

GERHARD RÄGO

**Matemaaatika
tööõraamat**
keskkoolidele

Analüüsi alged

4. klassi kursus

K. O.-Ü. «Loodus», Tartus

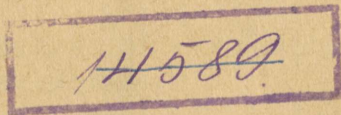
GERHARD RÄGO

Matemaatika tööraamat

keskkoolidele

Analüüsi alged

4. klassi kursus



K. O.-Ü. «Loodus», Tartus
1930

2



Keeleline korrektor: Tartu Ülikooli eesti keele lektor J. V. Veski
Tehniline korrektor: H. Pürkop

A-6287

Sisukord.

Peatükk I: Funktsiooni mõiste.

Harjutis I: Funktsiooni mõiste. Funktsiooni käigu graa- filine kujutamine	1
Harjutis II: Funktsiooni avaldis. Funktsiooni tähis . . .	8
Harjutis III: Funktsiooni piiri mõiste lõpmata kahaneva geomeetrilise rea näitel	15
Harjutis IV: Funktsiooni piiri mõiste: järg	28
Harjutis V: Funktsiooni pidevuse mõiste	39

Peatükk II: Tuletise mõiste.

Harjutis VI: Ühtlaselt arenevate nähtuskäikude kiirus .	50
Harjutis VII: Täiendavaid ülesandeid ühtlaselt arenevate nähtuskäikude kohta	57
Harjutis VIII: Üldine kiiruse mõiste	64
Harjutis IX: Kõvera puutuja mõiste	73
Harjutis X: Vea arvutamise põhivalemi rakendusi . . .	79
Harjutis XI: Tuletise mõiste rakendamine funktsiooni käigu uurimisel	84

Peatükk III: Polünoomide numbriline käsitlemine.

Harjutis XII: Horner'i skeem	91
Harjutis XIII: Numbriliste võrrandite lahendamine järk- järgulise lähendamise teel: lineaarse interpolatsiooni võte	95
Harjutis XIV: Numbriliste võrrandite lahendamine järk- järgulise lähendamise teel: Newton'i võte	100

Peatükk I.

Funktsiooni mõiste.

Harjutis I:

Funktsiooni mõiste.

Funktsiooni käigu graafiline kujutamine.

Eelmärkus. Järgmised ülesanded pakuvad funktsionaalse olenevuse näiteid. Selgita iga ülesande puhul

1^o. missugune kahest esinevast muutujast on olenematu, missugune on olenev;

2^o. missugustes rajades asuvad olenematu ja oleneva muutuja väärtused;

3^o. missugune mõõtkava on kohane iga üksiku muutuja kujutamiseks ja missugune on vastav kujutamise täpsus;

4^o. kas on mõeldav tabeli andmete täiendamine vahepealse-
tega, jaataval korral missugustega nimelt.

Kui ülesandes nõutav joonis on valmis, kirjelda temale tuginedes kujutatud nähtuse käik.

1. Järgmine tabel näitab õpilaste protsentuaalset jaotust üksikutele klassidele meie alg- ja keskkoolis 1927/28. õppeaastal:

Klassi (õppeaasta) number n	Algkool						Keskkool				
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
Õpilaste arv a protsentides	19	18	21	21	12	10	23	21	20	17	18

Kujuta graafiliselt arvu a käik arvu n muutudes.

2. Järgmine tabel annab keskmised Tartu sademete-hulgad üksikute kuude kohta 50 aastat kestnud vaatluste najal:

Kuu number n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Keskmine sademete hulk h mm-tes	36	30	27	30	47	61	84	78	56	49	46	44

Kujuta arvu h käik arvu n muutudes.

3. Alljärgnev tabel on väljavõtte meie raudtee-sõiduplaanist:

	Kaugus Tallinnast km-tes:	III klassi pileti hind Tallinnas, kroonides:
Tallinna	—	—
Ülemiste	8	0,20
Lagedi	15	0,35
Aruküla	24	0,50
Raasiku	30	0,65
Kehra	40	0,85
Mustjõe	48	1,20
Aegviidu	57	1,20
Jäneda	63	1,30
Lehtse	70	1,45
Tapa	78	1,60

Kujuta graafiliselt sõidupileti hinna h käik olenevuses lähte- ja lõppjaama vahelisest kaugusest k .

Valmista endises mõõtkavas h -teljel hinna astmik.

Kuidas saab viimasest tuletada ennemalt saadud joonist?

4. Järgmine tabel annab korrapärase hulknurga külje pikkuse a olenevuses külgede arvust n , kui pikkuseühikuks on hulknurga ümber joonistatud ringi raadius:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
a	1,73	1,41	1,18	1,00	0,87	0,77	0,68	0,62	0,52	0,42

Kontrolli tabeli andmed, määrates a väärtused trigonomeetriliselt.

Valmista korrapärase hulknurga külje a astmik.

Tuleta sellest n - a -diagramm.

5. Järgmine tabel näitab elektrivoolu kättesaadavuse arenemist Põhja-Ameerika Ühendriikides:

Aasta	1890	1894	1898	1902	1906	1910	1914	1918
Vooluhind	100	92	82	68	54	25	14	14

Vooluhind on siin antud 1890. a. hinna protsentides.

Valmista endale vooluhinna h astmik.

Tuleta sellest hinna h käigu pilt aastate muutudes.

6. Raudteel sõidavad lapsed alla 5 aastat maksuta; lapsed 5- kuni 10-aastases eas maksavad poole sõiduhinda; 10. aastast peale makstakse täis sõiduhind. III klassi sõidupilet Tallinnast Valka maksab 5,15 krooni. Kujuta Tallinna ja Valga vahelise tee sõiduhinna käik olenevuses sõitja east.

7. Järgmine tabel annab üksikute kuude keskmised Tartu õhutemperatuurid Celsiuse kraadides 50 aastat kestnud vaatluste najal:

Kuu number n	1	2	3	4	5	6
Keskmine õhutemperatuur t	-6,6	-6,6	-3,2	+3,4	+9,9	+15,0

Kuu number n	7	8	9	10	11	12
Keskmine õhutemperatuur t	+17,0	+15,2	+10,6	+4,9	-0,6	-4,9

Kujuta arvu t käik arvu n muutudes.

8. Et kindlustada oma lapsele 20-aastaseks saamisel 1000-kroonine summa, tuleb maksta kindlustusseltsile aastas „preemia“ p krooni, kui lapse iga on kindlustamise

ajal i aastat. Alljärgnev tabel annab rea kokkukuuluvaid i ja p väärtusi:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	35,20	37,90	40,90	44,30	48,15	52,55	57,55	63,35	70,15	78,20	87,90

Kujuta preemia p kõik olenevuses lapse east i , millel ta kindlustatute nimekirja võetakse.

9. Katsed on näidanud, et jões voolaval veel peab olema vähemalt kiirus v , et liikuma panna jõe põhjas asuvaid kive, mille keskmine läbimõõt on d . Alljärgnev tabel annab rea kokkukuuluvaid d ja v väärtusi:

Kivi läbimõõt d cm-tes	0,25	1,0	4,0	10,0	17,0	38,0
Voolu kiiruse alammäär v cm/sec-tes	25	50	100	150	200	300

Kujuta arvu v kõik arvu d muutudes.

10. Antud koha kõrgema ja madalama temperatuuri vahet nimetatakse koha temperatuuri amplituudiks. Järgmine tabel annab maatemperatuuri amplituudi olenevuses sügavusest, Tiflisis toimetatud vaatluste põhjal:

Sügavus s meetrites	0,01	0,20	0,40	0,84	1,65	3,26	3,99	6,47
Amplituud a Cel-siuse kraadides	72,7	37,3	31,5	27,2	22,8	17,9	16,6	15,3

Kujuta graafiliselt temperatuuri amplituudi a kõik sügavuse s muutudes. Missugust temperatuuri amplituudi võib oodata

0,30 0,65 1,25 2,60 5,15

meetri sügavusel?

11. Terasvarda vastupidavus tõmbele oleneb tunduval määral terases sisalduvast süsiniku hulgast. Järgmises tabelis seisab esimeses reas terase süsinikusisaldus

s protsentides, teises reas — maksimaalne koorem k tonnides, mida suudab kanda terasvarras läbilõikega 1 cm^2 .

s	0,14	0,46	0,57	0,66	0,78	0,80	0,87	0,96
k	4,36	5,27	5,51	6,20	6,39	7,11	7,24	8,19

Kujuta suuruse k käik suuruse s muutumisel.

12. Järgnev tabel näitab küllastatud auru rõhumise käiku temperatuuri kasvades. Temperatuurid on Celsiuse kraadides, rõhud kilogrammides ruutsentimeetritele.

Temperatuur	Rõhk
0	0,006
10	0,013
20	0,024
30	0,043
40	0,075
50	0,126
60	0,203
70	0,318
80	0,483

Temperatuur	Rõhk
90	0,715
100	1,033
110	1,461
120	2,024
130	2,754
140	3,684
150	4,852
160	6,299

Kujuta auru rõhumise käik temperatuuri muutumisel.

13. Pealael kasvavate juuste arv on ea funktsioon; pagasi veohind ühest jaamast teise on pagasi kaalu funktsioon; veskitammi korjatud vees peituv töövaru on veepinna kõrguse funktsioon; fotograafilise plaadi ilmutamise aeg on ilmutaja temperatuuri funktsioon.

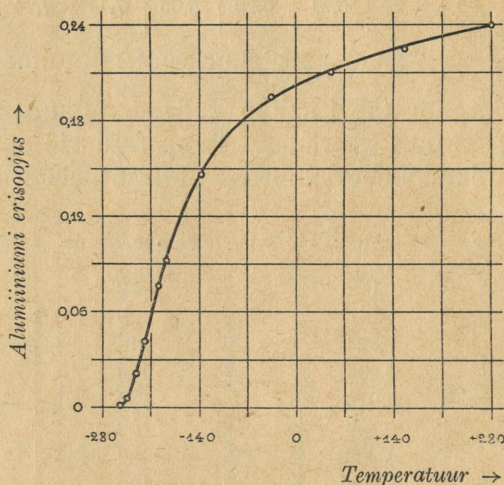
Anna 10 uut funktsionaalse olenevuse näidet.

14. Järgmine tabel sisaldab andmeid alumiiniumi erisoojuse e muutumise kohta temperatuuri t muutumisel:

Temperatuur t Celsiuse kraadides	—38	+58	+160	+283
Erisoojus e kalorites grammi kohta	0,1963	0,2098	0,2250	0,2391

Kujuta alumiiniumi erisoojuse käik temperatuuri muutudes.

Kui suur on alumiiniumi arvatav erisoojus temperatuuridel -120 , -170 , -200 , -230 , -250 ?



Joonis 1.

Võrdle oma graafikut ja temast ekstrapolatsiooni teel leitud väärtusi ülalseisva kujutise (joonis 1) andmetega, mis tugineb laiemale vaatlusvahemikule. Misugust üldlaadilist järeldust võib siit teha ekstrapolatsiooni teel leitud andmete kohta?

15. Alljärgnevas tabelis tähendab p niklisisalduse protsenti raudnikli-sulatises, α — selle sulatise joonpaisumistegurit (temperatuuril 0°):

p	0	20	28	55,8	69,0	100
$\alpha \cdot 10^6$	10,354	11,427	11,288	11,080	12,010	12,661

Kujuta arvu α käik arvu p muutudes.

Missugust α väärtust võib oodata p väärtustel 24, 36, 43?

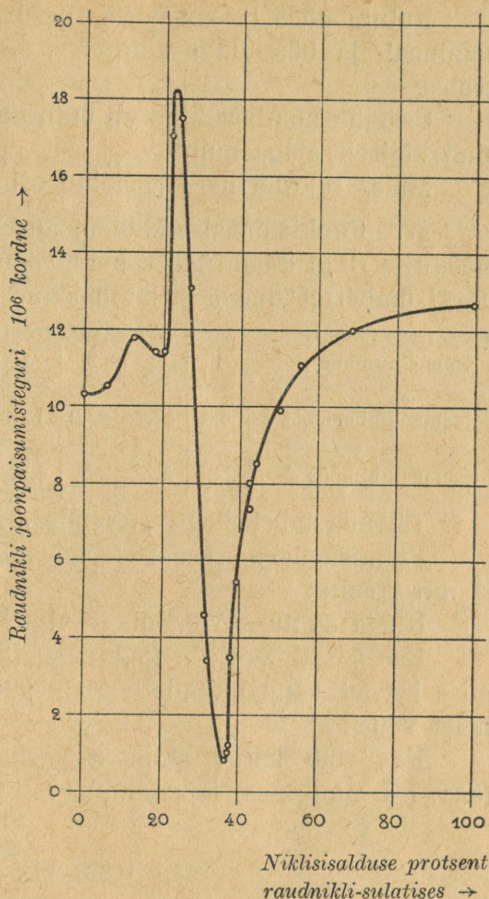
Võrdle enda saadud kõverat ja tema abil leitud α väärtusi kõrvaloleva kujutise andmetega (joonis 2). Kui suured on lahkuminekud absoluutselt ja protsentuaalselt?

Missuguse üldise järelduse võib siit teha interpolatsiooni kohta hõredates vaatlusandmete ridades?

Missuguse koosseisuga raudniklisulatis on eriti kohane mõõt-etaloonide valmistamiseks?

37%₀-line raudnikkel kannab invari nime: *invariabilis* tähendab muutumatu.

16. Ehituse-osaühingu „Oma Kolde“ osatähe nominaalhind on 50 krooni. Tema müügihind börsil oli see aasta



Joonis 2.

1. VI 8. VI 20. VI 1. VII 12. VII 30. VII
vastavalt kroonides

42

43

48

55

55

53

Kujuta ühes ja samas võrgus ülalnimetatud osatähe nominaal- ja börsihinna käigud s. a. juuni- ja juulikuu kestes.

Osatähe nominaalhind on muutumatu, osatähe börsihind üldiselt ajaga muutuv.

Milles tulevad need asjaolud esile graafikus?

17. Funktsionaalse sideme uurimiseks ringi ümbermõõdu ja ringi läbimõõdu vahel mõõdeti cm-tes 8 pudeli ja purgi ümbermõõdud c ja läbimõõdud d ja leiti tabel:

Eseme number n	1	2	3	4	5	6	7	8
Eseme ümbermõõt c	6,8	17,7	26,0	15,6	20,5	32,5	22,4	31,1
Eseme läbimõõt d	2,2	5,7	8,2	4,9	6,5	10,4	7,3	9,8

Täienda tabel reaga „Arvude c ja d suhe π “

Valmista ühes ja samas võrgus n - d -graafik, n - c -graafik ja n - π -graafik.

Hinda suhte π võimalikke vigu 1.—8. katses.

Kas leitud suhte π kõikumised ümber nende keskmise jäävad võimalikkude vigade piiridesse või ulatuvad neist välja?

Kas võib leitud suhet π vaadelda meie katsereas (s. t. n -i muutudes) konstandina?

Harjutis II:

Funktsiooni avaldis. Funktsiooni tähis.

1. Avalda valemina funktsionaalne side

kuubi serva a ja servade kogupikkuse p vahel;
kuubi serva a ja kuubi täispinna S vahel;
kuubi serva a ja kuubi ruumala V vahel;
kera raadiuse r ja kera ekvaatori pikkuse e vahel;

kera raadiuse r ja kera pinna S vahel;

kera raadiuse r ja kera ruumala V vahel.

2. Trapetsi rööbikute külgede mõõtmine andis detseimeetrites vastavalt $1 \pm \delta$ ja $2 \pm \delta$. Kõrguse mõõtmine andis $\frac{1}{2} \pm \delta$. Avalda funktsionaalne side trapetsi pindala suurema võimaliku vea v ja lineaarmõõdete vea δ vahel.

3. Korrapäraseks tetraedriks nimetatakse kolmekandilist püramiidi, mille kõik tahud on võrdkülgsed kolmnurgad. Selle keha serva mõõtmine andis sentimeetrites $10 \pm \varepsilon$. Avalda funktsionaalne side tetraedri ruumala suurema võimaliku vea ω ja serva vea ε vahel.

4. Olgu antud ring raadiusega 1. Olgu ringisse joonistatud kõõlu pikkus p ja kõõlu ja keskkoha vaheline kaugus k . Siis on $p = p(k)$. Anna selle funktsiooni avaldis.

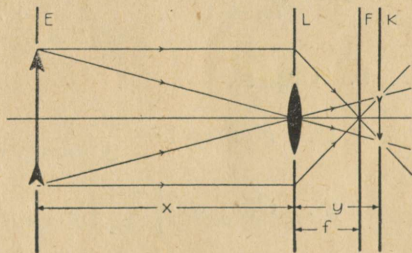
5. Olgu jõe laius 100 m; olgu voolu kiirus $\frac{1}{2}$ m/sec. Otsesihis üle jõe ujumise aeg t on ujuja kiiruse v funktsioon. Anna selle avaldis.

Näpunäide. Rakenda kiiruste liitmislause.

6. Olgu fotograafilise aparaadi objektiivläätses kaugus ülesvõtte-plaadist y ja ülesvõetava eseme ja objektiivi vaheline kaugus x (joonis 3).

Joonisel on tähtedega E , F ja K märgitud eseme-, fokaal- ja kujutistasapind; tähega L — läätses sümmeetriasapind.

Anna funktsiooni $y(x)$ avaldis.



Joonis 3.

7. Tasapinna valgustuse tugevuseks nimetatakse pinnaühikule langevat valgusehulka.

10. Olgu tasapinna-tüki valgustuse tugevus kiirte otsesel (normaalsel) langemisel N . Olgu sama tasapinna-tüki valgustuse tugevus kaldkiirte puhul I , juhul kui kii-

red moodustavad tasapinnaga nurga α . Missugune funktsionaalne side seob suurusi I ja α ?

2^o. Kroom-elementi pooluste potentsiaalvahe on ligikaudu 1,8 volti. Olgu juhtme ja elementi kogutakistus R . Missugune funktsionaalne side valitseb voolu tugevuse I ja takistuse R vahel?

3^o. Anna funktsionaalsed sidemed, milles avalduvad:

- Valguse peegeldumise seadus;
- Boyle'i seadus, juhaks, et rõhu puhul 1 kg/cm^2 on gaasi ruumala 1 l;
- Gay-Lussac'i seadus, juhaks, et temperatuuril 0° on gaasi ruumala 0,3 l.

8. Olgu funktsioon $f(x)$ määratud võrdusega:

$$f(x) = x^2 - 7x + 12.$$

Sõnasta eeskiri, mille järgi leitakse igale x -i väärtusele vastav $f(x)$ väärtus.

Sama ülesanne funktsioonide kohta:

$$1^o. g(x) = \sqrt{1 - 4x^2}$$

$$3^o. i(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$$

$$2^o. h(x) = \frac{2x + 5}{7x + 3}$$

$$4^o. j(x) = \log \sqrt[3]{1 + x^2}$$

9. Olgu:

Avalda:

$$1^o. F(x) = 1 - \frac{x}{2}$$

$$[F(x)]^3$$

$$2^o. G(x) = \frac{1+x}{1-x}$$

$$G(x) - 1$$

$$3^o. H(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\log H(x)$$

$$4^o. I(x) = \log(x^2 + 1)$$

$$10^{I(x)}$$

10. 1^o. Olgu $V(x) = ax$.

Näita, et selle funktsiooni puhul on maksev „liitmislause“:

$$V(x_1 + x_2) = V(x_1) + V(x_2).$$

Sõnasta lause.

Järelda siit, et

$$V(2x) = 2 \cdot V(x)$$

$$V(3x) = 3 \cdot V(x)$$

ja edasi, et

$$V(nx) = n \cdot V(x),$$

kus n on täisarv.

Laienda lause murruliste n -i väärtuste juhule.

2°. Olgu

$$E(x) = a^x.$$

Näita, et selle funktsiooni puhul on maksev „liitmislause“:

$$E(x_1 + x_2) = E(x_1) \cdot E(x_2).$$

Sõnasta lause.

Järelda siit, et

$$E(2x) = [E(x)]^2$$

$$E(3x) = [E(x)]^3$$

ja edasi, et

$$E(nx) = [E(x)]^n,$$

kus n on täisarv.

3°. Olgu

$$L(x) = \log x.$$

Näita, et selle funktsiooni puhul on maksev side:

$$L(x_1 \cdot x_2) = L(x_1) + L(x_2).$$

Sõnasta lause.

Järelda siit, et

$$L(x^2) = 2 \cdot L(x)$$

ja üldiselt

$$L(x^n) = n \cdot L(x),$$

kus n on täisarv.

11. On antud:

Leia:

1^o. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

$f(-1); f(+1); f(+5).$

$\times 2^o. g(x) = \frac{x+1}{2x-3}$

$g(0); g(-1); g(+9).$

3^o. $j(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

$j(+2); j(-3\frac{1}{2}); j(\sqrt{3}).$ $j(2)$

4^o. $h(x) = 5^{x-1}$

$h(0); h(+2); h(+1).$ $h(-3)$

5^o. $l(x) = \log \sqrt[3]{x}$

$l(+10); l(\sqrt{5}); l(0,001).$

12. On antud:

Leia:

1^o. $F(x) = 2x + 3$

$F(1+h); F\left(\frac{h}{2}\right).$

$\circledast 2^o. G(x) = x^2 - 5x + 6$

$G(2-h); G(3+h).$

$\circledast 3^o. K(x) = x^3 - 2x + 1$

$K(h); K(1+h).$

4^o. $L(x) = \log x$

$L(10^h) + 1; L(2^h).$

13. 1^o. Olgu

$r(x) = ax^2.$

Näita, et

$r(-x) = r(x).$

Mis järgneb siit funktsiooni $r(x)$ graafiku kohta?2^o. Olgu

$k(x) = cx^3.$

Näita, et

$k(-x) = -k(x).$

Mis järgneb siit funktsiooni $k(x)$ graafiku kohta?14. Funktsiooni $f(x)$, millel on omadus, et

$f(-x) = f(x),$

nimetatakse paarisfunktsiooniks.

Funktsiooni $g(x)$, millel on omadus, et

$g(-x) = -g(x),$

nimetatakse paaritufunktsiooniks.

Näita, et esimese funktsiooni graafik on sümmeetriline y -telje suhtes ja et teise graafik on sümmeetriline teljestiku alguspunkti suhtes.

15. Missugused funktsioonid reast

$$(25) \quad x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, \dots$$

on paaris-, missugused paaritufunktsioonid?

Anna ritta kuuluva paarisfunktsiooni üldine avaldis;
— paaritufunktsiooni üldine avaldis.

16. Näita joonisel, et funktsiooni

$$y = x^2 - 4x + 5$$

graafik on sümmeetriline püstsirge suhtes läbi täpi $x=2$.

Sama ülesanne funktsiooni

$$y = 5 - 6x - x^2$$

ja püstsirge kohta läbi täpi $x=-3$.

17. Kui funktsiooni

$$y = f(x)$$

graafik on sümmeetriline sirge $x=a$ suhtes, siis peab

$$f(a-u) \equiv f(a+u).$$

Näita seda graafiliselt.

Leitud samasus annab võrrandi a väärtuse määramiseks (kui niisugune väärtus on olemas).

Leia praeguseletatud viisil püstsirged, mille suhtes on sümmeetrilised järgmiste funktsioonide graafikud:

$$1^0. \quad x^2 - 6x + 7$$

$$3^0. \quad 1 - 6x - 3x^2$$

$$2^0. \quad 5x + x^2$$

$$4^0. \quad 3 - 2x^2$$

Milleks teiseneksid viimased avaldised, kui võtta leitud sümmeetriateljed uuteks y -telgedeks?

18. 1^0 . Näita, et funktsiooni

$$y = \frac{3}{1+x^2}$$

graafik on sümmeetriline y -telje suhtes.

Kuidas võiks seda tõsiasja ära kasutada funktsiooni graafiku joonistamisel?

2°. Näita, et funktsiooni

$$y = \frac{3x}{1+x^2}$$

graafik on sümmeetriline teljestiku alguspunkti suhtes.

Kuidas võiks seda tõsiasja ära kasutada funktsiooni graafiku joonistamiseks?

19. Leia, missugustes piirkondades on määratud allpool antud funktsioonid.

Kujuta iga leitud piirkond iseteljel.

$$1^{\circ}. y = 4x - 7$$

$$5^{\circ}. y = \sqrt{(x-3)(x+5)}$$

$$2^{\circ}. y = (x+1)(x-3)$$

$$6^{\circ}. y = \sqrt[3]{2x-5}$$

$$3^{\circ}. y = \sqrt{3(x-2)}$$

$$7^{\circ}. y = \log(3-x)$$

$$4^{\circ}. y = \sqrt{16-x^2}$$

$$8^{\circ}. y = \log(1-x)^3$$

$$20. \text{ Olgu } f(x) = \frac{3x}{x-2}.$$

Paremal pool võrdusemärgi seisev avaldis määrab funktsiooni $f(x)$ väärtuse igale x -i väärtusele vastavalt, välja arvatud väärtus $x=2$. Miks?

Leia x -i väärtused, mille puhul järgmistel funktsioonidel pole määratud väärtust:

$$1^{\circ}. g(x) = \frac{1}{x}$$

$$5^{\circ}. q(x) = \frac{x^2-4}{x^3+8}$$

$$2^{\circ}. i(x) = \frac{x-2}{x-3}$$

$$6^{\circ}. r(x) = \frac{x-1}{\log x}$$

$$3^{\circ}. h(x) = \frac{1}{x^2-3x-28}$$

$$7^{\circ}. s(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$4^{\circ}. p(x) = \frac{x(x+1)}{x^2-4x-5}$$

$$8^{\circ}. t(x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Harjutis III:

Funktsiooni piiri mõiste lõpmata kahaneva geomeetrilise rea näitel.

1. 1^o. Juuresolev 4. joonis kujutab rea

$$1, q, q^2, \dots, q^n, \dots$$

liikmete järk-järgulist saamist graafilisel teel, kui q asub vahemikus 0 ja 1 vahel.

Põhjenda võte.

Valmista endale samalaadiline joonis näiteks juhuks

$$q = 0,6.$$

Missugusest n -ist peale muutub valmistatud joonisel q^n väärtuse määramine võimatuks q^n väiksuse tõttu?

2^o. Olgu τ mingi vabalt etteantud väike arv (näiteks

$\frac{1}{10}$, või $\frac{3}{1000}$, või 0,000001, või mingi muu väärtus).

Näita, logaritmides $f(n) = q^n$ avaldist, et on võimalik valida muutuja n väärtust nõnda, et oleks

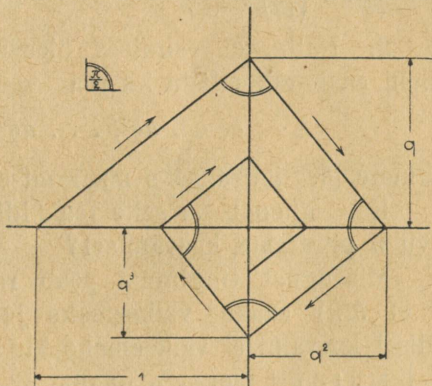
$$f(n) < \tau,$$

s. t. et $f(n)$ langeks alla tõket τ .

Missugust tingimust peab n selleks rahuldama?

Kas jääb nõue $f(n) < \tau$ täidetuks, kui laseme muutujat n edasi kasvada? Miks?

Kas on võimalik nimetada tõket, mis suurem oleks kui null ja alla mille $f(n)$ väärtus ei lange, kui suureks n ka kasvab? Miks?



Joonis 4.

Muutuja n piiramatut või lõpmatut kasvamist kirjutame sümbolsealt kujus $n \rightarrow \infty$; $f(n)$ tõkestamata lähene-mist nullile kirjutame kujus $f(n) \rightarrow 0$.

Märkus. Sümbolit ∞ ei tule mõista arvu tähisena. Vastavalt sellele ei tule mõista sümbolit $n \rightarrow \infty$ nõnda, nagu lähe-neks n millelegi. Sümbol $n \rightarrow \infty$ märgib vaid tõsiasi, et n kasvab üle iga etteantud määra.

Näide. Missugusest n -i väärtusest peale saab ja jääb murd $\left(\frac{11}{17}\right)^n$ väiksemaks kui 0,000043?

2. Näita, et eelmises ülesandes antud konstrukt-siooni saab rakendada ka rea

$$a, aq, aq^2, \dots aq^n, \dots$$

liikmete järk-järguliseks määramiseks.

Kas läheneb ka selle rea üldliige $h(n) = aq^n$ nullile arvu n piiramata kasvamisel?

Missugust tingimust peab rahuldama astmenäitaja n , et $h(n)$ saaks väiksemaks ja jääks ka n -i edas-pidisel kasvamisel väiksemaks kui etteantud suurus τ ?

Näide. Määra n nõnda, et oleks

$$3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^n < 0,000007.$$

3. Valmista, 1. ülesandes antud võtet kasutades, joonis juhuks, et $q > 1$ (võttes näiteks $q = 1,5$).

Mida võib öelda funktsiooni

$$f(n) = q^n$$

käigu kohta muutuja n kasvades?

Missugusest n -i väärtusest peale muutub joonisel q^n määramine võimatuks selle tõttu, et joonise osad ula-tuvad üle paberi ääre?

Olgu T mingi vabalt etteantud suur arv (näiteks 1000, või 3478961, või 9^9 , või mingi muu väärtus). Näita,

logaritmides $f(n)$ avaldist, et on võimalik valida muutuja n väärtust niiviisi, et oleks

$$h(n) > T,$$

s. o. et $h(n)$ ületaks tõkke T .

Missugust tingimust peab n selleks rahuldama?

Kas jääb nõue $h(n) > T$ täidetuks, kui laseme muutujat n edasi kasvada? Miks?

Kas on võimalik nimetada siisugust tõket, üle mille $h(n)$ väärtus ei tõuse, kui suureks n ka kasvab? Miks?

Kuidas tuleb mõista kirjutist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = \infty ?$$

Näide: Missugusest n -i väärtusest alates saab ja jääb $(3,17)^n$ suuremaks kui 8734000?

4. Valmista 2. ülesande joonise põhimõttel joonis rea

$$a, aq, aq^2, \dots aq^n, \dots$$

liikmete määramiseks juhul, et $q > 1$.

Mida võib joonise põhjal oodata suuruse aq^n muutumise kohta n -i piiramatul kasvamisel?

Olgu

$$i(n) = aq^n.$$

Tõesta, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i(n) = \infty.$$

5. Valmista 4. joonise põhimõttel joonis rea

$$1, q, q^2, \dots q^n, \dots$$

liikmete määramiseks juhul $q = 1$.

Võrdle kolme joonist 1., 3. ja 5. ülesandes.

Milles nad erinevad?

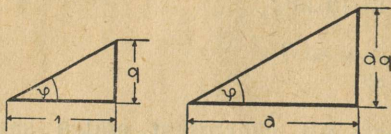
Milles tuleb 1. joonises esile rea koonduvus ja 3. joonises rea hajuvus?

Näide. Kujuta ühes ja samas teljestikus 1. ülesandes seletatud viisil 3 rida, joonistades igaühele vastav murdjoon isevärvis:

$$1^0. \quad 2, \quad 2 \cdot \frac{4}{5}, \quad 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2, \dots$$

$$2^0. \quad 2, \quad 2 \cdot 1, \quad 2 \cdot 1, \dots$$

$$3^0. \quad 2, \quad 2 \cdot \frac{4}{3}, \quad 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2, \dots$$



Joonis 5.

Põhjenda võte.

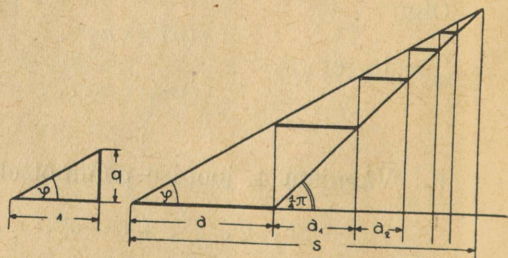
7. Allseisev 6. joonis näitab üht võtet geomeetrilise rea

$$a, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, \dots$$

liikmete järk-järguliseks konstruktsiooniks juhul, et $q < 1$.

Põhjenda võte.

Missugusest n väärtusest peale muutub rea liikmete esindamine joonisel võimatuks liikmete väiksuse tõttu?



Joonis 6.

8. Valmista eelmises ülesandes antud võttele vastav joonis juhiks $q > 1$.

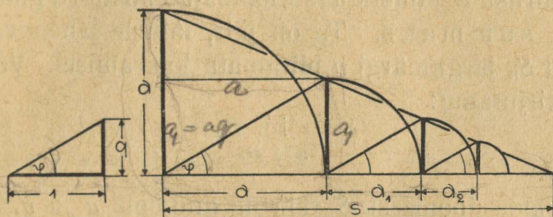
Missugusest n väärtusest peale muutub rea liikmete esindamine joonisel võimatuks liikmete suuruse tõttu?

Milles tuleb meie viimases kahes joonises esile rea koonduvus ja hajuvus?

Valmista samale võttele vastav joonis juhuks $q = 1$.

Milles avaldub selles joonises rea liikmete konstants?

9. Allseisev 7. joonis näitab veel üht võtet geomeetrilise rea liikmete järk-järguliseks konstrueerimiseks juhul, et $q < 1$.



Joonis 7.

Põhjenda võtte.

Näita joonisel geomeetrilise rea osasummad:

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + a_1$$

$$S_3 = a + a_1 + a_2$$

$$\dots$$

Nende osasummade üldavaldis on:

$$S_n = a + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}.$$

Need osasummad moodustavad jada kasvavaid arve.

Miks?

Kas toimub funktsiooni

$$S(n) = S_n$$

kasvamine tõkestamata?

Kui ei, siis kus esineb joonisel $S(n)$ kasvamise tõke?

Olgu selle tõkke tähtsiks S .

Kui lähedale tulevad joonisel osasummad S_n tõk-
kele S , kui aga sammuda jadas

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

küllalt kaugelt?

Mis tähenduses tuleb mõista kirjutist

$$S_n \rightarrow S ?$$

$$n \rightarrow \infty$$

Suurust S nimetatakse lõpmata kahaneva geomeetri-
lise rea summaks. Ta on piir, millele lähenevad osa-
summad S_n järgumärgi n piiramata kasvamisel. Vastavalt
sellele kirjutame:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Avalda joonisest S väärtus andmeis a ja q , kasuta-
des sarnaseid kolmnurki.

Märk $\lim$ on sõna *limes*'e lühendus, mis tähendab piiri.

10. Kujuta graafiliselt S ja S_n käik n -i kasvades,
võttes tarvilikud andmed valmitena eelmisest joonisest.

Missuguse veaga $v_1, v_2, v_3, \dots$ kujutab joonisel suu-
rust S selle lähendus $S_1, S_2, S_3, \dots$?

Mis mõte on kirjutisel

$$v_n \rightarrow 0 ?$$

$$n \rightarrow \infty$$

11. Olgu antud kahanev geomeetiline rida:

$$a, aq, aq^2, \dots aq^{n-1}, \dots$$

On teada, et

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Eelmises ülesandes leidsime S_n kasvamise tõkkena

$$S = \frac{a}{1 - q}.$$

Näita, et vahe

$$S - S_n$$

saab väiksemaks igast arvust τ , kui aga valida n küllalt suur.

12. Valmista 9. ülesande joonise põhimõttel joonis juhtudele, et $q > 1$ ja $q = 1$.

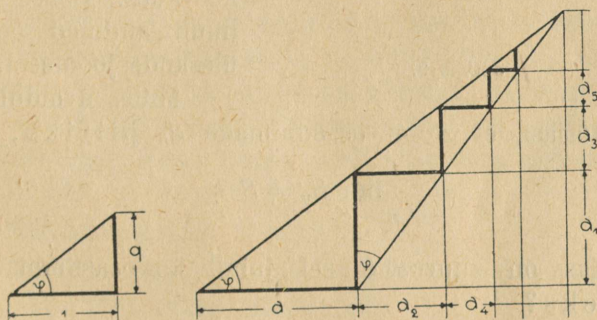
Mida võib öelda neil juhtudel osasummade kohta $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$?

Mis mõttes tuleb mõista kirjutist

$$S_n \rightarrow \infty ?$$

$$n \rightarrow \infty$$

13. Allseisev 8. joonis näitab veel üht teed geometrilise rea liikmete graafiliseks konstruktsiooniks juhiks, et $0 < q < 1$.



Joonis 8.

Põhjenda võte.

Märgi joonisel osasummad $S_1, S_2, S_3, \dots$

Kas need osasummad kasvavad tõkestamata?

Eitaval vastusel näita joonisel osasumma S_n kasvamise tõke.

Kas võib joonisel lugeda tõket S piiriks, millele S_n läheneb arvu n piiramatul kasvamisel? Miks?

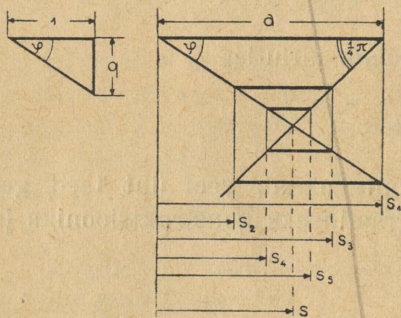
Avalda joonisest S väärtus andmeis a ja q .

14. Allseisev 9. joonis näitab üht teed geomeetrilise rea liikmete graafiliseks konstruktsiooniks juhuks, et q asub -1 ja 0 vahel: $-1 < q < 0$.

Põhjenda võte.

Märgi eriteljel lõikudena osasummad

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$



Joonis 9.

Missugusele lõigule S tulevad nad n -i kasvades ikka lähemale ja lähemale?

Avalda joonisest S väärtus andmeis a ja q .

15. Kujuta graafiliselt S ja S_n kõik n -i kasvades, võttes tarvilikud andmed eelmise ülesande joonisest.

Milles avaldub joonises tõsiasia, et S on osasummade S_n piiriks, sümboolites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S ?$$

Kas on suurus S sel juhul ka osasummade S_n tõkkeks?

16. Jaota lõik l (näit. 250 mm pikk) nõnda, et saadud osad moodustavad lõpmata kahaneva geomeetrilise rea, mille tegur on $\frac{2}{3}$.

17. Pärilikkuseõpetuse järgi omavad lapsed $\frac{1}{2}$ pärilikkudest omadustest oma vanematelt, $\frac{1}{4}$ oma vanemate vanematelt, $\frac{1}{8}$ oma vanemate vanemate vanematelt jne.

Näita, et pärilikkude omaduste kogu mõõtarvu määramine pärilikkuseõpetuse järgi annab tõele vastava tulemuse vaid teatud eeldusel esivanemate põlvede hulga kohta. Missugusel eeldusel nimelt?

18. Kui tähistada tähega t aega sekundites, milleni tühjuses vabalt langev keha on ära käinud kauguse s detsimeetrites, siis on Galilei' seaduse järgi

$$s = 49 t^2.$$

Alt üles paisatud keha, tõustes teatavale kõrgusele, langeb tagasi alla sama aja jooksul, millel enamalt tõusis.

Pingpong-pall kukub tühjuses kõrguselt 30 dm põrandale, hüppab üles 24 dm võrra, langeb tagasi põrandale, hüppab üles 19,2 dm kõrgusele jne.

Kui pika tee käib pall paigalejäämiseni?

Kui kaua kestab palli liikumine?

19. Katse näitab, et õhus võnkuvad kehad iga võnguga ikka vähem ja vähem kaugenevad oma tasakaalu-kohast: võnkude lühenemine on tingitud summutavast mõjust, mida õhk avaldab liikumisele.

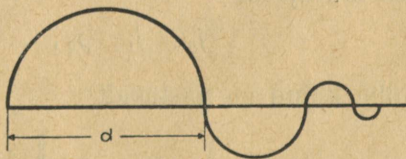
Summutus ei mõjusta aga väikeste võnkude aega: väikesed võngud on isokroonsed (võrdkestvad).

Lühterlamp ripub 10 m pika keti otsas võlvlae all. Põlemasüütamisel viiakse ta püstsihist kõrvale, nii et ta asub kaugusel 1 m tasakaalu-seisukohast, kaugust võnkekaart mööda arvates. Vabanenud pidemest, võngub lühter edasi-tagasi, kaugenedes tasakaalu-kohast järjest kaarte võrra: 0,90 m, 0,81 m, 0,729 m jne.

Kui kaua kestab võnkumine?

Kas on tee, mille lühter piiramatult kasvava aja kestes ära käib, ometi tõkestatud?

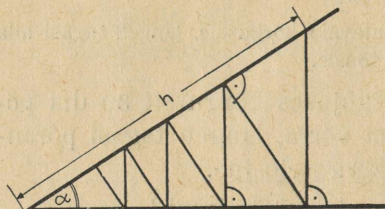
20. Sirgel (joonis 10) võetakse lõik d ja pikendatakse poole võrra sellest; saadus pikendatakse uuesti poole võrra eelkäivast pikendist jne. lõpmata.



Joonis 10.

Lõigul d ja igal tema pikendil ehitatakse poolring, vaheldumisi üks ühele, teine teisele poole sirget. Kui pikk on tekkiv kõverjoon?

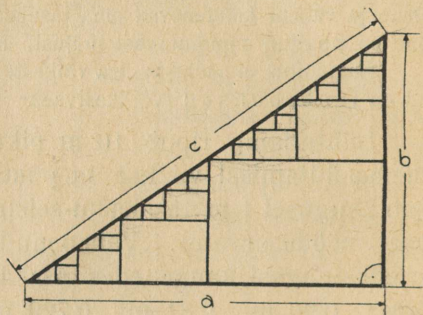
21. On antud nurk a (joonis 11). Ühel tema haaral on võetud lõik h . Selle lõpust on joonistatud perpendikulaar teisele haarale; selle perpendikulaari alusest perpendikulaar esimesele haarale jne. lõpmata. Kui pikk on nõnda tekkinud murdjoon?



Joonis 11.

22. Kui pikk on 1. ülendas joonistatud murdjooneline spiraal?

23. Olgu antud täisnurkne kolmnurk (joonis 12), mille kaatetid on a ja b ja mille hüpotenuus on c . Jaotame hüpotenuusi pooleks ja joonistame jagamistäpest ristjooned kaatetitele. Jaotame hüpotenuusi poolled jälle pooleks ja joonistame poolitajamistäpest jälle ristjooned kaatetitele ning jätkame protsessi samal viisil lõpmata. Nõnda saame lõpmatu rea murdjooni



Joonis 12.

$$j_0, j_1, j_2, \dots j_n, \dots$$

mille kujud on vastavalt



jne.

Olgu viimaste pikkused vastavalt

$$l_0, l_1, l_2, \dots l_n, \dots$$

Näib joonisest, et murdjoon j_n kujutab hüpotenuusi c seda paremini, mida suurem on murdjoone number; näib, et ühes sellega

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = c.$$

Teiselt poolt järgneb murdjoonte $j_1, j_2, \dots j_n, \dots$ konstruktsioonist, et

$$l_0 = l_1 = l_2 = \dots = l_n = \dots = a + b,$$

sellega ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = a + b.$$

Ühes eelmisega annab see võrduse

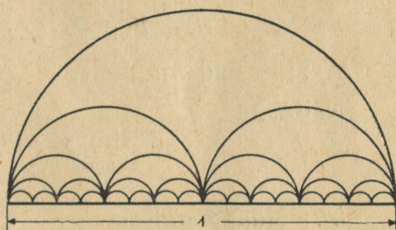
$$c = a + b.$$

Sõnasta tulemus.

Mis on eelmises mõttekäigus õige, mis vale?

Näpunäide. Kujuta arvteljel suurused c ja $l_0, l_1, l_2, \dots l_n, \dots$. Tuleta meelde piiri definitsioon. Arvusta hoolsalt iga sammu eelmises mõttekäigus.

24. Olgu antud lõik, mille pikkus 1. Joonistame sellel lõigul kui läbimõõdul poolringi (joonis 13), läbimõõdu pooltel jälle poolringid, poolte pooltel uued poolringid jne. lõpmata. Nõnda saame lõpmatu rea kõverjooni



Joonis 13.

$$j_0, j_1, j_2, \dots j_n, \dots$$

mille kujud on vastavalt



1^o. Joonisest näib, et kõverjoon j_n kujutab läbimõõtu 1 seda paremini, mida suurem on joone number n ; näib, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = 1.$$

Teiselt poolt saab kergesti arvutada joonte $j_0, j_1, j_2, \dots j_n, \dots$ pikkusi $l_0, l_1, l_2, \dots l_n, \dots$. Üldvalemist l_n jaoks järgneb, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \pi.$$

Miks?

Võrreldes viimast kahte võrdust, leiame, et

$$\pi = 1.$$

Mis ütled sa selle kohta?

Mis on eelmises mõttekäigus õige, mis vale?

2^o. Olgu kõverjoontega

$$j_0, j_1, j_2, \dots j_n, \dots$$

piiratud pinnad vastavalt:

$$p_0, p_1, p_2, \dots p_n, \dots$$

Avalda nad andmeis.

Näita, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0.$$

3^o. Määra summa

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$$

25. Kuulus mõtteteadlane, sofist Zenon (5. sajandil e. Kr.) väitis, et Achilles iialgi ei jõua järele kilpkonnale, kuigi ta liiguks 12 korda suurema kiirusega. Olgu nimelt kilpkonn 1 staadiumi (pikkuse põhimõõt Kreekas) võrra Achilles'est ees. Samal ajal, mil Achilles käib ära selle staadiumi, roomab kilpkonn $\frac{1}{2}$ staadiumi võrra edasi ja on nüüd $\frac{1}{2}$ staadiumi võrra Achilles'est ees.

Ajal, mil Achilles käib ära selle $\frac{1}{12}$ staadiumi, roomab kilpkonn edasi $(\frac{1}{12})^2$ staadiumi ja on nüüd selle $(\frac{1}{12})^2$ staadiumi võrra Achilles'est ees jne. Nii väheneb küll Achilles'e ja kilpkonna vaheline kaugus ikka enam ja enam, aga Achilles kilpkonna kätte ometi iialgi ei saa.

Uuri, milles seisab Zenon'i mõttekäigu viga.

Näpunäide. Märgi joonisel kilpkonna ja Achilles'e liikumise siht ja nende liikumise lähtekohad. Tähistage kuidagi kilpkonna kiirust, avalda selle kaudu Achilles'e kiirus ja määrage aeg ja koht, kus Achilles saab kilpkonna kätte.

Näita edasi, et kilpkonna käidud teed saab arvutada ka otse: ta on

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{12^3} + \dots \text{staadiumi pikk.}$$

Arvuta analoogiliselt selle tee käimiseks tarvitatud aeg.

Missugune eelarvamus nähtavasti viis Zenon'it väitele „iialgi“?

26. Ruutu, küljega a , on sisse kujundatud teine ruut tippudega esimese ruudu külgede keskkohdades; sellesse teise samal viisil kolmas, kolmandasse neljas jne. lõpmata. Kui pikk on kõigi nende ruutude ümbermõõdude summa?

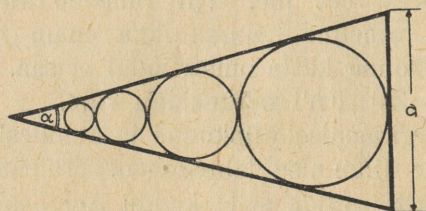
27. Sama ülesanne võrdkülgse kolmnurga kohta, mille külg on a .

28. Sama ülesanne korrapärase kuusnurga kohta, mille külg on a .

29. Ruutu, mille külg on a , on joonistatud ring, sellesse ruut, viimasesse ring jne. lõpmata.

Leia kõigi ruutude pindalade summa, kõigi ringide pindalade summa ja kõigi segmentide summa, mis jäävad ringides järele neisse kujundatud ruutude eemaldamisel.

30. On antud võrdhaarne kolmnurk, mille alus on a ja selle vastasnurk α (joonis 14). Sellesse kolmnurka



Joonis 14.

joonistatakse ring raadiusega r . Edasi joonistatakse teine ring, mis puutub kolmnurga haarasid ja esimest ringi, siis ring, mis puutub kolmnurga haarasid ja teist ringi jne.

lõpmata. Kui suur on kõigi nende ringidega kaetud pindala? Missugune osa kolmnurgast jääb vabaks?

Harjutis IV:

Funktsiooni piiri mõiste: järg.

1. Arenda murd $\frac{1}{3}$ kümnendmurruks ja anna tema lähendid puudusega ja liiaga, veaga alla

1, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001.

Olgu a_n ja b_n kaks murru $\frac{1}{3}$ niisugust lähendit, esimene puudusega, teine liiaga, et

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

Olgu τ mingi väike etteantud arv (näiteks 0,000001, või 0,003, või 0,00876, või mingi muu väärtus).

Kas saab lähendite vahet $b_n - a_n$ suruda alla tõket τ , kui aga n kohaselt valida?

Missugune on väiksem n -i väärtus, mille puhul vahe $b_n - a_n$ asub allpool tõket τ ?

Näita skemaatilisel joonisel, et siis nii a_n kui b_n kujutavad murdu $\frac{1}{3}$ veaga kindlasti väiksemaga kui τ .

Kas see tingimus jääb maksvaks ka veel n -i edaspidisel kasvamisel?

Mis mõttes tuleb mõista kirjutisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{4}{3} ?$$

2. Kujuta graafiliselt murru $\frac{1}{3}$ lähendite a_n ja b_n käik, lähendi järgu n kasvades, mõistes a_n lähendina puudusega ja b_n lähendina liiaga. Graafilisel tööil kasuta tabelit:

n	1	2	3	4	5	...
a_n	0	0,3	0,33	0,333	0,3333	...
b_n	1	0,4	0,34	0,334	0,3334	...

Mitmendal lähendil osutub võimatuks joonisel esile tuua vahet $b_n - a_n$?

Milles avalduvad joonises tõsiasiad, mis väljendatud kolme võrdusega eelmise ülesande lõpus?

3. Määra, kasutades vahemiku poolitamise võtet, $\sqrt{5}$ esimesed 7 lähisväärtust puuduse ja liiaga, veaga vastavalt alla

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{2^3}, \quad \frac{1}{2^4}, \quad \frac{1}{2^5}, \quad \frac{1}{2^6}.$$

Olgu n -es lähend puudusega märgitud a_n , n -es lähend liiaga b_n . Kui suur on nende lähendite vahe $b_n - a_n$?

Näita skemaatilisel joonisel, et vead, millega a_n ja b_n kujutavad arvu $\sqrt{5}$, on väiksemad kui vahe $b_n - a_n$.

Olgu τ vabalt etteantud väike arv. Kui suure peab valima n , et kindel olla, et a_n ja b_n kujutavad mõlemad arvu $\sqrt{5}$ veaga väiksemaga kui τ ?

Kas lähendite vead $\sqrt{5} - a_n$ ja $b_n - \sqrt{5}$ jäävad väiksemaks kui τ , lähendite numbri n edaspidisel kasvamisel?

Mis mõttes tuleb mõista kirjutisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{5} \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{5} ?$$

4. Kujuta graafiliselt eelmises ülesandes leitud lähendite a_n ja b_n käigud lähendite numbri n kasvades.

Mitmendal lähendil osutub võimatuks joonisel esile tuua vahet $b_n - a_n$?

Milles avalduvad joonises eelmise ülesande lõpul märgitud tõsiasiad?

5. Olgu a arvu $\sqrt{A}$ lähend: $\sqrt{A} \approx a$. Siis on $\sqrt{A} = a + a_1$, kus a_1 on lähisväärtuse a parandus. Ruutimine annab $A = a^2 + 2aa_1 + a_1^2$. Kuna parandus a_1 on väike, siis on $A \approx a^2 + 2aa_1$, nii et $a_1 \approx \frac{A - a^2}{2a} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{a} - a \right)$. Olgu viimase murru ümmargune väärtus a_1 . Siis on arv $a_1 = a + a_1$ parem $\sqrt{A}$ lähisväärtus, kui seda oli a . Protsessi jätkates saame järk-järgult ikka paremad $\sqrt{A}$ lähisväärtused:

$$a, a_1, a_2, a_3, \dots$$

Näide. Määra seletatud viisil $\sqrt{13}$ esimesed 6 lähendit $a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

Valmista nende astmik mõõtkavas 1 ühik 10 cm-is.

Kuidas asetuvad joonisel lähenditele $a_6, a_7, a_8, \dots$ vastavad kriipsud?

Ehita joonise mõõtkavas Pythagoras'e lause põhjal $\sqrt{13}$ ja määra vastav lõik astmikul.

Milles avaldub joonises tõsiasi, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{13} ?$$

6. Alljärgnevas tabelis seisab esimeses veerus ringi sisse ja ümber joonistatud korrapärase hulknurga külgede

arv n , teises — ringi sisse joonistatud hulknurga ümbermõõt u_n , kolmandas — ringi ümber joonistatud hulknurga ümbermõõt U_n . Pikkuseühikuks on ringi läbimõõt.

Täida tabel, toimetades arvutusi trigonomeetriliselt 4 kohaga.

n	u_n	U_n
6		
12		
24		
48		
96		

Kujuta murdjoondiagrammi viisil suuruste u_n ja U_n muutumise käigud numbri n kasvades.

Mis n -i väärtusest peale pole võimalik joonises esile tuua vahet $U_n - u_n$?

Väärtuste u_n ja U_n ühist piiri n -i tõkestamata kasvamisel

$$n = 6, 12, 24, 48, 96, \dots$$

loetakse ringi pikkuseks (ringi ümbermõõduks) U .

Arvu π definitsiooni põhjal on

$$U = \pi D.$$

Kui peenelt saame π väärtuse tabeli 1., 2., 3., 4. ja 5. reast?

Moodustame iga tabelirea andmete aritmeetilise keskmise. Missuguse peenusega kujutab viimane π väärtust?

7. Alljärgnevas tabelis seisab esimeses veerus korrapärase hulknurga külgede arv n , teises — ringi sisse joonistatud vastava hulknurga pindala s_n , kolmandas — ringi ümber joonistatud vastava hulknurga pindala S_n .

Pinnaühikuks on ringi raadiusele ehitatud ruut.

Täida tabel, toimetades arvutusi trigonomeetriliselt 4 kohaga.

n	s_n	S_n
6		
12		
24		
48		
96		

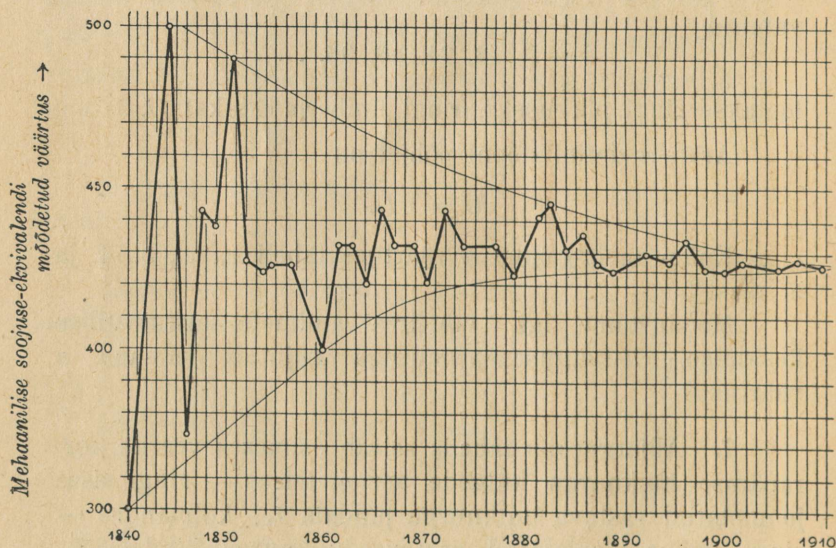
Kujuta murdjoondiagrammi viisil s_n ja S_n muutumise käigud n -i kasvades.

Mis n -i väärtusest peale pole võimalik joonises esile tuua vahet $S_n - s_n$?

Väärtuste s_n ja S_n ühist piiri numbri n piiramatul kasvamisel:

$$n = 6, 12, 24, 48, 96, \dots$$

loetakse ringi pindalaks S .



Joonis 15.

Aeg →

8. Mehaaniliseks soojuste-ekvivalendiks nimetatakse tööhulka kilogramm-meetrites, mis tarvilik kulutada, et saada (hõõrumise, pörke või mõnel teisel teel) 1 suurt kalorit soojust.

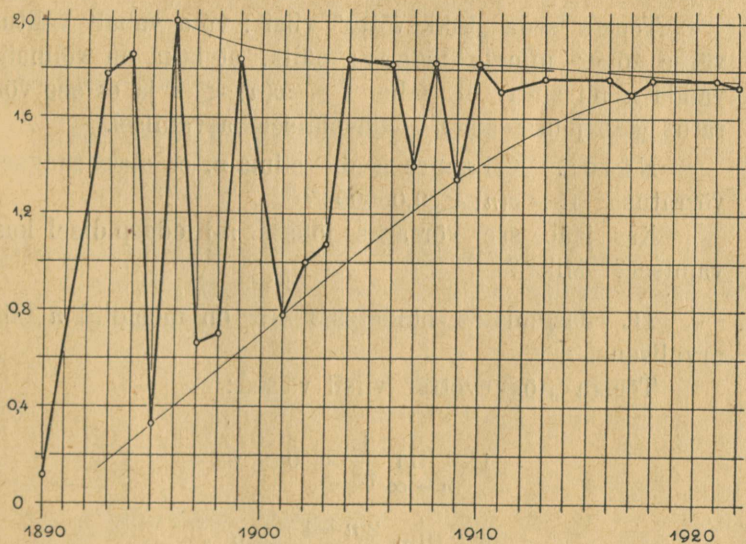
Eelmisel leheküljel seisev 15. joonis kujutab mehaanilise soojuste-ekvivalendi J mõõdetud väärtuste käiku murdjoondiagrammi viisil andmete põhjal, mis saadud a. 1840 kuni a. 1910.

Millega on seletatav J väärtuste kõikumise tunduv kahanemine aja kasvades?

Kas näib joonisest, et J mõõtmisväärtused püüdlevad teatud piirväärtusele?

9. Gaasi aatomid esinevad mõningatel tingimustel laetutena elektriga (näit. Röntgen'i torus, raadiolambis, õhus päikese paistel). Katsed on näidanud, et ühe ja sama gaasi aatomid üht ja sama laengut kannavad; kõige väiksemat laengut e kannab vesiniku aatom. Laengu e ja aatomi massi m suhe $\frac{e}{m}$ on põhjapanevaks suuruseks moodsas füüsikas. Teda mõõdetakse kulonites grammi kohta.

Allseisev 16. joonis kujutab suhte $\frac{e}{m}$ mõõtmisväärtuste käiku murdjoondiagrammi viisil, andmete põhjal,



Joonis 16.

Aeg →

mis saadud a. 1890 kuni a. 1922. Millega on seletatav $\frac{e}{m}$ mõõtmis- ja arvutuste kõikumiste tunduv kahanemine aja kasvades?

Kas näib joonisest, et $\frac{e}{m}$ mõõtmis- ja arvutused püüdleval teatud piirväärtusele?

10. Arvu n muutudes: $n = 1, 2, 3, \dots$ omab avaldis $\frac{n}{n+1}$ järjest väärtused:

$$v_1 = \frac{1}{1+1}, \quad v_2 = \frac{2}{2+1}, \quad v_3 = \frac{3}{3+1}, \quad \dots,$$

nii et avaldise $v_n = \frac{n}{n+1}$ väärtus on n -i funktsioon:

$$v_n = v(n).$$

Valmista funktsiooni v astmik, võttes küllalt suur pikkuseühik, näiteks 100 mm.

Saadud joonisest näib, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v(n) = 1.$$

Tõesta seda „tõkkevõtte“ viisil: võta vabalt valitud väike tõke; nimeta teda τ ; näita, et ikka on võimalik valida n nii suur, et vahe $1 - v(n) < \tau$ ja et see võrratus jääb jõusse ka n -i edaspidisel kasvamisel.

Näide. Kui suure peab valima n , et oleks maksev võrratus: $1 - v(n) < 0,000002$?

Kas jääb see võrratus jõusse n -i edaspidisel kasvamisel? Miks?

11. Järgmistes näidetes 1^0 — 5^0 on mõeldud n täisarvulisena.

Tõesta „tõkkevõtte“ viisil väited:

$$1^0. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$2^0. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$

$$3^0. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$4^0. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+3}{n^2} = 1$$

$$5^0. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}+5}{\sqrt{n}+1} = 1$$

12. Valmista funktsiooni

$$u(n) = \frac{1}{n}$$

astmik, võttes $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Saadud joonisest näib, et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Tõesta seda „tõkkevõtte“ viisil.

Näita, et ka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0,$$

kui a on mingi kindel arv.

13. Nõutagu funktsiooni

$$w(n) = \frac{3n+4}{n+5}$$

piirväärtust n -i kasvamisel üle iga määra: $n = 1, 2, 3, \dots$

Nõutud piirväärtuse hindamiseks jagame murru lugejat ja nimetajat muutujaga n :

$$w(n) = \frac{3 + \frac{4}{n}}{1 + \frac{5}{n}}.$$

Arvu n piiramatul kasvamisel $\frac{4}{n} \rightarrow 0$ ja $\frac{5}{n} \rightarrow 0$;

näib tõenäone, et ühes sellega $w(n) \rightarrow 3$.

Tõesta seda.

Määra praeguseletatud viisil piirväärtused:

$$1^{\circ}. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{1+n} \quad 2^{\circ}. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n-1}{2-5n}$$

14. Olgu meil n galvaanilist elementi, mille klemme pingevahe on 1,8 volti ja seesmine takistus 0,2 oomi. Olgu ahela välisosa takistus 5 oomi. Lülitage elemendid järjestikku. Esimese ja viimase klemmi pingevahe on siis $1,8 \cdot n$ volti, elementide kogutakistus $0,2 \cdot n$ oomi.

Ohm'i seaduse järgi on voolu tugevus ahelas

$$J = \frac{1,8 \cdot n}{0,2 \cdot n + 5}.$$

Kui suur on voolu tugevus väga suure elementide arvu puhul, kui näiteks $n = 100$?

Kas on voolu tugevuse mõttes oluline vahe, kas võtta $n = 1000$ või võtta $n = 1000000$?

Hõlpsam tee eelviimase küsimuse lahendamiseks on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J$$

määramine. Põhjenda võte.

15. Olgu maksvad eelmise ülesande eeldused. Lülitage elemendid paralleelselt. Põhjenda sel puhul maksev valem:

$$J = \frac{1,8}{\frac{0,2}{n} + 5}.$$

Kui suur on voolu tugevus, kui elementide arv $n = 1000$?

Leia vastus lühemal viisil.

16. Olgu optilise läätses fokaalkaugus f , kujutatava eseme kaugus läätsest x , eseme kujutise kaugus läätsest y .

Siis

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}.$$

Avalda siit suurus y kauguse x funktsioonina.

Määra $\lim_{x \rightarrow \infty} y$.

Kas saab seda piirväärtust leida otse, toimetades piirile minekut võrrandis:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \quad ?$$

17. Arenda järgmised murrud kümnendmurdudeks, kuni arendis lõpeb või selgub tema edaspidine koosseis:

$$1^0. \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{8}, \quad \frac{5}{16};$$

$$2^0. \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{1}{2} \frac{2}{5}, \quad \frac{9}{12} \frac{3}{5}, \quad \frac{1}{6} \frac{1}{2} \frac{9}{5};$$

$$3^0. \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{7}, \quad \frac{9}{13}, \quad \frac{8}{21};$$

$$4^0. \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{8}{15}, \quad \frac{1}{1} \frac{1}{4}, \quad \frac{7}{18}, \quad \frac{1}{3} \frac{8}{5}.$$

Missugustesse liikidesse lasevad need arendised endid liigitada?

18. Murru $\frac{1}{3}$ lähisväärtused puudusega on 0 (veaga alla 1), 0,3 (veaga alla 0,1), 0,33 (veaga alla 0,01), 0,333 (veaga alla 0,001) jne.

Näib loomulik mõista lõpmatut kümnendmurdu 0,333 . . . piirina, millele lähenevad arvud

$$0,3 \quad 0,33 \quad 0,333 \dots$$

kümnendkohtade arvu tõkestamatul kasvamisel.

Näita, et tõepoolest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots + \frac{3}{10^n} \right) = \frac{1}{3}.$$

Viimast tõsiasja kirjutatakse lühendatult nõnda:

$$0,333 \dots = \frac{1}{3}.$$

19. Määra järgmised piirväärtused:

$$1^0. \quad 0,777 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \dots + \frac{7}{10^n} \right)$$

$$2^0. \quad 0,363636 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{36}{100} + \frac{36}{100^2} + \dots + \frac{36}{100^n} \right)$$

$$3^0. \quad 0,259259 \dots$$

$$4^0. \quad 0,020202 \dots$$

Kontrolli saadused, arendades need kümnendmurdudeks.

20. Üks viisidest kirjutada lõpmatut perioodset kümnendmurdu on see, et perioodiliselt korduvad märgid antakse sulgudes.

Nii tähendab

$$0,(5) \text{ murdu } 0,555 \dots,$$

$$0,(31) \quad ,, \quad 0,313131 \dots,$$

$$0,2(8) \quad ,, \quad 0,2888 \dots \text{ jne.}$$

Missuguseid piirväärtusi kujutavad sümbolid:

$$1^0. \quad 0,(8) \qquad 5^0. \quad 0,5(72)$$

$$2^0. \quad 0,(45) \qquad 6^0. \quad 0,(06)$$

$$3^0. \quad 0,7(6) \qquad 7^0. \quad 0,4(81)$$

$$4^0. \quad 0,68(5) \qquad 8^0. \quad 0,(714285)$$

Anna iga piirväärtus lihtmurruna.

Kontrolli saadused, arendades need kümnendmurdudeks.

21. Anna üldine reegel lõpmatute kümnendmurdude

$$0,(a) \qquad 0,(ab) \qquad 0,(abc)$$

$$0,u(a) \qquad 0,uv(a) \qquad 0,u(ab)$$

kujutamiseks lihtmurruna.

Sümbolid a , b , c , u , v tähendavad siin numbreid.

22. Näita, et iga murd $\frac{m}{n}$ (kus m ja n on täisarvud) areneb kas lõplikuks või lõpmatuks kümnendmurruks. Viimasel juhul on arendis perioodiline (kas puhtperioodiline või jälle segaperioodiline).

Näpunäide. Arendist andvas jagamisprotsessis on jäägid väiksemad kui jagaja. Sellest järgneb, et nad hakkavad viimaks korduma. Miks?

23. Näita üldiselt, et iga perioodiline kümnendumrd (kas puht- või segaperioodiline) kujutab ikka ratsionaalset arvu.

Näpunäide. Üldisem perioodiline kümnendmurd laseb ennast kirjutada kujus

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots a_m (b_1 b_2 b_3 \dots b_n).$$

24. Tõesta vastuväiteliselt, et ühtki irratsionaalarvu, nagu

$$\sqrt{7}, \sqrt[3]{13}, \log 2,$$

ei saa kujutada perioodilise kümnendmurruna.

Järelda siit, et iga irratsionaalarvu kujutis kümnesüsteemis on ikka lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd ja ümberpöörduvalt.

Harjutis V:

Funktsiooni pidevuse mõiste.

1. Olgu x mingi arv, näiteks 1, või $2\frac{1}{2}$, või 3,7, või 4,91 või mingi muu. Olgu p nende algarvude hulk, mis on $\leq x$: kui $x=1$, $p=0$ (arvu 1 ei loeta algarvuks); kui $x=2\frac{1}{2}$, $p=1$; kui $x=3,7$, $p=2$; kui $x=4,91$, $p=2$ jne.

Arv p on x -i funktsioon.

Kas on p määratud iga x -i jaoks, mis võrdne 1-ga või suurem kui 1?

Valmista funktsiooni $p(x)$ graafik vahemikus $0 \leq x \leq 40$.

Missugustel x -i väärtustel katkeb funktsiooni $p(x)$ käigu kujujoon?

Kui suured on $p(x)$ hüpped arvu x üleminekul algarvulistest väärtustest 2, 3, 5, 7, 11 jne.?

Olgu $x = 11$. Kui suur on $p(11)$?

Olgu h väike murd. Kui suur on $p(11 + h)$ ja

$$\lim_{h \rightarrow 0} p(11 + h)?$$

Kui suur on $p(11 - h)$ ja $\lim_{h \rightarrow 0} p(11 - h)$?

Kui suur on $\lim_{h \rightarrow 0} p(11 + h) - p(11)$?

Kui suur on $\lim_{h \rightarrow 0} p(11 + h) - p(11)$?

Kui suur on $p(11) - \lim_{h \rightarrow 0} p(11 - h)$?

Kas viimased tulemused jäävad maksvaks ka teiste algarvuliste x -i väärtuste puhul, nagu 13, 17, 19 jne.?

Missugune geomeetriline tähendus on kahel viimasel differentsil?

2. Olgu $y(x) = \frac{x}{|x|}$, kui $x \neq 0$.

Anna funktsiooni $y(x)$ määramise piirkond.

Kas on funktsioon $y(x)$ määratud iga x -i väärtuse jaoks? Kui mitte, siis missuguse väärtuse jaoks mitte?

Olgu $y(x) = 3$, kui $x = 0$.

Kas on nüüd $y(x)$ määratud iga x -i väärtuse jaoks?

Välmista funktsiooni $y(x)$ graafik.

Olgu h mingi väike positiivne murd.

Kui suur on $y(+h)$ ja $y(-h)$?

Anna $\lim_{h \rightarrow 0} y(+h)$ ja $\lim_{h \rightarrow 0} y(-h)$ väärtused.

Kui suure hüppe teeb funktsioon $y(x)$ momendil, millel olenematu muutuja x , kasvades, läheb üle väärtusele 0? — momendil, millel olenematu muutuja x , vähenedes, läheb üle väärtusele 0?

3. Tähendagu $t(x)$ täisarvu, mis järgmiselt määratud: kui x on täisarv, on $t(x) = x$; kui x on murdarv, on $t(x)$ arvureas x -i eel seisev täisarv. Nii on

$$\begin{aligned} t(+5) &= +5 & t(-7) &= -7 \\ t(+4,7) &= +4 & t(-2\frac{3}{4}) &= -3. \end{aligned}$$

Teisiti: kui n on täisarv ja $n \leq x < n+1$,
siis $t(x) = n$.

Olgu a üks x -i täisarvulistest väärtustest ja olgu h väike positiivne murd. Määra järjest:

$$t(a-h) \qquad t(a) \qquad t(a+h)$$

$$\text{ja piirid: } \lim_{h \rightarrow 0} t(a-h) \qquad \lim_{h \rightarrow 0} t(a+h)$$

$$\text{ning edasi: } \lim_{h \rightarrow 0} t(a+h) - t(a)$$

$$\text{ja } t(a) - \lim_{h \rightarrow 0} t(a-h).$$

Kui suur on funktsiooni $t(x)$ hüpe, x -i üleminekul väärtustest, mis väiksemad kui a , väärtustele, mis suuremad kui a ?

Kujuta graafiliselt funktsiooni $t(x)$ käik vahemikus $-10 \leq x \leq +10$.

4. Tähendagu n nulli või positiivset täisarvu. Olgu iga x -i jaoks vahemikus

$$\begin{aligned} n &< x \leq n+1 \\ T(x) &= n+1. \end{aligned}$$

Kujuta funktsiooni $T(x)$ käik vahemikus $0 \leq x \leq +10$.

Näita, et $T(x)$ on igal murdarvulisel x -i väärtusel pidev, igal täisarvulisel x -i väärtusel katkev funktsioon.

Näita edasi, et $T(x) = |t(-x)|$, kus $t(x)$ tähendab eelmises ülesandes uuritud funktsiooni.

5. Sõudepaadi üürihind on 25 senti iga tunni või selle osa pealt.

Sõudepaadi üürihind u avaldub sõidukestuse k funktsioonina kujul

$$u = 25 \cdot T(k),$$

kus T tähendab eelmises ülesandes määratud funktsiooni. Põhjenda valem.

Näita, et $u = 25 \cdot |t(-k)|$, kus $t(x)$ tähendab 3. ülesandes uuritud funktsiooni.

6. Pagasi veotariifis leiame Tallinna-Irboska tee-vahe puhul veohinnana 0,61 krooni iga täie või algava 5 kg kohta.

Avalda pagasi veohind v Tallinna-Petseri teevahel kaalu k funktsioonina, kasutades funktsioone $T(k)$ ja $t(k)$, mis on tuttavad 3. ja 4. ülesandest.

7. Lihtkirja saatekulu tariif käib järgmiselt:

„Esimese 20 g pealt 10 senti, iga järgmise 20 grammi või selle osa pealt 5 senti.“

Missugune valem määrab lihtkirja saatekulu s kaalu k vahemikus $0 < k \leq 20$?

Missugune valem määrab selle saatekulu s kaalu puhul $k > 20$?

Näpunäide. Kasuta funktsioone $T(k)$ ja $t(k)$, mis tuttavad 3. ja 4. ülesandest.

8. Postipaki saatekulu tariif käib järgmiselt:

„Kaalul kuni 1 kg 0,5 krooni,

1-st „ 5 „ 1 kroon,

üle 5 kg iga 5 kg või selle osa pealt 1 kroon.“

Anna postipaki saatekulu s kaalu k funktsioonina vahemikkudes

$$0 < k < 1, \quad 1 \leq k \leq 5, \quad 5 < k.$$

Kasuta funktsioone $T(k)$ ja $t(k)$, mis tuttavad 3. ja 4. ülesandest.

9. Kärbeste hulk kärbseid püüdval lindil on katkev aja funktsioon; kooli ruumes viibivate inimeste hulk

on katkev aja funktsioon; Eesti Panga kassaseis sentides on katkev aja funktsioon; riide hind on katkev riide pikkuse funktsioon; rahakaardi saatekulu on katkev saatesumma funktsioon.

Anna 10 uut katkeva funktsiooni näidet.

10. Kujuta ühes ja samas teljestikus vahemikus $0 \leq x \leq 10$ kolme funktsiooni käigud:

$$y_1 = x, \quad y_2 = t(x), \quad y_3 = x - t(x),$$

kus $t(x)$ tähendab x -i täisarvulist osa.

Kuidas saada kahe esimese funktsiooni graafikust kolmanda funktsiooni graafik?

Olgu a mingi x -i täisarvuline väärtus ja h mingi väike positiivne murd.

Moodusta:

$y_1(a-h)$	$y_2(a-h)$	$y_3(a-h)$
$y_1(a)$	$y_2(a)$	$y_3(a)$
$y_1(a+h)$	$y_2(a+h)$	$y_3(a+h)$

ja edasi

$$\lim_{h \rightarrow 0} y_1(a+h) - y_1(a)$$

$$y_1(a) - \lim_{h \rightarrow 0} y_1(a-h)$$

ja samalaadilised avaldised y_2 ja y_3 puhul.

Võrdle tulemusi ja tõlgenda neid joonisel.

Olgu b mingi x -i murdarvuline väärtus.

Määra $\lim_{h \rightarrow 0} y_1(b+h) - y_1(b),$

$$y_1(b) - \lim_{h \rightarrow 0} y_1(b-h)$$

ja analoogilised vahed y_2 ja y_3 puhul.

Tõlgenda tulemusi joonisel.

11. Tähendagu $t(x)$ muutuja x -i täisarvulist osa.

Olgu $x > 0$ ja

$$y = t(x+1) - x.$$

Valmista selle funktsiooni käigu skits.

Uuri saadud kujudjoont pidevuse ja katkevuse suhtes.

12. Olgu $x > 0$. Tähendagu $t(x)$ muutuja x -i väärtuse täisarvulist osa.

Kujuta funktsiooni $y = \frac{t(x)}{x}$ käik vahemikus $\frac{1}{2} \leq x \leq 5$.

Näita, et funktsiooni y graafik on katkev. Määra katkemiskohad ja funktsiooni y hüpete suurus x -i üleminekul viimastest kohtadest.

13. Tähendagu $t(x)$ muutuja x -i väärtuse täisarvulist osa. Olgu $x > 0$ ja

$$y = (-1)^{t(x)} \cdot x.$$

Valmista selle funktsiooni käigu skits.

Kui suure hüppe teeb funktsioon y muutuja x -i üleminekul täisarvulisest väärtusest n ?

14. Olgu

$$y = 2x + 3.$$

Olgu ξ mingi x -i eriväärtus (missugune nimelt, jätame ütle mata). Selle x -i väärtuse puhul on $y(\xi) = 2\xi + 3$.

Olgu h väike murd. Näita, et $\lim_{h \rightarrow 0} y(\xi + h) = y(\xi)$, hoolimata arvu h märgist.

Näpunäide. Moodusta funktsiooni y kasv

$$y(\xi + h) - y(\xi)$$

ja määra vahe $\lim_{h \rightarrow 0} y(\xi + h) - y(\xi)$.

Järelda, et y on pidev x -i eriväärtusel ξ , ja sellega pidev igal x -i väärtusel.

Miks „igal x -i väärtusel“?

15. Olgu $y = x^2$.

Olgu ξ mingi x -i eriväärtus (missugune nimelt, jätame ütle mata). Selle x -i eriväärtuse puhul on $y(\xi) = \xi^2$.

Olgu h väike murd. Näita, et

$$\lim_{h \rightarrow 0} y(\xi + h) = y(\xi),$$

hoolimata murru h märgist.

Järelda, et y on pidev igal x -i väärtusel.

Näpunäide. Funktsiooni y kasvu avaldises $y(\xi + h) - y(\xi)$ võta enne piirile minekut h sulgude ette.

16. Allpool on antud 10 funktsiooni. Tõesta nende pidevus, otsides funktsiooni kasvu ja määrates viimase piiri olenematu muutuja kasvu lõpmatul vähenemisel.

$$1^0. -x + 3$$

$$6^0. ax^2 + bx + c$$

$$2^0. \frac{x}{2} - 1$$

$$7^0. x^3$$

$$3^0. ax + b$$

$$8^0. x^3 - 2x + 1$$

$$4^0. x^2 - x + 2$$

$$9^0. x^3 + x^2 + x + 1$$

$$5^0. 6 - 5x - x^2$$

$$10^0. ax^3 + bx^2 + cx + d$$

17. Olgu $t(x)$ muutuja x -i väärtuse täisarvuline osa. Olgu $x > 0$ ja

$$y = [x - t(x)]^2.$$

Kujuta funktsiooni y kõik x -i muutudes vahemikus $0 < x \leq 5$.

Missugustel x -i väärtustel funktsioon y katkeb? — on pidev?

Tõesta oma väited.

Näita, et funktsioon y on perioodiline.

18. Tõesta järgmiste funktsioonide pidevus igas täpis, milles nad määratud:

$$1^0. \frac{1}{x}$$

$$4^0. \frac{x}{x-1}$$

$$2^0. \frac{1}{2x-3}$$

$$5^0. \frac{x+2}{2x+3}$$

$$3^0. \frac{1}{ax+b}$$

$$6^0. \frac{ax+b}{cx+d}$$

19. Järgmine skeem kujutab funktsiooni

$$y = \sqrt{x}$$

pidevuse tõestust:

Olgu $x = \xi$;

siis $y(\xi) = \sqrt{\xi}$,

$$y(\xi + h) = \sqrt{\xi + h},$$

$$\begin{aligned} y(\xi + h) - y(\xi) &= \sqrt{\xi + h} - \sqrt{\xi} \\ &= \frac{h}{\sqrt{\xi + h} + \sqrt{\xi}}. \end{aligned}$$

Piirile minnes saame:

$$\lim_{h \rightarrow 0} y(\xi + h) - y(\xi) = 0,$$

või
$$\lim_{h \rightarrow 0} y(\xi + h) = y(\xi),$$

olenemata arvu h märgist.

Sõnasta üksikasjaliselt tõestuse käik ja põhjenda iga ta sammu.

Miks peab enne piirile minekut teisendama vahet

$$\sqrt{\xi + h} - \sqrt{\xi} \quad ?$$

20. Tõesta funktsioonide

$$y = \sqrt{1+x} \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

pidevus igal x -i väärtusel, millel funktsioonid määratud.

21. Tähendagu y suuruse $|\sqrt{x}|$ täisarvulist osa, sümboolselt:

$$y = t(|\sqrt{x}|).$$

Kujuta funktsiooni y käik.

Missugustel x -i väärtustel katkeb funktsioon y ?

Kui suur on funktsiooni hüpe neil x -i väärtustel?

Missugustel x -i väärtustel on funktsioon y pidev?
Tõesta oma väide.

22. Tähendagu $t(x)$ suuruse x täisarvulist osa. Olgu $x > 0$ ja

$$y = |\sqrt{x - t(x)}|.$$

Valmista funktsiooni y graafik ja uuri y -käigu kujujoont selle pidevuse ja katkevuse suhtes.

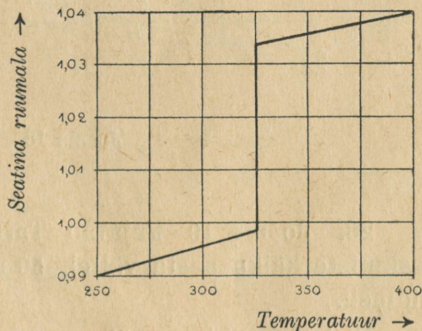
23. Tähendagu $t(x)$ muutuja x -i väärtuse täisarvulist osa. Olgu $x > 0$ ja

$$y = |\sqrt{(-1)^{t(x)} \cdot x}|.$$

Missugustel x -i väärtustel on see funktsioon määratamata?

Valmista selle funktsiooni käigu skits.

Uuri saadud kujujoont pidevuse ja katkevuse suhtes.



Joonis 17.

24. Juuresolev 17. joonis kujutab seatina mahu muutumist temperatuuri muutudes sulamispunkti (327°) ümbruses.

Kirjelda nähtuse käik.

Kui suur on mahu hüpe seatina sulamisel?

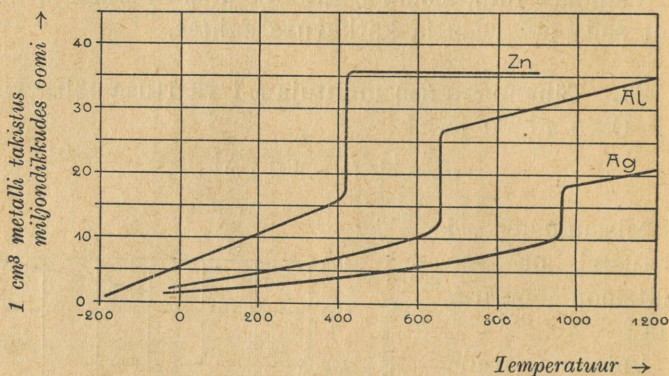
25. Joonis 18 järgmisel leheküljel kujutab elektri- voolu takistuse muutust temperatuuriga kolme metalli puhul: tsink (Zn), alumiinium (Al) ja hõbe (Ag).

Kirjelda nähtuse käik.

Missugune eriline asjaolu tuleb esile iga kolme metalli sulamispunkti juures:

Zn 419°, Al 658°, Ag 961°?

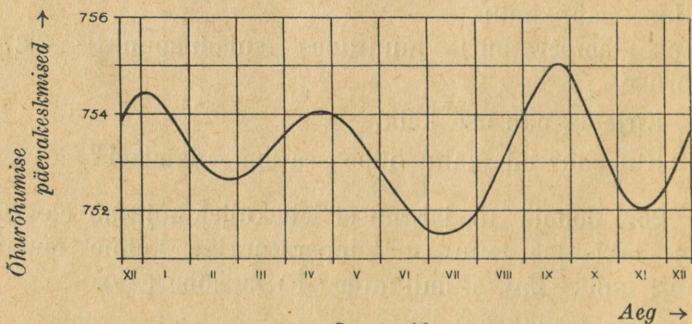
Kui suured on kolme metalli takistuse hüpped?



Joonis 18.

26. Joonis 19 kujutab Tartu õhurõhumise päevakeskmiste käiku aasta vältel, 50 aastat kestnud vaatluste andmeil.

Kirjelda nähtuse käik.



Joonis 19.

Miks esineb graafikul pidev joon, kuna seal ometi peaks esinema treppjoon?

27. Allseisev tabel näitab 100 000 vastsündinud inimesest ellujäänute arvu aja kasvades:

Aeg aastates:	Ellujäänute arv:	Aeg aastates:	Ellujäänute arv:
0	100 000	30	54 454
1	74 727	35	51 815
2	69 876	40	48 775
3	67 557	50	41 228
4	65 997	60	31 124
5	64 871	70	17 750
10	62 089	80	5 035
15	60 892	90	330
20	59 287	100	2
25	56 892		

Kujuta ellujäänute arvu käik graafiliselt.

Missugusena (pidevana, katkevana) esineb joonisel nähtuse käigu kujutis? Miks?

Kirjelda nähtuse käik.

Millega on seletav kõvera järsk langus 1. aastal?

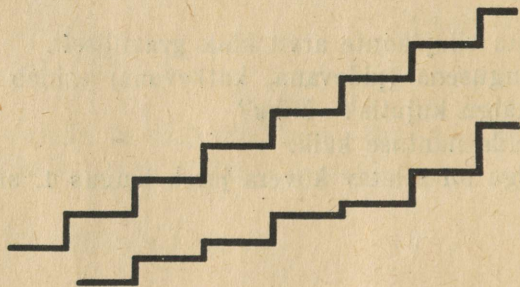
Peatükk II.

Tuletise mõiste.

Harjutis VI:

Ühtlaselt arenevate nähtuskäikude kiirus.

1. Ülemine murdjoontest 20. joonisel kujutab ühtlaselt tõusvat treppi, alumine — mitteühtlaselt tõusvat treppi. Milles trepid erinevad?



Joonis 20.

1^o. Mil korral me nimetame trepi tõusmist ühtlaseks?

Näita, et ühtlaselt tõusval trepil ülessammumisel on nihutused rõht- ja püstsihis võrdelised. Avalda vastav võrdetegur trepi astmete laiuse l ja kõrguse k kaudu.

2^o. Tõesta, et ühtlaselt tõusva trepi joonisel asuvad astmete kujutiste tipud sirgel joonel.

3°. Joonista kaks trepp ühesuguse astmelaiusega, aga erineva astmekõrgusega. Missugune kahest trepist on järsem?

Joonista kaks treppi ühesuguse astmekõrgusega, aga erineva astmelaiusega. Missugune kahest trepist on järsem?

Trepi järskus on iseliiki mõiste; trepi järskust loetakse võrdeliseks trepi astme kõrgusega k ja pöördvõrdeliseks trepi astme laiusega l .

Avalda järskus j suuruste k ja l kaudu.

Trepi järskuse mõõduks võetakse niisuguse trepi järskus, kus astme laius on võrdne astme kõrgusega.

Joonista niisugune trepp. Missuguse nurga ta moodustab rõhttasapinnaga?

Kuidas avaldub üldjuhul trepi järskus j astme laiuse l ja kõrguse k kaudu, kui järskust mõõta praegukirjeldatud mõõduga?

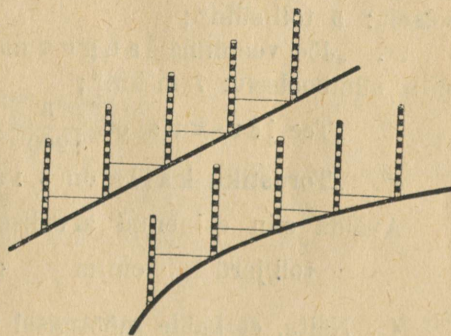
4°. Joonista 5 treppi, mille järskused oleksid vastavalt

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ 1 $1\frac{1}{2}$ 2.

Mis tähenduses tuleb mõista ütlust: „trepi järskus on 19 : 28“?

2. Joonisel 21 on kujutatud kahe mäenõlvaku loodimispildid. Milles pildid erinevad?

1°. Mil korral me ütleksime, et mäenõlvak tõuseb ühtlaselt?



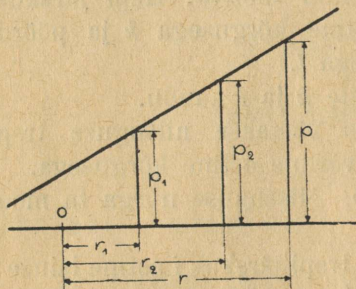
Joonis 21.

Näita, et ühtlaselt tõusval nõlvakul ülessammumisel on nihutused rõht- ja püstsihis võrdelised.

Kuidas saab leida võrdetegurit?

2°. Näita, et ühtlaselt tõusva nõlvaku profiil on sirge joon.

3°. Olgu rõhtkaugustel r_1 ja r_2 (joonis 22) ühtlaselt tõusva nõlvaku kõrgused (püstsihis mõõtes) p_1 ja p_2 . Olgu mingil kaugusel r nõlvaku kõrgus p . Seo arvud r_1 , r_2 , r arvudega p_1 , p_2 , p . Avalda p ja näita, et ta on lineaarne arvust r .



Joonis 22.

4°. Näita, et viimati-leitud valemis r -i juures seisev kordaja mõõdab nõlvaku järskust.

Kuidas on nõlvaku järskus j seotud nurgaga α , mille moodustab nõlvak rõht-tasapinnaga?

Kas on nõlvaku järskus j võrdeline nurgaga α ?

3. Kuidas tuleb mõista järgmisi ütlusi:

1°. „Hüppelaua tõus on 5 tolli sülla kohta, sümbboolselt: 5 toll/süld“;

2°. „Jõe veepinna langus on 7 meetrit kilomeetri kohta, sümbboolselt: 7 m/km“;

3°. „Tee järskus on $\frac{3}{200}$ m/m“;

4°. „Torustiku kalle on 3 : 175“?

Avalda siin esinenud arvulised andmed mõõtudes
toll/jard cm/m cm/arssin.

4. Näita, et kalde mõõtmisel mõõtudes

m/m cm/cm jalg/jalg km/km

on tulemus ikka üks ja seesama.

Kas võib tulemust kirjutada nimeta arvuna?

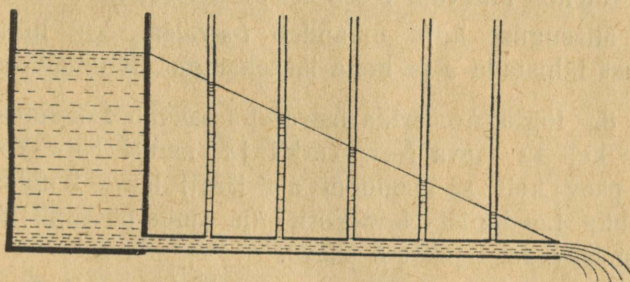
Raudtee ääres seisval tulbal loeme tee kaldena 0,008.

Missuguses mõõdus tuleb viimast annet mõista?

5. Allseisev pilt (joonis 23) näitab voolava vee rõhu vähenemist veevärgi magistraaltorus kauguse kasvamisel, kaugust reservuaarist mõõtes. Kas rõhu vähenemine toimub ühtlaselt? Jaataval korral anna rõhu käiku valitsev seadus, kasutades andmeid: kaugustel l_1 ja l_2 meetrit on rõhk p_1 ja p_2 atmosfääri. Viimase mõõdu sümboliks on at. Ta on võrdne rõhuga 1 kilogramm 1 ruutsentimeetrile.

Missuguses tähenduses tuleb mõista sümbolit at/m?

Millest on tingitud ülalkäsiteldud veerõhu vähenemine kauguse kasvades?



Joonis 23.

6. Suurema kondensaatori pinget hoitakse püsivalt kõrgusel V_0 volti. Kondensaator on ühendatud maaga halva juhtija kaudu. Mõõtes pinget suurust viimase juhtija üksikutes kohtades, leiti järgmine tabel:

Kaugus kondensaatorist m-tes	0	5	8	15	19	20	27	30
Pinge suurus voltides	1500	1250	1100	750	550	450	150	0

Kas pinget vähenemine toimub ühtlaselt kauguse kasvades? Kui suur on pinget langus? Missuguses mõõdus on kohane mõõta seda langust meie juhul?

Avalda seadus, mis määrab pinget V kaugusel l .

Kuidas esineb pinge V kõik graafilises kujutises l - V -tasapinnal?

Tee vastav joonis.

7. Keha liikumist nimetatakse ühtlaseks, kui võrdsetes ajavahemikkudes keha käib ära võrdsed teeosad.

Näita, et sel puhul käidud teeosad on võrdelised nende käimiseks tarvitatud aegadega.

Olgu aegadeks t_1 ja t_2 ära käidud teepikkused s_1 ja s_2 . Asugu keha mingil ajal t kaugusel s kauguste algusest. Avalda kaugus s aja t funktsioonina. Mida näitab saadud valemis muutuja t ees seisev kordaja?

Missuguse kaju omandab t - s -valem, kui liikumise kiirust tähistada v ja keha lähtekaugust tähistada s_0 ?

8. Inglis-Ameerika laevaselts saadab Londonist iga päev kell 12 laeva New-York'i ja samuti New-York'ist iga päev kell 12 (Londoni aja järgi) laeva Londonisse. Sõiduks Londonist New-York'i (ja ümberpöördukt) kulub seltsi laevadel täpsalt 6 päeva.

Leia graafiliselt mitu sõsaraurikut kohtab igaüks neist laevadest oma teekonnal? (Ed. Lucas, 1842—1891.)

9. Kaks autot sõidavad piki sirget teed samas suunas, üks kiirusega 30, teine — kiirusega 40 km tunnis. Autod algavad liikumist ühteaegu; esimene on teisest 60 km ees.

Postituvi algab lendu 1. autolt, ühteaegu sellega; ta lendab 60 km-lise tunnikiirusega esimeselt autolt teisele, sellelt tagasi esimesele, edasi teisele jne., kuni teine auto jõuab järele esimesele.

Mis aegadel ja kus muudab tuvi oma lennu-suunda? (Ch. Laisant, 1841—1920.)

Anna meetod ülesande numbriliseks lahendamiseks.

Lahenda ülesanne graafiliselt, kujutades kahe auto ja tuvi liikumiskäigud ühes ja samas teljestikus.

Kui pika tee lendab tuvi ära ajani, mil teine auto jõuab esimesele järele?

Sama ülesanne juhul, kui autode sõidusuunad on vastupidised.

10. Joonista maksva raudtee-sõiduplaani andmeil rongide käigu graafikud (kõik ühes ja samas teljestikus ja mõõtkavas) teevahede kohta:

1°. Tallinna-Valga; 2°. Tartu-Narva; 3°. Tartu-Petseri.

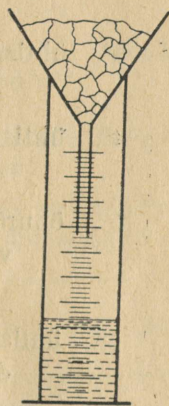
Määra saadud graafikust rongide vahetuskohad ja ajad.

11. Pöorelgu tasapind T kindla telje ümber. Tema seisu ruumis võib märkida igal ajamomendil nurga φ abil, mida ta moodustab teise, teljest läbimineva püsiva tasapinnaga T_0 . Millal me nimetaksime tasapinna T pöörlemist ühtlaseks? Mida võiksime öelda sel puhul nurga φ muutumise laadi kohta aja kasvades?

Olgu t_1 ja t_2 kaks kindlat ajamomenti ja t mingi kolmas. Olgu neile aegadele vastavad nurgad φ_1 , φ_2 ja φ . Avalda nurk φ aja t funktsioonina.

Missugune tähendus on saadud valemis kordajal muutuja t juures?

Olgu ajal $t=0$ pöördenurk $\varphi = \varphi_0$ ja olgu keha nurk-kiiruse tähiseks ω . Kuidas kujuneb neis tähistes t - φ -side?



Joonis 24.

12. Joonisel 24 on kujutatud lehter sulava jääga. Sulamisel tekkinud vee hulga kasvamist ajaga näitab järgmine tabel:

Aeg	11 ^h 24 ^m	11 ^h 44 ^m	12 ^h 04 ^m	12 ^h 24 ^m	12 ^h 44 ^m	13 ^h 04 ^m
Vee hulk g-des	256	271	286	300	315	329

Kas meie juhul saab lugeda sulamiskäiku ühtlaseks protsessiks?

Mil korral me nimetaksime jää sulamiskäiku ühtlaseks?

Mis kiirusega toimub meie näites jää sulamine?

Anna sulamiskäiku valitsev seadus.

Millena kujuneb jää sulamise kiirus sulamiskäigu graafikus?

13. Mis tähenduses tuleb mõista

1°. ühtlase liikumise puhul sümboleid:

km/tund, m/minut, mm/sekund?

2°. ühtlase pöörlemise puhul sümboleid:

kraad/aasta, tiir/minut?

3°. ühtlase voolamise puhul sümboleid:

l/minut, hl/päev, cm³/sekund?

4°. ühtlase paisumise puhul sümboleid:

m/kraad, cm²/kraad, mm³/kraad?

5°. õhurõhu ühtlase langemise puhul (kõrguse kasvades) sümboleid:

mm/km, at/km?

6°. ühtlase pingelangemise puhul kauguse kasvades sümboleid:

Volt/km, Volt/cm?

14. Olgu $y = ax + b$.

Olgu x_1, x_2, x_3 kolm x -i eriväärtust ja y_1, y_2, y_3 neile vastavad y -väärtused. Näita otseselt, et y -kasvud on võrdelised vastavate x -kasvudega.

Pööra lause sõnastus ja tõesta ka pöördlause maksvus.

Kui suur on funktsiooni $y = ax + b$ muutumise kiirus x -i kasvades?

Milles väljendub see kiirus funktsiooni y käigu graafikus?

15. Tõesta lause:

Missugused ühikud ka valida x - ja y -teljel, funktsiooni $y = ax + b$ käigu graafiliseks kujuks on sirge joon.

16. Funktsiooni $y = ax + b$ käigu kujutamisel on valitud mõõtkava järgmiselt:

x -teljel 1 ühik l_x mm-is,
 y -teljel 1 ühik l_y mm-is.

Kui suurena esineb joonisel kalle a ?

Missuguse mõõduga tuleks joonisel mõõta y käigu kujusirge kallet, et saada y kasvamise kiirus kohe õiges suuruses?

Harjutis VII:

Täiendavaid ülesandeid ühtlaselt arenevate nähtuskäikude kohta.

1. Järgmine tabel annab vee keemistemperatuurid t mitmesugustel kõrgustel h üle merepinna:

Kõrgus h meetrites	— 400	— 200	0	+ 200	+ 400	+ 600
Temperatuur t C. kraadides	101,4	100,7	100	99,3	98,7	98,1

Kõrgus h meetrites	+ 800	+ 1000	+ 1200	+ 1400	+ 1600	+ 1800
Temperatuur t C. kraadides	97,4	96,7	96,0	95,3	94,6	94,0

Näita, et t muutub ligikaudu ühtlaselt kõrgusega h .
 Kujuta graafiliselt t käik h muutudes, tasandades vaatlusandmed.

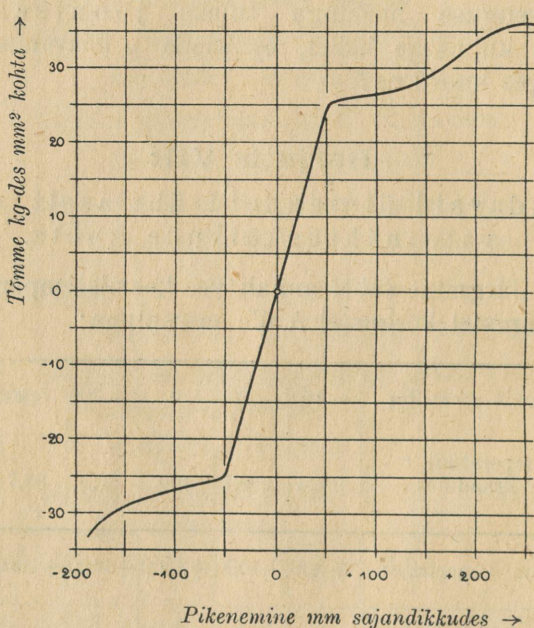
Avalda temperatuur t kõrguse h funktsioonina.

Kui kiiresti muutub temperatuur t kõrguse h kasvades?

Mis tähenduses tuleb meie näites mõista sümbolit kraad/meeter?

2. Ehitusmaterjali (puu, raud, teras, telliskivi jne.) kandejõu ja vastupidavuse proovimine toimub tõmbe-surve-masinas. Katse näitab, et igale tõmbele (ja survele) vastab oma varda pikenemine (lühenemine) ja ümberpöörduvalt.

Joonis 25 näitab, kuidas muutus tõmme, mis oli tarvis rakendada proovitava varda, et saavutada antud pikenemist.



Joonis 25.

Kirjelda üksikasjaliselt nähtuse käik.

Kas on tõmbepiirkondi, kus pikenemine toimub võrdeliselt tõmbega (Hooke'i seadus)? Jaataval korral anna joonisest varda pikenemise kiirus nimetatud tõmbe piirkonnas. Missuguses mõõdus oleks loomulik seda pikendamise kiirust mõõta?

Anna valem varda pikenemise määramiseks olenevuses tõmbest.

3. Õhk rõhub merepinnal üht ruutsentimeetrit ümmarguselt jõuga 1 kilogramm, lühemalt: õhurõhk on 1 atmosfäär (at). Vette süvenemisel kasvab rõhk 1 at võrra iga 10 meetri kohta.

Anna valem rõhu r arvutamiseks, mis valitseb sügavusel s .

Kui suure rõhu all asub tuuker, töötades 10 meetri sügavusel? — töötades 100 meetri sügavusel?

Missuguses tähenduses tuleb mõista sümbolit 1 at/m? Tõlgenda seda „kiirusena“.

4. Nagu vaatlused näitavad, ei ulatu temperatuuri kõikumised maakera kooses sügavamale kui 15 meetrit, kus kogu aasta valitseb ümmarguselt temperatuur 10° . Edaspidisel süvenemisel maakerra kasvab temperatuur ümmarguselt 1 kraadi võrra iga 35 meetri kohta.

Anna valem, mis lubaks arvutada temperatuuri t sügavusel s .

Kuidas kujuneb graafiliselt temperatuuri käik sügavuse kasvamisel?

Mis mõttes kujutab sümbol $\frac{1}{35}$ kraad/meeter nähtusekäigu „kiirust“?

5. Kaardi klišee maksab 6,4 krooni; äratõmbe-kartong ja trükk maksavad kokku 10 senti, kusjuures minimaalseks äratõmmete arvuks on 100. Valmistatakse n äratõmmet ($n > 100$). Nende valmistamiskulu k on arvu n funktsioon. Anna viimase avaldis.

Kuidas kujuneb graafiliselt arvu k käik arvu n muutudes?

Mille „kiirust“ kujutab sümbol 10 sent/tükk?

6. Reservuaaris, mille mõõted (pikkus, laius, kõrgus) on 1, $1\frac{1}{2}$ ja 2 m ja mille põhi asub 10 m kõrgusel, on 250 l vett. Survepump tõstab iga löögiga sinna 5 l vett

juurde. Kuidas tõuseb veepinna kõrgus k (sentimeetrites) lõõkide arvu n kasvades?

Anna k avaldis n -i funktsioonina.

Mis mõttes kujutab sümbol $cm/lõök$ nähtusearenemise „kiirusemõõtu“?

7. Liikugu kelk rõhtsal siledal teel. Et seda liikumist ühtlasena hoida, on tarvis kelgule rakendada tõmme T hõõrumisjõu äravõitmiseks, mis mõjub tee ja kelgujalaste vahel. Katsed näitavad, et tõmbejõu suurus T on teatud murdosa μ kelgu ja temal asuva koorma kaalust K . Avalda tõmme T kaalu K kaudu.

Järgmine tabel annab μ väärtused viie juhu kohta:

1 ^o .	Puust jalased siledal kiviteel, määrdata	μ 0,38
2 ^o .	„ „ „ „ määratud	
	kuiva seebiga	0,15
3 ^o .	Puust jalased siledal kiviteel, määratud	
	rasvaga	0,07
4 ^o .	Puust jalased lumel või jääl	0,04
5 ^o .	Rauast (või rauaga löödud) jalased lumel	
	või jääl	0,02

Missuguses mõõdus on antud μ väärtused?

Mis mõttes võib tõlgendada kordajat μ „kiirusena“?

8. Kuni meetrimõõdustiku maksmahakkamiseni 1. jaanuaril 1929. a. oli kaalu põhimõõduks nael. Kaupmees arvutas $5\frac{7}{8}$ naela saia hinda järgmiselt:

1 nael	24 senti
5 naela	120 senti
$\frac{1}{2}$ „	12 „
$\frac{1}{4}$ „	6 „
$\frac{1}{8}$ „	3 „
$5\frac{7}{8}$ naela	141 senti.

Missugusel kaubahinna omadusel põhineb esitatud arvutusviis?

Mille „kiirust“ kujutab sümbol 24 sent/nael?

9. Olgu 27. augustil s. a. paigutatud pank 257 krooni. Maksu pank hoiusummade pealt 8% aastas. Intresse, mis 257 krooni aasta lõpuks on kandnud, arvutab pangaametnik nõnda:

27. VIII kuni 31. XII on $3 + 4 \cdot 30$ arvestatavat „äripäeva“.

360 päeva jooksul saadakse kroonides $8 \cdot 2,57 = 20,56$ intresse, edasi

90	„	„	4 korda väiksem summa, s. o. . .	5,14 krooni
30	„	„	3 korda väiksem summa, s. o. . .	1,71 „
3	„	„	10 korda väiksem summa, s. o. . .	0,17 „

nii siis 123 päeva jooksul kokku 7,02 krooni

Missugusel intresside omadusel põhineb esitatud arvutusviis?

Mis mõttes kujutab sümbol 20,56 kroon/aasta kapitali kasvamise „kiirust“?

10. Joonis 26 näitab õpilase kasvamiskäiku astmik-kujutusviisil. Kas kasvamine toimub ühtlaselt? Jaataval korral määra kasvamise kiirus.

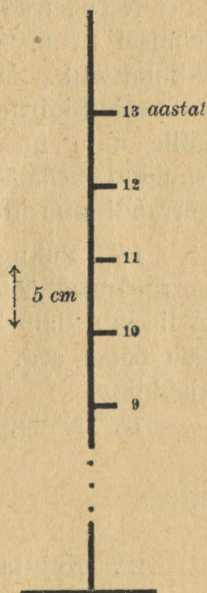
Anna seadus, mis valitseb õpilase kasvamiskäiku.

Missugustes rajades on leitud seadus arvatavasti maksev?

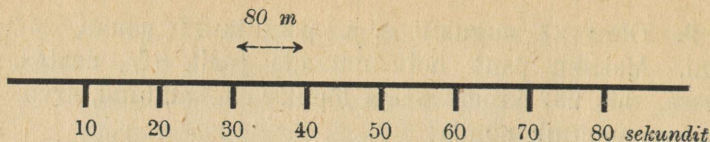
11. Joonis 27 kujutab võidu-jooksja liikumiskäiku astmik-kujutusviisil. Kas jook on ühtlane?

Tuleta astmik-kujutusest liikumiskäigu graafik.

Anna võidujooksja liikumise seadus.



Joonis 26.



Joonis 27.

12. Näita, et lineaarse funktsiooni astmik on mõõtskaalataoline.

Näita, et mõõtskaalataoline astmik ikka kujutab lineaarset funktsiooni.

13. Kirikukella löögid järgnevad üksteisele τ_0 -sekundilise vahega. Heli levib kiirusega c meetrit sekundis. Auto sõidab kirikust mööda kiirusega v meetrit sekundis. Ajavahe τ , mis autosõitja kuuldes möödub ühelt kellalöögilt teisele, on auto kiiruse v funktsioon. Anna selle avaldis.

Näpunäide. Kujuta graafiliselt ühel ja samal joonisel 1., 2., 3., ... löögi heli levimiskäigud ja autosõitja liikumiskäik. Millena esinevad joonisel heli levimise ja auto sõidu kiirused? Avalda joonisest kahel viisil teevahe, millele auto on ära käinud kahe teineteisele järgneva kuuldu kellalöögi vahel. Võrrutades tulemusi, saame võrrandi τ määramiseks.

14. Puhugu tuul piki järve ja pangu selle pinna korrapäraselt õotsuma. Olgu laine pikkus (harjast harjani) λ_0 ja liikugu lainehari kiirusega c . Olgu õõtseperiood, s. o. täie õõtse aeg, märgitud tähega τ_0 . Toimugu n_0 õõtsset ajaühikus.

1°. Näita, et

$$c = n_0 \lambda_0$$

ja

$$n_0 = \frac{1}{\tau_0}.$$

2°. Kujuta graafiliselt hästi suurel joonisel viie üksteisele järgneva laineharja liikumise käik. Kirjelda graafik. Millena esineb graafikus laine levimise kiirus c ?

Märkus. Graafilisel tööl võta meetrites $\lambda_0 = 5$, meeter/sekundites $c = 10$ ja vali ühikud kauguste ja aegade telgedel võrdpikad, näit. 50 mm.

3°. Näita, et graafikus esinevate rööpjoonte vahe rõhtsihis kujutab perioodi τ_0 , rööpjoonte vahe püstsihis — lainepikkust λ_0 .

4°. Seisku järvel paat ankrus (näiteks 1,5 m eemal kauguste nullpunktist). Kujuta eelmisel joonisel paadi „seismiskäik“ aja muutudes, vaadeldes paigalseismist liikumise erijuhuna.

Näita graafiliselt, et paati kohtab igas ajavahemikus just nii mitu lainet, kui neid tekib selles ajavahemikus.

Kui suur on öötseperiood ja kui suur on lainepikkus paadimehe seisukohalt vaadeldes?

5°. Liikugu paat kiirusega v ($v < c$) päri laineid. Kujuta eelmisel joonisel paadi liikumise käik.

Märkus. Graafilisel tööl võta meeter/sekundites $v = 2$.

Märgi joonisel ajavahed τ , mille järel paadi nina kohtab laineharja. Näita, et $\tau > \tau_0$. Märgi joonisel kaugused, mille käivad ära laineharjad ajavahemikkudes τ . Need kaugused on veelaine pikkused λ paadist vaadeldult. Põhjenda seda ja näita graafiliselt, et $\lambda > \lambda_0$.

6°. Kahest täisnurksest kolmnurgast, millel mõlemal on rõhtkaatetiteks τ ja püstkaatetiteks vastavalt λ_0 ning $\lambda - \lambda_0$, saab siduda suurusi λ , λ_0 , c ja v .

Avalda siit suurus λ suuruste kaudu λ_0 , c ja v .

Näpunäide. c ja v esinevad joonisel vastava liikumise käigujoone kaldenurga tangensina.

7°. Avalda λ suurustes λ_0 ja $\frac{v}{c}$.

Missuguse kuju omandab valem juhul, kui v on väike võrreldes c -ga?

8°. Lahenda küsimused 5 kuni 7 juhiks, et paat sõidab vastu laineid. Võrdle tulemusi eelmistega.

9°. Asetame eelmises ülesandes veelainete asemele helilained õhus, paadi asemele auto. Missugustena paistavad helilainete pikkused autos asuvale vaatlejale?

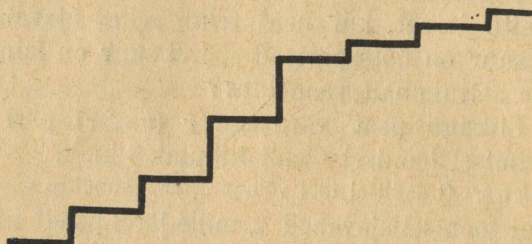
Näide. Andku heliallikas heli õõtsesagedusega $n_0 = 345$ (la-toon); olgu $c = 332$ m/sec, $v = 20$ m/sec. Missuguse toonina märgib selle heli autos sõitev vaatlaja?

Harjutis VIII:

Üldine kiiruse mõiste.

1. Allseisev 28. joonis kujutab ositi ühtlaselt tõusvat treppi. Kui järsud on trepi üksikud osad?

Kujuta järskuse käik.



Joonis 28.

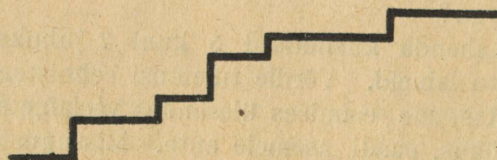
Kas trepi järskus muutub pidevalt? Katkevuse korral anna hüpoteetised asendid ja suurused.

Kui suur on trepi keskmine järskus 1. ja 3., 3. ja 5., 5. ja 7. astme vahel?

Kui suur on kogu trepi keskmine järskus?

Määra trepi keskmine järskus graafiliselt, ehitades kohane sihtkolmnurk.

2. Kui järsk on 29. joonisel kujutatud trepp 1., 2., 3., . . . astme kohal?



Joonis 29.

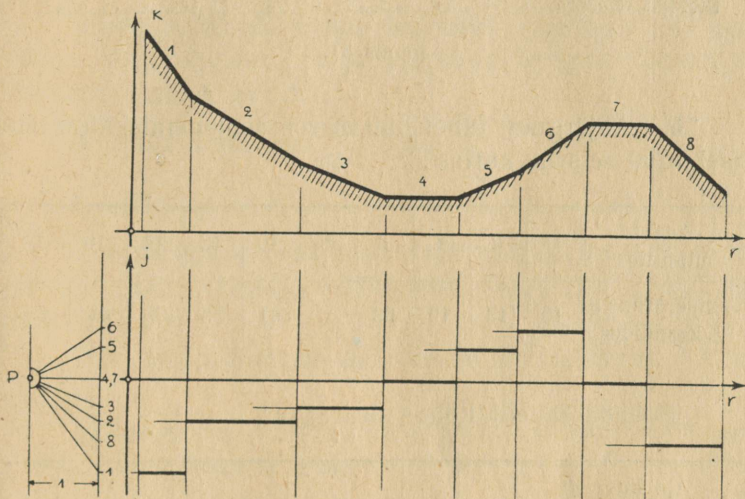
Kas trepi järskus on üks ja sama kogu trepi ulatusel või muutuv astmelt astmele?

Kui suur on trepi keskmine järskus 1. ja 3., 1. ja 4., 2. ja 5. astme vahel?

Kui suur on kogu trepi keskmine järskus?

Arvuta nõutud järskust otse ja enamalt leitud järskustest 1., 2., 3., jne. astme kohal.

Määra nõutud järskus ka graafiliselt.



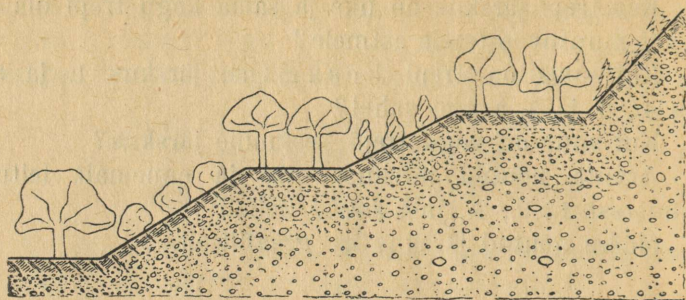
Joonis 30.

3. 30. joonise ülemisel osal on kujutatud liuvälja profiil (s. o. kõrguse k kõik rõhtnihke r kasvamisel); joonise alumisel osal on antud graafiline võtte liuvälja järskuskäigu tuletamiseks.

Põhjenda võtte.

4. Järgmisel leheküljel seisev 31. joonis näitab terrass-aia profiili. Valmista selle koopia suurendatud mõõtkavas, määra profiili üksikosade kalded ja kujuta nende käik, rakendades eelmises ülesandes antud võtet.

Kui suur on profiili keskmine kalle?



Joonis 31.

5. Alljärgnev tabel näitab vee soojenemiskäiku lahtisel tulel seisvas katlas:

Aeg t minutites	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Temperatuur ϑ C. kraadides	10	13	19	33	47	61	75	89	96	100

Täienda tabelit kolme lisareaga:

Aja kasv Δt										
Temperatuuri kasv $\Delta \vartheta$										
Keskmine soojenemiskiirus $\Delta \vartheta : \Delta t$										

Mis ühikutes on kohane mõõta soojenemiskiirust meie näites?

Kujuta üksteise alla paigutatud kahel joonisel 1^o. temperatuuri käik ja 2^o. soojenemise keskmise kiiruse käik aja kasvades.

Kirjelda mõlemad nähtuskäigud.

-6. Alljärgnev tabel annab jõe veepinna kõrguse käigu ajavahes 10. IV kuni 20. V, kõrgust mõõdulati nullpunktist arvates.

Aeg t	10. IV	15. IV	20. IV	25. IV	30. IV	5. V	10. V	15. V	20. V
Veepinna kõrgus h cm-tes	180	204	209	213	207	194	182	167	155

Täienda tabelit kolme lisareaga: aja kasv Δt , veepinna kõrguse kasv Δh ja veepinna kõrguse keskmine muutumiskiirus $\Delta h : \Delta t$.

Kirjelda h -käik ja $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ -käik.

7. Olgu $y = x^2$.

Tähendagu x edaspidises mõttekäigus mingit kindlat olenematu muutuja eriväärtust. Olgu Δx viimase eriväärtuse kasv.

Mis suuruse võrra Δy kasvab y vahemikus x kuni $x + \Delta x$?

Kui suur on funktsiooni y keskmine kasvamiskiirus vahemikus x kuni $x + \Delta x$?

Laseme kasvul Δx omandada järjest vähenevaid väärtusi, niisuguseid, et $\Delta x \rightarrow 0$. Missugusele piirväärtusele läheneb sel puhul murd $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

Piirväärtust, millele läheneb funktsiooni keskmine muutumiskiirus vahemikus x kuni $x + \Delta x$ vahemiku Δx lõpmatul kahanemisel, nimetatakse funktsiooni muutumiskiiruseks olenematu muutuja eriväärtusel x , ehk funktsiooni tuletiseks olenematu muutuja eriväärtusel x .

Funktsiooni x^2 tuletist tähistame $(x^2)'$.

8. Järgmine skeem näitab funktsiooni $y = x^3$ tuletise leidmist. Seleta võtet üksikasjaliselt.

$$\begin{aligned}
 x \dots & y = x^3 \\
 x + \Delta x \dots & y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 \\
 & = x^3 + 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\
 \Delta x \dots & \Delta y = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 \\
 1 \dots & \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3x^2 \cdot \Delta x + 3x \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 & = \frac{\Delta x \cdot [3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2]}{\Delta x} \\
 & = 3x^2 + (3x + \Delta x) \cdot \Delta x \\
 & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 \\
 & (x^3)' = 3x^2.
 \end{aligned}$$

9. Järgmine skeem näitab funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ tuletise leidmist.

Seleta võtet üksikasjaliselt.

$$\begin{aligned}
 x \dots & y = \frac{1}{x} \\
 x + \Delta x \dots & y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} \\
 \Delta x \dots & \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \\
 & = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)} \\
 1 \dots & \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)} \\
 & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2} \\
 & \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.
 \end{aligned}$$

10. Järgmine skeem näitab funktsiooni

$$y = \sqrt{x}$$

tuletise leidmist.

Seleta võtet üksikasjaliselt.

$$\begin{array}{ll} x \dots & y = \sqrt{x} \\ x + \Delta x \dots & y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} \\ \Delta x \dots & \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} \\ 1 \dots & \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}) \cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}) \cdot \Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Miks oli tarvis enne piirile minekut vabaneda irratsionaalsusest lugejas?

11. Olgu $y = f(x)$.

Tähendagu x mingit kindlat olenematu muutuja eriväärtust. Avalda sümboolselt funktsiooni y keskmine kasvamiskiirus vahemikus x kuni $x + \Delta x$.

Avalda sümboolselt funktsiooni y kasvamiskiirus olenematu muutuja eriväärtusel x .

Anna täielik eeskiri funktsiooni tuletise leidmiseks.

12. Määra järgmiste funktsioonide tuletised, käies tuletiseleidmise üldise eeskirja järgi:

1 ^o . $3x$	6 ^o . $5s^2$
2 ^o . $x + 5$	7 ^o . $s^2 - 3s$
3 ^o . $2x - 1$	8 ^o . $s^2 - 5s + 6$
4 ^o . $-u + 2$	9 ^o . $2t^3 - 1$
5 ^o . $1 - \frac{1}{2}u$	10 ^o . $t^3 - 3t + 2$

13. Määra järgmiste funktsioonide tuletised, käies tuletiseleidmise üldise eeskirja järgi:

1 ^o . $\frac{3}{x}$	6 ^o . $\sqrt{2x}$
2 ^o . $\frac{1}{x-1}$	7 ^o . $\sqrt{3x+1}$
3 ^o . $\frac{2}{x+3}$	8 ^o . $\sqrt{x - \frac{1}{2}}$
4 ^o . $\frac{1-u}{u}$	9 ^o . $\sqrt{5(s-1)}$
5 ^o . $\frac{u}{1-u}$	10 ^o . $\sqrt{\frac{s}{2} - 3}$

14. Määra järgmiste funktsioonide tuletised, käies tuletiseleidmise üldise eeskirja järgi:

1 ^o . $x^2 - 2x + 1$	5 ^o . $(x-1)^2$
2 ^o . $2t - 3t^2$	6 ^o . $t(2-3t)$
3 ^o . $\frac{3u+4}{u}$	7 ^o . $3 + \frac{4}{u}$
4 ^o . $\frac{v^2+10}{v}$	8 ^o . $v + \frac{10}{v}$

15. Näita, käies tuletiseleidmise üldise eeskirja järgi, et:

$$1^0. [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$2^0. [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$3^0. c' = 0, \text{ kui } c \text{ on konstant;}$$

$$4^0. [c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \text{ kui } c = \text{konstant.}$$

Sõnasta tulemused.

16. Kirjuta järgmiste polünoomide tuletised, tuginedes eelmises ülesandes leitud tõsiasjadele:

$$1^0. 2x - 7 \qquad 5^0. 1 + 2x - x^2$$

$$2^0. mx + n \qquad 6^0. ax^2 + bx + c$$

$$3^0. b - \frac{b}{a}x \qquad 7^0. x^3 - 4x + 3$$

$$4^0. x^2 - 3x + 1 \qquad 8^0. \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$$

17. Näita, käies tuletiseleidmise eeskirja järgi, et

$$1^0. [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

$$2^0. \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

Tuleta kahest viimasest võrdusest, et

$$3^0. [c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x), \text{ kui } c \text{ on konstant;}$$

$$4^0. \left[\frac{1}{g(x)} \right]' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$$

18. Määra järgmiste, x -ist olenevate funktsioonide tuletised, rakendades praegutõestatud lauseid:

$$1^0. \quad x(x-5)$$

$$5^0. \quad x\sqrt{x}$$

$$2^0. \quad (x-2)(x-1)$$

$$6^0. \quad \frac{1}{1+x^2}$$

$$3^0. \quad (x+3)(x-3)$$

$$7^0. \quad \frac{x^2}{a^2+x^2}$$

$$4^0. \quad x^2(x^2+a^2)$$

$$8^0. \quad \frac{1}{\sqrt{x}}$$

19. On tõsi, et

$$(x^2)' = 2x,$$

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Võib arvata, et $(x^4)' = 4x^3$

ja üldiselt

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Tõesta viimase valemi maksvust täielise induktiooni viisil.

20. 1⁰. Arenda järgmised jagatised:

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a}$$

$$\dots \dots \dots \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Kontrolli tulemusi korrutamise teel.

2⁰. Loe saadud valemeis x konstandiks ja a temale lähenevaks suuruseks. Missugune tähendus on piirväärtustel:

$$\lim_{a \rightarrow x} \frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

$$\lim_{a \rightarrow x} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \dots$$

$$\lim_{a \rightarrow x} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

funktsioonide suhtes

$$y = x^2$$

$$y = x^3 \dots$$

$$y = x^n ?$$

3⁰. Määra ülalseisvad piirväärtused ja kontrolli nende abil ennemleitud valemeid $(x^2)'$, $(x^3)'$, $\dots$ $(x^n)'$ jaoks.

21. Rakendades ennemalt tuletatud valemeid, anna üldise polünoomi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

tuletise avaldis.

Näited. Määra järgmiste polünoomide tuletised:

$$1^0. \quad x^3 - 2x + 1$$

$$2^0. \quad x^5 - 3x^3 + x - 5$$

$$3^0. \quad x^4 - 2x^2 + 1$$

$$4^0. \quad 3x^5 - 2x^3 + x^2 - 7$$

22. Definiitsiooni põhjal on

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Sellest lähtudes näita, et astmefunktsiooni tuletisvalem jääb maksvaks ka negatiivsete täisarvuliste astmenäitajate juhul.

23. Leia järgmiste funktsioonide tuletised, kasutades eelmises ülesandes tõestatud lauset:

$$1^0. \quad \frac{1}{x^2}$$

$$3^0. \quad \frac{1+x}{x^2}$$

$$2^0. \quad \frac{5}{x^3}$$

$$4^0. \quad \frac{1-x^2}{x^3}$$

Harjutis IX:

Kõvera puutuja mõiste.

1. 1⁰. Olgu antud kõver oma võrrandiga

$$y = f(x)$$

ja täpp $P_0(x_0|y_0)$ kõveral. Võta kõveral selle täpi naabruses teine täpp $P_1(x_0 + \Delta x_0|y_0 + \Delta y_0)$. Joonista kõõlsirge, mis läheb läbi mõlema täpi. Kui suur on kõõlsirge tõus?

2^o. Kõvera puutujaks täpis P_0 nimetatakse seda piirsirget, millele läheneb kõõlsirge P_0P_1 , kui täpp P_1 lõpmata läheneb täpile P_0 .

Näita, et puutuja tõus on võrdne funktsiooni y tule-
tisega argumendi eriväärtusel x_0 .

Anna puutuja P_0T võrrand.

2. Olgu antud parabool oma võrrandiga:

$$y = 0,4 x^2.$$

Joonista selle kõverjoone puutujad täpes, mis asuvad vahemikus $-6 \leq x \leq +6$ ja millel on täisarvulised abstsissid. Leia eeskätt puutujate võrrandid.

Töö korralda kindla skeemi järgi.

Täienda joonist parabooliga.

Kas kergendab kõverjoone puutujate tundmine kõvera joonistamist?

3. Leia puutujad järgmistele kõveratele $y = f(x)$ täpis, mille abstsiss on x_0 :

1 ^o .	$y = 0,3 x^2 - 4$	$x_0 = 2$
2 ^o .	$y = 0,1 x^3$	$x_0 = -3$
3 ^o .	$y = x^2 - 2x + 3$	$x_0 = 1$
4 ^o .	$y = 2x^3 - 6x + 5$	$x_0 = 0$
5 ^o .	$y = \frac{1}{x-1}$	$x_0 = 3$
6 ^o .	$y = \frac{3x}{1+x^2}$	$x_0 = 0$

4. On antud kõver

$$y = x^2 - x - 6.$$

Missuguses täpis on kõvera tõus vastavalt

$$(+1) \quad \left(-\frac{1}{2}\right) \quad \left(+\frac{3}{2}\right) ?$$

5. On antud kõver:

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 90x - 18.$$

Missuguses täpis on kõvera tõus 0? — on kõvera tõus (+1)? — on kõvera tõus (−2)?

6. Kus on kõveral

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$$

rõhtsihiline puutuja?

Sama küsimus kõvera kohta

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 10.$$

7. Paraboolil

$$y = ax^2 + bx + c$$

on püstiseisev sümmeetriatelg ja lagitäpis rõhtsihiline puutuja. See märkus annab võimaluse määrata lagitäpi koordinaate ja ühes sellega lagitäpis joonistatud puutuja ja parabooli sümmeetriatelje võrrandit.

Anna lagitäpi koordinaadid ja sümmeetriatelje võrrand ülalseisva parabooli jaoks.

Näita edasi, et nimetatud kahe sirge (lagitäpist joonistatud puutuja ja sümmeetriatelje) valikul koordinaatide telgedeks antud võrrand taandub kujule

$$Y = aX^2.$$

Viimane kuju on eriti soodus parabooli joonistamiseks.

Näited. Joonista allseisvad kõverad, andes eeskätt nende võrrandeile kohane kuju:

$$1^0. \quad y = x^2 - 4x$$

$$3^0. \quad y = 5 + 6x - x^2$$

$$2^0. \quad y = x^2 - 3x - 10$$

$$4^0. \quad y = 15 + 2x - x^2$$

8. Missugused nurgad tekivad paraboolide

$$y = 0,5 x^2$$

$$y = 0,5 x(3 - x)$$

ja

lõikumisel?

9. Missugused nurgad tekivad kõverate

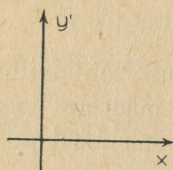
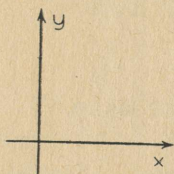
ja

$$y = 0,2x^3 + 6$$

lõikumisel?

$$y = 6 + x - x^2$$

10. Eelmärkus. Käesolevas ülesandes tähendab sümbol $a(x)$ muutuja x absoluutväärtust, sümbol $t(x)$ aga x -i väärtuse täisarvulist osa.



Joonis 32.

Allpool seisab 6 funktsiooniavaldist. Ehita igaühe jaoks tema käigu kujujoon.

Võta igal joonisel uus teljestik xy' nii, et y' -telg asuks y -telje pikendil allapoole (joonis 32).

Lähtudes y' geomeetrilisest tähendusest ja tuletades meelde sirge tõusu graafilist määramisviisi, ehita igale näitele vastavalt y' -käigu kujujoon (vt. asetatavat konstruktsiooni joonisel 30). Missugustel x -i väärtustel katkeb viimane?

$$1^0. \quad y = \frac{x}{a(x)}$$

$$4^0. \quad y = t(x)$$

$$2^0. \quad y = a(x)$$

$$5^0. \quad y = x - t(x)$$

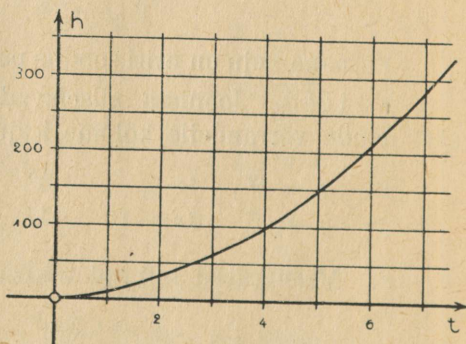
$$3^0. \quad y = x + a(x)$$

$$6^0. \quad y = x \cdot t(x)$$

11. Joonis 33 näitab lennuki kõrguse h käiku ajaga t lennuki õhkutõusmisel. Kirjelda nähtuse käik.

Valmista endale joonise koo-
pia suurendatud
mõõtkavas.

Kõrgus meetrites

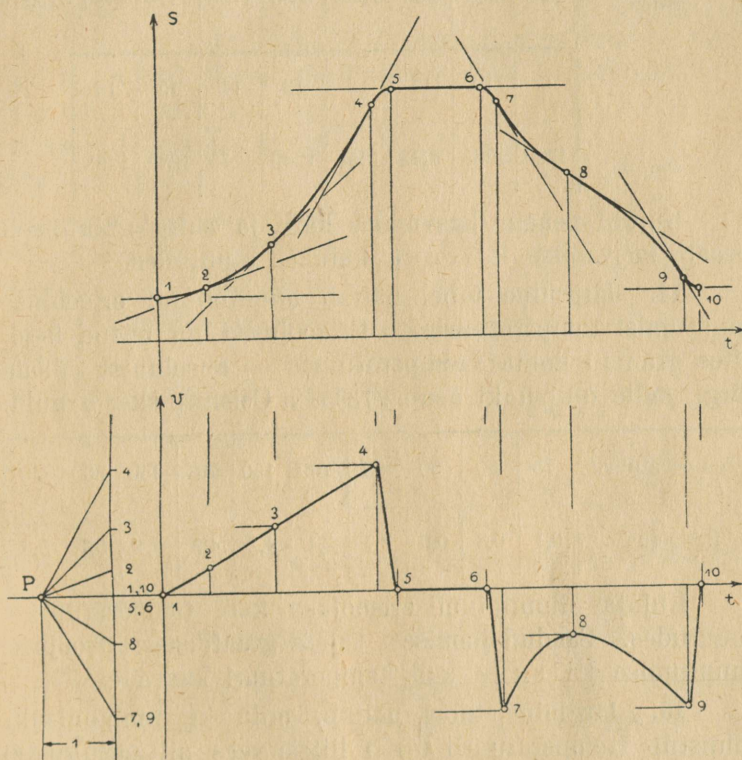


Aeg minutites →

Joonis 33.

Määra graafiliselt lennuki tõusmise kiirused aegadel
1, 2, 3, 4, 5 minutit.

Näpunäide. Kiirus esineb joonisel lennuki kõrguskäigu kujujoone puutuja kaldena.



Joonis 34.

12. Joonis 34 näitab auto liikumiskäiku: joonise ülemine osa annab kauguse s aja t funktsioonina, joonise alumine osa näitab auto liikumise kiiruskäiku. Seleta ja põhjenda võtte, mille abil on alumine joonise osa ehitatud ülemisest lähtudes.

13. Allseisev tabel annab inimese peaaju keskmised kaalud mitmesuguses eas:

Inimese iga aastates	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Peaaju kaal g-des	330	800	945	1050	1095	1148	1170	1180	1205

	9	10	11	12	13	14	15	16
	1220	1235	1248	1253	1260	1275	1282	1295

Kujuta peaaju kasvamise käik ja ehita graafiliselt peaaju kasvamise kiiruse käik ea muutudes.

14. Järgmine tabel näitab alumiiniumi erisoojuse muutumist temperatuuriga. Erisoojused on antud kalories grammi kohta; temperatuurid — absoluutse skaala järgi, mille nullpunkt asub 273° alla Celsiuse skaala nulli.

Temperatuur t	15	30	50	80	100	150	200	250	300	350
Erisoojus c	0,1	0,3	0,9	2,7	3,1	4,2	4,9	5,4	5,7	5,8

Kujuta alumiiniumi erisoojuse käik temperatuuri t muutudes. Saadud joonisest tuleta graafiliselt erisoojuse muutumise kiiruse käik temperatuuri kasvades.

15. Järgmine tabel näitab, mitu kg ammoniaaki lahustub (temperatuuril 0°) 1 liitris vees mitmesugustel rõhkudel:

Rõhk at-des	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
Ammoniaagi hulk kg-des	0,57	0,88	1,23	1,62	2,01

Kujuta ammoniaagi lahustumise käik ja tuleta graafiliselt selle lahustumise kiiruse käik.

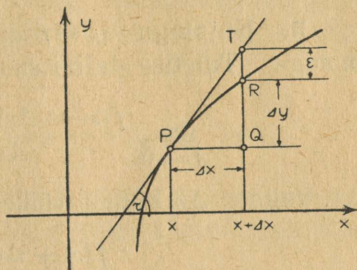
Harjutis X:

Vea arvutamise põhivalemi rakendusi.

1. Joonis 35 kujutab kõverat $y = f(x)$ pidevalt muutuva tõusuga. Avalda Δy suuruste kaudu Δx , $\tan \tau$ ja ε .

Joonista kuju $PQRT$ tunduvalt suuremas mõõtkaavas ja märgi tema rõhtkaatetil rida vähenevaid Δx -väärtusi. Määra igale niisugusele Δx -väärtusele vastavad Δy ja ε .

Leia iga ε jaoks protsent, mille ta moodustab suurusest Δy . Kuidas muutub see protsent Δx vähenedes?



Joonis 35.

Järelda siit, et

$$\Delta y \approx \Delta x \cdot \tan \tau,$$

kus võrdus on täidetud seda täpsamalt, mida väiksem on Δx .

Näita, et leitud valem jääb maksvaks ka teiste kõvera kujude puhul, kui see, mis esitatud joonisel.

Asenda leitud valemis $\tan \tau$ väärtus tuletisega $f'(x)$.

2. Kujutagu $y = f(x)$ kõverat pidevalt muutuva tõusuga. Olgu $P_0(x|y)$ ja $P_1(x + \Delta x|y + \Delta y)$ kaks kõvera täppi. Kui suur on kõõlu P_0P_1 tõus?

Joonista kõvera kaarele P_0P_1 puutuja PT , mis on rööbik kõõluga P_0P_1 . Sirge PT puutetäpi abstsiss asub x ja $x + \Delta x$ vahel, ta on Δx murdosa võrra suurem kui x : puutetäpi abstsiss on $x + \vartheta \cdot \Delta x$, kus $0 < \vartheta < 1$.

Kirjuta puutuja PT tõus funktsiooni $f(x)$ tuletisena. Avalda tingimus $PT \parallel P_0P_1$ algebra keeles valemina ja sõnasta tulemus.

Et $f'(x)$ on oletuse järgi pidev, siis erineb $f'(x + \vartheta \cdot \Delta x)$ vaid vähe $f'(x)$ väärtusest: võrdus

$$f'(x + \vartheta \cdot \Delta x) \approx f'(x)$$

on maksev seda täpsamalt, mida väiksem on Δx .

Järelda varemavaldatud tingimusest ja viimasest märkusest, et

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx \Delta x \cdot f'(x).$$

Sõnasta saadus.

3. Kujutagu $y = f(x)$ kõverat pidevalt muutuva tõusuga. Tuletise definitsiooni põhjal on

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$

s. t. valides Δx küllalt väikese, saame murru

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

nii lähedale $f'(x)$ väärtusele, kui tahame. Järelda siit, et

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx \Delta x \cdot f'(x),$$

kus võrdus on maksev seda täpsamalt, mida väiksem on Δx .

4. Eelmistes ülesannetes tuletatud valemit

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx \Delta x \cdot f'(x)$$

saab lugeda kujul:

„Väikestele argumendi kasvudele vastavad nendega ligikaudu võrdelised funktsiooni kasvud.“

Kui suur on võrdetegur?

Sama valemit võib mõista ka nõnda:

„Küllalt väikestes argumendi vahemikkudes võib funktsiooni $y = f(x)$ lugeda lineaarseks.“

Selgita asja graafiliselt.

5. Toimugu suuruse y määramine valemi kaudu

$$y = f(x),$$

kus x on otsese mõõtmise teel saadav arv. Olgu Δx suuruse x väike mõõtmisviga. Mille võrra see viga Δx mõjustab y arvutamise saadust, s. t. missugune viga Δy tekib y suuruses eksimise tõttu x -i puhul Δx võrra?

6. Ruudu mõõtmisel leiti tema küljena a cm, veaga mitte üle Δa cm. Kui täpsalt saab määrata ruudu pindala S , või teisiti: milleni võib kühündida pindala S määramise viga ΔS ?

Selgita asi joonisel.

Näide. $a = 29,7$; $\Delta a = 0,05$. Määra ΔS .

7. Õhupall, mille läbimõõt on 3,85 m, paisub päikese-paistel läbimõõduni 3,92 m. Mille võrra kasvab seejuures palli ruumala?

Lahenda küsimus eeskätt üldkujul.

8. Poiseuille'i seaduse järgi voolab sekundis läbi jõhvtoru, mille pikkus l ja läbimõõt d , rõhu mõjul p , verehulk

$$q = 0,52 \cdot 10^3 \cdot \frac{p}{l} \cdot d^4,$$

kus q ühikuks on cm^3 , p ühikuks g/cm^2 , l ja d ühikuks cm .

Mille võrra mõjustab sekundilist vooluhulka rõhu-muut Δp ? — toru pikkusemuut Δl ? — toru läbimõõdu-muut Δd ?

Näide. $p = 164$; $l = 10$; $d = 0,02$;
 $\Delta p = 10$; $\Delta l = 1$; $\Delta d = 0,003$.

Määra neile kasvudele vastavad 3 voolumuutu Δq .

9. Kera segmendi ruumala arvutatakse valemi järgi

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h),$$

kus R on kera raadius ja h tähendab segmendi sügavust.

Kui suure vea tekitab segmendi ruumalas raadiuse mõõtmisviga ΔR ? — sügavuse mõõtmisviga Δh ?

Näide. $R = 5,48$; $h = 3,15$;
 $\Delta R = 0,005$; $\Delta h = 0,007$.

Määra viimastele kasvudele vastavad ΔV väärtused.

10. Olgu silindri kannu all teatud hulk gaasi. Olgu tema ruumala rõhul p_0 märgitud tähega v_0 , rõhul p — tähega v . Olgu temperatuur katse vältel muutumatu. Avalda v suuruste kaudu p_0 , v_0 ja p .

Kui kiiresti muutub ruumala v rõhu p kasvades?

Missugune v kasv Δv vastab rõhukasvule Δp ?

Näide. $p_0 = 1$; $v_0 = 3$; $p = 10$; $\Delta p = 0,2$.

Ruumalad on liitrites, rõhud atmosfäärides.

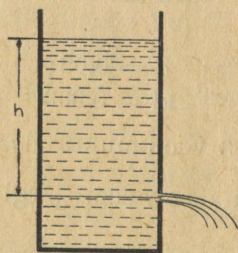
11. Olgu meil 1 l õhku rõhul 760 mm ja temperatuuril 15° . Langegu rõhk 748 mm-ni. Missugust ruumala omab gaas sel rõhul, kui temperatuur jääb endiseks?

Mille võrra muutub viimane ruumala rõhu edaspidisel langemisel 1 mm võrra?

12. Torricelli' seaduse järgi voolab ümmardatud äärtega august sekundis vedelikku

$$Q = S\sqrt{2gh},$$

kus S tähendab augu pindala, g raskuskiirendust ja h vedeliku vaba pinna kõrgust üle augu taseme (joonis 36).



Ühikuteks on: Q puhul cm^3 , S puhul cm^2 , h puhul cm ja g puhul cm/sec^2 .

Mille võrra mõjustab sekundilist vooluhulka vedeliku vaba pinna alamine Δh võrra?

Näide. $S = 3,84$; $g = 981$;
 $h = 200$; $\Delta h = 1$.

Määra ΔQ .

Joonis 36.

13. Tühjuses vabalt langev keha liigub kaugusel s lähtekohast kiirusega

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot s},$$

kus s ühikuks on m ja v ühikuks m/sec .

Mis kiirusega toimub liikumine kaugusel $s = 5$, langemise lähtekohast arvates?

Mille võrra muutub langemiskiirus, kui kaugus s kasvab $0,2$ võrra?

14. Silmapiiri raadius r kilomeetrites, mis vastab vaatekoha kõrgusele h meetrites, on viimase kõrgusega seotud valemi abil

$$r = 3,57 \cdot \sqrt{h}.$$

Mille võrra muutub r kõrguse h kasvamisel Δh võrra?

Näide. $h = 35$; $\Delta h = 1$. Määra r ja Δr .

15. Olgu valguse tugevus kaugusel r_0 valguseallikast märgitud tähega I_0 , — kaugusel r olgu ta I . Kaugused on meetrites, valgusetugevused normaalküünaldes. Avalda I suuruste r_0 , I_0 ja r kaudu, jättes neelumise arvestamata.

Kui kiiresti muutub valgusetugevus kauguse r kasvades?

Missugune I kasv ΔI vastab r -i väikesele kasvule Δr ?

Näide. $r_0 = 1$; $I_0 = 50$; $r = 6$; $\Delta r = 0,1$.

Määra I ja ΔI .

16. Elektri juhtme takistus R on võrdeline juhtme pikkusega l ja pöördvõrdeline juhtme ristlõike pinnaga, seega pöördvõrdeline juhtme läbimõõdu ruuduga. Asja valemiga kirjutades saame:

$$R = c \frac{l}{d^2},$$

kus c on tegur, mis iseloomustab juhtme ainet.

Mil määral mõjustab juhtme takistust väike juhtme pikkusemuut Δl ? — väike juhtme läbimõõdu-muut Δd ?

17. Olgu fotograafia aparaadi fookuse kaugus f eseme kaugus objektiivi optilisest keskkohast x ja plaadi kaugus samast punktist y (joonis 3).

Siis on

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}.$$

Mil määral mõjustab kaugust y eseme nihkumine vaatejoones Δx võrra?

Näide. $f = 4,5$; $x = 400$; $\Delta x = 1$. Määra Δy .

18. Tahetakse valmistada ruutmeetri mudel. Tingimuseks on, et viga ei ületaks 1 cm^2 . Missugune on mudeli serva lubatava vea ülemmäär?

Kas on võimalik tingimusele vastav mudel valmistada papist?

19. Tahetakse valmistada kuubilist liitermõõtu. Valmistatud nõu ruumala viga ei tohi ületada $0,0005 \text{ l}$. Missugune viga on lubatav nõu seesmise serva puhul?

Kas on võimalik valmistada nõuet rahuldav liitermõõt karedast raudplekist?

20. Kui täpsalt peaks mõõtma võrdkülgse kolmnurga külge a , kui soovitakse arvutada tema pinda S veaga alla ΔS ?

Näide. $a = 15,6$; $\Delta S = 0,004$. Määra Δa .

21. Kui peenelt peaks võtma $\sqrt{2}$, et saada $(\sqrt{2})^3$ veaga alla $0,001$?

22. Kui peenelt peaks võtma π väärtuse, et saada $\sqrt{\pi}$ veaga alla $0,005$?

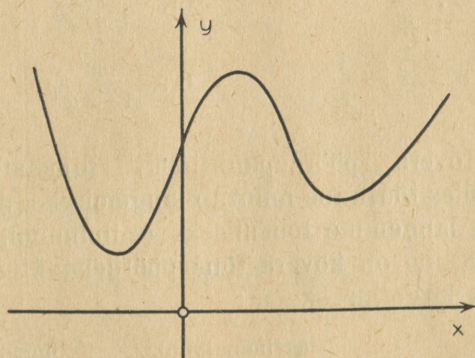
Harjutis XI:

Tuletise mõiste rakendamine funktsiooni käigu uurimisel.

1. Joonis 37 näitab kõverat, mis kohati tõuseb, kohati langeb. Joonista sellesarnane kõver ja võta temal

esiteks rida täppe, milles kõver tõuseb, teiseks rida täppe, milles kõver langeb. Joonista võetud täpes kõvera puutujad. Saadud joonise põhjal täida tabel:

Kõvera käik	Kõver tõuseb	Kõver langeb
Puutuja ja x -telje vaheline nurk (terav või nüri)		
Puutuja tõusu märk (+ või -)		



Joonis 37.

Sõnasta tabelis avaldatud lause, lugedes tabelit ülevalt alla.

Kas on maksev ka lause, millele jõuame, kui loeme tabelit alt üles? Sõnasta vastav lause.

Sõnasta kõvera tõusmise ja langemise tunnused.

Tõlgi tabel algebra keelde, märkides kõvera võrandi $y = f(x)$.

Sõnasta funktsiooni $f(x)$ kasvamise ja vähenemise tunnused.

17. Olgu fotograafia aparadi fookuse kaugus f , eseme kaugus objektiivi optilisest keskkohast x ja plaadi kaugus samast punktist y (joonis 3).

Siis on

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}.$$

Mil määral mõjustab kaugust y eseme nihkumine vaatejoones Δx võrra?

Näide. $f = 4,5$; $x = 400$; $\Delta x = 1$. Määra Δy .

18. Tahetakse valmistada ruutmeetri mudel. Tingimuseks on, et viga ei ületaks 1 cm^2 . Missugune on mudeli serva lubatava vea ülemmäär?

Kas on võimalik tingimusele vastav mudel valmistada papist?

19. Tahetakse valmistada kuubilist liitermõõtu. Valmistatud nõu ruumala viga ei tohi ületada $0,0005 \text{ l}$. Missugune viga on lubatav nõu seesmise serva puhul?

Kas on võimalik valmistada nõuet rahuldav liitermõõt karedast raudplekist?

20. Kui täpsalt peaks mõõtma võrdkülgse kolmnurga külge a , kui soovetakse arvutada tema pinda S veaga alla ΔS ?

Näide. $a = 15,6$; $\Delta S = 0,004$. Määra Δa .

21. Kui peenelt peaks võtma $\sqrt{2}$, et saada $(\sqrt{2})^3$ veaga alla $0,001$?

22. Kui peenelt peaks võtma π väärtuse, et saada $\sqrt{\pi}$ veaga alla $0,005$?

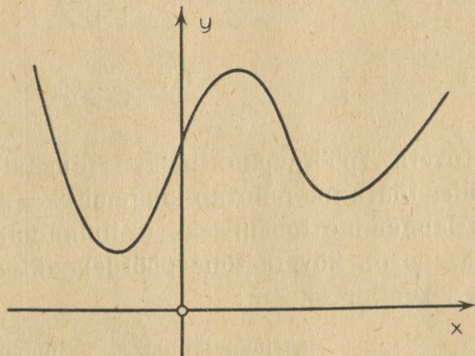
Harjutis XI:

Tuletise mõiste rakendamine funktsiooni käigu uurimisel.

1. Joonis 37 näitab kõverat, mis kohati tõuseb, kohati langeb. Joonista sellesarnane kõver ja võta temal

esiteks rida täppe, milles kõver tõuseb, teiseks rida täppe, milles kõver langeb. Joonista võetud täpes kõvera puutujad. Saadud joonise põhjal täida tabel:

Kõvera käik	Kõver tõuseb	Kõver langeb
Puutuja ja x -telje vaheline nurk (terav või nüri)		
Puutuja tõusu märk (+ või -)		



Joonis 37.

Sõnasta tabelis avaldatud lause, lugedes tabelit ülevalt alla.

Kas on maksev ka lause, millele jõuame, kui loeme tabelit alt üles? Sõnasta vastav lause.

Sõnasta kõvera tõusmise ja langemise tunnused.

Tõlgi tabel algebra keelde, märkides kõvera võrandi $y = f(x)$.

Sõnasta funktsiooni $f(x)$ kasvamise ja vähenemise tunnused.

2. Anna iga järgmise funktsiooni jaoks vahemik, milles funktsioon kasvab ja milles ta kahaneb. Kujuta need vahemikud iga funktsiooni puhul iseteljel.

$$1^0. \quad 2x - 3$$

$$2^0. \quad -1,7x + 3,5$$

$$3^0. \quad x^2$$

$$4^0. \quad 4 - x^2$$

$$5^0. \quad 2x - x^2$$

$$6^0. \quad x(x - 5)$$

$$7^0. \quad x^3$$

$$8^0. \quad x(x^2 - 12)$$

3. Sama ülesanne funktsioonide kohta:

$$1^0. \quad 0,6 \cdot |\sqrt{x}|$$

$$4^0. \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$$

$$2^0. \quad \frac{1}{x}$$

$$5^0. \quad \frac{1}{1+x^2}$$

$$3^0. \quad x - \frac{1}{x}$$

$$6^0. \quad \frac{x}{1+x^2}$$

4. Kõvera pöördepunktideks nimetatakse neid punkte, milles tõusmine muutub langemiseks (maksimumipunkt) või langemine tõusmiseks (miinimumipunkt).

Missugune on kõvera tõus pöördepunktis?

Täida järgmine skeem:

Maksimumipunkt:

Miinimumipunkt:

Tõusu märk enne pöördepunkti		
Tõusu väärtus pöördepunktis		
Tõusu märk peale pöördepunkti.		

Sõnasta funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnused.

5. Näita, et lineaarsel funktsioonil ei ole pöördepunkte.

6. Järgmine skeem näitab funktsiooni

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$$

pöördepunktide uurimist.

Selgita iga sammu.

Skeemis esinev sümbol h tähendab kuitahes väikest murdu.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$

$$6x^2 - 6x - 36 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x_1 = -2; x_2 = +3.$$

$$f'(x) = 6 \cdot (x + 2) \cdot (x - 3)$$

	$x_1 = -2$	Märk	$x_2 = +3$	Märk
$f'(x - h)$	$6 \cdot (-h) (-5 - h)$	+	$6 \cdot (5 - h) (-h)$	-
$f'(x)$	0		0	
$f'(x + h)$	$6 \cdot (+h) (-5 + h)$	-	$6 \cdot (5 + h) (+h)$	+

$x_1 = -2$ annab maksimumi,

$x_2 = +3$ „ miinimumi.

7. Määra järgmiste funktsioonide pöördepunktid:

$$1^0. \quad x^2 + 2x - 3$$

$$5^0. \quad x^3 - 3x + 1$$

$$2^0. \quad x^2 - 7x + 12$$

$$6^0. \quad 2x^3 - 12x^2 + 7$$

$$3^0. \quad 5 + 12x - x^2$$

$$7^0. \quad x^3 - 12x^2 + 36x - 15$$

$$4^0. \quad 3x^2 - 24x + 5$$

$$8^0. \quad x^3 - 9x^2 + 15x + 1$$

8. Uuri, kas on järgmistel funktsioonidel pöördepunkte:

$$1^0. \quad x^3 + 3x - 11$$

$$2^0. \quad x^3 + 2x^2 - 6$$

$$3^0. \quad x^3 + x^2 + x + 1$$

$$4^0. \quad x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 13$$

9. Leia arv, mis ületaks oma ruudu maksimaalse suuruse võrra.

10. Jaota õik $2a$ kahte ossa nõnda, et nendele ehitatud ristkülik oleks maksimaalse pinnaga.

11. Töö T , mis saadakse 1 kuupjala söegaasi ja x kuupjala õhu segu plahvatamisel, avaldub kujul:

$$T = 83x - 3,2x^2.$$

Missugune söegaasi ja õhu segu on kõige tulusam põletamiseks plahvatusmootoris?

12. Näita, et

1^o. kõigist ristkülikuist ühe ja sama übermõõduga u — ruudul on maksimaalne pind;

2^o. kõigist ristkülikutest ühe ja sama pinnaga S — ruudul on minimaalne übermõõt.

13. Põhjenda järgmised väited:

1^o. Argumendi x väärtused, millel korrutis

$$\text{konst} \cdot f(x)$$

saab ekstremaalse (s. t. äärmise) väärtuse, on samad, millel niisuguse väärtuse saab $f(x)$;

2^o. argumendi x väärtused, millel jagatis

$$\frac{\text{konst}}{f(x)}$$

saab ekstremaalse väärtuse, on samad, millel niisuguse väärtuse saab $f(x)$;

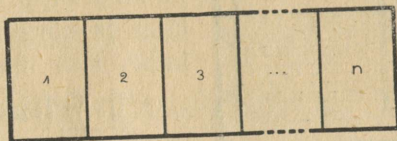
3^o. argumendi x väärtused, millel $\sqrt[n]{f(x)}$ saab ekstremaalse väärtuse, on samad, millel niisuguse väärtuse saab $f(x)$.

Mis mõttes võimaldavad need laused lihtsustada ekstreemum-ülesannete lahendamist?

14. Olgu antud ristküliku übermõõt u . Ehita ristkülik nõnda, et tema diagonaali pikkus oleks minimaalne.

15. Leia kõigist kolmnurkadest pinnaga S see, millel on minimaalne aluse ja kõrguse summa.

16. Kanakasvataval on u (jooksvat) meetrit traatvõrku. Ta tahab valmistada riskülikutaolise kana-aia, mis jaguneks n võrdsesse ossa (joonis 38). Kuidas tuleb valida aia mõõted, et tema alla langev pind oleks maksimaalne?



Joonis 38.

17. Võrdhaarse kolmnurga alus on 18 cm pikk, kõrgus 15 cm. Kujuta kolmnurka riskülik maksimaalse pinnaga nii, et üks risküliku külgedest asuks kolmnurga alusel.

18. Inglismaale saadetavate postipakkide mõõted on piiratud inglise postimäärusega, mille järgi paki pikkuse ja vöö summa ei tohi ületada 6 jalga.

Missugused mõõted on ruudulise läbilõikega suuri-
mal karbil, mida veel saab saata Inglismaale, eelmist
määrust silmas pidades?

19. Koogikarpide tegijal on tagavaraks kartongilehed mõõdetega 30×14 tolli. Karbi valmistamisel lõikab ta lehe nurkadest ruudud ja painutab ülejääva osa karbiks. Kuidas peab valima eemaldatavate ruutude küljed, et karp saaks maksimaalse ruumalaga?

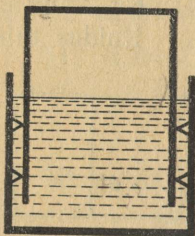
20. Soovitakse valmistada 100-liitriline risttahuka-
kujuline akvaarium ruudukujulise alusega. Kuidas tuleb
valida ta mõõted, et

1^o. nõu kallim osa, punasest vasest servad, maksaks võimalikult vähe?

2^o. peegliklaasist põhi ja külgpind tuleksid võimalikult odavad?

21. Gasomeeter on silindrikujuline anum (joonis 39), mis oma põhjaga on pöördud ülespoole ja lahtise osaga

kastetud vette. Olgu ta ruumala V . Kuidas peab valima gasomeetri kõrguse ja läbimõõdu, et tema valmistamiseks kuluks miinimum materjali?



Joonis 39.

22. Aken koostub ristkülikust ja sellele asetatud poolringist. Tema ümbermõõt on p . Kuidas tuleb valida akna laius ja kõrgus, et läbilastav valgusehulk oleks maksimum?

23. Raamatu leheküljele soovitakse mahutada teksti $S \text{ cm}^2$ ja jätta ümber selle $l \text{ cm}$ laiad ääred (joonis 40). Missugused mõõted peavad olema lehel, et raamatuks kuluva paberi hulk oleks minimaalne?

24. 1°. Missugune kõvera $y^2 = 4x$ täppidest asub täpile $(10|0)$ kõige lähemal?

2°. Anna selle sirge võrrand, mis puutub kõverat $y^2 = 4x$ leitud täpis.

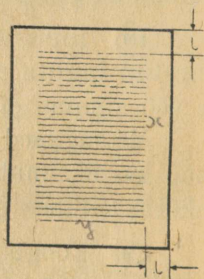
3°. Näita, et lõik, mis kujutab minimaalset kaugust täpilt $(10|0)$ kõverale $y^2 = 4x$, seisab leitud puutujal risti.

4°. Valmista asjast täppis joonis.

25. Leia minimaalne kaugus täpilt $(4|0)$ kõverale $y^2 = x^3$.

Näita, et nõutud kaugust kujutav lõik seisab risti puutujal, mis joonistatud kõverale lõigu otsas.

Valmista asjast täppis joonis.



Joonis 40.

Peatükk III.

Polünoomide numbriline käsitlemine.

Harjutis XII:

Horner'i skeem.

1. Tähendagu sümbol $(675)_8$ arvusüsteemis, mille alus on 8, arvu $6 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 5$. Tema väärtuse arvutamiseks kümnesüsteemis peenendame 2. järgu liitühikud 1. järgu liitühikuteks; see annab $8 \cdot 6 = 48$; ühes 7 liitühikuga 1. järgu saame kokku 55; need peenendame liitühikuteks ja lisame viimased 5; nii tuleb $8 \cdot 55 + 5 = 440 + 5 = 445$. Arvutusi otstarbekohaselt korraldades saame tabeli:

2. j. liitühikud	1. j. liitühikud	liitühikud
6	7	5
.	48	440
Kogusummas: 6	55	445

Tähendab:

$$(675)_8 = (445)_{10}.$$

Samal viisil arvuta sümbolite

$$(1111)_7 \quad (2345)_6 \quad (432)_5 \quad (101001)_2$$

väärtused kümnesüsteemis.

Esitatud arvutusviis kannab Horner'i skeemi nime. Ta on numbrilise arvutamise tähtsamaid skeeme.

2. Rakenda eelmises ülesandes esitatud mõttekäik juhul

$$6x^2 + 7x + 5$$

x -i eriväärtustel

$$9 \quad 12 \quad 13 \quad 20$$

ja juhul

$$x^2 - 5x + 6$$

x -i eriväärtustel

$$-3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4.$$

3. Anna Horner'i skeemid järgmiste polünoomide arvutamiseks x -i eriväärtusel a :

1. astme polünoom	$p_1(x)$	$c_1x + c_0$
2. " "	$p_2(x)$	$c_2x^2 + c_1x + c_0$
3. " "	$p_3(x)$	$c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x + c_0$
.		
n . " "	$p_n(x)$	$c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$

Veendu, et Horner'i skeemis joone all viimasel kohal seisev arv tõepoolest kujutab polünoomi $p(x)$ väärtust x -i eriväärtusel a .

4. Arvuta Horner'i skeemi abil polünoomi

$$y = x^2 - 4x - 3$$

väärtused vahemikus $-3 \leq x \leq +6$, andes x -ile täisarvulised väärtused.

Missuguses vahemikus polünoom kasvab? — kahaneb?

Kus asub tema kasvamise pöördepunkt?

Kujuta polünoomi kõik saadud väärtuste tabeli põhjal, viimast tarbe korral täiendades vahepealsete y -väärtustega.

Määra joonisest x -i väärtused, millel

$$y = 0 \quad y = -4 \quad y = +2.$$

Kontrolli leitud väärtuste headus, asetades neid polünoomi avaldisse.

5. Arvuta polünoomi

$$y = x^3 - 9x^2 + 5$$

või täielikumalt kirjutades

$$y = 1 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 5$$

väärtused vahemikus $-3 \leq x \leq +4$, andes x -ile täisarvulised väärtused.

Missuguses vahemikus polünoom kasvab? — kahaneb?

Kus asuvad polünoomi muutumise pöördepunktid?

Kujuta polünoomi käik.

Määra joonisest polünoomi nullkohad.

Kontrolli saadud väärtuste headus, asetades neid polünoomi avaldisse.

6. Sama ülesanne polünoomide puhul

$$1^0. \quad x^3 - x^2 - 37x - 35 \quad -7 \leq x \leq +9$$

$$2^0. \quad x^3 - 7x^2 + 36 \quad -5 \leq x \leq +8$$

$$3^0. \quad x^3 + 3x^2 + 5x + 15 \quad -5 \leq x \leq +5$$

$$4^0. \quad x^3 + 5x^2 + 4x \quad -6 \leq x \leq +3$$

$$5^0. \quad x^3 - 12x + 16 \quad -6 \leq x \leq +5$$

7. Olgu $p(x)$ mingi polünoom. Saadagu tema jagamisel vahega $x - a$ jagatis $q(x)$ ja jääk r , nii et

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) + r.$$

Asendades mõlemal pool x -i tema väärtusega a , saame

$$p(a) = r.$$

Kuidas kasutada Horner'i skeemi selle jäägi arvutamiseks, mille annab polünoom $p(x)$ jagamisel vahega $x - a$?

Kus kohal seisab Horner'i skeemis nõutud jääk?

8. Jaga polünoom

$$p(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

binoomiga $x - a$ ja näita, et saadud jagatise kordajad seisavad Horner'i skeemis joone all üksteise järel.

9. Täienda järgmine tabel, kasutades Horner'i skeemi:

Nr.	Jagatav	Jagaja	Jagatis	Jääk
1.	$x^2 + 2x - 35$	$x - 5$		
2.	$x^3 - 3x^2 + 6x - 5$	$x - 3$		
3.	$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$	$x - 2$		
4.	$2x^5 - x^3 + 2x - 1$	$x + 2$		
5.	$x^5 - 1$	$x - 1$		

10. Olgu $p(x)$ mingi polünoom. Saadagu tema jagamisel vahega $x - a$ jagatis $q(x)$ ja jääk r . Nagu varemalt näidatud, on $r = p(a)$. Seda arvestades, tõesta laused:

1^o. Kui arv a on polünoomi $p(x)$ nullkohaks, siis on $p(x)$ jaguv vahega $x - a$.

2^o. Kui polünoom $p(x)$ on jaguv vahega $x - a$, siis on arv a polünoomi $p(x)$ nullkohaks.

11. Näita, et avaldis

$$x^n - 1$$

on iga n -i puhul jaguv vahega $x - 1$.

Tuleta jagatise $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ avaldis Horner'i skeemi abil.

Tuleta sama jagatise avaldis otsese jagamise teel.

12. Näita, et avaldis

$$x^n - a^n$$

on iga n -i puhul jaguv vahega $x - a$.

Tuleta jagatise avaldis Horner'i skeemi abil.

Tuleta sama jagatise avaldis otsese jagamise teel.

13. Kas saab arv $b^n - a^n$ olla algarv, kui a , b ja n on täisarvud ja $b > a + 1$?

14. 1°. Olgu a üks polünoomi $p(x)$ nullkohtadest. Siis on eelmise põhjal

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x).$$

Näita, et teised polünoomi $p(x)$ nullkohad, peale teadaoleva a , on võrrandi $q(x) = 0$ lahendid.

2°. Olgu polünoomi $p(x)$ aste n . Kui kõrge on polünoomi $q(x)$ aste?

Mis mõte on lausel: „Kui üks võrrandi $p(x) = 0$ lahend a on teada, siis taandub võrrandi ülejäävate lahendite leidmine ühe võrra madalama astmega võrrandi lahendamisele“?

15. Allpool järgneb rida võrrandeid. Leia igäühe puhul üks lahend proovimise teel, toimetades asendamist Horner'i skeemi järgi; taanda võrrand leitud lahendi abil; lahenda taandatud võrrand kas edaspidise proovimise teel või võimaluse korral mõnel teisel viisil.

$$1^{\circ}. \quad x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$2^{\circ}. \quad x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$$

$$3^{\circ}. \quad x^3 + 5x^2 + 4x = 0$$

$$4^{\circ}. \quad x^4 + x^3 - 15x^2 - 9x + 54 = 0$$

$$5^{\circ}. \quad x^5 - 8x^4 + 62x^2 - 97x + 42 = 0$$

Harjutis XIII:

Numbriliste võrrandite lahendamine järkjärgulise lähendamise teel: lineaarse interpolatsiooni võtte.

1. Olgu antud ülesanne: „Leida x , mille puhul teatud funktsioon $f(x)$ omandab etteantud väärtuse k .“ Ülesannet saab ikka sõnastada kujus: „Leida x , mille puhul $f(x) - k = 0$, lühidalt $g(x) = 0$.“

Juhul, kui $f(x)$ on 1., 2., 3., . . . n -da astme polünoom, tuleme vastavalt 1., 2., 3., . . . n -da astme võrrandile.

Kirjuta need võrrandid üldkujus.

Anna rida võrrandite näiteid arvuliste kordajatega.

2. Anna võtted 1. ja 2. astme võrrandite lahendamiseks. Anna skeemid nende võrrandite lahendite arvutamiseks.

3. Näita, et igat teise astme polünoomi

$$x^2 + px + q$$

on võimalik täiendada kohase konstandi lisamisel täie ruuduni.

Näita, et kolmanda astme polünoomi

$$x^3 + rx^2 + sx + t$$

üldiselt võimalik ei ole täiendada konstandi lisamisel täie kuubini.

Näited.	1 ^o . $x^2 + 2x + 5$	4 ^o . $x^3 - 3x^2 + 4x - 1$
	2 ^o . $x^2 - x + 3$	5 ^o . $x^3 + 5x^2 - 2x + 7$
	3 ^o . $x^2 - \frac{1}{3}x - 1$	6 ^o . $x^3 + 2x - 8$

Kas laseb ennast kolmanda astme võrrandile üle kanda lahendamisvõtte, mida tarvitatakse ruutvõrrandi puhul?

4. Kolmanda ja kõrgema astme numbrilised võrrandid lahendatakse kõige kohasemalt nõnda, et leitakse proovimise teel või graafiliselt lahendi lähisväärtus ja parandatakse seda järk-järgult, kuni ta saadakse rahuldava peenusega.

Parandusvõtete aluseks on järgmine printsiip:

Olgu $f(x)$ mingi pidev x -i funktsioon. Olgu a ja b kaks argumendi eriväärtust ja $f(a)$ ja $f(b)$ neile vastavad funktsiooni väärtused. Olgu $f(a)$ ja $f(b)$ märgid vastupidised ($+$ ja $-$ või $-$ ja $+$). Siis on kindlasti a ja b vahel olemas väärtus c , mille puhul $f(c) = 0$.

Illustreeri asja graafiliselt.

Näita, et juhul, kui sääraseid vahepealseid väärtusi c on mitu, siis nende hulk on ikka paaritu arvuline.

5. Olgu antud lahendada võrrand

$$2x^3 - 3x^2 - 36x + 1 = 0.$$

Asetades võrrandi vasemasse ossa täisarvud $t = 0, +1, +2, \dots; -1, -2, -3, \dots$, leia niisugune vahemik t -st kuni $(t+1)$ -ni, mille lõpupunktides oleksid asetussaadused vastupidise märgiga. Võta vahemiku keskpunkt $t + \frac{1}{2}$, aseta väärtus $t + \frac{1}{2}$ võrrandi vasemasse ossa ja määra tulemuse märk: nii saadakse uus vahemik, milles asub võrrandi lahend ja mis on poole võrra kitsam kui eelmine.

Rakenda vahemiku poolitamise võtet korduvalt, nii kaua kui on saadud võrrandi lahend veaga alla 0,01.

Mitu korda tuleb võtet ülimalt rakendada?

Mitu korda tuleb võtet ülimalt rakendada, et leida lahend veaga alla 0,001?

6. Olgu antud võrrand

$$x^3 + 6x^2 + 1 = 0.$$

Määra eelmises ülesandes seletatud viisil üks lahend veaga alla 0,01. Taanda leitud lahendi abil võrrand ja määra teised lahendid, kui olemas.

Kõik leitud lahendid aseta lähevõrrandi vasemasse ossa ja hinda lahendite headust.

Sama ülesanne võrrandite puhul:

$$1^0. \quad 2x^3 - 9x^2 - 24x - 3 = 0$$

$$2^0. \quad 4x^3 - 15x^2 + 12x + 1 = 0$$

$$3^0. \quad x^3 + 3^2x + 1 = 0$$

$$4^0. \quad x^3 - 6x + 7 = 0$$

$$5^0. \quad x^3 - x + 3 = 0$$

7. Võrrandi $x^3 + px + q = 0$ lahendid on samad, mis võrrandi $x^3 = -px - q$ omadki; nendeks on x -i väärtused, mille puhul funktsioonid

$$\begin{aligned} y_2 &= x^3 \\ y_1 &= -px - q \end{aligned}$$

omandavad võrdsed väärtused. Sellega on võrrandi

$$x^3 + px + q = 0$$

lahenditeks nende täppide abstsissid, milles lõikuvad 3. astme parabool $y_2 = x^3$ ja sirge $y_1 = -px - q$.

Seda arvestades anna juhised kolmanda astme võrrandi

$$x^3 + px + q = 0$$

graafiliseks lahendamiseks.

Miks jätkub kõigi sääraste 3. astme võrrandite graafiliseks lahendamiseks kõvera

$$y = x^3$$

ühekordsest joonistamisest?

Joonise valmistamisel on kohane võtta y -teljel mõõt tunduvalt väiksem kui x -teljel. Miks?

8. Lahenda võrrand

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

graafiliselt nii täpsalt kui võimalik. Missuguse tulemuse annab lahendi kontrollasetamine võrrandi vasemasse ossa?

Sama ülesanne võrrandite puhul:

$$\begin{array}{ll} 1^0. & x^3 + 2,5x + 40 = 0 \\ 2^0. & x^3 - 6x + 3,5 = 0 \\ 3^0. & x^3 - 5x - 10 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 4^0. & x^3 - 12x + 20 = 0 \\ 5^0. & x^3 - 2x + 18 = 0 \\ 6^0. & x^3 - 15x + 5 = 0 \end{array}$$

9. Olgu lahendada võrrand

$$f(x) = 0.$$

Olgu leitud kaks lahendi lähisväärtust a ja b , niisugust, et

$$f(a) < 0 \quad \text{ja} \quad f(b) > 0.$$

Kujuta käsiskitsis funktsiooni $f(x)$ käigukõver vahemikus a -st kuni b -ni.

Kus asub joonisel võrrandi $f(x) = 0$ lahend c ?

Olgu täppide $(a|f(a))$ ja $(b|f(b))$ tähisteks A ja B . Et kõvera joonistamine on tülikas, asendame ta sirgega AB . Viimase sirge ja x -telje lõiketäpp annab c lähisväärtuse c_1 . Missuguse paranduse a peab joonisel lisama väärtusele a , et saada lahendi lähisväärtus c_1 ? Avalda a .

Kas saab võtet korduvalt rakendada? Jaataval korral seleta asja kujunemist graafiliselt.

10. Näita, et eelmises ülesandes käsitletud võte lubab rakendamist ka siis, kui $f(a)$ ja $f(b)$ on ühesuguse märgiga, kui aga a ja b on küllalt head lahendi lähisväärtused.

11. Olgu antud võrrand

$$x^3 - 4x + 7 = 0.$$

Leia proovimise teel vahemik, milles asub võrrandi lahend. Paranda interpolatsiooni teel lahendi lähisväärtus. Rakenda võtet korduvalt, kuni lahend on saadud peenusega 0,001.

12. Missuguse kuju omandab avaldis

$$x^3 + bx^2 + cx + d,$$

kui x asendada lineaarse binoomiga $x + a$? Mis tähendab niisugune asendamine geomeetriliselt?

Kas on võimalik valida konstanti a nõnda, et asendamissaadus esineks vabana ruudulisest liikmest?

13. Kirjuta järgmised 3. astme võrrandid ruudulisest liikmest vabastatud kujus:

$$1^0. \quad x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$2^0. \quad x^3 + 5x^2 - 4x + 7 = 0$$

$$3^0. \quad x^3 + x^2 - 1 = 0$$

$$4^0. \quad x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$5^0. \quad x^3 - 6x^2 - 10 = 0$$

14. Allpool järgneb rida 3. astme võrrandeid. Kirjuta nad ruudulisest liikmest vabastatud kujus. Lahenda nad graafiliselt kõvera $y = x^3$ abil.

Paranda lahendid interpolatsiooni teel, kuni lahendi viga on surutud alla 0,01.

$$1^0. \quad x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$

$$2^0. \quad x^3 - 7x^2 + 2x + 40 = 0$$

$$3^0. \quad x^3 - 1,8x^2 - 6,9x - 9,0 = 0$$

$$4^0. \quad x^3 - 3,9x^2 - 3,9x + 10,8 = 0$$

$$5^0. \quad x^3 - 4,2x^2 - 12,6x + 45,9 = 0$$

Harjutis XIV:

Numbriliste võrrandite lahendamine järkjärgulise lähendamise teel: Newton'i võtte.

1. Olgu antud lahendada võrrand

$$f(x) = 0.$$

Olgu a mingi lahendi lähisväärtus. Selle asetamistulemus $f(a)$ erineb nullist. Miks?

Olgu a_1 lähisväärtuse a parandus, nii et $f(a + a_1) = 0$. Funktsiooni kasvu valemi järgi on

$$f(a + a_1) - f(a) \approx a_1 \cdot f'(a).$$

Avalda siit parandus a_1 .

Olgu viimase ümmargune väärtus a ; siis on $a + a = b$ otsitava lahendi teine lähisväärtus, mis eelmisest parem.

Näita, kuidas saada lahendi 3. lähisväärtus.

Võtet korduvalt rakendades saame võrrandi $f(x) = 0$ lahendi nii täpsalt kui soovime.

Võtte kannab Newton'i nime.

2. Rakenda Newton'i võtet võrrandi puhul

$$x^2 = 15,$$

leides lahend peenusega 0,0001.

Sama ülesanne võrrandi puhul

$$x^3 = 17.$$

3. Lahenda 1. ülesandes seletatud viisil järgmised võrrandid peenusega 0,01:

$$1^0. \quad x^2 + x - 9 = 0$$

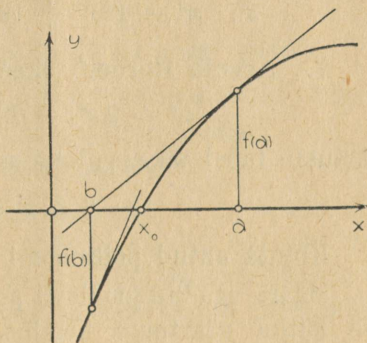
$$2^0. \quad 3x^2 + 5x + 1 = 0$$

$$3^0. \quad x^3 + 6x^2 + 5 = 0$$

$$4^0. \quad x^3 - 2x - 5 = 0$$

4. Kujutagu kõver 41. joonisel funktsiooni $f(x)$ käiku. Võrrandi $f(x) = 0$ lahendiks on kõvera ja x -telje lõikepunkti abstsiss x_0 . Olgu selle x_0 lähisväärtus a . Asetades leiame $f(a) \neq 0$. Miks?

Joonista täpis ($a \mid f(a)$) kõvera puutuja. Puutuja ja x -telje ühistäpi abstsiss b annab parema x_0 lähenduse, kui seda oli a . Avalda joonisest lähisväärtuse a parandus $a = b - a$ väärtuste kaudu $f(a)$ ja $f'(a)$.



Joonis 41.

Võrdle tulemust 1. ülesandest leituga. Kuidas kujuneb joonisel otsitava x_0 järkjärguline lähendamine väärtustega a, b, c jne.?

5. Lihtsusta järgmised võrrandid, lahenda nad graafiliselt kõvera abil $y = x^3$ ja paranda lahendid Newton'i võtte abil, kuni lahendid on saadud peenusega 0,01:

$$1^0. \quad x^3 + 2,5x^2 - 6,3x - 7,0 = 0$$

$$2^0. \quad x^3 - 2,2x^2 - 3,7x + 6,3 = 0$$

$$3^0. \quad x^3 + 6,0x^2 + 5,8x - 7,4 = 0$$

$$4^0. \quad x^3 - 3,2x^2 - 13,8x - 34,0 = 0$$

$$5^0. \quad x^3 - 7,1x^2 + 15,6x - 10,2 = 0$$

6. Allpool järgnevate võrrandite graafilisel lahendamisel tekitab raskust suurte kordajate kujutamine. Ras-

kusest saab üle sel teel, et valitakse uus tundmatu, näit. $x = 10u$. Selle asenduse tulemust 10-ne kõrgema astmega jagades saadakse väiksemate kordajatega võrrand, mille lahendamine toimub ennemseletatud viisil. Leia nõnda järgmiste võrrandite lahendid veaga mitte üle 0,1:

$$1^0. \quad x^3 - 24x^2 + 38x + 616 = 0$$

$$2^0. \quad x^3 - 6x^2 - 141x - 135 = 0$$

$$3^0. \quad x^3 - 237x + 884 = 0$$

$$4^0. \quad x^3 - 39x^2 - 479x + 15960 = 0$$

$$5^0. \quad x^3 - 18x^2 + 19x + 255 = 0$$

7. Arvuta Horner'i skeemi järgi polünoomi

$$x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 11x - 11$$

väärtuste tabel täisarvuliste x -ide jaoks vahemikus

$$-6 \leq x \leq +5.$$

Kujuta antud polünoomi väärtuse käik.

Määra saadud jooniselt polünoomi nullkohad ja kontrolli leitud väärtuste headus, asetades neid polünoomi avaldisse.

Suru nullkohtade vead Newton'i võtte abil alla 0,01.

Sama ülesanne polünoomide puhul:

$$1^0. \quad x^4 + 8x^3 - 10x^2 - 104x + 100 \quad -9 \leq x \leq +5$$

$$2^0. \quad x^4 + 2x^3 - 33x^2 - 72x - 110 \quad -8 \leq x \leq +7$$

$$3^0. \quad x^4 - 13x^2 + 37 \quad -5 \leq x \leq +5$$

8. Risttahuka mõõted on 1, 2 ja 3 dm, veaga alla 0,0005. Missuguse suuruse võrra peaks suurendama igat kolme risttahuka mõõtu, et risttahuka ruumala kasvaks kahekordseks?

9. Soovitakse valmistada risttahuka-kujuline valgevasest karp mõõdetega 1, 2, ja 3 dm. Kui paksud peab võtma seinad, et keha jääks vees parajasti hõljuma? Vase erikaal on 8.

10. Mälestussammas pidi koosnema kolmest üksteisel seisvast kuubist, mis olid valitud nõnda, et teise serv oli 1 m võrra lühem kui esimese oma, kolmanda kuubi serv 1 m võrra lühem kui teise oma ja kahe viimase ruumala oli võrdne alumise kuubi ruumalaga. Kui pikad pidi valima kolme kuubi servad?

11. Õõnsa kera seesmine läbimõõt on 10 cm. Kerra valatakse 500 cm^3 vett. Kui kõrgele tõuseb veepind?

Näpunäide. Kerasegmendi ruumala

$$V = \frac{4}{3}\pi h^2(3R - h),$$

kus h on segmendi sügavus ja R on kera raadius.

12. Jaga poolkera kaheks võrdseks osaks, lõigates poolkera tasapinnaga, mis aluspinnaga rööbik.

Vt. 11. ülesandes antud näpunäidet.

13. Kui sügavale vajub seatinast kera, ujudes elavhõbedal? Seatina erikaal on 11,5, elavhõbeda oma 13,6.

Sama ülesanne rauast kera kohta. Raua erikaal on 7,8.

Vt. 11. ülesande lahendamiseks antud näpunäidet.

14. Metallkera, mille läbimõõt on 4 cm, valatakse ümber kehaks, mis koosneb 4 cm kõrgusest silindrist ja pealemahtuvast poolkerast. Kui suur on tekkinud keha läbimõõt, kui materjalikadu valamisel moodustab 5%?

15. Olgu antud poolkera, mille raadius on 5 cm. Kujunda poolkerasse silinder, mille ruumala on 50% poolkera omast.

Hind 1 kr. 90 s.