SISEKAITSEAKADEEMIA

Helmo Käerdi

LINEAARALGEBRA ELEMENDID

Teine trükk

Tallinn 2005

Õppevahend Sisekaitseakadeemia päästeteenistuse ning maksunduse ja tolli erialade üliõpilastele. On kasutatav ka teistes kõrgkoolides erialadel, kus lineaaralgebrat ei õpita põhiainena.

ISBN 9985.67-125-2

Sisekaitseakadeemia
Kase 61 12012 Tallinn
juuli 2007

Sisukord

Sissejuhatus

Õppevahendis käsitletakse lineaaralgebra põhimõisteid ja meetodeid, mida kasutatakse inseneri- ja majandusülesannete ning samuti mitmete muude valdkondadega seotud probleemide formuleerimiseks, lahendamiseks ja analüüsiks. Esimeses peatükis tuuakse determinandi mõiste, olulisemad omadused ja arvutuseeskirjad. Teises peatükis käsitletakse maatriksarvutuse operatsioone. Maatrikseid kasutatakse andmete süstematiseerimiseks, nende kompaktseks esitamiseks ja töötlemiseks ning mitmesuguste rakendusülesannete lahendamiseks. Kolmas peatükk on pühendatud lineaarsetele võrrandisüsteemidele. Vaadeldakse nii *Crameri* peajuhtu kui ka üldist lineaarset võrrandisüsteemi. Lahendusmeetoditest piirdutakse *Crameri* valemitega, *Gaussi* meetodiga ja lahendamisega maatriksvõrrandite abil. Neljandas peatükis defineeritakse kompleksarvu mõiste ja puudutatakse tehteid kompleksarvudega.

Õppevahend on mõeldud Sisekaitseakadeemia päästekolledži üliõpilastele kasutamiseks "Lineaaralgebra ja arvutusmeetodite" kursuses, mille kaheainepunktisest kogumahust käsitletakse lineaaralgebrat ligikaudu 40% ulatuses. Kolm esimest peatükki katavad finantskolledži õppeaine "Majandusmatemaatika" (mida kokku on üks ainepunkt) lineaaralgebraga seotud osad.

Teoreetilise materjali omandamise kõrval on lineaaralgebra õppimise lahutamatuks osaks ülesannete lahendamine. Lisaks õppevahendis toodud näidetele lahendatakse ülesandeid praktikumis õppejõu juhendamisel, antakse üliõpilastele iseseisvaks tööks koduülesandeid ning omandatud oskusi hinnatakse kontrolltööl.

Täienduseks sellele trükisele saavad üliõpilased elektrooniliselt akadeemia intraneti kaudu veel mõned praktilist laadi õppematerjalid, sealhulgas *MS Exceli* lineaaralgebraga seotud tarkvara kasutamist õpetavad näidisfailid koos juhistega iseseisvaks interaktiivseks tööks arvutil. Praktikumis toimub ka vastav arvutidemonstratsioon.

Sisekaitseakadeemias kasutatava terminoloogia kohaselt on käesolev õppevahend B-tüüpi, mis tähendab, et seda pole retsenseeritud ega keeletoimetaja poolt redigeerinud. Seetõttu palub koostaja mõistvat suhtumist mõnesse võimalikku keeleväääratusse ning on tänulik, kui tähelepanelikud kasutajad informeerivad kõikidest ebatäpsustest elektronposti aadressil helmo.kaerdi@sisekaitse.ee.

1. DETERMINANDID

1.1. Teist järku determinandid

Olgu antud neljast arvust (elemendist) $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ koosnev ruudukujuline tabel (1.1), mis ümbritsetakse püstkriipsudega

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \det A. \qquad (1.1)$$

Tabel (1.1) tähistab **teist järku determinanti**, millele arvutuseeskirja $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ kohaselt seatakse vastavusse üks arv, mis märgitakse lühidalt $\det A$. Elemendid a_{11} ja a_{22} asuvad peadiagonaalil, a_{21} ja a_{12} aga kõrvaldiagonaalil.

Näide 1.1. Arvutada teist järku determinant

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2{,}5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 2{,}5 \cdot (-4) = 28.$$

1.2. Kolmandat ja *n* -järku determinandid

Kolmandat järku determinanti tähistab kolmest veerust ja kolmest reast koosnev ruudukujuline tabel (1.2), mis sisaldab üheksat arvulist elementi a_{ij} $(i,\ j = 1,\ 2,\ 3)$. Kolmandat järku determinandile vastavusse seatava arvu võib leida kas ***Sarruse*** **reegliga** (1.3)

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (1.2)$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ &- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \end{aligned} \qquad (1.3)$$

või punktis 1.4 vaadeldava determinandi arendusteoreemiga.

Skeem (1.4) illustreerib, missuguste tabeli (1.2) elementide korrutis tuleb *Sarruse* reegli kohaselt võtta plussmärgiga ja missuguste elementide korrutis miinusmärgiga:

$$\begin{vmatrix} + & \bullet & \bullet \\ \bullet & + & \bullet \\ \bullet & \bullet & + \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \bullet & + & \bullet \\ \bullet & \bullet & + \\ + & \bullet & \bullet \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & + \\ + & \bullet & \bullet \\ \bullet & + & \bullet \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & - \\ \bullet & - & \bullet \\ - & \bullet & \bullet \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \bullet & - & \bullet \\ - & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & - \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} - & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & - \\ \bullet & - & \bullet \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

Näide 1.2. Arvutada kolmandat järku determinant *Sarruse* reegliga:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -5 & 2 & 6 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot 5 + (-2) \cdot 6 \cdot (-4) + (-5) \cdot 3 \cdot 3 -$$

$$-(-4) \cdot 2 \cdot 3 - (-5) \cdot (-2) \cdot 5 - 3 \cdot 6 \cdot 4 = -55.$$

***n*-järku determinanti** tähistab n reast ja n veerust koosnev ruudukujuline tabel (1.5). n-järku determinandi arvutamist vaadeldakse punktis 1.4.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

1.3. Determinandi omadusi

Determinandi põhiomadused tuuakse siin ilma detailsete tõestusteta, piirdudes näidetega kolmandat järku determinantide kohta. Nende näidete kehtivust võib kontrollida *Sarruse* reegli abil.

1. Determinandi väärtus ei muutu **transponeerimisel** (s.t ridade ja veergude vahetamisel): $\det A^T = \det A$. Determinandi read ja veerud on seega teatud tähenduses samaväärsed ja kui edaspidi on tõestatud midagi veergude kohta, siis kehtib see ka ridade kohta ning vastupidi.

Näiteks kolmandat järku determinandi puhul

$$\det A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A.$$

2. Kahe veeru (või kahe rea) ümbervahetamisega korrutub determinant miinus ühega.
3. Kui determinandil on kaks ühesugust veergu (või rida), siis ta võrdub nulliga. Vahetame need kaks ühesugust veergu (või rida) ning omaduse 2 põhjal saame $\det A = -\det A$ ja $2\det A = 0$ või $\det A = 0$.
4. Determinandi ühe veeru (või ühe rea) kõikide elementide korrutamine mistahes arvuga k on samaväärne determinandi korrutamisele selle arvuga k. Omaduse 4 põhjendamisel arvestatakse, et determinant avaldub summana, mille iga liige sisaldab tegurina ühte elementi igast reast ja igast veerust (kolmandat järku determinandi kohta vt (1.3)). Näiteks

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

5. Kui mingi veeru (või rea) kõik elemendid on nullid, siis determinant võrdub nulliga. Omadus 5 on omaduse 4 alajuhus, kui $k = 0$.
6. Kahte proportsionaalset veergu (või rida) sisaldav determinant võrdub nulliga. See omadus tuleneb omadustest 4 ja 3. Näiteks järgnevas determinandis on esimene veerg võrdne kahekordse teise veeruga ja see determinant võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 14 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Kui determinandi üks veerg (või rida) on tema ülejäänud veergude (või ridade) lineaarne kombinatsioon, siis determinant võrdub nulliga. See on omaduse 6 üldistus.

Tähistame kolmandat järku determinandi veerud α, β ja γ. Kui näiteks kolmanda veeru elemendid arvutada lineaarse valemiga $\gamma = 2\alpha - \beta$, siis see determinant võrdub nulliga:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -5 & 3 & -13 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

8. Kui determinandi n-nda veeru (või rea) iga element on kahe liidetava summa, siis võib determinandi esitada kahe liidetava summana. Neist esimesel on n-ndas veerus (või reas) esimene nimetatud liidetavatest, teisel aga teine. Näiteks

$$\begin{vmatrix} a'_{11} + a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} + a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} + a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

9. Determinandi väärtus ei muutu, kui mingi veeru (või rea) elementidele liita mingi teise veeru (või rea) vastavad elemendid, mis on korrutatud ühise teguriga k. Omadus 9 järeldub omadustest 8 ja 6. Näiteks liidame allolevas kolmandat järku determinandis esimesele veerule k-kordse teise veeru. Vastavalt omadusele 8 võime determinandi esitada kahe liidetava summana, kusjuures omaduse 6 kohaselt võrdub teine liidetav nulliga:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1.4. Determinandi arendusteoreem

Determinandi mingi elemendi a_{ij} **miinoriks** M_{ij} nimetatakse determinanti, mis saadakse antud determinandist selle rea ja veeru kustutamisega, mille lõikumisel asub antud element. Elemendi a_{ij} **alamdeterminant** (ehk algebraline täiend) on

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.6}$$

Arvutame kolmandat järku determinandi *Sarruse* reegliga ja teisendame tulemust:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} -$$

$$- a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33}) +$$

$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}. \tag{1.7}$$

Teisenduste (1.7) tulemusel saime, et $\det A$ võrdub tema esimese veeru elementide ja nende alamdeterminantide korrutiste summaga.

Eelneva üldistuseks on **determinandi arendusteoreem**:

Determinant võrdub tema mingi veeru (rea) elementide ja nende alamdeterminantide korrutiste summaga.

Arendusteoreem võimaldab n-järku determinandi arvutamise taandada $(n-1)$-järku determinantide arvutamisele. Arvutustehnilist tööd saab vähendada, kui determinandi omadusi 9 ja 4 kasutades eelnevalt teisendada ühte veergu või rida (nn juhtveergu või juhtrida) nii, et sellesse jääks täpselt üks nullist erinev element (nn juhtelement). Selle eeltöö tulemusena taandub n-järku determinandi arvutamine üheainsa $(n-1)$-järku determinandi arvutamisele. Teoreetiliselt on juhtveeru (juhtrea) ning juhtelemendi valik suvaline. Kui aga mõni element on 1 või -1, siis võiks peastarvutamisel selle võtta juhtelemendiks. Kui 1 või -1 ei leidu, siis võib püüda selle sinna teisendada, kasutades determinandi omadusi 9 ja 4.

Näide 1.3. Arvutada näites 1.2 toodud kolmandat järku determinant determinandi arendusteoreemiga. Üldiselt taanduks kolmandat järku determinant kolme teist järku (alam)determinandi summaks (mis on vastavalt arendusteoreemile korrutatud teatavate elementidega). Kui aga enne arendamist teisendada (determinandi omadusi 9 ja 4 kasutades) determinandi ühe veeru (või rea) kõik elemendid peale üheainsa nullideks, siis jääb järele vaid üks nullist erineva kordajaga teist järku determinant. Nagu öeldakse, determinandi järk alaneb.

Liidame kõigepealt determinandi esimese rea nii teisele kui ka kolmandale reale (st liidame vastavad elemendid). Seejärel liidame esimesele reale kahekordse uue kolmanda rea.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -5 & 2 & 6 \\ -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 19 \\ -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

Nüüd on teise veergu (juhtveergu) jäänud vaid üks nullist erinev element (juhtelement) $a_{32} = 1$, mille järgi arendades determinandi järk alaneb:

$$= 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 19 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = -(36 + 19) = -55.$$

Näide 1.4. Arvutada neljandat järku determinant.
Liidame esmalt determinandi neljandale reale esimese rea.

$$\begin{vmatrix} -6 & -5 & 8 & 4 \\ -9 & 8 & 5 & 2 \\ -5 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -5 & 8 & 4 \\ -9 & 8 & 5 & 2 \\ -5 & 7 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Nüüd liidame esimesele veerule 2-kordse neljanda veeru ja teisele veerule (-3) -kordse neljanda veeru. Oleme teisendanud neljandasse ritta (juhtritta) kolm nulli. Arendades neljandat järku determinandi tema neljanda rea ainsa nullist erineva elemendi (juhtelemendi) $a_{44} = 1$ järgi, saame ühe kolmandat järku determinandi, mille võib arvutada kas *Sarruse* reegliga või arendusteoreemiga.

$$= \begin{vmatrix} 2 & -17 & 8 & 4 \\ -5 & 2 & 5 & 2 \\ 9 & -14 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -17 & 8 \\ -5 & 2 & 5 \\ 9 & -14 & 3 \end{vmatrix} = -452.$$

Näide 1.5. Lahendada võrrand

$$\begin{vmatrix} 9 & 2x & -2x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Liidame võrdusmärgist vasakul pool oleva determinandi kolmandale veerule teise veeru. Tulemuseks saadud determinandis lahutame kolmandast reast teise rea.

$$\begin{vmatrix} 9 & 2x & -2x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2x & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ x+10 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2x & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ x+8 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

Arendame viimase determinandi kolmanda veeru (juhtveeru) järgi, kusjuures juhtelemendiks on $a_{23} = 2$. Toome selle teist järku determinandi teisest veerust determinandi ette kordaja 2 ja arvutame determinandi vastavalt eeskirjale (1.1):

$$= 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 2x \\ x+8 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 9 & x \\ x+8 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (9 - x^2 - 8x).$$

Võrdsustame tulemuse nulliga ja saame ruutvõrrandi

$$x^2 + 8x - 9 = 0,$$

mille lahenditeks ja ühtlasi ülesande vastuseks on $x_1 = 1$ ja $x_2 = -9$.

1.5. Determinandi arvutamine *MS Excelis*

Tabelarvutuspaketi *MS Excel* matemaatikafunktsioonide hulgas on determinandi arvutamist võimaldav funktsioon *MDETERM*. Esmalt sisestame arvutamisele kuuluva n-järku determinandi elementide arvväärtused ruudukujulise tabelina *Exceli* töölehele (suvalisse sobivasse kohta). Seejärel pressime standardse nupurea ikooni f_x. Avaneb dialoogikast, millest valime funktsioonide kategooria *Math&Trig*. See kategooria sisaldabki funktsiooni *MDETERM*. Funktsiooni käivitamisel avaneb uus dialoogikast, millesse tuleb sisestada determinandi elementide a_{11} ja a_{nn} aadressid *Exceli* töölehel, mis eraldatakse teineteisest kooloniga. Trükkimise asemel on vajalikke aadresse lihtsam sisestada determinandi elemente sisaldava ruudukujulise tabeli hiirega märgistamise teel. Vajutades nupule *OK*, ilmub tulemus sellesse töölehe ruutu, mis oli enne arvutuste algust aktiivne.

2. MAATRIKSID

2.1. Maatriksi mõiste

Maatriksiks nimetatakse arvuliste elementidega tabelit

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ või } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (2.1)$$

ehk lühidalt $A=(a_{ij})$ või $A=\|a_{ij}\|$. Maatriks ümbritsetakse ümarsulgudega või kahekordsete püstkriipsudega. Suurused a_{ij} on maatriksi elemendid, mis rühmituvad m reaks ja n veeruks.

Kui $m=n$, siis on tegemist ruutmaatriksiga (n^2- maatriksiga). Vasakust ülanurgast paremasse alanurka läheb peadiagonaal, millel paiknevate elementide mõlemad indeksid on võrdsed: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. n^2- maatriksist saab moodustada parajasti ühe n-järku determinandi. Kui ruutmaatriksi determinant on nullist erinev, siis nimetatakse seda ruutmaatriksit **regulaarseks**, kui aga determinant võrdub nulliga, siis **singulaarseks**.

Kui $m \neq n$, siis kõneldakse ristkülikmaatriksist (mn- maatriksist). Üheveerulisi ja üherealisi maatrikseid nimetatakse ka vektoriteks (vastavalt veeruvektoriteks ja reavektoriteks). Vektori elemente nimetatakse sageli vektori koordinaatideks ehk komponentideks.

2.2. Tehted maatriksitega

Vaatleme kahte mn-maatriksit

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ja } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.2)$$

ehk lühidalt $A=(a_{ij})$ ja $B=(b_{ij})$.

Definitsioon 1. Maatrikseid A ja B peetakse **võrdseteks**, kui nende vastavad elemendid on võrdsed, s.o $A = B$, kui $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$.

Definitsioon 2. Maatriksite A ja B **summaks** $A + B$ nimetatakse maatriksit, mille elementideks on maatriksite A ja B vastavate elementide summad, s.o $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Definitsioon 3. Maatriksite A ja B **vaheks** $A - B$ nimetatakse maatriksit, mille elementideks on maatriksite A ja B vastavate elementide vahed, s.o $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$.

Definitsioon 4. Maatriksi **korrutamisel arvuga** (skalaariga) k korrutuvad selle arvuga kõik maatriksi elemendid, s.o $kA = (ka_{ij})$.

Maatriksite A ja B korrutis $A \cdot B$ defineeritakse teisiti, kui vastavate elementide korrutis (niisugusel korrutisel poleks rakendusi). Olgu A mn-maatriks ja B np-maatriks. Tähistame maatriksi A reavektorid α_i $(i = 1,\ 2, \ldots, m)$ ning maatriksi B veeruvektorid β^j $(j = 1,\ 2, \ldots, n)$. Näiteks on siis $\alpha_1 = (a_{11},\ a_{12}, \ldots, a_{1n})$ ning $\beta^1 = (b_{11},\ b_{21}, \ldots, b_{n1})$.

Definitsioon 5. Maatriksite A ja B **korrutiseks** nimetatakse maatriksit $A \cdot B = \left(\alpha_i \cdot \beta^j\right)$, mille elementideks c_{ij} on vektorite α_i ja β^j skalaarkorrutised $c_{ij} = \alpha_i \cdot \beta^j$ (maatriksi A reavektorite α_i ja maatriksi B veeruvektorite β^j vastavate elementide korrutiste summa).

Näiteks $c_{11} = \alpha_1 \cdot \beta^1 = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}$.

Paneme tähele kahte järgmist asjaolu.

1. Korrutis $A \cdot B$ on defineeritud ainult siis, kui maatriksi A veergude arv võrdub maatriksi B ridade arvuga.
2. Korrutise $A \cdot B$ ridade arv võrdub esimese teguri A ridade arvuga ja korrutise veergude arv võrdub teise teguri B veergude arvuga: kui A on mn-maatriks ja B on np-maatriks, siis $A \cdot B$ on mp-maatriks.

Näide 2.1. Leida korrutis $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$

$$=\begin{pmatrix} 5\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)+3\cdot 3+1\cdot 4 & 5\cdot 3+(-1)\cdot 1+3\cdot 0+1\cdot 1 & 5\cdot 0+(-1)\cdot 1+3\cdot(-2)+1\cdot 2 \\ 2\cdot(-1)+0\cdot(-2)+(-1)\cdot 3+4\cdot 4 & 2\cdot 3+0\cdot 1+(-1)\cdot 0+4\cdot 1 & 2\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+4\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 10 & 15 & -5 \\ 11 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Esimene tegur (maatriks A) on 2×4-maatriks ja teine tegur (maatriks B) on 4×3-maatriks. Esimeses teguris on neli veergu ja samapalju on teises teguris ridu. Tulemuses (korrutises $A\cdot B$) on kaks rida (mis võrdub esimese teguri ridade arvuga) ja kolm veergu (mis võrdub teise teguri veergude arvuga).

Näide 2.2. Korrutada 2×2-ruutmaatriks A 2×2-ruutmaatriksiga B paremalt (s.t leida $A\cdot B$) ja vasakult (s.t leida $B\cdot A$). Võrrelda tulemusi.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 4\cdot 1+9\cdot(-2) & 4\cdot(-3)+9\cdot 1 \\ (-1)\cdot 1+3\cdot(-2) & (-1)\cdot(-3)+3\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & -3 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot 4+(-3)\cdot(-1) & 1\cdot 9+(-3)\cdot 3 \\ (-2)\cdot 4+1\cdot(-1) & (-2)\cdot 9+1\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -9 & -15 \end{pmatrix}$$

Ruutmaatriksit A võib korrutada sama järku ruutmaatriksiga B nii paremalt kui ka vasakult, kuid tulemus on üldiselt erinev (teataval spetsiifilisel juhul, mida käsitletakse järgmises punktis 2.3, võib tulemus ka võrdne olla). Niisiis, sama järku ruutmaatriksite vallas ei ole korrutis üldiselt kommutatiivne, vaid sõltub tegurite järjekorrast:

$$A\cdot B\neq B\cdot A. \tag{2.3}$$

Tehted maatriksitega alluvad järgmistele **arvutusseadustele**:

$$\begin{aligned} &A+B=B+A && \text{(liitmise kommutatiivsus);} \\ &(A+B)+C=A+(B+C) && \text{(liitmise assotsiatiivsus);} \qquad (2.4) \\ &(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C && \text{(distributiivsus);} \\ &(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C) && \text{(korrutamise assotsiatiivsus).} \end{aligned}$$

2.3. Pöördmaatriks

Ruutmaatriksit, mille peadiagonaalil paiknevad ühed ning kõik muud elemendid on nullid, nimetatakse **ühikmaatriksiks**. Ühikmaatriksit tähistatakse tähega E. Näiteks kolmandat järku ühikmaatriks on

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Definitsioon. Ruutmaatriksit B, mis koos antud ruutmaatriksiga A rahuldab võrdusi

$$A \cdot B = B \cdot A = E, \tag{2.6}$$

kus E on ühikmaatriks, nimetatakse maatriksi A **pöördmaatriksiks** ja tähistatakse A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E. \tag{2.7}$$

Meenutame, et üldiselt ruutmaatriksite korrutis ei ole kommutatiivne, vt seost (2.3) ja näidet 2.2.

Ruutmaatriksi A pöördmaatriks A^{-1} leitakse järgmise skeemi alusel.

1. Arvutatakse $\det A$. Kui
   a) $\det A \neq 0$, siis maatriks A on regulaarne ja tal on pöördmaatriks;
   b) $\det A = 0$, siis maatriks on singulaarne ja pöördmaatriks puudub.
2. Leitakse niisugune maatriks, kus maatriksi $A = (a_{ij})$ iga elemendi a_{ij} kohal seisab tema alamdeterminant A_{ij}, s.o leitakse maatriks (A_{ij}).
3. Transponeeritakse eelnev maatriks $(A_{ij})^T = (A_{ji}) = \widetilde{A}$ ning saadakse maatriksi A nn adjungeeritud maatriks $\widetilde{A}$.
4. Maatriksi A pöördmaatriksi saab, kui adjungeeritud maatriksi $\widetilde{A}$ kõik elemendid jagada maatriksi A determinandiga:

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{\det A}. \tag{2.8}$$

5. Tulemust võib vajadusel kontrollida, näidates et $A \cdot A^{-1} = E$ või et $A^{-1} \cdot A = E$.

Näide 2.3. Leida maatriksi A pöördmaatriks.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Arvutame $\det A = 5 \neq 0$, mis näitab, et maatriks on regulaarne ja tal on pöördmaatriks olemas.
2. Leiame maatriksi A kõikide elementide a_{ij} alamdeterminandid A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Moodustame nendest alamdeterminantidest maatriksi

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Transponeerime viimase maatriksi, mille tulemusena saame maatriksi A adjungeeritud maatriksi

$$(A_{ij})^T = (A_{ji}) = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Adjungeeritud maatriksist leiame pöördmaatriksi seosega (2.8)

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0{,}8 & -0{,}2\\ 2 & 2{,}4 & -0{,}6\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}$$

5. Kontrolliks võib arvutada $A\cdot A^{-1}$ ja veenduda, et tulemuseks on ühikmaatriks:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0{,}8 & -0{,}2\\ 2 & 2{,}4 & -0{,}6\\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Näide 2.4. Leida maatriksi A pöördmaatriks.

$$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 7 & -3\end{pmatrix}$$

1. Arvutame $\det A=-12+14=2\neq 0$. Järelikult on maatriks A regulaarne ning seega on tal pöördmaatriks olemas.
2. Leiame maatriksi A kõikide elementide a_{ij} alamdeterminandid A_{ij}:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-3)=-3,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 7=-7,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-2)=2,\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 4=4.$$

Moodustame nendest alamdeterminantidest maatriksi

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix}-3 & -7\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

3. Transponeerime viimase maatriksi, mille tulemusena saame maatriksi A adjungeeritud maatriksi

$$(A_{ij})^T=(A_{ji})=\tilde{A}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -7 & 4\end{pmatrix}$$

4. Adjungeeritud maatriksist leiame pöördmaatriksi seosega (2.8)

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}5 & 1 \\ -3{,}5 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Kontrollime tulemust, näidates et $A^{-1} \cdot A = E$:

$$A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -12+14 & 6-6 \\ -28+28 & 14-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

2.4. Pöördmaatriksi omadusi

Omadus 1. $$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \tag{2.9}$$

Omaduse (2.9) tõestuseks piisab näidata, et $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = E$. Maatriksite korrutamise assotsiatiivsuse (2.4) tõttu on

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Omadus 2. $$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{2.10}$$

Korrutame pöördmaatriksi definitsioonikohast seost (2.7) $AA^{-1} = E$ paremalt maatriksiga $(A^{-1})^{-1}$ ning saame $AA^{-1}(A^{-1})^{-1} = E(A^{-1})^{-1}$. Kuna aga $A^{-1}(A^{-1})^{-1} = E$, siis tuleneb viimasest seosest $AE = E(A^{-1})^{-1}$, millest omakorda järeldub (2.10).

Omadus 3. $$\det A \cdot \det A^{-1} = 1. \tag{2.11}$$

Minnes pöördmaatriksi definitsioonis (2.7) $AA^{-1} = E$ üle determinantidele, saab $\det(AA^{-1}) = \det E$, millest on võimalik järeldada (2.11) (viimast väidet pole siin tõestatud).

Märgime, et kui seoses (2.11) $\det A = 0$ (s.t maatriks A on singulaarne), siis tekib selles seoses (2.11) vastuolu $0 = 1$, mis kinnitab pöördmaatriksi leidmise eeskirja juures väidetut, et pöördmaatriks on vaid regulaarsetel maatriksitel A, mille puhul $\det A \neq 0$.

2.5. Maatriksvõrrandid

Maatriksvõrrand on niisugune võrrand, kus otsitavaks on maatriks. Tähistame otsitava maatriksi tähega X. Olgu A, B ja C antud maatriksid ja E ühikmaatriks. Vaatleme kolme liiki maatriksvõrrandeid.

1.
$$\boxed{AX = B.} \tag{2.12}$$

Korrutame võrrandi (2.12) mõlemat poolt **vasakult** maatriksi A pöördmaatriksiga A^{-1} ja saame

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Kuna $A^{-1}A = E$, siis $EX = A^{-1}B$. Et $EX = X$ (ühikmaatriksiga korrutamine on analoogne arvude vallas arvuga üks korrutamisele), siis otsitav maatriks

$$X = A^{-1}B. \tag{2.13}$$

2.
$$\boxed{XA = B.} \tag{2.14}$$

Korrutame võrrandi (2.14) mõlemat poolt **paremalt** maatriksi A pöördmaatriksiga A^{-1}:

$$XAA^{-1} = BA^{-1}.$$

Kuna $AA^{-1} = E$, siis $XE = BA^{-1}$. Et $XE = X$, siis võrrandi (2.14) lahend on

$$X = BA^{-1}. \tag{2.15}$$

3.
$$\boxed{AXB = C.} \tag{2.16}$$

Korrutame võrrandit (2.16) **vasakult** maatriksi A pöördmaatriksiga ja **paremalt** maatriksi B pöördmaatriksiga:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1}.$$

Kuna $A^{-1}A = E$ ja $BB^{-1} = E$, siis $EXE = A^{-1}CB^{-1}$. Et $EXE = X$, siis lahend on

$$X = A^{-1}CB^{-1}. \tag{2.17}$$

Näide 2.5. Lahendada maatriksvõrrand $AX = B$, vt (2.12), kui

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ ja } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Maatriksi A pöördmaatriks A^{-1} on leitud näites 2.3. Otsitav maatriks X avaldub kujul (2.13):

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 13 & 8 \\ -16 & 39 & 19 \\ 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Lõppvastuse saamiseks tuleb viimase maatriksi kõik elemendid jagada arvuga 5.

Näide 2.6. Lahendada maatriksvõrrand $AXB = C$, vt (2.16), kui

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \text{ ja } C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Näites 2.4 on leitud maatriksi A pöördmaatriks A^{-1}. Analoogselt leitakse maatriksi B pöördmaatriks

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Maatriksvõrrandi (2.16) lahend avaldub kujul (2.17):

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3+12 & -12+4 \\ -7+24 & -28+8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 17 & -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -27+40 & 9-16 \\ -51+100 & 17-40 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 49 & -23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}5 & -3{,}5 \\ 24{,}5 & -11{,}5 \end{pmatrix}$$

2.6. *MS Exceli* funktsioonid *MMULT* ja *MINVERSE*

Tabelarvutuspaketi *MS Excel* matemaatikafunktsioonide hulgas on maatriksite korrutamist ja pöördmaatriksi leidmist võimaldavad funktsioonid *MMULT* ja *MINVERSE*. Enne vajalike funktsioonide väljakutsumist sisestatakse *Exceli* töölehele lähteandmeteks olevate maatriksite elementide arvväärtused. Need arvud trükitakse ristkülikukujulistesse tabelitesse, milles on täpselt sama palju ridu ja veerge kui lähtemaatriksitel. Kuna nii maatriksite korrutamisel kui ka pöördmaatriksi leidmisel on tulemuseks maatriks, mitte skalaarne suurus (mitte üks arv) nagu determinandi arvutamisel, siis on funktsioonide *MMULT* ja *MINVERSE* kasutamisel võrreldes funktsiooniga *MDETERM* mõned iseärasused. Tulemuse (korrutise või pöördmaatriksi) jaoks märgistatakse hiirega *Exceli* töölehel (suvaline vaba) ruudustik, mis sisaldab sama palju ridu ja veerge kui tulemusmaatriks. Seejärel pressitakse standardse nupurea ikooni f_x. Avaneb dialoogikastist, millest valitakse funktsioonide kategooriaks *Math&Trig*. See kategooria sisaldabki funktsioone *MMULT* ja *MINVERSE*. Vajaliku funktsiooni käivitamise järel tuleb dialoogikasti sisestada lähteandmeteks olevate maatriksite elementide aadressid (täpsemalt maatriksite vasakus ülanurgas ja paremas alanurgas olevate elementide aadressid, mis eraldatakse teineteisest kooloniga). Seda on kõige lihtsam teha lähteandmete maatriksite elementide arvväärtusi sisaldavate ristkülikukujuliste tabelite märgistamisega hiire abil (samal viisil, nagu see toimus funktsiooni *MDETERM* kasutamisel determinandi arvutamiseks, vt punkti 1.5). Funktsiooni käivitamiseks (tulemuse saamiseks) vajutatakse korraga **kolme** klahvi *Ctrl+Shift+Enter*. Praktiliselt toimub see nii, et klahve *Ctrl* ja *Shift* hoitakse kahte sõrmega all ning seejärel vajutatakse klahvile *Enter*. Vastus ilmub eelnevalt hiirega märgistatud tabelisse.

Maatriksvõrrandi (2.12) $AX = B$ või (2.14) $XA = B$ lahendamiseks tuleb kõigepealt funktsiooniga *MINVERSE* leida maatriksi A pöördmaatriks A^{-1}. Seejärel arvutatakse funktsiooniga *MMULT* korrutis $X = A^{-1}B$ (2.13) või korrutis $X = BA^{-1}$ (2.14). Võrrandi $AXB = C$ (2.16) lahend $X = A^{-1}CB^{-1}$ (2.17) leitakse analoogilisel viisil samm-sammult (samas järjekorras, nagu see toimus näites 2.6.) funktsiooniga *MINVERSE* pöördmaatrikseid arvutades ja funktsiooniga *MMULT* maatrikseid korrutades.

2.7. Vektorite lineaarne sõltuvus

Definitsioon 1. Olgu antud n skalaarset suurust (arvu) $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$, mida vaadeldakse kindlas järjekorras. Süsteemi $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ nimetatakse n-dimensionaalseks (n-mõõtmeliseks) **algebraliseks vektoriks**

$$\beta_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}). \tag{2.18}$$

Skalaarsed suurused $a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}$ on vektori β_1 koordinaadid.

Vaatleme vektorite hulka

$$S = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}, \text{ kus} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} &\beta_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ &\beta_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\beta_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots a_{mn}). \end{aligned}$$

Definitsioon 2. Vektorite hulk S on **lineaarselt sõltuv** (vektorid $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ on lineaarselt sõltuvad), kui leiduvad arvud $k_1, k_2, \dots, k_m$, mis ei ole kõik korraga nullid ja mille puhul kehtib seos

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \dots + k_m\beta_m = \Theta, \tag{2.20}$$

kus Θ on nullvektor (mille kõik koordinaadid on nullid). Kui seos (2.20) kehtib ainult juhul $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$, siis vektorid $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ on **lineaarselt sõltumatud**.

Näide 2.7. Näidata, et vektorite $\beta_1 = (2, -5, 1, -1)$, $\beta_2 = (1, 3, 6, 5)$ ning $\beta_3 = (-1, 4, 1, 2)$ lineaarne sõltuvus avaldub seosega $7\beta_1 - 3\beta_2 + 11\beta_3 = 0$. Kontrolliks võib veenduda, et eelnev seos kehtib nende kolme vektori kõigi nelja koordinaadi kohta. Näiteks esimese koordinaadi puhul $7 \cdot 2 - 3 \cdot 1 + 11 \cdot (-1) = 0$.

Asjaolu, kas vektorid on lineaarselt sõltuvad või mitte, saab kindlaks teha maatriksi astaku abil, mida käsitletakse järgmises punktis 2.8. Konkreetset sõltuvust väljendavate arvude $k_1, k_2, \dots, k_m$ leidmine aga väljub käesoleva õppevahendi raamidest.

2.8. Maatriksi astak

Kirjutame vektorite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ koordinaadid (vt (2.19)) välja maatriksi A ridadena (või ka veergudena, see ei oma põhimõttelist tähtsust):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

Maatriks A, määrates täielikult vektorid $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, fikseerib ka nende hulgas olevate lineaarselt sõltumatute vektorite maksimaalarvu.

Definitsioon 1. Maatriksi A **astakuks** nimetatakse tema lineaarselt sõltumatute reavektorite maksimaalarvu.

Kuna maatriksi lineaarselt sõltumatute ridade maksimaalarv võrdub selle maatriksi lineaarselt sõltumatute veergude maksimaalarvuga, siis võib maatriksi astakut defineerida ka kui tema lineaarselt sõltumatute veergude maksimaalarvu.

Maatriksi astak on võimalik defineerida teisiti selle maatriksi nullist erinevate miinorite järgu kaudu, mis annab praktilise eeskirja maatriksi astaku leidmiseks.

Definitsioon 2. Kui maatriksis A leidub vähemalt üks nullist erinev r-järku miinor, kuid mitte ühtegi nullist erinevat kõrgemat järku miinorit, siis öeldakse, et maatriksi astak $rank\, A = r$.

Miinorite arvutamise hõlbustamiseks teisendatakse kõigepealt maatriksi A peadiagonaalist allpool asuvad elemendid nullideks, millest enamasti piisab astaku üle otsustamiseks. Vajadusel võib teisendada kõik peadiagonaalivälised elemendid nullideks. Selleks kasutatakse **maatriksi elementaarteisendusi**, mis ei muuda maatriksi astakut:

1) maatriksi rea (või veeru) korrutamine nullist erineva teguriga k;
2) maatriksi ühele reale (või veerule) k-kordse teise rea (või veeru) liitmine;
3) kahe rea (või veeru) ümberpaigutamine.

Kui maatriksitel A ja B on ühesugused järgud ja astakud, siis nimetatakse neid ekvivalentsetaks ja tähistatakse $A \sim B$.

Näide 2.8. Moodustame näites 2.7 olevate vektorite β_1, β_2 ja β_3 koordinaatidest maatriksi (2.21) A ja leiame selle astaku.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 6 & 5 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & -11 & -11 & -11 \\ 0 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kuna maatriksist A saab moodustada maksimaalselt kolmandat järku miinoreid (vt punkti 1.4), siis võib selle maatriksi astak olla ülimalt kolm. Kolmandat järku miinorite (milleks on teatavad kolmandat järku determinandid) arvutamise lihtsustamiseks teisendatakse maatriksi peadiagonaalist (vasakust ülanurgast algavast diagonaalist) allpool asuvad elemendid nullideks, kasutades selleks maatriksi elementaarteisendusi.

1. Vahetatakse maatriksi A esimene ja teine rida.
2. Korrutatakse uut esimest rida (-2)-ga ja liidetakse teisele reale.
3. Liidetakse esimene rida kolmandale reale. Nüüd on esimesse veergu teisenenud kaks nulli (vt eelneva teisenduse kolmandat maatriksit).
4. Jagame teise rea (-11)-ga, kolmanda rea (-7)-ga ja seejärel lahutame kolmandast reast teise rea.

Paneme tähele, et maatriksi viimase rea kõik elemendid on teisenenud nullideks. Seega on kõik kolmandat järku miinorid võrdsed nulliga, näiteks ka see, mis saadakse maatriksi A viimase veeru kustutamisel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Seega maatriksi astak ei saa olla kolm: $rank\, A \neq 3$. Maatriksi A vasakust ülanurgast võetud teist järku miinor on aga nullist erinev

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 0\cdot 3 = 1 \neq 0.$$

Järelikult maatriksi A astak $rank\,A = 2$, mis ütleb, et kolme vektori β_1, β_2, β_3 hulgas on lineaarselt sõltumatuid kaks ja kehtib seos (2.20): $k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 = \Theta$. Kordajate k_1, k_2, k_3 leidmist siin ei vaadelda.

Näide 2.9. Leida maatriksi A astak.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 8 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Maatriksist A saab moodustada ühe neljandat järku miinori. Seega võib maatriksi A astak olla ülimalt neli. Kuna selle neljandat järku miinori (maatriksist A moodustatud neljandat järku determinandi) arvutamine on tülikas, siis töödeldakse maatriksit A esmalt elementaarteisendustega (järgnevas pole maatriksi A esialgset kuju uuesti välja kirjutatud).

1. Korrutatakse maatriksi A esimest rida
   (-3) -ga ja liidetakse teisele reale;
   2-ga ja liidetakse kolmandale reale;
   1-ga ja liidetakse neljandale reale.
2. Vahetatakse teine ja neljas rida.
3. Jagatakse kolmas rida kolmega ning liidetakse neljandale reale.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nüüd on näha, et neljandat järku miinor võrdub nulliga (neljanda rea kõik elemendid on nullid). Vasakust ülanurgast moodustatud kolmandat järku miinor

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0,$$

mis võrdub selle miinori peadiagonaali elementide korrutisega, on nullist erinev. Järelikult on maatriksi A astak võrdne kolmega: $rank\,A = 3$.

3. LINEAARSED VÕRRANDISÜSTEEMID

3.1. *Crameri* peajuht

Vaatleme lineaarset võrrandisüstemi, mille üldkuju on järgmine:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

Lineaarsus tähendab seda, et kõik tundmatud $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on esimeses astmes. Arvud a_{ij} on võrrandisüsteemi kordajad ning arvud b_i on vabaliikmed. Võrrandite arv m ei tarvitse ühte langeda tundmatute arvuga n, s.t üldiselt $m \neq n$. Moodustame **tundmatute kordajatest maatriksi**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Kui $m = n$, siis saab maatriksist A moodustada determinandi $\det A$.

Täiendame maatriksit A vabaliikmete veeruga ja saame nn **laiendatud maatriksi**

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Süsteemi (3.1) **lahendiks** on tundmatute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ väärtuste kogum, mille asetamisel süsteemi kõikidesse võrranditesse saadakse samasus. Sõltuvalt võrrandite ja tundmatute arvust ning kordajate ja vabaliikmete väärtustest võib süsteemil olla üks lahend, lõpmata palju lahendeid või mitte ühtegi lahendit.

Käsitleme kõigepealt ***Crameri* peajuhtu**, mille puhul

1) võrrandeid ja tundmatuid on ühepalju: $m = n$;
2) tundmatute kordajatest moodustatud determinant on nullist erinev: $\det A \neq 0$.

Crameri peajuhul on lineaarsel võrrandisüsteemil üksainus lahend.

3.2. *Crameri* valemid

Vaatleme *Crameri* peajuhule vastavat süsteemi (3.1), milles on ühepalju võrrandeid ja tundmatuid ning mille tundmatute kordajatest moodustatud determinant on nullist erinev. Niisuguse süsteemi lahendid $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ võib (muude, järgmistes punktides käsitletavate meetodite kõrval) leida *Crameri* valemitega. Asendame tundmatute kordajatest moodustatud determinandi $\det A$ veerud ükshaaval vabaliikmete veeruga ja saame n determinanti, millest üks, järjenumbriga j, väljendub kujul (3.4):

$$\det A_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Süsteemi lahend avaldub siis *Crameri* valemitega

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Näide 3.1. Lahendada süsteem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$$

Moodustame ja arvutame süsteemi kordajatest moodustatud determinandi $\det A$ ning kolm determinanti $\det A_j$, $j = 1, 2, 3$ vastavalt eeskirjale (3.4):

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 24, \quad \det A_1 = \begin{vmatrix} -9 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 25 & -6 & -1 \end{vmatrix} = 48,$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & -9 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 25 & -1 \end{vmatrix} = -72, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -9 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 25 \end{vmatrix} = -24.$$

Eeltoodud kolmandat järku determinandid võib arvutada kas *Sarruse* reegliga (1.3) või determinandi arendusteoreemiga (punkt 1.4). Kuna $m = n = 3$ ja $\det A = 24 \neq 0$, siis on tegemist *Crameri* peajuhuga.

Crameri valemite (3.5) kohaselt saame ülesande vastuseks

$$x_1 = \frac{48}{24} = 2, \quad x_2 = \frac{-72}{24} = -3, \quad x_3 = \frac{-24}{24} = -1,$$

mille õigsust saab (ja on soovitav) kontrollida leitud lahendi võrrandisüsteemi asetamise teel:

$$\begin{cases} 2 + 2 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) = -9, \\ 2 - (-3) + 3 \cdot (-1) = 2, \\ 3 \cdot 2 - 6 \cdot (-3) - (-1) = 25. \end{cases}$$

Crameri valemite kasutamisel tuleb arvutada mitu determinanti, mis erinevad üksteisest vaid ühe veeru poolest. Nimetatud asjaolu viitab sellele, et *Crameri* valemid ei ole lineaarse võrrandisüsteemi lahendamiseks kõige ökonoomsemad, vaid nõuavad suhteliselt palju arvutusoperatsioone. Kui tundmatuid on üle kolme, siis kasutatakse enamasti teisi, vähem arvutustööd nõudvaid meetodeid, näiteks *Gaussi* meetodit, mida käsitletakse detailselt punktis 3.5.

3.3. Süsteemi lahendamine maatriksvõrrandina

Täitku lineaarne võrrandisüsteem (3.1) *Crameri* peajuhu tingimusi (vt punkti 3.1). Siis on süsteemi kordajate maatriks A (3.2) ruutmaatriks. Moodustame tundmatutest $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vektori X ja vabaliikmetest $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vektori B, vt (3.6):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Arvestades eeltoodud tingimusi ja tähistusi, saab võrrandisüsteemi (3.1) esitada maatrikskujul

$$AX = B. \tag{3.7}$$

Võrrand (3.7) on aga varasemast tuttav maatriksvõrrand (2.12), vt punkti 2.5, mille lahend avaldub kujul (2.13)

$$X = A^{-1}B, \tag{3.8}$$

kus A^{-1} on maatriksi A pöördmaatriks. Kuna *Crameri* peajuhu korral teatavasti $\det A \neq 0$, siis on maatriks A regulaarne, mis tagab pöördmaatriksi olemasolu.

Näide 3.2. Lahendada näites 3.1 toodud süsteem maatriksvõrrandina.

Tundmatute kordajate maatriks A ja tema pöördmaatriks A^{-1}, mis on leitud punktis 2.4 toodud võtetega, on järgmised:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

Tundmatute vektor X ja vabaliikmete vektor B on

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Ülesanne on formuleeritav maatriksvõrrandina (3.7) (ehk (2.12)), mille lahend avaldub kujul (3.8) (ehk (2.13)):

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 19 & -28 & 11 \\ 10 & -16 & 2 \\ -3 & 12 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 25 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 19 \cdot (-9) - 28 \cdot 2 + 11 \cdot 25 \\ 10 \cdot (-9) - 16 \cdot 2 + 2 \cdot 25 \\ (-3) \cdot (-9) + 12 \cdot 2 - 3 \cdot 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 48 \\ -72 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Veendume, et saame sama vastuse kui näites 3.1 *Crameri* valemitega lahendades: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ ja $x_3 = -1$.

3.4. Süsteemi lahendamine *MS Exceli* funktsioonidega

Lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine maatriksvõrrandina on tehniliselt pigem vaevanõudvam kui *Crameri* valemite kasutamine. Tabelarvutuspaketi *MS Excel* (piiratud) võimaluste taustal pakub see siiski praktilist huvi. *Excelis* puudub lineaarse võrrandisüsteemi lahendamise programm, kuid maatriksite korrutamine ja pöördmaatriksi leidmine on võimalik (vt punkti 2.6). Nii saab kahesammuliselt lahendada *Crameri* peajuhule vastavaid lineaarseid võrrandisüsteeme:

1) funktsiooniga *MINVERSE* leitakse tundmatute kordajate maatriksi A pöördmaatriks A^{-1};
2) korrutades funktsiooniga *MMULT* pöördmaatriksi A^{-1} ning vabaliikmete veeru B, saadakse vastuseks tundmatute vektori X koordinaatide arvväärtused.

3.5. *Gaussi* meetod

Selgitame *Gaussi* meetodi ehk tundmatute järk-järgulise elimineerimise meetodi ideed esmalt alljärgneva näite 3.3 varal, milles on lahendatud näites 3.1 toodud võrrandisüsteem. Selles näites on tegemist *Crameri* peajuhuga, sest võrrandeid ja tundmatuid on ühepalju, $m = n = 3$ ning süsteemi kordajatest moodustatud determinant on nullist erinev: $\det A = 24 \neq 0$. Pärast näidet 3.3 tuuakse *Gaussi* meetodi universaalne arvutuseeskiri. Edasistes punktides 3.7 ja 3.8 kasutatakse *Gaussi* meetodit niisuguste üldiste lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks, mis ei täida *Grameri* peajuhu nõudeid.

Näide 3.3 . Lahendada näites 3.1 toodud süsteem ***Gaussi* meetodiga**.

Kirjutame välja võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi, s.o niisuguse maatriksi, milles tundmatute kordajate maatriksile on lisatud vabaliikmete veerg, vt (3.3). Esmaülesandeks on **teisendada laiendatud maatriksi kõik allpool peadiagonaali asuvad elemendid nullideks**. Selleks **kasutame maatriksi elementaarteisendusi** (vt punkti 2.7) **ainult maatriksi ridade kohta, välja arvatud veergude vahetamine**. Nimetatud tingimusi täitvad maatriksi elementaarteisendused ei muuda süsteemi lahendit, mis tähendab seda, et teisendatud maatriksile vastaval võrrandisüsteemil on samad lahendid kui esialgsel süsteemil.

Liidame laiendatud maatriksi teisele reale (-1) -kordse esimese rea ja kolmandale reale (-3) -kordse esimese rea, mille tulemusena saame esimesse veergu kaks nulli. Seejärel korrutame uut teist rida (-4) -ga ja liidame kolmandale reale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -6 & -1 & 25 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & -12 & -16 & 52 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -9 \\ 0 & -3 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{pmatrix} \sim$$

Sellega on lõppenud nn “**edasikäik**”. Esmane eesmärk on saavutatud, sest peadiagonaalist allapoole jäävad elemendid on teisenenud nullideks. Viimasele maatriksile vastav võrrandisüsteem on

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ \quad -3x_2 - 2x_3 = 11 \\ \qquad\quad -8x_3 = 8 \end{cases}$$

Järgneb “**tagasikäik**”. Tundmatuid hakatakse leidma alates viimasest võrrandist samm-sammult esimese võrrandi poole tagasi liikudes. Viimasest võrrandist saame $x_3 = -1$. Eelviimasest võrrandist arvutame $x_2 = (11 + 2x_3)/(-3) = -3$ ja esimesest võrrandist $x_1 = -9 - 2x_2 - 5x_3 = 2$.

Tagasikäiku võib tõlgendada kui **tundmatute kordajate maatriksi teisendamist ühikmaatriksiks**. Laiendatud maatriksi vabaliikmete veergu tuleb siis süsteemi lahend. Näites 3.3 jagame laiendatud maatriksi viimase rea (-8) -ga. Seejärel liidame teisele reale 2-kordse kolmanda rea ja esimesele reale (-5) -kordse kolmanda rea. Siis jagame uue teise rea (-3) -ga. Lõpuks korrutame teise rea (-2) -ga ja liidame esimesele.

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & -9\\ 0 & -3 & -2 & 11\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -4\\ 0 & -3 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\sim$$

Nüüd ongi tundmatute kordajate maatriks teisenenud ühikmaatriksiks ning vabaliikmete veerust saab välja lugeda süsteemi lahendi:

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}x_1 = 2\\ x_2 = -3\\ x_3 = -1\end{cases}$$

Näite 3.3 lahendamine kirjeldatud viisil nõudis üsna palju leidlikkust, misläbi tehnilised arvutused võisid küll lihtsustuda, kuid samas muutus arvutuseeskiri ebaülevaatlikuks. Arvutil kasutamiseks sobib paremini järgmine, ***Gaussi* meetodi universaalne arvutusskeem**:

1) jagame **esimese** võrrandi **esimese** tundmatu kordajaga a_{11};
2) korrutame uuekujulist **esimest** võrrandit järjesti teise, kolmanda jne võrrandi **esimese** tundmatu kordajaga $a_{21}, a_{31}, \cdots, a_{n1}$ ning lahutame tulemuse vastavalt teisest, kolmandast jne võrrandist (laiendatud maatriksi **esimesse** veergu, alates teisest reast, teisenevad nullid);
3) saadud süsteemi (alates teisest võrrandist) teisendatakse analoogselt eelnevaga (uuekujuline **teine** võrrand jagatakse **teise** tundmatu kordajaga, jne);

Jne.

Gaussi meetodi universaalse algoritmi esimese sammu täitmisel eeldatakse, et esimese tundmatu kordaja on nullist erinev: $a_{11} \neq 0$. Kui a_{11} on väike (nullilähedane), siis tekivad temaga jagamisel ja järgneval võrrandite lahutamisel suured vead. Selle vältimiseks (seega täpsuse suurendamise huvides) on soovitav vahetada tundmatute kordajate maatriksi ridu ja veerge nii, et selle maatriksi vasakusse ülemisse nurka kohale a_{11} teiseneks absoluutväärtuse poolest suurim element (sama tuleks teha ka kõigil järgmistel sammudel). Niisugune üldistus, mida praktikas sageli kasutatakse, on ***Gaussi* meetod peaelemendi valikuga**.

Gaussi meetodi universaalset arvutusskeemi on algoritmilistes keeltes suhteliselt kerge kirjeldada, kuid peaelemendi valikuga seotud loogiliste operatsioonide programmeerimine on küllalt keeruline.

3.6. Pöördmaatriksi leidmine *Gaussi* meetodiga

Järgnevas on pöördmaatriksi leidmist käsitletud kolmandat järku maatriksite näitel, kuid küsimus on kergesti üldistatav n-järku maatriksitele. Olgu A kolmandat järku ruutmaatriks ning A^{-1} tema pöördmaatriks:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Vastavalt pöördmaatriksi definitsioonile (2.7) on $A \cdot A^{-1} = E$, kus E on ühikmaatriks. Detailselt väljakirjutatuna avaldub maatriksvõrrandi (2.7) esimene veerg süsteemina (3.10). Süsteemi (3.10) võrrandite vasakud pooled saadakse maatriksi A esimese, teise ja kolmanda rea korrutamisel maatriksi A^{-1} esimese veeruga. Paremal pool võrdusmärke on ühikmaatriksi E esimene veerg.

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + a_{13}x_{31} = 1 \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} + a_{23}x_{31} = 0 \\ a_{31}x_{11} + a_{32}x_{21} + a_{33}x_{31} = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Seostest (3.10) on näha, et pöördmaatriksi esimese veeru leidmiseks tuleb lahendada lineaarne võrrandisüsteem, mille tundmatute kordajate maatriks on A ja mille vabaliikmete veerg on võrdne ühikmaatriksi esimese veeruga. Eelnevast võib järeldada, et pöördmaatriksi teise (kolmanda) veeru leidmiseks tuleb lahendada lineaarne võrrandisüsteem, mille tundmatute kordajate maatriks on samuti A ja mille vabaliikmete veerg on võrdne ühikmaatriksi teise (kolmanda) veeruga. Seega peab kolmandat järku maatriksi pöördmaatriksi leidmiseks lahendama kolm lineaarset võrrandisüsteemi. Kuna need võrrandisüsteemid erinevad üksteisest ainult vabaliikmete veeru poolest, siis võib neid süsteeme lahendada samaaegselt, kasutades selleks *Gaussi* meetodit.

Kolmandat järku **pöördmaatriksi leidmiseks *Gaussi* meetodiga** kasutatakse järgmist eeskirja.

1. Moodustatakse maatriks, mille kolmes esimeses veerus on maatriksi A veerud ning kolmes viimases veerus on ühikmaatriksi veerud. Selles maatriksis on kolm rida ja kuus veergu.

2. Eelneva maatriksi kolm esimest veergu teisendatakse ühikmaatriksi veergudeks. Kolme viimasesse veergu tuleb siis maatriksi A pöördmaatriks A^{-1}.

Näide 3.4. Leida näites 2.3 toodud maatriksi A pöördmaatriks.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Kirjutame välja maatriksi, mille esimestes veergudes on maatriksi A veerud ning viimastes veergudes ühikmaatriksi veerud. Liidame selle maatriksi teise rea nii esimesele kui ka kolmandale reale, mille tulemusena teiseneb teine veerg ühikmaatriksi veeruks.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

Korrutame esimese rea 2-ga ja liidame teisele reale. Nüüd on esimene veerg teisenenud ühikmaatriksi veeruks. Kolmandasse veergu ühikmaatriksi veeru saamiseks jagame kõigepealt kolmanda rea viiega. Seejärel korrutame uut kolmandat rida (-3) -ga ja liidame teisele reale ning (-1) -ga ja liidame esimesele reale.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 12/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Kolmes esimeses veerus on nüüd ühikmaatriksi veerud ning kolmes viimases veerus on pöördmaatriksi veerud:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}8 & -0{,}2 \\ 2 & 2{,}4 & -0{,}6 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

Veendume, et saime sama vastuse kui näites 2.3, kus on tulemuse õigsuse kontrolliks näidatud, et $A \cdot A^{-1} = E$.

3.7. Üldise lineaarse võrrandisüsteemi lahenduvus

Vaatleme enne teoreetilist käsitlust võimalikke süsteemide liike ja nende lahenduvust nelja lihtsa näite 3.5 kuni 3.8 varal.

Näide 3.5. Lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 + 7x_2 = 13 \end{cases}$

Kontrollida võib, et tegemist on ***Crameri*** **peajuhuga** ning et $x_1 = 3$ ja $x_2 = 1$, on süsteemi **ainus** lahend.

Näide 3.6. Lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 12 \end{cases}$

Siin pole kaks võrrandit lineaarselt sõltumatud, vaid teine võrrand saadakse esimese võrrandi kahega korrutamise teel. Kuna kahe tundmatu leidmiseks on vaid üks lineaarselt sõltumatu võrrand, siis **lahendeid on lõpmata palju**. Võtame $x_2 = C$, kus C on suvaline konstant. Siis $x_1 = 6 - 3C$. Kui näiteks $C = 3$, siis saame eelnevast üldlahendist ühe konkreetse erilahendi $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Mitmese lahendiga süsteeme vaadeldakse järgmises punktis 3.8.

Näide 3.7. Lahendada võrrandisüsteem $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 + 6x_2 = 10 \end{cases}$

Jagame teise võrrandi kahega ja saame $x_1 + 3x_2 = 5$. Ilmne on, et $x_1 + 3x_2$ ei saa üheaegselt võrduda 6-ga ja 5-ga. Järelikult vaadeldaval süsteemil **lahendid puuduvad**.

Näide 3.8. Lahendada nulliliste vabaliikmetega (homogeenne) võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$$

Süsteemi rahuldab ilmselt nulliline (triviaalne) lahend $x_1 = x_2 = 0$, kuid kontrollida võib, et süsteemil on ka lõpmata palju mittetriviaalseid lahendeid $x_1 = -3C$ ja $x_2 = C$, kus C on suvaline konstant. Homogeensete süsteemide lahendamist käsitletakse punktis 3.9.

Üldise lineaarse võrrandisüsteemi (3.1) lahenduvuse küsimusele annab vastuse ***Kronecker-Capelli* teoreem**.

Lineaarne võrrandisüsteem (3.1) on lahenduv (on kooskõlas) siis ja ainult siis, kui selle tundmatute kordajate maatriksi (3.2) astak $rank\, A$ ja laiendatud maatriksi (3.3) astak $rank\, B$ on võrdsed: $rank\, A = rank\, B$.

Näide 3.9. Uurida, kuidas oleneb võrrandisüsteemi lahendi olemasolu ja ühesus parameetritest a ja b.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + a\,x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 4\,x_1 + 3x_2 + x_3 = b \end{cases}$$

Vahetame kaks esimest võrrandit ja kirjutame välja süsteemi laiendatud maatriksi. Teisendame laiendatud maatriksi peadiagonaalist allpool asuvad elemendid nullideks. Selleks liidame maatriksi teisele reale (-2)-kordse esimese rea ning kolmandale reale (-4)-kordse esimese rea. Seejärel lahutame uuest kolmandast reast uue teise rea.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & a & 4 \\ 4 & 3 & 1 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & a+2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & b-12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & a+2 & -2 \\ 0 & 0 & 3-a & b-10 \end{pmatrix}$$

Viimase maatriksi struktuur võimaldab kergesti hinnata nii tundmatute kordajate kui ka laiendatud maatriksi astakut, mille alusel saab vastavalt *Kronecker-Capelli* teoreemile teha järeldusi süsteemi lahenduvuse kohta.

1. Lahend on ühene, kui $a \neq 3$ suvalise b korral, sest siis on astakutingimus täidetud: $rank\, A = rank\, B = 3$. Süsteemis on lineaarselt sõltumatuid võrrandeid kolm ja tundmatuid on samuti kolm, kusjuures tundmatute kordajatest moodustatud $\det A \neq 0$. Seega on tegemist *Crameri* peajuhuga.
2. Lahend on mitmene, kui $a = 3$ ja $b = 10$. Ka nüüd on astakutingimus $rank\, A = rank\, B = 2$ täidetud, kuid kolme tundmatu leidmiseks on vaid kaks lineaarselt sõltumatut võrrandit. Taoliste süsteemide lahendamist vaadeldakse järgmises punktis 3.7.
3. Süsteem pole lahenduv, kui $a = 3$ ja $b \neq 10$, sest siis $rank\, A = 2$ ning $rank\, B = 3$ ja astakutingimus jääb täitmata (süsteem pole kooskõlas).

3.8. Üldise lineaarse võrrandisüsteemi lahendamine

Kui *Kronecker-Capelli* teoreemi eelduseks olev astakutingimus $rank\, A = rank\, B = r$ on täidetud, siis on süsteemis (3.1) parajasti r lineaarselt sõltumatut võrrandit. Kui astak r on võrdne tundmatute arvuga n ($r = n$), siis on tegemist *Crameri* peajuhuga, sest siis tuleb ka $\det A \neq 0$. Kui aga

$$r < n, \tag{3.11}$$

siis on süsteemis (3.1) tundmatuid rohkem, kui lineaarselt sõltumatuid võrrandeid ja lahend on mitmene (süsteemil on lõpmata palju lahendeid).

Üldise lineaarse võrrandisüsteemi lahendamise võib jagada järgmistesse etappidesse.

1. Valime n tundmatu hulgast r **põhitundmatut**. Ülejäänud $n - r$ tundmatut jäävad **vabadeks tundmatuteks**. Põhitundmatute valik on suvaline. Nendeks võivad (aga ei tarvitse) olla näiteks r esimest tundmatut $x_1, x_2, \ldots, x_r$, kusjuures vabadeks tundmatuteks on siis $x_{r+1},\ x_{r+2}, \ldots, x_n$.
2. Vabad tundmatud viiakse süsteemi (3.1) võrrandites paremale poole võrdusmärki.
3. Vabadele tundmatutele antakse suvalised arvulised väärtused, näiteks $x_{r+1} = C_1,\ x_{r+2} = C_2, \ldots, x_n = C_{n-r}$.
4. Edasine lahendus toimub nii, nagu *Crameri* peajuhul.

Süsteemi lahendamisel *Gaussi* meetodiga on eelkirjeldatud algoritmi asemel soovitavam kõigepealt teisendada laiendatud maatriksi (3.3) peadiagonaalist (vasakust ülanurgast algavast diagonaalist) allpool asuvad elemendid nullideks. Seejärel on lihtne otsustada astakutingimuse täidetuse üle ning kooskõlas oleva süsteemi puhul saab fikseerida põhitundmatute arvu r. Laiendatud maatriksi teisenenud kuju alusel võib nüüd vabad tundmatud valida nii, et süsteemi järgneval lahendamisel ("tagasikäigul") oleks võimalikult vähe arvutustööd.

Näide 3.10. Lahendada võrrandisüsteem
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

Kasutame lahendamiseks *Gaussi* meetodit. Selleks kirjutame välja võrrandisüsteemi laiendatud maatriksi ja teisendame selle maatriksi peadiagonaalist allpool asuvad elemendid nullideks. Esimese sammuna liidame laiendatud maatriksi teisele reale (-2)-kordse esimese rea ja kolmandale reale (-3)-kordse esimese rea. Seejärel korrutame uue teise rea (-1)-ga ja liidame uuele kolmandale reale.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \\ 0 & -3 & -7 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kuna laiendatud maatriksi viimase rea elemendid teisenesid kõik nullideks, siis näeme, et $rank\, A = rank\, B = r = 2$. Astakutingimus on täidetud ning süsteem on kooskõlas. Esialgsest kolmest võrrandist osutus lineaarselt sõltumatuks kaks võrrandit. Kuna tundmatuid on kolm, $n = 3$ ja $r < n$ (3.11), siis on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid. Põhitundmatuid on kaks ($r = 2$) ja kuna $n - r = 3 - 2 = 1$, siis vabaks jääb üks tundmatu. Valime vabaks tundmatuks x_3 (kui vabaks tundmatuks võtta x_1, siis oleksid edasised arvutused tehniliselt tülikamad). Anname vabale tundmatule suvalise arvulise väärtuse $x_3 = C.$ Teisest võrrandist $3x_2 + 7x_3 = 5$ avaldame $x_2 = (5 - 7x_3)/3 = (5 - 7C)/3$ ning esimesest võrrandist $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$ saame $x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_3 = (2 + 5C)/3$. Vastus on seega

$$\begin{cases} x_1 = (2+5C)/3, \\ x_2 = (5-7C)/3, \\ x_3 = C. \end{cases}$$

Näide 3.11. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6 \end{cases}$$

Kirjutame välja laiendatud maatriksi, võtame juhtveeruks esimese veeru, valime juhtelemendiks $a_{11} = 1$ ja teisendame ülejäänud esimese veeru elemendid nullideks. Selleks korrutame esimest rida (-3)-ga, (-1)-ga ja (-2)-ga ning liidame vastavalt teisele, kolmandale ja neljandale reale. Paneme tähele, et teise veergu teisenesid n.ö "üleplaanilised" nullid, mida saame järgnevas arvutuses ära kasutada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 & 11 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

Võtame juhtveeruks viienda veeru, juhtelemendiks $a_{45} = 1$ ja lahutame esimesest reast neljanda rea. Liites teisele reale kolmanda, muutuvad teise rea kõik elemendid nullideks. Jagame kolmanda rea (-2)-ga ning võtame juhtveeruks neljanda veeru, juhtelemendiks a_{34} (mis pärast (-2)-ga jagamist võrdub ühega), liidame esimesele reale 3-kordse kolmanda rea ja lahutame neljandast reast kolmanda.

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -9/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -7/2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Viimasest maatriksist on näha, et astakutingimus on täidetud, $rank\, A = rank\, B = r = 3$ ja süsteem on kooskõlas. Esialgsest neljast võrrandist osutusid lineaarselt sõltumatuteks kolm. Kuna tundmatuid on viis, $n = 5$ ja $r < n$ (3.11), siis on võrrandisüsteemil lõpmata palju lahendeid. Et $r = 3$ ja $n - r = 5 - 3 = 2$, siis põhitundmatuid on kolm ja vabaks jääb kaks tundmatut. Valime vabadeks tundmatuteks x_2 ja x_3, andes neile suvalised arvulised väärtused

$$x_2 = C_1,$$
$$x_3 = C_2.$$

Esimesest võrrandist $x_1 = -9/2 - 2x_2 - x_3 = -9/2 - 2C_1 - C_2$.

Teisest võrrandist $x_4 = -7/2 + 2x_3 = -7/2 + 2C_2$.

Kolmandast võrrandist $x_5 = 3/2 + 2x_3 = 3/2 + 2C_2$.

3.9. Homogeenne lineaarne võrrandisüsteem

Lineaarset võrrandisüsteemi (3.1) nimetatakse **homogeenseks**, kui tema kõik vabaliikmed on nullid, $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Kui kasvõi üks vabaliige erineb nullist, siis on süsteem **mittehomogeenne**.

Olgu tundmatute kordajate maatriksi astak $rank\, A = r$. Laiendatud maatriksi B astak on siis samuti r, sest nullveeru lisamine ei mõjuta maatriksi astakut. Seega on astakutingimus $rank\, A = rank\, B = r$ igal juhul täidetud ning homogeenne süsteem (3.12) on alati kooskõlas ja lahenduv. Seda on ka vahetult näha, sest süsteemil on ilmselt alati olemas nulliline (triviaalne) lahend $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Juhul $r = n$ on triviaalne lahend süsteemi (3.12) ainsaks lahendiks. Kui $r < n$, siis on süsteemil (3.12) lõpmata palju mittetriviaalseid lahendeid. Sellisel juhul on põhitundmatute arv r ning vabu tundmatuid on $n - r$. Mittetriviaalsed lahendid leitakse samade meetoditega, mida kasutatakse üldise mittehomogeense süsteemi lahendamiseks. *Gaussi* meetodiga lahendamisel pole mõtet vabaliikmete veergu välja kirjutada, sest see on ja jääb ainult nulle sisaldavaks veeruks.

Kui süsteemis (3.12) on tundmatuid ja võrrandeid ühepalju, $n = m$, siis saab tundmatute kordajatest moodustada determinandi. Niisugusel süsteemil on mittetriviaalseid lahendeid ainult siis, kui see determinant võrdub nulliga.

Näide 3.12. Lahendada homogeenne süsteem

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 26x_3 + 22x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + \ \ 4x_3 - \ \ 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + \ \ 6x_3 - \ \ 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Vahetame võrrandite järjekorda ning kirjutame tundmatute kordajate maatriksi esimesse ritta kolmanda võrrandi tundmatute kordajad. Viimase võrrandi tõstame teiseks ning esimene ja teine võrrand jäävad vastavalt kolmandaks ja neljandaks.

Korrutame esimest rida järjekorras (-3), (-1) ja (-3)-ga ning liidame tulemused vastavalt teisele, kolmandale ja neljandale reale. Nüüd on esimeses veerus teisenenud kolm elementi nullideks.

Korrutame uut teist rida (-5) ja 2-ga ning liidame uuele kolmandale ja neljandale reale. Näeme, et maatriksi kahe viimase rea elemendid on seejärel kõik nullideks teisenenud.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 1 & -3 & -26 & 22 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -5 & -30 & 25 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tundmatute kordajate maatriksi astak $rank\, A = r = 2$, mis ütleb, et põhitundmatuid on kaks ning vabu tundmatuid on $n - r = 4 - 2 = 2$. Valime vabadeks tundmatuteks x_3 ja x_4, millele anname suvalised arvulised väärtused

$x_3 = C_1$ ja

$x_4 = C_2$. Teisest võrrandist avaldame

$x_2 = -6x_3 + 5x_4 = -6C_1 + 5C_2$ ja esimesest

$x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 12C_1 - 10C_2 - 4C_1 + 3C_2 = 8C_1 - 7C_2$.

Tulemuse kontrollimiseks võib asetada x_1, x_2, x_3 ja x_4 esialgsesse süsteemi ning veenduda, et kõigi nelja võrrandi puhul saadakse samasus. Teeme seda kontrolli ainult neljanda võrrandiga:

$$3x_1 + 5x_3 + 6x_3 - 4x_4 = 3 \cdot (8C_1 - 7C_2) + 5 \cdot (-6C_1 + 5C_2) + 6C_1 - 4C_2 =$$
$$= 24C_1 - 30C_1 + 6C_1 - 21C_2 + 25C_2 - 4C_2 = 0.$$

Kuna näites 3.12 on tundmatuid ja võrrandeid ühepalju, $n = m = 4$, siis saab tundmatute kordajatest moodustada neljandat järku determinandi. Võib veenduda, et see determinant võrdub nulliga (neid arvutusi pole siin toodud), millest järeldub, et süsteemil on mittetriviaalseid lahendeid.

3.10. Maatriksi omaväärtused ja omavektorid

Olgu antud n^2-maatriks A ja vektor $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Vektor $\overline{x}$ on üheveeruline maatriks, mis kompaktsema kirjutusviisi huvides on esitatud transponeeritud kujul. Üldjuhul $A\overline{x} \neq \overline{x}$. Erijuhul võib leiduda niisugune λ, et

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}. \tag{3.13}$$

Definitsioon. Niisugust λ väärtust, mille puhul võrrand (3.13) omab nullist erinevat lahendit, nimetatakse maatriksi A **omaväärtuseks** ja vastavat lahendit $\overline{x}$ nimetatakse **omavektoriks**.

Võrrandist (3.13) saab $A\overline{x} - \lambda\overline{x} = 0$ ehk

$$(A - \lambda E)\overline{x} = 0, \tag{3.14}$$

kus E on n-järku ühikmaatriks, vt punkti 2.3. Maatriksvõrrand (3.14) esitab homogeenset lineaarset võrrandisüsteemi tundmatute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ suhtes. Meid huvitavad süsteemi (3.14) nullist erinevad (mittetriviaalsed) lahendid. Kuna A on ruutmaatriks, siis on homogeensel lineaarsel võrrandisüsteemil (3.14) mittetriviaalseid lahendeid parajasti siis, kui selle süsteemi kordajatest moodustatud determinant võrdub nulliga:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{3.15}$$

ehk üksikasjalikumalt

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{3.16}$$

Arendades determinandi (3.16), saame λ suhtes n-astme algebralise võrrandi, nn **karakteristliku võrrandi**. Leides siit omaväärtused $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ ja asendades süsteemis (3.14) oleva λ järjest nendega, saame homogeensed lineaarsed võrrandisüsteemid

$$(A - \lambda_k E)\overline{x} = 0, \tag{3.17}$$

mille nullist erinevad lahendid määravadki maatriksi A omavektorid.

Näide 3.13.

Leida maatriksi $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ omaväärtused ja omavektorid.

Koostame võrrandi (3.16)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

milles oleva determinandi arendamisel saame karakteristliku võrrandi

$$(1-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) - 9(1-\lambda) = 0,$$
$$(1-\lambda)(-2+2\lambda-\lambda+\lambda^2-1-9) = 0,$$
$$(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-12) = 0.$$

Karakteristliku võrrandi lahendamiseks võtame $\lambda^2+\lambda-12=0$ ja $1-\lambda=0$, millest saame omaväärtused $\lambda_1=3$, $\lambda_2=-4$ ja $\lambda_3=1$. Antud näites on kõik omaväärtused erinevad reaalarvud. Üldiselt võivad omaväärtused olla ka kompleksarvulised ja korduda (kompleksarvude kohta vt 4. peatükki).

Leiame omaväärtusele $\lambda_3=1$ vastava omavektori. Selleks asetame $\lambda_3=1$ homogeensesse süsteemi (3.14), kirjutame välja selle süsteemi tundmatute kordajatest moodustatud maatriksi ja teisendame tema viimase rea elemendid nullideks:

$$\begin{cases} (1-1)x_1 + 3x_2 = 0 \\ 3x_1 + (-2-1)x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + (1-1)x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Võtame vabaks tundmatuks $x_1=C$. Siis põhitundmatud on $x_2=0$ ja $x_3=3C$. Omaväärtusele λ_3 vastav omavektor on seega $\overline{x}_3=(C,\,0,\,3C)^T$. Analoogsel viisil leiame omaväärtustele $\lambda_1=3$ ja $\lambda_2=-4$ vastavad omavektorid $\overline{x}_1=(-3C,\,-2C,\,C)^T$ ja $\overline{x}_2=(-3C,\,5C,\,C)^T$.

3.11. Näiteid halva konditsiooniga süsteemidest

Praktikas on lineaarse võrrandisüsteemi kordajad ja vabaliikmed sageli määratud ligikaudselt. Võib püstitada küsimuse, kuidas muutub süsteemi lahend, kui süsteemi kordajaid ja vabaliikmeid muuta vähesel määral. Kui lahend muutub seejuures ka vähe, siis öeldakse, et süsteem on hea konditsiooniga. Kui aga lahend muutub (väga) palju, siis süsteem on halva konditsiooniga. Küllalt paljud rakendusülesanded taanduvad halva konditsiooniga süsteemideks, mistõttu on selliste süsteemide äratundmiseks ja lahendamiseks välja töötatud erimeetodid. Käesolevas piirdutakse kolme lihtsa illustreeriva näitega.

Näide 3.14. Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11 \\ 10x_1 + 101x_2 = 111 \end{cases} \tag{3.18}$$

lahendid on $x_1 = 1$ ja $x_2 = 1$, mida võib kontrollida lahendite süsteemi asetamisega. Suurendame esimese võrrandi vabaliiget 0,1 võrra ja saame süsteemi

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 11{,}1 \\ 10x_1 + 101x_2 = 111 \end{cases} \tag{3.19}$$

Selgub, et süsteemi (3.18) ühe vabaliikme varieerimine küllalt vähesel määral (alla 1%) muudab selle süsteemi lahendeid väga palju. Süsteemi (3.19) lahendid on $x_1 = 11{,}1$ ja $x_2 = 0$.

Mõnikord (kuid mitte alati) viitab halvale konditsioonile tundmatute kordajatest moodustatud determinandi nullilähedus, kuid antud juhul erineb see determinant nullist küllalt palju, $\det A = 1 \cdot 101 - 10 \cdot 10 = 1$.

Konditsiooni hindamiseks võib leida tundmatute kordajate maatriksi (absoluutväärtuse poolest) maksimaalse omaväärtuse $\max|\lambda|$ ja (absoluutväärtuse poolest) minimaalse omaväärtuse $\min|\lambda|$ suhte, nn konditsiooniarvu. Mida suurem on konditsiooniarv, seda halvema konditsiooniga on süsteem. Arvutame punktis 3.10 toodud meetodiga süsteemi (3.18) tundmatute kordajate maatriksi omaväärtused ja leiame konditsiooniarvu, mis osutub väga suureks:

$$\frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|} \approx \frac{101{,}9902}{0{,}0098} \approx 10400.$$

Näide 3.15. Järgnev lineaarne võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + (1 + 1/3600)x_2 = 0{,}375 \end{cases}$$

tekib ühe praktilise inseneriülesande lahendamisel. Süsteemi tundmatute kordajatest moodustatud determinant on nullilähedane, $\det A \approx 0{,}000278$ ja konditsiooniarv on väga suur

$$\frac{\max|\lambda|}{\min|\lambda|} \approx \frac{2{,}000139}{0{,}000139} \approx 14400.$$

Süsteem on väga halva konditsiooniga. Täpne lahend on $x_1 = 4951$ ja $x_2 = 4950$. Kui võtta $1 + 1/3600 \approx 1{,}000278$ ja teha arvutused seitsme tüvenumbriga, siis tuleb $x_1 = 4947{,}043$ ja $x_2 = 4946{,}043$.

Näide 3.16. Lahendada süsteem, mille tundmatute kordajad moodustavad *Hilberti* maatriksi:

$$\begin{cases} x_1 + 1/2x_2 + 1/3x_3 = 1 \\ 1/2x_1 + 1/3x_2 + 1/4x_3 = 2 \\ 1/3x_1 + 1/4x_2 + 1/5x_3 = 1 \end{cases} \tag{3.20}$$

Süsteemi (3.20) täpne lahend on $x_1 = -33$, $x_2 = 168$ ja $x_3 = -150$, mille saab leida näiteks *Exceli* funktsioonidega, vt punkti 3.4. Süsteemi (3.20) tundmatute kordajatest moodustatud determinant on nullilähedane, $\det A \approx 0{,}000463$, mis viitab võimalikule halvale konditsioonile.

Asendame süsteemis (3.20) kordajad $1/3$ nende ligikaudsete väärtustega täpsusega kolm kohta peale koma $1/3 \approx 0{,}333$ ja saame süsteemi (3.21):

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}333x_3 = 1 \\ 0{,}5x_1 + 0{,}333x_2 + 0{,}25x_3 = 2 \\ 0{,}333x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}2x_3 = 1 \end{cases} \tag{3.21}$$

Süsteemi (3.21) lahend on (näiteks *Exceli* funktsioonidega arvutades) $x_1 = -36{,}062$, $x_2 = 183{,}912$ ja $x_3 = -164{,}847$. Näeme, et süsteemi (3.20) tundmatute kordajate väike muutus tingis lahendi suure muutuse.

4. KOMPLEKSARVUD

4.1. Kompleksarvu mõiste ja esitusviisid

Kompleksarvu algebraline kuju

Kompleksarvudeks nimetatakse reaalarvude järjestatud paare $z = (x; y)$, mis esitatakse algebralisel kujul järgmiselt:

$$z = x + iy, \tag{4.1}$$

kus i on imaginaarühik, mis võrdub

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{või} \quad i^2 = -1. \tag{4.2}$$

x on kompleksarvu reaalosa, mida tähistatakse $x = \operatorname{Re} z$ ning
y on kompleksarvu imaginaarosa kordaja, mida tähistatakse $y = \operatorname{Im} z$.
iy on kompleksarvu imaginaarosa.

Kompleksarve $x \pm iy$ nimetatakse kaaskompleksarvudeks.

Kaks kompleksarvu $x_1 + iy_1$ ja $x_2 + iy_2$ on võrdsed, $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$, kui neil on võrdsed reaalosad $x_1 = x_2$ ja imaginaarosa kordajad $y_1 = y_2$.

Kompleksarv võrdub nulliga, $x + iy = 0$, kui $x = 0$ ja $y = 0$.

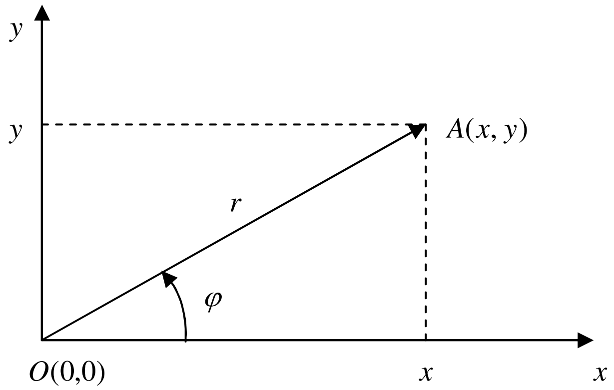
Näide 4.1. Ruutvõrrandil $x^2 - 2x + 2 = 0$ on komplekslahendid

$$x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i,$$

mis avalduvad kaaskompleksarvudena $x_1 = 1 + i$ ja $x_2 = 1 - i$.

Kompleksarvude geomeetriline kujutamine

Kompleksarv $z = x + iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ sõltub kahest reaalarvulisest parameetrist $x = \operatorname{Re} z$ ja $y = \operatorname{Im} z$. Kompleksarvu z piltlikustamiseks kasutatakse *xy*-tasandit, kus *x*-koordinaat on $\operatorname{Re} z$ ning *y*-koordinaat on $\operatorname{Im} z$. Selles tähenduses nimetatakse *x*-telge reaalteljeks ja *y*-telge imaginaarteljeks. Tasandit, mille igale punktile $(x; y)$ on üheselt vastavusse seatud kompleksarv $x+iy$, nimetatakse komplekstasandiks (joonis 4.1).



Joonis 4.1. Kompleksarvu geomeetriline kujutamine

Ühendades koordinaatide alguspunkti $O(0,0)$ punktiga $A(x, y)$, saadakse vektor $\overline{OA}$. Mõnel juhul on sobiv kompleksarvu geomeetriliseks kujutiseks lugeda vektorit $\overline{OA}$.

Kompleksarvu trigonomeetriline kuju

Joonisel 4.1 avalduvad punkti $A(x, y)$ koordinaadid x ja y järgmiselt:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Seoste (4.3) abil võib algebralisel kujul oleva kompleksarvu (4.1) esitada trigonomeetrilisel kujul

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{4.4}$$

milles

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{4.5}$$

on moodul ja $\varphi = \operatorname{Arg} z$ on argument. Harilikult kasutatakse argumendi peaosa $\arg z$, mis rahuldab täiendavat tingimust $-\pi \le \arg z \le \pi$:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ kui } x < 0 \text{ ja } y \geq 0 \text{ (teine veerand)}, \\ \arctan\dfrac{y}{x}, \text{ kui } x \geq 0 \text{ (esimene ja neljas veerand)}, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ kui } x < 0 \text{ ja } y < 0 \text{ (kolmas veerand)}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Näide 4.2. Esitada kompleksarv $-1+i$ trigonomeetrilisel kujul.

Arvutame mooduli $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

ja argumendi $\varphi = \arctan\dfrac{1}{(-1)} + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$

ning saame $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Märkus. Ka reaalarvu A saab esitada trigonomeetrilisel kujul:

$$\begin{aligned} &\text{kui } A > 0 \text{, siis } A = |A|(\cos 0 + i\sin 0), \\ &\text{kui } A < 0 \text{, siis } A = |A|(\cos\pi + i\sin\pi). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Näide 4.3. Reaalarv -5 avaldub trigonomeetrilisel kujul järgmiselt: $-5 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Kompleksarvu eksponentkuju

On võimalik näidata, et kehtib *Euleri* valem

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}, \tag{4.8}$$

mille abil saab kompleksarvule (vt (4.4)) anda eksponentkuju

$$z = r\,e^{i\varphi}. \tag{4.9}$$

Näide 4.4. Viia kompleksarv $-1+i$ eksponentkujule. Näites 4.2 on leitud selle kompleksarvu moodul $r = \sqrt{2}$ ja argument $\varphi = 3\pi/4$, mille abil saab moodustada kompleksarvu eksponentkuju $-1+i = \sqrt{2}\,e^{3\pi i/4}$.

4.2. Tehted kompleksarvudega

Kompleksarvude liitmine ja lahutamine

Algebralisel kujul olevaid kompleksarve liidetakse ja lahutatakse nii nagu algebralisi avaldisi:

$$\begin{aligned}(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)&=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2),\\(x_1+iy_1)-(x_2+iy_2)&=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Näide 4.5. $(2+5i)-(3-2i)=(2-3)+(5+2)i=-1+7i.$

Kompleksarvude korrutamine

Algebralisel kujul olevaid kompleksarve x_1+iy_1 ja x_2+iy_2 korrutatakse nii nagu algebralisi kaksliikmeid, kusjuures

$$\begin{array}{lcl}i^2=-1, & & \\ i^3=(-1)\cdot i=-i, & & i^{4k}=1,\\ i^4=(-i)\cdot i=-i^2=1, & \text{üldiselt} & i^{4k+1}=i,\\ i^5=1\cdot i=i, & & i^{4k+2}=-1,\\ \text{jne.} & & i^{4k+3}=-i,\quad k=0,1,2,\ldots.\end{array}\tag{4.11}$$

Näide 4.6. $(2+3i)(-4+i)=-8+2i-12i-3=-11-10i$.

Märkus. Kaaskompleksarvude korrutamisel saadakse tulemuseks reaalarv:

$$(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2.\tag{4.12}$$

Trigonomeetrilisel kujul olevad kompleksarvud korrutatakse järgmise valemiga:

$$\begin{aligned}&r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\&\quad=r_1r_2\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right].\end{aligned}\tag{4.13}$$

Valemi (4.13) tuletamisel on arvestatud, et $i^2=-1$,
$\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2=\cos(\varphi_1+\varphi_2)$ ja
$\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2=\sin(\varphi_1+\varphi_2)$.

Kompleksarvude jagamine

Algebralisel kujul olevate kompleksarvude jagamisel korrutatakse lugejat ja nimetajat nimetaja kaaskompleksarvuga ning nimetajas arvestatakse seosega (4.12):

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)\cdot(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)\cdot(x_2-iy_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x^2+y^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x^2+y^2}. \qquad (4.14)$$

Näide 4.7. $\frac{3-i}{4+5i}=\frac{(3-i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)}=\frac{12-4i-15i-5}{16+25}=\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i.$

Trigonomeetrilisel kujul olevate kompleksarvude jagamine toimub järgmise valemiga:

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right]. \qquad (4.15)$$

Valemi (4.15) kontrolliks võib võrdusmärgist paremal pool oleva jagatise korrutada nimetajaga ning veenduda, et tulemuseks saadakse lugeja $r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$.

Kompleksarvude astendamine

Trigonomeetrilisel kujul olevaid kompleksarve astendatakse valemiga (4.16), mis järeldub korrutamise eeskirjast (4.13) ja kus n on positiivne täisarv:

$$\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (4.16)$$

Näide 4.8. Arvutada $(\sqrt{3}+i)^6$.

Viime algebralisel kujul oleva kompleksarvu kõigepealt trigonomeetrilisele kujule, arvutades mooduli valemiga (4.5) $r=\sqrt{3+1}=2$ ja argumendi valemiga (4.6) $\varphi=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$ ja saame

$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$ Viimase astendamisel leitakse

$$(\sqrt{3}+i)^6=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=2^6(\cos\pi+i\sin\pi)=64(-1+i\cdot 0)=-64.$$

Antud näites tuli vastuseks (erandina) reaalarv.

Kompleksarvude juurimine

Trigonomeetrilisel kujul olevat kompleksarvu juuritakse valemiga (4.17), mille kehtivust siin ei tõestata:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{4.17}$$

$\sqrt[n]{r}$ on siin positiivse arvu r (mooduli) aritmeetiline (s.t positiivne reaalne) juur.

Valemist (4.17) nähtub, et kompleksarvu n-ndal juurel on n erinevat väärtust. Ka nullist erineva reaalarvu n-ndal juurel on n väärtust, sest reaalarv on kompleksarvu erijuhuks ja teda võib esitada trigonomeetrilisel kujul, vt (4.7).

Näide 4.9. Lahendada võrrand $x^3 + 8 = 0$.

Kuupvõrrandil peab olema kolm lahendit. Neist üks (reaalarvuline lahend $x = -2$) on võimalik leida peast, kuid kaks ülejäänud lahendit tuleb arvutada valemiga (4.17).

Avaldame lahendamist nõudvast võrrandist otsitava suuruse $x = \sqrt[3]{-8}$ ja esitame reaalarvu -8 trigonomeetrilisel kujul oleva kompleksarvuna, vt (4.7):

$$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi).$$

Juurime seda kompleksarvu valemiga (4.17):

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)} = 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right).$$

Kui eelnevas avaldises $k = 0$, siis $x_1 = 1 + i\sqrt{3}$,

$k = 1$, $x_2 = -2$,

$k = 2$, $x_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

Valemiga (4.17) saime kuupvõrrandile $x^3 + 8 = 0$ kolm lahendit, millest üks on reaalarvuline. Kaks kompleksarvulist lahendit moodustavad kaaskompleksarvude paari.

KIRJANDUS

1. J. Henno. Sisssejuhatus lineaaralgebrasse ja analüütilisse geomeetriasse. Tallinn: TPI, 1982. - 108 lk.

2. G. Kangro. Kõrgem algebra. Tallinn: Eesti Riiklik Kirjastus, 1962. - 556 lk.

3. A. Lõhmus, I. Petersen, H. Roos. Kõrgema matemaatika ülesannete kogu. Tallinn: Valgus, 1982. - 604 lk.

4. E. Paal. Lineaaralgebra. Tallinn: TTÜ, 2004. - 208 lk.

5. E. Paal. Lineaaralgebra elemente. Tallinn: TTÜ, 2000. - 71 lk.

6. P. Puusemp. Lineaaralgebra. Tallinn: Avita, 2000. - 257 lk.

7. H. Päeva. Matemaatika II. Majandusmatemaatika. Tallinn: Eesti Kõrgem Kommertskool, 1995. - 115 lk.

8. E. Sakkov, L. Roots. Kõrgem matemaatika. Tartu: TÜ, 1994. - 108 lk.