

TARTU ÜLIKOOL  
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND  
PUHTA MATEMAATIKA INSTITUUT  
GEOMEETRIA JA TOPOLOOGIA ÕPPETOOL

Heli Tuopi

**Gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra ja selle  
rakendused taandatud kvanttasandil**

Magistritöö

Juhendaja: dots V. Abramov,  
kand(füüs-mat)

TARTU 2005

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>3</b>
<b>1 Algebra struktuurid</b>	<b>8</b>
1.1 Moodustajatega algebrad . . . . .	8
1.2 Tensoralgebra . . . . .	10
1.3 Moodulid . . . . .	11
1.4 Gradueeritud algebra . . . . .	12
<b>2 <math>q</math>-arvutus</b>	<b>14</b>
2.1 Ühejuured . . . . .	14
2.2 $q$ -arvutus . . . . .	15
<b>3 Diferentsiaalarvutuse üldistus</b>	<b>17</b>
3.1 Vaba diferentsiaal . . . . .	17
3.2 Üldistatud osatuletis ja tema seos vaba diferentsiaaliga . . . .	19
3.3 Gradueeritud $q$ -diferentsiaalalgebra . . . . .	20
<b>4 Taandatud kvanttasand <math>\mathbf{C}_q[x, y]</math></b>	<b>26</b>
4.1 Algebra $\mathbf{C}_q[x, y]$ kui gradueeritud $q$ -diferentsiaalalgebra . . . .	26
4.2 Bimoodulid algebral $\mathbf{C}_q[x, y]$ . . . . .	30
4.3 Baasid ja nende vahelised seosed algebra $\mathbf{C}_q[x, y]$ moodulitel. Osatuletis algebral $\mathbf{C}_q[x, y]$ . . . . .	31
<b>Kirjandus</b>	<b>35</b>
<b>Summary</b>	<b>36</b>

## Sissejuhatus

Tegevusvaldkond, millega tegeletakse magistritöös, on mittekommutatiivne geomeetria, mis tekkis eelmise sajandi 80ndatel aastatel ja mille uurimisega tegeletakse praegu aktiivselt seoses tema rakendustega kvantväljateoorias. Nimelt üritatakse ühendada gravitatsiooni kvantteooriaga. Arvatakse, et gravitatsioonivälja on võimalik kvantiseerida, kui aegruumi vaadelda mittekommutatiivse ruumina. Vastavad teadaolevad teooriad on omavahel seotud nn deformatsiooni parameetritega  $\hbar$ ,  $G$  ja  $c$ , kus  $\hbar$  on Plancki konstant,  $c$  on valguse kiirus ning  $G$  on gravitatsioonikonstant. On võimalik, et gravitatsiooni "liitmisel" süsteemi võivad tekkida uued nn deformatsiooni parameetrid, mis võivad olla seotud eelpool mainitud kolme põhikonstandiga, kuid ei tarvitse.

Mittekommutatiivne geomeetria põhineb sellel, et minna üle kommutatiivselt funktsioonide algebralt mittekommutatiivsele algebrale, kusjuures kõik tingimused ja kommutatiivsus säilivad. Selleks, et tekiks sisukas mittekommutatiivne geomeetria, me vajame konkreetseid struktuure.

Järgnevalt kirjeldamegi lühidalt võimalust, kuidas minna kommutatiivselt geomeetrialt üle mittekommutatiivsele geomeetriaale. Selle skeemi pakkus välja mittekommutatiivse geomeetria rajaja A. Connes [1].

Olgu  $X$  kompaktne topoloogiline ruum. Sellel määratud pidevate funktsioonide algebra  $C(X)$ , mille väärtused on kompleksarvud, moodustavad kommutatiivse ühikuga  $C^*$ -algebra, kus  $f^*(x) = \overline{f(x)}$  mistahes  $f \in C(X)$  korral [2].  $C^*$ -algebra on Banachi algebra  $\mathcal{A}$  involutsiooniga  $*$  :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  st  $a \mapsto a^*$ , nii et

$$(i) \quad (a^*)^* = a;$$

$$(ii) \quad (ab)^* = b^*a^*;$$

$$(iii) \quad (\alpha a + b)^* = \overline{\alpha}a^* + b^*$$

mistahes  $a, b \in \mathcal{A}$  ja  $\alpha \in \mathbf{C}$ , kusjuures suvalise  $a \in \mathcal{A}$  korral kehtib tingimus  $\|a^*a\| = \|a\|^2$ .

Samas Gelfandi teooria kohaselt on teada, et kompaksete topoloogiliste ruumide kategooria on ekvivalentne kommutatiivsete ühikuga  $C^*$ -algebrate kategooriaga [3]. Seega võime kompakse topoloogilise ruumi asendada kommutatiivse ühikuga  $C^*$ -algebraga ning kui loobuda kommutatiivsuse nõudest  $C^*$ -algebral, siis võib mittekommutatiivset  $C^*$ -algebrat vaadelda kui kompakse topoloogilise ruumi mittekommutatiivse üldistusena.

Mittekommutatiivses geometrias mittekommutatiivne ruum kui punkti-hulk sageli puudub ning meie käsutuses on ainult eespool mainitud mittekommutatiivne algebra, mida tõlgendatakse kui mittekommutatiivsel ruumil määratud funktsioonide algebra. Meil on võimalik uurida seda ruumi funktsioonide algebra abil. Analoogiliselt klassikalise teooriaga on funktsioonide algebra abil võimalik defineerida vektorväljad, diferentsiaalvormid ja muud diferentsiaalgeomeetria struktuurid mittekommutatiivsel ruumil.

Kuna eelmise sajandi teisel poolel loodud kalibratsiooniteooriad, millele panid aluse C.N. Yang ja R.L. Mills 50ndatel, saab kirjeldada kihtkondade teooria abil, siis analoogiliselt eelmisele skeemile on võimalik järgnev kalibratsiooniväljade mittekommutatiivne üldistus.

Olgu  $X$  kompaktnen topoloogiline ruum ja  $\mathcal{E}(X)$  kompleksete vektorkondade kategooria, kusjuures iga vektorkonna baasiks on ruum  $X$  ning kihi dimensioon on lõplik. Serre-Swani teoreemi kohaselt vastavus vektorkonna  $E \in \mathcal{E}(X)$  ja temal määratud siledade lõigete ruumi  $\Gamma(E)$  vahel määrab ekvivalentsusseose vektorkondade kategooria  $\mathcal{E}(X)$  ja projektiivsete  $C(X)$ -moodulite kategooria  $\mathcal{P}(C(X))$  vahel. Millest tulenevalt saab vektorkonda baasiga  $X$  vaadelda kui projektiivset moodulit üle  $C^*$ -algebra ning vastavat mittekommutatiivset üldistust võib vaadelda lõplikumõõtmelise projektiivse moodulina üle mittekommutatiivse ühikuga  $C^*$ -algebra.

Käesolevas töös vaadeldakse mittekommutatiivse algebra ühikuga assotiatiiivset algebrat  $\mathbf{C}_q[x, y]$  üle kompleksarvude korpuse  $\mathbf{C}$ , kus  $x, y$  selle algebra moodustajad, mille vahel kehtib seos  $xy = qyx$ , ning  $q \in \mathbf{C}$ ,  $q \neq 1$ . Antud algebrat tõlgendatakse polünoomide algebra n n kvanttasandil, kusjuures selle algebra moodustajaid tõlgendatakse selle tasandi koordinaat-

funktsioonidena. Seega mittekommutatiivseks ruumiks on kvanttasand. Kui algebrale  $\mathbf{C}_q[x, y]$  lisada tingimused  $x^N = y^N = \mathbf{1}$ , kus  $\mathbf{1}$  vaadeldava algebra ühikelement, siis saadud algebrat nimetatakse polünoomide algebraks taandatud kvanttasandil.

Gradueeritud diferentsiaalalgebra on oluline struktuur klassikalises diferentsiaalgeomeetrias. Näiteks diferentsiaalvormide algebra siledal muutkonnal (de Rhami kompleks) on graduateeritud diferentsiaalalgebra, kusjuures diferentsiaaliks on välisdiferentsiaal  $d$ , mis rahuldab tingimust  $d^2 = 0$ , ja korrumtamiseks on väliskorrutamise  $\wedge$ . Seejuures, kui  $X$  on lõplikumõõtmeline sile muutkond, siis vektorkonna  $T^*X$ , kus kihiks on puutujaruumi kaasruum, selle lõige on diferentsiaalvorm  $\omega$ , mille kuju lokaalselt on  $\omega = \omega_i(x)dx^i$  ning  $k$ -vorm on vastavalt vektorkonna  $\wedge^k T^*X$  sile lõige, mille kuju lokaalselt on  $\omega = \omega_{i_1 \dots i_k}(x)dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ .

Seoses mittekommutatiivse geomeetria arenguga tekkis graduateeritud diferentsiaalalgebra üldistus, mida nimetatakse graduateeritud  $q$ -diferentsiaalalgebraks, kus  $q$  on  $N$ -enda astme algjuur.

Käesolevas töös suvalisel  $\mathbf{Z}_N$ -graduateeritud algebral konstrueeritakse kujutus  $d_w$   $q$ -kommutaatori abil ja tõestatakse, et see kujutus on graduateeritud  $q$ -diferentsiaal (Lemma 3.6, Lemma 3.7). Konstrueeritakse ja tõestatakse valem (Lemma 3.8), mis näitab, kuidas suvalise elemendi  $n$ -es diferentsiaal  $d_w^n$  avaldub selle elemendi astmete kaudu. Valemis on kordajateks binoomkordajate  $q$ -analoogid. Antud töö põhitulemusena tõestatakse, et juhul kui  $q$  on  $N$ -enda astme algjuur, siis suvaline  $\mathbf{Z}_N$ -graduateeritud algebra on graduateeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra, kusjuures graduateeritud  $q$ -diferentsiaaliks on  $d_w$ , st  $d_w$  on  $N$ -diferentsiaal ( $d_w^N = 0$ ) [4] (Teoreem 3.9). Viimast teoreemi kasutatakse graduateeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra konstrueerimiseks taandatud kvanttasandil ja uuritakse esimest järku diferentsiaalarvutust, mis tekib taandatud kvanttasandil seoses eespool mainitud graduateeritud  $q$ -diferentsiaalalgebraga.

Paragrahvis 1 käsitletakse lühidalt algebralisi struktuure, mis olulised käesoleva töö seisukohalt. Kirjeldatakse kahel erineval viisil, kuidas konstrueerida vaba moodustajatega algebra. Esimesel juhul kasutatakse suvalisi

elemente, teisel juhul vektorruume. Lisaks tuuakse ära bimooduli ja gradueeritud algebra definitsioonid ning näiteid gradueeritud algebra kohta.

Teises paragrahvis tutvustatakse  $q$ -arvutust. Defineeritakse mitmed  $q$ -analoogid nagu  $q$ -faktoriaal,  $q$ -binoomkordaja,  $q$ -gammafunktsioon. Veel näidatakse, et kui  $q$  on  $N$ -enda astme ühejuur, siis vastav  $q$ -sulg on võrdne nulliga ning veendutakse selles, et kui  $N$  on paarisarv ja  $q$  on  $N$ -enda astme algjuur, siis  $q^{\frac{N}{2}} = -1$ .

Kolmas paragrahv on pühendatud diferentsiaalarvutuse üldistusele ning sisaldab ühe töö põhitulemustest.

Selles paragrahvis tuuakse sisse mõisted: diferentsiaal, vaba diferentsiaal, üldistatud osatuletis, gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra ning  $q$ -kommutaator. Näidatakse, kuidas on omavahel seotud vaba diferentsiaal ja üldistatud osatuletis. Veendutakse, et kujutus, mis on defineeritud  $q$ -kommutaatori abil, on gradueeritud  $q$ -diferentsiaal. Seejärel formuleeritakse ja tõestatakse valem, mis on oluline abitulemus käesoleva magistritöö põhitulemuse tõestamise seisukohalt. See valem näitab, kuidas avaldub suvalise gradueeringuga elemendi  $N$ -es diferentsiaal, kui üldistatud diferentsiaal on defineeritud  $q$ -kommutaatori abil. Paragrahvi lõpus sõnastatakse ja tõestatakse teoreem, mis näitab, millal on algebra gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra. Viimane teoreem on käesoleva töö põhitulemus.

Töö neljandas osas käsitletakse gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra rakendusi taandatud kvanttasandil. Kõigepealt kirjeldatakse lühidalt algebrat  $\mathbf{C}_q[x, y]$  ning näidatakse, et algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  on  $\mathbf{Z}_N$ -gradueeritud algebra ning tehakse järeldus eelnevate tulemuste põhjal, et algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra. Seejärel veendutakse, et algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  on isomorfne maatriksalgebraga üle kompleksarvude korpuse  $\mathbf{C}$ , kusjuures näidatakse, milline on maatriksi kuju, kui ta on gradueeringuga  $k$ .

Järgmises selle paragrahvi punktis veendutakse millised bimoodulid eksisteerivad algebral  $\mathbf{C}_q[x, y]$  ning näidatakse, kuidas on omavahel seotud parem- ja vasakpoolne struktuur bimoodulis. Seejärel antakse mitu erinevat võimalust baasi defineerimiseks bimoodulil ning formuleeritakse ning tõestatakse

nende vahelised seosed. Töö lõpus antakse valem osatuletise arvutamiseks ning tõestatakse see.

# 1 Algebra struktuurid

Selles paragrahvis käsitletakse lühidalt selliseid algebralisi struktuure nagu vaba algebra, tensoralgebra, moodulid ja gradueeritud algebra. Need struktuurid on olulised käesoleva töö seisukohalt.

## 1.1 Moodustajatega algebrad

Vektorruumi  $\mathcal{A}$  üle korpuse  $\mathbf{K}$ , kus  $\mathbf{K}$  on kas reaalarvude- või kompleksarvude korpus, nimetatakse *algebraks*, kui temal on määratud bilineaarne kujutus  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , nii et igale paarile  $(u, v) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  on üheselt vastavusse seatud element  $uv \in \mathcal{A}$ .

Järgnevalt kirjeldatakse lühidalt, kuidas konstrueeritakse vaba moodustajatega algebra. Olgu  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$  mingid sümbolid. Antud sümbolitest moodustatakse kõikvõimalikud lõplikud kombinatsioonid kirjutades sümbolid üksteise järel suvalises järjekorras, näiteks  $\hat{x}_1\hat{x}_2\hat{x}_1$  või  $\hat{x}_2\hat{x}_1\hat{x}_3$ . Saadud kombinatsioone nimetatakse *monoomideks*. Olgu  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , kus  $k$  on lõplik naturaalarv, sümbolitest  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$  moodustatud monoomid. Monoomide  $p_1, p_2, \dots, p_k$  lineaarkombinatsiooniks kordajatega  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$  nimetatakse formaalset avaldist  $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n$ . Osutub, et monoomide kõikvõimalike lõplike lineaarkombinatsioonide hulk  $\mathcal{B}$  on vektorruum vastava liitmise ja korpuse  $\mathbf{K}$  elementidega korrutamise suhtes. On ilmne, et monoomide hulk on lõpmatu. Järelikult vektorruum  $\mathcal{B}$  on lõpmatumõõtmeline. Osutub, et vektorruum  $\mathcal{B}$  on assotsiatiivne algebra, kui korrutamine defineerida järgmiselt: kahe monoomi  $p_1, p_2$  korrutiseks nimetatakse monoomi  $p_1 p_2$ , mis on saadud esimese ja teise monoomi jrejest kirjutamisel. Monoomide korral defineeritud korrutamist laiendame kogu vektorruumile  $\mathcal{B}$  järgmiselt:

$$\sum_i^l \alpha_i p_i \sum_j^m \beta_j p'_j = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j p_i p'_j, \quad (1)$$

kus  $l, m$  on lõplikud naturaalarvud. Kui monoomis on üks ja sama sümbol, näiteks  $\hat{x}_i$ , kirjutatud järjest  $k$ -korda, siis monoomi vastavat osa tähistame

$\hat{x}_i^k$  abil st  $\hat{x}_i^k = \hat{x}_i \hat{x}_i \dots \hat{x}_i$  ( $k$ -korda). Suvalise sümboli korral kehtib valem  $\hat{x}_i^k \hat{x}_i^l = \hat{x}_i^{k+l}$ . Kui täiendada monoomide hulka korpuse  $\mathbf{K}$  arvuga 1, nii et

$$\alpha 1 = 1 \alpha = 1, \quad p 1 = 1 p = p, \quad \hat{x}_i^0 = 1,$$

kus  $\alpha \in \mathbf{C}$  ja  $p$  on suvaline monoom, siis algebra  $\mathcal{B}$  muutub ühikuga algebraks, kus ühikelemendiks on korpuse  $\mathbf{K}$  arv 1. Saadud assotsiatiivset ühikuga algebrat  $\mathcal{B}$  nimetatakse vabaks algebraks moodustajatega  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$ .

Paljud tähtsad moodustajatega algebrad tekkivad sel juhul, kui meie eeldame, et algebra moodustajate vahel kehtivad mingid seosed. Selliste algebrate klassi kuuluvad näiteks Grassmanni algebrad ja Cliffordi algebrad. Olgu  $\mathcal{C}$  moodustajatega  $x_1, x_2, \dots, x_n$  algebra, kusjuures moodustajate vahel kehtivad seosed  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, 2, \dots, J$ . Algebra  $\mathcal{C}$  struktuuri konstrueerimiseks võime kasutada eespool kirjeldatud skeemi, vaid antud juhul tuleb arvestada, et seoste  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  tõttu monoomide vahel tekkivad seosed ehk monoomid ei ole sõltumatud. Järelikult algebra  $\mathcal{C}$  konstrueerimise esimene samm seisneb sõltumatute monoomide leidmisel. Monoomide korrutamise on määratud sama valemiga nagu vaba algebra korral, vaid nüüd arvestame seoseid. Järelikult algebra  $\mathcal{C}$  konstrueerimise teine samm seisneb sõltumatute monoomide korrutiste leidmisel, kusjuures korrutame järgmiselt: kui  $p_1, p_2$  on sõltumatud monoomid, siis kirjutame teise monoomi esimese järele  $p_1 p_2$  ja saadud monoomi esitame sõltumatute monoomide lineaarkombinatsioonina kasutades algebra seoseid. Algebra  $\mathcal{C}$  kirjeldamiseks võime kasutada eespool kirjeldatud vaba algebrat. Olgu  $\mathcal{B}$  moodustajate  $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n$  poolt tekitatud vaba algebra ja  $S = \{f_i : f_i \in \mathcal{B}, i = 1, \dots, J\}$  tema elementide süsteem, kus elemendid on määratud algebra  $\mathcal{C}$  seostega. Olgu  $I_S$  elementide  $f_1, f_2, \dots, f_J$  poolt tekitatud kahepoolne ideaal algebras  $\mathcal{B}$ , st

$$I_S = \left\{ \sum_{i=1}^J p_i f_i p'_i : p_i, p'_i \in \mathcal{B} \right\} \subset \mathcal{B}.$$

Algebra  $\mathcal{C}$  moodustajatega  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , mille vahel kehtivad seosed

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, J$$

on isomorfne faktoralgebraga  $\mathcal{B}/I_S$ , kusjuures kanoonilise epimorfismi  $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  korral  $\pi(\hat{x}_i) = x_i$  ja  $\ker \pi = I_S$ .

## 1.2 Tensoralgebra

Teise võimaluse moodustajatega vaba algebra kirjeldamiseks on tensoralgebra.

Olgu  $V$  ja  $W$  vektorruumid üle korpuse  $\mathbf{K}$ . Seejärel moodustatakse vektorruumidest  $V$  ja  $W$  otsekorrutis  $V \times W$ . Hulgast  $V \times W$  saadakse vektorruum, kui tema elementidest moodustatakse lineaarkate

$$\text{Lin}(V \times W) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i (v_i, w_i) : v_i \in V, w_i \in W, \alpha_i \in \mathbf{K} \right\},$$

kus  $n$  on suvaline lõplik naturaalarv.

Olgu antud alamruum  $I \subset \text{Lin}(V \times W)$ , mis koosneb järgmiste elementide lineaarkombinatsioonidest:

$$(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w),$$

$$(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2),$$

$$(\alpha v, w) - \alpha(v, w),$$

$$(v, \alpha w) - \alpha(v, w),$$

kus  $v, v_1, v_2 \in V$ ,  $w, w_1, w_2 \in W$  ja  $\alpha \in \mathbf{K}$ . Kui lineaarkatet  $\text{Lin}(V \times W)$  faktoriseerida alamruumi  $I$  järgi, siis saadud faktorruumi

$$V \otimes W = \text{Lin}(V \times W)/I$$

nimetatakse *vektorruumide  $V$  ja  $W$  tensorkorrutiseks*.

Kui vektorruumid  $V$  ja  $W$  on lõplikumõõtmelised vastavalt baasidega  $e_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, n$  ja  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , siis nende kõikvõimalikud tensorkorrutised kujuga  $e_\alpha \otimes f_i$  moodustavad baasi vektorruumis  $V \otimes W$ . Seega tensorkorrutise  $V \otimes W$  suvaline element  $\varrho$  avaldub kujul

$$\varrho = \sum_{\alpha, i=1}^{n, m} \varrho_{\alpha i} e_\alpha \otimes f_i.$$

Analoogiliselt saadakse ka tensorkorrutised  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_k$ , kus  $V_1, V_2, \dots, V_k$  on vektorruumid ja  $k$  on lõplik naturaalarv. Kui tensorkorrutises esinevad vektorruumid on võrdsed, siis kasutatakse tähistust

$$V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_k.$$

Kui nüüd moodustada otsesumma ühest ja samast vektorruumist moodustatud tensorkorrutistest, siis saadakse vektorruum

$$T(V) = \mathbf{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \dots = \bigoplus_{k=0} V^{\otimes k},$$

kusjuures iga element  $w \in T(V)$  on lõpliku arvu nullist erinevate elementide summa.

Osutub, et  $T(V)$  on assotsiatiivne ühikuga algebra, kui korrutamine defineerida järgmiselt: kui  $v \in V^{\otimes k}$ ,  $w \in V^{\otimes l}$ , siis  $(v, w) \mapsto v \otimes w \in V^{\otimes(k+l)}$ , kus  $k \geq 1$ ,  $l \geq 1$ ; kui  $\alpha \in \mathbf{K}$ ,  $w \in V^{\otimes l}$  või  $v \in V^{\otimes k}$ ,  $\beta \in \mathbf{K}$ , siis vastavalt  $(\alpha, w) \mapsto \alpha w$  või  $(v, \beta) \mapsto \beta v$ . Korpuse  $\mathbf{K}$  ühikelement 1 on algebra  $T(V)$  ühikelemendiks. Algebrat  $T(V)$  nimetatakse *vabaks algebraks*, mis on tekitatud vektorruumi  $V$  poolt.

### 1.3 Moodulid

Olgu  $R$  ühikuga assotsiatiivne algebra üle korpuse  $\mathbf{C}$  ja  $e$  selle algebra ühikelement.

**Definitsioon 1.1.** Hulka  $M$  nimetatakse vasakpoolseks (parempoolseks) mooduliks üle algebra  $R$ , kui ta on vektorruum üle kompleksarvude korpuse  $\mathbf{C}$  ning igale paarile  $(u, w) \in R \times M$  ( $(w, u) \in M \times R$ ) on üheselt vastavusse seatud element  $uw \in M$  ( $wu \in M$ ), nii et

- (i)  $u(aw + bw') = a(uw) + b(uw')$  ( $(aw + bw')u = a(wu) + b(w'u)$ ),
- (ii)  $(au + bv)w = a(uw) + b(vw)$  ( $w(au + bv) = a(wu) + b(wv)$ ),
- (iii)  $(uv)w = u(vw)$  ( $w(uv) = (wu)v$ ),

(iv)  $ew = w$  ( $we = w$ ),

mistahes algebra elementide  $u, v \in R$  ja mooduli elementide  $w, w' \in M$  ning suvaliste kompleksarvude  $a, b$  korral.

Kujutust  $R \times M \rightarrow M$  ( $M \times R \rightarrow M$ ) nimetatakse vasakpoolse (parempoolse) mooduli  $M$  elementide korrutamiseks vasakult (paremalt) algebra  $R$  elementidega. Vasakpoolse (parempoolse) mooduli  $M$  elementi  $uw$  ( $wu$ ), kus  $u \in R, w \in M$ , nimetatakse elementide  $u$  ja  $w$  korrutiseks.

**Definitsioon 1.2.** Hulka  $M$  nimetatakse bimooduliks üle algebra  $R$ , kui ta on samaaegselt nii vasakpoolne kui ka parempoolne moodul üle algebra  $R$ , kusjuures  $(uw)v = u(wv)$  mistahes algebra elementide  $u, v \in R$  ja mistahes bimooduli elemendi  $w \in M$  korral.

Kui  $M$  on bimoodul üle algebra  $R$ , siis kirjutame, et  $M$  on  $(R, R)$ -moodul. Kui moodulis  $M$  (parempoolses või vasakpoolses) leidub lõplik hulk elemente  $w_1, w_2, \dots, w_n$ , nii et mooduli iga element  $w$  on avaldatav nende elementide lineaarkombinatsioonina, näiteks vasakpoolse mooduli korral  $w = u_1w_1 + u_2w_2 + \dots + u_nw_n$ , kus kordajateks  $u_1, u_2, \dots, u_n$  on algebra  $R$  elementid, siis öeldakse, et moodul  $M$  on lõplikult tekitatud ja kui mooduli iga element avaldub üheselt elementide  $w_1, w_2, \dots, w_n$  lineaarkombinatsioonina (kordajad  $u_1, u_2, \dots, u_n$  on üheselt määratud), siis nimetatakse moodulit  $M$  vabaks mooduliks üle algebra  $R$  ja tema elemente  $w_1, w_2, \dots, w_n$  mooduli moodustajateks. Seega on moodulid üsna sarnased vektorruumidele ehk moodulid on vektorruumide üldistus.

## 1.4 Gradueeritud algebra

**Definitsioon 1.3.** Algebrat  $\mathcal{A}$  nimetatakse  $\mathbf{R}$ -gradueeritud algebraks (kus  $\mathbf{R}$  on kas täisarvude hulk  $\mathbf{Z}$ , naturaalarvude hulk  $\mathbf{N}$  või jäägiklassiring  $\mathbf{Z}_N$ ), kui ta on oma alamruumide  $\mathcal{A}^i$ ,  $i \in \mathbf{R}$  otsesumma  $\mathcal{A} = \bigoplus_{i \in \mathbf{R}} \mathcal{A}^i$ , kusjuures kehtib tingimus  $\mathcal{A}^k \mathcal{A}^l \subset \mathcal{A}^{k+l}$  ehk

$$\forall a \in \mathcal{A}^k, \forall b \in \mathcal{A}^l \Rightarrow ab \in \mathcal{A}^{k+l},$$

kus  $k, l \in \mathbf{R}$ .

Kui  $a$  on  $\mathbf{R}$ -gradueeritud algebra suvaline element, siis ta avaldub kujul

$$a = \sum_{i \in \mathbf{R}} a_i, \quad (2)$$

kus  $a_i \in \mathcal{A}^i$  ja  $\mathbf{Z}$ -gradueeritud või  $\mathbf{N}$ -gradueeritud algebra korral nullist erinevate liidetavate arv summas (2) on lõplik. Kui  $a_i \in \mathcal{A}^i$  on ainuke nullist erinev element selles summas, siis elementi  $a \in \mathcal{A}$  nimetatakse homogeeneks elemendiks gradueeringuga  $i$ , mille tähis on

$$gr(a) = i.$$

Seega, kui arvestada definitsioonis 1.3. antud tingimust, on homogeensete elementide korrutise gradueering võrdne nende elementide gradueeringute summaga

$$gr(ab) = gr(a) + gr(b),$$

kus  $a$  ja  $b$  on suvalised homogeenised elemendid algebrast  $a \in \mathcal{A}$ .

### Näited

1. Polünoomide ring on  $\mathbf{Z}$ -gradueeritud algebra, kus homogeenseteks elementideks polünoomid kujul  $P(X) = \alpha X^k$ , kus  $\alpha$  on korpuse element;
2. Jäägiklassiring mooduli  $N$  järgi on  $\mathbf{Z}_{\mathbf{N}}$ -gradueeritud algebra, mille alamruumid on jäägiklassid mooduli  $N$  järgi;
3. Välisalgebra  $\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^N \Lambda^k(V)$ , kus  $V$  on  $N$ -mõõtmeline vektorruum, on  $\mathbf{Z}_{\mathbf{N}}$ -gradueeritud algebra, mille homogeenseteks elementideks on  $k$ -vormid;
4. Tensoralgebra  $T(V)$  on  $\mathbf{N}$ -gradueeritud algebra, mille homogeenseteks elementideks on  $k$ -ndat järku kovariantsed tensorid.

## 2 $q$ -arvutus

Selles paragrahvis käsitleme lühidalt ühe- ja algjuuri ning diferentsiaalarvutuste üldistustes kasutatavat  $q$ -arvutust.

### 2.1 Ühejuured

Olgu  $N$  naturaalarv. Kompleksarvu  $\alpha$   $N$ -enda astme juureks nimetatakse kompleksarvu  $\xi$ , mille korral  $\xi^N = \alpha$ .

Olgu antud kompleksarv

$$\alpha = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi},$$

kus  $r$  on kompleksarvu  $\alpha$  polaarradius ehk kaugus koordinaatide alguspunktist ja  $\varphi$  on polaarnurk. Kui kompleksarv  $\xi$  on kompleksarvu  $\alpha$   $N$ -enda astme juur, siis kasutades Moivre valemit saame, et  $\xi = \sqrt[N]{r}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{N}}$ , kus  $k \in \mathbf{Z}$ .

Kompleksarvu  $\alpha$   $N$ -enda astme juurte hulgas on täpselt  $N$  erinevat, sest kui juurte polaarnurgad oleksid

$$\frac{\varphi}{N}, \frac{\varphi + 2\pi}{N}, \frac{\varphi + 4\pi}{N}, \dots, \frac{\varphi + 2(N-1)\pi}{N},$$

siis nende hulgas puuduvad sellised, mis erineksid üksteisest täispöörde võrra ja kui neid liita, siis saame nurga, mis on üks olemasolevatest. Seega  $N$  erinevat  $N$ -enda astme juurt nullist erinevast kompleksarvust  $\alpha$  asetsevad sellise korrapärase  $N$ -nurga tippudes, mille ümberringjoone raadiuseks on  $r$  ja mille keskpunkt asetseb koordinaatide alguspunktis.

Eriline osa, seoses juurte leidmisega kompleksarvudest, on juurtel kompleksarvust 1.  $N$ -enda astme juurt kompleksarvust 1 nimetatakse  $N$ -enda astme ühejuureks. On võimalik näidata, et  $N$ -enda astme ühejuurte hulk on kompleksarvude korrutamise suhtes tsüklikline rühm.

Kui  $N$ -enda astme ühejuure astmetena on avaldatavad kõik  $N$ -enda astme ühejuured, siis  $N$ -enda astme ühejuurt nimetatakse  $N$ -enda astme algjuureks.

Tarvilik ja piisav tingimus selleks, et  $N$ -enda astme ühejuur  $\varepsilon^k = e^{\frac{2k\pi i}{N}}$  oleks  $N$ -enda astme algjuur, on kui arvud  $k$  ja  $N$  on ühisteguriteta.

Arvestades  $N$ -enda astme ühejuurte paiknemist komplekstasandil, on lihtne arusaada, et  $N$ -enda astme ühejuurte rühm on isomorfne jäägiklassirühmaga  $\mathbf{Z}_N$  [5].

## 2.2 $q$ -arvutus

Matemaatiliste arvutuste üldistustes on oluline osa  $q$ -analooigidel.  $q$ -analooigid baseeruvad piirväärtusele

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1 - q^\alpha}{1 - q} = \alpha,$$

kusjuures suhet  $\frac{1 - q^\alpha}{1 - q}$  tähistatakse sageli sümboliga  $[\alpha]$ , mida nimetatakse  $q$ -sulgudeks [6].

Olgu  $k$  täisarv, siis faktoriaali  $q$ -analooig e  $q$ -faktoriaal defineeritakse valemiga

$$[k]_q! = 1(1 + q)(1 + q + q^2) \cdots (1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}).$$

Kui  $k$  on naturaalarv, siis

$$[k]_q! = \Gamma_q(k + 1) = (1 - q)^{-k} \prod_{i=0}^{k-1} (1 - q^{i+1}),$$

kus  $\Gamma_q$  on *gammafunktsiooni  $q$ -analooig*.

Olgu  $k, N \in \mathbf{N}$ , siis *binoomkordaja  $q$ -analooig* avaldub valemiga

$$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[N]_q!}{[k]_q! [N - k]_q!}.$$

Kui  $q \rightarrow 1^-$ , siis  $q$ -binoomkordaja muutub tavaliseks binoomkordajaks.

Kui  $q$  on  $N$ -enda astme algjuur, siis kehtivad järgmised omadused:

**Lause 2.1.**

$$[N]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = 0,$$

*kus  $q$  on  $N$ -enda astme algjuur.*

Tõestus. Olgu

$$[N]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1},$$

siis

$$q[N]_q = q + q^2 + q^3 + \dots + q^N.$$

Lahutame esimesest võrdusest teise, siis saame

$$[N]_q - q[N]_q = 1 - q^N = 0,$$

sest  $q$  on  $N$ -enda astme algjuur e  $q^N = 1$ . Teiselt poolt

$$[N]_q - q[N]_q = [N]_q(1 - q) = 0.$$

Kuna  $q \neq 1$ , siis järelikult  $[N]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{N-1} = 0$ .

◇

**Lause 2.2.** *Olgu  $q$   $N$ -enda astme algjuur. Kui  $N$  on paaris, siis*

$$q^{\frac{N}{2}} = -1.$$

Tõestus. Olgu  $q$   $N$ -enda astme algjuur st  $q = e^{\frac{2\pi i}{N}}$ , siis

$$q^{\frac{N}{2}} = e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot \frac{N}{2}} = e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1.$$

◇

## 3 Diferentsiaalarvutuse üldistus

### 3.1 Vaba diferentsiaal

Käesolevas paragrahvis käsitletakse diferentsiaalarvutust assotsiatiivsel ühikuga algebral. Paragrahvis esitatud materjal suure osas põhineb artiklitel [7], [8].

Olgu  $R$  assotsiatiivne ühikuga algebra.

**Definitsioon 3.1.** Kui  $M$  on  $(R, R)$ -moodul, siis lineaarkujutust  $d : R \rightarrow M$  nimetatakse diferentsiaaliks algebral  $R$ , kui algebra  $R$  suvaliste elementide  $u, v$  korral kehtib Leibnizi valem

$$d(uv) = d(u)v + ud(v). \quad (3)$$

Paari  $(M, d)$ , kus  $M$  on  $(R, R)$ -moodul ja  $d$  on diferentsiaal nimetatakse esimest järku diferentsiaalarvutuseks algebral  $R$ .

Antud töös meie oleme huvitatud diferentsiaalarvutusest algebral moodustajatega. Olgu  $R$  moodustajatega  $x^1, x^2, \dots, x^n$  algebra ja  $(M, d)$  esimest järku diferentsiaalarvutus algebral  $R$ . Definitsioonist 3.1 järeldub, et elemendid  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$  on bimooduli  $M$  elemendid, st  $dx^i \in M, i = 1, 2, \dots, n$ . Bimooduli  $M$  elemente  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$  edaspidi nimetame moodustajate diferentsiaalideks. Tuleb mainida, et mittekommutatiivse geomeetria seisukohalt algebra  $R$  on funktsioonide algebra analoog, selle algebra moodustajad  $x^1, x^2, \dots, x^n$  on mittekommutatiivse ruumi koordinaatide (ehk koordinaat-funktsioonide) analoogid ja bimooduli  $M$  elemendid on esimest järku diferentsiaalvormide analoogid.

**Definitsioon 3.2.** Olgu  $R$  moodustajatega  $x^1, x^2, \dots, x^n$  algebra,  $(M, d)$  esimest järku diferentsiaalarvutus algebral  $R$  ja  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$  moodustajate diferentsiaalid. Diferentsiaali  $d : R \rightarrow M$  nimetatakse vaba diferentsiaaliks, kui bimoodul  $M$  on vaba parempoolne moodul üle algebra  $R$  vabalt

tekitatud moodustajate diferentsiaalide  $dx^1, dx^2, \dots, dx^n$  poolt. Kui  $d$  on vaba diferentsiaal moodustajatega algebral, siis esimest järku diferentsiaalarvutust  $(M, d)$  nimetatakse koordinaatarvutuseks.

Defintsioonist 3.2 järeldub, et vaba diferentsiaali korral suvalise algebra  $R$  elemendi  $u$  diferentsiaal  $du$  avaldub kujul

$$du = \sum_i dx^i u_i,$$

kus kordajad  $u_i \in R, i = 1, 2, \dots, n$  on üheselt määratud. On teada, et kui bimooduli parempoolne struktuur on vaba moodul, siis bimooduli vasakpoolne struktuur on seotud bimooduli parempoolse struktuuriga vastavate algebrate homomorfismi abil. Tõepoolest olgu  $d$  vaba diferentsiaal algebral  $R$ . Defintsioonist 3.2 järeldub, et algebra  $R$  suvalise elemendi  $u$  korral bimooduli  $M$  elemendi  $udx^i$  võime esitada kujul

$$udx^i = dx^k A_k^i(u), \quad (4)$$

kus kordajad  $A_k^i(u)$  on üheselt määratud ja kordajad määravad kujutuse  $A : R \rightarrow Mat_n R$ , kus  $Mat_n R$  on elementidega algebrast  $R$   $n$ -järku ruutmaatriksite algebra, kusjuures juhime lugeja tähelepanu sellele, et vastavas maatriksis  $A(u)$  on ära vahetatud rea ja veeru indeksid.

Näitame, et kujutus  $A : R \rightarrow Mat_n R$  on algebrate homomorfism, kasutades selleks valemit (4). Olgu  $u, w \in R$ , siis ühelt poolt

$$uwdx^i = dx^j A_j^i(uw)$$

ja teiselt poolt

$$(uw)dx^i = u(wdx^i) = u(dx^k A_k^i(w)) = (udx^k)A_k^i(w) = dx^m A_m^k(u)A_k^i(w).$$

Asendades viimases võrduses indeksid  $m$  indeksiga  $j$ , saame et

$$A_j^i(uw) = A_j^k(u)A_k^i(w)$$

ehk maatriks kujul

$$A(uw) = A(u)A(w).$$

Seega oleme jõudnud soovitud tulemuseni. Mugavuse mõttes kasutame edaspidi arvutustes parempoolset moodulit.

### 3.2 Üldistatud osatuletis ja tema seos vaba diferentsiaaliga

Kui  $d$  on vaba diferentsiaal, siis saab osatuletise defineerida järgmiselt:

**Definitsioon 3.3.** *Osatuletiseks elemendi  $x^i$  järgi nimetatakse lineaarkujutust  $\partial_i : R \rightarrow R$ , mis on määratud valemiga*

$$du = \sum_{i=1}^n dx^i \partial_i u,$$

kusjuures  $\partial_i(x^j) = \delta_i^j$ ,  $\partial_i e = 0$ , kus  $e$  on algebra  $R$  ühikelement ja  $\delta_i^j$  on Kroneckeri delta.

Leiame korrutise osatuletise arvutamise valemi nii, et see oleks kooskõlas korrutise diferentseerimisega, kasutades selleks bimooduli omadusi ning tema vasak- ja parempoolse struktuuri seotust.

Olgu  $u, w \in R$ , siis osatuletise definitsiooni põhjal

$$d(uw) = dx^i \partial_i(uw)$$

ning teiselt poolt diferentsiaali definitsioonist saame

$$\begin{aligned} d(uw) &= (du)w + ud(w) = (dx^i \partial_i u)w + u dx^i ((\partial_i u)w) = \\ &= dx^i ((\partial_i u)w) + (u dx^i) \partial_i w = dx^i ((\partial_i u)w) + (dx^i A(u)) \partial_i w = \\ &= dx^i ((\partial_i u)w) + dx^i (A(u) \partial_i w) = dx^i ((\partial_i u)w + A(u) \partial_i w). \end{aligned}$$

Oleme saanud võrdused, kus vasakud pooled on võrdsed. Järelikult peavad olema võrdsed ka paremad pooled. Seega oleme saanud valemi korrutise osatuletise arvutamiseks

$$\partial_i(uw) = (\partial_i(u))w + A_j^i(u) \partial_i w$$

ehk maatriks kujul

$$\partial(uv) = (\partial u)w + A(u)\partial w, \quad (5)$$

kus

$$\partial(uv) = \begin{pmatrix} \partial_1(uv) \\ \partial_2(uv) \\ \vdots \\ \partial_n(uv) \end{pmatrix}, \quad (\partial u)w = \begin{pmatrix} (\partial_1 u)w \\ (\partial_2 u)w \\ \vdots \\ (\partial_n u)w \end{pmatrix},$$

$$A(u)\partial w = \begin{pmatrix} A_1^1 u & A_1^2 u & \cdots & A_1^n u \\ A_2^1 u & A_2^2 u & \cdots & A_2^n u \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^1 u & A_n^2 u & \cdots & A_n^n u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 w \\ \partial_2 w \\ \vdots \\ \partial_n w \end{pmatrix}$$

Samas on võimalik lähtudes osatuletisest defineerida vaba diferentsiaal, kui on olemas algebra  $R$  moodustajatega  $x^1, x^2, x^3, \dots, x^n$ .

Olgu kujutus  $A : R \rightarrow Mat_n R$  algebra homomorfism ning kujutus  $\partial : R \rightarrow R^N$ , mis rahuldab tingimust (5) ja  $\partial_i(x^j) = \delta_i^j$ . Sellisel juhul kujutus  $\Delta : u \mapsto dx^k \cdot \partial_k(u)$  on vaba diferentsiaal, sest

$$\Delta(x^i) = dx^k \cdot \partial_k(x^i) = dx^k \cdot \delta_k^i = dx^i$$

ja

$$\Delta(uv) = dx^k \cdot \partial_k(uv) = dx^k [\partial_k(u)v + A(u)_k^i \partial_i(v)] = \Delta(u)v + u\Delta(v)$$

ehk kehtib Leibnizi valem.

### 3.3 Gradueeritud $q$ -diferentsiaalalgebra

Selles punktis defineeritakse käesoleva magistritöö seisukohalt kõige olulisem mõiste s.o gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra, konstrueeritakse gradueeritud

$q$ -diferentsiaal  $q$ -kommutaatori abil ning esitatakse töö põhitulemuse (teoreem 3.9) ja abitulemuse (lemma 3.8) sõnastused koos tõestustega.

**Definitsioon 3.4.** *Assotsiatiivset ühikuga algebrat  $\mathcal{A}$  nimetatakse gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebraks, kui*

(i) *algebra  $\mathcal{A}$  on  $\mathbf{Z}_N$ -gradueeritud;*

(ii) *algebral  $\mathcal{A}$  on antud lineaarkujutus  $d : \mathcal{A}^{\bar{i}} \rightarrow \mathcal{A}^{\overline{i+1}}$ , mida edaspidi nimetame gradueeritud  $q$ -diferentsiaaliks, nii et kehtib gradueeritud  $q$ -Leibnizi valem*

$$d(ab) = (da)b + q^{|a|}adb,$$

*kus  $|a| = gr(a)$ ;*

(iii)  *$d^N = 0$ , kusjuures  $q$  on  $N$ -enda astme algjuur.*

**Definitsioon 3.5.** *Olgu  $\mathcal{A}$   $\mathbf{Z}_N$ -gradueeritud algebra. Elementide  $w \in \mathcal{A}^{\bar{k}}$  ja  $w' \in \mathcal{A}^{\bar{k}'}$   $q$ -kommutaator määratakse valemiga*

$$[w, w']_q = ww' - q^{kk'}w'w,$$

*kus  $q \in \mathbf{C}$ ,  $q \neq 1$ .*

Olgu  $\mathcal{A}$   $\mathbf{Z}_N$ -gradueeritud algebra ja element  $w \in \mathcal{A}^{\bar{1}}$  pööratav. Defineerime kujutuse  $d_w : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  valemiga

$$d_w(w') = [w, w']_q.$$

**Lemma 3.6.** *Kujutus  $d_w$  on lineaarkujutus, mis tõstab elemendi gradueeringut ühe võrra s.o  $d : \mathcal{A}^{\bar{i}} \rightarrow \mathcal{A}^{\overline{i+1}}$ .*

Tõestus. Olgu  $w' \in \mathcal{A}^{\bar{i}}$  st, et  $gr(w') = \bar{i}$ , siis diferentsiaali definitsiooni põhjal

$$gr(d_w w') = gr(ww' - q^i w'w) = gr(w) + gr(w') = \bar{1} + \bar{i} = \overline{i+1}.$$

Seega  $d_w$  on kujutus, mis tõstab elemendi gradueeringut ühe võrra.

Näitame nüüd, et  $d_w$  on lineaarkujutus. Olgu  $w', w'' \in \mathcal{A}^{\bar{k}}$  ning  $a, b \in \mathbf{C}$ , siis

$$\begin{aligned} d_w(aw' + bw'') &= w(aw' + bw'') - q^k(aw' + bw'')w = \\ &= aww' + bww'' - aq^k w'w - bq^k w''w = \\ &= a(ww' - q^k w'w) + b(ww'' - q^k w''w) = ad_w w' + bd_w w'' \end{aligned}$$

ehk  $d_w$  on lineaarkujutus. ◇

**Lemma 3.7.** *Lineaarkujutus  $d_w$  on gradueeritud  $q$ -diferentsiaal.*

Tõestus. Peame näitama, et kehtib gradueeritud  $q$ -Leibnizi valem

$$d_w(w'w'') = d_w w' \cdot w'' + q^{|w'|} w' \cdot d_w w'', \quad (6)$$

kus  $w'$  ja  $w''$  on algebra  $\mathcal{A}$  homogeensed elemendid. Rakendame definitsiooni kõigepealt paremale poolele

$$d_w(w'w'') = ww'w'' - q^{|w'|+|w''|} w'w''w$$

ning seejärel vasakule poolele

$$\begin{aligned} d_w w' \cdot w'' + q^{|w'|} w' \cdot d_w w'' &= (ww' - q^{|w'|} w'w)w'' + \\ &+ q^{|w'|} w'(ww'' - q^{|w''|} w''w) = \\ &= ww'w'' - q^{|w'|+|w''|} w'w''w. \end{aligned}$$

Oleme jõudnud tulemusele, et parempool võrdub vasaku poolega ehk kehtib valem (6). Seega lineaarkujutus  $d_w$  on gradueeritud  $q$ -diferentsiaal. ◇

**Lemma 3.8.** *Kui  $gr(w') = r$ , siis*

$$d_w^N(w') = \sum_{j=0}^N p_j^{(N)} w^{N-j} w' w^j, \quad (7)$$

*kus*

$$p_j^{(N)} = (-1)^j \begin{bmatrix} N \\ j \end{bmatrix}_q q^{rj+\sigma_j}, \quad (8)$$

$$\text{milles } \sigma_j = \begin{cases} 0, & j \leq 1; \\ \frac{(j-1)j}{2}, & j \geq 1. \end{cases}$$

Tõestus. Kasutame tõestamisel matemaatilist induktsiooni. Näitame, et  $N = 1$  väide kehtib

$$\begin{aligned} d_w^1(w') &= p_0^{(1)}ww' + p_1^{(1)}w'w = \\ &= (-1)^0 q^0 \frac{[1]_q!}{[0]_q![1]_q!} ww' + (-1)q^r \frac{[1]_q!}{[0]_q![1]_q!} w'w = ww' - q^r w'w. \end{aligned}$$

Oleme saanud gradueeritud  $q$ -diferentsiaali määrava valemi ehk  $N = 1$  korral väide kehtib.

Oletame nüüd, et  $N = k$  korral kehtib valem

$$d_w^k(w') = \sum_{j=0}^k p_j^{(k)} w^{k-j} w' w^j,$$

milles kordaja avaldub kujul

$$p_j^{(k)} = (-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q q^{rj+\sigma_j} = \frac{[k]_q!}{[j]_q![k-j]_q!} q^{rj+\sigma_j}.$$

Leiame kõigepealt, kuidas avaldub element  $p_j^{(k+1)}$  elementide  $p_i^{(k)}$ ,  $i = 0, 1, \dots, k$ , abil

$$\begin{aligned} d_w^{k+1}(w') &= d_w(d_w^k w') = d_w\left(\sum_{j=0}^k p_j^{(k)} w^{k-j} w' w^j\right) = \\ &= \sum_{j=0}^k w p_j^{(k)} w^{k-j} w' w^j - q^{r+k} p_j^{(k)} w^{k-j} w' w^{j+1} = \\ &= p_0^{(k)} w^{k+1} w' + p_1^{(k)} w^k w' w - q^{r+k} p_0^{(k)} w^k w' w + \\ &\quad + (p_2^{(k)} - q^{r+k} p_1^{(k)}) w^{k-1} w' w^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + (p_{j+1}^{(k)} - q^{r+k} p_j^{(k)}) w^{k-j} w' w^{j+1} + \dots \\
& \dots + (p_k^{(k)} - q^{r+k} p_{k-1}^{(k)}) w w' w^k - q^{r+k} p_k^{(k)} w' w^{k+1} = \\
& = \sum_{j=0}^{k+1} (p_j^{(k)} - q^{r+k} p_{j-1}^{(k)}) w^{k+1-j} w' w^j,
\end{aligned}$$

kus  $p_{-1}^{(k)} = p_{k+1}^{(k)} = 0$ . Seega oleme saanud, et

$$p_j^{(k+1)} = p_j^{(k)} - q^{r+k} p_{j-1}^{(k)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k+1.$$

Näitame, et kordaja (8) avaldub analoogiliselt ka  $N = k+1$  korral

$$\begin{aligned}
p_j^{(k+1)} &= p_j^{(k)} - q^{r+k} p_{j-1}^{(k)} = (-1)^j q^{rj+\sigma_j} \frac{[k]_q!}{[j]_q! [k-j]_q!} - \\
& \quad - q^{r+k} (-1)^{j-1} q^{rj+\sigma_{j-1}} \frac{[k]_q!}{[j-1]_q! [k-(j-1)]_q!} = \\
&= (-1)^j q^{rj+\sigma_j} \frac{[k]_q!}{[j-1]_q! [k-j]_q!} \left( \frac{1}{[j]_q} + q^{k-j+1} \frac{1}{[k-j+1]_q} \right) = \\
&= (-1)^j q^{rj+\sigma_j} \frac{[k]_q!}{[j-1]_q! [k-j]_q!} \\
& \quad \left( \frac{1+q+q^2+\dots+q^{k-j}+q^{k-j+1}(1+q+q^2+\dots+q^{j-1})}{[j]_q [k-j+1]_q} \right) = \\
&= (-1)^j q^{rj+\sigma_j} \frac{[k]_q!}{[j-1]_q! [k-j]_q!} \left( \frac{[k+1]_q}{[j]_q [k-j+1]_q} \right) = \\
&= (-1)^j q^{rj+\sigma_j} \frac{[k+1]_q!}{[j]_q! [(k+1)-j]_q!} = (-1)^j q^{rj+\sigma_j} \begin{bmatrix} k+1 \\ j \end{bmatrix}_q.
\end{aligned}$$

Seega oleme saanud, et  $N = k+1$  korral valem (7) kehtib. ◇

**Teoreem 3.9.** *Kui  $w^N = \mathbf{1}$  ja  $q$  on  $N$ -inda astme algjuur, siis algebra  $\mathcal{A}$  on gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra, mille gradueeritud  $q$ -diferentsiaal on defineeritud  $q$ -kommutaatori abil.*

Tõestus. Peame veenduma, et  $d_w^N = 0$ . Summas (7) on igas liidetavas kordaja

$$\frac{[N]_q!}{[j]_q![N-j]_q!} = \frac{[1]_q[2]_q \cdots [N]_q}{[j]_q![N-j]_q!}.$$

Kui  $j = 0$  või  $j = N$ , siis tegur  $[N]_q$  taandub. Vastupidisel juhul antud tegur kordaja lugejas eksisteerib. Kuna  $q$  on  $N$ -enda astme algjuur, siis kehtib tingimus  $[N]_q = 0$  ning seetõttu muutuvad summas (7) liidetavad nulliks va esimene ja viimane.

Arvestades, et  $w^N = 1$ , siis jääb järele

$$\begin{aligned} d_w^N(w') &= w^N w' + (-1)^N q^{rN+\sigma_N} w' w^N = w' + (-1)^N q^{rN+\sigma_N} w' = \\ &= (1 + (-1)^N q^{rN+\sigma_N}) w' = 0, \end{aligned}$$

sest kui  $N$  on paaritu, siis

$$1 - (q^N)^{\frac{N-1}{2}} = 1 - 1^{\frac{N-1}{2}} = 0$$

ja kui  $N$  on paaris, siis kasutades lauset 2.2

$$1 + (q^{\frac{N}{2}})^{N-1} = 1 + (-1)^{N-1} = 0.$$

Olemegi näidanud, et  $\mathbf{Z}_N$ -graduateeritud algebra on graduateeritud  $q$ -diferent-siaalalgebra.

◇

## 4 Taandatud kvanttasand $\mathbf{C}_q[x, y]$

### 4.1 Algebra $\mathbf{C}_q[x, y]$ kui gradueeritud $q$ -diferentsiaalalgebra

Olgu  $\mathbf{C}_q[x, y]$  moodustajatega algebra, mille moodustajate  $x$  ja  $y$  vahel kehtivad järgmised seosed:

$$x^N = y^N = \mathbf{1}, \quad xy = qyx, \quad (9)$$

kus  $\mathbf{1}$  on algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  ühikelement ning  $q \in \mathbf{C}$  on  $N$ -enda astme algjuur. Antud algebra elemendi saame esitada kujul

$$w = \sum_{k,l=0}^{N-1} \alpha_{kl} y^k x^l,$$

kusjuures  $x^0 = y^0 = \mathbf{1}$ .

**Lemma 4.1.** *Algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  on  $\mathbf{Z}_N$ -gradueeritud algebra, mille gradueering on defineeritud järgmiselt:  $gr(\mathbf{1}) = gr(x) = \bar{0}$ ,  $gr(y) = \bar{1}$  ning  $gr(\alpha y^k x^l) = \bar{k}$ , kus  $\alpha \in \mathbf{C}$ .*

Tõestus. Näitame, et algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  on gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra, mille alamruumideks on  $\mathbf{C}_q^{\bar{i}}[x, y]$ , kus  $\bar{i}$  on jäägiklass mooduli  $N$  järgi,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Hulgad  $\mathbf{C}_q^{\bar{i}}[x, y]$  on alamruumid, sest kui vaadelda vastava gradueeringuga elementi ja seda, kuidas on defineeritud gradueering, siis skalaariga korrutamine ei muuda elemendi gradueeringut. Liidame nüüd kaks sama gradueeringuga elementi. Olgu  $w, w' \in \mathbf{C}_q^{\bar{i}}[x, y]$ , siis

$$w + w' = \sum_{l=0}^{N-1} \alpha_l y^i x^l + \sum_{l=0}^{N-1} \beta_l y^i x^l = \sum_{l=0}^{N-1} (\alpha_l + \beta_l) y^i x^l \in \mathbf{C}_q^{\bar{i}}[x, y].$$

Algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  avaldub oma alamruumide  $\mathbf{C}_q^{\bar{i}}[x, y]$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$  otsesummana, sest antud algebra elementi  $\sum_{i,j=0}^{N-1} \alpha_{ij} y^i x^j$  saab esitada gradueeritud elementide summana ning mistahes kaks erineva gradueeringuga elementi kuuluvad erinevatesse alamruumidesse.

Veendume nüüd, et kehtib gradueeritud algebra definitsioonis antud tingimus. Olgu meil homogeenised elemendid  $w, w' \in \mathbf{C}_q[x, y]$  nii, et  $gr(w) = \bar{k}$ ,  $gr(w') = \bar{l}$ , siis

$$\begin{aligned} gr(ww') &= gr\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j y^k x^j \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y^l x^i\right) = gr\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j y^k x^j y^l \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i x^i\right) = \\ &= gr\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j y^k q^{jl} y^l x^j \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i x^i\right) = gr\left(\sum_{j,i=0}^{n-1} q^{jl} \alpha_j \beta_i y^k y^l x^j x^i\right) = \\ &= gr\left(\sum_{j,i=0}^{n-1} q^{jl} \alpha_j \beta_i y^{k+l} x^{j+i}\right) = \overline{k+l} = \bar{k} + \bar{l} = gr(w) + gr(w'), \end{aligned}$$

mida oligi tarvis näidata. Seega algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  on  $\mathbf{Z}_{\mathbf{N}}$ -gradueeritud algebra.  $\diamond$

Kuna algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  on  $\mathbf{Z}_{\mathbf{N}}$ -gradueeritud algebra, siis kasutades teoreemi 3.10, saame teha järgmise järelduse:

**Järeldus 4.2.** Algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  on gradueeritud  $q$ -diferentsiaalalgebra.

**Lause 4.3.**  $\mathbf{C}_q[x, y] \cong Mat_N(\mathbf{C})$ .

Tõestus. Seame algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  moodustajatele vastavusse järgmised  $N$ -mõõtmelised maatriksid :

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q^{-(N-1)} \end{pmatrix}, \quad y \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

ning ühikelemendile  $\mathbf{1}$   $N$ -mõõtmelise ühikmaatriksi, siis lihtne arvutus näitab, et seosed (9) kehtivad, sest moodustajale  $x$  vastavas maatriksis  $q$  astmed kasvavad vastav arv kordi, kui mitmendas astmes on  $x$

$$x^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q^{k(-1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q^{k(-2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q^{k(-(n-1))} \end{pmatrix}$$

ja moodutajale  $y$  vastavas maatriksis nullist erinevate elementide reaindeksid suurenevad vastava arvu võrra, kui mitmendas astmes on  $y$

$$y^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

(viimases reas asub 1  $k$ -ndal kohal), kus  $1 \leq k \leq N$ . Seega kui  $k = N$ , siis on tulemuseks mõlemal juhul  $N$ -ndat järku ühikmaatriks, sest  $q$  on  $N$ -enda astme ühejuur. Analoogiliselt kehtib tingimus  $xy = qyx$ , sest

$$xy = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q^{-(n-3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q^{-(n-2)} \\ q^{-(n-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$yx = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q^{-(n-2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q^{-(n-1)} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kui nüüd korrutada viimast võrdust arvuga  $q$ , siis saamegi, et võrdus kehtib. Seega oleme näidanud, et algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  on isomorfne maatriksalgebra  $Mat_N(\mathbf{C})$ .

◇

Kuna oleme saanud, et maatriksalgebra  $Mat_N(\mathbf{C})$  on isomorfne algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$ , siis ka  $Mat_N(\mathbf{C})$  peab olema  $\mathbf{Z}_N$ -gradueeritud algebra. Uurime, millisel kujul on maatriks, kui ta on gradueeringuga  $k$ . Selleks piisab, kui vaadelda maatrikseid lause 4.3 tõestuses. Kuna  $gr(y) = \bar{1}$  ja  $gr(x) = \bar{0}$ , siis  $gr(xy) = gr(yx) = \bar{1}$ . Vastavates maatriksites on nullist erinevad elemendid peadiagonaali elementidest paremal olevad elemendid ning viimase rea esimene element. Maatriksil (10) on näha, milline on maatriksi kuju, kui see on gradueeringuga  $k$ . Seega gradueeringuga  $k$  elemendi üldkuju on

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_{k+2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_N \\ \alpha_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_k & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

kus  $\alpha_i \in \mathbf{C}$ .

## 4.2 Bimoodulid algebra $\mathbf{C}_q[x, y]$

Käesolevas punktis uurime, millised bimoodulid eksisteerivad algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  ning kuidas on omavahel seotud parempoolne ja vasakpoolne moodul.

Vaatleme algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  alamruume  $\mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$ , kus  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ . Osutub, et need alamruumid on bimoodulid üle algebra  $\mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y]$ , sest kui  $w \in \mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$  ja  $u \in \mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y]$ , siis  $gr(uw) = \bar{k} + \bar{0} = \bar{k}$  ehk  $uw \in \mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$ . Analoogiliselt  $gr(wu) = \bar{k}$  ehk  $wu \in \mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$ . Kuna  $\mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y]$  ja  $\mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$  on algebra  $\mathbf{C}_q[x, y]$  alamruumid ning algebras  $\mathbf{C}_q[x, y]$  kehtivad bilineaarsuse ja assotsiatiivsuse seadused, siis kehtivad ka mooduli definitsioonis (1.1) toodud tingimused ruumides  $\mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y]$  ja  $\mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$ ,  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ .

Bimoodulid  $\mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$  on vabad moodustajatega  $y^k$ , sest kui  $w \in \mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$ , siis parempoolse mooduli korral

$$w = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i y^k x^i = y^k \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i x^i \in \mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y] \times \mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y]$$

ning vasakpoolse mooduli korral

$$w = \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i x^i y^k = \left( \sum_{i=0}^{N-1} \beta_i x^i \right) y^k \in \mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y] \times \mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y].$$

Leiame, kuidas on omavahel seotud parempoolne ja vasakpoolne struktuur st peab leiduma homomorfism

$$A_k : \mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y] \rightarrow \mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y],$$

nii et

$$u(x)y^k = y^k A_k(u(x)), \quad (11)$$

kus  $u(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i x^i$ .

Kuna  $A_k$  on homomorfism, siis

$$A_k(u(x)) = A_k\left(\sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i A_k(x^i) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i (A_k x)^i.$$

Seega piisab, kui leiame elemendi  $A_k x$ . Homomorfismi kirjeldavast võrdusest (11) saame

$$xy^k = y^k A_k x \quad (12)$$

ja tingimusest (9)

$$xy^k = q^k y^k x. \quad (13)$$

Lahutame võrduste (12) ja (13) vastavad pooled, siis saame

$$y^k A_k x - q^k y^k x = 0 \Rightarrow y^k (A_k x - q^k x) = 0.$$

Kuna  $y^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, N - 1$ , on pööratav ( $y^k (y^k)^{-1} = y^k y^{N-k} = 1$ ), siis

$$A_k x - q^k x = 0 \Rightarrow A_k x = q^k x$$

ning

$$A_k (x^i) = (A_k x)^i = (q^k x)^i = q^{ki} x^i, k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Olemegi leidnud homomorfismi  $A_k : \mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y] \rightarrow \mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y]$ , mis seab elemendid vastavusse järgmiselt  $x^i \mapsto q^{ki} x^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ .

### 4.3 Baasid ja nende vahelised seosed algebra $\mathbf{C}_q[x, y]$ moodulitel. Osatuletis algebra $\mathbf{C}_q[x, y]$

On mitu erinevat võimalust baasi valikuks moodulil  $\mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$ . Uurime, milline on vastavate baaside vahelised seosed.

**Lause 4.4.** *Mooduli  $\mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$  baasid  $y^k$ ,  $d_y^k x$  ja  $(d_y x)^k$  on omavahel seotud järgmiste valemitega:*

$$d_y^k x = y^k (1 - q)^k x, \quad (14)$$

$$(d_y x)^k = y^k q^{\sigma_k} (1 - q)^k x^k, \quad (15)$$

$$\text{kus } \sigma_k = \begin{cases} 0, & j \leq 1; \\ \frac{(k-1)k}{2}, & j \geq 1. \end{cases}$$

Tõestus. Kasutame tõestamisel matemaatilist induktsiooni. Näitame esiteks, et kehtib valem (14).

Moodustaja  $y$  genereerib diferentsiaali abil moodustaja  $d_y x$ . Urime, milline on nende vaheline seos. Kasutades üldistatud diferentsiaali, mis on defineeritud  $q$ -kommutaatori abil, ja seost (9), saame

$$d_y x = yx - q^{\bar{1}\bar{0}} xy = yx - q^{\bar{0}\bar{0}} xy = yx - xy = yx - qyx = (1 - q)yx.$$

Seega  $k = 1$  valem (14) kehtib. Oletame nüüd, et  $k$  korral on valem (14) õige ning veendume selles  $k + 1$  korral

$$\begin{aligned} d_y^{k+1} x &= d_y(d_y^k x) = d_y(y^k(1 - q)^k x) = yy^k(1 - q)^k x - y^k(1 - q)^k xy = \\ &= y^{k+1}(1 - q)^k x - y^k(1 - q)^k qyx = y^{k+1}(1 - q)^k x - y^{k+1}(1 - q)^k qx = \\ &= y^{k+1}(1 - q)^k(1 - q)x = y^{k+1}(1 - q)^{k+1}x. \end{aligned}$$

Olemegi saanud, et valem (14) kehtib.

Veendume analoogiliselt, et kehtib ka valem (15). Kui  $k = 1$ , siis valemid (14) ja (15) ühtivad. Oletame nüüd, et  $k$  korral valem (15) kehtib st

$$(d_y x)^k = y^k q^{\frac{(k-1)k}{2}} (1 - q)^k x^k.$$

Korrutame viimase võrduse mõlemaid pooli elemendiga  $d_y x$

$$(d_y x)^k d_y x = y^k q^{\frac{(k-1)k}{2}} (1 - q)^k x^k d_y x.$$

Kuna  $d_y x = y(1 - q)x$ , siis

$$(d_y x)^{k+1} = y^k q^{\frac{(k-1)k}{2}} (1 - q)^k x^k y(1 - q)x.$$

Kasutades tingimust (9)

$$\begin{aligned} (d_y x)^{k+1} &= y^k q^{\frac{(k-1)k}{2}} (1 - q)^{k+1} q^k yx^k x = y^k yq^{\frac{(k-1)k}{2}} q^k (1 - q)^{k+1} x^{k+1} = \\ &= y^{k+1} q^{\frac{(k-1)k}{2} + k} (1 - q)^{k+1} x^{k+1} = y^{k+1} q^{\frac{(k-1)k}{2} + k} (1 - q)^{k+1} x^{k+1} = \\ &= y^{k+1} q^{\frac{k^2 - k + 2k}{2}} (1 - q)^{k+1} x^{k+1} = y^{k+1} q^{\frac{k^2 + k}{2}} (1 - q)^{k+1} x^{k+1} = \\ &= y^{k+1} q^{\frac{k(k+1)}{2}} (1 - q)^{k+1} x^{k+1}. \end{aligned}$$

Sellega on lause tõestatud. ◇

Lausest 4.4 saame teha järelduse, kuidas on omavahel seotud mooduli  $\mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$  baasid  $d_y^k x$  ja  $(d_y x)^k$ .

**Järeldus 4.5.** *Mooduli  $\mathbf{C}_q^{\bar{k}}[x, y]$  baasid  $d_y^k x$  ja  $(d_y x)^k$  on omavahel seotud valemiga*

$$(d_y x)^k = d_y^k x \cdot q^{\sigma_k} x^{k-1}, \quad (16)$$

$$\text{kus } \sigma_k = \begin{cases} 0, & j \leq 1; \\ \frac{(k-1)k}{2}, & j \geq 1. \end{cases}$$

Tõestus. Avaldame valemist (14) baasi  $y^k$  baasi  $d_y^k x$  abil, korrutades paremalt antud võrdust vastavate pöördelementidega

$$d_y^k x ((1-q)^k)^{-1} x^{-1} = y^k.$$

Asendame saadud tulemuse valemisse (15)

$$(d_y x)^k = d_y^k x (1-q)^{-k} x^{-1} q^{\sigma_k} (1-q)^k x^k$$

ning koondame

$$(d_y x)^k = d_y^k x q^{\sigma_k} x^{k-1}.$$

Olemegi saanud soovitud valemi. ◇

Paragrahvis 3 veendusime, et ühikuga assotsiatiivsel algebral on võimalik defineerida osatuletis, mis rahuldab üldistatud Leibnizi reeglit. Antud juhul on võimalik defineerida osatuletis  $\partial : \mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y] \rightarrow \mathbf{C}_q^{\bar{0}}[x, y]$  valemiga, mis on antud järnevas lemmas.

**Lemma 4.4.** *Osatuletis elemendist  $x^k$  on*

$$\partial(x^k) = [k]_q x^{k-1}, \quad (17)$$

*kusjuures  $\partial(1) = \mathbf{0}$ ,  $\partial x = \mathbf{1}$ .*

Tõestus. Kasutame tõestamisel matemaatilist induktsiooni. Valemi (5) põhjal

$$\partial(x^2) = \partial x \cdot x + Ax\partial x = x + qx = (1 + q)x = [2]_q x.$$

Seega  $k = 2$  korral valem (17) kehtib. Oletame nüüd, et valem kehtib  $k = l$  korral, siis  $k = l + 1$  korral

$$\begin{aligned}\partial(x^{l+1}) &= \partial(xx^l) = \partial x \cdot x^l + Ax\partial(x^l) = x^l + qx[l]_q(x^{l-1}) = x^l + q[l]_q x^l = \\ &= (1 + q[l]_q)x^l = (1 + q(1 + q + \dots + q^{l-1}))x^l = [l + 1]_q x^l.\end{aligned}$$

Seega väide kehtib.

◇

## Viited

- [1] Connes, A., Cuntz, J., Guentner, E., Higson, N., Kaminker, J., Roberts, J.E. *Noncommutative Geometry*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.
- [2] Conway, J.B. *A Course in Functional Analysis*. New York: Springer-Verlag, 1990, lk 232-248.
- [3] Dubois-Violette, M. *Lectures on differential algebras and noncommutative geometry*, math.QA/9912017.
- [4] Dubois-Violette, M. *Lectures on differentials, generalized differentials and some examples related to theoretical physics*, QA/0005256.
- [5] Kilp, M. *Algebra I*. Tartu, 1998.
- [6] Koekoek, R. and Swarttouw, R. F. *The Askey-Scheme of Hypergeometric Orthogonal Polynomials and its  $q$ -Analogue*. Delft, Netherlands: Technische Universiteit Delft, Faculty of Technical Mathematics and Informatics Report 98-17, p. 7, 1998.
- [7] Borowiec, A., Kharchenko, V.K., Oziewicz, Z. *On Free Differentials on Associative Algebras*, hep-th/9312023.
- [8] Borowiec, A., Kharchenko, V.K. *Algebraic approach to calculus with partial derivatives*, Siberian Advances in Mathematics, v.5, N.2, 10-37,1995.

# Graded $q$ -differential algebra and its application to the reduced quantum plane

Heli Tuopi

Summary

We study a generalization of a graded differential algebra which is called a graded  $q$ -differential algebra. This generalization of a graded differential algebra has arisen in connection with the development of the non-commutative geometry. The foundations of the non-commutative geometry were laid down by A. Connes in 70s of the previous century. We give a brief review of the A. Connes approach to the non-commutative geometry in the introduction of this thesis. This approach is based on the idea to study the geometry of a space by means of the algebra of continuous (or smooth) functions determined on this space. Indeed the structures of the differential geometry such as vector fields, differential forms and connections on vector bundles can be defined in the terms of the algebra of functions or in the terms of the module of sections of a corresponding vector bundle. For instance it is well known that a vector field can be defined as a derivation of an algebra of functions. Now if one replaces the commutative  $C^*$ -algebra of functions determined on a space by a non-commutative one then this algebra can be considered as an algebra of functions on a non-commutative generalization of a space.

The algebra of differential forms plays an essential role in the geometry of a smooth manifold. This algebra is a prototype of a graded differential algebra. Thus if we wish to construct a non-commutative generalization of an algebra of differential forms then we should use an appropriate generalization of a graded differential algebra. This generalization was proposed by M. Dubois-Violette and we use this algebraic structure in this thesis in order to construct generalized differential forms on a reduced quantum plane. Our starting point is a  $\mathbf{Z}$ -graded algebra and we define a mapping  $d_w$  on this algebra by means of a graded  $q$ -commutator. Then we prove that this mapping is a graded  $q$ -differential. We derive the formula for  $d_w^k$  which includes the

$q$ -analogues of the binomial coefficients. Then we prove the theorem which asserts that if  $q$  is a primitive  $N$ th root of unity and element  $w$  satisfies the condition  $w^N = \mathbf{1}$ , where  $\mathbf{1}$  is the unit element of an algebra, the graded  $q$ -differential  $d_w$  is the  $N$ -differential (i.e.  $d_w^N = 0$ ) and the corresponding  $\mathbf{Z}_N$ -graded algebra endowed with the differential  $d_w$  becomes a graded  $q$ -differential algebra. We use this general result to determine the structure of a graded  $q$ -differential algebra on a reduced quantum plane and we study the corresponding first order differential calculus generated by the differential of this algebra.