347 A-6018

Stereomeetriliste ülesannete kogu

Kogunud

K. R. Veski ja J. Verendel

Keskkooli kursus

Hind 100 marka

K/Ü „Loodus", Tartus
1923

Märgatud trükivead:

Ülesande 338 lahenduses lhk. 41

12 rida ülalt trükitud: $V_2 = m^3 - \frac{(m^3 - n^3)a}{2}$

peab olema: $m^3 a - \frac{(m^3 - n^3)a}{2}$

13 ja 14 rida ülalt trükitud: $\frac{h}{m-n}\left[m^3 - \sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}\right]$

peab olema: $\frac{h}{m-n}\left[m - \sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}\right]$

K/Ü „Looduse" lastekirjandus.

K. Ewald „Loodus jutustab" (lasteraamat), I 60 m., II 95 m.
Wagner „Lood loomadest" 40 m.
Ernest Seton Thompson „Tito" (lasteraamat) 60 m.
Ernest Seton-Thompson „Kolm kangelast," tõlkinud Ella Treffner 65 m.
Sillaots-Riikoja „Kodu" I 150 m.
Ernest Seton-Thompson „Loomkangelased" I, tõlkinud H. Rumma 100 m.
Ernest Seton-Thompson „Loomkangelased" II, tõlkinud H. Rumma 75 m.
Ernest Seton-Thompson „Loomkangelased" III, tõlkinud H. Rumma 75 m.

A. Tammekann:

Lühike kaardiprojektsiooni-õpetus.

Seletused — näited — ülesanded.

60 lk., **hind 130 marka.**

Sisu: Tähtsam kirjandus kaardiprojektsioonide kohta. — Märgid ja oskussõnad. — Matemaatilised eelmõisted. — I. Kaardist ja projektsioonidest üldse. — II. Silindrilised projektsioonid. — III. Koonuselised projektsioonid. — IV. Tasapinnalised projektsioonid. — V. Sobedad (konventsionaalsed) projektsioonid. — Tabelid.

Prof. J. Sarv:

Neljakohaga

LOGARITMIDE TABELID

ühes tarvitamise juhatusega.

Stereomeetriliste ülesannete kogu

Kogunud

K. R. Veski ja **J. Verendel**

Keskkooli kursus

44344

K/Ü **„Loodus“**, Tartus
1923

K/Ü „Looduse“ keeleline korrektor M. Bekker.

2
Bibliotheca
Universitatis
Tartuensis
(Dorpatensis)
56132
A-6018

K. Mattiesen'i trükk, Tartus.

§ 1. Tasapind ja tema rist- ja kaldjooned.

1. Punkti kaugus tasapinnast on 12 sm. Kaldjoon aga, mis sellest punktist tasapinnale tõmmatud, on 20 sm. Leida kaldjoone projektsiooni pikkus tasapinnal. V.: 16 sm.

2. Ruumis asuvast punktist tasapinnale tõmmatud ristjoon a ja kaldjoon moodustavad nurga $\alpha = 45^0$. Leida kaldjoone pikkus. V.: $a\sqrt{2}$.

3. Ruumis asuvast punktist on tasapinnale tõmmatud kaks kaldjoont: $m = 40$ sm ja $n = 30$ sm. Leida n projektsiooni pikkus, kui m projektsioon on 32 sm. V.: 18 sm.

4. Punkt A-st, mille kaugus tasapinnast on 10 m, on tõmmatud kaldjooned AB ja AC, kumbki 20 m; nende projektsioonid tasapinnal moodustavad omavahel nurga $\alpha = 120^0$. Kui pikk on BC? V.: 30 m.

5. Ruudu külg on 8. Kui kaugel ruudu tippudest on punkt, mille kaugus ruudu keskpunktist on 7? V.: 9.

6. Täisnurkse kolmnurga ABC tasapinnale on sama kolmnurga täisnurga tipust A tõmmatud ristjoon $AD = 1$; ristjoone otsapunkti D kaugus hüpotenuusi otsapunktidest on 3 ja 3. Kui pikk on hüpotenuus? V.: 4.

7. Täisnurkse kolmnurga ABC kaatetid on 15 m ja 20 m. Täisnurga C tipust on kolmnurga tasapinnale tõmmatud ristjoon $CD = 35$ m. Leida punkti D kaugus hüpotenuusist AB. V.: 37 m.

8. Antud on täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus = 12 m. Ruumis on punkt, mis kolmnurga igast tipust on 10 m. kaugel. Kui kaugel on see punkt tasapinnast? V.: 8 m.

9. Võrdkülgse kolmnurga külg on 3 m. Kui kaugel kolmnurga tasapinnast asub punkt, mille kaugus kolmnurga igast tipust on 2 m? V.: 1 m.

10. Antud on võrdkülgne kolmnurk. Ruumis on punkt, mis on kolmnurga igast tipust 14 m kaugel ja tasapinnast 13 m. Leida kolmnurga külg. V.: 9 m.

11. Võrdhaarse kolmnurga alus ja kõrgus on kumbki 4 m. Ruumis on punkt, mis asub kolmnurga igast tipust ühekaugusel, aga tema tasapinnast 6 m kaugusel. Kui kaugel on see punkt kolmnurga tippudest? V.: $6^1/_2$ m.

12. Kolmnurga küljed on 10, 17 ja 21 m. Kõige suurema nurga tipust on kolmnurga tasapinnale tõmmatud ristjoon = 15 m. Leida ristjoone tipu kaugus kolmnurga kõige suuremast küljest. V.: 17 m.

13. Kolmnurgas ABC on nurk B täisnurk. BD on ristjoon kolmnurga tasapinnale. Punkt D on ühendatud A ja C-ga. Leida kolmnurga ADC pindala, kui BA on 3 m, BC 2 m ja BD 1 m. V.: $3^1/_2$ m^2.

14. Kolmnurga ABC küljed on: $AB = 7$ m, $AC = 8$ m ja $BC = 9$ m. Külg AC asub tasapinnal M, kuna tipp B tasapinnast 3 m kaugusel on. Leida ABC projektsiooni pindala tasapinnal M. V.: 24 m^2.

15. Ruumis asuvast punktist on tasapinnale tõmmatud kaks võrdset kaldjoont; nende vahel olev nurk on 60°. Kaldjoonte projektsioonide vaheline nurk aga = 90°. Missuguse nurga moodustab iga kaldjoon oma projektsiooniga? V.: 45°.

§ 2. Rööbikud sirgjooned ja tasapinnad.

16. Joonlõigu otsapunktid A ja B asuvad ühel pool tasapinda; punkt A kaugus tasapinnast on 6 m ja B kaugus — 10 m. Kui kaugel asub joonlõigu AB keskkoht tasapinnast? V.: 8 m.

17. Antud joonlõik asub ühel pool tasapinda, kusjuures tema otsapunktid on tasapinnast 10 m ja 16 m kaugel. Joon-

lõik on jaotatud kolmeks võrdseks osaks. Leida jaotuspunktide kaugus tasapinnast. V.: 12 m ja 14 m.

18. AB ja CD on kaks rööbikut sirget, mis asuvad ühel ja samal tasapinnal M, 28 m üksteisest kaugel. EF on sirge, mis väljaspool tasapinda M 15 m kaugusel asub; ühtlasi on EF rööbiti AB-ga ja viimasest 17 m kaugusel. Leida EF ja CD kaugus teineteisest. V.: 25 m või 39 m.

19. Tasapinnal M asuvast punktist A on tõmmatud kaldjoon, mille peal on võetud kaks punkti B ja C nii, et AB=8 m ja AC=14 m. Punkt B kaugus tasapinnast M on 6 m. Leida punkti C kaugus tasapinnast M. V.: 10,5 m.

20. Joonlõigu otsapunktide kaugus tasapinnast on 8 ja 2, kusjuures joonlõik lõikab tasapinda. Leida joonlõigu keskkoha kaugus tasapinnast. V.: 3.

21. Joonlõik, mille pikkus on 10, lõikab tasapinda; tema otsapunktide kaugus tasapinnast on 5 ja 3. Kui pikk on selle joonlõigu projektsioon tasapinnal? V.: 6.

22. Kahe rööbiku tasapinna kaugus teineteisest on 8. Joonlõik, mille pikkus on 10, toetub otsapunktidega tasapindadele. Leida selle joonlõigu projektsioonid tasapindadel. V.: 6.

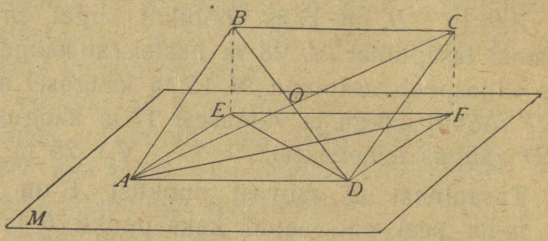
23. Rööpküliku 3 tipu kaugus tasapinnast on 3; 4; 6. Leida neljanda tipu kaugus tasapinnast. V.: 5.

24. Trapetsi $ABCD$ alus AD asub tasapinnal M, kuna alus BC samast tasapinnast 5 m kaugel on. Kui kaugel tasapinnast M on trapetsi nurkjoonte lõikepunkt, kui $AD:BC = 7:3$? V.: $3\frac{1}{2}$ m.

25. Rööpküliku $ABCD$ tipud A ja D asuvad tasapinnal M, kuna B ja C tasapinnast eemal on. Külg AD on 10 m, külg AB — 15 m, nurkjoonte AC ja BD projektsioonid tasapinnal M on vastavalt $13\frac{1}{2}$ m ja $10\frac{1}{2}$ m. Kui pikad on diagonaalid? V.: 19 m ja 17 m.

26. Läbi kaldruudu (rombi) ühe külje on tõmmatud tasapind, mis kaldruudu vastasküljest 4 m kaugel asub. Nurk-

joonte projektsioonid tasapinnale on 8 m ja 2 m. Leida külgede projektsioonid.



1. joonis.

Lahendus: Olgu $ABCD$ antud kaldruut (1. joon.); M on antud tasapind, millega BC on rööbiti; kaugus $CF = 4$ m, nurkjoonte projektsioonid: $AF = 8$ m ja $DE = 2$ m.

Järjelikult: $AC = \sqrt{80}$, $AO = \sqrt{20}$, $BD = \sqrt{20}$, $DO = \sqrt{5}$, $CD = 5$ m, $DF = 3$ m. V.: 5 m ja 3 m.

27. Läbi täisnurkse kolmnurga täisnurga tipu on tõmmatud tasapind, rööbiti hüpotenuusiga; tasapinna kaugus hüpotenuusist on 1, kaatetite projektsioonid sellele tasapinnale on 3 ja 5. Leida hüpotenuus. V.: 6.

28. Trapetsi alused on 5 m ja 10 m. Läbi ühe kõrvalkülje on tõmmatud tasapind, mis asub 6 m kaugusel vastaskülje keskkohast. Leida vastastippude kaugus tasapinnast. V.: 4 m ja 8 m.

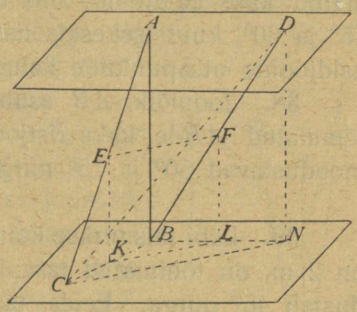
29. Tasapinnaga M rööbiti oleva joonlõigu AB otspunktidest on tasapinnale tõmmatud ristjoon AC ja kaldjoon BD, kusjuures viimane on risti AB-ga. Määrata kaugus CD, kui $AB = a$, $AC = b$ ja $BD = c$.

Juhatus: Tõmmata $BE \perp M$ ja E ühendada C ja D-ga. V.: $\sqrt{c^2 - b^2 + a^2}$.

30. Tasapinnad M ja P on rööbiti. Tasapinna M punktidest A ja B on tasapinnale P-le tõmmatud kaldjooned: $AC = 37$ m ja $BD = 125$ m, AC projektsioon ühele tasapinnale $= 12$ m. Leida BD projektsioon. V.: 120 m.

31. Kahe sirge lõigud, mis kahe rööbiku tasapinna vahel asuvad, on 51 m ja 53 m, kuna nende projektsioonid ühele neist tasapindadest suhtuvad nõnda kui 6 : 7. Leida nende tasapindade kaugus teineteisest. V.: 45 m.

32. Kahe rööbiku tasapinna vahel asub nendega risti joonlõik $AB = 8$, tema otsapunktidest on tasapindadele tõmmatud võrdsed kaldjooned AC ja BD. Kaugus kaldjoonte keskkohtade vahel $EF = 3$. Leida kaugus CD kaldjoonte otsapunktide vahel.



2. joonis.

Lahendus (2. joon.): Tõmbame ristjooned: $EK; FL; DN;$ siis $KL = EF = 3$. K ja L on BC ja BN keskkohad; järjelikult: $CN = 2\,KL = 6$; täisnurksest kolmnurgast CDN saame: $CD^2 = CN^2 + ND^2$, kust $CD = 10$. V.: 10.

§ 3. Tasapinna ja sirgjoone nurk, kahetahused nurgad, ruumisnurgad.

33. Kaldjoone pikkus on a. Leida kaldjoone projektsioon, kui ta moodustab tasapinnaga nurga: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°.

V.: 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

34. Punkti kaugus tasapinnast on h. Leida kaldjoonte pikkus, mis sellest punktist on tasapinnale tõmmatud järgmisi nurgi: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 18°.

V.: 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2h}{\sqrt{3}}$; 4) $h(\sqrt{5}+1)$.

35. Ruumis asuvast punktist on tasapinnale tõmmatud kaks kaldjoont; üks moodustab tasapinnaga nurga 30°, teine — 45°. Esimene = 2. Leida teine. V.: $\sqrt{2}$.

36. Joonlõik, mille pikkus on 10, lõikab tasapinda; tema otsapunktide kaugus tasapinnast on 3 ja 2. Leida selle tasapinna ja joonlõigu nurk. V.: 30^0.

37. Punktist, mille kaugus tasapinnast on h, on tõmmatud kaks kaldjoont, mis tasapinnaga moodustavad nurgad 45^0 ja 30^0, kuid isekeskis moodustavad nad täisnurga. Leida kaldjoonte otsapunktide kaugus teineteisest. V.: $h\sqrt{6}$.

38. Joonlõik AB asub tasapinnal M. Punkt B-st on tõmmatud AB-le kaks ristjoont BC ja BD, mis tasapinnaga moodustavad 50^0 ja 15^0 nurgad. Leida nurk CBD.
V.: 115^0 või 35^0.

39. Läbi täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi, mille pikkus on 2 m, on tõmmatud tasapind, mis kummagi kaatetiga moodustab 45^0 nurga. Leida tasapinna kaugus täisnurga tipust.
V.: 1 m.

40. Kui võrdhaarse täisnurkse kolmnurga üks kaatet asub tasapinnal M, teine aga moodustab temaga 45^0 nurga, siis moodustab hüpotenuus tasapinnaga 30^0 nurga. Tõestada.

41. Täisnurkses kahetahuses nurgas on punkt, mille kaugus tahkudest on 6 ja 8. Kui kaugel on see punkt kahetahuse nurga servast? V.: 10.

42. Kahetahuse nurga ühel tahul on võetud kaks punkti, mis kahetahuse nurga servast 51 sm ja 34 sm kaugel asuvad. Esimese punkti kaugus teisest tahust on 15 sm. Leida teise punkti kaugus samast tahust. V.: 10 sm.

43. Kahetahune nurk on 45^0. Ühel tahul on antud punkt, mis teisest tahust 1 m kaugel asub. Leida selle punkti kaugus kahetahuse nurga servast. V.: $\sqrt{2}$ m.

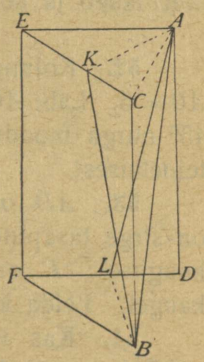
44. Täisnurkse kahetahuse nurga serval on võetud joonlõik $AB = 6$. Tema otsapunktidest on tõmmatud ristjooned, $AM = 3$ ja $BN = 2$, mis kumbki isetahul asuvad. Leida MN.
V : 7.

45. Määrata kahetahuse nurga suurus, kui punkt, mis ühel tahul asub, servast kaks kord kaugemal on kui teisest tahust. V.: 30^0.

46. Kahetahuses nurgas asuvast punktist on servale tõmmatud ristjoon, mis moodustab tahkudega nurgad $38^0\,24'$ ja $71^0\,36'$. Kui suur on kahetahune nurk? V.: 110^0.

47. Joonlõik toetub oma otsapunktidega kahetahuse nurga tahkudele. Joonlõigu projektsioonid tahkudele on 15 ja 16, aga servale 9. Leida joonlõigu pikkus. V.: 20.

48. Joonlõik toetub oma otsapunktidega 60^0 kahetahuse nurga tahkudele. Joonlõigu projektsioonid tahkudele $= 7$, aga servale — 3. Leida joonlõigu pikkus.

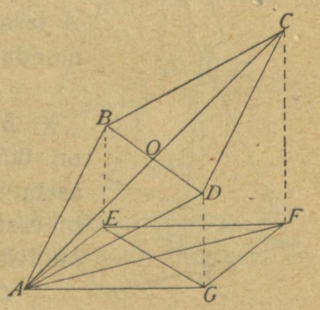


3. joonis.

Lahendus: Olgu AB otsitav joonlõik (3. joon.) Läbi A ja B tõmbame tasapinnad AEC ja BFD $\perp$-lt servaga EF; läbi A ja B aga lõigud AD ja BC $\parallel$-lt servaga EF. A-st ja B-st tõmbame tahkudele ristjooned AK ja BL ja lõigud BK ja AL. Tingimuse järele on $\angle AEC = \angle BFD = 60^0$, $EF = 3$, $BK = AL = 7$. Täisnurksed $\triangle$-ad ABK ja ABL on võrdsed, järjelikult $AE = BF = EC$; kuid $\angle E = 60^0$, järjelikult on $\triangle AEC$ võrdkülgne. $KC^2 = BK^2 - BC^2 = 40$; $KC = \sqrt{40}$; aga $AC = 2KC$; järjelikult: $AK = \sqrt{120}$; $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 169$, kust $AB = 13$.

49. Läbi kaldruudu tipu on tema tasapinnale 45^0-si nurgi tõmmatud tasapind, mis rööbiti on ühega nurkjoontest. Kaldruudu projektsioon sellele tasapinnale on ruut, mille külg on 2. Leida kaldruudu külg. V.: 13.

Juhatus: $ABCD$ on antud kaldruut (4. joon.); $AEFG$ — tema projektsioon tasapinnale (ruut); $\angle CAF = 45^0$; $AF = 2\sqrt{2}$; $CF = 2\sqrt{2}$; $AC = 4$; $AO = 2$; $OD = \frac{1}{2}EG = \sqrt{2}$; $CD = \sqrt{6}$. V.: $\sqrt{6}$.



4. joonis.

50. Kolmnurk ABC, milles on täisnurk C, toetub kaateti AC-ga tasapinnale M, moodustades temaga 45^0 kahetahuse nurga. Leida kaugus tipust B tasapinnani M, kui AC on 2 m ja $AB : BC = 3 : 1$. V.: 5 dsm.

51. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 7 ja 24. Leida täisnurga tipu ja selle tasapinna kaugus, mis hüpotenuusist läbi läheb ja kolmnurga tasapinnaga 30^0 nurga moodustab. V.: 3, 36.

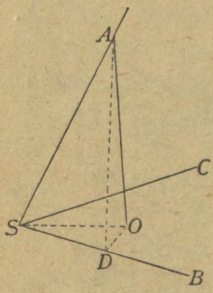
52. Kolmnurga ABC küljed on $AB = 9$, $BC = 6$ ja $AC = 5$. Läbi AC kulgeb tasapind, mis kolmnurga tasapinnaga 45^0 nurga moodustab. Leida tasapinna M ja tipu B kaugus teineteisest. V.: 4.

53. AB on kahe rist-tasapinna M ja P lõikjoon; CD on sirge tasapinnal M, mis rööbik AB-ga ja asub temast 60 m kaugusel; E on punkt tasapinnal P ja asub 91 m AB-st kaugel. Leida kaugus E-st CD-ni. V.: 109 m.

54. Kas võib olla kolmetahune nurk järgmiste tasanurkadega: 1) 130^0, 85^0 ja 36^0; 2) 100^0, 70^0 ja 40^0; 3) 160^0, 130^0 ja 80^0; 4) 82^0, 56^0 ja 26^0; 5) 150^0, 120^0 ja 90^0? V.: 1) ei; 2) ja; 3) ei; 4) ei; 5) ei.

55. Kas saab moodustada kumera neljatahuse nurga järgnevaist tasanurkadest: 1) 40^0, 70^0, 100^0 ja 150^0; 2) 150^0 30^0, 70^0 ja 40^0; 3) 130^0, 50^0, 30^0 ja 70^0? V.: 1) ei; 2) ei; 3) ja.

56. Kolmetahuses nurgas $SABC$ on antud: $\angle BSC = 90^0$, $\angle ASB = \angle ASC = 60^0$ ja $SA = a$. 1) Leida kaugus punktist A tasapinnani BSC; 2) näidata, et serv SA moodustab tasapinnaga BSC 45^0 nurga. V.: 1) $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.



5. joonis.

57. Kolmetahuse nurga iga tasanurk on 60^0; ühele servale on tipust algades asetatud joonlõik $= 3$ ja saadud punktist on vastastahule ristjoon tõmmatud. Kui pikk on ristjoon?

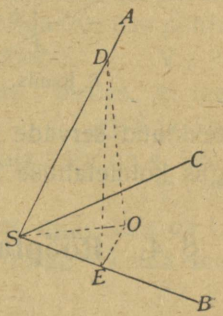
Lahendus: Kolmetahuses nurgas $SABC$ $\angle ASB = \angle ASC = 60^0$ (5. joon.); $SA = 3$;

$AO \perp$ tasap. BSC. Tõmbame $OD \perp SB$ ja lõigud SO ja AD; $SD = \frac{AS}{2} = \frac{3}{2}$. Täisnurkses $\triangle$-gas OSD on $\angle OSD = 30^0$; $OS = \sqrt{3}$. Täisnurksest $\triangle$-gast AOS saame $AO = \sqrt{6}$.

V.: $\sqrt{6}$.

58. Kolmetahuses nurgas on kaks tasanurka, kumbki 45^0; nende vahel olev kahetahune nurk on täisnurkne. Kui suur on kolmas tasanurk? V.: 60^0.

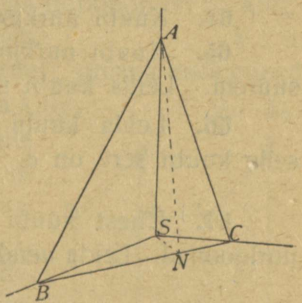
59. Kolmetahuses nurgas on kaks tasanurka, kumbki 60^0; kolmas tasanurk on täisnurk. Leida täisnurga tasapinna ja vastasserva vaheline nurk.



6. joonis.

Lahendus: Antud: $\angle BSC = 90^0$, $\angle ASB = ASC = 60^0$ (6. joon.). Servale SA asetame $SD = 2k$ (abisuurus). Tõmbame $DO \perp BSC$, $OE \perp SB$ ja lõigud SO ja DE; $\angle DES = 90^0$; $SE = \frac{DS}{2} = k$, $OE = k$, $SO = k\sqrt{2}$; kolmnurgast DSO saame: $DO = k\sqrt{2}$; järjelikult: $DO = SO$ ja otsitav nurk DSO on 45^0. V.: 45^0.

60. Kolmetahuses nurgas on kõik tasanurgad täisnurgad; servadele on asetatud tipust algades joonlõigud 2; 4 ja 6 ja läbi saadud punktide on tõmmatud tasapind. Leida saadud lõike pindala.



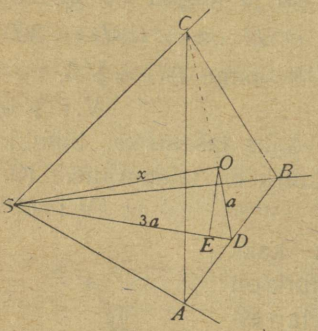
7. joonis.

Juhatus: Olgu $SA = 6$, $SB = 4$, $SC = 2$ (7. joon.); otsitav pindala on ABC. Tõmbame $SN \perp BC$, siis $BC \perp AN$. Leiame järgemööda: BC, SN, AN.

V.: 14.

61. Kolmetahuses nurgas, mille kõik tasanurgad on 60^0, on antud punkt, mis kõigist kolmest tahust asub kaugusel 1. Leida punkti kaugus tipust.

Lahendus: $SABC$ olgu antud kolmetahune nurk ja O



8. joonis.

— antud punkt (8. joon.); OE on punkti O kaugus tahust. Kui tõmmata läbi O tasapind ABC $\perp$-lt SO-ga, siis saame lõikes ja tahkudel võrdsed võrdkülgsed kolmnurgad; järjelikult: $OD = \frac{CD}{3} = \frac{SD}{3}$, $\triangle SOE \backsim \triangle SOD$, sellep.: $\frac{OE}{SO} = \frac{OD}{SD} = \frac{1}{3}$, kust $SO = 3$. $OE = 3$. V.: 3.

62. Kolmetahune nurk, mille tasanurgad on täisnurgad, on läbi lõigatud tasapinnaga; selle juures tekkinud servade lõigud on 1, 2 ja 3. Leida lõikepinna kaugus kolmetahuse nurga tipust. V.: $\frac{6}{7}$.

§ 4. Rööptahukad ja tahksambad (prismad).

a) Lineaar- ja nurkosad.

63. Kuubi serv on a. Leida tema nurkjoon (diagonaal). V.: $a\sqrt{3}$.

64. Kuubi nurkjoon on 3. Leida tema serv. V.: $\sqrt{3}$.

65. Kuubi nurkjoon on tema tahu nurkjoonest m võrra suurem. Leida kuubi serv. V.: $m(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

66. Leida kuubi tipu kaugus tema nurkjoonest, kui selle kuubi serv on a. V.: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

67. Ühest kuubi tipust on tõmmatud kahe kõrvaltahu nurkjooned. Leida nende nurkjoonte kaudu moodustatud nurk. V.: 60^0.

68. Leida täisnurkse rööptahuka nurkjoon, teades rööptahuka kolm mõõdet: 1) 1; 2; 2; 2) 2; 3; 6; 3) 6; 6; 7; 4) 8; 9; 12; 5) 12; 16; 21. V.: 1) 3; 2) 7; 3) 11; 4) 17; 5) 29.

69. Täisnurkse rööptahuka nurkjoon on 25 m, kõrgus — 9 m ja põhja pindala — 240 m². Leida põhja küljed. V.: 20 m ja 12 m.

70. Leida püst-rööptahuka nurkjooned, teades, et tema küljeserv on 5 m, põhja küljed aga 6 m ja 8 m ja üks põhja nurkjoontest on 12 m. V.: 13 m ja 9 m.

71. Püst-rööptahuka põhja küljed on 2 m ja 5 m, kaugus kahe vähema külje vahel — 4 m, kuna aga küljeserv on $\sqrt{8}$ m. Leida rööptahuka nurkjooned. V.: 5 m ja 7 m.

72. Püst-rööptahuka põhja küljed on 3 m ja 5 m, kuna üks põhja nurkjoontest võrdub 4 m. Rööptahuka vähem nurkjoon moodustab põhja tasapinnaga 60^0 nurga. Leida rööptahuka nurkjooned. V.: 8 m ja 10 m.

73. Püst-rööptahuka nurkjooned on 15 ja 20, üks põhja nurkjoontest on 16. Leida teine põhja nurkjoon. V.: 9.

74. Leida püst-rööptahuka nurkjooned, teades, et iga serv on a ja põhja nurk on 60^0. V.: $a\sqrt{2}$ ja $2a$.

75. Korrapärase nelinurkse prisma põhja külg on 4, kõrgus — 7. Leida prisma nurkjoon. V.: 9.

76. Korrapärase prisma põhjaks on ruut, mille külg on 1; prisma nurkjoon moodustab põhjaga 45^0 nurga. Leida see nurkjoon. V.: 2.

77. Korrapärase nelinurkse prisma põhja külg on 2; prisma nurkjoon — 3. Leida prisma kõrgus. V.: 1.

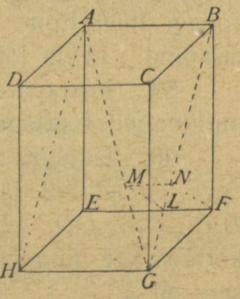
78. Korrapärase nelinurkse prisma nurkjoon on 5; külgtahu nurkjoon aga 4. Leida põhja külg. V.: 3.

79. Püstprisma põhjaks on kaldruut; prisma nurkjooned on 8 ja 5, kõrgus aga 2. Leida põhja külg. V.: $4\frac{1}{2}$.

80. Kolmnurkse prisma külgtahkude nurkjooned on 4, 7, 8; prisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk. Leida prisma kõrgus. V.: 1.

81. Kuubi serv on 3. Leida nurkjoone kaugus igast tipust. V.: $\sqrt{6}$.

82. Korrapärase nelinurkse prisma põhja külg on 15; kõrgus aga 20. Leida prisma nurkjoone kõige lühem kaugus põhja küljest, millega ta ei lõiku.



9. joonis.

Lahendus: Leiame AG kõige lühema kauguse EF-st, selleks tõmbame läbi AG tasapinna $ABGH \parallel EF$ (9. joon.). Tõmbame $FN \perp$ tasapinna $ABGH$. Otsitava kauguse FN saame täisnurksest $\triangle$-st BFG; $BG = 25$, pindala $= 150$; $\frac{BG \cdot FN}{2} = 150$, kust $FN = 12$. V.: 12.

83. Korrapärase nelinurkse prisma põhja külg on a. Leida prisma nurkjoone kõige lühem kaugus servast, millega ta ei lõiku.

V.: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Rööptahukate ja prismade lõikepinnad.

84. Kuubi serv on a. Leida nurkjoonelise (diagonaalse) lõike pindala. V.: $a^2\sqrt{2}$.

85. Kuubi serv on 2. Läbi kolme ühes tipus lõikuva serva otsapunktide on tõmmatud tasapind. Leida lõike pindala. V.: $2\sqrt{3}$.

86. Täisnurkse rööptahuka põhja küljed on 7 dm ja 24 dm, kõrgus aga 8 dm. Leida nurkjoonelise (diagonaalse) lõike pindala. V.: $2m^2$.

87. Täisnurkses rööptahukas, mille põhi on $ABCD$, võrdub küljeserv 56 dm, kuna põhja küljed on: $AB = 33$ dm ja $AD = 4$ m. Leida selle lõike pindala, mis läbi servade AD ja B_1C_1 kulgeb. V.: 26 m^2.

88. Täisnurkse rööptahuka küljeservad on 2; 4; 6. Läbi kolme ühes tipus lõikuva serva otsapunktide on tõmmatud tasapind. Leida lõike pindala. V.: 14.

89. Korrapärase kuusnurkse prisma iga serv on 1. Leida nurkjoonelise (diagonaalse) lõike pindala. V.: $2\sqrt{3}$.

90. Kuubis $ABCDA_1B_1C_1D_1$ on järgemööda joonlõikudega ühendatud järgmiste servade keskkohad: AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, AD ja AA_1. Näidata, et saadud kujund on korrapärane kuusnurk, ja leida ta pindala, teades, et kuubi serv on a.

V.: $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

91. Kuubi serv on 2; läbi nurkjoone keskkoha on samale nurkjoonele tõmmatud rist-tasapind. Leida lõike pindala.
V.: $3\sqrt{3}$.

92. Korrapärase nelinurkse prisma külgtahu pindala on Q. Leida nurkjoonelise (diagonaalse) lõike pindala.
V.: $Q\sqrt{2}$.

93. Kolmnurkse kaldprisma üks küljetahkudest moodustatud kahetahune nurk on $20^0\,43'\,28''$ ja teine — $105^0\,27'\,32''$. Kui suur on kolmas nurk? V.: $53^0\,49'$.

94. Kolmnurkse püstprisma põhja küljed on 10, 17 ja 21, kõrgus aga 18. Leida lõike pindala, mis läbi küljeserva ja põhja kõige vähema kõrguse läheb. V.: 144.

95. Korrapärane kolmnurkne prisma, mille iga serv on a, on lõigatud tasapinnaga, mis põhja küljest ja vastaskülje serva keskkohast läbi läheb. Leida saadud lõike pindala. V.: $\frac{a^2}{2}$.

96. Teades korrapärase kolmnurkse prisma põhja külje a ja küljeserva b, leida lõike pindala, mis küljeservast ja teljest läbi läheb. V.: $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$.

97. Korrapärase prisma põhjaks on kuusnurk, mille külg on 3; prisma kõrgus on 13. Kui suur on lõike pindala, mis läbi alumise ja ülemise põhja vastaskülgede läheb. V.: 63.

98. Korrapärase prisma põhjaks on kuusnurk, mille külg on 1. Läbi ühe põhja külje on tõmmatud tasapind, mis kõiki prisma küljeservi lõikab ja põhjaga 30^0 nurga moodustab. Leida lõike pindala. V.: 3.

c) Rööptahukate ja prismade pindala.

99. Kuubi täis-pindala on 2400 m^2. Leida kuubi serv.
V.: 20 m.

100. Leida kuubi täis-pindala, teades, et 1) nurkjoon on l; 2) nurkjoonelise (diagonaalse) lõike pindala on Q.
V.: 1) $2l^2$; 2) $3Q\sqrt{2}$.

101. Leida täisnurkse rööptahuka täis-pindala, kui teada on tema kolm mõõdet: 10, 22 ja 16. V.: 1464.

102. Täisnurkse rööptahuka servad suhtuvad nõnda kui 2 : 3 : 4. Täis-pindala on 208. Leida servad. V.: 4, 6, 8.

103. Ruutpõhjaga püst-rööptahuka täis-pindala on 8928, aga kõrgus 44. Leida põhja külg. V.: 36.

104. Leida ruutpõhjaga püst-rööptahuka nurkjoon, kui teada on, et rööptahuka kõrgus = 94, aga külje pindala = 45120. V.: 194.

105. Ruutpõhjaga püst-rööptahuka täis-pindala on 608,22, külje pindala aga — 370,6. Leida kõrgus. V.: 8,5.

106. Täisnurkse rööptahuka täis-pindala on 5472, külje pindala — 3960 ja kõrgus 36. Kui pikk on rööptahuka nurkjoon? V.: 53.

107. Leida täisnurkse rööptahuka külje pindala, kui selle rööptahuka kõrgus on h, põhja pindala — Q ja nurkjoonelise lõike pindala — M. V.: $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$.

108. Püst-rööptahuka põhja küljed on 6 m ja 8 m ja moodustavad 30^0 nurga. Küljeserv on 5 m. Leida rööptahuka täis-pindala. V.: 188 m^2.

109. Püst-rööptahuka põhjaks on kaldruut, mille nurkjooned on 6 ja 8. Küljetahu nurkjoon on 13. Leida selle rööptahuka täis-pindala. V.: 288.

110. Leida: 1) kolmnurkse, 2) nelinurkse ja 3) kuusnurkse korrapärase prisma täis-pindala, teades põhjakülje a ja küljeserva b.

V.: 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$.

111. Püstprisma põhjaks on korrapärane kolmnurk; prisma kõrgus on 66, põhja pindala — 792. Leida prisma külje pindala. V.: 8468.

112. Korrapärase nelinurkse prisma külje pindala on 32, täis-pindala aga 40. Leida prisma kõrgus. V.: 4.

113. Leida korrapärase nelinurkse prisma täis-pindala, kui ta nurkjoon on 14, aga külgtahu nurkjoon on 10. V.: 270,4.

114. Kaugus kolmnurkse kaldprisma küljeservade vahel on 2, 3, 4; külje pindala on 45. Leida küljeserv. V.: 5.

115. Nelinurkse kaldprisma küljeserv on 8, kuna küljeservade vaheline kaugus on 3, 6, 2 ja 7. Leida külje pindala. V.: 144.

116. Püstprisma põhjaks on ruut, mille külg tarvis leida, teades, et prisma täis-pindala on 512 m^2 ja kõrgus — 12 m. V.: 8 m.

117. Leida kolmnurkse püstprisma täis-pindala, teades, et prisma kõrgus on 50, põhja küljed aga: 40; 13 ja 37. V.: 4980.

118. Kolmnurkse püstprisma põhja küljed on 25; 29 ja 36; täis-pindala on 1620. Leida prisma külje pindala ja kõrgus. V.: 900 ja 10.

119. Korrapärase kolmnurkse prisma külje pindala on 36, külgtahu nurkjoon aga 5. Leida prisma kõrgus. V.: 4 või 3.

120. Korrapärase nelinurkse prisma nurkjoon on 3, külje pindala aga 8. Leida kõrgus. V.: 1 või $\sqrt{8}$.

121. Püstprisma põhjaks on kaldruut. Prisma nurkjooned on 5 ja 8, külje pindala aga 36. Leida prisma kõrgus. V.: 2.

122. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne trapets (sariktrapets) $ABCD$; $AB = CD = 13$ sm, $BC = 11$ sm ja $AD = 21$ sm; nurkjoonelise lõike pindala on 180 sm^2. Leida prisma täispindala ja lõike AB_1C_1D pindala. V.: 906 sm^2 ja 240 sm^2.

123. Püstprisma põhjaks on korrapärane kaheksanurk, mille pindala võrdub 536; prisma kõrgus on 9. Leida külje pindala. V.: 758,6.

124. Kaldprisma külje pindala on 18067; ristlõikes saadakse kolmnurk, mille küljed on: 63; 69 ja 71. Leida prisma küljeserv. V.: 89.

125. Kolmnurkse kaldprisma kaks külgtahku moodustavad 60^0 nurga; nende tahkude pindalad on 5 ja 8. Leida külje pindala. V.: 20.

126. Kaldprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk ABC, mille külg $AB=AC=10$ ja $BC=12$. Tipp A_1 on ühekaugusel tippudest A, B ja C ja serv $AA_1=13$. Leida selle prisma täis-pindala. V.: 492.

d) Rööptahukate ja prismade ruumala.

127. Leida kuubi serv, kui ta ruumala on: 1) 4096 sm^3; 2) 3375 sm^3; 3) 21952 sm^3. V.: 1) 16 sm; 2) 15 sm; 3) 28 sm.

128. Kolme kuubi servad on 3 sm; 4 sm ja 5 sm. Leida niisuguse kuubi serv, mis on võrdne antud kuupide ruumalade summaga. V.: 6 sm.

129. Kuubi ruumala on 8 m^3. Leida selle kuubi pindala. V.: 24 m^2.

130. Suurendades kuubi serva 2 sm võrra, suureneb kuubi ruumala 98 sm^3 võrra. Leida kuubi serv. V.: 3 sm.

131. Kui suurendada kuubi serva 1 m võrra, suureneb kuubi ruumala 125 korda. Leida kuubi serv. V.: 25 sm.

132. Täisnurkse rööptahuka kolm mõõdet on 15; 50 ja 36. Kui suur on rööptahukaga võrdse kuubi serv? V.: 30.

133. Ruutpõhjaga täisnurkse rööptahuka kõrgus on 31, täis-pindala — 3486. Leida ruumala. V.: 13671.

134. Täisnurkse rööptahuka servad suhtuvad nõnda kui 2:3:4; rööptahuka ruumala on 192. Leida servad. V.: 4; 6; 8.

135. Täisnurkse rööptahuka servad suhtuvad nõnda kui 2:3:6; rööptahuka ruumala on 288. Leida rööptahuka nurkjoon. V.: 14.

136. Leida täisnurkse rööptahuka ruumala, teades, et tema kolme tahu pindalad on: 2; 3 ja 6. V.: 6.

137. Leida täisnurkse rööptahuka ruumala, kui ta tahkude nurkjooned on 5; 11 ja 12. V.: $24\sqrt{5}$.

138. Täisnurkse rööptahuka täis-pindala on 2238, ruumala — 7182 ja üks põhja külgedest — 19. Leida rööptahuka mõlemad kõrgused. V.: 18 ja 21.

139. Niisuguse püstprisma põhjaks, mille nurkjooned on 20 ja 15 ja kõrgus 12, on kaldruut. Leida püstprisma ruumala. V.: 864.

140. Täisnurkse rööptahuka täis-pindala on 1112, külje pindala aga 728; sama rööptahuka ruumala on 2496. Leida: 1) küljeserv; 2) põhja küljed. V.: 1) 13; 2) 16 ja 12.

141. Leida täisnurkse rööptahuka ruumala, kui rööptahuka nurkjoon on l ja moodustab ühe tahuga 30^0 nurga, teisega aga 45^0 nurga. V.: $\frac{l^3\sqrt{2}}{8}$.

142. Püstprisma põhjaks on rööpkülik, mille teravnurk on 30^0 ja pindala — 4. Prisma külgtahkude pindalad on 6 ja 12. Leida prisma ruumala. V.: 12.

143. Püströöptahuka põhja küljed on a ja b ja moodustavad isekeskis 30^0 nurga; rööptahuka külje pindala on P. Leida ruumala. V.: $\frac{P.ab}{4(a+b)}$.

144. Teades põhja külje a ja küljeserva b, leida korrapärase 1) kolmnurkse; 2) nelinurkse; 3) kuusnurkse prisma ruumala. V.: 1) $\frac{a^2b\sqrt{3}}{4}$; 2) a^2b; 3) $\frac{3a^2b\sqrt{3}}{2}$.

145. Niisuguse püstprisma külje pindala, mille põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, võrdub 576, aga ruumala on 1152. Leida põhja külg. V.: 13,856.

146. Leida kolmnurkse püstprisma ruumala, kui põhja pindala võrdub 6, aga külgtahkude pindalad on: 6; 8 ja 10. V.: 12.

147. Kolmnurkse püstprisma ruumala on 12672, kõrgus — 33 ja kaks põhja külge 24 ja 32. Leida kolmas põhja külg. V.: 40.

148. Korrapärane kolmnurk, mille ümber raadiusega r on ring joonestatud, on niisuguse prisma põhjaks, mille külgtahkudeks on ruudud. Leida selle prisma ruumala. V.: $\frac{9}{4}r^3$.

149. Kolmnurkse püstprisma põhja küljed on 4; 5 ja 7, kuna aga küljeserv põhja kõige suurema kõrgusega võrdub. Leida prisma ruumala. V.: 48.

150. Trapets $ABCD$ on püstprisma põhjaks; trapetsi alused: $AD = 39$ ja $BC = 22$; küljed: $AB = 26$ ja $CD = 25$; lõike AA_1C_1C pindala on 400. Leida prisma ruumala.

V.: 7320.

151. Leida korrapärase kuusnurkse prisma kõrgus, kui selle prisma täis-pindala on S ja põhja külg — a.

V.: $\frac{S - 3a^2\sqrt{3}}{6a}$.

152. Leida korrapärase kümnenurkse prisma ruumala, kui selle prisma põhjaks on ruut, mille pindala on Q.

V.: $\frac{5}{2}Q\sqrt{Q(5+2\sqrt{5})}$.

153. Kolmnurkse püstprisma ühe külgtahu pindala on Q ja selle tahu kaugus vastasservast on d. Leida prisma ruumala.

V.: $\frac{Qd}{2}$.

154. Kolmnurkse kaldprisma ühe külgtahu pindala on Q ja selle tahu kaugus vastasservast on d. Leida prisma ruumala.

V.: $\frac{Qd}{2}$.

155. Leida rööptahuka ruumala, kui selle rööptahuka kahe tahu pindalad on P ja Q, nende tahkude ühine serv on a ja nende vaheline kahetahune nurk $= 30^0$. V.: $\frac{P.Q}{2a}$.

156. Prisma põhi on kolmnurk, mille üks külg on 2 m, kuna teised kaks külge kumbki on 3 m. Küljeserva pikkus on 4 m ja ta moodustab põhjaga 45^0 nurga. Leida selle prismaga võrdse kuubi serv. V.: 2 m.

157. Prisma põhi on kolmnurk, mille küljed on: 3; 5 ja 7. Küljeserv $= 8$ ja moodustab põhjaga 60^0 nurga. Leida prisma ruumala. V.: 45.

158. Kuidas suhtuvad kahe kuubi ruumalad, kui nende täis-pindalad on vastavalt S ja S_1. V.: $\sqrt{S^3} : \sqrt{S_1^3}$.

159. Leida korrapärase kuusnurkse prisma kõrgus, kui selle prisma täis-pindala on S ja kõrgus võrdub põhja küljega.

V.: $\sqrt{\frac{S}{3(2+\sqrt{3})}}$.

160. Kaldprisma põhjaks on nelinurk $ABCD$, mille nurkjooned on isekeskis risti. Nurkjooneline lõige AA_1C_1C on põhjaga risti. Leida selle prisma ruumala, kui nurkjoon BD on 16 dm ja AA_1C_1C pindala on 250 dm^2. V.: 2 m^3.

§ 5. Püramiidid.

a) Lineaar- ja nurkosad.

161. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi küljeserv, kui selle püramiidi kõrgus on 7 sm ja põhja külg 8 sm. V.: 9 sm.

162. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi põhja ümbermõõt, kui selle püramiidi kõrgus on 12 ja apoteem 13. V.: 40.

163. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhja külg on a. Leida küljeserv, kui ta põhjaga moodustab 45° nurga. V.: a.

164. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on 1, kuid külje serv — 2. Leida põhja külg. V.: 3.

165. Leida kolmnurkse püramiidi kõrgus, kui selle püramiidi iga serv on a. V.: $\frac{a}{3}\sqrt{6}$.

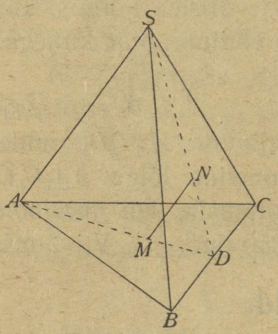
166. Korrapärase kolmnurkse püramiidi küljeserv, mis põhjaga 30° nurga moodustab, on b. Leida põhja külg. V.: $\frac{3b}{2}$.

167. Leida korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus, kui põhja külg ja apoteem on kumbki 2. V.: 1.

168. Püramiidi põhjaks on püstkülik; üks küljeservadest on püramiidi kõrguseks, kuna teised küljeservad on 4; 8 ja 7. Leida püramiidi kõrgus. V.: 1.

169. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 6 ja 8, on püramiidi põhjaks, püramiidi iga küljeserv on aga 13. Leida kõrgus. V.: 12.

170. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille külg on 4 ja kõrgus 2. Leida püramiidi kõrgus, kui iga küljeserv on 5 V.: 3.



10. joonis.

171. Leida kaugus tetraeedri tahkude keskpunktide vahel, kui tetraeedri serv on a.

Lahendus: Olgu M ja N tahkude keskpunktid, siis on $MD = \frac{AD}{3}$ ja $ND = \frac{SD}{3}$; järjelikult on $\triangle ASD \sim \triangle MND$ ja $MN = \frac{AS}{3} = \frac{a}{3}$ (10. joon.).

172. Leida kaugus tetraeedri kahe kõrguse keskkohtade vahel, kui tetraeedri serv on a. V.: $\frac{a}{3}$.

173. Püramiidi põhjaks on kaldruut, mille kõrgus on 2; püramiidi iga küljeserv moodustab põhjaga 45° nurga. Leida püramiidi kõrgus. V.: 1.

174. Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 3 ja 4; iga küljeserv moodustab põhjaga 60° nurga. Leida püramiidi kõrgus. V.: $\sqrt{3}$.

175. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhja kõige lühem nurkjoon võrdub püramiidi kõrgusega. Kui suur on põhja ja küljeserva moodustatud nurk? V.: 60°.

176. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhja juures olevad kahetahused nurgad on 45°. Missugused on külgtahkudest moodustatud kahetahused nurgad? V.: 120°.

b) Püramiidi lõiked.

177. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi nurkjoonelise lõike pindala, kui püramiidi küljeserv on 10 m ja põhja külg 14 m. V.: 14 m².

178. Kolmnurkse püramiidi iga serv on a. Leida lõike pindala, mis läbi küljeserva ja kõrguse läheb. V.: $\frac{a^2}{4}\sqrt{2}$.

179. Leida korrapärase kuusnurkse püramiidi nurkjooneliste lõigete pindalad, kui selle püramiidi kõrgus on 4 ja põhja külg 6. V.: 24; $15\sqrt{3}$.

180. Püramiidi põhja-pindala on M. Leida kesklõike[1]) pindala. V.: $\frac{M}{4}$.

181. Püramiidi kõrgus on jagatud neljaks võrdseks osaks ja püramiid on lõigatud läbi jaotuspunktide põhjaga rööbiti tõmmatud tasapindadega. Leida lõigete pindalad, kui põhja pindala on 48. V.: 3; 12; 27.

182. Põhjaga rööbiti tõmmatud tasapind jagab püramiidi kõrguse nii, et osad (tipust arvates) suhtuvad kui 3 : 4, kuna lõike pindala põhja pindalast 200 sm^2 võrra vähem on. Leida põhja pindala. V.: 245 sm^2.

183. Püramiidi kõrgus on 8 m ja põhja pindala 32 m^2. Kui kaugel põhjast on rööplõige, mille pindala on 18 m^2.

V.: 2 m.

184. Püramiidi põhja pindala on 150 m^2, kuna põhjast 14 m kaugusel tõmmatud rööplõike pindala on 54 m^2. Leida püramiidi kõrgus. V.: 35 m.

185. Püramiid, mille põhja pindala on 98, on lõigatud kahe põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga, kusjuures saadud kõrguse osad (tipust arvates) suhtuvad kui 4 : 2 : 1. Leida lõigete pindalad. V.: 32; 72.

186. Püramiidi põhja pindala on M; kõrgus on n võrdseks osaks jagatud ja püramiid neist jaotuspunktidest põhjaga rööbiti tõmmatud tasapindadega osadeks jagatud. Leida lõigete pindalad. V.: $\frac{M}{n^2}; \frac{4M}{n^2}; \frac{9M}{n^2}$ jne.

187. Püramiid on lõigatud põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga; lõike pindala moodustab $\frac{1}{4}$ põhja pindalast. Kuidas suhtuvad kõrguse osad isekeskis? V.: 2 : 1 (tipust arvates).

188. Korrapärase nelinurkse püramiidi iga serv on 2. Leida lõike pindala, mis läbi põhja ühe nurkjoone läheb ja ühe küljeservaga rööbiti on. V.: $\sqrt{2}$.

189. Korrapärane kolmnurkne püramiid $SABC$ on lõigatud tasapinnaga läbi servade AB ja BC keskkohtade rööbiti

1) s. o. püramiidi kõrguse keskkohast põhjaga rööbiti tõmmatud lõike pindala.

servaga SB. Leida lõike pindala, kui selle püramiidi põhja külg on a ja küljeserv b. V.: $\frac{ab}{4}$.

190. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on 4, põhja külg — 1. Leida lõike pindala, mis läbi põhja ühe külje läheb ja vastas-küljeservaga risti on. V.: $\frac{3}{7}$.

191. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 20, põhja külg — 30. Leida lõike pindala, mis kulgeb põhja üht külge ja risti on vastas-külgtahuga. V.: 460,8.

192. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhja külg on a, küljeserv b. Leida ruutlõike pindala, mis rööbiti on kahe mittelõikuva servaga. V.: $\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$.

193. Korrapärase nelinurkse püramiidi sisse on kuup nii joonestatud, et neli tippu asuvad küljeservadel ja ülejäänud neli tippu — põhjal. Leida selle kuubi serv, kui püramiidi põhja külg on a ja kõrgus — h. V.: $\frac{ah}{a+h}$.

194. Korrapärase oktaeedri sisse on kuup nii joonestatud, et tipud asuvad oktaeedri servadel. Leida selle kuubi serv, kui oktaeedri serv on a. V.: $a(2-\sqrt{2})$.

c) Püramiidi pindala.

195. Leida korrapärase 1) nelinurkse, 2) kolmnurkse, 3) kuusnurkse püramiidi täis-pindala, kui püramiidi kõrgus on h ja põhja külg — a. V.: 1) $a\sqrt{4h^2+a^2}+a^2$;

2) $\frac{3a}{4}\sqrt{4h^2+\frac{a^2}{3}}+\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{3a}{2}\sqrt{4h^2+3a^2}+\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

196. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi täis-pindala, kui selle püramiidi kõrgus on 4 ja põhja külg — 6. V.: 96.

197. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi külje pindala, kui selle püramiidi kõrgus on 8 ja apoteem 10. V.: 240.

198. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi külje pindala, kui selle püramiidi kõrgus on h ja küljeserv — a.

V.: $2\sqrt{a^4-h^4}$.

199. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on 1 ja põhja külg 6. Leida külje pindala. V.: 18.

200. Leida korrapärase kuusnurkse püramiidi täis-pindala, kui selle püramiidi apoteem on g ja põhja apoteem k. V.: $2k\sqrt{3}\,(g+k)$.

201. Korrapärase nelinurkse püramiidi külje pindala on 14,76 m^2, täis-pindala aga 18 m^2. Leida püramiidi põhja külg ja kõrgus. V.: 1,8 m ja 4 m.

202. Leida korrapärase 1) kolmnurkse, 2) kuusnurkse püramiidi külje pindala, kui püramiidi põhja külg on 2 ja külgtahk moodustab põhjaga 30° kahetahuse nurga. V.: 1) 2; 2) 12.

203. Leida korrapärase kolmnurkse püramiidi külje pindala, kui selle püramiidi põhja külg on a ja küljeserv moodustab põhjaga 45° nurga. V.: $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

204. Tetraeedri külje pindala on tasandatud üheks tasapinnaks. Leida saadud nelinurga nurkjoon, kui tetraeedri serv on 1. V.: $\sqrt{3}$.

205. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi põhja külg, kui selle püramiidi kõrgus on h ja külje pindala P. V.: $\sqrt{-2h^2+\sqrt{4h^4+P^2}}$.

206. Ruutpõhjaga korrapärase püramiidi kõrgus on 30, külje pindala aga — 2176. Leida põhja külg. V.: 32.

207. Ruutpõhjaga korrapärase püramiidi täis-pindala on 4704, apoteem aga — 35. Leida selle püramiidi kõrgus. V.: 28.

208. Korrapärase nelinurkse püramiidi küljeserv on 74 ja ühe külje-kolmnurga pindala on 1680. Leida põhja külg. V.: 48.

209. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi külje pindala, kui selle püramiidi põhja külg on 2 ja küljetahud moodustavad 120° kahetahused nurgad. V.: $4\sqrt{2}$.

210. Ruutpõhjaga püramiidi kaks küljetahku on põhjaga risti, kuna teised kaks temaga 30° nurga moodustavad; püramiidi kõrgus on 1. Leida külje pindala. V.: $3\sqrt{3}$.

211. Püramiidil, mille kõrgus on 1, on kaldruut põhjaks. Kaks külgtahku, mis isekeskis 120^0 nurga moodustavad, on põhjaga risti, aga kaks teist moodustavad põhjaga 30^0 nurga. Leida põhja ja külgtahkude pindala. V.: $2\sqrt{3}$; 1; 2.

212. Püramiidi $SABC$ põhjaks on täisnurkne kolmnurk ABC, mille hüpotenuus AB on 26 sm ja kaatet AC — 24 sm. Serv $SA = 18$ sm ja on ABC tasapinnaga risti. Leida selle püramiidi külje pindala. V. 6 dm^2.

213. Ruutpõhjaga püramiidi kõrgus läheb läbi põhja ühe tipu. Leida selle püramiidi külje pindala, kui põhja külg on 20 dm ja kõrgus 21 dm. V.: 10 m^2.

214. Püramiidi põhjaks on rööpkülik, mille küljed on 20 ja 36, aga pindala 360; püramiidi kõrgus on 12 ja läheb läbi põhja nurkjoonte lõikepunkti. Leida püramiidi külje pindala. V.: 768.

215. Püramiidi põhjaks on rööpkülik, mille küljed on 5 ja 4, aga üks nurkjoon on 3. Püramiidi kõrgus kulgeb põhja nurkjoonte lõikepunkti ja võrdub 2. Leida selle püramiidi täis-pindala. V.: $22 + \sqrt{136}$.

216. Püramiidi põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külg on a. Üks külgtahkudest on samuti võrdkülgne kolmnurk ja põhjaga risti. Leida selle püramiidi külje pindala.

V.: $\frac{a^2}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{15})$.

217. Püramiidi kõrgus on 6. Kui kaugel põhjast peab rööplõige olema, mis püramiidi külje pindala jagab osadesse: 20 (tipupoolne osa) ja 25 (põhjapoolne osa). V.: 2.

218. Püramiidi kõrgus on h. Kui kaugel tipust on rööplõige, mis külje pindala poolitab.

V: $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

219. Püramiidi kõrgus on jagatud kahte ossa, mis suhtuvad kui 1) 4 : 3, 2) 5 : 2 (tipust arvates); püramiid on lõigatud põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga läbi jaotuspunkti. Kuidas suhtuvad püramiidi külje pindala osad isekeskis? V.: 1) 16 : 33; 2) 25 : 24.

220. Püramiidi kõrgus on jagatud kolme võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide lõigatud põhjaga rööbiti tõmmatud tasapindadega. Kuidas jagub külje pindala? V.: 1 : 3 : 5.

221. Püramiidi külje pindala on põhjaga rööbiti tasapindadega jaotatud osadeks, mis suhtuvad kui 1) 4 : 5, 2) 9 : 16 : 11 (tipust arvates). Kuidas suhtuvad kõrguse osad isekeskis? V.: 1) 2 : 1; 2) 3 : 2 : 1.

222. Püramiidi kõrgus on h. Põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnad jagavad külje pindala n võrdsesse ossa. Leida lõigete kaugus tipust. V.: $h\sqrt{\frac{1}{n}}$, $h\sqrt{\frac{2}{n}}$, $h\sqrt{\frac{3}{n}}$, ...

d) Püramiidi ruumala.

223. Korrapärase 1) nelinurkse, 2) kolmnurkse, 3) kuusnurkse püramiidi põhja külg on a ja külje serv b. Leida ruumala.

V.: 1) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 2) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$.

224. Kolmnurkse püramiidi iga küljeserv on b ja nad on isekeskis risti. Leida püramiidi ruumala. V.: $\frac{b^3}{6}$.

225. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui teada on põhja ja külje pindalad Q ja P. ($Q = 12$, $P = 24$). V.: $\frac{1}{6}\sqrt{Q(P^2-Q^2)}$.

226. Leida korrapärase kuusnurkse püramiidi küljeserv, kui selle püramiidi ruumala on 6 ja põhja külg 1. V.: 7.

227. Leida korrapärase tetraeedri pindala ja ruumala, kui selle tetraeedri serv on a. V.: $a^2\sqrt{3}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

228. Leida korrapärase oktaeedri pindala ja ruumala, kui selle oktaeedri serv on a. V.: $2a^2\sqrt{3}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

229. Kuubi tahkude keskpunktid on korrapärase oktaeedri tippudeks. Leida nende ruumalade suhe. V.: 6 : 1.

230. Oktaeedri tahkude keskpunktid on kuubi tippudeks. Leida nende ruumalade suhe. V.: 9 : 2.

231. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui selle püramiidi kõrgus on h ja küljeserv moodustab põhjaga 45^0 nurga.

V.: $\frac{2h^3}{3}$.

232. Leida korrapärase 1) kolmnurkse ja 2) kuusnurkse püramiidi ruumala, kui selle püramiidi küljeserv b moodustab põhjaga 60^0 nurga.

V.: 1) $\frac{3}{32}b^3$; 2) $\frac{3}{16}b^3$.

233. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ja tipu juures olev tasanurk on 60^0. Leida püramiidi ruumala.

V.: $\frac{2}{3}h^3$.

234. Korrapärase 1) nelinurkse ja 2) kolmnurkse püramiidi põhja külg on a, põhja ja külgtahu kaudu moodustatud kahetahune nurk — 45^0. Leida püramiidi ruumala.

V.: 1) $\frac{a^3}{6}$; 2) $\frac{a^3}{24}$.

235. Leida kolmnurkse püramiidi ruumala, kui selle püramiidi küljeservad a, b ja c on vastastikku risti.

V.: $\frac{abc}{6}$.

236. Kolmnurkse püramiidi küljetahud on vastastikku risti; nende tahkude pindalad on 6; 4 ja 3. Leida püramiidi ruumala.

V.: 4.

237. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 16, täis-pindala aga 1536. Leida ruumala.

V.: 3072.

238. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui selle püramiidi apoteem on 39 ja külje pindala 2340.

V.: 10800.

239. Püramiidi põhjaks on püstkülik, mille küljed on 18 ja 24; püramiidi iga küljeserv on 25. Leida püramiidi ruumala.

V.: 2880.

240. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 6 ja 8, on püramiidi põhjaks. Iga küljeserv moodustab põhjaga 45^0 nurga. Leida püramiidi ruumala.

V.: 40.

241. Püramiidi põhjaks on kaldruut, mille nurkjooned on 6 ja 8. Põhja ja külgtahkude kaudu moodustatud kahetahused nurgad on 45^0. Leida püramiidi ruumala.

V.: $19\frac{1}{3}$.

242. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille võrdsed küljed on 6 ja kolmas külg 8. Püramiidi iga küljeserv on 9. Leida ruumala. V.: 48.

243. Püramiidi $SABC$ põhjaks on kolmnurk ABC, mille külg $AB = 15$, $BC = 27$ ja $AC = 18$. Tahud SAB ja SAC on risti ABC tasapinnaga, kuna tahk SBC viimasega 45^0 nurga moodustab. Leida püramiidi ruumala ja tahu BSC pindala. V.: 400; 180.

244. Kolmnurkse püramiidi üks serv on 4, aga teised igaüks — 3. Leida ruumala. V.: $\sqrt{11}$.

245. Leida kolmnurkse püramiidi ruumala, kui selle püramiidi kaks mittelõikuvat serva on kumbki 4, aga teised servad igaüks 3. V.: $\frac{8}{3}$.

246. Kaks tahku kolmnurkses püramiidis on võrdhaarsed kolmnurgad ühise aluse a-ga, mille kaugus tema vastasseisvast servast b-st on d. Leida püramiidi ruumala. V.: $\frac{1}{6}\ abd$.

247. Leida kolmnurkse püramiidi ruumala, kui selle püramiidi kahe tahu pindalad on M ja N, nende ühine serv aga a ja nende moodustatud kahetahune nurk on 30^0.

V.: $\frac{MN}{3a}$.

248. Korrapärase püramiidi põhjaks on kaksteistnurk, mille raadius on R. Küljeserv moodustab põhjaga 45^0 nurga. Leida püramiidi ruumala. V.: R^3.

249. Korrapärase kaheksanurkse püramiidi põhja raadius on R. Küljeserva kallakus põhjaga on 45^0. Leida püramiidi ruumala. V.: $\frac{2}{3}R^3\sqrt{2}$.

250. Püramiidi põhjaks on kaldruut, mille külg on a ja teravnurk 30^0. Põhja ja külgtahkude kaudu moodustatud kahetahused nurgad on 45^0. Leida püramiidi ruumala. V.: $\frac{a^3}{24}$.

251. Ruutpõhjaga püramiidi kaks külgtahku on põhjaga risti, aga kaks teist tahku moodustavad temaga 45^0 nurga. Leida püramiidi ruumala, kui ta kõrgus on 3. V.: 9.

252. Püramiidi põhjaks on püstkülik, mille pindala on 9; kaks küljetahku on põhjaga risti, kuna kaks teist temaga 60^0 ja 30^0 nurga moodustavad. Leida püramiidi ruumala.

V.: 9.

253. Kuubil, mille serv on a, on tipud nii ära lõigatud, et igast küljetahust korrapärane kaheksanurk järele on jäänud. Leida saadud hulktahu ruumala. V.: $\frac{7}{3}a^3(\sqrt{2}-1)$.

254. Kuup on läbi tippude lõigatud tasapindadega, mis risti on ühe tema nurkjoonega. Kuidas jagub 1) ruumala ja 2) pindala? V.: 1) 1:4:1; 2) 1:2:1.

255. Püramiidi ruumala on V. Püramiidi kõrgus on jagatud kahte ossa, mis suhtuvad kui 2:1 (tipust arvates) ja läbi jaotuspunkti on lõigatud põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga. Leida tipupoolse osa ruumala. V.: $\frac{8}{27}$ V.

256. Püramiidi kõrgus on jagatud 1) kolme, 2) nelja võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide lõigatud põhjaga rööbiti tõmmatud tasapindadega. Kuidas suhtuvad ruumala saadud osad? V.: 1) 1:7:19; 2) 1:7:19:37.

257. Missuguse osa püramiidi ruumalast lõikab keskmine lõige? V.: $\frac{1}{8}$.

258. Püramiidi kõrgus on h; põhjaga rööbiti tõmmatud tasapind poolitab püramiidi ruumala. Leida lõike kaugus tipust. V.: $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$.

259. Püramiidi kõrgus on h; põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnad jagavad püramiidi ruumala n võrdsesse ossa. Leida lõigete kaugus tipust. V.: $h\sqrt[3]{\frac{1}{n}}, h\sqrt[3]{\frac{2}{n}}, h\sqrt[3]{\frac{3}{n}}, \ldots$

260. Põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnad jagavad püramiidi ruumala osadeks, mis suhtuvad kui 1:26:37 (tipust arvates). Kuidas suhtuvad kõrguse osad? V.: 1:2:1.

261. Püramiidi põhjaga rööbiti tõmmatud lõige on 0,36 põhja-pindalast. Kuidas suhtuvad ruumala osad? V.: 27:98.

262. Põhjaga rööbiti tõmmatud tasapind poolitab püramiidi külje-pindala. Kuidas jagab see lõige püramiidi ruumala? V.: $1 : (2\sqrt{2} - 1)$.

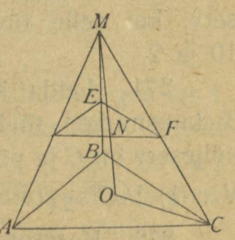
263. Kuidas jagab korrapärase kolmnurkse püramiidi ruumala see tasapind, mis põhja keskpunktist läbi läheb ja ühe külgtahuga rööbik on? V.: 8 : 19.

264. Korrapärase kolmnurkse püramiidi kõrgus on jagatud kolme võrdsesse ossa ja püramiid on lõigatud läbi jaotuspunktide külgtahuga rööbiti oleva tasapinnaga. Kuidas suhtuvad ruumala saadud osad? V.: 343 : 169 : 217.

265. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhja- ja külgtahkudest moodustatud kahetahused nurgad on 60^0; läbi põhja külje läheb tasapind, mis kahetahuse nurga poolitab. Kuidas jagab see tasapind püramiidi ruumala?

Juhatus: Olgu põhja külg a; leiame lõike pindala $\frac{1}{8}\frac{3}{8}\ a^2$; see on ülemise püramiidi põhi, kuna kõrguseks tal antud püramiidi pool apoteemi on; ülemise osa ruumala $= \frac{1}{4}\frac{3}{8}\ a^3\sqrt{3}$; lahutades selle kogu ruumalast, saame alumise osa ruumala $\frac{3}{4}\frac{3}{8}\ a^3\sqrt{3}$; nende suhe 13 : 23. V.: 13 : 23.

266. Korrapärase tetraeedri põhja ümber joonestatud ringi raadius on r. Kui kaugel tipust peab tetraeedrit lõikama tasapinnaga, et see tasapind poolitaks ruumala.



11. joonis.

Lahendus: Olgu OM (11. joon.) tetraeedri kõrgus, $OC = r$ ümber kolmnurga ABC joonestatud ringi raadius, DEF — lõige; otsitava kauguse MN tähistame x-i kaudu. $\triangle ABC$ iga külg on $r\sqrt{3}$, siis on ta pindala $\frac{3r^2}{4}\sqrt{3}$, ja et kõrgus

$$MO = \sqrt{MC^2 - OC^2} = \sqrt{(r\sqrt{3})^2 - r^2} = r\sqrt{2},$$

siis on tetraeedri ruumala $V = \frac{1}{4}\ r^2\sqrt{3}\ \frac{r\sqrt{2}}{3} = \frac{r^3}{4}\sqrt{6}$. Tähistame püramiidi $MDEF$ ruumala V_1 kaudu; võrrandist

$\frac{V_1}{V} = \frac{MN^3}{MO^3} = \frac{x^3}{(r\sqrt{2})^3}$ saame: $V_1 = V \cdot \frac{x^3}{(r\sqrt{2})^3}$. Aga et tingimuse järele $V_1 = \frac{V}{2}$, siis $\frac{1}{2} = \frac{x^3}{(r\sqrt{2})^3}$ või: $x^3 = \frac{r^3\sqrt{8}}{2} = r^3\sqrt{2}$, kust $x = r\sqrt[6]{2}$.

267. Leida hulktahu ruumala, kui ta on piiratud kuue kolmnurgaga ja iga serv on b. V.: $36\sqrt{2}$.

268. Hulktahk, mille pindala on 27, on piiratud kuue võrdse võrdhaarse täisnurkse kolmnurgaga. Leida hulktahu ruumala. V.: 9.

269. Korrapärase tetraeedri tahkude keskpunktides asuvad teise korrapärase tetraeedri tipud. Kuidas suhtuvad nende pindalad ja ruumalad? V.: 1 : 9; 1 : 27.

§ 6. Tüvipüramiidid.

a) Lineaarosad.

270. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi küljeserv, kui selle tüvipüramiidi kõrgus on 7 ja põhjade küljed 10 ja 2. V.: 9.

271. Leida korrapärase 1) kolmnurkse, 2) nelinurkse, 3) kuusnurkse tüvipüramiidi kõrgus, kui selle tüvipüramiidi küljeserv on C ja põhjade küljed on: a (alumine) ja b (ülemine). V.: 1) $\sqrt{C^2 - \frac{1}{3}(a-b)^2}$; 2) $\sqrt{C^2 - \frac{1}{2}(a-b)^2}$; 3) $\sqrt{C^2 - (a-b)^2}$.

272. Korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi vähema põhja külg on 3, kõrgus — 4, küljeserv — 5. Leida suurema põhja külg. V.: 6.

273. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade küljed, kui tüvipüramiidi kõrgus on 63, apoteem 65 ja põhjade küljed suhtuvad nõnda kui 7 : 3. V.: 56 ja 24.

274. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi nurkjooned, kui selle tüvipüramiidi põhjade küljed on 2 ja 10 ja küljeserv — 9. V.: 11.

275. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 7, küljeserv — 9 ja nurkjoon — 11. Leida põhjade küljed. V.: 10 ja 2.

276. Suurema põhja külg korrapärases nelinurkses tüvipüramiidis on a, vähema põhja külg — b. Leida küljeserv, kui ta põhjaga moodustab 45^0 nurga. V.: $a—b$.

277. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 2 ja 6. Küljeserv moodustab suurema põhjaga 60^0 nurga. Leida tüvipüramiidi kõrgus. V.: 2.

278. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi vastasnurkjooned on kumbki 2 ja on vastamisi risti. Leida selle tüvipüramiidi kõrgus. V.: $\sqrt{2}$.

279. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus, kui selle tüvipüramiidi küljeserv on 7 ja apoteem 5. V.: 1.

280. Leida korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi apoteem, kui selle tüvipüramiidi kõrgus on 2 ja küljeserv 8. V.: 7.

281. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi suurema põhja külg on vähema põhja küljest 4 võrra suurem; kõrgus on 1. Leida küljeserv. V.: 3.

b) Tüvipüramiidi lõiked.

282. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 4, põhjade küljed aga 2 ja 8. Leida nurkjooneliste lõigete pindala. V.: $30 . \sqrt{2}$.

283. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade pindalad on B ja b; küljeserv moodustab alumise põhjaga 45^0 nurga. Leida nurkjoonelise lõike pindala. V.: $\frac{B—b}{2}$.

284. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi suurema põhja külg on a, vähema külg — b. Küljeserv moodustab põhjaga 45^0 nurga. Leida läbi küljeserva ja telje mineva lõike pindala. V.: $\frac{a^2—b^2}{4}$.

285. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi nurkjoonelise lõike pindala, kui selle tüvipüramiidi kõrgus on 4, nurkjoon aga 5. V.: 12.

286. Korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi kõrgus on 2 ja põhjade küljed 10 ja 1. Leida selle lõike pindala, mis läbi suurema põhja külje ja vähema põhja vastasseisva tipu läheb.

V.: 20.

287. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kesklõike[1]) pindala, kui selle tüvipüramiidi kõrgus on 1 ja vastasnurkjooned on vastamisi risti.

V.: $\frac{1}{2}$.

288. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kesklõike pindala, kui selle tüvipüramiidi kõrgus on 1 ja nurkjoon 3.

V.: 4.

289. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed suhtuvad kui 13 : 17; kesklõike ümbermõõt on 45. Leida põhjade ümbermõõdud.

V.: 39 ja 51.

290. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 162 ja 32. Kõrgus on jagatud kahte ossa, mis suhtuvad nõnda kui 3 : 2 (vähemast põhjast arvates), ja läbi jaotuspunkti on tüvipüramiid lõigatud põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga. Leida lõike pindala.

Lahendus: Otsitav pindala on x; täiendame tüvipüramiidi täispüramiidiks. Olgu O, O_1 ja O_2 kõrguse SO lõikepunktid alumise põhjaga, ülemise põhjaga ja lõikega. Siis $\overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2 = 162 : 32 = 81 : 16$, kust $SO : SO_1 = 9 : 4$; olgu $SO = 9k$, siis $SO_1 = 4k$; $OO_1 = 5k$; $OO_2 = 2k$; $SO_2 = 7k$; $x : 162 = \overline{SO_2}^2 : \overline{SO}^2 = (7k)^2 : (9k)^2$, kust $x = 98$.

291. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 9 ja 25. Leida kesklõike pindala.

Lahendus: Olgu otsitav pindala x; põhjade vastavad küljed suhtuvad nõnda kui 3 : 5; olgu need küljed $3k$ ja $5k$; siis võrdub otsitava lõike külg

$$\frac{3k+5k}{2} = 4k;\quad x : 9 = (4k)^2 : (3k)^2;\quad x = 16.$$

Teine lahenduseviis: täiendada tüvipüramiid täispüramiidiks (v. eelmine ülesanne).

---

1) Lõige, mis rööbik on põhjadega ja kõrguse keskkohast läbi läheb.

292. Tüvipüramiidi ülemise ja alumise põhja pindalad on 1 ja 9. Leida keskmise pindala. V.: 4.

293. Tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja pindalad on A ja B, keskmise pindala on aga M. Näidata, et

$$\sqrt{M}=\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}.$$

Tõestus: Tähistame keskmise ja põhjade vastavad küljed m, a ja b kaudu; siis $M:A:B=m^2:a^2:b^2$, kust $m:a:b=$ $=\sqrt{M}:\sqrt{A}:\sqrt{B}$, et aga $m=\frac{a+b}{2}$, siis $\sqrt{M}=\frac{\sqrt{A}+\sqrt{B}}{2}$.

294. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 12 ja 75; külje-serv on jagatud kolmeks võrdseks osaks, ja püramiid on läbi jaotuspunktide lõigatud põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinda-dega. Leida lõigete pindalad. V.: 27 ja 48.

295. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 1 ja 49; kõrgus on aga h. Kui kaugel vähemast põhjast peab lõikama tüvi-püramiidi põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga, et lõike-pindala oleks pool põhjade pindalade summast? V.: $\frac{2h}{3}$.

296. Tüvipüramiidi kõrgus on h ja põhjade pindalad — A ja B. Kui kaugel ülemisest põhjast peab püramiidi lõikama põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga, et lõike-pindala oleks põhjade pindalade keskmine võrdeline? V.: $h\frac{\sqrt[4]{B}}{\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}}$.

297. Tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja pindalad on a^2 ja b^2. Kuidas jagab kõrguse see lõige, mille pindala on põhjade pindalade keskmine võrdeline?

Lahendus: Olgu S täienduspüramiidi tipp; O, O_1 ja O_2 kõrguse SO lõikepunktid alumise ja ülemise põhjaga ja lõikega SO tähistame H kaudu; siis on $\frac{SO_1}{H}=\frac{b}{a}$, kust $SO_1=H\cdot\frac{b}{a}$; $\frac{SO_2}{H}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$, kust $SO_2=H.\sqrt{\frac{b}{a}}$; järjelikult: $O_1O_2=H\left(\sqrt{\frac{b}{a}}-\frac{b}{a}\right)$ ja $OO_2=H\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$; $\frac{OO_2}{O_1O_2}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

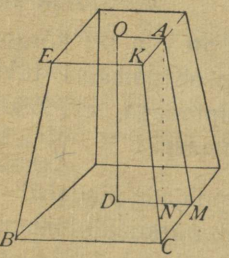
298. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 2 ja 8, kõrgus aga 4. Leida selle lõike pindala, mis ülemise põhja keskpunktist läbi läheb ja servaga rööbiti on. V.: 25.

299. Korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 2 ja 4. Teravad kahetahused nurgad on 60°-lised. Leida selle lõike pindala, mis läbi ülemise ja alumise põhja vastaskülgede läheb. V.: 26.

c) Tüvipüramiidi pindala.

300. Ruutpõhjaga tüvipüramiidi kõrgus on h, alumise põhja külg on a ja ülemise põhja külg — b. Leida tüvipüramiidi täis-pindala.

Lahendus: Nagu teada, võrdub tüvipüramiidi täis-pindala tema põhjade ümbermõõtude poolsumma ja apoteemi korrutisega + mõlema põhja pindalad. Antud tüvipüramiidi (12. joon.) alumise põhja ümbermõõt $= 4a$, ülemise põhja ümbermõõt $= 4b$. Tõmmates AN rööbiti kõrgusega OD, leiame, et apoteem



12. joonis.

$$AM = \sqrt{\overline{AN}^2 + \overline{NM}^2} = \sqrt{\overline{AN}^2 + (DM - DN)^2};$$

et aga $AN = OD = h$; $DM = \frac{a}{2}$;

$DN = OA = \frac{b}{2}$, siis $AM = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{h^2 + \frac{(a-b)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + (a-b)^2}$. Antud tüvipüramiidi alumise põhja pindala $= a^2$, ülemise põhja pindala — b^2; järjelikult võrdub antud tüvipüramiidi täispindala avaldusega:

$$\tfrac{1}{2}(4a + 4b) \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{4h^2 + (a-b)^2} + a^2 + b^2 = (a+b)\sqrt{4h^2 + (a-b)^2} + a^2 + b^2.$$

301. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi täispindala, teades, et selle tüvipüramiidi põhjade küljed on 8 ja 2 ja kõrgus on 4. V.: 168.

302. Leida korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi külje pindala, teades, et selle tüvipüramiidi põhjade küljed on 6 ja 12 ja kõrgus on 1. V.: 54.

303. Leida korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi külje pindala, teades, et selle tüvipüramiidi põhjade küljed on 4 ja 2 ja kõrgus on 1. V.: 36.

304. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 1, apoteem aga 2 ja nurkjoon on 3. Leida tüvipüramiidi külje pindala. V.: 16.

305. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus, kui selle tüvipüramiidi põhjade küljed on a ja b ja külje pindala võrdub põhjade pindalade summaga. V.: $\frac{ab}{a+b}$.

306. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade küljed, kui selle tüvipüramiidi apoteem on 12, küljeserv 13 ja külje pindala on 640. V.: 20 ja 10.

307. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade küljed, kui selle tüvipüramiidi kõrgus on 12, põhjade külgede vahe — 10, täis-pindala aga 512. V.: 12 ja 2.

308. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi külgtahk moodustab suurema põhjaga 60°-lise kahetahuse nurga; põhjade küljed on 6 ja 4. Leida selle tüvipüramiidi täis-pindala. V.: 92.

309. Korrapärase 1) kolmnurkse ja 2) kuusnurkse tüvipüramiidi külgtahk moodustab suurema põhjaga 30°-lise kahetahuse nurga; põhjade küljed on 4 ja 2. Leida külje pindala. V.: 1) 6; 2) 36.

310. Leida korrapärase kaheksanurkse tüvipüramiidi külje pindala, kui selle tüvipüramiidi põhjade kõige suuremad nurkjooned on $D = 4$ ja $d = 2$ ja külgtahu ja suurema põhja kaudu moodustatud nurk on 45°. V.: $D^2 - d^2 = 12$.

311. Korrapärase tüvipüramiidi suurema ja vähema põhja pindalad on vastavalt M ja N; suurem põhi moodustab külgtahkudega 60°-lised kahetahused nurgad. Leida külje pindala.

Juhatus: Tõmmata ristjooned vähema põhja tippudest suuremale põhjale. V.: 2 ($M-N$).

312. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 4 ja 2. Külgtahkudest moodustatud kahetahused nurgad on 120°. Leida külje pindala.

Juhatus: Täiendada tüvipüramiid täispüramiidiks.

V.: $12\sqrt{2}$.

313. Tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja pindalad on vastavalt A ja B. Leida selle põhjadega rööbiti tõmmatud lõike pindala, mis külje pindala poolitab. V.: $\frac{A+B}{2}$.

314. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed suhtuvad nõnda kui 3 : 11. Kuidas suhtuvad kesklõike läbi tekkinud külje-pindala osad? V.: 5 : 9.

315. Püramiidi põhja pindala on P, külje pindala aga S ja kõrgus h. Püramiid lõigati põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga, kusjuures tekkinud lõike pindala võrdub püramiidi külje pindalaga. Leida lõike kaugus püramiidi tipust.

V.: $h\sqrt{\frac{S}{P+S}}$.

316. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on a^2 ja b^2. Kuidas suhtuvad külje pindala osad, mis tekkinud põhjadega rööbiti tõmmatud tasapinna lõikumisel, kui selle lõike pindala on põhjade pindalade geomeetriline keskmine? V.: $a : b$.

317. Tüvipüramiidi põhjadeks on võrdkülgsed kolmnurgad, millede küljed on a ja b. Üks küljeserv — c on põhjaga risti. Leida selle tüvipüramiidi külje pindala.

V.: $\frac{a+b}{4}[4c+\sqrt{4c^2+3(a-b)^2}]$.

d) Tüvipüramiidi ruumala.

318. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi ruumala, kui selle tüvipüramiidi küljeserv on 3, põhjade küljed aga 5 ja 1. V.: $10\frac{1}{3}$.

319. Leida korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi ruumala, kui selle tüvipüramiidi küljeserv on 7, põhjade küljed aga 2 ja 1. V.: 42.

320. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi ruumala on 109, põhjade küljed aga 5 ja 7. Leida tüvipüramiidi nurkjoon. V.: 9.

321. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on B ja b, ruumala aga V. Leida sellest tüvipüramiidist täiendatud täispüramiidi ruumala. V.: $\frac{V \cdot B\sqrt{B}}{B\sqrt{B} - b\sqrt{b}}$.

322. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 245 m² ja 80 m², täispüramiidi kõrgus on 35 m. Leida tüvipüramiidi ruumala. V.: 2325 m³.

323. Leida tüvipüramiidi kõrgus, kui selle tüvipüramiidi ruumala on 13 m³, põhjade pindalad aga 2 m² ja 5 m². V.: $7 - \sqrt{10} = \sim 3{,}8$ m.

324. Tüvipüramiidi kõrgus on 15 m, ruumala aga 475 m³. Leida selle tüvipüramiidi põhjade pindalad, kui need pindalad suhtuvad nõnda kui 4 : 9. V.: 20 m² ja 45 m².

325. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi ruumala on 430 m³, kõrgus — 10 m ja ühe põhja külg — 8 m. Leida teise põhja külg. V.: 5 m.

326. Leida tüvipüramiidi ühe põhja pindala, kui teise põhja pindala on 18 m², kõrgus — 6 m ja ruumala — 76 m³. V.: 8 m².

327. Leida tüvipüramiidi põhjade pindalad, kui nende pindalade vahe on 6 m², tüvipüramiidi kõrgus — 9 m ja ruumala — 42 m³. V.: 2 m² ja 8 m².

328. Leida tüvipüramiidi põhjade pindalad, kui selle tüvipüramiidi ruumala on 1720 m³, kõrgus — 20 m ja põhjade vastavad küljed suhtuvad nõnda kui 5 : 8. V.: 50 m² ja 128 m².

329. Leida korrapärase 1) kolmnurkse, 2) nelinurkse ja 3) kuusnurkse tüvipüramiidi ruumala, teades, et küljeserv on l ja põhjade küljed on a ja b. V.: 1) $\frac{1}{12}(a^2+ab+b^2)\sqrt{3l^2-(a-b)^2}$; 2) $\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-\frac{1}{2}(a-b)^2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2+ab+b^2)\sqrt{l^2-(a-b)^2}$.

330. Leida korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi ruumala, kui selle tüvipüramiidi põhjade küljed on 30 ja 20 ja külje pindala võrdub põhjade pindalade summaga. V.: 1900.

331. Korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on a ja b; küljeserv moodustab põhjaga 60°-lise nurga. Leida selle tüvipüramiidi ruumala. V.: $\frac{3}{2}(a^3-b^3)$.

332. Korrapärase 1) kolmnurkse, 2) nelinurkse, 3) kuusnurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on a ja b; külgtahud moodustavad põhjaga 45°-lised kahetahused nurgad. Leida ruumala. V.: 1) $\frac{a^3-b^3}{24}$; 2) $\frac{a^3-b^3}{6}$; 3) $\frac{3}{4}(a^3-b^3)$.

333. Leida korrapärase kaksteistnurkse tüvipüramiidi ruumala, kui selle tüvipüramiidi põhjade raadiused on R ja r ja küljeserv moodustab põhjaga 45°-lise nurga. V.: R^3-r^3.

334. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed on $a=3$ ja $b=2$. Kuidas suhtuvad kesklõike läbi tekkinud tüvipüramiidi ruumala osad? V.: $\frac{4ab+7b^2+a^2}{4ab+7a^2+b^2}=\frac{61}{91}$.

335. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed suhtuvad nõnda kui 5 : 2. Kõrgus on kolme võrdsesse ossa jagatud ja tüvipüramiid läbi jaotuspunktide lõigatud põhjadega rööbiti tõmmatud tasapindadega. Kuidas suhtuvad ruumala osad? V.: 19 : 37 : 61.

336. Tüvipüramiidi kõrgus on h, põhjade pindalad aga A ja B. Kõrgus on jagatud kolme võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud põhjaga rööbiti tasapinnad. Leida tüvipüramiidi keskmise osa ruumala.

V.: $\frac{h}{81}[7A+7B+13\sqrt{AB}]$.

337. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus on 9, põhjade küljed aga 6 ja 3. Tüvipüramiid on lõigatud põhjadega rööbiti tõmmatud tasapinnaga läbi nurkjoonte lõikepunkti. Leida saadud osade ruumalad.

Juhatus: Teades tüvipüramiidi põhjade nurkjooned, leida lõike nurkjoon, mis on $4\sqrt{2}$. V.: 37 ja 152.

338. Tüvipüramiidi kõrgus on h; alumise ja ülemise põhjade vastavad küljed suhtuvad nõnda kui $m : n$; põhjadega rööbiti tõmmatud tasapind poolitab ruumala. Leida selle tasapinna kaugus tüvipüramiidi alumisest põhjast.

Lahendus: Olgu otsitav kaugus x. Täiendame tüvipüramiidi täispüramiidiks S. Olgu O, O_1 ja O_2 kõrguse SO lõikepunktid alumise põhjaga, ülemise põhjaga ja lõike-tasapinnaga; siis leiame sarnastest $\triangle$-dest kergesti, et $SO = \frac{hm}{m-n}$. Tähistame kolm püramiidi: alumisest põhjast tipuni — V-ga; ülemisest põhjast tipuni — V_1-ga; lõikest tipuni — V_2-ga; $V : V_1 = m^3 : n^3$, olgu $V = m^3a$, siis $V_1 = n^3a$, tüvipür. $= (m^3 - n^3)a$; $V_2 = m^3 - \frac{(m^3-n^3)a}{2} = \frac{m^3+n^3}{2}a$.

$\left(\frac{SO_2}{SO}\right)^3 = \frac{V_2}{V}$ või: $\frac{SO_2}{SO} = \sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}$, kust $SO_2 = \frac{SO}{m}\sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}} = \frac{h}{m-n}\sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}$; $x = SO - SO_2 = \frac{h}{m-n}\left[m^3 - \sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}\right]$.

V.: $\frac{h}{m-n}\left[m^3 - \sqrt[3]{\frac{m^3+n^3}{2}}\right]$.

339. Tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja pindalad on vastavalt a^2 ja b^2. Leida põhjadega rööbiti tõmmatud lõike pindala, mis tüvipüramiidi ruumala poolitab.

V.: $\sqrt[3]{\frac{1}{4}(a^3+b^3)^2}$.

340. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on a^2 ja b^2. Kuidas suhtuvad põhjadega rööbiti tõmmatud lõike läbi tekkinud ruumala osad, kui lõike pindala on põhjade pindalade keskmine võrdeline? V.: $\sqrt{a^3} : \sqrt{b^3}$.

341. Tüvipüramiidi põhjade vastavad küljed suhtuvad nõnda kui 1 : 4; põhjadega rööbiti tõmmatud tasapind jagab külje pindala osadeks, mis suhtuvad nõnda kui 1 : 4. Kuidas suhtuvad ruumala osad? V.: 1 : 8.

342. Korrapärane nelinurkne tüvipüramiid on jagatud kolme ossa tasapindadega, mis läbi ülemise põhja vastaskülgede

tõmmatud ja mis alumise põhjaga risti on. Leida iga osa ruumala, kui tüvipüramiidi kõrgus on 4, aga põhjade küljed on 2 ja 5. V.: Keskosa 28, küljeosa 12.

343. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi küljeserv moodustab põhjaga 60^0-lise nurga; tüvipüramiidi kõrgus on 6, kuna alumise põhja külg on ülemise põhja küljest 3 korda suurem. Alumise põhja tipust on tõmmatud tasapind, mis vastaskülje servaga risti on. Kuidas jagub tüvipüramiidi ruumala?

Juhatus: Täiendada tüvipüramiid täispüramiidiks; leida lõike pindala, mis on 54; leida püramiidi osa ülalpool lõiget (54); püramiidi ruumala on 162. Alumise osa ruumala on 108. V.: 48 ja 108.

§ 7. Tüviprismad.

344. Nelinurkse tüviprisma kolm küljeserva on: 3; 5 ja 9. Leida neljas küljeserv.

Juhatus: Ühendada tüviprisma põhja ja mitteröövbiku lõike nurkjoonte lõikepunktid. V.: 7.

345. Püst-tüviprisma põhjaks on kolmnurk, mille küljed on 5; 5 ja 6; küljeservad on 8; 10 ja 12. Leida tüviprisma ruumala. V.: 120.

346. Püst-tüviprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk ABC, mille kaatet $AB = 15$, kaatet $BC = 20$; küljeservad BB_1 ja CC_1 on kumbki 10, aga $AA_1 = 18$. Leida selle tüviprisma ruumala ja täis-pindala. V.: 1900 ja 1080.

347. Ruutpõhjaga püst-tüviprisma põhja külg on a. kuna kaks vastas-küljeserva kumbki on b. Leida selle tüviprisma ruumala ja külje pindala. V.: a^2b ja $4ab$.

348. Tüviprisma põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külg on 2; küljeservad on 4; 6 ja 8 ja moodustavad põhjaga 60^0-lise nurga. Leida ruumala. V.: 9.

349. Tõestada, et kolmnurkse tüviprisma ruumala võrdub ristlõike pindala ja kolme serva aritmeetilise keskmise korrutisega.

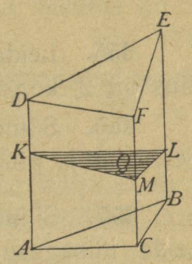
Tõestus: Tähistame Q kaudu ristlõike KLM (13. joon.).

$KLMFED$ ruumala $= \frac{Q}{3}[KD + LE + MF]$;

$KLMCBA$ ruumala $= \frac{Q}{3}[KA + LB + MC]$;

liites leiame:

otsitav ruumala $= \frac{Q}{3}[AD + BE + CF]$.



13. joon.

350. Kolmnurkse tüviprisma küljeservad on 17; 25 ja 30, aga nende kaugus üksteisest on 18; 20 ja 34. Leida selle tüviprisma ruumala. V.: 3456.

351. Kolmnurkse kald-tüviprisma küljeservad on a; b ja c, kuna nende kaugus üksteisest on d. Leida selle tüviprisma külje pindala ja ruumala.

V.: $(a+b+c)d$ ja $\frac{1}{12}(a+b+c)d^2\sqrt{3}$.

352. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhja külg on a, kõrgus aga h. Püramiid on lõigatud läbi kõrguse keskkoha külgtahuga rööbiti tõmmatud tasapinnaga. Missugusteks osadeks jagub püramiidi ruumala? V.: $\frac{7}{12\,8}a^2h$ ja $\frac{7}{3\,8\,4}a^2h$.

353. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi alumise ja ülemise põhja küljed on a ja b, kõrgus aga h. Tüvipüramiid on lõigatud läbi põhjade vastaskülgede tõmmatud tasapinnaga. Leida ruumala osad.

Juhatus: Kumbki otsitavatest osadest on kolmnurkne tüviprisma. V.: $\frac{ah}{6}(2a+b)$ ja $\frac{bh}{6}(2b+a)$.

354. Korrapärane kuusnurkne püramiid on lõigatud külgtahuga rööbiti tõmmatud tasapinnaga läbi põhja keskpunkti. Kuidas suhtuvad püramiidi ruumala osad?

Juhatus: Tähistame põhja külje a-ga ja püramiidi kõrguse H-ga, siis on vähema osa ruumala: $\frac{7}{4\,8}a^3H\sqrt{3}$; leides terve ruumala, mis on $\frac{a^2H\sqrt{3}}{2}$, leiame nende suhte $\frac{7}{2\,4}$; järjelikult suhtub vähem osa suuremasse nõnda kui 7 : 17.

V.: 7 : 17.

§ 8. Silindrid.

355. Leida silindri telglõike[1]) nurkjoon, kui põhja raadius on 2, kõrgus aga 3. V.: 5.

356. Silindri telglõige on ruut, mille pindala on Q. Leida põhja pindala. V.: $\pi\frac{Q}{4}$.

357. Silindri kõrgus on 6 sm, põhja raadius aga 5 sm. Leida niisuguse lõike pindala, mis teljega 4 sm kaugusel rööbiti on. V.: 36 sm^2.

358. Silindri kõrgus on 8, põhja raadius 5. See silinder on teljega rööbiti tõmmatud tasapinnaga nii läbi lõigatud, et lõikes ruut tekkis. Leida lõike kaugus teljest. V.: 3.

359. Püstküliku küljed on a ja b. Leida selle püstküliku pöördumisel ümber külje a tekkinud silindri külje pindala. V.: $2\pi ab$.

360. Leida silindri täis-pindala, kui silindri kõrgus võrdub põhja läbimõõduga ja põhja raadius on R. V.: $6\pi R^2$.

361. Leida silindri külje pindala, teades, et selle silindri põhja läbimõõt on 1, kõrgus aga võrdub põhja ringjoone pikkusega. V.: π^2.

362. Millega võrdub silindri külje pindala ja telglõike pindala suhe? V.: π.

363. Niisuguse silindri kõrgus, mille telglõige on ruut, on h. Leida külje pindala. V.: πh^2.

364. Silindri põhja raadius on R; külje pindala võrdub põhjade pindalade summaga. Leida selle silindri kõrgus. V.: R.

365. Silindri põhja raadius on 2, kõrgus aga 7. Leida niisuguse ringi raadius, mille pindala võrdub silindri täispindalaga. V.: 6.

366. Leida silindri külje pindala, kui telglõike pindala on Q. V.: πQ.

---

1) Lõige, mille tasapinnal asub telg kõigi oma punktidega.

367. Leida silindri ruumala, kui põhja raadius on 5, kõrgus aga 4. ($\pi = 3{,}14$). V.: 314.

368. Leida keha ruumala, kui see keha on saadud ruudu pöördumisel ümber külje a. V.: πa^3.

369. Püstküliku pindala on 320 sm^2, keha ruumala aga, mis selle püstküliku pöördumisel ümber ühe külje saadud, on 6400 π sm^2. Leida püstküliku küljed ja näidata, missugune neist oli teljeks.

V.: 20 sm ja 16 sm, vähem oli teljeks.

370. Silindri põhja ringjoon on 52, telglõike pindala aga 480. Leida silindri ruumala. V.: 6240.

371. Silindri kõrgus on 36, täis-pindala aga 5200. Leida ruumala. V.: 28718.

372. Leida silindri ruumala, kui selle silindri kõrgus suhtub põhja läbimõõdusse nõnda kui 5 : 4, täis-pindala aga on 28 π. V.: 20 π.

373. Leida silindri ruumala, kui selle silindri telglõige on ruut, mille nurkjoon on 4. V.: $4\pi\sqrt{2}$.

374. Silindri külje pindala on S, ruumala aga V. Leida silindri põhja raadius. V.: $\frac{2V}{S}$.

375. Leida niisuguse silindri ruumala, mille külje pindala tasapinnale laotatuna annab ruudu, mille külg on a. V.: $\frac{a^3}{4\pi}$.

376. Leida niisuguse silindri täis-pindala ja ruumala, mis on ümber kuubi joonestatud, teades, et kuubi serv on a. (Kuubi tipud asuvad silindri põhjade ringjoontel.)

V.: $\pi a^2(\sqrt{2}+1)$; $\frac{\pi a^3}{2}$.

377. Silindri sisse on joonestatud korrapärane kuusnurkne prisma. Leida silindri ja prisma külje-pindalade suhe.

V.: $\pi : 3$.

378. Leida niisuguse silindri ruumala, mis on korrapärase kuusnurkse prisma sisse joonestatud, teades, et prisma iga serv on a. V.: $\frac{3\pi a^3}{4}$.

379. Silindri sisse on joonestatud korrapärane kolmnurkne prisma, viimase sisse aga silinder; telg on neil ühine. Leida silindrite ruumalade suhe. V.: 4.

380. Silindri ruudukujulise telglõike nurkjoon on a. Leida selle silindri sisse joonestatud korrapärase kaheksanurkse prisma ruumala. V.: $\frac{a^3}{4}$.

381. Silindri sisse on joonestatud korrapärane kaksteistnurkne prisma. Leida silindri ja prisma ruumalade suhe. V.: $\pi : 3$.

382. Püstprisma põhjaks on täisnurkne kolmnurk; selle prisma sisse on joonestatud silinder, kuna teine silinder prisma ümber on joonestatud. Silindrite külje pindalad on 2π ja 5π. Leida prisma külje pindala. V.: 12.

383. Silindri kõrgus on 6, põhja raadius aga 5. Joonlõik, mille pikkus on 10, asub otsapunktidega silindri põhjade ringjoontel. Leida selle joonlõigu kõige lühem kaugus silindri teljest. V.: 3.

384. Silindri põhja raadius on R. Silinder on lõigatud põhjaga ebaröödbiku tasapinnaga, kusjuures telje alumine osa on d. Leida silindri alumise osa 1) külje pindala ja 2) ruumala.

Juhatus: Läbi lõike ja telje lõikepunkti tõmmata põhjaga rööbiti tasapind. V.: 1) $2\pi Rd$; 2) $\pi R^2 d$.

385. Püstkülik, mille küljed on a ja b, pöördub esiteks külje a ümber, siis külje b ümber. Kuidas suhtuvad neil pöördumistel saadud kehade ruum- ja pindalad?

V.: $V_a : V_b = b : a$ ja $S_a : S_b = b : a$.

386. Püstküliku pöördumisel järgemööda ümber isesuguste külgede on saadud kaks keha, millede ruumalad on V ja F. Leida püstküliku nurkjoon. V.: $\frac{\sqrt{V^2 + F^2}}{\sqrt[3]{\pi VF}}$.

387. Silindrilise toru pikkus on a; väline raadius — R ja seina paksus — c. Leida selle toru täis-pindala ja seina ruumala. V.: $2\pi(2R - c)(a + c)$; $\pi(2R - c)ac$.

388. Silindrilise toru seina ruumala on $15\,\pi$ sm^3, toru pikkus on 12 sm ja sisemine raadius 1 sm. Leida selle toru seina paksus. V.: $\frac{1}{2}$ sm.

§ 9. Koonused.

389. Leida koonuse moodustaja, kui koonuse põhja raadius on 3, kõrgus aga 4. V.: 5.

390. Leida koonuse kõrgus, teades, et moodustaja l sünnitab põhjaga 30^0 nurga. V.: $\frac{1}{2}\,l$.

391. Koonuse telglõige on täisnurkne kolmnurk. Leida selle kolmnurga pindala, kui koonuse põhja raadius on R. V.: R^2.

392. Koonuse põhja pindala suhe telglõike pindalasse on π. Missuguse nurga sünnitab selle koonuse moodustaja põhjaga? V.: 45^0.

393. Koonus on kõrguse keskpunktist põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga läbi lõigatud. Leida lõike pindala, kui koonuse põhja raadius on R. V.: $\frac{\pi R^2}{4}$.

394. Koonuse kõrgus on h. Kui kaugel tipust on tarvis koonust lõigata põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga, et lõike pindala oleks pool põhja pindalast? V.: $\frac{h}{\sqrt{2}}$.

395. Koonuse kõrgus on jagatud n võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud põhjaga rööbikud tasapinnad. Leida lõigete pindalad, kui põhja raadius on R.

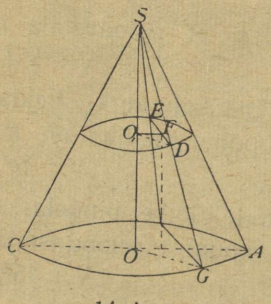
V.: $\frac{\pi R^2}{n^2}$; $\frac{\pi R^2}{n^2} \cdot 4$; $\frac{\pi R^2}{n^2} \cdot 9$ ja n. e.

396. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, põhja raadius aga R. See koonus on lõigatud tasapinnaga läbi kahe moodustaja, mis isekeskis 30^0 nurga sünnitavad. Leida lõike pindala. V.: R^2.

397. Koonuse kõrgus on h Moodustaja ja kõrguse vaheline nurk on 60^0. Leida niisuguse lõike pindala, mis läbi kahe isekeskis risti oleva moodustaja on tõmmatud. V.: $2h^2$.

398. Koonuse moodustaja on 13, kõrgus aga 12. Seda koonust lõikab põhjaga rööbiti tõmmatud sirge, mille kaugus põhjast on 6, kõrgusest aga 2. Leida sirge lõik, mis asub koonuses.

Lahendus: Olgu SAC (14. joon.) antud koonus, DE — otsitav joonlõik, DE kaugus põhjast $OO_1 = 6$, $O_1F = 2$, $SG = 13$, $SO = 12$, $GO = 5$. Et $SO_1 = \frac{1}{2}SO$, siis $DO_1 = \frac{1}{2}GO = \frac{5}{2}$; täisnurksest $\triangle O_1DF$ saame: $DF = 1\frac{1}{2}$; otsitav joonlõik $DE = 3$.



14. joon.

399. Leida koonuse külje pindala, kui ta kõrgus on 6, põhja raadius aga 8. V.: 80π.

400. Leida koonuse täis-pindala, kui ta kõrgus on 4, moodustaja aga 5. V.: 24π.

401. Koonuse põhja pindala on 9π, külje pindala aga 15π. Leida koonuse kõrgus. V.: 4.

402. Leida koonuse kõrgus, kui ta moodustaja ja põhja raadius suhtuvad nõnda kui $m : n$ ja täis-pindala on S.

V.: $\sqrt{\frac{S(m-n)}{\pi n}}$.

403. Koonuse külje pindala on põhja pindalast kaks korda suurem. Leida moodustaja ja põhja kaudu sünnitatud nurk. V.: 60^0.

404. Koonuse moodustaja on l, põhja raadius aga r. Kui kaugel tipust peab seda koonust lõikama põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga, et äralõigatud koonuse täis-pindala võrduks antud koonuse külje pindalaga. V.: $\sqrt{l(l-r)}$.

405. Leida koonuse ruumala, kui ta kõrgus on 3, moodustaja aga 5. V.: 16π.

406. Leida koonuse ruumala, kui ta moodustaja on l ja sünnitab põhjaga 30^0-lise nurga. V.: $\frac{1}{8}\pi l^3$.

407. Koonuse põhja raadius on r, telglõike pindala aga Q. Leida ruumala.

V.: $\frac{\pi r Q}{3}$.

408. Koonuse telglõige on täisnurkne kolmnurk, mille pindala on 9. Leida koonuse ruumala. V.: 9π.

409. Koonuse põhja pindala on 9π, täis-pindala aga $24\ \pi$. Leida ruumala. V.: 12π.

410. Leida koonuse täis-pindala, kui ta kõrgus on 15, ruumala aga 320π. V.: 200π.

411. Leida koonuse ruumala, kui ta kõrgus on 6, külje pindala aga 24π. V.: 24π.

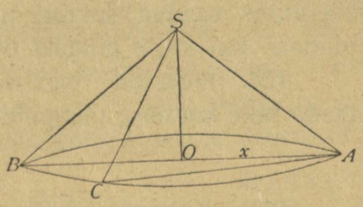
412. Koonuse kõrgus ja moodustaja suhtuvad nõnda kui 4 : 5, ruumala on 96π. Leida koonuse täis-pindala. V.: 96π.

413. Leida koonuse ruumala, kui ta kõrgus on 1 ja telglõike nurk tipu juures on 120^0. V.: π.

414. Leida koonuse põhja raadius, kui selle koonuse telglõike pindala on Q, ruumala aga V. V.: $\frac{3V}{\pi Q}$.

415. Võrdhaarne kolmnurk pöördub oma kõrguse ümber. Leida selle kolmnurga küljed, kui ta ümbermõõt on 30, pööramisel saadud keha täis-pindala aga 60π. V.: Alus 8, külg 11.

416. Koonuse ruumala on V; kõrgus on jagatud kolme võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud põhjaga rööbikud tasapinnad. Leida keskmise osa ruumala. V.: $\frac{7}{27}\ V$.



15. joon.

417. Koonuse kõrgus on h. Kaks vastamisi risti tõmmatud moodustajat jagavad koonuse külje pindala kahte ossa, mis suhtuvad nõnda kui 1 : 2. Leida koonuse ruumala.

Juhatus: Olgu koonuse põhja raadius x (15. joon.). $\sphericalangle AC = 120^0$, kõõl $AC = x\sqrt{3}$; $SA = \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $AO^2 + SO^2 = SA^2$ ehk $x^2 + h^2 = \frac{3}{2}\ x^2$, kust leiame x-i. V.: $\frac{2}{3}\ \pi h^3$.

418. Koonus on lõigatud tasapinnaga läbi tipu, kusjuures külje pindala saadud osad suhtuvad nõnda kui 1 : 3. Kuidas suhtuvad ruumala osad? ($\pi = \frac{22}{7}$). V.: 1 : 10.

419. Koonuse kõrgus on 4, põhja raadius aga 3. Kui koonuse külje pindala tasapinnale laotada, siis saame sektori. Leida sektori nurk antud juhusel. V.: 216°.

420. Koonuse moodustaja on l, põhja raadius R. Koonuse külje pindala tasapinnale laotatuna moodustab sektori. Leida selle sektori nurk. V.: $\frac{R}{l} \cdot 360°$.

421. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk; selle koonuse külje pindala on tasapinnale laotatud. Leida laotise nurk. V.: 180°.

422. Poolring on keeratud koonuspinnaks. Leida koonuse moodustaja ja kõrguse vaheline nurk. V.: 30°.

423. Sektori raadius on 3, ta nurk aga 120°. See sektor on keeratud koonuspinnaks. Leida koonuse põhja raadius. V.: 1.

424. Koonuse külje pindala on 80; laotise nurk on 112° 30′. Leida koonuse põhja pindala. V.: 25.

425. Koonuse külje pindala on laotatud tasapinnale, kusjuures saadud sektori nurk on 36°. Leida koonuse täispindala, kui külje pindala on 10. V.: 11.

426. Veerand ringi on kokku keeratud koonuspinnaks. Leida selle koonuse täis-pindala, kui ta telglõike pindala on M. V.: $\frac{\pi M \sqrt{15}}{3}$.

427. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, silindri telglõige aga ruut. Kuidas suhtuvad koonuse ja silindri külje-pindalad, kui neil on ühine kõrgus? V.: 2 : 3.

428. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, silindri telglõige aga ruut. Kuidas suhtuvad koonuse ja silindri ruumalad, kui nende täis-pindalad on võrdsed? V.: $\sqrt{2} : \sqrt{3}$.

429. Koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, silindri telglõige aga ruut. Kuidas suhtuvad koonuse ja silindri täis-pindalad, kui nende ruumalad on võrdsed? V.: $\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{2}$.

430. Koonuse ümber on joonestatud korrapärane nelinurkne püramiid. Kuidas suhtuvad koonuse ja püramiidi 1) külje pindalad; 2) täis-pindalad ja 3) ruumalad?

V.: 1) $\pi : 4$ (kõik juhused).

431. Koonuse põhja raadius on 3, kõrgus aga 12. Selle koonuse sisse on joonestatud niisugune silinder, mille telglõige on ruut. (Silindri põhi asub koonuse põhjal.) Leida silindri kõrgus. V.: 4.

432. Leida niisuguse koonuse ruumala ja külje pindala, mis on korrapärase tetraeedri sisse joonestatud, kui tetraeedri serv on a. $\frac{\pi a^3}{36}\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\frac{\pi a^2}{4}$.

433. Koonuse põhja raadius on 1, kõrgus ka 1. Leida selle koonuse sisse joonestatud kuubi serv. (Kuubi põhi asub koonuse põhjal.) V.: $2-\sqrt{2}$.

434. Koonuse põhja raadius on R, kõrgus — H. Selle koonuse sisse on joonestatud korrapärane kolmnurkne prisma, mille külgtahud on ruudud. Leida selle prisma serv.

V.: $x = \frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$.

(Kui koonuse telglõige on võrdkülgne kolmnurk, siis $x = \frac{H}{2}$.)

435. Kahel koonusel on ühine kõrgus ja rööbikud põhjad, millede raadiused on R ja r. Leida selle ringjoone pikkus, mida mööda nende koonuste külje pindalad lõikuvad.

V.: $2\pi\frac{Rr}{R+r}$.

436. Võrdkülgne $\triangle$ pöördub ümber oma külje a. Leida pöördumisel saadud keha pindala ja ruumala.

V.: $\pi a\sqrt{3}$ ja $\frac{\pi a^3}{4}$.

437. Kolmnurga alus on a, kõrgus — h. Leida selle kolmnurga aluse ümber pöördumisel saadud keha ruumala.

V.: $\frac{1}{3}\pi h^2 . a$.

438. Võrdhaarne täisnurkne $\triangle$ pöördub ümber hüpotenuusi a. Leida pöördkeha ruumala. V.: $\frac{1}{12}\pi a^3$.

439. Võrdhaarse $\triangle$-ga alus on 8, kõrgus aga 5. Leida selle keha pindala ja ruumala, mis saadud kolmnurga pöördumisel ümber külje. V.: $62\frac{2}{5}\pi$; $38\frac{2}{5}\pi$.

440. Kolmnurga alus on 14, küljed aga 13 ja 15. Kolmnurk pöördub aluse ümber. Leida pöördkeha pindala ja ruumala. V.: 1056; 2112.

441. Kolmnurga küljed on 8 ja 15, nende külgede moodustatud nurk on 60^0. Kolmnurk pöördub ümber suurema neist kahest küljest. Leida pöördkeha ruumala ja pindala. V.: 240π ja $84\pi\sqrt{3}$.

442. Tõestada, et nende kehade ruumalad, mis saadud kolmnurga pöördumisel järjestikku ümber iga külje, on vastuvõrdelised nende külgedega.

Juhatus: Kui kolmnurk pöördub külje a ümber, siis $V_a = \frac{4}{3}\pi\frac{Q^2}{a}$, kus Q on kolmnurga pindala. $V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

§ 10. Tüvikoonused.

443. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 3 ja 6, kõrgus aga 4 Leida moodustaja. V.: 5.

444. Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r. Moodustaja sünnitab põhjaga 45^0 nurga. Leida kõrgus V.: $R—r$.

445. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 11 ja 16, moodustaja aga 13. Leida kaugus ülemise põhja keskpunktist alumise põhja ringjooneni. V.: 20.

446. Leida tüvikoonuse moodustaja, kui viimane sünnitab põhjaga 30^0 nurga ja tüvikoonuse kõrgus on h. V.: $2h$.

447. Tüvikoonuse moodustaja on $2a$; moodustaja ja põhja vaheline nurk on 60^0. Leida selle koonuse põhjade raadiused, kui üks neist on kaks korda teisest suurem.

V.: a; $2a$.

448. Leida tüvikoonuse telglõike pindala, kui selle tüvikoonuse põhjade raadiused on 3 ja 7, moodustaja aga 5.

V.: 30.

449. Tüvikoonus on kõrguse keskkohast põhjadega rööbiti tõmmatud tasapinnaga läbi lõigatud. Leida lõike pindala, kui tüvikoonuse põhjade raadiused on 4 ja 16. V.: 9.

450. Tüvikoonuse põhjade pindalad on 4 ja 25. Kõrgus on jagatud kolme võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud põhjadega rööbikud tasapinnad. Leida lõigete pindalad. V.: 9; 16.

451. Tüvikoonuse põhjade pindalad on 1 ja 49. Rööplõike pindala on pool põhjade pindalade summast. Missugusteks osadeks jagab see lõige kõrguse h? V.: $\frac{h}{3}$ ja $\frac{2h}{3}$.

452. Leida tüvikoonuse külje pindala, kui selle tüvikoonuse kõrgus on 4, põhjade raadiused aga 2 ja 5.
V.: 35π.

453. Tüvikoonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on 60^0, põhjade raadiused aga 2 ja 3. Leida täis-pindala.
V.: 23π.

454. Tüvikoonuse täis-pindala on 572π, põhjade raadiused aga 6 ja 14. Leida kõrgus. V.: 15.

455. Tüvikoonuse külje pindala on $2600\ \pi$, moodustaja 65, kõrgus aga 63. Leida põhjade raadiused. V.: 28 ja 12.

456. Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r; külje pindala võrdub põhjade pindalade summaga. Leida telglõike pindala. V.: $2Rr$.

457. Tüvikoonuse põhjade raadiused ja moodustaja suhtuvad nõnda kui 1 : 4 : 5; kõrgus on 8. Leida külje pindala ($\pi = 3{,}14$). V.: 314.

458. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 4 ja 16, kõrgus aga 9. Kõrgus on jagatud kolme võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud põhjadega rööbikud tasapinnad. Kuidas jagub tüvikoonuse külje pindala?
V.: 60 π; 100 π; 140 π.

459. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 1 ja 7, kõrgus aga 6. Leida alumise põhja kaugus sellest tasapinnast, mis on põhjadega rööbiti tõmmatud ja poolitab külje pindala. V.: 2.

460. Tüvikoonuse külje pindala suhe telglõike pindalasse on 2π. Leida moodustaja ja põhja vaheline nurk. V.: 30^0.

461. Leida tüvikoonuse ruumala, kui ta moodustaja on 29, põhjade raadiused aga 5 ja 25. V.: 17034,5.

462. Tüvikoonuse ruumala on 584 π, põhjade raadiused aga 7 ja 10. Leida kõrgus. V.: 8.

463. Leida tüvikoonuse ruumala, kui ta põhjade raadiused on R ja r ja moodustaja sünnitab põhjaga 45^0 nurga. V.: $\frac{\pi}{3}(R^3 - r^3)$.

464. Tüvikoonuse ruumala on 248 π, kõrgus — 8 ja ühe põhja raadius — 4. Leida teise põhja raadius. V.: 7.

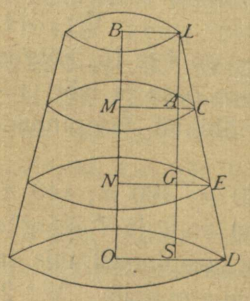
465. Leida tüvikoonuse põhjade raadiused ja moodustaja, kui teada on, et nad suhtuvad nõnda kui 4 : 11 : 25 ja kui tüvikoonuse ruumala on 181 π. V.: 2; $5\frac{1}{2}$; $12\frac{1}{2}$.

466. Tüvikoonuse ühe põhja raadius on kaks korda teise põhja raadiusest suurem; külje pindala võrdub põhjade pindalade summaga, telglõike pindala on aga 36. Leida ruumala. V.: 84π.

467. Tüvikoonuse ruumala on 52, kuna alumise põhja pindala on ülemise põhja pindalast 9 korda suurem. Tüvikoonus on täiendatud täiskoonuseks. Leida täiskoonuse ruumala. V.: 54.

468. Tüvikoonuse ruumala on 2580 π, kõrgus aga, mis $^3/_8$ täiskoonuse kõrgusest moodustab, on 15. Leida põhjade raadiused. V.: 10 ja 16.

469. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 2 ja 5, kõrgus aga 9; kõrgus on jagatud kolme võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud põhjadega rööbikud tasapinnad. Missugusteks osadeks jagavad need tasapinnad ruumala? V.: 19π, 37π, 61π.



16. joon.

Lahendus: Et $BM = MN = NO = 3$ (16. joon.) ja $OD = 5$, $BL = 2$, siis on vaja leida MC ja NE. Olgu $MC = x$ ja $NE = y$. Tõmmates $LS \parallel BO$ leiame sarnastest kolmnurkadest:

1) $\frac{AC}{SD} = \frac{LA}{LS}$ või: $\frac{x-2}{5-2} = \frac{1}{3}$, kust $x = 3$.

2) $\frac{GE}{SD} = \frac{LG}{LS}$ või $\frac{y-2}{5-2} = \frac{2}{3}$, kust $y = 4$.

Nüüd leiame ruumala osad valemi järele:

$V_1 = \frac{\pi H}{3}(R^2 + y^2 + Ry) = 61\pi$ jne.

470. Tüvikoonuse ühe põhja raadius on teise põhja raadiusest kaks korda suurem; tüvikoonus on lõigatud läbi kõrguse keskpunkti põhjadega rööbiti tõmmatud tasapinnaga. Kuidas suhtuvad külje pindala ja ruumala saadud osad isekeskis? V.: 1) 5:7; 2) 19:37.

471. Tüvikoonuse ühe põhja raadius on neli korda teise põhja raadiusest suurem; kõrgus on jagatud kolme võrdsesse ossa ja läbi jaotuspunktide on tõmmatud põhjadega rööbikud tasapinnad. Kuidas suhtuvad ruumala saadud osad?

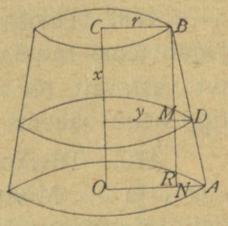
Juhatus: Täiendada tüvikoonus täiskoonuseks, siis saab neli koonust; nende ruumalad suhtuvad nõnda kui kõrguste kuubid. V.: 7:19:37.

472. Tüvikoonuse kõrgus on h, põhjade raadiused aga R ja r. Kui kaugel suuremast põhjast peab seda tüvikoonust põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga lõikama, et ruumala jaguks kaheks võrdseks osaks, ja millega võrdub lõike raadius?

Lahendus: Olgu otsitav kaugus x, otsitav raadius y. Tingimuse järele võime kirjutada (17. joonis):

$\frac{1}{2}\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi}{3}x(R^2 + y^2 + Ry)$;

või $\frac{h}{2}(R^2 + r^2 + Rr) = x(R^2 + y^2 = Ry)$.



17. joon.

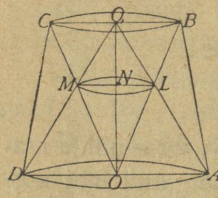
Peale selle võime kirjutada:

$$\frac{AN}{MD} = \frac{BN}{BM} \text{ või: } \frac{R-r}{y-r} = \frac{h}{h-x}.$$

Neist kahest võrrandist saame:

$$y = \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}; x = \frac{h}{R-r}\left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}}\right).$$

473. Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r. Kumbki põhi on põhjaks koonusele, mille tipp asub teise põhja keskpunktis. Leida selle ringi raadius, mis on saadud koonuste lõikumisel.



18. joon.

Lahendus: $ABCD$ on antud tüvikoonus (18. joon.), AO_1D ja BOC on koonused; lõike raadius $NL = x$. Sarnastest kolmnurkadest OLA ja O_1LB saame: $\frac{O_1L}{AL} = \frac{r}{R}$ või: $\frac{O_1L}{O_1A} = \frac{r}{R+r}$; kuid $\frac{x}{R} = \frac{O_1L}{O_1A} = \frac{r}{R+r}$, kust $x = \frac{Rr}{R+r}$. V.: $\frac{Rr}{R+r}$.

474. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 1 ja 2. Kumbki põhi on põhjaks koonusele, mille tipp asub teise põhja keskpunktis. Kuidas suhtuvad ühe koonuse külje pindala osad, milleks teda jagab teise koonuse külje pindala?

V.: 1 : 8 ja 4 : 5.

475. Tüvikoonuse moodustaja on 5, põhjade raadiused aga 1 ja 5. Leida niisuguse silindri raadius, mille kõrgus ja külje pindala võrduvad tüvikoonuse kõrguse ja külje pindalaga. V.: 5.

476. Leida tüvikoonuse sisse- ja ümberjoonestatud korrapäraste kolmnurksete tüvipüramiidide ruumalade suhe. V.: 4.

477. Kuidas suhtuvad tüvikoonuse ja tema ümberjoonestatud korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi külje pindalad?

V.: $\pi : 2\sqrt{3}$.

478. Tüvikoonuse põhjade raadiused on 1 ja 2. Kuidas jagab tema ruumala niisugune koonuspind, mille moodustajad on vastavalt rööbikud tüvikoonuse moodustajatega ja mille tipp asub vähema põhja keskpunktis? V.: 1 : 6.

479. Tüvikoonuse moodustaja on 5, põhjade raadiused aga 1 ja 4. Missugustesse osadesse jagub selle tüvikoonuse külje pindala niisuguse koonuse külje pindalaga, mille tipp asub tüvikoonuse alumise põhja keskpunktis ja mille moodustajad on vastavalt rööbikud tüvikoonuse moodustajatega.

V.: 5π ja 20π.

§ 11. Pöördkehad, mida silindritena ja koonustena võib vaadelda.

Niisuguste pöördkehade ülesandeid, mida silindritena ja koonustena võib vaadelda, lahendatakse suuremalt jaolt järgmiselt:

1) Kõigist pöörduva joonise tippudest tõmbame pöördumisteljele ristjooned ja määrame ära, missugustest lihtkehadest koosseisva kombinatsiooni moodustab otsitav keha.

2) Avaldame otsitava keha üksikud osad; seks tarvis esiteks joonisel ära märkida kõik tarvilised jooned ja tähistada nad x, y, z jne. abil; neid jooni ei ole tarvis esialgu mitte ülesande tingimuste põhjal arvutada.

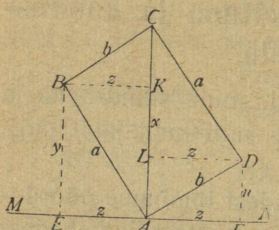
3) Liites või lahutades otsitava keha üksikute osade saadud avaldusi, leiame otsitava suuruse avalduse, mis oleneb x-ist, y-ist, z-ist jne.; pärast saadud avalduse koondamist võivad mõned neist otsitavaist koonduda (seepärast ei olegi tarvis neid esmalt arvutada); nüüd vaatleme joonist, kas ei leidu seal mõnd liht teineteisest olenevust kas otsitavate vahel või mõne otsitava ja antud suuruse vahel; tuleb ju sagedasti ette, et kahe otsitava suuruse korrutis (või summa) võrdub mingi antud suurusega (iseäranis siis, kui on antud pöörduva joonise pindala või ümbermõõt).

4) Lõppeks, kui mõni otsitav suurus koondamise abil ära ei kao ja kui selle tundmatu asemele ei ole võimalik ka mingit tuntud suurust asetada, siis tarvis selle otsitava väärtus arvutada ülesande tingimuste põhjal ja leitud väärtus asetada avaldusse vastava otsitava asemele.

1. näide.

Püstküliku küljed on a ja b; leida selle keha ruumala, mis on saadud püstküliku pöördumisel telje ümber, mis on püstküliku nurkjoonega risti tema otsapunktis.

Lahendus: 1) Antud on, et püstkülik $ABCD$ pöördub ümber MN, mis on $\perp AC$; $AB = a$, $BC = b$ (19. joon.).



19. joon.

Otsitava ruumala V saamiseks peame liitma kahe tüvikoonuse ruumalad, mis saame $ACBE$ ja $ACDF$ pöördumisel, ja saadud summast lahutama kaks koonust, mis on saadud $\triangle ABE$ ja $\triangle ADF$ pöördumisel, s. o.: $V = V_{(ACBE)} + V_{(ACDF)} - V_{(ABE)} - V_{(ADF)}$.

2) Et avaldada need ruumalad, seks läheb meile järgmisi joonlõikusid vaja: AC, BE, AE, DF, AF; olgu $AC = x$, $BE = y$, $AE = AF = z$, $DF = u$.

Nüüd avaldame ruumalad:

$$V_{(ACBE)} = \frac{\pi z}{3}(x^2 + y^2 + xy)$$

$$V_{(ACDF)} = \frac{\pi z}{3}(x^2 + u^2 + xu)$$

$$V_{(ABE)} = \frac{\pi z}{3} y^2$$

$$V_{(ADF)} = \frac{\pi z}{3} u^2$$

3) Liites esimese teisega ja lahutades kolmanda ja neljanda, saame $\frac{\pi z}{3}$ sulgude ette viies:

$$V = \frac{\pi z}{3}(2x^2 + xy + xu) \text{ või}$$

$$V = \frac{\pi z x}{3}(2x + y + u).$$

Vaatame, kas ei ole mingit lihtsat olenevust tundmatute vahel? Ja tõepoolest ei ole raske näidata, et $y + u = 2x$; selleks tõmbame BK ja $DL \perp AC$; $\triangle ADF \cong \triangle CBK$ (hüpotenuus ja teravnurk on võrdsed); järjelikult $CK = DF = u$, $AK = CK = x$; tähendab $y + u = 2x$; pannes V avaldusse $y + u$ asemel $2x$, saame $V = \frac{\pi x z}{3} \cdot 3x = \pi x z \,.\, x$; selles avalduses on ainult kaks tundmatut endise nelja asemel. Edasi märkame, et xz väljendab püstküliku pindala ja on võrdne ab-ga; tõestame selle: $\triangle ACB$ pindala $= \frac{1}{2} AC \,.\, BK = \frac{xz}{2}$, jär-

jelikult on püstküliku pindala xz või ab; xz asemele ab pannes saame: $V = \pi ab \,.\, x$.

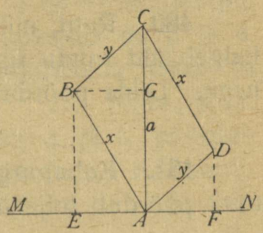
Nüüd on meil üks tundmatu, mille peame arvutama.

4) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, tähendab $V = \pi ab\sqrt{a^2 + b^2}$.

2. näide.

Rööpkülik, mille ümbermõõt on p, pöördub telje ümber, mis rööpküliku nurkjoonega a on risti tema otsapunktis. Leida pöördkeha pindala.

Lahendus: 1) Antud rööpkülik on $ABCD$, $MN \perp AC$ (20. joon.). Tõmbame ristjooned BE ja DF pöördumisteljele. AB pöördumisel saame koonuse küljepinna; koonuse kõrgus on AE, põhja raadius aga BE; analoogiliselt: AD kujutab pöördumisel koonuse küljepinna, kõrguseks on AF, põhja raadiuseks DF.



20. joon.

BC pöördumisel saame tüvikoonuse küljepinna, kõrgus on AE, põhjade raadiused AC ja BE; analoogiliselt: CD pöördumisel saame tüvikoonuse küljepinna, kus kõrguseks on AF ja põhjade raadiusteks AC ja DF. Et otsitavat pindala saada, on tarvis kõik neli pindala liita' s. o. $S = S_{(AB)} + S_{(AD)} + S_{(BC)} + S_{(CD)}$.

2) Et igaüht neist pindaladest avaldada, läheb tarvis järgmisi joonlõikusid: rööpküliku küljed ja ristjooned BE, DF ja CA.

Olgu: $AB = CD = x$; $AD = BC = y$; $BE = z$; $DF = u$.

$$S_{(AB)} = \pi \,.\, x \,.\, z.$$
$$S_{(AD)} = \pi \,.\, y \,.\, u.$$
$$S_{(BC)} = \pi \,.\, y \,.\, (a + z).$$
$$S_{(CD)} = \pi \,.\, x \,.\, (a + u).$$

3) Liites kõik neli võrdust, saame otsitava pindala: $S = \pi[xz + uy + y(a + z) + x(a + u)]$. Rühmitame sulgudes I liikme IV-ga ja II—III-ga:

$$S = \pi[x(z + a + u) + y(u + a + z)],$$
$$S = \pi(a + z + u) \,.\, (x + y).$$

Vaadeldes joonist näeme, et $x+y$ võrdub rööpküliku poole ümbermõõduga, s. o. $x+y=\frac{P}{2}$, kuna aga $z+u=a$; tõepoolest, tõmmates $BG \perp AC$, saame $\triangle BCG \cong \triangle ADF$ (hüpotenuus ja teravnurk on võrdsed); järjelikult $CG=DF=u$, $AG=z$, kust $z+u=a$. Nüüd võime kirjutada: $S=\pi(a+a)\cdot\frac{P}{2}=\pi \cdot a \cdot p$.

Juhime siinkohal tähelepanu selle peale, kuidas saadud S avalduse lihtsustamise teel joonestuse abil on kõrvaldatud kõik tundmatud x, y, z, u; just sellep. ei olnud neid alguses vaja arvutada.

480. Ruut, mille külg on a, pöördub telje ümber, mis kulgeb üht ruudu tippu ning on risti tippu kulgeva nurkjoonega. Leida pöördumisel saadud keha ruum- ja pindala.

V.: $\pi a^3\sqrt{2}$; $4\pi a^2\sqrt{2}$.

481. Kolmnurga kõrgus on h, alus aga a. See kolmnurk pöördub telje ümber, mis on alusega rööbiti ja kulgeb kolmnurga tippu. Leida saadud keha ruumala. V.: $\frac{2}{3}\pi a h^2$.

482. Võrdhaarne kolmnurk, mille alus on $2a$ ja kõrgus h, pöördub telje ümber, mis kulgeb aluse otsapunkti ja on alusega risti. Leida saadud keha ruum- ja pindala.

V.: $4\pi a\sqrt{a^2+h^2}$; $2\pi a^2 h$.

483. Kaldruut, mille külg on a ja teravnurk 60°, pöördub ühe külje ümber. Leida pöördkeha 1) pindala ja 2) ruumala.

V.: 1) $2\pi a^2\sqrt{3}$; 2) $\frac{3}{4}\pi a^3$.

484. Trapetsi alused on 3 ja 9, kumbki külg aga 5. Leida niisuguse keha 1) pindala ja 2) ruumala, mis selle trapetsi pöördumisel ümber suurema aluse saadud.

V.: 1) 64π; 2) 80π.

485. Trapetsi alused on 10 ja 4, küljed kumbki 5. Leida selle trapetsi pöördumisel ümber vähema aluse saadud keha pind- ja ruumala.

V.: 120π; 128π.

486. Täisnurkne kolmnurk, mille pindala on Q, pöördub telje ümber, mis kulgeb teravnurga tippu ja on risti lähiskaatetiga, mille pikkus on a. Leida pöördkeha ruumala.

V.: $\frac{4}{3}\pi Qa$.

487. Kolmnurga kaks külge on a ja b; nende külgede vaheline nurk on 150°. Leida keha ruumala, mis on saadud selle kolmnurga pöördumisel ümber külje a. V.: $\frac{\pi}{12}ab^2$.

488. Kaldruut, mille külg on a, teravnurk aga 60°, pöördub telje ümber, mis kulgeb teravnurga tippu ja on risti lähisküljega. Leida pöördkeha 1) pindala ja 2) ruumala.

V.: 1) $6a^2\pi$; 2) $\frac{3}{4}\pi a^3\sqrt{3}$.

489. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 3 ja 4, pöördub hüpotenuusi ümber. Leida pöördkeha pind- ja ruumala. V.: $16{,}8\pi$; $9{,}6\pi$.

490. Kaldruut, mille nurkjooned on a ja b, pöördub telje ümber, mis kulgeb kaldruudu tippu ja on risti nurkjoonega a. Leida pöördkeha pind- ja ruumala. V.: $\frac{\pi a^2 b}{2}$.

491. Leida niisuguse keha ruumala, mis on saadud kolmnurga pöördumisel ümber aluse, teades, et kolmnurga pindala on S, kõrgus aga h. V.: $\frac{2}{3}\pi hS$.

492. Kolmnurk, mille pindala on S, pöördub külje a ümber Leida pöördkeha ruumala. V.: $\frac{4\pi S^2}{3a}$.

493. Kolmnurk, mille pindala on S, pöördub sirge ümber, mis kulgeb kolmnurga tippu ja on rööbiti vastasseisva küljega a. Leida pöördkeha ruumala. V.: $\frac{8\pi S^2}{3a}$.

494. Võrdkülgne kolmnurk pöördub telje ümber, mis kulgeb kolmnurga tippu ja on risti küljega. Kuidas suhtuvad pindalad, mille kolmnurga küljed pöördudes kujutavad?

V.: 1 : 2 : 3.

495. Võrdkülgne kolmnurk pöördub esiteks külje ümber, siis aga telje ümber, mis kulgeb kolmnurga tippu ja on rööbiti vastasküljega. Teisel juhusel saadud keha ruum- ja

pindala on kaks korda suuremad kui esimesel juhusel. (Teha järelekatse.)

496. Kolmnurk pöördub järgemööda iga oma külje a, b ja c ümber. Leida pöördumisel saadud kehade ruumalade suhted.

Juhatus: Tähistame kolmnurga pindala S-ga.

V.: $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

497. Kolmnurga küljed on a, b, c. See $\triangle$ pöördub järgemööda sirgete ümber, mis kulgevad kolmnurga tippusid ja on rööbiti vastaskülgedega. Leida saadud kehade ruumalade suhted.

V.: $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

498. Rööpkülik pöördub järgemööda külgede a ja b ümber. Leida saadud pöördkehade ruumalade suhe.

V.: $b : a$.

499. Leida nende kehade ruumalade suhe, mis saadud rööpküliku pöördumisel järgemööda iga külje ümber, kui rööpküliku kõrgused on m ja n. V.: $m : n$.

500. Leida niisuguse keha 1) pindala ja 2) ruumala, mis on saadud korrapärase kuusnurga pöördumisel ümber külje a. V.: 1) $6a^2\pi\sqrt{3}$; 2) $\frac{3}{2}\pi a^3$.

501. Korrapärane kuusnurk, mille külg on a, pöördub telje ümber, mis kulgeb kuusnurga tippu ja on risti sellesse tippu tõmmatud raadiusega. Leida pöördkeha ruum- ja pindala. V.: $3\pi a^3\sqrt{3}$; $12\pi a^2$.

502. Korrapärane kuusnurk, mille külg on a, pöördub telje ümber, mis rööbiti on kuusnurga küljega ja viimasest apoteemi kaugusel asub. Leida saadud keha ruum- ja pindala.

V.: $9\pi a^3$; $12\pi a^2\sqrt{3}$.

503. Täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 5 ja 12, pöördub telje ümber, mis rööbiti on suurema kaatetiga ja temast asub kaugusel 3. Leida pöördkeha ruum- ja pindala.

V.: 280 π; 270 π.

504. Ringi sisse on joonestatud ruut, ja ringile on tõmmatud puutuja, mis rööbiti on ruudu küljega; ruut pöördub

selle puutuja ümber. Leida pöördkeha 1) pindala ja 2) ruumala, kui ringi raadius on R. V.: 1) $8\pi R^2\sqrt{2}$; 2) $4\pi R^3$.

505. Võrdkülgse kolmnurga külg on a; selle kolmnurga ümber on joonestatud ring ja ringile on tõmmatud puutuja, mis rööbiti on kolmnurga küljega; kolmnurk pöördub selle puutuja ümber. Leida pöördkeha pindala ja ruumala.

V.: $2\pi a^2\sqrt{3}$; $\frac{1}{2}\pi a^3$.

506. Püstkülik, mille küljed on a ja b, pöördub sirge ümber, mis kulgeb püstküliku nurkjoont otsapunktis ja rööbiti on teise nurkjoonega. Leida pöördkeha pind- ja ruumala.

V.: $\frac{4\pi(a+b)\cdot ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{2\pi a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

507. Rööpküliku pindala on Q; see rööpkülik pöördub sirge ümber, mis kulgeb üht nurkjoont otsapunktis ja on rööbiti teise nurkjoonega d. Leida pöördkeha ruumala.

V.: $\frac{2\pi Q^2}{d}$.

508. Rööpküliku pindala on Q; see rööpkülik pöördub telje ümber, mis on rööbiti ühe nurkjoonega kaugusel d. Leida pöördkeha ruumala. V.: $2\pi dQ$.

509. Rööpküliku ümbermõõt on P; see rööpkülik pöördub sirge ümber, mis on rööbiti nurkjoonega ja mis viimasest asub kaugusel d. Leida pöördkeha pindala.

V.: $2\pi dP$.

510. Kolmnurga küljed on 8 ja 5, kuna nende külgede vaheline nurk on 60^0; see kolmnurk pöördub telje ümber, mis antud nurga tippu kulgeb ja on risti vähema küljega. Leida pöördkeha ruum- ja pindala. V.: $60\pi\sqrt{3}$; 120π.

511. Poolringi (raadius on R) sisse on joonestatud trapets nii, et läbimõõt trapetsi alumiseks aluseks on, kuna külg 30^0-list kaart seob. Leida selle keha ruum- ja pindala, mis on saadud trapetsi pöördumisel ümber alustega risti tõmmatud raadiuse. V.: $\frac{\pi R^3}{24}(7+2\sqrt{3})$; $\frac{\pi R^2}{4}(7+\sqrt{6}+\sqrt{2})$.

§ 12. Kerad ja nende osad.

a) Kõõl, läbimõõt, puute-tasapind, lõiked jne.

512. Kera raadius on 5; ühest ja samast kerapinna punktist on tõmmatud kõõl, mille pikkus on 6, ja läbimõõt (diameeter). Leida nende otsapunktide kaugus teineteisest. V.: 8.

513. Kera puute-tasapinnal on punkt A, mis asub puutepunktist kaugusel 4, kerapinnast aga kaugusel 2. Leida kera raadius. V.: 3.

514. Kera raadius on 63. Puute-tasapinnal on antud punkt, mis asub puutepunktist kaugusel 16. Leida selle punkti kõige lühem kaugus kerapinnast. V.: 2.

515. Kera raadius on 41; see kera on lõigatud tasapinnaga, mis asub keskpunktist kaugusel 9. Leida lõike pindala. V.: 1600π.

516. Kera on lõigatud tasapinnaga läbi raadiuse keskpunkti. Kuidas suhtuvad saadud lõike ja suurringi pindalad? V.: 3 : 4.

517. Kera on lõigatud tasapinnaga, mis jagab läbimõõdu osadeks 2 ja 8. Leida lõike pindala. V.: 16π.

518. Kera raadius on R; selle kera pinna üht punkti kulgevad kaks tasapinda: üks puute-tasapind ja teine, mis moodustab esimesega 30^0 nurga. Leida lõike pindala. V.: $\frac{\pi R^2}{4}$.

519. Maakera raadius on R. Leida ekvaatori pikkus. V.: $2\pi R$.

520. Maakera raadius on R. Kui pikk on see rööpringjoon, mille laius on 60^0? V.: πR.

521. N linn asub 60. põhjalaiuse kraadi all. Missuguse tee käib see koht maakera pöördumisel ühe tunni jooksul? Maakera raadius $= \sim 6000$ versta ($\pi = 3{,}14$). V.: ~ 785 v.

522. Kera kaks raadiust, mis on tõmmatud kahte kerapinna punkti, moodustavad 60^0 nurga. Nende punktide kõige vähem kaugus teineteisest kerapinda mööda on 5. Leida kera raadius. ($\frac{1}{\pi} = 0{,}32$). V.: 4,8.

523. Kera läbimõõt on 25. Selle kera pinnal asub punkt A ja ringjoon, mille kõik punktid asuvad punktist A kaugusel 15. Leida selle ringjoone raadius. V.: 12.

524. Kera raadius on 15. Ruumis on punkt A, mis asub kera pinnast kaugusel 10. Leida kera pinnal niisuguse ringjoone pikkus, mille kõik punktid asuvad punktist A kaugusel 20. V.: 24π.

525. Keha on piiratud kahe ühiskeskese kera pinnaga, millede raadiused on R ja r. Mõlemad kera pinnad on läbi lõigatud meelevaldse (juhuslise) tasapinnaga. Leida rõngaslõike pindala. V.: $\pi(R^2 - r^2)$.

526. Antud on kaks kera, millede raadiused on 15 ja 20; kerade keskpunktide kaugus on 25. Leida ringjoone pikkus, mida mööda kerade pinnad lõikuvad. V.: 24π.

527. Kaks võrdset kera, millede raadiused on R, seisavad nii, et ühe kera keskpunkt asub teise kera pinnal. Leida selle ringjoone pikkus, mida mööda kerade pinnad lõikuvad. V.: $\pi R\sqrt{3}$.

528. Kaldruudu kõik neli külge on kera puutujad. Leida selle kaldruudu tasapinna kaugus kera keskpunktist, kui kaldruudu nurkjooned on 15 ja 20, kera raadius aga 10. V.: 8.

529. Kaldruudu kõik neli külge on kera puutujad. Leida selle kaldruudu pindala, kui kera raadius on 5, kaldruudu külg 6 ja kaldruudu tasapinna kaugus kera keskpunktist 4. V.: 36.

530. Kera pinnal asuvad kaks võrdset lõikuvat ringjoont. Leida nende ringide raadiused, kui on teada, et nende tasapinnad on risti, tasapindade lõikejoon (kõõl) on 2 ja kera raadius on 7. V.: 5.

531. Poolkeral ja tema sissejoonestatud koonusel on ühine alus ja kõrgus; läbi kõrguse keskpunkti on tõmmatud põhjaga rööbik tasapind. Tõestada, et selle lõike pindala, mis poolkera ja koonuse külje pindala vahel asub, võrdub poole põhja pindalaga.

b) Kera ja ta osade pindala.

532. Leida kera pindala, teades et suurringi pindala on 1. V.: 4.

533. Leida kera pindala, kui teada on, et selle kera raadius on 5. ($\pi = 3{,}1416$). V.: 314,16.

534. Kera pindala on 706,5. Leida selle kera raadius. ($\pi = 3{,}14$). V.: 7,5.

535. Kui kera raadiust suurendada 1 võrra, siis suureneb kera pindala 28π võrra. Leida kera raadius. V.: 3.

536. Kera pindala on m võrra suurringi pindalast suurem. Leida: 1) kera raadius ja 2) kera pindala.

V.: 1) $\sqrt{\frac{m}{3\pi}}$; 2) $\frac{4}{3}m$.

537. Kolme kera raadiused on 12; 4 ja 3. Leida niisuguse neljanda kera raadius, mille pindala võrdub kolme antud kera pindalade summaga. V.: 13.

538. Kahe kera raadiused on 5 ja 4. Leida niisuguse kolmanda kera raadius, mille pindala võrdub antud kahe kera pindalade vahega. V.: 3.

539. Mitu korda suureneb kera pindala, kui raadiust suurendada 1) 4 korda ja 2) 5 korda? V.: 1) 16; 2) 25.

540. Hüpotenuus ja kaatetid on läbimõõtudeks kolmele kerale. Missugune olenevus on nende kerade pindalade vahel?

V.: Kõige suurem kera-pindala võrdub kahe väiksema kera-pindalade summaga.

541. Kera on ühel pool keskpunkti läbi lõigatud kahe rööp-tasapinnaga; lõigete pindalad on 49π ja 400π, kuna lõigete kaugus teineteisest on 9. Leida kera pindala. V.: 2500π.

542. Kera raadius on 13, keralõigu põhja raadius aga 5. Leida keralõigu kõver-pindala. V.: 26π.

543. Leida keralõigu täis-pindala, kui selle lõigu kõrgus on 2, põhja raadius aga 4. V : 36π.

544. Leida keralõigu kõver-pindala, teades, et keralõigu kõrgus on h ja põhja raadius r. V.: $\pi(h^2 + r^2)$.

545. Niisugune ringilõik, mille kaar on 120^0 ja pindala Q, pöördub oma kõrguse ümber. Leida saadud keha täispindala. V.: $\frac{21\pi Q}{4\pi - 3\sqrt{3}}$.

546. Kera raadius on 5. Leida kera kihi kõver-pindala, kui ta põhja raadiused on kumbki 4. V.: 60π.

547. Kera raadius on 5. Leida kera kihi kõver-pindala, kui ta põhjade raadiused on 3 ja 4 (2 juhust).

Juhatus: Ühel juhusel asuvad põhjad ühel pool kera keskpunkti, teisel juhusel — kahel pool. V.: 10π ja 70π.

548. Keralõigu kõrgus on 2, põhja raadius aga 4. Leida selle lõike pindala, mis põhjaga rööbiti on ja keralõigu kõver-pindala poolitab. V.: 9π.

549. Leida keravöö pindala, teades, et ta põhjade raadiused on 20 ja 24, kera raadius aga 25 (2 juhust).

V.: 400π või 1100π.

550. Poolkera raadius on R; leida niisuguse ringlõike pindala, mis poolkera pindala poolitab. V.: $\frac{3}{4}\pi R^2$.

551. Kera raadius on 15. Leida see osa kera pindalast, mis nähtav on niisugusest punktist, mille kaugus kera keskpunktist on 25. V.: 180π.

552. Maakera raadius on R. Lendur tõusis aeroplaanil h kõrgusele maapinnast. Kui suur pindala on lendurile nähtav?

V.: $\frac{2\pi R^2 h}{R+h}$.

553. Valguspunkt asub kerast, mille raadius on 15, kaugusel 10. Leida valgustatud kera pinna osa ja ringjoone pikkus, mis valgustatud osa valgustamata osast lahutab.

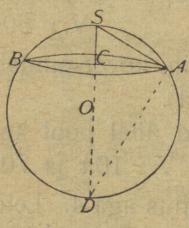
V.: 180π ja 24π.

554. Kera raadius on R. Kui kaugel selle kera keskpunktist peab olema valguspunkt, et ta $\frac{1}{3}$ kera pinnast valgustaks? V.: $3R$.

555. Tasapind jagab kera pindala kaheks osaks: 20 ja 80. Leida lõike pindala. V.: 16.

556. Avaldada keralõigu kõver-pindala selle kõver-pindala keskpunkti ja äärmise punkti kaugusest a olenevalt.

Lahendus: Keralõigu kõver-pindala $S = 2\pi R.h = \pi.SD.SC$ (21. joon.); $SD.SC = SA^2 = a^2$. V.: πa^2.



21. joon.

557. Keralõigu kõver-pindala võrdub suure ringi pindalaga. Leida selle kaare pikkus kraadides, mis saadakse, kui keralõigu lõikame tasapinnaga läbi telje. V.: 120°.

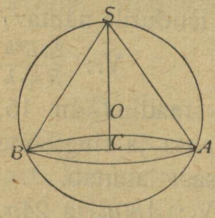
558. Keralõigu põhja pindala moodustab 1) $\frac{1}{4}$, 2) $\frac{1}{2}$, 3) $\frac{3}{4}$ keralõigu kõver-pindalast. Leida telglõikes saadud kaare pikkus kraadides.

V.: 1) 240°; 2) 180°; 3) 120°.

559. Keravöö kõõl-pindala on kaks korda niisuguse sisse-joonestatud silindri külje pindalast suurem, millel keravööga ühised põhjad on. Leida keravöö telglõikes saadud kaarte pikkus kraadides. V.: 120°.

560. Ühise põhjaga võrdkülgne koonus ja keralõik moodustavad kera sektori, mille täis-pindala on 39. Leida sektori telglõike pindala. V.: $5+2\sqrt{3}$.

561. Keralõigu sisse on joonestatud koonus, millel on keralõiguga ühine põhi. Leida keralõigu telglõike kaar, kui on teada, et keralõigu kõver-pindala on koonuse külje pindalast kaks korda suurem.



22. joon.

Lahendus: (22. joon.) Keralõigu ASB kõver-pindala $= 2\pi.SO.SC = \pi(2R.SC) =$ $= \pi.SB^2$; koonuse külje pindala $=$ $= \pi.SB.BC$; järjelikult $\frac{SB}{BC} = 2$, kust $\angle SBC = 60°$ ja $\smile ASB = 240°$.

562. Leida niisuguse keha pindala, mis on saadud ringi sektori pöördumisel ümber keskmise raadiuse, kui on teada, et selle sektori nurk on 90° ja pindala on Q.

V.: $2Q(4-\sqrt{2})$.

563. Leida niisuguse keha pindala, mis on saadud ringi sektori pöördumisel ühe külje raadiuse ümber, kui on teada, et sektori nurk on 30^0 ja ringi raadius on R.

V.: $\frac{\pi R^2}{2}(5-2\sqrt{3})$.

c) Kera ja ta osade ruumala.

564. Kera raadius on 3. Leida kera ruumala. V.: 36π.

565. Kera pindala on 225π. Leida kera ruumala.

V.: $562{,}5\pi$.

566. Kera ruumala on V. Leida kera pindala.

V.: $\sqrt{36\pi V^2}$.

567. Antud on kolm kera: nende raadiused on 3; 4 ja 5. Leida niisuguse kera raadius, mis võrdub antud kolme kera ruumalade summaga. V.: 6.

568. Mitu korda suureneb kera ruumala, kui raadiust suurendada 1) 4 korda; 2) 5 korda? V.: 1) 64; 2) 125.

569. Kahe kera ruumalade suhe on 27. Kui suur on nende kerade raadiuste suhe? V.: 3.

570. Kuidas suhtuvad kahe kera ruumalad, kui nende pindalad suhtuvad nõnda kui $m:n$? V.: $\sqrt{m^3}:\sqrt{n^3}$.

571. Kuidas suhtuvad kahe kera pindalad, kui nende ruumalad suhtuvad nõnda kui $m:n$? V.: $\sqrt[3]{m^2}:\sqrt[3]{n^2}$.

572. Kui kolme kera raadiused suhtuvad nõnda kui $1:2:3$, siis on suurema kera ruumala kolm korda kahe vähema kera ruumalade summast suurem. (Järele katsuda.)

573. Kui koonusel, keral ja silindril on ühine kõrgus ja koonuse ja silindri põhjaks on kera suurring, siis suhtuvad nende kehade ruumalad nõnda kui $1:2:3$. (Järele katsuda.)

574. Kolme kera raadiuste summa on 12; nende pindalad suhtuvad nõnda kui $1:4:9$. Leida kerade raadiused.

V.: 2; 4 ja 6.

575. Kera sektori raadius on R ja telglõike nurk on 120^0. Leida sektori ruumala. V.: $\frac{\pi R^3}{3}$

576. Leida ringi sektori pöördumisel ümber külje raadiuse moodustatud keha ruumala, kui sektori nurk on 30°, raadius aga R. V.: $\frac{\pi R^2}{2}(5-2\sqrt{3})$.

577. Poolring, mis kahe raadiusega on kolme võrdsesse ossa jagatud, pöördub ümber läbimõõdu. Leida pöördumisel saadud kehade ruumala, kui poolringi raadius on R.

V.: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$.

578. Leida niisuguse kerasektori ruumala, mille põhja raadius on 60, kera raadius aga 75. V.: $112\,500\pi$.

579. Leida kera sektori ruumala, kui on teada, et sektori põhja pindala on M, külje pindala aga N. V.: $\frac{M}{6}\sqrt{\frac{M^2+4N^2}{\pi M}}$.

580. Leida, missuguse osa kerast moodustab kerasektor, mille sfääriline pindala võrdub koonuspindalaga. V.: $\frac{1}{5}$.

581. Ringi sektor pöördub läbimõõdu ümber, mis risti on keskmise raadiusega. Pöördkeha ruumala võrdub kera poole ruumalaga. Leida antud sektori nurk. V.: 60°.

582. Tasapind, mis on risti läbimõõduga, jagab viimase osadeks 3 ja 9. Missugusteks osadeks jagab see tasapind kera ruumala? V.: 45π ja 243π.

583. Leida niisuguse keralõigu ruumala, mille kõrgus on 3, põhja raadius aga 7. V.: 78π.

584. Missuguse osa kerast moodustab keralõik, mille kõrgus on 0,1 kera läbimõõdust? V.: 0,02 . 8.

585. Keralõigu põhja pindala on 64π, kõver-pindala aga 100π. Leida keralõigu ruumala. V.: 228π.

586. Koonusel ja keralõigul on ühine alus ja võrdsed kõrgused. Koos moodustavad nad kera sektori, mille ruumala on 8. Leida keralõigu ruumala. V.: 5.

587. Tasapind jagab kera pindala kahte ossa, mis suhtuvad nõnda kui 1 : 2. Kuidas suhtuvad kera ruumala osad?

Juhatus: Tasapind jagab temaga risti tõmmatud läbimõõdu osadeks, mis suhtuvad nõnda kui 1 : 2. V.: 7 : 20.

588. Leida niisuguse kerakihi ruumala, mille põhjade raadiused on 10 ja 5, kõrgus aga 6. V.: 411π.

589. Kera on ühelt poolt keskpunkti läbi lõigatud kahe rööp-tasapinnaga, millede kaugus kera keskpunktist on 16 ja 25. Leida rööp-tasapindade vahelise keraosa ruumala, kui kera raadius on 65. V.: 34182π.

590. Leida niisuguse kerakihi ruumala, mille üks põhja raadius on 15, külje pindala 1350π, kera raadius aga 25. V.: 14094π.

591. Kera kihil ja silindril on ühised põhjad ja kõrgus; nende kehade küljepindade vahel olev ruumala on 36π. Leida kehade kõrgus. V.: 6.

592. Ringile on välispunktist tõmmatud puutuja ja lõikaja, mis keskpunktist läbi läheb; nad moodustavad 30^0-lise nurga. Joonis, mis on puutujaga, lõikaja välise osaga ja nende vahelise kaarega piiratud, pöördub lõikaja ümber. Leida saadud pöördkeha pindala ja ruumala, kui ringi raadius on R. V.: $\frac{5}{2}\pi R^2$; $\frac{\pi R^3}{6}$.

593. Kõõl seob 60^0-list kaart ja on rööbiti läbimõõduga. See ringi osa, mis läbimõõdu ja kõõluga on piiratud, pöördub läbimõõdu ümber. Leida pöördkeha ruumala, kui kõõlu pikkus on $3\,.\,(\pi = \frac{22}{7})$. V.: 99.

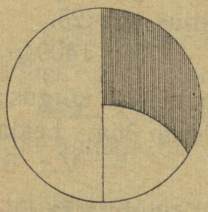
594. Niisuguses poolringis, mille raadius on R, seob läbimõõduga rööbiti tõmmatud kõõl 120^0 kaart; joonis, mis läbimõõdu, kõõlu ja kahe nende vahel asuva kõõluga piiratud on, pöördub läbimõõdu ümber. Leida pöördkeha ruumala.

V.: $\frac{\pi}{6}R^3(1+\sqrt{3})$.

595. Ringilõigu raadius on R, tema kaar aga 120^0. Leida selle keha pindala ja ruumala, mis selle lõigu pöördumisel ümber lõigu kaare otsapunktist läbi tõmmatud läbimõõdu saadud. V.: $\frac{3}{2}\pi R^2$; $\frac{3}{4}\pi R^3$.

596. Ringilõik pöördub kõõluga rööbiti tõmmatud läbimõõdu ümber. Leida pöördkeha ruumala, kui kõõlu pikkus on a. V.: $\frac{\pi a^3}{6}$.

597. Ringjoone punktist on tõmmatud läbimõõt d ja kõõl a; nende vaheline ringi osa pöördub läbimõõdu ümber. Leida pöördkeha ruumala. V.: $\frac{\pi d^3}{6} - \frac{\pi a^4}{6d}$.



23. joon.

598. Poolringi raadius on R. Läbimõõdu otsapunktist on tõmmatud sama raadiusega kaar, mis poolringi kahte ossa jagab; suurem osa pöördub läbimõõdu ümber. Leida saadud pöördkeha pindala ja ruumala (23. joon). V.: $4\pi R^2$; $4\frac{1}{2}\pi R^3$.

599. Ringilõik pöördub läbimõõduga rööbiti tõmmatud kõõlu ümber. Tõestada, et saadud pöördkeha ruumala võrdub niisuguse kera ruumalaga, mille läbimõõt võrdub lõigu kõõluga.

600. AMC, CND ja DPB on kolmandikud poolringist, mille läbimõõt on AB ja keskpunkt O. Poolringis on tõmmatud raadiused OC ja OD, kõõlud AC ja AD, ja poolring pöördub läbimõõdu ja AB ümber. Tõestada, et joonised $ACND$ ja $OCND$ moodustavad võrdsete ruumaladega kehad, milledest igaüks on pool kera ruumalast.

d) Sisse- ja ümberjoonestatud kera.

601. Leida kuubi sisse- ja ümberjoonestatud kerade raadiused, kui kuubi serv on a. V.: $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

602. Leida täisnurkse rööptahuka ümberjoonestatud kera raadius, kui rööptahuka mõõted on 4; 6 ja 12. V.: 7.

603. Leida korrapärase nelinurkse prisma põhja külg, kui selle prisma kõrgus on 14, sissejoonestatud kera raadius aga 9. V.: 8.

604. Kera raadius on R. Leida niisuguse kuubi pindala, mille kõik servad on kera puutujad. V.: $12R^2$.

605. Leida korrapärase kuusnurkse prisma ümberjoonestatud kera raadius, kui on teada, et prisma kõrgus on 8, külgtahu nurkjoon aga 13. V.: 11.

606. Leida kera ümberjoonestatud korrapärase kolmnurkse prisma pind- ja ruumala, kui kera raadius on R.
V.: $18R^2\sqrt{3}$; $6R^3\sqrt{3}$.

607. Korrapärase kaheksanurkse prisma ümber on kera joonestatud. Leida selle prisma ruumala, kui kera raadius on R ja prisma kõrgus võrdub põhja läbimõõduga.

Juhatus: Prisma lõige läbi telje ja põhja nurkjoone on ruut, mille nurkjoon on $2R$, külg — $\frac{2R}{\sqrt{2}}$; järjelikult on põhja raadius $\frac{R}{\sqrt{2}}$ ja kaheksanurga pindala — $R^2\sqrt{2}$. V.: $2R^3$.

608. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi ümberjoonestatud kera raadius, kui selle püramiidi kõrgus on h, küljeserv aga b. V.: $\frac{b^2}{2h}$.

609. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi ümberjoonestatud kera raadius, kui selle püramiidi kõrgus ja põhja külg on kumbki 4. V.: 3.

610. Leida tetraeedri sisse- ja ümberjoonestatud kerade raadiused tetraeedi serva a kaudu. V.: $\frac{a}{12}\sqrt{6}$; $\frac{a}{4}\sqrt{6}$.

611. Kera sisse on joonestatud korrapärane kolmnurkne püramiid, mille küljeserv moodustab põhjaga 60^0 nurga. Leida püramiidi kõrgus, kui kera raadius on R. V.: $^3/_2 R$.

612. Kera sisse on joonestatud korrapärane nelinurkne püramiid, mille kõrguse jagab kera keskpunkt osadeks 4 ja 5. Leida püramiidi ruumala.

Juhatus: Pikendada püramiidi kõrgus kuni kera pinnani ja lõikepunkt ühendada põhja mingi tipuga. V.: 54.

613. Korrapärase püramiidi kõrgus on H, põhja raadius R. Missuguse seose (vahekorra) puhul kõrguse ja põhja raadiuse vahel asub püramiidi ümberjoonestatud kera keskpunkt 1) seespool püramiidi, 2) püramiidi põhjal, 3) väljaspool püramiidi? V.: 1) $H > R$; 2) $H = R$; 3) $H < R$.

614. Püramiidi põhjaks on niisugune korrapärane kolmnurk, mille külg on 3; üks küljeserv, mis on põhjaga risti, on 2. Leida ümberjoonestatud kera raadius

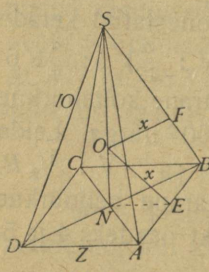
Juhatus: Põhja keskpunkti tõmmata ristjoon; otsitavaks keskpunktiks on ristjoone lõikepunkt küljeserva keskkohta tõmmatud ristjoonega. V.: 2.

615. Korrapärase 1) kolmnurkse, 2) kuusnurkse püramiidi põhja külg on a; põhja ja külgtahu kaudu moodustatud kahetahune nurk on 60°. Leida selle püramiidi sissejoonestatud kera raadius. V.: 1) $\frac{a}{6}$; 2) $\frac{a}{2}$.

616. Kolmnurkse püramiidi täis-pindala on S, püramiidi sissejoonestatud kera raadius — r. Leida püramiidi ruumala.

Juhatus: Ühendades sissejoonestatud kera keskpunkti kõigi tippudega, saame neli kolmnurkset püramiidi, millede kõrgus on r. V.: $\frac{1}{3} S \cdot r$.

Märkus: Analoogia planimeetriaga: kolmnurga pindala võrdub $\frac{1}{2}$ ümbermõõdu ja sissejoonestatud ringi raadiuse korrutisega; tõestuse viis samuti analoogiline.



24. joon.

617. Nelinurkse püramiidi küljeserv on 10, põhja külg aga 2. Leida niisuguse kera raadius, mis puutub kõiki püramiidi servi.

Lahendus: $SABCD$ on antud püramiid (24. joon.). O — otsitava kera keskpunkt; OF, OE — kera raadiused (x); SN — püramiidi kõrgus. Täisnurksete kolmnurkade SBN ja SOF sarnasusest saame: $NB : OF = SB : SO$, s. o. $\sqrt{2} : x = 10 : SO$, kust $SO = 5x\sqrt{2}$; $ON = SN - OS = (7 - 5x) \cdot \sqrt{2}$. x-i leidmiseks seame võrrandi kokku: $OE^2 - NE^2 = ON^2$, s. o., $x^2 - 1 = 2(7 - 5x)^2$; siit saame x-i jaoks kaks vastust.

Märkus: Üks x-i väärtus vastab sellele juhusele, kui kera keskpunkt asub püramiidi kõrgusel, teine — kui ta asub kõrguse pikendusel allpool põhja. V.: $\frac{9}{7}$ ja $\frac{11}{7}$.

618. Korrapärase püramiidi küljeserv on 13, kõrgus aga 12. Leida niisuguse kera raadius, mis puutub põhja ja küljeservade pikendusi. V.: $7\frac{1}{2}$.

619. Leida korrapärase oktaeedri sisse- ja ümberjoonestatud kerade raadiused oktaeedri serva a kaudu.

V.: $\frac{a}{6}\sqrt{6}$; $\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

620. Korrapärase 1) oktaeedri, 2) tetraeedri serv on a. Leida niisuguse kera raadius, mis puutub kõiki servi.

V.: $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{4}\sqrt{6}$.

621. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 7 ja 1; küljeserv moodustab põhjaga 45^0 nurga. Leida selle tüvipüramiidi ümberjoonestatud kera raadius. V.: 5.

622. Leida korrapärase kolmnurkse tüvipüramiidi ümberjoonestatud kera raadius, kui on teada, et tüvipüramiidi kõrgus on 17, põhjade raadiused aga 5 ja 12. V.: 13.

623. Kera ümber on joonestatud korrapärane nelinurkne püramiid; põhjade küljed on a ja b. Leida kera raadius.

V.: $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

624. Kera ümber on joonestatud korrapärane 1) kolmnurkne, 2) kuusnurkne püramiid; põhjade küljed on a ja b. Leida ümberjoonestatud kera raadius.

V.: 1) $\frac{1}{6}\sqrt{3ab}$; 2) $\frac{1}{2}\sqrt{3ab}$.

625. Kera ümber on joonestatud silinder. Leida kera ja silindri 1) pindalade ja 2) ruumalade suhe.

V.: 2 : 3 (mõlemil juhusel).

626. Niisuguse kera sisse, mille raadius on R, on joonestatud võrdkülgne silinder. Kuidas jagavad silindri põhjad kera ruumala? V.: $2\pi R^2\sqrt{2}$ ja $\pi R^2(2-\sqrt{2})$.

627. Ringi sisse on joonestatud ruut ja läbi viimase tippude on tõmmatud ümberjoonestatud ruudu küljed. Mõlemad ruudud ja ring pöörduvad sissejoonestatud ruudu nurkjoone ümber. Kuidas suhtuvad saadud kehade ruumalad?

V.: 1 : 2 : 3.

628. Kera sisse on joonestatud niisugune silinder, mille põhja raadius ja kõrgus suhtuvad nõnda kui $m : n$. Leida selle silindri täis-pindala, kui kera pindala on S.

V.: $\frac{2Sm(m+n)}{4m^2+n^2}$.

629. Leida koonuse ümberjoonestatud kera raadius koonuse kõrguse h ja moodustaja l kaudu. V.: $\frac{l^2}{2h}$.

630. Leida kera sissejoonestatud koonuse kõrgus, kui kera raadius on 5 ja koonuse põhja raadius 4. V.: 8.

631. Kera raadius on 2. Kera sisse on joonestatud võrdkülgne koonus. Leida koonuse pindala ja ruumala.

V.: 9π; 3π.

632. Koonuse kõrgus on 8, moodustaja — 10. Leida sissejoonestatud kera raadius. V.: 3.

633. Kera sisse ja ümber on joonestatud võrdkülgsed koonused. Leida koonuste ruumalade suhe. V.: 8.

634. Leida koonuse ruumala, kui selle koonuse ümberjoonestatud kera keskpunkt jagab kõrguse osadeks 4 ja 5. V.: 27π.

635. Leida koonuse külje pindala, kui koonuse põhi jagab ümberjoonestatud kera pindala osadeks 225 ja 400. V.: 180.

636. Koonuse ümber on raadiusega R kera joonestatud; kera ruumala võrdub koonuse neljakordse ruumalaga. Leida kera keskpunkti kaugus koonuse põhjast.

Juhatus: Tähistades otsitava kauguse x-iga, saame võrrandi $x(x^2 - Rx + R^2) = 0$, kust $x = 0$; kaks teist juurt on imaginaarsed. V.: 0.

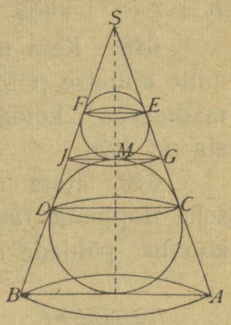
637. Koonuse moodustaja on 9, põhja raadius aga 3. Selle koonuse sisse on joonestatud kera. Leida kera ja koonuse puute-ringjoone pikkus. V.: 4π.

638. Koonuse kõrgus on 20, moodustaja aga 25. Leida niisuguse koonuse sissejoonestatud poolkera raadius, mille põhi koonuse põhjaga ühtib. V.: 12.

639. Koonuse kõrgus on 9, põhja raadius — 12. Leida niisuguse koonuse sissejoonestatud keralõigu raadius, millel koonusega ühine põhi on. V.: 20.

640. Koonuse kõrgus on 16, moodustaja — 20. Leida niisuguse koonuse sissejoonestatud keralõigu kõrgus, millel koonusega ühine põhi on. V.: 6.

641. Koonuse sisse on teineteise peale kaks kera joonestatud; kerade puutejooned koonuse küljepinnaga on m ja n. Leida koonuse niisuguse lõike ringjoon, mis põhjaga rööbiti olles mõlemaid kerasid puutub.



25. joon.

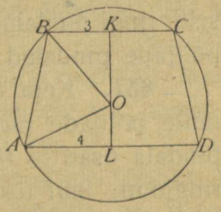
Lahendus: Puutuja $GM = GE$ (25. joon.), samuti $GM = GC$, järjelikult $GE = GC$, kuid siis on GM keskjoon. V.: $\frac{m+n}{2}$

642. Leida tüvikoonuse ümberjoonestatud kera raadius, kui tüvikoonuse põhja raadiused on 3 ja 4, aga kõrgus 7.

Juhatus: Otsitav raadius $AO = BO$ olgu x (26. joon.), $OK = y$; siis $x^2 = 4^2 + (7-y)^2$ ja $x^2 = 3^2 + y^2$; järjelikult $4^2 + (7-y)^2 = 3^2 + y^2$, kust $y = 4$. V.: 5.

643. Leida kera sissejoonestatud tüvikoonuse kõrgus, kui kera raadius on 10, tüvikoonuse põhjade raadiused aga 6 ja 8. V.: 14 või 2.

644. Leida tüvikoonuse ümberjoonestatud kera raadius, teades, et tüvikoonuse põhjade raadiused on 1 ja 2 ja moodustaja 2. V.: 2.



26. joon.

645. Kera ümber on joonestatud niisugune tüvikoonus, mille moodustaja sünnitab põhjaga 45^0 nurga. Tõestada, et selle tüvikoonuse külje pindala võrdub kahekordse kera-pindalaga.

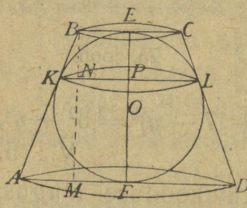
646. Kera sisse on tüvikoonus joonestatud, kusjuures kera pindala tüvikoonuse põhjadega kolme ossa jagub: 10π, 70π ja 20π. Leida tüvikoonuse ruumala. V.: $\frac{259}{3}\pi$.

647. Leida kera ümberjoonestatud tüvikoonuse külje pindala, kui tüvikoonuse moodustaja on l.

Lahendus: Tüvikoonuses telglõike tõmmates, saame ringi ümberjoonestatud nelinurga; ümberjoonestatud nelinurgas on vastaskülgede summad võrdsed, s. o., $2R + 2r = l + l$, kust $R + r = l$; külje pindala $= \pi(R + r)l = \pi l^2$. V.: πl^2.

648. Kera ümber on niisugune tüvikoonus joonestatud, mille alumise põhja raadius võrdub ülemise põhja neljakordse raadiusega. Leida selle tüvikoonuse ruumala, kui ta täis-pindala on 42π. V.: 28π.

649. Kera ümber on tüvikoonus joonestatud. Leida selle ringjoone raadius, mida mööda nad puutuvad, kui tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r.



27. joon.

Juhatus: Tõmmates telglõike, saame trapetsi $ABCD$ ja sissejoonestatud ringi (27. joon.); ühendame puutepunktid K ja L ja tõmbame $BM \perp AD$; $AK = AF = R$; $BK = BE = r$; $AM : KN = AB : BK$, s. o.: $(R - r) : KN = (R + r) : r$, siit leiame KN; otsitav raadius $KP = KN + r$. V.: $\frac{2Rr}{R+r}$.

650. Kera ümber on joonestatud tüvikoonus. Leida selle ringi pindala, mida mööda nad puutuvad, kui tüvikoonuse põhjade pindalad on 4 ja 36. V.: 9.

651. Kera ümber on niisugune tüvikoonus joonestatud, mille põhjade raadiused on 12 ja 6. Kuidas suhtuvad kera-pindala osad ja tüvikoonuse külje pindala osad, mis on puute-ringjoone läbi tekkinud? V.: 1 : 2; 7 : 20.

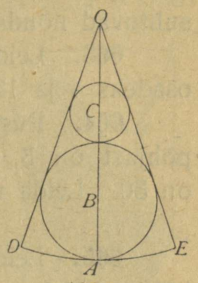
652. Kera ümber on joonestatud tüvikoonus, kusjuures puute-ringjoon jagab kera pindala kahte ossa: 80 ja 320. Leida tüvikoonuse täis-pindala.

Juhatus: (27. joonis). Kera pindala $= 4\pi R^2 = 80 + 320$, kust R leiame. Keralõikude KFL ja KEL kõver-pindalad suhtuvad nõnda kui $FP : PE$; järjelikult $FP : PE = 4$, kust

leiame EP ja PF; $AK:BK = PF:EP = 4$. Olgu $x = BK = BE$, siis on $4x = AK = AF$; $AM = 3x$; $AB = 5x$. Kirjutame võrrandi: $AB^2 = BM^2 + AM^2$, kust võime arvutada x. V.: 1050.

653. Kera ümber on tüvikoonus joonestatud; puute-ringjoon jagab kera pindala kahte ossa: 80π ja 320π. Missugusteks osadeks jagab see ringjoon tüvikoonuse külje pindala?

V.: 65π ja 560π.



28. joon.

654. Kerasektori sisse on kera joonestatud; sektori raadius on 15, kera raadius — 6. Missugustesse osadesse jagab puutejoon kera pindala? V.: 24π ja 120π.

655. Kerasektori sisse on kaks puutujat kera joonestatud; kerade raadiused on 1 ja 3. Leida sektori raadius (28. joon.). V.: 9.

§ 13. Kordamis-ülesanded.

656. Võrdhaarse kolmnurga ABC alus BC on 12, küljed AB ja AC on kumbki 10; see kolmnurk pöördub telje ümber, mis, alusega rööbiti olles, tippu A kulgeb. Leida pöördkeha pindala. V.: 1105,28.

657. Korrapärase kolmnurkse püramiidi küljeservad on isekeskis risti. Leida selle püramiidi külje pindala, kui ta ruumala on 36. V.: 54.

658. Põhjaga rööbiti tõmmatud tasapind poolitab koonuse täis-pindala. Leida moodustaja tipupoolne osa, teades, et koonuse põhja raadius on 1, moodustaja aga 8. V.: 6.

659. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhja külg on a. Leida selle püramiidi kõrgus, kui ta külje pindala on põhja pindalast 10 korda suurem. V.: $\frac{3}{2}a\sqrt{33}$.

660. Kera sisse on kuup joonestatud ja viimase tahkudele korrapärased püramiidid konstrueeritud, millede tipud kera pinnal asuvad. Leida saadud hulktahu ruumala, kui kera raadius on R. V.: $\frac{8}{3}R^3$.

661. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhjade küljed on 3 ja 6; külje pindala võrdub põhjade pindalade summaga. Leida ruumala. V.: 42.

662. Leida tüvikoonuse külje pindala, kui selle tüvikoonuse ruumala on 388π ja põhjade raadiused ja moodustaja suhtuvad nõnda kui 3:8:13. V.: 143π.

663. Leida selle lõike pindala, mis kera-pindala jagab osadeks 4 ja 12. V.: 3.

664. Püst-rööptahuka nurkjoonte lõikepunkti kaugus põhjast on 3, külgtahkudest aga 2 ja 4; põhja ümbermõõt on 30. Leida rööptahuka täis-pindala ja ruumala.
V.: 260; 240.

665. Leida keravöö ruumala, kui ta täis-pindala on 900, külje pindala — 200 ja üks põhja raadiustest — 11.
V.: 1009,5.

666. Võrdkülgne trapets pöördub esiteks ühe, siis teise aluse ümber. Leida saadud pöördkehade ruumalade suhe, teades, et trapetsi alused on 8 ja 4. V.: 5 : 4.

667. Kõigist kuubi tippudest on tõmmatud ristjooned kuubi nurkjoonele. Missugusteks osadeks jagub kuubi nurkjoon a? V.: $\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}$.

668. Keralõigu kõrgus on 2, põhja raadius — 4. Leida täis-pindala. V.: 36π.

669. Püramiidi põhjaks on niisugune täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 6 ja 8; küljeservad on igaüks 13. Leida püramiidi ruumala. V.: 96.

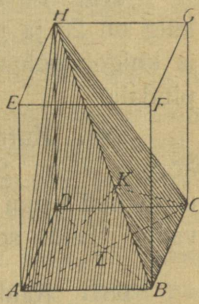
670. Oktaeedri serv on a. Leida niisuguse hulktahu serv, mille tipud asuvad oktaeedri tahkude keskpunktidel.
V.: $\frac{a}{3}\sqrt{2}$.

671. Koonuse sisse on keralõik joonestatud nii, et neil ühine põhi on. Leida keralõigu kõrgus, kui koonuse kõrgus on 8, moodustaja aga 10. V.: 3.

672. Kerasektori raadius on 3, sektori sissejoonestatud kera raadius — 1. Leida sektori telglõike nurk. V.: 60^0.

673. Läbi kuubi nurkjoone on tõmmatud kaks tasapinda nii, et kumbki neist kulgeb kuubi põhja üht kõrvalkülge. Leida nende tasapindade kaudu moodustatud kahetahune nurk.

Lahendus: Tõmmatud tasapinnad on $ABGH$ ja $BCHE$ (29. joon.); nende lõikejoon on BH. Tippudest A ja C tõmbame ristjooned BH-le; need ristjooned lõikuvad punktis K. $\angle AKC$ on otsitava kahetahuse nurga lineaarnurk. Olgu kuubi serv a; leides KL ja AK, näeme, et $AK = 2KL$; järjelikult on $\angle AKL = 60^0$.



29. joon.

V.: 120^0.

674. Antud on 45^0 kahetahune nurk; ühel selle nurga tahul on servaga 45^0-lisi nurgi sirge tõmmatud. Missuguse nurga moodustab see sirge teise tahuga? V.: 30^0.

675. Kolmetahuses nurgas on üks tasanurk täisnurk; tema kahetahused lähisnurgad on kumbki 45^0. Kui suur on kolmas kahetahune nurk? V.: 120^0.

676. Kera ümber on niisugune koonus joonestatud, mille külje pindala suhtub kera-pindalasse nõnda kui 3 : 2. Leida koonuse põhja raadius, kui kera raadius on r.

V.: $r\sqrt{3}$ või $r\sqrt{2}$.

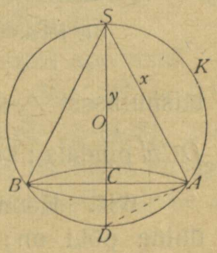
677. Leida kera sissejoonestatud koonuse ruumala, kui kera raadius on R ja koonuse külje pindala on S.

Juhatus: Pikendada koonuse kõrgus allapoole kuni kera pinnani.

V.: $\frac{S^2}{6\pi R}$.

678. Kera sisse on niisugune koonus joonestatud, mille küljepind kera ruumala poolitab. Leida koonuse moodustaja, kui kera raadius on R.

Lahendus: Olgu ASB sisse joonestatud koonus (30. joon.); $AS = x$, $SC = y$. Ringi lõigu AKS pöördumisel ümber läbimõõdu SD saadud keha ruumala $V_{(AKS)} = \frac{\pi}{6}x^2y$;



30. joon.

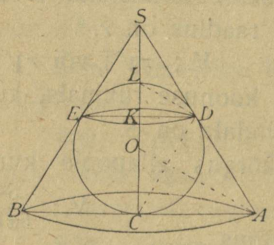
täisnurksest kolmnurgast ASD leiame $y=\frac{x^2}{2R}$; siis $V_{(AKS)}=\frac{\pi x^4}{12R}$; tingimuse järele on see ruumala pool kera ruumalast, järjelikult: $\frac{\pi x^4}{12R}=\frac{2}{3}\pi R^3$, kust $x=R\sqrt[4]{8}$. V.: $R\sqrt[4]{8}$.

679. Püramiidi põhjaks on niisugune kaldruut, mille külg on 25 ja vähem nurkjoon 30; püramiidi kõrgus on 32 ja kulgeb põhja nürinurga tippu. Leida selle püramiidi täispindala. V.: 2400.

680. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhja külg on a, kõrgus — h. Selle püramiidi sisse on joonestatud kuup nii, et ta neli tippu asuvad püramiidi põhjal ja neli — külje servadel. Leida selle kuubi serv. V.: $\frac{ah}{a+h}$.

681. Kaldruut pöördub järgemööda ümber mõlema nurkjoone; pöördkehade ruumalad, mis neil pöördumistel saadud, on 24π ja 36π. Leida kaldruudu pindala. V.: 12.

682. Võrdkülgse koonuse ruumala on V. Leida selle koonuse sissejoonestatud kera ruumala. V.: $\frac{4}{9}V$.



31. joon.

683. Koonuse sisse on niisugune kera joonestatud, mille pindala võrdub koonuse põhja pindalaga. Kuidas jagab puute-ringjoon kera pindala?

Lahendus: Tingimuse järele on $4\pi \cdot OC^2=\pi \cdot AC^2$, kust $\frac{AC}{OC}=2$; $\angle DCL=\angle OAC$ (31. joon.); järjelikult on $\triangle DCL \sim \triangle OAC$ ja $\frac{CD}{DL}=\frac{AC}{OC}=2$; täisnurksest $\triangle$-st DCL saame: $\frac{CK}{KL}=\frac{CD^2}{DL^2}=4$, siis keralõigu DCE pindala : keralõigu DLE pindalasse $=\frac{CK}{KL}=4$. V.: 4 : 1.

684. Koonuse sisse on keralõik joonestatud nii, et neil ühine põhi on; nende kõrgused on 16 ja 6. Leida nende kõver-pindalad. V.: 240π ja 180π.

685. Metallist silinder, mille kõrgus on 121,5, on keraks ümber valatud. Silindri põhja läbimõõt S suhtub kera läbimõõdusse nõnda kui 8 : 9. Leida mõlemad läbimõõdud.

V.: 128 ja 144.

686. Metallsilinder, mille läbimõõt ja kõrgus suhtuvad nõnda kui 3 : 2, on keraks ümber valatud, kusjuures kera raadius on 48. Leida silindri läbimõõt ja kõrgus.

V.: 96 ja 64.

687. Kolmnurk, mille pindala on 36, pöördub ühe oma külje ümber. Saadud pöördkeha ruumala on 192π, pindala aga 216π. Leida kolmnurga küljed ja määrata, missugune oli teljeks. V.: 9; 10 ja 17; vähem.

688. Kera raadius on R. Selle kera sisse on joonestatud võrdkülgne koonus; kui kaugel koonuse tipust peab tõmbama põhjaga rööbiku tasapinna, et rõngaslõike pindala võrduks koonuse põhja pindalaga. V.: $\frac{3}{4}R$.

689. Kolmnurkse püramiidi küljeservad on 6; 8 ja 24 ja nad on vastamisi risti. Leida ümberjoonestatud kera raadius.

Juhatus: Asetame püramiidi külgtahule, kui alusele.

V.: 13.

690. Kera sisse on niisugune korrapärane nelinurkne püramiid joonestatud, mille tipu juures olevad tasanurgad on igaüks 60^0. Leida püramiidi kõrgus, kui kera raadius on R.

V.: R.

691. Korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala on V. Kuidas jagab selle ruumala tasapind, mis põhjast ja külgtahust moodustatud 60^0 kahetahust nurka poolitab?

Juhatus: Ülemise osa kõrguseks on pool apoteemi.

V.: $\frac{3}{8}V$ ja $\frac{5}{8}V$.

692. Tüvipüramiidi põhjade pindalad on 16 ja 81, kõrgus — 5. Kui kaugel vähemast põhjast peab tõmbama temaga rööp-tasapinna, et lõike pindala oleks põhjade pindalade keskmine võrdeline?

Juhatus: Täiendada tüvipüramiid täispüramiidiks. V.: 2.

693. Korrapärase kuusnurkse tüvipüramiidi alumise põhja külg on kolm korda ülemise põhja küljest suurem. See tüvipüramiid on läbi nurkjoonte lõikepunkti lõigatud põhjadega rööbiti tõmmatud tasapinnaga. Kuidas jagub ruumala?

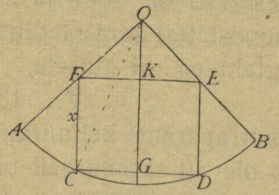
V.: 19 : 189.

694. Kald-tüviprisma küljeservad on 8; 7 ja 6, nende kaugus üksteisest aga 5; 4 ja 3. Leida ruumala. V.: 42.

695. Kuubi serv on 2. Kuubi iga tippu kulgeb tasapind, mis risti on samast tipust tõmmatud nurkjoonega. Leida nende tasapindade lõikumisel tekkinud oktaedri serv. V.: $3\sqrt{2}$.

696. Kera sektori raadius on R; sektori telglõike nurk on täisnurk. Leida selle sektori sissejoonestatud kuubi serv, kui kuubi neli tippu asuvad sektori koonuspinnal ja neli — kerapinnal.

Juhatus: Tõmbame sektori telglõike läbi kuubi nurkjoone; saame sektori BOA ja tema sisse joonestatud püstküliku $CDEF$ (32. joon.); CF on kuubi serv $= x$; CD — kuubi alumise tahu nurkjoon. Täisnurksest $\triangle OCG$ saame: $CG^2 + OG^2 = OC^2$, kust leiame x. V.: $R\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{3}}}$.



32. joon.

697. Kahe väliselt puutuja ringi ühine väline puutuja on a. Leida pindala, mille see puutuja moodustab, pöördudes ümber kesksirge. V.: πa^2.

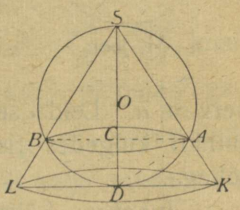
698. Võrdkülgse koonuse sisse, mille moodustaja on a, on kera joonestatud, viimase sisse aga kuup. Leida kuubi serv. V.: $\frac{a}{3}$.

699. Koonuse tipp asub niisuguse kera keskpunktis, mille raadius on 6. Kui suur peab olema koonuse põhja raadius, et koonuse täis-pindala võrduks kera pindalaga. V.: 8.

700. Koonuse kõrgus on niisuguse kera läbimõõduks, mille ruumala on koonuse pindala kaudu pooleks jagatud. Kuidas jagub koonuse külje pindala?

Juhatus: Olgu KSL antud koonus (33. joon.), SD — koonuse kõrgus ja kera läbimõõt $= 2R$, siis $SA = R\sqrt[4]{8}$ (v. ülesande nr. 678. lahendus). SA külje pindala : SK külje pindalasse $= SA^2 : SK^2$; leiame selle suhte: $\frac{SA}{SD} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$; $\frac{SD}{SK} = \frac{SA}{SD} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$; korrutades need võrded, saame: $\frac{SA}{SK} = \frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; siit on kerge leida, et koonuse külje pindala samuti pooleks jagub. V.: Pooleks.

701. Kuubi kahe vastasseisva kolmetahuse nurga sisse on võrdsed kerad joonestatud nii, et nad ka isekeskis puutuvad. Leida kerade raadius, kui kuubi serv on a. V.: $\frac{a}{4}(3-\sqrt{3})$.



33. joon.

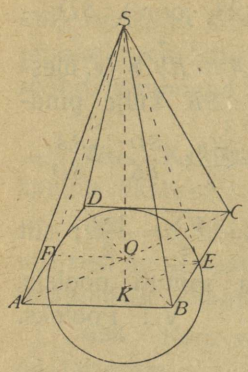
702. Kuubi sisse on joonestatud võrdkülgne koonus; koonuse tipp ühtib kuubi ühe tipuga, kuna põhi kuubi kolme tahku puutub, mis vastastipus kulgevad. Leida selle koonuse põhja raadius, kui kuubi serv on a. V.: $a(3-\sqrt{6})$.

703. Püstkülik $ABCD$ on nurkjoont AC mööda täisnurga võrra pööratud. Leida kaugus B ja D vahel, kui püstküliku küljed on a ja b. V: $\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$.

704. Tasapinna kahest punktist, millede kaugus teineteisest on a, on tasapinnaga 45°-lisi nurgi kaks rööbikut kaldjoont tõmmatud. Leida nende sirgete kaugus teineteisest, kui nende projektsioonide kaugus tasapinnal on b. V.: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

705. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 16, põhja külg — 24; kera puutub püramiidi kõiki külgtahke ja kõiki põhja külgi. Leida kera raadius ja püramiidis asuva keralõigu ruumala.

Juhatus: $SABCD$ on antud püramiid, K — kera keskpunkt; tõmbame tasapinna läbi kõrguse SO ja apoteemi SE



34. joon.

(34. joon.); siis saame △-ga SEF ja ringi, mis puutub külgi SE ja SF punktides E ja F. Tõmbame KO ja KE.

V.: 15; 468π.

706. Korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrgus on 9, põhja külg — 12. Leida niisuguse kera raadius, mis kõiki püramiidi servi puutub. V.: 12 ja 28.

707. Oktaeedri serv on a. Leida selle lõike ümbermõõt, mis oktaeedri keskpunkti kulgedes rööbiti on tahuga.

V.: $3a$.

708. Ikosaeedri (kakskümmendtahk) serv on a. Leida selle lõike ümbermõõt, mis ikosaeedri keskpunkti kulgedes risti on kaht vastasseisvat tippu ühendava teljega.

Juhatus: Lõige on korrapärane kümmenurk, mille tipud servi poolitavad; iga külg on $\frac{a}{2}$. V.: $5a$.

709. Ikosaeedri serv on a. Leida selle lõike ümbermõõt, mis läbi ikosaeedri keskpunkti ja serva läheb.

Juhatus: Lõige on kuusnurk, mille kaks vastaskülge on a; teised küljed on tahkude kõrgused. V.: $2a(1+\sqrt{3})$.

710. Dodekaeedri (kaksteisttahk) serv on a. Leida ümberjoonestatud kera raadius.

Juhatus: Kujutame enestele ette oktaeedri sisse joonestatud kuubi, mille tipud asuvad dodekaeedri 8 tipul, kuna kuubi servaks on tahu nurkjoon; otsitav kera on kuubi ümber joonestatud.

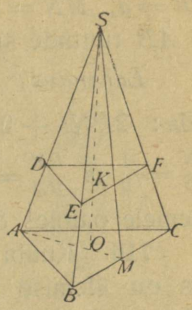
V.: $\frac{a}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3})$.

711. Leida niisuguse korrapärase nelinurkse püramiidi telglõike pindala, mille külgtahkudest moodustatud kahetahused nurgad on 120^0 ja mille külje pindala on M. V.: $\frac{1}{4}M$.

712. Korrapärase püramiidi põhjaks on võrdkülgne kolmnurk, mille külg $= a$. Püramiidi kõrgus on $2a$. Kui kaugel põhjast peab püramiidi lõikama põhjaga rööbiti tõm-

matud tasapinnaga, et lõike pindala võrduks saadud tüvipüramiidi külje pindalaga?

Lahendus: Olgu $SABC$ antud püramiid, SO — püramiidi kõrgus, DEF — põhjaga rööbiti tõmmatud lõige, mille kaugus KO on otsitav (35. joon.). Tõmbame püramiidi apoteemi SM ja ühendame punkti M A-ga. Olgu $\triangle$-ga ABC pindala B; $B = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; et punkt O asub kolmnurga ABC keskpunktis, siis $OM = \frac{AM}{3} = \frac{1}{6}a\sqrt{3}$; $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 4a^2 + \frac{3a^2}{36} = \frac{49a^2}{12}$, kust $SM = \frac{7}{6}a\sqrt{3}$. Tähistame püramiidi $SABC$ külje pindala P-ga, siis $P = 3a \cdot \frac{SM}{2} = \frac{7}{4}a^2\sqrt{3}$; jagades saame $\frac{P}{B} = 7$. Püramiidid $SABC$ ja $SDEF$ on sarnased; olgu $SDEF$ külje pindala P_1 ja DEF pindala B_1, siis $\frac{P}{B} = \frac{P_1}{B_1} = \frac{P - P_1}{B - B_1} = 7$; et aga tingimuse järele $P - P_1 = B_1$, siis $\frac{B_1}{B - B_1} = 7$, kust $\frac{B_1}{B} = \frac{7}{8}$, sellepärast $\frac{SK^2}{SO^2} = \frac{B_1}{B} = \frac{7}{8}$, kust $SK^2 = \frac{7 \cdot SO^2}{8} = \frac{7a^2}{2}$ ja $SK = a\sqrt{\frac{7}{2}}$; $KO = 2a - SK = a\,(2 - \sqrt{\frac{7}{2}})$.



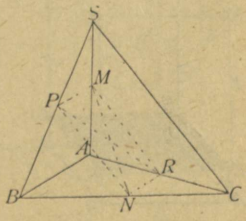
35. joon.

713. Leida korrapärase kümmenurga pöördumisel ümber läbimõõdu saadud keha ruumala, kui kümmenurga külg on a.

V.: $\frac{\pi a^3}{6}(15 + 7\sqrt{5})$.

714. Korrapärane kolmnurkne püramiid on läbi lõigatud kõrguse keskkohast külgtahuga rööbiti tõmmatud tasapinnaga. Kuidas suhtuvad saadud ruumala osad? V.: 125 : 91.

715. Kolmnurkse püramiidi $SABC$ servad SB, SA, BC ja AC (36. joon.) on punktides P, M, N ja R poolitatud;



36. joon.

$PR = a$, $MN = b$. Avaldada a ja b kaudu vastasservade SC ja AB ruutude summa.

Lahendus: Et $PMRN$ rööpkülik on, siis võime kirjutada: $2PN^2 + 2PM^2 = a^2 + b^2$, ja $PN^2 + PM^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$. $\frac{PN}{SC} = \frac{1}{2}$ ja $\frac{PM}{BA} = \frac{1}{2}$, kust $PN = \frac{SC}{2}$ ja $PM = \frac{BA}{2}$; saame asemele pannes $SC^2 + BA^2 = 2(a^2 + b^2)$.

716. Kuubi serv on 2; selles kuubis on antud viis punkti: üks on ülemise põhja keskkohas, teised aga alumise põhja külgede keskkohtades. Need punktid on viistahu tippudeks. Leida viistahu külje pindala. V.: 6.

717. Rööpküliku lähisküljed on a ja b, nende vaheline nurk 45°. Leida pöördkeha 1) pindala ja 2) ruumala, mis on saadud selle rööpküliku pöördumisel ümber külje a.

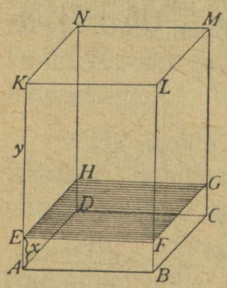
V.: 1) $\pi\sqrt{2}(a+b)b$; 2) $\frac{1}{2}\pi ab^2$.

718. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhja ümber joonestatud ringi raadius on 4, külgtahu ümberjoonestatud ringi raadius aga 3. Leida püramiidi 1) külje pindala, 2) ruumala ja 3) põhjast ja külgtahust moodustatud kahetahune nurk.

V.: 1) $32\sqrt{2}$; 2) $\frac{64}{3}\sqrt{2}$; 3) 45°.

719. Kahel sarnasel täisnurksel rööptahukal on ühine tahk, mille küljed on 1 ja 2. Leida kummagi rööptahuka ruumala.

Lahendus: Olgu rööptahukate võrratud küljed x ja y (37. joon.). Arusaadav, et ühised servad ühes rööptahukas on kõige suuremad, teises aga — vähemad. Rööptahuka AG servad on: x; 1 ja 2; rööptahuka EM servad: 1; 2 ja y (tõusvas järjekorras); sarnasuse põhjal võime kirjutada: $\frac{x}{1} = \frac{1}{2} = \frac{2}{y}$, kust x ja y leiame.



37. joon.

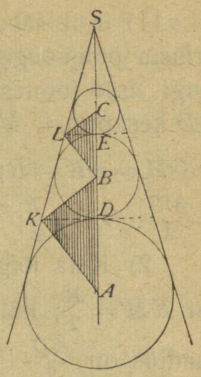
V.: 1 ja 8.

720. Kahel sarnasel täisnurksel rööptahukal on ühine tahk; rööptahukate ruumalad on 8 ja 64. Leida nende pindalad. V.: 14 ja 56.

721. Kuubi ümber on silinder joonestatud nii, et kuubi nurkjoon d on silindri teljeks. Leida silindri ruumala. V.: $\frac{3}{9}\pi d^3$.

722. Leida niisuguse kaksikumera klaasi ruumala, mille kõveruse raadiused on 10 ja 17, keskpunktide kaugus aga 21. V.: 204π.

723. Koonuspinna sisse on kolm kera nii joonestatud, et nad järgemööda üksteist puutuvad. Äärmiste kerade raadiused on R ja r. Leida keskmise kera raadius.



38. joon.

Juhatus: Täisnurksed △-gad CLB ja ABK on sarnased; sellepärast $CE : BD = EB : AD$, s. o.: $r : x = x : R$ (38. joon.). V.: $\sqrt{Rr}$.

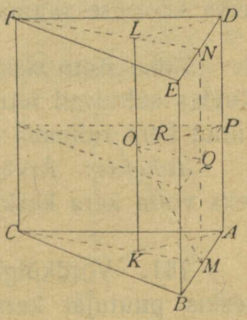
724. Koonuse sisse on järgemööda rida kerasid joonestatud; koonuse kõrgus on 8, põhja raadius — 6. Missugusele piirile läheneb sissejoonestatud kerade ruumalade summa, kui nende arv piiramatult kasvab? V.: $\frac{256\pi}{7}$.

725. Leida niisuguse koonuse ruumala, mille telglõige on võrdkülgne kolmnurk, kui telglõike pindala on S.

V.: $\frac{\pi S}{3}\sqrt{\frac{S\sqrt{3}}{3}}$.

726. Leida kaksikumera klaasi ruumala, kui ühe raadius on 7, teise raadius aga 5 ja vähema kera keskpunkti kaugus klaasi ääri kulgevast tasapinnast on 1. V.: 84π.

727. Kera raadius on R; korrapärase kolmnurkse prisma kõik servad puutuvad kera. Leida: 1) prisma kõrgus ja põhja külg; 2) lõigete pindalad, mis prisma põhjal ja külgtahkudel tekivad; 3) keralõigu ruumala, mille külgtahk ära lõikab.



39. joon.

Lahendus: Olgu $ABCDEF$ antud prisma (39. joon.).

1) Kui läbi kera keskpunkti tõmmata tasapind rööbiti prisma põhjadega, siis saame ringi, mille raadius on R, ja ringi sisse joonestatud $\triangle$-ga, mille külg on $R\sqrt{3}$; P on serva AD keskpunkt, M — AB keskpunkt, KL — prisma telg. $OP = OM = AK = R$; $KM = \frac{R}{2}$; $OK^2 = OM^2 - KM^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$; $OK = \frac{R}{2}\sqrt{3}$; prisma kõrgus $= 2 . OK = R\sqrt{3}$.

2) Kera lõige, mille alus tekitab, on ring, mille raadius on $KM = \frac{R}{2}$; külgtahu läbi tekkinud kera lõige on ring, mille raadius on $\frac{AD}{2}$.

3) Kaugus OQ otsitava keralõigu põhjast kera keskpunktini O on $\frac{R}{2}$, järjelikult on keralõigu kõrgus $\frac{R}{2}$; tarvitame keralõigu ruumala valemit: $\pi h^2(R - \frac{h}{3})$.

V.: 1) $R\sqrt{3}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$ ja $\frac{3}{4}\pi R^2$; 3) $\frac{5}{24}\pi R^3$.

728. Poolringis on kaks läbimõõduga rööbikut kõõlu a ja b $(a > b)$; kõõlude vaheline poolringi osa pöördub läbimõõdu ümber. Leida pöördkeha ruumala. V.: $\frac{\pi}{6}(a^3 - b^3)$.

729. Koonuse moodustaja on l, põhja raadius — R; selle koonuse sisse on kera joonestatud ja koonus on põhjaga rööbiti tõmmatud tasapinnaga läbi lõigatud, kusjuures tasapind kera puutub. Kuidas suhtub koonuse ülemise osa ruumala terve koonuse ruumalasse? V.: $\frac{(l-R)^3}{(l+R)^3}$.

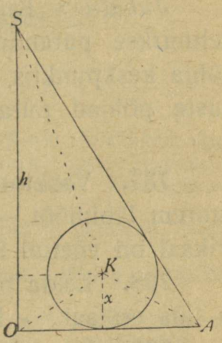
730. Kera sisse on korrapärane tetraeeder joonestatud. Kuidas suhtuvad tetraeedri külgtahu tasapinna lõikumisel tekkinud kera ruumala osad?

Juhatus: Arvutamise hõlbustuseks võib pikkuse üksuseks võtta kera keskpunkti kauguse tetraeedri külgtahust.

V.: 7 : 20.

731. Võrdkülgse koonuse sisse on kolm võrdset isekeskis puutujat kera joonestatud. Leida kerade raadiused, kui koonuse kõrgus on h.

Juhatus: Tõmbame koonuse telglõike, mis ühe kera keskpunkti kulgeb; otsitav raadius olgu x; kirjutame võrrandi: *AOS* pindala = *AKO* pindala + *AKS* pindala + *OKS* pindala (40. joon.). V.: $\frac{h}{5}$.



40. joon.

732. Leida kolmnurkse püramiidi kõrgus, kui teada on, et selle püramiidi küljeservad on 1; 2 ja 3 ja et nad on isekeskis risti.

Juhatus: Kasutame kahesugust ruumala leidmise viisi. V.: $\frac{6}{7}$.

733. Püramiidi põhi on rööpkülik; tasapind, mis püramiidi ruumala poolitab, kulgeb üht rööpküliku külge. Kuidas jagab see tasapind vastastahu küljed?

Juhatus: Olgu x küljeserva ülemise osa suhe kogu servasse, a — rööpküliku külg, h — selle külje kaugus vastasküljest ja H — püramiidi kõrgus. Avaldades püramiidi alumise osa ruumala (kui tüviprisma ruumala), saame võrrandi: $\frac{h \cdot H(1-x)}{2} \cdot \frac{2a+ax}{3} = \frac{a \cdot h \cdot H}{6}$, kust $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

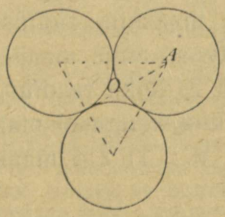
V.: kuldlõikeliselt.

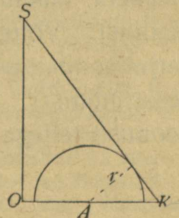
734. Tasapinnale toetuvad oma põhjadega kolm võrdset isekeskis puutujat poolkera, millede raadiused on r; leida nende poolkerade ümberjoonestatud võrdkülgse koonuse kõrgus.

Juhatus: $AO = \frac{2r}{\sqrt{3}}$; $AK = \frac{2r}{\sqrt{3}}$; $OK = \frac{4r}{\sqrt{3}}$; $SO = 4r$ (41. ja 42. joon.). V.: $4r$.

735. Kera sisse on 4 võrdset kera joonestatud nii, et igaüks neist puutub suurt kera ja kolme ülejäänut. Leida sissejoonestatud kerade raadiused, kui suure kera raadius on R.

V.: $R(\sqrt{6}-2)$.


41. joon.



42. joon.

736. Tasapinnal, ühise punkti ümber on 4 võrdset

küljeli asetsevat koonust; igaüks neist puutub kaht lähiskoonust; koonuste moodustaja on a. Leida koonuste kõrgus.

Juhatus: Kujutame enestele ette niisuguse korrapärase nelinurkse püramiidi, mille servad on võrdsed ($2a$) ja mille põhja keskpunktis asuvad antud koonuste tipud; siis on koonuste põhjad püramiidi külgtahkude sissejoonestatud ringid.

V.: $\frac{a}{3}\sqrt{6}$.

737. Vasktoru kaalub 90 kg; toru pikkus on 1,2 m ja suurem läbimõõt — 0,95 m. Leida toru seina paksus. (Vase erikaal on võetud 9.) V.: 0,29 sm.

738. Leida tinakera raskus, kui kera läbimõõt on 6,4 sm ja tina erikaal — 11,33. V.: 0,874 kg.

739. Ruutpõhjaga korrapärane metallist püramiid kaalub 216 kg. Leida selle püramiidi kõrgus, teades, et püramiidi põhja külg on 15 sm ja selle metalli erikaal on 7,2.

V.: 4 m.

740. Metallkera on koonuseks ümber valatud, kusjuures koonuse külje pindala on n korda põhja pindalast suurem. Leida selle koonuse kõrgus, kui kera raadius oli R.

V.: $R\sqrt[3]{4(n^2-1)}$.

741. Täisnurkse rööptahuka kujulisest puutükist on võimalikult suure ruumalaga silinder välja lõigatud. Leida nende kehade ruumalade vahe, kui rööptahuka kõrgus oli h, ruutpõhja külg aga a. V.: $\frac{1}{4}a^2h(4-\pi)$.

742. Päikese raadius on 112 maakera raadiust. Päikese ja maakera keskpunktide kaugus on 23984 maakera raadiust. Kuu kaugus maakerast on 60 maakera raadiust. Võttes maakera raadiuse üksuseks, leida: 1) selle varjukoonuse pikkus, mille maakera heidab (arvates maakera keskpunktist); ja 2) lõike raadius, mis tõmmatud risti varjukoonuse teljega kuu kaugusel maakerast.

V.: 1) 216 maakera raadiust; 2) 0,72 m. r.

J. Maramaa:

Geomeetria

algkooli kõrgematele klassidele.

128 lhk., 165 joon.

Hind 100 marka.

Sisu. Planimeetria: Sirgjoon. Ringjoon. Nurk. Rööbikud sirgjooned. Kolmnurk. Ülesannete lahendamine. Nelinurk. Ring. Hulknurk. Pindalade mõõtmine. Kujundite muundamine ja jagamine. Pythagorase lause. Kujundite sarnasus.

Stereomeetria: Sirgjoon ja tasapind. Tasapind ja tasapind. Hulktahud. Pöördkehad. Kehade pindalad. Kehade ruumalad.

Lisa: Koordinaadid ja graafilised kujutused. Mõned praktilise geomeetria küsimuste lahendused.

J. Maramaa „Geomeetria" on heaks toeks V ja VI klassi õpilastele geomeetria tundides läbivõetud materjali kordamiseks. Õpetaja võib vabalt ainet käsitada kas ühe või teise metoodi järele. Kehade ruumalade mõõtmistel on aluseks võetud Cavalieri põhilause. Kõikide osade järele on toodud hulk harjutusi ja ülesandeid. Oskussõnad on võetud „Matemaatika sõnastiku" kolmandast trükist (1922).

K. Loskit ja A. Paris:

Anorgaanilise kvalitatiivse analüüsi praktikum.

Hind 90 marka.

„Väsimata teadusline kirjastus „Loodus" on kõne all oleva õpiraamatu avaldamisega tuntud puuduse kõrvaldanud. K. Loskit'i ja A. Paris'i „praktikum" on meie teadmise järele esimene eestikeelne käsiraamat keemilise analüüsi alal." Prof. F. Dreyer, Eesti Tehnika Seltsi Ajakiri nr. 6, 1922. a.

Dots. Dr. H. Bekker:

Ajaloolise geoloogia õpperaamat.

„Ajaloolise geoloogia õpperaamat" tahab olla peaasjalikult abiks „kodumaa geoloogia" käsitamisel keskkoolides, seminarides õpilastele kui ka õpetajaile. Autor nimetab eessõnas: „Et Eesti geoloogia ülevaates materjali kohati ehk rohkem pakutud, kui jõutakse koolides ületada, jääb õpetajate hooleks valikut teha." Kuna meil nimetatud ainet puudutavad ülikoolis tarvitatavad eestikeelsed õpperaamatud sootuks puuduvad, on see raamat ka üliõpilastele tarvilik; viimaseks otstarbeks on mõeldud ka suurem osa materjalist peene trükiga. Peale muu sisaldab raamat võrdlemisi rohkesti tüübiliste kivindite joonistusi loomulikus suuruses, mis võimaldab üksikuid kivindeid Eesti lademeist nende järgi määrata."

Prof. G. Rägo:

Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned.

Elementaarne õpperaamat ja ülesanded.

143 lhk. 100 joon.

Hind 185 marka.

Sisust: Anal. geom. ülesanne. Koordinaatide mõiste. Funktsiooni mõiste. Funktsiooni graafiline kujutamine. Kõvera võrrand. Sirge. Mõned anal. geom. rakendused. Ring. Ellips. Hüperbool. Parabool. Koonuslõiked. Puutujad. Diameetrid. Koordinaatide teisendamine. Kõvera aste. Üldine teiseastmeliste kõverate uurimine.

Prof. K. Väisälä arvustusest „Kasvatus'es" nr. 22, 3. aastakäik, 1921: „Raamat on määratud keskkoolidele ja iseõppimiseks... Raamat sisaldab peale analüütilise geomeetria väga laia ja näitliku esituse funktsioonide graafilisest kujutamisest ja võrrandite graafilisest lahendamisest..."

B. Raikov - H. Riikoja:

Praktilised tööd anatoomias ja füsioloogias.

Hind 175 marka.

„... Sama kui teistegi loodusteadusliste ainete omandamine, ei või ka inimese anatoomia ja füsioloogiaga tutvumine põhjeneda ainult õpetaja klassi-ettekannete ja koduse õpiraamatu järele „õppimise" peale. Ka nimetatud aine õpetamisel peab katse ja vaatlus esimesel kohal olema, kusjuures tähtis on, et vähemalt osagi tarvilistest katsetest õppijad ise võiksid teha. Et meie keskkoolides inimese kehaehitust ja selle tegevust kavatsetakse kaunis põhjalikult käsitada, on kohase praktikumi soetamine paratamata tarviduseks saanud . . ."

Esimeses osas leiduvad üldised näpunäited töötajale ja üksikute elundkavade järele rühmitatud tööde kirjeldused, kuna tarvilised metoodilised näpunäited ja üldised praktiliste tööde korraldamisesse puutuvad juhatused teise osasse on koondatud.

Ei ole esialgselt mõnes õppeasutuses sel või teisel põhjusel võimalik sääraseid praktilisi töid korraldada, võib suuremat osa kirjeldatavatest töödest kui läbivõetavat kursust illustreerivaid demonstratsioone korraldada."

Audova-Univer:

Bioloogia õpiraamat.

Hind 100 marka.

Väljavõte järelsõnast: „... Käesolev õpiraamat läheb märgatavalt lahku tavalistest sellekohaseist õpiraamatuist: ta käsitleb ka anorgaanilist loodust ja selle arenemist ning kannab rohkem üldist ja ühtlustavat laadi kui harilikult. Autorite arvates on niisugune laiem (orgaanilise kui ka anorgaanilise looduse) ühtlustamine ülitarvilik loodusteadusliku ilmavaate sünnitamisel ja süvendamisel."

Stereomeetria.

K. N. Rashevski järele **K. Veski ja J. Grünthal.**

Hind 85 marka.

K. N. Rashevski „Stereomeetria“ on uuem ja parem vene keeles ilmunud õpperaamatutest. Vastab oma sisu poolest meie keskkooli kursusele täiesti.

Prof. G. Rägo:

Matemaatilise analüüsi elemendid.

176 lehek., 95 joonisega.

Hind 200 marka.

Sisust: Funktsionaalse olenevuse mõiste. Funktsioonide graafiline kujutamine. Mõned matemaatilise analüüsi põhimõisted. Funktsiooni pidevuse mõiste. Sirge tõusmine. Ühtluse mõiste. Mitteühtlaselt sündivate nähtuste uurimine. Nende kiirus. Funktsiooni tuletis. Mõned differentsimislaused. Funktsioonide muutumise uurimine nende tuletiste abil. Integraalarvutuse põhi-ülesanne. Teine integraalarvutuse põhi-ülesande käsitamise viis. Graafiline inteegrimine. Integraal kui summa. Funktsiooni teine tuletis. Joonte kõverus. Funktsionaalse olenemise pööramine. Eksponentfunktsioon ja naturaalne logaritm. Orgaanilise kasvamise seadus. Funktsioonide ligikaudne kujutamine polünoomide abil. Integraalide ligikaudne arvutamine.

Jaan Rumma

maateaduse õpetaja Tartu seminaris.

Üldine maateadus.

Opiraamat keskkoolidele

135 joonisega ja kahekülgse tahvliga kriidipaberil.

Hind 195 marka.

Väljavõte „Eessõnast“: „Eeloleva „Üldise maateaduse“ kirjutamisel olen silmas pidanud maateaduse uuemaid teaduslisi saavutusi ja metoodilisi nõudeid kui ka meie keskkoolide õppekavade ulatust (2 t. näd.) ja õpilaste üldist arenemist ja töötamisvõimet. . . . Erilise osana esineb antud raamatus hulk küsimusi ja ülesandeid, mis osalt määratud klassitundide elustamiseks, osalt iseseisvateks töödeks õpilastele . . .“

Maateadusliste oskussõnadena on, peale väheste erandite, tarvitatud geograafia-oskussõnade komisjonis vastuvõetud sõnu . . .“

S. Sütt ja D. Koppel:

Maateaduse õpperaamat.

IV õppeaasta.

Hind 65 marka (ilma kaartideta).

Autorite eessõnast: „Käesolev „Maateaduse õpperaamat" on kirjutatud algkoolide IV õppeaasta jaoks, silmas pidades vastavaid õppekavasid. Raamat sisaldab peale kodumaa ja naabermaade veel lühikese ülevaate Euroopast ja kogu maakerast. Viimane osa on selleks, et paljud õpilased IV aastaga oma õppimise lõpetavad ning siis seega maakerast lühikese ülevaate saaksid. Raamatu lõppu on lisana paigutatud mõned maateaduslikud lood juhtnööriks, mil viisil õpetaja võiks peale muude abinõude ainet süvendada ja elustada."

Selle raamatu paratamata lisana on tarvilik:

Maateaduse ülesannete kaustik

samade autorite poolt.

Hind à 25 mk. Kaustik jaguneb kaheks: I ja II.

Arvustus on seda raamatut kui sündsat õppevahendit soovitanud. Vaata „Kasvatus" 1922. a. novembrinumber.

Dots. H. Reichenbach:

Juhe zooloogilisteks vaatlusteks ja kogude korraldamiseks.

I. Akvaarium.

49 joonisega, **hind 55 mk.**

Autori eessõnast: Moodsa loodusloo õppeviisi algnõudeks on, et kogu õppetöö olgu võimalust mööda rajatud ekskursioonide, õppijate iseseisvate tööde ja vaatluste peale.

Käesolev juhe tahab olla teetasandajaks ja ettevalmistajaks sel alal. Raamatuke tahab kätte juhatada rea ülesandeid, mida võiks õppijatele soovitada, et neis huvi äratada looduse vastu ja neid iseseisvate vaatluste ja tähelepanekute tegemisele õhutada; tahab ühtlasi aga ka õpetajale näidata, kuidas võiks klassis läbivõetavat materjali sellekohaste näidete abil elustada.

Prof. V. V. Polovtsov:

TAIMEDE EHITUS JA ELU

Tõlkinud ja ümber töötanud **A. Jürgenson.**

Hulga piltidega.

Hind 125 marka.

Tõlkija poolt:

„Meie koolikirjanduses puudusid seni raamatud, mis oleksid vastanud meie keskkoolide uuendatud õppekavas ettenähtud looduseõpetuse teisele kontsentrile (seitsmes ja kaheksas õppeaasta, keskkooli neljas ja viies klass). ... Käesolev raamat tahab kaasa aidata selle puuduse kõrvaldamisele."

O. Schmeil:

Inimene ja tema tervishoid.

J. Teinman'i tõlge. 96 lhk. Hulga piltidega.

Hind 60 marka.

Palume mitte ära vahetada k.-ü. „Kooli" kirjastusel ilmunud O. Schmeili „Inimesega" J. Püperi tõlkes, mis sama autori zooloogia-käsiraamatu väljavõte ja palju lühem on kui J. Teinmani tõlkes „Inimene".

J. Kents:

Eestimaa geograafia õpperaamat.

122 lhk., 80 joonist tekstis, 8 tahvlit kriidipaberil, 5 värvilist kaarti.

Hind 155 marka.

Väljavõtted arvustustest:

„Loodus" nr. 1, 1922. a., prof. J. G. Granö:

„Sarnase teose järele on keskkoolis tuntud kibedat tarvidust, ja ka laiematel ringkondadel on põhjust ennast selle tööga tutvustada, sest kodumaa tundmine ei ole meie seltskonnas kaugeltki rahuloldav."

„Vaba Maa" Kirjandus ja teadus nr. 36, 1921. a., dots. H. Bekker:

„Vähe on õpiraamatuid, mis huvi pakuksid ka lugejale. Sarnane on neil päevil ilmunud J. Kents'i „Eestimaa geograafia õpperaamat". Selle raamatu võtavad kätte paljud eesti lugejad, mitte ainult kooliõpilased ja õpetajad!"

Eesti taimestik koolidele

Schmeil-Fitscheni „Flora von Deutschland" järele Eesti kohaselt ümber töötanud G. Vilberg, Tartu Ülikooli Botaanika-instituudi noorem assistent.

Hind 220 marka.

Tähendatud raamat tahab edendada taimede tundmaõppimist. Taime välimuse lihtsa võrdlemise läbi jaatavate ja eitavate küsimuste varal jõutakse raamatus esinevatel tabelitel vaadeldava taime juurde, mille nimetus antud eesti ja ladina keeles. Isegi võhik võib selle abil taime tundma õppida, sest et raamatu eesotsas on lühike taimede organograafia (elunditeadus), mida täiendab hulk jooniseid. Ka esinevad terves raamatus vähemad joonised (üle 360), mis taime määramisel suureks abiks.

K/Ü „LOODUS'E" kirjastusel ilmunud:

J. Rumma „Maateaduse õppevils" 95 m.
J. Rumma „Üldine maateadus" 195 m.
A. P. Netshajev „Mere tegevus". Tõlkinud ja täiendanud J. Rumma. 60 m.
Prof. J. Piiper „Üldise zooloogia põhijooned" 140 m.
L. Mahlstein ja **H. Männik „Elus loodus"** algaste 145 m.
Audova-Univer „Bioloogia õpiraamat" keskk. van. kl. 100 m.
Schmeil „Inimene" Teinmani tõlge 60 m. 96 lhk.
H. Männik „Praktilised tööd botaanikas", (kaustik) 15 m.
H. Reichenbach „Zooloogia praktikum keskkoolidele" 130 m.
H. Reichenbach „Juhe zooloogilisteks vaatlusteks ja kogude korraldamiseks I" (akvaarium) 55 m.
H. Riikoja-B. E. Raikov „Anatoomia ja füsioloogia algpraktikum" 175 m.
Prof. Polovtsov „Taimede ehitus ja elu" (teine konts.) 125 m.
G. Vilberg „Harjumaa" (maateadusline lugemik) 215 m.
Prof. W. Oels „Katsed taimede elust". Eesti keelde toimetanud G. Vilberg 160 m.
Prof. Wagner „Zooloogia" (teine kontsentr) 145 m. I r.
„ „ „ „ 145 m. II r.
Rumma-Raikov „Loodusloo praktiliste tööde õppevils". 140 m.
J. Kents „Eestimaa geograafia õpperaamat" 155 m.
O. Schmeil „Välke looduslugu". Tõlkinud J. Piiper 150 m.
„Tallinna juht". Ülevaade Tallinna tähtsamatest kohtadest ja valitsuseasutustest 150 m.
Shaposhnikov ja **Vaitsev „Algebraliste ülesannete kogu"** I jagu. Ümber töötanud ja täiend. K. Veski ja J. Grünthal. 140 m.
Prof. J. Sarv „Logaritmide tabelid" 28 m.
K. Veski ja **J. Grünthali „Aritmeetika" I õppeaasta** 65 m., **II õppeaasta** 55 m., **III õppeaasta** 70 m., **IV õppeaasta** 100 m., **V õppeaasta** 75 m., **VI õppeaasta** 135 m.
Prof. G. Rägo „Tasapinnalise analüütilise geomeetria põhijooned" (keskkoolidele) 185 m.
Prof. G. Rägo „Matemaatilise analüüsi elemendid" 200 m.
K. Loskit ja **A. Paris „Anorgaanilise kvalitatiivse analüüsi praktikum"** 90 m.
Edm. Spohr ja **G. Vilberg „Õistaimede määramise abivihik"** 25 m.
Loodus, I aastakäik: I, II, III, IV, V ja **VI** à 60 m.
Rashevski „Stereomeetria". Tõlk. K. Veski ja J. Grünthal. 85 m.
G. Vilberg „Eesti taimestik koolidele", Schmeil-Fitscheni järele Eesti taimestiku kohaselt ümber töötatud. 220 m.
Kogerman-Männik-Mahlstein „Looduseõpetus" II tr. 130 m.
S. Sütt ja **D. Koppel „Maateaduse õpperaamat algkoolidele",** IV. õppeaasta 65 m.
D. Koppel ja **S. Sütt „Maateaduse ülesannete kaustik"** I vihk 25 m., II vihk 25 m.
Arvo Yippö „Lastetoast koolipinglie", tõlk
man. 100 m.
J. Maramaa „Geomeetria" 100 mk.
Raamatute tutvustaja nr. 1, 2 ja 3.
K. Hintzer „Vabaharjutused" 60 mk.
K. Hintzer „Kepiharjutused" 55 m.
Prof. Lipschütz „Miks me sureme", tõlkinud A
Dots. H. Bekker „Geoloogia õpperaamat"
Ladu Vana t. nr. 1, telef. 435. Arijuhi tele

A A
6018
56132