

A-6789

# Geomeetria ja trigonomeetria

valemite kogu

== Korraldanud ==  
stud. mat. Ed. Lindenberg.

Tallinnas 1926.



# Geomeetria ja trigonomeetria valemite kogu.

== Korraldanud ==  
stud. mat. Ed. Lindenberg.

Autori kirjastus — Tallinnas, 1926.

A-6784

Waba-Maa trükikoda, Tallinnas



4591

# GEOMEETRIA.

## I. Planimeetria.

### A. Kolmnurgad.

Osa tasapinnast, mis piirdub kolme sirgjoonega, nim. kolmnurgaks.

$\triangle$  = kolmnurk

a, b, c = küljed

$h_a, h_b, h_c$  = kõrgused, } mis vastavad  
 $m_a, m_b, m_c$  = külgede poolitajad, } külg. a, b, c

$n_\alpha, n_\beta, n_\gamma$  = nurkade  $\alpha, \beta, \gamma$  poolitajad

R = ümber — } joonestatud ringide raadiused  
r = sisse — }

$\rho_a, \rho_b, \rho_c$  = kõrvujoonestatud ringide raadiused

$\frac{a+b+c}{2} = p$  = poolüumbermõõt

S = pindala.

#### a. Isekülgne kolmnurk.

$\triangle$ -ka, mille küljed on võrratud, nim. isekülgseks.

Ristjoont, mis tõmmatud  $\triangle$ -ga tipust

vastasküljele või selle pikendusele, nim.  $\triangle$ -ga kõrguseks.

$\triangle$ -ga kõrgused avalduvad järgmiselt :

$$h_a = \frac{bc}{2R} = \frac{2S}{a} = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{ac}{2R} = \frac{2S}{b} = \frac{2}{b} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{ab}{2R} = \frac{2S}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$\triangle$ -ga kõrgused on vastuvõrdelised vastavate külgedega  $\left[ \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = a : b : c \right]$ .

$\triangle$ -ga kõrgused lõikuvad ühes punktis, ning jagunevad temas osadesse, millede korrutised isekeskis võrdsed.

Ristjooned, mis tõmmatud  $\triangle$ -ga ühe külje lähistippudest sama külje poolitajale, on võrdsed.

Sirgjoont, mis poolitab nurka, nim. nurgapoolitajaks (bissektoriks).

$\triangle$ -ga nurgapoolitajad avalduvad järgmiselt :

$$na = \frac{2}{b+c} \sqrt{bc p (p-a)}$$

$$n\beta = \frac{2}{a+c} \sqrt{acp(p-b)}$$

$$n\gamma = \frac{2}{a+b} \sqrt{abp(p-c)}.$$

$\triangle$ -ga sisenurga poolitaja jagab vastaskülje osadeks, mis on  $\triangle$ -ga kahe teise küljega võrdelised [ $AD : DC = AB : BD$ ].

$\triangle$ -ga välisnurga poolitaja lõikab selle nurga vastaskülje pikenduse niisuguses punktis, mille kaugused selle külje otspunktidest on  $\triangle$ -ga kahe teise küljega võrdelised [ $AF : FC = AB : BC$ ].

Kumbki joonlõik, moodustatud nurgapoolitaja lõikumisel vastasküljega, = murruga, mille lugejaks on sama külje ja lõigu lähiskülje korrutis, nimetajaks nurka moodustavate külgede summa

$$\left[ AD = \frac{AC \cdot AB}{AB+BC}; BD = \frac{AC \cdot BC}{AB+BC} \right].$$

$\triangle$ -ga nurgapoolitajad lõikuvad ühes punktis.

Sirgjoont, mis ühendab  $\triangle$ -ga külje keskpunkti tema vastasnurga tipuga, nim. küljepoolitajaks (mediaaniks).

$\triangle$ -ga küljepoolitajad avalduvad järgmiselt:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$$

$\triangle$ -ga neljakordne küljepoolitajate ruutude summa = kolmekordse külgede ruutude summaga  $[4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)]$ .

$\triangle$ -ga küljepoolitajad lõikuvad ühes punktis, mis jagab nad suhtes 2 : 1, arvatud tipust küljele.

Küljepoolitajad jagavad  $\triangle$ -ga 6-de pindvõrdsesse ossa.

$\triangle$ -ga ümberjoonestatud ringi raadius

$$R = \frac{ac}{2h_b} = \frac{abc}{4S} = \frac{1}{4}(q_a + q_b + q_c - r).$$

$\triangle$ -ga sissejoonestatud ringi raadius

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

$\triangle$ -ga kõrvujoonestatud ringide raadiused avalduvad järgmiselt:

$$q_a = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}$$

$$q_b = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}$$

$$q_c = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}$$

$\triangle$ -ga kolm kõrvu- ja sissejoonestatud ringi raadiused on seotud järgmise võrrandiga:

$$\frac{1}{q_a} + \frac{1}{q_b} + \frac{1}{q_c} = \frac{1}{r}$$

$\triangle$ -ga sissejoonestatud ringi raadius ja kõrgused on seotud järgmise võrrandiga:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

$\triangle$ -ga sisse- ja neljakordse ümberjoonestatud ringi raadiuste summa = kõrvujoonestatud ringide raadiuste summaga

$$[r + 4R = q_a + q_b + q_c]$$

$\triangle$ -ga ümber- ja sissejoonestatud ringide keskjoon =  $\sqrt{R^2 - 2Rr}$ .

$\triangle$ -ga ümber- ja kõrvujoonestatud ringide keskjoon =  $\sqrt{R^2 + Rq}$ .

$\triangle$ -ga ümberjoonestatud ringi keskpunkt asetseb külgede keskristjoonte ühispunktis.

$\triangle$ -ga sissejoonestatud ringi keskpunkt asetseb nurgapoolitajate ühispunktis.

$\triangle$ -ga teravnurga vastaskülje ruut = kahe teise külje ruutude summaga, — aluse ja teravnurga tipu ja kõrguse vahel asetseva sama aluse lõigu kahekordne korrutis [ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bn$ ].

$\triangle$ -ga nürinurga vastaskülje ruut = kahe teise külje ruutude summaga + aluse ja nürinurga tipu ja kõrguse vahel asetseva sama aluse pikenduse kahekordne korrutis [ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bn$ ].

Kui  $\triangle$ -ga üks nurk on  $\frac{4}{3}d$ , siis = selle nurga vastaskülje ruut kahe teise külje ruutude summaga, + seda nurka moodustavate külgede korrutis.

$\triangle$ -ga küljed avalduvad järgmiselt:

$$a = \frac{2}{3} \sqrt{2m_b^2 + 2m_c^2 - m_a^2}$$

$$b = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_c^2 - m_b^2}$$

$$c = \frac{2}{3} \sqrt{2m_a^2 + 2m_b^2 - m_c^2}$$

$\triangle$ -ga kahe külje korrutis võrdub :

1) tema ümberjoonestatud ringi läbimõõdu ja kolmandale küljele tõmmatud kõrguse korrutisega [ $b c = 2 R h_a$ ];

2) samade külgede vahel asetseva nurgapoolitaja ruudu ja kolmanda külje lõikude korrutise summaga.

$\triangle$ -ga kahe külje ruutude vahe = nende külgede vastavate projektsioonide ruutude vahega kolmandal küljel.

Kahe pindvõrdse  $\triangle$ -ga võrdseid nurki moodustavate külgede korrutised on võrdsed.

$\triangle$ -ga külgede ruutude summa = tema tippu ja küljepoolitajate ühispunkti ühendavate joonlõikude kolmekordse ruutude summaga [ $a^2 + b^2 + c^2 = 3 (AM^2 + BM^2 + CM^2)$ ].

Joonlõik, mis ühendab  $\triangle$ -ga kahe külje keskpunkte, = kolmanda külje poolega, on viimasega rööbiti ja eraldab  $\triangle$ -gast  $\frac{1}{4}$ -ku.

Ristjoon, mis tõmmatud  $\triangle$ -ga ühe külje keskpunktist teisele küljele, =  $\triangle$ -ga selle kõrguse poolega, mis temaga rööbiti.

Kui  $\triangle$ -ga nurgapoolitajate ühispunktist ja tippudest tõmmata välisele sirgjoonele

ristjooned, siis on esimene ristjoon kolme viimase aritmeetiline keskarv.

$$\triangle\text{-ga sisenurkade summa} = 2d = 180^\circ.$$

$$\triangle\text{-ga välisnurkade summa} = 4d = 360^\circ.$$

$\triangle$ -ga välisnurk = temaga mitte kõrva oleva kahe sisenurga summaga.

Kui  $\triangle$ -ga ühe külje ruut on väiksem, võrdne või suurem kahe teise külje ruutude summast, siis on tema vastasnurk vastavalt terav-, täis- või nürinurk.

Kaks  $\triangle$ -ka on ühtivad, kui neil on:

- 1) üks külj ja selle kaks lähisnurka,
- 2) kaks külge ja nende vahelnurk,
- 3) kolm külge,
- 4) kaks külge ja suurema külje vastasnurk vastavalt võrdsed.

Kaks  $\triangle$ -ka on sarnased, kui neil on

- 1) kaks võrdset nurka,
- 2) kaks vastavalt võrdelist külge võrdse vahelnurgaga,
- 3) kolm vastavalt võrdelist külge,
- 4) küljed vastavalt risti ehk rööbiti.

Sarnaste  $\triangle$ -de vastavad küljed suhtuvad nagu vastavad kõrgused, ümbermõõdud, nurga- ja küljepoolitajad ning sisse- ja ümberjoonestatud ringide raadiused.

$\triangle$ -ga pindala = aluse ja kõrguse poolkorrutisega

$$\left[ S = \frac{bh_b}{2} \right], \text{ ehk : } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ = \frac{abc}{4S} = (p-a)q_a = \sqrt{r q_a q_b q_c}.$$

$\triangle$ -de pindalad suhtuvad nagu aluste ja kõrguste korrutised.

Võrdse nurgaga  $\triangle$ -de pindalad suhtuvad nagu neid nurki moodustavate külgede korrutised  $[S : S_1 = ab : a_1b_1]$ .

Sarnaste  $\triangle$ -de pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud  $[S : S_1 = a^2 : a_1^2]$ .

### b. Võrdhaarne kolmnurk.

a = haar; b = alus.

$\triangle$ -ka, mille kaks külge on võrdsed, nim. võrdhaarseks.

Võrdhaarse  $\triangle$ -ga tippnurga poolitaja on ühtlasi ka tema aluse poolitaja ja kõrgus.

Võrdhaarse  $\triangle$ -ga haarale tõmmatud kõrgus = aluse mistahes punktist haaradele tõmmatud ristjoonte summaga.

Võrdhaarse  $\triangle$ -ga ümberjoonestatud ringi raadius  $R = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$ .

Võrdhaarse  $\triangle$ -ga sissejoonestatud ringi raadius  $r = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{2(2a + b)}$ .

Võrdhaarse  $\triangle$ -ga aluse lähisnurgad on võrdsed.

Võrdhaarse  $\triangle$ -ga pindala

$$S = \frac{bh_b}{2} = \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2} = h_b \sqrt{a^2 - h_b^2}.$$

### c. Võrgkulgne kolmnurk.

$\triangle$ -ka, mille küljed on võrdsed, nim. võrdkulgseks.

Võrdkulgse  $\triangle$ -ga iga nurk =  $60^\circ$ .

Võrdkulgse  $\triangle$ -ga kõrgus = ristjoonte summaga, mis tõmmatud  $\triangle$ -ga mistahes punktist külgedele.

Võrdkulgse  $\triangle$ -ga ümberjoonestatud ringi raadius  $R = \frac{a}{3} \sqrt{3} = \frac{2}{3} h = 2r$ .

Võrdkulgse  $\triangle$ -ga sissejoonestatud ringi raadius  $r = \frac{a}{6} \sqrt{3} = \frac{h}{3} = \frac{R}{2}$ .

Võrdkulgse  $\triangle$ -ga kõrgus

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3} = \frac{3}{2} R = 3r.$$

Võrdkulgse  $\triangle$ -ga külg

$$a = R \sqrt{3} = \frac{2}{3} h \sqrt{3} = 2r \sqrt{3}.$$

Võrdkulgse  $\triangle$ -ga pindala

$$S = \frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{h^2}{3} \sqrt{3} = \frac{3}{4} R^2 \sqrt{3} = 3r^2 \sqrt{3}.$$

#### d. Täisnurkne kolmnurk.

a, b = kaatetid

c = hüpotenuus

h = kõrgus hüpotenuusile

f, g = kaatete a ja b projektsioonid hüpotenuusile.

$\triangle$ -ka, mille üks nurk on täisnurk, nim. täisnurkseks.

Täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrgus on kaatete projektsioonide keskmine võrdeline ehk: hüpotenuusi ruut = kaatete projektsioonide korrutisega [f : h = h : g ehk  $h^2 = fg$ ].

Kaatet on hüpotenuusi ja oma projektsiooni keskmine võrdeline ehk: kaateti ruut = hüpotenuusi ja oma projektsiooni korrutisega [c : a = a : f ehk  $a^2 = cf$ ; c : b = b : g ehk  $b^2 = cg$ ].

Kaatete ruutude summa = hüpotenuusi ruuduga [ $a^2 + b^2 = c^2$ ].

Hüpotenuusi ja temale tõmmatud kõrguse korrutis = kaatetite korrutisega [ $ch = ab$ ].

Ühe kaateti ja hüpotenuusile tõmmatud kõrguse korrutis = teise kaateti ja esimese kaateti projektsiooni korrutisega [ $ah = bf$  ehk  $bh = ag$ ].

Hüpotenuusile tõmmatud kõrgus ja kaatetid on seotud järgmise võrrandiga:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Kaatetite ruudud suhtuvad nagu nende vastavad projektsioonid [ $a^2 : b^2 = f : g$ ].

Täisnurkse  $\triangle$ -ga küljed avalduvad järgmiselt: kaatetid:  $\begin{cases} a = 2n^2 + 2n \\ b = 2n + 1 \end{cases}$  ja hüpotenuus  $c = 2n^2 + 2n + 1$ , kus  $n$  on mistahes täisarv.

Hüpotenuus  $c = f + g = 2R = 2m_c = b + c - 2r$ .

$$\begin{aligned} \text{Hüpotenuusi poolitaja } m_c &= \frac{c}{2} = R = \frac{f+g}{2} = \\ &= \frac{a+b-2r}{2}. \end{aligned}$$

Täisnurkse  $\triangle$ -ga ümberjoonestatud ringi raadius  $R = \frac{c}{2} = m_c = \frac{f+g}{2} = \frac{a+b-2r}{2}$ .

Täisnurkse  $\triangle$ -ga sissejoonestatud ringi raadius  $r = \frac{a + b - 2m_c}{2} = \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b - 2R}{2}$ .

Hüpotenuusi kõrvujoonestatud ringi raadius  $q_c = \frac{a + b + c}{2}$ .

Täisnurkse  $\triangle$ -ga sissejoonestatud ringi puutepunkt jagab hüpotenuusi kahte ossa, millede korrutis =  $\triangle$ -ga pindalaga.

Täisnurkse  $\triangle$ -ga teravnurkade summa =  $d = 90^\circ$ .

$$30^\circ \text{ nurga vastaskaatet} = \frac{\text{hüpotenuus}}{2}$$

$$45^\circ \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad = \frac{\text{hüpotenuus} \sqrt{2}}{2}$$

$$60^\circ \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad = \frac{\text{hüpotenuus} \sqrt{3}}{2}$$

Täisnurksed  $\triangle$ -gad on ühtivad, kui neil on:

- 1) kaks kaatetit,
  - 2) üks kaatet ja selle lähisteravnurk,
  - 3) hüpotenuus ja teravnurk,
  - 4) hüpotenuus ja kaatet vastavalt võrdsed.
- Täisnurksed  $\triangle$ -gad on sarnased, kui

neil on:

- 1) võrdne teravnurk,

- 2) kaks vastavalt võrdelist kaatetit,
- 3) hüpotenuus ja kaatet vastavalt võrdelised,
- 4) küljed vastavalt risti või rööbiti.

Hüpotenuusile konstrueeritud ruudu pindala = kaatetitele konstrueeritud ruutude pindalade summaga.

Hüpotenuusile konstrueeritud hulknurga (samuti ringi) pindala = kaatetitele konstrueeritud sarnaste hulknurkade (ka ringide) pindalade summaga.

Kui täisnurkse  $\triangle$ -ga külgedele konstrueerida poolringid, mis asetsevad ühelt pool külgi, siis = tekkinud kuukujuliste kujundite pindalade summa  $\triangle$ -ga pindalaga.

## B. Nelinurgad.

a, b, c, = küljed

e, f = nurkjooned

$a + b + c + d = P = \text{ümbermõõt}$

$\frac{a + b + c + d}{2} = p = \text{poolümbermõõt}$

S = pindala.

Osa tasapinnast, mis piirdub nelja sirgjoonega nim. nelinurgaks.

Joonlõiku, mis ühendab nelinurga vas-

tasnurga tippe, nim. tema nurkjooneks (diagonaaliks).

Nelinurga külgede ruutude summa = nurkjoonte ruutude summaga, liidetud neljakordse nurkjoonte keskpunkte ühendava joonlõigu ruuduga [ $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4k^2$ ].

Nelinurga nurkjoonte ruutude summa = kahekordse vastaskülgede keskpunktide kauguste ruutude summaga [ $e^2 + f^2 = 2(EF^2 + KL^2)$ ].

Sissejoonestatud nelinurga vastaskülgede summad on võrdsed [ $a + c = b + d$ ].

Sissejoonestatud nelinurga nurkjoonte korrutis = vastaskülgede korrutiste summaga [ $ef = ac + bd$ ].

Sissejoonestatud nelinurga nurkjooned avalduvad järgmiselt:  $e = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$ ;

$$f = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}}$$

Nelinurga ümberjoonestatud ringi raadius

$$R = \sqrt{\frac{(ab + dc)(ac + bd)(ad + bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$

Sarnaste nelinurkade ümbermõõdud suhtuvad nagu vastavad küljed [ $P : P_1 = a : a_1$ ].

Nelinurga sisenuurkade summa =  $4d = 360^\circ$ .

Sissejoonestatud nelinurga vastasnurkade summa  $= 2d = 180^\circ$ .

Sissejoonestatud nelinurga pindala

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Sarnaste nelinurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud  $[S:S_1 = a^2:a_1^2]$ .

Nelinurga külgede keskpunkte ühendavad joonlõigud moodustavad rööpküliku, mille pindala = nelinurga pindala poolega.

### a. Rööpkülik (parallelogramm).

$b =$  alus;  $h =$  kõrgus.

Nelinurka, mille vastasküljed on rööbikud, nim. rööpkülikuks.

Rööpküliku vastasküljed ja vastasnurgad on võrdsed.

Rööpküliku ühe külje lähisnurkade summa  $= 2d = 180^\circ$ .

Rööpküliku kõrgused on vastuvõrdelised vastavate külgedega.

Rööpküliku nurkjooned poolituvad vastamisi.

Rööpküliku nurkjoonte ruutude summa = külgede ruutude summaga  $[e^2+f^2=a^2+b^2+c^2+d^2]$ .

Iga joonlõik, mis kulgeb rööpküliku nurkjoonte ühispunkti, poolitub temas.

Rööpküliku pindala = aluse ja kõrguse korrutisega  $[S = bh]$ .

Rööpkülikute pindalad suhtuvad nagu aluste ja kõrguste korrutised  $[S:S_1 = bh:b_1h_1]$ .

### b. Püstkülik (täisnelinurk).

Rööpkülikut, mille nurgad on täisnurgad, nim. püstkülikuks.

Püstküliku nurkjooned on võrdsed.

Püstküliku ümber võib joonestada ringjoone.

Märkus: Püstkülikust on maksvad ka kõik eelpool käsitatud rööpküliku omadused.

### c. Kaldruut (romb).

Rööpkülikut, mille küljed on võrdsed, nim. kaldruuduks.

Kaldruudu nurkjooned on isekeskis risti ja poolitavad tema nurki.

Kaldruudu pindala = nurkjoonte poolkorrutisega  $\left[ S = \frac{ef}{2} \right]$ .

Kaldruutu võib joonestada ringjoone.

Märkus: Kaldruudust on maksvad ka kõik eelpool käsitatud rööpküliku omadused.

### d. Ruut.

Püstkülikut, mille küljed on võrdsed, nim. ruuduks.

Ruudu pindala = tema külje ruuduga  
 $[S = a^2]$ .

Märkus: Ruudust on maksvad ka kõik eel-  
 pool käsitatud rööpküliku, püstküliku ja  
 kaldruudu omadused.

### e. Trapets.

a, b = alused                      h = kõrgus  
 c, d = küljed                      k = kesjoon.

Nelinurka, mille kaks vastaskülge on röö-  
 bikud, nim. trapetsiks.

Trapetsi keskjoon = aluste poolsum-  
 maga  $\left[ k = \frac{a + b}{2} \right]$ .

Trapetsi nurkjoonte ruutude summa = kül-  
 gede ruutude ja aluste kahekordse korrutise  
 summaga  $[e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab]$ .

Trapetsi nurkjooned jagunevad lõikudes  
 osadesse, mis vastavalt võrdelised alustega.

Trapetsit, mille küljed on võrdsed, nim.  
 võrdhaarseks.

Võrdhaarse trapetsi nurkjoone ruut =

külje ruudu ja aluste korrutise summaga [ $e^2 = c^2 + ab$ ].

Võrdhaarse trapetsi nurkjooned ja nende lõikumisest tekkinud alumised ja ülemised osad on isekeskis võrdsed.

Võrdhaarse trapetsi ümber võib joonestada ringjoone.

Trapetsit, mille kaks nurka on täisnurkad, nim. täisnurkseks.

Täisnurkse trapetsi nurkjoonte ruutude vahe = aluste ruutude vahega [ $f^2 - e^2 = a^2 - b^2$ ].

Kui trapetsi küljed jagada suhtes  $m : n$ , siis = jagatispunkte ühendav joonlõik järgmise avaldusega :  $(mc + nd) : (m + n)$ .

Trapetsi pindala võrdub :

1) aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega

$$\left[ S = \frac{(a+b)h}{2} \right];$$

2) keskjoone ja kõrguse korrutisega [ $S = kh$ ];

3) ühe külje ja teise külje keskpunktist esimesele tõmmatud kõrguse korrutisega ;

4)  $\frac{a+b}{4(a-b)} \sqrt{(b+c+d-a)(a-b-c+d)(a-b+c-d)(a-b+c+d)}$ .

### C. Hulknurgad.

$a_n =$  sisse-  
 $b_n =$  ümber- } joonestatud korrapärase hulknurga külge,

$a_{2n} =$  sissejoonestatud korrapärase hulknurga kahendatud külge,

$r =$  sisse-  
 $R =$  ümber- } joonestatud ringi raadius,

$P =$  ümbermõõt,

$n =$  külgede arv,

$s =$  pindala.

Osa tasapinnast, mis piirdub enam kui nelja sirgjoonega, nim. hulknurgaks.

H-nurka, mille küljed ja nurgad on võrdsed, nim. korrapäraseks.

Ristjoont, mis tõmmatud korrapärase h-nurga keskpunktist küljele, nim. tema apoteemiks.

Igasuguse h-nurga sisenukade summa  $= 2d(n-2)$ .

Igasuguse h-nurga välisnurkade summa  $= 4d=360$ .

Korrapärase h-nurga sisenuk  $= \frac{2d(n-2)}{n}$

Korrapärase samanimeliste h-nurkade küljed suhtuvad nagu nende ümbermõõdud

või sisse- ja ümberjoonestatud ringide raadiused.

Sarnaste h-nurkade küljed suhtuvad nagu vastavad ümbermõõdud või joonlõigud.

H-nurga ühest tipust tõmmatud nurkjoonte arv = tema kolme võrra vähendatud külgede arvuga  $[N=n-3]$ .

Igasuguse ümberjoonestatud h-nurga pindala = ümbermõõdu ja raadiuse poolkorrutisega

$$\left[ S = \frac{P_r}{2} \right].$$

Korrapärase h-nurga pindala = ümbermõõdu ja apoteemi poolkorrutisega  $\left[ S = \frac{P_r}{2} \right]$ .

Korrapärase h-nurga pindala = kaks korda vähema külgede arvuga sisse- ja ümberjoonestatud korrapärase h-nurkade pindalade korrutisega  $[S_{2n}^2 = S_n S_n]$ .

Korrapärase sissejoonestatud h-nurga pindala = tema ümberjoonestatud ringi raadiuse ja kaks korda vähema külgede arvuga korrapärase sissejoonestatud h-nurga ümbermõõdu poolkorrutisega  $\left[ S_{2n} = \frac{R P_n}{2} \right]$ .

Korrapärase samanimeliste h-nurkade

pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede või sisse- ja ümberjoonestatud ringide raadiuste ruudud.

Sarnaste h-nurkade pindalad suhtuvad nagu vastavate külgede ruudud.

$$a_n = \frac{b_n R}{\sqrt{R^2 + \frac{b_n^2}{4}}}$$

$$b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

$$a_3 = R \sqrt{3} = \frac{b_3}{2} = 2r_3 \sqrt{3}$$

$$a_4 = R \sqrt{2} = \frac{b_4}{2} = 2r_4$$

$$a_5 = \frac{R}{2} \sqrt{5 - \sqrt{5}} = \frac{3b_5}{4\sqrt{3 - \sqrt{5}}}$$

$$a_6 = R = \frac{b_6}{2} \sqrt{3} = \frac{2}{3} r_6 \sqrt{3}$$

$$a_8 = R \sqrt{2 - \sqrt{2}} = \frac{b_8}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} = 2r_8 (\sqrt{2} - 1)$$

$$a_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5}-1) = \frac{b_{10}}{\sqrt{2-\sqrt{0,8}}} = \frac{2r_{10}}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}$$

$$a_{12} = R \sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{b_{12}}{4} (\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 2r_{12} (2-\sqrt{3})$$

## D. Ringjoon, ring ja nende osad.

C = ringjoon

k = kõõl

R = raadius

l<sub>s</sub> = kaare pikkus

D = läbimõõt

S = pindala

### a. Ringjoon.

Kinnist kõverjoont, mille kõik punktid asetsevad võrdsel kaugusel tema keskpunktist, nim. ringjooneks.

Joonlõiku, mis ühendab mistahes ringjoone punkti tema keskpunktiga, nim. raadiuseks.

Ringjoone ja läbimõõdu suhe  $\pi = 3,14 = \frac{22}{7} = \frac{355}{113}$ .

Ringjoone pikkus  $C = 2\pi R = \pi D$ .

Ringjooned suhtuvad nagu vastavad raadiused või läbimõõdud.

### b. Kaar.

Osa ringjoonest nimetatakse kaareks.

Ühes ringis või ühtivates ringides vasta-  
vad võrdsetele kaartele võrdsed kõõlud ja  
kesknurgad, ühtivad sektorid ja lõigud.

Rööpkõõlude vahel asetsevad kaared on  
võrdsed.

Kaare pikkus  $l = \frac{\pi R \alpha^0}{180^0}$ , kus  $\alpha^0$  on kaare  
kraadide arv.

Kaared suhtuvad nagu vastavad raadiused.

### c. Lõikaja.

Sirgjoont, millel on ringjoonega kaks ühist  
punkti, nim. lõikajaks.

Kui välimisest punktist tõmmata ringile  
kimp lõikajaid, siis on lõikajate korrutised  
oma välisosadega isekeskis võrdsed.

### d. Puutuja.

Sirgjoont, millel on ringjoonega üks ühine  
punkt, nim. puutujaks.

Kui välimisest punktist tõmmata ringile  
puutuja ja lõikaja, siis on puutuja lõikaja ja  
selle välisosa keskmine võrdeline ehk:  
puutuja ruut = lõikaja ja selle välisosa kor-  
rutisega.

Ühest punktist tõmmatud puutujad on võrdsed.

Puutuja poolitab rööpkõõlule vastava kaare.

Puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

### e. Kõõl.

Joonlõiku, mis ühendab ringjoone kaht punkti, nim. kõõluks.

Ühes punktis lõikuvate kõõlude osade korrutised on isekeskis võrdsed.

Ristjoon, mis tõmmatud ringjoone mistahes punktist läbimõõdule, on läbimõõdu osade keskmine võrdeline.

Läbimõõt, mis risti kõõluga, poolitab kõõlu ja sellele vastava kaare.

Kahe lõikuva ringi keskjoon on risti nende ühise kõõluga ja poolitab selle.

Kui läbimõõduga rööbiti oleva kõõlu otspunktid ühendada läbimõõdu mistahes punktiga, siis = ühendusjoonte ruutude summa läbimõõdu osade ruutude summaga.

### f. Ring.

Osa tasapinnast, mis piirdub ringjoonega, nim. ringiks.

$$\text{Ringi pindala } S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Ringide pindalad suhtuvad nagu vastavate raadiuste või läbimõõtude ruudud.

### g. Sektor (väljalõik).

Osa ringist, mis piirdub kahe raadiuse ja kaarega, nim. sektoriks.

$$\text{Sektori pindala } S = \frac{\pi R^2 \alpha^{\circ}}{360^{\circ}} = \frac{IR}{2}.$$

Sarnaste sektori pindalad suhtuvad nagu raadiuste või läbimõõtude ruudud.

### h. Segment (lõik).

Osa ringist, mis piirdub kõõlu ja kaarega, nim. segmendiks.

$$\text{Segmendi pindala } S = \frac{R(1 - k) + kh}{2}, \text{ kus}$$

$h$  on segmendi kõrgus.

Sarnaste segmentite pindalad suhtuvad nagu raadiuste ehk läbimõõtude ruudud.

## E. Võrdelised lõigud.

Kui nurga üks külj jagada võrdseteks osadeks ja jaotuspunktidest tõmmata rööbi-

kud sirgjooned kuni lõikumiseni teise küljega, siis jaguneb ka teine külg võrdseteks osadeks.

Nurga külgi lõikuvad rööpsirged jagavad nurga küljed vastavalt võrdelisteks osadeks.

Kui rida rööpsirgeid lõikuvad ühest punktist tulevate kiirtega, siis jagunevad nad ise ja jagavad ka kiired vastavalt võrdelisteks osadeks.

Jagada joonlõik  $AB$  kuldlõikeliselt, tähendab jagada ta kahte ossa nõnda, et suurem osa oleks terve joonlõigu ja väiksema osa keskmine võrdeline [ $AB : AD = AD : DB$ ].

Jagada joonlõik  $AB$  harmooniliselt, tähendab leida temal ja ta pikendusel üks niisugune punkt, millede kauguste suhted joonlõigu otspunktidest oleksid võrdsed

$$[AC : BC = AD : BD].$$

## F. Nurgad.

Kujundit, mille moodustavad kaks ühest punktist väljaminevat kiirt ühes nende vahelise tasapinna-osaga, nim. nurgaks.

Nurki, millel on ühine tipp ja küljed moodustavad kaks lõikuvat sirgjoont, nim. tippnurkadeks.

Tippnurgad on võrdsed.

Rööbikute või risti külgedega nurgad on võrdsed, kui nad mõlemad on kas teravad või nürid ja nende summa = sirgnurgaga, kui üks on terav ja teine nüri.

Vastavad nurgad, sisemised ja välimised põiknurgad on võrdsed ja sisemiste ja välimiste rindnurkade summa = sirgnurgaga.

Nurki, millel on üks ühine külge ja teised kaks moodustavad sirgjoone, nim. kõrvunurkadeks.

Kõrvunurkade summa = sirgnurgaga.

Nurka, mille külgedeks on raadiused, nim. kesknurgaks.

Kesknurk mõõhtub temale vastava kaarega.

Kesknurgad suhtuvad nagu nende vastavad kaared.

Nurka, mille tipp asetseb ringjoonel ja külgedeks on kõõlud, nim. piirdenurgaks.

Piirdenurk mõõhtub temale vastava poolkaarega.

Ühele kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed.

Läbimõõdule toetuv piirdenurk on täisnurk.

Nurk, mille külgedeks on kas lõikajad,

kõõl ja puutuja või puutujad, mõõtub tema külgede vahel asetsevate kaarte poolvahega.

Nurk, mille külgedeks on lõikuvad kõõlud, mõõtub tema külgede ja nende pikenduste vahel asetsevate kaarte poolvahega.

## II. Stereomeetria.

### A. Sirgjooned ja tasapinnad ruumis.

Läbi kolme mitte ühel sirgjoonel asetseva punkti võib tõmmata tasapinna ja ainult ühe.

Tasapindade lõikjoon on sirgjoon.

Sirgjoont, mis on risti iga tema alust läbistava sirgjoonega tasapinnal, nim. tasapinna ristjooneks.

Kui sirgjoon on risti kahe selle sirgjoone alust läbistava sirgjoonega tasapinnal, siis on ta risti ka tasapinnaga.

Sirgjoonele võib läbi iga temal või väljaspool teda asetsevast punktist tõmmata rist-tasapinna ja ainult ühe.

Tasapinnale võib igast temal või väljaspool teda asetsevast punktist tõmmata ristjoone ja ainult ühe.

Kui sirgjoon on risti kaldjoone projekt-

siooniga tasapinnal, siis on ta risti ka kaldjoonega.

Kui kahest rööpjoonest on üks risti tasapinnaga, siis on ka teine temaga risti.

Ühele tasapinnale tõmmatud ristjooned on rööbikud.

Läbi kahe rööp-sirgjoone tõmmatud tasapindade lõikjoon on rööbik antud sirgjoontega.

Sirgjoon ja tasapind, samuti kaks tasapinda on rööbikud, kui neil puudub ühine punkt, s. o. kui nad ei lõiku kunagi.

Kui sirgjoon ja tasapind või kaks tasapinda on risti ühe ja sama sirgjoonega, siis on nad isekeskis rööbikud.

Sirgjoon, mis on rööbik mistahes sirgjoonega tasapinnal, on rööbik ka selle tasapinnaga.

Tasapinnaga rööpsirgjoone kõik punktid asetsevad võrdsel kaugusel sellest tasapinnast.

Kui kahel tasapinnal asetsevate nurkade vastavad küljed on rööbikud ja ühele poole sihitud, siis on nurgad võrdsed ja tasapinnad rööbikud.

Kahe rööp-tasapinna lõikjooned kolmanda tasapinnaga on rööbikud.

Sirgjoon, mis on risti ühe rööp-tasapinnaga, on risti ka teisega.

Rööp-tasapindade vahel asetsevate rööp-sirgjoonte lõigud on võrdsed.

Kahe sirgjoone nurgaks nim. nurka, mille moodustavad ruumi mistahes punktist antud sirgjoontele tõmmatud rööpjooned.

Kui kaks sirgjoont lõikuvad rea rööp-tasapindadega, siis jagunevad nad vastavalt võrdelisteks osadeks.

Kujundit, mille moodustavad kaks lõikuvat tasapinda, nim. kahetahuseks nurgaks.

Nurka, mille küljed asetsevad kahetahuse nurga tahkudel ja on risti selle servaga, nim. kahetahuse nurga lineaarnurgaks (ta on kahetahuse nurga mõõduks).

Kui kahetahused nurgad ühtivad, siis ühtivad ka nende lineaarnurgad ja ümberpöörduvalt.

Kui sirgjoon on risti tasapinnaga, siis on ka sirgjoont läbistav tasapind temaga risti.

Kui kaks lõikuvat tasapinda on risti kolmandaga, siis on ka nende lõikjoon risti viimasega.

Sirgjoone ja tasapinna nurgaks nim.

nurka, mille moodustavad sirgjoon ja tema projektsioon sellel tasapinnal.

Kujundit, mille moodustavad mitu ühes punktis lõikuvat tasapinda, nim. ruumisnurgaks.

Igas kolmtahuses nurgas on üks tasanurk vähem kahe teise tasanurga summast ja suurem nende vahest.

Kumera ruumisnurga tasanurkade summa on väiksem kui 4d.

## B. Hulktahud.

$$\begin{array}{l}
 P_k = \text{külg-} \\
 P_t = \text{täis-}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \text{pind} \\
 \text{pind}
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 h = \text{kõrgus} \\
 l = \text{külgserv}
 \end{array}$$

$V = \text{ruumala.}$

Keha, mis igast küljest piirdub tasapindadega, nim. hulktahuks.

Joonlõiku, mis ühendab kaht mitte ühel tahul asetsevat hulktahu tippu. nim. tema nurkjooneks.

Kumera hulktahu tippude ja külgtahkude arvsumma = tema kahevõrra suurendatud servade arvuga  $[E+F=k+2]$ .

Gavalieri lause: Kehad on ruumvõrdsed kui neid võib asetada kahe rööptasapinna

vahele nõnda, et lõikes iga kolmanda rööptasapinnaga neis tekiksid pindvõrdsed kujujundid.

Sarnaste hulktahkude pinnad suhtuvad nagu vastavate servade ruudud ja ruumalad — nagu nende kuubid.

Keha kaal = ruumala ja erikaalu korrutisega  $[G=Ve]$ .

### a. Prisma (tahksammas).

$S = \text{põhja}$	}	pindala	$P = \text{põhja}$	}	ümber-
$S_n = \text{lõike}$			$P_n = \text{ristlõike}$		

Hulktahku, mille kaks tahku on võrdsed ja rööbikud hulknurgad, aga kõik teised tahud — rööpkülikud, nim. prismaks.

Püstprisma külgpind = põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega  $[P_n = Ph]$ .

Püstprisma täispind = külginna ja põhjade pindalade summaga  $[P_t = P_k + 2S]$ .

Kaldprisma külgpind = tema ristlõike ümbermõõdu ja külgserva korrutisega  $[P_k = P_n l]$ .

Kaldprisma täispind = külginna ja põhjade pindalade summaga  $[P_t = P_k + 2S]$ .

Püstprisma ruumala = põhjapindala ja kõrguse korrutisega  $[V = Sh]$ .

Kaldprisma ruumala võrdub :

- 1) põhjapindala ja kõrguse korrutisega  $[V=Sh]$ ;
- 2) ristlõike pindala ja külgserva korrutisega  $[V=S_n l]$ .

### b. Rööptahukas (parallelepiped).

$S$  = põhja pindala.

$a, b, c$  = täisnurkse rööptahuka mõõted.

Prismat, mille põhjades on rööpkülükud, nim. rööptahukaks.

Rööptahuka vastastahud ja vastasservad on võrdsed ja rööbikud.

Rööptahuka nurkjooned lõikuvad ühes punktis ning poolituvad temas.

Rööptahuka nurkjoonte ruutude summa = tema servade ruutude summaga.

Rööptahukat, mille kõik tahud on püst-külükud, nim. täisnurkseks rööptahukaks.

Täisnurkse rööptahuka nurkjooned on võrdsed.

Täisnurkse rööptahuka nurkjoone ruut = tema kolme mõõte ruutude summaga

$$[d^2 = a^2 + b^2 + c^2].$$

Täisnurkse rööptahuka täispind = kahekordse paarikaupa võetud mõõdede korrutiste summaga  $[P=2(ab + ac + bc)]$ .

Täisnurkse rööptahuka ruumala = tema kolme mõõte korrutisega [ $V=abc$ ].

Igasuguse rööptahuka ruumala = põhjapindala ja kõrguse korrutisega [ $V = Sh$ ].

### c. Püramiid.

$S$  = põhja pindala

$P$  = põhja übermõõt

$K$  = püramiidi apoteem.

Hulktahku, mille põhjaks on hulknurk ja külgtahkudeks kolmnurgad ühise tipuga, nim. püramiidiks.

Püramiiti, mille põhjaks on korrapärane hulknurk ja kõrgus kulgeb põhja keskpunkti, nim. korrapäraseks.

Korrapärase püramiidi külgtahu kõrgust nim. tema apoteemiks.

Kui püramiit lõigata põhjale rööptasapinnaga, siis :

1) jagunevad tema külgservad ja kõrgus vastavalt võrdelisteks osadeks ;

2) lõikes tekib põhjaga sarnane hulknurk;

3) põhja ja lõikpindalad suhtuvad nagu nende tippude kauguste ruudud.

Korrapärase püramiidi külgpind = põhja



Tüvipüramiidi ruumala = põhjade pindalade ja nende geomeetrilise keskarvu summa ning kõrguse  $\frac{1}{3}$ -ku korrutisega

$$\left[ V = \frac{h}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \right].$$

### B<sub>a</sub>. Korrapärased hulktahud.

$a =$  serv                       $R =$  ümber- } joonestatud  
 $d =$  nurkjoon                 $r =$  sisse- } kera raadius.

#### a. Kuup.

Hulktahku, mis piirdub kuue võrdse ruuduga, nim. kuubiks.

$$P_t = 6a^2; V = a^3; d = a\sqrt{3}; R = \frac{d}{2}; r = \frac{a}{2}.$$

#### b. Tetraeeder.

Hulktahku, mis piirdub nelja võrdse korrapärase  $\triangle$ -ga, nim. tetraeedriks.

$$P_t = a^2\sqrt{3}; V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}; R = \frac{a}{4}\sqrt{6}; r = \frac{a}{12}\sqrt{6}.$$

#### c. Oktaeeder.

Hulktahku, mis piirdub kaheksa võrdse korrapärase  $\triangle$ -ga, nim. oktaeedriks.

$$P_t = 2a^2\sqrt{3}; V = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}; R = \frac{a}{2}\sqrt{2}; r = \frac{a}{6}\sqrt{6}.$$

## C. Pöördkehad.

$$\left. \begin{array}{l} P_k = \text{külg-} \\ P = \text{täis-} \end{array} \right\} \text{pind} \quad \begin{array}{l} h = \text{kõrgus} \\ V = \text{ruumala} \end{array}$$

### a. Koonus.

$l$  = moodustaja ;  $R$  = põhja raadius.

Keha, mis moodustab täisnurkse  $\triangle$ -ga pöördumisel ümber ühe kaateti, nim. püst-ringkoonuseks.

Püst-ringkoonuse külgpind = põhja ringjoone ja moodustaja poolkorrutisega

$$\left[ P_k = \frac{2\pi R l}{2} = \pi R l \right].$$

Püst-ringkoonuse täispind = külginna ja põhjapindala summaga

$$[P_l = \pi R l + \pi R^2 = \pi R (l + R)].$$

Tasapinnale laotatud püst-ringkoonuse külgpind moodustab ringisektori, mille kesk-

nurk  $\alpha = \frac{360^\circ R}{l}$  kraadiga.

Koonuse ruumala = põhjapindala ja kõr-

guse  $\frac{1}{3}$ -ku korrutisega  $\left[ V = \frac{\pi R^2 h}{3} \right]$ .

Sarnaste koonuste külj- ja täispinnad

suhtuvad nagu vastavate raadiuste või kõrguste ruudud ja ruumalad — nagu nende kuubid.

### b. Tüvikoonus.

$$\left. \begin{array}{l} R = \text{alumise põhja} \\ r = \text{ülemise} \quad " \\ q = \text{kesk-ristlõike} \\ l = \text{moodustaja.} \end{array} \right\} \text{ raadius}$$

Osa koonusest, mis asetseb põhja ja temaga rööp-lõikpinna vahel. nim. tüvikoonuseks.

Tüvikoonuse külgpind võrdub :

1) põhjade ringjoonte summa ja moodustaja poolkorrutisega  $\left[ P_k = \frac{(2\pi R + 2\pi r)l}{2} = \pi l(R+r) \right]$ ;

2) kesk-ristlõike ringjoone ja moodustaja korrutisega  $[P_k = 2\pi q l]$ .

Tüvikoonuse täispind = külgpinna ja põhjade pindalade summaga

$$[P^t = \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi q^2].$$

Tasapinnale laotatud tüvikoonuse külgpind moodustab ringisektori vöö, mille kesk-

nurk  $\alpha = \frac{360^\circ(R-r)}{l}$  kraadiga.

Tüvikoonuse ruumala

$$V = \frac{\pi h}{3} R^2 + 2^2 + Rr).$$

### c. Silinder.

$R$  = põhja raadius.

Keha, mis moodustub püstküliku pöör-  
dumisel ümber ühe külje, nim. püst-ring-  
silindriks.

Püst - ringsilindri külgpind = põhja ring-  
joone ja kõrguse korrutisega [ $P_k = 2\pi Rh$ ].

Püst-ringsilindri täispind = külpinna ja  
põhjade pindalade summaga

$$[P_t = 2 \pi R h + 2 \pi R^2 = 2 \pi R (h + R)].$$

Silindri ruumala = põhjapindala ja kõr-  
guse korrutisega [ $V + \pi R^2 h$ ].

Sarnaste silindrite külj- ja täispinnad  
suhtuvad nagu vastavate raadiuste või kõr-  
guste ruudud ja ruumalad — nagu nende  
kuubid.

### d. Kera.

$R$  = raadius ;  $D$  = läbimõõt.

Keha, mis moodustub poolringi pöördu-  
misel ümber läbimõõdu, nim. keraks.

Kera lõige tasapinnaga on ring.

Suuringid poolituvad lõikumisel.

Suuring poolitab kera ja selle pinna.

Kera pind = neljakordse suuringi pindalaga [ $P = 4 \pi R^2 = \pi D^2$ ].

Kera ruumala = kerapinna ja raadiuse  $\frac{1}{3}$ -ku korrutisega [ $V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi D^3}{6}$ ].

Kerade pinnad suhtuvad nagu raadiuste või läbimõõtude ruudud ja ruumalad — nagu nende kuubid.

Ühise põhjaga ja ühise kõrgusega koonuse, poolkera ja silindri ruumalad suhtuvad nagu 1 : 2 : 3.

### e. Kerasektor.

$r_1, r_2$  = sektori põhjale vastava kihi põhjate raadiused,

$h$  = sektori põhjale vastava kihi kõrgus,

$R$  = kera raadius.

Keha, mis moodustub ringisektori pöördumisel ümber teda lõikumatu läbimõõdu, nim. kerasektoriks.

Kerasektori põhjapind ehk vööpind (sfääriline pind) = suuringjoone ja põhjale vastava kihi kõrguse korrutisega [ $P_k = 2\pi Rh$ ].

Kerasektori täispind üldjuhusel = põhja- ja kahe koonuse külgpinna summaga  
 $[P_t = 2\pi Rh + \pi Rr_1 + \pi Rr_2]$ .

Kerasektori täispind erijuhusel (kui  $r_2 = 0$ ) = põhja- ja ühe koonuse külgpinna summaga  
 $[P_t = 2\pi Rh + \pi Rr_1]$ .

Kerasektori ruumala = suuringi pindala ja põhjale vastava kihi kõrguse  $\frac{2}{3}$ -ku korrutisega  $[V = \frac{2}{3}\pi R^2 h]$ .

#### f. Kerasegment (keralõik).

$h$  = kõrgus;  $r$  = põhja raadius;  $R$  = kera raadius.

Tasapinnaga eraldatud osa kerast nim. kerasegmentiks.

Kerasegmenti külgpind ehk kalott (sfääriline pind) = suuringjoone ja kõrguse korrutisega  $[P_k = 2\pi Rh]$ .

Kerasegmenti täispind = külgpinna- ja põhjapindala summaga  $[P_t = 2\pi Rh + \pi r^2]$ .

Kerasegmenti ruumala  $V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)$ .

### g. Kerakiht.

$h$  = kõrgus;  $r_1$  ja  $r_2$  = põhjade raadiused;  
 $R$  = kera raadius.

Osa kerast, mis asetseb kahe rööpringi vahel, nim. kerakihtiks ja viimase külgpinda — keravööks.

Kerakihi külgpind (vööpind) = suuringjoone ja kõrguse korrutisega [ $P_k = 2\pi Rh$ ].

Kerakihi täispind = külgpinna ja põhjade pindalade summaga [ $P_t = [2\pi Rh + \pi r_1^2 + \pi r_2^2]$ ].

Kerakihi ruumala  $V = \frac{\pi h}{6} (3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ .

Kui joonlõik pöörduv ümber telje, mis ei lõika teda ega ole temaga risti, kuid asetseb teljega ühel tasapinnal, siis moodustub pind, mis = joonlõigu projektsiooniga teljel, korrutatud ringjoone pikkusega, mille raadiuseks on joonlõigu keskpunktist telje lõikumiseni tõmmatud ristjoon.

Kolmnurga pöördumisel temaga ühel tasapinnal asetseva ja üht tippu kulgeva, kuid teda mitte lõikava telje ümber moodustatud keha ruumala = nimetatud tipu vastas-

küljega moodustatud pinna ja sellele küljele tõmmatud kõrguse  $\frac{1}{3}$ -ku korrutisega.

### Guldini laused:

1. Pöördkeha külgpind = moodustaja ja selle raskuspunkti tee pikkuse korrutisega.
  2. Pöördkeha ruumala = külginna ja selle raskuspunkti tee pikkuse korrutisega.
-

# Trigonomeetria.

## A. Coniomeetria.

a. Tähtsamate nurkade trigonoom. funktsioonid.

Kraadid	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	+1	0	-1	0
cos	+1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	+1
tan	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$+\sqrt{3}$	$\infty$	0	$\infty$	0
cot	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0	$\infty$	0	$\infty$
sec	+1	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\infty$	-1	$\infty$	+1
cosec	$\infty$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	+1	$\infty$	-1	$\infty$

b. Funktsiooni avaldamine sama nurga teiste funktsioonide kaudu.

	$\sin a$	$\cos a$	$\tan a$	$\cot a$
$\sin a =$		$\sqrt{1 - \cos^2 a}$	$\frac{\tan a}{\sqrt{1 + \tan^2 a}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}$
$\cos a =$	$\sqrt{1 - \sin^2 a}$		$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 a}}$	$\frac{\cot a}{\sqrt{1 + \cot^2 a}}$
$\tan a =$	$\frac{\sin a}{\sqrt{1 - \sin^2 a}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 a}}{\cos a}$		$\frac{1}{\cot a}$
$\cot a =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 a}}{\sin a}$	$\frac{\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}$	$\frac{1}{\tan a}$	

### c. Funktsioonide taandustabel.

	$90^\circ \mp a$	$180^\circ \mp a$	$270^\circ \mp a$	$360^\circ \mp a$	$-a$
sin	$+\cos a$	$\pm \sin a$	$-\cos a$	$\mp \sin a$	$-\sin a$
cos	$\pm \sin a$	$-\cos a$	$\mp \sin a$	$+\cos a$	$+\cos a$
tan	$\pm \cot a$	$\mp \tan a$	$+\cot a$	$\mp \tan a$	$-\tan a$
cot	$\pm \tan a$	$\mp \cot a$	$\pm \tan a$	$\mp \cot a$	$-\cot a$
sec	$\pm \operatorname{cosec} a$	$-\sec a$	$\mp \operatorname{cosec} a$	$+\sec a$	$+\sec a$
cosec	$+\sec a$	$\pm \operatorname{cosec} a$	$-\sec a$	$\mp \operatorname{cosec} a$	$-\operatorname{cosec} a$

$$\sin (45^\circ \pm a) = \cos (45^\circ \mp a); \quad \tan (45^\circ \pm a) = \cot (45^\circ \mp a)$$

Taandamise üldreegel. Taandatava funktsiooni nurk jagada  $90^\circ$  ja jääk võtta endise

nimetusega, kui jagatis on paaris arv, ja vastava koofunktsiooni nimetusega ehk ümberpöördult, kui jagatis on paaritu arv, ning selle veerandi märgiga, milles lõpeb taandatava funktsiooni nurk.

#### d. Funktsioonide märgid.

Kvadrandid	I	II	III	IV
sin, cosec	+	+	-	-
cos, sec	+	-	-	+
tan, cot	+	-	+	-

#### e. Põhivalemid.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$$

$$\frac{\sin^2 a = 1 - \cos^2 a}{\cos^2 a = 1 - \sin^2 a}$$

$$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$$

$$\sec a \cos a = 1$$

$$1 + \cot^2 a = \operatorname{cosec}^2 a$$

$$\sec a \cos a = 1$$

$$\operatorname{cosec} a \sin a = 1$$

$$\tan a \cot a = 1$$

### f. Nurkade summa ja vahe funktsioonid.

$$\sin(a + \beta) = \sin a \cos \beta + \cos a \sin \beta$$

$$\sin(a - \beta) = \sin a \cos \beta - \cos a \sin \beta$$

$$\cos(a + \beta) = \cos a \cos \beta - \sin a \sin \beta$$

$$\cos(a - \beta) = \cos a \cos \beta + \sin a \sin \beta$$

$$\tan(a + \beta) = \frac{\tan a + \tan \beta}{1 - \tan a \tan \beta}$$

$$\tan(a - \beta) = \frac{\tan a - \tan \beta}{1 + \tan a \tan \beta}$$

$$\cot(a + \beta) = \frac{\cot a \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot a}$$

$$\cot(a - \beta) = \frac{\cot a \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot a}$$

### g. Kahekordse nurga funktsioonid.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$1 - \cos 2a = 2 \sin^2 a$$

$$1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a$$

$$\sin a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{2}}$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{2}}$$

$$\tan a = \sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}}$$

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a} \quad \left| \quad \cot a = \sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{1 - \cos 2a}}\right.$$

### h. Poolnurga funktsioonid.

$$\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

$$\sin a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$$

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\tan a = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$$

$$\cot a = \frac{\cot^2 \frac{a}{2} - 1}{2 \cot \frac{a}{2}}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$$\tan \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$$

$$\cot \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a}} = \frac{1 + \cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1 - \cos a}$$

### i. Kolmekordse nurga funktsioonid.

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$$\tan 3a = \frac{3 \tan a - \tan^3 a}{1 - 3 \tan^2 a}$$

$$\cot 3a = \frac{\cot^3 a - 3 \cot a}{3 \cot^2 a - 1}$$

### k. Funktsioonide summa ja vahe logaritmiline kuju.

$$\sin a + \sin \beta = 2 \sin \frac{a + \beta}{2} \cos \frac{a - \beta}{2}$$

$$\sin a - \sin \beta = 2 \cos \frac{a + \beta}{2} \sin \frac{a - \beta}{2}$$

$$\cos a + \cos \beta = 2 \cos \frac{a + \beta}{2} \cos \frac{a - \beta}{2}$$

$$\cos a - \cos \beta = -2 \sin \frac{a + \beta}{2} \sin \frac{a - \beta}{2}$$

$$\tan a + \tan \beta = \frac{\sin (a+\beta)}{\cos a \cos \beta}$$

$$\tan a - \tan \beta = \frac{\sin (a-\beta)}{\cos a \cos \beta}$$

$$\cot a + \cot \beta = \frac{\sin (\beta+a)}{\sin a \sin \beta}$$

$$\cot a - \cot \beta = \frac{\sin (\beta-a)}{\sin a \sin \beta}$$

$$\sin (a+\beta) + \sin (a-\beta) = 2 \sin a \cos \beta$$

$$\sin (a+\beta) - \sin (a-\beta) = 2 \cos a \sin \beta$$

$$\cos (a+\beta) + \cos (a-\beta) = 2 \cos a \cos \beta$$

$$\cos (a+\beta) - \cos (a-\beta) = -2 \sin a \sin \beta$$

$$1 + \sin a = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$$

$$1 - \sin a = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)$$

$$1 + \tan a = \frac{\sqrt{2} \cos (45^\circ - a)}{\cos a}$$

$$1 - \tan a = \frac{\sqrt{2} \sin (45^\circ - a)}{\cos a}$$

$$1 + \cot a = \frac{\sqrt{2} \cos (45^\circ - a)}{\sin a}$$

$$1 - \cot a = \frac{\sqrt{2} \sin(a - 45^\circ)}{\sin a}$$

Kui  $a + \beta + \gamma = 180^\circ$ , siis

$$\sin a + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos a + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + 1$$

$$\sin a + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\cos a + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 1$$

$$\tan a + \tan \beta + \tan \gamma = \tan a \tan \beta \tan \gamma$$

$$\cot \frac{a}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{a}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$\cot a + \cot \beta \cdot \cot a = 1.$$

### I. Abinurga meetod.

See meetod võimaldab igale avaldusele anda logaritmilise kuju, laienedes binoomilt hulkliikmele.

1. Kui avalduses  $A+B = A \left(1 + \frac{B}{A}\right)$ , milles  $A$  ja  $B$  on samamärgilised üksliikmed, võtta  $\frac{B}{A} = \tan^2 \varphi$ , mis võimalik, sest et tangens

omandab kõik väärtused 0 kuni  $\pm \infty$ , siis saame:  $A + B = A(1 + \tan^2 \varphi) = \frac{A}{\cos^2 \varphi}$ , mis logaritmitav, kui abinurk  $\varphi$  määrata võrrandist

$$\tan \varphi = \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

2. Kui avalduses  $A - B = A(1 - \frac{B}{A})$ , milles  $A$  ja  $B$  on vastasmärgilised üksliikmed ja  $A > B$ , võtta  $\frac{B}{A} = \sin^2 \varphi$ , mis võimalik, sest

et siinus omandab kõik väärtused 0 kuni  $\pm 1$ , siis saame:  $A - B = A(1 - \sin^2 \varphi) = A \cos^2 \varphi$ , mis logaritmitav, kui abinurk  $\varphi$  määrata võr-

$$\text{randist } \sin \varphi = \sqrt{\frac{B}{A}}.$$

Juhusel, kui  $A < B$  tuleb avaldus  $A - B$  korraldada järgmiselt:  $A - B = -B(1 - \frac{A}{B})$

ja võtta  $\frac{A}{B} = \sin^2 \varphi$ , saame:  $A - B = -B(1 - \sin^2 \varphi)$

$$= -B \cos^2 \varphi, \text{ kus } \sin \varphi = \sqrt{\frac{A}{B}}.$$

## B. Kolmnurgad.

### a. Täisnurkne kolmnurk.

a, b = kaatedid; c = hüpotenuus;

$\alpha, \beta$  = kaatetide  $a, b$  vastasnurgad ;

$S$  = pindala.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{vastaskaatet}}{\text{hüpotenuus}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{lähiskaatet}}{\text{hüpotenuus}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{vastaskaatet}}{\text{lähiskaatet}}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{lähiskaatet}}{\text{vastaskaatet}}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = c \sin \alpha = c \cos \beta \\ b = c \sin \beta = c \cos \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Kaatet} = \text{hüpotenuusi} \\ \text{ja oma vastasnurga} \\ \text{siinuse või lähisnurga} \\ \text{koosinuse korrutisega.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} a = b \tan \alpha = b \cot \beta \\ n = a \tan \beta = a \cot \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Kaatet} = \text{teise kaateti} \\ \text{ja oma vastasnurga} \\ \text{tangensi või lähis-} \\ \text{nurga kootangensi} \\ \text{korrutisega.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a}{\cos \beta} \\ c = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{b}{\cos \alpha} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Hüpotenuus} = \text{kaateti} \\ \text{ja selle vastasnurga} \\ \text{siinuse või lähisnurga} \\ \text{koosinuse jagatisega.} \end{array}$$

$$S = \frac{a^2 \cot a}{2} = \frac{c^2 \sin 2a}{4}$$

### b. Kaldnurkne kolmnurk.

$a, b, c =$  küljed,

$\alpha, \beta, \gamma =$  külgede  $a, b, c$  vastasnurgad,

$h_a, h_b, h_c =$  külgedele  $a, b, c$  tõmmatud kõrgused,

$$\frac{a + b + c}{2} = p = \text{poolümberringmõõt},$$

$R =$  ümber — } joonestatud ringi raadius,  
 $r =$  sisse — }

$\rho_a, \rho_b, \rho_c =$  kõrvujoonestatud ringide raadiused,

$S =$  pindala.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Siinuslause:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$

[ $\Delta$ -ga küljed on otsevõrdelised vastasnurkade siinustega].

Siinuslausest tarvitatakse, kui on antud :

- 1) üks külge ja kaks nurka,
- 2) kaks külge ja üks vastasnurk.

$$2 \text{ Koosinuslause: } \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{cases}$$

[ $\Delta$ -ga ühe külje ruut = kahe teise külje ruutude summaga, — samade külgede kahekordne korrutis nende vahelnurga koosinusega].

Koosinuslauseid tarvitatakse, kui on antud:

- 1) kaks külge ja nende vahelnurk,
- 2) kolm külge.

$$3 \text{ Tangenslause: } \frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{\alpha+\beta}{2}}{\tan \frac{\alpha-\beta}{2}}$$

[ $\Delta$ -ga kahe külje summa suhtub nende vahesse, nagu nende külgede vastasnurkade poolsumma tangens suhtub samade nurkade poolvahe tangensisse].

Tangenslauseid tarvitatakse, kui on antud kaks külge ja nende vahelnurk.

$$4. \text{ Poolnurga tangenslause: } \begin{cases} \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a} \\ \tan \frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b} \\ \tan \frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c} \end{cases}, \text{ kus } r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}},$$

$$\text{niiet} \left\{ \begin{array}{l} \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \\ \tan \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \\ \tan \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \end{array} \right.$$

[ $\Delta$ -ga poolnurga tangens = ruutjuurega murrust, mille lugejaks on poolübermõõdu ja nurka moodustavate külgede vahede korrutis, aga nimetajaks — poolübermõõdu korrutis poolübermõõdu ja nurga vastaskülje vahega].

Poolnurga tangenslauset tarvitatakse, kui on antud kolm külge.

$$\text{Molveide laused:} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \\ \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} \end{array} \right.$$

$$\text{Erinev tangenslause : } \begin{cases} \tan \alpha = \frac{a \sin \gamma}{b - a \cos \gamma} \\ \tan \beta = \frac{b \sin \alpha}{c - b \cos \alpha} \\ \tan \gamma = \frac{c \sin \beta}{a - c \cos \beta} \end{cases}$$

$$\text{Kõõlulause} \quad : \quad \begin{cases} a = 2 R \sin \alpha \\ b = 2 R \sin \beta \\ c = 2 R \sin \gamma \end{cases}$$

$[\Delta$ -ga külg = ümberjoonestatud ringi läbimõõdu ja vastasnurga siinuse korrutisega].

$$\text{Kõrguselause : } \begin{cases} h_a = c \sin \beta = b \sin \gamma \\ h_b = c \sin \alpha = a \sin \gamma \\ h_c = b \sin \alpha = a \sin \beta \end{cases}$$

$[\Delta$ -ga kõrgus = küljega, korrutatud selle külje ja aluse vahelnurga siinusega].

$$\text{Projektsioonlause : } \begin{cases} a = c \cos \beta + b \cos \gamma \\ b = c \cos \alpha + a \cos \gamma \\ c = b \cos \alpha + a \cos \beta \end{cases}$$

$[\Delta$ -ga külg = kahe teise külje projektsioonide algebralise summaga tema sihile].

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

$$a = \frac{p \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} \quad a = \sqrt{\frac{2S \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}}$$

$$a = (b+c) \cos \varphi, \text{ kus } \sin \varphi = \frac{2\sqrt{bc} \cos \frac{\alpha}{2}}{b+c}.$$

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha} = \frac{b}{2 \sin \beta} = \frac{c}{2 \sin \gamma} =$$

$$= 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$r = (p-a) \tan \frac{\alpha}{2} = (p-b) \tan \frac{\beta}{2} = (p-c) \tan \frac{\gamma}{2}.$$

$$q_a = p \tan \frac{\alpha}{2}; \quad q_b = p \tan \frac{\beta}{2}; \quad q_c = p \tan \frac{\gamma}{2}.$$

$$p = 4 R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$\triangle$ -ga pindala=kahe külje ja nende vahel-  
nurga siinuse poolkorutisega  $\left[ S = \frac{ab \sin \gamma}{2} \right].$

$$S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} = \frac{h_a^2 \sin \alpha}{2 \sin \beta \sin \gamma}.$$

$$S = 2 R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = r^2 \cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} \cot \frac{\gamma}{2}$$

$$S = p(p-a) \tan \frac{\alpha}{2} = p^2 \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} \tan \frac{\gamma}{2}$$

Märkus: Rööpküliku pindala = kahe lähiskülje ja nende vahelnurga siinuse korrutisega.

### C. Kolmnurkade lahendamine.

Antud: Täisnurksed kolmnurgad.

c, a  $\beta = 90^\circ - \alpha; a = c \sin \alpha; b = c \cos \alpha.$

c, a  $\sin \alpha = \frac{a}{c}; \beta = 90^\circ - \alpha; b = c \cos \alpha.$

a, a  $\alpha = 90^\circ - \beta; c = \frac{a}{\sin \alpha}; b = a \cot \alpha.$

a, b  $\tan \alpha = \frac{a}{b}; \beta = 90^\circ - \alpha; c = \frac{a}{\sin \alpha}.$

Kaldnurksed kolmnurgad.

a,  $\beta$ ,  $\gamma$   $\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma); b = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha};$

$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}; S = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}.$

a, b, a  $\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}; \gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta);$

a > b  $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}; S = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$

$$a, b, \gamma \quad \frac{a+\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}; \quad \tan \frac{a-\beta}{2} = \frac{(b-c) \tan \frac{a+\beta}{2}}{b+c};$$

$$a = \frac{a+\beta}{2} + \frac{a-\beta}{2}; \quad \beta = \frac{a+\beta}{2} - \frac{a-\beta}{2};$$

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}; \quad S = \frac{ab \sin \gamma}{2}.$$

$$a, b, c \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)};$$

$$\tan^2 \frac{\beta}{2} = \frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)};$$

$$\tan^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)};$$

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$


---

## L i s a.

## a. Paljutarvitatavad arvud.

$$\sqrt{2} = 1,4142$$

$$\pi = 3,1416$$

$$\pi^2 = 9,8696$$

$$\sqrt{3} = 1,7321$$

$$2\pi = 6,2832$$

$$\sqrt{\pi} = 1,7725$$

$$\sqrt{5} = 2,2361$$

$$4\pi = 12,5664$$

$$\sqrt[3]{\pi} = 1,4646$$

$$\sqrt{6} = 2,4495$$

$$\frac{\pi}{2} = 1,5708$$

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183$$

$$\sqrt{10} = 3,1623$$

$$\frac{\pi}{3} = 1,0472$$

$$\frac{1}{\pi^2} = 0,1013$$

$$\sqrt[3]{2} = 1,2599$$

$$\frac{\pi}{4} = 0,7854$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5642$$

$$\sqrt[3]{3} = 1,4422$$

$$\sqrt[3]{5} = 1,7100$$

$$\frac{\pi}{6} = 0,5236$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = 0,6828$$

$$\sqrt[3]{6} = 1,8171$$

$$\sqrt[3]{10} = 2,1544$$

$$\frac{4}{3}\pi = 4,1888$$

$$\frac{180}{\pi} = 57,2959$$

## b. Esimese saja arvu ruudud ja kuubid.

Arvud	Ruudud	Kuubid	Arvud	Ruudud	Kuubid	Arvud	Ruudud	Kuubid
2	4	8	35	1225	42875	68	4624	314432
3	9	27	36	1296	46656	69	4761	328509
4	16	64	37	1369	50653	70	4900	343000
5	25	125	38	1444	54872	71	5041	357911
6	36	216	39	1521	59319	72	5184	373248
7	49	343	40	1600	64000	73	5329	389017
8	64	512	41	1681	68921	74	5476	405224
9	81	729	42	1764	74088	75	5625	421875
10	100	1000	43	1849	79507	76	5776	438976
11	121	1331	44	1936	85184	77	5929	456533
12	144	1728	45	2025	91125	78	6084	474552
13	169	2197	46	2116	97336	79	6241	493039
14	196	2744	47	2209	103823	80	6400	512000
15	225	3375	48	2304	110592	81	6561	531441
16	256	4096	49	2401	117649	82	6724	551368
17	289	4913	50	2500	125000	83	6889	571787
18	324	5832	51	2601	132651	84	7056	592704
19	361	6859	52	2704	140608	85	7225	614125
20	400	8000	53	2809	148877	86	7396	636056
21	441	9261	54	2916	157464	87	7569	658503
22	484	10648	55	3025	166375	88	7744	681472
23	529	12167	56	3136	175616	89	7921	704969
24	576	13824	57	3249	185193	90	8100	729000
25	625	15625	58	3364	195112	91	8281	753571
26	676	17576	59	3481	205379	92	8464	778688
27	729	19683	60	3600	216000	93	8649	804357
28	784	21952	61	3721	226981	94	8836	830584
29	841	24389	62	3844	238328	95	9025	857375
30	900	27000	63	3969	250047	96	9216	884736
31	961	29791	64	4096	262144	97	9409	912673
32	1024	32768	65	4225	274625	98	9604	941192
33	1089	35937	66	4356	287496	99	9801	970299
34	1156	39304	67	4489	300763	100	10000	1000000

## c. Kreeka tähestik.

$A, \alpha$	Alfa,	$N, \nu$	Nü,
$B, \beta$	Beeta,	$\Xi, \xi$	Xi,
$\Gamma, \gamma$	Gamma,	$O, o$	Omikron,
$\Delta, \delta$	Delta,	$\Pi, \pi$	Pi,
$E, \varepsilon$	Epsilon,	$P, \rho$	Rho,
$Z, \zeta$	Zeta,	$\Sigma, \sigma, \varsigma$	Sigma,
$H, \eta$	Eeta,	$T, \tau$	Tau,
$\Theta, \theta$	Theeta,	$Y, \upsilon$	Üpsilon,
$I, \iota$	Joota,	$\Phi, \varphi$	Fi,
$K, \kappa$	Kappa.	$X, \chi$	Chi,
$\Lambda, \lambda$	Lambda,	$\Psi, \psi$	Psi,
$M, \mu$	Mü,	$\Omega, \omega$	Omega.

---





