



**МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ  
ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ  
ФИЗИКИ В ВУЗЕ**

**В помощь преподавателю XIII**

**1988**

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

---

МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ  
ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ  
ФИЗИКИ В ВУЗЕ

В помощь преподавателю XIII

---

ТАРТУ 1988

Утверждено на заседании совета физико-химического факультета ТГУ 28 октября 1987 года.

Ответственный редактор Ю.Я. Лембра.

От редактора

В серии "В помощь преподавателю", издаваемой Тартуским университетом с 1976 года, вышло девять методических сборников по физике в следующей хронологической последовательности номеров: IУ (1978), У (1980), УI (1982), УII (1982), УIII (1983), IX (1984), X (1985), XI (1986) и XII (1987).

KUSTUTATUD

*Anh.*  
Tartu Ülikooli  
füüsikakogu

9864

## КАК ПОВЫСИТЬ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ФИЗИЧЕСКОГО ПРАКТИКУМА?

Х.И. Воолайд

Преподаватели физики единогласно утверждают, что эффективность физического практикума (ФП) следует повысить. Для этой цели предлагается множество методов и приемов (см., напр. [1, 2, 3]): внедрение современных методов исследования, фронтальный метод, использование телевидения, ЭВМ и тестов, комплексные работы, задачи поискового характера, введение элементов исследовательской работы и т.д.

Все эти методы можно реализовать в принципе двумя способами: репродуктивно или продуктивно.\* Не умаляя значимости репродуктивной деятельности в учебном процессе, необходимо подчеркнуть особую роль продуктивной деятельности, в значительной мере повышающей эффективность ФП ([2, стр. 56], [3, стр. 68-69, 70-71, 79]). Но, как показывает анализ некоторых сборников лабораторных работ ФП [4-8], преобладают репродуктивные задачи. Это приводит студента к общеизвестному подходу к ФП: не задумываясь, сделай все точно по руководству, рассчитай результаты на ЭВМ и представь эти результаты преподавателю и тогда, когда они отличаются от истинных даже на несколько порядков величины. Можно ли здесь обвинить студента? Конечно, можно, но безосновательно, поскольку он поступает в соответствии с руководством, которое не рассчитано на принятие самостоятельного решения даже тогда, когда требования руководства явно не совпадают с реальной обстановкой.

Мы в большинстве случаев не учим студентов видеть проблемы, не говоря о том, как найти их решения. Такой подход уменьшает познавательный интерес и мотивацию деятельности

---

\* Репродуктивным называется действие по заданному алгоритму; при продуктивном действии имеющиеся знания приходится использовать в новых ситуациях, создавать алгоритмы действия (см., напр. [1]).

студентов, что свидетельствует о низкой эффективности учебного процесса [9].

В чем выход? Часто предлагаемый выход состоит в том, что пишутся еще более детализированные руководства, чтобы дать студенту меньше возможности ошибиться. Тем самым, самостоятельному мышлению отводится еще меньшая роль. Действовать же необходимо как раз наоборот: поставить перед студентом больше проблем, научить его видеть проблемы и находить пути их решения.

Здесь приходится учитывать то обстоятельство, что понятия репродуктивного и продуктивного носят в некоторой степени относительный характер. Продуктивное для одного может быть репродуктивным для другого, и наоборот. Поэтому задачи должны быть различными.

Далее приведем результаты анализа некоторых руководств ФП. Задания были разбиты на репродуктивные задания (РЗ), полупродуктивные задания (ПЗ) и продуктивные задания (П). Репродуктивными считались задания, в которых были заданы точные алгоритмы действий (рассчитать искомую величину по данной формуле, регулировать показания приборов на такие величины и т.д.). Полупродуктивными считались задания, в которых давались советы для решения (выбрать для графика такие-то оси, при регулировании уделить внимание таким-то обстоятельствам, не уточняя конкретных значений). Продуктивными считались задания, не содержавшие советов.

В таблице приведено число РЗ, ПЗ и П в процентах в различных руководствах. Проценты эти не абсолютны, поскольку при оценке немаловажен субъективный фактор, что, однако, не препятствует установлению основных тенденций. Из данных таблицы обращает на себя внимание, что при выполнении работ большинство (в среднем около 50%) составляют чисто репродуктивные задачи и гораздо меньше (около 15%) – продуктивные. Дополнительные же задачи и вопросы в большинстве своем (55%) продуктивны, репродуктивных меньше (40%). Конечно, автора можно критиковать за выбор образцов: почему их так мало и почему именно эти? Но каждому, кому приходилось заниматься ФП, ясно, что эти образцы – скорее правила, чем исключения.

Таблица

| № п.п. | Тип практикума                  | Задачи работы |     |    | Дополнительные задачи и вопросы |     |    |
|--------|---------------------------------|---------------|-----|----|---------------------------------|-----|----|
|        |                                 | РПЗ           | ППЗ | ПЗ | РПЗ                             | ППЗ | ПЗ |
| 1      | По механике, МГУ [7]            | 73            | 21  | 6  | -                               | -   | -  |
| 2      | По молекулярной физике, ТГУ [5] | 67            | 24  | 9  | 30                              | -   | 70 |
| 3      | По электричеству, ТГУ [6]       | 45            | 36  | 19 | 35                              | 19  | 46 |
| 4      | По электричеству, ВГУ [8]       | 47            | 26  | 27 | 47                              | 6   | 47 |
| 5      | По оптике, ТГУ [4]              | 34            | 60  | 6  | 39                              | -   | 61 |

Конечно, весь процесс обучения нельзя основывать на продуктивном действии, но такое распределение РПЗ и ПЗ неправильно, ибо выходит, будто студентов обучают репродуктивно, а требуют от них продуктивных знаний. Теоретически это можно обосновать: в процессе проведения работы репродуктивный метод закрепляет основные понятия, после чего студент в состоянии справиться с продуктивными заданиями и вопросами. Практика же свидетельствует об обратном: таким способом нельзя развивать продуктивное мышление. Для повышения эффективности ФП студентам целесообразно предлагать больше продуктивных задач.

Исходя из вышеприведенных соображений на кафедре общей физики ТГУ "на пробу" проблемно было составлено руководство по проведению лабораторной работы "Изучение маятников". С этим руководством студенты I курса педагогического потока физического отделения работали наряду с традиционными руководствами. Опрос студентов показал, что они хорошо принимали такой стиль и отлично усвоили материал.

В порядке обмена опытом вкратце представим сущность данного руководства.

В начале работы приводятся определения всех используемых понятий (математический маятник, его приведенная длина, момент инерции точечной массы и регулярных тел, теорема Штейнера). Далее обобщенно описывается метод линеаризации (выбор координат для получения линейной зависимости, которая позволяет легко определить искомые величины).<sup>\*</sup> Проблемное представление задач позволяло это сделать при небольшом объеме (5 стр.) руководства.

Все студенты получали следующие задания: изучить, зависит ли период колебания подвешенного на нити шарика от массы шарика, амплитуды колебаний, длины нити, упругости нити, траектории движения шарика; при обнаружении зависимости определить математическую формулу, которая описывает эту зависимость, и сравнить полученные результаты с теоретическими (давались ссылки на литературу). В этой части работы был дан ряд методических указаний для проведения экспериментов.

Остальные задачи были выданы студентам в зависимости от их способностей и интересов. Это следующие задачи:

1. Вывести формулу для периода математического маятника в зависимости от длины последнего при малых амплитудах.

2. Определить на основе полученных результатов значение ускорения свободного падения, используя формулу математического маятника.

3. Оценить методическую ошибку при использовании формулы математического маятника для подвешенного на нить шарика.

4. Определить момент инерции физического маятника (подвешенного за один конец стержня), используя формулу приведенной длины. Последняя определялась при помощи модели математического маятника. Сравнить полученный результат с теоретически вычисленным.

5. Вывести связь между длинами математического маятника и подвешенного за один конец стержня, если периоды их колебаний одинаковы. Сравнить с экспериментальными данными.

6. Определить экспериментально периоды колебаний математического маятника и физического маятника (тот самый стержень). Сравнить полученные данные с выведенными теоретически.

---

<sup>\*</sup> В дальнейшем эта часть приводится во вступительном практикуме.

При допуске к работе основное внимание уделялось плану экспериментов: какие измерения провести, в каком порядке, на что стоит обращать особое внимание, как гарантировать достаточную точность, как вывести теоретические формулы и т.д.

#### Л и т е р а т у р а

1. Махмутов М.И. Проблема познавательного интереса в педагогике. - М.; 1977.
2. Тезисы докладов УШ конференции преподавателей физики вузов Прибалтийской зоны СССР. - Вильнюс, 1983.
3. Тезисы докладов IX зональной научно-методической конференции преподавателей общей физики вузов Белоруссии, республик Прибалтики и Калининградской области РСФСР. - Минск, 1986.
4. Практикум по оптике IУ / Под ред. Х.Й. Воолайда. - Тарту, 1983.
5. Руководства к лабораторным работам по молекулярной физике / Под ред. Я.И. Сальма. - Тарту, 1981.
6. Практикум по электричеству / Под ред. К.Ф. Куду. - Тарту, 1988.
7. Физический практикум. Механика и молекулярная физика / Под ред. В.И. Ивероновой. - М., 1967.
8. Физический практикум / Под ред. Г.С.Кембровского. - Минск, 1986.
9. Щукина Г.И. Проблема познавательного интереса в педагогике. - М., 1971.

## ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ В ИНСТИТУТЕ ФИЗИКИ АН ЭССР

В.Х. Корровитс

На базовой кафедре физики твердого тела Института физики АН ЭССР подготовка физиков по профилю кафедры начинается на шестом семестре обучения. Студенты получают необходимые теоретические знания по физике твердого тела, лазерной спектроскопии и другим специальным предметам. Освоение специальности происходит преимущественно при участии в научных исследованиях лабораторий института. На седьмом семестре, до выполнения курсовой и дипломной работ, студенты проходят спецпрактикум, цель которого — ознакомление с основными методами и аппаратурой исследования твердого тела, используемыми в лабораториях Института физики АН Эстонской ССР. В отличие от других физических практикумов, проводимых в Тартуском государственном университете, данный спецпрактикум проводится на действующих установках института под непосредственным руководством научных сотрудников, проводящих на этих же установках научные измерения. Такая организация практикума позволяет использовать для проведения задач самую современную экспериментальную аппаратуру физики твердого тела, поскольку таковой является основная часть лабораторных установок Института физики. Выделять же современную экспериментальную аппаратуру только для нужд практикума не представляется целесообразным, так как ее загруженность в таком случае будет несравненно меньше, чем при использовании в лабораториях института. Десятилетний опыт работы спецпрактикума позволяет сделать вывод о целесообразности такой организации использования научной аппаратуры для нужд практикума.

Некоторые задачи практикума с годами заменяются новыми, но неизменной остается его общая направленность. Основное

внимание в практикуме уделяется освоению лазеров и методов лазерной спектроскопии (однако по одной задаче включены задачи на измерение магнитной индукции в сильных импульсных полях, спектра ЭПР парамагнитного центра, критической температуры чистых сверхпроводников и сверхпроводящих сплавов и на изучение электронно-оптического преобразователя). Выполнение задачи начинается с изучения руководства по ее выполнению и дополнительной литературы. После освоения данных материалов руководитель задачи проверяет знания студента.

Если материал освоен удовлетворительно, студент допускается к проведению экспериментальной части задачи. В зависимости от задачи и учитывая в том числе правила ее безопасного проведения, экспериментальную часть выполняют вдвоем либо в одиночку. После завершения экспериментальной части задачи полученные результаты обрабатываются и задача сдается руководителю. После выполнения всех предусмотренных в плане практикума задач руководителем практикума проводится коллоквиум, в ходе которого студенты делают короткий доклад по одной из выполненных задач. Вопросы задаются докладчику как руководителем, так и студентами. Если доклад удовлетворительный, практикум считается завершенным и студент получает зачет.

В 1986/87 учебном году в лабораторный практикум кафедры физики твердого тела входили следующие задачи:

I. Спектральный состав излучения гелий-неонового лазера.

Целью работы является получение представления о спектральном составе излучения газового лазера и методах его изучения, измерение спектрального состава излучения многочастотного лазера, ознакомление с устройством одночастотного лазера и измерение спектрального состава его излучения. В работе изучается спектральное распределение излучения многочастотного лазера ЛГ-38 или ЛГ-52-3 и одночастотного лазера ЛГ-149. Для измерения спектра лазеров используется спектроанализатор Trorol 240-2В, представляющий собой конфокальный интерферометр Фабри-Перо с фотодетектором. Спектроанализатор управляется при помощи блока управ-

ления  $\text{Trapel 25I}$ . В процессе выполнения практикума для каждого лазера следует измерить спектр генерации и объяснить его вид, определить дрейф линии генерации, определить ширину линии генерации с учетом аппаратной функции спектроанализатора и вычислить относительную стабильность линии генерации.

## 2. Метод фотовыжигания спектральных провалов

Цель работы - ознакомление с методом фотовыжигания спектральных провалов. Исследуемой системой в задаче является пленка из поливинилбутирала, активированного молекулами хлорина. Для проведения эксперимента используются гелий-неоновый лазер, монохроматор МДР-23, регистрирующая система (ФЭУ, усилитель, самописец), гелиевый криостат. Необходимо снять временные зависимости пропускания луча гелий-неонового лазера при трех разных интенсивностях лазерного луча, определить скорости и порядок процесса выжигания, а также оценить его квантовый выход. Затем следует снять спектр пропускания образца до выжигания при линейной и насыщающей выжигающей дозах и определить колебательные частоты в возбужденном электронном состоянии и величину фотохромного сдвига.

## 3. Метод комбинационного рассеяния

В задачу входит ознакомление с методом комбинационного рассеяния, его возможностями в сравнении с другими близкими оптическими методами исследования вещества (например, с методом люминесценции). Требуется освоить комплекс установки для измерения спектров комбинационного рассеяния, в который входят аргоновый лазер IIA-120, двойной монохроматор SPEx 1402, ФЭУ и многоканальный анализатор LP 4900.

## 4. Исследование характеристик электронно-оптического преобразователя (ЭОП)

Благодаря высокому временному разрешению ЭОП позволяет регистрировать сигналы продолжительностью порядка  $10^{-13}$  с. Цель задачи - ознакомление с устройствами и с принципами

работы ЭОП и определение некоторых его характеристик. При работе особое внимание обращается на технику безопасности вследствие высокого (около 15 кВ) рабочего напряжения прибора, необходима тщательная проверка заземлений и соединений кабелей. ЭОП обладает очень высокой светочувствительностью, поэтому при освещении катода ЭОП требуется большая осторожность.

#### 5. Изменение характеристик диодных лазеров

Целью работы является ознакомление с методами исследования диодных лазеров; снятие ваттамперной характеристики диодного лазера; определение порога генерации, квантового выхода стимулированного излучения, времени жизни носителей заряда, инжектированных в активную область, и измерение задержек генерации диодного лазера. Излучается диодный лазер с двойной гетероструктурой  $\text{AlGaAsSb}/\text{GaSb}$  и активной областью из  $\text{GaSb}$ .

#### 6. Определение критической температуры сверхпроводников

В задаче предусмотрено измерение температурной зависимости электрического сопротивления чистых сверхпроводников и сверхпроводящих сплавов, особенно в области сверхпроводящего перехода, ознакомление с некоторыми методами измерения температуры (газовый термометр, конденсационный термометр, угольный термометр сопротивления) и приобретение навыков работы с жидким гелием.

Сопротивление измеряется потенциометрически по четырехпроводниковой схеме. Работа с жидкими хладагентами требует освоения правил техники безопасности, что также входит в предлагаемую задачу.

#### 7. Измерение магнитной индукции в сильном импульсном магнитном поле

В задаче при помощи эффекта Фарадея определяется индукция магнитного поля в импульсе с максимальным значением 20 Т, который создается при разрядке конденсаторной батареи емкостью 3000 мкФ, заряженной до 3 кВ в соленоиде с повышен-

ной механической прочностью. В качестве источника света используется гелий-неоновый лазер ЛГ-56. По углу поворота плоскости поляризации лазерного луча, который регистрируется осциллографом с памятью типа СВ-13, определяется величина магнитной индукции.

#### 8. Измерение спектра электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) парамагнитного центра

Цель работы - ознакомление с методом ЭПР и его информативными возможностями, измерение спектра ЭПР  $V_{O_2}$ -центра в  $MgO$ . В измерительную установку входят: ЭПР спектрометр РЭ 1301, измеритель магнитной индукции ШИ-1, частотомер ЧЗ-36. Измерения проводятся при температуре жидкого азота. В задачу входит также интерпретация измеренного спектра ЭПР.

Спецпрактикум кафедры физики твердого тела с данным набором задач позволяет приобрести навыки, необходимые для выполнения курсовой и дипломной работ, а также для самостоятельной научной работы в лабораториях института.

## ПРОГРАММИРУЕМЫЕ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЫ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ

Э.Н. Бихеле

Для обработки экспериментальных данных в рамках физического практикума на кафедре физики ЭСХА в течение ряда лет используются программируемые микрокалькуляторы (ПК) "Электроника БЗ-34" [1].

Мы не ставили своей задачей обучение студентов программированию на ПК. У нас попросту нет на это времени. Для желающих в настоящее время существует обширная литература [2, 3, 4, 5, 6]. Кроме того, эти вопросы в доступной форме освещены в популярных журналах "Наука и жизнь", "Химия и жизнь" и "Техника молодежи".

Наша цель - познакомить студентов с возможностями ПК, научить их пользоваться готовыми программами, убедить на практике в преимуществах использования средств автоматизации расчетов, приучить к абсолютно точному выполнению инструкции расчета.

Мы считаем, что наиболее целесообразно использовать ПК в тех работах, где требуется многократно повторять расчеты по одним и тем же формулам (пусть даже не очень сложным), так как здесь особенно наглядно проявляются преимущества использования программ.

Очень удобно выполнять на ПК статистическую обработку экспериментальных данных. В литературе имеется достаточное количество разнообразных прикладных программ по этим вопросам, которые могут быть с успехом использованы в физическом практикуме [2, 3, 5, 6].

Однако конкретные лабораторные работы требуют составления специальных программ. Ниже приводятся программы для некоторых широко известных лабораторных работ общего физического практикума.

Текст программы записан в трех колонках. В первой (адрес) указан номер ячейки памяти, куда записывается очередной оператор. Во второй колонке (оператор) обозначены клавиши, которые надо нажимать при вводе программы, исходя из их смыслового значения. В третьей колонке записаны коды операций, по которым проверяется правильность ввода программы в ПМК. Прилагаемая к программе инструкция поясняет порядок работы с программой, а контрольный пример позволяет быстро проверить правильность ее работы.

ПРОГРАММА I. Определение отношения удельных теплоемкостей воздуха методом адиабатического расширения

Расчетные формулы:

$$\delta = \frac{h_1}{h_1 - h_2} ;$$

$$h_1 = h_{1,\lambda} - h_{1,\mu\mu}$$

$$h_2 = h_{2,\lambda} - h_{2,\mu\mu}$$

$$\tilde{\delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i ;$$

$$S_{\tilde{\delta}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i^2 - \tilde{\delta}^2 \right)}$$

$$\Delta \delta = t_{n,p} \cdot S_{\tilde{\delta}} ;$$

$$E_{\delta} = \frac{\Delta \delta}{\tilde{\delta}} \cdot 100 \%$$

где  $\delta = c_p / c_v$ ,  $h_{1,\lambda}$  и  $h_{1,\mu\mu}$  - высота уровня жидкости, соответственно, в левом и правом колена манометра до расширения,  $h_{2,\lambda}$  и  $h_{2,\mu\mu}$  - после расширения,  $n$  - число опытов,  $t_{n,p}$  - коэффициент Стюдента.

Текст программы

| Адрес | Оператор | Код | Адрес | Оператор | Код | Адрес | Оператор | Код |
|-------|----------|-----|-------|----------|-----|-------|----------|-----|
| 1     | 2        | 3   | 4     | 5        | 6   | 7     | 8        | 9   |
| 00    | К НОП    | 54  | 19    | +        | 10  | 38    | ИП С     | 6Г  |
| 01    | -        | 11  | 20    | П В      | 4Г  | 39    | +        | 13  |
| 02    | П 7      | 47  | 21    | Г        | 0Г  | 40    | ИП 4     | 64  |

| 1  | 2                | 3  | 4  | 5                | 6  | 7  | 8    | 9  |
|----|------------------|----|----|------------------|----|----|------|----|
| 03 | F ○              | 25 | 22 | ИП С             | 6I | 4I | -    | II |
| 04 | -                | II | 23 | +                | IO | 42 | ИП 2 | 62 |
| 05 | П 8              | 48 | 24 | П С              | 4Г | 43 | ÷    | 13 |
| 06 | ИП 7             | 67 | 25 | С/П              | 50 | 44 | F √  | 2I |
| 07 | -                | II | 26 | В/0              | 52 | 45 | С/П  | 50 |
| 08 | F I/x            | 23 | 27 | I                | 0I | 46 | ИП Д | 6Г |
| 09 | ИП 8             | 68 | 28 | -                | II | 47 | x    | I2 |
| 10 | x                | 12 | 29 | П 2              | 42 | 48 | С/П  | 50 |
| 11 | П 9              | 49 | 30 | ИП А             | 6- | 49 | ВП   | 0I |
| 12 | С/П              | 50 | 3I | ИП С             | 6Г | 50 | 2    | 02 |
| 13 | ИП А             | 6- | 32 | ÷                | I3 | 5I | ИП I | 6I |
| 14 | +                | IO | 33 | П I              | 4I | 52 | ÷    | 13 |
| 15 | П А              | 4- | 34 | С/П              | 50 | 53 | С/П  | 50 |
| 16 | ИП 9             | 69 | 35 | F x <sup>2</sup> | 22 | 54 | В/0  | 52 |
| 17 | F x <sup>2</sup> | 22 | 36 | П 4              | 44 |    |      |    |
| 18 | ИП В             | 6L | 37 | ИП В             | 6L |    |      |    |

### И н с т р у к ц и я

1. Включить МК и перейти на режим программирования F ПРТ. Ввести текст программы, проверяя адрес и код каждой операции.

2. Перейти на режим автоматического счета F АВТ В/0.

3. Ввести значение коэффициента Стюдента в регистр  $D(t_{n,p} \text{ ПД})$ .

4. Вводить поочередно значения высот уровней жидкости в левом и правом колене манометра, набирая их на клавиатуре с учетом знака и нажимая клавишу  $\uparrow$ . Ввод отрицательных чисел производится с помощью клавиши  $/-$ . Например, число -20 вводится так: 20  $/-$   $\uparrow$ .  $h_{2,n} \uparrow h_{2,np} \uparrow h_{2,n} \uparrow h_{2,np}$  C/П ( $\delta_i$ ) C/П ( $i$ )

В скобках после C/П указаны символы величин, значения которых высвечиваются на индикаторе МК при его остановке. Таким образом, после первого нажатия на C/П высвечивается очередное значение  $\delta_i$ , после второго - порядковый номер опыта  $i$ .

5. После записи последнего значения  $\delta_{i_2}$  и его порядково-

го номера  $i_2$  считают остальные искомые величины  
 БП 27 С/П ( $\tilde{\gamma}$ ) С/П ( $S_{\tilde{\gamma}}$ ) С/П ( $\Delta \delta$ ) С/П ( $E_{\tilde{\gamma}}$ ).

6. Для повторного использования программы очистить рабочие регистры С<sub>х</sub> П А П В П С, заменить значение  $t_{2,p}$  и идти к п. 4.

7. Контрольный пример.  $t_{2,p} = 2$

| №<br>п.п. | $h_{1,\lambda}$ | $h_{2,1/p}$ | $h_{2,\lambda}$ | $h_{2,1/p}$ | $\delta_i$ |
|-----------|-----------------|-------------|-----------------|-------------|------------|
| 1         | 20              | -10         | 2               | -1          | I, III     |
| 2         | 40              | -10         | 2               | -1          | I, 064     |

$$S_{\tilde{\gamma}} = 2,36 \cdot 10^{-2}$$

$$\Delta \delta = 4,73 \cdot 10^{-2}$$

$$\tilde{\gamma} = 1,087 \quad E_{\tilde{\gamma}} = 4,3$$

ПРОГРАММА 2. Определение сопротивления с помощью мостика Уитстона

Расчетные формулы:

$$R_x = R \frac{\ell_1}{\ell_2}; \quad \tilde{R}_x = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 R_{x,i};$$

$$\Delta R_x = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 |R_{x,i} - \tilde{R}_x|; \quad E_{R_x} = \frac{\Delta R_x}{\tilde{R}_x} \cdot 100\%;$$

где  $\ell_1$  и  $\ell_2$  - длины плеч реохорда,  $R$  - известное и  $R_x$  - неизвестное сопротивление.

Текст программы

| Адрес | Оператор | Код | Адрес | Оператор | Код | Адрес | Оператор | Код |
|-------|----------|-----|-------|----------|-----|-------|----------|-----|
| 00    | 3        | 03  | 16    | П I      | 4I  | 32    | ИП 2     | 62  |
| 01    | П 0      | 40  | 17    | К ИП 6   | Г6  | 33    | +        | 10  |
| 02    | П 3      | 43  | 18    | С/П      | 50  | 34    | П 2      | 42  |
| 03    | 0        | 00  | 19    | F L 0    | 5Г  | 35    | F L 3    | 5-  |
| 04    | П I      | 4I  | 20    | II       | II  | 36    | 26       | 26  |
| 05    | П 2      | 42  | 21    | ИП I     | 6I  | 37    | 3        | 03  |
| 06    | 6        | 06  | 22    | 3        | 03  | 38    | +        | 13  |
| 07    | П 4      | 44  | 23    | ÷        | I3  | 39    | С/П      | 50  |
| 08    | П 5      | 45  | 24    | П С      | 4Г  | 40    | ВП       | 0Г  |
| 09    | П 6      | 46  | 25    | С/П      | 50  | 41    | 2        | 02  |
| 10    | С/П      | 50  | 26    | К ИП 5   | Г5  | 42    | ИП С     | 6Г  |
| 11    | ÷        | I3  | 27    | ИП С     | 6Г  | 43    | +        | I3  |
| 12    | x        | I2  | 28    | -        | II  | 44    | С/П      | 50  |
| 13    | К П 4    | 14  | 29    | F x < 0  | 5I  | 45    | БП       | 5I  |
| 14    | ИП I     | 6I  | 30    | 32       | 32  | 46    | 00       | 00  |
| 15    | +        | 10  | 31    | /-/      | 0L  |       |          |     |

## Инструкция

1. Установить на МК режим программирования F ПЛТ и ввести текст программы. После этого перейти на режим автоматического счета F АВТ В/С.

2. Нажать на клавишу С/П. На индикаторе появится 6.

3. Для получения очередного значения  $R_x$  набрать на клавиатуре значения начальных данных и нажимать клавиши  $\uparrow$  и С/П в указанном порядке

$$R \uparrow \ell_1 \uparrow \ell_2 \quad \text{С/П}(R_x)$$

4. После получения третьего значения искомого сопротивления находят его среднее, а также абсолютную и относительную погрешность

$$\text{С/П}(\bar{R}_x) \quad \text{С/П}(\Delta R_x) \quad \text{С/П}(E_{R_x})$$

5. Для расчета нового сопротивления перейти к п. 2.

6. Контрольный пример.

| $R$ | $\ell_1$ | $\ell_2$ | $R_x$ |
|-----|----------|----------|-------|
| 10  | 5        | 5        | 10,00 |
| 5   | 7        | 3        | 11,67 |
| 20  | 3        | 7        | 8,57  |

$$\begin{aligned} \bar{R}_x &= 10,08 \\ \Delta R_x &= 1,06 \\ E_{R_x} &= 10,50 \end{aligned}$$

ПРОГРАММА 3. Определение характеристик источника тока  
Расчетные формулы:

$$\frac{R}{z} = \frac{U}{\mathcal{E} - U} \quad ; \quad \Delta\left(\frac{R}{z}\right) = E_{\mathcal{E}} \cdot \frac{R}{z} \quad ; \quad E_{\frac{R}{z}} = E_U + E_{\mathcal{E}-U} \quad ;$$

$$P_i = J \cdot U \quad ; \quad \Delta P_i = E_{P_i} \cdot P_i \quad ; \quad E_{P_i} = E_J + E_U \quad ;$$

$$\eta = \frac{U}{\mathcal{E}} \quad ; \quad \Delta\eta = E_{\eta} \cdot \eta \quad ; \quad E_{\eta} = E_U + E_{\mathcal{E}} \quad ;$$

где  $R$  - внешнее и  $z$  - внутреннее сопротивление цепи,  $U$  - напряжение,  $\mathcal{E}$  - эдс источника,  $J$  - сила тока и  $\eta$  - коэффициент полезного действия источника.

Текст программы

| Адрес | Оператор        | Код | Адрес | Оператор | Код | Адрес | Оператор | Код |
|-------|-----------------|-----|-------|----------|-----|-------|----------|-----|
| 00    | П I             | 4I  | 2I    | П 9      | 49  | 42    | С/П      | 50  |
| 01    | Р $\odot$       | 25  | 22    | ИП В     | 6L  | 43    | ИП 2     | 62  |
| 02    | П 2             | 42  | 23    | ИП С     | 6Г  | 44    | ИП I     | 6I  |
| 03    | Р $\odot$       | 25  | 24    | +        | 10  | 45    | ÷        | I3  |
| 04    | П 3             | 43  | 25    | ИП 5     | 65  | 46    | ИП 0     | 60  |
| 05    | ИП А            | 6-  | 26    | ÷        | 13  | 47    | х        | I2  |
| 06    | $\overline{XV}$ | 14  | 27    | +        | 10  | 48    | С/П      | 50  |
| 07    | ÷               | 13  | 28    | х        | 12  | 49    | ИП С     | 6Г  |
| 08    | П 4             | 44  | 29    | С/П      | 50  | 50    | ИП I     | 6I  |
| 09    | ИП I            | 6I  | 30    | ИП 3     | 63  | 51    | ÷        | I3  |
| 10    | ИП 2            | 62  | 31    | ИП 2     | 62  | 52    | ИП 9     | 69  |
| 11    | -               | II  | 32    | х        | I2  | 53    | +        | I0  |
| 12    | П 5             | 45  | 33    | С/П      | 50  | 54    | х        | I2  |
| 13    | ИП 2            | 62  | 34    | ИП 9     | 69  | 55    | С/П      | 50  |
| 14    | $\overline{XV}$ | 14  | 35    | ИП 4     | 64  | 56    | Р Вх     | 0   |
| 15    | +               | 13  | 36    | +        | 10  | 57    | ИП 0     | 60  |
| 16    | С/П             | 50  | 37    | х        | I2  | 58    | х        | I2  |
| 17    | П 6             | 46  | 38    | С/П      | 50  | 59    | С/П      | 50  |
| 18    | ИП В            | 6L  | 39    | Р Вх     | 0   | 60    | ВП       | 5I  |
| 19    | ИП 2            | 62  | 40    | ИП 0     | 60  | 6I    | 00       | 00  |
| 20    | ÷               | I3  | 4I    | х        | I2  |       |          |     |

Инструкция

1. Установить МК на режим программирования Р ПРГ и ввести текст программы. Перейти на режим автоматической работы Р АВТ В/0.

2. Рассчитать по классу точности измерительных приборов их погрешности и ввести их в рабочие регистры  
( $\Delta J$ ) П А ( $\Delta U$ ) П В ( $\Delta \varepsilon$ ) П С 100 П 0

3. Для каждого измерения вводить начальные данные, набирая их значения на клавиатуре и нажимая клавиши  $\uparrow$  и С/П в указанном порядке

$\sigma \uparrow U \uparrow \varepsilon$  С/П ( $\frac{\Delta}{\varepsilon}$ ) С/П ( $\frac{\Delta}{\varepsilon}$ ) С/П ( $P_1$ ) С/П ( $\sigma P_1$ ) С/П ( $E_{P_1}$ ) С/П ( $\gamma$ ) С/П ( $\Delta \gamma$ ) С/П ( $E_\gamma$ ). В скобках после С/П указаны символы вели-

чин, значения которых высвечиваются на индикаторе после очередной остановки МК. Полученные данные заносят в таблицу и продолжают расчеты с новыми значениями  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{E}$ .

4. Если результаты очередного счета кажутся нереальными (это может быть, например, если предыдущий ряд не был досчитан до конца), следует нажать клавиши  $S_x \uparrow \uparrow \uparrow V/O$  и ввести заново начальные данные этого ряда согласно п. 3.

5. Если в процессе измерений изменяли пределы измерений приборов, то в соответствующие регистры следует ввести их новые погрешности и идти к п. 3.

6. Контрольный пример:

0,1 П А 0,1 П В 0,2 П С 100 П О

| № | $\mathcal{J}$ | $\mathcal{U}$ | $\mathcal{E}$ | $R/2$ | $\Delta(\frac{R}{2})$ | $P_i$ | $\Delta P_i$ | $E_{P_i}, \%$ | $\eta, \%$ | $\Delta \eta$ | $E_{\eta}, \%$ |
|---|---------------|---------------|---------------|-------|-----------------------|-------|--------------|---------------|------------|---------------|----------------|
| 1 | 1             | 3             | 5             | 1,5   | 0,28                  | 3,0   | 0,4          | 13,4          | 60         | 4,4           | 7,4            |
| 2 | 1             | 2,5           | 5             | 1     | 0,16                  | 2,5   | 0,35         | 14            | 50         | 4             | 8              |

Примечание: Программа не работает, если  $\mathcal{J} = 0$  или  $\mathcal{U} = \mathcal{E}$ .

Если результат контрольного примера не совпадает с тем, который приведен в инструкции, или на индикаторе высвечивается символ ЕТСГ, то либо неправильно введены начальные данные, либо при вводе программы допущены ошибки. В первом случае с помощью клавиши ИП надо проверить содержимое регистров оперативной памяти ПМК, куда вводились начальные данные, во втором - нажать клавиши В/О F ПРГ и с помощью клавиши ШП проверить адреса и коды команд. При обнаружении ошибки заменить ошибочные операторы правильными.

Спыт показывает, что несмотря на краткость инструкции студенты довольно быстро привыкают к пользованию программами.

Приведенные здесь программы можно использовать и для ПМК "Электроника МК-54" и "Электроника МК-56". Правда, они имеют иное обозначение некоторых клавиш (например,  $V \leftarrow$ ,  $x \rightarrow$  П,  $P \rightarrow x$  вместо  $\uparrow$ ,  $\downarrow$ , П, ИП и др.), но об их соответствии нетрудно догадаться [5]. То же можно сказать и о более совершенных ПМК - "Электроника МК-61" и "Электроника МК-52", обладающих несколько большими возможностями: дополнительными ма-

тематическими операциями, 105-строчным программным регистром, а МК-52 - еще и запоминающим устройством, позволяющим сохранять введенные программы на длительный срок. Тем не менее, программы, составленные для БЗ-34, можно использовать и для них.

#### Л и т е р а т у р а

1. Бихеле З.Н., Росс В.А. Использование программируемых микрокалькуляторов в физическом практикуме // Методика преподавания физики в вузе. В помощь преподавателю IX. - Тарту, 1984.
2. Астанин Л.Ю., Дорский Ю.Д., Костылев А.А. Применение программируемых микрокалькуляторов для инженерных и научных расчетов. - Л., 1986.
3. Дьяконов В.П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. - М., 1985.
4. Пухначев Ю.В., Данилов И.Д. Микрокалькуляторы для всех. - М., 1986.
5. Ристхейн Э. 100-строчные программируемые микрокалькуляторы. Начала программирования. - Таллин, 1987.
6. Славин Г. Программирование на программируемых микрокалькуляторах типа "Электроника БЗ-34". - Таллин, 1984.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ  
ПРИ ПРОВЕДЕНИИ СТУДЕНЧЕСКИХ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ В ТПедИ  
ПО ФИЗИЧЕСКИМ ПРЕДМЕТАМ

Э.Э.-А. Мартинсон

В течение последних 10-15 лет студентам стали доступны четыре вида вычислительной техники: 1) обычные инженерные калькуляторы; 2) программируемые калькуляторы; 3) персональные компьютеры и 4) возможность проведения вычислительных работ в больших вычислительных центрах (ВЦ). Выяснилось, что в учебной лаборатории очень важное значение имеет личный контакт студента с ЭВМ по двум причинам: 1) действия студента требуют руководства ими преподавателем и 2) студент стыдится показать свои возможные ошибки высококвалифицированному персоналу ВЦ. Наибольшего эффекта при проведении лабораторных работ можно достичь при использовании персональных ЭВМ каждым студентом. Поскольку число ЭВМ в вузах еще недостаточно для полного оснащения ими лабораторий, к неплохим результатам приводит и использование программируемых калькуляторов типов БЗ-21, МК-46, БЗ-34, МК-61 и им подобных. В качестве примера ниже приведены несколько программ, написанных автором для применения в физических лабораториях ТПедИ. Программу обработки данных и программу линейной регрессии используют при проведении многих лабораторных работ, программа обработки комплексных чисел найдет применение в электро-радиотехнике, программами решения дифференциальных уравнений моделируют колебательный процесс в контурах и программу перевода звездных координат используют при составлении карты видимой части ночного неба.

Программы для калькуляторов БЗ-34 можно использовать без изменения для калькуляторов МК-61 и им подобных. При работе с калькуляторами МК-61 надо только иметь в виду, что обозначение клавиши ввода содержания рабочего регистра в память (и извлечение из памяти) не И (ИП), как у БЗ-34, а

$x \rightarrow \Pi$  ( $\Pi \rightarrow x$ ). Практика показала, что студенты часто путают обозначения  $x \rightarrow \Pi$  и  $\Pi \rightarrow x$ . Поэтому в настоящей работе используют  $\Pi$  и  $\text{III}$ . Для обозначения клавиш  $\overline{xu}$  (БЗ-34) и  $\leftarrow$  (МК-61) здесь используется  $xu$ . Клавиша передвижения стека названных калькуляторов "вниз" имеет обозначение  $\bigcirc$ . При переводе программы для калькуляторов БЗ-21 (или обратно) это может привести к ошибкам, так как принцип действия БЗ-21, связанный с их клавишами  $P\bigcirc$  и  $P\bigcirc$  (в настоящей статье  $P_{\bigcirc}$  и  $P_{\bigcirc}$ ), совсем иной. Поэтому продвижение рабочего стека калькуляторов "вниз" в настоящей статье обозначается более удобным для написания и чтения символом  $\downarrow$ , нашедшим международное применение.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений приведен на рис.

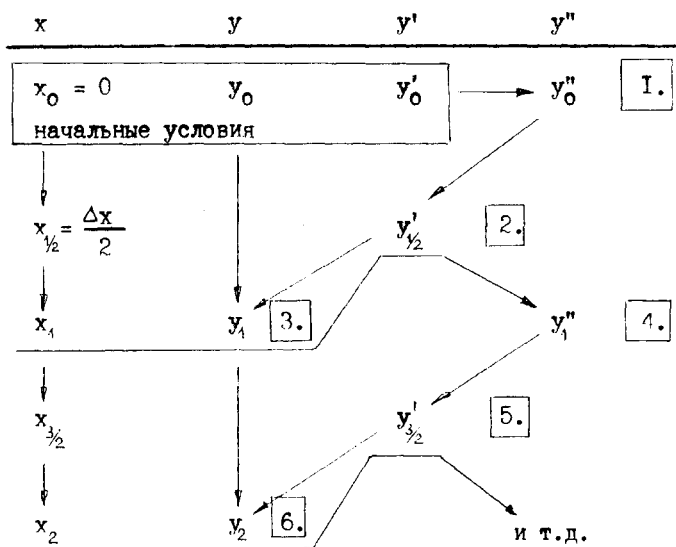


Рис.

Число в квадратике обозначает порядок следования данной операции. Аналогичные простые алгоритмы предлагают и в [1].

Для МК-61 доступны и более совершенные алгоритмы (например, методы Рунге-Кутты). Для примера можно привести [2]. Однако для студенческой работы предпочтительны простые и быстро работающие программы. Программа перевода экваториальных звездных координат в горизонтальные написана на основе формул [3]. Алгоритмы статистических программ общеизвестны.

Программа обработки комплексных чисел переводит программируемый калькулятор в простой калькулятор для комплексных чисел. Действия, которые при этом можно совершать, обозначены в колонке символов (умножение, сложение, передвижение стека и т.д.). Действия записи в память, суммирования в память, перевода в показательную форму и извлечения из памяти при этом изображены в форме, нашедшей международное применение. Это сделано для того, чтобы подчеркнуть тот факт, что они не являются изображениями шагов программы.

Программа обработки данных для БЗ-34

$Fx^2$   $FVx$  ИИИ + ИИ  $F\sqrt{ИИ2}$  + П2  
 ИИИ I ИИО + ПС + ПЗ С/П ВП ОС  
 ИИ2 ИИИ $Fx^2$  ИИО ÷ ИИО I - +  $F\sqrt{П4}$  С/П  
 ИИ4 ИИО  $F\sqrt{\quad}$  + П5 С/П  
 $S_x$  ПС П П2 ВП I6  
 $Fx^2$   $FVx$  ИИИ  $x_y - ИИИ\sqrt{ИИ2}$   $x_y - П2$  ИИИ ИИО I - ВП I3

Содержание регистров

| 0             | 1          | 2            | 3                               | 4  | 5  |
|---------------|------------|--------------|---------------------------------|--|--|
| индекс<br>$i$ | $\sum x_i$ | $\sum x_i^2$ | среднее<br>$\frac{\sum x_i}{i}$ | средне-<br>квадра-<br>тичное<br>отклоне-<br>ние $\sigma$ | средне-<br>квадра-<br>тичная<br>ошибка<br>$\sigma_M$ |

Использование:

1. Вводим число, С/П, получим среднее, повторим с новыми данными.

2. ВП I9 С/П, получим среднеквадратичное отклонение ( $\sigma$  в рег. 4).

3. С/П или ВП 32, получим среднеквадратичную ошибку ( $\sigma_{\mu}$  в рег. 5).

4. Можем повторить ВП 19 С/П или ВП 32 С/П.

5. Перед началом обработки нового комплекса данных ВП 38 С/П (очистка памяти) или С/П.

6. Если надо исключить ошибочно введенное число, уже прошедшее в счет: число (снова), ВП 44 С/П.

Программа линейной регрессии для БЗ-34

ПО ху ПП Х ИПЗ + ПЗ ИПО ИПБ + ПБ ИПО Рх<sup>2</sup> ИПЗ + ПЗ

ИПП ИП4 + П4 I ИПБ + ПБ С/П ВП 00

ИПБ + ПП ИПЗ Х ИП4 - ИПП ИПЗ Х ИПБ - ÷ ПБ

↑ ИП4 ху ИПБ Х - ИПБ + П4 С/П ВП 50

ИПВ Х ИПА + ВП 50

ИПА - ИПВ + ВП 50

С<sub>х</sub> П2 ПЗ П4 ПБ ВП 23

ПО ху ПП Х ИПЗ ху - ПЗ ИПБ ИПО - ПБ

ИПЗ ИПО Рх<sup>2</sup> - ПЗ ИП4 ИПП - П4 I /- / ВП 21

Содержание регистров

| 0 | I              | 2          | 3         | 4        | 5 | A | B |
|---|----------------|------------|-----------|----------|---|---|---|
| x | в употреблении | $\sum x^2$ | $\sum xy$ | $\sum y$ | n | a | b |

Использование:

Результатом будут  $a$  и  $b$  в уравнении прямой  $y = a + bx$ .

1. Ввод точки: вводим  $y$ , ↑, вводим  $x$ , С/П, повторим со всеми точками.

2. Удаление точки: вводим  $y$ , ↑, вводим  $x$ , ВП 72 С/П.

3. Удаление точки сразу после ввода ИПП ↑ ИПО ВП 72 С/П.

4. Вычисление прямой ВП 27 С/П,  $a$  на дисплее и в регистре А,  $b$  в у-регистре и в регистре В.

5. Вычисление  $y$ , соответствующего данной  $x$ : вводим  $x$ , ВП 53 С/П.

6. Вычисление  $x$ , соответствующего данной  $y$ : вводим  $y$ , ВП 59 С/П.

7. Очистка памяти для расчета нового комплекта данных: ВП 65 С/П.

Программа обработки комплексных чисел на БЗ-34

|  | Символ операции     | Использование |
|--|---------------------|---------------|
| ПП 80 С/П  | x                   | В/О С/П       |
| ИПА + ху ИПВ + ху С/П  | +                   | БП 03 С/П     |
| ПА ху ПВ БП 08   | ↑                   | БП 10 С/П     |
| ПС ху ПД ху С/П  | STO                 | БП 15 С/П     |
| ИПС + ПС ху ИПД + БП 18  | SUM                 | БП 20 С/П     |
| ИПВ ИПА F ↓ F ↓ ПА F ↓ ПВ F ↓ С/П  | x ↔ y               | БП 28 С/П     |
| ИПА ху - ху ИПВ ху - БП 08   | -                   | БП 37 С/П     |
| ху 0 ху - ху ПП 80 ИПП Fx <sup>2</sup> ИП2 Fx <sup>2</sup><br>+ ПЗ + ху ИПЗ + ху С/П | +                   | БП 46 С/П     |
| ПП Fx <sup>2</sup> ху П2 Fx <sup>2</sup> + F √ П4 ИП2 ИПП<br>+ Farotan П5 БП 08      | ROL                 | БП 65 С/П     |
| ПП ИПВ X ху П2 ИПА X + ИПП ИПА X<br>ИП2 ИПВ X - В/О                                  | подпрограмма<br>RCL | ИПД ИПС       |

Содержание регистров

|                | 0 | 1              | 2  | 3              | 4         | 5 | A    | B  | C      | D  |
|----------------|---|----------------|----|----------------|-----------|---|------|----|--------|----|
|                |   | Re             | Im |                | /z/       | φ | Re   | Im | Re     | Im |
| в употреблении |   | в употреблении |    | в употреблении |           |   |      |    |        |    |
|                |   | результат      |    |                | результат |   | ввод |    | память |    |

Использование

1. Мнимую часть вводят в у-регистр, вещественную часть - в х-регистр: Im ↑ Re для ввода БП 10 С/П,
2. Следующее число: Im ↑ Re, желаемая операция (например, при сложении БП 03 С/П).
3. Ввод результата в качестве первого числа следующего расчета БП 10 С/П (в нашем примере после сложения можно сразу С/П).

Программа решения дифференциального уравнения свободных электрических колебаний на БЗ-2I

F4 ↑ F5 X P<sub>1</sub> F6 ↑ F7 X ↑ P<sub>1</sub> +

↑ F2 X 2 + ↑ P<sub>1</sub> F6 + P6

F3 P<sub>x</sub> ≠ 0 P5 P<sub>1</sub> ↑ F6 + P6

F2 ↑ F3 + P3 C/П

F6 X ↑ F4 + P4 C/П

ВП P0

Уравнением является

$$y'' = -\nu y' - \sigma y$$

Содержание регистров

|            |   |   |    |    |    |   |
|------------|---|---|----|----|----|---|
| 2          | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8 |
| $\Delta x$ | x | y | -C | y' | -B |   |

Использование

1. Вводим  $\Delta x$ , начальные условия и коэффициенты  $\nu$  и  $\sigma$ .

2. В/0, C/П, получим  $x_1$ , C/П, получим  $y_1$ .

C/П, получим  $x_2$ , C/П, получим  $y_2$  и т.д.

Программа решения дифференциального уравнения вынужденных электрических колебаний на БЗ-2I

P<sub>1</sub> ↑ P<sub>1</sub> F3 X P<sub>1</sub> sin ↑ F8 X P<sub>1</sub>

F4 ↑ F5 X P<sub>1</sub> F6 ↑ F7 X ↑ P<sub>1</sub> + ↑ P<sub>1</sub> +

↑ F2 X 2 + ↑ P<sub>1</sub> F6 + P6

F3 P<sub>x</sub> ≠ 0 F7 P<sub>1</sub> ↑ F6 + P6

F2 ↑ F3 + P3 C/П

F6 X ↑ F4 + P4 C/П

ВП P0

Уравнением является

$$y'' = -\nu y' - \sigma y + D \sin \omega t$$

Содержание регистров

|            |   |   |    |    |    |   |
|------------|---|---|----|----|----|---|
| 2          | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  | 8 |
| $\Delta x$ | x | y | -C | y' | -B | D |

Использование

1. Вводим  $\Delta x$ , P2, C/-/ P5,  $\nu$  P6, B/-/P7, D P8,  $\omega$  P<sub>1</sub>,  $\omega$  P<sub>1</sub>, 0 P3, В/0.

2. C/П, получим  $x_1$ , C/П, получим  $y_1$ , C/П, получим  $x_2$ , C/П, получим  $y_2$  и т.д.

Программа перевода экваториальных звездных координат в горизонтальные на БЗ-34

ИПВ ИПА - ПЗ Pcos ПЗ

ИП2 Pcos ПВ X ПД ИП7 X ИП2 Psin ПБ ИП4 X + ПБ

$F_x^2$  I -  $F_x < 0$  54 ИКБ  $\text{Farcos}$  ПС  $\text{Fsin}$  FI/x  
 ИКБ  $\text{Fsin}$  ИКБ X  $F_x \geq 0$  45 ПП 58 ПД С/П ИПС С/П  
 ИКД ВП 39 ПП 58  $F_x \neq 0$  38 ИПО ху - ВП 38  
 $C_x$  ПС ВП 38  
 $F \downarrow$  ИКД ИК4 X ИК7 ИК5 X - X ПБ I -  $F_x < 0$  81  
 ИКБ I +  $F_x \geq 0$  83 ИКБ  $\text{Farcos}$  ПД В/О  $C_x$  В/О 180 В/О

### Содержание регистров

|               |              |            |          |                                   |
|---------------|--------------|------------|----------|-----------------------------------|
| 7             | 8            | 9          |          | $\varphi$ - географическая широта |
| $\cos\varphi$ | $\cos\delta$ | $\cos t$   |          | $\delta$ - склонение              |
| 4             | 5            | 6          |          | $t$ - часовой угол                |
| $\sin\varphi$ | $\sin\delta$ | в употреб- |          | $d$ - прямое восхождение          |
|               |              | лении      |          | $s$ - звездное время              |
| I             | 2            | 3          |          | $Z$ - зенитное расстояние         |
| $\varphi$     | $\delta$     | $t$        |          | A - азимут                        |
| 0             | ,            | /-/        | ВП $C_x$ |                                   |
| 360           | A            | B          | C        | D                                 |
|               | $\alpha$     | S          | Z        | A                                 |

### Использование

Вводят географическую широту, ее синус и косинус (рег. I, 4 и 7), склонение, прямое восхождение и звездное время (рег. 2, A, B, все в градусах, а не в единицах времени, даже S) и число 360 в регистре 0. При расчете координат нового светила в тот же момент времени следует вводить только новое прямое восхождение и склонение. В качестве результата получают азимут A (начиная с точки юга), С/П, зенитное расстояние Z. Можно повторять С/П, Z, С/П, A и т.д. сохраняется и в регистре C, A в регистре D.

### Л и т е р а т у р а

1. Eisberg R.M. Applied mathematical physics with programmable pocket calculators, Mc Graw-Hill.- N. Y. s.o., 1976.
2. Lee H.E. SR-52 solves second-order differential equations // "Electronics". - 1977. - No. 20. - Pp. 111, 113.
3. Попов P.I., Bajev K.L., Verontsov-Veljaminov B.A., Kunitaki R.V. Astronomija, - Tallinn: ERK, 1959. - Lk. 58-60.
4. Romanovskis T. Skaitlotajs darba, mācībās, spēlēs. - Rīga: "Zvaigzne", 1982.

## ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

З.Н. Бихеле, Г.А. Бихеле

### Часть II. Вопросы теории подобия

#### I. Основные элементы теории подобия

В настоящее время быстро развиваются наука и техника, накапливается научная информация, разрабатываются новые конструкции, технологии, усложняются экспериментальные исследования. Возникает необходимость в более рациональном планировании экспериментов с целью ускорения и удешевления проводимых исследований. При этом возрастает роль моделей изучаемых систем и протекающих в них процессов [1].

В основе моделирования и планирования эксперимента лежит теория подобия, которая является мощным инструментом исследования во всех областях знаний.

В задачи теории подобия входят:

1) установление условий, позволяющих распознать подобие модели натуре или специально обеспечить его при построении модели;

2) выяснение того, как применять результаты исследования модели к оригиналу;

3) разработка путей наиболее рациональной организации опытных исследований и обобщения их результатов.

Два явления (процесса) считаются подобными, если по характеристикам одного из них можно рассчитать значения характеристики другого. Подобными могут быть явления как одной и той же, так и различной физической природы.

Установление закономерностей изучаемого процесса часто наталкивается на большие трудности ввиду необходимости учитывать большое количество величин, существенных для данного процесса. Рассмотрение действия всех этих величин порознь (вне связи с другими величинами) не всегда позволяет получить правильное представление о той действительной роли, которую

они играют в развитии процесса, действуя совместно. Теория подобия указывает на возможность построения таких комплексов величин, которые учитывают некоторый конечный совместный эффект взаимодействия нескольких факторов. Эти комплексы называются критериями подобия.

Введение этих комплексов как новых обобщенных переменных открывает возможность обобщения данных единичного опыта на группу подобных явлений. В результате, казалось бы, совершенно непохожие явления оказываются подобными друг другу. Теория подобия вырабатывает правила, как следует соотносить друг с другом подобные явления, описываемые, в общем случае, различными характеристиками, если они выражены с помощью размерных величин, и одинаковыми - в безразмерных переменных.

Различные физические величины связаны между собой определенными соотношениями. Поэтому, если некоторые из этих величин принять за основные (первичные), то остальные (вторичные, производные) величины будут выражаться через основные, согласно физическим законам, устанавливающим связь между этими величинами. Это позволяет, в свою очередь, выразить размерности всех производных величин через размерности основных физических величин.

В механике достаточно принять за основные величины длину, массу и время, размерности которых обозначаются, соответственно, через  $L$ ,  $M$  и  $T$ . При изучении тепловых явлений эти величины дополняются термодинамической температурой  $\theta$ , а при описании электромагнитных явлений - силой электрического тока  $I$ .

Размерность любой производной физической величины может быть выражена через размерности основных величин в виде степенного одночлена [2, 3, 4].

$$[P] = L^a M^b T^c \theta^d \dots \quad (I)$$

Следует отметить, что величины, существенные для описания изучаемого процесса, могут быть и безразмерными. К ним относятся: 1) отношения одноименных величин (например, угол, коэффициент трения скольжения и др.); 2) аргументы несродных (тригонометрических, логарифмических, показательных и

др.) функций (например,  $\omega t$  в выражении  $\sin \omega t$ ); а также 3) целые комплексы физических величин, определяющих течение рассматриваемого процесса. Так, при изучении движения жидкости важной характеристикой является безразмерный комплекс - число Рейнольдса

$$Re = \frac{v \ell}{\nu},$$

где  $v$  ( $L T^{-1}$ ) - скорость движения жидкости,  $\ell$  ( $L$ ) - характерный размер,  $\nu$  ( $L^2 T^{-1}$ ) - динамическая вязкость жидкости.

Величины, характеризующие свойства изучаемой системы и протекающие в ней процессы, называются ее параметрами. Часто оказывается целесообразным выделить из числа всей совокупности параметров  $P_1, \dots, P_n$ , существенных для описания исследуемого явления, группу так называемых независимых параметров  $P_1, \dots, P_s$ , размерность каждого из которых не может быть выражена в виде комбинаций формул размерностей всех других параметров этой группы. Остальные параметры (обозначим их через  $P_{s+1}, \dots, P_n$ ) будут производными (зависимыми), поскольку их размерности могут быть образованы из размерностей параметров, принятых за независимые, т.е.

$$[P_{s+1}] = [P_1]^{x_{1s+1}} \dots [P_s]^{x_{ss+1}}, \quad (2)$$

где  $x_{1s+1}, \dots, x_{ss+1}$  - некоторые подлежащие определению показатели степеней, которые могут быть целыми, дробными, положительными и отрицательными числами.

За независимые параметры могут быть выбраны любые (не обязательно основные) величины из данной совокупности, если они удовлетворяют условию независимости. Однако число независимых параметров в данной системе физических величин не должно превышать числа основных величин в ней. Так, в механике  $S \leq 3$ , в термо- и электродинамике  $S \leq 4$ .

Например, среди следующих параметров: длина ( $\ell$ ), масса ( $m$ ), скорость ( $v$ ) и ускорение ( $a$ ), за независимые параметры можно принять лишь три из них. Пусть это будут  $\ell$ ,  $m$  и  $v$ , поскольку размерность ни одного из них не может быть выражена в виде какой-либо функции от размерностей двух других. Тогда ускорение  $a$  будет зависимым параметром, так как его размерность  $[a] = [\ell]^{-1} [v]^2$

Рассмотрим теперь некоторый процесс  $A$ , определяемый размерными параметрами  $P_1, \dots, P_n$ , из которых  $S$  параметров  $P_1 \dots P_S$  являются независимыми, остальные  $P_{S+1}, \dots, P_n$  — зависимые. Пусть математическим описанием этого процесса будет уравнение

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0. \quad (3)$$

Поскольку, согласно (2), размерности  $P_{S+1}$  и выражения  $P_1^{x_{12}}, \dots, P_S^{x_{S2}}$  одинаковы, то отношение

$$\pi_{2,A} = \frac{P_{S+1}}{P_1^{x_{12}} \dots P_S^{x_{S2}}} \quad (4)$$

безразмерно и служит критерием подобия (КП). Ввиду того, что число зависимых параметров равно  $n-S$ , то можно составить  $n-S$  независимых КП (4).

Очевидно, что любая комбинация полученных таким образом КП будет, в свою очередь, безразмерным комплексом  $k$ , следовательно, является одной из возможных форм выражения КП. Но независимыми из них будут лишь  $n-S$ .

Положим, что с целью моделирования процесса  $A$ , мы сопоставим с ним процесс  $B$  (в общем случае другой физической природы), определяемый также  $n$  — размерными параметрами  $R_1, \dots, R_n$ , имеющий с процессом  $A$  одинаковое математическое описание

$$f(R_1, \dots, R_n) = 0 \quad (5)$$

и равное число  $S$  независимых и  $n-S$  зависимых параметров. Для этого процесса мы можем составить  $n-S$  независимых КП

$$\pi_{2,B} = \frac{R_{S+1}}{R_1^{x_{12}} \dots R_S^{x_{S2}}}. \quad (6)$$

В основе теории подобия лежат следующие утверждения [4, 5, 6, 7]:

1. Для каждого физического процесса, описываемого  $n$  — размерными параметрами, из которых  $S$  являются независимыми, можно составить  $n-S$  независимых КП (4).

2. Для подобия двух сопоставляемых процессов необходимо равенство значений соответствующих КП.

3. Уравнения, описывающие данный физический процесс,

можно представить в критериальной форме, устанавливающей связь между составленными для этого процесса КП. Это уравнение будет содержать, в общем случае, также так называемые тривиальные КП  $K_1, \dots, K_m$ , представляющие собой отношения одноименных характерных для данного процесса величин, т.е.

$$\varphi(\pi_1, \dots, \pi_{n-s}, k_1, \dots, k_m) = 0. \quad (7)$$

Учитывая, что один из КП (например,  $\pi_{n-s}$ ) может быть выражен как функция остальных  $n-s-1$  независимых КП, критериальные уравнения можно записать в следующем виде:

$$\pi_{n-s} = \Phi(\pi_1, \dots, \pi_{n-s-1}, k_1, \dots, k_m), \quad (8)$$

уменьшив тем самым число величин, определяющих характер изучаемого процесса.

Однако равенство критериев подобия является необходимым, но еще не достаточным для полного подобия этих процессов. Как правило, требуется, чтобы выполнялись еще и так называемые условия однозначности.

Уравнения, описывающие изучаемый процесс, обычно представляют собой дифференциальные уравнения, в которых устанавливается связь между параметрами, характеризующими изучаемую систему и протекающие в ней процессы. Их называют основными уравнениями. Отражая главные информационные свойства протекающих в системе процессов, они являются математической моделью целого класса явлений, характеризующихся одинаковым внутренним механизмом. В результате интегрирования дифференциальных уравнений получается бесчисленное множество решений. Для того, чтобы выделить из их числа решение, соответствующее конкретному процессу, необходимо знать все особенности этого процесса, отражаемые в заданных дополнительно условиях однозначности.

В зависимости от физической природы процесса, эти условия могут быть весьма различными по объему и характеру выраженных в них знаний. Обычно в условиях однозначности входят временные и пространственные характеристики системы в начальный момент времени, а также условия на ее границе в процессе взаимодействия с окружающей средой [7].

## 2. Методы определения критериев подобия

Существуют различные способы определения КП, в зависимости от того, известно математическое описание процесса или нет [4, 5].

Рассмотрим эти случаи.

Определение КП по известному математическому описанию процесса осуществляется либо путем приведения определяющих его основных уравнений и условий однозначности к безразмерному виду, либо методом размерностных (интегральных) аналогов.

Для приведения данных уравнений к подобному виду поступаем следующим образом:

1. Выбираем для всех параметров  $P_i$ , входящих в данную систему уравнений, характерные с точки зрения данной задачи значения, так называемые масштабы подобия  $K_{P_i}$ .

2. Выражаем в уравнениях параметры  $P_i$  через их новые значения  $P_i' = P_i / K_{P_i}$ .

3. Приравняем друг к другу коэффициенты, составленные из введенных масштабов и стоящие перед членами полученных уравнений.

4. Разделив полученное равенство на какой-либо из его членов, найдем безразмерные комплексы, которые и являются искомыми КП в "масштабной форме".

Пример. Движение материальной точки массой  $m$  вдоль оси  $Ox$  под действием силы  $F$  описывается уравнением

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F. \quad (9)$$

Введем масштабные коэффициенты  $K_m$ ,  $K_x$ ,  $K_t$  и  $K_F$ , приняв

$$m = K_m m', \quad x = K_x x', \quad t = K_t t', \quad F = K_F F', \quad (10)$$

где  $m'$ ,  $x'$ ,  $t'$  и  $F'$  будут новыми значениями соответствующих параметров.

Уравнение (9) при этом приводится к виду

$$\frac{K_m K_x}{K_t^2} m' \frac{d^2 x'}{d t'^2} = K_F F'.$$

Приравняв коэффициенты

$$\frac{K_m K_x}{K_t^2} = K_F,$$

получим

$$\frac{K_F K_T^2}{K_m K_X} = 1. \quad (II)$$

Подставляя в (II) значения масштабов из (IO), найдем искомый КП – так называемое число Ньютона

$$Ne = \frac{F t^2}{m X}. \quad (I2)$$

Определение КП методом размерностных аналогов осуществляется в следующем порядке:

1. Обозначим члены данного уравнения через  $y_i$  (не учитывая связывающие их знаки "+" и "-").

2. Если в выражения  $y_i$  входят неоднородные функции, а также производные и интегралы, то заменяем  $y_i$  их размерностными аналогами  $y_i^*$ . Для этого неоднородные функции (например,  $\sin(\omega t + \alpha)$ ,  $\exp(-\frac{x}{\lambda})$ ,  $\log kt$  и др.) исключаем из  $y_i$ , так как их аргументы и они сами должны быть безразмерными. Символы дифференцирования и интегрирования опускаем, заменяя, например, производную  $\frac{d^2x}{dt^2}$  ее размерностным аналогом  $\frac{x}{t^2}$ , а интеграл  $\int F \cos \alpha ds$  – на  $Fs$ .

3. Разделив все  $y_i^*$  на какой-либо один из них ( $y_k^*$ ), получим независимые КП  $\pi_i = y_i^* / y_k^*$ .

4. Добавим к ним в качестве дополнительных КП аргументы неоднородных функций.

Пример. Рассмотрим процесс колебания тела массой  $m$ , подвешенного на упругой пружине жесткостью  $K$ , на которое действует возмущающая сила  $F \sin \omega t$ , и пропорциональное скорости груза сопротивление вязкой среды. Колебания тела описываются при этом дифференциальным уравнением

$$m \frac{d^2 l}{dt^2} + \tau \frac{dl}{dt} + Kl = F \sin \omega t, \quad (I3)$$

где  $l$  – расстояние, на которое переместилось тело от положения равновесия,  $\tau$  – коэффициент сопротивления среды и  $\omega$  – круговая частота, с которой изменяется возмущающая сила.

Для определения КП составим сперва размерностные аналоги членов, входящих в эти уравнения

$$y_1^* = \frac{m\ell}{z^2}, \quad y_2^* = \frac{z\ell}{t}, \quad y_3^* = \kappa\ell, \quad y_4^* = F. \quad (I4)$$

Затем, разделив выражения (I4), например, на  $y_2^*$ , получим три независимых КП, которые дополним аргументом неоднородной функции из (I3),

$$\pi_1 = \frac{m}{zt}, \quad \pi_2 = \frac{\kappa t}{z}, \quad \pi_3 = \frac{Ft}{z\ell}, \quad \pi_4 = \omega t. \quad (I5)$$

Для определения КП в случае, когда математическое описание процесса неизвестно, используют размерностный анализ. При этом поступают следующим образом:

1. Выясняем, какие параметры определяют рассматриваемую систему и происходящие в ней процессы, и устанавливаем, какие из них можно считать независимыми и какие — зависимыми.

2. Обозначим независимые параметры через  $P_1, \dots, P_s$  и зависимые — через  $P_{s+1}, \dots, P_n$ . Как известно, при этом можно выписать  $n-s$  независимых КП (4)

$$\pi_r = \frac{P_{s+r}}{P_1^{x_{1r}} \dots P_s^{x_{sr}}}. \quad (I6)$$

Чтобы определить их, надо найти показатели степеней  $x_{1r}, \dots, x_{sr}$ . Для этого следует предварительно определить, как выразятся размерности всех входящих в (I6) параметров через размерности основных величин в рассматриваемой области знаний.

Подставляя полученные размерностные выражения в (I6) и приравнявая показатели степеней при размерностях основных величин в его числителе и знаменателе, получим систему уравнений, из которой найдем искомые значения для  $x_{1r}, \dots, x_{sr}$  и тем самым определим КП [3, 4].

Пример. Рассмотрим приведенный ранее пример вынужденных колебаний груза. Только на этот раз предположим, что нам неизвестно дифференциальное уравнение (I3), описывающее этот процесс, но даны определяющие его параметры  $\ell, m, t, z, \kappa, F, \omega$ .

Нетрудно убедиться, что за независимые параметры в этом случае можно выбрать одну из следующих групп:

$$(\ell, m, t), (\ell, t, z), (m, \kappa, F), (m, t, F).$$

Выбрав за таковые  $(\ell, t, \tau)$ , можно, например, представить КП  $\mathcal{P}_1$ , в следующем виде

$$\mathcal{P}_1 = \frac{m}{\ell^{x_1} \cdot \tau^{x_2} \cdot t^{x_3}} \quad (17)$$

Поскольку размерность  $[\mathcal{P}_1] = 1$ , получим

$$\frac{M}{L^{x_1} \cdot (MT^{-1})^{x_2} \cdot T^{x_3}} = 1, \quad (18)$$

откуда и рассчитаем следующие значения для искомым показателей степеней:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 1$ . Следовательно,

$$\mathcal{P}_1 = \frac{m}{\tau t} \quad (19)$$

Аналогично найдем и остальные критерии подобия

$$\mathcal{P}_2 = \frac{Kt}{\tau}, \quad \mathcal{P}_3 = \frac{Ft}{\tau \ell}, \quad \mathcal{P}_4 = \omega t \quad (20)$$

Сравнивая (20) с (15), видим, что оба метода дают один и тот же результат.

### 3. Определение вида искомой функциональной зависимости

Пусть рассматриваемый процесс определяется известными нам размерностными параметрами  $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$  и характерными для него безразмерными величинами  $K_1, \dots, K_m$ . В течение процесса все эти параметры как-то связаны между собой. Но математическое описание процесса нам неизвестно. Тем не менее, нас часто интересует вид зависимости какого-нибудь одного из данных параметров (например,  $\mathcal{P}_n$ ) от остальных.

Возникает вопрос, что можно утверждать о виде этой зависимости, основываясь лишь на положениях теории подобия и размерностном анализе, т.е. как установить вид функции [3, 5].

$$\mathcal{P}_n = f(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n-1}, K_1, \dots, K_m) \quad (21)$$

В общем случае, когда среди данных размерностных параметров независимыми будут лишь  $s$  первых из них, остальные же  $n-s$  будут зависимыми, можно, как известно, составить  $n-s$  независимых критериев подобия (4) и критериальное уравнение представить в виде функциональной зависимости (8)

$$\mathcal{P}_{n-s} = \phi(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{n-s-1}, K_1, \dots, K_m) \quad (22)$$

Поскольку

$$\pi_{n-s} = \frac{P_n}{P_1^{x_{1,n-s}} \dots P_s^{x_{s,n-s}}},$$

то  $P_n$  можно представить в виде следующей функции

$$P_n = P_1^{x_{1,n-s}} \dots P_s^{x_{s,n-s}} \phi(\pi_1, \dots, \pi_{n-s-1}, K_1, \dots, K_m), \quad (22)$$

где  $x_{1,n-s}, \dots, x_{s,n-s}$  определяются на основании равенства размерностей  $P_n$  и выражения  $P_1^{x_{1,n-s}}, \dots, P_s^{x_{s,n-s}}$

Очевидно, что в рассматриваемом случае нам не удастся полностью определить вид искомой функции  $P_n$ . Тем не менее, знание зависимости (22) обычно упрощает как экспериментальное, так и теоретическое решение поставленной задачи, поскольку при этом уменьшается число неизвестных. Вместо прежних  $n-1$  аргументов искомой функции (21) остается  $n-s-1$  безразмерных комплексов, которые можно принять за обобщенные переменные.

В частном случае, когда из зависимых параметров

$P_{s+1}, \dots, P_n$  отличен от нуля лишь один —  $P_{s+1}$ , он будет зависеть только от независимых параметров  $P_1, \dots, P_s$ , т.е.

$$P_{s+1} = f(P_1, \dots, P_s, K_1, \dots, K_m). \quad (23)$$

При этом можно составить лишь один КП

$$\pi_1 = \frac{P_{s+1}}{P_1^{x_{1,s+1}} \dots P_s^{x_{s,s+1}}} \quad (24)$$

и уравнение (23) примет следующий вид

$$P_{s+1} = C P_1^{x_{1,s+1}} \dots P_s^{x_{s,s+1}} \theta(K_1, \dots, K_m), \quad (25)$$

где постоянная  $C$  и значение  $\theta(K_1, \dots, K_m)$  находятся либо опытным путем, либо устанавливаются, исходя из теоретических соображений.

Таким образом, когда искомая функция представляет собой степенной одночлен из данных независимых размерностных параметров и не содержит неоднородных функций, нам удается найти вид искомой функции с точностью до постоянной.

Пример. Пусть тело обтекается потоком воздуха. Требуется найти силу  $F$ , с которой он действует на тело.

Очевидно, определяющими параметрами в этом случае будут скорость  $v$  набегающего потока воздуха, его плотность  $\rho$ , а

также величина площади  $S$  поперечного сечения тела, перпендикулярной направлению движения воздуха, т.е.

$$F = f(v, \rho, S).$$

Размерность входящих сюда величин будет

$$[F] = LMT^{-2}, [v] = LT^{-1}, [\rho] = L^{-3}M, [S] = L^2,$$

а независимыми параметрами -  $v$ ,  $\rho$  и  $S$ .

Следовательно, критерий подобия

$$\pi = \frac{F}{v^2 \rho S^2} = C, \quad (26)$$

где  $C$  - безразмерная постоянная.

Выразив размерности входящих сюда параметров через размерности основных величин, найдем

$$x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1.$$

Отсюда, приравнявая показатели степеней при одноименных размерностях, имеем

$$\pi = \frac{F}{\rho S v^2} = C \quad (27)$$

и, следовательно,

$$F = C \rho S v^2. \quad (28)$$

Пример. Найдем период колебаний математического маятника длиной  $l$ , отклоненного от положения равновесия на угол  $\varphi_0$  и отпущенного без начальной скорости.

Период колебаний маятника  $\tau$  можно выразить в виде функции

$$\tau = f(l, g, \varphi_0),$$

где  $g$  - ускорение свободного падения.

Размерностными параметрами здесь будут  $l$ ,  $\tau$  и  $g$ . За независимые параметры выберем  $l$  и  $g$ . Тогда критерий подобия

$$\pi_\tau = \frac{\tau}{l^2 g^{x_2}}. \quad (29)$$

Ввиду того, что  $[\tau] = T$ ,  $[l] = L$ ,  $[g] = LT^{-2}$ , получим  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = -\frac{1}{2}$

При этом 
$$\pi_\tau = \tau \sqrt{g/l}. \quad (30)$$

Поскольку  $\varphi_0$  - безразмерная величина, то  $K = \varphi_0$ .

Критериальное уравнение представим в виде:

$$\bar{L}_z = \Phi(\varphi_0) . \quad (31)$$

откуда

$$\tau = \Phi(\varphi_0) \sqrt{\frac{L}{g}} . \quad (32)$$

Как известно из теории,

$$\tau = 2\pi \left(1 + \frac{L_0^2}{16} + \dots\right) \sqrt{\frac{L}{g}} . \quad (33)$$

Итак, методы теории подобия и размерностей являются весьма плодотворными при отыскании функциональной зависимости между параметрами, существенными для рассматриваемого процесса.

#### Л и т е р а т у р а

1. Бихеле З.Н., Бихеле Г.А. Вопросы моделирования и теории подобия. Часть I. Проблемы моделирования// Методика преподавания физики в вузе. В помощь преподавателю XII. - Тарту, 1987.
2. Камке Д., Кремер К. Метод подобия. - М., 1980.
3. Хантли Г. Анализ размерностей. - М., 1970.
4. Алабужев П.М., Геронимус В.Б., Минкевич Л.М., Шеховцев Б.А. Теория подобия и размерностей. Моделирование. - М., 1968.
5. Соколов Э.Т., Коваленко В.Е. Зеркало, или путешествие в мир подобных явлений. - Минск, 1985.
6. Гухман А.А. Введение в теорию подобия. - М., 1973.
7. Резняков А.Б. Метод подобия. - Алма-Ата, 1959.

## МАТЕМАТИКА В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ВТУЗОВ

Р.-К.Р. Лойде, Р.И. Манкин, Э.К. Рейтер

Изложение курса общей физики невозможно без применения аппарата высшей математики. Оно должно быть строго научным, точным и ясным. В курсе физики необходимо провести анализ физического смысла соотношений, полученных с помощью математики. Такое преподавание не только обеспечивает глубокое усвоение физики студентами, но и повышает уровень их математической культуры.

В технических вузах, в зависимости от специальности курс физики начинается с первого или второго семестра, поэтому необходимый математический материал студентами еще не усвоен. Для лучшего усвоения курса физики нужен методический материал, где излагается основной математический аппарат курса физики и указывается его применение. На кафедре физики Таллинского политехнического института составлен один возможный вариант методического руководства "Математика в курсе общей физики", где кратко изложены основные элементы курса высшей математики, а на примерах из курса физики иллюстрируется применение. При изложении математики мы исходили из справочников по высшей математике [1-4], составленных кафедрой математики нашего института. Поэтому математический материал дается сжато и приводятся лишь необходимые в курсе физики соотношения. Исключение составляют элементы дифференциального и интегрального исчисления в теории поля, а также понятие операторов в квантовой механике, так как этим проблемам в курсе математики уделяют меньше времени. Основная часть методического руководства содержит изложения применения математики в курсе общей физики. В приведенных из курса физики примерах особое внимание уделяется математике. Анализ физического смысла этих примеров проводится на занятиях по физике.

По нашему мнению, студентам нужны не только конспекты

лекций по физике, но и методические руководства, где излагалось бы применение математики в курсе физики. Это особенно важно в условиях увеличения объема самостоятельной работы студентов.

Ниже приводится основная структура руководства по математике в курсе общей физики. Руководство содержит шесть разделов:

### 1. Дифференциальное и интегральное исчисление.

1а. Производная от функции. Понятие производной, интерпретация производной, понятие дифференциала, высшие производные, производная от функции многих переменных, исследование функции с помощью производной.

Физические примеры: движение по окружности, мощность постоянного тока, закон преломления света (принцип Ферма), излучение абсолютно черного тела, сила при гармоническом колебании, ускоренное прямолинейное движение, разность теплоемкостей.

1б. Неопределенный интеграл, определенный интеграл. Понятие неопределенного интеграла, основные приемы интегрирования. Понятие определенного интеграла и его интерпретация, свойства определенного интеграла, вычисление определенного интеграла.

Физические примеры: равноускоренное движение, пройденный путь при неравномерном движении, изменение энтропии идеального газа, поглощение света, магнитное поле прямого и кругового токов.

1в. Кратные интегралы. Понятие двукратного интеграла и его свойства, интерпретация двукратного интеграла, вычисление двукратного интеграла, замена переменных в двукратном интеграле. Понятие трехкратного интеграла.

Физические примеры: ламинарное течение жидкости, электрическое поле диска, распределение заряда в атоме водорода, энергия электрического поля равномерно заряженного шара, момент инерции шара и цилиндра.

### 2. Векторная алгебра.

Векторы. Понятие вектора, линейные операции с векторами, скалярное и векторное произведение, производная от вектора. Системы координат. Уравнения кривой и поверхности.

Физические примеры: скорость, ускорение, кинематика вращения, кинематика твердого тела, закон сохранения момента импульса, основное уравнение динамики вращательного движения, кинетическая энергия твердого тела, движение заряженной частицы в магнитном поле, сила, действующая на элемент тока в магнитном поле, релятивистская кинетическая энергия, сложение гармонических колебаний, сила инерции.

3. Основные понятия теории поля.

За. Скалярное и векторное поле. Дифференциальное исчисление в теории поля. Градиент скалярного поля, дивергенция и ротор векторного поля.

Физические примеры: линии поля точечного заряда, градиент радиуса, ротор и дивергенция радиуса-вектора, электрическое поле точечного заряда и диполя, уравнения Максвелла, электромагнитная волна, уравнение Пуассона, векторный потенциал, закон Био-Савара-Лапласа, поле скоростей вращающегося тела.

3б. Интегральное исчисление в теории поля. Поток векторного поля и дивергенция, циркуляция векторного поля, теорема Стокса, потенциальные и соленоидальные поля.

Физические примеры: поток скорости жидкости, кинетическая энергия, консервативное векторное поле и потенциальная энергия, центральное поле, работа в поле тяжести, теорема Гаусса, электрическое поле однородного шара, бесконечной плоскости и бесконечного цилиндра, поток электрического поля через эллипсоид вращения, уравнения Максвелла (интегральная форма), закон сохранения электрического заряда, магнитное поле соленоида.

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Уравнения первого порядка. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (однородное и неоднородное).

Физические примеры: скорость ракеты, уравнение адиабата, падение тела в жидкости, эквипотенциальные кривые диполя, затухающие электрические колебания, вынужденные колебания.

5. Элементы теории вероятностей и статистики

Вероятность, среднее значение, непрерывное распределение вероятности, амплитуда вероятности (волновая функция).

Физические примеры: уравнение состояния идеального газа,

расширение газа, распределение Гаусса, распределение Максвелла, наиболее вероятная скорость и средняя скорость молекул, распределение Больцмана, средняя энергия гармонического осциллятора, теплоемкость гармонических осцилляторов, закон излучения Планка, распределение Ферми-Дирака, распределение Бозе-Эйнштейна, атом водорода в основном состоянии.

#### 6. Операторы в квантовой механике

Основные понятия: линейные операторы, задача на собственные значения, физическая интерпретация. Операторы координаты и импульса, оператор Гамильтона, оператор момента импульса. Принцип суперпозиции. Соотношения неопределенностей.

Физические примеры: собственные функции оператора импульса, оператор Гамильтона свободной частицы и его собственные функции, потенциальные барьеры, туннельный эффект, потенциальная яма, трехмерная потенциальная яма, уравнение Шредингера, момент импульса, атом водорода, число квантовых состояний в трехмерной потенциальной яме.

Приведенная структура охватывает основные моменты из курса математики и физики. Что касается размещения физических примеров, то они связаны с несколькими подразделами курса математики и поэтому место конкретного примера определялось по основному математическому признаку приведенного примера.

Надеемся, что предложенное руководство будет способствовать более глубокому усвоению курса общей физики, являющейся одним из фундаментов для специальных инженерных дисциплин во втузах.

#### Л и т е р а т у р а

1. Kõrgema matemaatika teatmik I (Справочник по высшей математике I). - Tallinn: TPI rotaprint, 1978.
2. Diferentsiaal- ja integraalarvutus (Kõrgema matemaatika teatmik II). - Tallinn: TPI rotaprint, 1978.
3. Kõrgema matemaatika eripeatükke (Kõrgema matemaatika teatmik III). - Tallinn: TPI rotaprint, 1978.
4. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika (Kõrgema matemaatika teatmik IV). - Tallinn: TPI rotaprint, 1979.

О ДЕДУКТИВНОМ ПОДХОДЕ  
В ИЗЛОЖЕНИИ КУРСА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ПЕДВУЗЕ

А.А. Вировере

Курс теоретической физики занимает заметное место в системе формирования у будущего учителя современной физической картины мира. Поэтому не случайно в программе этого курса для специальности "Математика и физика" [1] выдвинуто требование сосредоточить внимание студентов не столько на расчетных методах теоретической физики, сколько на идейной стороне изучаемых проблем. Однако в рамках традиционной методики преподавания теоретической физики в педвузах, основанной на индуктивном подходе в сочетании с историческим способом изложения [2 - 4], достижение этой программной цели затруднительно из-за многообразия подходов к методике изложения каждого из разделов курса. Между тем для формирования у будущих учителей целостного физического мировоззрения чрезвычайно важно, чтобы физические знания образовали единую систему и позволили рассматривать явления, относящиеся к различным разделам современной физической теории, с единой точки зрения.

Решение этой задачи, на наш взгляд, может быть наилучшим образом достигнуто при использовании дедуктивного способа изложения курса теоретической физики. Идейной основой этого способа служит известный курс теоретической физики Ландау-Лифшица, в котором наиболее последовательно реализован принцип дедуктивного изложения материала и который хорошо зарекомендовал себя при серьезном изучении теоретической физики на самом высоком уровне. В настоящей работе излагается попытка применения аналогичного подхода в преподавании курса теоретической физики в педвузе, не выходя за рамки утвержденной программы [1].

Как известно (см., например, [5 - 7]), все основные уравнения механики и электродинамики можно получить исходя

из принципа наименьшего действия. Такой подход позволяет вывести из общих свойств пространства и времени также такие важные фундаментальные законы как законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В рамках такого изложения релятивистская механика также естественным образом свяжется с классической, ибо в этом случае меняется лишь соответствующее выражение для функции Лагранжа. К тому же использование формализма Лагранжа позволяет упростить решение ряда практических задач, которые в других случаях оказались бы значительно более сложными.

При использовании принципа наименьшего действия в электродинамике мы можем достаточно легко получить уравнения Максвелла и таким образом исходя из того же общего принципа вывести основные уравнения теории электромагнитного поля. Следует подчеркнуть, что в этом случае введение четырехмерного формализма также значительно проще, чем при других подходах. В рамках такого построения курса легко показать, что электростатическое и магнитостатическое поля являются частными случаями общего решения уравнений Максвелла. Можно также показать, что, например, известный из общего курса физики закон Кулона является лишь частным случаем уравнений Максвелла и т.д. Такая общая трактовка понятия поля создает, таким образом, все предпосылки для понимания идеи теории поля при рассмотрении физики элементарных частиц. К тому же при возможности изложения общей теории относительности (предположительно, например, в рамках спецкурса) изложенный выше подход может быть естественным образом продолжен и здесь, осуществив вывод уравнений гравитационного поля из принципа наименьшего действия.

Приведенные примеры показывают, что курс теоретической физики можно построить на основе некоторых общих фундаментальных принципов (принцип наименьшего действия, однородность и изотропность пространства и времени и др.), т.е. вполне последовательно реализовать дедуктивный метод изложения материала. Методика изложения отдельных вопросов программы представляет собой предмет специального обсуждения, ибо рамки дедуктивного подхода позволяют рассматривать альтернативные варианты получения тех или иных результатов. По мнению авто-

ра, наиболее удачным из имеющихся пособий, соответствующих выбранному методу изложения и программы [1], является краткий курс теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М.Лифшица [6 - 7]. Однако опыт преподавания теоретической физики на основе дедуктивного подхода показывает, что дальнейшее углубление и усовершенствование этого метода таит в себе широкие возможности для упрощения изложения материала и тем самым для лучшего понимания сущности изучаемых проблем.

В заключение отметим, что дедуктивный подход в изложении теоретической физики позволяет, на наш взгляд, наиболее полно раскрыть идейную сторону фундаментальных проблем физики. В сочетании же с традиционным индуктивным подходом в преподавании курса общей физики дедуктивный способ изложения теоретической физики создает, таким образом, некое диалектическое единство процесса преподавания физики в вузе, что в целом и призвано обеспечить оптимальные условия для формирования у студентов в процессе обучения системы знаний по физике.

#### Л и т е р а т у р а

1. Программы педагогических институтов. - Сб. № 10.-М., 1980.
2. Мирков Н.И. Классическая механика. - М., 1980.
3. Грашин А.Р. Квантовая механика. - М., 1974.
4. Ноздрев В.Ф., Сенкевич А.А. Курс статистической физики. - М., 1969.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. - М., 1958.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Т. 1. - М., 1969.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Т. 2. - М., 1972.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ МЕТОДИКИ ИЗЛОЖЕНИЯ  
РАЗДЕЛА "ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ"  
В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ ВТУЗОВ

П.Л. Кукк, Р.-К.Р. Лойде

Крайне ограниченное число часов, отводимое на электричество и магнетизм в курсе общей физики втузов, требует очень четкого и логичного изложения курса. В имеющихся учебниках и задачниках, к сожалению, допускается непоследовательное оперирование некоторыми основными понятиями электромагнетизма.

В настоящей работе излагаются некоторые методические рекомендации, полезные при изложении основ электромагнетизма. Мы рассмотрим вопросы, изложение которых в курсе общей физики является неточным и требует пересмотра.

1. Курс электричества начинается с изложения электростатики в вакууме. При этом исходным является закон Кулона для двух точечных зарядов. В некоторых учебниках (например, в [1]), курс физики начинается с закона Кулона в неограниченной однородной диэлектрической среде:

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon \epsilon_0 r^2}$$

Такое изложение является методически неверным, так как последний закон является не общим, а частным законом. Только после рассмотрения электрического поля в диэлектриках можно при желании вывести закон Кулона в неограниченной диэлектрической среде. Кроме того, тогда будет ясна и причина изменения силы взаимодействия зарядов в материальной среде.

2. Второе наше замечание касается изложения электроемкости в курсе общей физики. Программа курса физики [2] предусматривает следующий порядок изложения: электроемкость удлинённого проводника, взаимная емкость двух проводников. Методически более обоснованным является изложение в обратном порядке. В электродинамике доказана простая, но полезная тео-

рема - теорема взаимности Грина [3]. Рассмотрим систему зарядов  $q_i$ , расположенных в точках с потенциалами  $\varphi_i$ , причем предполагается, что потенциал  $\varphi_i$  в точке расположения заряда  $q_i$  создается всеми зарядами кроме  $q_i$ . Пусть имеется другая система зарядов  $q'_i$ , расположенных в тех же точках, а  $\varphi'_i$  - соответствующие потенциалы. Теорема взаимности Грина выражается тогда в следующей форме

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i q'_i = \sum_{i=1}^n \varphi'_i q_i$$

Эта теорема легко обобщается на случай  $n$  проводников с зарядами  $q_i$  и потенциалами  $\varphi_i$ , если в вышеприведенной формуле все члены с одинаковыми потенциалами объединить в один.

Данная теорема просто доказывается и в курсе общей физики, причем для дальнейшего требуется эта теорема для двух проводников

$$\varphi_1 q'_1 + \varphi_2 q'_2 = \varphi'_1 q_1 + \varphi'_2 q_2$$

Взаимная емкость двух проводников следует из последней формулы, если рассматривать систему, где проводникам даны заряды равной величины, но с противоположными знаками  $q = q_1 = -q_2$ ,  $q' = q'_1 = -q'_2$ . Тогда из вышеприведенной формулы мы получим

$$\frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q'}{\varphi'_1 - \varphi'_2}$$

Отсюда видно, что при рассмотрении системы из двух произвольных проводников пропорциональность заряда и разности потенциалов очень просто доказывается, ее не надо принимать как опытный факт.

Емкость уединенного проводника следует из емкости двух проводников, когда один из них удален в бесконечность ( $\varphi_2 = 0$ ).

3. Основными понятиями курса электромагнетизма являются понятия напряженности электрического поля  $\vec{E}$ , магнитной индукции  $\vec{B}$ , поляризуемости  $\vec{P}$  и намагниченности  $\vec{M}$ . Вспомогательными величинами являются векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ , которые прямого физического смысла не имеют. Векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$  полезны в теоретической физике, так как они упрощают запись многих уравнений. В курсе общей физики векторам  $\vec{D}$  и  $\vec{H}$ , следовательно, много внимания уделять не следует. Если запланирова-

не более подробное изложение ферромагнетизма, надо привести уравнение циркуляции вектора  $\vec{H}$ , без которого невозможно вычисление магнитного поля в зазорах ферромагнетиков.

Вместо исторически сложившихся названий векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  — напряженности электрического поля и магнитной индукции следует пользоваться одинаковыми названиями — электрическое поле  $\vec{E}$  и магнитное поле  $\vec{B}$ , как, например, в учебниках [4, 5].

4. При изложении основных понятий электричества обычно трудностей не возникает. Что касается изучения магнетизма, то студентам зачастую остается непонятным физический смысл векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . В некоторой степени в этом погрешны и имеющиеся учебники и задачки, где допускается напоследовательное оперирование  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Примером этого является описание магнитного поля в диа- и парамагнетиках, где намагниченность  $\vec{M}$  принято по историческим причинам связывать с вектором  $\vec{H}$ :  $\vec{M} = \chi \vec{H}$  (см., например, [6]), а не с физическим полем  $\vec{B}$ . Для более логичного изложения курса электромагнетизма в работе [9] была предложена схема определения основных понятий электромагнетизма, где аналогично  $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$  намагниченность определяется формулой

$$\vec{M} = \chi_m \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$$

и приведены основные соотношения при таком изложении. При таком изложении достигается аналогия с изложением электрического поля в диэлектриках.

Оказывается, что в данном вопросе еще нет единодушия. В недавней работе [8] автор предпочитает соотношение  $\vec{M} = \chi \vec{H}$ . Надо отметить, что определение намагниченности  $\vec{M}$  через  $\vec{B}$  приведено в последнем выпуске весьма авторитетного учебника [9].

В основном задачнике для втузов [10] в задачах по магнетизму, к сожалению, все еще требуется рассчитать магнитное поле токов  $\vec{H}$ , а не магнитную индукцию  $\vec{B}$ . Последнее эквивалентно требованию рассчитать электрическую индукцию зарядов вместо напряженности электрического поля.

В задачнике [10], как и в некоторых других задачниках, приведена одна некорректная задача, где требуется рассчитать

энергии магнитного поля в ферромагнетике при заданном внешнем поле  $\vec{H}$ . Поскольку заданная точка лежит на кривой намагничивания в нелинейной области, то применение формулы  $w = BH/2$  для плотности энергии неправильно.

В учебниках дается кривая гистерезиса ферромагнетика в переменных  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ . Если пользоваться единицами системы СИ, то остается непонятным, как небольшое внешнее поле (порядка  $10^3$  А/м) вызывает в ферромагнетике большое магнитное поле (порядка Т). В гауссовой системе с единицами эрстед и гаусс такого недоразумения нет. Поэтому целесообразнее провести кривую гистерезиса в переменных  $(B, B_0)$ , где  $B_0 = \mu \cdot H$  - внешнее магнитное поле.

В заключение отметим, что и электромагнитная волна характеризуется векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , а не векторами  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , как это принято во многих учебниках (см., например [1, 6]). Использование  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  объясняется формой уравнений Максвелла, которые в системе СИ симметричны относительно векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , а не физических векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. Гершензон Е.М., Малов Н.Н. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. - М., 1980.
2. Программа курса ФИЗИКА для инженерно-технических специальностей высших учебных заведений. - М., 1982.
3. Панковский В., Филипс М. Классическая электродинамика. - М., 1963. - § 3.2.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. 5. Электричество и магнетизм. - М., 1966.
5. Астахов А.В., Широнов Д.М. Курс физики II. Электромагнитное поле. - М., 1980.
6. Савельев И.В. Курс общей физики. - Т. 2. - М., 1982.
7. Лойде Р.-К.Р., Лаккас Р., Суурварик П. Вопросы методики преподавания физики в вузе, УП. - Тарту, 1982.
8. Кибартас В. Лят. физ. сборник. 1986. - Т. 26. - № 2.
9. Кигтель Ч. Введение в физику твердого тела. - М., 1978.
10. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. - М., 1985.

## ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАРЯДА МЕЛКИХ ЧАСТИЦ

П. П. Парис

В настоящее время в студенческих практикумах по общей физике единственной работой по определению заряда мелких частиц является опыт Милликэна [1, 2, 3]. Задание этой работы обычно формулируется как определение величины элементарного заряда. В большинстве случаев студенты способны наблюдать только относительно большие масляные капли, которые имеют заряд порядка нескольких сотен элементарных зарядов. Величину элементарного заряда определяют как наибольший общий делитель зарядов изучаемых масляных капель. В действительности в течение физического практикума студенты не успевают провести такое число измерений заряда капель, которое позволило бы им определить величину элементарного заряда. Но желание получить правильный результат (то есть табличные данные) провоцирует многих студентов комбинировать результаты своих измерений, чтобы подогнать их в желаемом направлении. Поэтому, на наш взгляд, в студенческом практикуме имеет смысл только определение величины заряда капли или определение числа элементарных зарядов на масляной капле.

В опыте Милликэна заряд частицы определяется путем изучения ее движения в вертикальном электрическом поле плоского конденсатора. Измеряя скорость движения частицы под действием гравитационного поля Земли в отсутствии электрического поля и зная напряженность электрического поля между пластинами конденсатора, когда заряженная частица неподвижна, то есть находится в состоянии равновесия, или измеряя скорость ее движения при наличии электрического поля, можно вычислить заряд частицы. Точность определения заряда частицы зависит главным образом от точности определения скорости ее движения. Для более крупных частиц (5 - 50 мкм) метод Милликэна определения заряда непригоден, поскольку скорости их падения в поле тяжести Земли так велики, что визуальным способом с помощью

микроскопа и секундомера скорости эти определить невозможно.

В настоящей статье предлагается способ определения заряда частиц и с указанными выше размерами. Приведенный метод заключается в стробоскопическом фотографировании траектории заряженных частиц в горизонтальном электрическом поле (см. рис. I).

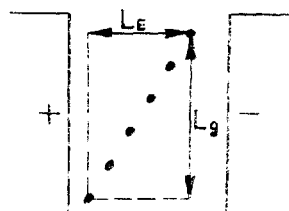


Рис. I. Стробоскопический след заряженной частицы в электрическом поле

По стробоскопической фотографии можно с достаточной точностью определить компоненты скоростей движения частицы в направлениях электрического и гравитационного полей  $v_E$  и  $v_g$  и судить о равномерности ее движения.

На частицу, находящуюся в пространстве между двумя электродами, действуют одновременно электрическое и гравитационное поля. Согласно закону Стокса, движение частицы в гравитационном поле (седиментация) описывается уравнением:

$$m g = 6\pi\eta r v_g, \quad (I)$$

а движение в электрическом поле задается выражением

$$E q = 6\pi\eta r v_E, \quad (2)$$

где  $m$  - масса частицы,  $\eta$  - вязкость воздуха,  $r$  - радиус частицы,  $E$  - напряженность электрического поля,  $g$  - ускорение силы тяжести.

Зная частоту следования светимпульсов  $f$ , а, следовательно, и их период, по стробоскопической фотографии трека заряженной частицы можно найти скорости  $v_g$  и  $v_E$  как

$$v_g = \frac{L_g}{\tau} \quad \text{и} \quad v_E = \frac{L_E}{\tau}, \quad (3)$$

где  $\tau$  - время движения частицы,  $L_y$  и  $L_E$  (см. рис. 1).

Обозначив  $K = 6\pi\eta r$ , из формул (1) и (2) получим

$$\left. \begin{aligned} m y &= K v_y \\ q E &= K v_E \end{aligned} \right\} (4)$$

откуда удельный заряд частицы

$$\frac{q}{m} = \frac{q v_E}{E v_y} \quad (5)$$

Мы видим, что определение удельного заряда частицы по ее траектории происходит просто и точность определения зависит главным образом от точности определения скоростей  $v_y$  и  $v_E$ , то есть от точности измерения отрезков  $L_y$  и  $L_E$ . Точность определения напряженности электрического поля между пластинами конденсатора намного больше.

Для определения заряда частицы мы должны знать ее массу. Масса шарообразных частиц  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ . Радиус  $r$  частицы можно определить по скорости ее равномерного падения в поле тяжести Земли таким же образом, как и в опыте Милликена [2]

$$r = \sqrt{\frac{9\eta L_y}{2(\rho - \rho_0) g \tau}} \quad (6)$$

где  $\rho$  - плотность частицы,  $\rho_0$  - плотность воздуха. Средний радиус частиц можно найти и по прямым измерениям измерительным микроскопом или дифракционным методом, описанным, например, в [1].

Если изучаемыми частицами являются зернышки цветочной пыльцы, споры грибов или ликопоидия (так называемый аэропланктон), то их плотность порядка  $1,1 - 1,2 \text{ г/см}^3$  [4]. Подходящим является ликопоидий, преимущество которого перед другими веществами, состоит в том, что его зернышки почти шарообразны и он доступен в необходимом количестве.

Основной частью разработанной установки для измерения заряда частиц (рис. 2) является кюветка, снабженная стеклянным окошком 3, через которое можно либо сфотографировать движение частиц, либо визуально наблюдать за их движением. Боковые стенки кюветки 1 и 2 образуют плоский конденсатор. Для введения в кюветку изучаемых частиц в центре ее крышки сделан

прорез 4 шириной 2–3 мм. Фотоаппарат соединен с микроскопом и сфокусирован в сильно освещенную область в центре кюветки. Сильное освещение частиц достигается применением лазера 8 и цилиндрической линзы 6. Благодаря использованию описанной осветительной системы, толщина освещенного слоя составляет несколько миллиметров, что обеспечивает достаточную резкость изображения всего освещенного участка. Ширина светового пучка соответствует расстоянию между пластинами конденсатора.

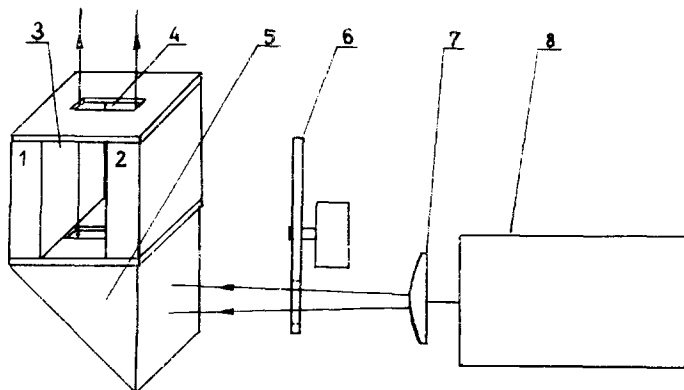


Рис. 2. Принципиальная схема измерительной установки

Для направления луча лазера в кюветку пользуются полным внутренним отражением от гипотенузы равнобедренной призмы 5. Стробоскопическое освещение получается при помощи стробоскопического диска с вырезом 6, помещенного на пути луча лазера. Величина выреза – порядка  $\frac{1}{10} - \frac{1}{15}$  доли круга. Частота следования световых импульсов определена скоростью вращения стробоскопического диска и проверяется при измерении строботаксометром. При измерениях пластины конденсатора должны находиться в строго вертикальном положении. Правильность их установки проверяется с помощью уровня. Разность потенциалов подается на пластины конденсатора от выпрямителя. Увеличение микроскопа определяется фотографированием калибровочной шкалы.

При помощи пульверизатора в пространство между пластинами конденсатора вводятся зернышки ликоподия, которые под влиянием трения заряжаются, приобретая различные положительные или отрицательные заряды. Зернышки видны в затемненном поле как светящиеся точки. Стробоскопическую фотографию хо-

рошего качества из них можно получить только при отсутствии побочного рассеянного света в кюветке. В работе желательно пользоваться пленкой чувствительностью 250 ед. ГОСТ, которая обладает повышенной чувствительностью в красной области спектра. Для определения координат точек траектории частиц пользуются измерительным столиком для рассматривания фотограмм.

Предлагаемая лабораторная работа требует от студентов знаний из разных разделов курса общей физики (механики, молекулярной физики, электростатики и оптики). Поскольку на одном фотоснимке обычно получаются изображения траекторий даже нескольких десятков частиц, то данная работа позволяет провести и статистическую обработку данных (изучить распределение частиц по размерам, построить гистограммы и т.д.). Данная работа может быть и примером лабораторной работы исследовательского характера. Студенты могут в течение нескольких практических занятий изучать совокупности разных частиц, определять их заряды и распределения по размерам, сравнивать полученные распределения с распределениями, полученными другими методами (например, при использовании измерительного микроскопа).

Исследовательский подход к лабораторной работе повышает интерес студентов к изучаемым вопросам и предоставляет им хорошую возможность глубже ознакомиться с научной работой. Немаловажным является и тот факт, что приведенный метод имеет прямую связь с современными методами исследования аэрозолей [4, 5], что сближает его с истинной исследовательской работой.

#### Л и т е р а т у р а

1. Ахматов А.С. Лабораторный практикум по физике. — М., 1980.
2. Куду К. Руководство к практикуму по электричеству. — Тарту, 1985.
3. Иверонова В.И. Физический практикум. Электричество и оптика. — М., 1988.
4. Фукс Н.А. Механика аэрозолей. — М., 1955.
5. Спурный К., Нех Ч., Седлачек Б., Стрех О. Аэрозоли. — М., 1964.

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ  
ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ АТОМНОЙ ФИЗИКИ X

Ю.Я. Лембра

Части I–IX опубликованы в сборнике ТГУ "В помощь преподавателю", в выпусках IV (1978 г., на эст. яз.), V (1980 г.), VI (1982 г.), VII (1982 г.), VIII (1983 г.), IX (1984 г.), X (1985 г.), XI (1986 г.) и XII (1987 г.).

24. Таблица по использованию единицы энергии ридберга

Как известно, в курсе атомной физики ощущается недостаток иллюстраций. Чтобы частично устранить этот пробел, мы предлагаем ниже сводную таблицу по использованию единицы энергии ридберга при изучении строения как атома, так и молекулы.

Учитывая потребности курса общей физики, используем определение единицы энергии ридберга по формуле

$$Rhc = \frac{m_e c^4}{8 \epsilon_0^2 h^2}, \quad (I)$$

где  $m_e$  – масса электрона, а численное значение  $Rhc = 13,6$  эВ. При выборе (I) частоты выражаются в единицах  $Rc$ , волновые числа – в единицах  $R$  и длины волн – в единицах  $1/R$ .

В таблице приводятся значения порядков величин разности уровней энергии.

|          |                                 |                                 |  |  |
|----------|---------------------------------|---------------------------------|--|--|
| Атом     | Внутренние<br>слои<br>$Z^2 Rhc$ | Внешние<br>слои<br>$Rhc$        | Спиноорбитальное<br>взаимодействие<br>$\alpha^2 Rhc$     | Сверхтонкая<br>структура<br>$\frac{m_e}{m_p} \alpha^2 Rhc$ |
| Молекула | Внутренние<br>слои<br>$Z^2 Rhc$ | Электронная<br>энергия<br>$Rhc$ | Колебательная<br>энергия<br>$\sqrt{\frac{m_e}{m_p}} Rhc$ | Вращательная<br>энергия<br>$\frac{m_e}{m_p} Rhc$           |

Приняты следующие обозначения:  $Z$  - порядковый номер элемента,  $\alpha = 1/137$  - постоянная тонкой структуры,  $m_p$  - масса протона.

Ниже приводится сетка, показывающая, в каких разделах нашей статьи соответствующие порядки величин установлены.

|              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Раздел 6 [1] | Раздел 6 [1] | Раздел 7 [2] | Раздел 7 [2] |
|              | Раздел 9 [2] | Раздел 9 [2] | Раздел 9 [2] |

В качестве комментария к пустой "клетке" в этой сетке отметим, что в химической связи участвуют электроны внешних слоев. Поэтому расстояния уровней внутренних слоев в молекуле будут такими же, как в атоме, то есть равны по порядку  $Z^2 R_{hc}$ .

## 25. Момент импульса (продолжение)

Методику изложения момента импульса мы уже рассмотрели в разделе 5 [1]. О систематизации названий квантовых чисел, описывающих момент импульса, мы рассказали в разделе 23 [3]. Эти методические положения получили отражение в наших учебных пособиях [4, § 14-16], [5, § 3-4]. В связи с появлением нового учебника [6] хочется сделать еще некоторые дополнительные замечания относительно методики преподавания момента импульса в общем курсе физики.

В книге [6] орбитальный и спиновый моменты импульса рассматриваются раздельно, исходя из одинаковых коммутационных соотношений (см. формулы (31.6) и (36.3) соответственно). Целесообразно, однако, сразу после получения формулы (31.6) привести обобщающее определение момента импульса с помощью коммутационных правил в форме

$$\left. \begin{aligned} \hat{j}_y \hat{j}_z - \hat{j}_z \hat{j}_y &= i\hbar \hat{j}_x \\ \hat{j}_z \hat{j}_x - \hat{j}_x \hat{j}_z &= i\hbar \hat{j}_y \\ \hat{j}_x \hat{j}_y - \hat{j}_y \hat{j}_x &= i\hbar \hat{j}_z \end{aligned} \right\} (2)$$

где  $\hat{j}_x$ ,  $\hat{j}_y$  и  $\hat{j}_z$  - операторы составляющих момента импульса.

Тогда формулы (31.6) и (30.3) [6] окажутся частным случаем формулы (2) при  $\hat{J} = \hat{T}$  и  $\hat{K} = \hat{L}$  соответственно.

В [6] введены также операторы понижения и повышения проекции момента импульса (обозначенные там через  $\hat{L}_-$  и  $\hat{L}_+$  соответственно). Возникает вопрос, стоит ли ввести эти операторы в курс общей физики. Фактическое лекционное время вряд ли позволит изложить этот вопрос. Студенту с посредственными способностями трудно изучить этот вопрос самостоятельно. Сильный же студент может изучить его по трудам, посвященным квантовой механике. Однако, если в [6] введены операторы понижения и повышения проекции момента, целесообразно их также последовательно использовать. Если через  $m$  обозначить проекцию момента импульса на ось  $Z$ , как это сделано в [6, с. 196], а через  $j$  — наибольшее положительное значение величины  $m$  (в [6, с. 196] вместо  $j$  стоит  $l$ ), то путем повторного применения оператора понижения проекции момента импульса получим результат, согласно которому  $m$  пробегает отличающиеся друг от друга на единицу значения в промежутке от  $-j$  до  $j$ . Вследствие симметрии минимальное значение  $m$  равно  $-j$ . Из изложенного ясно, что разность максимальной и минимальной проекций  $j - (-j) = 2j$  является неотрицательным целым числом. К сожалению, это простое, но важное преобразование пропущено в [6]. Из этого преобразования следуют две возможности. Одна возможность заключается в том, что  $j$  является неотрицательным целым числом ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ). Как показывает формула (31.10) [6], эта возможность реализуется, например, в случае орбитального момента импульса одной частицы. Другая возможность говорит о том, что  $j$  является положительным полуцелым числом ( $j = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$ ). Таким образом, полуцелые квантовые числа входят в теорию естественным образом. С учетом этого обстоятельства изучение спина и полного момента импульса электрона в § 36 и 38 [6] получило бы более содержательную основу.

В книге [6] обходится вопрос о прецессии моментов импульса. Такую модель, которая непосредственно вытекает из коммутационных правил (2), можно было изложить в рамках § 31 [6], например, следующим образом. На основе коммутационных правил (31.6) [6] у вектора момента импульса не может быть

определенного направления в пространстве. Однако на основе формулы (31.12) [6] существуют определенные значения длины вектора и одной его проекции (например, на ось  $Z$ ). Неопределенность двух других проекций описывает наглядно так, что вектор  $\vec{I}$  прецессирует вокруг оси  $Z$ .

## 26. Потенциальная кривая молекулы

В курсе общей физики изучается в основном двухатомная молекула. Даже в этом случае потенциальная кривая относится к числу трудно усваиваемых понятий. Ниже мы попытаемся изложить схему использования потенциальной кривой молекулы. В учебной литературе этот вопрос до сих пор не нашел должного освещения.

Исходим из того факта, что гамильтониан двухатомной молекулы можно рассматривать как сумму следующих пяти слагаемых:

$$\hat{H} = \hat{T}_e + \hat{T}_n + U_{en} + U_{ee} + U_{nn} \quad (3)$$

где  $\hat{T}_e$  - оператор кинетической энергии электронов,  $\hat{T}_n$  - оператор кинетической энергии ядер,  $U_{en}$  - потенциальная энергия взаимодействия электронов с ядрами,  $U_{ee}$  - потенциальная энергия взаимодействия электронов между собой и  $U_{nn}$  - потенциальная энергия взаимодействия двух ядер.

Учитываем, что ядра имеют массу, примерно в 2000 раз превышающую массу электрона. Поэтому состояние ядер изменяется относительно медленно и в первом приближении в формуле (3) можно пренебречь слагаемым  $\hat{T}_n$ . Такой способ описания молекулы называется адиабатическим приближением. Итак, гамильтониан адиабатического приближения выражается формулой

$$\hat{H}_0 = \hat{T}_e + U_{en} + U_{ee} + U_{nn} \quad (4)$$

Если решить уравнение Шредингера с гамильтонианом  $H_0$ , то собственное значение  $\varepsilon$  будет зависеть от межъядерного расстояния  $\rho$ . Если учесть также движение ядер, то есть использовать влияние оператора  $\hat{T}_n$ , то оказывается, что величина  $\varepsilon(\rho)$  выступает в роли потенциальной энергии. В связи с этим кривая  $\varepsilon(\rho)$  называется потенциальной кривой молекулы.

Таким образом, можно привести следующее четкое опреде-

ление. Потенциальная кривая молекулы – это кривая, характеризующая зависимость собственного значения гамильтониана адиабатического приближения от межъядерного расстояния. В учебных группах, в программу которых не включен операторный подход, идею адиабатического приближения следует излагать качественно. Надо отметить, что в этом случае энергия молекулы зависит от межъядерного расстояния, и обозначить эту зависимость, например, через  $\varepsilon(\rho)$ . Поскольку сюда входит межъядерное расстояние, то при изучении движения ядер величина  $\varepsilon(\rho)$  уже выступает в роли потенциальной энергии.

Качественная форма потенциальной кривой стабильной молекулы приведена на рис. При  $\rho = \rho_0$  потенциальная кривая имеет минимум. В связи с этим величину  $\rho_0$  называют равновесным межъядерным расстоянием.

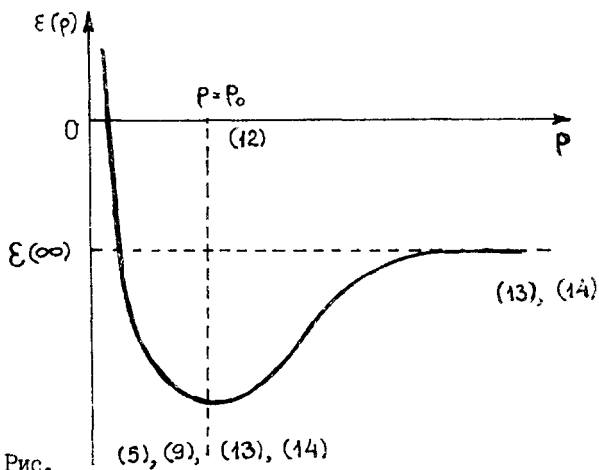


Рис.

$$\text{Величину } E_e = \varepsilon(\rho_0) \quad (5)$$

называют электронной энергией молекулы. Название связано с тем обстоятельством, что при  $\rho = \rho_0$  в качественном рассмотрении ядра покоятся.

Колебательная энергия молекулы рассчитывается по формуле

$$E_v = \sqrt{\frac{k}{M}} \left( v + \frac{1}{2} \right), \quad (6)$$

где  $v$  – колебательное квантовое число, принимающее значения

$$v = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Приведенная масса молекулы  $M$  подчиняется формуле

$$M = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}, \quad (8)$$

где  $M_1$  и  $M_2$  - массы ядер.

Силовая постоянная молекулы  $k$  определяется по формуле

$$k = \left. \left( \frac{d^2 \epsilon}{d\rho^2} \right) \right|_{\rho = \rho_0}. \quad (9)$$

Таким образом, силовая постоянная определяется с помощью второй производной потенциальной кривой в точке ее минимума.

Для уточнения отметим, что формула (6) действует при малых колебаниях, то есть в том случае, если  $\rho$  относительно мало отличается от  $\rho_0$ .

Вращательная энергия молекулы вычисляется из формулы

$$E_n = \frac{J(J+1)k^2}{2I}. \quad (10)$$

Здесь вращательное квантовое число  $J$  пробегает значения

$$J = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Величина  $I = M\rho_0^2$  (12)

называется моментом инерции молекулы. Таким образом, для нахождения момента инерции необходимо знать абсциссу минимума потенциальной кривой.

Значение  $\epsilon(\infty)$  (см. рис.) используется при определении энергии диссоциации. Принято использовать двоякого типа определения энергии диссоциации:

$$D = \epsilon(\infty) - \epsilon(\rho_0) \quad (13)$$

и

$$D = \epsilon(\infty) - \epsilon(\rho_0) - (E_v) \Big|_{v=0} \quad (14)$$

Первое определение просто связано с видом потенциальной кривой. Второе определение является более содержательным. Оно определяет энергию, которую следует сообщить молекуле, чтобы вызвать ее диссоциацию исходя из основного состояния. Поскольку роль колебательной энергии в (14) относи-

тельно мала, то практически определения (I3) и (I4) различаются лишь незначительно.

В заключение резюмируем схему использования потенциальной кривой молекулы. Электронная энергия молекулы определяется ординатой минимума потенциальной кривой. Для нахождения колебательной энергии молекулы надо предварительно знать силу постоянную, которая определяется как вторая производная потенциальной кривой в точке ее минимума. Чтобы найти вращательную энергию молекулы, необходимо знать ее момент инерции. Для нахождения момента инерции надо, в свою очередь, знать абсциссу минимума потенциальной кривой. При нахождении энергии диссоциации молекулы необходимо использовать ординату минимума потенциальной кривой и ее поведение при бесконечно большом межъядерном расстоянии. Для иллюстрации изложенной схемы на рис. проставлены номера соответствующих формул.

#### Л и т е р а т у р а

1. Лембра Ю.Я. Некоторые методические приемы при преподавании атомной физики II // Вопросы методики преподавания физики в вузе. В помощь преподавателю V. - Тарту, 1980.
2. Лембра Ю.Я. Некоторые методические приемы при преподавании атомной физики III // Методика преподавания физики в вузе. В помощь преподавателю VI. - Тарту, 1982.
3. Лембра Ю.Я. Некоторые методические приемы при преподавании атомной физики IX // В помощь преподавателю XII. (в печати).
4. Лембра Ю. Физические основы квантовой механики. - Тарту, 1983.
5. Атомные спектры: некоторые методические приемы и примеры / Сост. Ю.Я. Лембра. - Тарту, 1985.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. Ч. I. - М., 1986.

О МИНИМАЛЬНОМ ЗНАЧЕНИИ НАПРЯЖЕННОСТИ  
И ПЮТОКА МАГНИТНОГО ПОЛЯ,  
КОТОРОЕ МОЖНО ИЗМЕРИТЬ  
С ПОМОЩЬЮ СВОБОДНОГО ПРОБНОГО ЗАРЯДА

И. Э. Кийранен

В связи с повышением точности в физических экспериментах с пробными телами возникает естественный вопрос о том, какие ограничения налагают на данные измерения квантово-механические свойства этих пробных тел [1, 2]. Например, в работе [3] из соотношения неопределенности для координаты и импульса получено, что минимальная сила, которая может быть обнаружена по отклику свободной частицы, равна

$$F_{\min} \geq \frac{1}{\tau} \sqrt{\frac{4\hbar m}{\tau}}, \quad (1)$$

где  $m$  - масса частицы и  $\tau$  - время действия силы (время наблюдения).

Задачу о минимальном значении напряженности электрического поля, которое можно измерить с помощью свободного пробного заряда, подробно проанализировали уже в 1933 году Н. Бор и Л. Розенфельд [4] (цитируется по переводу [5]). Им удалось также показать, что обратное действие собственного поля пробного заряда можно последовательно учесть, если принять во внимание конечные размеры этого пробного тела и поэтому измерить лишь среднее значение напряженности поля в протяженной пространственно-временной области. В [5, с. 132] приведена формула

$$\overline{\Delta E_x} \sim \frac{\hbar}{\rho_{\Delta x} VT}, \quad (2)$$

где  $\rho$  - плотность электрического заряда,  $V$  - объем пробного тела,  $T$  - время действия силы и  $\Delta x$  - перемещение пробного тела за это время.

Автор статьи [6] получил аналогичную формулу из соотно-

нения неопределенности для энергии и времени

$$\Delta \mathcal{E} \cdot \Delta t \geq \hbar, \quad (3)$$

где  $\Delta \mathcal{E} = q E_x \Delta t$  - работа электрического поля над пробным точечным зарядом  $q$ . Тогда из (3) получим

$$E_x \geq \frac{\hbar}{q \Delta x \Delta t}, \quad (4)$$

где  $\Delta x$  - перемещение заряда в направлении вектора  $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$  за время  $\Delta t$ . Чтобы избежать трудностей, связанных с обратным действием пробного заряда, мы считаем, что измерения производят с помощью достаточно малых пробных зарядов.

Возникает естественный вопрос: можно ли найти аналогичную формулу для магнитного поля? Работа магнитного поля над зарядом равна нулю. Другими словами, магнитное поле не изменяет кинетическую энергию (и абсолютное значение импульса) частицы. Поэтому нельзя использовать соотношение (3). Однако изменяются компоненты импульса. В силу этого мы исходим из соотношения неопределенностей для координат и компонент импульса:

$$\left. \begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta p_x &\geq \hbar \\ \Delta y \cdot \Delta p_y &\geq \hbar \\ \Delta z \cdot \Delta p_z &\geq \hbar. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Сначала мы показываем, что в случае электрического поля формула (5) дает такой же результат (4), который раньше был получен из соотношения неопределенности для энергии времени. Теперь  $\vec{F} = q \vec{E}$  и изменение импульса пробной частицы равно

$$\Delta p_x = q E_x \Delta t. \quad (6)$$

Первое соотношение из (5) дает теперь уже известный результат (4). Обозначим  $\Delta x_0 \equiv c \Delta t$ . Тогда

$$E_x \geq \frac{\hbar c}{q \Delta x \Delta x_0}. \quad (7)$$

В случае магнитного поля сила Лоренца  $\vec{F} = \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{H})$ . Пусть конкретно  $\vec{H} = (0, 0, H_z)$  и начальная скорость частицы  $\vec{v}_0 = (v_0, 0, 0)$ .

Тогда изменения  $x$ - и  $y$ -компонент импульса пробной ча-

стицы по модулю равны соответственно:‡

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_x &= \frac{q}{c} v_y H_z \Delta t = \frac{q}{c} \Delta y H_z \\ \Delta p_y &= \frac{q}{c} v_x H_z \Delta t = \frac{q}{c} \Delta x H_z \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и вместе с соотношениями (5) мы получим

$$H_z \geq \frac{\hbar c}{q \Delta x \Delta y} . \quad (9)$$

Сравнивая (7) и (9), можно изобразить их вместе в компактном виде:

$$|F_{\mu\nu} \Delta x_\mu \Delta x_\nu| \geq \frac{\hbar c}{q} \quad (10)$$

(не суммировать по  $\mu$  и  $\nu$ !  $\mu \neq \nu$ ), где  $F_{\mu\nu}$  - компоненты тензора электромагнитного поля.

Поскольку электрическое и магнитное поле - компоненты единого электромагнитного поля, существует возможность получения формулы (9) исходя из формулы (4). В системе  $K'$ , которая движется вместе с пробным зарядом относительно системы  $K$  со скоростью  $\vec{v}_0 = (0, v_0, 0)$ , сила Лоренца равна нулю и перемещение пробной частицы в направлении  $x$  может происходить только под действием электрического поля. Формулы преобразований для компонент поля

$$\left. \begin{aligned} E'_x &= \frac{v_0}{c} \gamma H_z, \quad E'_y = E'_z = 0 \\ H'_x &= H'_y = 0, \quad H'_z = \gamma H_z \end{aligned} \right\} , \quad (11)$$

где  $\gamma \equiv (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$  - фактор Лоренца. Формулы (11) и соотношение (4) в системе  $K'$  дают в нерелятивистском приближении ( $\gamma \approx 1$ ) соотношение (9).

Величина  $H_z \Delta x \Delta y \equiv \Phi$  является магнитным потоком через плоскость  $xy$ . Следовательно, неравенство (9) означает просто, что

$$\Phi \geq \frac{\hbar c}{q} . \quad (12)$$

Итак, пробным зарядом  $q$  можно измерить магнитный поток только с точностью до величины  $\frac{\hbar c}{q}$ . Например, в случае  $q = e$   $\Phi \geq \Phi_0$ , где  $\Phi_0 = \frac{\hbar c}{e} \sim 10^{-7} \text{ Гс} \cdot \text{см}^2 = 10^{-15} \text{ Вб}$ . Такие кванты

‡ Предположим, что магнитное поле  $H_z \approx \text{const.}$  в промежутке  $\Delta t$ .

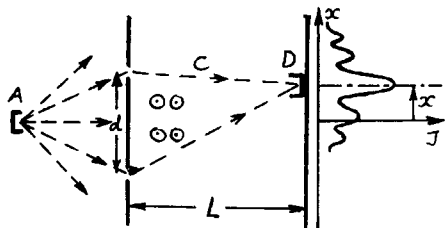
потока встречаются обычно в сверхпроводниках, где  $q = 2e$ . В частном случае, если  $q \rightarrow \infty$ , точность измерения повышается, но тем самым уже необходимо учитывать обратное действие собственного поля пробного заряда, о чем говорилось раньше.

Интересное приложение соотношения (12) связано с интерференционным опытом с электронами, принципиальная схема которого приведена на рисунке. Под действием магнитного поля происходит смещение интерференционной картины на величину [7]

$$x \approx \frac{Lq\lambda}{c\hbar d} \phi, \quad (13)$$

где  $\lambda = \frac{h}{p}$  - длина волны де Бройля электрона, а  $\phi \equiv \oint_C \vec{A} d\vec{e}$  - магнитный поток. Оказывается, что существует минимальное перемещение благодаря неравенству (12):

$$x \geq \frac{L}{d} \lambda \quad (14)$$



Обычно  $\lambda \approx 0,01 \text{ \AA}$ ,  $L \approx 0,1 \text{ м}$ ,  $d \approx 10^{-6} \text{ м}$ , и тогда  $x \approx 10^{-8} \text{ м} = 100 \text{ \AA}$ .

Такого рода эксперименты проведены в связи с эффектом Бома-Ааронова [8]. В нашем случае неважно, сконцентрированы силовые линии магнитного поля в тонкую струну перпендикулярно к плоскости рисунка или распределены равномерно за стенкой с щелями.

В заключение отметим, что более реальные пути для точного измерения магнитного поля основаны на сверхпроводящих квантовых интерферометрах типа СКВИД (SQUID) [9]. Ограничения на их энергетическую чувствительность рассматриваются в работе 10 также на основе соотношений неопределенностей.

Благодарю Ю. Лембра, А. Хаав и М. Ансо за полезные обсуждения, а также М. Халлик за техническую помощь.

## Л и т е р а т у р а

1. Брагинский В.Б. Физические эксперименты с пробными телами. - М., 1970.
2. Лихарев К.К. Реально-квантовые макроскопические эффекты в слабой сверхпроводимости // УФН.- 1983.- 139. - Вып. I.
3. Брагинский В.Б., Воронцов Д.И. Квантово-механические ограничения в макроскопических экспериментах и современная экспериментальная техника // УФН. - 1974. - 114. - Вып. I.
4. Bohr N., Rosenfeldt L. Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrößen.// Kgl.Danske Vidensk. Selskab. Math.-Fys.Medd.- 1933. - 12. - № 8. - S. 3-65.
5. Бор Н. Избр. научные труды П. - М., 1971.
6. Лустовойт В.И. Некоторые вопросы измерений физических величин // Измерительная техника. - 1977. - № 4.
7. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэнде М. Фейнмановские лекции по физике. - М., 1977. - № 6.
8. Буккель В. Сверхпроводимость. - М., 1975.
9. Бароне А., Патерно Дж. Эффект Джозефсона. - М., 1984.
10. Voss R.F. Uncertainty principle limit to the energy sensitivity of SQUIDS and other linear amplifiers // Appl. Phys. Lett. - 1981.-38.- Pp. 182-184.

# О ХАРАКТЕРЕ КЛАССИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ В ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЕ, ДОПУСКАЮЩЕЙ СОВПАДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА И ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

Д. Я. Лембра

При изложении в университетском курсе квантовой механики вопроса о предельном переходе от квантовой механики к классической можно дать также понятие о системе уравнений Розена [1], позволяющей найти потенциалы, при которых имеет место совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона-Якоби. Простым является решение этой системы в одномерной системе [2]. Данный вопрос можно предложить в качестве самостоятельной задачи в сильных учебных группах. По характеру трудоемкости эта задача не выходит за пределы уровня задач в известном сборнике [3].

В настоящем методическом сообщении мы преследуем цель - выяснить характер классического движения в одномерной системе, допускающей совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона-Якоби. Полученные сведения можно использовать и при организации самостоятельной работы в сильных учебных группах.

## Основные положения метода

При изложении системы Розена решение уравнения Шредингера для стационарных состояний представляют в форме

$$\psi = R e^{\frac{iS}{\hbar}}, \quad (1)$$

где  $R$  и  $S$  - вещественные функции координат. Из системы Розена одновременно с функциями  $R$  и  $S$  находится потенциальная энергия  $U$ .

В системе Розена не используется малость постоянной Планка. Поэтому решение системы Розена не означает совпадения квантово-механического и классического движения, как неудачно указано в заглавии статьи [1]. Составление системы Розена,

например, не затрагивает принципа неопределенности. Этот принцип все равно действует для квантово-механического состояния с волновой функцией  $\psi$ , определяемой из системы Розена. Решение системы Розена означает с точки зрения квантовой механики лишь модель, согласно которой плотность вероятности  $R^2$  распространяется в пространстве по законам классической механики со скоростью

$$\vec{v} = \frac{1}{m} \text{grad } S \quad (2)$$

так же, как двигалась бы частица по законам классической механики при той же потенциальной энергии, определяемой из этой системы.

Перейдем теперь к изучению системы Розена в одномерном случае. В [2] доказано свойство

$$\frac{dS}{dx} = \frac{A}{R^2}, \quad (3)$$

где  $A$  — постоянная интегрирования.

В случае классического движения согласно (2)  $dS/dx$  является импульсом частицы. Таким образом,

$$\frac{dS}{dx} = m \frac{dx}{dt}. \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) получим

$$m \frac{dx}{dt} = \frac{A}{[R(x)]^2}. \quad (5)$$

Следует подчеркнуть, что после решения системы Розена величина  $R$  является известной функцией координаты. С учетом этого обстоятельства разделим в формуле (5) переменные

$$dt = \frac{m}{A} [R(x)]^2 dx. \quad (6)$$

Предположив, что в начальный момент времени  $t = 0$  частица находится в точке  $x = 0$ , после интегрирования получим

$$t = \frac{m}{A} \int_0^x [R(\xi)]^2 d\xi. \quad (7)$$

Формула (7) в принципе устанавливает зависимость координаты от времени. Следовательно, она отражает закон движения частицы по классической механике.

Случай, при котором  $C = 0$

Здесь и в дальнейшем  $C$  обозначает постоянную в третьем уравнении системы Розена.

Выищем для иллюстрации из [2] при  $C = 0$  решение системы Розена

$$\psi = -\frac{A^2}{2m(Bx + D)^2} \quad (8)$$

$$R = Bx + D. \quad (9)$$

$$S = -\frac{A}{B(Bx + D)}, \quad \text{если } B \neq 0 \quad (10)$$

$$S = \frac{Ax}{D^2}, \quad \text{если } B = 0 \quad (11)$$

В связи с формулой (9) отметим, что постоянные  $B$  и  $D$  не могут одновременно равняться нулю. В противном случае по (1) волновая функция обращалась бы в нуль, что, однако, означает отсутствие состояния.

Для получения закона классического движения при потенциальной энергии (8) следует функции  $R$  из формулы (9) подставить в формулу (7). После интегрирования получим

$$x = \frac{m\lambda}{A} \sqrt{\frac{B^2 x^2}{3} + BDx + D^2} \quad (12)$$

В частном случае  $B = 0$  получим из формулы (12)

$$x = \frac{At}{mD^2}, \quad (13)$$

что означает равномерное движение частицы со скоростью  $A/mD^2$ . Другими словами: в данном случае мы имеем свободную частицу. Для иллюстрации отметим, что этому обстоятельству соответствует по формуле (8) постоянное значение потенциальной энергии. На основе модели толкования решения системы Розена, приведенной в предыдущем разделе нашего сообщения, в случае  $B = 0$  квантово-механическая плотность вероятности  $D^{-2}$  движется с постоянной скоростью  $A/mD^2$ . Этот пример отчетливо иллюстрирует то обстоятельство, что квантово-механическое и классическое описания свободной частицы различаются.

Если  $B \neq 0$ , то для получения классического закона дви-

жения следует решить кубическое уравнение (I2). Подстановкой

$$y = x + \frac{D}{B} \quad (I4)$$

получим соответствующее приведенное уравнение (см., например, [4, с. I68] ) в простой форме

$$y^3 - \frac{D^3}{B^3} - \frac{3At}{mB^2} = 0. \quad (I5)$$

Уравнение (I5) имеет единственное вещественное решение

$$y = \frac{1}{B} \sqrt[3]{D^3 + \frac{3ABt}{m}}. \quad (I6)$$

С учетом формул (I4) и (I6) получим при  $B \neq 0$  закон классического движения

$$x = \frac{1}{B} \left( \sqrt[3]{D^3 + \frac{3ABt}{m}} - D \right). \quad (I7)$$

Формула (I7) показывает, что координата изменяется медленнее, чем при равномерном движении.

#### Случай, при котором $C \neq 0$

В [2] доказано, что положительное значение  $C$  не обеспечивает выполнения условия конечности волновой функции. Поэтому можно положить  $C = -\mu^2$ , где  $\mu$  - вещественная постоянная.

В целях приложений данного методического сообщения удобно полученные в [2] величины  $U$ ,  $R$ ,  $S$  (см. там же формулы (46), (45) и (48) соответственно) преобразовать методом вспомогательного угла к следующей форме

$$U = - \frac{A^2}{2mN^2 \cos^4(\mu x + \alpha)} \quad (I8)$$

$$R = N \cos(\mu x + \alpha) \quad (I9)$$

$$S = \frac{A}{\mu N^2} \operatorname{tg}(\mu x + \alpha), \quad (20)$$

где  $N$  и  $\alpha$  - постоянные интегрирования.

Для получения закона классического движения при потен-

циальной энергии (18) функцию  $R$  из формулы (19) следует подставить в формулу (7). Выполняя интегрирование, получим

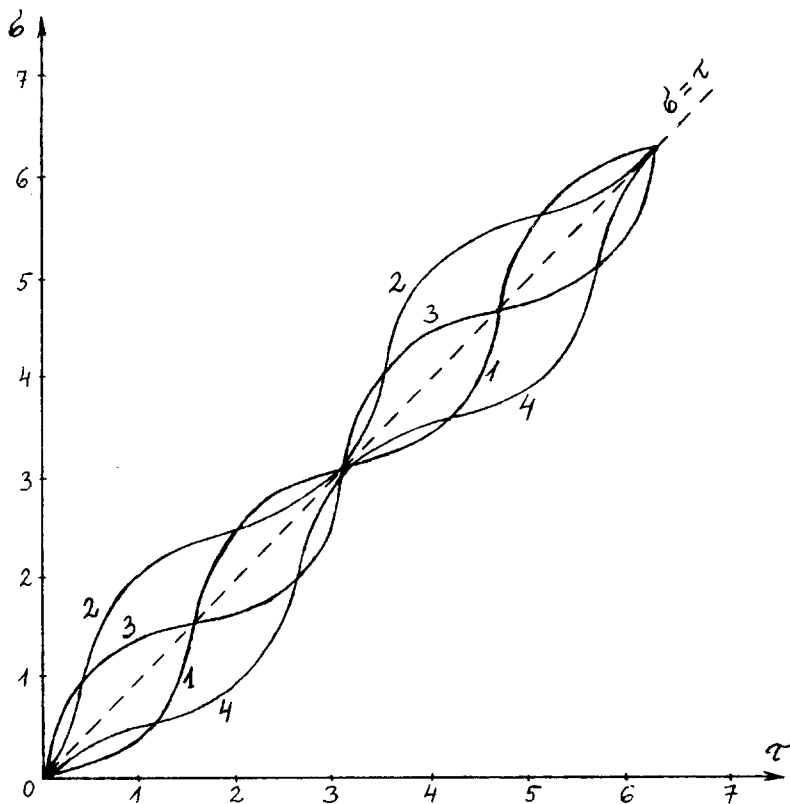
$$t = \frac{m N^2}{2\mu A} [\mu x + \sin \mu x \cos(\mu x + 2\alpha)]. \quad (21)$$

Теперь целесообразно ввести безразмерные время

$$\tau = \frac{2\mu A t}{m N^2} \quad (22)$$

и координату

$$\delta = \mu x. \quad (23)$$



Из (21) - (23) получим закон классического движения в безразмерных переменных

$$\tau = \delta + \sin \delta \cos(\delta + 2\alpha). \quad (24)$$

Зависимость (24) при некоторых значениях  $\alpha$  иллюстрируется на рис. Кривые 1, 2, 3 и 4 соответствуют следующим значениям:  $\alpha = 0$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/2$  и  $3\pi/4$ . В целях облегчения чтения рисунка отметим, что кривые 1 и 3 колеблются вокруг прямой  $\delta = \tau$ . Кривая 2 лежит выше, а кривая 4 - ниже этой прямой.

Ввиду того, что произведение синуса на косинус является ограниченной функцией, закономерность типа (24) относительно мало отличается от пропорциональной связи, особенно при больших  $\delta$ . В связи с этим закон классического движения при потенциальной энергии (18) в некоторой степени напоминает закон равномерного движения. Такое сравнение имеет сугубо условный характер, ведь при движении частицы в поле (18) на нее действует сила. Поскольку эта сила имеет осциллирующий характер, то с течением времени устанавливается закон изменения координаты, напоминающий закон равномерного движения.

Можно надеяться, что приведенные в данном методическом сообщении примеры способствуют достижению большего разнообразия при проведении практических занятий по квантовой механике. Они также позволяют повторить курс теоретической механики.

#### Л и т е р а т у р а

1. Rosen N. Identical motion in quantum and classical mechanics // Amer. Journ. Phys. - 1964. - Vol. 32. - No 5. - P. 377-379.
2. Лембра Д.Я. О потенциалах, допускающих совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона-Якоби // Учен. зап. Тартуского ун-та. - Тарту, 1980. - Вып. 520.
3. Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. - М., 1981.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. - М., 1981.

НЕКОТОРЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИЗЛОЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ  
ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ  
В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

В.А. Веймер, Р.Й. Манкин

Важной задачей курса общей физики в высшей школе является формирование мировоззрения будущих специалистов. Исходя из последних достижений науки необходимо хотя бы частично заполнить пробел в программе общей физики в области космологии и астрофизики. Вследствие ограниченности лимита времени целесообразно рассматривать вопросы, связанные с этими темами, как иллюстрации к другим разделам курса общей физики.

В настоящей статье представлены некоторые примеры из общей теории относительности и космологии в рамках курса механики.

### 1. Влияние гравитационного поля на темп времени

Предположим, что слабое гравитационное поле однородно, то есть ускорение сил тяжести  $\vec{g}$  одинаково во всех точках рассматриваемой области пространства. Это условие реализуется, если рассматриваемая область пространства достаточно мала, вследствие чего изменение ускорения может не учитываться (например, вблизи Земли или Солнца).

Пусть первый наблюдатель находится в точке  $X_1$  (рис. 1) в инерциальной системе отсчета  $K$ , которую в дальнейшем будем считать неподвижной. Поскольку во всех точках инерциальной системы отсчета темп времени одинаков, то во всех точках этой системы часы всегда показывают одинаковое время, то есть все часы синхронизованы.

Пусть второй наблюдатель находится в той же точке  $X_1$  также в неподвижной системе отсчета  $K_2$  в однородном гравитационном поле с напряженностью  $\vec{g}$  (рис. 2). В этой системе отсчета часы не синхронизованы, так как темп времени зависит от

точки наблюдения ( $K_g$  - система неинерциальная).

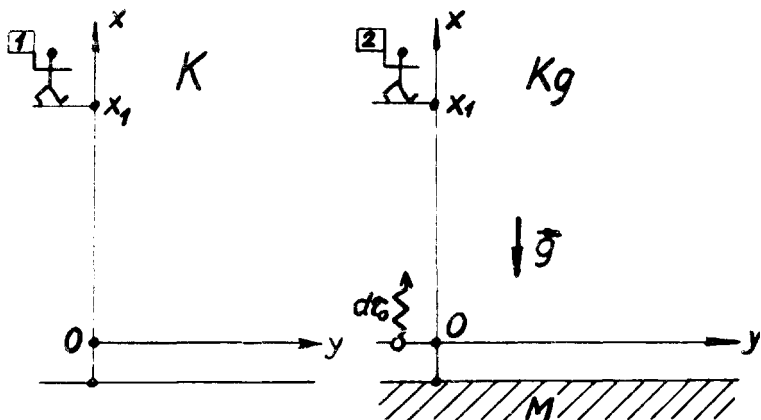


Рис. 1

Рис. 2

Начала координат систем отсчета  $K$  и  $K_g$  можно считать совпадающими, если расстояние от них до наблюдателей достаточно мало (укорачивание длин отрезков в гравитационном поле не учитывается).

Пусть теперь в системе  $K_g$  в точке  $X = 0$  происходит событие продолжительности  $d\tau_0$ . Второй наблюдатель в точке регистрирует продолжительность события  $d\tau$ .

Поставим вопрос: какова связь между  $d\tau_0$  и  $d\tau$ ?

Из принципа эквивалентности вытекает, что все физические явления в статическом, однородном гравитационном поле происходят так же, как они происходят в специально подобранных равноускоренных системах отсчета при отсутствии гравитационного поля. В рассматриваемом случае системе отсчета  $K_g$  эквивалентны все системы отсчета, движущиеся с ускорением  $\vec{a}$  в направлении оси  $x$ , то есть  $\vec{a} = -\vec{g}$ .

Таких систем отсчета много и они различаются только скоростью относительно инерциальной системы  $K$  в некоторый определенный момент времени.

Важно подчеркнуть, что исходя из принципа эквивалентности в этих неинерциальных системах отсчета все физические процессы протекают так же, как и в системе  $K_g$ . Поэтому в

дальнейшем вместо гравитационного поля мы будем рассматривать эти неинерциальные системы отсчета.

Из этих систем отсчета выберем одну, которую обозначим  $K'$ .

Пусть событие происходит в точке  $O'$  ( $O' \approx 0$ ) и пусть второй наблюдатель находится в точке  $x'_1 = x_1$  (рис.3). Ввиду того, что  $K'$  эквивалентно  $K_g$ , то и здесь второй наблюдатель регистрирует продолжительность события  $d\tau$ . В неинерциальной системе отсчета часы не синхронизованы. Поэтому мы прибегнем к помощи первого наблюдателя из системы отсчета  $K$ , где все часы шли синхронно во всех точках.

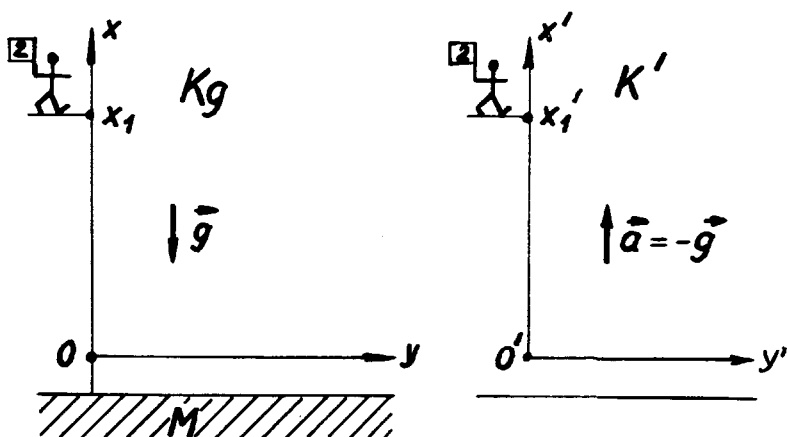


Рис. 3

Для упрощения сравнения показаний часов выберем  $K'$  такую, чтобы в момент регистрации оба наблюдателя находились в одном и том же месте ( $x'_1 = x_1$ ) и их относительная скорость равнялась нулю ( $V=0$ ) (рис. 4). В таком случае оба наблюдателя могут сверить часы.

Но так как относительная скорость движения наблюдателей в момент сверки часов равна нулю, то и ход часов для наблюдателей систем отсчета  $K$  и  $K'$  одинаков и оба они отмечают продолжительность события  $d\tau$ .

Продолжительность события  $d\tau_0$  в точке  $O'$  мы получаем из следующего рассуждения. Поскольку в инерциальной системе отсчета ход часов во все моменты времени одинаков, то достаточно, чтобы первый наблюдатель из системы отсчета  $K$  подождал, пока точка  $O'$ , где произошло событие, переместится в точку его расположения и сравнил тогда показание часов, находящихся в точке  $O'$ , со своими. Учитывая, что точка  $O'$  движется относительно первого наблюдателя с ускорением  $\vec{a}$  и пройденный путь  $x'_1 \approx x_1$ , получим, что в момент сравнения показаний часов скорость точки  $O'$  относительно первого наблюдателя  $v = \sqrt{2ax_1}$  (рис. 5).

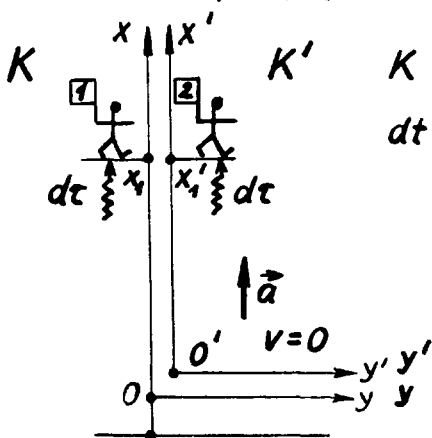


Рис. 4

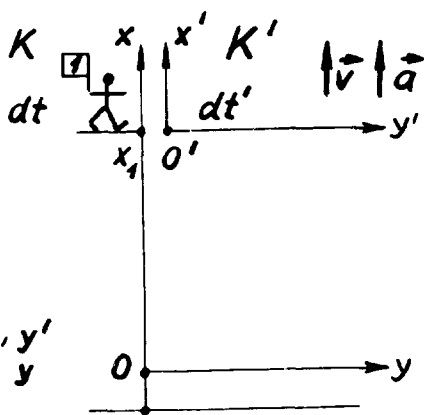


Рис. 5

Согласно специальной теории относительности промежутки времени, измеренные двумя движущимися относительно друг друга со скоростью  $v$  часов, связаны соотношением

$d\tau = d\tau' (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ , причем это соотношение действительно для всех часов в обеих системах отсчета и хотя в данном случае одна из систем отсчета неинерциальная, эта связь справедлива для часов, находящихся в одной точке пространства.

Такая же связь должна быть справедливой для продолжительности события. Следовательно,

$$d\tau = d\tau_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \text{ где } v^2 = 2ax_1.$$

Итак,  $d\tau$  — продолжительность события, отмеченная вторым наблюдателем, а  $d\tau_0$  — продолжительность события в точке  $O'$ .

Теперь мы можем вернуться к системе  $K_g$ . Поскольку предполагалось слабое гравитационное поле, то  $\alpha x_1 \ll c^2$  и, следовательно, в первом приближении справедливо соотношение

$$d\tau \approx d\tau_0 \left(1 - 2\alpha x_1/c^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx d\tau_0 \left(1 + \frac{\alpha x_1}{c^2}\right).$$

В случае слабого однородного гравитационного поля гравитационный потенциал в точке  $X$ , в системе отсчета  $K_g$  может быть представлен в виде  $\varphi_1 = \varphi_0 + g x_1$  где  $\varphi_0$  — потенциал поля в точке  $O$ . Отсюда следует, что разность гравитационных потенциалов между точками  $O$  и  $X_1$  будет  $\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_1 = -\alpha x_1$ .

Ввиду того, что  $K_g$  и  $K'$  — эквивалентные системы отсчета, то для второго наблюдателя, находящегося в  $K_g$ , можем записать

$$d\tau = d\tau_0 \left(1 + 2\Delta\varphi/c^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx d\tau_0 \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{c^2}\right).$$

Отсюда следует, что вблизи массивных тел, где  $(\Delta\varphi \neq 0)$ , темп времени меньше, чем вдали от них  $(\Delta\varphi \rightarrow 0)$ .

Последние соотношения верны при любом слабом статическом гравитационном поле. Например, если событие произошло вблизи звезды или планеты с массой  $M$  и радиусом  $R$ , то для далекого наблюдателя  $(\varphi \rightarrow 0)$ :

$$d\tau = d\tau_0 \left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 R}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx d\tau_0 \left(1 + \frac{\gamma M}{c^2 R}\right). \quad (I)$$

К этому соотношению можно прийти и в случае поля с изменяющейся напряженностью. В этом случае расстояние между местом происхождения события и расположения наблюдателя следует разделить на малые части  $dr$ , в пределах которых напряженность поля  $g = \frac{M\gamma}{r^2}$  может считаться постоянной. Если для каждого отрезка  $dr$  применить теперь ход рассуждений, справедливый для однородного поля, то задача сводится к интегрированию по  $dr$ , в результате которого получится та же связь (I). Ясно, что связь (I) действительна и для конечных промежутков времени.

Следует отметить, что в сильном гравитационном поле связь  $d\tau$  с  $d\tau_0$  скажется сложнее, так как ньютоновская тео-

рия гравитации здесь более не действительна. Однако несмотря на это формула (I) оказывается справедливой и в сильном поле, если источником поля оказывается центрально-симметричное статическое тело.

Величина  $R_g = \frac{2\gamma M}{c^2}$  называется гравитационным радиусом тела или радиусом Шварцшильда. Для тела с массой Земли этот радиус равен 0,88 см, с массой Солнца - 2,94 км.

Из связи (I) вытекает, что если размеры источника гравитационного поля меньше  $R_g$ , то по наблюдениям внешнего (далекого) наблюдателя время на расстоянии  $R_g$  от центра источника поля останавливается, то есть для любой конечной длительности события  $d\tau_0$ , происходящего на сфере радиуса  $R_g$ , продолжительность, наблюдаемая внешним наблюдателем  $d\tau \rightarrow \infty$ , то есть темп времени неограниченно замедляется.

Сферу с радиусом  $R_g$  называют сферой Шварцшильда (черной дырой). Последний термин обусловлен тем, что ни один материальный объект, в том числе даже свет, не может с поверхности этой сферы (или из нее) дойти до внешнего далекого ( $r \gg R_g$ ) наблюдателя.

Феномен черной дыры может быть получен и из ньютоновской механики. Каждому телу с массой  $M$  и радиусом  $R$  соответствует так называемая вторая космическая скорость, определяющая минимальную кинетическую энергию, которую должно иметь другое тело массой  $m$ , для преодоления потенциальной энергии притяжения тела  $M$ , чтобы удалиться с его поверхности по открытой траектории (то есть в бесконечность).

$$\text{Поэтому } \frac{mv^2}{2} = \frac{\gamma Mm}{R}, \text{ откуда } v_2 = \sqrt{2 \frac{\gamma M}{R}}.$$

Ввиду того, что максимально возможной скоростью движения материальных объектов является скорость света в вакууме  $C$ , то если вторая космическая скорость некоторого тела больше  $C$ , никакое тело не может уйти с поверхности этого тела по открытой траектории, то есть освободиться от влияния гравитационного поля этого тела.

Определим связь между радиусом и массой тела для случая  $v_2 = C$ . В таком случае  $C^2 = \frac{2\gamma M}{R_c}$  или  $R_c = \frac{2\gamma M}{C^2} = R_g$ .

Результат оказался таким же, как и выведенный на основании общей теории относительности.

Поскольку свет не может достичь далекого наблюдателя ни с поверхности сферы Шварцшильда, ни, тем более, изнутри ее, то объект, который окружен такой сферой, наблюдается внешним наблюдателем абсолютно черным (абсолютно не излучающим и не отражающим), а всепоглощающей Черной Дыркой.

## 2. Гравитационное красное смещение

Явление гравитационного красного смещения состоит в различии длины волн электромагнитного излучения  $\lambda_0$  — излученных из области сильного гравитационного поля и  $\lambda_1$  — зарегистрированных далеким наблюдателем (находящимся вне области сильного гравитационного поля), причем  $\lambda_1 > \lambda_0$ , то есть происходит сдвиг спектра электромагнитного излучения в сторону длинных (красных) волн. При этом относительный сдвиг  $\Delta\lambda/\lambda_0$ , где  $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0$ , будет в первом приближении пропорционален изменению гравитационного потенциала  $\Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_1$ , где  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  есть гравитационные потенциалы соответственно в месте измерения и в месте приема (наблюдателя). Гравитационное красное смещение обусловлено замедлением темпа времени в гравитационном поле по наблюдениям внешнего (далекого) наблюдателя.

2.1. Определим гравитационное изменение частоты. Если вблизи тела большой массы, где гравитационный потенциал равен  $\varphi_0$ , испускается фотон с частотой  $\nu_0 = \Delta N / \Delta t_0$ , где  $\Delta N$  — число колебаний за время  $\Delta t_0$ , то на месте наблюдателя, где гравитационный потенциал равен  $\varphi_1$ , частота фотона будет  $\nu_1 = \Delta N / \Delta t_1$ , где  $\Delta t_1$  — промежуток времени, соответствующий приему наблюдателем такого же числа колебаний.

Получим, что  $\nu_1/\nu_0 = \Delta t_0 / \Delta t_1$  и  $\nu_1 = \nu_0 \Delta t_0 / \Delta t_1$ .

Однако, поскольку  $\Delta t_0 = \Delta t_1 \left(1 + \frac{2\Delta\varphi}{c^2}\right)^{1/2}$ , то

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 - \frac{2\gamma M}{R c^2}\right)^{1/2} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{\gamma M}{R c^2}\right). \quad (2)$$

Если в окрестности наблюдателя гравитационное поле отсутствует ( $\varphi_1 = 0$ ), то вследствие  $\varphi_0 = -\frac{\gamma M}{R}$  получим:

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 - \frac{2\gamma M}{R c^2}\right)^{1/2} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{\gamma M}{R c^2}\right). \quad (3)$$

Гравитационное красное смещение подтверждено эксперимен-

тально. Например, излученное с поверхности Земли и зарегистрированное на высоте 20 м электромагнитное излучение имеет относительное гравитационное красное смещение  $\Delta\lambda/\lambda = 2 \cdot 10^{-15}$ .

Из связи (3) вытекает также, что если  $R \rightarrow R_g$ , то  $V_1 \rightarrow 0$ , то есть что испущенный с поверхности сферы Шварцшильда свет не достигает внешнего (далекого) наблюдателя, так как в этом случае энергия принимаемых квантов  $E = h\nu \rightarrow 0$  и не может регистрироваться.

2.2. Формулу (2) для гравитационного красного смещения можно получить и другим способом.

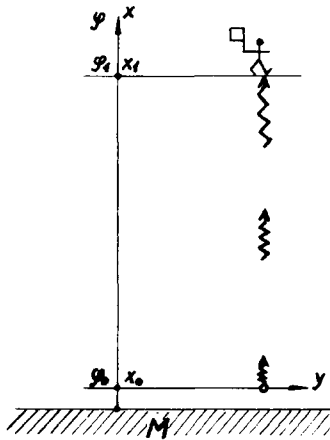


Рис. 6

Пусть из точки пространства с координатой  $X_0$ , где гравитационный потенциал равен  $\varphi_0$ , излучается фотон с энергией  $h\nu_0$ . Если наблюдатель находится в точке  $X_1$  (рис.6), где потенциал равен  $\varphi_1 = \varphi_0 + gX_1$ , то энергия регистрируемого им фотона будет:

$$h\nu_1 = h\nu_0 - mgX_1 \approx h\nu_0 - gX_1 \frac{h\nu_0}{c^2}, \quad (4)$$

где  $\frac{h\nu_0}{c^2} = m$  - масса излученного фотона. Хотя  $m$  изменяется при движении из точки  $X_0$  в точку  $X_1$  (различные потенциалы, этого изменения массы можно не учитывать, если принять  $X_1$  достаточно малым, так что  $gX_1/c^2 \ll 1$ ).

Следует отметить, что здесь мы применили принцип эквивалентности, так как считаем инертную массу фотона  $h\nu_0/c^2$  равной его гравитационной массе.

Учитывая, что  $-g_{x_1} = \Delta\varphi = \varphi_0 - \varphi_1$  получим из (4)

$$v_1 = v_0 \left(1 - g_{x_1}/c^2\right) = v_0 \left(1 + \Delta\varphi/c^2\right),$$

то есть соотношение (2).

Поскольку  $v_1 = \Delta N/\Delta t_1$  и  $v_0 = \Delta N/\Delta t_0$  (см. раздел 2.1), то  $\Delta N/\Delta t_1 = \Delta N/\Delta t_0 \left(1 + \Delta\varphi/c^2\right)$  и  $\Delta t_0 = \Delta t_1 \left(1 + \Delta\varphi/c^2\right)$ .

Для центрально-симметричного тела массы  $M$  и радиуса  $R$  относительно далекого наблюдателя получим  $\Delta\varphi = \frac{\gamma M}{R}$ . Поэтому

$$\Delta t_0 \approx \Delta t_1 \left(1 - \frac{\gamma M}{R c^2}\right)$$

или

$$\Delta t_1 \approx \Delta t_0 \left(1 + \frac{\gamma M}{R c^2}\right).$$

В заключение следует отметить, что при использовании оптической доски и готовых рисунков весь представленный материал может быть изложен примерно за 45 минут лекционного времени, причем в зависимости от лимита времени можно изложить содержание пунктов 2.1 или 2.2.

На наш взгляд, представленный способ изложения элементов общей теории относительности позволяет раскрыть физическую суть принципа эквивалентности и иллюстрирует логические построения специальной теории относительности.

### Л и т е р а т у р а

1. Einstein A. Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen // Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik. - 1907. - N 4. - S. 411-462.
2. Kard P. Relatiivsusteooria peajooned. - Tln.:Valgus, 1980. - 152 lk.
3. Einstein A. Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes // Ann. Phys.-1911.- N 35. - S. 898-908.
4. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Берклеевский курс физики: Т. I. Механика. - М.: Мир, 1971. - С. 442-444.

## РАССМОТРЕНИЕ ВОПРОСОВ ЭВОЛЮЦИИ ВСЕЛЕННОЙ В КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

В.А. Веймер, Р.Й. Манкин

Бурное развитие астрофизики, вызванное усовершенствованием средств наблюдений, крупными достижениями в области ядерной физики и физики элементарных частиц, привело в последние несколько десятилетий к коренному пересмотру космологических концепций и взглядов на характер эволюции Вселенной.

Естественный интерес познавательного характера к проблеме возможных вариантов эволюции Вселенной вызвал огромный поток статей, книг, сборников и монографий самого разнообразного уровня - от научно-популярного до высокотeorетического [1 - 14]. Поэтому перед преподавателями высшей школы, естественно, возникает сложная проблема изложения темы эволюции Вселенной в курсе общей физики, тем более, что при выборе уровня изложения необходимо учитывать содержание других разделов курса общей физики. Серьезным ограничением является также небольшой лимит времени, который можно отвести на рассмотрение данного вопроса. С другой стороны, общепознавательная и мировоззренческая важность ознакомления студентов с современным состоянием научного подхода к вопросам эволюции Вселенной, не позволяет ограничиваться при их рассмотрении лишь общими фразами.

Нами представлен возможный вариант рассмотрения глобальной эволюции Вселенной, основанный на наблюдательных данных и ньютоновской механике, однако учитывающий основные выводы общей теории относительности и в этом смысле строгий с точки зрения совершенной теории.

Названием темы может быть: "Эволюция Вселенной и критическая плотность материи".

Рассмотрение имеет качественный характер и основано на ньютоновской механике. Основой являются следующие наблюдательные данные:

1. Крупномасштабное распределение массы в мировом пространстве является однородным и изотропным. Крупномасштабной можно считать область пространства, линейные размеры которой намного больше размеров любой структурной единицы распределения массы во Вселенной, то есть значительно больше, чем размеры скоплений и сверхскоплений галактик.

2. Имеет место закономерность: далекие галактики удаляются от наблюдателя со скоростью, пропорциональной их удаленности (закон Хаббла). Этот закон справедлив при нерелятивистских скоростях удаления, то есть для не очень далеких объектов наблюдения.

Для определения закономерности эволюции Вселенной во времени рассмотрим большую шарообразную с радиусом  $R$  область пространства, в которой окажется множество галактик. Пусть наблюдатель будет находиться в центре этой области. Галактики будем рассматривать как материальные точки.

Пусть масса некоторой галактики, расположенной на поверхности этой шаровой области, будет  $m$ . Тогда ее полная механическая энергия будет постоянной во времени (закон сохранения механической энергии), то есть

$$E = \frac{m v^2}{2} - \frac{\gamma M m}{R} = \text{const}, \quad (I)$$

где  $M$  — полная масса всех галактик, заключенная в сфере радиуса  $R$ . Здесь следует отметить, что полного гравитационного воздействия массы объектов, расположенных вне сферы, можно не учитывать (см., например [15, с. 79]).

Уравнение (I) можно переписать в виде

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{2\gamma M}{R} + 2\varepsilon, \quad (2)$$

где  $\frac{dR}{dt} = v$  и  $\varepsilon = E/m$ .

Из наблюдений известно, что в данный момент времени  $t_0$  скорость удаления галактик от наблюдателя  $v_0 = R_0 H_0$ , где  $R_0$  — расстояние от галактики до наблюдателя, а  $H_0 \approx 3 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}$  — постоянная Хаббла.

Учитывая (2), получим для  $v_0$ :

$$v_0^2 = \frac{2\gamma M}{R_0} + 2\varepsilon \quad \text{или} \quad 2\varepsilon = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R_0}.$$

Подставляя это значение в (2), получим:

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R_0} + \frac{2\gamma M}{R} \quad (3)$$

Нахождение решения этого уравнения довольно сложно, однако достаточно анализировать его общие свойства в зависимости от соотношения  $t$  и  $t_0$ .

1. Пусть  $t < t_0$  (соответствует рассмотрению развития в прошлом). Тогда, поскольку  $(dR/dt)|_{t=t_0} > 0$  (галактики, по данным наблюдений, в настоящее время удаляются от наблюдателя), то в прошлом  $R(t)$  должен был быть меньше, чем  $R_0$ . Поэтому  $2\gamma M/R > 2\gamma M/R_0$ , а, следовательно,  $dR(t)/dt > (dR/dt)|_{t=t_0}$ , то есть скорость разбегания галактик должна была иметь значения тем большие, чем глубже в прошлое их движение рассматривалось. Следовательно, должен быть такой момент времени  $t_1$ , чтобы при  $t \rightarrow t_1$ ,  $R \rightarrow 0$ , плотность вещества  $\rho \rightarrow \infty$ .

2. Пусть  $t > t_0$  (рассмотрение развития в будущем). Тогда характер крупномасштабного движения галактик (то есть эволюции Вселенной) зависит от того, какой знак имеет величина  $v_0^2 - 2\gamma M/R_0$ .

2.1. Пусть  $v_0^2 - 2\gamma M/R_0 < 0$ , но  $dR/dt > 0$ . Тогда  $2\gamma M/R$  убывает пока не наступит момент времени  $t_2$ , когда  $dR/dt = 0$ , то есть

$$v_0^2 - \frac{2\gamma M}{R_0} + \frac{2\gamma M}{R_2} = 0$$

Тем самым, в момент времени  $t_2$  расширение наблюдаемой сферы прекращается. В дальнейшем (для  $t > t_2$ ) эта сфера под действием сил тяготения будет сжиматься ( $dR/dt|_{t>t_2} < 0$ ). Радиус сферы  $R$  будет уменьшаться, чему сопутствует увеличение скорости сжатия, то есть сжатие будет идти с ускорением до момента времени  $t = t_3$ , где  $R \rightarrow 0$  и плотность вещества  $\rho \rightarrow \infty$  (рис. I).

Такая модель эволюции Вселенной называется замкнутой. По такой модели Вселенная за конечное время эволюции ( $t_2$ ) расширяется от точечного размера до некоторого максимального, а затем снова сжимается до точечных размеров, прекращая свое существование в нашем обычном представлении. Уилер [II] называл такой момент "Большой остановкой".

2.2. Если  $v_0^2 - 2\gamma M/R_0 > 0$ , то скорость расширения по-

степенно замедляется, однако не изменяет своего знака вплоть до  $k \rightarrow \infty$ , где  $dR/dt \rightarrow (v_c^2 - 2\pi M/R_0)^{1/2}$ . Поскольку  $dR/dt < v_c$ , то продолжительность расширения не ограничена (рис. 2).

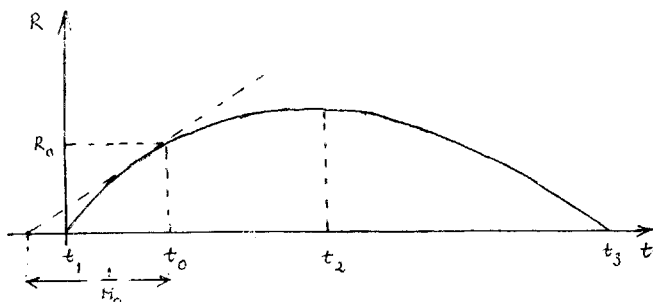


Рис. 1

Модель эволюции Вселенной при  $\rho_0 > \rho_k \cdot \frac{1}{H_0^2}$  — время Хаббла

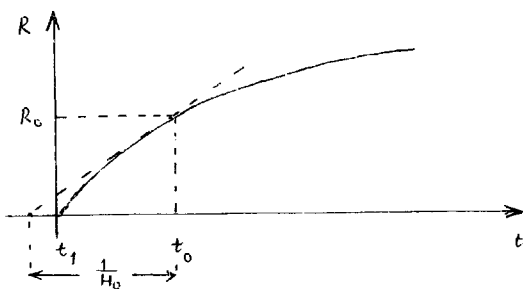


Рис. 2

Модель эволюции Вселенной при  $\rho_0 < \rho_k$

Такая модель эволюции Вселенной называется открытой. Согласно этой модели Вселенная, "родившаяся" в момент  $t_1$  в результате "Большого взрыва", будет неограниченно расширяться с постепенно уменьшающейся скоростью. При этом расстояния между всеми далекими, то есть гравитационно не связанными в одну систему, объектами будут неограниченно возрастать и средняя плотность вещества  $\rho \rightarrow 0$ . Очевидно, что свойства такого состояния Вселенной также будут значительно отличаться

от тех, которые наблюдаются сейчас.

Покажем, что характер эволюции Вселенной по той или другой модели зависит от средней плотности материи в настоящее время. Рассмотрим величину  $v_0^2 - 2\gamma M/R_0$ . По закону Хаббла  $v_0 = H_0 R_0$ , поэтому знак величины  $v_0^2 - 2\gamma M/R_0 = H_0^2 R_0^2 - 2\gamma M/R_0$  определяет выбор замкнутой или открытой модели Вселенной.

Пусть  $H_0^2 R_0^2 - 2\gamma M/R_0 < 0$ . Учитывая, что полная масса  $M = \frac{4\pi}{3} \rho_c R_0^3$ , получим:

$$\rho_c > \frac{3H_0^2}{8\pi\gamma} = \rho_k.$$

Величина  $\rho_k$  называется критической плотностью Вселенной. Критическая плотность Вселенной соответствует такому значению средней плотности крупномасштабного распределения материи в пространстве, что если истинная плотность в настоящий момент времени  $\rho_c > \rho_k$ , то эволюция Вселенной будет следовать замкнутой модели (рис. 1) и, наоборот, если  $\rho_c < \rho_k$ , то дальнейшая эволюция Вселенной будет соответствовать открытой модели (рис. 2). Принимая полученные из данных наблюдений значения  $H_0 = (2 \div 4) 10^{-18} \text{ с}^{-1}$ , для критической плотности в настоящую эпоху развития Вселенной получим

$$\rho_k = (7 \div 28) 10^{-27} \text{ кг/м}^3.$$

С другой стороны, по современным данным наблюдений средняя плотность вещества, сосредоточенного в звездах, галактиках, скоплениях галактик и сверхскоплениях галактик (последние являются крупнейшими из известных ныне структурных единиц распределения звездного вещества)  $\rho_c \approx 1,5 \cdot 10^{-28} \text{ кг/м}^3$  [II, с. 541]. Таким образом, при предположении, что вся масса Вселенной сосредоточена только в объектах, видимых в доступном астрофизическим наблюдениям диапазоне электромагнитных волн, плотность вещества ( $\rho_c$ ) меньше критической ( $\rho_k$ ) и Вселенная должна развиваться по открытой модели.

Однако есть целый ряд признаков, указывающих на возможность существования так называемой "скрытой" массы. Среди таких "источников" добавочного вклада в  $\rho_0$  могут быть черные дыры, карликовые звезды и остывшие нейтронные звезды, не излучающий межзвездный газ, облака нейтрино (при условии, что нейтрино обладает конечной массой покоя) и другие объекты.

Поэтому в настоящее время еще нет единого мнения относительно модели эволюции Вселенной. Хотя многие ведущие ученые и склоняются в сторону замкнутой Вселенной, нет решающих данных наблюдений в пользу этого предположения.

И все же некоторые косвенные признаки в пользу модели замкнутой Вселенной имеются. Так, согласно наблюдениям эволюции звезд, промежуток времени, прошедший с момента "Большого взрыва", оценивается с точностью 30–40%  $t_0 - t_1 = \Gamma \approx 10 \cdot 10^9$  лет. Обратная величина постоянной Хаббла – так называемое время Хаббла (см. рис. 1 и 2) – получается порядка  $20 \cdot 10^9$  лет. Сравнение этих времен указывает на значительное изменение постоянной Хаббла со временем, то есть на значительное влияние массы во Вселенной на скорость ее расширения. Если эти два значения времен использовать в расчете стандартной модели по общей теории относительности Эйнштейна для замкнутой Вселенной, то интервал времени  $t_3 - t_1$ , то есть время от "Большого взрыва" до "Большой остановки", получается около  $60 \cdot 10^9$  лет [11].

Исходя из приведенных значений постоянной Хаббла  $H_0$  и наблюдаемой плотности материи  $\rho_0$  можно получить ряд интересных численных оценок параметров расширяющейся модели изотропной Вселенной. Например, так как скорость распространения света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – конечная величина (соответствует наклону прямой на рис. 3), то наблюдаемая область Вселенной ограничена сферой радиусом  $R_H = c(t_0 - t_1) \approx 10^{26}$  м, полная масса наблюдаемой Вселенной  $M_H \approx 10^{53}$  кг и эквивалентное число барионов получается порядка  $10^{80}$ .

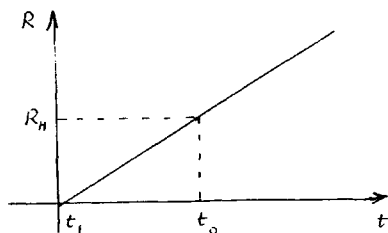


Рис. 3

Зависимость радиуса видимой Вселенной от времени

В заключение хочется сказать, что отсутствие в большинстве отечественных учебников по курсу общей физики хотя бы небольшого раздела, посвященного современному представлению об эволюции Вселенной, является, на наш взгляд, значительным упущением, которое следует исправить в будущих изданиях.

#### Л и т е р а т у р а

1. Азимов А. Вселенная. - М.; 1969.
2. Берке Х. Пространство-время, геометрия, космология. М., 1985.
3. Гинсбург В.Л. О физике и астрофизике. - М., 1985.
4. Девис П. Пространство и время в современной картине Вселенной. - М., 1979.
5. Девис П. Случайная вселенная. - М., 1985.
6. Кауфман У. Космические рубежи теории относительности. - М., 1981.
7. Нарликар Дж. Неистовая Вселенная. - М., 1985.
8. Николсон И. Тяготение, черные дыры и Вселенная. - М., 1983.
9. Редже Т. Этюды о Вселенной. - М., 1985.
10. Уилл К. Теория и эксперимент в гравитационной физике. - М., 1985.
11. Астрофизика, кванты и теория относительности / Под ред. Ф.И. Федорова. - М., 1982.
12. На переднем крае астрофизики / Под ред. Ю. Эвертта. - М., 1979.
13. Фундаментальная структура материи / Под ред. Дж. Малви. - М., 1984.
14. Ядерная астрофизика / Под ред. Ч. Барнса, Д. Клейтона, Д. Шрамма. - М., 1986.
15. Орир Дж. Физика. - М., 1981.

## ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ХАРАКТЕРИСТИК ВОСПРИЯТИЯ У СТУДЕНТОВ-ФИЗИКОВ

Э.Ю. Пунг

XX век характеризуется бурным развитием техники, в особенности вычислительной техники, широким внедрением автоматизации на производстве. Вместе с тем наблюдается парадокс конца нашего века: общество нуждается во все возрастающем количестве физиков, электроников, математиков, операторов, программистов, число же молодых людей, желающих изучать технические и естественные науки, из года в год уменьшается не только у нас в стране, но и в глобальном масштабе.

До сих пор наука не располагает исчерпывающими данными о том, какой уровень и какие умственные способности необходимы для успешной деятельности, например, в области физики. В условиях новой школьной реформы и реформы высшей школы развитию психических способностей будущего специалиста уделяется большое внимание. Прежде всего нужно выяснить, какие психические свойства наиболее важны для той или иной профессии.

Литературные данные и наши собственные эксперименты показали, что для будущего физика особенно важны высокий уровень наглядно-зрительного восприятия и логического мышления. Поэтому мы ставили эксперименты для исследования этих показателей. Была построена электронная аппаратура и выработана методика. В экспериментах принимали участие две группы испытуемых: студенты-физики 3-го курса и школьники-старшеклассники (40 человек).

В первой серии экспериментов испытуемый должен был выполнить две задачи.

Во-первых, ему нужно было решить задачу на зрительное восприятие. На панели перед испытуемым видны две точки. Эти точки одновременно начинают двигаться навстречу друг другу. Скорости их движения могли быть одинаковыми, а могли быть и

различными. По истечении некоторого времени точки исчезали, то есть становились невидимыми. Опираясь на зрительное представление о скорости движения исчезнувших точек необходимо было указать карандашом место их предполагаемой встречи. Сделать это нужно было в тот момент, когда испытуемый считал, что точки встретились. В эксперимент входило четыре варианта задачи, в которых скорости варьировались следующим образом:

|    | <u>Правая точка</u> | <u>Левая точка</u> |
|----|---------------------|--------------------|
| 1) | 1 см/с              | 1 см/с             |
| 2) | 2 см/с              | 4 см/с             |
| 3) | 8 см/с              | 8 см/с             |
| 4) | 4 см/с              | 2 см/с             |

Автоматическим карандашом испытуемый указывал место предполагаемой встречи точек (в дальнейшем это определяло  $x_1, x_2$  - пройденные пути правой и левой точек соответственно), и одновременно с этим фиксировалось время. Первоначальное расстояние между точками равнялось 71,3 см. Для решения каждого варианта задачи предлагалось пять попыток. Перед началом эксперимента имелась возможность потренироваться.

Во-вторых, точно такую же задачу испытуемые решали логически. Каждый получал письменное задание с численным значением расстояния между точками и значениями скоростей их перемещения. Все четыре варианта решались отдельно, фиксировалось время решения для каждого варианта.

Во второй серии экспериментов мы провели опыты на пространственное и временное восприятие. Перед испытуемым на панели по окружности двигался световой сигнал, по прохождении трех пятых всего дуги он исчезал. Необходимо было нажатием на кнопку зафиксировать предполагаемый момент возврата точки в исходное положение. Точки двигались равномерно (частота - 100; 100/20; 100/50 Гц) и хаотически (частота 100/2; 100/10; 100/50 Гц). Каждым вариантом задачи проводились три серии измерений.

Во второй задаче на экране появлялись числа, которые убывали от 100 до 0. В течение чередования чисел от 100 до 40 испытуемый мог следить за их движением. Затем на числе

40 изменение прекращалось. Момент предполагаемого "нуля" испытуемый фиксировал нажатием на кнопку. Числа менялись в режиме 100/20 и 100/2 Гц, то есть скорость изменения была высокой.

С испытуемыми был проведен также тест Айзенка, выявляющий уровень невротизма, экстраверсии и интроверсии, а также особенности темперамента. Результаты измерений, а также данные об успеваемости подвергались статистическому и корреляционному анализу.

Коротко о результатах. Первая серия опытов.

При анализе экспериментальных данных первой серии опытов обратил на себя внимание тот факт, что время решения задачи существенно зависит от способа ее решения. Время решения логической (математической) задачи намного больше времени решения зрительной.

Для выравнивания условий эксперимента группа испытуемых делилась на две подгруппы. Одна подгруппа решала сначала логическую задачу, вторая – задачу на зрительное восприятие. Вопрос состоял в том, используют ли испытуемые каким-либо образом имеющуюся уже информацию при решении задачи другим способом? Корреляционная связь не обнаруживалась, то есть имеющийся опыт не использовался.

Существенное различие между группой студентов и школьников было выявлено при решении логической задачи. Во второй группе число точных ответов меньше и 40 % школьников вообще не смогли решить какой-либо из вариантов задачи (наибольшие трудности вызывали второй и четвертый варианты). В случае зрительного опыта различия между двумя группами испытуемых обнаружено не было.

Бросается в глаза, что процент ошибок упреждения при задаче на зрительное восприятие превышает процент ошибок запаздывания. Это совпадает с результатами исследований других авторов. Наши данные показали существенное влияние скорости движения точек на характер и величину ошибки. Так, при увеличении времени движения в 8 раз (от 4,46 до 35,65 с) величина временной ошибки увеличивалась в среднем в 5 раз (от 0,38 до 2,01) и величина пространственной ошибки – почти в 1,5 раза.

По данным корреляционного анализа выявились следующие связи:

1) успеваемость студентов лучше таковой школьников, у студентов же больше точных ответов в задаче на зрительное восприятие, а также общее число решенных заданий в логической задаче;

2) общее число решенных заданий в логической задаче существенно связано с успеваемостью и, естественно, с точными ответами.

При более подробном рассмотрении результатов возник ряд вопросов, которые предстояло решить посредством проведения дополнительной серии экспериментов.

Было замечено, что в ходе определения момента встречи движущихся точек исключительно на основе их "мысленного" прослеживания появилось большое число ошибок упреждения. Таким образом, обнаруживается закономерность, суть которой заключается в том, что мысленно представляемое движение кажется испытуемым быстрее, чем непосредственно воспринимаемое.

Для определения такой зависимости была проведена серия дополнительных экспериментов.

В этой серии экспериментов нас интересовала зависимость  $\Delta t(v_1/v_2)$ , где  $\Delta t = x_{ист} - \bar{x}$ , а  $v_1$  - скорость движения левой точки,  $v_2$  - скорость движения правой точки.

Варианты движения точек были следующие:

- |                     |                  |
|---------------------|------------------|
| 1) 8 см/с - 8 см/с, | 1 см/с - 1 см/с; |
| 2) 4 см/с - 2 см/с, | 2 см/с - 2 см/с; |
| 3) 8 см/с - 2 см/с, | 2 см/с - 8 см/с. |

В таблице I представлены общие данные этого эксперимента.

Таблица I

|  | Варианты движения точек, см/с |       |       |       |       |       |
|--|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|  | 8:8                           | 1:1   | 4:2   | 2:4   | 8:2   | 2:8   |
| Значение среднего арифметического (M)                            | 35,60                         | 36,10 | 42,20 | 25,80 | 55,60 | 15,60 |
| Значения среднего отклонения от истинной величины ( $\Delta t$ ) | 0,05                          | -0,45 | 5,32  | -2,03 | 1,46  | -1,34 |
| $v_1/v_2$  | 1                             | 1     | 2     | 0,5   | 4     | 0,25  |

Выявленная зависимость представлена на рисунке I, из которого видно, что при  $v_1/v_2 = 1$  ошибка незначительна, так как скорости точек одинаковы и место предполагаемой встречи определяется довольно точно. Максимальное значение ошибки имеет место тогда, когда  $v_1/v_2 \approx 2; 1/2$ . При  $v_1/v_2 \approx 4; 1/4$  ошибка уменьшается. Объяснить это уменьшение можно тем обстоятельством, что время наблюдения уменьшается и составляет примерно 7 секунд. Место предполагаемой встречи ориентировочно определяется уже в самом начале движения.

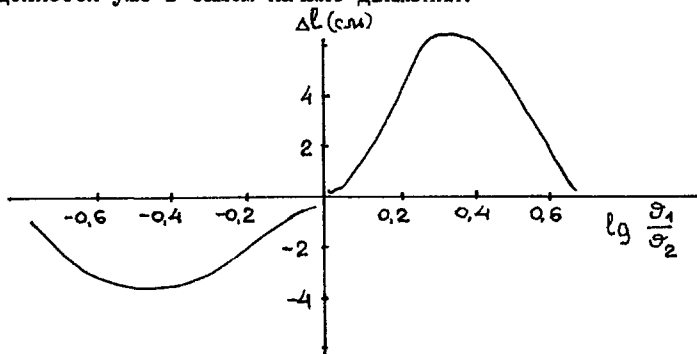


Рис. I. Зависимость  $\Delta l$  от  $\lg \frac{v_1}{v_2}$ .

Крайней точкой в данном исследовании явились отношения  $v_1/v_2 = 4; 1/4$ . По этим характеристикам можно определить общий вид зависимости. Что же можно сказать о поведении этой кривой при увеличении отношения скоростей по обе стороны? По-видимому, кривые будут асимптотически приближаться к оси абсцисс. Пересечь ее она в общем случае не сможет, так как это будет означать отсутствие какой бы то ни было ошибки, что соответствовало бы идеалу. Но и увеличиваться  $\Delta l$ , по-видимому, не будет. Этому предположению можно дать некоторые объяснения.

На результатах проведенных опытов мы убедились, что после отношения  $v_1/v_2 = 2$  (и соответственно  $v_1/v_2 = 1/2$ ) кривая зависимости  $\Delta l$  ( $\lg \frac{v_1}{v_2}$ ) падает и падает не случайно, так как уменьшается вероятность разброса данных, место предполагаемой встречи можно определить уже в самом начале экспери-

мента, а затем это место все больше конкретизируется. Влияет на это еще и тот факт, что при увеличении отношения время наблюдения за движением точек сокращается до минимума и та точка, которая движется с меньшей скоростью, за это малое время практически не претерпевает изменений, то есть испытуемый может принимать ее за точку отсчета. И еще один факт: при таком малом времени их движения до встречи время, в течение которого движение точек закрыто экраном, принимает такие ничтожные значения, что момент их встречи определяется с большой точностью. В этом помогли убедиться опыты при движении точек со скоростью  $8 \text{ см/с} - 1 \text{ см/с}$  и  $1 \text{ см/с} - 8 \text{ см/с}$  (соответственно  $v_1/v_2 = 8; 0,125$ ). Величина  $\Delta t$  при этом не превышала значения  $0,05 \text{ см}$ .

Таким образом, с достаточной степенью уверенности можно утверждать закономерность зависимости. Измениться может только абсолютная величина  $\Delta t$  (при улучшении условий эксперимента).

Вторая серия опытов.

При определении временных и пространственных погрешностей было замечено, что наибольшие ошибки (от  $10,12$  до  $11,85 \text{ с}$ ) наблюдались при малых скоростях движения сигнала.

На уровне  $r = 95\%$  обнаружена корреляционная связь между следующими показателями:

1) число ошибок упреждения у мужчин встречается несколько чаще, чем у женщин;

2) у студентов по сравнению со школьниками выше уровень невротизма и меньше число ошибок запаздывания. Объясняется это, наверно, тем, что студенты чаще оказывались в экстремальных ситуациях (например, частая сдача экзаменов и т.п.). Высокий уровень невротизма, в свою очередь, влечет за собой увеличение числа ошибок упреждения;

3) ошибки упреждения встречаются чаще у экстравертов, а ошибки запаздывания - у интровертов;

4) у холериков ошибки упреждения встречаются в два раза чаще, чем ошибки запаздывания, у флегматиков - наоборот;

5) у экстравертов чаще встречаются ошибки упреждения, а у интровертов больше точных ответов.

Можно сказать, что наши эксперименты дали довольно хо-

рошую картину некоторых личностных характеристик студентов-физиков. Все они были студентами третьего курса, и можно было ожидать, что уровень их развития примерно одинаков. Однако, как показало исследование, по уровню речемыслительного, а также по точности наглядно-зрительного восприятия они существенно отличались друг от друга (интериндивидуальные различия). Старшеклассники же показали довольно низкий уровень речемыслительного восприятия.

Приведенные данные позволяют предполагать, что обучение на отделении физики существенно способствует развитию логического мышления, но не влияет на уровень наглядно-зрительного восприятия (который оказался примерно одинаковым и у студентов третьего курса, и у школьников старших классов). Иначе говоря, при существующих методах обучения в вузе обеспечивается развитие преимущественно логического мышления, что несмотря на свою важность страдает, однако, односторонностью и тем самым сужает базу творческих решений. Как показывают психологические исследования, наглядно-чувственная база для таких решений имеет исключительно большое значение.

Результаты экспериментов свидетельствуют о необходимости перестройки методов обучения физиков в направлении усиления развития наглядно-чувственных механизмов деятельности. С нашей точки зрения, это может расширить возможности человека в решении творческих задач. Физик должен обладать высоким уровнем не только логического мышления, но и наблюдательности.

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ  
НА ПОДГОТОВИТЕЛЬНОМ ОТДЕЛЕНИИ

Л.Э. Мятас

Ой как трудно решать задачи по физике! Так жалуется слушатели подготовительного отделения Эстонской сельскохозяйственной академии. Жалуется не один, жалуется большинство...

Что же здесь трудного?! – Удивляется тот же слушатель после того, как задача решена.

Трудным оказывается переход от физики к математике. Трудность выражается в вопросах: как решать? с чего начать? как добраться до начала? Вопросы стоят и перед преподавателем: как научить решению задач молодежь со средним образованием, которая решать не умеет?

На основе многолетней практики преподавания на подготовительном отделении ЭСХА осмеливаюсь предложить следующую стратегию.

Переход от физики к математике приходится начать с вопроса: имеются ли формулы, в которых содержатся искомые величины? Если этот вопрос не приведет к решению (как правило, это так), приходится заняться вторым вопросом: имеются ли формулы для процесса, отмеченного или подразумеваемого в задаче?

При помощи этих двух стратегических вопросов можно найти  $n$  формул (уравнений) для  $n$  неизвестных. Условие –  $n$  формул для  $n$  неизвестных – признак математической разрешаемости задачи.

Для реализации стратегии надо запомнить определения-формулы физических величин и формулы, выражающие законы природы. Запомнить надо не только формулы, но и их названия. Название указывает на процесс, где можно пользоваться формулой.

Описываемая методика по существу не нова, в той или иной форме аналогичные идеи можно найти во многих книгах (см., например, [1, 2]). Однако здесь мы подчеркиваем психологичес-

кий подход. Решение каждой задачи начинается с одинаковых, неизменных вопросов: есть ли формулы для неизвестных? есть ли (дополнительные) формулы для процесса?

Даже самому упрямому решающему ясно, с чего приходится начать. Надо искать формулы с известными признаками, то есть такие, в которых содержатся неизвестные или которые описывают процесс. Без оговорок ясно, что в памяти решающего должно быть собрание подходящих формул (при сдаче контрольных работ и на экзамене пользоваться литературой, сводкой формул и т.д. не разрешается).

Методика проста, она выявляет недостатки в знаниях, переводит активную деятельность с решающего примерные задачи (преподавателя) незаметно на слушателя или студента. Методика дает целенаправленный вид самостоятельной работе слушателя (студента): комбинация начальных понятий и законов при условии, фиксированном в тексте.

Практика преподавания физики на подготовительном отделении ЭСХА подтверждает, что описанная методика в виде двух вопросов доступна даже для тех, которые в начале учебы выражают сомнение (я ничего не знаю, ничего не умею). Конечно, методика предполагает трудоспособность и некоторую математическую культуру.

Дублет вопросов подходит к решению вычислительных задач (см. задачник автора [3]), но он применим и при решении качественных задач.

Поскольку нынешний выпускник средней школы часто говорит насчет решения задач по физике: "Ой как трудно...", то можно попробовать, как действует на него дублет вопросов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Каменецкий С.Е., Орехов В.П. Методика решения задач по физике в средней школе. - М., 1987.
2. Беликов В.С. Решение задач по физике. Общие методы. - М., 1986.
3. Mättas L. Füüsika ülesannete kogu ettevalmistus-ovakonnale. - Tartu, 1977 (2-е издание, 1984).

## СО Д Е Р Ж А Н И Е

|  | Стр. |
|--|------|
| Х.И. ВОСЛАЙД. Как повысить эффективность физического практикума? .....   | 3    |
| В.Х. КОРРОВИТС. Лабораторный практикум в Институте физики АН ЭССР .....  | 8    |
| Э.Н. ВИХЕЛЕ. Программируемые микрокалькуляторы для обработки лабораторных работ по физике .....  | 13   |
| Э.Э.-А. МЯРТИНСОН. Об использовании вычислительной техники при проведении студенческих лабораторных занятий в ТПедИ по физическим предметам .....  | 21   |
| Э.Н. ВИХЕЛЕ, Г.А. ВИХЕЛЕ. Вопросы моделирования и теории подобия в общей физике П.....   | 28   |
| Р.-К.Р. ЛОЙДЕ, Р.Й. МАНКИН, Э.К. РЕЙТЕР. Математика в курсе общей физики втузов .....  | 40   |
| А.А. ВИРОВЕРЕ. С дедуктивным подходе в изложении курса теоретической физики в педвузе .....  | 44   |
| П.Л. КУКК, Р.-К.Р. ЛОЙДЕ. Некоторые вопросы методики изложения раздела "Электричество и магнетизм" в курсе общей физики втузов .....               | 47   |
| Л.П. ПАРИС. Об одном способе определения заряда мелких частиц .....  | 51   |
| Ю.А. ЛЕМБРА. Некоторые методические приемы при преподавании атомной физики X .....   | 56   |
| К.Э. КИЙРАНЕН. О минимальном значении напряженности и потока магнитного поля, которое можно измерить с помощью свободного пробного заряда .....    | 63   |
| Ю.А. ЛЕМБРА. О характере классического движения в одномерной системе, допускающей совпадение решений уравнений Шредингера и Гамильтона-Якоби ..... | 68   |
| В.А. ВЕЙМЕР, Р.Й. МАНКИН. Некоторые возможности изложения элементов общей теории относительности в курсе общей физики .....                        | 74   |

|   | Стр. |
|---|------|
| В.А. ВЕЙМЕР, Р.И. МАНКИН. Рассмотрение вопросов эволюции вселенной в курсе общей физики ..... | 83   |
| Э.Ю. ПУНГ: Об исследовании характеристик восприятия у студентов-физиков .....                 | 90   |
| Л.Э. МЯТТАС. О решении задач по физике на подготовительном отделении .....                    | 97   |

**МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ В ВУЗЕ.**

В помощь преподавателю XIII.

На русском языке.

Тартуский государственный университет.  
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Дликобли, 18.

Ответственный редактор В. Лембра.

Корректор И. Кингс.

Подписано к печати 19.02.1988.

МВ 02467.

Формат 60x84/16.

Бумага ротаторная.

Машинопись. Ротапринт.

Условно-печатных листов 5,81.

Учетно-издательских листов 5,56. Печатных листов 6,25.

Тираж 200.

Заказ № 148.

Цена I руб. 10 коп.

Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.

|   | Стр. |
|---|------|
| В.А. ВЕЙМЕР, Р.И. МАНКИН. Рассмотрение вопросов эволюции вселенной в курсе общей физики ..... | 83   |
| Э.Ю. ПУНГ: Об исследовании характеристик восприятия у студентов-физиков .....                 | 90   |
| Л.Э. МЯТТАС. О решении задач по физике на подготовительном отделении .....                    | 97   |

**МЕТОДЫ ПОВЫШЕНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ФИЗИКИ В ВУЗЕ.**

В помощь преподавателю XIII.

На русском языке.

Тартуский государственный университет.  
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Дликобли, 18.

Ответственный редактор В. Лембра.

Корректор И. Кингс.

Подписано к печати 19.02.1988.

МВ 02467.

Формат 60x84/16.

Бумага ротаторная.

Машинопись. Ротапринт.

Условно-печатных листов 5,81.

Учетно-издательских листов 5,56. Печатных листов 6,25.

Тираж 200.

Заказ № 148.

Цена I руб. 10 коп.

Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.