ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

С. БАРОН

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ

ТАРТУ 1966

107797 Tagastage raamat õigeaegselt!
Возвратите книгу вовремя!

10395
1165
2704

Н. Н. 1154. II 65. 100.000.

XII
A-4278

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математического анализа

С. БАРОН

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ

ТАРТУ 1966

N
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
107797

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

Предисловие

Предлагаемое руководство посвящено общим основам теории суммируемости последовательностей. Оно рассчитано, в первую очередь, на студентов-математиков Тартуского государственного университета, готовящих курсовые, семинарские или дипломные работы по вопросам суммируемости. По объему материала настоящее издание значительно уступает известной монографии Харди [24], зато ряд вопросов в ней изложен подробнее, чем у Харди, и сюда включен также материал, которого нет в названной монографии. Например, параллельно с вопросами суммируемости здесь рассматриваются те же вопросы и для абсолютной суммируемости; приводятся все теоремы для матричных преобразований пространств c, m и l друг в друга, даются формулы перехода от одних треугольных матричных (и обратных) преобразований к другим; целая глава отводится теории множителей суммируемости. Из классических методов суммирования особенно подробно рассматривается метод Чезаро комплексного порядка.

В работе принята сплошная нумерация параграфов. Формулы нумерованы двумя числами, первое из которых указывает на номер параграфа. Числа в квадратных скобках представляют собой ссылки на список литературы. Чтение работы предполагает владение университетским курсом математического анализа (включающим элементы функционального анализа).

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам проф. Г. Кангро и доц. Э. Реймерсу, внимательно прочитавшим всю рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний.

Введение

В математическом анализе важнейшим понятием является понятие предельного процесса. Простейшим здесь является определение предела последовательности.

Последовательность[1] u_n называется <u>сходящейся</u> к пределу u, что обозначается[2]

$$\lim u_n = u,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти индекс $N = N(\varepsilon)$ такой, что неравенство

$$|u_n - u| < \varepsilon$$

выполняется для всех $n > N$. В противном случае последовательность называется <u>расходящейся</u>.

Вопросы сходимости последовательностей – основной объект исследования в теории рядов.

Ряд[3]

$$\sum u_n \qquad (0.1)$$

называется <u>сходящимся</u> к сумме u, если последовательность его частичных сумм

---

[1] Предполагаем (здесь и всюду в дальнейшем) $n = 0, 1, \ldots$.

[2] Вместо $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ будем писать $\lim s_n$, а иногда $\lim\limits_{n} s_n$.

[3] Вместо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ будем всюду писать $\sum u_n$, а иногда $\sum\limits_{n} u_n$.

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad (0.2)$$

сходится к σ, и пишем $\sum u_n = \sigma$. Ряд называется расходящимся, если последовательность σ_n его частичных сумм расходится или имеет бесконечный предел.

Итак, в определении сходимости ряда мы переходим от ряда (0.1) к последовательности (0.2). Для перехода от последовательности к ряду обозначим[1]

$$\overline{\Delta}\sigma_n = \begin{cases} \sigma_n - \sigma_{n-1} & \text{при } n \geq 1, \\ \sigma_0 & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

и из (0.2) получаем

$$u_n = \overline{\Delta}\sigma_n. \qquad (0.3)$$

Формулы (0.2) и (0.3) являются формулами перехода от частичных сумм ряда (0.1) к его членам и обратно. Из этих формул видно, что рассмотрение ряда и его суммы есть лишь новая форма изучения последовательности и ее предела, но равносильного содержания. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении различных вопросов теории рядов будем выбирать именно ту форму, которая нам удобнее.

Ряды обычно подразделяют на числовые и функциональные. Членами числового ряда являются комплексные (в частности, вещественные) числа u_n. Членами функционального ряда — фун-

[1] Символ $\overline{\Delta}$ будем называть разностью назад. В дальнейшем выражения с отрицательными нижними индексами полагаем равными нулю. При таком соглашении $\sigma_{-1} = 0$ и $\overline{\Delta}\sigma_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ при всех $n = 0, 1, \ldots$.

кции $u_n = u_n(x)$. Однако, все результаты, получаемые для числовых рядов, верны и для функциональных, ибо при $x = x_0$ члены функционального ряда обращаются в числа $u_n(x_0)$. Поэтому следует в первую очередь изучать именно числовые ряды.

Что же касается специфических вопросов сходимости функциональных рядов (например, вопросы равномерной сходимости на некотором множестве, сходимости в среднем и др.), то как видно из работ проф. Г.Кангро [12, 13] и др., их можно изучить с единой точки зрения, если развивать теорию рядов в произвольном банаховом пространстве, т.е. абстрактную теорию рядов. Однако и эта теория существенно использует теорию числовых рядов.

Для современной теории рядов характерно то, что она изучает, главным образом, расходящиеся ряды. Для расходящихся рядов надо дать новое определение суммы ряда. Эти определения можно дать по-разному. Если расходящийся ряд имеет сумму $\mathcal{U}$ по какому-нибудь определению A, то говорят, что ряд суммируем методом суммирования A к сумме $\mathcal{U}$. О важности изучения расходящихся рядов говорят следующие примеры.

Как известно (см., например, [23], стр. 328), ряд-произведение $\sum w_n$ двух сходящихся рядов $\sum u_n = \mathcal{U}$ и $\sum v_n = \mathcal{V}$, составленное по правилу Коши, т.е. где $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$, не обязано сходиться. Однако, если из частичных сумм $\mathcal{W}_n$ ряда $\sum w_n$ образуем арифметические средние

$$\mathcal{W}'_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \mathcal{W}_k,$$

то, как показал в 1890 году Чезаро [33], всегда

$$\lim w'_n = uv.$$

Результат Чезаро можно сформулировать и так:

ряд-произведение (по Коши) любых двух рядов, сходящихся соответственно к суммам u и v, суммируем методом арифметических средних к сумме uv.

Далее известно ([3],стр.320; [9],стр.474),что ряд Фурье непрерывной функции может расходиться на бесконечном множестве $E \subset (0, 2\pi)$. В то же время венгерским математиком Л.Фейером ([35], стр.60) установлен следующий результат:

если $f(x)$ — любая 2π-периодическая непрерывная функция, а

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

— частичные суммы ее ряда Фурье, то последовательность их средних арифметических

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} s_k(x)$$

равномерно сходится к $f(x)$ на всей числовой оси.

Таким образом, ряд Фурье любой 2π-периодической непрерывной функции равномерно суммируем методом арифметических средних на всей оси.

В этих двух примерах вопрос решался методом арифметических средних. Во многих вопросах нужны разные другие методы суммирования. Чаще всего эти методы определяются следующими преобразованиями, называемыми матричными преобразованиями.

Пусть $\mathcal{A} = (a_{nk})$ — бесконечная матрица $(n, k = 0, 1, \ldots)$.

Для данной последовательности u_n образуем новую последовательность

$$u'_n = \sum_k a_{nk} u_k . \qquad (A)$$

Если u'_n существуют при любом $n = 0,1,\ldots$ и $\lim u'_n = u'$, то последовательность u_n называется суммируемой методом A к сумме u'.

Преобразование (A) называют матричным преобразованием последовательности в последовательность.

Наряду с преобразованием (A) применяются и следующие матричные преобразования:

преобразование

$$u'_n = \sum_k a_{nk} u_k \qquad (B)$$

ряда в последовательность;

преобразование

$$u'_n = \sum_k \bar{a}_{nk} u_k \qquad (C)$$

ряда в ряд;

преобразование

$$u'_n = \sum_k \bar{a}_{nk} u_k \qquad (D)$$

последовательности в ряд.

Поэтому изучение теории рядов начинаем с изучения матричных преобразований.

Преобразование (A) называется треугольным, если $a_{nk} = 0$ при $k > n$. Аналогично определяется треугольность преобразований (B), (C) и (D).

В случае преобразования (C), если все u'_n существуют и ряд $\sum u'_n$ сходится к числу u', то ряд (0.1) называется суммируемым этим методом к числу u'.

В случае преобразований (B) и (D) определения суммируемости такие же, как в случае преобразований (A) и (C).

Отметим, что матрицы преобразований (A)—(D), мы обозначаем через

$$\mathcal{A}=(a_{nk}),\quad A=(\alpha_{nk}),\quad \overline{A}=(\bar{\alpha}_{nk}),\quad \overline{\mathcal{A}}=(\bar{a}_{nk}).$$

В случаях, где нет боязни путаницы, мы все эти матрицы будем просто обозначать буквой A.

Глава I

МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Для нахождения теорем, дающих необходимые и достаточные условия для того, чтобы данное матричное преобразование переводило один класс последовательностей (скажем α) в другой (скажем β), исторически сложились следующие три общих метода.

1) Непосредственный метод, или метод быстро возрастающих последовательностей. Исторически — это первый метод для доказательства теорем о матричных преобразованиях, примененный Теплицем [66] в 1911 году. Достаточность условий доказывается непосредственно, а их необходимость доказывается от противного путем построения одной последовательности класса α такой, что при невыполнении рассматриваемого условия преобразованная последовательность не входит в класс β.

2) Метод, основанный на применении теоремы Банаха—Штейнгауза ([28], стр. 79, теорема 3) о сходимости всюду в банаховом пространстве последовательности непрерывных линейных функционалов. Этот метод (в частных случаях) применял уже Хан ([39], стр.9, теорема III). Систематическое применение этого метода имеем в статье Кулля [15], где рассматриваются матричные преобразования двойных последовательностей.

3) Метод Целлера. Он разработан в 1953 году немецким математиком Целлером [70] и основывается на применении тео-

ремы Банаха о замкнутом графике.

Для нахождения формул предела преобразованной последовательности (т.е. $\lim u'_n$) или суммы преобразованного ряда (т.е. $\sum u'_n$) удобно также пользоваться общим видом непрерывного линейного функционала рассматриваемого пространства последовательностей.

Методы 2 и 3 неудобны а) для преобразований пространства m (ограниченных последовательностей) и б) для преобразований пространств c (сходящихся последовательностей) и m в пространство l (абсолютно сходящихся рядов).

§ 1. Теорема Кожима—Шура

Матричное преобразование называется сохраняющим сходимость, если оно переводит все сходящиеся последовательности или ряды в сходящиеся последовательности, т.е. если из сходимости последовательности u_k или ряда (0.1) всегда следует сходимость последовательности u'_n. Если при этом

$$\lim u'_n = \lim u_k,$$

то матричное преобразование называется регулярным[1].

В теории суммируемости главную роль играет

Теорема 1.1. Для того, чтобы преобразование (A) существовало и сохраняло сходимость, необходимо и достаточно выполнение условий[2]

---

[1] В литературе применяется также термин "перманентный".

[2] Если матрица $A = (a_{nk})$ треугольна, то суммирование в условиях 2^0 и 3^0 производится до индекса n.

1^0 существует $\lim\limits_n a_{nk} = a_k$,

2^0 существует $\lim\limits_n \sum\limits_k a_{nk} = a$,

3^0 $\sum\limits_k |a_{nk}| = \mathcal{O}(1)$.

При этом, если $\lim u_k = u$, то

$$\lim u'_n = a u + \sum a_k (u_k - u) \qquad (1.1)$$
$$= (a - \sum a_k) u + \sum a_k u_k .$$

Доказательство непосредственным методом дано в книгах Харди ([24], стр. 63-66) и Кука ([14], стр. 74-77). При помощи теоремы Банаха—Штейнгауза доказательство дано в книге Кангро [47] (§ 28, п.6) и в статье Кноппа ([51], стр. 274-276).

Теорема 1.1 принадлежит для треугольных матриц Кожима ([53], стр. 297) и в общем случае Шуру ([64], стр. 82, теорема I). Поэтому матрицы, удовлетворяющие условиям 1^0-3^0, часто называют K-матрицами.

Замечание 1.1. Из условий 1^0 и 3^0 следует

$$\sum |a_k| < \infty . \qquad (1.2)$$

Действительно, из условия 3^0 для любого $m = 0,1,\ldots$ вытекает

$$\sum_{k=0}^{m} |a_{nk}| = \mathcal{O}(1).$$

Переходя в последнем к пределу при $n \to \infty$, в силу условия 1^0, получаем условие

$$\sum_{k=0}^{m} |a_k| = \mathcal{O}(1),$$

равносильное условию (1.2).

Теорема 1.2. Для того, чтобы преобразование (А) было регулярным, необходимо и достаточно выполнение условий 1^0-3^0 теоремы 1.1 с $a_k=0$ и $a=1$.

Доказательство. Достаточность вытекает непосредственно из формулы (1.1).

Необходимость. Если[1] $u_k=\delta_{kp}\to 0$ при $k\to\infty$, то $u'_n=a_{np}$, и, следовательно, условие $a_p=0$ необходимо. Если $u_k=1$, то $u'_n=\sum_k a_{nk}$, откуда и вытекает необходимость условия $a=1$.

Теорема 1.2 по существу принадлежит Теплицу [66] (см. также Харди [24], стр. 84, Кук [14], стр. 73). Поэтому матрицу регулярного преобразования часто называют T-матрицей.

Замечание 1.2. Если преобразование (А) применять к классу последовательностей u_k, для которых $\lim u_k=0$, то в теоремах 1.1 и 1.2 условие 2^0 можно опустить.

Приведем теперь аналоги теорем 1.1 и 1.2 для преобразования (В).

Теорема 1.3. Для того, чтобы преобразование (В) существовало и сохраняло сходимость, необходимо и достаточно выполнение условий

1^0 существуют[2] $\lim_n a_{nk}=a_k$,

2^0 $\sum_k|\Delta a_{nk}|=O(1)$.

При этом, если $\sum u_k=u$, то

---

[1] Символ Кронеккера $\delta_{nk}=\begin{cases}0 & \text{при } n\neq k,\\ 1 & \text{при } n=k.\end{cases}$

[2] Символ Δ будем называть разностью вперед, причем

$$\Delta\delta_{nk}=\delta_{nk}-\delta_{n,k+1}.$$

$$\lim \mathcal{U}'_n = \alpha_0 \mathcal{U} + \sum (\Delta\alpha_k)(\mathcal{U}_k - \mathcal{U}) \qquad (1.3)$$
$$= (\alpha_0 - \sum \Delta\alpha_k)\mathcal{U} + \sum (\Delta\alpha_k)\mathcal{U}_k .$$

Доказательство. Сначала найдем условия существования преобразования (B). Для этого, обозначив

$$\mathcal{U}_n^m = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{nk} u_k ,$$

учитывая (0.2), при помощи преобразования Абеля

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k u_k = \sum_{k=0}^{m-1} \Delta\varepsilon_k \cdot \mathcal{U}_k + \varepsilon_m \mathcal{U}_m$$

получаем

$$\mathcal{U}_n^m = \sum_{k=0}^{m-1} (\Delta\alpha_{nk})\mathcal{U}_k + \alpha_{nm}\mathcal{U}_m .$$

Отсюда по теореме 1.1 преобразование (B), т.е. последовательность

$$\mathcal{U}'_n = \lim_m \mathcal{U}_n^m , \qquad (1.4)$$

существует тогда и только тогда, если матрица

$$a_{mk}^n = \begin{cases} \Delta\alpha_{nk} & \text{при } k<m \\ \alpha_{nm} & \text{при } k=m \\ 0 & \text{при } k>m \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1^0-3^0 теоремы 1.1 для любого $n = 0,1,\ldots$. Однако, так как

$$\lim_m a_{mk}^n = \Delta\alpha_{nk} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{m} a_{mk}^n = \alpha_{n0},$$

то остается лишь условие 3^0 теоремы 1.1, т.е. последовательность (1.4) существует тогда и только тогда, если найдутся независящие от m постоянные M_n такие, чтобы

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\Delta\alpha_{nk}| + |\alpha_{nm}| \le M_n ,$$

что равносильно условию

$$\sum_{k} |\Delta\alpha_{nk}| < \infty \qquad (1.5)$$

ввиду неравенства

$$|\alpha_{nm}| \le |\sum_{k=0}^{m-1} \Delta\alpha_{nk}| + |\alpha_{n0}| \le M_n + |\alpha_{n0}|.$$

При этом по формуле (1.1) из (1.4) получаем

$$u'_n = \alpha_{n0} u + \sum_{k} (\Delta\alpha_{nk})(u_k - u),$$

или

$$u'_n - \alpha_{n0} u = \sum_{k} (\Delta\alpha_{nk})(u_k - u). \qquad (1.6)$$

Так как $u_k - u = o(1)$, то применяя к (1.6) теорему 1.1 и учитывая замечание 1.2, убеждаемся в том, что преобразование (1.6) и

$$\lim (u'_n - \alpha_{n0} u)$$

существуют тогда и только тогда, если

$$\text{существуют } \lim_{n} \Delta\alpha_{nk} = a_k \qquad (1.7)$$

и выполнено условие 2^0 (ибо из 2^0 вытекает (1.5)), причем

$$\lim (u'_n - \alpha_{n0} u) = \sum a_k (u_k - u). \qquad (1.8)$$

Отсюда для существования $\lim u'_n$ должен существовать

$$\alpha_0 = \lim \alpha_{n0}. \qquad (1.9)$$

Из последнего и условия (1.7) выводим, что для любого конечного $k \ge 1$ должны существовать числа

$$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k,$$

т.е. должно иметь место условие 1^0. Обратно, из условия 1^0 следует (1.7).

Из (1.8) и (1.9) заключаем справедливость формулы (1.3). Теорема 1.3 доказана.

Следствие 1.1. Для того, чтобы преобразование (B) было регулярным, необходимо и достаточно выполнение условий 1^0 и 2^0 теоремы 1.3 с $\alpha_k = 1$.

Доказательство следует из теоремы 1.2, ибо (1.7) показывает, что здесь $a_k = \Delta\alpha_k$, а тогда из (1.3) вытекает, что $a = \alpha_0$.

Теорема 1.3 принадлежит многим авторам (см. Кук [14], стр.80). Ее доказательство непосредственным методом приведено в книге Кука ([14], стр. 80–83), а при помощи теоремы Банаха—Штейнгауза дано Ханом ([39], стр.33). Приведенное нами доказательство теоремы 1.3 принадлежит, в основном, Кармайклу ([32], стр. 120).

§ 2. Теорема Шура

Здесь основной является

Теорема 2.1. Для того, чтобы преобразование (A) существовало и переводило все ограниченные последовательности u_k в сходящиеся последовательности u'_n, необходимо и достаточно выполнение условий[1]

---

[1] Если матрица $\mathcal{A} = (a_{nk})$ треугольна, то суммирование в условиях 2^0 и 3^0 производится до индекса n. Действительно, для условия 2^0 это очевидно, а для условия 3^0 имеем

$$\sum_k |a_{nk} - a_k| = \sum_{k=0}^{n} |a_{nk} - a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k|,$$

причем, второе слагаемое справа стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу замечания 1.1.

1^0 существуют $\lim a_{nk} = a_k$,

2^0 $\sum_k |a_{nk}| = \mathcal{O}(1)$,

3^0 $\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_k| = 0$.

При этом

$$\lim \mathcal{U}'_n = \sum a_k \mathcal{U}_k. \qquad (2.1)$$

Доказательство. Достаточность. Из условия 2^0 следует существование преобразования (A), а из условий 1^0 и 2^0, ввиду замечания 1.1, вытекает абсолютная сходимость ряда в формуле (2.1). Отсюда, обозначив

$$\sum_k |a_{nk} - a_k| = \delta_n,$$

из условия 3^0 выводим

$$|\mathcal{U}'_n - \sum a_k \mathcal{U}_k| = |\sum_k (a_{nk} - a_k)\mathcal{U}_k| = \mathcal{O}(1)\,\delta_n = o(1)$$

при $n \to \infty$.

Необходимость условий 1^0 и 2^0 вытекает из теоремы 1.1, ибо $c \subset m$. Остается доказать необходимость условия 3^0, учитывая, что из условий 1^0 и 2^0 следует сходимость рядов

$$\sum_k |a_{nk} - a_k| \quad \text{и} \quad \delta_n = \mathcal{O}(1).$$

Предположим от противного, что условие 3^0 не выполнено. Тогда по лемме Больцано—Вейерштрасса существует число $\delta > 0$ и возрастающая последовательность $\{n_p\} \subset \{n\}$ такие, что

$$\lim_p \delta_{n_p} = \lim_p \sum_k |a_{n_p k} - a_k| \doteq \delta. \qquad (2.2)$$

Покажем, что в этом случае можно построить (хотя бы одну) ограниченную последовательность $\mathcal{U}_k$ такую, что $\mathcal{U}'_{n_p}$ расходится при $p \to \infty$.

Зададим произвольно k_0 и построим индуктивно две быстро возрастающие последовательности $\{k_s\}$ и $\{n_s\} \subset \{n_p\}$. А именно, предполагая, что $k_0, k_1, \dots, k_s$ и $n_0, n_1, \dots, n_{s-1}$ уже определены, укажем правило для определения n_s и k_{s+1}.

В силу условия 1^0 можем выбрать $n_s > n_{s-1}$ столь большим, чтобы

$$\sum_{k=0}^{k_s} |a_{n_s k} - a_k| < \frac{1}{2^s}. \tag{2.3}$$

Далее, ввиду сходимости рядов $\sum_k |a_{nk} - a_k|$ при каждом n, учитывая, что n_s уже определено, можем выбрать $k_{s+1} > k_s$ столь большим, чтобы

$$\sum_{k=k_{s+1}+1}^{\infty} |a_{n_s k} - a_k| < \frac{1}{2^s}. \tag{2.4}$$

Таким образом последовательности $\{k_s\}$ и $\{n_s\}$ определены.

Из (2.2), (2.3) и (2.4) непосредственно заключаем, что

$$\sum_{k=k_s+1}^{k_{s+1}} |a_{n_s k} - a_k| = \delta + o(1) \tag{2.5}$$

при $s \to \infty$.

Определим[1] теперь последовательность $\mathcal{U}_k$ так:

$$\mathcal{U}_k = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant k_0, \\ (-1)^s \operatorname{sgn}(a_{n_s k} - a_k) & \text{при } k_s < k \leqslant k_{s+1}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Тогда $|\mathcal{U}_k| \leqslant 1$, и, в силу (2.3) и (2.4),

---

[1] Для любого комплексного $z \neq 0$ полагаем $\operatorname{sgn} z = \frac{|z|}{z}$, а $\operatorname{sgn} 0 = 1$. Отсюда $z \operatorname{sgn} z = |z|$.

$$\sum_{k=0}^{k_j}|(a_{n_j k}-a_k)u_k|<\frac{1}{2^j},\quad \sum_{k=k_{j+1}+1}^{\infty}|(a_{n_j k}-a_k)u_k|<\frac{1}{2^j}. \qquad (2.7)$$

Теперь можем доказать, что u_k такова, что u'_{n_j} расходится, а вместе с ней расходится и u'_n. Действительно, учитывая (2.6) и применяя оценки (2.5) и (2.7), рассмотрим разность

$$u'_{n_j}-\sum a_k u_k=\sum_k (a_{n_j k}-a_k)u_k=$$

$$=\sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}}(a_{n_j k}-a_k)u_k+o(1)=$$

$$=(-1)^j\sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}}|a_{n_j k}-a_k|+o(1)=(-1)^j\delta+o(1).$$

Отсюда вытекает, что u'_{n_j} не может сходиться. Необходимость условия 3^0 доказана.

Легко доказывается

Теорема 2.2. Для того, чтобы преобразование (A) существовало и переводило все сходящиеся к нулю (или все ограниченные[1]) последовательности u_k в ограниченные последовательности u'_n, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_k|a_{nk}|=O(1).$$

Доказательство. Достаточность. Так как $u_k=O(1)$, то

$$|u'_n|\le\sum_k|a_{nk}u_k|=O(1)\sum_k|a_{nk}|=O(1).$$

Необходимость следует из доказательства теоремы 1.1.

Теорема 2.1 принадлежит Шуру ([64], стр. 82, теорема III), однако у Шура условие 3^0 заменено условием

---

[1] Следовательно, и все сходящиеся последовательности.

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = \sum |a_k|.$$

Необходимость условия 3^0 доказана в статье Хилла—Гамильтона ([42], стр. 156) и в книге Целлера ([71], стр. 58).

Теорема 2.2 принадлежит Хану ([39], стр. 11,19 и 21).

§ 3. Теорема Хана

Здесь основной является

Теорема 3.1. Для того, чтобы преобразование (B) существовало и переводило все абсолютно сходящиеся ряды (0.1) в сходящиеся последовательности u'_n, необходимо и достаточно выполнение условий

1^0 существуют $\lim_n a_{nk} = a_k$, (3.1)

2^0 $a_{nk} = O(1)$. (3.2)

При этом

$$\lim u'_n = \sum a_k u_k. \qquad (3.3)$$

Доказательство. Из условий 1^0 и 2^0 вытекает

$$a_k = O(1),$$

и, следовательно, ряд в (3.3) сходится абсолютно. Далее, так как по условию 2^0

$$|a_{nk} u_k| = O(1)|u_k|,$$

то преобразование (B) не только существует, но ряды в нем сходятся равномерно относительно n. Поэтому по условию 1^0

$$\lim u'_n = \lim_n \sum_k a_{nk} u_k = \sum_k \lim_n a_{nk} u_k = \sum a_k u_k,$$

чем достаточность условий 1^0 и 2^0 и формула (3.3) доказаны.

Доказательство необходимости этих условий см. Кангро

[47], § 28, п.8, или Целлер [70].

Следствие 3.1. Для того, чтобы преобразование (B) переводило все абсолютно сходящиеся ряды (0.1) в сходящиеся последовательности $\mathcal{U}'_n$ и выполнялось равенство

$$\lim \mathcal{U}'_n = \sum u_k,$$

необходимо и достаточно выполнение условий 1^0 и 2^0 теоремы 3.1 с $\alpha_k = 1$.

Доказательство. Достаточность вытекает из формулы (3.3).

Необходимость. Если $u_k = \delta_{kp}$, то $\sum u_k = \sum |u_k| = \delta_{pp} = 1$; но ввиду того, что тогда $\mathcal{U}'_n = \sum_k \alpha_{nk} \delta_{kp} = \alpha_{np}$, условия $\alpha_p = 1$ необходимы.

Теорема 3.1 принадлежит Хану ([39], стр. 29).

Теорема 3.2. Для того, чтобы преобразование (B) существовало и переводило все абсолютно сходящиеся ряды (0.1) в ограниченные последовательности $\mathcal{U}'_n$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\alpha_{nk} = \mathcal{O}(1).$$

Доказательство достаточности аналогично доказательству теоремы 3.1, а доказательство необходимости такое же, как для условия 2^0 теоремы 3.1.

Теорема 3.2 также принадлежит Хану ([39], стр. 29).

Дадим теперь аналог теоремы 3.1 для преобразования (A).

Для этого дадим

Определение. Последовательность $\mathcal{U}_n$ называется абсолютно сходящейся, если $\sum |\Delta \mathcal{U}_n| < \infty$.

Теорема 3.3. Для того, чтобы преобразование (A) существовало и переводило все абсолютно сходящиеся последова-

тельности u_k в сходящиеся последовательности u'_n, необходимо и достаточно выполнение условий

1^0 существуют $\lim_n a_{nk}=a_k$, (3.4)

2^0 существует $\lim_n \sum_k a_{nk}=a$, (3.5)

3^0 $\sum_{k=0}^{m} a_{nk}=O(1)$. (3.6)

При этом, если $\lim u_n=u$, то имеет место (1.1).

Первое доказательство. Так как при $u_k=1$ имеем $u'_n=\sum_k a_{nk}$ и последовательность $u_k=1$ абсолютно сходится, то необходима сходимость всех рядов $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_{n\nu}$. Поэтому можем обозначить

$$a_{nk}=\sum_{\nu=k}^{\infty} a_{n\nu}. \qquad (3.7)$$

Пусть теперь u_k - любая абсолютно сходящаяся последовательность (отсюда $u_k=O(1)$) и равенство (3.7) существует. Применяя преобразование Абеля с учетом (0.2) и вытекающего из (3.7) равенства

$$a_{nk}=\Delta a_{nk}, \qquad (3.8)$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}u_k=\sum_{k=0}^{m-1} a_{nk}u_k+u_m\sum_{\nu=m}^{\infty} a_{n\nu}.$$

Отсюда при $m\to\infty$ заключаем

$$\sum_k a_{nk}u_k=\sum_k a_{nk}u_k,$$

т.е. формулой (3.7) определяется переход от преобразования (A) к (B) для всех (абсолютно) сходящихся последовательностей u_k.

Достаточность. Докажем, что из условий 1^0-3^0 теоремы 3.3 вытекают условия 1^0 и 2^0 теоремы 3.1.

Действительно, из (3.7) следует, что

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu} a_{n\nu} - \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{n\nu},$$

откуда видно, что из (3.5) и (3.4) вытекает условие (3.1), а из условий (3.5) и (3.6) - условие (3.2).

Необходимость. Докажем, что и наоборот, из условий 1^0 и 2^0 теоремы 3.1 вытекают условия 1^0-3^0 теоремы 3.3.

Действительно, пользуясь (3.7) при $k=0$ и (3.8), убеждаемся в том, что (3.1) влечет за собой условия (3.5) и (3.4). Наконец, при помощи вытекающего из (3.7) (или (3.8)) формулы

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk} = \alpha_{no} - \alpha_{n,m+1},$$

из (3.2) выводим условие (3.6).

Чтобы доказать формулу (1.1), отметим, что из (3.4) и (3.6) вытекает

$$\sum_{k=0}^{m} a_k = \mathcal{O}(1),$$

и поэтому по известному признаку[1] Дедекинда—Адамара ряд $\sum a_k(\varphi_k - \varphi)$ сходится, чем формула (1.1) доказана.

Второе доказательство. Из сходимости рядов (3.7) следует существование для любого $n = 0,1,\ldots$ независящих от m постоянных M_n таких, что

---

[1] См., например, теорему 21.1, доказательство которой дано в книге Кангро [47], глава I.

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_{nk}\right| \le M_n. \tag{3.9}$$

Обозначим

$$u_k - u = v_k$$

и

$$u_n^m = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} u_k.$$

Так как $v_k = o(1)$ и $\sum |\bar{\Delta} v_k| < \infty$, имеем

$$u_n^m - u \sum_{k=0}^{m} a_{nk} = \sum_{k=0}^{m} a_{nk} v_k =$$

$$= -\sum_{k=0}^{m} a_{nk} \sum_{\nu=k+1}^{\infty} \bar{\Delta} v_\nu =$$

$$= -\sum_{\nu=1}^{m} \Big(\sum_{k=0}^{\nu-1} a_{nk}\Big) \bar{\Delta} v_\nu - \sum_{\nu=m+2}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{m} a_{nk}\Big) \bar{\Delta} v_\nu.$$

Отсюда при $m \to \infty$, ввиду (3.7) и (3.9), выводим

$$u'_n - u \sum_{k} a_{nk} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{\nu-1} a_{nk}\Big) \bar{\Delta} v_\nu. \tag{3.10}$$

Следовательно, преобразование (3.10) существует, если сходятся все ряды в (3.7).

Применяя к преобразованию (3.10) теорему 3.1, получаем, как необходимые и достаточные, условия (3.6) и (3.4), ибо существование пределов

$$\lim_{n} \sum_{k=0}^{\nu-1} a_{nk}$$

равносильно условию (3.4). Так как при $u_k = 1$ получаем необходимость условия (3.5), то из сходимости разности

$u'_n - u\sum_k a_{nk}$

следует сходимость последовательности u'_n.

Последнее доказательство принадлежит Идзуми ([44], стр. 317).

Докажем и формулу (1.1). Действительно, в силу условия (3.6) можем в (3.10) перейти к пределу при $n\to\infty$, в результате чего, применяя (3.4) и (3.5), получаем формулу

$$\lim u'_n = a u - \sum_{\nu=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\nu-1} a_k\Big)\bar{\Delta} v_\nu =$$

$$= a u + \sum a_k v_k ,$$

так как из условий (3.6) и (3.4) вытекает, что $\sum_{k=0}^{m-1} a_k = O(1)$, и, следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{\nu-1} a_k\Big)\bar{\Delta} v_\nu = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \sum_{\nu=k+1}^{m} \bar{\Delta} v_\nu =$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1}(-a_k v_k) + v_m \sum_{k=0}^{m-1} a_k =$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1} a_k v_k + o(1),$$

чем и доказана формула (1.1).

Замечание. Если преобразование (A) применять к классу последовательностей u_n, для которых $\lim u_n = 0$, то в теореме 3.3 можем условие 2^0 опустить.

Теорема 3.3 также принадлежит Хану ([39], стр. 25).

§ 4. Теорема Кноппа—Лоренца

Здесь основной является

Теорема 4.1. Для того, чтобы преобразование (C) существовало и переводило все абсолютно сходящиеся ряды (0.1) в абсолютно сходящиеся ряды $\sum u'_n$, необходимо и достаточно выполнение условия[1]

$$\sum_n |\bar{a}_{nk}| = \mathcal{O}(1). \tag{4.1}$$

При этом

$$\sum u'_n = \sum \alpha_k u_k, \tag{4.2}$$

где обозначено

$$\alpha_k = \sum_n \bar{a}_{nk}.$$

Доказательство. Достаточность условия (4.1) и формула (4.2) просто доказывается непосредственно. Действительно, из абсолютной сходимости ряда (0.1) и условия (4.1) сразу заключаем

$$\sum |u'_n| = \sum_n \Big| \sum_k \bar{a}_{nk} u_k \Big| \le \sum |u_k| \sum_n |\bar{a}_{nk}| = \mathcal{O}(1),$$

и поэтому верна и формула (4.2).

Необходимость условия (4.1) очень просто доказана в книге Кангро [47], § 28, п.8, и в статье Целлера [70].

Заметим, что матричное преобразование называется сохраняющим абсолютную сходимость, если оно переводит все абсолютно сходящиеся ряды (или последовательности) снова в аб-

---

[1] Если матрица $\bar{A} = (\bar{a}_{nk})$ треугольна, то суммирование в (4.1) и в формуле для α_k производится по индексу n от k до ∞.

солютно сходящиеся. Если при этом сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется, т.е. $\sum u'_n = \sum u_n$, то преобразование часто называют абсолютно регулярным.

Следствие 4.1. Преобразование (C), сохраняющее абсолютную сходимость, абсолютно регулярно тогда и только тогда, если $\alpha_k = 1$.

Доказательство. Достаточность следует непосредственно из формулы (4.2).

Необходимость. Если $u_k = \delta_{kp}$, то $\sum u_k = 1$. Поэтому по формуле (4.2) должно быть

$$1 = \sum u'_n = \sum \alpha_k \delta_{kp} = \alpha_p .$$

Теорема 4.1 принадлежит Кноппу и Лоренцу [52].

Найдем теперь аналоги теоремы 4.1 для преобразований (A) и (B).

Теорема 4.2. Для того, чтобы преобразование (B) существовало и переводило все абсолютно сходящиеся ряды (0.1) в абсолютно сходящиеся последовательности u'_n, необходимо и достаточно выполнение условия[1]

$$\sum_n |\Delta \alpha_{nk}| = O(1). \qquad (4.3)$$

При этом

$$\sum u'_n = \sum (\lim_n \alpha_{nk})\, u_k .$$

Доказательство. Для существования преобразования (B) достаточно вытекающее из (4.3) условие (3.2). Оно и необходимо по теореме 3.1. Но, если все ряды в преобразовании (B)

---

[1] При наличии двух нижних индексов полагаем всегда

$$\Delta s_{nk} = s_{nk} - s_{n-1,k} .$$

существуют, то

$$u'_n = \bar{\Delta} u'_n = \sum_k \alpha_{nk} u_k - \sum_k \alpha_{n-1,k} u_k = \sum_k \bar{\Delta} \alpha_{nk} u_k,$$

откуда

$$\bar{\alpha}_{nk} = \bar{\Delta} \alpha_{nk}, \qquad (4.4)$$

и остается применить теорему 4.1, учитывая, что здесь

$$\alpha_k = \lim_n \alpha_{nk}.$$

Теорема 4.2 впервые доказана Суноути [65].

Теорема 4.3. Для того, чтобы преобразование (A) существовало и переводило все абсолютно сходящиеся последовательности u_n в абсолютно сходящиеся последовательности u'_n, необходимо и достаточно выполнение условий

1^0 сходятся ряды $\sum_\nu a_{n\nu}$,

2^0 $\sum_n \left| \bar{\Delta} \sum_{\nu=k}^{\infty} a_{n\nu} \right| = O(1).$

При этом имеет место формула (1.1).

Доказательство. Так как последовательность $u_k = 1$ абсолютно сходится, то условие 1^0 должно выполняться. Поэтому сходятся все ряды (3.7). Теперь остается лишь к (3.7) применить теорему 4.2.

Теорему 4.3 впервые доказала Меарс [57] непосредственным методом.

§ 5. Теорема Пейеримхоффа

Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_n$ - конечные множества неотрицательных целых чисел. Предварительно нам нужна

Лемма 5.1. Для того, чтобы ряд (0.1) сходился абсолют-

но, необходимо и достаточно существование постоянной K такой, что

$$\left| \sum_{n\in\mathfrak{N}} u_n \right| \le K \qquad (5.1)$$

для любого $\mathfrak{N}$. При этом

$$\sum |u_n| \le 4 \sup_{\mathfrak{N}} \left| \sum_{n\in\mathfrak{N}} u_n \right| \le 4K.$$

Доказательство. Поскольку $u_n = c_n + i d_n$, где $c_n = \mathrm{Re}\, u_n$ и $d_n = \mathrm{Im}\, u_n$, то

$$\left| \sum_{n\in\mathfrak{N}} c_n \right| \le \left\{ \left(\sum_{n\in\mathfrak{N}} c_n \right)^2 + \left(\sum_{n\in\mathfrak{N}} d_n \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left| \sum_{n\in\mathfrak{N}} u_n \right| \le K$$

имеет место для любого $\mathfrak{N}$. Выберем $\mathfrak{N}$ таким, чтобы при $n\in$ $\in\mathfrak{N}$ были $c_n \ge 0$. Тогда для этого $\mathfrak{N}$

$$\sum_{n\in\mathfrak{N}} |c_n| = \sum_{n\in\mathfrak{N}} c_n \le K. \qquad (5.2)$$

Вследствие этого неотрицательные вещественные части комплексных чисел u_n образуют абсолютно сходящийся ряд. Таким же образом находим, что все отрицательные вещественные, неотрицательные мнимые и отрицательные мнимые части комплексных чисел u_n образуют абсолютно сходящиеся ряды. Неравенство (5.2) показывает, что сумма ни одного из этих четырех рядов не превосходит K . Следовательно,

$$\sum |u_n| \le 4K,$$

чем лемма доказана.

Теорема 5.1. Для того, чтобы преобразование (D) существовало и переводило все сходящиеся к нулю (или все ограниченные) последовательности (0.2) в абсолютно сходящиеся ряды

$\sum u'_n$, необходимо и достаточно существование постоянной M такой, что

$$\sum_k \left| \sum_{n \in \mathfrak{N}} \bar{a}_{nk} \right| \leq M \qquad (5.3)$$

для любого $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Условие (5.3) обеспечивает существование преобразования (D) для всех последовательностей, так как для любого одноэлементного $\mathfrak{N} = \{n\}$, $n = 0,1,\ldots$, из (5.3) следует, что

$$\sum_k |\bar{a}_{nk}| < \infty.$$

Далее, для того, чтобы $\sum |u'_n| < \infty$, по лемме 5.1 необходимо и достаточно условие (5.1), принимающее в данном случае вид

$$\left| \sum_{n \in \mathfrak{N}} \left(\sum_k \bar{a}_{nk} u_k \right) \right| \leq K, \qquad (5.4)$$

где K не зависит от $\mathfrak{N}$, но может зависеть от u_k. Так как ряды в условии (5.4) при любом $n = 0,1,\ldots$ сходящиеся и $\mathfrak{N}$ – конечное множество, можно условие (5.4) представить в виде

$$\left| \sum_k \left(\sum_{n \in \mathfrak{N}} \bar{a}_{nk} \right) u_k \right| \leq K. \qquad (5.5)$$

Однако, поскольку все $\mathfrak{N}$ можно[1] упорядочить в последовательность $\mathfrak{N}_0, \mathfrak{N}_1, \ldots, \mathfrak{N}_n, \ldots$, то, обозначив

$$b_{nk} = \sum_{\nu \in \mathfrak{N}_n} \bar{a}_{\nu k},$$

можем условие (5.5) переписать в виде

$$\left| \sum_k b_{nk} u_k \right| \leq K$$

[1] См., например, Натансон [17], стр. 21.

и рассматривать его как матричное преобразование всех ограниченных или всех сходящихся последовательностей (0.2) в ограниченные последовательности. Для этого по теореме 2.2 необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_{k}|b_{nk}|=O(1),$$

т.е. условия (5.3).

Замечание 5.1. Условия (5.3),

$$\sum_{n}\Big|\sum_{k\in\mathfrak{M}}\bar{a}_{nk}\Big|\leqslant M \tag{5.6}$$

и

$$\Big|\sum_{n\in\mathfrak{N}}\sum_{k\in\mathfrak{M}}\bar{a}_{nk}\Big|\leqslant M \tag{5.7}$$

равносильны. Равносильность их вытекает из леммы 5.1.

Замечание 5.2. Условие (5.3) нельзя заменить условием

$$\sum_{k}\sum_{n}|\bar{a}_{nk}|<\infty,$$

ибо, как показал Пейеримхофф [62], матрица с элементами

$$\bar{a}_{nk}=\frac{1}{n+1}\int_{\ln(k+1)}^{\ln(k+2)}e^{inu}\,\frac{du}{(u+1)^2}$$

переводит все ограниченные последовательности в абсолютно сходящиеся ряды, но тем не менее

$$\sum_{k}\sum_{n}|\bar{a}_{nk}|=\infty.$$

Теорема 5.1 вместе с приведенным простым доказательством принадлежит Пейеримхоффу ([61], стр. 141-142). Если в теореме 5.1 условие (5.3) заменить любым из условий (5.6) или (5.7), то в таком виде теорема 5.1 доказана ранее Целле-

ром [70].

Пусть σ_k и τ_n - две произвольные последовательности, принимающие лишь целочисленные неотрицательные значения.

В применениях часто очень полезна

Теорема 5.2. Если преобразование (D) существует и переводит все сходящиеся к нулю последовательности (0.2) в абсолютно сходящиеся ряды $\sum u'_n$, то существует независящая от матрицы $\overline{\mathcal{A}}=(\bar{a}_{nk})$ постоянная L такая, что для любых $\mathcal{N}_p$ ($p=0,1,\dots$) с $\mathcal{N}_p \cap \mathcal{N}_q = \varnothing$ при $p \neq q$ выполняются условия

$$\sum_k \Big| \sum_{n \in \mathcal{N}_{\sigma_k}} \bar{a}_{nk} \Big| \leq L \quad \text{для любых } \sigma_k \tag{5.8}$$

и

$$\sum_n \Big| \sum_{k \in \mathcal{N}_{\tau_n}} \bar{a}_{nk} \Big| \leq L \quad \text{для любых } \tau_n. \tag{5.9}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_k = o(1)$ и $\mathcal{V}_n = o(1)$. В силу леммы 5.1 выводим

$$\sum_n |\mathcal{V}_n \sum_k \bar{a}_{nk} \mathcal{U}_k| \leq \sup|\mathcal{V}_n| \cdot \sum_n \Big| \sum_k \bar{a}_{nk} \mathcal{U}_k \Big| \leq$$

$$\leq \sup|\mathcal{V}_n| \cdot 4 \sup_{\mathcal{N}} \Big| \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_k \bar{a}_{nk} \mathcal{U}_k \Big| =$$

$$= 4 \sup|\mathcal{V}_n| \cdot \sup_{\mathcal{N}} \Big| \sum_k \mathcal{U}_k \sum_{n \in \mathcal{N}} \bar{a}_{nk} \Big| \leq$$

$$\leq 4 \sup|\mathcal{V}_n| \cdot \sup|\mathcal{U}_k| \cdot \sup_{\mathcal{N}} \sum_k \Big| \sum_{n \in \mathcal{N}} \bar{a}_{nk} \Big|.$$

Отсюда в силу (5.3) вытекает неравенство

$$\sum_n |\mathcal{V}_n \sum_k \bar{a}_{nk} \mathcal{U}_k| \leq 4M \sup|\mathcal{V}_n| \cdot \sup|\mathcal{U}_k|. \tag{5.10}$$

Теперь определим последовательность

$$t_\kappa = \begin{cases} p & \text{при } \kappa \in \mathfrak{N}_p, \\ -1 & \text{при } \kappa \notin \mathfrak{N}_p \end{cases}$$

и положим

$$u_\kappa = \begin{cases} e^{-ixt_\kappa} & \text{при } \kappa \in \mathfrak{N}, \\ 0 & \text{при } \kappa \notin \mathfrak{N}, \end{cases} \qquad v_n = \begin{cases} e^{ix\tau_n} & \text{при } n \in \mathfrak{M}, \\ 0 & \text{при } n \notin \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Тогда (5.10) принимает вид

$$\Big| \sum_{n \in \mathfrak{M}} e^{ix\tau_n} \sum_{\kappa \in \mathfrak{N}} \bar{a}_{n\kappa} e^{-ixt_\kappa} \Big| \leqslant 4M. \tag{5.11}$$

Далее, так как

$$\int_0^{2\pi} e^{ix(\tau_n - t_\kappa)} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{при } t_\kappa = \tau_n, \\ 0 & \text{при } t_\kappa \neq \tau_n, \end{cases} \tag{5.12}$$

то разделив обе части неравенства (5.11) на 2π и интегрируя его по x в промежутке $(0, 2\pi)$, получаем

$$\Big| \sum_{n \in \mathfrak{M}} \sum_{\kappa \in \mathfrak{N}_{\tau_n}} \bar{a}_{n\kappa} \Big| \leqslant 4M, \tag{5.13}$$

ибо ввиду (5.12) суммирование по индексу $\kappa \in \mathfrak{N}$ в (5.13) производится лишь по тем его значениям, для которых $t_\kappa = \tau_n$, т.е. по всем $\kappa \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{N}_{\tau_n} = \mathfrak{N}_{\tau_n}$. По лемме 5.1 из (5.13) вытекает (5.9) с $L = 16M$.

Аналогично доказывается необходимость условия (5.8).

Теорема 5.2 принадлежит Пейеримхоффу [62].

В частности, если множество $\mathfrak{N}_p$ состоит из одного числа p, то из теоремы 5.2 вытекает

Следствие 5.1. Для того, чтобы преобразование (D) су-

ществовало и переводило все нуль-последовательности (0.2) в абсолютно сходящиеся ряды $\sum u'_n$ необходимы условия

$$\sum_k |\bar{a}_{\sigma_k k}| \le L \qquad \text{для любых } \sigma_k,$$

$$\sum_n |\bar{a}_{n\tau_n}| \le L \qquad \text{для любых } \tau_n.$$

В заключение докажем еще одно предложение, принадлежащее Пейеримхоффу ([61], теорема 6).

Сопоставим преобразование (D) с преобразованием

$$u'_n = \sum_k \bar{a}^*_{nk} u_k = \sum_k \bar{a}_{kn} u_k. \qquad (5.14)$$

Поскольку

$$\sum_n \Big| \sum_{k\in\mathfrak{M}} \bar{a}^*_{nk} \Big| = \sum_k \Big| \sum_{n\in\mathfrak{M}} \bar{a}_{nk} \Big|,$$

то условие (5.6) для преобразования (5.14) является не чем иным, как условием (5.3) для преобразования (D). Вследствие этого, согласно теореме 5.1 и примечанию 5.1 преобразования (D) и (5.14) одновременно переводят все ограниченные последовательности (0.2) в абсолютно сходящиеся ряды. Для последнего, как видно из (5.14), необходимо и достаточно условие

$$\sum_n \Big| \sum_k \bar{a}_{kn} u_k \Big| < \infty,$$

равносильное условию

$$\sum_k \Big| \sum_n \bar{a}_{nk} d_n \Big| < \infty \qquad (5.15)$$

с любыми $d_n = O(1)$. Но, так как по теореме 5.1 любое условие, необходимое для преобразования $m \to l$, необходимо и для преобразования $c \to l$, то тем самым доказано

Следствие 5.2. Для того, чтобы преобразование (D) су-

ществовало и переводило все сходящиеся (или все ограниченные) последовательности (0.2) в абсолютно сходящиеся ряды $\sum u'_n$, необходимо и достаточно сходимость всех рядов $\sum_n \bar{a}_{nk} d_n$ и выполнение условия (5.15) для любой ограниченной последовательности d_n.

Глава II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

§ 6. Определение метода суммирования

Нашей целью является дать такое обобщение понятия суммы ряда (или, что то же самое, понятие предела последовательности), чтобы и расходящемуся ряду можно было приписать сумму. Расходящиеся ряды применялись в анализе намного раньше, чем была создана теория расходящихся рядов. Например, когда требовалось найти сумму какого-то функционального ряда, производились различные его преобразования. И, несмотря на то, что нередко ряды при этом преобразовывались в расходящиеся, в итоге получались верные результаты. Особенно часто расходящиеся ряды применял Эйлер (1707-1783), но неверных результатов он не получал. Отметим, что в 17-18 веках математики очень наивно относились к расходящимся рядам. Например, спрашивали какова сумма ряда

$$\sum (-1)^n = 1-1+1-1+ \ldots . \qquad (6.1)$$

При этом сумму ряда (6.1) считали равной $\frac{1}{2}$. Это обосновывали тем, что частичные суммы ряда (6.1) попеременно равны 0 и 1, и поэтому самой вероятной суммой ряда (6.1) является арифметическое среднее частичных сумм - число $\frac{1}{2}$. Были и другие "обоснования". Например, обозначая сумму ряда (6.1) через $\mathcal{U}$, получается

$$\mathcal{U} = 1-1+1-1+ \ldots = 1-(1-1+1-1+ \ldots) = 1 - \mathcal{U},$$

откуда $2\mathcal{U} = 1$, $\mathcal{U} = \frac{1}{2}$. В то время лишь Л.Эйлер пришел к мысли, что понятие суммы ряда надо в первую очередь четко определить. Он указывал, что вопрос не в том, чему равна сумма расходящегося ряда, а в том, как определить ее. И Эйлер (1743) дает определение:

"Сумма всякого ряда есть значение того конечного выражения, из развертывания которого возникает этот ряд".

В этом определении Эйлер, по-видимому, имел в виду разложения в степенные ряды. Если ряд сходится, то ясно, что определение Эйлера приписывает ему сумму в согласии с обычным определением (см. ниже § 20). Но определение Эйлера применимо и к расходящимся рядам. Например, по определению Эйлера сумма ряда (6.1) равна $\frac{1}{2}$, так как ряд (6.1) получается при $x = -1$ из разложения

$$\frac{1}{1-x} = \sum x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots .$$

Однако некоторые математики возражали против определения Л. Эйлера. Н.Бернулли (1743) спрашивал, не может ли один и тот же ряд возникнуть из двух различных выражений. Эйлер (1745) в письме Гольдбаху утверждал, что так быть не может, ибо Эйлер имел в виду разложения в степенные ряды, а сумма степенного ряда определяется однозначно. Позже приводился пример, где сумма ряда (6.1) может быть по определению Эйлера любая правильная дробь $\frac{m}{n}$, если исходить из разложения

$$\frac{1+x+\cdots+x^{m-1}}{1+x+\cdots+x^{n-1}} = \frac{1-x^m}{1-x^n} = 1 - x^m + x^n - x^{m+n} + x^{2n} - \cdots ,$$

в частности, число $\frac{2}{3}$ из разложения

$$\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{1-x^2}{1-x^3} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - \cdots \qquad (6.2)$$

при $x = 1$. Этот парадокс решил Лагранж (1736-1813). Действительно, положив $x = 1$, из степенного ряда (6.2) получаем

$$\frac{2}{3} = 1+0-1+1+0-1+1- \ldots ,$$

так что последний ряд не является рядом (6.1), а содержит нули членами ряда[1].

Таким образом, можем сказать, что у Эйлера были действительно основополагающие результаты в теории расходящихся рядов. Все же, несмотря на эти результаты, в первой половине 19-го века при критическом пересмотре основ математического анализа результаты Эйлера были забыты и расходящиеся ряды выброшены из анализа. Однако уже во второй половине 19-го века без привлечения расходящихся рядов нельзя было обойтись, причем появились друг за другом ряд важных результатов теории расходящихся рядов. В 1901 году уже вышла первая монография по расходящимся рядам Э.Бореля [29].

Перейдем теперь к определению понятия суммируемости.

Пусть A' - некоторое множество рядов[2]. Если для любого ряда $\sum u_n \in A'$ ставится в соответствие некоторое число

$$A\{\sum u_n\}, \qquad (6.3)$$

то говорят, что на множестве A' определен метод суммирования, который обозначим просто через A.

Число (6.3) называется A-суммой ряда (0.1), множество

---

[1] Такие обстоятельства нужно нам и в дальнейшем учитывать.

[2] Вместо рядов можем всюду говорить и о последовательностях.

A' (его часто обозначают и через cA) называется полем суммируемости метода A.

Говорят также, что метод A суммирует ряд (0.1) к сумме (6.3); или ряд (0.1) является A-суммируемым к сумме (6.3); или же ряд (0.1) суммируем методом A к сумме (6.3).

Отметим, что сумма ряда зависит от выбора метода A.

Приведем несколько примеров.

1. По определению суммируемости обычная сходимость также является методом суммирования. Его будем называть методом сходимости или единичным методом и обозначать через E. Он определяется равенством:

$$E\{\sum u_n\} = \lim_n \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

а для последовательностей

$$E\{u_n\} = \lim u_n.$$

Итак, $E' = c$, т.е. полем суммируемости метода E является всё множество сходящихся последовательностей.

2. Пусть

$$A\{\sum u_n\} = u_0.$$

Этот метод обозначается через E_0. Он суммирует любой ряд к его нулевому члену. По этому же определению

$$E_0\{0 + u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots\} = 0.$$

Ясно, что $E_0' = s$ (множество всех последовательностей).

3. Пусть

$$A\{\sum u_n\} = \lim_n \sum_k \alpha_{nk} u_k.$$

Здесь $A = (\alpha_{nk})$ - матричный метод суммирования. В частности, если

$$\alpha_{nk}=\begin{cases}1 & \text{при } k\le n,\\ 0 & \text{при } k>n,\end{cases}$$

то $A=E$. Если же

$$\alpha_{nk}=\begin{cases}1 & \text{при } k=0,\\ 0 & \text{при } k>0,\end{cases}$$

то $A=E_0$.

4. Пусть

$$A\{\sum u_k\}=\lim_{x\to x_0}\sum_k u_k\alpha_k(x),$$

где x_0 - некоторое число или символ ∞, или

$$A\{u_n\}=\lim_{x\to x_0}\sum_k u_k\alpha_k(x).$$

Такой метод A называют полунепрерывным методом суммирования.

§ 7. Некоторые важные классы методов суммирования

Ясно, что важнейшие свойства метода сходимости не могут иметь места для любого метода суммирования. Поэтому в дальнейшем не будем рассматривать любые методы суммирования, а наложим на них некоторые ограничения.

Если

$$A'\supset c,$$

т.е. если метод суммирования A суммирует все сходящиеся ряды (последовательности), то говорят, что метод A сохраняет сходимость или консервативен.

Для методов, сохраняющих сходимость, могут быть две возможности.

1. Метод A сохраняет сумму любого сходящегося ряда.

Тогда метод A называют регулярным. Таким образом, метод называется регулярным, если он суммирует все сходящиеся ряды к их обычной сумме.

Если регулярный метод A суммирует к ∞ любой ряд $\sum u_n = \infty$, то метод A называется вполне регулярным.

2. Метод A не сохраняет суммы каждого сходящегося ряда. Тогда метод A называется нерегулярным.

Отметим, что нерегулярные методы суммирования также имеют практическое значение. Например, в применении к приближенным методам вычислений важны также методы суммирования, которые могут искажать значение рассматриваемой величины в пределах заданной точности.

Если

$$A' \supset m,$$

т.е. если метод суммирования A суммирует все ограниченные последовательности, то метод A называется методом, порождающим сходимость.

Важным свойством метода сходимости является его линейность, которую для любого метода A определяют так.

Метод суммирования A называется линейным, если для любых постоянных λ и μ

$$A\{\sum(\lambda u_n + \mu v_n)\} = \lambda A\{\sum u_n\} + \mu A\{\sum v_n\},$$

причем существование правой части влечет за собой существование левой.

Например, любой матричный или полунепрерывный метод суммирования является линейным.

Нелинейным является, например, метод, определяемый фор-

мулой $A\{\sum u_n\}=u_0^2$.

Множество A' обладает многими интересными свойствами (см. Волков—Ульянов [14], стр. 374-384).

§ 8. Матричные методы суммирования

Матричный метод задается в виде одного из преобразований (A), (B), (C) или (D), причем метод и его матрицу всюду обозначаем одной и той же буквой.

Если матричный метод A задан в виде преобразований (A) или (B), то

$$A\{\sum u_n\}=A\{\mathcal{U}_n\}=\lim \mathcal{U}'_n,$$

а в виде (C) или (D) -

$$A\{\sum u_n\}=A\{\mathcal{U}_n\}=\sum u'_n.$$

Матричный метод называется треугольным, если он задан треугольным преобразованием. Метод $A=(a_{nk})$ называется нормальным, если он треуголен и $a_{nn}\neq 0$ при любом $n=0,1,\ldots$

Отметим, что не все четыре вида преобразований самостоятельны. Покажем, что легко переходить от преобразования (A) к (D) и обратно, и от (B) к преобразованию (C) и обратно (здесь же станет ясным и выбор наших обозначений).

Действительно, ввиду сходимости всех рядов в преобразовании (A), имеем

$$u'_n=\bar{\Delta}\mathcal{U}'_n=\sum_k a_{nk}\mathcal{U}_k-\sum_k a_{n-1,k}\mathcal{U}_k=\sum_k \bar{\Delta}a_{nk}\mathcal{U}_k,$$

и, следовательно,

$$\bar{a}_{nk}=\bar{\Delta}a_{nk}. \qquad (8.1)$$

Аналогично доказывается (см. (4.4)), что

$$\bar{a}_{nk} = \bar{\Delta} a_{nk}. \tag{8.2}$$

Также наоборот, ввиду сходимости всех рядов в преобразовании (D), имеем

$$u'_n = \sum_{m=0}^{n} u'_m = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k} \bar{a}_{mk} u_k = \sum_{k} \left(\sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk} \right) u_k,$$

и, следовательно,

$$a_{nk} = \sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}. \tag{8.3}$$

Аналогично

$$a_{nk} = \sum_{m=0}^{n} \bar{a}_{mk}. \tag{8.4}$$

Для треугольных методов формулы (8.3) и (8.4) получают вид

$$a_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mk}, \tag{8.3_1}$$

$$a_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{mk}. \tag{8.4_1}$$

Формула (8.1) является формулой перехода от преобразования (A) к преобразованию (D); формула (8.3) - от (D) к (A); формула (8.2) - от (B) к (C); формула (8.4) - от (C) к (B).

Отметим, что переход[1] от преобразования (A) к (B) или обратно не всегда возможен. Поэтому в общем случае преобразования (A) и (B) самостоятельны. Однако, если метод треугольный, то все четыре вида преобразований равносильны.

Найдем теперь формулы перехода от преобразования (A) к преобразованию (B) и обратно в случае треугольного метода. Действительно,

---

[1] См. Зигмунд [9], стр. 141-142.

$$u'_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} u_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} \sum_{k=0}^{\nu} u_k = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} \Big) u_k,$$

откуда

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu}. \qquad (8.5)$$

Из формулы (8.5) при $k < n$ выводим

$$\Delta \alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} - \sum_{\nu=k+1}^{n} a_{n\nu} = a_{nk},$$

откуда всегда

$$a_{nk} = \Delta \alpha_{nk}. \qquad (8.6)$$

Формула (8.5) является формулой перехода от преобразования (A) к (B) в случае треугольного метода, а формула (8.6) - от (B) к (A).

Далее, в случае треугольного метода, из (8.5), (8.2) и (8.1) вытекает

$$\bar{\alpha}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \bar{\Delta} a_{n\nu}, \qquad (8.7)$$

$$\bar{\alpha}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \bar{a}_{n\nu}, \qquad (8.8)$$

Аналогично находим

$$\bar{a}_{nk} = \Delta \bar{\alpha}_{nk}, \qquad (8.9)$$

$$\bar{a}_{nk} = \bar{\Delta} \Delta \alpha_{nk} = \Delta \bar{\Delta} \alpha_{nk}, \qquad (8.10)$$

$$a_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \Delta \bar{\alpha}_{mk} = \Delta \sum_{m=k}^{n} \bar{\alpha}_{mk}, \qquad (8.11)$$

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \sum_{m=k}^{n} \bar{a}_{m\nu}. \qquad (8.12)$$

Отметим, что для треугольного метода, например, из фор-

мул (8.5), (8.2) и (8.8) следует

$$a_{nn} = \alpha_{nn} = \bar{\alpha}_{nn} = \bar{a}_{nn}. \tag{8.13}$$

Отметим также, что для треугольного метода имеет место равенство

$$\sum_{n=K}^{\infty} \alpha_{nK} = \lim_{n} a_{nK}. \tag{8.14}$$

Действительно, из (8.2) непосредственно вытекает

$$\sum_{n=K}^{\infty} \alpha_{nK} = \bar{\alpha}_{KK} + \sum_{n=K+1}^{\infty} \bar{\Delta} a_{nK} = \lim_{n} a_{nK}.$$

§ 9. Обратные преобразования

Многие проблемы теории рядов часто решаются при помощи обратного преобразования. Например, для преобразования (A) это означает найти формулу, выражающую члены последовательности u_n через члены последовательности u'_n. Отметим, что для бесконечной треугольной матрицы $A = (a_{nk})$ (двусторонней) обратной матрицей называется матрица $A^{-1} = (\xi_{nk})$, если

$$\sum_{\nu=K}^{n} a_{n\nu} \xi_{\nu K} = \sum_{\nu=K}^{n} \xi_{n\nu} a_{\nu K} = \delta_{nK},$$

т.е. если

$$A A^{-1} = A^{-1} A = (\delta_{nK}).$$

Покажем, что имеет место (ср. Кук [14], стр. 31 и 34)

Теорема 9.1. Для треугольного матричного метода A обратное преобразование A^{-1} существует тогда и только тогда, если A нормален, причем матрица A^{-1} является обратной матрицей матрицы A.

Доказательство. Так как метод A треугольен, то можем рассматривать лишь преобразование (A).

Пусть $\mathcal{A}=(a_{nk})$ нормален. Имеем

$$u'_n = a_{n0}u_0 + a_{n1}u_1 + \cdots + a_{nn}u_n.$$

Отсюда, так как $a_{nn} \neq 0$ при любом $n = 0,1,\ldots$, следует

$$u_0 = \frac{1}{a_{00}}u'_0,$$

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}}u'_1 - \frac{a_{10}}{a_{11}}u_0 = \frac{1}{a_{11}}u'_1 - \frac{a_{10}}{a_{11}a_{00}}u'_0$$

и т.д. Предположим теперь, что для каждого $m = 0,1,\ldots,n-1$ существуют числа ξ_{mk}, при которых

$$u_m = \sum_{k=0}^{m} \xi_{mk}u'_k,$$

и, подставляя последнее в выражение

$$u_n = \frac{1}{a_{nn}}\left(u'_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk}u_k\right),$$

учитывая, что $a_{nn} \neq 0$ при любом $n = 0,1,\ldots$, находим, что u_n однозначно выражается через $u'_0, u'_1, \ldots, u'_n$, т.е. имеет место формула

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \xi_{nk}u'_k. \qquad (9.1)$$

Покажем теперь, что однозначно определяемые числа ξ_{nk} – элементы обратной матрицы $\mathcal{A}^{-1}$ матрицы $\mathcal{A}$. Действительно, равенство

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}u_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\sum_{k=0}^{\nu} \xi_{\nu k}u'_k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu}\xi_{\nu k}\right)u'_k = u'_n$$

имеет место тогда и только тогда, если

$$\sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu}\xi_{\nu k} = \delta_{nk}. \qquad (9.2)$$

Аналогично, так как при помощи (9.1) и (A)

$$u_n = \sum_{\nu=0}^{n} \xi_{n\nu} u'_\nu = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{\nu=k}^{n} \xi_{n\nu} a_{\nu k} \Big) u_k,$$

то, обозначив

$$b_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \xi_{n\nu} a_{\nu k},$$

убеждаемся в том, что также

$$b_{nk} = \delta_{nk},$$

ибо в таком случае, ввиду (9.2),

$$\sum_{\nu=k}^{n} b_{n\nu}\xi_{\nu k} = \sum_{\nu=k}^{n} \xi_{\nu k} \sum_{\varkappa=\nu}^{n} \xi_{n\varkappa} a_{\varkappa\nu} = \sum_{\varkappa=k}^{n} \xi_{n\varkappa} \sum_{\nu=k}^{\varkappa} a_{\varkappa\nu}\xi_{\nu k} = \xi_{nk}.$$

Следовательно, матрица нормального метода $\mathfrak{A}$ имеет двустороннюю обратную матрицу $\mathfrak{A}^{-1} = (\xi_{nk})$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 9.1 следует и из того факта, что определитель системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} a_{00} u_0 &= u'_0 \\ a_{10} u_0 + a_{11} u_1 &= u'_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n0} u_0 + \cdots + a_{nn} u_n &= u'_n \end{aligned}$$

отличен от нуля, т.е.

$$a_{00} a_{11} \cdots a_{nn} \neq 0.$$

Из теоремы 9.1 следует существование обратных и для матриц преобразований (B) - (D), если они нормальны. Поэтому вместе с формулой (9.1) для преобразований (B), (C) и (D) соответственно имеем

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk} u'_k , \tag{9.3}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{\eta}_{nk} u'_k , \tag{9.4}$$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{\xi}_{nk} u'_k . \tag{9.5}$$

Найдем формулы, связывающие обратные преобразования (9.1), (9.3), (9.4) и (9.5) между собой, учитывая, что

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k .$$

Действительно,

$$u_n = \sum_{\nu=0}^{n} \eta_{n\nu} u'_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \eta_{n\nu} \sum_{k=0}^{\nu} u'_k = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{\nu=k}^{n} \eta_{n\nu} \Big) u'_k ,$$

и, следовательно,

$$\bar{\eta}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \eta_{n\nu} , \tag{9.6}$$

откуда, аналогично (8.6), выводим

$$\eta_{nk} = \Delta \bar{\eta}_{nk} . \tag{9.7}$$

В точности так же, как (9.6) и (9.7), получаем

$$\bar{\xi}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \xi_{n\nu} , \tag{9.8}$$

$$\xi_{nk} = \Delta \bar{\xi}_{nk} . \tag{9.9}$$

Из (9.1) и (9.3) находим

$$u_n = \bar{\Delta} \sum_{k=0}^{n} \xi_{nk} u'_k = \sum_{k=0}^{n} \bar{\Delta} \xi_{nk} u'_k ,$$

т.е.

$$\eta_{nk} = \bar{\Delta}\,\xi_{nk}, \tag{9.10}$$

откуда

$$\xi_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \eta_{mk}. \tag{9.11}$$

Из (9.11) и (9.7) выводим

$$\xi_{nk} = \Delta \sum_{m=k}^{n} \bar{\eta}_{mk} = \sum_{m=k}^{n} \Delta\,\bar{\eta}_{mk}. \tag{9.12}$$

Из (9.6) и (9.10) находим

$$\bar{\eta}_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \bar{\Delta}\,\xi_{n\nu}. \tag{9.13}$$

Наконец, из (9.13) и (9.8) получаем

$$\bar{\eta}_{nk} = \bar{\Delta}\,\bar{\xi}_{nk}, \tag{9.14}$$

откуда

$$\bar{\xi}_{nk} = \sum_{m=k}^{n} \bar{\eta}_{mk}. \tag{9.15}$$

Формулы (9.14) и (9.15) аналогичны формулам (9.10) и (9.11).

Положив $k=n$ в формулах (9.10),(9.13),(9.15) и (9.2), для любого нормального метода A, учитывая (8.13), находим

$$\xi_{nn} = \eta_{nn} = \bar{\eta}_{nn} = \bar{\xi}_{nn} = \frac{1}{a_{nn}} = \frac{1}{\alpha_{nn}} = \frac{1}{\bar{\alpha}_{nn}} = \frac{1}{\bar{a}_{nn}}. \tag{9.16}$$

Отметим, что для нетреугольных методов обратные преобразования (если они существуют) имеют более сложный вид. Об этом см., например, Кангро [11], стр. 197-200.

Теперь, обозначив

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk},$$

докажем одно интересное свойство чисел η_n. Имеет место

Теорема 9.2. (Кангро [12]). Если метод $A=(\alpha_{nk})$ нормален и $\alpha_{n0}=1$, то

$$\eta_n=\delta_{n0}.$$

Доказательство. Если в преобразовании (B) положить $u_k=\delta_{k0}$, то при $\alpha_{n0}=1$ получаем, что $u'_n=1$. В этом случае (9.3) дает

$$\delta_{n0}=\sum_{k=0}^{n}\eta_{nk}\cdot 1=\eta_n.$$

§ 10. Характеристика матричного метода

Пусть A - матричный метод суммирования в виде преобразования (A). Для того, чтобы метод A сохранял сходимость, необходимо и достаточно выполнение условий теоремы 1.1 Кожима—Шура.

Для того, чтобы метод A порождал сходимость необходимо и достаточно выполнение условий теоремы 2.1 Шура.

Если A сохраняет сходимость, то, следуя Виланскому [67], число

$$\rho(A)=\alpha-\sum\alpha_k$$

называется характеристикой метода A.

Если $\rho(A)\neq 0$, то метод A называется корегулярным.

В частности, регулярный матричный метод A является корегулярным с характеристикой $\rho(A)=1$.

Если $\rho(A)=0$, то метод A называется конулевым.

Покажем, что любой матричный метод, порождающий сходимость, является конулевым.

Действительно, из условия 3^0 теоремы 2.1 Шура вытекает,

TRU Raamatukogu
TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

что

$$\lim_n \sum_k (a_{nk} - a_k) = 0,$$

откуда

$$a = \lim_n \sum_k a_{nk} = \sum a_k$$

(ибо сходимость этих рядов следует из условий 1^0 и 2^0 теоремы 2.1 Шура) и, следовательно, $\rho(A) = 0$.

Так как по определению матричный метод не может быть одновременно корегулярным и конулевым, то, по доказанному, он также не может быть одновременно порождающим сходимость и корегулярным. Отсюда вытекает

Теорема 10.1. Никакой корегулярный матричный метод не может суммировать всех ограниченных последовательностей.

Теорему 10.1 впервые доказал Штейнгауз (см. [14]), стр. 93 и 113) для регулярного A и Вилянский ([67], стр. 62) для корегулярного A; приведенное здесь изящное доказательство ее принадлежит Кангро.

Теорему 10.1 дополняет следующий результат Агнью.

Теорема 10.2. Для любой ограниченной и расходящейся последовательности существует регулярный матричный метод, суммирующий ее к любому заданному числу.

Доказательство см. Кук [14], стр. 99.

Итак, все ограниченные последовательности можно суммировать лишь некоторым множеством регулярных матричных методов.

Реймерс [19] ввел новые, так называемые континуальные методы суммирования (являющиеся обобщениями матричных методов суммирования), среди которых имеются регулярные методы,

суммирующие все ограниченные последовательности.

§ 11. Абсолютная суммируемость. Методы ограниченности

Пусть A - некоторый матричный метод суммирования.

Ряд (0.1) называется абсолютно суммируемым методом A (или $|A|$-суммируемым), если преобразованный ряд абсолютно сходится, т.е. если

$$\sum |u'_n| < \infty .$$

При этом, если метод задан преобразованием (A) или (B), то считаем

$$u'_n = \bar{\Delta} u'_n . \qquad (11.1)$$

Отметим, что и при $|A|$-суммируемости A-суммой ряда (0.1) является число $\sum u'_n$, а не число $\sum |u'_n|$.

Множество всех рядов (последовательностей), которые метод A абсолютно суммирует, называется полем абсолютной суммируемости метода A и обозначается одним из символов $|A|'$, ℓA или αA.

Если любой абсолютно сходящийся ряд является $|A|$-суммируемым, то говорят, что метод A сохраняет абсолютную сходимость. Если при этом сохраняется сумма любого абсолютно сходящегося ряда, то говорят, что метод A абсолютно регулярен.

Если любая ограниченная (в частности, сходящаяся) последовательность является $|A|$-суммируемой, то говорят, что метод A порождает абсолютную сходимость.

Для того, чтобы матричный метод A сохранял абсолютную сходимость, необходимо и достаточно выполнение условий тео-

ремы 4.1 Кноппа—Лоренца или других теорем параграфа 4, а чтобы порождал абсолютную сходимость - условие теоремы 5.1 Пейеримхоффа.

Отметим, что регулярный метод, сохраняющий абсолютную сходимость, абсолютно регулярен (см. формулу (8.2) и следствия 1.1 и 4.1).

Введем теперь понятия A-ограниченной последовательности и поля ограниченности.

Последовательность (0.2) называется A-ограниченной, если преобразованная последовательность ограничена, т.е. если

$$u'_n = O(1),$$

причем, если метод задан преобразованием (C) или (D), то считаем

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k.$$

Множество всех последовательностей (рядов), которые метод A ограничивает, называется полем ограниченности метода A и обозначается одним из символов A'_0, mA или ℓA.

Из сказанного ясно, что

$$|A|' \subset A' \subset A'_0.$$

§ 12. Включение методов суммирования

Пусть A и B - два метода суммирования.

Если $B' \supset A'$, то говорят, что метод B включает метод A, или, что метод B не слабее метода A, и пишут

$$B \supset A.$$

Если при этом найдется хотя бы один ряд, суммируемый методом B, но несуммируемый методом A, то говорят, что метод

$\mathcal{B}$ <u>сильнее</u> метода A (или A <u>слабее</u> метода $\mathcal{B}$).

Если

$$\mathcal{B}\{\sum u_n\} = A\{\sum u_n\}$$

для любого ряда $\sum u_n$ из множества $A' \cap \mathcal{B}'$, то говорят, что методы A и $\mathcal{B}$ <u>совместны</u>.

Если одновременно $\mathcal{B} \supset A$ и $A \supset \mathcal{B}$, то говорят, что методы A и $\mathcal{B}$ <u>равносильны</u>, и пишут

$$A \sim \mathcal{B}$$

(другими словами, $A \sim \mathcal{B}$, если $A' = \mathcal{B}'$).

Аналогично вышеизложенному определяются и другие включения. Например, $\mathcal{B} \supset |A|$ означает, что метод $\mathcal{B}$ суммирует все $|A|$-суммируемые ряды; $|\mathcal{B}| \supset A_0$ означает, что метод $\mathcal{B}$ абсолютно суммирует все A-ограниченные ряды.

Вообще возможны следующие девять включений:

$$\mathcal{B} \supset A, \qquad |\mathcal{B}| \supset A, \qquad \mathcal{B}_0 \supset A,$$
$$\mathcal{B} \supset |A|, \qquad |\mathcal{B}| \supset |A|, \qquad \mathcal{B}_0 \supset |A|,$$
$$\mathcal{B} \supset A_0, \qquad |\mathcal{B}| \supset A_0, \qquad \mathcal{B}_0 \supset A_0.$$

Посмотрим, как узнать, когда имеет место какое-нибудь из последних соотношений. Для этого нам нужно понятие произведения методов.

<u>Произведением</u> матричных методов A и $\mathcal{B}$ называется метод $C = AB$, определенный матрицей $C = (c_{nk})$ с элементами

$$c_{nk} = \sum_{\nu} a_{n\nu} b_{\nu k}$$

(произведение AB существует, если все ряды, определяющие

элементы c_{nk}, сходятся). Если методы A и B треугольны, то всегда существует произведение AB, ибо

$$c_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu} b_{\nu k}.$$

Теперь может быть доказана

Теорема 12.1. Пусть метод A нормален и B треуголен; $\alpha, \beta = \ell, c, m$. Для того, чтобы имело место включение

$$\beta B \supset \alpha A,$$

необходимо и достаточно, чтобы метод

$$G = BA^{-1} = \left(\sum_{\nu=k}^{n} b_{n\nu} \xi_{\nu k} \right)$$

удовлетворял условиям преобразования $\alpha \to \beta$. При $\alpha, \beta \neq m$ для совместности методов A и B необходима и достаточна соответствующая регулярность[1] метода G.

Доказательство сводится к нахождению условий, когда $\{u_k\} \in \beta B$ при любой последовательности $\{u_k\} \in \alpha A$. Обозначив

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} u_k,$$

$$u''_n = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} u_k,$$

видим, что нам остается показать, что $\{u''_n\} \in \beta$ при любой последовательности $\{u'_n\} \in \alpha$. Последнее, однако, имеет место тогда и только тогда, если метод $G = (g_{nk})$ удовлетворяет условиям преобразования $\alpha \to \beta$, ибо, в силу нормальности метода A, применяя (9.1), находим

---

[1] Ср. Реймерс [18], стр. 30.

$$\mathcal{U}''_n=\sum_{\nu=0}^{n}b_{n\nu}\sum_{k=0}^{\nu}\xi_{\nu k}\mathcal{U}'_k=\sum_{k=0}^{n}\mathcal{U}'_k\sum_{\nu=k}^{n}b_{n\nu}\xi_{\nu k}=\sum_{k=0}^{n}g_{nk}\mathcal{U}'_k.$$

Если же метод G регулярен, то

$$\lim\mathcal{U}''_n=\lim\mathcal{U}'_n,$$

и метод B совместен с методом A.

Теорема 12.1 в основном доказана Кармайклом [32].

В общем случае имеет место следующая теорема Мазура—Хилла [41], обобщенная Кангро [11].

Теорема 12.2. Пусть $A=(a_{nk})$ обратимый[1], а $B=(b_{nk})$ - произвольный матричный метод. Для того, чтобы имело место включение

$$B\supset A$$

необходимо и достаточно выполнение условий

1^0 B-суммируемость последовательностей $\{\xi_{nk}\}$ и $\{\xi_n\}$,

2^0 $\sup_m\sum_k\left|\sum_{\nu=0}^{m}b_{n\nu}\xi_{\nu k}\right|<\infty \qquad (n=0,1,\ldots),$

3^0 $\sum_k\left|\sum_\nu b_{n\nu}\xi_{\nu k}\right|=O(1) \qquad (n=0,1,\ldots),$

где

$$(\xi_{nk})=A^{-1}, \qquad \xi_n=\sum_k\xi_{nk}.$$

При этом для совместности A и B необходимо и достаточнс выполнение условий

$$B\{\xi_{nk}\}=0 \quad (k=0,1,\ldots) \quad \text{и} \quad B\{\xi_n\}=1.$$

Доказательство см. Кангро [11], стр. 200-201.

Дальнейшие результаты о включении и совместности см. Волков—Ульянов [14], стр. 367-395.

[1] Об обратимых (т.е. реверсивных) методах см., например, Кангро [11], стр. 197, 198 и 200.

§ 13. Транслятивность методов суммирования

Как известно, если ряд

$$u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots \tag{0.1}$$

сходится, то сходится также ряд

$$0+u_0+\cdots+u_{n-1}+\cdots \tag{13.1}$$

и наоборот. Это свойство для суммируемости вообще не имеет места. Последнее происходит потому, что в преобразованной последовательности u'_n (например, в случае преобразования (B)) любой элемент зависит от всех членов ряда (0.1). Для изучения этого явления вводится понятие транслятивности метода.

Пусть A - некоторый метод суммирования. Если из A-суммируемости ряда (0.1) всегда следует A-суммируемость ряда (13.1), то метод A называется транслятивным[1] слева.

Если из $|A|$-суммируемости ряда (0.1) всегда следует $|A|$-суммируемость ряда (13.1), то метод A называется абсолютно транслятивным слева.

Если, наоборот, из A-суммируемости ряда (13.1) всегда следует A-суммируемость ряда (0.1), то метод A называется транслятивным справа.

Метод суммирования A называется транслятивным, если он транслятивен справа и слева.

Если метод A транслятивен (транслятивен справа или слева) и A-суммы рядов (0.1) и (13.1) совпадают, то говорят

---

[1] Этот термин принадлежит Хиллу [41]. См. также Кук [14], стр. 137.

о соответствующей регулярной транслятивности.

Аналогичны определения и для абсолютной транслятивности.

Из сказанного видно, что метод сходимости E регулярно транслятивен. Метод E_0 является транслятивным, но не регулярно транслятивным.

13.1. Сведение вопроса о транслятивности к включению. Покажем, что транслятивность - это частный случай включения.

Начнем рассматривать транслятивность слева. Частичные суммы рядов (0.1) и (13.1) соответственно суть последовательности

$$u_0, u_1, \dots, u_n, \dots \qquad (13.2)$$

$$0, u_0, \dots, u_{n-1}, \dots . \qquad (13.3)$$

Применяя к последовательностям (13.2) и (13.3) метод суммирования $A=(a_{nk})$, убеждаемся в том, что вопрос о транслятивности слева метода A сводится к нахождению необходимых и достаточных условий, чтобы из существования предела

$$\lim_n \sum_k a_{nk} u_k$$

всегда следовало существование предела

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} u_{k-1} = \lim_n \sum_k a_{n,k+1} u_k .$$

Следуя Хиллу [41], обозначим $A_L = (a_{n,k+1})$. Теперь из сказанного вытекает

Теорема 13.1. Для того, чтобы матричный метод $A=(a_{nk})$ был транслятивным слева, необходимо и достаточно выполнение условия

$$A_L \supset A. \qquad (13.4)$$

Для того, чтобы метод A был регулярно транслятивным слева, необходимо и достаточно выполнение условий (13.4) и

$$A_L\{\sum u_n\} = A\{\sum u_n\}.$$

Замечание. Для транслятивности справа имеет место аналогичная теорема, если A_L заменить матрицей $A_R = (a_{n,k-1})$, полагая $a_{n,-1} = 0$.

13.2. Некоторые свойства транслятивных методов.

1. Как известно, общий член сходящегося ряда стремится к нулю. Встает вопрос: при каких условиях это свойство сходящихся рядов обобщается на суммируемые ряды? Это означает, при каких условиях из A-суммируемости ряда (0.1) вытекает A-суммируемость к нулю его членов. Для любого метода это не имеет места, например, для метода E_0. Ответ дает следующая

Теорема 13.2. Пусть A - линейный метод суммирования. Для того, чтобы из A-суммируемости ряда (0.1) всегда следовала A-суммируемость к нулю последовательности u_n, необходимо и достаточно, чтобы метод A был регулярно транслятивным слева.

Доказательство. Необходимость. Пусть по условию

$$A\{\sum u_n\} = \mathcal{U}, \qquad A\{u_n\} = 0;$$

тогда метод A регулярно транслятивен слева, ибо из линейности метода A для последовательности (13.3) выводим

$$A\{\mathcal{U}_{n-1}\} = A\{\mathcal{U}_n - u_n\} = A\{\mathcal{U}_n\} - A\{u_n\} = \mathcal{U} - 0 = \mathcal{U}.$$

---

[1] См. Хилл [41], теорема 3; Кук [14], стр. 157. У Хилла требуется регулярность метода A.

Достаточность. Если A линеен и регулярно транслятивен слева, то

$$A\{u_n\} = A\{\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n-1}\} = A\{\mathcal{U}_n\} - A\{\mathcal{U}_{n-1}\} = \mathcal{U} - \mathcal{U} = 0.$$

2. Здесь будет доказана[1]

Теорема 13.3. Линейный и регулярный метод суммирования A, регулярно транслятивный слева, может суммировать ряд $\sum z^n$ лишь к значению $\frac{1}{1-z}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$, $A\{\mathcal{U}_n\} = \mathcal{U}$. Тогда, согласно предположению, имеем

$$A\{\sum_{k=1}^{n} z^k\} = A\{z\mathcal{U}_{n-1}\} = z\,A\{\mathcal{U}_{n-1}\} = z\,\mathcal{U};$$

с другой стороны, ввиду линейности и регулярности метода A

$$A\{\sum_{k=1}^{n} z^k\} = A\{\mathcal{U}_n - 1\} = A\{\mathcal{U}_n\} - A\{1\} = \mathcal{U} - 1.$$

Следовательно, $\mathcal{U} - 1 = z\,\mathcal{U}$ и $\mathcal{U} = \frac{1}{1-z}$.

Положив в теореме 13.3 параметр $z = -1$, получаем

Следствие 13.1. Линейный и регулярный метод суммирования, регулярно транслятивный слева, может суммировать эйлеров ряд (6.1) лишь к числу $\frac{1}{2}$.

Другие применения транслятивных методов см. Кук [14], стр. 138 и 158.

---

[1] См. Кук [14], стр. 142 и 158.

Глава III

НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

Классические методы суммирования возникли, в первую очередь, в результате обобщения метода арифметических средних в том или ином направлении. Первым таким методом является метод суммирования Гельдера. Таким же образом возникли методы Чезаро, взвешенных средних Рисса и др.

§ 14. Метод суммирования Гельдера

Последовательность (0.2) называется суммируемой методом арифметических средних к числу u', если последовательность

$$H_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad (14.1)$$

сходится к u'.

Метод арифметических средних обозначим через H, или H^1, или $(H, 1)$.

В частности, для ряда (6.1) имеем

$$H\{\sum (-1)^n\} = \frac{1}{2}.$$

Если же образуем квадрат ряда (6.1) по правилу Коши, то он не суммируем методом H. Действительно,

$$\left[\sum (-1)^n\right]^2 = \sum_n \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (-1)^{n-k}\right] = \sum_n (-1)^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum (-1)^n (n+1),$$

а частичные суммы ряда

$$\sum (-1)^n (n+1) \qquad (14.2)$$

есть

$$u_n=\begin{cases} k+1 & \text{при } n=2k, \\ -k-1 & \text{при } n=2k+1. \end{cases}$$

Поэтому для ряда (14.2) имеем

$$H_{2k+1}=0, \quad H_{2k}=\frac{1}{2k+1}u_{2k}=\frac{k+1}{2k+1}\to\frac{1}{2}\neq 0,$$

т.е. ряд (14.2) не является H-суммируемым.

Оказывается, что ряд (14.2) суммируем более сильным методом. А именно, Гельдер ([43], стр. 548) показал, что ряд (14.2) суммируем введенным им методом H^2 арифметических средних второго порядка, определяемый через предел последовательности

$$H_n^2=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}H_k.$$

Действительно, для ряда (14.2) из-за регулярности метода H (в чем убеждаемся применением к матрице (14.1) теоремы 1.2 Теплица) имеем

$$H_{2n}^2=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}H_k=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}H_{2k}=$$

$$=\frac{n+1}{2n+1}\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}H_{2k}\to\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

откуда

$$H_{2n+1}^2=\frac{1}{2n+2}\sum_{k=0}^{n}H_{2k}=\frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}H_{2k}\to\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

и, значит,

$$H^2\left\{\sum(-1)^n(n+1)\right\}=\frac{1}{4}.$$

Вообще можем аналогично рассматривать арифметические средние

последовательности (0.2) любого натурального порядка, определив

$$H_n^0 = \mathcal{U}_n,$$

$$H_n^\alpha = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} H_k^{\alpha-1}.$$

Таким образом приходим к методу Гельдера порядка α, введенный Гельдером ([43], стр.536) в 1882 году. Его обозначают через H^α или (H,α). По определению

$$H^\alpha\{\sum u_n\} = \lim_n H_n^\alpha.$$

При $\alpha = 0$ метод H^α есть метод сходимости:

$$H^0 = E.$$

Имеет место

Теорема 14.1. Метод H^α регулярен.

Доказательство. Если ряд (0.1) сходится к числу $\mathcal{U}$, то, в силу регулярности метода H, также $H_n \to \mathcal{U}$. Если предположить, что $H_n^{\alpha-1} \to \mathcal{U}$ при $\alpha \geq 1$, то, снова применяя регулярность метода арифметических средних, получаем $H_n^\alpha \to \mathcal{U}$.

Теорема 14.2. Если $\beta > \alpha$, то $H^\beta \supset H^\alpha$, и оба метода совместны.

Доказательство. Обозначим $\beta = \alpha + \gamma$. Тогда, если

$$H^\alpha\{\sum u_n\} = \mathcal{U}',$$

то, ввиду регулярности метода H, последовательно получаем

$$H^{\alpha+1}\{\sum u_n\} = \mathcal{U}',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$H^{\alpha+\gamma}\{\sum u_n\} = \mathcal{U}',$$

что и требовалось доказать.

Гельдер ввел свой метод для того, чтобы обобщить вторую теорему Абеля[1]. Гельдер ([43], стр. 536) фактически получил следующий результат[2].

Теорема 14.3. Если степенной ряд

$$\sum a_n z^n$$

H^α-суммируем в точке $z = z_0$ круга сходимости, то имеет место равенство

$$\lim_{z \to z_0} \sum a_n z^n = H^\alpha \{ \sum a_n z_0^n \},$$

где предел берется по некасательному к окружности пути[3].

При $\alpha = 0$ теорема 14.3 есть теорема Абеля. Случай $\alpha = 1$ теоремы 14.3 рассматривал Фробениус [36]. Эта теорема Фробениуса считается первым значительным результатом в теории расходящихся рядов, после которого теория суммируемости начала быстро развиваться.

Метод H^α обладает и рядом других хороших свойств, но доказывать их очень затруднительно, ибо очень трудно представить H_n^α в виде преобразования (A). Например, возвысив в квадрат матрицу метода арифметических средних, для метода H^2 получаем

$$a_{nk} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=k}^{n} \frac{1}{\nu+1}.$$

Очевидно, чем больше α, тем сложнее вид матрицы метода H^α. Поэтому практически применяют другой метод, равносильный ме-

---

[1] См., например, Фихтенгольц [23], стр. 446.

[2] См. также Кнопп [50], стр. 491.

[3] См. Бари [3], стр. 30.

тоду H^α, матрица которого очень проста. Таким методом является метод Чезаро, который рассматривается в следующем параграфе.

Отметим, что метод H^α можно определить и для любого комплексного α, если метод H^α рассматривать как частный случай метода Хаусдорфа. Об этом пойдет речь в § 19.

§ 15. Метод суммирования Чезаро

15.1. Определение метода Чезаро. К методу суммирования Чезаро приходим следующим образом. Для ряда (0.1) положим

$$S_n^0 = \sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k ,$$

и при $\alpha \geq 1$

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha-1} .$$

Вместе с величинами S_n^α в определении метода Чезаро важны и биноминальные коэффициенты

$$A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n},$$

являющиеся коэффициентами биноминального ряда

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} = \sum A_n^\alpha x^n . \qquad (15.1)$$

Чезаровские средние, коротко C^α-средние, определим отношением[1]

$$\sigma_n^\alpha = \frac{S_n^\alpha}{A_n^\alpha} . \qquad (15.2)$$

[1] В литературе вместо σ_n^α часто пишут C_n^α или s_n^α.

Если существует конечный предел

$$\lim \sigma_n^{\alpha} = \mathcal{U}',$$

то говорят, что ряд (0.1) суммируем методом Чезаро порядка α к числу $\mathcal{U}'$.

Метод Чезаро порядка α обозначают через C^{α} или (C,α). Следовательно,

$$C^{\alpha}\{\sum u_n\} = \lim_n \sigma_n^{\alpha}.$$

Отметим, что $(C,0)$ - это метод сходимости, ибо $A_n^0 = 1$ и

$$\sigma_n^0 = \frac{S_n^0}{A_n^0} = \mathcal{U}_n;$$

метод $(C,1)$ - это метод арифметических средних, так как $A_n^1 = n+1$ и, следовательно,

$$\sigma_n^1 = \frac{S_n^1}{A_n^1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}_k.$$

Покажем теперь, что средние (15.2) можно привести к виду (A), т.е. к виду

$$\sigma_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}\mathcal{U}_k. \qquad (15.3)$$

Для этого образуем формальное произведение рядов

$$\frac{1}{1-x}\sum \mathcal{U}_n x^n = \sum x^n \cdot \sum \mathcal{U}_n x^n = \sum_n \Big(\sum_{k=0}^{n} \mathcal{U}_k\Big) x^n =$$

$$= \sum S_n^1 x^n.$$

Далее, предположив, что

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}}\sum \mathcal{U}_n x^n = \sum S_n^{\alpha-1} x^n,$$

для любого $\alpha = 1,2,\ldots$ получаем

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\sum u_n x^n = \frac{1}{1-x}\sum S_n^{\alpha-1} x^n =$$

$$= \sum x^n \cdot \sum S_n^{\alpha-1} x^n = \sum_n \Big(\sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha-1}\Big) x^n .$$

Следовательно, методом математической индукции нами доказана формула

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha}}\sum u_n x^n = \sum S_n^{\alpha} x^n . \qquad (15.4)$$

Отсюда и из (15.1) выводим

$$\sum_n \Big(\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} u_k\Big) x^n = \sum A_n^{\alpha-1} x^n \cdot \sum u_n x^n = \sum S_n^{\alpha} x^n .$$

Приравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях переменного x, находим

$$S_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} u_k , \qquad (15.5)$$

и после деления на A_n^{α} для (15.3) получаем

$$\sigma_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} u_k . \qquad (15.6)$$

До сих пор предполагалось, что $\alpha = 0,1,\ldots$. Однако, при помощи соотношения (15.6) можем средние σ_n^{α} определить и для нецелого α, даже для мнимого α. Для этого надо лишь определить величины S_n^{α} так, чтобы они имели смысл для комплексных α. Поэтому за определение величин S_n^{α} будем считать формулу (15.5). Тогда из (15.6) заключаем, что метод Чезаро C^{α} определяется для любого комплексного[1] α с $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$ в виде треугольного матричного преобразования

[1] При $\alpha = -1, -2,\ldots$ соотношение (15.6) не имеет смысла.

(A) последовательности в последовательность с матрицей

$$a_{nk}=\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}. \qquad (15.7)$$

Если в выводе соотношения (15.4) последовательность u_n по формуле (0.2) заменить на u_n, то вместо (15.4) и (15.5) получим соответственно

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}}\sum u_n x^n=\sum S_n^{\alpha}x^n, \qquad (15.8)$$

$$S_n^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha}u_k. \qquad (15.9)$$

Следовательно, метод Чезаро C^{α} в виде преобразования (B) ряда в последовательность определяется матрицей

$$a_{nk}=\frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}. \qquad (15.10)$$

Ниже увидим, что (15.10) легко получить и непосредственно из (15.7) при помощи формулы (8.5)

Определение метода C^{α} при $\alpha=1,2,\ldots$ дано Чезаро [33], а для любых $\alpha>-1$ дано независимо друг от друга Кноппом [48] и Чепменом [34]. Практически больше рассматривают метод C^{α} при $\alpha>-1$, ибо, как ниже увидим, тогда $a_{nk}>0$. Определение методов C^{α} и C_0^{α} при $\alpha=-1,-2\ldots$ и подробное исследование его свойств даны в статье Люры [55].

15.2. Свойства чисел S_n^{α} и A_n^{α}. В определении метода Чезаро большое значение имеют числа S_n^{α} и A_n^{α} и соотношения между ними.

Напомним, что для любого комплексного α имеет место

формула (15.5) и, значит, остается в силе соотношение (15.4).

Перепишем (15.1) в виде

$$\frac{1}{(1-x)^{\sigma+1}} = \sum A_n^{\sigma} x^n. \qquad (15.1_1)$$

Перемножив теперь обе части равенств (15.4) и (15.1_1) между собой, получаем

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+\sigma+1}} \sum u_n x^n = \sum S_n^{\alpha+\sigma+1} x^n = \sum_n \Big(\sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha} A_{n-k}^{\sigma} \Big) x^n,$$

откуда

$$S_n^{\alpha+\sigma+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\sigma} S_k^{\alpha}. \qquad (15.11)$$

Если теперь перемножить между собой равенства (15.1) и (15.1_1), то также получаем

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha+\sigma+2}} = \sum A_n^{\alpha+\sigma+1} x^n = \sum_n \Big(\sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha} A_{n-k}^{\sigma} \Big) x^n,$$

откуда

$$A_n^{\alpha+\sigma+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\sigma} A_k^{\alpha}. \qquad (15.12)$$

Сравнивая (15.11) и (15.12), мы видим, что (15.12) следует из (15.11) при $S_k^{\alpha} = A_k^{\alpha}$. Учитывая (15.5), получаем, что (15.11) переходит в (15.12) при $u_n = 1$, т.е. при $u_n = \delta_{n0}$. Поэтому и имеет место такая аналогия между величинами S_n^{α} и A_n^{α}.

Формула (15.12) часто применяется в виде

$$\sum_{k=\nu}^{n} A_{n-k}^{\sigma} A_{k-\nu}^{\alpha} = A_{n-\nu}^{\alpha+\sigma+1}. \qquad (15.13)$$

Если в формулах (15.11) и (15.12) положить $\sigma = 0$, то обнаруживаем, что

$$S_n^{\alpha+1} = \sum_{k=0}^{n} S_k^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} S_{n-k}^{\alpha}, \qquad (15.14)$$

$$A_n^{\alpha+1} = \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha}. \qquad (15.15)$$

Отсюда непосредственно выводим

$$S_n^{\alpha} - S_{n-1}^{\alpha} = S_n^{\alpha-1}, \qquad A_n^{\alpha} - A_{n-1}^{\alpha} = A_n^{\alpha-1}.$$

При помощи (15.15) из (15.7) и (8.5) заключаем

$$a_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} = \frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n-k} A_{n-k-\nu}^{\alpha-1} = \frac{A_{n-k}^{\alpha}}{A_n^{\alpha}},$$

т.е. получаем формулу (15.10).

Отметим и следующие свойства биноминальных коэффициентов. Из того, что $A_n^{\alpha} = \binom{n+\alpha}{n}$ непосредственно следует

$$A_n^0 = 1$$

$$A_0^{\alpha} = 1 \quad \text{при любом } \alpha,$$

$$A_n^{\alpha} = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\cdots(\alpha+1)}{n!} \quad \text{при } n > 0,$$

$$A_n^{\alpha} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{при } \alpha \neq -1,-2,\ldots . \qquad (15.16)$$

Из последнего сразу заключаем

$$A_n^{\alpha} = (-1)^n \binom{-\alpha-1}{n},$$

$$A_n^{\alpha} > 0 \quad \text{при } \alpha > -1,$$

$$A_n^{-m} = 0 \quad \text{в случае } m = 1,2,\ldots \text{ при } n \geq m,$$

$$A_n^{-1} = \delta_{n0};$$

а в случае $\alpha < 0$ числа A_n^{α} сохраняют знак при всех

$n \geqslant [-\alpha]$, ибо $|A_n^\alpha| = (-1)^{[-\alpha]} A_n^\alpha$ при $n \geqslant [-\alpha]$ и $\alpha < 0$.

Последовательность A_n^α строго возрастает по n при $\alpha > 0$ и строго убывает при $-1 < \alpha < 0$, ибо $\Delta A_n^\alpha = -\frac{\alpha}{n+1} A_n^\alpha$.

Далее, из формулы Эйлера—Гаусса

$$\Gamma(\alpha) = \lim_n \frac{n^\alpha}{\alpha A_n^\alpha}$$

заключаем, что при $n \to \infty$

$$A_n^\alpha \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \quad \text{для} \quad \alpha \neq -1, -2, \ldots .$$

Следовательно, существуют положительные постоянные M_1 и M_2 такие, что

$$|A_n^\alpha| \leqslant M_1 (n+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \quad \text{при любом } \alpha,$$

$$|A_n^\alpha| \geqslant M_2 (n+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \quad \text{при } \alpha \neq -1, -2, \ldots .$$

Отсюда получаем также, что

$$\sum_n |A_n^\alpha| < \infty \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\alpha < -1,$$

$$\sum_{n=k}^{\infty} |A_n^\alpha| = \mathcal{O}\left[(k+1)^{\operatorname{Re}\alpha - 1}\right] \quad \text{при } \operatorname{Re}\alpha < -1.$$

Далее для любых вещественных $\varkappa, \lambda$ имеет место формула Андерсена ([27], стр. 22)

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^\varkappa A_{n-k}^\lambda| = \mathcal{O}\left[(n+1)^\varkappa\right] + \mathcal{O}\left[(n+1)^\lambda\right] + \mathcal{O}\left[(n+1)^{\varkappa+\lambda+1}\right],$$

откуда при $\lambda = 0$ выводим

$$\sum_{k=0}^{n} |A_k^\varkappa| = \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}\left[(n+1)^\varkappa\right].$$

Для доказательства заметим, что формулы вытекают из (15.12) при $\varkappa, \lambda \geqslant -1$. Если же, например, $\varkappa, \lambda < -1$, то

$$\sum_{k=0}^{n}|A_k^{\alpha}A_{n-k}^{\lambda}|=\sum_{k=0}^{[-\alpha]-1}|A_k^{\alpha}A_{n-k}^{\lambda}|+\Big|\sum_{k=[-\alpha]}^{n-[-\lambda]-1}A_k^{\alpha}A_{n-k}^{\lambda}\Big|+\sum_{k=n-[-\lambda]}^{n}|A_k^{\alpha}A_{n-k}^{\lambda}|=$$

$$=O\big[(n+1)^{\lambda}\big]+\Big|\sum_{k=0}^{n}A_k^{\alpha}A_{n-k}^{\lambda}\Big|+O\big[(n+1)^{\alpha}\big]=$$

$$=O\big[(n+1)^{\lambda}\big]+O\big[(n+1)^{\alpha+\lambda+1}\big]+O\big[(n+1)^{\alpha}\big].$$

Из (15.16) и (15.15) также вытекает

$$n\,A_n^{\alpha}=(\alpha+1)\,A_{n-1}^{\alpha+1},$$

$$n\,A_n^{\alpha}=(\alpha+1)\big(A_n^{\alpha+1}-A_n^{\alpha}\big), \qquad (15.17)$$

а отсюда и из (15.13)

$$\sum_{k=0}^{n}k\,A_{n-k}^{\sigma}A_k^{\alpha}=(\alpha+1)\,A_{n-1}^{\alpha+\sigma+2}.$$

Значительно труднее доказательство формулы Чжоу [4], стр. 51)

$$\sum_{n=k}^{\infty}\frac{A_{n-k}^{\sigma}}{n\,A_n^{\tau}}=\frac{1}{k\,A_k^{\tau-\sigma-1}}, \qquad (15.18)$$

где $\mathrm{Re}\,\tau>-1$, $\mathrm{Re}(\tau-\sigma)>0$, $k=1,2,\ldots$.

Действительно, ряд слева абсолютно сходится, так как $\mathrm{Re}\,(\tau-\sigma)>0$. Далее,

$$\sum_{n}\frac{A_n^{\sigma}}{(n+k)A_{n+k}^{\tau}}=\sum_{n}A_n^{\sigma}B(n+k,\tau+1)=\sum_{n}A_n^{\sigma}\int_0^1x^{n+k-1}(1-x)^{\tau}dx=$$

$$=\int_0^1x^{k-1}(1-x)^{\tau}\sum_{n}A_n^{\sigma}x^n\,dx=$$

$$=\int_0^1x^{k-1}(1-x)^{\tau-\sigma-1}dx=B(k,\tau-\sigma)=\frac{1}{k\,A_k^{\tau-\sigma-1}}.$$

Все бета-функции здесь существуют, так как $n+k>0$, $k>0$, $\mathrm{Re}(\tau+1)>0$ и $\mathrm{Re}\,(\tau-\sigma)>0$. Перестановка интеграла

и суммы оправдана, потому что

$$\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^\tau \sum_n A_n^\tau x^n dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{1-\varepsilon} x^{k-1}(1-x)^\tau \sum_n A_n^\sigma x^n dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \sum_n A_n^\sigma \int_0^{1-\varepsilon} x^{n+k-1}(1-x)^\tau dx =$$

$$= \sum_n A_n^\sigma \int_0^1 x^{n+k-1}(1-x)^\tau dx,$$

причем ряд под знаком интеграла равномерно сходится по x на отрезке $[0, 1-\varepsilon]$, а последующий ряд равномерно сходится по ε, в чем убеждает неравенство

$$\left| A_n^\sigma \int_0^{1-\varepsilon} x^{n+k-1}(1-x)^\tau dx \right| \le |A_n^\sigma| \int_0^1 x^{n+k-1}(1-x)^{\operatorname{Re}\tau} dx.$$

Также имеет место формула

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^\sigma}{A_n^\tau} = \frac{\tau}{\tau-\sigma-1} \frac{1}{A_k^{\tau-\sigma-1}}, \qquad (15.19)$$

где $\operatorname{Re}\tau \ge 0$, $\operatorname{Re}(\tau-\sigma)>1$, $k=0,1,\ldots$.

При $\operatorname{Re}\tau>0$ формулу (15.19) можно или непосредственно доказать аналогично доказательству формулы (15.18), исходя из равенства

$$\frac{1}{A_n^\tau} = \tau \int_0^1 x^n (1-x)^{\tau-1} dx = \tau B(n+1,\tau), \quad \text{где } \operatorname{Re}\tau>0,$$

или же вывести из (15.18) и (15.17). Докажем верность формулы (15.19) при $\operatorname{Re}\tau=0$. Для $k\ge 1$ из-за (15.17) и (15.18) имеем

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^\sigma}{A_n^\tau} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-k)A_{n-k}^\sigma}{n A_n^\tau} + k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^\sigma}{n A_n^\tau} = \frac{\sigma+1}{k A_k^{\tau-\sigma-2}} + \frac{k-\sigma-1}{k A_k^{\tau-\sigma-1}} =$$

$$= \frac{1}{k A_k^{\tau-\sigma-1}} \left[(\sigma+1) \frac{k+\tau-\sigma-1}{\tau-\sigma-1} + k-\sigma-1 \right] = \frac{\tau}{\tau-\sigma-1} \frac{1}{A_k^{\tau-\sigma-1}},$$

а при $k=0$ из (15.19) и (15.18) находим

$$\sum_n \frac{A_n^\sigma}{A_n^\tau} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n-1}^\sigma}{A_n^\tau}\left(1+\frac{\sigma}{n}\right) = 1 + \frac{\tau}{\tau-\sigma-1}\,\frac{1}{\tau-\sigma} + \frac{\sigma}{\tau-\sigma} = \frac{\tau}{\tau-\sigma-1}.$$

При $\tau=0$ формула (15.19) вытекает и из (15.15).

Наконец, докажем еще следующую формулу Бозанкет ([4], стр. 53)

$$\sum_{k=\nu}^{m} A_{n-k}^{\sigma-1} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} = \mathcal{O}(1) A_{n-\nu}^{\sigma-1} A_{m-\nu}^{-\alpha}, \qquad (15.20)$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant m \leqslant n$, $0 \leqslant \alpha < 1$ и $0 < \sigma < 1$.

При $\alpha = 0$ справедливость равенства (15.20) очевидна. Для доказательства ее при $\alpha > 0$, с одной стороны, имеем

$$\sum_{k=\nu}^{m} A_{n-k}^{\sigma-1} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} = A_{n-\nu}^{\sigma-1}\left|A_0^{-\alpha-1}\right| - A_{n-\nu-1}^{\sigma-1}\left|A_1^{-\alpha-1}\right| - \cdots - A_{n-m}^{\sigma-1}\left|A_{m-\nu}^{-\alpha-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant A_{n-\nu}^{\sigma-1}\left(\left|A_0^{-\alpha-1}\right| - \left|A_1^{-\alpha-1}\right| - \cdots - \left|A_{m-\nu}^{-\alpha-1}\right|\right) =$$

$$= A_{n-\nu}^{\sigma-1} \sum_{k=0}^{m-\nu} A_k^{-\alpha-1} = A_{n-\nu}^{\sigma-1} A_{m-\nu}^{-\alpha};$$

с другой стороны, существуют положительные постоянные M_1 и M_2 такие, что

$$\sum_{k=\nu}^{m} A_{n-k}^{\sigma-1} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} \geqslant \sum_{k=\nu}^{n} A_{n-k}^{\sigma-1} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} = A_{n-\nu}^{\sigma-\alpha-1} \geqslant$$

$$\geqslant -M_1 (n-\nu+1)^{\sigma-\alpha-1} \geqslant$$

$$\geqslant -M_1 (n-\nu+1)^{\sigma-1} (m-\nu+1)^{-\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant -M_2 A_{n-\nu}^{\sigma-1} A_{m-\nu}^{-\alpha}.$$

15.3. Регулярность и сохранение абсолютной сходимости.

Теорема 15.1. Метод (C,α) регулярен, если $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ или $\alpha = 0$.

Доказательство следует из теоремы 1.2 Теплица, формул (15.7), (15.15) и неравенств на стр.71-72. Действительно, обозначив $\mathrm{Re}\,\alpha = \lambda$, находим, что условия 1^0-3^0 теоремы 1.2 выполнены, так как

$$a_k = \lim_n a_{nk} = \lim_n \frac{(n-k)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{n^\alpha} = \lim_n O(1) \frac{(n-k)^{\lambda-1}}{n^\lambda} = 0$$

при $\lambda > 0$, а при $\alpha = 0$ имеем $a_{nk} = \delta_{nk} \to 0$ при $n \to \infty$;

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} = \frac{1}{A_n^\alpha} A_n^\alpha = 1;$$

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| \le \frac{M_1}{M_2 (n+1)^\lambda} \sum_{k=0}^{n} (n+1-k)^{\lambda-1} = \frac{O(1)}{(n+1)^\lambda} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\lambda-1} = \frac{O(A_n^\alpha)}{(n+1)^\lambda} = O(1)$$

при $\lambda > 0$, а при $\alpha = 0$ (даже при любом $\alpha \ge 0$) условие 3^0 теоремы 1.2 здесь вытекает из выполнения условия 2^0, ибо $A_{n-k}^{\alpha-1} \ge 0$ при $\alpha \ge 0$.

Так как метод Чезаро треугольен, то абсолютную суммируемость (коротко $|C^\alpha|$-суммируемость или $|C,\alpha|$-суммируемость) удобно определить в виде преобразования (C). Поэтому найдем для метода C^α матрицу $(\bar{a}_{nk})$. Действительно, при помощи (8.13) из (15.10) выводим

$$\bar{a}_{00} = 1,$$

а при помощи (8.2) для $n \ge 1$ и $\alpha \ne 0$ из (15.10) выводим

$$\bar{a}_{nk} = \bar{\Delta} \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \left(\frac{n-k+\alpha}{\alpha} - \frac{n-k}{\alpha} \frac{n+\alpha}{n} \right) = \frac{k}{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}.$$

Если при $k = n = 0$ считать $\frac{k}{n} = 1$, то в итоге для всех $0 \le k \le n$ имеем[1]

---

[1] Верность формулы (15.21) при $\alpha = 0$ очевидна, ибо тогда $\bar{a}_{nk} = \delta_{nk} = a_{nk}$.

$$\bar{a}_{nk} = \frac{k A_{n-k}^{\alpha-1}}{n A_n^{\alpha}}. \qquad (15.21)$$

В теории C^{α}-суммируемости, и в особенности $|C^{\alpha}|$-суммируемости, большую помощь оказывает рассмотрение вместе с рядом (0.1) последовательности

$$\{nu_n\} \qquad (15.22)$$

Обозначим C^{α}-средние последовательности (15.22) через[1] τ_n^{α}, т.е.

$$\tau_n^{\alpha} = \frac{T_n^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}, \qquad (15.23)$$

где

$$T_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} k u_k. \qquad (15.24)$$

Сравнивая (15.23) и (15.24) с (15.21), ввиду сказанного в § 11, можем сказать, что ряд (0.1) называется[2] C^{α}-суммируемым, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tau_n^{\alpha};$$

ряд (0.1) называется $|C^{\alpha}|$-суммируемым, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\tau_n^{\alpha}| < \infty.$$

При этом

$$C^{\alpha}\{\sum u_n\} = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tau_n^{\alpha}.$$

---

[1] В литературе вместо τ_n^{α} часто пишут T_n^{α} или t_n^{α}.

[2] Это определение в книге Харди ([24], стр. 157) дается теоремой 66.

Определение метода $|C^\alpha|$ при $\alpha = -1, -2, \ldots$ и подробное исследование его свойств даны в статье Люры [55]. См. также Слепенчук [20].

Теорема 15.2. Метод $|C,\alpha|$ сохраняет абсолютную сходимость, если $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ или $\alpha = 0$.

Доказательство. Из (15.21) видно, что $\bar{a}_{n0} = 0$ при $n \neq 0$ и $\bar{a}_{00} = 1$. Для всех $k = 1,2,\ldots$ по теореме 4.1 Кнопа—Лоренца при $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ или $\alpha = 0$ по формуле (15.18) имеем

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{a}_{nk}| = k \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{n A_n^\alpha} \right| = O(k) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^{\mathrm{Re}\,\alpha - 1}}{n A_n^{\mathrm{Re}\,\alpha}} = O(1).$$

15.4. Обратные матрицы. Ввиду того, что метод Чезаро нормален, то по теореме 9.1 он обратим.

Найдем сначала обратную матрицу метода C^α, заданного в виде преобразования (A), т.е. матрицей (15.7). Для этого в (15.11) положим $\sigma = -\alpha - 1$, в результате чего получаем

$$u_n = \sigma_n^0 = S_n^0 = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-\alpha-1} S_k^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{-\alpha-1} A_k^\alpha \sigma_k^\alpha,$$

и, значит,

$$\xi_{nk} = A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-1}. \qquad (15.25)$$

Найдем также матрицу (η_{nk}), обратную для метода C^α, заданного в виде преобразования (B), т.е. матрицей (15.10). Именно, положив в (15.9) число $\alpha = -1$, получаем

$$S_n^{-1} = u_n,$$

а используя последнее и взяв в (15.11) число $\sigma = -\alpha - 2$, аналогично (15.25) находим

$$\eta_{nk} = A_k^{\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-2}. \qquad (15.26)$$

Формула (15.26) найдена Кноппом ([48], стр. 11) и Чепменом ([34], стр. 373).

Формулу (15.26) можно очень просто получить из (15.25) при помощи (9.10), а именно

$$\eta_{nk} = A_k^{\alpha} \Delta A_{n-k}^{-\alpha-1} = A_k^{\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-2}.$$

Найдем, наконец, матрицу $(\bar{\eta}_{nk})$, обратную для метода C^{α}, заданного в виде преобразования (C), т.е. матрицей (15.21). Докажем, что

$$\bar{\eta}_{nk} = \frac{k}{n} A_k^{\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1}. \qquad (15.27)$$

Формула (15.27) вытекает из (15.26) при помощи (9.6), однако не столь непосредственно. Приведем это доказательство, т.е. докажем что

$$\sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu}^{\alpha} A_{n-\nu}^{-\alpha-2} = \frac{k}{n} A_k^{\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1}.$$

Так как при $k=0$, или $k=n$, или $n=0$ эта формула очевидна, и $A_n^{-1}=0$ при $n\neq 0$, то, вследствие (15.12), остается показать, что при $1\leq k\leq n$ имеет место равенство

$$-\sum_{\nu=0}^{k-1} A_{\nu}^{\alpha} A_{n-\nu}^{-\alpha-2} = \frac{k}{n} A_k^{\alpha} A_{n-k}^{-\alpha-1}.$$

Для этого применим метод математической индукции. Действительно, при $k=1$ имеем

$$\frac{1}{n} A_1^{\alpha} A_{n-1}^{-\alpha-1} = \frac{1}{n}(\alpha+1)\frac{(n-1-\alpha-1)\cdots(-\alpha)}{(n-1)!} =$$
$$= -\frac{(n-\alpha-2)\cdots(-\alpha)(-\alpha-1)}{n!} = -A_n^{-\alpha-2},$$

а в итоге

$$-\sum_{\nu=0}^{k} A_\nu^\alpha A_{n-\nu}^{-\alpha-2} = \frac{k}{n} A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-1} - A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-2} =$$

$$= A_k^\alpha \left[\frac{k}{n} \frac{(n-k-\alpha-1)\cdots(-\alpha)}{(n-k)!} - \frac{(n-k-\alpha-2)\cdots(-\alpha-1)}{(n-k)!}\right] =$$

$$= A_k^\alpha \frac{1}{n(n-k)} A_{n-k-1}^{-\alpha-1} \left[k(n-k-\alpha-1) - n(-\alpha-1)\right] =$$

$$= A_k^\alpha \frac{k+\alpha+1}{n} A_{n-k-1}^{-\alpha-1} = \frac{k+1}{n} A_{k+1}^\alpha A_{n-k-1}^{-\alpha-1}.$$

15.5. Включение и совместность.

Теорема 15.3. Если $\mathrm{Re}\,\beta > \mathrm{Re}\,\alpha > -1$, то[1] $(C,\beta) \supset (C,\alpha)$, и оба метода совместны.

Доказательство. Обозначим $\gamma = \beta - \alpha$. Тогда по формуле (15.11) получаем

$$S_n^\beta = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\gamma-1} S_k^\alpha,$$

откуда

$$\sigma_n^\beta = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\gamma-1} A_k^\alpha}{A_n^\beta} \sigma_k^\alpha = \sum_{k=0}^{n} c_{nk} \sigma_k^\alpha. \qquad (15.28)$$

Теперь остается доказать, что $\lim \sigma_n^\beta = \lim \sigma_n^\alpha$ всякий раз, когда предел справа существует. Это получается применением теоремы 1.2 Теплица к матрице (c_{nk}). Действительно, условиям теоремы 1.2 матрица (c_{nk}) удовлетворяет, так как

$$\lim_n c_{nk} = A_k^\alpha \lim_n O(1) \frac{(n-k)^{\mathrm{Re}\,\gamma - 1}}{n^{\mathrm{Re}\,\beta}} = 0;$$

по формуле (15.12)

---

[1] Также $C_0^\beta \supset C_0^\alpha$.

$$\sum_{k=0}^{n} c_{nk} = \frac{1}{A_n^\beta} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\gamma-1} A_k^\alpha = \frac{1}{A_n^\beta} A_n^{\alpha+\gamma} = 1,$$

а учитывая, что $\mathrm{Re}\,\gamma > 0$ и $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$,

$$\sum_{k=0}^{n} |c_{nk}| = \frac{O(1)}{(n+1)^{\mathrm{Re}\,\beta}} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\mathrm{Re}\,\gamma-1} A_k^{\mathrm{Re}\,\alpha} = \frac{O(1)}{(n+1)^{\mathrm{Re}\,\beta}} A_n^{\mathrm{Re}(\alpha+\gamma)} = O(1).$$

Теорему 15.3 можем доказать и при помощи теоремы 12.1, положив в последней $A = C^\alpha$ и $B = C^\beta$, откуда $G = BA^{-1} = (g_{nk})$, где по формулам (15.7), (15.25) и (15.13)

$$g_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{A_n^\beta} A_k^\alpha A_{\nu-k}^{-\alpha-1} = \frac{A_k^\alpha}{A_n^\beta} \sum_{\nu=k}^{n} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-k}^{-\alpha-1} = \frac{A_k^\alpha}{A_n^\beta} A_{n-k}^{\beta-\alpha-1},$$

т.е. G совпадает с матрицей в преобразовании (15.28).

Иное доказательство теоремы 15.3 для вещественных α, β дано в книге Харди [24], стр. 131. Теорема 15.3 при $\alpha, \beta > -1$ принадлежит Кноппу [48], стр. 5, и Чепмену [34], стр. 377, а в общем случае - Боргерсу (см.[8], стр.138). Как показал Люра ([55], стр. 538-539), теорема 15.3 неверна без дополнительных условий для нецелых $\alpha, \beta < -1$.

Волков [8] доказал, что теорема 15.3 в общем случае неверна при $\alpha \neq \beta$ с $\mathrm{Re}\,\alpha = \mathrm{Re}\,\beta$, т.е. Волковым доказана

Теорема 15.4. Для любых комплексных чисел $\beta \neq \alpha$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\,\beta = \mathrm{Re}\,\alpha > -1$, существует ряд, суммируемый (C, α) и не суммируемый (C, β).

Из теоремы 15.4 следует, что метод (C, α) при $\alpha \neq 0$ с $\mathrm{Re}\,\alpha = 0$, т.е. при чисто мнимом α, не является регулярным.

Из теорем 15.3 и 15.4 следует также, что теорему 15.3 можно усилить. Именно, верна

Теорема 15.3а. Метод (C, β) сильнее метода (C, α)

при $\mathrm{Re}\,\beta > \mathrm{Re}\,\alpha > -1$.

Это означает, что $(C,\beta) \supset (C,\alpha)$ при $\mathrm{Re}\,\beta > \mathrm{Re}\,\alpha > -1$, причем существует ряд, суммируемый (C,β) и не суммируемый (C,α). Таким рядом служит, например, любой ряд, суммируемый (C,α_1), но не суммируемый (C,α) при $\alpha_1 \neq \alpha$ с $\mathrm{Re}\,\alpha_1 = \mathrm{Re}\,\alpha$.

В частности, метод (C,α) при $-1 < \mathrm{Re}\,\alpha < 0$ слабее метода сходимости.

Для абсолютной суммируемости имеет место

Теорема 15.5. Если $\mathrm{Re}\,\beta > \mathrm{Re}\,\alpha > -1$, то $|C,\beta| \supset |C,\alpha|$.

Доказательство. Обозначим $\gamma = \beta - \alpha$. Тогда из (15.11), (15.5) и (15.24) выводим

$$T_n^\beta = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\gamma-1} T_k^\alpha ,$$

откуда, ввиду[1] (15.23),

$$\frac{\tau_n^\beta}{n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{A_{n-k}^{\gamma-1} A_k^\alpha}{A_n^\beta} \frac{\tau_k^\alpha}{k} = \sum_{k=0}^{n} \bar{\gamma}_{nk} \frac{\tau_k^\alpha}{k} . \qquad (15.29)$$

Применяя к (15.29) теорему 4.1 Кноппа—Лоренца, учитывая, что $\mathrm{Re}\,\gamma > 0$, получаем требуемое, ибо по формуле (15.18)

$$\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\gamma}_{nk}| = k|A_k^\alpha| O(1) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^{\mathrm{Re}\,\gamma-1}}{n A_n^{\mathrm{Re}\,\beta}} = k\, O(A_k^\alpha) \frac{1}{k A_k^{\mathrm{Re}\,\alpha}} = O(1).$$

Теорема 15.5 принадлежит Когбетлианцу (см.[52], стр.13, или [30], стр.518).

Теорему 15.5 можем также доказать при помощи теоремы 12.1 при $A = (\bar{\alpha}_{nk}) = C^\alpha$ и $B = (\bar{\beta}_{nk}) = C^\beta$. Действительно, для $G = BA^{-1} = (\bar{\gamma}_{nk})$ по формулам (15.21), (15.27) и (15.13)

---

[1] Напомним, что при $k = 0$ имеем $\frac{\tau_k^\alpha}{k} = u_0$.

находим

$$\bar{\gamma}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\bar{\beta}_{n\nu}\bar{\eta}_{\nu k}=\frac{kA_k^{\alpha}}{nA_n^{\beta}}\sum_{\nu=k}^{n}A_{n-k}^{\beta-1}A_{\nu-k}^{-\alpha-1}=\frac{k}{n}\frac{A_k^{\alpha}A_{n-k}^{\beta-\alpha-1}}{A_n^{\beta}},$$

т.е. то же самое, что в (15.29).

Отметим, что из (15.29) легко вывести формулу (15.27). Действительно, (15.23) при $\alpha=0$ дает

$$\tau_n^0=T_n^0=nu_n,$$

а поэтому (15.29) при $\gamma=-\alpha$, т.е. при $\beta=0$, превращается[1] в

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}A_{n-k}^{-\alpha-1}A_k^{\alpha}\frac{\tau_k^{\alpha}}{k},$$

т.е. в формулу (15.27).

И для абсолютной суммируемости имеет место (см. Барон [5], стр. 179)

Теорема 15.6. Для любых комплексных чисел $\beta\neq\alpha$, удовлетворяющих условию $\mathrm{Re}\,\beta=\mathrm{Re}\,\alpha>-1$, можно построить ряд, суммируемый $|C,\alpha|$, но не суммируемый $|C,\beta|$.

Из теоремы 15.6 следует, что метод $|C,\alpha|$ при чисто мнимом α не сохраняет абсолютную сходимость.

Из теорем 15.5 и 15.6 также следует, что метод $|C,\beta|$ сильнее метода $|C,\alpha|$ при $\mathrm{Re}\,\beta>\mathrm{Re}\,\alpha>-1$.

15.6. Транслятивность.

Теорема 15.7. Метод (C,α) регулярно транслятивен при всех $\alpha\neq-1,-2,\ldots$.

Доказательство следует из теорем 13.1 и 12.1, ибо здесь ввиду (15. 7) имеем

---

[1] Напомним, что при $k=0$ имеем $\frac{\tau_k^{\alpha}}{k}=u_0$.

$$A_L=\left(\frac{A_{n-1-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\right),\qquad A_R=\left(\frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}\right),$$

и, по формулам (15.25) и (15.13),

$$A_L A^{-1}=\left(\frac{A_k^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}\sum_{\nu=k}^{n}A_{n-1-\nu}^{\alpha-1}A_{\nu-k}^{-\alpha-1}\right)=\left(\frac{A_k^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}A_{n-1-k}^{-1}\right)=\left(\delta_{n-1,k}\right);$$

аналогично

$$A_R A^{-1}=\left(\delta_{n+1,k}\right).$$

Применяя к $A_L A^{-1}$ и $A_R A^{-1}$ теорему 1.2 Теплица, получаем требуемое.

Другое доказательство теоремы 15.7 см. Харди [24], стр. 133, теорема 47.

15.7. Теорема о выпуклости.

Теорема 15.8. Если ряд (0.1) является C^{α}-ограниченным и C^{β}-суммируемым к числу $\mathcal{U}$ при $\mathrm{Re}\,\beta>\mathrm{Re}\,\alpha>-1$, то он является также C^{γ}-суммируемым к $\mathcal{U}$ при всех γ с $\mathrm{Re}\,\beta>\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha$.

Доказательство. Пусть сначала α, β и γ - вещественные числа. Без ограничения общности можем принять $\beta=\alpha+1$. Действительно, если $\beta<\alpha+1$, то по теореме 15.3 из C^{β}-суммируемости ряда (0.1) следует его $C^{\alpha+1}$-суммируемость. Если же $\beta>\alpha+1$, то по той же теореме 15.3 из C^{α}-ограниченности ряда (0.1) следует его $C^{\alpha+\delta_i}$-ограниченность при $\delta_i>0$. Ввиду этого, положив сначала $\delta_1=\beta-\alpha-1$ сводим доказательство к случаю $\alpha=\beta-1$, т.е. получаем, что из $C^{\beta-1}$-ограниченности и C^{β}-суммируемости ряда (0.1) к числу $\mathcal{U}$ следует его C^{γ}-суммируемость к $\mathcal{U}$ при всех γ с $\beta-1<\gamma\le\beta$,

и, значит, при всех $\gamma \geq \gamma_1 = \alpha + \delta$, где $\delta = [\beta - \alpha]$. Затем, если еще $\gamma_1 > \alpha + 1$, то, положив $\delta_i = \gamma_{i-1} - \alpha - 1$ при $i > 1$, после δ шагов (ибо $\gamma_\delta = \alpha + 1$) придем к случаю, когда из C^α-ограниченности и $C^{\alpha+1}$-суммируемости ряда (0.I) вытекает его C^γ-суммируемость при всех $\gamma > \alpha$.

Пусть теперь $\beta = \alpha + 1$. Мы можем ограничиться случаем $C^{\alpha+1}\{\sum u_n\} = 0$, ибо если $C^{\alpha+1}\{\sum u_n\} = \mathcal{U} \neq 0$, то рассматривая ряд $\sum v_n$ с

$$v_n = \begin{cases} u_0 - \mathcal{U} & \text{при } n = 0, \\ u_n & \text{при } n \geq 1, \end{cases}$$

получаем $C^{\alpha+1}\{\sum v_n\} = 0$.

Обозначим $\gamma - \alpha = \sigma$. Тогда, выбрав произвольно число $\theta \in (\frac{1}{2}, 1)$, обозначим $N = [\theta n]$ и положим

$$S_n^\gamma = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\sigma-1} S_k^\alpha = \sum_{k=0}^{N} + \sum_{k=N+1}^{n} = \mathcal{I}_n + \mathcal{K}_n.$$

Так как по предположению

$$S_n^{\alpha+1} = o(n^{\alpha+1}), \tag{15.30}$$

то, применяя к сумме $\mathcal{I}_n$ преобразование Абеля, получаем

$$\mathcal{I}_n = \sum_{k=0}^{N-1} A_{n-k}^{\sigma-2} A_k^{\alpha+1} + A_{n-N}^{\sigma-1} S_N^{\alpha+1} = \mathcal{I}_n' + \mathcal{I}_n''.$$

Из (15.30) непосредственно заключаем

$$\mathcal{I}_n'' = O(n^{\sigma-1}) o(N^{\alpha+1}) = o(n^{\alpha+\sigma}) = o(n^\gamma).$$

Далее, так как

$$\mathcal{I}_n' = \sum_{k=0}^{N-1} A_{n-k}^{\sigma-2} A_k^{\alpha+1} \sigma_k^{\alpha+1},$$

то, обозначив

$$c_{nk}=\begin{cases} n^{-\gamma}A_{n-k}^{\sigma-2}A_k^{\alpha+1} & \text{при} \quad k\le N-1,\\ 0 & \text{при} \quad k>N-1, \end{cases}$$

убеждаемся в том, что матрица (c_{nk}) переводит все нуль-последовательности $\sigma_k^{\alpha+1}$ в нуль-последовательность $n^{-\gamma}J_n'$. Действительно, учитывая замечание 1.2, матрица (c_{nk}) удовлетворяет условиям теоремы 1.2, ибо ввиду того, что $\sigma-\gamma-2<0$, $\alpha+1>0$ и $-2<\sigma-2<-1$,

$$\lim_n c_{nk}=A_k^{\alpha+1}\lim_n n^{-\gamma}A_{n-k}^{\sigma-2}=0,$$

$$\sum_k|c_{nk}|\le n^{-\gamma}A_N^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{N-1}|A_{n-k}^{\sigma-2}|=O(n^{\alpha+1-\gamma})\sum_{k=n+1-N}^{n}|A_k^{\sigma-2}|=$$

$$=O(n^{1-\sigma})\sum_{k=n-N+1}^{\infty}k^{\sigma-2}=O(n^{1-\sigma})O[(n-N)^{\sigma-1}]=O(1).$$

Остается оценить сумму $\mathcal{K}_n$. Так как $S_k^{\alpha}=O(k^{\alpha})$, то по формуле (15.13) при некоторой постоянной M получаем

$$\mathcal{K}_n=O(1)\sum_{k=N+1}^{n}A_{n-k}^{\sigma-1}k^{\alpha}=O(n^{\alpha})A_{n-N-1}^{\sigma}=O(n^{\alpha})(n-[\theta n]-1)^{\sigma}<$$

$$<Mn^{\alpha+\sigma}(1-\theta)^{\sigma}=o(n^{\alpha+\sigma}),$$

ибо для любого $\varepsilon>0$ можем, в виду произвольности $\theta\in(\frac{1}{2},1)$ сделать

$$M(1-\theta)^{\sigma}<\varepsilon.$$

Тем самым для вещественных α, β и γ теорема 15.8 доказана.

Пусть теперь α, β и γ - произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условиям теоремы. Выберем вещественные α_1, β_1 и γ_1 такими, чтобы

$$\mathrm{Re}\,\alpha<\alpha_1<\gamma_1<\mathrm{Re}\,\gamma<\mathrm{Re}\,\beta<\beta_1.$$

Тогда по теореме 15.3 из условий теоремы 15.8 следует (C,α_1)-ограниченность и (C,β_1)-суммируемость ряда (0.1). По доказанному ряд (0.1) является (C,γ_1)-суммируемым, откуда, снова по теореме 15.3, следует его (C,γ)-суммируемость. Ввиду регулярности метода Чезаро, сумма ряда не изменяется. Теорема 15.8 полностью доказана.

Теорема 15.8 для вещественных α, β и γ доказана многими авторами (см. Харди [24], стр. 163 и 186).

Положив в теореме 15.8 число $\alpha=0$, заключаем:

Для рядов с ограниченными чистичными суммами все методы (C,α) при $\mathrm{Re}\,\alpha>0$ **равносильны.**

15.8. Лимитирующие теоремы. Здесь найдем необходимые условия для C^{α}-суммируемости ряда (0.1).

Теорема 15.9. Если ряд (0.1) при $\mathrm{Re}\,\alpha>-1$ суммируем (C,α) к конечной сумме, то

$$u_n=o(n^{\mathrm{Re}\,\alpha}).$$

Доказательство. В силу (9.3) и (15.26) можем **писать** (для $n\geq 1$)

$$\frac{u_n}{n^{\alpha}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k^{\alpha}A_{n-k}^{-\alpha-2}}{n^{\alpha}}\sigma_k^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}c_{nk}\sigma_k^{\alpha}.$$

Теорема будет доказанной, если покажем, что $\lim_n(n^{-\alpha}u_n)=0$ всякий раз, когда $\lim_n\sigma_n^{\alpha}$ существует. А это **покажем** при помощи теоремы 1.1 Кожима—Шура. Имеем (и при $-1<\mathrm{Re}\,\alpha\leq 0$)

$$1^{0}\ \lim_n c_{nk}=A_k^{\alpha}\lim_n\frac{A_{n-k}^{-\alpha-2}}{n^{\alpha}}=\mathcal{O}(A_k^{\alpha})\lim_n n^{-\mathrm{Re}\,\alpha}(n-k)^{-\mathrm{Re}\,\alpha-2}=0,$$

$$2^{0}\ \sum_{k=0}^{n}c_{nk}=n^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}A_k^{\alpha}A_{n-k}^{-\alpha-2}=n^{-\alpha}A_n^{-1}=0,$$

$$3^0\ \sum_{k=0}^{n}|c_{nk}|=\mathcal{O}(n^{-\alpha}A_n^{Re\alpha})\sum_{k=0}^{n}|A_{n-k}^{-\alpha-2}|=\mathcal{O}(1)\sum_{k=0}^{n}|A_{n-k}^{-\alpha-2}|=\mathcal{O}(1),$$

ибо при $Re\alpha>-1$ будет $Re(-\alpha-2)<-1$. Итак, пока нами доказано, что $\lim(n^{-\alpha}u_n)$ существует. Остается показать, что $\lim(n^{-\alpha}u_n)=0$. Но это следует из формулы (1.1), ибо пределы 1^0 и 2^0 равны нулю.

Более общую лимитирующую теорему, содержащую в себе и теорему 15.9, см. Зигмунд [9], стр. 132, или Харди [24], стр. 132, причем приведенные там доказательства верны и для мнимых α.

Имеет место также

Теорема 15.10. Если ряд (0.1) суммируем (C,α), $Re\alpha>0$, к конечной сумме, то

$$\mathcal{U}_n=o(n^{Re\alpha}).$$

Доказательство такое же, как для теоремы 15.9, если вместо (15.26) применять (15.25).

Теорема 15.10 перестает быть верной при $Re\alpha=0$, например, для сходящихся рядов. При $Re\alpha>0$ из теоремы 15.10 следует и теорема 15.9, так как

$$u_n=\mathcal{U}_n-\mathcal{U}_{n-1}=o(n^{\alpha})-o(n^{\alpha})=o(n^{\alpha}).$$

Ряд других лимитирующих теорем см. Кнопп [50], стр.485. Их можно получить и при помощи теории множителей суммируемости (см. гл. IV).

15.9. Примеры.

1. Рассмотрим ряд

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx,\quad \text{где}\quad x\neq 2k\pi,\quad k=0,\pm1,\dots,$$

расходящийся при любом x (так как $\cos nx \not\to 0$). Покажем, что этот ряд C^1-суммируем. Действительно, как известно[1],

$$S_n^0 = \frac{\sin (n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

откуда

$$S_n^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin (n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right]^2,$$

и, значит,

$$\sigma_n^1 = \frac{1}{n+1} S_n^1 = \frac{1}{n+1} \mathcal{O}(1) \to 0.$$

Следовательно,

$$C^1\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx\right\} = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 2k\pi.$$

Отсюда, так как $\sigma_n^0 = S_n^0 = \mathcal{O}(1)$ для каждого фиксированного $x \neq 2k\pi$, то по теореме 15.8 о выпуклости для любого γ с $\operatorname{Re}\gamma > 0$

$$C^\gamma\left\{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx\right\} = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 2k\pi.$$

Далее, применяя формулу

$$\bar{\Delta}(a_n b_n) = a_n \bar{\Delta} b_n + \bar{\Delta} a_n \cdot b_{n-1},$$

имеющую место для любых последовательностей a_n и b_n, и учитывая (11.1), находим

$$\frac{\tau_n^1}{n} = \bar{\Delta}\sigma_n^1 = \frac{1}{n+1} S_n^0 - \frac{1}{n(n+1)} S_{n-1}^1,$$

$$\frac{\tau_n^2}{n} = \bar{\Delta}\sigma_n^2 = \bar{\Delta}\left(\frac{1}{A_n^2} S_n^2\right) = \frac{1}{A_n^2} S_n^1 + \frac{\mathcal{O}(1)}{n^3} S_{n-1}^2.$$

---

[1] См., например, Фихтенгольц [23], стр. 527 и 402; или Бари [3], стр. 94 и 138.

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty}|n^{-1}\tau_n^1|=\infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty}|n^{-1}\tau_n^2|<\infty$, т.е. рассматриваемый ряд является $|C^2|$-суммируемым, но не $|C^1|$-суммируемым.

2. Рассмотрим ряд

$$\sum \sin nx \qquad (15.31)$$

расходящийся при любом $x\neq k\pi$, $k=0,\pm1,\dots$. Здесь при $x\neq 2k\pi$ имеем

$$S_n^0=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}2\sin kx\cdot\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos(k-\tfrac12)x-\cos(k+\tfrac12)x\right]=$$

$$=\frac12\cot\frac{x}{2}-\frac{\cos(n+\frac12)x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

откуда, аналогично предыдущему примеру, выводим

$$S_n^1=(n+1)\frac12\cot\frac{x}{2}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\sin(n+1)x,$$

и, следовательно, для любого γ с $\operatorname{Re}\gamma>0$

$$C^{\gamma}\{\sum\sin nx\}=\frac12\cot\frac{x}{2}\quad\text{при}\quad x\neq2k\pi.$$

Аналогично предыдущему примеру доказывается, что ряд (15.31) при всех $x\neq k\pi$ является $|C^2|$-суммируемым, но не $|C^1|$-суммируемым.

Очевидно для любого γ с $\operatorname{Re}\gamma>-1$

$$C^{\gamma}\{\sum\sin nx\}=0\qquad\text{при}\quad x\neq2k\pi.$$

3. Пусть α — любое комплексное число с $\operatorname{Re}\alpha>-1$. Рассмотрим ряд

$$\sum(-1)^n A_n^{\alpha}. \qquad (15.32)$$

Ясно, что ряд (15.32) сходится[1] при $\alpha<0$ и расходится при всех α с $\mathrm{Re}\,\alpha\geq 0$.

По лимитирующей теореме 15.9 ряд (15.32) не суммируем методом C^{α}.

В силу (15.8) при $u_n=(-1)^n A_n^{\alpha}$ и (15.1) имеем

$$\sum S_n^{\alpha} x^n=(1-x)^{-\alpha-1}\sum A_n^{\alpha}(-x)^n=(1-x^2)^{-\alpha-1}=\sum A_n^{\alpha} x^{2n},$$

откуда

$$S_n^{\alpha}=\begin{cases} A_k^{\alpha} & \text{при } n=2k,\\ 0 & \text{при } n=2k+1,\end{cases}$$

и ряд (15.32) ограничен методом (C,α). Далее, ввиду (15.15),

$$S_{2k}^{\alpha+1}=\sum_{\nu=0}^{2k} S_{\nu}^{\alpha}=\sum_{\nu=0}^{k} A_{\nu}^{\alpha}=A_k^{\alpha+1},\quad S_{2k+1}^{\alpha+1}=S_{2k}^{\alpha+1}+S_{2k+1}^{\alpha}=S_{2k}^{\alpha+1}=A_k^{\alpha+1},$$

и, значит,

$$\lim_n \sigma_{2n}^{\alpha+1}=\lim_n \frac{A_n^{\alpha+1}}{A_{2n}^{\alpha+1}}=\lim_n \frac{n^{\alpha+1}}{(2n)^{\alpha+1}}=\frac{1}{2^{\alpha+1}},$$

$$\lim_n \sigma_{2n+1}^{\alpha+1}=\lim_n \frac{n^{\alpha+1}}{(2n+1)^{\alpha+1}}=\frac{1}{2^{\alpha+1}},$$

так что

$$C^{\alpha+1}\left\{\sum (-1)^n A_n^{\alpha}\right\}=2^{-\alpha-1}.$$

По теореме 15.8 о выпуклости для любого γ с $\mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>-1$

$$C^{\gamma}\left\{\sum (-1)^n A_n^{\alpha}\right\}=2^{-\alpha-1}.$$

В частности при $\alpha=0$ и любого γ с $\mathrm{Re}\,\gamma>0$ для ряда Эйлера (6.1) получаем

---

[1] По теореме 21.1б (положив в ней $\varepsilon_n=A_n^{\alpha}$) ряд (15.32) сходится при всех α с $\mathrm{Re}\,\alpha<0$.

$$C^{\delta}\{\sum(-1)^n\}=\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим вопрос об абсолютной суммируемости ряда (15.32).

Если в (15.4) заменить u_n на nu_n, то получим

$$(1-x)^{-\alpha}\sum nu_n x^n=\sum T_n^{\alpha}x^n, \qquad (15.33)$$

и дифференцированием равенства (15.1) -

$$\sum nA_n^{\alpha}x^{n-1}=(\alpha+1)(1-x)^{-\alpha-2}.$$

Для ряда (15.32) имеем

$$\sum nu_n x^n=-x\sum nA_n^{\alpha}(-x)^{n-1}=-x(\alpha+1)(1+x)^{-\alpha-2},$$

откуда, ввиду (15.33) и (15.1),

$$\sum T_n^{\alpha+2}x^n=-(\alpha+1)x(1-x^2)^{-\alpha-2}=-(\alpha+1)\sum A_n^{\alpha+1}x^{2n+1}.$$

Следовательно,

$$T_n^{\alpha+2}=\begin{cases}0 & \text{при } n=2k,\\ -(\alpha+1)A_k^{\alpha+1} & \text{при } n=2k+1,\end{cases}$$

и, значит,

$$\frac{\tau_n^{\alpha+2}}{n}=\frac{O(n^{\alpha+1})}{nA_n^{\alpha+2}}=\frac{O(1)}{n^2},$$

т.е. ряд (15.32) является $|C^{\alpha+2}|$-суммируемым.

Другие примеры C^{α}-суммируемых рядов см. Фихтенгольц [23], стр. 413-415; Кнопп [50], стр. 479; Харди [24], стр. 175-185.

§ 16. Метод суммирования Вороного—Нерлунда

Метод Вороного—Нерлунда можно рассматривать как обобщение метода Чезаро. Впервые этот метод рассматривал Г.Ф.Вороной в 1902 г. Статья Вороного представляет собой краткую заметку в редком издании. Поэтому она не распространилась среди математиков и осталась в забытьи. Метод стал известным благодаря Нерлунда, который ввел его, независимо от Вороного, и опубликовал свою работу в 1919 г. Работа Вороного стала известной благодаря английскому переводу ее в 1932 г. Тамаркина (см. Харди [24], стр. 88 и 120).

16.1. Определение метода Вороного—Нерлунда. Методом Вороного—Нерлунда называют треугольный матричный метод, определенный последовательностью комплексных чисел p_n, в виде преобразования (A) матрицей

$$a_{nk} = \frac{p_{n-k}}{P_n}, \qquad (16.1)$$

где $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$, $P_n \neq 0$.

Метод Вороного—Нерлунда обозначают через[1] (WN, p_n).

В частности, метод C^α является методом (WN, p_n) с $p_n = A_n^{\alpha-1}$.

Метод $(WN, \frac{1}{n+1})$ обычно называют методом гармонических средних.

В силу (8.5) выводим

---

[1] В литературе часто обозначают также (N, p_n) и (W, p_n).

$$a_{nk}=\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=k}^{n}p_{n-\nu}=\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n-k}p_{n-k-\nu}=\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n-k}p_\nu,$$

и, значит, в виде преобразования (B) метод (WN, p_n) определяется матрицей

$$a_{nk}=\frac{P_{n-k}}{P_n}. \qquad (16.2)$$

Поэтому вместо (WN, p_n) иногда пишут и (WN, P_n) или просто P.

16.2. Регулярность. Посмотрим при каких условиях метод (WN, p_n) сохраняет сходимость. Применяя теорему 1.1 Кожима—Шура, получаем условия

$$1^0\ \lim_n a_{nk}=\lim_n\frac{p_{n-k}}{P_n}=a_k,$$

$$2^0\ \sum_{k=0}^{n}a_{nk}=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}=\frac{1}{P_n}P_n=1,$$

$$3^0\ \sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|=\frac{1}{|P_n|}\sum_{k=0}^{n}|p_{n-k}|=\mathcal{O}(1).$$

Оказывается, что условие 1^0 можно упростить, а именно, условие 1^0 вытекает из существования предела

$$a_0=\lim\frac{p_n}{P_n}.$$

Действительно, из представления

$$\frac{p_{n-k}}{P_n}=\frac{p_{n-k}}{P_{n-k}}\,\frac{P_{n-k}}{P_{n-k+1}}\cdots\frac{P_{n-2}}{P_{n-1}}\,\frac{P_{n-1}}{P_n}$$

заключаем, что существуют a_k и

$$a_k=a_0(1-a_0)^k,$$

ибо

$$\lim_n\frac{p_{n-k}}{P_{n-k}}=a_0,\qquad \lim_n\frac{p_{n-k}}{P_{n-k+1}}=\lim_n\left(1-\frac{p_{n-k+1}}{P_{n-k+1}}\right)=1-a_0.$$

Итак, доказана

Теорема 16.1. Метод (WN, p_n) сохраняет сходимость тогда и только тогда, если выполнены условия

1^0 существует $\lim \frac{p_n}{P_n} = a_0$,

2^0 $\sum_{k=0}^{n} |p_k| = O(P_n)$.

Ясно, что условие 2^0 теоремы 16.1 отпадает, если p_k знакопостоянны.

Отметим, что из условия 2^0 теоремы 16.1 вытекает необходимое условие

$$P_m = O(P_n) \qquad \text{при всех} \quad 0 \le m \le n.$$

Из теоремы 16.1 и теоремы 1.2 Теплица вытекает

Следствие 16.1. Метод (WN, p_n), сохраняющий сходимость, будет регулярным тогда и только тогда, если $a_0 = 0$.

Как Вороной, так и Нерлунд рассматривали лишь случай $a_0 = 0$.

В частности, отсюда вытекает теорема 15.1, если в следствии 16.1 положить $p_k = A_k^{\alpha-1}$. Если же положить $p_k = \frac{1}{k+1}$, то получаем, что метод гармонических средних регулярен.

Посмотрим, что будет в случае $a_0 \neq 0$. Для этого вычислим характеристику метода (см. замечание 1.1). Имеем

$$p(P) = 1 - \sum a_k = 1 - \sum a_0 (1-a_0)^k = 1 - a_0 : [1-(1-a_0)] = 0.$$

Отсюда, учитывая следствие 16.1, заключаем

Следствие 16.2. Метод (WN, p_n), сохраняющий сходимость, является или регулярным, или конулевым.

16.3. Обратные матрицы. Метод (WN, p_n) нормален тогда и только тогда, если $p_0 \neq 0$, ибо $a_{nn} = \frac{1}{p_n} p_0$. Поэтому по теореме 9.1 метод (WN, p_n) обратим тогда и только тогда, если $p_0 \neq 0$.

Найдем обратную матрицу $(WN, p_n)^{-1} = (\xi_{nk})$. В нашем случае формула (9.2) обращается в

$$\sum_{\nu=k}^{n} p_{n-\nu} \xi_{\nu k} = \delta_{nk} p_n, \tag{16.3}$$

где левая часть напоминает член произведения Коши двух рядов. Поэтому применим следующий искусственный прием. В силу (16.3) имеем

$$\sum p_n x^n \cdot \sum_n \xi_{nk} x^n = \sum_n \Big(\sum_{\nu=0}^{n} p_{n-\nu} \xi_{\nu k} \Big) x^n = \sum_n \delta_{nk} p_n x^n = p_k x^k,$$

откуда, обозначив

$$\frac{1}{\sum p_n x^n} = \sum c_n x^n \tag{16.4}$$

(частное существует, если $p_0 \neq 0$), выводим

$$\sum_n \xi_{nk} x^n = p_k x^k \cdot \sum c_n x^n = \sum_{n=k}^{\infty} p_k c_{n-k} x^n,$$

и после приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x находим[1]

$$\xi_{nk} = p_k c_{n-k}. \tag{16.5}$$

Если (16.4) заменить через

$$\frac{1}{\sum p_n x^n} = \sum d_n x^n, \tag{16.6}$$

то аналогично получаем

---

[1] Напоминаем, что $\xi_{nk} = 0$ при $k > n$.

$$\eta_{nk} = P_k d_{n-k}. \qquad (16.7)$$

Формулы (16.5) и (16.7) можем получить также друг из друга при помощи (9.10) и (9.11), если учесть. что

$$\sum P_n x^n = \sum x^n \cdot \sum p_n x^n,$$

откуда

$$\sum d_n x^n = (1-x) \sum c_n x^n,$$

и, значит,

$$d_n = \bar{\Delta} c_n,$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} d_k.$$

Таким образом в дальнейшем можем ограничиться лишь формулами (16.4) и (16.5).

В частности, при $P_n = A_n^{\alpha}$ из (16.6) и (15.1) заключаем

$$\sum d_n x^n = (1-x)^{\alpha+1} = \sum A_n^{-\alpha-2} x^n,$$

вследствие чего из (16.5) и (16.7) заново выводим формулы (15.25) и (15.26).

Далее, положив в (16.4) числа $p_n = \frac{1}{n+1}$, для метода гармонических средних, учитывая (15.1), находим (ср. [56], стр. 176)

$$\sum c_n x^n = \left(\sum \frac{x^n}{n+1}\right)^{-1} = -\frac{x}{\ln(1-x)} = \int_0^1 (1-x)^z dz = \int_0^1 \sum A_n^{-z-1} x^n dz,$$

откуда

$$c_n = \int_0^1 A_n^{-z-1} dz, \qquad (16.8)$$

и,значит,для метода гармонических средних

$$\xi_{nk} = H_k \int_0^1 A_{n-k}^{-z-1} dz,$$

$$\eta_{nk} = H_k \int_0^1 A_{n-k}^{-z-2}\, dz,$$

где $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \sim \ln(n+1)$.

16.4. Включение и равносильность. Пусть $A = (WN, p_n)$ и $B = (WN, q_n)$. Вопрос о включении $B \supset A$ решим при помощи теоремы 12.1. Действительно, обозначив

$$\sum k_n x^n = \sum Q_n x^n \cdot \sum d_n x^n = \sum q_n x^n \cdot \sum c_n x^n, \quad (16.9)$$

или, что ввиду (16.6) то же самое,

$$\sum P_n x^n \cdot \sum k_n x^n = \sum Q_n x^n, \quad (16.10)$$

для элементов g_{nk} матрицы $G = BA^{-1}$ находим

$$g_{ni} = \sum_{\nu=i}^{n} \frac{q_{n-\nu}}{Q_n} P_i c_{\nu-i} = \frac{P_i}{Q_n} \sum_{\nu=0}^{n-i} q_{n-i-\nu} c_\nu = \frac{P_i}{Q_n} k_{n-i}.$$

Применяя теоремы 12.1 и 1.1, приходим к следующему результату М.Рисса (см.Харди [24], стр. 91 и 121), если учесть, что из (16.10) следует

$$\sum_{i=0}^{n} g_{ni} = \frac{1}{Q_n} \sum_{i=0}^{n} P_i k_{n-i} = \frac{1}{Q_n} Q_n = 1.$$

Теорема 16.2. Для того, чтобы $(WN, q_n) \supset (WN, p_n)$, необходимо и достаточно выполнение условий

1^0 существуют $\lim\limits_n \frac{k_{n-i}}{Q_n} = g_i$,

2^0 $\sum\limits_{i=0}^{n} |k_i P_{n-i}| = O(Q_n)$.

При этом оба метода совместны тогда и только тогда, если $g_i = 0$.

Дополнение к теореме 16.2. Если метод (WN, q_n) сохра-

няет сходимость, то в условии 1^0 теоремы 16.2 можно положить $i=0$.

Доказательство. Из представления

$$\frac{k_{n-i}}{Q_n}=\frac{k_{n-i}}{Q_{n-i}}\,\frac{Q_{n-i}}{Q_{n-i+1}}\cdots\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}\,\frac{Q_{n-1}}{Q_n}$$

заключаем, если существует g_0, то $g_i=g_0(1-b_0)^i$, где $b_0=\lim(q_n:Q_n)$.

Если в теореме 16.2 положить $p_k=A_k^{\alpha-1}$ и $q_k=A_k^{\beta-1}$, то заново получим теорему 15.3, ибо по формуле (15.1) будет $k_n=A_n^{\beta-\alpha-1}$.

Положим теперь в теореме 16.2 числа $P_n=H_n$, $Q_n=A_n^{\beta}$. Тогда по формулам (16.9), (16.8) и (15.12) находим

$$k_n=\sum_{i=0}^{n}A_i^{\beta-1}\int_0^1 A_{n-i}^{-z-1}\,dz=\int_0^1 A_n^{\beta-z-1}\,dz=\mathcal{O}(1)\int_0^1(n+2)^{\mathrm{Re}\,\beta-z-1}\,dz.$$

Так как метод гармонических средних регулярен, и, значит, $(WN,p_n)\supset C^0$, то нас интересует лишь случай $\mathrm{Re}\,\beta>0$. В этом случае

$$g_0=\lim\frac{\mathcal{O}(1)}{n^{\mathrm{Re}\,\beta}}\int_0^1(n+2)^{\mathrm{Re}\,\beta-z-1}\,dz=$$

$$=\lim\mathcal{O}(1)\int_0^1(n+2)^{-z-1}\,dz=\lim\frac{1}{(n+2)h_1(n+2)}=0,$$

и, учитывая дополнение к теореме 16.2, видим, что условие 1^0 теоремы 16.2 выполнено. Чтобы доказать выполнение условия 2^0, заметим, что

$$\sum_{i=0}^{n}(i+2)^{\mathrm{Re}\,\beta-z-1}=\begin{cases}\mathcal{O}(1)(n+1)^{\mathrm{Re}\,\beta-z} & \text{при } 0\le z<\mathrm{Re}\,\beta,\\ H_{n+1}-1 & \text{при } z=\mathrm{Re}\,\beta,\\ \mathcal{O}(1) & \text{при } \mathrm{Re}\,\beta<z\le 1.\end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n}|H_{n-i}k_i| = \mathcal{O}(H_n)\int_0^1 \sum_{i=0}^{n}(i+2)^{\operatorname{Re}\beta - z - 1}\,dz =$$

$$= \mathcal{O}(H_n)\left\{\frac{(n+2)^{\operatorname{Re}\beta}}{\ln(n+2)} + \mathcal{O}(1)\right\} = \mathcal{O}(A_n^{\beta}).$$

Таким образом доказана

Теорема 16.3. Если $\operatorname{Re}\beta > 0$, то $C^{\beta} \supset (WN, \frac{1}{n+1})$, и оба метода совместны.

Другое доказательство теоремы 16.3 см. Харди [24], стр. 142.

Из теорем 16.3 и 15.3а вытекает, что метод гармонических средних слабее метода Чезаро C^{α} при $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Покажем также существование такого метода Вороного—Нерлунда, который сильнее метода Чезаро любого порядка. Для этого рассмотрим метод (WN, a^n), сохраняющий сходимость по теореме 16.1 при любом комплексном a, но являющийся регулярным лишь при $0 < |a| < 1$ и $a = 1$, ибо при $|a| > 1$ имеем $a_0 = (a-1):a$.

Формула (16.4) при $p_n = A_n^{\alpha-1}$ дает $c_n = A_n^{-\alpha-1}$, и, положив в (16.9) числа $q_n = a^n$, находим, что

$$k_n = \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} A_k^{-\alpha-1}. \qquad (16.11)$$

Отсюда $k_n = \mathcal{O}(a^n)$ при $|a| > 1$ и условия теоремы 16.2 выполнены, ибо предел g_0 последовательности

$$\frac{k_n}{q_n} = \frac{a^n(a-1)}{a^{n+1}-1} \sum_{k=0}^{n} a^{-k} A_k^{-\alpha-1}$$

существует при $|a| > 1$ из-за сходимости ряда $\sum |a|^{-k}$; а

$$\sum_{k=0}^{n}|P_i k_{n-i}| = \sum_{i=0}^{n}|A_i^{\alpha}\mathcal{O}(a^{n-i})| = \mathcal{O}(a^n)\sum_{i=0}^{n} A_i^{\operatorname{Re}\alpha}|a|^{-i} = \mathcal{O}(a^n).$$

Итак, доказана

Теорема 16.4. Если $\mathrm{Re}\beta > -1$ и $|\alpha| > 1$, то $(WN, a^n) \supset C^\beta$.

Пример регулярного метода Вороного—Нерлунда, который сильнее метода Чезаро любого порядка см. Харди [24], стр. 141-142.

О равносильности двух методов Вороного—Нерлунда нами может быть доказана

Теорема 16.5. Для того, чтобы два регулярных метода Вороного—Нерлунда (WN, p_n) и (WN, q_n) были равносильны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum |k_n| < \infty, \qquad \sum |l_n| < \infty, \tag{16.12}$$

где

$$\sum k_n x^n = \frac{\sum q_n x^n}{\sum p_n x^n}, \qquad \sum l_n x^n = \frac{1}{\sum k_n x^n}.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $Q \sim P$ и докажем, что выполняется первое из условий (16.12).

Действительно, по условию 2^0 теоремы 16.2 ввиду $P \supset Q$ будет

$$l_0 Q_n = O(P_n) \qquad \text{или} \qquad Q_n P_n^{-1} = O(1),$$

а ввиду $Q \supset P$ для любого $0 \le r \le n$

$$\sum_{i=0}^{n} \left| k_i \frac{P_{n-i}}{P_n} \right| = O\left(\frac{Q_n}{P_n}\right).$$

Следовательно, в пределе при $n \to \infty$ отсюда ввиду $P \supset Q$ выводим

$$\sum_{i=0}^{n} |k_i| = O(1),$$

т.е. первое из условий (16.12), ибо, ввиду регулярности метода P,

$$\lim_n (P_{n-i} : P_n) = (1-\alpha_0)^i = 1.$$

Аналогично из условия $P \sim Q$ и регулярности метода Q вытекает второе из условий (16.12).

Достаточность. Предположим выполнение условий (16.12) и докажем, что $Q \sim P$.

Действительно, так как $k_n \to 0$, то условие 1^0 теоремы 16.2 выполнено, ибо по теореме 16.1

$$q_0 = O(Q_n), \qquad \text{т.е.} \quad \frac{1}{Q_n} = O(1).$$

Далее, ввиду вытекающего из (16.10) соотношения

$$\sum P_n x^n = \sum l_n x^n \cdot \sum Q_n x^n$$

и регулярности метода Q имеем

$$|P_n| = \Big|\sum_{i=0}^{n} Q_i l_{n-i}\Big| = O(Q_n) \sum_{i=0}^{n} |l_{n-i}| = O(Q_n) \sum_{j=0}^{n} |l_j|,$$

откуда из-за регулярности метода Q из условий (16.12) следует

$$\sum_{i=0}^{n} |k_i P_{n-i}| = \sum_{i=0}^{n} |k_i| \, O(Q_{n-i}) \sum_j |l_j| = O(Q_n) \sum |k_i| \sum |l_j| = O(Q_n),$$

т.е. условие 2^0 теоремы 16.2 также выполнено и включение $Q \supset P$ доказано.

Включение $P \supset Q$ доказывается аналогично.

Другие примеры применения теоремы 16.2 см. Харди [24], стр. 92-96 и 141-142.

В качестве применения теоремы 16.5 докажем, что при $0<|a|<1$ будет $(WN, a^n) \sim C^0$.

Действительно, положив в (16.11) число $\alpha = 0$, находим, что здесь $k_n = a^n$. Отсюда

$$\sum l_n x^n = \frac{1}{\sum a^n x^n} = 1 - ax,$$

и, значит, $l_0 = 1$, $l_1 = -a$ и $l_n = 0$ при $n \geqslant 2$. Таким образом, условия (16.12) выполнены и по теореме 16.5 доказана

Теорема 16.6. Если $0 < |a| < 1$, то метод (WN, a^n) равносилен обыкновенной сходимости и совместен с ним.

16.5. Транслятивность методов Вороного—Нерлунда. Вопрос о транслятивности методов (WN, p_n) легче решается непосредственно теоремой 13.1, чем привлечением теоремы 12.1. Остановимся сначала на вопросе о транслятивности слева.

Действительно, если в теореме 13.1 взять $A = (WN, p_n)$, то $A_L = (p_{n-k-1} : P_n)$. Теперь, обозначив A-средние и A_L-средние последовательности (13.2) соответственно через u'_n и u''_n, убеждаемся в справедливости соотношения

$$u''_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{n-1-k}}{P_n} u_k = \frac{P_{n-1}}{P_n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_{n-1-k}}{P_{n-1}} u_k = \left(1 - \frac{p_n}{P_n}\right) u'_{n-1}.$$

Отсюда, предел $\lim u''_n = u''$ существует всякий раз, когда существует $\lim u'_n = u' \neq 0$ (если $u' \neq 0$, то очевидно и $u'' = 0$), тогда и только тогда, если существует предел

$$\lim \frac{p_n}{P_n} = a_0,$$

причем $u'' = u'$, тогда и только тогда, если $a_0 = 0$.

Для транслятивности справа такое же доказательство приводит к тем же условиям.

Поэтому в силу теоремы 13.1 и замечания к ней доказана

Теорема 16.7. Метод (WN, p_n) транслятивен тогда и только тогда, если существует предел a_0, и регулярно транс-

лятивен, если $a_0 = 0$.

Из теоремы 16.7 и теоремы 16.1 и ее следствия вытекает, что всякий метод (WN, p_n), сохраняющий сходимость, транслятивен; а всякий регулярный метод (WN, p_n) регулярно транслятивен. В частности, отсюда непосредственно следует теорема 15.7.

Пример применения метода Вороного—Нерлунда к рядам Фурье приведен в книге Зигмунда ([9], стр. 495-496).

Вопросы абсолютной суммируемости рядов методом Вороного—Нерлунда изложены в большой статье Макфедена [56].

§ 17. Метод взвешенных средних Рисса

Метод взвешенных средних Рисса можно рассматривать как обобщение метода арифметических средних. Поэтому его часто называют также методом взвешенных средних арифметических.

17.1. Определение метода взвешенных средних Рисса. Методом взвешенных средних Рисса называют треугольный матричный метод, определенный последовательностью комплексных чисел p_n в виде преобразования (A) матрицей

$$a_{nk} = \frac{p_k}{P_n}, \qquad (17.1)$$

где $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$, $P_n \neq 0$.

Метод взвешенных средних Рисса обозначают через $(\mathcal{R}, p_n)$.

В частности, метод $(\mathcal{R}, 1)$ является методом средних арифметических.

Метод $(\mathcal{R}, \frac{1}{n+1})$, следуя М.Риссу [63], обычно называют методом логарифмических средних.

Метод (R, p_n) при $p_n=(n+1)^\alpha-n^\alpha$, т.е. при $P_n=(n+1)^\alpha$, обычно называют методом Зигмунда порядка α и обозначают через (Z,α), так как Зигмунд [72] изучал приближение функций (Z,α)-средними их ряда Фурье при целом $\alpha>0$. В частности $(Z,1)=(C,1)$, а $(Z,0)=E_0$.

Из (17.1) при $k\geqslant 1$ получаем

$$\sum_{\nu=k}^{n} a_{n\nu}=\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=k}^{n} p_\nu=\frac{1}{P_n}\left(\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu-\sum_{\nu=0}^{k-1} p_\nu\right)=\frac{P_n-P_{k-1}}{P_n},$$

откуда, считая $P_{-1}=0$, в силу (8.5) метод (R, p_n) в виде преобразования (B) определяется матрицей[1]

$$\alpha_{nk}=1-\frac{P_{k-1}}{P_n}. \qquad (17.2)$$

Матрицей (17.2) определил свой метод сам М.Рисс [63]. Поэтому вместо (R, p_n) иногда также пишут (R, P_n) или просто P.

Из (17.2) при $n\geqslant 1$ находим

$$\bar{\Delta}\alpha_{nk}=-P_{k-1}\left(\frac{1}{P_n}-\frac{1}{P_{n-1}}\right)=\frac{P_{k-1}(P_n-P_{n-1})}{P_n P_{n-1}},$$

откуда, считая $\frac{0}{0}=1$, в силу (8.2), метод (R, p_n) в виде преобразования (C) определяется матрицей[2]

$$\bar{\alpha}_{nk}=\frac{P_{k-1}\,p_n}{P_n P_{n-1}}. \qquad (17.3)$$

Из-за (17.3), учитывая определение абсолютной суммируемости, данное в § 11, и то, что метод (R, p_n) треугольен, ряд (0.1) называют $|R, p_n|$-суммируемым, если

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{k=1}^{n} P_{k-1}u_k\right|<\infty,$$

---

[1] Из (17.2) следует, что $\alpha_{n0}=1$.

[2] Из (17.3) вытекает, что $\bar{\alpha}_{n0}=\delta_{n0}$.

причем

$$(\mathcal{R}, p_n)\{\sum u_k\} = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{k=1}^{n} P_{k-1} u_k .$$

17.2. Сохранение сходимости и абсолютной сходимости. Применяя к (17.1) и (17.2) соответственно теоремы Кохима—Шура, Теплица и Кноппа—Лоренца, непосредственно получаем следующие теоремы.

Теорема 17.1. Метод $(\mathcal{R}, p_n)$ сохраняет сходимость тогда и только тогда, если выполнены условия

1^0 существует $\lim P_n \neq 0$ (конечный или нет),

2^0 $\sum_{k=0}^{n} |p_k| = \mathcal{O}(P_n)$.

Метод $(\mathcal{R}, p_n)$ регулярен тогда и только тогда, если выполнено условие 2^0 и $\lim |P_n| = +\infty$.

Теорема 17.2. Метод $(\mathcal{R}, p_n)$ сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, если

$$P_{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \right| = \mathcal{O}(1) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

или, что то же самое, если

$$P_k \sum_{n=k+1}^{\infty} \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \right| = \mathcal{O}(1).$$

Ясно, что условия 1^0 и 2^0 теоремы 17.1 выполнены, когда $p_n > 0$. Покажем, что тогда выполнено и условие теоремы 17.2. Действительно, из условия 1^0 теоремы 17.1 следует

$$P_k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} = P_k \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n} \right) = 1 - \lim_n \frac{P_k}{P_n} = \mathcal{O}(1),$$

так как P_n монотонно возрастает. Следовательно, имеет место

Следствие 17.1. Если $p_n>0$, то метод $(\mathcal{R}, p_n)$ сохраняет сходимость и абсолютную сходимость; этот метод регулярен, если $\sum p_n=+\infty$.

В частности, из теорем 17.1 и 17.2 вытекает:

1) метод логарифмических средних регулярен и сохраняет абсолютную сходимость;

2) метод $(\mathcal{Z}, \alpha)$ регулярен и сохраняет абсолютную сходимость тогда и только тогда, если $\operatorname{Re}\alpha>0$;

3) метод $(\mathcal{R}, \alpha^n)$ с $\alpha\neq 0$ и $\alpha\neq 1$ сохраняет сходимость и абсолютную сходимость тогда и только тогда, если $|\alpha|\neq 1$, а регулярен тогда и только тогда, если $|\alpha|>1$.

17.3. Обратные матрицы метода. Из (17.1) заключаем, что метод $(\mathcal{R}, p_n)$ нормален тогда и только тогда, если $p_n\neq 0$, и по теореме 9.1 при этом условии он также обратим.

Найдем сначала обратную матрицу $(\mathcal{R}, p_n)^{-1}=(\xi_{nk})$. Для этого, вычитая почленно вытекающие из (17.1) равенства

$$\sum_{k=0}^{n} p_k u_k = P_n u'_n,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k u_k = P_{n-1} u'_{n-1},$$

и разделив результат на $p_n\neq 0$, находим

$$u_n = -\frac{P_{n-1}}{p_n} u'_{n-1} + \frac{P_n}{p_n} u'_n, \qquad (17.4)$$

где $P_{-1}=0$, и, следовательно,

$$\xi_{nk}=\begin{cases}\dfrac{P_n}{p_n} & \text{при } k=n,\\ -\dfrac{P_{n-1}}{p_n} & \text{при } k=n-1,\\ 0 & \text{при } k<n-1 \text{ или } k>n.\end{cases} \tag{17.5}$$

Теперь можем найти обратные матрицы метода $(\mathcal{R}, p_n)$ и для преобразований (B), (C) и (D). Действительно, из (17.5) при помощи (9.10) непосредственно выводим

$$\eta_{nk}=\begin{cases}\dfrac{P_n}{p_n} & \text{при } k=n,\\ -P_{n-1}\left(\dfrac{1}{p_n}+\dfrac{1}{p_{n-1}}\right) & \text{при } k=n-1,\\ \dfrac{P_{n-2}}{p_{n-1}} & \text{при } k=n-2,\\ 0 & \text{при } k<n-2 \text{ или } k>n.\end{cases} \tag{17.6}$$

Далее, из (17.5) при помощи (9.8) вытекает

$$\bar{\xi}_{nk}=\begin{cases}\dfrac{P_n}{p_n} & \text{при } k=n,\\ 1 & \text{при } k<n,\\ 0 & \text{при } k>n.\end{cases}$$

Отсюда, наконец, при помощи (9.14) заключаем, что

$$\bar{\eta}_{nk}=\begin{cases}\dfrac{P_n}{p_n} & \text{при } k=n,\\ -\dfrac{P_{n-2}}{p_{n-1}} & \text{при } k=n-1,\\ 0 & \text{при } k<n-1 \text{ или } k>n.\end{cases} \tag{17.7}$$

17.4. Включение и совместность. Пусть $\mathcal{B}$ – произвольный треугольный матричный метод, сохраняющий сходимость, заданный в виде преобразования (A) матрицей $\mathcal{B}=(b_{nk})$, а в

виде преобразования (C) - матрицей $\mathcal{B}=(\bar{\beta}_{nk})$. Пользуясь теоремой 12.1, найдем условия для того, чтобы имели место включения $\mathcal{B}\supset(\mathcal{R},p_n)$ и $|\mathcal{B}|\supset|\mathcal{R},p_n|$.

Для первого включения из (17.5) находим

$$g_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}b_{n\nu}\xi_{\nu k}=b_{nk}\frac{P_k}{p_k}-b_{n,k+1}\frac{P_k}{p_{k+1}}=P_k\Delta\frac{b_{nk}}{p_k}. \qquad (17.8)$$

Так как $\mathcal{B}$ сохраняет сходимость, то для матрицы (g_{nk}) условие 1^0 теоремы Кожима—Шура, как видно из (17.8), выполнено. Из (17.8) также заключаем, что и условие 2^0 теоремы 1.1 выполнено, ибо

$$\sum_{k=0}^{n}P_k\Delta\frac{b_{nk}}{p_k}=\sum_{k=0}^{n}(\Delta\frac{b_{nk}}{p_k})\sum_{\nu=0}^{k}p_\nu=\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu\sum_{k=\nu}^{n}\Delta\frac{b_{nk}}{p_k}=\sum_{\nu=0}^{n}b_{n\nu}\to b.$$

Следовательно, остается лишь условие 3^0 теоремы 1.1 и по теореме 12.1 при $\alpha=\beta=c$ доказана

<u>Теорема 17.3</u>. Треугольный метод $\mathcal{B}=(b_{nk})$, сохраняющий сходимость, включает нормальный метод $(\mathcal{R},p_n)$ тогда и только тогда, если

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|P_k\Delta\frac{b_{nk}}{p_k}\right|+\left|\frac{P_n}{p_n}b_{nn}\right|=O(1)\quad(n=1,2,\ldots).$$

При этом методы $\mathcal{B}$ и $(\mathcal{R},p_n)$ совместны, если $\mathcal{B}$ регулярен.

Отметим, что в случае, когда в теореме 17.3 метод $\mathcal{B}$ регулярен, то и метод $(\mathcal{R},p_n)$ должен быть регулярным, если он сохраняет сходимость. Действительно, из теоремы 17.1 непосредственно следует, что метод $(\mathcal{R},p_n)$, сохраняющий сходимость, является или регулярным, или конулевым. Если же $(\mathcal{R},p_n)$ конулевой, то по теореме 6.2а статьи Целлера [68] и метод $\mathcal{B}$ должен быть конулевым, что невозможно.

Теорема 17.3 доказана Кангро ([11], стр. 219). В частном случае $\mathcal{B}=(\mathcal{R}, q_n)$ теорема 17.3 доказана Гарабедяном и Рандельсом ([38], стр. 529), а если отношение $p_n : q_n$ монотонно - уже Чезаро и Харди (см. Харди [24], стр.80-81 и 86).

Чтобы найти условия для включения $|\mathcal{B}| \supset |\mathcal{R}, p_n|$, применим обратную матрицу (17.7), вследствие чего

$$\bar{\gamma}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\bar{\beta}_{n\nu}\bar{\eta}_{\nu k}=\bar{\beta}_{nk}\frac{P_k}{p_k}-\bar{\beta}_{n,k+1}\frac{P_{k-1}}{p_k}=\frac{P_k}{p_k}\Delta\bar{\beta}_{nk}+\bar{\beta}_{n,k+1}.$$

По теореме 12.1 при $\alpha=\beta=1$ включение $|\mathcal{B}| \supset |\mathcal{R}, p_n|$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\bar{\gamma}_{nk}|=O(1).$$

Если же считать метод $\mathcal{B}$ сохраняющим абсолютную сходимость, то по теореме 4.1 Кноппа—Лоренца

$$\sum_{n=k}^{\infty}|\bar{\beta}_{n,k+1}|=O(1).$$

Следовательно, доказана

Теорема 17.4. Треугольный метод $\mathcal{B}=(\bar{\beta}_{nk})$, сохраняющий абсолютную сходимость, абсолютно включает нормальный метод $|\mathcal{R}, p_n|$ тогда и только тогда, если выполнены условия

$$|\bar{\beta}_{kk}|+\sum_{n=k+1}^{\infty}|\Delta\bar{\beta}_{nk}|=O\left(\frac{P_k}{P_k}\right).$$

Теорема 17.4 принадлежит Кангро ([11], стр. 221-222), а достаточные условия при $\mathcal{B}=(\mathcal{R}, q_n)$ с $p_n, q_n>0$ даны Суноути ([65], теорема 10; см. также Кангро [10], стр. 170).

Из теорем 17.3 и 17.4 вытекает

Теорема 17.5. Имеют место включения

$$\beta\left(\mathcal{R},\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)\cdot\ln\ln(n+2)}\right)\supset\beta\left(\mathcal{R},\frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}\right)\supset\beta\left(\mathcal{R},\frac{1}{n+1}\right)\supset\beta(\mathcal{R},1)\sim$$

$$\sim\beta\left(\mathcal{R},(n+1)^{\alpha}\right)\sim\beta(\mathcal{Z},\alpha+1)\sim\beta(\mathcal{R},(n+1)\ln(n+2)),$$

где $\mathrm{Re}\,\alpha>-1$, $\beta=c,l$, причем все методы совместны.

Доказательство. Если $\mathcal{B}=(\mathcal{R},q_n)$, то, учитывая (17.1) и (17.3), получаем, что условия теорем 17.3 и 17.4 принимают соответственно вид

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|P_k\,\Delta\frac{q_k}{p_k}\right|+\left|P_n\,\frac{q_n}{p_n}\right|=\mathcal{O}(Q_n)\quad(n=1,2,\ldots),\qquad(17.9)$$

$$\frac{1}{|Q_k|}+\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{q_n}{Q_n\,Q_{n-1}}\right|=\mathcal{O}\left(\frac{p_k}{q_k\,P_k}\right).\qquad(17.10)$$

Проверкой выполнения последних условий докажем для примера лишь включения $\beta(\mathcal{R},(n+1)^{\alpha})\supset\beta(\mathcal{Z},\alpha+1)$ и $(\mathcal{R},1)\supset(\mathcal{R},(n+1)\ln(n+2))$.

Пусть $p_n=(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}=-\Delta n^{\alpha+1}$ и $q_n=(n+1)^{\alpha}$, $\mathrm{Re}\,\alpha>-1$. Тогда $P_n=(n+1)^{\alpha+1}$ и, применяя (15.15), находим[1]

$$Q_n=\Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{n}A_k^{\alpha}+\sum_{k=0}^{n}o(A_k^{\alpha})=$$

$$=\Gamma(\alpha+1)\,A_n^{\alpha+1}+o\left(A_n^{\mathrm{Re}\,\alpha+1}\right)\sim$$

$$\sim\frac{1}{\alpha+1}(n+1)^{\alpha+1}.$$

---

[1] Если $y_n=\sum_{k=0}^{n}|x_k|$, то $\sum_{k=0}^{n}o(x_k)=o(y_n)$. Действительно, для любого $\varepsilon>0$ существует индекс L такой, что $|o(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2}|x_k|$ при всех $k>L$. Далее, так как существует такой M, что $\left|\sum_{k=0}^{L}o(x_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}y_n$ при всех $n>M$, то $\left|\sum_{k=0}^{n}o(x_k)\right|\le\left|\sum_{k=0}^{L}o(x_k)\right|+\sum_{k=L+1}^{n}|o(x_k)|<\frac{\varepsilon}{2}y_n+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=L+1}^{n}|x_k|\le\varepsilon\,y_n$ как только $n>N=\max(L,M)$.

Для проверки условий (17.9) и (17.10) применим[1] формулы

$$\Delta^p f(n) = \Delta[\Delta^{p-1} f(n)] = \int_{n+1}^{n} dx_1 \int_{x_1+1}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_{p-1}+1}^{x_{p-1}} \left(\frac{d}{dx_p}\right)^p f(x_p)\, dx_p, \quad (17.11)$$

$$\Delta(a_n b_n) = a_n \Delta b_n + \Delta a_n \cdot b_{n+1}, \quad (17.12)$$

имеющие место соответственно для любой p раз дифференцируемой функции $f(x)$ и любых последовательностей a_n и b_n.

Теперь для любого комплексного λ находим

$$|\Delta n^\lambda| = \left|\int_{n+1}^{n} \frac{d}{dx} x^\lambda dx\right| = \left|\lambda \int_{n+1}^{n} x^{\lambda-1} dx\right| \sim |\lambda| (n+1)^{\operatorname{Re}\lambda - 1},$$

$$|\Delta^2 n^\lambda| = \left|\int_{n+1}^{n} dx \int_{x+1}^{x} \left(\frac{d}{dy}\right)^2 y^\lambda dy\right| = \left|\lambda(\lambda-1) \int_{n+1}^{n} dx \int_{x+1}^{x} y^{\lambda-2} dy\right| \sim |\lambda(\lambda-1)| (n+1)^{\operatorname{Re}\lambda - 2},$$

и, заметив, что

$$\Delta \frac{1}{\Delta n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\Delta n^{\alpha+1}} - \frac{1}{\Delta (n+1)^{\alpha+1}} = -\frac{\Delta^2 n^{\alpha+1}}{\Delta n^{\alpha+1} \cdot \Delta (n+1)^{\alpha+1}},$$

получаем, применяя (17.12),

$$\left|\Delta \frac{q_k}{p_k}\right| = \left|\frac{1}{-\Delta k^{\alpha+1}} \Delta (k+1)^\alpha + \Delta \frac{1}{-\Delta k^{\alpha+1}} \cdot (k+2)^\alpha\right| =$$

$$= \mathcal{O}(1) \left\{ \frac{1}{(k+1)^{\operatorname{Re}\alpha}} (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha - 1} + \frac{(k+1)^{\operatorname{Re}\alpha - 1}}{(k+1)^{2\operatorname{Re}\alpha}} (k+2)^{\operatorname{Re}\alpha} \right\} = \frac{\mathcal{O}(1)}{k+1},$$

откуда следует выполнение условия (17.9). Условие (17.10) также выполнено, ибо (см. (15.19) или [23], стр. 284)

$$\frac{1}{|Q_k|} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left|\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\right| = \frac{\mathcal{O}(1)}{(k+1)^{\operatorname{Re}\alpha+1}} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \left|\frac{\mathcal{O}(n^\alpha)}{(n+1)^{2\alpha+2}}\right| =$$

$$= \frac{\mathcal{O}(1)}{(k+1)^{\operatorname{Re}\alpha+1}} = \mathcal{O}\left(\frac{p_k}{q_k P_k}\right).$$

---

[1] Формула (17.11) приведена в статье [30], но она имеется уже в диссертации Бора (см. [4], стр. 67).

Следовательно, включения $\beta(R,(n+1)^{\alpha})\supset\beta(\mathcal{I},\alpha+1)$ доказаны.

Пусть теперь $p_n=(n+1)\ln(n+2)\sim\int_{n+1}^{n+2}x\ln x\,dx$ и $q_n=1$. Тогда $P_n\sim\int_1^{n+2}x\ln x\,dx\sim\frac{1}{2}(n+1)^2\ln(n+2)$ и $Q_n=n+1$. Отсюда по формуле конечных приращений (или по формулам (17.11) и (17.12)) находим

$$\Delta\frac{q_k}{p_k}=\frac{\mathcal{O}(1)}{(k+1)^2\ln(k+2)},$$

откуда следует выполнение условия (17.9) и, значит, включение $(R,1)\supset(R,(n+1)\ln(n+2))$.

Доказательство всех остальных включений аналогично и проще. По теореме 17.3 все рассматриваемые здесь методы совместны, так как они регулярны.

Теорема 17.5 при $\beta=c$ (для вещественных α) принадлежит в основном Харди и приведена в статье Гарабедяна—Ранделься [38], а при $\beta=l$ – Суноути [65] (для первых четырех методов).

Замечание. В литературе часто встречается понятие совершенного метода. Регулярный метод A называется совершенным, если он совместен с любым регулярным методом $B\supset A$. Аналогично при помощи условия $|B|\supset|A|$ определяется абсолютная совершенность абсолютно регулярного метода A.

Из теоремы 17.3 следует, что регулярный нормальный метод (R,p_n) является совершенным. Из теоремы 17.4 вытекает, что абсолютно регулярный метод $|R,p_n|$ является абсолютно совершенным.

О совершенных методах см. Кук ([14], стр. 236). Свойства совершенных методов подробно исследовал Юримяэ [25] (см. также Реймерс [18], стр. 31-32).

17.5. Транслятивность. Согласно теореме 13.1, положив в теореме 17.3 сначала $\mathcal{B}=(\mathcal{R}, p_n)_L$, т.е. $b_{nk}=p_{k+1}:P_n$ при $k<n$ и $b_{nn}=0$, а затем $\mathcal{B}=(\mathcal{R}, p_n)_R$, т.е. $b_{nk}=p_{k-1}:P_n$, непосредственно получаем следующий результат Хилла ([41], стр. 377).

Теорема 17.6. Нормальный метод $(\mathcal{R}, p_n)$, сохраняющий сходимость, транслятивен слева тогда и только тогда, если

$$\sum_{k=0}^{n-2}\left|P_k\,\Delta\frac{p_{k+1}}{p_k}\right|+\left|P_{n-1}\,\frac{p_n}{p_{n-1}}\right|=\mathcal{O}(P_n)\qquad(n=2,3,\ldots);$$

и транслятивен справа тогда и только тогда, если

$$\sum_{k=0}^{n}\left|P_k\,\Delta\frac{p_{k-1}}{p_k}\right|+\left|P_{n+1}\,\frac{p_n}{p_{n+1}}\right|=\mathcal{O}(P_n).$$

Если при этом $(\mathcal{R}, p_n)$ регулярен, то из этих условий следует соответствующая регулярная транслятивность.

Для решения вопроса об абсолютной транслятивности слева метода взвешенных средних Рисса положим в теореме 17.4 числа $\bar\beta_{nk}=\bar a_{n,k+1}$ из формулы (17.3). Тогда $\bar\beta_{kk}=0$, и условие теоремы 17.4 превращается в

$$\left|\bar a_{k+1,k+1}\right|+\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\Delta\bar a_{n,k+1}\right|=\left|\frac{p_{k+1}}{P_{k+1}}\right|\left\{1+\left|P_{k+1}\right|\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\right|\right\}=\mathcal{O}\left(\frac{p_k}{P_k}\right),$$

что по теореме 17.2 равносильно условию

$$\frac{p_{k+1}}{P_{k+1}}=\mathcal{O}\left(\frac{p_k}{P_k}\right),\qquad(17.13)$$

если $(\mathcal{R}, p_n)$ сохраняет абсолютную сходимость. Вопрос об абсолютной транслятивности справа решается аналогично. В итоге доказан следующий результат Кангро ([10], стр. 181).

Теорема 17.7. Нормальный метод $(\mathcal{R}, p_n)$, сохраняющий

абсолютную сходимость, абсолютно транслятивен слева тогда и только тогда, если выполнено условие (17.13); и абсолютно транслятивен справа тогда и только тогда, если

$$\frac{p_k}{P_k} = \mathcal{O}\left(\frac{p_{k+1}}{P_{k+1}}\right).$$

В частности, из теорем 17.6 и 17.7 заключаем, что все методы $(\mathcal{R}, p_n)$, рассматриваемые в теореме 17.5, регулярно транслятивны и абсолютно транслятивны.

17.6. Лимитирующие теоремы. Очень просто доказывается

Теорема 17.8. Если нормальный метод $(\mathcal{R}, p_n)$ суммирует последовательность u_n к числу u, то

$$u_n = u + o\left(\frac{P_n}{p_n}\right) + o(1). \qquad (17.14)$$

Доказательство. Обозначив $(\mathcal{R}, p_n)$-средние последовательности u_n через $u'_n = u + o(1)$, в силу соотношения (17.4) получаем

$$p_n u_n = (-P_{n-1} + P_n)u + P_{n-1}o(1) + P_n o(1) =$$
$$= p_n u + o(P_n) + o(p_n),$$

откуда и вытекает (17.14).

При $p_n > 0$ член $o(1)$ в условии (17.14) излишен (см. Харди [24], стр. 80).

Другую лимитирующую теорему см. Гарабедян и Рандельс [38], теорема 3.

В частности, из теоремы 17.8 вытекает, что для методов $(\mathcal{R}, p_n)$ при

$$p_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}, \quad p_n = \frac{1}{n+1}, \quad p_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$$

имеем соотвтетственно

$$\mathcal{U}_n = o(n \ln n \cdot \ln\ln n), \quad \mathcal{U}_n = o(n \ln n), \quad \mathcal{U}_n = o(n).$$

Поэтому никакой из этих методов не может включать метод (C,α) при $\operatorname{Re}\alpha > 1$, ибо по теореме 15.10 для метода (C,α) имеем $\mathcal{U}_n = o(n^\alpha)$.

17.7. Методы, равносильные сходимости. В противоположность методу Вороного—Нерлунда метод сходимости не является частным случаем метода (R, p_n). Поэтому особенно важно узнать: каким условиям должны удовлетворять p_n, чтобы метод (R, p_n) был равносилен сходимости. Из теоремы 17.8 непосредственно следует, что при условии[1]

$$P_n = O(p_n) \tag{17.15}$$

будет $\mathcal{U}_n = \mathcal{U} + o(1)$ всегда, когда $(R, p_n)\{\mathcal{U}_n\} = \mathcal{U}$, т.е. условие (17.15) достаточно для того, чтобы имело место включение $(R, p_n) \subset E$. Однако, имеет место

Теорема 17.9. Для того, чтобы регулярный метод (R, p_n) был равносильным сходимости, необходимо и достаточно выполнение условия (17.15).

Доказательство. Из регулярности метода $P = (R, p_n)$ следует включение $E \subset P$. По теореме 1.1 из формулы (17.5) следует, что для обратного включения $P \subset E$ необходимо и достаточно условие (17.15), так как $\xi_{nk} = 0$ при $n > k+1$, $\sum_{k=0}^{n} \xi_{nk} = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} |\xi_{nk}| = \frac{1}{|p_n|}\left(|P_n| + |P_n - p_n|\right) = O(1).$$

Аналогично из (17.7) по теореме 3.1 вытекает

Теорема 17.10. Для того, чтобы регулярный метод $|R, p_n|$

---

[1] См. Гарабедян и Рандельс [38], стр. 531.

был равносильным абсолютной сходимости, необходимо и достаточно выполнение условия (17.15).

Теорема 17.9 принадлежит Хиллу ([41], теорема 4), а теорема 17.10 - Кангро ([10], стр.170-171). В случае $p_n>0$ в слегка отличной форме теорема 17.9 имеется в книге Харди ([24], стр.82), а теорема 17.10 - дана Суноути ([65], теорема 9). Теорема 17.9 следует из теоремы Брудно ([14], стр.380).

Условию (17.15) удовлетворяют методы (R, p_n) при $p_n = a^n$ с $|a|>1$, при $p_n=n\cdot n!$ (т.е. $P_n=(n+1)!-1$) и др.

§ 18. Метод суммирования Эйлера—Кноппа

18.1. Определение метода. Методом Эйлера—Кноппа E_λ называют треугольный матричный метод, определенный в виде преобразования (A) матрицей

$$a_{nk}=\binom{n}{k}\lambda^k(1-\lambda)^{n-k}, \qquad (18.1)$$

где параметр λ - некоторое комплексное число.

Эйлер рассматривал случай $\lambda=\frac{1}{2}$, Кнопп [49] в 1922 г. - случай любого вещественного λ, а Агнью [26] - общий случай комплексного λ в 1944 году.

В литературе часто матрицу (18.1) записывают в виде

$$a_{nk}=\frac{1}{(q+1)^n}\binom{n}{k}q^{n-k} \qquad (18.2)$$

и называют методом (E,q). Переход от (18.1) к (18.2) и обратно при $\lambda\neq 0$ очень прост:

$$\lambda=\frac{1}{q+1}, \qquad q=\frac{1-\lambda}{\lambda}.$$

Если считать $0^0=1$, то при $\lambda=0$ будет $a_{nk}=\delta_{0k}$

и метод E_λ действительно превращается в метод[1] E_0. При $\lambda=1$ будет $a_{nk}=\delta_{nk}$, т.е. метод $E_1=(E,0)$ является методом сходимости E.

По формуле бинома Ньютона из (18.2) непосредственно находим

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}=(q+1)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k q^{n-k}=1. \qquad (18.3)$$

Докажем, что в виде преобразования (C) метод Эйлера—Кноппа задается треугольной матрицей[2]

$$\begin{aligned}\bar{a}_{nk}&=\frac{k}{n}a_{nk}\\ &=\frac{k}{n}\binom{n}{k}\lambda^k(1-\lambda)^{n-k}\\ &=\frac{k}{n}\frac{1}{(q+1)^n}\binom{n}{k}q^{n-k}.\end{aligned} \qquad (18.4)$$

Действительно, при $k=0$ равенство (18.4) верно, ибо по формуле (8.7) из (18.3) следует

$$\bar{a}_{n0}=\bar{\Delta}\sum_{k=0}^{n}a_{nk}=\delta_{n0}.$$

Для всех $k>0$ (и,значит, $n\geqslant k$) формула (18.4) доказывается методом математической индукции, так как из (8.9), (8.1) и (18.1) вытекает

$$\begin{aligned}\bar{a}_{n,k+1}&=\bar{a}_{nk}-a_{nk}+a_{n-1,k}=\\ &=\lambda^k(1-\lambda)^{n-1-k}\left[\frac{k}{n}\binom{n}{k}(1-\lambda)-\binom{n}{k}(1-\lambda)+\binom{n-1}{k}\right]=\\ &=\lambda^k(1-\lambda)^{n-1-k}\left[\binom{n}{k}\frac{n-k}{n}(\lambda-1)+\binom{n-1}{k}\right]=\\ &=\binom{n-1}{k}\lambda^{k+1}(1-\lambda)^{n-k-1}=\frac{k+1}{n}\binom{n}{k+1}\lambda^{k+1}(1-\lambda)^{n-k-1}=\frac{k+1}{n}a_{n,k+1}.\end{aligned}$$

---

[1] Метод E_0 не является частным случаем метода (E,q) ни при каком конечном q.

[2] Отметим, что $\frac{k}{n}\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}$, где $\binom{n-1}{-1}=\delta_{n0}$.

Замечание. Иногда метод Эйлера—Кнопна задают матрицей

$$a_{nk}=\frac{1}{(q+1)^{n+1}}\binom{n+1}{k+1}q^{n-k},$$

тогда

$$\tilde{a}_{nk}=\frac{1}{(q+1)^{n+1}}\binom{n}{k}q^{n-k}$$

(см., например, Харди [24], стр. 224–226).

18.2. Сохранение сходимости и абсолютной сходимости. Из теоремы 1.1 и 1.2 вытекает

Теорема 18.1. Метод E_λ сохраняет сходимость тогда и только тогда, если $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, и регулярен при $0<\lambda\leqslant 1$. Метод (E,q) сохраняет сходимость и регулярен тогда и только тогда, если $q\geqslant 0$.

Доказательство. При $\lambda=0$ теорема очевидна. Применяя к матрице (18.2) теорему 1.2, видим, что ее условие 2^0 выполнено из-за (18.3); а условие 3^0, т.е.

$$\sum_{k=0}^{n}|a_{nk}|=|q+1|^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|q|^{n-k}=\left(\frac{|q|+1}{|q+1|}\right)^n=O(1)$$

выполняется лишь при $|q+1|\geqslant|q|+1$, т.е. при $|q+1|=|q|+1$, что возможно только для вещественных $q\geqslant 0$ и $0<\lambda\leqslant 1$. При таких q и λ выполнено и условие 1^0 теоремы 1.2, так как

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}=\binom{n-k+k}{n-k}=A_{n-k}^{k}\sim\frac{(n-k)^k}{k!}\sim\frac{n^k}{k!}$$

при $n\to\infty$ и, значит,

$$\lim_n a_{nk}=q^{-k}\,\frac{1}{k!}\lim_n n^k\left(\frac{q}{q+1}\right)^n=0.$$

Также имеет место

Теорема 18.2. Метод $|E_\lambda|$ сохраняет абсолютную сходи-

мость тогда и только тогда, если $0 \le \lambda \le 1$.

Доказательство. При $\lambda = 0$ теорема очевидна. Так как

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n} = A_n^{k-1},$$

то, учитывая (15.1), из (18.4) при $\lambda \neq 0$ выводим

$$\sum_{n=k}^{\infty} |a_{nk}| = |\lambda|^k \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} |1-\lambda|^{n-k} = |\lambda|^k \sum_n A_n^{k-1} |1-\lambda|^n = \left(\frac{|\lambda|}{1-|1-\lambda|}\right)^k,$$

откуда видим, что матрица (18.4) удовлетворяет условию теоремы 4.1 Кноппа—Лоренца тогда и только тогда, если $|\lambda| = 1-|1-\lambda|$, т.е. при $0 \le \lambda \le 1$.

18.3. Обратные матрицы. Из (18.1) заключаем, что метод E_λ нормален тогда и только тогда, если $\lambda \neq 0$ (отсюда метод (E, q) нормален), и по теореме 9.1 при $\lambda \neq 0$ метод E_λ обратим.

Чтобы найти обратную матрицу $E_\lambda^{-1} = (\xi_{nk})$ докажем, что

$$E_\lambda E_\mu = E_{\lambda\mu}. \tag{18.5}$$

Действительно, обозначив $E_\lambda E_\mu = (c_{nk})$, применяя элементарное тождество

$$\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\nu-k}, \tag{18.6}$$

и формулу бинома Ньютона при $\lambda \neq 0$, из (18.1) выводим

$$\begin{aligned} c_{nk} &= \sum_{\nu=k}^{n} \binom{n}{\nu} \lambda^\nu (1-\lambda)^{n-\nu} \binom{\nu}{k} \mu^k (1-\mu)^{\nu-k} = \\ &= \binom{n}{k} (\lambda\mu)^k \sum_{\nu=k}^{n} \binom{n-k}{\nu-k} \lambda^{\nu-k} (1-\lambda)^{n-\nu} (1-\mu)^{\nu-k} = \\ &= \binom{n}{k} (\lambda\mu)^k \sum_{\nu=0}^{n-k} \binom{n-k}{\nu} [\lambda(1-\mu)]^\nu (1-\lambda)^{n-k-\nu} = \\ &= \binom{n}{k} (\lambda\mu)^k (1-\lambda\mu)^{n-k}. \end{aligned}$$

Формула (18.5) доказана.

Из (18.4) непосредственно вытекает, что формула (18.5) имеет место и в том случае, когда метод E_λ задан матрицей (18.4).

Для получения обратных матриц положим в (18.5) произведение $\lambda\mu = 1$, откуда, так как $E_1 = E$, заключаем

$$E_\lambda^{-1} = E_{\frac{1}{\lambda}}. \tag{18.7}$$

Отсюда и из (18.1) и (18.4) находим, что

$$\xi_{nk} = \lambda^{-n}\binom{n}{k}(\lambda-1)^{n-k}, \tag{18.8}$$

$$\bar{\eta}_{nk} = \frac{k}{n}\lambda^{-n}\binom{n}{k}(\lambda-1)^{n-k}. \tag{18.9}$$

18.4. Включение и совместность. Найдем условия, при которых $\alpha E_\mu \supset \alpha E_\lambda$, где $\alpha = c$ и $\alpha = \ell$, причем остановимся на случае $\lambda \neq 0$, ибо при $\lambda = 0$ ясно, что и αE_μ должен суммировать (абсолютно суммировать) все ряды.

Учитывая (18.7) и (18.5), получаем

$$E_\mu E_\lambda^{-1} = E_{\lambda/\mu}.$$

Отсюда, воспользовавшись теоремами 18.1 и 18.2, из теоремы 12.1 заключаем, что, например, $E_\mu \supset E_\lambda$ тогда и только тогда, если метод $E_{\mu/\lambda}$ сохраняет сходимость, т.е. $0 \leq \mu/\lambda \leq 1$. Следовательно, обозначив $\mu/\lambda = \theta$, получаем следующий результат.

Теорема 18.3. Включения[1] $E_\mu \supset E_\lambda$ и $|E_\mu| \supset |E_\lambda|$ имеют место тогда и только тогда, если $\mu = \theta\lambda$, где $0 \leq \theta \leq 1$,

[1] Каждое в отдельности.

а совместность - тогда и только тогда, если $0<\theta\leq 1$.

Из теоремы 18.3 следует, что методы E_μ и E_λ могут включать один другого и быть совместными даже в случае, когда λ и μ - мнимые числа, т.е. когда оба метода не сохраняют сходимость, ибо равенство $\mu=\theta\lambda$ при $\theta>0$ выполняется, когда $|\mu|\leq|\lambda|$ и $\arg\mu=\arg\lambda$.

Отсюда, если $\lambda>0$, то метод E_λ тем сильнее, чем меньше параметр λ, а метод (E,q) тем сильнее, чем больше параметр $q>-1$.

При $\theta=0$ из теоремы 18.3 вытекает и тот очевидный факт, что E_0 сильнее любого метода E_λ с $\lambda\neq 0$.

В частности, $E_\lambda\subset E$ при $\lambda>1$, т.е. при $\lambda>1$ метод E_λ может суммировать лишь сходящиеся ряды.

Все сказанное относится и к абсолютной суммируемости методом Эйлера—Кноппа.

18.5. Транслятивность. Ясно, что метод E_0 является транслятивным, однако не является регулярно транслятивным ни справа и ни слева. Оказывается, что при $\lambda\neq 0$ метод Эйлера—Кноппа E_λ может быть лишь регулярно транслятивным. Вопрос о транслятивности метода E_λ полностью решает

Теорема 18.4. Пусть $\lambda\neq 0$. Метод E_λ регулярно транслятивен слева тогда и только тогда, если

$$|\lambda-1|<1. \qquad (18.10)$$

Метод E_λ регулярно транслятивен справа.

Доказательство следует из теорем 13.1 и 12.1. Действительно, обозначив $E_\lambda=A$ и $A_L A^{-1}=(c_{nk})$, ввиду (18.1) и (18.8) находим

$$c_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n-1} a_{n,\nu+1}\xi_{\nu k}=\sum_{\nu=k}^{n-1}\binom{n}{\nu+1}\lambda^{\nu+1}(1-\lambda)^{n-\nu-1}\binom{\nu}{k}\lambda^{-\nu}(\lambda-1)^{\nu-k}=$$

$$=\lambda(1-\lambda)^{n-1-k}\sum_{\nu=k}^{n-1}(-1)^{\nu-k}\binom{n}{\nu+1}\binom{\nu}{k}=\lambda(1-\lambda)^{n-1-k},$$

ибо по формуле (15.13)

$$\sum_{\nu=k}^{n-1}(-1)^{\nu-k}\binom{n}{\nu+1}\binom{\nu}{k}=(-1)^{k-n+1}\sum_{\nu=k}^{n-1}(-1)^{n-1-\nu}\binom{n}{n-1-\nu}\binom{\nu-k+k}{\nu-k}=$$

$$=(-1)^{k-n+1}\sum_{\nu=k}^{n-1}A_{n-1-\nu}^{-n-1}A_{\nu-k}^{k}=(-1)^{k-n+1}A_{n-1-k}^{k-n}=1.$$

Для того, чтобы матрица $A_L A^{-1}$ удовлетворяла условию 2^0 теоремы 1.2 Теплица, необходимо и достаточно условие (18.10), так как при $n\to\infty$

$$\sum_{k=0}^{n-1}c_{nk}=\lambda\sum_{k=0}^{n-1}(1-\lambda)^{n-k-1}=\lambda\sum_{k=0}^{n-1}(1-\lambda)^{k}\to 1.$$

Из условия (18.10) вытекает и выполнение условий 1^0 и 3^0 теоремы 1.2.

Далее, обозначив $A_R A^{-1}=(g_{nk})$, ввиду (18.1) и (18.8) при $k\geqslant 1$, находим

$$g_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n+1}a_{n,\nu-1}\xi_{\nu k}=\sum_{\nu=k}^{n+1}\binom{n}{\nu-1}\lambda^{\nu-1}(1-\lambda)^{n-\nu+1}\binom{\nu}{k}\lambda^{-\nu}(\lambda-1)^{\nu-k}=$$

$$=\lambda^{-1}(1-\lambda)^{n+1-k}\sum_{\nu=k}^{n+1}(-1)^{\nu-k}\binom{n}{\nu-1}\binom{\nu}{k}=\lambda^{-1}(\lambda-1)^{n+1-k}A_{n+1-k}^{k-n},$$

ибо по формуле (15.13)

$$\sum_{\nu=k}^{n+1}(-1)^{\nu-k}\binom{n}{\nu-1}\binom{\nu}{k}=(-1)^{k-n-1}\sum_{\nu=k}^{n+1}A_{n+1-\nu}^{-n-1}A_{\nu-k}^{k}=(-1)^{k-n-1}A_{n+1-k}^{k-n};$$

аналогично

$$q_{n0}=\sum_{\nu=1}^{n+1}a_{n,\nu-1}\xi_{\nu 0}=-\lambda^{-1}(1-\lambda)^{n+1}A_n^{-n}=-\lambda^{-1}(1-\lambda)^{n+1}\delta_{n0}.$$

Поэтому матрица $A_R A^{-1}$ удовлетворяет условиям 1^0-3^0 теоремы 1.2; например, при $n>0$

$$\sum_{k=0}^{n+1}q_{nk}=\lambda^{-1}(\lambda-1)^{n+1}\left[\delta_{n0}(-1)^n+(\lambda-1)^{-n}+(\lambda-1)^{-n-1}\right]=$$

$$=\lambda^{-1}(\lambda-1)+\lambda^{-1}=1.$$

Теорема 18.5 принадлежит Агнью ([26], стр. 318), для $\lambda=\frac{1}{2}$ - Кноппу ([49], стр. 233-235), для $0<\lambda\leqslant 1$ - Сильверману (см.[26]).

18.6. Лимитирующая теорема. Следующая теорема дает необходимое условие для E_λ-суммируемости ряда (0.1) не только в случае, когда E_λ является регулярным методом или включающим сходимость, но и при $\lambda<0$. В случае $\lambda=1$ теорема неверна, а случай $\lambda=0$ нас не интересует.

Теорема 18.6. Если $0\neq\lambda<1$ и последовательность u_n является E_λ-суммируемой, то

$$u_n=o\left[\left(\frac{2-\lambda}{\lambda}\right)^n\right].$$

Доказательство аналогично как для теоремы 15.9. Действительно, обозначив E_λ-средние последовательности u_n через u'_n, при помощи (9.1) и (18.8) (если $\lambda\neq 0$) находим

$$\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^n u_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2-\lambda)^{-n}(\lambda-1)^{n-k}u'_k=\sum_{k=0}^{n}c_{nk}\,u'_k.$$

Условие 3^0 теоремы 1.1 Кожима—Шура по формуле бинома Ньютона дает

$$\sum_{k=0}^{n}|c_{nk}|=|2-\lambda|^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}|\lambda-1|^{n-k}=|2-\lambda|^{-n}(|\lambda-1|+1)^n,$$

что выполняется, если $|\lambda-1|+1 \le |2-\lambda|$. Так как всегда $|2-\lambda| \le 1+|1-\lambda|$, то должно быть $|2-\lambda| = 1+|1-\lambda|$, т.е. $\lambda \le 1$. Условие 2^0 теоремы 1.1 превращается в

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} c_{nk} = \lim_n \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)^n = a,$$

и выполняется при $|\lambda| < |2-\lambda|$ или $\lambda = 2-\lambda$, откуда также получаем, что $\lambda \le 1$. Однако $a=0$ при $\lambda<1$. Для проверки условия 1^0 теоремы 1.1 вспомним, что $\binom{n}{k} \sim \frac{1}{k!} n^k$, и поэтому при $\lambda<1$

$$\lim_n c_{nk} = \frac{1}{k!(\lambda-1)^k} \lim_n n^k \left(\frac{\lambda-1}{2-\lambda}\right)^n = 0.$$

Так как пределы 1^0 и 2^0 равны нулю, то остается применить формулу (1.1).

Из теоремы 18.6 и необходимого условия сходимости числовых рядов непосредственно вытекает

Следствие 18.1. Если $0 \ne \lambda \le 1$ и ряд (0.1) является E_λ-суммируемым, то

$$u_n = o\left[\left(\frac{2-\lambda}{\lambda}\right)^n\right].$$

Следствие 18.1 можно по-другому доказать аналогично, как теорему 18.6, если вместо (18.8) применить (18.9). Другое доказательство следствия 18.1 см. Харди [24], теорема 121.

18.7. Пример. Рассмотрим при каких значениях переменного z ряд

$$\sum z^n \qquad (18.11)$$

E_λ-суммируем и какова его сумма. Если $0 \le \lambda \le 1$, то по теореме 18.2 ряд (18.11) является даже $|E_\lambda|$-суммируемым внутри его круга сходимости $|z|<1$. Оказывается, что метод

E_λ осуществляет аналитическое продолжение степенных рядов за круг сходимости, или, как говорят, метод E_λ эффективен для степенных рядов (см., например, Кук [14], стр. 229). Для ряда (18.11) при $z \neq 1$ имеем

$$u_n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z},$$

и применяя (18.1), находим

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k (1-\lambda)^{n-k} \left(\frac{1}{1-z} - \frac{z^{k+1}}{1-z} \right) =$$

$$= \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda z)^k (1-\lambda)^{n-k} = \frac{1}{1-z} - \frac{z}{1-z} (\lambda z + 1 - \lambda)^n.$$

Последняя последовательность сходится к $\frac{1}{1-z}$ или при $z = 0$ или при $|\lambda z + 1 - \lambda| < 1$ (при $\lambda z + 1 - \lambda = 1$ получаем $z = 1$). Отсюда, если $\lambda \neq 0$, получаем, что степенной ряд (18.11) является E_λ-суммируемым к значению $\frac{1}{1-z}$ при $z = 0$ и при всех z, удовлетворяющих неравенству

$$\left| z + \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) \right| < \frac{1}{|\lambda|},$$

т.е. внутри круга с центром в точке $1 - \frac{1}{\lambda}$ и радиусом, равным $1/|\lambda|$. Отсюда, чем ближе $|\lambda|$ к нулю, тем больше круг E_λ-суммируемости ряда (18.11). Если λ вещественно, то при $\lambda \to 0$ этот круг стремится к полуплоскости $\operatorname{Re} z < 1$. Покажем еще, что эта суммируемость является также абсолютной. Действительно, применяя к ряду (18.11) метод (18.4), при $n \geq 1$ получаем

$$u'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} a_{nk} z^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a_{nk} z^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \lambda^{k+1} (1-\lambda)^{n-1-k} z^{k+1} =$$

$$= \lambda z(\lambda z + 1 - \lambda)^{n-1},$$

откуда

$$\sum |u'_n| = 1 + |\lambda z| \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda z + 1 - \lambda|^{n-1} < \infty.$$

О применении метода E_λ к суммируемости произвольных степенных рядов см., например, Агнью ([26], стр. 328–333, или Кнопп [49], стр. 239–245).

§ 19. Метод суммирования Хаусдорфа

Произведение двух методов Эйлера—Кноппа, как видно из (18.5), также является методом Эйлера—Кноппа, так что множество методов Эйлера—Кноппа замкнуто относительно операции умножения. Метод Хаусдорфа, к рассмотрению которого сейчас приступаем, также обладает этим свойством. Множество методов Хаусдорфа является достаточно широким: метод является обобщением методов Гельдера, Чезаро и Эйлера—Кноппа.

19.1. Матрица и последовательность Хаусдорфа. Введем матрицу

$$\mathfrak{D} = (d_{nk}) \quad \text{с} \quad d_{nk} = (-1)^k \binom{n}{k}.$$

Эта матрица обратна сама себе, т.е. $\mathfrak{D}^{-1} = \mathfrak{D}$, или

$$\mathfrak{D}^2 = E. \tag{19.1}$$

Действительно, обозначив $\mathfrak{D}^2 = (e_{nk})$, при помощи (18.6) находим

$$e_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} d_{n\nu} d_{\nu k} = \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^{\nu+k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{\nu-k} = \binom{n}{k} \sum_{\nu=0}^{n-k} (-1)^{\nu} \binom{n-k}{\nu} =$$

$$= \binom{n}{k} (1-1)^{n-k} = \binom{n}{k} \delta_{nk} = \delta_{nk}, \tag{19.2}$$

чем (19.1) доказано.

Возьмем числовую последовательность μ_n и введем диагональную матрицу

$$\mu=(\delta_{nk}\mu_n).$$

Соответственно матрице μ образуем произведение

$$H=\mathcal{D}\mu\mathcal{D}, \qquad (19.3)$$

которое назовем матрицей Хаусдорфа, а последовательность μ_n - последовательностью Хаусдорфа.

Метод суммирования, матрица которого в виде преобразования (A) является матрицей Хаусдорфа, называется методом Хаусдорфа и обозначается через (H, μ_n).

Имеет место

Теорема 19.1. Произведение методов Хаусдорфа (H, μ_n) и (H, λ_n) есть метод Хаусдорфа $(H, \lambda_n\mu_n)$.

Доказательство. Действительно, учитывая (19.1) и то, что произведение диагональных матриц есть диагональная матрица, находим

$$(H,\lambda_n)(H,\mu_n)=\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}\mathcal{D}\mu\mathcal{D}=\mathcal{D}\lambda E\mu\mathcal{D}=\mathcal{D}\lambda\mu\mathcal{D}=(H,\lambda_n\mu_n).$$

Из теоремы 19.1 непосредственно вытекает

Следствие 19.1. Любые два метода Хаусдорфа перестановочны.

19.2. Примеры методов Хаусдорфа. Найдем критерий, по которому легко установить, является ли заданный метод $A=(a_{nk})$ методом Хаусдорфа, т.е. представим ли он в виде (19.3), т.е. в виде

$$A=\mathcal{D}\mu\mathcal{D} \qquad (19.4)$$

Умножив равенство (19.4) справа и слева матрицей $\mathcal{D}$, в силу (19.1) получаем

$$\mathcal{D}A\mathcal{D} = \mu. \tag{19.5}$$

Обратно, из (19.5) таким же образом следует (19.4). Итак, доказана

Теорема 19.2. Метод A является методом Хаусдорфа тогда и только тогда, если произведение $\mathcal{D}A\mathcal{D}$ является диагональной матрицей, т.е. если имеет место (19.5).

Следствие 19.2. Метод Чезаро C^α является методом Хаусдорфа $(H, 1/A_n^\alpha)$ при любом $\alpha \neq -1, -2, \dots$.

Доказательство. Обозначив $C^\alpha\mathcal{D} = (b_{nk})$, ввиду (15.7), (15.12) и (15.16), находим

$$b_{nk} = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=k}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} d_{\nu k} = \frac{(-1)^k}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n-k} A_{n-k-\nu}^{\alpha-1} A_\nu^k = \frac{(-1)^k}{A_n^\alpha} A_{n-k}^{\alpha+k} =$$

$$= (-1)^k \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{(n-k)!\,\Gamma(\alpha+k+1)} \frac{n!\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)} = (-1)^k \binom{n}{k} \frac{k!\,\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = d_{nk}\frac{1}{A_k^\alpha}.$$

Теперь, обозначив $(m_{nk}) = \mathcal{D}C^\alpha\mathcal{D} = \mathcal{D}(b_{nk})$, ввиду (19.2), заключаем

$$m_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} d_{n\nu} d_{\nu k} \frac{1}{A_k^\alpha} = \frac{1}{A_k^\alpha} e_{nk} = \delta_{nk} \frac{1}{A_k^\alpha},$$

и по теореме 19.2 получаем требуемое.

Следствие 19.3. Метод Гельдера H^α является методом Хаусдорфа $\left(H, (n+1)^{-\alpha}\right)$.

Доказательство. По следствию 19.2 метод $H^1 = C^1 = \left(H, \frac{1}{n+1}\right)$. Отсюда по теореме 19.1 для любого $\alpha = 1, 2, \dots$ получаем требуемое.

Замечание. Следствие 19.2 дает возможность определить

метод Гельдера H^α для нецелых α. Поэтому для любого комплексного α определяем

$$H^\alpha=(H,(n+1)^{-\alpha}).$$

Следствие 19.4. Метод Эйлера—Кноппа E_λ является методом Хаусдорфа (H,λ^n).

Доказательство. Обозначив $E_\lambda\mathcal{D}=(\ell_{nk})$, ввиду (18.1) и (18.6), находим

$$\ell_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\binom{n}{\nu}\lambda^\nu(1-\lambda)^{n-\nu}d_{\nu k}=(-1)^k\binom{n}{k}\sum_{\nu=k}^{n}\binom{n-k}{\nu-k}\lambda^\nu(1-\lambda)^{n-\nu}=$$

$$=(-1)^k\binom{n}{k}\lambda^k\sum_{\nu=0}^{n-k}\binom{n-k}{\nu}\lambda^\nu(1-\lambda)^{n-k-\nu}=d_{nk}\lambda^k[\lambda+(1-\lambda)]^{n-k}=$$

$$=d_{nk}\lambda^k.$$

Теперь, обозначив $(m_{nk})=\mathcal{D}E_\lambda\mathcal{D}=\mathcal{D}(\ell_{nk})$, ввиду (19.2), заключаем

$$m_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}d_{n\nu}d_{\nu k}\lambda^k=\lambda^k e_{nk}=\delta_{nk}\lambda^n,$$

и по теореме 19.2 получаем требуемое.

Из следствий 19.1-19.4 вытекает перестановочность методов Чезаро, Гельдера и Эйлера—Кноппа, например,

$$C^\alpha C^\beta=C^\beta C^\alpha \qquad (\alpha,\beta\neq -1,-2,\ldots),$$
$$C^\alpha E_\lambda=E_\lambda C^\alpha \qquad (\alpha\neq -1,-2,\ldots),$$
$$H^\alpha C^\beta=C^\beta H^\alpha \qquad (\beta\neq -1,-2,\ldots).$$

19.3. Матричные преобразования Хаусдорфа. Найдем элементы матрицы (19.3) в виде преобразования (A). Для этого, обозначив $\mu\mathcal{D}=(\ell_{nk})$, имеем

$$\ell_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\delta_{n\nu}\mu_n d_{\nu k}=\mu_n d_{nk},$$

откуда для элементов a_{nk} матрицы (19.3) при помощи (18.6) находим

$$a_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n} d_{n\nu}\, b_{\nu k}=\binom{n}{k}\sum_{\nu=k}^{n}(-1)^{\nu+k}\binom{n-k}{\nu-k}\mu_\nu=\binom{n}{k}\sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-n+k-1}\,\mu_\nu. \qquad (19.6)$$

Теперь назовем разностью неотрицательного целого порядка $\varkappa$ последовательности μ_n величину

$$\Delta^{\varkappa}\mu_k=\sum_{\nu=k}^{k+\varkappa}(-1)^{\nu-k}\binom{\varkappa}{\nu-k}\mu_\nu=\sum_{\nu=k}^{k+\varkappa} A_{\nu-k}^{-\varkappa-1}\,\mu_\nu. \qquad (19.7)$$

Отсюда

$$\Delta^0\mu_k=\mu_k,$$

$$\Delta^1\mu_k=\mu_k-\mu_{k+1}=\Delta\mu_k.$$

Ввиду (19.6) и (19.7) метод Хаусдорфа (H,μ_n) треугольен и в виде преобразования (A) имеет матрицу

$$a_{nk}=\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k. \qquad (19.8)$$

Докажем, что в виде преобразования (C) метод Хаусдорфа задается треугольной матрицей

$$\bar{a}_{nk}=\frac{k}{n}a_{nk} \qquad (19.9)$$

$$=\frac{k}{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k.$$

Действительно, аналогично как для метода E_λ при $k=0$ равенство (19.9) верно, а для всех $k>0$ из (8.9), (8.1) и (19.8) вытекает

$$\bar{a}_{n,k+1}=\bar{a}_{nk}-a_{nk}+a_{n-1,k}=$$

$$=\frac{k}{n}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k-\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k+\binom{n-1}{k}\Delta^{n-1-k}\mu_k=$$

$$=-\binom{n-1}{k}\Delta^{n-k}\mu_k+\binom{n-1}{k}\Delta^{n-1-k}\mu_k=$$

$$= \binom{n-1}{k} \Delta^{n-k-1} \mu_{k+1} = \frac{k+1}{n} a_{n,k+1} .$$

19.4. Сохранение сходимости и абсолютной сходимости.

Применим теорему 1.1 Кожима—Шура к матрице (19.8). Условие 2^0 ее выполнено, так как из (19.6) и (18.6) выводим

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sum_{\nu=k}^{n} (-1)^{\nu+k} \binom{n-k}{\nu-k} \mu_\nu =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \mu_\nu \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^{\nu+k} \binom{\nu}{k} = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \mu_\nu \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (-1)^k =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \mu_\nu (1-1)^\nu = \mu_0 . \qquad (19.10)$$

Остаются условия 1^0 и 3^0 теоремы 1.1. Поэтому верна

Теорема 19.3. Метод (H, μ_n) сохраняет сходимость тогда и только тогда, если выполнены условия

1) $\lim_n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k = a_k$ существует при $k = 0,1,\ldots,$ (19.11)

2) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |\Delta^{n-k} \mu_k| = \mathcal{O}(1).$ (19.12)

Сохраняющий сходимость метод (H, μ_n) регулярен тогда и только тогда, если $a_k = 0$ для всех $k = 0,1,\ldots$ и $\mu_0 = 1$.

Теорему 19.3 доказал Хаусдорф ([40], стр. 79).

Из (19.10) следует, что условие (19.12) можем в теореме опустить, если $\Delta^{n-k} \mu_k \geqslant 0$.

Можно доказать, что выполнение условия 1) теоремы 19.3 достаточно требовать лишь при $k = 0$ (см., например, Харди [24], стр. 316, или Гарабедян [37], стр. 396).

Для доказательства следующей теоремы нам нужно

Определение. Последовательность μ_n называется абсо-

лютно монотонной, если

$$\Delta^p \mu_n \geqslant 0$$

для всех $n, p = 0, 1, \ldots$.

Из (19.10) вытекает, что для абсолютно монотонных последовательностей условие (19.12) всегда выполнено.

Лемма 19.1. Вещественная последовательность μ_n удовлетворяет условию (19.12) тогда и только тогда, если она представима в виде разности

$$\mu_n = \alpha_n - \beta_n,$$

где α_n и β_n - абсолютно монотонные последовательности.

Доказательство см. Харди [24], стр. 314-316.

Теперь может быть доказана

Теорема 19.4. Метод (H, μ_n) сохраняет абсолютную сходимость, как только он сохраняет сходимость.

Доказательство. Пусть сначала μ_n - вещественная последовательность, удовлетворяющая условиям (19.12) и (19.11). По лемме 19.1 можем ограничиться случаем, когда сама μ_n абсолютно монотонна. А тогда, в силу (19.9), условие теоремы 4.1 Кноппа—Лоренца выполнено, ибо из (8.14), (8.5), (19.10) и (19.11) вытекает

$$\sum_{n=K}^{\infty} |\bar{a}_{nK}| = \sum_{n=K}^{\infty} \bar{a}_{nK} = \lim_n \alpha_{nK} = \lim_n \sum_{\nu=K}^{n} a_{n\nu} = \lim_n (\mu_0 - \sum_{\nu=0}^{K-1} a_{n\nu}) =$$

$$= \mu_0 - \sum_{\nu=0}^{K-1} a_\nu = O(1).$$

Если же $\mu_n = u_n + i v_n$, где u_n и v_n вещественны, то вместе с μ_n удовлетворяют условиям (19.11) и (19.12) последовательности u_n и v_n. Теорема доказана.

Теорема 19.4 принадлежит Кноппу и Лоренцу [52].

Вопросы регулярности и включения методов Хаусдорфа имеют тесную связь с проблемой моментов. Об этом см. Хаусдорф [40]; Харди [24], стр. 318-330; Гарабедян [37], стр. 398-406; Ахиезер [2], стр. 97 и 252; Кук [14], стр. 361-362, где имеется и дальнейшая литература.

19.5. Обратная матрица. Включение. Из (19.8) заключаем, что метод (H, μ_n) нормален тогда и только тогда, когда $\mu_n \neq 0$. По теореме 9.1 при этом условии метод (H, μ_n) обратим. Чтобы найти обратную матрицу, заметим, что ввиду (19.3) и (19.1)

$$(H, 1) = E,$$

откуда

$$(H, \mu_n)^{-1} = (H, \frac{1}{\mu_n}), \qquad (19.13)$$

ибо по теореме 19.1 имеем $(H, \mu_n)(H, 1/\mu_n) = (H, 1)$.

Формула (19.9) показывает, что равенство (19.13) сохраняется и в том случае, когда метод (H, μ_n) задан в виде преобразования (C).

По той же теореме $(H, \lambda_n)(H, \mu_n)^{-1} = (H, \lambda_n/\mu_n)$, откуда и из теоремы 12.1 вытекает

Теорема 19.5. а) Включение $(H, \lambda_n) \supset (H, \mu_n)$ имеет место тогда и только тогда, когда метод

$$(H, \lambda_n/\mu_n) \qquad (19.14)$$

сохраняет сходимость, и совместность - тогда и только тогда, когда метод (19.14) регулярен.

б) Включение $|H, \lambda_n| \supset |H, \mu_n|$ имеет место тогда и

только тогда, когда метод

$$|H, \lambda_n/\mu_n|$$

сохраняет абсолютную сходимость.

Случай а) теоремы 19.5 доказан в статье Гарабедяна ([37], стр. 397).

Вопрос о транслятивности методов Хаусдорфа изучается в статье Катнера [54].

19.6. Регулярные последовательности Хаусдорфа. Последовательность Хаусдорфа μ_n будем называть регулярной, если метод (H, μ_n) является регулярным.

Найдем условия, когда линейная комбинация и произведение регулярных последовательностей являются регулярными последовательностями.

Пусть μ_n и λ_n - две регулярные последовательности. Образуем третью последовательность

$$\nu_n = \alpha\mu_n + (1-\alpha)\lambda_n .$$

Этой последовательности, ввиду (19.3) соответствует метод Хаусдорфа

$$(H, \nu_n) = \mathcal{D}\vee\mathcal{D} = \alpha\mathcal{D}\mu\mathcal{D} + (1-\alpha)\mathcal{D}\lambda\mathcal{D} = \alpha(H, \mu_n) + (1-\alpha)(H, \lambda_n).$$

Если этот метод применить к сходящейся последовательности $\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}$, то ввиду регулярности μ_n и λ_n, также

$$(H, \nu_n)\{\mathcal{U}_n\} = \alpha\mathcal{U} + (1-\alpha)\mathcal{U} = \mathcal{U}.$$

Теперь обратимся к произведению регулярных последовательностей. Если $\mathcal{U}_n \to \mathcal{U}$, то , обозначив (H, μ_n)-средние последовательности $\mathcal{U}_n$ через $\mathcal{U}'_n$, получаем $\mathcal{U}'_n \to \mathcal{U}$. Отсюда, учитывая теорему 19.1, находим

$$(H, \lambda_n \mu_n)\{\mathcal{U}_n\} = (H, \lambda_n)\{\mathcal{U}'_n\} = \mathcal{U}.$$

Итак, доказана

Теорема 19.6. Линейная комбинация $a\mu_n + b\lambda_n$ двух регулярных последовательностей Хаусдорфа μ_n и λ_n регулярна, если сумма их коэффициентов $a+b=1$.

Произведение $\lambda_n \mu_n$ двух регулярных последовательностей Хаусдорфа μ_n и λ_n регулярно.

В качестве примера покажем, что последовательность

$$\mu_n = \frac{1}{\beta n + 1}, \quad \text{где} \quad \beta > 0,$$

регулярна.

Действительно, $\mu_0 = 1$, а методом математической индукции легко доказать, что для любого $\alpha = 0, 1, \ldots$

$$\Delta^\alpha \mu_k = \frac{\alpha!\, \beta^\alpha}{(\beta k+1)(\beta(k+1)+1)\ldots(\beta(k+\alpha)+1)}.$$

Отсюда

$$\Delta^{n-k} \mu_k = \frac{(n-k)!\, \beta^{n-k}}{(\beta k+1)(\beta(k+1)+1)\cdots(\beta n+1)} > 0,$$

и остается проверить лишь условие (19.11) теоремы 19.3. Но отсюда после элементарных вычислений обнаруживаем, что

$$\binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k = \frac{1}{\beta k+1} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\beta(k+1)}\right)\left(1+\frac{1}{\beta(k+2)}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{\beta n}\right)}.$$

Здесь знаменатель при $n \to \infty$ обращается в бесконечное произведение

$$\prod_{n=k+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\beta n}\right) = \infty,$$

и поэтому $\alpha_k = 0$ при $k = 0, 1, \ldots$.

Далее, так как последовательность $\mu_n=1$ регулярна (это следует из (19.3) и (19.1) непосредственно), то ввиду равенства

$$\frac{\alpha n+1}{\beta n+1}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot 1+\frac{\beta-\alpha}{\beta}\,\frac{1}{\beta n+1}$$

из теоремы 19.6 вытекает

Теорема 19.7. Последовательность Хаусдорфа

$$\left\{\frac{\alpha n+1}{\beta n+1}\right\}$$

регулярна при $\beta>0$.

19.7. Равносильность методов Чезаро и Гельдера. Имеет место

Теорема 19.8. Если $\alpha>-1$, то

$$C^{\alpha}\sim H^{\alpha} \tag{19.15}$$

и

$$|C^{\alpha}|\sim|H^{\alpha}|. \tag{19.16}$$

Доказательство. Пусть α - целое число. По теореме 19.5 включение $C^{\alpha}\supset H^{\alpha}$ имеет место, если λ_n/μ_n является регулярной последовательностью, где

$$\lambda_n=\frac{1}{A_n^{\alpha}} \quad \text{и} \quad \mu_n=(n+1)^{-\alpha}.$$

Но в силу (15.16) отношение

$$\frac{\lambda_n}{\mu_n}=\frac{(n+1)^{\alpha}}{A_n^{\alpha}}=\frac{(n+1)^{\alpha}\,\alpha!}{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(n+1)}=\frac{n+1}{\frac{n}{\alpha}+1}\,\frac{n+1}{\frac{n}{\alpha-1}+1}\dots\frac{n+1}{\frac{n}{1}+1}$$

является по теореме 19.7 произведением α регулярных последовательностей и поэтому в силу теоремы 19.6 само является регулярной последовательностью. Обратное включение $H^{\alpha}\supset C^{\alpha}$ доказывается аналогичным рассуждением, ибо

$$\frac{\mu_n}{\lambda_n}=\frac{\frac{n}{\alpha}+1}{n+1}\,\frac{\frac{n}{\alpha-1}+1}{n+1}\cdots\frac{\frac{n}{1}+1}{n+1}.$$

Окончание доказательства соотношения (19.15) для нецелых α см. Харди [24], стр.328. Включения (19.16) вытекают из (19.15) в силу теорем 19.5 и 19.4.

Отметим, что включение $C^\alpha \supset H^\alpha$ для целых α впервые доказал Кнопп в 1907 году, а обратное включение Шнээ в 1909 году. Для любых $\alpha > -1$ соотношение (19.15) доказал Хаусдорф ([40], стр. 89-91). См. Также Кнопп [50], стр. 481-483, и Харди [24], стр. 153, где имеются ссылки и на другую литературу. Соотношение (19.16) доказано Кноппом и Лоренцом [52].

19.8. Теорема Мерсера. При помощи преобразования

$$u'_n=\alpha u_n+(1-\alpha)\sigma_n^1 \qquad (19.17)$$

определим метод суммирования M. По теоремам 15.1 и 19.6 метод M регулярен, ибо из того, что $u_n\to u$ следует

$$\lim u'_n=\alpha u+(1-\alpha)u=u.$$

Однако, обратное включение $E\supset M$ не столь просто, ибо здесь требуется из свойств суммы сделать заключение о свойствах слагаемых. То, что включение $E\supset M$ действительно имеет место, показывает следующая теорема Мерсера ([24], стр. 135). Шур доказал, что условие $\alpha>0$ также необходимо, т.е. включение $E\supset M$ при $\alpha\leq 0$ не имеет места.

Теорема 19.9. Если $\alpha>0$ и последовательность u'_n в (19.17) сходится к числу u, то и $\lim u_n=u$.

Доказательство. Метод (19.17) можно представить в виде

$$M=\alpha E+(1-\alpha)C^1.$$

Отсюда в силу следствия 19.2 метод M определяется последовательностью

$$\mu_n = a + (1-a)\frac{1}{n+1},$$

а метод E - последовательностью $\lambda_n = 1$. Так как по теореме 19.7 отношение

$$\frac{\lambda_n}{\mu_n} = \frac{1}{a + (1-a)\frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{an+1}$$

является регулярной последовательностью при $a > 0$, а поэтому по теореме 19.5 верно включение[1] $E \supset M$ вместе с совместностью.

В настоящее время имеются многочисленные обобщения теоремы Мерсера на случай, когда в (19.17) метод арифметических средних заменен другим регулярным методом. Отсюда следующая проблема:

При каких значениях параметра a из равенства

$$\lim_n \{a u_n + (1-a)\sum_k a_{nk} u_k\} = u$$

следует равенство $\lim u_n = u$.

О решениях этой проблемы см., например, Сырмус [21].

§ 20. Метод суммирования Пуассона—Абеля

Здесь изучим одного из представителей полунепрерывных методов суммирования - метод Пуассона—Абеля. Пуассон применял этот метод к суммированию рядов Фурье.

---

[1] Отсюда по теоремам 19.5 и 19.4 имеем и включение $|E| \supset |M|$.

20.1. Определение метода. Ряд (0.1) называется суммируемым методом Пуассона—Абеля, коротко A-суммируемым, к числу $\mathcal{U}'$, если степенной ряд

$$f(x)=\sum u_n x^n \qquad (20.1)$$

сходится при $|x|<1$ и

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}\sum u_n x^n=\mathcal{U}'.$$

В силу (15.8) можем это определение переформулировать и так:

Последовательность (0.2) называется A-суммируемой к числу $\mathcal{U}'$, если степенной ряд $\sum \mathcal{U}_n x^n$ сходится при $|x|<1$ и

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(1-x)\sum \mathcal{U}_n x^n=\mathcal{U}'.$$

Таким образом, метод A - полунепрерывный метод суммирования с

$$\alpha_k(x)=x^k$$

и

$$\alpha_k(x)=(1-x)\,x^k.$$

Далее, ряд (0.1) называется абсолютно суммируемым методом Пуассона—Абеля, коротко $|A|$-суммируемым, если функция (20.1) имеет ограниченное изменение на полуотрезке $0\leqslant x<1$, или, что то же самое[1], если

$$\int_0^1 \left|\frac{d}{dx} f(x)\right| dx<\infty.$$

Например, ряд $\sum(-2)^n$ не является A-суммируемым, ибо

[1] См. Натансон [17], стр. 238 и 279.

степенной ряд $\sum (-2x)^n$ расходится при $|x| \geq \frac{1}{2}$. Также ряд $\sum \frac{1}{n+1}$ не является A-суммируемым, так как для него $f(x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x) \to \infty$ при $x \to 1-$. Напротив, для ряда (15.32) имеем $f(x) = (1+x)^{-\alpha-1} \to 2^{-\alpha-1}$ при $x \to 1-$, т.е. ряд (15.32) является A-суммируемым к сумме $2^{-\alpha-1}$. Ряд (15.32) также $|A|$-суммируем, ибо для него

$$\int_0^1 \left| \frac{d}{dx} f(x) \right| dx = |\alpha+1| \int_0^1 (1+x)^{-\mathrm{Re}\,\alpha - 2} dx < \infty.$$

20.2. Регулярность, сохранение абсолютной сходимости.

Теорема 20.1. Метод A регулярен.

Доказательство непосредственно следует из теоремы Абеля[1]. Другое доказательство см., например, Бари [3], стр. 29.

Теорема 20.2. Метод $|A|$ сохраняет абсолютную сходимость.

Доказательство (очень простое) см., например, Зигмунд [9], стр. 139.

20.3. Включение и совместность.

Теорема 20.3. Если $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, то $A \supset C^\alpha$, и оба метода совместны.

Доказательство. Пусть x_n - любая последовательность точек на действительной оси, стремящейся к 1 слева. Предположим, что ряд (0.1) суммируем методом C^α. Тогда в силу (15.8), (15.2) и (20.1) имеем

$$f(x_n) = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_k S_k^\alpha x_n^k = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_k \sigma_k^\alpha A_k^\alpha x_n^k ,$$

---

[1] См. Фихтенгольц [23], стр. 397 или 446.

причем $f(x)$ существует при $|x|<1$, так как по теореме 15.9 имеем $u_n = o(n^{\mathrm{Re}\,\alpha})$. Выражение справа есть матричное преобразование последовательности σ_k^α. Покажем, что из сходимости последовательности σ_n^α следует существование

$$\lim f(x_n) = \lim \sigma_n^\alpha. \tag{20.2}$$

Для этого надо к матрице

$$c_{nk} = (1-x_n)^{\alpha+1} A_k^\alpha x_n^k$$

применить теорему 1.2 Теплица, причем по теореме 15.3 можем ограничиться случаем, когда $\alpha > -1$ вещественное число. В таком случае $c_{nk} \geqslant 0$, $\lim\limits_n c_{nk} = 0$ и ввиду (15.1)

$$\sum_k c_{nk} = (1-x_n)^{\alpha+1} \sum_k A_k^\alpha x_n^k = 1,$$

видим, что все условия теоремы 1.2 выполнены и наша теорема доказана.

Другое доказательство см. Харди [24], стр. 140. Обобщения теоремы 20.3 см. Бари [3], стр. 887; Зигмунд [9], стр. 136, Кнопп [50], стр. 491.

Из теоремы 20.3 при $\alpha = 0$ вытекает теорема 20.1.

Теорема 20.4. Если $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$, то $|A| \supset |C^\alpha|$.

Доказательство. Предположим, что ряд (0.1) суммируем $|C^\alpha|$. По теореме 15.5 нам достаточно ограничиться случаем вещественного α. В силу (15.33) и (20.1) имеем

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n x^{n-1} = (1-x)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} T_n^\alpha x^{n-1},$$

откуда так как, учитывая (15.23), $T_n^\alpha = o(n^{\alpha+1})$, то

$$\int_0^1 \left| \frac{d}{dx} f(x) \right| dx \leqslant \int_0^1 (1-x)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} |T_n^\alpha| x^{n-1} dx =$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}|T_n^{\alpha}|\int_0^1(1-x)^{\alpha}x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}|T_n^{\alpha}|B(\alpha+1,n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|\tau_n^{\alpha}|<\infty.$$

Оправдание перестановки интеграла и суммы таково же, как при доказательстве формулы (15.18).

Из теоремы 20.4 при $\alpha = 0$ вытекает теорема 20.2.

Теорему 20.3 при $\alpha = 1$ доказал Фробениус [36], при $\alpha = 2, 3, \ldots$ – Гельдер [43], а для произвольных $\alpha > -1$ Кнопп [48] и Чепмен [34], стр. 376. Теорему 20.4 доказал Фекете (см. [30], стр. 518).

Суммируемость и абсолютная суммируемость методом Абеля–Пуассона имеют большое значение в теории рядов Фурье [3,9].

20.4. Тауберова теорема. В 1897 году Таубером (см. [24], стр. 191, или [3], стр. 889) доказана следующая

Теорема 20.5. Если

$$A\{\sum u_n\}=\mathcal{U} \tag{20.3}$$

и

$$u_n=o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{20.4}$$

то

$$\sum u_n=\mathcal{U}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\sum_{k=0}^{n}k u_k=o(n). \tag{20.5}$$

Действительно, для любого $\varepsilon>0$ можем в силу (20.4) найти такой индекс M, что $|nu_n|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $n>M$. Отсюда можем выбрать $N>M$ таким, чтобы при $n>N$ было

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}ku_k=\frac{1}{n}\Big(\sum_{k=0}^{M}+\sum_{k=M+1}^{n}\Big)|ku_k|<\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{M}k|u_k|+\frac{\varepsilon}{2n}(n-M)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

чем доказано (20.5).

Из (20.3) видно, что ряд (20.1) сходится при всех x из промежутка $0 \le x < 1$. Поэтому, положив

$$x = 1 - \frac{1}{n}$$

(тогда $1-x = \frac{1}{n}$), для любого $n > N$ из (20.4) получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k x^k \right| < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k} < \frac{\varepsilon}{2n} \sum x^k = \frac{\varepsilon}{2n} \frac{1}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда и из (20.5), так как $1-x^k = (1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1}) < k(1-x)$, для любого $n > N$ выводим

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_k - f(x) \right| \le \left| \sum_{k=0}^{n} u_k (1-x^k) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k x^k \right| <$$

$$< (1-x) \sum_{k=0}^{n} k |u_k| + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n} o(n) + \frac{\varepsilon}{2} = o(1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} u_k = \lim_n f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = q.$$

Обобщения теоремы 20.5 см. Бари [3], стр. 889–891; Зигмунд [9], стр. 137; Фихтенгольц [23], стр. 399 и 405. В частности, в теореме 20.5 можно условие (20.4) заменить более слабым условием (20.5).

В настоящее время имеются многочисленные обобщения теорем Таубера на случаи, когда методы A и E заменены другими. Отсюда следующая проблема:

Пусть A и B – два метода суммирования, где $B \supset A$. Каким условиям должны удовлетворять члены ряда (0.1), чтобы B-суммируемость ряда (0.1) влекла за собой его A-суммируемость к той же сумме?

Решения этой проблемы в ряде случаев см. Харди [24], главы VI, VII и IX.

Литература по теории тауберовых теорем чрезвычайно обширна.

Глава IУ

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ

§ 21. Постановка проблемы

Проблема множителей суммируемости берет свое начало от одной из основных проблем теории рядов: узнать сходится или расходится данный ряд. В решении вопроса об абсолютной сходимости ряда основную роль играет метод сравнения, при помощи которого доказываются все признаки сходимости положительных рядов. Метод сравнения, однако, неприменим для получения признаков условной сходимости рядов, а тем более для получения признаков суммируемости рядов, так как, например, ряды

$$\sum (-1)^n \frac{1}{n+1} \quad \text{и} \quad \sum \frac{1}{n+1}$$

с одинаковой скоростью стремятся к нулю.

Получение признаков сходимости рядов с произвольными (комплексными) членами основано на следующей идее: члены исследуемого ряда представляются в виде произведения двух последовательностей; тогда исследуемый ряд получает вид

$$\sum \varepsilon_n u_n . \tag{21.1}$$

Если поведение ряда

$$\sum u_n \tag{0.1}$$

нам известно, то сходимость ряда (21.1) зависит лишь от последовательности ε_n. В случае сходимости ряда (21.1) числа ε_n называются множителями сходимости.

Например, признак условной сходимости рядов Лейбница говорит, что ряд

$$\sum \varepsilon_n (-1)^n$$

сходится, если $\varepsilon_n \downarrow 0$.

Признак Лейбница - частный случай признака Дирихле:

Ряд (21.1) сходится, если ряд (0.1) ограничен, т.е. если его частичные суммы

$$\mathcal{U}_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad (0.2)$$

ограничены, а $\varepsilon_n \downarrow 0$.

Если же потребуем сходимость ряда (0.1), то от ε_n можем требовать меньше. Например, признак Абеля таков:

Ряд (21.1) сходится, если ряд (0.1) сходится, и ε_n монотонна и ограничена.

Признаки Дирихле и Абеля - частные случаи следующей опубликованной в 1903 году теоремы Дедекинда—Адамара:

Теорема 21.1. а) Ряд (21.1) сходится при любом сходящемся ряде (0.1) тогда и только тогда, если

$$\sum |\Delta \varepsilon_n| < \infty . \qquad (21.2)$$

б) Ряд (21.1) сходится при любом ограниченном ряде (0.1) тогда и только тогда, если выполнены условия (21.2) и

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

Отметим, что здесь необходимость условий, как и вообще в теории рядов, относится ко всему рассматриваемому классу рядов. Например, если $\sum |\Delta \varepsilon_n| = \infty$, то найдется хотя бы один ряд (0.1), который сам сходится, но ряд (21.1) расхо-

дится. Следовательно, необходимость условий теоремы Дедекинда—Адамара означает, что эти условия являются самыми общими, их ослабить уже невозможно.

Теорема Дедекинда—Адамара дает окончательное решение проблемы множителей сходимости в случае, когда ряд (0.1) сходится или ограничен.

Теорему Дедекинда—Адамара стали обобщать на суммируемые ряды. Первые важные обобщения получили в 1907-1909 гг. Бор, Харди и Бромвич. В теореме Бора—Харди рассматривается случай, когда оба ряда (0.1) и (21.1) суммируемы методом C^{α} ($\alpha = 0,1,\ldots$), а в теореме Бромвича - ряд (0.1) суммируем методом C^{α}, ряд (21.1) сходится.

Все названные теоремы дали начало теории множителей суммируемости, которая с тех пор развивается по сей день и ныне, благодаря ее многочисленным применениям, как в теории рядов, так и вне ее, стала центральной ветвью теории рядов.

Дадим точное

Определение. Пусть X и Y - два класса рядов. Комплексные числа ε_n называются множителями суммируемости типа (X, Y), если для любого ряда (0.1) из класса X ряд (21.1) принадлежит классу Y.

Пусть теперь A и B - некоторые методы суммирования рядов. Класс X можно образовать, например, из всех A-суммируемых, A-ограниченных или $|A|$-суммируемых рядов (тогда вместо X пишем соответственно A, A_0 или $|A|$). Класс Y можно образовать из всех B-суммируемых или $|B|$-суммируемых рядов (и вместо Y пишем соответственно B или $|B|$).

Если $\mathcal{B} = E$, то говорят о соответствующем типе множителей сходимости, т.е. соответственно о множителях сходимости или абсолютной сходимости.

Уточним, что означает найти множители суммируемости данного типа.

Если метод A обратим, то, как сейчас увидим, нетрудно написать необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа ε_n, чтобы они были множителями суммируемости заданного типа. Для примера остановимся на множителях суммируемости типа $(A,\mathcal{B})$. Действительно, пусть в виде преобразования (B) метод $\mathcal{B} = (\beta_{nk})$. Тогда по определению ряд (21.1) является $\mathcal{B}$-суммируемым, если существует предел

$$\lim_n \sum_k \beta_{nk}\varepsilon_k u_k$$

всякий раз, когда ряд (0.1) является A-суммируемым. Обозначив

$$\gamma_{nk} = \beta_{nk}\varepsilon_k$$

и

$$C = (\gamma_{nk}),$$

заключаем, что имеет место

Теорема 21.2. Комплексные числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(A,\mathcal{B})$ тогда и только тогда, когда $C \supset A$.

Применяя к теореме 21.2 теоремы включения 12.1 или 12.2, приходим к искомым необходимым и достаточным условиям.

Таким путем получаемые условия являются, однако, практически трудно проверяемыми, или, как говорят, неэффективными. Значит, получение таких условий не является решением за-

дачи. Поэтому:

Найти множители суммируемости заданного типа впредь означает: найти эффективные необходимые и достаточные условия для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости этого типа.

Следовательно, теоремой 21.1 найдены множители сходимости типов (E,E) и (E_0,E); теоремой Бора—Харди - множители суммируемости типов (C^α,C^α) и (C_0^α,C^α) при $\alpha = 1, 2,\ldots$; теоремой Бромвича - множители сходимости типа (C^α,E) при $\alpha = 1, 2, \ldots$.

Найдем при помощи теоремы 21.2 некоторые эффективные необходимые условия.

Пусть метод A сохраняет сходимость, т.е. $A \supset E$. Тогда по теореме 21.2 для множителей суммируемости типа $(A,\mathcal{B})$ необходимо условие $C \supset E$, т.е. метод C должен сохранять сходимость. По теореме 1.3 получаем условия

$$\text{существуют } \lim_n \gamma_{nk} = \gamma_k, \tag{21.3}$$

$$\sum_k |\Delta\gamma_{nk}| = \mathcal{O}(1). \tag{21.4}$$

Если еще потребуем, чтобы[1]

$$\lim_n \beta_{nk} = 1, \tag{21.5}$$

то $\gamma_k = \varepsilon_k$, и из условий (21.3) и (21.4) вытекает[2] условие (21.2). Ввиду соотношения

---

[1] Условие (21.5) выполнено, когда метод $\mathcal{B}$ регулярен (см. следствие 1.1).

[2] Ср. замечание 1.1.

$$\varepsilon_n = \varepsilon_0 - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\varepsilon_k ,$$

из (21.2) следует условие

$$\varepsilon_n = \mathcal{O}(1). \qquad (21.6)$$

Таким образом, доказана

Лемма 21.1. Пусть метод A сохраняет сходимость, а метод $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию (21.5). Для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа $(A,\mathcal{B})$, необходимо выполнение условий (21.2) и (21.6).

Остановимся ниже на методах нахождения множителей суммируемости.

§ 22. Метод обратного преобразования

22.1. Непосредственный метод. Ряд математиков находили различные типы множителей суммируемости без применения общих теорем теории рядов. Будем этот метод называть непосредственным методом. В частности, этим методом пользовались Бор, Харди и Бромвич хотя бы потому, что в то время теоремы 1.1 еще не было. Например, множители суммируемости типа $(A,\mathcal{B})$ можно непосредственным методом находить так: предположив ряд (0.1) суммируемым методом A, установить (точнее угадать) достаточные условия для чисел ε_n и доказать, что при выполнении этих условий ряд (21.1) суммируем методом $\mathcal{B}$. Необходимость условий для ε_n доказывается от противного, а именно, доказывается, что при невыполнении рассматриваемого условия для ε_n существует хотя бы один ряд (0.1) такой, что для него ряд (21.1) не суммируем мето-

дом $\mathcal{B}$. Непосредственным методом пользовались еще Чешмен, Фекете, Андерсен, Бозанкет. В итоге, в 1946 году непосредственным методом ими найдены[1] множители суммируемости типов (C^{α}, C^{β}) и $(C^{\alpha}_{(\delta)}, C^{\beta})$ для произвольных $\alpha, \beta \geqslant 0$, а в 1953 г. – множители суммируемости типа $(|C^{\alpha}|, |C^{\beta}|)$ для произвольных $\alpha, \beta \geqslant 0$.

22.2. Метод обратного преобразования. Самым важным является другой метод нахождения множителей суммируемости – метод обратного преобразования, который также называют методом Шура, впервые указавший на него в случае метода суммирования Чезаро. Метод Шура принципиально применим для любого обратимого A.

Основная идея этого метода заключается в том, что при помощи обратной матрицы метода A задача нахождения множителей суммируемости сводится к исследованию некоторого матричного преобразования, в результате чего получаем неэффективные необходимые и достаточные условия. Затем эти условия используются для нахождения эффективных условий. Для этого из названных неэффективных условий сначала выводятся эффективные необходимые условия, а потом доказывается, что из этих эффективных условий вытекают неэффективные, о которых говорилось выше. В последнем, однако, как раз и заключается основная трудность применения метода обратного преобразования.

Например, если методы A и $\mathcal{B}$ треугольны, то из теорем 21.2 и 12.1 следует, что задача нахождения множителей

---

[1] Об истории нахождения множителей суммируемости для методов Чезаро см. Барон [4].

суммируемости типа $(A,\mathcal{B})$ сводится к тому, чтобы матрица $G = C A^{-1}$ удовлетворяла условиям теоремы 1.1. Отсюда, если обозначить $G=(g_{nk})$ и $A^{-1}=(\eta_{nk})$, то

$$g_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\beta_{n\nu}\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n}g_{nk}=\sum_{\nu=0}^{n}\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu\sum_{k=0}^{\nu}\eta_{\nu k}=\sum_{\nu=0}^{n}\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu\eta_\nu,$$

и имеет место

Теорема 22.1. Если метод $A=(\alpha_{nk})$ нормален и метод $\mathcal{B}=(\beta_{nk})$ треугольен, то комплексные числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(A,\mathcal{B})$ тогда и только тогда, если выполнены условия

1^0 существуют $\lim\limits_n g_{nk}=g_k$,

2^0 существует $\lim\limits_n \sum\limits_{k=0}^{n}\beta_{nk}\varepsilon_k\eta_k=g$,

3^0 $\sum\limits_{k=0}^{n}|g_{nk}|=\mathcal{O}(1)$.

Замечание 22.1. Если $\alpha_{n0}=1$ и существует $\lim \beta_{n0}$, то условие 2^0 теоремы 22.1 выполнено.

Действительно, по теореме 9.2 имеем

$$\sum_{\nu=0}^{n}\beta_{n\nu}\varepsilon_\nu\eta_\nu=\beta_{n0}\varepsilon_0\longrightarrow g.$$

Из неэффективных условий теоремы 22.1 нетрудно вывести эффективные необходимые условия. Действительно, в силу замечания 1.1 из условий 1^0 и 3^0 теоремы 22.1 вытекает необходимое условие

$$\sum |g_{nk}| < \infty. \qquad (22.1)$$

Далее, положив $k=n$ в условии 3^0, получаем еще одно необходимое условие

$$g_{nn} = \beta_{nn}\eta_{nn}\varepsilon_n = O(1),$$

или ввиду (9.16)

$$\beta_{nn}\varepsilon_n = O(\alpha_{nn}). \qquad (22.2)$$

Таким образом, из теоремы 22.1 вытекает

Лемма 22.1. Пусть метод A нормален и $\mathcal{B}$ треуголен. Для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа $(A,\mathcal{B})$, необходимо выполнение условий (22.1) и (22.2).

Теперь остается доказать обратное, однако, самое трудное: доказать достаточность условий лемм 21.1 и 22.1, т.е. из эффективных необходимых условий лемм 21.1 и 22.1 вывести неэффективные условия теоремы 22.1. Последнее до сих пор удалось лишь для некоторых конкретных методов суммирования, причем неизвестно возможно ли это для других методов суммирования.

22.3. Множители суммирования для метода Чезаро. Пусть A и $\mathcal{B}$ - соответственно методы Чезаро C^α и C^β, где $\alpha, \beta \geqslant 0$. Найдем множители суммируемости типа (C^α, C^β). Ввиду (15.10) и (15.26), имеем

$$g_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \frac{A_{n-\nu}^{\beta}}{A_n^{\beta}} A_k^{\alpha} A_{\nu-k}^{-\alpha-2} \varepsilon_\nu = A_k^{\alpha} \sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-\alpha-2} \frac{A_{n-\nu}^{\beta}}{A_n^{\beta}} \varepsilon_\nu. \qquad (22.3)$$

Так как по теореме 15.1 метод Чезаро регулярен, то применима лемма 21.1, и, следовательно, необходимо условие (21.6).

Поэтому в (22.3) можем перейти к пределу при $n\to\infty$ под знаком суммы, вследствие чего

$$g_k = A_k^{\alpha} \sum_{\nu=k}^{\infty} A_{\nu-k}^{-\alpha-2} \varepsilon_\nu .$$

Чтобы последнему выражению придать компактный вид, надо формулу (19.7) обобщить для любого вещественного $\varkappa$. Для этого назовем разностью порядка $\varkappa$ последовательности μ_n величину

$$\Delta^{\varkappa}\mu_k = \sum_{\nu=k}^{\infty} A_{\nu-k}^{-\varkappa-1} \mu_\nu , \qquad (22.4)$$

если последний ряд сходится при всех $k = 0, 1, \ldots$. Например, если $\mu_n = \mathcal{O}(1)$, то разность (22.4) существует при любом комплексном $\varkappa$ с $\mathrm{Re}\,\varkappa > 0$ и при $\varkappa = 0$. В частности, при $\varkappa = 0, 1, \ldots$ формула (22.4) превращается в (19.7), так как тогда $A_{\nu-k}^{-\varkappa-1} = 0$ для всех $\nu > k+\varkappa$.

При помощи символа разности можем написать

$$g_k = A_k^{\alpha} \Delta^{\alpha+1} \varepsilon_k ,$$

и условие (22.1) леммы 22.1 принимает вид

$$\sum (n+1)^{\alpha} |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| < \infty . \qquad (22.5)$$

Далее, так как $\alpha_{nn} = 1/A_n^{\alpha}$ и $\beta_{nn} = 1/A_n^{\beta}$, то условие (22.2) леммы 22.1 принимает вид

$$\varepsilon_n = \mathcal{O}(n^{\beta-\alpha}) . \qquad (22.6)$$

Теперь остается самое трудное. Надо доказать достаточность условий (21.6), (22.5) и (22.6) для множителей суммируемости типа (C^{α}, C^{β}), т.е. доказать, что из условий

(21.6), (22.5) и (22.6) вытекают условия 1^0, 2^0 и 3^0 теоремы 22.1 при q_{nk}, заданными формулой (22.3). Для этого заметим, что ввиду замечания 22.1 условие 2^0 выполнено. Также нами доказано, что условие 1^0 вытекает из условия (21.6). Остается доказать, что из условий леммы 22.1 вытекает условие 3^0 теоремы 22.1. Этому доказательству предпошлем следующие леммы Андерсена, имеющие и самостоятельный интерес.

Лемма 22.2. а) Если $\delta > -1$, $\sigma \geqslant 0$ и $\delta+\sigma > 0$, то из условия $\mu_n = O(1)$ следует равенство

$$\Delta^{\delta}(\Delta^{\sigma}\mu_n) = \Delta^{\delta+\sigma}\mu_n. \qquad (22.7)$$

б) Если $\delta \geqslant -1$, $\sigma \geqslant 0$ и $\delta+\sigma \geqslant 0$, то из условия $\mu_n = o(1)$ следует равенство (22.7).

Доказательство. Введем для $m = 1, 2, \ldots$ обозначения

$$x_m^{\sigma\delta} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=m+1-k}^{m} \left| A_k^{-\sigma-1} A_\nu^{-\delta-1} \right|,$$

$$z_m^{\sigma\delta} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{m} \left| A_k^{-\sigma-1} A_\nu^{-\delta-1} \right|,$$

Очевидно, что

$$x_m^{0\delta} = z_m^{0\delta} = 0.$$

Докажем, что для всех $\sigma > 0$ имеют место оценки

$$x_m^{\sigma\delta} = O(m^{-\sigma}) + O(m^{-\delta-1}) + O(m^{-\delta-\sigma}),$$

$$z_m^{\sigma\delta} = O(m^{-\sigma}) + O(m^{-\delta-\sigma}).$$

Действительно,

$$x_m^{\sigma\delta} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{k} \left| A_k^{-\sigma-1} A_{m-k+\nu}^{-\delta-1} \right| = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=\nu}^{m} \left| A_k^{-\sigma-1} A_{m-k+\nu}^{-\delta-1} \right| =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{m} \left(\left| A_{\varkappa}^{-\sigma-1} A_{m}^{-\delta-1} \right| + \dots + \left| A_{m}^{-\sigma-1} A_{\varkappa}^{-\delta-1} \right| \right) =$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{m} \sum_{k=\varkappa}^{m} \left| A_{m-k+\varkappa}^{-\sigma-1} A_{k}^{-\delta-1} \right| = \sum_{k=1}^{m} \left| A_{k}^{-\delta-1} \right| \sum_{\varkappa=1}^{k} \left| A_{m-k+\varkappa}^{-\sigma-1} \right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left| A_{k}^{-\delta-1} \right| \sum_{\varkappa=m+1-k}^{m} \left| A_{\varkappa}^{-\sigma-1} \right| .$$

Далее, так как $A_{\varkappa}^{-\sigma-1}$ сохраняет знак при всех $\varkappa \geqslant [\sigma]+1$, то равенство

$$\sum_{\varkappa=m+1-k}^{m} \left| A_{\varkappa}^{-\sigma-1} \right| = \left| \sum_{\varkappa=0}^{m} - \sum_{\varkappa=0}^{m-k} \right| = \left| A_{m}^{-\sigma} - A_{m-k}^{-\sigma} \right|$$

имеет место лишь при $\varkappa \geqslant m+1-k \geqslant [\sigma]+1$, т.е. при $k \leqslant m-[\sigma]$. Поэтому, применяя формулу Андерсена, выводим

$$x_{m}^{\sigma\delta} = \sum_{k=1}^{m-[\sigma]} \left| A_{k}^{-\delta-1} \left(A_{m}^{-\sigma} - A_{m-k}^{-\sigma} \right) \right| + \sum_{k=m-[\sigma]+1}^{m} \left| A_{k}^{-\delta-1} \right| \sum_{\varkappa=m+1-k}^{m} \left| A_{\varkappa}^{-\sigma-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| A_{m}^{-\sigma} \right| \sum_{k=1}^{m} \left| A_{k}^{-\delta-1} \right| + \sum_{k=1}^{m} \left| A_{k}^{-\delta-1} A_{m-k}^{-\sigma} \right| + \sum_{k=1}^{[\sigma]} \left| A_{m-[\sigma]+k}^{-\delta-1} \right| \mathcal{O}(1) =$$

$$= \left\{ \mathcal{O}(m^{-\sigma}) \left[\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(m^{-\delta}) \right] \right\} + \left\{ \mathcal{O}(m^{-\delta-1}) + \mathcal{O}(m^{-\sigma}) + \mathcal{O}(m^{-\delta-\sigma}) \right\} +$$

$$+ \mathcal{O}(m^{-\delta-1}) =$$

$$= \mathcal{O}(m^{-\sigma}) + \mathcal{O}(m^{-\delta-\sigma}) + \mathcal{O}(m^{-\delta-1}) .$$

Вторую оценку получить очень легко. Действительно,

$$z_{m}^{\sigma\delta} = \sum_{k=m+1}^{\infty} \left| A_{k}^{-\sigma-1} \right| \sum_{\varkappa=0}^{m} \left| A_{\varkappa}^{-\delta-1} \right| = \mathcal{O}(m^{-\sigma}) \left[\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(m^{-\delta}) \right] =$$

$$= \mathcal{O}(m^{-\sigma}) + \mathcal{O}(m^{-\delta-\sigma}) .$$

Теперь продолжим доказательство леммы 22.2. Обозначив $\mu_{n+\varkappa} = e_{\varkappa}$, нам надо доказать, что

$$\lim_m \sum_{k=0}^{m} A_k^{-\lambda-1} \Delta^\sigma e_k = \lim_m \sum_{k=0}^{m} A_k^{-\lambda-\sigma-1} e_k .$$

Но, учитывая сходимость всех рядов

$$\sum_k A_k^{-\sigma-1} e_{k+\varkappa} ,$$

по формуле (15.12) находим

$$\sum_{k=0}^{m} A_k^{-\lambda-1} \Delta^\sigma e_k = \sum_{k=0}^{m} A_k^{-\lambda-1} \sum_{\varkappa=k}^{\infty} A_{\varkappa-k}^{-\sigma-1} e_\varkappa = \sum_{\varkappa=0}^{m} A_\varkappa^{-\lambda-\sigma-1} e_\varkappa + \delta_m ,$$

где

$$\delta_m = \sum_{\varkappa=m+1}^{\infty} e_\varkappa \sum_{k=0}^{m} A_{\varkappa-k}^{-\sigma-1} A_k^{-\lambda-1} .$$

Остается доказать, что $\lim \delta_m = 0$. Для этого, обозначив

$$\sup_k |e_{m+k}| = \ell_m ,$$

имеем в случае а) $\ell_m = O(1)$, а в случае б) $\ell_m = o(1)$. Следовательно, при выполнении условий леммы

$$\lim |\delta_m| \le \lim_m \sum_{\varkappa=m+1}^{\infty} |e_\varkappa| \sum_{k=0}^{m} |A_{\varkappa-k}^{-\sigma-1} A_k^{-\lambda-1}| =$$

$$= \lim_m \ell_m \sum_{k=0}^{m} \sum_{\varkappa=m+1-k}^{\infty} |A_\varkappa^{-\sigma-1} A_k^{-\lambda-1}| =$$

$$= \lim_m \ell_m (x_m^{\sigma\lambda} + z_m^{\sigma\lambda}) = 0.$$

Лемма 22.3. Из условий (21.6) и (22.5) для любого $0 < \lambda \le \alpha+1$ вытекает неравенство

$$\sum A_n^{\lambda-1} |\Delta^\lambda \varepsilon_n| \le \sum A_n^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| .$$

Доказательство. Пусть $\lambda - 1 = \sigma - \tau$. Тогда по лемме 22.2 имеем

$$\Delta^{\delta}\varepsilon_n=\Delta^{\sigma+1-\tau}\varepsilon_n=\sum_{k=n}^{\infty}A_{k-n}^{\tau-1}\Delta^{\sigma+1}\varepsilon_k,$$

если только $\sigma+1\geqslant 0$, $-\tau>-1$ и $\sigma+1-\tau>0$. Поэтому, положив $0\leqslant\sigma\leqslant\alpha$ и $0<\tau<1$, можем писать

$$\sum A_n^{\sigma-\tau}|\Delta^{\sigma+1-\tau}\varepsilon_n|=\sum A_n^{\sigma-\tau}\Big|\sum_{k=n}^{\infty}A_{k-n}^{\tau-1}\Delta^{\sigma+1}\varepsilon_k\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum|\Delta^{\sigma+1}\varepsilon_k|\sum_{n=0}^{k}A_n^{\sigma-\tau}A_{k-n}^{\tau-1}=$$

$$=\sum A_k^{\sigma}|\Delta^{\sigma+1}\varepsilon_k|. \qquad (22.8)$$

Придав σ последовательно значения $\sigma=\alpha,\alpha-\tau,\alpha-2\tau,\dots,\delta+\tau,\delta$, получаем требуемое.

Лемма 22.4. Из условий (21.6) и (22.5) для любого $0<\delta\leqslant\alpha$ вытекает

$$\Delta^{\delta}\varepsilon_n=o(n^{-\delta}).$$

Доказательство. Из доказательства леммы 22.3 следует равенство

$$\sum A_k^{\delta-1}\Delta^{\delta}\varepsilon_k=\sum A_k^{\delta}\Delta^{\delta+1}\varepsilon_k, \qquad (22.9)$$

ибо все ряды в неравенствах (22.8) абсолютно сходятся. Теперь при помощи преобразования Абеля, формулы (15.15) и леммы 22.2 находим

$$\sum_{k=0}^{n}A_k^{\delta-1}\Delta^{\delta}\varepsilon_k=\sum_{k=0}^{n-1}A_k^{\delta}\Delta^{\delta+1}\varepsilon_k+A_n^{\delta}\Delta^{\delta}\varepsilon_n.$$

Отсюда и из (22.9) вытекает утверждение леммы.

Кроме лемм 22.3 и 22.4, нам нужна формула разности произведения

$$\Delta^{\kappa}(a_nb_n)=\sum_{i=0}^{\kappa}\binom{\kappa}{i}\Delta^{i}a_n\cdot\Delta^{\kappa-i}b_{n+i}, \qquad (22.10)$$

имеющая место для любого $\varkappa = 0, 1, \dots$.

Формула (22.10) легко доказывается, исходя из (17.12), методом математической индукции.

Обратимся теперь к доказательству того, что условия (21.6), (22.5) и (22.6) влекут за собой условие 3^0 теоремы 22.1.

Пусть $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Ограничимся случаем, когда α целое число. Тогда, применяя формулу (22.10) и вытекающую из (22.4) и (15.13) формулу

$$\Delta^{\lambda} A_{n-k}^{\varkappa} = A_{n-k}^{\varkappa-\lambda},$$

имеющую место для любых $\varkappa$, λ, находим

$$\sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-\alpha-2} A_{n-\nu}^{\beta} \varepsilon_{\nu} = \sum_{\nu=k}^{\infty} A_{\nu-k}^{-\alpha-2} A_{n-\nu}^{\beta} \varepsilon_{\nu} = \Delta^{\alpha+1}\left(A_{n-k}^{\beta} \varepsilon_{k}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\alpha+1} \binom{\alpha+1}{i} \mathcal{B}_i ,$$

где

$$\mathcal{B}_i = A_{n-k-i}^{i+\beta-\alpha-1} \Delta^{i} \varepsilon_{k} .$$

Обозначим $[\beta] = \ell$.

Если $i + \beta - \alpha - 1 \leqslant -1$, т.е. $i = 0, 1, \dots, \alpha - \beta$ при целом β и $i = 0, 1, \dots, \alpha - \ell - 1$ при[1] нецелом β, из условия (22.6) вытекает[2]

$$\mathcal{O}(n^{-\beta}) \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha} |\mathcal{B}_i| = \mathcal{O}(n^{-\beta}) \sum_{k=0}^{n} A_k^{\alpha} (k+1)^{\beta-\alpha} \left| A_{n-k}^{i+\beta-\alpha-1} \right| =$$

$$= \mathcal{O}(1) \sum_{k=0}^{n} \left| A_{n-k}^{i+\beta-\alpha-1} \right| = \mathcal{O}(1).$$

---

[1] В случае $\alpha = [\beta]$ такого i нет.

[2] Достаточно считать $n \geqslant 1$.

Если же $i+\beta-\alpha-1 \geqslant 0$, т.е. если $i = \alpha+1-\beta, \ldots, \alpha+1$, то $\alpha+1-i \geqslant 0$, и поэтому

$$\frac{A_k^\alpha}{A_n^\beta}|\mathcal{B}_i| = \mathcal{O}(1)\left(\frac{n-k}{n}\right)^{i+\beta-\alpha-1}\left(\frac{k+1}{n}\right)^{\alpha+1-i}(k+1)^{i-1}|\Delta^i\varepsilon_k| =$$

$$= \mathcal{O}(1)(k+1)^{i-1}|\Delta^i\varepsilon_k|.$$

Следовательно, по лемме 22.3 из условий (21.6) и (22.5) выводим

$$n^{-\beta}\sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha|\mathcal{B}_i| = \mathcal{O}(1)\sum(k+1)^{i-1}|\Delta^i\varepsilon_k| = \mathcal{O}(1).$$

Если, наконец, $i = \alpha-\beta$ при нецелом β, то по лемме 22.4 из условий (21.6) и (22.5) следует

$$n^{-\beta}\sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha|\mathcal{B}_{\alpha-\beta}| = n^{-\beta}\sum_{k=0}^{n} A_k^\alpha A_{n-k}^{\beta-\beta-1}\mathcal{O}[(k+1)^{\beta-\alpha}] =$$

$$= \mathcal{O}(n^{-\beta})\sum_{k=0}^{n} A_k^\beta A_{n-k}^{\beta-\beta-1} = \mathcal{O}(1).$$

Пусть теперь $\beta > \alpha$. По доказанному для множителей суммируемости типа (C^α, C^α) достаточны условия (21.6) и (22.5). В силу включения $C^\alpha \subset C^\beta$, что имеет место по теореме 15.3, эти же условия достаточны и для типа (C^α, C^β), а по леммам 21.1 и 22.1 и необходимы.

Итак, доказана

Теорема 22.2. Пусть $\alpha = 0, 1, \ldots$. Для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типа (C^α, C^β), необходимо и достаточно выполнение условий (22.5) и (22.6) при $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$, а условий (22.5) и (21.6) - при $\beta > \alpha$.

Теорема Бора—Харди вытекает из теоремы 22.2 при $\beta = \alpha$, теорема Шура - при целом β.

В случае нецелого α доказательство теоремы 22.2

усложняется.

Аналогично можно найти множители суммируемости типов (C_0^α, C^β), $(|C^\alpha|, C^\beta)$, $(|C^\alpha|, |C^\beta|)$, $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$ и $(C^\alpha, |C^\beta|)$. Все эти доказательства имеются в статье Барона [4].

Эти же теоремы при целом α обобщены для комплексного β в статье Абеля [1]. К множителям суммируемости типов $(C_0^\alpha, |C^\beta|)$ и $(C^\alpha, |C^\beta|)$ мы вернемся ниже.

22.4. Множители суммируемости для метода Рисса. Найдем множители суммируемости типа $(|P|, \mathcal{B})$. Предварительно нам нужна

Лемма 22.5. Пусть метод A сохраняет абсолютную сходимость, а метод $\mathcal{B}$ удовлетворяет условию (21.5). Для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа $(|A|, \mathcal{B})$, необходимо выполнение условия (21.6).

Доказательство. Так как по условию $|A| \supset |E|$, то по теореме 21.2 для множителей суммируемости типа $(|A|, \mathcal{B})$ необходимо условие $C \supset |E|$. Поэтому по теореме 3.1 получаем условия (21.3) и

$$\gamma_{nk} = \beta_{nk}\varepsilon_k = \mathcal{O}(1).$$

Из последних условий при помощи (21.5) получаем условие (21.6).

Пусть теперь A - метод взвешенных средних Рисса $P = (R, p_n)$ с $p_n \neq 0$, а $\mathcal{B} = (\beta_{nk})$ - произвольный треугольный метод. По теореме 21.2 числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(|P|, \mathcal{B})$ тогда и только тогда, если $C \supset |P|$. По теореме 12.1 последнее сводится к тому, чтобы матрица $G = CA^{-1}$ удовлетворяла условиям теоремы 3.1. Отсюда, если

обозначить $G=(\lambda_{nk})$ и $P^{-1}=(\bar{\eta}_{nk})$, то

$$\lambda_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\beta_{n\nu}\bar{\eta}_{\nu k}\varepsilon_{\nu},$$

и приходим к следующему результату.

Числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(|P|,\mathcal{B})$ тогда и только тогда, если выполнены условия

существуют $\lim\limits_{n}\lambda_{nk}=\lambda_k$, (22.11)

$$\lambda_{nk}=\mathcal{O}(1). \tag{22.12}$$

При помощи (17.7) находим, что

$$\lambda_{nk}=\beta_{nk}\frac{P_k}{p_k}\varepsilon_k-\beta_{n,k+1}\frac{P_{k-1}}{p_k}\varepsilon_{k+1}=$$

$$=\frac{P_k}{p_k}\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k)+\beta_{n,k+1}\varepsilon_{k+1}. \tag{22.13}$$

Предположим, что метод $\mathcal{B}$ регулярен. Тогда по теореме 1.3 и следствию 1.1 выполнены условия (21.5) и

$$\beta_{nk}=\mathcal{O}(1). \tag{22.14}$$

Перейдя теперь в (22.12) к пределу при $n\to\infty$, применяя условие (21.5), находим

$$\lambda_k=\frac{P_k}{p_k}\Delta\varepsilon_k+\varepsilon_{k+1}=\mathcal{O}(1),$$

откуда, при помощи леммы 22.5 приходим к необходимому условию

$$P_k\Delta\varepsilon_k=\mathcal{O}(p_k).. \tag{22.15}$$

Далее, применяя к (22.13) формулу разности произведения (17.12) и учитывая (8.6), обозначив $\Delta\beta_{nk}=b_{nk}$, можем условие (22.12) представить в виде

$$\frac{P_k}{\rho_k}(\beta_{n,k+1}\Delta\varepsilon_k + b_{nk}\varepsilon_k) + \beta_{n,k+1}\varepsilon_{k+1} = O(1). \qquad (22.16)$$

Ввиду условия (22.14) и необходимости условий (22.15) и (21.6), из (22.16) выводим

$$P_k b_{nk}\varepsilon_k = O(\rho_k). \qquad (22.17)$$

Обратно, из условий (22.14), (22.15), (22.17) и (21.6) вытекает условие (22.16). Условие (22.11), как мы видели, следует из (21.5).

Итак доказана

Теорема 22.3. Пусть метод $P=(R,\rho_n)$ нормален и сохраняет абсолютную сходимость, а метод $\mathcal{B}$ треугольен и регулярен[1]. Для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типа $(|P|,\mathcal{B})$, необходимо и достаточно выполнение условий (21.6), (22.15) и (22.17).

Аналогично находятся множители суммируемости типов $(|P|,|\mathcal{B}|)$, $(P,\mathcal{B})$ и $(P_0,\mathcal{B})$. Все эти типы множителей суммируемости найдены в 1953 г. Г.Кангро [11] даже в случае нетреугольного $\mathcal{B}$. В той же статье дается история развития теории множителей суммируемости для метода взвешенных средних Рисса. Множители суммируемости типов $(P,|\mathcal{B}|)$ и $(P_0,|\mathcal{B}|)$ при некоторых (довольно сильных) ограничениях на метод $\mathcal{B}$ найдены в статье Барона [6].

Отметим, что при некоторых дополнительных ограничениях на метод $\mathcal{B}$ или же при конкретных $\mathcal{B}$ можно условия для множителей суммируемости для метода P упростить. Например,

---

[1] Фактически нам нужны лишь вытекающие из регулярности метода $\mathcal{B}$ условия (21.5) и (22.14).

если $\mathfrak{B} = C^{\alpha}$, то можем упростить условие (22.17). Действительно, тогда ввиду (15.7) условие (22.17) принимает вид

$$\frac{(n+1-k)^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha}} P_k \varepsilon_k = O(p_k). \qquad (22.18)$$

Покажем, что последнее равносильно условию

$$P_k b_k \varepsilon_k = O(p_k), \qquad (22.19)$$

где

$$b_k = \begin{cases} (k+1)^{-\operatorname{Re}\alpha} & \text{при } 0 \leqslant \operatorname{Re}\alpha \leqslant 1, \\ (k+1)^{-1} & \text{при } \operatorname{Re}\alpha \geqslant 1. \end{cases}$$

Действительно, условие (22.19) получается из (22.18) при $n=k$ и при $n = 2k$. Обратно, если $\operatorname{Re}\alpha \leqslant 1$, то

$$\left|\frac{(n+1-k)^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)^{\operatorname{Re}\alpha}} \leqslant \frac{1}{(k+1)^{\operatorname{Re}\alpha}},$$

а если $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 1$, то

$$\left|\frac{(n+1-k)^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha}}\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

Поэтому, учитывая теорему 15.3, доказано

Следствие 22.1. Пусть метод P нормален и сохраняет абсолютную сходимость, причем число $\alpha = 0$ или α комплексное с $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типа $(|P|, C^{\alpha})$, необходимо и достаточно выполнение условий (21.6), (22.15) и (22.19).

§ 23. Метод Мура—Кангро

Этот метод является разновидностью метода обратного преобразования для нахождения множителей сходимости. Этот метод впервые применял американский математик Мур в своей

монографии [58] к нахождению множителей сходимости типа (WN, E). В 1956 г. Г.Кангро [12] обобщает метод Мура для нахождения множителей сходимости типов (A, E), (A_0, E), $(|A|, E)$ и $(|A|, |E|)$.

Пусть $A=(\alpha_{nk})$ - произвольный нормальный метод, удовлетворяющий условию

$$\sum n\mathcal{D}_n<\infty, \qquad (23.1)$$

где

$$\mathcal{D}_n=\sup_k|\alpha_{k+n,k+n}\eta_{k+n,k}|.$$

Найдем множители сходимости типа (A, E). Для этого можем применить теорему 22.1 и лемму 22.1, положив в них $\mathcal{B}=E$, т.е. положив $\beta_{nk}=1$. В этом случае

$$g_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu,$$

$$g_k=\sum_{\nu=k}^{\infty}\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu,$$

откуда условия (22.1) и (22.2) леммы 22.1 принимают соответственно вид

$$\sum_n\Big|\sum_{\nu=n}^{\infty}\eta_{\nu n}\varepsilon_\nu\Big|<\infty, \qquad (23.2)$$

$$\varepsilon_n=\mathcal{O}(\alpha_{nn}). \qquad (23.3)$$

Покажем, что из условий (23.1), (23.2) и (23.3) вытекает выполнение условий 1^0 и 3^0 теоремы 22.1. Действительно, условие 1^0 выполнено, ибо из (23.3) и (23.1) следует даже

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}|\eta_{\nu n}\varepsilon_\nu|=\sum_\nu|\eta_{\nu+n,n}\mathcal{O}(\alpha_{\nu+n,\nu+n})|=\mathcal{O}(1)\sum\mathcal{D}_n<\infty.$$

Далее, так как из условий (23.3) и (23.1) вытекает

$$\sum_{k=0}^{n}|g_k-g_{nk}|=\sum_{k=0}^{n}\Big|\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu\Big|=\sum_{k=0}^{n}\Big|\sum_{\nu=n+1-k}^{\infty}\eta_{k+\nu,k}\mathcal{O}(d_{k+\nu,k+\nu})\Big|=$$

$$=\mathcal{O}(1)\Big(\sum_{\nu=1}^{n+1}\mathcal{D}_\nu\sum_{k=n+1-\nu}^{n}1+\sum_{\nu=n+2}^{\infty}\mathcal{D}_\nu\sum_{k=0}^{n}1\Big)=$$

$$=\mathcal{O}(1)\Big(\sum_{\nu=1}^{n+1}\nu\mathcal{D}_\nu+\sum_{\nu=n+2}^{\infty}(n+1)\mathcal{D}_\nu\Big)=\mathcal{O}(1)\sum_{\nu}\nu\mathcal{D}_\nu=$$

$$=\mathcal{O}(1),$$

то ввиду неравенства

$$|g_{nk}|\le|g_k-g_{nk}|+|g_k|,$$

для выполнения условия 3^0 теоремы 22.1 остается применить условие (23.2).

Условие 2^0 теоремы 22.1 принимает вид

$$\text{ряд}\ \sum\varepsilon_n\eta_n\ \text{сходится}. \tag{23.4}$$

Таким образом, доказана следующая теорема Кангро [12].

Теорема 23.1. Если метод $A=(a_{nk})$ нормален и удовлетворяет условию (23.1), то для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями сходимости типа (A,E), необходимо и достаточно выполнение условий (23.2), (23.3) и (23.4).

Рассмотрим применения теоремы 23.1 к методу Вороного—Нерлунда. Пусть в теореме 23.1 метод $A=(WN,p_n)$ такой, что

$$P_m=\mathcal{O}(P_n)\quad\text{при}\quad m\le n. \tag{23.5}$$

Отсюда и из (16.2) и (16.7) выводим

$$\mathcal{D}_n=\sup_k\Big|\frac{P_0}{P_{k+n}}P_k d_n\Big|=|\mathcal{B}d_n|,$$

где d_n определяется равенством (16.6) и $\mathcal{B}$ – постоянная. Поэтому условие (23.1) превращается в

$$\sum n|d_n|<\infty. \qquad (23.6)$$

Далее, следуя Муру [58], обозначим

$$L\varepsilon_n=\sum_{k=n}^{\infty} d_{k-n}\varepsilon_k .$$

Теперь, учитывая (16.2) и (16.7) и то, что ввиду замечания 22.1, условие (23.4) выполнено, теорема 23.1 дает следующий результат Мура ([58], § 3.3).

Теоема 23.2. Если метод $P=(WN,p_n)$ нормален и удовлетворяет условиям (23.5) и (23.6), то для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями сходимости типа (P,E), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum|P_nL\varepsilon_n|<\infty,$$
$$P_n\varepsilon_n = \mathcal{O}(1).$$

В частности, в случае метода Чезаро, т.е. в случае $P_n=A_n^{\alpha}$, условие (23.5) выполнено при $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant 0$. Далее, так как $d_n=A_n^{-\alpha-2}$, то условие (23.6) выполнено при $\alpha = 0$ и при $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$, а

$$L\varepsilon_n=\sum_{k=n}^{\infty} A_{k-n}^{-\alpha-2}\varepsilon_k=\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n.$$

Поэтому из теоремы 23.2 непосредственно следует

Теорема 23.3. Если $\alpha = 0$ или α комплексное с $\mathrm{Re}\,\alpha>0$, то для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями сходимости типа (C^{α},E), необходимо и достаточно выполнение условий (22.5) и

$$\varepsilon_n = \mathcal{O}(n^{-\alpha}).$$

При натуральном α теорема 23.3 доказана Бромвичем,

при вещественном $\alpha > 0$ – Чезаро, при комплексном α – Муром. При $\alpha = 0$ получаем отсюда первую часть теоремы 21.1.

Применим, наконец, теорему 23.1 к методу взвешенных средних Рисса. Пусть в теореме 23.1 метод $A=(\mathcal{R}, p_n)= P$, удовлетворяющий условиям (23.5) и (17.13). Тогда из (17.2) и (17.6) следует существование

$$\mathcal{D}_0=1, \quad \mathcal{D}_1 = \sup\left|\frac{P_{k+1}}{P_{k+1}} P_k\left(\frac{1}{P_{k+1}}+\frac{1}{P_k}\right)\right| =$$

$$= \sup\left|\frac{P_k}{P_{k+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{P_k}{P_k}\right)\frac{P_k}{p_k}\right| = \sup \mathcal{O}(1),$$

$$\mathcal{D}_2 = \sup\left|\frac{P_{k+2}}{P_{k+2}}\frac{P_k}{P_{k+1}}\right| = \sup\left|\mathcal{O}\left(\frac{P_{k+1}}{P_{k+1}}\right)\frac{P_k}{P_{k+1}}\right| = \sup\left|\mathcal{O}(1)\frac{P_k}{P_{k+1}}\right| = \sup \mathcal{O}(1),$$

$\mathcal{D}_n = 0$ при $n > 2$. Значит, условие (23.1) выполнено. Ввиду замечания 22.1, условие (23.4) также выполнено. Далее, из (17.6) заключаем, что здесь

$$q_n = P_n \Delta \frac{\Delta \varepsilon_n}{p_n}.$$

Итак, на основе теоремы 23.1 доказана

Теорема 23.4. Если метод $P=(\mathcal{R}, p_n)$ нормален и удовлетворяет условиям (23.5) и (17.13), то для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями сходимости типа (P, E), необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum \left| P_n \Delta \frac{\Delta \varepsilon_n}{p_n} \right| < \infty, \tag{23.7}$$

$$P_n \varepsilon_n = \mathcal{O}(p_n). \tag{23.8}$$

В заключение приведем и следующий результат Кангро [12].

Теорема 23.5. Если метод $A=(a_{nk})$ нормален и удовлетворяет условию (23.1), то для того, чтобы комплексные числа

ε_n были множителями сходимости типа (A_φ, E), необходимо и достаточно выполнение условий (23.2) и

$$\varepsilon_n = o(\alpha_{nn}). \qquad (23.9)$$

Доказательство. Чтобы получить неэффективные условия для множителей суммируемости типа $(A_\varphi, \mathcal{B})$, надо в доказательстве теоремы 22.1 заменить теорему 1.1 на 2.1. Тогда теорема 22.1 изменится лишь настолько, что ее условие 2^0 заменится условием

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} |g_{nk} - g_k| = 0. \qquad (23.10)$$

Вместе с этим и в теореме 23.1 условие (23.4) заменится на (23.10). Положив в (23.10) индекс $k = n$, получаем

$$\lim |g_{nn} - g_n| = 0,$$

откуда и из (22.1) следует необходимость условия

$$g_{nn} = o(1),$$

которое при $\mathcal{B} = E$ превращается в (23.9). Очевидно, из (23.9) вытекает (23.3).

Остается доказать, что из (23.1), (23.2) и (23.9) вытекает (23.10). Но, учитывая доказательство теоремы 23.1, при $n \to \infty$ из (23.9) и (23.1) выводим

$$\sum_{k=0}^{n} |g_k - g_{nk}| = \sum_{k=0}^{n} \Big| \sum_{\nu=n+1-k}^{\infty} \eta_{k+\nu,k}\, o(\alpha_{k+\nu,k+\nu}) \Big| = o(1) \sum \nu \mathfrak{D}_\nu = o(1),$$

ибо здесь $k+\nu \geqslant n+1$. Теорема 23.5 доказана.

Из теоремы 23.5 можно вывести теоремы, аналогичные теоремам 23.2–23.4.

§ 24. Множители суммируемости первого рода

Следуя Кангро [12], все рассмотренные выше множители суммируемости обычно называют множителями суммируемости второго рода. Если вместо ряда (21.1) рассматривать ряд

$$\sum \varepsilon_n u_n, \tag{24.1}$$

где u_n определяется формулой (0.2), то приходим к множителям суммируемости первого рода.

Дадим точное

Определение. Пусть X и Y – два класса рядов. Комплексные числа ε_n называются множителями суммируемости первого рода типа (X,Y), если для любой последовательности u_n из класса X ряд (24.1) принадлежит классу Y.

Множители суммируемости первого рода типа (X,Y) обычно обозначают коротко через $(\mathfrak{X},Y)$, заменяя X соответствующей готической буквой $\mathfrak{X}$.

Все методы, применяемые для нахождения множителей суммируемости типа (X,Y), применимы и для нахождения множителей суммируемости типа $(\mathfrak{X},Y)$, однако нахождение последних обычно проще первых.

Аналогично теореме 21.2 из определения множителей суммируемости первого рода вытекает

Теорема 24.1. Комплексные числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$ тогда и только тогда, когда $C \supset \mathfrak{A}$.

В статье [12] Г.Кангро указал метод нахождения множителей сходимости типов $(\mathfrak{A},E)$, $(\mathfrak{A}_0,E)$, $(|\mathfrak{A}|,E)$ и $(|\mathfrak{A}|,|E|)$.

Остановимся на нахождении методом обратного преобразования множителей суммируемости типов $(\mathcal{A},|\mathcal{B}|)$ и $(\mathcal{A}_0,|\mathcal{B}|)$. Если методы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ треугольны, то из теорем 24.1 и 12.1 следует, что задача нахождения этих типов множителей суммируемости сводится к тому, чтобы матрица $\overline{\mathcal{G}}=\overline{C}\,\mathcal{A}^{-1}$ удовлетворяла условиям теоремы 5.1. Отсюда, если обозначить $\overline{\mathcal{G}}=(\bar{g}_{nk})$, $\overline{\mathcal{B}}=(\bar{\beta}_{nk})$ и $\mathcal{A}^{-1}=(\xi_{nk})$, то

$$\bar{g}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\bar{\beta}_{n\nu}\xi_{\nu k}\varepsilon_\nu,$$

и имеет место

Теорема 24.2. Если метод $\mathcal{A}=(a_{nk})$ нормален и метод $\overline{\mathcal{B}}=(\bar{\beta}_{nk})$ треугольен, то комплексные числа ε_n являются множителями суммируемости типов $(\mathcal{A},|\mathcal{B}|)$ или $(\mathcal{A}_0,|\mathcal{B}|)$ тогда и только тогда, если существует постоянная M такая, что

$$\sum_k\Big|\sum_{n\in\mathcal{M}}\bar{g}_{nk}\Big|\le M \qquad (24.2)$$

для любого $\mathcal{M}$.

Найдем, например, для методов Чезаро множители суммируемости типов[1] $(\mathcal{L}^{\alpha+1},|C^\beta|)$ и $(\mathcal{L}_0^{\alpha+1},|C^\beta|)$ при $\alpha\ge-1$. В этом случае из (15.25) и (15.21) получаем

$$\bar{g}_{nk}=A_k^{\alpha+1}\sum_{\nu=k}^{n}\frac{\nu A_{n-\nu}^{\beta-1}}{nA_n^\beta}A_{\nu-k}^{-\alpha-2}\varepsilon_\nu, \qquad (24.3)$$

причем всюду в дальнейшем будем считать, что в условии (24.2) фигурируют величины (24.3).

При помощи теоремы 24.2 найдем сначала эффективные не-

[1] Для удобства берем $\alpha+1$ вместо α.

обходимые условия. Для этого, положив в этой теореме $\mathfrak{M} = (0, 1, \dots, p)$, где p - произвольное, приходим к условию

$$\sum_k \Big|\sum_{n=0}^{p} \bar{g}_{nk}\Big| \le M,$$

откуда для любого $l = 0, 1, \dots$, ввиду треугольности $\bar{\mathcal{G}}$, вытекает

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{l} \Big|\sum_{n=k}^{p} \bar{g}_{nk}\Big| = \sum_{k=0}^{l} \Big|\sum_{n=k}^{\infty} \bar{g}_{nk}\Big| \le M,$$

что равносильно условию

$$\sum_k A_k^{\alpha+1} \Big|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n A_n^{\beta}} \sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-\alpha-2} A_{n-\nu}^{\beta-1} \nu\varepsilon_\nu\Big| < \infty. \qquad (24.4)$$

Положив в (24.4) параметр $\alpha = -1$, учитывая включение $C^0 \subset C^{\alpha+1}$, при помощи (15.18) получаем необходимость условия

$$\sum |\varepsilon_n| < \infty. \qquad (24.5)$$

Ввиду необходимости условия (24.5) в (24.4) допустима перестановка порядка суммирования, вследствие чего (24.4) превращается в

$$\sum A_n^{\alpha+1} |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| < \infty. \qquad (24.6)$$

Обозначив

$$\omega_n = n\varepsilon_n,$$

заметим, что из (24.5) для всех $\sigma \ge 0$ следует справедливость равенства

$$\Delta^\sigma \omega_n = (n+\sigma)\Delta^\sigma \varepsilon_n - \sigma \Delta^{\sigma-1} \varepsilon_n. \qquad (24.7)$$

Действительно, при помощи (15.17) находим

$$(-\sigma+k-n)A_{k-n}^{-\sigma-1} = -\sigma A_{k-n}^{-\sigma-1} - \sigma(A_{k-n}^{-\sigma} - A_{k-n}^{-\sigma-1}) = -\sigma A_{k-n}^{-\sigma},$$

откуда

$$\Delta^{\sigma}\omega_n = \sum_{k=n}^{\infty}\{(n+\sigma)+(-\sigma+k-n)\}A_{k-n}^{-\sigma-1}\varepsilon_k =$$

$$=(n+\sigma)\sum_{k=n}^{\infty}A_{k-n}^{-\sigma-1}\varepsilon_k-\sigma\sum_{k=n}^{\infty}A_{k-n}^{-\sigma}\varepsilon_k=$$

$$=(n+\sigma)\Delta^{\sigma}\varepsilon_n-\sigma\Delta^{\sigma-1}\varepsilon_n,$$

ибо сходимость всех фигурирующих здесь рядов следует из условия (24.5).

При помощи (24.7), ввиду включения $C^{\alpha}\subset C^{\alpha+1}$, из (24.6) выводим необходимость условия

$$\sum n^{\alpha}|\Delta^{\alpha+1}\omega_n|<\infty, \tag{24.8}$$

так как

$$n^{\alpha}|\Delta^{\alpha+1}\omega_n|=\mathcal{O}(1)n^{\alpha+1}|\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_n|+(\alpha+1)n^{\alpha}|\Delta^{\alpha}\varepsilon_n|.$$

Наконец, применяя следствие 5.1 к величинам (24.3), положив в нем $\tau_n=n$, получаем необходимость условия

$$\sum(n+1)^{\alpha+1-\beta}|\varepsilon_n|<\infty. \tag{24.9}$$

Остается доказать достаточность условий (24.8),(24.9) и (24.5), т.е. что из них вытекает условие (24.2).

Для доказательства нам нужна

Лемма 24.1. Из условий (24.8) и (24.5) при $\alpha\geqslant 0$ для любого $0\leqslant\beta\leqslant\alpha+1$ вытекает неравенство

$$\sum(n+1)^{\beta-1}|\Delta^{\beta}\omega_n|=\mathcal{O}(1)\sum(n+1)^{\alpha}|\Delta^{\alpha+1}\omega_n|<\infty.$$

Доказательство. Докажем сначала, что

$$\Delta^{\alpha}\omega_n=o(1). \tag{24.10}$$

Для этого заметим, что

$$\Delta^{\alpha+1}\omega_n=\sum_{k=n}^{\infty}A_{k-n}^{-\alpha-2}\omega_k=\sum_{k=n}^{\infty}(A_{k-n}^{-\alpha-1}-A_{k-n-1}^{-\alpha-1})\omega_k=$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}A_{k-n}^{-\alpha-1}\omega_k-\sum_{k=n+1}^{\infty}A_{k-n-1}^{-\alpha-1}\omega_k=$$

$$=\Delta^{\alpha}\omega_n-\Delta^{\alpha}\omega_{n+1}=\Delta(\Delta^{\alpha}\omega_n),$$

ибо существование $\Delta^{\alpha}\omega_n$ следует из условия (24.5). Поэтому из условия (24.8) вытекает

$$\sum|\Delta(\Delta^{\alpha}\omega_n)|<\infty,$$

откуда заключаем, что существует конечный

$$\lim_n\Delta^{\alpha}\omega_n=\delta.$$

Теперь надо доказать, что $\delta=0$. Последнее следует из условия (24.5), ибо при $\alpha>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}|\Delta^{\alpha}\omega_n|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}\sum_{k=n}^{\infty}|A_{k-n}^{-\alpha-1}\omega_k|=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}|\omega_k|\sum_{n=1}^{k}n^{-1}\mathcal{O}[(k-n+1)^{-\alpha-1}]=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}|\omega_k|\Big\{\mathcal{O}(k^{-\alpha-1})\sum_{n=1}^{[k/2]}n^{-1}+\mathcal{O}(k^{-1})\sum_{n=[k/2]}^{k}\mathcal{O}[(k-n+1)^{-\alpha-1}]\Big\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}|\omega_k|\Big\{\mathcal{O}(k^{-\alpha-1})\mathcal{O}[\ln(k+1)]+\mathcal{O}(k^{-1})\Big\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}|\omega_k|\mathcal{O}(k^{-1})=\mathcal{O}(1)\sum|\varepsilon_k|<\infty,$$

откуда, ввиду $\sum(n+1)^{-1}=\infty$, получаем $\delta=0$, т.е. (24.10) имеет место (и при $\alpha\ge0$).

Из (24.10) и (24.8) заключаем

$$\sum A_n^{\alpha-1}|\Delta^{\alpha}\omega_n|=\sum A_n^{\alpha-1}\Big|\sum_{k=n}^{\infty}\Delta^{\alpha+1}\omega_k\Big|\le\sum|\Delta^{\alpha+1}\omega_k|\sum_{n=0}^{k}A_n^{\alpha-1}=$$

$$= \sum A_k^{\alpha} |\Delta^{\alpha+1} \omega_k| < \infty .$$

Повторяя последовательно все рассуждения, получаем утверждение леммы при $\beta = \alpha, \alpha-1, \ldots, \alpha-a$, где $a = [\alpha]$.

Теперь можем доказать, что

$$\Delta^{\alpha-a}(\Delta^{\alpha-a+1}\omega_n) = \Delta\omega_n . \qquad (24.11)$$

Действительно, по доказанному соответственно равенству (24.10) и условию (24.8), из условий (24.5) и (24.8) следует

$$\Delta^{\alpha-a}\omega_n = o(1), \qquad (24.12)$$

$$\sum n^{\alpha-a} |\Delta^{\alpha-a+1}\omega_n| < \infty . \qquad (24.13)$$

Далее, при помощи условия (24.5) получаем

$$\Delta^{\alpha-a+1}(\Delta^{\alpha-a}\omega_n) = \sum_{k=n}^{\infty} A_{k-n}^{\alpha-a-2} \sum_{\nu=k}^{\infty} A_{\nu-k}^{\alpha-a-1}\omega_\nu = \sum_{\nu=n}^{\infty} \omega_\nu A_{\nu-n}^{-2} = \Delta\omega_n ,$$

откуда ввиду (24.12)

$$\Delta\omega_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_{k-n}^{\alpha-a-2}\Delta^{\alpha-a}\omega_k = o(1)\sum_{k=n}^{\infty} |A_{k-n}^{\alpha-a-2}| = o(1).$$

Поэтому, обозначая временно $\Delta\omega_n = \mu_n$, имеем $\mu_n = o(1)$. Теперь ввиду оценки

$$\sum_{k=n}^{\nu} |A_{k-n}^{\alpha-a-1} A_{\nu-k}^{-2}| = O(A_{\nu-n}^{\alpha-a-1}),$$

имеем

$$\Delta^{\alpha-a}\mu_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_{k-n}^{\alpha-a-1} \sum_{\nu=k}^{\infty} A_{\nu-k}^{-2}\omega_\nu = \sum_{\nu=n}^{\infty} \omega_\nu A_{\nu-n}^{\alpha-a-2} = \Delta^{\alpha-a+1}\omega_n ,$$

вследствие чего по лемме 22.2 б, находим

$$\Delta^{\alpha-a}(\Delta^{\alpha-a+1}\omega_n) = \Delta^{\alpha-a}(\Delta^{\alpha-a}\mu_n) = \mu_n = \Delta\omega_n ,$$

т.е. (24.11) доказано.

При помощи (24.11) из (24.13) вытекает

$$\sum|\Delta\omega_n|=\sum_n\Big|\sum_{k=n}^{\infty}A_{k-n}^{\alpha-\alpha-1}\Delta^{\alpha-\alpha+1}\omega_k\Big|\le\sum A_k^{\alpha-\alpha}|\Delta^{\alpha-\alpha+1}\omega_k|<\infty,$$

откуда $\omega_n=O(1)$.

Теперь выполнены все условия леммы 22.3 для ω_n. Применяя ее к ω_n, получаем требуемое.

Лемма 24.1 для $1=\alpha,\ \alpha-1,\ \dots,\ \alpha-\alpha$ доказана Бозанкет и Чжоу [31]. Равенство (24.11) можно (даже непосредственно) вывести из условий (24.12) и (24.13) при помощи теоремы 6 статьи Идзуми [45], посвященной выводу различных условий верности равенства (22.7).

Вернемся теперь к доказательству того, что(24.8),(24.9) и (24.5) влекут за собой условие (24.2) теоремы 24.2.

Очевидно, что условие (24.2) само вытекает из условия

$$\sum_k\sum_{n=k}^{\infty}|\bar g_{nk}|=\sum A_k^{\alpha+1}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{nA_n^{\beta}}\Big|\sum_{\nu=k}^{n}A_{\nu-k}^{-\alpha-2}A_{n-\nu}^{\beta-1}\omega_\nu\Big|<\infty.\quad(24.14)$$

Пусть $\alpha\ge-1$, $-1<\beta\le0$. Из условия (24.9) выводим

$$\sum_k\sum_{n=k}^{\infty}|\bar g_{nk}|\le\sum_k A_k^{\alpha+1}\sum_{\nu=k}^{\infty}|A_{\nu-k}^{-\alpha-2}\omega_\nu|\sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{|A_{n-\nu}^{\beta-1}|}{nA_n^{\beta}}=$$

$$=\sum_k A_k^{\alpha+1}\sum_{\nu=k}^{\infty}|A_{\nu-k}^{-\alpha-2}\varepsilon_\nu|\frac{O(1)}{A_\nu^{\beta}}=$$

$$=O(1)\sum_\nu\frac{|\varepsilon_\nu|}{A_\nu^{\beta}}\sum_{k=0}^{\nu}A_k^{\alpha+1}|A_{\nu-k}^{-\alpha-2}|=$$

$$=O(1)\sum A_\nu^{\alpha+1}\frac{|\varepsilon_\nu|}{A_\nu^{\beta}}=O(1)\sum(\nu+1)^{\alpha+1-\beta}|\varepsilon_\nu|<\infty.$$

Пусть теперь $\alpha\ge-1$, $0<\beta\le\alpha+1$. В этом случае условие (24.14) вытекает из условий (24.8) и (24.9). Доказательство последнего опирается на лемму 24.1 и вполне аналогично доказательству теоремы 4 статьи [4] (стр. 62-66), од-

нако намного короче его, так как в нашем случае выпадают из рассмотрения выражения, соответствующие суммам P, Q, R, S, T и V.

Случай $\beta>\alpha+1$ (аналогично, как в теореме 22.2) очевиден в силу включения $|C^{\alpha+1}|<|C^{\beta}|$, имеющее место по теореме 15.5.

Итак, доказана

Теорема 24.3. Пусть $\alpha\geq -1$, $\beta>-1$. Для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типов $(\mathcal{L}^{\alpha+1}, |C^{\beta}|)$ или $(\mathcal{L}_0^{\alpha+1}, |C^{\beta}|)$, необходимо и достаточно выполнение условий (24.8) и (24.9) при $\beta\leq\alpha+1$, а условий (24.8) и (24.5) - при $\beta>\alpha+1$.

Другие типы множителей суммируемости первого рода для метода Чезаро нашел Пейеримхофф [59] (см. также ниже § 25), а при произвольном $\mathcal{B}$ для метода взвешенных средних Рисса и его обобщения - Кангро [11] и Тюрпу [22]. Для метода E_λ разные типы степенных множителей сходимости нашел Эспенберг [16].

При помощи теоремы 24.3 можем легко найти множители суммируемости типов $(C^{\alpha}, |C^{\beta}|)$ и $(C_0^{\alpha}, |C^{\beta}|)$. В этом случае аналогично условию (24.2) теоремы 24.2 необходимо и достаточно условие (24.2) с

$$\bar{g}_{nk}=\sum_{\nu=k}^{n}\bar{\beta}_{n\nu}\eta_{\nu k}\varepsilon_\nu=A_k^{\alpha}\sum_{\nu=k}^{n}\frac{\nu A_{n-\nu}^{\beta-1}}{n\,A_n^{\beta}}A_{\nu-k}^{-\alpha-2}\varepsilon_\nu,$$

т.е. условие

$$\sum_k A_k^{\alpha}\Big|\sum_{n\in\mathcal{M}}\frac{1}{n\,A_n^{\beta}}\sum_{\nu=k}^{n}A_{\nu-k}^{-\alpha-2}A_{n-\nu}^{\beta-1}\omega_\nu\Big|\leq M \qquad (24.15)$$

для любого $\mathcal{M}$.

Аналогично условиям (24.6) и (24.9) здесь необходимы

условия (22.5) и

$$\sum (n+1)^{\alpha-\beta}|\varepsilon_n| < \infty. \qquad (24.16)$$

Докажем еще необходимость условия

$$\sum \frac{|\varepsilon_n|}{n+1} < \infty. \qquad (24.17)$$

Для этого, положив в (24.15) число $\alpha = 0$, в силу следствия 5.2, получаем

$$\sum_k \Big|\sum_{n=k}^{\infty} \bar{g}_{nk} d_n\Big| = \sum_k \Big|\sum_{n=k}^{\infty} \frac{d_n}{n A_n^{\beta}} \sum_{\nu=k}^{\infty} A_{n-\nu}^{\beta-1} A_{\nu-k}^{-2} \omega_\nu\Big| =$$

$$= \sum_k \Big|\sum_{\nu=k}^{\infty} A_{\nu-k}^{-2} \omega_\nu \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^{\beta-1}}{n A_n^{\beta}} d_n\Big| =$$

$$= \sum_k \Big|\Delta\Big(\omega_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_{n-k}^{\beta-1}}{n A_n^{\beta}} d_n\Big)\Big| < \infty$$

(перестановка порядка суммирования оправдана из-за сходимости ряда под знаком разности). Далее, положив в полученном условии $d_n = A_n^{\beta} / A_n^{\beta+i\varphi}$, где $\varphi \neq 0$ и вещественно, приходим к необходимому условию

$$\sum \Big|\Delta \frac{\varepsilon_k}{A_k^{i\varphi}}\Big| < \infty.$$

Отсюда, ввиду соотношения

$$\Delta \frac{\varepsilon_n}{A_n^{i\varphi}} = (\Delta \frac{1}{A_n^{i\varphi}})\varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \cdot \frac{1}{A_{n+1}^{i\varphi}} = \frac{i\varphi}{1+i\varphi} \frac{\varepsilon_n}{A_n^{1+i\varphi}} + \frac{1}{A_{n+1}^{i\varphi}} \Delta\varepsilon_n,$$

и необходимости условия (21.2), вытекающего из (22.5) при $\alpha = 0$, и получаем необходимость условия (24.17), так как

$$\frac{1}{|A_n^{1+i\varphi}|} \sim \frac{|\Gamma(2+i\varphi)|}{n+1} \quad \text{и} \quad \Gamma(2+i\varphi) \neq 0.$$

Для дальнейшего докажем формулу

$$\tau_n^{\alpha+1}=(\alpha+1)(\sigma_n^{\alpha}-\sigma_n^{\alpha+1}). \qquad (24.18)$$

Действительно, ввиду (15.17)

$$k A_{n-k}^{\alpha}=\{(k-n)+n\}A_{n-k}^{\alpha}=-(\alpha+1)(A_{n-k}^{\alpha+1}-A_{n-k}^{\alpha})+n A_{n-k}^{\alpha}=$$

$$=(n+\alpha+1)A_{n-k}^{\alpha}-(\alpha+1)A_{n-k}^{\alpha+1},$$

откуда ввиду (15.24) и (15.9)

$$T_n^{\alpha+1}=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha}k u_k=(n+\alpha+1)S_n^{\alpha}-(\alpha+1)S_n^{\alpha+1}.$$

Разделив полученное на $A_n^{\alpha+1}$, при помощи (15.2) и (15.16) приходим к формуле (24.18).

Теперь заметим, что если в теореме 24.3 заменить u_n на $n u_n$, а ω_n на ε_n, то условия этой теоремы превращаются в условия (22.5), (24.16) и (24.17). Поэтому, чтобы доказать достаточность последних условий для множителей суммируемости типов $(C^{\alpha},|C^{\beta}|)$ и $(C_0^{\alpha},|C^{\beta}|)$ при $\alpha>-1$, покажем, что из C^{α}-суммируемости (или C^{α}-ограниченности) ряда (0.1) вытекает $C^{\alpha+1}$-суммируемость (соответственно $C^{\alpha+1}$-ограниченность) последовательности (15.22). Последнее, однако, вытекает из формулы (24.18) в силу включения $C^{\alpha}\subset C^{\alpha+1}$.

Итак, доказана

Теорема 24.4. Пусть $\alpha,\beta>-1$. Для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типов $(C^{\alpha},|C^{\beta}|)$ или $(C_0^{\alpha},|C^{\beta}|)$, необходимо и достаточно выполнение условий (22.5) и (24.16) при $\beta\leqslant\alpha+1$, а условий (22.5) и (24.17) - при $\beta>\alpha+1$.

§ 25. Метод Пейеримхоффа

25.1. Множители суммируемости первого рода. Рассмотрим множители суммируемости типа $(\mathcal{A},\mathcal{B})$. Обозначим $\{\mathcal{U}_k\}=x$, поле суммируемости метода $\mathcal{A}$ через $\mathcal{A}'$. По определению множителей суммируемости типа $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ для любого $x\in\mathcal{A}'$ должен существовать предел

$$\lim_n \sum_k \beta_{nk}\varepsilon_k \mathcal{U}_k = f x, \tag{25.1}$$

где f - непрерывный линейный функционал в пространстве $\mathcal{A}'$, так как $\mathcal{U}_k=\mathcal{U}_k x$ являются непрерывными линейными функционалами[1] в нем.

Предположим теперь, что оба метода $\mathcal{A}=(a_{nk})$ и $\mathcal{B}=(\beta_{nk})$ регулярны. Из регулярности метода $\mathcal{A}$ следует $e_\nu=\{\delta_{\nu k}\}\in\mathcal{A}'$, и, тем самым, из (25.1) получаем

$$\lim_n \beta_{n\nu}\varepsilon_\nu = f e_\nu,$$

что, в силу регулярности метода $\mathcal{B}$, по условию (21.5) дает необходимое условие

$$\varepsilon_\nu = f e_\nu, \tag{25.2}$$

которое Пейеримхофф ([59], стр. 29) называет функциональным условием.

Таким образом, для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа $(\mathcal{A},\mathcal{B})$, необходимо существование в $\mathcal{A}'$ функционала f, удовлетворяющего условию (25.2).

Функциональное условие (25.2), однако, не обязано быть

---

[1] Действительно, обозначив $x_n=\{\mathcal{U}_k^n\}$, из условия $x_n\to x$ выводим $\mathcal{U}_k x_n=\mathcal{U}_k^n\to\mathcal{U}_k=\mathcal{U}_k x$ при $n\to\infty$.

достаточным для множителей суммируемости типа $(\mathcal{A},\mathcal{B})$, ибо оно зависит лишь от матрицы $\mathcal{A}$ и совершенно не зависит от матрицы $\mathcal{B}$ (эта зависимость утрачена из-за регулярности метода $\mathcal{B}$). Оказывается, что при некоторых ограничениях на метод $\mathcal{A}$ условие (25.2) является достаточным даже для множителей сходимости типа $(\mathcal{A},E)$. Найдем при каких условиях это будет. Для этого рассмотрим, при каких условиях сходится последовательность частичных сумм ряда (24.1). Применяя условие (25.2) и линейность функционала f, находим

$$\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k u_k=\sum_{k=0}^{n}u_k f e_k=f\sum_{k=0}^{n}u_k e_k=f\overset{n}{x},$$

где $\overset{n}{x}$ - отрезок элемента x, т.е.

$$\overset{n}{x}=\{u_0,u_1,\dots,u_n,0,0,\dots\}.$$

Следовательно, для множителей сходимости типа $(\mathcal{A},E)$ достаточно условие

$$f\overset{n}{x}\to fx \quad \text{для любых} \quad x\in\mathcal{A}' \quad \text{и} \quad f\in\mathcal{A}'^{*}.$$

Последнее означает, что функциональное условие (25.2) достаточно для множителей сходимости типа $(\mathcal{A},E)$, если в пространстве $\mathcal{A}'$ имеет место слабая сходимость по отрезкам.

Легко убедиться, что во всем $\mathcal{A}'$ слабая сходимость по отрезкам не может иметь места. Однако, в подпространстве[1] $\mathcal{A}'_0\subset\mathcal{A}'$ нуль-суммируемости метода $\mathcal{A}$ это возможно. А именно, Пейеримхофф ([59], стр. 35, для нормального $\mathcal{A}$) и Целлер ([69], стр. 61) доказали, что в $\mathcal{A}'$ имеет место сла-

[1] Следовательно, $\mathcal{A}'_0$ означает множество $\{x\}$, при которых $\lim u'_n=0$.

бая сходимость по отрезкам тогда и только тогда, если для любого $x \in \mathcal{A}'_0$ существует постоянная M_x (зависящая только от x) такая, что

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu} u_\nu\right| \leq M_x \quad \text{при всех } m,n=0,1,\dots . \qquad (25.3)$$

Оказывается, что слабая сходимость по отрезкам в $\mathcal{A}'_0$ достаточна для сходимости ряда (24.1) во всем пространстве $\mathcal{A}'$. Действительно, если $\mathcal{A}\{x\}=u' \neq 0$ для $x \in \mathcal{A}'$, то $x_0 = x - u'e \in \mathcal{A}'_0$, где $e=\{1\}$, ибо $\mathcal{A}\{x_0\}=\mathcal{A}\{x\} - u'\mathcal{A}\{e\} = u'-u'=0$. Поэтому, из условия (25.2) следует сходимость ряда (24.1) для всех $x \in \mathcal{A}'$, так как, обозначив $x_0=\{u_k^0\}$, учитывая равенство $x=x_0+u'e$, находим

$$\sum \varepsilon_k u_k = \sum \varepsilon_k (u_k^0 + u') = \sum \varepsilon_k u_k^0 + u' \sum \varepsilon_k .$$

Здесь первый ряд справа сходится ввиду $x_0 \in \mathcal{A}'_0$, а сходимость (даже абсолютная) второго ряда вытекает из условия (24.5), необходимость которого можно доказать аналогично тому, как необходимость условия (21.2) в лемме 21.1. В виду того, что условие (24.5) необходимо и при $x \in \mathcal{A}'$, то тем самым, (24.5) является следствием функционального условия (25.2).

Итак, доказана

Теорема 25.1. Пусть $\mathcal{A}$ – такой регулярный метод, что в $\mathcal{A}'_0$ имеет место слабая сходимость по отрезкам, и $\mathcal{B}$ – произвольный регулярный метод. Тогда для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типа $(\mathcal{A},\mathcal{B})$, необходимо и достаточно существование в $\mathcal{A}'$ функционала f,

удовлетворяющего условию (25.2).

Теорема 25.1 принадлежит Пейеримхоффу ([59], стр. 35).

Предположим еще, что метод $\mathcal{A}$ обратим. Тогда ([28], стр. 92; [59], стр. 27) общий вид непрерывного линейного функционала в $\mathcal{A}'$ есть

$$fx = c\mathcal{U}' + \sum c_n \mathcal{U}'_n \quad \text{при} \quad \sum |c_n| < \infty, \qquad (25.4)$$

где c - постоянная, $\mathcal{U}'_n$ определено преобразованием (A) и $\mathcal{U}' = \lim \mathcal{U}'_n$. Положив в (25.4) элемент $x = e_\nu$, имеем $\mathcal{U}'_n = \sum_k a_{nk}\delta_{\nu k} = a_{n\nu}$, $\mathcal{U}' = \lim_k \delta_{\nu k} = 0$, и функциональное условие (25.4) принимает вид

$$\varepsilon_\nu = \sum c_n a_{n\nu} \quad \text{при} \quad \sum |c_k| < \infty. \qquad (25.5)$$

Из условия (25.5) и теоремы 1.1 уже совсем просто вытекает необходимость условия (24.5), ибо

$$\sum |\varepsilon_\nu| \le \sum_\nu \sum_n |c_n a_{n\nu}| = \sum |c_n| \sum_\nu |a_{n\nu}| = \mathbb{O}(1) \sum |c_n| < \infty.$$

Теорема, аналогичная теореме 25.1, для множителей суммируемости типа $(|\mathcal{A}|, \mathcal{B})$ найдена также Пейеримхоффом ([60], стр. 273 и 281).

Как показал Кангро ([11], стр. 203 и 205), необходимость функциональных условий для множителей суммируемости типов $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(|\mathcal{A}|, \mathcal{B})$ можно легко доказать и методом обратного преобразования.

25.2. Слабая сходимость по отрезкам для некоторых методов. Чтобы можно было применить теорему 25.1 к конкретным методам суммирования, надо для них найти условия выполнения неравенства (25.3). Остановимся лишь на методах Чезаро C^α и

взвешенных средних Рисса $P=(\mathcal{R}, p_n)$.

Отметим, что условие (25.5) очевидно вытекает из оценки: для любого x существует число k, где $0 \leq k \leq m$, такое, что

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu} u_\nu\right| \leq M \left|u'_k\right| \tag{25.6}$$

при некоторой постоянной M.

1. Пусть $\mathcal{A}$ - метод Чезаро порядка $0 \leq \alpha \leq 1$. Докажем сначала неравенство Бозанкет (см. Пейеримхофф [59], стр. 39)

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} A_{n-\nu}^{\alpha-1} u_\nu\right| \leq \left|S_k^\alpha\right|. \tag{25.7}$$

Действительно, в случаях $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ неравенство (25.7) очевидно. Предположим поэтому, что $0 < \alpha < 1$. Тогда имеем

$$\frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_{m-\nu}^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1+n-\nu}{n-\nu} \cdot \frac{m-\nu}{\alpha+1+m-\nu} \cdot \frac{A_{n-\nu-1}^{\alpha-1}}{A_{m-\nu-1}^{\alpha-1}} = \frac{1-\frac{1-\alpha}{n-\nu}}{1-\frac{1-\alpha}{m-\nu}} \cdot \frac{A_{n-\nu-1}^{\alpha-1}}{A_{m-\nu-1}^{\alpha-1}} > \frac{A_{n-\nu-1}^{\alpha-1}}{A_{m-\nu-1}^{\alpha-1}}$$

для $0 \leq \nu \leq m < n$, вследствие чего при помощи неравенства Абеля[1] находим, что существует индекс m_1, где $0 \leq m_1 \leq m$, при котором

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} A_{n-\nu}^{\alpha-1} u_\nu\right| = \left|\sum_{\nu=0}^{m} \frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_{m-\nu}^{\alpha-1}} A_{m-\nu}^{\alpha-1} u_\nu\right| \leq \frac{A_n^{\alpha-1}}{A_m^{\alpha-1}} \left|\sum_{\nu=0}^{m_1} A_{m-\nu}^{\alpha-1} u_\nu\right| \leq$$

---

[1] Т.е. применяем лемму Абеля: если $a_0, a_1, \ldots, a_m$ неотрицательны и не возрастают, то

$$\left|\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu u_\nu\right| \leq a_0 \max_{0 \leq \nu \leq m} |u_\nu| = a_0 |u_{m_1}|$$

(см., например, Зигмунд ([9], стр. 15, или Бари [3], стр. 18).

$$\leqslant \Big|\sum_{\nu=0}^{m_1} A_{m-\nu}^{\alpha-1} q_\nu u_\nu\Big|.$$

Повторяя это рассуждение, найдем конечное число индексов m_λ, где $m \geqslant m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_\lambda \geqslant m_{\lambda+1} \geqslant 0$, таких что

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{m} A_{n-\nu}^{\alpha-1} q_\nu u_\nu\Big| \leqslant \Big|\sum_{\nu=0}^{m_1} A_{m-\nu}^{\alpha-1} q_\nu u_\nu\Big| \leqslant \Big|\sum_{\nu=0}^{m_2} A_{m_1-\nu}^{\alpha-1} q_\nu u_\nu\Big| \leqslant \cdots \leqslant$$

$$\leqslant \Big|\sum_{\nu=0}^{m_{\lambda+1}} A_{m_\lambda-\nu}^{\alpha-1} q_\nu u_\nu\Big|. \qquad (25.8)$$

Ввиду того, что m_λ не возрастают, $m_\lambda \geqslant 0$, то при некотором λ должно иметь место равенство

$$m_\lambda = m_{\lambda+1} = k,$$

а тогда, ввиду формулы (15.5), неравенство (25.8) превращается в (25.7).

Учитывая (15.6) и (15.2), из (25.7) вытекает также (25.6) для метода Чезаро при $0 < \alpha < 1$, ибо $A_k^\alpha \leqslant A_n^\alpha$ при $\alpha > 0$.

Пейеримхофф ([59], стр. 42) доказал, что при $\alpha > 1$ в пространстве $\mathcal{L}_0^{\alpha'}$ не имеет места слабая сходимость по отрезкам.

2. Пусть $\mathcal{A}$ - регулярный метод Рисса P. В этом случае непосредственно находим

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{m} \frac{p_\nu}{P_n} q_\nu u_\nu\Big| = \Big|\frac{P_m}{P_n}\sum_{\nu=0}^{m} \frac{p_\nu}{P_m} q_\nu u_\nu\Big| = \Big|\frac{P_m}{P_n}\Big| |u'_m|,$$

откуда оценка (25.6) вытекает, если

$$P_m = O(P_n),$$

что по теореме 17.1 необходимо для регулярности метода P.

Если метод $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (25.6),то говорят, что метод $\mathcal{A}$ удовлетворяет теореме о среднем значении. Такие методы обладают рядом замечательных свойств (см. Юркат—Пейеримхофф [46]). Теоремы о среднем значении для абсолютной суммируемости рассматривали Пейеримхофф ([60], стр. 276) и Реймерс (см. [16], стр. 25).

Докажем следующий результат Целлера [69] (см. также Юркат—Пейеримхофф [46], стр. 100; Реймерс [18], леммы 1.6.2 и 1.6.3).

Лемма 25.1. Если обратимый метод $\mathcal{A}$ регулярен и в $\mathcal{A}'_0$ имеет место слабая сходимость по отрезкам,то выполняется условие

$$\lim_n \sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu} \mathcal{U}_\nu = 0 \qquad \text{равномерно по } m. \tag{25.9}$$

Доказательство. Так как $\mathcal{A}$ обратим, то $\mathcal{A}'_0$ является банаховым пространством с нормой

$$\|x\| = \sup_n |\mathcal{U}'_n|$$

(см. Пейеримхофф [59], стр. 26). Так как в этом пространстве $\mathcal{U}_\nu = \mathcal{U}_\nu x$ являются непрерывными линейными функционалами, то существуют независящие от x постоянные $M_{mn} > 0$ такие,что

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu} \mathcal{U}_\nu \right| \le M_{mn} \|x\|.$$

Учитывая, что по условию леммы для любого $x \in \mathcal{A}'_0$ выполняется условие (25.3), то $M_{mn} = \mathcal{O}(1)$, и, следовательно,существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого $x \in \mathcal{A}'_0$

$$\left| \sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu} \mathcal{U}_\nu \right| \le M \|x\|.$$

Поскольку слабая сходимость по отрезкам в $\mathfrak{A}_0'$ влечет за собой сильную сходимость (см. Целлер [69], теорема 3.4), то для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $k=k(\varepsilon)$, что для всех m будет

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu}q_\nu-\sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu}q_\nu^{k}\Big|\le M\|x-\overset{k}{x}\|<\frac{\varepsilon}{2},$$

где обозначено $\overset{k}{x}=\{q_\nu^{k}\}$. Отсюда ввиду регулярности метода $\mathfrak{A}$ найдется такое $N=N(\varepsilon)$, что независимо от m при всех $n>N$ имеем

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{m} a_{n\nu}q_\nu\Big|<\frac{\varepsilon}{2}+\Big|\sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}q_\nu^{k}\Big|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т.е. имеет место условие (25.9).

Понятие сходимости по отрезкам обобщено Реймерсом [18].

25.3. Множители суммируемости первого рода для методов Чезаро и Рисса. Применим теорему 25.1 к методам Чезаро и взвешенных средних Рисса.

В случае метода Чезаро при $0\le\alpha\le1$ ввиду (15.7) и (22.4) условие (25.5) принимает вид

$$\varepsilon_\nu=\sum_{n=\nu}^{\infty} c_n\frac{A_{n-\nu}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}}=\Delta^{-\alpha}\frac{c_\nu}{A_\nu^{\alpha}}\quad\text{при}\quad\sum|c_n|<\infty,\qquad(25.10)$$

откуда непосредственно следует

$$\varepsilon_n=o(1),\qquad(25.11)$$

а при помощи формулы (22.4) и (15.13) выводим

$$c_n=A_n^{\alpha}\Delta^{\alpha}\varepsilon_n,\qquad(25.12)$$

т.е.

$$\sum n^{\alpha}|\Delta^{\alpha}\varepsilon_n|<\infty.\qquad(25.13)$$

Обратно, при помощи леммы 22,2б из (25.11) и (25.13) вытекает (25.10).

Итак, в силу оценки (25.6) доказана

Теорема 25.2. Если $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ и $\mathcal{B}$ - произвольный регулярный метод, то для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типа $(\mathcal{L}^{\alpha}, \mathcal{B})$, необходимо и достаточно выполнение условий (25.11) и (25.13).

Аналогично из теоремы 25.1 выводится

Теорема 25.3. Если метод $\mathcal{R}=(R, p_n)$ нормален и регулярен и $\mathcal{B}$ - произвольный регулярный метод, то для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типа $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum \left| P_n \Delta \frac{\varepsilon_n}{p_n} \right| < \infty,$$

$$\varepsilon_n = o(p_n).$$

25.4. Множители суммируемости второго рода. Оказывается, что при помощи теоремы 25.1 легко найти и множители суммируемости типа $(A, \mathcal{B})$ в некоторых случаях, на чем здесь остановимся.

По определению множителей суммируемости типа $(A, \mathcal{B})$ для любого $x \in \mathcal{A}'$ должен существовать

$$\lim_n \sum_k \beta_{nk} \varepsilon_k u_k = fx, \quad u_k = \bar{\Delta} v_k, \qquad (25.14)$$

где f - непрерывный линейный функционал в пространстве $\mathcal{A}'$.

Предположим, что методы $\mathcal{A}=(a_{nk})$ и $\mathcal{B}=(\beta_{nk})$ регулярны. Тогда при $x=e_\nu$ из (25.14) вытекает для множителей суммируемости типа $(A, \mathcal{B})$ необходимое условие

$$\Delta\varepsilon_\nu = \ell e_\nu . \qquad (25.15)$$

Применяя преобразование Абеля к частичной сумме ряда (21.1), находим

$$\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k u_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\varepsilon_k \cdot \mathcal{U}_k + \varepsilon_n \mathcal{U}_n = I + II.$$

Здесь $\Delta\varepsilon_k$ являются множителями суммируемости типа $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Следовательно, по теореме 25.1 из условия (25.15) вытекает даже сходимость последовательности I, если в $\mathcal{A}'_0$ имеет место слабая сходимость по отрезкам. Теперь задача сводится к $\mathcal{B}$-суммируемости последовательности II. Предположим еще, что метод $\mathcal{B}$ треугольен. Тогда его можно задать в виде преобразования (A) с матрицей (b_{nk}), где по формуле (8.6) имеем $b_{nk} = \Delta\beta_{nk}$. Считая $a_{nk} \neq 0$, при помощи преобразования Абеля мы вправе писать

$$\sum_{k=0}^{n} b_{nk}\varepsilon_k \mathcal{U}_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta\left(\frac{b_{nk}}{a_{nk}}\varepsilon_k\right) \cdot \sum_{\nu=0}^{k} a_{n\nu}\mathcal{U}_\nu + \frac{b_{nn}}{a_{nn}}\varepsilon_n \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\mathcal{U}_\nu . \qquad (25.16)$$

Потребуем выполнение условий

$$b_{nn}\varepsilon_n = \mathcal{O}(a_{nn}), \qquad (25.17)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\Delta\left(\frac{b_{nk}}{a_{nk}}\varepsilon_k\right)\right| = \mathcal{O}(1). \qquad (25.18)$$

Тогда ввиду леммы 25.1 из (25.16), пользуясь определением равномерной сходимости, выводим $\mathcal{B}$-суммируемость последовательности II к нулю для всех $x \in \mathcal{A}'_0$. Если же $\mathcal{A}\{x\} = \mathcal{U}' \neq 0$, то возьмем ряд $\sum u^0_k$, где

$$u^0_k = \begin{cases} u_k & \text{при } k > 0, \\ u_0 - \mathcal{U}' & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

для которого $\mathcal{A}\{\sum u_k^0\}=0$. Этот ряд отличается от ряда (0.1) лишь членом $u_0 = u_0^0 + \mathcal{U}'$, и ряд (21.1) является суммой $\mathcal{B}$-суммируемых рядов $\sum \varepsilon_k u_k^0$ и

$$\varepsilon_0 \mathcal{U}' + 0 + 0 + \cdots .$$

Итак, доказана

Теорема 25.4. Пусть $\mathcal{A}$ - такой обратимый регулярный метод, что $a_{nk} \neq 0$ и в $\mathcal{A}'_0$ имеет место слабая сходимость по отрезкам, и $\mathcal{B}$ - произвольный треугольный регулярный метод. Тогда комплексные числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(A, \mathcal{B})$, если в $\mathcal{A}'$ существует функционал $\mathcal{U}$, удовлетворяющий условию (25.15) и выполнены условия (25.17) и (25.18).

Отметим, что поскольку $\mathcal{A}$ обратим, то, как и в теореме 25.1, функциональное условие (25.15) равносильно условию

$$\Delta \varepsilon_\nu = \sum_n c_n a_{n\nu} \quad \text{при} \quad \sum |c_n| < \infty . \qquad (25.19)$$

Если $\mathcal{A}$ нормален, то необходимо условие (25.17), ибо оно является условием (22.2). Однако, условие (25.18) теоремы 25.4 вообще не является необходимым. Поэтому рассмотрим некоторые частные случаи.

Пусть $\mathcal{B} = E$. Тогда $b_{nk} = \delta_{nk}$ и условие (25.18) превращается в условие (25.17).

В итоге, доказана

Теорема 25.5. Пусть $\mathcal{A}$ - такой обратимый регулярный метод, что $a_{nk} \neq 0$ и в $\mathcal{A}'_0$ имеет место слабая сходимость по отрезкам. Для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями сходимости типа (A, E), необходимо и достаточно

выполнение условий (25.19) и

$$\varepsilon_n = O(a_{nn}).$$

Положим теперь $B = A$. Тогда A нормален (его можно задать и в виде преобразования (B)), условие (25.18) теоремы 25.4 превращается в условие (21.2), вытекающее (по теореме 1.1) из условия (25.19). Условие (25.17) превращается в условие (21.6), которое, в свою очередь, следует из (21.2). Отсюда имеет место

Теорема 25.6. Пусть $\mathcal{A}$ - такой нормальный регулярный метод, что в $\mathcal{A}'_0$ имеет место слабая сходимость по отрезкам. Для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями суммируемости типа (A, A), необходимо и достаточно выполнение условия (25.19).

Теоремы 25.5 и 25.6 принадлежат Кангро, а в несколько ином виде уже Юркату и Пейеримхоффу ([46], теоремы 10 и 11). Теорема 25.4 принадлежит Кангро.

Теоремы, аналогичные теоремам 25.5 и 25.6, для множителей суммируемости типа $(|A|, B)$ найдены также Пейеримхоффом ([60], стр. 282 и 283).

Применяя теоремы 25.5 и 25.6 к методам Чезаро C^α, получаем частные случаи $\beta = 0$ и $\beta = \alpha$ теоремы 22.2. Применение их к методу $(\mathcal{R}, p_n)$ дает следующий результат.

Теорема 25.7. Если метод $P = (\mathcal{R}, p_n)$ с $p_n \neq 0$ регулярен, то для того, чтобы комплексные числа ε_n были множителями сходимости типа (P, E), необходимо и достаточно выполнение условий (23.7), (23.8) и

$$\Delta \varepsilon_n = o(p_n); \qquad (25.20)$$

для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа (P,P), необходимо и достаточно выполнение условий (23.7) и (25.20).

Отметим, что то, что в теореме 23.4 отсутствует условие (25.20), объясняется тем, что в теореме 25.7 не требуем выполнения условия (17.13).

25.5. О множителях суммируемости в последовательности и др. Рассматривая метод Пейеримхоффа для множителей суммируемости второго рода, мы натолкнулись на следующую задачу: при каких условиях последовательность

$$\{\varepsilon_n u_n\}$$

$\mathcal{B}$-суммируема при всех $\mathcal{A}$-суммируемых последовательностях $\{u_n\}$. Это и есть задача нахождения множителей суммируемости в последовательности типа $(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

На решении этой задачи мы не останавливаемся, а отсылаем читателя к статье Кангро и Тыннова [13], где она решена в случае, когда $\mathcal{A}$ - метод взвешенных средних Рисса и $\mathcal{B}$ - произвольный матричный метод, причем все рассуждения проводятся для абстрактных рядов. Вместе с тем в этой статье дается обобщение метода Пейеримхоффа на абстрактные ряды.

Рассматриваются некоторые обобщения проблемы множителей суммируемости. О них и других результатах теории рядов отсылаем читателя к обзорным статьям [7, 16].

Литература

1. Абель М., Множители суммируемости для методов Чезаро комплексного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 92-105.

2. Ахиезер Н.И., Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М., 1961.

3. Бари Н.К., Тригонометрические ряды. М., 1961.

4. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст.ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, 9, 47-68.

5. Барон С., О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов. Уч. зап.Тартуск.ун-та, 1964, 150, 165-181.

6. Барон С., О локальном свойстве абсолютной суммируемости рядов Фурье. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 106-120.

7. Барон С., Юримяэ Э., Реймерс Э., Сырмус Т., К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г.Кангро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, 150, 3-11.

8. Волков И.И., К вопросу суммирования расходящихся рядов методом (C,α). Тр. Моск. ин-та механиз. и электрифик. с.х., 1959, 4, № 1, 137-146.

9. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. I, М., 1965.

10. Кангро Г., О суммировании бесконечных рядов при помощи матричных методов. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 150-190.

11. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 191-232.

12. Кангро Г., Об обобщении одной теоремы Мура. Докл.АН СССР, 1958, 121, 967-969.

13. Кангро Г., Тыннов М., Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1961,102, 249-262.

14. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М., 1960.

15. Кулль И.Г., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, 62, 3-59.

16. Лумисте Ю., Тамме Э. и др., Математика в Советской Эстонии за последние двадцать лет. Уч. зап.Тартуск. ун-та, 1964, 150, 12-52.

17. Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной. М., 1957.

18. Реймерс Э., Сходимость по отрезкам и умножение суммируемых рядов. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1961,102, 29-42.

19. Реймерс Э., Новые общие методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129, 119-154.

20. Слепенчук К.М., Абсолютная суммируемость рядов методами Чезаро отрицательного порядка. Изв.высш.учебн. заведений. Математика, 1965, № 5, 128-131.

21. Сырмус Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 169-184.

22. Тюрнпу Х., Некоторые типы множителей суммируемости для метода Рисса второго порядка. Уч.зап.Тартуск. ун-та, 1962, 129, 253-263.

23. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. М., 1966.

24. Харди Г.Х., Расходящиеся ряды. М., 1951.

25. Юримяэ Э., Топологические свойства конулевых методов суммирования. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 43-61.

26. Agnew, R.P., Euler transformations. Amer. J. Math., 1944, 66, 313-338.

27. Andersen, A.F., Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode. København, 1921.

28. Banach, S., Théorie des opérations linéaires. Warszawa, 1932.

29. Borel, E., Leçons sur les séries divergentes. Deuxième édition. Paris, 1928.

30. Bosanquet, L.S., The absolute Cesàro summability of a Fourier series. Proc. London Math. Soc., (2), 1936, 41, 517-528.

31. Bosanquet, L.S., Chow, H.C., Some remarks on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1957, 32, 73-82.

32. Carmichael, R.D., General Aspects of the Theory of Summable Series. Bull. Amer. Math. Soc., 1918, 25, 97-131.

33. Cesàro, E., Sur la multiplication des séries. Bull. sci. math., (2), 1890, 14, №1, 114-120.

34. Chapman, S., On non-integral orders of summability of series and integrals. Proc. London Math., Soc., (2), 1911, 9, 369-409.

35. Fejér, L., Untersuchungen über Fouriersche Reihen. Math. Ann., 1904, 58, 51-69.

36. Frobenius, G., Ueber die Leibnitzsche Reihe. J. reine und angew. Math., 1880, 89, 262-264.

37. Garabedian, H.L., Hausdorff matrices. Amer. Math. Monthly, 1939, 46, 390-410.

38. Garabedian, H.L., Randels, W.C., Theorems on Riesz means. Duke Math. J., 1938, 4, 529-533.

39. Hahn, H., Über Folgen linearer Operationen. Monatsh. Math. und Phys., 1922, 32, 3-88.

40. Hausdorff, F., Summationsmethoden und Momentfolgen. I. Math. Z., 1921, 9, 74-109.

41. Hill, J.D., Some properties of summability. Duke Math. J., 1942, 9, 373-381.

42. Hill, J.D., Hamilton, H.J., Operation theory and multiple sequence transformations. Duke Math. J., 1941, 8, 154-162.

43. Hölder, O., Grenzwerte von Reihen an der Convergenzgrenze. Math. Ann., 1882, 20, 535-549.

44. Izumi, S., Über die lineare Transformation in der Theorie der unendlichen Reihen. Tôhoku Math. J., 1926, 27, 313-323.

45. Izumi, S., Einiges über die Differenzoperation in der Theorie der unendlichen Reihen. Tôhoku Math. J., 1926, 27, 324-331.

46. Jurkat, W., Peyerimhoff, A., Mittelwertsätze bei Matrix- und Integraltransformationen. Math. Z., 1951, 55, 92-108.

47. Kangro, G., Matemaatiline analüüs, II osa. Tallinn, 1967.

48. Knopp, K., Multiplikation divergenter Reihen. Arch. Math. und Phys., (3), 1907, 12; Sitzungsber. Berlin. Math. Ges., 1907, 7, 1-12.

49. Knopp, K., Über das Eulersche Summierungsverfahren. Math. Z., 1922, 15, 226-253; 1923, 18, 125-156.

50. Knopp, K., Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Berlin, 1924.

51. Knopp, K., Folgenräume und Limitierungsverfahren. Rend. mat. e applic., (5), 1952, 11, № 3-4, 269-298.

52. Knopp, K., Lorentz, G.G., Beiträge zur absoluten Limitierung. Arch. Math., 1949, 2, 10-16.

53. Koijima, T., On generalized Toeplitz's theorems on limit and their applications. Tôhoku Math. J., 1917, 12, 291-326.

54. Kuttner, B., The problem of "translativity" for Hausdorff summability. Proc. London Math. Soc., (3), 1956, 6, 117-138.

55. Lyra, G., Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit negativer Ordnung. Math. Z., 1944, 49, 538-562.

56. Mc Fadden, L., Absolute Nörlund summability. Duke Math. J., 1942, 9, 168-207.

57. Mears, F.M., Absolute Regularity and the Nörlund Mean. Ann. Math., (2), 1937, 38, 594-601.

58. Moore, C.N., Summable series and convergence factors. New York, 1938.

59. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1951, 55, 23-54.

60. Peyerimhoff, A., Untersuchungen über absolute Summierbarkeit. Math. Z., 1953, 57, 265-290.

61. Peyerimhoff, A., Über Summierbarkeitsfaktoren und verwandte Fragen bei Cesàroverfahren I. Publs Inst. math. Acad. serbe sci., 1955, 8, 139-156.

62. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von Herrn H.C. Chow. J. London Math. Soc., 1957, 32, 33-36.

63. Riesz, M., Sur la sommation des séries de Dirichlet. C.r. Acad. sci., 1909, 149, 18-21.

64. Schur, I., Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. J. reine und angew. Math., 1921, 151, 79-111.

65. Sunouchi, G., Notes on Fourier Analysis (XVIII): Absolute summability of series with constant terms. Tôhoku Math. J., (2), 1949, 1, 57-65.

66. Toeplitz, O., Über allgemeine lineare Mittelbildungen. Prace matematyczno fizyczne, 1911, 22, 113-119.

67. Wilansky, A., An application of Banach linear functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 59-68.

68. Zeller, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, 53, 463-487.

69. Zeller, K., Anschnittskonvergenz in FK-Räumen. Math. Z., 1951, 55, 55-70.

70. Zeller, K., Matrixtransformationen von Folgenräumen. Rend. mat. e applic., (5), 1954, 12, N& 3-4, 340-346.

71. Zeller, K., Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.

72. Zygmund, A., The Approximation of Functions by Typical Means of Their Fourier Series. Duke Math. J., 1945, 12, 695-704.

О г л а в л е н и е

Стр.

Предисловие 3

Введение 5

Глава I
МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 1. Теорема Кожима—Шура 12
§ 2. Теорема Шура 17
§ 3. Теорема Хана 21
§ 4. Теорема Кноппа—Лоренца 27
§ 5. Теорема Пейеримхоффа 29

Глава II
ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ
ТЕОРИИ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

§ 6. Определение метода суммирования 37
§ 7. Некоторые важные классы методов суммирования 41
§ 8. Матричные методы суммирования 43
§ 9. Обратные преобразования 46
§ 10. Характеристика матричного метода 51
§ 11. Абсолютная суммируемость. Методы ограниченности 53
§ 12. Включение методов суммирования 54
§ 13. Транслятивность методов суммирования 58

Глава III
НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ

§ 14. Метод суммирования Гельдера 62
§ 15. Метод суммирования Чезаро 66
§ 16. Метод суммирования Вороного—Нерлунда 93
§ 17. Метод суммирования взвешенных средних Рисса 104
§ 18. Метод суммирования Эйлера—Кноппа 117
§ 19. Метод суммирования Хаусдорфа 127
§ 20. Метод суммирования Пуассона—Абеля 139

Глава IV
МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ

§ 21. Постановка проблемы 145
§ 22. Метод обратного преобразования 150
§ 23. Метод Мура—Кангро 164
§ 24. Множители суммируемости первого рода 170
§ 25. Метод Пейеримхоффа 180

Литература 193

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул.Юликооли,I8

С.А.Барон

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ

На русском языке

Ответственный редактор З.Г. Реймерс
Корректор Ю.Х. Сарв

==========

Ротапринт ТГУ I967. Печ.листов I2,5 (условных II,38).
Учетн.-издат. листов 6,42. Тираж 500 экз.
Бумага 30х42. I/4. Сдано в печать I5/XII I966 г.
МВ-099I6. Заказ № 546.
Цена 43 коп.

43 кол.

XII
1A-4278
6295564

