Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Erik-Jürgen Määrits

Caputo murrulist tuletist sisaldava algväärtusülesande lahendamisest

Matemaatika eriala

Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: prof. Arvet Pedas, Mikk Vikerpuur (PhD)

Tartu 2024

CAPUTO MURRULIST TULETIST SISALDAVA ALGVÄÄRTUSÜLESANDE LAHENDAMISEST

Magistritöö

Erik-Jürgen Määrits

Lühikokkuvõte

Käesolevas magistritöös vaadeldakse Caputo murrulist tuletist sisaldava algväärtusülesande lahendamist tükiti polünomiaalse kollokatsioonimeetodi abil. Põhjendatakse selle meetodi koondumist ja koondumise järku. Tuuakse sisse itereeritud meetod lähislahendi leidmiseks ja uuritakse selle koondumise järku. Vaadeldakse ka ühe konkreetse näidisülesande lahendamist.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Riemann-Liouville'i integraaloperaator, Caputo murruline diferentsiaaloperaator, kollokatsioonimeetod, itereeritud meetod.

ON SOLVING THE INITIAL VALUE PROBLEM CONTAINING A CAPUTO FRACTIONAL DERIVATIVE

Master's thesis

Erik-Jürgen Määrits

Abstract

In this Master's thesis, we consider an initial value problem containing a Caputo fractional derivative. Piecewise polynomial collocation method is introduced and its convergence and rate of convergence are analyzed. An iterated method for finding the approximate solution for the initial problem is also considered and the rate of its convergence is analyzed. Finally, an example problem is considered.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: Riemann-Liouville integral operator, Caputo fractional differential operator, collocation method, iterated method.

Sisukord

Sissejuhatus

Tuletise mõiste on matemaatilises analüüsis olnud olulisel kohal alates selle algusest 17. sajandil, kuid läks pikalt aega, enne kui Georg Friedrich Bernhard Riemann ja Joseph Liouville suutsid tuletise mõistet 19. sajandil üldistada ka murrulise järgu jaoks. Rakendustes on aga tänapäeval osutunud oluliseks just Itaalia geofüüsiku Michele Caputo 1967. aastal sisse toodud murrulise tuletise definitsioon, mida sisaldava diferentsiaalvõrrandi lahendamisega tegeleb ka käesolev töö.

Töö esimeses peatükis tuuakse sisse käesolevas töös vajaminevad definitsioonid ja abitulemused. Defineeritakse ka funktsiooni Riemann-Liouville'i ja Caputo α-järku tuletised juhul, kui $\alpha \in (0, 1)$.

Töö teine peatükk algab Caputo murrulist tuletist sisaldava diferentsiaalvõrrandi vaatlemisega ja näitamisega, et tegelikult on algse ülesande lahendamine samaväärne teatava Volterra teist liiki integraalvõrrandi lahendamisega. Edasi tuuakse sisse tükiti polünomiaalne kollokatsioonimeetod selle integraalvõrrandi ligikaudseks lahendamiseks ja näidatakse, et selliselt saadud lähislahendid koonduvad lähteülesande lahendiks. Lisaks sellele uuritakse, millist järku koondumisega on tegemist, kui me teame ette, et algses võrrandis esinevad funktsioonid kuuluvad teatavasse funktsionaalruumi. Teise peatüki viimases alapeatükis näidatakse, et kui algses meetodis teha veel üks lisasamm, siis teatavatel lisaeeldustel on saadud (itereeritud) meetodi järk parem.

Töö kolmandas peatükis vaadeldakse ühe konkreetse näiteülesande lahendamist, rakendades teises peatükis käsitletud meetodeid.

Magistritöö põhitulemused on esitatud teoreemidega 2 ja 3.

1 Definitsioonid ja abitulemused

Selles peatükis tuuakse sisse edasises kasutatavad definitsioonid, ruumid ja üldised abitulemused.

Kõigi reaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, kõigi naturaalarvude hulga tähistame sümboliga $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ ning olgu $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definitsioon 1. Olgu X mingi mittetühi hulk. Operaatorit $I : X \to X,\ x \mapsto x$, nimetatakse ühikoperaatoriks.

Funktsionaalanalüüsi põhimõistete, nagu operaatori pidevus, lineaarsus, tõkestatus ja kompaktsus, kohta saab lugeda näiteks õpikust [5]. Toome siiski sisse mõisted, mida meil vahetult vaja läheb.

Kui X ja Y on normeeritud ruumid, siis kõigi pidevate ja lineaarsete operaatorite hulka ruumist X ruumi Y tähistame sümboliga $\mathcal{L}(X, Y)$. Hulk $\mathcal{L}(X, Y)$ on vektorruum punktiviisi defineeritud tehete suhtes ja normeeritud ruum normi

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \in B_X(0,1)} \|Ax\|_Y, \quad A \in \mathcal{L}(X, Y),$$

suhtes (siin $B_X(0, 1)$ on ruumi X lahtine ühikkera).

Definitsioon 2. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ja $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, $n = 1, 2, ...$. Operaatorite jada (A_n) nimetatakse normi järgi tõkestatuks ehk ühtlaselt tõkestatuks, kui leidub arv $M \geq 0$ nii, et

$$\|A_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \leq M \text{ iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Õpikust [5] võib leida järgnevad teoreemid 1.1-1.3.

Teoreem 1.1. *(Fredholmi alternatiiv) Olgu X Banachi ruum ja olgu $T : X \to X$ kompaktne operaator. Siis operaator $I - T$ on sürjektsioon parajasti siis, kui ta on injektsioon.*

Fredholmi alternatiiv ütleb meile, et operaatorvõrrandil $x - Tx = y$, kus $T : X \to X$ on kompaktne operaator ja $y \in X$, leidub Banachi ruumis X lahend x parajasti siis, kui vastava homogeense võrrandi $x - Tx = 0$ ainus lahend on $x = 0$; sel juhul on võrrandi $x - Tx = y$ lahend ka ühene.

Teoreem 1.2. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ja operaator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiivne. Siis $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$.*

Teoreem 1.3. *(Banachi teoreem pööratavale operaatorile lähedase operaatori pööratavusest) Olgu X ja Y Banachi ruumid. Kui $A, B \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ja $\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \left\|A^{-1}\right\|^{-1}_{\mathcal{L}(Y,X)}$, siis leidub $(A + B)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ ja kehtib hinnang*

$$\left\|(A + B)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \le \frac{\left\|A^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)}}{1 - \|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)}}$$

Tähistame sümboliga $C[a, b]$ kõigi lõigus $[a, b]$ $(a < b)$ pidevate funktsioonide hulka. Hulk $C[a, b]$ on vektorruum punktiviisi defineeritud tehete suhtes ja Banachi ruum normiga

$$\|y\|_\infty = \max_{t \in [a,b]} |y(t)|, \ \ y \in C[a, b].$$

Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja tähistame sümboliga $C^m[a, b]$ kõigi lõigus $[a, b]$ $(a < b)$ m-korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka. Hulk $C^m[a, b]$ on vektorruum punktiviisi defineeritud tehete suhtes ja Banachi normiga

$$\|y\|_{C^m[a,b]} = \sum_{j=0}^{m} \max_{t \in [a,b]} \left|y^{(j)}(t)\right|, \ \ y \in C^m[a, b].$$

Definitsioon 3. Olgu $m \in \mathbb{N}$. Diferentseerimisoperaator $D^m : C^m[a, b] \to C[a, b]$ on defineeritud võrdusega

$$(D^m y)(t) = y^{(m)}(t), \quad y \in C^m[a, b], \quad t \in [a, b].$$

Defineerime ka $D^0 := I$, kus $I : C[a, b] \to C[a, b]$ on ühikoperaator.

Tähistame sümboliga $L_\infty(a,b)$ kõigi lõigus $[a,b]$ $(a<b)$ Lebesgue'i mõttes mõõtuvate funktsioonide hulka, mis on peaaegu kõikjal lõigus $[a,b]$ tõkestatud (Lebesgue'i mõõdu suhtes). Meenutame, et siin loetakse kaks hulga $L_\infty(a,b)$ elementi võrdseks, kui nad on võrdsed peaaegu kõikjal lõigus $[a,b]$. Hulk $L_\infty(a,b)$ on vektorruum loomulikul viisil defineeritud tehete suhtes ja Banachi ruum normiga

$$\|y\|_\infty = \inf_{E\subset[a,b],\ \mu(E)=0}\ \sup_{t\in[a,b]\setminus E} |y(t)| < \infty,\ y\in L_\infty(a,b),$$

kus $\mu(E)$ on (mõõtuva) hulga E Lebesgue'i mõõt ja $t\in[a,b]\setminus E$ tähendab, et $t\in[a,b]$, kuid $t\notin E$.

Olgu $q\in\mathbb{N}$ ja $\nu<1$. Tähistame sümboliga $C^{q,\nu}(0,b]$ pidevate funktsioonide $y: [0,b]\to\mathbb{R}$ hulka, mis on q korda pidevalt diferentseeruvad poollõigus $(0,b]$ ja mille jaoks iga $i=1,..,q$ korral kehtivad hinnangud

$$\left|y^{(i)}(t)\right| \le c\begin{cases}1, & i<1-\nu,\\ 1+|\ln t| & i=1-\nu,\\ t^{1-\nu-i} & i>1-\nu,\end{cases}\qquad t\in(0,b],$$

kus $c=c(y)>0$. Märgime, et ka seda hulka saab vaadelda vektorruumi ja Banachi ruumina (vaata näiteks [2]).

Toodud definitsioonidest järelduvad järgnevad sisalduvused:

$$C^q[0,b]\subset C^{q,\nu}(0,b]\subset C^{p,\mu}(0,b]\subset C[0,b],\ p\le q\ ,\ \nu\le\mu<1.$$

Edasi toome sisse gamma- ja beetafunktsioonide mõisted. Tähistame $\mathbb{R}^+ := (0,\infty)$.

Definitsioon 4. Gammafunktsioon $\Gamma:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ defineeritakse võrdusega

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-s}s^{x-1}ds,\ 0<x<\infty.$$

On hästi teada, et selle võrduse paremal pool olev integraal koondub kõikide $x \in \mathbb{R}^+$ korral (vaata näiteks [4], §17).

Definitsioon 5. Beetafunktsioon $B : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ defineeritakse võrdusega

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}dt, \ \alpha, \beta > 0.$$

Raamatus [4] (paragraaf 17) näidatakse, et selle võrduse paremal pool olev integraal tõepoolest koondub iga $\alpha, \beta > 0$ korral. Samas töös näidatakse, et gamma- ja beetafunktsiooni vahel kehtib järgnev seos

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \ \alpha, \beta > 0. \tag{1.1}$$

Järgnevad käesoleva töö jaoks keskse tähtsusega mõisted.

Definitsioon 6. Olgu $0 < \delta < \infty$. Defineerime operaatori $J^\delta : L_\infty(0, b) \to C[0, b]$ võrdusega

$$\left(J^\delta y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t-s)^{\delta-1} y(s)ds, \ y \in L_\infty(0, b), \ 0 \le t \le b.$$

Sel viisil määratud operaatorit J^α nimetatakse Riemann-Liouville'i integraaloperaatoriks.

Riemann-Liouville'i integraaloperaator J^δ, $\delta > 0$, on pidev, lineaarne ja kompaktne operaator ruumist $L_\infty(0, b)$ ruumi $C[0, b]$ [2].

Saab näidata (vaata [3], teoreem 2.2), et Riemann-Liouville'i integraaloperaatori J^α jaoks kehtib järgnev omadus: kui $\delta_1, \delta_2 > 0$ ja $y \in C[0, b]$, siis

$$\left(J^{\delta_1} J^{\delta_1} y\right)(t) = \left(J^{\delta_1+\delta_2} y\right)(t), \ 0 \le t \le b. \tag{1.2}$$

Definitsioon 7. Olgu $0 < \alpha < 1$ ja $y \in C[0,b]$, $b > 0$, selline, et $J^{1-\alpha}y \in C^1(0,b]$. Funktsiooni y Riemann-Liouville'i α-järku tuletis $D^{\alpha}_{RL}y$ kohal $t \in (0,b]$ defineeritakse võrdusega

$$\left(D^{\alpha}_{RL}y\right)(t) \;= \frac{d}{dt}\left(J^{1-\alpha}y\right)(t).$$

Operaatorit $D^{\alpha}_{RL} := D^1 J^{1-\alpha}$ nimetatakse Riemann-Liouville'i murrulise diferentseerimise operaatoriks. Ka defineerime $D^0_{RL} := I$, kus $I : C[0,b] \to C[0,b]$ on ühikoperaator.

Üldjuhul konstandi Riemann-Liouville'i murruline tuletis ei võrdu nulliga [9]. See motiveerib sisse tooma Caputo murrulise tuletise mõistet.

Definitsioon 8. Olgu $0 < \alpha < 1$ ja $y \in C[0,b]$, $b > 0$, selline, et $J^{1-\alpha}(y - y(0)) \in C^1(0,b]$. Funktsiooni y α-järku Caputo tuletis D^{α}_{Cap} kohal $t \in (0,b]$ defineeritakse võrdusega

$$\left(D^{\alpha}_{Cap}y\right)(t) = \left(D^{\alpha}_{RL}(y - y(0))\right)(t).$$

ehk

$$\left(D^{\alpha}_{\mathrm{Cap}}y\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}(y(s) - y(0))\,ds.$$

Niiviisi määratud operaatorit $D^{\alpha}_{Cap}y$ nimetatakse Caputo murrulise diferentseerimise operaatoriks.

Olgu $\alpha \in (0,1)$. Vahetult definitsioonist on selge, et operaator D^{α}_{Cap} on lineaarne. Erinevalt aga Riemann-Liouville'i murrulisest tuletisest järeldub Caputo tuletise definitsioonist, et konstandi Caputo tuletis on alati võrdne nulliga ehk

$$D^{\alpha}_{Cap}c = 0, \;\; c \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Riemann-Liouville'i integraaloperaatori J^{α} ja Caputo murrulise diferentseerimise operaatori D^{α}_{Cap} vahekorra kohta kehtib järgmine omadus (vaata [3], teoreem 3.7):

kui $y \in C[0, b]$, siis

$$D^{\alpha}_{Cap} J^{\alpha} y = y \tag{1.4}$$

ehk operaator D^{α}_{Cap} on operaatori J^{α} vasakpoolne pöördoperaator. Osutub aga, et parempoolne pöördoperaator operaatorile J^{α} ta ei ole (vaata [3], teoreem 3.8).

2 Caputo murrulist tuletist sisaldav diferentsiaalvõrrand

2.1 Ülesande püstitus ja üleminek integraalvõrrandile

Olgu $\alpha \in (0,1)$. Vaatleme ülesannet

$$\left(D^{\alpha}_{Cap}y\right)(t) + h(t)y(t) = f(t), \quad 0 \le t \le b,\ b > 0; \tag{2.1.1}$$

$$y(0) = y_0; \tag{2.1.2}$$

kus $y_0 \in \mathbb{R}$ ja $f, h : [0,b] \to \mathbb{R}$ on etteantud pidevad funktsioonid. Otsime sellist pidevat funktsiooni $y : [0,b] \to \mathbb{R}$, mis võrdusesse (2.1.1) asetades annaks samasuse ning seejuures rahuldaks ka algtingimust (2.1.2). Sellist funktsiooni y nimetame ülesande (2.1.1)-(2.1.2) lahendiks.

Näitame nüüd, et püstitatud ülesanne on samaväärne integraalvõrrandiga

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}[f(s) - h(s)y(s)]ds,\ t \in [0,b], \tag{2.1.3}$$

ehk $y \in C[0,b]$ on ülesande (2.1.1)-(2.1.2) lahend parajasti siis, kui ta on integraalvõrrandi (2.1.3) lahend.

Olgu $y \in C[0,b]$ ülesande ülesande (2.1.1)-(2.1.2) lahend. Defineerime

$$z(t) := f(t) - h(t)y(t),\ t \in [0,b].$$

Kuna eelduse järgi $y \in C[0,b]$ ja ka $h, f \in C[0,b]$, siis ka $z \in C[0,b]$. Kuna funktsioon y on võrrandi (2.1.1) lahend, siis

$$z = f - hy = D^{\alpha}_{Cap}y = D^{\alpha}_{RL}(y - y_0) = D^1 J^{1-\alpha}(y - y_0).$$

Rakendame saadud võrdusele operaatorit J^1:

$$J^1 z = J^1 D^1 J^{1-\alpha}(y - y_0),$$

millest
$$J^1 z = J^{1-\alpha}(y - y_0).$$

Omaduste (1.2) ja (1.4) abil

$$D^{1-\alpha}_{Cap} J^{1-\alpha}(y - y_0) = y - y_0 = D^{1-\alpha}_{Cap} J^1 z = D^{1-\alpha}_{Cap} J^{1-\alpha} J^\alpha z = J^\alpha z$$

ehk
$$y = y_0 + J^\alpha z = y_0 + J^\alpha (f - hy),$$

mis tähendabki, et funktsioon y rahuldab võrrandit (2.1.3).

Olgu nüüd $y \in C[0, b]$ võrrandi (2.1.3) lahend ehk

$$y = y_0 + J^\alpha (f - hy).$$

Siis operaatori D^α_{Cap} lineaarsuse ja omaduste (1.3), (1.4) põhjal

$$\begin{aligned} D^\alpha_{Cap} y &= D^\alpha_{Cap} y_0 + D^\alpha_{Cap} \left(J^\alpha (f - hy)\right) = 0 + D^\alpha_{Cap} J^\alpha (f - hy) \\ &= f - hy. \end{aligned}$$

ehk
$$D^\alpha_{Cap} y + hy = f.$$

Seega funktsioon y rahuldab võrrandit (2.1.1). Samuti, kuna

$$y(0) = y_0 + \left(J^\alpha (f - hy)\right)(0) = y_0,$$

siis on ka algtingimus (2.1.2) rahuldatud.

Seega oleme saanud, et tingimustega (2.1.1) ja (2.1.2) antud ülesande lahendamine on samaväärne võrrandi (2.1.3) lahendamisega. Tähistades

$$K(t,s) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}h(s),\ 0 \leq s < t \leq b,$$

ja

$$g(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds + y_0 = \left(J^\alpha f\right)(t) + y_0,\ t \in [0,b], \tag{2.1.4}$$

saame võrrandi (2.1.3) viia kujule

$$y(t) + \int_0^t K(t,s)y(s)ds = g(t),\ 0 \leq t \leq b, \tag{2.1.5}$$

Märgime, et kuna $J^\alpha : L_\infty(0,b) \to C[0,b]$, siis $g \in C[0,b]$. Monograafias [1] (vaata sealt teoreemi 1.3.5) on näidatud, et integraalvõrrandil (2.1.5) leidub ühene lahend $y \in C[0,b]$ iga $g \in C[0,b]$ korral. Seega on ka ülesanne (2.1.1)-(2.1.2) üheselt lahenduv. Lisaks märgime, et artikli [12] tulemustest järeldub, et kui $f,h \in C^{q,\mu}(0,b]$, kus $q \in \mathbb{N}$ ja $\mu < 1$, siis ülesande (2.1.1)-(2.1.2) lahend y kuulub klassi $C^{q,\nu}(0,b]$, kus $\nu = \max\{1-\alpha,\mu\}$. Võtame need tulemused kokku järgneva teoreemiga.

Teoreem 1. *Olgu $f,h \in C[0,b]$ ja $\alpha \in (0,1)$. Siis ülesandel (2.1.1)-(2.1.2) leidub ühene lahend $y \in C[0,b]$. Kui $f,h \in C^{q,\mu}(0,b]$, kus $q \in \mathbb{N}$ ja $\mu < 1$, siis $y \in C^{q,\nu}(0,b]$, kus*

$$\nu = \max\{1-\alpha,\mu\}.$$

Märgime, et integraalvõrrandi (2.1.5) võime esitada ka operaatorkujul

$$y = Ty + g, \tag{2.1.6}$$

kus operaator $T : L_\infty(0,b) \to C[0,b]$ on fikseeritud $h \in C[0,b]$ korral defineeritud võrdusega

$$Tu = J^\alpha(-hu),\ u \in L_\infty(0,b). \tag{2.1.7}$$

Riemann-Liouville'i integraaloperaatori J^α omadustest ja klassikalistest funktsionaalanalüüsi tulemustest operaatorite kompositsiooni pidevuse ja kompaktsuse kohta (vaata näiteks õpikut [5]) järeldub, et T on pidev, lineaarne ja kompaktne operaator ruumist $L_\infty(0,b)$ ruumi $C[0,b]$.

2.2 Kollokatsioonimeetod

Eespool nägime, et ülesande (2.1.1)-(2.1.2) lahendamine on samaväärne integraalvõrrandi (2.1.5) lahendamisega. Selles peatükis kirjeldame võrrandi (2.1.5) ligikaudset lahendamist tükiti polünomiaalse kollokatsioonimeetodi abil.

Olgu $n \in \mathbb{N}$. Jaotame lõigu $[0,b]$ osalõikudeks $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, ..., n$, kus

$$t_j = b\left(\frac{j}{n}\right)^r, \quad r \geq 1, \quad [0,b] = \bigcup_{j=1}^{n}[t_{j-1}, t_j]. \tag{2.2.1}$$

Tähistame $\Pi_n := \{t_0, ...t_n\}$. Olgu π_k, $k \in \mathbb{N}_0$, kõigi ülimalt k-järku polünoomide hulk ja

$$S_k(\Pi_n) := \left\{u : [0,b] \to \mathbb{R} : \; u\big|_{[t_{j-1},t_j]} \in \pi_k, \; j = 1, ..., n\right\},$$

ehk hulga $S_k(\Pi_n)$ elemendid on igal osalõigul $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, ..., n$, ülimalt k-järku polünoomid. Valime nüüd $m \in \mathbb{N}$ arvu (kollokatsiooniparameetrit) $\eta_1, ..., \eta_m$ nii, et

$$0 < \eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_m < 1 \tag{2.2.2}$$

ja defineerime kollokatsioonipunktid

$$t_{jk} = t_{j-1} + \eta_k(t_j - t_{j-1}), \; j = 1, ..., n, \; k = 1, ..., m. \tag{2.2.3}$$

Otsime integraalvõrrandi (2.1.5) lähislahendit y_n hulgast $S_{m-1}(\Pi_n)$. Täpsemalt, otsime sellist lähislahendit $y_n \in S_{m-1}(\Pi_n)$, et kehtiks

$$y_n(t_{jk}) + \int_0^{t_{jk}} K(t_{jk}, s) y_n(s) ds = g(t_{jk}),\ j = 1, ..., n,\ k = 1, ..., m. \tag{2.2.4}$$

Funktsiooni y_n leidmiseks kasutame tema esitust Lagrange'i baaspolünoomide $l_{\lambda\mu} : [0, b] \to \mathbb{R}$ kaudu kujul

$$y_n(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu} l_{\lambda\mu}(t),\ 0 \le t \le b, \tag{2.2.5}$$

kus $c_{\lambda\mu}$, $\lambda = 1, ..., n$, $\mu = 1, ..., m$ on otsitavad kordajad. Siin

$$l_{\lambda\mu}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin (t_{\lambda-1}, t_\lambda] \\ \prod_{i=1,\ i\neq\mu}^{m} \frac{t-t_{\lambda i}}{t_{\lambda\mu}-t_{\lambda i}}, & t \in (t_{\lambda-1}, t_\lambda] \end{cases},\ \lambda = 2, ..., n,$$

ja

$$l_{1\mu}(t) = \begin{cases} 0, & t \notin [0, t_1] \\ \prod_{i=1,\ i\neq\mu}^{m} \frac{t-t_{1i}}{t_{1\mu}-t_{1i}}, & t \in [0, t_1] \end{cases},$$

kui $m \ge 2$ ja

$$l_{1\mu}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_{\lambda-1}, t_\lambda] \\ 1, & t \notin [t_{\lambda-1}, t_\lambda] \end{cases},\ l_{\lambda\mu}(t) = \begin{cases} 0, & t \in (t_{\lambda-1}, t_\lambda] \\ 1, & t \notin (t_{\lambda-1}, t_\lambda] \end{cases},\ \lambda = 2, ...n,$$

kui $m = 1$. Siis $y_n \in S_{m-1}(\Pi_n)$ ja $y_n(t_{jk}) = c_{jk}$, $j = 1, ..., n$, $k = 1, ..., m$. Seega tingimust (2.2.4) rahuldava lähislahendi $y_n \in S_{m-1}(\Pi_n)$ leidmine on samaväärne järgneva $n \cdot m$ tundmatust c_{jk}, $j = 1, ..., n$, $k = 1, ..., m$, koosneva lineaarse võrrandisüsteemi

$$c_{jk} + \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} c_{\lambda\mu} \int_0^{t_{jk}} K(t_{jk}, s) l_{\lambda\mu}(s) ds = g(t_{jk}),\ j = 1, ..., n, k = 1, ..., m, \tag{2.2.6}$$

lahendamisega. Selle võrrandisüsteemi lahendavuse juurde tuleme alapeatükis 2.3

tagasi. Märgime, et kollokatsioonitingimused (2.2.4) saame $y_n \in S_{m-1}(\Pi_n)$ korral esitada operaatorkujul

$$y_n = P_n T y_n + P_n g, \tag{2.2.7}$$

kus funktsioon g on määratud seosega (2.1.4) ja interpolatsioonioperaator P_n on defineeritud võrdusega

$$P_n u = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} u(t_{\lambda\mu}) l_{\lambda\mu}, \ \ u \in C[0,b]. \tag{2.2.8}$$

Järgnev lemma operaatori P_n omaduste kohta järeldub töödest [2] ja [11].

Lemma 1. *Olgu operaator $P_n : C[0,b] \to L_\infty(0,b)$ ($n \in \mathbb{N}$) defineeritud võrdusega (2.2.8). Siis $P_n \in \mathcal{L}(C[0,b], L_\infty(0,b))$, operaatorite jada (P_n), $n = 1, 2, \ldots$, on ühtlaselt tõkestatud ja iga $y \in C[0,b]$ korral*

$$\|y - P_n y\|_\infty \to 0, \ \text{kui} \ n \to \infty.$$

2.3 Meetodi koonduvus ja veahinnang

Selles alapeatükis vaatleme alapeatükis 2.2 käsitletud kollokatsioonimeetodi koonduvust. Alustame järgneva lemmaga, mis on oluline allpool toodud teoreemi 2 tõestamiseks.

Olgu $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ja olgu antud lõigul $[0,b]$, $b > 0$, osalõikude süsteem (2.2.1) (kus $r \geq 1$) ja kollokatsioonipunktid (2.2.3). Olgu operaator P_n defineeritud võrdusega (2.2.8).

Lemma 2. *Olgu $y \in C^{m,\nu}(0,b]$, kus $\nu \in (0,1)$. Siis*

$$\|y - P_n y\|_\infty \leq c \begin{cases} n^{-r(1-\nu)}, & 1 \leq r < \frac{m}{1-\nu} \\ n^{-m}, & r \geq \frac{m}{1-\nu} \end{cases},$$

kus konstant $c > 0$ ei sõltu arvust n.

Tõestus. Tähistame $h_j := t_j - t_{j-1}$, $j = 1, ..., n$. Näitame, et

$$\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - (P_n y)(t)| \le c' h_j^m t_j^{1-\nu-m}, \ j = 1, ..., n, \tag{2.3.1}$$

kus $c' > 0$ on mingi konstant, mis ei sõltu naturaalarvust n ega arvust j. Fikseerime $j \in \{2, ..., n\}$. Kuna $y \in C^{m,\nu}(0, b]$, saame vaadelda funktisooni

$$z_j(t) := \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(t_{j-1})}{k!}(t - t_{j-1})^k, \quad t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Kolmnurga võrratuse põhjal

$$\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - (P_n y)(t)| \le \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - z_j(t)| + \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |z_j(t) - (P_n y)(t)|.$$

Vaatleme operaatorit $P_{n_j} : C[t_{j-1}, t_j] \to C[t_{j-1}, t_j]$,

$$(P_{n_j} u)(t) = \sum_{k=1}^{m-1} u(t_{jk})\varphi_{jk}(t), \quad u \in C[t_{j-1}, t_j], \quad t \in [t_{j-1}, t_j],$$

kus

$$\varphi_{jk}(t) = \prod_{i=1,\ i\neq k}^{m} \frac{t - t_{ji}}{t_{jk} - t_{ji}}, \quad t \in [t_{j-1}, t_j].$$

Siis $(P_n y)(t) = (P_{n_j} y)(t)$, kui $t \in (t_{j-1}, t_j)$ ja kuna z_j on $(m-1)$-astme polünoom lõigus $[t_{j-1}, t_j]$, siis $P_{n_j} z_j = z_j$. Seega

$$\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t)-(P_n y)(t)| \le \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t)-z_j(t)| + \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |(P_{n_j} z_j)(t)-(P_{n_j} y)(t)|.$$

On selge, et $P_{n_j} \in \mathcal{L}(C[t_{j-1}, t_j], C[t_{j-1}, t_j])$. Seega

$$\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - (P_n y)(t)| \le (1 + \|P_{n_j}\|_{\mathcal{L}(C[t_{j-1},t_j],C[t_{j-1},t_j])}) \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - z_j(t)|. \tag{2.3.2}$$

Näitame nüüd, et $\|P_{n_j}\|_{\mathcal{L}(C[t_{j-1},t_j],C[t_{j-1},t_j])} \le \|P_n\|_{\mathcal{L}(C[0,b],L_\infty(0,b))}$. Oletame vastuväiteliselt, et

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}(C[0,b],L_\infty(0,b))} < \|P_{n_j}\|_{\mathcal{L}(C[t_{j-1},t_j],C[t_{j-1},t_j])}.$$

Siis vastavalt normi $\|P_{n_j}\|_{\mathcal{L}(C[t_{j-1},t_j],C[t_{j-1},t_j])}$ definitsioonile leidub $u \in B_{C[t_{j-1},t_j]}(0,1)$ nii, et

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}(C[0,b],L_\infty(0,b))} < \|P_{n_j}u\|_\infty. \tag{2.3.3}$$

Vaatleme funktsiooni $v : [0,b] \to \mathbb{R}$,

$$v(t) = \begin{cases} u(t_{j-1}), & t \in [0, t_{j-1}] \\ u(t), & t \in (t_{j-1}, t_j] \\ u(t_j), & t \in (t_j, b] \end{cases}.$$

Siis $v \in B_{C[0,b]}(0,1)$, kusjuures

$$(P_n v)(t) = \begin{cases} u(t_{j-1}), & t \in [0, t_{j-1}] \\ (P_{n_j}u)(t), & t \in (t_{j-1}, t_j] \\ u(t_j), & t \in (t_j, b] \end{cases}$$

ja

$$\|P_{n_j}u\|_\infty \le \|P_n v\|_\infty \le \|P_n\|_{\mathcal{L}(C[0,b],L_\infty(0,b))}$$

See aga on vastuolu võrratusega (2.3.3) .

Niisiis saame võrratust (2.3.2) hinnata ülalt kui

$$\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - (P_n y)(t)| \le (1 + \|P_n\|) \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - z_j(t)|.$$

Lemma 1 põhjal leidub konstant $c > 0$, mis ei sõltu arvust n, nii, et $\|P_n\|_{\mathcal{L}(C[0,b],L_\infty(0,b))} \le$

c iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Seega

$$\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - (P_n y)(t)| \le c_1 \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - z_j(t)|.$$

Siin ja edaspidi tähistame $c, c_1, c_2, ...$ abil positiivseid konstante, mis eri kohtades võivad omada erinevaid väärtusi, kuid mis ei sõltu arvust n ega arvust j. Funktsioon z_j on vahemikus (t_{j-1}, t_j) funktsiooni y Taylori polünoom, mistõttu rakendades Taylori valemi jääkliiget integraalsel kujul (vaata raamatut [8], lk 224), saame

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - (P_n y)(t)| &\le c_1 \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} \left| \frac{1}{(m-1)!} \int_{t_{j-1}}^{t} (t-s)^{m-1} y^{(m)}(s)\, ds \right| \\
&\le c_2 \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} \int_{t_{j-1}}^{t} (t-s)^{m-1} |y^{(m)}(s)|\, ds \\
&\le c_3 \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} \int_{t_{j-1}}^{t} (t-s)^{m-1} s^{1-\nu-m}\, ds,
\end{aligned}$$

kus kasutati asjaolu, et $y \in C^{m,\nu}(0, b]$. Kuna $t - s \le (t_j - t_{j-1}) = h_j$, siis

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - (P_n y)(t)| &\le c_3 h_j^{m-1} \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} \int_{t_{j-1}}^{t} s^{1-\nu-m}\, ds \\
&\le c_3 h_j^{m-1} \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} t_{j-1}^{1-\nu-m} (t - t_{j-1}) \\
&\le c_3 h_j^{m} t_{j-1}^{1-\nu-m}
\end{aligned}$$

Paneme ka tähele, et kuna $j > 1$, siis

$$t_j = \frac{t_j}{t_{j-1}} t_{j-1} = \left(\frac{j}{j-1}\right)^r t_{j-1} = \left(1 + \frac{1}{j-1}\right)^r t_{j-1} \le 2^r t_{j-1}.$$

Seega kokku

$$\sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t) - (P_n y)(t)| \le c_4 h_j^m t_j^{1-\nu-m},$$

nagu vaja.

Vaatleme nüüd juhtu $j = 1$. Olgu

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(t_1)}{k!}(t-t_1)^k, \quad t \in [0, t_1].$$

Analoogiliselt $j > 1$ juhuga saame, et leidub $c_1 > 0$ nii, et

$$\sup_{t\in(0,t_1)} |y(t) - (P_n y)(t)| \leq c_1 \sup_{t\in(0,t_1)} \left| \frac{1}{(m-1)!} \int_{t_1}^{t} (t-s)^{m-1} y^{(m)}(s) ds \right|,$$

millest

$$\begin{aligned}\sup_{t\in(0,t_1)} |y(t) - (P_n y)(t)| &\leq c_2 \sup_{t\in(0,t_1)} \int_t^{t_1} (s-t)^{m-1} |y^{(m)}(s)|\, ds \\ &\leq c_3 \sup_{t\in(0,t_1)} \int_t^{t_1} (s-t)^{m-1} s^{1-\nu-m}\, ds.\end{aligned}$$

Tehes muutujavahetused $t = t_1\eta$, $\eta \in (0,1)$, ja $s = t_1 u$, saame

$$\begin{aligned}c_3 \sup_{t\in(0,t_1)} \int_t^{t_1} (s-t)^{m-1} s^{1-\nu-m}\, ds &= c_2 t_1^{2-\nu-m} \sup_{t\in(0,t_1)} \int_{\frac{t}{t_1}}^{1} (t_1 u - t)^{m-1} u^{1-\nu-m}\, du \\ &= c_3 t_1^{1-\nu} \sup_{\eta\in(0,1)} \int_\eta^1 (u-\eta)^{m-1} u^{1-\nu-m}\, du \\ &= c_3 t_1^{1-\nu-m} h_1^m \sup_{\eta\in(0,1)} \int_\eta^1 (u-\eta)^{m-1} u^{1-\nu-m}\, du.\end{aligned}$$

Paneme tähele, et suvalise $\eta \in (0,1)$ korral

$$\begin{aligned}\int_\eta^1 (u-\eta)^{m-1} u^{1-\nu-m}\, du &= \int_\eta^1 \left(1 - \frac{\eta}{u}\right)^{m-1} u^{-\nu}\, du \\ &\leq \int_\eta^1 u^{-\nu}\, du = \frac{1}{1-\nu}\left(1 - \eta^{1-\nu}\right) \leq \frac{1}{1-\nu}.\end{aligned}$$

ja seega ka

$$\sup_{\eta\in(0,1)} \int_\eta^1 (u-\eta)^{m-1} u^{1-\nu-m} du \leq \frac{1}{1-\nu},$$

mistõttu

$$\sup_{t\in(0,t_1)} |y(t)-(P_ny)(t)| \le c_4 h_1^m t_1^{1-\nu-m}.$$

Niisiis väide (2.3.1) kehtib ka $j=1$ korral ja kokkuvõttes saame kirjutada

$$\|y-P_ny\|_\infty = \max_{1\le j\le n} \sup_{t\in(t_{j-1},t_j)} |y(t)-(P_ny)(t)| \le c' \max_{1\le j\le n} (t_j-t_{j-1})^m t_j^{1-\nu-m}.$$

Kasutades Lagrange'i keskväärtusteoreemi näeme, et iga $j=1,...,n$ korral leidub $\xi(j)\in(j-1,j)$ nii, et

$$h_j = (t_j - t_{j-1}) = bn^{-r}\left(j^r-(j-1)^r\right) \le bn^{-r} r(\xi(j))^{r-1} \le bn^{-r} r j^{r-1}.$$

Seega

$$\begin{aligned} h_j^m t_j^{1-\nu-m} &= b^{1-\nu-m} n^{-r(1-\nu-m)} j^{r(1-\nu-m)} h_j^m \\ &\le b^{1-\nu-m} n^{-r(1-\nu-m)} j^{r(1-\nu-m)} b^m n^{-rm} r^m j^{m(r-1)} \\ &= b^{1-\nu} r^m n^{-r(1-\nu)} j^{r(1-\nu)-m}, \end{aligned}$$

mistõttu

$$\|y-P_ny\|_\infty \le cn^{-r(1-\nu)} \max_{1\le j\le n} j^{r(1-\nu)-m}.$$

Hinnates suurust $j^{r(1-\nu)-m}$ vastavalt sellele, kas $r(1-\nu)-m$ on negatiivne või mittenegatiivne, saame hinnangu

$$\|y-P_ny\|_\infty \le c \begin{cases} n^{-r(1-\nu)}, & 1\le r<\frac{m}{1-\nu} \\ n^{-m}, & r\ge\frac{m}{1-\nu} \end{cases}.$$

$\square$

Järgneva lemma tõestuse võib leida artiklist [2].

Lemma 3. *Olgu $T : L_\infty(0,b) \to C[0,b]$ kompaktne operaator ja olgu operaator $P_n : C[0,b] \to L_\infty(0,b)$, $n \in \mathbb{N}$, defineeritud võrdusega (2.2.8). Siis*

$$\|T - P_nT\|_{\mathcal{L}(L_\infty(0,b),L_\infty(0,b))} \to 0, \text{ kui } n \to \infty.$$

Tõestame järgmise teoreemi vaadeldava kollokatsioonimeetodi koonduvuse ja veahinngu kohta. Tõestuse käigus kasutame mõningaid ideid töödest [11] ja [12].

Teoreem 2. *Olgu $f, h \in C[0,b]$, $\alpha \in (0,1)$. Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja olgu antud kollokatsiooniparameetrid (2.2.2). Olgu iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineeritud kollokatsioonipunktid (2.2.3) võrgupunktide (2.2.1) (kus $r \geq 1$) abil. Siis ülesandel (2.1.1)-(2.1.2) leidub ühene lahend $y \in C[0,b]$ ja leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et võrrandil (2.2.7) leidub ühene lahend y_n iga $n \geq N$ korral ning*

$$\|y_n - y\|_\infty \to 0, \text{ kui } n \to \infty.$$

Kui $f, h \in C^{m,\mu}(0,b]$, $\mu < 1$, siis $y \in C^{m,\nu}(0,b]$, kus $\nu = \max\{1-\alpha, \mu\}$, ja iga $n \geq N$ korral kehtib veahinnang

$$\|y_n - y\|_\infty \leq c \begin{cases} n^{-r(1-\nu)}, & 1 \leq r < \frac{m}{1-\nu} \\ n^{-m}, & r \geq \frac{m}{1-\nu} \end{cases},$$

kus $c > 0$ ei sõltu naturaalarvust n.

Tõestus. Väited lahendi olemasolu ja sileduse kohta järelduvad teoreemist 1. Seega teame, et võrrand (2.1.6) on üheselt lahenduv ruumis $C[0,b]$. Sellest järeldub, et võrrand (2.1.6) on üheselt lahenduv ka ruumis $L_\infty(0,b)$. Tõepoolest, kuna $T : L_\infty(0,b) \to C[0,b]$ on kompaktne, on ta ka kompaktne kui operaator ruumist $L_\infty(0,b)$ ruumi $L_\infty(0,b)$. On ka lihtne näha, et homogeensel võrrandil $y = Ty$ on ruumis $L_\infty(0,b)$ vaid triviaalne lahend $y = 0$. Fredholmi alternatiivi põhjal on võrrand (2.1.6) üheselt lahenduv ruumis $L_\infty(0,b)$.

Võrrandi (2.1.6) ühene lahendavus ruumis $L_\infty(0,b)$ tähendab, et operaator $(I-T):L_\infty(0,b)\to L_\infty(0,b)$ on pööratav. Teoreemist 1.2 järeldub, et kuna $(I-T)\in\mathcal{L}(L_\infty(0,b),L_\infty(0,b))$, siis ka $(I-T)^{-1}\in\mathcal{L}(L_\infty(0,b),L_\infty(0,b))$. Edasi paneme tähele, et

$$I-P_nT=I-T-(P_nT-T).$$

Lemma 3 põhjal leidub $N\in\mathbb{N}$ nii, et

$$n\geq N\Longrightarrow\|P_nT-T\|<\frac{1}{\|(I-T)^{-1}\|}.$$

Märgime, et siin (ja tõestuses edaspidi) on tegemist ruumi $\mathcal{L}(L_\infty(0,b),L_\infty(0,b))$ operaatornormidega. On selge, et $(P_nT-T)\in\mathcal{L}(L_\infty(0,b),L_\infty(0,b))$, $n=1,2,\ldots$. Seega Banachi teoreemist 1.3 saame, et kui $n\geq N$, siis on operaator $I-P_nT$ pööratav ehk võrrand (2.2.7) on üheselt lahenduv. Banachi teoreemist järeldub ka hinnang

$$\left\|(I-P_nT)^{-1}\right\|\leq\frac{\left\|(I-T)^{-1}\right\|}{1-\|(I-T)^{-1}\|\,\|P_nT-T\|},\text{ kui } n\geq N.$$

Kuna selle võrratuse parem pool koondub arvuks $\left\|(I-T)^{-1}\right\|$, leidub konstant $c>0$ nii, et

$$\left\|(I-P_nT)^{-1}\right\|\leq c,\text{ kui } n\geq N.$$

Nüüd arvestades, et $y_n=P_nTy_n+P_ng$ ja $y=Ty+g$, siis

$$\begin{aligned}(I-P_nT)(y-y_n)&=y-y_n-P_nTy+P_nTy_n\\&=y-P_ng-P_nTy\\&=y-P_ny.\end{aligned}$$

Seega $\|y-y_n\|_\infty\leq c\|y-P_ny\|_\infty$, kui $n\geq N$. Lemmast 1 ja lemmast 2 järeldub nüüd teoreemi väide. □

2.4 Itereeritud meetod

Eelmises alapeatükis 2.3 nägime, et kui algses võrrandis (2.1.1)-(2.1.2) esinevad funktsioonid f ja h kuuluvad teatavasse funktsionaalruumi, siis alapeatükis 2.2 esitatud kollokatsioonimeetod on (piisavalt suure $r \geq 1$ korral) järku $O\left(n^{-m}\right)$. Selles alapeatükis näeme, et tehes varem käsitletud meetodis veel ühe lisasammu (ja nõudes funktsioonidelt h ja f natuke rohkem), saame meetodi, mis on järku $O\left(n^{-m-\alpha}\right)$, kui $r \geq 1$ valida piisavalt suur ja kollokatsiooniparameetrid sobivalt.

Toome kõigepealt sisse järgnevad kaks lemmat. Lemma 4 tõestuse võib leida tööst [6]. Lemma 5 üldistab artiklis [7] toodud tulemust $\alpha, \nu \in (0,1)$ korral.

Lemma 4. *Olgu $\gamma < 0$ ja $\beta \in \mathbb{R}$ ning $N \geq 2$ naturaalarv. Siis iga $l \in \mathbb{N}$, $2 \leq l \leq N$, korral kehtib hinnang*

$$\sum_{j=1}^{l-1} (l-j)^{\gamma} j^{\beta} \leq c \begin{cases} 1, & \text{kui } \beta + \gamma < -1 \text{ ja } \beta < 0, \\ N^{\beta}, & \text{kui } \beta \geq 0 \text{ ja } \gamma < -1, \\ N^{\beta+\gamma+1}, & \text{kui } \beta + \gamma \geq -1 \text{ ja } \gamma > -1, \end{cases}$$

kus konstant $c > 0$ ei sõltu arvust l ja N.

Olgu $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ ja olgu antud lõigul $[0,b]$, $b > 0$, osalõikude süsteem (2.2.1), kus $r \geq 1$.

Lemma 5. *Olgu $y \in C^{m+1,\nu}(0,b]$, kus $\nu \in (0,1)$. Olgu $h \in C^1[0,b]$ ja $\alpha \in (0,1)$. Olgu seost (2.2.2) rahuldavad kollokatsiooniparameetrid $\eta_1, ..., \eta_m$ valitud nii, et kvadratuurvalem*

$$\int_0^1 u(x)dx = \sum_{k=1}^{m} w_k u(\eta_k) + R_m(u), \;\; u \in C[0,b], \tag{2.4.1}$$

kus w_k, $k = 1, ..., m$, on vastavad kaalud, on täpne kõigi m-järku polünoomide u korral (ehk $R_m(u) = 0$ iga m-järku polünoomi u korral). Olgu antud kollokatsioo-

nipunktid (2.2.3) ja olgu operaator P_n defineeritud võrdusega (2.2.8). Siis

$$\|J^\alpha(h(y-P_ny))\|_\infty \le c \begin{cases} n^{-r(1+\alpha-\nu)}, & 1 \le r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \ge \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \end{cases},$$

kus konstant $c > 0$ ei sõltu arvust n.

Märgime, et lemmas olevat eeldust kvadratuurvalemi (2.4.1) täpsuse kohta täidab näiteks Gaussi kvadratuurvalem; seal esinevad sõlmed võime valida kollokatsiooniparameetriteks (vaata näiteks [10], osa II, §3).

Tõestus. Olgu $t \in (0,b]$ fikseeritud ja olgu $k \in \{0,1,...,n-1\}$ selline, et $t \in (t_k, t_{k+1}]$. Olgu

$$A_j(t) := \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t-s)^{\alpha-1} h(s)(y(s) - (P_ny)(s))ds, \; j = 1, ..., k \; (k \ge 1),$$
$$A_{k+1}(t) := \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} h(s)(y(s) - (P_ny)(s))ds.$$

Siis

$$J^\alpha(h(y-P_ny))(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{k+1} A_j(t).$$

Tähistame $h_j := t_j - t_{j-1}$, $j = 1, ..., k+1$. Kuna $y \in C^{m+1,\nu}(0,b] \subset C^{m,\nu}(0,b]$ ja funktsioon h on pidev, saame lemma 2 tõestuses tuletatud võrratuse (2.3.1) abil, et kehtib hinnang

$$\begin{aligned} |A_{k+1}(t)| &\le c \sup_{x \in (t_{j-1}, t_j)} |(y - P_ny)(x)| \int_{t_k}^{t} (t-s)^{\alpha-1} \, ds \\ &\le c_1 h_{k+1}^m t_{k+1}^{1-\nu-m} (t-t_k)^\alpha \\ &\le c_1 h_{k+1}^m t_{k+1}^{1-\nu-m} h_{k+1}^\alpha \\ &= c_2 h_{k+1}^{m+\alpha} t_{k+1}^{1-\nu-m}. \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

Siin ja edaspidi tähistame $c, c_1, c_2, ...$ abil positiivseid konstante, mis eri kohtades võivad omada erinevaid väärtusi, kuid mis ei sõltu arvudest n, k ega $t \in (0, b]$.

Lemma 2 tõestuses nägime, et

$$h_j \le brj^{r-1}n^{-r}, \quad j = 1, ..., n. \tag{2.4.3}$$

Seega arvestades lisaks ka, et $t_{k+1} = b\left(\frac{k+1}{n}\right)^r$, saame

$$\begin{aligned}|A_{k+1}(t)| &\le c(k+1)^{(r-1)(m+\alpha)}n^{-r(m+\alpha)}t_{k+1}^{1-\nu-m}\\ &= c(k+1)^{(r-1)(m+\alpha)+r(1-\nu-m)}n^{-r(m+\alpha)-r(1-\nu-m)}\\ &= c(k+1)^{r(1+\alpha-\nu)-(m+\alpha)}n^{-r(1+\alpha-\nu)}.\end{aligned}$$

ehk

$$|A_{k+1}(t)| \le c\begin{cases} n^{-r(1+\alpha-\nu)}, & 1 \le r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \ge \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu}\end{cases}. \tag{2.4.4}$$

Kui $k \ge 1$, on vaja hinnata ka suurusi $A_j(t)$, $j = 1, ..., k$. Vaatleme suurust $A_k(t)$:

$$\begin{aligned}|A_k(t)| &\le c \sup_{x\in(t_{j-1},t_j)} |(y - P_n y)(x)| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t-s)^{\alpha-1}\, ds\\ &\le c_1 h_k^m t_k^{1-\nu-m} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t-s)^{\alpha-1}\, ds\\ &\le c_2 h_k^m t_k^{1-\nu-m} \int_{t_{k-1}}^{t} (t-s)^{\alpha-1}\, ds,\end{aligned}$$

kus kasutati seost (2.3.1). Seega

$$|A_k(t)| \le ch_k^m t_k^{1-\nu-m}(t - t_{k-1})^\alpha.$$

Paneme tähele, et

$$t - t_{k-1} \le h_k + h_{k+1} = \frac{h_k + h_{k+1}}{h_k} h_k = \left(1 + \frac{h_{k+1}}{h_k}\right) h_k$$

ja
$$\frac{h_{k+1}}{h_k} = \frac{t_{k+1}-t_k}{t_k-t_{k-1}} = \frac{\frac{t_{k+1}}{t_k}-1}{1-\frac{t_{k-1}}{t_k}} = \frac{\left(\frac{k+1}{k}\right)^r-1}{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^r} = \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^r-1}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^r} \to 1,$$
kui $k \to \infty$. Seega asjaolust, et koonduv arvjada on tõkestatud, järeldub, et leidub arvust k sõltumatu konstant $c > 0$ nii, et

$$t - t_{k-1} \le h_k + h_{k+1} < ch_k,$$

millest
$$|A_k(t)| \le ch_k^{m+\alpha} t_k^{1-\nu-m}.$$

Sarnaselt suuruse $A_{k+1}(t)$ hindamisega (vaata võrratust (2.4.2) ja edasi), saame

$$|A_k(t)| \le c \begin{cases} n^{-r(1+\alpha-\nu)}, & 1 \le r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \ge \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \end{cases}. \tag{2.4.5}$$

Kui $k \ge 2$, tuleb veel hinnata suurusi $A_j(t)$, kus $j = 1, ..., k-1$. Vaatleme funktsiooni
$$\psi(s) = h(s)(t-s)^{\alpha-1}, \quad 0 \le s < t,$$

kus $t \in (0, b]$ on eespool fikseeritud.

Rakendame funktsiooni ψ jaoks osalõigus (t_{j-1}, t_j), $j = 1, ..., k-1$, valemit

$$\psi(s) = \psi(t_j) + \psi'(\xi(s))(s - t_j), \quad s, \xi(s) \in (t_{j-1}, t_j).$$

Olgu

$$B_0(t) := \sum_{j=1}^{k-1} \psi(t_j) \int_{t_{j-1}}^{t_j} (y(s) - (P_n y)(s))ds,$$
$$B_1(t) := \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi'(\xi(s))(s-t_j)(y(s) - (P_n y)(s))ds,$$

kus $t \in (t_k, t_{k+1}]$, $k \in \{2, ..., n-1\}$. Siis

$$\sum_{j=1}^{k-1} A_j(t) = B_0(t) + B_1(t).$$

Lisaks kollokatsiooniparameetritele $0 < \eta_1 < ... < \eta_m < 1$, fikseerime veel ühe kollokatsiooniparameetri $\eta_{m+1} \in (0,1)$. Defineerime uued kollokatsioonipunktid

$$t_{jl} = t_{j-1} + \eta_l(t_j - t_{j-1}),\ j = 1, ..., n,\ l = 1, ..., m+1.$$

ja operaatori $P_{n,m+1} : C[0,b] \to L_\infty(0,b)$ võrdusega

$$P_{n,m}u = \sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m+1} u(t_{\lambda\mu}) l_{\lambda\mu}, \quad u \in C[0,b],$$

kus baaspolünoomid $l_{\lambda\mu}$ on defineeritud nii nagu alapeatükis 2.2. Kuna kvadratuurvalem (2.4.1) on täpne kõigi m-järku polünoomide korral, siis

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} (P_n u)(s))ds = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (P_{n,m}u)(s))ds,\ j = 1, ..., k-1, \quad u \in C[0,b].$$

Seega iga $u \in C[0,b]$ ja $j = 1, ..., k-1$ korral kehtib võrdus

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} (u(s) - (P_n u)(s))ds = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (y(s) - (P_{n,m}u)(s))ds. \tag{2.4.6}$$

Kuna $\psi(t_j) = h(t_j)(t-t_j)^{\alpha-1}$ ja $t - t_j \geq t_k - t_j \geq (k-j)h_j$, $j = 1, ..., k-1$, siis

$$\begin{aligned}
|B_0(t)| &\leq c \sum_{j=1}^{k-1} |\psi(t_j)| \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (y(s) - (P_n y)(s))\, ds \right| \\
&\leq c_1 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} h_j^{\alpha-1} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (y(s) - (P_n y)(s))\, ds \right| \\
&= c_1 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} h_j^{\alpha-1} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} (y(s) - (P_{n,m} y)(s))\, ds \right| \\
&\leq c_1 \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} h_j^{\alpha} \sup_{x \in (t_{j-1}, t_j)} |y(x) - (P_{n,m} y)(x)|.
\end{aligned}$$

kus kasutasime seost (2.4.6). Rakendades võrratust (2.3.1), kus P_n asemel on operaator $P_{n,m}$, saame

$$|B_0(t)| \quad \leq c \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} h_j^{\alpha} h_j^{m+1} t_j^{1-\nu-m-1} = c \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} h_j^{\alpha+m+1} t_j^{-\nu-m}.$$

Nüüd arvestades, et $t_j = b\left(\frac{j}{n}\right)^r$ saame võrratuse (2.4.3) abil

$$\begin{aligned}
|B_0(t)| &\leq c \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} j^{(r-1)(m+\alpha+1)} n^{-r(m+\alpha+1)} j^{-r(\nu+m)} n^{r(\nu+m)} \\
&= c n^{-r(1+\alpha-\nu)} \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} j^{r(1+\alpha-\nu)-m-\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Kuna

$$\sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} j^{r(1+\alpha-\nu)-m-\alpha-1} \leq \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} j^{r(1+\alpha-\nu)-m-\alpha-1} j^{-\alpha+1},$$

siis lemma 4 abil

$$|B_0(t)| \leq c \begin{cases} n^{-r(1+\alpha-\nu)}, & 1 \leq r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \geq \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \end{cases}. \tag{2.4.7}$$

Edasi hindame suurust

$$B_1(t) = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi'(\xi(s))(s - t_j)(y(s) - (P_n y)(s))ds, \quad \xi(s) \in (t_{j-1}, t_j).$$

Kuna $t - t_j \geq (k-j)h_j$, $h \in C^1[0,b]$ ja

$$\psi'(s) = h'(s)(t-s)^{\alpha-1} - (\alpha - 1)h(s)(t-s)^{\alpha-2}, \quad 0 \leq s < t,$$

siis leidub $c > 0$ nii, et

$$|\psi'(\xi(s))| \leq c\left((k-j)^{\alpha-1}h_j^{\alpha-1} + (k-j)^{\alpha-2}h_j^{\alpha-2}\right).$$

Seega

$$\begin{aligned}|B_1(t)| \leq c\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)^{\alpha-1}h_j^{\alpha-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}|s-t_j||y(s)-(P_n y)(s)|\,ds \\ + c\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)^{\alpha-2}h_j^{\alpha-2}\int_{t_{j-1}}^{t_j}|s-t_j||y(s)-(P_n y)(s)|\,ds.\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Uurime saadud võrratuse paremal pool olevat esimest summat:

$$\begin{aligned}S_1(t) &:= c\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)^{\alpha-1}h_j^{\alpha-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}|s-t_j||y(s)-(P_n y)(s)|\,ds \\ &\leq c\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)^{\alpha-1}h_j^{\alpha-1}\sup_{x\in(t_{j-1},t_j)}|(y-P_n y)(x)|\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t_j - s)\,ds \\ &= c_1\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)^{\alpha-1}h_j^{\alpha-1}h_j^2\sup_{x\in(t_{j-1},t_j)}|(y-P_n y)(x)|.\end{aligned}$$

Võrratuse (2.3.1) abil saame, et

$$S_1(t) \leq c\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)^{\alpha-1}h_j^{\alpha-1}h_j^2 h_j^m t_j^{1-\nu-m} = c\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)^{\alpha-1}h_j^{1+\alpha+m}t_j^{1-\nu-m}.$$

Arvestades seost $t_j = b\left(\frac{j}{n}\right)^r$ ja kasutades võrratust (2.4.3), saame

$$\begin{aligned} S_1(t) &\le c \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} j^{(r-1)(1+\alpha+m)} n^{-r(1+\alpha+m)} j^{r(1-\nu-m)} n^{-r(1-\nu-m)} \\ &= c n^{-r(2+\alpha-\nu)} \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} j^{r(2+\alpha-\nu)-(1+\alpha+m)}. \end{aligned}$$

Kuna

$$\sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} j^{r(2+\alpha-\nu)-(1+\alpha+m)} \le \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-1} j^{r(2+\alpha-\nu)-(1+\alpha+m)} j^{-\alpha+1},$$

siis lemma 4 abil

$$S_1(t) \le c \begin{cases} n^{-r(2+\alpha-\nu)}, & 1 \le r < \frac{m+\alpha}{2+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \ge \frac{m+\alpha}{2+\alpha-\nu} \end{cases}.$$

Siit aga järeldub vahetult, et

$$S_1(t) \le c \begin{cases} n^{-r(1+\alpha-\nu)}, & 1 \le r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \ge \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \end{cases}. \tag{2.4.9}$$

Uurime nüüd võrratuse (2.4.8) paremal poolel olevat teist summat. Analoogiliselt esimese summa $S_1(t)$ hinnanguga

$$\begin{aligned} S_2(t) &:= c \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-2} h_j^{\alpha-2} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |s-t_j||y(s)-(P_n y)(s)|\, ds \\ &\le c_1 n^{-r(1+\alpha-\nu)} \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)^{\alpha-2} j^{r(1+\alpha-\nu)-(\alpha+m)}. \end{aligned}$$

Lemma 4 abil saame, et

$$S_2(t) \leq c \begin{cases} n^{-r(1+\alpha-\nu)}, & 1 \leq r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \geq \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \end{cases} . \tag{2.4.10}$$

Võrratustest (2.4.9)-(2.4.10) järeldub nüüd hinnang

$$|B_1(t)| \leq S_1(t) + S_2(t) \leq c \begin{cases} n^{-r(1+\alpha-\nu)}, & 1 \leq r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \geq \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \end{cases} . \tag{2.4.11}$$

Seega, kuna

$$J^\alpha(h(y - P_n y))(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{k+1} A_j(t) = A_{k+1}(t) + A_k(t) + B_0(t) + B_1(t),$$

siis hinnangutest (2.4.4), (2.4.5), (2.4.7) ja (2.4.11) järeldub lemma väide.

$\square$

Nüüd saame asuda vaatlema itereeritud meetodit ülesande (2.1.1)-(2.1.2) lahendamiseks. Teoreemi 2 põhjal teame, et leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et alapeatükis 2.2 vaadeldud kollokatsioonimeetodi abil konstrueeritud ülesande (2.1.1)-(2.1.2) lähislahend y_n on üheselt määratud, kui $n \geq N$. Defineerime itereeritud lähislahendi võrdusega

$$y_n^{it} := Ty_n + g \ , \ n \geq N, \tag{2.4.12}$$

kus T ja g on defineeritud vastavalt valemitega (2.1.7) ja (2.1.4). Näeme, et $y_n^{it} \in C[0, b]$. Tõestame vaadeldava lähislahendi kohta järgneva tulemuse.

Teoreem 3. *Olgu $f \in C^{m+1,\mu}(0,b]$, kus $m \in \mathbb{N}$ ja $\mu < 1$. Olgu $h \in C^{m+1}[0,b]$ ja $\alpha \in (0,1)$. Olgu tingimust (2.2.2) rahuldavad kollokatsiooniparameetrid $\eta_1, ..., \eta_m$ valitud selliselt, et kvadratuurvalem*

$$\int_0^1 u(x)dx = \sum_{k=1}^{m} w_k u(\eta_k) + R_m(u), \ u \in C[0,1],$$

kus w_k, $k = 1, ..., m$, on vastava kvadratuurvalemi kaalud, on täpne kõigi m-järku polünoomide u korral (ehk $R_m(u) = 0$ iga m-järku polünoomi u korral) . Olgu iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineeritud kollokatsioonipunktid (2.2.3) võrgupunktide (2.2.1) (kus $r \geq 1$) abil. Siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et kehtib veahinnang

$$\left\| y_n^{it} - y \right\|_\infty \leq c \begin{cases} n^{-r(1+\alpha-\nu)}, & 1 \leq r < \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \\ n^{-m-\alpha}, & r \geq \frac{m+\alpha}{1+\alpha-\nu} \end{cases}, \ n \geq N, \tag{2.4.13}$$

kus y on ülesande (2.1.1)-(2.1.2) lahend, y_n^{it} on defineeritud võrdusega (2.4.12), $\nu = \max\{1-\alpha, \mu\}$ ja konstant $c > 0$ ei sõltu arvust n.

Tõestus. Teoreemi 2 põhjal leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga $n \geq N$ korral leidub võrdusega (2.2.5) defineeritud lähislahend y_n. Paneme tähele, et kuna $y_n = P_n T y_n + P_n$, siis

$$P_n y_n^{it} = P_n(Ty_n + g) = P_n T y_n + P_n g = y_n,$$

ja seega

$$y_n^{it} = TP_n y_n^{it} + g,$$

kui $n \geq N$. Vahetu kontroll näitab, et kui $n \geq N$, siis on operaator $I - TP_n$ pööratav ja

$$(I - TP_n)^{-1} = I + T(I - P_n T)^{-1} P_n, \ n \geq N. \tag{2.4.14}$$

Kuna $T \in \mathcal{L}(L_\infty(0,b), C[0,b])$ ja lemma 1 põhjal $P_n \in \mathcal{L}(C[0,b], L_\infty(0,b))$, on selge, et $(I - TP_n) \in \mathcal{L}(C[0,b], C[0,b])$. Seega teoreemi 1.2 põhjal ka $(I - TP_n)^{-1} \in$

$\mathcal{L}(C[0,b], C[0,b])$, kui $n \geq N$.

Teoreemi 2 tõestuse põhjal leidub konstant $c_0 > 0$ nii, et

$$\left\|(I - P_nT)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L_\infty(0,b), L_\infty(0,b))} \leq c_0, \quad n \geq N.$$

Nüüd arvestades, et $T \in \mathcal{L}(L_\infty(0,b), C[0,b])$ ja lemma 1 põhjal on operaatorite jada (P_n) ühtlaselt tõkestatud, saame viimasest võrratusest ja võrdusest (2.4.14), et leidub konstant $c > 0$ nii, et

$$\left\|(I - TP_n)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(C[0,b], C[0,b])} \leq c, \quad n \geq N. \tag{2.4.15}$$

Kuna $y = Ty + g$ ja $y_n^{it} = TP_n y_n^{it} + g$, siis

$$(I - TP_n)\left(y_n^{it} - y\right) = y_n^{it} - y - TP_n y_n^{it} + TP_n y = TP_n y - Ty = T(P_n y - y),$$

kui $n \geq N$. Võrratuse (2.4.15) abil saame nüüd, et

$$\left\|y_n^{it} - y\right\|_\infty \leq c\|T(P_n y - y)\|_\infty = c\left\|J^\alpha(-h(P_n y - y))\right\|_\infty,$$

kui $n \geq N$. Lemmast 5 järeldub nüüd teoreemi väide. $\square$

3 Arvuline näide

Selles peatükis vaatleme ühe konkreetse ülesande ligikaudset lahendamist töös käsitletud teoreetilises raamistikus.

Vaatleme ülesannet

$$\left(D^{\frac{1}{2}}_{Cap}y\right)(t) + (1-t)y(t) = t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} - 2t + 2 + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right),\ y(0) = 2,\ t \in [0,1]. \quad (3.1)$$

Tegemist on ülesandega (2.1.1)-(2.1.2), kus

$$\alpha = \frac{1}{2},\ h(t) = 1-t,\ f(t) = t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}} - 2t + 2 + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right),\ y_0 = 2,\ b = 1.$$

Rakendame alapeatükis 2.2 vaadeldud kollokatsioonimeetodi juhul $m = 2$. Selleks valime kollokatsiooniparameetriteks

$$\eta_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6},\ \eta_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6}.$$

Märgime, et selliselt valitud kollokatsiooniparameetrid rahuldavad teroreemi 3 eeldust kvadratuurvalemi täpsuse kohta (vaata näiteks [10], osa II, §3). Võrdusega (2.2.5) antud lähislahendi y_n ($n \in \mathbb{N}$) leidmiseks on meil vaja lahendada võrrandisüsteem

$$c_{jk} + \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{2} c_{\lambda\mu}\int_0^{t_{jk}} K(t_{jk},s)l_{\lambda\mu}(s)ds = g(t_{jk}),\ j = 1,...,n,\ k = 1,2,$$

milles c_{jk} on otsitavad. Meenutame, et

$$K(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}h(s),\ g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds + y_0.$$

Funktsiooni g avaldamiseks saame kasutada järgnevat kasulikku valemit.

Olgu $\alpha \in (0,1)$ ja $\beta > 0$, siis

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta ds = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}, \quad t \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Tõestuseks märgime, et

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta \, ds &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(1-\frac{s}{t}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{s}{t}\right)^\beta \, ds \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^\beta \, du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)} B(\alpha, \beta+1) \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\alpha+\beta}, \quad t \in (0,1], \end{aligned}$$

kus kasutasime seost (1.1). Valemi (3.2) abil saame nüüd, et

$$g(t) = \left(1 + \frac{4}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right) t^{\frac{1}{2}} + \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) t - \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{2} t^2 - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} t^{\frac{3}{2}} + 2$$

Vaadeldavas võrrandisüsteemis esinevate integraalide arvutamiseks, võrrandisüsteemi lahendamiseks ja nii esialgse kui itereeritud meetodi rakendamiseks kasutame Pythoni tarkvara (vaata ka lisa 1).

Uurime nüüd antud $n \in \mathbb{N}$ korral esialgse meetodi ja itereeritud meetodi kohta teoreemidega 2 ja 3 esitatud tulemusi antud näite puhul. Siin $h, f \in C^{q,1/2}(0,1]$ iga $q \in \mathbb{N}$ korral ja seega

$$\nu = \max\left\{1 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Teoreemi 2 põhjal teame, et võrdusega (2.2.5) antud algse meetodi lähislahendi y_n jaoks kehtib $m = 2$ ja $\nu = \frac{1}{2}$ puhul piisavalt suure $n \in \mathbb{N}$ korral veahinnang

$$\|y_n - y\|_\infty \le c_1 \begin{cases} n^{-\frac{r}{2}}, & 1 \le r < 4 \\ n^{-2}, & r \ge 4 \end{cases}, \tag{3.3}$$

kus $y(t) = t^{1/2} + 2$ on ülesande (3.1) täpne lahend ja konstant $c_1 > 0$ ei sõltu arvust $n \in \mathbb{N}$.

Teoreemi 3 põhjal saame itereeritud meetodi lähislahendi y_n^{it} jaoks veahinnangu

$$\left\|y_n^{it} - y\right\|_\infty \leq c_2 \begin{cases} n^{-r}, & 1 \leq r < \frac{5}{2} \\ n^{-2.5}, & r \geq \frac{5}{2} \end{cases}, \tag{3.4}$$

kus konstant $c_2 > 0$ ei sõltu arvust $n \in \mathbb{N}$.

Arvulised tulemused on esitatud tabelis 1, kus esialgse meetodi vea $\|y_n - y\|_\infty$ lähend ε_n on arvutatud valemiga

$$\varepsilon_n = \max_{j=1,\ldots,n} \max_{i=1,\ldots,10} |y(x_{ji}) - y_n(x_{ji})|, \ n \in \mathbb{N},$$

kus

$$x_{ji} = t_{j-1} + \frac{i}{10}(t_j - t_{j-1}), \ j = 1, ..., n, \ i = 1, ..., 10.$$

Itereeritud meetodiga tekkivad (ligikaudsed) vead ε_n^{it} on arvutatud valemiga

$$\varepsilon_n^{it} = \max_{j=1,\ldots,n} \max_{i=1,\ldots,10} \left|y(x_{ji}) - y_n^{it}(x_{ji})\right|, \ n \in \mathbb{N}.$$

Tabelis olevad vigade suhted

$$\varrho_n = \frac{\varepsilon_{n/2}}{\varepsilon_n}, \ \varrho_n^{it} = \frac{\varepsilon_{n/2}^{it}}{\varepsilon_n^{it}}$$

näitavad, mitu korda vähenevad vead ε_n ja ε_n^{it} kui suurendada osalõikude arvu kaks korda. Teoreetilise hinnangu (3.3) tõttu võiks arvata, et näiteks esialgse meetodi korral võttes $r = 4$, võiks see suhe olla ligikaudu $2^2 = 4$. Tabeli viimases reas olev arv just see eeldatav arv ongi vastava $r \geq 1$ korral.

Tabel 1: Arvulised tulemused näiteülesande jaoks

$r = 1$					
Algne meetod			Itereeritud meetod		
n	ε_n	ϱ_n	n	ε_n^{it}	ϱ_n^{it}
4	1.44702×10^{-1}		4	8.08994×10^{-3}	
8	1.03464×10^{-1}	1.399	8	4.19988×10^{-3}	1.926
16	7.38164×10^{-2}	1.402	16	2.15907×10^{-3}	1.945
32	5.25566×10^{-2}	1.405	32	1.10167×10^{-3}	1.960
64	3.73555×10^{-2}	1.407	64	5.58988×10^{-4}	1.971
128	2.65149×10^{-2}	1.409	128	2.82463×10^{-4}	1.979
256	1.88008×10^{-2}	1.410	256	1.42303×10^{-4}	1.985
		≈ 1.414			2
$r = 2$					
4	7.38164×10^{-2}		4	2.15907×10^{-3}	
8	3.73555×10^{-2}	1.976	8	5.58988×10^{-4}	3.863
16	1.88008×10^{-2}	1.987	16	1.42303×10^{-4}	3.928
32	9.43259×10^{-3}	1.993	32	3.59053×10^{-5}	3.963
64	4.72453×10^{-3}	1.997	64	9.01817×10^{-6}	3.981
128	2.36438×10^{-3}	1.998	128	2.24132×10^{-6}	4.023
256	1.18270×10^{-3}	1.999	256	5.60982×10^{-7}	3.995
		2			4
$r = 4$					
4	2.56513×10^{-2}		4	2.74746×10^{-3}	
8	6.80136×10^{-3}	3.772	8	3.76009×10^{-4}	7.307
16	1.86347×10^{-3}	3.650	16	7.91378×10^{-5}	4.751
32	4.66852×10^{-4}	3.992	32	1.39477×10^{-5}	5.674
64	1.16773×10^{-4}	3.998	64	2.46083×10^{-6}	5.668
128	2.91971×10^{-5}	4.000	128	4.36171×10^{-7}	5.642
256	7.29954×10^{-6}	4.000	256	7.72673×10^{-8}	5.645
		4			≈ 5.657

Tabelist 1 näeme, et arvulised tulemused on heas kooskõlas teoreetiliste hinnangutega; rakendatav meetod tagab oodatavat järku koondumise.

Vaatame nüüd uuesti sama ülesande ligikaudset lahendamist, kuid võtame kollokatsiooniparameetriteks seekord $\eta_1 = 0.1$ ja $\eta_2 = 0.9$. Sel juhul on tulemused järgnevad.

Tabel 2: Arvulised tulemused uute kollokatsiooniparameetritega

Algne meetod			Itereeritud meetod		
n	ε_n	ϱ_n	n	ε_n^{it}	ϱ_n^{it}
			$r = 1$		
4	1.14326×10^{-1}		4	1.03667×10^{-2}	
8	8.15843×10^{-2}	1.401	8	5.54147×10^{-3}	1.871
16	5.81064×10^{-2}	1.404	16	2.86848×10^{-3}	1.932
32	4.13139×10^{-2}	1.407	32	1.46152×10^{-3}	1.963
64	2.93332×10^{-2}	1.409	64	7.38548×10^{-4}	1.980
128	2.08040×10^{-2}	1.410	128	3.71550×10^{-4}	1.988
256	1.47427×10^{-2}	1.411	256	1.86458×10^{-4}	1.993
		≈ 1.414			2
			$r = 2$		
4	5.81064×10^{-2}		4	3.18598×10^{-3}	
8	2.93332×10^{-2}	1.981	8	9.50767×10^{-4}	3.351
16	1.47427×10^{-2}	1.990	16	2.54532×10^{-4}	3.735
32	7.39120×10^{-3}	1.995	32	6.64282×10^{-5}	3.832
64	3.70066×10^{-3}	1.997	64	1.70902×10^{-5}	3.887
128	1.85163×10^{-3}	1.999	128	4.35129×10^{-6}	3.928
256	9.26126×10^{-4}	1.999	256	1.09932×10^{-6}	3.959
		2			4
			$r = 4$		
4	1.65300×10^{-2}		4	4.68951×10^{-3}	
8	4.35499×10^{-3}	3.796	8	1.11609×10^{-3}	4.202
16	1.18024×10^{-3}	3.690	16	2.84909×10^{-4}	3.917
32	3.00346×10^{-4}	3.930	32	6.61433×10^{-5}	4.307
64	7.65563×10^{-5}	3.923	64	1.55383×10^{-5}	4.257
128	1.93304×10^{-5}	3.960	128	3.76263×10^{-6}	4.130
256	4.85373×10^{-6}	3.983	256	9.14624×10^{-7}	4.114
		4			≈ 5.657

Antud tulemused viitavad, et suvaliste kollokatsiooniparameetritega ei pruugi teoreemis 3 toodud maksimaalset koondumisjärku saavutada. Näiteks näeme tabelis 2 toodud tulemustest, et kui teoreemi 3 eeldus kvadratuurvalemi (2.4.1) täpsuse kohta ei ole täidetud, siis üldjuhul itereeritud meetodi abil saadud lähislahendi y_n^{it} vea $y_n^{it} - y$ jaoks ei saa loota hinnangut $\left\|y_n^{it} - y\right\|_\infty = O\left(n^{-m-\alpha}\right)$. Samas näib, et itereeritud meetodi järk on suurem selliste $r \geq 1$ korral, mil algne meetod pole veel oma maksimaalset koondumise järku saavutanud. Need väited nõuavad täpsemat analüüsi, mis ei mahu selle töö raamidesse.

Kasutatud allikad

[1] Hermann Brunner. *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. ISBN: 978-1-107-09872-5. DOI: 10.1017/9781316162491. URL: https://www.cambridge.org/core/books/volterra-integral-equations/7046C767D498B31F59FE600A2F1892DD (vaadatud 05.05.2024).

[2] Hermann Brunner, Arvet Pedas ja Gennadi Vainikko. "Piecewise Polynomial Collocation Methods for Linear Volterra Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels". *SIAM Journal on Numerical Analysis* 39.3 (2002). Avaldaja: Society for Industrial and Applied Mathematics, lk. 957–982. ISSN: 0036-1429. URL: https://www.jstor.org/stable/3061940 (vaadatud 05.05.2024).

[3] Kai Diethelm. *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. en. Köide 2004. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, 2010. ISBN: 978-3-642-14573-5 978-3-642-14574-2. DOI: 10.1007/978-3-642-14574-2. URL: https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-14574-2 (vaadatud 20.05.2024).

[4] Gunnar Kangro. *Matemaatiline analüüs II*. Tallinn: Valgus, 1968.

[5] Eve Oja ja Peeter Oja. *Funktsionaalanalüüs*. Tartu: Tartu Ülikooli trükikoda, 1991.

[6] Inga Parts. "Piecewise polynomial collocation methods for solving weakly singular integro-differential equations". Doktoritöö. Tartu: Tartu Ülikool, 2005. URL: https://dspace.ut.ee/items/2e7bc5f9-ba98-4347-b606-f53712e64d21.

[7] Arvet Pedas ja Enn Tamme. "Spline collocation methods for linear multi-term fractional differential equations". *Journal of Computational and Applied Mathematics* 236.2 (august 2011), lk. 167–176. ISSN: 0377-0427. DOI: 10.1016/j.cam.2011.06.015. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042711003384 (vaadatud 12.05.2024).

[8] Arvet Pedas ja Gennadi Vainikko. *Harilikud diferentsiaalvõrrandid*. Tartu Ülikool: Tartu Ülikooli Kirjastus, 2011. ISBN: 978-9949-19-915-0.

[9] Arvet Pedas ja Mikk Vikerpuur. "Murrulised tuletised ja murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandid". *Eesti Matemaatika Seltsi aastaraamat* (2019), lk. 81–117. URL: https://matemaatika.eu/emsar/ar2019/ar2019lk81.pdf.

[10] Enn Tamme, Leo Võhandu ja Lembit Luht. *Arvutusmeetodid I*. 2. väljaanne. Tallinn: Valgus, 1986.

[11] Gennadi Vainikko. *Multidimensional Weakly Singular Integral Equations*. Berlin: Springler, 1993. URL: https://doi.org/10.1007/BFb0088979 (vaadatud 05.05.2024).

[12] Mikk Vikerpuur. "Two Collocation Type Methods for Fractional Differential Equations with Non-Local Boundary Conditions". *Mathematical Modelling and Analysis* 22.5 (21. september 2017). Number: 5, lk. 654–670. ISSN: 1648-3510. DOI: 10.3846/13926292.2017.1355339. URL: https://journals.vilniustech.lt/index.php/MMA/article/view/920 (vaadatud 05.05.2024).

Lisa 1: näiteülesande kood

```
#Vajalikud paketid
import numpy as np
from scipy.special import gamma
from math import sqrt
import pandas as pd
from scipy.integrate import quad


#Defineerime funktsiooni, mis väljastab nii esialgse kui itereeritud meetodi korral saadud lähislahendi (ligikaudse) vea

def kol_meetod(N,r):

    #Defineerime ülesande lahendi
    def yt(u):
        return u**(1/2) + 2

    #Defineerime funktsiooni g
    def G(u):
        return (1+(4/gamma(1/2)))*u**(1/2) + gamma(3/2)*u -(2/gamma(5/2))*u**(3/2) - (gamma(5/2)/2)*u**2 +2


    t=[]
    #Defineerime osalõigud, kollokatsiooniparameetrid ja kollokatsioonisõlmed etteantud N korral
    t0 = np.array([(j/N)**r for j in range(0,N+1)])
    eta1 = (3-sqrt(3))/6
    eta2 = (3+sqrt(3))/6
    eta = np.array([eta1,eta2])
    for j in range(1,N+1):
        for k in range(1,3):
            t_0 = t0[j-1] + eta[k-1] * (t0[j]-t0[j-1])
            t.append(t_0)

    #Leiame lahendatava võrrandisüsteemi kordajad (selleks on meil vaja teatavad integraalid leida, mida siin tehakse paketi scipy.integrate.quad abil)
    A0=[]
```

```
    for j in range(1,N+1):
        for k in range(1,3):
            for la in range(1,N+1):
                    def integrand1(u):
                        return (t[(j-1)*2+k-1]-u)**(-1/2) *u*(1-u)
                    def integrand2(u):
                        return (t[(j-1)*2+k-1]-u)**(-1/2) *(1-u)
                    if la < j:
                        a011 = + (1/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], t0[la])[0]
                        a012 = - (1/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(t[2*(la-1)+1]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], t0[la])[0]
                        a013 = + (1/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], t0[la])[0]
                        a014 = - (1/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(t[2*(la-1)]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], t0[la])[0]
                        a01 = a011 + a012
                        a02 = a013 + a014
                        A0.append(a01)
                        A0.append(a02)
                    elif la == j:
                        if (j,k) == (la,1):
                         b011 = + (1/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], t[(j-1)*2+k-1])[0]
                         b012 = - (1/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(t[2*(la-1)+1]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], t[(j-1)*2+k-1])[0]
                         b01  = 1 + b011 + b012
                         A0.append(b01)
                         b013 = + (1/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], t[(j-1)*2+k-1])[0]
                         b014 = - (1/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(t[2*(la-1)]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], t[(j-1)*2+k-1])[0]
                         b02  = b013 + b014
                         A0.append(b02)
                        else:
```

```
                        b011 = + (1/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], t[(j-1)*2+k-1])[0]
                        b012 = - (1/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(t[2*(la-1)+1]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], t[(j-1)*2+k-1])[0]
                        b01  =  b011 + b012
                        A0.append(b01)
                        b013 = + (1/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], t[(j-1)*2+k-1])[0]
                        b014 = - (1/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(t[2*(la-1)]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], t[(j-1)*2+k-1])[0]
                        b02  = 1 + b013 + b014
                        A0.append(b02)
                   else:
                       c0 = 0
                       c01 = 0
                       A0.append(c0)
                       A0.append(c01)

    A0 = np.array(A0)
    A = A0.reshape(2*N,2*N)
    #Leiame funktsiooni g väärtused kollokatsioonipunktides
    g=[]
    for j in range(1,N+1):
        for k in range(1,3):
            g0 = G(t[(j-1)*2+k-1])
            g.append(g0)

    #Lahendame võrrandisüsteemi
    c=np.linalg.solve(A,g)

    #Defineerime baaspolünoomid
    def l(s,la):
        if t0[la-1] <= s < t0[la]:
            return c[(la-1)*2]*((s-t[(la-1)*2+1])/(t[(la-1)*2]-t[(la-1)*2+1])) + c[(la-1)*2+1]*((s-t[(la-1)*2])/(t[(la-1)*2+1]-t[(la-1)*2]))
        else:
```

```
            return 0

    #Defineerime algse meetodi lähislahendi
    def yN(s):
        z=[]
        for la in range(1,N+1):
            z0 = l(s,la)
            z.append(z0)
        z=np.array(z)
        return(np.sum(z))

    #Defineerime itereeritud meetodi lähislahendi (vastavalt selle definitsioonile, on ka siin vaja teatavaid integraale leida, vaata ka operaatori T definitsiooni (võrdust (2.1.7)))
    def yIT(s):
        w=[]
        for la in range(1,N+1):
            def integrand1(u):
                return (s-u)**(-1/2) *u*(1-u)
            def integrand2(u):
                return (s-u)**(-1/2) *(1-u)
            if t0[la] <= s:
                w01 = - ((c[(la-1)*2])/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], t0[la])[0]
                w02 = + ((c[(la-1)*2])/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(t[2*(la-1)+1]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], t0[la])[0]
                w03 = - ((c[(la-1)*2 +1])/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], t0[la])[0]
                w04 = + ((c[(la-1)*2 +1])/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(t[2*(la-1)]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], t0[la])[0]
                w.append(w01)
                w.append(w02)
                w.append(w03)
                w.append(w04)
            elif t0[la-1]< s <= t0[la]:
                w11 = - ((c[(la-1)*2])/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], s)[0]
                w12 = + ((c[(la-1)*2])/(t[2*(la-1)]-t[2*(la-1)+1]))*(t[2*(la-1)+1]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], s)[0]
```

```
            w13 = - ((c[(la-1)*2 +1])/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(1/gamma(1/2))*quad(integrand1, t0[la-1], s)[0]
            w14 = + ((c[(la-1)*2 +1])/(t[2*(la-1)+1]-t[2*(la-1)]))*(t[2*(la-1)]/gamma(1/2))*quad(integrand2, t0[la-1], s)[0]
            w.append(w11)
            w.append(w12)
            w.append(w13)
            w.append(w14)
        else: break

    return (np.sum(w)+G(s))

#Nüüd leiame (ligikaudsed) vead e1 ja e2 vastavalt algse ja itereeritud meetodiga
x=[]
y00t =[]
y00N =[]
y00IT =[]

for j in range(1,N+1):
    for i in range(0,10):
        x0 = t0[j-1] + i * (t0[j]-t0[j-1])/10
        y000t = yt(x0)
        y000N = yN(x0)
        y000IT = yIT(x0)
        x.append(x0)
        y00t.append(y000t)
        y00N.append(y000N)
        y00IT.append(y000IT)

w = []
for j in range(1,N+1):
    for i in range(0,10):
        w0 = abs(yt(x[(j-1)*i+i-1]) - yN(x[(j-1)*i+i-1]))
        w.append(w0)
e = np.max(w)

ww2 = []
for j in range(1,N+1):
    for i in range(0,10):
        ww02 = abs(yt(x[(j-1)*i+i-1]) - yIT(x[(j-1)*i+i-1]))
```

```
            ww2.append(ww02)
    e2 = np.max(ww2)


    return(e,e2)


#Edasi arvutame vead n=4,8,16,32,64,128,256 korral ja leiame vastavad suhted
N = [4,8,16,32,64,128,256]

v1 = [kol_meetod(N[i], 4)[0] for i in range(0,len(N))]
v2 = [kol_meetod(N[i], 4)[1] for i in range(0,len(N))]

rho = [v1[i-1]/v1[i] for i in range(1,len(v1))]
rho.insert(0, 0)

rho2 = [v2[i-1]/v2[i] for i in range(1,len(v2))]
rho2.insert(0, 0)

#Loome tabeli tulemustest
pd.set_option('display.float_format', '{:.5e}'.format)
df = pd.DataFrame({'n': N, 'Viga': v1, 'rho': rho})
df2 =  pd.DataFrame({'n': N, 'Viga2': v2, 'rho2': rho2})
print(df.to_string(index=False))
print(df2.to_string(index=False))
```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Erik-Jürgen Määrits,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose Caputo murrulist tuletist sisaldava algväärtusülesande lahendamisest, mille juhendajad on prof. Arvet Pedas ja Mikk Vikerpuur (Phd) reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, alates ***01.09.2025*** kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Erik-Jürgen Määrits
22.05.2024