Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Markus Vanatoa

Milne'i integraalvõrrandi lahendi tükiti lineaarne aproksimatsioon

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: prof. Arvet Pedas

Tartu 2025

MILNE'I INTEGRAALVÕRRANDI LAHENDI TÜKITI LINEAARNE APROKSIMATSIOON

Bakalaureusetöö

Markus Vanatoa

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös vaadeldakse Milne'i integraalvõrrandi ligikaudset lahendamist lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodil. Käsitletakse Milne'i integraalvõrrandi tuuma omadusi, lahendi olemasolu ja ühesust ning lähislahendite koondumist. Töö teoreetilisi tulemusi testitakse ühe konkreetse näiteülesande lahendamise abil.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Milne'i integraalvõrrand, kollokatsioonimeetod, lineaarsplain.

THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE MILNE INTEGRAL EQUATION USING THE COLLOCATION METHOD

Bachelor thesis

Markus Vanatoa

Abstract

In the present bachelor's thesis, the approximate solution of the Milne integral equation using linear splines and the collocation method is investigated. The properties of the kernel of the Milne integral equation, the existence and uniqueness of the solution, and the convergence of the approximate solutions are analyzed. The theoretical results are tested on a specific example problem.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: Milne integral equation, collocation method, spline.

Sisukord

1 Sissejuhatus

Käesolevas bakalaureusetöös on vaatluse all atmosfäärifüüsikas suurt tähtsust omav Milne'i võrrand, mis kujutab endast teatavat teist liiki Fredholmi integraalvõrrandit, mille tuumaks on integraalne eksponentfunktsioon. Kuna võrrandi tuum on tõkestamata argumentide kokkulangemise korral ning võrrandi lahendi tuletised on tõkestamata integreerimislõigu otspunktide lähedal, siis tekivad raskused efektiivsete numbriliste meetodite konstrueerimisel võrrandi ligikaudseks lahendamiseks. Töös uuritakse kõigepealt Milne´i integraalvõrrandi tuuma omadusi ning tuginedes saadud tulemustele tõestatakse selle võrrandi lahendi olamasolu ja ühesus. Võrrandi ligikaudseks lahendamiseks kasutatakse pidevate lineaarsplainidega kollokatsioonimeetodit. Näidatakse selle meetodi koonduvus võrgupunktide arvu suurenemisel ja hinnatakse vaadeldava meetodi abil saadud lähislahendite viga. Töö viimases osas kontrollitakse töö teoreetilisi tulemusi konkreetse näiteülesande lahendamise abil. Arvuline näide teostati kasutades programmeerimiskeelt Python, mille kood on leitav lisas.

2 Milne'i integraalvõrrand

2.1 Milne'i integraalvõrrand

Maa atmosfääris osa päikesekiirguse kandjateks olevatest footonitest neelatakse ja osa hajutatakse keskkonna osakestestega (veeaur, pilved, tolm jne.) kokkupõrkel. Üldjuhul võib footon hajumise tulemusena jätkata liikumist mis tahes suunas. Sellist footoni hajutamist, mille korral kõik suunad footoni liikumises peale kokkupõrget keskkonna osakesega on võrdtõenäosed, nimetatakse isotroopseks hajumiseks. Tööst [1] järeldub, et lihtsamatel juhtudel isotroopse hajumise korral mängib olulist rolli lineaarne intergaalvõrrand kujul

$$u(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau - s|)u(s)ds + f(\tau), \quad 0 \le \tau \le b,\ b > 0, \tag{2.1}$$

milles $u = u(\tau)$ on otsitav funktsioon. Võrrandis esinev konstant $\lambda \in [0, 1]$ on footoni ellujäämise tõenäosus kekkonna osakesega, vabaliige $f(\tau)$ avaldub kujul $f(\tau) = c_1 e^{c_2(\tau-b)}$ on positiivne funktsioon $\tau \in [0, b]$ korral, kus c_1 ja c_2 on mingid positiivsed konstandid ning

$$E(t) = \int_0^1 \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} d\mu \qquad (t > 0) \tag{2.2}$$

on nn. integraalne eksponentfunktsioon, üks matemaatilises füüsikas laialdaselt kasutavaist spetsiaalsetest funktsioonidest. Integraalvõrrand (2.1) kannab Milne'i võrrandi nime. Leidnud võrrandist (2.1) funktsiooni $u = u(\tau)$, saame näiteks kiirguse intensiivsuse $I(\tau, \mu)$ ($\tau \in [0, b]$, $\mu \in [-1, 1]$) leidmiseks kasutada valemit (vt. [1])

$$I(\tau,\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mu|}\displaystyle\int_\tau^b e^{-\frac{|\tau-s|}{|\mu|}} u(s)ds, & \text{kui } \mu < 0, \\ u(\tau), & \text{kui } \mu = 0, \\ \dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^\tau e^{-\frac{\tau-s}{\mu}} u(s)ds, & \text{kui } \mu > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

2.2 Integraalse eksponentfunktsiooni omadusi

Kõigepealt paneme tähele, et muutujavahetuse $s = \dfrac{t}{\mu}$ abil (2.2) esitub kujul

$$E(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-s}}{s} ds \qquad (t > 0). \tag{2.4}$$

Osutub (vt. [1], lk. 34), et tegu on $t \in (0, \infty)$ korral monotoonselt kahaneva kumera funktsiooniga, mille tuletis avaldub kujul

$$E'(t) = -\frac{e^{-t}}{t}. \tag{2.5}$$

Funktsioon $E(t)$ on esitatav võrdusena (vt. [2], lk. 229)

$$E(t) = g(t) - \gamma - \ln t \quad (t > 0), \tag{2.6}$$

milles esinev konstant $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0.5772156649$ kannab Euleri konstandi nime ja kus

$$g(t) = t - \frac{t^2}{2 \cdot 2!} + \frac{t^3}{3 \cdot 3!} - \frac{t^4}{4 \cdot 4!} + \ldots, \tag{2.7}$$

on analüütiline funktsioon kogu reaalteljel.

Seoste (2.6) ja (2.5) põhjal saame, et $E(t)$ on pidevalt diferentseeruv iga $t > 0$ korral ning $b > 0$ puhul kehtivad hinnangud

$$E(t) \leq c_1(1 + |\ln t|), \quad t \in [0, b], \tag{2.8}$$

$$|E'(t)| \leq c_2 t^{-1}, \quad t \in [0, b], \tag{2.9}$$

kus c_1 ja c_2 on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest $t \in [0, b]$.

Lause 1. Kehtib valem

$$\int_0^\infty E(t) dt = 1. \tag{2.10}$$

Tõestus. Tugenedes definitsioonile (2.2), saame

$$\int_0^\infty E(t) dt = \int_0^\infty \left(\int_0^1 \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} d\mu \right) dt = \int_0^1 \left(\int_0^\infty \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} dt \right) d\mu =$$

$$= \int_0^1 \left([-e^{-\frac{t}{\mu}}]_{t=0}^{t=\infty} \right) d\mu = \int_0^1 d\mu = 1.$$

□

Lause 2. Fikseeritud $\tau \in [0, b]$ korral kehtib valem

$$\int_0^b E(|\tau - s|)ds = \int_0^\tau E(t)dt + \int_0^{b-\tau} E(t)dt. \tag{2.11}$$

Tõestus. Olgu $\tau \in [0, b]$, siis

$$\int_0^b E(|\tau - s|)ds = \int_0^\tau E(\tau - s)ds + \int_\tau^b E(s - \tau)ds.$$

Tehes viimase võrduse paremal poolel olevas esimeses integraalis muutujavahetuse $t = \tau - s$ ja teises integraalis muutujavahetuse $t = s - \tau$, jõuamegi võrduseni (2.11):

$$\int_0^b E(|\tau - s|)ds = \int_0^\tau E(t)dt + \int_0^{b-\tau} E(t)dt. \tag{2.12}$$

$\square$

Lause 3. Kehtib võrdus

$$\lim_{t\to 0+} tE(t) = 0.$$

Tõestus. Lähtume funktsiooni $E(t)$ kujust (2.6). Siis otsitavaks piirväärtuseks osutub

$$\lim_{t\to 0+} tE(t) = \lim_{t\to 0+} t(\gamma - \ln(t) + g(t)) = 0,$$

sest $\lim\limits_{t\to 0+}(t\gamma + tg(t)) = 0$ ja kasutades L'Hospitali reeglit, saame

$$\lim_{t\to 0+} -t\ln(t) = \lim_{t\to 0+} -\frac{\ln(t)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0+} -\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0+} \frac{t^2}{t} = 0.$$

$\square$

Lause 4. Olgu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sellised, et $0 \le a_1 < a_2$. Siis kehtib valem

$$\int_{a_1}^{a_2} E(t)dt = \begin{cases} E(a_2)a_2 - E(a_1)a_1 + e^{-a_1} - e^{-a_2}, & \text{kui } 0 < a_1 < a_2, \\ E(a_2)a_2 + 1 - e^{-a_2}, & \text{kui } 0 = a_1 < a_2. \end{cases} \tag{2.13}$$

Tõestus. Olgu $u = E(t)$ ja $v = t$, siis $du = E'(t)dt$ ja $dv = dt$. Kasutades seost (2.5) ja ositi integreerimise valemit

$$\int_{a_1}^{a_2} udv = uv\Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} vdu,$$

jõuame tulemuseni (2.13), kui $0 < a_1 < a_2$:

$$\int_{a_1}^{a_2} E(t)dt = E(t)t\Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} t(-\frac{e^{-t}}{t})dt =$$

$$= E(a_2)a_2 - E(a_1)a_1 + e^{-a_1} - e^{-a_2}.$$

Kui $0 = a_1 < a_2$, siis Lause 3 abil saame

$$\int_{0}^{a_2} E(t)dt = E(t)t\Big|_{0}^{a_2} - \int_{0}^{a_2} t(-\frac{e^{-t}}{t})dt =$$

$$= E(a_2)a_2 + 1 - e^{-a_2}.$$

□

Lause 5. Olgu $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ sellised, et $0 \leq a_1 < a_2$. Siis kehtib valem

$$\int_{a_1}^{a_2} E(t)tdt = \begin{cases} \frac{1}{2}\Big(E(a_2)a_2^2 - E(a_1)a_1^2 - a_2e^{-a_2} + a_1e^{-a_1} - e^{-a_2} + e^{a_1}\Big), & \text{kui } 0 < a_1 < a_2, \\ \frac{1}{2}\Big(E(a_2)a_2^2 - a_2e^{-a_2} - e^{-a_2} + 1\Big), & \text{kui } 0 = a_1 < a_2. \end{cases} \tag{2.14}$$

Tõestus. Olgu $u = E(t)$ ja $v = \frac{t^2}{2}$, siis $du = E'(t)dt$ ja $dv = tdt$. Kasutame seost (2.5) ja integreerime ositi

$$\int_{a_1}^{a_2} E(t)tdt = E(t)\frac{t^2}{2}\Big|_{a_1}^{a_2} - \int_{a_1}^{a_2} \frac{t^2}{2}(-\frac{e^{-t}}{t})dt = E(t)\frac{t^2}{2}\Big|_{a_1}^{a_2} + \int_{a_1}^{a_2} \frac{te^{-t}}{2}dt.$$

Kasutades ositi integreerimist ka integraali $\int_{a_1}^{a_2} \frac{te^{-t}}{2}dt$ leidmiseks, jõuamegi valemini (2.14), kui $0 < a_1 < a_2$

$$\frac{1}{2}(E(a_2)a_2^2 - E(a_1)a_1^2) + \frac{1}{2}(-te^{-t} - e^{-t})\Big|_{a_1}^{a_2} = \frac{1}{2}\Big(E(a_2)a_2^2 - E(a_1)a_1^2 - a_2e^{-a_2} + a_1e^{-a_1} - e^{-a_2} + e^{a_1}\Big).$$

Kui $0 = a_1 < a_2$, siis Lause 3 abil saame

$$\int_{0}^{a_2} E(t)tdt = \frac{1}{2}\Big(E(a_2)a_2^2 - a_2e^{-a_2} - e^{-a_2} + 1\Big).$$

$\square$

2.3 Lahendi olemasolu ja ühesus

Võrrandi (2.1) lahendi olemasolu ja ühesuse näitamiseks kirjutame selle võrrandi operaatorkujul

$$u = Tu + f, \tag{2.15}$$

kus operaator T on defineeritud valemiga

$$(Tu)(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau - s|)u(s)ds, \quad 0 \le \tau \le b. \tag{2.16}$$

Kõigepealt näitame, et integraaloperaator T, mis on määratud valemiga (2.16), teisendab pidevad funktsioonid $u : [0, b] \to \mathbb{R}$ pidevateks funktsioonideks $Tu : [0, b] \to \mathbb{R}$.

Fikseerime $\varepsilon > 0$ ja olgu u pidev funktsioon lõigul $[0, b]$. Näitame funktsiooni $w = Tu$ pidevust lõigul $[0, b]$. Suvaliste $\tau_1, \tau_2 \in [0, b]$ jaoks tähistame

$$U_\eta(\tau_1, \tau_2) = (\tau_1 - \eta, \tau_1 + \eta) \cup (\tau_2 - \eta, \tau_2 + \eta), \quad 0 < \eta < 1.$$

Esitame

$$|w(\tau_1) - w(\tau_2)| = \frac{\lambda}{2}\left|\int_0^b (E(|\tau_1 - s|) - E(|\tau_2 - s|))u(s)ds\right| \tag{2.17}$$

kahe integraali summana: esimeses integraalis on integreerimispiirkonnaks $A := [0, b] \cap U_\eta(\tau_1, \tau_2)$, teises vastavalt $B := [0, b] \setminus U_\eta(\tau_1, \tau_2)$.Kuna

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\tau_1-\eta}^{\tau_1+\eta} E(|\tau_1 - s|)ds = \frac{\lambda}{2}\int_{-\eta}^{\eta} E(|t|)dt = \lambda\int_0^\eta E(t)dt,$$

siis kasutades hinnangut (2.8), saame (vt. Lause 3)

$$\lambda\int_0^\eta E(t)dt \le \lambda\int_0^\eta c_1(1 - \ln t)dt = \lambda c_1\eta - \lambda(t\ln t - t)|_0^\eta \to 0, \text{ kui } \eta \to 0.$$

Analoogiline tulemus kehtib ka τ_2 korral:

$$\frac{\lambda}{2}\int_{\tau_2-\eta}^{\tau_2+\eta} E(|\tau_2 - s|)ds \to 0, \text{ kui } \eta \to 0.$$

Seega

$$\frac{\lambda}{2}\left|\int_A (E(|\tau_1 - s|) - E(|\tau_2 - s|))u(s)ds\right|$$
$$\leq \frac{\lambda \max_{t\in[0,b]} |u(t)|}{2} \int_A (E(|\tau_1 - s|) + E(|\tau_2 - s|))ds \to 0, \text{ kui } \eta \to 0.$$

Niisiis, valides küllalt väikese $\eta = \eta(\varepsilon)$, saame esimese integraali jaoks hinnangu

$$\frac{\lambda}{2}\left|\int_A (E(|\tau_1 - s|) - E(|\tau_2 - s|))u(s)ds\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.18}$$

Teises integraalis on kinnisel piirkonnal B pidev integrand, mis teatavasti on ühtlaselt pidev. Seega

$$\frac{\lambda}{2}\left|\int_B (E(|\tau_1 - s|) - E(|\tau_2 - s|))u(s)ds\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{2.19}$$

kui $\tau_1, \tau_2 \in [0, b]$ on küllalt lähedased. Kokkuvõttes saame seoste (2.17)-(2.19) tõttu, et kehtib hinnang $|w(\tau_1) - w(\tau_2)| < \varepsilon$, kui τ_1 ja τ_2 on küllalt lähedased, st. $w(\tau)$ on pidev lõigul $[0, b]$.

Olgu $C[0, b]$ lõigus $[0, b]$ pidevate funktsioonide hulk. Hulk $C[0, b]$ on Banachi ruum normiga

$$||u|| = \max_{0\leq\tau\leq b} |u(\tau)|, \quad u = u(\tau) \in C[0, b].$$

Lause 6. Valemiga (2.16) määratud integraaloperaator $T : C[0, b] \to C[0, b]$ on lineaarne.

Tõestus. Näitame, et integraaloperaator T on aditiivne ja homogeenne. Olgu $u, v \in C[0, b]$ ja $c \in \mathbb{R}$.

Aditiivsus:

$$(T(u + v))(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau - s|)(u(s) + v(s))ds =$$
$$= \frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau - s|)u(s)ds + \frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau - s|)v(s)ds = (Tu)(\tau) + (Tv)(\tau) \quad (\tau \in [0, b]).$$

Homogeensus:

$$(T(cu))(\tau) = \frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau-s|)(cu(s))ds = c\frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau-s|)u(s)ds = c(Tu)(\tau) \quad (\tau \in [0, b]).$$

□

Lause 7. Valemiga (2.16) määratud integraaloperaator $T : C[0, b] \to C[0, b]$ on

tõkestatud.
Tõestus. Näitame, et leidub selline arv $M \in \mathbb{R}$ nii, et $||Tu|| \leq M||u||$.
Olgu antud suvaline funktsioon $u = u(\tau) \in C[0,b]$. Sel juhul

$$||Tu|| \leq \max_{0\leq\tau\leq b}\left|\frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau-s|)u(s)ds\right| \leq \left(\max_{0\leq\tau\leq b}\frac{\lambda}{2}\int_0^b E(|\tau-s|)|ds\right)|u||.$$

Seega $||Tu|| \leq M||u||$, kus $M := \max\limits_{0\leq\tau\leq b}\frac{\lambda}{2}\int_0^b |E(|\tau-s|)|ds$.

□

Lineaarne operaator on pidev parajasti siis, kui ta on tõkestatud (vt. [3], lk. 120), seega valemiga (2.16) määratud integraaloperaator kuulub pidevate lineaarsete operaatorite ruumi, see tähendab $T \in \mathcal{L}\Big(C([0,b]),\, C([0,b])\Big)$, kus

$$||T|| = ||T||_{\mathcal{L}\left(C([0,b]),\, C([0,b])\right)} = \min\{M \geq 0 : ||Tu|| \leq M||u|| \ \forall u \in C[0,b]\}. \quad (2.20)$$

Lause 8. Kehtib $||T|| < 1$.
Tõestus. Eelmisest lausest saime, et $||Tu|| \leq M||u||$, seega

$$||T|| \leq M = \max_{0\leq\tau\leq b}\frac{\lambda}{2}\int_0^b |E(|\tau-s|)|ds.$$

Arvestades, et $\lambda \leq 1$, saame

$$||T|| \leq \max_{0\leq\tau\leq b}\frac{1}{2}\int_0^b |E(|\tau-s|)|ds.$$

Kasutades Lause 2 tulemust saame, et

$$||T|| \leq \max_{0\leq\tau\leq b}\frac{1}{2}\left(\int_0^\tau E(t)dt + \int_0^{b-\tau} E(t)dt\right) \leq \int_0^b E(t)dt < 1,$$

kus viimase võrratuse saavutame tänu Lausele 1.

□

Oleme näidanud, et valemiga (2.16) määratud integraaloperaator $T : C[0,b] \to C[0,b]$ on pidev, lineaarne ja selle norm on väiksem kui 1. Sellest järeldub (vt. [3], lk. 141), et operaatoril $I-T$ on olemas pöördoperaator $(I-T)^{-1} \in \mathcal{L}\Big(C([0,b]),\, C([0,b])\Big)$. Seega võrrandil (2.15) leidub ühene lahend $u = (I-T)^{-1}f \in C[0,b]$. Teiste sõnadega, me oleme näidanud, et Milne'i integraalvõrrand (2.1) ruumis $C[0,b]$ on üheselt lahenduv.

3 Milne'i võrrandi aproksimatsioon

3.1 Lineaarsed splainid

Olgu $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Olgu lõigul $[0, b]$ antud ühtlane võrk

$$\Delta_n := \{t_0, t_1, \ldots, t_n : \quad 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\},$$

kus $t_i = ih$ ja $h = b/n$. Võrgule Δ_n vastavaks pidevaks esimest järku splainiks ehk lineaarsplainiks nimetatakse funktsiooni, mis täidab järgmist kahte tingimust:

a) funktsioon on igal osalõigul $[t_i, t_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ ülimalt esimese astme polünoom, ehk

$$\varphi(t) = c_{1i}t + c_{0i}, \quad t \in [t_i, t_{i+1}],\ c_{0i}, c_{1i} \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, \ldots, n-1$$

b) funktsioon φ on pidev kogu lõigul

$$\varphi \in C[0, b].$$

Võrgu Δ_n punkte $t_0, \ldots, t_n$ nimetatakse splaini φ sõlmedeks.

Tähistame kõigi võrgule Δ_n vastavate lineaarsplainide hulga suurusega $S(\Delta_n)$. Osutub, et $S(\Delta_n)$ on vektorruum, mille dimensioon on $n + 1$.
Tõepoolest, kui $\varphi_1, \varphi_2 \in S(\Delta_n)$, siis ilmselt $\varphi_1 + \varphi_2 \in S(\Delta_n)$ ning $a\varphi_1 \in S(\Delta_n)$, kus a on mingi konstant. Tingimusest a) näeme, et võrgule Δ_n vastav lineaarsplain on määratud $2n$ parameetriga c_{1i} ja c_{0i} $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Tingimus b) seab splainidele igas sisesõlmes $t_1, \ldots, t_{n-1}$ pidevus nõude, mis kitsendavad parameetrite valikut $n - 1$ võrra. Seega vabade parameetrite arv, millest lineaarsplain sõltub on $n+1$ ja järelikult $dim S(\Delta_n) = n+1$, ning valides ruumis $S(\Delta_n)$ mingi baasi (st. $n+1$ lineaarselt sõltumatut vektorit), saab vaadelda lineaarsplaini esitust baassplainide lineaarkombinatsioonina.

Kollokatsioonimeetodis kasutame võrgule Δ_n vastavaid lineaarsplaine $\varphi_j(t)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ kujul:

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \dfrac{t_1 - t}{h}, & \text{kui } t_0 \leq t \leq t_1, \\ 0, & \text{kui } t_1 \leq t \leq t_n, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{j-1}}{h}, & \text{kui } t_{j-1} \leq t \leq t_i, \\ \dfrac{t_{j+1} - t}{h}, & \text{kui } t_j \leq t \leq t_{i+1}, \\ 0, & \text{kui } t_0 \leq t \leq t_{j-1} \text{ või } t_{j+1} \leq t \leq t_n, \end{cases} \tag{3.2}$$

kus $j = 1, \ldots, n-1$,

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_{n-1}}{h}, & \text{kui } t_{n-1} \leq t \leq t_n, \\ 0, & \text{kui } t_0 \leq t \leq t_{n-1}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Näeme, et vastavad lineaarsplainid on omadusega

$$\varphi_j(t_i) = \begin{cases} 1, & \text{kui } i = j, \\ 0, & \text{kui } i \neq j, \end{cases} \tag{3.4}$$

kus $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Esitatud lineaarsplaine moodustavad baasi ruumis $S(\Delta_n)$, sest nad on lineaarselt sõltumatud lõigul $[0, b]$. Selles veendumiseks näitame, et kui

$$a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \cdots + a_n\varphi_n(t) = 0, \tag{3.5}$$

kus $t \in [0, b]$, siis konstandid $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ saavad olla vaid nullid:

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Võtame võrduse (3.5) muutuja t väärtuseks $t = t_0$ Omaduse (3.4) saame saame, et

$$a_0\varphi_0(t_0) + a_1\varphi_1(t_0) + \cdots + a_n\varphi_n(t_0) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0,$$

kust järeldub $a_0 = 0$. Analoogiliselt võttes t väärtuseks $t = t_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, saame järeldada, et $a_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Seega seos (3.5) saab kehtida ainult juhul, kui

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

3.2 Kollokatsioonimeetod

Vaatleme Milne'i integraalvõrrandit (2.1), see tähendab võrrandit

$$u(t) = \int_0^b \frac{\lambda}{2} E(|t-s|)u(s)ds + f(t), \quad t \in [0,b]. \tag{3.6}$$

Olgu antud lõigul $[0,b]$ ühtlane võrk Δ_n ja olgu funktsioonid φ_j $(j = 0, \ldots, n)$ võrgule Δ_n vastavad lineaarsed baassplainid (3.1-3.3). Integraalvõrrandile (3.6) otsime lähislahendit kujul

$$u_n(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(t), \quad t \in [0,b], \tag{3.7}$$

kus $c_0, c_1, \ldots c_n$ on otsitavad kordajad. Konstantide $c_0, c_1, \ldots c_n$ määramiseks asetame suuruse (3.7) integraalvõrrandisse (3.6) ning nõuame, et integraalvõrrand (3.6) oleks rahuldatud võrgu Δ_n sõlmedes $t_i = ih$ $(i = 0, \ldots, n; h = \frac{b}{n})$:

$$u_n(t_i) = \int_0^b \frac{\lambda}{2} E(|t_i - s|)u_n(s)ds + f(t_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n). \tag{3.8}$$

Kuna $u_n(t_i) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varphi_j(t_i) = c_i$, tekib meil algebraline lineaarvõrrandisüsteem

$$c_i = \sum_{j=0}^{n} k_{ij} c_j + f(t_i), \quad i, j = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.9}$$

kus $c_0, c_1, \ldots, c_n$ on otsitavad ja

$$k_{ij} = \int_0^b \frac{\lambda}{2} E(|t_i - s|)\varphi_j(s)ds, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Seega kujutab (3.9) endast otsitavate kordajate $c_0, c_1, \ldots, c_n$ suhtes järgmist lineaarset võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} (1 - k_{00})c_0 - k_{01}c_1 - \cdots - k_{0n}c_n = f(t_0), \\ -k_{10}c_0 + (1 - k_{11})c_1 - \cdots - k_{1n}c_n = f(t_1), \\ \quad \vdots \\ -k_{n0}c_0 - k_{n1}c_1 - \cdots + (1 - k_{nn})c_n = f(t_n). \end{cases} \tag{3.11}$$

Olles leidnud suurused $c_0, \ldots, c_n$ saame Milne'i integraalvõrrandi suurust $u_n(t)$ mingis punktis $t \in [0,b]$ leida valemiga (3.7). Süsteemi (3.9) ehk (3.11) lahendamiseks tuleb meil arvutada suurused (3.10). Kuna funktsioon $\varphi_j(s) = 0$, kui $s \notin [t_{j-1}; t_{j+1}]$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ ja kasutades võrdust (3.2), saame

$$k_{ij} = \frac{\lambda}{2h}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(|t_i - s|)sds - \frac{\lambda t_{j-1}}{2h}\int_{t_{j-1}}^{t_j} E(|t_i - s|)ds$$
$$- \frac{\lambda}{2h}\int_{t_j}^{t_{j+1}} E(|t_i - s|)sds + \frac{\lambda t_{j+1}}{2h}\int_{t_j}^{t_{j+1}} E(|t_i - s|)ds, \tag{3.12}$$

kus $i = 0, 1, \dots, n$ ja $j = 1, \dots, n-1$.

Kui $j = 0$, siis (3.1) järgi eksisteerib funktsioonil mitte nulliline väärtus ainult lõigul $[0, t_1]$, kus $t_1 \in \Delta_n$. Seega

$$k_{i0} = \frac{\lambda t_1}{2h}\int_{t_0}^{t_1} E(|t_i - s|)ds - \frac{\lambda}{2h}\int_{t_0}^{t_1} E(|t_i - s|)sds, \tag{3.13}$$

kus $i = 0, 1, \dots, n$. Analoogiliselt saame iga $i = 0, 1, \dots, n$ korral

$$k_{in} = -\frac{\lambda t_{n-1}}{2h}\int_{t_{n-1}}^{t_n} E(|t_i - s|)ds + \frac{\lambda}{2h}\int_{t_{n-1}}^{t_n} E(|t_i - s|)sds. \tag{3.14}$$

Seega suuruste k_{ij} $(i, j = 0, 1, \dots, n)$ arvutamiseks võime kasutada eespool tõestatud lauseid Lause 4 ja Lause 5 ning valemeid (3.12-3.14).

Osutub, et suurused k_{ij} $(i = 0, \dots, n; j = 1, \dots, n-1)$ on esitatavad järgmiselt.

1) Kui $i \geq j + 1$, siis

$$k_{ij} = \frac{\lambda}{2h}\Bigg(\frac{1}{2}\Big((t_i - t_j)^2 E(t_i - t_j) - (t_i - t_{j-1})^2 E(t_i - t_{j-1}) - (t_i - t_j)e^{-(t_i - t_j)} +$$
$$+ (t_i - t_{j-1})e^{-(t_i - t_{j-1})} - e^{-(t_i - t_j)} + e^{-(t_i - t_{j-1})}\Big) -$$
$$- t_i\Big((t_i - t_j)E(t_i - t_j) - (t_i - t_{j-1})E(t_i - t_{j-1}) - e^{-(t_i - t_j)} + e^{-(t_i - t_{j-1})}\Big)\Bigg) +$$
$$+ \frac{\lambda t_{j-1}}{2h}\Bigg((t_i - t_j)E(t_i - t_j) - (t_i - t_{j-1})E(t_i - t_{j-1}) + e^{-(t_i - t_{j-1})} - e^{-(t_i - t_j)}\Bigg) +$$
$$+ \frac{\lambda}{2h}\Bigg(-\frac{1}{2}\Big((t_i - t_{j+1})^2 E(t_i - t_{j+1}) - (t_i - t_j)^2 E(t_i - t_j) - (t_i - t_{j+1})e^{-(t_i - t_{j+1})} +$$
$$+ (t_i - t_j)e^{-(t_i - t_j)} - e^{-(t_i - t_{j+1})} + e^{-(t_i - t_j)}\Big) +$$
$$+ t_i\Big((t_i - t_{j+1})E(t_i - t_{j+1}) - (t_i - t_j)E(t_i - t_j) - e^{-(t_i - t_{j+1})} + e^{-(t_i - t_j)}\Big)\Bigg) -$$
$$- \frac{\lambda t_{j+1}}{2h}\Bigg((t_i - t_{j+1})E(t_i - t_{j+1}) - (t_i - t_j)E(t_i - t_j) + e^{-(t_i - t_j)} - e^{-(t_i - t_{j+1})}\Bigg)$$

2) Kui $i \leq j-1$, siis

$$k_{ij} = \frac{\lambda}{2h}\Bigg(\frac{1}{2}\Big((t_j - t_i)^2 E(t_j - t_i) - (t_{j-1} - t_i)^2 E(t_{j-1} - t_i) - (t_j - t_i)e^{-(t_j - t_i)} +$$

$$+(t_{j-1} - t_i)e^{-(t_{j-1} - t_i} - e^{-(t_j - t_i)} + e^{-(t_{j-1} - t_i)}\Big) +$$

$$+t_i\Big((t_j - t_i)E(t_j - t_i) - (t_{j-1} - t_i)E(t_{j-1} - t_i) - e^{-(t_j - t_i)} + e^{-(t_{j-1} - t_i)}\Big)\Bigg) -$$

$$-\frac{\lambda t_{j-1}}{2h}\Bigg((t_j - t_i)E(t_j - t_i) - (t_{j-1} - t_i)E(t_{j-1} - t_i) + e^{-(t_{j-1} - t_i)} - e^{-(t_j - t_i)}\Bigg) -$$

$$-\frac{\lambda}{2h}\Bigg(\frac{1}{2}\Big((t_{j+1} - t_i)^2 E(t_{j+1} - t_i) - (t_j - t_i)^2 E(t_j - t_i) - (t_{j+1} - t_i)e^{-(t_{j+1} - t_i)} +$$

$$+(t_j - t_i)e^{-(t_j - t_i)} - e^{-(t_{j+1} - t_i)} + e^{-(t_j - t_i)}\Big) +$$

$$+t_i\Big((t_{j+1} - t_i)E(t_{j+1} - t_i) - (t_j - t_i)E(t_j - t_i) - e^{-(t_{j+1} - t_i)} + e^{-(t_j - t_i)}\Big)\Bigg) +$$

$$+\frac{\lambda t_{j+1}}{2h}\Bigg((t_{j+1} - t_i)E(t_{j+1} - t_i) - (t_j - t_i)E(t_j - t_i) + e^{-(t_j - t_i)} - e^{-(t_{j+1} - t_i)}\Bigg)$$

3) Kui $i = j$, siis

$$k_{ij} = \frac{\lambda}{2h}\Bigg(\frac{1}{2}\Big(- (t_i - t_{j-1})^2 E(t_i - t_{j-1}) + (t_i - t_{j-1})e^{-(t_i - t_{j-1})} - 1 + e^{-(t_i - t_{j-1})}\Big) -$$

$$-t_i\Big(- (t_i - t_{j-1})E(t_i - t_{j-1}) - 1 + e^{-(t_i - t_{j-1})}\Big)\Bigg) +$$

$$+\frac{\lambda t_{j-1}}{2h}\Bigg(- (t_i - t_{j-1})E(t_i - t_{j-1}) + e^{-(t_i - t_{j-1})} - 1\Bigg) -$$

$$-\frac{\lambda}{2h}\Bigg(\frac{1}{2}\Big((t_{j+1} - t_i)^2 E(t_{j+1} - t_i) - (t_{j+1} - t_i)e^{-(t_{j+1} - t_i)} - e^{-(t_{j+1} - t_i)} + 1\Big) +$$

$$+t_i\Big((t_{j+1} - t_i)E(t_{j+1} - t_i) - e^{-(t_{j+1} - t_i)} + 1\Big)\Bigg) +$$

$$+\frac{\lambda t_{j+1}}{2h}\Bigg((t_{j+1} - t_i)E(t_{j+1} - t_i) + 1 - e^{-(t_{j+1} - t_i)}\Bigg).$$

Tulemused suuruste k_{ij} $(i = 0, \ldots, n; j = 0)$ on esitatavad järgmiselt.

1) Kui $i \geq j+1$, siis

$$k_{i0}=-\frac{\lambda t_1}{2h}\Big((t_i-t_1)E(t_i-t_1)-(t_i-t_0)E(t_i-t_0)+e^{-(t_i-t_0)}-e^{-(t_i-t_1)}\Big)-$$

$$-\frac{\lambda}{2h}\Big(-\frac{1}{2}\big((t_i-t_1)^2E(t_i-t_1)-(t_i-t_0)^2E(t_i-t_0)-(t_i-t_1)e^{-(t_i-t_1)}+$$

$$+(t_i-t_0)e^{-(t_i-t_0)}-e^{-(t_i-t_1)}+e^{-(t_i-t_0)}\big)+$$

$$+t_i\big((t_i-t_1)E(t_i-t_1)-(t_i-t_0)E(t_i-t_0)-e^{-(t_i-t_1)}+e^{-(t_i-t_0)}\big)\Big).$$

2) Kui $i \leq j-1$, oleks $i<0$, mis pole võimalik.

3) Kui $i=j$, siis

$$k_{i0}=\frac{\lambda t_1}{2h}\Big((t_1-t_i)E(t_1-t_i)+1-e^{-(t_1-t_i)}\Big)+$$

$$+\frac{\lambda}{2h}\Big(\frac{1}{2}\big((t_1-t_i)^2E(t_1-t_i)-(t_1-t_i)e^{-(t_1-t_i)}-e^{-(t_1-t_i)}+1\big)+$$

$$+t_i\big((t_1-t_i)E(t_1-t_i)-e^{-(t_1-t_i)}+1\big)\Big).$$

Tulemused suuruste k_{ij} $(i=0,\ldots,n; j=n)$ on esitatavad järgmiselt.
1) Kui $i \geq j+1$, oleks $i>n$, mis pole võimalik.

2) Kui $i \leq j-1$, siis

$$k_{in}=\frac{\lambda t_{n-1}}{2h}\Big((t_n-t_i)E(t_n-t_i)-(t_{n-1}-t_i)E(t_{n-1}-t_i)+e^{-(t_{n-1}-t_i)}-e^{-(t_n-t_i)}\Big)+$$

$$+\frac{\lambda}{2h}\Big(\frac{1}{2}\big((t_n-t_i)^2E(t_n-t_i)-(t_{n-1}-t_i)^2E(t_{n-1}-t_i)-(t_n-t_i)e^{-(t_n-t_i)}+$$

$$+(t_{n-1}-t_i)e^{-(t_{n-1}-t_i}-e^{-(t_n-t_i)}+e^{-(t_{n-1}-t_i)}\big)+$$

$$+t_i\big((t_n-t_i)E(t_n-t_i)-(t_{n-1}-t_i)E(t_{n-1}-t_i)-e^{-(t_n-t_i)}+e^{-(t_{n-1}-t_i)}\big)\Big).$$

3) Kui $i=j$, siis

$$k_{in}=-\frac{\lambda t_{n-1}}{2h}\Big(-(t_i-t_{n-1})E(t_i-t_{n-1})+e^{-(t_i-t_{n-1})}-1\Big)+$$

$$+\frac{\lambda}{2h}\Bigg(\frac{1}{2}\Big(-(t_i-t_{n-1})^2E(t_i-t_{n-1})+(t_i-t_{n-1})e^{-(t_i-t_{n-1})}-1+e^{-(t_i-t_{n-1})}\Big)-$$

$$-t_i\Big(-(t_i-t_{n-1})E(t_i-t_{n-1})-1+e^{-(t_i-t_{n-1})}\Big)\Bigg).$$

4 Kollokatsioonimeetodi koondumine

4.1 Kollokatsioonimeetodi operaatorkuju

Toome sisse interpolatsiooniprojektori $P_n : C[0,b] \to C[0,b]$, mis seab igale funktsioonile $u \in C[0,b]$ vastavusse funktsiooni $P_n u \in C[0,b]$ kujul

$$(P_n u)(t) = \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t), \quad t \in [0,b], \tag{4.1}$$

kus φ_j $(j = 0, \ldots, n)$ on võrgule Δ_n vastavad lineaarsed baassplainid, mis on defineeritud seostega (3.1)-(3.3).

Osutub, et P_n on lineaarne ja tõkestatud operaator iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tõepoolest, P_n on lineaarne, sest kui $u, v \in C[0,b]$ ja $\mu, \gamma \in \mathbb{R}$, siis

$$(P_n(\mu u + \gamma v))(t) = \sum_{j=0}^{n} (\mu u(t_j)\varphi_j(t) + \gamma v(t_j)\varphi_j(t))$$

$$= \mu \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j + \gamma \sum_{j=0}^{n} v(t_j)\varphi_j(t)$$

$$= \mu(P_n u)(t) + \gamma(P_n v)(t), \quad t \in [0,b].$$

Veendumaks, et operator P_n on tõkestatud, tuleb näidata, et $||P_n u||_{C[0,b]} \leq ||u||_{C[0,b]}$ iga $u \in C[0,b]$ korral, kus $c \in \mathbb{R}$ on mingi konstant.

Tõepoolest, olgu $u \in C[0,b]$. Siis definitsiooni (4.1) põhjal saame

$$
\begin{aligned}
||P_n u||_{C[0,b]} &= \max_{t\in[0,b]} \left| \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t) \right| \\
&\le \max_{t\in[0,b]} \sum_{j=0}^{n} |u(t_j)|\varphi_j(t) \\
&\le ||u||_{C[0,b]} \max_{t\in[0,b]} \sum_{j=0}^{n} \varphi_j(t) \\
&\le ||u||_{C[0,b]},
\end{aligned}
$$

sest $\sum_{j=0}^{n} \varphi_j(t) = 1$, kui $t \in [0,b]$. Oleme saanud, et iga $n \in \mathbb{N}$ ja $u \in C[0,b]$ korral

$$||P_n u||_{C[0,b]} \le ||u||_{C[0,b]}.$$

Seega $P_n : C[0,b] \to C[0,b]$ on tõkestatud, kusjuures

$$||P_n||_{\mathcal{L}\left(C([0,b]),\, C([0,b])\right)} \le 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Seoste (3.4) ja (4.1) abil saame

$$(P_n u)(t_i) = \sum_{j=0}^{n} u(t_j)\varphi_j(t_i) = u(t_i), \quad i = 0,\dots,n.$$

Seega iga $u \in C[0,b]$ korral

$$
\begin{aligned}
(P_n^2 u)(t) = (P_n(P_n u))(t) &= \sum_{j=0}^{n} (P_n u)(t_j)\varphi_j(t) \\
&= \sum_{j=0}^{n} u(t)\varphi_j(t_i) = (P_n u)(t), \quad t \in [0,b],
\end{aligned}
$$

s.t. $P_n^2 = P_n$, mis ütleb, et operaator P_n on projektor. Sel juhul teame, et kehtib $||P_n||_{\mathcal{L}\left(C([0,b]),\, C([0,b])\right)} \ge 1$ (vt. [3], lk 259-260). Kokkuvõtteks saame, et

$$||P_n||_{\mathcal{L}\left(C([0,b]),\, C([0,b])\right)} = 1 \quad (n = 1,2,\dots).$$

Lause 9. Võrdusega (4.1) defineeritud operaatori $P_n : C[0,b] \to C[0,b]$ korral $P_n u = 0$ parajasti siis, kui $u(x_i) = 0$, $i = 0,1,...,n$.

Tõestus. Tarvilikkus. Olgu $u \in C[0,b]$ ja oletame, et $P_n u = 0$. Siis $(P_n u)(t_i) = 0$

$(i = 0, ..., n)$. Kuna P_n definitsioonist järeldub, et $(P_n u)(t_i) = u(t_i)$, siis $u(t_i) = 0$ $(i = 0, ..., n)$.

Piisavus järeldub vahetult definitsioonist (4.1), sest kui $u(t_i) = 0$ iga $i = 0, ..., n$ korral, siis $(P_n u)(t) = 0$ iga $t \in [0, b]$ korral. □

Eelneva põhjal näeme, et kollokatsioonitingimus (3.8) on samaväärne nõudega

$$P_n(u_n - Tu_n - f) = 0,$$

kus T on integraaloperaator võrrandist (3.6):

$$(Tu)(t) = \frac{\lambda}{2} \int_0^b E(|t - s|)u(s)ds.$$

Võtame arvesse, et $P_n u_n = u_n$ funktsioonide jaoks kujul (3.7). Seega tingimus (3.8) võtab kuju

$$u_n = P_n T u_n + P_n f, \tag{4.3}$$

kus u_n on otsitav.

Võrrandi (4.3) käsitlemisel võime unustada nõude, et lähislahend avalduks kujul (3.7). Nimelt, kui võrrand (4.3) on lahenduv, siis tema lahendid on automaatselt kujuga (3.7).

Milne'i võrrandi puhul me näitasime, et $||T|| < 1$ (operaatori norm ruumi $C[0, b]$ suhtes). Interpolatsiooniprojektori (4.1) puhul $||P_n|| = 1$, seega $||P_n T|| \leq ||T|| < 1$, mis toob kaasa võrrandi (4.3) ühese lahenduvuse ja võrratuse $||(I - P_n T)^{-1}|| \leq \frac{1}{1 - ||T||}$, mille parem pool ei sõltu n-st (vt. [3], lk. 142). Viimane asjaolu osutubki määravaks kollokatsioonimeetodi koonduvuseks.
Lähtudes võrdusest

$$(I - P_n T)(u_n - u) = (I - P_n T)u_n - (I - P_n T)u = P_n f - u + P_n T u =$$

$$P_n f - u + (P_n u - P_n f) = P_n u - u,$$

saame, et

$$u_n - u = -(I - P_n T)^{-1}(u - P_n u), \tag{4.4}$$

kust jõuame hinnanguni

$$||u_n - u||_{C[0,b]} \leq c||(u - P_n u)||_{C[0,b]}, \tag{4.5}$$

kus c ei sõltu suurusest n.

4.2 Vea hindamine

Tuginedes hinnagutele (2.8)-(2.9)) saab näidata (vt. [1]), et võrrandi (2.1) (võrrandi (2.15) lahend u on pidev lõigul $[0, b]$ ja kaks korda pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0, b)$ ning tema tuletiste u' ja u'' kohta kehtivad järgmised hinnangud:

$$\begin{cases} |u'(t)| \leq c_1(1 + |\ln t| + |\ln (b-t)|), \\ |u''(t)| \leq c_2(\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{b-t}), \end{cases} \tag{4.6}$$

kus c_1 ja c_2 on mingid positiivsed konstandid, mis ei sõltu suurusest $t \in (0, b)$.

Me eesmärk on hinnata $u - P_n u$ viga, kus u on võrrandi (2.1) lahend. Küsimus taandub lineaarse interpolatsiooni vea hindamisele igal lõigul $[t_j, t_{j+1}]$ $(j = 0, \ldots, n-1)$.

a) Siselõikudel $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 1, \ldots, n-2$, võib rakendada vea valemit (vt. [5])

$$u(t) - v(t) = \frac{1}{2}u''(\tau)(t - t_j)(t - t_{j+1}) \quad (t_j \leq t \leq t_{j+1}),$$

kus $v(t) = (P_n u)(t)$, $\tau \in (t_j, t_{j+1})$ on mingi meile üldiselt mittetadaolev punkt,

$$|u''(\tau)| \leq c_2(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{b-\tau}).$$

Seega iga $j = 1, \ldots, n-2$ korral

$$|u(t) - (P_n u)(t)| \leq \frac{1}{8}c_2\left(\frac{1}{t_j} + \frac{1}{b - t_{j+1}}\right)(t_{j+1} - t_j)^2 \quad (t_j \leq t \leq t_{j+1}).$$

Niisiis siselõikudel $[t_j, t_{j+1}]$ $(j = 1, \ldots, n-2)$ saame hinnangu

$$|u(t) - (P_n u)(t)| \leq \frac{1}{8}c_2\left(1 + 1\right)h = c_3 \cdot h. \tag{4.7}$$

Siselõikudes osutub tükiti lineaarse interpolandi viga hinnatavaks valitud võre Δ_n sammu pikkusega h.

b) Lõikudel $[0, t_1]$ ja $[t_{n-1}, t_n]$ ei ole hinnang (4.7) rakendatav. Esitame uue hinnangu lõigul $[0, t_1]$, kus kirjutiste lühendamiseks tähistame ajutiselt $t_1 = h$. Hindame lineaarse interpolandi

$$v(t) = u(0)\frac{h-t}{h} + u(t)\frac{t}{h} \tag{4.8}$$

viga lõigul $t \in [0,h]$. Teisendame avaldist (4.8):

$$u(t) - v(t) = u(t) - u(0)\frac{h-t}{h} - u(h)\frac{t}{h} =$$

$$= \frac{h-t}{h}(u(t) - u(0)) + \frac{t}{h}(u(t) - u(h)) =$$

$$= \frac{h-t}{h}\int_0^b u'(s)ds - \frac{t}{h}\int_t^h u'(s)ds =$$

$$= \frac{h-t}{h}\left(su'(s)|_0^t - \int_0^t su''(s)ds\right) - \frac{t}{h}\left((s-h)u'(s)|_t^h - \int_t^h (s-h)u''(s)ds\right) =$$

$$= -\frac{h-t}{h}\int_0^t su''(s)ds - \frac{t}{h}\int_t^h (h-s)u''(s)ds$$

Võrratusest (4.6) ja lausest 3 järeldub, et teisendatud avaldises esinevad integraalid koonduvad. Saavutame võrratuse

$$|u(t) - v(t)| \leq \frac{h-t}{h}\int_0^t s|u''(s)|ds + \frac{t}{h}\int_t^h (h-s)|u''(s)|ds \quad (0 \leq t \leq h). \qquad (4.9)$$

Kasutame võrratustest (4.6) tulevat hinnangut

$$|u''(s)| \leq \frac{c_2}{s} \quad (0 < s \leq h)$$

ja saame hinnangu

$$|u(t) - v(t)| \leq \frac{h-t}{h}\int_0^t c_2 ds + \frac{t}{h}\int_t^h c_2\frac{(h-s)}{s}ds =$$

$$= c_2\left(\frac{h-t}{h}t + t\ln s|_t^h - \frac{t}{h}(h-t)\right) =$$

$$= c_2 t \ln(\frac{h}{t})$$

Funktsioon $t\ln(\frac{h}{t})$ on lõigul $[0,h]$ mittenegatiivne ja saavutab maksimaalse väärtuse $\frac{h}{e}$ punktis $t = \frac{h}{e}$. Seega

$$|u(t) - v(t)| \leq c_2\frac{h}{e}$$

ehk

$$|u(t) - (P_n u)(t)| \leq c_4 \cdot h \quad (0 \leq t \leq t_1). \qquad (4.10)$$

Analoogiline hinnang kehtib viimasel osalõigul:

$$|u(t) - (P_n u)(t)| \leq c_5 \cdot h \quad (t_{n-1} \leq t \leq b). \tag{4.11}$$

c) Võrratustest (4.7), (4.10), (4.11) ja (4.5) järeldub, et

$$||u - P_n u||_{C[0,b]} \leq C \cdot h = C \cdot \frac{1}{n} \tag{4.12}$$

ning seega ka

$$||u_n - u||_{C[0,b]} \leq C \cdot \frac{1}{n}, \tag{4.13}$$

kus konstant C ei sõltu suurusest n.
Võtame saadud tulemused kokku järgmise teoreemina.

Teoreem 1. *Olgu Milne´i võrrandi (2.1) korral täidetud osas 2.1 esitatud eeldused. Olgu kollokatsioonimeetodis (3.7)-(3.8) kasutusel ühtlane võrk Δ_n $(n \geq 2)$ sõlmedega $t_i = ih$ $(i = 0, \ldots, n; h = \frac{b}{n})$. Siis Milne´i integraalvõrrandil on olemas ühene lahend $u \in C[0, b]$, mis on kaks korda pidevalt diferentseeruv vahemikus $(0, b)$ ning tema esimese ja teise tuletise jaoks kehtivad hinnangud (2.8)-(2.9). Kollokatsioonimeetodis tekkiv võrrandisüsteem (3.11) on üheselt lahenduv ning kehtib vea hinnang (4.13), kus u_n avaldub kujul (3.7), milles olevad konstandid on leitud võrrandisüsteemist (3.11).*

5 Arvuline näide

Vaatleme integraalvõrrandit

$$u(t) = \frac{1}{4}\int_0^{0.3} E(|t-s|)u(s)ds + \frac{1}{8}e^{2t-0.6}, \quad 0 \leq t \leq 0.3, \tag{5.1}$$

mille tuum $E(|\tau - s|)$ on valemiga (2.2) määratud integraalne eskponentfunktsioon. Integraalvõrrandi (5.1) ligikaudse lahendi u_n leiame osas 3 kirjeldatud kollokatsioonimeetodi (3.7)-(3.8) abil, võttes aluseks ühtlase võrgu Δ_n ($n \geq 2$) punktidega

$$t_i = ih \quad (i = 0, 1, \ldots n),$$

kus $h = \dfrac{0.3}{n}$.

Kuna võrrandi (5.1) lahend $u(t)$ ei ole teada, siis võtame kasutusele kollokatsioonimeetodil (3.7)-(3.8) saadud lahendi $u(t)$ lähendi $u_{1536}(t)$, $t \in [0, 0.3]$. Kollokatsioonimeetodil (3.7)-(3.8) saadud lähislahendite u_n vea $||u_n - u||_{C[0,0.3]}$ iseloomustamiseks $n = 3, 6, 12, 24, 48, 96$ korral kasutame suurust

$$\varepsilon_n = \max_{\substack{i=0,1,\ldots,n-1 \\ j=0,1,\ldots,9}} |u_n(t_i + \frac{j}{10}\cdot\frac{0.3}{n}) - u_{1536}(t_i + \frac{j}{10}\cdot\frac{0.3}{n})| \tag{5.2}$$

ning suhteid $\varepsilon_{\frac{n}{2}}/\varepsilon_n$. Teoreemi 1 hinnangust (4.13) tuleneb, et suhted $\varepsilon_{\frac{n}{2}}/\varepsilon_n$ peaksid suuruse n kasvades lähenema arvule 2. Järgnevast tabelist näeme, et saadud tulemused on vastavuses teoreetilise hinnanguga (4.13).

n	ε_n	$\varepsilon_{\frac{n}{2}}/\varepsilon_n$
3	0.00098033	-
6	0.00057392	1.708
12	0.00030763	1.865
24	0.00015857	1.939
48	0.00008022	1.976
96	0.00004018	1.996

Tabel 1: Vigade ε_n väärtused ja suhted $\varepsilon_{\frac{n}{2}}/\varepsilon_n$

Kirjandus

[1] Vainikko, G., *Kiirguslevi. Matemaatilise füüsika täiendavaid peatükke.*, Tartu: TÜ trükikoda, 1990. -92 lk.

[2] Abramowitz, M., Stegun, I. A. (toim.), *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1964. – 1046 lk.

[3] Oja, E., Oja, P., *Funktsionaalanalüüs.*, Tartu: TÜ trükikoda, 1991. - 308 lk.

[4] Anna Laaneväli, *Lineaarsplainidega kollokatsioonimeetod Fredholmi teist liiki integraalvorrandite lahendamiseks.*, Tartu Ülikool, 2016.

[5] Janno, J., *Arvutusmeetodid: õpik kõrgkoolidele.* TTÜ Kirjastus, Tallinn, 2016. – 334 lk.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Markus Vanatoa,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   "Milne'i integraalvõrrandi lahendi tükiti lineaarne aproksimatsioon",

   mille juhendaja on Arvet Pedas, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Markus Vanatoa
29.05.2025

6 Lisa

```python
import math
import numpy as np

#E(t) funktsioon naturaallogaritmi, summarea ja konstandiga
def E(x):
    a = x-x**2/(2*math.factorial(2))+x**3/(3*math.factorial(3))-x**4/(4*math.factorial(4))+x**5/(5*math.factorial(5))-x**6/(6*math.factorial(6))+x**7/(7*math.factorial(7))
    return -0.5772156649-math.log(x)+a

#Koik funktsioonid, mis algavad "i1" on esimese uuritava integraali tuumaga E(|t-s|) funktsioonid. Jargnevate funktsioonida nimetused
#on pandud sama loogika aluses, kus i2 on teine uuritud integraal sama tuumaga ja i3 ning i4 on vastavalt esimene ja teine uuritud
#integraal tuumaga E(|t-s|)s.
#i>=j+1
def i1suuremj(i,j,h,lam):
    t1 = (i-j+1)*h
    t2 = (i-j)*h
    return lam*(j-1)*0.5*(E(t2)*t2-t1*E(t1)+math.exp(-t1)-math.exp(-t2))

def i1vordnej(i,j,h,lam):
    t1 = (i-j+1)*h
    t2 = (i-j)*h
    return lam*(j-1)*0.5*(-t1*E(t1)+math.exp(-t1)-1)

```

```
    def i1vaiksemj(i,j,h,lam):
        t1 = (j-1-i)*h
        t2 = (j-i)*h
        return -lam*(j-1)*0.5*(E(t2)*t2-t1*E(t1)+math.exp(-t1)-math.exp(-t2))

    def i1erijuht(i,j,h,lam):
        t1 = (j-1-i)*h
        t2 = (j-i)*h
        return -lam*(j-1)*0.5*(E(t2)*t2+1-math.exp(-t2))

    #i>=j+1
    def i2suuremj(i,j,h,lam):
        t1 = (i-j)*h
        t2 = (i-j-1)*h
        return -lam*(j+1)*0.5*(E(t2)*t2-t1*E(t1)+math.exp(-t1)-math.exp(-t2))

    def i2vordnej(i,j,h,lam):
        t1 = (j-i)*h
        t2 = (j+1-i)*h
        return lam*(j+1)*0.5*(E(t2)*t2+1-math.exp(-t2))

    def i2vaiksemj(i,j,h,lam):
        t1 = (j-i)*h
        t2 = (j+1-i)*h
        return lam*(j+1)*0.5*(E(t2)*t2-t1*E(t1)+math.exp(-t1)-math.exp(-t2))

    def i2erijuht(i,j,h,lam):
        t1 = (i-j)*h
        t2 = (i-j-1)*h
        return -lam*(j+1)*0.5*(-t1*E(t1)+math.exp(-t1)-1)


    #i>=j+1
    def i3suuremj(i,j,h,lam):
        t1 = (i-j+1)*h
        t2 = (i-j)*h
```

```
        osa1 = 0.5*(t2**2*E(t2)-t1**2*E(t1)-t2*math.exp(-t2)+t1*math.exp(-t1)-math.exp(-t2)+math.exp(-t1))
        osa2 = i*h*(t2*E(t2)-t1*E(t1)-math.exp(-t2)+math.exp(-t1))
        return (lam/(2*h))*(osa1-osa2)

    def i3vordnej(i,j,h,lam):
        t1 = (i-j+1)*h
        t2 = (i-j)*h
        osa1 = 0.5*(-t1**2*E(t1)+t1*math.exp(-t1)-1+math.exp(-t1))
        osa2 = i*h*(-t1*E(t1)-1+math.exp(-t1))
        return (lam/(2*h))*(osa1-osa2)

    def i3vaiksemj(i,j,h,lam):
        t1 = (j-1-i)*h
        t2 = (j-i)*h
        osa1 = 0.5*(t2**2*E(t2)-t1**2*E(t1)-t2*math.exp(-t2)+t1*math.exp(-t1)-math.exp(-t2)+math.exp(-t1))
        osa2 = i*h*(t2*E(t2)-t1*E(t1)-math.exp(-t2)+math.exp(-t1))
        return (lam/(2*h))*(osa1+osa2)

    def i3erijuht(i,j,h,lam):
        t1 = (j-1-i)*h
        t2 = (j-i)*h
        osa1 = 0.5*(t2**2*E(t2)-t2*math.exp(-t2)-math.exp(-t2)+1)
        osa2 = i*h*(t2*E(t2)-math.exp(-t2)+1)
        return (lam/(2*h))*(osa1+osa2)

    #i>=j+1
    def i4suuremj(i,j,h,lam):
        t1 = (i-j)*h
        t2 = (i-j-1)*h
        osa1 = 0.5*(t2**2*E(t2)-t1**2*E(t1)-t2*math.exp(-t2)+t1*math.exp(-t1)-math.exp(-t2)+math.exp(-t1))
        osa2 = i*h*(t2*E(t2)-t1*E(t1)-math.exp(-t2)+math.exp(-t1))
        return (lam/(2*h))*(-osa1+osa2)
```

```
    def i4vordnej(i,j,h,lam):
        t1 = (j-i)*h
        t2 = (j+1-i)*h
        osa1 = 0.5*(t2**2*E(t2)-t2*math.exp(-t2)-math.exp(-t2)+1)
        osa2 = i*h*(t2*E(t2)-math.exp(-t2)+1)
        return -(lam/(2*h))*(osa1+osa2)

    def i4vaiksemj(i,j,h,lam):
        t1 = (j-i)*h
        t2 = (j+1-i)*h
        osa1 = 0.5*(t2**2*E(t2)-t1**2*E(t1)-t2*math.exp(-t2)+t1*math.exp(-t1)-math.exp(-t2)+math.exp(-t1))
        osa2 = i*h*(t2*E(t2)-t1*E(t1)-math.exp(-t2)+math.exp(-t1))
        return -(lam/(2*h))*(osa1+osa2)

    def i4erijuht(i,j,h,lam):
        t1 = (i-j)*h
        t2 = (i-j-1)*h
        osa1 = 0.5*(-t1**2*E(t1)+t1*math.exp(-t1)-1+math.exp(-t1))
        osa2 = i*h*(-t1*E(t1)-1+math.exp(-t1))
        return (lam/(2*h))*(-osa1+osa2)

    #Allikafunktsioon f
    def f(x):
        c = 1/8
    return c*math.exp(2*x-0.6)

    #See funktsioon tagastab konstantide c vektori
    def lahend(n, b, lam):
        h = b/n
        A = np.zeros((n+1, n+1))
        for i in range(n+1):
            for j in range(n+1):
                if j==0:
                    if i >= j+1:
                        if i == j+1:
```

```
                            A[i][j] = -(i2erijuht(i,j,h,lam)+i4erijuht(i,j,h,lam))
                        else:
                            A[i][j] = -(i2suuremj(i,j,h,lam) + i4suuremj(i,j,h,lam))
                    elif i<= j-1:
                        if i == j-1:
                            A[i][j] = -(i2vaiksemj(i,j,h,lam) + i4vaiksemj(i,j,h,lam))
                        else:
                            A[i][j] = -(i2vaiksemj(i,j,h,lam) + i4vaiksemj(i,j,h,lam))
                    elif i==j:
                        A[i][j] = 1-(i2vordnej(i,j,h,lam) + i4vordnej(i,j,h,lam))
                elif j==n:
                    if i >= j+1:
                        if i == j+1:
                            A[i][j] = -(i1suuremj(i,j,h,lam) + i3suuremj(i,j,h,lam))
                        else:
                            A[i][j] = -(i1suuremj(i,j,h,lam) + i3suuremj(i,j,h,lam))
                    elif i<= j-1:
                        if i == j-1:
                            A[i][j] = -(i1erijuht(i,j,h,lam) + i3erijuht(i,j,h,lam))
                        else:
                            A[i][j] = -(i1vaiksemj(i,j,h,lam) + i3vaiksemj(i,j,h,lam))
                    elif i==j:
                        A[i][j] = 1-(i1vordnej(i,j,h,lam) + i3vordnej(i,j,h,lam))
                else:
                    if i >= j+1:
                        if i == j+1:
                            A[i][j] = -(i1suuremj(i,j,h,lam) + i2erijuht(i,j,h,lam) + i3suuremj(i,j,h,lam) + i4erijuht(i,j,h,lam))
```

```
                    else:
                        A[i][j] = -(i1suuremj(i,j,h,lam) + i2suuremj(i,j,h,lam) + i3suuremj(i,j,h,lam) + i4suuremj(i,j,h,lam))
                elif i<= j-1:
                    if i == j-1:
                        A[i][j] = -(i1erijuht(i,j,h,lam) + i2vaiksemj(i,j,h,lam) + i3erijuht(i,j,h,lam) + i4vaiksemj(i,j,h,lam))
                    else:
                        A[i][j] = -(i1vaiksemj(i,j,h,lam) + i2vaiksemj(i,j,h,lam) + i3vaiksemj(i,j,h,lam) + i4vaiksemj(i,j,h,lam))
                elif i==j:
                    A[i][j] = 1-(i1vordnej(i,j,h,lam) + i2vordnej(i,j,h,lam) + i3vordnej(i,j,h,lam) + i4vordnej(i,j,h,lam))




    vabaliikmed = []
    for i in range(n+1):
        vabaliikmed.append(f(i*h))

    return np.linalg.solve(A, vabaliikmed)

#Phi funktsioon kui see on positiivse tousuga
def posphi(t, h):
    i=0
    while i*h < t:
        i+=1
    return t/h-(i-1)

#Phi funktsioon kui see on negatiivse tousuga
def negphi(t, h):
    i=0
```

```
        while i*h < t:
            i+=1
        return i-t/h

    #Viimaks un(t) aproksimeerimis funktsioon
    def aproks(t, h, lahendvektor):
        i=0
        while i*h<t:
            i+=1
        if t==0:
            return lahendvektor[0]
        elif t<h:
            return lahendvektor[0]*negphi(t,h)+lahendvektor
               [1]*posphi(t,h)
        elif i >= len(lahendvektor):
            return lahendvektor[len(lahendvektor)-1]*posphi(t
               ,h)+lahendvektor[len(lahendvektor)-2]*negphi(t
               ,h)
        else:
            return lahendvektor[i]*posphi(t,h)+lahendvektor[i
               -1]*negphi(t,h)

    #See kood arvutab un vaartused valitud loigupunktides
    n = [3,6,12,24,48, 96, 1536]
    b = 0.3
    lam = 0.5
    arr = [0, 0.1, 0.15, 0.2, 0.3]
    j=0
    for t in arr:
        tul = []
        for i in n:
            tul.append(float(aproks(t, b / i, lahend(i, b,
               lam))))
            i += 1
        print(f"Tulemused: {tul}")

    #un funktsioonid
    def u(t):
        n = 768*2
        b = 0.3
```

```
        lam = 0.5
        return float(aproks(t, b / n, lahend(n, b, lam)))

    def u3(t):
        n = 3
        b = 0.3
        lam = 0.5
        return float(aproks(t, b / n, lahend(n, b, lam)))

    def u6(t):
        n = 6
        b = 0.3
        lam = 0.5
        return float(aproks(t, b / n, lahend(n, b, lam)))


    def u12(t):
        n = 12
        b = 0.3
        lam = 0.5
        return float(aproks(t, b / n, lahend(n, b, lam)))


    def u24(t):
        n = 24
        b = 0.3
        lam = 0.5
        return float(aproks(t, b / n, lahend(n, b, lam)))

    def u48(t):
        n = 48
        b = 0.3
        lam = 0.5
        return float(aproks(t, b / n, lahend(n, b, lam)))


    def u96(t):
        n = 96
        b = 0.3
        lam = 0.5
```

```
        return float(aproks(t, b / n, lahend(n, b, lam)))

    #n=3 lahislahendi vea arvutamine
    start_time = time.time()
    n=3
    b=0.3
    h=b/n
    c=b*(1/(10*n))
    vead3 = []
    for i in range(n):
        for j in range(10):
            vead3.append(abs(u3(i*h+j*c)-u(i*h+j*c)))

    max3 = max(vead3)
    print(max3)
    end_time = time.time()
    elapsed_time = end_time - start_time
    print(elapsed_time)

    #n=6 lahislahendi vea arvutamine
    start_time = time.time()
    n=6
    b=0.3
    h=b/n
    c=b*(1/(10*n))
    vead6 = []
    for i in range(n):
        for j in range(10):
            vead6.append(abs(u6(i*h+j*c)-u(i*h+j*c)))

    max6 = max(vead6)
    print(max6)
    end_time = time.time()
    elapsed_time = end_time - start_time
    print(elapsed_time)


    #n=12 lahislahendi vea arvutamine
    start_time = time.time()
    n=12
```

```
    b=0.3
    h=b/n
    c=h/10
    vead12 = []
    for i in range(n):
        for j in range(10):
            vead12.append(abs(u12(i*h+j*c)-u(i*h+j*c)))

    max12 = max(vead12)
    print(max12)
    end_time = time.time()
    elapsed_time = end_time - start_time
    print(elapsed_time)

    #n=24 lahislahendi vea arvutamine
    start_time = time.time()
    n=24
    b=0.3
    h=b/n
    c=h/10
    vead24 = []
    for i in range(n):
        for j in range(10):
            vead24.append(abs(u24(i*h+j*c)-u(i*h+j*c)))

    max24 = max(vead24)
    print(max24)
    end_time = time.time()
    elapsed_time = end_time - start_time
    print(elapsed_time)

    #n=48 lahislahendi vea arvutamine
    start_time = time.time()
    n=48
    b=0.3
    h=b/n
    c=h/10
    vead48 = []
    for i in range(n):
        for j in range(10):
```

```
            vead48.append(abs(u48(i*h+j*c)-u(i*h+j*c)))

    max48 = max(vead48)
    print(max48)
    end_time = time.time()
    elapsed_time = end_time - start_time
    print(elapsed_time)

    #n=96 lahislahendi vea arvutamine
    start_time = time.time()
    n=96
    b=0.3
    h=b/n
    c=h/10
    vead96 = []
    for i in range(n):
        for j in range(10):
            vead96.append(abs(u96(i*h+j*c)-u(i*h+j*c)))

    max96 = max(vead96)
    print(max96)
    end_time = time.time()
    elapsed_time = end_time - start_time
    print(elapsed_time)

    #vigade suhted
    print(max3/max6)
    print(max6/max12)
    print(max12/max24)
    print(max24/max48)
    print(max48/max96)
```