutis on

$$5a^2x^3 \cdot (-7ax^4).$$

Tegurite vahetuvuse seaduse põhjal võime seda kirjutada ka nii:

$$5 \cdot (-7) \cdot a^2 \cdot a \cdot x^3 \cdot x^4$$

ja edasi korrutise korrutamise seaduse põhjal:

$$[5 \cdot (-7)] \cdot [a^2 \cdot a] \cdot [x^3 \cdot x^4]$$

ehk

$$(-35) \cdot (a^3) \cdot (x^7)$$

ehk lühemalt

$$-35a^3x^7.$$

Seda mõttekäiku üldistades võime sõnastada üksliikmete korrutamisejuhise lühidalt nõnda:

üksliikmete korrutamisel kordajad korrutuvad ja ühesuguste tähttegurite astendajad liituvad.

N ä i d e.

$$\begin{aligned} (-3abx^2) \cdot (-2\frac{1}{3}a^2x^3) &= (-3) \cdot (-2\frac{1}{3}) \cdot a^3bx^5 = \\ &= (3 \cdot \frac{7}{3})a^3bx^5 = 7a^3bx^5. \end{aligned}$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised korrutised võimalikult lühidalt:

- |                         |                         |                              |
|-------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 237. $4 \cdot 5c$       | 237. $7A \cdot AB$      | 238. $p \cdot 2p \cdot 3q$   |
| $f \cdot 9f$            | $3cD \cdot 8DE$         | $12pqr \cdot \frac{3}{4}qr$  |
| $2h \cdot 7k$           | $3r^2 \cdot 0,2s^2$     | $6f^2h \cdot 8fh^2$          |
| $3pq \cdot q$           | $0,9hk^2 \cdot 2h$      | $3ax \cdot 2bx \cdot cx$     |
| $3uv \cdot 5v$          | $4N^2 \cdot 9Nu$        | $u^2v \cdot v^2w \cdot w^2u$ |
| 238. $x^2 \cdot x$      | 239. $x^3 \cdot x^3$    | 239. $x^5 \cdot x^4$         |
| $y \cdot y^2 \cdot y^4$ | $y^2 \cdot y \cdot y^3$ | $y^3 \cdot y \cdot y$        |
| $2z^2 \cdot 3z^3$       | $3z \cdot 7z^3$         | $7z^2 \cdot z^7$             |
| $8u^3 \cdot 8u^3$       | $0 \cdot u^2 \cdot 14$  | $6u^3 \cdot 4u^4$            |
| $a^2v^3 \cdot a^3v$     | $av^3 \cdot a^4v^2$     | $a^2v^3 \cdot av$            |

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

<p>240. <math>(-3a)(-4b^2)(-a)</math>  <math>2a^2 \cdot (-a)(-b)</math>  <math>(-a)(-b)(-2a)</math>  <math>(+x)(-3b)(-2c)</math>  <math>(-2)(-3a)(-4b)</math></p>	<p>240. <math>(-\frac{2}{3}x)(-\frac{3}{2}y)</math>  <math>(-x) \cdot 0 \cdot (-5x^2)</math>  <math>(-4x^2)(-7x) \cdot \frac{1}{7}y</math>  <math>(0,3x^2)(-\frac{1}{3}x)</math>  <math>(-0,4y^2) \cdot 5y^2</math></p>
---	---

241.  $0,3a \cdot 0,3a \cdot (-\frac{1}{100}b)$   
 $(-0,5a)(-0,2a) \cdot 10ab^2$   
 $(-4x)(-\frac{1}{2}y)(-\frac{1}{4}xy^3)$   
 $(-3x)(+3x)(-3x^2)$   
 $(-0,5a)(+2ab)(-c)$

241.  $0,5x^3 \cdot 0,5x^3$   
 $(-0,3a)(-b)(-c)$   
 $(+1,2x)(-5)(-y)$   
 $(-\frac{2}{3}a)(+\frac{2}{3}b)(-9ab)$   
 $(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}x)(+\frac{2}{3}z)$

242.  $12h^2 \cdot \frac{3}{4}h$   
 $\frac{1}{2}n \cdot 16nx^3$   
 $16c^3z^2 \cdot cz^3$   
 $0,1a^2s \cdot 10as^4$   
 $0,1k^3t^2 \cdot 0,1kt^3$

242.  $3\frac{1}{3}h \cdot \frac{3}{10}h^4$   
 $1\frac{3}{4}n^4x \cdot 1\frac{1}{7}nx^6$   
 $0,2c^3 \cdot 0,5cx^4$   
 $0,8a^3s^3 \cdot 2,5a^2s$   
 $0,9k^2t \cdot 9,1k^3t^2$

## § 40. Üksliikmete jagamine.

Olgu antud jagada kaks sama alusega astet, näiteks avaldis  $a^m$  avaldisega  $a^n$ . Olgu astendaja  $m$  suurem astendajast  $n$  ehk sümbolites:  $m > n$ , siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Tõepoolest, korrutades kontrolliks jagatist jagajaga, saame

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m,$$

nagu peab olema.

Seega: kui  $m > n$ , siis

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Tulemuse võime lühidalt sõnastada nõnda:

ühe ja sama arvu astmete jagamisel astendaja jagajas lahutatakse astendajast jagatavas.

Jagatis  $a^m : a^m = 1$  igasuguse astendaja  $m$  puhul.

Olgu antud jagada üksliige  $-28a^5b^3x$  üksliikmega  $-4a^2b^3$ . Rakendame korrutisega jagamise juhust:

jagame jagatava eeskätt jagaja esimese teguriga  $-4$ ; saame  $7a^5b^3x$ ; jagame saaduse teise teguriga  $a^2$ ; see annab  $7a^3b^3x$ ; jagame selle saaduse kolmanda teguriga  $b^3$ ; see annab lõppsaadusena  $7a^3x$ .

Seda mõttekäiku üldistades võime üksliikmete jagamise juhise sõnastada lühidalt nõnda:

üksliikme jagamisel kordajad jagatakse ja ühesuguste tähestike tegurite astendajad lahutatakse.

N ä i d e.

$$3cN^2u^5 : (-4N^2u^3) = -\frac{3}{4}cu^2.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$243. \quad a^4 : a^2 \\ c^3 : c^3 \\ x^4 : x \\ t^5 : t^2 \\ S^8 : S^8$$

$$243. \quad q^6 : q^4 \\ N^8 : N^5 \\ u^{10} : u^9 \\ v^3 : v \\ y^7 : y^4$$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$244. \quad 12a^2 : 3 \\ 28b^3 : b \\ 32c^2 : 8c^2 \\ 18i^4 : 6t^3 \\ 6,4u^5 : 1,6u^3$$

$$244. \quad 21p^2q^3 : 7pq^2 \\ 5a^2u^3 : 5au^2 \\ pq^2r^3 : qr^2 \\ 30i^3m^5n^3 : 10i^2m^3 \\ 63N^3c^5u^7 : 9Nc^3u^5$$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$245. \quad 18m : 6 \\ 85h : 17 \\ 576g : 24 \\ 26u^2 : 13 \\ 42z^3 : 7z$$

$$245. \quad 112mv : 7m \\ 36ax : 9a \\ 80rR^2 : 24rR \\ 27mn^2 : 3mn \\ 18p^3q : 36p^2q$$

$$246. \quad 39n^5 : 3n \\ a^3 : a^3 \\ 28f^2 : 14f \\ 0 : 19k \\ 25i : 5i$$

$$246. \quad 3uvw : 12uw \\ 11a^3b^2z : 66ab^2 \\ 25h^2k^3l : 10hk^2 \\ 16c^3d^2u : 32c^3du \\ 0,2k^3l^4m^2 : 0,5k^2l^3m$$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

$$247. \quad \frac{x^6}{x^2} \\ \frac{a^4}{a^1} \\ \frac{-z^{12}}{z^8}$$

$$247. \quad \frac{a^2b}{ab} \\ -28u^2 \\ 42u \\ 14a^2x^2 \\ 196a^2x$$

$$248. \quad \frac{5c^2v}{10c^2v} \\ 0 \\ \frac{4d^2w}{7N^2u^3} \\ \frac{35N^2u^2}{35N^2u^2}$$

$$248. \quad \frac{-27ab^2c^3}{18bc^2} \\ 48c^3d^4 \\ -11c^2d^2 \\ -72a^4h^5 \\ 56a^3h$$

## § 41. Üksliikmete astendamine.

Olgu antud astendada avaldis  $a^m$  arvuga  $n$ .  
Astme definitsiooni kohaselt kirjutame

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m}_{n \text{ tegurit}}$$

Meelde tuletades, et ühe ja sellesama arvu astmete korrutamisel astendajad liidetakse, leiame, et

$$(a^m)^n = a^{m + m + m + \dots + m}.$$

Summa  $m + m + m + \dots + m$ , kus esineb  $n$  võrdset liidetavat ja iga liidetav on  $m$ , võime kirjutada lühemalt  $nm$ .  
Seega

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Tulemuse võime sõnastada lühidalt nõnda:  
astme astendamisel astendajad korrutatakse.

Näited.

$$(x^2)^3 = x^6 \qquad (u^3)^5 = u^{15}$$

Olgu antud astendada korrutis  $ab$  arvuga  $n$ .  
Astme definitsiooni järgi on

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot ab \cdots ab}_{n \text{ tegurit}}$$

Rakendades tegurite vahetuvuse ja korrutise korrutamise seadust näeme, et

$$(ab)^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ tegurit}}$$

ehk

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Tulemuse võime sõnastada lühidalt nõnda:  
korrutise astendamisel astendatakse tema iga tegur.

N ä i d e. Leida üksliikme  $-3ab^2c^3$  neljas aste.

Eelmist juhust rakendades saame

$$\begin{aligned} (-3ab^2c^3)^4 &= (-3)^4 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4 = \\ &= +81 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot c^{12} \end{aligned}$$

ehk lühemalt

$$(-3ab^2c^3)^4 = 81a^4b^8c^{12}.$$

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult väheste sümboolitega:

$$\begin{aligned} 249. \quad &(2^2)^3 \\ &(1^5)^4 \\ &[(-1)^2]^3 \\ &[(-5)^2]^2 \\ &[(-3)^2]^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 249. \quad &(a^2)^3 \\ &(b^3)^2 \\ &-(c^4)^2 \\ &(d^2)^5 \\ &-(e^3)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 250. \quad &(-s^2)^3 \\ &-(-t^3)^2 \\ &(+u^3)^4 \\ &\left(-\frac{v}{2}\right)^2 \\ &- \left(-\frac{w}{10}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 250. \quad &\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]^2 \\ &\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^4\right]^2 \\ &(-0,6^2)^3 \\ &[(-1,2)^2]^2 \\ &(-2,6^2)^2 \end{aligned}$$

Kirjutada järgmised astmed sulgudeta:

$$\begin{aligned} 251. \quad &(2a)^2 \\ &(3b)^3 \\ &(0,2c)^2 \\ &(1,5d)^3 \\ &(7,1e)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 251. \quad &(5x^3)^2 \\ &(3y^2)^3 \\ &(2z^3)^5 \\ &(4u^3)^3 \\ &(6v^4)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 252. \quad & (-6h)^2 \\
 & (-k^2)^3 \\
 & (-3i^2)^2 \\
 & (-4m)^3 \\
 & (-7n^3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 252. \quad & (x^2)^2 \\
 & (-u)^2 \\
 & (3v^2)^3 \\
 & -(-7z^4)^2 \\
 & (Q^2q)^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 253. \quad & (x^3)^4 \\
 & (-u^2)^3 \\
 & (-4v^3)^2 \\
 & (-10z^2)^3 \\
 & (-Qq^3)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 253. \quad & (x^2)^5 \\
 & (-u)^2 \\
 & (-2v^3)^3 \\
 & (-2z^2)^5 \\
 & (-2Q^2q^4)^3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 254. \quad & (2a^2b)^3 \\
 & (4mn^2)^2 \\
 & (3p^2q^3)^4 \\
 & (rst^2)^5 \\
 & (7a^2x^5)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 254. \quad & (3h^4k)^3 \\
 & (-4k^5l)^5 \\
 & (2i^4m^3)^4 \\
 & (-0,5m^5n^2)^2 \\
 & (-0,4pq^2)^3
 \end{aligned}$$

## § 42. Hulkliikmete liitmine ja lahutamine.

Hulkliikmete liitmine ja lahutamine tugineb liitmise ja lahutamise põhiseadustele. Nende tehete sooritamise viis on näha järgmisist näiteist.

Näited.

$$\begin{aligned}
 1. \quad & (x^3 + 2x^2 + 5x - 1) + (x^3 - 2x^2 - 2x + 1) = \\
 & = x^3 + 2x^2 + 5x - 1 + x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = \\
 & = 2x^3 + 3x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & (u^3 - 5u + 7) - (u^3 - 3u^2 + 6) = \\
 & = u^3 - 5u + 7 - u^3 + 3u^2 - 6 = 3u^2 - 5u + 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & (5ax^2 + 3bz^2 - 7abc) + (bz^2 - 5ax^2 + 6abc) = \\
 & = 5ax^2 + 3bz^2 - 7abc + bz^2 - 5ax^2 + 6abc = \\
 & = 4bz^2 - abc.
 \end{aligned}$$

Neid näiteid arvestades sõnastame hulkliikme liitmiseks ja lahutamiseks järgmise juhise:

avaldisele hulkliiget liites kirjutatakse sellele avaldisele juurde hulkliikme liikmed koos nende liikmete märkidega;

avaldisest hulkliiget lahutades kirjutatakse sellele avaldisele juurde hulkliikme liikmed vastupidiste märkidega.

Nii esimesel kui ka teisel juhul, kui võimalik, koondatakse tulemus.

Mõnikord on otstarbekohasem kirjutada liidetavad ja lahutatavad hulkliikmed üksteise alla nii, et sarnased liikmed esineksid s a m a s v e e r u s. Puuduvate astmete koht jäetakse tühjaks. Võte on sama, mida rakendatakse arvude liitmisel ja lahutamisel, selle vahega, et ülekanDED ja laenamised jäävad ära.

Näited.

1.	4035	$4k^3$	+	$3k + 5$
	+ 720	+	$7k^2 + 2k$	
	43			$4k + 3$
	4798			$4k^3 + 7k^2 + 9k + 8$
2.	75938			$7k^4 + 5k^3 + 9k^2 + 3k + 8$
	— 30708	—	$3k^4$	+ $7k^2$
				+ 8
	45230			$4k^4 + 5k^3 + 2k^2 + 3k$

Ülesanded.

Lihtsustada järgmised avaldised:

255.  $(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 + y^2)$   
 $(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 2ab + b^2)$

255.  $(ny^2 + 2nyz + z^2) - (ny^2 + 2nyz + ny^2)$   
 $(x^3 + 3cx^2 + c^3) - (x^3 - 3c^2x + c^3)$

Liita järgmised polünoomid ja koondada saadus:

$$256. \quad \begin{aligned} x^2 + 5x + 6 \\ x^2 - 5x + 12 \\ x - 18 \end{aligned}$$

$$256. \quad \begin{aligned} y^2 - 13y - 30 \\ 3y^2 + 16y + 29 \\ 4y + 7 \end{aligned}$$

$$257. \quad \begin{aligned} 4u^2 - 17u + 32 \\ -4u^2 + 14u - 18 \\ -u^2 - 14u - 15 \end{aligned}$$

$$257. \quad \begin{aligned} v^5 - 3v^3 + 2 \\ 2v^3 - 2v + 1 \\ v^3 + 2v - 3 \end{aligned}$$

Lahutada igas reas teises veerus seisev polünoom vastavast esimeses veerus seisvast ja koondada saadus:

$$258. \quad \begin{aligned} 2x^2 - 5x - 37 \\ 7y^2 - 35y + 18 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x - 13 \\ -7y^2 - 27y + 15 \end{aligned}$$

$$258. \quad \begin{aligned} u^3 + 6u - 7 \\ v^5 + 3v^3 - 2v^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^3 - u^2 + 5u - 1 \\ 3v^4 + 3v^3 - 2v^2 + 6 \end{aligned}$$

### § 43. Hulkliikme korrutamise ja jagamise üksliikmega.

Hulkliikme korrutamine üksliikmega taandub summa korrutamise seaduse rakendamisel üksliikmete korrutamisele.

Hulkliikme jagamine üksliikmega taandub summa jagamise seaduse rakendamisel üksliikmete jagamisele.

Näited.

- $$\begin{aligned} (+5x^2) \cdot (x^3 - 4x^2 + 3x - 1) &= \\ &= 5x^5 - 20x^4 + 15x^3 - 5x^2. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (-4ab^2x) \cdot (5a^2x + 3bx^2 - 7ab) &= \\ &= -20a^3b^2x^2 - 12ab^3x^3 + 28a^2b^3x. \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (35Nu^3 - 14N^2u^2 + 7N^3u) : (-7Nu) &= \\ &= -5u^2 + 2Nu - N^2. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes võime sõnastada järgmise juhise:

**hulkliikme korrutamisel üksliikmega korrutame selle üksliikmega hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.**

Analoogiline eeskiri kehtib hulkliikme jagamise kohta üksliikmega:

hulkliikme jagamisel üksliikmega jagame selle üksliikmega hulkliikme iga liikme ja liidame tulemused.

N ä i t e d.

$$1. (4ax^3 + 12abx^2 - 8abcx) : 4ax = \\ = x^2 + 3bx - 2bc.$$

$$2. (2\frac{4}{5}N^4u^4 + 10\frac{1}{2}N^3u^3 - 16\frac{1}{3}N^2u^2) : 7Nu^2 = \\ = \frac{2}{5}N^3u^2 + 1\frac{1}{2}N^2u - 2\frac{1}{3}N.$$

Ülesanded.

Avada sulud järgmistes avaldistes:

$$259. 5a \cdot (4a^2 + 2)$$

$$7b \cdot (b^2 - x)$$

$$Q^2 \cdot (2q - Q)$$

$$6y \cdot (2y^2 - ab)$$

$$3h \cdot (h^3 - a^2h)$$

$$259. \frac{1}{2}u^2(6v + 2u)$$

$$1,4v(5v^2 - 1)$$

$$0,6(8cz^2 + z^3)$$

$$10mn(\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{5}ng^2)$$

$$14p^2(\frac{3}{7}pq^2 - \frac{1}{2}q^2v)$$

$$260. (a + b + c) \cdot (-ab)$$

$$(2a - 3b - 4c) \cdot (+2c)$$

$$(-x^3 + 2x^5 - 3x^7) \cdot (-3x^2)$$

$$(x^2 - 5x + 6) \cdot 0,2x^3$$

$$(m^2 - 3mn + n^2) \cdot (-mn)$$

$$260. (2ax + 3by - 4cz) \cdot (-1)$$

$$(x^2 + y^2 - xy) \cdot (-ax^2)$$

$$(m - mn + np) \cdot (-3mnp)$$

$$(2au + 3bv - 4cw) \cdot \frac{5}{12}abc$$

$$(0,1hx^2 + 10h^2x) \cdot 0,1hx$$

Arendada järgmised jagatised:

- |  |   |
|--|---|
| <p>261. <math>(6Q - 4) : 2</math><br/> <math>(15z - 12) : 3</math><br/> <math>(28u + 21v) : 7</math><br/> <math>(7pq + 7) : 7</math><br/> <math>(81r^2 + 63) : 9</math></p>                | <p>261. <math>(m + 2mn) : m</math><br/> <math>(5x^2 - 2x) : x</math><br/> <math>(4n^2 + 3cn) : n</math><br/> <math>(y^3 + y^2 + y) : y</math><br/> <math>(4z^4 - 2z^2 + z) : z</math></p>                               |
| <p>262. <math>(6hg - 3g^2) : 3g</math><br/> <math>(12ax - 20a^2) : 4a</math><br/> <math>(18x^2 - 6x) : 6x</math><br/> <math>(2Q^3 - Qq) : 2Q</math><br/> <math>(3r^4 - 4r) : 4r</math></p> | <p>262. <math>(13m^2n - 3mn^2) : 5hk</math><br/> <math>(15h^3k - 25hk^2) : 5hk</math><br/> <math>(z^5 + z^3 + z^2) : z^2</math><br/> <math>(14c^5 + 98c^4d) : 14c^3</math><br/> <math>(35u^4 - 20u^2) : 5u^2</math></p> |
263.  $(m^2 - m) : (-m)$   
 $(hk - kl) : (+k)$   
 $(9x^2 - 6x) : (-3x)$   
 $(14y^2 - 42y) : (-7y)$   
 $(18w^3 - 45w) : (-9w)$
263.  $(2z^3 - 3z^2) : (-4z^2)$   
 $(u^4 - 2u^3 - 3u^2) : (+0,5u^2)$   
 $(av^4 - bv^4) : (-v^3)$   
 $(20ap^2q^3 - 12bpq^2) : (-4pq^2)$   
 $(32N^2u^3 - 40N^3u^2) : (-8N^2u^2)$

#### § 44. Ülesandeid kordamiseks.

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

- |  |   |
|--|---|
| <p>264. <math>n \cdot n^2 \cdot n^3</math><br/> <math>T^3 \cdot T^4 \cdot T^2</math><br/> <math>q^2 \cdot q^4 \cdot q^6</math><br/> <math>R^2 \cdot R^2 \cdot R^2</math><br/> <math>x^4 \cdot x^3 \cdot x^2 \cdot x</math></p> | <p>264. <math>8a^2b \cdot 7bc^2</math><br/> <math>6p^5q \cdot 7q^5</math><br/> <math>2hu \cdot 3hu^2 \cdot 4hu^3</math><br/> <math>4F^2G^3 \cdot 4F^2G^3</math><br/> <math>3ax^2 \cdot 3ax^2 \cdot 3ax^2</math></p> |
|--|---|

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

265.	$b \cdot (-a) \cdot (-a)$	265.	$(-4n^2) \cdot 3n^3 \cdot (-n^2)$
	$-3c \cdot (-c) \cdot 2c^2$		$(-7m^3) \cdot (+2mn) \cdot (-m^2n)$
	$(-2b) \cdot (-d)$		$2R^2 \cdot (-3r) \cdot 5r \cdot R$
	$(-d) \cdot (-3d^2) \cdot 2d$		$-9ay^3 \cdot (-a^2y) \cdot (-1)$
	$h \cdot (-h^2k) \cdot kl$		$-0,1p^2q \cdot (-10pq^2) \cdot (-pq)$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lihtsal kujul:

266.	$(-212a) : 4$	266.	$(-75)ay^2 : (-15ay)$
	$(-16b) : 4$		$(+217a^2v) : (-7a^2)$
	$(-36cd) : 9$		$(-91p^2q^2) : 13pq$
	$(-56u) : (+8u)$		$(-5z^4) : (-5z^4)$
	$(-72gh) : (-18g)$		$(+a^3b^2c) : (-5a^2b)$
267.	$-(-3p^3)^3$	267.	$(-2u)^3(-u^2v)^4$
	$(-13)^2(-q)^4$		$- (+\frac{1}{3})^2(-\frac{1}{3}pq^2)^2$
	$(-1)(-2r^2)^6$		$(-0,7)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (0,2ax)^2$
	$(-1)^3 \cdot (-3s)^2$		$(+0,1)^2 \cdot (-1)^4 \cdot (100by)^2$
	$(-2)^4 \cdot (-5t^2)^2$		$(+0,2)^3 \cdot (-10c^2z)^3$

Kirjutada järgmised avaldised võimalikult lühidalt:

268.	$(-N) \cdot 3N^2$	268.	$4x^4 \cdot 5x^2 \cdot (-2x^6)$
	$a^{13} : a^9$		$(0,3v^2)^5$
	$(-4m)^3$		$(-2cw)^3 : (-w)^2$

Teostada järgmised liitmised ja lahutamised ning koondata saadused:

269.  $(7h^2 + 3h^2) - (2h + 1)$   
 $(15f^3 - 10f^3) + (3f^2 - 2)$   
 $(4H^2 - 2H^3 + H) - (4H^3 + 6H^2 + H - 5)$   
 $(Q^3 - 2Q^2 + 12Q - 7) - (20Q^2 - 11Q + 3)$   
 $7r^3 - (6r^3 - r^2 - 2r + 3)$

$$\begin{aligned}
269. \quad & u^3 - (u^3 - 1 - u^2 - 5u + 1) \\
& (3v^4 - v^2 - 1) - 3(v^4 - v^2 + 1) \\
& 2(x^5 - 3x^3 + 1) - 3(1 - x^3 - x) \\
& y^4 - (y^3 - 2y^2 - 1) - (2y^2 - 1) \\
& 7z^5 - (z^4 - z^3 - 2z - 1)
\end{aligned}$$

Arendada järgmised korrutised:

$$\begin{array}{ll}
270. \quad (2a + b) \cdot 3b & 270. \quad (x^2 - x + 1)(-3x) \\
(4a - 3b)(-4a^2) & (x^2 - 6x - 5)(+0,4x) \\
(2a + 7b)(+2ab) & (5x^2 + 7x - 12)(-0,5ax) \\
(4a - 6) \cdot \frac{1}{6} ab & (3x^2 - x + 4)(-\frac{1}{2}x^2) \\
(a^2 - 8b) \cdot (-\frac{3}{4}ab^2) & (10x^2 - 5x + 1)(-\frac{3}{10}ax^3)
\end{array}$$

Kirjutada järgmised avaldised sulgudeta ja murrujoon-  
teta:

$$\begin{array}{l}
271. \quad (x^2 - xy) : x \\
(x^5 - 7x^3) : x^3 \\
(34a^3x^2 - 51a^2x^3) : 17ax \\
(15c^2x^4 - 20cx^5) : 5cx^4 \\
(21d^3u^5 - 28d^5u^3) : 7d^3u^3 \\
271. \quad (36x^2 - 60ax + 84a^2) : 12 \\
(12a^2b - 6a^2b^2 + ab^3) : 3ab \\
(15h^5 + 4h^4 - 2h^3) : 5h^3 \\
(10N^3 + N^2) : 5N^2 \\
(21u^3 - 35u^2) : (-7u^2)
\end{array}$$

## Peatükk V.

### Arvutamise abivalemid.

#### § 45. Kaksliikmete korrutamine.

Olgu antud kaksliikmed  $a + b$  ja  $c + d$ . Nende korrutis on

$$(a + b) \cdot (c + d).$$

Et saada seda korrutist sulgudeta avaldisena ehk arendatud kujul, rakendame summa korrutamise seadust:

$$m \cdot (c + d) = mc + md.$$

Kõnesoleval juhul  $m = a + b$ . Seega

$$(a + b) \cdot (c + d) = (a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d.$$

Rakendades viimase võrduse paremal poolel uuesti sama seadust, saame

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Samal viisil saame

$$(a + b) \cdot (c - d) = ac + bc - ad - bd$$

ja

$$(a - b) \cdot (c - d) = ac - bc - ad + bd.$$

Tulemuse sõnastame nõnda:

kaksliikmete korrutise arendamiseks korrutame ühe kaksliikme kummagi liikme teise kaksliikme kummagi liikmega ja liidame saadused.

Näited.

1.  $(x + 1)(x + 2) = x^2 + x + 2x + 2 = x^2 + 3x + 2.$
2.  $(2a + u)(a - 3u) = 2a^2 + au - 6au - 3u^2 =$   
 $= 2a^2 - 5au - 3u^2.$

Ülesanded.

Arendada järgmised kaksliikmete korrutised:

- |   |  |
|---|--|
| <p>272. <math>(x + 2)(x + 1)</math><br/> <math>(x + 4)(x + 2)</math><br/> <math>(x - 2)(x + 3)</math><br/> <math>(x + 4)(x - 3)</math><br/> <math>(x - 5)(x - 1)</math></p> | <p>272. <math>(f - 3)(f + 2)</math><br/> <math>(g - 5)(g - 8)</math><br/> <math>(h + 6)(h - 10)</math><br/> <math>(i - 7)(i + 13)</math><br/> <math>(k + 12)(k - 5)</math></p> |
|---|--|

Arendada järgmised korrutised:

- |  |   |
|--|---|
| <p>273. <math>(7 - v)(v - 6)</math><br/> <math>\left(y - \frac{3}{4}\right)\left(y + \frac{2}{5}\right)</math><br/> <math>(z - 3)\left(z - \frac{5}{6}\right)</math><br/> <math>(g + 3)(g - 0,5)</math><br/> <math>(h - 2,5)(h + 1,4)</math></p> | <p>273. <math>(3 + u)(5 - u)</math><br/> <math>\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)</math><br/> <math>(4 - w)(w + 9)</math><br/> <math>(a + 1)(3,4 - a)</math><br/> <math>(0,8 + b)(b - 2,5)</math></p> |
| <p>274. <math>(a + 2b)(3a - b)</math><br/> <math>(c + 5d)(c - 12d)</math><br/> <math>(s - 4t)(s + t)</math><br/> <math>(s - 7t)(s + 6t)</math><br/> <math>(p - 5q)(p + 5q)</math></p>  | <p>274. <math>(2x + 3)(3x + 2)</math><br/> <math>(3y + 5)(2y - 4)</math><br/> <math>(5z - 1)(2z - 7)</math><br/> <math>(8f - 4)(f + 3)</math><br/> <math>(3g - 2h)(2g - 3h)</math></p>                                      |
| <p>275. <math>(x + 2a)(x - a)</math><br/> <math>(x + 3a)(x + 8a)</math><br/> <math>(x - 9,5)(x - 2,2)</math></p>   | <p>275. <math>(m - x)(3m + x)</math><br/> <math>(n + x)(n - x)</math><br/> <math>(6,5 - x)(1,2 + x)</math></p>  |
| <p>276. <math>(x - 7p)(x - 5p)</math><br/> <math>(x - h)(x + 2k)</math><br/> <math>(x + l)(m - 2x)</math></p>  | <p>276. <math>(x - 3q)(q + x)</math><br/> <math>(-x + v)(5x - v)</math><br/> <math>(-x - 5s)(x + s)</math></p>  |

Näited.

$$1. \quad 92 \cdot 103 = (100 - 8) \cdot (100 + 3) = \\ = 10000 - 800 + 300 - 24 = 9500 - 24 = 9476.$$

$$2. \quad 2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{4} = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \left(4 + \frac{1}{4}\right) = 8 + \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \\ = 8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 10\frac{5}{8}.$$

Rakendada binoomide korrutamise eeskirja järgmiste korrutiste arvutamiseks, kujutades tegureid summana või vahena:

277.	$97 \cdot 98$	277.	$499 \cdot 505$
	$103 \cdot 104$		$12\frac{1}{2} \cdot 12\frac{1}{3}$
	$104 \cdot 99$		$4\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{4}$
	$198 \cdot 203$		$15,5 \cdot 16,5$
	$299 \cdot 302$		$9,7 \cdot 10,2$

#### § 46. Summa ruudu valem.

Olgu antud kahe arvu summa  $a + b$ . Selle summa ruut on

$$(a + b)^2.$$

Selle avaldise arendamiseks rakendame kaksliikmete korrutamise eeskirja; saame:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2;$$

sellest järeldub, et

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu summa ruudu arendamisel tuleb liita esimese arvu ruut, esimese ja teise arvu kahekordne korrutis ja teise arvu ruut.

Näited.

- $(a + 3)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2 = a^2 + 6a + 9.$
- $(4a + 7b)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot 7b + (7b)^2 =$   
 $= 16a^2 + 56ab + 49b^2.$
- $108^2 = (100 + 8)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 8 + 8^2 =$   
 $= 10000 + 1600 + 64 = 11664.$

Ülesanded.

Arendada järgmiste avaldiste ruudud:

278.	$a + 1$	278.	$m + 6$	279.	$11 + x$	279.	$y + a$
	$a + 2$		$m + 7$		$12 + x$		$y + b$
	$a + 3$		$m + 8$		$13 + x$		$y + c$
	$a + 4$		$m + 9$		$14 + x$		$y + d$
	$a + 5$		$m + 10$		$15 + x$		$y + e$

280.	$n + 0,1$	280.	$b + \frac{1}{2}$	281.	$2a + b$	281.	$2x + 5a$
	$n + 0,3$		$b + \frac{1}{3}$		$16m + 2$		$4a + 5b$
	$n + 1,5$		$b + \frac{1}{4}$		$5 + 4n$		$3m + 6n$
	$n + 2,7$		$b + 1\frac{2}{3}$		$10n + m$		$7x + 2y$
	$n + 3,9$		$b + 2\frac{4}{5}$		$3x + 2$		$9c + 10d$

Arvutada järgmised väärtused, tarvitades summa ruudu valemit:

282.	$51^2$	$71^2$	$102^2$	$803^2$	$1010^2$
282.	$62^2$	$43^2$	$104^2$	$502^2$	$2005^2$

## § 47. Vahe ruudu valem.

Olgu antud kahe arvu vahe  $a - b$ . Selle vahe ruut on

$$(a - b)^2.$$

Selle avaldise arendamiseks rakendame kaksliikmete korrutamise eeskirja; saame:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2,$$

millest järeldub, et

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu vahe ruudu arendamisel tuleb esimese arvu ruudust lahutada esimese ja teise arvu kahekordne korrutis ja saadusega liita teise arvu ruut.

Näited.

$$1. (a - 5)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 5 + 5^2 = a^2 - 10a + 25.$$

$$2. (3a - 2b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = \\ = 9a^2 - 12ab + 4b^2.$$

$$3. 97^2 = (100 - 3)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = \\ = 10\,000 - 600 + 9 = 9409.$$

Ülesanded.

Arendada järgmiste avaldiste ruudud:

283. $c - 1$	283. $2 - k$	284. $\frac{1}{2} - p$	284. $\frac{1}{4} - x$
$c - 3$	$4 - k$	$\frac{1}{3} - p$	$1\frac{1}{2} - x$
$c - 5$	$6 - k$	$1\frac{1}{4} - p$	$2\frac{3}{4} - x$
$c - 7$	$8 - k$	$2\frac{2}{3} - p$	$3\frac{1}{4} - x$

285.  $d - 0,1$

$d - 0,2$

$d - 1,3$

$d - \frac{2}{3}$

$d - 1\frac{1}{2}$

286.  $2c + 1$

$3c + 2$

$3c + \frac{1}{6}$

$\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y$

$2\frac{1}{2}x - \frac{5}{12}x^2$

285.  $2w - 1$

$3w - 2$

$4w - 3$

$6w - \frac{5}{6}$

$5w - 1\frac{2}{5}$

286.  $4z + 7a$

$3z + b$

$2\frac{1}{2} - 5a$

$\frac{1}{3}x - \frac{3}{4}x^2$

$3\frac{1}{7}a + \frac{1}{22}b$

Arvutada vahe ruudu valemi abil järgmised väärtused:

287.  $39^2$      $99^2$      $18^2$      $197^2$      $1990^2$

287.  $37^2$      $89^2$      $68^2$      $998^2$      $1999^2$

### § 48. Kahe arvu summa ja vahe korrutise valem.

Kahe arvu  $a$  ja  $b$  summa ja vahe korrutis avaldub kujul  
 $(a + b)(a - b)$ .

Selle avaldise arendamine kaksliikmete korrutamise eeskirja järgi annab:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2,$$

millest saame

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Sõnastame tulemuse nõnda:

kahe arvu summa ja vahe korrutis võrdub nende arvude ruutude vahega.



2) Arvutamise abivalemite võib vahetada pooled. See laiendab veelgi nende valemite kasutamise võimalust arvutamisel ja avaldiste teisendamisel.

Näited.

1.  $1 + 2x + x^2 = (1 + x)^2$ .

2.  $4u^2 - u + \frac{1}{16} = (2u - \frac{1}{4})^2$ .

3.  $93^2 - 7^2 = (93 + 7)(93 - 7) = 100 \cdot 86 = 8600$ .

Ülesanded.

Kirjutada järgmised avaldised kahe arvu summa või vahe ruudu kujul:

288. 1.  $1 + 2a + a^2$

$4 + 4x + x^2$

$y^2 - 8y + 16$

$25a^2 + 30a + 9$

$36a^2 - 24ab + 4b^2$

2.  $x^2 + 6x + 9$

$25 + 10a + a^2$

$n^2 - 6n + 9$

$16x^2 - 24x + 9$

$100c^2 + 100bc + 25b^2$

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

289. 1.  $56^2 - 55^2$

$78^2 - 76^2$

$84^2 - 81^2$

$67^2 - 63^2$

$57^2 - 43^2$

2.  $49^2 - 48^2$

$62^2 - 59^2$

$79^2 - 21^2$

$59^2 - 11^2$

$121^2 - 21^2$

### § 49. Hulkliikmete korrutamine.

Hulkliikme korrutamine hulkliikmega taandub summa korrutamise seaduse rakendamisel hulkliikme korrutamisele üksliikmetega ja saadud korrutiste liitmisele. Hulkliikmete korrutamise eeskirja sõnastame nii:

kahe hulkliikme korrutise saamiseks tuleb korrutada ühe hulkliikme iga liige teise hulkliikme iga liikmega ja liita saadused.

Korrutise anname koondatud kujul.

Näide 1.

$$\begin{aligned} & (x^2 - 2x + 3)(x + 4) = \\ & = x^3 - 2x^2 + 3x + 4x^2 - 8x + 12 = \\ & = x^3 + 2x^2 - 5x + 12. \end{aligned}$$

Näide 2.

$$\begin{aligned} & (3ax^2 + 4bu^2)(ax + bu) = \\ & = 3a^2x^3 + 4abu^2x + 3abux^2 + 4b^2u^3. \end{aligned}$$

Polünoomide korral on ülevaatlikkuse mõttes otstarbekohane osakorrutisi kirjutada üksteise alla nii, et sarnased liikmed esineksid samas veerus. Puuduvate astmete kohad jäetakse tühjaks. Võte on sama, mida rakendame arvude korrutamisel.

Näide 3.

$$\begin{array}{r} (x^3 - 2x + 3)(x^2 + x - 1) \\ \hline x^5 \quad - 2x^3 + 3x^2 \\ \quad + x^4 \quad - 2x^2 + 3x \\ \quad \quad - x^3 \quad + 2x - 3 \\ \hline x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 + 5x - 3 \end{array}$$

Ülesanded.

Avada sulud ja koondada tulemused järgnevais avaldisis:

290.  $(a + b)(a + 2b) - (a - b)(a - 2b)$   
 $3n(n + 2) - (1 - 4n)(n - 5)$

290.  $(Q - q)(q - 1) - (Q + q)(q + 1)$   
 $(1 - p)(q - 1) - (1 - q)(p - 1)$

Korrutada

polünoom

polünoomiga

291.  $h^2 + 3$

$3h + 4$

$h^2 - h + 1$

$5h - 3$

291.  $3 - 4h - 5h^2$

$3h - 1$

$h^2 - 7h + 12$

$2h + 3$

ja kontrollida saadust, asetades andmeisse ja tulemustesse mingi  $h$  eriväärtuse, näiteks  $h = 2$  või  $h = 3$  või  $h = 10$ .

Igas alljärgnevas reas on kaks avaldist. Arendada nende avaldiste korrutis ja koondada saadused:

$$292. \quad \begin{array}{ll} x^2 + 2x + 1 & x + 1 \\ x^2 - 3x - 9 & x - 3 \end{array}$$

$$292. \quad \begin{array}{ll} 3x^2 + 4x - 6 & 2x - 5 \\ 1 - 7x + 15x^2 & 1 - 6x \end{array}$$

Arendada järgmised korrutised:

$$293. \quad \begin{array}{l} (3m + n + 1)(3m - n + 1) \\ (7p^2 - 8p + 3)(5p^2 + 3p + 4) \\ (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)(3x^3 + 2) \\ (y^4 + y^3 + y^2 + y + 1)(y^2 - 1) \end{array}$$

$$293. \quad \begin{array}{l} (2x - 1)(x - 2)(x - 4) \\ (3x - 2)(2x + 7)(x - 1) \\ (4x - 3)^2(3x - 1) \\ (5x - 4)(1 + 2x)^2 \end{array}$$

### § 50. Summa kuubi ja vahe kuubi valemid.

Olgu antud kahe arvu summa  $a + b$ . Selle summa kuup on  $(a + b)^3$ .

Selle avaldise arendame järgmiselt:

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Pärast koondamist saame:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Samal teel leiame, et

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Sõnastame tulemused nõnda:

kahe arvu summa kuubi arendamiseks tuleb liita esimese arvu kuup, esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis, esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis ning teise arvu kuup;

kahe arvu vahe kuubi arendamiseks tuleb esimese arvu kuubist lahutada esimese arvu ruudu ja teise arvu kolmekordne korrutis, vahega liita esimese arvu ja teise arvu ruudu kolmekordne korrutis ning saadusest lahutada teise arvu kuup.

Märkus. Et need sõnastused on pikad ja raskepärased, on otstarbekohane vastavad valemid meelde jätta otsekohe tähtvaldistena.

Näited.

- $(1 - x)^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3.$
- $(10,1)^3 = (10 + 0,1)^3 =$   
 $= 1000 + 3 \cdot 100 \cdot 0,1 + 3 \cdot 10 \cdot 0,01 + 0,001 =$   
 $= 1000 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 0,1 + 0,001 = 1030,301.$

Ülesanded.

Arendada järgmiste kaksliikmete kuubid:

294.	$x + 1$	294.	$3m + 4$
	$a + 1$		$2n + 3$
	$4 + c$		$4p + q$
	$d + 5$		$5r + 2$
	$7 + f$		$6u + 5$

295.	1. $x + \frac{1}{2}$	295.	1. $0,7 + e$
	$a - \frac{1}{3}$		$2f + 0,3$
	$\frac{c}{2} - 2$		$3g - 0,5$
	$\frac{c}{2} - \frac{1}{2}$		$2k + \frac{1}{2}$
			$\frac{1}{2}l - 4$

2.  $2a + 5b$

$4x + \frac{1}{2}y$

$\frac{2}{3} - \frac{3}{4}n$

$\frac{1}{2}a - 1\frac{2}{3}a^2$

$2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}x^2$

2.  $3a - 2b$

$\frac{1}{3}x + 3y$

$\frac{1}{4}m - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}a^2 + 2\frac{1}{4}a$

$1\frac{2}{3}x^2 - 1\frac{3}{4}x$

Arvutada:

296.  $(2,1)^3; (10,2)^3; (100,1)^3.$

296.  $(3,1)^3; (5,1)^3; (10,3)^3.$

§ 51. Korrutised  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$  ja  
 $(a - b)(a^2 + ab + b^2).$

Kui arendada korrutised  $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$  ja  $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , siis koonduvad tulemused õige lihtsateks avaldisteks, nimelt esimesel juhul arvude  $a$  ja  $b$  kuupide summaks ja teisel juhul samade arvude kuupide vaheks. Tõesti:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = \\ = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3;$$

niisiis

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Samuti

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = \\ = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3;$$

seega

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Näited. 1.  $(2 + a)(4 - 2a + a^2) = 2^3 + a^3 = 8 + a^3.$

2.  $(1 - x)(1 + x + x^2) = 1^3 - x^3 = 1 - x^3.$

Ülesanded.

Teisendada valemite põhjal järgmised korrutised:

297. 1.  $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$       2.  $(b - c)(b^2 + bc + c^2)$   
 $(a + x)(a^2 - ax + x^2)$        $(x - b)(x^2 + bx + b^2)$   
 $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$        $(u - v)(u^2 + uv + v^2)$   
 $(b + 2)(b^2 - 2b + 4)$        $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$   
 $(x + 1)(x^2 - x + 1)$        $(4 - y)(16 + 4y + y^2)$
297. 1.  $(a + d)(a^2 - ad + d^2)$       2.  $(6 + u)(36 - 6u + u^2)$   
 $(b - m)(b^2 + bm + m^2)$        $(6 - u)(36 + 6u + u^2)$   
 $(3 + x)(9 - 3x + x^2)$        $(a + 7)(a^2 - 7a + 49)$   
 $(4 - a)(16 + 4a + a^2)$        $(x^2 + 2x + 4)(x - 2)$   
 $(y - 5)(y^2 + 5y + 25)$        $(9 - 3a + a^2)(3 + a)$

§ 52. Ülesandeid kordamiseks.

Arendada järgmiste kaksliikmete ruudud:

298.  $3u - 5v$        $0,9 - w$        $2f + \frac{1}{2}g$   
 $\frac{3}{4} - x$        $1 - \frac{1}{2}s$        $\frac{1}{3}h - \frac{3}{5}k$
298.  $N - 0,7$        $\frac{2}{3}H + 6$        $ax - 3by$   
 $x + \frac{x}{3}$        $2u - \frac{u}{3}$        $pq - \frac{pq}{10}$

Arendada järgmised korrutised:

299.  $(a^2 + a)(a - 1)$       299.  $(m + n + 3)(m - n)$   
 $(m^3 - n)(m - n)$        $(c^2 + c + 3)(c^2 - 1)$
300.  $(n - 2)(n - 3)(n - 8)$   
 $(x + 1)(x - 5)(x + 6)$
300.  $(H - 1)(H - 2)(H - 3)$   
 $(D - 2)(D + 5)(D - 7)$

$$301. \quad (2a + b + 1)(2a - b - 1) \\ (m^2 - mn + n^2)(m^2 + mn + n^2)$$

$$301. \quad (4x^2 + 2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) \\ (2u^2 - 6u + 7)(3u^2 + 9u - 1)$$

Avada sulud järgmistes avaldistes ja kus võimalik, seal koondada tulemus:

$$302. \quad (5x - 1)(2x + 1)(2x - 1) - 20x^3 \\ 8a^3 - b^3 - (2a - b)^3 \\ (2F - 5)^3 - 2F(4F^2 + 3F - 6) \\ (u^3 - 1) - (u - 1)(u^2 + u + 1) \\ (2N - 1)(4N^2 + 2N + 1) - (2N - 1)^3$$

$$302. \quad (2a^2 + 3)(2a^2 - 3) - (2a^2 - 1)^2 \\ 2(b + 2u)(b - 2u) - 2(b - 2u)^2 \\ (3m - n)^2 - 2(3m - n)(m - 3n) + (m - 3n)^2 \\ [(3x^2 - x) + 1]^2 - (3x^2 - x)^2 + 2x(1 - 3x) \\ [x^2 + (x + 2)]^2 + [x^2 - (x - 2)]^2 - \\ - 2(x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$$

Arendada järgmiste kakliikmete kuubid:

$303. \quad 2a - 1 \\ \frac{1}{2} - c \\ F - 0,1 \\ hk + l \\ m + \frac{1}{3}m$	$303. \quad 0,4 - n \\ 1 - \frac{1}{3}p \\ \frac{3}{4}q + 2 \\ st - u \\ 2v - \frac{v}{3}$
---	--

Arendada järgmised korrutised:

$$304. \quad (m + p)(m^2 - mp + p^2) \\ (a - m)(a^2 + am + m^2) \\ (8 + x)(64 - 8x + x^2) \\ (5 - y)(25 + 5y + y^2) \\ (12 + a)(144 - 12a + a^2)$$

$$\begin{aligned}
304. \quad & (2 - v)(4 + 2v + v^2) \\
& (y - 7)(y^2 + 7y + 49) \\
& (11 + d)(121 - 11d + d^2) \\
& (a + 13)(a^2 - 13a + 169) \\
& (20 - b)(400 + 20b + b^2)
\end{aligned}$$

### § 53. Hulkliikme tegureiks lahutamine.

1. Teguri toomine sulgude ette.

Hulkliikme tegureiks lahutamise all mõistame hulkliikme teisendusi nii, et tema kui summa või vahe muutub korrutiseks, s. t. hulkliige teisendub üksliikmeks.

Summa korrutamise seaduse põhjal on

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Muidugi kehtib see võrdus ka siis, kui tema pooled vahetame, s. t. parema poole asemele kirjutame vasaku poole ja vasaku poole asemele parema poole. Nii saame

$$ab + ac = a(b + c).$$

Siit näeme, et kui summa koosneb niisugustest korrutistest, millel leidub samasugune tegur, siis võib selle teguri tuua sulgude ette. Nii saamegi summa  $ab + ac$  teisendada korrutiseks  $a(b + c)$ , või, nagu öeldakse, avaldise  $ab + ac$  lahutada tegureiks; need tegurid on käesoleval juhul  $a$  ja  $b + c$ .

Avaldis  $a(b + c)$  on üksliige, kuna temas viimaseks tehteks on korrutamine.

Vahe korrutamise seaduse põhjal on

$$a(b - c) = ab - ac.$$

Vahetades selle võrduse pooled saame

$$ab - ac = a(b - c).$$

Üldiselt võime öelda, et

kui hulkliikme liikmetel leidub ühesugune tegur, siis saab seda hulkliiget teisendada korrutiseks (ehk lahutada tegureiks), tuues selle teguri sulgude ette.

Näited.

$$3a + 3b = 3(a + b).$$

$$5x + 5a - 10 = 5(x + a - 2).$$

2. Ruutude vahe valemi rakendamine.

Eespool selgus, et kahe arvu summa ja vahe korrutise valemit vahetatud pooltega kirjutades saame nn. ruutude vahe valemi

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

mille võime sõnastada nii:

kahe arvu ruutude vahe võrdub nende arvude summa ja vahe korrutisega.

See valem võimaldab kahe arvu ruutude vahe kujulise hulkliikme teisendada korrutiseks, mille tegureiks on nende arvude summa ja vahe.

Ka numbrilise arvutamise alal on sellel teisendusel suur praktiline väärtus, sest see hõlbustab tunduvalt antud arvude ruutude vahe arvutamist; ruutude vahe arvutamise vajadus aga esineb matemaatiliste probleemide lahendamisel väga sageli.

Näited.

$$4 - x^2 = (2 + x)(2 - x).$$

$$23^2 - 13^2 = (23 + 13)(23 - 13) = 36 \cdot 10 = 360.$$

Ülesanded.

Lahutada tegureiks järgmised avaldised:

305.	$2a + 2b$	305.	$8a - 8b$	306.	$15m + 15n$
	$7x + 7y$		$9x - 9y$		$32a - 32b$
	$3m + 6n$		$9c - 18$		$mn + ml$
	$4a + 4b + 4$		$3x + 3y - 6$		$16a - 32$
	$10b + 20c + 20$		$12 - 3m + 6$		$8b + 4$

306.	$bs + 2b$	307.	$x^2 - y^2$	307.	$m^2 - n^2$
	$a - a^2$		$a^2 - n^2$		$a^2 - 49$
	$am + a$		$25 - a^2$		$64 - x^2$
	$cn - n$		$m^2 - 16$		$100 - b^2$
	$2ab + ab$		$36 - b^2$		$36 - 4a^2$

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused, neid avaldised enne tegureiks lahutades:

308.	$6 \cdot 18 + 6 \cdot 2$	308.	$5 \cdot 19 - 5 \cdot 18$
	$7 \cdot 4,6 + 7 \cdot 5,4$		$7 \cdot 17,6 - 7 \cdot 5,6$
	$14 \cdot 9,8 + 14 \cdot 0,2$		$8,5 \cdot 13,6 - 8,5 \cdot 3,6$
	$0,4 \cdot 4,7 + 0,4 \cdot 5,3$		$9,35 \cdot 0,5 - 3,35 \cdot 0,5$
	$2,5 \cdot 2,7 + 2,5 \cdot 3,3$		$12,46 \cdot 1,25 - 2,46 \cdot 1,25$
309.	$12 \cdot 8 + 12 \cdot 2$	309.	$16 \cdot 19 + 16 \cdot 6$
	$3,5 \cdot 6,4 - 3,5 \cdot 5,4$		$38,2 \cdot 74 + 38,2 \cdot 26$
	$9,2 \cdot 29 - 9,2 \cdot 28$		$5,4 \cdot 7,3 - 5,4 \cdot 6,3$
	$42 \cdot 16 + 42 \cdot 14$		$6,7 \cdot 8,2 - 6,7 \cdot 6,2$
	$5,3 \cdot 68 + 5,3 \cdot 32$		$27 \cdot 78 + 27 \cdot 22$

Rakendada ruutude vahe valemit järgmiste väärtuste arvutamiseks:

310.	$21^2 - 19^2$	310.	$157^2 - 143^2$	311.	$202^2 - 198^2$
	$62^2 - 58^2$		$25,1^2 - 24,9^2$		$1017^2 - 983^2$
	$101^2 - 99^2$		$1,55^2 - 1,45^2$		$315^2 - 285^2$
	$11^2 - 9^2$		$1,65^2 - 1,35^2$		$1018^2 - 983^2$
	$33^2 - 27^2$		$2,75^2 - 2,25^2$		$1019^2 - 981^2$
311.	$53^2 - 43^2$	312.	$37^2 - 35^2$	312.	$49^2 - 44^2$
	$67^2 - 57^2$		$48^2 - 45^2$		$63^2 - 57^2$
	$130^2 - 129^2$		$123^2 - 120^2$		$139^2 - 132^2$
	$247^2 - 246^2$		$237^2 - 233^2$		$1234^2 - 1226^2$
	$551^2 - 549^2$		$342^2 - 338^2$		$2576^2 - 2567^2$

§ 54. Ülesandeid kordamiseks.

313. Tabeli andmete põhjal arvutada puuduvad suurused:

Harjut. nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
$a$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	2	3	$4\frac{1}{2}$	3,2	1,8
$b$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{7}$	0,5	1,02
$a + b$								
$a - b$								
$a \cdot b$								
$a : b$								
$(a + b)(a - b)$								
$(a + b) : (a - b)$								
$a \cdot b + a : b$								

314. Kirjutada matemaatilises lühikirjas arvude  $a$  ja  $b$  summa ja vahe jagatis;  
 ruutude summa;  
 ruutude vahe;  
 kuupide summa;  
 summa kuup.

314. Kirjutada algebra sümboolite abil  
kahe arvu ruutude summa jagatis nende arvude  
summaga;  
kahe arvu ruutude vahe jagatis nende arvude  
korrutisega.

315. Kaks lennukit stardivad Tallinnast ühel ajal len-  
nuks Riiga. Üks lendab kiirusega  $a$  km minutis, teine kiiru-  
sega  $b$  km minutis. Kui suur on nende kaugus  $c$  minuti  
pärast, oletades, et  $a > b$ ?

315. Kaup omahinnaga  $a$  rubla müüdi  $p\%$ -lise juurde-  
hindlusega. Kui suur on kauba müügihind?

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

$$316. \frac{108 + 17}{25} \cdot \frac{15 - 10}{17 + 8}$$

$$316. \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{120}{5 + 7} \cdot \frac{28 + 22}{19 - 14}$$

$$\left(12\frac{1}{2} + 4\frac{1}{6}\right) : \left(7\frac{1}{2} - 4\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{2 \cdot (3 + 7)}{38 - 13} - \frac{4}{7 - 2}$$

$$\frac{\left(2\frac{1}{2} - 1\frac{14}{15}\right) \cdot 1\frac{1}{5}}{5\frac{1}{2} - 2\frac{1}{10}}$$

$$\frac{24 + 36}{(7 - 6) \cdot 5} - \frac{6(101 - 62)}{(13 + 14) - 2}$$

$$\left(3\frac{3}{7} \cdot 3\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{11} - \frac{27}{55}\right)$$

$$\frac{1\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}}{3 \cdot (18 - 16)} + \frac{3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}}{3 \cdot (13 - 12)}$$

$$2\frac{1}{4} : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{6}\right) : 3\frac{1}{6}$$

Leida järgmiste avaldiste hulgast need, millede numbrilist väärtust on võimalik arvutada, teades, et  $a + b = 8$ , ja arvutada nende väärtused:

317.  $(a + 2) + b$

$2a + b$

$a + (b - 3)$

$3a + 3b$

$(a + b)^2$

317.  $a^2 + ab$

$\frac{a}{5} + \frac{b}{5}$

$\frac{a}{3} + \frac{b}{3}$

$a + \frac{b}{4}$

$(5 + b) + a$

Leida järgmiste avaldiste hulgest need, mille numbrilist väärtust on võimalik arvutada, teades, et  $ab = 15$ , ja arvutada nende väärtused:

318.  $3a \cdot b$

$a(b + 2)$

$a \cdot \frac{b}{5}$

$ab + 7$

$a^2b^2$

318.  $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$

$a + b$

$a - b$

$a \cdot b + 3$

$a \cdot \frac{b}{4}$

319. Kujutada graafiliselt avaldise  $y = 2a$  numbrilised väärtused, mis vastavad  $a$  täisarvulistele väärtustele 0-st kuni 6-ni.

Saadud graafikust määrata  $y$ -i väärtused, mis vastavad  $a$  väärtustele  $2\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{1}{2}$ ,  $4\frac{1}{2}$ ,  $5\frac{1}{2}$ .

Kui suur on  $a$ , kui  $y$  on 1; 3;  $6\frac{3}{4}$ ?

319. Kujutada graafiliselt avaldise  $y = 1,2x$  numbrilised väärtused, võttes  $x$ -i väärtusteks täisarvud 0-st kuni 10-ni.

Saadud graafikust määrata  $y$ -i väärtused, kui  $x$  on 2,5; 3,5; 4,5; 5,25.

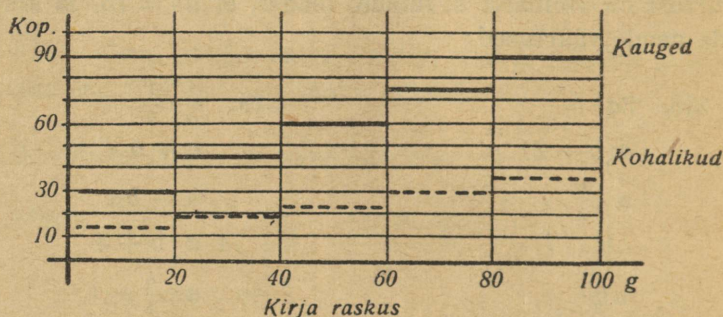
Kui suur on  $x$ , kui  $y$  on 4; 5; 7; 9?

320. Avaldada  $n$ -nda paarisarvu ruut.

320. Avaldada  $n$ -nda paaritu arvu kuup.

321. Joonisel 16 on esitatud kirjade postitariifi diagramm. Mitme kopika väärtuses tuleb panna postmarke kaugele kirjale, kui kiri kaalub

15, 22, 28, 45, 63, 69 grammi?



Joonis 16.

321. Mitmekopikalise postmargiga tuleb frankeerida eelmises ülesandes antud raskustega kohalikud kirjad?

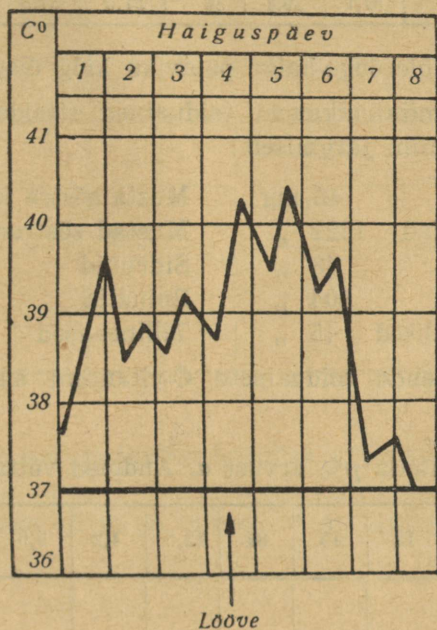
322. Rahakaartide postitariif on järgmine:

Rahakaardi pealt kuni 30 rbl. — 60 kop.; üle 30 rbl. kuni 50 rbl. — 1 rbl.; üle 50 rbl. kuni 100 rbl. — 2 rbl.; rahakaardi pealt üle 100 rbl. iga järgmise täie rubla või selle osa pealt — 2 kop.

Valmistada kuni 100-rublaste rahakaartide postitariifi diagramm.

322. Panderollide (ristpaela-saadetiste) postitariif on järgmine: kuni 50 g — 20 kop.; iga järgmise 50 g või selle osa pealt — 10 kop.

Esitada panderollide postitariifi diagramm.



Joonis 17.

323. Joonisel 17 on esitatud leetrihaige palavikudiagramm. Mitmendal haiguspäeval on leetrihaige palavik kõige kõrgem?

Mitmendal haiguspäeval hakkab temperatuur langema?

324. Tuulerõuge-haige palaviku mõõtmise tulemused on antud järgmises tabelis:

Mõõtmise aeg	H a i g u s p ä e v a d						
	1	2	3	4	5	6	7
Hommikul	—	38,7	39,1	38,4	36,8	36,3	36,5
Keskpäeval	—	39	38,5	38	37,2	36,5	36,2
Õhtul	37,7	39,4	39	37,5	37,3	36,8	36,5

Esitada tuulerõuge-haige palaviku kulg diagrammis.

325. Vitamiinirikkamad toiduained sisaldavad iga kg kohta C-vitamiini järgmiselt:

Aedmaasikad	43 mg	Musta sõstra lehed	327 mg
Kibuvitsamarjad	1222 „	Mustad sõstrad	128 „
Lillkapsad	43 „	Sidrunid	56 „
Metsvabarnad	104 „	Spinatid	32 „
Murulaugupealised	45 „	Tillipealised	123 „

Esitada nende toiduainete C-vitamiini sisaldavus diagrammis.

326. Arvutada  $p\%$  arvust  $a$ . Andmed võtta tabelist.

$a \backslash p$	12	45	84	12,5	4,2	9,6	2,8	37,5
60								
6								
68								
280								
135								
65								

327. Leida, mitu protsenti on arv  $a$  arvust  $b$ . Andmed võtta tabelist.

$b \backslash a$	8	3,8	45	13	5,6	46	40	7,6
40								
7,6								
170								
128								
24								
260								

328. Kolhoosi ristküliku-kujulise viljapuuaija pikkus oli  $a$  meetrit ja laius  $b$  meetrit. Aia suurendamise otstarbel lisati pikkusele 15 m ja laiusele 8 m. Kui palju suurenes aia pindala?

328. Maja põhijooniseks on ristkülik, mille mõõted on  $a$  ja  $b$  meetrit. Maja ümber jäetakse  $n$  meetri laiune muru-riba. Kui suur pindala jääb muru alla?

Arvutada järgmised väärtused, tarvitades kohaselt summa ja vahe ruudu valemeid:

329.  $41^2$      $83^2$      $29^2$      $299^2$      $890^2$

329.  $72^2$      $47^2$      $38^2$      $603^2$      $999^2$

330. Tabeli andmete põhjal täita tühjad kohad tabelis:

Harj. nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
$a$	3	-8	12	10	-2	3	-16	-5
$b$	6	4	-3	5	1	-9	-8	-10
$a + b$								
$a - b$								
$a \cdot b$								
$a : b$								
$\frac{a + b}{a - b}$								
$\frac{a - b}{a \cdot b}$								

Arendada järgmised avaldised ning anda lõpptulemused teguriteks lahutatud kujul:

331.  $(3 + a)^2 + (a - 3)^2$   
 $(5 + n)(5 - n) - (5 - n)^2$   
 $(2 + x)^3 + (2 - x)^3$   
 $(a - n)(a^2 + an + n^2) - (a - n)^3$   
 $2(3a - b) + 3(4 - 2a)$

331.  $(4 + b)^2 + (b - 4)^2$   
 $(3 + a)(3 - a) - (3 - a)^2$   
 $(1 + y)^3 + (1 - y)^3$   
 $(b - x)(b^2 + bx + x^2) - (b - x)^3$   
 $2(10 - 5x) + 5(2x - c)$

$$\begin{aligned}
 332. \quad & (4 + m)(4 - m) + (4 + m)^2 \\
 & (c + 3)^2 - (c - 3)^2 \\
 & (a + 2)^3 - (a - 2)^3 \\
 & (a + x)(a^2 - ax + x^2) - (a + x)^3 \\
 & 3(4d + 2x) - 2(3x - 6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 332. \quad & (6 + n)(6 - n) + (n + 6)^2 \\
 & (k + 7)^2 - (k - 7)^2 \\
 & (m + 1)^3 - (m - 1)^3 \\
 & (b + c)(b^2 - bc + c^2) - (b - c)^3 \\
 & 3(8a + 4y) - 4(3y - 1)
 \end{aligned}$$

Lahendada võrrandid:

$$\begin{aligned}
 333. \quad & 8(2x + 3) + 6(x - 4) = 66 \\
 & (5 + x)(2x - 3) - 2(x^2 + x - 8) = 16 \\
 & (3 + x)^2 + (4 + x)(4 - x) = 37 \\
 & (3 + x)^3 - x^2(9 + x) = 81 \\
 & (x - 7)(x^2 + 7x + 49) - x(x^2 - 2) = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 333. \quad & 7(5x - 4) - 8(4x - 5) = 24 \\
 & (9 - 3x)(4x + 1) - 6(2 + x - 2x^2) = 51 \\
 & (5 + x)(5 - x) + (x + 6)^2 = 73 \\
 & (x + 2)^3 - x^2(x + 6) = 56 \\
 & (x + 4)(x^2 - 4x + 16) + x(5 - x^2) = 79
 \end{aligned}$$

334. Kooli spordiringis ja kirjandusringis on kokku 197 liiget. Mitu liiget on kirjandusringis, kui spordiringi liikmete arv on kirjandusringi liikmete arvust 83 võrra suurem?

334. Kahe arvu summa on 342. Leida need arvud, kui üks on teisest 28 võrra väiksem.

335. Raamatukogus on eesti-, vene- ja ingliskeelseid raamatuid kokku 624 köidet. Venekeelseid on 2 korda rohkem kui ingliskeelseid ja eestikeelseid 3 korda rohkem kui ingliskeelseid raamatuid. Mitu eestikeelset raamatut on raamatukogus?

335. Kolme arvu summa on 168. Leida need arvud, kui teine on esimesest 3 korda suurem ja kolmas on esimesest 4 korda suurem.

336. Mitu grammi vasevitrioli peab lahustama 100 grammis vees, et saaks kaalu järgi 25%-lise lahu?

336. Mitu grammi keedusoola tuleb lahustada 200 grammis vees, et saaks 20%-lise soolalahu?

337. Kahepoolne kang on tasakaalustatud 6 kg ja 10 kg raskustega, mis asetsevad teineteisest 40 cm kaugusel. Leida kangi õlgade pikkused.

337. Kahepoolne kang on tasakaalustatud kahe koormusega, mis kokku on 630 g. Kangi õlgade pikkused on 20 cm ja 50 cm. Leida kummagi koormuse raskus.

338. Kolhoosis peksti masinaga 9 päeva jooksul 172 koormat rukist ja suvivilja. Masin peksab päevas kas 18 koormat rukist või 20 koormat suvivilja. Mitu päeva kulub kolhoosis rukki peksemiseks ja mitu päeva suvivilja peksemiseks?

338. Masinatehas tootis 10 päevaga 90 põllutöömasinat — viljaniitjaid ja hobuserehasid. Tehas toodab päevas kas 5 viljaniitjat või 15 hobusereha. Mitu päeva kulutas tehas viljaniitjate ja mitu päeva hobuserehade valmistamiseks?

## GEOMEETRIA.

### Peatükk VI.

#### Ring. Nurk.

##### § 55. Ring ja ringjoon.

Mõnedel meile tuttavatel esemetel, nagu ämbri ja toobri põhjal, paja kaanel on ringi kuju.

Ringi servjoont nimetame ringjooneks.

Ümmarguse teeklaasi põhi on ring, selle põhja serv on ringjoon, ka ülemine serv sellel teeklaasil on ringjoon; kausi ja ämbri ülemised servad on samuti ringjooned.

Kindlasti leidub ka meie klassiruumis asju, millel esinevad ring ja ringjoon, näiteks ümmargune pliatsipõhi ja selle põhja servjoon.

Ringjoon tekib pöörlemisel.

Näiteks kui vokiratas pöörleb, siis iga tema punkt, iga kodaraots kujundab ringjoone. Samal viisil tekib ringjooni, kui mõne asja tsentrifugaalmasina abil pöörlema paneme.

Väga kerge on ringjoont sirkliga joonestada. Kuid ka sirkli puudumisel saame ringjoont joonestada. Siis vajame tükki niiti või pabeririba, nõöpnõela ja pliatsit.

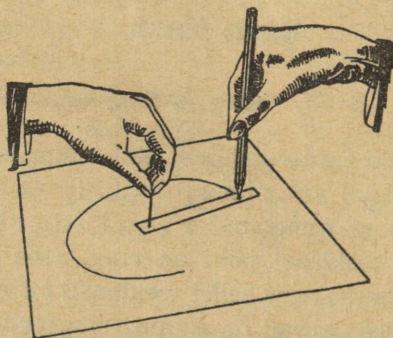
Asetame paberi tasasele lauale. Kinnitame niidi või pabeririba ühe otsa mingisse kindlasse punkti. Niidi teise otsa külge kinnitame pliatsi; kui niidi asemel on pabeririba, siis pistame pliatsi otsa paberiribast läbi. Nüüd hakkame

niiti või pabeririba pöörama, nii et viimane on kogu aeg parajasti pingul. Pöörämist toimetame vähemalt nii kaua, kuni pliitsi ots on jõudnud lähteasendisse, siis on pliitsi ots joonestanud ringjoone.

Kui paberilehest ringjoont mööda tükk välja lõigata, siis saame ringi.

Nii võime ütelda, et

**ring on ringjoonega piiratud tükk tasapinnast.**



Joonis 18.

Punkti, kuhu ringjoone joonestamisel pistsime nõela, nimetame **k e s k p u n k t i k s**. Niidi või pabeririba tüki ulatuse nõela ja pliitsi vahel nimetame **r a a d i u s e k s**.

**Raadius ühendab ringi keskpunkti ringjoone punktiga.**

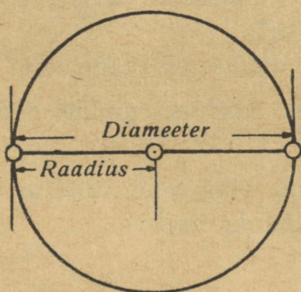
Kui raadiust pikendada üle keskpunkti teisele poole kuni ringjooneni, siis saame **l ä b i m õ õ d u** ehk **d i a m e e t r i**.

Ringjoone joonestamise viisist leiame tema omadused.

1. Ringjoone joonestamisel peab paberileht asetsema tasasel pinnal; sellest näeme, et ringjoon on **t a s a p i n n a - l i n e** kõverjoon.

2. Ringjoon ei ole enne valmis, kui pliiatsi ots jõuab sinna kohta, kust ta liikuma hakkas, nii et joonestatud kõverjoon saab kinniseks. Sellest selgub, et ringjoon on kinnine kõverjoon.

3. Joonestamise ajal on niit või pabeririba pingul. Nii asetseb pliiatsi ots keskpunktist joonestamise ajal alati ühel ja samal kaugusel, seega ka pliiatsiga märgitud ringjoone punktid asetsevad keskpunktist ühel ja samal kaugusel.



Joonis 19.

Nii võime öelda, et

**ringjoon on tasapinnaline kinnine kõverjoon, mille kõik punktid asetsevad ühest kindlast punktist võrdsetel kaugustel.**

Joonisest näeme, et diameeter koosneb kahest raadiusest. Kui raadiuse pikkus tähistada tähega  $r$  ja diameetri pikkus tähega  $d$ , siis võime kirjutada diameetri jaoks valemi

$$d = 2r.$$

**Ülesanded.**

339. Nimetada viis eset, kus esineb ring ja ringjoon.

339. Joonestada vabalt võetud raadiusega ringjoon ja mõõta selle diameetri pikkus.

340. Mitu diameetrit võib joonestada ühes ringis? Mis võib väita ühe ja sama ringi diameetrite pikkuste kohta?

341. Arvutada valemi  $d = 2r$  abil ringi diameeter  $d$ , kui raadiuse  $r$  pikkus on 1 cm; 2 cm; 2,5 cm; 3 cm; 3,5 cm; 4 cm; 5 cm; 6 cm, ning täita tabel:

$r$	1	2	2,5	3	3,5	4	5	6
$d$								

Kuidas muutub diameetri väärtus  $d$  raadiuse  $r$  kasvades 2-, 3- jne. kordseks?

Kuidas oleneb diameeter raadiusest?

341. Avaldada raadiuse pikkus  $r$  diameetri pikkuse  $d$  kaudu.

Kuidas muutub ringjoone raadius  $r$ , kui diameeter  $d$  kasvab 2-, 3-, 4- jne. kordseks?

## § 56. Kaar. Kaare mõõtmine kaarekraadides. Sektor.

Joonestame paberile ringjoone ja lõikame seda ringjoont mööda paberist ringi välja.

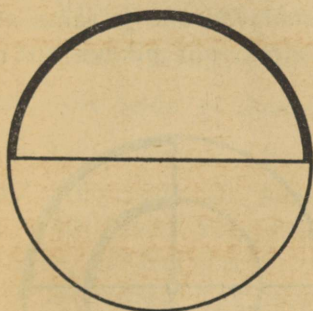
Murrame nüüd selle ringi pooleks, voltides pooled nii kokku, et üks pool parajasti teist katab. Kui me nüüd ringi uuesti lahti murrame ja tasapinnale laotame, siis näeme, et murdejooneks on diameeter ning ring on jagunenud kaheks poolringiks ehk sektoriks; ringjoon jagunes seejuures kaheks võrdseks kaareks.

Joonisel on kumbki kaar joonestatud eri jämedusega.

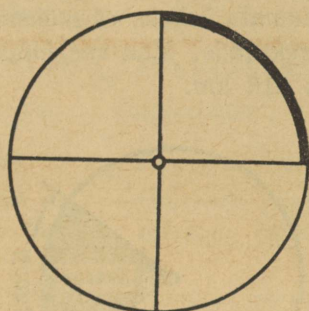
Murrame paberist väljalõigatud ringi uuesti pooleks ja voldime ta kahekordseks kokku; saadud kahekordse poolringi murrame veel kord pooleks ning voldime ta neljakordseks.

Voldime oma ringi uuesti lahti. Nüüd on ring jaotatud neljaks võrdseks osaks, neljaks sektoriks. Ringjoon on jagunenud neljaks võrdseks kaareks ja iga kaar on veerand ringjoone pikkusest.

Murdejoonteks on kaks diameetrit ja need on teineteisega risti.



Joonis 20.



Joonis 21.

Me võime nüüd öelda, et

**kaar on tükki ringjoonest.**

Edasi võime öelda, et

**sektor on kaarega ja kahe raadiusega piiratud tükki ringist.**

Kui meil õnnestuks kaar, mis on veerand ringjoonest, kas voltimise või mõnel muul teel jaotada 90-ks võrdseks osaks, siis saaksime väikese kaare, mida nimetame **kaarekraadiks**. Seega

**kaarekraad on  $\frac{1}{90}$  ringjoone veerandist.**

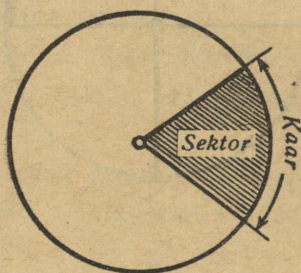
Veerand ringjoonest on seega 90 kraadi. Kraadi märkeks on väike null, mis kirjutatakse kraadide arvu juurde paremale poole üles. Nii kirjutame lühidalt

**veerand ringjoonest on  $90^\circ$ ,**

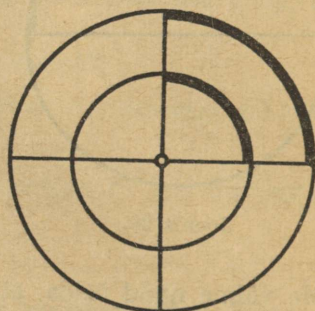
**ringjoon on  $360^\circ$ .**

Et kaarekraad on murdosa ringjoonest, siis on pikemal ringjoonel ka pikem kaarekraad. Seega kaare kraadide arv ei määra kaare pikkust, vaid määrab ainult seda, millise murdosa see kaar moodustab sellest ringjoonest, mille kaar ta on.

Joonisel 23 on esitatud kahe ringjoone 90-kraadilised kaared. On näha, et üks neist on tunduvalt pikem kui teine, vaatamata sellele, et mõlemad sisaldavad ühe ja sama arvu kaarekraade. Maa meridiaani kaarekraadi pikkus on näiteks 110 km.



Joonis 22.



Joonis 23.

Kui sektorit piirav kaar on näiteks  $45^\circ$ , siis ütleme selle sektori kohta, et see on 45-kraadiline sektor. Kui sektori kaar on  $30^\circ$ , siis see sektor on 30-kraadiline.

#### Ülesanded.

342. Joonestada paberilehele 10-sentimeetrilise raadiusega ringjoon; voltida see neljakordseks kokku; pärast lahtivoltimist lõigata sellest ringist veerand välja; nii oleme saanud 90-kraadilise sektori, mida piirav kaar on 90 kaarekraadi. Jaotada see kaar sirkli abil proovimise teel 9-ks võrdseks kaareks; nii saadud iga kaar on siis  $10^\circ$ . Iga jao

tuskriipsu juurde kirjutame vastava kraadide arvu:  $0^{\circ}$ ;  $10^{\circ}$ ;  $20^{\circ}$  jne. kuni  $90^{\circ}$ .

Iga 10-kraadiline kaar jaotada veel silma järgi 10-ks võrdseks kaareks.

Mitu kraadi on iga niiviisi tekkinud väike kaar?

343. 1. Mitu kraadi on pool ringjoonest?

2. Mitu kraadi on kolmveerand ringjoonest?

3. Lause asemel „kaarekraad on  $\frac{1}{90}$  ringjoone veerandist“ võib öelda, et „kaarekraad on ... ringjoonest“.

4. Lause asemel „kaarekraad on  $\frac{1}{90}$  ringjoone veerandist“ võib öelda, et „kaarekraad on ... ringjoone poolest“.

5. Mitmendik ringjoonest on  $30^{\circ}$ -line,  $60^{\circ}$ -line,  $180^{\circ}$ -line,  $20^{\circ}$ -line,  $45^{\circ}$ -line kaar?

6. Mitmendik ringjoonest on  $90^{\circ}$ -line,  $270^{\circ}$ -line,  $120^{\circ}$ -line,  $10^{\circ}$ -line,  $15^{\circ}$ -line kaar?

344. Mitmekraadiline on sektor, kui teda piirav kaar on  $60^{\circ}$ ,  $50^{\circ}$ ,  $40^{\circ}$ ,  $30^{\circ}$ ,  $25^{\circ}$ ?

344. Mitmekraadiline on sektor, kui teda piirav kaar on  $15^{\circ}$ ,  $35^{\circ}$ ,  $45^{\circ}$ ,  $55^{\circ}$ ,  $75^{\circ}$ ?

345. Mitmendik ringist on  $45^{\circ}$ -line,  $90^{\circ}$ -line,  $180^{\circ}$ -line,  $120^{\circ}$ -line,  $60^{\circ}$ -line sektor?

345. Mitmendik ringist on  $30^{\circ}$ -line,  $15^{\circ}$ -line,  $10^{\circ}$ -line,  $12^{\circ}$ -line,  $22^{\circ}$ -line sektor?

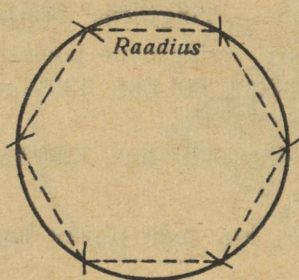
346. Mitmekraadilist sektorit piirab diameeter ja pool ringjoonest?

346. Mitmekraadilist sektorit piiravad kaks teineteisega risti asetsevat raadiust ja veerand ringjoonest?

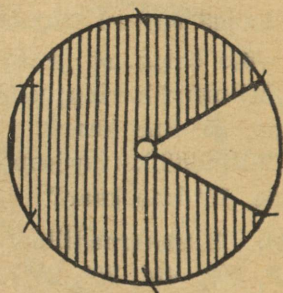
347. Joonestada vabalt ringjoon ja jaotada see kuueks võrdseks kaareks, nagu näidatud joonisel 24.

347. Jaotada ring kuueks võrdseks sektoriks.

348. Jaotada ringjoon 3-ks võrdseks kaareks.  
 348. Jaotada ring 3-ks võrdseks sektoriks.  
 349. Joonestada sektor, mis on  $\frac{1}{6}$  ringist.  
 349. Joonestada sektor, mis on  $\frac{1}{3}$  ringist.  
 350. Joonestada sektor, mis on  $\frac{2}{3}$  ringist.  
 350. Missugune osa ringist on joonisel 25 viirutatud sektor?



Joonis 24.



Joonis 25.

351. Joonestada  $60^\circ$ -line sektor.  
 351. Joonestada  $120^\circ$ -line sektor.  
 352. Joonestada  $240^\circ$ -line sektor.  
 353. Mitu kaarekraadi on  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{5}$ ,  $\frac{1}{6}$ ,  $\frac{1}{9}$  ringjoonest?  
 353. Mitu kaarekraadi on  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{12}$ ,  $\frac{1}{30}$ ,  $\frac{1}{15}$ ,  $\frac{1}{10}$  ringjoonest?  
 354. Mitu kraadi on kaar, mis on  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{5}{8}$ ,  $\frac{7}{12}$  ringjoonest?  
 354. Mitu kraadi on kaar, mis on  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{3}{8}$ ,  $\frac{5}{12}$ ,  $\frac{8}{15}$ ,  $\frac{29}{30}$  ringjoonest?

355. Mitu kraadi on kaar, mis on ringjoonest 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5?

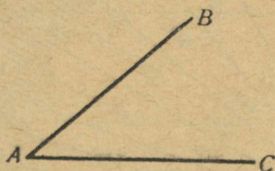
355. Mitu kraadi on kaar, kui ta on ringjoonest 0,25; 0,75; 0,33; 0,15; 0,02?

### § 57. Nurk. Nurga mõõtmine nurgakraadides.

Raadiused, mis sektorit piiravad, moodustavad sektori nurga. Kui raadiused on teineteisega risti, siis moodustavad nad täisnurga.

Kui ühest ja samast punktist joonestada kaks sirgjoont niiviisi, nagu raadiused on joonestatud ringi keskpunktist, siis moodustavad ka need sirgjooned nurga.

Nurka moodustavad sirgjooned on nurga haarad; haarade ühine punkt on nurga tipp.



Joonis 26.

Joonisel 26 esitatud nurka tähistatakse sümboliga  $\hat{A}$  ehk  $B\hat{A}C$ .

Võtame jälle paberist ringi ja jaotame ta voltimise teel neljaks võrdseks sektoriks. Iga niiviisi saadud sektori nurk on täisnurk. Lõikame ühe täisnurgaga sektori ringist välja. Voltimise teel saame täisnurga kergesti jaotada. Kui on

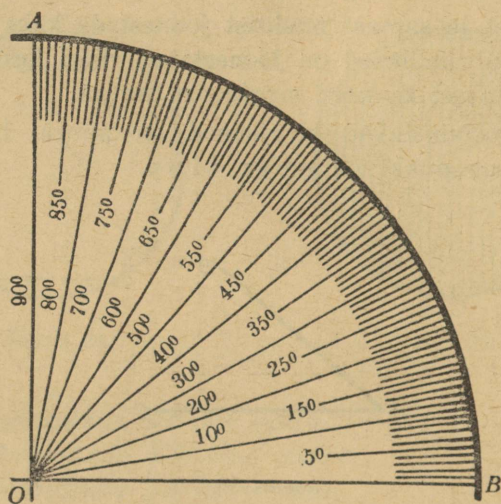
õnnestunud täisnurk 90-ks võrdseks osaks jaotada, siis oléme saanud nurgakraadid.

Nurgakraad on  $\frac{1}{90}$  täisnurgast.

Nurgakraadi kasutame ühikuks nurga mõõtmisel.

Täisnurga jaotamist 90-ks võrdseks osaks saab teostada kaarekraadide abil.

Saab näidata, et kui meie täisnurgaga sektori kaare jaotame kaarekraadideks, s. o. 90-ks võrdseks osaks, ja jao-



Joonis 27.

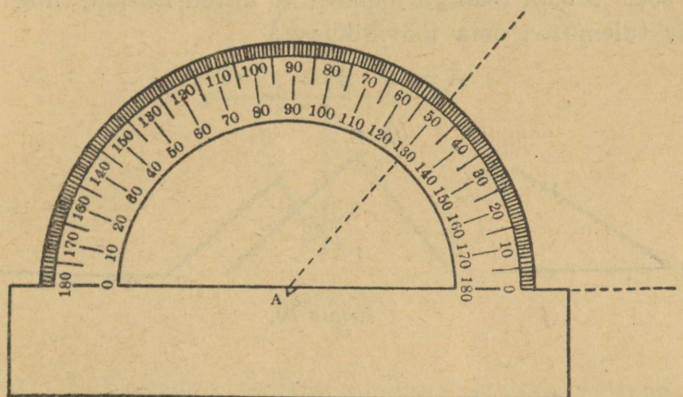
tuspunktid ühendame sektori nurga tipuga, siis need ühendusjooned jaotavad ka nurga 90-ks võrdseks osaks, seega nurgakraadideks (vt. joonis 27).

Nii on meie sektori kaar 90 kaarekraadi ja sektori nurk 90 nurgakraadi.

Igal sektoril on tema kaarekraadide arv võrdne tema nurgakraadide arvuga.

Iga nurga tipu ümber võib joonestada kaare, nii et see lõikub nurga haaradega; nimetame seda nurga haarade vahelist kaart selle nurga kaareks. Nüüd võime öelda, et

iga nurga kaares on niimitu kaarekraadi, kuimitu nurgakraadi on selles nurgas.



Joonis 28.

Sellest näeme, et nurka saab mõõta tema kaare abil.

Selle põhjal on ehitatud nurga mõõteriist mall. Joonisel 28 on näha, kuidas malliga mõõdetakse näiteks 50-kraadilist nurka.

Kui nurga haarad on suunatud vasakule poole, siis kasutame mõõtmisel mallil märgitud teist arvude rida.

Nurgakraadi ja kaarekraadi sümbol on ühine. Nii kirjutame, et täisnurk on  $90^\circ$ .

Täisnurgast väiksemat nurka nimetatakse teravnurgaks.

Täisnurgast suuremat nurka nimetatakse nürinurgaks.

Teravnurk.

Nürinurk.

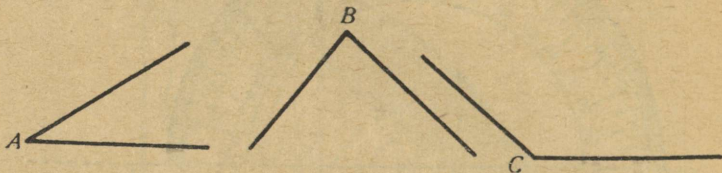


Joonis 29.

Ülesanded.

356. Mõõta malliga joonisel 30 antud nurgad ning märkida tulemused oma töövihikusse:

$$\hat{A} = \quad \hat{B} = \quad \hat{C} =$$



Joonis 30.

356. Joonestada vabalt teravnurk ja nürinurk ning mõõta nende suurused; tulemused kirjutada tipu juurde nurga sisse.

Joonestada nurgad, mille suurused on

357.  $40^\circ$ ;  $50^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $65^\circ$ ;  $120^\circ$ .

357.  $30^\circ$ ;  $35^\circ$ ;  $42^\circ$ ;  $95^\circ$ ;  $161^\circ$ .

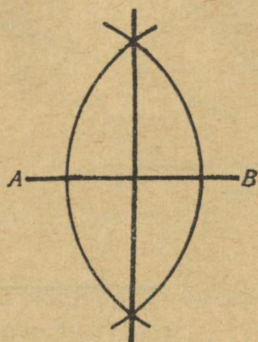
358. Joonestada vabalt mingi nurk ja poolitada see malli abil.

358. Joonestada vabalt mingi nurk ning jaotada see malli abil 3-ks võrdseks osaks.

359. Joonestada malli abil täisnurk.

360. Joonestada sirkli abil täisnurk, nagu näidatud joonisel 31. Kontrollida saadud nurga suurust, teda malliga mõõtes.

361. Joonisel 31 on sirglõik  $AB$  jagunenud kaheks lõiguks. Võrrelda nende lõikude pikkusi omavahel kas sirkliga või mõõtlauaga mõõtes.



Joonis 31.

361. Joonestada vabalt sirglõik ja jaotada see sirkli abil pooleks.

362. Joonisel 32 on näidatud, kuidas sirgjoonest väljaspool olevast punktist saab sirkli abil sellele sirgjoonele joonestada ristsirge.

Kontrollida ristseisu malli abil.

362. Joonestada vabalt sirgjoon ja märkida sellest väljaspool mingi punkt. Joonestada sellest punktist sirkli abil sirgjoonele ristsirge.

363. Joonisel 33 on näidatud, kuidas sirgjoone punktist saab sirkli abil joonestada antud sirgele ristsirge.

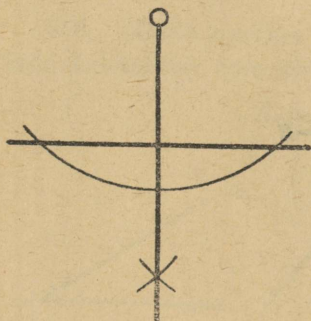
Kontrollida ristseisu malli abil.

363. Joonestada vabalt sirgjoon ja märkida sellel vabalt mingi punkt. Joonestada sirkli abil sellest punktist sirgjoonele ristsirge.

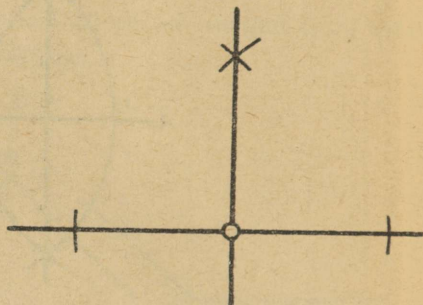
364. Teha paberist voltimise teel täisnurk.

364. Teha paberist voltimise teel  $45^\circ$ -line nurk.

365. Kui suur on niisuguse sektori nurk, mis on veerand ringist?



Joonis 32.



Joonis 33.

365. Kui suur on niisuguse sektori nurk, mis on pool ringist? Missuguse joone moodustavad selle nurga haarad?

$180^\circ$ -list nurka nimetatakse sirgnurgaks, sest tema haarad moodustavad sirgjoone.

366. Kui suur on niisuguse sektori nurk, mis on  $\frac{3}{4}$  ringist?

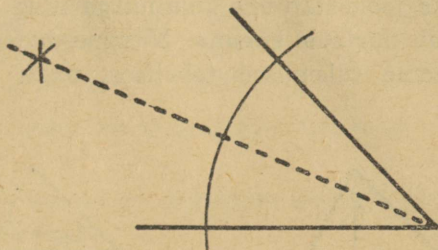
366. Millise osa ringist moodustab sektor, mille nurk on  $360^\circ$ ?

367. Joonise 34 järgi selgitada ja kirjeldada, kuidas sirkliga saab poolitada nurka.

368. Joonestada vabalt mingi nurk ning poolitada see sirkli abil.

368. Joonestada vabalt kolmnurk ning poolitada sirkli abil selle nurgad.

369. Joonestada vabalt kolmnurk ja mõõta selle nurgad. Kui suur on selle kolmnurga nurkade summa?



Joonis 34.

369. Joonestada nürinurkne kolmnurk, mõõta selle nurgad ja arvutada nurkade summa.

370. Joonestada viis kolmnurka, nii et ükski külg ei oleks alla 5 cm. Leida iga kolmnurga nurkade summa.

371. Leida nende summade keskmine. Tulemused kirjutada tabelisse:

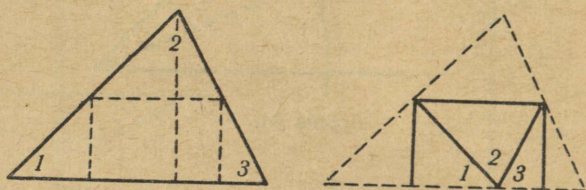
Kolmnurga nr.	Nurk			
	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$
1				
2				
3				
4				
5				

Kokku .....  
Keskmine .....

### § 58. Kolmnurga nurkade summa.

Kolmnurga nurki mõõtes ja neid liites leidsime, nagu ülesannetes 369—371, et saadud kraadide arv erineb väga vähe  $180^{\circ}$ -st, mõne mõõtmise tulemus ei erinegi  $180^{\circ}$ -st.

Meie võime katset veel korrata, nii et kogu klassi kollektiivis igäüks joonestab ühe kolmnurga ning mõõdab selle nurgad ja leiab nurkade summa. Nummerdades need kolmnurgad, kanname tulemused tabelisse, nagu on näidatud ülesandes 371.



Joonis 35.

Kui saadud keskmine erinebki  $180^{\circ}$ -st, siis ei ole see erinevus kuigi suur ja seda erinevust võime panna meie mõõtmisvigade arvele.

Mida hoolsamini mõõdame, seda vähem erineb tulemus  $180^{\circ}$ -st.

Kolmnurga nurki võime liita ka voltimise teel. Selleks võtame vähemalt vihikulehe-suuruse tüki paberit, joonestame sinna võimalikult suure kolmnurga. Joonestame ühest tipust kõrguse (kui kolmnurgal on nürinurk, siis nürinurga tipust), poolitame selle kõrguse, poolitamispunkti joonestame kõrgusele ristjoone lõikumiseni külgedega, külgede lõikepunktidest joonestame ristjooned kolmnurga alusele. Nüüd lõikame kolmnurga paberist välja ja voldime ta kokku, nagu on näidatud joonisel 35. Voltimisel kolmnurga nurgad liituvad ja, nagu näha, moodustavad sirgninga, s. o.  $180^{\circ}$ -lise nurga.

Oma vaatlustest järeldame, et  
kolmnurga nurkade summa on  $180^\circ$ .

**Ülesanded.**

Arvutada kolmnurga kolmas nurk, kui

372. esimene nurk on  $37^\circ$ , teine nurk on  $48^\circ$ ;

372. „ „ „  $28^\circ$ , „ „ „  $56^\circ$ ;

373. „ „ „  $72^\circ$ , „ „ „  $40^\circ$ ;

373. „ „ „  $110^\circ$ , „ „ „  $38^\circ$ .

374. Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

374. Kui suured on niisuguse kolmnurga nurgad, mille nurgad on võrdsed?

Arvutada täisnurkse kolmnurga teine teravnurk, kui üks on

375.  $25^\circ$ ;  $39^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $59^\circ$ ;  $60^\circ$ ;

375.  $30^\circ$ ;  $49^\circ$ ;  $55^\circ$ ;  $69^\circ$ ;  $70^\circ$ .

376. Joonestada võrdhaarne kolmnurk ja mõõta selle alusnurgad ning võrrelda tulemusi omavahel. Korrata seda katset mitu korda.

376. Lõigata paberist välja võrdhaarne kolmnurk ja voltida see tippu läbivat kõrgust mööda kokku. Mis sünnib nüüd alusnurkadega? Mis võime öelda võrdhaarse kolmnurga alusnurkade kohta?

Arvutada võrdhaarse kolmnurga kumbki alusnurk, kui tipunurk on

377.  $30^\circ$ ;  $35^\circ$ ;  $40^\circ$ ;  $57^\circ$ ;  $60^\circ$ ;

377.  $35^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $48^\circ$ ;  $52^\circ$ ;  $65^\circ$ .

Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on

378.  $25^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $52^\circ$ ;  $68^\circ$ ;  $72^\circ$ ;  $60^\circ$ ;

378.  $28^\circ$ ;  $48^\circ$ ;  $55^\circ$ ;  $71^\circ$ ;  $75^\circ$ ;  $63^\circ$ .

Kui suur on tipunurk?

379. Arvutada võrdhaarse täisnurkse kolmnurga nurgad.

380. Mitu täisnurka või mitu nürinurka saab olla kolmnurgal?

Joonestada võrdhaarne kolmnurk, mille

381. alus on 8 cm, alusnurk on  $50^\circ$ ;

381. „ „ 7,5 „ „ „  $45^\circ$ .

Joonestada võrdhaarne kolmnurk, mille

382. tipunurk on  $70^\circ$ , haar on 10 cm;

382. „ „  $120^\circ$ , „ „ 6,4 „ .

Joonestada kolmnurk, mille

383. alus on 8,2 cm, alusnurgad on  $30^\circ$  ja  $50^\circ$ ;

383. „ „ 7,9 „ „ „  $45^\circ$  „  $114^\circ$ .

Joonestada kolmnurk, mille üks külg on

384. 6,4 cm, teine külg on 4,5 cm, nurk nende vahel on  $72^\circ$ ;

384. 2,8 „ „ „ „ 4,8 „ „ „ „ „  $96^\circ$ .

Joonestada kolmnurk, mille külgede pikkused on

385. 9 cm, 12 cm ja 10 cm;

385. 12,2 cm, 7,4 cm ja 7,8 cm.

386. Joonestada vabalt kolmnurk. Mõõta selle kolmnurga nurgad ning kontrollida tulemusi mõõtarvude liitmise teel.

387. Maatükil on võrdkülgse kolmnurga kuju; selle kolmnurga külje pikkus on 13,4 m.

Joonestada kolmnurk vähendatult paberile, võttes 1 m kujutamiseks pikkuse 1 cm. Mõõta joonisel kolmnurga kõrgus ja arvutada pindala. Mitu aari on selle maatüki pindala?

Määrata kolmnurkse maatüki pindala ja nurgad, kui maatüki servade pikkused on

388. 59 m, 92 m ja 48 m;

388. 78 m, 52 m ja 64 m.

389. Määrata nelinurga nurkade summa, jaotades nelinurga diagonaaliga kaheks kolmnurgaks.

## § 59. Ringjoone pikkus.

### Kaare pikkus.

Teeme järgmise katse: mõõdame niidi abil mõnede ringikujuliste esemete ümbermõõdud ning mõõtlaua abil nende läbimõõdud. Arvutame iga ringi jaoks tema ümbermõõdu ja läbimõõdu jagatise ehk suhte. Sellega saame arvu, mis näitab, mitu korda ringi ümbermõõt on läbimõõdust pikem.

Katse tulemused korraldame tabelisse:

Katse nr.	Ringi ümbermõõt	Ringi läbimõõt	Ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe
1			
2			
3			
.			
.			
.			

Suhete summa .....

Keskmine .....

Katsed näitavad, et ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe ei olene ringi suuruselt. Igal katsel saame selle suhte jaoks arvu, mis väga vähe erineb arvust 3, enamail juhtudel saame 3-st pisut suurema arvu.

Uurimisel on selgunud, et selle suhte ligikaudne väärtus on 3,14. Seega

**ringjoon on oma diameetrist 3,14 korda pikem.**

Seda suhtearvu on hakatud tähistama kreeka keelse tähega  $\pi$ , mille nimetuseks on „pii“. Nii on

$$\pi = 3,14.$$

Tarvitades seda tähist võime öelda, et  
ringjoon on diameetrist  $\pi$  korda pikem.

Ringjoone pikkuse saamiseks peame diameetri pikkuse korrutama arvuga 3,14 ehk arvuga  $\pi$ .

Tähistades ringjoone pikkuse tähega  $C$ , saame ringjoone pikkuse valemi

$$C = \pi d.$$

Silmas pidades, et  $d = 2r$ , saame:  $C = \pi 2r$  või, kirjutades numbrilise teguri esikohale,

$$C = 2\pi r.$$

Kui kaar, mille raadius on teada, on antud kaarekraadi- des, siis saab arvutada tema pikkuse, arvutades esmalt ring- joone pikkuse, siis 1<sup>o</sup>-lise kaare pikkuse ja korrutades saa- duse antud kraadide arvuga.

#### Ülesanded.

Arvutada ringjoone pikkus, kui tema diameeter on

390. 4,2 cm; 5,8 cm; 6,7 cm; 3,5 m; 4,3 m;

390. 2,2 „ 3,8 „ 5,6 „ 3,2 „ 3,4 „

Arvutada ringi übermõõt, kui tema raadius on

391. 2,3 cm; 3,5 cm; 17 cm; 0,2 m; 1,8 m;

391. 4,9 „ 2,5 „ 9 „ 1,3 „ 2,6 „

392. Ratta läbimõõt on 70 cm. Kui pikk tuleb selle ratta jaoks võtta rehviraua tükk, kui otste kokkukeevitamiseks jätta 8 cm?

392. Taskukella minutiosuti pikkus on 1,8 cm. Kui pika tee käib selle osuti otspunkt tunni jooksul?

393. Vankriratta läbimõõt on 78 cm. Ratas tegi kaevu juurest õueväravani 32 pööret. Kui kaugel on kaev õuevära- vast?

393. Ratas jõudis 50 pöördega 125 m edasi. Kui pikk on selle ratta raadius?

Arvutada ringi läbimõõd, kui tema ümbermõõd on

394. 8,3 cm; 13,4 cm; 18,8 cm; 32,8 cm; 25,7 cm;

394. 12 „ 15 „ 32,6 „ 46,4 „ 31,9 „

Arvutada ringi raadius, kui tema ümbermõõd on

395. 10 cm; 26 cm; 5,6 m; 72 m; 35,7 m;

395. 20 „ 24 „ 8,4 „ 12 „ 16,3 „

396. Arvutada ringjoone pikkus, võttes raadiuse pikkuseks järgemööda 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm.

Tulemused kanda tabelisse:

Raadiuse pikkus $r$ (cm)	1	2	3	4	5	6	7	8
Ringjoone pikkus $C$ (cm)								

Kuidas oleneb ringjoone pikkus raadiusest?

397. Puutüve ümbermõõd on 86 cm. Kui suur on läbimõõd?

397. Maakera ümbermõõd on 40 000 km. Kui pikk on Maakera raadius?

398. Selle ajaga, kui suurem hammasratas teeb ühe pöörde, teeb väiksem 5 pööret. Arvutada väiksema ratta raadius, kui suurema ümbermõõd on 50 cm.

398. Masinarihm käib üle kahe võlli, millest esimese raadius on 3 dm, teise raadius 6 dm. Mitu pööret teeb väike võll sel ajal, kui suur teeb ühe pöörde?

Arvutada kaare pikkus, kui raadius on 20 cm ja kaar on

399.  $45^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $120^\circ$ ;  $180^\circ$ ;  $270^\circ$ ;

399.  $30^\circ$ ;  $90^\circ$ ;  $150^\circ$ ;  $72^\circ$ ;  $115^\circ$ .

400.  $32^\circ$ -lise kaare pikkus on 16 cm. Kui pikk on ringjoon?

400.  $40^\circ$ -lise kaare pikkus on 25 cm. Kui pikk on raadius?

401. Raadius on 10 cm. Arvutada  $10^\circ$ -lise,  $20^\circ$ -lise,  $30^\circ$ -lise,  $40^\circ$ -lise,  $50^\circ$ -lise kaare pikkus.

Tulemused korraldada tabelisse:

Kaare kraadide arv	10	20	30	40	50
Kaare pikkus (cm)					

Kuidas oleneb kaare pikkus tema kraadide arvust?

## § 60. Ringi pindala.

### Sektorid pindala.

Et saada juhust ringi pindala arvutamiseks, selleks tükeldame ringi ja katsume tükkidest koostada niisuguse kujundi, mille pindala oskame arvutada.

Joonestame paberile umbes 5 cm raadiusega ringi.

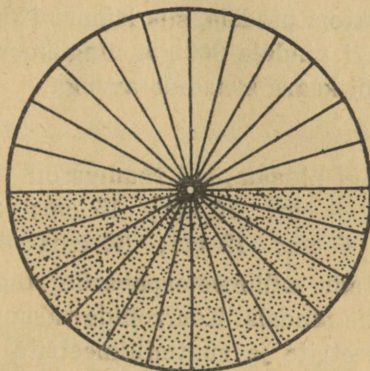
Jaotame ta esmalt 6-ks võrdseks sektoriks, siis, iga saadud sektorit poolitades, 12-ks võrdseks sektoriks, siis 24-ks võrdseks sektoriks. Poole ringist võime varjutada või katta mõlemad pooled eri värviga (vt. joon. 36).

Nüüd lõikame ringi paberist välja ja lõikame selle 24-ks sektoriks. Sektorid laome kokku, nagu näha joonisel 37. Saadud kujundit vaadeldes näeme, et see ei erine palju rööpkülikust. Erinevus seisab ainult selles, et selle kujundi alused ei ole päris sirged, vaid koosnevad väikestest kaartest. See erinevus on aga väike ja saab veel väiksemaks, kui ringi jaotame edasi 48-ks, 96-ks jne. võrdseks sektoriks.

Selle „rööpküliku“ aluseks on varjutatud sektorite kaartest moodustatud joone tükki, sellega pool ringjoonest, kõrgu-

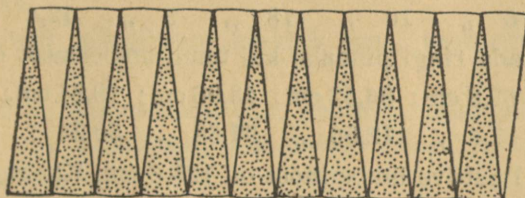
seks on raadius. Et meie „rööpkülik“ ja ring koosnevad ühtedest ja samadest tükkidest, siis nende pindalad on võrdsed. Seega

ringi pindala võrdub poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutisega.



Joonis 36.

Ringi ümbermõõdu pikkus on  $2\pi r$ , pool ümbermõõtu on siis  $\pi r$ , poole ümbermõõdu ja raadiuse korrutis on seega  $\pi r \cdot r = \pi r^2$ .



Joonis 37.

Tähistades ringi pindala tähega  $S$ , saame ringi pindala jaoks valemi

$$S = \pi r^2.$$

Sektori pindala arvutamisel peab olema peale raadiuse veel teada sektori kraadide arv või sektori kaare kraadide arv.

Sektori pindala saamiseks arvutame esmalt ringi pindala, s. o.  $360^\circ$ -lise sektori pindala, siis leiame  $1^\circ$ -lise sektori pindala, jagades ringi pindala  $360$ -ga, ning korrutame tulemuse sektori nurga või kaare kraadide arvuga.

#### Ülesanded.

Arvutada ringi pindala, kui raadius on

402. 4 cm; 5 cm; 10 cm; 15 cm; 20 cm;

402. 3 cm; 6 cm; 12 cm; 30 cm; 40 cm.

403. Joonestada millimeeterpaberile ring.

Arvutada selle pindala. Kontrollida tulemust ringis esinevate ruutsentimeetrite ja ruutmillimeetrite loendamise teel.

404. Tõrre põhja läbimõõt on 89 cm. Kui suur on pindala?

404. Ringikujulise lillepeenra läbimõõt on 2 m. Arvutada pindala.

Arvutada ringi pindala, kui tema läbimõõt on

405. 8 cm; 12 cm; 20 cm; 7 cm; 14,2 cm;

405. 6 „ 10 „ 18 „ 9 „ 12,4 „

Arvutada ringi pindala, kui tema ümbermõõt on

406. 62,8 cm; 56,52 cm; 43,96 cm; 18,84 cm; 25,12 cm;

406. 31,4 „ 12,56 „ 37,68 „ 50,24 „ 94,2 „

407. Puutüve ümbermõõt on 125,6 cm. Kui suur on tüve ristlõike-pindala?

407. Tünni kaane ümbermõõt on 188,4 cm. Kui suur on kaane pindala?

408. Ringi raadius on 4 cm. Arvutada sektori pindala, kui sektori nurk on

$10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $42^\circ$ ,  $56^\circ$ .

408. Raadius on 10 cm. Arvutada alljärgnevas tabelis antud sektorite pindalad. Tulemused kanda tabelisse.

Sektori kraadide arv	360°	1°	10°	20°	30°	60°	120°	180°
Sektori pindala								

Kuidas muutub sektori pindala kraadide arvu kasvades 2-, 3- jne. kordseks? kraadide arvu vähenedes 2, 3 jne. korda?

Kuidas oleneb sektori pindala sektori nurga kraadide arvust?

—————

Oma tähelepanekust märkame, et  
sektori pindala on võrdeline sektori nurgaga.

—————

### § 61. Sektordiagramm.

Suuruste graafilisel kujutamisel sektordiagrammis jaotakse ring sektoriteks, mis on võrdelised kujutatavate suurustega.

Harilikult märgitakse lühidalt igale sektorile, mida ta kujutab.

Näide. Atmosfääri õhk koosneb peaaesjalikult lämmastikust ja hapnikust, sisaldades 79% lämmastikku ja 21% hapnikku.

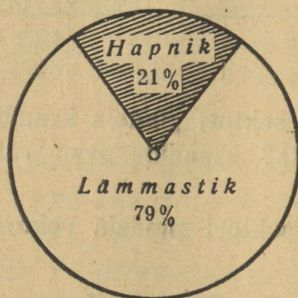
Kujutada õhu koosseis sektordiagrammis.

Lahendus. Jaotame vabalt joonestatud ringi kaheks sektoriks, millest üks moodustab 79%, teine 21% ringist. Arvutamisel saame:

$$\frac{360 \cdot 79}{100} \approx 284; \quad \frac{360 \cdot 21}{100} \approx 76.$$

Seega lämmastiku sisaldavust kujutav sektor on  $284^\circ$ , teine  $76^\circ$ .

Malli abil joonestame vastavate nurkadega sektorid.



Joonis 38.

#### Ülesanded.

409. Väljahingatud õhk sisaldab ligikaudu 79% lämmastikku, 17% hapnikku ja 4% süsihappegaasi. Teha väljahingatud õhu koosseisu sektordiagramm.

409. Rukkitera sisaldab 70% tärklist, 14% vett, 11% valke, 2% rasva, 2% kestollust ja 1% sooli. Kujutada rukkitera koosseis sektordiagrammis.

410. Maailma kanepitoodang 1938. a. oli 410 tuhat tonni. Sellest tootis

NSVL	120 tuhat tonni;	Korea	16 tuhat tonni;
Itaalia	117 " "	Türgi	15 " "
Jugoslaavia	55 " "	Poola	13 " "
Rumeenia	30 " "	teised riigid	44 " "

Koostada maailma 1938. a. kanepitoodangu sektordiagramm.

410. Maailma plaatinatoodang 1938. a. oli järgmine:

Kanada . . . . .	150	tuhat	untsi;
NSVL . . . . .	140	„	„
Lõuna-Aafrika . . . . .	47	„	„
Kolumbia . . . . .	30	„	„
Alaska . . . . .	28	„	„

Valmistada 1938. a. plaatinatoodangu sektordiagramm.

Märkus: 1 unts = 28,3495 g.

Maailma energiavarude jaotus NSV Liidu ja teiste maade vahel on käesoleva aja andmete põhjal järgmine:

Maad	Energia liik				
	Nafta	Turvas	Hüdro-energia	Süsi	Küttepuud
NSVL	55%	40%	35,7%	20%	17,5%
Teised maad kokku	45%	60%	64,3%	80%	82,5%

Esitada sektordiagrammis

- 411. naftavarude jaotus;
- 412. turbavarude „
- 412. hüdroenergia-varude „
- 413. söevarude „
- 413. küttepuude-varude „

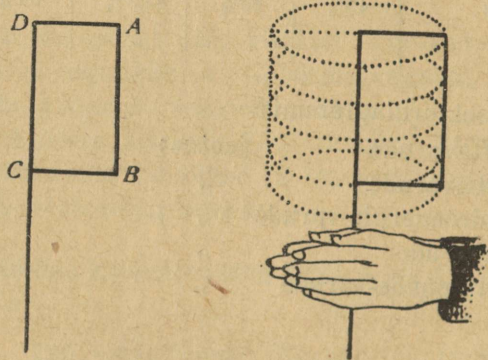
## Peatükk VII.

### Silinder.

#### § 62. Silinder, tema pinnalaotus ja pindala.

Kui ristkülik oma külje ümber pöörlema panna, siis tekib kujund, mida nimetame silindriks.

Niisuguse pöörlemise teel tekkinud silindri võime saada traadist ristküliku abil, mille üks külg on pikendatud (vaata



Joonis 39.

joonis 39). Pöörlemist võib teostada kas tsentrifugaalmasinaga või kahe peo vahel.

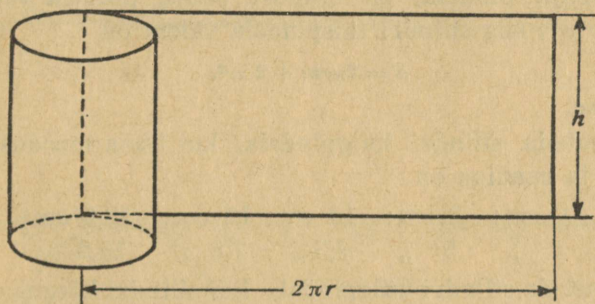
Pöörlemisteljeks on külg  $CD$ . Külg  $AB$  moodustab silindrilise pinna, seepärast see külg kannabki

moodustaja nime. Küljed  $AD$  ja  $BC$  kujundavad ringid, mis on silindri põhjadeks; põhjade raadiusteks on needsamad küljed. Punkt  $A$ , samuti punkt  $B$  moodustavad ringjoone: see ringjoon on nii silindri põhja kui ka silindri ümbermõõduks. Silindri kõrguseks on tema telg. Kõrguseks võib pidada ka moodustajat.

Sellest vaatlusest selgub, et

**silindrit piiravad silindriline pind ja kaks ringi.**

Pesurull, põllurull, pleki valmistamise valtsid tehases on silindrid. Silindri kuju on veel kruusil, keedisepurgil, konservikarbil jne.



Joonis 40.

Kui mõnel silindrikujulisel pappkarbil kaane ja põhja eraldame, siis saame silindri külgpinna mudeli.

Silindri külgpinna mudeli võime valmistada samuti paberist, mähkides paberilehe näiteks puust silindrile, lõigates siis otstest ääred tasaseks ja kleepides servad kokku. Lõikame silindri külgpinna üht moodustajat mööda lahti ja laotame ta tasapinnale. Nii oleme saanud silindri külgpinna-laotuse.

Silindri külgpinna-laotus on ristkülik ja tema pindala võrdub silindri külgpindalaga. Selle ristküliku aluseks on silindri põhja ümbermõõt ja kõrguseks on silindri moodustaja. Sellepärast võime öelda, et

silindri külgpindala võrdub põhja ümbermõõdu ja moodustaja korrutisega.

Kui silindri raadius on  $r$ , siis põhja ümbermõõt on  $2\pi r$ . Tähistades silindri külgpindala tähega  $S$  ja moodustaja tähega  $m$ , saame silindri külgpindala valemi:

$$S = 2\pi r m.$$

Silindri täispindala saamiseks tuleb külgpindalale liita kahe põhja pindala. Et silindri põhja pindala väljendab avaldis  $\pi r^2$ , siis silindri täispindala valem on

$$S = 2\pi r m + 2\pi r^2.$$

**Olesanded.**

Arvutada silindri külgpindala, kui tema moodustaja on 10 cm ja raadius on

414. 6 cm; 8 cm; 10 cm; 12 cm; 12,5 cm;

414. 4 „ 5 „ 6,5 „ 7,8 „ 10,2 „

Arvutada silindri külgpindala, kui silindri kõrgus on 5 cm ja põhja läbimõõt on

415. 14,2 cm; 15,6 cm; 21,3 cm; 28,4 cm; 32,9 cm;

415. 13,1 „ 12,2 „ 18,6 „ 24,7 „ 30,8 „

Arvutada silindri täispindala, kui tema

416. kõrgus on 6 cm, põhja raadius on 4 cm;

416. „ „ 12 „ „ „ „ 3,5 „

417. „ „ 20 „ „ „ „ 5,6 „

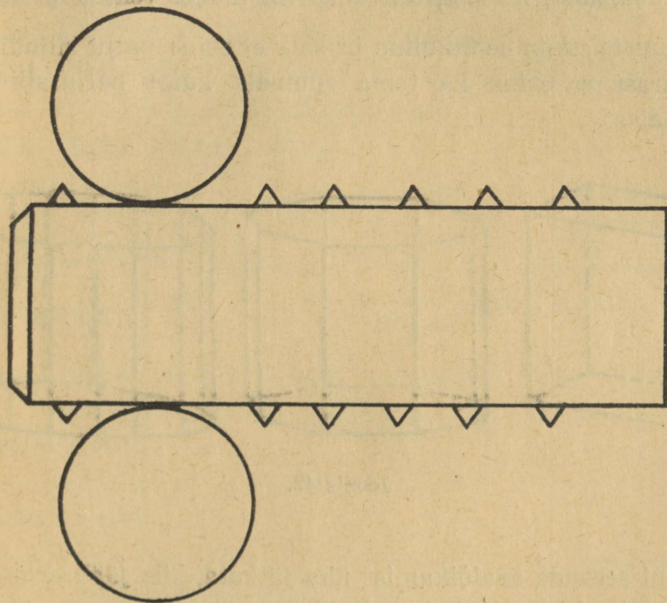
417. „ „ 30 „ „ „ „ 16,5 „

418. Valmistada paberist või kartongist silindri mudel, mille kõrgus on 8 cm ja põhja raadius on 3 cm.

Väljalõikamisel jätta kleepimiseks serv ja hambad, nagu näha joonisel 41.

419. Mitu  $\text{cm}^2$  plekki kulub kaaneta silindrilise nõu valmistamiseks, kui nõu kõrgus on 10 cm, põhja raadius on 4 cm ja kui valtsimiseks vajaliku serva jaoks arvestada  $35 \text{ cm}^2$ ?

419. Tuletõrje silindrikujulise veepaagi kõrgus on 1,5 m ja läbimõõt on 0,8 m. Kui suur on selle veepaagi pindala?



Joonis 41.

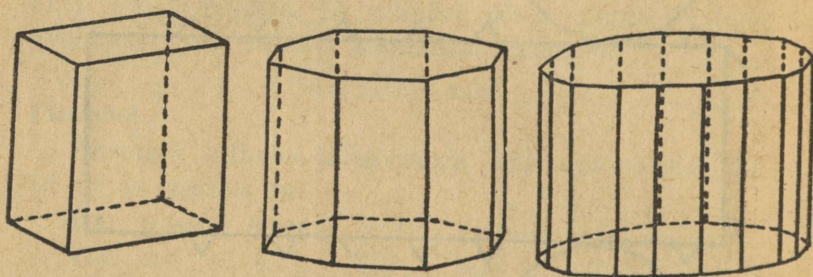
420. Kui palju maksab eelmises ülesandes mainitud veepaagi värvimine väljastpoolt, kui  $1 \text{ m}^2$  värvimine maksab 8 rubla?

420. Silindrikujulise raudahju kõrgus on 1,8 m ja ümbermõõt on 1,6 m. Kui palju kulus selle ahju valmistamiseks plekki, kui valtsimiseks arvestada 5% lisaks?

### § 63. Silindri ruumala.

Kui korrapärasel neljatahulisel prismal külgservad nii viisi ära lõikame, et uuesti tekkivad tahud on jälle võrdsed, siis saame korrapärase kaheksatahulise prisma. Kui sellel prismal servad samal viisil ära lõikame, saame kuueteistkümne-tahulise prisma. Servade mahalõikamist võime teostada kaalikast, naerist, kartulist või muust tehtud prismal.

Kuueteistkümne-tahuline prisma ei erine palju silindrist, seepärast ei erine ka tema ruumala kuigi palju silindri ruumalast.



Joonis 42.

Kui servade äralõikamist üha jätkata, siis jääb erinevus prisma ja silindri vahel veel vähem märgatavaks.

Seepärast arvutataksegi silindri ruumala nii, nagu arvutatakse prisma ruumala. Seetõttu

**silindri ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega.**

Tähistades silindri ruumala, põhja raadiust ja kõrgust vastavalt sümbolitega  $V$ ,  $r$  ja  $h$ , saame silindri ruumala valemi

$$V = \pi r^2 h.$$

### Olesanded.

Arvutada silindri ruumala, kui tema

421. kõrgus on 8 cm ja põhja raadius 10 cm;

421. „ „ 12 „ „ „ „ 4 „

422. „ „ 14 „ „ „ „ 2,5 „

422. „ „ 15 „ „ „ „ 3 „

423. Ümmargune kaev on 20 m sügav ja 1,2 m lai. Mitu  $m^3$  mulda tuli sellest kaevust välja kaevata?

423. Mitu liitrit vett mahub silindrikujulisse tõrde, mille kõrgus on 1,2 m ja läbimõõt on 1,6 m?

424. Täita järgmine tabel:

Harj. nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	
Silindri									
Põhja raadius $r$ (cm)	10	5	4	6	3,5	4,8	9,6	7,5	
Kõrgus $h$ (cm)	10	20	12	8	14	15	30	8,6	
Ruumala $V$ ( $cm^3$ )									
Pindala $C$ ( $cm^2$ )									

425. Silindrikujulise rauatüki otsa läbimõõt on 8 mm, pikkus on 30 cm. Arvutada selle rauatüki raskus. Raua erikaal on 7,8.

425. Vasktraadi jämedus on 2 mm. Kui palju kaalub 10 m seda traati, kui vase erikaal on 8,8?

426. Silindrikujulise palgi otsa läbimõõt on 20 cm, palgi pikkus on 6 m. Mitu tihumeetrit puitu sisaldab see palk? (1 tihumeeter on puiduga tihedalt täidetud  $1 m^3$ -line ruumala.)

426. Silindrikujulises kaevus on 1,2 m kõrguseft vett. Kaevu sisemine läbimõõt on 9,5 dm. Mitu liitrit vett on selles kaevus? Mitu hl see on?

427. Mensuuris on 12 cm kõrguseft vett. Mitu  $\text{cm}^3$  on seda vett, kui mensuuri sisemine läbimõõt on 4,2 cm?

428. Kui kõrge tuleb teha silindrikujuline liitrimõõt, et ta läbimõõt oleks 10 cm?

428. Kui kõrge peab olema 2-meetrilise läbimõõduga silindrikujuline veepaak, et ta mahutaks 20 hl vett?

Arvutada silindri kõrgus, kui tema

429. ruumala on  $6 \text{ dm}^3$  ja raadius on 10 cm;

429. „ „  $2 \text{ m}^3$  „ „ „ 8 dm;

430. „ „ 0,8 hl „ „ „ 0,25 m;

430. „ „ 15 hl „ „ „ 0,4 m.

431. Kui suure läbimõõduga võru saab painutada traadist, mille pikkus on 3,14 dm?

431. Mitu korda on ringjoon oma raadiusest pikem?

432. Ringikujulise peegli raadius on 40 cm. Kui palju maksab selle peegli hõbetamine, kui  $1 \text{ cm}^2$  hõbetamine maksab 2 kopikat?

432. 2-mm-lise läbimõõduga raudtraat kaalub 2,450 kg. Kui pikk on see traat? Raua erikaal on 7,8.

433. Mitu korda on kuubi ruumala suurem silindri ruumalast, kui kuubi serva pikkus on 10 cm, silindri põhja läbimõõt on 10 cm ja kõrgus on 10 cm?

434. Arvutada võrdhaarse kolmnurga nurgad, kui tipunurk on niisama suur nagu alusnurgad kokku.

434. Arvutada võrdhaarse kolmnurga nurgad, kui tipunurk on alusnurgast 3 korda suurem.

435. 100 m traati läbimõõduga 5 mm kaalub 68,1 kg. Arvutada selle traadi erikaal.

435. 200 m traati läbimõõduga 2 mm kaalub 4,898 kg. Arvutada selle traadi erikaal.

436. Arvutada puuduvad suurused järgmises tabelis:

Harjut. nr.								
Silindri	1	2	3	4	5	6	7	8
Põhja raadius (cm)	1	10	12	16			4	
Põhja übermõõt (cm)					201	50,24		37,68
Põhja pindala (cm <sup>2</sup> )								
Kõrgus (cm)	8	20						
Külgpindala (cm <sup>2</sup> )			753,6	502,4				
Täispindala (cm <sup>2</sup> )					7236	653,1		
Ruumala (cm <sup>3</sup> )							401,9	1696

437. Inimese keha koosseis on ligikaudu: 65% vett, 20% valkaineid, 10% rasva ja 5% mineraalaineid. Esitada inimese keha koosseis sektordiagrammis.

437. Inimese toidutarvidus päevas on keskmiselt: valke 118 g, rasva 56 g ja süsivesikuid 500 g. Kujutada inimese toidutarvidus sektordiagrammis.

## VASTUSED.

1. 4; 8; 16; 40; 100.
2. 0; 1; 3; 5; 8.
3. 12; 49; 9; 0; 170.
4. 0,3; 0; 0,01; 0,4; 0,04.
5.  $a + 7$ ;  $10 - b$ ;  $3c$ ;  $\frac{9d}{10}$ ;  $\frac{c}{8}$ .
6.  $p + t = 52$ .
7.  $j = m - h$ .
8.  $p - q$ ;  $p + q$ .
9.  $v + 5$ ;  $v + a$ ;  $v - b$ .
10.  $60 + m$ .
11.  $100 - k$ .
12.  $\frac{a}{100}$ ;  $\frac{7b}{100}$ ;  $\frac{pc}{100}$ .
13.  $\frac{100a}{b}$ .
14.  $\frac{100a}{4}$ .
15.  $60a$  minutit.
16.  $6t$  rbl.
17.  $7n + p$  päeva.
18.  $m \cdot n$  rbl.
19.  $p \cdot t$ .
20.  $\frac{100}{s}$ .
21.  $\frac{s}{t}$  km tunnis.
22.  $\frac{1000s}{400}$  rbl. ehk  $\frac{5s}{2}$  rbl.
23.  $\frac{bc}{a}$  rbl.
24.  $\frac{N}{20}$  rbl.
25.  $\frac{a+b}{2}$  sulge.
26.  $\frac{100m}{N}$  %.
27.  $af + bg + ch$  rbl.
28.  $abc$  m<sup>3</sup>.
29.  $4a$ ;  $7b$ ;  $4m + 3n$ ;  $3x + 3y$ ;  $3u + 4v$ .
30.  $a + a + a + a + a$ ;  $p + p + p$ ;  $cx + cx + cx$ ;  
 $fy + fy + fy + fy$ ;  $d + d + c + c + c + c + c$ ;  
 $ab + ab + ab + xy + xy + xy + xy$ .
31.  $7a$ ;  $10b$ ;  $\frac{c}{2}$ ;  $\frac{3d}{10}$ ;  $0,76c$ .
32.  $x + 2y$ ;  $3u - v$ ;  $2a + 3b$ ;  $4m - 7n$ ;  $\frac{p}{2} + \frac{q}{3}$ .
33. arvude  $a$  ja  $b$  summa; arvude  $a$ ,  $b$  ja  $c$  summa; arvu  $d$  kolm neljandikku; arvu  $5,8$  ja arvu  $b$  korrutis; arvu  $a$  kolmekordse ja arvu  $b$  seitsmekordse summa; arvu  $a$  ja arvu  $b$  kolmandiku summa.
34.  $a$ ;  $3b$ ;  $4c$ ;  $d$ ;  $9e$ ;  $5k$ ;  $9m$ ;  $13n$ ;  $18p$ ;  $19q$ .
35.  $3a$ ;  $5x$ ;  $7m$ ;  $5n$ ;  $11p$ ;  $5q$ ;  $10r$ ;  $11s$ ;  $12t$ ;  $10u$ .



62.

$t$	$12 - t$
6	6
7	5
8	4
9	3
10	2
11	1
12	0

63.

$x$	$x - 1$	$2(x - 1)$
1	0	0
2	1	2
3	2	4
4	3	6
5	4	8

64.

$x$	$x^2$	$2x$	$x^2 + 2x$
1	1	2	3
2	4	4	8
3	9	6	15
4	16	8	24
5	25	10	35
6	36	12	48
7	49	14	63
8	64	16	80
9	81	18	99
10	100	20	120

65.

$n$	$2n$	$1 + 2n$	$\frac{1 + 2n}{n}$
1	2	3	3
2	4	5	$2\frac{1}{2}$
3	6	7	$2\frac{1}{3}$
4	8	9	$2\frac{1}{4}$
5	10	11	$2\frac{1}{5}$
6	12	13	$2\frac{1}{6}$

66.

$m$	$2m$	$2m + 3$
0	0	3
0,5	1	4
1	2	5
1,5	3	6
2	4	7
2,5	5	8
3	6	9
3,5	7	10
4	8	11
4,5	9	12
5	10	13

67.	$x$	$5x$	$5x + 4$
	0	0	4
	0,2	1	5
	0,4	2	6
	0,6	3	7
	0,8	4	8
	1	5	9
	1,2	6	10
	1,4	7	11
	1,6	8	12
	1,8	9	13
	2	10	14
	2,2	11	15
	2,4	12	16
	2,6	13	17
	2,8	14	18
	3	15	19
	3,2	16	20
	3,4	17	21
	3,6	18	22
	3,8	19	23
	4	20	24

68. 5; 11; 97; 7; 16.  
 69. 16; 26; 19; 49; 60.  
 70.  $10 \cdot 2 + 5$ ;  
 $10 \cdot 3 + 2$ ;  
 $10 \cdot 1 + 7$ ;  
 $100 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 4$ ;  
 $100 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 7$ ;  
 $1000 \cdot 3 + 100 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 6$ .

71.  $c = u - (a + b)$ .

72.  $s = ab + cd$  (kop.) ehk

$$s = \frac{ab + cd}{100} \text{ (rbl.)}$$

73.  $a = l + 12t$ .

74.  $S = uv - a^2$ .

75.  $S = \frac{pq}{2}$ .

76.  $S = 6a^2$ .

77.  $H = ab \left( \frac{h+k}{100} \right)$ .

78. 60.

79. 8,9.

80. 251,2.

81. 50,24.

82. 0,0063.

83. 20; 50; 70; 120; 190.

89. 41; 68,5; 84; 113.

90.  $\frac{1}{2}$  mm.

92.  $y = \frac{x+3}{x}$

$x$	$x+3$	$\frac{x+3}{x}$
1	4	4
2	5	2,5
3	6	2
4	7	1,75
5	8	1,6

104. 40; 0,9986; 0,9992; 0,9988; 0,9983; 0,9929.

106. liitmine; summa; hulkliige;  
 korrutamine; korrutis; üksliige;  
 lahutamine; vahe; hulkliige;

korrutamine; korrutis; üksliige;  
 jagamine; jagatis; üksliige;  
 lahutamine; vahe; hulkliige;  
 lahutamine; vahe; hulkliige;  
 liitmine; summa; hulkliige;  
 jagamine; jagatis; üksliige;  
 korrutamine; korrutis; üksliige;  
 jagamine; jagatis; üksliige;  
 jagamine; jagatis; üksliige;  
 astendamine; aste; üksliige;  
 lahutamine; vahe; hulkliige;  
 lahutamine; vahe; hulkliige.

107.  $11b$ ;  $13,5c$ ;  $1\frac{4}{7}d$ ;  $5\frac{4}{5}d$ ;  $h$ .

108.  $1\frac{1}{8}u$ ;  $2\frac{7}{15}v$ ;  $9\frac{3}{10}w$ ;  $\frac{5}{12}N$ ;  $\frac{7}{10}h$ .

109.  $12a$ ;  $12d$ ;  $15x$ ;  $13k$ ;  $28c$ .

109.  $1,3m$ ;  $7p$ ;  $9,3s$ ;  $4,2t$ ;  $17,1q$ .

110.  $4a + 10b$ ;  $5x + 2t$ ;  $6s + 11r$ ;  $10p + 5q$ ;  $6y + 10z$ .

111.  $2a^2$ ;  $3a^2$ ;  $2a^3$ ;  $3x^3$ ;  $4x^2$ .

112.  $3a^2 + 2b^2$ ;  $3m^3 + 3n^2$ ;  $m^2 + 4m^3$ ;  
 $3x^2 + 3y^2$ ;  $2n^3 + 3v^4$ .

113.  $4ab$ ;  $17mn$ ;  $pq$ ;  $rs$ ;  $2ik$ .

114.  $7,1ab - 5,3$ ;  $9cd$ ;  $3gh + 24$ ;  $17$ ;  $1,2pq^2$ .

115.  $4 - 4x + x^2$ ;

$1 + 2y + y^2$ ;

$5 - 6z - 9z^2$ ;

$12 - 5u + 8u^2$ ;

$1 - 4N + N^3$ .

116.  $3x^2 - 2x + 1$ ;

$y^2 + 8y - 6$ ;

$z^2 - 3z + 7$ ;

$15u^2 - 7u - 1$ ;

$4t^3 - t + 10$ .

117.  $5723$ ;  $18\ 211$ ;  $80\ 592$ ;  $907\ 086$ ;  $35\ 740$ .

118.  $2 \cdot 10 + 9;$   $10 + 1;$   
 $5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 2;$   $10^2 + 10 + 1;$   
 $5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10;$   $10^3 + 2 \cdot 10;$   
 $2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 2;$   
 $5 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10;$   
 $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2;$   
 $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2.$
119.  $\frac{mr}{s}$  kg.      120.  $H = \frac{1}{2}(ab - 8cd).$
121.  $10a; 100b; 10c + 3; 100f + 10g; 100p + 10q + r.$
122.  $10b + a; 10a + b.$       123.  $p + 2$  ja  $p + 4;$   
 $p - 2$  ja  $p - 4.$
124.  $(N - 1)a$  meetrit.
125. Korrutada arvud 1,3,  $a$  ja  $s$ , siis korrutada 2,4 arvuga  $c$  ja saadused liita;  
korrutada arvud  $a$  ja  $b$ , võtta sellest korrutisest pool;  
siis korrutada arvud  $b$  ja  $c$  ning võtta sellest korrutisest  $\frac{2}{5}$  ja tulemused liita;  
arvutada arvu  $a$  teine aste;  
leida arvu  $a$  ruut ja korrutada see kolmega;  
arvu  $a$  kuup korrutada kolmega;  
kahekordsest arvu  $a$  kuubist lahutada viiekordne arvu  $b$  kuup.
126. 7; 14; 4; 0; 3,5; 5.
127.  $2,1a + 1,9b;$       128.  $a^2 + bc;$   
 $1,6m + 0,6n;$        $10m - 3m^2 + m;$   
 $3,7k + 3,5;$        $9n^3 + 2np - n;$   
 $f + g;$       0;  
S.       $t^3.$
129. 67; 22; 288; 208; 108; 150.

130. 499; 179; 604; 210; 177; 7;  $4\frac{5}{8}$ ;  $2\frac{3}{4}$ ;  $8\frac{1}{4}$ .
131.  $2a + 2$ ;  
 $4a + 1$ ;  
 $5a + 5$ ;  
 $26a$ ;  
 $31a + 1$ .
132.  $3a + b$ ;  
 $8f + 2g$ ;  
 $10h + 4i$ ;  
 $10k + l$ ;  
 $20m + 3n$ .
133.  $8a - 8$ ;  
 $4a$ ;  
 $6a$ ;  
 $2a$ ;  
 $12a$ .
134.  $9x + 4$ ;  
 $8a - 2b$ ;  
 $9 + 3c$ ;  
 $10a + 3b + c$ ;  
 $12f - g$ .
135.  $6a - b$ ;  
 $7b - 2c$ ;  
 $10c - 3d$ ;  
 $7d + e$ ;  
 $4f + 5e$ .
138.  $y - 3$ ;  
 $y - 13$ ;  
 $5y$ ;  
 $8y + 11$ ;  
 $5$ .
139.  $5p + 1$   
 $5p - 3$   
 $6$   
 $p + 5$   
 $10$ .
140.  $1,4a + 1,8$   
 $0,5b + 1,6$   
 $4,5c + 10,5$   
 $3,7d + 0,1$   
 $2,2f + 8$ .
141.  $7 - 3\frac{7}{12}a$   
 $2\frac{19}{20}b + 1$   
 $c - 2$   
 $\frac{5}{6}d - 1$   
 $1\frac{8}{9}l - 3$ .
142. 3780; 9630; 5880.
143. 170;  $6a$ ;  $16a^2$ ;  
 $3900$ ;  $15x$ ;  $28c^2$ .
144.  $a^3$ ;  $a^3$ ;  $2a^3$ ;  $5b^4$ ;  $10x^2$ ;  $35y^2$ .
145.  $20ab$   $60asq$   $21bcdf$   
 $2vwu$   $300hik$   $2glmr$ .
146. 255; 507; 8525.
147. 20; 10; 7; 21; 13.
148.  $3k + 1$   
 $21 + 1,4m$   
 $45 + 15,3n$   
 $20p$   
 $0,7 + 2,1q$ .
149.  $6x - 6$   
 $3y - 12$   
 $56 - 8z$   
 $16u - 8$   
 $15 - 2v$ .
150.  $3ab + 2a$ ;  $2a^2 - a$ ;  $15ax - 10bx$ ;  
 $7a - ab$ ;  $4x^2 - 7ax$ ;  $ax - 3bx$ .
151.  $4x + 12$   
 $10z - 20$   
 $10x - 9z$   
 $45x + 9z$   
 $7x - 49z$ .

152. 474;  $2a$ ; 7;  
500; 56;  $a$ .
153. 9; 16; 28;  $1\frac{1}{2}$ ; 1,4.      154. 1; 8; 5; 1; 2,3.
155.  $2a + 3$ ;  $b + 3$ ;  $0,5 + c$ ;  $0,2 + \frac{1}{4}d$ ;  $0,5e + 0,4$ .
157.  $7x = 28$ ;  $x = 4$       158. 3; 6; 9; 11; 0; 1.  
 $\frac{x}{13} = 3$ ;  $x = 39$       159. 30; 14; 21; 24; 0,2; 4,9.  
 $x - 9 = 9$ ;  $x = 18$   
 $x + 11 = 11$ ;  $x = 0$   
 $x - 13 = 1$ ;  $x = 14$ .
159. 5 6 6      160. 30      161. 9  
8 8 26      50      10  
4 5 5      280      12  
1 2 3      30      44  
4 8 7.      30.      13.
162. 6,8      163. 1,7      164. 0      165. 3  
5,4      5,8      3      4  
13,6      0,2      10      6  
16,7      4,2      6      16  
5.      6.      4.      7.
166. 12; 1; 9; 11; 3.      167. 27.      168. 33 rbl.
169. 31.      170. 67.      171. 127.      172. 28.
173. 12 aastat.      174. 20 min.      175. 7; 7; 10.
176. 30.      180.  $127; 2\frac{1}{12}; 2000; 3800; 660$ .
180.  $3ab + 5a$       181.  $3a + 5ab + 5b$       181.  $3a - 3$   
 $3cd - 4ce$        $7x + 2ax - 4a$        $2a + 19$   
 $3mn - 7mp$        $6mn - 3m - 5n$        $a + 20$   
 $8pq - 5q$        $3r - 6rs - 7s$        $16a + 8$   
 $8rs - 2rt$        $8p - 2px - 3x$        $29a + 11$ .

182.	$x = 12$	182.	$x = 2$	183.	$s = 0,5$
	$y = 7$		$y = 3$		$t = \frac{1}{3}$
	$z = 1\frac{2}{3}$		$z = 0$		$u = \frac{1}{23}$
	$u = 13$		$u = 1$		$v = 0$
	$v = 1\frac{1}{9}$		$v = 7.$		$x = 0.$

184.	Väljaminek kaotus üle normi kahanemine aastaarv m. a. j.	185.	$+2^0$ $+300$ m $+100$ rbl. $-47$ a.	186.	$+3\%$ $-17$ rbl. $-2$ tundi $+60^0$ $+27^0$ .
------	--	------	---	------	--

187.  $0; +0,5; +1; +2; +4; +7; +9\frac{1}{2}; +14; +20.$

188.  $-11; -8; -7; -5; -3,7; +2; +3,6; +4; +6; +15.$

191.	$+8$	192.	$-4$	193.	$-5\frac{8}{15}$	194.	$-9,06$
	$+7$		$0$		$+\frac{1}{2}$		$+1,26$
	$+9$		$-7$		$+5\frac{7}{24}$		$+34,21$
	$+19$		$+2$		$0$		$-7,58$
	$+8.$		$-20.$		$+\frac{31}{200}.$		$-66,81.$

195.	$-20$	196.	$+3$	197.	$+19$	198.	$-\frac{2}{3}$
	$+12$		$+2$		$+19$		$-2\frac{3}{8}$
	$0$		$+7$		$0$		$+6\frac{13}{24}$
	$-82$		$+9$		$-16$		$-11\frac{9}{10}$
	$-48.$		$+13.$		$+8.$		$-3\frac{283}{600}.$

199.	-8	200.	$5x$	201.	$-5z$	202.	$6x - 3y$
	-12		$2x$		0		$4x + 6y$
	-7		$-2y$		$-3u$		$2,5x$
	+9		$3 - 8y$		$-4v$		$0,8x - 1,7z$
	-6.		$-6z.$		$4 - 4v.$		0.

203.	+6733	204.	-6	205.	$x = +4$
	+7088		+15		$y = -17$
	-2244		-8		$z = -4$
	-14 836		+15		$u = -13$
	-967.		-16.		$v = -15.$

206.	+6	207.	-15	208.	-6
	+12		0		+10
	-10		+8		+1
	0		-20		-2
	+8.		-56.		-1,111.

209.	-24	210.	-1
	+15		+12
	-60		+1
	-42		-8
	-72.		-1.

211.	$+\frac{3}{5}$	212.	+14 641
	+1		+1444
	-2		+0,2401
	-5		$+11\frac{1}{9}$
	+1.		$-5\frac{23}{64}.$

- |      |                      |      |   |      |         |      |       |
|------|----------------------|------|---|------|---------|------|-------|
| 213. | +10                  | 214. | +9                                      | 215. | +0,81   |      |       |
|      | -2197                |      | -64                                     |      | +1,69   |      |       |
|      | +0,0625              |      | +36                                     |      | +0,0016 |      |       |
|      | +1 $\frac{175}{216}$ |      | -343                                    |      | +12,25  |      |       |
|      | +7 $\frac{1}{9}$ .   |      | +1.                                     |      | +16,81. |      |       |
|      |                      |      |   |      |         |      |       |
| 216. | -72                  | 217. | +18                                     | 218. | +2      | 219. | -9    |
|      | 640 000              |      | +90                                     |      | +7      |      | +1    |
|      | 1 024 000            |      | -81                                     |      | +8      |      | -6    |
|      | -2.                  |      | +1,997                                  |      | +3      |      | -1    |
|      |                      |      | +399,964.                               |      | 0.      |      | -7.   |
|      |                      |      |   |      |         |      |       |
| 220. | $\frac{2}{9}$        | 221. | -4                                      | 222. | -11     | 223. | -8°.  |
|      | 0                    |      | -8                                      |      | -15     | 224. | 310°. |
|      | +4                   |      | +7.                                     |      | +64.    |      |       |
|      | -3 $\frac{3}{4}$     |      |   |      |         |      |       |
|      | $\frac{1}{24}$ .     |      |   |      |         |      |       |
|      |                      |      |   |      |         |      |       |
| 225. | -2,2°.               | 227. | +0,16; -8649; -841; +3 $\frac{6}{25}$ . |      |         |      |       |
|      |                      |      |   |      |         |      |       |
|      |                      | 228. | 3u + 126                                |      |         |      |       |
|      |                      |      | 30                                      |      |         |      |       |
|      |                      |      | 144t - 70                               |      |         |      |       |
|      |                      |      | 8 - 4p                                  |      |         |      |       |
|      |                      |      | 4q + 6.                                 |      |         |      |       |
|      |                      |      |   |      |         |      |       |
|      |                      | 229. | -15R                                    |      |         |      |       |
|      |                      |      | -43h <sup>2</sup>                       |      |         |      |       |
|      |                      |      | -17abx                                  |      |         |      |       |
|      |                      |      | -5Q                                     |      |         |      |       |
|      |                      |      | -4uv.                                   |      |         |      |       |

$$230. y = 4 - 0,25x^2$$

$x$	$x^2$	$0,25x^2$	$4 - 0,25x^2$
-8	64	16	-12
-7	49	$12\frac{1}{4}$	$-8\frac{1}{4}$
-6	36	9	-5
-5	25	$6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{4}$
-4	16	4	0
-3	9	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
-2	4	1	3
-1	1	$\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
0	0	0	4
+1	1	$\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
+2	4	1	3
+3	9	$2\frac{1}{4}$	$1\frac{3}{4}$
+4	16	4	0
+5	25	$6\frac{1}{4}$	$-2\frac{1}{4}$
+6	36	9	-5
+7	49	$12\frac{1}{4}$	$-8\frac{1}{4}$
+8	64	16	-12

231.  $x = -1$   
 $x = 5$   
 $x = -3$   
 $x = -1$   
 $x = 0.$

232.  $x = 75$   
 $x = 5$   
 $x = 45$   
 $x = -9$   
 $x = 7.$

233.  $x = 3$   
 $x = 1$   
 $x = -1$   
 $x = \frac{5}{8}$   
 $x = 16.$

234.  $x = -3$   
 $x = -25$   
 $x = 6$   
 $x = 8$   
 $x = 10.$

235.  $x = 7; x = 1\frac{9}{11}.$

236.  $5; -99.$

- |      |  |      |  |      |  |      |   |
|------|--|------|--|------|--|------|---|
| 237. | $20c$<br>$9f^2$<br>$14hk$<br>$3pq^2$<br>$15uv^2.$        | 238. | $6p^2q$<br>$9pq^2r^2$<br>$48f^3h^3$<br>$6abcx^3$<br>$u^3v^3w^3.$             | 239. | $x^6$<br>$y^6$<br>$21z^4$<br>$0$<br>$a^5v^5.$                  |      |   |
| 240. | $-12a^2b^2$<br>$2a^2b$<br>$-2a^2b$<br>$6bcx$<br>$-24ab.$ | 241. | $-0,0009a^2b$<br>$10a^3b^2$<br>$-\frac{1}{2}x^2y^4$<br>$27x^4$<br>$a^2bc.$   | 242. | $9h^3$<br>$8n^2x^3$<br>$16c^4z^5$<br>$a^3s^5$<br>$0,01k^4t^5.$ |      |   |
| 243. | $a^2$<br>$1$<br>$x^3$<br>$t^3$<br>$1.$                   | 244. | $4a^2$<br>$28b^2$<br>$4$<br>$3t$<br>$4u^2.$                                  | 245. | $3m$<br>$5h$<br>$24g$<br>$2n^2$<br>$6z^2.$                     | 246. | $13m^4$<br>$1$<br>$2f$<br>$0$<br>$\frac{5}{i}.$     |
| 247. | $x^4; 1; -z^4.$  | 248. | $\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}u.$  |      |  |      |   |
| 249. | $64$<br>$1$<br>$1$<br>$625$<br>$729.$                    | 250. | $-s^6$<br>$-t^6$<br>$u^{12}$<br>$\frac{v^2}{4}$<br>$+\frac{w^3}{10^3}.$      | 251. | $4a^2$<br>$27b^3$<br>$0,04c^2$<br>$3,375d^3$<br>$50,41e^2.$    | 252. | $36h^2$<br>$-k^6$<br>$9i^4$<br>$-64m^3$<br>$49n^6.$ |
| 253. | $x^{12}$<br>$-u^6$<br>$16v^6$<br>$-1000z^6$<br>$Q^2q^6.$ | 254. | $8a^6b^3$<br>$16m^2n^4$<br>$81p^8q^{12}$<br>$r^5s^5t^{10}$<br>$49a^4x^{10}.$ | 255. | $2xy$<br>$2a^2 + 2b^2.$  | 256. | $2x^2 + x.$   |
| 257. | $-u^2 - 17u - 1.$  | 258. | $x^2 - 9x - 24$<br>$14y^2 - 12y + 3.$  |      |  |      |   |

$$\begin{aligned}
 259. \quad & 20a^3 + 10a \\
 & 7b^3 - 7bx \\
 & 2Q^2q - Q^3 \\
 & 12y^3 - 6aby \\
 & 3h^4 - 3a^2h^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 260. \quad & -a^2b^2 - ab^2 - abc \\
 & 4ac - 6bc - 8c^2 \\
 & 3x^5 - 6x^7 - 9x^9 \\
 & 0, 2x^5 - x^4 + 1, 2x^3 \\
 & -m^3n + 3m^2n^2 - mn^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 261. \quad & 3Q - 2 \\
 & 5z - 4 \\
 & 4u - 3v \\
 & pq + 1 \\
 & 9r^2 + 7.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 262. \quad & 2h - g \\
 & 3x - 5a \\
 & 3x - 1 \\
 & Q^2 - \frac{q}{2} \\
 & \frac{3}{4}r^3 - 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 263. \quad & -m + 1 \\
 & h - l \\
 & -3x + 2 \\
 & -2y + 6 \\
 & 2w^2 + 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 264. \quad & n^6 \\
 & T^9 \\
 & q^{12} \\
 & R^6 \\
 & x^{10}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 265. \quad & a^2b \\
 & 6c^4 \\
 & 2bd \\
 & 6d^4 \\
 & -h^3k^2l.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 266. \quad & -53a \\
 & -4b \\
 & -4cd \\
 & -7 \\
 & +4h.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 267. \quad & 27p^9 \\
 & 169q^4 \\
 & -64r^{12} \\
 & -9s^2 \\
 & 400t^4.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 268. \quad & -3N^3 \\
 & a^4 \\
 & -64m^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 269. \quad & 10h^2 - 2h + 1 \\
 & 5f^3 + 3f^2 - 2 \\
 & -6H^3 - 2H^2 + 5 \\
 & Q^3 - 22Q^2 + 23Q - 10 \\
 & r^3 + r^2 + 2r - 3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 270. \quad & 6ab + 3b^2 \\
 & -16a^3 + 12a^2b \\
 & 4a^2b + 14ab^2 \\
 & \frac{2}{3}a^2b - ab \\
 & -\frac{3}{4}a^3b^2 + 6ab^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 271. \quad & x - y \\
 & x^2 - 7 \\
 & 2ax - 3ax^2 \\
 & 3c - 4x \\
 & 3a^2 - 4d^2.
 \end{aligned}$$

$$272. \quad x^2 + 3x + 2$$

$$x^2 + 6x + 8$$

$$x^2 + x - 6$$

$$x^2 + x - 12$$

$$x^2 - 6x + 5.$$

$$273. \quad -v^2 + 13v - 42$$

$$y^2 - \frac{7}{20}y - \frac{6}{20}$$

$$z^2 - 3\frac{5}{6} + 2\frac{1}{2}$$

$$g^2 + 2,5g - 1,5$$

$$h^2 - 1,1h - 3,5.$$

$$274. \quad 3a^2 + 5ab - 2b^2$$

$$c^2 - 7cd - 60d^2$$

$$s^2 - 3ts - 4t^2$$

$$s^2 - ts - 42t^2$$

$$p^2 - 25q^2.$$

$$275. \quad x^2 + ax - 2a^2$$

$$x^2 + 11ax + 24a^2$$

$$x^2 - 11,7x + 209.$$

$$276. \quad x^2 - 12px + 35p^2$$

$$x^2 - hx + 2kx - 2hk$$

$$mx + lm - 2x^2 - 2lx.$$

$$277. \quad 9506$$

$$10712$$

$$10296$$

$$4554$$

$$9568.$$

$$278. \quad a^2 + 2a + 1$$

$$a^2 + 4a + 4$$

$$a^2 + 6a + 9$$

$$a^2 + 8a + 16$$

$$a^2 + 10a + 25$$

$$279. \quad 121 + 22x + x^2$$

$$144 + 24x + x^2$$

$$169 + 26x + x^2$$

$$196 + 28x + x^2$$

$$225 + 30x + x^2.$$

$$280. \quad n^2 + 0,2n + 0,01$$

$$n^2 + 0,6n + 0,09$$

$$n^2 + 3n + 2,25$$

$$n^2 + 5,4n + 7,29$$

$$n^2 + 7,8n + 15,21.$$

$$281. \quad 4a^2 + 4ab + b^2$$

$$9x^2 + 12x + 4$$

$$25 + 40n + 16n^2$$

$$100n^2 + 20mn + m^2$$

$$256m^2 + 64m + 4.$$

$$282. \quad 2601; 5041; 10404; 644809; 1020100.$$

$$283. \quad c^2 - 2c + 1$$

$$c^2 - 6c + 9$$

$$c^2 - 10c + 25$$

$$c^2 - 14c + 49.$$

$$284. \quad \frac{1}{4} - p + p^2$$

$$\frac{1}{9} - \frac{2}{3}p + p^2$$

$$6\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}p + p^2$$

$$7\frac{1}{9} - 5\frac{1}{3}p + p^2.$$

285.	$d^2 - 0,2d + 0,01$	286.	$4c^2 + 4c + 1$
	$d^2 - 0,4d + 0,04$		$9c^2 + 12c + 4$
	$d^2 - 2,6d + 1,69$		$16c^2 + 24c + 9$
	$d^2 - 4,8d + 5,76$		$25c^2 + 40c + 16$
	$d^2 - 7d + 12,25.$		$36c^2 + 60c + 25.$

287. 1521; 9801; 324; 38809; 3960100.

288.	$x^2 - 1$	290.	$6ab.$
	$x^2 - 9$	291.	$3h^3 + 4h^2 + 9h + 12$
	$x^2 - 36$		$5h^3 - 8h^2 + 8h - 3.$
	$x^2 - 81$	292.	$x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
	$x^2 - 144.$		$x^3 - 6x^2 + 27.$

293.  $9m^2 + 6m - n^2 + 1$   
 $35p^4 - 19p^3 + 19p^2 - 23p + 12.$

293.  $2x^3 - 13x^2 + 22x - 8$   
 $6x^3 + 11x^2 - 31x + 14.$

294.  $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$   
 $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$   
 $64 + 48c + 12c^2 + c^3$   
 $d^3 + 15d^2 + 75d + 125$   
 $343 + 147f + 21f^2 + f^3.$

295.  $x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$   
 $a^3 - a^2 + \frac{1}{3}a - \frac{1}{27}$   
 $\frac{c^3}{8} - 1\frac{1}{2}c^2 + 6c - 8$   
 $\frac{c^3}{8} - \frac{3}{8}c^2 + \frac{3}{8}c - \frac{1}{8}.$

$$297. \quad 1. \quad x^3 + y^3 \\ a^3 + x^3 \\ m^3 + n^3 \\ b^3 + 8 \\ x^3 + 1.$$

$$297. \quad 1. \quad a^3 + d^3 \\ b^3 - m^3 \\ 27 + x^3 \\ 64 - a^3 \\ y^3 - 125.$$

$$298. \quad 9u^2 - 30uv + 25v^2 \\ \frac{9}{16} - 1\frac{1}{2}x + x^2 \\ 0,81 - 1,8w + w^2$$

$$1 - s + \frac{1}{4}s^2 \\ 4f^2 + 2fg + \frac{1}{4}g^2 \\ \frac{1}{9}h^2 - \frac{2}{5}hk + \frac{9}{25}k^2.$$

$$299. \quad a^3 - a; \quad m^4 - m^3n - mn - n^2.$$

$$300. \quad n^3 - 13n^2 + 46n - 48; \quad x^3 + 2x - 29x - 30.$$

$$301. \quad 4a^2 - b^2 - 2b - 1; \quad m^4 + m^2n^2 + n^4.$$

$$302. \quad 1 - 5x - 4x^2 \\ 12a^2b - 6ab^2 \\ -66F^2 + 162F - 125 \\ 0 \\ 12N^2 - 6N.$$

$$303. \quad 8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$$

$$\frac{1}{8} - \frac{3}{4}c + \frac{3}{2}c^2 - c^3 \\ F^3 - 0,3F^2 + 0,03F - 0,001 \\ h^3k^3 + 3h^2k^2l + 3hkl^2 + l^3 \\ 2\frac{10}{27}m^3.$$

$$304. \quad m^3 + p^3 \\ a^3 - m^3 \\ 512 + x^3 \\ 125 - y^3 \\ 1728 + a^3.$$

$$305. \quad 2(a + b) \\ 7(x + y) \\ 3(m + 2n) \\ 4(a + b + 1) \\ 10(b + 2c + 2).$$

$$306. \quad 15(m + n) \\ 32(a - b) \\ m(n + l) \\ 16(a - 2) \\ 4(2b + 1).$$

307.	$(x + y)(x - y)$	308.	120	309.	120
	$(a + n)(a - n)$		70		3,5
	$(5 + a)(5 - a)$		140		9,2
	$(m + 4)(m - 4)$		4		1260
	$(6 + b)(6 - b)$		15.		530.

310.	80	311.	1600	312.	144
	480		48 000		279
	400		18 000		729
	40		72 000		1680
	360.		76 000.		2720.

314.	$\frac{a + b}{a - b}$	315.	$c(a - b)$ kilomeetrit.
	$a^2 + b^2$	316.	1; 1; 0; 10,16; $1\frac{1}{12}$ .
	$a^2 - b^2$		
	$a^3 + b^3$		
	$(a + b)^3$ .		

317.	$a + b + 2 = 10$	318.	$3 \cdot (ab) = 45$
	Ei ole võimalik		Ei ole võimalik
	$a + b - 3 = 5$		$\frac{ab}{5} = 3$
	$3(a + b) = 24$		$15 + 7 = 22$
	$8^2 = 64$ .		$(ab)^2 = 225$ .

320.	$4n^2$ .	321.	30; 45; 45; 60; 75; 75.
------	----------	------	-------------------------

328.  $8a + 15b + 120$  ruutmeetrit.

329.	$(40 + 1)^2 = 1681$	331.	$2(9 + a^2)$
	$(80 + 3)^2 = 6889$		$2n(5 - n)$
	$(30 - 1)^2 = 841$		$4(4 + 3x^2)$
	$(300 - 1)^2 = 89401$		$3an(a - n)$
	$(900 - 10)^2 = 792100$ .		$2(6 - b)$ .

332.  $8(4 + m)$   
 $12c$   
 $4(3a^2 + 4)$   
 $-3ax(a + x)$   
 $12(d + 1).$

333.  $x = 3$   
 $x = 3$   
 $x = 2$   
 $x = 2$   
 $x = 172.$

334. 57.      335. 312.

341.	$r$	1	2	2,5	3	3,5	4	5	6
	$d$	2	4	5	6	7	8	10	12

Diameeter on võrdeline raadiusega.

343.  $180^\circ.$

344.  $60^\circ; 50^\circ; 40^\circ; 30^\circ; 25^\circ.$       345.  $\frac{1}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{6}.$

346.  $180^\circ.$       353.  $180^\circ; 120^\circ; 72^\circ; 60^\circ; 40^\circ.$

354.  $240^\circ; 288^\circ; 300^\circ; 225^\circ; 210^\circ.$

355.  $36^\circ; 72^\circ; 108^\circ; 144^\circ; 180^\circ.$       365.  $90^\circ.$

366.  $270^\circ.$       372.  $95^\circ.$

373.  $68^\circ.$       374.  $90^\circ.$

375.  $65^\circ; 51^\circ; 45^\circ; 31^\circ; 30^\circ.$

377.  $75^\circ; 72,5^\circ; 70^\circ; 61,5^\circ; 60^\circ.$

378.  $130^\circ; 90^\circ; 76^\circ; 44^\circ; 36^\circ; 60^\circ.$

387. Kõrgus 11,6; pindala 77,72 aari.

388.  $27^\circ; 34^\circ; 119^\circ; S \approx 1200 \text{ m}^2.$

390. 13,2 cm; 18,2 cm; 21 cm; 11 m; 13,5 m.

391. 14,5 cm; 22 cm; 107 cm; 1,26 m; 11,3 m.

392. 228 cm.      393. 78 m.

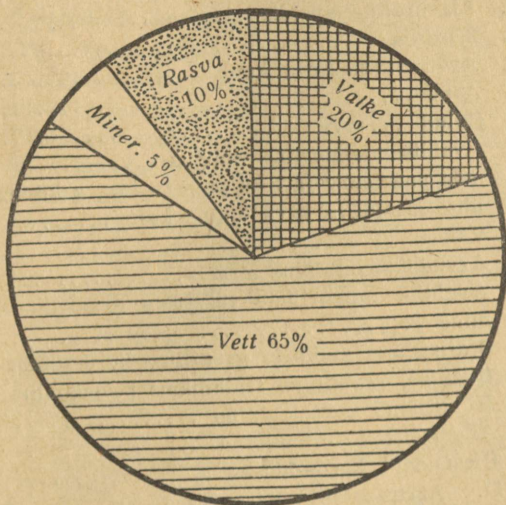
394. 2,64; 4,27; 6; 10; 4; 8,2.

395. 1,59; 4,14; 0,89; 11,5; 5,7.      397. 27,4 cm.

398. 1,59 cm.      399. 17; 21; 42; 61; 94.

400. 180 cm.      402. 50; 78,5; 314; 706; 1260  $\text{cm}^2.$

404. 0,62 m<sup>2</sup>.      405. 50; 113; 314; 38,5; 158 cm<sup>2</sup>.  
 406. 314; 252; 154; 28,3; 50 cm<sup>2</sup>.  
 407. 1260 cm<sup>2</sup> = 12,6 dm<sup>2</sup>.  
 408. 1,4; 2,8; 4,2; 57,6; 78 cm<sup>2</sup>.  
 414. 378; 500; 628; 754; 775 cm<sup>2</sup>.  
 415. 220; 247; 336; 445; 510 cm<sup>2</sup>.  
 416. 251,2 cm<sup>2</sup>.      417. 900,3 cm<sup>2</sup>.  
 419. 336 cm<sup>2</sup>.      420. 34 rbl. 16 kop.  
 421. 2512 cm<sup>3</sup>.      422. 276 cm<sup>3</sup>.      423. 22,6 m<sup>3</sup>.  
 425. 1,176 kg.      426. 0,188 tihumeetrit.  
 427. 27,7 cm<sup>3</sup>.      428. 12,8 cm.      429. 19,1 cm.  
 430. 0,41 m.      431. 1 m.      432. 100 rbl. 48 kop.  
 433. 1,27 korda.      434. 90°; 45°; 45°.      435. 8,93.  
 437.



## SISUKORD.

	Lk.
<b>ALGEBRA.</b>	
<b>Peatükk I. Algebralise sümbolika alged</b> .....	3
§ 1. Algebra nimi .....	3
§ 2. Täht arvu tähisena .....	3
§ 3. Matemaatilised märgid .....	9
§ 4. Algebraline avaldis .....	11
§ 5. Kordaja .....	11
§ 6. Arvu ruut, Arvu kuup .....	16
§ 7. Aste .....	16
§ 8. Sulud .....	20
§ 9. Avaldise numbriline väärtus .....	24
§ 10. $n$ -es paarisarv ja $n$ -es paaritu arv. $a$ kümnet ja $b$ ühte sisaldava arvu üldine kuju .....	30
§ 11. Valem .....	31
§ 12. Arvude kujutamine sirgel .....	34
§ 13. Avaldise numbriliste väärtuste graafiline kujutamine .....	37
§ 14. Statistiliste andmete graafiline kujutamine .....	40
§ 15. Üksliige, Hulkliige, Hulkliikme koondamine .....	53
§ 16. Hulkliikme korraldamine .....	58
§ 17. Algebralised teisendused .....	60
§ 18. Ülesandeid kordamiseks .....	61
<b>Peatükk II. Arvutamise põhiseadused</b> .....	65
§ 19. Loendamise tulemuse ühesus .....	65
§ 20. Liitmise põhiseadused .....	66
§ 21. Lahutamise põhiseadused .....	71
§ 22. Korrumise põhiseadused .....	75
§ 23. Jagamise põhiseadused .....	81
§ 24. Täht tundmatu arvu tähisena .....	88

	Lk.
§ 25. Võrrand .....	90
§ 26. Ülesandeid kordamiseks .....	97
<b>Peatükk III. Positiivsed ja negatiivsed arvud .....</b>	<b>100</b>
§ 27. Vastassuurused .....	100
§ 28. Positiivsed ja negatiivsed arvud .....	102
§ 29. Relatiivsete arvude järjestus suuruse järgi .....	105
§ 30. Relatiivsete arvude astmik .....	106
§ 31. Relatiivsete arvude liitmine .....	107
§ 32. Relatiivsete arvude lahutamine .....	110
§ 33. Relatiivsete arvude korrutamine .....	115
§ 34. Relatiivsete arvude astendamine .....	120
§ 35. Relatiivsete arvude jagamine .....	122
§ 36. Arvuvalla laiendamine negatiivsete arvudega ....	124
§ 37. Null .....	125
§ 38. Ülesandeid kordamiseks .....	126
<b>Peatükk IV. Täisavaldised .....</b>	<b>130</b>
§ 39. Üksliikmete korrutamine .....	130
§ 40. Üksliikmete jagamine .....	133
§ 41. Üksliikmete astendamine .....	135
§ 42. Hukliikmete liitmine ja lahutamine .....	137
§ 43. Hukliikme korrutamine ja jagamine üksliikmega	139
§ 44. Ülesandeid kordamiseks .....	141
<b>Peatükk V. Arvutamise abivalemid .....</b>	<b>144</b>
§ 45. Kakslükmete korrutamine .....	144
§ 46. Summa ruudu valem .....	146
§ 47. Vahe ruudu valem .....	148
§ 48. Kahe arvu summa ja vahe korrutise valem .....	149
§ 49. Hukliikmete korrutamine .....	151
§ 50. Summa kuubi ja vahe kuubi valemid .....	153
§ 51. Korrutised $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ ja $(a-b)(a^2+ab+b^2)$	155
§ 52. Ülesandeid kordamiseks .....	156
§ 53. Hukliikme tegureiks lahutamine .....	158
§ 54. Ülesandeid kordamiseks .....	161
<b>GEOMEETRIA.</b>	
<b>Peatükk VI. Ring. Nurk. ....</b>	<b>171</b>
§ 55. Ring ja ringjoon .....	171
§ 56. Kaar. Kaare mõõtmine kaarekraadides. Sektor ...	174
§ 57. Nurk. Nurga mõõtmine nurgakraadides .....	179

	Lk
§ 58. Kolmnurga nurkade summa .....	186
§ 59. Ringjoone pikkus. Kaare pikkus .....	189
§ 60. Ringi pindala. Sektori pindala .....	192
§ 61. Sektordiagramm .....	195
<b>Peatükk VII. Silinder.</b> .....	198
§ 62. Silinder, tema pinnalaotus ja pindala .....	198
§ 63. Silindri ruumala .....	202
Vastused .....	206

III täiendatud trükk.

*Vastutav toimetaja A. Borkvell.*

*Keeleline toimetaja E. Kivistik.*

Ladumisele antud 13. V 1948. Trükkimisele antud 30. VII 1948. Trükiarv 12.000. Paber  $56 \times 79, \frac{1}{16}$ . Trükipoognaid 14,25. Trükitähti trükipoognas 42.240. Arvutuspoognaid 13,3. MB-06673. Tellimise nr. 969. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4.

На эстонском языке.

A. Вихман. Математика для VI класса.



Rbl. 4.25

A-17388

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00426580 9

Rbl. 4.25

A-17388

A. VIHMAN • MATEMAATIKA ÔPIK VI KLASSILE



1 0300 00426580 9

A-17388

Duplum

A. VIHMAN

# MATEMAATIKA ÔPIK

VI KLASSILE

*RK*

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“ • 1948