

*prof. Letto*

677

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

# TOIMETISED

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ

ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

492

ARVUTUSMEETODID  
МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

МАТЕМААТИКА- JA МЕННААНИКА-  
ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ  
И МЕХАНИКЕ

XXIV

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED  
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS  
ALUSTATUD 1893. a. VIHK 492 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

---

**ARVUTUSMEETODID**  
**МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

**МАТЕМААТИКА- JA МЕННААНИКА-  
ALASEID TÖID**

**ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ  
И МЕХАНИКЕ**

**XXIV**

**ТАРТУ 1979**

Redaktsioonikolleegium:

U. Lepik (esimees), L. Ainola, S. Baron (vast. toimetaja), K. Kenk, M. Kilp,  
U. Lumiste, E. Reimers, E. Tamme

Редакционная коллегия:

Ю. Лепик (председатель), Л. Айнола, С. Барон (отв. редактор), К. Кенк,  
М. Кильп, Ю. Лумисте, Э. Реймерс, Э. Тамме

Настоящее издание является межвузовским сборником  
высших учебных заведений Эст. ССР.

## ОБ АППРОКСИМАЦИИ ГОЛОМОРФНЫХ ПОЛУГРУПП

С. Пискарев

Тартуский государственный университет

### Введение

Настоящая работа посвящена изучению общей теории аппроксимации параболических уравнений. Для аналитических полугрупп получена теорема, аналогичная теореме Троттера—Като. Этот результат применяется для исследования явного и неявного методов решения задачи Коши. Устанавливается условие устойчивости для дискретных полугрупп в банаховом пространстве, а также даны оценки скорости сходимости явного и неявного методов.

### § 1. Аппроксимационная схема

Пусть  $E$  и  $E_n$  — банаховы пространства, связанные линейными отображениями  $p_n : E \rightarrow E_n$ , причем

$$\|p_n x\| \rightarrow \|x\|, \quad x \in E.$$

Обозначим через  $S(E)$  множество замкнутых линейных операторов  $A$  с областью определения  $D(A) \subset E$  и областью значений в  $E$ . Множество ограниченных линейных операторов в  $E$  обозначим  $B(E)$ . Напомним некоторые определения  $P$ -сходимости (более полные сведения, связанные с  $P$ -сходимостью, а также рядом следующих понятий, можно найти в работах [1—2, 10—12, 16—19, 22—24]).

**Определение 1.** Последовательность  $(x_n)$ ,  $x_n \in E_n$ , называется  $P$ -сходящейся к  $x \in E$ , если  $\|p_n x - x_n\| \rightarrow 0$ ; будем писать просто  $x_n \rightarrow x$ .

**Определение 2.** Последовательность операторов  $(B_n)$ ,  $B_n \in B(E_n)$ , называется  $P$ -сходящейся к оператору  $B \in B(E)$ , если для любой  $P$ -сходящейся последовательности  $(x_n)$  имеет место импликация

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow B_n x_n \rightarrow Bx;$$

обозначаем  $B_n \rightarrow B$ .

<sup>1</sup> Всюду в статье индекс  $n$  пробегает множество  $\mathbb{N}$ .

**Определение 3.** Последовательность операторов  $(A_n)$ ,  $A_n \in C(E_n)$ , называется *P-согласованной* с  $A \in C(E)$ , если для любого  $x \in D(A)$  найдется последовательность  $(x_n)$ ,  $x_n \in D(A_n)$ , такая, что  $x_n \rightarrow x$ ,  $A_n x_n \rightarrow Ax$ .

Равносильное определение получим, если вместо  $D(A)$  рассматривать для оператора  $A$  его сердцевину  $\mathfrak{D} \subset D(A)$ , т. е. такое множество, что замыкание суженного на  $\mathfrak{D}$  оператора  $A$  совпадает с  $A$ . Мы неоднократно будем использовать следующее простое

**Предложение** (см. [2]). Пусть  $A_n \in C(E_n)$ ,  $A \in C(E)$ , причем  $(\bigcap \mathcal{Q}(-A_n)) \cap \mathcal{Q}(-A)$  непусто и  $(\lambda + A_n)^{-1} \rightarrow (\lambda + A)^{-1}$  для некоторого  $\lambda$  из указанного множества. Тогда  $A_n$  и  $A$  согласованы.

## § 2. Основная теорема

Рассмотрим в банаховом пространстве  $E$  задачу Коши

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad (1)$$

где  $A \in C(E)$ ,  $u_0 \in D(A)$ .

Будем предполагать, что оператор  $-A$  генерирует полугруппу класса  $C_0$  (см. [4, 9]). Решением задачи (1) называют непрерывную, сильно дифференцируемую функцию  $u(t)$  такую, что  $u(t) \in D(A)$  для любого  $t \in [0, T]$  и выполняется (1). Задача (1) называется *равномерно корректной* (см. [6]), если

1° для любого  $u_0 \in D(A)$  существует ее единственное решение,

2° если  $u_n(0) \rightarrow 0$ , то  $u_n(t) \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  на каждом конечном отрезке  $[0, T]$ .

Известно ([6], стр. 64), что задача (1) с замкнутым оператором равномерно корректна тогда и только тогда, когда оператор  $-A$  является производящим оператором полугруппы класса  $C_0$ .

Задачу (1) будем аппроксимировать рассматриваемыми в банаховых пространствах  $E_n$  задачами

$$\frac{du_n(t)}{dt} + A_n u_n(t) = 0, \quad u_n(0) = u_n^0, \quad (2)$$

где  $A_n \in C(E_n)$  и  $u_n^0 \in D(A_n)$ . Также предполагаем, что каждый оператор  $-A_n$  генерирует полугруппу класса  $C_0$ . В этом случае решения  $u(t) = e^{-tA}u_0$  и  $u_n(t) = e^{-tA_n}u_n^0$  задач (1) и (2) даются с помощью полугрупп операторов  $e^{-tA}$  и  $e^{-tA_n}$  ( $t \geq 0$ ), действующих соответственно в  $E$  и  $E_n$ .

Если начальные условия задачи (1) не принадлежат  $D(A)$ , то решение  $u(t) = e^{-tA}u_0$ , вообще говоря, не будет непрерывно дифференцируемым и  $u(t)$  называется обобщенным решением.

Аналогичное замечание касается задачи (2). В приложениях, когда размерности пространств  $E_n$  конечны, полугруппа  $e^{-tA_n}$  является голоморфной и, значит,  $u_n(t) = e^{-tA_n}u_n^0$  непрерывно дифференцируемо для любых  $u_n^0 \in E_n$ .

Будем говорить, что  $e^{-tA_n} \rightarrow e^{-tA}$  равномерно по  $t \in [0, T]$ , если

$$\max_{t \in [0, T]} \|e^{-tA_n}x_n - p_n e^{-tA}x\| \rightarrow 0, \quad x \in E$$

при любой последовательности  $(x_n)$  со свойством  $x_n \rightarrow x$ . Введем следующие условия.

(A) (Согласованность). Существует точка  $\lambda \in (\cap \rho(-A_n)) \cap \rho(-A)$  такая, что

$$R(\lambda; A_n) \rightarrow R(\lambda; A). \quad (a)$$

(B<sub>0</sub>) (Ограниченность). Существуют константа  $M \geq 1$  и действительное число  $\omega$  такие, что

$$\|e^{-tA_n}\| \leq M e^{\omega t} \quad \text{при } t \geq 0.$$

(C<sub>0</sub>) (Сходимость). Для каждого конечного  $T \geq 0$

$$e^{-tA_n} \rightarrow e^{-tA}$$

равномерно по  $t \in [0, T]$ .

Хорошо известна (см. [11, 20—21]) следующая теорема Троттера—Като—Ушнима.

**Теорема (A—B—C).** Условия (A) и (B<sub>0</sub>) эквивалентны (C<sub>0</sub>).

**З а м е ч а н и е 1.** Условие (B<sub>0</sub>) может быть заменено на следующее эквивалентное (см. [3, 14]):

(B<sub>00</sub>) существуют константа  $M \geq 1$  и действительное число  $\omega$  такие, что

$$\|R(\lambda; A_n)^k\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^k}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega, \quad k=1, 2, \dots, n=1, 2, \dots$$

**З а м е ч а н и е 2.** В данной формулировке теорема (A—B—C) получена и детально разобрана в работе Ушнима (см. [20]). Однако, в упомянутой статье сходимость  $e^{-tA_n} \rightarrow e^{-tA}$  понимается в более слабом, чем у нас смысле, а именно

$$\|e^{-tA_n}p_n x - p_n e^{-tA}x\| \rightarrow 0 \quad \forall x \in D(A)$$

равномерно по  $t \in [0, T]$ ; на операторы  $p_n$  накладывается следующее дополнительное условие:

каждый  $x_n \in E_n$  может быть представлен в виде  $x_n = p_n x^{(n)}$ ,  $x^{(n)} \in E$ , причем  $\|x^{(n)}\| \leq C \|x_n\|$  с постоянной  $C$ , не зависящей от  $n$ .

В нашем понимании сходимости это дополнительное условие удается снять.

Обозначим

$$\Sigma(\theta) = \{z: z \in \mathbb{C}, |\arg z| \leq \theta\},$$

$$\Sigma(\theta, \mu) = \{z: z \in \Sigma(\theta), |z| \leq \mu\}.$$

Всюду далее будем изучать аппроксимацию задачи (1) задачами (2) в случае, когда операторы  $-A_n$  и  $-A$  генерируют аналитические полугруппы.

Введем следующие условия.

(B) Существуют константа  $M_1 \geq 1$  и числа  $\omega$  и  $\theta_1 \in (0, \pi/2)$  такие, что

$$\|e^{-(\xi+i\eta)A_n}\| \leq M_1 e^{\omega\xi}, \quad \xi+i\eta \in \Sigma(\theta_1).$$

(C) Для некоторого  $\theta_2 \in (0, \pi/2)$ , любого  $\mu > 0$  и любого  $x \in E$  имеет место сходимость

$$\max_{\xi \in \Sigma(\theta_2, \mu)} \|e^{-\xi A_n} x_n - p_n e^{-\xi A} x\| \rightarrow 0 \quad (B')$$

как только  $x_n \rightarrow x$ .

**Теорема 1.** Условия (A) и (B) эквивалентны условию (C).

**З а м е ч а н и е 3.** Укажем еще три эквивалентные формулировки условия (B) теоремы 1:

(B') существуют константа  $M' \geq 1$  и число  $\omega'$  такие, что

$$\|R(\lambda; A_n)\| \leq \frac{M'}{|\lambda - \omega'|}, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \omega, \quad n=0, 1, \dots; \quad (C')$$

(B'') полугруппы  $e^{-tA_n}$  сильно дифференцируемы, и с некоторыми  $M'' \geq 1$  и  $\omega''$  справедливы оценки:

$$\|e^{-tA_n}\| \leq M'' e^{\omega'' t}, \quad \left\| \frac{d}{dt} e^{-tA_n} \right\| \leq M'' \frac{e^{\omega'' t}}{t}, \quad t > 0;$$

(B''') существуют  $M''' \geq 1, \tau^* > 0$  и  $\omega'''$  такие, что

$$\|(1 + \tau A_n)^{-k}\| \leq M''' e^{\omega''' \tau k}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau^*, \quad k, n = 0, 1, \dots;$$

$$\|k \tau A_n (1 + A_n)^{-k}\| \leq M''' e^{\omega''' \tau k}, \quad 0 \leq \tau \leq \tau^*, \quad k, n = 0, 1, \dots.$$

Равносильность (B) с (B') и с (B'') устанавливается, следуя С. Г. Крейну (см. [6]). Указания к доказательству равносильности условий (B''') и (B) можно найти в работе П. Е. Соболевского (см. [8]).

**Доказательство теоремы 1.** Докажем импликацию (C)  $\Rightarrow$  (B). Из условия (C) немедленно следует, что

$$\|e^{-\xi A_n}\| \leq M, \quad \xi \in \Sigma(\theta_2, \mu).$$

Далее, для любого  $\lambda \in \Sigma(\theta_2)$  имеет место представление

$$\lambda = q\xi_1 + \xi_2,$$

где  $\xi_1, \xi_2$  и  $\lambda$  лежат на одной прямой, проходящей через 0, а  $q$  — целое, причем  $|\xi_1| = \mu, |\xi_2| < \mu$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \|e^{-\lambda A_n}\| &= \|e^{-(q\zeta_1 + \zeta_2)A_n}\| = \|(e^{-\zeta_1 A_n})^q e^{-\zeta_2 A_n}\| \leq \\ &\leq M^q M = M e^{q \operatorname{Im} M} \leq M e^{(\operatorname{Re} \lambda \operatorname{Im} M)/(\mu \cos \theta_2)}, \end{aligned}$$

поэтому (B) выполняется с  $\omega = (\operatorname{Im} M)/(\mu \cos \theta_2)$  и  $\theta_1 = \theta_2$ . Условие (A) вытекает из теоремы (A—B—C).

Докажем импликацию (A), (B)  $\Rightarrow$  (C). Обозначим через  $\Gamma(\theta) = \Gamma(\theta, 0)$  контур, являющийся границей множества  $\Sigma(\theta + \pi/2)$ , а через  $\Gamma(\theta, \omega) = \Gamma(\theta) + \omega$  — его сдвиг.

Точке  $\lambda \in \Gamma(\theta_1, \omega)$  сопоставим точку  $\lambda' = \omega \pm i|\lambda - \omega|/\cos \theta_1$  на прямой  $\operatorname{Re} \zeta = \omega$  (знак плюс в случае  $\operatorname{Im} \lambda > 0$  и минус в случае  $\operatorname{Im} \lambda < 0$ ). Поскольку

$$\|R(\lambda'; A_n)\| \leq \frac{M_1 \cos \theta}{|\lambda - \omega|},$$

$$\|A_n + \lambda - (A_n + \lambda')\| = |\lambda - \lambda'| = |\lambda - \omega| \tan \theta,$$

то по теореме об обратимости оператора, близкого к обратному,  $R(\lambda; A_n)$  при условии  $M_1 \sin \theta < 1$  существует и

$$\|R(\lambda; A_n)\| \leq \frac{M(\theta)}{|\lambda - \omega|}, \quad \lambda \in \Gamma(\theta, \omega), \quad M(\theta) = \frac{M_1 \cos \theta}{1 - M_1 \sin \theta}.$$

Уменьшив, если нужно  $\theta_1$ , будем считать, что  $M_1 \sin \theta_1 < 1$ . Докажем теперь, что  $R(\lambda; A_n) \rightarrow R(\lambda; A)$ ,  $\lambda \in \Gamma(\theta_1, \omega)$ . Из условия (A) получим согласованность  $A_n$  и  $A$ . Обозначим через  $y = R(\lambda; A)x$  и  $y_n$  такие элементы, что  $y_n \rightarrow y$ ,  $A_n y_n \rightarrow Ay$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|(R(\lambda; A_n)p_n - p_n R(\lambda; A))x\| &= \\ &= \|R(\lambda; A_n)[p_n(\lambda + A) - (\lambda + A_n)p_n]R(\lambda; A)x\| \leq \\ &\leq \|R(\lambda; A_n)\| \cdot \|(\lambda + A_n)y_n - p_n(\lambda + A)y\| + \|y_n - p_n y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Значит, резольвенты сходятся и для любого  $\Gamma(\theta', \omega)$  с  $0 \leq \theta' \leq \theta_1$ . Возьмем  $\theta' = -\varepsilon + \theta_1/2$ ,  $0 < \varepsilon < \theta_1/4$  и, рассмотрев интеграл Динфорда—Тейлора, получим:

$$e^{-\zeta A_n} x_n - p_n e^{-\zeta A} x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\theta'/2, \omega)} e^{\zeta \lambda} (R(\lambda; A_n)x_n - p_n R(\lambda; A)x) d\lambda \rightarrow 0$$

для любого  $\zeta \in \Sigma(\theta')$  и  $x_n \rightarrow x$ , так как тогда, например, для  $\lambda$  с  $\operatorname{Im} \lambda > 0$  имеем  $\pi/2 + \varepsilon \leq \arg \zeta \lambda \leq \pi/2 + \theta_1$ . Равномерная сходимость на  $\Sigma(\theta', \mu)$  доказывается от противного. Итак, условие (C) выполняется с  $\theta_2 = \theta_1$ . Теорема доказана.

Нам понадобятся следующие обозначения<sup>2</sup>  $\omega' = \omega - 1/\sin \theta$ ,  $e_n(\zeta; \alpha; x) = \|R(\zeta; A_n)p_n x - p_n R(\zeta; A)x\| \cdot |\zeta - \omega'|^\alpha$ ,  $\alpha \geq 0$ , (3)

$$e_n(\Gamma(\theta, \omega); \alpha; x) = \sup_{\zeta \in \Gamma(\theta, \omega)} e_n(\zeta; \alpha; x).$$

<sup>2</sup> Предполагаем, что  $\omega' \in (\cap \varrho(-A_n)) \cap \varrho(-A)$ .

**Предложение 1.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для любого  $\theta \in (0, \theta_2]$  и  $\alpha \in [0, 1)$  имеет место сходимость

$$e_n(\Gamma(\theta, \omega); \alpha; x) \rightarrow 0.$$

**Доказательство.** Предположим от противного, что существует последовательность  $(\zeta_n)$  со свойством  $e_n(\zeta_n; \alpha; x) \geq \varepsilon > 0$ . В случае  $|\zeta_n| \rightarrow \infty$  для получения противоречия достаточно воспользоваться оценкой резольвенты. Если же  $\zeta_n \rightarrow \zeta_0$ , то к противоречию приходим, рассмотрев неравенство

$$\begin{aligned} & \|R(\zeta_n; A_n)p_n x - p_n R(\zeta_n; A)x\| \leq \\ & \leq \|(R(\zeta_n; A_n)p_n - R(\zeta_0; A_n)p_n)x\| + \\ & + \|[R(\zeta_0; A_n)p_n - p_n R(\zeta_0; A)]x\| + \|p_n(R(\zeta_n; A) - R(\zeta_0; A))x\|. \end{aligned}$$

Действительно, второе слагаемое в правой части стремится к нулю по доказательству теоремы 1. Для оценки третьего слагаемого, аналогично для первого, можно применить, например, тождество Гильберта

$$R(\zeta_n; A) - R(\zeta_0; A) = (\zeta_n - \zeta_0)R(\zeta_n; A)R(\zeta_0; A).$$

Предложение доказано.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для

$$\varepsilon_n(t; x) = \|e^{-tA_n}p_n x - p_n e^{-tA}x\|$$

при  $\theta \in (0, \theta_2]$  и  $\alpha \in [0, 1)$  справедлива оценка

$$\varepsilon_n(t; x) = \frac{c_1 e^{\omega t}}{t^{1-\alpha}} e_n(\Gamma(\theta, \omega); \alpha; x).$$

**Доказательство.** Используя (3) и интегральное представление полугруппы, находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(t; x) &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\theta, \omega)} e^{\zeta t} (R(\zeta; A_n)p_n - p_n R(\zeta; A))x d\zeta \right\| \leq \\ & \leq e_n(\Gamma(\theta, \omega); \alpha; x) \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma(\theta, \omega)} \frac{e^{\zeta t}}{(\zeta - \omega')^\alpha} d\zeta \right| \leq \\ & \leq e_n(\Gamma(\theta, \omega); \alpha; x) \frac{1}{2\pi t^{1-\alpha}} \cdot c_0 e^{\omega t}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Замечание 4.** Оценку для  $\varepsilon_n(t; x)$  в теореме 2 можно улучшить, если рассматривать разность решений на «гладких» начальных условиях. А именно, пусть  $x_n \in D((A_n + \omega)^{1-\alpha})$  и  $x \in D((A + \omega)^{1-\alpha})$  при  $0 \leq \alpha < 1$  со свойствами  $x_n \rightarrow x$  и  $(A_n + \omega)^{1-\alpha} x_n \rightarrow (A + \omega)^{1-\alpha} x$ . Такой выбор  $x_n$  в силу условия (A) возможен для любого  $x \in D((A + \omega)^{1-\alpha})$ . Определение дробных степеней см. [4, 6].

Рассмотрим цепочку неравенств

$$\|e^{-tA_n}x_n - p_n e^{-tA}x\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left\| \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \left( \frac{R(\lambda; A_n)}{(\lambda - \omega)^{1-\alpha}} y_n - p_n \frac{R(\lambda; A)}{(\lambda - \omega)^{1-\alpha}} y \right) d\lambda \right\| \leq$$

$$\leq c e_n(\Gamma; \alpha; y_n; y) \int_{\Gamma} \frac{|e^{\lambda t}|}{|\lambda - \omega|} |d\lambda| \leq c e^{\omega t} e_n(\Gamma; \alpha; y_n; y),$$

где  $y_n = (A_n + \omega)^{1-\alpha} x_n$  и  $y = (A + \omega)^{1-\alpha} x$ , а  $0 \leq \alpha < 1$  и

$$e_n(\Gamma; \alpha; y_n; y) = \sup_{\zeta \in \Gamma} \|R(\zeta; A_n) y_n - p_n R(\zeta; A) y\| \cdot |\zeta - \omega|^\alpha.$$

Последняя величина отличается от аналогичного выражения в предложении 1 тем, что сходимость интеграла  $I_1 = \int_{\Gamma} (\lambda - \omega)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda$  докажем, выбрав контур  $\Gamma$  следующим образом:  $\Gamma = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) - \omega$ , где

$$\Gamma_1 = \{r e^{i\theta} : -\pi/2 - \varphi \leq \theta \leq \pi/2 + \varphi\}, \quad \Gamma_2 = \{\rho e^{\pm i\varphi} : r \leq \rho < \infty\},$$

причем для контура  $\Gamma_2$  положим  $r = 1/t$ . Таким образом,

$$\|I_1\| \leq \left| \int_{\Gamma_1} \zeta^{-1} e^{\zeta t} d\zeta \cdot e^{\omega t} \right| \leq e^{\omega t} \left( \int_{\Gamma_1} e t |d\theta| + \int_1^\infty \rho^{-1} e^{-\rho \cos \varphi} d\rho \right) < \infty.$$

Итак, мы получим оценку

$$\|e^{-tA_n} x_n - p_n e^{-tA} x\| \leq \text{const} \cdot e^{\omega t} \cdot e_n(\Gamma(\Theta, \omega); \alpha; y_n, y). \quad (d)$$

Перейдем теперь к рассмотрению полной дискретизации уравнения (1).

### § 3. Явная и неявная схемы

Следуя Т. Като (см. [5, 7, 15, 18]), назовем дискретной полугруппой семейство  $(U^k)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , состоящее из степеней некоторого ограниченного оператора  $U \in B(E)$ .

Привязывая к  $U$  временной шаг  $\tau > 0$ , пишут  $U(k\tau) = U(\tau)^k = U^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . Более того, для любого  $t \geq 0$  можно определить  $U(t) = U([t/\tau] \cdot \tau)$ , где  $[t/\tau]$  — целая часть числа  $t/\tau$ . Функцию  $U(t)$  также будем называть дискретной полугруппой, а ее производящий генератор определим как  $A = \tau^{-1}(1 - U(\tau))$ .

Всюду далее будем рассматривать последовательность полугрупп  $(U_n(t))$ ,  $U_n(t) \in B(E_n)$ , с шагами  $\tau_n$ , причем  $\lim \tau_n = 0$ .

**Определение 5.** Говорят, что последовательность полугрупп  $(U_n(t))$  аппроксимирует  $e^{-tC}$  на отрезке  $[0, T]$ , если имеет место  $P$ -сходимость  $U_n(k_n \tau_n) \rightarrow e^{-t_0 C}$  для каждого  $t_0 \in [0, T]$  и каждой последовательности положительных целых чисел  $k_n$  со свойством  $k_n \tau_n \rightarrow t_0$ ; пишем  $U_n(t) \rightarrow e^{-tC}$ .

Рассмотрим в банаховых пространствах  $E_n$  задачи ( $k \in \mathbb{N}$ )

$$u_n(k\tau_n + \tau_n) - u_n(k\tau_n) + \tau_n A_n u_n(k\tau_n) = 0, \quad u_n(0) = u_n^0, \quad (4)$$

$$u_n(k\tau_n + \tau_n) - u_n(k\tau_n) + \tau_n A_n u_n(k\tau_n + \tau_n) = 0, \quad u_n(0) = u_n^0. \quad (5)$$

Задачи (4) и (5) представляют собой соответственно явный и неявный методы решения задачи (2). Решение задачи (4) дается формулой  $u_n(k\tau_n) = U_n(k\tau_n)u_n^0$ , где полугруппа  $U_n(t)$  построена по генератору  $A_n$ . Решение задачи (5) определяется по формуле  $u_n(k\tau_n) = \bar{U}_n(k\tau_n)u_n^0$ , где полугруппа  $\bar{U}_n(t)$ , построенная по генератору  $A_n(1 + \tau_n A_n)^{-1}$ , определяет неявный метод решения.

Ограниченный оператор  $-A_n \in B(E_n)$  генерирует как дискретную полугруппу  $U_n(t)$ , так и непрерывную полугруппу  $e^{-tA_n}$ . В случае неявного метода, находясь в условии теоремы 1, нет необходимости предполагать, что  $A_n$  ограничен (см. замечание 3).

Для дискретных полугрупп справедлива теорема, аналогичная теореме (А—В—С) (см. [7, 20]). Чтобы получить ее формулировку, достаточно в формулировке теоремы (А—В—С) вместо  $e^{-tA_n}$  писать  $U_n(t)$ . Теорему (А—В—С) для дискретных полугрупп будем называть теоремой (А—В—С—discr).

Пусть  $U_n(t) \rightarrow e^{-tA}$  равномерно по  $t \in [0, T]$ , т. е.

$$\max_{t \in [0, T]} \|U_n(t)x_n - p_n e^{-tA}x\| \rightarrow 0 \text{ при } x_n \rightarrow x. \quad (e)$$

Тогда по теореме (А—В—С—discr) имеем  $\|U_n(t)\| \leq Me^{\omega t}$ . Отсюда, в свою очередь (см. [15, 20]), получаем  $\|e^{-tA_n}\| \leq Me^{\omega t}$  и, следовательно,

$$e^{-tA_n} \rightarrow e^{-tA} \text{ равномерно по } t \in [0, T].$$

Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, так как упирается в устойчивость явного метода. Отметим, что для неявной схемы справедлива

**Теорема 3** (см. [20]). Пусть  $e^{-tA_n} \rightarrow e^{-tA}$  равномерно по  $t \in [0, T]$ , тогда  $\bar{U}_n(t) \rightarrow e^{-tA}$  равномерно по  $t \in [0, T]$ .

В общей ситуации, когда  $e^{-tA_n}$  и  $e^{-tA}$  являются  $C_0$ -полугруппами, Ушнина доказал, что справедлива

**Теорема 4** (см. [20]). Пусть  $e^{-tA_n} \rightarrow e^{-tA}$  равномерно по  $t \in [0, T]$ , тогда, если  $\tau_n \|A_n^2\| = O(1)$ , то

$$U_n(t) \rightarrow e^{-tA} \text{ равномерно по } t \in [0, T].$$

Оказывается, что для случая, когда оператор  $-A$  генерирует аналитическую полугруппу возможно уточнение.

**Теорема 5.** Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда, если

$$\tau_n \|A_n\| \leq \delta < \frac{1}{2+M}, \quad (6)$$

то

$$U_n(t) \rightarrow e^{-tA} \text{ равномерно по } t \in [0, T].$$

Теорема 5 дает достаточные условия для сходимости явного метода.

Доказательство. Существует оператор

$$B_n = \frac{(1 - \tau_n A_n)^{-1} - 1}{\tau_n}.$$

В силу теоремы (A—B—C-discr) для доказательства нашего утверждения достаточно показать, что

$$\|U_n(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

так как сходимость резольвент уже имеется. Учитывая определение оператора  $B_n$ , находим, что (7) равносильно условию

$$\|(1 + \tau_n B_n)^{-k}\| \leq M e^{\omega k \tau_n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Последнее неравенство выполняется, если  $\|e^{-t B_n}\| \leq M e^{\omega t}$ , так как тогда

$$\begin{aligned} \|(1 + \tau_n B_n)^{-k}\| &= \tau_n^{-k} \|(\tau_n^{-1} + B_n)^{-k}\| \leq M \left( \frac{\tau_n^{-1}}{\tau_n^{-1} - \omega} \right)^k = \\ &= M (1 - \tau_n \omega)^{-k}, \end{aligned}$$

а  $(1 - \tau_n \omega)^{-k} \leq e^{\omega k \tau_n}$ , где  $\omega_1$  выбрано из условия  $-\ln(1 - \tau_n \omega) \leq \omega_1 \tau_n$  (на самом деле это условие выполняется с  $\omega_1 = \omega$ , если  $\tau_n$  достаточно мало). Поэтому достаточно доказать, что  $\|e^{-t B_n}\| \leq M e^{\omega t}$ . Для этого рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} A_n - B_n &= A_n - \tau_n^{-1} ((1 - \tau_n A_n)^{-1} - 1) = A_n - A_n (1 - \tau_n A_n)^{-1} = \\ &= A_n (1 - (1 - \tau_n A_n)^{-1}) = \tau_n A_n (1 - \tau_n A_n)^{-1} A_n. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\|(1 - \tau_n A_n)^{-1}\| \leq (1 - \delta)^{-1}$ , получим  $A_n$ -ограниченность оператора  $A_n - B_n$ , то есть

$$\|(A_n - B_n)x_n\| \leq \delta (1 - \delta)^{-1} \|A_n x_n\| < (1 + M)^{-1} \|A_n x_n\|.$$

Поэтому, применяя теорему Хилле—Филлипса (см. [5], стр. 616—617, теорема 2.4), находим, что оператор  $B_n$  генерирует голоморфную полугруппу, причем справедлива равномерная по  $n$  оценка  $\|e^{-t B_n}\| \leq M_2 e^{\omega t}$ . Теорема доказана.

Исследование аппроксимации голоморфных полугрупп для проекционных методов проводились в работе [13]. Оказывается, что используя теорему 1 и повторяя доказательства [13], многие результаты остаются в силе и в рассматриваемой здесь общей аппроксимационной схеме. В частности, справедливы следующие теоремы 6 и 7.

**Теорема 6.** В условиях теоремы 1 имеют место оценки

$$\|e^{-t A_n} - (1 + \tau_n A_n)^{-k_n}\| \leq c \frac{e^{\omega t}}{k_n}, \quad t = k_n \tau_n,$$

а при  $\tau_n \|A_n\| \leq \delta < (1 + M)/(2 + M)$

$$\|e^{-t A_n} - (1 - \tau_n A_n)^{k_n}\| \leq c \frac{e^{\omega t}}{k_n} \quad t = k_n \tau_n.$$

**Теорема 7.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и для некоторого числа  $M_0$  выполняется

$$\sup \tau_n \|A_n\| \leq M_0.$$

Тогда

$$\|e^{-tA_n} - \frac{(2 - \tau_n A_n)^{k_n}}{(2 + \tau_n A_n)^{k_n}}\| \leq c \frac{e^{\omega t}}{k_n^2}, \quad t = k_n \tau_n.$$

Учитывая теорему 2, имеет место

**Теорема 8.** Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда

$$\|p_n e^{-tA} x - (1 + \tau_n A_n)^{-k_n} p_n x\| \leq C e^{\omega t} \left( \frac{\tau_n}{t} + \frac{1}{t^{1-\alpha}} e_n(\Gamma; \alpha; x) \right), \\ t = k_n \tau_n.$$

Условие  $(B''')$  из замечания 3 позволяет активно изучать полную дискретизацию задачи 1. Введем условие:

$(C')$  при любых  $0 \leq \tau \leq \tau^*$  и любых  $k = 0, 1, 2, \dots$  справедливости оценки

$$\|(1 + \tau A_n)^{-k}\| \leq M e^{\omega k}, \quad (f)$$

$$\|\tau k A_n (1 + \tau A_n)^{-k}\| \leq M e^{\omega k},$$

а при  $k_n \tau_n \rightarrow t$  с  $\tau_n \rightarrow 0$  и  $k_n \rightarrow \infty$  имеют место сходимости

$$(1 + \tau_n A_n)^{-k_n} \rightarrow e^{-tA}, \quad t \in [0, T], \quad (g)$$

$$A_n (1 + \tau_n A_n)^{-k_n} \rightarrow A e^{-tA}, \quad t \in (0, T].$$

Справедлива, например, следующая

**Теорема 9.** Условия  $(A)$ ,  $(B')$  эквивалентны условию  $(C')$ .

**Доказательство.** Докажем импликацию  $(C') \Rightarrow (B')$ ,  $(A)$ . Воспользовавшись вещественным критерием аналитичности  $(B''')$ , немедленно получаем  $(B')$ . Условие  $(A)$  теперь будет доказано, если мы покажем, что операторы  $A_n$  и  $A$  согласованы. Известно (см. теорему 10.3.1 из [9]), что множество

$$X_0 = \bigcup_{0 < t < \infty} (e^{-tA} E)$$

плотно в  $E$ . Поэтому, согласно аналитичности полугруппы  $e^{-tA}$ , из сходимостей  $A_n (1 + \tau_n A_n)^{-k_n} \rightarrow A e^{-tA}$  и  $(1 + \tau_n A_n)^{-k_n} \rightarrow e^{-tA}$  получаем согласованность  $A_n$  и  $A$ . Для доказательства импликации  $(B')$ ,  $(A) \Rightarrow (C')$  достаточно воспользоваться замечанием 3 и теоремой 3. Сходимость  $A_n (1 + \tau_n A_n)^{-k_n} \rightarrow A e^{-tA}$ ,  $t \neq 0$ , легко следует из согласованности  $A_n$  и  $A$  и равномерной ограниченности операторов  $A_n (1 + \tau_n A_n)^{-k_n}$ . Теорема доказана.

Автор считает приятным долгом выразить свою глубокую благодарность проф. Г. М. Вайникко за ценные советы и помощь при написании данной работы.

## Литература

1. Вайникко Г. М., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Вайникко Г. М., Пискарев С., О регулярно согласованных операторах. Изв. высш. учеб. заведений. Математика, 1977, № 10, 25—36.
3. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
4. Иосида К., Функциональный анализ. Москва, 1967.
5. Като Т., Теория возмущений линейных операторов. Москва, 1972.
6. Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва, 1967.
7. Рихтмайер Р., Мортон К., Разностные методы решения краевых задач. Москва, 1972.
8. Соболевский П. Е., Теория полугрупп и устойчивость разностных схем. Теория операторов в функциональн. пространствах. Новосибирск, 1977, 304—337.
9. Хилле Э., Филлипс Р. С., Функциональный анализ и полугруппы. Москва, 1962.
10. Butzer, P. L., Berens, H., Semigroups of operators and approximation. Berlin/New York, Springer, 1967.
11. Goldstein, J. A., Semigroup-theoretic proofs of the central limit theorem and other theorems of analysis. Semigroup Forum, 1976, 12, № 3, 189—206.
12. Grigorief, R. D., Zur Theorie approximationsregulärer Operatoren. Math. Nachr., 1973, 55, 233—263.
13. Fujita, H., Mizutani, A., On the finite element method for parabolic equations. I; approximation of holomorphic semi-groups. J. Math. Soc. Japan, 1976, 28, N 4, 749—771.
14. Ladas, G. E., Lakshmikantham, V., Differential equations in abstract spaces. New York—London, 1972.
15. Strang, G., Approximating semigroups and the consistency of difference schemes. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 20, 1—7.
16. Stummel, F., Diskrete Konvergenz linearer Operatoren I. Math. Ann., 1970, 190, 45—92.
17. Stummel, F., Diskrete Konvergenz linearer Operatoren II. Math. Z., 1971, 120, 231—264.
18. Trotter, H. F., Approximation of semigroups of operators. Pacific J. Math., 1958, 8, 887—919.
19. Trotter, H. F., Approximation and perturbation of semigroups. Linear operators and approximation, 1974.
20. Ushijima, T., Approximation theory for semigroups of linear operators and its application to approximation of wave equations. Japan J. Math., 1975, 1, N 1, 185—224.
21. Ushijima, T., On the finite element approximation of parabolic equations. Memoirs of Numer. Math., 1975, 2, 21—34.
22. Vainikko, G., Funktionalanalysis der Diskretisierungsverfahren. Karl-Marx-Stadt, 1974.
23. Vainikko, G., Über Konvergenzbegriffe für lineare Operatoren in der Numerischen Mathematik. Math., Nachr., 1977, 78, 165—183.
24. Vainikko, G., Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem). Nonlinear Analysis. Theory, methods and appl., 1978, 2, № 6, 647—687.

Поступило  
25 IV 1978

# ABOUT THE APPROXIMATION OF HOLOMORPHIC SEMIGROUPS

S. Piskarjov

## Summary

This paper is devoted to approximation theory for parabolic problems. We reformulate the Trotter-Kato theorem for the holomorphic semigroups and use this result to investigate the forward and backward difference approximations. Stability condition for forward difference approximation in Banach space and error estimates for forward and backward methods are given.

Let  $E$  and  $E_n$  be Banach spaces. We assume that there exist continuous linear maps  $p_n: E \rightarrow E_n$ , such that  $\lim \|p_n x\| = \|x\|$  for every  $x \in E$ . We say that  $x_n \rightarrow x$  if  $\lim \|p_n x - x_n\| = 0$ . A sequence  $(B_n)$  of continuous operators  $B_n: E_n \rightarrow E_n$  is said  $P$ -converges to a continuous operator  $B: E \rightarrow E$ , whenever  $x_n \rightarrow x \Rightarrow B_n x_n \rightarrow Bx$ ; we write  $B_n \rightarrow B$ .

Consider abstract Cauchy problems (1) and (2) in  $E$  and  $E_n$  respectively, where  $A: E \rightarrow E$  and  $A_n: E_n \rightarrow E_n$  densely defined, closed linear operators with nonvoid resolvent sets. We shall henceforth assume that holomorphic semigroups  $e^{-tA}$  and  $e^{-tA}$  with infinitesimal generators  $-A$  and  $-A$  satisfy following conditions:

(A) There is a complex  $\lambda \in \cap \rho(-A_n) \cap \rho(-A)$  such that (a) holds;

(B) There are a constant  $M' \geq 1$  and a real number  $\omega'$  such that condition (c) holds;

(C) For some  $\Theta \in (0, \pi/2)$ , any finite  $\mu \geq 1$  and every  $x \in E$  condition (b) holds, whenever  $x_n \rightarrow x$ .

If  $A_n$  is bounded we can define the operator  $U_n(\tau) = 1 - \tau A_n$ . Let  $U_n(k\tau) = U_n(\tau)^k$  and  $U_n(t) = U_n([t/\tau_n]\tau_n)$ , where  $[m]$  denotes the integer part of  $m$ . Finally, introduce the following condition:

(C') For any  $0 \leq \tau \leq \tau^*$  and every  $k=1, 2, \dots$  condition (f) holds, and if  $k_n \tau_n \rightarrow t \in [0, T]$ , where  $\tau_n \rightarrow 0, k_n \rightarrow \infty$ , then condition (g) holds.

We are now in a position to state:

**Theorem 1.** The conditions (A) and (B) equivalent to (C).

**Theorem 2.** Suppose that conditions (A) and (B) are fulfilled and  $\| \tau_n A_n \| \leq \delta < 1/(M+2)$  holds, then (e) holds for any finite  $T \geq 0$ , whenever  $x_n \rightarrow x$ .

**Theorem 3.** Suppose that conditions (A) and (B) are fulfilled, then for  $x_n \in D((A_n + \omega)^{1-\alpha})$  and  $x \in D((A + \omega)^{1-\alpha})$  the condition (d) holds.

**Theorem 4.** The conditions (A) and (B) are equivalent to (C').

Also we give some other estimates which are concerned with exact solutions and full discretisation of problems (1) and (2), and discuss some conditions which are equivalent to (B).

## ОБ ОБРАТИМОСТИ ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ВИНЕРА—ХОПФА С ОПЕРАТОРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. Лепик

Тартуский государственный университет

В данной статье даются условия обратимости в  $l^2(Z, H)$  дискретного оператора Винера—Хопфа с операторными коэффициентами. С такими операторами мы естественным образом сталкиваемся при изучении многомерного дискретного уравнения Винера—Хопфа. По-видимому, такие операторы представляют и самостоятельный интерес.

### § 1. Результаты статьи

1. Рассмотрим оператор  $A_N$ :

$$A_N x = \sum_{|k| \leq N} A_k U^k x, \quad (1)$$

где  $x \in l^2(Z, H)$ , т. е.  $x = (x_i)$ ,  $x_i \in H$ ,  $\sum \|x_i\|_H^2 < \infty$ . Операторы  $A_k \in L(H, H)$  ( $k \in Z$ ) действуют в комплексном гильбертовом пространстве  $H$ , оператор сдвига  $U^k$  ( $k \in Z$ ) линейен и изометричен в  $l^2(Z, H)$ , он действует по формуле

$$(U^k x)_j = x_{j-k}, \quad j \in Z, \quad x \in l^2(Z, H).$$

Введем зависящий от параметра  $t \in R$  оператор  $\bar{A}_N(t) \in L(H, H)$  (так называемый символ оператора  $A_N$ ) соотношением

$$\bar{A}_N(t) = \sum_{|k| \leq N} A_k e^{ikt} \quad (t \in R). \quad (2)$$

**Лемма 1.** *Имеет место равенство*

$$\inf_{\|x\|=1} \|A_N x\|_{l^2(Z, H)} = \inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}_N(t) \xi\|_H. \quad (3)$$

**Лемма 2.** *Имеет место равенство*

$$\left\| \sum_{|k| \leq N} A_k U^k \right\| = \sup_{t \in R} \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k e^{ikt} \right\|. \quad (4)$$

Доказательства леммы 1 и леммы 2 будут даны в следующем параграфе.

2. Определим кольцо  $\mathfrak{A}$  действующих в  $l^2(Z, H)$  операторов со следующим свойством: для каждого  $A \in \mathfrak{A}$  и каждого  $\varepsilon > 0$  найдутся  $N = N(\varepsilon)$  и  $A_k = A_k(\varepsilon, N)$  такие, что

$$\|A - \sum_{|k| \leq N} A_k U^k\| < \varepsilon. \quad (5)$$

Символ оператора  $A$ , который обозначим через  $\bar{A}(t)$ , определим с помощью предельного процесса символов  $\bar{A}_N(t)$  таких операторов  $A_N$ , для которых  $\|A - A_N\| \rightarrow 0$ ; заметим, что в силу леммы 2 неравенство (5) равносильно неравенству

$$\sup_{t \in R} \|\bar{A}(t) - \sum_{|k| \leq N} A_k e^{ikt}\| < \varepsilon. \quad (6)$$

Ясно, что  $\mathfrak{A}$  содержит все операторы вида  $A = \sum_k A_k U^k$  с  $\sum \|A_k\| < \infty$ , а символом для такого оператора является  $\bar{A}(t) = \sum_k A_k e^{ikt}$  ( $t \in R$ ).

Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

**Теорема 1.** Для оператора  $A \in \mathfrak{A}$  справедливы равенства

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|_{l^2(Z, H)} = \inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}(t)\xi\|_H,$$

$$\|A\| = \sup_{t \in R} \|\bar{A}(t)\|.$$

**Доказательство.** Пусть

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| = \gamma \geq 0.$$

Тогда найдется  $x_\varepsilon \in l^2(Z, H)$  с  $\|x_\varepsilon\| = 1$ , что  $\|Ax_\varepsilon\| < \gamma + \varepsilon$ , и ввиду неравенства (5) найдется такой оператор  $A_N$ , что  $\|A_N x_\varepsilon\| < \gamma + 2\varepsilon$ . Из леммы 1 получим, что найдутся  $t_0 \in R$  и  $\xi_\varepsilon \in H$  с нормой  $\|\xi_\varepsilon\| = 1$ , такие что  $\|\bar{A}_N(t_0)\xi_\varepsilon\| < \gamma + 2\varepsilon$ . Учитывая неравенство (6), получим  $\|\bar{A}(t_0)\xi_\varepsilon\| < \gamma + 3\varepsilon$  и

$$\inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}(t)\xi\| \leq \|\bar{A}(t_0)\xi_\varepsilon\| < \inf_{\|x\|=1} \|Ax\| + 3\varepsilon.$$

Поскольку последнее неравенство справедливо при каждом  $\varepsilon > 0$ , то доказано, что

$$\inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}(t)\xi\| \leq \inf_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Рассуждая по такой же схеме, получим

$$\inf_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}(t)\xi\|.$$

Доказательство второго утверждения теоремы проводится аналогично, исходя из леммы 2. Теорема 1 доказана.

Пусть  $N(\bar{A}(t))$  — нулевое подпространство оператора  $\bar{A}(t)$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор  $A \in \mathfrak{A}$  и выполнены следующие условия:

1° оператор  $\bar{A}(t)$  при каждом  $t \in R$  фредгольмов с нулевым индексом;

2°  $N(\bar{A}(t)) = 0$  при каждом  $t \in R$ .

Тогда оператор  $A$  имеет ограниченный обратный оператор  $A^{-1} \in L(l^2(Z, H), l^2(Z, H))$ . Если выполнено условие 1°, то условие 2° необходимо для обратимости оператора  $A$ .

**Доказательство.** В силу теоремы 1 и условий 1° и 2°

$$\exists \gamma > 0: \|Ax\| \geq \gamma \|x\|, \quad x \in l^2(Z, H). \quad (7)$$

Символом сопряженного к  $A = \lim A_N$  оператора

$$A^* = \lim A_N^* = \lim \sum_{|k| \leq N} A_k^* U^{-k}$$

является

$$[\bar{A}(t)]^* = \lim \sum_{|k| \leq N} A_k^* e^{-ikt}$$

и из 1° и 2° вытекают такие же условия для оператора  $[\bar{A}(t)]^*$ . Ясно, что теорема 1 справедлива и для операторов  $A^*$  и  $[\bar{A}(t)]^*$ . Поэтому верно утверждение:

$$\exists \gamma_1 > 0: \|A^*x\| \geq \gamma_1 \|x\|, \quad x \in l^2(Z, H). \quad (8)$$

Известен факт, что из (7) и (8) следует обратимость оператора  $A$ . Теорема 2 доказана.

Теорема 2 распространяется и на кольцо  $\mathfrak{A}^m$  операторов, действующих в  $l^2(Z^m, H)$  и обладающих свойством (5) с  $U^k = U_1^{k_1} U_2^{k_2} \dots U_m^{k_m}$ ,  $A_k = A_{k_1 \dots k_m} \in L(H, H)$ ,  $|k| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_m|$ . Символ  $\bar{A}_N(t)$  для оператора вида (1) определяется формулой (2), где  $kt = k_1 t_1 + k_2 t_2 + \dots + k_m t_m$ , а для оператора  $A \in \mathfrak{A}^m$  общего вида определим его в предельном процессе.

Доказательство такого обобщения теоремы 2 основывается на повторном применении теоремы 1 и замечания, что  $l^2(Z^m, H) = l^2(Z, l^2(Z^{m-1}, H))$ .

3. Приложениям теорем 1 и 2 будет посвящена отдельная работа. Здесь в качестве иллюстративного примера рассмотрим оператор Винера—Хопфа в  $l^2(Z^m \times Z_+^2, C)$ , определенный для  $x = (x_{kj})_{k \in Z^m, j \in Z_+^2}$  формулой

$$(Ax)_{kj} = \sum_{k' \in Z^m} \sum_{j' \in Z_+^2} a_{k-k', j-j'} x_{k' j'} \quad (k \in Z^m, j \in Z_+^2); \quad (9)$$

ради простоты примем, что

$$\sum_{k \in Z^m} \sum_{j \in Z_+^2} |a_{kj}| < \infty.$$

Отождествляя  $l^2(Z^m \times Z_+^2, C)$  с  $l^2(Z^m, l^2(Z_+^2, C))$ , запишем  $A$  в виде

$$A = \sum_{k \in Z^m} A_k U^k,$$

где  $A_k \in L(l^2(Z_+^2, C), l^2(Z_+^2, C))$ ,

$$(A_k y)_j = \sum_{j' \in Z_+^2} a_{k, j-j'} y_{j'} \quad (j \in Z_+^2) \quad \text{для } y = (y_j)_{j \in Z_+^2}.$$

Символом оператора  $A$  является двумерный оператор Винера—Хопфа  $\bar{A}(t) = \sum A_k e^{ikt}$  на квадранте, фредгольмовость которого хорошо изучена (см. [5, 8]). Применение теоремы 2 (вернее ее обобщения на  $\mathfrak{A}^m$ ) дает следующий результат.

**Теорема 3.** *Для того, чтобы оператор  $A$ , определенный соотношением (9), был обратим в пространстве  $l^2(Z^m \times Z_+^2, C)$ , необходимы и достаточны следующие условия:*

$$1^\circ \quad a(t, \tau) = a(t; \tau_1, \tau_2) = \sum_{k \in Z^m} \sum_{j \in Z^2} a_{kj} e^{ikt} e^{ij\tau} \neq 0$$

при каждом  $t \in R^m, \tau \in R^2$ ;

$$2^\circ \quad \text{ind } a_1 = \frac{1}{2\pi} [\arg a(0; \tau_1, 0)]_{\tau_1=0}^{2\pi} = 0,$$

$$\text{ind } a_2 = \frac{1}{2\pi} [\arg a(0; 0, \tau_2)]_{\tau_2=0}^{2\pi} = 0;$$

3° при каждом  $t \in R^m$  уравнение  $\bar{A}(t)y = 0$  имеет в пространстве  $l^2(Z_+^2, C)$  лишь нулевое решение.

Достаточность вытекает из теоремы 2 и условий фредгольмовости двумерного оператора, а необходимость следует из свойств двумерного оператора и из теоремы 1.

4. Дискретные уравнения Винера—Хопфа в многомерном случае изучались во многих работах (см., например, [5, 7, 9, 11]). При  $H = C^n$  теорема 2 превращается в хорошо известную теорему об обратимости многомерного (одномерного при  $n = 1$ ) оператора Винера—Хопфа (см. [4]). Укажем также некоторые другие примышающие сюда работы, касающиеся в основном обратимости оператора Винера—Хопфа в полупространстве. В статьях [2, 3, 6] имеются результаты об обратимости в полупространстве  $l^p(Z^{n-1} \times Z^+, C)$ . В [1] даны условия обратимости в пространствах  $l^p(Z^+, H)$  через факторизацию символа в случае, когда  $A_0 = I$ , а  $A_k$  ( $k \neq 0$ ) вполне непрерывны. В [10] обобщены результаты работы [1], в частности, изучаются интегральные операторы с операторными символами, принимающими значения в пространстве операторов вида  $I + K$ , где  $I$  — единичный,  $K$  — вполне непрерывный оператор. Найдены также условия фредгольмовости в полупространстве. Аналогичные результаты (ср. [1]) о фредгольмовости интегральных операторов имеются в [13]. Интегральные уравнения с операторными символами изучаются еще в [12, 14].

## § 2. Доказательства лемм 1 и 2

Докажем справедливость равенства (3).

1. Покажем, что верно неравенство

$$\inf_{\|x\|=1} \|A_N x\| \leq \inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}_N(t) \xi\|. \quad (10)$$

Для фиксированного  $\varepsilon > 0$  выберем  $t_0 \in R$  и  $\xi_\varepsilon \in H$  с нормой  $\|\xi_\varepsilon\| = 1$ , такие что

$$\|\bar{A}_N(t_0) \xi_\varepsilon\| < \inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}_N(t) \xi\| + \varepsilon. \quad (11)$$

Определим элемент  $x_\varepsilon = ((x_\varepsilon)_k) \in l^2(Z, H)$  с координатами  $(x_\varepsilon)_k = e^{-|k|\delta} e^{-ik t_0} \xi_\varepsilon$ , где  $\delta > 0$ . Учитывая определение (1), вычислим

$$(A_N x_\varepsilon)_j = \sum_{|k| \leq N} A_k e^{-|j-k|\delta} e^{i(k-j)t_0} \xi_\varepsilon. \quad (12)$$

Наряду с  $A_N x_\varepsilon$  рассмотрим элемент  $y_\varepsilon = ((y_\varepsilon)_j)$  с координатами

$$(y_\varepsilon)_j = e^{-|j|\delta} e^{-ij t_0} \bar{A}_N(t_0) \xi_\varepsilon. \quad (13)$$

Вычислим нормы

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)} &= \left( \sum_j e^{-2|j|\delta} |e^{-2ij t_0}| \|\bar{A}_N(t_0) \xi_\varepsilon\|_H^2 \right)^{1/2} = \\ &= \|\bar{A}_N(t_0) \xi_\varepsilon\|_H \left( \sum_j e^{-2|j|\delta} \right)^{1/2} = \|\bar{A}_N(t_0) \xi_\varepsilon\|_H \left( \frac{1+e^{-2\delta}}{1-e^{-2\delta}} \right)^{1/2}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\|x_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)} = \left( \sum_k e^{-2|k|\delta} |e^{-2ik t_0}| \|\xi_\varepsilon\|_H^2 \right)^{1/2} = \left( \frac{1+e^{-2\delta}}{1-e^{-2\delta}} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

На следующем этапе доказательства мы покажем, что величина  $\|A_N x_\varepsilon - y_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)}$  мала. Во-первых, учитывая соотношения (12) и (13), оценим норму одной координаты

$$\begin{aligned} \|(A_N x_\varepsilon)_j - (y_\varepsilon)_j\|_H &= \\ &= \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k e^{-|j-k|\delta} e^{i(k-j)t_0} \xi_\varepsilon - \sum_{|k| \leq N} A_k e^{-|j|\delta} e^{i(k-j)t_0} \xi_\varepsilon \right\|_H \leq \\ &\leq \sum_{|k| \leq N} \|A_k\| |e^{-|j-k|\delta} - e^{-|j|\delta}| |e^{i(k-j)t_0}| \|\xi_\varepsilon\|_H \leq \\ &\leq \sum_{|k| \leq N} \|A_k\| ||j-k| - |j|| \delta e^{-\min\{|j|, |j-k|\}\delta} \leq \\ &\leq \delta \left( \sum_{|k| \leq N} |A_k| |k| \right) e^{-|j|\delta} e^{N\delta}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства получим оценку

$$\begin{aligned} \|A_N x_\varepsilon - y_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)} &\leq \left( \sum_j (\delta \sum_{|k| \leq N} \|A_k\| |k|) e^{-|j|\delta} e^{N\delta} \right)^{1/2} = \\ &= \delta e^{N\delta} \sum_{|k| \leq N} \|A_k\| |k| \left( \sum_j e^{-2|j|\delta} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq c\delta \left( \frac{1 + e^{-2\delta}}{1 - e^{-2\delta}} \right)^{1/2} \leq c_1 \delta / \sqrt{\delta} = c_1 \sqrt{\delta} \quad (c_1 = \text{const}). \end{aligned}$$

Последние неравенства верны в случае  $\delta < \delta_0$ , где  $\delta_0 > 0$  некоторое число, например,  $\delta_0 = 1/2$ . Тогда величина  $e^{N\delta}$  при каждом фиксированном  $N$  ограничена константой  $e^{N/2}$  и имеет место неравенство

$$\frac{1 + e^{-2\delta}}{1 - e^{-2\delta}} < \frac{2}{\delta}.$$

Поскольку мы будем рассматривать процесс  $\delta \rightarrow 0$ , то условие  $\delta < 1/2$  не является для нас ограничением.

В результате мы доказали, что, выбирая величину  $\delta > 0$  достаточно малой, элементы  $A_N x_\varepsilon$  и  $y_\varepsilon$  будут сколь угодно близкими, и, учитывая (14), получим, что при  $\delta \rightarrow 0$  имеет место сходимость

$$\|A_N x_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)} - \|\bar{A}_N(t_0) \xi_\varepsilon\|_H \left( \frac{1 + e^{-2\delta}}{1 - e^{-2\delta}} \right)^{1/2} \rightarrow 0. \quad (16)$$

Ввиду (15) и (16)

$$\frac{\|A_N x_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)}}{\|x_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)}} \rightarrow \|\bar{A}_N(t_0) \xi_\varepsilon\|_H \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (17)$$

Из (17) и (11), наконец, получим

$$\inf_{\|x\|=1} \|A_N x\| < \inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}_N(t) \xi\| + \varepsilon.$$

Поскольку последнее неравенство верно для каждого  $\varepsilon > 0$ , то этим завершено доказательство соотношения (10).

2. Покажем, что верно неравенство

$$\inf_{\|x\|=1} \|A_N x\| \geq \inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}_N(t) \xi\|. \quad (18)$$

Для фиксированного  $\varepsilon > 0$  выберем  $x_\varepsilon \in l^2(Z, H)$  с нормой  $\|x_\varepsilon\| = 1$ , такой что

$$\|A_N x_\varepsilon\| < \inf_{\|x\|=1} \|A_N x\| + \varepsilon. \quad (19)$$

Определим зависящий от параметра  $t \in R$  элемент

$$z_\varepsilon(t) = \sum_t e^{-|t|\delta} e^{-it} U^t x_\varepsilon \in l^2(Z, H), \quad \delta > 0. \quad (20)$$

Учитывая (1), (2) и (20), вычислим

$$(z_\varepsilon)_j(t) = \sum_l e^{-|l|\delta} e^{-itl} (x_\varepsilon)_{j-l}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_N(t) (z_\varepsilon)_j(t) &= \sum_{|k| \leq N} A_k e^{ikt} (z_\varepsilon)_j(t) = \\ &= \sum_{|k| \leq N} A_k \sum_l e^{-|l|\delta} e^{-it(l-k)} (x_\varepsilon)_{j-l}, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_N z_\varepsilon)_j(t) &= \sum_{|k| \leq N} A_k (z_\varepsilon)_{j-k}(t) = \sum_{|k| \leq N} A_k \sum_l e^{-|l|\delta} e^{-itl} (x_\varepsilon)_{j-k-l} = \\ &= \sum_{|k| \leq N} A_k \sum_l e^{-|l-k|\delta} e^{-it(l-k)} (x_\varepsilon)_{j-l}. \quad (23) \end{aligned}$$

Функции  $(z_\varepsilon)_j(t)$ ,  $\bar{A}_N(t) (z_\varepsilon)_j(t)$  и  $(A_N z_\varepsilon)_j(t)$  являются  $2\pi$ -периодичными по  $t$ , и мы рассмотрим их как элементы пространства  $L_2(H)$ , но при фиксированном  $t$  и как элементы пространства  $H$ . Норма в пространстве  $L_2(H)$  определена как

$$\|x(t)\|_{L_2(H)} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|x(t)\|_H^2 dt \right)^{1/2}, \quad x \in L_2(H). \quad (24)$$

Учитывая линейность оператора  $A_N$ , перестановочность операторов  $A_N$  и  $U^k$  и соотношение (20), выпишем равенство

$$(A_N z_\varepsilon)_j(t) = \sum_l e^{-|l|\delta} e^{-itl} (A_N x_\varepsilon)_{j-l}. \quad (25)$$

На основании (21), (24) и (25) вычислим нормы

$$\begin{aligned} \|(A_N z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)} &= \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l, l'} e^{-(|l|+|l'|\delta)} e^{-it(l-l')} ((A_N x_\varepsilon)_{j-l}, (A_N x_\varepsilon)_{j-l'}) dt \right)^{1/2} = \\ &= \left( \sum_l e^{-2|l|\delta} \|(A_N x_\varepsilon)_{j-l}\|_H^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\|(z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)} = \left( \sum_l e^{-2|l|\delta} \|(x_\varepsilon)_{j-l}\|_H^2 \right)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\|(A_N z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)} \rightarrow \|A_N x_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0, \quad (26)$$

$$\|(z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)} \rightarrow \|x_\varepsilon\|_{l^2(Z, H)} = 1 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (27)$$

Теперь покажем, что величина

$$\Delta = \|\bar{A}_N(t) (z_\varepsilon)_j(t) - (A_N z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)}$$

мала. Ввиду (22) и (23)

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k \sum_l (e^{-|l|\delta} - e^{-|l-k|\delta}) e^{-it(l-k)} (x_\varepsilon)_{j-l} \right\|_{L_2(H)} \leq \\ &\leq \sum_{|k| \leq N} \|A_k\| \sum_l |e^{-|l|\delta} - e^{-|l-k|\delta}| \| (x_\varepsilon)_{j-l} \|_H \leq \\ &\leq \sum_{|k| \leq N} \|A_k\| |k| \delta \sum_l e^{-\min\{|l|, |l-k|\}\delta} \| (x_\varepsilon)_{j-l} \|_H. \end{aligned}$$

Используя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \sum_{|k| \leq N} \|A_k\| |k| \delta \left( \sum_l e^{-2\min\{|l|, |l-k|\}\delta} \right)^{1/2} \|x_\varepsilon\|_{L_2(Z, H)} \leq \\ &\leq \sum_{|k| \leq N} \|A_k\| |k| \delta \sqrt{2} \left( \frac{1 + e^{-2\delta}}{1 - e^{-2\delta}} \right)^{1/2} \leq c \sqrt{\delta} \quad (c = \text{const}; \delta < 1/2). \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что выбирая величину  $\delta > 0$  достаточно малой, элементы  $\bar{A}_N(t)(z_\varepsilon)_j(t)$  и  $(A_N z_\varepsilon)_j(t)$  будут сколь угодно близкими в  $L_2(H)$ .

Из (26) получим

$$\|\bar{A}_N(t)(z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)} \rightarrow \|A_N x_\varepsilon\|_{L_2(Z, H)} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (28)$$

Ввиду (27) и (28) имеет место сходимость

$$\frac{\|\bar{A}_N(t)(z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)}}{\|(z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)}} \rightarrow \|A_N x_\varepsilon\|_{L_2(Z, H)} \quad \text{при } \delta \rightarrow 0. \quad (29)$$

Очевидно, справедливо неравенство

$$\inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}_N(t)\xi\|_H \leq \frac{\|\bar{A}_N(t)(z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)}}{\|(z_\varepsilon)_j(t)\|_{L_2(H)}}. \quad (30)$$

Действительно, интегрируя неравенство

$$\|\bar{A}_N(t)(z_\varepsilon)_j(t)\|_H^2 \geq \inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|_H=1} \|\bar{A}_N(t)\xi\|^2 \cdot \|(z_\varepsilon)_j(t)\|_H^2$$

по переменной  $t$  от нуля до  $2\pi$ , сразу получим (30). Учитывая неравенства (19) и (30), имеем

$$\inf_{t \in R} \inf_{\|\xi\|=1} \|\bar{A}_N(t)\xi\|_H < \inf_{\|x\|=1} \|A_N x\| + \varepsilon.$$

Поскольку последнее неравенство верно для каждого  $\varepsilon > 0$ , то этим доказано соотношение (18). Неравенства (10) и (18) дают нам утверждение леммы 1.

3. Докажем равенство (4). Сначала покажем, что верно неравенство

$$\left\| \sum_{|k| \leq N} A_k U^k \right\| \geq \sup_{t \in R} \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k e^{iht} \right\|. \quad (31)$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем  $t_0 \in R$ ,  $\xi_\varepsilon \in H$  с нормой  $\|\xi_\varepsilon\| = 1$ , такие что

$$\|\bar{A}_N(t_0)\xi_\varepsilon\| > \sup_{t \in R} \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k e^{iht} \right\| - \varepsilon. \quad (32)$$

Определим элемент  $x_\varepsilon = ((x_\varepsilon)_k) \in l^2(Z, H)$  с координатами  $(x_\varepsilon)_k = e^{-|k|\delta} e^{-ikt} \xi_\varepsilon$ , т. е. точно так же как в доказательстве неравенства (10). Повторяя рассуждения пункта 1, получим, что имеет место сходимость (17). Из (17) и (32) следует

$$\sup_{\|x\|=1} \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k U^k x \right\| > \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k e^{ikt} \right\| - \varepsilon,$$

и поскольку неравенство верно для каждого  $\varepsilon > 0$ , то имеет место (31).

Докажем теперь неравенство

$$\left\| \sum_{|k| \leq N} A_k U^k \right\| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k e^{ikt} \right\|. \quad (33)$$

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$  и выберем  $x_\varepsilon \in l^2(Z, H)$  с нормой  $\|x_\varepsilon\| = 1$ , такой что

$$\left\| \sum_{|k| \leq N} A_k U^k x_\varepsilon \right\| > \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k U^k \right\| - \varepsilon. \quad (34)$$

Определим элемент  $z_\varepsilon(t)$  точно так же, как в пункте 2 (см. (20)). Повторяя теперь рассуждения пункта 2, получим сходимость (29). Из соотношений (29) и (34) следует

$$\left\| \sum_{|k| \leq N} A_k e^{ikt} \right\|_{L_2(H) \rightarrow L_2(H)} > \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k U^k \right\| - \varepsilon.$$

Отсюда по определению нормы сразу получим

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k e^{ikt} \right\|_{H \rightarrow H} > \left\| \sum_{|k| \leq N} A_k U^k \right\| - \varepsilon$$

и поскольку это верно для каждого  $\varepsilon > 0$ , то неравенство (33) доказано. Этим завершено доказательство леммы 2.

## Литература

1. Будяну М. С., Решение некоторых классов уравнений Винера—Хопфа с операторными коэффициентами. Изв. АН МССР, 1966, № 4, 18—31.
2. Гольденштейн Л. С., Дискретный аналог многомерного интегрального уравнения Винера—Хопфа. Мат. исследования (Кишинев), 1967, 2, № 3, 52—63.
3. Гольденштейн Л. С., Гохберг И. Ц., О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов, и его дискретном аналоге. Докл. АН СССР, 1960, 131, № 2, 9—12.
4. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. Москва, 1971.
5. Дуглас Р. Г., Хоув Р.,  $C^*$ -алгебра теплицевых операторов в квадрате. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1973, 17, № 5, 67—81.
6. Дудучава Р. В., О многомерных уравнениях в свертках, составленных из коэффициентов Фурье разрывных функций. Сообщ. АН ГрузССР, 1974, 74, № 2, 277—280.

7. Дудучава Р. В., Дискретные операторы свертки на квадранте и их индексы. Изв. АН СССР, сер. матем., 1977, 41, № 5, 1125—1137.
8. Лепик Р., О фредгольмовости двумерного оператора Винера—Хопфа. Материалы республиканской конференции СНО (Тарту), 1977, 1, 72—78.
9. Малышев В. А., Уравнение Винера—Хопфа в четверти плоскости, дискретные группы и автоморфные функции. Матем. сб., 1971, 84, № 4, 499—525.
10. Рабинович В. С., Многомерные уравнения типа свертки с операторным символом. Теория функций, функц. анализ и их прил., Респ. межвед. темат. науч. сб., 1974, № 19, 44—53.
11. Симоненко И. Б., О многомерных дискретных свертках. Мат. исследования (Кишинев), 1968, 3, № 1, 108—122.
12. Фельдман И. А., Операторные уравнения Винера—Хопфа и их приложения к уравнению переноса. Мат. исследования (Кишинев), 1971, 6, № 3, 115—132.
13. Фельдман И. А., О некоторых проекционных методах решения уравнения переноса лучистой энергии. Мат. исследования (Кишинев), 1972, 7, № 4, 228—236.
14. Фельдман И. А., Об уравнениях Винера—Хопфа со слабо интегрируемыми операторными ядрами. Мат. исследования (Кишинев), 1973, 8, № 4, 101—110.

Поступило  
4 IV 1978

## ON THE INVERTIBILITY OF DISCRETE WIENER—HOPF OPERATORS WITH OPERATOR COEFFICIENTS

R. Lepik

### Summary

In the present paper the conditions of invertibility for discrete Wiener—Hopf operators with operator coefficients are found. A new approach, which uses elementary means and enables us to strengthen or extend the known results, is applied. The main conclusions are given in Theorems 1 and 2.

## О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ МНОГОМЕРНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ВИНЕРА—ХОПФА

Р. Лепик

Тартуский государственный университет

В данной работе мы продолжим изучение многомерных операторов Винера—Хопфа, начатое в статье [8]. Результаты о фредгольмовости многомерного оператора Винера—Хопфа имеются в статьях [3, 4], но лишь в виде заметок. Для полисингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами результаты такого рода имеются в [5]. Цель данной работы дать прямое доказательство, использующее совершенно элементарные средства.

### § 1. Результаты статьи

Определим линейный и ограниченный оператор, действующий в пространстве  $l^2(Z^n)$ , соотношением

$$A = \sum_{j \in Z^n} a_j U^j, \quad (1)$$

где  $a_j$  ( $j \in Z^n$ ) заданные комплексные числа, такие что

$$\sum_{j \in Z^n} |a_j| < \infty, \quad (2)$$

операторы сдвига  $U^j$  ( $j \in Z^n$ ) действуют по правилу

$$(U^j x)(k) = x(k - j), \quad k \in Z^n, \quad x \in l^2(Z^n),$$

$Z^n$  — целочисленная сетка в  $R^n$ . Для любого множества  $D \subset Z^n$  под  $l^2(D)$  понимается подпространство сеточных функций, имеющих носитель в  $D$ , для которых конечна норма

$$\|x\|_{l^2(D)} = \left( \sum_{j \in D} |x(j)|^2 \right)^{1/2};$$

соответствующий естественный проектор обозначим через  $P_D$ . Определим функцию (так называемый символ оператора  $A$ )

$$a(t) = \sum_{j \in Z^n} a_j e^{ijt} \quad (t \in R^n, \quad jt = j_1 t_1 + \dots + j_n t_n),$$

которая будет непрерывной по совокупности переменных  $t_1, \dots, t_n$  и  $2\pi$ -периодической по каждому из них. Определим также множество

$$Z_+^n = \{j = (j_1, \dots, j_n) \in Z^n: 0 \leq j_i < \infty, i = 1, \dots, n\}.$$

Для любого  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  с  $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) обозначим

$$Z_\sigma^n = \{j \in Z^n: 0 \leq \sigma_i j_i < \infty, i = 1, \dots, n\}.$$

Заметим, что если  $\sigma_i = 0$ , то  $j_i$  принимает все целочисленные значения. Будем также пользоваться сокращенными обозначениями

$$P_+ = P_{Z_+^n}, \quad P_\sigma = P_{Z_\sigma^n}.$$

Пользуясь введенными обозначениями, запишем оператор Винера—Хопфа в виде  $P_+ A: l^2(Z_+^n) \rightarrow l^2(Z_+^n)$ . Переходим к формулировке основного результата статьи.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы оператор  $P_+ A$  был фредгольмов с нулевым индексом, необходимы и достаточны следующие условия:*

1°  $a(t) = a(t_1, \dots, t_n) \neq 0, t \in R^n;$

2°  $\text{ind } a_1 = \frac{1}{2\pi} [\arg a(t_1, 0, \dots, 0)]_{t_1=0}^{2\pi} = 0,$

$\dots$   
 $\text{ind } a_n = \frac{1}{2\pi} [\arg a(0, \dots, 0, t_n)]_{t_n=0}^{2\pi} = 0;$

3° *при любом разбиении множества индексов  $\{1, \dots, n\}$  на два непересекающиеся подмножества  $\{k_1, \dots, k_r\}$  и  $\{l_1, \dots, l_s\}$  с  $r \geq 1, s \geq 2$  и  $r + s = n$  и при любых  $t_{k_1}, \dots, t_{k_r}$  из  $R$   $s$ -мерное однородное уравнение Винера—Хопфа*

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{k_1 \dots k_r}(t_{k_1}, \dots, t_{k_r})x \equiv \\ & \equiv P_{Z_+^s} \sum_{j \in Z^n} a_j e^{i j_{k_1} t_{k_1}} \dots e^{i j_{k_r} t_{k_r}} U_{l_1}^{j_{l_1}} \dots U_{l_s}^{j_{l_s}} x = 0 \end{aligned}$$

*имеет в пространстве  $l^2(Z_+^s)$  лишь нулевое решение.*

При  $n = 1$  и  $n = 2$  условие 3° отпадает (формально это соответствует тому, что при  $n = 1$  и  $n = 2$  не существует разбиений  $\{1, \dots, n\}$  с указанными в 3° свойствами). Для  $n = 1$  соответствующая формулировка теоремы 1 имеется в [2], а для  $n = 2$  в [3, 6, 7]. Отметим, что при  $n \geq 3$  условие 3° не следует из условий 1° и 2°. Мы не встречали в литературе формулировки теоремы 1 в случае  $n \geq 3$ , однако некоторые замечания об этом случае имеются в [3, 4].

Основной при доказательстве достаточности условий теоремы 1 служит следующая лемма.

**Лемма 1.** Пусть выполнены условия  $1^\circ-3^\circ$ , и пусть  $(x_i)$  такая последовательность, что

$$x_i \in l^2(Z_+^n), \quad \|x_i\| = 1, \quad \|P_+ A x_i\| \rightarrow 0. \quad (3)$$

Тогда последовательность  $(x_i)$  компактна в  $l^2(Z^n)$ .

Доказательство леммы 1 в двумерном случае имеется в [7], в трехмерном и в общем случае будет дано в параграфах 2 и 3 (доказательство проводится индукцией по  $n$ ). Доказательство теоремы 1 дадим в параграфе 4.

## § 2. Доказательство леммы 1 в трехмерном случае

1. Введем для любых  $D \subset Z^n$ ,  $\eta > 0$  линейный оператор  $B_{D,\eta}: l^2(Z^n) \rightarrow l^2(Z^n)$ , действующий по формуле

$$(B_{D,\eta}x)(j) = e^{-\eta d(j,D)}x(j), \quad j \in Z^n, \quad x \in l^2(Z^n),$$

где расстояние

$$d(j,D) = \inf_{k \in D} |j-k| \quad (|j| := |j_1| + \dots + |j_n|).$$

Для конечного множества  $D \subset Z^n$  оператор  $B_{D,\eta}: l^2(Z^n) \rightarrow l^2(Z^n)$  вполне непрерывен. Далее, ясно, что для любых  $D, D' \subset Z^n$  имеем

$$\|B_{D,\eta}\| = 1, \quad P_{D'} B_{D,\eta} = B_{D,\eta} P_{D'}, \quad \|P_{D'} B_{D,\eta}\| = e^{-\eta d(D,D')}, \quad (4)$$

где

$$d(D',D) = \sup_{j \in D'} \inf_{k \in D} |j-k|.$$

Если  $D^1, \dots, D^l$  — непересекающиеся подмножества  $Z^n$ , а  $D$  — их объединение,  $d(D^i, D^{i'}) \geq 2r$  при  $i \neq i'$  ( $i, i' = 1, \dots, l$ ), то

$$\|B_{D,\eta} - \sum_{i=1}^l B_{D^i,\eta}\| \leq (l-1)e^{-\eta r}. \quad (5)$$

Наконец,

$$\sup_{D \subset Z^n} \|A B_{D,\eta} - B_{D,\eta} A\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow 0. \quad (6)$$

Доказательства соотношений (5) и (6) имеются в [1].

2. Зададим сколь угодно малое  $\varepsilon > 0$  и выберем  $\eta > 0$  так, что (см. (6))

$$\sup_{D \subset Z^3} \|A B_{D,\eta} - B_{D,\eta} A\| \leq \varepsilon, \quad (7)$$

затем выберем достаточно большое  $r$ , чтобы выполнялись неравенства (см. (2))

$$e^{-\eta r} \leq \varepsilon, \quad \sum_{|j| \geq r} |a_j| \leq \varepsilon. \quad (8)$$

В  $Z^3$  рассмотрим множества

$$\begin{aligned} D &= \{j \in Z^3: 0 \leq j_i \leq 3r, i = 1, 2, 3\}, \\ D^1 &= \{j \in Z^3: 3r < j_1 < \infty, 0 \leq j_2 \leq 2r, 0 \leq j_3 \leq 2r\}, \\ D^2 &= \{j \in Z^3: 0 \leq j_1 \leq 2r, 3r < j_2 < \infty, 0 \leq j_3 \leq 2r\}, \\ D^3 &= \{j \in Z^3: 0 \leq j_1 \leq 2r, 0 \leq j_2 \leq 2r, 3r < j_3 < \infty\}, \\ D^{(1)} &= D^1 \cup D^2 \cup D^3, \\ D^{12} &= \{j \in Z^3: 2r < j_1 < \infty, 2r < j_2 < \infty, 0 \leq j_3 \leq r\}, \\ D^{13} &= \{j \in Z^3: 2r < j_1 < \infty, 0 \leq j_2 \leq r, 2r < j_3 < \infty\}, \\ D^{23} &= \{j \in Z^3: 0 \leq j_1 \leq r, 2r < j_2 < \infty, 2r < j_3 < \infty\}, \\ D^{(2)} &= D^{12} \cup D^{13} \cup D^{23}. \end{aligned}$$

Имеем  $d(D^k, D^{k'}) \geq 2r$  при  $k \neq k'$ , и из (5) и (8) вытекает

$$\|B_{D^{(0)}, \eta} - (B_{D^1, \eta} + B_{D^2, \eta} + B_{D^3, \eta})\| \leq 2\varepsilon. \quad (9)$$

Аналогично получаем

$$\|B_{D^{(2)}, \eta} - (B_{D^{12}, \eta} + B_{D^{13}, \eta} + B_{D^{23}, \eta})\| \leq 2\varepsilon. \quad (10)$$

Пусть  $(x_i)$  — последовательность со свойствами (3). Сопоставим ей последовательности  $(x_i^1)$ ,  $(x_i^2)$  и  $(x_i^3)$  по формулам

$$x_i^1 := x_i - B_{D, \eta} x_i, \quad (11)$$

$$x_i^2 := x_i^1 - B_{D^{(0)}, \eta} x_i^1, \quad (12)$$

$$x_i^3 := x_i^2 - B_{D^{(2)}, \eta} x_i^2. \quad (13)$$

Последовательность  $(B_{D, \eta} x_i)$  компактна ввиду конечности множества  $D$ . Цель дальнейших выкладок — доказать неравенство  $\|x_i^1\| \leq c\varepsilon$  с некоторой независимой от  $i$  и  $\varepsilon$  постоянной  $c$ . Тогда ввиду (11) последовательность  $(x_i)$  будет  $c\varepsilon$ -близкой компактной последовательностью  $(B_{D, \eta} x_i)$  и ввиду произвольности  $\varepsilon$  будет сама компактной, что и утверждается в лемме.

Имеем

$$\|x_i^1\| \leq \|x_i\| = 1, \|x_i^2\| \leq \|x_i^1\| \leq 1, \|x_i^3\| \leq \|x_i^2\| \leq 1. \quad (14)$$

На основании (3), (4), (7) и (14) из (11), (12) и (13) находим<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \|P_+ A x_i^1\| &\leq \|P_+ A x_i\| + \|P_+ A B_{D, \eta} x_i\| \leq \\ &\leq \|P_+ A x_i\| + \|B_{D, \eta} P_+ A x_i\| + \varepsilon \|x_i\| \leq 2\varepsilon, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\|P_+ A x_i^2\| \leq \|P_+ A x_i^1\| + \|B_{D^{(0)}, \eta} P_+ A x_i^1\| + \varepsilon \|x_i^1\| \leq 5\varepsilon, \quad (16)$$

$$\|P_+ A x_i^3\| \leq \|P_+ A x_i^2\| + \|B_{D^{(2)}, \eta} P_+ A x_i^2\| + \varepsilon \|x_i^2\| \leq 11\varepsilon. \quad (17)$$

Носитель функции  $x_i^3$  содержится в области  $\{j \in Z^3: r < j_k < \infty, k = 1, 2, 3\}$  и его расстояние до октанта  $Z^3_{-1,1,1}$  превышает  $r$ . Тогда  $P_{-1,1,1} U^j x_i^3 = 0$  при  $|j| \leq r$ , т. е.

$$P_{-1,1,1} A x_i^3 = P_{-1,1,1} \sum_{|j| > r} a_j U^j x_i^3,$$

и в силу (8) и (14)

$$\|P_{-1,1,1} A x_i^3\| \leq \sum_{|j| > r} |a_j| \|x_i^3\| \leq \varepsilon.$$

<sup>1</sup> В § 2 и § 3, если не сказано противное,  $i \geq i_0$ , где  $i_0$  — некоторое число.

Совместно с (17) это дает (имея в виду, что  $P_+ = P_{1,1,1}$ )

$$\|P_{0,1,1}Ax_i^3\| \leq \|P_+Ax_i^3\| + \|P_{-1,1,1}Ax_i^3\| \leq 12\varepsilon.$$

В условиях 1°—3° оператор  $P_{0,1,1}A : l^2(Z_{0,1,1}^3) \rightarrow l^2(Z_{0,1,1}^3)$  непрерывно обратим (см. [8], теорема 3), и из последнего неравенства получаем

$$\|x_i^3\| \leq 12\alpha_1\varepsilon \quad \alpha_1 = \|(P_{0,1,1}A)^{-1}\|. \quad (18)$$

Оценим  $B_{D^{k,1}, \eta}x_i^2$ ,  $1 \leq k < j \leq 3$ . Представим  $B_{D^{k,1}, \eta}x_i^2$  в виде  $B_{D^{k,1}, \eta}x_i^2 = u_i^2 + v_i^2$ ,  $u_i^2 = P_{G_1}(B_{D^{k,1}, \eta}x_i^2)$ ,  $v_i^2 = P_{Z \setminus G_1}(B_{D^{k,1}, \eta}x_i^2)$ , (19)

где  $G_1 = \{j \in Z^3: 0 \leq j_1 \leq r, 0 \leq j_2 < \infty, 0 \leq j_3 < \infty\}$ . Поскольку  $d(D^{12}, G_1) > r$ , то из (4), (8), (14) и (19) получаем

$$\|u_i^2\| \leq e^{-nr} \|x_i^2\| \leq \varepsilon. \quad (20)$$

Расстояние между  $Z_{-1,1,1}^3$  и носителем  $v_i^2$  превосходит  $r$ , поэтому

$$P_{-1,1,1}Av_i^2 = P_{-1,1,1} \sum_{|j| > r} a_j U^j v_i^2, \\ \|P_{-1,1,1}Av_i^2\| \leq \sum_{|j| > r} |a_j| \|v_i^2\| \leq \varepsilon \|v_i^2\| \leq \varepsilon.$$

С другой стороны, на основании (19), (7), (16) и (20)

$$\|P_+Av_i^2\| \leq \|P_+AB_{D^{k,1}, \eta}x_i^2\| + \|P_+Au_i^2\| \leq \\ \leq \|B_{D^{k,1}, \eta}P_+Ax_i^2\| + \varepsilon \|x_i^2\| + \|P_+Au_i^2\| \leq (6 + \|A\|)\varepsilon,$$

поэтому

$$\|P_{0,1,1}Av_i^2\| \leq \|P_+Av_i^2\| + \|P_{-1,1,1}Av_i^2\| \leq (7 + \|A\|)\varepsilon, \\ \|v_i^2\| \leq \alpha_1(7 + \|A\|)\varepsilon.$$

Совместно с (19) и (20) отсюда получаем

$$\|B_{D^{k,1}, \eta}x_i^2\| \leq [\alpha_1(7 + \|A\|) + 1]\varepsilon.$$

Аналогично оценим

$$\|B_{D^{13}, \eta}x_i^2\| \leq [\alpha_1(7 + \|A\|) + 1]\varepsilon, \\ \|B_{D^{23}, \eta}x_i^2\| \leq [\alpha_2(7 + \|A\|) + 1]\varepsilon, \quad \alpha_2 = \|(P_{1,0,1}A)^{-1}\|.$$

Совместно с (10) из последних трех неравенств получаем

$$\|B_{D^{(2)}, \eta}x_i^2\| \leq [(2\alpha_1 + \alpha_2)(7 + \|A\|) + 5]\varepsilon. \quad (21)$$

Учитывая соотношения (13), (18) и (21),

$$\|x_i^2\| \leq c\varepsilon, \quad c = (2\alpha_1 + \alpha_2)(7 + \|A\|) + 12\alpha_1 + 5. \quad (22)$$

Оценим  $B_{D^k, \eta}x_i^1$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Представим  $B_{D^k, \eta}x_i^1$  в виде  $B_{D^k, \eta}x_i^1 = u_i^1 + v_i^1$ ,  $u_i^1 = P_{G_1}(B_{D^k, \eta}x_i^1)$ ,  $v_i^1 = P_{Z \setminus G_1}(B_{D^k, \eta}x_i^1)$ . (23)

Поскольку опять  $d(D^1, G_1) > r$ , то

$$\|u_i^1\| \leq e^{-nr} \|x_i^1\| \leq \varepsilon. \quad (24)$$

Расстояние между  $Z_{-1,1,1}^3$  и носителем  $v_i^1$  превосходит  $r$ , поэтому

$$P_{-1,1,1}Av_i^1 = P_{-1,1,1} \sum_{|j|>r} a_j U^j v_i^1,$$

$$\|P_{-1,1,1}Av_i^1\| \leq \sum_{|j|>r} |a_j| \|v_i^1\| \leq \varepsilon \|v_i^1\| \leq \varepsilon.$$

С другой стороны, на основании (23), (7), (15) и (24)

$$\|P_+Av_i^1\| \leq \|P_+AB_{D^1,\eta}x_i^1\| + \|P_+Au_i^1\| \leq$$

$$\leq \|B_{D^1,\eta}P_+Ax_i^1\| + \varepsilon \|x_i^1\| + \|P_+Au_i^1\| \leq (3 + \|A\|)\varepsilon,$$

поэтому

$$\|P_{0,1,1}Av_i^1\| \leq \|P_+Av_i^1\| + \|P_{-1,1,1}Av_i^1\| \leq (4 + \|A\|)\varepsilon,$$

$$\|v_i^1\| \leq \alpha_1(4 + \|A\|)\varepsilon.$$

Совместно с (23) и (24) отсюда получаем

$$\|B_{D^1,\eta}x_i^1\| \leq [\alpha_1(4 + \|A\|) + 1]\varepsilon.$$

Аналогично оценим

$$\|B_{D^2,\eta}x_i^1\| \leq [\alpha_2(4 + \|A\|) + 1]\varepsilon,$$

$$\|B_{D^3,\eta}x_i^1\| \leq [\alpha_3(4 + \|A\|) + 1]\varepsilon, \quad \alpha_3 = \|(P_{1,1,0}A)^{-1}\|.$$

Учитывая (9), из последних трех неравенств получаем

$$\|B_{D^{(0)},\eta}x_i^1\| \leq [(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(4 + \|A\|) + 5]\varepsilon. \quad (25)$$

На основании (12), (22) и (25) утверждаем

$$\|x_i^1\| \leq c_1\varepsilon,$$

где  $c_1 = c + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(4 + \|A\|) + 5$ . Этим завершено доказательство леммы 1 в трехмерном случае.

### § 3. Доказательство леммы 1 в общем случае

Будем считать, что вопрос о фредгольмовости  $(n - 1)$ -мерного оператора Винера—Хопфа решен. Прделаем теперь переход на  $n$ -мерный случай. Для этого нам нужны условия обратимости операторов типа  $P_{0,1,\dots,1}A : l^2(Z^{n_{0,1,\dots,1}}) \rightarrow l^2(Z^{n_{0,1,\dots,1}})$ . Из теоремы 2 работы [8] мы знаем, что в условиях  $1^\circ - 3^\circ$  такие операторы непрерывно обратимы.

Зададим сколь угодно малое  $\varepsilon > 0$  и выберем  $\eta > 0$  так, что

$$\sup_{D \subset Z^n} \|AB_{D,\eta} - B_{D,\eta}A\| \leq \varepsilon, \quad (26)$$

затем выберем достаточно большое  $r$ , чтобы выполнялись неравенства (8). В  $Z^n$  для каждого  $m = 0, \dots, n - 1$  и  $k_1, \dots, k_m$ ,  $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$  рассмотрим множества

$$D^{k_1, \dots, k_m} = \{j \in Z^n : (n - m + 1)r < j_i < \infty, i \in \{k_1, \dots, k_m\},$$

$$0 \leq j_i \leq (n - m)r, i \notin \{k_1, \dots, k_m\}\}.$$

Для каждого  $m = 1, \dots, n-1$  обозначим через  $D^{(m)}$  объединение множеств  $D^{k_1 \dots k_m}$  по всем комплектам  $k_1, \dots, k_m$ , где

$$1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n.$$

Имеем  $d(D^{k_1 \dots k_m}, D^{l_1 \dots l_m}) \geq 2r$  при  $(k_1, \dots, k_m) \neq (l_1, \dots, l_m)$  и каждом  $m = 1, \dots, n-1$ , из (5) и (8) получим

$$\|B_{D^{(m)}, \eta} - \sum B_{D^{k_1 \dots k_m}, \eta}\| \leq \left( \frac{n!}{(n-m)!m!} - 1 \right) \varepsilon. \quad (27)$$

Пусть  $(x_i)$  — последовательность со свойствами (3). Сопоставим ей последовательности  $(x_i^1), \dots, (x_i^n)$  по формулам

$$x_i^1 = x_i - B_{D, \eta} x_i, \quad (28)$$

$$x_i^2 = x_i^1 - B_{D^{(1)}, \eta} x_i^1, \quad (29)$$

$$x_i^3 = x_i^2 - B_{D^{(2)}, \eta} x_i^2, \quad (30)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$x_i^{m+1} = x_i^m - B_{D^{(m)}, \eta} x_i^m, \quad m = 3, \dots, n-1. \quad (31)$$

Последовательность  $(B_{D, \eta} x_i)$  компактна ввиду конечности множества  $D$ . Опять мы должны доказать неравенство  $\|x_i^1\| \leq c\varepsilon$  с некоторой независимой от  $i$  и  $\varepsilon$  постоянной  $c$ . Тогда последовательность  $(x_i)$  будет  $c\varepsilon$ -близкой компактной последовательностью  $(B_{D, \eta} x_i)$  и ввиду произвольности  $\varepsilon$  будет сама компактной, что и утверждается в лемме.

Имеем

$$\|x_i^m\| \leq \|x_i\| = 1 \quad (m = 1, \dots, n). \quad (32)$$

На основании (3), (4), (26) и (32) находим из (28)–(31)

$$\|P_+ A x_i^1\| \leq \|P_+ A x_i\| + \|P_+ A B_{D, \eta} x_i\| \leq$$

$$\leq \|P_+ A x_i\| + \|B_{D, \eta} P_+ A x_i\| + \varepsilon \|x_i\| \leq 2\varepsilon,$$

$$\|P_+ A x_i^2\| \leq \|P_+ A x_i^1\| + \|B_{D^{(1)}, \eta} P_+ A x_i^1\| + \varepsilon \|x_i^1\| \leq 5\varepsilon,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\|P_+ A x_i^{m+1}\| \leq \|P_+ A x_i^m\| + \|B_{D^{(m)}, \eta} P_+ A x_i^m\| + \varepsilon \|x_i^m\| \leq 2^{m+2} \varepsilon \quad (33)$$

для каждого  $m = 2, \dots, n-1$ . Носитель функции  $x_i^n$  содержится в области  $\{j \in Z^n : r < j_k < \infty, k = 1, \dots, n\}$  и его расстояние до «октанта»  $Z_{-1,1,\dots,1}^n$  превышает  $r$ . Тогда  $P_{-1,1,\dots,1} U^j x_i^n = 0$  при  $|j| \leq r$ , т. е.

$$P_{-1,1,\dots,1} A x_i^n = P_{-1,1,\dots,1} \sum_{|j| > r} a_j U^j x_i^n,$$

и в силу (8) и (32)

$$\|P_{-1,1,\dots,1} A x_i^n\| \leq \sum_{|j| > r} |a_j| \|x_i^n\| \leq \varepsilon.$$

Совместно с (33) при  $m = n-1$  это дает

$$\|P_{0,1,\dots,1} A x_i^n\| \leq \|P_+ A x_i^n\| + \|P_{-1,1,\dots,1} A x_i^n\| \leq (2^{n+1} + 1) \varepsilon.$$

В условиях 1°–3° оператор  $P_{0,1,\dots,1} A : l^2(Z_{0,1,\dots,1}^n) \rightarrow l^2(Z_{0,1,\dots,1}^n)$  непрерывно обратим и из последнего неравенства получаем

$$\|x_i^n\| \leq (2^{n+1} + 1) \alpha_1 \varepsilon \quad (i \geq i_0), \quad \alpha_1 = \|(P_{0,1,\dots,1} A)^{-1}\|. \quad (34)$$

Оценим  $B_{D^{k_1 \dots k_{n-1}, \eta} x_i^{n-1}}$ ,  $1 \leq k_1 < \dots < k_{n-1} \leq n$ . Представим  $B_{D^{k_1 \dots k_{n-1}, \eta} x_i^{n-1}}$  в виде

$$B_{D^{k_1 \dots k_{n-1}, \eta} x_i^{n-1}} = u_i^{n-1} + v_i^{n-1}, \quad (35)$$

$$u_i^{n-1} = P_{G_1}(B_{D^{k_1 \dots k_{n-1}, \eta} x_i^{n-1}}), \quad v_i^{n-1} = P_{Z^n \setminus G_1}(B_{D^{k_1 \dots k_{n-1}, \eta} x_i^{n-1}}), \quad (36)$$

где  $G_1 = \{j \in Z^n: 0 \leq j_1 \leq r, 0 \leq j_k < \infty, k = 2, \dots, n\}$ . Поскольку  $d(D^{1 \dots n-1}, G_1) > r$ , то из (4), (8), (32) и (36) получаем

$$\|u_i^{n-1}\| \leq e^{-nr} \|x_i^{n-1}\| \leq \varepsilon. \quad (37)$$

Расстояние между  $Z^{n-1, 1, \dots, 1}$  и носителем  $v_i^{n-1}$  превосходит  $r$ , поэтому

$$P_{-1, 1, \dots, 1} A v_i^{n-1} = P_{-1, 1, \dots, 1} \sum_{|j| > r} a_j U_j v_i^{n-1},$$

$$\|P_{-1, 1, \dots, 1} A v_i^{n-1}\| \leq \sum_{|j| > r} |a_j| \|v_i^{n-1}\| \leq \varepsilon \|v_i^{n-1}\| \leq \varepsilon.$$

С другой стороны, на основании (35), (26), (4), (32), (33) и (37), обозначив  $\beta_n = 2^n + 2 + \|A\|$ , находим

$$\begin{aligned} \|P_+ A v_i^{n-1}\| &\leq \|B_{D^{1 \dots n-1, \eta} P_+ A x_i^{n-1}}\| + \varepsilon \|x_i^{n-1}\| + \\ &+ \|P_+ A u_i^{n-1}\| \leq (\beta_n - 1)\varepsilon, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \|P_{0, 1, \dots, 1} A v_i^{n-1}\| &\leq \|P_+ A v_i^{n-1}\| + \|P_{-1, 1, \dots, 1} A v_i^{n-1}\| \leq \beta_n \varepsilon, \\ \|v_i^{n-1}\| &\leq \beta_n \alpha_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

Совместно с (35) и (37) отсюда получаем

$$\|B_{D^{1 \dots n-1, \eta} x_i^{n-1}}\| \leq (\beta_n \alpha_1 + 1)\varepsilon.$$

Аналогично оценим

$$\|B_{D^{k_2 \dots k_{n-1}, \eta} x_i^{n-1}}\| \leq (\beta_n \alpha_1 + 1)\varepsilon,$$

$$\|B_{D^{2 \dots n, \eta} x_i^{n-1}}\| \leq (\beta_n \alpha_2 + 1)\varepsilon,$$

где

$$\alpha_2 = \|(P_{1, 0, 1, \dots, 1} A)^{-1}\|.$$

Совместно с (27) из последних трех неравенств получаем

$$\|B_{D^{(n-1), \eta} x_i^{n-1}}\| \leq [\beta_n ((n-1)\alpha_1 + \alpha_2) + 2n - 1]\varepsilon. \quad (38)$$

Учитывая соотношения (31), (34) и (38),

$$\|x_i^{n-1}\| \leq c_{n-1} \varepsilon, \quad (39)$$

$$c_{n-1} = \beta_n (n-1)\alpha_1 + \beta_n \alpha_2 + (2^{n-1} + 1)\alpha_1 + 2n - 1.$$

Оценим  $B_{D^{k_1 \dots k_{n-2}, \eta} x_i^{n-2}}$ ,  $1 \leq k_1 < \dots < k_{n-2} \leq n$ . Представим  $B_{D^{k_1 \dots k_{n-2}, \eta} x_i^{n-2}}$  в виде

$$B_{D^{k_1 \dots k_{n-2}, \eta} x_i^{n-2}} = u_i^{n-2} + v_i^{n-2}, \quad (40)$$

$$u_i^{n-2} = P_{G_1}(B_{D^{k_1 \dots k_{n-2}, \eta} x_i^{n-2}}), \quad v_i^{n-2} = P_{Z^n \setminus G_1}(B_{D^{k_1 \dots k_{n-2}, \eta} x_i^{n-2}}). \quad (41)$$

Поскольку  $d(D^{1 \dots n-2}, G_1) > r$ , то из (4), (8), (32) и (41) получаем

$$\|u_i^{n-2}\| \leq e^{-nr} \|x_i^{n-2}\| \leq \varepsilon. \quad (42)$$

Расстояние между  $Z_{-1,1,\dots,1}^n$  и носителем  $v_i^{n-2}$  превосходит  $r$ , поэтому

$$P_{-1,1,\dots,1}Av_i^{n-2} = P_{-1,1,\dots,1} \sum_{|j|>r} a_j U^j v_i^{n-2},$$

$$\|P_{-1,1,\dots,1}Av_i^{n-2}\| \leq \sum_{|j|>r} |a_j| \|v_i^{n-2}\| \leq \varepsilon \|v_i^{n-2}\| \leq \varepsilon.$$

Как и ранее, оценим

$$\|P_+Av_i^{n-2}\| \leq \|B_{D^{1,\dots,n-2},\eta}P_+Ax_i^{n-2}\| + \varepsilon + \|P_+Au_i^{n-2}\| \leq (\beta_{n-1} - 1)\varepsilon,$$

поэтому

$$\|P_{0,1,\dots,1}Av_i^{n-2}\| \leq \|P_+Av_i^{n-2}\| + \|P_{-1,1,\dots,1}Av_i^{n-2}\| \leq \beta_{n-1}\varepsilon,$$

$$\|v_i^{n-2}\| \leq \beta_{n-1}\alpha_1\varepsilon.$$

Совместно с (40) и (42) отсюда получаем

$$\|B_{D^{1,\dots,n-2},\eta}x_i^{n-2}\| \leq (\beta_{n-1}\alpha_1 + 1)\varepsilon.$$

Аналогично оценим

$$\|B_{D^{k_2,\dots,k_{n-2},\eta}x_i^{n-2}\| \leq (\beta_{n-1}\alpha_1 + 1)\varepsilon,$$

$$\|B_{D^{2k_2,\dots,k_{n-2},\eta}x_i^{n-2}\| \leq (\beta_{n-1}\alpha_2 + 1)\varepsilon,$$

$$\|B_{D^{3,\dots,n},\eta}x_i^{n-2}\| \leq (\beta_{n-1}\alpha_3 + 1)\varepsilon,$$

где

$$\alpha_3 = \|(P_{1,1,0,1,\dots,1}A)^{-1}\|.$$

Учитывая (27); из последних четырех неравенств получаем

$$\|B_{D^{1/n-2},\eta}x_i^{n-2}\| \leq [\beta_{n-1}((n-1)(n-2)\alpha_1/2 + (n-2)\alpha_2 + \alpha_3) + n(n-1) - 1]\varepsilon. \quad (43)$$

Ввиду соотношений (31), (39) и (43)

$$\|x_i^{n-2}\| \leq c_{n-2}\varepsilon,$$

$$c_{n-2} = c_{n-1} + \beta_{n-1}((n-1)(n-2)\alpha_1/2 + (n-2)\alpha_2 + \alpha_3) + n(n-1) - 1.$$

Продолжим точно по такой же схеме и наконец получим

$$\|x_i^1\| \leq c_1\varepsilon,$$

где

$$c_1 = c_1(n, \|A\|, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{const},$$

$$\alpha_k = \|(P_{\underbrace{1,\dots,1}_{k-1},0,1,\dots,1}A)^{-1}\|.$$

Этим завершено доказательство леммы 1 в общем случае.

#### § 4. Доказательство теоремы 1

1. Достаточность. Будем считать выполненными условия 1°—3° теоремы 1. Из леммы 1 непосредственно следует конечность нулевого подпространства

$$N(P_+A) = \{x \in l^2(Z_+^n) : P_+Ax = 0\},$$

а также замкнутость области значений

$$R(P_+A) = \{y \in l^2(Z_+^n) : y = P_+Ax, x \in l^2(Z_+^n)\}.$$

Поясним последнее. Пусть  $M$  — некоторое прямое дополнение к (конечномерному) подпространству  $N = N(P_+A)$ :

$$l^2(Z_+^n) = N + M.$$

Для замкнутости  $R(P_+A)$  необходимо и достаточно существование такого  $\gamma > 0$ , что

$$\|P_+Ax\| \geq \gamma \|x\| \quad \forall x \in M.$$

Если такого  $\gamma$  не существует, то для некоторой последовательности  $(x_i) \subset M$  выполнены условия (3) и по лемме 1  $(x_i)$  компактна. Для предельных точек  $x \in M$  из (3) следует, что  $\|x\| = 1$ ,  $P_+Ax = 0$ , т. е.  $0 \neq x \in M \cap N$ , что невозможно. Итак,  $R(P_+A)$  замкнута.

Итак, в условиях 1°–3° оператор  $P_+A : l^2(Z_+^n) \rightarrow l^2(Z_+^n)$  полуредгольмов и определен индекс

$$\text{ind } P_+A = \dim N(P_+A) - \text{codim } R(P_+A).$$

Для завершения доказательства достаточности условий теоремы 1 надо показать, что  $\text{ind } P_+A = 0$ . Это легко сделать традиционным способом, построив гомотопию между функциями  $a(t)$  и 1.

2. Необходимость. Пусть условие 1° не выполняется. Тогда оператор  $A$  необратимый, т. е.  $N(A) \neq \{0\}$  или  $R(A) \neq l^2(Z^n)$ . Рассмотрим вначале первый случай. Найдется элемент  $x \in l^2(Z^n)$  с нормой  $\|x\| = 1$ , такой что  $Ax = 0$ . Зафиксируем  $\varepsilon_k > 0$  и аппроксимируем элемент  $x$  с  $x_{\varepsilon k} \in l^2(Z^n)$ , носитель которого конечен и  $\|x - x_{\varepsilon k}\| < \varepsilon_k$ . Рассмотрим сдвиги  $U^{l_k}x_{\varepsilon k}$ , где  $l_k = (l_{1k}, \dots, l_{nk})$  с  $l_{ik} \geq 0$ . Заметим, что если  $l_{ik}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) достаточно большие, то расстояние между носителем  $U^{l_k}x_{\varepsilon k}$  и областью  $(I - P_+)l^2(Z^n)$  превышает  $r = r(\varepsilon_k)$  и из (8) получим  $\|(I - P_+)AU^{l_k}x_{\varepsilon k}\| < \varepsilon_k$ . Поскольку  $\|AU^{l_k}x_{\varepsilon k}\| = \|U^{l_k}Ax_{\varepsilon k}\| \leq \|A\|\varepsilon_k$ , то имеет место оценка  $\|P_+AU^{l_k}x_{\varepsilon k}\| \leq \|AU^{l_k}x_{\varepsilon k}\| + \|(I - P_+)AU^{l_k}x_{\varepsilon k}\| \leq (\|A\| + 1)\varepsilon_k$ .

Итак, мы доказали, что найдется последовательность  $(y_k)$  ( $y_k = U^{l_k}x_{\varepsilon k}$ ,  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ,  $l_{ik} \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow \infty$ ) со свойствами  $y_k \in l^2(Z_+^n)$ ,  $\|y_k\| \approx 1$ ,  $y_k \rightarrow 0$  и  $\|P_+Ay_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Хорошо известно, что тогда оператор  $P_+A$  нефредгольмов. Данные рассуждения будем повторять несколько раз с небольшими изменениями.

Пусть теперь  $N(A) = \{0\}$  и  $R(A) \neq l^2(Z^n)$ . Если  $R(A)$  замкнут, то  $\dim N(A^*) = \text{codim } R(A) > 0$  и по доказанному оператор  $P_+A^*$  нефредгольмов. Тогда и сопряженный к нему оператор  $P_+A$  нефредгольмов. Пусть теперь  $R(A)$  не является замкнутым. Это равносильно тому, что не существует постоян-

<sup>1</sup> Мы применяем обозначения:

$$x_{\varepsilon k} = x_{\varepsilon k}, \quad U^{l_k} = U^{l_k}.$$

пой  $\gamma > 0$ , такой что  $\|Ax\| \geq \gamma\|x\|$  при каждом  $x \in l^2(Z^n)$ , т. е. найдутся  $x_k \in l^2(Z^n)$  с нормой  $\|x_k\| = 1$ , такие что  $\|Ax_k\| \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Повторяя рассуждения с небольшими изменениями ( $y_k = U^{i_k} x_{k, \varepsilon_k}$ ;  $\|Ay_k\| \leq \|A\| \varepsilon_k + \varepsilon_k$ ), получаем опять, что оператор  $P_+A$  нефредгольмов. Итак, условие 1° необходимо для фредгольмовости оператора  $P_+A$ .

Пусть не выполняется хотя бы одно из условий 3°, т. е. для некоторых фиксированных  $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ ,  $s = n-r$ ,  $1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n$ ,  $t_{k_i} \in R$  однородное уравнение

$$P_+ \sum_{j \in Z^n} a_j e^{ij_{k_1} t_{k_1}} \dots e^{ij_{k_r} t_{k_r}} U_{l_1}^{j_{l_1}} \dots U_{l_s}^{j_{l_s}} x = 0 \quad (P_+ = P_{Z^s})$$

имеет в пространстве  $l^2(Z_+^s)$  отличное от нуля решение. Тогда имеет место (см. [8], теорема 1)

$$\inf_{x \in l^2(Z^r \times Z^s)} \|P_{i_1 \dots i_n} \sum_{j \in Z^n} a_j U^j x\| = 0,$$

где

$$i_k = \begin{cases} 0, & \text{при } k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{l_1, \dots, l_s\}, \\ 1, & \text{при } k \in \{l_1, \dots, l_s\}. \end{cases}$$

Как и выше, отсюда легко получить, что оператор  $P_+A$  нефредгольмов. Необходимость условий 3° доказана.

Пусть теперь выполнено условие 1°, но при некотором  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) имеет место  $\text{ind } a_i \neq 0$ . Тогда для некоторых  $l_1$  и  $l_2$  реализуется один из следующих трех случаев:

- а)  $\text{ind } a_{l_1} \geq 0$ ,  $\text{ind } a_{l_2} \geq 0$ ,  $\text{ind } a_{l_1} + \text{ind } a_{l_2} > 0$ ;
- б)  $\text{ind } a_{l_1} \leq 0$ ,  $\text{ind } a_{l_2} \leq 0$ ,  $\text{ind } a_{l_1} + \text{ind } a_{l_2} < 0$ ;
- в)  $\text{ind } a_{l_1} \cdot \text{ind } a_{l_2} < 0$ .

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} & \bar{A}_{k_1 \dots k_r}(t_{k_1}, \dots, t_{k_r}) \equiv \\ & \equiv P_{Z^s} \sum_{j \in Z^n} a_j e^{ij_{k_1} t_{k_1}} \dots e^{ij_{k_r} t_{k_r}} U_{l_1}^{j_{l_1}} U_{l_2}^{j_{l_2}}, \end{aligned}$$

где

$$r = n - 2, \{k_1, \dots, k_r\} \cup \{l_1, l_2\} = \{1, \dots, n\}.$$

Анализ для двумерного оператора показывает (см. [3]), что в случае а) оператор  $\bar{A}_{k_1 \dots k_r}(t_{k_1}, \dots, t_{k_r})$  имеет замкнутую область значений бесконечной коразмерности, а в случаях б) и в) — бесконечномерное нулевое подпространство. В случаях б) и в) хотя бы одно из условий 3° не выполнено, и, как нами показано, оператор  $P_+A$  нефредгольмов. В случае а) просто получаем, что  $\dim N(\bar{A}_{k_1 \dots k_r}^*(t_{k_1}, \dots, t_{k_r})) = \infty$ , где сопряженный оператор имеет вид

$$\bar{A}_{k_1 \dots k_r}^*(t_{k_1}, \dots, t_{k_r}) = P_{Z^s} \sum_{j \in Z^n} \bar{a}_j e^{-ij_{k_1} t_{k_1}} \dots e^{-ij_{k_r} t_{k_r}} U_{l_1}^{-j_{l_1}} U_{l_2}^{-j_{l_2}}.$$

Опираясь на теорему 1 статьи [8], которая справедлива и для сопряженных операторов, можно еще раз повторить проведенные в начале доказательства рассуждения и получим, что оператор  $P_+A^* = P_+ \sum \bar{a}_j U^{-j}$  нефредгольмов. Но тогда и  $P_+A$  нефредгольмов. Этим завершено доказательство теоремы.

Автор выражает искреннюю благодарность Г. Вайникко за руководство работой.

## Литература

1. Вайникко Г., Лепик Р., О методе редукции для многомерных дискретных уравнений Винера—Хопфа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, **448**, 74—81.
2. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А., Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. Москва, 1971.
3. Дуглас Р. Г., Хоув Р.,  $C^*$ -алгебра теплицевых операторов в квадранте. Математика. Период. сб. пер. ин. статей, 1973, **17**, № 5, 67—81.
4. Дудучава Р. В., О бисингулярных интегральных операторах и операторах свертки на квадранте. Докл. АН СССР, 1975, **221**, № 2, 279—282.
5. Дудучава Р. В., О бисингулярных интегральных операторах с разрывными коэффициентами. Мат. сб., 1976, **101**, № 4, 584—609.
6. Дудучава Р. В., Дискретные операторы свертки на квадранте и их индексы. Изв. АН СССР, сер. матем., 1977, **41**, № 5, 1125—1137.
7. Лепик Р., О фредгольмовости двумерного оператора Винера—Хопфа. Материалы республиканской конференции СНО (Тарту), 1977, **1**, 72—78.
8. Лепик Р., Об обратимости дискретного оператора Винера—Хопфа с операторными коэффициентами. Настоящий сборник, стр. 15—24.

Поступило  
21 IV 1978

## ON THE CONDITIONS WHEN THE MULTIDIMENSIONAL DISCRETE WIENER—HOPF OPERATOR IS A FREDHOLM OPERATOR

R. Lepik

### Summary

In the present paper the conditions when the multidimensional discrete Wiener—Hopf operator is a Fredholm operator are found. Our approach uses only elementary means.

## НЕКОТОРЫЕ АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ КОРНЕЙ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

О. Карма

Тартуский государственный университет

Пусть голоморфные в области  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  функции  $g_n(\cdot)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , сходятся при  $n \rightarrow \infty$  равномерно на каждом компакте  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  к голоморфной функции  $f(\cdot)$ . В статье доказаны некоторые асимптотические оценки скорости сходимости корней функций  $g_n(\cdot)$  в  $\Lambda_0$  и их арифметических средних к соответствующим величинам функции  $f(\cdot)$ . При этом в случае кратных корней у  $f(\cdot)$  для арифметических средних получается более хорошая оценка, чем для каждого корня в отдельности. Основные результаты подытожены в предложениях 1.1, 2.1 и 3.1. Приведены также простые примеры, указывающие на неулучшаемость по порядку доказанных оценок в общем случае.

Используя доказанные оценки, можно доказать аналогичные оценки для собственных значений голоморфных фредгольмовых оператор-функций в предположении регулярной аппроксимации (применяя, например, изложенную в [2, 3] методику). Это и явилось причиной нижеследующего исследования и этой целью обусловлена несколько искусственная форма результатов (см. замечание 2.1). Но приведенные оценки могут представить и определенный самостоятельный интерес. В частности, они обобщают оценку, вытекающую из т. н. подготовительной теоремы Вейерштрасса ([1], стр. 253), на случай неаналитической зависимости семейства функций от параметра.

1. Пусть  $f(\cdot) \not\equiv 0$  — голоморфная в области  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  функция. Пусть  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  — некоторый компакт с жордановой границей  $\Gamma$ , причем на  $\Gamma$  нет корней функции  $f(\cdot)$ . Тогда  $f(\cdot)$  имеет внутри компакта  $\Lambda_0$  конечное число  $\nu \geq 0$  корней, учитывая их кратности. Если  $\nu \neq 0$ , обозначим эти корни через

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_\nu, \quad (1.1)$$

где каждый корень выписан столько раз, какую кратность он имеет.

Пусть далее  $g(\cdot)$  — голоморфная в той же области  $\Lambda$  функция такая, что выполнено неравенство

$$\varepsilon = \sup_{\lambda \in \Gamma} |f(\lambda) - g(\lambda)| < \alpha = \inf_{\lambda \in \Gamma} |f(\lambda)| \quad (1.2)$$

(ясно, что  $\alpha > 0$ , так как  $f(\cdot)$  не имеет на  $\Gamma$  корней).

Тогда функция  $g(\cdot)$  не имеет на  $\Gamma$  корней, а из теоремы Руше следует, что внутри  $\Lambda_0$  она имеет точно  $\nu$  корней, учитывая их кратности. Если  $\nu \neq 0$ , обозначим эти корни через

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu, \quad (1.3)$$

где каждый корень выписан столько раз, какую кратность он имеет.

**Лемма 1.1.** Для каждого корня  $\eta_j$  функции  $g(\cdot)$  в  $\Lambda_0$  имеет место неравенство

$$\prod_{i=1}^{\nu} |\eta_j - \xi_i| \leq \varepsilon d^{\nu} / \alpha, \quad (1.4)$$

где  $\xi_i$  — корни функции  $f(\cdot)$  в  $\Lambda_0$ , а

$$d = \max_{i=1, \dots, \nu} \sup_{\lambda \in \Gamma} |\xi_i - \lambda| < D = \sup_{\lambda, \lambda' \in \Gamma} |\lambda - \lambda'|. \quad (1.5)$$

**Доказательство.** В наших предположениях функция  $\varphi(\cdot)$ , определенная при  $\lambda \neq \xi_i$  равенством

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda) \prod_{i=1}^{\nu} (\lambda - \xi_i)^{-1}$$

и продолженная в точках  $\lambda = \xi_i$  по непрерывности, будет голоморфной на  $\Lambda$ . Более того, так как  $\varphi(\cdot)$  не имеет в  $\Lambda_0$  корней, то

$$\alpha' = \inf_{\lambda \in \Lambda_0} |\varphi(\lambda)| > 0, \quad (1.6)$$

и существует голоморфная в некоторой окрестности компакта  $\Lambda_0$  функция  $1/\varphi(\cdot)$ .

Для всех корней  $\eta_j \neq \xi_i$ ,  $i = 1, \dots, \nu$ , функции  $g(\cdot)$  в  $\Lambda_0$  выполнено неравенство

$$|f(\eta_j) - g(\eta_j)| \left| \prod_{i=1}^{\nu} (\eta_j - \xi_i)^{-1} \right| = |\varphi(\eta_j)| \geq \alpha', \quad (1.7)$$

или, что то же, неравенство

$$\prod_{i=1}^{\nu} |\eta_j - \xi_i| \leq |f(\eta_j) - g(\eta_j)| / \alpha'. \quad (1.8)$$

Ясно, что неравенство (1.8) выполняется также в случае, когда  $\eta_j = \xi_i$  при некотором  $i$ .

Неравенство (1.4) вытекает из (1.8), если учесть, что

$$i) |f(\eta_j) - g(\eta_j)| \leq \sup_{\lambda \in \Lambda_0} |f(\lambda) - g(\lambda)| = \sup_{(*)} |f(\lambda) - g(\lambda)| = \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} ii) \alpha' &= \inf_{\lambda \in \Lambda_0} |\varphi(\lambda)| = (\sup_{\lambda \in \Lambda_0} |1/\varphi(\lambda)|)^{-1} = \\ &= (\sup_{(*)} |1/\varphi(\lambda)|)^{-1} = \inf_{\lambda \in \Gamma} |\varphi(\lambda)| \geq \\ &\geq (\inf_{\lambda \in \Gamma} |f(\lambda)|) \prod_{i=1}^v \inf_{\lambda \in \Gamma} |\lambda - \xi_i|^{-1} = \\ &= \alpha \prod_{i=1}^v (\sup_{\lambda \in \Gamma} |\lambda - \xi_i|)^{-1} \geq \alpha d^{-v}. \end{aligned}$$

(В переходах  $(*)$  использован принцип максимума модуля.)

**Предложение 1.1.** Пусть  $f(\cdot) \not\equiv 0$  и  $g(\cdot)$  — голоморфные в области  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  функции. Пусть  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  — некоторый компакт с границей  $\Gamma$ , причем на  $\Gamma$  нет корней  $f(\cdot)$  и выполнено неравенство (1.2). Тогда для всех корней  $\xi_i$  и  $\eta_j$  в  $\Lambda_0$  функций  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  соответственно имеют место оценки

$$\max_j \min_i (|\eta_j - \xi_i| \leq (\varepsilon d^v / \alpha)^{1/v}, \quad (1.9)$$

$$\max_i \min_j |\eta_j - \xi_i| \leq (\varepsilon D^v / \alpha')^{1/v}, \quad (1.10)$$

где  $v$  — суммарная кратность корней  $f(\cdot)$  в  $\Lambda_0$ , величины  $d$  и  $D$  определены в (1.5), и  $\alpha' = \alpha - \varepsilon$ .

**Доказательство.** Если допустить, что (1.9) не имеет места, то мы сразу получим противоречие с леммой 1.1. Для доказательства (1.10) надо менять в лемме 1.1 функции  $f(\cdot)$  и  $g(\cdot)$  местами. (При  $\varepsilon > \alpha'$  оценка (1.10) тривиальна.)

2. Обозначим  $V = V(\lambda_0, \delta) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| \leq \delta\}$ ,  $\gamma = \partial V = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$ . Пусть<sup>1</sup>

(1)  $f_n(\cdot)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , и  $g_n(\cdot)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , — совокупности голоморфных на области  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  функций,

$$(2) V \subset \Lambda,$$

$$(3) \varepsilon_n = \sup_{\lambda \in \gamma} |f_n(\lambda) - g_n(\lambda)| \rightarrow 0, \quad (2.1)$$

$$(4) \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\lambda \in \gamma} |f_n(\lambda)| \leq h, \quad (2.2)$$

$$(5) \liminf \alpha_n = \alpha > 0, \quad \text{где } \alpha_n = \inf_{\lambda \in \gamma} |f_n(\lambda)|, \quad (2.3)$$

(6) каждая функция  $f_n(\cdot)$  имеет в круге  $V$  только один корень — корень  $\lambda = \lambda_0$  кратности  $v \neq 0$ , причем

$$\liminf |f_n^{(v)}(\lambda_0)| = \beta > 0. \quad (2.4)$$

<sup>1</sup> Все пределы берутся по  $n \rightarrow \infty$ .

**З а м е ч а н и е 2.1.** Условия (4)—(6) выполнены, например, когда  $f_n(\cdot) = f(\cdot)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , причем  $f(\cdot)$  имеет в  $V$  только корень  $\lambda_0$  кратности  $\nu$ . Но этот естественный случай является недостаточным для доказательства аналогичных результатов для оператор-функций.

В предположениях (1)—(5) функции  $g_n(\cdot)$  будут при всех достаточно больших  $n$  иметь в круге  $V$  точно  $\nu$  корней, учитывая их кратности. Обозначим эти корни через

$$\eta_{n1}, \eta_{n2}, \dots, \eta_{n\nu}, \quad (2.5)$$

и заметим, что из предложения 1.1 вытекает оценка

$$\max_j |\eta_{nj} - \lambda_0| \leq (\varepsilon_n \delta^\nu / \alpha_n)^{1/\nu} \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Представим далее функции  $f_n(\cdot)$  и  $g_n(\cdot)$  в виде

$$f_n(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^\nu \varphi_n(\lambda), \quad g_n(\lambda) = \psi_n(\lambda) \prod_{j=1}^{\nu} (\lambda - \eta_{nj}), \quad (2.7)$$

где  $\varphi_n(\cdot)$  и  $\psi_n(\cdot)$  — голоморфные на  $\Lambda$  функции, не имеющие нулей в  $V$ . Обозначим коэффициенты в разложениях в степенные ряды функций  $\varphi_n(\cdot)$  и  $\psi_n(\cdot)$  в точке  $\lambda_0$  через  $a_{nk}$  и  $b_{nk}$ :

$$\varphi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} (\lambda - \lambda_0)^k, \quad \psi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} (\lambda - \lambda_0)^k. \quad (2.8)$$

В силу (2.4) имеем тогда

$$\liminf |a_{n0}| = \beta' = \beta/\nu! > 0, \quad (2.9)$$

а в силу (2.2) с помощью формулы Коши получим

$$|a_{nk}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - \lambda_0)^{-k-1} (\lambda - \lambda_0)^{-\nu} f_n(\lambda) d\lambda \right| \leq \delta^{-k-\nu} h. \quad (2.10)$$

**Лемма 2.1.** При всех достаточно больших  $n$  имеют место оценки

$$|b_{n0}| \geq |a_{n0}|/2 > 0 \quad (2.11)$$

и

$$|b_{nk}| \leq 2|a_{nk}| \leq 2\delta^{-k-\nu} h. \quad (2.12)$$

**Доказательство.** Утверждения леммы 2.1 следуют из оценок (2.9) и (2.10) ввиду того, что

$$\begin{aligned} 2\pi\delta^{k+1}|a_{nk} - b_{nk}| &= \delta^{k+1} \left| \int_{\gamma} (\lambda - \lambda_0)^{-k-1} [\varphi_n(\lambda) - \psi_n(\lambda)] d\lambda \right| \leq \\ &\leq \int_{\gamma} [|\lambda - \lambda_0|^{-\nu} |f_n(\lambda) - g_n(\lambda)|] |d\lambda| + \\ &+ \int_{\gamma} |(\lambda - \lambda_0)^{-\nu} - \prod_{j=1}^{\nu} (\lambda - \eta_{nj})^{-1}| |g_n(\lambda)| |d\lambda| \leq \\ &\leq 2\pi\delta^{-\nu+1}\varepsilon_n + (h + \varepsilon_n) \int_{\gamma} |(\lambda - \lambda_0)^{-\nu} - \prod_{j=1}^{\nu} (\lambda - \eta_{nj})^{-1}| |d\lambda| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

так как  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  и  $\eta_{nj} \rightarrow \lambda_0$  (см. (2.6)).

**Предложение 2.1.** Пусть выполнены условия (1) — (6). Тогда имеют место оценки<sup>2</sup>

$$\left| \sum_{j=1}^{\nu} (\lambda_0 - \eta_{nj}) \right| \leq c\varepsilon_n, \quad |\lambda_0 - \bar{\eta}_n| \leq c\varepsilon_n, \quad (2.13)$$

где  $\varepsilon_n$  определено в (2.1), а  $\eta_{nj}$  — корни  $g_n(\cdot)$  в  $V(\lambda_0, \delta)$  и

$$\bar{\eta}_n = (\eta_{n1} + \dots + \eta_{n\nu})/\nu, \quad (2.14)$$

**Доказательство.** Обозначим коэффициенты в разложениях в степенные ряды функций  $f_n(\cdot)$  и  $g_n(\cdot)$  в точке  $\lambda_0$  через  $a'_{nk}$  и  $b'_{nk}$ :

$$f_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{nk} (\lambda - \lambda_0)^k, \quad g_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} b'_{nk} (\lambda - \lambda_0)^k. \quad (2.15)$$

Так как при  $k = 0, 1, \dots, \nu - 1$  имеем  $a'_{nk} = 0$ , то

$$\begin{aligned} |b'_{nk}| &= |b'_{nk} - a'_{nk}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda - \lambda_0)^{-k-1} [g_n(\lambda) - f_n(\lambda)] d\lambda \right| \leq \\ &\leq \delta^{-k} \varepsilon_n, \quad k=0, 1, \dots, \nu-1; \quad n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Выпишем далее произведение  $\Pi(\lambda - \eta_{nj})$  в виде многочлена по степеням  $(\lambda - \lambda_0)$ :

$$\prod_{j=1}^{\nu} (\lambda - \eta_{nj}) = \prod_{j=1}^{\nu} ((\lambda - \lambda_0) + (\lambda_0 - \eta_{nj})) = \sum_{i=0}^{\nu} d_{ni} (\lambda - \lambda_0)^i. \quad (2.17)$$

При этом  $d_{n\nu} = 1$  и

$$d_{n,\nu-1} = \sum_{j=1}^{\nu} (\lambda_0 - \eta_{nj}) = \nu(\lambda_0 - \bar{\eta}_n). \quad (2.18)$$

Для коэффициентов  $b'_{nk}$  в (2.15) мы из (2.7), (2.8) и (2.17) получим выражение

$$b'_{nk} = \sum_{i=0}^k d_{ni} b_{n,k-i}. \quad (2.19)$$

Отсюда, используя оценки (2.16) и имея в виду неравенства (2.11) и (2.12), получим последовательно:

$$|b'_{n0}| = |d_{n0} b_{n0}| \leq c\varepsilon_n \Rightarrow |d_{n0}| \leq c\varepsilon_n, \quad (2.20_0)$$

$$|b'_{n1}| = |d_{n0} b_{n1} + d_{n1} b_{n0}| \leq c\varepsilon_n \Rightarrow |d_{n1}| \leq c\varepsilon_n, \quad (2.20_1)$$

$$|b'_{n,\nu-1}| = \left| \sum_{i=1}^{\nu-1} d_{ni} b_{n,\nu-1-i} \right| \leq c\varepsilon_n \Rightarrow |d_{n,\nu-1}| \leq c\varepsilon_n. \quad (2.20_{\nu-1})$$

Соотношение (2.20 <sub>$\nu-1$</sub> ) и означает, ввиду (2.18), что имеет место оценка (2.13).

<sup>2</sup> Через  $c$  будем обозначать константы, не зависящие от  $n$ , но, вообще говоря, в разных местах разные.

3. Обычно в условиях (1) — (6) п. 2 функции  $g_n(\cdot)$  имеют в  $V$   $\nu$  попарно различных корней кратности 1. Иногда может все же представить определенный интерес и случай, когда часть корней  $g_n(\cdot)$  в  $V$  кратные.

**Лемма 3.1.** При  $k = 1, 2, \dots, \nu$  имеют место оценки

$$\left| \sum_{j=1}^{\nu} (\eta_{nj} - \lambda_0)^k \right| \leq c \varepsilon_n. \quad (3.1_k)$$

**Доказательство.** Для сокращения записи мы в доказательстве будем предполагать, что  $\lambda_0 = 0$ . (Этого всегда можно добиться путем замены переменной.) Оценка (3.1<sub>1</sub>) имеет место по предложению 2.1. Далее, при  $k = 1, 2, \dots, \nu$  имеем<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{j_s \neq j_r} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_k} &= k! \sum_{j_1 < \dots < j_k} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_k} \stackrel{(*)}{=} \\ &= k! (-1)^k d_{n, \nu-k} \stackrel{(**)}{\leq} c \varepsilon_n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

(Здесь при переходе (\*) использовано выражение величин  $d_{ni}$  в (2.17) через величины  $\eta_{nj}$ , а при переходе (\*\*) — оценка (2.20 <sub>$\nu-k$</sub> )).

В то же время при  $k \geq 2$  имеем

$$\begin{aligned} k \sum_{j_s \neq j_r} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_k} &= k \left( \sum_{j=1}^{\nu} \eta_{nj} \right) \sum_{j_s \neq j_r} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_{k-1}} + \\ &+ (-1) k(k-1) \sum_{j_s \neq j_r} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_{k-2}} \eta_{nj_{k-1}}^2 \stackrel{(**)}{=} \dots = \\ &= \sum_{l=0}^{k-2} (-1)^l k(k-1) \dots (k-l) \left( \sum_{j=1}^{\nu} \eta_{nj}^{l+1} \right) \sum_{j_s \neq j_r} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_{k-l-1}} + \\ &+ (-1)^{k-1} k! \sum_{j=1}^{\nu} \eta_{nj}^k. \end{aligned} \quad (3.3)$$

(Здесь при переходе (\*) использовано соотношение

$$\begin{aligned} &\sum_{j_s \neq j_r} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_{k-p}} \eta_{nj_{k-p+1}}^p = \\ &= \left( \sum_{j=1}^{\nu} \eta_{nj}^p \right) \sum_{j_s \neq j_r} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_{k-p}} - (k-p) \sum_{j_s \neq j_r} \eta_{nj_1} \dots \eta_{nj_{k-p-1}} \eta_{nj_{k-p}}^{p+1} \end{aligned}$$

с  $p = 1$ , при переходе (\*\*) — это же соотношение с  $p = 2$  и т. д.)

Учитывая (3.1<sub>1</sub>) и (3.2), при  $k = 2$  из (3.3) получим (3.1<sub>2</sub>), потом при  $k = 3$  получим (3.1<sub>3</sub>) и т. д.

<sup>3</sup> Индексы  $j_1, \dots, j_{\nu}$  здесь принимают значения от 1 до  $\nu$ .



Ясно, что аналогичное соотношение можно получить для любого индекса  $i$  в роли индекса  $l$ . При этом всегда в правой части получается сумма членов вида

$$O(\mu_{nj_1} \dots \mu_{nj_r} \varepsilon_n^{1-r/l}), \quad j_s \neq j_t \text{ при } s \neq t,$$

которые оцениваются, ввиду (3.5), выражениями

$$O(\mu_{n1} \dots \mu_{nr} \varepsilon_n^{1-r/l}).$$

Таким образом, для  $i = 1, 2, \dots, l$  из (3.6<sub>1</sub>)—(3.6<sub>l</sub>) получим оценки

$$\begin{aligned} & k_i \mu_{ni} \prod_{j=1, \dots, l; j \neq i} (\mu_{ni} - \mu_{nj}) = \\ & = O(\varepsilon_n) + O(\mu_{n1} \varepsilon_n^{1-1/l}) + \dots + O(\mu_{n1} \dots \mu_{n, l-1} \varepsilon_n^{1/l}). \end{aligned} \quad (3.8_i)$$

Введем следующие обозначения

$$S^r = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq l} \mu_{nj_1} \dots \mu_{nj_r}, \quad S^0 = 1,$$

$$S_{\neq i}^r = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq l, j_s \neq i} \mu_{nj_1} \dots \mu_{nj_r}, \quad S_{\neq i}^0 = 1.$$

В этих обозначениях имеем для  $i = 1, 2, \dots, l$ :

$$\begin{aligned} \mu_{ni} \prod_{j=1, \dots, l; j \neq i} (\mu_{ni} - \mu_{nj}) &= \mu_{ni} \sum_{r=1}^l \mu_{ni}^{r-1} (-1)^{l-r} S_{\neq i}^{l-r} = \\ & \stackrel{(*)}{=} (-1)^{l-1} \mu_{n1} \dots \mu_{nl} + \sum_{r=2}^l (-1)^{l-r} \mu_{ni}^r S_{\neq i}^{l-r} + \\ & + \sum_{r=3}^l (-1)^{l-r} (r-2) \mu_{ni}^r S_{\neq i}^{l-r} + \\ & + \sum_{r=2}^{l-1} (-1)^{l-r} (r-1) \mu_{ni}^r [\mu_{ni} S_{\neq i}^{l-r-1}] = \\ & = (-1)^{l-1} \mu_{n1} \dots \mu_{nl} + \sum_{r=2}^{l-1} (-1)^{l-r} (r-1) \mu_{ni}^r [S_{\neq i}^{l-r} + \mu_{ni} S_{\neq i}^{l-r-1}] + \\ & + (l-1) \mu_{ni}^l = (-1)^{l-1} \mu_{n1} \dots \mu_{nl} + \\ & + \sum_{r=2}^l (-1)^{l-r} (r-1) \mu_{ni}^r S_{\neq i}^{l-r}. \end{aligned} \quad (3.9_i)$$

(В переходе (\*) прибавляется и отнимается одна и та же сумма, записанная в двух разных видах.) Сложим соотношения (3.8<sub>i</sub>),  $i = 1, \dots, l$ . Учитывая при этом равенства (3.9<sub>i</sub>),  $i = 1, \dots, l$ ,

получим

$$\begin{aligned} & (-1)^{l-1}(k_1 + \dots + k_l)\mu_{n1} \dots \mu_{nl} + \\ & + \sum_{r=2}^l (-1)^{l-r}(r-1)S^{l-r} \sum_{i=1}^l k_i \mu_{ni}^r = \\ & = O(\varepsilon_n) + O(\mu_{n1} \varepsilon_n^{1-1/l}) + \dots + O(\mu_{n1} \dots \mu_{n,l-1} \varepsilon_n^{1/l}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Имея в виду, что  $S^{l-r} = O(\mu_{n1} \dots \mu_{n,l-r})$  при  $r = 1, \dots, l-1$  (см. (3.5)) и что имеют место оценки (3.6<sub>r</sub>),  $r = 1, \dots, l$ , мы из (3.10) выводим оценку

$$\mu_{n1} \dots \mu_{nl} = O(\varepsilon_n) + O(\mu_{n1} \varepsilon_n^{1-1/l}) + O(\mu_{n1} \dots \mu_{n,l-1} \varepsilon_n^{1/l}). \quad (3.11)$$

Из (3.11) уже, ввиду (3.5), следует, что  $\mu_{nl} = O(\varepsilon_n^{1/l})$ . Теперь в соотношениях (3.6<sub>1</sub>)—(3.6<sub>l-1</sub>) члены  $\mu_{nl}, \dots, \mu_{nl}^{l-1}$  можно включить в правую часть и повторить все рассуждения (для  $\mu_{n1}, \dots, \mu_{n,l-1}$ ). Сделав это  $l$  раз, мы получим, что  $\mu_{ni} = O(\varepsilon_n^{1/l})$ ,  $i = l, l-1, \dots, 1$ , т. е. оценку (3.4).

4. Приведем несколько простых примеров, указывающих на неулучшаемость в общем случае порядка сходимости относительно  $\varepsilon_n$  в оценках (2.13) и (3.4). Во всех примерах

$$\Lambda = \mathbf{C}, \quad f_n(\lambda) = \lambda^4, \quad V(\lambda_0, \delta) = \{\lambda: |\lambda| \leq 1/2\}$$

(так что все  $f_n(\cdot)$  имеют в  $V(\lambda_0, \delta)$  точно один корень — корень  $\lambda_0 = 0$  кратности  $\nu = 4$ ).

**Замечание 4.1.** Пусть степенные ряды, представляющие голоморфные функции  $f_n(\cdot)$  и  $g_n(\cdot)$  в круге  $V(\lambda_0, \delta)$  с  $\delta < 1$  имеют вид (2.15). При рассмотрении конкретных примеров могут оказаться полезными следующие оценки

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{1-\delta} \sup_k |a'_{nk} - b'_{nk}|, \quad |a'_{nk} - b'_{nk}| \leq \delta^{-k} \varepsilon_n.$$

**Пример 1:**  $g_n(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3/n^4 + \lambda^2/n^5 + \lambda/n^6 + 1/n^7 - 1/n^4 =$   
 $= (\lambda^4 - 1/n^4)(\lambda - 1/n + 1/n^4)/(\lambda - 1/n)$ ;  $\varepsilon^n = O(1/n^4)$ ;

$|\eta_{n1}| = |\eta_{n2}| = |\eta_{n3}| = 1/n$ ,  $\eta_{n4} = 1/n - 1/n^4$ ;  $\bar{\eta}_n = -1/n^4$ ;  $l=4$ .

**Пример 2:**  $g_n(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3/n + 6\lambda^2/n^2 - 4\lambda/n^3 + 1/n^4 =$   
 $= (\lambda - 1/n)^4$ ;  $\varepsilon_n = O(1/n)$ ;  $\eta_{n1} = \eta_{n2} = \eta_{n3} = \eta_{n4} = 1/n$ ;  $\bar{\eta}_n = 1/n$ ;  
 $l=1$ .

**Пример 3:**  $g_n(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2/n^2 + 1/n^4$ ;  $\varepsilon_n = O(1/n^2)$ ;  
 $\eta_{n1} = \eta_{n2} = 1/n$ ,  $\eta_{n3} = \eta_{n4} = -1/n$ ;  $\bar{\eta}_n = 0$ ;  $l=2$ .

**Пример 4:**  $g_n(\lambda) = \lambda^4 + \lambda/n^3 + 3/n^4$ ;  $\varepsilon_n = O(1/n^3)$ ;  
 $\eta_{n1} = \eta_{n2} = 1/n$ ,  $\eta_{n3} = (-1 + i\sqrt{2})/n$ ,  $\eta_{n4} = (-1 - i\sqrt{2})/n$ ;  $\bar{\eta}_n = 0$ ;  
 $l=3$ .

## Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
2. Карма О. О., Асимптотические оценки погрешности приближенных собственных значений голоморфных фредгольмовых оператор-функций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, 11, № 3, 539—568.
3. Карма О. О., Об аппроксимации оператор-функций и сходимости приближенных собственных значений. Дисс. канд. физ.-матем. наук., Тарту, Тартуск. ун-т, 1971.

Поступило  
25 IV 1978

## SOME ASYMPTOTIC ESTIMATIONS FOR NEARNESS OF ZEROES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS

O. Karma

### Summary

Let  $f(\cdot)$  and  $g_n(\cdot)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , be holomorphic functions in region  $\Lambda \subset \mathbb{C}$ . In this article some asymptotic estimations for nearness of zeroes of  $g_n(\cdot)$  and  $f(\cdot)$  are proved, when  $g_n(\cdot) \rightarrow f(\cdot)$ ,  $n \rightarrow \infty$  (theorems 1.1, 2.1 and 3.1). At that for weight mean (proportionally to orders of zeroes) a better estimation is proved than for single ones.

The investigation of eigenvalue problems for operation functions can be reduced to searching of zeroes of holomorphic functions (see e.g. [2, 3]). So the results of this article could be used for investigation of eigenvalue problems for operator functions. But proved estimations may have an independent interest, too.

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ПОДОБЛАСТЕЙ

Р. Керге

Тартуский государственный университет

1. Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$Ax \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t)x^{(j)}(t) = y(t), \quad (1)$$

которое требуется решить в интервале  $[a, b]$  при некоторых однородных краевых условиях

$$\sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij}x^{(j)}(a) + \beta_{ij}x^{(j)}(b)] = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Пусть уравнение  $x^{(m)}(t) = 0$  при краевых условиях (2) имеет лишь тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$ . Тогда существует последовательность многочленов

$$\varphi_k(t) = \sum_{l=0}^{m+k} c_{kl}t^l \quad (c_{k,m+k} \neq 0, k=0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

степени  $m, m+1, \dots$  соответственно, которые удовлетворяют краевым условиям (2). Эту последовательность  $\varphi_k(t)$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) берем за координатную систему. Выберем в качестве весовой функции на отрезке  $[a, b]$  функцию  $\varrho(t) = 1/[(t-a)(b-t)]^{1/2}$ . Пусть  $\omega_n$  ( $n=1, 2, \dots$ ) — ортогональные на отрезке  $[a, b]$  с весом  $\varrho(t)$  полиномы, т. е. полиномы Чебышева.

Приближенное решение краевой задачи  $\{(1), (2)\}$  будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k^{(n)} \varphi_k(t); \quad (4)$$

постоянные  $a_k^{(n)}$  определяем по методу подобластей, т. е. из условия, чтобы интеграл от невязки обращался в нуль в  $n+1$  подинтервалах  $[t_i, t_{i+1}]$ :

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} [x_n^{(m)}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t)x_n^{(j)}(t) - y(t)] dt = 0 \quad (i=0, 1, \dots, n), \quad (5)$$

где узлами  $t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n+1$ ) выбраны корни полинома  $\omega_{n+2}(t)$  (узлы Чебышева),  $a < t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} < b$ .

Условие (5) приводим к следующей системе относительно  $a_k^{(n)}$ :

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\varphi_k^{(m)} + \sum_{j=0}^{m-1} p_j \varphi_k^{(j)}] dt \right\} a_k^{(n)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t) dt \quad (i=0, 1, \dots, n). \quad (6)$$

Введем оператор  $\Phi_n$ , который каждой суммируемой функции  $z(t)$  сопоставляет полином степени не выше  $n$ , такой что

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi_n z(t) dt \quad (i=0, 1, \dots, n).$$

Оператор  $\Phi_n$  является проектором,

$$\Phi_n = \frac{d}{dt} P_{n+1} J,$$

где  $P_{n+1}$  — лагранжевый проектор, соответствующий узлам  $t_0, \dots, t_{n+1}$ , а

$$(Jz)(t) = \int_a^t z(s) ds.$$

Система (6) равносильна операторному уравнению

$$x_n^{(m)} + \Phi_n \sum_{j=0}^{m-1} p_j(t) x_n^{(j)} = \Phi_n y,$$

которое можем переписать в виде (см. [2]):

$$\begin{aligned} x_n^{(m-1)} - x_n^{(m-1)}(a) + P_{n+1} J \sum_{j=0}^{m-1} p_j x_n^{(j)} - (P_{n+1} J \sum_{j=0}^{m-1} p_j x_n^{(j)})(a) = \\ = P_{n+1} J y - (P_{n+1} J y)(a). \end{aligned}$$

Однозначная разрешимость системы (6) доказана в [2]:

**Теорема 1.** Пусть коэффициенты  $p_j(t)$  и свободный член  $y(t)$  уравнения (1) непрерывны. Пусть однородная задача  $Ax = 0$  имеет при краевых условиях (2) лишь нулевое решение. Тогда система (6) имеет при  $n \geq n_0$  единственное решение и справедливы оценки погрешности:

$$\|x_n(t) - x^*(t)\|_{C^{m-1}} \leq c(1 + \ln n) e_{n+1}(x^{*(m-1)}),$$

$$\|x_n^{(m)}(t) - x^{*(m)}(t)\|_C \leq c(1 + n \ln n) e_n(x^{*(m)}),$$

где  $x^*$  — решение задачи  $\{(1), (2)\}$ ,  $x_n$  — его приближение по методу подобластей  $\{(4), (6)\}$ ,

$$e_n(z) = \inf_{b_0, \dots, b_n} \|z(t) - \sum_{k=0}^n b_k t^k\|_C.$$

Постоянные  $c$  здесь и далее принимают различные значения. Из результатов [2] следует также, что  $\|x_n\|_{C^{m-1}} \leq c \|P_{n+1} J y\|_C$ .

2. В вычислительной практике система (6) составляется с некоторыми погрешностями, в результате чего мы в действительности решаем не систему (6), а возмущенную систему

$$\sum_{k=0}^n \left\{ \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\varphi_k^{(m)} + \sum_{j=0}^{m-1} p_j \varphi_k^{(j)}] dt + \gamma_{ik}^{(n)} \right\} \bar{a}_k^{(n)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t) dt + \delta_i^{(n)} \quad (7)$$

$$(i=0, 1, \dots, n)$$

и получаем не приближенное решение (4), а «неточное»

$$\bar{x}_n(t) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_k^{(n)} \varphi_k(t).$$

Введем следующие обозначения:

$$a^{(n)} = (a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}) \in R_{n+1},$$

$$\bar{a}^{(n)} = (\bar{a}_0^{(n)}, \bar{a}_1^{(n)}, \dots, \bar{a}_n^{(n)}) \in R_{n+1},$$

$$A_n = (a_{ik}^{(n)})_{i,k=0}^n \in [R_{n+1} \rightarrow R_{n+1}], \quad a_{ik}^{(n)} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} [\varphi_k^{(m)} + \sum_{j=0}^{m-1} p_j \varphi_k^{(j)}] dt,$$

$$\Gamma_n = (\gamma_{ik}^{(n)})_{i,k=0}^n \in [R_{n+1} \rightarrow R_{n+1}],$$

$$\delta^{(n)} = (\delta_0^{(n)}, \delta_1^{(n)}, \dots, \delta_n^{(n)}) \in R_{n+1},$$

$$Q^{(n)} z(t) = (Q_i^{(n)} z(t))_{i=0}^n = \left( \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t) dt \right)_{i=0}^n \in R_{n+1}.$$

Перепишем теперь системы (6) и (7) соответственно в виде:

$$A_n a^{(n)} = Q^{(n)} y, \quad (8)$$

$$(A_n + \Gamma_n) \bar{a}^{(n)} = Q^{(n)} y + \delta^{(n)}. \quad (9)$$

Нас интересует влияние возмущений  $\gamma_{ik}^{(n)}$  и  $\delta_i^{(n)}$  на  $x_n(t) - \bar{x}_n(t)$ . В частности, возникает вопрос о допустимых возмущениях, не портящих разрешимости системы (7). Наш подход аналогичен работе [1].

Исходя от координатной последовательности (3), построим последовательность функций  $\psi_k(t) = \varphi_k^{(m-1)}(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Известно, что наименьшее собственное значение  $\lambda_1^{(n)}$  матрицы Грама

$$\Psi_n = \int_a^b \varrho(t) \psi_i(t) \psi_k(t) dt \Big|_{i,k=0}^n$$

положительное и последовательность  $\{\lambda_1^{(n)}\}$  не возрастает, т. е. существует неотрицательный предел  $\lambda_1 = \lim \lambda_1^{(n)}$ . Если  $\lambda_1 > 0$ , то система  $\{\psi_k(t)\}$ , где  $k = 0, \dots, n$ , называется сильно минимальной в  $L_{2,\rho}$ . Ясно, что  $\|\Psi_n^{-1}\| = 1/\lambda_1^{(n)}$ .

<sup>1</sup> Все нормы векторов и матриц берутся по евклидовой метрике.

**Теорема 2.** *Найдется такое  $c_0 > 0$ , что при*

$$\|\Gamma_n\| \leq c_0 \frac{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}}{\sqrt{n \ln n}} \quad (n \geq n_0)$$

*система (7) однозначно разрешима и*

$$\begin{aligned} & \|x_n^{(m-1)}(t) - \bar{x}_n^{(m-1)}(t)\|_{L_{2,\rho}} \leq \\ & \leq \frac{n^{1/2} \ln n}{c_0} \left( \frac{\|\Gamma_n\|}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} \|x_n^{(m-1)}(t)\|_{L_{2,\rho}} + \|\delta^{(n)}\| \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, в случае сильно минимальной системы функций  $\psi_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) вычисления следует проводить с точностью  $\|\Gamma_n\| = o(1/n^{1/2} \ln n)$ ,  $\|\delta^{(n)}\| = o(1/n^{1/2} \ln n)$ , а в общем случае требуется точность вычислений

$$\|\Gamma_n\| = o(\sqrt{\lambda_1^{(n)}}/n^{1/2} \ln n), \quad \|\delta^{(n)}\| = o(\sqrt{\lambda_1^{(n)}}/n^{1/2} \ln n).$$

**Доказательство.** Ортонормируем последовательность  $\psi_k(t)$ , пользуясь обычным методом ортонормализации

$$\begin{aligned} \chi_i(t) &= \sum_{k=0}^i d_{ik} \psi_k(t), \\ \int_a^b \varrho(t) \chi_i(t) \chi_j(t) dt &= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j, \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases} \\ (d_{ii} &\neq 0, \quad i, j=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Обозначим получаемую треугольную матрицу

$$D_n = (d_{ik})_{i,k=0}^n \quad (d_{ik} = 0, i < k), \quad D_n \in [R_{n+1} \rightarrow R_{n+1}]$$

и перепишем условие ортонормальности:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \int_a^b \varrho(t) \chi_i(t) \chi_j(t) dt = \int_a^b \varrho(t) \sum_{k=0}^i d_{ik} \psi_k(t) \sum_{l=0}^j d_{jl} \psi_l(t) dt = \\ &= \int_a^b \varrho(t) \sum_{k=0}^n d_{ik} \psi_k(t) \sum_{l=0}^n d_{jl} \psi_l(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^n d_{ik} \sum_{l=0}^n d_{jl} \int_a^b \varrho(t) \psi_k(t) \psi_l(t) dt, \end{aligned}$$

т. е.  $I_n = D_n \Psi_n D_n'$ , где  $I_n$  — единичная матрица,  $D_n'$  — матрица, получаемая транспонированием матрицы  $D_n$ ,  $D_n' \in [R_{n+1} \rightarrow R_{n+1}]$ . Отсюда  $\Psi_n = D_n^{-1} (D_n')^{-1}$ ,  $\Psi_n^{-1} = D_n' D_n$  и, следовательно,

$$\|D_n\| = \|\Psi_n^{-1}\|^{1/2} = 1/\sqrt{\lambda_1^{(n)}}.$$

Обозначим  $b^{(n)} = (D'_n)^{-1}a^{(n)}$ ,  $\bar{b}^{(n)} = (D'_n)^{-1}\bar{a}^{(n)}$  и выпишем снова уравнения (8) и (9):

$$A_n D'_n b^{(n)} = Q^{(n)} y, \quad (11)$$

$$(A_n + \Gamma_n) D'_n \bar{b}^{(n)} = Q^{(n)} y + \delta^{(n)}. \quad (12)$$

Отсюда

$$(A_n D'_n + \Gamma_n D'_n) (b^{(n)} - \bar{b}^{(n)}) = \Gamma_n D'_n b^{(n)} - \delta^{(n)}. \quad (13)$$

Выведем следующие равенства:

$$\|x_n^{(m-1)}\|_{L_{2,\rho}} = \|b^{(n)}\|, \quad (14)$$

$$\|x_n^{(m-1)} - \bar{x}_n^{(m-1)}\|_{L_{2,\rho}} = \|b^{(n)} - \bar{b}^{(n)}\|. \quad (15)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} x_n^{(m-1)}(t) &= \sum_{h=0}^n a_h^{(n)} \varphi_h^{(m-1)}(t) = \sum_{h=0}^n a_h^{(n)} \psi_h(t) = \\ &= \sum_{h=0}^n \left( \sum_{i=0}^n d_{ih} b_i^{(n)} \right) \psi_h(t) = \sum_{i=0}^n b_i^{(n)} \sum_{h=0}^n d_{ih} \psi_h(t) = \sum_{i=0}^n b_i^{(n)} \chi_i(t), \end{aligned}$$

и для вывода (14) надо принять во внимание ортонормированность в  $L_{2,\rho}$  последовательности  $\{\chi_i(t)\}$ . Соотношение (15) устанавливается аналогично.

Так как уравнение (8), а следовательно, и (11), однозначно разрешимы при  $n \geq n_0$ , то оператор  $A_n D'_n$  обратим ( $n \geq n_0$ ). Для получения оценки нормы  $(A_n D'_n)^{-1}$  оценим

$$\|(A_n D'_n)^{-1} Q^{(n)} y\| = \|b^{(n)}\| = \|x_n^{(m-1)}\|_{L_{2,\rho}} \leq c \|x_n^{(m-1)}\|_C.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{C^{m-1}} &\leq c \|P_{n+1} J y\|_C \leq c \ln n \max_{0 \leq i \leq n+1} |(Jy)(t_i)| = \\ &= c \ln n \max_{0 \leq i \leq n+1} \left| \int_a^{t_0} y(s) ds + \int_{t_0}^{t_i} y(s) ds \right|. \end{aligned}$$

Так как решение  $x_n(t)$  не зависит от значений  $y(t)$  на  $[a, t_0)$ , то можем соответствующий член не учитывать. Продолжаем с помощью неравенства Коши—Буняковского:

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq n+1} \left| \int_{t_0}^{t_i} y(s) ds \right| &= \left| \int_{t_0}^{t_0} y(s) ds \right| = \left| \sum_{\alpha=0}^{i_0-1} \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} y(s) ds \right| \leq \\ &\leq i_0^{1/2} \left( \sum_{\alpha=0}^{i_0-1} \left| \int_{t_\alpha}^{t_{\alpha+1}} y(s) ds \right|^2 \right)^{1/2} \leq (n+1)^{1/2} \|Q^{(n)} y\|. \end{aligned}$$

В итоге мы установили, что

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{C^{m-1}} &\leq c n^{1/2} \ln n \|Q^{(n)} y\|, \\ \|(A_n D'_n)^{-1} Q^{(n)} y\| &\leq \|x_n^{(m-1)}\|_C \leq c n^{1/2} \ln n \|Q^{(n)} y\|, \\ \|(A_n D'_n)^{-1}\| &\leq c n^{1/2} \ln n. \end{aligned}$$

Выберем  $c_0$  так, что  $\|(A_n D'_n)^{-1}\| \leq n^{1/2} \ln n / 2c_0$ . Пусть

$$\|\Gamma_n\| \leq c_0 \frac{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}}{n^{1/2} \ln n}.$$

Тогда

$$\|(A_n D'_n)^{-1} \Gamma_n D'_n\| \leq \frac{n^{1/2} \ln n}{2c_0} \cdot \frac{c_0 \sqrt{\lambda_1^{(n)}}}{n^{1/2} \ln n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} = \frac{1}{2}$$

и, следовательно, оператор  $A_n D'_n + \Gamma_n D'_n$  также обратим и  $\|(A_n D'_n + \Gamma_n D'_n)^{-1}\| \leq \|(I_n + (A_n D'_n)^{-1} \Gamma_n D'_n)^{-1}\| \|(A_n D'_n)^{-1}\| \leq$

$$\leq \frac{\|(A_n D'_n)^{-1}\|}{1 - \|(A_n D'_n)^{-1} \Gamma_n D'_n\|} \leq \frac{n^{1/2} \cdot \ln n}{c_0}.$$

Ввиду обратимости оператора  $A_n D'_n + \Gamma_n D'_n$  уравнение (13) и система (7) однозначно разрешимы и из (15) и (13) получаем

$$\begin{aligned} \|x_n^{(m-1)} - \bar{x}_n^{(m-1)}\|_{L_{2,\rho}} &= \|b^{(n)} - \bar{b}^{(n)}\| \leq \\ &\leq \|(A_n D'_n + \Gamma_n D'_n)^{-1}\| (\|\Gamma_n D'_n\| \|b^{(n)}\| + \|\delta^{(n)}\|) \leq \\ &\leq \frac{n^{1/2} \ln n}{c_0} \left( \frac{\|\Gamma_n\|}{\sqrt{\lambda_1^{(n)}}} \|x_n^{(m-1)}\|_{L_{2,\rho}} + \|\delta^{(n)}\| \right). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

3. Из теоремы 1 видно, что для  $x_n^{(m)}$  оценка погрешности хуже, чем для младших производных. Возникает вопрос, какими могут быть возмущения, чтобы все же  $\bar{x}_n^{(m)}$  остался близким к  $x_n^{(m)}$ . Оказывается, что можно получить следующий результат.

**Теорема 3.** *Найдется такое  $c_1 > 0$ , что при*

$$\|\Gamma_n\| \leq c_1 \frac{\sqrt{\mu_1^{(n)}}}{n^{1/2} \ln n \|\Phi_n\|_{C \rightarrow L_{2,\rho}} + n \|\Phi_n\|_{L_2 \rightarrow L_{2,\rho}}}$$

система (7) однозначно разрешима и

$$\begin{aligned} \|x_n^{(m)}(t) - \bar{x}_n^{(m)}(t)\|_{L_{2,\rho}} &\leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} (n^{1/2} \ln n \|\Phi_n\|_{C \rightarrow L_{2,\rho}} + n \|\Phi_n\|_{L_2 \rightarrow L_{2,\rho}}) \left( \frac{\|\Gamma_n\| \|x_n^{(m)}\|_{L_{2,\rho}}}{\sqrt{\mu_1^{(n)}}} + \|\delta^{(n)}\| \right), \end{aligned}$$

где  $\mu_1^{(n)}$  — наименьшее собственное значение матрицы Грама

$$\Psi_n = \left( \int_a^b \varrho(t) \varphi_i^{(m)}(t) \varphi_k^{(m)}(t) dt \right)_{i,k=0}^n$$

Известно (см. [3]), что норма  $\Phi_n$  как оператора из  $C$  в  $C$ , а тем более как оператора из  $C$  в  $L_2$ , имеет порядок роста не выше  $n \ln n$ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Будем ортонормировать систему  $\psi_k = \varphi_k^{(m)}$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), соответственно видоизменяется матрица  $D_n$  и векторы  $b^{(n)}$  и  $\bar{b}^{(n)}$ . Теперь аналогично соотношениям (14) и (15) получаем равенства

$$\|x_n^{(m)}\|_{L_{2,\rho}} = \|b^{(n)}\|,$$

$$\|x_n^{(m)} - \bar{x}_n^{(m)}\|_{L_{2,\rho}} = \|b^{(n)} - \bar{b}^{(n)}\|.$$

Выведем оценку  $\|(A_n D'_n)^{-1}\|$ :

$$\begin{aligned} \|(A_n D'_n)^{-1} Q^{(n)} y\| &= \|b^{(n)}\| = \|x_n^{(m)}\|_{L_{2,\rho}} = \\ &= \left\| -\Phi_n \sum_{j=0}^{m-1} p_j x_n^{(j)} + \Phi_n y \right\|_{L_{2,\rho}} \leq \\ &\leq c \|\Phi_n\|_{C \rightarrow L_{2,\rho}} \|x_n\|_{C^{m-1}} + \|\Phi_n\|_{L_2 \rightarrow L_{2,\rho}} \|y\|_{L_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Это справедливо при любом свободном члене  $y(t) \in L_2$ . Пусть кусочно-постоянная функция  $z$  такова, что  $z(t) = z_i = \text{const}$  для  $t \in [t_i, t_{i+1})$ ,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t) dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} z(t) dt \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

и  $z(t) = 0$  при  $a \leq t \leq t_0$ ,  $t_{n+1} \geq t \geq b$ . Функции  $y(t)$  и  $z(t)$  определяют одно и то же решение  $x_n(t)$ , так как  $x_n(t)$  зависит не прямо от  $y(t)$ , а от  $Q^{(n)}y$ , а по определению  $z$  имеем  $Q^{(n)}y = Q^{(n)}z$ . Оценим норму

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_{L_2} &= \left( \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} |z(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left( \sum_{i=0}^n \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \frac{\int_{t_i}^{t_{i+1}} y(t) dt}{t_{i+1} - t_i} \right|^2 dt \right)^{1/2} = \\ &= \left( \sum_{i=0}^n |Q_i^{(n)} y|^2 \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \left( \max \frac{1}{t_{i+1} - t_i} \right)^{1/2} \|Q^{(n)} y\| \leq \frac{n+2}{\sqrt{2(b-a)}} \|Q^{(n)} y\|, \end{aligned}$$

учитывая, что

$$\max \frac{1}{|t_{i+1} - t_i|} \leq \frac{(n+2)^2}{2(b-a)}.$$

Заменяя  $y(t)$  на  $z(t)$  и учитывая оценку для  $\|x_n\|_{C^{m-1}}$ , можем, учитывая (16), написать

$$\|(A_n D'_n)^{-1}\| \leq c n^{1/2} \ln n \|\Phi_n\|_{C \rightarrow L_{2,\rho}} + c \cdot n \|\Phi_n\|_{L_2 \rightarrow L_{2,\rho}}$$

и найдется нужная постоянная  $c_1$ .

Дальнейшие рассуждения следуют по схеме доказательства теоремы 2.

4. Рассмотрим еще случай, когда решение задачи  $\{(1), (2)\}$  ищется методом подобластей в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n+m} a_k^{(n)} \omega_k(t) = \sum_{k=0}^{n+m} a_k^{(n)} T_k \left( \frac{2t - b - a}{b - a} \right),$$

где  $T_k$  — ортогональные на  $[-1, 1]$  многочлены Чебышева. Так как они не удовлетворяют краевым условиям, то налагаем на коэффициенты  $a_k^{(n)}$  наряду с (6) еще краевые условия:

$$\sum_{k=0}^{n+m} \left[ \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{ij} T_k^{(j)}(a) + \beta_{ij} T_k^{(j)}(b) \right] a_k^{(n)} = 0 \quad (i=1, \dots, m). \quad (17)$$

Обозначим матрицу системы (6), (17)

$$A_n = (a_{ik}^{(n)})_{i,k=0}^{n+m} \in [R_{n+m+1} \rightarrow R_{n+m+1}],$$

где

$$a_{ik}^{(n)} = \begin{cases} \int_{t_i}^{t_{i+1}} [T_k^{(m)} + \sum_{j=0}^{m-1} p_j T_k^{(j)}] dt, & i=0, 1, \dots, n, \\ \sum_{j=0}^{m-1} [\alpha_{ij} T_k^{(j)}(a) + \beta_{ij} T_k^{(j)}(b)], & i=n+1, \dots, n+m. \end{cases}$$

Обозначим, далее,

$$a^{(n)} = (a_0^{(n)}, \dots, a_{n+m}^{(n)}) \in R_{n+m+1},$$

$$\bar{a}^{(n)} = (\bar{a}_0^{(n)}, \dots, \bar{a}_{n+m}^{(n)}) \in R_{n+m+1},$$

$$\bar{x}_n(t) = \sum_{k=0}^{n+m} \bar{a}_k^{(n)} T_k,$$

$$Q^{(n)}z \in R_{n+1}, \quad \Theta = (0, \dots, 0) \in R_m, \quad (Q^{(n)}z, \Theta) \in R_{n+m+1},$$

$$\Gamma_n = (\gamma_{ik}^{(n)})_{i,k=0}^{n+m} \in [R_{n+m+1} \rightarrow R_{n+m+1}],$$

$$\delta^{(n)} = (\delta_0^{(n)}, \dots, \delta_{n+m}^{(n)}) \in R_{n+m+1}.$$

В операторном виде можем теперь систему (6), (17) выразить аналогично формулой (8) и соответственную возмущенную систему — аналогично формулой (9).

Поскольку

$$\int_a^b \varrho(t) T_i \left( \frac{2t - b - a}{b - a} \right) T_j \left( \frac{2t - b - a}{b - a} \right) dt = \delta_{ij} \varrho_j \quad (i, j=0, 1, \dots),$$

где  $\varrho_0 = \pi$ ,  $\varrho_i = \pi/2$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), то

$$\|x_n\|_{L_{2,\rho}} \leq \sqrt{\pi} \|a^{(n)}\|, \quad \|x_n - \bar{x}_n\|_{L_{2,\rho}} \leq \sqrt{\pi} \|a^{(n)} - \bar{a}^{(n)}\|.$$

Оценим норму матрицы  $A_n^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \|A_n^{-1}(Q^{(n)}y, \Theta)\| &= \|a^{(n)}\| \leq \sqrt{\pi} \|x_n\|_{L_{2,\rho}} \leq c \|x_n\| c \leq \\ &\leq c n^{1/2} \ln n \|Q^{(n)}y\| = c n^{1/2} \ln n \|(Q^{(n)}y, \Theta)\|. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|A_n^{-1}(Q^{(n)}y, \Theta)\| &\leq c n^{1/2} \ln n \|(Q^{(n)}y, \Theta)\|, \\ \|A_n^{-1}\| &\leq c n^{1/2} \ln n. \end{aligned}$$

Значит, найдется такая постоянная  $c_2$ , что

$$\|A_n^{-1}\| \leq \frac{n^{1/2} \ln n}{2c_2}.$$

Если теперь  $\|\Gamma_n\| \leq c_2/n^{1/2} \ln n$ , то оператор  $A_n + \Gamma_n$  также обратим и  $\|(A_n + \Gamma_n)^{-1}\| \leq n^{1/2} \ln n / c_2$ . В итоге мы получим из (8), и (9):

$$\|x_n - \bar{x}_n\|_{L_{2,\rho}} \leq \sqrt{\pi} \|a^{(n)} - \bar{a}^{(n)}\| \leq \sqrt{\pi} \frac{n^{1/2} \ln n}{c_2} (\|\Gamma_n\| \|x_n\|_{L_{2,\rho}} + \|\delta^{(n)}\|).$$

Таким образом, при использовании полиномов Чебышева также требуются точности вычислений  $\|\Gamma_n\| = o(1/n^{1/2} \ln n)$ ,  $\|\delta^{(n)}\| = o(1/n^{1/2} \ln n)$ .

## Литература

1. Вайникко Г. М., О сходимости и устойчивости метода коллокации. Дифференц. уравнения, 1965, 1, № 2, 244—254.
2. Керге Р. М., К оценке погрешности метода подобластей. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1978, 18, № 3, 628—633.
3. Петерсен И., О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений. Изв. АН ЭстССР, 1961, 10, № 1, 3—12.

Поступило  
24 IV 1978

## ÜBER DIE STABILITÄT DES TEILGEBIETSVERFAHRENS

R. Kerger

### Zusammenfassung

Die Aufgabe  $\{(1), (2)\}$  wird mit Hilfe des Teilgebietsverfahrens gelöst. In der Rechenpraxis löst man statt des Systems (6) ein gestörtes System (7) und statt der Lösung  $x_n$  bekommt man eine gestörte Lösung  $\bar{x}_n$ . In dem Artikel ist der Einfluß der Störungen auf  $x_n - \bar{x}_n$  betrachtet worden. Die Stabilitätsbedingungen sind in Sätzen 2 und 3 dargestellt worden.

Die Konvergenzgeschwindigkeit des Teilgebietsverfahrens ist in [2] untersucht worden.

## О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛАБО-СИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

А. Педас

Тартуский государственный университет

### § 1. Введение

Дифференциальные свойства решений интегральных уравнений имеют важное значение при решении многих теоретических и практических задач. Например, данные о том, что искомое решение обладает определенной степенью гладкости весьма существенны для успешного применения квадратурных формул повышенной точности при численном решении интегральных уравнений методом механических квадратур.

Целью настоящей статьи является изучение дифференциальных свойств и особенностей решений одномерных линейных интегральных уравнений вида

$$x(t) = \int_0^1 \kappa(|t-s|)x(s)ds + f(t), \quad (1)$$

где  $0 \leq t \leq 1$  и ядро  $\kappa(\tau)$  обладает следующими свойствами:

- 1) функция  $\kappa$  определена и непрерывно дифференцируема при  $0 \leq \tau \leq 1$ , кроме, быть может, точки  $\tau = 0$ ;
- 2) при любых  $\tau \in (0, 1]$  имеют место оценки

$$|\kappa(\tau)| \leq b \left( \frac{|\ln \tau|^m}{\tau^\beta} + 1 \right) \quad (0 < \tau \leq 1; b = \text{const}) \quad (2)$$

и

$$\left| \frac{d}{d\tau} \kappa(\tau) \right| \leq b' \left( \frac{|\ln \tau|^m}{\tau^{\beta+1}} + 1 \right) \quad (0 < \tau \leq 1; b' = \text{const}), \quad (3)$$

где  $0 \leq \beta = \text{const} < 1$ , а  $m \geq 0$  — некоторое целое число;

- 3) существуют конечные пределы

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\tau^\beta}{|\ln \tau|^m} \kappa(\tau); \quad \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\tau^{\beta+1}}{|\ln \tau|^m} \frac{d}{d\tau} \kappa(\tau). \quad (4)$$

Доказывается, что если  $f \in C^2[0, 1]$ , то решение  $x_0$  уравнения (1) имеет в промежутке интегрирования  $(0, 1)$  непрерывную вторую производную  $x_0''$ , и что  $x_0''(t)$  при  $t = 0$  и  $t = 1$  имеет особенности, которые не сильнее, чем  $t^{-(\beta+1)} |\ln t|^m$ , соответственно  $(1-t)^{-(\beta+1)} |\ln(1-t)|^m$ .

Отметим, что дифференцируемость решений интегральных уравнений со слабой особенностью изучалась в статьях [3—5]. В [4] предполагается аналитичность ядра и свободного члена интегрального уравнения, а основные результаты работы [5] относятся к уравнениям (1) с ядрами  $\kappa(\tau) = \log \tau$  и  $\kappa(\tau) = \tau^{-\beta}$ . В работе [3] рассматривается случай ядра (2)—(4) с  $\beta = 0$  и  $m = 1$ .

## § 2. Основные результаты статьи

В этом параграфе дадим более четкие формулировки результатов статьи; их доказательства будут приведены в последующих параграфах.

**Теорема 1.** Пусть ядро  $\kappa(\tau)$  интегрального уравнения (1) непрерывно при  $0 < \tau \leq 1$  и удовлетворяет оценке (2), а свободный член  $f$  непрерывно дифференцируем при  $0 \leq t \leq 1$ . Пусть соответствующее однородное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 \kappa(|t-s|)x(s)ds \quad (5)$$

имеет в классе непрерывных на  $[0, 1]$  функций лишь нулевое решение.

Тогда решение  $x_0$  уравнения (1) непрерывно дифференцируемо при  $0 < t < 1$ , его производная  $x'_0$  является единственным решением уравнения

$$x(t) = \int_0^1 \kappa(|t-s|)x(s)ds + f'(t) + x_0(0)\kappa(t) - x_0(1)\kappa(1-t). \quad (6)$$

и справедлива оценка

$$|x'_0(t)| \leq c_1 \left( \frac{|\ln t|^m}{t^\beta} + \frac{|\ln(1-t)|^m}{(1-t)^\beta} \right) \quad (0 < t < 1), \quad (7)$$

где  $c_1 = c_1(m, \beta)$  — некоторая положительная постоянная.

**Теорема 2.** Пусть выполнены следующие условия:

1) функция  $\kappa$  непрерывно дифференцируема при  $0 < \tau \leq 1$ ; имеют место оценки (2) и (3); существуют конечные пределы (4):

2) функция  $f$  дважды непрерывно дифференцируема при  $0 \leq t \leq 1$ ;

3) уравнение (5) имеет в классе непрерывных на  $[0, 1]$  функций лишь нулевое решение.

Тогда решение  $x_0$  интегрального уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируемо при  $0 < t < 1$  и для второй производной  $x''_0$  справедлива оценка

$$|x''_0(t)| \leq c_2 \left( \frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} + \frac{|\ln(1-t)|^m}{(1-t)^{\beta+1}} \right) \quad (0 < t < 1), \quad (8)$$

где  $c_2 = c_2(m, \beta)$  — некоторая положительная постоянная.

З а м е ч а н и е. Если  $x_0(0) \neq 0$  и  $x_0(1) \neq 0$ , то оценки (7) и (8) неулучшаемы (в смысле порядка).

### § 3. Первая производная решения

Мы приступаем теперь к доказательству теоремы 1.

3.1. Обозначения и вспомогательные результаты. Условимся здесь и далее обозначать через  $c$  положительные постоянные, которые в разных неравенствах могут принимать различные значения. Через  $C$  и  $L^p$  ( $p \geq 1$ ) соответственно обозначим банахово пространство непрерывных на  $[0, 1]$  функций с обычной макс-нормой и банахово пространство суммируемых с  $p$ -ой степенью на  $[0, 1]$  функций  $x$ :

$$\|x\|_{L^p} = \left( \int_0^1 |x(s)|^p ds \right)^{1/p} < \infty.$$

Из непрерывности ядра  $\kappa(\tau)$  при  $\tau > 0$  и оценки (2) вытекает (см. [2]), что интегральный оператор  $T$ , определяемый формулой

$$(Tx)(t) = \int_0^1 \kappa(|t-s|) x(s) ds, \quad (9)$$

вполне непрерывен, как оператор из  $C$  в  $C$ , а оператор  $T^n$  (при достаточно больших  $n$ ) вполне непрерывен, как оператор из  $L^1$  в  $C$ . Считая, что однородное уравнение  $x = Tx$  имеет лишь тривиальное решение в  $C$ , теперь заключаем, что интегральное уравнение (1) имеет в любом из пространств  $C$  и  $L^1$  единственное решение. Другими словами, если  $I$  есть тождественное преобразование, то в условиях теоремы 1 существует ограниченный на всем  $L^1$  обратный оператор  $(I - T)^{-1}$ .

Из непрерывности  $\kappa$  при  $0 < \tau \leq 1$  и оценки (2) вытекает, что  $(T\kappa)(t)$  является непрерывной функцией при  $0 < t \leq 1$  и справедлива оценка  $|(T\kappa)(t)| \leq c t^{-\beta}$ .

3.2. Доказательство теоремы 1. Докажем сначала, что решение  $x_0 \in C$  уравнения (1) имеет суммируемую производную  $x'_0$  и что  $x'_0$  является единственным решением уравнения (6). Другими словами, мы покажем, что

$$x'_0 = (I - T)^{-1}g, \quad (10)$$

где

$$g(t) = f'(t) + x_0(0)\kappa(t) - x_0(1)\kappa(1-t) \in L^1. \quad (11)$$

Мы исходим из тождества  $x_0 = Tx_0 + f$  или, что то же самое, из

$$x_0(t) = - \int_t^{t-1} \kappa(|\tau|) x_0(t-\tau) d\tau + f(t). \quad (12)$$

Обозначая непрерывное продолжение  $x_0$  вне отрезка  $[0, 1]$  снова через  $x_0$ , преобразуем (12) к виду

$$x_h = Tx_h + g_h, \quad (13)$$

где

$$x_h(t) = \frac{1}{h} [x_0(t+h) - x_0(t)],$$

$$g_h(t) = \frac{1}{h} [f(t+h) - f(t)] + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (f - f') \kappa(|\tau|) x_0(t+h - \tau) d\tau,$$

а  $h \neq 0$  — некоторое действительное число. Так как  $x_h \in L^1$  и  $g_h \in L^1$ , а, по доказанному в пункте 3.1, оператор  $I - T$  непрерывно обратим в  $L^1$ , то

$$x_h = (I - T)^{-1} g_h.$$

Воспользовавшись теоремой о среднем, нетрудно убедиться, что функции  $g_h$  почти всюду сходятся к функции  $g$  при  $h \rightarrow 0$ . С помощью оценки (2) и непрерывности функций  $x_0$  и  $f'$  получаем, что почти всюду имеет место неравенство  $|g_h(t)| \leq \varphi(t)$ , где

$$\varphi(t) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(t)| + c \left( \frac{|\ln t|^m}{t^\beta} + \frac{|\ln(1-t)|^m}{(1-t)^\beta} + 1 \right)$$

— интегрируемая на  $[0, 1]$  функция. Отсюда по теореме Лебега (см. [1]) вытекает, что  $g_h \rightarrow g$  в пространстве  $L^1$  при  $h \rightarrow 0$ . Но тогда и  $(I - T)^{-1} g_h \rightarrow (I - T)^{-1} g$  в  $L^1$  при  $h \rightarrow 0$ . Отсюда и из  $x_h \rightarrow x'_0$  при  $h \rightarrow 0$  следует соотношение (10).

Итак, нами доказано, что  $x_0$  имеет производную  $x'_0$  и  $x'_0 \in L^1$ . Но тогда существует номер  $n_0$  такой, что  $T^{n_0} x'_0 \in C$ . После преобразования  $x'_0 = Tx'_0 + g$  получим

$$x'_0(t) = (T^{n_0} x'_0)(t) + g(t) + (Tg)(t) + \dots + (T^{n_0-1} g)(t). \quad (14)$$

Отсюда, в силу результатов пункта 3.1 и линейности оператора  $T$ , следует, что  $x'_0$  непрерывна при  $0 < t < 1$  и справедлива оценка (7).

Теорема 1 доказана.

#### § 4. Вторая производная решения

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 2.

4.1. Вспомогательные пространства. Положим

$$\varphi(t) = t^{-\beta} |\ln t|^m; \quad \psi(t) = \varphi(t)/t, \quad (15)$$

$$p(t) = t^\beta (|\ln t|^m + 1)^{-1}; \quad q(t) = tp(t). \quad (16)$$

Пространство  $U$ . Через  $U = U(m, \beta)$  будем обозначать совокупность непрерывно дифференцируемых в промежутке  $(0, 1]$  функций  $u$  таких, что имеют место оценки

$$|u(t)| \leq c(\varphi(t)+1), \quad |u'(t)| \leq c(\psi(t)+1) \quad (0 < t \leq 1) \quad (17)$$

и существуют конечные пределы

$$\lim_{t \rightarrow 0+} p(t)u(t); \quad \lim_{t \rightarrow 0+} q(t)u'(t). \quad (18)$$

Пространство  $V$ . Через  $V = V(m, \beta)$  будем обозначать совокупность непрерывно дифференцируемых в  $[0, 1)$  функций  $v$  таких, что имеют место оценки

$$|v(t)| \leq c(\varphi(1-t)+1), \quad |v'(t)| \leq c(\psi(1-t)+1) \quad (0 \leq t < 1) \quad (19)$$

и существуют конечные пределы

$$\lim_{t \rightarrow 1-} p(1-t)v(t); \quad \lim_{t \rightarrow 1-} q(1-t)v'(t). \quad (20)$$

Снабженные соответственно нормами

$$\|u\|_U = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)u(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |q(t)u'(t)| \quad (21)$$

и

$$\|v\|_V = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(1-t)v(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} |q(1-t)v'(t)|, \quad (22)$$

$U$  и  $V$  являются банаховыми пространствами.

Пространство  $W$ . Через  $W = W(m, \beta)$  будем обозначать банахово пространство, определяемое равенством

$$W = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

и нормой

$$\|w\|_W = \inf_{u \in U, v \in V, u+v=w} (\|u\|_U + \|v\|_V). \quad (23)$$

Пространство  $W_0$ . Через  $W_0 = W_0(m, \beta)$  будем обозначать банахово пространство, определяемое равенством

$$W_0 = \{u + v \mid u \in U_0, v \in V_0\}$$

и нормой

$$\|w\|_{W_0} = \inf_{u \in U_0, v \in V_0, u+v=w} (\|u\|_U + \|v\|_V). \quad (24)$$

Здесь

$$U_0 = \{u \mid u \in U, u(1) = 0\}; \quad V_0 = \{v \mid v \in V, v(0) = 0\}.$$

Ясно, что имеет место теоретико-множественное равенство  $W_0 = W$  и что  $\|w\|_W \leq \|w\|_{W_0}$  ( $w \in W_0$ ), т. е. оператор вложения  $W_0$  в  $W$  ограничен. По теореме Банаха ограничен также обратный к нему оператор, т. е. имеет место неравенство  $\|w\|_{W_0} \leq c\|w\|_W$  с некоторой постоянной  $c$ . Поэтому нормы (23) и (24) эквивалентны.

**4.2.** Схема доказательства теоремы 2. Мы исходим из равенства  $x'_0 = Tx'_0 + g$ , где функция  $g$  (см. формулу (11)) принадлежит пространству  $W$ , ибо  $f \in W$  и в силу (2) — (4) также  $[x_0(0)\kappa(t) - x_0(1)\kappa(1-t)] \in W$ . Мы хотим показать, что оператор  $T$  отображает пространство  $W$  в себя и существует ограниченный обратный оператор  $(I - T)^{-1}$  (определенный на всем  $W$ ). Это равносильно требуемому результату, так как тогда из  $x'_0 = Tx'_0 + g$  следует включение  $x'_0 = (I - T)^{-1}g \in W$ , т. е.  $x'_0$  непрерывно дифференцируемо в  $(0, 1)$  и имеет место оценка (8).

Таким образом, на основании сказанного выше, достаточно проверить справедливость следующих утверждений.

а) Оператор  $T$  отображает пространство  $W$  в  $W$  (или, что то же самое,  $W_0$  в  $W$ ).

б) Оператор  $T$  является вполне непрерывным оператором из  $W$  в  $W$  (или из  $W_0$  в  $W$ ).

в) Уравнение  $\omega = T\omega$  имеет в  $W$  лишь нулевое решение.

Установление этих утверждений мы проведем в следующих пунктах.

**4.3.** Некоторые леммы. В дальнейшем мы везде будем предполагать, что выполнены условия 1) — 3) из § 1 относительно ядра  $\kappa(\tau)$  (хотя это всегда и не является необходимым).

**Лемма 1.** Если  $u \in U$  и  $v \in V$ , то несобственные интегралы

$$I_u(t) = \int_0^1 u'(s) [\kappa(|t-s|) - \kappa(t)] ds \quad (25)$$

и

$$I_v(t) = \int_0^1 v'(s) [\kappa(|t-s|) - \kappa(1-t)] ds \quad (26)$$

абсолютно сходятся при каждом  $t \in (0, 1)$ , причем имеют место оценки

$$|I_u(t)| \leq c \left( \frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} + 1 \right) \quad (0 < t \leq 1) \quad (27)$$

и

$$|I_v(t)| \leq c \left( \frac{|\ln(1-t)|^m}{(1-t)^{\beta+1}} + 1 \right) \quad (0 \leq t < 1). \quad (28)$$

**Доказательство.** Докажем сходимость интеграла (25) и оценку (27); сходимость интеграла (26) и оценка (28) доказывается аналогично. Мы имеем

$$\begin{aligned} |I_u(t)| &\leq c \left( \int_0^r + \int_r^t + \int_t^1 \right) \left[ \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |\kappa(|t-s|) - \kappa(t)| \right] ds = \\ &\equiv c(J_1 + J_2 + J_3), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$r = r(t, R) = t/(t+R) \quad (0 < t \leq 1), \quad (30)$$

а  $R > 1$  — некоторое действительное число. Оценим каждый член в (29) отдельно. Пользуясь оценками (2) и (3) и формулой Лагранжа, при всех  $\varepsilon$  с  $0 < \varepsilon < r$  имеем

$$\int_{\varepsilon}^r (\psi(s) + 1) |\chi(|t-s|) - \chi(t)| ds \leq b' \psi(t-r) \int_0^r (\varphi(s) + 1) ds. \quad (31)$$

Так как

$$\psi(t-r) \leq \psi(t) \cdot \left( \frac{R+1}{R-1} \right)^{\beta+1} \left[ 1 + \dots + \frac{\ln^m(R^2+R)}{|\ln t|^m} \right].$$

и

$$\int_0^r \varphi(s) ds \leq cR^{-1+\beta} \ln^m(R+1),$$

то из (31) теперь заключаем, что интеграл  $J_1$  сходится. Кроме того, имеет место оценка

$$\int_0^r \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |\chi(t-s) - \chi(t)| ds \leq c \left( \frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} + 1 \right) \quad (0 < t \leq 1), \quad (32)$$

где постоянная  $c = c(m, \beta, R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$  (это замечание будет использовано позже).

Аналогично, при всех  $\varepsilon > 0$ ,  $r + \varepsilon < t$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_r^{t-\varepsilon} \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |\chi(|t-s|) - \chi(t)| ds \leq \\ & \leq \left( \frac{|\ln r|^m}{r^{\beta+1}} + 1 \right) b \int_0^t \left( \frac{|\ln(t-s)|^m}{(t-s)^\beta} + \frac{|\ln t|^m}{t^\beta} + 2 \right) ds \leq \\ & \leq c \left( \frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} + 1 \right), \end{aligned}$$

где  $c = c(m, \beta, R)$  — некоторая положительная постоянная. Поэтому интеграл  $J_2$  сходится. Наконец, при всех  $\varepsilon > 0$ ,  $t + \varepsilon < 1$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_{t+\varepsilon}^1 \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |\chi(|t-s|) - \chi(t)| ds \leq \\ & \leq \left( \frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} + 1 \right) b \int_t^1 \left( \frac{|\ln|t-s||^m}{|t-s|^\beta} + 1 \right) ds + \\ & + b \left( \frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} + 1 \right) \int_t^1 \left( \frac{|\ln s|^m}{s^\beta} + 1 \right) ds \leq c \left( \frac{|\ln t|^m}{t^{\beta+1}} + 1 \right), \end{aligned}$$

где  $c = c(m, \beta)$  — некоторая положительная постоянная. Отсюда видно, что интеграл  $I_3$  сходится.

Итак, нами доказано, что несобственный интеграл  $\int_0^1$  в правой части неравенства (29) сходится при каждом  $t$ ,  $0 < t \leq 1$ , и справедлива оценка

$$\int_0^1 (\psi(s) + 1) |\kappa(|t-s|) - \kappa(t)| ds \leq c(\psi(t) + 1). \quad (33)$$

Но тогда, тем более, сходится интеграл  $I_u(t)$  и справедлива оценка (27). Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Функции  $q(t)I_u(t)$  и  $q(1-t)I_v(t)$  непрерывны при  $0 \leq t \leq 1$ .*

**Доказательство.** Докажем непрерывность функции  $q(t)I_u(t)$ ; непрерывность  $q(1-t)I_v(t)$  доказывается аналогично. Положим

$$y_t(s) = q(t) [\kappa(|t-s|) - \kappa(t)] u'(s).$$

Пусть  $t_0 \in [0, 1]$ . По теореме Витали (см. [1]) достаточно проверить выполнение следующих условий:

1) функции  $y_t(s)$  сходятся почти всюду к функции  $y_{t_0}(s)$  при  $t \rightarrow t_0$ ;

2) при любом заданном  $\varepsilon > 0$  существует такое (не зависящее от  $t$ ) число  $\delta > 0$ , что

$$\int_D |y_t(s)| ds < \varepsilon \quad \text{при} \quad \text{mes } D < \delta.$$

Здесь  $\text{mes } D$  — лебегова мера измеримого множества  $D \subset [0, 1]$ .

Условие 1) очевидно. Пусть  $\eta > 0$  — достаточно малое число. Пользуясь выражением (30) и оценкой (17) относительно  $u'$ , можем записать

$$\int_0^\eta |y_t(s)| ds \leq c \left( \int_0^r + \int_r^\eta \right) q(t) \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |\kappa(|t-s|) - \kappa(t)| ds. \quad (34)$$

Ввиду (32) для первого интеграла в правой части неравенства (34) будем иметь, что этот интеграл не превосходит положительную величину  $c(R)$ , причем  $c(R) \rightarrow 0$  при  $R \rightarrow \infty$ . Увеличив, если нужно  $R$ , будем теперь считать, что при всех  $t$ ,  $0 < t \leq 1$ , имеют одновременно место следующие неравенства

$$r < \eta; \quad cq(t) \int_0^r \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |\kappa(|t-s|) - \kappa(t)| < \frac{\gamma}{2},$$

где  $\gamma$  — некоторое малое положительное число. При указанном (фиксированном) числе  $R$  для второго интеграла в правой части неравенства (34) будем иметь

$$\begin{aligned}
& cq(t) \int_r^\eta \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |\chi(|t-s|) - \chi(t)| ds \leq \\
& \leq cbq(t) \left[ \left( \frac{|\ln r|^m}{r^{\beta+1}} + 1 \right) \int_0^\eta \left( \frac{|\ln|t-s||^m}{|t-s|^\beta} + 1 \right) ds + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\left( \frac{|\ln t|^m}{t^\beta} + 1 \right)}{r} \int_0^\eta \left( \frac{|\ln s|^m}{s^\beta} + s \right) ds \right].
\end{aligned}$$

При этом

$$q(t) \frac{\left( \frac{|\ln t|^m}{t^\beta} + 1 \right)}{r} \leq (R+1)^{\beta+1} \quad \text{и} \quad q(t) \frac{|\ln r|^m}{r^{\beta+1}} \leq c,$$

где  $c = (m, \beta, R) = \text{const} > 0$ . Поэтому за счет уменьшения  $\eta$  можно теперь добиться, чтобы указанный член в (34) был достаточно малым ( $< \gamma/2$ ). Таким образом, мы доказали, что интеграл в левой части неравенства (34) стремится к нулю при  $\eta \rightarrow 0$  равномерно по  $t$ ,  $0 < t \leq 1$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  и зафиксируем  $\eta$  так, чтобы для всех  $t \in (0, 1]$  выполнялось неравенство

$$\int_0^\eta |y_t(s)| ds < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $\delta > 0$ . Обозначим через  $D_\delta$  любое такое множество из отрезка  $[0, 1]$ , для которого  $\text{mes } D_\delta < \delta$ . Принимая во внимание, что  $D_\delta = (D_\delta \cap [0, \eta]) \cup (D_\delta \cap [\eta, 1])$  и используя соотношение

$$\int_{D_\delta} \left( \frac{|\ln|t-s||^m}{|t-s|^\beta} + 1 \right) ds \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0,$$

мы приходим к оценке

$$\int_{D_\delta} |y_t(s)| ds \leq \int_0^\eta |y_t(s)| ds + \int_{D_\delta \cap [\eta, 1]} |y_t(s)| ds < \varepsilon,$$

если только  $\delta$  достаточно мало. Другими словами, выполнено и условие 2) теоремы Витали. Лемма 2 доказана.

В ходе наших рассуждений мы доказали следующий результат:

Для любого  $\varepsilon > 0$  существует не зависящая от  $t \in (0, 1]$  постоянная  $\delta > 0$  такая, что для любого измеримого множества  $D \subset [0, 1]$  с  $\text{mes } D < \delta$  справедливо неравенство

$$q(t) \int_D (\psi(s) + 1) |\chi(|t-s|) - \chi(t)| ds < \varepsilon. \quad (35)$$

**Лемма 3.** Если  $u \in U_0$  и  $v \in V_0$ , то

$$\frac{d}{dt} (Tu)(t) = I_u(t); \quad \frac{d}{dt} (Tv)(t) = I_v(t). \quad (36)$$

**Доказательство.** Пусть  $D(0,1)$  — совокупность бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в  $(0,1)$  и  $D'(0,1)$  — множество всех линейных непрерывных функционалов на  $D(0,1)$  (т. е.  $D'(0,1)$  есть пространство распределений на  $D(0,1)$ ). Если  $F \in D'$ , а  $\varphi \in D$ , то значение  $F$  на  $\varphi$  будем обозначать через  $\langle F, \varphi \rangle$ . Если  $F$  — регулярная обобщенная функция, т. е. распределение, порождаемое локально интегрируемой в  $(0,1)$  функцией  $F$ , то обозначим

$$\langle F, \varphi \rangle = (F, \varphi) = \int_0^1 F(t)\varphi(t) dt, \quad \varphi \in D(0,1).$$

Мы докажем первое из равенств (36) (второе равенство доказывается аналогично). Достаточно показать, что для любой  $\varphi \in D(0,1)$  справедливо соотношение

$$\langle (Tu)', \varphi \rangle = (I_u, \varphi). \quad (37)$$

Прежде всего заметим, что если ввести в рассмотрение функцию  $f_\varphi = T\varphi - \varphi$  ( $\varphi \in D$ ) и провести выкладки, аналогичные доказательству теоремы 1, то получаем, что  $f_\varphi \in C^1[0,1]$  и  $f'_\varphi = T\varphi' - \varphi'$ . С другой стороны,  $f'_\varphi = (T\varphi)' - \varphi'$  и, следовательно,

$$(T\varphi)' = T\varphi' \quad (\varphi \in D(0,1)). \quad (38)$$

Далее, принимая во внимание симметричность оператора  $T$  и учитывая (38), при всех  $\varphi \in D(0,1)$  получим

$$\begin{aligned} \langle (Tu)', \varphi \rangle &= -\langle Tu, \varphi' \rangle = -\langle Tu, \varphi' \rangle = -\langle u, T\varphi' \rangle = \\ &= -\langle u, (T\varphi)' \rangle = \langle u', T\varphi - T\varphi(0) \rangle. \end{aligned} \quad (39)$$

На последнем шаге мы воспользовались интегрированием по частям и соотношением  $u(1) = 0$ .

С другой стороны, так как  $\text{supp } \varphi \subset (0,1)$  и имеют место неравенства (27) и (33), то по теоремам Фубини и Тонелли (см. [1], стр. 208 и 213) получаем, что при всех  $\varphi \in D(0,1)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 I_u(t)\varphi(t) dt &= \int_0^1 \left( \int_0^1 u'(s) [\chi(|t-s|) - \chi(t)] ds \right) \varphi(t) dt = \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 [\chi(|t-s|) - \chi(t)] \varphi(t) dt \right) u'(s) ds = \\ &= \int_0^1 u'(s) [T\varphi(s) - T\varphi(0)] ds. \end{aligned}$$

Таким образом, продолжая равенства (39), получим соотношение (37). Лемма 3 доказана.

Опираясь на леммы 1—3 и линейность оператора  $T$ , теперь нетрудно убедиться, что оператор  $T$  отображает  $W_0$  в  $W$ . Имеет место

**Лемма 4.** *Оператор  $T: W_0 \rightarrow W$  вполне непрерывен.*

**Доказательство.** Достаточно показать, что  $T$  является вполне непрерывным оператором из  $U_0$  в  $U$  и из  $V_0$  в  $V$ .

Пусть  $\{u_n\}$  — любая последовательность элементов пространства  $U_0$ , ограниченных по норме определенным числом  $K$ :

$$\|u_n\|_U \leq K \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (39)$$

Покажем, что  $\{Tu_n\}$  компактна в  $U$ . Ввиду (21) это равносильно тому, что  $\{p(t)(Tu_n)(t)\}$  и  $\{q(t)(Tu_n)'(t)\}$  суть компактные множества в пространстве  $C[0, 1]$ .

Докажем, например, компактность  $\{q(t)(Tu_n)'(t)\}$ , т. е. покажем, что функции

$$d_n(t) = q(t) \int_0^1 u'_n(s) [\chi(|t-s|) - \chi(t)] ds \quad (n=1, 2, \dots)$$

равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Ограниченность  $d_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , одним и тем же числом следует из (15)—(17), (33) и (39). Остается доказать равностепенную непрерывность. Мы имеем

$$|d_n(t_1) - d_n(t_2)| \leq cK \int_0^1 M(t_1, t_2; s) ds, \quad (40)$$

где  $0 \leq t_1, t_2 \leq 1$ , а

$$M(t_1, t_2; s) = \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |q(t_1) [\chi(|t_1-s|) - \chi(t_1)] - q(t_2) [\chi(|t_2-s|) - \chi(t_2)]|.$$

Ввиду (40) достаточно показать, что при любом заданном  $\varepsilon > 0$  существует такое  $\gamma > 0$ , что

$$cK \int_0^1 M(t_1, t_2; s) ds < \varepsilon \quad \text{при} \quad |t_1 - t_2| < \gamma. \quad (41)$$

Доказательство этого проведем от противного. Пусть для некоторого  $\varepsilon > 0$  не существует такого числа  $\gamma > 0$ , о котором идет речь в (41). В таком случае, какое бы число  $\gamma > 0$  ни взять, найдутся в отрезке  $[0, 1]$  такие два значения  $t_1$  и  $t_2$ , что  $|t_1 - t_2| < \gamma$ , а  $cK \int_0^1 M(t_1, t_2; s) ds \geq \varepsilon$ . Возьмем теперь последовательность  $\{\gamma_n\}$  положительных чисел таких, что  $\gamma_n \rightarrow 0$ . В силу сказанного, для каждого  $\gamma_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , найдутся в  $[0, 1]$  значения  $t_1^n$  и  $t_2^n$  такие, что  $|t_1^n - t_2^n| < \gamma_n$ , а

$$cK \int_0^1 M(t_1^n, t_2^n; s) ds \geq \varepsilon.$$

Из ограниченной последовательности  $\{t_1^n\}$  можно извлечь подпоследовательность (которую будем снова обозначать через  $\{t_1^n\}$ ), сходящаяся к некоторой точке  $t^0$  отрезка  $[0, 1]$ . Так как  $|t_1^n - t_2^n| < \gamma_n$ , а  $\gamma_n \rightarrow 0$ , то одновременно и  $\{t_2^n\}$  сходятся к  $t^0$ .

С другой стороны, мы имеем следующее:

1) функции  $M_n(s) \equiv M(t_1^n, t_2^n; s)$  сходятся к  $M_0(s) \equiv 0$  почти всюду при  $n \rightarrow \infty$ ;

2) для каждого  $\gamma > 0$  существует  $\eta > 0$ , одно и то же для всех  $n$ , такое, что

$$\int_D M_n(s) ds \leq \sum_{i=1}^2 \int_D \left( \frac{|\ln s|^m}{s^{\beta+1}} + 1 \right) |q(t_i^n) [\chi(|t_i^n - s|) - \chi(t_i^n)]| ds < \gamma,$$

если  $\text{mes } D < \eta$  и  $D \subset [0, 1]$ . Здесь мы воспользовались соотношением (35). Но тогда по теореме Витали должно быть

$$\int_0^1 M_n(s) ds \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

а это противоречит тому, что при всех  $n$

$$cK \int_0^1 M_n(s) ds \geq \varepsilon > 0.$$

Таким образом, доказано, что  $T: U_0 \rightarrow U$  вполне непрерывен. Аналогичным образом можно доказать, что  $T: V_0 \rightarrow V$  вполне непрерывен. Лемма 4 доказана.

**4.4. Доказательство теоремы 2.** По теореме 1 решение  $x_0$  непрерывно дифференцируемо в промежутке  $(0, 1)$  и  $x'_0 = Tx'_0 + g$ , где функция  $g$  определена в (11). Из предположений относительно  $\chi$  и  $f$  следует, что  $g \in \mathcal{W}$ . Из условия 3) теоремы 2 вытекает, что уравнение  $\omega = T\omega$  имеет в пространстве  $\mathcal{W}$  лишь нулевое решение. Отсюда по лемме 4, ввиду эквивалентности норм (23) и (24), заключаем, что оператор  $I - T$  непрерывно обратим в  $\mathcal{W}$ . Следовательно,  $x'_0 = (I - T)^{-1}g \in \mathcal{W}$ , т. е.  $x'_0$  непрерывно дифференцируемо при  $0 < t < 1$  и справедлива оценка (8). Теорема 2 доказана.

## Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. М., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.

3. Педас А., О решении интегральных уравнений с логарифмической особенностью сплайн-коллокационным методом первого порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, **431**, 130—146.
4. Kahane, C., Analyticity of a solutions of mildly singular integral equations. *Communs Pure and Appl. Math.*, 1965, **18**, № 4, 593—626.
5. Richter, G. R., On weakly singular Fredholm integral equations with displacement kernels. *J. Math. Anal. and Appl.*, 1976, **55**, № 1, 32—42.

Поступило  
25 IV 1978

## ON THE SMOOTHNESS OF THE SOLUTION OF AN INTEGRAL EQUATION WITH A WEAKLY SINGULAR KERNEL

A. Pedas

### Summary

The object of this paper is to study differential properties of solutions of linear integral equations of the second kind with weakly singular kernels. This question has particularly important implications for the problem of solving such integral equations numerically, since the success of any numerical procedure depends crucially on one's ability to approximate the solution accurately. The following results are obtained.

**Theorem 1.** *Let  $\kappa$  be a continuous function over  $(0, 1]$ , which satisfies the condition (2). Let  $f$  be a continuously differentiable function over  $[0, 1]$ . Finally, let the equation (5) has only trivial solution  $x=0$  in  $C[0, 1]$ . Then the solution  $x_0$  of the integral equation (1) is continuously differentiable on  $(0, 1)$ ; there exists a unique solution of the equation (6), which is the derivative of  $x_0$ , and the estimate (7) holds.*

**Theorem 2.** *Assume that*

- 1)  $\kappa$  is a continuously differentiable function over  $(0, 1]$ , which satisfies the conditions (2) and (3) and there exist the finite limits (4);
- 2)  $f$  is a twice continuously differentiable function over  $[0, 1]$ ;
- 3) the equation (5) has only trivial solution  $x=0$  in  $C[0, 1]$ .

*Then the solution  $x_0$  of the integral equation (1) has a continuous second derivative on  $(0, 1)$  and the estimate (8) holds.*

## ИЗУЧЕНИЕ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ ОТЫСКАНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ВРАЩЕНИЙ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

П. Мийдла

Тартуский государственный университет

### § 1. Введение

В настоящей статье изучается сходимость некоторых приближенных методов при отыскании периодических решений (автоколебаний) нелинейной автономной системы дифференциальных уравнений

$$Z'(\tau) = F(Z(\tau)), \quad (1)$$

где  $Z(\tau) = (z_1(\tau), \dots, z_m(\tau))$  и  $F(Z) = (f_1(Z), \dots, f_m(Z))$ . Для этого мы используем понятие вращения векторного поля.

Предполагаем, что для системы (1) имеют место следующие условия:

- (i) вектор-функция  $F$  определена и непрерывна на всем фазовом пространстве  $\mathbf{R}^m$ ;
- (ii) каждое начальное значение определяет единственное решение системы (1);
- (iii) система (1) имеет  $\omega^*$ -периодическое решение  $Z^*(\tau)$ , отличное от состояния равновесия,

$$\begin{aligned} Z^*(\tau) &= (z_1^*(\tau), \dots, z_m^*(\tau)) = \\ &= (z_1^*(\tau + \omega^*), \dots, z_m^*(\tau + \omega^*)) = Z^*(\tau + \omega^*). \end{aligned}$$

Это решение описывает движение по замкнутой траектории (по т. н. циклу)  $\Gamma \subset \mathbf{R}^m$ .

Пусть

- (iv) цикл  $\Gamma$  изолирован, т. е. существует открытая окрестность  $G$  цикла  $\Gamma$ , в которой нет больше циклов системы (1).

Наша цель — перейти к операторному уравнению вида  $Y = TY$  с вполне непрерывным оператором  $T: E \rightarrow E$ , которое эквивалентно системе (1); здесь  $E$  — некоторое банахово пространство. Затем хотим установить сходимость метода коллокации, метода Галеркина и разностного метода при отыскании автоколебаний системы (1) с помощью понятия вращения векторного поля  $I - T$ ;  $I$  — единичный оператор. Вращение

$\gamma(I - T; \partial\Omega)$  вполне непрерывного векторного поля  $I - T$  на границе  $\partial\Omega$  некоторой области  $\Omega \subset E$  — это некоторая целочисленная характеристика, характеризующее наличие у оператора  $T$  неподвижных точек в области  $\Omega$ , причем предполагается, что поле  $I - T$  не вырождено на  $\partial\Omega$ . Подробное изложение понятия вращения вполне непрерывного векторного поля можно найти в книгах [6, 7]; здесь мы на этом останавливаться не будем.

В случае автономной системы мы имеем дело с некоторыми трудностями, которые не позволяют непосредственно для изучения сходимости приближенных методов использовать обычное понятие вращения. Этими трудностями являются, во-первых, то, что определению подлежит и период  $\omega^*$  решения  $Z^*(\tau)$  системы (1), который а priori неизвестен, и, во-вторых, обстоятельство, что решение  $Z^*(\tau)$  всегда неизолировано. Последнее утверждение более точно означает, что решениями системы (1) являются все вектор-функции  $Z(\tau) = Z^*(\tau + \theta)$ ,  $\forall \theta \in [0, 2\pi]$  (в этом можно непосредственно убедиться).

Эти особенности заставляют нас искать новые возможности подхода к данному вопросу, сохраняя притом возможность использования следующей общей теоремы сходимости, доказанной в [3].

Пусть  $E$  и  $E_n$  ( $n \in N$ ) — банаховы пространства;  $P = (p_n)$  — система связывающих операторов  $p_n \in L(E, E_n)$  таких, что  $\|p_n x\|_{E_n} \rightarrow \|x\|_E$  ( $n \in N$ )  $\forall x \in E$ . Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} x \in E \supset [\Omega] & \xrightarrow{T} & E \\ \downarrow p_n & & \\ x_n \in E_n \supset [\Omega_n] & \xrightarrow{T_n} & E_n \end{array} \quad (2)$$

Пусть открытые ограниченные множества  $\Omega$  и  $\Omega_n$  удовлетворяют следующим условиям согласованности:

$$\begin{aligned} \forall x \in [\Omega] \quad \exists (x_n), \quad x_n \in \Omega_n, \quad P\text{-}\lim x_n = x; \\ x_n \in [\Omega_n], \quad P\text{-}\lim x_n = x \quad (n \in N' \subset N) \Rightarrow x \in [\Omega]; \\ x_n \in \partial\Omega_n, \quad P\text{-}\lim x_n = x \quad (n \in N' \subset N) \Rightarrow x \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $[\Omega]$  — замыкание множества  $\Omega$ , а  $P\text{-}\lim x_n = x$  означает  $P$ -сходимость  $(x_n)$  к  $x$  (подробнее см. [2]), т. е. что

$$\|x_n - p_n x\|_{E_n} \rightarrow 0 \quad (n \in N' \subset N).$$

Рассмотрим уравнения

$$x = Tx \quad (4)$$

и

$$x_n = T_n x_n. \quad (5)$$

Будем говорить, что  $T_n \rightarrow T$  ( $n \in N$ ) компактно, если имеют место импликации

- а)  $x_n \in [\Omega_n]$ ,  $P\text{-}\lim x_n = x \Rightarrow P\text{-}\lim T_n x_n = Tx$ ;
- б)  $x_n \in \Omega_n$  ( $n \in N$ )  $\Rightarrow (T_n x_n)$   $P$ -компактна.

Последовательность  $(x_n)$  ( $n \in N$ ) с  $x_n \in E_n$  называется  $P$ -компактной (в  $E$ ), если для любого  $N' \subset N$  существует  $N'' \subset N'$ , так что подпоследовательность  $(x_n)$  ( $n \in N''$ )  $P$ -сходится (к элементу из  $E$ ).

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:

1) операторы  $T$  и  $T_n$  ( $n \in N$ ) вполне непрерывны, оператор  $T$  не имеет на границе  $\partial\Omega$  неподвижных точек и вращение  $\gamma(I - T; \partial\Omega) \neq 0$ ,

2)  $T_n \rightarrow T$  компактно.

3) множество предельных точек каждой  $P$ -компактной последовательности  $(T_n x_n)$  компактно в  $E$ .

Тогда уравнение (5) при почти всех  $n$  имеет хотя бы одно решение  $x_n^* \in \Omega_n$ . Каждая последовательность  $(x_n^*)$  решений  $x_n^* \in \Omega_n$   $P$ -компактна, и ее предельные точки являются решениями уравнения (4) в  $\Omega$ .

В частности,  $P\text{-}\lim x_n^* = x^*$ , если  $x^*$  — единственное решение уравнения (4) в  $\Omega$ .

## § 2. Сходимость методов коллокации и Галеркина

В этом параграфе устанавливаются сходимости методов коллокации и Галеркина для опьскания автоколебаний системы (1), опираясь на абстрактную теорему сходимости 1. Эта теорема, как уже говорилось, непосредственно неприменима в данном случае. Чтобы преодолеть трудности, описанные в § 1, мы используем метод функционализаций параметра, идея которого изложена в § 55 книги [7].

Итак, рассмотрим систему (1), для которой выполнены предположения (i) — (iv). Пусть, кроме того,

(v) нам известно некоторое число  $\alpha$ , принадлежащее области значений функции  $x^*(t) = z_1^*(t/\lambda)$ , где  $z_1^*$  — первая компонента вектор-функции  $Z^*$  (см. (iii)),  $\lambda = 2\pi/\omega$ , а  $\omega$  — неизвестный период решения  $Z^*$ , причем  $x^{*'}(t_\alpha) \neq 0$ , если  $x^*(t_\alpha) = \alpha$ .

Заменой переменной  $t = \lambda\tau$  перейдем к системе

$$X'(t) = \frac{1}{\lambda} F(X(t)), \quad (6)$$

где искомыми являются  $2\pi$ -периодическая вектор-функция  $X = X(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$  и значение параметра  $\lambda \neq 0$ . Решение системы (6) мы обозначим через  $\{X^*, \lambda^*\}$ . Здесь  $\lambda^* = 2\pi/\omega^*$ . Без ограничения общности можно предполагать, что для первой компоненты  $x_1^*$  вектор-функции  $X^*$  имеет место (v), т. е.  $x_1^*(t_\alpha) = \alpha$  с  $t_\alpha = 0$ .

Решение системы (6) (как и решение системы (1)) неизолировано. Более подробно, вместе с  $X^*(t)$  решениями системы (6) будут и все вектор-функции  $X = X(t) = X^*(t + \Theta)$ ,  $\Theta \in [0, 2\pi]$ , при том же значении параметра  $\lambda$ . Множество этих решений об-

разует замкнутую кривую  $\Delta \subset C$ , где  $C = C([0, 2\pi]; \mathbf{R}^m)$  — пространство непрерывных на  $[0, 2\pi]$  вектор-функций со значениями в  $\mathbf{R}^m$ ,

$$\|X\|_0 = \|X\|_C = \max_{t \in [0, 2\pi]} \|X(t)\|_{\mathbf{R}^m} = \max_{t \in [0, 2\pi]} \left\{ \sum_{k=1}^m |x_k(t)|^2 \right\}^{1/2}.$$

Интегрируя уравнение (6), приходим к эквивалентному с (6) операторному уравнению

$$X = A(\lambda)X \quad (7)$$

с вполне непрерывным оператором  $A(\lambda)$ ,

$$A(\lambda)X = X(2\pi) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t F(X(s)) ds.$$

Каждая точка кривой  $\Delta$  является неподвижной точкой оператора  $A(\lambda^*)$ , а операторы  $A(\lambda)$  при  $\lambda^*/2 < \lambda < \lambda^*$  и  $\lambda^* < \lambda$  не имеют в некоторой окрестности  $D \subset C$  кривой  $\Delta$  неподвижных точек.

Введем на  $C$  непрерывный функционал  $\varphi$ , который при каждой  $Y \in C$  действует по формуле

$$\varphi(Y) = \frac{1}{\lambda^*} - \alpha + y_1(0).$$

Ввиду наших предположений,  $\varphi(X^*) = 1/\lambda^*$ .

Теперь  $X^*$  — изолированная неподвижная точка оператора  $T$ , которая действует по формуле

$$TY = TY(t) = Y(2\pi) + \varphi(Y) \int_0^t F(Y(s)) ds. \quad (8)$$

Число  $\text{ind}(X^*, I-T; C)$ , если  $x_1^*(0) > 0$ , или  $-\text{ind}(X^*, I-T; C)$ , если  $x_1^*(0) < 0$ , называется функциональной характеристикой цикла  $\Gamma$  и обозначается через  $\mu(\Gamma)$ . В § 55 книги [7] доказано, что  $\mu(\Gamma)$  совпадает с индексом цикла  $\Gamma$  системы (1); в той же книге можно найти подробное определение числа  $\text{ind}(X^*, I-T; C)$  — индекса особой точки векторного поля  $I-T$  в пространстве  $C$ . Пусть

(vi) функциональная характеристика  $\mu(\Gamma) \neq 0$ .

Определим для дальнейшего еще окрестность  $\Omega \subset D$  точки  $X^*$  из вектор-функций  $Y \in C$ , для которых  $0 < \varphi(Y) < 2/\lambda^*$ .

Для операторного уравнения

$$X = TX, \quad (9)$$

где  $T$  определен в (8), уже применима абстрактная теорема сходимости I. Опишем метод коллокации и метод Галеркина для решения ее. В качестве приближенных решений уравнения (9) рассмотрим вектор-функции  $X_n = (x_{1n}, \dots, x_{mn})$ , каждая компонента которых — тригонометрический многочлен вида

$$x_{in}(t) = \frac{c_{i0}}{2} + \sum_{k=1}^n (c_{ik} \cos kt + d_{ik} \sin kt),$$

$i = 1, \dots, m$ . Приближенные операторные уравнения, определяемые методами коллокации и Галеркина, соответственно:

$$X_n = T_n X_n \quad (10)$$

и

$$X_n = K_n X_n, \quad (11)$$

где  $T_n$  и  $K_n$  — вполне непрерывные операторы:

$$T_n X_n = X_n(2\pi) + \varphi(X_n) \int_0^t (P_n F(X_n))(s) ds, \quad (12)$$

$$K_n X_n = X_n(2\pi) + \varphi(X_n) \int_0^t (O_n F(X_n))(s) ds.$$

Здесь  $P_n$  — проектор Лагранжа проектирования на подпространство вектор-функции с компонентами в виде тригонометрических многочленов по равноотстоящим узлам, а  $O_n$  — ортопроектор. Мы пришли к диаграмме, аналогичной диаграмме (2). Насчет окрестности  $\Omega$  точки  $X^*$  предполагаем дополнительно, что оператор  $T$  не имеет в  $[\Omega]$  неподвижных точек, кроме  $X^*$ . Тогда для уравнений  $\{(9), (10)\}$  и  $\{(9), (11)\}$  справедлива первая предпосылка теоремы 1.

Имеет место и третье предположение, так как пространство  $C$  сепарабельно.

Установим состоятельность второй предпосылки теоремы 1 для уравнений  $\{(9), (10)\}$  и  $\{(9), (11)\}$ . Заметим, что достаточно доказать это для пары  $\{(9), (10)\}$ , так как проекторы  $P_n$  и  $O_n$  удовлетворяют следующим соотношениям (приводим их для  $P_n$ ; об этом см. гл. III и X в [5]):

$$\|P_n\|_{C \rightarrow L_2} \leq \text{const} \quad \forall n; \quad (13)$$

$$\|P_n x - x\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad (n \in N) \quad \forall x \in C; \quad (14)$$

здесь  $L_2 = L_2([0, 2\pi]; \mathbb{R}^m)$  — пространство вектор-функций  $X = (x_1, \dots, x_m)$  с нормой

$$\|X\|_{L_2} = \left\{ \int_0^{2\pi} \|X\|_{\mathbb{R}^m}^2 dt \right\}^{1/2} = \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^m |x_k(t)|^2 dt \right\}^{1/2}.$$

Проверим, во первых, условие а), т. е. утверждение о том, что при любой последовательности  $(X_n)$ ,  $X_n \in \Omega$  ( $n \in N$ ), сходящейся к некоторому элементу  $X$  (которая тоже принадлежит области  $\Omega$ ), имеет место и сходимость  $\|T_n X_n - TX\|_0 \rightarrow 0$  ( $n \in N$ ). Напомним, что в данном случае  $P$ -сходимость совпадает со сильной сходимостью в  $C$ .

Так пусть  $\|X_n - X\|_0 \rightarrow 0$  ( $n \in N$ ). Оценим разность  $\|T_n X_n - TX\|_0$ . Имеем ввиду (12)

$$\|T_n X_n - TX\|_0 \leq A_n + B_n + C_n + D_n,$$

где

$$A_n = \|X_n(2\pi) - X(2\pi)\|_0,$$

$$B_n = |\varphi(X_n)| \left\| \int_0^t [(P_n F(X_n))(s) - (P_n F(X))(s)] ds \right\|_0,$$

$$C_n = |\varphi(X_n)| \left\| \int_0^t [(P_n F(X))(s) - F(X(s))] ds \right\|_0,$$

$$D_n = |\varphi(X_n) - \varphi(X)| \left\| \int_0^t F(X(s)) ds \right\|_0.$$

Оценим почленно:

$$\|X_n(2\pi) - X(2\pi)\|_0 \leq \|X_n - X\|_0 \rightarrow 0 \quad (n \in N);$$

$$|\varphi(X_n)| \text{ равномерно ограничены, так как } X_n \in \Omega \quad (n \in N);$$

$$|\varphi(X_n) - \varphi(X)| \leq \|X_n - X\|_0 \rightarrow 0 \quad (n \in N);$$

$$\|F(X_n) - F(X)\|_0 \rightarrow 0 \quad (n \in N) \text{ ввиду (i);}$$

$$\|P_n F(X_n) - P_n F(X)\|_{L_2} \rightarrow 0 \quad (n \in N) \text{ ввиду (13),}$$

следовательно,  $B_n \rightarrow 0$ ; а ввиду (14) также  $C_n \rightarrow 0$ .

Стало быть, выполнено первое соотношение условия 2 теоремы 1. Проверим и второе соотношение. Оно в данном случае следующее:

— для каждой последовательности  $(X_n)$  с  $X_n \in \Omega$  ( $n \in N$ ) последовательность  $(T_n X_n)$  является компактной в  $C$ .

Ясно, во первых, ввиду (i), что последовательность  $(F(X_n))$  ( $n \in N$ ) вместе с последовательностью  $(X_n)$  ограничена в  $C$ . Соотношение (13) влечет ограниченность  $(P_n F(X_n))$  в  $L_2$ ; последовательность интегралов

$$\int_0^t (P_n F(X_n))(s) ds,$$

будет ограничена уже в  $C^{(\beta)}$ , например, с  $\beta = 1/2$ , и она оказывается компактной в  $C$  (см., например, [1]). Здесь  $C^{(\beta)} = C^{(\beta)}([0, 2\pi]; \mathbf{R}^m)$  — пространство всех вектор-функций, заданных на  $[0, 2\pi]$  со значениями в  $\mathbf{R}^m$  и удовлетворяющих условию Гельдера с показателем  $\beta \in (0, 1)$ . Ввиду ограниченности  $(\varphi(X_n))$  ( $n \in N$ ) и компактности в  $C$  числовой последовательности  $(X_n(2\pi))$  получаем компактность в  $C$  всей последовательности  $(T_n X_n)$ .

Мы установили справедливость для пары уравнений  $\{(9), (10)\}$  предположений теоремы 1, т. е. имеют место и соответственные утверждения. Именно, следуя этой теореме, уравнение (10) при почти всех  $n$  определяет хотя бы одно решение  $X_n^* \in \Omega$  при  $\lambda = \lambda^*$ . Каждая последовательность решений  $(X_n^*)$  сходится к точному решению  $X^*$ , которое единственно в  $\Omega$  по нашей конструкции. То же самое можно сказать и про пару  $\{(9), (11)\}$ .

Так как решение операторного уравнения (9) эквивалентно нахождению периодического решения системы (1), то имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть для системы (1) выполнены предположения (i) — (vi).

Тогда метод коллокации (15) (метод Галеркина (16)) при почти всех  $n$  определяет хотя бы одно приближенное решение  $X_n^* \in \Omega$  ( $n \in N$ ) и имеет место сходимость

$$X_n^* \rightarrow X^* \quad (n \in N),$$

где  $X^*$  — решение системы (6) при  $\lambda = \lambda^*$ .

Численные реализации методов (10) и (11) затруднительны, однако, они близки соответственно к задачам

$$X'_n(t_i) = \lambda^{-1} F(X_n(t_i)), \quad x_{1n}(0) = \alpha; \quad (15)$$

$$\int_0^{2\pi} e_i(t) X'_n(t) dt = \lambda^{-1} \int_0^{2\pi} e_i(t) F(X_n(t)) dt, \quad x_{1n}(0) = \alpha \quad (16)$$

( $i = 0, \dots, 2n$ ), для которых можно доказать аналогичную теорему сходимости. Здесь  $t_i = ih$ ,  $h = 2\pi/(2n + 1)$ ;  $e_{2k}(t) = \cos kt$ ,  $e_{2k+1}(t) = \sin kt$ .

### § 3. Разностный метод

Теперь сформулируем теорему сходимости разностного метода для отыскания автоколебаний системы (1) (точнее — для отыскания периодических решений эквивалентной системы (6)). Ипользуем для этого опять абстрактную теорему сходимости 1; исходим от равносильного к системе (6) операторного уравнения (9).

Пусть для системы (1) выполнены предположения (i) — (vi), а окрестность  $\Omega$  изолированной неподвижной точки  $X^*$  оператора  $T$  пусть выбрана так, чтобы оператор  $T$  не имел в  $[\Omega]$  неподвижных точек, кроме  $X^*$ ; пусть еще  $0 < \varphi(Y) < 2/\lambda^* \forall Y \in \Omega$ .

Перейдем к дискретизации уравнения (6) разностным методом. Обозначим через  $\Delta_h$  сетку с шагом  $h = 2\pi/n$ , т. е.  $\Delta_h = (0, h, \dots, nh = 2\pi)$ . Введем пространство  $C_h = C_h(\Delta_h; \mathbf{R}^m)$  — это множество векторных сеточных функции  $X_h = (X_0^h, X_1^h, \dots, X_n^h)$ , определенных на  $\Delta_h$  и со значениями в  $\mathbf{R}^m$ , компоненты которых имеют вид  $X_i^h = (x_{1,i}^h, \dots, x_{m,i}^h)$ . Норма в  $C_h$  определяется через

$$\|X_h\|_0 = \|X_h\|_{C_h} = \max_{0 \leq j \leq n} \|X_j^h\|_{\mathbf{R}^m} = \max_{0 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{k=1}^m |x_{k,j}^h|^2 \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим в пространстве  $C_h$  разностные операторы  $D_{h,i}$ ,  $i = 1, \dots, m$ , каждый из которых определен по следующим правилам.

1) На подсетке

$$(p_i h, (p_i + 1)h, \dots, (n - r_i - 1)h, (n - r_i)h) \subset \Delta_h,$$

где  $p_i$  и  $r_i$  — некоторые конечные числа, не зависящие от  $h$ ,

оператор  $D_{h,i}$  определен некоторой формулой численного дифференцирования

$$[D_{h,i}X_h]_j := \frac{1}{h} \sum_{k=-q_i}^{s_i} b_{ik} X_{j+k}^h = \frac{1}{h} \sum_{k=-q_i}^{s_i} b_{ik} U_{h^k} X_j^h; \quad (17)$$

здесь  $U_{h^k}$  — оператор сдвига,  $U_{h^k} X_j^h = X_{j+h^k}^h$ ;  $q_i \leq p_i$ ;  $s_i \leq r_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ).

2) На подсетках  $\Delta_{h,p_i} = (0, h, \dots, (p_i - 1)h)$  и  $\Delta_{r_i,h} = ((n - r_i + 1)h, \dots, nh)$  оператор  $D_{h,i}$  может быть в каждой точке  $t_k = kh$  определен с помощью своей формулы численного дифференцирования типа (17). При этой конструкции нужно только следить, что если  $t_k \in \Delta_{h,p_i}$ , то в формуле (17) надо взять  $q_i \leq k$  (соответственно, если  $t_k \in \Delta_{r_i,h}$ , то в формуле (17) надо взять  $s_i \leq n - k$ ).

Таким образом мы получим  $m$  операторов  $D_{h,i}$  ( $i = 1, \dots, m$ ), каждый из которых определен не более, чем  $p_i + r_i + 1$  формулами численного дифференцирования типа (17). Всего мы используем не более  $M = m + p_1 + r_1 + \dots + p_m + r_m$  различных формул численного дифференцирования ( $M$  не зависит от  $h$ ), для каждого из которых мы требуем, чтобы они сходились, т. е. чтобы имело место сходимость вида

$$\frac{1}{h} \sum_{k=-q}^s b_{.,k} U_{h^k} x(t) \rightarrow x'(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi] \quad (18)$$

для каждой непрерывно дифференцируемой функции  $x(t)$ ;  $U_{h^k} x(t) = x(t + kh)$ .

Теперь можно определить разностный оператор

$$D_h = (D_{h,1}, D_{h,2}, \dots, D_{h,m}),$$

который действует по формуле

$$[D_h X_h]_i = (D_{h,1} x_{1,i}^h, D_{h,2} x_{2,i}^h, \dots, D_{h,m} x_{m,i}^h),$$

где  $X_h \in C_h$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

Кроме  $C_h$  нам понадобится еще дискретное пространство  $C_h^{(1)} = C_h^{(1)}([0, 2\pi]; \mathbf{R}^m)$  вектор-функций  $X_h \in C_h$ , норма в котором определена так:

$$\|X_h\|_1 = \|X_h\|_{C_h^{(1)}} = \max \{ \|X_h\|_0, \|\partial_h X_h\|_0 \}.$$

Пусть оператор  $D_h : C_h^{(1)} \rightarrow C_h$  удовлетворяет следующему, т. н. условию устойчивости.

Дискретная задача Коши

$$\begin{aligned} D_h X_h &= Y_h, \\ X_0^h &= 0 \quad (\Leftrightarrow x_{i,0}^h = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

имеет при любом  $Y_h \in C_h$  единственное решение  $X_h \in C_h^{(1)}$ , причем  $\|X_h\|_1 \leq \text{const} \|Y_h\|_0$ .

Введем связывающие операторы  $p_h \in L(C, C_h)$ :

$$[p_h X]_i = (x_1(ih), \dots, x_m(ih)),$$

где  $X = (x_1, \dots, x_m) \in C$ . Система операторов  $P = (p_h)$  определяет  $P$ -сходимость и  $P$ -компактность, так как имеет место сходимость

$$\|p_h Y\|_{C_h} \rightarrow \|Y\|_C$$

при  $h \rightarrow 0 \forall Y \in C$ . Заметим, что операторы  $p_h$  могут быть рассмотрены и из пространства  $C^{(1)}$  в  $C_h^{(1)}$ , где  $C^{(1)} = C^{(1)}([0, 2\pi]; \mathbb{R}^m)$  — пространство вектор-функций  $X = (x_1, \dots, x_m)$  с нормой

$$\|X\|_1 = \|X\|_{C^{(1)}} = \max \{\|X\|_0, \|DX_0\|\};$$

здесь  $D$  — оператор дифференцирования. В этом случае будем говорить о дискретной сходимости (дискретной компактности) как о  $P_1$ -сходимости ( $P_1$ -компактности).

Сходимость (18) формул численного дифференцирования, через которые определен оператор  $D_h$ , гарантирует дискретную сходимость, которая обозначается  $P_1 P\text{-lim } D_h = D$ , т. е. если  $P_1\text{-lim } X_h = X$ , то  $P\text{-lim } D_h X_h = DX$ . Условие устойчивости равносильно обратимости операторов  $D_h$  и равномерной ограниченности норм операторов  $D_h^{-1}: C_h \rightarrow C_h^{(1)}$ . Отсюда следует, что  $PP_1\text{-lim } D_h^{-1} = D^{-1}$  (см. [2], гл. 1). Здесь оператор  $D^{-1} с  $D^{-1}u(t) = \int u(s)ds$  рассматривается действующим из  $C$  в  $C^{(1)}$ .$

Рассмотрим операторы  $T_h: C_h \rightarrow C_h$ , где

$$T_h X_h = X_n^h + \varphi(X_h) D_h^{-1} F_h(X_h),$$

причем функционал  $\varphi$  действует по формуле

$$\varphi(X_h) = \frac{1}{\lambda^*} - \alpha + X_{1,0}^h, \quad X_h \in C_h,$$

а  $\alpha$  и  $\lambda^*$  — введенные в § 2 параметры;  $F_h$  — дискретная функция, соответствующая функции  $F$ ,  $F_h(X_h) = (F(X_0^h), \dots, F(X_n^h))$  с компонентами  $F(X_k^h) = (f_1(X_k^h), \dots, f_m(X_k^h))$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Эти операторы при каждом  $h$  вполне непрерывны, так как они конечномерны.

Мы пришли к диаграмме аналогичной (2) с  $T_h$  вместо  $T_n$ . Здесь оператор  $T$  определен соотношением (8), а  $\Omega_h$  — это множество

$$\Omega_h = \{X_h \in C_h : \bar{X}_h \in \Omega\},$$

где  $\bar{X}_h \in C$  — вектор-функция, график которой — ломанная в  $\mathbb{R}^m$ , такая что  $\bar{X}_h(t_k) = X_k^h$ ,  $t_k = kh$ ,  $k = 0, \dots, n$ . Легко проверить, что между областями  $\Omega_h$  и  $\Omega$  выполнены условия согласованности (3).

Докажем, что  $PP\text{-lim } T_h = T$ .

Действительно, пусть  $P\text{-lim } X_h = X$ , т. е.  $\|X_h - p_h X\|_0 \rightarrow 0$ . Оценим разность

$$\|T_h X_h - p_h T X\|_0 \leq A_h + B_h + C_h,$$

где

$$\begin{aligned} A_h &= \|X_{n^h} - X(2\pi)\|_0, \\ B_h &= |\varphi(X_h)| \|D_h^{-1}F_h(X_h) - p_h D^{-1}F(X)\|_0, \\ C_h &= |\varphi(X_h) - \varphi(X)| \|p_h D^{-1}F(X)\|_0. \end{aligned}$$

Имеют место следующие импликации:

$$P\text{-}\lim X_h = X \Rightarrow A_h \rightarrow 0, \quad C_h \rightarrow 0 \quad (n \in N);$$

$$P\text{-}\lim X_h = X \Rightarrow P\text{-}\lim F_h(X_h) = F(X) \Rightarrow B_h \rightarrow 0.$$

Стало быть,  $PP\text{-}\lim T_h = T$ .

Проверим для операторов  $T_h$  условие компактности:

$$\|X_h\|_0 \leq \text{const} \quad (n \in N) \Rightarrow \text{последовательность } (T_h X_h) \\ P\text{-компактна.}$$

Это условие выполнено ввиду следующих импликаций:

$$\|X_h\|_0 \leq \text{const} \quad (n \in N) \Rightarrow (X_{n^h}) \text{ компактна в } C_h.$$

Если  $\|X_h\|_0 \leq \text{const}$ , то  $\|F_h(X_h)\| \leq \text{const}$  ввиду (i), а тогда ввиду ограниченности  $D_h^{-1}$  также  $\|D_h^{-1}F_h(X_h)\|_1 \leq \text{const}$ . Поэтому последовательность  $(D_h^{-1}F_h(X_h))$  является  $P$ -компактной в  $C$ . Итак, для операторов  $T_h$  и  $T$  выполнена вторая предпосылка теоремы 1.

Заметим, что для уравнений

$$X = TX \tag{19}$$

и

$$X_h = T_h X_h \tag{20}$$

выполнены и первая и третья предпосылки теоремы 1 (обсуждение здесь аналогичное, проведенному во втором параграфе). Стало быть, для уравнений (19) и (20) имеют место утверждения теоремы 1, т. е. уравнение (20) имеет при почти всех  $n$  (при почти всех  $h = 2\pi/n$ ) хотя бы одно решение  $X_h^* \in \Omega_h$ , причем

$$P\text{-}\lim X_h^* = X^*.$$

Доказана следующая

**Теорема 3.** Пусть для системы автономных дифференциальных уравнений (1) выполнены предположения (i)–(vi). Пусть формулы численного дифференцирования (17) сходятся. Пусть, наконец,  $D_h$  удовлетворяет условию устойчивости.

Тогда разностный метод (20) при почти всех  $h$  определяет, хотя бы одно, приближенное решение  $X_h^* \in \Omega_h$  системы (6), причем эти приближения  $P$ -сходятся к точному решению системы (6).

Аналогичный результат можно доказать и для вычислительной схемы

$$D_h X_h = \frac{1}{\lambda} F_h(X_h), \quad x_{1,0}^h = a.$$

Теоремы 2 и 3 непосредственно применимы для уравнения

$$z^{(m)}(\tau) = g(z(\tau), \dots, z^{(m-1)}(\tau)). \quad (21)$$

Нужно просто сделать переход к соответствующей системе. Для уравнения (21) в работе [4] установлены и скорости сходимости метода коллокации, метода Галеркина и разностного метода.

### Литература

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными. Москва, 1966.
2. Вайникко Г. М., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
3. Вайникко Г. М., О приближении неподвижных точек вполне непрерывных операторов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 225—236.
4. Вайникко Г., Мийдла П., О сходимости приближенных методов отыскания автоколебаний. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 75—88.
5. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, тт. I, II. Москва, 1965.
6. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. Москва, 1956.
7. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Геометрические методы нелинейного анализа. Москва, 1975.

Поступило  
31 V 1978

### STUDY OF THE CONVERGENCE OF APPROXIMATION METHODS OF FINDING SELF-OSCILLATIONS, USING THE ROTATION OF VECTOR-FIELD

P. Miidla

#### Summary

In this article we study the problem of finding self-oscillations (periodic solutions) of the autonomous system of differential equations (1). With change of the variable  $t = \lambda\tau$  we come to the equivalent system (6), then, using the idea of functionalisation of parameters [7], to the equation (9) with the compact operator  $T$ . The fixed-points of  $T$  are isolated in the space  $C([0, 2\pi]; \mathbb{R}^m)$  and we may apply the abstract theorem of convergence 1 to our problem. In the article there are given the proofs of convergence of the method of collocations, Galyorkin's method and the method of finite differences for finding  $2\pi$ -periodical solutions of the system (6). The operator-equations, which correspond to the named methods, are (10), (11) and (20). For the system (1) conditions (i)—(vi) must be fulfilled.

Under somewhat different conditions [4] we get the quickness of convergence of named methods for finding self-oscillations of equation (21).

## РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА В ДВУМЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Э. Тамме

Тартуский государственный университет

Рассмотрим задачу Неймана для уравнения второго порядка в вариации постановке (см., например, [5]): найти  $u \in H^1(\Omega)$  такую, что

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad (1)$$

где  $\Omega$  — ограниченная двумерная область с липшицевой границей  $\Gamma$  (см., например, [4], стр. 424),  $H^1(\Omega)$  — действительное пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_1 = \left[ \sum_{|\alpha| \leq 1} (D^\alpha u, D^\alpha u) \right]^{1/2}, \quad (u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$$

и

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} (a_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v), \quad (f, v) = \sum_{|\alpha| \leq 1} (f_\alpha, D^\alpha v).$$

При этом пользуемся обозначениями  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ ,  $D^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}$ .

Предположим, что  $f_\alpha$  и  $a_{\alpha\beta}$  непрерывны в  $[\Omega] = \Omega \cup \Gamma$  и что коэффициенты  $a_{\alpha\beta}$  при  $|\alpha| = |\beta| = 1$  удовлетворяют условию сильной эллиптичности:

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta \geq \kappa \sum_{|\alpha|=1} t_\alpha^2, \quad \kappa > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2)$$

где  $t_\alpha$  — любые действительные числа.

В статье построена разностная схема для решения задачи (1) и доказана ее сходимость со скоростью  $O(h^{3/2})$ . Рассмотрен также случай, когда решение задачи Неймана определено до произвольной постоянной. Отметим, что разностные схемы для решения задачи Неймана в прямоугольнике построены и исследованы во многих работах, например, в [2, 3].

### § 1. Разностная схема

Разностную схему для решения задачи (1) построим следующим образом. Выберем шаг  $h > 0$  и покроем плоскость  $\mathbb{R}^2$  равномерной сеткой

$$R_h^2 = \{x_i = (i_1 h, i_2 h) : i_v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}.$$

Каждому узлу  $x_i$  поставим в соответствие треугольники  $\omega_{i1}$  и  $\omega_{i2}$  соответственно с вершинами  $x_i, x_i + he_1, x_i + he_2$  и  $x_i, x_i - he_1, x_i - he_2$ , где  $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ . Площади пересечений этих треугольников обозначим через  $\sigma_{iv} = \text{mes}(\omega_{iv} \cap \Omega)$  ( $v = 1, 2$ ).

Пусть  $\Omega_{h1}$  — множество вершин всех треугольников  $\omega_{iv}$  с  $\sigma_{iv} > 0$  ( $v = 1, 2$ ), а  $\Omega_h \subset \Omega_{h1}$  — множество всех узлов  $x_i \in [\Omega]$ , для которых  $\sigma_{i1} + \sigma_{i2} \geq \sigma h^2$ , где  $\sigma$  — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию  $0 < \sigma \leq 1$ .

Пространство  $H^1(\Omega)$  аппроксимируем пространством  $H^1(\Omega_h)$ , элементами которого являются сеточные функции  $u_{hi} := u_h(x_i)$ , определенные на  $\Omega_h$  и продолженные на  $\Omega_{h1}$  при помощи линейной интерполяции значений  $u_h(x_i)$  в близких узлах  $x_i \in \Omega_h$ . При этом можно считать, что  $u_h$  изменяется линейно в направлении оси  $x_1$  или  $x_2$  или по квадрату. При вычислении  $u_h(x_i)$  с  $x_i \in \Omega_{h1} \setminus \Omega_h$  можно использовать узлы из  $\Omega_h$ , отстоящие от  $x_i$  не более, чем на  $m_1 h$ , где  $m_1$  — фиксированное положительное число. При фиксированном  $h$  считаем способ продолжения фиксированным.

Задачу (1) аппроксимируем задачей: найти  $u_h \in H^1(\Omega_h)$  такую, что

$$a_h(u_h, v_h) = \langle f_h, v_h \rangle \quad \forall v_h \in H_1(\Omega_h), \quad (3)$$

где

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \sum_{x_i \in R_h^2} (r_h a_{\alpha\beta})_i (\partial^\beta u_{hi} \partial^\alpha v_{hi} \sigma_{i1} + \bar{\partial}^\beta u_{hi} \bar{\partial}^\alpha v_{hi} \sigma_{i2}), \quad (4)$$

$$\langle f_h, v_h \rangle = \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{x_i \in R_h^2} (r_h f_\alpha)_i (\partial^\alpha v_{hi} \sigma_{i1} + \bar{\partial}^\alpha v_{hi} \sigma_{i2}), \quad (5)$$

$$\partial^\alpha u_{hi} = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} u_{hi}, \quad \partial_v u_{hi} = [u_h(x_i + he_v) - u_h(x_i)]/h,$$

$$\bar{\partial}^\alpha u_{hi} = \bar{\partial}_1^{\alpha_1} \bar{\partial}_2^{\alpha_2} u_{hi}, \quad \bar{\partial}_v u_{hi} = [u_h(x_i) - u_h(x_i - he_v)]/h,$$

$(r_h a)_i = a(x_i)$  при  $x_i \in [\Omega] \cap R_h^2$ , а при  $x_i \notin [\Omega]$  можно взять  $(r_h a)_i$  равным значению функции  $a$  в близком к  $x_i$  узле из  $[\Omega]$ , отстоящем от  $x_i$  не более, чем на  $m_1 h$ .

Задача (3) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений, в которой число неизвестных и уравнений равно числу узлов в множестве  $\Omega_h$ . Коэффициенты и свободные члены этой системы можно найти, взяв для каждого узла  $x_j \in \Omega_h$

$$v_h(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_i = x_j, \\ 0 & \text{при } x_i \neq x_j, x_i \in \Omega_h, \end{cases}$$

и продолжить  $v_h$  на  $\Omega_{h1}$  как элемент пространства  $H^1(\Omega_h)$ .

## § 2. Сходимость метода

При исследовании сходимости построенного разностного метода пользуемся понятиями дискретной сходимости и результатами из работы [1]. Определив в  $H^1(\Omega_h)$  скалярное произведение

$$(u_h, v_h)_1 = \sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{x_i \in R_h^2} (\partial^\alpha u_{hi} \partial^\alpha v_{hi} \sigma_{i1} + \bar{\partial}^\alpha u_{hi} \bar{\partial}^\alpha v_{hi} \sigma_{i2})$$

и соответственно норму  $\|u_h\|_1 = (u_h, u_h)_1^{1/2}$ , пространство  $H^1(\Omega_h)$  становится гильбертовым пространством. Обозначим через

$$\|u\|_{-1} = \sup_{\|v\|_1 \leq 1} \langle u, v \rangle, \quad \|u_h\|_{-1} = \sup_{\|v_h\|_1 \leq 1} \langle u_h, v_h \rangle$$

нормы в пространствах  $(H^1(\Omega))'$  и  $(H^1(\Omega_h))'$ , сопряженных с пространствами  $H^1(\Omega)$  и  $H^1(\Omega_h)$ , а через  $\langle u, v \rangle$  и  $\langle u_h, v_h \rangle$  — линейные непрерывные функционалы в соответствующих пространствах.

Непрерывные и дискретные пространства связываем оператором  $p_h$ , определенным для  $x_i \in \Omega_h$  формулой

$$(p_h u)(x_i) = \frac{1}{h^2} \int_{\pi_i} u(x) dx,$$

где  $\pi_i = \{x = (x_1, x_2) : (i_v - 1/2)h < x_v < (i_v + 1/2)h\}$ . При этом считаем, что функция  $u \in H^1(\Omega)$  продолжена на  $R^2$  таким образом, что

$$\|u\|_{H^1(R^2)} \leq c \|u\|_1, \quad c = \text{const.}$$

Сеточную функцию  $p_h u$  продолжим на  $\Omega_{h1}$  как элемент из  $H^1(\Omega_h)$ . Можно показать, что  $p_h$  является линейным непрерывным оператором из  $H^1(\Omega)$  в  $H^1(\Omega_h)$  и удовлетворяет условиям

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|p_h u\|_{\pm 1} = \|u\|_{\pm 1} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Расширим  $p_h$  на  $(H^1(\Omega))'$  как линейный неограниченный оператор, сохранив это свойство.

При помощи оператора  $p_h$  введем следующие понятия сильной и слабой дискретной сходимости (при  $h \rightarrow 0$ )

$$\begin{aligned} u_h \xrightarrow{\pm 1} u &\Leftrightarrow \|u_h - p_h u\|_{\pm 1} \rightarrow 0, \\ u_h \xrightarrow{\mp 1} u &\Leftrightarrow \{v_h \xrightarrow{\mp 1} v \Rightarrow \langle u_h, v_h \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle\} \end{aligned}$$

и соответствующие понятия сильной и слабой компактности (см. [1]).

Разобьем билинейную форму  $a(u, v)$  на две части

$$a_1(u, v) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (a_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha v) + \kappa(u, v)$$

и

$$a_2(u, v) = a(u, v) - a_1(u, v),$$

и обозначим их аппроксимации, построенные по формуле (4), через  $a_{1h}(u_h, v_h)$  и  $a_{2h}(u_h, v_h)$ . При помощи соотношений

$$a_\nu(u, v) = \langle A_\nu u, v \rangle \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

$$a_{\nu h}(u_h, v_h) = \langle A_{\nu h} u_h, v_h \rangle \quad \forall u_h, v_h \in H^1(\Omega_h), \quad \nu = 1, 2,$$

определим линейные непрерывные операторы  $A_1, A_2, A = A_1 + A_2$  и  $A_{1h}, A_{2h}, A_h = A_{1h} + A_{2h}$ , действующие соответственно из пространств  $H^1(\Omega)$  и  $H^1(\Omega_h)$  в пространства  $(H^1(\Omega))'$  и  $(H^1(\Omega_h))'$ . Тогда задачи (1) и (3) можно записать в виде операторных уравнений  $Au = f$  и  $A_h u_h = f_h$ .

Аналогично [1] доказывается следующая

**Лемма 1.** *Справедливы утверждения*

$$u_h \xrightarrow{-1} u \Leftrightarrow \{v_h \xrightarrow{1} v \Rightarrow \langle u_h, v_h \rangle \rightarrow \langle u, v \rangle\}, \quad (6)$$

$$u_h \xrightarrow{1} u, v_h \xrightarrow{1} v \Rightarrow a_h(u_h, v_h) \rightarrow a(u, v), \quad (7)$$

$$u_h \xrightarrow{1} u, v_h \xrightarrow{1} v \Rightarrow a_{2h}(u_h, v_h) \rightarrow a_2(u, v). \quad (8)$$

Сходимость разностного метода вытекает из следующей леммы, при формулировке и доказательстве которой пользуемся понятиями и результатами из [1].

**Лемма 2.** *Операторы  $A_h$  сходятся при  $h \rightarrow 0$  регулярно к оператору  $A$ .*

*Доказательство.* Сходимость операторов

$$A_h \rightarrow A \Leftrightarrow \{u_h \xrightarrow{1} u \Rightarrow A_h u_h \xrightarrow{-1} Au\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{u_h \xrightarrow{1} u, v_h \xrightarrow{1} v \Rightarrow a_h(u_h, v_h) \rightarrow a(u, v)\}$$

вытекает из утверждений (6) и (7). Из условия эллиптичности (2) следует, что  $a_{1h}(u_h, v_h) \geq \kappa \|u_h\|_1^2$ , а отсюда, в свою очередь, что  $\|A_{1h}^{-1}\| \leq 1/\kappa$ . Следовательно,  $A_{1h}$  сходится к  $A_1$  устойчиво. Из утверждения (8) получаем, что  $A_{2h}$  сходится к  $A_2$  компактно. Следовательно,  $A_h = A_{1h} + A_{2h}$  сходится к  $A = A_1 + A_2$  регулярно.

Из леммы 2 почти непосредственно следует (см. [1]).

**Теорема 1.** *Пусть задача (1) при  $f_\alpha = 0$  с  $|\alpha| \leq 1$  имеет в  $H_1(\Omega)$  лишь тривиальное решение  $u = 0$ . Тогда задача (1) имеет единственное решение  $u \in H^1(\Omega)$  и найдется такая  $h_0 > 0$ , что задача (3) имеет при  $h \leq h_0$  единственное решение  $u_h \in H^1(\Omega_h)$ ; причем эти решения при  $h \rightarrow 0$  сходятся к  $u$  со скоростью*

$$\begin{aligned} \|u_h - p_h u\|_1 &\leq c \|A_h p_h u - f_h\|_{-1} = \\ &= c \sup_{\|v_h\|_1 \leq 1} |a_h(p_h u, v_h) - \langle f_h, v_h \rangle|, \quad c = \text{const}. \end{aligned}$$

Если  $u \in C[\Omega]$ , то имеет место оценка погрешности

$$\|u_h - q_h u\|_1 \leq c \sup_{\|v_h\|_1 \leq 1} |a_h(q_h u, v_h) - \langle f_h, v_h \rangle|, \quad (9)$$

где  $q_h u \in H^1(\Omega_h)$  такая, что  $(q_h u)(x_i) = u(x_i)$  при  $x_i \in \Omega_h$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Утверждения теоремы 1 остаются верными и тогда, когда  $f_\alpha$  и  $a_{\alpha\beta}$  — разрывные ограниченные функции, лишь только в разностной схеме (3) сеточные функции  $r_h f_\alpha$  и  $r_h a_{\alpha\beta}$  заменить на  $p_h f_\alpha$  и  $p_h a_{\alpha\beta}$ .

**З а м е ч а н и е 2.** Регулярная сходимость  $A_h$  к  $A$  гарантирует и сходимость соответствующего разностного метода вычисления собственных значений и функций оператора  $A$  (см. [1, 6]).

Скорость сходимости метода (3) можно оценить следующим образом. Из неравенства (9) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|u_h - q_h u\|_1 \leq c \sup_{\|v_h\|_1 \leq 1} |a_h(q_h u, v_h) - a(u, v)| + \\ + c \sup_{\|v_h\|_1 \leq 1} |\langle f, v \rangle - \langle f_h, v_h \rangle|, \end{aligned}$$

где  $v$  — произвольная функция из  $H^1(\Omega)$ . Предполагая, что  $f_\alpha, a_{\alpha\beta} \in C^2[\Omega]$  при  $|\alpha|, |\beta| \leq 1$  и  $u \in C^3[\Omega]$ , а также взяв за  $v$  кусочно-линейное восполнение  $v_h$  (т. е.  $v$  линейна на каждом треугольнике  $\omega_{iv}$  ( $v = 1, 2$ ) и  $v(x_i) = v_h(x_i)$  при  $x_i \in (\Omega_h)_i$ ), получим оценку  $\|u_h - q_h u\|_1 \leq c_1 h^{3/2}$ ,  $c_1 = \text{const}$ .

### § 3. Случай неоднозначной разрешимости

Остановимся на частном случае задачи (1), когда  $a_{\alpha\beta} = 0$  при  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ . Тогда соответствующая однородная задача имеет нетривиальное решение  $u = \text{const}$ , и, таким образом, условия теоремы 1 не выполнены. В таком случае можно применить полученные результаты, если рассмотреть задачи (1) и (3) в подходящих подпространствах.

Введем подпространства

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega); \quad (u, 1) = 0\} \subset H^1(\Omega), \\ H_0^{-1}(\Omega) &= \{u \in (H^1(\Omega))'; \quad \langle u, 1 \rangle = 0\} \subset (H^1(\Omega))', \\ H_0^1(\Omega_h) &= \{u_h \in H^1(\Omega_h); \quad (u_h, 1) = 0\} \subset H^1(\Omega_h), \\ H_0^{-1}(\Omega_h) &= \{u_h \in (H^1(\Omega_h))'; \quad \langle u_h, 1 \rangle = 0\} \subset (H^1(\Omega_h))', \end{aligned}$$

где

$$(u_h, 1) = (u_h, 1)_i = \sum_{x_i \in R_h^2} u_{hi} (\sigma_{i1} + \sigma_{i2}).$$

Так как в рассматриваемом случае  $a(u, 1) = 0$  и  $a_h(u_h, 1) = 0$ , то операторы  $A$  и  $A_h$  действуют из пространств  $H_0^1(\Omega)$  и  $H_0^1(\Omega_h)$  в пространство  $H_0^{-1}(\Omega)$  и  $H_0^{-1}(\Omega_h)$ .

Необходимыми для существования решения задач (1) и (3) являются условия

$$\begin{aligned} \langle f, 1 \rangle = (f_\theta, 1) = \int_{\Omega} f_\theta(x) dx = 0, \quad \theta = (0, 0), \\ \langle f_h, 1 \rangle = (r_h f_\theta, 1) = \sum_{x_i \in R_h^2} (r_h f_\theta)_i (\sigma_{i1} + \sigma_{i2}) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы гарантировать выполнение последнего условия, заменим в формуле (5) значения  $r_h f_\theta$  на  $r_h f_\theta - (r_h f_\theta, 1) / \text{mes } \Omega$ .

Пространства  $H_0^1(\Omega)$  и  $H_0^1(\Omega_h)$  связываем оператором

$$r_{h1}u = r_h u - (r_h u, 1) / \text{mes } \Omega.$$

Так как  $\|r_{h1}u - r_h u\|_1 \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$  для  $\forall u \in H^1(\Omega)$  и из леммы 2 вытекает регулярная сходимость операторов  $A_h \in L(H_0^1(\Omega_h), H_0^{-1}(\Omega_h))$  к оператору  $A \in L(H_0^1(\Omega), H_0^{-1}(\Omega))$ , то имеет место следующая

**Теорема 2.** Пусть  $a_{\alpha\beta} = \delta$  при  $|\alpha| + |\beta| \leq 1$  и задача (1) при  $f_\alpha = 0$  с  $|\alpha| \leq 1$  имеет в  $H_0^1(\Omega)$  лишь тривиальное решение  $u = 0$ . Тогда задача (1) имеет в  $H_0^1(\Omega)$  единственное решение  $u$  и найдется такая  $h_0 > 0$ , что задача (3) имеет при  $h \leq h_0$  в  $H_0^1(\Omega_h)$  единственное решение  $u_h$  и  $\|u_h - r_h u\|_1 \rightarrow 0$ .

Если  $f_\alpha, a_{\alpha\beta} \in C^2[\Omega]$  с  $|\alpha|, |\beta| \leq 1$  и  $u \in C^3[\Omega]$ , то

$$\|u_h - q_h u\|_1 \leq c_2 h^{3/2}, \quad c_2 = \text{const}.$$

## Литература

1. Вайникко Г., Анализ дискретизационных методов. Тарту, 1976.
2. Кагчевский М. М., Ляшко А. Д., Разностные схемы для нелинейных многомерных эллиптических уравнений, I, II. Изв. высш. учебн. заведений, Математика. 1972, № 11, 23—31; 1973, № 3, 44—52.
3. Карчевский М. М., Ляшко А. Д., Разностные схемы для нелинейных задач математической физики, Ч. I. Казань, 1976.
4. Никольский С. М., Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва, 1977.
5. Обэн Ж.-П., Приближенное решение эллиптических краевых задач. Москва, 1977.
6. Vainikko, G., Über die Konvergenz und Divergenz von Näherungsmethoden bei Eigenwertproblemen. Math. Nachr., 1977, 78, 145—164.

Поступило  
30 V 1978

## EIN DIFFERENZENVERFAHREN FÜR DIE LÖSUNG DES NEUMANNSCHEM PROBLEMS IM ZWEIDIMENSIONALEM GEBIET

E. Tamme

### Zusammenfassung

Es wird für die Lösung des Neumannschen Problems im Gebiet mit der krummen Randkurve ein Differenzenverfahren konstruiert und die Konvergenz dieses Verfahrens mit der Geschwindigkeit  $O(h^{3/2})$  bewiesen.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИЙ ВЫБОРКИ

А.-М. Парринг

Тартуский государственный университет

Цель настоящей статьи — определить и вычислить при некоторых предположениях общее асимптотическое распределение вектора выборочных средних и выборочной ковариационной матрицы.

Пусть  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  — матрица теоретической выборки объема  $n$  из генеральной совокупности, определяемой некоторым  $p$ -мерным вектором  $x$ ;  $x_i$  — независимые  $p$ -мерные векторы с таким же распределением, как вектор  $x$ . В дальнейшем предположим, что у вектора  $x$  существуют конечные моменты до четвертого порядка.

Используем следующую символику. Символом  $\otimes$  обозначим прямое произведение матриц:  $A \otimes B = [a_{ij}B]$  (см., например, [3], стр. 235). Символом  $\text{vec } A$  обозначим  $mn$ -мерный вектор, получаемый расположением по порядку один под другим столбцы  $m \times n$ -матрицы  $A$ ; т. е.

$$(\text{vec } A)' = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{p1}, \dots, a_{1p}, a_{2p}, \dots, a_{pp}).$$

В дальнейшем для произвольных векторов  $a$  и  $b$  будут полезными соотношения:  $a \otimes b = \text{vec}(ba')$  и

$$a' \otimes b = b \otimes a' = ba'. \quad (1)$$

Определим первые четыре момента случайного вектора  $x$  следующим образом:

$$\mu = Ex,$$

$$M_2 = Ex \otimes x',$$

$$M_3 = Ex \otimes x' \otimes x = E \text{vec}(xx') \otimes x',$$

$$M_4 = Ex \otimes x' \otimes x \otimes x' = E \text{vec}(xx') (\text{vec}(xx'))'.$$

Аналогично определим и центральные моменты вектора  $x$ :

$$\Sigma = E(x - \mu) \otimes (x - \mu)',$$

$$\bar{M}_3 = E(x - \mu) \otimes (x - \mu)' \otimes (x - \mu),$$

$$\bar{M}_4 = E(x - \mu) \otimes (x - \mu)' \otimes (x - \mu) \otimes (x - \mu)'.$$

Учитывая приведенные определения и равенство (1), получаем следующие соотношения:

$$\Sigma = M_2 - \mu\mu', \quad (2)$$

$$\bar{M}_3 = M_3 - \mu \otimes M_2 - M_2 \otimes \mu - \text{vec } M_2 \otimes \mu' + 2\mu \otimes \mu' \otimes \mu, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_4 = & M_4 - \mu \otimes M'_3 - M'_3 \otimes \mu - \mu' \otimes M_3 - M_3 \otimes \mu' + \\ & + \mu \otimes \mu \otimes (\text{vec } M_2)' + \text{vec } M_2 \otimes \mu' \otimes \mu' + \mu' \otimes \mu \otimes M_2 + \\ & + \mu' \otimes M_2 \otimes \mu + \mu \otimes M_2 \otimes \mu' + M_2 \otimes \mu \otimes \mu' - \\ & - 3\mu \otimes \mu' \otimes \mu \otimes \mu'. \end{aligned} \quad (4)$$

Выборочной ковариационной матрицей называем матрицу

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i' - \bar{x} \bar{x}', \quad (5)$$

где  $\bar{x}$  — вектор выборочных средних, т. е.

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Определим асимптотическое распределение матрицы  $S$ . Начнем с доказательства леммы. В дальнейшем символом  $\text{plim}$  обозначим сходимость по вероятности (см. [4], стр. 105), а символом  $\lim_L$  — сходимость по распределению (см. [4], стр. 111).

**Лемма.** Пусть  $\{Z_n\}$  и  $\{Y_n\}$  — последовательности случайных  $p$ -мерных векторов;  $\lim_L Z_n = N(0, T)$ ,  $\text{plim } Y_n = 0$ . Тогда  $\lim_L (Z_n + Y_n) = N(0, T)$ .

**Доказательство.** Действительно, при произвольном векторе  $\lambda$  имеем  $\lim_L \lambda' Z_n = N(0, \lambda' T \lambda)$  (см. [1], стр. 108) и  $\text{plim } \lambda' Y_n = 0$ . Следовательно,  $\lim_L (\lambda' Z_n + \lambda' Y_n) = N(0, \lambda' T \lambda)$  (см. [4], стр. 118). Отсюда вытекает, что асимптотическое распределение вектора  $Z_n + Y_n$  существует и равно  $N(0, T)$  (см. [4], стр. 119). Лемма доказана.

Докажем теперь основную теорему.

**Теорема 1.** Пусть у вектора  $x$  из генеральной совокупности существуют все моменты четвертого порядка  $E x_i x_j x_k x_l = m_{ijkl} < \infty$ , где  $i, j, k, l = 1, 2, \dots, p$ . Тогда

$$\lim_L n^{1/2} \text{vec } (S - \Sigma) = N(0, \Psi),$$

причем

$$\Psi = \bar{M}_4 - \text{vec } \Sigma (\text{vec } \Sigma)'. \quad (6)$$

**Доказательство.** Представим вектор  $\text{vec } (S - \Sigma)$  в виде суммы двух слагаемых. Так как

$$\bar{x} \bar{x}' - \mu \mu' = (\bar{x} - \mu) (\bar{x} - \mu)' + \bar{x} \mu' + \mu \bar{x}' - 2\mu \mu',$$

то по (2) и (5) можно написать:

$$\begin{aligned} \text{vec}(S - \Sigma) = & \text{vec}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i' - M_2 - (\bar{x} - \mu)\mu' - \mu(\bar{x} - \mu)'\right) - \\ & - \text{vec}(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)'. \end{aligned} \quad (7)$$

Имея в виду, что  $\text{plim}(\bar{x} - \mu) = 0$  и  $\lim_L n^{1/2}(\bar{x} - \mu) = N(0, \Sigma)$ , то по известному результату (см. [4], стр. 118) получаем

$$\text{plim} n^{1/2} \text{vec}(\bar{x} - \mu)(\bar{x} - \mu)' = 0. \quad (8)$$

Но первое слагаемое из выражения (7) можно представить в форме  $Az_n$ , где  $\lim_L n^{1/2}z_n = N(0, T)$ . Действительно, обозначив через  $v_i$  следующий  $p(p+1)$ -мерный вектор

$$v_i = \begin{pmatrix} \text{vec}(x_i x_i') \\ x_i \end{pmatrix}$$

и учитывая, что по определению теоретической выборки все векторы  $x_i$  имеют одинаковое распределение, имеем по центральной предельной теореме (см. [1], стр. 105)

$$\lim_L n^{1/2}z_n = N(0, T), \quad (9)$$

где

$$z_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i - v, \quad (10)$$

$$v = E v_i = \begin{pmatrix} \text{vec} M_2 \\ \mu \end{pmatrix},$$

$$T = D v_i = \begin{pmatrix} M_4 - \text{vec} M_2 (\text{vec} M_2)' & \vdots & M_3 - (\text{vec} M_2)\mu' \\ M_3' - \mu (\text{vec} M_2)' & \vdots & M_2 - \mu\mu' \end{pmatrix}.$$

Матрицей  $A$  выбираем теперь  $p^2 \times (p^2 + p)$ -матрицу  $(I_{p^2} \oplus -W)$ , где через  $I_{p^2}$  обозначена  $p^2 \times p^2$ -единичная матрица, а матрицей  $W$  является  $p^2 \times p$ -матрица, представимая в виде суммы  $W = \mu \otimes I_p \oplus I_p \otimes \mu$ . Произведение матрицы  $W$  с произвольной  $p \times s$ -матрицей  $B$  определяется соотношением

$$WB = \mu \otimes B \oplus B \otimes \mu. \quad (11)$$

Вычислим произведение  $Az_n$ :

$$Az_n = \text{vec}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i' - M_2 - (\bar{x} - \mu)\mu' - \mu(\bar{x} - \mu)'\right).$$

Из (9) следует (см. [4], стр. 336), что

$$\lim_L n^{1/2}Az_n = N(0, ATA'). \quad (12)$$

Значит, по результатам (8), (12) и по лемме получается

$$\lim_L n^{1/2} \text{vec}(S - \Sigma) = N(0, ATA').$$

Чтобы доказать соотношение (6), вычислим произведение

$$ATA' = M_4 - \text{vec } M_2 (\text{vec } M_2)' - W(M_3' - \mu (\text{vec } M_2)') - \\ - (M_3 - \text{vec } M_2 \mu') W' + W(M_2 - \mu \mu') W',$$

откуда по соотношениям (2), (4) и (11) получим

$$ATA' = \bar{M}_4 - \text{vec } \Sigma (\text{vec } \Sigma)'$$

Теорема доказана.

Аналогичная методика дает возможность вычислить и совместное асимптотическое распределение вектора выборочных средних и выборочной ковариационной матрицы. Докажем это в следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть  $y$  вектора  $x$  из генеральной совокупности существуют все моменты четвертого порядка  $E x_i x_j x_k x_l = m_{ijkl} < \infty$ ,  $i, j, k, l = 1, 2, \dots, p$ . Тогда

$$\lim_L n^{1/2} \left( \frac{\bar{x} - \mu}{\text{vec}(S - \Sigma)} \right) = N(0, \zeta),$$

где

$$\zeta = \left( \begin{array}{c} \Sigma \vdots \bar{M}'_3 \\ \hline \bar{M}_3 \vdots \Psi \end{array} \right),$$

а  $\Psi$  определено соотношением (6).

Доказательство. Действительно, рассмотрим  $p(p+1) \times p(p+1)$ -матрицу  $B$ , состоящую из следующих блоков:

$$B = \left( \begin{array}{c} I_p \vdots 0 \\ \hline -W \vdots I_{p^2} \end{array} \right),$$

здесь через  $0$  обозначена  $p \times p^2$ -матрица, образованная из нулей, а через  $I_p$  обозначена  $p \times p$ -единичная матрица.

Аналогично предыдущему

$$\left( \frac{\bar{x} - \mu}{\text{vec}(S - \Sigma)} \right) = Bz_n - o(n^{1/2}),$$

где  $z_n$  — вектор, определяемый соотношением (10), а через  $o(n^{1/2})$  обозначается вектор, удовлетворяющий условию  $\text{plim } n^{1/2} o(n^{1/2}) = 0$ . Но из такого представления по лемме следует

$$\lim_L n^{1/2} \left( \frac{\bar{x} - \mu}{\text{vec}(S - \Sigma)} \right) = N(0, BVB').$$

Вычислим интересующую нас ковариационную матрицу асимптотического распределения:

$$BVB' = \left( \begin{array}{c} \Sigma \vdots M'_3 - \mu (\text{vec } M_2)' - \Sigma W' \\ \hline M_3 - (\text{vec } M_2) \mu' - W \Sigma \vdots \Psi \end{array} \right).$$

По определениям (2), (3) и (11) получаем

$$M_3 - (\text{vec } M_2) \mu' - W \Sigma = \bar{M}_3.$$

Теорема доказана.

По доказанному видно, что вектор выборочных средних и выборочная ковариационная матрица асимптотически независимы тогда и только тогда, если  $\bar{M}_3 = 0$ . Такое условие всегда выполнено для распределения, все маргинальные распределения которого симметричны относительно среднего значения. Можно отметить, что приведенные теоремы являются некоторым обобщением результатов Крамера для одномерного распределения (см. [2], стр. 339).

### Литература

1. Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ. Москва, 1963.
2. Крамер Г., Математические методы статистики. Москва, 1975.
3. Ланкастер П., Теория матриц. Москва, 1978.
4. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их приложения. Москва, 1968.

Поступило  
30 III 78

### CALCULATION OF ASYMPTOTIC PARAMETERS OF SAMPLING FUNCTIONS

A.-M. Parring

#### Summary

In the present paper it is proved that the asymptotic distribution of the well known sampling functions — the sampling average vector and the sampling covariance matrix — is a multivariate normal distribution if the random vector under examination has finite fourth moments. The parameters of this distribution are calculated in the paper.

## ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ И ЕЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

А.-М. Парринг

Тартуский государственный университет

### Введение

Цель настоящей статьи — определить функцию линейной регрессии для случайного вектора и изучить поведение приближения этой функции, получаемой при помощи выборочной оценки.

Обычно при определении функции линейной регрессии исходят из предположений, что зависимая переменная распределена нормально и ее среднее значение является линейной функцией независимых переменных, которые считаются неслучайными. В случае unplanned (пассивных) экспериментов, когда результат эксперимента — матрица выборки, эти условия кажутся несколько искусственными. В следующем определяется функция линейной регрессии, не используя названных предположений, и изучается асимптотическое поведение оценок регрессионных параметров, отказываясь от предположения нормальности исходных данных.

### 1. Функция линейной регрессии

Пусть  $x^* = (x_0, x_1, \dots, x_p)$  — произвольный случайный  $(p+1)$ -мерный вектор с вектором средних  $\mu^* = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_p)$  и ковариационной матрицей<sup>1</sup>  $\Sigma^* = (\sigma_{ij})$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, p$ . Выберем один из компонентов вектора  $x^*$  (не ограничивая общности предположим в дальнейшем, что этим компонентом является  $x_0$ ) и определим для этого компонента наилучшее линейное приближение

$$l_{\alpha_*} = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p,$$

<sup>1</sup> Как правило, в дальнейшем индексы  $i, j, k, l$  имеют значения  $0, 1, \dots, p$ , если не указано иное.

в смысле наименьших квадратов, т. е. удовлетворяющее условию

$$E(x_0 - l_{\alpha_*})^2 = \min_{l_{\alpha_*}} E(x_0 - l_{\alpha_*})^2. \quad (1)$$

Функцию  $l_{\alpha_*}$  будем в дальнейшем называть функцией линейной регрессии (ФЛР) для компонента  $x_0$ .

Пусть векторы  $\alpha_*$ ,  $x_*$ , вектор средних  $\mu_*$  и ковариационная матрица  $\Sigma_*$  расчленены в блоки следующим образом:

$$\begin{aligned} x'_* &= (x_0 \mid x'), \\ \alpha'_* &= (\alpha_0 \mid \alpha'), \\ \mu'_* &= (\mu_0 \mid \mu'), \\ \Sigma_* &= \begin{pmatrix} \sigma_{00} & \sigma'_{0'} \\ \sigma_0 & \Sigma \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Как хорошо известно (см. [6], стр. 128), условие (1) выполнено для всех векторов  $\alpha_*$ , которые являются решением системы:

$$\begin{aligned} \Sigma \alpha &= \sigma_0 \\ \mu_0 - \alpha' \mu &= \alpha_0. \end{aligned} \quad (2)$$

В дальнейшем предположим, что матрица  $\Sigma$  имеет обратную матрицу, т. е. среди компонентов  $x_1, \dots, x_p$  нет линейно зависимых. В таком случае система (2) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} \alpha &= \Sigma^{-1} \sigma_0 \\ \alpha_0 &= \mu_0 - \alpha' \mu \end{aligned} \quad (3)$$

и ФЛР существует всегда, как только у вектора  $x_*$  существуют конечные вторые моменты. Известно (см. [6], стр. 126), что эта функция является наилучшим линейным приближением к условному среднему  $E(x_0 | x)$ .

Качество такого приближения характеризуется множественным коэффициентом корреляции (МКК)

$$Q^2 = \sigma'_{0'} \Sigma^{-1} \sigma_0 / \sigma_{00}. \quad (4)$$

Если между компонентами случайного вектора  $x_*$  существует функциональная связь

$$x_0 = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p,$$

то  $Q^2 = 1$ ; если компонента  $x_0$  не коррелирована с компонентами  $x_1, \dots, x_p$  (т. е.  $\sigma_0 \equiv 0$ ), то  $Q^2 = 0$ . По существу (см. [6], стр. 132) МКК является коэффициентом корреляции между случайными величинами  $x_0$  и  $l_{\alpha_*}$ .

## 2. Выборочная функция линейной регрессии

Пусть  $X = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$  — матрица теоретической выборки объема  $n$  из генеральной совокупности, определяемой случайным  $(p+1)$ -мерным вектором  $x_*$ , а  $x_{(i)}$  — независимые случайные векторы с таким же распределением, как и вектор  $x_*$ . Обозначим через  $\bar{x}_*$  и  $S_*$  соответственно вектор выборочных средних и выборочную ковариационную матрицу, т. е.

$$\bar{x}_* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{(i)}, \quad S_* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{(i)} x_{(i)}' - \bar{x}_* \bar{x}_*'$$

Аналогично предыдущему расчленим  $\bar{x}_*$  и  $S_*$  в блоки:

$$\bar{x}_*' = (\bar{x}_0 \mid \bar{x}'), \quad S_* = \begin{pmatrix} s_{00} \mid s_0' \\ s_0 \mid S' \end{pmatrix}.$$

Приближением ФЛР называем линейную функцию  $l_{a_*}$ , где  $a_*' = (a_0 \mid a')$  — выборочная оценка вектора  $a_*$ , определяемая как решение системы

$$\begin{aligned} a &= S^{-1} s_0 \\ a_0 &= \bar{x}_0 - a' \bar{x}. \end{aligned} \quad (5)$$

Приближением МКК  $q^2$  является выборочная оценка

$$r^2 = s_0' S^{-1} s_0 / s_{00}. \quad (6)$$

Нашей первой целью является определение асимптотического распределения выборочных оценок (5) и (6).

## 3. Асимптотическое распределение коэффициентов выборочной функции линейной регрессии

Обозначим  $S_* - \Sigma_* = U_*$ . Как доказано в [2], при предположении, что у вектора  $x_*$  существуют конечные моменты четвертого порядка, имеет место соотношение<sup>2</sup>

$$\lim_L n^{1/2} \text{vec } U_* = N(0, \Psi),$$

где

$$\Psi = \bar{M}_4 - \text{vec } \Sigma_* (\text{vec } \Sigma_*)',$$

$$\bar{M}_4 = E(x_* - \mu_*) \otimes (x_* - \mu_*)' \otimes (x_* - \mu_*) \otimes (x_* - \mu_*)'. \quad (7)$$

Если расчленим матрицу  $U_*$  в блоки аналогично предыдущим расчленениям:

$$U_* = \begin{pmatrix} u_{00} \mid u_0' \\ u_0 \mid U \end{pmatrix},$$

<sup>2</sup> Символом  $\lim_L$  обозначается сходимость по распределению (см. [3], стр. 111).

то можно выборочную оценку  $a$  представить в виде

$$a = (\Sigma + U)^{-1}(\sigma_0 + u_0). \quad (8)$$

Так как  $\text{plim } U = 0$ , и, следовательно,  $\text{plim } \Sigma^{-1} U = 0$ , можно предположить, что при больших  $n$  с вероятностью, близкой к единице, все собственные значения матрицы  $\Sigma^{-1} U$  меньше единицы. Но тогда имеет место разложение:

$$(\Sigma + U)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Sigma^{-1} (U \Sigma^{-1})^i, \quad (9)$$

откуда по (3) и (8) получаем:

$$a = \alpha - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \Sigma^{-1} (U \Sigma^{-1})^i (U \alpha - u_0).$$

Пусть через  $\gamma$  обозначено  $(p+1)$ -мерный вектор  $\gamma' = (1 \vdots -\alpha')$ , через  $I^0$  обозначено  $p \times (p+1)$ -матрица  $I^0 = (0 \vdots I_p)$ , а через  $F$  обозначено  $p \times (p+1)^2$ -матрица  $F = \gamma' \otimes I^0$ . Вычислим произведение  $F \text{vec } U_*$ . Используя соотношение

$$\text{vec}(ABC) = (C' \otimes A) \text{vec } B, \quad (10)$$

получим

$$F \text{vec } U_* = \gamma' \otimes I^0 \text{vec } U_* = u_0 - U \alpha.$$

Как известно (см. [3], стр. 338),  $\lim_L n^{1/2} F \text{vec } U_* = N(0, F \Psi F')$ . Имея в виду сказанное и сходимость  $\text{plim } \text{vec } U_* = 0$ , по хорошо известному результату (см. [3], стр. 118) получаем, что  $\text{plim } n^{1/2} (U \Sigma^{-1})^i (U \alpha - u_0) = 0$ . Обозначая любой вектор  $b$ , при котором произведение  $\text{plim } n^{1/2} b = 0$ , символом  $o(n^{1/2})$ , можно, наконец, записать:

$$a - \alpha = \Sigma^{-1} F \text{vec } U_* + o(n^{1/2}). \quad (11)$$

Обозначим теперь  $\bar{x}_* = \mu_* = \omega_*$  с  $\omega_* = (\omega_0 \vdots \omega')$ . Как доказано в [2], при предположении, что у вектора  $x_*$  существуют конечные моменты четвертого порядка, имеет место

$$\lim_L n^{1/2} \left( \frac{\omega_*}{\text{vec } U_*} \right) = N(0, \zeta),$$

где

$$\zeta = \begin{pmatrix} \Sigma_* \vdots \bar{M}'_3 \\ \bar{M}_3 \vdots \Psi \end{pmatrix},$$

$$\bar{M}_3 = E(x_* - \mu_*) \otimes (x_* - \mu_*)' \otimes (x_* - \mu_*). \quad (12)$$

Рассуждения, аналогичные предыдущим, дают возможность выборочную оценку  $a_0$ , определяемую выражением (5), представить выражением

<sup>3</sup> Символом  $\text{plim}$  обозначается сходимость по вероятности (см. [3], стр. 105).

$$a_0 = \alpha_0 + \omega_0 - \alpha' \omega - \mu' \Sigma^{-1} (U\alpha - u_0) + o(n^{1/2}).$$

Обозначая  $[(p+1) + (p+1)^2]$ -мерный вектор, состоящий из блоков  $(\gamma' \vdots \mu' \Sigma^{-1} F)$  через  $K'$ , можно написать:

$$a_0 - \alpha_0 = K' \left( \frac{\omega_*}{\text{vec } U_*} \right) + o(n^{1/2}). \quad (13)$$

Объединяя выражения (11) и (13), получим

$$a_* - \alpha_* = G \left( \frac{\omega_*}{\text{vec } U_*} \right) + o(n^{1/2}), \quad (14)$$

где  $(p+1) \times [p+1 + (p+1)^2]$ -матрица  $G$  состоит из блоков

$$G = \left( \begin{array}{c} \gamma' \vdots \mu' \Sigma^{-1} F \\ 0 \vdots \Sigma^{-1} F \end{array} \right).$$

По лемме, доказанной в [2], и из представления (14) следует, что

$$\lim_L n^{1/2} (a_* - \alpha_*) = N(0, G \xi G').$$

Вычислим ковариационную матрицу этого асимптотического распределения

$$G \xi G' = \left( \begin{array}{c} \gamma' \Sigma_* \gamma + 2\mu' \Sigma^{-1} F \bar{M}_3 \gamma + \mu' \Sigma^{-1} F \Psi F' \Sigma^{-1} \mu \\ \Sigma^{-1} F \bar{M}_3 \gamma + \Sigma^{-1} F \Psi F' \Sigma^{-1} \mu \end{array} \vdots \right. \\ \left. \begin{array}{c} \gamma' \bar{M}'_3 F' \Sigma^{-1} + \mu' \Sigma^{-1} F \Psi F' \Sigma^{-1} \\ \Sigma^{-1} F \Psi F' \Sigma^{-1} \end{array} \right).$$

Рассмотрим подробнее отдельные блоки этой матрицы. Обозначим  $\Pi = \Sigma^{-1} F \Psi F' \Sigma^{-1}$ . По определению соответствующих матриц

$$\Pi = \Sigma^{-1} (\gamma' \otimes I^0) (\bar{M}_4 - \text{vec } \Sigma_* (\text{vec } \Sigma_*)') (\gamma \otimes I^0) \Sigma^{-1}.$$

Используя соотношение (10) и учитывая определение вектора  $\alpha$  выражением (3), получим:

$$\gamma' \otimes I^0 \text{vec } \Sigma_* = \text{vec} (I^0 \Sigma_* \gamma) = (\sigma_0 \vdots \Sigma) \left( \frac{1}{-\alpha} \right) = \sigma_0 - \sigma_0 = 0,$$

откуда

$$\Pi = \Sigma^{-1} (\gamma' \otimes I^0) \bar{M}_4 (\gamma \otimes I^0) \Sigma^{-1}.$$

Матрицу четвертых центральных моментов  $\bar{M}_4$  можно расчлнить в блоки,  $\bar{M}_4 = [\bar{M}_{4ij}]$ , где согласно определению (7)

$$\bar{M}_{4ij} = E(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)(x_* - \mu_*)'(x_* - \mu_*)'. \quad (15)$$

Обозначая через  $C$  следующее произведение

$$C = (\gamma' \otimes I^0) \bar{M}_4 (\gamma \otimes I^0),$$

получим при помощи соотношения (10)

$$C = E[(x - \mu)(x - \mu)' \gamma' (x_* - \mu_*)(x_* - \mu_*)' \gamma].$$

Отсюда видно, что элементы <sup>4</sup>  $c_{st}$ ,  $s, t = 1, 2, \dots, p$ , матрицы  $C$  определены выражением

$$c_{st} = \gamma' \bar{M}_{4st} \gamma \quad (16)$$

и окончательно

$$\Pi = \Sigma^{-1} C \Sigma^{-1}. \quad (17)$$

Дальше через  $f$  обозначим  $p$ -мерный вектор,  $f = F \bar{M}_3 \gamma$ . Аналогично предыдущему можно матрицу третьих центральных моментов  $\bar{M}_3$  расчленить в блоки,  $\bar{M}_3 = [\bar{M}_{3i}]$ , где согласно определению (12)  $\bar{M}_{3i} = E(x_i - \mu_i)(x_* - \mu_*)(x_* - \mu_*)'$ . Отсюда получим  $f = E[(x - \mu)\gamma'(x_* - \mu_*)(x_* - \mu_*)'\gamma]$ . Видим, что компоненты  $f_s$  вектора  $f$  определены равенством

$$f_s = \gamma' \bar{M}_{3s} \gamma. \quad (18)$$

Вычислим и произведение  $\gamma' \Sigma_* \gamma$ :

$$\gamma' \Sigma_* \gamma = (1 \vdots -\alpha') \begin{pmatrix} \sigma_{00} & \sigma'_0 \\ \sigma_0 & \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix} = \sigma_{00}(1 - \varrho^2). \quad (19)$$

Таким образом, доказана

**Теорема 1.** Пусть  $y$  вектора  $x_*$  из генеральной совокупности существуют конечные моменты четвертого порядка  $E x_i x_j x_k x_l = m_{ijkl} < \infty$ . Тогда

$$\lim_L n^{1/2}(a_* - \alpha_*) = N(0, \Xi),$$

где

$$\Xi = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{00}(1 - \varrho^2) + 2\mu' \Sigma^{-1} f + \mu' \Pi \mu}{\Pi \mu + \Sigma^{-1} f} & \frac{\mu' \Pi + f' \Sigma^{-1}}{\Pi} \end{pmatrix},$$

а  $\Pi$ ,  $C$  и  $f$  определены выражениями (17), (16) и (18).

Рассмотрим частный случай. Предположим, например, что вектор  $x_*$  из генеральной совокупности распределен нормально с параметрами  $\mu_*$  и  $\Sigma_*$ . В таком случае  $\bar{M}_3 \equiv 0$ , а

$$\bar{M}_{4ij} = \sigma_{ij} \Sigma_* + \sigma_{*(i)} \sigma'_{*(j)} + \sigma_{*(j)} \sigma'_{*(i)}, \quad (20)$$

где  $\sigma_{*(i)}$  — вектор-столбец с номером  $i$  ковариационной матрицы  $\Sigma_*$ . Вычислим элементы матрицы  $C$ :

$$c_{st} = \sigma_{st} \gamma' \Sigma_* \gamma + \gamma' \sigma_{*(s)} \sigma'_{*(t)} \gamma + \gamma' \sigma_{*(t)} \sigma'_{*(s)} \gamma.$$

По определению (3) получим значение произведения  $\gamma' \sigma_{*(s)}$ :

$$\gamma' \sigma_{*(s)} = \sigma_{0s} - \sigma'_0 \Sigma^{-1} \sigma_{(s)} = 0, \quad (21)$$

и, имея в виду равенство (19),  $c_{st} = \sigma_{00}(1 - \varrho^2) \sigma_{st}$ , или в матричной форме:  $C = \sigma_{00}(1 - \varrho^2) \Sigma$ . Следовательно, в этом случае

$$\Xi = \sigma_{00}(1 - \varrho^2) \begin{pmatrix} \frac{1 + \mu' \Sigma^{-1} \mu}{\Sigma^{-1} \mu} & \frac{\mu' \Sigma^{-1}}{\Sigma^{-1}} \end{pmatrix},$$

что согласуется с результатами из [4].

<sup>4</sup> Как правило, в дальнейшем индексы  $s, t$  имеют значения  $1, 2, \dots, p$ .

#### 4. Асимптотическое распределение оценки МКК

Найдем теперь асимптотическое распределение выборочной оценки МКК  $r^2$ , определяемой выражением (6). Как и раньше, начнем с представления

$$r^2 = (\sigma_0 + u_0)' (\Sigma + U)^{-1} (\sigma_0 + u_0) / (\sigma_0' + u_0).$$

Используя разложение (9), отсюда получим

$$r^2 = \varrho^2 + \sigma_{00}^{-1} [(1 - \varrho^2)e_1 - \gamma \otimes \gamma]' \text{vec } U_+ + o(n^{1/2}),$$

где  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  является  $(p+1)$ -мерным вектором. Обозначим через  $h$  выражение

$$h = [(1 - \varrho^2)e_1 - \gamma \otimes \gamma]' \Psi [(1 - \varrho^2)e_1 - \gamma \otimes \gamma]. \quad (22)$$

Из леммы, доказанной в [2], следует, что

$$\lim_L n^{1/2}(r^2 - \varrho^2) = N(0, \sigma_{00}^{-2}h).$$

Вычислим дисперсию асимптотического распределения. Найдем отдельные слагаемые из выражения (22):

$$(1 - \varrho^2)^2 e_1' \Psi e_1 = (1 - \varrho^2)^2 (m_{0000} - \sigma_{00}^2),$$

$m_{ijkl}$  — элементы матрицы  $\bar{M}_4$ . Дальше, имея в виду соотношения (7), (10), (15) и (19), получим

$$\Psi(\gamma \otimes \gamma) = \text{vec } C_0 - \sigma_{00}(1 - \varrho^2) \text{vec } \Sigma_*,$$

где элементы  $c_{ij}$   $(p+1) \times (p+1)$ -матрицы  $C_0$  определены равенством  $c_{ij} = \gamma' \bar{M}_{4ij} \gamma$ , откуда  $e_1' \Psi(\gamma \otimes \gamma) = \gamma' \bar{M}_{400} \gamma - \sigma_{00}(1 - \varrho^2)$ . Значение последнего слагаемого из выражения (22) найдем, используя равенство (10)

$$(\gamma \otimes \gamma)' \Psi(\gamma \otimes \gamma) = \gamma' C_{0\gamma} - (\sigma_{00}(1 - \varrho^2))^2.$$

Окончательно,

$$h = (1 - \varrho^2)m_{0000} - 2(1 - \varrho^2)\gamma' \bar{M}_{400} \gamma - \gamma' C_{0\gamma}. \quad (23)$$

Представим доказанное теоремой.

**Теорема 2.** Пусть  $y$  вектора  $x_*$  из генеральной совокупности существуют конечные моменты четвертого порядка  $E x_i x_j x_k x_l = m_{ijkl} < \infty$ . Тогда

$$\lim_L n^{1/2}(r^2 - \varrho^2) = N(0, \sigma_{00}^{-2}h),$$

где  $h$  определено равенством (23).

Полезно заметить, что асимптотическая дисперсия равна нулю, если  $\varrho^2 = 1$  или  $\varrho^2 = 0$ , т. е. если компонент  $x_0$  случайного вектора  $x_*$  является линейной функцией остальных компонентов или некоррелирован с другими компонентами соответственно.

Действительно, если  $\varrho^2 = 1$ , то  $h = \gamma' C_{0\gamma}$ . Из функциональной зависимости  $x_0 = \alpha_0 + \alpha' x$  следует равенство  $x_0 - \mu_0 = \alpha'(x - \mu)$  и отсюда следующие равенства между элементами матрицы  $\bar{M}_4$ :

$$m_{0000} = \sum_{i,j,k,l=1}^n \alpha_i \alpha_j \alpha_k \alpha_l m_{ijkl},$$

$$m_{i000} = \sum_{j,k,l=1}^n \alpha_j \alpha_k \alpha_l m_{ijkl},$$

$$m_{ij00} = \sum_{k,l=1}^n \alpha_k \alpha_l m_{ijkl},$$

$$m_{ijk0} = \sum_{l=1}^n \alpha_l m_{ijkl}.$$

Но по определению элемента  $c_{ij}$ :

$$c_{ij} = m_{ij00} - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k m_{ijk0} + \sum_{k,l=1}^n \alpha_k \alpha_l m_{ijkl} = 0$$

и, следовательно, в этом случае  $h = 0$ .

Дальше, если  $q^2 = 0$ , то  $h = m_{0000} - 2\gamma' \bar{M}_{400}\gamma - \gamma' C_0 \gamma$ . Но  $q^2 = 0$  тогда и только тогда, если  $\sigma_0 \equiv 0$ , а тогда и  $\alpha \equiv 0$ . Отсюда  $h = m_{0000} - 2m_{0000} + m_{0000} = 0$ .

Рассмотрим частный случай. Предположим, что вектор  $x_*$  из генеральной совокупности распределен нормально с параметрами  $\mu_*$  и  $\Sigma_*$ . Вычислим асимптотическую дисперсию выборочной оценки МКК. По определению (20) получим  $m_{0000} = 3\sigma_{00}^2$ . Дальше, используя (20) и (19) найдем

$$\gamma' \bar{M}_{400}\gamma = \gamma' (\sigma_{00}\Sigma_* + 2\sigma_{*(0)}\sigma'_{*(0)}) \gamma = \sigma_{00}^2 (1 - q^2) (3 - 2q^2).$$

Выпишем матрицу  $C_0$ :

$$C_0 = \sigma_{00} (1 - q^2) \left( \frac{\sigma_{00} (3 - 2q^2)}{\sigma_0} \middle| \begin{array}{c} \sigma'_0 \\ \hline \Sigma_*^{-1} \end{array} \right),$$

откуда  $\gamma' C_0 \gamma = 3\sigma_{00} (1 - q^2)^2$  и, окончательно,

$$\sigma_{00}^{-2} h = 4q^2 (1 - q^2)^2,$$

что согласуется с известным результатом (см. [1], стр. 109).

## Литература

1. Андерсон Т., Введение в многомерный статистический анализ. Москва, 1963.
2. Парринг А.-М., Вычисление асимптотических характеристик функции выборки. Настоящий сборник, стр. 86—90.
3. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их приложения. Москва, 1968.
4. Izenman, A. J., Reduced rank regression for the multivariate linear model. J. Multivar. anal., 1975. 5, 248—264.

5. Schneeweiß, H., Consistent estimation of a regression with errors in the variables. *Metrika*, 1976, 23, 101—115.
6. Tiit, E., Parring, A., Möls, T., Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika. Tallinn, 1977.

Поступило  
19 IV 1978

## ESTIMATION OF LINEAR REGRESSION FUNCTION AND ITS ASYMPTOTIC PROPERTIES

A.-M. Parring

### Summary

In the present paper the definitions of linear regression function and multiple correlation coefficient for a random vector are given. The sampling estimations might serve as an approximation to these objects. It is proved that if the random vector we are concerned with has finite fourth moments, the asymptotic distribution of these estimations is normal distribution. The parameters of this asymptotic distribution are calculated in the paper.

## НОВЫЙ ВИД ВЫДЕЛЯЕМЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А. Керге

Тартуский государственный университет

### Введение

Настоящая работа является развитием идеи автора [3] о выделяемых областях задачи математического программирования с невыпуклой допустимой областью. Выделяемые области являются окрестностями локальных решений (в общем случае стационарных точек), где нет допустимых точек, которые были бы лучше рекорда — наилучшего среди уже найденных локальных решений. В работе [3] автор пользовался линейными приближениями функций — ограничений для нахождения выделяемых областей, а в данной работе используем квадратичные приближения. Задача нахождения выделяемых областей сводится к задаче линейного программирования при присутствии одного квадратичного равенства. Эту задачу решаем методом из [9], используя специфику задачи.

Найденные выделяемые области можно использовать в процессе решения задачи математического программирования при помощи метода ветвей и границ, предложенного в [3].

### § 1. Выделяемые области

Рассматриваем следующую задачу нелинейного программирования: найти точку  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , максимизирующая с точностью до заданного  $\varepsilon > 0$  линейную целевую функцию

$$(c, x) \tag{1}$$

при ограничениях

$$f_i(x) \geq 0 \quad (i = 1, \dots, m), \tag{2}$$

$$x_j - a_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n), \tag{3}$$

$$b_j - x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n). \tag{4}$$

Обозначим  $n$ -мерный прямоугольный параллелепипед, описываемый условиями (3), (4), через  $P$ :

$$P = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_j \leq x_j \leq b_j \ (j = 1, \dots, n)\}.$$

Предполагаем, что функции  $f_i(x)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) являются дважды непрерывно дифференцируемыми в области  $P$  и существуют константы  $M_i$  такие, что при всех  $x \in P$  и таких  $h \in E^n$ , что  $x + h \in P$ , выполняется

$$(f_i''(x)h, h) \leq M_i \|h\|^2 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Если функции  $f_i(x)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) являются сепарабельными, т. е.

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^n f_{ij}(x_j) \quad (i=1, \dots, m),$$

то  $\nabla f_i(x) = (f'_{i1}(x_1), \dots, f'_{in}(x_n))$  и  $f_i''(x)$  является диагональной матрицей

$$f''_i(x) = \begin{pmatrix} f''_{i1}(x_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f''_{i2}(x_2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f''_{in}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда константы  $M_i$  можно найти следующим образом:

$$\begin{aligned} (f''_i(x)h, h) &= \sum_{j=1}^n f''_{ij}(x_j) h_j^2 \leq \sum_{j=1}^n \max_{x_j \in [a_j, b_j]} f''_{ij}(x_j) h_j^2 \leq \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \max_{x_j \in [a_j, b_j]} f''_{ij}(x_j) \|h\|^2 = M_i \|h\|^2 \quad (i=1, \dots, m). \end{aligned}$$

Для нахождения необходимых глобальных максимумов функций одной переменной  $f_{ij}''(x_j)$  на отрезках  $[a_j, b_j]$  существуют различные методы (см. [1, 2, 4]).

Пусть нам известны  $n$ -мерные прямоугольные параллелепипеды  $P_k \subseteq P$  ( $k = 1, \dots, N$ ):

$$P_k = \{(x_1, \dots, x_n) \mid a_j^k \leq x_j \leq b_j^k \ (j = 1, \dots, n)\}$$

и пусть найдена точка  $x^k \in P_k$  — локальный максимум задачи максимизации функции (1) при ограничениях (2) и линейных ограничениях

$$f_{m+j}(x) \equiv x_j - a_j^k \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n; a_j^k \geq a_j), \quad (5)$$

$$f_{m+n+j}(x) \equiv b_j^k - x_j \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n; b_j^k \geq b_j). \quad (6)$$

Наилучшее среди этих локальных максимумов обозначим через  $x^*$ :

$$(c, x^*) = \max_{1 \leq k \leq N} \{(c, x^k)\}.$$

В дальнейшем будем при фиксированном  $k = 1, \dots, N$  определять окрестность точки  $x^k$ , где нет допустимых точек, которые были бы лучше рекорда  $x^*$ . Если возможно, то уточняем константы  $M_i$  в области  $P_k \subseteq P$ , т. е. определим такие  $M_{ik} \leq M_i$ , что

$$(f_i''(x^k)h, h) \leq M_{ik} \|h\|^2 \quad (i = 1, \dots, m) \quad (7)$$

при любых  $x \in P_k$  и таких  $h \in E^n$ , что  $x + h \in P_k$ .

Ввиду линейности целевой функции локальный максимум задачи (1), (2), (5), (6) достигается на границе допустимой области. Для этой задачи определим множества индексов

$$I_k = \{i \mid f_i(x^k) = 0, i \in \{1, \dots, m + 2n\}\} \neq \emptyset,$$

$$I_k^+ = \{i \in I_k \mid M_{ik} > 0\}, \quad I_k^- = \{i \in I_k \mid M_{ik} \leq 0\}.$$

Как и в работе [3], вводим понятие выделяемой области задачи (1)–(4).

**Определение 1.** Выделяемой областью задачи (1)–(4) (относительно множества  $P_k$ ) называется такая окрестность  $U_k$  точки  $x^k$ , что для любой  $x \in P_k \cap U_k$  выполняется одно из следующих условий:

1) найдется такой индекс  $q \in I_k$ , что  $f_q(x) < 0$ , или

2)  $(c, x) < (c, x^*) + \varepsilon$ .

**Теорема 1.** Шар  $U_k := \{x \mid \|x - x^k\|^2 < Z^2\}$ , где

$$Z^2 = \min(h, h) \quad (8)$$

при ограничениях

$$(\nabla f_i(x^k), h) + \frac{1}{2} M_{ik} \|h\|^2 \geq 0 \quad (i \in I_k^+), \quad (9)$$

$$(\nabla f_i(x^k), h) \geq 0 \quad (i \in I_k^-), \quad (10)$$

$$(c, h) \geq (c, x^* - x^k) + \varepsilon, \quad (11)$$

является выделяемой областью задачи (1)–(4).

**Доказательство.** При сделанных предположениях при  $i \in I_k$  для любой  $x \in P_k$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_i(x^k + h) = f_i(x^k) + (\nabla f_i(x^k), h) + \frac{1}{2} (f_i''(x^k + \Theta_{ik}h)h, h) \leq \\ &\leq (\nabla f_i(x^k), h) + \frac{1}{2} M_{ik} \|h\|^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $0 \leq \Theta_{ik} \leq 1$ . Последнее неравенство вытекает из предположения (7). При  $i \in I_k^-$  получаем из неравенства (12) оценку

$$f_i(x) \leq (\nabla f_i(x^k), h). \quad (13)$$

Выбираем любой  $x \in P_k \cap U_k$  и покажем, что для него выполнено одно из двух условий выделяемой области. Принимая  $h = x - x^k$ , получаем из предположения теоремы, что  $\|h\|^2 < Z^2$ .

Следовательно,  $h$  является недопустимой точкой задачи (8) — (11). Если нарушено одно из ограничений (9), например,

$$(\nabla f_q(x^k), h) + \frac{1}{2} M_{qk} \|h\|^2 < 0$$

при  $q \in I_k^+$ , то из-за оценки (12) имеет место  $f_q(x) < 0$ . Это значит, что выполняется первое условие в определении 1.

Если не выполняется одно из ограничений (10) при  $p \in I_k^-$ , то

$$(\nabla f_p(x^k), h) < 0.$$

Из-за оценки (13) тогда имеем  $f_p(x) < 0$  и опять удовлетворено первое условие выделяемой области.

Если не имеет места (11), то

$$(c, h) < (c, x^* - x^k) + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$(c, x) = (c, x^k + h) < (c, x^*) + \varepsilon.$$

Это значит, что выполняется второе условие выделяемой области и каждая точка  $h \in U_k$  является точкой выделяемой области, если  $Z^2 \neq 0$ . Абсолютный минимум  $(0, \dots, 0)$  целевой функции (8) не удовлетворяет ограничениям (11) и, следовательно,  $Z^2 > 0$ . Теорема доказана.

Задача (8) — (11) имеет строго выпуклую целевую функцию, но и невыпуклые ограничения при  $i \in I_k^+$ , так что задача (8) — (11) является задачей невыпуклого программирования. Для решения задачи (8) — (11) можно использовать метод решения общей задачи квадратичного программирования, например, из [10], но в рамках этого метода надо решить огромное количество подзадач линейного программирования. В следующем параграфе выработаем конечный метод для решения задачи (8) — (11), используя ее специфику.

## § 2. Нахождение выделяемых областей

В дальнейшем для решения задачи (8) — (11) нам нужно предположение о регулярности точки локального максимума (стационарной точки) задачи (1), (2), (5), (6). Для этого используем формулировку Пшеничного и Данилина ([5], стр. 44), которая в терминах нашей задачи будет следующей.

**Определение 2.** Стационарная точка  $x^k$  задачи (1), (2), (5), (6) называется регулярной, если градиенты  $\nabla f_i(x^k)$  при  $i \in I_k$  линейно независимы.

Если стационарная точка задачи (1), (2), (5), (6) регулярна, то число индексов в множестве  $I_k$  (далее обозначим это, через  $|I_k|$ ) не больше размерности пространства  $E^n$  ( $|I_k| \leq n$ ).

Для решения задачи (8)–(11) введем новую переменную  $h_{n+1}$ , определяя

$$h_{n+1} = (h, h).$$

Здесь и в дальнейшем обозначение  $\|\cdot\|^2 = (\cdot, \cdot)$  отмечает евклидову норму пространства  $E^n$ . Тогда вместо задачи (8)–(11) получаем задачу:

$$h_{n+1} \rightarrow \min \quad (14)$$

при ограничениях

$$(\nabla f_i(x^k), h) + \frac{1}{2} M_{ik} h_{n+1} \geq 0 \quad (i \in I_k^+), \quad (15)$$

$$(\nabla f_i(x^k), h) \geq 0 \quad (i \in I_k^-), \quad (16)$$

$$(c, h) \geq (c, x^* - x^k) + \varepsilon, \quad (17)$$

$$(h, h) - h_{n+1} = 0. \quad (18)$$

При решении задачи (14)–(18) используем решение ее линейной части, т. е. задачи (14)–(17). Проверим, ограничена ли целевая функция (14) задачи (14)–(17), а при неограниченности добавим еще одно ограничение  $h_{n+1} \geq 0$  ввиду того, что целевая функция задачи (8)–(11) ограничена снизу ( $\|h\|^2 \geq 0$ ).

**Теорема 2.** В оптимальном решении  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  задачи (14)–(17) всегда  $h'_{n+1} > 0$ .

**Доказательство.** Допустим, что в оптимальной точке  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  выполняется  $h'_{n+1} \leq 0$ . Тогда ввиду допустимости точки  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  имеет место

$$(\nabla f_i(x^k), h') \geq -\frac{1}{2} M_{ik} h'_{n+1} \geq 0 \quad (i = I_k^+), \quad (19)$$

$$(\nabla f_i(x^k), h') \geq 0 \quad (i \in I_k^-), \quad (20)$$

$$(c, h') \geq (c, x^* - x^k) + \varepsilon > 0. \quad (21)$$

В стационарной точке  $x^k$  задачи (1), (2), (5), (6) выполняются необходимые условия экстремума первого порядка (условия Куна-Таккера): существуют такие  $u_i^k \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m + 2n$ ), что

$$c + \sum_{i=1}^{m+2n} u_i^k \nabla f_i(x^k) = 0, \quad (22)$$

$$u_i^k f_i(x^k) = 0 \quad (i = 1, \dots, m + 2n). \quad (23)$$

Из (22) для любого  $h \in E^n$  следует равенство

$$(c, h) + \sum_{i=1}^{m+2n} u_i^k (\nabla f_i(x^k), h) = 0.$$

За  $h \in E^n$  берем проекцию на  $E^n$  оптимальной точки задачи (14)–(17)  $(h'_1, \dots, h'_n)$ , которая является ненулевым вектором ввиду ограничения (17). Учитывая условия (23) и опреде-

ление множества  $I_k$ , получаем

$$(c, h') = - \sum_{i \in I_k} u_i^k (\nabla f_i(x^k), h').$$

Из-за разложения  $I_k = I_k^+ \cup I_k^-$ , неравенств (19), (20) и неотрицательности констант  $u_i^k$  ( $i \in I_k$ ) из последнего выражения вытекает неравенство  $(c, h') \leq 0$ . Но это неравенство противоречит условию (21). Полученное противоречие показывает несправедливость предположения  $h'_{n+1} \leq 0$  и завершает доказательство теоремы.

Для нахождения решения задачи (14)—(18) сперва рассмотрим случай, когда число ограничений в линейной задаче (14)—(17) равно  $n + 1$ , т. е. когда  $|I_k| = n$ .

Для дальнейших исследований нам понадобятся следующие понятия и утверждения.

**Определение 3** (см. [7], стр. 215). *Неравенство  $g_q(h) \leq 0$  совместной линейной системы*

$$g_i(h) \leq 0 \quad (i \in J) \quad (24)$$

*называется неустойчивым, когда ни одно из решений системы (24) не удовлетворяет неравенству  $g_q(h) < 0$ .*

**Теорема 3** (см. [8], теорема 1.2). *Имеет место только одна из следующих альтернатив: либо система*

$$Ah = b \quad (b \neq 0) \quad (25)$$

*имеет неотрицательное решение, либо имеет решение система неравенств*

$$y^T A \geq 0, \quad y^T b < 0.$$

**Лемма 1** (см. лемму 2.14 в [7]). *Неравенство  $g_p(h) \leq 0$  совместной системы (24) тогда и только тогда неустойчиво, когда уравнение*

$$\sum_{i \in J} u_i g_i(h) = 0$$

*с неизвестными  $u_i$  ( $i \in J$ ) имеет неотрицательное решение (одно и то же для всех  $h \in E^n$ ) с положительной координатой  $u_p$ .*

**Теорема 4.** *Если  $|I_k| = n$  и точка  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  — оптимальное базисное решение задачи (14)—(17), то  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  является решением задачи минимизации функции*

$$\|h\|^2 \quad (26)$$

*при ограничениях (15)—(17).*

**Доказательство.** В точке  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  все ограничения (15)—(17) становятся активными вследствие того, что оптимальному базисному решению задачи линейного программирования соответствует крайняя точка многогранного множества допустимых решений, которая в  $E^{n+1}$  определяется пересечением  $n + 1$  гиперплоскостей. Тогда выполняются равенства

$$(\nabla f_i(x^k), h') + \frac{1}{2} M_{ik} h'_{n+1} = 0 \quad (i \in I_k^+), \quad (27)$$

$$(\nabla f_i(x^k), h') = 0 \quad (i \in I_k^-), \quad (28)$$

$$(c, h') = (c, x^* - x^k) + \varepsilon. \quad (29)$$

Если нам удастся найти такие величины  $\mu_i \geq 0$  ( $i \in I_k \cup \{0\}$ ), что удовлетворены равенства

$$2h' - \sum_{i \in I_k} \mu_i \nabla f_i(x^k) - \mu_0 c = 0, \quad (30)$$

$$- \sum_{i \in I_k^+} \frac{1}{2} \mu_i M_{ik} = 0, \quad (31)$$

то в точке  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  выполняются условия Куна—Таккера для задачи (26), (15)—(17) из-за равенств (27)—(29). Ввиду выпуклости целевой функции (26) тогда точка  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  является оптимальным решением задачи (26), (15)—(17).

Из равенства (31) вытекает из-за положительности  $M_{ik}$  ( $i \in I_k^+$ ), что  $\mu_i = 0$  при  $i \in I_k^+$ . Для определения величины  $\mu_0$  умножаем векторное равенство (30) скалярно ненулевым вектором  $(h'_1, \dots, h'_n)$ :

$$2 \|h'\|^2 - \sum_{i \in I_k} \mu_i (\nabla f_i(x^k), h') - \mu_0 (c, h') = 0.$$

Учитывая равенства (28), (29) и предыдущее заключение, что  $\mu_i = 0$  при  $i \in I_k^+$ , получаем

$$\mu_0 = \frac{2 \|h'\|^2}{(c, x^* - x^k) + \varepsilon} > 0.$$

Для определения величин  $\mu_i$  ( $i \in I_k^-$ ) умножаем равенство (30) скалярно линейно независимыми векторами  $\nabla f_j(x^k) \in E^n$  ( $j \in I_k^-$ ). Тогда, учитывая равенства (28), получаем следующую систему линейных уравнений

$$- \sum_{i \in I_k} \mu_i (\nabla f_i(x^k), \nabla f_j(x^k)) = \frac{2 \|h'\|^2}{(c, x^* - x^k) + \varepsilon} (c, \nabla f_j(x^k)) \quad (j \in I_k^-). \quad (32)$$

По теореме 3 система (32) имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда противоречива следующая система неравенств

$$\sum_{j \in I_k^-} \lambda_j (\nabla f_j(x^k), \nabla f_i(x^k)) \leq 0 \quad (i \in I_k), \quad (33)$$

$$\sum_{j \in I_k^-} \lambda_j (c, \nabla f_j(x^k)) < 0. \quad (34)$$

На основе определения 3 система (33), (34) противоречива тогда, когда неравенство

$$\sum_{j \in I_k^-} \lambda_j(c, \nabla f_j(x^h)) \leq 0 \quad (35)$$

является неустойчивым для совместной системы (33), (35). В силу леммы 1 это имеет место тогда и только тогда, когда уравнение

$$\sum_{i \in I_k} u_i \left[ \sum_{j \in I_k^-} \lambda_j(\nabla f_j(x^h), \nabla f_i(x^h)) \right] + u_0 \sum_{j \in I_k^-} \lambda_j(c, \nabla f_j(x^h)) = 0 \quad (36)$$

с неизвестными  $u_i$  ( $i \in I_k \cup \{0\}$ ) имеет неотрицательное решение, где  $u_0 > 0$ . Выбирая  $u_0 = 1$ ,  $u_i = u_i^h$  ( $i \in I_k$ ), где  $u_i^h \geq 0$  ( $i \in I_k$ ) — множители Лагранжа в стационарной точке  $x^h$  задачи (1), (2), (5), (6), получаем из (36) следующее равенство:

$$\sum_{j \in I_k^-} \lambda_j(\nabla f_j(x^h), \sum_{i \in I_k} u_i^h \nabla f_i(x^h) + c) = 0,$$

которое независимо от  $\lambda_j$  ( $j \in I_k^-$ ) тождественно справедливо в силу условий Куна—Таккера (22), (23) для задачи (1), (2), (5), (6). Следовательно, система (33), (34) противоречива, система (32) имеет решение  $\mu_i^h \geq 0$  ( $i \in I_k \cup \{0\}$ ), причем можно выбирать  $\mu_i^h = 0$ ,  $i \in I_k^+$ , так, чтобы в точке  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  выполнялись условия Куна—Таккера для задачи (26), (15)—(17). Теорема доказана.

**Теорема 5.** Если  $|I_k| = n$  и в оптимальной  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  задачи (14)—(17) выполняется неравенство

$$\|h'\|^2 - h'_{n+1} \geq 0, \quad (37)$$

то  $\|h'\|^2 = \|h^k\|^2$ , где  $h^k \in E^n$  — глобальное решение задачи (8)—(11).

Доказательство. Задачи (8)—(11) и (14)—(18) являются эквивалентными. Поэтому  $(h^k_1, \dots, h^k_n, h^k_{n+1})$  с

$$h^k_{n+1} = \|h^k\|^2, \quad (38)$$

является глобальным решением задачи (14)—(18).

В точке  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  удовлетворена система (27)—(29). Используя предположение (37), получаем из (27) неравенства

$$(\nabla f_i(x^h), h') + \frac{1}{2} M_{ik} \|h'\|^2 \geq 0 \quad (i \in I_k^+). \quad (39)$$

Из (28), (29), (39) видно, что точка  $(h'_1, \dots, h'_n)$  является допустимой для задачи (8)—(11). Следовательно, справедлива оценка  $\|h^k\|^2 \leq \|h'\|^2$ . По теореме 4  $\|h'\|^2 = \min \|h\|^2$  при ограничениях (15)—(18). Если выполняется

$$\|h^k\|^2 < \|h'\|^2, \quad (40)$$

то точка  $(h^k_1, \dots, h^k_{n+1})$  должна быть недопустимой для задачи (26), (15)—(17). Так как ограничения (10), (11) совпадают со-

ответственно с условиями (16), (17), то должен существовать  $q \in I_k^+$ , при котором

$$(\nabla f_q(x^k), h^k) + \frac{1}{2} M_{qk} h_{n+1}^k < 0.$$

Но из-за равенства (38) тогда выполняется

$$(\nabla f_q(x^k), h^k) + \frac{1}{2} M_{qk} \|h^k\|^2 < 0,$$

что невозможно, так как  $h^k$  оптимальна к задаче (8)—(11). Следовательно, предположение (40) никогда не выполняется, что доказывает утверждение теоремы.

Пусть теперь в оптимальной точке  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$  задачи (14)—(17) при  $|I_k| = n$  выполняется

$$\|h'\|^2 - h'_{n+1} < 0. \quad (41)$$

Это условие показывает, что точка  $(h'_1, \dots, h'_n) \in E^n$  является внутренней точкой шара  $\|h\|^2 \leq h'_{n+1}$ . Пересечение полупространств (15)—(17) образует многогранный конус в  $E^{n+1}$  с вершиной в точке  $(h'_1, \dots, h'_{n+1})$ , а уравнение (18) определяет эллиптический параболоид (см. [6], стр. 287). Если глобальное решение задачи (14)—(18) достигается в точке  $(h^k_1, \dots, h^k_{n+1})$ , то на гиперплоскости  $h_{n+1} = h'_{n+1}$ , где  $h'_{n+1} < h''_{n+1} < h^k_{n+1}$ , ограничения (15)—(17) образуют выпуклый многогранник, который расположен во внутренности шара  $\|h\|^2 \leq h'_{n+1}$  (иначе существовало бы допустимая точка задачи (14)—(18) со значением целевой функции  $h''_{n+1} < h^k_{n+1}$ ). Ввиду того, что шар является строго выпуклым множеством, где все граничные точки являются крайними, то на гиперплоскости  $h_{n+1} = h^k_{n+1}$  многогранник

$$(\nabla f_i(x^k), h) \geq -\frac{1}{2} M_{ik} h_{n+1}^k \quad (i \in I_k^+), \quad (42)$$

$$(\nabla f_i(x^k), h) \geq 0 \quad (i \in I_k^-), \quad (43)$$

$$(c, h) \geq (c, x^* - x^k) + \varepsilon, \quad (44)$$

может коснуться сферы  $\|h\|^2 = h^k_{n+1}$  только в крайней точке  $(h^k_1, \dots, h^k_{n+1})$ . Крайние точки многогранника (42)—(44) при переменных значениях  $h_{n+1}$  образуют ребра многогранного конуса (15)—(17). Следовательно, для нахождения глобального решения задачи (14)—(18) при условии (41) достаточно найти точки пересечения  $(h^i_1, \dots, h^i_{n+1})$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , ребер конуса (15)—(17) с параболоидом (18) и выбрать из них наименьшую по значению целевой функции (14):

$$h_{n+1}^k = \min_{1 \leq i \leq n+1} \{h^i_{n+1}\}.$$

Для краткости представления ребер конуса (15)—(17) введем константы  $M_{ik}=0$  при  $i \in I_k^-$ . Тогда первые  $n$  ребер конуса (15)—(17) представимы следующими линейными системами при  $p = 1, \dots, n$ :

$$(\nabla f_i(x^k), h) + \frac{1}{2} M_{ik} h_{n+1} = 0 \quad (i \in I_k, i \neq p), \quad (45)$$

$$(c, h) = (c, x^* - x^k) + \varepsilon. \quad (46)$$

Последнее ребро определяется системой

$$(\nabla f_i(x^k), h) + \frac{1}{2} M_{ik} h_{n+1} = 0 \quad (i \in I_k). \quad (47)$$

Решение линейных систем (45), (46) или (47) с уравнением (18) сводится к решению обычного квадратного уравнения одной переменной. Из полученных двух решений может быть точкой пересечения ребра с параболоидом (18) только такая точка, при которой  $h^i_{n+1} \geq h'_{n+1}$ . Такое утверждение опирается на обстоятельство, что значение целевой функции при оптимальном решении задачи (14)—(18) не может быть меньше, чем в оптимальной точке задачи (14)—(17).

Теперь рассматриваем случай, когда в стационарной точке задачи (1), (2), (5), (6) число активных ограничений  $|I_k| = n_1 < n$ . Тогда оптимальное значение  $h'_{n+1}$  задачи (14)—(17) достигается на  $(n - n_1)$ -мерной плоскости

$$(\nabla f_i(x^k), h) + \frac{1}{2} M_{ik} h'_{n+1} = 0 \quad (i \in I_k^+), \quad (48)$$

$$(\nabla f_i(x^k), h) = 0 \quad (i \in I_k^-), \quad (49)$$

$$(c, h) = (c, x^* - x^k) + \varepsilon, \quad (50)$$

расположенной на целевой плоскости  $h_{n+1} = h'_{n+1}$ . Роль величины  $\|h'\|^2$  предыдущих случаев теперь будет выполнять расстояние  $d$  от точки  $h^0 = (0, \dots, 0, h'_{n+1})$  до плоскости (48)—(50). Если систему уравнений (48)—(50) представить в матричном виде

$$Uh = v,$$

то  $d$  можно определить ([6], стр. 94) при помощи выражения

$$d = (h^{0T} U^T - v)^T (U U^T)^{-1} (U h^0 - v). \quad (51)$$

Теоремы 4 и 5 остаются справедливыми, если величину  $\|h'\|^2$  заменить величиной  $d$ . В случае  $d < h'_{n+1}$   $(n - n_1)$ -мерная плоскость оптимальных решений (48)—(50) пересекается сферой (18) по  $(n - n_1 - 1)$ -мерной сфере (см. [6], стр. 225), которая, конечно, тоже принадлежит плоскости (48)—(50). Следова-

тельно, в случае  $|I_k| = n_1 < n$  оптимальное решение задачи (14)—(18) определяется условием

$$h^k_{n+1} = \max \{h'_{n+1}, d\},$$

где величина  $d$  вычисляется формулой (51).

Полученные результаты позволяют для нахождения выделяемой области вместо задачи квадратичного программирования с невыпуклой допустимой областью решать систему вместе с одномерными поисками небольшого количества.

### Литература

1. Вилков А. В., Жидков Н. П., Щедрин Б. М. Метод отыскания глобального минимума функции одного переменного. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, 15, № 4, 1040—1042.
2. Евтушенко Ю. Г., Методы поиска глобального экстремума. В сб. «Исслед. операций». Вып. 4. М., 1974, 39—68.
3. Керге А., Выделяемые области в методе ветвей и границ для задачи невыпуклого программирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 149—158.
4. Леонов В. В., Метод покрытий для отыскания глобального максимума функций от многих переменных. В сб. «Исслед. по кибернетике». М., «Сов. радио», 1970, 41—52.
5. Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М., Численные методы в экстремальных задачах. Москва, 1975.
6. Розенфельд Б. А., Многомерные пространства. Москва, 1966.
7. Черников С. Н., Линейные неравенства. Москва, 1968.
8. Ху Т., Целочисленное программирование и потоки в сетях. Москва, 1974.
9. Hillestad, R. J., Optimization problems subject to a budget constraint with economies of scale. Oper. Res., 1975, 23, № 6, 1091—1099.
10. Reeves, G. R., Global minimization in nonconvex all-quadratic programming. Manag. Sci., 1975, 22, № 1, 76—86.

Поступило  
20 IV 1978

## NEW DISTINGUISHABLE REGIONS FOR NONCONVEX PROGRAMMING

A. Kerge

### Summary

The concept of distinguishable regions introduced earlier by the present author [3] is developed by applying quadratic approximations of the nonconvex restrictions. The results achieved make it possible to find the distinguishable region by solving a system of linear equations, which can be supplemented by  $n+1$  quadratic equations ( $n$  being the number of the variables in the programming problem).

## СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

С. Пискарев. Об аппроксимации голоморфных полугрупп . . .	3
S. Piskarjov. About the approximation of holomorphic semi-groups. <i>Summary</i> . . .	14
Р. Лепик. Об обратимости дискретного оператора Винера—Хопфа с операторными коэффициентами . . .	15
R. Lepik. On the invertibility of discrete Wiener-Hopf operators with operator coefficients. <i>Summary</i> . . .	24
Р. Лепик. О фредгольмовости многомерного дискретного оператора Винера—Хопфа . . .	25
R. Lepik. On the conditions when the multidimensional discrete Wiener-Hopf operator is a Fredholm operator. <i>Summary</i> . . .	36
О. Карма. Некоторые асимптотические оценки близости корней голоморфных функций . . .	37
O. Karma. Some asymptotic estimations for the nearness of zeroes of holomorphic functions. <i>Summary</i> . . .	46
Р. Керге. Об устойчивости метода подобластей . . .	47
R. Kerge. Über die Stabilität des Teilgebietsverfahrens. <i>Zusammenfassung</i> . . .	55
А. Педас. О гладкости решения интегрального уравнения со слабо-сингулярным ядром . . .	56
A. Pedas. On the smoothness of the solution of an equation with a weakly singular kernel. <i>Summary</i> . . .	68
П. Мийдла. Изучение сходимости приближенных методов отыскания автоколебаний с помощью вращений векторного поля . . .	69
P. Miidla. Study of the convergence of the approximation methods of finding self-oscillations, using the rotation of vector-field. <i>Summary</i> . . .	79
Э. Тамме. Разностный метод решения задач Неймана в двумерной области . . .	80
E. Tamme. Ein Differenzenverfahren für die Lösung des Neumannschen Problems im zweidimensionalen Gebiet. <i>Zusammenfassung</i> . . .	85
А.-М. Парринг. Вычисление асимптотических характеристик функций выборки . . .	86
A.-M. Parring. Calculation of asymptotic parameters of sampling functions. <i>Summary</i> . . .	90
А.-М. Парринг. Оценка функции линейной регрессии и ее асимптотическое поведение . . .	91
A.-M. Parring. Estimation of linear regression function and its asymptotic properties. <i>Summary</i> . . .	99
А. Керге. Новый вид выделяемых областей для задачи невыпуклого программирования . . .	100
A. Kerge. New distinguishable regions for nonconvex programming. <i>Summary</i> . . .	110

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 492.  
МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ. Труды по математике и механике XXIV. На рус-  
ском языке. Резюме на английском и немецком языках. Тартуский государст-  
венный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18. Ответственный редак-  
тор. С. Барон. Корректоры В. Фляйшер, О. Мутт, К. Уусталу. Сдано в набор  
9/VI 1978. Подписано к печати 19/1 1979. Бумага типографская № 1,  
60×90 1/16. Печ. листов 7,0. Учетно-издат. листов 6,77. Тираж 450. МВ 01029.  
Зак. 2769. Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР, г. Тарту, ул. Юли-  
кооли, 17/19 II. Цена 1 руб.