TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Evelin Kukk

Probleemülesannete lahendamine kolmandas kooliastmes

Matemaatika- ja informaatikaõpetaja õppekava

Magistritöö (15 EAP)

Juhendaja: Hannes Jukk, MSc

Tartu 2023

Probleemülesannete lahendamine kolmandas kooliastmes

Magistritöö

Evelin Kukk

Lühikokkuvõte

Käesolevas magistritöös antakse ülevaade probleemülesannete lahendamise arengutest. Töös tuuakse välja, mida probleemi ja probleemülesande all matemaatikas mõistetakse. Antakse ülevaade, kuidas probleemülesannete lahendamist koolitunnis korraldada ning millistele õpilaste ja õpetaja enda tegevustele tähelepanu pöörata. Töös kirjeldatakse nn mõtleva klassiruumi kujundamist, kus koos väikeses grupis probleemülesandeid lahendades tuleb õpilastel omavahel suhelda ja koostööd teha. Töös tuuakse välja erinevaid probleemide lahendamise strateegiaid ja esitatakse strateegiate rakendamise kohta näiteid. Teiseks on antud magistritöö raames loodud õppematerjalid probleemülesannetest. Valik erinevaid probleemülesandeid toetavad seitsmenda klassi ainekava omandamist. Samas on ülesanded sobilikud lahendada kõigile kolmanda kooliastme õpilastele.

CERCS teadusala: S270 pedagoogika ja didaktika

Märksõnad: Probleemülesanne, probleemi lahendamine, koos õppimine, probleemipõhine õpe

Problem solving in the third school level

Master's Thesis

Evelin Kukk

Abstract

This master's thesis provides an overview of developments in problem solving. The paper outlines what is meant by problem and problem solving in mathematics. It gives an overview of how to organise problem solving in the classroom and which student and teacher activities to pay attention to. It describes how to create a thinking classroom, where students interact and collaborate in a small group to solve problems. The paper outlines different problem-solving strategies and gives examples of how they are applied. Teaching materials for problem solving have been created. A selection of different types of problems supports the learning of the seventh grade curriculum. At the same time, they are suitable for all third level students.

CERCS research specialization: S270 Pedagogy and didactics

Keywords: Problem-solving task, problem solving, cooperative learing, problem-based learning

Sisukord

Sissejuhatus

Põhikooli riiklik õppekava eeldab probleemülesannete koostamist ja lahendamist, erinevate lahendusstrateegiate uurimist ja rakendamist, olemasoleva informatsiooni analüüsimist ja loogilise arutluse kaudu järeldusteni jõudmist (Põhikooli riiklik õppekava lisa 5, 2011). Seega on igati asjakohane tutvustada probleemülesannete lahendamise praktikaid ja strateegiaid, pakkuda välja probleemülesandeid ja lahendusi. Matemaatikaõpetus eristub oma hierarhilise iseloomu tõttu, kus hilisem õpitu toetub varasemale ja uute teadmiste omandamise edukus on tugevalt seotud eelnevate teadmistega (Põhikooli riiklik õppekava lisa 5, 2011). Seetõttu on matemaatika õppeprotsessis oluline roll täpsusel, järjepidevusel ja aktiivsel mõttetööl kogu õppeaja vältel (Põhikooli riiklik õppekava lisa 5, 2011).

Käesoleva töö kirjutamiseks on inspiratsiooni saadud Peter Liljedahli (2021) raamatust „Building thinking classrooms in mathematics grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning“. Raamat sisaldab selle autori aastaid väldanud uurimistöö tulemusi selle kohta, kuidas „mittemõtlevast“ klassiruumist liikuda „mõtleva“ klassiruumi poole. Autor on raamatus toonud hulga näiteid, ülesandeid ja õppijakeskseid praktikaid, mis soodustavad õpilaste matemaatilist mõtlemist ja õppimist.

Üks mõte, mida Peter Liljedahl (2021) korduvalt oma raamatus sõnastab on „selleks, et õpilased mõtleksid, peame me andma neile midagi, mille üle mõelda“ (lk 279). Olulised on klassis valitsev kultuur ja keskkond, kus mõtlemine ei ole ainult hinnatud, vaid on ka vajalik, ehk õpetajal tuleb luua nn mõtlev klassiruum (Liljedahl, 2021).

Põhikoolis õppetegevust kavandades ja korraldades teevad õpetajad koostööd, seejuures rakendatakse uurivat õpet ja kasutatakse mitmekesiseid ja kombineeritud õppemeetodeid ning aktiivsust, loovust, koostööd ja tagasisidet soodustavaid õppetegevusi (Põhikooli riiklik õppekava lisa 5, 2011). Üks võimalus tõsta õpilaste aktiivust, arendada loovust ja koostöö oskusi, on lahendada tunnis probleemülesandeid rühmades antud magistritöös kirjeldatud viisil.

Magistritöö eesmärk on anda ülevaade probleemülesannete lahendamise arengutest aja jooksul, praktikatest ja erinevatest strateegiatest. Tuua välja, mida probleemi ja probleemülesande all matemaatikas mõistetakse. Siin selgitatakse, miks on vaja probleemülesandeid lahendada. Antud töö oleks abiks ka põhikooli kolmanda kooliastme õpetajale nn mõtleva klassiruumi kujundamiseks. Teiseks pakub antud töö valiku erinevaid probleemülesandeid, mis toetavad ka ainekava omandamist. Õpetajad võivad vältida probleemülesannete lahendamist tundides, sest nii võib tekkida maha jäämine kohustuslikes õppekava teemades, eriti aeglasemates tempogruppides. Antud töös pakutud probleemülesanded toetavad õppekava teemasid, seega antud valiku kasutamine tundides on põhjendatud. Käesolev magistritöö võiks õpetajates tekitada huvi Liljedahli (2021) kirjeldatud mõtleva klassiruumi ja koos õppimise metoodika vastu. Antud töö eesmärk ei ole uurida ja analüüsida koolides probleemülesannete lahendamist ja õpilaste probleemülesannete lahendamise oskusi.

1. Mis on probleemülesanne

Antud magistritöös vaadeldakse probleemülesandeid matemaatikas, aga probleemülesandeid tuleb ette erinevates valdkondades nagu füüsika, keemia, majandus, psühholoogia ja muudes eluvaldkondades. Koolimatemaatikas on probleemülesanneteks enamasti tekstülesanded. Alljärgnevalt on toodud mõned aja jooksul esitatud arusaamised ja kirjeldused probleemi ja probleemülesande kohta.

Probleem on uurimisülesanne, lahendust nõudev keerukas küsimus (Eesti õigekeelsussõnaraamat, 2018).

Resnick ja Glaser (1975) on kirjutanud, et „mõiste probleem viitab olukorrale, kus tuleb lahendada varem mitte ettetulnud ülesanne, mille jaoks ei ole täpset lahendusviisi antud“ (lk 6). Teisisõnu, konkreetne ülesanne on lahendajale uus, kuigi olemasolevaid teadmisi võib lahendamiseks kasutada (Resnick & Glaser, 1975).

Kolm erinevat mõistet on küsimus, harjutus ja probleem. Krulik ja Rudnick (1982) on öelnud, et „küsimus nõuab meelde tuletamist, harjutus pakub harjutamist ja praktikat, probleem nõuab hoolikat läbimõtlemist ja teadmiste sünteesi. See, mis kord ühele inimesele on probleem, võib olla harjutus või küsimus talle hiljem. Veelgi enam, mis ühele on probleem, võib kergesti olla harjutus või küsimus kellegi teise jaoks“ (lk 42).

Probleemülesandeid nimetatakse sageli mitterutiinseteks ülesanneteks, sest need ülesanded nõuavad õpilastelt oma teadmiste kasutamist mitterutiinsel viisil (Liljedahl, 2021). Head probleemülesanded on väärtuslikud ülesanded, sest nõuavad õpilastelt mitmekesiseid matemaatilisi teadmisi ja erinevate teadmiste kooskasutamist, et probleem lahendada (Liljedahl, 2021).

L. Lepmann ja T. Lepmann (1995) on kirjutanud, et „probleemiks osutub ülesanne siis, kui selle täitjal puudub valmis retsept antud korralduse täitmiseks. Harjutuse korral seevastu on ülesande lahendamise meetod lahendajale ette antud“ (lk 12).

Erinevad autorid on üksmeelel, et probleem või probleemülesanne on, kui kindlat lahendusviisi ei ole ette teada ja ülesande lahendamine nõuab teatavat pingutust, mõtlemist ja proovimist. Ülesannet, mida saab kergesti teada oleval viisil lahendada, on autorid nimetatud harjutuseks või rutiinseks ülesandeks.

2. Probleemülesannete lahendamisest Polyast alates

Probleemülesannete lahendamisel ja probleemülesannete lahendamise õpetamisel on koolimatemaatikas kindel koht.

Esimene, kes kirjeldas probleemide lahendamise strateegiaid nii, et neid saaks ka õpetada, oli George Polya (Schoenfeld, 1980). Ungari päritolu matemaatik George Polya avaldas 1945. aastal teose „How to solve it“, kus kirjeldab probleemülesannete lahendamist ja esitab ülesannete lahendamise neli faasi (How to solve it, *s.a.*). Raamatut on tõlgitud paljudesse keeltesse ja pidevalt on avaldatud kordustrükke (How to solve it, *s.a.*). Eesti keeles, Ülo Kaasiku tõlkes ilmus raamat „Kuidas seda lahendada“ esmakordselt 1967. aastal ja kordustrükk 2001. aastal (Polya, 2001). Raamatut kasutatakse siiani matemaatika õpetamisel (George Polya, *s.a.*). Edasi avaldas Polya kahes köites raamatu „Mathematical Discovery“, vastavalt aastatel 1962 ja 1965 ja pani nende kolme teosega aluse edasisele uurimisele heuristikas[1] (Schoenfeld, 1980).

Kahekümnenda sajandi teisel poolel, eriti 1960ndatel ja 1970ndatel aastatel, edenes matemaatikas probleemilahendamise uurimine ja avaldati rida uuringuid probleemilahendamise protsesside kohta (Liljedahl *et al*., 2016). Eeldati, et õpetamise ja õppimise heuristilised strateegiad, põhimõtted ja vahendid on abiks õpilastele probleemolukordades ja parandavad nende probleemülesannete lahendamise oskusi (Liljedahl *et al*., 2016).

Polya mõju oli suur. Näiteks National Council of Teachers of Mathematics soovitas oma 1980. aasta tegevuskavas, et probleemide lahendamine oleks 1980. aastatel koolimatemaatikas keskel kohal (Schoenfeld, 1987). Praeguseks on heuristiliste lähenemisviiside õpetamine õpilastele didaktikas aktsepteeritud (Liljedahl *et al*., 2016). Schoenfeld (1987) kirjutab, et „lühidalt öeldes tähendab probleemide lahendamine matemaatikahariduses probleemide lahendamist a la Polya“ (lk 287). Polya töid probleemide lahendamise alal tsiteeriti ajakirjades American Political Science Review, Annual Review of Psychology, Artificial Intelligence, Computers and Chemistry, Computers and Education, Discourse Processes, Educational Leadership, Higher Education, Human Learning ja paljudes teistes ajakirjades (Schoenfeld, 1987).

---

[1] Heuristika on avastamisõpetus. Heuristika annab probleemi lahendamiseks reegli või meetodi, kuid ei paku valmislahendusi (Heuristika, *s.a.*).

Eestis avaldasid 1995. aastal Lea ja Tiit Lepmann raamatu „Teeme ise matemaatikat“, kus on rõhutatud avastava õppimise tähtsust. Avastav õppimine on kõige üldisemas plaanis õppimine läbi oma enese kogemuses (Lepmann & Lepmann, 1995). Raamatus on antud nii metoodilisi nõuandeid õpetajale avatud ülesannete kasutamiseks õppetöös, aga on esitatud nn probleemide ringid ehk avatud ülesanded, mida õpetaja õppetöös kasutada saab (Lepmann & Lepmann, 1995). Avatud ülesannetena käsitlevad autorid selliseid ülesandeid, mille puhul on algtingimused või oodatav resultaat või siis mõlemad sõnastatud suhteliselt üldiselt (Lepmann & Lepmann, 1995). Lepmann (2012) on ka kirjutanud:

> Loovalt ja loogiliselt arutlemise oskuse arendamine on matemaatikaõpetuse üheks olulisemaks eesmärgiks. See oskus pole vajalik mitte ainult matemaatikaülesannete, vaid ka elus ette tulevate igapäevaste probleemide edukaks lahendamiseks. Arvatakse, et viljakaim aeg loova ja loogilise mõtlemise õppimiseks on 7. – 9. klass, mil õpilased on oma mõtlemise tasemelt jõudnud nn formaalsete operatsioonide staadiumi (lk 1).

Probleemülesannete lahendamisest on õpilastele kasu lisaks ainealaste teadmiste arendamisele ka muul moel. Avastava või huvitava, kuid raske probleemülesande lahendamine tõstab õpilase enesehinnangut ja motivatsiooni, pakub rahulolu ja pingest vabanemise tunnet (Lepmann & Lepmann, 1995).

Eesti põhikooli riikliku õppekava järgi kolmanda kooliastme lõpuks õpilane esitab erinevate eluvaldkondade probleeme matemaatiliselt, koostab ja lahendab mitmetehtelisi probleemülesandeid, mõistab ja kasutab erinevaid probleemide lahendamise strateegiaid ning oskab analüüsida nende erinevusi, koostab erinevate eluvaldkondade probleemide lahendamiseks sobivaid matemaatilisi mudeleid, lahendab neid ja üldistab saadud tulemusi (Põhikooli riiklik õppekava lisa 5, 2011). National Council of Teachers of Mathematics soovitas 1980. aastal probleemülesannete lahendamist koolimatemaatikas. Kehtivas Eesti põhikooli riiklikus õppekavas on probleemülesannete lahendamine nõutud.

Probleemülesanded peaksid kuuluma iga matemaatikateema koosseisu (Lepmann 2012). Sellest mõttest lähtuvalt on käesolevas magistritöös pakutud ka ainekava toetavaid probleemülesandeid, mida õpetaja saab oma töös õpilastega kasutada. Lisaks on toodud ülesannete lahendusi ja vastused. Käesoleva magistritöö eesmärk on ka tutvustada õpetajale viise ja strateegiaid, kuidas probleemülesannete lahendamist koolitunnis korraldada ning millistele õpilaste ja õpetaja enda tegevustele tähelepanu pöörata.

3. Miks probleemülesandeid lahendada ja koos õppida

Käesolevas peatükis antakse ülevaade tavapärasest matemaatikatunnist, selle puudustest ja esitatakse erinevaid praktikaid matemaatikatunni läbiviimiseks. Antakse ülevaade probleemi lahendamisest matemaatikas ja probleemülesannete lahendamise vajadusest. Antud peatükis tuuakse välja õpilaste erinevad tegevused matemaatikatunnis ülesannete lahendamisel.

3.1 Matemaatika õpetamisest ja õppimisest põhikooli riiklikus õppekavas

Põhikooli riikliku õppekava kohaselt (2011) tuleb koolis õppe- ja kasvatuseesmärkidena kujundada õpilaste suhtlus- ja sotsiaalseid pädevusi. Koos grupis probleemülesandeid lahendades tuleb õpilastel omavahel suhelda ja koostööd teha. Õpilastel tuleb kaaslaste ees oma seisukohti esitada ja põhjendada. Samas tuleb aktsepteerida kaaslaste arvamusi, arvestada üksteisega ja jagada õppevahendeid.

Põhikooli riikliku õppekava (2011) kohaselt koolis luuakse ka võimalusi õppimiseks ja toime tulemiseks erinevates sotsiaalsetes suhetes (õpilane-õpetaja, õpilane-õpilane). Grupis probleemülesandeid lahendades õpivad õpilased koos, omavahel teadmisi ja oskusi vahetades. Õpetajal on suunav roll sellise õppimise meetodi juures.

Põhikooli riikliku õppekava (2011) kohaselt peab õpetaja kasutama nüüdisaegset ja mitmekesist õppemetoodikat, -viise ja -vahendeid (sealhulgas suulisi ja kirjalikke tekste, audio- ja visuaalseid õppevahendeid, aktiivõppemeetodeid, õppekäike, õues- ja muuseumiõpet jms). Käesolevas töös järgnevalt kirjeldatud Peter Liljedahli (2021) õpetamise praktika on õpilasekeskne, kus on ühendatud õpilaste koostöö ja liikumine tunni ajal. Õpilased ei istu klassikalisel viisil pingirivides, vaid lahendavad ülesandeid seistes vertikaalsetele pindadele kirjutades. Peter Liljedahli (2021) kirjeldatud tundi saab läbi viia ka õues, kui leidlikul viisil luua sobivad võimalused.

3.2 Nüüd proovige teie

Järgmises osas tutvustatakse vajadust klassikalist õpetamise viisi muuta. Siinkohal tuginetakse põhiliselt Liljedahli ja Allani (2013, 2021) töödele.

Õpetajal on oluline aru saada, millega õpilased tunnis tegelevad. Kas nad õpivad ja lahendavad tegelikult ise ülesandeid või ei keskendu nad õppimisele ega saa ka aru, mis tunnis toimub? Millised on asendustegevused, millega õpilased tunnis tegelevad ja mis ei aita neil õppida, aru saada ega arenda nende teadmisi ja oskusi? Õpetajal on oluline mõista õpilaste käitumist, mis ei vasta tunni eesmärkidele ja õpetaja ootustele. Õpetaja saab olukorda muuta ja tuua klassi erinevaid praktikaid, et õpilasi aktiivselt õppima ja mõtlema suunata.

Üks tavapärane õpetamise praktika matemaatikatundides on nn *nüüd proovige teie* (Liljedahl & Allan 2013). Meetod on lihtne. Kui õpetaja on selgitanud ja teinud näiteks tahvlile mõned näited, siis annab ta õpilastele lahendada ülesandeid ehk nüüd proovige teie (Liljedahl & Allan 2013). Liljedahl ja Allan (2013, 2021) ongi lühidalt nimetanud seda traditsioonilist matemaatikatunni läbiviimise praktikat *nüüd proovige teie.* See tundide läbiviimise meetod on levinud. Liljedahli (2021) külastatud neljakümnes erinevas Kanada klassis oli see meetod kasutusel igas vaadeldud tunnis. Autorid Liljedahl ja Allan (2013, 2021) ei anna hinnangut, mis on meetodi voorused või puudused.

3.3 Tavapärane matemaatikatund ja õpilaste tegevused tunnis

Peter Liljendahl (2021) on kirjeldanud, kuidas ta käis Kanada erinevates koolides, vaatles neljakümne erineva klassi tunde neljakümnes erinevas koolis ja leidis, et õpilased ei mõtle tunnis ise (Liljedahl, 2021). Vaadeldud koolide seas oli nii madalama kui kõrgema sotsiaalmajanduslike tingimustega koole, inglise ja prantsuse õppekeelega koole, nii riiklike kui ka erakoole. Ta mõistis, et probleem ei ole õpetajates või koolides, vaid probleem on süsteemne ehk selles, kuidas tavapärane matemaatikatund ja matemaatika õpetamine koolis on korraldatud.

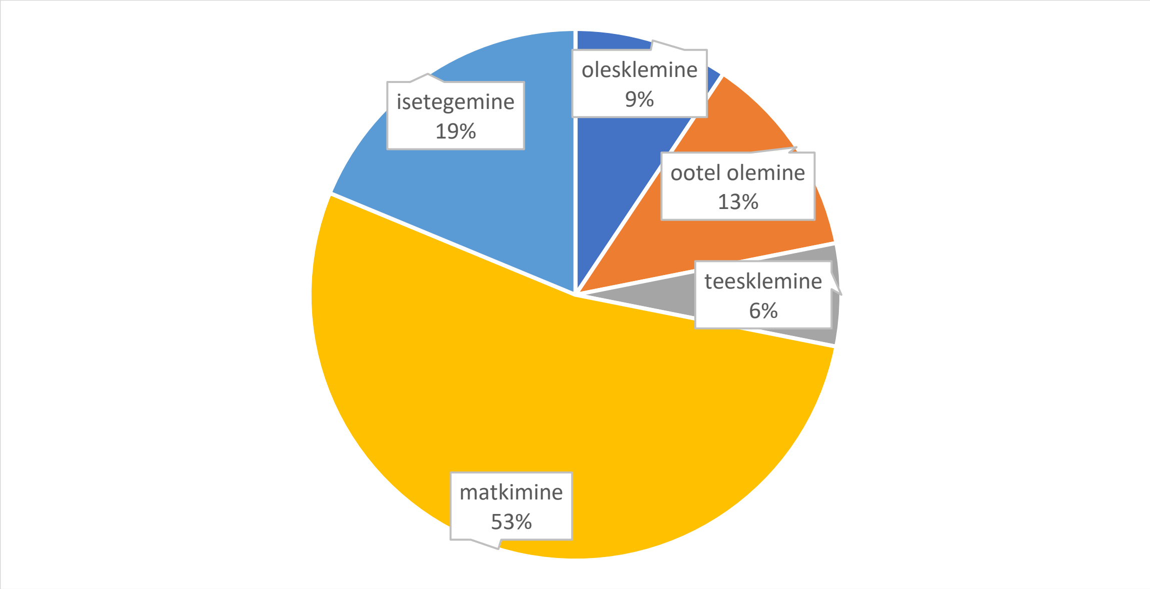
Tavapärane matemaatikatund on, kui õpetaja on tahvlile ette näidanud, kuidas midagi teha või lahendada, pöördub ta õpilaste poole ja laseb neil iseseisvalt mõne ülesande lahendada ehk kasutab levinud praktikat *nüüd proovige teie*. Keskmiselt nelja minuti ja kahekümne kahe sekundi pärast õpetaja näitab lahenduse. Sageli see kordub ja õpilased saavad järgmise ülesande iseseisvalt lahendada (Liljedahl, 2021). Peter Liljedahl (2021) leidis, et kõigest kakskümmend protsenti õpilastest tegid seda, mida õpetajad eeldasid ehk lahendasid iseseisvalt ülesandeid. Ülejäänud seda ei teinud. Üle poolte õpilastest matkisid iseseisvat lahendamist. Nad proovisid õpetaja toodud näite järgi ülesannet lahendada. Kui õpetaja näidatud lahendusskeem täpselt ei sobinud, siis nad küsisid, mida teha (Liljedahl, 2021).

Mida õpilased tunnis teevad, kui nad ei mõtle ega lahenda ise ülesandeid? Peter Liljedahl (2021) viis läbi eraldi uuringu kümnes erinevas klassis. Alltoodud on tema uuringu tulemused ehk õpilaste viis tegevust matemaatikatunni ajal. *Nüüd proovige teie* tunnis, kus õpetaja esmalt selgitab ja teeb mõned näited tahvlile ja seejärel annab ülesanded iseseisvaks lahendamiseks, jagunesid õpilased tegevuste järgi viide gruppi. Õpilaste tegevused matemaatika tunni ajal olid alljärgnevad (Liljedahl, 2021).

- Olesklemine (*slacking*). Need olid õpilased, kes isegi ei üritanud ülesandeid lahendada. Õppimise asemel nad vaatasid oma nutitelefoni, ajasid juttu ehk ei teinud midagi. Nad ei teadnud, mis tunnis toimub (Liljedahl, 2021). Olesklejad olid mittemotiveeritud õpilased, kes on oma huvipuudust selgitanud nii: „ma ei saa aru, mu eraõpetaja aitab mind õhtul või ma olen väsinud“ (Liljedahl & Allan 2013).
- Viivitamine (*stalling*). Sarnaselt olesklejatele ka need õpilased ei üritanudki ülesandeid ise lahendada ja nemad tegelesid kõrvaliste asjadega nagu pliiatsi teritamine, vee joomine, tualetis käimine või oma asjade kotist otsimine (Liljedahl, 2021). Viivitajad ootasid õpetaja selgitamist (Liljedahl, 2021). Nende õpilaste jaoks oli *nüüd proovige teie* osa tunnis tähtsusetu ja nad võtsid seda osa tunnist kui puhkepausi (Liljedahl & Allan 2013).
- Teesklemine (*faking*). Sellese rühma kuuluvad õpilased teesklesid ülesannete lahendamist, aga ei teinud päriselt seda (Liljedahl, 2021). Nemad vaatasid tahvlit, lappasid õpiku lehti, teesklesid vihikusse kirjutamist midagi saavutamata ehk tegelesid erinevalt viivitajatest nö lubatud kõrvaliste tegevustega (Liljedahl, 2021). Sisuliselt ootasid nemad samuti õpetaja selgitamist. Sarnaselt eelmistega ka teesklejad ei teadnud, kuidas antud ülesannet lahendada (Liljedahl, 2021). Need õpilased on oma tegevust selgitanud nii: „ma ei taha oma märkmeid segi ajada, küll õpetaja annab meile õige vastuse“ (Liljedahl & Allan 2013).
- Matkimine (*mimicking*). Erinevalt kolmest eelmisest õpilaste grupist matkijad lahendasid ülesandeid (Liljedahl, 2021). Samas nad järgisid õpetaja näidatud lahendusskeemi. Kui õpetaja näidatud skeem antud ülesande lahendamiseks ei sobinud, siis jäid nad hätta (Liljedahl, 2021). Need õpilased sageli otsisid abi oma märkemetest või õpetaja toodud näidetest tahvlil (Liljedahl & Allan 2013). Matkijad on vastanud oma tegevuse selgitamiseks, et tegid seda, mida õpetaja soovis (Liljedahl & Allan 2013).
- Isetegemine (*trying it on their own*). Need õpilased proovisidki ise oma teadmisi kasutades ülesandeid lahendada (Liljedahl, 2021). Need õpilased mõistsid hästi matemaatilisi seoseid, ei kopeerinud varasemaid näiteid rida realt ehk otsisid minimaalselt abi varasematest näidetest (Liljedahl & Allan 2013). See ei tähendanud,

et õpetaja selgitused ja esitatud näited neile väheolulised oleksid (Liljedahl & Allan 2013).

Ainult viimase viienda grupi õpilased nö mõtlesid ja lahendasid ise ülesandeid. Õpilaste jaotus erinevate ülesannete lahendamise viiside järgi on toodud järgmisel joonisel. Matkimisega ehk õpetaja näite järgi ülesannete lahendamisega tegeles natuke rohkem kui pool klassi õpilastest, veerand õpilastest ei proovinud ülesandeid lahendada ja viiendik õpilasi mõtles ja lahendas ülesandeid.



Joonis 1. Õpilaste tegevuste jaotus, kui õpetaja esmalt teeb mõne näite ja siis annab ülesandeid iseseisvaks lahendamiseks (Liljedahl, 2021).

Liljedahli (2021) kirjeldatud uuring on läbi viidud Kanada koolides. Eesti koolides ei ole sellist ulatuslikku tundide vaatlemist ja analüüsimist keegi teinud. Seega ei ole kindlalt teada, milline on eesti õpilaste täpne jaotus tundides ülesannete lahendamise viisi järgi. Peter Liljedahl on Vancouveris asuva Simon Fraseri Ülikooli matemaatikahariduse professor. Kanada õpilased olid 2018. aasta Pisa testide tulemuste järgi matemaatikas kaheteistkümnendal kohal (Pisa 2018, *s.a*). See on lähedane tulemus Eesti õpilastele, kes saavutasid kaheksanda koha (Pisa 2018, *s.a*). Võib oletada, et eesti õpilaste jaotus on sarnane ja igas klassis on nii ise ülesandeid lahendavaid õpilasi kui ka kõrvaliste asjadega tegelejaid.

Õpilastest lähtuvalt on aga nende tegevustes teatud ratsionaalsus nagu pingutuse minimeerimine, tegevuse ökonoomsus ehk enda säästmine, piiratud ratsionaalsus st rahuldava mitte optimaalse valiku tegemine, kahju-ja riskikartlikkus, kus õpilased ei soovinud näiteks oma märkmetesse vigu ja parandusi, eelistades vihikusse kirja panna õpetaja õige lahenduse (Liljedahl & Allan 2013).

3.4 Matemaatiline mõtteviis ja probleemi lahendamine

Matemaatikat õpitakse koolis esimesest viimase klassini. On õpilasi, kellele matemaatika meeldib ja nad lahendavad ülesandeid igas tunnis, ja teised, kes matemaatikaga tegeleda ei soovi. Mida vajalikku annab matemaatikaga tegelemine ja probleemülesannete lahendamine?

Matemaatika on elav aine, mis püüab mõista mustrid meie ümber ja meie sees (Schoenfeld, 2016). Schoenfeld (2016, lk 2) kirjutab:

> Matemaatika õppimine on jõustav. Matemaatiliselt võimekad õppijad on kvantitatiivsed kirjaoskajad. Nad on võimelised tõlgendama tohutul hulgal kvantitatiivseid andmeid, millega nad igapäevaselt kokku puutuvad, ja langetama arukaid otsuseid. Nad kasutavad matemaatikat praktikas alates lihtsatest rakendustest kuni keerukate eelarveprognooside, statistiliste analüüside tegemiseks ja arvutimodelleerimiseks. Nad on paindlikud mõtlejad, kellel on nn tööriistad uudsete probleemide ja olukordade lahendamiseks. Nad on nii analüütilised mõtlejad kui ka teiste esitatud argumentide analüütilised hindajad.

Niisiis on matemaatikast ja matemaatika õppimisest kasu erinevatel tegevusaladel töötades ja eluliste probleemide lahendamisel. Koolis tuleb õpetajal kaasata ja motiveerida tunnist tundi ka vähemotiveeritud õpilasi.

Lisaks probleemi lahendamise oskustele on vaja koolis arendada koostööoskusi. Üks võimalus suunata õppima vähemotiveeritud õpilasi ja arendada õpilaste koostööoskusi on probleemipõhised õppimisviisid. Probleemipõhisel õppimisviisil on pikk ajalugu (Hmelo-Silver, 2004). Probleemipõhine õpe sobib hästi selleks, et aidata õpilastel saada aktiivseteks õppijateks, sest paneb õppijad lahendama reaalseid probleeme ja õpilased oma õppimise eest vastutama (Hmelo-Silver, 2004). Probleemipõhise õppimisviisi korral töötavad õpilased väikestes rühmades ja õpivad, mida nad peavad teadma, et probleem lahendada. Õpetaja on vaid abistaja (Hmelo-Silver, 2004). Hmelo-Silver (2004) on esitanud probleemipõhise õppimisviisi viis eesmärki.

- Moodustada lai ja paindlik teadmiste baas. Õpilased ei õpi vaid fakte ja samas saab lõimida erinevaid valdkondi.
- Parandada probleemide lahendamise oskusi.
- Arendada ennastjuhtivaid õpilasi ja anda elukestvaid õpioskusi. Õpilased peavad eesmärkide saavutamiseks valima tegevussuuna ja hiljem otsustama, kas eesmärk sai täidetud või mitte.
- Saada headeks koostöötegijateks.

- Saada sisemiselt motiveeritud õppijateks. Kui õppijad saavad töötada ülesande kallal, mis pakub huvi, väljakutseid, rahulolu ja on kaasahaarav, siis on õppija motiveeritud sellega tegelema.

4. Kuidas ja kus lahendada probleemülesandeid

Ülesannet, sageli just probleemülesannet, saame lahendada mitmel erineval viisil. Lahendamise viis, oskus ja ka kiirus sõltub varasemalt õpitud teadmistest ja varasemate erinevate ülesannete lahendamise kogemustest. Probleemülesannete lahendamine arendab analüütilist ja loogilist mõtlemist. Nende lahendamist võib võtta loominguliselt, samas on palju kasu süsteemsest lähenemisest. Probleemilahendamise oskuste arendamine võib aidata inimestel muutuda tõhusamaks probleemide lahendajaks ja võimaldada saavutada paremaid tulemusi erinevates valdkondades.

Matemaatikud ja didaktikud on aja jooksul uurinud, leidnud ja välja pakkunud, kuidas matemaatika ülesandeid ja probleemülesandeid õpilastele anda ja neid lahendada. Selles peatükis esitatakse erinevate matemaatikute ja didaktikute pakutud ideid ja meetodeid ülesannete lahendamiseks. Vaadeldud autorite arvates ei ole sugugi ükskõik, kus ja kuidas probleemülesandeid lahendada.

Põhikooli riikliku õppekava (2011) kohaselt tuleks õpilastes arendada ka koostöö oskust. Probleemülesannete lahendamine allpool käesolevas peatükis toodud ja Peter Liljedahli poolt pakutud idee õppida matemaatikat väikemates gruppides on siin asjakohane.

Võib ju anda probleemülesandeid õpilastele individuaalseks lahendamiseks, näiteks matemaatika tunni teises pooles kiirematele õpilastele. Vahelduseks koos lahendamisele ja arutlemisele tahavad osad õpilased lahendada ülesandeid ka otsast lõpuni iseseivalt ja panna ennast sel viisil proovile. Eksamiteks või matemaatika võistlusteks valmistudes on õpilastel vaja ka iseseivat lahendamise kogemust. Seega rühmas ja individuaalne õppimine peavad koos eksisteerima, pakkudes õpilastele erinevaid ülesannete lahendamise kogemusi ja eluks vajalike teadmisi.

4.1 Polya ülesannete lahendamise neli faasi

Ungari matemaatik George Polya (1887−1985) andis 1945. aastal välja raamatu „How to solve it", kus pakub välja nii matemaatiliste kui ka mittematemaatiliste probleemide lahendamise viise. Raamat, mida kasutatakse matemaatikaõppes siiani, sisaldab ka nõuandeid matemaatika õpetamiseks (George Polya, *s.a.*).

Polya (2001, lk 14−21) eristab ülesannete lahendamisel nelja faasi.

- Esiteks peame ülesandest aru saama ja selgelt nägema, mida nõutakse. Näiteks, kui ülesanne on seotud mingi kujundiga, siis tuleb teha joonis ja näidata sellel otsitav ja andmed.

- Teiseks, lahendamise idee, lahendusplaani saamiseks peame nägema, kuidas on üksikelemendid omavahel ühendatud, kuidas otsitav seostub andmetega. Idee võib kujuneda järk-järgult. Head ideed tuginevad kogemustele ja varem omandatud teadmistele.
- Kolmandaks me täidame lahendusplaani. Kui õpilane koostas plaani ise, olgugi et mõningase välise abiga, siis ta seda ideed nii kergesti ei unusta.
- Neljandaks, teeme tagasivaate lahenduskäigule, uurime ja analüüsime seda. Tagasivaade lõpetatud lahenduskäigule, tulemuse ja selle juurde viinud tee veelkordne uurimine ja analüüsimine tugevdavad õpilaste teadmisi ning arendavad neis ülesannete lahendamise oskust.

Kokkuvõtlikult on Polya (2001) ülesande lahendamise neli faasi järgmised: arusaamine, lahendusplaani koostamine, lahendusplaani täitmine ja tagasivaatamine lahenduskäigule. Polya (2001) leiab, et kõik nimetatud faasid on tähtsad. Ülesannet lahendada püüdes võime korduvalt muuta oma lähenemisviisi ja vaadata ülesandele erineva nurga all (Polya, 2001).

Polya „How to solve it“ ilmus 1945. aastal. Ilmumise ajal oli see oma aja olulisim teos probleemülesannete lahendamise kohta (Schoenfeld, 1987). Schoenfeld (1987) otsis ka mõned probleemilahenduseksperdid, matemaatikaõppejõud, kes juhendasid õpilasi Putnami võistluse[2] või erinevate olümpiaadide jaoks. Nende otsus oli üksmeelne ja ühemõtteline: Polyast polnud kasu algajatele noortele probleemide lahendajatele (Schoenfeld, 1987). Nad ütlesid, et õpilased ei õpi Polya raamatuid lugedes probleeme lahendama. Õpilased lahendasid probleemülesandeid oma andest lähtuvalt ja õppisid neid lahendama lahendades palju probleemülesandeid (Schoenfeld, 1987).

Polya ideed ja strateegiad leiavad siiski kaasajal rakendamist. Näiteks on alates 1990ndatest aastatest Singapuri koolimatemaatika õppekavas probleemülesannete lahendamine kesksel kohal (Leong *et al.*, 2014). 2009. aastal viidi viies Singapuri koolis läbi projekt *Mathematical Problem Solving for Everyone* (Leong *et al.*, 2014). Selle eesmärk oli integreerida probleemülesannete lahendamist igal tasemel, mitte valitud õppijatele, matemaatika õpetamisse Singapuri koolides. Projekti käigus peeti oluliseks ka õpetajate arendamist ja ettevalmistust. Projekti käigus rakendati Polya (1945) kirjeldatud ja 1985. aastal Schoenfeldi poolt täiustatud ülesannete lahendamise mudelit.

---

[2] William Lowell Putnami matemaatikavõistlus ehk ka Putnami võistlus on iga-aastane matemaatikavõistlus Ameerika Ühendriikide ja Kanada kõrgkoolide üliõpilastele (olenemata õpilaste rahvusest).

Loetelu küsimustest ja soovitustest probleemülesannete lahendamiseks, mille Polya esitas raamatus „How to solve it“, on kindel probleemide lahendamise strateegia, mida tuleks õpilastele õpetada (Kilpatrick, 1987). Polya mudel on muutunud rituaaliks, mida õpitakse õpetajakoolituse kursustel (Kilpatrick, 1987). Polya pidas ülesannete lahendamist matemaatikaõpetuse selgrooks (Kilpatrick, 1987). Tema mõju matemaatika õpetamisele on olnud peen, ta andis näiteid ja ettepanekuid, mitte teooriaid ega retsepte (Kilpatrick, 1987). Polya leidis, et matkimine ja harjutamine on peamised vahendid, mille kaudu probleemide lahendamist õpitakse (Kilpatrick, 1987). Polyat ja tema ideid tutvustatakse ka Tartu Ülikoolis õpetajakoolituses. Polya (2001) raamatus toodud ideedest, ülesannete lahendamisest ja küsimuste esitamisest kirjutab ka Tartu Ülikooli matemaatikadidaktik Lea Leppmann (2012).

4.2 Avastav ja avatud õppimine

Tartu Ülikooli matemaatikud ja didaktikud Lea ja Tiit Lepmann (1995) on raamatus „Teeme ise matemaatikat“ kirjutanud:

> Matemaatikaülesanded meie kooliõpikutes on tavaliselt antud järgmises vormis: esitatakse mingit andmed ja öeldakse, mida tuleb nende põhjal leida või tõestada. Tegelikkuses on aga olukord tavaliselt teistsugune: elu ise seab meid probleemide ette, elu ise määrab ka algtingimused, millest lähtuvalt tuleb need probleemid lahendada. Me ise peame kõigepealt oskama probleemi enda jaoks korralikult sõnastada. Veel peame välja selgitama selle, millised olemasolevad lähtetingimused on antud probleemi lahendamise seisukohalt olulised, millised mitte (lk 3).

L. Lepmann ja T. Lepmann (1995) on raamatus kasutanud mõisteid avatud ülesanne, avastav õppimine ja pakkunud välja hulga ülesandeid ehk probleemide ringe. Suletud ülesanded erinevad avatud ülesannetest selle poolest, et nende puhul on alati täpselt fikseeritud algtingimused ja oodatav tulemus. Avatud ülesanne korral on üks neist komponentidest või siis mõlemad sõnastatud suhteliselt üldiselt (Lepmann & Lepmann, 1995). Autorid leiavad, et ülesande osutumine probleemiks või mitte sõltub sellest, kas ülesande lahendajal on olemas vajalikud eelteadmised või mitte.

L. Lepmann ja T. Lepmanni (1995) metoodilised nõuanded avatud ülesannete kasutamisel matemaatika õpetamisel on järgmised.

- Väga oluline on anda õpilastele piisavalt aega mõtlemiseks, samuti omavahel (rühmades) arutamiseks ning erinevate ideede tekkimiseks. Õpetaja ei tohiks rutata vihjetega lahendusele või vastuste ütlemisega.
- Loovaks tegutsemiseks on vaja vabamat keskkonda. Õpetaja sage sekkumine lahendusprotsessi pole vajalik ja lasta lahendusi arutada õpilastel omavahel.

- Õpilane peab saama ise teha ja katsetada. Tähtis on, et õpilasel endal tekiks mingi idee, et ta ise õpiks nägema ja sõnastama seaduspärasusi.
- Kui ülesanded sisaldavad erineva raskusastmega alamülesandeid, siis võimaldab see edukust tajuda erineva võimekusega õpilastel. Seetõttu annavad avatud ülesanded motivatsiooni matemaatikaga tegelemiseks.
- Tingimata on vaja ka nn treeningtunde ehk teha harjutusülesandeid õpikust, et varustada õpilased teatud hulga matemaatiliste teadmiste ja oskustega. Avastav ja avatud matemaatikatund nõuab palju aega, seetõttu ei saa iga tund olla arutelukeskne.

4.3 Peter Liljedahli mõtleva klassiruumi kujundamine ja grupis töötamine

L. Lepmann ja T. Lepmann (1995) on kirjutanud, et matemaatika õpetamisel on vaja ka nn treeningtunde õpilaste teadmiste arendamiseks. Liljedahl (2021) on kirjeldanud, kuidas vaid viiendik õpilasi matemaatikatunnis mõtleb ja lahendab ise ülesandeid ning ülejäänud matkivad õpetaja näidatud lahendusskeemi või tegelevad kõrvaliste tegevustega. Liljedahl (2021) leiab, et õpilased tuleb mõtlema panna, samas ei ole matkimine alati halb. Ta leiab, et matkimine ehk õpetaja antud näite järgi tegutsemine on väga hea teatud rutiinsete oskuste nagu näiteks kümnendmurdude või harilike murdudega arvutamise õppimisel (Liljedahl, 2021).

Kuidas panna õpilased tunnis mõtlema ja ise ülesandeid lahendama ehk luua mõtlev klassiruum? Mõtlevat klassiruumi ei saa tekitada ehk õpilasi mõtlema panna ühe hetkega, vaid mõtlev klassiruum tuleb luua sammhaaval (Liljedahl, 2021).

Ka L. Lepmann ja T. Lepmann (1995) on pidanud oluliseks, et õpetaja sage sekkumine lahendusprotsessi pole vajalik ja õpilastel tuleb lasta lahendusi omavahel arutada. Kuidas seda klassis korraldada? Liljedahl (2021) leiab, et enamasti õpetatakse ja õpitakse tavapärasel viisil traditsiooniliselt paigutatud klassiruumis laudade taga istudes ja õpetaja järgi märkmeid tehes, siis selline õppimisviis on suures osas passiivne ja soodustab matkimist.

Liljedahl (2021) pakkus, et kui õpilased lahendavad probleemülesandeid, siis teevad nad seda seistes seinale kinnitatud valgetele tahvlitele kirjutades ja töötavad juhuslikult moodustatud väikestes gruppides. Liljedahli (2021) uuringu järgi elimineeris see kõrvaliste asjadega tegelemise ja soodustas õpilaste mõtlemist. Õpilased mõtlesid pikemalt, arutlesid rohkem matemaatika üle ja püsisid ka raske ülesande lahendamise juures. Valge tahvli eelis oli, et sellelt sai kiiresti vigu kustutada (Liljedahl, 2021). Liljedahl leidis (2021) et, seismine suurendab teadmiste jagamist omavahel ja lisaks muudavad valged vertikaalsed tahvlid töö kõigile nähtavaks ja ideed liiguvad ka gruppide vahel. Valge vertikaalse tahvli kasu õpetajale on, et tal on ülevaade ruumis toimuvast, õpetaja näeb jooksvalt, kuhu õpilased on mõtlemisega jõudnud, kas on vaja anda vihjeid või lisaülesandeid (Liljedahl, 2021). Kui klassis ei ole valgeid tahvleid, siis traditsioonilised kriiditahvlid või näiteks puhastatavad kiled seintel sobivad ka (Liljedahl, 2021).

Liljedahl (2021) on kokku võtnud, et valgetele tahvlitele väikestes kolmeliikmelistes, juhuslikes gruppides ülesandeid lahendades:

- õpilaste mittemõtlevad tegevused nagu olesklemine, viivitamine ja teesklemine jäid suures osas ära;
- kadus ka matkimise võimalus, kui ülesanne anti kohe tunni alguses;
- kui erinevad grupid töötasid ruumis teineteisele lähemal, liikus info gruppide vahel paremini;
- grupi peale võiks olla üks marker, sest kui grupis oli igaühel marker kirjutamiseks, siis koostöö asemel hakati eraldi tegutsema;
- kui õpetajal on märkmete ja vihjete tegemiseks õpilastest erinevat värvi marker, siis ka naabergrupid kasutasid õpetajalt saadud infot oma töös.

Kokkuvõtlikult Liljedahli (2021) soovitused õpetajale õpilaste mõtlemise soodustamiseks ja kõrvaliste tegevuste elimineerimiseks matemaatika tunnis on alljärgnevad.

- Anna lahendada probleemülesandeid.
- Moodusta õpilastest juhuslikud õpperühmad.
- Kasuta vertikaalseid kustutatavaid pindu (valged tahvlid, puhastatavad kiled seintel, ka kriiditahvlid) eespool kirjeldatud viisil.

4.4 Koos õppimise positiivsed mõjud

Grupitöö kasutamine koolis on õppeprotsessi oluline osa. See võimaldab õpilastel õppida koostööd tegema, arendab suhtlemis- ja kuulamisoskust ning võimaldab seega neil tulevikus edukamalt erinevates ametites töötada. Grupis töötamist kasutatakse traditsiooniliselt rohkem keele ja vähem matemaatika tundides. Traditsiooniliselt lahendavad õpilased matemaatikatunnis ülesandeid iseseivalt eespool kirjeldatud viisil *nüüd proovige teie.* Mitmesugustes eluvaldkondades on samas vaja suhelda, kuulata, vastustust võtta, kompromisse leida ja konflikte lahendada, teha tööd ühes meeskonnas ühtse eesmärgi nimel. Pole kahtlust, et koostööoskust tuleb juba koolis õpilastes arendada. Põhikoolis õpetades tuleb õpetajal rakendada uurivat õpet ja kasutada mitmekesiseid ja kombineeritud õppemeetodeid ning aktiivsust, loovust, koostööd ja tagasisidet soodustavaid õppetegevusi (Põhikooli riiklik õppekava lisa 5, 2011).

Noorukid on mõjutatud eakaaslastest. Koostööpõhine õppimine väikestes rühmades võib olla ideaalne õppetöö vorm ja kasutab ära noorukite arengu eripärasid nagu kaaslastele orienteeritus, entusiasm, aktiivsus ja iseseisvuse soov (Slavin, 1996). Koos õppimisel on mitmeid vorme, mida kasutatakse igas kooliastmes. Kõik koos õppimise meetodid on põhimõttega, et õpilased teevad õppimiseks koostööd ja vastutavad nii kaaslaste kui ka enda õppimise eest (Slavin, 1996). Slavin (1996) on kirjeldanud oma töös mitmeid koos õppimise meetodeid ja uuringute tulemusi. Erinevaid meetodeid ei pea töö autor siinkohal vajalikuks kirjeldata, sest see ei ole käesoleva töö peamine eesmärk. Tõhusa koos õppimise eeldused on grupi eesmärgid ja individuaalne vastutus. Rühmad peavad töötama selle nimel, et saavutada mõni eesmärk või teenida tasu, tunnustus ning rühma edu peab sõltuma iga rühmaliikme õppimisest (Slavin, 1996).

Vahel on väljendatud muret, et koostööl põhinev õppimine pärsib saavutusi, samas uuringud seda ei kinnita (Slavin, 1996). Võrreldes traditsioonilise õppimisviisiga, edukad õpilased said kasu koos õppimisest sama palju nagu keskmised ja nõrgad õpilased (Slavin, 1996). Koos õppimine parandas õpilaste hoiakuid ja käitumist erineva etnilise taustaga kaasõpilaste suhtes (Slavin, 1996). Slavini (1996) kirjeldatud uuringud tõid kokkuvõttes välja koos õppimise positiivse mõju õpilaste saavutustele, suhetele koolikaaslaste vahel, õpilaste enesehinnangule kui ka õppimisega hõivatud ajale, tundides kohal käimisele, väheneb riskikäitumine, paraneb nõrkade õpilaste suhtumine kooli ja nende edasipüüdlikkus.

4.5 Küsimine tunnis

Ei ole sugugi ükskõik kuidas, kuna ja milliseid küsimusi õpetaja tunni jooksul õpilastele esitab. Samuti tuleb õpetajal teadlikult anda vihjeid nii, et nendest on õpilastele kasu. Õpetaja ei tohiks õpilastele liiga vara vihjeid anda ja liiga agaralt ülesannete lahendusi näidata ka probleemülesannete puhul. Samas saab õpetaja igas tunnis küsimusi õpilastelt. Millised on küsimused väärivad vastamist ja millised neist on tegelikult mittevajalikud?

Õpetajad esitavad 300-400 küsimust päevas ja paljud neist koguni 120 küsimust tunnis (Vogler, 2008). Paljudele küsimustele õpetaja ise vastab ja millistele küsimustele ta üldse vastata võiks? Liljedahl (2021) on välja toonud kolme tüüpi küsimusi, mida õpilased esitavad.

- Läheduskküsimused (*proximity questions*). Need on küsimused, mida õpilased küsivad, kui õpetaja on läheduses. Näiteks õpetaja kõnnib vahekäigus ja õpilane küsib „Kas ma pean kõik vastused leidma või ainult ühe?“. Kui õpetaja läheduses ei oleks, siis õpilane seda küsimust ei esitaks. Sellistele küsimustele vastusena saadud informatsiooni õpilased tegelikult ei vaja ja ei kasuta.
- Mõtlemist peatavad küsimused (*stop-thinking questions*). Sellised küsimused on näiteks „Kas me peame seda õppima?“, „Kas see tuleb kontrolltöösse ka?“ või „Kas see on õige?“. Selliseid küsimusi esitavad õpilased ka enda vaeva vähendamise eesmärgil, et õpetaja vastab ja ise ei pea mõtlema ja pingutama.
- Mõtlemist säilitavad küsimused (*keep-thinking questions*). Selliseid küsimusi küsivad motiveeritud õpilased, kes töötavad ja mõtlevad. Need on täpsustavad või ülesande lahendamise jätkamisega seotud küsimused. Näiteks on mõtlemist säilitavad küsimused „Kas sobib, kui me proovime lahendada ülesande ka negatiivsel juhul?“ või „Millise ülesande me järgmisena lahendame?“.

Õpetaja vastab päevas 200-400 küsimusele, millest 90% on lähedus- ja mõtlemist peatavad küsimused (Liljedahl, 2021). Õpetaja peaks kindlasti vastama vaid neile 10% mõtlemist säilitavatele küsimustele (Liljedahl, 2021). Samas võivad õpilased olla väga järjekindlad küsima lähedus- ja mõtlemist peatavaid küsimusi, et oma vaeva vähendada. Liljedahl (2021) on toonud kümme vastust, mida õpetaja saab anda lähedus- ja mõtlemist peatavatele küsimustele.

1) Kas see ei olnud huvitav?
2) Saad sa midagi veel leida?
3) Saad sa näidata, kuidas sa seda tegid?
4) Kas see on alati õige?
5) Miks sa arved, et see nii on?
6) Oled sa kindel?
7) On see oluline?
8) Miks sa ei proovi midagi muud?
9) Miks sa ei proovi veel ühte?
10) Kas küsid minult või ütled mulle?

See on küsimusele küsimusega vastamine. Liljedahli (2021) uuring näitas, et õpilased, välja arvatud algkooli lapsed, lõpetasid lähedus- ja mõtlemist peatavate küsimuste esitamise, kui nad said aru, et neile küsimustele õpetaja ei vasta.

4.6 Vihjete andmine

Mõtlemine matemaatikatunnis on väga oluline ja ise mõeldes ja ülesandeid lahendades saavad õpilased kogemusi ja arenevad nende teadmised ja oskused. On oluline, et õpetaja jälgib tunnis õpilaste tegevusi ja suunab neid oskuslikult mõtlema, tegutsema ja ülesandeid lahendama.

Liljedahl (2021) kirjutab, et „Kui me mõtleme, siis oleme tegevuses. Kui oleme tegevuses, siis me mõtleme" (lk 146). Mõtlemine on privaatne ja silmale nähtamatu tegevus, seevastu tegevuses olemine on füüsiline tegevus, see on väliselt jälgitav ja tuvastatav (Liljedahl, 2021).

On kahte tüüpi vihjeid, mida õpetaja saab tunnis anda:

- vihjed, mis vähendavad väljakutset ehk õpetaja vihje peale ülesande lahendamine lihtsustub õpilaste jaoks;
- vihjed, mis suurendavad võimekust, näiteks tuletab õpetaja meelde kasuliku lahendusstrateegia, mis võimaldab nö mõttega kinni jooksnud õpilastel tööd jätkata (Liljedahl, 2021).

Ilmselgelt on võimekust suurendavad vihjed paremad, aga tulemuseni st lahenduseni jõudmine võtab õpilastel kauem aega (Liljedahl, 2021). Vahel tuleb anda ka väljakutset vähendavaid vihjed. Kui õpilased on ülesandega hädas, frustreeritud, et ei saa kuidagi ülesandega edasi, siis tuleb teinekord anda ka väljakutset vähendavaid vihjeid, sest negatiivsed emotsioonid tunnis nõuavad õpetaja sekkumist (Liljedahl, 2021). Negatiivseid emotsioone tundes võivad õpilased alla anda, tegevuse lõpetada, ei soovigi ülesandega enam tegeleda, kuid õpetaja abistava, väljakutset vähendav vihje peale jätkavad nad mõtlemist ja saavad ülesande lõpuni lahendada.

5. Probleemülesannete lahendamise strateegiaid

Õpilased ei õpi probleemülesandeid lahendama päris iseseisvalt ja õpetaja roll on neile anda vajalikud vahendid ehk strateegiad ülesannete lahendamiseks. Kui õpilastele on erinevaid strateegiaid õpetatud, siis on neil olemas eelteadmised, kuidas võiks ülesandeid lahendada, ja neil on võimalus valida ja mõelda, mida rakendada, et ülesannete lahendamisel edu saavutada. Kui õpilastel ei õnnestu üht strateegiat kasutades ülesannet lahendada, siis strateegiaid tundes on neil võimalus teist strateegiat kasutades proovida ülesanne lahendada. Lepmann (2012) on arvanud, et probleemi lahendamist saab õppida eeskätt ülesannete iseseisva lahendamise kaudu. Samas on väga tähtis, et õpilane ei oleks oma probleemiga täiesti üksi ja õpetaja peaks olema valmis teda kuidagi aitama (Lepmann, 2012). Kuna probleemi lahendamisest mingi osa toimub alateadvuses, on seetõttu raske täpselt kirjeldada probleemülesande lahendamise protsessi, seega ka õpetada selliseid ülesandeid lahendama (Lepmann, 2012). Järgnevalt on toodud Kruliki ja Rudnicki (1982) valik strateegiaid probleemülesannete lahendamiseks, mida õpetaja saab õpilastele õpetada. Lisaks on toodud näiteid lihtsamatest ülesannetest, mille lahendamisel toodud strateegiaid kasutada saab.

5.1 Mustri leidmine

Mustrite sihipärane otsimine ja leidmine võivad paljude ülesannete lahendust oluliselt lihtsustada (Lepmann, 2012). Nii saab lahendada näiteks jada jätkamise ülesandeid. Näiteks järgmine Lepmanni (2012) näide ja lahendus seaduspärasuse ja jada järgmiste liikmete leidmisest.

Näide. Millised on jada 1, 10, 2, 7, 3, 4, 4, … kaks järgmist liiget?

Lahendus. Jadas 1, 10, 2, 7, 3, 4, 4, … jääb silma kaks erinevat jada: paarituarvulistel kohtadel on arvud 1, 2, 3, 4 ja paarisarvulistel kohtadel 10, 7, 4. Selle seaduspärasuse järgi jätkates oleksid jada järgnevad liikmed 1 ja 5.

Õpetajale. Õpetaja saab vajadusel anda vihje:

- Kas saate antud jada jaotada kuidagi kaheks erinevaks jadaks? Mida märkate?

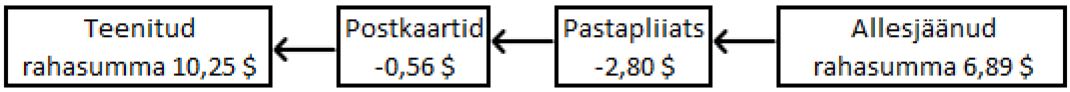
5.2 Tagasisuunas arutlemine

Vaatame näiteks O'Dafferi (1985a) pakutud ülesannet ja tema tagasisuunas arutlemise abil ülesande lahendamist.

Näide. Sue luges kokku nädala jooksul teenitud rahasumma ja kirjutas selle paberilehele. Seejärel ostis ta mõned postkaardid 0,56 dollari eest ja pastapliiatsi, mis maksis

2,80 dollarit. Pärast ostude sooritamist oli tal alles 6,89 dollarit, kuid ta oli kaotanud paberilehe. Mis summa Sue paberile kirjutas?

Lahendus. Et leida paberile kirjutatud rahasumma lähtume teadmisest, et liitmine ja lahutamine on pöördtehted. Alustame allesjäänud rahasummast ja liidame kulutused, et teada saada paberile kirjutatud rahasumma.



Joonis 2. Tagasisuunas arutamine ehk lahutamise asemel liidame ostusummad allesjäänud rahasummale (O'Daffer, 1985a).

Ülesandeid, mida saab lahendada tagasisuunas arutledes, saab sageli lahendada võrrandi koostamise abil (O'Daffer, 1985a). Oletame, et Sue kirjutas paberile *x* dollarit. Saame võrrandi:

$$x - 0{,}56 - 2{,}80 = 6{,}89$$

$$x = 10{,}25 \text{ (dollarit)}$$

Saame, et Sue kirjutas paberile 10,25 dollarit.

Tagasisuunas arutades on lahendatavad ka mõõtmise ülesanded. Näiteks on selline O'Dafferi (1985a) ülesanne ja lahendus.

Näide. On kasutada 3 l ämber ja 8 l ämber. Kuidas saab nende abil mõõta 4 l vett?

Lahendus. Alustame sellest, et 4 l saame, kui mõõdame 1 l ja 3 l vett. Täites 3 l ämbrit kolm korda ja valades sealt vett 8 l ämbrisse, jääb 1 l vett 3 l ämbrisse. Tühjendame 8 l ämbri ja valame sinna 1 l vett väiksemast ämbrist. Täidame 3 l ämbri ja valame vee 8 l ämbrisse, kus on nüüd kokku 4 l vett.

5.3 Oletamine ja testimine

Oleta ja testi on kasulik strateegia kindlat tüüpi ülesannete lahendamiseks (O'Daffer, 1984a). Näiteks O'Dafferil (1984a) on pakutud ülesanne ja selle lahendus strateegiat oleta ja testi kasutades.

Näide. Täiskasvanute pilet maksab 6 dollarit ja õpilase pilet 4 dollarit. Jenny müüs 13 piletit 66 dollari eest. Kui palju täiskasvanute pileteid ta müüs?

Lahendus. Esiteks õpilased püüavad vastust ära arvata. Kui Jenny müüs 6 täiskasvanu piletit 36 dollari eest ja 7 õpilase piletit 28 dollari eest, siis kogusumma oleks 64 dollarit.

Tulemus 64 dollarit on vähem kui 66 dollarit ülesande püstituses. Edasi õpilane oletab, et Jenny müüs 7 täiskasvanu piletit ja see osutub kontrollimisel õigeks vastuseks.

Õpetajale. Õpetaja saab ülesande lahendamise käiku jälgida ja esitada suunavaid küsimusi:

- Proovige vastus ära arvata ja kontrollige oma oletust?
- Kas teie oletus oli liiga suur või liiga väike?
- Mis on teie järgmine oletus?

Lepmann (2012) on kirjutanud antud strateegia kohta, et seda strateegiat saab kasutada probleemülesannete lahendamisel sellistes keerulisemates situatsioonides, kus lahendi jaoks on palju võimalusi.

5.4 Katsetamine ja simuleerimine

Mõned probleemülesanded on lahendatavad katsetamise ja simuleerimise teel (O'Daffer *et al.*, 1985b). Vaatame järgmist O'Dafferi jt (1985b) esitatud ülesannet ja selle lahenduskäiku.

Näide. Kaheksa 1-sendist on seatud laual ritta. Iga teine sent asendatakse 5-sendisega. Iga kolmas münt asendatakse 10-sendisega. Lõpuks iga neljas münt asendatakse 25-sendisega. Mis on laual oleva 8 mündi väärtus kokku?

Lahendus. Ülesande lahendamiseks saab reaalselt mündid lauale ritta panna, teha vastavad asendused ja katsetades ülesande lahendada. Ülesande saab lahendada ka simuleerimise teel, kui münte näiteks käepärast ei ole. Paberile saab mündid ja vastavad asendused joonistada.

Joonis 3. Ülesande lahendamine simuleerimise teel (O'Daffer *et al.*, 1985b).

Laual olevate müntide koguväärtus on 78 senti.

Õpetajale. Õpetaja saab ülesande lahendamise käiku jälgida ja esitada suunavaid küsimusi:

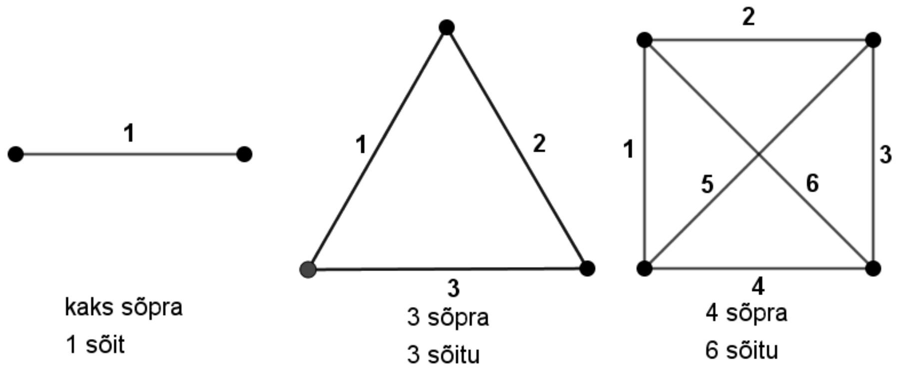
- Kas ülesannet saaks lahendada, kui te joonistate sendid paberile?

5.5 Lihtsama sarnase ülesande lahendamine

Lihtsama sarnase ülesande lahendamise strateegia on sageli kasutatav koos strateegiatega tabeli koostamine ja mustri otsimine (O’Daffer, 1985c). Näiteks sobib O’Dafferi (1985c) pakutud ülesanne ja selle lahendus.

Näide. Eric ja kaheksa sõpra veetsid päeva lõbustuspargis. Päeva lõpuks otsustasid nad paarikaupa sõita ameerika mägedel nii, et iga sõber sõidab teisega koos vaid üks kord. Mitu sõitu on vaja teha?

Lahendus. Lihtsamas ülesandes, mida esialgu lahenda, võib võtta Ericu sõprade arvuks 1, 2 või 3. Järgmise pildi joonistamine on ka lahendamisel abiks.



Joonis 4. Lihtsama ülesande lahendamine joonise tegemise abil (O’Daffer, 1985c).

Kolm lihtsamat ülesannet aitavad originaalülesannet lahendada. Andmetest tabelit koostades on näha, et sõitude arvu erinevus suureneb ühe võrra ühe sõbra lisandumisel.

Tabel 1. Andmetest tabeli koostamine ülesande lahendamisel (O’Daffer, 1985c).

Sõprade arv	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Sõitude arv	0	1	3	6	10	15	21	28	36
		+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8

Mustrit järgides saame, et Eric ja tema kaheksa sõpra peavad tegema kokku 36 sõitu.

Õpetajale. Õpetaja saab ülesande lahendamise käiku jälgides vajadusel esitada suunavaid küsimusi:

- Kas oskate lahendada lihtsama ülesanne väiksema sõprade arvuga?
- Mida märkad, kui lisandub üks sõber?

Teine lahendus erinevalt pealkirjas toodud strateegiale on selline, kus kombinatoorikat õppinud õpilane lahendab ülesande lihtsasti kombinatsioonide arvu leidmisega:

$$C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!\cdot 2!} = 36 \text{ (sõitu).}$$

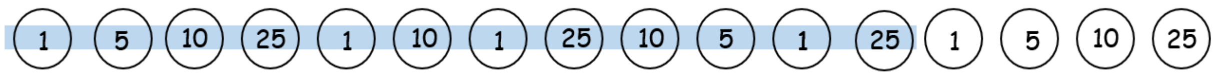
Ülesande asemel lihtsama ülesande lahendamise võtted on veel:

- muuda ülesandes olevaid arve (näiteks kümnendmurrud asenda täisarvudega) nii, et ülesannet on tehniliselt lihtsam lahendada, lahenda see lihtsam ülesanne ja seejärel kasuta originaalülesande lahendamiseks sama lahendusprotsessi;
- sõnasta ja lahenda lihtsamad alamülesanded ja kasuta neid lahendusi originaalülesande lahendamiseks (O'Daffer, 1985c).

Lihtsama sarnase ülesande lahendamise strateegiat kasutades saab lahendada eelmises punktis toodud sentide ülesande keerulisema versiooni.

Näide. 2023 1-sendist on seatud laual ritta. Iga teine sent asendatakse 5-sendisega. Iga kolmas münt asendatakse 10-sendisega. Lõpuks iga neljas münt asendatakse 25-sendisega. Mis on laual oleva 2023 mündi väärtus kokku?

Lahendus. Ülesande lahendamiseks saab taas reaalselt münte lauale ritta panna, teha vastavad asendused ja katsetades lahendada lihtsama ülesande väiksema arvu müntidega. Ülesande saab taas lahendada ka simuleerimise teel, kui münte näiteks käepärast ei ole, ja paberile mündid ja vastavad asendused joonistada. Mustrit ja seaduspärasust otsides on näha, et sama müntide järjestus kordub iga kaheteist mündi järel.



Joonis 5. Ülesande lahendamine simuleerimise teel.

Selliseid kaheteistkümne mündi komplekte on rivis 168, igaühe väärtus 119 senti. Rivi lõpus on veel seitse münti koguväärtusega 53 senti. Seega on 2023 mündi väärtus kokku

$$168 \cdot 119 + 53 = 20\,045 \text{ (senti)}.$$

Õpetajale. Õpetaja saab ülesande lahendamise käiku jälgida ja esitada suunavaid küsimusi:

- Kas ülesannet saaks lahendada, kui te joonistate sentide rivi paberile?
- Kas joonistatud müntide rivi on piisav? Mida märkad?
- Mitu ühesugust korduvat mündikomplekti on rivis? Mitu münti jääb üle?

5.6 Korrastatud loendi tegemine

Korrastatud loendi moodustamine on strateegia, mis hõlbustab süstemaatilist lähenemist teatud tüüpi probleemidele (O’Daffer, 1984b). Näiteks O’Dafferi (1984b) esitatud ülesanne ja lahenduskäik.

Näide. Ann, Beth, Cathy, Dee ja Evita mängisid tennist. Iga tüdruk mängis iga teise tüdrukuga ühe mängu. Mitu matši kokku peeti?

Lahendus. Alustuseks võib tähistada tüdrukute nimed vastavalt tähtedega A, B, C, D ja E. Õpilane kirjutab välja A mängud teiste tüdrukutega ja seejärel B, C, D ja E mängud ülejäänutega. Õpilane moodustab süstemaatiliselt lähenedes loendi ja leiab, et peetakse kokku 10 matši.

AB	**AC**	**AD**	**AE**
BC	**BD**	**BE**	
CD	**CE**		
DE			

Joonis 6. Korrastatud loendi tegemine ülesande lahendamiseks (O’Daffer, 1984b).

Taas saab kombinatoorikat õppinud õpilane lahendada ülesande lihtsalt kombinatsioonide arvu leidmisega:

$$C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = 10 \text{ (matši)}.$$

Korrastatud loendi abil lahenduvad ülesanded ongi sageli lahenduvad kombinatoorika valemite abil, mida nooremad õpilased ei ole veel õppinud. Kui õpilased on varem ülesandeid lahendanud strateegiaid kasutades, siis hiljem valemeid õppides ja kasutades on neil parem arusaamine ülesandes toodud olukorrast ja algtingimustest (O’Daffer, 1984b).

Õpetajale. Õpetaja saab ülesande lahendamise käiku jälgida ja esitada suunavaid küsimusi:

- Kas 20 on õige vastus? Kas oled tüdrukutevahelisi mänge üks kord arvesse võtnud?
- Kas korrastatud loendi tegemisest võiks abi olla?
- Kas lihtsa joonise tegemisel saaks tüdrukute nimed asendada esitähtedega?

5.7 Loogiline järeldamine

Loogiline järeldamine on üldisem strateegia, kui sellised strateegiad nagu tabeli koostamine, oletamine ja testimine või korrastatud loendi moodustamine (O'Daffer, 1985d). Järgmine O'Dafferi (1985d) esitatud probleem ja selle lahendus esindab olukorda, kus seda strateegiat võib kasutada.

Näide. Ann, Ben, Carlos ja Dina armastavad erinevat tüüpi (huumor, müsteerium, sport, seiklus) raamatuid. Ühele Anni klassikaaslasele meeldivad enam müsteeriumid. Carlos ja Dina ei armasta seiklusjutte. Beni lemmikraamatud on spordist. Dina armastas huumoriraamatuid, kuid muutis oma meelt. Millist tüüpi raamatud on nüüd Dina lemmikud?

Lahendus. Esiteks teeme tabeli.

Tabel 2. Tabel ülesande algandmete põhjal (O'Daffer, 1985d).

	Ann	Ben	Carlos	Dina
Huumor				ei
Müsteerium	ei			
Sport		jah		
Seiklusjutud			ei	ei

Täiendame tabelit algandmeid ja loogilist järeldamist kasutades. Kuna Beni lemmikraamatud on spordist, siis saame kirjutada „ei“ Beni veergu ülejäänud raamatute kohta. Peale seda näeme, et ainult Anni lemmikraamatud saavad olla seiklusjutud.

Tabel 3. Täiendatud tabel loogilist järeldamist kasutades (O'Daffer, 1985d).

	Ann	Ben	Carlos	Dina
Huumor	**ei**	**ei**	**jah**	ei
Müsteerium	ei	**ei**		
Sport	**ei**	jah		
Seiklusjutud	**jah**	**ei**	ei	ei

Tabelist näeme Anni, Beni ja Carlose lemmikraamatuid, seega Dina lemmikud on müsteeriumid.

Õpetajale. Õpetaja saab õpilasi jälgida ja esitada suunavaid küsimusi:

- Kas ülesande lahendamisel oleks abi tabeli koostamisest?
- Mida te kohe tabelisse märkida saate?
- Mida märkate? Kas ülesande teksti põhjal saate tabelit täiendada?

5.8 Andmete esitamine graafiku, võrrandi, avaldise, tabeli, joonise või diagrammina

Ülesannete lahendamist võrrandi koostamise abil kasutatakse matemaatikas ja teaduses sageli (O'Daffer, 1985e). Antud strateegiat saavad kasutada õpilased, kes on juba õppinud võrrandeid koostama ja lahendama. Põhikooli riikliku õppekava (2011) kohaselt kolmanda kooliastme lõpetaja koostab ja lahendab tekstülesandeid, mis lahenduvad võrrandi või võrrandisüsteemi abil (sh võrdelise jaotamise ülesandeid). Võrrandite koostamist ülesandes toodud algandmete põhjal, võrrandite lahendamist ja lahendi kontrollimist algandmete suhtes õpitakse eesti koolimatemaatikas põhjalikult alates seitsmendast klassist (Kaldmäe *et al.*, 2019b). Järgnev näide ja lahendus on seitsmenda klassi õpikust (Kaldmäe *et al.*, 2019b).

Näide. Mihkel läbis 11 km pikkusest teest osa käies ja osa joostes. Käies oli tema kiirus 4 km/h ja joostes 10 km/h. Kui palju aega Mihkel käis ja kui palju jooksis, kui kogu tee läbis ta 2 tunniga?

Lahendus. Oletame, et Mihkel käis *t* tundi. Sel juhul kulus tal jooksmisele aega $(2-t)$ tundi. Käies läbitud tee on 4*t* km ja joostes läbitud tee $10(2-t)$ km. Mihkel läbis kokku 11 km. Saame võrrandi ja lahendame selle

$$4t + 10(2-t) = 11$$
$$4t + 20 - 10t = 11$$
$$-6t = -9 \mid :(-6)$$
$$t = 1{,}5 \text{ (tundi)}$$

Mihkel käis 1,5 tundi ja jooksis $(2-t) = 2 - 1{,}5 = 0{,}5$ tundi.

Kontroll. Käies läbis Mihkel $1{,}5 \cdot 4 = 6$ km ja joostes $0{,}5 \cdot 10 = 5$ km. Kokku läbis ta $6 + 5 = 11$ km. See vastab ülesande tingimustele.

Sageli on ülesande andmed seotud muutuvate protsessidega, nagu näiteks liikumise, töötamise, vee voolamisega mahutisse. Sel juhul on hea esitada ülesande andmed tabelina, kuhu kantakse aeg, kiirus ja tulemus (Kaldmäe *et al.*, 2019b).

Tabel 4. Ülesande lahendamine tabeli abil (Kaldmäe *et al.*, 2019b).

	Aeg (h)	Kiirus (km/h)	Teepikkus (km)
Käimine	t	4	$4t$
Jooksmine	$2-t$	10	$10(2-t)=20-10t$

Tabeli järgi saab koostada võrrandi ja lahendada nagu eespool.

Õpetajale. Õpetaja saab õpetada ja suunata õpilasi koostama tabelit, mis lihtsustab ülesandest arusaamist ja võrrandi koostamist.

Ka ülesande andmete põhjal graafiku joonestamist õpitakse eesti koolimatemaatikas. Näiteks õpitakse seitsmendas klassis liikumisega seotud ülesannetes ühtlase liikumise graafikut joonestama ja sellel andmeid kujutama (Kaldmäe *et al.*, 2019a). Järgnev näide on seitsmenda klassi töövihikust (Saks & Reinson, 2013). Ülesanne on lahendatav graafiku joonestamise abil.

Näide. Siim ja Ott sõitsid jalgratastega samas suunas. Siim alustas teekonda kell 12.00 ja sõitis kiirusega 10 km/h. Ott alustas teekonda 12.30 ja sõitis kiirusega 15 km/h. Mitme kilomeetriga edestas Siim Otti, kui Ott oli sõitnud pool tundi? Mitmendal kilomeetril jõudis Ott Siimule järele? Mis kell poisid kohtusid?

Lahendus. Esiteks koostame Siimu ja Otti liikumise ajatabelid.

Tabel 5. Ülesande lahendamine tabeli koostamise abil.

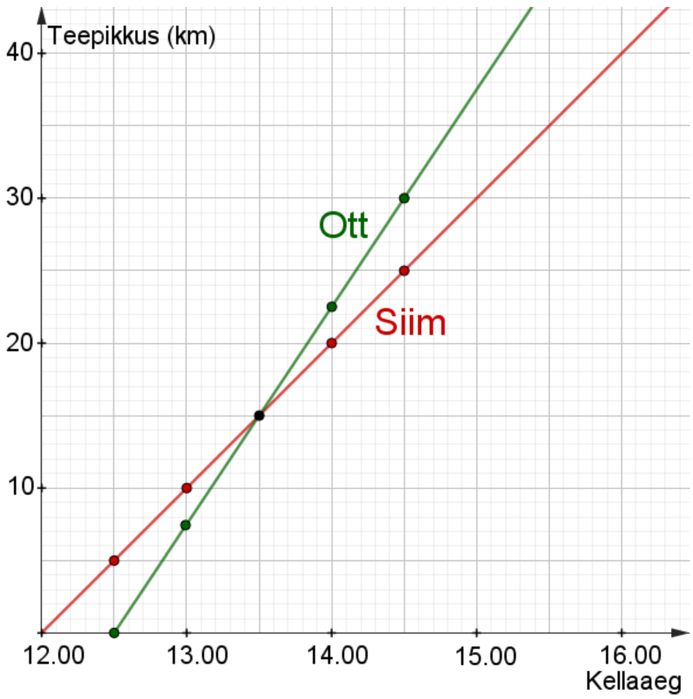
Siim

Aeg (h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5
Teepikkus (km)	0	5	10	15	20	25

Ott

Aeg (h)	0	0,5	1	1,5	2
Teepikkus (km)	0	7,5	15	22,5	30

Teiseks joonestame tabelite põhjal Siimu ja Otti liikumise graafikud.



Joonis 7. Ülesande lahendamine graafiku joonestamise abi.

Graafikult saab leida küsimustele vastused. Kui Ott oli sõitnud pool tundi, siis Siim edestas teda 2,5 kilomeetriga. Ott jõudis Siimule järele 15. kilomeetril. Poisid kohtusid kell 13.30.

Õpetajale. Õpetaja saab õpetada ja suunata õpilasi koostama tabeleid ja joonestama graafikut, mille abi saab ülesande lahendada.

Eespool on juba näiteid, kus ülesande lahendamise üks osa on tabeli koostamine. Tabeli koostamine ülesandes toodud algandmete põhjal ja selle abil ülesande lahendamine võib olla väga kasulik (O’Daffer, 1984d). Alltoodud O’Dafferi (1984d) pakutud ülesanne ja lahendus tabeli koostamise abil illustreerivad seda strateegiat hästi.

Näide. Carlotta luges, et kahel inimesel viiest on sinised silmad. Ta otsustas selle teadmise põhjal ennustada, mitmel õpilasel tema klassis on sinised silmad. Klassis on 30 õpilast. Mis arvu ta ennustas?

Lahendus. Ülesannet saab lahendada osa leidmisega tervikust, aga ka tabeli koostamise abil. Esiteks tuleb koostada tabel ja kirjuta sinna numbrid nii, et moodustuv muster on kergesti märgatav.

Tabel 6. Ülesande lahendamiseks koostatud tabel (O’Daffer, 1984d).

Sinised silmad	2					
Muud värvi silmad	3					
Kokku	5	10	15	20	25	30

Täiendame tabelit andmetega järgides seost: kahel inimesel viiest on sinised silmad.

Tabel 7. Täidetud tabel ülesande lahendamiseks (O’Daffer, 1984d).

Sinised silmad	2	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**
Muud värvi silmad	3	**6**	**9**	**12**	**15**	**18**
Kokku	5	10	15	20	25	30

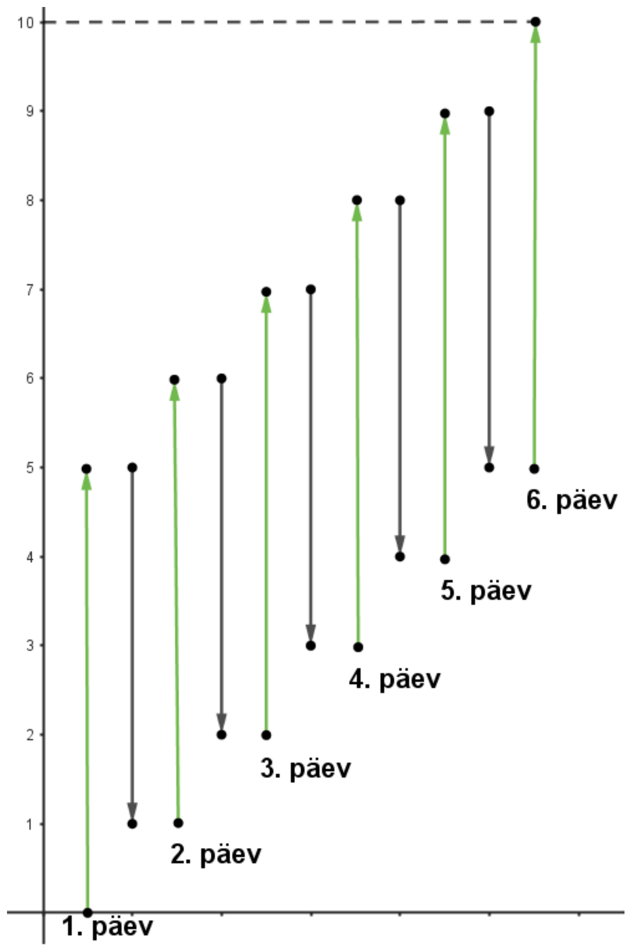
Täiendatud tabeli andmete põhjal peaks kolmekümnest õpilasest kaheteistkümnel olema sinised silmad.

Tabeli koostamise strateegia ei ole kasulik ainult teatud tüüpi ülesannete lahendamisel, vaid ka teiste strateegiatega koos kasutamisel andmete korrastamisel (O’Daffer, 1984d).

Joonise tegemine abistab sageli ülesandest arusaamist ja selle lahendamist. Eespool toodud katsetamise ja simuleerimise strateegia näite korral sai näiteks ülesande lahendamiseks reaalseid münte kasutada või nende puudumisel ka need paberile joonistada. Järgnev näide ei ole katsetamise teel lahendatav, küll aga joonise tegemise abil. Järgnev O’Dafferi (1984c) esitatud ülesanne ja selle lahendamine joonise tegemise abil.

Näide. Unine koaala tahab ronida 10 meetri kõrguse puu tippu. Päeval ronib ta 5 meetrit üles, aga öösel magades libiseb 4 meetrit tagasi. Mitu päeva kulub koaalal puu tippu jõudmiseks?

Lahendus. Ülesande lahendamiseks võib teha vabakäe joonise. Samas peaks joonisel ülesande tingimused, 5 m tõusu päeval ja 4 meetrit libisemist öösel, selgelt väljenduma. Jooniselt näeb õpilane, et koaalal kulub puu tippu jõudmiseks 6 päeva.



Joonis 8. Joonise tegemise abil ülesande lahendamine.

Joonistub välja, et koaala liigub ööpäevaga edasi 1 meetri ja viimase kuuenda päeva lõpuks saavutab eesmärgi ja jõuab puu tippu.

Õpetajale. Õpetaja saab julgustada õpilasi ülesannete lahendamisel jooniseid tegema ja joonisel mustrit nägema. Õpetaja saab ülesande lahendamise käiku jälgida ja esitada suunavaid küsimusi:

- Kas joonise tegemine võiks aidata ülesannet lahendada?
- Õige vastus ei ole kümme päeva? Miks?
- Kui kõrgel asub koaala esimese päeva lõpuks? Teise päeva lõpuks? Kolmanda päeva lõpuks? Kas näete mustrit?

Kokkuvõte

Magistritöös anti ülevaade probleemülesannete lahendamise arengutest kaasajal. Kirjeldati, kuidas probleemülesannete lahendamist koolitunnis korraldada ning millistele õpilaste ja õpetaja enda tegevustele tähelepanu pöörata. Töös kirjeldatakse nn mõtleva klassiruumi kujundamist, kus on ühendatud õpilaste koostöö ja liikumine tunni ajal. Võrdlevalt toodi välja tavapärane matemaatikatund ja õpilaste tegevused ülesannete lahendamise ajal ehk praktika *nüüd proovige teie.*

Töös toodi välja, mida on kirjutatud probleemülesannete lahendamise kohta põhikooli riiklikus õppekavas ning põhjendati probleemi lahendamise õpetamise vajadust koolis. Lisaks anti töös ülevaade erinevatest probleemide lahendamise strateegiatest ja toodi strateegiate rakendamise kohta näiteid.

Magistritöö praktilise osa raames koostati valik probleemülesandeid, mis toetavad seitsmenda klassi ainekava omandamist ja on sobilikud lahendada kolmanda kooliastme õpilastele. Lisaks ülesannetele on praktilise osa lõpus toodud ülesannete vastused ja osadele ülesannetele autori üks või mitu üksikasjalikku lahendust.

Koolitundides probleemülesannete lahendamise olulisusest on kirjutatud ja räägitud ikka ja jälle. Käesolevas magistritöös on kokkuvõtlikult toodud välja, mis on probleemülesanne ning kus, kuidas ja miks probleemülesandeid lahendada.

Tänusõnad

Soovin tänada oma juhendajat Hannes Jukki väärtuslike nõuannete eest töö valmise ajal. Tänusõnad kolleegidele, kes mind õpingute ajal toetanud on.

Kasutatud kirjandus

Eesti õigekeelsussõnaraamat (2018). Vaadatud 31.03.2023. http://eki.ee/dict/qs/index.cgi?Q=probleem

George Polya (s.a.). Vaadatud 28.03.2023. https://en.wikipedia.org/wiki/George_P%C3%B3lya

Heuristika (s.a.). Vaadatud 30.03.2023. https://et.wikipedia.org/wiki/Heuristika

Hmelo-Silver, C. (2004). Problem-based learning: what and how do students learn? *Educational Psychology Review*, 16(3), 235-266.

How to solve it (s.a.). Vaadatud 30.03.2023. https://en.wikipedia.org/wiki/How_to_Solve_It

Kaldmäe, K. Kontson, A. Matiisen, K.Pais, E. (2019a). *Matemaatika õpik 7. klassile I osa*. Avita.

Kaldmäe, K. Kontson, A. Matiisen, K.Pais, E. (2019b). *Matemaatika õpik 7. klassile II osa*. Avita.

Kilpatrick, J. (1987). George Polya's influence on mathematics education. *Mathematics Magazine* , 60(5), 299−300.

Krulik, S. Rudnick, J. (1982). Teaching problem solving to preservice teachers. *The Arithmetic Teacher* , 29(6), 42−45.

Leong, Y. Tay, E. Quek, K. Toh, T. Toh, P. Jaguthsing, D. Ho, F. Romina, A. (2014). *Making mathematics more practical*. World Scientific Publishing Co.

Lepmann, L. Lepmann, T. (1995). *Teeme ise matemaatikat*. Avita.

Lepmann, L. (2012). Probleemülesannete lahendamise oskuse arendamine põhikoolis. K. Kokk & A. Talts (Toim), *Matemaatika. Valdkonnaraamat põhikooliõpetajale*. Riiklik Eksami- ja Kvalifikatsioonikeskus, 1-15.

Liljedahl, P. (2021). *Building thinking classrooms in mathematics grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning.* Corwin.

Liljedahl, P. Allan, D. (2013). Studenting: The case of “now you try one”. In Lindmeier, A. M. Heinze, A. (Eds.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3, 257-264.

Liljedahl, P. Santos-Trigo, M. Malaspina, U. Bruder, R. (2016). *Problem solving in mathematics education*. ICME-13 Topical Survey, Springer.

O’Daffer, G. (1985a). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 32(8), 34−35.

O'Daffer, G. (1984a). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 32(1), 44−45.

O'Daffer, G. Krulik, S. Rudnick, J (1985b). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 33(3), 34−35.

O'Daffer, G. (1985c). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 32(7), 34−35.

O'Daffer, G. (1984b). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 32(4), 30−31.

O'Daffer, G. (1985d). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher,* 32(6), 62−63.

O'Daffer, G. (1984c). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 32(2), 42−43.

O'Daffer, G. (1985e). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 32(9), 14−15.

O'Daffer, G. (1984d). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 32(3), 46−47.

Pisa 2018 (s.a). Vaadatud 07.05.2023. https://factsmaps.com/pisa-2018-worldwide-ranking-average-score-of-mathematics-science-reading/

Polya, G. (2001). *Kuidas seda lahendada*. Valgus. Tallinn.

Põhikooli riiklik õppekava (2011). *Riigi Teataja I, 08.03.2023,5*. https://www.riigiteataja.ee/akt/108032023005?leiaKehtiv

Põhikooli riiklik õppekava lisa 5 (2011). *Vabariigi Valitsuse 6. jaanuari 2011. a määrus nr 1*. https://www.riigiteataja.ee/aktilisa/1080/3202/3005/18m_pohi_lisa5.pdf#

Resnick, L. Glase, R. (1976). *Problem solving and intelligence*. Learning Research and Development Center University of Pittsburgh

Riiklike õppekavade ajakohastamine (2023). Vaadatud 12.03.2023. https://oppekava.ee/oppekavade-ajakohastamine/

Saks, M. Reinson, Ü. (2013). *Matemaatika töövihik 7. klassile I osa*. Avita.

Schoenfeld, A. (1980). Teaching problem-solving skills. *The American Mathematical Monthly*, 87(10), 794−805.

Schoenfeld, A. (1987). Polya, problem solving and education. *Mathematics Magazine,* 60(5), 283−291.

Schoenfeld, A. (2016). Learning to think mathematically. *The Journal of Education,* 196(2), 1−38.

Slavin, R. (1996). Cooperative learing in middle and secondary schools. *The Clearing House*, 69(4), 200−204.

Vogler, K. (2008). Asking good questions. *Educational Leadership, Vol 65.*

Lisa 1. Probleemülesandeid

Koostaja: Evelin Kukk

Probleemülesandeid 7. klassile ja kolmandale kooliastmele

Tartu 2023

Sisukord

Juhend

Käesolevas töös toodud probleemülesanded toetavad seitsmenda klassi ainekava teemade õppimist ja on sobilikud lahendada kolmanda kooliastme õpilastele. Ülesanded on ainekava teemade järgi erinevates peatükkides.

Osa ülesandeid on autori enda koostatud. Ülesanded, mis ei ole töö autori enda koostatud, on viidatud. Mõned ülesanded on matemaatikavõistluselt „Kuubik“. Tartu Ülikooli teaduskooli korraldatud veebipõhine matemaatikavõistlus „Kuubik“ oli mõeldud neljanda kuni kaheksanda klassi õpilastele. Seda korraldas Maksim Ivanov. Veebiviited ülesannetele ei ole praegu saadaval.

Mitmed ülesanded on Cambridge Ülikooli matemaatika- ja haridusteaduskonna kodulehelt Nrich, mis keskendub probleemide lahendamisele ja õpilastele võimaluste loomisega matemaatika õppimiseks läbi uurimise ja arutelu.

Viimases peatükis on toodud ülesannete vastused ja lahendusi. Osade ülesannete kohta on esitatud üks või mitu üksikasjalikku autori enda lahendust. Töö autor ei ole pidanud vajalikuks esitada lahendusi kõigi ülesannete kohta. Need ülesanded on õpetajale vajadusel kiiresti lahendatavad. Näiteks teise peatüki ülesannetel on mitmeid lahendusi ja töö autor jätab need õpilastele ja õpetajale ise avastada.

Ülesannete juures on õpetajale abistav osa. Seal on toodud, milliseid vihjeid õpetaja õpilastele võiks anda ja kuidas õpilasi ülesande lahendamise juures vajadusel suunata.

Autori arvates võiks käesolevas töös toodud probleemülesandeid lahendada magistritöös kirjeldatud viisil juhuslikes kolmeliikmelistes rühmades vertikaalsetele tahvlitele või sarnastele pindadele kirjutades. Mõnede ülesannete juures on õpetajale info, et ülesannet võiks lahendada ka arvutiklassis töös soovitatud sobiva tarkvara abil.

1. Protsent

1.1 Ülesanne „Ananassimahl“

See ülesanne on Nrich (2023a) lehelt. Ülesanne toetab seitsmenda klassi ainekava protsentarvutuse ja lineaarvõrrandite abil lahenduvate tekstülesannete õppimisel.

Ülesanne. Ettevõte „Juice Drink“ otsustab uue joogi valmistamiseks segada tootmise käigus üle jäänud mahlajooke. Neil on 450 liitrit ananassijooki, mille mahlasisaldus on 42%. Nad segavad selle 630 liitri apelsinijoogiga. Uue joogi mahlasisaldus on 35%.
Mitu protsenti oli apelsinijoogi mahlasisaldus?

Õpetajale. Ülesande tekstis on protsendid, seega võivad õpilased hakata ülesannet lahendama protsentidega arvutades. Kui õpilastel ei ole meeles protsentide arvutamise valemid, saab õpetaja anda vihje võrde põhiomaduse kasutamise kohta.

Kui õpilased ei saa ülesande lahendamisega hakkama ja on alla andmas, võib õpetaja anda vihjeid:

- Kas ülesannet saaks lahendada muul viisil, kui protsente leides?
- Kas ülesannet saaks lahendada võrrandi koostamisega?

1.2 Ülesanne „Merevesi“

Punase mere soolsus on 4,2%. Mitu kg magedat vett peab lisama 50 kg Punase mere veele, et soolasisaldus väheneks 0,2%-ni, nagu see on Soome lahes?

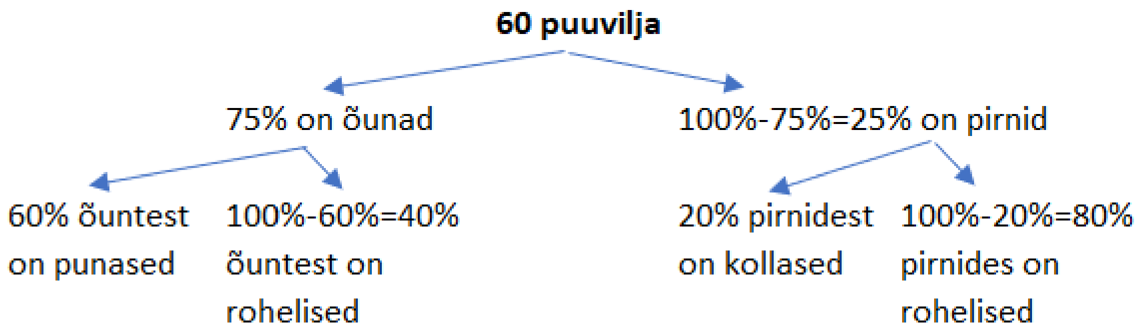
Õpetajale. Ülesande tekstis on protsendid, seega võivad õpilased hakata ülesannet lahendama protsentide leidmisega. Kui õpilastel ei ole meeles protsentide arvutamise valemid, saab õpetaja anda vihje võrde põhiomaduse kasutamise kohta. Kui õpilased ei saa ülesande lahendamisega hakkama võib õpetaja vihjata:

- Kuidas muutuvad puhta vee ja soola hulgad vaadeldud juhul?
- Kas soola hulk on soolasemas ja magedamas merevees sama? Kuidas te seda teadmist lahendamisel saate kasutada?

1.3 Ülesanne „Puuviljad“

Korvis on 60 puuvilja. Puuviljadest 75% on õunad ja ülejäänud on pirnid. Pirnidest 20% on kollased ja ülejäänud on rohelised. Õuntest 60% on punased ja ülejäänud on rohelised. Kui suur osa rohelistest puuviljadest on õunad?

Õpetajale. Kui õpilastel on raskusi teksti mõistmise ja ülesande lahendamisega, võib õpetaja suunata õpilased joonist tegema.



Joonis 1. Ülesandest arusaamist toetav joonis ülesande „Puuviljad“ juurde.

Kui õpilastel ei ole meeles protsentide arvutamise valemid, saab õpetaja suunata õpilasi protsente teisendama osamääradeks ja aidata valemeid meelde tuletada.

2. Tehted ratsionaalarvudega

Käesolevas peatükis toodud ülesanded toetavad seitsmenda klassi ainekava ratsionaalarvudega arvutamise õppimisel. Ülesanded sobivad kõigile kolmanda kooliastme õpilastele.

Ülesanne 1. Lisa võrduse vasakusse poolde tehtemärke ja sulgusid nii, et võrdus oleks õige.

1 2 3 = 1

1 2 3 4 = 1

1 2 3 4 5 = 1

1 2 3 4 5 6 = 1

1 2 3 4 5 6 7 = 1

1 2 3 4 5 6 7 8 = 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 1

Ülesanne 2. Lisa võrduse vasakusse poolde tehtemärke ja sulgusid nii, et võrdus oleks õige.

1 2 3 = −1

1 2 3 4 = −1

1 2 3 4 5 = −1

1 2 3 4 5 6 = −1

1 2 3 4 5 6 7 = −1

1 2 3 4 5 6 7 8 = −1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = −1

Ülesanne 3. „Pii päeva ülesanne“

1) Lisa võrduse vasakusse poolde tehtemärke ja sulgusid nii, et võrdus oleks õige.

3 1 4 = −2

3 1 4 = −1

3 1 4 = 0

3 1 4 = 1

3 1 4 = 2

2) Lisa võrduse vasakusse poolde tehtemärke ja sulgusid nii, et võrdus oleks õige. Milliseid võrdusi suudad välja mõelda?

3 1 4 = 3

3 1 4 = 4

3 1 4 = 5

3 1 4 = 6

3 1 4 = 7

3 1 4 = 8

…

3) Lisa võrduse vasakusse poolde tehtemärke ja sulgusid nii, et võrdus oleks õige. Milliseid võrdusi suudad välja mõelda?

3 1 4 = −3

3 1 4 = −4

3 1 4 = −5

3 1 4 = −6

3 1 4 = −7

3 1 4 = −8

…

Õpetajale. Õpetaja saab vajadusel aidata meelde tuletada tehete järjekorda ja sulgude kasutamist.

3. Arvu aste

Selle peatüki ülesanded toetavad seitsmenda klassi ainekava arvu astmete õppimisel.

Õpilased võiksid arvutada taskuarvutil.

3.1 Ülesanne „7 astmed“

Leia 7 astmed.

$7^1 =$

$7^2 =$

$7^3 =$

$7^4 =$

$7^5 =$

$7^6 =$

$7^7 =$

$7^8 =$

$7^9 =$

$7^{10} =$

…

a) Mida märkad?

b) Mis on arvu 7^{70} üheliste number?

3.2 Ülesanne „5 astmed“

Leia 5 astmed.

$5^1 =$

$5^2 =$

$5^3 =$

$5^4 =$

$5^5 =$

$5^6 =$

$5^7 =$

$5^8 =$

$5 =$

$5^{10} =$

…

a) Mida märkad?

b) Mis on arvu 5^{55} kolm viimast numbrit?

4. Funktsioonid ja nende graafikud

Järgnevad ülesanded toetavad seitsmenda klassi ainekava lineaarfunktsiooni ja selle graafiku õppimisel.

4.1 Ülesanne „Sirge ja võrrand I“

a) Joonesta lineaarfunktsiooni $y = 2x + 1$ graafik.
b) Milline on lineaarfunktsiooni valem?
c) Joonesta samasse koordinaatteljestikku lineaarfunktsiooni $y = 2x + b$ graafikuid erinevate b väärtuste korral?
d) Kuidas on sirge asukoht ja võrrand seotud?
e) Kuidas sirged teineteise suhtes asetsevad? Mida saate öelda sirgete võrrandite kohta?

Õpetajale. Ülesannet võib olla mugavam lahendada laual suuremale ruudulisele paberile. Õpetaja võib õpilastele koordinaatteljestiku ette anda. Õpetaja võib õpilastele ka b väärtused ette anda ja erinevatele gruppidele ka erinevad. Grupid saavad suhelda ja vaadata teiste gruppide töid.

Ülesanne võimaldab õpetajal anda õpilastele joonestada antud lineaarfunktsiooni graafik väärtuste tabeli abil. Edasi avastavad õpilased koos õppides ise seosed kordajate ja sirge asendi vahel. Õpetaja saab suunata õpilasi valima vabaliikme b erinevaid väärtusi, nii positiivseid, negatiivseid kui ka murdarve. Teine võimalus sirgete ja võrrandite uurimiseks on teha seda arvutiklassis paaristööna GeoGebra programmi kasutades.

4.2 Ülesanne „Sirge ja võrrand II“

a) Joonesta lineaarfunktsioon $y = 3x + 2$ graafik.
b) Joonesta samasse koordinaatteljestikku lineaarfunktsiooni $y = ax + 2$ graafikuid erinevate a väärtuste korral?
c) Kuidas muutub sirge asend?
d) Joonesta samasse koordinaatteljestikku lineaarfunktsiooni $y = ax + 3$ graafikuid negatiivsete a väärtuste korral?
e) Kuidas muutub sirge asend?

Õpetajale. Ülesannet võib olla mugavam lahendada laual suuremale ruudulisele paberile. Õpetaja võib õpilastele koordinaatteljestiku ette anda. Õpetaja võib õpilastele ka a väärtused ette anda ja erinevatele gruppidele ka erinevad. Grupid saavad suhelda ja vaadata teiste gruppide töid.

Ülesanne võimaldab õpetajal anda õpilastele joonestada antud lineaarfunktsiooni graafik väärtuste tabeli abil. Edasi avastavad õpilased koos õppides ise seosed kordajate ja sirge asendi vahel. Õpetaja saab suunata õpilasi valima kordaja *a* erinevaid väärtusi, nii positiivseid, negatiivseid kui ka murdarve. Tunnis õpitut kokku võttes saab õpetaja selgitada uusi mõisteid tõusev ja langev sirge. Teine võimalus sirgete ja võrrandite uurimiseks on teha seda arvutiklassis paaristööna GeoGebra programmi kasutades.

4.3 Ülesanne „Sirge ja võrrand III“

a) Leia kujundi pindala, kui seda piiravad jooned:

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$y = -3x + 7$$

$$y = -3x + 17$$

b) Muuda ühe sirge võrrandit nii, et joontega piiratud kujundi pindala kahekordistuks.

c) Kas piisab ühe sirge võrrandi muutmisest, et kujundi pindala kahekordistuks? Leia erinevaid võimalusi.

Õpetajale. Ülesanne võimaldab õpetajal anda õpilastele joonestada antud lineaarfunktsioonide graafikud väärtuste tabeli abil või tõusu ja algkoordinaadi meetodil. Kui õpilased on joontega piiratud kujundi leidnud, saab õpetaja vajadusel suunata õpilasi konkreetse sirge võrrandit muutma ja katsetama. Teine võimalus sirgete ja võrrandite uurimiseks on teha seda arvutiklassis paaristööna GeoGebra programmi kasutades.

5. Võrrandid ja tekstülesanded

5.1 Ülesanne „Bussipiletid“

Ülesanne „Bussipiletid“ oli matemaatikavõistluse „Kuubik“ 2019-2020. aasta võistluse kolmanda vooru ülesanne. Ülesanne toetab seitsmenda klassi ainekava lineaarvõrrandite koostamise ja lahendamise õppimisel.

Ülesanne. Sõiduks firma BusGo rahvusvaheliste liinide bussidega müüakse pileteid nii täiskasvanutele kui ka lastele. Täiskasvanu pilet maksab 3 eurot, millele lisandub 20 senti iga läbitud kilomeetri eest. Laste pilet maksab 2 eurot, millele lisatakse 5 senti iga läbitud kilomeetri eest. Kahest täiskasvanust ja ühest lapsest koosnev pere ostab pileteid selle firma bussile.

a) Mitu eurot peab see pere kolme pileti eest tasuma, et sõita linnast A linna B, kui linnade vahemaa on 40 km?
b) Et sõita linnast B linna C, tuleb perel kolme pileti eest tasuda 35 eurot ja 45 senti. Mitu kilomeetrit lahutab linna C linnast B.
c) Laste pilet linnast C linna D maksab täpselt 2 korda vähem kui täiskasvanu pilet. Mitu kilomeetrit on tee linnast C linna D?
d) Et jõuda linnast D linna E, tuleb sellel perel iga kilomeetri eest keskmiselt maksta 55 senti. Mitu kilomeetrit lahutab linna E linnast D?
e) Sõiduks linnast E linna F, tuleb pere kahe pileti eest kokku maksta täpselt 35 eurot. Mitu eurot maksab selle pere kolmas pilet linnast E linna F?

Õpetajale. Õpetaja saab julgustada õpilasi tegema ülesandest arusaamist parandavat joonist ja ülesande lahendamise käigus andmeid ka joonisele kandma.

Joonis 2. Illustreeriv joonis ülesande „Bussipiletid“ juurde.

5.2 Ülesanne „Kommikarp“

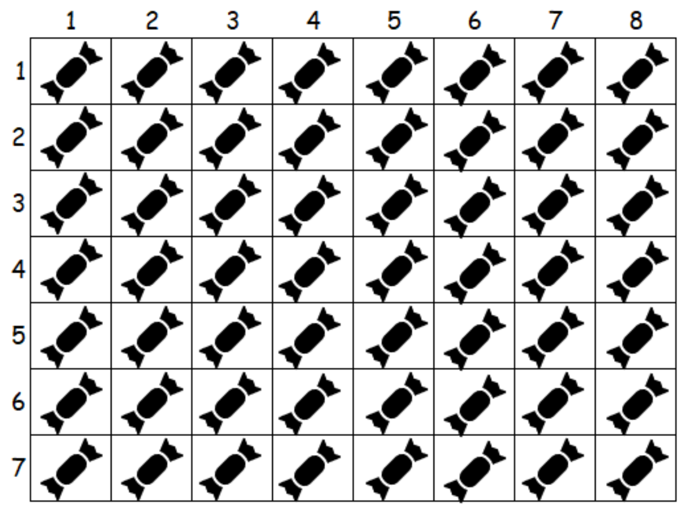
Ülesanne kommikarp oli matemaatikavõistluse „Kuubik“ 2017-2018. aasta võistluse kolmanda vooru ülesanne. Ülesanne toetab seitsmenda klassi ainekava võrdelise jaotamise ning lineaarvõrrandi koostamise ja lahendamise õppimisel.

Ülesanne. Mari kohtus kahe oma sõbrannaga – Kadri ja Sandraga. Nad otsustasid kolme peale osta kommikarbi oma lemmikkommidega. Kommikarbis oli kokku 7 rida komme, millest igaühes 8 kommi. Mari maksis poole kommikarbi hinnast, Kadri maksis 2 eurot ning kommikarbi täpse maksumuse saamiseks lisas Sandra 1 euro ja 50 senti.

a) Mitu kommi oli selles kommikarbis?
b) Kui palju maksis kommikarp (eurodes)?
c) Kommikarbi maksumusest moodustab ühe viiendiku pakend ja ülejäänud osa kommid. Kui suur on ühe kommi keskmine hind (sentides)?
d) Tüdrukud sõid ära kõik kommid, kusjuures Mari sõi kaks korda rohkem komme, kui Kadri, kes omakorda sõi kaks korda rohkem komme, kui Sandra. Mitu kommi sõi Mari?
e) Kui tüdrukud jaotaksid omavahel kõik kommid vastavalt sellele, kui palju igaüks kommikarbi eest on maksnud, siis mitu kommi saaks endale võtta Sandra?

Õpetajale. Nooremad õpilased saavad ülesannet lahendada ka magistritöös kirjeldatud oletamise ja testimise strateegiat kasutades.

Õpetaja saab julgustada õpilasi ise tegema ülesandest arusaamist parandavat joonist ja ülesande lahendamise käigus andmeid ka joonisele kandma. Vajadusel suunab õpetaja õpilasi eurosid sentideks teisendama.



Joonis 3. Abistav joonis ülesande „Kommikarp“ juurde.

5.3 Ülesanne „Caesar“

See ülesanne on Nrich (2023b) lehelt. Ülesanne toetab seitsmenda klassi ainekava võrdelise jaotamise õppimisel. Ülesanne toetab teises kooliastmes õpitud harilike murdude võrdlemise kordamist.

Ülesanne. Las Vegase kasiinos Caesars Palace läksid ühel õhtul kolm mängijat pokkerit mängima. Alan, Bernie ja Craig olid mängimiseks kaasa võtnud rahasummad, mis jaotusid õhtu alguses nagu 7 : 6 : 5. Pärast mängimist õhtu lõpuks jagunesid rahad nagu 6 : 5 : 4. Üks mängijatest võitis õhtuga 1200 dollarit võrreldes sellega, milline summa oli tal kaasa võetud. Milliste summadega tulid pokkerimängijad õhtul mängima?

Vihje: pokkeris mängu jooksul raha kogusumma ei muutu, vaid muutub raha jaotus mängijate vahel.

Õpetajale. Kui õpilased jäävad ülesande lahendamisega hätta, siis saab õpetaja suunata õpilased võrdlevat tabelit koostama. Näide tabelist on lahenduste ja vastuste osas. Vajadusel aitab õpetaja meelde tuletada murdude ühenimeliseks teisendamist.

5.4 Ülesanne „Ema ja tütar“

Tütar on 37-aastana ja ema on 65-aastane. Mitu aastat tagasi oli ema tütrest 15 korda vanem?

Õpetajale. Nooremad õpilased, kes lineaarvõrrandeid õppinud ei ole, saavad ülesannet lahendada magistritöös kirjeldatud oletamise ja testimise strateegiat kasutades ning andmetest tabelit koostades.

6. Tõenäosus ja statistika

6.1 Ülesanne „Erinevad keskmised“

See ülesanne on Nrich (2023c) lehelt. Ülesanne toetab seitsmenda klassi ainekava statistikas arvnäitajate aritmeetiline keskmine, mood ja mediaan õppimisel.

Ülesanne. Antud viie arvu

$$2, 5, 5, 6, 7$$

keskmine, mood, mediaan ja variatsiooni ulatus on 5.

1) Leia veel viis positiivset täisarvu nii, et

   keskmine = mood = mediaan = variatsiooni ulatus.

2) Kas leiduvad viiest positiivsest täisarvust koosnevad komplektid nii, et
   a) mood < mediaan < keskmine
   b) mood < keskmine < mediaan
   c) keskmine < mood < mediaan
   d) keskmine < mediaan < mood
   e) mediaan < mood < keskmine
   f) mediaan < keskmine < mood
3) Iga tingimuse kohta ei saa leida seda rahuldavat viite arvu. Miks?
4) Näidata, et mõne eespool toodud tingimuse rahuldamiseks leiduvad neli sobivat arvu.
5) Näidata, et kõigi eespool toodud tingimuste rahuldamiseks saab leida kuus sobivat arvu.

Õpetajale. Õpetaja saab õpilasi julgustada oletamise ja testimise strateegiat kasutama. Õpetaja saab suunata õpilasi esialgu proovima väikeste arvudega. Kui üks komplekt arve on ülesande esimeses osas leitud, siis on lihtsam järgmine komplekt leida. Proovimise käigus leiavad õpilased vastuseid ka ülesande teisetele küsimustele. Teine võimalus statistika ülesannete lahendamiseks on teha seda arvutiklassis tabelarvutusprogrammi, näiteks MS Excel, või ka GeoGebrat kasutades.

Antud ülesande lahendamine võtab aega. Seega võib õpetaja anda lahendada osa ülesandest. Õpetaja annab näiteks teises punktis õpilastele ette võrratused a ja b. Edasi võiksid õpilased ka ise koostada erinevaid võrratusi ja proovida neid lahendada. Kui õpilastel ei õnnestu viie arvuga komplekti leida, saab õpetaja pakkuda, et proovige leida neli või kuus sobivat arvu.

6.2 Ülesanne „Kustutamine“

See ülesanne on taas Nrich (2023d) lehelt. Ülesanne toetab seitsmenda klassi ainekava statistikas arvnäitaja aritmeetiline keskmine õppimisel.

Ülesanne. Võtke arvud 1, 2, 3, 4, 5, 6 ja valige nende seast üks arv, mis sellest reast kustutada. Näiteks jätate välja arvu 5, alles jäävad 1, 2, 3, 4, 6. Allesjäänud arvude keskmine on 3,2.

1) Kas on võimalik üks arv arvude 1 kuni 6 reast kustutada nii, et alles jäänud viie arvu keskmine on täisarv?
2) Kui on antud arvude komplekt 1 kuni *n*, kus *n* on paarisarv. Kustutage taas reast üks arv ja leidke keskmine. Milliseid arve saab kustutada nii, et järelejäänud arvude keskmine on täisarv? Selgitage, miks?
3) Mis juhtub, kui *n* on paaritu arv?
4) Siin on mõned arvuread ja kustutamised, mida võiksite proovida:
   a) Kustutage üks arvudest 1, 2, 3, 4, 5, 6. Järelejäänud arvude keskmine on 3,6. Milline arv kustutati?
   b) Üks arvudest 1 kuni 15 kustutatakse. Järelejäänud arvude keskmine on 7,(714285) Milline arv kustutati?
   c) Üks arvudest 1 kuni *n* kustutatakse. Järelejäänud arvude keskmine on 6,8(3). Mis on *n* ja milline arv kustutati?
   d) Üks arvudest 1 kuni *n* kustutatakse. Allesjäänud arvude keskmine on 25,76. Mis on *n* ja milline arv kustutati?

Õpetajale. Õpetaja saab õpilasi julgustada oletamise ja testimise strateegiat kasutama ning uurima seaduspärasusi. Õpetaja saab suunata õpilasi proovima erinevate arvudega. Õpetaja saab punktides 2 ja 3 suunata õpilasi kasutama strateegiat lahendada esialgu lihtsam ülesanne väiksema *n* väärtuse korral.

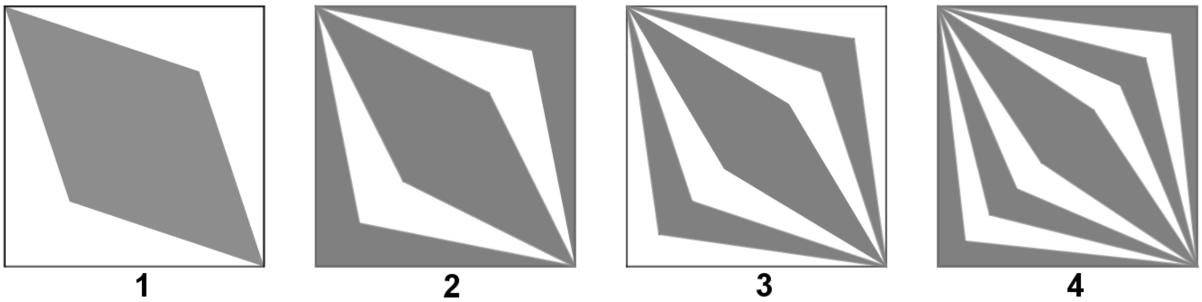
Teine võimalus statistika ülesannete lahendamiseks on teha seda arvutiklassis tabelarvutusprogrammi, näiteks MS Excel, kasutades. Siin alates ülesande 4 osast b on hea kasutada tabelarvutusprogrammi, sest arvujadad on pikemad ja keskmise arvutamine võtab aega.

7. Hulknurgad ja prismad

7.1 Ülesanne „Vaibad“

See ülesanne oli matemaatikavõistluse „Kuubik“ 2019-2020. aasta võistluse neljanda vooru ülesanne. Ülesanne toetab seitsmenda klassi ainekava geomeetria teemas rombi õppimisel.

Ülesanne. Ettevõte valmistab ruudukujulisi vaipu, mille diagonaalid on pikkusega 6 meetrit. Vaip on valget värvi, kuid ettevõte pakub vaiba värvimiseks joonisel näidatud nelja erinevat võimalust.



Joonis 4. Vaipade värvimise neli võimalust.

Iga värvimise korral on selle järjenumber võrdne ruudu sisse kujundatud rombide arvuga. Iga rombi üks diagonaalidest ühtib ruudu diagonaaliga. Iga rombi teine diagonaal asub ruudu teisel diagonaalil, kusjuures kõik sellel diagonaalil asuvad rombide tipud koos selle diagonaali keskpunktiga jaotavad selle diagonaali võrdseteks osadeks (näiteks, teisel värvimise korral jaotavad kuueks võrdseks osaks).

Vaiba hind sõltub värvitava osa pindalast. Valge vaiba alghinnale 100 eurot lisatakse 10 eurot iga värvitud ruutmeetri eest.

a) Leia ühe vaiba pindala ruutmeetrites.

Leia …

b) näidise 1 järgi;

c) näidise 2 järgi;

d) näidise 3 järgi;

e) näidise 4 järgi;

värvitud vaiba maksumus eurodes.

Märkus. Ruut on samuti romb, mille pindala leidmiseks tuleb korrutada rombi kahe diagonaali pikkused ja jagada saadud korrutis arvuga 2.

Õpetajale. Andes ülesanded lahendada õpilastele alates seitsmendast klassist, kes on õppinud rombi omadusi ja pindala arvutamist, võiks lõpus toodud märkuse ka ära jätta. Ülesanne sisaldab erinevaid alaülesandeid lihtsamast keerulisemani ja võimaldab oma edukust tajuda erineva võimekusega õpilastel. Õpetaja saab suunata kaheksanda ja üheksanda klassi õpilasi, kes on õppinud kolmnurga mediaani ja selle omadusi, ülesannet lahendama kolmnurkade abil.

7.2 Ülesanne „Hulknurga diagonaalid“

Millisel korrapärasel hulknurgal on 30 diagonaali rohkem kui külgi?

Õpetajale. Õpetaja saab suunata õpilasi kasutama strateegiat, et lahendage esialgu lihtsam ülesanne.

7.3 Ülesanne „Tennispallid“

Kolm tennispalli on tihedalt pakitud torukujulisse purki. Kas purgi kõrgus on suurem, kui selle ümbermõõt või vastupidi (Phares *et al*., 1985)?

Õpetajale. Ülesande lahendamisel saab kasutada katsetamise ja simuleerimise strateegiat. Õpetaja saab suunata õpilasi joonist tegema, et nad mõistaksid, kuidas pallid purgis paiknevad. Pallide ja pakendiks oleva purgi olemasolul, saab ka reaalselt olukorda vaadelda ja mõõta.

8. Lahendused ja vastused

Lahenduste ja vastuste osas on toodud ülesannete vastused. Osadele ülesannetele on esitatud lisaks üks või mitu töö autori üksikasjalikku lahendust. Ülejäänud ülesannete, millele kohta lahendusi ei ole toodud, lahendamine on autori arvates õpetajale vähe aega nõudev või ka mittevajalik.

1.1 *Lahendus 1.* Ülesande lahendamine protsentarvutuse abil.

450 liitrit 42% ananassijooki sisaldab mahla $450 \cdot \frac{42}{100} = 189$ liitrit.

Segujooki valmistati kokku $450 + 630 = 1080$ liitrit.

1080 liitrit 35% segujooki sisaldab mahla $1080 \cdot \frac{35}{100} = 378$ liitrit.

Apelsinijoogis on mahla $378 - 189 = 189$ liitrit.

Apelsinijoogi mahlasisaldus on seega $\frac{189}{630} \cdot 100\% = 30\%$.

Lahendus 2. Ülesande lahendamine lineaarvõrrandi koostamise ja lahendamise teel. Oletame, et apelsinijoogi mahlasisaldus on *x*%.
Segujooki mahlasisaldusega 35% valmistati kokku $450 + 630 = 1080$ liitrit. Saame võrrandi:

$$0{,}42 \cdot 450 + x \cdot 630 = 0{,}35 \cdot 1080$$

$$189 + 630x = 378$$

$$x = 0{,}3$$

Seega apelsinijoogi mahlasisaldus on 30%.

Ülesandel on veel mitmeid lahendusviise, mis on toodud Nrich (2023a) internetilehel.

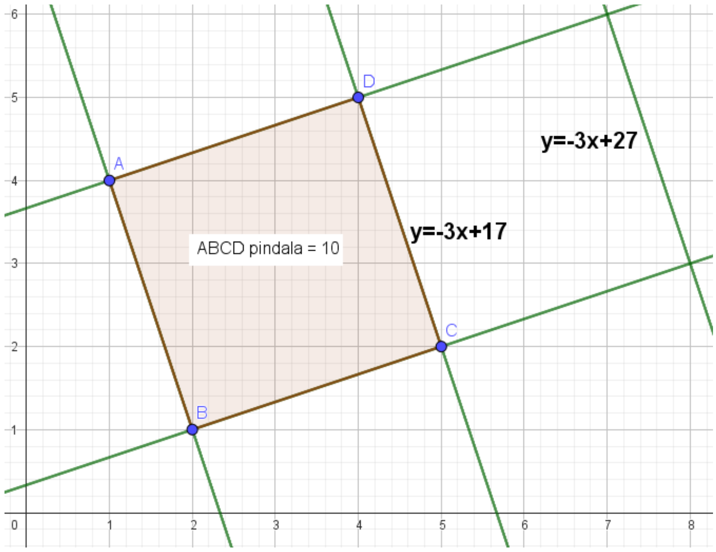
1.2 *Vastus.* 1000 kg.

1.3 *Vastus.* 60%.

3.1 *Vastus*. a) Seitsme astmeid järjest arvutades märkame, et üheliste number hakkab korduma 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, … . b) 9.

3.2 *Vastus.* a) Viie astmeid järjest arvutades alates arvu kuubist on viie astme kolm viimast numbrit vaheldumisi 125, 625, 125, 625, … . b) …125.

4.3 b) Üks võimalus on muuta sirge võrrandis $y = -3x + 17$ vabaliikme väärtust $y = -3x + 27$ ja saame kaks korda suurema pindalaga kujundi (ristküliku).



Joonis 5. Antud joontega piiratud kujund (ruut) ja kaks korda suurema pindalaga kujund (ristkülik).

5.1 *Lahendus.* Ülesanded on lahendatavad avaldise või võrrandi koostamise teel.

a) Täiskasvanu pilet linnast A linna B maksab $(3 + 0{,}2 \cdot 40)$ eurot.
   Lapse pilet linnast A linna B maksab $(2 + 0{,}05 \cdot 40)$ eurot.
   Seega perel kulub sõiduks linnast A linna B kolme pileti ostmiseks
   $$2(3 + 0{,}2 \cdot 40) + 2 + 0{,}05 \cdot 40 = 22 + 4 = 26 \text{ (eurot).}$$
b) Olgu linnade B ja C vaheline kaugus *x* km. Perel tuleb kolme pileti eest tasuda 35 eurot ja 45 senti. Saame võrrandi
   $$2(3 + 0{,}2x) + 2 + 0{,}05x = 35{,}45$$
   $$0{,}45x = 27{,}45$$
   $$x = 61 \text{ (km)}$$
   Linnade B ja C vaheline kaugus on 61 kilomeetrit.
c) Olgu linnade C ja D vaheline kaugus *y* km. Lapse pilet maksab kaks korda vähem kui täiskasvanu pilet. Saame võrrandi

$$3 + 0{,}2y = 2(2 + 0{,}05y)$$

$$0{,}1y = 1$$

$$y = 10 \text{ (km)}$$

Linnade C ja D vaheline kaugus on 10 kilomeetrit.

d) Olgu linnade D ja E vaheline kaugus *z* km. Iga kilomeetri eest tuleb perel keskmiselt maksa 55 senti. Saame võrrandi

$$\frac{2(3 + 0{,}2z) + 2 + 0{,}05z}{z} = 0{,}55$$

Linnade vaheline kaugus $z \neq 0$, korrutan võrrandi mõlemaid pooli *z*-ga.

$$2(3 + 0{,}2z) + 2 + 0{,}05z = 0{,}55z$$

$$0{,}1z = 8$$

$$z = 80 \text{ (km)}$$

Linnade C ja D vaheline kaugus on 80 kilomeetrit.

e) Olgu linnade E ja F vaheline kaugus *w* km. Perel tuleb kahe pileti eest tasuda 35 eurot. Saame võrrandi

$$3 + 0{,}2w + 2 + 0{,}05w = 35$$

$$0{,}25w = 30$$

$$w = 120 \text{ (km)}$$

Linnade E ja F vaheline kaugus on 120 kilomeetrit. Kolmas pilet maksab

$$3 + 0{,}2 \cdot 120 = 27 \text{ eurot.}$$

5.2 *Lahendus.* Ülesande küsimused on järjestatud alustades lihtsatest (kolm esimest küsimust) keerulisemateni (kaks viimast).

a) Karbis on

$$7 \cdot 8 = 56 \text{ kommi.}$$

b) Kommikarp maksis

$$2 \cdot (2 + 1{,}5) = 7 \text{ eurot.}$$

c) Teisendame 7 eurot = 700 senti. Karbis on 56 kommi, kommid moodustavad kommikarbi hinnast $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$, seega ühe kommi keskmine hind on

$$\frac{4}{5} \cdot 700 : 56 = 10 \text{ senti.}$$

d) Oletame, et Sandra sõi *k* kommi. Kadri sõi komme kaks korda rohkem, seega ta sõi *2k* kommi. Mari sõi omakorda Kadrist kaks korda rohkem komme, seega tema sõi *2 · 2k* kommi. Sandra sõi

$$k + 2k + 2 \cdot 2k = 56$$

$$7k = 56$$

$$k = 8 \text{ (kommi)}$$

Sandra sõi 8 kommi, seega Mari sõi

$$4 \cdot 8 = 32 \text{ kommi.}$$

e) Kui Mari, Kadri ja Sandra jaotaksid kommid omavahel suhtes 3,5 : 2 : 1,5.

Suhte osade arv on 3,5 + 2 + 1,5 = 7.

Ühe osa suurus on 56 : 7 = 8 kommi.

Sandra saaks 1,5 · 8 = 12 kommi.

5.3 *Lahendus.* Ülesande lahendamist on sobiv alustada võrdleva tabeli koostamise abil.

	Õhtu alguses	Õhtu lõpus
Raha jaotus mängijate vahel	7 : 6 : 5	6 : 5 : 4
Suhte osade arv	7 + 6 + 5 = 18	6 + 5 + 4 = 15
Alani osa	$\frac{7}{18} = \frac{35}{90}$	$\frac{6}{15} = \frac{36}{90}$
Bernie osa	$\frac{6}{18} = \frac{30}{90}$	$\frac{5}{15} = \frac{30}{90}$
Craigi osa	$\frac{5}{18} = \frac{25}{90}$	$\frac{4}{15} = \frac{24}{90}$

Et võrrelda, millise mängija osa suurenes või vähenes, tuleb osade suurused teisendada ühenimelisteks. Ühiseks nimetajaks sobib 90.

Alani osa suurenes $\frac{36}{90} - \frac{35}{90} = \frac{1}{90}$ võrra. Seega võitis tema 1200 dollarit.

Kui ühe osa suurus on 1200 dollarit, siis kogu rahasumma mängus oli

$$90 \cdot 1200 = 108\,000 \text{ dollarit.}$$

Alani osa suurus õhtu alguses oli $\frac{7}{18} \cdot 108\,000 = 42\,000$ dollarit.

Bernie osa suurus õhtu alguses oli $\frac{6}{18} \cdot 108\,000 = 36\,000$ dollarit.

Craigi osa suurus õhtu alguses oli $\frac{5}{18} \cdot 108\,000 = 30\,000$ dollarit.

Sarnane lahendus ülesandele on toodud Nrich (2023b) lehel.

5.4 *Vastus.* 35 aastat tagasi.

6.1 *Lahendus.* Erinevaid lahendusi on toodud Nrich (2023c) veebilehel ja töö autor on neid siin lahenduses kasutanud.

1) 1, 2, 2, 2, 3
   3, 4, 5, 5, 8
   …
2) Kas leiduvad viiest positiivsest täisarvust koosnevad komplektid nii, et
   a) mood < mediaan < keskmine   2, 2, 5, 10, 11
   b) mood < keskmine < mediaan   2, 2, 6, 7, 8
   c) keskmine < mood < mediaan   -
   d) keskmine < mediaan < mood   3, 4, 7, 8, 8
   e) mediaan < mood < keskmine   -
   f) mediaan < keskmine < mood   4, 5, 6, 10, 10
3) Iga tingimuse kohta ei saa leida seda rahuldavat viite arvu. Miks?
   c) Ei leidu viite sobivat arvu. Mediaan (kolmas arv jadas) peab olema suurem kui mood, mille määravad kaks esimest arvu jadas. Kaks suuremat arvu peale mediaani muudavad keskmise aga moodist suuremaks.
   e) Ei leidu sobivat viite arvu. Jada kolmas arv peab olema väiksem kui keskmine ja mood. Seega kaks arvu pärast mediaani peavad olema suuremad ja samad. Need kaks arvu on jadas suurimad, seega keskmine ei saa olla moodist suurem.
4) Näidata, et mõne eespool toodud tingimuse rahuldamiseks leiduvad neli sobivat arvu.
   a) mood < mediaan < keskmine   4, 4, 8, 12
5) Näidata, et kõigi eespool toodud tingimuste rahuldamiseks saab leida kuus sobivat arvu.
   a) mood < mediaan < keskmine   3, 3, 6, 8, 12, 16
   b) mood < keskmine < mediaan   1, 1, 10, 12, 14, 16
   c) keskmine < mood < mediaan   1, 100, 100, 101, 102, 103
   d) keskmine < mediaan < mood   3, 4, 5, 6, 6, 6
   e) mediaan < mood < keskmine   3, 4, 5, 7, 7, 34

f) mediaan < keskmine < mood 4, 5, 6, 7, 10, 10

6.2 *Lahendus.*

1) Proovimise teel alustades esimese numbri 1 välja jätmisega, saame allesjäänud arvude 2, 3, 4, 5, 6 keskmine 4 on täisarv. Proovida võib kõigi arvude välja jätmist.
2) Kui *n* on paarisarv, siis saab välja jätta arvud 1 ja *n* nii, et allesjäänud arvude keskmine on täisarv. Arvude 1 kuni *n* summa on $\frac{n}{2} \cdot (n+1)$.

   Kui arv 1 välja jäta, saame allesjäänud arvude keskmiseks:

$$\frac{\frac{n}{2}(n+1)-1}{n-1} = \frac{n^2+n-2}{2(n-1)} = \frac{(n+2)(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n+2}{2},$$

mis on täisarv.

   Kui arv *n* välja jäta, saame allesjäänud arvude keskmise:

$$\frac{\frac{n}{2}(n+1)-n}{n-1} = \frac{n^2+n-2n}{2(n-1)} = \frac{n(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n}{2}$$

on täisarv.

   Osutub, et ülejäänud nn keskmiste arvude välja jätmisel ei ole allesjäänud arvude keskmine täisarv.

3) Kui *n* on paaritu arv, siis saab välja jätta nn keskmise arvu $\frac{n+1}{2}$. Allesjäänud arvude keskmine:

$$\frac{\frac{n}{2}(n+1)-\frac{n+1}{2}}{n-1} = \frac{n^2+n-n-1}{2(n-1)} = \frac{(n+1)(n-1)}{2(n-1)} = \frac{n+1}{2}$$

on täisarv.

   Osutub, et ülejäänud arvude välja jätmisel ei ole allesjäänud arvude keskmine täisarv.

4) Saab lahendada näiteks oletamise ja testimise strateegiat kasutades.
   a) 3
   b) 12
   c) n =13, kustutati arv 9.
   d) n =51, kustutati arv 38.

7.1 *Lahendus 1.* Ülesande lahendamiseks on vaja teada, et rombi pindala võrdub diagonaalide poole korrutisega.

a) Ruut on samuti romb. Seega saame leida vaiba pindala on:

$$\frac{6 \cdot 6}{2} = 18 \text{ m}^2.$$

b) Esimese vaiba värvitud osa pindala on

$$\frac{6 \cdot 3}{2} = 9\ m^2.$$

Esimese vaiba maksumus on seega

$$100 + 9 \cdot 10 = 190 \text{ eurot.}$$

c) Ruudu üks diagonaal on jagatud kuueks võrdseks osaks ja ühe osa suurus on 1 cm. Teise vaiba värvitud osa pindala on

$$18 - \frac{6 \cdot 4}{2} + \frac{6 \cdot 2}{2} = 18 - 12 + 6 = 12\ (\text{m}^2).$$

Teise vaiba maksumus on seega

$$100 + 12 \cdot 10 = 220 \text{ eurot.}$$

d) Ruudu üks diagonaal on jagatud kaheksaks võrdseks oskaks ja ühe osa suurus on $6 : 8 = 0{,}75$ cm. Kolmanda vaiba värvitud osa pindala on

$$\frac{6 \cdot 6 \cdot 0{,}75}{2} - \frac{6 \cdot 4 \cdot 0{,}75}{2} + \frac{6 \cdot 2 \cdot 0{,}75}{2} = 13{,}5 - 9 + 4{,}5 = 9\ (\text{m}^2).$$

Kolmanda vaiba maksumus on seega

$$100 + 9 \cdot 10 = 190 \text{ eurot.}$$

e) Ruudu üks diagonaal on jagatud kümneks võrdseks oskaks ja ühe osa suurus on $6 : 10 = 0{,}6$ cm. Neljanda vaiba värvitud osa pindala on

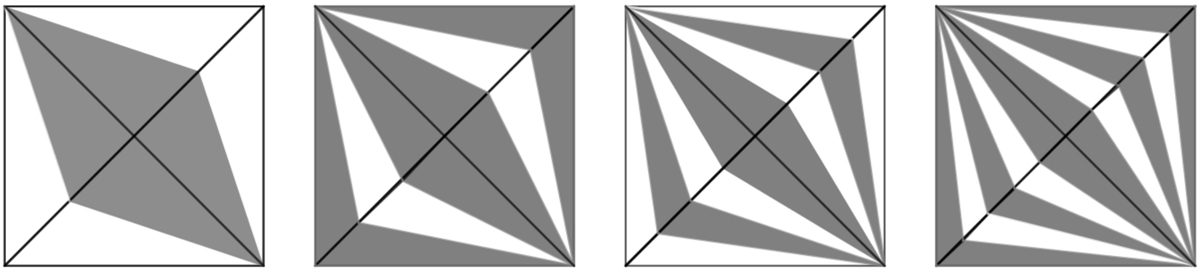
$$18 - \frac{6 \cdot 8 \cdot 0{,}6}{2} + \frac{6 \cdot 6 \cdot 0{,}6}{2} - \frac{6 \cdot 4 \cdot 0{,}6}{2} + \frac{6 \cdot 2 \cdot 0{,}6}{2} =$$

$$= 18 - 14{,}4 + 10{,}8 - 7{,}2 + 3{,}6 = 10{,}8\ (\text{m}^2).$$

Neljanda vaiba maksumus on seega

$$100 + 10{,}8 \cdot 10 = 208 \text{ eurot.}$$

Lahendus 2. Lahendame ülesande kolmnurkade abil. Kui joonistele lisada diagonaalid, siis saab ülesande lahendada ka teades, et mediaan jaotab kolmnurga kaheks pindvõrdseks osaks. Esimene vaip on jaotatud vastavalt kaheksaks, teine kaheteistkümneks, kolmas kuueteistkümneks ja neljas kahekümneks võrdseks osaks.



Joonis 6. Vaipade värvimise neli võimalust ja joonisele lisatud diagonaalid.

a) Ruut on jagatud diagonaalidega neljaks täisnurkseks kolmnurgaks, kus iga kolmnurga kõrgus on vastavalt 3 cm ja alus 3 cm. Ruudu pindala on

$$4 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2} = 4 \cdot 4{,}5 = 18\ (m^2).$$

b) Esimese vaiba värvitud osa pindala on pool ruudust

$$\frac{1}{2} \cdot 18 = 9\ m^2.$$

Esimese vaiba maksumus on seega

$$100 + 9 \cdot 10 = 190 \text{ eurot.}$$

c) Teises vaibast on värvitud 8 osa 12-st. Teise vaiba värvitud osa pindala on

$$\frac{8}{12} \cdot 18 = 12\ \mathrm{m}^2.$$

Teise vaiba maksumus on seega

$$100 + 12 \cdot 10 = 220 \text{ eurot.}$$

d) Kolmandast vaibast on värvitud 8 osa 16-st. Kolmanda vaiba värvitud osa pindala on

$$\frac{8}{16} \cdot 18 = 9\ \mathrm{m}^2.$$

Kolmanda vaiba maksumus on seega

$$100 + 9 \cdot 10 = 190 \text{ eurot.}$$

e) Neljandast vaibast on värvitud 12 osa 20-st. Neljanda vaiba värvitud osa pindala on

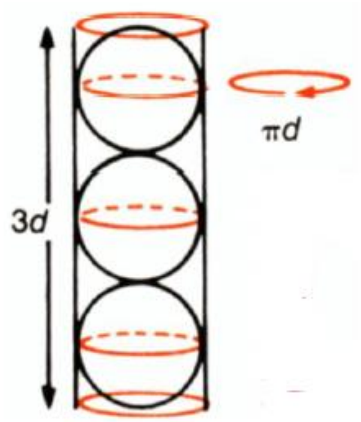
$$\frac{12}{20} \cdot 18 = 10{,}8\ \mathrm{m}^2.$$

Neljanda vaiba maksumus on seega

$$100 + 10{,}8 \cdot 10 = 208 \text{ eurot.}$$

7.2 *Vastus.* Korrapärane 10-nurk.

7.3 *Vastus.* Purgi ümbermõõt on suurem kui kõrgus, sest $\pi d > 3d$.



Joonis 7. Tennispallid torukujulises purgis (Phares *et al*., 1985).

Kasutatud materjalid

Nrich kodulehekülg (2023a). Vaadatud 19.03.2023. https://nrich.maths.org/13675

Nrich kodulehekülg (2023b). Vaadatud 04.03.2023. https://nrich.maths.org/718

Nrich kodulehekülg (2023c). Vaadatud 17.03.2023. https://nrich.maths.org/unequal

Nrich kodulehekülg (2023d). Vaadatud 18.03.2023. https://nrich.maths.org/10996

Phares, G. Krulik, S. Rudnick, J (1985). Problem solving: tips for teachers. *The Arithmetic Teacher*, 33(3), 34-35.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Evelin Kukk,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Probleemülesannete lahendamine kolmandas kooliastmes, mille juhendaja on Hannes Jukk, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;

2. annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni;

3. olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile;

4. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Tartus, 15.05.2023

/allkirjastatud digitaalselt/