

X 163 10  
Dugim

K. RATASSEPP

# TRIGONOMEETRIA

KESKKOOLI

X

KLASSILE

*RK*

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“  
TALLINN 1947

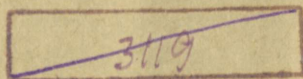
2/25746

Duplum

K. RATASSEPP

# TRIGONOMEETRIA

KESKKOOLI X KLASSILE



RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1947

2



25176

A 16570

## Peatükk I.

### Täisnurkse kolmnurga lahendamine.

#### § 1. Trigonomeetria ülesanne.

On teada, et kolmnurga mõnede antud elementide järgi saab leida teisi elemente, näiteks kolmnurga kahe nurga järgi saab arvutada kolmandat nurka. See arvutamine on võimalik seetõttu, et on teada seos

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

mis valitseb kolmnurga nurkade  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  vahel.

Mitte alati ei toimu kolmnurga antud elementide järgi otsitavate elementide leidmine nii lihtsalt nagu eelmises näites. Kui on antud näiteks kolmnurga kolm külge, siis on kolmnurk ja seega ka tema nurgad määratud, kuid arvutada neid nurki meie ei oska, sest me ei tunne seoseid kolmnurga külgede ja nurkade vahel. Nende seoste leidmisega ja rakendamisega tegeleb geomeetria osa, mille nimeks on trigonomeetria<sup>1</sup>; seega

trigonomeetria ülesandeks on:

1. kolmnurga elementide vahel valitsevate seoste avastamine;
2. nende seoste rakendamine kolmnurga antud elementide järgi otsitavate elementide leidmiseks.

---

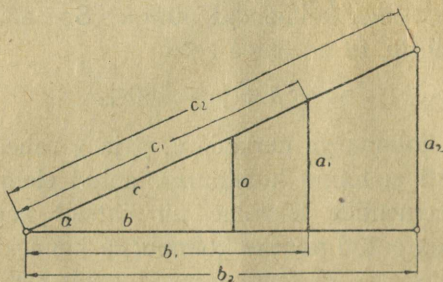
<sup>1</sup> Trigonomeetria tähendab kreeka keeles kolmnurga mõõtmist (*trigonon* — kolmnurk, *metrein* — mõõtma).

Kui oskame leida kolmnurga antud elementide järgi tema teisi elemente, siis oskame seda teha ka hulknurga puhul, sest hulknurga võib tükeldada kolmnurkadeks. Viimaste elemente arvutades leiame kõik hulknurga otsitavad elemendid.

Et kõrgus tükeldab kolmnurga kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, siis iga kolmnurga elementide arvutamist on võimalik rajada täisnurkse kolmnurga elementide arvutamisele.

## § 2. Teravnurga siinus.

Seoste leidmiseks täisnurkse kolmnurga nurkade ja külgede vahel vaatleme täisnurkseid kolmnurki, millel on ühine teravnurk  $\alpha$  (joonis 1). Need kolmnurgad on sarnased.



Joonis 1.

Valime nende seast mingid kaks kolmnurka; olgu nende küljed vastavalt  $a, b, c$  ja  $a_1, b_1, c_1$ . Valitud kahe kolmnurga sarnasusest järeldame, et

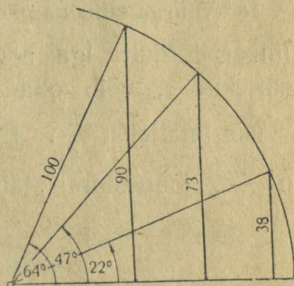
$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1}.$$

Sellest näeme, et täisnurksetel kolmnurkadel, millel üks teravnurk on ühine, on selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhted võrdsed. Samuti saab nende kolmnurkade

sarnasusest järeldada, et neis kolmnurkades on võrdsed mistahes vastavate külgede suhted, näiteks

$$\frac{b}{a} = \frac{b_1}{a_1}.$$

Seetõttu võime neid suhteid määrata mingi ühe kolmnurga abil. Kasutame selleks kolmnurka, mille hüpotenuusi pikkus on 100 mm. Joonisel 2 on kujutatud vähen-  
datud moodsus 3 niisugust kolmnurka. On näha, et mida suurem on teravnurk  $\alpha$ , seda suurem on ka tema vastaskaatet  $a$  ja seega ka vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe  $\frac{a}{c}$ . Jooniselt leiame, et kui  $\alpha$  on  $22^\circ$ ,  $47^\circ$ ,  $64^\circ$ , siis  $a$  on vastavalt 38 mm, 73 mm, 90 mm, ja seega  $\frac{a}{c}$  on vastavalt 0,38, 0,73, 0,90.



Joonis 2.

Nii vastab teravnurga  $\alpha$  igale väärtusele suhte  $\frac{a}{c}$  üks väärtus. Seda suhet nimetatakse teravnurga  $\alpha$  siinuseks ja tähistatakse sümboliga  $\sin \alpha$ . Seega täisnurkses kolmnurgas

teravnurga siinus on selle nurga vastaskaateti ja hüpotenuusi suhe

ehk sümbolites

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

Et selles definitsioonis esinevad kaateti ja hüpotenuusi pikkused on mõlemad positiivsed suurused ja seejuures kaatet on alati lühem kui hüpotenuus, siis

$$0 < a < c.$$

Jagades iga arvu selles võrratuses arvuga  $c$ , saame:

$$0 < \frac{a}{c} < 1.$$

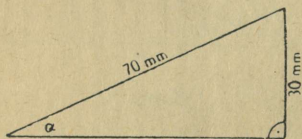
Asendades jagatise  $\frac{a}{c}$  sümboliga  $\sin \alpha$  saame

$$0 < \sin \alpha < 1,$$

millega oleme tõestanud, et

**teravnurga siinus on suurem kui 0 ja väiksem kui 1.**

Ümberpöörduvalt: iga arv, mis on suurem kui 0 ja väiksem kui 1, võib olla teravnurga siinuseks. Olgu selleks arvuks näiteks  $\frac{3}{7}$ . Et leida teravnurka, mille siinus on  $\frac{3}{7}$ , joonestame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuus on 70 mm ja üks kaatet 30 mm. Selle kolmnurga väiksema teravnurga siinus ongi  $\frac{3}{7}$  (joonis 3). Nii võime alati joonestada nurga, mille siinus võrdub antud positiivse lihtmurruga.



Joonis 3.

### Ülesanded.

1. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 24 cm ja üks kaatet on 16 cm. Kui suur on selle kaateti vastasnurga siinus?

2. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 42 m ja üks kaatet on 27 m. Kui suur on selle kaateti vastasnurga siinus?

3. Joonestada malli abil nurgad

$20^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $48^\circ$ ,  $62^\circ$  ja  $70^\circ$

ning leida jooniselt nende nurkade siinused.

4. Täisnurkse kolmnurga kaatedid on 3 cm ja 4 cm. Kui suur on suurema kaateti vastasnurga siinus?

5. Täisnurkse kolmnurga kaatedid on 5 m ja 12 m. Kui suured on selle kolmnurga teravnurkade siinused?

6. Ristküliku küljed on 40 cm ja 9 cm. Arvutada nende nurkade siinused, mis ristküliku diagonaal moodustab külgedega.

7. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 5 korda pikem kui üks kaatet. Kui suur on selle kaateti vastasnurga siinus?

8. Täisnurkse kolmnurga kaatet on  $1\frac{1}{2}$  korda lühem kui hüpotenuus. Kui suur on selle kaateti vastasnurga siinus?

9. Joonestada täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 15 cm ja ühe teravnurga siinus on 0,2.

10. Joonestada teravnurk, mille siinus on 0,5.

11. Joonestada teravnurk, mille siinus on 0,8.

Nagu hiljem näeme, on siinuste tabel hea vahend täisnurkse kolmnurga elementide arvutamiseks. Selle tabeli koostamiseks tuleb osata antud nurga järgi leida tema siinus. Mõnede nurkade puhul on siinuse leidmine eriti lihtne, näiteks nurkade puhul  $45^\circ$ ,  $30^\circ$  ja  $60^\circ$ .

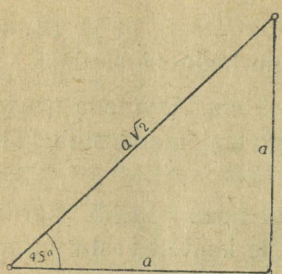
Et leida  $\sin 45^\circ$ , võtame abiks võrdhaarse täisnurkse kolmnurga (joonis 4). Kui selle kolmnurga kaatetite pikkus on  $a$  mm, siis hüpotenuusi pikkus millimeetrites on

$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

Seega

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071.$$

Et leida  $\sin 30^\circ$  ja  $\sin 60^\circ$ , võtame abiks võrdkülgse kolmnurga (joonis 5). Selle kolmnurga kõrgus poolitab kolmnurga kaheks täisnurkseks kolmnurgaks, mille teravnurgad on  $60^\circ$  ja  $30^\circ$ . Nagu jooniselt näha, on

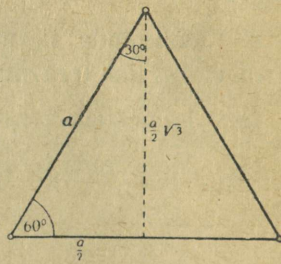


Joonis 4.

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}.$$

Et arvutada  $\sin 60^\circ$ , avaldame võrdkülgse kolmnurga kõrguse  $h$  kolmnurga külje kaudu:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{4} a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{3}. \end{aligned}$$



Joonis 5.

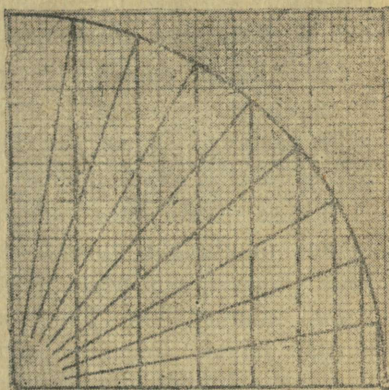
Nagu jooniselt näha, on

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{a}{2} \sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0,8660.$$

Need tulemused näitavad, et nurkade  $45^\circ$  ja  $60^\circ$  siinused on irratsionaalsed arvud. Irratsionaalsed on ka paljude teiste nurkade siinused. Siinuste tabeli kasutamise hõlbustamiseks antakse neis siinuste ligikaudsed väärtused, harilikult kas 3- või 4-kohalise murdosaga.

Lihtsa tabeli, mis sisaldab kahekohalise murdosaga siinuseid, saame koostada graafiliselt leitud andmeil.

Selleks joonestame millimeeterpaberile  $90^\circ$ -se kaare raadiusega 100 mm ja jaotame selle kaare üheksaks võrdseks osaks; jaotised järgnevad siis üksteisele iga  $10^\circ$  tagant. Kaare jaotamist saab teha kas malliga või proovimise teel sirkliga. Saadud jaotuspunktide ühendamisel ringjoone keskpunktiga saame nurgad  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ , ...,  $80^\circ$  (joonis 6, kaks korda vähendatud mõõdus). Nende nurkade siinuste leidmiseks joonestame kaare jaotuspunktidest ristlõigud rõhtraadiusele, mõõdame nende ristlõikude pikkused millimeetrites ja jagame tulemused raadiuse pikkusega, antud juhul 100-ga. Nii saame järgmise tabeli:



Joonis 6.

$\alpha$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
$\sin \alpha$	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98

Selle tabeli vaatlemisel näeme, et

**teravnurga kasvamisel tema siinus kasvab.**

Nurga siinus ei kasva ühtlaselt, vaid väiksemate nurkade puhul kiiremini ja suuremate nurkade puhul aeglasmalt: nurga kasvamisel  $10^\circ$ -st  $20^\circ$ -ni kasvab siinus 0,17 võrra; nurga kasvamisel  $70^\circ$ -st  $80^\circ$ -ni kasvab siinus ainult 0,04 võrra.

Ülaltoodud siinuste tabel sisaldab nurga väärtusi, mis kasvavad  $10^\circ$  tagant, ja neile vastavaid siinuse väärtusi.

Edaspidisteks ülesanneteks vajame aga siinuste tabelit, milles nurgad ja neile vastavad siinused on antud tihedamini, näiteks  $1^{\circ}$  või isegi  $0,1^{\circ}$  tagant. Niisugune siinuste tabel leidub K. Ratasessa «Matemaatilistes tabelites» lk. 18 ja 19.

Selle tabeli esimeses veerus on antud nurga väärtused  $1^{\circ}$  tagant ja teises veerus (pealkirjaga  $0'$  ehk  $,0^{\circ}$ ) on antud neile vastavad siinuse väärtused neljakohalise murdosaga. Sellest tabelist leiame näiteks, et  $\sin 38^{\circ} = 0,6157$ .

Tabeli järgnevates veergudes on antud  $0,1^{\circ}$  ehk  $6'$  tagant muutuvate nurkade siinused, s. o. niisuguste nurkade siinused, mis peale täisarvu kraadide sisaldavad veel kraadi kümnendikke. Tabel on koostatud nii, et niisuguse nurga siinuse (õigemini siinuse neljakohalise murdosaga) leiame reast, mille ette on trükitud kraadide arvu täisosa, ja veerust, mille peale on trükitud kraadi kümnendike arv. Nii leiame näiteks  $38,3^{\circ}$ -se nurga siinuse kohast, kus lõikuvad rida, mille ette on trükitud  $38^{\circ}$ , ja veerg, mille peale on trükitud  $,3^{\circ}$  ehk  $18'$ . Nimelt leiame, et  $\sin 38,3^{\circ} = 0,6198$ .

Siinuste tabeli vaatlemisel võime tähele panna, et nurga kasvades näiteks  $24^{\circ}$ -st  $25^{\circ}$ -ni järjest  $6'$  võrra, tabelis antud siinuse ligikaudne väärtus kasvab enamasti ikka  $0,0016$  võrra ehk 16 viimase koha ühiku võrra, paiguti aga 15 viimase koha ühiku võrra; mõnes teises vahemikus, näiteks  $60^{\circ}$ -st  $63^{\circ}$ -ni, näeme, et nurga kasvades järjest  $6'$  võrra nurga siinus kasvab paiguti 9, paiguti 8 viimase koha ühiku võrra. Sellest järeldame, et kuigi nurga siinus ei kasva ühtlaselt, siiski väikestes kasvamisvahemikkudes võrdsetele nurga juurdekasvudele vastavad ligikaudselt võrdsed siinuse juurdekasvud.

Seega, kui nurga kasvades  $1'$  võrra siinus kasvab näiteks 4 viimase koha ühiku võrra, siis nurga kasvades  $2'$  võrra siinus kasvab ligikaudu  $2 \cdot 4$  ehk 8 viimase koha

ühiku võrra ja nurga kasvades 3' võrra siinus kasvab ligikaudu  $3 \cdot 4$  ehk 12 viimase koha ühiku võrra, jne.

Seda tähelepanekut võime sõnastada ka nii:

**nurga väikestele juurdekasvudele vastavad siinuse juurdekasvud on ligikaudu võrdelised nurga juurdekasvudega.**

Kirjeldatud siinuste tabel ei sisalda enam 1' tagant muutuvate nurkade siinuseid, kuid kasutades ülaltehtud tähelepanekut võime selle tabeli abil leida ka niisuguste nurkade siinused.

N ä i d e 1. Leiame  $\sin 38^{\circ}26'$ .

Tabelist näeme, et

$$\sin 38^{\circ}24' = 0,6211$$

ja  $\sin 38^{\circ}30' = 0,6225.$

Seega nurga kasvades 6' võrra nurga siinus selles vahemikus kasvab 14 viimase koha ühiku võrra. Järelikult nurga kasvades 1' võrra siinus kasvab  $\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$  viimase koha ühiku võrra ja nurga kasvades 2' võrra siinus kasvab  $2 \cdot \frac{7}{8} = \frac{14}{4} \approx 3,5$  viimase koha ühiku võrra. Seega on  $\sin 38^{\circ}26' = 0,6211 + 0,0005 = 0,6216.$

Niisugust tabelis mitte-esineva suuruse leidmist nimetatakse tabeli interpoleerimiseks ehk interpolatsiooniks.

«Matemaatilistes tabelites» toodud siinuste tabel võimaldab interpolatsiooni teostada ka väiksema vaeva ja ajakuluga: tabeli viimases viies veerus on antud iga rea ( $10^{\circ}$ -se kasvamisvahemiku) kohta nurga juurdekasvudele vastavad siinuse keskmised juurdekasvud. Nii leiame näiteks reas  $38^{\circ}$  ja veerus 2' arvu 5. See tähendab, et vahemikus  $38^{\circ}$  kuni  $39^{\circ}$  nurga kasvades 2' võrra siinus kasvab keskmiselt 5 viimase koha ühiku võrra — tulemus, mille

üalaloodud näites leidsime arvutamise teel. Et siinus isegi 10-ses vahemikus ei kasva päris ühtlaselt, siis tabelis antud keskmised juurdekasvud arusaadavalt ei ole alati võrdsed ülalantud viisil arvutatud juurdekasvudega. Kuid keskmiste juurdekasvude tabel on koostatud nii, et nende abil leitud siinuse väärtused ei erine õigetest rohkem kui 1 viimase koha ühiku võrra.

Kasutame nüüd siinuste tabelit vastupidise ülesande lahendamiseks: leida nurk, mille siinus on antud.

N ä i d e 2. Leiame nurga, mille siinus on 0,7513.

Tabelist näeme, et niisugune siinus esineb reas  $48^{\circ}$  ja veerus  $42'$ . Seega nurk, mille siinus on 0,7513, on  $48^{\circ}42'$  ehk  $0,7513 = \sin 48^{\circ}42'$ .

N ä i d e 3. Leiame nurga, mille siinus on 0,8376.

Et antud siinus tabelis ei esine, siis peame nurga leidmiseks rakendama interpolatsioonivõtet. Tabelist näeme,

et  $\sin 56^{\circ}48' = 0,8368$

ja  $\sin 56^{\circ}54' = 0,8377$ .

Seega siinuse kasvades selles vahemikus 9 viimase koha ühiku võrra nurk kasvab  $6'$  võrra. Järelikult siinuse kasvades 1 viimase koha ühiku võrra nurk kasvab  $\frac{6'}{9}$  võrra. Et otsitava nurga siinus on 8 viimase koha ühiku võrra suurem kui  $\sin 56^{\circ}48'$ , siis otsitav nurk on  $8 \cdot \frac{6'}{9} \approx 5'$  võrra suurem kui  $56^{\circ}48'$ . Seega otsitav nurk on  $56^{\circ}48' + 5' = 56^{\circ}53'$  ehk  $0,8376 = \sin 56^{\circ}53'$ .

Seegi ülesanne laheneb hõlpsamalt ja kiiremini, kui kasutame keskmisi juurdekasve: reas  $56^{\circ}$  otsime üles siinuse juurdekasvu 8; see asetseb veerus, mis kannab pealkirja  $5'$ . Seega oleme saanud sama tulemuse, mis varemini: otsitav nurk on  $5'$  võrra suurem kui  $56^{\circ}48'$ .

## Ülesanded.

12. Leida siinuste tabelist järgmiste nurkade siinused:

8°	15°	24°	38°	42°
50°	66°	78°	84°	89°

13. Leida siinuste tabelist nurgad, mille siinused on:

0,0698	0,2924	0,5299	0,6561
0,6947	0,7986	0,9135	0,9903

14. Leida siinuste tabeli abil järgmiste nurkade siinused:

15°30'	25°42'	39°06'	64°12'	76°54'
10,6°	5,1°	24,9°	48,3°	80,4°

15. Leida siinuste tabeli abil nurgad, mille siinused on:

0,2857	0,5934	0,9516	0,9992	0,0993
0,8300	0,6909	0,0035	0,9999	0,8111

16. Leida siinuste tabeli abil järgmiste nurkade siinused:

23°10'	48°27'	69°50'	51°07'	4°46'
1°39'	14°40'	77°22'	85°20'	48°08'

17. Leida siinuste tabeli abil nurgad, mille siinused on:

0,5035	0,7698	0,8000	0,4488	0,5600
0,6918	0,1190	0,9691	0,9948	0,3000

18. Leida siinuste tabeli abil nurgad, mille siinused on:

$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{10}{11}$
---------------	---------------	---------------	---------------	-----------------

### § 3. Täisnurkse kolmnurga elementide arvutamine nurga siinuse abil.

Võrduses  $\sin a = \frac{a}{c}$

on seotud täisnurkse kolmnurga kolm elementi: teravnurk, vastaskaatet ja hüpotenuus. Kui neist suurustest mingid kaks on antud, siis siinuste tabeli kasutamisel saame leida kolmanda suuruse. Näidetena lahendame järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Kivi veeretatakse maast vankrile plangu abil, mille pikkus on 2,43 m. Leida plangu kaldenurk maapinna suhtes, kui vankri kõrgus on 0,95 m.

Lahendus. Tähistame plangu kaldenurga tähega  $a$ . Siis

$$\sin a = \frac{0,95}{2,43}$$

ehk

$$\sin a = 0,391.$$

Siinuste tabelist leiame, et

$$a \approx 23^\circ.$$

Vastus. Plank moodustab maapinnaga nurga  $23^\circ$ .

Ülesanne 2. Laev väljub sadamast suunas, mis meridiaaniga moodustab  $38^\circ$ -se nurga. Kui kaugel on laev sadama meridiaanist, kui ta on jõudnud 24 meremiili kaugusele sadamast?

Lahendus. Laeva kulgetud tee, laeva kaugus sadama meridiaanist ja selle meridiaani lõik moodustavad täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on laeva kulgetud tee. Laeva kaugus sadama meridiaanist on kaatetik, mille vastas asetseb  $38^\circ$ -ne nurk. Tähistanud selle kauguse tähega  $k$ , võime siinuse definitsiooni põhjal kirjutada, et

$$\frac{k}{24} = \sin 38^\circ.$$

Siit leiame, et

$$k = 24 \cdot \sin 38^\circ$$

ehk

$$k = 24 \cdot 0,616 \approx 14,8.$$

Vastus. Laeva kaugus sadama meridiaanist on 14,8 meremiili.

Ülesanne 3. Kui pikk tuleb võtta telefoniposti tugitraat, et traadi kinnituskoht asetseks 2,4 m kõrgusel maapinnast ja traat moodustaks maapinnaga  $60^\circ$ -se nurga?

Lahendus. Olgu traadi pikkus  $x$  m. Siis

$$\frac{2,4}{x} = \sin 60^\circ,$$

millest

$$x = \frac{2,4}{\sin 60^\circ}$$

ehk

$$x = \frac{2,4}{0,866}$$

ehk

$$x \approx 2,8.$$

Vastus. Tugitraadi pikkus peab olema 2,8 m.

Sagedasti kasutatakse teravnurga siinust selle nurga vastaskaateti arvutamiseks. Sellekohase valemi saame võrdusest

$$\sin \alpha = \frac{a}{c},$$

avaldades temast kaateti  $a$ :

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

Analoogiliselt avaldub kolmnurga teine kaatet:

$$b = c \cdot \sin \beta.$$

Neid valemeid võime sõnastada järgmiselt:

täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub hüpoteenuusi ja selle kaateti vastasnurga siinuse korrutisega.

Kui võrduse

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

lahendame hüpoteenuusi  $c$  suhtes, siis saame valemi hüpoteenuusi arvutamiseks:

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Analoogiliselt avaldub hüpoteenuus ka teise kaateti ja teise teravnurga kaudu:

$$c = \frac{b}{\sin \beta}.$$

Neid valemeid võime sõnastada järgmiselt:

täisnurkse kolmnurga hüpoteenuus võrdub ühe kaateti ja selle kaateti vastasnurga siinuse jagatisega.

**Ülesanded.**

19. Kuivatusrehte viiv sild on 16,5 m pikk ja tõuseb rõhtsalt maapinnalt 4,1 m kõrgusele. Missuguse nurga moodustab sild rõhtsa maapinnaga?

20. Loodimine näitab, et sirgjooneline maantee tõuseb kohast  $A$  kohani  $B$  18 m võrra;  $A$  ja  $B$  vaheline tee pikkus on 300 m. Kui suure nurga moodustab maantee rõhttasandiga?

21. Antenni juhe on 24 m pikk; juhtme üks ots on kinnitatud vardale 8,8 m kõrgusel, teine ots maja seinale 5,2 m kõrgusel. Missuguse nurga moodustab juhe rõhttasandiga?

22. Täisnurkse kolmnurga hüpoteenuus on 104 cm ja ühe teravnurga siinus on  $\frac{9}{13}$ . Kui suur on selle nurga vastaskaatet?

23. Lohenöör on 152 m pikk ja moodustab rõhtsa maapinnaga nurga  $54^\circ$ . Kui kõrgel on lohe maapinnast?

24. Sirge autotee moodustab sirge raudteega  $76,8^\circ$ -se nurga. Kui kaugel on auto raudteest, kui ta on jõudnud 16 km kaugusele teede ristlemiskohast?

25. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 35 cm ja selle kaateti vastasnurga siinus on  $\frac{7}{12}$ . Kui suur on hüpotenuus?

26. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 54 cm ja selle kaateti vastasnurk on  $34,5^\circ$ . Kui suur on selle kolmnurga hüpotenuus?

27. Raadiomast hoitakse püsti terasköite abil, mis on kinnitatud masti külge 8,2 m kõrgusel ja moodustavad rõhttasandiga  $62^\circ$ -sed nurgad. Arvutada terasköite pikkus.

#### § 4. Teravnurga koosinus.

Eespool leidsime seose täisnurkse kolmnurga teravnurga, selle vastaskaateti ja hüpotenuusi vahel. Et saada seost täisnurkse kolmnurga teravnurga, selle lähiskaateti ja hüpotenuusi vahel, selleks kasutame teravnurga  $\alpha$  lähiskaateti ja hüpotenuusi suhet, mida nimetatakse nurga  $\alpha$  koosinuseks. Seega täisnurkses kolmnurgas

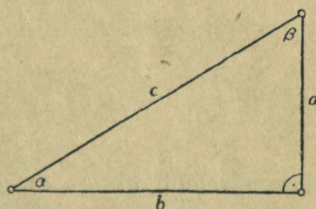
teravnurga koosinus on selle nurga lähiskaateti ja hüpotenuusi suhe

ehk sümbolites

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

ja

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$



Joonis 7.

Et täisnurkse kolmnurga kaatet on alati lühem hüpotenuusist, siis on murrud  $\frac{b}{c}$  ja  $\frac{a}{c}$  lihtmurrud ja seejuures positiivsed. Sellest jäeldub, et

teravnurga koosinus on suurem kui 0 ja väiksem kui 1.

### Ülesanded.

28. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 36 m ja üks kaatet on 27 m. Kui suur on nende külgede vahelise nurga koosinus?

29. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 33 cm ja üks kaatet on 21 cm. Arvutada selle kaateti lähisnurga koosinus.

30. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 5 cm ja 12 cm. Arvutada suurema teravnurga koosinus.

31. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 4 korda lühem kui hüpotenuus. Kui suur on selle kaateti lähisnurga koosinus?

32. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 2 korda pikem ühest kaatetist. Kui suur on hüpotenuusi ja selle kaateti vahelise nurga koosinus?

Võrreldes nurga koosinuse ja siinuse definitsioone näeme, et

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

ja samuti

$$\sin \beta = \frac{b}{c}.$$

Sellest jäeldub, et

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

ja seega

täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga koosinus võrdub teise teravnurga siinusega.

Et täisnurkse ko' nurga teravnurkade summa on  $90^\circ$ , siis

$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

järelikult

$$\boxed{\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)}$$

Nurka  $90^\circ - \alpha$  nimetatakse nurga  $\alpha$  täiendusnurgaks; seepärast võime eelneva seose sõnastada ka nii:

teravnurga koosinus võrdub täiendusnurga siinusega.<sup>1</sup>

Selle seose põhjal on näiteks

$$\cos 30^\circ = \sin (90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \approx 0,8660;$$

$$\cos 45^\circ = \sin (90^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,7071;$$

$$\cos 60^\circ = \sin (90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = 0,5000.$$

Ülesanded.

33. Leida nurk, mille koosinus on niisama suur kui

$\sin 64^\circ$	$\sin 43^\circ$	$\sin 76^\circ$	$\sin 2^\circ$
$\sin 59^\circ 40'$	$\sin 80^\circ 10'$	$\sin 11^\circ 19'$	$\sin 29^\circ 01'$

34. Leida nurk, mille siinus on niisama suur kui

$\cos 63^\circ$	$\cos 25^\circ$	$\cos 45^\circ$	$\cos 9^\circ$
$\cos 48^\circ 20'$	$\cos 74^\circ 30'$	$\cos 68^\circ 12'$	$\cos 88^\circ 46'$

---

<sup>1</sup> Oskussõna koosinus ja sümbol  $\cos$  on tekkinud lühenditena ladinakeelsest oskussõnast *complementi sinus*, mis tähendab täiendusnurga siinust.

35. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

$$2 \sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$$

$$\sin 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 60^\circ$$

$$(\sin 60^\circ + \sin 45^\circ) (\cos 30^\circ - \cos 45^\circ)$$

$$(\sin 30^\circ)^2 + (\cos 30^\circ)^2$$

$$(\sin 45^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2$$

36. Lihtsustada järgmised avaldised ja arvutada nende väärtused, kasutades siinuste tabelit:

$$5 \sin 46^\circ + 4 \cos 44^\circ$$

$$10 \cos 12^\circ - 2 \sin 78^\circ$$

$$6 \sin 44^\circ 10' - 4 \cos 45^\circ 50'$$

$$\sin 20^\circ 48' \cdot \cos 69^\circ 12'$$

$$\cos 25^\circ 56' : \sin 64^\circ 04'$$

Nurga koosinuse kasutamiseks täisnurkse kolmnurga elementide arvutamisel on vajalik koosinuste tabel. Selle koostame siinuste tabeli põhjal, kasutades seost

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha).$$

Nii saame eespool toodud siinuste tabelist järgmise koosinuste tabeli:

$\alpha$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
$\cos \alpha$	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17

Sellest tabelist on näha, et

teravnurga kasvamisega tema koosinus kahaneb.

«Matemaatilistes tabelites» lk. 18 ja 19 leiduva siinuste tabeli iga rea lõppu (enne keskmiste juurdekasvude veerge) on trükitud kraadide arv, mis rea algusse trükitud kraadide

arvu täiendab  $89^{\circ}$ -ni, ja iga veeru alla on trükitud kraadi kümnendike (ja vastav minutite) arv, mis sama veeru peale trükitud kümnendike (või minutite) arvu täiendab  $1^{\circ}$ -ni. Seega on mingi rea algusest ja mingi veeru pealt võetud arvude ning sama rea lõpust ja sama veeru alt võetud arvude summa ikka  $89^{\circ} + 1^{\circ}$  ehk  $90^{\circ}$ . Järelikult on vasakult ja ülalt loetud nurk ning vastav paremalt ja alt loetud nurk teineteise täiendusnurgad. Seetõttu iga vasakult ja ülalt loetud nurga siinus on ühtlasi vastava paremalt ja alt loetud nurga koosinuseks. Niiviisi täiendatud siinuste tabel on ühtlasi ka koosinuste tabeliks.

Antud nurga koosinuse leiame reast, mille lõppu on trükitud selle nurga kraadide arvu täisosa, ja veerust, mille alla on trükitud selle nurga kraadi kümnendike arv. Nii leiame näiteks, et  $\cos 28,3^{\circ} = 0,8805$ .

Kui antud nurka tabelis ei esine, siis tuleb tema koosinuse leidmiseks kasutada interpolatsioonivõtet. Seejuures peab alati silmas pidama, et nurga kasvades tema koosinus kahaneb.

N ä i d e 1. Leiame  $\cos 28^{\circ}22'$ .

Tabelist leiame, et

$$\cos 28^{\circ}18' = 0,8805$$

ja

$$\cos 28^{\circ}24' = 0,8796.$$

Seega nurga kasvades  $6'$  võrra tema koosinus selles vahemikus kahaneb 9 viimase koha ühiku võrra. Järelikult nurga kasvades  $4'$  võrra koosinus kahaneb  $\frac{4 \cdot 9}{6} = 6$  viimase koha ühiku võrra. Seega on  $\cos 28^{\circ}22' = 0,8805 - 0,0006 = 0,8799$ .

Ka koosinuse leidmisel võib kasutada keskmiste juurdekasvude veerge. Nii leiame reas  $28^{\circ}$  ja veerus  $4'$  juurdekasvu 6. Koosinuse leidmisel on soovitav kasutada kesk-

miste juurdekasvude veergude peale trükitud minutite arvude asemel nende alla trükitud negatiivseid arve, mis meenutavad, et nurga kasvades koosinus kahaneb ja nurga kahanedes koosinus kasvab.

### Ülesanded.

37. Leida koosinuste tabelist järgmiste nurkade koosinused:

3°	7°	16°	29°	43°
55°	74°	82°	85°	89°

38. Leida koosinuste tabelist nurgad, mille koosinused on:

0,9986	0,9744	0,8090	0,7071
0,5878	0,3090	0,1564	0,0349

39. Leida koosinuste tabeli abil järgmiste nurkade koosinused:

38°06'	47°36'	76°48'	13°12'	50°24'
25°49'	25°50'	37°39'	85°55'	66°29'

40. Leida koosinuste tabeli abil nurgad, mille koosinused on:

0,9542	0,3371	0,8131	0,9810	0,0488
0,8867	0,7919	0,4000	0,2600	0,4142

### § 5. Täisnurkse kolmnurga elementide arvutamine nurga koosinuse abil.

Nurga koosinuse kasutamist täisnurkse kolmnurga elementide arvutamisel selgitame järgmiste ülesannetega.

Ülesanne 1. Avaldada täisnurkse kolmnurga kaatet hüpotenuusi ja nende kahe külje vahelise teravnurga abil.

L a h e n d u s. Koosinuse definitsiooni järgi on

$$\cos a = \frac{b}{c},$$

seega

$$b = c \cdot \cos a$$

Analoogiliselt

$$a = c \cdot \cos \beta.$$

Tulemuse sõnastame järgmiselt:

täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub hüpotenuusi ja selle kaateti lähisnurga koosinuse korrutisega.

Ülesanne 2. Avaldada täisnurkse kolmnurga hüpotenuus ühe kaateti ja selle kaateti lähisnurga kaudu.

L a h e n d u s. Lahendades võrduse

$$b = c \cdot \cos a$$

hüpotenuusi  $c$  suhtes, saame

$$c = \frac{b}{\cos a}.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$c = \frac{a}{\cos \beta}.$$

Tulemuse sõnastame nii:

täisnurkse kolmnurga hüpotenuus võrdub ühe kaateti ja selle kaateti lähisnurga koosinuse jagatisega.

Ülesanded.

41. Kuulus Pisa torn on 54 m kõrge. Vajumise tõttu on torni tipp nihkunud oma algasendist kõrvale 4,5 m võrra. Leida vähendatud mõõodus tehtud joonise abil nurk, mille torn moodustab röhhtasandiga. Leida sama nurk koosinuste tabeli abil.

42. Telefoniposti tugi on 3,8 m pikk; toe alumine ots asetseb 2,6 m kaugusel telefonipostist. Missuguse nurga moodustab tugi rõhttasandiga?

43. 4,6 m pikk redel tugeb ülemise otsaga seinakarniisile, mille kõrgus üle maapinna on 3,4 m. Missuguse nurga moodustab redel seinaga?

44. Kui suur on lõigu ja projektsioontelje vaheline nurk, kui lõigu pikkus on 54 cm ja ta projektsiooni pikkus on 38 cm?

45. Võrdhaarse kolmnurga alus on 22 cm ja haar on 25 cm. Kui suur on selle kolmnurga alusnurk?

46. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 86 m ja üks teravnurk on  $30,8^\circ$ . Arvutada selle nurga lähiskaadet.

47. Leida 5,6 meetri pikkuse lõigu projektsiooni pikkus, kui lõik moodustab projektsioonteljega nurga  $68^\circ$ .

48. Mere sügavuse määramiseks lastakse laevalt merre nööri otsas tükk tina, mis laeva sõites libiseb mööda merepõhja. Merre lastud nööri pikkus on 50 m ja nööri moodustab püstsihiga nurga  $28^\circ$ . Kui sügav on meri laeva kohal?

49. Kui suur on täisnurkse kolmnurga pindala, kui hüpotenuus on 17 cm ja üks teravnurk on  $58^\circ 26'$ ?

50. Täisnurkses kolmnurgas on kaadet  $a = 12,8$  m ja  $\cos \beta = 0,7$ . Arvutada hüpotenuusi pikkus  $c$ .

51. Laev sõidab suunas, mis meridiaaniga moodustab nurga  $52,4^\circ$ . Kui pika tee on laev kulgenud, kui ta tee projektsioon meridiaanile on 18 meremiili?

52. Mäenõlv moodustab rõhtsa maapinnaga  $24^\circ$ -se nurga. Tee äärde, mis viib otse mäkke, tahetakse istutada puid nii, et kahe kõrvuti oleva puu tüvede vaheline kaugus oleks 4 m. Kui kaugele üksteisest tuleb kaevata augud puude jaoks?

## § 6. Teravnurga tangens.

Täisnurkses kolmnurgas (joonis 8)

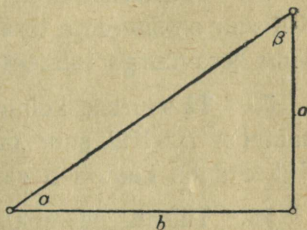
teravnurga tangens on selle nurga vastaskaateti ja lähiskaateti suhe.

Selle suhte tähistamiseks kasutatakse sümbolit  $\tan$ . Seega

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{a}{b}}$$

ja

$$\tan \beta = \frac{b}{a}.$$



Joonis 8.

Et täisnurkse kolmnurga üks kaatet võrreldes teise kaatetiga võib olla kuitahes suur, siis kaatetite suhted  $\frac{a}{b}$  ja  $\frac{b}{a}$  võivad omandada igasuguseid positiivseid väärtusi. Vastandina teravnurga siinusele ja koosinusele võib teravnurga tangens omandada igasuguseid positiivseid väärtusi. Ümberpöörduvalt: iga positiivse arvu järgi saab konstrueerida nurka, mille tangens võrdub selle arvuga.

Näide. Et konstrueerida nurka, mille tangens on 4,7, joonestame täisnurkse kolmnurga, mille kaatetid on näiteks 10 mm ja 47 mm. Selle kolmnurga suurema kaateti vastasnurga tangens on 4,7.

Samuti nagu arvutasime  $\sin 45^\circ$ ,  $\sin 30^\circ$  ja  $\sin 60^\circ$ , saame arvutada ka  $\tan 45^\circ$ ,  $\tan 30^\circ$  ja  $\tan 60^\circ$ . Nii leiame võrdhaarsest täisnurksest kolmnurgast (joonis 6), et

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1.$$

Võrdkülgsest kolmnurgast, mis on kõrgusega poolitatud kaheks täisnurkseks kolmnurgaks (joonis 5), saame:

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774; \quad \tan 60^\circ = \sqrt{3} \approx 1,732.$$

## Ülesanded.

53. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 16 cm ja 30 cm. Kui suur on väiksema kaateti vastasnurga tangens?

54. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 24 cm ja 32 cm. Kui suur on suurema teravnurga tangens? Kui suur on väiksema teravnurga tangens?

55. Täisnurkse kolmnurga kaatet  $a$  on 5 korda pikem kaatetist  $b$ . Kui suur on kaateti  $a$  vastasnurga tangens? Kui suur on kaateti  $b$  vastasnurga tangens?

56. Täisnurkse kolmnurga teravnurga  $\alpha$  tangens on  $\frac{4}{7}$ . Missuguse osa nurga  $\alpha$  lähiskaatetist moodustab selle nurga vastaskaatet?

57. Täisnurkse kolmnurga teravnurga  $\beta$  tangens on 2,6. Kumb kaateteist on pikem teisest ja mitu korda?

58. Joonestada nurk, mille tangens on 2.

59. Joonestada nurk, mille tangens on  $\frac{1}{5}$ .

60. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on  $c$ . Kaatet  $a$  on 0,6  $c$ . Kui suur on selle kaateti vastasnurga tangens?

61. Täisnurkse kolmnurga kaatet on  $a$ , hüpotenuus on  $c$ . Avaldada nurga  $\alpha$  tangens andmete kaudu.

62. Võrdhaarse kolmnurga haar on 15 cm ja alus 18 cm. Kui suur on alusnurga tangens?

63. Risküliliku diagonaal on 13 cm ja üks külg 5 cm. Kui suur on diagonaali ja pikema külje vahelise nurga tangens?

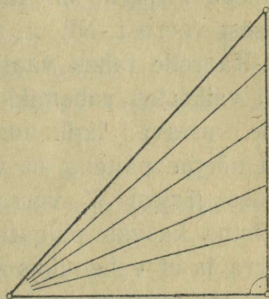
64. Ühendada ruudu ühe külje keskpunkt kahe vastasoleva tipuga ja arvutada kõigi joonisel tekkinud nurkade tangensid.

Eespool selgus, et nurkade  $30^\circ$  ja  $60^\circ$  tangensid on irratsionaalsed arvud. Irratsionaalsed on ka paljude teiste nurkade tangensid. Seepärast tabelites antakse ka tangensid ligikaudsetena, harilikult kas 3- või 4-kohalise murdosaga.

Nagu siinuste tabeli, nii saame ka tangensite tabeli koostada graafiliselt leitud andmeil. Selleks joonestame millimeeterpaberile täisnurksed kolmnurgad, milledes esinevad nurgad

$10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 80^\circ,$

möödame nende kolmnurkade kaatetid ja leiame vajalikud suhted. Töö kergendamiseks on kasulik neid kolmnurki joonestada ühe ühise kaatetiga ja võtta selle kaateti pikkuseks 100 mm (joonis 9, vähendatud määridus). Töö tulemusena saame järgmise tabeli.



Joonis 9.

$\alpha$	$10^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
$\tan \alpha$	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67

Joonis, mille tegime tangensi väärtuse määramiseks, näitab, et nurga  $\alpha$  kasvades ja lähiskaateti muutumatuks jäädes kasvab vastaskaatet ning seega ka vastaskaateti ja lähiskaateti suhe ehk nurga  $\alpha$  tangens; seega

**teravnurga kasvamisel tema tangens kasvab.**

«Matemaatilistes tabelites» lk. 20 ja 21 leidub tangensite tabel, milles nurgad ja nende tangensid on antud 0,10 tagant. Oma ehituselt see tabel sarnaneb samas raamatus leiduva siinuste tabeliga, mistõttu tangensite tabeli kasutamine ei vaja erilist selgitust. Märkida tuleb vaid seda, et

ruumi säästmise otstarbel, alates tabeli kolmandast veerust, on ära trükitud ainult tangensite murdosad. Kui tangensi murdosa on trükitud tavalise kirjaga, siis täisosa tuleb võtta sama rea teisest veerust; kui murdosa on trükitud jämeda kirjaga, siis täisosa tuleb võtta järgneva rea teisest veerust. Nii on näiteks  $\tan 63^{\circ}42' = 2,0233$ .

Ka selle tabeli vaatlemisel võime tähele panna, et küllalt väikestes vahemikkudes võrdsetele nurga juurdekasvudele vastavad ligikaudselt võrdsed tangensi juurdekasvud. Nii näeme näiteks, et vahemikus  $26^{\circ}$  kuni  $27^{\circ}$  nurga kasvades järjest  $6'$  võrra tabelis antud tangensi ligikaudne väärtus kasvab paiguti 21, paiguti 22 viimase koha ühiku võrra ja et vahemikus  $49^{\circ}$  kuni  $50^{\circ}$  nurga kasvades järjest  $6'$  võrra tangens kasvab paiguti 40, paiguti 41, paiguti aga ka 42 viimase koha ühiku võrra. Seega võime ka tangensi kohta nentida, et

**nurga väikestele juurdekasvudele vastavad tangensi juurdekasvud on ligikaudu võrdelised nurga juurdekasvudega.**

Selle tõsiasja tõttu on võimalik leida ka tabelis mittesinevate nurkade tangenseid.

N ä i d e. Leiame  $\tan 63^{\circ}26'$ .

Tabelist leiame, et

$$\tan 63^{\circ}24' = 1,9970$$

ja

$$\tan 63^{\circ}30' = 2,0057.$$

Seega nurga kasvades  $6'$  võrra tangens kasvab selles vahemikus 87 viimase koha ühiku võrra. Järelikult nurga kasvades  $2'$  võrra tangens kasvab  $\frac{2 \cdot 87}{6} = 29$  viimase koha ühiku võrra. Seega on  $\tan 63^{\circ}26' = 1,9970 + 0,0029 = 1,9999$ .

Sama tulemuse oleksime saanud, kui tangensi juurdekasvu oleksime võtnud keskmiste juurdekasvude veerust —

seal vastab 2'-sele nurga juurdekasvule tangensi juurdekasv 29.

Alates 75<sup>o</sup>-sest nurgast hakkab tangensi juurdekasv nii kiiresti muutuma, et kasutades interpolatsiooniks keskmisi juurdekasve võime saada tulemusi, mis õigetest erinevad juba enam kui 1 viimase koha ühiku võrra. Seepärast tuleb pidada ebasoovitavaks keskmiste juurdekasvude kasutamist tabeli selles osas, mistõttu siit alates keskmised juurdekasvud ongi jäetud andmata.

Vaadeldes edasi tangensite tabelit näeme, et täisnurga lähedaste nurkade puhul nurga 6'-stele juurdekasvudele ei vasta kaugeltki enam võrdsed tangensi juurdekasvud. Nii on näiteks vahemikus 88<sup>o</sup> kuni 90<sup>o</sup> tangensi järjestikused juurdekasvud 150, 168, 187, 211 jne. viimase koha ühikut. Seega ei ole siin kehtiv eeldus, mis lubas rakendada interpolatsioonivõtet. Rakendades siingi interpolatsiooni võime saada tangensi väärtusi, mis tunduvalt erinevad õigetest. Nii leiame interpolatsiooni abil, et  $\tan 89^{\circ}39' = 143,2 + \frac{3 \cdot 47,8}{6} = 143,2 + 23,9 = 167,1$ , kuna detailsematest tabelitest leiame, et  $\tan 89^{\circ}39' = 163,7$ . Seega oleme interpolatsiooni abil saanud tangensi väärtuse, mis õigest erineb 34 viimase koha ühiku võrra. Seepärast ei ole soovitatav kasutada interpolatsiooni vahemikus 88<sup>o</sup> kuni 90<sup>o</sup>.

### Ülesanded.

65. Leida tangensite tabelist järgmiste nurkade tangensid:

7 <sup>o</sup>	26 <sup>o</sup>	47 <sup>o</sup>	72 <sup>o</sup>	89 <sup>o</sup> ,
10,3 <sup>o</sup>	32,7 <sup>o</sup>	56,5 <sup>o</sup>	63,6 <sup>o</sup>	78,9 <sup>o</sup>

66. Leida tangensite tabelist nurgad, mille tangensid on:

0,1051	0,3443	0,6745	1,2799	19,08
0,2053	0,7212	2,0323	3,0595	44,07

67. Leida tangensite tabeli abil järgmiste nurkade tangensid:

15°30'	24°18'	58°42'	78°42'	60°06'
21°15'	17°45'	59°10'	63°27'	78°39'

68. Leida tangensite tabeli abil nurgad, mille tangensid on:

0,3679	0,4010	1,7000	2,0300	5,0000
--------	--------	--------	--------	--------

69. Leida tangensite tabeli abil nurgad, mille tangensid on:

$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{13}{12}$
---------------	---------------	---------------	---------------	-----------------

70. Mäenõlvaku kallakust mõõdetakse nõlvaku kaldenurga tangensi abil. Missuguse nurga moodustab nõlvak rõhttasandiga, kui nõlvaku kallakus on 31 : 72 ?

71. Liikumisel mööda liumäge vastab 1-meetrisele tõusule 1,7-meetriline edasinihkumine rõhtsuunas. Kui suure nurga moodustab liumägi rõhttasandiga?

### § 7. Täisnurkse kolmnurga elementide arvutamine nurga tangensi abil.

Kui täisnurkse kolmnurga kolmest elemendist, mis esinevad võrduses

$$\tan \alpha = \frac{a}{b},$$

on mingid kaks elementi antud, siis tangensite tabeli abil saame arvutada kolmanda elemendi. Nii saab leida

1. teravnurga, kui on antud kaatetid  $a$  ja  $b$ , sest

$$\tan \alpha = \frac{a}{b};$$

2. teravnurga vastaskaateti, kui on antud nurk ja selle lähiskaatet, sest

$$a = b \cdot \tan \alpha$$

3. teravnurga lähiskaateti, kui on antud nurk ja vastaskaatet, sest

$$b = \frac{a}{\tan \alpha}$$

Et viimasel juhul toimub kaateti arvutamine jagamise teel mitmekohalise arvuga, siis ei ole see arvutamiski soovitav. Seepärast 3. juhul arvutame enne nurga  $\beta$  valem järgi

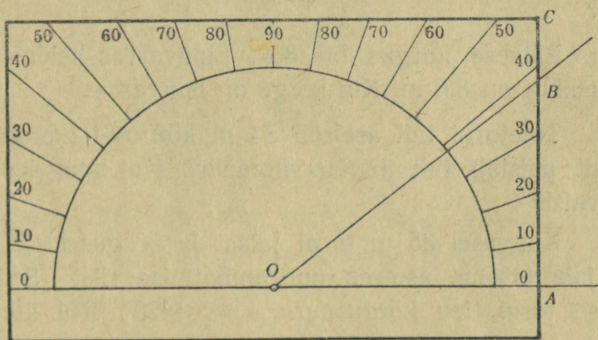
$$\beta = 90^\circ - \alpha$$

ja kasutame siis kaateti arvutamiseks võrdust

$$b = a \cdot \tan \beta.$$

Nii ühe kui ka teise kaateti arvutamine toimub seega järgmise eeskirja järgi:

täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub teise kaateti ja selle juures oleva teravnurga tangensi korrutisega.



Joonis 10.

Mallid valmistatakse mõnikord ristküliku-kujulistena (joonis 10). Sellisel mallil on nurgajaotised kantud tema

sirgetele servadele. Lõigud  $AB$  ja  $AC$  malli serval on võrreldised vastavate nurkade tangensitega. Seepärast sellist malli nimetatakse tangensjoonlauaks.

### Ülesanded.

72. Missuguse nurga moodustavad päikese kiired maapinnaga, kui ühe meetri pikkune püstiseisev kepp heidab maapinnale 1,35 meetri pikkuse varju?

73. Risküliku küljed on 4 dm ja 5,6 dm. Leida nurgad, mis risküliku diagonaal moodustab külgedega.

74. Redeli ülemine ots tugeb akna veelauale 4,6 m kõrgusel; redeli alumine ots on 2,7 m seinast eemal. Missuguse nurga moodustab redel rõhtsa maapinnaga?

75. Trepi astmed on 21 cm laiad ja 13 cm kõrged. Missuguse nurga moodustab trepi käsipuu rõhttasandiga?

76. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 42 cm. Kui suur on selle kolmnurga teine kaatet, kui ta vastasnurga tangens on  $\frac{11}{14}$ ?

77. Päikese kõrgus on  $36^\circ$ . Lipuvarras heidab varju, mille pikkus on 8,6 m. Kui kõrge on lipuvarras?

78. Tuletorni tuli asetseb 84 m kõrgusel merepinnast. Laevalt paistab tuli  $8^\circ$  üle silmapiiri. Kui kaugel on laev tuletornist?

79. Kaugusel 35 m torni jalast ja kõrgusel 1,7 m üle selle jala taseme asetseb nurgamõõtmise riist. Selle abil leitakse torni tipu kõrgusnurk  $\alpha = 64^\circ 20'$ . Kui kõrge on torn?

80. Punktist  $A$  paistab lennuk parajasti pea kohal; samal ajal seda lennukit punktist  $B$  vaadeldes leitakse tema kõrgusnurk olevat  $48^\circ$ . Kaugus  $AB$  on kaardi järgi 472 m. Kui kõrgel maapinnast on lennuk vaatlusajal?

81. Kui kaugele silmast peab asetama 25-millimeetrise läbimõõduga mündi, et ta paistaks niisama suures nurgas kui kuu? Kuud näeme nurgas  $31'$ .

82. Täisnurkse kolmnurga üks kaateteist on 17 m; kolmnurga pindala on  $134 \text{ m}^2$ . Kui suured on kolmnurga teravnurgad?

### § 8. Teravnurga kootangens.

Eespool selgus, et nurga tangensi abil ei ole sobiv arvutada selle nurga lähiskaatetit. Viimase leidmiseks on kasulik tarvitada nurga kootangensit. Täisnurkses kolmnurgas

teravnurga kootangens on selle nurga lähiskaateti ja vastaskaateti suhe.

Selle suhte tähistamiseks kasutatakse sümbolit  $\cot$ .

Kasutades täisnurkse kolmnurga elementide tähistamiseks normaaltähistust (joonis 8), saame antud definitsiooni järgi, et

$$\cot \alpha = \frac{b}{a}$$

ja

$$\cot \beta = \frac{a}{b}.$$

Nurga kootangensi ja tangensi definitsioonide võrdlemisel selgub, et üks ja sama suhe, näiteks  $\frac{a}{b}$ , on täisnurkse kolmnurga ühe teravnurga kootangens ja teise teravnurga tangens:

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha$$

ja

$$\frac{b}{a} = \tan \beta,$$

järelikult

$$\cot \alpha = \tan \beta.$$

Nurk  $\beta$  on nurga  $\alpha$  täiendusnurk; seega

teravnurga kootangens võrdub täiendusnurga tangensiga<sup>1</sup> ehk sümbolites

$$\cot \alpha = \tan (90^\circ - \alpha)$$

Et teravnurga tangens võib omandada igasuguse positiivse väärtuse, siis järeldub viimasest võrdusest seesama omadus ka teravnurga kootangensi kohta.

Nurga kootangensi leidmiseks kasutame täiendusnurga tangensit. Nii leiame näiteks, et

$$\cot 10^\circ = \tan (90^\circ - 10^\circ) = \tan 80^\circ = 5,67.$$

Selsamal viisil võime leida ka teiste nurkade kootangensid ja koostada kootangensite tabeli:

$\alpha$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\cot \alpha$	5,67	2,75	1,73	1,19	0,84	0,58	0,36	0,18

Saadud tabelist on näha, et

teravnurga kasvamisel tema kootangens kahaneb.

Täiendades tangensite tabelit täiendusnurkade veeruga saame seda kasutada ka kootangensite tabelina. Antud nurga kootangensi leidmine ja nurga leidmine antud kootangensi järgi «Matemaatilistes tabelites» lk. 20 ja 21 toodud tabeli abil toimub analoogiliselt koosinuste tabeli kasutamisega.

Võrdusest

$$\frac{b}{a} = \cot \alpha$$

leiame, et

$$b = a \cot \alpha$$

<sup>1</sup> Sümboli  $\cot$  tekkimine on analoogiline koosinuse sümboli  $\cos$  tekkimisega; sümbol  $\cot$  on ladinakeelse oskussõna *complementi tangens* lühend.

Analoogiliselt on ka

$$a = b \cot \beta.$$

Nii saame täisnurkse kolmnurga kaateti arvutamiseks veel ühe eeskirja:

täisnurkse kolmnurga kaatet võrdub teise kaateti ja selle vastas asetseva nurga kootangensi korrutisega.

#### Ülesanded.

83. Täisnurkses kolmnurgas on kaatet  $a = 12$  ja kaatet  $b = 15$ . Arvutada  $\cot a$  ja  $\cot \beta$ .

84. Võrdhaarse kolmnurga alus on 1,8 m ja kõrgus on 1,4 m. Arvutada aluse lähisnurga kootangens.

85. Joonestada nurk, mille kootangens on 2.

86. Joonestada nurk, mille kootangens on  $\frac{1}{3}$ .

87. Leida nurk, mille kootangens on niisama suur kui  $\tan 58^\circ$ ,  $\tan 1^\circ$ ,  $\tan 14^\circ 10'$ ,  $\tan 0^\circ 36'$ ,  $\tan 41^\circ 41'$ .

88. Leida nurk, mille tangens on niisama suur kui  $\cot 18^\circ$ ,  $\cot 55^\circ$ ,  $\cot 24^\circ 40'$ ,  $\cot 2^\circ 05'$ ,  $\cot 12^\circ 19'$ .

89. Leida kootangensite tabeli abil järgmiste nurkade kootangensid:

$10^\circ$	$65^\circ$	$26^\circ$	$18^\circ$	$46^\circ$
$53^\circ 54'$	$69^\circ 18'$	$11^\circ 12'$	$26^\circ 30'$	$89^\circ 42'$

90. Leida kootangensite tabeli abil nurgad, mille kootangensid on:

9,5144	3,4874	2,0503	5,1446	1,1106
0,9358	0,7454	3,0061	2,0145	5,0504

91. Leida kootangensite tabeli abil järgmiste nurkade kootangensid:

$24^\circ 50'$	$58^\circ 40'$	$18^\circ 21'$	$11^\circ 29'$	$26^\circ 22'$
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

92. Leida kootangensite tabeli abil nurgad, mille kootangensid on:

1,2291    1,4478    2,0189    3,0177    0,8921

93. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 96 cm; selle kaateti vastasnurga kootangens on  $\frac{15}{8}$ . Kui pikk on teine kaatet?

94. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 22 cm ja 28 cm. Arvutada kummagi teravnurga kootangens 4 kümnendkohaga ja leida tabelist kummagi nurga suurus. Kuidas saab kõige hõlpsamini tulemust kontrollida?

95. Täisnurkse kolmnurga teravnurk on  $23^\circ$ . Selle nurga vastaskaatet on 11,5 m. Arvutada nurga lähiskaatet.

96. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 0,587 m. Selle kaateti vastasnurk on  $40^\circ 18'$ . Arvutada teine kaatet.

97. Ontika 40 m kõrge paekallas paistab merel olevast paadist  $5^\circ$ -ses kõrgusnurgas. Kui kaugel on paat kaldast?

98. Rõhtsalt maapinnalt mõõtes leiame torni tipu kõrgusnurga suuruse olevat  $\varphi$ ; tõustes  $h$  meetrit üle eelmise vaatekoha, leiame torni aluse alangunurga suuruse olevat  $\psi$ . Näidata, et torni kõrgus on  $h \cdot \tan \varphi \cdot \cot \psi$ .

99. Kui suur on täisnurkse kolmnurga pindala, kui üks kaatet on 15,2 cm ja selle kaateti vastasnurk on  $21^\circ 18'$ ?

## § 9. Teravnurga goniomeetriliste funktsioonide vahelised põhiseosed.

Nagu eespool nägime, vastab teravnurga  $\alpha$  igale väärtusele kindel  $\sin \alpha$  väärtus, näiteks kui  $\alpha$  on

20°,    45°,    70°,

siis  $\sin \alpha$  on vastavalt

$$0,34, \quad 0,71, \quad 0,94.$$

Me ütleme, et  $\sin \alpha$  oleneb nurgast  $\alpha$  ehk

**$\sin \alpha$  on nurga  $\alpha$  funktsioon.**

Samuti on  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$  nurga  $\alpha$  funktsioonid. Kõiki neid nelja funktsiooni nimetatakse goniomeetristeks<sup>1</sup> funktsioonideks. Seejuures siinusfunktsiooni ja koosinusfunktsiooni nimetatakse teineteise kaasfunktsioonideks; samuti on tangensfunktsioon ja kootangensfunktsioon teineteise kaasfunktsioonid.

Need neli goniomeetrist funktsiooni on seotud omavahel seostega, nii et nurga ig a goniomeetrist funktsiooni järgi saab arvutada selle nurga ülejäänud kolm goniomeetrist funktsiooni.

Ühe ja sama teravnurga siinuse ja koosinuse vahel kehtib järgmine seos:

**teravnurga siinuse ja koosinuse ruutude summa on 1.**

Tõestus. Kui  $a$ ,  $b$  ja  $c$  on täisnurkse kolmnurga kaatetid ja hüpotenuus, siis Pythagorase teoreemi järgi

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Jagades selle võrduse mõlemad pooled arvuga  $c^2$ , saame:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

ehk

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Et  $\frac{a}{c} = \sin \alpha$  ja  $\frac{b}{c} = \cos \alpha$ , siis

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1,$$

m. o. t. t.

---

<sup>1</sup> Goniomeetria — nurkade mõõtmise õpetus.

Harilikult kirjutatakse  $(\sin \alpha)^2$  asemel  $\sin^2 \alpha$  ja  $(\cos \alpha)^2$  asemel  $\cos^2 \alpha$ . Nii omandab äsjatuletatud võrdus kuju:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

See võrdus võimaldab arvutada nurga koosinust, kui on teada nurga siinus, — ja ümberpöörduvalt — nurga siinust, kui on teada nurga koosinus. Lahendades võrduse kord  $\sin \alpha$ , kord  $\cos \alpha$  suhtes, saame:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Näide. Rakendame viimase valemi  $\cos 18^\circ$  arvutamiseks, teades, et  $\sin 18^\circ = 0,31$ . Nii leiame, et

$$\begin{aligned} \cos 18^\circ &= \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \sqrt{1 - 0,31^2} = \\ &= \sqrt{1 - 0,0961} = \sqrt{0,9039} = 0,95. \end{aligned}$$

Kasutades varem leitud valemit

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

koos valemiga

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

saame valemi

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha},$$

mis võimaldab antud nurga siinuse järgi arvutada täiendusnurga siinust. Teades  $0^\circ$  ja  $45^\circ$  vaheliste nurkade siinuseid saame viimase valemi põhjal arvutada kõigi  $45^\circ$  ja  $90^\circ$  vaheliste nurkade siinuseid, sest kui nurk  $\alpha < 45^\circ$ , siis täiendusnurk  $90^\circ - \alpha > 45^\circ$ .

Näide. Olgu teada, et  $\sin 25^\circ = 0,423$ . Arvutame nurga  $25^\circ$  täiendusnurga siinuse ehk  $\sin 65^\circ$ :

$$\begin{aligned}\sin 65^\circ &= \sin (90^\circ - 25^\circ) = \sqrt{1 - \sin^2 25^\circ} = \\ &= \sqrt{1 - 0,423^2} = \sqrt{1 - 0,1789} = \sqrt{0,8211} = 0,906.\end{aligned}$$

### Ülesanded.

100. Arvutada teravnurga  $\alpha$  koosinus, kui  $\sin \alpha = 0,6$ .

101. Teravnurga  $\beta$  siinus on  $\frac{12}{13}$ . Arvutada  $\cos \beta$ . Kontrollida tulemust siinuste ja koosinuste tabeli abil.

102. Teravnurga  $\gamma$  koosinus on  $\frac{2}{3}$ . Arvutada  $\sin \gamma$ . Kontrollida tulemust tabeli abil.

103. Teravnurga  $\delta$  koosinus on  $\frac{20}{29}$ . Arvutada  $\sin \delta$ . Kontrollida tulemust tabeli abil.

104. Arvutada  $27^\circ$ -se nurga koosinus, võttes tabelist selle nurga siinuse. Kontrollida tulemust koosinuste tabeli abil.

105. Arvutada nurga  $53^\circ 54'$  koosinus, võttes tabelist selle nurga siinuse. Kontrollida tulemust koosinuste tabeli abil.

106. Nurga  $\varphi$  siinus on võrdne sama nurga koosinusega. Kui suur on nurk  $\varphi$ ?

107. Nurga  $\beta$  koosinuse ja siinuse jagatis on 3. Kui suur on nurk  $\beta$ ?

108. Nurga  $\gamma$  siinuse ja koosinuse jagatis on 3. Kui suur on nurk  $\gamma$ ?

109. Taandada järgmised murrud:

1.  $\frac{\sin^2 \alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$

3.  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha}$

2.  $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

4.  $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - 1}$

110. Näidata, et on kehtivad järgmised samasused:

1.  $2 - 3 \cos^2 a = 3 \sin^2 a - 1$
2.  $(1 + \cos a)^2 + (1 - \cos a)^2 = 2(2 - \sin^2 a)$
3.  $\cos^3 a \sin a + \sin^3 a \cos a = \sin a \cos a$
4.  $\sin^2 a - \cos^2 a = \sin^4 a - \cos^4 a$
5.  $\sin a + \cos a = \sqrt{1 + 2 \sin a \cdot \cos a}$

Nurga tangensi ja kootangensi definitsioonide järgi

$$\tan a = \frac{a}{b}$$

ja

$$\cot a = \frac{b}{a}.$$

Korrutades nende võrduste vastavaid pooli saame

$$\tan a \cdot \cot a = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}$$

ehk

$$\tan a \cdot \cot a = 1$$

Tulemuse võime sõnastada järgmiselt:

**ühe ja sama teravnurga tangensi ja kootangensi korrutis on 1.**

Lahendades saadud võrduse  $\cot a$  suhtes saame

$$\cot a = \frac{1}{\tan a},$$

mis tähendab, et

**teravnurga kootangens on sama nurga tangensi pöördarv.**

Samuti on ka nurga tangens sama nurga kootangensi pöördarv.

Näited.

$$\cot 30^{\circ} = \frac{1}{\tan 30^{\circ}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3};$$

$$\cot 45^{\circ} = \frac{1}{\tan 45^{\circ}} = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\cot 60^{\circ} = \frac{1}{\tan 60^{\circ}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \sqrt{3}.$$

Ülesanded.

111. Nurga tangens on 0,75. Kui suur on sama nurga kootangens? Kontrollida tulemust tabelite abil.

112. Nurga tangens on 5. Kui suur on sama nurga kootangens? Kontrollida tulemust tabelite abil.

113. Nurga kootangens on  $1\frac{2}{3}$ . Kui suur on sama nurga tangens?

114. Nurga  $\omega$  kootangens on kaks korda suurem kui sama nurga tangens. Kui suur on nurk  $\omega$ ?

115. Nurga  $\varphi$  tangens on võrdne sama nurga kootangensiga. Kui suur on nurk  $\varphi$ ?

---

Nagu nägime eespool, võrdused

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

ja

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

võimaldavad leida nurga ühe funktsiooni järgi selle kaasfunktsiooni. Selleks et oleks võimalik ühe funktsiooni järgi leida kõik ülejäänud funktsioonid, on vaja võrdust, mis seob esimest kaht funktsiooni viimase kahega.

Selle võrduse leiame järgmiselt: et

$$\tan \alpha = \frac{a}{b},$$

ning

$$a = c \sin \alpha,$$

ja

$$b = c \cos \alpha,$$

siis

$$\tan \alpha = \frac{c \sin \alpha}{c \cos \alpha}$$

ehk

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}$$

Tulemuse sõnastame järgmiselt:

**teravnurga tangens võrdub selle nurga siinuse ja koosinuse jagatisega.**

Samal viisil saame näidata, et

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

see tähendab:

**teravnurga kootangens võrdub selle nurga koosinuse ja siinuse jagatisega.**

Võrdustena

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

väljenduvaid seoseid nimetatakse goniomeetriliste funktsioonide vahelisteks põhiseosteks. Need seosed võimaldavad ühe funktsiooni järgi arvutada ülejäänud kolm funktsiooni.

Ülesanne 1. Arvutada  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$  ja  $\cot \alpha$ , kui  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ .

Lahendus. a) Asendades võrduses

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$\sin \alpha$  tema väärtusega  $\frac{3}{5}$ , leiame, et

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

b) Asendades võrduses

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  nende väärtustega, saame

$$\tan \alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$$

ehk

$$\tan \alpha = \frac{3}{4}.$$

c) Asendades võrduses

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$\cos \alpha$  ja  $\sin \alpha$  nende väärtustega, saame

$$\cot \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}$$

ehk

$$\cot \alpha = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}.$$

Ülesanne 2. Arvutada  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  ja  $\tan \alpha$ , kui  $\cot \alpha = 1 \frac{3}{4}$ .

Lahendus. a) Asendades võrduses

$$\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha}$$

$\cot \alpha$  tema väärtusega  $1\frac{3}{4}$ , saame

$$\tan \alpha = \frac{1}{1\frac{3}{4}}$$

ehk

$$\tan \alpha = \frac{4}{7}.$$

b) Võrdusest

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

järeldame, et

$$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha.$$

Asendades viimases võrduses  $\tan \alpha$  tema väärtusega  $\frac{4}{7}$ , saame

$$\sin \alpha = \frac{4}{7} \cdot \cos \alpha.$$

Asendades võrduses

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$\sin \alpha$  avaldisega  $\frac{4}{7} \cos \alpha$ , saame

$$\frac{16}{49} \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

ehk

$$\frac{65}{49} \cos^2 \alpha = 1.$$

Siit leiame, et

$$\cos^2 \alpha = \frac{49}{65}$$

ja

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{49}{65}}$$

ehk

$$\cos \alpha = \frac{7}{65} \sqrt{65}.$$

c) Asendades varem leitud võrduses

$$\sin \alpha = \frac{4}{7} \cos \alpha$$

$\cos \alpha$  tema leitud väärtusega, saame

$$\sin \alpha = \frac{4}{65} \sqrt{65}.$$

**Ülesanded.**

116. Nurga siinus on 0,2. Arvutada sama nurga tangens. Kontrollida tulemust tabelite abil.

117. Nurga koosinus on 0,7. Arvutada sama nurga tangens ja kootangens.

118. Nurga tangens on 2. Arvutada sama nurga siinus ja koosinus.

119. Nurga kootangens on 3. Arvutada sama nurga siinus ja koosinus.

120. Olgu teada, et  $\cos \varphi = c$ . Avaldada  $\sin \varphi$ ,  $\tan \varphi$  ja  $\cot \varphi$  suuruse  $c$  kaudu.

121. Näidata, et on kehtivad järgmised samasused:

$$1. \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$2. \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} = 1 - \cos \alpha$$

$$3. \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{1}{\cot^2 \alpha} = 1$$

$$4. \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} = 1$$

$$5. \sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$6. \cot \alpha + \cos \alpha = \frac{\cot^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\cot \alpha - \cos \alpha}$$

$$7. \tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

122. Avaldada murd  $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$  funktsiooni  $\tan \alpha$  kaudu.

123. Avaldada vahe  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$  funktsiooni  $\sin \alpha$  kaudu.

124. Avaldada summa  $\tan \alpha + \cot \alpha$  funktsioonide  $\sin \alpha$  ja  $\cos \alpha$  kaudu.

125. Olgu  $\tan \alpha = \frac{5}{4}$ . Arvutada avaldise  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$  väärtus.

126. Lihtsustada järgmised avaldised:

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\cos \alpha \cdot \tan \alpha$               | 6. $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}$    |
| 2. $\cot \alpha \cdot \sin \alpha$               | 7. $\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$            |
| 3. $\tan \alpha : \cot \alpha$                   | 8. $\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta}$            |
| 4. $\sin \alpha : \tan \alpha$                   | 9. $\sqrt{1 - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \tan \alpha}$       |
| 5. $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ | 10. $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$ |

## § 10. Täisnurkse kolmnurga lahendamine.

Lahendada kolmnurk tähendab leida selle antud elementide põhjal kõik teised elemendid. Et kolmnurk oleks lahenduv, selleks peavad olema antud niisugused elemendid, millega see kolmnurk on määratud. Täisnurkne kolmnurk on määratud, kui sellest on teada kaks elementi, millede hulgas peab olema vähemalt üks külge. Seega on täisnurkse kolmnurga lahendamine võimalik, kui on antud:

1. teravnurk ja hüpotenuus;
2. teravnurk ja üks kaatet;
3. kaks kaatetit;
4. kaatet ja hüpotenuus.

Igal juhul toimub kolmnurga lahendamine goniomeetri-  
liste funktsioonide definitsioonide või neist järelduvate seoste  
põhjal; nii esimesed kui teised on käsitletud eelmistel lehe-  
külgedel. Lahendamisel püüame

1. iga otsitava elemendi arvutada andmete põhjal,
2. kontrollida lahendeid, leides neid andmeist mõnel  
teisel arvutusteel.

Ülesanne 1. Täisnurkse kolmnurga üks nurk on  
 $57^\circ$  ja hüpotenuus on 9,5 m. Arvutada teine teravnurk ja  
kaatetid.

Lahendus. Arvutamiseks kasutame neljakohalisi  
tabeleid. Arvutussammud nummerdame järjest 1., 2., 3. jne.  
Tähistame antud nurga tähega  $\alpha$  ja hüpotenuusi tähega  $c$ .  
Siis otsitavad on: nurk  $\beta$  ning kaatetid  $a$  ja  $b$ .

1.  $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 57^\circ = 33^\circ$ .
2.  $a = c \sin \alpha = 9,5 \cdot \sin 57^\circ = 9,5 \cdot 0,8387 = 7,968$ .
3.  $b = c \cos \alpha = 9,5 \cdot \cos 57^\circ = 9,5 \cdot 0,5446 = 5,174$ .

Kontrolliks kasutame Pythagorase lauset:

$$a^2 = 7,968^2 = 63,49$$

$$b^2 = 5,174^2 = 26,77$$

---


$$a^2 + b^2 = 90,26$$

$$c^2 = 9,5^2 = 90,25$$

---


$$\text{Vahe} = 0,01$$

Vahe  $a^2 + b^2$  ja  $c^2$  vahel on seletatav tabelite andmete  
ligikaudsusega ja lahendamisel tehtud ümardamistega.

Vastus. Kolmnurga kaatetid on 7,968 m ja 5,174 m  
ning teine teravnurk on  $33^\circ$ .

Ülesanne 2. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on  
52,3 m ja tema vastasnurk on  $68,4^\circ$ . Arvutada teine terav-  
nurk, teine kaatet ja hüpotenuus.

L a h e n d u s. Tähistame antud kaateti tähega  $a$  ja tema vastasnurga tähega  $\alpha$ . Siis on otsitavad: nurk  $\beta$ , kaatet  $b$  ja hüpotenuus  $c$ .

1.  $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 68,4^\circ = 21,6^\circ$ .
2.  $b = a \tan \beta = 52,3 \cdot \tan 21,6^\circ = 52,3 \cdot 0,3959 = 20,71$ .
3.  $c = a : \sin \alpha = 52,3 : \sin 68,4^\circ = 52,3 : 0,9298 = 56,25$ .

K o n t r o l l i k s kasutame näiteks seost

$$b = c \sin \beta.$$

Selle abil leiame, et

$$b = 56,25 \cdot \sin 21,6^\circ = 56,25 \cdot 0,3681 = 20,71.$$

Seega kontroll osutab, et ülesanne on õigesti lahendatud.

V a s t u s. Kolmnurga teine teravnurk on  $21,6^\circ$ , teine kaatet on 20,71 m ja hüpotenuus on 56,25 m.

Ü l e s a n n e 3. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 19 cm ja 27 cm. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad ja hüpotenuus?

L a h e n d u s. Tähistame väiksema kaateti tähega  $a$  ja suurema tähega  $b$ . Otsitavad on: nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$  ning hüpotenuus  $c$ .

$$1. \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{19}{27} = 0,7037,$$

$$\alpha = 35^\circ 08'.$$

$$2. \quad \beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 35^\circ 08' = 54^\circ 52'.$$

$$3. \quad c^2 = a^2 + b^2 = 19^2 + 27^2 = 1090,$$

$$c = \sqrt{1090} = 33,02.$$

K o n t r o l l i k s kasutame näiteks seost

$$b = c \cos \alpha,$$

mille abil leiame, et

$$b = 33,02 \cdot \cos 35^\circ 08' = 33,02 \cdot 0,8178 = 27,00.$$

Seega ülesande lahendus osutub õigeks.

Vastus. Kolmnurga teravnurgad on  $35^{\circ}08'$  ja  $54^{\circ}52'$  ning hüpotenuus on 33,02 cm.

Ülesanne 4. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 0,14 m ja üks kaatet on 0,093 m. Kui suured on kolmnurga teravnurgad ja teine kaatet?

Lahendus. Tähistame antud kaateti tähega  $b$  ja hüpotenuusi tähega  $c$ . Otsitavad on siis nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$  ning kaatet  $a$ .

$$1. \quad \sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{0,093}{0,14} = 0,6643,$$
$$\beta = 41^{\circ}38'.$$

$$2. \quad \alpha = 90^{\circ} - \beta = 90^{\circ} - 41^{\circ}38' = 48^{\circ}22'.$$

$$3. \quad a = c \sin \alpha = 0,14 \cdot \sin 48^{\circ}22' =$$
$$= 0,14 \cdot 0,7474 = 0,1046.$$

Kontrolliks kasutame Pythagorase lauset:

$$a^2 = 0,1046^2 = 0,01095$$

$$b^2 = 0,093^2 = 0,00865$$

---

$$a^2 + b^2 = 0,01960$$

$$c^2 = 0,14^2 = 0,0196.$$

Seega osutub ülesande lahendus õigeks.

Vastus. Kolmnurga teravnurgad on  $41^{\circ}38'$  ja  $48^{\circ}22'$  ning teine kaatet on 0,1046 m.

Ülesanded.

127. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 8,5 m ja üks teravnurk on  $32^{\circ}$ . Arvutada selle kolmnurga teine teravnurk, mõlemad kaatetid ja pindala.

128. Ristküliku diagonaal on 7,56 m ja moodustab ühe küljega nurga  $25^{\circ}48'$ . Arvutada ristküliku ümbermõõt.

129. Ristküliku diagonaal on 6,28 cm ja moodustab ühe küljega nurga  $38^{\circ}20'$ . Arvutada ristküliku pindala.

130. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 0,486 m ja selle lähisnurk on  $28,7^{\circ}$ . Arvutada kolmnurga teine teravnurk, teine kaatet, hüpotenuus ja pindala.

131. Antennimasti vari rõhtsale väljakule on 36 m pikk. Päikesekiired moodustavad maapinnaga  $42^{\circ}$ -se nurga. Kui kõrge on antennimast? Missuguse nurga päikesekiired moodustavad püstsihiga?

132. Vabrikukorstna kõrguse määramiseks asetati teodoliit korstnast 56 m kaugusel asetsevale 1,8 m kõrgemale kivisambale ja mõõdeti korstna tipu kõrgusnurk. Mõõtmise andis  $36^{\circ}$ . Arvutada korstna kõrgus.

133. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 160 cm ja selle vastasnurk on  $70^{\circ}$ . Arvutada kolmnurga teine teravnurk, teine kaatet, hüpotenuus ja pindala.

134. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 0,084 m ja 0,176 m. Arvutada selle kolmnurga hüpotenuus, teravnurgad ja pindala.

135. Täisnurkse kolmnurga kaatetite pikkused meetrites on  $a = 0,934$  ja  $b = 1,340$ . Leida nurk  $a$  üks kord tan  $a$ , teine kord sin  $a$  kaudu.

136. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 12,75 m ja hüpotenuus on 20,58 m. Arvutada selle kolmnurga teine kaatet, mõlemad teravnurgad ja pindala.

137. Lahendada täisnurkne kolmnurk, teades, et üks tema kaateteist on  $b$  ja täisnurga tipust hüpotenuusile joonestatud kõrgus on  $h$ .

Näide.  $b = 35,47$ ;  $h = 14,29$ . Arvutada kolmnurga elemendid.

138. Punkti  $O$  ümber on joonestatud ringjoon raadiusga 3 cm. Kaugusel 10 cm punktist  $O$  on võetud punkt  $P$  ning sellest on joonestatud puutujad  $PA$  ja  $PB$  ringjoonele. Arvutada nurga  $OAB$  siinus ja leida punkti  $O$  kaugus lõigust  $AB$ .

Ex bibl. univ. Tartu

139. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus  $c = 32,46$  cm, kaatet  $b = 18,40$  cm. Leida nurk  $a$  tema koosinuse kaudu.

140. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus  $c = 4,56$ , kaatet  $a = 2,88$ . Leida nurk  $a$  üks kord  $\tan a$ , teine kord  $\sin a$  kaudu.

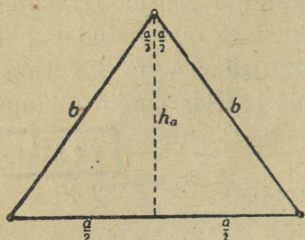
141. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 32,54 m ja teravnurk on  $26^{\circ}42'$ . Arvutada kolmnurga pindala.

142. Lahendada järgmised täisnurksed kolmnurgad:

	$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$S$
1.			12		$42^{\circ}$	
2.			10	$25^{\circ}$		
3.	20				$66^{\circ}$	
4.	70			$32^{\circ}$		
5.	32		40			
6.		10	26			
7.	6	9				
8.	7	24				
9.		15				100
10.				$78^{\circ}$		125

## § 11. Võrdhaarse kolmnurga lahendamine.

Tähistame võrdhaarse kolmnurga aluse tähega  $a$ , haara tähega  $b$ , tipunurga tähega  $\alpha$  ja alusnurga tähega  $\beta$  (joonis 11). See kolmnurk on määratud, kui on antud:



Joonis 11.

Võrdhaarse kolmnurga lahendamiseks tükeldame ta kõrgusega  $h_a$  kaheks täisnurkseks kolmnurgaks ja lahendame viimased.

1. juhtum. Kui on antud haar  $b$  ja tipunurk  $\alpha$ , siis

$$1. \quad \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2};$$

$$2. \quad \frac{a}{2} = b \cdot \sin \frac{\alpha}{2},$$

seega

$$a = 2b \cdot \sin \frac{\alpha}{2}.$$

2. juhtum. Kui on antud alus  $a$  ja alusnurk  $\beta$ , siis

$$1. \quad \frac{a}{2} = 90^\circ - \beta,$$

seega

$$a = 180^\circ - 2\beta;$$

$$2. \quad \cos \beta = \frac{\frac{a}{2}}{b},$$

seega

$$b = \frac{\frac{a}{2}}{\cos \beta} = \frac{a}{2 \cos \beta}.$$

3. juhtum. Kui on antud alus  $a$  ja haar  $b$ , siis

$$1. \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b},$$

millest leiame esiteks  $\frac{\alpha}{2}$  ja siis  $\alpha$ ;

$$2. \quad \beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Võrdhaarse kolmnurga kõrguse arvutamiseks kasutame ühte järgmistest tema avaldistest:

$$h_a = \frac{a}{2} \cdot \tan \beta = b \cdot \sin \beta = b \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

**Ülesanded.**

143. Võrdhaarse kolmnurga haarad on 7,2 cm ja moodustavad teineteisega nurga  $66^\circ$ . Arvutada kolmnurga alus ja pindala.

144. Noatera laius on 11 mm ja paksus tagant on 2 mm. Kui suure nurga moodustavad tera tahud teineteisega?

145. Võrdhaarse kolmnurga haarad on 19,2 cm, alusnurk on  $37^\circ 42'$ . Arvutada kolmnurga alus, tipunurk ja pindala.

146. Võrdhaarse kolmnurga alus on 41 mm ja tipunurk  $114,2^\circ$ . Leida kolmnurga teised elemendid.

147. Võrdhaarse kolmnurga haarad on 7,5 dm, alus on 6 dm. Lahendada see kolmnurk.

148. Kui pikk kõõl vastab kesknurgale  $33^\circ 24'$  ringis, mille raadius on 6 cm?

149. Kreissae läbimõõt on 54 cm; sael on 128 hammast. Kui suur on kahe teineteisele järgneva hamba teravikkude vahe?

150. Olgu ringjoone raadius  $r$  cm. Kui pikk on selle ringjoone kõõl, mis vastab kesknurgale  $\varphi^\circ$ ?

Näide.  $r = 100$ ;  $\varphi = 20, 40, 60, 100, 130, 150$ . Arvutada nõutavad kõõlu pikkused.

151. Kui pikk peab olema ringjoone raadius, et  $\varphi$ -kraadisele kesknurgale vastaks  $k$  cm pikkune ringjoone kõõl?

Näide.  $\varphi = 50$ ,  $k = 1$ . Arvutada nõutav raadius.

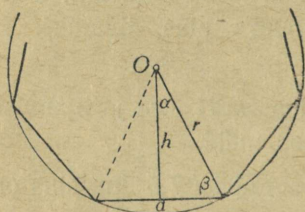
152. Ringi kesknurgale  $57^{\circ}18'$  vastab kõõl, mille pikkus on 8 cm. Kui pikk on ringi raadius?

153. On antud ringjoone raadius 0,0178 ja selle ringjoone kõõl 0,0094. Leida kesknurk, mis vastab sellele kõõlule.

154. Kui suur kesknurk vastab 8,7 cm pikkusele kõõlule ringis, mille raadius on 9,2 cm?

## § 12. Korrapärase hulknurga lahendamine.

Tähistame korrapärase  $n$ -nurga külje sümbooliga  $a$ , ümberjoonestatud ringjoone raadiuse sümbooliga  $r$  ja apoteemi sümbooliga  $h$  (joonis 12).



Joonis 12.

Kui peale  $n$  on antud üks elementidest  $a$ ,  $h$ ,  $r$ , siis on korrapärane hulknurk määratud ja järelikult ka lahenduv. Lahendamine toimub täisnurkse kolmnurga abil, mille tippudeks on hulknurga keskpunkt, külje otspunkt ja külje keskpunkt (joonis 12). Keskpunkti juures olev selle kolmnurga nurk

$$\alpha = \frac{360^{\circ}}{2n} = \frac{180^{\circ}}{n},$$

sest keskpunkti  $O$  ühendamisel kõikide külgede otspunktidega ja nende külgede keskpunktidega jaguneb täispööre punkti  $O$  ümber  $2n$  võrdseks osaks.

## Ülesanded.

155. Avaldada korrapärase viisnurga apoteem, ümberjoonestatud ringjoone raadius ja pindala selle hulknurga külje kaudu.
156. Arvutada korrapärase üheksanurga apoteem, külj ja pindala, kui selle üheksanurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 4,5 cm.
157. Ringisse, mille raadius on 8,4 cm, on kujutatud korrapärase 15-nurk. Leida selle hulknurga külj ja pindala.
158. Ringisse, mille raadius on 6 cm, on kujutatud korrapärase seitsenurk. Leida selle hulknurga külj ja pindala.
159. Korrapärase viisnurga külj on 20 cm. Arvutada viisnurga sisse ja ümber joonestatud ringjoonte raadiused.
160. Korrapärase kaheksanurga külj on 32 cm. Arvutada sisse- ja ümberjoonestatud ringjoonte raadiused.
161. Korrapärase viisnurga apoteem on 8 cm. Arvutada viisnurga külj.
162. Korrapärase kümmenurga pindala on  $96 \text{ cm}^2$ . Arvutada kümmenurga ümber joonestatud ringjoone raadius.
163. Ringisse, mille läbimõõt on  $d$ , on joonestatud korrapärase 60-nurk. Arvutada selle hulknurga ümbermõõt. Mitme protsendi võrra erineb see ümbermõõt ringjoone pikkusest?
164. Ringi ümber, mille läbimõõt on  $d$ , on joonestatud korrapärase 60-nurk. Arvutada selle hulknurga ümbermõõt. Mitme protsendi võrra erineb see ümbermõõt ringjoone pikkusest?

165. Ringisse, mille läbimõõt on  $d$ , on joonestatud korrapärane 96-nurk. Arvutada selle hulknurga pindala. Mitme protsendi võrra erineb see ringi pindalast?

### § 13. Täisnurkse kolmnurga lahendamine logaritmi abil.

Kui tahetakse logaritmi abil arvutada mingi suuruse väärtust, mille valemis esineb ka goniomeetrilisi funktsioone, siis tuleb muude suuruste logaritmi kõrval leida selles valemis esinevate funktsioonide logaritmid. Selleks peaks esmalt leidma goniomeetriliste funktsioonide tabelitest nende funktsioonide väärtused ja seejärel logaritmi tabelist nende funktsioonide logaritmi väärtused. Et vältida seda tülikat kaheksuguste tabelite kasutamist, selleks on koostatud eritabelid, milles vahenditult on antud goniomeetriliste funktsioonide logaritmi väärtused. Nii sisaldavad kõik matemaatiliste tabelite kogud siinuse logaritmi, koosinuse logaritmi, tangensi logaritmi ja kootangensi logaritmi tabelleid. Oma ehituselt sarnanevad need tabelid tavaliselt goniomeetriliste funktsioonide tabelitega ning nende abil mingi funktsiooni logaritmi leidmine ja nurga leidmine goniomeetrilise funktsiooni logaritmi järgi toimub samuti kui vastavate goniomeetriliste funktsioonide tabelite kasutamine.

#### Ülesanded.

166. Leida logaritmi tabelite abil järgmiste avaldiste väärtused:

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. $\log \sin 17^{\circ}30'$ | 2. $\log \tan 19^{\circ}24'$ |
| $\log \sin 38^{\circ}13'$    | $\log \tan 40^{\circ}08'$    |
| $\log \sin 6^{\circ}48'$     | $\log \tan 5^{\circ}54'$     |
| $\log \sin 48^{\circ}04'$    | $\log \tan 59^{\circ}28'$    |
| $\log \sin 67^{\circ}41'$    | $\log \tan 84^{\circ}55'$    |

167. Leida logaritmid tabelite abil järgmiste avaldiste väärtused:

1.  $\log \cos 19^{\circ}23'$
- $\log \cos 26^{\circ}45'$
- $\log \cos 54^{\circ}16'$
- $\log \cos 72^{\circ}05'$
- $\log \cos 82^{\circ}29'$

2.  $\log \cot 24^{\circ}52'$
- $\log \cot 39^{\circ}08'$
- $\log \cot 46^{\circ}48'$
- $\log \cot 5^{\circ}45'$
- $\log \cot 84^{\circ}11'$

168. Leida logaritmid tabelite abil nurgad  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , teades, et

1.  $\log \sin \alpha = \bar{1},7720$
- $\log \sin \beta = \bar{1},5312$
- $\log \sin \gamma = \bar{1},4359$
- $\log \sin \delta = \bar{2},9960$
- $\log \sin \varepsilon = \bar{2},5672$

2.  $\log \tan \lambda = \bar{1},3032$
- $\log \tan \mu = \bar{1},4480$
- $\log \tan \varphi = \bar{1},8736$
- $\log \tan \psi = 0,1425$
- $\log \tan \omega = 0,8716$

169. Leida logaritmid tabelite abil nurgad  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ , teades, et

1.  $\log \cos \alpha = \bar{1},4682$
- $\log \cos \beta = \bar{1},7356$
- $\log \cos \gamma = \bar{1},8830$
- $\log \cos \delta = \bar{1},9404$
- $\log \cos \varepsilon = \bar{2},9211$

2.  $\log \cot \lambda = 1,5680$
- $\log \cot \mu = 0,8446$
- $\log \cot \varphi = 0,5430$
- $\log \cot \psi = 0,1042$
- $\log \cot \omega = \bar{1},6752$

170. Leida nurga  $\varphi$  suurus, teades, et

1.  $\sin \varphi = \frac{0,9548}{2,746}$

3.  $\cos \varphi = \frac{745}{1000}$

2.  $\tan \varphi = \frac{1000}{2718}$

4.  $\cot \varphi = \frac{0,8572}{0,2008}$

171. Leida nurk  $x$ , teades, et  $\cos x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ .

$$172. \text{ Leida nurk } \alpha, \text{ teades, et } \cot \alpha = \sqrt[3]{\frac{1,782}{0,0948}}.$$

$$173. \text{ Leida nurk } \alpha, \text{ teades, et } \cot \alpha = \frac{\sqrt[3]{4,27}}{\sqrt{12,84}}.$$

Kui täisnurkse kolmnurga lahendamisel tuleb kasutada kolme- või neljakohalisi andmeid ja nurgafunktsioonide väärtusi, siis on kasulik arvutused teostada logaritmide abil. Logaritmide rakendamist võimaldab asjaolu, et täisnurkse kolmnurga lahendamine toimub peamiselt valemite abil, milles esineb ainult korrutamise ja jagamise tehe.

Erandi moodustab ainult hüpoteenuusi arvutamine antud kaatetite järgi ning kaateti arvutamine antud hüpoteenuusi ja teise kaateti järgi, kui selleks kasutatakse Pythagorase teoreemi. Kuid neid ülesandeid on võimalik lahendada ka Pythagorase teoreemi kasutamata — valemite abil, mis võimaldavad logaritmide rakendamist. Järgmistes näidetes on kasutatud selliseid lahendusvõtteid.

**N ä i d e 1.** On antud kaatet  $a$  ja hüpoteenus  $c$ . Leiame kaateti  $b$ .

Esmalt leiame nurga  $\alpha$ , kasutades valemit

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Seejärel valemil

$$b = c \cos \alpha$$

abil leiame kaateti  $b$ .

Et kasutatud valemid ei sisalda liitmise ega lahutamise tehet, siis on võimalik arvutusi teostada logaritmide abil.

**N ä i d e 2.** On antud kaatetid  $a$  ja  $b$ . Leiame hüpoteenuusi  $c$ .

Leiame esmalt näiteks nurga  $\alpha$ , kasutades valemit

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}.$$

Seejärel leiame valemi

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

abil hüpoteenuusi  $c$ .

Näide 3. Täisnurkse kolmnurga üks kaatet on 28,3 m ja selle vastasnurk on  $44,8^\circ$ . Arvutada teine kaatet ja hüpoteenus.

Lahendus. Tähistame antud kaateti tähega  $a$  ja antud nurga tähega  $\alpha$ . Otsitavad on siis kaatet  $b$  ja hüpoteenus  $c$ .

1. Arvutame kaateti  $b$  valemi

$$b = a \cot \alpha$$

järgi. Siis

$$b = 28,3 \cdot \cot 44,8^\circ.$$

Logaritmidest selle võrduse, saame

$$\log b = \log 28,3 + \log \cot 44,8^\circ.$$

Tabelitest leiame, et

$$\log 28,3 = 1,4518$$

$$\text{ja} \quad \log \cot 44,8^\circ = 0,0030$$

$$\text{Seega} \quad \log b = 1,4548.$$

Logaritmidest tabelist leiame, et

$$b = 28,5.$$

2. Hüpoteenuusi  $c$  arvutame valemi

$$c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

järgi. Siis

$$c = \frac{28,3}{\sin 44,8^\circ}.$$

Logaritmides selle võrduse, saame

$$\log c = \log 28,3 - \log \sin 44,8^\circ.$$

Tabelist leiame, et

$$\begin{array}{r} \log 28,3 = 1,4518 \\ \text{ja} \quad \log \sin 44,8^\circ = \overline{1,8480} \\ \hline \text{Seega} \quad \log c = 1,6038. \end{array}$$

Logaritmide tabelist leiame, et

$$c = 40,16.$$

K o n t r o l l. Arvutame nurga  $\beta$  valemi

$$\sin \beta = \frac{b}{c}$$

järgi. Logaritmides selle võrduse, saame

$$\log \sin \beta = \log b - \log c.$$

Kasutades varemini leitud logaritme

$$\begin{array}{r} \log b = 1,4548 \\ \text{ja} \quad \log c = 1,6038 \\ \hline \text{leiame, et} \quad \log \sin \beta = \overline{1,8510}. \end{array}$$

Siinuse logaritmide tabelist leiame, et

$$\beta = 45,2^\circ.$$

Liites nurgad  $a$  ja  $\beta$ , saame  $44,8^\circ + 45,2^\circ$  ehk  $90^\circ$ . Seega on ülesande lahendus osutunud õigeks.

V a s t u s. Kolmnurga teine kaatet on 28,5 m ja hüpotenuus on 40,16 m.

**Ülesanded.**

174. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 19,43 m ja üks teravnurk on  $38,4^\circ$ . Arvutada mõlemad kaatetid.

175. Täisnurkse kolmnurga kaatet on 0,952 m ja selle kaateti vastasnurk on  $59^{\circ}06'$ . Arvutada teine kaatet ja kolmnurga pindala.

176. Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 43,56 m ja 19,08 m. Arvutada kolmnurga teravnurgad ja hüpotenuus.

177. Võrdhaarse kolmnurga haar on 123,7 cm ja kõrgus on 84,2 cm. Arvutada kolmnurga alus.

178. Lahendada järgmised täisnurksed kolmnurgad:

	$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$S$
1.			21,85	$62^{\circ}28'$		
2.	4,630			$25^{\circ}32'$		
3.		0,634			$51^{\circ}10'$	
4.	75,64				$33^{\circ}20'$	
5.	0,2136		0,9247			
6.	67,53	42,38				
7.		15,08				120
8.				$78^{\circ}45'$		34,52

179. Võrdhaarse kolmnurga alus on 59,48 cm ja haar on 44,53 cm. Kui suur on kolmnurga kõrgus?

180. Võrdhaarse kolmnurga alus on 31,26 m ja kõrgus on 20,75 m. Leida kolmnurga tipunurk.

181. Ringi raadius on 41,7 cm. Kui pikad kõõlud vastavad selles ringis kaartele  $37^{\circ}42'$ ,  $51^{\circ}37'$  ja  $69^{\circ}04'$ .

182. Ringi raadius on 35,8 cm. Kui suured kaared vastavad selles ringis kõõludele, mille pikkused on 12,8 cm, 34,5 cm ja 50,3 cm?

183. Arvutada korrapärase viisnurga pindala, kui viisnurga raadius on 128 mm.

184. Korrapärase kaheksanurga pindala on  $23,5 \text{ m}^2$ . Kui suur on kaheksanurga raadius?

185. Ringi raadius on  $34,8 \text{ cm}$ . Kui suur on selle ringi sektori pindala, kui sektori kõõl on  $24,6 \text{ cm}$ ?

186. Ringi raadius on  $124 \text{ cm}$  ja sektori pindala on  $0,312 \text{ m}^2$ . Arvutada sektori kõõl.

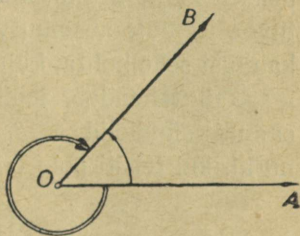
## Peatükk II.

### Goniomeetriliste funktsioonide muutumine.

#### § 14. Positiivne nurk ja negatiivne nurk.

Algebra kursusest teame, et paljude küsimuste lahendamisel osutub vajalikuks laiendada lõigu mõistet ja vaadelda kõrvuti suunata lõikudega ka suunatud lõike. Analoogiliselt sellega on trigonomeetrias tulus laiendada nurga mõistet ja vaadelda ka nurki relatiivsete suurustena.

Nurga mõiste laiendamiseks vaatleme tasapinnal oma otspunkti ümber pöörlevat kiirt. Kui selle pöörlemise juures kiir on jõudnud asendist  $OA$  asendisse  $OB$  (joonis 13), siis on ta pöörelnud kas ühe noolega tähistatud suunas või kahe noolega tähistatud suunas. Loeme esimese pöörlemise suuna positiivseks, teise negatiivseks. Negatiivses suunas pöörlevad näiteks kellaosutid. Seega



Joonis 13.

positiivseks pöörlemise suunaks loeme joonisel seda suunda, mis on vastupidine kellaosutite pöörlemise suunaga.

Pöörde suurust mõõdetakse pöördenurga abil. Et nurga kirjutusest oleks näha ka pöörlemise suund, lepime kokku järgmiselt:

**pöörlemisel tekkiva nurga suurust loeme positiivseks, kui pöörlemine toimub positiivses suunas, ja negatiivseks, kui pöörlemine toimub negatiivses suunas.**

Negatiivseid nurki märgime, samuti kui negatiivseid arve, miinusmärgiga nurga kraadide arvu ees; seega kella suur osuti pöördub veerand tunniga nurga võrra, mille suurus on  $-90^\circ$ , ja poole tunniga nurga võrra, mille suurus on  $-180^\circ$ .

Nurga haara, millest kiir alustab oma pöörlemist, nime-tame *alghaaraks* ja haara, millel kiire pöörlemine lõpeb, nimetame *lõpphaaraks*. Nurga tähistamisel kolme tähe abil kirjutame esikohale tähe, mis asetseb nurga alghaaral. Joonisel 13 on üks nurk märgitud ühe, teine nurk kahe noolega. Nii üht kui teist nurka tuleks kolme tähega kirjutada kujul  $\sphericalangle AOB$ . Seega sümbol  $\sphericalangle AOB$  märgib üldiselt kahte nurka, milledest üks on positiivne, teine negatiivne ja mille absoluutväärtuste summa on  $360^\circ$ . Et vältida kahtlust selle kohta, kumba kahest nimetatud nurgast sümbol  $\sphericalangle AOB$  tähendab, lepime kokku nii, et sümbol  $\sphericalangle AOB$  ja samuti sümbolid  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  tähendavad ikka positiivseid nurki, kui teisiti pole öeldud.

### Ülesanded.

187. Kummalt pooluselt vaadatuna on maakera telje ümber pöörlemise suund positiivne?

188. Missuguses suunas näeb vaatleja pöörlevat temast paremalt vasakule mööduva sõiduki rattaid?

189. Missuunalist pöörlemist kujutab pöörangu välisel rajal liiklemismääruste kohaselt sõitva sõiduki liikumine?

### § 15. Nurgad kuni $360^\circ$ ja üle selle.

Olgu  $OA$  pöörleva kiire lähteasend ja  $OB$  see asend, millesse ta jõuab peale pöördumist positiivses suunas  $45^\circ$  võrra (joonis 14). Kui kiir pöörleb edasi positiivses suunas ja läbib järjekorras asendid

$$OC \quad OD \quad OA,$$

siis ütleme, et ta on pöördunud nurga võrra, mille suurus on vastavalt

$$180^\circ \quad 270^\circ \quad 360^\circ.$$

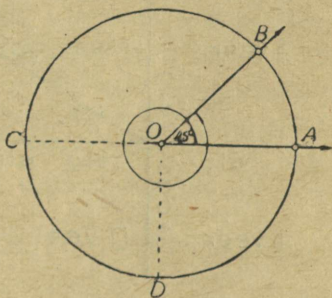
Jätkaku kiir samas suunas pöörlemist ja jõudku uuesti asendisse  $OB$ . Nurk, mille võrra ta nüüd on pöördunud, on suurem kui  $360^\circ$ : me ütleme, et see nurk on

$$360 + 45^\circ \text{ ehk } 405^\circ.$$

Kui kiir jätkab samas suunas pöörlemist, läbib teiskordselt oma esialgse asendi ja jõuab kolmandat korda asendisse  $OB$ , siis ütleme, et on tekkinud nurk, mille suurus on

$$2 \cdot 360^\circ + 45^\circ \text{ ehk } 765^\circ.$$

Nii nurga mõistet laiendades saab kõnelda kuitahes suurtest positiivsetest nurkadest. Kuid samuti võib ka negatiivse nurga absoluutväärts olla kuitahes suur: kui kiir  $OA$  pöörleb negatiivses suunas ja läbib järjekorras punktid (joonis 14)



Joonis 14.

$$D, \quad C, \quad B, \quad A, \quad D, \quad C,$$

siis on tekkinud nurk, mille suurus on vastavalt

$$-90^\circ, \quad -180^\circ, \quad -315^\circ, \quad -360^\circ, \quad -450^\circ, \quad -540^\circ.$$

## Ülesanded.

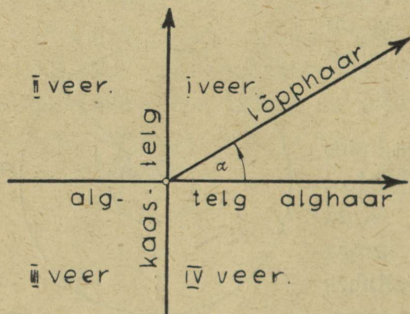
190. Kui suur on põhjapooluselt vaadatuna nurk, mille võrra pöörduv maakera ekvaatori raadius  $2\frac{1}{2}$  ööpäeva vältel? Kui suur on see nurk lõuna pooluselt vaadatuna?

191. Kui suure nurga võrra pöörduv minutiosuti  $1\frac{3}{4}$  tunni vältel?

192. Kui suure nurga võrra pöörduv tunniosuti 7 tunni vältel?

## § 16. Nurkade liigitamine veeranditesse.

Sirget, millel asetseb nurga alghaar, nimetame nurga algteljeks (joonis 15).



Joonis 15.

Kui kujutleme positiivset täisnurka, mille tipp ja alghaar ühtivad antud nurga tipu ja alghaaraga, siis selle täisnurga lõpphaar asetseb sirgel, mida nimetame antud nurga kaasteljeks (joonis 15).

Nurga algtelg ja kaastelg jaotavad tasapinna neljaks täis-

nurgaks ehk veerandiks. Veerandid nummerdame positiivse pöörlemissuuna järjestuses, kusjuures esimeseks veerandiks loeme selle positiivse täisnurga, mille alghaar ühtib antud nurga alghaaraga.

Nurgad liigitatakse esimese, teise, kolmanda ja neljanda veerandi nurkadeks vastavalt sellele, mitmendas veerandis asetseb nurga lõpphaar, ja sõltumata sellest, kuidas ta sellesse asendisse on jõudnud.

Seega on teravnurgad esimese veerandi nurgad, nürinurgad on teise veerandi nurgad, ülinürinurgad, mis on väiksemad kui  $270^\circ$ , on kolmanda veerandi nurgad ja ülinürinurgad, mis on suuremad kui  $270^\circ$ , on neljanda veerandi nurgad. Kuid esimese veerandi nurgad on ka nurgad, mis on teravnurgast täisarvu täispöörete võrra suuremad või väiksemad kui teravnurk, ja teise veerandi nurgad on ka nurgad, mis on mingi täisarvu täispöörete võrra suuremad või väiksemad kui nürinurk, jne. Samuti on negatiivsed teravnurgad neljanda veerandi nurgad ja negatiivsed nürinurgad on kolmanda veerandi nurgad, jne.

Veeranditesse jäävad liigitamata ainult nurgad, mis on täisnurga täiskordsed:  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ , ..., sest nende lõpphaarad asetsevad kas sama nurga algteljel või kaasteljel, s. o. sirgetel, mis jaotavad tasapinna veeranditeks.

Et leida, mitmendasse veerandisse kuulub antud nurk, selleks tuleb temast lahutada või temaga liita (kui antud nurk on negatiivne) nii mitu täispööret ( $360^\circ$ ), et järele jääks täispöördest väiksem positiivne nurk. Antud nurk kuulub siis samasse veerandisse, millesse kuulub see jääk.

Näide 1. Leiame, mitmendasse veerandisse kuulub nurk  $1000^\circ$ .

Lahutades  $1000^\circ$ -st  $2 \cdot 360^\circ$  saame jäägina  $280^\circ$ . Et  $280^\circ$  on neljanda veerandi nurk, siis ka  $1000^\circ$  on neljanda veerandi nurk.

Näide 2. Nurk  $-200^\circ$  on teise veerandi nurk, sest liites  $-200^\circ$ -ga  $360^\circ$  saame  $160^\circ$ , mis on teise veerandi nurk.

Ülesanne.

193. Liigitada veeranditesse järgmised nurgad:

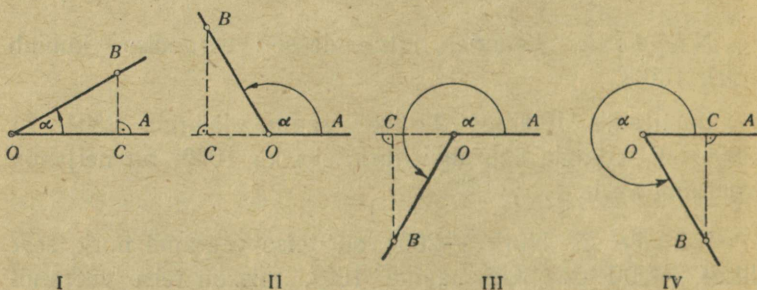
1.	$150^{\circ}$	2.	$400^{\circ}$	3.	$-30^{\circ}$	4.	$-300^{\circ}$
	$200^{\circ}$		$600^{\circ}$		$-100^{\circ}$		$-500^{\circ}$
	$250^{\circ}$		$700^{\circ}$		$-170^{\circ}$		$-600^{\circ}$
	$300^{\circ}$		$950^{\circ}$		$-400^{\circ}$		$-800^{\circ}$

Goniomeetriliste funktsioonide rakendusvald ei piirdu ainult täisnurksete kolmnurkade lahendamisega, vaid neid kasutatakse ka kaldnurksete kolmnurkade lahendamiseks. Peale selle need funktsioonid leiavad rakendamist paljude loodusseaduste, eriti lainetusnähtuste kirjeldamisel, mida käsitletakse akustikas, optikas, raadiotehnikas ja mujal.

Nende laiemate rakendusvõimaluste otstarbel tuleb goniomeetrilisi funktsioone defineerida mitte ainult teravnurga puhuks, vaid tuleb anda neile sellised definitsioonid, mis on kehtivad mistahes nurga puhul.

§ 17. Mistahes nurga goniomeetrilised funktsioonid.

Esimeses peatükis antud goniomeetriliste funktsioonide definitsioonid on kehtivad ainult teravnurkade jaoks, sest täisnurkses kolmnurgas, mille abil need definitsioonid anti,



Joonis 16.

esinevad (peale täisnurga) ainult teravnurgad. Et defineerida siinust ja koosinust mistahes nurga puhul, selleks toimime järgmiselt.

Joonestame igast veerandist ühe positiivse nurga  $AOB$  (joonis 16), valime selle nurga lõpphaaral mingi punkti  $B$  ja projekteerime selle punkti nurga algteljele. Varemini antud goniomeetriliste funktsioonide definitsioonide kohaselt on esimese veerandi nurga puhul

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{BC}{OB}, & \cos \alpha &= \frac{OC}{OB}, \\ \tan \alpha &= \frac{BC}{OC}, & \cot \alpha &= \frac{OC}{BC}. \end{aligned}$$

Nendesamade võrdustega defineerime ka teise, kolmanda ja neljanda veerandi nurkade goniomeetrilised funktsioonid.

Sirglõigud  $BC$  ja  $OC$  on esimese veerandi nurkade puhul nurga  $\alpha$  vastaskaatetiks ja lähiskaatetiks, kuid ei ole seda enam teiste veerandite nurkade puhul. Seepärast tuleb neile anda uued sobivad nimetused. Joonise konstruktsiooni järgi on lõik  $BC$  kõigil juhtudel lõpphaara lõigu otspunkti  $B$  projektiija nurga algteljele ja lõik  $OC$  on kõigil juhtudel lõpphaara lõigu projektsioon algteljel.

Kasutades neid nimetusi saame järgmised üldised goniomeetriliste funktsioonide definitsioonid:

nurga siinus on projektija ja projektitava suhe; nurga koosinus on projektsiooni ja projektitava suhe; nurga tangens on projektija ja projektsiooni suhe; nurga kootangens on projektsiooni ja projektija suhe.

Nendest definitsioonidest järeldub, et nurga goniomeetriliste funktsioonide väärtused on määratud selle nurga lõpphaara asendiga sõltumata sellest, kuidas lõpphaar sellesse asendisse jõudis. Seega

goniomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu nurga kasvamisel või kahanemisel täispöörde või selle täiskordse võrra.

Seda tõde võime sümbolites kirjutada järgmiselt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \sin \alpha, & \tan(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \tan \alpha, \\ \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cos \alpha, & \cot(\alpha + k \cdot 360^\circ) &= \cot \alpha,\end{aligned}$$

kus  $k$  on mistahes positiivne või negatiivne täisarv.

Nende valemite abil saab mistahes nurga goniomeetri-  
lise funktsiooni taandada  $360^\circ$ -st väiksema nurga  
funktsiooniks. Selleks tuleb antud nurk avaldada kujul

$$k \cdot 360^\circ + \alpha,$$

kus  $k$  on mingi positiivne või negatiivne täisarv ja  $\alpha$  on  
 $360^\circ$ -st väiksem positiivne nurk, ning rakendada viimati kir-  
jutatud valemeid.

Näited.

1.  $\cos 1710^\circ = \cos(4 \cdot 360^\circ + 270^\circ) = \cos 270^\circ.$
2.  $\tan(-2540^\circ) = \tan(-8 \cdot 360^\circ + 340^\circ) = \tan 340^\circ.$

Ülesanne.

194. Taandada järgmised funktsioonid  $360^\circ$ -st väikse-  
mate positiivsete nurkade funktsioonideks:

$$\begin{array}{cccc}\sin 750^\circ & \cos 1100^\circ & \tan 1560^\circ & \cot 2342^\circ \\ \sin(-800^\circ) & \cos(-935^\circ) & \tan(-780^\circ) & \cot(-438^\circ)\end{array}$$

## § 18. Projektija ja projektsiooni muutumine.

Et oleks võimalik täielikult kirjeldada projektija ja projektsiooni muutumist, selleks peame neid vaatlema kui suunatud lõike. Nende lõikude suundade kindlaksmääramiseks peame enne määrama kindlaks nurga alg- ja kaastelje suunad.

Nurga haari loeme suunatud kiirteks, mis on suunatud nurga tipust eemale. Nurga algteljele omistame sama suuna, mis on alghaaral (joonis 17) ja kaasteljele sama suuna, mis on esimese veerandi (täisnurga) lõpphaaral.

Projektitavale omistame alati sama suuna, mis on nurga lõpphaaral, ja loeme projektitava alati positiivseks.

Projektija loeme positiivseks, kui tal on sama suund, mis kaasteljel, ja negatiivseks, kui tal on vastupidine suund.

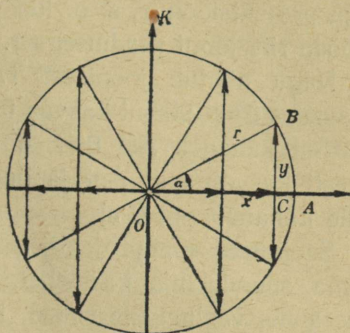
Projektsiooni loeme positiivseks, kui tal on sama suund, mis algteljel, ja negatiivseks, kui tal on vastupidine suund.

Et projektitav on alati positiivne, siis nurga siinusel kui projektija ja projektitava jagatisel on alati sama märk, mis projektijal, ja nurga koosinusel kui projektsiooni ja projektitava jagatisel on alati sama märk, mis projektsioonil.

Nüüd määrame kindlaks projektija ja projektsiooni suunad. Seda peame tegema nii, et mõlemad lõigud esimeses veerandis oleksid positiivsed, sest teravnurkade siinused ja koosinused peavad jääma positiivseteks.

Joonisest 17 nähtub, et selle nõude kohaselt tuleb projektsioonile omistada suund, mis viib nurga tipust eemale, ja projektijale omistada suund, mis viib projektitava lõpppunkti poole, teiste sõnadega,

projektsioonile ja projektijale omistame sellised suunad, et liikudes nendes suundades algul mööda projektsiooni ja seejärel mööda projektijat, jõuame projektitava algpunktist tema lõpppunkti.



Joonis 17.

Laseme nüüd nurgal kasvada  $0^{\circ}$ -st  $360^{\circ}$ -ni ja jälgime, kuidas seejuures muutuvad ühe ja sama lõigu  $r$  projektija  $y$  ja projektsioon  $x$ , s. o. kui projektitava lõpp-punkt liigub mööda ringjoont raadiusega  $r$ .

Nagu nähtub joonisest 17, projektija  $y$  pikkus nurga kasvades  $0^{\circ}$ -st  $90^{\circ}$ -ni kasvab  $0$ -st  $r$ -ni, nurga kasvades  $90^{\circ}$ -st  $180^{\circ}$ -ni kahaneb  $r$ -st  $0$ -ni, nurga kasvades  $180^{\circ}$ -st  $270^{\circ}$ -ni uuesti kasvab  $0$ -st  $r$ -ni ja nurga kasvades  $270^{\circ}$ -st  $360^{\circ}$ -ni jälle kahaneb  $r$ -st  $0$ -ni.

Seejuures on projektijal esimeses ja teises veerandis sama suund, mis kaasteljel, ning kolmandas ja neljandas veerandis vastupidine suund. Kui esimese ja teise veerandi nimetame ülemisteks veeranditeks ning kolmanda ja neljanda veerandi alumisteks veeranditeks, siis võime öelda, et

**ülemistes veerandites projektija on positiivne ja alumistes veerandites negatiivne.**

Projektija muutumise kirjelduse võime võtta kokku järgmisse tabelisse, milles on toodud täisnurga täiskordsetele vastavad projektija väärtused:

Nurk	$0^{\circ}$	$90^{\circ}$	$180^{\circ}$	$270^{\circ}$	$360^{\circ}$
Projektija	0	$r$	0	$-r$	0

Jälgides projektsiooni muutumist paneme tähele, et projektsiooni  $x$  pikkus nurga kasvades  $0^{\circ}$ -st  $90^{\circ}$ -ni kahaneb  $r$ -st  $0$ -ni, nurga kasvades  $90^{\circ}$ -st  $180^{\circ}$ -ni kasvab  $0$ -st  $r$ -ni, nurga kasvades  $180^{\circ}$ -st  $270^{\circ}$ -ni uuesti kahaneb  $r$ -st  $0$ -ni ja nurga kasvades  $270^{\circ}$ -st  $360^{\circ}$ -ni jälle kasvab  $0$ -st  $r$ -ni.

Seejuures on projektsioonil esimeses ja neljandas veerandis sama suund, mis algteljel, ning teises ja kolmandas veerandis vastupidine suund. Kui esimese ja neljanda

veerandi nimetame parempoolseteks veeranditeks ning teise ja kolmanda veerandi vasakpoolseteks veeranditeks, siis võime öelda, et

parempoolsetes veerandites projektsioon on positiivne ning vasakpoolsetes veerandites negatiivne.

Projektsiooni muutumise kirjelduse võime võtta kokku järgmisse tabelisse, milles on toodud täisnurga täiskordsetele vastavad projektsiooni väärtused:

Nurk	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
Projektsioon	$r$	$0$	$-r$	$0$	$r$

Kõigi nurkade puhul peale täisnurga täiskordsete projektija  $y$ , projektsioon  $x$  ja projektitav  $r$  moodustavad täisnurkse kolmnurga, mille kaatetid on  $y$  ja  $x$  ning hüpotenuus on  $r$ . Seega Pythagorase teoreemi järgi nende vahel kehtib seos

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

See seos jääb kehtivaks ka täisnurga täiskordsete puhul. Tõesti, kui nurk on täisnurga paariskordne, nagu  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $360^\circ, \dots$ , siis on

$$y = 0 \quad \text{ja} \quad x = \pm r$$

ning nende ruutude summa on seega  $r^2$ . Kui nurk on täisnurga paaritukordne, nagu  $90^\circ$ ,  $270^\circ, 450^\circ, \dots$ , siis on

$$y = \pm r \quad \text{ja} \quad x = 0$$

ning nende ruutude summa on seega jällegi  $r^2$ .

Jagades ülemise võrduse kõik liikmed avaldisega  $r^2$ , saame, et

$$\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = 1$$

ehk

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Seega see põhiseos, mille kehtivus oli varem tõestatud ainult teravnurkade puhul, jääb kehtivaks ka mistahes nurkade puhul.

Mistahes nurga tangens on defineeritud kui projektija ja projektsiooni jagatis:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}.$$

Jagades selles võrduses murru liikmed projektitavaga  $r$ , saame, et

$$\tan \alpha = \frac{y:r}{x:r}$$

ehk

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Seega ka see varem tõestatud põhiseos jääb kehtivaks mistahes nurkade puhul.

Mistahes nurga kootangens on defineeritud kui projektsiooni ja projektija jagatis:

$$\cot \alpha = \frac{x}{y}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemad pooled tangensit defineeriva võrduse vastavate pooltega, saame, et

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{y}$$

ehk

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

Viimasest põhiseosest järeldub, et nurga kootangens on selle nurga tangensi pöördarv:

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

ehk

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Seega on selgunud, et defineerides mistahes nurga gonio-meetrilised funktsioonid nii, nagu ülal oli tehtud, jäävad kehtima kõik need põhiseosed nende funktsioonide vahel, mis on kehtivad teravnurkade puhul.

### Ülesanded.

195. Millised märgid on projektijal ja projektsioonil järgmiste nurkade puhul:

$$\begin{array}{ccccc} 160^\circ & 190^\circ & 292^\circ & 348^\circ & 440^\circ \\ -40^\circ & -100^\circ & -172^\circ & -300^\circ & -500^\circ \end{array}$$

196. Millistes veerandites on projektijal ja projektsioonil üks ja sama märk? Millistes veerandites on neil erinevad märgid?

197. Arvutada nürinurga koosinus, kui ta siinus on 0,8.

198. Arvutada ülinürinurga siinus, kui ta koosinus on  $-0,6$ .

199. Arvutada nürinurga koosinus, kui ta siinus on 0,5.

200. Arvutada neljanda veerandi nurga tangens, kui ta siinus on  $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

201. Arvutada kolmanda veerandi nurga kootangens, kui ta koosinus on  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ .

202. Arvutada  $\sin \beta$  ja  $\tan \beta$ , kui  $\cos \beta = \frac{5}{13}$  ja  $270^\circ < \beta < 360^\circ$ .

203. Arvutada  $\cos \gamma$ ,  $\tan \gamma$  ja  $\cot \gamma$ , kui  $\sin \gamma = -\frac{40}{41}$  ja  $180^\circ < \gamma < 270^\circ$ .

204. Arvutada  $\cos \delta$ ,  $\tan \delta$  ja  $\cot \delta$ , kui  $\sin \delta = 0,4$  ja  $90^\circ < \delta < 180^\circ$ .

205. Avaldada nurga koosinus sama nurga tangensi kaudu. (N ä p u n ä i d e: Jagada võrduse  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  kõik liikmed avaldisega  $\cos^2 \alpha$ .)

206. Arvutada  $\cos \varphi$ , kui  $\tan \varphi = \frac{1}{2}$  ja  $180^\circ < \varphi < 270^\circ$ .

207. Avaldada nurga siinus sama nurga tangensi kaudu.

208. Arvutada  $\sin \varphi$ , kui  $\tan \varphi = -\sqrt{2}$  ja  $90^\circ < \varphi < 180^\circ$ .

209. Näidata, et tangensi absoluutväärtus pole kunagi väiksem sama nurga siinuse absoluutväärtusest.

210. Näidata, et absoluutväärtuselt kootangens pole kunagi väiksem sama nurga koosinusest.

### § 19. Nurga siinuse ja koosinuse muutumine.

Eelmises paragrahvis nägime, et siinusel on sama märk, mis projektijal, ja et koosinusel on sama märk, mis projektsioonil. Seega

**siinus on ülemistes veerandites positiivne ja alumistes veerandites negatiivne ning**

**koosinus on parempoolsetes veerandites positiivne ja vasakpoolsetes veerandites negatiivne.**

Et nurga siinus on projektija ja projektitava jagatis, siis nurkadele, mille puhul projektija on 0, vastab siinuse väärtus 0 ja nurkadele, mille puhul projektija absoluutväärtus on võrdne projektitava pikkusega, vastab siinuse absoluutväärtus 1.

Et koosinus on projektsiooni ja projektitava jagatis, siis nurkadele, mille puhul projektsioon on 0, vastab koosinuse väärtus 0 ja nurkadele, mille puhul projektsiooni absoluutväärtus on võrdne projektitava pikkusega, vastab koosinuse absoluutväärtus 1.

Seega nurga siinus nurga kasvades  $0^{\circ}$ -st  $90^{\circ}$ -ni kasvab 0-st 1-ni, nurga kasvades  $90^{\circ}$ -st  $270^{\circ}$ -ni kahaneb 1-st  $-1$ -ni ja nurga kasvades  $270^{\circ}$ -st  $360^{\circ}$ -ni kasvab  $-1$ -st 0-ni

ning nurga koosinus nurga kasvades  $0^{\circ}$ -st  $180^{\circ}$ -ni kahaneb 1-st  $-1$ -ni ja nurga kasvades  $180^{\circ}$ -st  $360^{\circ}$ -ni kasvab  $-1$ -st 1-ni.

Nurga  $\alpha$  siinuse ja koosinuse muutumise kirjelduse võib võtta kokku järgmisse tabelisse:

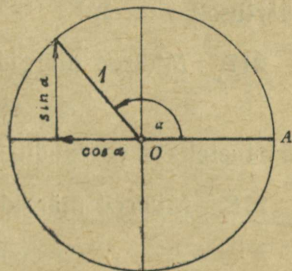
$\alpha$	$0^{\circ}$	$90^{\circ}$	$180^{\circ}$	$270^{\circ}$	$360^{\circ}$
$\sin \alpha$	0	1	0	$-1$	0
$\cos \alpha$	1	0	$-1$	0	1

Nagu siinuse ja koosinuse muutumise kirjeldusest selgub, on nende funktsioonide kõige suuremaks väärtuseks 1 ja kõige väiksemaks väärtuseks  $-1$ .

Kui ringi raadius on 1, siis on

$$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y \quad \text{ja} \quad \cos \alpha = \frac{x}{1} = x.$$

Seega ringis, mille raadius on 1, ehk ühikringis on projektija (pikkuselt ja märgilt) võrdne nurga siinusega ja projektsioon võrdne nurga koosinusega. Seepärast kasutame allpool nende funktsioonide näitlikuks kujutamiseks projektijat ja projektsiooni ühikringis (joonis 18).



Joonis 18.

#### Ülesanded.

211. Kui suured on järgmiste avaldiste väärtused:

$$\begin{array}{cccc} \sin 0^{\circ} & \cos 90^{\circ} & \sin 270^{\circ} & \cos 360^{\circ} \\ \sin 450^{\circ} & \cos 450^{\circ} & \sin 540^{\circ} & \cos (-90^{\circ}) \end{array}$$

212. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

$$3 \cos 0^{\circ} - 4 \sin 180^{\circ} + 5 \cos 270^{\circ} \\ \cos 90^{\circ} \cos 270^{\circ} - \sin 90^{\circ} \sin 270^{\circ}$$

213. Kui suured on järgmiste avaldiste väärtused:

$$\sin \pi \quad \sin \frac{\pi}{2} \quad \sin \frac{3\pi}{2} \quad \sin 2\pi \\ \cos \frac{\pi}{2} \quad \cos \pi \quad \cos \frac{3\pi}{2} \quad \cos 2\pi$$

214. Arvutada iga järgmise avaldise väärtused, mis vastavad tähe  $x$  väärtusele  $0^{\circ}$ ,  $90^{\circ}$ ,  $180^{\circ}$ ,  $270^{\circ}$  ja  $360^{\circ}$ :

1.  $2 \sin x + \cos x$

3.  $2 \sin^2 x + \cos x$

2.  $\frac{\cos x + 3}{\sin x + 3}$

4.  $\frac{\sin^2 x - 5}{\cos^2 x - 5}$

215. Millised märgid on järgmiste avaldiste väärtustel eri veerandites:

1.  $\cos x + 2$

3.  $\cos x (\sin x - 1)$

2.  $\frac{\cos x + 1}{\sin x}$

4.  $\frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$

216. Kumb funktsioonidest  $\sin x$  ja  $\sin^2 x$  on absoluutväärtuselt suurem?

217. Millised märgid on avaldise

$$\sin x - \sin^2 x$$

väärtustel eri veerandites? (Vt. eelmist ülesannet.)

218. Millised märgid on avaldise

$$\cos x + \cos^2 x$$

väärtustel eri veerandites?

219. Millised on avaldise  $\cos x + 2$  suurim ja väikseim väärtus?

220. Millistele nurga  $x$  väärtustele vastavad avaldise  $\sin^2 x + 3$  suurim ja väikseim väärtus?

221. Kas on nurki, mis rahuldavad võrrandit

$$\sin x + 2 \cos x = 4?$$

222. Kas on nurki, mis rahuldavad võrrandit

$$\sin^2 x - \cos^2 x = 1?$$

## § 20. Nurga tangensi ja kootangensi muutumine.

Seos

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

lubab uurida nurga tangensi muutumist selle nurga siinuse ja koosinuse muutumise kaudu.

Et esimeses ja kolmandas veerandis nurga siinusel ja koosinusel on üks ja sama märk, siis nendes veerandites on nurga tangens positiivne. Et teises ja neljandas veerandis nurga siinusel ja koosinusel on erisugused märgid, siis nendes veerandites nurga tangens on negatiivne. Seega

**nurga tangens on paaritunumbrilistes veerandites positiivne ja paarisnumbrilistes veerandites negatiivne.**

Et täisnurga paariskordsetele ( $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $360^\circ$ , ...) vastab siinuse väärtus 0 ja koosinuse väärtus 1 või  $-1$ , siis nendele nurkadele vastab tangensi väärtus 0.

Et täisnurga paaritukordsetele ( $90^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $450^\circ$ , ...) vastab siinuse väärtus 1 või  $-1$  ja koosinuse väärtus 0, siis nendele nurkadele ei vasta mingit tangensi väärtust, sest nulliga jagamisel pole mõtet. Küll on aga võimalik leida nende suuruste ümbruses igale nurgale vastava tangensi väärtus.

Nii leiame, et  $90^\circ$ -st pisut väiksema teravnurga tangens on suur positiivne arv, sest säärase nurga tangens on arvule

1 väga lähedase siinuse ja arvule 0 väga lähedase koosinuse väärtuse jagatis. Teravnurga suuruse lähenemisel  $90^{\circ}$ -le ta tangens kasvab piiramatult, sest nurga koosinus läheneb siis arvule 0. Seda mõtet väljendatakse lühidalt järgmise kirjutisega:

$$\begin{array}{l} \tan \alpha \rightarrow \infty, \\ \text{kui teravnurk } \alpha \rightarrow 90^{\circ} \end{array}$$

Kui nurk on pisut suurem kui  $90^{\circ}$ , siis selle nurga tangens on suure absoluutväärtusega negatiivne arv, sest säärase nurga tangens on arvule 1 väga lähedase siinuse väärtuse ja arvule 0 väga lähedase negatiivse koosinuse väärtuse jagatis. Nürinurga suuruse lähenemisel  $90^{\circ}$ -le ta tangens (olles negatiivne) kasvab absoluutväärtuselt piiramatult. Seda mõtet väljendatakse lühidalt järgmise kirjutisega:

$$\begin{array}{l} \tan \alpha \rightarrow -\infty, \\ \text{kui nürinurk } \alpha \rightarrow 90^{\circ} \end{array}$$

Peab eriti pidama silmas, et ei üks ega teine kirjutis ei väljenda  $90^{\circ}$ -se nurga tangensi väärtust, sest seda pole olemas, vaid nad kirjeldavad tangensfunktsiooni muutumist  $90^{\circ}$  ümbruses, üks nurga kasvades ja teine nurga kahanedes. Tangensite tabelis, kus pole öeldud, kas nurk läheneb  $90^{\circ}$ -le kasvades või kahanedes, kirjutatakse tinglikult  $90^{\circ}$ -le vastavale funktsiooni väärtuse kohale sümbol  $\infty$ .

Samal viisil arutades leiame, et

$$\begin{array}{l} \tan \alpha \rightarrow \infty, \\ \text{kui III veerandi nurk } \alpha \rightarrow 270^{\circ} \end{array}$$

ja

$$\begin{array}{l} \tan \alpha \rightarrow -\infty, \\ \text{kui IV veerandi nurk } \alpha \rightarrow 270^{\circ} \end{array}$$

Et pöördarvul on sama märk, mis arvul endal, siis seosest

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

järeldub, et ka

nurga kootangens on paaritunumbrilistes veerandites positiivne ja paarisnumbrilistes veerandites negatiivne.

Et täisnurga paariskordsetele ( $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $360^\circ$ , ...) vastab koosinuse väärtus 1 või  $-1$  ja siinuse väärtus 0, siis seetõttu, et

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

nendele nurkadele ei vasta mingit kootangensi väärtust. Kuid samas mõttes, nagu ülal, võime kirjutada, et

$$\cot \alpha \rightarrow \infty,$$

kui I veerandi nurk  $\alpha \rightarrow 0^\circ$ ,

ja

$$\cot \alpha \rightarrow -\infty,$$

kui negatiivne nurk  $\alpha \rightarrow 0^\circ$   
või IV veerandi nurk  $\alpha \rightarrow 360^\circ$ ,

ning

$$\cot \alpha \rightarrow -\infty,$$

kui II veerandi nurk  $\alpha \rightarrow 180^\circ$ ,

ja

$$\cot \alpha \rightarrow \infty,$$

kui III veerandi nurk  $\alpha \rightarrow 180^\circ$ .

Et täisnurga paaritukordsetele ( $90^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $450^\circ$ , ...) vastab koosinuse väärtus 0 ja siinuse väärtus 1 või  $-1$ , siis nendele nurkadele vastab kootangensi väärtus 0.

Nurga  $\alpha$  tangensi ja kootangensi muutumise kirjelduse võib lühidalt võtta kokku järgmisse tabelisse:

$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$\tan \alpha$	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0
$\cot \alpha$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$

Seega võivad nii tangensfunktsioon kui ka kootangensfunktsioon omandada igasuguseid väärtusi  $-\infty$ -st  $+\infty$ -ni.

### Ülesanded.

223. Millised märgid on järgmiste funktsioonide väärtustel eri veerandites:

1.  $\tan x + \cot x$

3.  $\tan x - \sin x$

2.  $\tan x + \sin x$

4.  $\cos x - \cot x$

(Vt. ülesandeid 209 ja 210.)

224. Arvutada kummagi järgmise avaldise väärtused, mis vastavad nurga  $x$  väärtusele  $180^\circ$  ja  $360^\circ$ :

1.  $\tan x + \sin x$

2.  $0,01 \tan x + 100 \sin x$

Kuidas muutuvad nende avaldiste väärtused, kui  $x$  läheneb  $90^\circ$ -le,  $270^\circ$ -le?

225. Kui suured on järgmiste avaldiste väärtused:

$$\tan \pi$$

$$\tan 2\pi$$

$$\cot \frac{\pi}{2}$$

$$\cot \frac{3\pi}{2}$$

## § 21. Taandamisvalemid.

Ülal nägime, et täispöördest suuremate nurkade goniomeetrilisi funktsioone on võimalik taandada täispöördest väiksemate positiivsete nurkade funktsioonideks. Selles paragrahvis näitame, et iga nurga goniomeetrilisi funktsioone on võimalik taandada mistahes veerandi nurkade

funktsioonideks. Seetõttu goniomeetriliste funktsioonide tabelites tarvitseb anda ainult ühe veerandi nurkade, täavaliselt teravnurkade funktsioonide väärtused. Nende abil on võimalik leida mistahes nurga funktsioonide väärtused.

Selleks tõestame esmalt kaks taandamisvalemit, mis võimaldavad negatiivse nurga siinuse ja koosinuse avaldada positiivse nurga funktsioonide abil.

I taandamisvalem:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

II taandamisvalem:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

Nende valemite kehtivus selgub joonisest 19, millel on ühikringis kujutatud ühise alghaara positiivne nurk  $AOB = \alpha$  ja negatiivne nurk  $AOB' = -\alpha$ .

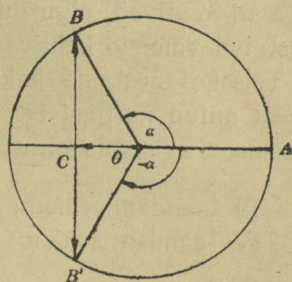
Et nende nurkade absoluutväärtused on võrdsed, siis nende lõpphaarad  $OB$  ja  $OB'$  ning seetõttu ka ühikringi punktid  $B$  ja  $B'$  asetsevad sümmeetriliselt nurkade  $AOB$  ja  $AOB'$  ühise alghaara  $OA$  suhtes.

Seetõttu sümmeetriatelg  $OA$  on risti punkte  $B$  ja  $B'$  ühendava lõiguga  $BB'$  ja poolitab seda.

Seega on projektijad  $CB$  ja  $CB'$  pikkuselt võrdsed, kuid suunalt vastupidised. Et nende lõikude märgid määratakse nende suundade võrdlemise teel ühe ja sama telje suunaga (nurkade  $\alpha$  ja  $-\alpha$  ühise kaastelje  $OK$  suunaga joonisel 20), siis on ka nende lõikude märgid vastupidised. Järelikult suurused  $\sin \alpha$  ja  $\sin(-\alpha)$ , mida kujutavad lõigud  $CB$  ja  $CB'$ , on absoluutväärtuselt võrdsed, kuid märgilt vastupidised, s. o.

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Sümmeetria vaatlusest selgus, et radiustel  $OB$  ja  $OB'$  on ühine projektsioon  $OC$ . Seega suurused  $\cos \alpha$  ja  $\cos(-\alpha)$ ,



Joonis 19.

mida see lõik kujutab, on absoluutväärtuselt võrdsed. Et nii nurga  $a$  kui  $-a$  puhul saame selle lõigu märgi võrreldes tema suunda ühe ja sama telje suunaga (nurkade  $a$  ja  $-a$  ühise alghaara  $OA$  suunaga), siis lõigul  $OC$  on mõlemal juhul üks ja sama märk. Seega on ka suurustel  $\cos a$  ja  $\cos(-a)$  üks ja sama märk. Järelikult on

$$\cos(-a) = \cos a.$$

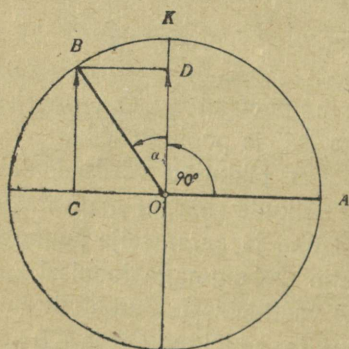
**M ä r k u s.** Kuigi joonisel 19 nurk  $a$  on kujutatud nürinurgana, ei ole tõestuses seda asjaolu kuskil kasutatud. Tõestamisel on kasutatud ainult selliseid põhjendusi, mis on alati kehtivad, olgu nurk  $a$  milline tahes. Seepärast on tõestatud valemid kehtivad mistahes nurkade jaoks.

Teiseks tõestame kaks taandamisvalemit, mis võimaldavad antud nurgast  $90^\circ$  võrra suurema nurga siinuse ja koosinuse avaldada antud nurga funktsioonide abil.

III taandamisvalem:

IV taandamisvalem:

$\sin(90^\circ + a) = \cos a$ $\cos(90^\circ + a) = -\sin a$
--



Joonis 20.

III taandamisvalemi kehtivus selgub joonisest 20, millel on ühikringis kujutatud nurgad  $KOB = a$  ja  $AOB = 90^\circ + a$  ühise lõpphaaraga  $OB$ . Nurga  $a$  koosinust kujutab sellel joonisel raadiuse  $OB$  projektioon  $OD$  selle nurga alghaarel  $OK$ . Nurga  $90^\circ + a$  siinust kujutab raadiuse  $OB$  projektija  $CB$  selle nurga alghaarale  $OA$ .

Jooniselt nähtub, et lõigud  $OD$  ja  $CB$  on võrdsed (ristküliku vastasküljed) ning et neil on üks ja sama suund. Pro-

jektija  $CB$  märgi määrab selle lõigu suuna võrdlemine nurga  $90^\circ + \alpha$  kaastelje  $OK$  suunaga; projektsiooni  $OD$  märgi määrab selle lõigu suuna võrdlus nurga  $\alpha$  alghaara  $OK$  suunaga. Et mõlema lõigu suunda võrreldakse ühe ja sama suunaga, siis seetõttu, et neil on üks ja sama suund, on neil ka üks ja sama märk.

Järelikult suurused  $\sin(90^\circ + \alpha)$  ja  $\cos \alpha$ , mida kujutavad võrdsed ning ühe ja sama märgiga lõigud  $CB$  ja  $OD$ , on võrdsed.

IV taandamisvalemi kehtivus järeldub esimesest kolmest taandamisvalemist.

II taandamisvalemi järgi on

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \cos(-90^\circ - \alpha),$$

III taandamisvalemi järgi on

$$\cos(-90^\circ - \alpha) = \sin(-90^\circ - \alpha + 90^\circ)$$

ehk

$$\cos(-90^\circ - \alpha) = \sin(-\alpha),$$

I taandamisvalemi järgi on

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

Järelikult on

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha.$$

Kui nurga funktsiooni on vaja avaldada täisnurga mingi täiskordse võrra väiksema nurga funktsioonina, siis võime seda teha järk-järgult vähendades nurka ühe täisnurga kaupa. Selleks tuleb rakendada vaheldumisi III ja IV taandamisvalemite. Nii võime näiteks taandada  $\sin(270^\circ + \alpha)$  nurga  $\alpha$  funktsiooniks järgmiselt:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \cos(180^\circ + \alpha) = -\sin(90^\circ + \alpha) = -\cos \alpha.$$

III                      IV                      III

Kuid me võime sellest näitest välja lugeda ka üldise reegli, mille abil võime koostada taandamisvalemid mistahes

juhu jaoks. Sellest näitest nähtub, et seoses nurga iga vähenemisega täisnurga võrra funktsiooni nimetus asendub kaasfunktsiooni nimetusega, nii et nurga vähenemisel (ka suurenemisel) täisnurga paariskordse võrra funktsiooni nimetus jääb endiseks, kuid nurga vähenemisel (või suurenemisel) täisnurga paaritukordse võrra funktsiooni nimetus asendub kaasfunktsiooni nimetusega. Seega on täisarvu  $k$  järgi alati võimalik otsustada, millise funktsioonina nurgast  $\alpha$  avaldub nurga  $k \cdot 90^\circ + \alpha$  siinus või koosinus.

Jääb järele veel ainult leida, millise teguriga,  $+1$  või  $-1$ , tuleb seda taandatud funktsiooni korrutada, et tulemus oleks võrdne taandatava funktsiooniga. Et taandamisvalemid III ja IV, mille rakendamise tulemuseks peab olema otsitav taandamisvalem, on kehtivad mistahes nurga  $\alpha$  puhul, siis on selge, et see tegur ei olene nurgast  $\alpha$ . Seepärast võime mööduvalt vaadelda nurka  $\alpha$  teravnurgana. Kui selgub, et sellele oletusele vastab nurga  $k \cdot 90^\circ + \alpha$  taandatava funktsiooni negatiivne väärtus, siis tuleb taandatud funktsioon korrutada teguriga  $-1$ , sest taandatud funktsiooni enda väärtus on teravnurkse  $\alpha$  puhul alati positiivne.

Kõik ülal-öeldu jääb õigeks ka siis, kui me nurga  $k \cdot 90^\circ - \alpha$  siinuse või koosinuse avaldame nurga  $\alpha$  funktsioonina, sest asendades nurga  $\alpha$  nurgaga  $-\alpha$  taandatud funktsiooni nimetus jääb taandamisvalemite I ja II põhjal muutmatuks; muutuda võib ainult selle funktsiooni ees oleva teguri märk. Kuid samadel kaalutlustel, mis varemgi, selle teguri märgi saab määrata samuti taandatava ja taandatud funktsioonide märkide võrdlemise teel.

Taandamisvalemitest I ja II järeldub tangensi kohta, et

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

ehk

$$\boxed{\tan(-\alpha) = -\tan \alpha}$$

Samal viisil leiame kootangensi kohta, et

$$\boxed{\cot(-\alpha) = -\cot \alpha}$$

Taandamisvalemite III ja IV järeldub, et

$$\tan(90^\circ + \alpha) = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\cos(90^\circ + \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha}$$

ehk

$$\boxed{\tan(90^\circ + \alpha) = -\cot \alpha}$$

Samal viisil leiame, et

$$\boxed{\cot(90^\circ + \alpha) = -\tan \alpha}$$

Viimasest kahest taandamisvalemist nähtub, et nurga vähendamisel (või suurendamisel) täisnurga võrra ka tangensi ja kootangensi nimetus asendub kaasfunktsiooni nimetusega. Seepärast ja ka seetõttu, et tangens- ja kootangensfunktsiooni taandamisvalemid samuti ei sõltu nurga  $\alpha$  suurusest, kõik, mis ülal oli öeldud siinuse ja koosinuse taandamisvalemite koostamise kohta, on kehtiv ka tangensi ja kootangensi puhul.

Seega kokkuvõttes saame järgmise goniomeetriliste funktsioonide taandamisvalemite koostamise reegli:

Nurga  $k \cdot 90^\circ \pm \alpha$  goniomeetriline funktsioon avaldub nurga  $\alpha$  samanimelise funktsioonina, kui  $k$  on paarisarv, ja kaasfunktsioonina, kui  $k$  on paarituurv;

seejuures tuleb taandatud funktsioon korrutada arvuga  $-1$ , kui nurga  $k \cdot 90^\circ \pm \alpha$  taandatav funktsioon teravnurkse  $\alpha$  puhul on negatiivne.

Näide 1. Koostame selle reegli järgi taandamisvalemi  $\sin(270^\circ + \alpha)$  jaoks.

Et  $270^\circ$  on täisnurga paaritukordne, siis  $\sin(270^\circ + \alpha)$  avaldub nurga  $\alpha$  koosinusena. Et teravnurkse  $\alpha$  puhul

$270^\circ + \alpha$  on neljanda veerandi nurk, kus siinus on negatiivne, siis tuleb  $\cos \alpha$  korrutada arvuga  $-1$ .

Seega nõutav taandamisvalem on:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos \alpha.$$

Näide 2. Avaldame  $\cos 300^\circ$  nürinurga funktsioonina.

Et  $300^\circ = 180^\circ + 120^\circ$ , siis koostame esmalt taandamisvalemi  $\cos(180^\circ + \alpha)$  jaoks. See on ülal toodud reegli järgi:

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha.$$

Järelikult on

$$\cos 300^\circ = \cos(180^\circ + 120^\circ) = -\cos 120^\circ.$$

Tõesti,  $\cos 300^\circ$  on positiivne (parempoolne veerand) ja  $\cos 120^\circ$  on negatiivne (vasakpoolne veerand). Seepärast tuleb viimast korrutada arvuga  $-1$ , et saada esimene.

Koostame ülal toodud reegli abil mõned tähtsad taandamisvalemid. Need on:

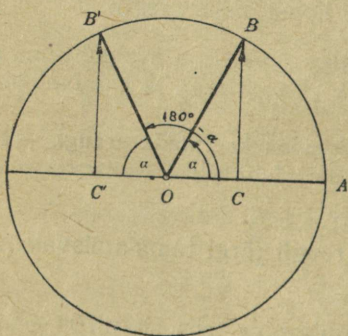
$\frac{\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha}{\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha}$
--

millede abil saab nürinurga siinust ja koosinust avaldada teravnurga siinuse ja koosinusena. Nende valemitega väljendatud tõsiasiad nähtuvad ka jooniselt 21, kus  $B'C' = BC$  ja  $OC' = -OC$ .

Tangensfunktsiooni kohta tuletame taandamisvalemi:

$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$
--

millest nähtub, et tangensi väärtused hakkavad korduma  $180^\circ$  tagant, s. o. kolmanda veerandi nurkadel on samad tangensi väärtused ja samas



Joonis 21.

järjestuses, mis esimeses veerandis, ja neljandas veerandis samad, mis teises veerandis.

Koostame veel ühe rühma taandamisvalemeid:

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$
$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$
$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$
$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$

Nendest valemitest nähtub, et ka mistahes nurga  $\alpha$  puhul nurga  $90^\circ - \alpha$  goniomeetiline funktsioon võrdub nurga  $\alpha$  kaasfunktsiooniga.

**Ulesanded.**

226. Koostada reegli abil taandamisvalemid järgmisteks juhtudeks:

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\sin(180^\circ + \alpha)$ | 5. $\tan(270^\circ + \alpha)$ |
| 2. $\sin(270^\circ + \alpha)$ | 6. $\tan(360^\circ - \alpha)$ |
| 3. $\cos(270^\circ - \alpha)$ | 7. $\cot(270^\circ - \alpha)$ |
| 4. $\cos(360^\circ - \alpha)$ | 8. $\cot(360^\circ - \alpha)$ |

227. Taandada järgmised funktsioonid nurga  $\alpha$  funktsioonideks:

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\sin(90^\circ + \alpha)$  | 6. $\sin(270^\circ - \alpha)$ |
| 2. $\sin(180^\circ - \alpha)$ | 7. $\tan(90^\circ + \alpha)$  |
| 3. $\cos(90^\circ + \alpha)$  | 8. $\tan(180^\circ + \alpha)$ |
| 4. $\cos(180^\circ + \alpha)$ | 9. $\tan(270^\circ - \alpha)$ |
| 5. $\cos(270^\circ + \alpha)$ | 10. $\cot(90^\circ + \alpha)$ |

228. Taandada järgmised funktsioonid teravnurkade funktsioonideks:

- |                  |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\sin 120^\circ$ | $\cos 170^\circ$ | $\tan 96^\circ$  | $\cot 148^\circ$ |
| $\sin 210^\circ$ | $\cos 235^\circ$ | $\tan 185^\circ$ | $\cot 188^\circ$ |
| $\sin 290^\circ$ | $\cos 312^\circ$ | $\tan 280^\circ$ | $\cot 322^\circ$ |

229. Lihtsustada avaldised:

$$\begin{aligned} & \sin(180^\circ - a) + \cos(180^\circ - a) \\ & \cos(180^\circ + a) - \sin(180^\circ + a) \\ & a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(180^\circ - \gamma) \\ & \tan(270^\circ + \beta) + \tan(270^\circ - \beta) \\ & \cot(360^\circ - \gamma) + \cot(180^\circ + \gamma) \end{aligned}$$

230. Taandada järgmiste nurkade goniomeetrilised funktsioonid teravnurkade funktsioonideks ja anda nende väärtused murd- ja juuravaldistena.

$$120^\circ \quad 135^\circ \quad 150^\circ$$

231. Leida tabelite abil järgmiste nurkade siinused:

$$\begin{array}{cccc} 107^\circ & 115^\circ & 164,6^\circ & 178^\circ 18' \\ 192^\circ & 346^\circ & 215,8^\circ & 287^\circ 42' \end{array}$$

232. Leida tabelite abil järgmiste nurkade koosinused:

$$\begin{array}{cccc} 99^\circ & 152^\circ & 170,7^\circ & 100^\circ 50' \\ 212^\circ & 312^\circ & 200,4^\circ & 308^\circ 12' \end{array}$$

233. Leida tabelite abil järgmiste nurkade tangensid:

$$\begin{array}{cccc} 114^\circ & 152^\circ & 160,1^\circ & 159^\circ 14' \\ 196^\circ & 293^\circ & 272,3^\circ & 262^\circ 40' \end{array}$$

234. Leida tabelite abil järgmiste nurkade kootangensid:

$$94^\circ \quad 288,4^\circ \quad 222,7^\circ \quad 173^\circ 45'$$

235. Taandada järgmised funktsioonid positiivsete teravnurkade funktsioonideks:

$$\begin{array}{lll} 1. \sin(-28^\circ) & 2. \cos(-85^\circ) & 3. \tan(-166^\circ) \\ \sin(-134^\circ) & \cos(-235^\circ) & \tan(-320^\circ) \\ \sin(-240,8^\circ) & \cos(310,1^\circ) & \cot(-18,8^\circ) \end{array}$$

236. Taandada järgmiste nurkade siinused positiivsete teravnurkade siinusteks:

$$130^\circ \quad 145^\circ \quad 231^\circ \quad 347^\circ \quad -170^\circ$$

237. Taandada järgmiste nurkade siinused positiivsete teravnurkade koosinusteks:

$$92^{\circ} \quad 284^{\circ} \quad 213^{\circ} \quad -56^{\circ} \quad -112^{\circ}$$

238. Taandada järgmiste nurkade koosinused positiivsete teravnurkade siinusteks:

$$140^{\circ} \quad 168^{\circ} \quad 199^{\circ} \quad 246^{\circ} \quad -265^{\circ}$$

239. Taandada järgmiste nurkade tangensid positiivsete teravnurkade tangensiteks:

$$185^{\circ} \quad 136^{\circ} \quad 210^{\circ} \quad 272^{\circ} \quad -96^{\circ}$$

240. Taandada järgmised funktsioonid positiivsete nürinurkade funktsioonideks:

1. $\sin 200^{\circ}$	2. $\cos 300^{\circ}$	3. $\tan 192^{\circ}$
$\sin 15^{\circ}$	$\cos 64^{\circ}$	$\tan (-192^{\circ})$
$\sin (-15^{\circ})$	$\cos (-64^{\circ})$	$\cot 282^{\circ}$

241. Taandada järgmised funktsioonid positiivsete teravnurkade funktsioonideks:

1. $\sin 460^{\circ}$	2. $\cos 540^{\circ}$	3. $\tan 499^{\circ}$	4. $\cot 370^{\circ}$
$\sin 693^{\circ}$	$\cos 982^{\circ}$	$\tan 654^{\circ}$	$\cot 518^{\circ}$
$\sin 850^{\circ}$	$\cos 754^{\circ}$	$\tan 815^{\circ}$	$\cot 710^{\circ}$

242. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sin 210^{\circ} + \cos 300^{\circ}$	4. $\tan 135^{\circ} + \tan 315^{\circ}$
2. $\sin 225^{\circ} + \sin 315^{\circ}$	5. $\tan 240^{\circ} - \cot 330^{\circ}$
3. $\cos 160^{\circ} + \cos (-20^{\circ})$	6. $\cot 100^{\circ} + \cot 260^{\circ}$

243. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1. $\sin 870^{\circ} + \cos 1230^{\circ}$	3. $\cos (-630^{\circ}) - \sin (-540^{\circ})$
2. $\sin 1125^{\circ} + \sin 855^{\circ}$	4. $\cot 990^{\circ} - \tan 1575^{\circ}$

244. Leida nurgad, teades, et:

1. $\cos \alpha = -0,9310$	ja	$90^{\circ} < \alpha < 180^{\circ}$
2. $\sin \beta = 0,5000$	ja	$90^{\circ} < \beta < 180^{\circ}$

- |    |                           |    |                                   |
|----|---------------------------|----|-----------------------------------|
| 3. | $\sin^2 \gamma = 0,5000$  | ja | $180^\circ < \gamma < 270^\circ$  |
| 4. | $\cos \delta = 0,9310$    | ja | $270^\circ < \delta < 360^\circ$  |
| 5. | $\cos^2 \varphi = 0,7500$ | ja | $180^\circ < \varphi < 270^\circ$ |
| 6. | $\tan \psi = 1$           | ja | $180^\circ < \psi < 270^\circ$    |
| 7. | $\tan^2 \omega = 3$       | ja | $270^\circ < \omega < 360^\circ$  |

245. Leida kaks kõige väiksemat positiivset nurka, mil-  
lede siinus on  $\frac{4}{5}$ . Ehitada need nurgad nii, et neil oleks  
ühine tipp ja ühine alghaar.

246. Leida kaks kõige väiksemat positiivset nurka, mil-  
lede koosinus on  $-0,9500$ .

247. Leida kaks kõige väiksemat positiivset nurka, mil-  
lede tangens on  $3,0061$ .

248. Ehitada kaks kõige väiksemat positiivset nurka  
järgmiste funktsioonide väärtuste järgi:

1.	$\sin \varphi = -\frac{4}{5}$	2.	$\cos \psi = -0,8$
----	-------------------------------	----	--------------------

249. Leida funktsiooni  $\sin x$  väärtused, mis vastavad  
nurga  $x$  väärtustele  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$  ja  $315^\circ$ .

250. Leida funktsiooni  $\cos x$  väärtused, mis vastavad  
nurga  $x$  väärtustele  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$  ja  $315^\circ$ .

251. Leida funktsiooni  $\tan x$  väärtused, mis vastavad  
nurga  $x$  väärtustele  $45^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $225^\circ$  ja  $315^\circ$ .

252. Taandada järgmised funktsioonid nurga  $a$  funkt-  
sioonideks:

$\sin(\pi + a)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$	$\tan(\pi - a)$	$\cot(\pi + a)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$	$\cos(\pi - a)$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)$	$\tan(2\pi - a)$	$\cot(2\pi + a)$

253. Kui suured on järgmiste funktsioonide väärtused:

$$\begin{array}{cccc} \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{3} & \tan \frac{\pi}{4} & \cot \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{6} & \tan \frac{\pi}{3} & \cot \frac{\pi}{3} \end{array}$$

254. Leida järgmiste funktsioonide väärtused:

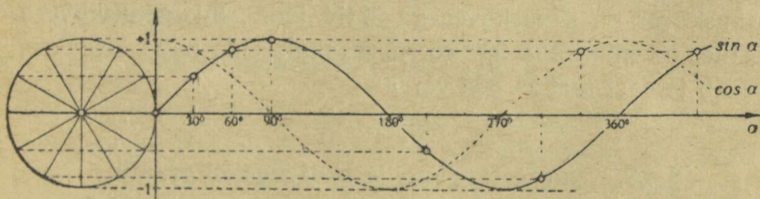
$$\begin{array}{cccc} \sin \frac{3\pi}{4} & \cos \frac{7\pi}{6} & \tan \frac{3\pi}{4} & \cot \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{5\pi}{6} & \tan \frac{7\pi}{4} & \cot \frac{11\pi}{6} \\ \sin \frac{5\pi}{4} & \cos \frac{4\pi}{3} & \tan \frac{5\pi}{3} & \cot \frac{7\pi}{6} \end{array}$$

## § 22. Nurga siinuse ja koosinuse graafik.

Hea ülevaate goniomeetriliste funktsioonide muutumisest saame nende funktsioonide graafikutest.

Nurga siinuse graafiku joonestamiseks

1. märgime nurga kujutamisel kohaselt valitud mõõdus nurga väärtused näiteks iga  $30^\circ$  järel (joonis 22);



Joonis 22.

2. ehitame saadud punktidest ristlõigud kas ülespoole või allapoole nurgateljest, vastavalt sellele, kas kujutatav siinuse väärtus on positiivne või negatiivne, ja kujutame neil ristlõikudel sobivas mõõdus vastavad siinuse väärtused;

3. ühendame saadud ristlõikude otpunktid kõverjoone abil. See kõver näitab meile siinuse muutumist; teda nimetatakse **siinuskõveraks** ehk sinusoidiks.

Selleks, et graafiku valmistamiseks vajalikke siinuse väärtusi leida graafiliselt, joonestame ringjoone, mille raadius võrdub siinuse kujutamiseks valitud ühikuga. Sel juhul projektija pikkus ongi  $\sin a$  ja siinuse graafiku joonestamiseks tarvitseb vaid need projektijad üle kanda nurgatelje vastava punkti juurde ning ühendada nende sirglõikude teised otpunktid kõvera abil.

Selsamal viisil, nagu ülal kirjeldatud, saame joonestada ka koosinuse graafiku; et ühikringis  $\cos a$  väärtus võrdub projektsiooni pikkusega, siis koosinusgraafiku joonestamisel kanname nurgatelje vastavate punktide juurde projektsioonide pikkused.

Taandamisvalemiga III:

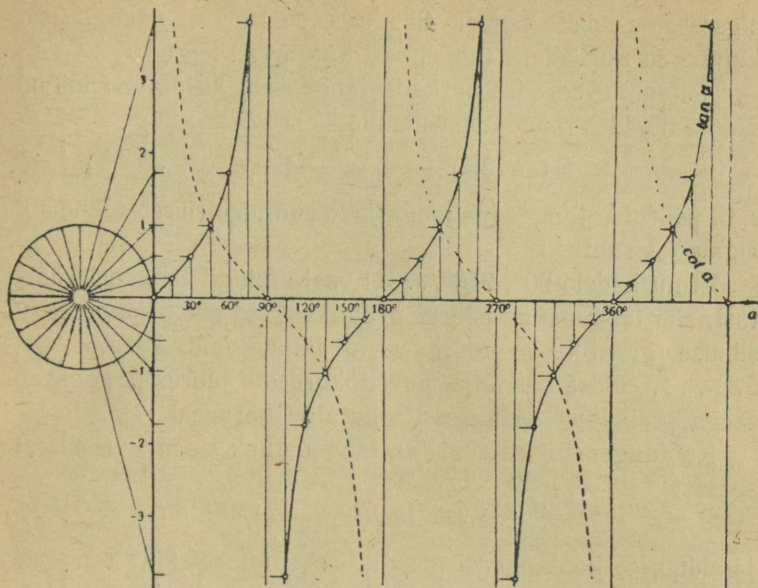
$$\sin(90^\circ + a) = \cos a$$

väljendatud seos siinusfunktsiooni ja koosinusfunktsiooni vahel avaldub nende funktsioonide graafikus selles, et koosinuskõver on siinuskõveraga ühtiv joon, mis siinuskõvera suhtes on nihutatud  $90^\circ$  võrra vasakule ehk, nagu öeldakse, «jääb temast maha»  $90^\circ$  võrra.

### § 23. Nurga tangensi ja kootangensi graafik.

Parema ülevaate saamiseks nurga tangensi ja kootangensi muutumisest nurga muutumisel joonestame ka nende funktsioonide graafikud.

Tangensfunktsiooni graafiku saamiseks kasutame tangensjoonlauda, mille abil kujutame teravnurkade tangensite väärtused sirglõikudena. Need lõigud kanname nurgatelje vastavate punktide kohale (joonis 23).



Joonis 23.

Nürinurkade tangensite kujutamiseks lõikudena lähtume taandamisvalemist

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha,$$

millest järeldub, et pöörates tangensjoonlaua nurkade alg-  
haara suhtes ta esialgse asendiga sümmeetrilisse asendisse,  
saame tangensjoonlault nürinurkade  $180^\circ - \alpha$  tangensid  
samade lõikude pikkustena, mis varemalt kujutasid terav-  
nurkade  $\alpha$  tangenseid; kuid need lõigud on nüüd negatiivsed.

Taandamisvalemist

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$$

järeldub, et kolmanda veerandi nurkade tangenseid kuju-  
tavad lõigud saame, kui pöörame tangensjoonlaua jälle esi-

algmesse asendisse tagasi. Siis nurkade  $180^\circ + a$  tangenseid kujutavad nurkade  $a$  tangenseid kujutavad lõigud.

Neljanda veerandi nurkade tangenseid kujutavad lõigud saame tugesdes taandamisvalemile

$$\tan(360^\circ - a) = -\tan a,$$

s. o. pöörates tangensjoonlaua jälle sümmeetrilisse asendisse algasendi suhtes.

Et nurkadele  $90^\circ, 270^\circ, \dots$  ei vasta mingit tangensi väärtust, siis tangensfunktsiooni graafik ei ole pidev joon, nagu siinuse graafik ja koosinuse graafik, vaid katkeb  $90^\circ, 270^\circ, \dots$ , üldse täisnurga paaritukordsete juures ja koosneb seega üksikutest teineteisest lahutatud harudest.

Kootangensfunktsiooni ja tangensfunktsiooni vahelisest seosest

$$\cot a = \tan(90^\circ - a)$$

järeldub, et kootangensi graafik on sümmeetriline tangensi graafikuga nurgatelje  $45^\circ$  kohal püstitatud sirge suhtes. Tõesti, kui selles seoses täht  $a$  asendada avaldisega  $45^\circ - \beta$ , siis saame, et

$$\cot(45^\circ - \beta) = \tan(45^\circ + \beta),$$

mis tähendab, et  $45^\circ$ -st nurkade  $\beta$  võrra väiksemate nurkade kootangensid on võrdsed  $45^\circ$ -st nurkade  $\beta$  võrra suuremate nurkade tangensitega.

Seetõttu saame esimese veerandi nurkadele vastava kootangensi graafiku osa (punktiirjoon joonisel 22), kui joonestame esimese veerandi nurkadele vastava tangensi graafikule sümmeetrilise joone  $45^\circ$ -le vastava püstsirge suhtes.

Samal viisil, nagu ülal, võime seostest

$$\cot a = \tan(270^\circ - a),$$

$$\cot a = \tan(450^\circ - a)$$

ja

$$\cot a = \tan(630^\circ - a)$$

järeldada, et kootangensi graafik on sümmeetriline tangensi graafikuga ka nurkadele  $135^\circ$ ,  $225^\circ$  ja  $315^\circ$  vastavate püst-sirgete suhtes. Joonestades ka nende sirgete suhtes tangensi graafiku vastavatele lõikudele sümmeetrilised lõigud, saame ka teise, kolmanda ja neljanda veerandi nurkadele vastavad kootangensi graafiku lõigud.

Ka kootangensfunktsiooni graafik on katkeline joon, kuid katkemiskohad on nüüd  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $360^\circ$ ,  $\dots$ , üldse täisnurga paariskordsete juures.

## § 24. Goniomeetriliste funktsioonide perioodsus.

Eespool leidsime, et ühegi goniomeetrilise funktsiooni väärtus ei muutu nurga suuruse muutumisel  $360^\circ$  mingi kordse võrra. Vaatame nüüd, missugune on väikseim nurk  $p$ , mille lisandamisel nurgale  $\alpha$  goniomeetrilised funktsioonid omandavad endisi väärtusi. Me otsime seega iga goniomeetrilise funktsiooni jaoks seda väikseimat nurka  $p$ , mille puhul nurga  $\alpha$  iga väärtuse juures nurga  $\alpha + p$  funktsioon on võrdne nurga  $\alpha$  samanimelise funktsiooniga, sümboolites:

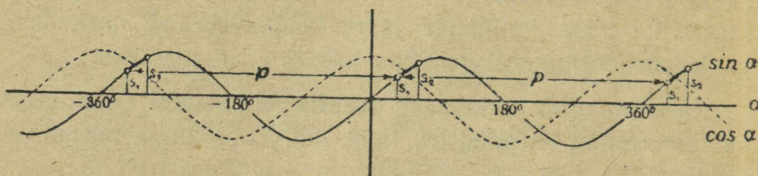
1.  $\sin(\alpha + p) = \sin \alpha$
2.  $\cos(\alpha + p) = \cos \alpha$
3.  $\tan(\alpha + p) = \tan \alpha$
4.  $\cot(\alpha + p) = \cot \alpha$ .

Seda nurka  $p$  nimetatakse uuritava funktsiooni perioodiks.

Vaadeldes siinuse graafikut näeme, et nurga muutumisel siinuse väärtused  $s_1, s_2, \dots$  korduvad iga kord siis, kui nurk suureneb või väheneb  $360^\circ$  võrra (joonis 24). Seega siinuse puhul  $p = 360^\circ$ .

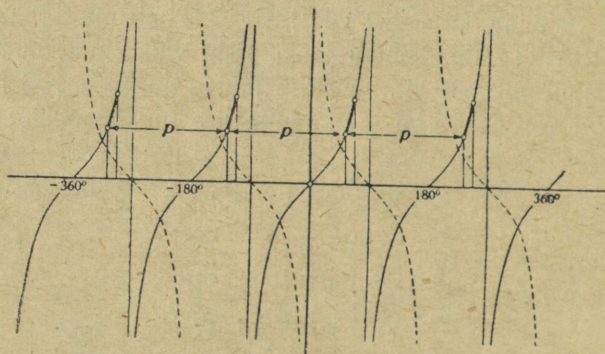
Samuti näeme koosinuse graafikust (joonis 24), et ka koosinuse puhul  $p = 360^\circ$ . Seega

**nurga siinuse ja koosinuse periood on  $360^\circ$ .**



Joonis 24.

Vaadeldes tangensi graafikut näeme, et selles nurga muutumisel tangensi väärtused  $t_1, t_2, \dots$  korduvad iga kord siis, kui nurk suureneb või väheneb  $180^\circ$  võrra (joonis 25). Seega on tangensi puhul  $p = 180^\circ$ .



Joonis 25.

Samuti näeme kootangensi graafikust (joonis 25), et ka kootangensi puhul  $p = 180^\circ$ . Seega

**nurga tangensi ja kootangensi periood on  $180^\circ$ .**

Et goniomeetiline funktsioon omandab korduvalt endisi väärtusi, kui nurk suureneb või väheneb perioodi võrra, siis

$$\sin a = \sin (a + k \cdot 360^\circ)$$

$$\cos a = \cos (a + k \cdot 360^\circ)$$

$$\tan a = \tan (a + k \cdot 180^\circ)$$

$$\cot a = \cot (a + k \cdot 180^\circ),$$

kus  $k$  on mistahes positiivne või negatiivne täisarv.

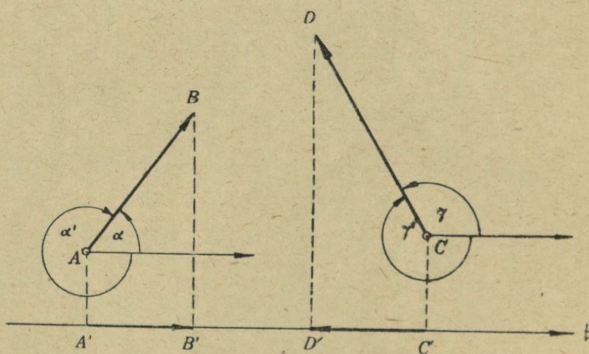
## Peatükk III.

### Goniomeetriliste funktsioonide teisendamisi.

#### § 25. Lõigu projektsioon.

Sirgele, millele projektitakse lõike, on kasulik omistada mingi kindel suund. Säärast sirget nimetatakse projektsiooniteljeks.

Suunatud lõigu suunanurgaks projektsioonitelje suhtes nimetatakse nurka, mille alghaaraks on lõigu alg-



Joonis 26.

punktist joonestatud projektsiooniteljega paralleelne ja samasuunaline kiir ja mille lõpphaaraks on antud lõik.

Suunanurgaks võib valida nii kiire ja lõigu vahelise positiivse kui negatiivse nurga. Nii on joonisel 26 lõigu  $AB$

suunanurgaks telje  $t$  suhtes positiivne nurk  $\alpha$  või negatiivne nurk  $\alpha'$  ja lõigu  $CD$  suunanurgaks on positiivne nurk  $\gamma$  või negatiivne nurk  $\gamma'$ . Tavaliselt valitakse suunanurgaks kahest võimalikust absoluutväärtuselt väiksem nurk.

Suunatud lõigu projektsioonile omistatakse suund, mis viib lõigu algpunkti projektsioonist tema lõpp-punkti projektsiooni.

Kui projektsiooni suund ühtib projektsioonitelje suunaga, siis projektsiooni loetakse positiivseks, vastasel korral aga negatiivseks.

Joonisel 25 on lõigu  $AB$  projektsioon  $A'B'$  positiivne ja lõigu  $CD$  projektsioon  $C'D'$  on negatiivne.

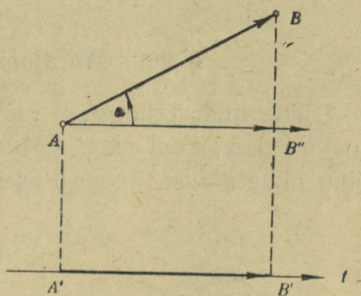
Tõestame nüüd teoreemi, et

**lõigu projektsioon võrdub pikkuselt ja märgilt lõigu pikkuse ja suunanurga koosinuse korrutisega.**

Joonisel 27 lõigu  $AB$  projektsioon  $A'B'$  võrdub nii pikkuselt kui märgilt suunanurga  $\alpha$  lõpphaara lõigu projektsiooniga  $AB''$  selle nurga algteljele. Kuid

$$\frac{AB''}{|AB|} = \cos \alpha,$$

kus  $AB''$  tähendab suunaga arvu, mille absoluutväärtus (lõigu  $AB''$  pikkus) on võetud projektsiooni  $AB''$  suunale vastava märgiga, ja sümbol  $|AB|$  tähendab ainult lõigu  $AB$  pikkust.



Joonis 27.

Sellest võrdusest saame, et

$$AB'' = |AB| \cos \alpha.$$

Et aga

$$A'B' = AB'',$$

siis

$$A'B' = |AB| \cdot \cos \alpha$$

Siit järeldub, et suunatud lõigu projektsioon on positiivne, kui ta suunanurk on esimese või neljanda veerandi nurk, ja projektsioon on negatiivne, kui suunanurk on teise või kolmanda veerandi nurk.

**Ülesanded.**

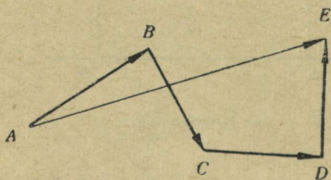
255. Lõigu pikkus on 12 cm. Kui suur on selle lõigu projektsioon, kui lõik moodustab projektsiooniteljega nurga  $30^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $-30^\circ$ ,  $-210^\circ$ ?

256. Kui suur on kella tunniosuti projektsioon minuti-osutile kell 6, kell 7, kell 9, kui tunniosuti pikkus on 16 mm ja kella numbrilaud on jaotatud 12 tunniks?

257. Vastata samad küsimused, mis ülesandes 256, kella kohta, mille numbrilaud on jaotatud 24 tunniks.

## § 26. Murdjoone projektsioon.

Lõike, millest koosneb murdjoon, nimetatakse murdjoone külgedeks. Murdjoone otspunkte ühendavat lõiku nimetatakse murdjoone sulgejaks.



Joonis 28.

Joonisel 28 kujutatud murdjoone ABCDE sulgeja on lõik AE.

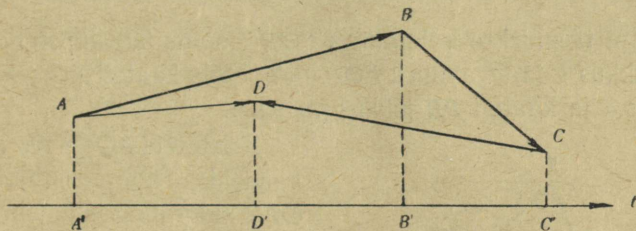
On kasulik murdjoone sulgejale ja külgedele omistada kindlad suunad. Joonisel 28 on sulgeja suunaks valitud punkti A punkti E viiv suund.

Murdjoone külgede suundadeks loetakse suundi, milledes mööda murdjoont liikudes jõuab sulgeja algpunktist tema lõpp-punkti.

Seega murdjoone  $ABCDE$  (joonis 28) külje  $AB$  algpunktiks on punkt  $A$ , külje  $BC$  algpunktiks on punkt  $B$ , jne.

Nüüd võime tõestada teoreemi, et

**murdjoone sulgeja projektsioon võrdub tema külgede projektsioonide summaga.**



Joonis 29.

Et murdjoone iga eelneva külje, peale viimase, lõpp-punkt ühtib järgneva külje algpunktiga, siis ka projektsiooniteljel iga eelneva külje projektsiooni lõpp-punkt ühtib järgneva külje projektsiooni algpunktiga (joonis 29). Seega esimese külje projektsiooni algpunkti ja viimase külje projektsiooni lõpp-punkti vaheline lõik  $A'D'$  on murdjoone külgede projektsioonide summa. Kuid  $A'D'$  on ühtlasi ka sulgeja  $AD$  projektsioon. Seega on tõesti

$$\text{proj. } AD = \text{proj. } AB + \text{proj. } BC + \text{proj. } CD.$$

#### Ülesanded.

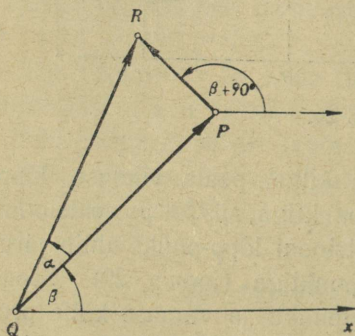
**258.** Trapetsi  $ABCD$  diagonaali  $AC$  pikkus on 20 cm ja ta suunanurk aluse  $AD$  suhtes on  $45^\circ$ . Kui suur on murdjoone  $ABC$  projektsioon alusele  $AD$ ?

**259.** Täisnurkse kolmnurga kaatetid on 6 cm ja 8 cm. Kolmnurga hüpotenuus moodustab projektsiooniteljega nurga  $60^\circ$ . Kui suur on kaatetidest moodustatud murdjoone projektsioon sellele teljele?

260. Laev sõitis 14 meremiili<sup>1</sup> kursiga  $22^{\circ}$  NO, seejärel 25 meremiili kursiga  $30^{\circ}$  NO ja 10 meremiili kursiga  $56^{\circ}$  NW. Arvutada, mitu meremiili laev jõudis lähtesadamast põhja poole ja mitu meremiili ida poole.

### § 27. Kahe nurga summa koosinus ja siinus.

Olgu täisnurkse kolmnurga  $PQR$  (joonis 30) hüpotenuusi  $QR$  pikkus 1 ja teravnurk  $PQR = \alpha$ . Siis kaateti  $PQ$  pikkus on  $\cos \alpha$  ja kaateti  $PR$  pikkus on  $\sin \alpha$ .



Joonis 30.

Kaateteid  $PQ$  ja  $PR$  võib vaadelda kui murdjoone  $QPR$  külgi ning hüpotenuusi  $QR$  võib vaadelda kui selle murdjoone sulgejat. Kui sulgejale omistada punktist  $Q$  punkti  $R$  viiv suund, siis vastavalt sellele tuleb külgedele  $QP$  ja  $PR$  omistada joonisel näidatud suunad.

Asetsegu kolmnurk  $PQR$  nii, et ta kaatet  $PQ$  moodustab mingi teljega  $x$  nurga  $\beta$ . Siis  $\beta$  on külje  $QP$  suunanurk selle telje suhtes. Külje  $PR$  suunanurk on siis  $\beta + 90^{\circ}$  ja sulgeja suunanurk on  $\alpha + \beta$ .

Projekteime selle murdjoone teljele  $x$ . Murdjoone projektsiooni teoreemi järgi on siis

$$QR \cdot \cos(\alpha + \beta) = QP \cdot \cos \beta + PR \cdot \cos(\beta + 90^{\circ}).$$

Et

$$QR = 1,$$

$$QP = \cos \alpha,$$

$$PR = \sin \alpha$$

$$\text{ja } \cos(\beta + 90^{\circ}) = -\sin \beta,$$

<sup>1</sup> 1 meremiil = 1,852 km.

siis saame siit seose:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Seega

kahe nurga summa koosinus võrdub nende nurkade koosinuste korrutise ja siinuste korrutise vahega.

Kui murdjoon  $QPR$  projektida teljele  $y$ , mis on risti teljega  $x$  (joonis 31), siis külje  $PR$  suunanurga suurus on  $\beta + 90^\circ - 90^\circ = \beta$ .

Külje  $QP$  suunanurgaks on siis nurk  $yQP$ . Nurga  $yQP$  lõpphaar  $QP$  ühtib joonisel nurga  $xQP$  ehk nurga  $\beta$  lõpphaara-ga. Seepärast on täisnurk  $xQy$  nende nurkade vahe:

$$90^\circ = \beta - yQP.$$

Siit saame, et

$$yQP = \beta - 90^\circ.$$

Seega külje  $QP$  suunanurga suurus on  $\beta - 90^\circ$ .

Sulgeja  $QR$  suunanurgaks on nurk  $yQR$ . Arutades analoogiliselt eelmisega, leiame, et sulgeja  $QR$  suunanurga suurus on  $\alpha + \beta - 90^\circ$ .

Murdjoone projektsiooni teoreemi järgi on siis

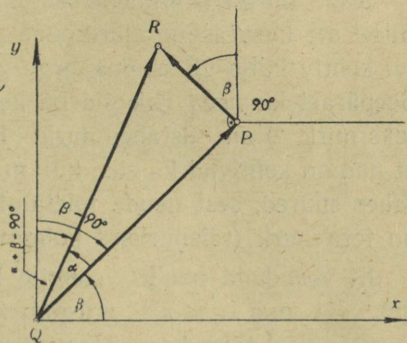
$$QR \cdot \cos(\alpha + \beta - 90^\circ) = QP \cdot \cos(\beta - 90^\circ) + PR \cdot \cos \beta.$$

Et

$$\cos(\alpha + \beta - 90^\circ) = \sin(\alpha + \beta)$$

ja

$$\cos(\beta - 90^\circ) = \sin \beta,$$



Joonis 31.

siis võime ülemise võrduse asemel kirjutada:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \sin \beta + \sin \alpha \cdot \cos \beta$$

ehk

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Seega

**kahe nurga summa siinus võrdub esimese nurga siinuse ja teise nurga koosinuse korrutise ning esimese nurga koosinuse ja teise nurga siinuse korrutise summaga.**

Kahe nurga summa koosinuse ja siinuse valemi tuletamisel me kasutasime murdjoone projektsiooni teoreemi, mis on kehtiv külje  $QP$  suunanurga  $\beta$  mistahes väärtuse puhul. Seepärast ka need valemid on kehtivad, kui üks nurk (näiteks nurk  $\beta$ ) on mistahes nurk. Kuid me ei tohi veel väita, et nad on kehtivad ka siis, kui mõlemad nurgad on kuitahes suured, sest nende tuletamisel oli eeldatud, et nurk  $\alpha$  on teravnurk (täisnurkses kolmnurgas).

Et veenduda nende valemite kehtivuses ka sellel juhtumil, kui mõlemad nurgad on kuitahes suured, selleks on vaja veel täiendavat tõestust.

Selleks näitame esmalt, et kui need valemid on kehtivad mingi nurga  $\alpha'$  puhul, siis nad jäävad kehtivaiks ka  $90^\circ$  võrra suurema nurga  $\alpha = 90^\circ + \alpha'$  puhul.

Seepärast eeldame, et mingi nurga  $\alpha'$  puhul on

$$\cos(\alpha' + \beta) = \cos \alpha' \cdot \cos \beta - \sin \alpha' \cdot \sin \beta$$

ja

$$\sin(\alpha' + \beta) = \sin \alpha' \cdot \cos \beta + \cos \alpha' \cdot \sin \beta.$$

Et

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ + \alpha' + \beta) = -\sin(\alpha' + \beta)$$

ja

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(90^\circ + \alpha' + \beta) = \cos(\alpha' + \beta),$$

siis eelduse kohaselt on

$$\cos(\alpha + \beta) = -\sin \alpha' \cdot \cos \beta - \cos \alpha' \cdot \sin \beta$$

ja

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha' \cdot \cos \beta - \sin \alpha' \cdot \sin \beta.$$

Kuid

$$\sin \alpha' = \sin(\alpha - 90^\circ) = -\sin(90^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

ja

$$\cos \alpha' = \cos(\alpha - 90^\circ) = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Tehes kahes viimases valemis need asendused, leiame, et

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

ja

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Seega, kui summa siinuse ja koosinuse valemid on kehtivad mistahes nurga  $\beta$  ja mingi nurga  $\alpha'$  puhul, siis nad on kehtivad ka mistahes nurga  $\beta$  ja nurga  $\alpha$  puhul, mis on  $90^\circ$  võrra suurem kui nurk  $\alpha'$ .

Samal viisil on võimalik näidata, et kui kahe nurga koosinuse ja siinuse summa valemid on kehtivad mingi nurga  $\alpha'$  puhul, siis nad jäävad kehtivaiks ka  $90^\circ$  võrra väiksema nurga  $\alpha = \alpha' - 90^\circ$  puhul.

Iga positiivse nurga, mis on suurem kui  $90^\circ$ , või negatiivse nurga võib saada sel teel, et mingile teravnurgale järjest lisatakse  $90^\circ$  või järjest lahutatakse talt  $90^\circ$ . Nurkade summa siinuse ja koosinuse valemid on kehtivad, kui üks nurk on teravnurk ja teine on kuitahes suur nurk. Kuid järjest  $90^\circ$  lisandamine teravnurgale või  $90^\circ$  lahutamine sellest ei riku nende valemite kehtivust, nagu praegu oli tõestatud. Järelikult need valemid on kehtivad mistahes positiivsete või negatiivsete nurkade puhul.

Et kahe suuruse vahet  $\alpha - \beta$  võib alati vaadelda kui summat  $\alpha + (-\beta)$  ja et kahe nurga summa koosinuse ja siinuse valemid on kehtivad mistahes (ka negatiivsete) nur-

kade kohta, siis võime nendest tuletada ka kahe nurga vahe koosinuse ja vahe siinuse valemid.

Ülal tuletatud valemite järgi on:

$$\cos[a + (-\beta)] = \cos a \cdot \cos(-\beta) - \sin a \cdot \sin(-\beta)$$

ja

$$\sin[a + (-\beta)] = \sin a \cdot \cos(-\beta) + \cos a \cdot \sin(-\beta).$$

Et

$$\cos(-\beta) = \cos \beta \quad \text{ja} \quad \sin(-\beta) = -\sin \beta,$$

siis saame, et

$$\cos(a - \beta) = \cos a \cdot \cos \beta + \sin a \cdot \sin \beta$$

ja

$$\sin(a - \beta) = \sin a \cdot \cos \beta - \cos a \cdot \sin \beta$$

#### Ülesanded.

261. Avaldada  $\sin 50^\circ 20'$ -se ja  $30^\circ$ -se nurga funktsioonide kaudu.

262. Avaldada  $\sin 50^\circ 70'$ -se ja  $20^\circ$ -se nurga funktsioonide kaudu.

263. Arvutada  $\sin(\alpha + 30^\circ)$ , kui  $\sin \alpha = 0,28$  ja  $\cos \alpha = 0,96$ .

264. Kasutades  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ja  $60^\circ$  funktsioonide väärtusi, arvutada  $75^\circ$ ,  $105^\circ$  ja  $15^\circ$  siinuste väärtused.

265. Arvutada teravnurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  summa siinus, kui  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  ja  $\sin \beta = \frac{5}{13}$ .

266. Lahendada eelmine ülesanne tingimusel, et  $\alpha$  ja  $\beta$  on nürinurgad.

267. Lahendada sama ülesanne tingimusel, et  $\alpha$  on teravnurk ja  $\beta$  on nürinurk.

268. Avaldada  $\cos 70^\circ 40'$ -se ja  $30^\circ$ -se nurga funktsioonide kaudu.

269. Avaldada  $\cos 10^\circ 30'$ -se ja  $20^\circ$ -se nurga funktsioonide kaudu.

270. Arvutada  $\cos(\alpha + 45^\circ)$ , kui teravnurga  $\alpha$  koosinus on  $\sqrt{0,2}$ .

271. Kasutades  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ja  $60^\circ$  funktsioonide väärtusi, arvutada  $75^\circ$ ,  $105^\circ$  ja  $15^\circ$  koosinuste väärtused.

272. Arvutada  $\cos(\alpha + \beta)$ , kui  $\cos \alpha = 0,6$  ja  $\cos \beta = 0,8$  ning  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  ja  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ .

273. Arvutada  $\cos(\alpha - \beta)$ , kui  $\sin \alpha = 0,8$  ja  $\sin \beta = 0,28$  ning  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  ja  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ .

274. Näidata positiivsete nurkade  $\alpha$  ja  $\beta$  puhul, et  $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$ , kui  $\alpha + \beta < 90^\circ$ .

275. Lihtsustada järgmised avaldised:

1.  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
2.  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
3.  $\sin(\alpha + 60^\circ) - \sin(\alpha - 60^\circ)$
4.  $\cos(30^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha)$

276. Väljendada avaldis  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$   $\tan \alpha$  ja  $\tan \beta$  abil.

277. Väljendada avaldis  $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}$   $\cot \alpha$  ja  $\cot \beta$  abil.

278. Kolmnurga kahe teravnurga siinused on  $0,1$  ja  $0,7$ . Arvutada kolmnurga kolmanda nurga koosinus.

279. Kolmnurga kahe nurga koosinused on  $-0,2$  ja  $0,8$ . Arvutada kolmnurga kolmanda nurga siinus.

280. Näidata, et on kehtivad järgmised samasused:

1.  $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha + \sin \beta)(\sin \alpha - \sin \beta)$
2.  $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha + \cos \beta)(\cos \alpha - \cos \beta)$
3.  $\cos(\alpha + \beta) \sin \beta + \sin(\alpha + \beta) \cos \beta = \sin(\alpha + 2\beta)$
4.  $\cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta = \cos \alpha$
5.  $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \beta}{1 - \tan \beta}$
6.  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$
7.  $\frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$
8.  $\cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0$
9.  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{2}$
10.  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)$

### § 28. Kahe nurga summa tangens.

Elmistes paragrahvides tuletatud valemite abil, mis lubavad kahe nurga summa koosinuse ja siinuse avaldada nende nurkade funktsioonide kaudu, saame tuletada ka valemid, mis lubavad kahe nurga summa tangensi avaldada nende nurkade funktsioonide kaudu.

Selleks kirjutame, et

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}.$$

Kahe nurga summa siinuse ja koosinuse valemite põhjal võime siis kirjutada, et

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta}.$$

Jagame viimase murru lugeja ja nimetaja kõik liikmed avaldisega  $\cos \alpha \cdot \cos \beta$ . Siis saame:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}$$

Taandanud viimases avaldises esinevad murrud ja pidades silmas, et nurga siinuse ja koosinuse jagatis on selle nurga tangens, saame valemi

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

Seega

kahe nurga summa tangens võrdub murruga, mille lugeja on nende nurkade tangensite summa ning nimetaja on arvu 1 ja nende nurkade tangensite korrutise vahe.

Kui selles valemis asendada täht  $\beta$  avaldisega  $-\beta$  ja pidada silmas, et

$$\tan(-\beta) = -\tan \beta,$$

siis saame kahe nurga vahe tangensi jaoks valemi

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

**Ülesanded.**

281. Arvutada  $\tan(45^\circ + \alpha)$ , kui  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ .

282. Arvutada  $\tan(\alpha + \beta)$  ja  $\tan(\alpha - \beta)$ , kui  $\tan \alpha = \frac{1}{4}$  ja  $\tan \beta = -1$ .

283. Arvutada  $\tan(\alpha + \beta)$  ja  $\tan(\alpha - \beta)$ , kui  $\tan \alpha = 2$  ja  $\tan \beta = -\frac{1}{3}$ .

284. Kasutades  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ja  $60^\circ$  goniomeetriliste funktsioonide väärtusi, arvutada  $15^\circ$ ,  $75^\circ$  ja  $105^\circ$  tangensite väärtused.

285. Mälestussamba projekteerimisel nõutakse, et 7 m kõrgune ratsaniku kuju oleks 22 m kaugusel seisvale vaatlejale näha 16<sup>0</sup>-ses nurgas. Kui kõrge peab olema samba sokkel (alus, mis kannab kuju), kui vaatleja silmade kõrguseks maapinnast lugeda 1,60 m?

286. Näidata, et on kehtivad järgmised samasused:

$$1. \quad \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$$

$$2. \quad \frac{\tan(\alpha + \beta) + \tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta) - \tan(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$3. \quad \tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha - \tan \beta = \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta$$

$$4. \quad \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

## § 29. Kahekordse nurga siinus, koosinus ja tangens.

Võttes kahe nurga summa siinuse, koosinuse ja tangensi valemities mõlemad nurgad võrdsetena :  $\beta = \alpha$ , saame, et

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

ja

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

Seega

kahekordse nurga siinus võrdub ühekordse nurga siinuse ja koosinuse kahekordse korrutisega;

kahekordse nurga koosinus võrdub ühekordse nurga koosinuse ja siinuse ruutude vahega;

kahekordse nurga tangens võrdub murruga, mille lugeja on ühekordse nurga kahekordne tangens ning nimetaja on arvu 1 ja ühekordse nurga tangensi ruudu vahe.

### Ulesanded.

287. Avaldada  $\sin 40^\circ 20'$ -se nurga funktsioonide abil.
288. Avaldada  $\sin 70^\circ 35'$ -se nurga funktsioonide abil.
289. Teravnurga koosinus on 0,6. Arvutada kaks korda suurema nurga siinus.
290. Nürinurga siinus on 0,28. Arvutada kaks korda suurema nurga siinus.
291. Tõestada esiteks joonise abil esimese veerandi nurkade kohta, et  $\sin 2\alpha < 2 \sin \alpha$ , ja teiseks, kasutades kahekordse nurga siinuse valemit, et üldiselt  $|\sin 2\alpha| < |2 \sin \alpha|$ .
292. Avaldada  $\cos 36^\circ 18'$ -se nurga funktsioonide abil.
293. Avaldada  $\cos \frac{\pi}{5}$  nurga  $\frac{\pi}{10}$  funktsioonide abil.
294. Arvutada  $\cos 2\alpha$ , kui  $\sin \alpha = 0,2$ . Mitmenda veerandi nurk on  $2\alpha$ , kui  $\alpha$  on teravnurk; kui  $\alpha$  on nürinurk?
295. Arvutada  $\cos 2\alpha$  ja  $\cos 2\beta$ , kui  $\cos \alpha = 0,9$  ja  $\cos \beta = 0,7$ . Kumb nurkadest  $2\alpha$  ja  $2\beta$  on nürinurk, kui  $\alpha$  ja  $\beta$  on teravnurgad?
296. Arvutada  $\tan 2\alpha$ , kui  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ .
297. Arvutada  $\tan 2\alpha$ , kui  $\tan \alpha = -3$ .
298. Arvutada  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  ja  $\tan 2\alpha$ , kui  $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$  ja  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ .
299. Terava piirdenurga siinus on 0,96. Arvutada samale kaarele toetuva kesknurga siinus, koosinus ja tangens.
300. Piirdenurga koosinus on  $-0,352$ . Arvutada samale kaarele toetuva kesknurga siinus, koosinus ja tangens.
301. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga tangens on 2,4. Arvutada selle kolmnurga tipunurga siinus.

302. Näidata, et kehtivad järgmised samasused:

1.  $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + \sin 2a$

2.  $1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$

3.  $1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$

4.  $\frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} = \cos 2a$

5.  $\frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} = \sin 2a$

6.  $\frac{1}{1 - \tan a} - \frac{1}{1 + \tan a} = \tan 2a$

7.  $\sin 2a - \cos 2a \cdot \tan a = \tan a$

8.  $\tan\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \tan 2a$

### § 30. Kahe nurga siinuste summa.

Kahe nurga summa siinuse valemi abil on võimalik tule-  
tada valem, mis lubab kahe nurga siinuste summa väljen-  
dada üksliikmena.

Kirjutame, et

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cdot \cos \beta + \cos a \cdot \sin \beta$$

ja  $\sin(a - \beta) = \sin a \cdot \cos \beta - \cos a \cdot \sin \beta,$

ning liites nende võrduste vastavad pooled, leiame, et

$$\sin(a + \beta) + \sin(a - \beta) = 2 \sin a \cdot \cos \beta.$$

Kui kummagi argumendi  $a + \beta$  ja  $a - \beta$  tähistame ühe  
tähega:

$$a + \beta = \varphi$$

$$a - \beta = \psi$$

ning lahendame selle võrrandsüsteemi tähtede  $a$  ja  $\beta$  suhtes,  
siis leiame, et

$$a = \frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$\beta = \frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Tehes ülal leitud võrduses need asendused saame, et

$$\sin \varphi + \sin \psi = 2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Seega

kahe nurga siinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma siinuse ja poolvahe koosinuse kahekordse korrutisega.

Kahe nurga siinuste summa valemist saame tuletada ka kahe nurga siinuste vahe valemi, asendades temas tähe  $\psi$  avaldisega  $-\psi$  ja pidades silmas, et

$$\sin(-\psi) = -\sin \psi.$$

Nii leiame, et

$$\sin \varphi + \sin(-\psi) = 2 \sin \frac{\varphi - \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi + \psi}{2}$$

ehk

$$\sin \varphi - \sin \psi = 2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Muide, selle tulemuse oleksime võinud saada ka sel teel, et me paragrahvi alguses kirjutatud esimese võrduse pooltest oleksime lahutanud teise võrduse vastavad pooled.

Säärane goniomeetriliste avaldiste teisendamine üksliikmeiks ehk teguriteks lahutamine on mõnikord väga kasulik, sest ta võimaldab lihtsustada avaldise, näiteks taandada murde, milles esineb goniomeetrilisi funktsioone. Need teisendused on kasulikud ka siis, kui on vaja kasutada goniomeetriliste funktsioonide logaritme. Teatavasti hulkiikmelisi avaldise pole võimalik logaritmidada. Ainult üksliikmed on logaritmitavad. Seepärast neid teisendusi nimetatakse ka logaritmitava kuju andmiseks.

Näide 1. Kujutame avaldise

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$$

üksliikmena.

Kahe nurga siinuste summa valemi järgi on

$$\begin{aligned}\sin 40^\circ + \sin 20^\circ &= 2 \sin \frac{40^\circ + 20^\circ}{2} \cdot \cos \frac{40^\circ - 20^\circ}{2} = \\ &= 2 \sin 30^\circ \cdot \cos 10^\circ = \cos 10^\circ.\end{aligned}$$

Nii oleme selles näites esialgse avaldise asemele saanud tunduvalt lihtsama avaldise: selle asemel, et tabelist otsida kahe nurga siinuste väärtusi ja need liita, tarvitseb otsida ainult ühe nurga koosinuse väärtust.

Näide 2. Lihtsustame avaldise

$$\frac{\sin 52^\circ + \sin 36^\circ}{\sin 52^\circ - \sin 36^\circ}.$$

Teeme järgmised teisendused:

$$\frac{\sin 52^\circ + \sin 36^\circ}{\sin 52^\circ - \sin 36^\circ} = \frac{2 \sin 44^\circ \cdot \cos 8^\circ}{2 \cos 44^\circ \cdot \sin 8^\circ} = \tan 44^\circ \cdot \cot 8^\circ.$$

Jällegi saime esialgsest avaldisest tunduvalt lihtsama avaldise.

**Ülesanded.**

303. Lahutada teguriteks järgmised avaldised:

- |                                    |                                    |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ | 5. $\sin 80^\circ - \sin 20^\circ$ |
| 2. $\sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ | 6. $\sin 50^\circ - \sin 20^\circ$ |
| 3. $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ$ | 7. $\sin 10^\circ - \sin 30^\circ$ |
| 4. $\sin 12^\circ + \sin 8^\circ$  | 8. $\sin 13^\circ - \sin 16^\circ$ |

304. Lihtsustada järgmised avaldised:

- $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha)$
- $\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)$
- $\sin(30^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ + \alpha)$
- $\sin(75^\circ + \alpha) - \sin(15^\circ + \alpha)$

305. Taandada järgmised murrud:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\frac{\sin 55^\circ + \sin 35^\circ}{\sin 55^\circ - \sin 35^\circ}$ | 3. $\frac{\sin 36^\circ + \sin 24^\circ}{\sin 36^\circ - \sin 24^\circ}$   |
| 2. $\frac{\sin 29^\circ - \sin 9^\circ}{\sin 29^\circ + \sin 9^\circ}$   | 4. $\frac{\sin 102^\circ - \sin 84^\circ}{\sin 102^\circ + \sin 84^\circ}$ |

306. Taandada järgmised murrud ja arvutada saadud avaldiste väärtused:

$$1. \frac{\sin 120^{\circ} - \sin 80^{\circ}}{\sin 120^{\circ} + \sin 80^{\circ}} \quad 2. \frac{\sin 200^{\circ} + \sin 100^{\circ}}{\sin 200^{\circ} - \sin 100^{\circ}}$$

307. Leida logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

$$1. \sin 46^{\circ} + \sin 12^{\circ} \quad 3. \sin 52^{\circ} 24' + \sin 13^{\circ} 36'$$

$$2. \sin 118^{\circ} - \sin 62^{\circ} \quad 4. \sin 120^{\circ} 48' - \sin 48^{\circ} 36'$$

308. Tuletada kahe nurga siinuste vahe valem viisil, millele on viidatud tekstis.

309. Lahutada teguriteks järgmised avaldised:

N ä p u n ä i d e:  $1 = \sin 90^{\circ}$ .

$$1. 1 + \sin 42^{\circ} \quad 3. \sin \alpha + \frac{1}{2}$$

$$2. 1 - \sin 36^{\circ} \quad 4. \sin \alpha - \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

310. Lahutada teguriteks järgmised avaldised:

N ä p u n ä i d e:  $\cos \alpha = \sin (90^{\circ} - \alpha)$ .

$$1. \sin 36^{\circ} + \cos 48^{\circ} \quad 3. \sin \varphi + \cos \psi$$

$$2. \sin 55^{\circ} - \cos 13^{\circ} \quad 4. \sin \varphi - \cos \psi$$

311. Näidata, et kehtivad järgmised samasused:

$$1. 1 + \sin 2\alpha = 2 \sin (45^{\circ} + \alpha) \cos (45^{\circ} - \alpha)$$

$$2. 1 - \sin 2\alpha = 2 \cos (45^{\circ} + \alpha) \sin (45^{\circ} - \alpha)$$

$$3. \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

$$4. \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\alpha - \beta)}{\sin \frac{1}{2} (\alpha + \beta)}$$

$$5. \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan (45^{\circ} + \alpha)$$

$$6. \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)$$

### § 31. Kahe nurga koosinuste summa.

Samuti, nagu eelmises paragrahvis, saab ka kahe nurga koosinuste summat väljendada üksliikmena.

Kirjutame, et

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

ja 
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

ning liidame nende võrduste vastavad pooled. Nii leiame, et

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Tehes selles võrduses samad asendused, mis eelmiseski paragrahvis, saame, et

$$\cos \varphi + \cos \psi = 2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Seega

**kahe nurga koosinuste summa võrdub nende nurkade poolsumma ja poolvahe koosinuste kahekordse korrutisega.**

Kahe nurga koosinuste summa valemist saame tuletada ka kahe nurga koosinuste vahe valemi, kui asendame temas tähe  $\psi$  avaldisega  $180^\circ - \psi$  ja peame silmas, et

$$\cos(180^\circ - \psi) = -\cos \psi.$$

Nii leiame, et

$$\cos \varphi + \cos(180^\circ - \psi) = 2 \cos \frac{\varphi + 180^\circ - \psi}{2} \cos \frac{\varphi - 180^\circ + \psi}{2}$$

ehk

$$\cos \varphi - \cos \psi = 2 \cos(90^\circ + \frac{\varphi - \psi}{2}) \cos(\frac{\varphi + \psi}{2} - 90^\circ).$$

Et

$$\cos(90^\circ + \frac{\varphi - \psi}{2}) = -\sin \frac{\varphi - \psi}{2}$$

ja

$$\cos(\frac{\varphi + \psi}{2} - 90^\circ) = \sin \frac{\varphi + \psi}{2},$$

siis saame, et

$$\cos \varphi - \cos \psi = -2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Selle tulemuse oleksime võinud saada ka sel teel, et me paragrahvi alguses kirjutatud esimese võrduse pooltest oleksime lahutanud teise võrduse vastavad pooled.

Näide 1. Kujutame avaldise

$$\cos 60^\circ + \cos 30^\circ$$

üksliikmena.

Kahe nurga koosinuste summa valemi järgi on

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ + \cos 30^\circ &= 2 \cos \frac{60^\circ + 30^\circ}{2} \cdot \cos \frac{60^\circ - 30^\circ}{2} = \\ &= 2 \cos 45^\circ \cdot \cos 15^\circ = \sqrt{2} \cdot \cos 15^\circ. \end{aligned}$$

Näide 2. Lihtsustame avaldise

$$\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

Selleks teeme järgmised teisendused:

$$\begin{aligned} \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} &= \frac{\cos 0^\circ + \cos \alpha}{\cos 0^\circ - \cos \alpha} = \frac{2 \cos \frac{0^\circ + \alpha}{2} \cdot \cos \frac{0^\circ - \alpha}{2}}{-2 \sin \frac{0^\circ + \alpha}{2} \cdot \sin \frac{0^\circ - \alpha}{2}} = \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \cot^2 \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

**Ülesanded.**

312. Tuletada kahe nurga koosinuste vahe valem viisil, millele on viidatud tekstis.

313. Lahutada teguriteks järgmised avaldised:

1.  $\cos 58^\circ + \cos 32^\circ$

3.  $\cos 78^\circ + \cos 48^\circ$

2.  $\cos 154^\circ + \cos 26^\circ$

4.  $\cos 13^\circ + \cos 34^\circ$

5.  $\cos 15^\circ - \cos 25^\circ$       7.  $\cos 44^\circ - \cos 144^\circ$   
 6.  $\cos 80^\circ - \cos 20^\circ$       8.  $\cos 200^\circ - \cos 280^\circ$

314. Lihtsustada järgmised avaldised:

1.  $\cos(45^\circ - a) + \cos(45^\circ + a)$
2.  $\cos(30^\circ - a) - \cos(30^\circ + a)$
3.  $\cos(50^\circ + a) - \cos(40^\circ + a)$
4.  $\cos \frac{1}{2}(a + \beta) + \cos \frac{1}{2}(a - \beta)$

315. Taandada järgmised murrud:

1.  $\frac{\cos 14^\circ + \cos 12^\circ}{\cos 14^\circ - \cos 12^\circ}$
2.  $\frac{\cos 110^\circ - \cos 80^\circ}{\cos 110^\circ + \cos 80^\circ}$
3.  $\frac{\sin 40^\circ + \sin 60^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 60^\circ}$
4.  $\frac{\cos 65^\circ + \cos 35^\circ}{\sin 65^\circ - \sin 35^\circ}$

316. Logaritmidel abil leida järgmiste avaldiste väärtused:

1.  $\cos 63^\circ + \cos 49^\circ$
2.  $\cos 11^\circ - \cos 27^\circ$
3.  $\cos 166^\circ + \cos 112^\circ$
4.  $\cos 109^\circ - \cos 137^\circ$

317. Lahutada teguriteks järgmised avaldised:

1.  $1 + \cos 70^\circ$
2.  $1 - \cos 52^\circ$
3.  $\cos a + \frac{1}{2}$
4.  $\cos a + \frac{1}{2} \sqrt{2}$

318. Näidata, et kehtivad järgmised samasused:

1.  $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$
2.  $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$
3.  $\cos^2 a - \cos^2 \beta = \sin(a + \beta) \sin(\beta - a)$
4.  $\sin a + \tan a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \cdot \tan a$

### § 32. Võrdsete siinustega nurkade üldavaldis.

Et nurga goniomeetrilise funktsiooni väärtus ei olene sellest, kuidas nurga lõpphaar on jõudnud oma asendisse, siis on olemas lõpmatu palju nurki, millede goniomeetrilise funktsiooni väärtused on võrdsed mingi ühe nurga selle funktsiooni väärtusega.

Leiame kõigi nende nurkade üldavaldise, millede siinused on võrdsed mingi nurga  $\alpha$  siinusega. Tähistame kõiki neid nurki ühe tähega  $\varphi$ . Siis on

$$\sin \varphi = \sin \alpha$$

ehk

$$\sin \varphi - \sin \alpha = 0.$$

Rakendades kahe nurga siinuste vahe valemit, võime viimase võrduse kirjutada kujul

$$2 \cos \frac{\varphi + \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} = 0.$$

Et korrutis võib võrduda nulliga ainult siis, kui vähemalt üks tegureist on null, siis peab olema kas

$$\cos \frac{\varphi + \alpha}{2} = 0$$

või

$$\sin \frac{\varphi - \alpha}{2} = 0.$$

Koosinus saab olla null ainult siis, kui nurk on mingi paaritu arvuline täisnurga kordne. Seega esimesel juhul peab olema

$$\frac{\varphi + \alpha}{2} = (2k + 1) \cdot 90^\circ,$$

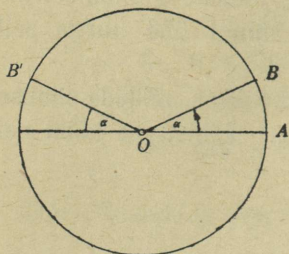
kus  $k$  tähendab mistahes (positiivset või negatiivset) täisarvu ja  $2k + 1$  tähendab seega mistahes paaritut arvu. Siit saame, et

$$\varphi + \alpha = (2k + 1) \cdot 180^\circ$$

ehk

$$\varphi = (2k + 1) \cdot 180^\circ - \alpha.$$

See valem annab nende nurkade üldavaldise, mis tekivad, kui nurga lõpphaar on asendis  $OB'$  (joonis 32), millesse ta jõuab, pöördudes nurga  $\alpha$  võrra väiksema nurga võrra kui 1, 3, 5, ... sirgnurka. (Joonisel on nurk  $\alpha$  kujutatud esimese veerandi nurgana, kuid on selge, et see nurk võib olla mistahes positiivne või negatiivne nurk.)



Joonis 32.

Et siinus saab olla null ainult siis, kui nurk on täisnurga paaris-kordne, siis ülalpool leitud teisel juhul on

$$\frac{\varphi - \alpha}{2} = 2k \cdot 90^\circ,$$

kus  $k$  tähendab mistahes täisarvu ja  $2k$  tähendab seega mistahes paarisarvu. Siit saame, et

$$\varphi - \alpha = 2k \cdot 180^\circ$$

ehk

$$\varphi = 2k \cdot 180^\circ + \alpha.$$

See valem annab nende nurkade üldavaldise, mis tekivad, kui nurga lõpphaar on asendis  $OB$  (joonis 32), millesse ta jõuab, pöördudes nurga  $\alpha$  võrra suurema nurga võrra kui 0, 2, 4, ... sirgnurka.

Seega kõiki nurki, millede siinused on võrdsed mingi nurga  $\alpha$  siinusega, on võimalik väljendada kas avaldisega

$$(2k + 1) \cdot 180^\circ - \alpha$$

või avaldisega

$$2k \cdot 180^\circ + \alpha.$$

Pannes tähele, et

$$-1 = (-1)^{2k+1}$$

ja

$$+1 = (-1)^{2k},$$

võime need avaldised kirjutada ka järgmisel kujul:

$$(2k + 1) \cdot 180^\circ + (-1)^{2k + 1} \cdot \alpha$$

ja

$$2k \cdot 180^\circ + (-1)^{2k} \cdot \alpha.$$

Siit nähtub, et mõlemad avaldised on ühe ja sama avaldise

$$n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot \alpha$$

erikujud — üks arvu  $n$  paarituurvuliste väärtuste ja teine arvu  $n$  paarisarvuliste väärtuste juhuks.

Seega oleme leidnud, et kui

$$\sin \varphi = \sin \alpha,$$

siis nurkade  $\varphi$  ja  $\alpha$  vahel kehtib seos

$$\boxed{\varphi = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \alpha}$$

kus  $n$  on mistahes täisarv.

Nurgad  $\varphi$  on need nurgad, milledele vastavad niisugused punktid, kus kõrgusel  $\sin \alpha$  nurgateljega paralleelselt joonestatud sirge lõikab siinuse graafikut (joonis 23, lk. 95).

### Ülesanded.

319. Milline on nurkade  $x$  üldavaldis, kui  $\sin x = \sin 30^\circ$ ? Arvutada positiivsed  $x$ -i väärtused, mis on väiksemad kui kaks täispööret.

320. Milline on nurkade  $x$  üldavaldis, kui  $\sin x = \sin 120^\circ$ ? Arvutada  $x$ -i väärtused, mis absoluutväärtuselt on väiksemad kui  $360^\circ$ .

### § 33. Võrdsete koosinustega nurkade üldavaldis.

Lejame nüüd kõigi nende nurkade üldavaldise, millede koosinused on võrdsed mingi nurga  $\alpha$  koosinusega. Tähistame kõiki neid nurki tähega  $\varphi$ . Siis on

$$\cos \varphi = \cos \alpha$$

ehk

$$\cos \varphi - \cos \alpha = 0.$$

Rakendades kahe nurga koosinuste vahe valemit, võime kirjutada, et

$$-2 \sin \frac{\varphi + \alpha}{2} \cdot \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} = 0.$$

Seega kas

$$\sin \frac{\varphi + \alpha}{2} = 0$$

või

$$\sin \frac{\varphi - \alpha}{2} = 0.$$

Et siinus saab olla null ainult siis, kui nurk on täisnurga paariskordne, siis on kas

$$\frac{\varphi + \alpha}{2} = 2n \cdot 90^\circ$$

või

$$\frac{\varphi - \alpha}{2} = 2n \cdot 90^\circ$$

ehk kas

$$\varphi + \alpha = 2n \cdot 180^\circ$$

või

$$\varphi - \alpha = 2n \cdot 180^\circ.$$

Siit saame, et kas

$$\varphi = n \cdot 360^\circ - \alpha$$

või aga

$$\varphi = n \cdot 360^\circ + \alpha.$$

Esimene valem annab nende nurkade üldavaldise, millede lõpphaar on asendis  $OB'$ , kuhu ta jõuab, pöördudes nurga  $\alpha$  võrra väiksema nurga võrra kui mingi täisarv täispöördeid (joonis 33).

Teine valem annab nende nurkade üldavaldise, millede lõpphaar on asendis  $OB$ , kuhu ta jõuab, pöördudes nurga  $\alpha$  võrra suurema nurga võrra kui mingi täisarv täispöördeid.

Mõlemaid valemuid saab ühendada üheks valemiks:

$$\varphi = n \cdot 360^\circ \pm \alpha.$$

Seega oleme leidnud, et kui

$$\cos \varphi = \cos \alpha,$$

siis nurkade  $\varphi$  ja  $\alpha$  vahel kehtib seos

$$\varphi = n \cdot 360^\circ \pm \alpha$$

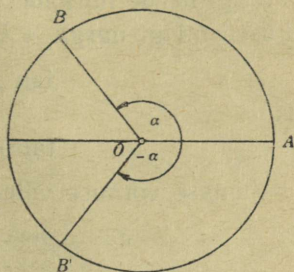
kus  $n$  on mistahes täisarv.

Nurgad  $\varphi$  on need nurgad, milledele vastavad seesugused punktid, kus kõrgusel  $\cos \alpha$  nurgateljega paralleelselt joonestatud sirge lõikab koosinuse graafikut (joonis 23, lk. 95).

### Ülesanded.

321. Leida kolm positiivset ja kolm negatiivset nurka, millede koosinused on võrdsed nurga  $56^\circ$  koosinusega.

322. Leida nurgad  $x$  vahemikus  $720^\circ$  kuni  $1440^\circ$ , kui  $\cos x = \cos 100^\circ$ .



Joonis 33.

§ 34. Võrdsete tangensitega ja võrdsete kootangensitega nurkade üldavaldised.

Kõigi nende nurkade  $\varphi$  üldavaldise, millede tangensid on võrdsed mingi nurga  $\alpha$  tangensiga, leiame, kui nõuame, et

$$\tan \varphi = \tan \alpha$$

ehk

$$\tan \varphi - \tan \alpha = 0.$$

Viimase võrduse võime kirjutada kujul:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 0$$

ehk

$$\frac{\sin \varphi \cdot \cos \alpha - \cos \varphi \cdot \sin \alpha}{\cos \varphi \cdot \cos \alpha} = 0$$

ehk

$$\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos \varphi \cdot \cos \alpha} = 0.$$

Et see murd võib võrduda nulliga ainult siis, kui lugeja on null, siis peab olema

$$\sin(\varphi - \alpha) = 0.$$

Et siinus saab olla null ainult siis, kui nurk on täisnurga paariskordne, siis on

$$\varphi - \alpha = 2n \cdot 90^\circ$$

ehk

$$\varphi - \alpha = n \cdot 180^\circ.$$

Järelikult nurkade  $\varphi$  üldavaldise annab valem

$$\varphi = n \cdot 180^\circ + \alpha$$

kus  $n$  on mistahes täisarv. Seega kahe nurga tangensid on võrdsed, kui nurgad erinevad sirgnurga, s. o. tangensfunktsiooni perioodi, täiskordse võrra.

Nurgad  $\varphi$  need nurgad, milledele vastavad kõik punktid, kus kõrgusel  $\tan \alpha$  nurgateljega paralleelselt joonestatud sirge lõikab tangensi graafikut (joonis 24, lk. 98).

Et kootangens on tangensi pöördväärtus ja seetõttu kootangensi periood on samuti  $180^\circ$ , siis võrdsete kootangensitega nurkade  $\varphi$  ja  $\alpha$  vahel kehtib sama seos, mis võrdsete tangensitegi puhul,

$$\varphi = n \cdot 180^\circ + \alpha$$

Ülesanded.

323. Leida nurgad  $x$  vahemikus  $360^\circ$  kuni  $1080^\circ$ , kui  $\tan x = \tan 82^\circ$ .

324. Leida neli positiivset ja neli negatiivset nurka, millede kootangensid on võrdsed nurga  $48^\circ$  kootangensiga.

### § 35. Goniomeetrilised võrrandid.

Võrrandit, milles tundmatu nurk esineb goniomeetrilise funktsiooni argumentis, nimetatakse goniomeetriliseks võrrandiks.

Goniomeetrilised võrrandid on näiteks võrrandid:

$$\begin{aligned}\sin x &= 0,8, \\ \sin x + \cos(x + 30^\circ) &= 1, \\ \tan 3x &= \tan 2x.\end{aligned}$$

Lahendada goniomeetriline võrrand — tähendab üldiselt leida kõik nurgad, mis rahuldavad seda võrrandit. Erijuhtudel võidakse aga nõuda ka ainult mõnede kitsamate tingimuste vastavaid nurki, mis rahuldavad antud võrrandit. Näiteks võib olla vaja leida kolmnurga sisenurk  $\alpha$ , mis rahuldab võrrandit  $\cos \alpha = 0,54$ .

Goniomeetriliste võrrandite suure mitmekesisuse tõttu pole võimalik anda mingit üldist meetodit nende lahendamiseks. Allpool esitatud näidetega selgitame mõningaid tähtsamaid lahendamisevõtteid.

Goniomeetrilise võrrandi lihtsaimaks juhuks on võrrand, milles otseselt on antud otsitava nurga mingi goniomeetrilise

funktsiooni väärtus. Säärase võrrandi lahendamine seisneb selles, et goniomeetriliste funktsioonide tabelite abil leitakse positiivne või negatiivne teravnurk, mis rahuldab antud võrrandit, ja seejärel koostatakse kõigi seda võrrandit rahuldavate nurkade üldavaldis.

N ä i d e 1. Lahendame võrrandi

$$\sin x = 0,8.$$

Siinuste tabelist leiame, et teravnurk, mille siinus on 0,8, on  $53^{\circ}08'$ .

Seega võime antud võrrandi nüüd kirjutada kujul:

$$\sin x = \sin 53^{\circ}08'.$$

Eespool nägime, et nurkade üldavaldis, millede siinused on võrdsed nurga  $\alpha$  siinusega, on

$$n \cdot 180^{\circ} + (-1)^n \cdot \alpha.$$

Järelikult viimast võrrandit rahuldavad nurgad, millede üldavaldis on

$$x = n \cdot 180^{\circ} + (-1)^n \cdot 53^{\circ}08',$$

kus täht  $n$  tähendab mistahes täisarvu.

See ongi antud võrrandi lahend.

Kui goniomeetrilise funktsiooni argumendiks on mingi lineaarne avaldis, mis sisaldab otsitavat nurka, siis esmalt lahendatakse võrrand selle argumendi suhtes, s. o. leitakse selle argumendi üldavaldis. Nii saadakse lineaarne võrrand, milles tundmatuks on otsitav nurk. Lahendades selle võrrandi saame otsitava nurga üldavaldise.

N ä i d e 2. Lahendame võrrandi

$$\tan 2x = -1,6.$$

Tangensite tabelist leiame, et tangensi väärtusele 1,6 vastab teravnurk  $58^{\circ}$ . Seega tangensi väärtusele  $-1,6$  vastab nurk  $-58^{\circ}$ .

Seega võime antud võrrandi kirjutada kujul:

$$\tan 2x = \tan (-58^\circ).$$

Kõigi nurkade üldavaldis, millede tangensid on võrdsed nurga  $a$  tangensiga, on

$$n \cdot 180^\circ + a,$$

kus  $n$  tähendab mistahes täisarvu. Järelikult on

$$2x = n \cdot 180^\circ - 58^\circ.$$

Lahendades selle lineaarvõrrandi, leiame, et

$$x = n \cdot 90^\circ - 29^\circ$$

Nagu nendest näidetest nähtub, rahuldab goniomeetrilist võrrandit lõpmata palju nurki. Kõigi nende nurkade üldavaldist nimetatakse goniomeetrilise võrrandi üldlahendiks. Iga üksikut nurka, mida sisaldab see üldavaldis, nimetatakse goniomeetrilise võrrandi erilahendiks. Iga erilahend vastab üldlahendis esineva määramatu täisarvu  $n$  mingile eriväärtusele. Nii oli näites 1 nurk  $53^\circ 08'$  võrrandi erilahend, mis vastab arvu  $n$  eriväärtusele 0. Näites 2 oli võrrandi erilahendiks nurk  $-29^\circ$ , mis vastas arvu  $n$  eriväärtusele 0.

Iga goniomeetriline võrrand määrab tundmatu nurga mingi goniomeetrilise funktsiooni ühe või mõned väärtused. Võrrandi lahendamiseks leitakse esmalt igale säärasele väärtusele vastav erilahend ja seejärel koostatakse igale funktsiooni väärtusele vastav üldlahend.

Sagedasti goniomeetriline võrrand annab funktsiooni numbrilise väärtuse mitte otseselt (nagu näidetes 1 ja 2), vaid mingi algebralise võrrandi kaudu, milles algebraalse funktsiooni argumendiks on see goniomeetriline funktsioon. Säärase võrrandi lahendamine seisneb selles, et esmalt lahendatakse see algebraalne võrrand tundmatu nurga goniomeetrilise funktsiooni suhtes, s. o. leitakse

algebraalise võrrandiga määratud tundmatu nurga goniomeetrilise funktsiooni väärtus, ja seejärel lahendatakse nii viisi saadud lihtsaim goniomeetriline võrrand.

Näide 3. Lahendame võrrandi

$$2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0.$$

Algebraliselt see võrrand kujutab endast ruutvõrrandit, milles tundmatuks on  $\cos x$ . Lahendades selle võrrandi  $\cos x$  suhtes, leiame, et

$$\cos x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}.$$

Seega tundmatu nurga koosinusel on kaks väärtust:

$$\cos x = 1 \quad \text{ja} \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

Esimesele koosinuse väärtusele vastab erilahend  $0^\circ$ . Et kõigi nende nurkade üldavaldis, millede koosinus võrdub nurga  $\alpha$  koosinusega, on

$$n \cdot 360^\circ \pm \alpha,$$

kus  $n$  on mistahes täisarv, siis esimene koosinuse väärtus annab võrrandi üldlahendi

$$x_1 = n \cdot 360^\circ \pm 0^\circ$$

ehk

$$x_1 = n \cdot 360^\circ.$$

Teisele koosinuse väärtusele vastab erilahend  $60^\circ$  ja seega võrrandi teine üldlahend

$$x_2 = n \cdot 360^\circ \pm 60^\circ.$$

Võrdsete funktsiooni väärtustega nurkade üldavaldiste rakendamisele võib rajada ka selliste võrrandite lahendamise, mis väljendavad nõuet, et otsitava nurga kahe lineaarse avaldise ühe ja sama goniomeetrilise funktsiooni väärtused peavad olema võrdsed.

N ä i d e 4. Lahendame võrrandi

$$\cos(2x + 30^\circ) = \cos(60^\circ - x).$$

Et nurkadel  $2x + 30^\circ$  ja  $60^\circ - x$  on võrdsed koosinused, siis nende vahel kehtib seos

$$2x + 30^\circ = n \cdot 360^\circ \pm (60^\circ - x).$$

Seega otsitav nurk  $x$  peab rahuldama kas võrrandit

$$2x + 30^\circ = n \cdot 360^\circ + 60^\circ - x$$

või võrrandit

$$2x + 30^\circ = n \cdot 360^\circ - 60^\circ + x.$$

Lahendades esimese võrrandi saame, et

$$3x_1 = n \cdot 360^\circ + 90^\circ$$

ehk

$$x_1 = n \cdot 120^\circ + 30^\circ.$$

See on antud võrrandi üks üldlahend.

Lahendades teise võrrandi, saame antud võrrandi teise üldlahendi:

$$x_2 = n \cdot 360^\circ - 90^\circ.$$

Viimati mainitud tüübile taanduvad säärased võrrandid, nagu näiteks

$$\cos(ax + b) = -\cos(cx + d),$$

milles tarvitseb ainult asendada liige  $-\cos(cx + d)$  liikmega  $\cos(180^\circ - cx - d)$ , või nagu

$$\sin(ax + b) = \cos(cx + d),$$

milles tarvitseb ainult asendada liige  $\cos(cx + d)$  liikmega  $\sin(90^\circ + cx + d)$ .

N ä i d e 5. Lahendame võrrandi

$$\tan 3x = \cot(70^\circ + x).$$

Eesmärgiga saada võrrand, milles esineks ainult üks ja sama goniomeetriline funktsioon, asendame kootangens-funktsiooni täiendusnurga tangensfunktsiooniga:

$$\cot(70^\circ + x) = \tan[90^\circ - (70^\circ + x)] = \tan(20^\circ - x).$$

Siis saame võrrandi

$$\tan 3x = \tan(20^\circ - x).$$

millest järeldub, et

$$3x = n \cdot 180 + 20^\circ - x.$$

Siit saame, et

$$4x = n \cdot 180^\circ + 20^\circ.$$

Seega võrrandi üldlahend on

$$x = n \cdot 45^\circ + 5^\circ.$$

Kui võrrand sisaldab ühe ja sama tundmatu nurga mitut funktsiooni, siis tuleb ta eelkõige teisendada nii, et ta sisaldaks ainult ühte ja sama funktsiooni. See on alati võimalik, sest põhiseoste abil on võimalik kõiki goniomeetrilisi funktsioone avaldada mingi ühe goniomeetrilise funktsiooni kaudu.

Näide 6. Kui võrrandis

$$\tan x + 3 \cot x = 4$$

$\cot x$  avaldada  $\tan x$  kaudu, siis pärast nimetajast vabanemist saame ruutvõrrandi

$$\tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0,$$

mille lahendamiskäiku me juba tunneme.

Kui üks funktsioon avaldub teise kaudu irratsionaalse avaldise kujul, siis ei ole soovitatav kasutada seda võtet, sest ruutirratsionaalsusest vabanemiseks tuleb võrrandi mõlemad pooled tõsta ruutu, mis võib tuua kaasa võõrlahendite esinemise. Seepärast tuleb säärastel juhtudel otsida teisi lahendamisvõtteid.

Üheks säärase võrrandite tüübiks on võrrandid, millele üldine kuju on

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c,$$

kus tähed  $a$ ,  $b$  ja  $c$  tähendavad nullist erinevaid antud arve.

Kui siin avaldaksime siinuse koosinuse kaudu või vastupidi, siis saaksime irratsionaalse võrrandi. Seepärast säärase võrrandite lahendamiseks kasutatakse erilist, nn. *abi-nurka võtet*, mis seisneb järgmises.

Võrrandi liikmed jagatakse kordajaga  $b$ :

$$\frac{a}{b} \cdot \cos x + \sin x = \frac{c}{b}.$$

Seejärel leitakse tangensite tabeli abil selline nurk  $t$  (abinurk), mille tangens võrdub kordajate  $a$  ja  $b$  jagatisega:

$$\tan t = \frac{a}{b}.$$

Seda nõuet on alati võimalik rahuldada, sest nurga muutudes tangens võib omandada mistahes väärtuse  $-\infty$ -st  $+\infty$ -ni ja seega alati leidub säärane nurk, mille tangens võrdub mistahes antud arvuga.

Asendades võrrandis kordajate jagatise  $\frac{a}{b}$  avaldisega  $\tan t$ , saame võrrandile kuju:

$$\tan t \cdot \cos x + \sin x = \frac{c}{b}$$

ehk

$$\frac{\sin t}{\cos t} \cdot \cos x + \sin x = \frac{c}{b}.$$

Korrutades võrrandi liikmed avaldisega  $\cos t$ , saame võrrandile kuju

$$\sin t \cdot \cos x + \cos t \cdot \sin x = \frac{c}{b} \cdot \cos t$$

ehk

$$\sin(x + t) = \frac{c}{b} \cdot \cos t.$$

Seega võrrandi

$$a \cdot \cos x + b \cdot \sin x = c$$

lahendamiseks leitakse esmalt abinurk  $t$ , mille tangens on  $\frac{a}{b}$ ; seejärel leitakse selle nurga koosinus ja arvutatakse avaldise

$$\frac{c}{b} \cdot \cos t$$

väärtus; siis leitakse nurk  $x + t$ , mille siinus võrdub selle viimase avaldise väärtusega. Lahutades sellest nurgast nurga  $t$ , leitakse lõpuks otsitav nurk  $x$ .

Abinurgavõttel on see suur paremus, et kogu lahendamiskäiku on võimalik läbi viia logaritmide abil.

Näide 7. Lahendame võrrandi

$$3 \cos x - 2 \sin x = 1.$$

Tabelite abil leiame abinurga, mille tangens on  $\frac{3}{-2} = -1,5$ ,

$$t = -56^{\circ}19'.$$

Seejärel leidnud tabelitest, et

$$\cos t = 0,5546,$$

arvutame avaldise

$$\frac{1}{-2} \cdot \cos t$$

väärtuse. See on  $-0,2773$ .

Nüüd lahendame võrrandi

$$\sin(x + t) = -0,2773.$$

Tabelite abil leiame selle võrrandi ühe erilahendi  $-73^{\circ}54'$ . Seega selle võrrandi üldlahend

$$x + t = n \cdot 180^{\circ} + (-1)^n (-73^{\circ}54').$$

Siit leiame, et antud võrrandi üldlahend

$$x = n \cdot 180^{\circ} + (-1)^n (-73^{\circ}54') - t.$$

s. o.

$$x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n (-73^\circ 54') + 56^\circ 19'$$

ehk

$$\begin{aligned} x_1 &= 2k \cdot 180^\circ - 73^\circ 54' + 56^\circ 19' = \\ &= 2k \cdot 180^\circ - 17^\circ 35' \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} x_2 &= (2k + 1) \cdot 180^\circ + 73^\circ 54' + 56^\circ 19' = \\ &= (2k + 1) \cdot 180^\circ + 130^\circ 13'. \end{aligned}$$

Näide 8. Lahendame logaritmidel abil võrrandi

$$197 \cos x + 27,1 \sin x = 116,3.$$

Võrrandist  $\tan t = \frac{197}{27,1}$  leiame logaritmidel abil, et abinurk  $t = 82^\circ 10'$ .

Nüüd leiame tabelitest  $\log \cos 82^\circ 10'$  väärtuse ja arvutame avaldise  $\log \frac{116,3}{27,1} \cdot \cos t$  väärtuse, mis on ühtlasi  $\log \sin(x + t)$  väärtuseks.

$$\begin{array}{r} \log 197 = 2,2945 \\ \log 27,1 = 1,4330 \\ \hline \log \tan t = 0,8615 \\ t = 82^\circ 10' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \cos t = \bar{1},1363 \\ \log 116,3 = 2,0656 \\ \hline 1,2019 \\ \log 27,1 = 1,4330 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log \sin(x + t) = \bar{1},7689 \\ x + t = 35^\circ 58' \end{array}$$

Selle väärtuse järgi leiame, et

$$x + t = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 35^\circ 58',$$

kust saame, et

$$x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 35^\circ 58' - 82^\circ 10'$$

ehk

$$x_1 = 2k \cdot 180^\circ - 46^\circ 12'$$

ja

$$x_2 = (2k + 1) \cdot 180^\circ - 118^\circ 08'.$$

Paljud goniomeetrilised võrrandid lasevad end teisendada lihtsamateks võrranditeks põhiseoste või nurkade summa funktsioonide või funktsioonide summa või kahekordse nurga funktsioonide valemite abil.

N ä i d e 9. Lahendame võrrandi

$$(\sin x - \cos x)^2 = 0,7.$$

Avades sulud saame

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = 0,7.$$

Et

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ja

$$2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x,$$

siis võime selle võrrandi kirjutada kujul

$$1 + \sin 2x = 0,7$$

ehk

$$\sin 2x = 0,3$$

Tabelitest leiame, et sellele siinuse väärtusele vastab nurk  $17^{\circ}27'$ . Seega

$$2x = n \cdot 180^{\circ} + (-1)^n \cdot 17^{\circ}27'$$

ehk

$$x = n \cdot 90^{\circ} + (-1)^n \cdot 8^{\circ}44'.$$

Mõnikord on võimalik võrrandit teisendada nii, et üks pool kujutab endast tundmatu nurga funktsioonide korrutist ja teine pool on null. Säärastel juhtudel võrrandi edasine lahendamise käik tugeneb teoreemile, et korrutis saab olla null ainult siis, kui vähemalt üks teguritest on null. Sellega antud võrrand laguneb lihtsamateks võrranditeks, milledest igaüks saadakse ühe teguri võrrutamisel nulliga. Nende võrrandite lahendid moodustavadki antud võrrandi lahendite süsteemi.

Näide 10. Lahendame võrrandi

$$\sin 2x = \tan x.$$

Tuues liikme  $\tan x$  vasakule poolele ning asendades liikme  $\sin 2x$  avaldisega  $2 \sin x \cdot \cos x$  ja liikme  $\tan x$  avaldisega  $\frac{\sin x}{\cos x}$ , saame võrrandile kuju

$$2 \sin x \cdot \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0.$$

Tuues vasaku poole liikmete ühise teguri  $\sin x$  sulgude ette, saame võrrandile kuju

$$\sin x \cdot \left( 2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0,$$

millest järeldame, et peab olema

kas  $\sin x = 0$

või  $2 \cos x - \frac{1}{\cos x} = 0.$

Esimesel juhul on üheks erilahendiks  $0^\circ$ . Seega antud võrrandi üks üldlahend on

$$x_1 = n \cdot 180^\circ.$$

Teisel juhul

$$2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

ehk  $\cos^2 x = \frac{1}{2}.$

Siit saame, et

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Koosinuse positiivsele väärtusele vastab ühe erilahendina nurk  $45^\circ$  ja koosinuse negatiivsele väärtusele vastab ühe erilahendina nurk  $180^\circ - 45^\circ$  ehk  $135^\circ$ .

Seega antud võrrandi teine üldlahend

$$x_2 = n + 360^\circ \pm 45^\circ$$

ja kolmas üldlahend

$$x_3 = n \cdot 360^\circ \pm 135^\circ.$$

Ülesanded.

325. Lahendada järgmised võrrandid:

1.  $\sin x = \frac{1}{2}$

5.  $\tan x = 1$

2.  $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

6.  $\tan x = -\sqrt{3}$

3.  $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

7.  $\tan x = \sqrt{3} - 2$

4.  $\cos x = -\frac{1}{2}$

8.  $\cot x = 0,6$

326. Lahendada järgmised võrrandid:

1.  $\sin(x + 40^\circ) = 1$

5.  $\cos(2x + 45^\circ) = 0$

2.  $\sin(x - 60^\circ) = -1$

4.  $\cos(60^\circ - x) = 0,15$

327. Leida terav- ja nürinurgad, mis rahuldavad järgmisi võrrandeid:

1.  $\tan 2x = \frac{1}{2}$

3.  $\tan(2x + 50^\circ) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

2.  $\cot \frac{x}{2} = -1$

4.  $\tan(\frac{x}{2} - 10^\circ) = 1$

328. Lahendada järgmised võrrandid:

1.  $\sin^2 x = 1$

3.  $\cos^2(x + 60^\circ) = \frac{3}{4}$

2.  $\cos^2 2x = 0$

4.  $\tan^2(2x - 20^\circ) = 5$

329. Lahendada järgmised võrrandid:

1.  $6 \sin^2 x = 5 \sin x - 1$

2.  $100 \cos^2 x + 60 \cos x + 8 = 0$

3.  $25 \cos^2 x + 15 \cos x + 2 = 0$

4.  $\tan^2 x - 2\frac{1}{2} \tan x + 1 = 0$

5.  $\tan^2 2x - \tan 2x - 2 = 0$

330. Lahendada järgmised võrrandid:

1.  $\sin 2x = \sin(x - 90^\circ)$

3.  $\tan 2x = \tan x$

2.  $\cos 3x = \cos(60^\circ - x)$

4.  $\tan x = \tan(80^\circ - x)$

331. Leida järgmiste võrrandite lahendid vahemikust  $0^\circ$  kuni  $180^\circ$ :

1.  $2 \cos^2 x = 1$
2.  $3 \tan^2 x = 1$
3.  $\sin x = 2 \cos x$
4.  $3 \sin x + \cos x = 0$
5.  $\tan x + \cot x = 4$
6.  $\cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2$
7.  $2 \tan x + 3 \cot x = 5$
8.  $3 \sin x - 2 \cos^2 x = 0$

332. Jaotada sirgnurk kahte ossa nii, et ühe osa siinus oleks kaks korda suurem kui teise osa koosinus.

333. Jaotada täisnurk kahte ossa nii, et nende osade siinused suhtuksid nagu  $1 : \sqrt{3}$ .

334. Kui suured on võrdhaarse kolmnurga nurgad, kui alusnurga siinus võrdub kahekordse tipunurga siinusega?

335. Täisnurkses kolmnurgas on üks külg teise kahe külje geomeetriline keskmine. Kui suured on selle kolmnurga teravnurgad?

336. Leida järgmiste võrrandite lahendid vahemikust  $0^\circ$  kuni  $360^\circ$ :

1.  $(\sin x + \cos x)^2 = 1,5$
2.  $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$
3.  $\cos 2x = 2 \cos x$
4.  $\cos 2x = \cos^2 x$
5.  $\tan(x + 45^\circ) = 2 \tan x$
6.  $\sin(x + 30^\circ) = \sin x + 1 \frac{1}{2} \cos x$

337. Jaotada nurk  $130^\circ$  kahte ossa nii, et nende siinuste suhe oleks  $1 \frac{1}{2}$ .

338. Jaotada nurk  $45^\circ$  kahte ossa nii, et ühe osa tangens oleks kolm korda suurem teise osa tangensist.

339. Leida järgmiste võrrandite lahendid vahemikust  $0^\circ$  kuni  $360^\circ$ :

1.  $\cos x + \sin x = 1$

2.  $\cos x + 2 \sin x = 2$

3.  $4 \cos x - 3 \sin x = 2$

4.  $\cos x + \sqrt{3} \cdot \sin x = 1,6384$

5.  $34 \cos x - 87 \sin x = 65$

6.  $0,7265 \cos x + \sin x = -\frac{2192}{4045}$

7.  $\sin x - 0,2309 \cos x = \frac{693}{3248}$

340. Lahendada võrrandid:

1.  $\sin(x + 30^\circ) + \sin(x - 30^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{3}$

2.  $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 60^\circ) = 1$

3.  $2 \sin(x + 45^\circ) - \sin x = 0,8$

4.  $\cos(x + 60^\circ) + 2 \cos(x + 30^\circ) = 1,2$

341. Lahendada võrrandid:

1.  $2 \sin x = \tan x$

5.  $\sin x \cdot \tan x = 4 \sin^2 x$

2.  $\sin 2x = \tan x$

6.  $\sin 2x + \sin x = 0$

3.  $2 \sin^2 x = \sin x$

7.  $\sin^2 2x = \cos^2 x$

4.  $\tan^3 x = 3 \tan x$

8.  $\sin^2(x + 45^\circ) = \cos^2 x$

## Peatükk IV.

### Kaldnurkse kolmnurga lahendamine.

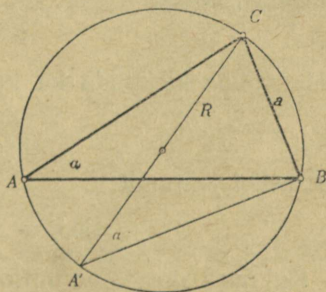
#### § 36. Siinuse teoreem.

Kaldnurkse kolmnurga elemente saab leida kolmnurka määravaist andmeist, tükeldades kolmnurga kõrgusega kaheks täisnurkseks kolmnurgaks ja arvutades viimaste elementid. Kuid tunduvalt kiiremini jõuame sellele eesmärgile, kui rakendame seoseid, mis kehtivad kaldnurkse kolmnurga elementide vahel.

Üht säärast seost väljendab siinuse teoreem, mis ütleb, et

**kolmnurga külje ja selle vastasnurga siinuse suhe võrdub kolmnurga ümber joonestatud ringjoone läbimõõduga.**

Selle teoreemi tõestamiseks joonestame kolmnurga  $ABC$  ümber ringjoone (joonis 34), mille raadiuse tähistame tähega  $R$ ; joonestame selle ringjoone sisse uue kolmnurga  $A'BC$  nii, et 1) uuel kolmnurgal on endise kolmnurgaga ühine külg  $BC = a$ , 2) uue kolmnurga üks külg, näiteks külg  $A'C$  läbib ringjoone keskpunkti.



Joonis 34.

Nii viisi joonestatud kolmnurk on täisnurkne, sest selle

üks nurk on diameetrile toetuv piirdenurk, järelikult täisnurk. Edasi näeme, et

$$\angle A' = \angle A = \alpha,$$

sest nurgad  $A$  ja  $A'$  on ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad. Et kolmnurk  $A'BC$  on täisnurkne, siis

$$a = A'C \cdot \sin \alpha = 2R \cdot \sin \alpha.$$

Sellest järeldub, et

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = 2R}$$

Samal viisil saab tõestada, et ka

$$\frac{b}{\sin \beta} = 2R$$

ja

$$\frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Joonisel oli siinusteoreemi tõestamiseks kasutatud teravnurkset kolmnurka, kuid on kerge näidata, et siinusteoreem kehtib samuti ka täisnurkse ja nürinurkse kolmnurga kohta.

Kui nurk  $A$  on täisnurk, siis külg  $a$  on ringjoone läbimõõduks, nii et

$$a = 2R,$$

mida võime kirjutada ka kujul

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

sest sellel juhtumil

$$\sin \alpha = \sin 90^\circ = 1.$$

Kui nurk  $A = \alpha$  on nürinurk (joonis 35), siis on

$$\angle A' = 180^\circ - \alpha,$$

sest teineteist ringjooneni täiendavatele kaartele  $BAC$  ja  $BA'C$  toetuvate nurkade  $A$  ja  $A'$  summa on  $180^\circ$ .

Seega täisnurkses kolmnurgas  $A'CB$  saadakse

$$a = A'C \cdot \sin(180^\circ - \alpha).$$

Et

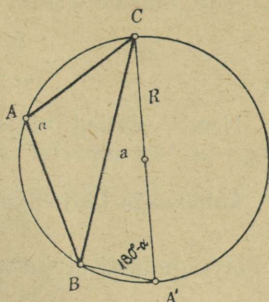
$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

siis ka sellel juhtumil

$$a = 2R \cdot \sin \alpha$$

ehk

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R.$$



Joonis 35.

Seega on tõestatud siinusetoreemi kehtivus igasuguste kolmnurkade kohta.

Et kolmnurga iga külje ja selle vastasnurga siinuse suhe on võrdne ühe ja sama suurusega, siis need suhted on võrdsed üksteisega:

$$\boxed{\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}}$$

Seega siinusetoreemist järeldub, et

**kolmnurga kõigi külgede suhted oma vastasnurkade siinustesse on võrdsed.**

Kui ülalpool saadud võrduse

$$a = 2R \cdot \sin \alpha$$

mõlemad pooled jagada analoogilise võrduse

$$b = 2R \cdot \sin \beta$$

vastavate pooltega, siis saame külgede paari  $a$  ja  $b$  kohta võrde

$$a : b = \sin \alpha : \sin \beta.$$

Samal viisil saame tuletada analoogilised võrded ka teiste külgede paaride kohta:

$$b : c = \sin \beta : \sin \gamma$$

ja

$$a : c = \sin \alpha : \sin \gamma.$$

Need võrded väljendavad siinusteoreemist järelduvat tõe, et

**kolmnurga küljed suhtuvad nagu nende vastasnurkade siinused,**

mida sagedasti kirjutatakse lühidalt kujul:

$$a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$$

Mõlema viimase sõnastuse mõtet väljendatakse ka ühe lausega:

**kolmnurga küljed on võrdelised nende vastasnurkade siinustega.**

Siinusteoreemi valemid

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

võimaldavad

1. leida kolmnurga üht külge, teades teist külge ja kumagi külje vastasnurka; nii saadakse

$$a = \frac{b \sin \alpha}{\sin \beta};$$

2. leida kolmnurga üht nurka, teades teist nurka ja kumagi nurga vastaskülge: teoreemi järeldusest

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \beta}{b},$$

leiame tabelite abil nurga  $\alpha$ ;

3. leida kas kolmnurga külge või selle vastasnurka või ümberjoonestatud ringjoone raadiust, teades kahte siin nimetatud elementi; nii näiteks

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha};$$

4. leida kas ringjoone kõõlu või sellele toetuvat piirde-  
nurka või ringjoone raadiust, teades kahte siin nimetatud  
elementi; nii on näiteks

$$a = 2R \sin \alpha.$$

Ülesanded.

342. Rakendades siinusteoreemi näidata, et

1. kui kolmnurgas kaks nurka on võrdsed, siis ka nende  
nurdade vastasküljed on võrdsed;

2. kolmnurgas, mille kõik nurgad on võrdsed, on ka kõik  
küljed võrdsed.

343. Kolmnurgas on üks nurk  $60^\circ$ , teine  $45^\circ$ . Kui suur  
on nende nurkade vastaskülgede suhe?

344. Kolmnurga kaks külge suhtuvad nagu  $1 : 2$ . Suu-  
rema külje vastasnurk on  $50^\circ$ . Kui suur on väiksema külje  
vastasnurk?

345. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu  $1 : 2 : 3$ . Kuidas  
suhtuvad nende nurkade vastasküljed?

346. Kolmnurga nurgad  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$  rahuldavad tingimust

$$\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta.$$

Näidata, et see kolmnurk on täisnurkne.

347. Kolmnurgas  $ABC$  on joonestatud nurga  $B$  pooli-  
taja  $BE$ , kus  $E$  tähendab nurgapoolitaja ja külje  $AC$  ühist  
punkti. Rakendades siinusteoreemi tõestada kolmnurga  
nurgapoolitaja omadus:

$$AE : EC = AB : BC.$$

348. Täisnurkse kolmnurga täisnurga poolitaja jaotab  
hüpoteenuusi osadeks, mis suhtuvad nagu  $4 : 5$ . Kui suured  
on täisnurkse kolmnurga teravnurgad?

349. Ehitada sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil:  
 $a = 10$  cm,  $\alpha = 60^\circ$  ja  $\beta = 45^\circ$ . Mõõta külg  $b$  ja kontrol-  
lida tulemust külje  $b$  arvutamise teel.

350. Kolmnurgas on külg  $b = 32,4$  cm, nurk  $\beta = 74,3^\circ$  ja nurk  $\gamma = 41,8^\circ$ . Kui suur on külg  $c$ ?

351. Kolmnurgas on külg  $a = 54$  m, külg  $b = 42$  m ja nurk  $\alpha = 146^\circ$ . Kui suur on nurk  $\beta$ ?

352. Kolmnurgas on külg  $c = 52,8$  m, nurk  $\alpha = 48^\circ 06'$  ja nurk  $\beta = 74^\circ 12'$ . Kui suur on külg  $b$ ?

353. Kolmnurga külg on 6,24 m; selle külje lähisnurgad on  $26^\circ 15'$  ja  $32^\circ 25'$ . Arvutada kolmnurga teised küljed.

354. Kolmnurga kaks nurka on  $65,4^\circ$  ja  $52,3^\circ$ ; kolmnurga kõige väiksem külg on 17,7 cm. Kui pikk on kolmnurga kõige suurem külg?

355. Ringi raadius on 6 cm. Ringis on joonestatud kõõl, mille pikkus on 5 cm. Kui suur on sellele kõõlule toetuv piiridenurk?

356. Ringi kõõlule, mille pikkus on 17 cm, toetub  $32^\circ$ -ne piiridenurk. Kui suur on ringi raadius?

357. Ringisse joonestatud kolmnurga üks külg on 3,75 m; selle külje vastasnurk on  $47,2^\circ$ . Kui suur on ringi raadius?

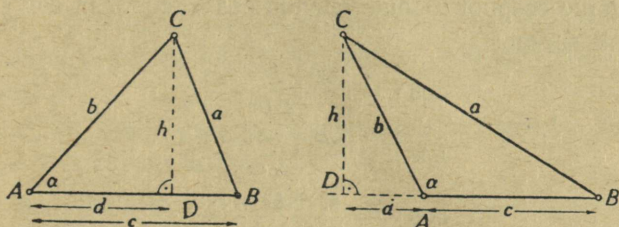
358. Võrdhaarse kolmnurga haarade pikkus on 7,92 m; selle kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius on 4,62 m. Leida kolmnurga nurgad.

### § 37. Koosinuseteeoreem.

Teise teoreemina, mis võimaldab avaldada seoseid kolmnurga elementide vahel, vaatleme koosinuseteeoreemi. See ütleb, et

kolmnurga külje ruut on teiste külgede ruutude summast nende külgede ja nende vahelise nurga koosinuse kahekordse korrutise võrra väiksem.

Tõestame teoreemi eraldi teravnurkse ja nürinurkse kolmnurga kohta (joonis 36). Selleks joonestame tipust  $C$  kolmnurga kõrguse  $h$  ja tähistame tähega  $d$  külje  $b$  projektsiooni küljele  $c$  või selle pikendusele.



Joonis 36.

Siis laiendatud Pythagorase teoreemi põhjal on

teravnurkses kolmnurgas

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$$

nürinurkses kolmnurgas

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$$

Kolmnurgast  $ADC$  leiame, et

$$d = b \cos \alpha$$

$$d = b \cos (180^\circ - \alpha).$$

Et  $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , siis nürinurkse kolmnurga puhul on

$$d = b (-\cos \alpha)$$

ehk

$$d = -b \cos \alpha.$$

Asendades eespool saadud  $a^2$ -valemities tähe  $d$  tema avaldistega, leiame vastavalt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b \cos \alpha$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \cdot (-b \cos \alpha).$$

Seega nii esimesel kui teisel juhul

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Samal viisil saame koosinusteoreemi tõestada ka teiste külgede kohta ja näidata, et

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

ja

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma.$$

Koosinuseteoreemi saame rakendada kolmnurga külje arvutamiseks, kui on antud kaks teist külge ja nende vaheline nurk. Kuid seda lauset saame kasutada ka kolmnurga nurkade leidmiseks, kui on antud kolmnurga küljed. Selleks lahendame eespool toodud valemid  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  ja  $\cos \gamma$  suhtes; nii saame:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Arvutanud antud külgede järgi  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  ja  $\cos \gamma$ , leiame tabelitest nurgad  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ .

Koosinuseteoreemi põhjal saadud kolmnurga külje ruudu ja nurga koosinuse avaldised ei ole logaritmitavad. Seetõttu on raskendatud logaritmi kasutamine selle lause rakendamisel.

### Ülesanded.

359. Ehitada sirkli ja joonlaua abil kolmnurk andmeil  $a = 3$ ,  $b = 7$ ,  $\gamma = 45^\circ$ . Mõõta kolmas külge  $c$  ja kontrollida tulemust külge  $c$  arvutamise teel.

360. Kolmnurga kaks külge on 30 m ja 14 m; nende külgede vaheline nurk on  $60^\circ$ . Kui pikk on kolmnurga kolmas külge?

361. Kolmnurgas on külge  $a = 3$ , külge  $b = 5$  ja nurk  $\gamma = 120^\circ$ . Kui pikk on külge  $c$ ?

362. Kolmnurga kaks külge on 8 m ja 12 m; nende vaheline nurk on  $58^\circ 25'$ . Arvutada kolmas külge.

363. Kolmnurga küljed on 6 cm, 7 cm ja 8 cm. Leida kolmnurga suurim nurk.

364. Kolmnurga küljed on 2 m, 5 m ja 6 m. Leida kolmnurga väikseim nurk.

365. Kolmnurgas on külg  $a = 56$  mm, külg  $b = 38$  mm ja külg  $c = 29$  mm. Kui suur on nurk  $\alpha$ ?

366. Rakendades koosinusteoreemi näidata, et kolmnurgas, millel kõik küljed on võrdsed, on ka kõik nurgad võrdsed.

367. Näidata, et koosinusteoreem on kehtiv ka täisnurkse kolmnurga kohta.

368. Näidata, et kolmnurk, mille küljed suhtuvad nagu 8,4 : 11,2 : 14, on täisnurkne kolmnurk.

369. Näidata, et nürinurkse kolmnurga suurima külje ruut on suurem kui teiste külgede ruutude summa ja väiksem kui teiste külgede summa ruut.

### § 38. Tangensiteoreem.

Siinusteoreemist on võimalik tuletada tangensiteoreemi, mis seob kolmnurga kahe külje summat ja vahet nende külgede vastasnurkade summa ja vahega.

Kui võrde

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

kummastki poolest kord lahutame arvu 1 ja kord liidame kummagi poolega arvu 1, siis saame kaks võrret:

$$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \beta}$$

ja

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \beta}.$$

Jagades nende võrrete vastavad pooled saame uue võrde

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta}.$$

Rakendades kahe nurga siinuste vahe ja summa valemeid, võime kirjutada, et

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Taandades selle võrde parema poole avaldisega

$$2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2},$$

saame lõpuks võrde

$$\boxed{\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}}$$

Samal viisil võime tuletada analoogilised võrded ka teiste külgede paaride kohta:

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan \frac{\beta-\gamma}{2}}{\tan \frac{\beta+\gamma}{2}}$$

ja

$$\frac{a-c}{a+c} = \frac{\tan \frac{\alpha-\gamma}{2}}{\tan \frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

Seega kolmnurga iga küljepaari kohta kehtib tangensiteoreem:

kolmnurga kahe külje vahe suhtub nende summasse nagu nende vastasnurkade poolvahe tangens suhtub poolsumma tangensisse.

Tangensiteoreem võimaldab arvutada kolmnurga kaht nurka, näiteks  $\alpha$  ja  $\beta$ , teades kaht külge ja nende vahelist nurka, näiteks  $\alpha$ ,  $b$  ja  $\gamma$ . Et kolmnurga sisenurkade teoreemi järgi on

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

siis teades nurka  $\gamma$  võime arvutada  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  :

$$\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$$

ja

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Asetanud võrdesse

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{\tan \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

avaldiste  $a - b$ ,  $a + b$  ja  $\tan \frac{\alpha + \beta}{2}$  numbrilised väärtused, leiame sellest võrdest avaldise  $\tan \frac{\alpha - \beta}{2}$  numbrilise väärtuse, mille järgi tabelitest leiame suuruse  $\frac{\alpha - \beta}{2}$ . Olgu  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  numbriline väärtus  $\delta$ . Siis lahendades võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \delta, \end{cases}$$

leiame nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ : liites nende võrrandite vastavad pooled, leiame  $\alpha$  ja lahutades esimese võrrandi pooltest teise võrrandi vastavad pooled, leiame  $\beta$ .

N ä i d e 1. Arvutame kolmnurga nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ , kui on antud, et  $a = 260$ ,  $b = 143$  ja  $\gamma = 36^\circ 48'$ .

Nende andmete järgi leiame, et

$$a - b = 117,$$

$$a + b = 403,$$

$$\frac{\gamma}{2} = 18^\circ 24',$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - 18^\circ 24' = 71^\circ 36',$$

$$\tan \frac{\alpha + \beta}{2} = \tan 71^\circ 36' = 3,0061.$$

Asetades need arvud tangensiteoreemi võrdesse, saame, et

$$\frac{117}{403} = \frac{\tan \frac{\alpha - \beta}{2}}{3,0061},$$

kust leiame, et

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{117}{403} \cdot 3,0061 = 0,8727.$$

Tabelitest leiame, et

$$\frac{\alpha - \beta}{2} = 41^{\circ}07'.$$

Võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \frac{\alpha + \beta}{2} = 71^{\circ}36' \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = 41^{\circ}07' \end{cases}$$

leiame, et

$$\alpha = 112^{\circ}43'$$

ja

$$\beta = 30^{\circ}29'.$$

### Ülesanded.

370. Kolmnurga kaks külge on 32 cm ja 9 cm; nende vaheline nurk on  $36^{\circ}44'$ . Arvutada kolmnurga teised nurgad.

371. Kolmnurga küljed  $b$  ja  $c$  on 34,40 m ja 51,25 m; nurk  $\alpha$  on  $59^{\circ}10'$ . Arvutada nurgad  $\beta$  ja  $\gamma$ .

372. Kolmnurga küljed  $a$  ja  $c$  on 81,5 m ja 77,3 m; nurk  $\beta$  on  $47^{\circ}14'$ . Arvutada nurgad  $\alpha$  ja  $\gamma$ .

373. Kolmnurga kahe külje summa on 52 m; nende külgedele vastasnurgad on  $46^{\circ}$  ja  $54^{\circ}$ . Kui suured on need küljed?

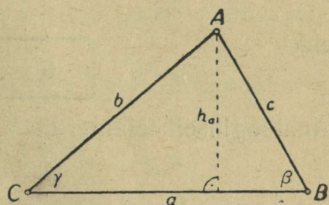
### § 39. Kolmnurga pindala valemid.

Kolmnurga pindala avaldamiseks külgede ja nurkade kaudu lähtume tuntud valemist

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}.$$

Asendades siin esineva kõrguse  $h_a$  tema avaldisega  $b \sin \gamma$  (joonis 37), saame pindala jaoks valemi

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$



Joonis 37.

Analoogiliselt saame

$$S = \frac{bc \sin \alpha}{2}$$

ja

$$S = \frac{ac \sin \beta}{2}.$$

Seega

kolmnurga pindala võrdub kahe külje ja nende vahelise nurga siinuse poole korrutisega.

Kolmnurga pindala saame avaldada ka ainult ühe külje ja nurkade abil. Selleks avaldame siinuseteeoreemi põhjal külje  $b$ ; et

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta},$$

siis

$$b \sin \alpha = a \sin \beta,$$

seega

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Asendades selle avaldisega ülal tuletatud valemis külje  $b$ , saame

$$S = \frac{a \cdot \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma}{2}$$

ehk

$$S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$$

Analoogiliselt leiame, et

$$S = \frac{b^2 \sin \alpha \sin \gamma}{2 \sin \beta}$$

ja

$$S = \frac{c^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin \gamma}$$

Kolmnurga pindala on võimalik avaldada ka ainult tema kolme külje abil. Vastava pindala valemi tuletame valemist

$$S = \frac{ab \sin \gamma}{2}$$

ja

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

sel teel, et eemaldame neist nurga  $\gamma$  funktsioonid.

Nendest võrdustest saame, et

$$2ab \sin \gamma = 4S$$

ja

$$2ab \cos \gamma = a^2 + b^2 - c^2.$$

Tõstes kummagi võrduse mõlemad pooled ruutu, saame, et

$$4a^2b^2 \sin^2 \gamma = 16S^2$$

ja

$$4a^2b^2 \cos^2 \gamma = (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Liites viimase kahe võrduse vastavad pooled, leiame, et

$$4a^2b^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) = 16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

ehk

$$4a^2b^2 = 16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Viimasest võrdusest saame, et

$$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2.$$

Avaldades sellest võrdusest suuruse  $S$ , saaksimegi valemi, mis avaldab kolmnurga pindala ta kolme külje kaudu. Tehes enne järgmised teisendused, saame selle valemi kujul, mis arvutamiseks paremini sobib.

Lahutades viimase võrduse parema poole tegureiks, saame võrduse

$$16S^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2),$$

mida võime kirjutada ka kujul:

$$16S^2 = [(a + b)^2 - c^2][c^2 - (a - b)^2].$$

Viimase võrduse parema poole kummagi teguri lahutame omakorda tegureiks:

$$16S^2 = (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b).$$

Selle võrduse võime kirjutada ka nii:

$$S^2 = \frac{a + b + c}{2} \cdot \frac{b + c - a}{2} \cdot \frac{a + c - b}{2} \cdot \frac{a + b - c}{2}.$$

Kui kolmnurga poolümberrõõd  $\frac{a + b + c}{2}$  tähistada tähega  $p$ , siis on

$$\frac{b + c - a}{2} = \frac{a + b + c}{2} - a = p - a,$$

$$\frac{a + c - b}{2} = \frac{a + b + c}{2} - b = p - b,$$

$$\frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b + c}{2} - c = p - c.$$

Nendes tähistes võime kirjutada, et

$$S^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

ehk lõplikult

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Seda kolmnurga pindala valemit nimetatakse Heroni<sup>1</sup> valemiks.

<sup>1</sup>) Heron Aleksandriast, antiikaja rakendusmatemaatik ja füüsik, elas u. II sajandi lõpul e. m. a.

## Ülesanded.

374. Kolmnurga kaks külge on 5 cm ja 8 cm; nende külgede vaheline nurk on  $30^\circ$ . Kui suur on kolmnurga pindala?
375. Kolmnurga kaks külge on 631,8 m ja 495,8 m; nende vaheline nurk on  $134^\circ 20'$ . Kui suur on kolmnurga pindala?
376. Kolmnurga kaks külge on 12 cm ja 10 cm; kolmnurga pindala on  $54 \text{ cm}^2$ . Leida antud külgede vaheline nurk.
377. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga külg on 15,92 m ning selle lähisnurgad on  $59^\circ 06'$  ja  $38^\circ 44'$ .
378. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga külg on 0,678 m ning selle lähisnurgad on  $156^\circ$  ja  $14^\circ 08'$ .
379. Kolmnurga küljed on 3 cm, 4 cm ja 6 cm. Arvutada kolmnurga pindala.
380. Arvutada kolmnurga pindala, kui kolmnurga küljed on 4,6 m, 4,6 m ja 5,8 m.
381. Võrdhaarse kolmnurga haar on 24,8 cm ja tipunurk on  $98,8^\circ$ . Arvutada kolmnurga pindala.
382. Võrdkülgse kolmnurga külg on 12 mm. Arvutada kolmnurga pindala.
383. Ringi raadius on 40,4 cm. Ringis on võetud segment, mille kaar on  $150^\circ$ . Arvutada segmenti pindala.
384. Arvutada korrapärase kümmenurga pindala, kui kümmenurga raadius on 0,8 m.
385. Kolmnurga kaks nurka on  $45^\circ$  ja  $70^\circ$ ; kolmnurga pindala on  $1 \text{ m}^2$ . Kui suur on kolmnurga suurim külge?

## § 40. Poolnurgateoreem.

Kui on antud kolmnurga kolm külge, siis kolmnurga nurgad võib leida koosinusteoreemi abil. Kui aga külgede mõõtardvud on mitmekohalised arvud, siis osutub koosinusteoreemi rakendamine tülikaks. Säärasel juhul kasutatakse nurkade leidmiseks koosinusteoreemi asemel poolnurgateoreemi, mis ütleb, et

kolmnurga poolnurga tangens on võrdne kolmnurgasse joonestatud ringi raadiuse ning kolmnurga poolümbermõõdu ja selle nurga vastaskülje vahe jagatisega.

Tähistades sissejoonestatud ringi raadiuse tähega  $r$  ja kolmnurga poolümbermõõtu tähega  $p$ , saame selle teoreemi kirjutada kujul:

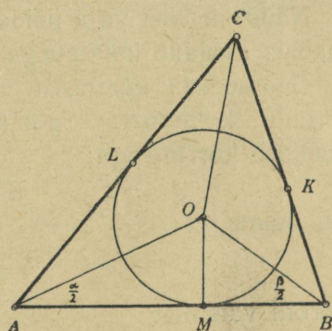
$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a},$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b},$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Tõestamiseks joonestame kolmnurgasse  $ABC$  ringi (joonis 38). Et kolmnurga siseringjoone keskpunkt asetseb nurgapoolitajate lõikepunktis, siis sirged  $AO$ ,  $BO$  ja  $CO$  poolitavad kolmnurga nurki.

Tähistame punktid, milles kolmnurga küljed puutuvad ringi, tähtedega  $K$ ,  $L$  ja  $M$ . Joonestame raadiuse  $OM$ . Siis nähtub täisnurksetest kolmnurkadest  $AOM$  ja  $BOM$ , et



Joonis 38.

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{OM}{AM} \text{ ja } \tan \frac{\beta}{2} = \frac{OM}{BM}.$$

Puutepunktid jaotavad kolmnurga küljed lõikudeks, mis on paarikaupa võrdsed kui ühest ja samast punktist ringile joonestatud puutujate lõigud:

$$AM = AL,$$

$$BK = BM,$$

$$CK = CL.$$

Et kõigi nende lõikude summa võrdub kolmnurga ümbermõõduga  $2p$ , siis kummagi kolmiku summa võrdub poolümbermõõduga:

$$AM + BK + CK = p \quad \text{ja} \quad BM + CL + AL = p$$

ehk

$$AM + a = p \quad \text{ja} \quad BM + b = p.$$

Siit saame, et

$$AM = p - a \quad \text{ja} \quad BM = p - b.$$

Seega on tõesti

$$\boxed{\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}} \quad \text{ja} \quad \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}.$$

Analoogiliselt võib näidata, et ka

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}.$$

Nüüd on veel vaja näidata, kuidas sissejoonestatud ringi raadius avaldub kolmnurga külgede kaudu.

Geomeetria kursusest on teada, et kolmnurga pindala võrdub kolmnurga poolümbermõõdu ja siseringjoone raadiuse korrutisega:

$$S = pr.$$

Siit saame, et

$$r = \frac{S}{p}.$$

Heroni valemist

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

saame, et

$$r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$$

ehk, võttes ka nimetaja juuresümboli alla ja taandades,

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Arvestades viimast valemit, saame nurga  $\alpha$  kohta, et

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{p-a} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

ehk, võttes ka nimetaja juuresümboli alla ja taandades,

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

Analoogiliselt leiame nurkade  $\beta$  ja  $\gamma$  kohta, et

$$\tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Viimast kolme valemit on otstarbekohane kasutada vaid siis, kui on vaja leida ainult üks kolmnurga nurk. Kui aga on vaja leida kõik kolmnurga nurgad, siis on otstarbekohasem enne arvutada siseringjoone raadius ja seejärel arvutada poolnurkade tangensid varem selles paragrahvis tuletatud valemite järgi.

Näide 1. Arvutame logaritmide abil kolmnurga nurgad, kui ta küljed on :  $a = 92,6$  m,  $b = 89,2$  m ja  $c = 75,6$  m.

Arvutame kolmnurga übermõõdu:

$$2p = 92,6 + 89,2 + 75,6 = 257,4.$$

Seejärel arvutame järgmised suurused ja leiame nende logaritmid ning arvutame  $\log r^2$ :

$$p = 128,7$$

$$p - a = 36,1 \qquad \log(p - a) = 1,5575$$

$$p - b = 39,5 \qquad \log(p - b) = 1,5966$$

$$p - c = 53,1 \qquad \log(p - c) = 1,7251$$

---


$$\text{Kontroll: } 128,7 \qquad 4,8792$$

$$\log p = 2,1096$$

---


$$\log r^2 = 2,7696$$

Nüüd arvutame  $\log r$  ja poolnurgade tangensite logaritmid ning nende järgi leiame poolnurgad ja seejärel nurgad:

$$\log r = 1,3848$$

$$\log(p - a) = 1,5575$$

---


$$\log \tan \frac{\alpha}{2} = \bar{1},8273,$$

$$\frac{\alpha}{2} = 33^{\circ}54', \quad \alpha = 67^{\circ}48'$$

$$\log(p - b) = 1,5966$$

---


$$\log \tan \frac{\beta}{2} = \bar{1},7882,$$

$$\frac{\beta}{2} = 31^{\circ}33', \quad \beta = 63^{\circ}06'$$

$$\log(p - c) = 1,7251$$

---


$$\log \tan \frac{\gamma}{2} = \bar{1},6597,$$

$$\frac{\gamma}{2} = 24^{\circ}33', \quad \gamma = 49^{\circ}06'$$

---


$$\text{Kontroll: } 180^{\circ}00'.$$

#### Ülesanded.

386. Kolmnurga küljed on 17 cm, 25 cm ja 29 cm. Arvutada selle kolmnurga suurim nurk.

387. Kolmnurga küljed on 325 m, 728 m ja 837 m. Arvutada selle kolmnurga kõik nurgad.

388. Kolmnurga küljed on 11,35 m, 16,52 m ja 23,75 m. Arvutada kolmnurga nurgad.

389. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 21 : 31 : 41. Kui suured on kolmnurga nurgad?

### § 41. Kolmnurga lahendamine.

Nagu teada, on kolmnurk määratud järgmiste elementidega:

- I. üks külj ja kaks nurka;
- II. kaks külge ja nende vaheline nurk;
- III. kaks külge ja suurema külje vastasnurk;
- IV. kolm külge.

Kolmnurga saame lahendada, kui on antud üks nimetatud elementide kolmikutest. Lahendamisevõtetega tutvumiseks vaatleme iga nimetatud juhtu eraldi.

I. Kui kolmnurgast on antud üks külj ja kaks nurka, näiteks  $\alpha$ ,  $\alpha$  ja  $\beta$ , siis ülejäänud elemendid leiame järgmiselt:

1. Kolmas nurk

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

2. Siinusteoreemi järgi

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha},$$

seega teine külj

$$b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

3. Siinusteoreemi järgi

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha},$$

seega kolmas külj

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

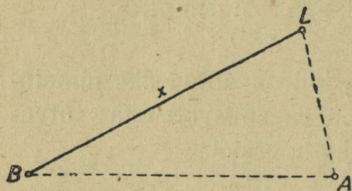
Kontrollimiseks võib kasutada koosinusteoreemi.

Ülesanne. Tuletornid  $A$  ja  $B$  asetsevad teineteisest 16,5 km kaugusel. Tornist  $A$  vaadates on tuletorn  $B$  ja merel olev laev  $L$  näha suundades, mis teineteisega moodustavad nurga  $78^{\circ}30'$ . Tornist  $B$  vaadates on tuletorn  $A$  ja laev  $L$  näha suundades, mis teineteisega moodustavad nurga  $27^{\circ}20'$ . Kui kaugel on laev tuletornist  $B$ ?

L a h e n d u s. Joonisel 39 saame:

1.

$$\begin{aligned} \angle L &= 180^{\circ} - (\angle A + \angle B) = 180^{\circ} - (78^{\circ}30' + 27^{\circ}20') = \\ &= 180^{\circ} - 105^{\circ}50' = 74^{\circ}10'. \end{aligned}$$



Joonis 39.

$$2. \frac{x}{\sin 78^{\circ}30'} = \frac{16,5}{\sin 74^{\circ}10'},$$

$$x = \frac{16,5 \cdot \sin 78^{\circ}30'}{\sin 74^{\circ}10'}.$$

Logaritmidega arvutades leiame, et

$$x = 16,8.$$

V a s t u s. Laeva kaugus tuletornist  $B$  on 16,8 km.

II. Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja nende vaheline nurk, näiteks  $a$ ,  $b$  ja  $\gamma$ , siis ülejäänud elemendid võime leida ühel järgmisest kolmest viisist.

A. Koosinusteoreemi põhjal:

$$1. c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

millest leiame külje  $c$ ;

$$2. \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

millest leiame nurga  $\beta$ ;

$$3. \cos a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

millest leiame nurga  $a$ .

Seda viisi on otstarbekohane kasutada ainult siis, kui antud külgede mõõtardvud on ühe- või kahekohalised arvud.

B. Koosinuse teoreemi ja siinuse teoreemi põhjal:

$$1. c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma,$$

millest leiame külje  $c$ ;

$$2. \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

seega

$$\sin \beta = \frac{b \sin \gamma}{c},$$

millest leiame  $\beta$ ;

$$3. \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c},$$

seega

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c},$$

millest leiame  $\alpha$ .

C. Kui antud külgede mõõtardvud on enam kui kahekohalised arvud, siis on kõige otstarbekohasem kasutada tangensiteoreemi ja siinuse teoreemi.

1. Arvutame suuruse

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

2. Tangensiteoreemi järgi on

$$\tan \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \tan \frac{\alpha + \beta}{2},$$

kust leiame  $\frac{\alpha - \beta}{2}$ .

3. Suuruste  $\frac{\alpha + \beta}{2}$  ja  $\frac{\alpha - \beta}{2}$  järgi leiame nurgad  $\alpha$  ja  $\beta$ .

#### 4. Siinuse teoreemi järgi on

$$\frac{\sin \gamma}{c} = \frac{\sin \alpha}{a},$$

kust leiame

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Kui on vaja leida ainult kolmnurga külge, siis on otstarbekohane kasutada koosinusteoreemi, kui aga on vaja leida kolmnurga nurgad, siis on sobivam kasutada tangensi-teoreemi.

**Ülesanne.** Arvutada järve pikkus  $AB$  (joonis 40), kui punktist  $C$ , mille kaugus punktist  $A$  on 570 m ja punktist  $B$  860 m, järv paistab nurgas  $79^\circ$ .

**Lahendus.** Kasutame ülesande lahendamiseks koosinusteoreemi.

$$\begin{aligned} x^2 &= 570^2 + 860^2 - 2 \cdot 570 \cdot 860 \cdot \cos 79^\circ = \\ &= 324\,900 + 739\,600 - 980\,400 \cdot 0,191 = 877\,244. \end{aligned}$$

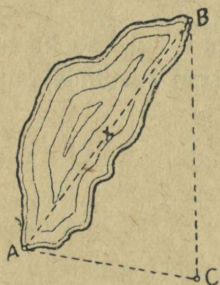
Seega

$$x = \sqrt{877\,244}$$

ehk

$$x = 937.$$

**Vastus.** Järve pikkus on 937 m.



Joonis 40.

III. Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja suurema külje vastasnurk, siis saab kolmnurga lahendada siinusteoreemi abil. Olgu kolmnurgast antud näiteks  $a$ ,  $b$  ja  $\beta$ , kusjuures  $a > b$ ; siis

$$1. \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \alpha}{a},$$

seega

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a},$$

millest leiame  $\beta$ .

$$2. \quad \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta).$$

$$3. \quad \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha},$$

seega

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}.$$

Kontrolliks võib arvutada  $b$  võrdusest

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Kui kolmnurgast on antud kaks külge ja väiksema külje vastasnurk, näiteks  $a$ ,  $b$  ja  $\alpha$ , kusjuures  $a < b$ , siis need andmed määravad teatavasti kas ühe või kaks kolmnurka või ei määra ühtki kolmnurka. Eelmise lahenduse 1. punktis saadud võrdusest

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}$$

saab järeldada, millal esineb üks või teine eelnimetatud juhtudest. Tõepoolest, arvutame andmete järgi murru

$$\frac{b \sin \alpha}{a}.$$

Võib juhtuda, et siis kas

$$\frac{b \sin \alpha}{a} < 1 \quad \text{või} \quad \frac{b \sin \alpha}{a} = 1 \quad \text{või} \quad \frac{b \sin \alpha}{a} > 1.$$

Sellele vastavalt peaks olema kas

$$\sin \beta < 1 \quad \text{või} \quad \sin \beta = 1 \quad \text{või} \quad \sin \beta > 1.$$

Vaatleme esimest juhtu. Et  $\sin \beta < 1$ , siis leidub ikka teravnurk  $\beta_1$ , mis sellele siinuse väärtusele vastab. Kuid siis leidub ka nürinurk  $\beta_2$ , millel on sama siinuse väärtus:

$\beta_2 = 180^\circ - \beta_1$ . Tõepoolest,  $\sin(180^\circ - \beta_1) = \sin \beta_1$ . Nii  $\beta_1$  kui ka  $\beta_2$  võib olla kolmnurga nurgaks, sest  $\beta$  kui suurema külje  $b$  vastasnurk võib olla nii terav- kui ka nürinurk. Sel juhul saamegi lahendamisel kaks kolmnurka, ühe nürinurkse ja teise teravnurkse.

Teisel juhul, nimelt, kui  $\sin \beta = 1$ , saame lahendamisel ühe täisnurkse kolmnurga, sest siis  $\beta = 90^\circ$ .

Viimasel juhul, kui  $\sin \beta > 1$ , ei määra  $a$ ,  $b$  ja  $\beta$  ühtki kolmnurka, sest niisugust nurka  $\beta$  ei ole, mille siinus oleks suurem kui 1.

IV. Kui kolmnurgast on antud kolm külge, siis nurkade arvutamine võib toimuda kas koosinusteoreemi põhjal või koosinuse- ja siinusteoreemi põhjal või poolnurgateoreemi põhjal.

$$\begin{array}{ll} \text{A. 1. } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; & \text{B. 1. } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \\ 2. \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; & 2. \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}; \\ 3. \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. & 3. \sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a}. \end{array}$$

C. Kui külgedede mõõtardvud on mitmekohalised arvud, siis on kõige otstarbekohasem kasutada kolmnurga lahendamiseks poolnurgateoreemi.

1. Arvutame kolmnurga poolümbermõõdu

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

ning suurused  $p - a$ ,  $p - b$  ja  $p - c$ .

2. Arvutame suuruse

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

3. Poolnurgateoreemi järgi:

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a},$$

$$\tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b},$$

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c},$$

kust leiame nurgad  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\gamma$ .

Kõigi kolme viisi puhul on soovitatav võrdust

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

kasutada ainult kontrolliks.

Ülesanne. Kui suured nurgad on kolmnurgal, mille külgede pikkused on 7,7 cm, 9,3 cm ja 14,1 cm?

Lahendus. Olgu  $a = 7,7$ ;  $b = 9,3$ ;  $c = 14,1$ .

$$\begin{aligned} 1. \quad \cos \alpha &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9,3^2 + 14,1^2 - 7,7^2}{2 \cdot 9,3 \cdot 14,1} = \\ &= \frac{86,49 + 198,8 - 59,29}{9,3 \cdot 28,2} = \frac{226}{262,3}. \end{aligned}$$

Logaritmidega arvutades leiame, et

$$\alpha = 30^\circ 30'.$$

$$2. \quad \sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a} = \frac{9,3 \cdot \sin 30^\circ 30'}{7,7}.$$

Logaritmidega arvutades leiame, et

$$\beta_1 = 37^\circ 49'$$

ja seega

$$\beta_2 = 142^\circ 11'.$$

Et nurk  $\beta$  on suuruselt keskmise külje vastasnurk, mis ei võõ olla nürinurk, siis nurk  $\beta_2$  ei saa olla otsitav nurk ja ainsaks vastuseks jääb  $\beta_1$ .

$$3. \quad \sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a} = \frac{14,1 \cdot \sin 30^{\circ}30'}{7,7}.$$

Logaritmidega arvutades leiame, et

$$\gamma_1 = 68^{\circ}20',$$

ja seega

$$\gamma_2 = 111^{\circ}40'.$$

Et kolmnurga nurkade summa peab olema  $180^{\circ}$ , siis  $\gamma_1$  ei tule vastusena arvesse ja sellena tuleb võtta  $\gamma_2$ .

Kontroll.

$$\alpha = 30^{\circ}30'$$

$$\beta = 37^{\circ}49'$$

$$\gamma = 111^{\circ}40'$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 179^{\circ}59' \approx 180^{\circ}$$

Vastus. Kolmnurga nurgad on  $30^{\circ}30'$ ,  $37^{\circ}49'$  ja  $111^{\circ}40'$ .

Märkus. Kolmnurga sisenurga leidmisel tema siinuse järgi ei tohi unustada tõsiasi, et võrrandil

$$\sin \alpha = k, \quad \text{kus} \quad 0 < k < 1,$$

on ikka kaks lahendit, mille summa on  $180^{\circ}$ ; üks neist lahendeist on teravnurk, teine — nürinurk. Vajab erilist kaalumist, missugune leitud lahendeist sobib.

Ülesanded.

390. Lahendada kolmnurgad järgmistel andmetel:

	$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1.		72	45		$58^{\circ}18'$	
2.	416	635			$28^{\circ}12'$	
3.	15,74			$31^{\circ}24'$		$69^{\circ}32'$
4.		85,76			$36^{\circ}55'$	$74^{\circ}18'$
5.			144,7	$120^{\circ}16'$	$42^{\circ}24'$	
6.		56		$52^{\circ}$		$5^{\circ}28'$

391. Lahendada kolmnurgad järgmistel andmetel:

	$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1.	17	8				$39^\circ$
2.		81,7	39,2	$122^\circ 06'$		
3.	52,84		14,88		$24^\circ 55'$	
4.	8	12	16			
5.	50	41	19			
6.	6,4	8,8	10,2			

392. Tuletornid  $M$  ja  $N$  asetsevad teineteisest 12,8 km kaugusel. Tuletornist  $M$  paistavad merel olev laev ja tuletorn  $N$  suundades, mis teineteisega moodustavad nurga  $37,8^\circ$ . Tuletornist  $N$  on samal ajal laev ja tuletorn  $M$  näha suundades, mis teineteisega moodustavad nurga  $104,7^\circ$ . Leida laeva kaugus tuletornist  $M$ .

393. Laev sõidab mööda tuletornidest  $A$  ja  $B$ , mis jäävad laeva sõidusuunast paremale. Mõõtmisest, mis toimetati enne laeva jõudmist tuletorne ühendavale sirgele, leiti, et tuletornid  $A$  ja  $B$  olid näha ühel ja samal ajal suundades, mis moodustasid laeva sõidusuunaga nurgad  $69,7^\circ$  ja  $30,6^\circ$ . Kaardi järgi on tuletornide kaugus teineteisest 15,7 km ja laeva sõidusuund moodustab tuletorne ühendava sirgega nurga  $42,1^\circ$ . Arvutada laeva kaugus tuletornist  $B$  mõõtmise hetkel.

394. Määrüknkast tahetakse läbi raiuda tunnel  $AB$ . Ehituskulude eelarvestamiseks on tarvis teada tunneli pikkust. Selle määramiseks valime vaatluspunkti  $C$ , millest on näha nii punkt  $A$  kui punkt  $B$ , ja mõõdame pikkused  $AC$  ja  $BC$  ning nurga  $C$ . Näidata, kuidas arvutada pikkust  $AB$ .

Näide.  $AC = 945$  m,  $BC = 1178$  m,  $\angle C = 65^\circ 45'$ . Arvutada  $AB$ .

395. Vulkaani kraatri läbimõõdu määramiseks valitakse kraatri serval kaks kohta  $A$  ja  $B$ , millede vahelist kaugust saab mõõta. Olgu  $AB = l$  m. Kohtadest  $A$  ja  $B$  viseeritakse mõni kolmas punkt  $C$  kraatri serval ja mõõdetakse nurgad  $CAB = \alpha$  ja  $CBA = \beta$ . Avaldada kraatri läbimõõt.

396. Punktide  $A$  ja  $B$  vahel asetsev mägi takistab nende vahelise kauguse otsest mõõtmist. Selle kauguse kaudseks määramiseks valiti punkti  $B$  läbival sirgel punktid  $C$  ja  $D$ , üks ühel pool, teine teisel pool  $B$ -d, ja nii, et neist oleks näha punkt  $A$ . Mõõtmisest saadi:  $CB = 200$  m,  $DB = 300$  m,  $\angle ACB = 58,4^\circ$  ja  $\angle ADB = 97,2^\circ$ . Arvutada punktide  $A$  ja  $B$  vaheline kaugus.

397. Nurk laeva sõidusuuna ja laevalt tuletornile võetud vaatesuuna vahel on  $\alpha$ . Kui laev on  $a$  meremiili edasi sõitnud, siis on nende suundade vaheline nurk  $\beta$ . Kui kaugelt sõidab laev tuletornist mööda?

398. Rööpküliliku küljed on 3,6 ja 4,2 m; üks rööpküliliku nurkadest on  $50^\circ 30'$ . Kui pikad on rööpküliliku diagonaalid?

399. Trapetsi  $ABCD$  alused  $AB$  ja  $CD$  on vastavalt 15 ja 29 cm. Haarad  $BC$  ja  $AD$  on vastavalt 11 ja 17 cm. Kui suur on trapetsi nurk  $D$ ?

400. Künkjal asetseb vaatetorn, mille kõrgus on 45,8 m. All orus näeme piirikivi. Viseerides torni tipust leiame piirikivi alangunurga olevat  $35^\circ 20'$ , viseerides sama punkti torni aluselt leiame piirikivi alangunurga olevat  $30^\circ 45'$ . Kui kõrge on kungas?

401. Ringisse joonestatud nelinurga  $ABCD$  küljed on:  $AB = 5$  cm,  $BC = 6$  cm,  $CD = 8$  cm ja  $DA = 10$  cm. Kui pikk on diagonaal  $BD$ ?

402. Nelinurga  $ABCD$  küljed on:  $AB = 38$  m,  $BC = 24$  m,  $CD = 62$  m ja  $DA = 36$  m; diagonaal  $BD = 50$  m. Kui suur on diagonaal  $AC$ ?

403. Nelinurga küljed on järjestikku: 128 cm, 182 cm, 350 cm ja 420 cm; üks diagonaal on 360 cm. Kui suur on teine diagonaal?

## § 42. Ülesandeid kordamiseks.

404. Täisnurkse kolmnurga kaatedid on 14 cm ja 48 cm. Arvutada kummagi teravnurga funktsioonid. Leida teravnurgad.

405. Täisnurkse kolmnurga teravnurga  $\alpha$  siinus on  $\frac{1}{3}$ . Missuguse osa hüpotenuusist moodustab kaatet  $a$ ?

406. Täisnurkse kolmnurga teravnurga  $\beta$  koosinus on  $\frac{5}{8}$ . Mitu protsenti hüpotenuusist on nurga  $\beta$  lähiskaatet?

407. Missuguse teravnurga koosinus on võrdne  $45^{\circ}$ -se nurga tangensiga?

408. Missuguse teravnurga tangens on võrdne  $30^{\circ}$ -se nurga siinusega?

409. Raudtee tõus on 1:250. Kui suur on raudtee tõusunurk?

410. Kui kõrgel oli päike, kui 8,5 m kõrgune telefoni-post heitis 13,6 m pikkuse varju? Kuidas muutus päikese kõrgus, kui posti vari pikenes 0,8 m võrra?

411. Õhupalli, mille kõrgus koos korviga on 12 m, nähti maapinnalt  $1^{\circ}$ -ses nurgas. Kui kõrgel oli õhupall, kui korvi põhja kõrgusnurk oli samal hetkel  $48^{\circ}$ ?

Õhupalli liikudes oli teiseks vaatlushetkeks vaatenurk vähenenud  $12'$  võrra ja korvi põhja kõrgusnurk vähenenud  $2^{\circ}$  võrra. Mille võrra oli muutunud õhupalli kõrgus?

412. Peegli ees asetseb kaks punkti, mille kaugused peegli tasapinnast on 2 cm ja 10 cm. Punktide kaugus teine-

teisest on 17 cm. Kui suur on niisuguse valguskiire lange-  
 misnurk, mis väljudes ühest punktist pärast peegeldumist  
 läbib teist punkti? Kuidas muutub langemisnurk, kui peegli  
 kaugust mõlemast punktist suurendada 2 cm võrra?

413. Anda järgmiste avaldiste väärtused:

- |                     |                        |                        |                     |
|---------------------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 1. $\sin 270^\circ$ | 2. $\sin (-180^\circ)$ | 3. $\sin (-270^\circ)$ | 4. $\sin 630^\circ$ |
| $\cos 180^\circ$    | $\cos 270^\circ$       | $\cos (-90^\circ)$     | $\cos 990^\circ$    |
| $\tan 180^\circ$    | $\tan 270^\circ$       | $\tan (-180^\circ)$    | $\tan 450^\circ$    |
| $\cot 180^\circ$    | $\cot 270^\circ$       | $\cot (-90^\circ)$     | $\cot (-360^\circ)$ |

414. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\sin 90^\circ \cdot \cos 90^\circ + \sin 0^\circ \cdot \cos 0^\circ$ | 2. $\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ$ |
| $\sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ + \tan 45^\circ$                      | $\tan^2 30^\circ + \cot^2 30^\circ$    |
| $(\sin 30^\circ + \cos 30^\circ)^2$                                      | $\cot^2 60^\circ - \tan^2 60^\circ$    |

415. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\sin \frac{\pi}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \cos 0 \cdot \cos \frac{\pi}{4}$          | 2. $\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{3}$ |
| $\sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6}$ | $\cot \frac{\pi}{6} - \cot \frac{\pi}{3}$    |

416. Lahendada täisnurksed kolmnurgad järgmistel  
 andmetel:

- |              |                         |             |                         |
|--------------|-------------------------|-------------|-------------------------|
| 1. $c = 23$  | $\beta = 28^\circ 04'$  | 3. $b = 40$ | $\alpha = 42^\circ 41'$ |
| 2. $a = 2,1$ | $\alpha = 46^\circ 24'$ | 4. $c = 53$ | $a = 28$                |

417. Lahendada võrdhaarsed kolmnurgad järgmistel  
 andmetel:

- |             |                         |              |                         |
|-------------|-------------------------|--------------|-------------------------|
| 1. $b = 15$ | $a = 16$                | 3. $b = 5,8$ | $\alpha = 87^\circ 12'$ |
| 2. $a = 14$ | $\sigma = 32^\circ 30'$ | 4. $b = 3,4$ | $\beta = 61^\circ 56'$  |

418. Rombi külje pikkus on 14,2 cm; ühe diagonaali  
 pikkus on 19,8 cm. Kui pikk on teine diagonaal? Kui suured  
 on rombi nurgad?

419. Kui suured on täisnurkse kolmnurga teravnurgad,  
 kui kolmnurga külgede pikkused on järjestikused täisarvud?

420. Kaldpind moodustab rõhttasandiga  $32^{\circ}$ -se nurga. Kui suure tungiga saab tasakaalustada kaldpinnal asetsevat 56,4-kilogrammist koormat?

421. Täisnurkse kolmnurga pindala on  $12,34 \text{ m}^2$  ja üks nurk on  $36,4^{\circ}$ . Leida kolmnurga hüpotenuus.

422. Täisnurkse kolmnurga pindala on  $256 \text{ cm}^2$  ja üks kaatet on  $32 \text{ cm}$ . Leida kolmnurga teravnurgad.

423. Leida korrapärase kümnenurga ümber kujundatud ringjoone raadius, kui kümnenurga apoteem on  $26,8 \text{ cm}$ .

424. Kui suur on piirdenurk, mis toetub  $17,26$ -meetrisele kõõlule, kui ringi raadius on  $59,09 \text{ m}$ ?

425. Ringi raadius on  $36,45 \text{ m}$ . Kui pikk kõõl vastab  $35^{\circ}$ -sele piirdenurgale?

426. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on  $681 \text{ m}$  ja üks nurkadest on  $71,1^{\circ}$ . Leida kolmnurga küljed.

427. Täisnurkse kolmnurga pindala on  $4 \text{ m}^2$  ja hüpotenuus on  $4 \text{ m}$ . Leida kolmnurga teravnurgad.

428. Võrdhaarse kolmnurga ümbermõõt on  $39,36 \text{ m}$  ja tipunurk on  $26,6^{\circ}$ . Leida kolmnurga küljed.

429. Täisnurkse kolmnurga pindala on  $819 \text{ cm}^2$  ja üks nurkadest on  $32^{\circ}45'$ . Leida kolmnurga küljed.

430. Täisnurkse kolmnurga teravnurk on  $24^{\circ}15'$ . Selle nurga vastaskaatet on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja jaotuspunktid on ühendatud vastasnurga tipuga. Kui suurteks osadeks jaotub nurk?

431. Ringis, mille raadius on  $5 \text{ cm}$ , on joonestatud  $8 \text{ cm}$  ja  $4 \text{ cm}$  pikkusega kõõlud. Mitu korda on esimesele kõõlule vastav kesknurk suurem teisele kõõlule vastavast kesk-nurgast?

432. Kahe võrdsete kõrgustega võrdhaarse kolmnurga tipunurgad on  $20^\circ$  ja  $60^\circ$ . Mitu korda on teise kolmnurga pindala suurem esimese kolmnurga pindalast?

433. Kolmnurga kaks külge on  $a = 32$  cm ja  $b = 18$  cm. Nende külgede projektsioonid kolmandale küljele on vastavalt  $a' = 14$  cm ja  $b' = 8$  cm. Kui suured on nende külgede lähisnurgad  $\beta$  ja  $\alpha$ ?

434. Korrapärase viisnurga pindala on  $36$  cm<sup>2</sup>. Kui suur on viisnurga külg?

435. Võrdhaarse kolmnurga pindala on  $258,4$  cm<sup>2</sup> ja üks nurk on  $113^\circ$ . Leida kolmnurga küljed.

436. Võrdhaarse kolmnurga alus on  $59,18$  m ja alusnurk on  $61,7^\circ$ . Leida kolmnurga übermõõt.

437. Võrdhaarse kolmnurga haar on  $146$  cm ja tipunurk on  $58^\circ 32'$ . Leida kolmnurga pindala.

438. Võrdhaarse kolmnurga pindala on  $636$  cm<sup>2</sup> ja kolmnurga suurim nurk on  $92^\circ 42'$ . Leida kolmnurga haar.

439. Maja teise korra aknast,  $a$  m kõrguselt üle maa-pinna, leiame raadiomasti tipu kõrgusnurgana  $\alpha$ ; maja kolmanda korra aknast, mis on eelmise akna kohal, kuid temast  $b$  m kõrgemal, leiame sama masti tipu kõrgusnurgana  $\beta$ . Avaldada raadiomasti kõrgus.

Näide.  $a = 5,7$ ,  $b = 4,2$ ,  $\alpha = 27,7^\circ$ ,  $\beta = 24,2^\circ$ .

Arvutada raadiomasti kõrgus.

440. Kui pikk on ringjoone kaar, mis vastab kesknurgale  $\varphi$ , kui ringjoone raadius on  $r$  cm?

Näide.  $r = 10$ ;  $\varphi = 30, 45, 90, 120, 180$ .

Arvutada kaarte pikkused.

441. Mitu kraadi sisaldab  $s$  cm pikkune ringjoone kaar, kui ringjoone raadius on  $r$  cm?

442. Kui pikk peaks olema ringjoone raadius, et  $\varphi$ -kraadisele kesknurgale vastaks  $s$  cm pikkune ringjoone kaar?

N ä i d e.  $\varphi = 48$ ,  $s = 10$ . Arvutada ringjoone raadius.

443. Tallinn ja Riia asetsevad ligikaudu ühel ja samal meridiaanil<sup>1</sup>. Kui kaugel on Riia Tallinnast, kui Tallinna geograafiline laius on  $59^{\circ}26'$  ja Riia geograafiline laius on  $56^{\circ}58'$ ? Maakera raadius on 6 370 km.

444. Kaplinn ja Nordkap asetsevad ligikaudu ühel ja samal meridiaanil. Kaplinna lõunalaius on  $33^{\circ}56'$  ja Nordkapi põhjalaius on  $71^{\circ}10'$ . Kui kaugel asetsevad need kaks kohta teineteisest?

445. Millisel geograafilisel laiusel on geograafilise paralleeli raadius  $\frac{1}{2}$  maakera raadiusest?

446. Oletades, et Tallinn ja Leningrad asetsevad ühel ja samal paralleelil<sup>2</sup>, mille geograafiline laius on  $59^{\circ}23\frac{1}{2}'$ , ja teades, et Tallinna idapikkus on  $25^{\circ}06'$  ja Leningradi idapikkus on  $30^{\circ}20'$ , leida, kui pikk on Tallinna ja Leningradi vaheline paralleeli kaar.

447. Kui kiiresti liigub Tallinn maakera pöörlemisel?

448. Kahe ratta läbimõõdud on 120 cm ja 40 cm; nende keskpunktid asetsevad teineteisest 160 cm kaugusel. Kui pikk peab olema veorihm, mis peab ühe ratta pöörlemisenergia kandma üle teisele?

449. Kõõl, mis ringist eraldab segmendi, on 18,5 mm pikk; segmendi kõrgus on 3,2 mm. Missugune kesknurk vastab segmendi kaarele? Kui suur on ringi läbimõõt?

450.  $38^{\circ}$ -se piirdenurga üheks haaraks on ringi läbimõõt ja teiseks haaraks on kõõl, mille pikkus on 24 cm. Kui pikk on kaar, millele toetub piirdenurk?

<sup>1</sup> Riia on  $2,5'$  lääne pool Tallinna meridiaanist.

<sup>2</sup> Leningradi geograafiline laius on  $59^{\circ}56\frac{1}{2}'$ .

451. Ringi raadius on 12 cm. Arvutada selle ringi 50°-se sektori pindala.

452. Ringi raadius on 28 cm. Arvutada selle ringi 72°-se segmendi pindala.

453. Arvutada segmendi pindala, kui ringi raadius on 3,4 m ja segmendi kõõl on 2,6 m.

454. Põlevkivikihi kaldenurk rõhttasandi suhtes on 20°. Vertikaalses puuraugus põlevkivi esineb 4 m pikkuselt. Kui paks on põlevkivikiht?

455. Lõik, mille pikkus on 18 cm, on projekteeritud mingile sirgele. Kui suur on lõigu ja sirge vaheline nurk, kui projektsiooni pikkus on 14 cm?

456. Murdjoone lõikude projektsioonid mingile sirgele on 10 cm, 15 cm, 12 cm ja 22 cm. Lõigud moodustavad selle sirgega nurgad 40°, 20°, -10° ja -30°. Kui pikk on murdjoon?

457. Murdjoon koosneb lõikudest, mille pikkused on 6 cm, 8 cm, 7 cm, 10 cm ja 4 cm ja mis projektsiooniteljega moodustavad nurgad 70°, 35°, 0°, -45° ja -80°. Arvutada murdjoone projektsiooni pikkus.

458. 120°-ne kaar on projekteeritud läbimõõdule, mis läbib kaare üht otspunkti. Kui pikk on kaare projektsioon?

459. Sirged  $s$  ja  $t$  on risti teineteisega. Lõik  $a$  moodustab sirgega  $s$  nurga 26°. Tema projektsioon sirgele  $s$  on 125 cm pikk. Kui pikk on lõigu  $a$  projektsioon sirgele  $t$ ? Kui pikk on lõik  $a$ ?

460. Arvutada teravnurga  $\alpha$  funktsioonid, kui  $\cos \alpha = \frac{12}{37}$ .

461. Arvutada nürinurga  $\beta$  funktsioonid, kui  $\tan \beta = -\frac{63}{16}$ .

462. Leida nurk, mille siinus on 3 korda suurem selle nurga koosinusest.

463. Leida nurk, mille tangens on 2 korda suurem selle nurga siinusest.

464. Leida nurk, mille siinus on  $\frac{1}{2}$  selle nurga koosinusest.

465. Lihtsustada avaldised:

1.  $(1 - \cos^2 a) (1 + \tan^2 a)$

$$\sin^2 a \cdot (1 + \cot^2 a)$$

$$(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2$$

$$(\sin \beta - \cos \beta)^2 + \frac{2 \sin^2 \beta}{1 + \tan^2 \beta}$$

2.  $\frac{\tan^2 \varphi}{1 + \tan^2 \varphi}$

$$\frac{\tan^2 \delta}{1 - \cos^2 \delta}$$

$$\frac{\tan \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha + \tan \beta}$$

$$\tan^2 \varphi - \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

466. Leida nurk, mille siinuse ja koosinuse summa on  $\sqrt{2}$ .

467. Kas on võimalik, et mingi nurga siinuse ja koosinuse summa on  $\sqrt{3}$ ?

468. Jaotada täisnurk kahte ossa nii, et ühe osa siinus oleks 2 korda suurem teise osa siinusest.

469. Jaotada täisnurk kahte ossa nii, et ühe osa tangens oleks 4 korda suurem teise osa siinusest.

470. Täisnurkse kolmnurga pindala on 441 cm<sup>2</sup> ja hüpoteenus on 84 cm. Leida kolmnurga teravnurgad.

471. Jaotada sirgnurk kahte ossa nii, et ühe osa siinus võrduks teise osa kolmekordse koosinusega.

472. Mitmenda veerandi nurgad on järgmised nurgad:

$$300^\circ, \quad 520^\circ, \quad -100^\circ, \quad -275^\circ, \quad 640^\circ?$$

473. Mitmenda veerandi nurgad rahuldavad võrrandit

$$\tan x = -\cos x?$$

474. Mitmenda veerandi nurgad ja millised täisnurga kordsed rahuldavad võrrandit

$$\tan x + \sin x = 0?$$

475. Kas kolmanda veerandi nurk võib rahuldada võrrandit

$$2 \sin x + 3 \cos x = 1,5?$$

476. Kas neljanda veerandi nurk võib rahuldada võrrandit

$$3 \sin x + \tan x = 0?$$

477. Kas on nurki, mis rahuldavad võrrandit

$$5 \sin x - \cos x = 3?$$

478. Arvutada avaldise

$$3 \sin x - 2 \cos x,$$

väärtused, kui  $x = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ .

479. Arvutada avaldise

$$\sin x + 2 \cos x,$$

väärtused, kui  $x$  kasvab  $0^\circ$ -st  $360^\circ$ -ni iga  $45^\circ$  tagant.

480. Kuidas muutub funktsiooni

$$\tan^2 x - \tan x$$

väärtuste märk ühe täispöörde piires?

481. Lihtsustada avaldised:

$$\begin{aligned} & \sin(180^\circ + \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha) \sin(180^\circ - \alpha) \\ & \cos(180^\circ + \alpha) \cos(90^\circ + \alpha) + \sin(180^\circ + \alpha) \sin(90^\circ + \alpha) \\ & \sin(\beta + 90^\circ) - \sin(\beta - 90^\circ) + 3 \cos \beta - 3 \cos(360^\circ - \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(-\varphi)}{\sin(180^\circ + \varphi)} - \frac{\tan(90^\circ + \varphi)}{\cot \varphi} + \frac{\cos \varphi}{\sin(90^\circ + \varphi)} \\ & \frac{\sin(360^\circ - \psi) \cos(180^\circ + \psi)}{\tan(270^\circ + \psi)} \end{aligned}$$

482. Taandada teravnurga funktsioonideks:

1.  $\sin 320^\circ$       3.  $\cos 430^\circ$       5.  $\tan 512^\circ$   
2.  $\sin(-150^\circ)$     4.  $\cos(-290^\circ)$     6.  $\tan(-208^\circ)$

483. Lihtsustada järgmised avaldised:

1.  $\sin \varphi + \sin(2\pi + \varphi) + \sin(4\pi + \varphi) + \sin(-\varphi)$   
2.  $\sin \varphi + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right) + \sin(3\pi + \varphi)$   
3.  $[1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \varphi\right)][1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right)]$   
4.  $\frac{\sin \varphi \tan(\pi + \varphi)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \tan \varphi}$

484. Olgu  $\alpha$  ja  $\beta$  teise veerandi nurgad ning  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  ja  $\cos \beta = -\frac{8}{17}$ . Arvutada  $\sin(\alpha + \beta)$  ja  $\cos(\alpha - \beta)$ . Mitmenda veerandi nurgad on  $\alpha + \beta$  ja  $\alpha - \beta$ ?

485. Taandada järgmised murrud:

1.  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$       3.  $\frac{\sin \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha - \cos \beta}$   
2.  $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$       4.  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$

486. Väljendada nurga  $\alpha$  funktsioonides:

1.  $\sin(30^\circ + \alpha)$     3.  $\sin(60^\circ - \alpha)$     5.  $\tan(45^\circ + \alpha)$   
2.  $\cos(45^\circ - \alpha)$     4.  $\cos(60^\circ - \alpha)$     6.  $\tan(60^\circ - \alpha)$

487. Näidata, et kolmnurga nurkade vahel kehtib seos:

$$\cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta.$$

488. Teravnurga siinus on 0,6. Arvutada kaks korda suurema nurga siinus ja koosinus. Mitmendas veerandis lõpeb see nurk?

489. Nürinurga koosinus on  $-0,4$ . Arvutada kaks korda suurema nurga siinus ja koosinus. Mitmendas veerandis lõpeb see nurk?

490. Teravnurga tangens on 1,2. Arvutada kaks korda suurema nurga tangens. Mitmendas veerandis lõpeb see nurk?

491. Olgu  $\sin a + \cos a = a$ . Arvutada  $\sin 2a$ .

492. Arvutada avaldise  $\frac{(\cos a - \sin a)^2}{\cos^2 \cdot 2a}$  väärtus, kui  $\sin 2a = 0,7$ .

493. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

1.  $\cos(38^\circ + a) \sin(52^\circ - a) + \sin(38^\circ + a) \cos(52^\circ - a)$

2.  $\cos^2(45^\circ - a) - \sin^2(45^\circ - a) - \sin 2a$

3.  $\frac{\sin^2(\frac{\pi}{4} + a) - \sin^2(\frac{\pi}{4} - a)}{\cos^2(\frac{\pi}{4} + a) - \cos^2(\frac{\pi}{4} - a)}$

4.  $\frac{\sin 2a}{2 \sin a} - \frac{\sin a}{\tan a}$

494. Anda logaritmitav kuju järgmistele avaldistele:

1.  $\sin 50^\circ + \frac{1}{2}$

4.  $1 - 2 \sin 15^\circ$

2.  $\frac{3}{4} - \sin^2 44^\circ$

5.  $3 - 4 \cos^2 56^\circ 30'$

3.  $\frac{1}{2} + \cos 82^\circ$

6.  $\cos^2 20^\circ - \cos^2 15^\circ$

495. Anda logaritmitav kuju järgmistele avaldistele:

1.  $\sin a + \tan a$

3.  $2 \sin a - \sin 2a$

2.  $\cos a - \cot a$

4.  $2 \cos a + \sin 2a$

496. Valem

$$\tan a + \tan \beta = \frac{\sin(a + \beta)}{\cos a \cos \beta}$$

annab kahe nurga tangensite summale logaritmitava kuju. Tuletada sellest valemist

1. kahe nurga tangensite vahe logaritmitav kuju,

2. kahe nurga kootangensite summa logaritmitav kuju.

497. Kasutades eelmise ülesande valemeid, anda logaritmitav kuju avaldistele:

1.  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta}$

3.  $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}$

2.  $\tan \alpha + \cot \alpha$

4.  $\cot \alpha - \tan \alpha$

498. Leida kõik nurgad  $0^\circ$  ja  $360^\circ$  vahelt, mille siinus on 0,6, ja arvutada nende nurkade koosinused, tangensid ja kootangensid.

499. Leida kõik nurgad  $0^\circ$  ja  $720^\circ$  vahelt, mille koosinus on  $\frac{12}{13}$ , ja arvutada nende nurkade siinused, tangensid ja kootangensid.

500. Leida kõik nurgad vahemikus  $0^\circ$  ja  $360^\circ$ , mille tangens on 2, ja arvutada nende nurkade siinused, koosinused ja kootangensid.

501. Leida kõik nurgad vahemikus  $0^\circ$  ja  $720^\circ$ , mille tangens on  $-4$ , ja arvutada nende nurkade siinused, koosinused ja kootangensid.

502. Lahendada järgmised võrrandid:

1.  $\sin(x + 30^\circ) = \sin x$       3.  $\sin(45^\circ - 2x) = \cos x$   
2.  $\cos(x - 60^\circ) = \sin 2x$       4.  $\tan(x + 50^\circ) = \tan 3x$

503. Lahendada järgmised võrrandid:

1.  $1 - \cos 2x = \sin x$       5.  $\tan 2x + \cot 2x = 3$   
2.  $\tan^2 x = 10 \sin x$       6.  $\tan x - \cot x = \frac{4}{3} \sin 2x$   
3.  $2 \sin 2x = 3 \cos x$       7.  $\tan x + \cot x = 4 \sin 2x$   
4.  $\tan 3x \cdot \cot 2x = 1$       8.  $\sin x = \tan(\pi - x)$

504. Lahendada järgmised võrrandid:

1.  $3 \sin x + \cos x = 0$       5.  $\sin 5x + \sin 3x = \cos x$   
2.  $2 \sin x - 9 \cos x = 7$       6.  $\cos 3x + \cos 2x = 0$   
3.  $2 \tan x + 3 \cot x = 5$       7.  $\tan x = 2 \cos x$   
4.  $\tan^2 x + 4 \sin^2 x = 6$       8.  $\cos^2 x = \sin 2x$

H 505. Leida teravnurk, mis rahuldab võrrandit

$$\frac{\tan x}{\tan 2x} - \frac{\tan 2x}{\tan x} = 2.$$

M 506. Kolmnurga kaks külge on 8 m ja 5 m. Esimese külje vastasnurk on kaks korda suurem kui teise külje vastasnurk. Kui suur on kolmnurga kolmas külge?

H 507. Leida teravnurgad, mis rahuldavad võrrandeid:

$$1. 10^{\log \sin x} = 0,5 \qquad 2. 10^{\log \tan x} = 1$$

T 508. Näidata, et kolmnurga nurkade vahel kehtib seos  $\sin^2 \gamma = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \gamma$ .

H 509. Kolmnurga übermõõt on 80 cm ning kolmnurga kaks nurka on  $80^\circ$  ja  $50^\circ$ . Arvutada kolmnurga überjoonestatud ringjoone raadius.

H 510. Lahendada kolmnurgad järgmistel andmetel:

$$\begin{array}{lll} 1. a = 195 & b = 169 & \alpha = 67^\circ 23' \\ 2. a = 841 & \alpha = 126^\circ 52' & \gamma = 9^\circ 32' \\ 3. c = 10,4 & \alpha = 39,0 & \alpha = 112^\circ 37' \end{array}$$

H 511. Lahendada kolmnurgad järgmistel andmetel:

$$\begin{array}{lll} 1. a = 4,1 & b = 1,7 & \gamma = 107^\circ 57' \\ 2. a = 82,1 & b = 33,3 & c = 57,7 \end{array}$$

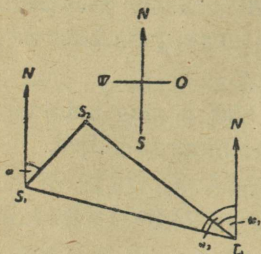
H 512. Kolmnurgas, mille küljed moodustavad aritmeetilise jada, on üks külge 5 cm ja selle külje vastasnurk on  $120^\circ$ . Leida kolmnurga teised küljed.

M 513. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on jaotatud kolmeks võrdseks osaks ja hüpotenuusi jaotuspunktid on ühendatud täisnurga tipuga. Kui suurteks osadeks jaotub täisnurk?

M 514. Kolmnurga küljed on 7 m, 8 m ja 12 m. Kui suurteks osadeks jaotab suurima külje poolitaja selle külje vastasnurga?

- M 515. Kolmnurga nurgad suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Kuidas suhtuvad kolmnurga küljed?
- M 516. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 2 : 3 : 4. Kuidas suhtuvad kolmnurga nurgad?
- A 517. Ringisse raadiusega  $r = 20$  cm on joonestatud kolmnurk, milles  $\alpha = 58^\circ$  ja  $\beta = 63^\circ$ . Arvutada kolmnurga küljed ja pindala.
- M 518. Kolmnurga übermõõt on 600 m ning kolmnurga kaks nurka on  $29,6^\circ$  ja  $84,9^\circ$ . Leida kolmnurga küljed.
- H 519. Kolmnurga kahe külje summa on 21,12 m ning nende külgede vastasnurgad on  $54,1^\circ$  ja  $71,8^\circ$ . Leida kolmnurga küljed.
- M 520. Leida kolmnurga pindala, kui kolmnurga kaks külge on 58,2 cm ja 74,4 cm ning nende vaheline nurk on  $66,6^\circ$ .
- M 521. Leida kolmnurga nurgad, kui kolmnurga pindala on  $78 \text{ m}^2$  ning kolmnurga kaks külge on 13,8 m ja 24,6 m.
- A 522. Kolmnurga pindala on  $21,5 \text{ cm}^2$  ning kolmnurga kaks nurka on  $32,4^\circ$  ja  $63,8^\circ$ . Leida kolmnurga küljed.
- MV 523. Sirge jõe ühel kaldal võetakse kaks punkti A ja B, millede vaheline kaugus on 41,2 m. Punktidest A ja B viseeritakse vastaskaldal olevale puule P; vaatejooned AP ja BP moodustavad sirgega AB vastavalt nurgad  $68^\circ 04'$  ja  $71^\circ 13'$ . Arvutada jõe laius.
- K 524. Nelinurga küljed on järjestikku: 110 m, 84 m, 55 m ja 42 m ning viimase kahe külje vaheline nurk on  $70^\circ$ . Arvutada nelinurga pindala.
- E 525. Nelinurga küljed on järjestikku: 16 m, 18 m, 24 m ja 26 m; üks diagonaal on 36 m. Arvutada nelinurga pindala.
- M<sub>üks</sub> 526. Matkaja on sattunud temale tundmatule maa-alale. Oma asukohast P ta näeb kolme mäetippu A, B ja C, milledest A ja B paistavad talle ühes ja samas suunas ja milledest

A on talle kõige lähemal. Kaardi järgi on  $AB = 9,4$  km,  $BC = 6,0$  km ja  $AC = 11,2$  km. Matkaja möödab nurga  $BPC$  ja leiab selle olevat  $12^\circ$ . Kui kaugel on matkaja mäest C?



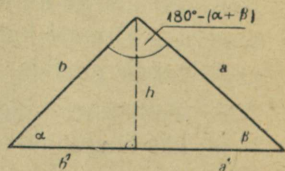
Joonis 41.

saab määrata laeva kaugused kummagi sadamani  $LS_1$  ja  $LS_2$  ja seega ka tema asukoha merel. 1) Anda valemid kauguste  $LS_1$  ja  $LS_2$  arvutamiseks. 2) Arvutada  $LS_1$  ja  $LS_2$ , kui  $\omega_1 = 53,4^\circ$ ,  $\omega_2 = 78,8^\circ$ ,  $\omega = 24,1^\circ$  ja  $l = 84,6$  mere-miili.

**528.** Punktist A vaadates näeme torni seisvat põhja suunas; ta tipp paistab kõrgusnurgas  $17^\circ$ . Liikudes 70 m võrra ida poole punktisse B, näeme torni nihkununa  $40^\circ$  võrra põhjast lääne poole. Arvutada torni kõrgus.

**529.** Avaldada lõigud  $h$ ,  $a'$  ja  $b'$  joonisel 42 kolmnurga elementide kaudu ja tuletada kahe nurga siinuse summa valem, lähtudes kolmnurga kahe külje ja nende vahelise nurga kaudu avaldatud pindala valemist.

**530.** Avaldada võrdhaarse kolmnurga pindala ta haara ja tipunurga kaudu ning lähtudes sellest valemist tuletada kahekordse nurga siinuse valem.



Joonis 42.

M 531. Kontrollida mõnede lihtsate numbriliste andmete varal järgmise kolmnurga pindala valemi kehtivust:

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4)}.$$

M 532. Kontrollida mõnede lihtsate numbriliste andmete varal järgmiste kõõnelinurga pindala valemite kehtivust:

$$1. \quad S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$2. \quad S = \frac{1}{4} \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 - 2(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 8abcd},$$

kus tähed  $a, b, c$  ja  $d$  tähendavad nelinurga külgede pikkusi ning  $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ .

Kolmnurkade lahendamise mitmekülgseks harjutamiseks on selle raamatu lõpus toodud täisnurksete, võrdhaarsete ja kaldnurksete kolmnurkade tabelid, milledes on antud mõnede kolmnurkade kõik elemendid ja pindala. Valinud mingi tabelis esineva kolmnurga ja võtnud tabelist vajalikud elemendid ning arvutanud nende järgi ülejäänud elemendid, võib oma arvutustulemusi kontrollida, võrreldes neid tabelis antud ülejäänud andmetega.

Täisnurksete kolmnurkade tabel.

Nr.	$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$S$
1.	5	12	13	22°37'	67°23'	30
2.	8	15	17	28°04'	61°56'	60
3.	20	21	29	45°36'	46°24'	210
4.	16	63	65	14°15'	75°45'	504
5.	15	112	113	7°38'	82°22'	840
6.	250	575	627	25°30'	66°30'	71880
7.	522	760	922	34°29'	55°31'	1,984 · 10 <sup>5</sup>
8.	7500	4115	8551	61°18'	28°42'	1,543 · 10 <sup>7</sup>
9.	391	2469	2500	9°00'	81°00'	4,287 · 10 <sup>5</sup>
10.	3081	1477	3416	64°23'	25°37'	2,276 · 10 <sup>6</sup>

### Vördhaarsete kolmnurkade tabel.

Nr.	$a$	$b = c$	$\alpha$	$\beta = \gamma$	$S$
1.	6	5	73°44'	53°08'	12
2.	25	14	52°52'	73°44'	168
3.	40	29	87°12'	46°24'	420
4.	41	18	25°22'	77°19'	360
5.	55	110	28°58'	73°31'	$2,929 \cdot 10^3$
6.	291	242	73°54'	53°03'	$2,815 \cdot 10^4$
7.	1427	5000	33°10'	73°25'	$3,419 \cdot 10^6$
8.	1150	627	433°00'	23°30'	$1,438 \cdot 10^5$
9.	4482	5450	48°40'	65°40'	$1,093 \cdot 10^7$
10.	6358	7979	46°48'	66°36'	$2,321 \cdot 10^7$

### Kaldnurksete kolmnurkade tabel.

Nr.	$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$S$
1.	5	6	7	44°25'	57°07'	78°28'	14,70
2.	4	5	7	34°03'	44°25'	101°32'	12,97
3.	5	7	11	19°41'	28°08'	132°11'	9,798
4.	13	14	15	53°08'	59°29'	67°23'	84,00
5.	13	20	21	36°52'	67°25'	75°45'	126,00
6.	26	75	91	14°15'	45°14'	120°31'	840,00
7.	9	65	70	6°22'	53°08'	120°31'	252,00
8.	87	65	76	75°45'	46°24'	57°51'	2394
9.	90	17	89	87°55'	10°53'	81°12'	756,00
10.	400	600	888	21°56'	34°04'	124°00'	99,49
11.	106	128	150	43°57'	56°56'	79°07'	6662
12.	178	642	790	7°58'	29°58'	142°04'	$3,513 \cdot 10^4$
13.	195	169	182	67°23'	53°08'	59°29'	$1,420 \cdot 10^4$
14.	195	169	52	112°37'	53°08'	14°15'	$4,056 \cdot 10^3$
15.	104	390	418	14°15'	67°23'	98°22'	$2,006 \cdot 10^4$
16.	1100	1000	892	70°50'	59°10'	50°00'	$4,213 \cdot 10^5$
17.	10000	9000	4852	87°01'	64°00'	28°59'	$2,180 \cdot 10^7$
18.	10000	6000	5908	114°14'	33°10'	32°36'	$1,616 \cdot 10^7$
19.	10000	6000	8718	83°25'	36°55'	60°00'	$2,598 \cdot 10^7$
20.	8000	5001	7173	80°00'	38°00'	62°00'	$1,766 \cdot 10^7$
21.	895	688	1023	59°10'	41°18'	79°32'	$3,028 \cdot 10^5$
22.	345	2270	2410	7°44'	62°16'	110°00'	$3,679 \cdot 10^5$
23.	348	1450	1682	9°52'	43°36'	126°52'	$2,018 \cdot 10^5$
24.	1055	1907	1225	30°32'	113°19'	36°09'	$3,934 \cdot 10^5$
25.	8214	3330	9768	53°08'	18°55'	107°57'	$1,301 \cdot 10^7$

## Vastused.

Vastuste arvutamisel on eeldatud, et ülesannete andmed on ligikaudsed arvud, millede kõik numbrid on õiged, s. o. et andmete vead ei ületa nende viimase järgu  $\frac{1}{2}$  ühikut. Seoses sellega on vastused antud täpsusega (numbrite arvuga), mis vastab andmete selle eelduse kohasele täpsusele. Vastuste viimased numbrid, mis pole täiesti usaldatavad, on trükitud väiksemas kirjas.

---

- |     |                     |     |                       |
|-----|---------------------|-----|-----------------------|
| 19. | 14,4 <sup>0</sup> . | 49. | 64 cm <sup>2</sup> .  |
| 20. | 3,4 <sup>0</sup> .  | 50. | 18,3 m.               |
| 21. | 0,9 <sup>0</sup> .  | 51. | 30 meremiili.         |
| 23. | 123 m.              | 52. | 4,4 m.                |
| 24. | 15,6 km.            | 70. | 23 <sup>0</sup> .     |
| 26. | 95 cm.              | 71. | 30 <sup>0</sup> .     |
| 27. | 9,3 m.              | 72. | 36 <sup>0</sup> 32'.  |
| 41. | 85 <sup>0</sup> .   | 73. | 54,5 <sup>0</sup> .   |
| 42. | 47 <sup>0</sup> .   | 74. | 60 <sup>0</sup> .     |
| 43. | 42 <sup>0</sup> .   | 75. | 58 <sup>0</sup> .     |
| 44. | 45,3 <sup>0</sup> . | 77. | 6,2 m.                |
| 45. | 63,9 <sup>0</sup> . | 78. | 0,6 km.               |
| 46. | 74 m.               | 79. | 74,5 m.               |
| 47. | 2,1 m.              | 81. | 2,8 m.                |
| 48. | 44 m.               | 99. | 296 cm <sup>2</sup> . |

114.  $35^{\circ}16'$ .
117.  $\tan \alpha = 1,020,$   
 $\cot \alpha = 0,9803.$
118.  $\sin \alpha = 0,8944,$   
 $\cos \alpha = 0,4472.$
122.  $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}.$
124.  $\frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}.$
125.  $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1}.$
126. 6.  $\tan \alpha - \cot \alpha,$   
9.  $\cos \alpha,$   
10.  $\cos \alpha + \sin \alpha.$
128. 20,2 m.
129. 19,2 cm<sup>2</sup>.
130.  $S = 0,0647 \text{ m}^2.$
132. 42,5 m.
133.  $S = 4660 \text{ cm}^2.$
136.  $S = 103,0 \text{ m}^2.$
138.  $\sin \angle OAB = 0,30.$
141. 212,5 m<sup>2</sup>.
142. 2.  $a = 4,2,$   
 $b = 9,1,$   
 $S = 38.$   
4.  $b = 110,$   
 $c = 130,$   
 $S = 3900.$   
6.  $a = 24,$   
 $\alpha = 67^{\circ},$   
 $S = 120.$   
8.  $c = 25,$   
 $\alpha = 16^{\circ},$   
 $S = 84.$
10.  $a = 34,$   
 $b = 7,3,$   
 $c = 35.$
144.  $10^{\circ}26'.$
145.  $S = 178 \text{ cm}^2.$
148. 3,45 cm.
149. 1,33 cm.
151.  $r = \frac{k}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$
153.  $30,6^{\circ}.$
156.  $S = 59 \text{ cm}^2.$
159.  $R = 17,$   
 $r = 14.$
162.  $R = 5,7 \text{ cm}.$
163. 0,1%.
165. 0,08%.
172.  $20^{\circ}36'.$
173.  $65^{\circ}39'.$
174. 12,0 m ja  
15,2 m.
175. 0,570 m.
178. 2.  $b = 9,69_2,$   
 $c = 10,74,$   
 $S = 22,44.$   
5.  $b = 0,8996,$   
 $\alpha = 13^{\circ}22',$   
 $S = 0,08540.$   
8.  $a = 18,64,$   
 $b = 3,706,$   
 $c = 19,00.$
180.  $73^{\circ}59'.$
183. 39,0 cm<sup>2</sup>.
184. 2,88 m.

186. 49,9 cm.  
 198.  $-0,8$ .  
 200.  $-1$ .  
 201.  $\sqrt{3}$ .  
 202.  $\sin \beta = -\frac{12}{13}$ .  
 216.  $|\sin x| \geq |\sin^2 x|$ .  
 220. Suurim väärtus 4 vastab täisnurga paaritukordsetele ja väikseim väärtus 3 täisnurga paariskordsetele.  
 221. Ei ole, sest siinuse ega koosinuse väärtus ei saa olla suurem kui 1.  
 222. On:  $x = (2n + 1) \cdot 90^\circ$ .  
 256. 1.  $-16$  mm,  
 2.  $-13,9$  mm.  
 260. 40 miili, 9,5 miili.  
 265.  $\frac{63}{65}$ .  
 266.  $-\frac{63}{65}$ .  
 267.  $-\frac{33}{65}$ .  
 272. 0.  
 273.  $-0,352$ .  
 278.  $\pm 0,64$ .  
 279. 0,66.  
 285. 6,2 m.  
 289. 0,96.  
 290. 0,538.  
 294. 2. IV veerand.  
 295.  $2\beta$  on nürinurk.  
 298.  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ .  
 301. 0,71.  
 304. 1.  $\sqrt{3} \cdot \cos \alpha$ .  
 2.  $-2 \cos(45^\circ + \alpha) \sin 15^\circ$ .  
 305. 1.  $\cot 10^\circ$ .  
 2.  $\cot 19^\circ \tan 5^\circ$ .  
 306. 1.  $-0,06417$ .  
 2.  $-0,04845$ .  
 307. 1. 0,927<sub>2</sub>.  
 3. 1,027.  
 309. 1.  $2 \sin 66^\circ \cos 24^\circ$ .  
 3.  $2 \sin \frac{\alpha + 45}{2} \cos \frac{\alpha - 45^\circ}{2}$ .  
 310. 1.  $2 \sin 39^\circ \cos 3^\circ$ .  
 4.  $2 \cos(45^\circ + \frac{\varphi - \psi}{2}) \sin(\frac{\varphi + \psi}{2} - 45^\circ)$ .  
 313. 1.  $\sqrt{2} \cdot \cos 13^\circ$ .  
 3.  $2 \cos 63^\circ \cos 15^\circ$ .  
 5.  $2 \sin 20^\circ \sin 5^\circ$ .  
 7.  $2 \sin 86^\circ \sin 50^\circ$ .  
 314. 1.  $\sqrt{2} \cdot \cos \alpha$ .  
 3.  $2 \cos(45^\circ + \alpha) \cos 5^\circ$ .  
 325.  
 1.  $x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 30^\circ$ .  
 2.  $x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 60^\circ$ .  
 3.  $x = n \cdot 360^\circ \pm 45^\circ$ .

4.  $x = n \cdot 360^\circ \pm 120^\circ$ .
5.  $x = n \cdot 180^\circ + 45^\circ$ .
6.  $x = n \cdot 180^\circ - 60^\circ$ .
7.  $x = n \cdot 180^\circ - 15^\circ$ .
8.  $x = n \cdot 180^\circ + 59^\circ 02'$ .

326.

1.  $x = n \cdot 360^\circ + 50^\circ$ .
2.  $x = n \cdot 360^\circ - 150^\circ$ .
3.  $x_1 = n \cdot 180^\circ + 22^\circ 30'$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ - 67^\circ 30'$ .
4.  $x_1 = n \cdot 180^\circ + 141^\circ 22'$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ - 21^\circ 22'$ .

327.

1.  $x_1 = 13^\circ 17'$ ,  $x_2 = 103^\circ 17'$ .
2. Antud võrrandit ei rahulda ükski terav- ega nürinurk.
3.  $x_1 = 80^\circ$ ,  $x_2 = 170^\circ$ .
4.  $x = 110^\circ$ .

328.

1.  $x = n \cdot 360^\circ \pm 90^\circ$ .
2.  $x = n \cdot 180^\circ \pm 45^\circ$ .
3.  $x_1 = n \cdot 180^\circ + 90^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ - 30^\circ$ .
4.  $x = n \cdot 180^\circ \pm 65^\circ 54'$ .

329.

1.  $x_1 = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 30^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 19^\circ 28'$ .
2.  $x_1 = n \cdot 360^\circ \pm 101^\circ 32'$ ,  
 $x_2 = n \cdot 360^\circ \pm 113^\circ 35'$ .
3.  $x_1 = n \cdot 360^\circ \pm 66^\circ 25'$ ,  
 $x_2 = n \cdot 360^\circ \pm 78^\circ 28'$ .

4.  $x_1 = n \cdot 180^\circ + 63^\circ 26'$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ + 26^\circ 34'$ .

330.

1.  $x_1 = n \cdot 180 - 90^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 60^\circ + 30^\circ$ .
2.  $x_1 = n \cdot 90^\circ + 15^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180 - 30^\circ$ .
3.  $x = n - 180^\circ$ .
4.  $x = n \cdot 90^\circ + 40^\circ$ .

331. 1.  $x_1 = 45^\circ$ ,  $x_2 = 135^\circ$ .

3.  $x = 161^\circ 34'$ .

8.  $x_1 = 16^\circ 18'$ ,

$x_2 = 163^\circ 42'$ .

332.  $63^\circ 26'$  ja  $116^\circ 34'$ ,

334.  $60^\circ$ ,  $60^\circ$  ja  $60^\circ$  või

$72^\circ$ ,  $72^\circ$  ja  $36^\circ$ .

335.  $11^\circ 57'$ .

336. 1.  $x_1 = 15^\circ$ ,  $x_2 = 75^\circ$ ,  
 $x_3 = 195^\circ$ ,  $x_4 = 255^\circ$ .

3.  $x = 180^\circ \pm 68^\circ 32'$ .

5. Ei ole lahendeid.

6.  $x = 187^\circ 38' \pm 90^\circ$ .

337.  $88^\circ 13'$  ja  $41^\circ 47'$ .

338.  $32^\circ 51'$  ja  $12^\circ 09'$ .

339. 1.  $0^\circ$  ja  $90^\circ$ .

2.  $x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 63^\circ 26' - 26^\circ 34'$ .

3.  $x = n \cdot 180^\circ - (-1)^n \cdot 23^\circ 35' + 53^\circ 08'$ .

4.  $x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n \cdot 55^\circ - 30^\circ$ .

5.  $x = n \cdot 180^\circ - (-1)^n \cdot 44^\circ 06' + 21^\circ 21'$ .

6.  $x = n \cdot 180^\circ - (-1)^n 26^\circ - 36^\circ$ .
7.  $x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 12^\circ + 13^\circ$ .
- 340.
1.  $x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 30^\circ$ .
2.  $x = n \cdot 360^\circ$ .
3.  $x = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 32^\circ 53' - 73^\circ 41'$ .
4.  $x = n \cdot 180^\circ - (-1)^n 24^\circ 22' + 50^\circ 06'$ .
- 341.
1.  $x_1 = n \cdot 180^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 360^\circ \pm 60^\circ$ .
2.  $x_1 = n \cdot 180^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 360^\circ \pm 45^\circ$ ,  
 $x_3 = n \cdot 360^\circ \pm 135^\circ$ .
3.  $x_1 = n \cdot 180^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 30^\circ$ .
4.  $x_1 = n \cdot 180^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ \pm 60^\circ$ .
5.  $x_1 = n \cdot 180^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 360^\circ \pm 75^\circ 31'$ .
6.  $x_1 = n \cdot 180^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 360^\circ \pm 120^\circ$ .
7.  $x_1 = n \cdot 90^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 30^\circ$ ,  
 $x_3 = n \cdot 180^\circ - (-1)^n 30^\circ$ .
8.  $x_1 = n \cdot 180^\circ - 72^\circ 21'$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ + 22^\circ 30'$ .
343.  $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ .
344.  $22^\circ 31'$ .
345.  $1 : \sqrt{3} : 2$ .
348.  $38^\circ 39'$  ja  $51^\circ 21'$ .
350.  $22,4$ .
351.  $25,8^\circ$ .
352.  $60,1$  m.
353.  $3,23$  m ja  $3,92$  m.
354.  $20,3$  m.
356.  $24^\circ 37'$ .
357.  $2,56$  m.
358.  $59,0^\circ$  ja  $62,0^\circ$ .
360.  $26$  m.
361.  $7$  m.
362.  $10,4$  m.
363.  $75,5^\circ$ .
364.  $18,2^\circ$ .
365.  $112^\circ 43'$ .
370.  $131,0^\circ$  ja  $12,3^\circ$ .
371.  $79^\circ 31'$  ja  $41^\circ 19'$ .
372.  $69,8^\circ$  ja  $62,9^\circ$ .
373.  $27,5$  m ja  $24,5$  m.
374.  $10$  cm<sup>2</sup>.
375.  $1,120 \cdot 10^5$  m<sup>2</sup>.
376.  $64^\circ 10'$ .
377.  $68,68$  m<sup>2</sup>.
378.  $0,133$  m<sup>2</sup>.
379.  $5,3$  cm<sup>2</sup>.
380.  $10,4$  m<sup>2</sup>.
381.  $304$  cm<sup>2</sup>.
382.  $62,4$  mm<sup>2</sup>.
383.  $1730$  cm<sup>2</sup>.
384.  $1,9$  m<sup>2</sup>.
385.  $1,7$  m.
386.  $85,1^\circ$ .

387.  $22^{\circ}37'$ ,  $59^{\circ}29'$  ja  $97^{\circ}54'$ .
388.  $25^{\circ}30'$ ,  $38^{\circ}50'$  ja  $115^{\circ}38'$ .
389.  $30^{\circ}02'$ ,  $47^{\circ}36'$  ja  $102^{\circ}23'$ .
390. 2.  $c = 970$ ,  
 $a = 18^{\circ}02'$ ,  
 $\gamma = 133^{\circ}46'$ .
4.  $a = 133,1$ ,  
 $c = 137,5$ ,  
 $a = 68^{\circ}47'$ .
6.  $a = 52$ ,  
 $c = 6,3$ ,  
 $\beta = 122^{\circ}32'$ .
391. 2.  $a = 108$ ,  
 $\beta = 39^{\circ}58'$ ,  
 $\gamma = 17^{\circ}56'$ .
4.  $a = 29,0^{\circ}$ ,  
 $\beta = 46,6^{\circ}$ ,  
 $\gamma = 104,4^{\circ}$ .
6.  $a = 38,5^{\circ}$ ,  
 $\beta = 58,8^{\circ}$ ,  
 $\gamma = 82,7^{\circ}$ .
392. 20,3 km.
393. 23,1 km.
394. 1238 m.
396. 1110 m.
397.  $\frac{a}{\cot \alpha - \cot \beta} =$   
 $= \frac{a \cdot \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}$ .
398. 7,1 m ja 3,4 m.
399.  $40^{\circ}$ .
400. 23,9 m.
401.  $10,6$  m.
402.  $60,5$  m.
403. 310 m.
410. Vähenes  $3,1^{\circ}$  võrra.
411. 330 m; on suurenenud 90 m võrra.
412.  $35,2^{\circ}$ ; väheneb  $19,5^{\circ}$  võrra.
418. 20,4 cm.
420. 29,9 kg.
421. 7,19 m.
430.  $8^{\circ}30'$ ,  $8^{\circ}13'$  ja  $7^{\circ}32'$ .
432. 3,275.
434. 4,6 cm.
439.  $a + \frac{b \tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \beta}$ .
443. 81,5 km.
444. 11700 km.
446. 296 km.
447. 848 km tunnis.
448. 570 cm.
449.  $76^{\circ}20'$ ; 30 mm.
453.  $0,44$  m<sup>2</sup>.
456. 67 cm.
457. 23 cm.
458.  $1\frac{1}{2}r$ .
459. 61,0 cm.
473. III ja IV veerandi nurgad.
474. II ja III veerandi nurgad ning täisnurga paariskordsed.

475. Ei vői, sest III veerandis siinus ja koo-sinus on negatiivsed.
484.  $-\frac{77}{85}$ ;  $-\frac{36}{85}$ ;  $\alpha + \beta$   
on III veerandi ja  
 $\alpha - \beta$  on I veerandi  
nurk.
491.  $1 - a^2$ .
497. 1.  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$ .  
2.  $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$ .  
3.  $\tan \alpha \tan \beta$ .
503.  
2.  $x_1 = n \cdot 180^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ +$   
 $+ (-1)^n 72^\circ 02'$ .
4.  $x = n \cdot 180^\circ$ .
- Näpunäide:  
 $\tan 3x = \tan(2x + x) =$   
 $= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 + \tan 2x \tan x}$ .
7.  $x_1 = n \cdot 90^\circ +$   
 $+ (-1)^n 22^\circ 30'$ ,  
 $x_2 = n \cdot 90^\circ -$   
 $- (-1)^n 22^\circ 30'$ .
8.  $x = n \cdot 180^\circ$ .
504.  
4.  $x_1 = n \cdot 180^\circ + (-1)^n 60^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 180^\circ - (-1)^n 60^\circ$ .  
5.  $x_1 = n \cdot 360^\circ \pm 90^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 45^\circ + (-1)^n 7^\circ 30'$ .
6.  $x_1 = (2n + 1) \cdot 180^\circ$ ,  
 $x_2 = n \cdot 144^\circ \pm 36^\circ$ .
505.  $x = n \cdot 180^\circ + 53^\circ 31'$ .
506. 7,8 m.
509. 16 cm.
510. 1.  $c = 182$ ,  
 $\beta = 53^\circ 08'$ .  
3.  $b = 33,8$ ,  
 $\gamma = 14^\circ 15'$ .
511. 2.  $\alpha = 126^\circ 48'$ ,  
 $\beta = 18^\circ 58'$ ,  
 $\gamma = 34^\circ 14'$ .
513.  $26^\circ 34'$ ,  $53^\circ 08'$  ja  
 $26^\circ 34'$ .
514.  $58^\circ 06'$  ja  $47^\circ 59'$ .
517. 34 cm, 34 cm ja  
36 cm; 510 cm<sup>2</sup>.
521.  $27^\circ 11'$ ,  $27^\circ 21'$  ja  
 $125^\circ 28'$  vői  $9^\circ 46'$ ,  
 $17^\circ 35'$  ja  $152^\circ 39'$ .
522. 8,66 cm, 5,17 cm ja  
9,65 cm.
523. 55,5 m.
524. 3420 m<sup>2</sup>.
525. 380 m<sup>2</sup>.
526. 29 km.
527.  $LS_1 = l \frac{\sin(\omega + \omega_1)}{\sin(\omega_2 - \omega_1)} =$   
 $= 192,6$  miili.
528. 16,4 m.

Vastutav toimetaja A. Humal.  
Keeleline toimetaja M. Tamm.

Ladumisele antud 9. VII 1947. Trükkimisele antud 13. IX 1947.  
Trükiarv 8200. Paber  $56 \times 79$ ,  $\frac{1}{16}$ . Trükipoognaid 12,25. Arvutus-  
poognaid 10,6. Trükitähti trükipoognas 34 560. MB-03802. Trüki-  
koda „Noor-Eesti“, Tartu, Kastani 38. Tellimise nr. 654.

На эстонском языке.

К. Ратассепп. Тригонометрия для X класса.



Rbl. 8.—

A-16570

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00497253 7

Rbl. 8.—

A-16570



K. RATASSEPP — TRIGONOMEETRIA KESKKOOLIKLASSILE

K. RATASSEPP

# TRIGONOMEETRIA

KESKKOOLI

X

KLASSILE

*RK*

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“  
TALLINN 1947