

ÜBER
SEISMOMETRISCHE BEOBACHTUNGEN.

VON
Fürst B. Galitzin.

Handwritten mark or signature

ST. PETERSBURG.
BUCHDRUCKEREI DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
Wass. Ostr., 9 Linie, № 12.
1902.

system an, und richtet die x -Axe nach Norden, die y -Axe nach Osten und die z -Axe nach dem Zenith, so handelt es sich darum, aus den Angaben der verschiedenen seismometrischen Apparate die Verschiebungen der Erdoberfläche bei einem Erdbeben parallel zu diesen drei Axen und die Drehungen um dieselben als Functionen der Zeit zu ermitteln. Die Drehungen um die x - und y -Axe verursachen die Neigungen und können bei Transversalwellen vorkommen. Was aber die Drehungen um die z -Axe anbelangt, so kommen dieselben wahrscheinlich hauptsächlich nur an Orten vor, welche nahe beim Epicentrum des Erdbebens liegen.

Die hier erwähnte Aufgabe ist zur Kenntniss der wahren Vorgänge bei einem Erdbeben von besonderer Wichtigkeit, doch bietet dieselbe grosse praktische Schwierigkeiten dar, weshalb bis jetzt in dieser Richtung noch sehr wenig gethan ist.

Die dritte Kategorie von Beobachtungen beschäftigt sich mit besonderen Aufgaben, welche speciell für den Geologen von Bedeutung sind, und auf welche wir hier nicht näher einzugehen brauchen.

In dieser Abhandlung werde ich mich ausschliesslich mit der zweiten Kategorie von Beobachtungen beschäftigen, da sie die wichtigste ist und daher die grössere Aufmerksamkeit verdient.

In verschiedenen Ländern, wo man sich für seismometrische Beobachtungen interessiert, strebt man darnach, die Anzahl der Beobachtungsstationen zu vermehren. Dieselben werden zuweilen mit sehr kostspieligen Apparaten versehen; es fehlt aber dabei oft eine klare Einsicht in dasjenige, wozu eigentlich diese Apparate dienen sollen, und was aus den Aufzeichnungen derselben geschlossen werden kann. In letzterer Zeit ist man sehr für Horizontalpendel eingenommen, und eine grosse Anzahl von Stationen wird mit diesen Apparaten versehen. Das Horizontalpendel ist ohne Zweifel ein vortreffliches und hoch empfindliches Instrument, wenn es sich darum handelt, kleine Neigungen der Erdoberfläche, welche äusserst langsam und ruhig verlaufen, resp. Abweichungen der Richtung der Lothlinie, zu constatieren, dagegen für Beobachtungen bei Erdbeben halte ich dasselbe für einen ganz ungeeigneten Apparat. Für den letzterwähnten Zweck ist das Horizontalpendel ein zu empfindlicher Apparat, da seine Bewegungen nicht nur von den Neigungen, sondern auch im hohen Maasse von den Translationsbewegungen der Erdoberfläche abhängen, was weiter bei der Auseinandersetzung der allgemeinen Theorie des Horizontalpendels bewiesen werden soll. Aus den Angaben der Horizontalpendel allein, sei ihre Anzahl auch noch so gross (gewöhnlich sucht man auf einer Station zwei Horizontalpendel senkrecht zu einander aufzustellen), ist es ganz und gar unmöglich, die Verschiebungen von den Neigungen zu trennen.

Bei der Gründung einer Station für seismometrische Beobachtungen ist es unbedingt nothwendig, von vornherein klar festzustellen, was eigentlich gemessen werden soll, und was jeder Typus von Apparaten zu geben imstande ist. Erst dann wird es möglich sein, eine richtige und rationelle Auswahl von Instrumenten zu treffen und eine vollständige, zweckmässig ausgestattete Station zu errichten.

Thut man das nicht, und hat man sich keinen bestimmten Plan zurechtgelegt, so wird eine derart gegründete Station nur ein mehr oder weniger umfangreiches statistisches Material liefern, welches sich zu jeder weiteren Bearbeitung als ungeeignet erweisen wird. Man wird dabei nur Curven und Zahlen sammeln, welche als Ballast auftreten werden, weil aus denselben keine sicheren Schlüsse über den wahren Charakter der Erderschütterung gezogen werden können.

Es ist sehr zu befürchten, dass, wenn die Seismometrie sich weiter in dieser Richtung entwickeln wird, sie denselben Fehler begehen wird, welcher in der Entwicklung einiger anderer Naturwissenschaften schon vorgekommen ist, nämlich, es wird ein reiches, aber unsystematisches und unvergleichbares Beobachtungsmaterial gesammelt, aus dem nichts Weiteres geschlossen werden darf.

Aus diesem Grunde erschien es mir sehr wünschenswerth, dieses Thema einer näheren Studie zu unterziehen und die Frage zu besprechen, mit welchen Instrumenten eine vollständige seismometrische Station ersten Ranges versehen werden soll, um aus den Aufzeichnungen derselben die wahren Elemente der Bewegung der Erdoberfläche bei einem Erdbeben ableiten zu können.

Die Anzahl der Instrumente muss auf jeden Fall sechs betragen, da wir es hier mit sechs Unbekannten zu thun haben, nämlich: drei Verschiebungen und drei Drehungen.

Die Frage, wie aus den Angaben eines Seismographen vom gegebenen Typus die wahre Bewegung der Erdoberfläche abgeleitet werden kann, ist leider bis jetzt sehr wenig besprochen worden, obgleich sie für die ganze Seismometrie von besonderer Bedeutung ist. Mir ist darüber nur eine kleine Notiz von Poincaré, ein Aufsatz von Lippmann und eine Abhandlung von Schlüter, die erst im vorigen Jahre erschienen ist und welche besondere Aufmerksamkeit verdient, bekannt.

Ich erlaube mir zunächst, diese Arbeiten zu besprechen und erst dann zu meinen eigenen Entwicklungen auf diesem Gebiet überzugehen.

§ 2.

Die Abhandlungen von Poincaré und Lippmann.

Der Aufsatz von Poincaré ist in Fouqué's «Les Tremblements de terre»¹⁾ wiedergegeben.

Poincaré untersucht die Bewegung eines einfachen Verticalpendels unter dem Einflusse eines periodischen Hin- und Herschwankens (Verschiebung) der Erdoberfläche parallel zur *x*-Axe.

Es sei diese Verschiebung zur Zeit *t* gleich *x*, so setzt Poincaré

$x = A \sin pt, \dots \dots \dots (1)$

wo *A* die Amplitude der Schwingung bedeutet und *p* von der Periode τ derselben unmittelbar abhängt:

$p = \frac{2\pi}{\tau}.$

Bezeichnet man ferner durch ξ die relative Abweichung des Pendels von der Gleichgewichtslage, durch *l* die Länge desselben und durch *g* die Beschleunigung der Schwere, und setzt man zur Abkürzung $\frac{g}{l} = n^2$, so ergibt sich folgende Differentialgleichung für die relative Bewegung des Pendels:

$\frac{d^2 \xi}{dt^2} + n^2 \xi + \frac{d^2 x}{dt^2} = 0^2) \dots \dots \dots (2)$

Daraus ergibt sich, bei Zugrundelegung der Formel (1), das allgemeine Integral

$\xi = A \frac{p^2}{n^2 - p^2} \sin pt + C_1 \sin nt + C_2 \cos nt. \dots \dots \dots (3)$

Die Constante *n* hängt unmittelbar von der Eigenperiode *T* des Pendels ab:

$n = \frac{2\pi}{T}.$

Poincaré setzt die Constanten *C*₁ und *C*₂ einfach gleich Null, was, obgleich theoretisch möglich, doch praktisch nicht ausführbar ist, da man, um dieses zu erreichen, zur Zeit *t* = 0 einen ganz bestimmten Anstoss dem Pendel geben müsste, dessen Grösse unmittelbar von *A* und *p* abhängt — zwei Grössen, die als unbekannt aufzufassen sind.

1) Paris. Bailliére et fils. 1888. p. 46.

2) Bei Poincaré sind die Bezeichnungen etwas anders gewählt.

Auf diese Frage werde ich bei der Besprechung der Abhandlung von Schlüter nochmals zurückkommen.

Indem Poincaré *C*₁ und *C*₂ gleich Null setzt, schliesst er aus der Formel (3), dass, je näher die Periode der Eigenschwingung des Pendels derjenigen des Erdbebens liegt, desto grösser der Ausschlag des Pendels bei der Erderschütterung sein wird. Folglich giebt es für ein gegebenes Erdbeben ein Pendel von günstigster Länge. Daraus wäre zu schliessen, dass es zweckmässig sei, an einer seismometrischen Station mehrere Pendel von verschiedener Länge aufzustellen; eines von denselben würde dann eine Curve von maximaler Amplitude aufzeichnen, nämlich dasjenige, dessen Eigenperiode der Periode des Erdbebens am nächsten kommt.

Allein dieses Resultat ist nur unter der speciellen Voraussetzung berechtigt, dass wir beim Erdbeben wirklich mit einem sinusartigen Schwingen der Erdoberfläche zu thun haben. Das ist jedoch eine etwas gewagte Voraussetzung, da wir über den wahren Charakter der Bewegung der Erdoberfläche bei einem Erdbeben nahezu Nichts wissen. Das Bewegungsgesetz kann ein ganz anderes sein; um nur die einfachsten Fälle zu citiren: etwa eine periodische Bewegung mit starker Dämpfung oder sogar eine aperiodische.

Die umgekehrte Aufgabe ist jedoch von viel grösserer Wichtigkeit, nämlich die, wie aus der vom Pendel aufgezeichneten Curve rückwärts auf die wahre Bewegung der Erdoberfläche geschlossen werden kann.

Poincaré löst diese Aufgabe in folgender Weise:

ξ ist aus der Beobachtungcurve als Function der Zeit gegeben.

Sei also

$\xi = F(t).$

Aus der Gleichung (2) folgt alsdann

$x'' = -F''(t) - n^2 F(t).$

Durch zweifache Integration findet man nach Poincaré

$x = -F(t) - n^2 \int_0^t dt \int_0^t F(t) dt. \dots \dots \dots (4)$

Diese Formel setzt voraus, dass zur Zeit *t* = 0 *F'*(0) und *F*(0), und ebenfalls (*x'*)₀ und (*x*)₀ gleich Null sind.

Wäre *F'*(0) und *F*(0) nicht gleich Null, so könnte dieser Umstand leicht berücksichtigt werden, da die Function *F* als bekannt anzusehen ist. Anders aber verhält es sich mit (*x*)₀ und (*x'*)₀.

Es kann sehr leicht vorkommen, dass für $t = 0$ $x = 0$ wird, aber x' von Null verschieden ausfällt, was gerade bei einer Sinusbewegung, welche speciell von Poincaré untersucht worden ist, der Fall sein wird.

Wie dann die anfängliche Geschwindigkeit $(x')_0$ zu ermitteln und in Betracht zu ziehen wäre, darüber sagt weder Poincaré noch Lippmann Etwas.

Die Frage nach der Bestimmung der anfänglichen Geschwindigkeit der Erderschütterung ist jedoch eine sehr ernste und schwere Aufgabe. Ohne diese Geschwindigkeit zu kennen, kann man aus einem Seismogramm die wahre Bewegung der Erdoberfläche bei einem Erdbeben nicht ableiten. Auf diese Frage werde ich später in § 11 nochmals zurückkommen.

Es sei mir hier noch folgende Bemerkung gestattet.

Poincaré setzt voraus, dass die Bewegung des einfachen Pendels nur von einem Parameter x abhängt. In Wirklichkeit ist das nicht der Fall; die Bewegung eines Pendels hängt von mehreren Veränderlichen ab, wie wir es weiter sehen werden.

Ein Blick auf die von einem einfachen Pendel bei einem Erdbeben gezeichneten verwickelten Curven¹⁾ zeigt hinlänglich, mit welchen complicirten Bewegungen wir es hier zu thun haben. Aus solchen und ähnlichen Curven halte ich es für ganz und gar unmöglich, die wahre Bewegung der Erdoberfläche bei einem Erdbeben abzuleiten, folglich sind solche Beobachtungen für den hier zu verfolgenden Zweck als vollständig werthlos zu bezeichnen.

Lippmann hat die gleiche Aufgabe, wie Poincaré, nur in einer etwas erweiterten Form, behandelt.²⁾

Er untersucht, ausser der Bewegung eines einfachen verticalen Pendels, noch die Schwingungen eines Horizontalpendels, indem er zugleich die Dämpfung in Betracht zieht.

Ausserdem nimmt Lippmann noch an, dass die Bewegung des Pendels von zwei Parametern, nämlich von zwei Verschiebungen der Erdoberfläche parallel den Coordinatenachsen abhängt. Von dem Einfluss der Neigungen auf die Bewegung eines Pendels ist weder bei Poincaré, noch bei Lippmann, die Rede. Da aber die Neigungen, wie wir weiter sehen werden, auf die Bewegung solcher Pendel einen mehr oder weniger starken Einfluss haben können, so ist es auch aus der von Lippmann gegebenen Formel nicht möglich, einen richtigen Aufschluss über die wahre Bewegung

1) Siehe z. B. Fouqué. L. c. p. 45.
2) C. R. T. CX. p. 440. 1890.

der Erdoberfläche bei einem Erdbeben zu erhalten. Ausserdem hat Lippmann in seinen Formeln einige Vereinfachungen eingeführt, die mir nicht immer als ganz zulässig erscheinen.

Denken wir uns ein Verticalpendel (siehe Fig. I) von der Länge l , und sei die relative Abweichung desselben von der Gleichgewichtslage gleich θ , wo θ als klein zu betrachten ist.

Die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels kann dann in folgende Form gebracht werden:

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + n^2\theta + \frac{n^2}{g}x'' - \frac{n^2}{g}y''\theta = 0. \dots\dots\dots (5)$$

Hierin bedeutet ϵ eine Constante, welche sich auf die Dämpfung des Systems bezieht; n hängt von der Eigenperiode T des Pendels ab. Sind x'' und y'' gleich Null, und bedeutet λ das logarithmische Decrement der Schwingungen, so ist bekanntlich

$$\epsilon = \frac{\lambda}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{n^2 - \epsilon^2}} \dots\dots\dots (6)$$

Indem nun Lippmann die Gleichung (5) in die Form

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + \frac{n^2}{g}\{g - y''\}\theta + \frac{n^2}{g}x'' = 0 \dots\dots\dots (7)$$

bringt, sagt er, mit Rücksicht darauf, dass g fast gleich 10 Meter ist, während die Verschiebung der Erdoberfläche nur einige Millimeter betragen kann, dass man y'' im Vergleich zu g vernachlässigen darf. Daraus würde sich ergeben, dass θ nur von dem Parameter x abhängig sein könnte.

Dieser Schluss scheint mir nicht immer ganz berechtigt zu sein. Es können nämlich bei einem Erdbeben sehr leicht Fälle vorkommen, z. B. bei heftigen Anstössen, dass y sehr klein bleibt, aber y'' doch mehreremal grösser ausfallen wird. Um nur ein Beispiel zu citiren, denken wir uns eine sinusartige Bewegung mit einer sehr kurzen Periode, etwa $\tau = \frac{1}{2}$ Sec.

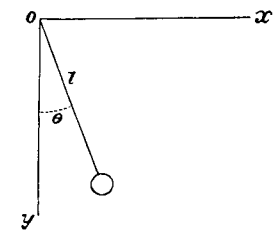
Setzen wir dementsprechend

$$y = P \sin pt,$$

wo $p = \frac{2\pi}{\tau} = 4\pi$ wird, so ergibt sich

$$-\frac{y''}{y} = p^2, \text{ also ungefähr } = 160.$$

Fig. I.



Würde man jedoch zugeben, dass für ein Verticalpendel y'' gegen g wirklich vernachlässigt werden darf, so ist diese Vernachlässigung für ein Horizontalpendel gar nicht mehr zulässig.

In der Gleichung für ein Horizontalpendel tritt, statt der Grösse $g - y''$, $gi_0 - y''$ ein, wo i_0 den Winkel zwischen der verticalen Linie und der Drehungsaxe des Pendels bedeutet.

i_0 wird gewöhnlich klein gewählt, um die Empfindlichkeit des Apparates zu vergrössern.

Ist z. B. $i_0 = 5'$, so wird $gi_0 = 14 \frac{m}{m}$, und in diesem Fall darf y'' nicht mehr vernachlässigt werden.

Lippmann leitet nun aus der Gleichung (7) durch zweifache Integration, indem er y'' vernachlässigt und den Einfluss der Neigungen ganz ausser Acht lässt, eine Formel zur Bestimmung von x als Function der Zeit ab.

Diese Formel ist der Formel von Poincaré (Gleichung (4)) vollständig analog, nur ist hier der Einfluss der Dämpfung der Schwingungen mitberücksichtigt.

Lippmann setzt dabei ebenfalls voraus, dass für $t = 0$, x und x' gleich Null werden, eine Bedingung, die nur ausnahmsweise stattfinden kann.

Die Benutzung der Lippmann'schen Formel setzt voraus, dass die Constanten des Pendels ϵ und n bekannt sind. Dieselben lassen sich aus der vom Pendel bei Abwesenheit eines Erdbebens gezeichneten Curve nach den Formeln (6) mit Leichtigkeit ermitteln.

Lippmann schlägt aber zur Bestimmung dieser Constanten eine ganz eigenthümliche Methode vor. Er will das Pendel einmal mit Dämpfung und das andere Mal ohne Dämpfung schwingen lassen. Wie das zu erreichen wäre, ist mir unklar, da die Dämpfung eine inhärente Eigenschaft des Instrumentes ist.

Zum Schluss sei gesagt, dass Poincaré und Lippmann ohne Zweifel das grosse Verdienst zukommt, die Aufmerksamkeit auf das äusserst wichtige Problem der Seismometrie, nämlich aus der vom Seismographen aufgezeichneten Curve die wahre Erdbewegung abzuleiten, gelenkt zu haben; doch haben sie beide das Problem nicht gelöst, erstens, weil sie die Bewegung der Erdoberfläche nur parallel zu einer Richtung berücksichtigen, und zweitens, weil sie die Neigungen vollständig ausser Acht gelassen haben.

§ 3.

Die Abhandlung von Schlüter.

Schlüter hat sich in seiner erst vor kurzem erschienenen wichtigen Abhandlung¹⁾ die zu lösende Frage ganz richtig gedacht und dieselbe rationell aufgefasst. Er sucht eben die Verschiebungen oder Translationsbewegungen der Erdoberfläche von den Neigungen zu trennen. Die hier citirte Abhandlung beschäftigt sich ausschliesslich mit Neigungen; die nächste Abhandlung soll den Verschiebungen gewidmet werden.

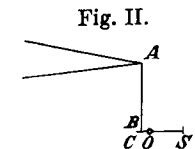
Nach einem kurzen historischen Überblick über seismometrische Beobachtungen sagt Schlüter, dass die Debatte sich besonders um die Frage drehe, ob die langen Wellen — Neigungswellen oder ein horizontales Hin- und Herschwingen des Bodens sind. Obwohl mehr als 200 verschiedene Typen von Seismographen existiren, harret diese Aufgabe noch immer ihrer Lösung. Der Grund dafür liegt in der Thatsache, dass diese Apparate durch Neigungen und ebenfalls durch Translationsverschiebungen der Erdoberfläche in Bewegung gesetzt werden; folglich kann man aus den Aufzeichnungen solcher Instrumente nicht schliessen, welche von beiden Bewegungsarten vor sich gegangen war.

Die Trennung dieser beiden Bewegungsarten lässt sich, nach Schlüter, dadurch erreichen, dass man einen solchen Apparat construirt, dessen Massenmittelpunkt mit der Drehungsaxe zusammenfällt. Alle parallelen Verschiebungen werden auf einen solchen Apparat ohne Einfluss sein, und derselbe wird sich gut dazu eignen, speciell die Neigungen zu erforschen.

Von diesem Gedanken geleitet, hat Schlüter einen besonderen Apparat construirt, welchen er mit den Namen Klinograph versehen hat.

Der Klinograph besteht einfach aus einem Wagebalken, dessen Schwingungen durch zwei in Öl getauchte Glasplatten gedämpft werden.

Da die Neigungen bei einem Erdbeben nach den allgemein herrschenden Ansichten sehr klein ausfallen, so versuchte Schlüter die Neigungen seines Klinographen durch eine besondere Hebelvorrichtung zu vergrössern. Diese Vorrichtung besteht, so weit ich sie verstanden habe, ihrem Princip nach aus einem Stift AB (siehe Fig. II), welcher an einem Arm des Klinographen befestigt ist. Dieser Stift lehnt sich an einem Hebel CS an, mit einem sehr kurzen Arm CO . In S befindet sich ein Spiegel zur photographischen Re-



1) Schlüter. Schwingungsart und Weg der Erdbebenwellen. Inaugural-Dissertation. Göttingen 1901.

gistrirung der Neigungen. Dadurch wird erreicht, dass kleine Neigungen des Klinographen verhältnissmässig grosse Drehungen des Spiegels hervorzurufen imstande sind.

Der photographische Registrirapparat, nach Prof. Wiechert's System, hatte eine grosse Drehungs-Geschwindigkeit, so dass die Länge einer Stunde auf der Trommel 36 cm. entsprach.

Die Empfindlichkeit des Apparates war so hergestellt, dass 1" Neigung des Klinographen $3,37 \frac{m}{m}$ auf dem lichtempfindlichen Papier entsprach. Indem man mit einer Lupe noch $0,05 \frac{m}{m}$ ablesen konnte, ergab sich nach Schlüter die Möglichkeit, die Neigungen bis auf $0,015''$ festzustellen.

Wegen der Frage, wie die Constanten des Apparates zu bestimmen sind, muss ich auf die Originalabhandlung von Schlüter verweisen.

Wollen wir uns jetzt zu der Theorie dieses Apparates wenden.

Das Vorhandensein des kleinen Spiegels zur photographischen Registrirung führt eine gewisse Complication bei der Aufstellung der fundamentalen Differentialgleichung der Bewegung des Klinographen ein.

Bei ihrer Ableitung nimmt Schlüter an, dass die Entfernung des Massenmittelpunktes des Klinographen von der Drehungsaxe nicht gleich Null ist; dabei ist es aber nicht mehr gestattet, wie Schlüter es thut, die Translationsverschiebungen der Erdoberfläche ausser Acht zu lassen. Auf das Endresultat hat dieses doch keinen Einfluss, da, wenn der Klinograph zu Beobachtungen richtig aufgestellt ist, nach Schlüter l wirklich gleich Null gemacht werden muss.¹⁾

Ist aber l gleich Null, so hat der Apparat keine richtende Kraft, folglich kann er jede beliebige Gleichgewichtslage einnehmen. Dieses ist, meiner Ansicht nach, ein principieller Fehler des Klinographen, da jede beliebige, äusserst unbedeutende Ursache einen Einfluss auf die Aufzeichnung des Apparates haben kann. Schlüter erkennt es vollständig an, da er selbst nach einer richtenden Kraft sucht und dabei gefunden hat, dass durch seine Spiegelvorrichtung die nöthige federnde Kraft erzielt ist, um dem Klinographen stabiles Gleichgewicht zu verleihen. Es scheint mir als ein bedeutender Mangel des Apparates zu sein, dass dessen richtiger Betrieb von solchen secundären Ursachen abhängig sein soll.

Ich denke sogar, dass diese ganze Spiegelvorrichtung von Schlüter, bei Abwesenheit irgend welcher anderen richtenden Kraft, gewissermaassen eine viel zu starre Verbindung zwischen dem Klinographen und der Unterlage, an welcher der Spiegel befestigt ist, vorstellt, und es ist wohl möglich, dass der Klinograph von Schlüter, wie wir es weiter sehen werden, nur

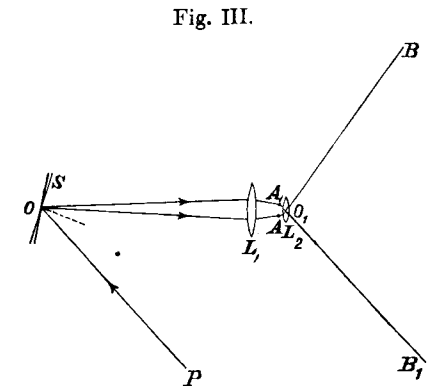
1) Dazu dient ein kleines Gewicht, welches man auf und nieder verschieben kann.

deshalb solche kleine Neigungen gezeigt hat, weil er in Folge dieser Spiegelvorrichtung gewissermassen ein einziges, starres System mit der Zimmerwand bildete.

Es wäre jedoch ganz leicht, die von Schlüter benutzte mechanische Hebelvorrichtung für die Spiegelablesung durch eine rein optische zu ersetzen. Dann würde der Klinograph vollständig frei schwingen können.

Das Prinzip dieses optischen Hebels lässt sich leicht aus der Figur III erkennen.

S ist ein auf dem einen Arm des Klinographen befestigter Spiegel. Auf S fällt ein paralleles Strahlenbündel PO . Nach der Reflexion werden diese parallelen Strahlen von der Linse L_1 zu einem Punkt in A vereinigt. Wird der Spiegel um einen kleinen Winkel gedreht, so werden die Strahlen in A_1 vereinigt. L_2 ist eine zweite Linse mit sehr kurzer Brennweite. Nach Brechung der Strahlen



in der zweiten Linse L_2 werden dieselben in zwei Punkten in B und B_1 auf dem lichtempfindlichen Papier vereinigt. Es ist immer möglich, die Linsen so zu wählen, dass der Winkel bei O_1 viel grösser, als der bei O ausfällt.

Hielte man es für wünschenswerth, so könnte man die Empfindlichkeit der Ablesung noch dadurch erhöhen, dass man statt einer Reflexion am Spiegel S zwei, oder sogar mehrere, Reflexionen statthaben liesse. Dazu wäre nur noch nöthig, vor dem beweglichen Spiegel S noch einen festen Spiegel aufzustellen und das System richtig zu justiren.¹⁾

Man sieht also, dass das hier angedeutete optische System einen völligen Ersatz für die mechanische Hebelvorrichtung von Schlüter bietet.

Es sei nun ψ der Winkel, um welchen sich die Erdoberfläche geneigt hat, also die Grösse der Drehung um die Axe des Klinographen; sei ferner die relative Abweichung des Klinographen von der Gleichgewichtslage θ , wo θ diejenige Grösse ist, welche eigentlich gemessen wird, so lässt sich bei Abwesenheit irgend welcher parallelen Verschiebungen der Erdoberfläche die Differentialgleichung der Bewegung des Klinographen in folgende Form kleiden:

$$(\theta'' + \psi'') + 2\epsilon\theta' + n^2(\theta + \psi) + a\theta - b\psi'' = 0 \dots \dots (8)$$

1) Selbstverständlich müssen die vorderen Flächen beider Spiegel gut versilbert werden.

Hierin bedeuten ε und n die Constanten des Klinographen; $a\theta$ und $b\psi''$ sind zwei Correctionsglieder, welche von der Wirkung der Spiegelvorrichtung herrühren.

Wären noch Verschiebungen der Erdoberfläche vorhanden und fiel die Ebene des Klinographen mit der xz -Ebene zusammen, so hätten wir, statt der Gleichung (8) von Schlüter, die folgende verallgemeinerte Differentialgleichung:

$$(\theta'' + \psi'') + 2\varepsilon\theta' + n^2 \left\{ 1 + \frac{z''}{g} \right\} \{\theta + \psi\} + \frac{n^2}{g} x'' + a\theta - b\psi'' = 0. \dots (9)$$

n^2 ist proportional der Entfernung l des Massenmittelpunktes von der Drehungsaxe; fällt also der Massenmittelpunkt mit der Drehungsaxe zusammen, so fallen alle Glieder, welche mit n^2 multiplicirt sind, einfach weg. Also nur unter der Bedingung, dass $l = 0$ ist, kann der Klinograph zur Erkennung der Neigungen allein verwendet werden. Aber in diesem Fall fällt auch jede richtende Kraft weg, wenn wir von der Spiegelvorrichtung absehen wollen.

Setzen wir nun mit Schlüter voraus, dass x'' und y'' gleich Null sind und dass die Neigungen der Erde dem Sinusgesetz ohne Dämpfung folgen, also etwa

$$\psi = \Gamma \sin pt,$$

so lässt sich die Gleichung (8) in folgende Form bringen:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + (n^2 + a)\theta + P \sin pt = 0, \dots (10)$$

wo P eine gewisse Constante bedeutet.

Diese Gleichung hat Schlüter integrirt. Ich habe dieselbe nun etwas verallgemeinert, indem ich für die Neigungen der Erdoberfläche eine gewisse Dämpfung annahm und ausserdem, statt nur eines Gliedes von der Form $Pe^{-\mu t} \sin pt$, eine Anzahl solcher Glieder eingeführt habe.

Die von mir integrirte Gleichung lautet, wenn wir noch zur Abkürzung $n^2 + a$ durch n_1^2 bezeichnen, also

$$n_1^2 = n^2 + a \dots (11)$$

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n_1^2\theta + \sum Pe^{-\mu t} \sin pt = 0. \dots (12)$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lässt sich in folgender Form wiedergeben:

$$\theta = e^{-\varepsilon t} [C_1 \sin \gamma t + C_2 \cos \gamma t] + \sum \frac{P}{\sqrt{L}} e^{-\mu t} \sin (pt + \Delta), \dots (13)$$

1) In dieser Σ sind im Allgemeinen die einzelnen P , μ und p verschieden.

wo

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 &= n_1^2 - \varepsilon^2 \\ L &= p^4 + \gamma^4 + v^4 - 2p^2\gamma^2 + 2p^2v^2 + 2\gamma^2v^2 \\ v &= \varepsilon - \mu \\ \text{tg } \Delta &= \frac{2pv}{p^2 - \gamma^2 - v^2} \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

Beschränken wir uns mit Schlüter nur auf ein einziges Glied $P \sin pt$ ohne Dämpfung, und setzen wir für's Erste auch die Dämpfungsconstante des Klinographen ε gleich Null, so ergibt sich aus der allgemeinen Gleichung (13), unter Berücksichtigung der Formeln (14),

$$\theta = C_1 \sin n_1 t + C_2 \cos n_1 t + \frac{P}{p^2 - n_1^2} \sin pt. \dots (15)$$

Ehe wir mit Schlüter zur weiteren Discussion der Gleichungen übergehen, wollen wir näher untersuchen, wie sich P in Wirklichkeit ausdrücken lässt.

Es ist gegeben

$$\psi = \Gamma \sin pt.$$

Setzt man diesen Werth in der Gleichung (8) ein und vergleicht alsdann dieselbe mit der Gleichung (10), so ergibt sich

$$P = \Gamma \{n^2 - p^2(1 - b)\}, \dots (16)$$

folglich wird

$$\theta = C_1 \sin n_1 t + C_2 \cos n_1 t - \Gamma \frac{n^2 - p^2(1 - b)}{n_1^2 - p^2} \sin pt. \dots (17)$$

An diese Formel wäre folgende Bemerkung, die vom Interesse sein könnte, anzuknüpfen:

Wäre die Spiegelvorrichtung des Klinographen nicht vorhanden, dann wäre $a = 0$, $b = 0$ und $n_1 = n$. In diesem Falle wird der Factor von $\sin pt$ immer gleich $-\Gamma$ sein, unabhängig von den Werthen von n und p .

Es ergibt sich also, dass, wenn auch die Periode der Erdschwingung gleich der Periode der Eigenschwingung des Klinographen ist, der Factor von $\sin pt$ in dem Ausdrücke des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung der Bewegung des Klinographen seinem absoluten Werthe nach nie grösser als Γ werden kann, während in dem von Poincaré untersuchten Fall (vergleiche Gleichung (3)) der Factor von $\sin pt$, wenn n sich an p nähert, sehr gross ausfallen kann.

Dieser principielle Unterschied in dem Verhalten der Functionen θ und ξ rührt davon her, dass in der vereinfachten Differentialgleichung für den Klinographen

$$(\theta + \psi)'' + n^2 (\theta + \psi) = 0$$

das Moment der zurückziehenden Kraft proportional der absoluten Verschiebung $\theta + \psi$ ist, während beim Pendel dieses Moment der relativen Verschiebung ξ proportional zu setzen ist, da nämlich

$$(\xi + x)'' + n^2 \xi = 0$$

wird.

Kehren wir jetzt zu der Schlüter'schen Gleichung (10) zurück.

Das allgemeine Integral derselben ergibt sich aus der Gleichung (13) unter Berücksichtigung der Formeln (14).

In diesem Falle ist $\nu = \epsilon$.

$$\left. \begin{aligned} L &= (n_1^2 - p^2)^2 + 4p^2 \epsilon^2 \\ \operatorname{tg} \Delta &= \frac{2p\epsilon}{p^2 - n_1^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

und

$$\theta = e^{-\epsilon t} [C_1 \sin \gamma t + C_2 \cos \gamma t] + \frac{P}{\sqrt{L}} \sin (pt + \Delta). \dots (19)$$

Bei Anstellung der Discussion dieser Gleichung sagt Schlüter: «Setzt man voraus, dass beim Beginn der Bewegung ein entsprechender Anstoss gegeben wird, so fallen die beiden ersten Glieder weg» Folglich kann man C_1 und C_2 gleich Null setzen.

Obgleich dieser Schluss Schlüter's, theoretisch gesprochen, auch vollständig richtig ist, hat derselbe doch keine reelle praktische Bedeutung. Damit C_1 und C_2 wirklich gleich Null werden, müssten am Anfange der Erdbewegung, also wenn $t = 0$ ist, der Anfangswinkel θ_0 und die anfängliche Winkelgeschwindigkeit θ_0' ganz bestimmte Werthe haben, die unmittelbar von dem Gesetz der Erdbewegung abhängig sind, welches aber in Wirklichkeit als völlig unbekannt zu betrachten ist.

Aus der Gleichung (19) ergibt sich nämlich für $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \theta_0 - \frac{P}{\sqrt{L}} \sin \Delta \\ C_1 &= \frac{1}{\gamma} \left[\theta_0' + \epsilon \theta_0 - \frac{P}{\sqrt{L}} \{ \epsilon \sin \Delta + p \cos \Delta \} \right]. \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

und

Damit diese Ausdrücke gleich Null werden, müsste

$$\theta_0 = \frac{P}{\sqrt{L}} \sin \Delta$$

und

$$\theta_0' = \frac{P}{\sqrt{L}} p \cos \Delta$$

sein.

Ist keine Dämpfung vorhanden, so ergibt sich

$$\theta_0 = 0$$

und

$$\theta_0' = \frac{P}{\sqrt{L}} \cdot p.$$

Wenn auch bei Abwesenheit irgend welcher Dämpfung beim Anfang der Ruhestörung θ_0 gleich Null gesetzt werden darf, wenn der Klinograph vorher in Ruhe war, so muss jedoch dem Apparate eine ganz bestimmte Anfangsgeschwindigkeit $\theta_0' = \frac{P}{\sqrt{L}} p$ ertheilt werden, damit C_1 und C_2 wirklich gleich Null gesetzt werden dürften; das ist praktisch aber unausführbar.

Poincaré setzt ebenfalls in seinem Aufsatz C_1 und C_2 gleich Null. Gegen diese Annahme muss ich dieselben Bedenken erheben.

Die Frage nach der Bestimmung der Constanten des allgemeinen Integrals der Differentialgleichung, wenn die Erdbewegung völlig unbekannt ist, ist in der That eine äusserst schwierige Aufgabe, auf die ich später zurückkommen werde.

Auf eine sehr elegante und sinnreiche Methode, diese Constanten zu bestimmen, möchte ich hier hinweisen. Diese Methode kann angewandt werden, wenn man von vornherein weiss, dass die Function θ durch eine allgemeine Sinusreihe mit verschiedenen Amplituden, Perioden und Phasen, jedoch ohne Dämpfung, sich darstellen lässt, also etwa:

$$\theta = P_1 \sin (p_1 t + \Delta_1) + P_2 \sin (p_2 t + \Delta_2) + P_3 \sin (p_3 t + \Delta_3) + \dots (21)$$

Es ist einleuchtend, dass die früher aufgestellte Integralformel für den Klinographen (für $\epsilon = 0$) in der Formel (21) mit einbegriffen ist.

Die zu erwähnende Methode, welche vom Professor Kryloff bei seinen Untersuchungen über den Widerstand des Wassers gegen die Bewegung von Schiffen in dem Untersuchungsbassin des Marineministeriums zu St. Petersburg angewandt wird, und welche auch für die Meteorologie von besonderem Interesse sein könnte, da wir dort öfters mit periodischen Erscheinungen zu thun haben, besteht in einer consecutiven Sichtung der Glieder der oben angegebenen Reihe.

Setzen wir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben,

$$p_1 < p_2 < p_3 \dots$$

und integrieren die aus den Beobachtungen sich ergebende Curve $\theta = F(t)$ $2n$ mal, indem wir alle Integrationsconstanten gleich Null setzen¹⁾, so ergibt sich:

$$\Theta = \int \dots \int_{(2n)} \theta dt = (-1)^n \frac{1}{p_1^{2n}} \left[P_1 \sin(p_1 t + \Delta_1) + P_2 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{2n} \sin(p_2 t + \Delta_2) + \dots + P_3 \left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{2n} \sin(p_3 t + \Delta_3) + \dots \right].$$

Da $\frac{p_1}{p_2}, \frac{p_1}{p_3}$ u. s. w. echte Brüche sind, so können bei hinreichend grossem n alle Summanden der vorigen Reihe, mit Ausnahme des ersten, beliebig klein gemacht werden und es bleibt mit hinreichender Annäherung nur übrig

$$\Theta = \frac{(-1)^n}{p_1^{2n}} P_1 \sin(p_1 t + \Delta_1).$$

Aus der Form dieser Curve lassen sich leicht p_1 und Δ_1 ermitteln. Ist nun p_1 bekannt, so findet man leicht aus der gewonnenen Amplitude den Werth von P_1 .

Auf diese Weise können also die drei Constanten des ersten Gliedes der Reihe (21) bestimmt werden.

Ist nun das Glied $P_1 \sin(p_1 t + \Delta_1)$ bekannt, so bringt man dasselbe auf die linke Seite der Gleichung (21) und verfährt weiter nach derselben Art und Weise mit der Function

$$\theta - P_1 \sin(p_1 t + \Delta_1),$$

statt θ .

Nach dieser Methode lassen sich alle Glieder der Reihe (21) nach und nach bestimmen, aber die Möglichkeit der Anwendung dieser Methode setzt voraus, dass θ wirklich durch eine Sinusreihe dargestellt werden kann, was eigentlich bei seismometrischen Beobachtungen wohl nicht immer zutrifft.

Nach dieser Abweichung von dem eigentlichen Thema kehren wir zur Discussion der Gleichung (17) zurück.

1) Bei Ausführung einer solchen Integration kann man von einem Integrirer Gebrauch machen. Wäre die Curve in einem sehr kleinen Massstabe gegeben, so könnte man dieselbe mit Leichtigkeit vorher photographisch vergrössern.

Es ist bei Abwesenheit einer Dämpfung

$$\theta = C_1 \sin n_1 t + C_2 \cos n_2 t - \Gamma \frac{n^2 - p^2 (1-b)}{n_1^2 - p^2} \sin pt \dots \dots (17)$$

Sei die Schwingungsperiode des freien Klinographen T , die Periode desselben beim Vorhandensein der Spiegelvorrichtung T_1 und die Periode der Erdschwingungen τ , so haben wir

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{2\pi}{T} \\ n_1 &= \frac{2\pi}{T_1} \\ p &= \frac{2\pi}{\tau} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

Schlüter sagt weiter, dass man, da bei seinem Klinographen b nur $\frac{1}{100}$ war, diese Grösse in der obigen Formel (17) vernachlässigen kann. Weiter setzt er C_1 und C_2 gleich Null, was, wie wir sahen, nicht völlig berechtigt ist, und, mit Berücksichtigung der Gleichungen (22), bekommt er

$$\theta = -\psi \frac{T_1^2}{T^2} \cdot \frac{\tau^2 - T^2}{\tau^2 - T_1^2} \dots \dots \dots (23)$$

Schlüter untersucht weiter den Einfluss der Perioden T, T_1 und τ auf den Werth von θ .

Er nimmt zunächst an, dass bei constanten Werthen von T und T_1 (wo $T_1 < T$ ist), τ von 0 an wächst. Dieser und den anderen hier angeknüpften Voraussetzungen Schlüter's kann ich jedoch keine besondere Bedeutung beilegen; ich halte sie sogar für ganz überflüssig, da, wenn der Klinograph wirklich nur Neigungen anzeigen darf, unbedingt $l = 0$, folglich auch $n = 0$ und $T = \infty$ sein muss.

In diesem Falle reducirt sich die Gleichung (23) auf

$$\theta = +\psi \frac{T_1^2}{\tau^2 - T_1^2}.$$

Bei Annäherung von τ an T_1 kann der Bruch $\frac{T_1^2}{\tau^2 - T_1^2}$ sehr gross werden, und damit ist Alles gesagt.

Dieses Resultat steht nicht im Widerspruch mit dem früher Gesagten, dass nämlich beim Klinographen der Factor von $\sin pt$ nicht unendlich werden kann.

Dieses wäre in Wirklichkeit der Fall, wenn n von 0 verschieden wäre, aber jetzt, wo $n = 0$ ist, verwandelt sich die allgemeine Differentialgleichung (8) des Klinographen in die folgende (für $\varepsilon = 0$ und $b = 0$):

$$(\theta + \psi)'' + a\theta = 0.$$

Hier ist das Moment der zurückziehenden Kraft schon der *relativen* Verschiebung θ proportional, und folglich kann der Factor von $\sin pt$ sehr gross werden.

Inbetreff des Unendlichwerdens des dritten Gliedes in dem Ausdrücke von θ (siehe Formel (15)) möge hier folgende Bemerkung angeknüpft werden.

Wir haben

$$\theta = C_1 \sin n_1 t + C_2 \cos n_1 t + \frac{P}{p^2 - n_1^2} \sin pt. \quad \dots \quad (15)$$

Setzen wir voraus, dass für $p = n_1$ P nicht gleich Null wird (also a und b von Null verschieden sind), so würde man schliessen, wenn der Unterschied $p - n_1$ sehr klein ist, und wenn man mit Poincaré und Schlüter C_1 und C_2 wirklich gleich Null setzt, dass θ schon vom Anfang der Bewegung an grosse Werthe besitzt.

Diesen Fall wollen wir etwas näher ins Auge fassen.

Setzt man voraus, dass am Anfang der Bewegung $\theta_0 = 0$ ist, so kann, wie wir sahen, $C_2 = 0$ gesetzt werden.

C_1 ergibt sich alsdann aus der Formel (15).

Es ist (vergleiche die zweite der Formeln (20)):

$$C_1 = \frac{1}{n_1} \left\{ \theta_0' - \frac{P}{p^2 - n_1^2} p \right\}.$$

Man findet also für θ :

$$\theta = \frac{\theta_0'}{n_1} \sin n_1 t + \frac{P}{p^2 - n_1^2} \left\{ \sin pt - \frac{p}{n_1} \sin n_1 t \right\}. \quad \dots \quad (24)$$

Ist der Unterschied zwischen p und n_1 sehr klein, so müsste θ_0' sehr gross sein, damit C_1 wirklich gleich Null werden kann.

Wollen wir jetzt keine Voraussetzung über θ_0' machen und näher verfolgen, wie θ sich ausdrücken lässt, wenn der Unterschied zwischen p und n_1 sehr klein ist.

Setzen wir demgemäss

$$p - n_1 = \alpha,$$

wo α eine sehr kleine Grösse ist.

Dann lässt sich die Formel (24) folgendermaassen schreiben:

$$\theta = \frac{\theta_0'}{n_1} \sin n_1 t + \frac{P}{2n_1 + \alpha} \left\{ t \cos n_1 t - \frac{1}{n_1} \sin n_1 t \right\}. \quad \dots \quad (25)$$

Diese Formel zeigt ganz deutlich, dass θ vom Anfang der Bewegung an nicht sehr gross zu sein braucht, wenn $\alpha = 0$ ist. Freilich kann mit der Zeit θ sehr anwachsen, da t vor dem Gliede $\cos(n_1 t)$ auftritt, aber am

Anfang der Bewegung, wenn auch $p = n_1$ ist, ist es nicht nothwendig, dass θ besonders gross wird. Aber unter der Annahme, dass C_1 und C_2 gleich Null sind, bekommt man schon bei kleinen Werthen von t sehr grosse Werthe für θ , und zwar nur deshalb, weil in diesem Fall θ_0' sehr gross gemacht werden muss. Gewöhnlich kann man θ_0' sogar gleich Null setzen, wenn man dem Apparat keine anfängliche Bewegung ertheilt.

Diese Bemerkung ist insofern von Bedeutung, da sie zeigt, dass man mit gewisser Vorsicht beim Feststellen der Werthe der Constanten C_1 und C_2 in der allgemeinen Integralformel vorgehen muss. θ wird am Anfang der Bewegung sehr gross sein, nicht etwa, weil $p = n_1$ ist, sondern weil zugleich noch verlangt wird, dass C_1 und C_2 gleich Null seien, eine Bedingung, die ganz überflüssig und praktisch gar nicht zu bewerkstelligen ist.

Nach dieser Bemerkung kehren wir nochmals zu der Schlüter'schen Abhandlung zurück.

Schlüter untersucht weiter, wie der Klinograph sich in Gegenwart von Dämpfung verhält (siehe Formel (19)). In diesem Fall kann L nie gleich Null werden, wie es aus der ersten der Gleichungen (18) ersichtlich ist.

Da Schlüter abermals C_1 und C_2 gleich Null gesetzt hat, kommt er zu dem Schluss, dass die Ausschläge des Klinographen immer gleich gross bleiben¹⁾, als ob der Apparat ganz ohne Dämpfung schwingen würde. Dieser Fall würde in der Praxis kaum jemals eintreten.

Nach Entwicklung der Formeln für den Klinographen geht Schlüter zur Theorie des Horizontalpendels und zwar *nur für Neigungen* über und stellt dabei die Differentialgleichung der Bewegung dieses Apparates auf.

Er setzt weiter wieder voraus, dass die Neigungen der Erde nach Sinusschwingungen erfolgen, also etwa nach

$$\psi = \Gamma \sin pt,$$

und integrirt unter dieser Voraussetzung seine Differentialgleichung.

Die Integralformel wird von Schlüter in ähnlicher Weise, wie diejenige für den Klinographen, discutirt, deshalb muss ich gegen diese Discussion ähnliche Bedenken wie früher erheben. Ich halte es daher für überflüssig, bei dieser Frage länger zu verweilen, um so mehr, da ein Horizontalpendel nie dem Einflusse von Neigungen allein ausgesetzt sein kann; auf dasselbe

1) Die Amplitude und Phase der Bewegung hängen selbstverständlich auch von der Dämpfung ab.

wirken in hohem Maasse auch die Translationsverschiebungen der Erdoberfläche ein, wie wir es anderweitig im nächsten Paragraphen sehen werden; folglich ist jede Theorie des Horizontalpendels, welche den Einfluss dieser Verschiebungen nicht in Betracht zieht, von vorn herein als unvollkommen zu bezeichnen. Schlüsse aus einer solchen Formel zu ziehen, halte ich für überflüssig.

Durch Vergleichung der Aufzeichnungen eines Horizontalpendels mit denen eines Klinographen, für welchen $l = 0$ war, bei einer Erderschütterung in Göttingen, ist Schlüter zu folgendem Schlusse gelangt: «Weder die Vorläufer noch die Hauptwellen eines Erdbebendiagrammes sind zurückzuführen auf Neigungsschwingungen der Erde.»

Diesen Schluss Schlüters halte ich jedenfalls für verfrüht. Da bei dem Klinographen $l = 0$ war, und die einzige richtende Kraft nur von der Spiegelvorrichtung herrührte, ist es wohl denkbar, dass der Klinograph keine Neigungen gezeigt hat, nur deshalb, weil er wegen der Spiegelvorrichtung gewissermaassen ein zu starres System mit der Wand des Observatoriums bildete. Diese Spiegelvorrichtung und die Abwesenheit irgend welcher anderen richtenden Kraft halte ich eben, wie ich schon früher oben erwähnt habe, für einen Nachtheil dieses Apparates, und ich glaube, dass der Klinograph in seiner jetzigen Form nicht ganz geeignet ist, die Neigungswellen bei einem Erdbeben anzugeben.

Schlüter kommt jedoch das grosse Verdienst zu, das Problem richtig aufgefasst, aufgestellt und sogar den ersten Schritt zu seiner Lösung gethan zu haben.

§ 4.

Allgemeine Theorie des Horizontalpendels.

Da die Frage nach der zweckmässigsten Art der Untersuchung der Elemente eines Erdbebens immer noch offen steht, so habe ich mir die Aufgabe gestellt, eine solche Combination von Apparaten zu ersinnen, welche gestattet, aus den Aufzeichnungen verschiedener Seismographen alle 6 Elemente eines Erdbebens, und zwar die drei Verschiebungen und die drei Drehungen, getrennt abzuleiten und als Funktionen der Zeit darzustellen.

Dieses betrachte ich als das Hauptproblem der Seismometrie, und zur Behandlung dieses Gegenstandes werde ich jetzt übergehen.

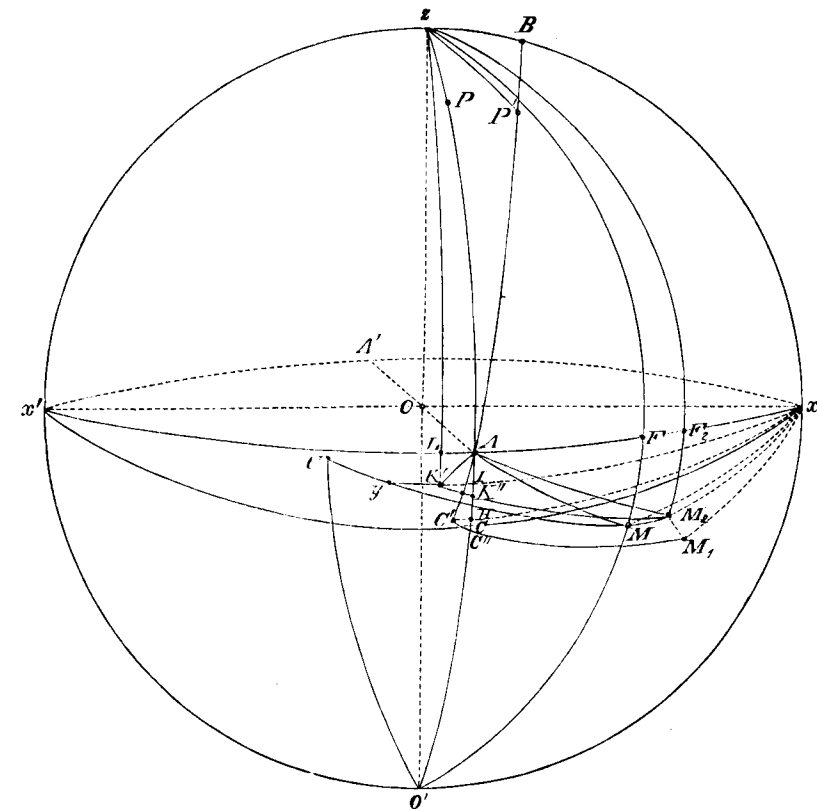
Ich erhebe keinen Anspruch auf eine vollkommene und endgiltige Erforschung des Problems. Möge das Folgende nur als ein Versuch in dieser Richtung betrachtet werden.

Zunächst ist es nothwendig, die allgemeine Theorie des Horizontalpendels näher zu untersuchen, um genau feststellen zu können, was dieser Apparat, welcher bei den Seismologen so beliebt ist, eigentlich zu geben imstande ist.

Das Horizontalpendel ist bekanntlich ein vortrefflicher Apparat, von grosser Empfindlichkeit, wenn es darauf ankommt, kleine Neigungen, welche ruhig vor sich gehen, oder etwaige Abweichungen der Richtung der Lothlinie anzugeben; aber bei Erdbeben ist das Horizontalpendel, wie wir weiter sehen werden, nicht imstande Neigungen *anzugeben*, da es ausserdem noch allzusehr unter dem Einflusse der Translationsverschiebungen der Erdoberfläche steht.

Wollen wir nun jetzt zur Aufstellung der allgemeinen Differentialgleichung der Bewegung eines Horizontalpendels übergehen.

Fig. IV.



Denken wir uns ein im Raume festes, rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z , dessen Anfang in dem Beobachtungsort liegt. Legen wir die x -Axe nach Norden, die y -Axe nach Osten und die z -Axe nach dem Zenith hin, und bedeuten x, y, z die absoluten Verschiebungen des Schnittpunktes des Pendels mit der Drehungsaxe desselben (Punkt O der Fig. IV) parallel zu diesen drei Richtungen.

Bezeichnen wir ferner die Drehungswinkel der Erdoberfläche um diese drei Axen beziehungsweise durch φ , ψ und χ , wobei wir unter positiver Drehung eine solche verstehen werden,

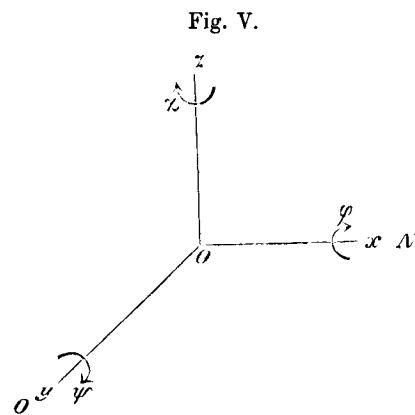


Fig. V.

welche der Bewegungsrichtung des Uhrzeigers entspricht, wenn man der Axe entlang nach dem Koordinatenanfangspunkt blickt (siehe Fig. V), so können x, y, z, φ, ψ und χ als die sechs unbekannt Elemente der Erderschütterung angesehen werden. Sie sind alle Functionen der Zeit, und die Aufgabe des hier zu behandelnden Problems der Seismometrie besteht eben darin, diese sechs

unbekannten Functionen aus den Aufzeichnungen gewisser Apparate zu ermitteln.

Wollen wir nun sehen, was das Horizontalpendel dabei leisten kann.

Denken wir uns ein solches Pendel in der ersten Verticalen aufgestellt, und sei i_0 der Winkel zwischen der Drehungsaxe des Pendels und der verticalen Linie, wenn das Pendel in Ruhe ist, wobei vorausgesetzt wird, dass i_0 sehr klein sein soll. Sei ferner θ die relative Ablenkung des Pendels zur Zeit t von der Gleichgewichtslage; θ ist eigentlich diejenige Grösse, welche die Beobachtungen liefern. Seien ferner alle 6 Elemente der Erdbewegung x, y, z, φ, ψ und χ von Null verschieden. Es handelt sich nun darum, die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels beim Vorhandensein dieser 6 Bewegungen der Erde abzuleiten.

Zu diesem Zweck denken wir uns eine Kugel (Fig. IV) vom Radius 1, deren Centrum O mit dem Schnittpunkt der Drehungsaxe des Pendels mit dem beweglichen Arm desselben zusammenfällt. Sei ferner l die Entfernung irgend eines Punktes M , in welchem die Masse m concentrirt zu denken ist, von O . Es handelt sich nun darum, die absoluten Coordinaten dieses Punktes ξ, η, ζ zur Zeit t beim Vorhandensein der früher erwähnten sechs Bewegungen aufzufinden.

Bezeichnen wir durch α, β und γ die *Cosinusse* der Winkel, welche die Richtung OM mit den Coordinaten-Axen bildet, so haben wir

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + l\alpha \\ \eta &= y + l\beta \\ \zeta &= z + l\gamma. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (26)$$

Die Aufgabe besteht nun darin, α, β, γ als Functionen von i_0, φ, ψ, χ und θ anzugeben.

Sind die Ausdrücke für α, β, γ schon einmal bekannt, so kann man dann die bekannten Formeln von Lagrange anwenden und die gesuchte Differentialgleichung ableiten.

Das Aufsuchen von α, β und γ ist eine ziemlich umständliche Aufgabe, zu der wir uns jetzt wenden werden.

Ich habe die ganze Ableitung unter Beibehaltung von Gliedern zweiter Ordnung (für φ, ψ und χ) durchgeführt, wobei ich auf Folgendes aufmerksam machen muss. φ, ψ und χ betrachte ich als kleine Grössen erster Ordnung, aber dabei ist man wohl nicht immer berechtigt, wie ich es schon früher bemerkt habe, ihre Derivirten nach der Zeit ebenfalls als sehr klein zu betrachten; folglich muss man bei der Feststellung dessen, was eigentlich in den Formeln vernachlässigt werden darf, mit gewisser Vorsicht zu Werke gehen.

Setzen wir zunächst voraus, dass Alles in Ruhe ist. Dann projicirt sich die Axe des Pendels in P (Fig. IV) und das Pendel selbst in C , wobei

$$zP = AC = i_0$$

ist.¹⁾

In diesem Fall wird das Pendel, wenn es von seiner Gleichgewichtslage abgelenkt wird, die Curve $x'Cx$ beschreiben.

Denken wir uns nun, dass eine Drehung ψ um die y -Axe stattgefunden hat.

Dann verschiebt sich der Punkt P nach P' und C nach C' , wobei

$$P'A = 90^\circ - i_0$$

und

$$AC' = i_0$$

wird.

Der Winkel zAP' ist gleich $zB = \psi$.

Der neue Winkel zwischen der Drehungsaxe des Pendels und der verticalen Linie wird jetzt $i = zP'$, wobei aus dem Dreieck $zP'B$ sich ergibt

$$\cos i = \cos i_0 \cdot \cos \psi. \dots \dots \dots (27)$$

Befinde sich zur Zeit t das Pendel in M_1 , wobei $C'M_1$ jetzt die Curve sein wird, welche das Pendel bei seiner Bewegung beschreibt. Die relative Entfernung des Pendels²⁾ von der Gleichgewichtslage ist M_1C' , also

$$\theta = M_1C'.$$

1) OA fällt mit der y -Axe zusammen.

2) Der Kürze halber werde ich statt «betrachteter Massenpunkt des Pendels M », was eigentlich richtiger wäre, immer kurz «Pendel» sagen.

Wenn das Pendel nach rechts sich bewegt, sei θ positiv.

Seien nun weiter $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die *Richtungscosinusse* der Linie OM_1 , zu deren Bestimmung wir nun schreiten wollen.

In dem rechtwinkligen Dreieck $AC'H$ ist

$$\angle C'AH = \psi,$$

folglich ist

$$\operatorname{tg}(AH) = \operatorname{tg} i_0 \cdot \cos \psi \dots \dots \dots (28)$$

$$\sin(C'H) = \sin i_0 \cdot \sin \psi. \dots \dots \dots (29)$$

In dem anderen gleichfalls rechtwinkligen Dreieck $C'HC''$ ist

$$\angle HC'C'' = \psi,$$

folglich ist

$$\operatorname{tg}(C''H) = \sin(C'H) \operatorname{tg} \psi \dots \dots \dots (30)$$

$$\sin(C'C'') = \frac{\sin(C'H)}{\sin \psi} \dots \dots \dots (31)$$

$$\cos(\angle C'C''H) = \cos(C'H) \sin \psi. \dots \dots \dots (32)$$

Aus den Formeln (28) bis (32) ergibt sich bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung¹⁾

$$\left. \begin{aligned} AH &= i_0 \cos \psi \\ C'H &= i_0 \psi \\ C''H &= i_0 \psi^2 \\ C'C'' &= i_0 \psi \\ \angle C'C''H &= 90^\circ - \psi. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (33)$$

Aus dem Dreieck $C'xM_1$, wo $\cos M_1x = \alpha_1$ und $M_1C' = 0$ ist, erhält man

$$\alpha_1 = \cos(90^\circ + C'H) \cos \theta + \sin(90^\circ + C'H) \sin \theta \cos \psi,$$

oder mit Rücksicht auf die zweite der Gleichungen (33),

$$\alpha_1 = -i_0 \psi \cos \theta + \cos \psi \sin \theta. \dots \dots \dots (34)$$

1) Da i_0 sehr klein ist, und ausserdem constant, so werde ich die Glieder von der Ordnung i_0^2 hier immer vernachlässigen.

Denken wir uns weiter M_1 mit A (Fig. IV) verbunden, dann ist

$$\cos(M_1A) = \beta_1.$$

Aus dem rechtwinkligen (bei C') Dreieck $AC'M_1$ folgt

$$\beta_1 = \cos \theta \cdot \cos(AC'),$$

da aber $AC' = i_0$ ist, so können wir, bei Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung i_0^2 , einfach schreiben

$$\beta_1 = \cos \theta \dots \dots \dots (35)$$

Denken wir uns jetzt M_1 mit z verbunden; dann ist

$$\cos(M_1z) = \gamma_1.$$

Aus dem Dreieck $M_1C''z$ erhält man:

$$\gamma_1 = \cos(90^\circ + AC'') \cos(\theta - C'C'') + \sin(90^\circ + AC'') \sin(\theta - C'C'') \cos(\angle HC''M_1).$$

$$AC'' = AH + HC'' = i_0 \cos \psi + i_0 \psi^2 = i_0 \sec \psi. \dots \dots (36)$$

Da aber noch $C'C'' = i_0 \psi$ und $\angle HC''M_1 = 180^\circ - \angle(C'C''H) = 90^\circ + \psi$ ist, so folgt

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -i_0 \sec \psi \{ \cos \theta + i_0 \psi \sin \theta \} - \{ \sin \theta - i_0 \psi \cos \theta \} \psi \\ &= -i_0 \cos \theta \{ \sec \psi - \psi^2 \} - \psi \sin \theta, \end{aligned}$$

oder

$$\gamma_1 = -i_0 \cos \psi \cos \theta - \psi \sin \theta. \dots \dots \dots (37)$$

Nachdem α_1, β_1 und γ_1 bestimmt sind, setzen wir weiter eine Drehung φ um die x -Axe voraus.

Dann verschiebt sich der Punkt M_1 nach M_2 , H nach I und C' nach K' , wobei $M_1\check{x} = M_2\check{x}$, $C'\check{x} = K'\check{x}$ und $HI = \varphi$ wird.

Bezeichnen wir die Cos. der Winkel, welche die Richtung nach M_2 mit den Coordinatenachsen bildet, beziehungsweise durch α_2, β_2 und γ_2 . Es handelt sich nun darum, diese Richtungscosinusse α_2, β_2 und γ_2 zu bestimmen.

Wir haben zunächst

$$\alpha_2 = \alpha_1. \dots \dots \dots (38)$$

1) Wegen der Gleichungen (33).

Aus der Fig. IV und aus der ersten der Gleichungen (33) ergibt sich weiter

$$AI = AH - \varphi = i_0 \cos \psi - \varphi.$$

Führen wir zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$AI = j = i_0 \cos \psi - \varphi.^1) \dots \dots \dots (39)$$

Bezeichnen wir noch den Winkel $K'AI$ durch ϵ und $AK'I$ durch δ , so erhalten wir aus dem Dreieck $K'AI$, da

$$K'I = C'H = i_0 \psi$$

ist,

$$\text{tg } \epsilon = \frac{\text{tg}(K'I)}{\sin(AI)}$$

oder

$$\text{tg } \epsilon = \frac{i_0 \psi}{j} \dots \dots \dots (40)$$

und

$$\text{tg}(AI) = \text{tg } \delta \cdot \sin(K'I),$$

also

$$\text{tg } \delta = \frac{j}{i_0 \psi.^2)} \dots \dots \dots (41)$$

Der Winkel $IK'K''$ ist offenbar gleich ψ , da bei der Drehung um die x -Axe die Curve M_1C' nach M_2K' und $C'x$ nach $K'x$ sich verlegt; dabei ist noch

$$M_1C' = M_2K' = 0.$$

Setzen wir provisorisch zur Abkürzung,

$$s = \sqrt{i_0^2 \psi^2 + j^2}, \dots \dots \dots (42)$$

so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta &= \frac{j}{s} \\ \cos \delta &= \frac{i_0 \psi}{s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \cos(AK') &= \cos(AI) \cos(i_0 \psi), \\ 1 - \frac{(AK')^2}{2} &= \left(1 - \frac{j^2}{2}\right) \left(1 - \frac{i_0^2 \psi^2}{2}\right), \end{aligned}$$

1) $i_0 \cos \psi$ soll dabei immer grösser als φ bleiben.
2) Die Glieder mit j^3 werden überhaupt vernachlässigt, diejenigen jedoch mit j^2 behalten. Siehe die Bemerkung auf Seite 24.

oder

$$AK' = \sqrt{i_0^2 \psi^2 + j^2} = s,$$

folglich wird

$$\left. \begin{aligned} \sin(AK') &= s \\ \cos(AK') &= 1 - \frac{1}{2} j^2.^1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (44)$$

Aus dem Dreieck M_2AK' erhält man nun

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \cos(AK') \cos \theta + \sin(AK') \sin \theta \cos(\delta + \psi) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} j^2\right) \cos \theta + s \cdot \sin \theta \{ \cos \delta \cdot \cos \psi - \sin \delta \cdot \sin \psi \}, \end{aligned}$$

oder, mit Berücksichtigung der Gleichungen (43),

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \left(1 - \frac{1}{2} j^2\right) \cos \theta + \{i_0 \psi \cos \psi - j \sin \psi\} \sin \theta \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} j^2\right) \cos \theta + \{i_0 \cos \psi - j\} \psi \cdot \sin \theta, \end{aligned}$$

oder, wegen der Gleichung (39),

$$\beta_2 = \left(1 - \frac{j^2}{2}\right) \cos \theta + \varphi \psi \sin \theta. \dots \dots \dots (45)$$

Zur Bestimmung von γ_2 denken wir uns K' mit z verbunden.

In dem rechtwinkligen Dreieck ALK' ist der Winkel $LAK' = 90^\circ - \epsilon$.

Der Winkel $LK'A$ sei durch α bezeichnet.

Es ergibt sich aus der Gleichung (40), unter Berücksichtigung der Gleichung (42),

$$\left. \begin{aligned} \sin \epsilon &= \frac{i_0 \psi}{s} \\ \cos \epsilon &= \frac{j}{s} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (46)$$

Weiter ist

$$\sin(LK') = \sin(AK') \cos \epsilon,$$

oder, wegen der Gleichungen (44) und (46),

$$\sin(LK') = j, \dots \dots \dots (47)$$

also

$$\cos(LK') = 1 - \frac{j^2}{2}. \dots \dots \dots (48)$$

1) In dem Ausdrücke für j^2 ist das Glied mit i_0^2 ebenfalls zu vernachlässigen.

Wollen wir nun noch x berechnen.

Aus dem Dreieck $zK'A$ folgt:

$$\cos 90^\circ = \cos(90^\circ + LK') \cos(AK') + \sin(90^\circ + LK') \sin(AK') \cos x,$$

also

$$\cos x = \frac{\sin(LK') \cos(AK')}{\cos(LK') \sin(AK')},$$

oder, wegen der Gleichungen (44), (47) und (48),

$$\cos x = \frac{j}{s}. \dots \dots \dots (49)$$

Folglich wird

$$\sin x = \frac{i_0 \psi}{s}. \dots \dots \dots (50)$$

Nun erhalten wir aus dem Dreieck $M_2 z K'$, wo $\cos M_2 z = \gamma_2$ ist,

$$\begin{aligned} \gamma_2 &= \cos(90^\circ + LK') \cos \theta + \sin(90^\circ + LK') \sin \theta \cos(x + \delta + \psi) \\ &= -\sin LK' \cos \theta + \cos LK' \sin \theta \{ \cos \psi \cos(x + \delta) - \sin \psi \sin(x + \delta) \}. \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \cos(x + \delta) &= \cos x \cos \delta - \sin x \cdot \sin \delta \\ \sin(x + \delta) &= \sin x \cos \delta + \sin \delta \cos x. \end{aligned}$$

Daraus finden wir mit Rücksicht auf die Gleichungen (43), (49) und (50),

$$\begin{aligned} \cos(x + \delta) &= 0 \\ \sin(x + \delta) &= 1. \end{aligned}$$

Folglich wird mit Berücksichtigung der Gleichungen (47) und (48),

$$\gamma_2 = -j \cos \theta - \left(1 - \frac{j^2}{2}\right) \sin \psi \sin \theta,$$

oder, bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung,

$$\gamma_2 = -j \cos \theta - \psi \sin \theta. \dots \dots \dots (51)$$

Nach Bestimmung von α_2, β_2 und γ_2 denken wir uns noch die dritte Drehung γ um die z -Axe vorhanden. Dann verlegt sich M_2 nach M, K' nach J und die Curve $M_2 K'$ nach MJ , wobei

$$MJ = 0$$

wird.

Nennen wir die Cosinuse der Winkel, welche die Richtung nach M nach allen drei erfolgten Drehungen mit den Coordinatenaxen bildet, respective α, β und γ (ohne Indices), so ist zunächst

$$\gamma = \gamma_2. \dots \dots \dots (52)$$

Führen wir noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} F_2 M_2 &= FM = c \\ F_2 x &= d \\ M_2 x &= a_2 \quad Mx = a \\ M_2 A &= b_2 \quad MA = b. \end{aligned}$$

Es ist dabei

$$\begin{aligned} \cos a_2 &= \alpha_2 \quad \cos a = \alpha \\ \cos b_2 &= \beta_2 \quad \cos b = \beta \end{aligned}$$

und

$$FF_2 = \chi.$$

Aus der Fig. (IV) ergibt sich, wie leicht einzusehen ist,

$$\begin{aligned} \cos a_2 = \alpha_2 &= \cos d \cdot \cos c \\ \cos(90^\circ + c) &= -\sin c = \gamma_2, \end{aligned}$$

also

$$\left. \begin{aligned} \cos d &= \frac{\alpha_2}{\cos c} \\ \sin d &= \frac{k}{\cos c}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (53)$$

wo

$$k = \sqrt{\cos^2 c - \cos^2 a_2}$$

ist.

Wollen wir nun k berechnen.

$$\begin{aligned} k^2 &= (1 - \sin^2 c) - \alpha_2^2 \\ &= 1 - \gamma_2^2 - \alpha_2^2. \end{aligned}$$

γ_2 und α_2 sind aber bekannt (siehe die Formeln (38), (34) und (51)).

Wir können also, mit Rücksicht auf die Gleichungen (42) und (39), schreiben

$$k^2 = 1 - j^2 \cos^2 \theta - \psi^2 \sin^2 \theta - 2j\psi \sin \theta \cos \theta - i_0^2 \psi^2 \cos^2 \theta - \cos^2 \psi \sin^2 \theta + 2i_0 \psi \cos \psi \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - s^2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta - 2\psi \{j - i_0 \cos \psi\} \sin \theta \cos \theta$$

$$= \cos^2 \theta [1 - s^2 + 2\varphi\psi \operatorname{tg} \theta],$$

also

$$k = \cos \theta \left[1 - \frac{1}{2} s^2 + \varphi\psi \operatorname{tg} \theta \right],$$

oder

$$k = \left(1 - \frac{j^2}{2} \right) \cos \theta + \varphi\psi \sin \theta. \dots \dots \dots (54)$$

Aus dem Dreieck *Mx'F* folgt alsdann

$$\alpha = \cos a = \cos c \cdot \cos (d + \chi)$$

$$= \cos c \{ \cos \chi \cdot \cos d - \sin \chi \sin d \},$$

oder, wegen der Gleichungen (53),

$$\alpha = \alpha_2 \cos \chi - k \sin \chi.$$

Setzt man hierin die Werthe für α_2 und k aus den Gleichungen (38), respective (34), und (54) ein, so wird daraus

$$\alpha = -i_0 \psi \cos \chi \cos \theta + \cos \psi \cos \chi \cdot \sin \theta - \left(1 - \frac{j^2}{2} \right) \sin \psi \cos \theta - \varphi\psi \sin \chi \sin \theta,$$

oder, bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung,

$$\alpha = - \{ i_0 \psi + \chi \} \cos \theta + \cos \psi \cos \chi \cdot \sin \theta. \dots \dots \dots (55)$$

Aus dem Dreieck *MAF* ersieht man weiter, dass

$$\beta = \cos b = \cos (90^\circ - (d + \chi)) \cdot \cos c$$

$$= \cos c \{ \sin \chi \cos d + \cos \chi \sin d \}$$

ist, oder, mit Rücksicht auf die Gleichungen (53),

$$\beta = \alpha_2 \sin \chi + k \cos \chi.$$

Führt man abermals die Werthe von α_2 und k hier ein, so folgt

$$\beta = -i_0 \psi \sin \chi \cos \theta + \sin \chi \cos \psi \sin \theta + \left(1 - \frac{j^2}{2} \right) \cos \chi \cos \theta + \varphi\psi \cos \chi \sin \theta,$$

oder, bei Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung,

$$\beta = \left(1 - \frac{j^2}{2} \right) \cos \chi \cos \theta + (\chi + \varphi\psi) \sin \theta. \dots \dots \dots (56)$$

Bekanntlich ist $\gamma = \gamma_2$, also, wegen der Gleichung (51),

$$\gamma = -j \cos \theta - \psi \sin \theta. \dots \dots \dots (57)$$

α , β und γ sind nun bestimmt; ehe wir aber zur Anwendung des Lagrange'schen Principes übergeben, wollen wir noch eine Grösse aus der Figur IV ermitteln, die bei der Aufstellung der Differentialgleichung der Bewegung des Pendels nöthig sein wird.

Das Moment der zurückziehenden Kraft der Schwere bei der Bewegung des Pendels erhält man, indem man das Gewicht mg der betrachteten Masse mit der Entfernung l multiplicirt und mit dem Cosinus des Winkels Γ , welchen die Richtung der Schwere mit der Richtung einer zum Pendel senkrechten und in der Bewegungsebene desselben liegenden Geraden bildet.

Sei der Punkt U auf der Curve *MJ* (siehe Figur IV) um 90° von M entfernt.

Dann ist

$$\Gamma = UO'.$$

Aus dem Dreieck *UMO'* finden wir, wenn wir den Winkel *JMz* mit μ bezeichnen,

$$\cos \Gamma = \sin (MO') \cos (180^\circ - \mu),$$

oder

$$\cos \Gamma = - \cos c \cdot \cos \mu. \dots \dots \dots (58)$$

Wollen wir nun μ bestimmen.

Es ist ersichtlich, dass

$$\mu = \angle JMz = \angle K'M_2z \text{ (Drehung um die } z\text{-Axe).}$$

Nun ergibt sich aber aus dem Dreieck *M₂K'z*

$$\cos (90^\circ + LK') = \cos (90^\circ + c) \cos \theta + \sin (90^\circ + c) \sin \theta \cos \mu,$$

also

$$\cos \mu = - \frac{1}{\cos c \cdot \sin \theta} \{ \sin (LK') - \sin c \cos \theta \}.$$

Da wegen der Gleichung (47),

$$\sin(LK') = j$$

gesetzt werden kann, und ausserdem

$$-\sin c = \gamma_2 = -j \cos \theta - \psi \sin \theta \text{ (siehe Formel (51))},$$

so ist

$$\begin{aligned} \cos \mu &= -\frac{1}{\cos c \sin \theta} \{j(1 - \cos^2 \theta) - \psi \sin \theta \cos \theta\} \\ &= -\frac{1}{\cos c} \{j \sin \theta - \psi \cos \theta\}. \end{aligned}$$

Setzt man nun diesen Werth von μ in die Formel (58), so verwandelt sich diese in

$$\cos \Gamma = j \sin \theta - \psi \cos \theta. \dots \dots \dots (59)$$

Nachdem nun α, β, γ und Γ bestimmt sind, wollen wir jetzt zur Aufstellung der Differentialgleichung der Bewegung des Horizontalpendels übergehen.

Zu diesem Zweck wenden wir das Langrange'sche Princip an.

Dazu müssen wir zuerst den allgemeinen Ausdruck für die lebendige Kraft T des Systems berechnen.

Ist T einmal bekannt, so bildet man den Ausdruck

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = A,$$

wo t die Zeit bedeutet.

Die Grösse A hat folgenden Sinn.

$A d\theta$ ist die durch die Kräfte geleistete Arbeit, wenn θ um $d\theta$ vermehrt wird.

In unserem Fall ist

$$A = -\Sigma mgl \cos \Gamma. \dots \dots \dots (60)$$

Führen wir nun zur Vereinfachung die Bezeichnungen ein:

$$\left. \begin{aligned} p &= -i_0 \psi - \chi \\ q &= \cos \psi \cdot \cos \chi \\ r &= \left(1 - \frac{j^2}{2}\right) \cos \chi \\ s &= \chi + \varphi \psi \\ t &= -j \\ u &= -\psi. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (61)$$

Dann gestalten sich die Formeln (55), (56) und (57) in folgende drei Gleichungen um:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= p \cos \theta + q \sin \theta \\ \beta &= r \cos \theta + s \sin \theta \\ \gamma &= t \cos \theta + u \sin \theta. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (62)$$

Die Coordinaten des betrachteten Massenpunktes werden (siehe Formeln (26))

$$\begin{aligned} \xi &= x + l\alpha \\ \eta &= y + l\beta \\ \zeta &= z + l\gamma, \end{aligned}$$

die Projectionen der Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} \xi' &= x' + l\alpha' \\ \eta' &= y' + l\beta' \\ \zeta' &= z' + l\gamma' \end{aligned}$$

und die totale lebendige Kraft nimmt die Form an

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2),$$

oder

$$T = \frac{1}{2} \left[\Sigma m \{x'^2 + y'^2 + z'^2\} + 2 \Sigma ml \{x'\alpha' + y'\beta' + z'\gamma'\} + \Sigma ml^2 \{\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2\} \right]. \dots (63)$$

Setzen wir

$$Q = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$

und wollen wir diesen Ausdruck mit Zugrundelegung der Gleichungen (62) und (61) umformen.

Aus (62) folgt

$$\begin{aligned} \alpha' &= p' \cos \theta + q' \sin \theta + \{q \cos \theta - p \sin \theta\} \theta'. \\ \alpha'^2 &= p'^2 \cos^2 \theta + q'^2 \sin^2 \theta + 2p'q' \sin \theta \cos \theta + \\ &\quad + \{q^2 \cos^2 \theta + p^2 \sin^2 \theta - 2pq \sin \theta \cos \theta\} \theta'^2 \\ &\quad + 2 \{p'q \cos^2 \theta - pq' \sin^2 \theta + (qq' - pp') \sin \theta \cos \theta\} \theta'. \end{aligned}$$

Ähnliche Ausdrücke lassen sich leicht für β'^2 und γ'^2 , einfach durch Vertauschung der Buchstaben, bilden.

Thut man das und addiert α'^2 , β'^2 und γ'^2 zusammen, so verwandelt sich Q in den Ausdruck

$$Q = \{p'^2 + r'^2 + t'^2\} \cos^2 \theta + \{q'^2 + s'^2 + u'^2\} \sin^2 \theta + 2 \{p'q' + r's' + t'u'\} \sin \theta \cos \theta + \{(q^2 + s^2 + u^2) \cos^2 \theta + (p^2 + r^2 + t^2) \sin^2 \theta - 2(pq + rs + tu) \sin \theta \cos \theta\} \theta'^2 + 2 \{(p'q + r's + t'u) \cos^2 \theta - (pq' + rs' + tu') \sin^2 \theta + [(qq' + ss' + uu') - (pp' + rr' + tt')] \sin \theta \cos \theta\} \theta'.$$

Bedenkt man noch, wie p, q, r, u s. w. sich durch φ, ψ, χ und i_0 ausdrücken lassen, so scheint es auf den ersten Blick, als ob Q eine äusserst complicirte Form hätte. In der That treten aber bedeutende Vereinfachungen auf.

Führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\left. \begin{aligned} A &= p'^2 + r'^2 + t'^2 \\ B &= p'q' + r's' + t'u' \\ C &= q'^2 + s'^2 + u'^2. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (64)$$

$$\left. \begin{aligned} D &= q^2 + s^2 + u^2 \\ E &= p^2 + r^2 + t^2 \\ F &= pq + rs + tu \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (65)$$

$$\left. \begin{aligned} G &= p'q + r's + t'u \\ H &= pq' + rs' + tu' \\ I &= (qq' + ss' + uu') - (pp' + rr' + tt'). \end{aligned} \right\} \dots \dots (66)$$

Dann wird

$$Q = A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta + \{D \cos^2 \theta + E \sin^2 \theta - 2F \sin \theta \cos \theta\} \theta'^2 + 2 \{G \cos^2 \theta - H \sin^2 \theta + I \sin \theta \cos \theta\} \theta'. \quad (67)$$

Aus den Formeln (61) ergibt sich unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$\left. \begin{aligned} p' &= -i_0 \psi' - \chi' \\ q' &= -\psi \psi' - \chi \chi' \\ r' &= -\chi \chi' - j j' \\ s' &= \chi' + \varphi \psi' + \psi \varphi' \\ t &= -j' \\ u &= -\psi' \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (68)$$

Folglich wird

$$\left. \begin{aligned} p'^2 &= \chi'^2 + 2i_0 \psi' \chi' \\ q'^2 &= \psi^2 \psi'^2 + \chi^2 \chi'^2 + 2\psi \chi \psi' \chi' \\ r'^2 &= \chi^2 \chi'^2 + j^2 j'^2 + 2j \chi \chi' j' \\ s'^2 &= \chi'^2 + \varphi^2 \psi'^2 + \psi^2 \varphi'^2 + 2\varphi \psi' \chi' + 2\psi \varphi' \chi' + 2\varphi \psi \varphi' \psi' \\ t'^2 &= j'^2 \\ u'^2 &= \psi'^2. \end{aligned} \right\} (69)$$

Bezeichnen wir durch Δ die Ordnungsgrösse von φ, ψ, χ und j ; dann sieht man leicht ein, dass diese Werthe von p'^2, q'^2 u. s. w. sich, der Ordnungsgrösse nach, in folgender Weise ausdrücken lassen:

$$\Delta'^2 (1 + \Delta + \Delta^2).$$

Bei der Ausrechnung von A, B und C mit der hier angenommenen Genauigkeit kann man, wie es leicht ersichtlich ist, die Grössen von der Ordnung $\Delta'^2 \Delta^2$ einfach weglassen.

Setzt man nun unter Berücksichtigung dieses Umstandes die Werthe aus den Formeln (68) und (69) in die Formeln (64), so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} A &= \chi'^2 + j'^2 + 2i_0 \psi' \chi' \\ B &= j' \psi' + \chi' (\psi \psi' - j j') \\ C &= \psi'^2 + \chi'^2 + 2\chi' (\varphi \psi' + \psi \varphi') \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

Gehen wir nun zur Berechnung von D, E und F über.

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (61) folgern wir:

$$D = q^2 + s^2 + u^2 = \cos^2 \psi \cos^2 \chi + \chi^2 + \psi^2 = 1 - \psi^2 - \chi^2 + \chi^2 + \psi^2 = 1.$$

$$E = p^2 + r^2 + t^2 = \chi^2 + (1 - j^2) \cos^2 \chi + j^2 = \chi^2 + 1 - j^2 - \chi^2 + j^2 = 1.$$

$$F = pq + rs + tu = -i_0 \psi - \chi + \chi + \varphi \psi + j \psi = \psi \{j - (i_0 - \varphi)\}.$$

Mit derselben Genauigkeit hat man aus der Gleichung (39)

$$j = i_0 - \varphi, \dots \dots \dots (71)$$

folglich wird

$$F = 0,$$

so dass wir haben

$$\left. \begin{array}{l} D = 1 \\ E = 1 \\ F = 0. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (72)$$

Wollen wir nun G , H und I bestimmen.

Wir erhalten aus den Formeln (66) unter Berücksichtigung der Gleichungen (61) und (68)

$$G = p'q + r's + t'u = (-i_0 \psi' - \chi') \cos \psi \cos \chi + (-\chi \chi' - j j') (\chi + \varphi \psi) + j' \psi$$

$$H = pq' + rs' + tu' = (-i_0 \psi - \chi) (-\psi \psi' - \chi \chi') + (1 - \frac{j^2}{2}) \cos \chi (\chi' + \varphi \psi' + \psi \varphi') + j \psi'.$$

Bei Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung, wie früher, lässt sich schreiben:

$$G = -i_0 \psi' - \chi' + \psi j',$$

da aber nach der Gleichung (71)

$$j' = -\varphi', \dots \dots \dots (73)$$

so wird

$$G = -i_0 \psi' - \chi' - \psi \varphi'. \dots \dots \dots (74)$$

Andererseits ist

$$H = \chi' + \varphi \psi' + \psi \varphi' + j \psi' = \chi' + \psi \varphi' + (j + \varphi) \psi',$$

oder, wegen der Gleichung (71),

$$H = i_0 \psi' + \chi' + \psi \varphi', \dots \dots \dots (75)$$

also

$$H = -G.$$

Was nun I betrifft, so sieht man leicht ein¹⁾, dass

$$\begin{aligned} I &= (qq' + ss' + uu') - (pp' + rr' + tt') \\ &= \frac{1}{2} [D' - E']. \end{aligned}$$

Da aber D und E constant sind, so folgt einfach

$$I = 0.$$

Der Factor von θ' in dem Ausdrücke für Q (Formel (67)) lässt sich also in eine sehr einfache Form bringen.

Auf Grund der Gleichungen (74), (75) und $I = 0$ wird

$$2(G \cos^2 \theta - H \sin^2 \theta) = -2H.$$

Der Factor von θ'^2 in demselben Ausdruck von Q ist, wegen der Gleichungen (72), einfach gleich der Einheit.

Es folgt also

$$Q = A \cos^2 \theta + 2B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta + \theta'^2 - 2H\theta', \dots (76)$$

wo A , B , C und H aus den Formeln (70) und (75) zu entnehmen sind.

Kehren wir jetzt wieder zu dem allgemeinen Ausdruck von T zurück (Formel (63)).

$$Q = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2$$

ist schon bestimmt.

Es kommt hier noch ein anderer Ausdruck vor, nämlich

$$x' \alpha' + y' \beta' + z' \gamma',$$

den wir durch P bezeichnen wollen.

1) Siehe die Formeln (65) und (66).

Auf Grund der Formeln (62) ergibt sich ohne Schwierigkeit

$$\left. \begin{aligned} P &= x' \{p' \cos \theta + q' \sin \theta + (q \cos \theta - p \sin \theta) \theta'\} \\ &+ y' \{r' \cos \theta + s' \sin \theta + (s \cos \theta - r \sin \theta) \theta'\} \\ &+ z' \{t' \cos \theta + u' \sin \theta + (u \cos \theta - t \sin \theta) \theta'\}. \end{aligned} \right\} \dots (77)$$

Da nun

$$T = \frac{1}{2} [\Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2 \Sigma m l P + \Sigma m l^2 Q]$$

ist, und dabei P und Q bekannt sind, so können wir zur Bildung des Ausdruckes

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta}$$

übergehen.

Weil x' , y' und z' von θ und θ' unabhängig sind, so folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \Sigma m l \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial P}{\partial \theta} \right\} + \frac{1}{2} \Sigma m l^2 \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right\}. \quad (78)$$

Aus der Formel (77) entwickelt sich

$$\frac{\partial P}{\partial \theta'} = x' (q \cos \theta - p \sin \theta) + y' (s \cos \theta - r \sin \theta) + z' (u \cos \theta - t \sin \theta)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta} &= x' \{-p' \sin \theta + q' \cos \theta - (q \sin \theta + p \cos \theta) \theta'\} \\ &+ y' \{-r' \sin \theta + s' \cos \theta - (s \sin \theta + r \cos \theta) \theta'\} \\ &+ z' \{-t' \sin \theta + u' \cos \theta - (u \sin \theta + t \cos \theta) \theta'\}. \end{aligned}$$

Nun ist weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta'} \right) &= x'' (q \cos \theta - p \sin \theta) + y'' (s \cos \theta - r \sin \theta) + z'' (u \cos \theta - t \sin \theta) \\ &+ x' \{q' \cos \theta - p' \sin \theta - (q \sin \theta + p \cos \theta) \theta'\} \\ &+ y' \{s' \cos \theta - r' \sin \theta - (s \sin \theta + r \cos \theta) \theta'\} \\ &+ z' \{u' \cos \theta - t' \sin \theta - (u \sin \theta + t \cos \theta) \theta'\}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial P}{\partial \theta} &= x'' (q \cos \theta - p \sin \theta) + y'' (s \cos \theta - r \sin \theta) \\ &+ z'' (u \cos \theta - t \sin \theta). \end{aligned} \right\} (79)$$

Die Coefficienten von x'' , y'' und z'' lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (61) bilden.

Es ist nämlich

$$q \cos \theta - p \sin \theta = \cos \psi \cos \chi \cos \theta + (i_0 \psi + \chi) \sin \theta$$

$$s \cos \theta - r \sin \theta = (\chi + \varphi \psi) \cos \theta - \left(1 - \frac{j^2}{2}\right) \cos \chi \sin \theta$$

$$u \cos \theta - t \sin \theta = -\psi \cos \theta + j \sin \theta.$$

Wollen wir nun von jetzt ab annehmen, wie es gewöhnlich geschieht, dass auch θ klein ist, so dass

$$\sin \theta = 0$$

und

$$\cos \theta = 1$$

gesetzt werden darf.

Dann ergibt sich, bei Vernachlässigung von Gliedern, in denen die Producte $\varphi \psi$ etc. vorkommen,

$$q \cos \theta - p \sin \theta = 1 + \chi \theta$$

$$s \cos \theta - r \sin \theta = \chi - \theta$$

$$u \cos \theta - t \sin \theta = -\psi + j \theta.$$

Setzt man nun diese Werthe in der Formel (79) ein, so folgt:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial P}{\partial \theta} = x'' (1 + \chi \theta) + y'' (\chi - \theta) + z'' (-\psi + j \theta),$$

oder, unter der Annahme, dass auch θ von derselben Grössenordnung, wie φ etc., sei, und unter Beibehaltung nur der Glieder niedrigster Ordnung, können wir schreiben:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial P}{\partial \theta} = x'' + (\chi - 0) y'' - \psi z''. \quad \dots \dots (80)$$

Wenden wir uns jetzt der Grösse Q zu.

Wir haben:

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta'} = 2\theta' - 2H$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta'} \right) = 2(\theta'' - H')$$

oder, wegen der Gleichung (75),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta'} \right) = 2\{\theta'' - i_0\psi'' - \chi'' - \psi\varphi'' - \psi'\varphi'\}.$$

Es ist weiter

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} = 2(C - A) \sin \theta \cos \theta + 2B \cos 2\theta.$$

Aus den Gleichungen (70) folgt

$$C - A = \psi'^2 - j'^2 + 2\chi'(\varphi\psi' + \psi\varphi' - i_0\psi'),$$

da aber

$$j = i_0 - \varphi$$

ist, so ergibt sich

$$C - A = \psi'^2 - \varphi'^2 + 2\chi'(\psi\varphi' - j\psi').$$

Ausserdem ist

$$B = -\varphi'\psi' + \chi'(\psi\psi' + j\varphi').$$

Wir erhalten also, bei derselben Voraussetzung bezüglich θ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial Q}{\partial \theta} &= 2\{\theta'' - i_0\psi'' - \chi'' - \psi\varphi'' - \psi'\varphi'\} \\ &+ 2\{\varphi'^2 - \psi'^2 - 2\chi'(\psi\varphi' - j\psi')\}\theta + 2\{\varphi'\psi' - \chi'(\psi\psi' + j\varphi')\}, \end{aligned}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial Q}{\partial \theta} &= 2[\theta'' + \{\varphi'^2 - \psi'^2 - 2\chi'(\psi\varphi' - j\psi')\}\theta - \\ &- \{i_0\psi'' + \chi'' + \psi\varphi'' + \chi'(\psi\psi' + j\varphi')\}]. \end{aligned} \right\} (81)$$

Führt man nun die Werthe aus den Gleichungen (80) und (81) in die Gleichung (78) ein, so wird:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \Sigma ml \{x'' + (\chi - 0)y'' - \psi z''\} + \\ &+ \Sigma ml^2 [\theta'' + \{\varphi'^2 - \psi'^2 - 2\chi'(\psi\varphi' - j\psi')\}\theta - \\ &- \{i_0\psi'' + \chi'' + \psi\varphi'' + \chi'(\psi\psi' + j\varphi')\}]. \end{aligned}$$

Wollen wir nun diesen Ausdruck in der Lagrange'sche Gleichung

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = A$$

einsetzen und dabei noch die Gleichungen (59) und (60) berücksichtigen, dann gestaltet sich jene folgendermaassen:

$$\begin{aligned} \Sigma ml^2 [\theta'' + \{\varphi'^2 - \psi'^2 - 2\chi'(\psi\varphi' - j\psi')\}\theta - \{i_0\psi'' + \chi'' + \psi\varphi'' + \chi'(\psi\psi' + j\varphi')\}] \\ + \Sigma ml [\{x'' + (\chi - 0)y'' - \psi z''\} + g\{j\theta - \psi\}] = 0, \end{aligned}$$

oder, mit hinreichender Genauigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \theta'' + \left[\frac{1}{l_0} \{gj - y''\} + \{\varphi'^2 - \psi'^2 - 2\chi'(\psi\varphi' - j\psi')\} \right] \theta \\ + \frac{1}{l_0} \{x'' - g\psi + \chi y'' - \psi z''\} - \{i_0\psi'' + \chi'' + \psi\varphi'' + \chi'(\psi\psi' + j\varphi')\} = 0, \end{aligned} \right\} (82)$$

wo

$$j = i_0 - \varphi$$

ist.

Diese ist die allgemeine Differentialgleichung der Bewegung eines Horizontalpendels. Hierin bedeutet l_0 eine gewisse Länge, welche sehr nahe mit der Entfernung des Massencentrums des Pendels von der Drehungsaxe zusammenfällt. Im Folgenden werde ich den Index o fallen lassen und einfach l — statt l_0 — schreiben.

Wie ersichtlich, ist die allgemeine Differentialgleichung der Bewegung eines Horizontalpendels unter dem Einflusse der 6 Componenten einer Erderschütterung äusserst complicirt.

Ehe wir zur Vereinfachung derselben schreiten, wollen wir einige Specialfälle besprechen.

Sei x'' , y'' und z'' immer gleich Null, und denken wir uns, dass der Reihe nach nur eine von den Neigungen vorhanden ist.

I. Fall.

$$\psi = 0 \quad \chi = 0 \quad \varphi \text{ von Null verschieden.}$$

Aus der allgemeinen Differentialgleichung (82) ergibt sich alsdann unter diesen Bedingungen folgende Gleichung für die Bewegung des Horizontalpendels:

$$\theta'' + \left\{ \frac{g}{l} (i_0 - \varphi) + \varphi'^2 \right\} \theta = 0. \dots \dots \dots (83)$$

II. Fall.

$$\varphi = 0 \quad \chi = 0 \quad \psi \text{ von Null verschieden.}$$

Dann wird aus (82):

$$\theta'' + \left(\frac{g}{l} i_0 - \psi'^2\right) \theta - \frac{g}{l} \psi - i_0 \psi'' = 0. \dots \dots (84)$$

III. Fall.

$$\varphi = 0 \quad \psi = 0 \quad \chi \text{ von Null verschieden.}$$

Dann folgt

$$\theta'' + \frac{g}{l} i_0 \theta - \chi'' = 0. \dots \dots (85)$$

Wollen wir nun die allgemeine Differentialgleichung (82) zu vereinfachen versuchen, da sie in ihrer jetzigen complicirten Form kaum zu gebrauchen wäre.

Nehmen wir an, dass die Drehungen der Erde φ , ψ und χ äusserst klein sind, und dass sie sich nicht etwa stossweise ändern, oder, wenn sie eine Periode haben sollen, dieselbe nicht zu klein ist.

Dann werden φ' , φ'' etc. ebenfalls sehr klein sein.

In diesem Falle können wir alle Glieder, in denen die Quadrate und Produkte von φ' , ψ' und χ' zu je zwei vorkommen, einfach weglassen.

Dann bleibt die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \theta'' + \frac{1}{l} \{g i_0 - (y'' + g\varphi)\} \theta + \frac{1}{l} \{(x'' - g\psi) + \chi y'' - \psi z''\} - \\ - i_0 \psi'' - \chi'' - \psi \varphi'' = 0 \end{aligned} \right\} (86)$$

nach.

In derselben dürfte freilich Nichts mehr vernachlässigt werden, da z. B. $i_0 \psi''$ oder $\psi \varphi''$ sich von derselben Grössenordnung ergeben können, wie etwa $\frac{g}{l} i_0$, doch ist eine weitere Vereinfachung sehr wünschenswerth, da die Gleichung noch immer sehr complicirt aussieht.

Setzen wir deshalb voraus, dass θ grösser als φ , ψ oder χ ist, und wollen wir uns nun damit begnügen, die Hauptglieder der Gleichung (86) beizubehalten. Dann können, unter gewissem Vorbehalt, $i_0 \psi''$ und $\psi \varphi''$ im Vergleich zu χ'' , so wie auch $\chi y''$ und $\psi z''$ im Vergleich zu x'' und $g\psi$, vernachlässigt werden.

Es verkürzt sich dann (86) in:

$$\theta'' + \frac{1}{l} \{g i_0 - (y'' + g\varphi)\} \theta + \frac{1}{l} \{x'' - g\psi\} - \chi'' = 0.$$

Führen wir noch die Dämpfung ein, so erhalten wir folgende definitive Differentialgleichung der Bewegung eines Horizontalpendels, welches in der ersten Verticalen aufgestellt ist:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{1}{l} \{g i_0 - (y'' + g\varphi)\} \theta + \frac{1}{l} \{x'' - g\psi\} - \chi'' = 0. (87)$$

Die Constanten der Formel ergeben sich aus Schwingungsbeobachtungen des Pendels bei Abwesenheit irgend welcher Erderschütterung.

Denken wir uns nun ein zweites Horizontalpendel im Meridian aufgestellt, und zwar nach Norden gerichtet.

Die Differentialgleichung der Bewegung desselben lässt sich leicht aus der Gleichung (87) ableiten; nur muss folgende Vertauschung der Buchstaben in (87) gemacht werden:

| statt | muss gesetzt werden |
|-----------|---------------------|
| y | x |
| x | $-y$ |
| ψ | φ |
| φ | $-\psi$ |

Dann lässt sich für ein im Meridian aufgestelltes Pendel die Bewegungsgleichung schreiben:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{1}{l} \{g i_0 - (x'' - g\psi)\} \theta - \frac{1}{l} \{y'' + g\varphi\} - \chi'' = 0. (88)$$

Die Constanten dieser Gleichung können selbstverständlich andere sein, als die in (87).

In beiden Gleichungen (87) und (88) kommt das Glied χ'' vor. Dieser Umstand ist nicht bedenklich, da die Drehung um die z -Axe durch einen besonderen Apparat leicht ermittelt werden kann, wie wir es weiter sehen werden.

Was aber viel wichtiger und lehrreicher ist, ist der Umstand, dass weder zwei, noch eine beliebige Anzahl von Horizontalpendeln imstande sind, die Neigungen φ oder ψ , oder aber die Translationsverschiebungen x oder y getrennt anzugeben.

Es treten in den Formeln immer die Combinationen

$$x'' - g\psi \text{ und } y'' + g\varphi$$

auf, und nur diese Combinationen von Werthen können aus Beobachtungen mit zwei Horizontalpendeln ermittelt werden.

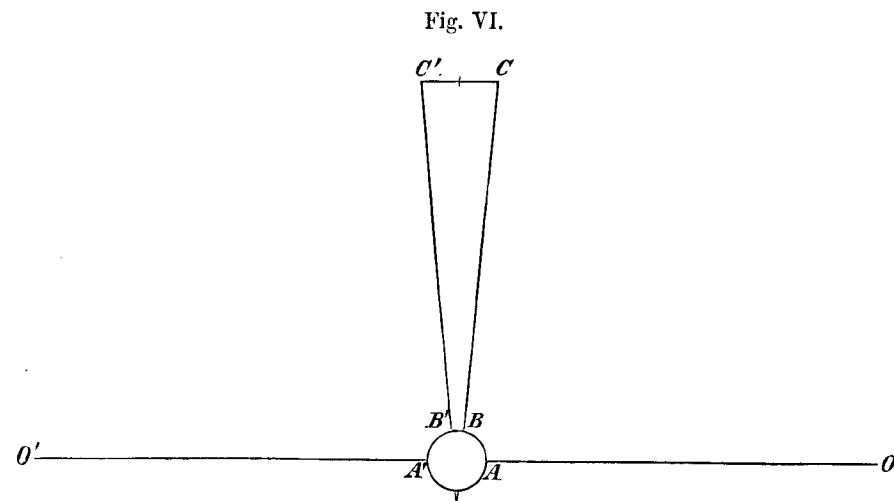
Das Horizontalpendel, welches für die Neigungen der Erdoberfläche sich als ein so hoch empfindlicher Apparat erweist, ist jedoch nicht imstande, diese Neigungen bei einem Erdbeben anzugeben. Da es ausserdem auch die Verschiebungen x und y nicht zu ermitteln vermag, so halte ich es für einen zu Erdbebenbeobachtungen ungeeigneten Apparat, aus dessen Aufzeichnungen sehr wenig über den wahren Charakter der Bewegung der Erdoberfläche bei einem Erdbeben geschlossen werden kann.

Es besteht also nur die Möglichkeit, durch diesen Apparat $x'' - g\psi$ und $y'' + g\varphi$ zu bestimmen; aber zu diesem Zwecke bedürfen wir gar nicht kostspieliger und schwer zu behandelnder Horizontalpendel, denn dasselbe Resultat kann auch mit einfachen Verticalpendeln, jedoch bei bifilarer Aufhängung, erzielt werden, wie wir es im nächsten Paragraphen sehen werden.

§ 5.

Theorie des Verticalpendels mit bifilarer Aufhängung.

Der grosse Nachtheil eines einfachen Verticalpendels besteht darin, dass es Bewegungen in allen Azimuthen durchmachen kann, und da es infolge dessen sehr vielen Einflüssen unterworfen ist, so kann aus seinen Aufzeichnungen überhaupt nichts Sicheres über die Bewegungsart der Erdoberfläche geschlossen werden.



Hätte das Verticalpendel nur eine ganz bestimmte Schwingungsebene, so würde sich dadurch das Problem bedeutend vereinfachen.

Dieses lässt sich auch sehr leicht erreichen, dazu wäre nur nöthig, das Pendel bifilar aufzuhängen, wie es in der Figur VI schematisch angedeutet

ist. Um noch jede seitliche Verschiebung des Pendels zu vermeiden, empfiehlt es sich ausserdem, dasselbe von beiden Seiten durch zwei sehr lange und dünne Drähte AO und $A'O'$ (siehe Fig. VI), welche in O , respective O' , fest eingeklemmt sind, zu befestigen. Welchen Einfluss diese Drähte auf die Bewegung des Pendels haben können, werden wir weiter sehen.

Denken wir uns nun ein solches Verticalpendel, dessen Schwingungsebene mit dem Meridian zusammenfallen würde.

Auf die Bewegungen eines solchen Pendels haben die Drehungen φ und χ , so wie auch die Verschiebung y , keinen Einfluss.

Dasselbe steht also nur unter dem Einflusse der Drehung φ und der Verschiebungen x und z , und zwar das Letztere nur im Falle, wenn θ von 0 verschieden ist.

Nachdem dieses festgestellt ist, wollen wir zur Aufstellung der Differentialgleichung der Bewegung eines solchen Pendels übergehen.

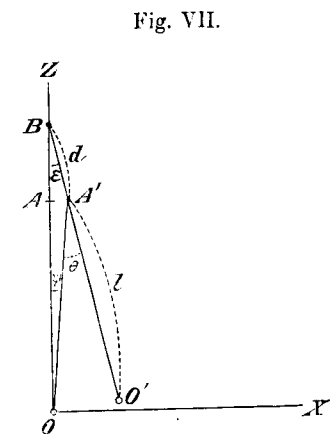
$OA = l$ sei die Länge des Pendels oder, strenger, die Entfernung des betrachteten Massenpunktes m von der Drehungsaxe A (siehe Fig. VII). Wenn die Erdoberfläche sich um den Winkel ψ um die y -Axe dreht, so verschiebt sich A nach A' . Sei die relative Verschiebung des Pendels durch den Winkel θ angegeben. θ ist eigentlich diejenige Grösse, welche direct gemessen wird. Es handelt sich nun darum, die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels durch θ auszudrücken.

Hierbei ist noch Folgendes zu bemerken.

Stiele die x -Achse in der Zeichnung nicht mit der Erdoberfläche zusammen, so wäre dieser Umstand leicht zu berücksichtigen. Eine Drehung der Erdoberfläche um eine nach Osten gerichtete, in der Erdoberfläche liegende Axe würde eine Verschiebung des Punktes O nach Norden hervorrufen. Diese Verschiebung würde sich dann einfach zu der wahren Verschiebung der Erdoberfläche x addiren und wäre folglich leicht in Betracht zu ziehen. Eine ähnliche Bemerkung gilt selbstverständlich auch für ein Horizontalpendel.

Wollen wir nun die Coordinaten ξ , η , ζ des Punktes m , welcher sich zur Zeit t in O' befindet, aufsuchen.

Denken wir uns zunächst, dass keine Verschiebungen vorhanden sind und es seien dann die Coordinaten von m zur Zeit t — ξ_1 , η_1 , ζ_1 .



Verlängern wir die Linie $A'O'$ bis zum Schnittpunkt in B mit der z -Axe und bezeichnen wir die Strecke $A'B$ durch d , OB durch D und den Winkel $A'BO$ durch ϵ , so ist

$$\epsilon = 0 - \psi. \dots \dots \dots (89)$$

Aus dem Dreieck OBA' ergibt sich, da $A'O$ auch gleich l ist,

$$d = l \frac{\sin \psi}{\sin \epsilon} \dots \dots \dots (90)$$

$$D = l \frac{\sin \theta}{\sin \epsilon} \dots \dots \dots (91)$$

Aus der Figur VII ersieht man weiter, dass

$$\zeta_1 = (d + l) \sin \epsilon$$

$$\eta_1 = 0$$

$$\zeta_1 = D - (d + l) \cos \epsilon.$$

Aus der Gleichung (90) folgt aber

$$d + l = l \frac{\sin \psi + \sin \epsilon}{\sin \epsilon},$$

folglich wird

$$\zeta_1 = l \{ \sin \psi + \sin \epsilon \}.$$

Weiter ist, mit Rücksicht auf die Gleichungen (91) und (89),

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= l \frac{\sin \theta}{\sin \epsilon} - l \frac{\sin \psi + \sin \epsilon}{\sin \epsilon} \cdot \cos \epsilon \\ &= \frac{l}{\sin \epsilon} \{ \sin \epsilon \cos \psi + \sin \psi \cos \epsilon - \sin \psi \cos \epsilon - \sin \epsilon \cos \epsilon \} \\ &= l \{ \cos \psi - \cos \epsilon \}. \end{aligned}$$

Es berechnen sich also für die absoluten Coordinaten des Massenpunktes m (da noch $\eta_1 = 0$ ist) folgende Werthe

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x + l \{ \sin \psi + \sin \epsilon \} \\ \eta &= y \\ \zeta &= z + l \{ \cos \psi - \cos \epsilon \} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (92)$$

Die Projectionen der Geschwindigkeit v werden

$$\xi' = x' + l \{ \cos \psi \cdot \psi' + \cos \epsilon \cdot \epsilon' \}$$

$$\eta' = y'$$

$$\zeta' = z' + l \{ -\sin \psi \cdot \psi' + \sin \epsilon \cdot \epsilon' \}$$

$$\begin{aligned} \xi'^2 &= x'^2 + 2lx' \{ \cos \psi \cdot \psi' + \cos \epsilon \cdot \epsilon' \} + \\ &+ l^2 \{ \cos^2 \psi \cdot \psi'^2 + 2 \cos \psi \cdot \cos \epsilon \cdot \psi' \epsilon' + \cos^2 \epsilon \cdot \epsilon'^2 \} \end{aligned}$$

$$\eta'^2 = y'^2$$

$$\begin{aligned} \zeta'^2 &= z'^2 + 2lz' \{ -\sin \psi \cdot \psi' + \sin \epsilon \cdot \epsilon' \} + \\ &+ l^2 \{ \sin^2 \psi \cdot \psi'^2 - 2 \sin \psi \sin \epsilon \cdot \psi' \epsilon' + \sin^2 \epsilon \cdot \epsilon'^2 \}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} v^2 &= \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2l [x' \{ \cos \psi \cdot \psi' + \cos \epsilon \cdot \epsilon' \} + \\ &+ z' \{ -\sin \psi \cdot \psi' + \sin \epsilon \cdot \epsilon' \}] + l^2 \{ \psi'^2 + 2 \cos \theta \cdot \psi' \epsilon' + \epsilon'^2 \}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch, dass wegen der Gleichung (89),

$$\epsilon' = \theta' - \psi'$$

ist, so lässt sich die lebendige Kraft des Systems T folgendermaassen ausdrücken:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \Sigma m v^2 = \frac{1}{2} \Sigma m (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \Sigma ml [x' \{ \cos \psi \cdot \psi' + \cos \epsilon \cdot (\theta' - \psi') \} + \\ &+ z' \{ -\sin \psi \cdot \psi' + \sin \epsilon \cdot (\theta' - \psi') \}] + \frac{1}{2} \Sigma ml^2 \{ \psi'^2 + 2 \cos \theta \cdot \psi' (\theta' - \psi') + (\theta' - \psi')^2 \}. \end{aligned} \quad (93)$$

Jetzt können wir das Lagrange'sche Princip

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = A. \dots \dots \dots (94)$$

anwenden.

Aus der Gleichung (93) erhält man

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = \Sigma ml \{ x' \cos \epsilon + z' \sin \epsilon \} + \Sigma ml^2 \{ \cos \theta \cdot \psi' + (\theta' - \psi') \},$$

folglich wird

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) &= \Sigma ml \{ x'' \cos \epsilon + z'' \sin \epsilon - x' \sin \epsilon \cdot \epsilon' + z' \cos \epsilon \cdot \epsilon' \} \\ &+ \Sigma ml^2 \{ \cos \theta \cdot \psi'' - \sin \theta \cdot \theta' \psi' + \theta'' - \psi'' \}. \end{aligned} \quad (95)$$

Aus der Gleichung (93) ergibt sich andererseits, da

$$\theta' - \psi' = \varepsilon'$$

ist,

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = \Sigma ml [x' (-\sin \varepsilon) \varepsilon' + z' \cos \varepsilon \cdot \varepsilon'] - \Sigma ml^2 \sin \theta \cdot \psi' (\theta' - \psi'). \quad (96)$$

Bringt man nun diese Werthe aus den Gleichungen (95) und (96) in die Gleichung (94), so folgt:

$$\Sigma ml \{x'' \cos \varepsilon + z'' \sin \varepsilon\} + \Sigma ml^2 \cdot [\cos \theta \cdot \psi'' + \theta'' - \psi'' - \sin \theta \cdot \psi'^2] = A.$$

Setzen wir voraus, dass θ und ψ sehr klein sind, so können wir schreiben

$$\cos \theta = 1 \quad \sin \theta = \theta$$

$$\cos \varepsilon = 1 \quad \sin \varepsilon = \varepsilon = \theta - \psi.$$

Vernachlässigen wir wieder, wie bei dem Horizontalpendel, und zwar unter denselben Voraussetzungen, das Glied mit ψ'^2 , so nimmt die Lagrange'sche Gleichung die Form an:

$$\Sigma ml \{x'' + (\theta - \psi) z''\} + \Sigma ml^2 \cdot \theta'' = A. \quad \dots \quad (97)$$

Wollen wir nun jetzt A berechnen.

$A d\theta$ ist die von den Kräften geleistete Arbeit, wenn θ um $d\theta$ vermehrt wird. Diese Arbeit zerfällt in zwei Theile: der erste Theil $A_1 d\theta$ ist die Arbeit der Schwerkraft und der zweite rührt von der Spannung der Seitendrähte AO und $A'O'$ (siehe Fig. VI) her. Also $A d\theta = (A_1 + A_2) d\theta$. Für die Arbeit der Schwerkraft $A_1 d\theta$ haben wir

$$A_1 d\theta = - \Sigma mg \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} d\theta,$$

oder, wegen der dritten der Gleichungen (92),

$$A_1 d\theta = - \Sigma mgl \sin \varepsilon \cdot d\theta. \quad \dots \quad (98)$$

Wollen wir nun sehen, wie gross $A_2 d\theta$ sein kann.

Sei die Länge der Drähte AO und $A'O'$ (Fig. VI) L , der Querschnitt derselben q und der Elasticitätsmodulus des Materials der Drähte E .

Wenn das Pendel sich um θ verschiebt, so werden die Drähte einen Winkel α mit ihrer vorigen Lage bilden. Wenn L hinreichend gross ist, so kann α kleiner, und zwar bedeutend kleiner, als θ sein. Dies soll auch als Voraussetzung gelten.

Sei die normale Spannung der Drähte bei der Ruhelage des Pendels sehr klein im Vergleich zum Gewicht desselben. Wäre dies auch nicht der Fall, so könnte dieser Umstand leicht berücksichtigt werden.

Setzen wir also voraus, dass von dieser normalen Spannung vollständig abgesehen werden kann.

Bei der Verschiebung des Pendels tritt eine Verlängerung jedes der Drähte um ΔL ein.

Sei die entsprechende Zunahme der Spannung der Drähte ΔP .

Dann wird bekanntlich

$$\Delta P = Eq \cdot \frac{\Delta L}{L}.$$

Nun ist

$$\Delta L = \frac{L}{\cos \alpha} - L = L \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha},$$

oder, mit hinreichender Annäherung,

$$\Delta L = \frac{1}{2} L \alpha^2.$$

Es ergibt sich also

$$\Delta P = \frac{1}{2} Eq \cdot \alpha^2.$$

Die Arbeit dieser Kräfte $A_2 d\theta$ (es sind zwei Drähte vorhanden) wird

$$A_2 d\theta = - 2 \Delta P l \sin \alpha \cdot d\theta,$$

oder

$$A_2 d\theta = - Eq l \alpha^2 \cdot d\theta.$$

Wir erhalten also, da $\sin \varepsilon = \varepsilon = \theta - \psi$ ist,

$$A = A_1 + A_2 = - \Sigma mgl (\theta - \psi) - Eq l \alpha^2.$$

Da α sehr klein ist, so können wir das zweite Glied, wo α^2 vorkommt, einfach weglassen und schreiben:

$$A = - \Sigma mgl (\theta - \psi).$$

Führen wir nun diesen Ausdruck in die Formel (97) ein und setzen dabei, wie bei dem Horizontalpendel, mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{\Sigma ml}{\Sigma ml^2} = \frac{1}{l_0} = \frac{1}{l},$$

so wird die Differentialgleichung der Bewegung eines auf einem Bifilar hängenden Verticalpendels, dessen Schwingungsebene mit dem Meridian zusammenfällt:

$$\theta'' + \frac{1}{l} (g + z'') \theta - \frac{1}{l} \psi'' + \frac{1}{l} (x'' - g\psi) = 0. \quad \dots \quad (99)$$

Wollen wir hier, wie bei dem Horizontalpendel, $\psi z''$ im Vergleich zu x'' vernachlässigen, dann bleibt übrig

$$\theta'' + \frac{1}{l} (g + z'') \theta + \frac{1}{l} (x'' - g\psi) = 0.$$

Es ist weiter möglich, z'' im Vergleich zu g als klein zu betrachten, obgleich es keineswegs unbedingt nothwendig ist, da z'' sich leicht mit Hilfe eines besonderen Apparates ermitteln lässt, wie wir es im nächsten Paragraphen sehen werden.

Führen wir noch die Dämpfung ein, so ergibt sich folgende definitive Differentialgleichung für das betrachtete Verticalpendel:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{g}{l}\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0. \dots \dots (100)$$

für die Schwingungsebene im Meridian.

Die Gleichung für ein Verticalpendel, dessen Schwingungsebene mit der ersten Verticalen zusammenfällt, lässt sich leicht aus der Gleichung (100) ableiten. Es muss in ihr, statt $\psi - \varphi$ und statt $x - y$ gesetzt werden. Man erhält also

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{g}{l}\theta - \frac{1}{l}\{y'' + g\varphi\} = 0. \dots \dots (101)$$

für die Schwingungsebene in der ersten Verticalen.

Wir sehen also, dass auch zwei senkrecht zu einander stehende Verticalpendel ebenfalls nicht imstande sind, die Verschiebungen x und y , wie auch die Neigungen φ und ψ getrennt anzugeben. Gleich den Horizontalpendeln geben sie nur die Combinationen der Werthe

$$x'' - g\psi$$

und

$$y'' + g\varphi,$$

aber eine Vergleichung mit den Formeln (87) und (88) für Horizontalpendel

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{1}{l}\{gi_0 - (y'' + g\varphi)\}\theta + \frac{1}{l}\{x'' - g\psi\} - \chi'' = 0 \quad (87)$$

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{1}{l}\{gi_0 - (x'' - g\psi)\}\theta - \frac{1}{l}\{y'' + g\varphi\} - \chi'' = 0 \quad (88)$$

zeigt ganz deutlich, dass mit Verticalpendeln diese Werthe $x'' - g\psi$ und $y'' + g\varphi$ sich viel einfacher und directer bestimmen lassen.

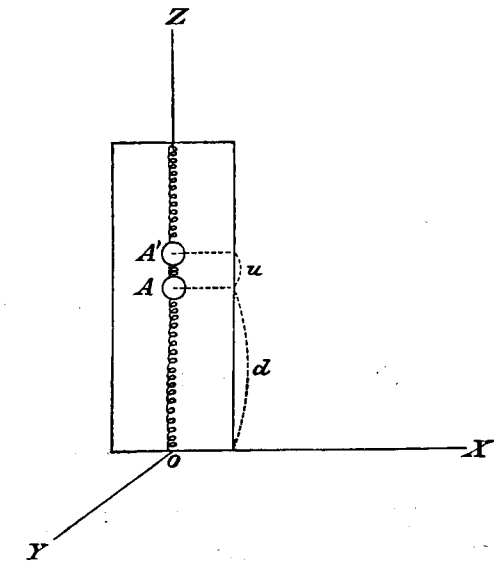
§ 6.

Apparat zur Bestimmung der Verticalcomponente der Erdbewegung.

Zu diesem Zweck kann man sich, zum Beispiel, einer schweren Kugel bedienen, welche mittelst einer Feder aufgehängt ist. Diese Kugel wollen wir uns noch von unten von einer anderen Feder angezogen denken (siehe Fig. VIII). Diese zweite Feder soll

dazu dienen, die seitlichen Bewegungen der Kugel zu erschweren. Sollte dies nicht genügend sein, so könnte man wiederum die Kugel von drei oder vier Seiten an langen horizontal liegenden Drähten, deren ein Ende eingeklemmt ist, befestigen, ganz ähnlich wie bei dem früher besprochenen Verticalpendel. Der Einfluss dieser Drähte auf die Bewegung des Systems wird äusserst klein sein, wie es im vorigen § gezeigt wurde; sie werden jedoch jede seitliche Bewegung der Kugel verhindern.

Fig. VIII.



In diesem Falle wirkt auf die Kugel einzig und allein die Componente der Erdbewegung z , weil die Drehung um die z -Axe hier nicht in Betracht kommt und aus der Formel einfach weggelassen werden kann, da sie auf das Endresultat keinen Einfluss hat.

Wollen wir nun die Differentialgleichung der Bewegung dieser Kugel aufsuchen. Die relative Entfernung der Kugel von der Gleichgewichtslage wollen wir durch u bezeichnen, wo u nach oben als positiv gerechnet werden soll.

Die zu benutzende Vorrichtung ist in der Fig. VIII schematisch angedeutet.

Sei die Kugel A nach A' verschoben und ist die verticale Verschiebung der Erdoberfläche gleich z , so wird die absolute Verschiebung ζ des Schwerpunktes der Kugel gegen ein im Raume fest liegendes Coordinatensystem

$$\zeta = z + u + d,$$

wo d die Entfernung des Schwerpunktes vom Coordinatenanfang im Ruhezustande bedeutet.

Daraus folgt

$$\zeta' = z' + u'$$

und die lebendige Kraft wird

$$T = \frac{1}{2} M (z'^2 + 2z'u' + u'^2),$$

wo M die Masse der ganzen Kugel bedeutet.

Wenden wir jetzt das Lagrange'sche Princip an:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial u'} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = A. \dots \dots \dots (102)$$

$$\frac{\partial T}{\partial u'} = M (z' + u')$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial u'} \right) = M (z'' + u'')$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0.$$

Bringen wir nun diese Werthe in die Formel (102), so folgt

$$M (z'' + u'') = A. \dots \dots \dots (103)$$

Wollen wir nun die Arbeit Adu berechnen, für den Fall, dass die Kugel um du verschoben wird.

Die Aenderung der Spannung der Federn ist der Verschiebung u proportional; nennen wir die Spannungsconstante der oberen Feder P und die der unteren P_1 , so ergibt sich

$$Adu = - (P + P_1) u du - Mgd u.$$

Setzen wir den aus dieser Formel sich ergebenden Werth von A in die Formel (103), und sei, der Kürze halber,

$$\frac{P + P_1}{M} = n^2,$$

so erhält man für diesen Apparat folgende Differentialgleichung der Bewegung:

$$u'' + n^2 u + g + z'' = 0.$$

Führen wir noch die Dämpfung ein, so nimmt die Gleichung folgende definitive Form an:

$$u'' + 2\epsilon u' + n^2 u + g + z'' = 0. \dots \dots \dots (104)$$

Die Constanten ϵ und n des Apparates lassen sich leicht aus Schwingungsbeobachtungen der Kugel, wenn $z'' = 0$ ist, ermitteln.

Ist nun der Gang von u mit der Zeit bei einem Erdbeben aus den Aufzeichnungen eines solchen Apparates bekannt geworden, so lässt sich z als Function der Zeit aus der Formel (104) durch zweifache Integration bestimmen. Freilich müssten dabei die Anfangsbedingungen gegeben sein. Auf diese letzte Frage komme ich in einem späteren §, bei der Behandlung eines besonderen Beispielles, nochmals zurück.

§ 7.

Apparat zur Bestimmung der Drehung um die Verticalaxe.

Zu diesem Zweck kann man sich einer massiven Kugel bedienen, die mittelst eines Fadens aufgehängt ist (siehe Fig. IX). Diese Kugel soll nach unten mittelst eines zweiten aufgespannten Fadens angezogen werden, der dazu dienen soll, die seitlichen Verschiebungen der Kugel zu verhindern. Unter dieser Bedingung wirkt auf die Kugel nur die Drehung χ der Erdoberfläche um die z -Axe.

Die Drehung der Kugel um die z -Axe kann entweder auf mechanischem, oder besser auf optischem Wege registrirt werden.

Fig. IX.

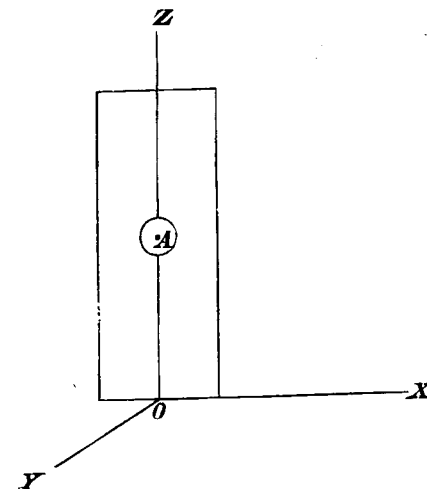
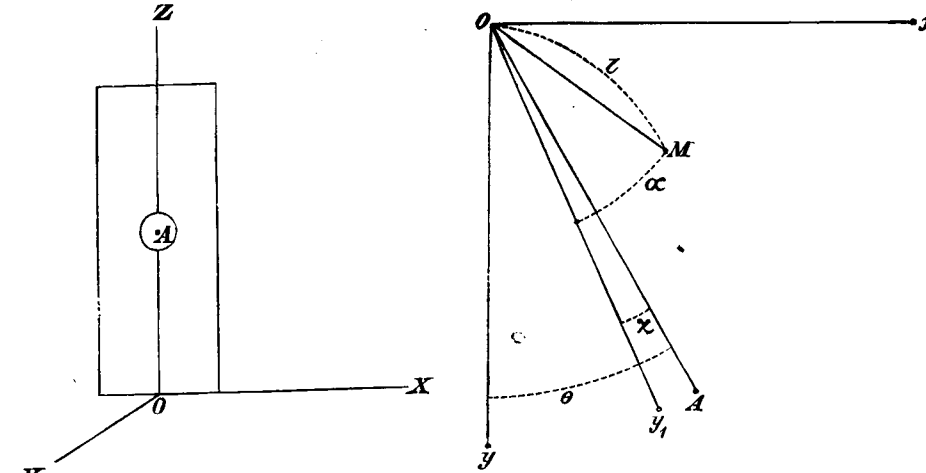


Fig. X.



Sei die Grösse der Drehung der Kugel zur Zeit t gleich θ .

Um die Differentialgleichung der Bewegung der Kugel für θ ableiten zu können, denken wir uns ein zweites fest mit der Kugel verbundenes Coordinatensystem vorhanden, welches dem ersten, im Raume festen, System parallel ist.

Ist die Kugel um den Winkel θ nach rechts gedreht, so verschiebt sich die y_1 -Axe dieses zweiten Systems nach OA (siehe Fig. X), wo $\angle yOA = \theta$ ist. Dreht sich nun weiter die Erde um den Winkel χ , so nimmt diese Axe die Stellung Oy_1 ein.

Nehmen wir weiter einen Massenpunkt M mit der Masse m in der Entfernung l von der Drehungsaxe der Kugel an, und sei der Winkel y_1OM gleich α .

Dann ergeben sich für die absoluten Coordinaten ξ und η des Punktes M folgende Werthe¹⁾

$$\xi = l \sin (\theta - \chi + \alpha)$$

$$\eta = l \cos (\theta - \chi + \alpha).$$

Daraus folgt für die Projectionen der Geschwindigkeit:

$$\xi' = l \cos (\theta - \chi + \alpha) (\theta' - \chi')$$

$$\eta' = -l \sin (\theta - \chi + \alpha) (\theta' - \chi').$$

Die lebendige Kraft T wird:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (\xi'^2 + \eta'^2) = \frac{1}{2} \Sigma m l^2 \cdot \{\theta'^2 - 2\chi'\theta' + \chi'^2\}.$$

$\Sigma m l^2$ ist das Trägheitsmoment der Kugel bezüglich der Drehungsaxe. Setzen wir es gleich K , dann ist:

$$T = \frac{1}{2} K \{\theta'^2 - 2\chi'\theta' + \chi'^2\}.$$

Wenden wir nun das Lagrange'sche Princip an.

Es ist

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = A. \dots \dots \dots (105)$$

Wir erhalten für:

$$\frac{\partial T}{\partial \theta'} = K \{\theta' - \chi'\}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) = K \{\theta'' - \chi''\}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0.$$

Bringen wir diese Werthe in die Formel (105), so folgt:

$$K \{\theta'' - \chi''\} = A. \dots \dots \dots (106)$$

1) Die dritte Coordinate braucht hier nicht berücksichtigt zu werden.

A ist leicht zu bestimmen. Ist die Drehungsconstante beider Drähte, zusammen genommen, gleich D , so wird

$$A d\theta = -D\theta d\theta.$$

Setzen wir diesen Werth in der Gleichung (106) ein, so ergibt sich, wenn $\frac{D}{K}$ gleich n^2 gesetzt wird,

$$\theta'' + n^2\theta - \chi'' = 0.$$

Führen wir noch die Dämpfung ein, so können wir die definitive Differentialgleichung der Bewegung der betrachteten Kugel folgendermassen schreiben:

$$\theta'' + 2\epsilon\theta' + n^2\theta - \chi'' = 0. \dots \dots \dots (107)$$

Die Constanten ϵ und n lassen sich abermals für den Fall, dass $\chi = 0$ ist, aus Schwingungsbeobachtungen leicht ermitteln.

Aus der Formel (107) kann ebenfalls χ durch zweifache Integration, unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen, gefunden werden.

Der im vorigen § beschriebene Apparat bietet also die Möglichkeit, die verticale Verschiebung z und der hier beschriebene Apparat die Drehung um die z -Axe χ aus den Beobachtungen direct abzuleiten.

Zwei Componenten der Erdbewegung können also mit Hilfe dieser beiden Apparate ermittelt werden.

Die Beobachtungen mit Verticalpendeln bei bifilarer Aufhängung liefern die Werthe für $y'' + g\varphi$ und $x'' - g\psi$. Es muss also noch ein Hilfsmittel gefunden werden, x , y , φ und ψ getrennt zu erhalten.

§ 8.

Der Apparat von Davidson zur Bestimmung von Neigungen.

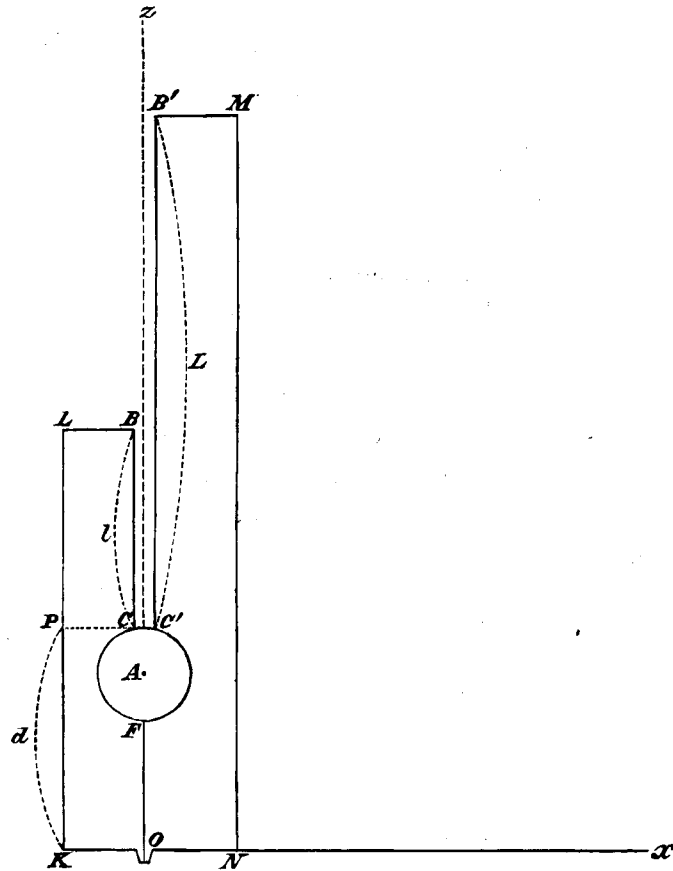
Wäre die Möglichkeit vorhanden, φ und ψ mit Hilfe irgend welcher Apparate direct zu bestimmen, so könnte man aus den von Verticalpendeln (mit bifilarer Aufhängung) gelieferten Werthen von $y'' + g\varphi$ und $x'' - g\psi$, schon y'' und x'' ermitteln und weiter, durch zweifache Integration, x und y ableiten.

Zur Erforschung reiner Neigungen hat eben Schlüter den Klinographen construiert, aber, wie ich schon früher betont habe, scheint mir der Klinograph wenig dazu geeignet zu sein.

Ein viel mehr passender Apparat für den erwähnten Zweck wäre, meiner Ansicht nach, der hoch elegante Apparat von Davidson, auf dessen Theorie ich jetzt etwas näher eingehen werde. Eine vollständige, strenge Theorie dieses Apparates werde ich hier nicht geben, sondern mich nur mit einer *angenäherten* Ableitung begnügen.

Der Apparat von Davidson besteht in seinen Hauptzügen aus einer schweren Masse, wollen wir sagen, aus einer Kugel *A* (siehe Fig. XI),

Fig. XI.



welche an einem Bifilar *CB* und *C'B'* aufgehängt ist. Einer von diesen beiden Drähten habe die Länge *l* (*CB = l*) und der andere *L > l* (*C'B' = L*); die Entfernung der Drähte von einander sei *e* (*CC' = e*), wobei *e* nach Belieben verkleinert werden kann. Die beiden Drähte *CB* und *C'B'* sind in den Punkten *B* und *B'* an dem Gestell *KLB - NMB'* befestigt.

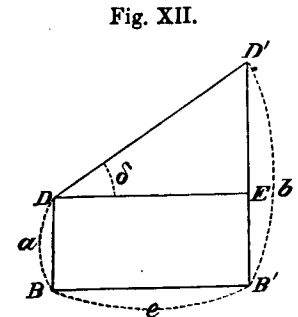
Wenn der Apparat in Ruhe ist, möge die Ebene beider Drähte mit dem

Meridian zusammenfallen, wobei noch der lange Draht auf der nördlichen Seite sich befinden soll.

Um seitliche Verschiebungen der Kugel zu verhindern, denke ich mir noch einen Stift *FO* von unten an der Kugel angebracht, welcher in eine kleine Höhlung *O* hineinragt. Dann kann die Kugel nur Drehungen um die *z*-Axe ausführen. Diese Drehung kann entweder mechanisch, oder sogar optisch aufgenommen werden. Die Verschiebungen *x*, *y*, *z* und die Drehung ψ um die *y*-Axe sollen die Lage der Kugel nicht ändern.

Wollen wir nun sehen, was eine Drehung φ um die *x*-Axe hervorruft.

In der Fig. XII, welche ein Horizontalschnitt der vorigen Zeichnung ist, projiciren sich die Punkte *B* und *B'* der Fig. XI in *B* und *B'* (Fig. XII), wenn $\varphi = 0$ ist.



Wird nun eine positive Drehung φ um die *x*-Axe stattfinden, so verschiebt sich *B* nach *D* und *B'* nach *D'* (Fig. XII) und die Ruhelage des Apparates wird dann mit der Richtung *DD'* zusammenfallen.

Bezeichnen wir die Entfernung der Punkte *C* und *C'* (auf der Fig. XI) von der *x*-Axe durch *d*, so erhalten wir, wenn φ sehr klein ist, folgende Relationen:

$$\left. \begin{aligned} BD = a &= \varphi (d + l) \\ \text{und} \quad B'D' = b &= \varphi (d + L). \end{aligned} \right\} \text{(Fig. XII.)}$$

Es ist weiter *BB' = DE = e*. Bezeichnen wir ferner den Winkel *EDD'* (Fig. XII), um welchen die Kugel sich drehen muss, um die neue Gleichgewichtslage anzunehmen, mit δ , so ergibt sich

$$\text{tg } \delta = \frac{b - a}{e},$$

oder, wenn δ sehr klein ist,

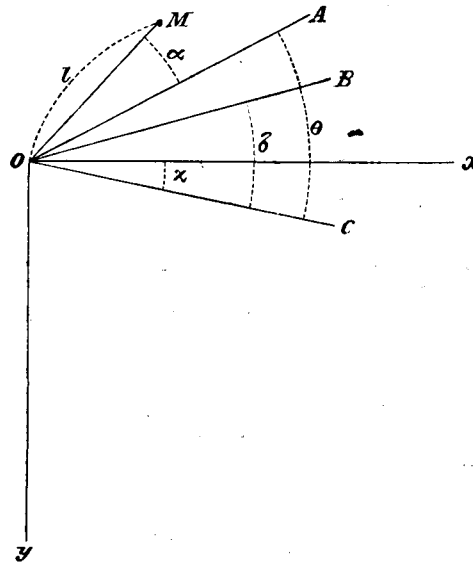
$$\delta = \frac{L - l}{e} \cdot \varphi. \dots \dots \dots (108)$$

Diese Formel lehrt uns, dass eine Drehung der Erdoberfläche um die *x*-Axe eine Drehung der Kugel um die *z*-Axe hervorruft, welche desto grösser wird, je grösser der Unterschied der Länge beider Drähte und je kleiner die Entfernung *e* derselben voneinander wird. Man kann $\frac{L-l}{e}$ so wählen, dass δ bedeutend grösser als φ ausfällt, und in dieser Hinsicht bietet der Apparat von Davidson einen grossen Vorzug vor dem Klinographen von Schlüter. Es ist dabei noch immer die Möglichkeit vorhanden, die Empfindlichkeit der Ablesung durch mechanische oder optische Mittel zu vergrössern.

Man ersieht also, dass auf die Bewegung der Kugel nur die Drehungen φ und χ von Einfluss sind, folglich ist der Einfluss der Translations-Verschiebungen der Erdoberfläche hier ausgeschlossen: der Apparat müsste in dieser Form nur reine Neigungen angeben.

Wollen wir nun die Differentialgleichung der Bewegung dieses Apparates ableiten; es brauchen dabei nur die Drehungen φ und χ berücksichtigt zu werden.

Fig. XIII.



Denken wir uns eine feste Richtung in der Kugel, die in der Ruhelage mit der x -Axe zusammenfällt. Sei die wirkliche Lage dieser Richtung zur Zeit, wenn die Kugel gedreht ist, OA (siehe Fig. XIII). Da zu derselben Zeit die Erdoberfläche sich um die z -Axe um den Winkel χ gedreht hat, so wird die relative Ablenkung der Kugel θ , also die Grösse, welche eigentlich gemessen wird, durch den Winkel COA (Fig. XIII) angegeben.

Denken wir uns weiter einen materiellen Punkt M mit der Masse m in der Entfernung l von der z -Axe vorhanden, und sei der Winkel MOA gleich α , so ergeben sich für die absoluten Coordinaten ξ und η des Punktes M folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \xi &= l \cos(\theta - \chi + \alpha) \\ \eta &= -l \sin(\theta - \chi + \alpha). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \xi' &= -l \sin(\theta - \chi + \alpha) (\theta' - \chi') \\ \eta' &= -l \cos(\theta - \chi + \alpha) (\theta' - \chi'). \end{aligned}$$

Die lebendige Kraft bekommt das Aussehen:

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m (\xi'^2 + \eta'^2) = \frac{1}{2} \Sigma m l^2 \cdot \{\theta'^2 - 2\chi'\theta' + \chi'^2\}.$$

Wenden wir nun das Lagrange'sche Princip an und berücksichtigen noch dabei, dass Σml^2 das Trägheitsmoment K bedeutet, so ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= K \{\theta' - \chi'\} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) &= K \{\theta'' - \chi''\} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0. \end{aligned}$$

Die Lagrange'sche Gleichung nimmt also die Form an:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = K \{\theta'' - \chi''\} = A \dots \dots \dots (109)$$

Wollen wir nun A berechnen.

Ist eine Drehung φ um die x -Axe vorhanden und ist dabei die wahre Richtung der Ruhelage des Apparates zur Zeit t OB , wobei der Winkel $COB = \delta$ ist, so kann in erster Annäherung

$$A = -D(\theta - \delta)$$

gesetzt werden, wo D eine gewisse Constante bedeutet.

Bringt man nun diesen Ausdruck in der Formel (109) und ersetzt den Werth von δ durch $\frac{L-l}{e} \varphi$ (Formel 108), so folgt

$$K \{\theta'' - \chi''\} + D\theta - D \frac{L-l}{e} \varphi = 0.$$

Setzen wir der Kürze halber

$$\begin{aligned} \frac{D}{K} &= n^2, \\ \frac{D}{K} \cdot \frac{L-l}{e} &= p, \end{aligned}$$

und führen noch die Dämpfung ein, so ergibt sich

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta - \chi'' = p \cdot \varphi. \dots \dots \dots (110)$$

Da χ'' aus anderen Beobachtungen als bekannt vorausgesetzt werden darf, so ermöglicht die Formel (110), φ direct zu bestimmen und zwar ohne irgend welche Integration.

Dabei muss freilich die empirische Curve $\theta = F(t)$ zweimal differencirt werden, was zuweilen grosse Schwierigkeiten darbietet, doch ist durch den beschriebenen Apparat theoretisch die Möglichkeit gegeben, die Neigungen direct zu bestimmen.

Die Constanten ε , n und p können aus Schwingungsbeobachtungen bei verschiedenen gegebenen, und zwar constanten, Werthen von φ ermittelt werden.

Ist noch ein ähnlicher Apparat in der ersten Verticalen aufgestellt und zwar so, dass der längere Draht nach Osten zu steht, so lässt sich die Differentialgleichung der Bewegung desselben leicht aus der Formel (110) ableiten. Es muss in ihr nur φ durch ψ ersetzt werden.

Dann wird aus (110):

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta - \chi'' = p \cdot \psi. \quad \dots \dots \dots (111)$$

Also zwei senkrecht zu einander stehende Apparate von der beschriebenen Form ergeben die Möglichkeit, die Drehungen um die x - und y -Axe direct zu bestimmen.

§ 9.

Ausstattung einer seismometrischen Station ersten Ranges.

Eine vollständige seismometrische Station ersten Ranges muss imstande sein, mit Hilfe gewisser Apparate alle 6 Componenten einer Erderschütterung, und zwar die drei Verschiebungen x , y , z und die drei Drehungen φ , ψ und χ , als Functionen der Zeit zu bestimmen.

Da es 6 Unbekannte giebt, so muss eine solche Station mindestens 6 Apparate besitzen.

Aus der vorigen Untersuchung geht nun hervor, dass die principielle Möglichkeit vorhanden ist, eine solche Combination von Apparaten zu treffen, welche imstande sein wird, alle 6 Elemente der Erdbewegung getrennt anzugeben.

Meine Absicht besteht nicht darin, die verschiedenen Einzelheiten solcher Beobachtungen zu discutiren und die praktische Ausführung derselben näher zu verfolgen, sondern nur darin, zu zeigen, dass durch eine passende Auswahl von Instrumenten eine der wichtigsten Aufgaben der Seismometrie ihre Lösung finden kann.

Wollen wir nun sehen, wie eine solche Station am rationellsten ausgestattet werden muss, und nach welchem Plan die Beobachtungen selbst geführt werden sollen.

In einer vollständigen seismometrischen Station ersten Ranges müssen, meiner Ansicht nach, folgende Instrumente vorhanden sein:

I. Ein Apparat zur Bestimmung der Verticalcomponente der Erdbewegung z ,

$$u'' + 2\varepsilon u' + n^2 u + g + z'' = 0 \quad (\text{Formel (104)});$$

daraus bestimmt sich z .

II. Ein Apparat zur Bestimmung der Drehung um die Verticalaxe χ ,

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = \chi'' \quad (\text{Formel (107)});$$

daraus ergibt sich χ .

III. Ein Apparat von Davidson im Meridian,

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta - \chi'' = p\varphi \quad (\text{Formel (110)});$$

daraus erhält man φ , da χ als bekannt angesehen werden darf.

IV. Ein Apparat von Davidson in der ersten Verticalen,

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta - \chi'' = p\psi \quad (\text{Formel (111)});$$

daraus berechnet sich ψ .

V. Ein Verticalpendel mit bifilarer Aufhängung — Schwingungsebene im Meridian,

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{g}{l}\theta + \frac{1}{l}\{x'' - g\psi\} = 0 \quad (\text{Formel (100)});$$

daraus ergibt sich $x'' - g\psi$, und

VI. ein Verticalpendel mit bifilarer Aufhängung — Schwingungsebene in der ersten Verticalen,

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{g}{l}\theta - \frac{1}{l}\{y'' + g\varphi\} = 0 \quad (\text{Formel (101)}),$$

zur Bestimmung von $y'' + g\varphi$.

Da nun φ und ψ von den Davidson'schen Apparaten direct geliefert werden, so können aus den bekannten Werthen von $x'' - g\psi$ und $y'' + g\varphi$ x'' und y'' und folglich, durch zweifache Integration, auch x und y ermittelt werden.

Wir sehen also, dass die Möglichkeit vorhanden ist, alle 6 Elemente einer Erderschütterung zu bestimmen und zwar ohne Anwendung von Horizontalpendeln. Für den erwähnten Zweck halte ich sogar das Horizontalpendel für einen weniger geeigneten Apparat, da es, sowohl in theoretischer, als auch in praktischer Hinsicht zu complicirt ist.

Es ist unbedingt nothwendig, dass bei Ausstattung jeder seismometrischen Station ein bestimmter Plan ins Auge gefasst wird. Man muss zuerst klar feststellen, was eigentlich gemessen werden soll, und dementsprechend ist alsdann die Wahl der zu benutzenden Instrumente zu treffen. Für den hier zu verfolgenden Zweck ist es ganz und gar nutzlos, Stationen mit Horizontalpendeln allein zu versehen, da aus Beobachtungen mit solchen nie etwas Sicheres über den wahren Charakter der Erdbewegung geschlossen werden kann. Hierbei wird nur eine Menge von Seismogrammen gesammelt, die fast ausschliesslich als statistisches Material Werth besitzen, da sie nie in dem hier besprochenen Sinn verwerthet und bearbeitet werden können.

Ein klar gefasster, zweckmässig ausgearbeiteter Plan muss der Gründung jeder seismometrischen Station vorausgeschickt werden.

§ 10.

Die Untersuchungsplattform.

Es ist unbedingt nothwendig, ehe man zur Gründung einer seismometrischen Station nach dem eben besprochenen Plan herantritt, die verschiedenen, hier angegebenen Formeln einer sorgfältigen experimentellen Prüfung zu unterwerfen.

Im Falle, dass die verschiedenen, früher angegebenen, theoretischen Erörterungen sich wirklich bestätigen lassen, und dabei zugleich auch verschiedene praktische Details der Beobachtungen aufgeklärt werden, wäre es sehr wünschenswerth, eine seismometrische Station nach dem hier angegebenen Plan wirklich zu gründen und zwar an einem Ort, an dem Erdbeben öfter vorkommen. Eine solche Station könnte dann ein hoch interessantes Beobachtungsmaterial liefern, aus dessen Bearbeitung wichtige Schlüsse über den wahren Charakter der Bewegung der Erdoberfläche bei einem Erdbeben gezogen werden könnten.

Um den Einfluss der Verschiebungen x und y , so wie der Drehungen φ und ψ , an verschiedenen Seismographen zu studiren, kann von der folgenden Plattform Gebrauch gemacht werden.

Die Fig. XIV zeigt eine Ansicht dieser Plattform von oben und die Fig. XV eine Seitenansicht derselben.

Auf dem feststehenden, massiven Eisenrahmen a bewegt sich der Rahmen b , welcher mit Hilfe der Rollen r' auf besonderen Schienen hin- und hergleiten kann. Auf diesem Rahmen b ist in der Mitte desselben eine starke Schneide angebracht, auf welche eine grosse Platte c sich stützt. Die Hin- und Herbewegung des Rahmens b wird vermittelst des gekrümmten Cylinders e hervorgerufen, welcher auf der Axe f befestigt ist, und sich mit derselben dreht, wobei zwei schwere Laufgewichte g und g' die kleine an dem Rahmen b befestigte Rolle l fortwährend an den Cylinder e andrücken. Um die Amplitude des Hin- und Herschwankens des Rahmens b allmählich zu verkleinern, wird die Axe f in ihren Lagern h und k durch die Schraube i , welche in der Mutter k läuft, in ihrer Längsrichtung verschoben.

Bei m ist eine ähnliche, aus Cylinder und Schraube bestehende Vorrichtung vorhanden, um der Platte c gewisse Neigungen zu ertheilen.

Das Gewicht n dient dazu, den Schwerpunkt der Platte c zu verlegen.

Auf der oberen Platte c wird der zu untersuchende Seismograph aufgestellt. Die erste Cylinder-Vorrichtung ergiebt die Möglichkeit, bei der

oberen Platte c Hin- und Herbewegungen nach einem beliebig vorgeschriebenen Gesetze zu bewirken; die zweite leistet dasselbe für die Neigungen.

Fig. XIV.

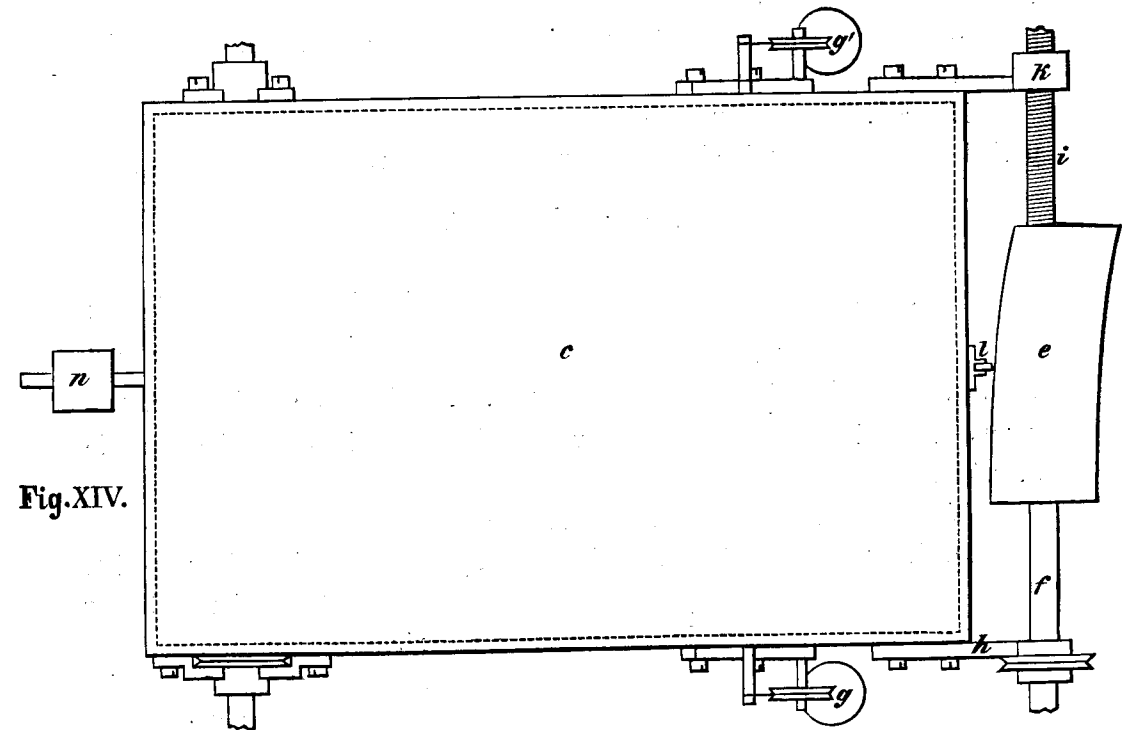


Fig. XIV.

Fig. XV.

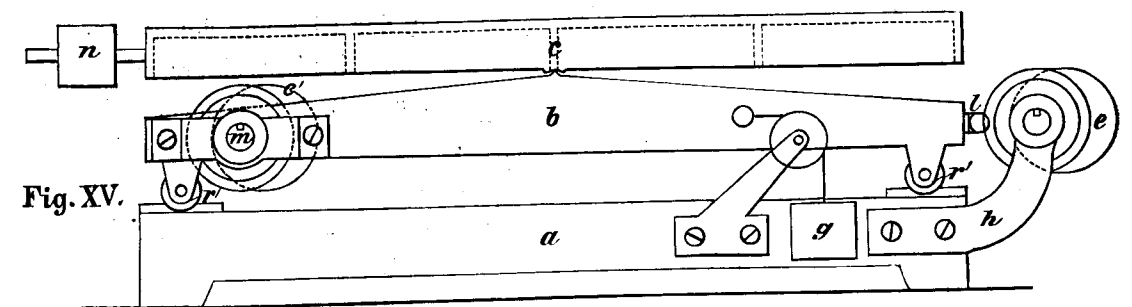


Fig. XV.

Steht der zu untersuchende Apparat parallel oder senkrecht zur Längsrichtung der Platte, so kommen nur eine Verschiebung, respective Drehung, oder beide zugleich in Betracht; bildet er dagegen einen spitzen oder stumpfen Winkel mit den erwähnten Richtungen, so lassen sich die Verschiebung und Drehung in je zwei Componenten zerlegen, und der Apparat wird sich alsdann unter dem Einflusse von 4 Bewegungsarten — zwei Verschiebungen x und y und zwei Drehungen φ und ψ — befinden. Die Drehung beider Axen kann mit Hilfe zweier kleiner Electromotore leicht bewerkstelligt werden.

Es ist auch nicht schwer, eine besondere Plattform zur Untersuchung der Bewegung nach der z -Axe, so wie auch der Drehung χ um die z -Axe, zu construiren. Auf die Einzelheiten der Construction dieser beiden letzten Plattformen brauchen wir hier nicht näher einzugehen.

Wollen wir nun etwas näher verfolgen, wie der Cylinder angefertigt werden soll, um gewisse Bewegungsarten hervorzurufen.

Möge z. B. die Hin- und Herbewegung der Plattform nach einem periodischen Gesetz mit abnehmender Amplitude erfolgen, also etwa nach

$$x = ae^{-\varepsilon t} \cdot \sin nt.$$

Sei der Gang der Schraube i (Fig. XIV) gleich h . Da die Periode τ der Bewegung gleich $\frac{2\pi}{n}$ ist, so muss die Schraube i so schnell gedreht werden, damit $N = \frac{1}{\tau} = \frac{n}{2\pi}$ Umdrehungen in einer Secunde zustande kommen. Bei jeder Umdrehung verschiebt sich die Schraube um die Strecke h .

Wollen wir nun die Form der Fläche e aufsuchen.

Denken wir uns zunächst, dass keine Dämpfung vorhanden, also $\varepsilon = 0$ ist,

dann könnte der Cylinder nicht gebogen werden, und die Schraube i könnte alsdann ganz fortfallen.

Drehe sich nun die Axe in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers, wenn man vor der Plattform steht und die Axe f , welche den Rahmen b in Bewegung setzt, auf der rechten Seite hat.

Dann müsste die Schnittcurve der Oberfläche des Cylinders mit einer senkrecht zur Drehungsaxe derselben stehenden Ebene fol-

gender Gleichung in Polarcordinaten genügen, wo der Pol auf der Drehungsaxe des Cylinders zu liegen kommt:

$$r = r_0 + a \sin \theta.$$

(Curve $ABCD$ in der Fig. XVI.)

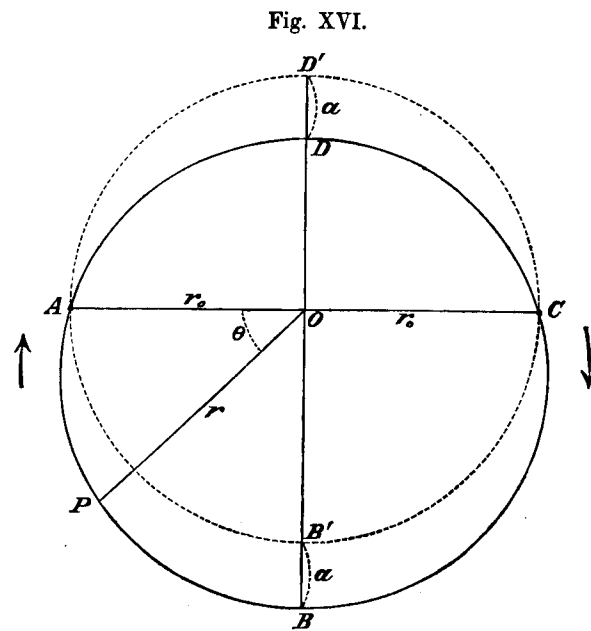


Fig. XVI.

Dann besteht die Relation:

$$x = r - r_0 = a \sin \theta.$$

Ist die Drehungsgeschwindigkeit der Axe passend gewählt, so wird für:

| | | | |
|-----------------------|---------------------------|---------------|----------|
| $t = 0$ | $\theta = 0$ | $r = r_0$ | $x = 0$ |
| $t = \frac{\tau}{4}$ | $\theta = \frac{\pi}{2}$ | $r = r_0 + a$ | $x = a$ |
| $t = \frac{\tau}{2}$ | $\theta = \pi$ | $r = r_0$ | $x = 0$ |
| $t = \frac{3}{4}\tau$ | $\theta = \frac{3}{2}\pi$ | $r = r_0 - a$ | $x = -a$ |
| $t = \tau$ | $\theta = 2\pi$ | $r = r_0$ | $x = 0$ |

Die Curve $ABCD$ ist kein Kreis.

Möge nun jetzt x der Gleichung

$$x = ae^{-\varepsilon t} \sin nt$$

genügen.

Wir haben zuerst:

$$nt = \theta,$$

oder

$$t = \frac{\theta}{n} = \frac{\tau\theta}{2\pi}.$$

Folglich wird

$$x = ae^{-\frac{\varepsilon\tau}{2\pi} \cdot \theta} \cdot \sin \theta.$$

In dem jetzigen Falle muss die Schraube schon in Gang gesetzt werden. Hat sich die Axe um θ gedreht, so ist die Verschiebung derselben

$$\xi = \frac{h}{2\pi} \cdot \theta,$$

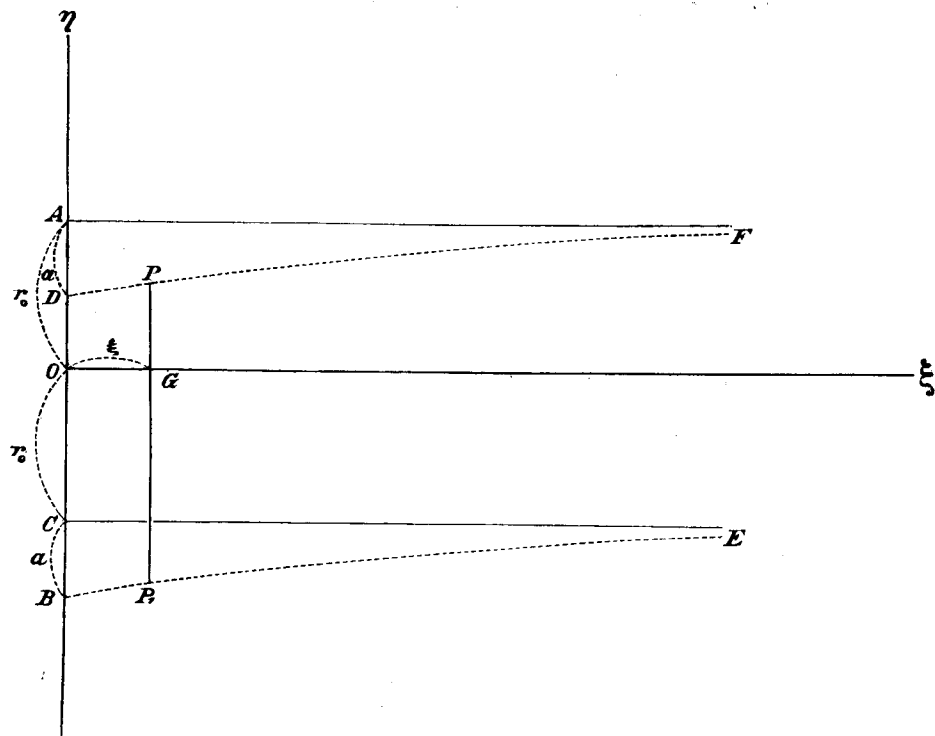
also

$$x = ae^{-\frac{\varepsilon\tau}{h} \cdot \xi} \cdot \sin \theta.$$

Damit diese vorgeschriebene Bewegung wirklich zustande kommt, müssen die Radien-Vectoren des unteren Theils der Curve ABC (Fig. XVI) entsprechend verkleinert und die des oberen CDA vergrößert werden, während OA und OC unverändert bleiben sollen. Somit werden die Entfernungen BB' und DD' immer kleiner und die betrachtete Fläche geht allmählich in eine Cylinderfläche mit kreisrundem Querschnitt $AB'CD'$ über.

Wollen wir nun die Form eines Schnittes dieser Fläche mit einer durch die Drehungsaxe gehenden Ebene untersuchen (siehe Fig. XVII).

Fig. XVII.



Sei der kleinste Radius-Vector nach oben und der grösste nach unten gerichtet, also:

$$OD = r_0 - a$$

$$OB = r_0 + a,$$

und bezeichnen wir die Ordinate irgend eines Punktes P der Curve DPF in der Entfernung ξ von O durch η und die Ordinate des entsprechenden Punktes P_1 der unteren Curve BP_1E ihrem absoluten Werthe nach durch η_1 . Beide Curven sind nichts Anderes, als die Schnittlinien der gebogenen Cylinderfläche mit der $\xi\eta$ -Ebene.

Es ergibt sich für die Gleichung der oberen Curve

$$\eta = r_0 - ae^{-\frac{\alpha\xi}{h}},$$

und für die der unteren

$$\eta_1 = r_0 + ae^{-\frac{\alpha\xi}{h}}.$$

Die Werthe von η und η_1 für andere Schnitte lassen sich ebenfalls ohne Schwierigkeit berechnen. Für einen Schnitt, welcher senkrecht zum vorigen ($\xi\eta$) liegt, sind η und η_1 constant und zwar gleich r_0 .

Zur Herstellung einer solchen Fläche lässt sich folgendes Verfahren empfehlen.

Man verfertigt aus Holz eine Anzahl von Schnittflächen, wie P_1GP (siehe auch die Fig. XVI, Curve $ABCD$), setzt sie dann auf einer gemeinsamen Axe $O\xi$ zusammen, schleift die Ecken ab und macht alsdann ein Sandmodell, in welchem dann der gesuchte gebogene Cylinder gegossen werden kann.

Auf dieselbe Art und Weise könnte man Flächen für jede andere vorgeschriebene Bewegungsart anfertigen.

Ganz ähnliche Betrachtungen gelten selbstverständlich auch für die zweite cylindrische Fläche nebst Schraubvorrichtung, welche die Neigungen der Platform bewirken soll.

§ 11.

Behandlung eines Beispiels.

Um nun die früher angegebenen theoretischen Auseinandersetzungen etwas anschaulicher zu machen, wollen wir ein besonderes Beispiel behandeln.

Wählen wir irgend einen Seismographen, welcher seine Schwingungen ohne Dämpfung ausführt.

Die Differentialgleichung der Bewegung desselben, wenn kein Erdbeben vorhanden ist, sei

$$\theta'' + n^2\theta = 0.$$

Nun gehe eine Erderschütterung vor sich, und betrachten wir die Wirkung eines Elementes derselben, etwa α , auf unseren Apparat.

Die Differentialgleichung der Bewegung des Seismographen sei in diesem Fall:

$$\theta'' + n^2\theta + \alpha'' = 0. \dots\dots\dots (112)$$

Dieser Fall entspricht z. B. dem Apparate zur Bestimmung der Drehung um die z -Axe, wenn χ negativ ist (siehe die Formel (107)), oder einem Verticalpendel bei Abwesenheit von Neigungen (siehe die Formel (100)).

Es soll nun α ein bestimmtes vorgeschriebenes Gesetz befolgen, und nehmen wir für dasselbe nicht eine periodische, sondern eine aperiodische Bewegung an. Diese Bewegung in ihrer Anwendung auf Seismographen soll von Interesse sein, da es wohl denkbar ist, dass bei Erdbeben, insbesondere, wenn dieselben stossweise erfolgen, gerade ähnliche aperiodische Bewegungen der Erdoberfläche zustande kommen.

Eine aperiodische Bewegung ergibt sich aus folgender Differentialgleichung:

$$\alpha'' + 2b\alpha' + p^2\alpha = 0, \dots \dots \dots (113)$$

wenn $b > p$ ist.

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$\alpha = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t}, \dots \dots \dots (114)$$

wo

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= b + c \\ \mu_2 &= b - c \\ c &= +\sqrt{b^2 - p^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (115)$$

und

ist.

Es müssen noch die Constanten C_1 und C_2 bestimmt werden.

Setzen wir voraus, dass zur Zeit $t = 0$ $\alpha = 0$ und die Anfangsgeschwindigkeit $(\alpha')_0 = \omega_0$ wird, so ergibt sich

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2c} \{ e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t} \}. \dots \dots \dots (116)$$

Diesem Gesetz soll die betrachtete Componente α der Erderschütterung genügen.

Diese Formel lehrt uns, dass mit wachsendem t , α von 0 an wächst, ein Maximum α_m für $t = t_m$ erreicht, um dann wieder abzunehmen und zwar asymptotisch der Nulllinie sich zu nähern.

Wollen wir nun α_m bestimmen.

Aus der Gleichung (116) erhält man:

$$\alpha' = \frac{\omega_0}{2c} \{ -\mu_2 e^{-\mu_2 t} + \mu_1 e^{-\mu_1 t} \}.$$

α' muss nun gleich Null gesetzt werden.

Daraus folgt

$$e^{(\mu_1 - \mu_2)t_m} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

oder, da $\mu_1 - \mu_2 = 2c$ ist,

$$t_m = \frac{1}{2c} \lg \frac{\mu_1}{\mu_2}. \dots \dots \dots (117)$$

Bringt man nun diesen Werth von t in die Gleichung (116), so bekommt man α_m .

Aus der Gleichung (116) ergibt sich weiter

$$\alpha'' = \frac{\omega_0}{2c} \{ \mu_2^2 e^{-\mu_2 t} - \mu_1^2 e^{-\mu_1 t} \}.$$

Setzt man diesen Werth in die Formel (112) ein, so entsteht die Gleichung:

$$\theta'' + n^2 \theta + \frac{\omega_0}{2c} \{ \mu_2^2 e^{-\mu_2 t} - \mu_1^2 e^{-\mu_1 t} \} = 0. \dots \dots (118)$$

Diese Gleichung lässt sich nach der bekannten Methode der Veränderung der Integrationsconstanten leicht behandeln; auf die Einzelheiten derselben brauchen wir hier nicht näher einzugehen.

Das allgemeine Integral wird:

$$\theta = C_1 \sin nt + C_2 \cos nt + \frac{\omega_0}{2c} \left\{ \frac{\mu_1^2}{n^2 + \mu_1^2} e^{-\mu_1 t} - \frac{\mu_2^2}{n^2 + \mu_2^2} e^{-\mu_2 t} \right\}. (119)$$

Die Constanten C_1 und C_2 berechnen sich aus den Anfangsbedingungen, nämlich, dass für $t = 0$

$$\theta = \theta_0$$

und

$$\theta' = (\theta')_0$$

wird.

Aus der Gleichung (119) ergibt sich weiter

$$\theta' = nC_1 \cos nt - nC_2 \sin nt + \frac{\omega_0}{2c} \left\{ -\frac{\mu_1^3}{n^2 + \mu_1^2} e^{-\mu_1 t} + \frac{\mu_2^3}{n^2 + \mu_2^2} e^{-\mu_2 t} \right\}. (120)$$

Setzen wir nun in den Formeln (119) und (120) $t = 0$, so ergibt sich

$$\theta_0 = C_2 + \frac{\omega_0}{2c} \left\{ \frac{\mu_1^2}{n^2 + \mu_1^2} - \frac{\mu_2^2}{n^2 + \mu_2^2} \right\},$$

$$(\theta')_0 = nC_1 - \frac{\omega_0}{2c} \left\{ \frac{\mu_1^3}{n^2 + \mu_1^2} - \frac{\mu_2^3}{n^2 + \mu_2^2} \right\}.$$

Daraus findet man für die Constanten C_1 und C_2 folgende Werthe:

$$C_2 = \theta_0 - \frac{\omega_0}{2c} \left\{ \frac{\mu_1^2}{n^2 + \mu_1^2} - \frac{\mu_2^2}{n^2 + \mu_2^2} \right\} \dots \dots \dots (121)$$

$$C_1 = \frac{1}{n} \left[(\theta')_0 + \frac{\omega_0}{2c} \left\{ \frac{\mu_1^3}{n^2 + \mu_1^2} - \frac{\mu_2^3}{n^2 + \mu_2^2} \right\} \right]. \dots \dots \dots (122)$$

Denken wir uns, dass die totale Periode der Schwingung unseres Seismographen, wenn er frei schwingt (bei $\alpha = 0$), gleich 1 Sec. ist, also $n = 2\pi$, und dass die maximale Amplitude der Schwingung die Einheit beträgt, dann kann, bei passender Wahl des Zeitanfangs, die Gleichung der Bewegung des Seismographen durch die folgende Formel dargestellt werden

$$\theta = \sin 2\pi t. \dots \dots \dots (123)$$

Diese Bewegung ist durch die blaue Curve $O'B'AC'D'E'$ (siehe Fig. XVIII) wiedergegeben.

Wenn der Seismograph $\frac{5}{8}$ seiner ganzen Periode durchlaufen hat (Punkt A), soll nun die Erderschütterung beginnen.

In diesem Moment, welchen wir für das Folgende als Anfang der Zeit-zählung nehmen wollen, ist

$$\theta_0 = 0,7071$$

$$(\theta')_0 = -4,443.$$

Die Erderschütterung soll nun dem aperiodischen Gesetze

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2c} \{e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t}\}$$

entsprechen.

Nehmen wir als Beispiel

$$b = 10$$

$$c = 1$$

$$\omega_0 = 13,568,$$

dann ergibt sich aus den Formeln (115)

$$\mu_1 = 11$$

$$\mu_2 = 9$$

und es wird:

$$\alpha = 6,784 \{e^{-9t} - e^{-11t}\}. \dots \dots \dots (124)$$

Das Maximum von α findet zur Zeit

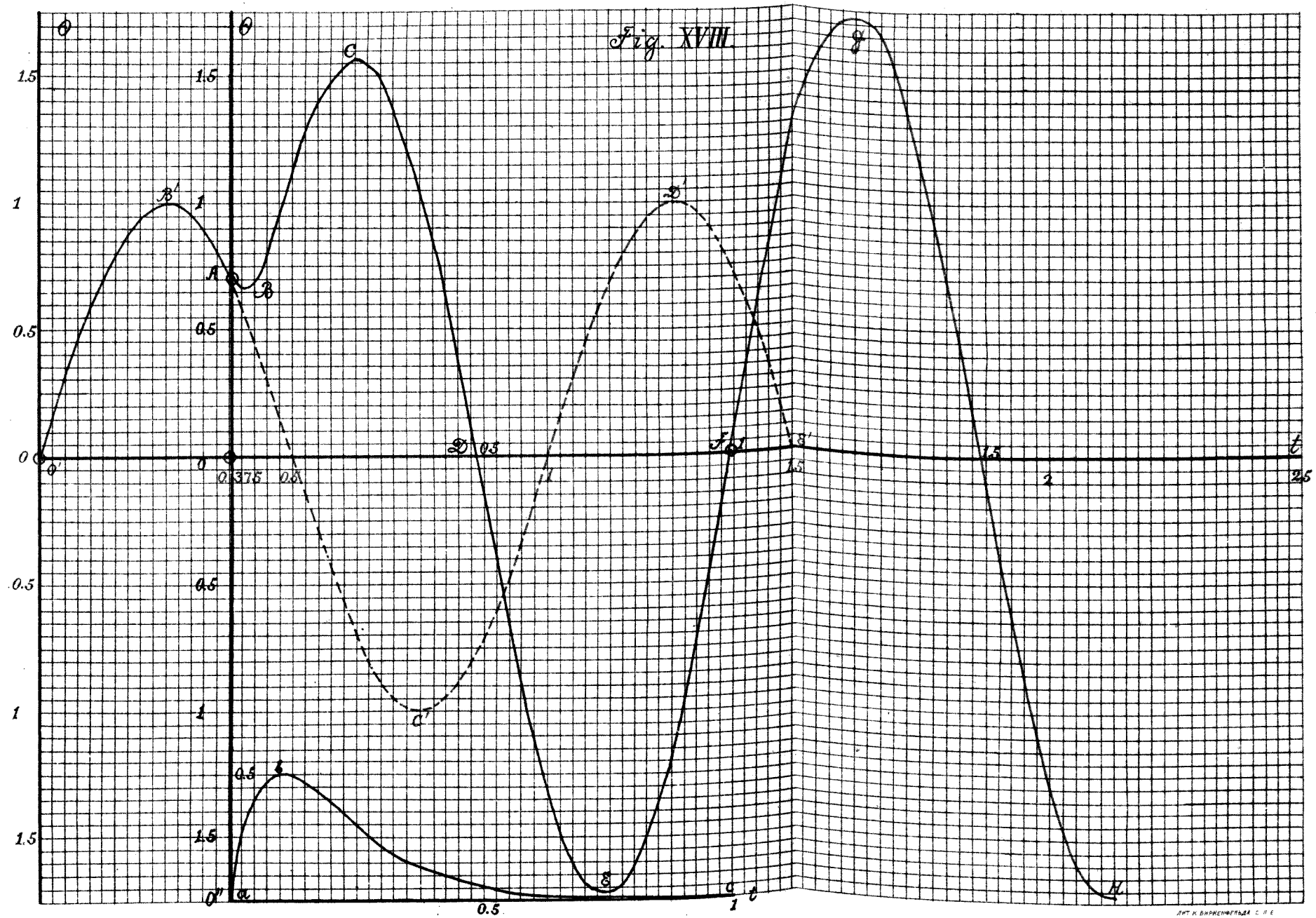
$$t_m = \frac{1}{2} \lg \frac{11}{9}, \text{ (siehe Formel (117)),}$$

also

$$t_m = 0,1003^{\text{sec}},$$

statt.

Fig. XVIII



Setzt man diesen Werth von t in der Formel (124) ein, so folgt

$$\alpha_{\max.} = 0,5000.$$

Wir sehen also, dass das Maximum der Ablenkung der Erdoberfläche von ihrer Gleichgewichtslage in diesem Fall ungefähr 0,1 Sec. nach dem Anfang der Erderschütterung eintritt; die Grösse dieser Ablenkung ist gleich 0,5, also gerade die Hälfte der maximalen Amplitude des freien Seismographen.

Wollen wir nun, unter Benutzung der hier angegebenen Werthe der verschiedenen Constanten $\mu_1, \mu_2, \omega_0, n, \theta_0, \theta'_0$ und c, C_2 und C_1 aus den Formeln (121) und (122) berechnen.

Man erhält folgende Zahlenwerthe:

$$\frac{\omega_0}{2c} \cdot \frac{\mu_1^2}{n^2 + \mu_1^2} = 5,1151$$

$$\frac{\omega_0}{2c} \cdot \frac{\mu_2^2}{n^2 + \mu_2^2} = 4,5611$$

und

$$C_1 = 1,7146$$

$$C_2 = 0,1531.$$

Bringt man nun diese Werthe in die Formel (119), so ergibt sich

$$\theta = 1,7146 \sin 2\pi t + 0,1531 \cos 2\pi t + 5,1151 \cdot e^{-11t} - 4,5611 e^{-9t}.$$

Diese Formel gestattet eine weitere zweckmässige Umformung.

Setzen wir nämlich:

$$+ \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = A$$

und

$$\frac{C_2}{C_1} = \operatorname{tg} \varphi,$$

so ergibt sich, wenn noch das Argument der trigonometrischen Functionen, statt in absolutem Maasse, in Graden ausgedrückt wird,

$$C_1 \sin 2\pi t + C_2 \cos 2\pi t = A \sin \left(360^\circ \frac{t}{1} + \varphi \right).$$

Auf Grund der früher angegebenen Zahlen ist

$$A = 1,7214$$

$$\varphi = 5^\circ 6' 9'',$$

folglich wird

$$\theta = 1,7214 \cdot \sin(360^\circ \cdot t + 5^\circ 6' 9'') + 5,1151 e^{-11t} - 4,5611 e^{-9t}. \quad (125)$$

Nach dieser Formel wollen wir nun die Werthe von θ für verschiedene t berechnen.

Setzen wir

$$\left. \begin{aligned} 1,7214 \sin(360^\circ \cdot t + 5^\circ 6' 9'') &= P \\ 5,1151 e^{-11t} - 4,5611 e^{-9t} &= Q, \end{aligned} \right\} \dots \dots (126)$$

und

also

$$\theta = P + Q. \dots \dots (127)$$

Wenn Q mit wachsendem t sehr klein wird, so wird der *directe* Einfluss des Erdbebens auf die Bewegung des Seismographen schon unbemerkbar sein.

In den folgenden Tabellen I und II sind die Werthe von P , Q und θ für verschiedene Werthe von t zusammengestellt — in der Tabelle I bis $t = 0,30$ Sec., für jede 0,01 Sec. und in der Tabelle II bis $t = 1,00$ Sec., für jede 0,02 Sec.

Tabelle I.

| t | P | Q | θ | t | P | Q | θ |
|----------------------|-------|--------|----------|----------------------|-------|--------|----------|
| 0,00 ^{sec.} | 0,153 | 0,554 | 0,707 | 0,16 ^{sec.} | 1,530 | -0,201 | 1,329 |
| 0,01 | 0,260 | 0,414 | 0,674 | 0,17 | 1,576 | -0,199 | 1,377 |
| 0,02 | 0,367 | 0,295 | 0,662 | 0,18 | 1,617 | -0,196 | 1,421 |
| 0,03 | 0,472 | 0,196 | 0,668 | 0,19 | 1,650 | -0,192 | 1,458 |
| 0,04 | 0,575 | 0,112 | 0,687 | 0,20 | 1,678 | -0,187 | 1,491 |
| 0,05 | 0,675 | 0,043 | 0,718 | 0,21 | 1,699 | -0,181 | 1,518 |
| 0,06 | 0,773 | -0,014 | 0,759 | 0,22 | 1,713 | -0,175 | 1,538 |
| 0,07 | 0,869 | -0,061 | 0,808 | 0,23 | 1,720 | -0,168 | 1,552 |
| 0,08 | 0,960 | -0,100 | 0,860 | 0,24 | 1,721 | -0,161 | 1,560 |
| 0,09 | 1,048 | -0,128 | 0,920 | 0,25 | 1,715 | -0,154 | 1,561 |
| 0,10 | 1,132 | -0,152 | 0,980 | 0,26 | 1,702 | -0,146 | 1,556 |
| 0,11 | 1,211 | -0,169 | 1,042 | 0,27 | 1,682 | -0,139 | 1,543 |
| 0,12 | 1,285 | -0,182 | 1,103 | 0,28 | 1,656 | -0,132 | 1,524 |
| 0,13 | 1,355 | -0,192 | 1,163 | 0,29 | 1,623 | -0,125 | 1,498 |
| 0,14 | 1,419 | -0,197 | 1,222 | 0,30 | 1,583 | -0,118 | 1,465 |
| 0,15 | 1,477 | -0,200 | 1,277 | | | | |

Tabelle II.

| t | P | Q | θ | t | P | Q | θ |
|----------------------|--------|--------|----------|----------------------|--------|--------|----------|
| 0,30 ^{sec.} | 1,583 | -0,118 | 1,465 | 0,66 ^{sec.} | -1,530 | -0,008 | -1,538 |
| 0,32 | 1,486 | -0,105 | 1,381 | 0,68 | -1,617 | -0,007 | -1,624 |
| 0,34 | 1,366 | -0,092 | 1,274 | 0,70 | -1,678 | -0,006 | -1,684 |
| 0,36 | 1,223 | -0,081 | 1,142 | 0,72 | -1,713 | -0,005 | -1,718 |
| 0,38 | 1,062 | -0,071 | 0,991 | 0,74 | -1,721 | -0,004 | -1,725 |
| 0,40 | 0,884 | -0,062 | 0,822 | 0,76 | -1,702 | -0,004 | -1,706 |
| 0,42 | 0,692 | -0,054 | 0,638 | 0,78 | -1,656 | -0,003 | -1,659 |
| 0,44 | 0,489 | -0,047 | 0,442 | 0,80 | -1,583 | -0,003 | -1,586 |
| 0,46 | 0,278 | -0,040 | 0,238 | 0,82 | -1,486 | -0,002 | -1,488 |
| 0,48 | 0,063 | -0,035 | 0,028 | 0,84 | -1,366 | -0,002 | -1,368 |
| 0,50 | -0,153 | -0,030 | -0,183 | 0,86 | -1,223 | -0,002 | -1,225 |
| 0,52 | -0,367 | -0,025 | -0,392 | 0,88 | -1,062 | -0,001 | -1,063 |
| 0,54 | -0,575 | -0,022 | -0,597 | 0,90 | -0,884 | -0,001 | -0,885 |
| 0,56 | -0,773 | -0,019 | -0,792 | 0,92 | -0,692 | -0,001 | -0,693 |
| 0,58 | -0,960 | -0,016 | -0,976 | 0,94 | -0,489 | -0,001 | -0,490 |
| 0,60 | -1,132 | -0,014 | -1,146 | 0,96 | -0,278 | -0,001 | -0,279 |
| 0,62 | -1,285 | -0,012 | -1,297 | 0,98 | -0,063 | -0,001 | -0,064 |
| 0,64 | -1,419 | -0,010 | -1,429 | 1,00 | +0,153 | -0,000 | +0,153 |

In der folgenden Tab. III sind nun die aus der Formel (124) sich ergebenden Werthe von α angeführt, und zwar für jede 0,02 Sec., von $t = 0$ bis $t = 1,00$ Sec.

Tabelle III.

| t | α | t | α | t | α |
|----------------------|----------|----------------------|----------|----------------------|----------|
| 0,00 ^{sec.} | 0,000 | 0,34 ^{sec.} | 0,157 | 0,68 ^{sec.} | 0,011 |
| 0,02 | 0,222 | 0,36 | 0,136 | 0,70 | 0,0094 |
| 0,04 | 0,364 | 0,38 | 0,118 | 0,72 | 0,0079 |
| 0,06 | 0,447 | 0,40 | 0,102 | 0,74 | 0,0067 |
| 0,08 | 0,488 | 0,42 | 0,088 | 0,76 | 0,0057 |
| 0,10 | 0,500 | 0,44 | 0,076 | 0,78 | 0,0048 |
| 0,12 | 0,492 | 0,46 | 0,065 | 0,80 | 0,0041 |
| 0,14 | 0,470 | 0,48 | 0,056 | 0,82 | 0,0034 |
| 0,16 | 0,440 | 0,50 | 0,048 | 0,84 | 0,0028 |
| 0,18 | 0,406 | 0,52 | 0,041 | 0,86 | 0,0025 |
| 0,20 | 0,370 | 0,54 | 0,035 | 0,88 | 0,0021 |
| 0,22 | 0,333 | 0,56 | 0,030 | 0,90 | 0,0018 |
| 0,24 | 0,298 | 0,58 | 0,025 | 0,92 | 0,0014 |
| 0,26 | 0,265 | 0,60 | 0,021 | 0,94 | 0,0012 |
| 0,28 | 0,234 | 0,62 | 0,018 | 0,96 | 0,0010 |
| 0,30 | 0,206 | 0,64 | 0,016 | 0,98 | 0,0009 |
| 0,32 | 0,180 | 0,66 | 0,013 | 1,00 | 0,0007 |

Betrachten wir nun die Zahlen der Tabellen I und II, so sehen wir, dass P sich nach dem Sinus-Gesetz mit der Zeit ändert; θ dagegen wird am Anfang positiv, nimmt sofort ab, geht durch Null hindurch, nimmt weiter ab bis zu einem bestimmten Minimum, um dann wieder zu wachsen, wobei es immer negativ bleibt und asymptotisch der Nulllinie sich nähert.

Wenn eine ganze Secunde verlaufen ist, ist Q verschwindend klein geworden, folglich kann dieses Glied in der Bewegungsformel des Seismographen (Formel (127)) einfach vernachlässigt werden.

Nach einer Secunde macht der Seismograph wiederum reine periodische Sinusschwingungen durch, und zwar mit grösserer Maximalamplitude (1,721 statt 1) und bei veränderter anfänglicher Phase. Beide sind eine unmittelbare Folge der Erderschütterung. Die Periode der Schwingungen bleibt jedoch unverändert.

Auf der Fig. XVIII zeigt die Curve $ABCDEFGH$ die Bewegung des Seismographen nach der Erderschütterung. Als Abscissen sind die Werthe von t und als Ordinaten die entsprechenden Werthe von θ angenommen. Der Punkt (A), respective O , entspricht dem Anfange der Erschütterung. Von A bis F macht sich das Glied Q noch bemerkbar, aber schon bei E ist der Einfluss von Q sehr gering. Von A bis F ist die Curve roth gezeichnet; weiter ist sie blau gezogen. Von F ab ist der directe Einfluss der Erderschütterung nicht mehr vorhanden (Q verschwindend klein).

Die untere kleine Curve abc ist auf Grund der Zahlen der Tabelle III gezeichnet. Sie stellt den Gang der Erderschütterung dar, also α als Function von t . Am Anfang ist α Null, dann wächst es bis zum Maximum 0,500, für t gleich ungefähr 0,10 Sec., um dann stetig und zwar asymptotisch gegen Null abzunehmen. Für $t = 1$ Sec. ist α schon verschwindend klein.

Wir sehen also, dass, obgleich die maximale Geschwindigkeit $\alpha' = 13,568$ beträgt, α nur bis 0,500 wächst, während für *den freien Seismographen* $\theta'_{\max.} = n = 2\pi$ nur gleich 6,28 wird, aber θ schon die Einheit erreichen kann.

Wollen wir nun die Bewegung des Seismographen unter dem Einfluss der Erderschütterung etwas näher verfolgen.

Der Anfang der Erschütterung entspricht dem Punkte A . Blicke die Erde in Ruhe, so würde der Seismograph nach der blauen punktirten Curve $AC'D'E'$ sich weiter bewegen. Infolge der Erschütterung tritt nur eine Störung in der Bewegung des Seismographen ein.

Am Anfang der Bewegung, ungefähr bis $t = 0,2$ Sec. (siehe weiter unten), bleibt α'' negativ, was vermehrend auf die Ablenkung θ wirkt (siehe Formel (112)), doch nimmt sofort nach dem Anfang der Erschütterung θ weiter ab, etwa bis zum Punkte B ; erst von dort fängt θ an zu wachsen

und erreicht ein Maximum 1,561 etwa bei $t = 0,25$ Sec. (Punkt C). Weiter nimmt es wieder ab, geht durch Null (Punkt D) bei

$$t_1 = 0,4827 \text{ Sec.}$$

und erreicht ein Minimum $-1,725$, etwa bei $t = 0,74$ Sec. (Punkt E), um von dort aus wieder zuzunehmen. Bei

$$t_2 = 0,9858 \text{ Sec.}$$

geht θ abermals durch Null (Punkt F).

Von F an führt nun der Seismograph reine Sinusschwingungen aus, und zwar mit der Amplitude 1,721, der anfänglichen Phase $\varphi = 5^\circ 6' 9''$ und der Periode 1 Secunde.

In der Nähe von B und C weist die Curve, infolge des Einflusses des Gliedes Q , zwei Knicke auf.

Vergleicht man nun die Curve $ABCDEFGH$ mit der Curve abc , so sieht man, dass die Zunahme der Amplitude der reinen Sinusschwingungen des Seismographen in Folge der Störung

$$1,721 - 1,000 = 0,721,$$

während der Maximalwerth von α nur gleich 0,500 wird.

Dies zeigt also ganz deutlich, dass die Veränderung der maximalen Ablenkung eines Seismographen viel grösser werden kann, als die maximale Ablenkung der Erdoberfläche von der Gleichgewichtslage.

Weiter ersieht man aus der Vergleichung beider Curven, dass das erste Maximum von θ etwa bei $t = 0,25$ Sec. eintritt, dasjenige von α jedoch bei $t = 0,10$ Sec. Also: das Maximum von θ fällt *nicht* mit dem Maximum von α zusammen.

Auf diesen Umstand möchte ich besonderes Gewicht legen, da man bei Vergleichung der Aufzeichnungen verschiedener Seismographen an verschiedenen Orten zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Erdbebenwelle oft geneigt ist, implicite anzunehmen, dass die maximale Phase der Erderschütterung mit der maximalen Ablenkung des Seismographen zusammenfällt, was, wie wir eben gesehen haben, gar nicht der Fall zu sein braucht.

Auf Eines möchte ich noch aufmerksam machen.

Die Bewegung der Erdoberfläche wird in unserem Falle durch die Gleichung (116) gegeben:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2c} \{e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t}\}. \dots \dots \dots (116)$$

Daraus folgt

$$\alpha' = \frac{\omega_0}{2c} \{-\mu_2 e^{-\mu_2 t} + \mu_1 e^{-\mu_1 t}\}$$

$$\alpha'' = \frac{\omega_0}{2c} \{\mu_2^2 e^{-\mu_2 t} - \mu_1^2 e^{-\mu_1 t}\}$$

$$\alpha''' = \frac{\omega_0}{2c} \{-\mu_2^3 e^{-\mu_2 t} + \mu_1^3 e^{-\mu_1 t}\}.$$

Hieraus ergibt sich, dass für

$$t = t_m = \frac{1}{2c} \lg \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \alpha' = 0 \quad \alpha = \max.$$

$$t = 2t_m \quad \alpha'' = 0 \quad \text{Wendepunkt der Curve.}$$

$$t = 3t_m \quad \alpha''' = 0 \quad \alpha'' = \max., \text{ da in diesem Falle } \alpha'''' < 0 \text{ wird.}$$

Dies ist eine eigenthümliche und interessante Eigenschaft einer aperioidischen Bewegung: tritt nämlich das Maximum der Ablenkung im Momente t_m ein, so hat zur Zeit $t = 2t_m$ die entsprechende Curve einen Wendepunkt und zur Zeit $t = 3t_m$ erreicht α'' seinen Maximalwerth.

In unserem Falle, bei Zugrundelegung der früher angeführten Constanten, ist

$$\alpha''_{\max.} = + 6,654,$$

also etwa 13-mal grösser, als die maximale Amplitude $\alpha_m = 0,500$.

Dieser Werth von α'' entspricht einem echten Maximum, d. h. in diesem Punkt (t etwa gleich 0,30 Sec.) ist α'' grösser, als in den benachbarten Punkten, jedoch ohne dass dies der grösste Werth wäre, welcher α'' überhaupt zukommt.

Für $t = 0$ ist nämlich $\alpha'' = - 271,4$, also etwa 543-mal grösser als $\alpha_{\max.}$; dieses ist aber kein echtes Maximum, da für $t < 0$ die Gleichung (116) ihre Bedeutung verliert.

Wir sehen also, dass Fälle vorkommen können, wo α relativ klein bleibt, aber α'' sehr gross wird. Diese Bemerkung ist insofern von Bedeutung, als sie zeigt, dass man mit gewisser Vorsicht vorgehen muss, wenn man aus dem Werthe der Funktion selbst Schlüsse über die Grösse der zweiten Derivirten nach der Zeit zieht (vergleiche die Abhandlung von Lippmann).

Zum Schluss wollen wir noch Folgendes bemerken. Wir sehen, dass nach Eintritt der Erderschütterung, θ bei $t_1 = 0,4827$ gleich Null wird, und nochmals bei $t_2 = 0,9858$. Die halbe Periode der Bewegung des Seis-

mographen ist also gleich 0,5031, während sie vor und später, nach Ablauf der Erderschütterung, gleich 0,5000 wird. Wir sehen also, dass sofort nach dem Anfange des Erdbebens, die halbe Periode der Bewegung des Seismographen etwas grösser ausfällt.

Hiermit haben wir die Bewegung des Seismographen unter dem Einflusse einer Erderschütterung, welche nach einem bestimmten, vorgeschriebenen Gesetze verläuft, analysirt.

Für die Seismometrie ist nicht diese, sondern gerade die umgekehrte Aufgabe von besonderer Wichtigkeit.

Die Bewegung des Seismographen unter dem Einflusse einer Erderschütterung, also die Curve $ABCDEF GH$, sei gegeben. Man soll aus derselben die wahre Bewegung der Erdoberfläche, also α als Function von t , ableiten.

Wir gehen nun zur Behandlung dieser Aufgabe über.

Sei also die Curve $O' B' ABCDEF GH$ aus den Beobachtungen gegeben; sind dabei noch die Constanten des freien Seismographen bekannt, so sieht man sofort ein, dass bei A eine Störung in der Bewegung eingetreten ist, weil sonst der Seismograph die Curve $AC'D'E'$ aufgeschrieben hätte. Den diesem Punkte A entsprechenden Punkt O auf der t -Axe wollen wir für den Anfang der Zeit nehmen ($t = 0$). Für $t = 0$ kann man aus der Form der Curve und aus den bekannten Werthen der Constanten des Apparates θ_0 und $(\theta')_0$ bestimmen. Es ergibt sich

$$\theta_0 = 0,707$$

$$(\theta')_0 = - 4,443.$$

Ein näheres Studium der Curve lehrt uns weiter, dass vom Punkte F aus die Curve ganz regelmässig verläuft. Infolgedessen darf man annehmen, dass schon in F die Erdbewegung fast ganz verschwunden ist. Folglich ist die Erdbewegung nur zwischen den Punkten A und F zu verfolgen.

Zu diesem Zweck kehren wir zu der Gleichung (112) zurück.

Man findet aus derselben durch einmalige Integration nach der Zeit zwischen den Grenzen 0 und t

$$\alpha' = (\alpha')_0 + (\theta')_0 - \theta' - n^2 \int_0^t \theta dt. \dots \dots (128)$$

Eine weitere Integration zwischen denselben Grenzen ergibt

$$\alpha = \alpha_0 + \{(\alpha')_0 + (\theta')_0\} t - \theta + \theta_0 - n^2 \int_0^t dt \int_0^t \theta dt. \dots (129)$$

Wenn die Erdoberfläche vorher in Ruhe war, so darf man annehmen, dass

$$\alpha_0 = 0$$

ist.

$\theta_0, (\theta')_0$ und $n = 2\pi$ sind bekannt; das zweifache Integral lässt sich leicht auf Quadraturen zurückführen. Als reine Unbekannte tritt $(\alpha')_0$ auf. Ohne seinen Werth zu kennen, ist es ganz und gar unmöglich α als Function von t zu ermitteln, wobei $(\alpha')_0$ im Allgemeinen ziemlich genau bestimmt werden muss, da es mit der Zeit t multiplicirt wird.

Die Bestimmung der anfänglichen Geschwindigkeit $(\alpha')_0$ der Erdbewegung ist eines der schwersten Probleme der Seismometrie. Nur in ganz speciellen Fällen kann $(\alpha')_0$ ebenfalls gleich Null gesetzt werden, aber im Allgemeinen wird $(\alpha')_0$ von Null verschieden sein. In unserem Fall hat $(\alpha')_0$ bekanntlich einen sehr beträchtlichen Werth.

Im nächsten Paragraphen werden wir sehen, wie Herr General Pomerantzeff bei Bearbeitung eines Seismogramms aus Strassburg diese Frage behandelt hat, in unserem Fall aber kann ich zur Bestimmung von $(\alpha')_0$ folgende Methode vorschlagen.

Man nehme in der Formel (128) t so gross an, dass α' als verschwindend klein angesehen werden darf. Dann ergibt sich

$$(\alpha')_0 = \theta' - (\theta')_0 + n^2 \int_0^t \theta dt. \dots \dots \dots (130)$$

Nehmen wir für t den Werth $t_2 = 0,9858$ an, was dem Punkte F entspricht, in welchem die Curve die t -Axe zum zweiten Mal schneidet. Man darf wohl annehmen, dass α' hier verschwindend klein ist, da die Curve weiter ganz regelmässig verläuft¹⁾

Für den Punkt F lässt sich folgender Werth von θ' finden:

$$\theta' = 10,811.$$

Da nun $(\theta')_0 = -4,443$ ist, so erhalten wir

$$(\alpha')_0 = 15,254 + (2\pi)^2 \int_0^{0,9858} \theta dt. \dots \dots \dots (131)$$

$(\alpha')_0$ würde sich leichter aus der Formel (130) berechnen lassen, wenn wir die Integration bis zu einem Punkte ausgedehnt hätten, in welchem θ ein Maximum oder Minimum aufweist. Dann wäre θ' in der Formel (130) einfach gleich Null zu setzen.

1) Eine genauere Berechnung für diesen Punkt ergibt $\alpha' = -0,00685$.

Zur Berechnung des Integrals

$$\int_0^{0,9858} \theta dt$$

habe ich von der einfachen Simpson'schen Formel Gebrauch gemacht: von $t = 0$ bis $t = 0,30$ Sec. die Abscissen in Intervallen von 0,01 Sec., weiter aber zu je 0,02 Sec. genommen. Bei Berechnung des Integrals habe ich die vierte Decimale in den Werthen von θ mitberücksichtigt.

Es ergibt sich

$$\int_0^{0,9858} \theta dt = -0,042325.$$

Setzt man nun diesen Werth in der Formel (131) ein, so erhält man

$$(\alpha')_0 = 13,583.$$

Der direct gegebene Werth war 13,568.

Der Unterschied beträgt also nur 0,11% vom Werthe für $(\alpha')_0$; die Uebereinstimmung kann also als eine sehr befriedigende bezeichnet werden.

Ist nun $(\alpha')_0$ einmal bekannt, so kann man schon die Formel (129) zur Berechnung von α benutzen.¹⁾

Das doppelte Integral habe ich ebenfalls nach der Simpson'schen Formel berechnet.

In der folgenden Tabelle IV enthält die erste, respective fünfte und neunte Colonne die verschiedenen Zeitmomente; in den nächsten Columnen sind die verschiedenen nach der Formel (129) berechneten Werthe (α_y) für jede 0,02 Sec. angeführt; daneben befinden sich die direct gegebenen Werthe α_y (aus der Tabelle III); weiter sind die Unterschiede $\Delta = \alpha_y - \alpha_y$ angegeben.

Die verschiedenen Werthe von α sind auf 0,01 abgerundet worden.

Die Uebereinstimmung zwischen den nach der Formel (129) berechneten und den direct gegebenen Werthen von α kann als eine äusserst befriedigende bezeichnet werden. Etwas grössere Unterschiede, aber höchstens bis $\pm 0,02$, kommen nur für grössere Werthe von t vor. Der Grund dafür ist hauptsächlich darin zu suchen, dass die berechnete Anfangsgeschwindigkeit α_0 etwas grösser ausgefallen ist, als die direct gegebene.

Man sieht also ganz deutlich, dass es unbedingt nothwendig ist, die Anfangsgeschwindigkeit $(\alpha')_0$ so genau wie möglich zu ermitteln.

1) $\alpha_0 = 0$.

Tabelle IV.

| t | α_b | α_g | Δ | t | α_b | α_g | Δ | t | α_b | α_g | Δ |
|-------------------|------------|------------|----------|----------------------|------------|------------|----------|----------------------|------------|------------|----------|
| 0 ^{sec.} | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,34 ^{sec.} | 0,16 | 0,16 | 0,00 | 0,68 ^{sec.} | 0,03 | 0,01 | +0,02 |
| 0,02 | 0,22 | 0,22 | 0 | 0,36 | 0,14 | 0,14 | 0 | 0,70 | 0,03 | 0,01 | +0,02 |
| 0,04 | 0,36 | 0,36 | 0 | 0,38 | 0,12 | 0,12 | 0 | 0,72 | 0,03 | 0,01 | +0,02 |
| 0,06 | 0,45 | 0,45 | 0 | 0,40 | 0,11 | 0,10 | +0,01 | 0,74 | 0,02 | 0,01 | +0,01 |
| 0,08 | 0,49 | 0,49 | 0 | 0,42 | 0,10 | 0,09 | +0,01 | 0,76 | 0,02 | 0,01 | +0,01 |
| 0,10 | 0,50 | 0,50 | 0 | 0,44 | 0,08 | 0,08 | 0 | 0,78 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,12 | 0,49 | 0,49 | 0 | 0,46 | 0,07 | 0,07 | 0 | 0,80 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,14 | 0,47 | 0,47 | 0 | 0,48 | 0,07 | 0,06 | +0,01 | 0,82 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,16 | 0,44 | 0,44 | 0 | 0,50 | 0,06 | 0,05 | +0,01 | 0,84 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,18 | 0,41 | 0,41 | 0 | 0,52 | 0,05 | 0,04 | +0,01 | 0,86 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,20 | 0,37 | 0,37 | 0 | 0,54 | 0,05 | 0,04 | +0,01 | 0,88 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,22 | 0,34 | 0,33 | +0,01 | 0,56 | 0,04 | 0,03 | +0,01 | 0,90 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,24 | 0,30 | 0,30 | 0 | 0,58 | 0,04 | 0,03 | +0,01 | 0,92 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,26 | 0,27 | 0,27 | 0 | 0,60 | 0,04 | 0,02 | +0,02 | 0,94 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,28 | 0,24 | 0,23 | +0,01 | 0,62 | 0,03 | 0,02 | +0,01 | 0,96 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,30 | 0,21 | 0,21 | 0 | 0,64 | 0,03 | 0,02 | +0,01 | 0,98 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |
| 0,32 | 0,18 | 0,18 | 0 | 0,66 | 0,03 | 0,01 | +0,02 | 1,00 | 0,02 | 0,00 | +0,02 |

Würde sich bei einem Erdbeben, wo wir nahezu Nichts über den wahren Character der Bewegung der Erdoberfläche wissen, bei der Bearbeitung eines Seismogrammes, das zu untersuchende Element der Bewegung α mit einer ähnlichen Genauigkeit berechnen lassen, so wäre damit auf jeden Fall schon sehr viel in dieser Richtung geleistet.

Die Bearbeitung von Seismogrammen ist ohne Zweifel eine sehr schwere und umständliche Aufgabe, und es ist nicht mein Zweck, diese Frage eingehend zu behandeln. Es werden sich gewiss mit der Zeit praktische und rasch zum Ziel führende Methoden dafür ausbilden; meine Absicht bei der Behandlung dieses Beispiels war nur die, eine gewisse Andeutung in dieser Richtung zu geben.

Zum Schluss möchte ich folgende Bemerkung anknüpfen.

Für die Berechnung von α nach der hier angedeuteten Methode ist es eigentlich gar nicht nöthig, $(\theta')_0$ zu bestimmen.

In der That erhält man aus der Formel (130) unmittelbar

$$(\alpha')_0 + (\theta')_0 = \theta' + n^2 \int_0^t \theta dt,$$

und dieser Werth wäre also direct in die Formel (129) zu setzen.

§ 12.

Bearbeitung eines Seismogrammes aus Strassburg.

Herr General Pomerantzeff hat den Versuch gemacht, ein von einem Horizontalpendel in Strassburg während eines Erdbebens am 24 Juni 1901 aufgezeichnetes Seismogramm unter Anwendung der Lippmann'schen Formel zu bearbeiten, um die parallelen Verschiebungen der Erdoberfläche während des Erdbebens abzuleiten. Die totale Eigenperiode der Schwingung des Pendels war 24 Sec., die Neigung der Drehungsaxe desselben $17\frac{1}{8}$. Die Ordinaten der erhaltenen Curve wurden dort, wo sie sich rasch änderten, zu je $0,1 \frac{m}{m}$ (was 1,8 Sec. entsprach), an anderen Stellen jedoch zu je $0,2 \frac{m}{m}$ gemessen. Die Genauigkeit der Ablesung mit einem Mikroskop betrug $0,001 \frac{m}{m}$.

Unter Anwendung der Lippmann'schen Formel, wie sie von dem Verfasser gegeben wurde, hat Herr Pomerantzeff gefunden, dass während der ganzen Zeit des Hauptbebens, welches etwa 38 Minuten dauerte, die Erdoberfläche, oder, besser gesagt, ein beliebiger Punkt derselben, sich fortwährend in derselben Richtung bewegte — am Anfang rascher und dann langsamer, wobei die ganze während dieser Zeit zurückgelegte Strecke $790 \frac{m}{m}$ betrug!

Dieses höchst unwahrscheinliche Resultat könnte theilweise dadurch erklärt werden, dass die Anfangsgeschwindigkeit nicht richtig bestimmt wurde, da diese Bestimmung, wie wir eben gesehen haben, äusserst schwierig ist, oder weil sogar, wenn das Horizontalpendel mehreren nach einander folgenden Erschütterungen ausgesetzt war, verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten in Betracht gezogen werden müssen. Das ganze Seismogramm wäre dann in bestimmte Theile zu zerlegen, von denen für jeden einzeln die anfängliche Geschwindigkeit als unverändert angenommen werden müsste.

So hat auch Herr Pomerantzeff vorzugehen versucht, freilich unter gewissen hypothetischen Voraussetzungen über die Zeitmomente, wo die verschiedenen Erdbebenstösse stattgefunden haben. Die Grösse der anfänglichen Geschwindigkeiten hat Herr Pomerantzeff in der Weise bestimmt, dass die berechneten Abweichungen des Erdpunktes möglichst symmetrisch in Bezug auf den Ort der Ruhelage desselben zu liegen kämen.

Gegen eine solche Behandlung der Aufgabe kann man gewisse Einwände machen, wenn man auch noch in's Auge fasst, dass Herr Pomerantzeff dabei zum Schlusse gelangt ist, dass die Phasen der Bewegung eines Punktes der Erdoberfläche mit den Phasen der Pendelbewegung zusammen-

fallen, und zwar ein Maximum der ersten Bewegung einem Minimum der zweiten entspricht und umgekehrt.

Die Schwierigkeiten, welchen Herr Pomerantzeff bei seiner Bearbeitung begegnet hat, würden vielleicht theilweise vermieden worden sein, wenn er zu gleicher Zeit mit den Verschiebungen der Erdoberfläche noch die Neigungen hätte mitberücksichtigen können, was ihm aus dem Grunde ganz unmöglich war, da diese Neigungen von keinem speciellen Apparat direct gemessen waren. Hätte er es aber thun können, so würde er wahrscheinlich zu anderen Schlüssen gelangt sein.

Dass die Neigungen, wenn sie auch sehr klein sein sollten, nicht ausser Acht gelassen werden dürfen und einen erheblichen Einfluss auf das Endresultat der Rechnungen haben können, leuchtet ganz deutlich ein, wenn man die allgemeine Differentialgleichung für das Horizontalpendel näher untersucht.

Wir haben früher folgende Gleichung für das Horizontalpendel aufgestellt (siehe Gleichung (87)):

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + \frac{1}{l}\{gi_0 - (y'' + g\varphi)\}\theta + \frac{1}{l}\{x'' - g\psi\} - \chi'' = 0.$$

In diesem Fall war $i_0 = 17,8$; folglich ist $gi_0 = 5,08$ cm.

Im Vergleich zu diesem Werth kann man in der That, wie Herr Pomerantzeff es thut, $y'' + g\varphi$ vernachlässigen; χ'' kann man ebenfalls gleich Null setzen, weil Strassburg weit vom Epicentrum dieses Erdbebens sich befindet.

Dann ergibt sich aus der obigen Gleichung für die Verschiebung x , welche eben als Function der Zeit zu bestimmen ist, folgender Ausdruck:

$$x'' = -l\theta'' - 2\varepsilon l\theta' - g(i_0\theta - \psi).$$

Hierin sah sich Herr Pomerantzeff genöthigt, ψ ganz wegzulassen, da die Neigungen der Erdoberfläche ihm völlig unbekannt waren; dabei war er auch von dem Gedanken geleitet, dass die Neigungen, nach Schlüter, wenn sie überhaupt existiren würden, äusserst klein sein müssten.

Es ergab sich alsdann, nach der Berechnung des doppelten Integrals $\int_0^t dt \int_0^t \theta dt$, dass x fortwährend mit der Zeit wächst.

Wollen wir aber sehen, ob man wirklich berechtigt ist, ψ im Vergleich zu $i_0\theta$ zu vernachlässigen.

Der maximale Ausschlag θ_m des Horizontalpendels betrug 2,47.

Folglich ist

$$i_0\theta_m = 0,77.$$

Es ist sehr zweifelhaft, ob man ψ im Vergleich zu diesem äusserst kleinen Werth vernachlässigen darf, insbesondere, wenn man dabei noch bedenkt, dass ich für θ den maximalen, sich ergebenden Werth angenommen habe. Es kann sogar für andere Werthe von θ vorkommen, dass ψ grösser als $i_0\theta$ ausfallen wird.

Diese Betrachtung zeigt ganz deutlich, dass man wahrscheinlich ganz andere Werthe für das doppelte Integral

$$\int_0^t dt \int_0^t \{i_0\theta - \psi\} dt$$

bekommen haben würde, wenn man auch die Neigungen hätte berücksichtigen können.

Wir sehen also, dass die Neigungen der Erdoberfläche bei Beobachtungen mit Horizontalpendeln eine ganz erhebliche Rolle spielen können, und folglich dürfen dieselben keineswegs ausser Acht gelassen werden.

Ich sehe keinen Grund dafür, die Neigungen, wie Schlüter es thut, als verschwindend klein anzunehmen, da die Beobachtungen am Klinographen in keiner Weise maassgebend sind, wie ich es schon früher betont habe.

Vielleicht sind auch die auf den Sternwarten von Pulkowo und Odessa beobachteten plötzlichen Verschiebungen der Libellen an den astronomischen Instrumenten bei entfernten Erdbeben wirklich Neigungswellen zuzuschreiben.

Die Frage nach dem Vorhandensein von Neigungswellen bleibt also, meiner Ansicht nach, immer noch offen.

Ogleich die Berechnungen des Herrn Generals Pomerantzeff, wie wir eben gesehen haben, nicht vollkommen einwandfrei sind, so kommt ihm doch das grosse Verdienst zu, meines Wissens der Erste zu sein, welcher solche, für die Seismometrie äusserst wichtige, Berechnungen angestellt hat. Er hat diese Aufgabe der Seismometrie näher präcisirt und einen lehrreichen Schritt zu ihrer Lösung gethan.

Nur auf diesem Wege, durch sorgfältige Bearbeitung von Seismogrammen, welche von zweckmässig aufgestellten Instrumenten geliefert sind, wird mit der Zeit die Möglichkeit geboten werden, einen Aufschluss über den wahren Charakter der Bewegung der Erdoberfläche bei einem Erdbeben zu gewinnen.

