

EESTI VABARIIGI TARTU ÜLIKOOLI
TOIMETUSED

ACTA ET COMMENTATIONES
UNIVERSITATIS TARTUENSIS
(DORPATENSIS)

A

MATHEMATICA, PHYSICA, MEDICA

XV

TARTU 1929

EESTI VABARIIGI TARTU ÜLIKOOLI
TOIMETUSED

ACTA ET COMMENTATIONES
UNIVERSITATIS TARTUENSIS
(DORPATENSIS)

A

MATHEMATICA, PHYSICA, MEDICA

XV

TARTU 1929

Sisukord. — Contenta.

1. **A. Nõmmik.** The influence of ground limestone on acid soils and on the availability of nitrogen from several mineral nitrogenous fertilizers.
 2. **A. Öpik.** Studien über das estnische Unterkambrium (Estonium). I—IV.
 3. **J. Nuut.** Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe.
 4. **J. Nuut.** Über die Vierfarbenformel.
 5. **J. Nuut.** Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs.
 6. **Theodor Lippmaa.** Pflanzenökologische Untersuchungen aus Norwegisch- und Finnisch-Lapland unter besonderer Berücksichtigung der Lichtfrage.
-

**THE INFLUENCE OF GROUND LIMESTONE ON
ACID SOILS AND ON THE AVAILABILITY OF
NITROGEN FROM SEVERAL MINERAL
NITROGENOUS FERTILIZERS**

BY

A. NÕMMIK

TARTU 1929

Historical ¹⁾.

There are some substances commonly used in agricultural practice which produce beneficial effects upon plant growth even though they do not serve as fertilizers. Such substances act indirectly on the soil, either by rendering it more suitable for cultivation and plant growth or by making available the other plant nutrients stored in the soil.

A substance of this kind is lime, and some authors (Hall, 31) note that "any soil containing less than 1 per cent of calcium will be benefited by liming, and when the percentage falls to 0.2 per cent, lime becomes a necessity to enable the manures to exert their proper action". Though lime contains calcium, one of the elements necessary for plant growth, it is in general not used for this purpose. It is impossible to ascertain the historical period when the value of lime first became known. We find mention of its use by the ancient Romans. Writers of that age (for instance Pliny) refer to the beneficial effects of lime on plant growth. Not all of the reactions involved were understood by the ancients, but the favorable effect of lime upon plant growth was known, and the recognition of this fact in European countries has given rise to the German proverbial expression, "Kalk macht die Väter reich, aber die Söhne arm". We now know that the words quoted do not necessarily express the facts; much depends on how the lime is used, and on the system of cropping employed.

During the last 50 or 60 years numerous articles and papers on the liming of soils have been published in Europe as well as in America. Among the writers in Germany are to be noted Heiden (37), Orth (74), Hoffmann (40), Heinrich (38). In Russia the application of lime was not very usual in the period just referred to, although among the Russian agricultural writers one may find such men as Stebut (85), Engelhardt (23) and

1) Research carried out at the N. Jersey Agricult. Exp. Sta. (U. S. A.), 1926.

others who heartily recommend the use of lime. In recent years series of experiments with lime have been conducted by some Russian agricultural experimental stations (Perm, Moscow), and Samoiloff (80) and other Russian authors give very striking examples of the results of lime deficiency in some Russian soils. Since the beginning of the present century agricultural literature has been very rich in articles about the liming of soils and it is not necessary to list them all.

It is generally recognized that soil acidity has an unfavorable influence upon the fertility of soils. This deleterious result is due to the effects of soil acidity on the chemical, physical, and biological conditions and processes of soils. Whereas formerly the presence of the small sorrel (*Rumex acetosella*), corn marigold (*Chrysanthemum segetum*), spurrey (*Spergula arvensis*), bracken (*Pteris aquilina*) served to indicate the lack of lime in the soil, agricultural chemists are now striving to find an exact chemical method for determining the lime requirement of soils. Some commonly known methods of this character, to which reference is frequently made, have been devised by the following authors: Tacke (88), Hutchinson and McLennan (42), Veitch (94), Truog (92, 93), Daikuhara (20). Although a number of them are in use by various soil workers, these methods are still considered as far from perfect. The difficulties experienced with them may be explained by the fact that we are still ignorant of many of the exact effects of lime in different types and kinds of soils. It is of interest here to note that recent observations by White (101) at the Pennsylvania Agricultural Experiment Station show that sorrel, which is commonly supposed to be a plant avoiding lime, is in reality benefited by lime and usually occurs on acid soils, because there it meets with the least competition from other weeds.

It is generally recognized that lime influences a) the physical, b) the chemical, and c) the biological aspects of the soil. In heavy soils, especially those which have been subjected to strong leaching, there is a tendency of the fine (negative) particles to become too closely aggregated. Such a condition interferes with the air and water movements in the soil and acts unfavorably on plant growth. Lime applications slightly improve matters by keeping the particles flocculated (22), a condition necessary for the desirable granular or crumbly structure.

Chemically lime brings about many complex changes in the soil. Base exchange is forced and probably certain mineral nutrients, for instance phosphorus (21^a, 27, 29, 105) and potassium (2, 77, 89) tend to become more available. Thaer (89) came to the conclusion that "eine Kalimehraufnahme ist eine fast regelmässig beobachtete Folge einer Kalkung. Das bessere Wachstum der Leguminosen nach einer Mergelung ist nicht nur auf die Reaktionsänderung des Bodens und Bakterienwachstums zurückzuführen, sondern bei diesen sehr blattreichen Gewächsen spielt das Kali die wichtigste Rolle". McCool (69) also supposes that "lime performs an additional function when applied to the soil such as liberation or making available certain substances that are utilized by the crops"; McCool found that lime had little, if any, effect on the leaching of potash from the soil, but Lipman and al. (63) with his 15-years' experiment came to the conclusion that the potassium content in limed soil was lower than in unlimed soil. Feilitzen (24) found that the plant food content in drainage water from the limed area of arable and grassland was not higher in comparison with unlimed areas. In a lysimeter experiment Lyon and Bizzel (66) ascertained that the application of lime did not result in an increase in the quantity of potassium contained in drainage water nor in any increase in the amount of potassium removed by the crops, but that the application of lime was accompanied by an increase in the quantity of sulphur in the drainage water. Whittle (102) suggested that lime increases the nitrogen content in the soil when it is applied to legumes, but Mooers and McIntire (71) observed that all forms of lime gave rise to a loss of soil total nitrogen, while increasing the crop yields. There are also indications that lime favors the oxidation of ferrous compounds of iron into ferric compounds (78).

Soil acidity usually favors the accumulation and solubility of toxic organic and inorganic substances. Among these toxic substances soluble aluminium salts have been noted by a number of investigators. Sufficient amounts of these toxic substances may be present to be very harmful to some plants. With the application of lime the acidity of soils as well as the solubility of soluble aluminium is lowered, because aluminium may be forced back into less active compounds (18).

That lime decreases the concentration of hydrogen ions in soils is generally admitted and hence there is no necessity for

discussing this subject at any length. It is sufficient to cite a few examples from the Rhode Island (13) and New Jersey (4) Agricultural Experiment Stations. Their results are of greater value because of the long duration of the experiments.

At the Rhode Island Agricultural Experiment Station one experimental field was under observation from 1909 to 1924. The limed plot received high calcium limestone periodically every 5 year period from 1909 to 1921. The total amount applied was 16,783 pounds of limestone per acre in four applications for the cropped plot. For the last four years the pH values were determined and the average results were as follows:

	1920 pH	1921 pH	1922 pH	1923 pH	1924 pH	Total average pH
No lime	5.2	4.9	4.5	4.5	4.5	4.73
High calcium hydrate	6.6	6.3	5.9	5.8	5.7	6.10

It is seen that the unlimed plot at Rhode Island showed a slight, but decidedly progressive, increase of acidity during the last four years of cropping. The pH value, which was 5.2 in 1920, dropped to 4.5 in 1924. It is only due to cropping in that short period of time.

At the New Jersey Agricultural Experiment Station the nitrogen availability plots were under observation from 1908 to 1920. The rotation was corn, oats, wheat and timothy (two years) without legumes. One series (A) received no lime, and the other (B) received ground limestone at the rate of one ton per acre in 1908, when the work was started, and later at intervals of five years it received two tons per acre (about 0.1 per cent CaO for a depth of 17 cm.). The last application was made in the spring of 1918. A few average pH values for the summer of 1920 for differently treated plots are shown in the following table:

Plot No.	Fertilizer treatment	Series A. Unlimed	Series B. Limed
7	Nothing	5.97	7.01
9	Minerals and 320 lbs. nitrate of soda per acre . .	6.07	7.02
11	Minerals and ammonium sulphate equal to 320 lbs. nitrate of soda per acre	4.70	6.56
13	Minerals and dried blood equal to 320 lbs. nitrate of soda per acre	5.79	6.96
19	Minerals only	5.75	7.13

It will be observed that there has been little change in the pH values throughout the growing period of 1920. A study of the tables reveals a large difference in pH values between limed and unlimed plots. On the limed plots the acidity is much less than on the unlimed ones. Some striking instances of the influence of fertilizers on the soil reaction may be gathered from this experiment: the unlimed and unfertilized plot No. 7 A has a pH value a little less than 6.0, whereas on the corresponding plot No. 11 A, which received minerals and sulphate of ammonia equal to 320 lbs. of nitrate of soda annually, the pH value went down and after 13 years of cropping reached 4.7. Similar results were obtained at the Rhode Island Agricultural Experiment Station as reported by Burgess (9). Here we have a striking example of the human influence on soil reaction. Mention should also be made of the influence of vegetation on the soil reaction. Some investigators, for instance Arrhenius (1) propose to ascertain the soil reaction by vegetative associations.

In recent years considerable attention has been given to the so-called "active" aluminium as a factor inhibiting plant growth in acid soils. It is held by some that the amount of active aluminium salts, rather than the degree of acidity, determines the toxicity of soil to plant growth. Numerous investigations have been made in this direction which indicate a fairly close correlation between the solubility of aluminium, the acidity of the soil, and frequently also plant growth. It was found that lime added to acid soil reduces the solubility of aluminium compounds and also the acidity of the soil. Hartwell (34) supposed that aluminium was the element which was responsible for the different toxic influences on the plants. Equivalent amounts of aluminium sulphate and sulphuric acid, when added to an optimum nutrient solution, produced nearly the same depression in the growth of barley. The nutrient solution, when it contained the acid, was found to have about four times the concentration of hydrogen ions as when it contained aluminium sulphate. Therefore, says the author, the toxic effect of the latter on the barley is attributable largely to the aluminium.

Burgess and Pember (12) have shown the influence of various amounts of lime in rendering the active aluminium of acid soil inactive and reducing the hydrogen ion concentration. A

short extract of the work done with barley by the authors cited will explain their conclusion.

Lime treatment, yields of barley, reaction and soluble aluminium in an acid soil.

Treatment	Average yield of barley per pot	Soil reaction and active aluminium after harvesting of lettuce, barley and onions	
	gm.	Reaction pH	Active Al_2O_3 p. p. m.
None	57	4.47	820
1000 lbs. CaO per acre	69	4.94	645
2000 " " " "	65	5.30	560
3000 " " " "	58	5.60	530
4000 " " " "	59	6.00	450
5000 " " " "	75	6.15	404
6000 " " " "	83	6.30	380

The authors came to the conclusion that lime without acid phosphate greatly reduced the amounts of active aluminium in the soils, but did not produce the largest yield. Combinations of lime and acid phosphate were better than either alone, and the authors recommend it for the correction of acid soil conditions. Heavy lime applications in all cases also greatly reduced the percentages of aluminium absorbed by the plant.

Burgess (11) showed that there does not always exist a relationship between the hydrogen ion concentration of soils of different types and the amounts of "active" aluminium contained therein. For instance, the most acid soil from California, fine sandy loam, with a reaction of pH 4.0 only yielded 53 p. p. m. of aluminium soluble in 0.5 N acetic acid, while the least acid Portsmouth sandy loam from South Carolina with a reaction of pH 5.77 also gave 42 p. p. m. of soluble aluminium. Studying the results obtained, the author comes to the conclusion that the acidity of the different soils may not always be directly correlated with the amounts of active aluminium found and that the group averages follow the correlation of the individual soils of varying reaction within the same soil type. The author also notes that in a great majority of cases, the amounts of active aluminium found corresponded to the heaviness of the rainfall.

Without going into a complete bibliography on the solubility of aluminium compounds, acidity of soil and plant growth, let us note the work of Conner (19), Denison (21), Blair (5), Magistad (67) and McGeorge (70). We shall here concern ourselves only with vegetation tests with barley on acid soils conducted at the New Jersey Agricultural Experiment Station (5). The soils for these experiments were used with the following previous treatments:

- Series I. Soil from nitrogen availability plot 11 A¹)
 Series II. Soil from plot which had previously received a heavy application of sulphur.
 Series III. Soil from acid silt loam which had been without any lime or fertilizer treatment for many years.

The experiments were conducted in pots and some of the results obtained are given here:

Special treatment	Series I		Series II		Series III	
	Yields of barley gm.	Final reaction pH	Yields of barley gm.	Final reaction pH	Yields of barley gm.	Final reaction pH
Nothing	0.0	4.7	0.0	4.4	4.5	5.3
20 gm. ground limestone	9.0	7.5	8.9	7.2	7.4	7.6
10 gm. acid phosphate	5.2	4.5	3.15	4.25	12.8	5.0
1 gm. aluminium nitrate	—	—	—	—	1.6	5.3

The table shows that in the first two series, with an acidity equal to pH 4.7 and lower, the crop failed. Addition of ground limestone or acid phosphate resulted in yields well above those obtained with the untreated soils. With the limestone treatment the acidity was materially reduced, and with acid phosphate treatment the acidity increased slightly. With 1 gm. aluminium nitrate the yield was reduced to even less than the yield with untreated check pots, although the acidity of these pots was lower than the pots treated with acid phosphate.

*

1) For treatment of the plot see page 6.

From the biological point of view the great value of lime in the acid soil consists in its power of maintaining the favorable reaction necessary to the development of those microorganisms which transform the organic matter of the soil into plant nutrients. It is well known that organic matter in acid soil, such as crop residues, is converted into plant food more rapidly when the soils are well supplied with lime than when they are without lime. This is explained by the fact that the organisms which cause the breaking down of the organic matter, thus forming available nitrogen compounds, find soils containing lime a more favorable medium for work than acid soils. In the absence of lime, decay of organic matter in the soil gives rise to various acid bodies, and acidity thus produced inhibits the action of many of the valuable groups of microorganisms. Most of the favorable organisms and even some that are unfavorable — such as the producers of potato scab — are assisted by judicious liming.

Numerous investigators have shown that the nitrogen fixing bacteria, either alone or in the nodules of legume plants, are usually benefited by the liming of acid soils. Waksman (100) has established the fact that lime decreases the number of fungi in the soil. Kopeloff (45) investigated the influence of calcium carbonate on the accumulation of ammonia from nitrogenous organic matter by *Penicillium* sp. in soils. He found an increase of ammonium accumulation as the acidity of soil was increased to 2300 lbs. lime requirement. With increase of alkalinity beyond the neutral point there was a decrease of ammonium accumulation. Coleman (17) showed the influence of lime upon the ammonification of dried blood and cottonseed meal in soil. Calcium oxide was added to the soil to neutralize the greater part of the acidity, but leaving an excess present equal to 2000 pounds of lime per acre. All the kinds of soil used were originally acid with a lime requirement (after Veitch) as indicated in the table below.

Organic matter added	Dried blood		Cottonseed meal	
	Wooster silt loam	Carrington loam	Wooster silt loam	Carrington loam
Lime requirement (after (Veitch) . .	4300	3700	4300	3700
Ammonia accumulation { Unlimed	82.12	139.40	59.50	80.92
m gm. N. after 6 days' incubation { Limed	104.93	158.35	69.87	90.18

It will be seen from the above table that lime increased the activity of the ammonifying soil microorganisms. Gainey (26) showed that "the presence of *Azotobacter* in soils has frequently been associated with both the presence of calcium carbonate and with the reaction. From available evidence there seems to be no doubt that soils well supplied with calcium carbonate and necessarily alkaline give in cultural solution a more vigorous development of *Azotobacter* than do soils deficient in lime". Christensen (14, 16) also demonstrated the relationship between lime content, acidity and *Azotobacter* development in the soils. It is generally admitted that cultivated soils are able to induce the conversion of organic matter containing nitrogen into nitrates; this fact has been known for a long time and utilized for many years on a commercial scale for the production of nitre. The presence of calcium carbonate, aeration, and moisture are necessary for nitrification.

Mention has been made that lime has a beneficial effect on nitrification. But this process occurs also in rather acid soils as determined by White (101) for Pennsylvania soils. For instance, nitrification took place when the soil showed a lime requirement of 8,373 pounds calcium carbonate per acre. Some other investigators have shown appreciable nitrification in very acid soils, and the presence of nitrates also has been reported in soils with a lime requirement over 10,000 pounds of limestone. Some acid soils may, therefore, be expected to contain the nitrifying organisms and to nitrify to a limited extent at least. Although the nitrifying organisms are quite sensitive to acidity, it is always possible for such organisms to be active in local areas of slight acidity. With liming the nitrification will only proceed more intensively, but the addition of large quantities of lime apparently does not increase the nitrification of the organic matter in the soil as was shown by Stephenson (86). This author also proved that lime considerably increases the nitrification of sulphate of ammonia added to the soil. Three and four tons of calcium carbonate doubled the amount of nitrates produced and there was some increase in the production of nitrate with the increasing amount of lime even up to the 20 ton treatment per acre. For instance, a general average of nitrate nitrogen p. p. m. formed from sulphate of ammonia for the same time incubated was:

Calcium carbonate in tons

per acre	Check	4	8	12	20
Nitrate nitrogen p. p. m.	75.0	157.8	182.1	189.0	193.1

It should be mentioned that this soil originally showed a lime requirement of nearly three tons of lime per acre as tested by the modified Tacke method. Fred and Graul (25) found that organic nitrogenous compounds (casein) were nitrified much more rapidly in acid soils than was sulphate of ammonia. With non-acid soils the reverse is true, sulphate of ammonia nitrifying more rapidly.

Brown and Hitchcock (8) studied the influence of some alkali salts upon the nitrification of sulphate of ammonia in the soils. With reference to calcium carbonate, they found that in small or moderate amounts it is beneficial to nitrification, but when the addition becomes excessive there is a decrease in the activities of the nitrifying microorganisms. The following table of the authors cited demonstrates the influence of calcium carbonate on the nitrification of ammonium sulphate in "normal" and alkali soils.

	CaCO ₃ added per cent	Nitrate nitrogen in mgm. per 100 gm. of soil	
		"Normal" soil	Alkali soil
1	--	3.53	2.02
2	0.189	3.63	2.03
3	0.378	3.89	2.23
4	0.756	4.37	2.45
5	1.512	4.74	2.81
6	6.048	1.10	0.90

In the alkali soil the small amount of the calcium carbonate did not seem to influence nitrification, but when 0.378 per cent was added nitrification increased. Further gain occurred with a larger application up to 1.522 per cent of CaCO₃, but when an application of 6.040 per cent of calcium carbonate was made, a distinct depression in nitrification took place.

Bear (6) among other investigators tested the effect of calcium carbonate on the rate of nitrification. Experiments were carried out with W. Virginia Dekalb silt loam (I) and Wooster silt loam (II). The lime requirement of both soils (after Veitch) was about 3500 pounds of calcium carbonate per 2,000,000 pounds of soil.

The following is an extract from the results obtained:

Calcium carbonate in pounds per 2,000,000 pounds of soil	Nitrogen as nitrate nitrogen, per 100 gm. of soil in mgm.		
	Sources of nitrogen:		
	Ammonium sulphate	Ammonium carbonate	
	Soil II	Soil I	Soil II
0	5.28	7.22	7.50
500	4.00	8.42	8.40
1000	6.15	9.52	8.55
2000	8.50	12.42	11.55
4000	15.74	17.50	15.12
7500	18.18	19.00	16.35
10000	20.98	20.00	16.16
20000	22.87	20.96	16.00

A perusal of the table shows that the addition of calcium carbonate is followed by an increased nitrification which correlates almost directly with the increased application of calcium carbonate. This correlation held fairly well with applications up to 4000 pounds of calcium carbonate per 2,000,000 pounds of soil.

*

Numerous observations and experiments have been made in various countries of the world to determine the relative response of different crops to applications of lime and the reason for certain differences in the results obtained. These, as might be expected, show striking disagreements between the different plant families and species. Generally, lime has a beneficial influence on the legume plants. Alfalfa and red and white clover respond markedly to lime, while the response of soybeans and peas is less, but still quite noticeable; vetch and field-beans do not seem to be greatly benefited by lime. Of the cereals generally favored by lime, corn, barley, sorghum and wheat may be mentioned. Rape is little influenced by lime. There are numerous experiments on the relation of lime to soil fertility, crop growth, and nitrogen content of plants, and some complex reasons exist for the promotion of plant-growth by lime. In some cases the calcium may function as a direct plant nutrient; in others the assimilation of plant nutrient elements may be facilitated by the presence of lime. The stimulating influence of

lime on the plant may also play a part. Certain diseases may be retarded or entirely suppressed by lime: a notable example is the slime fungus, *Plasmodiophora brassicae*, which causes "finger-and-toe" in cabbage, turnips, and similar plants. This disease does not seem to occur on soils rich in lime and can be obviated by a thorough liming of soils in which it does prevail.

A great majority of researches have revealed a beneficial effect of lime on crop growth in acid soils, but there are also some investigations showing the harmful effect of lime on acid soils. The reason of the unfavorable influence of lime on acid soils has not yet been established with certainty. Recently Tjulin (91) came to the conclusion that the decrease of yields in leached soils treated with an excessive amount of lime is due to the rapid decomposition of organic matter and the formation of ammonia.

Wagner (95) showed the influence of lime upon the increase in yield over the check when $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ was used. For example (yields in kg per ha):

	Barley grain	Oats grain	Winter wheat grain	Sugar beet
Unlimed	229	614	178	2217
Limed ¹⁾	494	886	171	2956
Gain or loss	+265	+272	--7	+739

Patterson (75) reports the influence of lime in crop rotation during a long period of time. Some results of that experiment are cited below:

Yield per acre of limed and unlimed plots:

	Unlimed	Limed
Corn, total for 3 years, bushels . . .	84.8	122.0
Wheat, total for 3 years, bushels . .	50.0	70.0
Hay, total for 5 years, pounds . . .	6311.0	10158.0

Thorne (90) gives the average yield for 10—12 years, with a rotation of corn, oats, wheat, clover and timothy. He found that liming added materially to the yield of corn with or without fertilizer treatment. On the oats liming had a much smaller

1) Burned lime of 300 kg per Morgen.

effect than on the corn crop. With the oats, as with the corn, the greatest increase from liming was found in the low-nitrogen plots — those to which the nitrogen was carried in sulphate of ammonia. Similar results were obtained in the case of wheat. As regards clover, not only did liming produce a great direct increase, but in every instance, excepting only the plots which receive phosphorus in the form of basic slag, the residual increase from the fertilizers applied to the previous crop was materially greater on the limed than on the unlimed plots. The total gain for lime in the timothy crop was greater, and the percentage gain nearly as great as in the case of clover. For example:

Fertilizer treatment	Pounds of hay per acre			
	Clover (average for 11 years)		Timothy (average for 7 years)	
	Unlimed	Limed	Unlimed	Limed
Acid phosphate	1554	2250	2992	3934
Acid phosphate and potassium	2286	3476	2982	4008
Acid phosphate, potassium, and nitrate of soda	2596	3842	3197	4636

Wianko et al. (103) gives the results obtained by the Indiana Agricultural Experiment Station from 1906 to 1921, and shows that lime produced a good increase on all crops in the rotation (corn, wheat and clover), both alone and with stable manure. For example, the average yields per acre from an experiment carried out during 1913—21 (in Jennings county) on a plot located on very acid heavy silt loam were as follows:

Crops	Without manure		6 tons stable manure once every three years	
	No lime	Limed	No lime	Limed
Corn, bushels	44.9	48.1	65.7	73.6
Wheat, bushels	8.9	12.8	13.1	20.1
Clover hay, pounds	2,723	3,317	28,20	35,57

The authors have come to the conclusion that "lime is of great importance in increasing the fertility of the majority of

Indiana soils. Lime is the way to increase legume production". Stewart and Wyatt (87) found that "for the common soil of Southern Illinois (U. S. A.), application of one ton per acre of limestone once every three years is sufficient to keep the soil alkaline".

At the New Jersey Agricultural Exp. Station numerous experiments in pots and on fields have been carried out. The object of the studies was the influence of lime on the yields of crops, total nitrogen, and percentage of nitrogen recovered by the different crops of the rotation. From the numerous experiments we shall quote some of the averages recently obtained. Field experiments were carried out on Sassafras loam soil (61). Prior to the initiation of the experiments, the land had been neglected for a number of years (50, 51). On this soil for the first five year period, in non-legume rotation, the average percentage of nitrogen, total nitrogen and yield of dry matter, was practically the same for the limed and unlimed plots. In the second five year period, the corn crop of 1913 (60) showed an increase after the lime treatment. The other crops showed little or no response to lime. The total yield of dry matter and nitrogen for the single five-year periods and also for three successive five-year periods on the limed plots are only a little in excess of the total for the unlimed plots, as is shown in the table below.

Average of dry matter and nitrogen per acre in crops from limed and unlimed plots.

Periods of cropping	Dry matter		Nitrogen			
	Unlimed lbs.	Limed lbs.	Unlimed		Limed	
			%	lbs.	%	lbs.
First 5-year period, 1908—12 .	3657	3669	1.21	40.66	1.21	40.77
Second 5-year period, 1912—17	2768	2926	1.13	28.31	1.14	31.07
Third 5-year period, 1918—22 (61)	2849	3231	—	34.13	—	39.38
Average for 15 years	3091	3275	1.17	34.37	1.18	37.07

The total yield of dry matter for all three 5-year periods was nearly as much on the unlimed plots as on the limed, and the authors point out that the practice of using lime on light to medium heavy soils, when non-leguminous crops

are grown in the rotation, may be questionable. Liming did not greatly affect the percentage of nitrogen in the dry matter of crops.

The authors (58) also carried out a lengthy experiment on the same soil with rotation including legume crops. Different systems of cropping were found, all of which include some legume crop. Calcium and magnesium limestones were used in three different rates, as shown in the table below. An experiment was laid in 1908 for the purpose of testing two sources of lime, applied in different amounts.

For an illustration of nitrogen removed by crops in the second 5-year period; for each rotation, let us give an extract from the results obtained:

Pounds of nitrogen per acre removed by crops for 5-year period 1913—17.

Treatment	Lbs. limestone applied per acre	Rotation I	Rotation II	Rotation III	Rotation IV
		Total nitrogen removed			
Check	—	124.8	165.1	125.1	202.4
Calcium limestone . . .	1000	173.2	192.3	150.6	275.4
	2000	213.4	223.3	167.2	339.4
	4000	226.10	257.4	157.0	416.5
Magnesium limestone . .	1000	195.60	221.2	142.0	349.7
	2000	243.60	242.2	162.3	393.1
	4000	242.3	239.9	157.3	401.7

The authors, in regard to the first ten years, came to the following conclusions: "During the ten years, the limed plots, with only slight exception, yielded distinctly larger crops and more total nitrogen than the unlimed plots. In the majority of cases the percentage of nitrogen was higher in crops from limed than from unlimed plots". For the third 5-year period the authors (59) give their opinions as follows: "With few exceptions, the lime treated plots have shown substantial increases in crop

1) For rotations see Soil Sci. v. 9, p. 91. 1920.

yield over the check plots . . . For the legume crops especially, the limed plots showed a higher percentage of nitrogen in the dry matter than the non-legume crops“.

Fifteen years of observations with manure, fertilizers, and lime, on Sassafra silt loam, at the Delaware Agricultural Experiment Station (Schuster, 82) showed that lime aids in the production of corn and soybeans only where muriate of potash is also applied. Lime does, however, play an important role in the growth of clover and timothy. Lime also improved the quality of corn and increased the percentage of sound grain, when muriate of potash was also used. Lemmermann (47) found that on a light soil, with 92.21 per cent of sand and 4.13 per cent of clay, liming in amount of 1 per cent calcium carbonate caused a loss of nitrogen in the soil.

*

Lime influences not only the yields of dry matter and the total nitrogen in crop yields, but also the availability of soil nitrogen, the percentage of nitrogen in the crop, and the recovery of the nitrogen from fertilizers. Let us here for a moment stop to look into some of the results with barley.

Lipman and his associates (52) carried out pot experiments with barley in the soil. The crop was grown to maturity. The influence of the application of different amounts of lime on the yield of dry matter and the nitrogen content in the barley crop was as follows:

Special treatment	Dry matter in gms.	Per cent of N in dry matter	Total increase of N over check mgm. per pot
1. No limestone	9.85	0.97	—
2. 0.12% CaCO ₃ or 0.67% CaO . .	12.35	0.97	24.83
3. 1.00% CaCO ₃ or 0.56% CaO . .	22.90	1.05	144.95
4. 2.00% CaCO ₃ or 1.12% CaO . .	20.75	1.13	138.06
5. 5.00% CaCO ₃ or 2.80% CaO . .	21.85	1.07	127.71
6. 10.00% CaCO ₃ or 5.60% CaO .	22.70	0.97	114.18
7. No limestone, 2 gm. nitrate of soda	20.09	1.55	229.37

The highest yield of dry matter was obtained with one per cent of limestone or 0.56% CaO, although the yield was

practically as high as with ten per cent of limestone. With 2 gm. of NaNO_3 the yield was nearly as great as with one per cent of limestone. The percentage of nitrogen in dry matter with lime was higher than without lime, except in the pots treated with nitrate of soda. Another experiment was conducted by the same authors (54), emphasizing the importance of CaCO_3 in making available the nitrogen of soil organic matter. The results obtained indicate that the limed pots gave considerably higher yields of dry matter and total nitrogen than the unlimed pots.

In 1915, the above named authors (53) carried out a pot experiment with acid silt loam, with a lime requirement of about five or six thousand pounds per acre. No commercial fertilizers were used and the pots were planted with barley, which grew to maturity. The highest percentage of nitrogen in the dry matter was obtained in the pots with 25 gm. (about 0.43%) of quick lime but without any commercial fertilizers. The yield was even higher than in the pot with the nitrate of soda. From the results of cylinder experiments, the same authors (57) came to the conclusion that lime in the form of carbonate had a pronounced effect upon the yields in general.

To follow the influence of lime upon the nitrogen percentage in the non-legume plants, a good opportunity is offered by the field experiments on the availability of nitrogenous fertilizers at the New Jersey Agricultural Experiment Station. For illustration, let us bring the average results from twenty limed and unlimed plots during the years 1918—1922 for four crops grown on this field (62).

Percentage of nitrogen in the crops 1918—1922.

	Corn — 1918			Oats — 1919		Barley — 1920		Timothy	
	Grain	Stalks	Cobs	Grain	Straw	Grain	Straw	1921	1922
Unlimed (A) plots	1.48	0.86	0.25	2.18	0.72	1.79	0.72	0.98	0.94
Limed (B) plots	1.58	0.95	0.30	2.15	0.72	1.86	0.59	0.98	1.00

The averages for the limed plots, with slight exceptions, show some increase in the percentage of nitrogen, corresponding with the unlimed plots.

Newton (72) found that barley grown in the control nutrient solution, and in solutions deficient in calcium, contained nitrogen as follows:

Barley tops — control, 4.65% N.

Barley tops — low calcium, 5.75% N.

It must be noted that the percentage of nitrogen in plants, particularly in barley, is not constant, but changes greatly during the period of growth. Newton came to the conclusion that the highest nitrogen percent in barley tops and roots was attained after about 48—70 days from the start of the experiment. Bieler and Aso (3) grew barley and other plants in pots. Analyses were made of the plants with reference to nitrogen and phosphoric acid at periods of 2½ and 4 months after planting. They found that “with wheat and oats the assimilation of plant nutrients was distributed throughout the different periods of growth but with barley it was confined mainly to the earlier stages“. Wilfarth et al. (104) in field experiments with barley (Chevalier) found that at different stages of growth it contained the following total amounts of percentages of nitrogen:

Starting of experiment March 30.	Nitrogen content					
	In plant top, grain and straw together			All plants		
	Nitrogen in dry matter		Highest amount assim. N = 100 %	Nitrogen in dry matter		Highest amount assim. N = 100 %
	%	kgm. per ha.		%	kgm. per ha.	
I. cutting May 29 . . .	2.37	48.09	71.40	2.03	57.26	66.15
II. „ June 17 . . .	1.23	67.52	100.00	1.26	86.56	100.00
III. „ July 3 . . .	0.76	66.62	98.80	0.75	71.26	82.32
IV. „ July 27 . . .	0.70	61.27	90.75	0.70	64.42	74.54

In the above experiment the barley in the last period of its growth lost a part of its total nitrogen. The loss of nitrogen in tops amounted to about 10 per cent and in the entire plant to over 23 per cent. The loss of nitrogen may be explained in part by the translocation of nitrogen to the roots from which it

is absorbed by the soil and in part probably by the fallen dry leaves. The highest yield of dry matter was reached on July 3, but the highest yield of nitrogen in tops, as well as in the entire plant, was found on June 17. At the end of the growth period, the amount of nitrogen assimilated was 90.75 per cent in the tops, and in the plant only 74.54 per cent, as compared with the amount assimilated on July 17.

*

Before presenting the experimental data on the availability of the soil nitrogen together with a comparison of mineral nitrogenous fertilizers by barley crop, a short review of the literature on the subject may not be out of place. A comparison of the effects of nitrate of soda and ammonium sulphate during a long period of time, is contained in the Rothamsted Experiments (Hall, 31), where the continuous field experiments with barley were begun in 1852. The arrangement and the manures applied to each plot have remained practically unchanged since that period, and the barley has been grown under the same treatment year after year. Let us make a short extract from these results:

Yield of barley (grain and straw) per acre.
Averages over 51 years (1852—1902).

	Grain bush.	Straw cwt.
Unmanured	15.3	8.8
Complete minerals, no nitrogen	20.4	10.8
Complete minerals, & amm. salts	42.1	24.9
Complete minerals, & nitrate of soda	43.5	27.4

Hall notes that "a little difference is seen in the return for this amount of nitrogen, whether it be applied as ammonium-salts, nitrate of soda, or rape cake. Over the whole period the nitrate of soda gave the highest returns by about 3 per cent, but during the last two decades the plot receiving ammonium salts has been the best of the three".

Wagner with different crops carried out a series of field and pot experiments for the purpose of studying the influence

of various nitrogenous materials on the yields and recovery of nitrogen (95, 96, 97, 98, 99). He found (95) that, in round numbers, of every 100 parts of nitrogen supplied to the common crops (oats, wheat, rye, barley) in the form of nitrate of soda, 71 parts were returned in the crops. Barley particularly recovered 61 (in pots) to 66 (in field) parts of every 100 parts of nitrogen supplied in the form of nitrate of soda, whereas with ammonium from the same 100 parts of nitrogen applied, Wagner found a recovery of about 52 parts. Letting 100 represent the fertilizing value of nitrate of soda, Wagner found the relative value of ammonium sulphate for the barley crop about 80 and on an average 74 for the grain of rye, oats and barley (98, 99). Haselhoff (36) in pot experiments, obtained the following results with barley:

Soils	Nitrogenous materials used	Of every 100 parts nitrogen recovered	If 100 represents nitrogen recovered from nitrate of soda: %
Loam soil	1. Nitrate of soda	88.8	100
	2. Ammonium sulphate	71.6	80
Sandy soil	1. Nitrate of soda	66.7	100
	2. Ammonium sulphate	60.1	90

Lipman and his associates (49) with sand culture in pots found the following effects of nitrate of soda and ammonium sulphate on barley:

Special treatment per pot	Nitrogen recovered per cent	Relative availability per cent
154 mgm. nitrogen in nitrate of soda	53.08	100.0
154 mgm. nitrogen in ammon. sulphate	31.95	60.0
308 mgm. nitrogen in nitrate of soda	51.25	100.0
308 mgm. nitrogen in ammon. sulphate	28.48	55.6

The same authors (52) carried out a sand culture experiment with barley in twenty pound pots. Ammonium sulphate gave the highest average yield of dry matter. The percentage of nitrogen in the dry matter varied very widely. Lipman and Blair (54) have also made some soil culture pot experiments

along these lines in sand and sandy loam soil. A study of the results shows a large difference between the recovery of nitrogen of nitrate of soda in sand (53.1%) and sandy loam (35.0%) soil and closely relative values for sulphate of ammonia (72—74%) in both experiments.

Cylinder experiments relative to the utilization and accumulation of nitrogen were conducted at the New Jersey Agricultural Experiment Station during a long period of time. The results obtained showed that minerals containing calcium carbonate had a slight influence on the recovery of nitrogen in eight kinds of soil. In this experiment it was found that "the average recovery for nitrate for seven years was 39.59%". In another cylinder experiment with Penn loam soil the authors (57) found that the average recoveries for all crops of the third rotation were 62.71 per cent for NaNO_3 and 40.05% for $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$, or letting 100 represent the average recovery from nitrate of soda, the recovery from ammonium sulphate was 64%.

The majority of experiments show that ammonium sulphate has a lower fertilizing effect than nitrate of soda and the recovery of nitrogen in comparison with nitrate of soda is also lower. Generally it is assumed that the reason for the lower availability in the nitrogen of sulphate of ammonia is that ammonia has to be nitrified to nitrate, before it can be assimilated by the plant. On the other hand, there are frequent indications that during the summers of abundant rainfall, sulphate of ammonia is liable to give better returns than nitrate of soda. For example in the writer's experience (73) during the summer of 1923, with an abundant rainfall, $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ gave the higher turnips yield.

A number of research workers attempt to account for the fact that sulphate of ammonia in comparison with NaNO_3 gives lower results. Johnson (43), for instance, suggests that this is due to the $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ being fixed in the clay particles of the soil. He assumes that clay matter "fixes ammonia, i. e. converts it into a comparatively insoluble compound, so that the plant may not be able to appropriate it all". Löhnis and Fred (65) supposed that "the assimilation of ammonia by soil organisms is one of the reasons why in fertilizer tests the nitrogen applied as ammonium often does not act as well as does nitrate nitrogen". The possibility is not excluded that the losses of ammonia occur by volatilization from soils treated with heavy

applications, as was shown by Lemmermann (47). Under common field conditions, such volatilization is hardly possible in any appreciable quantity.

The above experiments with nitrogenous fertilizers were carried out on more or less acid soils. Very few experiments of a similar nature have been carried out on arid soils. Here may be noted the experiment with barley by C. B. Lipman (64). The soil used was Oakley blow-sand, 10 pounds per pot. The dry weights of barley with the different nitrogenous treatments were as follows:

	Control	Nitrate of soda	Ammonium sulphate	Cotton-seed meal	Dried blood
Average of dry matter gm.	12.1	22.3	31.2	29.9	22.7
Assuming dry matter of nitrate of soda equal = 100, we obtain the relative value for the others	—	100.0	140.0	134.0	101.0

Considering the total weight of dry matter produced, the author noted the superiority of sulphate of ammonia and cotton-seed meal to all other fertilizers. The nitrate of soda treatment was distinctly inferior with respect to the total yield of dry matter. The author's results bear out the contention "that the low grade organic nitrogenous fertilizers and sulphate of ammonia are far more available in arid soils like Oakley blow-sand than the high grade nitrogenous fertilizers".

Coleman (17) supposes that the reason for the advantages of $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ over equivalent quantities of nitrogen in the form of NaNO_3 may be explained in the following manner: „We may conceive of conditions which militate against the very advantages of sodium nitrate. Its ready solubility, ease of diffusion renders it readily subject to removal in periods of excessive rainfall. Ammonium salts, on the other hand, because of the fact that very valuable portions become temporarily fixed, are less liable to loss by leaching“.

There is also ample evidence that the plants are capable of directly assimilating ammonia nitrogen. Only a few of the many investigations can be referred to in this brief review.

Pitsch (76) conducted an elaborate piece of work along these lines. Maze (68) showed that ammonia may be absorbed and assimilated by higher plants. Kossowitz (46) showed that peas utilized ammonia nitrogen in their growth nearly as well as that of nitrate. Gerlach and Vogel (30), Lemmermann (47) and Hutchinson (41) came to the same conclusions. The latter, for example, concluded that agricultural plants of various kinds may produce normal growth when supplied with nitrogen in the form of ammonium salts under conditions excluding the possibility of nitrification. Recently Shmuk (83) specially emphasized the feeding of plants by ammonia nitrogen, saying: "under natural conditions nitrate cannot serve as the main nitrogenous nutrient source for plants; they are always in an extreme minimum. It is reasonable to suppose that the nitrogenous nutrient sources (for plants) are ammonia into which the nitrates are converted by specific influences of the roots".

*

Concerning the influence of sulphate of ammonia upon the percentage of nitrogen in dry matter in comparison with nitrate of soda, the data are inconsistent; however, the majority of the investigators assume that with ammonium salts the percentage of nitrogen in dry matter is higher than in the case of nitrate of soda. This conclusion may have been derived already from the experiments of Pitsch (76) and Wohltmann (106). Hutchinson (41) found in sand and water culture that in those where nitrogen was applied as ammonium salts, the dry matter of the plants contained a higher percentage of nitrogen than when sodium nitrate was employed. In the work of Singleton (84) the percentage of nitrogen changed in either direction. In the above cited work of Lipman (52) with barley, the percentage of nitrogen in dry matter was much higher (3.13%) with an application of nitrate than with an application of sulphate of ammonia (2.59%).

It is also of interest in this connection to note the observations of the Rothamsted Experiment Station extending over a long period of time. Hutchinson (41) reports the percentage of nitrogen in the mixed herbage plots of that station for the long period as follows:

Manuring	Nitrogen per cent in dry matter	
	1856—73	1901—1905
Minerals and nitrate of soda	1.31	1.39
Minerals and sulphate of ammonia	1.55	1.52

Sulphate of ammonia showed a higher percentage of nitrogen than nitrate of soda.

A great number of experiments were also conducted on the comparative value of NaNO_3 and cyanamide. Wagner (96) carried out many experiments along these lines. The results of one of the pot experiments with barley in sandy loam may be cited here. The amount of nitrogen applied was 1 gm. per pot (pots 10"×13").

Nitrogenous materials used	Dry matter		Total N in yields mgm.	Nitrogen over check mgm.	Recovery of nitrogen per cent
	Grain gm.	Straw gm.			
Check	6.1	9.2	132	—	—
Nitrate of soda	39.1	56.7	709	577	57.7
Cyanamide	40.0	56.5	691	559	55.9

The author came to the conclusion that with the increase in the amount of cyanamide the fertilizer value falls as compared with NaNO_3 .

Haselhoff (36) assumes that with a spring application of cyanamide on barley the yields were lower as compared with NaNO_3 . On a loam soil the availability of cyanamide was better than on a sandy soil. Hartwell and Pember (33) also carried out pot experiments with different nitrogenous materials. A portion of the pots were seeded to barley. One portion of the pots received 150 mgm., others 300 mgm. of nitrogen per pot. The results shown below illustrate the comparative effects of nitrate of soda and cyanamide on the yield of barley.

Nitrogenous materials applied	Total weight of barley per pot — gm.	
	N — 150 mgm.	N — 300 mgm.
	Yields of barley in gm.	
None	26.6	26.6
Nitrate of soda	41.3	52.4
Cyanamide	35.7	33.4
Letting 100 represent the yield of barley with nitrate of soda we find for cyanamide — %	86.5	63.8

The results obtained show, that the effect of cyanamide on the yield of barley was much lower than that of nitrate of soda.

Pot experiments with oats recently carried out by Singleton (84) show that after 64 days of growth, oats recovered nitrogen as follows :

	Nitrate of soda	Ammonium sulphate	Cyanamide
Recovery of nitrogen	67.62%	54.60%	48.86%
Relative values	100.00	80.90	72.10

Generally it must be noted that soil conditions are much more important factors for the action of cyanamide than for that of nitrate of soda or sulphate of ammonia. When bacterial action is deficient, toxic products — possibly dicyanamide — are formed, which are injurious to plant growth. It will also be seen from the above review that the recoveries of nitrogen from the above named nitrogenous fertilizers obtained by the various investigators are anything but constant. Frequently the same experiments, with one and the same plants, lead to different conclusions.

Experimental.

Notwithstanding the fact that numerous experiments dealing with the availability of soil nitrogen as well as of different nitrogenous materials applied to soils have already been conducted, there are many points upon which further light would be helpful. In an attempt to clear up some questions, a series of pot experi-

ments with barley were conducted on an acid soil. The object of the study was to ascertain the influence of different calcium carbonate applications to a very acid soil upon the following factors:

1. The reaction of the soil at the start, during the growing period, and at the end of the experiment.
2. The solubility of aluminium compounds in the soil.
3. The growth of barley.
4. The percentage of nitrogen in the dry matter of the barley.
5. The recovery of nitrogen applied in fertilizers.
6. The formation of nitrate in the soil.

The soil for the experiment was taken from a plot once treated with sulphur for a sulphur oxidation experiment. The soil was screened to remove pebbles, thoroughly mixed and somewhat dried in the greenhouse.

This original Penn loam soil had a pH value of 3.95, a total nitrogen content 0.10%, and a water holding capacity of 32.8% for the portion passed through a 2 mm. sieve. The percentage of such matter was 92.5% of the total particles. At the start, an application of lime in four different amounts was contemplated, but later another increment of lime was added and the experiment was carried out as follows: 1) — No lime, 2) — 0.1%, 3) — 0.2%, 4) — 0.4%, 5) — 0.6% and 6) — 0.8% calculated as calcium oxide on the dry soil. Ground limestone containing about 95.0—95.5 per cent of calcium carbonate served as liming material. The above noted lime treatment was applied in the following five series:

- Series I. Without fertilizers.
- Series II. Only minerals. No nitrogenous fertilizers.
- Series III. Minerals and nitrate of soda.
- Series IV. Minerals and sulphate of ammonia.
- Series V. Minerals and calcium cyanamide.

Each pot of the corresponding series was identically fertilized varying only the amounts of calcium carbonate. The amounts of fertilizer added per pot were:

1. Potash (K_2O) — 0.34 gm as potassium chloride.
2. Phosphoric acid (P_2O_5) — 0.36 gm. as acid phosphate.
3. Nitrogen — 0.32 gm. in forms as noted above.

The limestone, acid phosphate and cyanamide were added in solid form, while the other fertilizers were applied in liquid form, as 1% solutions. All fertilizers, with the exception of the nitrate of soda, were added at the time of compacting the soil in the pots; only one half of the nitrate of soda was added at that time; the other half 30 days later, after taking the soil samples for the determination of pH values in the pots. The ground limestone and fertilizers were thoroughly mixed with the soil. The dryness of the soil favored a uniform distribution of the lime and fertilizers. Small earthenware glazed pots were used. On the bottom of the pots, one pound of gravel was laid and close to one side of the pot a glass tube was placed. This served for aeration and watering. Eight and two-tenths pounds of the soil treated, calculated on the dry basis, were well compacted in the pots over the gravel. Upon compacting, the pots were watered and left standing for 12 days and then on December 8th, 1925, seeded with barley.

Fourteen uniform, well germinated barley (Hanncha) seedlings, of approximately equal size were placed in seven separate holes. The seedlings were placed in such a way that one set of seedlings was in the middle and six sets around it at equal distances. After the planting, each pot was covered with a thin layer of quartz sand to the amount of one half pound. The watering throughout the experiment was done with distilled water, and was maintained at 55—60 per cent of the water holding capacity. The amount of water was periodically checked by weighing the pots.

At the start all treatments were triplicated, one pot being harvested 70 days after seeding, and the other two at the end of the experiment, at the blooming stage of the barley, i. e. 103 days after seeding. The barley came uniformly in all the pots. In the unlimed pots, after about 6 days, the plants showed indications of stunted growth. Eight days after planting the pots were thinned to seven plants in each pot. At first no injurious influences of the cyanamide upon the shoots were noticed, but soon after the first ten days, injury appeared: the tops of the plants became yellow and shrivelled. After 20 days this effect was more pronounced and the plants were retarded in their growth. After 20 days differences were also apparent between the nitrogen fertilized pots and those without such treatment.

Measurement of the height of the plants was made at intervals of each ten days. The following table gives the results after 30 days of growth.

Height of barley sprouts after 30 days of planting in centimeters.

Series	Unlimed	Limed
I	8—10	30—32
II	8—9	30—32
III	9—11	30—34
IV	6—7	30—32
V	6—8	26—28

In the same series, with different amounts of lime, there were no differences in the height of the barley but very notable differences in the height of the barley in limed and unlimed pots.

Besides the pots seeded to barley, there was one series of pots without any plants. For these pots no fertilizers were used,

T a b
Effect of lime on the reaction of th

CaO (Limestone was used)		No plants				B a r l e y							
%	Lbs per acre	No fertilizer								Muriate of potash and acid phosphate.			
		Check				Series I				Series II			
		At start- ing	After 30 days	After 70 days	At end (103 days)	At seed- ing	After 30 days	After 70 days	At end (103 days)	At seed- ing	After 30 days	After 70 days	At e (10 day
No lime		pH 3.94	pH 3.92	pH 3.96	pH 3.94	pH 3.96	pH 3.99	pH 3.91	pH 3.93	pH 3.98	pH 4.05	pH 4.02	pH 4.0
0.1	2000	—	—	—	—	4.92	5.00	4.85	4.59	4.92	4.80	4.75	4.5
0.2	4000	6.33	5.88	5.90	5.86	6.32	6.15	5.91	5.73	6.21	6.04	6.12	5.4
0.4	8000	6.96	7.05	7.05	7.10	6.98	7.20	7.10	6.82	6.80	7.16	7.02	6.8
0.6	12000	7.10	7.50	7.45	7.48	7.14	7.35	7.29	7.24	6.90	7.30	7.13	7.2
0.8	16000	7.16	7.55	7.58	7.63	7.14	7.56	7.32	7.36	6.98	7.56	7.42	7.4

but only lime in the amounts indicated above. The object of this series was to determine the influence of lime upon:

- a. the formation of nitrate nitrogen
- b. the pH value
- c. the amount of soluble aluminium in the soil.

*

Before we analyse the results obtained, brief mention must be made of the methods used.

The pH values were determined potentiometrically with Biilmann quinhydrone electrode, as described by Christensen (15). Although Bobko (7) has shown that the soil-water ratio between the limits of 1:1½ and 1:25 has very light effects upon the pH values in soil extracts, still the determinations of pH value were made under standard conditions, namely with extracts in the ratio of 1:5, as recommended by Salter (79). In each determination 50 cc. of water were added to 10 gm. of soil. The soil was in contact

oil during the experimental period.

l a n t s

Muriate of potash, acid phosphate and:

Nitrate of soda Series III				Sulphate of ammonia Series IV				Cyanamide Series V			
At seed- ing	After 30 days	After 70 days	At end (103 days)	At seed- ing	After 30 days	After 70 days	At end (103 days)	At seed- ing	After 30 days	After 70 days	At end (103 days)
pH	pH	pH	pH	pH	pH	pH	pH	pH	pH	pH	pH
3.96	3.99	4.00	3.96	3.88	4.00	3.89	3.93	3.92	4.25	4.21	4.18
4.85	4.72	4.68	4.72	4.90	4.91	4.82	4.61	5.20	5.12	5.03	4.85
6.10	6.00	5.97	5.60	6.12	5.95	5.36	5.31	6.64	6.26	6.13	5.80
6.94	7.20	6.56	6.87	7.04	7.22	6.81	6.75	7.07	7.15	7.08	7.04
6.98	7.39	7.20	7.25	7.14	7.58	6.92	7.09	7.20	7.46	7.42	7.35
7.17	7.52	7.35	7.42	7.21	7.50	7.20	7.24	7.32	7.60	7.50	7.41

with the water for 15—20 hours before determining the pH value, as is also recommended by Hissink (39). The Kjeldahl method was used in determining the total nitrogen in the soil and in the dry matter of the barley. The colorimetric method as described by Schreiner (81) was used for the nitrate determinations. The “soluble” aluminium was determined by the method described by Burgess (10), with slight modifications: precipitation was made at pH value 5.0—5.2, as recommended by Magistad (67). The reaction was partly checked by potentiometer, but in general the colorimeter method was used with brom cresol green as the indicator. All the nitrogen determinations in the barley, nitrate nitrogen and pH values and a large part of the “soluble” aluminium determinations were made in duplicate. The duplicates of the total nitrogen and pH value determinations checked well. Differences of 20—30 p. p. m. between duplicates were sometimes found in the aluminium determinations.

1. Changes of pH Values in Soils as Affected by Lime and Plant Growth.

In order to obtain definite information on some of the soil reactions during the experimental period, determinations of the pH value in the soil were made:

- a. at seeding,
- b. after 30 days of growth,
- c. after 70 days „ „ ,
- d. at the end, after 103 days of growth.

At seeding and after 30 days' cropping, the soil samples for the determinations were obtained from the pots by means of a small cork borer; the holes were filled with the corresponding soil which had been saved for this purpose. For the determination after 70 and 103 days the samples were taken in the following manner: the entire soil was shaken from the pots, mixed, and a representative sample chosen. The results obtained are summarized in the table no. 1.

A study of the table shows that with an increase of the amount of lime used, the hydrogen ion concentration decreased markedly in all series. With light applications of lime (0.1⁰/₀—0.4⁰/₀) the changes of the pH values are fairly correlated

with the amount of lime used; with heavy applications of lime the pH values change only a little — applications of lime from 0.4% to 0.8% only changed the pH value from 6.8 to 7.5. The changes of the pH values were considerable during the first three 10-day periods and after that time became approximately constant as found in the unplanted pots, which served as the standard. It may be noted also that with a lower application of lime — from 0.1% to 0.4% — the hydrogen ion concentration in the planted pots, with few exceptions, decreased gradually during the growth of the barley, beginning from the time of seeding. In the unplanted pots, these changes were not so marked. With the heavy application of lime — from 0.4 upwards — the pH values changed very little after 30 days. A study of the same table shows that potassium chloride and acid phosphate in equally small amounts (0.54 gm. of KCl and 2 gm. of acid phosphate) had an influence on the pH values. This phenomenon is clearly recognizable during the early stages of the experiment; at the end it was not noticeable. For instance:

pH values of series I and II after 30 days' growth.

Special treatment	Amounts of calcium oxide					
	0.0%	0.1%	0.2%	0.4%	0.6%	0.8%
	pH	pH	pH	pH	pH	pH
No fertilizers	3.99	5.00	6.15	7.20	7.35	7.56
KCl and acid phosphate . . .	4.05	4.80	6.04	7.16	7.30	7.56

It is possible that the influence noted was due to the potassium chloride, as is the opinion of Christensen (15) and Hissink (39). It is of interest to note that with KCl and acid phosphate there was a slight increase of the hydrogen ion concentration as compared with the unfertilized section, but only in the limed pots up to the neutral point; in the unlimed and heavily limed pots it was not noticed. It must also be remarked that an application of 2.71 gm. of cyanamide per pot considerably decreased the acidity of acid soil in comparison with other nitrogenous fertilizers.

It is well known that the continuous use of sulphate of ammonia, a physiologically acid salt, produces an acid condition

in the soil, whereas nitrate of soda, a physiologically alkaline salt, tends to the production of alkaline conditions. Studying table no. 1, it will be seen that this influence came to light already during the first cropping of barley and even in heavily limed pots.

For example, let us take a summary of the pH values from table no. 1 for the end of the experiment.

PH values of the soils at the end of experiment with nitrate of soda and sulphate of ammonia.

Special treatment	Amount of calcium oxide as limestone					
	0.0%	0.1%	0.2%	0.4%	0.6%	0.8%
	pH	pH	pH	pH	pH	pH
Nitrogen as nitrate of soda	3.96	4.72	5.60	6.87	7.25	7.42
Nitrogen as sulphate of ammonia . . .	3.93	4.61	5.31	6.75	7.09	7.24

2. Influence of lime upon the solubility of aluminium compounds in the soil.

Table no. 2 shows the influence of liming upon the solubility of aluminium compounds of the soil in 0.5 normal acetic acid. In general it may be said that with increasing amounts of

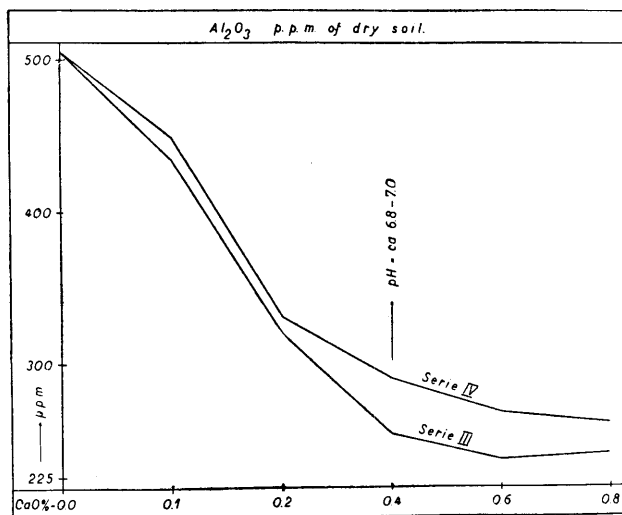


Diagram no. 1. Influence of lime upon the solubility of aluminium compounds. Series III. Minerals and nitrate of soda. Series IV. Minerals and sulphate of ammonia.

lime added, the amount of aluminium soluble in 0.5 normal acetic acid decreases. The correlations between the amount of lime used and the amount of soluble aluminium up to about the neutral point come out more clearly. Above the neutral point, as will be seen, ground limestone is comparatively less influential in retarding the solubility of aluminium compounds as indicated in diagr. no. 1 for the series IV and V. There seem to be differences in the amount of soluble aluminium with the different fertilizers used, but too much emphasis cannot be placed on this, since the precipitation of aluminium was effected by a method which may also give some traces of iron in the precipitate.

Table 2.

Effect of lime applications on the solubility of aluminium compounds in the soil. Al_2O_3 parts per million of air dry soil.

CaO (Limestone was used)		No plants		Barley plants		
		No fertilizers		Muriate of potash, acid phosphate and:		
Per cent	Lbs. per acre	Series I		— Series II	NaNO_3 Series III	$(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$ Series IV
0.0	—	510	520	495	504	505
0.1	2000	—	456	442	434	450
0.2	4000	256	290	310	320	330
0.4	8000	230	236	262	253	290
0.6	12000	230	234	232	237	268
0.8	16000	221	215	208	240	260

3. Influence of Lime upon the Growth of Barley.

Generally it may be stated that practically all the *unlimed* pots have failed to produce growth and that the plants died prematurely. All the pots with 0.1% calcium oxide treatment in some series produced a fairly good growth of barley, but generally the plants were stunted and duplicates in the majority of cases gave large disagreements. At the end of December a remarkable influence of the fertilizer applications became noticeable; in the unfertilized pots the sprouts were thin and more stunted. About the middle of January, the differences were more pronounced; some tips of barley in the pots with minerals but without any nitrogenous fertilizers and in the cyanamide

pots became yellowish and dried up. On March 5 the first head came in the second series (without nitrogen). In the middle of March the plants were generally heading and on March 20, i. e. after 103 days of growth, the barley was harvested. The samples were slowly dried in the oven and left at room temperature to attain a constant weight; they were then ground and analysed in the usual manner. In a similar fashion the first harvesting was prepared. Tables 3—7 give the results obtained for all the series. On the basis of these results some calculations have been made, which are included in the tables noted. These tables contain:

- a. yields of dry matter for both harvestings,
- b. nitrogen percentage in dry matter,
- c. total nitrogen in mgms per pot,
- d. nitrogen percentage recovered from the pots where nitrogen in fertilizer was added.

Table 3.

Series I. (No fertilizers). Influence of different amounts of lime on the yield of dry matter, total nitrogen assimilated and percentage of nitrogen in dry matter.

Lime-stone as CaO	Lbs per acre	Num- ber of shoots per pot	Nitrogen assimilat- ed after 70 days of growth	Time of harvesting:						
				After 70 days			After 103 days			
				Dry matter per pot	Nitrogen		Dry matter per pot	Nitrogen		
					In dry matter	Total per pot		per pot	average of two	In dry matter
%			%	gm.	%	mgm.	gm.	gm.	%	mgm.
0.0	—	7.0	—	0.20	—	—	0.17 0.15	0.16	—	—
0.1	2000	7.0	—	—	—	—	12.7 7.5	10.1	1.31	132
0.2	4000	20.0	29.6	4.8	2.09	100	14.8 14.6	14.7	0.96	142
0.4	8000	23.0	22.4	6.8	2.60	177	19.8 20.2	20.0	1.14	228
0.6	12000	22.0	21.3	6.5	2.62	170	20.5 22.6	21.5	1.05	216
0.8	16000	22.0	loss	6.2	2.90	180	17.3 17.5	17.4	1.05	175

In the tables is also given the number of shoots at the time of first harvesting, showing the force of tillering of plants. At the last harvesting, the tillering was about the same, and is therefore not indicated in the tables. The study of the tables shows that the yields from duplicate pots with lime over 0.1% of calcium oxide are generally in fair agreement; only in series V, with cyanamide, the divergences were at times too large.

Table no. 3 represents the results of the unfertilized series. As to the yields of dry matter at the end of the experiment, it will be seen that the yield of dry matter gradually increases with the increase of the amount of lime applied up to 12,000 pounds per acre. After this point the yield goes back. The same appears in the yield of the first harvesting, but there the differences are less marked. The percentage of nitrogen in the dry matter of the first harvesting also increases with the increase

Table 4.

Series II. (Minerals only, no nitrogen). Influence of different amounts of lime upon the yield of dry matter, total nitrogen assimilated and percentage of nitrogen in dry matter.

Lime-stone as CaO	Lbs. per acre	Num- ber of shoots per pot	Nitrogen assimilat- ed after 70 days of growth	Time of harvesting						
				After 70 days			After 103 days			
				Dry matter per pot	Nitrogen		Dry matter		Nitrogen	
					In dry matter	Total per pot	per pot	average of two	In dry matter	Total per pot
%			%	gm.	%	mgm.	gm.	gm.	%	mgm.
0.0	—	7.0	—	0.18	—	—	0.18 0.20	0.19	—	—
0.1	2000	9.0	—	—	—	—	12.8 10.8	11.8	1.40	165
0.2	4000	21.0	18.4	6.5	2.05	133	19.7 19.7	19.7	0.83	163
0.4	8000	22.0	21.6	7.6	2.25	171	24.9 24.7	24.8	0.88	218
0.6	12000	24.0	17.9	8.4	2.18	183	25.7 26.1	25.9	0.87	223
0.8	16000	24.0	21.7	8.4	2.33	195	28.4 28.2	28.3	0.88	249

of lime. It may be pointed out that the latter is a general phenomenon also in other series, with the exception of the cyanamide series. Attention may also be called to the high percentage of nitrogen in the pots with 0.1% of calcium oxide in the final harvesting. This phenomenon is apparent in all the series and seems to be in fair agreement with the results obtained by Lipman and Blair (55) who note that "starved plants store up more nitrogen in proportion than the healthy plants". The differences in the percentages of nitrogen in the final harvesting are slight and it is not possible to draw any conclusion in regard to the influence of lime upon the percentage of nitrogen in the dry matter of the barley at that stage of growth. The total

Table 5.

Series III. (Minerals and nitrate of soda). Influence of different amounts of lime on the yield of dry matter, total nitrogen assimilated, percentage nitrogen recovered and percentage nitrogen in dry matter.

Limestone as CaO		Number of shoots per pot	Nitrogen assimilated after 70 days of growth	Time of harvesting								Recovery of N	
%	Lbs. per acre			After 70 days			After 103 days				per pot over check	In %	
				Dry matter per pot	Nitrogen in dry matter	Total Nitrogen per pot	Dry matter per pot	average of two	Nitrogen in dry matter	Total Nitrogen per pot			
			%	gm.	%	mgm.	gm.	gm.	%	mgm.	mgm.	%	
0.0	--	7.0	—	0.20	—	—	0.19	0.20	—	—	—	—	
							0.21						
0.1	2000	17.0	—	?	2.52	—	18.5	19.2	1.48 ¹⁾	288	123	38.5	
							19.8						
0.2	4000	27.0	13.2	9.7	3.68	356	39.6	39.9	1.03	410	247	77.2	
							40.2						
0.4	8000	27.0	20.7	9.9	3.80	376	43.2	42.3	1.10	474	256	80.0	
							41.3						
0.6	12000	28.0	17.0	10.2	4.02	410	43.9	43.6	1.14	494	271	84.7	
							43.3						
0.8	16000	28.0	24.7	10.4	3.98	414	46.6	45.8	1.20	550	301	94.1	
							44.9						

1) The last half of nitrate nitrogen by mistake added after 47 (instead of 30) days.

amount of nitrogen increases with the application of lime up to about 0.4—0.6% of calcium oxide and then falls back considerably.

In table no. 4, similar results are given for series II, i. e. with minerals, but without nitrogenous fertilizers. Here the yields of dry matter and total nitrogen increase continuously with the increase of the amount of lime applied. The total yields of dry matter are considerably higher than in the unfertilized series, but the total amount of nitrogen assimilated is only slightly higher than in the first series: the percentage of nitrogen in the dry matter of the final harvest is considerably less than in the first series at the same time, as summarized in table nr. 8 below. Apparently in series II the nitrogen was the limiting factor, thereby influencing the yield of dry matter and the nitrogen percentage.

Table 6.

Series IV. (Minerals and sulphate of ammonia). Influence of different amounts of lime on yield of dry matter, total nitrogen assimilated, percentage of nitrogen recovered and percentage of nitrogen in dry matter.

Limestone as CaO		Number of shoots per pot	Nitrogen assimilated after 70 days of growth	Time of harvesting							Recovery of N		
%	Lbs. per acre			After 70 days			After 103 days				per pot check	In % %	
				Dry matter per pot	Nitrogen in dry matter	per pot	Dry matter per pot	average of two	Nitrogen in dry matter per pot	Total per pot			
			%	gm.	%	mgm.	gm.	gm.	%	mgm.	mgm.	%	
0.0	—	7.0	—	0.15	—	—	0.16	0.18	—	—	—	—	
0.1	2000	17.0	—	—	—	—	0.20	11.8	2.20	260	95	29.7	
0.2	4000	27.0	9.5	8.6	3.88	352	4.5	33.7	33.0	1.18	389	226	70.6
0.4	8000	32.0	17.4	8.7	4.25	370	32.1	32.0	1.40	448	230	71.9	
0.6	12000	31.0	17.2	8.4	4.35	365	31.8	32.9	32.7	1.35	441	218	68.2
0.8	16000	26.0	13.8	7.4	4.37	349	32.5	30.7	29.5	1.37	405	156	48.8
							28.2						

In tables 5—7 the results of the series with nitrogenous fertilizers (Series III—V) are represented. A very clear effect was noticed in the increase of dry matter and in the higher percentage of nitrogen in dry matter at the end of the harvest, as compared with series I and II. The percentage of nitrogen in dry matter at the time of the first harvest is also considerably higher. With nitrate of soda the yield of dry matter in

Table 7.

Series V. (Minerals and cyanamide). Influence of different amounts of lime applied on yield of dry matter, total nitrogen assimilated, percentage of nitrogen recovered and percentage of nitrogen in dry matter.

Limestone as CaO		Number of shoots per pot	Nitrogen assimilated after 70 days of growth	Time of harvesting						Recovery of N		
%	Lbs. per acre			After 70 days			After 103 days			per pot over check	In %	
				Dry matter	Nitrogen		Dry matter	Nitrogen				
			per pot	gm.	%	mgm.	per pot	average of two	In dry matter	Total per pot	mgm.	%
0.0	—	7.0	—	0.20	—	—	0.17	0.18	—	—	—	—
							0.20					
0.1	2000	16.0	—	?	2.90	—	14.8	14.3	2.09	299	134	41.9
							13.8					
0.2	4000	20.0	18.7	5.4	4.50	243	17.9	16.8	1.78	299	136	42.5
							15.6					
0.4	8000	27.0	26.3	6.6	4.62	320	20.7	20.6	2.05	422	204	63.8
							20.6					
0.6	12000	26.0	32.2	6.4	4.50	288	24.3	23.9	1.72	411	188	58.8
							23.5					
0.8	16000	29.0	22.0	7.8	4.35	339	25.6	25.3	1.80	455	206	64.4
							25.0					

both harvests, the total nitrogen assimilated and the increase of nitrogen over the check¹⁾ gradually increases with the increase of lime used.

Taking as a basis the pH value of the soil at 30 days after seeding [the reaction having attained apparent equilibrium

1) Series II being assumed as check.

conditions (table no. 1)] it will be seen that below 6.0 of the pH value the increase in the amount of lime caused a striking increase in the yield of dry matter and total nitrogen. Above this point up to pH 7.5, the increases of dry matter and total nitrogen are much lower, as may be seen in diagram 2.

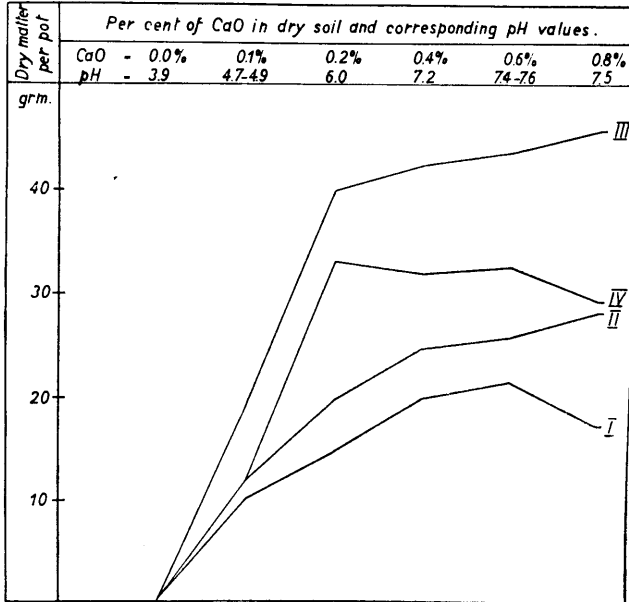


Diagram 2. Influence of different amounts of lime and reaction of the soil upon the yield of dry matter in Series I—IV.

- Series I. Without fertilizer.
- Series II. Minerals only.
- Series III. Minerals and nitrate of soda.
- Series IV. Minerals and sulphate of ammonia.

It is of interest to note that at the time of the first harvesting the percentage of nitrogen in Series III and IV at a lower pH value was lower than in the less acid pots (table no. 9, diagr. 3). At the time of the final harvest the reverse was the case (table no. 8).

Table no. 6 shows the results of series IV with sulphate of ammonia as the source of nitrogen. It seems that the yield of dry matter reached its highest point at pH value 6.0, and then commenced to decrease; but the decrease is not too striking, as is shown in diagram 2. The highest yield of the total nitrogen

assimilated takes place at pH value 7.2—7.4 (diagr. 4 and table 6), then it goes down considerably. Comparing diagrams 2 and 4 one may conclude that in general the yields of dry matter and total nitrogen coincide, but that in the highest yields they disagree in some cases.

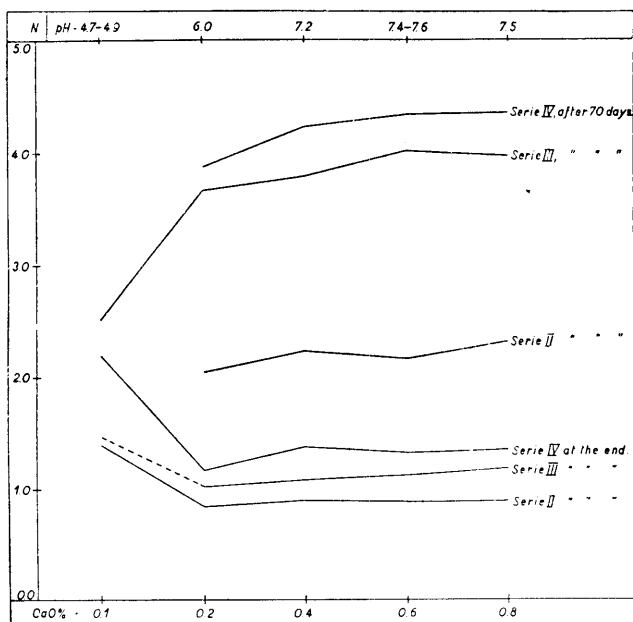


Diagram 3. Influence of lime upon the percentage of nitrogen in dry matter of barley (in two stages of growing period).

Series II. Only minerals. No nitrogenous fertilizers.

Series III. Minerals and nitrate of soda.

Series IV. Minerals and sulphate of ammonia.

4. Influence of Lime upon the Percentage of Nitrogen in Dry Matter.

Here it is of interest to point out that the percentage of nitrogen in dry matter is higher with an application of sulphate of ammonia than with applications of an equivalent amount of nitrate of soda. (Diagr. 3). This phenomenon is in fair agreement with the results obtained by Pitsch (76), Maze (68), Hutchinson and Miller (41), and some other experimentors referred to above. It may be added that Gericke (28) has recently investigated the differences produced in the protein content

of the grain of several cereals by applications of nitrogen made at different growing periods and has come to the conclusion that the results from the sets of pots with ammonium sulphate "are essentially similar to the results obtained from the sets treated with nitrate of soda".

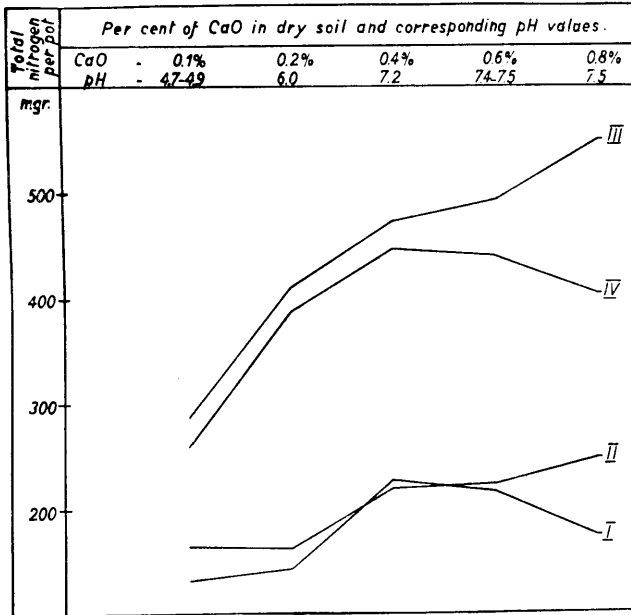


Diagram 4. The influence of different amounts of lime and reaction of the soil on the total nitrogen assimilated per pot in Series I—IV.

- Series I. No fertilizers.
- Series II. Minerals only.
- Series III. Minerals and nitrate of soda.
- Series IV. Minerals and sulphate of ammonia.

In the series with cyanamide (table no. 7) it will be generally observed that the injurious effects of the cyanamide have brought about certain abnormalities in the life of the barley, therefore the results must be taken with precaution. First of all, it is of interest to note the extraordinarily high percentage of nitrogen in the dry matter of the second harvest. This is not to be explained on the basis of the retarded growth of the plants, since the barley was in head in this series and had reached the same stage of development as in the other series. And besides,

the leaves were more dry than in the other series. The nitrogen increase may perhaps be explained by some specific influence of the cyanamide. We shall give a summary of the nitrogen content in the dry matter of the second and first harvest.

Table 8.

Nitrogen percentage in dry matter in different series at the final harvest.

Calcium oxide used %	Percentage of nitrogen in dry matter				
	Series I	Series II	Series III	Series IV	Series V
	%	%	%	%	%
0.1	1.31	1.40	1.48	2.20	2.09
0.2	0.96	0.83	1.03	1.18	1.78
0.4	1.14	0.88	1.10	1.40	2.05
0.6	1.05	0.87	1.14	1.35	1.72
0.8	1.05	0.88	1.20	1.37	1.80

Table 9.

Nitrogen percentage in dry matter in different series at the first harvest.

Calcium oxide used %	Percentage of nitrogen in dry matter				
	Series I	Series II	Series III	Series IV	Series V
	%	%	%	%	%
0.1	—	—	2.52	—	2.90
0.2	2.09	2.05	3.68	3.88	4.50
0.4	2.00	2.25	3.00	4.25	4.62
0.6	2.62	2.18	4.02	4.35	4.50
0.8	2.90	2.33	3.98	4.37	4.35

From the table no. 8 and diagram 3 it will be seen that at the final harvest in series II—IV the lowest percentage of nitrogen resulted from an application of lime to the amount of 0.2% CaO in the soil, which gave a pH value of 6.1—6.3. From that point a slight increase begins in the percentage of nitrogen which reaches about constant nitrogen content for every series at a pH value of ca 7.0. In the series without any nitrogenous fertilizers (series I and II) an increase of lime changed the pH

value of the soil and did not markedly increase the percentage of nitrogen in the dry matter after the neutral reaction in the soils had been reached. In the series with nitrate of soda, an increased lime application was followed by an increase of the nitrogen content in the dry matter. At the time of the first harvest, the increase of lime was followed by an increase of the nitrogen content up to pH value 7.4—7.5.

5. Influence of Lime upon the Recovery of Nitrogen Applied in Fertilizers.

In tables no. 5—7 (the last columns) are shown the percentages of nitrogen recovered by barley at the last heading stage from the nitrogenous fertilizers applied. The percentages of nitrogen recovered are obtained by subtracting from the total recovery in the nitrogen fertilized pots of a given series, the amount recovered in the corresponding minerals pots (Series II, without nitrogen fertilizers) for that series, dividing the remainder by the amount of nitrogen applied per pot and pointing off for the percentage. The first result apparent from these data

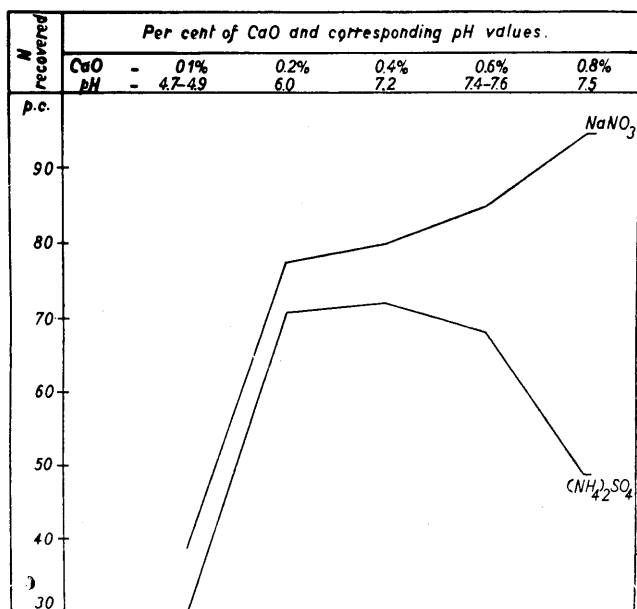


Diagram 5. Influence of different amounts of lime and reaction of the soil upon the recovery of nitrogen from nitrate of soda and sulphate of ammonia.

is that at pH values below 6.0, lime has had a striking effect upon the recovery of nitrogen from nitrate of soda and sulphate of ammonia. For the cyanamide this stage is reached later. Diagram 5 confirms the above statement concerning the recovery of nitrogen from nitrate of soda and sulphate of ammonia.

At the pH value 6.0 the increase in the recovery of nitrogen with nitrate of soda is reduced, but the recovery continues to increase gradually and reaches the highest point in our experiment at the pH value 7.5. With sulphate of ammonia below the pH value 7.2, we have almost the same amount of nitrogen recovered as at 6.0, but after this point, the per cent recovery of nitrogen from sulphate of ammonia goes down and after the pH value 7.6, it takes a sudden drop.

In tables no. 3—7 are also given the percentages of the total nitrogen assimilated after 70 days of growth. This percentage generally fluctuates between plus 20—30 and cannot be correlated with the amounts of lime. It is of interest to note that in the unmanured series the increase of lime is followed by a decrease of the percentage of nitrogen assimilated after 70 days, and that at pH value 7.5 some loss of nitrogen is indicated after 70 days.

Table 10.

Nitrate nitrogen in the soil during the period of growth. P. P. M. on air dry soil.

Time of sampling	Limestone as CaO		Barley plants					
			No plants		Muriate of potash, acid phosphate and			
	Per cent	Lbs. per acre	Series I	Series II	Series III	Nitrate of soda Series IV	Sulphate of ammonia Series IV	Cyanamide Series V
After 70 days	0.0	—	—	0.8	0.7	37.0	1.1	0.9
	0.2	4000	—	0.2	0.2	2.3	0.4	0.2
	0.4	8000	—	0.3	0.3	3.2	2.5	0.2
	0.6	12000	—	0.4	0.2	3.1	0.9	0.3
	0.8	16000	—	0.2	0.2	2.8	0.8	0.2
	0.0	—	0.9	0.4	1.0	24.3	2.8	0.7
After 103 days (at end of experiment)	0.1	2000	—	0.4	0.3	6.4	0.4	0.4
	0.2	4000	4.1	0.3	0.4	0.4	0.3	0.5
	0.4	8000	16.0	0.6	0.5	0.5	0.6	0.5
	0.6	12000	27.4	0.5	0.6	0.7	0.6	0.5
	0.8	16000	25.8	0.5	0.5	0.6	0.7	0.6

6. Influence of Lime upon the Formation of Nitrate in the Soil.

In order to obtain some information on the influence of lime upon the formation of nitrate in the soil, determinations were made at the start, at certain intervals, and at the end of the experiment. The results are summarized in table no. 10. The original soil had 0.9 p. p. m. nitrate nitrogen on a dry basis.

In the unplanted and unfertilized series, it will be seen that the increase of lime is followed by an increase of nitrates, the highest amounts of nitrate found during the 103 days being at pH values 7.5—7.6. In the unlimed pots with a pH value of 3.93, no nitrates were formed in the course of 103 days. With a lime application of 4000 pounds per acre and a pH value about 5.9 only an insignificant amount — about 3 p. p. m. — of nitrate nitrogen was formed during the same period. In all planted and limed pots, with the exception of the series with NaNO_3 , the amount of nitrate nitrogen was less in the majority of cases than one p. p. m. In the series with nitrate of soda at the first harvest, the nitrate content was considerable with nitrate of soda. At the second harvest no differences comparable with the other series are apparent. Only with a lime application of 0.1% higher nitrate nitrogen content was found; this may be explained by the fact that a later application of nitrate of soda was made (see table 5). It is also worth noting that in the series with nitrate of soda the amount of nitrate nitrogen in the unlimed pots, which produced practically no growth, gradually diminished. At the start of the experiment and also after 30 days a 43 p. p. m. nitrate nitrogen was added. In the unlimed pots 37 p. p. m. was found, after 70 days, and after 103 days, 24.3 p. p. m. Apparently the nitrates were utilized by the microbial flora capable of surviving in such an acid soil.

It may be added that the experiment was conducted during the winter from December 8 to March 20, in the greenhouse. The greenhouse temperature, during the experimental period, varied considerably from day to night. It must also be stated that there was comparatively little sunshine during the day. These conditions influenced the length of the growth period and perhaps also some of the results as regards the percentage of nitrogen recovered.

Conclusions.

From the experiment with barley described above the following conclusions may be drawn:

1. Ground limestone decreases the hydrogen ion concentration in the soil and in very acid soils changes in the pH values up to the neutral point may be correlated with the amounts of lime used. Above the neutral point the changes in the pH values, were much less marked when ground limestone was applied.
2. Ground limestone considerably decreases the solubility of aluminium compounds in the acid loam soil.
3. Ground limestone at first considerably increases the yield of dry matter in very acid loam soil. Above the neutral point the applications of lime cause either a small increase or even a decrease in the yields of dry matter. It is noteworthy that a heavy application of ground limestone caused a considerable decrease in the yield with sulphate of ammonia.
4. At an early stage of growth (up to 70 days in the experiment) an increase of lime applied is followed by an increase of the nitrogen percentage in the dry matter. An increase of lime applied at pH values 6.0—7.5 has only an insignificant influence upon the percentage of the nitrogen content in the barley crop at the heading stage. In general, the percentage of nitrogen in dry matter is considerably higher with an application of nitrogenous fertilizers.
5. The recovery of the nitrogen of nitrate of soda and sulphate of ammonia at pH values below 6.0 is strikingly benefited by lime. After this point the recovery of nitrogen of nitrate of soda increases only gradually and reaches the highest percentage at pH value 7.5. With sulphate of ammonia the highest percentage of recovery is reached at a pH value of about 7.2, and from this point the percentage of nitrogen recovered goes down, at first slowly, then rapidly; and at the value 7.5 it drops to 48.8%.
6. Lime considerably increases the formation of nitrates in unplanted pots. At a pH value below 4.0 no nitrate in unplanted pots was formed. At the pH value about 5.9 only

- an insignificant amount — about 3 p. p. m. — of nitrate nitrogen in course of 103 days in unplanted pots was formed.
7. The application of sulphate of ammonia during the first part of the growth of the barley, decreases the pH value by about 0.1—0.2, as compared with nitrate of soda.

Bibliography.

1. Arrhenius, O., Bodenreaction und Pflanzenleben. Leipzig. 1922.
2. van Bemmeln, J. M., Die Absorption. Dresden. 1910.
3. Bieler, K. and Aso, K. On the assimilation of nitrogen and phosphoric acid by different crops. Bul. Col. Agr. Imp. Univ. Tokyo 4, p. 241. 1901. Abs. Exp. Sta. Rec., v. 13, p. 539. 1901—1902.
4. Blair, A. W. and Prince, A. L. Variation of nitrate nitrogen and pH values of soils from the nitrogen availability plots. Soil Sci., v. 14, p. 9. 1922.
5. Blair, A. W. and Prince, A. L. Studies on the toxic properties of soils. Soil Sci., v. 15, p. 109. 1923.
6. Bear, F. E. A correlation between bacterial activity and lime requirement of soils. Soil Sci., v. 4, p. 433. 1917.
7. Bobko, E. B. and Droujinin, D. W. Contributions to the question concerning the factors which determine the reaction of the extracts of soil. Transactions of the Institute of Fertilizers, no. 27. Moscow. 1925 (Russian).
8. Brown, P. E. and Hitchcock, E. B. The effects of alkali salts on nitrification. Soil Sci., v. 4, p. 207. 1917.
9. Burgess, P. The reaction of soils in the field as influenced by the long continued use of fertilizers chemicals. Rh. Isl. Ag. Ex. Sta. Bul. 189. 1922.
10. Burgess, P. S. A method for the determination of "active" aluminum in acid soils. Soil Sci., v. 15, p. 131. 1923.
11. Burgess, P. S. Comparison of "active" aluminum and hydrogen ion concentration of widely separated acid soils. Soil Sci., v. 15, p. 407. 1923.
12. Burgess, P. S. and Pember, F. R. "Active" aluminum as a factor detrimental to crop production in many acid soils. Rh. Isl. Ag. Exp. Sta. Bul. 194, 1923.
13. Burgess, P. S. The effect on present soil reaction of long-continued application of equivalent amounts of high-calcium and high-magnesium limes. Soil Sci., v. 18, p. 169. 1924.
14. Christensen, H. R. Studien über den Einfluss der Bodenbeschaffenheit auf das Bakterienleben und den Stoffumsatz im Erdboden. Centr. f. Bakt. etc., Abt. II, Bd. 43, nr. 1/17, p. 1. 1915.

15. Christensen, H. R. and Jensen, S. T. Untersuchungen bezüglich der zur Bestimmung der Bodenreaktion benutzten elektrometrischen Methoden. Intern. Mitteil. f. Bodenkunde, Bd. **14**, Heft 1—2. 1924.
16. Christensen, H. R. Untersuchungen über einige neuere Methoden zur Bestimmung der Reaktion und des Kalkbedürfnisses des Erdbodens. Intern. Mitteil. f. Bodenkunde, Bd. **13**, S. 116. 1923.
17. Coleman, D. The influence of sodium nitrate upon nitrogen transformation in soils with special reference to its availability and that of other nitrogenous manures. Soil Sci., v. **4**, p. 345. 1917.
18. Conner, S. D. Liming in its relation to injurious inorganic compound in the soil. Journ. Amer. Soc. Agron., v. **13**, p. 113. 1921.
19. Conner, S. D. and Sears, O. H. Aluminum salts and acids at varying hydrogen-ion concentration in relation to plant growth in water cultures. Soil Sci., v. **13**, p. 23. 1922.
20. Daikuhara, G. Acid mineral soils. Bul. Imp. Cent. Agr. Exp. Sta. Japan **2**, p. 427. 1914. Abs. Exp. Sta. Rec., v. **31**, p. 618. 1914.
21. Denison, J. A. The nature of certain aluminum salts in the soil and their influence on ammonification and nitrification. Soil Sci., v. **13**, p. 81. 1922.
- 21^a. Densch, Erfahrungen mit der Methode Neubauer. Zts. f. Pflanzenern. u. Düngung, B. **5**, 97. 1926.
22. Ehrenberg, P. Die Bodenkolloide. 2. Aufl. Dresden und Leipzig. 1918.
23. Engelhardt, A. A number of papers in some Russian agric. journals, since 1888.
24. Feilitzen, H. v. Über den Einfluss der Kalkung auf kalkarmem Torfboden auf den Verlust der Pflanzennährstoffe durch die Drainwasser. Svenska Mosskulturforen. Tidskr. 1921, 189. Ref. Jahresbericht f. Agrikulturchemie, Jahrgang **65**, S. 77. 1922.
25. Fred, E. B. and Graul, E. Y. Some factors that influence nitrate formation in acid soils. Soil Sci., v. **1**, p. 317. 1916.
26. Gainey, P. L. Soil reaction and the growth of Azotobacter. Journ. Agr. Res., v. **14**, p. 265. 1918.
27. Gedroiz, K. K. The influence of liming on the availability of phosphatic acid of soils and phosphatic fertilizers. Journ. Exp. Agronomy (Russian), v. **4**, p. 686. 1905.
28. Gericke, W. E. Differences effected in the protein content of grain by application of nitrogen made at different growing periods of the plants. Soil Sci., v. **14**, p. 103. 1922.
29. Gericke, S. Der Einfluss hoher Kalkgaben auf die Wurzellöslichkeit der Nährstoffe Kali und Phosphorsäure im Boden. Fortschritte der Landwirtschaft., Jahrg. **1**, S. 774. 1926 und Jahrg. **2**, S. 381. 1927.
30. Gerlach und Vogel. Centralbl. f. Bakter., Paras. und Infekt., Abt. II, Bd. **14**, p. 124. 1905.
31. Hall, A. D. Fertilizers and manures. New York. 1910, p. 253.
32. Hall, A. D. The book of the Rothamsted Experiments. New York. 1905.
33. Hartwell, B. L. and Pember, F. R. The availability of certain unusual nitrogenous manures. Rhode Island Agr. Exp. Station Bul. **142**. 1910.

34. Hartwell, B. L. and Pember, F. R. The presence of aluminum as a reason for the difference in the effect of so-called acid soil on barley and rye. *Soil Sci.*, v. **6**, p. 259. 1918.
35. Hartwell, B. L. and Damon, S. C. Six years' experience in improving a light unproductive soil. *Journ. Am. Soc. Agr.*, v. **13**, p. 37. 1921.
36. Haselhoff, E. Versuche mit Stickstoffdüngern. *Mitt. d. landw. Vers. Sta. in Harles, Nausen. Versuchsstationen*, Bd. **84**, p. 1. 1914.
37. Heiden, E. *Lehrbuch der Düngerlehre*, Bd. II. Hannover. 1887.
38. Heinrich, R. *Mergel und Mergeln*. Berlin. 1908.
39. Hissink, D. J. und van der Spek, Jac. Die pH-Bestimmung des Bodens nach der Biilmann'schen Chinhydromethode. *Transactions of the second commission of the International Society of Soil Science*, vol. **A**, 1926, p. 29. Groningen (Holland).
40. Hoffmann, M. Düngungsversuche mit Kalk. *Arb. d. D. L.-G.*, no. **106**. 1905. *Abs. Exp. Sta. Rec.*, v. **17**, p. 449. 1905—1906.
41. Hutchinson, H. B. and Miller, H. L. Direct assimilation of ammonium salts by plants. *Journ. Agr. Sci.*, v. **3**, p. 179. 1908—1910.
42. Hutchinson, H. B. and McLennan, K. Studies on the lime requirement of certain soils. *Journ. Agr. Sci.*, v. **7**, p. 75. 1915—1916.
43. Johnson, S. W. *How crops feed*. New York. 1918, p. 302.
44. Kissling, R. und Fleischer, M. Die Bodenluft in besandeten und nichtbesandeten Hochmoor- und Niedermoorboden. *Landw. Jahrbücher*, Bd. **20**, p. 876. 1891.
45. Kopeloff, N. The effect of reaction of soil on ammonification by certain soil fungi. *Soil Sci.*, v. **1**, p. 541. 1916.
46. Kossowitsch, P. *Zhurn. Opytn. Agron.*, v. **2**, p. 625. 1901. *Abs. Exp. Sta. Rec.*, v. **14**, p. 343. 1902—1903.
47. Lemmermann, O., Blanck, E., Heintze, B. und v. Wlodeck, J. Untersuchungen über das Verhalten des Ammoniakstickstoffs in gekalkten und ungekalkten Boden. *Landw. Jahrb.*, Bd. **41**, p. 163. 1911.
48. Lemmermann, O., Aso, K. und Fresenius, L. Untersuchungen über Zersetzung der Kohlenstoffverbindungen verschiedener organischer Substanzen im Boden, speziell unter dem Einfluss von Kalk. *Landw. Jahrb.*, Bd. **41**, p. 217. 1911.
49. Lipman, J. G., Blair, A. W., Owen, I. L. and McLean, H. C. Conditions affecting the availability of nitrogen compounds in vegetation experiments. *Dept. Soil Chem. & Bact. N. J. Agr. Exp. Sta. for year 1912*, p. 205.
50. Lipman, J. G. and Blair, A. W. Lime and rotation experiments. *Dept. Soil Chem. & Bact. N. J. Agr. Exp. Sta. for year 1913*.
51. Lipman, J. G. and Blair, A. W. Field experiments on the availability of nitrogenous fertilizers. *N. J. Agr. Exp. Sta. Bul.* **260**. 1913.
52. Lipman, J. G., Blair, A. W., McLean, H. C. and Wilkins, L. K. Pot experiments on the availability of nitrogen in mineral and organic compounds. *N. J. Agr. Exp. Sta. Bul.* **280**. 1914.
53. Lipman, J. G. and Blair, A. W. Lime as a factor in utilization of nitrogen. *Report of the Department of Soil Chem. & Bact. N. J. Agr. Exp. Sta. for year 1915*.

54. Lipman, J. G. and Blair, A. W. The availability of nitrogenous materials. Dept. Soil Chem. & Bact. Report. N. J. Agr. Exp. Sta. for year 1915, p. 205.
55. Lipman, J. G. and Blair, A. W. The influence of the mechanical composition of the soil on the availability of nitrate of soda and dried blood. Dept. Soil Chem. & Bact. 1916.
56. Lipman, J. G. and Blair, A. W. Cylinder experiments relative to the utilization and accumulation of nitrogen. N. J. Agr. Exp. Sta. Bul. **289**. 1916.
57. Lipman, J. G. and Blair, A. W. Investigation relative to the use of nitrogenous plantfoods, 1898—1912. N. J. Agr. Exp. Sta. Bul. **288**. 1916.
58. Lipman, J. G. and Blair, A. W. The lime factor in permanent soil improvement. II. Rotation with legumes. Soil Sci., v. **9**, p. 91. 1920.
59. Lipman, J. G., Blair, A. W., McLean, H. C. and Prince, A. L. A comparison of magnesial and non-magnesial limestone in some 5 year rotations. Soil Sci., v. **15**, p. 307. 1923.
60. Lipman, J. G. and Blair, A. W. Field experiments on the availability of nitrogenous fertilizers, 1908—1917. Soil Sci., v. **9**, p. 371. 1920.
61. Lipman, J. G. and Blair, A. W. The lime factor in permanent soil improvement. I. Rotation without legumes. Soil Sci., v. **9**, p. 83. 1920.
62. Lipman, J. G., Blair, A. W. and Prince, A. L. Field experiments on the availability of nitrogenous fertilizers, 1918—1922. Soil Sci., v. **19**, p. 57. 1925.
63. Lipman, J. G., Blair, A. W. and Prince, A. L. Die Wirkung von Kalk und Düngemitteln auf den Kaligehalt von Boden und Pflanzen. Mitt. d. Intern. Bodenkundl. Gesellschaft (Neue Folge) **2**, 209. 1926.
64. Lipman, C. B. and Gericke, W. F. A vegetation experiment on the availability of nitrogenous fertilizers in an acid soil. Soil Sci., v. **2**, p. 575. 1916.
65. Löhnis, F. and Fred, E. B. Textbook of agricultural bacteriology. 1923.
66. Lyon, T. L. and Bizzel, J. A. Lysimeter experiments records for tanks 1 to 12 during the years 1910 to 1914 inclusive. Cornell University Agric. Exp. Sta. Memoirs **12**. 1918.
67. Magistad, O. C. The aluminium content of the soil solution and its relation to soil reaction and plant growth. Soil Sci., v. **20**, p. 181. 1925.
68. Mazé, P. L'assimilation de l'azote nitrique et de l'azote ammoniacal par les végétaux supérieurs. Compt. rend. Acad. Sci. Paris **127**, no. 24, p. 1031. 1898. Abs. Exp. Sta. Rec., v. **10**, p. 1011. 1898—1899.
69. McCool, M. M. Additional information concerning lime. Mich. Agr. Exp. Sta. Quarterly Bull. **2**, p. 95. 1919.
70. McGeorge, W. T. The influence of aluminium, manganese and iron salts upon the growth of sugar cane, and their relation to the infertility of acid island soils. Exp. Sta. of Hawaiian Sugar Planters Assoc. Bul. **49**. 1925.
71. Mooers, C. A. and McIntire, W. H. The comparative effects of various forms of lime on the nitrogen content of the soil. Journ. Americ. Soc. of Agronomy, v. **13**, p. 185. 1921.

72. Newton, J. D. A comparison of the absorption of inorganic elements and of the buffers systems of legumes and non-legumes and its bearing upon existing theories. *Soil Sci.*, v. **15**, p. 181. 1923.
73. Nõmmik, A. Fertilizing experiment with root crops. *Journ. "Agronomia"*, v. **4**, p. 169. 1924 (Estonian).
74. Orth. *Kalk und Mergeldüngung*. 1896.
75. Patterson, H. J. Results of experiments on the liming of soils. *Maryland Agr. Exp. Sta. Bul.* **110**. 1906.
76. Pitsch, O. Versuche zur Entscheidung der Frage, ob salpetersaure Salze für die Entwicklung d. landw. Kulturgewächse unentbehrlich sind. *Landw. Versuchssta.*, v. **34**, p. 217. 1887; v. **42**, p. 1. 1893; v. **46**, p. 357. 1896.
77. Plummer, J. K. The effects of liming on the availability of soil potassium, phosphorus and sulfur. *Journ. Amer. Soc. Agron.*, v. **13**, p. 162. 1921.
78. Prianschnikoff, D. H. *Fertilizer studies*. Moscow. 1912 (Russian).
79. Salter, R. M. and Morgan, M. F. Factors affecting soil reaction. I. The soil water ration. *Journ. Physic. Chemistry*, v. **27**, 117. 1923.
80. Samoiloff, J. B. and others. *Liming of soil*. Moscow. 1919 (Russian). (In this paper by A. A. Stolgane is listed also a good deal of Russian publications on the liming of soils.)
81. Schreiner, O. and Failyer, G. H. Colorimetric turbidity and titration methods used in soil investigations. *U. S. Dept. of Agr. Bul.* **31**. 1906.
82. Schuster, G. L. Economic returns from fifteen years results with manure, fertilizers and lime on Sassafras silt loam soil. *Delaware Agr. Exp. Sta. Bul.* **138**. 1924.
83. Shmuk, A. *Arbeiten des Kubanischen Landwirtsch. Instituts*, v. **3**, p. 77. Krasnodar. 1925 (Russian).
84. Singleton, G. H. Nitrogen availability studies on crops harvested at different stages of growth. *N. J. Agr. Exp. Sta. Bul.* **421**. 1925.
85. Stebut, J. *Liming of soils*. St. Petersburg. 1865.
86. Stephenson, R. E. Nitrification in acid soils. *Iowa Agr. Exp. Sta. Res. Bul.* **58**. 1920.
87. Stewart, R. and Wyatt, F. A. Limestone action on acid soils. *Ill. Agr. Exp. Sta. Bul.* **212**. 1919.
88. Taeke, B. Über die Bestimmung der freien Humussäuren im Moorboden. *Chem. Ztg.* **2**, p. 174. 1897.
89. Thear, W. Der Einfluss von Kalk und Humus auf die mechanische und physikalische Beschaffenheit von Ton, Lehm und Sandboden. *Journal für Landwirtschaft*, Bd. **59**, p. 9 and 107. 1911.
90. Thorne, G. E. The maintenance of fertility. *Liming of land*. *Ohio Agr. Exp. Sta. Bul.* **279**. 1914.
91. Tjulin, A. F. The injurious effect of excessive liming on podsol soils in connection with the peculiar character of the biological processes taking place in such soils. *Transactions of the Institute for Fertilizers*, no. **18**. 1923 and no. **26**. Moscow. 1925 (Russian).

92. Truog, E. A new apparatus for the determination of soil carbonates and new methods for the determination of soil acidity. *Journ. Indus. & Engin. Chem.*, v. **8**, p. 341. 1916.
93. Truog, E. Testing soils for acidity. *Agr. Exp. Sta. of the Univ. of Wisconsin Bul.* **312**. 1924 (revised).
94. Veitch, F. P. The estimation of soil acidity and the lime requirements of soils. *Journ. Amer. Chem. Soc.*, v. **24**, p. 1120. 1902.
95. Wagner, P. Die Stickstoffdüngung der landwirtsch. Kulturpflanzen. Berlin. 1892.
96. Wagner, P., Dorsch, R., Hals, S. and Popp, M. Die Verwendbarkeit des Kalkstickstoff zur Düngung der Kulturpflanzen. *Landw. Versuchsstationen* **66**, p. 285. 1907.
97. Wagner, P. Die Düngung mit schwefelsaurem Ammoniak und organischen Stickstoffdüngern im Vergleiche zum Chilisalpeter. *Arb. d. D. L.-G.*, Heft no. **80**. Berlin. 1903.
98. Wagner, P. Versuche über Stickstoffdüngung der Kulturpflanzen usw. *Arb. d. D. L.-G.*, Heft no. **129**. 1907.
99. Wagner, P. Die Ammoniak- und Salpeterdüngungs-Frage. Berlin. 1912.
100. Waksman, S. A. The growth of fungi in the soil. *Soil Sci.*, v. **14**, p. 153. 1922.
101. White, J. W. Concerning the growth and composition of clover and sorrel (*Rumex acetosella*) as influenced by varied amounts of limestone. *Penns. Agr. Exp. Sta. Rept. for 1913—1914*, p. 46. 1915.
102. Whittle, C. A. Stickstoffverluste und Kalk. *American Fertilizers* **55**, p. 73. 1921. *Ref. Jahresbericht f. Agrikulturchemie, Jahrgang* **65**, p. 75. 1922.
103. Wianko, A. T. et al. The value of lime on Indiana soils. *Ind. Agr. Exp. Sta. Bul.* **213**. 1922 (revised).
104. Wilfarth, N., Römer, H. and Wimmer, G. Über die Nährstoffaufnahme der Pflanzen in verschiedenen Zeiten ihres Wachstum. *Landw. Versuchsstat.*, Bd. **63**, p. 1. 1906.
105. Wityn, J. Über die bessere Ausnutzung der im Boden befindlichen Phosphorsäure. *Ztschr. f. Pflanzenernährung und Düngung*, Teil A Bd. **6**, p. 27.
106. Wohltmann, F. Chilisalpeter oder Ammoniak? Berlin. 1903.

STUDIEN ÜBER DAS ESTNISCHE UNTERKAMBRIUM (ESTONIUM)

I—IV

VON

A. ÖPIK

MIT 4 TAFELN UND 7 ABBILDUNGEN IM TEXT

TARTU 1929

C. Mattiesen, Tartu (Dorpat).

Inhalt.

I. Die Verbreitung des Unterkambriums auf dem Boden des Finnischen Meerbusens und die Entstehung des ostbaltischen Glintes 5

Aus der Verbreitung der sedimentären Geschiebe in den glazialen Ablagerungen nördlich vom Glint wird geschlossen, dass am Boden des Finnischen Meerbusens das Unterkambrium ansteht. Weil es die ältesten Schichten sind, die in Betracht kommen, so kann hier kein Graben vorhanden sein. In einem Graben müsste man jüngere Sedimente als das Kambrium erwarten. In der Mündung des Meerbusens aber und weiter nach Westen liegt offenbar ein Verwerfungsgebiet mit dem Ostseekalk = Wesenberger Kalk als jüngste Ablagerung.

Eine Übersichtskarte des Finnischen Meerbusens wird beigefügt. Der Glint wird für einen Erosionsrest am Rande der finnischen Aufwölbung erklärt.

II. Über das unterkambrische Alter des Estoniums 15

Das Estonium, aus dem Blauen Ton mit den basalen Bildungen und aus dem *Eophyton*- und dem petrefaktenleeren Sandstein bestehend, gehört einem einheitlichen Zyklus an; es sind in ihm also keine wichtigen Lücken zu erwarten. Die im oberen Teile des Blauen Tones vorhandene Fauna ist noch lange nicht die älteste kambrische Fauna überhaupt. Das Estonium muss von kleinerem Umfang sein als das Olenellium und kann daher nicht ins Vorkambrium versetzt werden. Das von älteren Autoren als Vermutung ausgesprochene algonkische Alter des Blauen Tones ist niemals bewiesen worden und kann auch niemals bewiesen werden, denn alle Tatsachen sprechen für das kambrische Alter der Formation. Der neue, von Scupin vorgeschlagene Name „Ingrium“ wird abgelehnt.

III. Eine *Corophioides*-Fauna aus dem estnischen unterkambrischen „fossilleeren“ Sandstein. (U-Röhre mit Spreite). 30

Es wird ein Fund von *C. erraticus* Richter und *C. Helmerseni* n. sp. beschrieben. Diese Formen kommen in der obersten Abteilung des Estoniums, im „petrefaktenleeren Sandstein“ bei Narva, vor. Das Vorhandensein einer Spreite liegt ausser Zweifel. Durch die zahllosen Spreiten ist das Gestein zerklüftet und verfällt daher leicht der Erosion.

V. Flachwassererscheinungen im estnischen Unterkambrium 42

Es werden veröffentlicht die während einer Exkursion mit A. Foerste (U. S. A.), Troedsson (Stockholm) und R. Richter (Frankfurt a/M.) unter der Führung von A. Öpik im estnischen Kambrium gemachten Beobachtungen. Es werden aus dieser Formation verschiedene grosse Wellenfurchen (von 1,5—20 m Länge) beschrieben. Neben Flachwassererscheinungen wird auch ein Sandsteinblock besprochen, der wegen seiner eigenartigen schaligen und runzeligen Beschaffenheit vom Verf. d. Schrift für organisch entstanden gehalten wird.

Abgebildet werden *Corophioides erraticus* Richter, *C. Helmerseni* n. sp. und verschiedene Profilaufnahmen.

I.

Die Verbreitung des Unterkambriums auf dem Boden des Finnischen Meerbusens und die Entstehung des ostbaltischen Glintes.

Jene estländischen, bzw. ostbaltischen Ablagerungen, welche dem unteren Teil des Unterkambriums angehören und den Namen *Estonium* tragen, treten zu Tage und sind erschlossen als untere Abteilung des Glintes vom Kap Pakerort im Westen bis zu den Ufern des südöstlichen Ladoga. Am Glint sind nur die oberen Glieder des *Estoniums* aufgeschlossen. Der grössere, tiefer liegende Teil setzt sich in Estland und Ingermanland gegen Norden im Meeresboden fort; weiter östlich ist als Fortsetzung des *Estoniums* der „Blaue Ton“ der Karelischen Landenge¹⁾ festgestellt worden.

Wir müssen annehmen, dass die ehemalige Verbreitung der Sedimente des *Estoniums* im Norden viel grösser war als jetzt. Als entferntere Fortsetzung des „Blauen Tons“ können die Sandsteine in SW-Finnland und auf Åland gelten. Diese Sandsteine sind nur in Spalten des kristallinen Untergrundes erhalten und sind im allgemeinen ganz fossillos. Nur auf Åland enthalten sie einen Brachiopoden — die *Acrotreta Tanneri* Metzger, und dieser Fund bestätigt das vorkambrische Alter des Rapakivi-granites von Åland, dessen Rumpf die Sandsteingänge durchsetzen²⁾.

Die Erhaltung des kambrischen Sandsteines in den Spalten des Urgebirges ist eine Tatsache von besonderer Bedeutung. Solche Sandsteingänge mit kambrischem Sandstein sind auch aus anderen Gebieten Fennoskandiens bekannt geworden, „und zwar nicht nur in der nächsten Umgebung der heute mit kambrischen Ablagerungen bedeckten Gebiete, sondern auch in grosser Entfernung von ihnen, wie in den Schärenhöfen vom Vänernsee, von Stockholm, Åland, Östergötland, d. h. nur in alten

Senkungsfeldern" 3). Diese Sandsteingänge im Urgebirge beweisen, dass wenigstens in ihrer Umgebung die gegenwärtige Landoberfläche als fossile vorkambrische Landfläche zu betrachten ist. Die postkambrische, resp. postkaledonische Destruktion, das Inlandeis und die Schmelzwasser waren nicht imstande dieses fossile Peneplan anzuschneiden, weil im Laufe der ganzen fossilführenden Erdgeschichte diese Landschaften niemals die nötige Höhe erreichten oder ein genügendes Gefälle besaßen. Wir müssen erwarten, dass auch andere „Senkungsfelder“ und tiefgelegene Urgebirgslandschaften das auspräparierte uralte Peneplan darstellen, und zwar besonders dort, wo das Kambrosilur ansteht oder wo es in der Nähe vorhanden ist.

Wir können deshalb sicher sein, dass das fossile Peneplan von Südfinnland sich am Boden des Meerbusens nach Süden fortsetzt, in der Richtung des Glintes, dessen Sedimente sich schützend über die vorkambrische Landfläche ausbreiten.

Im Ostbaltikum sind im Liegenden des Ordoviziums und Estoniums (Unterkambrium) die Gesteine des fossilen Peneplans erbohrt worden 4).

Aus den Bohrpulvern kann aber mit Sicherheit nur auf das Vorhandensein kristalliner Gesteine geschlossen werden, die Gesteine selbst sind unbestimmbar. In der Literatur werden diese Bohrpulver als „Rapakivi“ und „Gneisgranit“ und dgl. bezeichnet, und es werden daraus auch Schlüsse gezogen. Wie die Gesteinsbestimmungen, so sind auch alle sich an sie knüpfenden Folgerungen ganz problematisch.

Am Nordufer des Finnischen Meerbusens [vergl. W. R a m s a y 5)] taucht in flacher Abdachung in Form eines Schärenhofes das fossile Peneplan ins Meer, und an der Südküste liegt es schon rund 100 m tief unter dem Meeresspiegel. Diese Abdachung des Peneplans ist im Einfallen der ganzen Ostbaltischen Kambrosilurischen sedimentären Platte erkennbar. Diese Abdachung muss für sehr alt erklärt werden, weil eben damit die Erhaltung der ostbaltischen paläozoischen Sedimente verknüpft ist. In ihrer gegenwärtigen Ausbreitung liegen sie nämlich tief am Rande der mehr aufgewölbten kristallinen finnländischen Platte, welche wegen ihrer höheren Lage den ehemaligen sedimentären Überzug verloren hat.

Ein Blick auf die geologische Karte des Baltischen Schildes belehrt, dass diese Verhältnisse am Rande des Schildes die Regel darstellen. In einem gegen O und NO verlaufenden und nach Süden konkaven Bogen umsäumen die paläozoischen Sedimente die Wölbung des Schildes. In der

Richtung der Konvexität, nach S und O, liegt das Kristallinikum tief unter den mächtigen Sedimenten begraben. An der konkaven Seite des Bogens, am Rande des Schildes, auch im Osten sind sicherlich Spuren eines fossilen Peneplans zu erwarten.

Unter den Sedimenten, welche diesen Teil des Baltischen Schildes umsäumen, fallen besonders auf die Sandsteine und Tone des Old Red. Am Rande gelegen und im Wasser abgelagert, mit wenigen Brachiopoden usw. und mit einer Fischfauna, die auch in marinen Schichten vertreten ist, wird es wohl ein Saum von Deltaablagerungen gewesen sein.

Die Mächtigkeit des Ordoviziums und Kambriums am Glint schwankt von 120 bis 150 m; die grösste Höhe des Glintes beträgt 56 m. Es bleiben also noch rund 100 m von Sedimenten übrig, die keinen Anteil am Aufbau der eigentlichen Steilküste des Glintes haben, denn an den Südküsten des finnischen Meerbusens sind keine steilen Tiefen von dieser Grössenordnung vorhanden. Wir können deshalb annehmen, dass diese tiefsten 100 m von Sedimenten, welche ja dem „Blauen Ton“ angehören, am Boden des Meerbusens ausstreichen und ein breites und flaches O—W streichendes Band bilden, das ziemlich weit gegen N greifen muss. Je mehr gegen N, je näher zur finnischen Küste, desto höher steigt das fossile Peneplan an. Weil aber das Meer noch ungefähr ebenso tief bleibt, so muss angenommen werden, dass die kambrischen Sedimente gegen Norden immer dünner werden, und zwar in dem Sinne, dass die jüngeren Schichten im Süden zurückbleiben, gegen Norden aber immer ältere Schichten den Meeresboden bilden.

In derselben Art hat auch Mickwitz³⁰⁾ den Bau des Bodens des Finnischen Meerbusens dargestellt — in seinem Profil von der estländischen Küste bis nach Finnland über die Insel Keri oder Kokskär. Wie wir weiter sehen werden, hat diese Auffassung sehr viel für sich. Die Abbildung bei Mickwitz (S. 701) gibt in jeder Hinsicht die beste Deutung, nur dass die Kontaktfläche zwischen Kambrium und Archäikum viel unebener sein wird und dass das Grundgebirge in Estland nicht so tief liegt.

Ähnlich hat auch W. Ramsay⁵⁾ gedacht, als er die verschiedenen Entwicklungsstadien und Entstehungsmöglichkeiten des Finnischen Meerbusens darzustellen versuchte. Die Momente A, B, C und D [Ramsay⁵⁾, S. 8, Fig. 2] entsprechen vollständig unserer Auffassung, nämlich

dass im Meerbusen keine nachkambrischen Verwerfungen vorliegen und dass das Kambrium auf dem Meeresboden gegen Norden allmählich auskeilt. Nach Ramsay⁵⁾ soll aber die Entwicklung des Glintes weitergeschritten sein, wie es aus dem folgenden herauszulesen ist: „Il ne semble pas non plus invraisemblable que, un peu avant de la côte du glint, se trouve une faille qui ait fait baisser un peu le terrain situé au sud”.

Die dritte Möglichkeit wäre, dass im Meerbusen selbst ein Graben vorliegt, wobei der Glint und seine Sedimenttafel den stehengebliebenen Rand darstellen.

Eine Aufklärung dieser Fragen können wir wenigstens zum Teil von den sedimentären kambrosilurischen Geschieben in den Glazialablagerungen vor dem Glint erwarten.

In den Glazialablagerungen nördlich vom Glint finden sich sedimentäre Geschiebe, welche vom Inlandeise herangeführt worden sind. In Finnland kennen wir keine Sedimente von kambrosilurischem Alter, — die Heimat dieser Geschiebe liegt also am Boden des Finnischen Meeres. Die Glazialablagerungen sind stark von den Wellen angegriffen und zum Teil in Strandwälle umgewandelt worden, so dass es manchmal ziemlich schwer ist, diese voneinander und auch von späteren Deltaablagerungen zu unterscheiden. Deshalb sind von besonderem Wert solche Geschiebe, die sich faziell vom Anstehenden des Glintes unterscheiden, und solche, die in unveränderter Grundmoräne oder als Driftmaterial in den Bändertonen eingebettet sind. Abgesehen von vielen Fällen, wo es unmöglich war die Herkunft der Geschiebe festzustellen, gab es Fälle, wo mit Sicherheit die Herkunft vom Norden angenommen werden konnte.

Solche „glintfremde” Gesteine im Gebiete östlich von Tallinna sind nur von kambrischem Alter. Es sind tonige, gewöhnlich sehr grobkörnige grünlichgraue wohlgeschichtete glaukonithaltige Sandsteine, — bei denen gerade die Grobkörnigkeit befremdend wirkt. Einige dieser Geschiebe enthalten Phosphoritknollen. Diese Sandsteingeschiebe sind ziemlich selten, weil sie sehr locker sind, so dass man sie zuweilen zwischen den Fingern zerreiben kann. Nicht selten sind sie verkiest, und dann sind sie bedeutend härter.

In der Umgebung der Stadt Tallinna aber und westlich davon

finden wir nur selten kambrische Geschiebe, die sich vom Anstehenden unterscheiden. Auffallend ist nur ein äusserst grobkörniges, aus kantigen, aber glatten Quarz- und Feldspatkörnern bestehendes, etwas tonhaltiges Gestein mit grossen grauschwarzen glänzend-glatten Phosphoritknollen und eingesprengtem Bleiglanz. In Estland sind solche Gesteine unbekannt, und dieser Sandstein hat mit den anderen kambrischen Geschieben dieser Gegend auch nicht die geringste Ähnlichkeit. Besonders häufig ist dieser sonderbare Sandstein auf der Halbinsel Teliskopli.

Auf derselben Halbinsel finden wir nun plötzlich Geschiebe des Megalaspiskalkes (Glaukonitkalk), des Vaginatenkalkes und die Gesteine der höheren Stufen von C₁ bis E (Wesenberger Kalk). Die Blöcke sind fast immer korrodiert. Die Gesteine unterscheiden sich deutlich vom Anstehenden. Besonders gilt dies für den Vaginatenkalk, der als bituminöse sandige Kalkgeschiebe vertreten ist, also in einer Form, die wir erst weit westlich anstehend antreffen können⁶⁾. Also stammen diese Geschiebe sicherlich nicht vom Glinte.

Unweit der Stadt Tallinna, auf der Insel Paljassaar, deren Grät aus einem Äs besteht und von Sandflächen umgeben ist, finden sich reichlich Geschiebe vom Alter der Wesenberg-Stufe, die dem Ostseekalk gleichgestellt werden können. Von hier an nach Westen sind diese Ostseekalk-Blöcke eine häufige Erscheinung. Das estnische Anstehen liegt von hier sehr weit nach Süden, so dass kein Zweifel darüber vorhanden ist, dass diese Geschiebe glazialer Herkunft sind.

Westlicher werden Geschiebe vom Alter der Jeweschen Stufe (D₁) und der Kegelkalke (= Macrouruskalk D₂) häufig. So befindet sich an der Spitham-Spitze eine bedeutende Anhäufung solcher Blöcke.

Auf der Halbinsel Tahkona im Norden der Insel Hiiumaa (= Dagö) finden wir ebenfalls reichlich Geschiebe verschiedenen Alters. Sehr oft findet man hier Sandsteinblöcke (Kambrium), die als Schleifsteine gebraucht werden. Daher auch der estnische Name „Tahkona“, was als „das Gebiet der Schleifsteine“ übersetzt werden kann. Hier sind aber auch alle anderen Stufen vertreten, vom Vaginatenkalk bis zum Wesenberg-Kalkstein.

Neben diesen kambrischen und ordovizischen Geschieben treten gleichzeitig Blöcke auf, deren Heimat ohne Zweifel als Südwestfinnland bestimmt werden kann. Häufig sind rote, harte

Sandsteine, — gleich dem jotnischen Sandstein von Satakunta; daneben kommt ein Olivindiabas vor, der gleichen Ursprungs sein dürfte. In der Umgebung von Tallinna sind einige Blöcke von grobkristallinem Kalkstein gefunden worden. Ein grosser Block von 0,5 m Durchmesser liegt eben noch an der Teliskopli-Spitze. Dieser Kalkstein führt reichlich helle Glimmerblättchen, Körnchen eines grünen Minerals und offenbar auch etwas Chondroit. Dieser Kalkstein hat eine grosse Ähnlichkeit mit denen von der Insel Älö (Pargas). Diese letzteren Funde reden von einer NW—SO-lichen Eisbewegung, welche hier ja im allgemeinen herrschte. Aber auch die anderen sedimentären Geschiebe müssen aus dieser Richtung stammen, — offenbar vom Meeresboden an der Mündung des Finnischen Meerbusens und vielleicht westlich davon — aus der Ostsee. Die ordovizischen Gesteine, welche am Glint über dem Meer liegen, sind dort tief eingesenkt. Zuerst liegt der Wesenberg-Kalkstein, weil er das jüngste unter den Geschieben und deshalb auch am reichlichsten vorhanden ist.

Aber es liegen auch ältere Gesteine vor, — also sind die versunkenen Gebiete nicht einheitlich: entweder sind sie stark angeschnitten, oder es sind noch spezielle Störungen vorhanden, infolge deren die tieferen Ablagerungen das Bereich des Eisangriffes erreichten. Bei Tallinna ist es wirklich schwer, das Vorkommen älterer Geschiebe anders zu erklären. Aber westlicher, von den Inseln Rogö beginnend, werden die Schichten des Glintes vom Meere bedeckt, und so geht es weiter bis nördlich von Hiiu-maa (Dagö) und westlicher. Hier können unterseeische Aufschlüsse der Glintfortsetzung liegen, die einen Teil der älteren Geschiebe geliefert haben.

Nach allen unseren Überlegungen scheint es ziemlich sicher zu sein, dass das durch die Geschiebegeologie festgestellte Senkungsfeld der Ostsee sich bis zur Mündung des Finnischen Meerbusens erstreckt und sogar ein wenig in diesen eingedrungen ist.

Wie müssen wir uns nun den Sedimentüberzug des Bodens des Finnischen Meerbusens vorstellen?

Aus diesem Gebiete kennen wir nur Sandsteingeschiebe von kambrischem Alter. Es wurde festgestellt, dass in unberührten Moränen, nördlich vom Glint und östlich von Tallinna, dies die

einzig sedimentären Geschiebe sind. In der ganzen Masse des Kalkgerölles vor dem Glint finden wir nur solche Gesteine, die unmittelbar am Glinte anstehend nachweisbar sind. Stufen und Zonen, deren Ausstrich südlicher liegt, sind in diesen Anhäufungen nicht vertreten. Wir finden also nur Geröll bis zum Echinospaeritenkalk; Vertreter der Schichten von C₂ bis E (Wesenberg-Kalk) sind nicht vorhanden. Falls am Boden des Meerbusens ordovizische Kalksteine anstehen, müsste man hier ähnlich wie im Westen im Geschiebe jüngere Stufen erwarten, besonders aber den Wesenberg-Kalkstein. Als Geschiebe finden wir jedoch nur die kambrischen Sandsteine, — diese bilden also die Bodenschichten des Finnischen Meerbusens. Die „Esthonia-Formation“ liegt am Glint noch 100 m unter dem Meere, sie ist also mächtiger als die Wasserschicht des Meeres. Es liegt demnach kein Grund vor, im Finnischen Meerbusen eine Verwerfung zu vermuten. Das Meer ist durch das südliche Einfallen der fossilen subkambrischen Landfläche gebildet worden, am Rande der finnischen Aufwölbung, in einer alten Erosionsvertiefung *).

Eine Stütze unserer Ansichten sehen wir im Vorkommen des „Blauen Tones“ auf der Karelischen Landenge und auf der Insel Kotlin 7) (Kronstadt). Diese beiden liegen weit vom Glint entfernt, und es ist kein Grund vorhanden, hier irgendwelche Störungen zu vermuten. Dass der „Blaue Ton“ in Karelien noch so hoch liegt, westlicher aber, im Meerbusen, so tief — dies hängt mit dem alten Erosionsrelief zusammen und mit der alten Neigung der Ostbaltischen kambrosilurischen Platte nach Westen, dem Ostseebecken zu. Es könnte auch dieselbe Neigung sein, welche die Richtung der erodierenden Wasser bestimmt und zur Bildung des Finnischen Meerbusens geführt hat.

Falls wir im Finnischen Meerbusen selbst keine Verwerfungen haben, so hat auch die Steilküste des Glintes nichts mit einer Verwerfungstektonik zu tun. Die gegenwärtige Form des Glintes ist das Ergebnis seiner petrographischen Beschaffenheit und der postglazialen und rezenten Abrasion 6). Die ursprüngliche Entstehung des Glintes aber, als einer Geländestufe vor dem Finnischen Schilde, hängt mit der Aufwölbung des Schildes zusammen: die Aufwölbung wurde infolge der höheren Lage und des stei-

*) Der Finnische Meerbusen ist somit ein ertrunkenes Längstal oder ein Scheidetal in flach einseitig geneigten Schichten.

leren Gefälles ihres Sedimentüberzuges beraubt, während der tiefelegene Rand — jetzt die ostbaltische kambrosilurische Platte — in der Nähe der Erosionsbasis blieb und deshalb verschont wurde.

Die Auffassung R a m s a y's ⁵⁾ ist ebenfalls nicht vollständig überzeugend. Weil im Meerbusen das Estonium weit gegen Norden verbreitet zu sein scheint, so muss die von R a m s a y vermutete Verwerfung dicht an die finnische Küste verschoben werden. Liegt sie aber doch vor dem Glint, so ist die Sprunghöhe kleiner als die Mächtigkeit des Estoniums (also unter 100 m), denn sonst müsste man nicht das Kambrium, sondern das Urgebirge

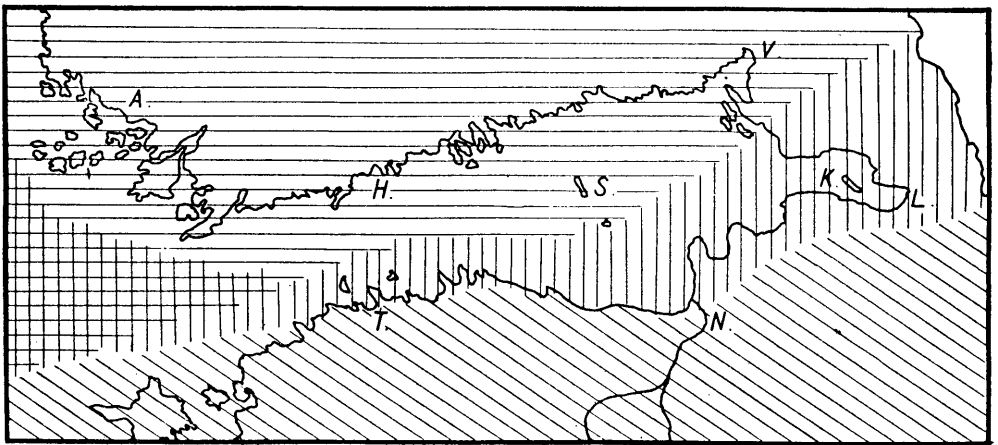


Abb. 1. Geologische Karte des Finnischen Meerbusens, 1:4.000.000. Zeichenerklärung: Horizontal gestrichelt: die finnischen vorkambrischen Gesteine und das fossile subkambrische Peneplan. Vertikal gestrichelt: Unterkambrium (Estonium). Schräg gestrichelt: die ordovizisch-kambrische ostbaltische Platte. Karriert: das mutmassliche tektonisch entstandene submarine ordovizische Gebiet, mit dem Wesenberg-Kalk als jüngster Ablagerung. A = Åbo; H = Helsingfors; V = Viborg; K = Insel Kotlin (oder Kronstadt); L = Leningrad; N = Narva; S = Hogland; T = Tallinna (= Reval).

im Meere bei den estnischen Küsten erwarten. Aber eine Verwerfung ist hier am Rande überhaupt unwahrscheinlich — eher müsste man solche grosse Einstürze oben auf dem Gewölbe erwarten.

Anmerkungen zur geol. Karte des Finnischen Meerbusens.

4. Schematisches Profil eines artesischen Brunnens auf dem 21-sten Arbeitsbezirk der Seefestung des Kaisers Peters des Grossen.

Höhe über dem Meere 42' (= ca 13 m).

Petrographische Charakteristik	Mächtigkeit		Bemerkungen und Deutung (nach dem Verf.)
	in Fuss	in Meter	
1. Gelber Sand	0—5'	1,5	In diesem Profil ist es schwer, die kambrischen und die quartären Sedimente voneinander zu trennen. Aus dem Vergleich mit dem folgenden (B) Profil aber muss man entnehmen, dass die Grenze in die tiefsten Teile der Schicht 2 zu verlegen ist.
2. Grauer Ton mit Sand	5'—141'	41,3	
3. Grauer Ton	141'—146'6"	1,7	
4. Sand	146'6"—155'	2,7	
5. Grand	155'—160'	1,5	
6. Weisser feiner wasserführender Sand . .	160'—197'	11,2	
7. Grober Sand	197'—203'	1,8	
8. Blauer Ton	203'—218'	4,6	
9. Weisser grober wasserführender Sand.	218'—256'	11,5	
		77,8	

B. Profil des artesischen Brunnens bei den südlichen Kasernen, ausgeführt vom Unternehmer A. Reiman.

1. Gelber Sand	0—10'	3,0	Postglazialer Meeressand
2. Fester Grauer Ton mit Geschiebe	10'—52'	12,8	Grundmoräne
3. Weisser Sand mit Torfpartikeln	52'—62'	3,0	Präglaziale (?) Ablagerungen mit Pflanzenresten (?)
4. Blauer fester Ton mit Grand	62'—116'	16,4	
5. Gelber Sand mit Torf	116'—120'	1,2	
6. Blauer Ton	120'—150'	9,1	Unterkambrium (Estonium)
7. Sandstein	150'—173'	7,6	
8. Blauer Ton	173'—176'	0,9	
9. Sandstein	176'—204'	8,5	
10. Blauer Ton	204'—207'5"	1,0	
11. Sandstein	207'5"—259'10"	16,0	
12. Roter Sandstein mit Ton	259'10"—260'	0,05	
13. Wassersand	260'—268'	2,4	
		81,95	

Die Grenze des Estoniums gegen das Urgebiet ist sicherlich nicht so geradlinig. In den Randgebieten müssen reichlich Inseln des Kambriums in den Vertiefungen des Urgebirges vorkommen, und durch die Decke des Estoniums ragen wohl mehrere Buckel von kristallinen Gesteinen hervor. Das Verbreitungsgebiet des Kambriums wird in der Tat auch grösser sein und mehr gegen Norden vorrücken. Die südliche Grenze ist durch die Glintlinie aufs genaueste bestimmt. Ohne Zweifel ist auch die Fortsetzung des Kambrosilurs im Westen am Meeresboden vorhanden, jedoch nur als flache Geländestufe, nicht als eine einheitliche Steilküste. Erst in Estland im Bereiche der Brandung wird der Ausstrich in eine Steilküste umgewandelt. Problematisch sind die Grenzen des (karrierten) subaquatischen Feldes. Im Süden von diesem ist wohl eine Verwerfungskluft vorhanden; sehr wahrscheinlich ist die Verbindung dieses Gebietes mit dem Anstehenden der Ostsee.

Dass der „Blaue Ton“ am Boden des Finnischen Meerbusens ansteht, ist nur in einem Fall durch Bohrungen nachgewiesen worden. Es sind dies nämlich zwei Tiefbohrungen (Brunnen) im Süden der Insel Naissaar (Nargö), die während der Festungsbauten von der russischen Regierung ausgeführt wurden. Die Bohrungsdaten sind in den Akten des Bergamtes in Tallinna vorhanden und wurden dem Verfasser von Herrn Dir. Berging. J. K a r k freundlichst zugestellt. Von Bohrproben ist nichts vorhanden. Deutlich unterscheidbar sind die oberen jüngeren und die älteren unterkambrischen Sedimente. Das Urgebirge ist in keinem Fall erbohrt worden.

Die Insel liegt ca 20 km nordwestlich von der Stadt Tallinna und 18 km nördlich vom Glint.

Aus den beiden angeführten Profilen geht unzweideutig hervor, dass noch in diesem Abstände vom Glint im Bereiche des Finnischen Meerbusens der „Blaue Ton“ — das Estonium — in normaler Höhe ansteht und dass von anstehenden ordovizischen Kalksteinen am Boden des Finnischen Meerbusens keine Rede sein kann. Sind hier Verwerfungen vorhanden, so müssen diese nördlich liegen, falls sie überhaupt vorhanden sind.

Aus den Bohrungen scheint auch hervorzugehen, dass das Estonium ziemlich sandig ist, indem im Profil die Sandsteine überwiegen. Doch handelt es sich um Schlagbohrung, wobei immer eine Durchmischung und Verunreinigung stattfindet und ein sandiger Ton leicht als Sand gedeutet werden kann. Aus

diesem Grunde bieten diese Bohrungen keine sichere Grundlage, auch was die „torfführenden“ Schichten anbetrifft. Der Streit ⁷⁾ über die Herkunft des Gases auf der Insel Kokskär wird ebenfalls nicht gelöst. Obwohl am Boden des Meeres kein Dictyonemaschiefer vorhanden ist, so ist doch nicht sicher, dass gerade ein Torflager der Ursprung des Gases sein kann. Der spärliche, problematische „Torf“ unserer Bohrungen ist wohl kein genügender Beweis. Sehr möglich aber, dass das Gas aus dem Kambrium selbst stammt: „klebrig“-bituminöse kambrische Sandsteingeschiebe werden aus dem Ålandgebiet von W i m a n ⁸⁾ erwähnt, vielleicht sind auch hier solche anstehend vorhanden.

II.

Über das unterkambrische Alter des Estoniums.

Die Zugehörigkeit des über dem Meeresspiegel liegenden Teiles des „Blauen Tones“ zum Unterkambrium ist ganz zweifellos. Das Alter der Sedimente wird durch die *Mickwitzia*-, *Holmia*-, *Volborthella*- und *Platysolenites*-Fauna bestimmt. Offen ist vorläufig die Frage nach dem Alter der übrigen Teile des „Blauen Tones“ oder Estoniums. Der Verfasser dieser Schrift hatte in einer früheren Abhandlung ⁹⁾ Gelegenheit zu dieser Frage Stellung zu nehmen, und zwar in dem Sinne, dass zu wenige Tatsachen vorliegen um zu entscheiden, ob die entsprechenden Schichten kambrischen oder vorkambrischen Alters sind. Auch jetzt ist die Zeit zur allseitigen Lösung dieser Frage noch nicht gekommen. Doch es muss zugegeben werden, dass alle bekannten Tatsachen für das unterkambrische Alter des „Blauen Tones“ sprechen, während das algonkische Alter nur eine Vermutung ohne jegliche Beweise darstellt, wie aus dem folgenden hervorgehen wird.

Die nachstehende Tabelle enthält alles, was wir gegenwärtig über die Gliederung des Estoniums und die vertikale Verbreitung seiner Fauna kennen. Gegenüber der früher veröffentlichten Gliederungstabelle ⁹⁾ sind nur kleine Abänderungen vorgenommen. Der petrefaktenleere Sandstein enthält jetzt Fossilien (*Corophioides*), und der *Olenellus*, resp. *Mesonacis*, resp. *Schmidtellus* hat sich als *Holmia* entpuppen müssen ¹⁰⁾.

Hangendes: Transgredierendes Unterordovizium. (Obolensandstein.)

Hiatus: *Olenus*-, *Paradoxides*- und obere *Olenellus*-Schichten fehlen.

		<i>Corophioides</i> -Zone. (Petrefaktenleerer Fukoidensandstein). 8—10 m.	
		K a m b r i u m	Untere <i>Olenellus</i> -Schichten (Esthonia formation, im Sinne Raymonds)
	<i>Volborthella</i> -Zone. 8—9 m. <i>Volb. tennis</i> , <i>Mickw. monil.</i> und <i>Holmia mickw.</i>		
„Blauer Ton“.	<i>Hyolithus</i> -Zone. 10—15? m.		
		„Blauer Ton“, untere Sandsteine und Konglomerate. 100—140 m.	

U r g e b i r g e .

Bemerkung: die Kolonnen links geben die allgemeinere, rechts — die eingehendere Gliederung derselben Formation an.

Seit Fr. Schmidt's Zeiten hat die untere fossilführende Grenze des Estoniums oder des „Blauen Tones“ um eine Zone tiefer verlegt werden müssen, nachdem die *Platysolenites*-Schichten eine ganze Fauna ans Tageslicht gebracht hatten. Es erwies sich aber gleichzeitig, dass diese Schichten sich offenbar noch unter dem Meeresspiegel fortsetzen, und dass keine Anzeichen dafür vorliegen, dass diese fossilführenden Schichten des „echten“ Blauen Tones unten bald ein Ende nehmen.

Die tiefste, die älteste bekannte Fauna stammt aus Kunda⁹⁾, aus der Tongrube der Zementfabrik, und schon ziemlich nahe am Meeresspiegel, also an der Grenze des Erreichbaren. Janischewsky¹¹⁾ hat inzwischen einige von Pogrebow

gemachte *Holmia Mickwitzi*-Funde aus Tallinna (= Reval) beschrieben. P o g r e b o w hat diese Trilobitenreste in einem von der russischen Regierung gebauten Dock in einer Tiefe von 16 m unter dem Meeresspiegel gefunden, also ebenso tief unter der bis jetzt bekannten *Holmia-Schicht*. Falls hier kein Irrtum vorliegt (es könnten während des Abbaues abgesunkene Partien sein), gehört dieser Fund in die *Platysolenites-Hyolithus-Zone*, und damit wird die Zugehörigkeit der genannten Fauna zur *Holmia*-Stufe ausser Zweifel gestellt.

Die estländischen ältesten Zonen des Unterkambriums, die *Volborthella*- und die *Hyolithus*-Zone, sind, nach den Faunen und der Lage zu urteilen, noch lange nicht die ältesten kambrischen Schichten der baltischen Länder. Eine ältere ist die *Discinella Holsti*-Fauna des Mjösen-Gebietes, des gotländischen Kambriums und des Geschiebes von Lappland, Öland u. s. w.

Am besten ist das Unterkambrium vom Mjösen beschrieben worden ¹²⁾, wo die Zonenreihenfolge ziemlich vollständig ist.

Mjösen.

Estland.

1 b β <i>Strenuella</i> <i>Linnarssoni</i>	
1 ba <i>Holmia Kjerulfi</i>	<i>Corophioides-Zone</i>
1 a β <i>Volborthella</i> <i>Platysolenites</i>	<i>Scenella-Zone</i>
	<i>Volborthella-Zone</i>
	<i>Platysol.-Hyolithus-Zone</i>
1 aa <i>Discinella Holsti</i>	Tiefere, unter dem Meeresspiegel liegende Schichten des Estoniums

Falls wir die beiden tiefsten estländischen Zonen der 1 a β -Zone von Mjösen gleichstellen — es zwingen uns dazu die über-

einstimmenden Fossilien — so müssen die *Scenella*-Zone und die mit dieser aufs engste verbundene *Corophioides*-Zone dem grössten Teil der *Holmia Kjerulfi*-Schichten gleich sein. Die vier estländischen Zonen sind also höchstens den Zonen 1ba+1a β aus Norwegen gleichzustellen. Die tiefste Zone des Mjösen-Gebietes, jene mit *Discinella Holsti*, ist vorläufig in Estland nicht vertreten. Mit grosser Sicherheit kann man aber vermuten, dass ein Teil der tieferen Schichten des Estoniums der *Discinella*-Zone entspricht, und es wird hoffentlich einmal eine *Discinella* aus diesen Schichten der Wissenschaft vorgelegt werden.

Der Abstand zwischen den norwegischen und estländischen Lokalitäten ist sehr gross, daher sind auch grosse fazielle (petrographische und faunistische) Unterschiede entstanden. Das Wesentliche ist, dass in Norwegen kein Äquivalent des schwedischen *Mickwitzia*-Sandsteines oder der estländischen *Scenella*-Zone vorhanden ist: und doch scheinen die Ablagerungen relativ lückenlos entwickelt zu sein. Ausserdem sind die in Estland getrennt vorkommenden *Volborthella*- und *Platysolenites*-Faunen in einer einzigen norwegischen Zone (1 a β) miteinander vermischt.

Aus den schwedischen Lokalitäten wissen wir aber, dass der *Mickwitzia*-Sandstein älter ist als die Zone mit *Holmia Kjerulfi* (L i n n.). Aus faunistischen Gründen muss der *Mickwitzia*-Sandstein von Östergötland den estländischen *Volborthella*-Schichten und den *Mickwitzia*-Schichten der *Scenella*-Zone äquivalent und synchron sein. Es müssen dann die eigentlichen *Scenella*-Schichten Estlands zusammen mit dem *Corophioides*-Sandstein in die Zeit der *Holmia Kjerulfi* gestellt werden. Damit scheint die Zeit- und Sedimentkorrelation zwischen dem Mjösen und Estland in Ordnung zu sein. Die Tatsache, dass in Norwegen von den vier Zonen nur ungefähr eine und eine halbe (des 1ba) die vier estländischen Zonen überdecken, bedarf in Norwegen keiner Lücken und Regressionen zur Erklärung. Die estländischen Zonen sind vorläufig nur lokale Bildungen einer Regressionszeit, wo grosse Veränderlichkeit in den ökologischen Bedingungen herrschte. Daher ist in Estland die *Volborthella*- und die *Platysolenites*-Fauna getrennt eingebettet worden zu einer Zeit, wo in Norwegen für diese indifferente Bedingungen herrschten, weshalb keine Trennung zustande kam. Synchroner Bildungen für die *Mickwitzia*-*Scenella*-Schichten sind in Norwegen wohl vor-

handen, doch weil dort eine rein-marine Fazies ansteht, fehlten die Lebensbedingungen für die strenge Flachseefauna Estlands.

Es muss betont werden, dass die estländischen kambrischen Fossilien innerhalb des baltischen Gebietes einen leitenden Wert haben. *Mickwitzia monilifera* (Linn.) kommt in Schweden und Estland vor in petrographisch ähnlicher Umgebung und vollständig gleichzeitig. Sie ist ja auch in der *Volborthella*-Zone Estlands vorhanden, und *Volborthella* kommt im *Mickwitzia*-Sandstein bei Lugnäs vor. Ausser Norwegen und Schweden ist *Volborthella* aus Polen¹³⁾ und Kanada¹⁴⁾ bekannt geworden. In Polen ist *Volborthella*, wie im ganzen Baltikum, unterhalb der *Holmia Kjerulfi*-Zone entdeckt worden. Die kanadischen Funde sind aber bedeutend jünger, indem sie der *Protolenus*-Zeit, also ungefähr der Unter- und Mittelkambrium-Wende angehören¹⁴⁾. *Platysolenites antiquissimus* ist vorläufig noch kein allzu sicheres Fossil. Dieses Problematicum ist mangelhaft bekannt, und die Funde aus den verschiedenen Lokalitäten sind untereinander noch nicht genau verglichen worden. Es ist wahrscheinlich ein Sammelname, wie Janischewsky¹⁵⁾ vermutet. *Scenella discinoides* Fr. Schmidt ist vorläufig nur aus Estland nach zerdrückten Exemplaren beschrieben worden. Doch bessere Stücke nähern sich sehr den Umrissen der *Scenella depressa* Kiaer aus der *Holmia Kjerulfi*-Zone vom Mjösen. In der Schalenskulptur sind offenbar fast gar keine Unterschiede vorhanden, und es kann mit der Zeit die *Scenella depressa* sich als *Scenella discinoides* entpuppen. Dieses wird dann die gesuchte Bestätigung unserer Korrelation sein.

Diese kurze Fossilienübersicht ist genügend, um festzustellen, mit welchem Grade von Sicherheit diese Versteinerungen Leitfossilien sind. Es sind alles innerhalb des Baltikums mehr oder weniger zonenbeständige Petrefakte.

Verlassen wir jetzt das ferne Mjösengebiet, und wenden wir uns der zu Estland viel näher gelegenen Insel Gotland zu. Das Kambrium, von mächtigem Gotlandium und Ordovizium überlagert, kommt auf der Insel überhaupt nicht zutage. Doch bei Visby¹⁶⁾ wurde in einer Diamantbohrung das vorhandene Gotlandium, Ordovizium und Kambrium durchteuft und das Grundgebirge selbst in einer Mächtigkeit von 20 m angebohrt.

Das Unterkambrium ist hier in einer Fazies entwickelt, die sich sehr dem Estonium nähert. Nach Hedström¹⁶⁾ gehören die untersten 104 m der Bohrung dem Unterkambrium an. Inmitten dieser Schichten fand sich im Bohrkern die *Discinella Holsti* Moberg, das Leitfossil der ältesten Zone des baltischen Kambriums. Hedström bezeichnet die Gesteine als gelblich-grauen Sandstein und bläulich-grauen Schieferthon. Der Verfasser hat die Möglichkeit gehabt, einige Proben davon in den Sammlun-

gen der „Sveriges Geologiska Undersökning“ in Stockholm zu berücksichtigen. Die Gesteine haben tatsächlich grosse Ähnlichkeit mit frischen Proben aus dem „Blauen Ton“ Estlands. Besonders die unverwitterten trockenen estländischen Tonproben können mitunter als bläulichgrauer Schiefertön bezeichnet werden. Der *Platysolenites*-Ton wird erst dort plastisch, wo er einige Zeit unter der Wirkung der Atmosphäre gestanden hat. Auch die Erfahrungen der Brunnenmeister zeigen, dass der „Blaue Ton“ schwer zu durchschlagen ist, weil er sehr fest, zähe und trocken ist, und weil Wasser ihn nur langsam erweicht. Auch die Mächtigkeit der Schichten von Gotland stimmt gut zur Mächtigkeit des Estoniums. Diesem Vergleich zufolge ist mit grosser Wahrscheinlichkeit zu erwarten, dass auch im Estonium, in dem „Blauen Ton“, dereinst die zweifellos kambrische *Discinella Holsti* Mbrg. entdeckt wird.

Aus den bis jetzt besprochenen Tatsachen geht hervor, dass die *Platysolenites*- und *Hyalolithus*-Fauna des Estoniums nicht die älteste kambrische Fauna des Baltikums darstellt, dass man also im übrigen Teil des „Blauen Tones“ noch ältere kambrische Faunen erwarten kann, besonders die *Discinella Holsti*. Diese *Discinella* ist aber auch nicht das älteste Fossil des Kambriums überhaupt: wir werden später noch darauf kommen, jetzt müssen wir uns anderen Tatsachen zuwenden.

Fast überall liegen die tiefsten kambrischen Ablagerungen transgredierend über dem Grundgebirge. Im Baltikum ist es immer das Urgebirge, und nur ausnahmsweise am Mjösen liegt das Olenellium über dem Sparagmitsystem. Die tiefste kambrische Zone — die erste Transgressionswelle — ist jene der *Discinella Holsti*. In Norwegen, Lappland und auf Gotland ist sie nachgewiesen. In anderen Gebieten sind es immer jüngere Zonen, die den Überzug des Urgebirges bilden. Nirgends im Baltikum kennen wir einen Fall, wo die Transgression vor dem Kambrium begonnen hätte, sondern immer ist eine deutliche Verspätung vorhanden. Wir haben deshalb kein Recht zur Annahme, dass das Estonium einen vorkambrischen Transgressionsvorläufer darstellt; sondern, solange keine Gründe für eine andere Meinung vorliegen (die Meinung ist da — die Begründung fehlt!), muss auch für den „Blauen Ton“ als Bildungszeit höchstens das *Discinella*-Alter angenommen werden.

Die bedeutende Mächtigkeit *) des „Blauen Tones“ kann ebenfalls kein Grund dafür sein, seinen unbekanntem Teil ins Vorkambrium überzuführen. Dies geht schon aus dem Vergleich mit der Visby-Bohrung ¹⁶⁾ hervor. Das baltische Kambrium ist ausserdem von sehr unbeständiger Mächtigkeit, und es kann auf grossen Strecken überhaupt fehlen. Die Mächtigkeit des baltischen Kambriums wächst im allgemeinen von West gegen Ost, die Zonenreihenfolge wird aber gleichzeitig lückenhafter. Die Zunahme der Mächtigkeit und der Klastizität der Sedimente bedeuten Landesnähe, und je näher zum Lande, desto häufiger sind Lücken zu erwarten (vergl. Studie IV dieser Schrift).

Wir wissen nichts über Lücken im unbekanntem Teile des Estoniums, können aber das Vorhandensein solcher auch nicht kategorisch ablehnen. Die Betrachtung der von R ü g e r ⁴⁾ bearbeiteten Bohrprofile belehrt aber, dass aus der Beschaffenheit der Sedimente und der Korngrössenverteilung die Einheitlichkeit des Estoniums hervorgeht, dass es ein einheitlicher Zyklus ist — dass also alle zu erwartenden Lücken nur von kurzer Dauer gewesen sein können.

Aus den Tiefbohrungen ⁴⁾ wird mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit geschlossen, dass das Estonium mit einem Basalkonglomerat oder Transgressionskonglomerat beginnt. Diese untere Abteilung ist ausgesprochen sandig, und wie R ü g e r ⁴⁾ berichtet, ist die Form der Sandkörner ziemlich eckig — das Material hat also keinen langen Weg durchgemacht. Es ist das A1a nach F r. S c h m i d t. Die Mächtigkeit schwankt von 67,9 m (Tallinna) bis 92,36 m (Aseri) und 80,6 m (Leningrad). Auch Ton und Tonschichten sind vorhanden, doch in verhältnismässig sehr geringer Menge. Es sind dies grobe klastische, eine eckige Kornform aufweisende, teilweise konglomeratische Sedimente, also typische Erscheinungen einer beginnenden Transgression.

Diese Sandsteinserie geht höher in tonreiche Sedimente —

*) Im Vergleich mit der Mächtigkeit der estnischen ordovizischen Zonen ist diejenige des Estoniums wirklich bedeutend. Der Vergleich mit den Kalksteinen sagt aber nichts; vergleichbar sind ja nur Formationen von gleicher Fazies. Das Estonium, mit Sand- und Tonbildungen anderer Zeiten verglichen, wird gar nicht auffallen — sogar unbedeutend scheinen, z. B. neben dem Flysch.

den „echten“ „Blauen Ton“ über. Es sind freilich Sand und Sandsteine vorhanden, doch diese treten sehr zurück, und das feinkörnige tonige Sediment spricht für eine weitere Entwicklung der Transgression. Gleichzeitig kommt auch ein ozeanogenes Element hinzu, nämlich der Glaukonit. Diese mit A1b bezeichnete Abteilung ist von 43 bis 89,9 m mächtig. Den oberen Teil dieses „echten“ „Blauen Tones“ bildet die *Hyolithus-Platysolenites*-Zone von Kunda.

Von hier an nimmt der Sandgehalt wieder zu. Die *Platysolenites*-Tone werden durch die ungefähr im Gleichgewicht vorhandenen Sandsteine und Tone der *Volborthella*-Zone abgelöst. Gleichzeitig kommt zum Vorschein ein Reichtum an Lebensspuren und lokalen Emersionen. Trockenrisse, Regenspuren und Wellenfurchen sind überall in dieser Zone verbreitet. Nach ihrem Aussehen können besonders diese Schichten als „kambrischer Flysch“ bezeichnet werden, ein Ausdruck, den Zuber¹³⁾ für andere ähnlich ausgebildete kambrische Gebiete sehr treffend verwendet hat.

In der *Scenella*-Zone treten die Tone sehr zurück; der Sand, der in der Zwischenzone aus mehr abgerundeten Körnern zusammengesetzt war, wird wieder eckiger.

Über der *Scenella*-Zone liegen die vorwiegend sandigen Schichten mit *Corophioides* und sehr zurücktretendem Glaukonit. Tongallen und Wellenfurchen sind häufige Erscheinungen.

Der *Corophioides*-Sandstein ist das jüngste Glied des ostbaltischen Kambriums. Er ist noch im Meere entstanden (vergl. Stud. III), doch als sein wichtiges Kennzeichen wird die eckige Form der Sandkörner genannt, also ganz ähnlich, wie beim tiefsten Glied des Estoniums.

Über dem *Corophioides*-Sandstein liegt die grosse Lücke der oberen *Olenellus*-, *Paradoxides*- und *Oleniden*-Epoche. Sie ist ein Analogon zu der allerdings unvergleichlich grösseren Lücke im Liegenden des Estoniums. Die Oberfläche des *Corophioides*-Sandsteines — eine Tieflandsfläche — ist aufgearbeitet, leicht angefurcht, und es sind ihre Blöcke im hangenden Ordovizium eingebettet. Das sind die Merkmale der erneuten Transgression.

Aus dieser kurzen Übersicht geht eine deutliche Symmetrie im Aufbau des Estoniums hervor. Die untersten und die jüngsten seiner Glieder sind Sandsteine mit eckigem Korn, und je näher zur Mitte, desto abgerundeter wird der Sand, desto feinkörniger-toniger werden die Sedimente. In der Mitte, im Kern liegt der

„echte“ „Blaue Ton“, der tatsächlich vorwiegend tonig entwickelt ist.

Es ist dies das Bild eines abgeschlossenen marinen Zyklus, wo der Höhepunkt durch feinklastischen Ton, die Transgression und Regression durch grobklastischen Sand und Lücken gekennzeichnet sind. Die Einheitlichkeit des Estoniums ist ganz deutlich ausgeprägt, und innerhalb seiner Sedimente können nur geringe Lücken erwartet werden.

Wir haben die oberen Zonen des Estoniums als Regressionsbildungen bezeichnet. Verfolgen wir die Ausbreitung dieser fossilführenden Zonen in horizontaler Richtung, so tritt der regressive Charakter dieser Sedimente noch deutlicher hervor.

Die älteste bekannte fossilführende Zone, der Ton mit Platysoleniten, hat die grösste Verbreitung. Wir kennen ihn im ganzen Gebiete des Glintes bis zu den SE-Ufern des Ladoga-Sees.

Die *Volborthella*-führenden Schichten haben sich stark nach Westen zurückgezogen. Ganz deutlich sind sie noch in Ostestland erkennbar, und als der östlichste Fundort des Cephalopoden wird in der Literatur noch Zarskoje Sselo genannt. Aber die *Holmia Mickwitzi*-Reste finden sich erst bedeutend westlicher, nämlich bei Kunda, wo die ganze Volborthellenzone mit allen Gliedern vorliegt. Erst hier begegnen wir auch dem *Mickwitzia*-Sandstein mit dem so charakteristischen Phosphoritkonglomerat. Aber die *Scenella*-Schichten (oberer Teil der *Scenella*-Zone) fehlen hier gänzlich. Erst weit im Westen, bei Jägala-Joa (= Jaggowal), erscheinen die Schichten mit *Scenella discinoides* und sind dann in jedem Aufschluss stets vorhanden. Diesen auffallenden Zonenrückzug macht aber der petrefaktenleere Sandstein merkwürdigerweise nicht mit. Er ist von Pakerort bis Koporje (Ingermanland), wenn auch in schwankender Mächtigkeit, ununterbrochen vorhanden. Von da an fehlt er aber auf einer bedeutenden Strecke bis zur Tosna, wo er wieder im Profil erkennbar wird¹⁷⁾. Auf der Strecke zwischen Koporje und der Tosna ist der Obolenssandstein im Kontakt¹⁷⁾ mit dem Platysolenitenton. Ähnlich hat auch Karpinsky¹⁸⁾ die Verhältnisse bei Kunizy im Pskowschen Gouvernement angetroffen. Der petrefaktenleere Sandstein — die *Corophioides*-Zone — liegt also transgressiv über den älteren Schichten. Es ist dies aber sicherlich keine bedeutende

Transgression gewesen, schon deshalb, weil sie im Hangenden von einem grossen Hiatus abgeschnitten wird. Dieses Übergreifen des Sandsteines bedeutet eher einen Ausgleich aller grösseren Unebenheiten des Meeresbodens auf weiten Strecken, begleitet von einer oszillatorischen ausgedehnten kurzzeitigen, sehr flachen Überschwemmung. Dadurch wird das Bild der allgemeinen Regression in keiner Hinsicht gestört.

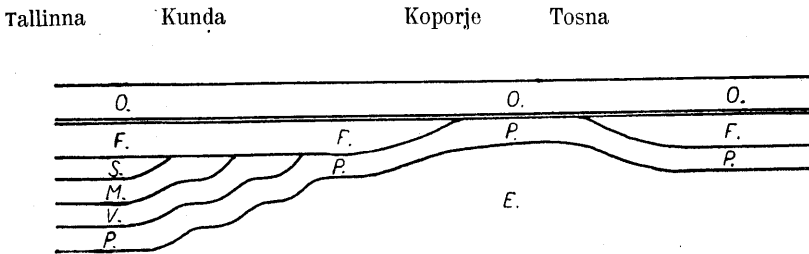


Abb. 2. Schematisches Profil durch das ostbaltische Kambrium von W nach E. O — Obolensandstein des basalen Ordoviziums; F — „petrefaktenleerer“ (*Corophioides*-) Sandstein; S — *Scenella*-Schichten der Scenellazone; M — *Mickwitzia*-Schichten der Scenellazone; V — Zone der *Volborthella tenuis*; P — *Platysolenites*-Ton (*Hyolithus*-Zone); E — nicht aufgeschlossene, nur aus Tiefbohrungen bekanntgewordene Schichten des Estoniums. Mit der doppelten Linie zwischen O und F (bzw. P) ist der Hiatus der oberen *Holmia*-, *Paradoxides*- und Olenidenzeit bezeichnet.

Aus allem, was über die Regression der unterkambrischen Zonen Estlands gesagt wurde, und aus der Abb. 2 geht hervor, dass erst westlich von Jägala, also erst in der Umgebung der Stadt Tallinna, die *Eophyton*-Schichten am vollständigsten entwickelt sind. Erst für dieses Gebiet ist unsere stratigraphische Gliederungstabelle in vollem Umfange verwendbar. Je weiter aber nach Osten, desto mehr Zonen und Schichten müssen gestrichen werden, und dementsprechend vergrössert sich die hangende Lücke in derselben Richtung, um ihren grössten Umfang im Fenster zwischen Koporje und Tosna zu erreichen.

Es muss zugegeben werden, dass das Auskeilen der entsprechenden Zonengesteine nach Osten zu noch ungenügend bekannt ist, dass also in dieser Hinsicht dereinst noch Korrekturen in dem hier aufgestellten Schema vorgenommen werden müssen. Ziemlich bekannt ist dagegen die horizontale Verbreitung der

Fossilien, denn nach diesen hat man viel gesucht. Und es ist ja ebenfalls eine Regression, indem die Fossilien sich gesetzmässig in bestimmter Reihenfolge nach Westen hin zurückziehen.

Bis jetzt haben wir zwei sehr wichtige Tatsachen erkannt, nämlich, dass das Estonium einen einheitlichen Zyklus darstellt, und dass unterhalb der *Hyalolithus*-Zone im „Blauen Ton“ Raum für die älteste baltische fossilführende Zone mit *Discinella Holsti* reserviert werden muss. Wir sind aber nicht sicher, dass der ganze Rest des Estoniums dieser einzigen Zone angehört, obwohl eine solche Annahme keine Schwierigkeiten macht. Doch falls die *Discinella*-Zone vorläufig die älteste kambrische Fauna des Baltikums enthält, ist jene noch lange nicht die älteste unterkambrische Zone überhaupt, so dass der älteste Teil des Estoniums immer noch als kambrisch gelten muss, — wobei als Vorbedingung die Einheitlichkeit des ganzen Estoniums anzusehen ist.

Im amerikanischen Kambrium finden wir nämlich Ablagerungen, die offenbar älter sind als die *Discinella*-Schichten.

Walcott¹⁹⁾ unterscheidet im nordamerikanischen Unterkambrium oder Waucobian vier mächtige Trilobitenzonen, und zwar

- D = *Olenellus*-Zone
- C = *Callavia*-Zone
- B = *Elliptocephala*-Zone
- A = *Nevadia*-Zone.

Es ist vorläufig aussichtslos, eine genaue Korrelation der baltischen und amerikanischen Zonen aufzustellen, doch ein nähernder Vergleich ist wohl denkbar.

Bezüglich der amerikanischen Zonen muss erwartet werden, dass diese in der Zukunft in eine grössere Anzahl von Zonen zerfallen werden, dass also das Walcott'sche Schema eine Reihenfolge von Faunen darstellt, von denen eine jede mehrere Zonen einnimmt. Gegenüber diesen amerikanischen stehen nun die baltischen Zonen, welche als drei Trilobitenfaunen vertreten sind, und zwar

- 1) *Strenuella Linnarssoni*,
- 2) *Holmia Kjerulfi* und *Kjerulfa lata* Kiaer,
- 3) die älteste Fauna mit *Holmia Mickwitzi*, zu welcher auch als Zonen die *Torelli*- und die *Discinella*-Schicht hinzuzurechnen sind.

Von diesen drei Faunen hat eigentlich nur die dritte Dimensionen, die mit denjenigen einer amerikanischen vergleichbar sind, während die zwei oberen zusammen in den Rahmen einer amerikanischen passen. Möglicherweise hat die *Strenuella*-Zone den Platz der *Protolenus*-Fauna, oder deren unteren Teil einzunehmen, und so fallen die anderen ostbaltischen Zonen mit der *Callavia*- und *Olenellus*-Zeit zusammen. Die *Elliptocephala*- und die *Nevadia*-Zeit sind im Ostbaltikum sedimentlos geblieben. Es ist daher auch unwahrscheinlich, dass der tiefere Teil des Estoniums diesen fehlenden Zonen entspricht. Wir können fast ganz sicher sein, dass die Transgression des Kambriums im Baltikum gegenüber Amerika sich überall um einige Phasen verspätete.

Für das ganze baltische Unterkambrium ist die Trilobiten-gattung *Holmia* bezeichnend. Die Gattung selbst ist daher für einzelne Zonen nicht entscheidend, und nur die Arten sind von Bedeutung. In Nevada in der *Nevadia*-Zone, mit der ältesten marinen Fauna überhaupt, erscheint ebenfalls eine *Holmia*-Art¹⁹⁾. Diese *Holmia rowei*, „a more advanced type“, kann nicht die primitive *Nevadia* in die Zeit der baltischen *Holmia*-Zonen versetzen. Es ist nur ein Beweis für eine gewisse Persistenz der Gattung *Holmia*, deren Ahnen im Lipalian zu suchen sind; aber es ist ebenfalls nicht ausgeschlossen, dass unter der *Nevadia* noch eine kambrische Fauna entdeckt werden wird. Das „abrupte“ Erscheinen *) der *Nevadia* und *Holmia* kann als Stütze dieser Hoffnung dienen.

Das unterkambrische Alter des ganzen Estoniums dürfte demnach eine sehr wahrscheinliche Tatsache sein.

Wir haben erkannt, dass im oberen Teil des Estoniums das obere Unterkambrium in Form der *Strenuella*-Zone und eines

*) Charles D. Walcott, Abrupt Appearance of the Cambrian Fauna on the North American Continent, Washington 1910.

Teiles der *H. Kjerulfi*-Schicht nicht vorhanden ist. Es ist ebenfalls sehr wahrscheinlich, dass auch die ältesten Zonen in Estland nicht vertreten sind. Demnach hat die Estonia-Formation einen kleineren Umfang als das ganze Olenellium, etwa wie es im folgenden Schema durch die Korrelationslinien dargestellt wird:

Paradoxidium	Hiatus
Olenellium	Estonium
„Lipalian“	

Wir geben zu, dass unsere Begründung des kambrischen Alters des „Blauen Tones“ auf wenigen Tatsachen und einer Reihe von Vermutungen, Annahmen und Analogien beruht, dass also noch weitere Beweise erwünscht sind. Aber welche Tatsachen und Gründe waren die Ursache, dass die Grenze zweier erdgeschichtlicher Ären, des Paläozoikums und des Eozoikums, in das Estonium verlegt wurde?

Zum erstenmal wurde die Vermutung, dass der „Blaue Ton“ algonkisch sein könne, von F r. S c h m i d t ausgesprochen, doch eine Begründung wurde nicht gegeben. In ähnlicher Weise geschah es später von J. W a l t e r, und einige jüngere Geologen haben sich dieser Meinung angeschlossen. Nur L. R ü g e r⁴⁾ hat den Versuch gemacht, eine Begründung zu geben. Aber gerade von ihm wird die Einheitlichkeit des Estoniums betont und auf dessen Zugehörigkeit zum Kambrium aus sedimentpetrographischen Gründen hingewiesen. Dass R ü g e r den „Blauen Ton“ aus faunistischen Gründen zum Präkambrium (allerdings zum spätesten) zu rechnen für möglich hält, ist durch den damaligen Stand der Wissenschaft verursacht worden: die *Hyo-lithus*-Fauna von Kunda und die Arbeiten von V o g t, H e d s t r ö m (die Ergebnisse der Visby-Bohrung) u. a. waren noch unbekannt. Von L. R ü g e r sind alle Argumente für das prä-

kambrische Alter des „Blauen Tones“ erwogen worden, es werden aber von ihm selbst alle anderen, ausser dem hier angeführten, abgelehnt. Das einzige also, was noch von Wichtigkeit zu sein schien und das algonkische Alter beweisen sollte — die Fauna — erwies sich gerade als ein Beweis für das kambrische Alter des Estoniums.

In letzter Zeit ist für das präkambrische Alter des Estoniums H. Scupin²⁰⁾ eingetreten. Wir lesen in seinem Aufsatz: „Mit Rüger betrachte ich (H. Scupin) alle diese besonders in Estland und Ingermanland auftretenden Ablagerungen als jünger als die Jotnische Stufe *) und möchte sie daher als jüngste Stufe des Präkambriums unter besonderem Namen dieser gegenüberstellen. Das gegebene wäre „Estnische Stufe“ oder Estonium; da aber bereits P. Raymond eine Esthonia-Formation unterscheidet (blauer Ton + Unterkambrium), so schlage ich die Bezeichnung ingriscische Formation (Ingrium) vor. An der Zugehörigkeit des „Blauen Tones“ zum Präkambrium ändert auch die Aufindung einer kleinen Fauna in dessen oberem Teil durch A. Öpik nichts, wenn man die allgemeingültige Definition des Präkambriums, wie sie jetzt auch wieder Sederholm bringt, festhalten will.“

Wie wir eben sahen, hat gerade diese „kleine aufgefundene Fauna“ ausschlaggebende Bedeutung für die Bestimmung des Alters des Estoniums, indem sie noch lange nicht die älteste kambrische Fauna ist. In der Altersbestimmung des Estoniums lehnt sich H. Scupin an Rüger⁴⁾ an, der aber, wie oben erwähnt wurde, sich gar nicht so kategorisch für das präkambrische Alter ausgesprochen hat und sogar umgekehrt geneigt ist die ganze Formation zum Kambrium zu rechnen! Auch der Name J. J. Sederholm's ist ganz ohne Grund angeführt worden. In der von Scupin zitierten Arbeit (im Lehrbuche von W. Salomon) können im Aufsätze von Sederholm nur die folgenden Zeilen über den „Blauen Ton“ in Be-

*) Es handelt sich wohl um das Jotnische System, welches von Sederholm in letzter Zeit in zwei grosse Formationen, das Hoglandium und das eigentliche Jotnium, gegliedert wird. „Stufe“ ist hier unpassend, wie z. B. auch in „Permische Stufe“ (statt „P. System“) u. s. w., wo „Stufe“ eine Geringschätzung bedeuten würde.

tracht kommen: „Mit Ablagerung des jotnischen Sandsteines schliesst das präkambrische Zeitalter in Fennoskandia ab, wenn man nicht dazu den blauen Ton rechnen will, welcher am Finnischen Meerbusen die Olenelluszone direkt unterlagert. Er wird aber gewöhnlich als kambrisch oder eokambrisch bezeichnet.“ Im selben Aufsatz wird das Präkambrium von Sederholm in viel weiterem Umfange, als es H. Scupin angibt, definiert, nämlich als „Antekambrium“, — Proterozoicum + Archäicum + u. s. w., also als die Erdgeschichte vor dem Beginn des Kambriums überhaupt. Auch in anderen Arbeiten von J. J. Sederholm ist offenbar keine Zeile vorhanden, aus der herausgelesen werden kann, dass der verehrte Erforscher der präkambrischen Ablagerungen eine unterkambrische Fauna und die entsprechenden Sedimente in eine andere Ära versetzen möchte.

In den Erläuterungen zur geologischen Karte Fennoskandias von J. J. Sederholm²⁹⁾ finden wir folgende Zeilen, welche uns über den Inhalt des Begriffes „Eokambrium“ aufklären: „Silurian and Cambrian. In this division are placed the nonmetamorphic sedimentary rocks of the Silurian and Cambrian ages in the region S. E. and E. from the mountain-chain (including the Eo-Cambrian „Blue Clay“)" u. s. w. (Seite 7), und auf Seite 10: „The nearest outcrops of Eo-Cambrian (i. e. pre-Olenellus) blue clay of the Carelian Isthmus" u. s. w. Auf der beigefügten Karte finden wir ausserdem unter „Silurian and Cambrian" vereinigt alle Sedimente beginnend mit dem „Blauen Ton" der Karelischen Landenge. Es ist klar, dass der Ausdruck „Eokambrium" die Schichten bezeichnet, welche kambrisch sind, aber unterhalb des „Olenellus" (= *Holmia Mickwitzi*) liegen. Es ist also bei H. Scupin der Sederholm'sche Ausdruck „Eokambrisch" fehlerhaft durch „präkambrisch" ersetzt worden. Dies geschah, weil Scupin nur die Schrift von Rüger⁴⁾ zitiert, und Rüger stützt sich wieder auf eine Fussnote bei Metzger²⁾, wo das Eokambrium als „unter dem untersten fossilführenden Kambrium liegend" definiert wird. So kann aber eine geologische Formation nicht definiert werden. Ausserdem ist es nur „der Rest" des „Blauen Tones", was im ganzen Baltikum allein ins „Eokambrium" gestellt werden kann; und den Ausdruck „Eokambrium" treffen wir immer nur im Zusammenhang mit dem „Blauen Ton", wobei es sich ja eigentlich offenbar nur um die Zone mit *Discinella Holsti* handelt! Dieser unglückliche

Ausdruck „Eokambrium“ muss überhaupt vermieden werden, und dies geschieht auch in der massgebenden Literatur über das Kambrium.

Zum Schluss noch ein Wort über den neuen Begriff „Ingrium“. Dieses vom Estonium abzusondern und ins Proterozoikum zu versetzen ist ganz dasselbe, wie wenn wir die unteren 100 m des Buntsandsteins abmessen, als eine besondere „Formation“ oder „Stufe“ mit einem neuen Namen belegen und aus dem Mesozoikum ins Paläozoikum versetzen. Mit dieser Einschränkung mag der Begriff „Ingrium“ bestehen bleiben.

III.

Eine *Corophioides*-Fauna aus dem estnischen unterkambrischen „fossilleeren“ Sandstein. (U-Röhre mit „Spreite“).

Die oberste Zone des estnischen Unterkambriums, der „petrefaktenleere Sandstein“ oder der „Fucoidensandstein“, wie er später ohne Grund genannt wurde (nur wegen seiner annähernden Gleichaltrigkeit mit dem schwedischen Fucoidensandstein), galt bis zur letzten Zeit als vollständig fossilleer. Erst vor ein paar Jahren berichtete Schindewolf²⁴⁾ über das Vorkommen von undeutlichen *Sabellarifex*-artigen Röhren, und im Jahre 1861 entdeckte Helmersen²²⁾ „Pflanzenspuren“ im „Ungulitensande“ bei Narva. Nach dem Profil bei Helmersen zu urteilen, handelt es sich um den „petrefaktenleeren“ Sandstein, die Abbildungen aber stellen schlecht erhaltene einzelne *Corophioides*-Röhren dar. Diese sind unvollständig und in umgekehrter Stellung abgebildet, indem die Zuwachsbogen der Spreite nach oben gerichtet sind. Daher auch die Ähnlichkeit mit Pflanzen.

Der Gattungsbegriff *Corophioides* Smith ist von Rud. Richter²³⁾ genau begrenzt worden, wobei eine strenge Trennung von den spreitenlosen U-Röhren des *Arenicoloides* und *Diplocraterion* durchgeführt wird.

Über die Organisation des Spreitenbaues gibt Aufschluss Richter, wobei er sich auf die umfangreiche Literatur stützt.

Auf Grund aller dieser Angaben ist das (Abb. 3) abgebildete Modell konstruiert worden.

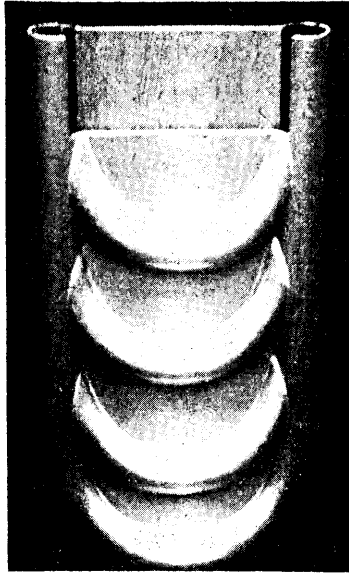


Abb. 3. Modell eines *Corophioides* „U-Rohr mit Spreite“. Ein Teil einer Spreitenwand ist entfernt, um die Kommunikation der Spreite mit dem U-Rohr zu zeigen. Die Bogen auf der Spreitenwand sind Anwachsstreifen, dem Bauprinzip „U in U“ entsprechend. Die ganze Tasche bestand aus mit Schleim zementierten Sandkörnern. — Das Modell ist vom Diener des Geol. Instituts Tartu Herrn Michelson angefertigt worden.

Photo A. Ö.

Corophioides erraticus R. Richter.

Taf. I, Abb. 1, 2.

1926. R. Richter, Flachseebeobachtungen u. s. w. XII—XIV, XII, Seite 203, Taf. 3, Abb. 3, Senckenbergiana, Bd. VIII, Heft 3/4.

Die Art *erraticus* ist auf Grund eines Sandsteingeschiebes aufgestellt worden, welches Grönvall (bei Richter) dem schwedischen Unterkambrium zuweist.

Der Verf. d. Schrift fand im Herbst 1927 im petrefaktenleeren Sandstein am rechten Narva-Ufer, bei Joachimstal in der Stadt Narva, zahlreiche Gebilde, welche eine besondere Ähnlichkeit mit *Arenicoloides uniformis* Blankenhorn, aus dem

Buntsandstein, aufwiesen. Im Frühling 1928 wurde die Lokalität nochmals besucht, Material gesammelt, Profile ausgemessen u. s. w.

Im Sommer desselben Jahres wurde diese Lokalität von R. Richter, A. Foerste und G. Troedsson unter der Führung d. Verf. besucht.

Auch der *Corophioides* wurde zum Gegenstand der Diskussion. Der grösste Teil der hier anstehenden Fossilien wurde von Herrn R. Richter als *C. erraticus* bestimmt, wobei von ihm auch mehrere im folgenden benutzte Ratschläge und Hinweise gegeben wurden.

Der Spreitenbau ist immer deutlich erkennbar. Wie beim Holotypus, so auch hier trägt die Spreite bogige Anwachsstreifen, die untereinander niemals streng parallel sind; die Krümmung ist verschieden stark, und die tiefste Stelle liegt nicht immer in der Mittellinie der Spreite. Die Spreitenbreite bei verschiedenen Exemplaren unterliegt bedeutenden Schwankungen; der Röhrendurchmesser dagegen ist bei den meisten annähernd gleich (ca 3 mm). Taf. I, Abb. 1 sind zwei Exemplare, nebeneinander im Sandstein dargestellt, von denen das rechte breiter ist als das linke. Die vertikalen Röhren sind streng parallel miteinander. Es liegt ein Fund vor, bei dem die Spreite etwas gebogen ist und ein Zylindersegment bildet, ganz ähnlich wie *Corophioides Zimmermanni* (Kolesch)²⁴) aus dem Buntsandstein. Sehr möglich, dass diese Verbiegung in der Enge entstanden ist, indem das Tier eine Verletzung der benachbarten besiedelten Bauten vermeiden wollte. Weil dieser Fall in einander so fernen Zeitabschnitten sich wiederholt, so kann diese Verbiegung schwer als spezifisches Merkmal dienen. Interessant ist es, dass diese Spreitenverbiegung sehr an *Rhizocorallium* erinnert (*Rh. jenense* Zenger, Abb. bei Richter), bei welchem der Querschnitt dem von *C. Zimmermanni* und dem aus Narva sehr ähnlich sieht.

Taf. I, Abb. 2 gibt ein U-Rohr wieder, bei dem die Spreite nicht mehr sichtbar ist. Es ist aber eine angewitterte Fläche, auf welcher in sonderbarer Weise auch die schöne Schichtung des Sandsteines ganz verwischt ist. Es liegen aber mehrere ähnliche Scheitelrohre aus denselben Schichten vor, welche auf frischen Bruchflächen liegen und die Spreite deutlich zeigen. Bei diesen Scheitelrohren ist ausserdem noch immer eine schwache Diver-

genz der Zweige des U-s vorhanden und die Vertikalrohre erweitern sich ein wenig nach oben.

Dimensionen: Taf. I, Abb. 1 (das linke Exemplar): Breite der Spreite 2,0 cm, Breite der Vertikalröhren 0,3 cm, vorhandene Länge 12,0 cm; Taf. I, Abb. 2 (Scheitel-U-Rohr): Breite bei der Mündung 2,8 cm, Breite vor der Biegung 2,4 cm, Röhrendurchmesser 0,7 cm (an der Mündung), 0,3 cm (kleinster Durchmesser). Länge 5 cm.

Grösste beobachtete Spreitenlänge ca 30 cm, grösste beobachtete Breite 5,6 cm bei einem Röhrendurchmesser von 0,4 cm.

Das Exemplar mit der zylindersektorartig gebogenen Spreite ist 4,5 cm breit.

Corophioides Helmerseni n. sp.

Taf. I, Fig. 3, 4; Textabb. 4.

Holotyp: das auf Taf. I, Fig. 3 abgebildete Stück, im Geol. Museum zu Tartu (Dorpat) aufbewahrt.

Unterschied von allen anderen *Corophioides*-Arten: die kolben- oder pendelartige Form der ganzen Tasche (Abb. 4).

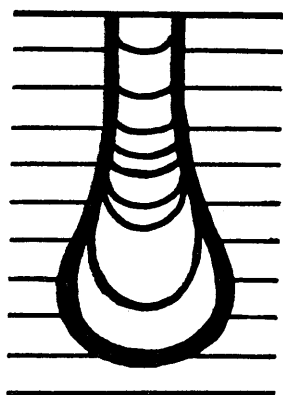


Abb. 4. *Corophioides Helmerseni* n. sp. Schematische Darstellung des Holotypus (Taf. I, Fig. 3), $\frac{1}{2}$ der nat. Gr.

Bei verschiedenen Exemplaren des *Corophioides erraticus* schwankt die Breite der Spreite beträchtlich, doch bei jedem einzelnen Individuum bleibt die Spreitenbreite immer konstant. Dass es so ist, zeigt die Abb. 2, Taf. I, wo ein Scheitelrohr abgebildet

ist, ohne die für die neue Art so bezeichnende Anschwellung. *Corophioides erraticus* vergrösserte beim Wachsen die Länge des U-Rohres, die Dicke des Rohres aber und die Krümmung blieben immer von derselben Form und Grösse. Je länger (grösser, älter) das Tier wurde, desto länger wurde die Spreite. *Corophioides Helmerseni* dagegen stieg nur bis zu einer gewissen Tiefe hinab, denn bei ihm wurde die Verlängerung des Wohnrohres durch die Zunahme der Spreitenbreite und -länge erreicht. Aus diesen Verschiedenheiten muss auf abweichende Organisation geschlossen werden.

Das typische Stück des *Corophioides Helmerseni* ist 9,5 cm lang; oben ist seine Spreite 1,8 cm, unten 4,0 cm breit. Der Röhrendurchmesser ist unten 0,6 cm, oben 0,3 cm. Die Breitenzunahme der Spreite ist nicht ganz von der Tiefe abhängig. Im oberen Teil der Spreite ist sogar eine schwache Einschnürung vorhanden. Die Krümmung der Zuwachsrunzeln ist im engen Teil der Spreite ziemlich gleichartig (zum Unterschied von *erraticus*). Die Krümmung nimmt aber unten zu, und im tiefsten Teil zeigt das U die Form eines Ovals, bei dem die schärfere Spitze (oben) halbkreisförmig eingebuchtet ist. Das Typus-Stück scheint ziemlich vollständig zu sein.

Ausser dem Holotypus liegt noch ein anderes Stück vor, an dem einige interessante Einzelheiten sichtbar sind (Taf. I, Fig. 4). Man sieht die undeutlichen Anwachsstreifen der Spreite und drei ineinander eingesetzte U-Röhren. Weil diese verschieden lang sind, so scheint es, dass der Schnitt dieses Stückes eine schraubenförmig gebogene Fläche war, dass also die Spreite nicht in einer Ebene lag, sondern eine schwache schraubenartige Drehung aufwies. Das ganze Stück scheint der Mitte einer „Kolben- oder Pendelspreite“ angehört zu haben. Die Länge beträgt 5,3 cm, die Breite oben 2,6 und die Breite unten 3,7 cm.

Corophioides Helmerseni kommt zusammen mit *erraticus* vor, ist aber selten.

In der Organisation des *Corophioides* interessieren uns zwei Fragen: 1) ist die Spreite während der Lebenszeit des Tieres eine offene Spalte gewesen, oder wurde sie vom Tier ausgefüllt, indem zwischen den Wänden der Spreite eine Platte aus Sand und

Schleim eingebaut wurde, und 2) wie ging das Wachstum der Spreite vor sich: durch Eingraben nach unten oder nach oben?

Es scheint, dass die Spreite während des Lebens des Tieres tatsächlich als offener Spalt existierte, denn es ist nicht gelungen eine regelmässige Ausfüllung dieses Spaltes zu finden. Es kommt wohl vor, dass die stärker ausgebildeten Anwachsstreifen (Wohngänge) mit Sand ausgefüllt sind und Steinkerne liefern, wie bei *C. erraticus*, Taf. I, Fig. 1. Die Mehrzahl der Fälle besitzt überhaupt keine Spreitenausfüllung, so dass die Zuwachsstreifen tatsächlich als Streifen, nicht als Röhren vorhanden sind. Ausserdem sehen wir im Anstehenden (Taf. II) zahlreiche Spalten im Sandstein: es sind die klaffenden Spreiten. Drittens sieht man im Profil oft nur die eine vertikale Röhre, während die andere, also auch die Spreite, noch im Sandstein verborgen ist. Falls mehrere solche Exemplare nebeneinander stehen, sieht man nichts von den U-Röhren und es entsteht ein *Scolithus*-artiges Bild. Ferner beobachtet man an solchen Schnitten, dass die Schichtung in die Spreiten eingestürzt ist, was nur bei klaffender Spreite geschehen kann. Der Einsturz ist ein Beweis des Vorhandenseins einer Spreite, und zwar nicht bloss einer scheinbaren oder falschen, wie es B a t h e r (zit. nach R i c h t e r) beschreibt. Die falsche Spreite entsteht nämlich bei einem einfachen U-Rohr durch Einsturz des Sandes in den Scheitel des U-s. Falls aber zwei echte Spreiten nebeneinander parallel stehen, so stürzt die Schichtung in die Spreiten, so dass im Profil die Schichten zwischen den Spreiten sich nach oben wölben, und dies nicht nur in einem einzelnen Schnitt, sondern in jedem beliebigen, den wir senkrecht zur Schichtung durch die beiden Spreiten legen.

Es muss bei der Spreitenskulptur von *Corophioides erraticus* zwischen Zuwachs-(Grabungs-)Bogen und Stillstandsröhren ein Unterschied gemacht werden. Die Stillstandsröhren sind ältere, verlassene Scheitelbogen, sie ähneln der untersten Umbiegung der „U“ und liefern dementsprechende Steinkerne. Zwischen diesen verlassenen Wohnräumen sind die Kratz- oder Grabungsbogen gelegen, welche während des Vertiefens der Tasche entstanden sind. Sie sind niemals Röhren gewesen, sondern nur Runzeln an den Wänden der Spreite. Dasselbe gilt auch von *Corophioides Helmerseni*, wobei die Anzahl der verlassenen Wohnröhren kleiner gewesen zu sein scheint als bei *erraticus*. Auf Abb. 4 sind die verlassenen Wohnröhren als schwarze Querbogen eingezeichnet;

die Kratzbogen sind ausgelassen. Sehr möglich, dass die Spreite beim Eingraben des Tieres ebenso breit wie das Wohnrohr war und erst später, mit Sandkörnern ausgekleidet, zur engen Spalte wurde. Aber dann müssten auch die alten Wohnröhren vom Tier in ähnlicher Weise behandelt, also seitlich ausgefüllt worden sein, und die Spreite müsste durch den Steinkern gehen. Dies ist aber nicht der Fall. Ausserdem würde bei einer nachträglichen Auskleidung der Wände die Bogenskulptur verwischt oder gar verschwunden sein. Das wahrscheinlichste ist, dass die Spreite von Anfang an als schmale Spalte mit verfestigten Wänden gebaut wurde.

Es ist ebenfalls wahrscheinlich, dass die Tiere mit dem Alter wachsend das U-Rohr und die Spreite allmählich tiefer verlegten — besonders ist dies der Fall beim pendelartigen *Corophioides*, wo die weiteren Teile der Spreite tiefer liegen als die engen. Es ist nicht möglich, dass das ältere Tier einen engeren Wohnraum brauchte als das junge. Auch ein Wachstum nur nach oben ist nicht denkbar. Denn das erste U musste doch durch Eingraben ins Sediment gemacht werden. Freilich, bei unerwarteter Versandung mussten die Tiere ihre Wohnung nach oben verlängern, vielleicht mussten sie wieder in die älteren oberen Teile der Spreite übergehen, um dem Wasser näher zu sein. Aber es war dies nur eine Folge der Not und nicht die Regel.

Die *Corophioides*-Lokalität.

Corophioides erraticus und sein Genosse wurden im petrefaktenleeren unterkambrischen Sandstein an den Ufern des Narva-Flusses in der estnischen Stadt Narva gefunden. Diese Lokalität — das Narvatal — ist von Helmersen²²⁾ untersucht worden, und seine Beschreibung gilt in den Hauptzügen bis zum heutigen Tag.

Die Aufschlüsse beginnen gleich am Wasserfall, dessen Stufe der Vaginaten- und Glaukonitkalk bilden. Aber erst unterhalb der Eisenbahnbrücke beginnen die besten Profile des unteren Ordoviziums. Der Strom hat hier ein cañonartiges Tal eingeschnitten, dessen steile und nicht sehr hohe Ufer durch die Strömung ständig in frischem Zustande erhalten werden.

Die oberen Schichten an den Flussufern bestehen aus dolomitischem, zum Teil kavernösem grauem Vaginatenkalk mit zahl-

reichen, aber schlecht erhaltenen Cephalopoden. Es ist dies die BIII γ -Zone mit *Asaphus Eichwaldi*. Es werden diese Kalke von einer oolithischen Mergelkalkschicht unterlagert, welche unter dem Namen der „Unteren Linsenschicht“ in der Literatur bekannt geworden ist und von L a m a n s k y²⁵⁾ als Zone mit *Asaphus raniiceps* (BIII β) bezeichnet wurde. Dann folgt eine als Ätzfläche ausgebildete Lücke vom Alter des *Asaphus expansus* (BIII α). Diese Zone ist weiter im Osten ausgebildet.

Die tieferen Kalksteinzonen gehören dem Glaukonit- oder Megalaspiskalke zu und bilden die ziemlich einheitliche BII-Stufe des ostbaltischen Ordoviziums. Es sind im ganzen drei Zonen — α , β und γ — unterschieden worden, welche alle bei Narva vertreten sind.

Unterhalb der Megalaspidenstufe (B II) ist wieder eine Lücke vorhanden. Es fehlt hier der Dictyonemaschiefer, und nur durch eine dünne, stellenweise sogar fehlende Glaukonitsandschicht (B I) ist der Megalaspiskalk vom tiefsten Glied des ostbaltischen Ordoviziums, dem Obolensandstein, getrennt. Zur Zeit des *Dictyonema flabelliforme* und während der B I-Zeit herrschte hier ein Stillstand in der Sedimentation.

Der Obolensandstein ist rötlich bis violettrot gefärbt und zum grössten Teil transversal geschichtet. Oft findet man in ihm helle Flecke, die mit der Schichtung nicht zusammenfallen: es sind Entfärbungserscheinungen. Es kommt reichlich *Obolus apollinis* vor, daneben auch einige *Schmidtia*-Arten. Besonders häufig ist hier die kleine, in vieler Hinsicht noch problematische *Helmerseniasia ladogensis* (J e r e m e j e w). Der Obolensandstein ist hier 3—4 m mächtig und führt an seiner Basis braune, leicht bituminöse Sandsteinblöcke mit *Obolus apollinis* und anderen Formen desselben Obolensandsteins.

Unter dem Obolensandstein liegt mit unebenem Kontakt der „petrefaktenleere“ unterkambrische Sandstein — der Hauptsitz des *Corophioides*. Die Lücke, auf die schon früher hingewiesen wurde, fällt in die Zeit des oberen und Mittelkambriums und in den oberen Teil des Unterkambriums; es ist dies die grösste Lücke innerhalb des ostbaltischen Kambroordoviziums. Das Konglomerat im Obolensandstein und die Kontaktfläche ist schon H e l m e r s e n²²⁾ bekannt gewesen, doch die Deutung dieser Erscheinungen als einer Lücke stammt von Fr. S c h m i d t und M i c k w i t z.

Corophioides wird in allen Aufschlüssen des petrefaktenleeren Sandsteins an den Ufern des Narvastromes gefunden, und überall ist er sehr reichlich vertreten. Die beste und zugänglichste Lokalität liegt am linken Ufer des Flusses gegenüber Iwangorod, an der Mündung des „Joachimstals“ oder „Joaoru“ in den Fluss. Hier ist der Sandstein im vollen Sinn des Wortes ein Spreiten-sandstein. Es kann hier kein Stück des Sandsteins aufgehoben oder abgeschlagen werden, das nicht allseitig von Spreiten bedeckt wäre. Diese Fundstelle wollen wir kurz als „Helmersen-Lokalität“ bezeichnen.

Die petrographische Beschaffenheit des Sandsteins in horizontaler Richtung ist nicht sehr beständig. Einige Bänke sind transversal geschichtet, doch mit ziemlich flachen Neigungswinkeln. Hier ist das folgende Profil gemessen worden, die Abbildung siehe Taf. II, Fig. 1, 3.

Detailprofil am linken Narva-Ufer bei Joachimstal (Lokalität „Helmersen“).

Hangendes: Obolensandstein, als basale Bildung des Ordoviziums.

Hiatus: Die sedimentlose Zeit der *Olenus*-, *Paradoxides* und Ober-*Olenellus*-Formationen.

<i>Corophioides</i> - oder petrefaktenleerer Sandstein (Unterkambrium, obere Zone des Estoniums).	5. Heller Sandstein mit zahlreichen schlecht erhaltenen Spreiten und mit Tongallen ca 2 m
	4. Heller bläulichvioletter sandiger Ton mit undeutlichen Spreiten 0,1 m
	3. Glaukonithaltiger wagerecht geschichteter Sandstein, mit guten Spreiten überfüllt und durch diese stark zerklüftet 0,35 m
	2. Toniger lockerer Sandstein mit Tonlagen, Glaukonit und undeutlichen Kriechspuren und Spreiten 1,0 m
	1. Gelblicher Sandstein mit weissen glaukonitischen Sandsteinlagen, alles wohlgeschichtet und sehr reich an <i>Corophioides</i> . In der Nähe des Flussspiegels sind die Scheitel-U-Röhren sehr häufig und manchmal hohl 0,5 m

Die Schichten setzen sich unter dem Spiegel des Flusses fort und gehen allmählich in die *Volborthella*-Zone über. Die *Scenella*-Zone ist hier nicht entwickelt.

Die Abb. 1 u. 3 auf Taf. II ergänzen das Profil. Auf der Abb. 1 sehen wir die Schichten 5, 4, 3 und 2, wobei die Zerklüftung durch die Spreiten besonders deutlich ist. Nur wenige Spreiten liegen in der Ebene des Aufschlusses; die Mehrzahl bildet, wie es ja zu erwarten ist, mit der Aufschlussfläche verschiedene Winkel und kommt daher als senkrechte Risse zum Vorschein. Einige der letzteren durchsetzen die ganze Bank 3, sie sind also über 35 cm lang. Dasselbe sehen wir auch auf der Abb. 3, wo die ganze Lokalität abgebildet ist. Die weicheren Bänke sind ausgehöhlt.

Die Zerklüftung des Sandsteins durch die Spreiten tritt in besonderer Weise im Flussniveau hervor (Abb. 2, Taf. II). Weil die Spreiten in allen Himmelsrichtungen im Sandstein sitzen, kommt eine kleinsäulige Absonderungsform des Sandsteins zustande. Gegenüber der Strömung ist der Sandstein wegen der Spreiten wenig widerstandsfähig. Es ist dies ein Beispiel dafür, wie die Erosion durch die organischen Einschlüsse des Sediments beschleunigt und befördert wird.

Das Alter des *Corophioides*-Sandsteins ist in der stratigraphischen Tabelle im ersten Abschnitt unserer Abhandlung angegeben. Er gehört ins Unterkambrium, ist offenbar einem Teile der Zone mit *Holmia Kjerulfi* gleichzeitig und bildet das oberste Glied der Estonia-Formation des Ostbaltikums. Doch weil nicht das Tier selbst, sondern nur der von ihm errichtete Spreitenbau vorliegt, so kann dieses Fossil nicht zum sicheren Leitfossil werden. Es wird wohl einmal gelingen, mit Hilfe des *Corophioides erraticus* eine nähere Parallele innerhalb der baltischen unterkambrischen Sandsteine zu ziehen, doch vorläufig wird das Alter des Sediments nicht nach diesem Fossil bestimmt, sondern das Alter des *Corophioides* ist nach dem Sediment und nach der Lage im Profil festgestellt worden.

Das Vorkommen *Corophioides*-artiger Gebilde in Estland ist nicht nur auf den petrefaktenleeren Sandstein beschränkt. Auch in den tieferen Zonen des Estoniums sind solche beobachtet worden, so bei Tallinna, Jägala u. s. w. Aber weil hier das Sediment in

seiner Zusammensetzung sehr unbeständig ist, indem die Sand- und Tonschichten miteinander sehr rasch abwechseln, so sind keine guten Erhaltungsbedingungen gegeben. Ausserdem liegen hier viele Unstetigkeitsflächen vor. Es ist auch wahrscheinlich, dass der *Corophioides* kein sehr bewegtes Wasser liebte; denn die Schichten bei Narva weisen nur eine schwache Transversal-



Abb. 5. „Hühnertrappen“ (positive) aus dem estnischen Unterkambrium. *Volborthella*-Zone bei Kannuka (Ost-Estland). Urstück aus den Sammlungen des Geologischen Institutes zu Tartu.

schichtung auf, der estnische *Eophyton*-Sandstein dagegen ist von viel unruhigerer Schichtung.

Im *Eophyton*-Sandstein, speziell in der *Volborthella*-Zone, kommen nicht allzuseiten „Hühnertrappen“ vor, wie sie aus dem Buntsandstein bekannt geworden sind (vergl. E. K a y s e r, „Lehrbuch der Geologie“, III. Bd., Abb. 126 und die zit. Literatur). Im Buntsandstein sind diese Trappen als die Abdrücke der Scheitelbogen des *Corophioides luniformis* (B l a n k e n h o r n)

erkannt worden. Die Ähnlichkeit mit unserem Stück (Abb. 5) ist so gross, dass es sich auch hier zweifellos um die Scheitel „der U mit Spreite“ handelt. Es sind aber nicht Abdrücke, sondern die Steinkerne der Scheitel, deren grösster Teil abgebrochen ist, nach der Schichtung des Sandsteins zu urteilen. In der Sandsteinplatte selbst nämlich ist nichts mehr von den Spreiten sichtbar. Es ist dies also eine „stark abgetragene Siedelung“²⁶⁾ der liegenden Schicht, von welcher nur die Scheitelbogen erhalten blieben, wobei die Röhrenreste vom feingeschichteten glaukonitischen Sand ausgefüllt wurden. Dieses Stück konnte ich Herrn K. A n d r é e (Königsberg) während seines Besuches in Tartu demonstrieren, und gerade von ihm habe ich den Gedanken, dass es sich um abgetragene Bauten handelt. Ähnliche „Hühnertrappen“ habe ich auf der Halbinsel Kakumägi an der Grenze der *Scenella*- und der *Volborthella*-Zone beobachten können.

Die vorgelegten neuen Tatsachen erlauben einige Schlüsse über die Entstehung des *Corophioides*-Sandsteins zu ziehen.

Der petrefaktenleere = *Corophioides*-Sandstein wurde von A. Ö p i k in einer früheren Schrift²⁷⁾ als kontinentale „Wüstenbildung“ gedeutet. Später („Über den Estländischen „Blauen Ton“ 1926⁹⁾) wird vom selben Verfasser zugegeben, „der petrefaktenleere Sandstein könnte ja auch teilweise mit Wasser bedeckt gewesen sein u. s. w.“. Jetzt müssen wir uns so dazu stellen, dass diese unterkambrische Zone sicherlich im Wasser und im Meere abgelagert wurde. Wir haben ja gesehen, dass dieser Sandstein über die anderen Zonen transgrediert, dass also im Vergleich mit diesen die *Corophioides*-Schichten eine positive Meeresoszillation darstellen. In seinem Liegenden, in den regredierenden Zonen, sind marine Fossilien eingebettet: also liegt die marine Entstehung der hangenden, übergreifenden *Corophioides*-Sandsteine auf der Hand. Ausserdem ist es recht auffallend, dass im *Corophioides*-Sandstein und seinen Tonschichten keine Regenspuren und Trockenrisse gefunden werden, sondern nur unsymmetrische Strömungsrippeln. Manche Gebiete konnten ja dennoch über dem Wasser gelegen sein, aber im grossen ganzen ist der Sandstein als ein Meeressediment entstanden. Wir müssen also annehmen, dass der *Corophioides erraticus* und seine Genos-

sen ebenfalls marine Tiere waren. Die marine Zugehörigkeit des *Corophioides erraticus* kann auch aus der Analogie mit *Polydora* (rezent) und mit *Corophioides luniformis* (Buntsandstein) gefolgert werden, weil die erstere ein Meereswurm ist und dasselbe in betreff des letzteren für wahrscheinlich gehalten wird. Die marine Entstehung des Sandsteins bestätigt einerseits, dass *Corophioides erraticus* ein Seetier war, und andererseits, dass seine Spreite den Bauten anderer mariner Arten ähnelt; also bestätigt das Vorhandensein von *C. erraticus* die marine Entstehung des Sediments. Manus manum lavat. Gleichzeitig steigt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die „U mit Spreite“ aus anderen Formationen ebenfalls marinen Ursprungs sind.

IV.

Flachwassererscheinungen im estnischen Unterkambrium.

Im Sommer 1928 hatte der Verfasser dieser Schrift die Ehre eine private „internationale“ geologische Exkursion im estnischen Kambrium, Ordovizium und teilweise im Gotlandium zu führen. Es nahmen an der Exkursion Teil Dr. A. F o e r s t e (Dayton — Ohio, U. S. A.), Dr. T r o e d s s o n (Stockholm) und Dr. R. R i c h t e r (Frankfurt am Main). In der Umgebung von Tallinna begleitete Herr O r v i k u (Tartu) einige Tage lang die Exkursion, und die Führung auf Ösel übernahm in liebenswürdigster Weise Herr A. L u h a. Für ihre freundliche Hilfe mögen Herr A. L u h a und Herr K. O r v i k u hiermit meinen innigsten Dank empfangen.

Unter anderem wurden auch die Aufschlüsse des Unterkambriums in der Umgebung der Stadt Tallinna beim Marienberge und auf der Halbinsel Kakumägi besucht und Platysoleniten im „Blauen Ton“ bei Kunda gesammelt.

In der Typ-Lokalität Marienburg und auf der Halbinsel Kakumägi haben die verehrten Gäste mehrere wichtige und instruktive Beobachtungen gemacht, die in vieler Hinsicht unser Wissen über das Estländische Kambrium vervollständigen und ergänzen. Diese neuen Beobachtungen sollen zusammen mit anderen im folgenden wiedergegeben werden.

Die genannten Lokalitäten sind in neuerer Zeit von A. Ö p i k ²⁷⁾ untersucht und beschrieben worden. In diesen Schriften werden mehrere Unstetigkeitsflächen im Unterkambrium erwähnt, deren Entstehung lokalen Emersionen zugeschrieben wird. Tatsächlich sind solche Emersionsflächen in den Ablagerungen der *Volborthella*- und der *Scenella*-Zone vorhanden. Einige solche Flächen erweisen sich aber als grosse Wellenfurchen, wobei sie sich nicht nur im Sande, sondern auch im Ton entwickelt haben.

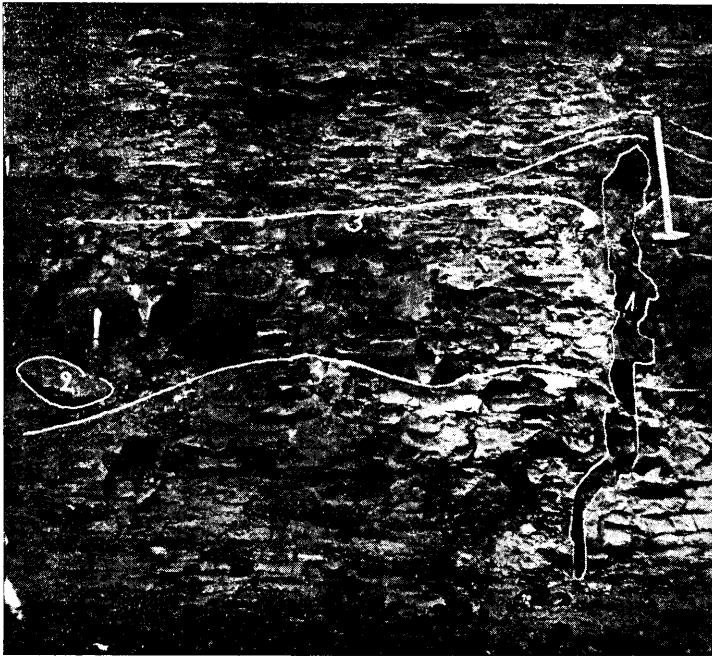


Abb. 6. Detailprofil aus der *Volborthella*-Zone am Marienberg, 4 km östlich von Tallinna. 1 — Im Ton senkrecht stehender Sandsteingang, der von L. R ü g e r als ein Erdbebenspalt gedeutet wird. 2 — Ein Geröll. 3 — Unstetigkeitsflächen. Ca $\frac{1}{20}$ der nat. Grösse. Dieses Profil ist nicht mehr zugänglich. Aus „Beitrag zur Stratigraphie und Fauna des estnischen Unterkambriums“, Publ. of the Geol. Inst. of Tartu, Nr. 3, 1925. Photo A. Ö.

Die in dem „Beitrag zur Stratigraphie und Fauna des estnischen Unterkambriums“ [Tartu 1925 ²⁷⁾] beschriebenen und auf Taf. III abgebildeten Erscheinungen sind als zweifellose Emer-

sions- und Erosionsfolgen zu betrachten. Mit diesen sind aus Sandsteinbänken bestehende Erosionsreste, Konglomerate, Abtragungsflächen u. s. w. verknüpft. In den Tonschichten kommen bis 1,5 m tiefe, mit Sandstein ausgefüllte senkrechte Spalten vor, die alle in einer bestimmten Höhe beginnen, nach unten dünner werden und in der Tiefe keilartig ausklingen (vergl. die oben zit. Schrift, Taf. III, Fig. 2). In manchen von diesen Spalten kommen *Volborthella tenuis* und Spuren von *Mickwitzia monilifera* vor. L. R ü g e r, über die genannte Schrift im Geol. Zentralblatt referierend, erklärt diese sonderbaren Spalten für Erdbebenspalten. Tatsächlich können diese tiefen, engen Risse durch Erosion nicht erklärt werden. Für Trockenrisse sind sie zu tief und breit und allzu selten. Es scheint, dass diese Meinung R ü g e r s am besten imstande ist die Natur dieser Spalten zu erklären, die als Sandsteingänge am Marienberg im unteren Teil der *Volborthella*-Zone anstehen.

Bevor wir uns den Wellenfurchen zuwenden, soll noch einiges über die Einbettungsart der Fossilien berichtet werden. In dieser Hinsicht liegen uns Beobachtungen nur bezüglich des Cephalopoden *Volborthella tenuis* vor. In der oben zitierten Schrift ist ein Vorkommen von *Volborthella tenuis* als Ausfüllung von Trockenrissen an einer Unstetigkeitsfläche, die ja so zahlreich in den kambrischen Zonen vorhanden sind, beschrieben. In diese Risse sind die *Volborthellen*-Steinkerne dicht und richtungslos hineingefallen, und nur selten sind ganze Exemplare zu beobachten. An der Schichtfläche selbst aber, wo die Trockenrisse einmünden, fanden sich keine Cephalopoden. Nur an einigen hier vorhandenen kleinen tonigen Sandsteingeröllern klebten wenige Exemplare, eine Erscheinung, die auch in einer tieferen Schicht zu beobachten war.

Ausser diesen Trockenrissen findet man *Volborthella tenuis* an der Unterseite von Sandsteinbänken auf niedrigen (1 bis 3 cm hohen und ebensobreiten), aber sehr langen Wülsten, denen auf der liegenden Sedimentfläche schmale, lange Rinnen entsprechen. Es sind dies auch wahrscheinlich echte Rinnen, von rieselndem Wasser hinterlassen. Die *Volborthellen* sind in diesen Rinnen immer parallel gestellt, mit der langen Achse in die Länge gerichtet, wobei auch alle Wohnkammern in die eine, die Spitzen in die andere Richtung zeigen. Diese Orientierung der *Volborthellen* muss wohl durch ihre eigene Gestalt und Gewichtsverteilung zu-

stande gekommen sein. Sie waren ja damals noch nicht Steinkerne, sondern kalkige körperlich erhaltene, innen leere, also sehr leichte Schalen. Ausserdem waren offenbar die Luftkammern noch teilweise mit Luft gefüllt. In strömendem Wasser war die luftlose Wohnkammer daher der schwerste Teil, sie musste wie ein Anker zurückbleiben, während die Schale mit der Spitze und den Luftkammern nach vorne, in der Richtung der Strömung gerichtet war. Wahrscheinlich spielte auch die konische Form der Gehäuse bei der Einbettung dieser Fossilien eine wichtige Rolle. In den schmalen Rinnen mussten die Cephalopoden von den Rändern zum Boden herabrollen, wobei, wie bei einem Vogelei, das dickere Ende — hier die Wohnkammer — vorseilen musste. Dadurch wurde eine Querstellung in der Rinne erreicht, welche im fließenden Wasser instabil ist. Das schwere Ende mit der Wohnkammer blieb zurück und wurde am Boden geschleppt, während die Luftkammern nach oben und nach vorne gerichtet wurden.

Aber auch auf ziemlich glatten Schichtflächen liegen die Cephalopoden manchmal ganz ähnlich orientiert, besonders wo sie zerstreut zu finden sind. Bei grosser Anhäufung kann höchstens nur das Vorwiegen einer bestimmten Richtung erkannt werden, gewöhnlich fehlt aber auch diese.

Diese Orientierung der Volborthellengehäuse ist sicherlich ein Strömungsmerkmal, ein Beweis für bewegtes Wasser. Eine orientierte Lage von Cephalopoden im Sediment ist sonst im Ostbaltikum, resp. im Baltikum überhaupt nicht zu beobachten. Nur noch einen ähnlichen Fall kennt der Verfasser, nämlich im Gotlandium von Ösel, wo Exemplare von „*Orthoceras*“ *bullatum* in den *Eurypterus*-Schichten in paralleler Lage gefunden werden, was ebenfalls für strömendes Wasser spricht.

Jetzt wenden wir uns den von A. F o e r s t e und G. T r o e d s o n entdeckten Wellenfurchen zu.

Zum erstenmal sind grosse Wellenfurchen in den Sandsteinen der *Scenella*-Zone auf der Halbinsel Kakumägi beobachtet worden. Hier bilden diese Rippeln einen besonderen Horizont und sind symmetrisch gebaut, doch sind sie nicht immer gleich hoch und lang. Gewöhnlich befinden sich zwischen zwei grösseren Wellen zwei bis drei kleinere, die Schwingungen sind also ziemlich komplizierter Art gewesen. Weil diese Wellen flächen-

haft nicht aufgeschlossen sind, können keine genauen Wellenabstände gegeben werden. Die Wellenhöhe liegt um 20 cm, die Länge um 1,8 m. Diese Sedimentwellen können wohl unter die „Para-ripples“²⁸⁾ eingereiht werden, und zwar unter die „even symmetrical ripples“. Welcher Wasserbewegung die Entstehung dieser Sedimentwellen zu verdanken ist, kann vorläufig nicht festgestellt werden. Die Schwierigkeit liegt nämlich darin, dass die Wellen nicht gleich hoch sind, dass aber die Wellenhöhen gesetzmässige Schwankungen aufweisen. Ausser den durch Strömungs- (Gezeiten-) und durch Windwellen erzeugten Sedimentwellen könnten ja auch Wasserwellen in Betracht kommen, die durch Erdbeben hervorgerufen werden. Wir wissen leider nichts von deren Wirkung auf das Sediment.

Am Marienberg (4 km östlich von Tallinna) kommen ebenfalls grosse Sedimentwellen vor, und zwar von dreierlei Art.

Die Abb. 2, Taf. III stellt kleinere Wellen dar, die den hier aufgeschlossenen oberen Schichten der *Scenella*-Zone angehören (die eigentlichen *Scenella*-Schichten). Das Sediment ist ein etwas kalk-(dolomit-)haltiger Sand mit dünnen tonigen Sandlagen. Aus der Abbildung ist der Bau dieser Sedimentwellen deutlich zu sehen. Die Zahl der Schichten in jeder Welle und jedem Wellental ist die gleiche. Die Schichten selbst sind durchgehend, sie keilen nicht aus und werden auch nicht in anderer Weise unterbrochen. Nur die Mächtigkeit der Schichten ändert sich, je nachdem, ob im Tale oder auf dem Berge gemessen wird. In den Tälern sind die Schichten dünn, abgemagert. Bergauf werden sie dicker, und am dicksten sind sie auf der grössten Höhe der Welle. Diese Sedimentwellen sind vollständig symmetrisch gebaut. Nicht nur dass die Neigungswinkel der Antiklinalen und der Synklinalen gleich sind: die Form der Täler gleicht auch vollständig den Bergen, so dass das Bild der Wellen, wenn wir es umkehren, dadurch nicht verändert wird. Die Form der Wellen ist abgerundet, und im Schnitt senkrecht zur Schichtung haben wir Kurven vor uns, die an Sinuskurven erinnern.

Die Wellenhöhe beträgt 18 cm, die Länge ist gleich 113 cm. Nach der allseitig abgerundeten Form der Sedimentwellen zu urteilen, sind sie nicht durch Strömung, sondern durch wellenbewegtes Wasser entstanden, „Sand Waves“²⁸⁾. Die Verdickung der Schichten in den Bergen und die Verdünnung in den Tälern erinnert besonders an stehende Wellen.

In den Schichten der *Volborthella*-Zone, ebenfalls am Marienberge, liegen einige Horizonte grosser Wellen, die aus Ton oder sandigem Ton bestehen, wie es auf der Abb. 1, Taf. III dargestellt ist. Auf den ersten Blick erscheinen sie als regelmässige, in den Ton einander parallel eingesenkte Rinnen, die später mit Sand ausgefüllt worden sind. Die Sandschichten schmiegen sich anfangs an den Boden der Rinnen, höher hinauf werden sie aber horizontaler, und in der Höhe der Wellenrate sind es schon ganz wagerechte Schichten. Der Sand reichte aber gerade hin, um die Rinnen auszufüllen — oberhalb breiten sich wieder abwechselnd Ton- und tonige Sandschichten aus. Der Sandstein der Rinnen scheint eine einfache Ausfüllung zu sein; es ist nur sonderbar, dass er über die Rinnen nicht hinausreicht.

Die Form der Wellen ist nicht gleichartig, die Tiefe und die Länge schwankt bedeutend. Bei einer Höhe von 26 cm beträgt die Länge 170—182 cm. Sie steigt aber bis 2,5—3 m an, und die grösste gemessene Tiefe erreichte 0,7 m.

Die Wellen sind von „fast symmetrischem“ Bau, doch ihre Oberfläche ist von grober Beschaffenheit, mit kleinen unregelmässigen Unebenheiten versehen. Wir können diese Sedimentwellen mit einiger Sicherheit unter die „Para-ripples“ einreihen. Hier entstanden sie wahrscheinlich durch eine Strömung, die aber nicht lange dauerte, und wohl bei beständiger Wassertiefe. Sehr wahrscheinlich ist hier die Gezeitenströmung tätig gewesen, wie es auch von T w e n h o f e l²⁸⁾ für die „Para-ripples“ angenommen wird.

Das auf Abb. 1, Taf. III wiedergegebene Profil war zur Zeit der Exkursion nicht mehr vorhanden, es ist nämlich vermauert worden.

Von einer ganz anderen Grössenordnung ist die Wellenfläche an der Grenze der *Volborthella*- und *Scenella*-Zone. Die obere Scenellenzone besteht vorwiegend aus dickbankigem Sandstein mit quadriger Absonderung. Die liegende Zone ist dagegen stark tonig.

Eine Wechsellagerung der Zonen, ein Eingreifen der einen Zone in die andere, ist niemals zu beobachten; der Kontakt ist scharf, aber wellig uneben. Die Oberfläche der *Volborthellen*zone trägt sehr grosse Rippeln, deren Höhe bis 2 m erreicht und deren Länge 15—20—25 m messen kann. Dementsprechend ist das

hängende Sediment, der *Mickwitzia*-Sandstein, in den Wellenmulden bedeutend mächtiger als auf den Antiklinalen. Die wellige Beschaffenheit der Schichten setzt sich im *Mickwitzia*-Sandstein fort, wobei die Wellen der höheren Schichten im allgemeinen mit der untersten Wellenfläche nicht zusammenfallen.

Das *Mickwitzia*-Konglomerat innerhalb des *Mickwitzia*-Sandsteins liegt in den Wellenmulden, auf den Bergen ist es aber nicht vorhanden. Diese Fläche wurde früher als eine Auswaschungsfläche gedeutet [R ü g e r ⁴), Ö p i k ²⁷)], doch wie wir jetzt sehen, liegt in diesem Falle kein Grund vor, eine Emersion anzunehmen.

Taf. III, Abb. 3 ist ein Teil einer Wellenmulde dargestellt. Die punktierte Linie ist die Grenze der *Scenella* und der *Volborthella*-Zone.

Wie gesagt, wurden diese Sedimentwellen für Erosionserscheinung erklärt, wobei die Vertiefungen als „Sedimentationsmulden“ bezeichnet wurden. So wird bei Ö p i k ²⁷), Seite 9, 10 und 12, Textabb. 12, eine solche von Rocca-al-Mare (Halbinsel Kakumägi) im *Mickwitzia*-Sandstein, in der Höhe des *Mickwitzia*-Konglomerates beschrieben. Die Tiefe der Welle ist gleich 1,15 m, die Länge beträgt 16 m.

Diese grossen Sedimentwellen mussten ebenfalls in die Gruppe der „Para-ripples“ ²⁸) eingereiht werden und sind durch die Gezeiten entstanden. Es ist interessant, dass diese gigantischen Wellen mit einer Änderung in der Beschaffenheit der Sedimente verbunden sind. Es ist, als ob die starke Strömung keine Sedimentation des feinkörnigen Tones zulassen konnte, so dass in der *Scenella*-Zone vorwiegend Sand vorliegt. Die Strömung setzte ganz u n e r w a r t e t ein — daher die scharfe Grenze gegenüber der Volborthellenzone. In den oberen *Scenella*-Schichten ist die Strömung schon abgeschwächt und der Tongehalt wird wieder bemerkbar, dasselbe auch im *Corophioides*-Sandstein. Es muss aber betont werden, dass noch weitere Forschungen notwendig sind, um genauere Schlüsse über die Beschaffenheit und Entstehung dieser Sedimentwellen zu ziehen. Besonders im letztgenannten Fall können es auch echte „Sand Waves“ ²⁸) gewesen sein.

Neben allen diesen Gross-Rippeln sind reichlich verschiedene normale, kleine Wellenfurchen zu beobachten, und zwar gewöhnlich stark asymmetrische Strömungsfurchen. Reichlich sind auch Trockenrisse, Regen- und Lebensspuren vorhanden. Doch diese

alle treten gewöhnlich in mehr horizontalen Schichten auf und vermeiden die grossgewellten Sedimente.

Alle unsere Kenntnisse über den estnischen *Eophyton*-Sandstein zusammenfassend, gelangen wir zum Bilde eines flachen Meeres mit wiederholten Trockenlegungen und nachfolgenden Überflutungen. Die Überflutungsströmungen wirkten hier und da erodierend, und wo das Wasser genügend tief wurde, bildeten sich die grossen Rippeln. Gegen Ende der *Eophyton*-Zeit (obere *Scenella*-Zone) und während der Ablagerung des *Corophioides*-Sandsteins wurden die Verhältnisse ruhiger, besonders im *Corophioides*-Sandstein, wo wir zwar normale Wellenfurchen finden, niemals aber Trockenrisse oder Regentropfenabgüsse. Wahrscheinlich entstand dieser Sandstein schon ausserhalb des Bereiches des Gezeitenmeeres und wurde in einem ruhigen Binnenmeer abgelagert.

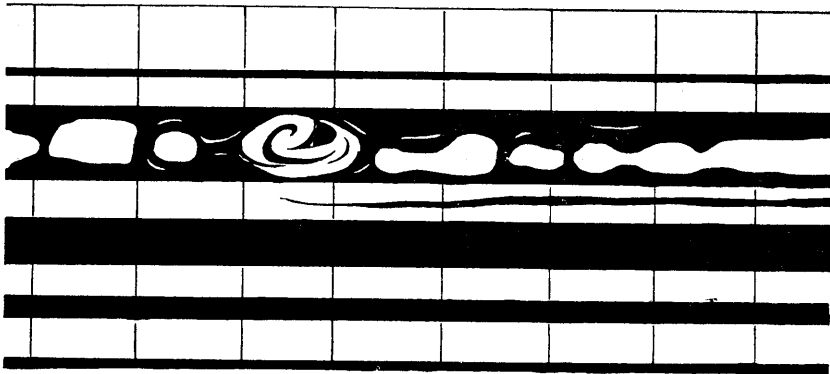


Abb. 7. Detailprofil aus dem petrefaktenleeren Sandstein bei Rannamõisa, westlich von Tallinna. Bemerkenswert ist die Sandsteinknollenschicht und der eingerollte Block. Schwarz ist Ton, weiss — Sandstein. Die Mächtigkeit des abgebildeten Teiles des Profils beträgt ungefähr 2 m.

Obwohl im petrefaktenleeren (= *Corophioides*-) Sandstein keine Grossrippeln beobachtet worden sind, so liegt doch ein Fall vor, wo an starke Wasserbewegung gedacht werden muss.

Das in Abb. 7 wiedergegebene Profil wurde vor einigen Jahren vom Verfasser d. Schrift bei Rannamõisa (ca 15 km westlich von Tallinna) beobachtet. Es ist eine Reihenfolge von weissen Sandsteinen mit bläulichen und grauen Tonschichten, die sehr dünn und zahlreich sein können. Hier ist die Schichtung im allgemeinen ziemlich horizontal. Auffallend ist die Tonbank mit den

Sandsteinknollen, welche seitlich zu einer knolligen Sandsteinschicht verschmelzen. Bemerkenswert ist der eingerollte aus Sand- und Tonschichten bestehende Block. Es ist dies offenbar eine horizontale Sedimentpartie gewesen, die durch irgendwelche Kräfte zusammengerollt wurde. Eine Strömung oder ein Wellenschlag hat die Sandschicht durchbrochen und zum Teil wie einen Kuchen eingerollt. Es ist, wie gesagt, ein Einzelfall.

Unsere Übersicht abschliessend, wollen wir noch bei den auf Taf. IV, Fig. 1, 2 abgebildeten sonderbaren Sandsteinblöcken verweilen. Solche Sandsteinblöcke mit runzeliger „Gehirnsculptur“ kommen in der *Volborthella*-Zone in mehreren Aufschlüssen vor (Teliskopli, Jägala-Joa). Der abgebildete Block liegt am Marienberge am Strande. Er ist allseitig konvex, nur auf einer Seite (Unterseite auf Abb. 2) besitzt er eine Bruchfläche. Es muss betont werden, dass ein beliebiger Schnitt durch diesen Block eine fast geschlossene Kurve darstellt. Die Seiten wölben sich über die Basis, etwa wie bei einem Kolumbusei, das nicht auf seine Spitze, sondern auf die Seite gestellt ist. Die Form des Blockes ist ziemlich unregelmässig, und auf die erwähnte Bruchfläche („Basis“) gestellt, hat er Ähnlichkeit mit einem Pferderumpf.

Der Block besteht aus Sandstein mit Ton und Karbonatbindemittel. Er ist sehr schön konzentrisch-schalig geschichtet, wobei die einzelnen Schichten von annähernd gleicher Mächtigkeit sind. Dieser schalige Bau wird deutlich beim näheren Betrachten der Abb. 2. Wir sehen, dass die gegenwärtige Fläche des Blockes nicht die primäre obere ist, sondern eine innere Schichtfläche darstellt. Die eigenartigen Runzeln auf dem Block wiederholen sich ganz genau in mehreren Schichten tiefer, indem die tiefere Schicht ein genaues Abbild der höheren darstellt. Es sind dies echte Falten oder Runzeln der Schichten, und sie haben nichts mit äusserlich ihnen ähnlichen schuppenartigen Gebilden zu tun, die beim Fliessen einer zähflüssigen Masse entstehen können.

Aus der Beschreibung geht mit Sicherheit hervor, dass es sich hier in keinem Fall um ein Geröll handeln kann, sondern um ein mit dem Sediment gleichzeitig entstandenes Gebilde.

Sollen wir uns diesen Block als eine Ausfüllung einer Vertiefung im Sediment vorstellen, oder bildete er eine Erhöhung auf der Schichtfläche? Eine Ausfüllung, — aber dann musste es eine sonderbare Vertiefung in weichem tonigem und sandigem Sediment gewesen sein, mit einer engen Mündung und innen stark ausgehöhlt. Und falls ein solches Loch denkbar wäre, würde die Ausfüllung doch nicht so schalig werden, es würde nur eine beschränkte Anpassung der Schichten an den Boden und die Seitenwände stattfinden. Auch die Runzeln können dabei nicht gut erklärt werden. Es müssten dann Abdrücke der Grubenwände sein, doch dass sie so genau sich in den tieferen Schichten wiederholen, scheint sehr sonderbar zu sein. Ausserdem setzen sich die Runzeln nicht durch alle Schichten durch. Die Aussenfläche kann runzellos sein; in tieferer Schicht erscheinen die Runzeln; ihre Deutlichkeit erreicht ein Maximum, sie werden schwächer und verschwinden wieder. Sie haben also mit dem vermutlichen Kontakt mit der Grubenwand nichts zu tun.

Es ist aber auch sehr schwer, die Entstehung solcher Blöcke zu erklären, falls sie Erhöhungen bildeten. Tatsächlich bildeten sie auch Erhöhungen, die einseitig an der Schichtfläche befestigt waren. Mechanisch können sie aber nicht entstanden sein. Es sind keine Absonderungsschalen, die durch Insolation oder Verwitterung entstehen konnten; es handelt sich um primäre Schichtung, denn es ist kein Unterschied in der Beschaffenheit des Materiales im Block und in den anderen geschichteten Gesteinen des Profils zu beobachten. Für eine Zusammenballung durch Wellenschlag oder fliessendes Wasser kann der Block ebenfalls nicht gehalten werden, die regelmässige konzentrische Schichtung erlaubt es nicht.

Durch einfache Sedimentation oder Fliessen konnte dies ebenfalls nicht zustande kommen. Man kann sich keine Kraft vorstellen, die imstande wäre die Sedimentkörner so zusammenzuhalten, dass sie allseitig gewölbte Schichten bilden könnten. Dabei müsste dieses instabile System viel flacher werden, es müsste, der Gravitation folgend, zerfliessen, um eine möglichst grosse Fläche des Bodens einzunehmen. Bei unserem Block ist aber das Gegenteil der Fall: bei einer verhältnismässig kleinen Kontaktfläche mit dem Boden, sehen wir das Bestreben eine möglichst grosse Oberfläche zu bilden, welche durch die Runzelung noch vergrössert wird. Dies ist nur dann denkbar, wenn eine Kraft vorhanden ist,

die sich der Schwere widersetzt und die lockeren Sedimentpartikel zusammenhalten kann. Organistentätigkeit ist hier die passendste Erklärung. Es handelt sich hier um dasselbe Prinzip, wie beispielsweise bei den Stromatoporen, die ebenfalls auf einem kleinen Teile des Meeresbodens Bauten von grosser Oberfläche errichteten (*Stromatopora mammilata*, *S. concentrica* u. s. w.). Von ähnlicher Bauart sind die amerikanischen rätselhaften mehr oder weniger konzentrisch gebauten *Cryptozoon* und dgl. Nach dem Bau des Blockes zu urteilen, sind im Querschnitt Beziehungen zu diesen Problematica zu erwarten. Das Material ist aber sehr verschieden. Dort ist es Kalk, hier Sand mit etwas Ton und Kalk. Es war eine Kolonie unbekannter, rätselhafter Geschöpfe, die ihr Substrat aus konzentrischen Schichten aufbauten und dazu aus dem Wasser Sand- und Tonpartikeln auffingen und diese mit ausgeschiedenem Kalk verfestigten. Diese rätselhaften Blöcke mit einem zoologischen oder botanischen Namen zu belegen scheint aber vorläufig zwecklos zu sein, denn es handelt sich um Gebilde, bei denen sogar die organische Natur noch bestritten werden kann.

Schrifttum.

- 1) Benj. Frosterus „Über die kambrischen Sedimente der Karelischen Landenge“. Bulletin de la Comm. Géol. de Finlande, Nr. 75, Helsingfors, Oktober 1925.
- 2) V. Tanner „Über eine Gangformation von fossilführendem Sandstein auf der Halbinsel Långbergsöda-Öjen im Kirchspiel Saltvik, Åland-Inseln“. Bull. de la Comm. Géol. de Finlande, Nr. 25, Helsingfors, Mai 1911.
- Adolf Th. Metzger „Beiträge zur Paläontologie des nordbaltischen Silurs im Ålandsgebiet“. Bull. de la Comm. Géol. de Finlande, Helsingfors, Oktober 1922.
- 3) Gustaf T. Troedsson „Über die präglaziale Verbreitung des Kambrosilurs in Südschweden und im Baltikum“. Zeitschrift für Geschiebeforschung, Bd. III, Heft 4, 1927.
- 4) L. Rümer „Paläogeographische Untersuchungen im baltischen Kambrium unter Berücksichtigung Schwedens. Ein Beitrag zur Paläogeographie des Baltischen Schildes und Fennoskandias“. Zentralblatt f. Min. 1923, Nr. 4, S. 117—128 und Nr. 5, S. 142—155.
- 5) R. Witting u. W. Ramsay „Carte bathymétrique du Golfe de Finlande et du lac Ladoga“. Atlas de Finlande 1910, „Fennia“.
- 6) A. Öpik „Die Inseln Odensholm und Rogö. Ein Beitrag zur Geologie von NW-Estland“. Acta et Comm. Univers. Tartuensis (Dorpatensis) A XII. 2, dasselbe in Publ. of the Geol. Institution of the Univ. of Tartu, Nr. 9, Tartu 1927.
- 7) B. Doss „Über die Herkunft des Naturgases auf der Insel Kokskär im Finnischen Meerbusen, nebst Bemerkungen über die Entstehung der Insel“. Zentralblatt für Min. etc. 1913.
- 8) Carl Wiman „Studien über das nordbaltische Silurgebiet I. Olenellussandstein, Obolussandstein und Ceratopygeschiefer“. Bulletin of the Geological Institution of the University of Upsala, Vol. VI, Part 1, Nr. 11, 1902. Upsala 1905.
- 9) A. Öpik „Über den estländischen „Blauen Ton“.“ Sitzungsberichte der Naturforscher-Gesellschaft bei der Universität Tartu, Band XXXIII, 1, 1926, dasselbe in Publ. of the Geol. Inst. of the Univers. of Tartu, Nr. 6, Tartu 1926.
- 10) O. H. Schindewolf „Eine neue Rekonstruktion von *Holmia Mickwitzi* (Schmidt) (Fam. *Mesonacidae* Walc.). Aus dem Unterkambrium Estlands“. Zeitschrift der Deutschen Geologischen Gesellschaft, Band 79, Jahrgang 1927, Monatsbericht Nr. 5—7.
- 11) T. M. Janischewsky „Über Trilobitenreste (*Schmidtellus Mickwitzi* F. Schmidt) aus dem kambrischen blauen Ton“. Annuaire de la Société Paléontologique de Russie, T. VI, 1926. Leningrad 1927.

- 12) Johan Kiær „The Lower Cambrian Holmia Fauna at Tømten in Norway”. Videnskapsselskapets Skrifter I, Mat.-Naturh. Klasse, 1916, Nr. 10, Oslo (Christiania).
- Thorolf Vogt „Forholdet mellem Sparagmitsystemet og det marine Underkambrium ved Mjøsen”. Norsk Geologisk Tidsskrift, Bind VII, Hefte 3—4.
- 13) J. Samsonowicz „Sur la stratigraphie du Cambrien et de l'Ordovicien dans la partie orientale des montagnes de Święty Krzyż (Sainte Croix), Pologne Centrale”. Bulletin du Service Géologique de Pologne, Vol. 1, Livr. 1, Varsovie 1920.
- 14) G. F. Matthew „The Protolenus Fauna”. Contributions from the Geological Department of Columbia College, No. XXVIII, und in Trans. New York Academy of Science XIV, 101—153, 1895.
- 15) M. Janichevsky „Sur les restes des *Tubicola* de l'argile cambrien”. Annuaire de la Société Paléontologique de Russie, T. IV, 1922, Leningrad 1924.
- 16) Herman Hedström „Remarks on some Fossils from the Diamond Boring at the Visby Cement Factory”. Preliminary Report. Sveriges Geologiska Undersökning, Ser. C, Nr. 314, Årsbok 16 (1922), Nr. 4, Stockholm 1923.
- 17) J. Bok „Geognostische Beschreibung des Untersilurischen und Devonischen Systems des Gouv. Petersburg”. Mater. zur Geologie Russlands, St. Pet. 1869.
- 18) Karpinsky „Zur Geologie des Gouvernements Pskow”. Bullet. de l'Acad. de St.-Pét. XXXI, p. 473, 1887.
- 19) Ch. Walcott „Olenellus and other genera of the Mesonacida”. Smiths. Miscellaneous Collections, Vol. 53, Nr. 6, 1910.
- —do— „The Cambrian and its Problems in the Cordilleran Region”, in „Problems of American Geology”, Yale University Press, 1915.
- 20) H. Scupin „Beiträge zur Geologie der ostbaltischen Länder. 1. Vordevonische Spuren des „Alten Roten Nordlands” im Ostbaltikum”. Zentralblatt für Min. u. s. w., Jahrg. 1927, Abt. B, Nr. 8, S. 297—302.
- 21) O. H. Schindewolf, Diskussion zu „Die fossilen Fährten und Bauten der Würmer. Ein Überblick über ihre biologischen Grundformen und deren geologische Bedeutung” von Rud. Richter (Frankfurt a. Main). Paläontologische Zeitschrift, Band IX, Heft 1/3, 1927.
- 22) G. v. Helmersen „Die geologische Beschaffenheit des unteren Narovatales und die Versandung der Narovamündung”. Bulletin de l'Acad. des Sciences de St.-Pét. 1861.
- 23) Rud. Richter „Flachseebeobachtungen zur Paläontologie und Geologie” VII—XI, B. Über „*Arenicoloides*” Blanckenhorn des Buntsandsteins”. Senckenbergiana, Bd. VI, Heft 3/4, April 1924.
- —do— „Flachseebeobachtungen zur Paläontologie und Geologie XII—XIV. XII — Bau, Begriff und paläogeographische Bedeutung von *Corophioides luniformis* (Blanckenhorn)”. Senckenbergiana, Bd. VIII, Heft 3/4, 1926.

- 24) K. Kolesch „Beitrag zur Stratigraphie des mittleren Buntsandsteines im Gebiete des Blattes Kahla“. Jahrbuch der Preussischen Geologischen Landesanstalt zu Berlin für das Jahr 1919, Band XL, Teil II, Heft 2, Berlin 1921.
- 25) W. Lamansky „Die ältesten silurischen Schichten Russlands (Étage 13)“. St.-Petersburg 1905.
- 26) O. H. Schindewolf „Studien aus dem Marburger Buntsandstein III—VII“. Senckenbergiana, Bd. X, Heft 1/2, 10. März 1928.
- 27) A. Öpik „Beitrag zur Stratigraphie und Fauna des estnischen Unterkambriums (Eophyton-Sandstein)“. Publications of the Geological Institution of the University of Tartu, Nr. 3, Tartu 1925.
- 28) William H. Twenhofel „Treatise on Sedimentation“. London 1926.
- 29) J. J. Sederholm „Explanatory Notes to accompany a Geological Sketch-Map of Fenno-Scandia“. Helsingfors 1908.
- 30) A. Mickwitz „Die Stratigraphie und Topographie des Bodens des Finnischen Meerbusens (Programm der Arbeit)“. Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg, Série VI, 1907, II, S. 699.

Erklärung der Tafeln.

TAFEL I.

Alles in natürlicher Grösse.

1. *Corophioides erraticus* Richter, zwei Exemplare im Sandstein nebeneinander. Das rechte, unvollständige Exemplar erinnert an die von Helmersen²²⁾ beschriebenen Pflanzenreste, es muss nur das Bild umgekehrt betrachtet werden.
2. Scheitel-U-Rohr (das letzte Wohnrohr) von *Corophioides erraticus* Richter. Ausnahmsweise ist die Schichtung des wohlgeschichteten Sandsteins und die Spreite nicht zu sehen. Das U-Rohr ist zum Teil von einem lockeren Ton- und Sandgemenge ausgefüllt.
3. *Corophioides Helmerseni* n. sp. Holotyp. Zu beachten ist die regelmässige Zuwachsskulptur und die pendel- oder kolbenartige Erweiterung in den tieferen Teilen. Schematisch ist dieses Stück auf der Textabbildung 4 wiedergegeben.
4. *Corophioides Helmerseni*, ein Mittelstück, von der Stelle, wo die Erweiterung beginnt.

T A F E L II.

Die „Helmersen“-Lokalität am linken Ufer des Narvaflusses, bei Joaoru (Joachimstal in der Stadt Narva).

1. Detailprofil des petrefaktenleeren = *Corophioides*-Sandsteins. (Das vollständige Profil siehe Abb. 3.) Die vertikalen Spalten sind Spreiten von *Corophioides*, die in allen Himmelsrichtungen im Sandstein sitzen. Die Numeration der Schichten (am linken Rande) wie im Profil auf Seite 38 und wie auf dieser Tafel Abb. 3.
2. Durch *Corophioides*-Spreiten zerklüfteter Sandstein von kleinsäuliger Absonderungsform. Der Schutt und die grösseren Blöcke im Hintergrund bestehen aus dem Spreitensandstein.
3. Allgemeine Ansicht. Der Schutt und die Blöcke stammen aus dem Spreitensandstein. Die Numeration der Schichten (am linken Rande) wie in Abb. 1 und auf Seite 38. Die Zerklüftung des Sandsteins durch die Spreiten ist deutlich sichtbar.

T A F E L III.

Marienberg oder Suhkrumägi, 4 km östlich von Tallinna.

1. Wellen im Ton der *Volborthella*-Zone. Die Wellentäler sind mit Sandstein ausgefüllt. Dieses Profil ist jetzt vermauert.
2. Wellen in den *Scenella*-Schichten der *Scenella*-Zone. Im Estonium kann man mit kleinen Schaufeln arbeiten, so wenig fest sind die Sedimente.
3. Allgemeine Ansicht. Die schwarzen Punkte bezeichnen die Grenze der sandigen (oberen) *Scenella*-Zone und der unteren tonigen *Volborthella*-Zone. Die Grenzfläche besteht aus grossen Para-Wellen, ein Wellental ist auf dem Bilde sichtbar. Es stehen: links A. Foerste, rechts R. Richter.

T A F E L IV.

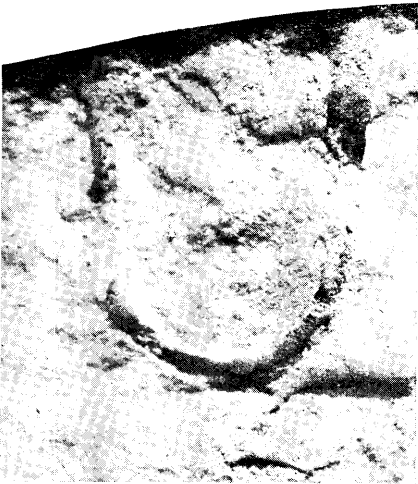
- 1 und 2. Der sonderbare Block aus der *Volborthella*-Zone vom Marienberge. Länge des Hammers 50 cm. Abb. 1 rechts vom Block sind Stücke mit Abdrücken (Negativen) der Runzeln zu sehen.



1



3



2



4



1

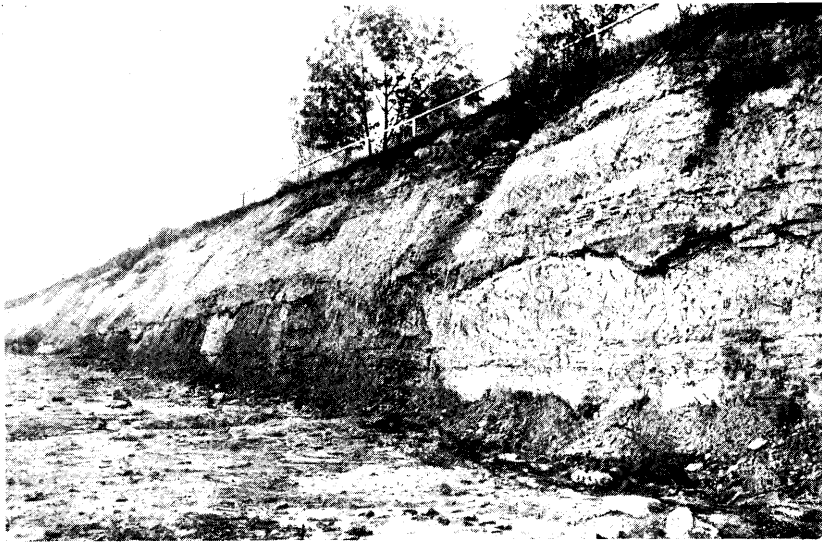


2



3

Photo A. Ö.



1

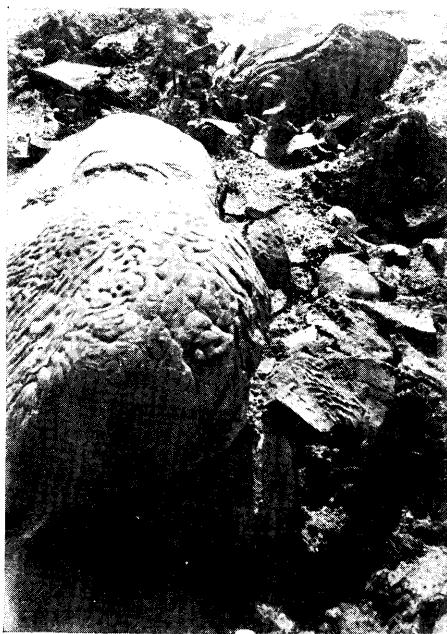
Photo A. Luha.



2



Photo A. Ü.



1



2

Photo A. Ö.

ÜBER DIE ANZAHL DER LÖSUNGEN DER VIERFARBENAUFGABE

VON

J. NUUT

TARTU (DORPAT) 1929

1. Fragestellung.

Die Tatsache, dass 4 Farben zur Bezeichnung der Länder einer Landkarte genügen¹⁾, gibt Anlass zu folgender Fragestellung²⁾:

Auf wieviele Arten lassen sich Gebiete einer Kugel-
fläche mit Hilfe von 4 Zeichen benennen, wenn jedem Ge-
biet ein Zeichen, benachbarten Gebieten dabei stets ver-
schiedene Zeichen zukommen sollen?

Als benachbart sind hierbei solche Gebiete anzusehen, die ein gemeinsames stetiges Grenzkurvenstück besitzen. Die geforderte Bezeichnung möge Vierfarbenbezeichnung heißen.

Dieses Problem soll durch ergänzende, die Art der Kugel-
teilung betreffende Forderungen eingeschränkt werden. Die An-
zahl der Gebiete, Kanten und Ecken sei endlich, jedes der Gebiete,
als Punktmenge für sich betrachtet, zusammenhängend. Es soll
ferner eine der ursprünglichen Teilung dual zugeordnete Teilung
existieren, von der Beschaffenheit, dass die Ecken der dualen Teilung
den Gebieten der ursprünglichen eineindeutig entsprechen, dabei
zwei Ecken der dualen Teilung höchstens eine Verbindungskante
aufweisen, nämlich dann und nur dann, wenn die zugehörigen
Gebiete der ursprünglichen Teilung benachbart sind. Diese duale
Teilung bietet sozusagen eine graphische Darstellung der Ge-
bietskollisionen in der ursprünglichen³⁾. Dass wirklich Kugel-
teilungen existieren, welche diese geforderte graphische Darstel-

1) Das Vierfarbenproblem oder Kartenfarbenproblem ist unter den Mathe-
matikern zuerst von Francis Guthrie und de Morgan berührt worden;
vgl. Federic Guthrie, Proc. Edinb. 10 (1880), p. 727; M. Dehn — P. Hee-
gaard, Enz. d. math. Wiss. III AB 3, p. 177—178 (daselbst Literaturangaben);
J. Sarv, Acta et Comm. Univ. Tartuensis (Dorpat.) A XIII₁ (1927). Ein geschicht-
licher Überblick bei A. Errera, Period. di Matem. IV—VII — 1 (1927), p. 20—41.

2) Behandelt von A. C. Dixon, Messenger of Math. 32 (1902), p. 81—83,
später in allgemeinerer Gestalt von G. D. Birkhoff, Annals of Math. 2 — XIV
(1912), p. 42—46. Diese Arbeiten standen mir nicht zur Verfügung.

3) Die duale Teilung findet Verwendung in den Untersuchungen von
P. G. Tait, Edinb. Proc. 10 (1880), p. 501 und p. 729, Edinb. Trans. 29 (1880), p. 657.

lung gestatten, ersieht man etwa am Beispiel der Tetraederteilung: wird in jedem der vier Tetraedergebiete je ein Punkt als Repräsentant gewählt, jedes Paar dieser Repräsentanten quer über die gemeinsame Grenze direkt verbunden, so erhält man eine zur ursprünglichen duale Teilung von der gewünschten Art.

Der Vierfarbenbezeichnung der Gebiete entspricht eindeutig eine Vierfarbenbezeichnung der Ecken in der dualen Teilung. Das oben formulierte Problem wird somit auf folgendes reduziert:

Auf der Kugel ist eine endliche Anzahl von Punkten (Ecken) durch stetige Kurven (Kanten) verbunden, dabei so, dass die Kanten sich nicht ausserhalb der Ecken treffen, und dass zwei Ecken höchstens eine Verbindungskante aufweisen. Es soll bestimmt werden, auf wieviele Arten eine Vierfarbenbezeichnung der Ecken durchführbar ist.

In dieser Fassung werden die Forderungen anschaulich-übersichtlicher, was die kombinatorische Behandlung der Frage erleichtert. Die gesuchte Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen findet ihren Ausdruck jedenfalls in einer nicht-negativen ganzen Zahl. Der hypothetische Vierfarbensatz behauptet, dass diese Zahl positiv ist.

Wir wollen die duale Teilung ein Netz nennen, die Ecken dieser Teilung als Knoten, die Kanten als Fäden, die Gebiete als Maschen des Netzes ansprechen. Das Netz soll gesättigt heissen, sobald seine Maschen sämtlich dreieckig sind. Diese Bezeichnung rechtfertigt sich dadurch, dass einem Netz allemal neue Fäden hinzugefügt werden können, solange noch nicht alle Maschen dreieckig sind, während ein Netz mit ausschliesslich dreieckigen Maschen keine neuen Fäden mehr aufnehmen vermag, weil zweieckige Maschen der Definition nach nicht gestattet sind. Sollte der Vierfarbensatz für gesättigte Netze richtig sein, so muss er auch für alle Netze gelten, weil die Hinzunahme neuer Fäden wohl manche Vierfarbenbezeichnung, die vorher möglich war, unmöglich machen, keinesfalls aber neuen Arten Raum geben kann.

Projiziert man ein gesättigtes Netz stereographisch auf die Ebene, so entsteht ein aus dreieckigen Maschen gebildetes ebenes Netz mit dreieckigem Rand. Diesen Rand bilden nämlich die Projektionen der Fäden derjenigen ausgezeichneten sphäri-

schen Masche, die das Projektionszentrum enthält. Entfernt man aus der Projektion einen Randknoten und die in ihm mündenden Fäden, so verbleibt als Rest ein kompaktes Gebilde von aneinandergehefteten ebenen Dreiecken, jedoch wird der Rand dieses Gebildes im allgemeinen kein Dreieck, sondern ein r -Eck sein ($r \geq 3$). Ebene Netze solcher Art sollen Normalnetze heissen; im Spezialfall $r = 3$ erhält man gesättigte ebene Netze.

In der vorliegenden Arbeit soll die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen der Knoten von Normalnetzen bestimmt werden, und zwar mit Hilfe von Formeln, die planmässigen ferneren Untersuchungen über die Gültigkeit des Viertarbensatzes zugänglich sind.

2. Die Farbeninvarianten.

Hat man eine Bezeichnung der Knoten eines Normalnetzes gemäss den Forderungen des Problems gefunden, so resultieren hieraus sofort 23 neue Bezeichnungsarten durch Permutation der vorgegebenen verwendeten Zeichen. Sämtliche 24 auseinander durch Permutation hervorgehende Vierfarbenbezeichnungen sollen hier als nicht wesentlich untereinander verschieden angesehen werden; untereinander wesentlich verschieden sind also nur solche Bezeichnungen, die nicht durch Permutation ineinander übergehen. Da die Anzahl aller überhaupt möglichen Bezeichnungen einer endlichen Menge von Punkten mit Hilfe einer endlichen Menge von Zeichen sicher endlich ist, so existiert eine obere Schranke für die Anzahl paarweise wesentlich verschiedener Vierfarbenbezeichnungen eines vorgelegten Normalnetzes. Fasst man also jedesmal alle nicht wesentlich verschiedenen Bezeichnungen in einen Komplex zusammen, so ist die Anzahl N dieser Komplexe endlich, und die Gesamtzahl der Lösungen für das Netz beträgt $24 N$. Das im § 1 gestellte Problem reduziert sich auf die Bestimmung der für das Normalnetz charakteristischen Zahl N . Wir nennen N die absolute Farbeninvariante des Normalnetzes.

Eine in mancher Hinsicht bequemere Definition dieser Farbeninvariante erhält man folgendermassen:

Es seien a, b, c, d die zu verwendenden 4 Zeichen. Geht man von einer fixierten Masche des Normalnetzes aus, so müssen die 3 Knoten dieser Masche notwendig mit 3 verschiedenen Zeichen versehen werden. Wählt man unter den 24 Möglich-

keiten eine aus, etwa die Bezeichnung der Knoten A, B, C der Reihe nach entsprechend mit a, b, c , — was fernerhin als $A \equiv a, B \equiv b, C \equiv c$ geschrieben werden mag, so entsteht die Frage:

Drei zu einer dreieckigen Masche gehörige Knoten sind als a, b, c fixiert; auf wieviele Arten lässt sich die Vierfarbenbezeichnung der übrigen Knoten dann noch durchführen?

Zwei beliebige Vierfarbenbezeichnungen der übrigen Knoten sind dann jedenfalls wesentlich verschieden, da eine von der identischen verschiedene Permutation der Zeichen a, b, c, d nicht die für das Ausgangsdreieck verwendeten Zeichen a, b, c sämtlich in Ruhe lassen kann. Hat man andererseits eine ganz beliebige Vierfarbenbezeichnung des Normalnetzes gefunden, so ist es hieraus möglich durch Permutation zu einer und nur einer Bezeichnung zu gelangen, die $A \equiv a, B \equiv b, C \equiv c$ liefert; die inverse Permutation führt von letzterer Vierfarbenbezeichnung zur erstgenannten zurück. D. h.:

Jede Vierfarbenbezeichnung überhaupt entsteht durch Permutation aus einer und nur einer Vierfarbenbezeichnung bei fixierter Bezeichnung der Ausgangsmasche. Existieren N' Vierfarbenbezeichnungen der letztgenannten Art, so muss die Gesamtzahl der Vierfarbenbezeichnungen des vorgelegten Normalnetzes gleich $24N'$ sein. Hieraus fließt aber $N' = N$, m. a. W.:

Die absolute Farbeninvariante kann als Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen bei fixierter Bezeichnung der Ausgangsmasche definiert werden.

Aus der Invarianz von N fließt dann sofort:

Die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen bei fixierter Ausgangsmasche ist von der speziellen Wahl dieser Masche unabhängig.

Eine ganz analoge Betrachtung lässt sich durchführen, sobald die Vierfarbenbedingung noch durch erschwerende Nebenbedingungen ergänzt wird. Als solche Nebenbedingungen werden weiterhin folgende auftreten:

1) Ein Komplex von Knotenpaaren auf dem Rande des Normalnetzes

$$(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_\mu, B_\mu) \quad (1)$$

soll dadurch ausgezeichnet sein, dass nur solche Vierfarbenbezeichnungen in Betracht kommen, die in jedem Paar die Komponenten A, B identisch bezeichnen, — geschrieben: $A_i \equiv B_i$.

2) Ein Komplex von Knotenpaaren auf dem Rande des Normalnetzes

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_\nu, Y_\nu) \tag{2}$$

soll dadurch ausgezeichnet sein, dass nur solche Vierfarbenbezeichnungen in Betracht kommen, die in jedem Paar die Komponenten X, Y verschieden bezeichnen, — geschrieben $X_i \neq Y_i$.

Versteht man unter

$$N_{(+A_1B_1) \dots (+A_\mu B_\mu)(-X_1Y_1) \dots (-X_\nu Y_\nu)} \tag{3}$$

oder kurz

$$N_{(+AB)(-XY)} \tag{4}$$

die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen, die sich für das vorgelegte Netz ergeben, wenn die Bezeichnung der Knoten einer Ausgangsmasche festgelegt und die Erfüllung der beiden Nebenbedingungen gefordert wird, so folgt sofort die Unabhängigkeit dieser Anzahl von der speziellen Wahl der Ausgangsmasche. Diese Zahl $N_{(+AB)(-XY)}$ soll als bedingte Farbeninvariante des Normalnetzes bezeichnet werden.

Sind die Nebenbedingungen unerfüllbar, so ist die zugehörige bedingte Farbeninvariante gleich null. Verschwinden die Nebenbedingungen, so geht die bedingte Farbeninvariante in die absolute über.

3. Reduzible Normalnetze.

Besitzt ein Normalnetz Fäden, die als Diagonalen des Randpolygons angesprochen werden können, so soll dieses Netz *reduzibel* heißen. Die Diagonalfäden wollen wir auch Querschnitte des *reduziblen Normalnetzes* nennen. Ein Normalnetz ohne Querschnitte soll *irreduzibel* heißen. Gesättigte Netze ($r = 3$) sind allemal *irreduzibel*.

Ist AB (Fig. 1) ein Querschnitt eines *reduziblen Normalnetzes*, so können wir zur Bestimmung der absoluten

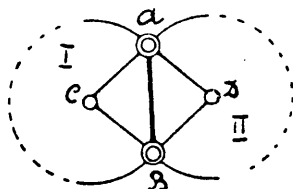


Fig. 1.

Farbeninvariante N dieses Netzes von der allemal existierenden Masche ABC ausgehen, etwa $A \equiv a$, $B \equiv b$, $C \equiv c$ wählen. Sind N' und N'' die absoluten Farbeninvarianten der beiden Teilnetze I und II, die aus dem gegebenen durch den Querschnitt AB entstehen, wobei C in I gelegen angenommen ist, so hat man für den Knoten D der in II notwendig existierenden Masche ABD noch 2 statthafte Bezeichnungen, nämlich $D \equiv d$ oder $D \equiv c$. Jede dieser beiden Bezeichnungen führt im Teilnetz II zu N'' Vierfarbenbezeichnungen, von denen jede mit den N' durch ABC bedingten Bezeichnungen des Teilnetzes I verträglich ist. Hieraus fließt

$$N = 2 N' N'' \quad (5)$$

Durch vollständige Induktion erkennt man ferner sofort, dass beim Vorhandensein von q Querschnitten, also $q + 1$ Teilnetzen, die Zahl N sich aus der Formel

$$N = 2^q N' N'' \dots N^{(q+1)} \quad (6)$$

bestimmt, wenn $N^{(\mu)}$ die absolute Farbeninvariante für das μ -te Teilnetz bedeutet. Daraus folgt zugleich, dass man sich bei der Lösung des im § 1 gestellten Problems auf irreduzible Normalnetze beschränken darf. Zunächst soll aber ein Spezialfall reduzierbarer Netze erledigt werden.

Bezeichnet i die Anzahl der inneren, d. h. nicht auf dem Rande gelegenen Knoten eines Normalnetzes, f die Anzahl der Fäden, m die Anzahl der Maschen, d. h. der Elementardreiecke, aus denen das Netz zusammengesetzt ist, so hat man auf Grund der Euler'schen Polyederformel

$$(m + 1) + (r + i) = f + 2. \quad (7)$$

Eine einfache Überlegung zeigt aber

$$2f = 3m + r. \quad (8)$$

Wird dies mit (7) verknüpft, so resultiert

$$m = r + 2(i-1) \quad (9)$$

und

$$f = 2r + 3(i-1). \quad (10)$$

Ist das Netz frei von inneren Knoten, also $i = 0$, so ergibt sich demnach $m = r - 2$, $f = 2r - 3$. Weil dann jedoch jeder Faden entweder zum Rande gehört oder einen Querschnitt darstellt, so berechnet sich die Anzahl der Querschnitte als $(2r - 3) - r$, d. h. sie ist gleich $r - 3$. Das Fehlen innerer Knoten bewirkt, dass sämtliche Teilnetze, in welche unser Normalnetz dank allen diesen Querschnitten zerfällt, einfach Elementardreiecke sind. Nun ist für ein alleinstehendes Elementardreieck die absolute Farbeninvariante gleich 1, wie aus der Definition ersichtlich. Auf Grund von (6) wird daher für ein innen knotenfreies Normalnetz die absolute Farbeninvariante, die wir dann als $\overset{0}{N}$ bezeichnen wollen, gleich

$$\overset{0}{N} = 2^{r-3} = 2^{m-1}. \quad (11)$$

Die Zahl 2^{m-1} ist eine obere Schranke für die absolute Farbeninvariante eines m -maschigen Netzes überhaupt. Denn schreitet man, um Vierfarbenbezeichnungen zu finden, von einer Masche ausgehend, von Dreieck zu Dreieck fort, jedoch so, dass eine Dreieckspitze allemal erst dann an die Reihe kommt, wenn beide Eckpunkte der zugehörigen Grundlinie schon bezeichnet sind, so hat man stets die Wahl zwischen beiden an der Basis nicht benutzten Zeichen, — sofern nicht andere Hemmnisse eintreten. Im günstigsten Falle verdoppelt sich somit mit jedem Schritt die Anzahl der in Betracht kommenden Bezeichnungsarten. Da ausser dem Ausgangsdreieck noch $m - 1$ andere Dreiecke vorhanden sind, so treten höchstens 2^{m-1} Verdoppelungen ein, woraus die Richtigkeit der Behauptung ersichtlich ist.

Die Zahl i soll die Ordnung des jeweiligen Normalnetzes heissen; die Farbeninvarianten eines Netzes i -ter Ordnung sollen fernerhin auch als $\overset{i}{N}$ geschrieben werden.

Wir suchen eine Reduktionsformel, die es gestattet Farbeninvarianten für Normalnetze i -ter Ordnung aus Farbeninvarianten für Normalnetze $(i-1)$ -ter Ordnung zu berechnen, wobei die absolute Farbeninvariante $\overset{0}{N}$ schon durch (11) bekannt ist. Für $i = 0$, $m > 1$ ist das Netz allemal reduzibel; bei $i > 0$ genügt die Betrachtung irreduzibler Typen.

Wo Missverständnisse ausgeschlossen sind, soll das Symbol $\overset{i}{N}$ eventuell nicht nur die Farbeninvariante, sondern auch das zugehörige Netz selbst bezeichnen.

4. Reduktion einer bedingten Farbeninvariante.

Für $i = 1$ wird nach (9) und (10) $m = r$, $f = 2r$. Man hat einen und nur einen irreduziblen Netztypus, der an ein Rad mit Speichen erinnert (Fig. 2). Ausser den r Randfäden müssen nämlich noch genau r Fäden auftreten, weil die Gesamtzahl $2r$ beträgt. Soll kein Querschnitt existieren, so muss jeder innere Faden von einem Randknoten ausgehen und in den einzig vorhandenen inneren Knoten münden. Da genau r Randknoten vorhanden sind, so werden damit sämtliche r nach innen führende Fäden aufgebraucht. Das Netz ist damit eindeutig bestimmt.

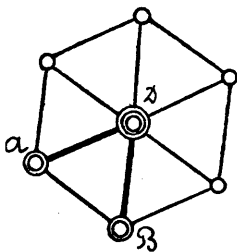


Fig. 2.

Entfernt man eine Masche, etwa ABD , so verbleibt ein reduzibles Restnetz ohne innere Knoten, mit $r-2$ von D ausgehenden Querschnitten. Jede der $\overset{0}{N}$ Vierfarbenbezeichnungen dieses Restnetzes führt dann

und nur dann zu einer Bezeichnung im $\overset{1}{N}$, wenn $A \neq B$, weil im Netz erster Ordnung diese beiden Punkte direkt verbunden erscheinen. Man hat daher

$$\overset{1}{N} = \overset{0}{N} - \overset{0}{N}_{(+AB)}. \quad (12)$$

Das auf dem Rande des Restnetzes gelegene Knotenpaar AB ist mit dem „zwischenliegenden“ Randknoten D direkt benachbart. Wir leiten zunächst eine Reduktionsformel zur Berechnung einer entsprechenden bedingten Farbeninvariante $N_{(+AB)}$ ab, für den Fall, dass in den zwischenliegenden Punkt D Querschnitte münden. Diese Formel soll für ein sonst ganz beliebiges Normalnetz bestimmt werden, also nicht an den oben statthabenden Spezialfall $i = 0$ gebunden sein.

Es sei im Normalnetz N (Fig. 3) der Faden DX ein Querschnitt, der das Netz in die Teilnetze I und II spaltet. Gesucht ist $N_{(+AB)}$. Als Ausgangsmasche diene diejenige, deren Grundlinie der Faden AD bildet. Unter den N Vierfarbenbezeichnungen

gen des Teilnetzes I unterscheiden wir solche, die $A \equiv X$ liefern, von solchen, wo $A \neq X$ wird; ist die erstere Zahl $N'_{(+AX)}$, so berechnet sich die letztere als $N' - N'_{(+AX)}$. Um $A \equiv B$ zu erhalten, kann man zunächst jede beliebige der Vierfarbenbezeichnungen $N'_{(+AX)}$ des Teilnetzes I mit einer sonst beliebigen Bezeichnungsart von II verknüpfen, sobald nur die Bezeichnung von D mit der durch I bedingten übereinstimmt, und $X \equiv B$ wird. Betrachtet man hierbei im Teilnetz II als Ausgangsmasche diejenige mit der Basis DB , so ist für diese Masche die Bezeichnung von D und B (letztere durch $A \equiv X \equiv B$) vorgeschrieben, während für die dritte Spitze noch 2 Zeichen gleichwertig freibleiben. Kennzeichnet man die Farbeninvarianten für das Teilnetz II durch doppelte Strichlegung, so kann man somit die auf diese

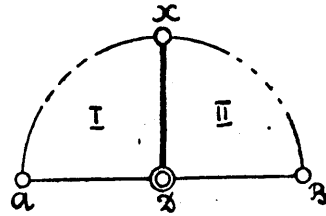


Fig. 3.

Weise resultierenden bedingten Vierfarbenbezeichnungen des Gesamtnetzes als $2N'_{(+AX)} N''_{(+XB)}$ in Rechnung setzen. Hierzu kommen nun aber noch die Bezeichnungsarten $A \neq X$ von I. Diese dürfen mit solchen und nur solchen Bezeichnungsarten von II kombiniert werden, wo $X \neq B$. Dabei hat dann X in II entweder dasselbe Zeichen, wie die Spitze der Masche mit der Grundlinie DB , — oder aber das vierte, von den Eckbezeichnungen dieser Masche verschiedene Zeichen. Durch eine einfache Überlegung erkennt man aber, dass die Gesamtzahl dieser zwei möglichen Bezeichnungsweisen von II gleich sein muss der Anzahl, derjenigen Vierfarbenbezeichnungen von II, die, bei fixierter Ausgangsmasche, $B \neq X$ ergeben, also gleich $N'' - N''_{(+XB)}$. Mithin treten zu den früher gezählten noch $\{N' - N'_{(+AX)}\} \cdot \{N'' - N''_{(+XB)}\}$ Bezeichnungsmöglichkeiten hinzu. Also wird

$$N_{(+AB)} = 2N'_{(+AX)} N''_{(+XB)} + \{N' - N'_{(+AX)}\} \{N'' - N''_{(+XB)}\}. \quad (13)$$

In anderer Anordnung:

$$N_{(+AB)} = 3N'_{(+AX)} N''_{(+XB)} + \{N'_{(+AX)} N'' + N''_{(+XB)} N'\} + N' N''. \quad (14)$$

5. Verallgemeinerung der Reduktionsformel.

Die Formel (14) lässt sich durch vollständige Induktion für den Fall verallgemeinern, dass im Knoten D q Querschnitte zusammenlaufen.

Es soll ε fernerhin überall als Abkürzung für -1 stehen. Mit α_q bezeichnen wir eine vom Index q abhängige, durch die Forderungen

$$\alpha_1 = 1, \alpha_\mu = 2\alpha_{\mu-1} + \varepsilon^{\mu-1} \tag{15}$$

eindeutig definierte Zahl. Die in D mündenden Querschnitte des gegebenen Normalnetzes seien DX_1, DX_2, \dots, DX_q . Zur Kennzeichnung der Farbeninvarianten der $q + 1$ Teilnetze, die dank diesen Querschnitten entstehen, verwenden wir oben angeetzte Indizes. Dann gilt die Relation:

$$\begin{aligned} N_{(+AB)} &= 3^q N'_{(+AX_1)} N''_{(+X_1X_2)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_qB)} + \\ &- 3^{q-1} \{ N' N''_{(+X_1X_2)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_qB)} + \dots + N'_{(+AX_1)} \dots \\ &\dots N^{(q)}_{(+X_{q-1}X_q)} N^{(q+1)} \} + 3^{q-2} \{ N' N'' N'''_{(+X_2X_3)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_qB)} + \\ &+ \dots + N'_{(+AX_1)} \dots N^{(q-1)}_{(+X_{q-2}X_{q-1})} N^{(q)} N^{(q+1)} \} + \tag{16} \\ &- \dots \dots \dots + \\ &+ \varepsilon^q \{ N' N'' \dots N^{(q+1)}_{(+X_qB)} + \dots + N'_{(+AX_1)} N'' \dots N^{(q+1)} \} + \\ &+ \alpha_q N' N'' \dots N^{(q+1)}. \end{aligned}$$

Hier enthält die mit 3^{q-k} verknüpfte Summe jedesmal sämtliche Produkte von k absoluten und $q - k + 1$ bedingten Farbeninvarianten, je eine Farbeninvariante aus jedem Teilnetz. Bei $q = 1$ reduziert sich (16) offenbar auf (14).

Zum Beweis der Allgemeingültigkeit von (16) bedienen wir uns für den Augenblick einer abgekürzten Schreibweise: es soll $S^{(k)}$ für $N^{(k)}_{(+X_{k-1}X_k)}$ gesetzt werden und das Sum-

menzeichen Verwendung finden. Die zu beweisende Formel wäre dann

$$\begin{aligned} N_{(+AB)} = & 3^q S' S'' \dots S^{(q+1)} - 3^{q-1} \Sigma N' S'' \dots S^{(q+1)} + \\ & + 3^{q-2} \Sigma N' N'' S''' \dots S^{(q+1)} - \dots + \varepsilon^q \Sigma N' N'' \dots N^{(q)} S^{(q+1)} + \\ & + \alpha_q N' N'' \dots N^{(q+1)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Wird (17) für ein fixiertes q als bewiesen angenommen, und denkt man sich das letzte Teilnetz, dessen Index $q+1$ ist, durch einen in D mündenden $(q+1)$ -ten Querschnitt in zwei neue Teilnetze zerfällt, zu deren Kennzeichnung die Indizes $\underline{q+1}$ (unterstrichen) und $q+2$ dienen mögen, so hat man nach (5)

$$N^{(q+1)} = 2N^{\underline{(q+1)}} N^{(q+2)}, \quad (18)$$

und nach (14)

$$\begin{aligned} S^{(q+1)} = & 3S^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} - \{S^{\underline{(q+1)}} N^{(q+2)} + \\ & + S^{(q+2)} N^{\underline{(q+1)}}\} + N^{\underline{(q+1)}} N^{(q+2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Wird dies in (17) eingeführt, so resultiert:

$$\begin{aligned} N_{(+AB)} = & 3^{q+1} S' S'' \dots S^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} + \\ & - 3^q \Sigma N' S'' \dots S^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} + 3^{q-1} \Sigma N' N'' S''' \dots S^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} + \\ & + \dots + \varepsilon^{q+1} \Sigma N' N'' \dots N^{\underline{(q+1)}} S^{(q+2)} + \\ & + (2\alpha_q + \varepsilon^q) N' N'' \dots N^{\underline{(q+1)}} N^{(q+2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Bei der Rechnung ist zu beachten, dass $3^\mu - 2 \cdot 3^{\mu-1} = 3^{\mu-1}$ und $-\varepsilon^k = \varepsilon^{k\pm 1}$. Am überzeugendsten wirkt die ausführliche Durchrechnung in den einfachsten Spezialfällen $q = 1, 2, \dots$

Wegen (15) ist aber nun (20) eine Formel vom selben Typus, wie (17), damit also die Allgemeingültigkeit der Reduktionsformel (16) erwiesen.

6. Allgemeine Eigenschaften der Vierfarbenkoeffizienten.

Die in (16) auftretenden, durch (15) definierten Zahlen α_t sind von grundlegender Bedeutung für das zu behandelnde Problem; sie mögen daher die Vierfarbenkoeffizienten genannt werden. Die Relationen (15) ermöglichen die Berechnung dieser Vierfarbenkoeffizienten α_t für jeden ganzzahligen Index t . Eine Tabelle sei hier angeführt:

t	-4	-3	-2	-1	0	+1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α_t	$-\frac{5}{16}$	$+\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$	0	+1	1	3	5	11	21	43	85	171	341

Die Vierfarbenkoeffizienten genügen einer Fülle interessanter Beziehungen, von denen einige sofort Erwähnung finden sollen. Man überzeugt sich zunächst durch vollständige Induktion, dass stets

$$2a_{t-1} + a_t = a_{t+1} \quad (21)$$

ist. Tatsächlich gilt diese Relation für $t=1$; besteht sie aber für irgendein t , so gilt sie auch für den nächstgrösseren und für den nächstkleineren Wert von t . Ersteres ersieht man aus der Schlusskette

$$\begin{aligned} 2a_t + a_{t+1} &= 2(2a_{t-1} + \varepsilon^{t-1}) + (2a^t + \varepsilon^t) = \\ &= 2(2a_{t-1} + a_t) + \varepsilon^{t+1} = 2a_{t+1} + \varepsilon^{t+1} = a_{t+2}, \end{aligned} \quad (22)$$

mit Hilfe von (15) und (21), letzteres folgt auf Grund von (15) aus der Umformung

$$2a_{t-2} + a_{t-1} = (a_{t-1} + \varepsilon^{t-1}) + a_{t-1} = 2a_{t-1} + \varepsilon^{t-1} = a_t. \quad (23)$$

Damit ist aber (21) durch vollständige Induktion bewiesen. Eine Weiterführung der oben gegebenen Tabelle gestaltet sich auf Grund von (21) höchst einfach. Sämtliche Vierfarbenkoeffizienten α_t sind bei positivem t positive ganze Zahlen. Schreibt man sie von α_1 beginnend aufwärts im Binärsystem, so lauten die ersten Zahlen der Reihe:

1; 1; 11; 101; 1011; 10101; 101011; 1010101;
10101011;

Das Gesetz ist hier leicht zu erfassen.

Aus (21) folgt, dass bei positivem t sämtliche a_t ungerade sein müssen.

Wir überzeugen uns ferner, dass bei positivem t allemal

$$a_t = 2^{t-1} - 2^{t-2} + 2^{t-3} - \dots + \varepsilon^{t-1} 2^0 \tag{24}$$

ist. Denn erstens hat man hieraus sofort $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, und zweitens ist dann

$$\begin{aligned} 2a_t + a_{t+1} &= (2^t + 2^t) - (2^{t-1} + 2^{t-1}) + \dots + \varepsilon^{t-1}(2 + 2) + \varepsilon^t \cdot 2^0 = \\ &= 2^{t+1} - 2^t + \dots + \varepsilon^{t-1} \cdot 2^2 + \varepsilon^t \cdot 2^0 = \tag{25} \\ &= 2^{t+1} - 2^t + \dots + \varepsilon^{t-1} \cdot 2^2 + \varepsilon^t \cdot 2^1 + \varepsilon^{t+1} \cdot 2^0 = a_{t+2}, \end{aligned}$$

d. h. die Rekursionsformel (21) wird befriedigt.

Summiert man die geometrische Reihe, so folgt hieraus

$$a_t = \frac{1}{3}(2^t + \varepsilon^{t-1}) . \tag{26}$$

Diese zunächst nur für positive t bewiesene Relation ist unabhängig von der Beschränkung $t > 0$. Denn nach (15) ergibt sich aus (26) für den nächstkleineren t -Wert:

$$\begin{aligned} a_{t-1} &= \frac{1}{2}(a_t + \varepsilon^t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}(2^t + \varepsilon^{t-1}) + \varepsilon^t \right] = \frac{1}{6}(2^t + 2\varepsilon^{t-2}) = \\ &= \frac{1}{3}(2^{t-1} + \varepsilon^{t-2}) . \tag{27} \end{aligned}$$

Die hierin enthaltene vollständige Induktion beweist unsere Behauptung.

Schreibt man (21) in der Gestalt

$$2a_{t-2} = a_t - a_{t-1}, \tag{28}$$

woraus

$$\begin{aligned} 4a_{t-4} &= 2(a_{t-2} - a_{t-3}) = 2a_{t-2} - 2a_{t-3} = \\ &= a_t - a_{t-1} - a_{t-1} + a_{t-2} = a_t - 2a_{t-1} + a_{t-2}, \tag{29} \end{aligned}$$

so folgt durch vollständige Induktion die Verallgemeinerung

$$2^k a_{t-2k} = a_t - \binom{k}{1} a_{t-1} + \binom{k}{2} a_{t-2} - \dots + \varepsilon^k \binom{k}{k} a_{t-k}, \quad (30)$$

wo die Symbole $\binom{k}{s}$ Binomialkoeffizienten bedeuten.

Aus der Beziehung (26) folgt

$$a_t + a_{t+1} = 2^t. \quad (31)$$

Endlich sei noch das Additionstheorem

$$a_{s+t} = a_s a_{t+1} + 2a_{s-1} a_t, \quad (32)$$

erwähnt, welches sich wieder durch vollständige Induktion leicht beweisen lässt. Aus ihm wird ersichtlich, dass a_τ den grössten gemeinsamen Teiler von a_μ und a_ν darstellt, sobald τ der grösste gemeinsame Teiler der positiven ganzen Zahlen μ und ν ist.

7. Die absolute Farbeninvariante für Normalnetze erster Ordnung.

Die im § 4 begonnene Berechnung der Zahl N für die Ordnung 1 kann nun zu Ende geführt werden. An (12) anknüpfend, berechnen wir nämlich zunächst $\overset{0}{N}_{(+AB)}$ nach (16). Das Netz nullter Ordnung, um welches es sich hier handelt (Fig. 2), zerfällt durch $r - 2$ von D ausgehende Querschnitte in $r - 1$ fächerförmig aneinandergeheftete Dreiecke; dieser Netztypus soll fernerhin der Kürze halber als Fächer bezeichnet werden. Die spezielle Form der Teilnetze lässt bei Anwendung der Formel (16) die bedingten Farbeninvarianten

$$N'_{(+AX_1)}, N''_{(+X_1X_2)}, N'''_{(+X_2X_3)}, \dots, N^{(r-1)}_{(+X_{r-2}B)}$$

sämtlich verschwinden, während die absoluten Farbeninvarianten alle gleichzeitig zu 1 werden. Dann verschwinden auf der rechten Seite von (16) alle Glieder mit Ausnahme des letzten, welches sich auf den Vierfarbenkoeffizienten reduziert, d. h. es wird

$$\overset{0}{N}_{(+AB)} = a_{r-2}. \quad (33)$$

Auf Grund von (11) ist gleichzeitig $\overset{0}{N} = 2^{r-2}$. Nach (12) hat man also

$$\overset{1}{N} = \overset{0}{N} - \overset{0}{N}_{(+AB)} = 2^{r-2} - a_{r-2}, \tag{34}$$

woraus endlich, wegen (31),

$$\overset{1}{N} = a_{r-1} \tag{35}$$

folgt. Hier ist der Index des Vierfarbenkoeffizienten die um 1 verkleinerte Anzahl der Maschen des betrachteten Netzes erster Ordnung. Da allemal mindestens 3 Maschen existieren müssen, wenn das Normalnetz wirklich einen inneren Knoten enthalten soll, so ist dieser Index nicht kleiner als 2, der zugehörige Vierfarbenkoeffizient daher allemal positiv. Mit zunehmender Maschenzahl wächst die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen in diesem Falle recht rasch.

In Bezug auf den Fächer haben wir zugleich folgendes Resultat gefunden:

Ist m die Anzahl der Maschen eines Fächers, so gestattet dieser Fächer, bei fixierter Bezeichnung der Knoten einer Ausgangsmasche, genau a_{m-1} Vierfarbenbezeichnungen mit identischer Färbung der Endknoten A, B , ($A \equiv B$), und a_m Vierfarbenbezeichnungen mit verschiedener Färbung dieser Endknoten A, B , ($A \neq B$).

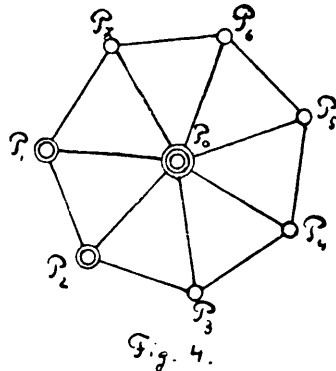


Fig. 4.

Zur Veranschaulichung und Kontrolle der Formel (35) sei hier eine Tabelle der Vierfarbenbezeichnungen eines Normalnetzes erster Ordnung mit 7 Randknoten P_1, P_2, \dots, P_7 und dem inneren Knoten P_0 angeführt. Laut (35) müssen dann a_6 , d. h. 21 Vierfarbenbezeichnungen bei fixierter Bezeichnung der Ausgangsmasche existieren; in der Tabelle sind diese Vierfarben-

bezeichnungen in 21 Kolumnen gegeben, wobei $P_0P_1P_2$ als Ausgangsmasche dient (Fig. 4):

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
P_0	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
P_1	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b
P_2	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c	c
P_3	b	b	b	b	b	b	b	b	b	b	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
P_4	c	c	c	c	c	d	d	d	d	d	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c
P_5	b	b	d	d	d	b	b	c	c	c	c	c	c	d	d	d	b	b	d	d	d
P_6	c	d	b	b	c	c	d	b	b	d	b	b	d	b	b	c	c	d	b	b	c
P_7	d	c	c	d	d	d	c	c	d	c	c	d	c	c	d	d	d	c	c	d	d

8. Reduktion durch Abtrennung eines Fächers.

Zur Berechnung von N^0 spalteten wir das Netz erster Ordnung in einen Fächer N^0 und ein Dreieck. Diese Methode gestattet eine Verallgemeinerung auf Netze höherer Ordnungen.

Es sei ein beliebiges Normalnetz N^i mit i inneren Knoten gegeben (Fig. 5). Wir fixieren einen Randfaden A_0A_1 . Wenn das Netz irreduzibel ist, so hat diejenige Masche, deren Grundlinie dieser Faden A_0A_1 bildet, zur Spitze notwendig einen inneren Knoten P des Netzes. Es kann möglich sein, dass die zum folgenden Randfaden gehörige Masche dieselbe Spitze P besitzt; wir wollen annehmen, dass m aufeinanderfolgende Randfäden

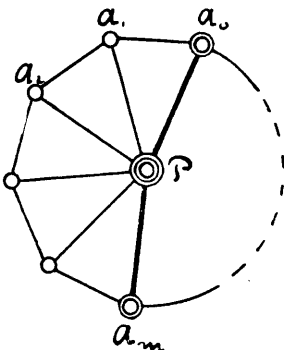


Fig. 5.

$$A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{m-1}A_m$$

Grundlinien von Maschen mit gemeinsamer Spitze P sind. Die Gesamtheit dieser m Maschen, für sich betrachtet, bildet dann einen Fächer, solange A_0 von A_m verschieden ist. Nach Abtrennung dieses Fächers vom Netz N^i verbleibt ein Teilnetz von der Ordnung $i - 1$,

denn dieses Teilnetz besitzt alle früheren inneren Knoten, mit alleiniger Ausnahme des Knotens P , der nun zum Randknoten geworden ist. Wir nennen dieses Teilnetz das zum Fächer gehörige Residuum des Normalnetzes N . Für irreduzible Netze wird die Maschenzahl m des Fächers mindestens gleich 1 sein; der Maximalwert von m ist abhängig von der Struktur des Netzes und der speziellen Wahl der Randfäden. Bei $i = 1$ darf $m = r - 1$ gesetzt werden, wie es im § 4 geschehen. Die gemeinsame Spitze P der Fächermaschen nennen wir das Zentrum der ausgeführten Zerlegung des Netzes in Fächer und Residuum, die Zahl m soll der Index der Zerlegung heissen.

Es ist allemal für ein irreduzibles Normalnetz N möglich, das Zentrum und den Index der Zerlegung so zu wählen, dass das Residuum wieder irreduzibel wird. Sollte zunächst auch die zum Randfaden $A_m A_{m+1}$ resp. zum Randfaden $A_{-1} A_0$ gehörige Masche die Spitze P aufweisen, so dürfen wir diese Masche zum Fächer hinzuzählen, m. a. W. den Index m um eine Einheit vergrössern, solange A_{m+1} von A_0 , resp. A_{-1} von A_m noch verschieden ist. Da die Anzahl der Knoten des Netzes endlich ist, so gelangt man auf diese Weise bei fixiertem Zentrum P jedenfalls zu einem maximalen Index m ; der zugehörige Fächer wird dann ein Maximalfächer.

Sollte nun ein irreduzibles Normalnetz N nach Abtrennung eines Maximalfächers ein reduzibles Residuum ergeben, so können die Querschnitte dieses Residuums nur von P , dem Zentrum der Zerlegung,

ausgehen, da widrigenfalls N selbst schon reduzibel wäre. Diese Querschnitte lassen sich dann in wohldefinierter Aufeinanderfolge als PX_1, PX_2, \dots, PX_q bezeichnen (Fig. 6). Das Residuum zerfällt in $q + 1$ Teilnetze, von denen etwa dasjenige mit den Randknoten A_m, X_q, P als „letztes“ angesprochen werden kann. Es führt dann in diesem letzten Teilnetz kein Querschnitt mehr von P zum Rand. Geht man nun von einem Faden auf dem Rande $A_m X_q$ des letzten Teilnetzes aus, so liegt die Spitze J der zugehörigen Masche notwendig im Inneren dieses

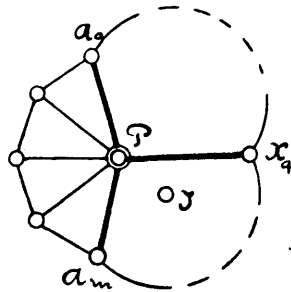


Fig. 6.

Residuum zerfällt in $q + 1$ Teilnetze, von denen etwa dasjenige mit den Randknoten A_m, X_q, P als „letztes“ angesprochen werden kann. Es führt dann in diesem letzten Teilnetz kein Querschnitt mehr von P zum Rand. Geht man nun von einem Faden auf dem Rande $A_m X_q$ des letzten Teilnetzes aus, so liegt die Spitze J der zugehörigen Masche notwendig im Inneren dieses

Teilnetzes, weil im einzig denkbaren anderen Falle, wo $A_m X_q P$ selbst diese Masche wäre, der vorhin vom N abgetrennte Fächer kein Maximalfächer sein könnte. Von J ausgehende Fäden können den Rand von N offenbar nur auf dem Bogenstück $A_m X_q$ treffen. Nimmt man statt der vorigen Zerlegung des N eine neue, diesmal mit J als Zentrum, so kann das zugehörige Residuum eventuell nur noch solche Querschnitte aufweisen, die J mit einem Knoten auf dem Randbogen $A_m X_q$ verbinden. Wiederholt man wörtlich die oben durchgeführten Betrachtungen für unsere neue Zerlegung, so gelangt man zu einem neuen Teilnetz, welches gleichzeitig einen echten Teil des früher betrachteten Teilnetzes $A_m X_q P$ ausmacht, dabei aber mit dem Randbogen $A_m X_q$ nur einen echten Teil gemeinsam hat. In diesem neuen Teilnetz kann ein neuer Punkt J' als Zentrum einer dritten Zerlegungsart des N gefunden werden, u. s. f. Da die Anzahl der Knoten endlich ist, so bricht die Kette entweder ab, indem ein irreduzibles Residuum auftritt, — oder man gelangt zu einem Teilnetz mit dreieckigem Rand $A^{(\nu)} X^{(\nu)} J^{(\nu)}$. Die zum Randfaden $A^{(\nu)} X^{(\nu)}$ gehörige Maschenspitze $J^{(\nu+1)}$ liefert dann eine neue Zerlegungsart des N mit dem Index 1. Reduzibel kann das zugehörige Residuum dann sicher nicht mehr sein, weil kein Randpunkt mehr existiert, mit dem das Zentrum $J^{(\nu+1)}$ verbunden sein könnte. Die jedesmalige Existenz von Zerlegungen mit irreduziblem Residuum ist somit gesichert.

Wir dürfen diese Tatsache auch folgendermassen aussprechen:

Jedes irreduzible Normalnetz i -ter Ordnung entsteht aus einem irreduziblen Normalnetz der Ordnung $i-1$ durch Anheften eines Fächers.

9. Reduktionsformeln für die absolute Farbeninvariante.

Im irreduziblen Normalnetz N sei eine Zerlegung vom Index m um P als Zentrum ausgeführt (Fig. 5). Wir wollen die Berechnung der absoluten Farbeninvariante N auf die Be-

rechnung von Farbeninvarianten des Residuums, also eines Netzes niedrigerer Ordnung, zurückführen.

Wählt man als Ausgangsmasche der Vierfarbenbezeichnung eine Masche des Fächers, so hat man laut § 7 für den Fächer α_{m-1} Bezeichnungsmöglichkeiten $A_0 \equiv A_m$, und α_m Möglichkeiten $A_0 \neq A_m$. Nun darf hierbei jede im Fächer zu $A_0 \equiv A_m$ führende Vierfarbenbezeichnung mit einer jeden Vierfarbenbezeichnung des Residuums kombiniert werden, sobald im Residuum A_0 und P ebenso wie im Fächer bezeichnet erscheinen, dabei im Residuum $A_0 \equiv A_m$ ist. Wählt man im Residuum das Dreieck mit der Basis A_0P zur Ausgangsmasche, so darf für die dritte Ecke dieses Dreiecks jede der beiden noch übrigen Bezeichnungen Verwendung finden, d. h. man hat $2 \cdot \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}$ Vierfarbenbezeichnungen des Residuums zur Verfügung. Mit den α_{m-1} Bezeichnungen des Fächers kombiniert ergibt dies $2\alpha_{m-1} \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}$ Bezeichnungen für das Gesamtnetz. Hinzu treten noch die Bezeichnungsarten $A_0 \neq A_m$, deren es im Fächer α_m gibt: analog dem in § 4 bei der Ableitung der Formel (13) angewandten Verfahren kommt man zu dem Schluss, dass jede der letztgenannten Vierfarbenbezeichnungen des Fächers mit $\overset{i-1}{N} - \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}$ des Residuums zu kombinieren ist, wodurch also $\alpha_m \left\{ \overset{i-1}{N} - \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)} \right\}$ Vierfarbenbezeichnungen des Gesamtnetzes entstehen. Es ist daher

$$\overset{i}{N} = 2\alpha_{m-1} \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)} + \alpha_m \left\{ \overset{i-1}{N} - \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)} \right\}. \quad (36)$$

Schreibt man auf Grund von (15) $\alpha_m + \varepsilon^m$ für $2\alpha_{m-1}$, so erhält man hieraus

$$\overset{i}{N} = \alpha_m \overset{i-1}{N} + \varepsilon^m \overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}. \quad (37)$$

Zur Kontrolle der somit gefundenen Reduktionsformel wenden wir sie auf den Fall $i = 1$ an, wo das Residuum ebenfalls ein Fächer, und zwar mit $r - m$ Maschen ist. Man hat dann in diesem Residuum

$$\begin{aligned} \overset{0}{N}_{(+A_0A_m)} &= a_{r-m-1}, \quad \overset{0}{N} = \overset{0}{N}_{(+A_0A_m)} + \left\{ \overset{0}{N} - \overset{0}{N}_{(+A_0A_m)} \right\} = \\ &= a_{r-m-1} + a_{r-m} \end{aligned} \quad (38)$$

zu setzen; hieraus folgt nach (37):

$$\begin{aligned} \overset{1}{N} &= a_m(a_{r-m-1} + a_{r-m}) + \varepsilon^m a_{r-m-1} = \\ &= a_{r-m-1}(a_m + \varepsilon^m) + a_m a_{r-m} = \\ &= 2a_{r-m-1} a_{m-1} + a_m a_{r-m} = a_{r-1}, \end{aligned} \quad (39)$$

wenn (15) und (32) zu Hilfe genommen werden. Dieses Resultat ist mit dem früher im § 7 gefundenen identisch.

Die Formel (37) gilt allgemein, unabhängig davon, ob das Residuum reduzibel ist oder nicht. Wie schon früher (§ 8) bemerkt, kann das Residuum nur solche eventuelle Querschnitte enthalten, die im Zentrum der Zerlegung, d. h. in P münden, — vorausgesetzt, dass das Gesamtnetz i -ter Ordnung selbst irreduzibel ist. Mit Hilfe von (6) und (16) lässt sich (37) so erweitern, dass nur die irreduziblen Teile, in welche das Residuum dank diesen Querschnitten zerfällt, berücksichtigt zu werden brauchen. Nimmt man die Existenz von q Querschnitten PX_1, PX_2, \dots, PX_q an und verwendet zur Unterscheidung der $q+1$ Teile, in die das Residuum zerfällt, oben angesetzte Indizes, so hat man

in (37) $\overset{i-1}{N}$ durch die rechte Seite von (6), und gleichzeitig $\overset{i-1}{N}_{(+A_0A_m)}$ durch die rechte Seite von (16) zu ersetzen.

M. a. W., um $\overset{i}{N}$ zu erhalten, hat man die mit a_m multiplizierte rechte Seite von (6) zu der mit ε^m multiplizierten rechten Seite von (16) zu addieren. Hierbei lässt das aus (6) erhaltene Glied sich mit dem letzten Summanden aus (16) vereinigen, wodurch dann der Koeffizient $2^i a_m + \varepsilon^m a_q$ entsteht. Es ist aber auf Grund von (31), (15) und (32):

$$\begin{aligned} 2^i a_m + \varepsilon^m a_q &= (a_q + a_{q+1}) a_m + (2a_{m-1} - a_m) a_q = \\ &= a_{q+1} a_m + 2a_{m-1} a_q = a_{m+q}. \end{aligned} \quad (40)$$

Man gelangt daher zur Formel

$$\begin{aligned}
 N &= a_{m+q} N' N'' \dots N^{(q+1)} + \\
 &+ 3^q \varepsilon^m N'_{(+A_0 X_1)} N''_{(+X_1 X_2)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_q A_m)} + \\
 &+ 3^{q-1} \varepsilon^{m+1} \Sigma N' N''_{(+X_1 X_2)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_q A_m)} + \\
 &+ 3^{q-2} \varepsilon^{m+2} \Sigma N' N'' N'''_{(+X_2 X_3)} \dots N^{(q+1)}_{(+X_q A_m)} + \\
 &+ \dots + \\
 &+ \varepsilon^{m+q} \Sigma N' N'' \dots N^{(q)} N^{(q+1)}_{(+X_q A_m)},
 \end{aligned} \tag{41}$$

wo die unter den Summenzeichen zusammengefassten Komplexe sämtliche Produkte von k absoluten und $q + 1 - k$ bedingten Farbeninvarianten enthalten, sobald $3^{q-k} \varepsilon^{m+k}$ der Koeffizient des Komplexes ist.

10. Reduktion bedingter Farbeninvarianten.

Zur Bestimmung der absoluten Farbeninvariante N reichen die Formeln (37) resp. (41) noch nicht aus, weil dort rechts bedingte Farbeninvarianten auftreten, welche gleichfalls eine Reduktion erfordern. Da nach § 8 das Residuum, in dem diese bedingten Farbeninvarianten auftreten, stets als irreduzibel angenommen werden darf, so genügt es wiederum, Reduktionsformeln bedingter Farbeninvarianten ausschliesslich für irreduzible Netze aufzustellen.

In den Formeln des vorigen Paragraphen bedeuteten A_0, A_m zwei Randknoten eines, jetzt als irreduzibel vorausgesetzten, Normalnetzes ($i-1$ -ter Ordnung; dabei erschienen A_0, A_m mit einem „zwischenliegenden“ Randknoten P benachbart, d. h. direkt verbunden. Wir verallgemeinern unsere nächstliegende Aufgabe etwas, indem wir die letzte Bedingung fallen lassen, mithin eine allgemeinere relative Lage von A_0, A_m auf dem Rande eines irreduziblen Normalnetzes, dessen Ordnung nun wieder durch i bezeichnet sein soll, gestatten. Die Namen dieser beiden ausgezeichneten Knoten sollen zweckentsprechend abgeändert werden. Führt man eine Zerlegung in Fächer und Residuum aus, so hat

man drei prinzipiell verschiedene Lagenmöglichkeiten des ausgezeichneten Knotenpaares :

- 1) beide Knoten, jetzt R_1 und R_2 genannt, können dem Rande des Residuums angehören (Fig. 7);
- 2) beide Knoten, jetzt F_1 und F_2 genannt, können dem Rande des Fächers angehören (Fig. 8);
- 3) einer der beiden Knoten, R , kann zum Rande des Residuums, der andere, F , zum Rande des Fächers gehören.

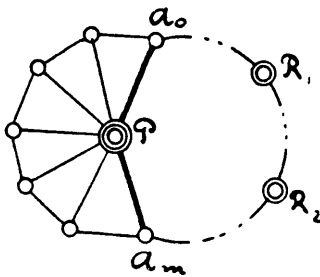


Fig. 7.

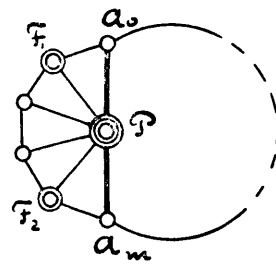


Fig. 8.

Es sei bemerkt, dass man durch Verkleinerung des Index m der Zerlegung stets zum ersten Fall gelangen kann, — jedoch darf dann nicht mehr allemal das Residuum als irreduzibel vorausgesetzt werden; hierdurch entstehen anderweitige Komplikationen, die unserer Fallunterscheidung äquivalent sind.

Die Behandlung des ersten Falles, d. h. die Bestimmung einer Reduktionsformel für $N_{(+R_1R_2)}^i$, gestaltet sich höchst einfach, da zu den Voraussetzungen, unter denen (37) abgeleitet war, bloss die ergänzende Nebenbedingung hinzukommt, dass im Residuum $R_1 \equiv R_2$ zu berücksichtigen ist. Die entsprechende Abänderung in (37) liefert dann

$$N_{(+R_1R_2)}^i = a_m N_{(+R_1R_2)}^{i-1} + \varepsilon^m N_{(+R_1R_2)}^{i-1} (+A_0A_m). \quad (42)$$

Hierzu ist nun noch zu bemerken, dass die beiden Paare R_1R_2 und A_0A_m auf dem Rande des Residuums sich nicht gegenseitig trennen. Wohl aber können die Knoten R mit den

Knoten A zusammenfallen, oder auch beide R untereinander zusammenfallen; im letzteren Falle ist die Forderung $R_1 \equiv R_2$ von selbst erfüllt, d. h. $N_{(+R_1R_2)}$ wird mit N identisch.

Wir wenden uns nun zur zweiten Annahme. Es sei f die Anzahl der Maschen im Fächerteil PF_1F_2 . Denkt man sich statt der tatsächlich ausgeführten Zerlegung zunächst nur eine Abtrennung dieses Fächerteiles vorgenommen, so darf man die für den ersten Fall gültige Formel (42) anwenden, wobei F_1 an Stelle von R_1 und A_0 , und zugleich F_2 an Stelle von R_2 und A_m zu setzen ist. Da $N_{(+XY)(+XY)}$ offenbar dasselbe bedeutet wie $N_{(+XY)}$, so folgt auf diese Weise:

$$\begin{aligned} N_{(+F_1F_2)}^i &= \alpha_f N_{(+F_1F_2)}^{i-1} + \varepsilon^f N_{(+F_1F_2)}^{i-1} = \\ &= (\alpha_f + \varepsilon^f) N_{(+F_1F_2)}^{i-1}. \end{aligned} \tag{43}$$

Der Strich bei N soll andeuten, dass nicht das Residuum für den Zerlegungsindex m , sondern dasjenige für den Index f gemeint ist. In letzterem Residuum sind nun aber sicher noch mindestens $m - f$ von P ausgehende Querschnitte vorhanden, nämlich die zum Fächerteil PF_1F_2 nicht zählenden Rippenfäden des Gesamtfächers PA_0A_m . Benutzt man dementsprechend die Formel (16), so zeigt sich, da für Dreiecke $N = 1$, $N_{(+XY)} = 0$ wird (letzteres unter Annahme nicht-zusammenfallender X, Y),

$$N_{(+F_1F_2)}^{i-1} = \varepsilon^{m-f} N_{(+A_0A_m)}^{i-1} + \alpha_{m-f} N^{i-1}, \tag{44}$$

denn es verbleiben dann in der rechten Seite von (16) nur diejenigen beiden Glieder, die keine bedingte Farbeninvariante eines Dreiecks als Faktor enthalten. Wird dies in (43) eingeführt, so findet man mit Hilfe von (15)

$$N_{(+F_1F_2)}^i = 2\alpha_{f-1} \left\{ \alpha_{m-f} N^{i-1} + \varepsilon^{m-f} N_{(+A_0A_m)}^{i-1} \right\}, \tag{45}$$

womit auch die zweite Annahme erledigt ist. Es unterscheidet sich die Formel (45) von (42) dadurch, dass sozusagen f Fächermaschen gestrichen sind, dafür aber der Faktor $2\alpha_{f-1}$ hinzukommt.

11. Untersuchung der dritten Annahme.

Zur Ableitung der Reduktionsformel bei der dritten Annahme bedarf es einiger Vorbereitungen.

Wir betrachten zunächst ein reduzibles Normalnetz, von dem der Querschnitt PA_1 (Fig. 10) eine dreieckige Masche PA_1A_0 abtrennt. Das danach verbleibende Teilnetz II ist von derselben Ordnung, wie das Gesamtnetz; wir kennzeichnen seine Farbeninvarianten durch Strichelung, während für das Gesamtnetz die gewöhnliche Bezeichnung ohne Strich verwendet werden soll.

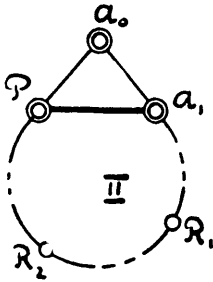


Fig. 10.

Sind R_1, R_2 zwei Randknoten von II, für die $R_1 \equiv R_2$ gefordert wird, so ist sofort ersichtlich, dass jede derartige Vierfarbenbezeichnung von II noch mit den 2 freibleibenden Bezeichnungsarten der Spitze A_0 kombiniert werden darf. Dies führt zur Relation

$$N_{(+R_1R_2)} = 2N'_{(+R_1R_2)}, \quad (46)$$

die in gewissem Sinne eine Verallgemeinerung von (5) darstellt.

Ist nun aber R ein beliebiger der beiden Knoten R_1, R_2 , und wird $N_{(+A_0R)}$ gesucht, so hat man zu beachten, dass diejenigen und nur diejenigen Vierfarbenbezeichnungen von II in Betracht kommen, welche $R \neq A_1$ und zugleich $R \neq P$ liefern. Da durch die Forderung $A_0 \equiv R$ die Bezeichnung von A_0 dann schon eindeutig vorgeschrieben ist, so führt jede dieser Vierfarbenbezeichnungen von II auch zu einer und nur einer bedingten Vierfarbenbezeichnung im Gesamtnetz. Weil nun eine Vierfarbenbezeichnung mit der Nebenforderung $R \equiv A_1$ notwendigerweise $R \neq P$ fordert (sonst wären nämlich die benachbarten Knoten P und A_1 identisch gefärbt, was nicht angeht), so gelangt man zur Formel

$$\begin{aligned} N_{(+RA_0)} &= N'_{(-RA_1)(-RP)} = \\ &= N' - N'_{(+RA_1)} - N'_{(+RP)}. \end{aligned} \quad (47)$$

Die Formeln (46) und (47) sollen nun verallgemeinert werden für den Fall der Existenz von q Querschnitten PA_1, PA_2, \dots, PA_q , die vom Gesamtnetz der Reihe nach q Dreiecke abtrennen und ein Restnetz II übrig lassen (Fig. 11). Sind R_1, R_2 wieder Randknoten von II, so erhält man durch vollständige Induktion

$$N_{(+R_1R_2)} = 2^q N'_{(+R_1R_2)}, \tag{48}$$

als Verallgemeinerung von (46). Gleichfalls durch vollständige Induktion beweisen wir ferner die Relation

$$\begin{aligned} N_{(+RA_0)} &= \alpha_q \{N' - N'_{(+RP)}\} + \varepsilon^q N'_{(+RA_q)} = \\ &= \alpha_q N'_{(-RP)} + \varepsilon^q N'_{(+RA_q)}, \end{aligned} \tag{49}$$

wo R jeden der Punkte R_1, R_2 bedeuten kann. Bei $q = 1$ folgt (47) als Spezialfall aus (49). Ist (49) für irgendein q stets gültig, so hat man im Falle der Existenz eines $(q+1)$ -ten Querschnittes PA_{q+1} , der von II noch ein Dreieck abspaltet, auf Grund von (46) und (49):

$$\begin{aligned} N_{(+RA_0)} &= \alpha_q \{2N'' - 2N''_{(+RP)}\} + \\ &+ \varepsilon^q \{N'' - N''_{(+RA_{q+1})} - N''_{(+RP)}\}, \end{aligned} \tag{50}$$

wobei der Doppelstrich bei den Farbeninvarianten rechts das nach Abtrennung der Masche PA_qA_{q+1} von II verbleibende Teilnetz charakterisiert. Auf Grund von (15) erhält man hieraus sofort:

$$N_{(+RA_0)} = \alpha_{q+1} \{N'' - N''_{(+RP)}\} + \varepsilon^{q+1} N''_{(+RA_{q+1})}. \tag{51}$$

Damit ist die Allgemeingültigkeit von (49) bewiesen.

Wir bemerken ferner, dass in dem Falle, wo noch andere Nebenbedingungen der im § 2 erwähnten Gattungen auftreten, jedoch nur solche, die sich nicht auf die Knoten $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{q-1}$ beziehen, sondern nur Randknoten des Teilnetzes II

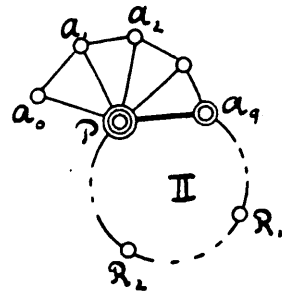


Fig. 11.

berücksichtigen, sämtliche Betrachtungen, die zu den Formeln (48), (49) führten, sich Wort für Wort wiederholen lassen, nur müssen rechts in den Farbeninvarianten von II die neu hinzugetretenen Nebenbedingungen konsequent hinzugenommen werden. Fasst man die neuen Nebenbedingungen der ersten Gattung (§ 2) kurz unter dem Symbol $(+M)$, diejenigen der zweiten Gattung unter dem Symbol $(-L)$ zusammen, so können wir statt (48) und (49) folgende, noch allgemeinere Relationen schreiben:

$$N_{(+M)(-L)(+R_1R_2)} = 2^q N'_{(+M)(-L)(+R_1R_2)} , \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & N_{(+M)(-L)(+RA_0)} = \\ & = \alpha_q \{ N'_{(+M)(-L)} - N'_{(+M)(-L)(+RP)} \} + \varepsilon^q N'_{(+M)(-L)(+RA_q)} . \end{aligned} \quad (53)$$

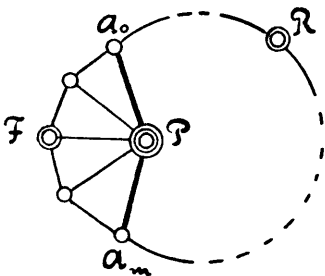


Fig. 9.

Die dritte Annahme des vorigen Paragraphen lässt sich nun leicht erledigen. An Stelle der tatsächlich ausgeführten Zerlegung (Fig. 9) fixieren wir zunächst eine solche, die nur den Fächer PFA_m abspaltet. Ist d die Anzahl der Maschen im Fächer teil PFA_0 , so wird der Index dieser Hilfszerlegung gleich $m - d$, und es darf (42) angewandt werden. Man erhält so

$$\overset{i}{N}_{(+FR)} = \alpha_{m-d} \overset{i-1}{N}'_{(+FR)} + \varepsilon^{m-d} \overset{i-1}{N}'_{(+FR)(+FA_m)} , \quad (54)$$

wobei die Strichelung rechts andeutet, dass es sich um Farbeninvarianten des Residuums der Hilfszerlegung handelt. Auf Grund von (53) ist jedoch

$$\overset{i-1}{N}'_{(+FR)} = \alpha_d \left\{ \overset{i-1}{N} - \overset{i-1}{N}_{(+RP)} \right\} + \varepsilon^d \overset{i-1}{N}_{(+RA_0)} , \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & \overset{i-1}{N}'_{(+FR)(+FA_m)} = \overset{i-1}{N}_{(+FR)(+RA_m)} = \\ & = \alpha_d \left\{ \overset{i-1}{N}_{(+RA_m)} - \overset{i-1}{N}_{(+RA_m)(+RP)} \right\} + \varepsilon^d \overset{i-1}{N}_{(A_0R)(+RA_m)} , \end{aligned} \quad (56)$$

denn die Forderungen $F \equiv R$, $F \equiv A_m$, sind den Forderungen $F \equiv R$, $R \equiv A_m$ gleichbedeutend. Werden (55) und (56) in (54) eingeführt, so erhält man die gesuchte Reduktion der Farbeninvariante für die dritte Annahme:

$$\begin{aligned} N_{(+FR)}^i &= \alpha_{m-d} \alpha_d \left\{ N_{(+RP)}^{i-1} - N_{(+RP)}^{i-1} \right\} + \varepsilon^{m-d} \alpha_d N_{(+RA_m)}^{i-1} + \\ &+ \alpha_{m-d} \varepsilon^d N_{(+A_0R)}^{i-1} + \varepsilon^{m-d} \varepsilon^d N_{(+A_0R)}^{i-1} (+RA_m). \end{aligned} \tag{57}$$

12. Die Auslese.

Auch die Formeln der beiden letzten Paragraphen geben noch nicht die Möglichkeit einer stets anwendbaren rekurrenten Berechnung der Farbeninvarianten, weil die Anzahl der Nebenbedingungen, die im Residuum zu erfüllen sind, wächst und die gegenseitige Lage der zu berücksichtigenden Randknotenpaare sich zu komplizieren scheint. Wir werden jedoch sehen, dass allemal nur solche Paarkombinationen in Betracht gezogen zu werden brauchen, in denen keine zwei Paare auf dem Rande des Netzes sich gegenseitig trennen. Einen solchen Komplex ausgezeichneter Randknotenpaare wollen wir fernerhin eine Auslese nennen. Ist die Anzahl der Paare einer Auslese gleich null, so reden wir auch von einer verschwindenden Auslese. Enthält die Kombination ein einziges Paar, so ist sie stets eine Auslese.

Eine Auslese kann positive Paare $(+AB)$ und negative Paare $(-XY)$ enthalten, — erstere fordern in der Vierfarbenbezeichnung $A \equiv B$, letztere $X \neq Y$. Jedenfalls bilden aber dann sowohl die positiven Paare für sich allein, als auch die negativen Paare allein schon eine Auslese; erstere möge kurz mit $(+M)$, letztere mit $(-L)$ bezeichnet sein. Sind $(+AB)$ und $(+AC)$ in der Auslese vorhanden, so ist damit eo ipso die Forderung $B \equiv C$ gestellt, — ohne dass $(+BC)$ in $(+M)$ ausdrücklich genannt zu sein braucht; ja es kann vorkommen, dass $(+BC)$ in $(+M)$ gar nicht genannt werden darf, weil $(+M)$ der Definition der Auslese dann nicht mehr genügen würde. Wir nennen allemal das Paar BC ein von $(+M)$ abhängiges Paar, gleichviel, ob es in $(+M)$ ausdrücklich genannt ist oder nicht; allgemeiner soll ein Paar PQ ein von $(+M)$ abhängiges Paar heissen, sobald

$P \equiv Q$ eine logische⁴⁾ Konsequenz der in $(+M)$ enthaltenen Forderungen ist, ohne Bezugnahme auf Relationen geometrischer Natur. Widrigenfalls ist (PQ) ein von $(+M)$ unabhängiges Paar.

Sollte ein in $(-L)$ genanntes Paar von $(+M)$ abhängig sein, so wird die gleichzeitige Erfüllung der Forderungen $(+M)(-L)$ aus rein logischen Gründen unmöglich. Wir sagen dann, die Auslese $(+M)(-L)$ enthalte einen Widerspruch. Sind die beiden Knoten eines von $(+M)$ abhängigen Paares benachbart, d. h. durch einen Faden des Netzes direkt verbunden, so ist schon die Forderung $(+M)$ unerfüllbar. Auch hier sprechen wir von einem in der Auslese enthaltenen Widerspruch.

Eine Auslese $(+M)(-L)$ soll widerspruchsfrei heissen, sobald sie keinen der beiden hier genannten Widersprüche enthält. Auf die wichtige Bedeutung dieses Begriffs kommen wir am Schluss der vorliegenden Arbeit noch zu sprechen.

Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, wie sich die Berechnung der durch eine Auslese bedingten Farbeninvariante eines irreduziblen Normalnetzes i -ter Ordnung auf die Berechnung wiederum durch Auslesen bedingter Farbeninvarianten des Residuums reduziert. Es genügt hierbei die Reduktion für den Fall einer ausschliesslich positiven Auslese zu kennen, da, wie gleich bewiesen werden soll, die Beziehung

$$\begin{aligned}
 N_{(+M)(-L)} &= N_{(+M)} - \sum_{\mu=1}^t N_{(+M)(+X_\mu Y_\mu)} + \\
 &+ \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^t N_{(+M)(+X_\mu Y_\mu)(+X_\nu Y_\nu)} + \\
 &+ \dots + \\
 &+ \varepsilon^t N_{(+M)(+X_1 Y_1)(+X_2 Y_2) \dots (+X_t Y_t)}
 \end{aligned} \tag{58}$$

besteht, wenn $(-L)$ sich aus den Paaren $(-X_1 Y_1)$, $(-X_2 Y_2)$, \dots , $(-X_t Y_t)$ zusammensetzt. Aus (58) lässt sich die Farbeninvariante für eine beliebige Auslese berechnen, sobald man sämtliche Farbeninvarianten für positive Auslesen kennt.

Die Richtigkeit der Relation (58) erkennt man durch vollständige Induktion. Für $t = 1$ ist sie offenbar richtig, — wir

4) D. h. eigentlich, sobald $P \equiv Q$ aus der Forderung $(+M)$ allein auf Grund der Transitivität des Begriffs der Identität folgt.

haben sie in diesem Falle auch schon in der speziellen Form, wo $(+M)$ verschwindet, früher benutzt. Ist (58) aber für t richtig, und wird dann $(-L)$ um ein Paar $(-X_{t+1} Y_{t+1})$ bereichert, so hat man jedenfalls

$$\begin{aligned} & N_{(+M)(-L)(-X_{t+1} Y_{t+1})} = \\ & = N_{(+M)(-L)} - N_{(+M)(-L)(+X_{t+1} Y_{t+1})} , \end{aligned} \tag{59}$$

wie eine einfache Überlegung zeigt. Wird dies nun mit (58) verknüpft, so folgt

$$\begin{aligned} N_{(+M)(-L)(-X_{t+1} Y_{t+1})} &= N_{(+M)} - \sum_{\mu=1}^t N_{(+M)(+X_{\mu} Y_{\mu})} + \\ &+ \dots + \varepsilon^t N_{(+M)(+L)} - N_{(+M)(+X_{t+1} Y_{t+1})} + \\ &+ \sum_{\mu=1}^t N_{(+M)(+X_{t+1} Y_{t+1})(+X_{\mu} Y_{\mu})} + \dots + \\ &+ \varepsilon^{t+1} N_{(+M)(+X_{t+1} Y_{t+1})(+L)} . \end{aligned} \tag{60}$$

Anders geschrieben lautet hier die rechte Seite:

$$\begin{aligned} & N_{(+M)} - \sum_{\mu=1}^{t+1} N_{(+M)(+X_{\mu} Y_{\mu})} + \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{t+1} N_{(+M)(+X_{\mu} Y_{\mu})(+X_{\nu} Y_{\nu})} - \\ & - \dots + \\ & + \varepsilon^{t+1} N_{(+M)(+X_1 Y_1)(+X_2 Y_2) \dots (+X_{t+1} Y_{t+1})} . \end{aligned} \tag{61}$$

Da dies wieder vom Typus (58) ist, so ist die Formel bewiesen.

Beiläufig sei bemerkt, dass zugleich mit (58) auch die sozusagen polare Relation

$$\begin{aligned} N_{(+M)(+L)} &= N_{(+M)} - \sum_{\mu=1}^t N_{(+M)(-X_{\mu} Y_{\mu})} + \\ &+ \sum_{\substack{\mu, \nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^t N_{(+M)(-X_{\mu} Y_{\mu})(-X_{\nu} Y_{\nu})} + \\ &+ \dots + \\ &+ \varepsilon^t N_{(+M)(-X_1 Y_1)(-X_2 Y_2) \dots (-X_t Y_t)} \end{aligned} \tag{62}$$

gilt, wie durch vollständige Induktion bewiesen werden kann. Auch allgemeinere analoge Beziehungen lassen sich ohne Schwierigkeiten angeben.

13. Reduzierte Maschenzahlen im Fächer.

Es sei auf dem Rande eines irreduziblen Normalnetzes eine positive Auslese fixiert. Wie verteilen sich die Komponenten der entsprechenden Knotenpaare auf Fächer und Residuum bei einer gegebenen Zerlegung dieses Netzes?

Die Knotenpaare der Auslese zerfallen in 3 Kategorien:

1) ein Knoten des Paares kann auf dem Fächer, der andere auf dem Residuum liegen; wir fassen solche Paare kurz unter dem Symbol (FR) zusammen;

2) beide Knoten des Paares können dem Fächer angehören; diese Kategorie werde durch das Symbol (FF) gekennzeichnet;

3) beide Knoten des Paares können auf dem Residuum liegen; als Symbol dieser Kategorie diene (RR) .

Wir zählen die Paare (FR) in der Reihenfolge der Knoten F auf dem Fächerrande ab, indem wir auf diesem Fächerrande eine Fortschreitungsrichtung fixieren und die F -Knoten dieser Paarkategorie in der durch diese Richtung bestimmten Reihenfolge als $F_1, F_2, F_3, \dots, F_t$ bezeichnen. Es ist hierbei möglich, dass eventuell F_μ mit $F_{\mu+1}$ zusammenfällt; man kann die Bezeichnung aber stets so wählen, dass gleichzeitig die zugehörigen R -Knoten, die demnach $R_1, R_2, R_3, \dots, R_t$ wären, auf dem Rande des Residuums aufeinanderfolgen, wobei allerdings benachbarte R dieser Reihenfolge auch zusammenfallen können. Die zugehörige Fortschreitungsrichtung auf dem Residuumrand ist der auf dem Fächerrand gewählten Richtung entgegengesetzt. Ist F_μ von $F_{\mu+v}$ verschieden, so kann $R_{\mu+v}$ auf dem Residuumrand nicht dem Knoten R_μ vorangehen, weil sonst die Paare $(F_\mu R_\mu)$ und $(F_{\mu+v} R_{\mu+v})$, gegen die Annahme, sich gegenseitig trennen würden. Sind aber F_μ und $F_{\mu+v}$ identische Knoten, so müssen $R_\mu, R_{\mu+1}, R_{\mu+2}, \dots, R_{\mu+v}$ sicher untereinander verschiedene Knoten sein; ihre Reihenfolge bestimmt dann die Numeration der (zusammenfallenden) Knoten $F_\mu, F_{\mu+1}, F_{\mu+2}, \dots, F_{\mu+v}$. Die somit wohldefinierte Abzählung der Paare (FR) teilt sowohl den Fächerrand, als auch den Residuumrand in nicht übereinandergreifende Teilbögen; verwendet man zur Bezeichnung der Fächer-

enden, d. h. der früher A_0 und A_m genannten Knoten, wo Fächerrand und Residuumrand zusammenstossen, gleichbedeutend F_0 oder R_0 statt A_0 , F_{t+1} oder R_{t+1} statt A_m , so sind die Fächerrandteile entsprechend F_0F_1 , F_1F_2 , , $F_{t-1}F_t$, F_tF_{t+1} , und die Residuumrandteile R_0R_1 , R_1R_2 , , $R_{t-1}R_t$, R_tR_{t+1} . Einzelne dieser Teilbögen können in einen Knoten ausarten. Die Gesamtheit der Teilbögen erschöpft den ganzen Netzrand.

Beide Knoten eines Paares der Kategorie (FF) müssen dann jedenfalls ein und demselben Teilbogen $F_\mu F_{\mu+1}$ des Fächerrandes angehören, weil widrigenfalls dieses Paar aus (FF) entweder das Paar $(F_\mu R_\mu)$ oder das Paar $(F_{\mu+1} R_{\mu+1})$ trennen würde.

Ebenso erkennt man, dass beide Knoten eines Paares der Kategorie (RR) ein und demselben Teilbogen $R_\mu R_{\mu+1}$ des Residuumrandes angehören müssen, weil sonst dieses Paar entweder $(F_\mu R_\mu)$ oder $(F_{\mu+1} R_{\mu+1})$ trennen würde.

Es verteilen sich also sowohl die Paare (FF) , als auch die Paare (RR) , nach der Zugehörigkeit zu Teilbögen des Netzrandes in Komplexe. Jedem Paar (FF) entspricht ein Teilfächer, dessen Enden die Knoten dieses Paares sind; die Maschen dieses Teilfächers mögen als zu diesem Paare gehörige Maschen bezeichnet werden, ihre Anzahl nennen wir die Maschenzahl des Paares. Analog entspricht jedem Randbogen $F_\mu F_{\mu+1}$ ein Teilfächer mit zugehöriger Maschenzahl.

Wir bezeichnen die Paare (FF) in irgendeiner Anordnung als (G_1H_1) , (G_2H_2) , . . . , (G_sH_s) . Die zu zwei solchen Paaren gehörigen Teilfächer besitzen entweder keine gemeinsamen Maschen, — wir sprechen dann von nebeneinander gelegenen Paaren, — oder aber es ist einer der beiden Teilfächer ein echter Teil des anderen, — die Paare sollen dann übereinander gelegen heissen. Letzterer Fall kann nur dann eintreten, wenn beide Paare dem gleichen Teilbogen $F_\mu F_{\mu+1}$ angehören. In der Fig. 12 sind (G_1H_1) und (G_2H_2) übereinandergelegene, (G_1H_1) und (G_3H_3) nebeneinandergelegene Paare. Da die Anzahl der Knoten im Netz endlich ist, so lassen sich unter den (FF) stets sicher solche Paare finden, deren zugehörige Maschen nicht alle gleichzeitig ein und demselben anderen Paare aus (FF) angehören. Wir bezeichnen solche Paare als Maximalpaare

in (FF) . Desgleichen existieren allemal solche Paare in (FF) , zu welchen kein anderes Paar aus (FF) angebbar ist, dessen zugehörige Maschen einen echten Teil der Maschen der erstgenannten Paare ausmachen; diese Paare mögen Minimalpaare heißen. Nennt man bei zwei übereinandergelegenen Paaren dasjenige, dessen Teilfächer kleiner ist, das niedrigere Paar, das andere das höhere Paar, so besitzt ein Maximalpaar also kein höheres, ein Minimalpaar dagegen kein niedrigeres Paar in (FF) . Ein und dasselbe Paar kann hierbei gleichzeitig Maximal- und Minimalpaar sein.

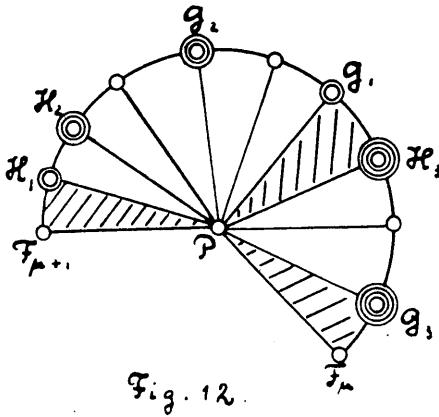


Fig. 12.

Streicht man von den Maschen eines Paares (G_v, H_v) alle diejenigen, die zugleich niedrigeren Paaren angehören, zählt dann die noch verbliebenen Maschen von (G_v, H_v) , so kommt man zu einer Anzahl, die wir die reduzierte Maschenzahl des Paares (G_v, H_v) resp. des zugehörigen

Teilfächers nennen wollen. Für die Fig. 12 sind z. B. die reduzierten Maschenzahlen der Paare (G_1, H_1) , (G_2, H_2) , (G_3, H_3) entsprechend 3, 2, 2. Die bei der Bestimmung der reduzierten Maschenzahl zu zählenden Maschen sollen die reduzierten Maschen des betreffenden Paares heißen.

Analog definieren wir die reduzierte Maschenzahl des Bogens $F_{\mu} F_{\mu+1}$ als Anzahl derjenigen Maschen (in der Fig. 12 schraffiert), die für diesen Bogen noch verbleiben, nachdem man alle Maschen fortlässt, die Paaren aus (FF) angehören.

Enthält der Bogen $F_{\mu} F_{\mu+1}$ insgesamt d Maschen, sind dabei $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ die reduzierten Maschenzahlen der zu diesem Bogen gehörigen Paare aus (FF) , bedeutet ferner ϱ die reduzierte Maschenzahl des Bogens $F_{\mu} F_{\mu+1}$, so gilt die evidente Relation:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_k + \varrho = d. \quad (63)$$

14. Verallgemeinerung früher abgeleiteter Hilfsformeln.

Wir schreiten nun zu einer Verallgemeinerung der Formeln (48), (49).

Die bedingten Farbeninvarianten in diesen Formeln berücksichtigen nur je ein Knotenpaar der betreffenden Netze. So figuriert in (48) das einzige ausgezeichnete Knotenpaar (R_1R_2) — s. Fig. 11. Wählt man statt dessen aber nun eine auf dem Restnetz II gelegene beliebige Auslese (RR) , so lassen sich die Erörterungen des § 11 Wort für Wort wiederholen, nur muss statt (R_1R_2) die gesamte positive Forderung $(+RR)$ berücksichtigt werden, womit man zur Formel

$$N_{(+RR)} = 2^q N'_{(+RR)} \quad (64)$$

gelangt.

Es sei analog bei (49) ausser der Forderung $(+RA_0)$, die wir nun $(+R_1A_0)$ schreiben wollen, noch eine auf dem Restnetz II gelegene Auslese $(+RR)$ zu beachten, jedoch von der speziellen Art, dass das Paar (R_1A_0) keines der Paare (RR) trennt, so dass also auch die Vereinigung $(R_1A_0)(RR)$ eine Auslese darstellt. Durch wortgetreue Wiederholung der entsprechenden Ausführungen des § 11, unter Berücksichtigung der Nebenforderungen $(+RR)$, erkennt man die Richtigkeit der Formel:

$$\begin{aligned} N_{(+R_1A_0)(+RR)} &= \\ &= \alpha_q \{ N'_{(+RR)} - N'_{(+RR)(+R_1P)} \} + \varepsilon^q N'_{(+RR)(+R_1A_q)}. \end{aligned} \quad (65)$$

Hier wäre noch zu beachten, dass (R_1P) ein Paar aus (RR) , ebenso (R_1A_q) ein Paar aus (RR) nur dann auf dem Rande von II trennen kann, wenn (R_1A_0) dasselbe Paar aus (RR) auf dem Rande des Gesamtnetzes trennt. Es bilden daher die Paarkombinationen $(RR)(R_1P)$ und $(RR)(R_1A_q)$ auf dem Rande von II wieder Auslesen.

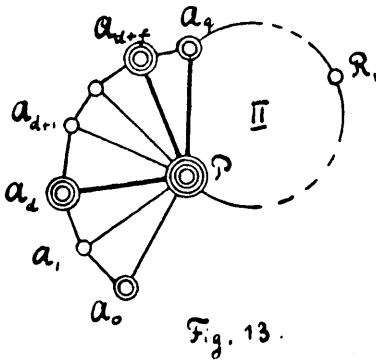
Im Spezialfall, wo R_1 mit A_q zusammenfällt, ergibt (65):

$$\begin{aligned} N_{(+A_qA_0)(+RR)} &= \\ &= \alpha_q \{ N'_{(+RR)} - N'_{(+RR)(+A_qP)} \} + \varepsilon^q N'_{(+RR)(+A_qA_q)} = \\ &= \alpha_q N'_{(+RR)} + \varepsilon^q N'_{(+RR)} = 2\alpha_{q-1} N'_{(+RR)}, \end{aligned} \quad (66)$$

weil die Forderung $(+A_qP)$ einen Widerspruch enthält (vgl. § 12), und $(+A_qA_q)$ von selbst erfüllt ist.

Es werde nun den bisherigen Forderungen noch die Bedingung $A_d \equiv A_{d+f}$ hinzugefügt (Fig. 13); dabei bildet offenbar sowohl $(RR)(A_dA_{d+f})$ als auch $(RR)(A_qR_1)(A_dA_{d+f})$ eine Auslese.

Die Berechnung von $N_{(+A_dA_{d+f})(+RR)}$ kann schrittweise ausgeführt werden, indem man vom Gesamtnetz zuerst den



d -maschigen Teil A_0PA_d abtrennt (die Farbeninvarianten des zugehörigen Restnetzes seien durch Tripelstrich gekennzeichnet), — hierauf noch den f -maschigen Teil A_dPA_{d+f} abtrennt (für die Farbeninvarianten des Restnetzes der Doppelstrich), endlich die noch übrigen $q-d-f$ Maschen des Teiles $A_{d+f}PA_q$ abtrennt (für das Restnetz der einfache Strich).

Auf Grund von (64) und (66) findet man dann:

$$\begin{aligned} N_{(+A_dA_{d+f})(+RR)} &= 2^d N'''_{(+A_dA_{d+f})(+RR)} = \\ &= 2^d \cdot 2a_{f-1} N''_{(+RR)} = 2^d \cdot 2a_{f-1} \cdot 2^{q-d-f} N'_{(+RR)} = \\ &= 2^{q-f} \cdot 2a_{f-1} N'_{(+RR)}. \end{aligned} \quad (67)$$

Analog berechnet sich $N_{(+A_0R_1)(+A_dA_{d+f})(+RR)}$:

$$\begin{aligned} &N_{(+A_0R_1)(+A_dA_{d+f})(+RR)} = \\ &= a_d \{ N'''_{(+A_dA_{d+f})(+RR)} - N'''_{(+A_dA_{d+f})(+R_1P)(+RR)} \} + \\ &\quad + \varepsilon^d N'''_{(+A_dA_{d+f})(+R_1A_d)(+RR)} = \\ &= 2a_{f-1} \left\{ a_d \{ N''_{(+RR)} - N''_{(+R_1P)(+RR)} \} + \varepsilon^d N''_{(+A_dA_{d+f})(+R_1P)(+RR)} \right\}, \end{aligned} \quad (68)$$

denn die Forderung $(+A_dA_{d+f})(+RR)(+R_1A_d)$ ist mit $(+A_dA_{d+f})(+RR)(+R_1A_{d+f})$ gleichbedeutend. Der letzte Schritt ergibt dann, unter Anwendung von (64) und (65):

$$\begin{aligned}
 & N_{(+A_0R_1)(+A_dA_{d+f})(+RR)} = \\
 & = 2\alpha_{f-1} \left\{ \alpha_d 2^{q-d-f} \{ N'_{(+RR)} - N'_{(+R_1P)(+RR)} \} + \right. \\
 & \left. + \varepsilon^d \left[\alpha_{q-d-f} \{ N'_{(+RR)} - N'_{(+R_1P)(+RR)} \} + \varepsilon^{q-d-f} N'_{(+R_1A_d)(+RR)} \right] \right\}. \quad (69)
 \end{aligned}$$

Benutzt man hier die Relation (58) zur Einführung negativer Bedingungssymbole, so findet man bei $N'_{(+RR)(-R_1P)}$ den Koeffizienten $2^{q-d-f}\alpha_d + \varepsilon^d\alpha_{q-d-f}$. Nun ist aber

$$\begin{aligned}
 2^v\alpha_\mu + \alpha_\nu\varepsilon^\mu &= 2^v\alpha_\mu + \alpha_\nu(2\alpha_{\mu-1} - \alpha_\mu) = (2^v - \alpha_\nu)\alpha_\mu + 2\alpha_{\mu-1}\alpha_\nu = \\
 &= \alpha_{\nu+1}\alpha_\mu + 2\alpha_{\mu-1}\alpha_\nu = \alpha_{\mu+\nu}, \quad (70)
 \end{aligned}$$

auf Grund der Formeln (15), (31) und (32). Somit erhält man:

$$\begin{aligned}
 & N_{(+A_0R_1)(+A_dA_{d+f})(+RR)} = \\
 & = 2\alpha_{f-1} \left\{ \alpha_{q-f} N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^{q-f} N'_{(+RR)(+R_1A_d)} \right\}. \quad (71)
 \end{aligned}$$

Diese Formel unterscheidet sich von (65) nur dadurch, dass statt der Maschenzahl q des Fächers A_0PA_q die reduzierte Maschenzahl (§ 13) $q-f$ genommen, und ausserdem der Faktor $2\alpha_{f-1}$ hinzugefügt ist.

15. Weitere Verallgemeinerungen.

Statt des einzigen ausgezeichneten Paares A_dA_{d+f} möge nun auf dem Rande des Fächers A_0PA_q eine positive Auslese von Paaren $(+G_\mu H_\mu)$ festgelegt sein; wir bezeichnen diese Auslese analog dem § 13 kurz als (FF) . Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_t$ die reduzierten Maschenzahlen dieser Auslese, q die zugehörige reduzierte Maschenzahl des Fächers A_0PA_q . Wir beweisen dann folgende Verallgemeinerungen der Relationen (64) und (65):

$$N_{(+FF)(+RR)} = 2^q \cdot 2^t \cdot \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} N'_{(+RR)}; \quad (72)$$

$$\begin{aligned}
 & N_{(+A_0R_1)(+FF)(+RR)} = \\
 & = 2^t \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \left\{ \alpha_q N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^q N'_{(+RR)(+A_dR_1)} \right\}. \quad (73)
 \end{aligned}$$

Man erkennt sofort in (67) und (71) Spezialfälle von (72), (73) für $t = 1$. Den Beweis der Allgemeingültigkeit von (72), (73) führen wir durch vollständige Induktion, wobei noch derjenige Spezialfall von (73) zu berücksichtigen ist, der sich ergibt, sobald R_1 mit A_q zusammenfällt; es wird dann $N_{(+RR)(+R_1P)} = 0$, $N_{(+RR)(+R_1A_q)} = N_{(+RR)}$ und man hat:

$$N_{(+A_0A_q)(+FF)(+RR)} = 2^{t+1} \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \alpha_{\varphi-1} N'_{(+RR)} . \tag{74}$$

Sind die fraglichen Formeln bis zu einem gewissen t -Wert richtig, so zeigt sich die Richtigkeit für $t+1$ auf folgende Weise:

Da in (FF) stets Maximalpaare vorkommen müssen (§ 13), so darf angenommen werden, dass das hinzugekommene Paar $(G_{t+1}H_{t+1})$ ein Maximalpaar darstellt. Ist φ_{t+1} die reduzierte Maschenzahl dieses Paares, so bleiben die ohne $(G_{t+1}H_{t+1})$ bestimmten reduzierten Maschenzahlen der übrigen Paare auch nach Hinzunahme von $(G_{t+1}H_{t+1})$ unverändert, weil letzteres Paar ein Maximalpaar sein sollte, seine Maschen also keinem höheren Paare aus (FF) angehören dürfen. Dagegen verkleinert sich die

reduzierte Maschenzahl des Fächers A_0PA_q um genau φ_{t+1} Einheiten, weil sämtliche reduzierten Maschen von $(G_{t+1}H_{t+1})$ vorhin zu den reduzierten Maschen des Fächers zählten. War ϱ die vorher bestimmte reduzierte Maschenzahl des Fächers A_0PA_q , so ist sie nun also gleich $\varrho - \varphi_{t+1}$ zu setzen.

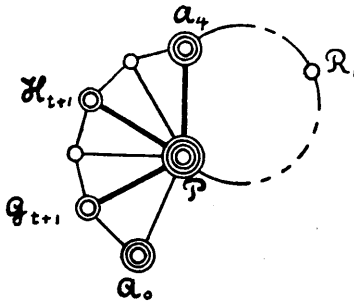


Fig. 14.

Der Gesamtfächer A_0PA_q (Fig. 14) sei nun in drei Teile — A_0PG_{t+1} , $G_{t+1}PH_{t+1}$, $H_{t+1}PA_q$ — zerlegt, die

wir als ersten, zweiten, dritten Summanden ansprechen wollen. Im ersten Summanden seien σ , im letzten τ reduzierte Maschen des Gesamtfächers vorhanden. Offenbar ist dann

$$\sigma + \varphi_{t+1} + \tau = \varrho . \tag{75}$$

Die t Paare der Auslese (FF) mögen so gezählt sein, dass die im ersten Summanden gelegenen Paare die Nummern 1 bis g ,

die im zweiten Summanden gelegenen die Nummern $g + 1$ bis h die im dritten Summanden gelegenen die Nummern $h + 1$ bis t erhalten. Dass tatsächlich die Paare aus (FF) sich alle auf die einzelnen Summanden verteilen, folgt aus dem Umstande, dass $(FF)(G_{t+1}H_{t+1})$ eine Auslese darstellen soll, in der zudem noch $(G_{t+1}H_{t+1})$ ein Maximalpaar sein muss.

Die Berechnung von $N_{(+G_{t+1}H_{t+1})(+FF)(+RR)}$ und $N_{(+A_0R_1)(+G_{t+1}H_{t+1})(+FF)(+RR)}$ führen wir in drei Schritten aus, indem wir zunächst den ersten, dann den zweiten, dann den dritten Summanden vom Gesamtnetz abspalten. Für die verbleibenden Restnetze verwenden wir entsprechend den dreifachen, doppelten und einfachen Strich. Die zum zweiten Summanden gehörigen Paare der Auslese (FF) wollen wir noch für den Augenblick mit (\underline{FF}) , die zum dritten Summanden gehörigen mit (\overline{FF}) symbolisieren. Weil keiner der Summanden mehr als t Paare (FF) enthält, so darf bei der Rechnung (72), (73) und (74) benutzt werden. Man findet:

$$\begin{aligned}
 & N_{(+G_{t+1}H_{t+1})(+FF)(+RR)} = \tag{76} \\
 & = 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_g-1} N'''_{(+G_{t+1}H_{t+1})(+\underline{FF})(+\overline{FF})(+RR)} = \\
 & = 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_{g-1}} \cdot 2^{h-g+1} \alpha_{\varphi_{g+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_h-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} N''_{(+\underline{FF})(+\overline{FF})(+RR)} = \\
 & = 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_{g-1}} \cdot 2^{h-g+1} \alpha_{\varphi_{g+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_h-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \cdot 2^{t-h} \alpha_{\varphi_{h+1}-1} \dots \\
 & \dots \alpha_{\varphi_t-1} N'_{(+RR)} = 2^{t+1} \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} N'_{(+RR)},
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & N_{(+A_0R_1)(+G_{t+1}H_{t+1})(+FF)(+RR)} = \\
 & = 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_{g-1}} \left\{ \alpha_{\sigma} N'''_{(+G_{t+1}H_{t+1})(+\underline{FF})(+\overline{FF})(+RR)(-R_1P)} + \right. \\
 & \left. + \varepsilon^{\sigma} N'''_{(+G_{t+1}H_{t+1})(+\underline{FF})(+\overline{FF})(+R_1G_{t+1})} \right\};
 \end{aligned}$$

an dieser Stelle ist zu beachten,³ dass $(+\underline{FF})(+\overline{FF})(+G_{t+1}H_{t+1})(+R_1G_{t+1})$ mit $(+\underline{FF})(+\overline{FF})(+G_{t+1}H_{t+1})(+R_1H_{t+1})$ gleichbedeutend ist, wodurch die weitere Umformung ermöglicht wird. Mit Hilfe von (74) erhält man dann:

$$\begin{aligned}
& N_{(+A_0R_1)(+G_{t+1}H_{t+1})(+FF)(+RR)} = \\
& = 2^g \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_g-1} \cdot 2^{h-g+1} \alpha_{\varphi_{g+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_h-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \cdot \\
& \cdot \left\{ \alpha_\sigma N''_{(+FF)(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^\sigma N''_{(+FF)(+RR)(+R_1H_{t+1})} \right\} = \\
& = 2^{h+1} \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_h-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \cdot 2^{t-h} \alpha_{\varphi_{h+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \cdot \\
& \cdot \left\{ 2^\tau \alpha_\sigma N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^\sigma \left[\alpha_\tau N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^\tau N'_{(+RR)(+R_1A_q)} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Verwendet man jetzt noch die Relationen (70) und (75), so folgt:

$$\begin{aligned}
& N_{(+R_0A_1)(+G_{t+1}H_{t+1})(+FF)(+RR)} = \\
& = 2^{t+1} \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_t-1} \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \left\{ \alpha_{\sigma+\tau} N'_{(+RR)(-R_1P)} + \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon^{\sigma+\tau} N'_{(+RR)(+R_1A_q)} \right\} = 2^{t+1} \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_{t+1}-1} \cdot \quad (77) \\
& \cdot \left\{ \alpha_{\varphi-\varphi_{t+1}} N'_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^{\varphi-\varphi_{t+1}} N'_{(+RR)(+R_1A_q)} \right\}.
\end{aligned}$$

Die Resultate (76) und (77) wiederholen aber nur die Aussagen (72), (73), diesmal für eine aus $t+1$ Paaren bestehende Auslese (FF). Damit sind die letztgenannten Formeln bewiesen.

16. Endgültige Verallgemeinerung.

Es sei ein beliebiges irreduzibles Normalnetz nach § 8 auf beliebige Art in Fächer und Residuum zerlegt; auf dem Rande dieses Normalnetzes sei eine beliebige positive Auslese fixiert, die dann in der Symbolik des § 13 als $(+FR)(+FF)(+RR)$ geschrieben werden soll. Die Paare (FR) seien wie im § 13 numeriert, ihre Anzahl sei t . Die beiden Knoten, die sowohl dem Fächerrande als auch dem Residuumrande angehören, sollen gleichwertig F_0 oder R_0 und F_{t+1} oder R_{t+1} heissen (§ 13). Entfernt man vom Normalnetz den Fächerteil $F_{t+1}PF_t$ (P bedeutet, wie früher, das Zentrum der Zerlegung), so verbleibt ein reduzibles Netz, das durch den Querschnitt PF_0 in den Fächer F_tPF_0 und das frühere Residuum zerfällt. Für dieses verbleibende reduzible Netz soll nun eine Formel bewiesen werden, die (77) als Spezialfall enthält.

Um Komplikationen in den Symbolen zu vermeiden, denken wir uns (FF) nur solche Paare enthaltend, die nicht dem entfernten Fächerteil $F_{t+1}PF_t$ angehören. Die Anzahl dieser Paare (FF) sei f , ihre reduzierten Maschenzahlen seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_f$. Die reduzierten Maschenzahlen der Teilbögen $F_0F_1, F_1F_2, F_2F_3, \dots, F_{t-1}F_t$ des Fächerrandes (vgl. § 13) seien entsprechend $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots, \varrho_t$. Die Farbeninvarianten des Residuums sollen durch Strichelung gekennzeichnet werden. Die zu beweisende Formel lautet dann:

$$N_{(+FR)(+FF)(+RR)} = \tag{78}$$

$$= 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varrho_1} \dots \alpha_{\varrho_t} N'_{(+RR)(-R_1P)(-R_2P) \dots (-R_tP)} + \right.$$

$$+ \sum_{\mu=1}^t \alpha_{\varrho_1} \dots \alpha_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} \alpha_{\varrho_{\mu+1}} \dots \alpha_{\varrho_t} N'_{(+RR)(+R_{\mu-1}R_\mu)(-R_1P) \dots (-R_tP)} +$$

$$+ \dots +$$

$$\left. + \varepsilon^{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \dots \varepsilon^{\varrho_t} N'_{(+RR)(+R_0R_1)(+R_1R_2) \dots (+R_{t-1}R_t)(-R_1P) \dots (-R_tP)} \right\} .$$

Die Glieder der Schleifenklammer sind hier in Zeilen verteilt; in der k -ten Zeile enthält jeder Koeffizient genau $k-1$ Faktoren vom Typus ε^ϱ , und jeder überhaupt mögliche Koeffizient dieser Art muss dort ein und nur einmal vorkommen; kommt im Koeffizienten $\varepsilon^{\varrho_\mu}$ vor, so ist die zugehörige Farbeninvariante ausser den Bedingungen $(+RR)(-R_1P) \dots (-R_tP)$ noch allemal der Bedingung $(+R_{\mu-1}R_\mu)$ zu unterwerfen. Die Bedingungen in den Farbeninvarianten des Residuums, die in dieser Formel vorkommen, können übrigens mit Hilfe der Relation (58) vereinfacht werden, wenn man beachtet, dass die Erfüllung der Forderung $(+R_0P)$ unmöglich ist. Es ist z. B. die Farbeninvariante der letzten Zeile gleich der Farbeninvariante $N'_{(+RR)(+R_0R_1)(+R_1R_2) \dots (+R_{t-1}R_t)}$.

Setzt man in (78) $t=1$ und schreibt nachher t für f , so gelangt man zur Formel (73) zurück, die somit wirklich einen Spezialfall der allgemeineren Relation (78) darstellt. Durch vollständige Induktion soll die Allgemeingültigkeit bewiesen werden. Es sei aber vor allem bemerkt, dass sämtliche Bedingungen in den Farbeninvarianten des Residuums wirklich wieder Auslesen darstellen, wie auf Grund der im § 13 entwickelten Tatsachen gefolgert werden kann.

Die Richtigkeit von (78) bis zu einem Werte $t-1$ werde nun vorausgesetzt. Trennt man dann von dem uns vorliegenden reduzierten Netz noch den Fächerteil $F_t P F_{t-1}$ ab, so verbleibt ein Restnetz, in dem (78) anwendbar ist, weil dort nur noch $t-1$ Paare (FR) verblieben sind. Die in diesem Restnetz verbliebenen Paare aus (FF) mögen durch (\underline{FF}) symbolisiert werden; ihre Anzahl sei f' , ihre reduzierten Maschenzahlen sind die früheren, weil die abgetrennten Paare neben den verbliebenen, nicht aber über ihnen liegen (§ 13). Die Numeration sei so durchgeführt, dass den verbliebenen Paaren die Nummern $1, 2, \dots, f'$, den abgetrennten die Nummern $f'+1, f'+2, \dots, f$ zukommen. Für die Farbeninvarianten des nach Abtrennung von $F_t P F_{t-1}$ verbliebenen Restnetzes soll der Doppelstrich Verwendung finden. Auf Grund von (73) hat man:

$$\begin{aligned} & N_{(+FR)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^{f-f'} \alpha_{\varphi_{f'+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varphi_t} N''_{(+FR)(\underline{FF})(+RR)(-R_t P)} + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^{\varphi_t} N''_{(+FR)(\underline{FF})(+RR)(+R_t F_{t-1})} \right\}, \end{aligned} \quad (79)$$

wo (\underline{FR}) die Auslese $(+F_1 R_1), (+F_2 R_2), \dots, (+F_{t-1} R_{t-1})$ symbolisiert. Bemerkt man noch die Gleichwertigkeit der Auslesen $(\underline{FR})(\underline{FF})(+RR)(+R_t F_{t-1})$ und $(\underline{FR})(\underline{FF})(+RR)(+R_{t-1} R_t)$, so kann man auf die Farbeninvarianten rechts die Formel (78) anwenden, wenn man vorher, mit Hilfe von (58), die Bedingungen positiv ausdrückt. Man erhält so schliesslich in dem Ausdruck für $N_{(+FR)(+FF)(+RR)}$ den gemeinschaftlichen Faktor

$$2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1}. \quad (80)$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} & N'_{(+RR)(-R_1 P) \dots (-R_{t-1} P)} - N'_{(+RR)(+R_t P)(-R_1 P) \dots (-R_{t-1} P)} = \\ & = N'_{(+RR)(-R_1 P) \dots (-R_t P)}, \end{aligned} \quad (81)$$

und die Forderung $(+R_{t-1} R_t)(-R_1 P) \dots (R_{t-1} P)$ offenbar mit der Forderung $(+R_{t-1} R_t)(-R_1 P) \dots (-R_{t-1} P)(-R_t P)$ gleichbedeutend. Auf Grund dieser Erwägungen wird dann aber der

nach Absonderung des Faktors (80) aus der Umformung sich ergebende Ausdruck identisch mit der Schleifenklammer' in (78). Damit ist die Richtigkeit von (78) erwiesen.

17. Die Vierfarbenformel.

Wir sind jetzt imstande eine Reduktionsformel anzugeben, welche die Berechnung einer durch eine beliebige positive Auslese bedingten Farbeninvariante eines Normalnetzes auf die Berechnung ebenfalls nur durch Auslesen bedingter Farbeninvarianten des Residuums zurückführt.

Das vorgelegte Normalnetz sei von der Ordnung i , die auf seinem Rande fixierte Auslese, wie früher, durch $(RR)(FF)(FR)$ dargestellt, t bedeute die Anzahl der Paare (FR) . Statt der tatsächlich ausgeführten Zerlegung, wo $F_{t+1}PF_0$ der Fächer ist, betrachten wir zunächst eine Hilfszerlegung mit $F_{t+1}PF_t$ als Hilfsfächer. Das zugehörige Hilfsresiduum zerfällt dann noch durch den Querschnitt PF_0 in den Fächer F_tPF_0 und das tatsächliche Residuum. Die f Paare (FF) sollen so abgezählt sein, dass dem Hilfsfächer die $f-f'$ letzten angehören. g_μ und q_μ sollen dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Paragraphen. Für die Farbeninvarianten des Hilfsresiduums verwenden wir nun den einfachen Strich, während das tatsächliche Residuum ohne Strich, dafür aber mit Angabe der Ordnungszahl $i-1$ geschrieben werden soll. Die Gesamtheit der f' ersten Paare (FF) werde als (FF) bezeichnet.

Zunächst erledigen wir die Annahme $t=1$.

Die im § 11 abgeleitete Relation (57) bleibt auch dann noch richtig, wenn überall eine nur auf das Residuum bezügliche ergänzende Bedingung $(+RR)$ hinzugefügt wird, weil letztere keinen wesentlichen Einfluss auf den Gang der Ableitung hat. Dasselbe gilt für die im § 9 gegebene Beziehung (37), die dann lautet:

$$N_{(+RR)}^i = a_m N_{(+RR)}^{i-1} + \varepsilon^m N_{(+RR)(+A_0A_m)}^{i-1}. \tag{82}$$

Es sei nun $t=1, f=f'$. Die Hilfszerlegung ergibt:

$$N_{(+FR)(+FF)(+RR)}^i = a_{q_2} N'_{(+FR)(+FF)(+RR)} + \varepsilon^{q_2} N'_{(+FR)(+FF)(+RR)(+F_1F_2)}, \tag{83}$$

infolge (82) für $m = \varrho_2$. Hier ist $(+FR)(+FF)(+RR)(+F_1F_2)$ mit der Auslese $(+FR)(+FF)(+RR)(+R_1R_2)$ gleichbedeutend. Berücksichtigt man dies und verwendet (73), zieht dabei noch in Betracht, dass

$$\overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_1R_2)(-R_1P)} = \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_1R_2)} \quad (84)$$

sein muss, weil R_2 und P im Netz benachbart sind, so folgt

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varrho_1} \alpha_{\varrho_2} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-R_1P)} + \varepsilon^{\varrho_1} \alpha_{\varrho_2} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1)} + \right. \\ & \quad \left. + \alpha_{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_1R_2)} + \varepsilon^{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1)(+R_1R_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (85)$$

Diese Formel ist eine Verallgemeinerung der Relation (57).

Verwendet man (85) für denjenigen Spezialfall, wo F_1 mit F_2 und R_1 mit R_2 zusammenfällt, so wird die Forderung $(+FR)$ von selbst erfüllt und bedarf daher keiner besonderen Erwähnung. Es ist dann $\varrho_2 = 0$, desgleichen also $\alpha_{\varrho_2} = 0$, und ε^{ϱ_2} wird gleich 1. Man erhält so

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varrho_1} \overset{i-1}{N}_{(+RR)} + \varepsilon^{\varrho_1} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1)} \right\}. \end{aligned} \quad (86)$$

Dies ist eine Verallgemeinerung von (82).

Den Fall $f > f'$, $t = 1$ brauchen wir nicht besonders zu betrachten, da er sich aus dem Fall eines allgemeinen t sofort ergibt und wir uns direkt letzterem zuwenden.

Es sei also t ganz beliebig. Die Hilfszerlegung zeigt dann nach (86):

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+RF)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^{f-f'} \alpha_{\varphi_{f'+1}-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ \alpha_{\varrho_{t+1}} \overset{i}{N}'_{(+RF)(+FF)(+RR)} + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^{\varrho_{t+1}} \overset{i}{N}'_{(+RF)(+FF)(+RR)(+F_tF_{t+1})} \right\}. \end{aligned} \quad (87)$$

Da $(+RF)(+FF)(+RR)(+F_tF_{t+1})$ mit $(+RF)(+FF)(+RR)(+R_tR_{t+1})$ gleichbedeutend ist, so führt die nunmehrige Anwendung von (78) zur Relation:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+RF)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^f a_{\varphi_1-1} \dots a_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ a_{\varrho_{t+1}} \left[a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_t} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)} + \right. \right. \\ & + \sum_{\mu=1}^t a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} a_{\varrho_{\mu+1}} \dots a_{\varrho_t} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_{\mu-1}R_\mu)(-RP)} + \\ & + \dots \dots \dots \left. \left. \right] + \varepsilon^{\varrho_{t+1}} \left[a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_t} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_tR_{t+1})(-RP)} + \right. \right. \\ & + \sum_{\mu=1}^t a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} a_{\varrho_{\mu+1}} \dots a_{\varrho_t} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_tR_{t+1})(+R_{\mu-1}R_\mu)(-RP)} + \\ & \left. \left. + \dots \dots \dots \right] \right\}, \tag{88} \end{aligned}$$

wo $(-RP)$ die Auslese $(-R_1P)(-R_2P) \dots (-R_tP)$ symbolisiert. In etwas geänderter Schreibweise lautet dies:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+RF)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^f a_{\varphi_1-1} \dots a_{\varphi_f-1} \cdot \left\{ a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)} + \tag{89} \right. \\ & + \sum_{\mu=1}^{t+1} a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} a_{\varrho_{\mu+1}} \dots a_{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_{\mu-1}R_\mu)(-RP)} + \\ & \left. + \dots \dots \dots + \varepsilon^{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \dots \varepsilon^{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1) \dots (+R_tR_{t+1})(-RP)} \right\}. \end{aligned}$$

Die Formel (89) löst das im § 1 gestellte Problem auf rekurrentem Wege und stellt somit das wesentliche Endziel unserer diesbezüglichen Untersuchung dar. Wir nennen sie die Vierfarbenformel. Die vorher abgeleiteten Reduktionsformeln sind allesamt als Spezialfälle in der Vierfarbenformel enthalten.

18. Spezielle Anwendungen der Vierfarbenformel.

Zur wirklichen Berechnung der Farbeninvarianten bedürfen wir noch ihrer Kenntnis für Normalnetze erster Ordnung, wobei es genügt irreduzible Netze zu betrachten. Man erhält die Farben-

invarianten für irreduzible Normalnetze erster Ordnung direkt aus der Vierfarbenformel folgendermassen:

Hat das betreffende Netz $m+1$ Maschen, so lässt sich ein Maximalfächer mit m Maschen abtrennen und das Residuum besteht aus einer einzigen dreieckigen Masche. Weil somit für die Punkte R_μ von (FR) überhaupt kein Platz verbleibt, so hat man $t=0$. Es muss aber auch die Auslese $(+RR)$ verschwinden, da die beiden in Betracht kommenden Randpunkte des Residuums allemal als Punkte auf dem Fächerrand angesehen werden dürfen. Es ist mithin $\overset{0}{N}_{(+RR)} = \overset{0}{N} = 1$. Das Glied, wo die Bedingung $(+R_0R_1)$ vorkommt, verschwindet, denn R_0 und R_1 sind benachbart. Schreibt man noch ϱ für ϱ_1 , so folgt aus (89) jetzt:

$$\overset{1}{N}_{(+FF)} = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \alpha_\varrho. \quad (90)$$

Wegen der invarianten Bedeutung der Zahl $\overset{1}{N}_{(+FF)}$ ist es hierbei gleichgültig, welche der Maschen man als Residuum ansieht, obwohl die reduzierten Maschenzahlen hiervon beeinflusst werden. Es dürfte demnach nur eine Permutation dieser Maschenzahlen eintreten.

Statt der reduzierten Maschenzahl des Fächers, die wir ϱ nannten, könnte man die reduzierte Maschenzahl φ des Netzes verwenden, indem man darunter die Anzahl derjenigen Maschen des Netzes erster Ordnung versteht, die nicht reduzierte Maschen der Paare (FF) sind. Man erkennt leicht, dass φ um eine Einheit grösser ist als ϱ (es tritt nämlich die Residuummasche zu den reduzierten Maschen des Fächers hinzu). Dann gewinnt (90) eine symmetrischere Gestalt:

$$\overset{1}{N}_{(+FF)} = 2^f \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} \alpha_{\varphi-1}. \quad (91)$$

Aus (91) ist zu ersehen, dass eine Farbinvariante eines irreduziblen Normalnetzes erster Ordnung dann und nur dann verschwindet, wenn irgendeine reduzierte Maschenzahl gleich 1 ist.

Als auf die Fig. 4 bezügliche Kontrollbeispiele nehmen wir etwa

$$\overset{1}{N}_{(+P_1P_3)(+P_3P_5)} = 2^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4$$

$$\overset{1}{N}_{(+P_3P_6)} = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6.$$

Vergleicht man dies mit der Tabelle des § 7, so zeigt sich, dass dort der ersten Forderung die Bezeichnungenarten der Kolonnen 1, 2, 6, 7, der zweiten Forderung die Bezeichnungenarten der Kolonnen 3, 4, 8, 9, 13, 18 genügen.

Zur Kontrolle der Vierfarbenformel an Netzen höherer Ordnungen betrachten wir die den regulären Polyedern entsprechenden Netze.

Das Tetraedernetz (Fig. 15) ist das einfachste Netz erster Ordnung. Laut (35) hat man hier $\overset{1}{N} = a_2 = 1$, wie ja auch direkt aus der Figur ersichtlich ist, da bei $P_0 \equiv a$, $P_1 \equiv b$, $P_2 \equiv c$ nur noch $P_3 \equiv d$ möglich bleibt.

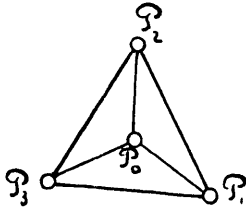


Fig. 15.

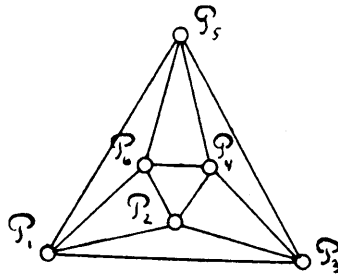


Fig. 16.

Das Oktaedernetz (Fig. 16) ist von der Ordnung 3. Nimmt man eine Zerlegung um P_2 als Zentrum vor, wobei der Zerlegungsindex gleich 1 wird, so folgt nach (37):

$$\overset{3}{N} = \overset{2}{N} - \overset{2}{N}_{(+1, 3)},$$

wenn man die Knoten abkürzend durch ihre Nummern bezeichnet.

Für das Residuum $P_1P_2P_3P_4P_5$ zeigt die Zerlegung vom Index 2 um P_4 als Zentrum:

$$\begin{aligned} \overset{2}{N} &= \overset{1}{N} + \overset{1}{N}_{(+2, 5)} \\ \overset{2}{N}_{(+1, 3)} &= \overset{1}{N} - \overset{1}{N}_{(+1, 4)}, \end{aligned}$$

auf Grund von (89). Weil aber $\overset{1}{N} = a_3 = 3$, $\overset{1}{N}_{(+2, 5)} = \overset{1}{N}_{(+1, 4)} = 2$, so folgt $\overset{2}{N} = 5$, $\overset{2}{N}_{(+1, 3)} = 1$, also $\overset{3}{N} = 4$.

Dient $P_1P_2P_3$ als Ausgangsmasche, so sind die 4 Bezeichnungenarten, wenn die Farben in der Reihenfolge der Knotennumeration genannt werden, die folgenden:

$$abcabc, \quad abcabd, \quad abcade, \quad abedbc.$$

Für das Ikosaedernetz, das von der Ordnung 9 ist, kann die langwierige Rechnung etwas abgekürzt werden, wenn

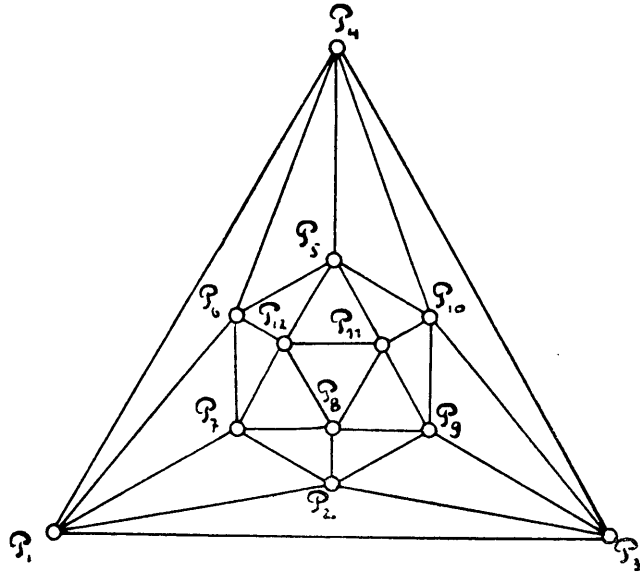


Fig. 17.

man bei der Ableitung der Relationen die topologische Symmetrie der Figuren in Betracht zieht (Fig. 17). Als aufeinanderfolgende Residuen seien etwa die folgenden genommen (genannt sind die Nummern der jeweiligen Randknoten):

$$(1, 2, 3, 4, 1); (1, 2, 9, 3, 4, 1); (1, 2, 9, 10, 4, 1); \\ (1, 2, 9, 10, 5, 4, 1); (1, 2, 9, 10, 5, 6, 1); (2, 9, 10, 5, 6, 7, 2); \\ (2, 9, 11, 5, 6, 7, 2); (2, 9, 11, 12, 7, 2).$$

Die entsprechenden Zerlegungszentren und Indizes sind:

$$P_2(\text{Ind. } 1); P_9(\text{Ind. } 1); P_{10}(\text{Ind. } 2); P_5(\text{Ind. } 1); \\ P_6(\text{Ind. } 2); P_7(\text{Ind. } 2); P_{11}(\text{Ind. } 2); P_{12}(\text{Ind. } 3).$$

Auf Grund der Vierfarbenformel ist

$$\begin{aligned} N^9 &= N^8 - N^8_{(+1, 3)}; & N^8 &= N^7 - N^7_{(+2, 3)}; & N^7 &= N^6 + N^6_{(+4, 9)}; \\ N^6 &= N^5 - N^5_{(+4, 10)}; & N^5 &= N^4 + N^4_{(+1, 5)}; & N^4 &= N^3 + N^3_{(+2, 6)}; \\ N^3 &= N^2 + N^2_{(+5, 9)}; & N^2 &= 3 \cdot N^1 - N^1_{(+7, 11)}. \end{aligned}$$

Mit der niedrigsten Ordnung beginnend, findet man:

$$\begin{aligned} N^1 &= 5; & N^2 &= 3 \cdot 5 - 2 = 13; & N^3 &= 13 + 5 = 18; \\ N^4 &= 18 + 6 = 24; & N^5 &= 24 + 7 = 31; & N^6 &= 31 - 11 = 20; \\ N^7 &= 20 + 6 = 26; & N^8 &= 26 - 8 = 18; & N^9 &= 18 - 8 = 10. \end{aligned}$$

Es gestattet somit das Ikosaeder 10 wesentlich verschiedene Vierfarbenbezeichnungen seiner Ecken, mithin das Dodekaeder 10 wesentlich verschiedene Vierfarbenbezeichnungen der Flächen. Lässt man die Forderung „wesentlich“ fallen, so erhält man die 24-fache Zahl, d. h. 240.

In der Reihenfolge der Ecken genannt, sind die 10 Vierfarbenbezeichnungen des Ikosaeders die folgenden ($P_1P_2P_3$ dient als Ausgangsmasche):

$$\begin{array}{ll} abcbedcdadacb; & abcdebcadabd; \\ abcbedcdedaba; & abcdebcledaba; \\ abcbedcdadacb; & abcdebcledabda; \\ abcbedcdadaba; & abcdebcledcabdb; \\ abcbedcdadbed; & abcdebcledadlcb. \end{array}$$

Diese Tabelle bezeugt u. a. die interessante Tatsache, dass zwei diametral gegenüberliegende Ecken des Ikosaeders niemals identisch gefärbt werden können.

19. Der allgemeine Vierfarbensatz.

Die Vierfarbenformel ermöglicht es, für jedes Normalnetz die absolute Farbeninvariante als explizite Funktion der Vierfarbennoeffizienten darzustellen, sobald das Netz tatsächlich vorgegeben ist. Diese Funktion ist wesentlich von der Struktur des Netzes

abhängig. Für einzelne spezielle Typen kann man die zugehörigen Bildungsgesetze dieser Funktion ganz allgemein angeben; ob sich aber ein Bildungsgesetz konstruieren lässt, welches jedem Netztypus entspricht, bleibt eine offene Frage.

Zur Lösung des Vierfarbenproblems, d. h. zur Beantwortung der Frage, ob die absolute Farbeninvariante allemal positiv ist, könnte man aber ohne Kenntnis der fraglichen Funktion gelangen, indem man auf Grund der Vierfarbenformel nachweist, dass diese Farbeninvariante notwendig positiv sein muss, sofern sie im Residuum positiv ist. Dies wäre ein Beweis durch vollständige Induktion, wobei die Normalnetze nach der Ordnungszahl angeordnet auftreten. Nun kommen aber in der Vierfarbenformel rechts im allgemeinen bedingte Farbeninvarianten vor, auch dann, wenn links nur die absolute Farbeninvariante steht; man wird also auf diesem Wege zur Untersuchung des Verhaltens bedingter Farbeninvarianten geführt. Setzt man die Richtigkeit der Vierfarbenhypothese voraus, so gelangt man durch Induktion zu folgendem Theorem, welches den Vierfarbensatz als Spezialfall in sich enthält, und daher als allgemeiner Vierfarbensatz bezeichnet werden mag:

Bedeutet $(+M)(-L)$ eine beliebige widerspruchsfreie Auslese auf dem Rande eines irreduziblen Normalnetzes, so ist die durch diese Auslese bedingte Farbeninvariante positiv.

Anders ausgedrückt:

$N_{(+M)(-L)}$ verschwindet nur dann, wenn $(+M)(-L)$ einen Widerspruch enthält.

Über den Begriff des Widerspruchs in einer Auslese vergleiche man § 12.

Der Beweis des allgemeinen Vierfarbensatzes durch vollständige Induktion bietet an einzelnen Stellen Schwierigkeiten, wie es scheint, technischen Charakters. Es ist aber auch nicht die Möglichkeit von der Hand zu weisen, dass der fragliche Beweis nur gleichzeitig mit dem Beweis eines anderen, hier nicht formulierten Satzes durchgeführt werden kann, analog dem, wie der Beweis des Vierfarbensatzes den gleichzeitigen Beweis des allgemeinen Vierfarbensatzes erfordert.

Dass der allgemeine Vierfarbensatz in Normalnetzen erster Ordnung wirklich gilt, erkennt man verhältnismässig leicht, indem

man die Farbeninvariante $N_{(+M)(-L)}$ explizite aufschreibt. Wird im Normalnetz erster Ordnung eine beliebige Masche als Residuum ausgezeichnet, so verbleibt ein Fächer, in welchem für jedes Paar der Auslese $(M)(L)$ die zugehörige reduzierte Maschenzahl bestimmt ist. Die Anzahl der ungezählten Maschen (hierher gehört auch das Residuum) bestimmt die reduzierte Maschenzahl des Normalnetzes. Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_m$ die so gefundenen reduzierten Maschenzahlen der positiven, also (M) entnommenen Paare, ferner $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_l$ die reduzierten Maschenzahlen der negativen, also (L) angehörigen Paare, endlich φ die reduzierte Maschenzahl des Netzes. Bei der Bestimmung der reduzierten Maschenzahlen ist die gleichzeitige Anwesenheit der Paare $(M), (L)$ zu berücksichtigen. Die Symbole φ_ν, ψ_μ verwenden wir auch zur Bezeichnung der zugehörigen Paare.

Wir fixieren ein Paar ψ_μ . Gibt es zu diesem ψ_μ kein höheres Paar φ_ν , so nennen wir φ_ν mit φ assoziiert; im entgegengesetzten Falle existiert unter sämtlichen höheren Paaren φ_ν ein und nur ein solches Paar φ_{ν_1} , welches höher ist als ψ_μ , doch niedriger als jedes andere φ_ν derselben Art, — es soll dann ψ_μ mit φ_{ν_1} assoziiert heissen. Je zwei demselben φ_ν assoziierte Paare ψ sollen verwandte Paare heissen.

In jedem Komplex sämtlich untereinander verwandter Paare ψ gibt es sicher Paare, die kein höheres verwandtes Paar aufweisen. Solche Paare nennen wir relative Maximalpaare der Verwandtschaft. Die Anzahl λ_ν der mit φ_ν assoziierten relativen Maximalpaare ψ_μ werden als Charakteristik von φ_ν bezeichnet; analog ist die Definition der Charakteristik von φ .

Unter den mit ψ_μ verwandten, aber in Bezug auf ψ_μ niedrigeren Paaren gibt es notwendigerweise solche, die nicht zugleich niedrigere Paare für Paare derselben Art sind. Wir nennen sie die grössten unter ψ_μ gelegenen Paare. Die Anzahl τ_μ dieser grössten unter ψ_μ gelegenen Paare sei die Charakteristik von ψ_μ .

Es gilt dann die Formel:

$$\begin{aligned} & \overset{1}{N}_{(+M)(-L)} = \\ & = 2^m \cdot \alpha_{\psi_1+\tau_1} \alpha_{\psi_2+\tau_2} \cdots \alpha_{\psi_l+\tau_l} \cdot \alpha_{\varphi_1+\lambda_1-1} \alpha_{\varphi_2+\lambda_2-1} \cdots \alpha_{\varphi_m+\lambda_m-1} \alpha_{\varphi+\lambda-1} \cdot \end{aligned} \quad (92)$$

Der Beweis ergibt sich leicht durch vollständige Induktion, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden soll. Es ist (92) eine Verallgemeinerung der Relation (91).

Aus (92) ist ersichtlich, dass $\overset{1}{N}_{(+M)(-L)}$ dann und nur dann verschwindet, wenn entweder $\psi_\mu + \tau_\mu = 0$, oder $\varphi_\nu + \lambda_\nu - 1 = 0$. Im ersteren Falle wäre $\psi_\mu = 0$ die reduzierte Maschenzahl für ein Paar aus $(-L)$, wobei kein niedrigeres verwandtes Paar existiert. Weil der diesem Paare ψ_μ entsprechende Teilfläche dann von Paaren aus $(+M)$ überdeckt sein muss, so lässt sich folgern, dass das ψ_μ entsprechende Paar von $(+M)$ abhängig ist, was nach § 12 einen Widerspruch darstellt. Im letzteren Falle ist entweder $\varphi_\nu = 0$, $\lambda_\nu = 1$, oder $\varphi_\nu = 1$, $\lambda_\nu = 0$. Für die erste dieser Annahmen sei etwa $(A_\nu B_\nu)$ das φ_ν entsprechende Paar aus $(+M)$, ferner $(X_\mu Y_\mu)$ das einzige mit $(A_\nu B_\nu)$ assoziierte relative Maximalpaar aus $(-L)$. Da die Differenz der Bögen $A_\nu B_\nu$ und $X_\mu Y_\mu$ mit Bögen aus (M) überdeckt sein muss, — sonst könnte φ_ν nicht null sein, — so zeigt sich eine Abhängigkeit des Paares $(X_\mu Y_\mu)$ von (M) , womit wieder ein Widerspruch aufgedeckt ist. Die zweite Annahme hätte zu bedeuten, dass schon in der Auslese (M) für sich allein der Teilfläche $(A_\nu B_\nu)$ die reduzierte Maschenzahl 1 aufweist, woraus dann folgt, dass wegen der Forderung $(+M)$ zwei benachbarten Knoten identische Farben zukommen sollen, was wiederum einen Widerspruch bedeutet.

Der allgemeine Vierfarbensatz ist daher für Netze erster Ordnung richtig.

ÜBER DIE VIERFARBENFORMEL

VON

J. NUUT

TARTU (DORPAT) 1929

C. Mattiesen, Tartu (Dorpat).

1. Einführung.

In der Untersuchung „Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe“*) (abgekürzt *ALV*) habe ich eine Rekursionsformel entwickelt, die es ermöglicht die Anzahl der Vierfarbenbezeichnungen der Ecken eines Normalnetzes¹⁾ zu berechnen, unter Berücksichtigung spezieller Systeme von Nebenbedingungen. Die Nebenbedingungen beziehen sich allemal auf eine Auslese²⁾ von Randknotenpaaren und zerfallen in positive und negative Forderungen ($+AB$) resp. ($-CD$); erstere besagen, dass A, B identisch, letztere dagegen, dass C, D verschieden gefärbt werden sollen. Die Reduktion des Problems erfolgt auf dem Wege der Anordnung der Normalnetze nach Ordnungszahlen, d. h. nach der Anzahl der inneren Netzknoten. Die Erniedrigung der Ordnungszahl wird durch Spaltung des jeweiligen Netzes in Fächer und Residuum³⁾ erreicht. Die Randknotenpaare der getroffenen Auslese verteilen sich hierbei notwendig in 3 Kategorien, nämlich Paare vom Typus (FR), wo die eine Komponente F zum Fächer, die andere R zum Residuum gehört, ferner Paare vom Typus (FF), wo beide Komponenten zum Fächer, endlich Paare vom Typus (RR), wo beide Komponenten zum Residuum gehören. Die Paare (FR) erscheinen in linearer Anordnung als (F_1R_1), (F_2R_2), ... (F_tR_t) und bestimmen zusammen mit den Paaren (FF) auf dem Fächer einen Komplex reduzierter Maschenzahlen⁴⁾

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{t+1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_t. \quad (1)$$

Diese ϱ, φ sind ihrer Definition nach nicht-negative ganze Zahlen.

Bezeichnet dann ε die Zahl -1 , ferner α_n den Vierfarbennoeffizienten⁵⁾, der durch die Relation

$$\alpha_n = \frac{1}{3} (2^n + \varepsilon^{n-1}) \quad (2)$$

definiert werden kann, und wird $N_{(Z)}$ als Symbol der durch die

*) Acta et Comm. Univ. Tartuensis A XV 3.

1) Vgl. *ALV* § 1. 2) *ALV* § 12. 3) *ALV* § 3. 4) *ALV* § 13. 5) *ALV* § 6.

Auslese (Z) bedingten Farbeninvariante ⁶⁾ verwendet, so lautet die Formel der ALV :

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)} = \\ & = 2^f a_{\varphi_1-1} \dots a_{\varphi_f-1} \left\{ a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)} + \right. \\ & + \sum_{\mu=1}^{t+1} a_{\varrho_1} \dots a_{\varrho_{\mu-1}} \varepsilon^{\varrho_\mu} a_{\varrho_{\mu+1}} \dots a_{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_{\mu-1}R_\mu)(-RP)} + \\ & \quad + \dots \dots \dots + \\ & \left. + \varepsilon^{\varrho_1} \varepsilon^{\varrho_2} \dots \varepsilon^{\varrho_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(+R_0R_1) \dots (+R_tR_{t+1})(-RP)} \right\}. \quad (3) \end{aligned}$$

Hier bedeutet P das Zentrum ⁷⁾ der ausgeführten Reduktionszerlegung, während $(-RP)$ abgekürzt die Auslese $(-R_1P)$ $(-R_2P) \dots (-R_tP)$ symbolisiert. Diese Formel (3) wird in der ALV als Vierfarbenformel ⁸⁾ bezeichnet.

Die Auslese $(+FR)(+FF)(+RR)$ enthält ausschliesslich positive Paare, was aber keine weitere Einschränkung bedeutet, da laut § 12 der ALV die negativen Bedingungen sich auf einfache Weise durch positive ersetzen lassen (auch umgekehrt!). Nur um den auftretenden Formeln eine übersichtlich symmetrische Gestalt zu geben, haben wir die negativen Bedingungen überhaupt explizite verwendet.

Am Schluss der ALV ist der hypothetische allgemeine Vierfarbensatz ⁹⁾ formuliert, laut welchem eine Farbeninvariante nur dann verschwinden kann, wenn die Auslese einen Widerspruch ¹⁰⁾ enthält; dass sie dann allemal auch wirklich verschwinden muss, ist evident.

In den unten folgenden Betrachtungen sollen einige Konsequenzen aus der Vierfarbenformel gezogen werden, um den Beweis dieses allgemeinen Vierfarbensatzes auf rein arithmetischer Grundlage anzubahnen.

2. Vierfarbenreihen.

Die Vierfarbennoeffizienten genügen der leicht zu verifizierenden Relation

$$2 a_n + a_{n+1} = a_{n+2}. \quad (4)$$

6) ALV § 2. 7) ALV § 8. 8) ALV § 17. 9) ALV § 19. 10) ALV § 12.

Es liege eine Zahlenreihe

$$\dots a_{-t}, \dots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_t, \dots \quad (5)$$

vor, in der das folgende, der Relation (4) nachgebildete Erzeugungsgesetz gilt:

$$2 a_n + a_{n+1} = a_{n+2}. \quad (6)$$

Diese Reihe steht dann in engem Zusammenhange mit der Reihe der Vierfarbennoeffizienten. Aus diesem Grunde möge die Reihe (5) eine Vierfarbenreihe, und zwar, im Hinblick auf eine gleich folgende Verallgemeinerung, eine eindimensionale Vierfarbenreihe heißen. Für eine solche Vierfarbenreihe gelten u. a. folgende leicht zu beweisende Relationen:

$$a_{t+k} = a_k a_{t+1} + 2 a_{k-1} a_t, \quad (7)$$

$$s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k = a_k a_1 + \frac{1}{2} (a_{k+1} - 1) a_2. \quad (8)$$

Aus (6) ist ersichtlich, dass die Reihe der Differenzen einer Vierfarbenreihe wieder eine Vierfarbenreihe darstellt, welche letztere sich in ihrer Gesamtheit nur durch den Faktor 2 von der ursprünglichen unterscheidet.

Spezielle Beispiele von Vierfarbenreihen liefern Reihen, wo $a_t = \varepsilon^t a$, unter a eine Konstante verstanden, d. h. Reihen vom Typus

$$\dots + a, -a, +a, -a, \dots \quad (9)$$

Bei $a=1$ hat man den engeren Spezialfall $a_t = \varepsilon^t$, m. a. W. die Reihe

$$\dots + 1, -1, +1, -1, \dots \quad (10)$$

Um zur versprochenen Verallgemeinerung zu gelangen, betrachte man zunächst etwa die folgende, nach 2 Parametern λ, μ geordnete Zahlenreihe, deren Allgemeinglied

$$a_{\lambda\mu} = a_\lambda a_\mu a, \quad (11)$$

wobei a eine Konstante ist. Auf Grund von (4) erweist sich

$$\begin{aligned} 2 a_{\lambda\mu} + a_{\lambda+1, \mu} &= a_{\lambda+2, \mu} \\ 2 a_{\lambda\mu} + a_{\lambda, \mu+1} &= a_{\lambda, \mu+2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Lässt man die spezielle Fassung der Definition (11) fallen, behält aber die Forderungen (12) bei, so gelangt man zum Begriff einer allgemeinen zweidimensionalen Vierfarbenreihe.

Ganz allgemein lautet nun folgende Festsetzung:

Eine Menge von Zahlen $a_{x_1 x_2 \dots x_p}$, die nach p unabhängigen ganzzahligen Parameterwerten x_1, x_2, \dots, x_p geordnet erscheinen, soll eine p -dimensionale Vierfarbenreihe heissen, wenn für jedes x_k die Forderung

$$2 \cdot a_{x_1 \dots x_{k-1} x_k x_{k+1} \dots x_p} + a_{x_1 \dots x_{k-1}, x_k+1, x_{k+1} \dots x_p} = a_{x_1 \dots x_{k-1}, x_k+2, x_{k+1} \dots x_p} \quad (13)$$

erfüllt ist.

Ein spezielles Beispiel einer solchen p -dimensionalen Vierfarbenreihe liefert

$$a_{x_1 \dots x_p} = a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_p} a, \quad (14)$$

wo a eine Konstante ist. Aber auch

$$a_{x_1 \dots x_p} = a_{x_1+x_2+\dots+x_p+c} \cdot a, \quad (15)$$

wo c und a Konstanten sind, ergibt eine Reihe von gleichem Typus. Andere Reihen derselben Gattung entstehen, wenn in (14) oder (15) a_m durch ε^m ersetzt wird, oder aber lineare Verbindungen solcherweise erhaltener Ausdrücke gebildet werden.

Es seien in der Vierfarbenformel (3) die Anzahlen und Numerationen der Paare $(+FR)$ $(+FF)$ $(+RR)$ fixiert, das Residuum als unveränderlich betrachtet und die Lage sämtlicher Knoten R und des Knotens P festgelegt. Variiert man dann die Verteilung der Knoten F auf dem Fächer, sowie die Gesamtzahl der Maschen des Fächers, so entspricht dies einer Variation der reduzierten Maschenzahlen q, φ , während die rechts in (3) auftretenden Grössen $\overset{i-1}{N_{(Z)}}$ konstant verbleiben. Jeder Kombination (1) der $t+f+1$ reduzierten Maschenzahlen entspricht ein bestimmter Wert von $\overset{i}{N_{(+FR)(+FF)(+RR)}}$, den wir uns dieser Kombination q, φ zugeordnet denken. Damit ist aber die Farbeninvariante $\overset{i}{N_{(+FR)(+FF)(+RR)}}$ als von $t+f+1$ Parametern

$$x_1 = q_1, \dots, x_{t+1} = q_{t+1}, x_{t+2} = \varphi_1, \dots, x_{t+f+1} = \varphi_f \quad (16)$$

abhängige Zahl $a_{x_1 x_2 \dots x_{t+f+1}}$ aufgefasst. Eine aufmerksame

Betrachtung der rechten Seite der Vierfarbenformel (3) zeigt sofort, dass diese Zahlen $a_{x_1 x_2 \dots}$ eine $(t + f + 1)$ -dimensionale Vierfarbenreihe bilden. Dieses Resultat ist von grundlegender Bedeutung für alle weiteren Entwicklungen und soll demnach als Satz zusammengefasst werden:

Bei der Variation des Fächers ordnen sich die Farbeninvarianten $N_{(+FR)(+FF)(+RR)}^i$ zu einer $(t + f + 1)$ -dimensionalen Vierfarbenreihe.

3. Das allgemeine Glied einer Vierfarbenreihe.

Deutet man $a_{x_1 \dots x_p}$ als dem Punkte $(x_1|x_2|\dots|x_p)$ eines p -dimensionalen ganzzahligen Punktgitters zugeordnete Zahl, so darf man die entsprechende Vierfarbenreihe in ihrer Gesamtheit als Funktion des Punktgitters ansehen. Statt von einer Vierfarbenreihe kann man dann auch von einer Vierfarbentfunktion sprechen, deren Werte in den Gitterpunkten (x) eben die a_x sind.

Die Beziehung auf den p -dimensionalen Raum erleichtert wesentlich die fernere Nomenklatur. Für unsere Zwecke wäre folgendes zu beachten:

ν lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten x_k definieren eine $(p - \nu)$ -dimensionale Ebene im Gitterraum ($\nu \leq p$), sofern diese Gleichungen linear unabhängig sind; jeder Punkt erscheint in dieser Auffassung als nulldimensionale, der Gitterraum selbst als p -dimensionale Ebene.

Die $2p$ Gleichungen $x_k = 0$ resp. $x_k = 1$ definieren jede für sich je eine spezielle $(p - 1)$ -dimensionale Ebene. Die Gesamtheit dieser $2p$ speziellen Ebenen, vereinigt mit der Gesamtheit ihrer sämtlichen Schnittebenen von niedrigerer Dimensionszahl, liefert ein Gebilde, welches als Fundamentalwürfel des Gitterraumes bezeichnet werden mag; jede zum Fundamentalwürfel zählende Ebene sei dementsprechend als Fundamentebene bezeichnet. Die Anzahl der $(p - \nu)$ -dimensionalen Fundamentebenen beträgt $2^\nu \binom{p}{\nu} = 2^\nu \binom{p}{p-\nu}$. Ist $\lambda < \mu$, so enthält jede μ dimensionale Fundamentebene genau $2^{\mu-\lambda} \binom{\mu}{\lambda}$ Fundamentebenen von der Dimension λ , und jede λ -dimensionale Fundamentebene

mentalebene liegt auf $\binom{p-\lambda}{p-\mu}$ Fundamentebenen von der Dimension μ . Da

$$2^p \binom{p}{p} - 2^{p-1} \binom{p}{p-1} + 2^{p-2} \binom{p}{p-2} - \dots + \varepsilon^{p-1} 2 \binom{p}{1} = 1 - \varepsilon^p, \quad (17)$$

so gilt der Satz:

Die mit wechselndem Vorzeichen genommene Summe der Anzahlen der Fundamentebenen, nach steigenden Dimensionszahlen geordnet und mit positivem Vorzeichen begonnen, beträgt null oder zwei, je nachdem der Raum eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen besitzt.

Es ist dies ein Spezialfall des Euler'schen Polyedersatzes in p Dimensionen.

Man erkennt sofort, dass die Vierfarbenreihe a_x eindeutig bestimmt ist, sobald die Werte der Funktion a_x in den Fundamentalecken, d. h. den nulldimensionalen Fundamentebenen, vorgegeben sind. Es gilt dann nämlich die Formel:

$$\begin{aligned} a_{x_1 \dots x_p} &= 2^p a_{x_1-1} a_{x_2-1} \dots a_{x_p-1} a_{00 \dots 0} + \\ &+ 2^{p-1} \sum_{\nu=1}^p a_{x_1-1} \dots a_{x_{\nu-1}-1} a_{x_\nu} a_{x_{\nu+1}-1} \dots a_{x_p-1} \cdot a_{0 \dots 010 \dots 0} + \\ &+ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots + \\ &+ a_{x_1} a_{x_2} \dots a_{x_p} \cdot a_{11 \dots 1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Bei $p=1$ hätte man hieraus

$$a_{x_1} = 2 a_{x_1-1} a_0 + a_{x_1} a_1, \quad (19)$$

was schon in (7) enthalten ist und daher als bewiesen erachtet werden soll. Ist aber die Gültigkeit von (18) für eine Dimensionszahl p erwiesen, so ergibt sich auch sofort die Gültigkeit derselben Formel für die nächsthöhere Dimensionszahl $p+1$. Man hat nämlich bei fixierten Werten von x_1, x_2, \dots, x_p und variablem x_{p+1} in $a_{x_1 x_2 \dots x_{p+1}}$ eine eindimensionale Vierfarbenreihe, mithin nach (19):

$$a_{x_1 x_2 \dots x_p x_{p+1}} = 2 a_{x_{p+1}-1} a_{x_1 x_2 \dots x_p 0} + a_{x_{p+1}} a_{x_1 x_2 \dots x_p 1}. \quad (20)$$

Hier bilden aber die Grössen $a_{x_1 x_2 \dots x_p 0}$, $a_{x_1 x_2 \dots x_p 1}$ jede für sich je eine p -dimensionale Vierfarbenreihe, auf welche (18) angewendet werden darf. Kombiniert man demnach (18) mit (20) und ordnet das Resultat, so erhält man, wie leicht zu übersehen, eine Formel von der Struktur (18), nur tritt $p+1$ an Stelle von p . Damit ist aber (18) allgemein bewiesen.

Man kann übrigens die Identität (18) in etwas allgemeinerer Gestalt schreiben, indem man zuvor die Parallelverschiebung $x' = x + \xi$ ausgeführt denkt. Der Fundamentalwürfel transformiert sich hierbei in einen solchen Würfel, dessen Eckkoordinaten die Werte ξ und $\xi+1$ annehmen.

4. Transformation der Vierfarbenformel.

Nach § 2 liefert die Vierfarbenformel (3) die Farbeninvariante $N_{(+FR)(+FF)(+RR)}^i$ als Vierfarbenfunktion, wobei die reduzierten Maschenzahlen ϱ , φ die Rolle der Parameter x übernehmen. Um dies anzudeuten, soll fernerhin, wo zweckmässig, $N_{\varrho_1 \dots \varrho_{i+1} | \varphi_1 \dots \varphi_f}^i$ für $N_{(+FR)(+FF)(+RR)}^i$, abgekürzt eventuell $N_{\varrho | \varphi}^i$, geschrieben werden.

Die Relation (18) gestattet $N_{\varrho | \varphi}^i$ durch die Fundamentalwerte, d. h. die Werte der $N_{\varrho | \varphi}$ in den Fundamentecken, auszudrücken. Dies soll nun ausgeführt werden. Aus der geometrischen Bedeutung der Farbeninvarianten ist ersichtlich, dass die Fundamentalwerte nicht negativ sind. Sobald ein Fundamentalwert null ist, verschwindet das entsprechende Glied in der Summe auf der rechten Seite von (18). Verschwindet ein Fundamentalwert unabhängig von der speziellen Lage der Punkte R auf dem Residuum, so sagen wir, der Fundamentalwert verschwinde identisch. Von Belang sind hier nur diejenigen Fundamentalwerte, die nicht identisch verschwinden. Es enthält die rechte Seite von (3) den gemeinschaftlichen Faktor $2^f \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1}$, der dann, aber auch nur dann, null wird, wenn mindestens eine der Koordinaten φ_k gleich 1 ist. Da in den Fundamentecken ausser dem Werte 1 für die Koordinaten nur noch der Wert 0 in Betracht kommt, so müssen

sämtliche φ_k gleich 0 sein, wenn der Fundamentalwert nicht identisch verschwinden soll. Bei $\varphi_1 = \varphi_2 \dots = \varphi_f = 0$ hat man aber

$$2^f \alpha_{\varphi_1-1} \alpha_{\varphi_2-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1} = 2^f \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^f = 1. \quad (21)$$

Der zugehörige Fundamentalwert $\overset{i}{N}_{\varrho|\varphi}$ ist daher gleich dem Wert des Vierfarbenpolynoms, d. h. des Ausdrucks in der Schleifenklammer der rechten Seite von (3). Sämtliche nicht identisch verschwindende Fundamentalwerte gehören also zur $(t+1)$ -dimensionalen Fundamentelebene $\varphi_1=0, \varphi_2=0, \dots, \varphi_f=0$. Diese Fundamentelebene erscheint für sich betrachtet als $(t+1)$ -dimensionales Punktgitter, und besitzt als solches einen Fundamentwürfel, dessen Ecken erhalten werden, wenn man ϱ gleich 0 und 1 setzt. Die entsprechenden $\overset{i}{N}_{\varrho|\varphi}$ können ohne Missverständnisse einfach als $\overset{i}{N}_{\varrho}$ bezeichnet, und es darf von der Fundamentecke (ϱ) gesprochen werden.

Es sei nun diese Fundamentecke (ϱ) als $\varrho_a = \varrho_b = \dots = 0, \varrho_u = \varrho_v = \dots = 1$ definiert. Im zugehörigen Vierfarbenpolynom verschwinden dann sämtliche Glieder, in denen auch nur eine der Zahlen $\alpha_{\varrho_a}, \alpha_{\varrho_b}, \dots$ als Faktor auftritt; es verbleiben also nur diejenigen, deren Koeffizient den Komplex

$$\varepsilon^{\varrho_a} \varepsilon^{\varrho_b} \dots = 1 \quad (22)$$

enthält. In den zugehörigen, auf das Netz $(i+1)$ -ter Ordnung bezüglichen Farbeninvarianten zeigt die Bedingung u. a. überall die gemeinschaftliche Forderung $(+RR) (-RP) (+R_{a-1} R_a) (+R_{b-1} R_b) \dots$, wofür abgekürzt $(+RR) (-RP) (+R^0)$ geschrieben werden möge.

Nach Abspaltung des Faktors (22) verbleiben in den Koeffizienten der übriggebliebenen Glieder nur noch durch $\varrho_u, \varrho_v, \dots$ bedingte Faktoren vom Typus α_{ϱ_u} und ε^{ϱ_u} . Da $\alpha_{\varrho_u} = \alpha_{\varrho_v} = \dots = 1$ und $\varepsilon^{\varrho_u} = \varepsilon^{\varrho_v} = \dots = -1$, und sämtliche Kombinationen der ε^{ϱ_u} auftreten müssen, so erkennt man, dass die fraglichen Koeffizienten gleich $+1$ oder -1 sind, je nachdem eine gerade oder eine ungerade Anzahl von ε^{ϱ_u} in der zugehörigen Kombination vorkommt. Es ergibt sich auf diese Weise:

$$\begin{aligned}
 N_{\rho}^i = & N_{(+RR)(-RP)(+R^0)}^{i-1} - \sum_u^{i-1} N_{(+RR)(-RP)(+R^0)(+R_{u-1} R_u)}^{i-1} + \\
 & + \sum_{u, v}^{i-1} N_{(+RR)(-RP)(+R^0)(+R_{u-1} R_u)(+R_{v-1} R_v)}^{i-1} - \dots \quad (23)
 \end{aligned}$$

Hier ist die Summation \sum_u auf jede Wahl der Indizes u , die Summation $\sum_{u, v}$ auf jede Wahl der Paare u, v usw. zu erstrecken. Man ersieht sofort, dass die rechte Seite von (23) mit

$$N_{(+RR)(-RP)(+R^0)(-R_{u-1} R_u)(-R_{v-1} R_v)}^{i-1} \dots \quad (24)$$

gleichbedeutend ist¹¹⁾. Indem wir die Abkürzung $(-R^1)$ für $(-R_{u-1} R_u)(-R_{v-1} R_v) \dots$ einführen, gelangen wir demnach zu dem Resultat:

Die Vierfarbenfunktion $N_{\rho|\varphi}^i$ hat in den Fundamentalecken

$$\varphi_1 = 0, \dots, \varphi_f = 0, \rho_a = 0, \rho_b = 0, \dots, \rho_u = 1, \rho_v = 1, \dots \quad (25)$$

den Wert

$$N_{(+RR)(-RP)(+R^0)(-R^1)}^{i-1}, \quad (26)$$

in allen übrigen Fundamentalecken den Wert null.

Auf Grund dieser Erkenntnis resultiert nun nach (18) folgende Umformung der Vierfarbenformel:

$$\begin{aligned}
 N_{\rho_1 \dots \rho_{t+1}}^i | \varphi_1 \dots \varphi_f = & 2^f \alpha_{\rho_1-1} \dots \alpha_{\rho_f-1} \cdot \\
 \cdot \{ & 2^{t+1} \alpha_{\rho_1-1} \dots \alpha_{\rho_{t+1}-1} \cdot N_{(+RR)(-RP)(+R_0 R_1)(+R_1 R_2)}^{i-1} \dots + \\
 & + 2^t \sum_{\mu} \alpha_{\rho_1-1} \dots \alpha_{\rho_{\mu}} \dots \alpha_{\rho_{t+1}-1} \cdot \\
 & \cdot N_{(+RR)(-RP)(+R_0 R_1) \dots (-R_{\mu-1} R_{\mu}) \dots (+R_t R_{t+1})}^{i-1} + \\
 & + \dots + \\
 & + \alpha_{\rho_1} \alpha_{\rho_2} \dots \alpha_{\rho_{t+1}} N_{(+RR)(-RP)(-R_0 R_1)(-R_1 R_2) \dots}^{i-1} \} \cdot \quad (27)
 \end{aligned}$$

11) ALV § 12.

Denn sämtliche Glieder, die den Faktor α_{φ_k} enthalten würden, verschwinden; es entsteht demnach überall der gemeinsame Faktor $2^f \alpha_{\varphi_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f-1}$.

5. Diskussion der Fälle, wo $N_{\varrho|\varphi}^i$ verschwindet.

Denjenigen Teil des Gitterraumes, in dem keine der Koordinaten negativ ist, nennen wir den Hauptraum. Die geometrische Interpretation der Zahl $N_{\varrho|\varphi}^i$ bezieht sich dem Wesen nach nur auf diesen Hauptraum, d. h. auf nicht-negative Werte von ϱ , φ , was aber bei rein analytischer Behandlung der aus (27) fließenden Folgerungen nicht hindert, auch andere Koordinatenwerte in den Bereich der Erwägungen zu ziehen.

In der Gestalt (27) hat die Vierfarbenformel den Vorzug, dass rechts keine negativen Glieder auftreten, solange man sich auf den Hauptraum beschränkt. Es verschwindet also $N_{\varrho|\varphi}^i$ im Hauptraum dann und nur dann, wenn jedes Glied der rechten Seite von (27) einzeln verschwindet. Damit ist ein Gedanken-gang als Grundlage für den Beweis des allgemeinen Vierfarbensatzes vorgezeichnet.

Ein Gitterpunkt $(\varrho|\varphi)$ des Hauptraumes kann mehreren Fundamentalebene angehören; eine und nur eine dieser Fundamentalebene wird die kleinste Dimensionszahl zeigen. Diese Fundamentalebene kleinster Dimensionszahl ist nämlich durch den Komplex der Gleichungen definiert, die angeben, welche Koordinatenwerte 0 und welche 1 sein sollen. Sind im Gitterpunkt $(\varrho|\varphi)$ sämtliche Koordinaten grösser als 1, so gehört dieser Punkt überhaupt keiner Fundamentalebene an. Es ist aber dann zweckmässig, den ganzen Gitterraum selbst als null Bedingungen unterworfenen und daher $(t+f+1)$ -dimensionale Fundamentalebene anzusehen, die in diesem Falle dabei natürlich die $(\varrho|\varphi)$ enthaltende Fundamentalebene kleinster Dimensionszahl bildet. Einen anderen extremen Fall hätte man, wenn $(\varrho|\varphi)$ eine Fundamentalecke ist. Die zugehörige Fundamentalebene kleinster Dimensionszahl besteht dann aus diesem einzigen Punkt und ist von der Dimension null.

Es sei nun $(\varrho|\varphi)$ zur Fundamentalebene Π von kleinster Dimensionszahl gehörig; wir fragen nach den Bedingungen, unter denen $N_{\varrho|\varphi}^i$ verschwindet.

Es wird $N_{\varrho|\varphi}^i$ zunächst allemal null, sobald in der Definition von Π für irgendein k die Forderung $\varphi_k = 1$ besteht. Die Knoten F', F'' , denen dieser Wert von φ_k zukommt, sind dann entweder benachbart, oder es wird der Teilfächer $F'PF''$ so von anderen Paaren $(+FF)$ überdeckt, dass nur eine Masche frei bleibt. Es sei $\underline{F'PF''}$ diese einzige freigebliebene Fächermasche, also etwa $\underline{F'PF'}$ und $\underline{F''PF''}$ völlig überdeckte Teilfächer, dann ergibt sich aus $(+FF)$ notwendig $\underline{F'} \equiv \underline{F'}$ und $\underline{F''} \equiv \underline{F''}$, was weiter wegen $(+F'F'')$ zur Forderung $\underline{F'} \equiv \underline{F''}$ führt; letztere bedeutet aber einen Widerspruch, weil $\underline{F'}$ und $\underline{F''}$ benachbart sind. Also:

Verschwindet $N_{\varrho|\varphi}^i$ wegen $\varphi_k = 1$, so ist in den Forderungen $(+FF)$ sicher ein Widerspruch enthalten

Dies steht im Einklang mit dem allgemeinen Vierfarbensatz. Es sei nun angenommen, dass Π an keine Forderung vom Typus $\varphi_k = 1$ geknüpft ist. Die Zahl $N_{\varrho|\varphi}^i$ kann in diesem Falle nur dann verschwinden, wenn die Schleifenklammer in (27) — das Vierfarbenpolynom — verschwindet. Es mögen für Π u. a. die Forderungen

$$q_a = 0, \quad q_b = 0, \dots\dots\dots (28)$$

$$q_u = 1, \quad q_v = 1, \dots\dots\dots (29)$$

gelten. Im Vierfarbenpolynom verschwinden dann sämtliche Glieder, die einen der Faktoren $\alpha_{q_a}, \alpha_{q_b}, \dots, \alpha_{q_{u-1}}, \alpha_{q_{v-1}}, \dots$ enthalten; es verbleiben also nur diejenigen, wo $\alpha_{q_{a-1}}, \alpha_{q_{b-1}}, \dots, \alpha_{q_u}, \alpha_{q_v}, \dots$ auftreten. Damit sondert sich vom Vierfarbenpolynom der gemeinschaftliche Faktor

$$2^\nu \alpha_{q_{a-1}} \alpha_{q_{b-1}} \dots \alpha_{q_u} \alpha_{q_v} \dots = 1 \quad (30)$$

ab, unter ν die Anzahl der Gleichungen (28) verstanden. Der verbleibende Rest ist von demselben Typus wie das in (27) definierte Polynom, nur hat sich die Gliederzahl verringert. Da einem jeden von a, b, \dots, u, v, \dots verschiedenen Index ein q -Wert entspricht, der 1 übersteigt, so wird keiner der Koeffizienten im Restpolynom null; es müssen daher sämtliche in dieses Rest-

polynom eingehende Farbeninvarianten $N_{(Z)}^{i-1}$ gleich null sein, wenn das ursprüngliche Vierfarbepolynom verschwinden soll.

Infolge der Existenz des gemeinsamen Faktors (30) enthält die Bedingung (Z) im Restpolynom allemal die Teilforderung

$$(+RR)(-RP)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b)\dots(-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v)\dots \quad (31)$$

Bedeutend m, n, \dots die von $a, b, \dots u, v, \dots$ verschiedenen Indizes der Reihe $1, 2, 3, \dots, t+1$, so enthält (Z) ausser (31) noch die Forderungen

$$(\pm R_{m-1}R_m)(\pm R_{n-1}R_n)\dots, \quad (32)$$

und zwar kommt, aus leicht erkennbaren Gründen, jede überhaupt denkbare Kombination der Vorzeichen $+$, $-$ einmal und nur einmal vor.

Aus der geometrischen Bedeutung der Farbeninvarianten folgt für beliebige (M)

$$N_{(M)(+AB)} + N_{(M)(-AB)} = N_{(M)}. \quad (33)$$

Mittels vollständiger Induktion lässt sich diese Relation sofort dahin verallgemeinern, dass

$$\sum N_{(M)(\pm AB)(\pm CD)} \dots = N_{(M)}, \quad (34)$$

wenn die Summe über alle denkbaren Kombinationen der Vorzeichen $+$, $-$ erstreckt wird.

Bildet man demnach die Summe sämtlicher $N_{(Z)}$ des Restpolynoms, so treten $(R_{m-1}R_m)(R_{n-1}R_n)\dots$ an die Stelle der $(AB)(CD)\dots$ in (34), woraus

$$\sum N_{(Z)}^{i-1} = N_{(+RR)(-RP)(+R_{a-1}R_a)\dots(-R_{u-1}R_u)\dots}^{i-1} \quad (35)$$

folgt. Weil nun $\sum N_{(Z)}^{i-1} = 0$, wenn jedes $N_{(Z)}^{i-1}$ einzeln null ist, so erhält man das Resultat:

Das Vierfarbepolynom verschwindet dann und nur dann, wenn

$$N_{(+RR)(-RP)(+R_{a-1}R_a)\dots(-R_{u-1}R_u)\dots}^{i-1} = 0. \quad (36)$$

Hat man vorausgesetzt, der allgemeine Vierfarbensatz sei bis zu den Netzen $(i-1)$ -ter Ordnung bewiesen, so ist man jetzt be-

rechtigt in (31) einen Widerspruch zu suchen, wenn das Vierfarbenpolynom verschwinden soll. Dieser Widerspruch könnte auf dreifache Weise zustande kommen:

- I. die Forderung $(+RR)$ könnte Widersprüche enthalten;
- II. die Gesamtforderung positiven Charakters $(+RR)$ $(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b)$.. könnte Widersprüche enthalten;
- III. eines der Paare $(R_{u-1}R_u)$, $(R_{v-1}R_v)$, .. könnte von den in II genannten Forderungen abhängig¹²⁾ sein.

Die Möglichkeit, dass ein Paar (RP) von den in II genannten positiven Paaren abhängig wird, kommt nicht in Betracht, weil P unter den Punkten R sicher nicht vorkommt.

Bei der Annahme I ist der Widerspruch $(+RR)$ offenbar schon in dem Netze i -ter Ordnung, wo $(+RF)(+FF)(+RR)$ gefordert war, ebenfalls enthalten, somit das Verschwinden von $N_{q|\varphi}$ wirklich durch einen Widerspruch im Netze i -ter Ordnung bedingt, wie es der Vierfarbensatz verlangt.

Bei der Annahme II bemerke man zunächst, dass wegen (28) im Gitterpunkt $(q|\varphi)$ notwendig

$$F_{a-1} \equiv F_a, F_{b-1} \equiv F_b, \dots \quad (37)$$

gefordert ist, denn die Teilflächen $F_{a-1}PF_a$, $F_{b-1}PF_b$, .. erscheinen hier mit positiven Paaren $(+FF)$ völlig überdeckt. Wird nun für das Netz i -ter Ordnung noch die Forderung $(+RR)$ $(+FR)$ gestellt, die u. a.

$$F_{a-1} \equiv R_{a-1}, F_a \equiv R_a, \dots \quad (38)$$

besagt, so ist doch

$$R_{a-1} \equiv R_a, R_{b-1} \equiv R_b, \dots \quad (39)$$

eine logische Konsequenz von (37) und (38), d. h. die Paare $(R_{a-1}R_a)$, $(R_{b-1}R_b)$... sind im Punkte $(q|\varphi)$ von $(+RR)(+RF)(+FF)$ abhängig. Ein aus den in II genannten Forderungen resultierender Widerspruch ist dann eo ipso schon in der Forderung $(+RR)(+RF)(+FF)$ im Netze i -ter Ordnung enthalten.

Sollte endlich bei der Annahme III etwa $(R_{u-1}R_u)$ von $(+RR)(+R_{a-1}R_a)$.. abhängig sein, d. h. $R_{u-1} \equiv R_u$ mit Notwendigkeit aus $(+RR)(+R_{a-1}R_a)$.. fließen, so wäre nach dem Vorigen dieselbe Beziehung $R_{u-1} \equiv R_u$ auch schon eine

12) Über den Begriff der „Abhängigkeit“ eines Paares von anderen vgl. ALV § 12.

Folge von $(+RR)(+RF)(+FF)$ im Netze i -ter Ordnung. Weil in $(+FR)$ aber auch die Forderungen

$$F_{u-1} \equiv R_{u-1}, F_u \equiv R_u \quad (40)$$

enthalten sind, so müsste im Netze i -ter Ordnung dann notwendig $F_{u-1} \equiv F_u$ sein, was aber einen Widerspruch bedeutet, da nach (29) $q_u = 1$ besteht. Damit ist auch diese Annahme erledigt. Also:

Gilt der allgemeine Vierfarbensatz für Netze, deren Ordnung $i-1$ nicht übersteigt, so gilt er in jedem Netz i -ter Ordnung für jede positive Auslese.

Für negative, resp. gemischte Auslesen ist damit noch nichts entschieden.

6. Einfache Fälle gemischter Auslesen.

Aus der Relation ¹³⁾

$$\begin{aligned} N_{(Z)}(-X_1 Y_1)(-X_2 Y_2) \cdots = \\ = N_{(Z)} - \sum_u N_{(Z)}(+X_u Y_u) + \sum_{u,v} N_{(Z)}(+X_u Y_u)(+X_v Y_v) - \dots \end{aligned} \quad (41)$$

ergeben sich die Werte der Vierfarbeninvarianten für gemischte Auslesen.

Es bedeute $(-R' R')$ einen Komplex negativer Bedingungen, in denen ausschliesslich Randpunkte R' des Residuums Erwähnung finden. Aus (41) ersieht man dann sofort, dass die Reduktionsformel für

$$\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-R' R')}$$

sich von der Reduktionsformel (27) nur um die rechts überall hinzutretende Ergänzungsforderung $(-R' R')$ unterscheidet.

Etwas komplizierter gestaltet sich die Reduktion von

$$\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-R' R')(-F' F')},$$

wenn $(-F' F')$ eine sich ausschliesslich auf Fächerpunkte F' beziehende Forderung symbolisiert. Kombiniert man hier (27) mit (41), so erkennt man zunächst, dass die einzelnen Farbeninvarianten $\overset{i-1}{N}_{(M)}$, die rechts in (27) auftreten, für jeden Summanden in (41) dieselben sind, — es ändern sich aber jedesmal

13) vgl. ALV § 12.

die reduzierten Maschenzahlen ϱ, φ . Endgültige Formeln lassen sich folgendermassen ableiten:

Man betrachte den Komplex der Paare $(FF)(F_0 F_1) \dots (F' F')$ auf dem Fächer. Dieser Komplex bildet notwendig eine Auslese, sofern $(FR)(FF)(F' F')$ eine Auslese ist. Es seien

$$\varphi'_1, \varphi'_2, \dots, \varphi'_f, \varrho'_1, \varrho'_2, \dots, \varrho'_{t+1}, \psi'_1, \psi'_2, \dots, \psi'_n \quad (42)$$

die zugehörigen reduzierten Maschenzahlen dieses Komplexes; zur Abkürzung sollen dieselben Symbole auch als Bezeichnungen der zugehörigen Knotenpaare dienen. Zu jedem Paar ψ' gibt es ein und nur ein nächsthöheres Paar¹⁴⁾ φ' oder ϱ' , d. h. ein solches Paar φ' resp. ϱ' , in welchem der Teilfächer ψ' einen echten oder auch unechten Teil überdeckt, wobei keinem niedrigeren Paar φ' oder ϱ' dieselbe Eigenschaft bezüglich dieses fixierten ψ' zukommt. Das Paar ψ' soll dann mit diesem nächsthöheren φ' resp. ϱ' assoziiert heissen. Sämtliche mit demselben φ' resp. ϱ' assoziierten Paare ψ' mögen untereinander verwandt¹⁴⁾ heissen; ihre Gesamtheit bildet dementsprechend eine Verwandtschaft. In jeder Verwandtschaft gibt es Paare ψ' , die kein höheres verwandtes Paar besitzen, — es sind dies die relativen Maximalpaare dieser Verwandtschaft. Die Anzahl der zu φ'_k resp. ϱ'_k assoziierten relativen Maximalpaare ψ' möge als Charakteristik¹⁴⁾ λ_k resp. μ_k von φ'_k resp. ϱ'_k bezeichnet werden. Diese Charakteristik wird dann und nur dann null, wenn kein einziges assoziiertes Paar vorhanden ist. Auch für die ψ' soll analog der Begriff einer Charakteristik bestimmt werden: unter den mit ψ'_k verwandten aber niedrigeren Paaren sollen die nächstniedrigen ausgesucht werden, d. h. diejenigen, die nicht gleichzeitig niedrigere Paare niedrigerer Paare sind; die Anzahl τ_k dieser nächstniedrigeren Paare bilde die Charakteristik von ψ'_k . Man hat $\tau_k = 0$, sobald kein niedrigeres verwandtes Paar vorhanden ist.

Es gilt nun die Formel:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')} = \\ & = 2^f \alpha_{\varphi'_1 + \lambda_1 - 1} \dots \alpha_{\varphi'_f + \lambda_f - 1} \alpha_{\psi'_1 + \tau_1} \dots \alpha_{\psi'_n + \tau_n} \cdot \quad (43) \\ & \cdot \left\{ 2^{f+1} \alpha_{\varrho'_1 + \mu_1 - 1} \dots \alpha_{\varrho'_{t+1} + \mu_{t+1} - 1} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)(+R_0 R_1) \dots (+R_t R_{t+1})} + \right. \\ & \left. + \dots + \alpha_{\varrho'_1 + \mu_1} \dots \alpha_{\varrho'_{t+1} + \mu_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)(-R_0 R_1) \dots (-R_t R_{t+1})} \right\}. \end{aligned}$$

14) ALV § 19.

Die Struktur dieser Formel ist derjenigen von (27) analog, nur sind φ und ϱ entsprechend durch $\varphi' + \lambda$ und $\varrho' + \mu$ ersetzt, und ausserdem die Faktoren $\alpha\psi' + \tau$ hinzugekommen.

Der Beweis für (43) erfolgt durch vollständige Induktion. Bei $n=0$ existiert überhaupt kein Paar ψ' , $\dot{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')}$ reduziert sich auf $\dot{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)}$, die Charakteristiken verschwinden, die Faktoren $\alpha\psi' + \tau$ kommen in Wegfall (ihre Anzahl beträgt n), und man gelangt zur schon bewiesenen Formel (27). Es bleibt noch aus der Gültigkeit für irgendein n die Gültigkeit für $n+1$ zu folgern.

Die Numeration der Paare $(F'F')$ ist willkürlich; man darf daher annehmen, dass das neu hinzugekommene $(n+1)$ -te Paar ein relatives Maximalpaar ist, weil solche Paare sicher existieren, sofern überhaupt die ψ' wirklich vorkommen.

Zur Unterscheidung mögen die reduzierten Maschenzahlen im System von n Paaren $(F'F')$ ohne Strichelung geschrieben werden, während für das System von $(n+1)$ Paaren die Strichelung verwendet werden soll. Man hat zwei Annahmen zu unterscheiden:

- I. ψ'_{n+1} ist mit einem φ'_s assoziiert;
- II. ψ'_{n+1} ist mit einem ϱ'_s assoziiert.

Im ersteren Falle sind sämtliche reduzierten Maschen von ψ'_{n+1} notwendig den reduzierten Maschen von φ_s entnommen, weil ψ'_{n+1} bezüglich φ_s ein Maximalpaar sein sollte. Hieraus folgt

$$\varphi'_s = \varphi_s - \psi'_{n+1}, \quad (44)$$

während im übrigen $\varphi' = \varphi$, $\varrho' = \varrho$, $\psi' = \psi$ gilt.

Nun ist aber

$$\dot{N}_{(Z)(-XY)} = \dot{N}_{(Z)} - \dot{N}_{(Z)(+XY)}. \quad (45)$$

Versteht man hier unter (XY) das Paar ψ'_{n+1} , während (Z) den Inbegriff aller übrigen Forderungen symbolisiert, so darf die rechte Seite von (45) auf Grund der Annahme nach der Formel (43) berechnet werden. Hierbei ist im Minuenden einfach die Existenz von n Paaren $(-F'F')$ zu berücksichtigen; im Subtrahenden tritt aber noch das positive, daher wie ein φ zu behandelnde Paar ψ'_{n+1} hinzu. Bei der Bestimmung der Charak-

teristiken sind überall nur die ersten n Paare ψ' als negative Paare in Rechnung zu setzen. Ist τ_{n+1} die Charakteristik von ψ'_{n+1} , die ja jedenfalls nur auf die übrigen n Paare ψ' bezogen erscheint, so ändert sich die frühere Charakteristik λ_s von φ_s durch die Hinzuzählung von ψ'_{n+1} unter die φ genau um $-\tau_{n+1}$ Einheiten, denn die τ_{n+1} Paare ψ' , die die Charakteristik von ψ'_{n+1} bestimmten, sind jetzt mit ψ'_{n+1} , also nicht mehr mit φ'_s assoziiert. Zugleich ist dies die einzige Änderung unter den Charakteristiken, die durch das Hinzutreten von ψ'_{n+1} unter die positiven Paare bewirkt wird, d. h. sämtliche übrigen λ, μ, τ bleiben unverändert. Daher entsteht sowohl für den Minuenden, als auch für den Subtrahenden von (45) ein und dasselbe Vierfarbenpolynom, — nur der Faktor vor diesem Polynom erleidet eine Änderung. In der Differenz hat man also dasselbe Polynom, multipliziert mit der Faktordifferenz

$$\begin{aligned} & 2^f \alpha_{\psi'_{1+\tau_1}} \dots \alpha_{\psi'_{n+\tau_n}} \alpha_{\varphi'_{1+\lambda_1-1}} \dots \alpha_{\varphi_s+\lambda_s-1} \dots \alpha_{\varphi'_f+\lambda_f-1} + \\ & - 2^{f+1} \alpha_{\psi'_{1+\tau_1}} \dots \alpha_{\psi'_{n+\tau_n}} \alpha_{\varphi'_{1+\lambda_1-1}} \dots \alpha_{\varphi'_s+\lambda_s-\tau_{n+1}-1} \dots \\ & \dots \alpha_{\varphi'_f+\lambda_f-1} \alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Hebt man hier den gemeinschaftlichen Teil

$$\begin{aligned} & 2^f \alpha_{\psi'_{1+\tau_1}} \dots \alpha_{\psi'_{n+\tau_n}} \alpha_{\varphi'_{1+\lambda_1-1}} \dots \alpha_{\varphi'_{s-1}+\lambda_{s-1}-1} \alpha_{\varphi'_{s+1}+\lambda_{s+1}-1} \dots \\ & \dots \alpha_{\varphi'_f+\lambda_f-1} \end{aligned} \quad (47)$$

heraus, so verbleibt noch der Faktor

$$\alpha_{\varphi_s+\lambda_s-1} - 2 \alpha_{\varphi'_s+\lambda_s-\tau_{n+1}-1} \alpha_{\psi'_{n+1}+\tau_{n+1}-1}, \quad (48)$$

der wegen (44) mit

$$\alpha_{\varphi^{s'}+\psi'_{n+1}+\lambda_s-1} - 2 \alpha_{\varphi'_s+\lambda_s-\tau_{n+1}-1} \alpha_{\psi'_{n+1}+\tau_{n+1}-1} \quad (49)$$

gleichbedeutend ist. Auf Grund einer für die Vierfarbennkoeffizienten gültigen Relation¹⁵⁾ ist aber (49) dasselbe, wie

$$\alpha_{\varphi'_s+\lambda_s-\tau_{n+1}} \alpha_{\psi'_{n+1}+\tau_{n+1}} \quad (50)$$

oder

$$\alpha_{\varphi'_s+(\lambda_s-\tau_{n+1}+1)-1} \alpha_{\psi'_{n+1}+\tau_{n+1}}. \quad (51)$$

15) *ALV* § 6, Formel (32).

Durch Hinzunahme dieser Faktoren (51) zu (47) entsteht die oben gesuchte Faktordifferenz. Nun ist aber $\lambda_s - \tau_{n+1} + 1$ die Charakteristik von φ'_s im System von $(n+1)$ Paaren ψ' , sobald auch ψ'_{n+1} als negatives Paar behandelt wird, denn das Paar ψ'_{n+1} ist dann selbst ein Maximalpaar für φ'_s , während die τ_{n+1} niedrigeren Paare ψ' keine Maximalpaare mehr sind — die frühere Charakteristik des φ'_s entsprechenden Paares ändert sich somit um $1 - \tau_{n+1}$ Einheiten; alle übrigen Charakteristiken bleiben unverändert. Verwendet man zur Kennzeichnung der Charakteristiken im System von $(n+1)$ negativen Paaren die Strichelung, so gelangt man auf diese Weise zur Formel:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{\varphi' | \psi'} = \\ & = 2^f \alpha_{\psi'_{1+\tau'_1}} \cdots \alpha_{\psi'_{n+1+\tau'_{n+1}}} \alpha_{\varphi'_{1+\lambda'_{1-1}}} \cdots \alpha_{\varphi'_{f+\lambda'_{f-1}}} \cdot \quad (52) \\ & \cdot \left\{ 2^{t+1} \alpha_{\varrho'_{1+\mu'_{1-1}}} \cdots \alpha_{\varrho'_{t+1+\mu'_{t+1-1}}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)(+R_0R_1)} \cdots + \right. \\ & \left. + \cdots \cdots + \alpha_{\varrho'_{1+\mu'_{1-1}}} \cdots \alpha_{\varrho'_{t+1+\mu'_{t+1-1}}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-RP)(-R_0R_1)} \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Sie stimmt mit (43) ihrer Struktur nach überein, — damit ist die Annahme I erledigt.

Analog gestaltet sich die Behandlung der Annahme II. Es ist hier

$$\varrho'_s = \varrho_s - \psi'_{n+1}, \quad (53)$$

im übrigen gilt $\varrho' = \varrho$, $\varphi' = \varphi$, $\psi' = \psi$. Als Ausgangspunkt dient wieder die Relation (45). Der Subtrahend enthält dort dann den im Minuenden fehlenden Faktor $2\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}}$, ausserdem tritt im Subtrahenden jedesmal $\varrho'_s + \mu_s - \tau_{n+1}$ auf, wenn im Minuenden $\varrho_s + \mu_s$ steht. Solcherweise entstandene Glieder sind mit ein und derselben Farheninvariante $\overset{i-1}{N}_{(M)}$ verknüpft; fasst man sie entsprechend paarweise zusammen, so entsteht die Differenz

$$\alpha_{\varrho_s + \mu_s} - 2\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}} \alpha_{\varrho'_s + \mu_s - \tau_{n+1}}, \quad (54)$$

resp.

$$\alpha_{\varrho_s + \mu_s - 1} - 2\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}-1}} \alpha_{\varrho'_s + \mu_s - \tau_{n+1} - 1}, \quad (55)$$

je nachdem die zugehörige Bedingung in der Farheninvariante

($-R_{s-1}R_s$) oder ($+R_{s-1}R_s$) lautet. Mit Hilfe von (53) ergeben sich hierfür die Ausdrücke

$$\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}}} \alpha_{\rho'_s+\mu_s-\tau_{n+1}+1} \quad (56)$$

resp.

$$\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}}} \alpha_{\rho'_s+\mu_s-\tau_{n+1}}. \quad (57)$$

Es sondert sich daher überall der gemeinschaftliche Faktor $\alpha_{\psi'_{n+1+\tau_{n+1}}}$ ab, und man gelangt wieder zu (52). Somit ist (49) bewiesen.

Auf Grund von (41) erkennt man weiter sofort, dass

$$\overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')}$$

einer Formel genügt, die sich von (43) nur dadurch unterscheidet, dass überall die Bedingung ($-R'R'$) hinzutritt:

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')} = \\ & = 2^f \alpha_{\psi_1+\tau_1} \cdots \alpha_{\psi_n+\tau_n} \cdot \alpha_{\varphi_1+\lambda_1-1} \cdots \alpha_{\varphi_f+\lambda_f-1} \cdot \quad (58) \\ & \cdot \left\{ 2^{t+1} \alpha_{\rho_1+\mu_1-1} \cdots \alpha_{\rho_{t+1}+\mu_{t+1}-1} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(+R_0R_1)} \cdots + \right. \\ & \left. + \cdots \cdots + \alpha_{\rho_1+\mu_1} \cdots \alpha_{\rho_{t+1}+\mu_{t+1}} \overset{i-1}{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(-R_0R_1)} \cdots \right\}. \end{aligned}$$

Die Strichelung der Indizes ist hier nun überflüssig und daher unterblieben.

7. Diskussion.

Setzt man in (58) $i=1$, so ist das Residuum ein einfaches Dreieck, auf dem ja dann nur noch für die Knoten R_0 und R_{t+1} Platz vorhanden ist, wobei notwendig $t=0$. Es kommen also sämtliche Forderungen $(+FR)(+RR)(-R'R')$ in Wegfall, $R_0 \equiv R_1$ ist unerfüllbar, weil beide Knoten auf dem Dreieckrand benachbart sind, und man hat allemal $\overset{0}{N}_{(-R_0R_1)} = 1$. Schreibt man noch $\varphi-1$ für ρ_1 , λ für μ_1 , so folgt aus (58)

$$\begin{aligned} & \overset{1}{N}_{(+FF)(-F'F')} = \\ & = 2^f \alpha_{\psi_1+\tau_1} \cdots \alpha_{\psi_n+\tau_n} \alpha_{\varphi_1+\lambda_1-1} \cdots \alpha_{\varphi_f+\lambda_f-1} \alpha_{\varphi+\lambda-1}, \quad (59) \end{aligned}$$

was inhaltlich mit der Formel (93) der *ALV* identisch ist. Wie schon dort dargelegt, folgt hieraus die Gültigkeit des allgemeinen Vierfarbensatzes für alle irreduziblen Normalnetze erster Ordnung.

Die Reduktionsformel (58) überträgt aber dann diesen allgemeinen Vierfarbensatz von Netzen ($i-1$)-ter Ordnung auf solche von der Ordnung i , sofern man sich in letzteren Netzen auf Bedingungen vom Typus

$$(+FR)(+RR)(+FF)(-F'F')(-R'R') \quad (60)$$

beschränkt. M. a. W., man kann beweisen, dass die linke Seite von (58) nur dann verschwindet, wenn (60) einen Widerspruch enthält.

I. Verschwindet die fragliche Farbeninvariante infolge Nullwerdens eines Faktors vor der Schleifenklammer, so ist dieser Faktor entweder ein $a_{\psi+\tau}$, oder ein $a_{\varphi+\lambda-1}$. Die erstere Annahme hätte zur Folge $\psi=0$, $\tau=0$. Da dann ψ kein niedrigeres Paar derselben Verwandtschaft aufweist, — sonst könnte τ nicht Null sein, — so wird ψ von Teilflächen φ vollständig überdeckt. Daraus zeigt sich aber, dass für das Paar ψ identische Färbung gefordert wird, während es doch andererseits, als ein ψ , zu den negativen Paaren zählt. Darin liegt der Widerspruch. Die zweite Annahme $\varphi+\lambda-1=0$ wird erfüllt bei $\varphi=0$, $\lambda=1$ oder bei $\varphi=1$, $\lambda=0$. Ersteres besagt, dass der Teilfläche φ von einem ψ und eventuell noch anderen φ_s völlig überdeckt erscheint, dann müsste aber das diesem φ entsprechende Paar gleichzeitig positiv und negativ ausfallen, was einen Widerspruch bedeutet. Die Voraussetzung $\varphi=1$, $\lambda=0$ führt aus ähnlichen Gründen zu der Folgerung, dass die Knoten der einzigen reduzierten Masche von φ identisch gefärbt sein müssen, was unmöglich ist, da sie ja sicher benachbart sind. In allen Fällen bedeutet mithin das Verschwinden eines Vierfarbenkoeffizienten vor der Schleifenklammer das Vorhandensein eines Widerspruches in den Forderungen (60).

II. Sollte das Polynom in der Schleifenklammer verschwinden, so beachte man zunächst, dass dieses Polynom eine $(t+1)$ -dimensionale Vierfarbenreihe liefert, die von den Parametern $\varrho_1+\mu_1$, $\varrho_2+\mu_2$, ..., $\varrho_{t+1}+\mu_{t+1}$ abhängt. Das Polynom möge demnach durch $Q_{\varrho_1+\mu_1|\varrho_2+\mu_2|\dots}$ oder kurz $Q_{\varrho+\mu}$ symbolisiert werden.

Die Fundamentalwerte dieses Polynoms sind durch die in der Formel (58) rechts auftretenden Farbeninvarianten $N_{(M)}$ ge-

geben. Sollte nun in einem Gitterpunkt $(\varrho + \mu)$, der zur Fundamentalebene

$$\varrho_a + \mu_a = 0, \varrho_b + \mu_b = 0, \dots \quad (61)$$

$$\varrho_u + \mu_u = 1, \varrho_v + \mu_v = 1, \dots \quad (62)$$

gehört, $Q_{\varrho+\mu}$ verschwinden, so folgt aus Betrachtungen, die denen des § 5 wörtlich entsprechen, dass

$$N_{(+RR)(-R'R')(-RP)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots}^{i-1} = 0 \quad (63)$$

sein muss.

Ist der dann notwendig in der Bedingung von (63) auftretende Widerspruch schon in der Forderung $(+RR)$ enthalten, so tritt dieser Widerspruch eo ipso im Netz i -ter Ordnung auf.

Enthält der Komplex $(+RR)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$ im Netz $(i-1)$ -ter Ordnung einen Widerspruch, so ist doch wegen (61) jedenfalls $\varrho_a = 0, \mu_a = 0, \varrho_b = 0, \mu_b = 0, \dots$, mithin $F_{a-1} \equiv F_a, F_{b-1} \equiv F_b, \dots$ eine notwendige Konsequenz der Forderungen $(+FF)$ im Netz i -ter Ordnung. Dann ist aber auch $R_{a-1} \equiv R_a, R_{b-1} \equiv R_b, \dots$ eine Folge von $(+FF)(+FR)$ im Netz i -ter Ordnung, und $(+FR)(+FF)(+RR)$ bedingt denselben Widerspruch, der in $(+RR)(+R_{a-1}R_a) \dots$ enthalten sein sollte.

Ist im Netz $(i-1)$ -ter Ordnung $(-R'R')$ unmöglich, sobald $(+RR)(R_{a-1}R_a) \dots$ besteht, so ist $(-R'R')$ auch im Netz i -ter Ordnung im Widerspruch zur Forderung $(+FR)(+FF)(+RR)$, weil aus letzterer ja $(+RR)(+R_{a-1}R_a) \dots$ resultiert.

Ist endlich etwa $(-R_{u-1}R_u)$ mit $(+RR)(+R_{a-1}R_a) \dots$, also auch mit $(+FR)(+FF)(+RR)$ im Widerspruch, so hätte man im Netz i -ter Ordnung notwendig $R_{u-1} \equiv R_u$, infolge $(+FR)$ dann aber auch $F_{u-1} \equiv F_u$, was jedoch wegen (62) unmöglich ist (vgl. die analogen Erörterungen unter I).

Da der Paarkomplex (RP) jedenfalls von $(+RR)(+R_{a-1}R_a) \dots$ unabhängig ist, so sind alle denkbaren Möglichkeiten erschöpft, die Annahme II somit erledigt.

Dadurch ist der allgemeine Vierfarbensatz auf das Netz i -ter Ordnung für den Fall der Bedingungen (60) übertragen. Im Vergleich zu den Resultaten des § 5 ist somit ein Fortschritt erzielt.

8. Erweiterung der negativen Bedingungen.

Der allgemeine Fall einer Auslese vom Typus

$$(+FR)(+FF)(+RR)(-F'R')(-F'F')(-R'R') \quad (64)$$

bietet wesentlich grössere Schwierigkeiten. Die Knoten F' der Paare $(-F'R')$ verteilen sich hierbei irgendwie auf die Fächerbögen $F_{s-1}F_s$. Jeder solche Knoten F' möge mit dem kleinsten Bogen $F_{s-1}F_s$, dem er angehört, resp. mit dem Knotenpaar $(F_{s-1}F_s)$ assoziiert heissen, wobei dann sämtliche mit ein und demselben $(F_{s-1}F_s)$ assoziierte F' als untereinander verwandt, die Gesamtheit der untereinander verwandten F' als eine Verwandtschaft bezeichnet werden soll.

Wir schreiben die zu $(F_{s-1}F_s)$ assoziierten F' in der Gestalt F_s^h , und zwar so, dass auf dem Bogen $F_{s-1}F_s$ die Reihenfolge

$$F_{s-1}^1, F_{s-1}^2, F_{s-1}^3, \dots, F_{s-1}^r, F_s \quad (65)$$

gilt. Die Knoten F_{s-1}^1, F_s könnten dieser Bezeichnung zweckentsprechend als F_{s-1}^0, F_s^0 mit eingeordnet werden. Fixiert man die Gesamtheit der Paare $(F_{s-1}^{h-1} F_{s-1}^h)$ gleichzeitig mit der Gesamtheit der Paare $(+FF)(-F'F')$ auf dem Fächer, so lassen sich auf schon erläuterte Weise reduzierte Maschenzahlen für jedes Paar bestimmen. Da die Forderung (64) sich auf eine Auslese bezieht, so darf kein Paar $(F_{s-1}^{h-1} F_{s-1}^h), (F_{s-1}^r F_s^0)$ einem höheren Paar φ oder ψ angehören. Daraus lässt sich ablesen, dass die Zahlen φ, ψ , ganz unabhängig von der speziellen Verteilung der Paare $(F_{s-1}^{h-1} F_{s-1}^h), (F_{s-1}^r F_s^0)$, reduzierte Maschenzahlen der Paare $(+FF)(-F'F')$ sind und bleiben. Entsprechendes gilt für die früher definierten Charakteristiken λ, τ . Für die $(F_{s-1}^{h-1} F_{s-1}^h)$ und $(F_{s-1}^r F_s^0)$ mögen sich die reduzierten Maschenzahlen ϱ_{s-1}^h resp. ϱ_s^0 ergeben.

Bei der Anwendung der Relation (41), die jetzt mit (58) zu kombinieren ist, erkennt man, dass sich im Ausdruck für die Farbeninvariante des Netzes i -ter Ordnung mit der Bedingung (64) ein Faktor

$$2^f \alpha_{\psi_1+\tau_1} \dots \alpha_{\psi_n+\tau_n} \alpha_{\varphi_1+\lambda_1-1} \dots \alpha_{\varphi_f+\lambda_f-1} \quad (66)$$

abspaltet, der dann noch mit einem Polynom Q komplizierter Struktur zu multiplizieren ist. Ein Nullwerden des Faktors (66) erfordert stets einen Widerspruch schon in der Bedingung $(+FF)(-F'F')$, wie im § 7, I dargelegt. Zum endgültigen Beweis des allgemeinen Vierfarbensatzes bliebe dann noch zu zeigen, dass auch $Q = 0$ allemal einen Widerspruch in (64) bedingt.

Aus der nach (41) und (58) resultierenden Struktur von Q lässt sich erkennen, dass dieses Q eine von den Parametern q_s^h abhängige Vierfarbenreihe definiert. Man hätte demnach Q für die Fundamentalecken zu bestimmen und darauf das gesuchte Resultat aus (18) abzuleiten.

Der angedeutete Weg führt sofort zum Ziel, sobald es gelingt die Fundamentalwerte von Q als Summen nicht-negativer Zahlen darzustellen, weil dann ein Nullwerden der Summe das Verschwinden eines jeden einzelnen Summanden erfordert, was die gesuchte Folgerung implizite enthält. In der Tat findet der Spezialfall $r < 2$, wo also jede Verwandtschaft von Knoten F_s^h höchstens einen Knoten enthält, auf diese Weise seine endgültige Erledigung, wie unten gezeigt werden soll.

9. Fundamentalwerte von Q für den Spezialfall.

Es möge h höchstens den Wert 1 haben. Die diesem Wert entsprechenden Elemente sollen durch Strichelung gekennzeichnet, der obere Index 0 dagegen überhaupt fortgelassen werden. Jedem q'_s resp. q_s entspricht im Bezug auf die Paare ψ eine Charakteristik μ'_s resp. μ_s . Als Koordinaten sollen die Summen

$$\xi'_s = q'_s + \mu'_s, \quad \xi_s = q_s + \mu_s \quad (67)$$

betrachtet werden. Den Wert von Q im Gitterpunkt (ξ) schreiben wir Q_ξ . Gesucht sind die Fundamentalwerte von Q_ξ .

Die Koordinaten verknüpfen sich in zusammengehörige Paare ξ'_{s-1} , ξ_s , sobald der Knoten F'_{s-1} wirklich existiert. In der Fundamentalecke (ξ) kann die Summe

$$\xi'_{s-1} + \xi_s = \eta_s \quad (68)$$

einen der drei Werte 0, 1, 2 annehmen. Sollte der Knoten F'_{s-1} nicht vorhanden sein, so fällt ξ'_{s-1} fort und η_s identifiziert sich mit ξ_s . In diesem letzteren Falle kommen für η_s nur die zwei

Werte 0, 1 in Betracht. Es soll zunächst Q_ξ für diejenigen Gitterpunkte berechnet werden, wo $\eta_s = 0$ oder $\eta_s = 1$, der Wert 2 also nicht auftritt. Dann ist mindestens eine der beiden Grössen ξ'_{s-1} , ξ_s gleich 0.

Mögen a, b, \dots die Werte des Index s sein, für die $\eta_s = 0$, ferner u, v, \dots die Werte von s , wo $\eta_s = 1$. Mit $m, n \dots$ sollen diejenigen Werte s bezeichnet sein, für welche die Knoten F'_{s-1} wirklich existieren, — hierher können also sowohl die $a, b \dots$, als auch die $u, v \dots$ ganz oder teilweise gehören. In der fixierten Fundamentalecke ist allemal mindestens eine der beiden Zahlen ξ'_{m-1} , ξ_m gleich 0, desgleichen mindestens eine der Zahlen ξ'_{n-1} , ξ_n gleich 0 usw.

Es sei (Z) ein abkürzendes Symbol für den Bedingungskomplex

$$(+FR)(+FF)(+RR)(-F'R')(-R'R'). \quad (69)$$

Nach (41) hat man

$$\begin{aligned} \dot{N}_{(Z)}(-F'R') &= \dot{N}_{(Z)} - \sum \dot{N}_{(Z)}(+F'_{m-1}R'_{m-1}) + \\ &+ \sum \dot{N}_{(Z)}(+F'_{m-1}R'_{m-1})(+F'_{n-1}R'_{n-1}) - \dots \end{aligned} \quad (70)$$

Bei der Berechnung von Q_ξ aus (58) hat man dort nur die Schleifenkammer zu berücksichtigen. Hierbei liefert $\dot{N}_{(Z)}$ den Beitrag

$$\dot{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b)\dots(-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v)\dots}, \quad (71)$$

wie analog § 4 gefolgert werden kann.

Ist $\xi'_{m-1} = 0$, $\xi_m = 0$, d. h. etwa $m = a$, so ergibt $\dot{N}_{(Z)}(+F'_{m-1}R'_{m-1})$ den Beitrag

$$\begin{aligned} &\dot{N}_{(+RR)(-R'R')(-RP)(+R_{a-1}R'_a)(+R'_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b)\dots} \\ &\dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v)\dots \end{aligned} \quad (72)$$

Diese Grösse lässt sich folgendermassen umformen, wenn die Forderungen $(+RR)(-R'R')(-PR)$ im Symbol (H) zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
& \overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots (+R_{a-1}R'_{a-1}) + \\
& + \overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots (+R'_{a-1}R_a) + \\
& + \overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots \quad (73) \\
& \dots (+R_{a-1}R'_{a-1})(+R'_{a-1}R_a).
\end{aligned}$$

Ist $\xi'_{m-1} = 0$, $\xi_m = 1$, etwa $m = u$, so ergibt $\overset{i}{N}(Z)(+F'_{m-1}R'_{m-1})$ den Beitrag

$$\overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (+R_{u-1}R'_{u-1})(-R'_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots, \quad (74)$$

was mit

$$\overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots (+R_{u-1}R'_{u-1}) \quad (75)$$

identisch ist.

Endlich folgt bei $\xi'_{m-1} = 1$, $\xi_m = 0$ auf Grund ähnlicher Erwägungen aus $\overset{i}{N}(Z)(+F'_{m-1}R'_{m-1})$ der Beitrag

$$\overset{i-1}{N}(H)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots (-R_{u-1}R_u)(R_{v-1}R_v) \dots (+R'_{u-1}R_u). \quad (76)$$

Analog behandelt man $\overset{i}{N}(Z)(+F'_{m-1}R'_{m-1})(+F'_{n-1}R'_{n-1})$ usw. Werden dann die Resultate mit Hilfe von (70) zur Bildung von Q_ξ zusammengefasst, so folgt:

$$Q_\xi = \overset{i-1}{N}(H)(+R^0)(-R^1)(-R^0). \quad (77)$$

Hier bedeutet:

$(+R^0)$ den Bedingungskomplex $(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$

$(-R^1)$ den Bedingungskomplex $(-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots$

$(-R^0)$ den Komplex derjenigen Bedingungen vom Typus $(-R_{m-1}R'_{m-1})$, $(-R'_{m-1}R_m)$, wo die und nur die Paare eingehen, deren Koordinaten ξ'_{m-1} resp. ξ_m gleich null sind.

Wir wenden uns nun zu den allgemeineren Fundamentalecken, wo η_s auch gleich 2 sein kann. Es seien x, y, z, \dots die Werte des Index s , wo $\eta_s = 2$, mithin $\xi'_{s-1} = 1, \xi_s = 1$. Die übrigen, von x, y, z, \dots verschiedenen Indizes bestimmen dann einen Bedingungskomplex $(H)(+R^0)(-R^1)(-R^0)$ [analog (77)], den wir abgekürzt mittels (E) symbolisieren. Für den Gitterpunkt (ξ) , der u. a. auch ξ'_{x-1}, ξ_x, \dots als Koordinaten enthält, gilt dann die Formel:

$$\begin{aligned}
 Q_\xi &= \sum_{x,y,z,\dots}^{i-1} \bar{N}_{(E)}(\underline{X})(Y)(Z) \dots + \\
 &+ \sum_{x,y,z,\dots}^{i-1} \bar{N}_{(E)}(\underline{X})(\underline{Y})(Z) \dots + \\
 &+ \sum_{x,y,z,\dots}^{i-1} \bar{N}_{(E)}(\underline{X})(\underline{Y})(\underline{Z}) \dots + \tag{78} \\
 &+ \dots \dots \dots + \\
 &+ \sum_{x,y,z,\dots}^{i-1} \bar{N}_{(E)}(\underline{X})(\underline{Y})(\underline{Z}) \dots
 \end{aligned}$$

In dieser Darstellung bedeutet (X) eine beliebige der zwei Forderungen $(+R_{x-1}R'_{x-1}), (+R'_{x-1}R_x)$; analog lautet die Erklärung für $(Y), (Z), \dots$. Das Symbol (\underline{X}) bedeutet entweder die Forderung $(+R_{x-1}R_x)(-R_{x-1}R'_{x-1})(-R'_{x-1}R_x)$ oder die Forderung $(+PR'_{x-1})$; entsprechend ist die Bedeutung von $(\underline{Y}), (\underline{Z}), \dots$. Das Summenzeichen $\sum_{x,y,z,\dots}$ fordert die Bildung sämtlicher Wahlmöglichkeiten im Komplex $(X)(Y)(Z) \dots$. Das Summenzeichen $\bar{\sum}_{x,y,z,\dots}$ fordert entsprechendes für jede Kombination vom Typus $(\underline{X})(Y)(Z) \dots$, wo der Strich ein und nur einmal auftritt. Das Summenzeichen $\underline{\sum}_{x,y,z,\dots}$ fordert entsprechendes für jede Kombination der Möglichkeiten im Typus $(\underline{X})(\underline{Y})(Z) \dots$, wo der Strich zweimal auftritt usw. Ist σ die Anzahl der Indizes x, y, \dots , so besteht die Summe in der ν -ten Zeile von (78) aus genau $2^\nu \binom{\sigma}{\nu-1}$ Summanden. Die Gesamtzahl der einzelnen Glieder der rechten Seite von (78) beträgt demnach

$$2^\sigma \left\{ \binom{\sigma}{0} + \binom{\sigma}{1} + \binom{\sigma}{2} + \dots + \binom{\sigma}{\sigma} \right\} = 2^\sigma \cdot 2^\sigma = 4^\sigma. \tag{79}$$

Bei $\sigma = 0$, wenn also überhaupt kein x, y, z, \dots vorkommt, reduziert sich (78) auf die für diesen Fall schon anerkannte Formel (77). Die allgemeine Gültigkeit von (78) wird durch vollständige Induktion bewiesen. Der Beweisgang soll kurz angedeutet werden.

Es möge die Formel (78) für $\sigma - 1$ Werte y, z, \dots bewiesen sein, zu denen dann noch als neuer Wert x hinzutritt. Zerfällt die Forderung $(-F'R')$ in $(-F'_{x-1}R'_{x-1})$ und $(-\Phi)$, so hat man jedenfalls

$$\begin{aligned} & \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')(-F'R')} = \\ & = \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')(-\Phi)} + \quad (80) \\ & + \overset{i}{N}_{(+FR)(+FF)(+RR)(-F'F')(-R'R')(-\Phi)(+F'_{x-1}R'_{x-1})}. \end{aligned}$$

Es möge der Minuend den Wert $Q^{(1)}$ und der Subtrahend den Wert $Q^{(2)}$ liefern, so dass

$$Q_{\xi} = Q^{(1)} - Q^{(2)} \tag{81}$$

gilt.

In $Q^{(1)}$ hat eine Koordinate den Wert 2; unter Anwendung von (27) lässt sich aber dieser Wert eliminieren. Man findet mit Hilfe von (78) und (27):

$$\begin{aligned} Q^{(1)} = & 2 \sum_{y,z,\dots}^{i-1} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)} \dots (+R_{x-1}R_x) + \sum_{y,z,\dots}^{i-1} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)} \dots (-R_{x-1}R_x) + \\ & + 2 \sum_{y,z,\dots}^{i-1} \overset{i-1}{N}_{(E)(\underline{Y})(Z)} \dots (+R_{x-1}R_x) + \sum_{y,z,\dots}^{i-1} \overset{i-1}{N}_{(E)(\underline{Y})(Z)} \dots (-R_{x-1}R_x) + \quad (82) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Für $Q^{(2)}$ ergibt sich direkt aus (78):

$$\begin{aligned} Q^{(2)} = & \sum_{y,z,\dots}^{i-1} \overset{i-1}{N}_{(E)(Y)(Z)} \dots (-R_{x-1}R'_{x-1})(-R'_{x-1}R_x)(-PR'_{x-1}) + \\ & + \sum_{y,z,\dots}^{i-1} \overset{i-1}{N}_{(E)(\underline{Y})(Z)} \dots (-R_{x-1}R'_{x-1})(-R'_{x-1}R_x)(-PR'_{x-1}) + \quad (83) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die Relation (82) lässt sich offenbar auch so schreiben :

$$\begin{aligned}
 Q^{(1)} = & \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R_x) + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. + \\
 & + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R_x) + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. + \quad (84) \\
 & + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Die Relation (83) gestattet folgende Umformung :

$$\begin{aligned}
 Q^{(2)} = & \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. - \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R'_{x-1}) + \\
 & + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R'_{x-1}R_x) - \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+PR'_{x-1}) + \quad (85) \\
 & + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R_x)(+R_{x-1}R'_{x-1}) + \\
 & + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Letztere Umformung stützt sich auf (41), wobei zu beachten ist, dass die Forderung $(+R_{x-1}R'_{x-1})(+PR'_{x-1})$ ebenso wie die Forderung $(+R'_{x-1}R_x)(+PR'_{x-1})$ im Widerspruch steht zu dem $(-PR_{x-1})(-PR_x)$ fordernden (E) , dass die entsprechenden Farbeninvarianten also verschwinden. In (85) ist nur die aus der ersten Zeile von (83) fließende Teilsumme explizite ausgeschrieben.

Subtrahiert man jetzt, wie in (81) gefordert, (85) von (84), so folgt :

$$\begin{aligned}
 Q_{\xi} = & \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R'_{x-1}) + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R'_{x-1}R_x) + \\
 & + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+PR'_{x-1}) + \sum_{y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(Y)(Z)} .. (+R_{x-1}R_x)(-R_{x-1}R'_{x-1}) + \\
 & + \dots\dots\dots \quad (86)
 \end{aligned}$$

Hier ist nun aber die rechte Seite nichts anderes als

$$\sum_{x,y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(X)(Y)(Z)} .. + \sum_{x,y,z,..}^{i-1} \bar{N}_{(E)(X)(Y)(Z)} .. + \dots \quad (87)$$

Damit ist (78) bewiesen.

10. Diskussion des Falles, wo Q_ξ verschwindet.

Es sei (ξ) ein Gitterpunkt, in dem Q_ξ verschwindet. Wir wollen zeigen, dass dann infolge (78) in den Forderungen (64) ein Widerspruch nachweisbar ist.

Die Fundamentalebene kleinster Dimensionszahl (§ 5), zu welcher der Gitterpunkt (ξ) gehört, sei Π . Das Π definierende Gleichungssystem sei:

$$\begin{aligned} \xi'_{m-1} &= 0, & \xi'_{n-1} &= 0, & \dots & \dots & \dots \\ \xi_p &= 0, & \xi_q &= 0, & \dots & \dots & \dots \\ \xi'_{x-1} &= 1, & \xi_x &= 1, & \xi'_{y-1} &= 1, & \xi_y = 1, & \dots & \dots \end{aligned} \tag{88}$$

Für gewisse Indizes, die wir mittels a, b, \dots bezeichnen wollen, folgt aus (88) dann noch $\eta_a = 0, \eta_b = 0, \dots$ Entsprechend folgen für gewisse andere, die als u, v, \dots angesprochen werden mögen, die Forderungen $\eta_u = 1, \eta_v = 1, \dots$

Bildet man nach (18) mit Hilfe der durch (78) bestimmten Fundamentalwerte die Zahl Q_ξ , so erkennt man, wie im § 5, dass ein Teil der Glieder von (18) verschwindet. Die den übriggebliebenen Gliedern entsprechenden Fundamentalwerte der Zahl Q_ξ müssen aber notwendig jeder einzeln verschwinden, wenn Q_ξ null werden soll. Diese letztgenannten Fundamentalwerte gehören den auf Π gelegenen Fundamentalecken an. Sämtliche Farbeninvarianten, aus denen diese Fundamentalwerte laut (78) zusammengesetzt sind, enthalten u. a. die Forderung

$$\begin{aligned} & (+RR)(-R'R')(-PR)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots \\ \dots & (-R_{u-1}R_u)(-R_{v-1}R_v) \dots (-R_{m-1}R'_{m-1}) \dots (-R'_{p-1}R_p), \end{aligned} \tag{89}$$

die wir abkürzend mit (E) symbolisierten.

Da jeder Fundamentalwert laut (78) eine Summe von Farbeninvarianten darstellt, so muss jede in einen verschwindenden Fundamentalwert eingehende Farbeninvariante einzeln verschwinden, desgleichen verschwindet jede Summe solcher Farbeninvarianten.

Man bilde nun die Summe S aller dieser verschwindenden Farbeninvarianten. Ist zwischen F_{g-1} und F_g überhaupt kein F'_{g-1} gelegen, so entspricht jeder Fundamentalecke, wo $\eta_g = 0$, in den zugehörigen Farbeninvarianten die Forderung $(+R_{g-1}R_g)$, und jeder Fundamentalecke, wo $\eta_g = 1$, die Forderung $(-R_{g-1}R_g)$.

Bei entsprechender Paarung der Farbeninvarianten in S nach dem in (33) angedeuteten Prinzip und Zusammenfassung der Paare zu neuen Farbeninvarianten kommen dann in den Bedingungen die das Knotenpaar $(R_{g-1}R_g)$ betreffenden Forderungen in Wegfall. Daraus folgt, dass jede einzelne der S bildenden Farbeninvarianten auch dann null ist, wenn die auf $(R_{g-1}R_g)$ bezüglichen Bedingungen einfach fortgelassen werden.

Es sei nun s ein Index, der von den in (88) genannten verschieden ist, dabei ein solcher, für den R'_{s-1} wirklich existiert. Unter den letztgenannten verschwindenden Farbeninvarianten hat man dann allemal Komplexe, die sich auf die Annahmen

$$\begin{aligned} (\xi'_{s-1} = 0, \xi_s = 0); & (\xi'_{s-1} = 0, \xi_s = 1); (\xi'_{s-1} = 1, \xi_s = 0); \\ & (\xi'_{s-1} = 1, \xi_s = 1) \end{aligned} \quad (90)$$

beziehen. In jedem einzelnen dieser Komplexe treten neben übrigen gleichen Bedingungen entsprechend die Forderungen

$$\begin{aligned} (+R_{s-1}R_s)(-R_{s-1}R'_{s-1})(-R'_{s-1}R_s), & (-R_{s-1}R_s)(-R_{s-1}R'_{s-1}), \\ (-R_{s-1}R_s)(-R'_{s-1}R_s), & (+R_{s-1}R'_{s-1}), (+R'_{s-1}R_s), \\ (+R_{s-1}R_s)(-R_{s-1}R'_{s-1}), & (+PR'_{s-1}) \end{aligned} \quad (91)$$

auf. Es ist aber bei beliebigem (M)

$$\begin{aligned} & N_{(M)}(+R_{s-1}R_s)(-R_{s-1}R'_{s-1}) + N_{(M)}(-R_{s-1}R_s)(-R_{s-1}R'_{s-1}) + \\ & + N_{(M)}(-R_{s-1}R_s)(-R'_{s-1}R_s) + N_{(M)}(+R_{s-1}R'_{s-1}) + \\ & + N_{(M)}(+R'_{s-1}R_s) + N_{(M)}(+R_{s-1}R_s)(-R'_{s-1}R_s) = \\ & = N_{(M)}(-R_{s-1}R'_{s-1}) + N_{(M)}(-R'_{s-1}R_s) + N_{(M)}(+R_{s-1}R'_{s-1}) + \\ & + N_{(M)}(+R'_{s-1}R_s) = 2 \cdot N_{(M)}. \end{aligned} \quad (92)$$

Dieses $N_{(M)}$ muss demnach null sein, sobald sämtliche Farbeninvarianten, deren Summe zur Bildung dieses $N_{(M)}$ laut (92) erforderlich war, verschwinden. Man erkennt auf diesem Wege die Möglichkeit durch geeignete Zusammenfassung der Glieder in S zu solchen Farbeninvarianten zu gelangen, die an keines

der Paare $(R_{s-1}R'_{s-1}), (R'_{s-1}R_s), (R_{s-1}R_s)$ explizite gebunden sind. M. a. W., sämtliche auf diese letztgenannten Paare bezüglichen Bedingungen dürfen fortgelassen werden, — die Farbeninvarianten verschwinden dann immer noch. Diese verbleibenden „reduzierten“ Farbeninvarianten sind nur noch an die Forderungen (E) und auf die Indizes x, y, \dots von (88) bezügliche Forderungen vom Typus $(X), (Y), \dots (\underline{X}), (\underline{Y}), \dots$ (§ 9) gebunden, und eine einfache Überlegung führt zur Erkenntnis, dass sämtliche in (78) geforderten Kombinationen in den Bedingungen wirklich auftreten. Aus $S=0$ folgt demnach das Bedingungs-
system:

$$\begin{aligned}
 N_{(E)(X)(Y)}^{i-1} \dots &= 0 \\
 N_{(E)(\underline{X})(Y)}^{i-1} \dots &= 0 \\
 N_{(E)(X)(\underline{Y})}^{i-1} \dots &= 0 \tag{93} \\
 \dots \dots \dots & \\
 N_{(E)(\underline{X})(\underline{Y})}^{i-1} \dots &= 0 \\
 \dots \dots \dots &
 \end{aligned}$$

An (93) knüpfen sich nun folgende Betrachtungen:

Sollte in (E) ein Widerspruch vorhanden sein, wodurch dann das Verschwinden der Farbeninvarianten (93) erklärlich wird, so hat man 3 Annahmen zu unterscheiden:

I. $(+RR)(-R'R')$ könnte im Residuum einen Widerspruch zeigen. Dieser Widerspruch besteht dann notwendigerweise auch schon im Gesamtnetz i -ter Ordnung.

II. $(+RR)(-R'R')(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$ könnte im Residuum Widersprüche zeigen. Wegen $\eta_a = 0, \eta_b = 0, \dots$ ist dann jedenfalls für diesen Gitterpunkt (ξ) im Gesamtnetz $F_{a-1} \equiv F_a, F_{b-1} \equiv F_b, \dots$, dann folgt aber $R_{a-1} \equiv R_a, R_{b-1} \equiv R_b, \dots$ aus den Forderungen $(+F_{a-1}R_{a-1})(+F_aR_a)(+F_{b-1}R_{b-1})(+F_bR_b) \dots$. Der Widerspruch $(+RR)(-R'R')(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$ ist deshalb schon im Gesamtnetz in den Forderungen $(+RR)(-R'R')(+FF)$ $(FR)(-F'F')$ implizite enthalten.

III. Aus $(+RR)(+R_{a-1}R_a)(+R_{b-1}R_b) \dots$ könnte im Residuum $(+R_{u-1}R_u)$ oder $(+R_{m-1}R'_{m-1})$ oder $(+R'_{p-1}R_p)$ folgen.

Dieselbe Folgerung müsste sich dann im Gesamtnetz aus $(+RR)(+FR)(+FF)(-F'F')$ ableiten lassen. Aus $(+FR)$ und $(+R_{u-1}R_u)$ ergibt sich dann $(+F_{u-1}F_u)$, was unmöglich ist, da $\eta_u = 1$ (vgl. § 7). Aus $(+FR)$ und $(+R_{m-1}R'_{m-1})$ bei $\xi'_{m-1} = 0$, also $F_{m-1} \equiv F'_{m-1}$, folgt $(+F'_{m-1}R'_{m-1})$, was doch der im Gesamtnetz gestellten Forderung $(-F'_{m-1}R'_{m-1})$ widerspricht. Dieselbe Folgerung erhält man aus der Voraussetzung $(+R'_{p-1}R_p)$.

Damit ist erwiesen, dass ein Widerspruch in (E) allemal auch einen Widerspruch in den für das Gesamtnetz i -ter Ordnung gestellten Bedingungen (64) bedeutet.

Es sei nun die Widerspruchslosigkeit von (E) vorausgesetzt. Die positiven Forderungen der Auslese (E) könnten eventuell $(+R_{x-1}R'_x)$ oder $(+R'_{x-1}R_x)$ usw. notwendig bedingen. Es dürften in der Indexreihe x, y, \dots auch solche Werte z vorkommen, für welche sowohl die Paare $(R_{z-1}R'_{z-1})$, als auch die Paare $(R'_{z-1}R_z)$ von (E) unabhängig sind. Nun ist in (93) sicherlich u. a. die Forderung

$$N_{(E)}^{i-1}(X)(Y) \dots (+R_{z-1}R_z)(-R_{z-1}R'_{z-1})(-R'_{z-1}R_z) \dots = 0 \quad (94)$$

enthalten, wo $(X), (Y), \dots$ gerade die von (E) abhängigen Paare bedeuten. Da diese $(X), (Y), \dots$ dann nicht explizite genannt zu werden brauchen, so reduziert sich (94) auf

$$N_{(E)}^{i-1}(+R_{z-1}R_z)(-R_{z-1}R'_{z-1})(-R'_{z-1}R_z) \dots = 0. \quad (95)$$

Wir wollen zeigen, dass dies unerfüllbar ist, und verfahren zu diesem Zweck folgendermassen:

Schaltet man auf dem Rande des Residuums das Stück R_0PR_{i+1} aus, so gehört zu jedem Knotenpaar des übriggebliebenen Randstückes ein eindeutig bestimmter Bogen. Besteht dieser Bogen aus ν Einzelfäden, so sagen wir, dem Knotenpaar entspreche die Distanz ν . Ist auf dem Bogen (AB) eine Auslese ausgezeichneter Paare (RR) getroffen, so soll unter der reduzierten Distanz von (AB) die Anzahl nur derjenigen Fäden verstanden werden, die nicht zugleich einem Bogen (RR) angehören. Ist (Z) eine beliebige, den Knoten P nicht enthaltende Auslese auf dem Residuumrand, so entspricht jedem Paar dieser Auslese eindeutig seine zugehörige reduzierte Distanz. Man

erkennt in dieser Begriffsbildung sofort eine Übertragung des Begriffs der reduzierten Maschenzahl vom Fächer auf das Residuum.

Eine einfache Überlegung überzeugt von der Richtigkeit des Satzes:

Eine positive Auslese (Z) auf dem Residuum zeigt dort dann und nur dann einen Widerspruch, wenn mindestens einem ihrer Paare die reduzierte Distanz 1 zukommt.

Auf Grund dieses Satzes zeigt sich sofort, dass die positiven Forderungen aus (E) zusammen mit den Forderungen $(+R_{z-1}R_z)$ keinen Widerspruch erzeugen können, solange (E) widerspruchsfrei ist. Es ist nämlich die reduzierte Distanz der Paare $(R_{z-1}R_z)$ jedesmal mindestens gleich 2, da widrigenfalls entweder $(+R_{z-1}R'_{z-1})$ oder $(+R'_{z-1}R_z)$ eine logische Folge von (E) wäre, was der Definition der z widerspricht. Hierbei ist der Bogen $(R_{z-1}R_z)$ sicher kein Teil eines Bogens (RR) oder $(R_{a-1}R_a)$, $(R_{b-1}R_b)$, ..., denn sonst würde auf dem Gesamtnetz ein Paar (FR) von einem Paare (RR) getrennt werden. Daraus folgt aber, dass die Hinzufügung der Paare $(R_{z-1}R_z)$ zu den (E) keine der früher bestimmten reduzierten Distanzen dieser Paare (E) ändert; die reduzierte Distanz 1 kann demnach in der Auslese, die aus den positiven Forderungen der (E) und den Forderungen $(+R_{z-1}R_z)$ besteht, nicht auftreten, — ein Widerspruch im Residuum ist also nicht vorhanden.

Versteht man unter einer Bogenkette eine Reihe derartiger Randbögen, dass der Anfangsknoten des nächstfolgenden stets mit dem Endknoten des nächstvorhergehenden identisch ist, unter der Resultante einer solchen Bogenkette den Bogen, der im Anfang des ersten Bogens beginnt und im Ende des letzten Bogens endet, so gilt, wie man leicht einsieht, der Satz:

Jedes von einer positiven Auslese (Z) abhängige Paar ergibt eine Resultante einer in (Z) enthaltenen Bogenkette.

Die aus den positiven Paaren von (E) bestehende Auslese definiert einen Bogenkomplex, der in den Intervallen $R_{z-1}R'_{z-1}$ und $R'_{z-1}R_z$ allemal Lücken aufweist, denn sonst wäre $(+R_{z-1}R'_{z-1})$ resp. $(+R'_{z-1}R_z)$ eine logische Folge von (E). Es ist also nicht möglich, von R_{z-1} resp. R_z mittels einer durch

positive Paare von (E) bestimmten Bogenkette zu R'_{z-1} zu gelangen. Daran kann auch die Hinzunahme neuer Bögen $(R_{z-1}R_z)$ zu den früheren (E) nichts ändern, da durch diese neuen Bögen bloss ein Übergang von den R_{z-1} zu den R_z oder umgekehrt vermittelt wird. Dies besagt aber, dass $(R_{z-1}R'_{z-1})$ resp. $(R'_{z-1}R_z)$ nie als Resultante einer Bogenkette der Auslese (E) $(+R_{z-1}R_z)$.. auftritt, d. h. $(R_{z-1}R'_{z-1})$ und $(R'_{z-1}R_z)$ sind von (E) $(+R_{z-1}R_z)$.. u n a b h ä n g i g. Aber auch die Paare $(R_{u-1}R_u)$, . . . , $(R_{m-1}R'_{m-1})$, . . . $(R'_{p-1}R_p)$.. sind von (E) $(+R_{z-1}R_z)$.. u n a b h ä n g i g. Sucht man nämlich etwa eine von R_{u-1} zu R_u führende Bogenkette, so kann die alleinige Benutzung von positiven Bögen (E) nicht zum Ziele führen, weil sonst, gegen die Voraussetzung, (E) einen Widerspruch enthalten würde. Sollte nun die Hinzunahme eines $(R_{z-1}R_z)$ notwendig sein, so muss der Bogen $(R_{z-1}R_z)$ in der fraglichen Bogenkette doch einmal vorkommen, und es darf angenommen werden, dass dies auch nur einmal geschieht, da bei etwa vorliegenden Wiederholungen die zwischenliegenden Kettenglieder zu schon benutzten Knoten zurückführen und deshalb ausgeschaltet werden können. Es müsste somit eine Kette in (E) etwa von R_{u-1} zu R_{z-1} und zugleich eine Kette in (E) von R_u zu R_z führen. Dies ist unmöglich, weil einerseits die Bögen $(R_{u-1}R_u)$, $(R_{z-1}R_z)$ fädenfremd sind, d. h. kein gemeinsames Stück aufweisen, und andererseits $(R_{z-1}R_z)$ von Bögen (E) nicht lückenlos überdeckt wird. Durch vollständige Induktion zeigt sich, dass auch die Hinzunahme sämtlicher $(R_{z-1}R_z)$ an der Sachlage nichts ändert. Derselbe Schluss gilt für die Paare $(R_{m-1}R'_{m-1})$, . . . , $(R'_{p-1}R_p)$, . . .

Damit wäre erwiesen, dass die Forderung (95) bei widerspruchsfreiem (E) nicht befriedigt werden kann. Ein Widerspruch in (E) bedeutet aber Widersprüche im Gesamtnetz, — somit ist der allgemeine Vierfarbensatz im Netz i -ter Ordnung für die behandelten speziellen Auslesetypen richtig.

Die Verwendung des Begriffs der Bogenkette veranschaulicht den Gedankengang des Beweises, könnte aber durch formalere Behandlung des Problems auch vermieden werden.

11. Ausblicke.

Der in den §§ 9, 10 entwickelte Beweiskgang ist prinzipiell verallgemeinerungsfähig. Hierbei zeigen sich jedoch für

$r > 1$ (§ 8) in einigen sehr speziellen Fällen Komplikationen, die im wesentlichen darin bestehen, dass die Entfernung negativer Glieder für einige Fundamentalwerte ausschliesslich mit Hilfe der bisher verwendeten Prinzipien nicht immer gelingen will. Gestattet man Zweifel an der Richtigkeit des Vierfarbensatzes, so kann man hierin Fingerzeige sehen, wie Netze zu konstruieren sind, die dem Vierfarbensatz nicht Folge leisten; eine Kontrolle ist für jedes vorliegende Netz auf Grund der Vierfarbenformel durchführbar. Sieht man aber in der Zwangsläufigkeit der Beweisführung der definit erledigten Fälle eine, allerdings gefühlsmässige, Gewähr für die allgemeine Gültigkeit des Satzes, so wird man suchen eine direkte Entscheidung eventuell mit Hilfe bisher unbenutzter Kunstgriffe zu erzwingen. Als ein solcher Kunstgriff bietet sich das Prinzip

$$N_{(Z)(-AB)(-AC)(-AD)(-AE)(-BC)(-BD)(-BE)(-CD)(-CE)(-DE)} = 0 \quad (96)$$

dar, welches rein arithmetischer Natur ist. Es besagt nämlich, dass 4 Farben nicht genügen, um 5 Knoten so zu färben, dass jedes Knotenpaar verschieden gefärbt erscheint, m. a. W., dass die Kardinalzahlen 4 und 5 von verschiedener Mächtigkeit sind. Das Prinzip (96) steht nicht im Widerspruch zu dem allgemeinen Vierfarbensatz, wie es auf den ersten Blick scheinen könnte, weil in (96) sich gegenseitig trennende Paare notwendigerweise auftreten, während der allgemeine Vierfarbensatz sich ausschliesslich auf Auslesen bezieht. Es gelingt tatsächlich die widerstrebenden Fundamentalwerte mit Hilfe von (96) als Summen nicht-negativer Glieder darzustellen. In einigen, wieder spezialisierten Fällen sind dann aber die Bedingungen in den eine untere Schranke des Fundamentalwertes bildenden Farbeninvarianten keine Auslesen mehr, wodurch die direkte Anwendung der Vierfarbenformel ausgeschaltet wird. Nimmt man dann Transformationen vor, die zu Auslesen zurückführen, so wird man gezwungen u. a. das folgende Theorem als richtig anzuerkennen:

Besitzt ein Normalnetz genau r Randknoten A_1, A_2, \dots, A_r , so ist

$$(4-r) N + \sum N_{(+A_i A_j)} - \sum N_{(+A_i A_j A_k)} + \dots + \sum N_{(+A_i A_j A_k A_l)} - \dots > 0. \quad (97)$$

Hier bedeutet $(+A_i A_j A_k \dots)$ die Forderung $A_i \equiv A_j \equiv A_k \equiv \dots$; die Summation ist über alle denkbaren Kombinationen der Indizes i, j, k, \dots zu erstrecken.

Der Vierfarbensatz ist in diesem Theorem als Spezialfall $r = 3$ enthalten; andererseits ist das Theorem selbst ein Spezialfall eines noch allgemeineren Satzes, über den ein anderes Mal berichtet werden soll.

Die verwickelte Natur des Vierfarbenproblems wird jedenfalls durch die komplizierte arithmetische Relation (97) ins rechte Licht gerückt: die Möglichkeit einer Entscheidung auf Grund bisher übersehener einfacher geometrischer Erwägungen ist höchst unwahrscheinlich. Noch mehr: es ist denkbar, dass der Vierfarbensatz einer unendlichen Gruppe sich gegenseitig bedingender, von bewiesenen topologischen Sätzen aber unabhängiger Sätze gleichwertig ist. Die auf Überlieferung und Gewöhnung gestützten Anschauungen über die Grundlagen der Arithmetik der ganzen Zahlen müssten in diesem Falle sorgfältig revidiert werden.

TOPOLOGISCHE GRUNDLAGEN DES ZAHLBEGRIFFS

VON

J. NUUT

TARTU (DORPAT) 1929

1. Fragestellung*).

Der geläufige Aufbau des Begriffs der reellen Zahl benutzt als Grundlage die Idee der Quantität, wobei dann die Rechenoperationen gleich zu Beginn als leitende Gedankengänge auftreten¹⁾. Dem steht gleichwertig eine andere Auffassungsweise gegenüber, bei welcher die Idee der linearen Anordnung als Ausgangspunkt der Betrachtungen dient, die reellen Zahlen als reine Ortssymbole eingeführt werden, während das Rechnen (die Metrik) erst später, und zwar in sehr allgemeiner Gestalt, als abgeleitete Gedankenbildung hinzukommt. Diese zweitgenannte Behandlungsweise läuft auf eine Entwicklung des Zahlbegriffs aus topologischen Grundlagen hinaus. Sollen hierbei Spekulationen metaphysischen Charakters vermieden werden, so hat man noch die Wahl zwischen zwei Wegen:

1) Man könnte einen absolut begründeten Zahlbegriff aufzubauen trachten, indem man jeden nötigen Hilfsbegriff formalaxiomatisch einführt. Es ist ein Grundproblem der Axiomatik zu entscheiden, ob diese Darstellungsart streng konsequent durchführbar ist.

2) Man kann sich mit einer relativen Begründung begnügen, indem man einen Komplex von Begriffen vorwiegend logischer Natur („Element“, „Menge“, „Identität“, „Verschiedenheit“, „Korrespondenz“, „Widerspruch“ u. a.) als dem Inhalt nach intuitiv gegeben ansieht; die axiomatische Unter-

*) Die vorliegende Arbeit bildet mit geringfügigen Änderungen eine gekürzte Wiedergabe des Inhalts der Doktorschrift des Verfassers: „Der lineare Raum als topologische Grundlage des Zahlbegriffs“ (verteidigt vor der Mathem.-Naturwissensch. Fakultät der Univ. Tartu am 27. November 1926). Die hier unterdrückten Beweise sind in den handschriftlichen Exemplaren der Dissertation grösstenteils vollständig ausgeführt.

1) So z. B. bei der Definition der Irrationalzahlen mittels Cantor'scher Fundamentalreihen, wo der Begriff der Differenz wesentlich notwendig ist.

suchung hat dann erst bei der Bildung eigentlich mathematischer Begriffe einzusetzen.

Hier soll der zweite Weg beschritten werden. Dass Vorsicht geboten ist, bzw. dass den Resultaten dann nur eine bedingte, wahrscheinlich aber auch zu enge Gültigkeit zukommt, ist evident. Meines Wissens existiert zur Zeit kein unanfechtbar absolut begründetes mathematisches System²⁾.

Aus naheliegenden Gründen soll der Sprachgebrauch sich an die Geometrie anlehnen, indem z. B. „Punkt“ und „Strecke“ statt „reelle Zahl“ und „Intervall“ Verwendung findet.

2. Einführung der natürlichen Zahlen.

Zur Vorbereitung der ferneren Entwicklungen bedarf man der Begriffe „endlich“, „abzählbar-unendlich“, „nichtabzählbar-unendlich“. Das hierzu gangbare Verfahren soll kurz angedeutet werden³⁾.

Man konstatiert zunächst die Existenz solcher Mengen, wo jedes Element das nächstfolgende bestimmt (intuitiv gegebene Grundbegriffe sind in diesem Satz durch gesperrten Druck gekennzeichnet). Beispiel — die Menge der Stellenzeichen⁴⁾

$$1, 2, 3, \dots, n, n+1, n+2, \dots \quad (1)$$

Solche Mengen mögen Folgen heißen.

Aus einer Folge F werde ein Element a_1 herausgegriffen. Ist das a_1 nächstfolgende Element a_2 von a_1 verschieden, so bildet die aus a_1 und a_2 bestehende Menge T_2^a einen echten oder unechten Teil von F , je nachdem in F noch von

2) D. Hilbert's Untersuchungen in dieser Richtung — „Üb. d. Grundl. d. Logik u. Arithmetik“, Verh. d. III. Math. Kongr. (1904), S. 174, „Neubegr. d. Math.“, Abh. Hamburg. Sem. 1 (1922), S. 157, „D. logisch. Grundl. d. Math.“, Math. Ann. 88 (1922), S. 151, „Üb. d. Unendliche“, Math. Ann. 95 (1925), S. 161, „D. Grundl. d. Mathem.“, Abh. Hamburg. Sem. 6 (1928), S. 65, — sind Entwürfe, die erst nach tatsächlicher Ausführung streng gewertet werden können; bei der Bewertung dürfte aber die Verschiedenheit der Mentalität bei den Kritikern eine wesentliche Rolle spielen.

3) Die verwendeten Axiome $A-E$ sind inhaltlich dem System von G. Peano („Sul concetto di numero“, Riv. Mat. 1, 1891) entlehnt.

4) Vgl. O. Hölder, „Die mathematische Methode“ (1924), S. 161.

a_1, a_2 verschiedene Elemente vorhanden sind oder nicht. Wir sagen, die mit a_1 begonnene Zählung von F breche bei a_2 ab, sofern das a_2 nächstfolgende Element von F zu $T_2^{a_1}$ gehört; widrigenfalls nennen wir diese Zählung über a_2 hinaus fortsetzbar. Ist im letzteren Falle a_3 das a_2 nächstfolgende Element, so kann die, von $T_2^{a_1}$ verschiedene, Teilmenge $T_3^{a_1}$ von F gebildet werden, die aus a_1, a_2, a_3 besteht, und es lässt sich nach analogen Prinzipien unterscheiden, ob die Zählung von F bei a_3 abbricht, oder aber über a_3 hinaus fortsetzbar ist.

Bei der geschilderten Zählung spielen die Stellenzeichen (1) eine wesentliche Rolle. Diese Stellenzeichen bilden eine Folge von speziellem Typus, nämlich die natürliche Zahlenreihe; wir bezeichnen letztere mit N und nennen ihre Elemente auch Ordnungszahlen (letztere werden also durch die Stellenzeichen repräsentiert). Für die Ordnungszahlen gelten folgende Axiome:

A. Ist n eine Ordnungszahl, $n+1$ die ihr nächstfolgende, so ist n von $n+1$ verschieden.

B. Ist die Ordnungszahl n von der Ordnungszahl m verschieden, so ist auch $n+1$ von $m+1$ verschieden.

C. Jede von 1 verschiedene Ordnungszahl $n+1$ bestimmt die Ordnungszahl n , zu der $n+1$ die nächstfolgende ist.

Wir nennen dann n die der Ordnungszahl $n+1$ nächstvorhergehende Ordnungszahl.

D. Zu der Ordnungszahl 1 gehört keine nächstvorhergehende.

E. Bezieht sich eine Aussage $A(n)$ auf die Ordnungszahl n , ist dabei $A(1)$ eine richtige Aussage, ferner $A(n+1)$ eine richtige Aussage, sobald $A(n)$ richtig ist, so ist die Aussage $A(x)$ richtig, sobald x irgendeine Ordnungszahl bedeutet.

Das Axiom E bildet das Prinzip der vollständigen Induktion (v. I.), welches eine fundamentale Gruppe „richtiger“ Aussagen erzeugt.

Aus den zitierten Axiomen ergeben sich die Folgerungen:

Zu verschiedenen Ordnungszahlen gehören verschiedene nächstvorhergehende.

Beginnt eine Zählung von N mit der Ordnungszahl 1, so existiert keine Ordnungszahl, bei der diese Zählung abbrechen könnte.

Bei einer solchen Zählung von N hat man sukzessive Teilmengen T_n^1 zu bilden, die aus den „schon gezählten“ Ordnungszahlen bestehen. Jede solche Teilmenge T_n^1 soll für sich, als Element neuer Art aufgefasst, eine Kardinalzahl heissen und zur Vereinfachung mit k_n symbolisiert werden. Die Menge der Kardinalzahlen bezeichnen wir mit K .

Aus der Bildungsweise der Kardinalzahlen ist ersichtlich, dass eine Ordnungszahl m in k_{n+1} eingeht, sobald m in k_n eingeht. Durch v. I. folgt, dass 1 in jeder Kardinalzahl enthalten ist.

Lässt sich eine Kardinalzahl k_n angeben, die eine Ordnungszahl m enthält, eine andere Ordnungszahl p aber nicht enthält, so sagt man, m sei kleiner als p ($m < p$), oder, damit gleichbedeutend, p sei grösser als m ($p > m$). Es ist demnach 1 kleiner als jede von 1 verschiedene Ordnungszahl. Durch v. I. erkennt man, dass $m < p$, $p < m$ nicht gleichzeitig richtige Aussagen sein können. Durch nochmalige Anwendung der v. I. ergibt sich dann für voneinander verschiedene m , p notwendig entweder $m < p$, oder $p < m$; tertium non datur. Ist daher $m < p$ falsch, desgleichen $p < m$ falsch, so muss m mit p identisch sein, was $m = p$, oder $p = m$ geschrieben werden mag.

Als weitere Konsequenz ergibt sich hieraus nun $n + 1 > n$. Ferner erkennt man die Existenz der Kardinalzahl k_n für jede Ordnungszahl n . Diese Kardinalzahl k_n enthält ausser n nur noch jede Ordnungszahl, die kleiner ist als n . Als weitere Folgerung fliesst die Transitivität der Grössenbeziehung, d. h. der Satz:

Aus $m < n$, $n < p$, folgt $m < p$.

Ordnungszahlen, die kleiner sind als n , heissen n vorhergehende Ordnungszahlen; Ordnungszahlen, die grösser sind als n , heissen auf n folgende Ordnungszahlen. „Nächstvorhergehend“ und „nächstfolgend“ sind Spezialfälle dieser allgemeineren Begriffsbildungen.

Zwischen den Mengen N und K besteht eine Korrespondenz (eindeutige Abbildung), die durch die wechselseitige Zuordnung der Ordnungszahl n aus N zur Kardinalzahl k_n aus K vermittelt wird. Diese Korrespondenz gestattet u. a. eine

Übertragung der Grössenanordnung auch auf die Kardinalzahlen ($k_n < k_m$ sobald $n < m$) und glättet überhaupt die aus den Definitionen resultierenden Unterschiede zwischen den Mengen N und K ; man spricht daher gewöhnlich von natürlichen Zahlen schlechtweg, ohne genaue Angabe, ob Ordnungs- oder Kardinalzahlen gemeint sind. In entsprechend abgeänderter Gestalt behalten die Axiome $A-E$ auch für Kardinalzahlen ihre Gültigkeit.

Ist $k_n < k_m$, so erweist sich die Menge k_n als ein echter Teil der Menge k_m . Dieses Kriterium könnte auch zur unabhängigen Definition der Grössenanordnung in K dienen.

Ist bei der Zählung einer beliebig gegebenen Folge F die Teilmenge $T_n^{a_1}$ gebildet, so sagen wir, diese Zählung sei bis zur Ordnungszahl n durchgeführt und k_n sei die Anzahl der gezählten Elemente von F . Der Zählungsprozess definiert dann eine Korrespondenz zwischen den Mengen $T_n^{a_1}$ und k_n , wobei a_1 der Ordnungszahl 1 entspricht. Um diese Korrespondenz explizite anzugeben, schreibt man a_p für das der Ordnungszahl p zugeordnete Element von F . Ist die Zählung von F bis zur Ordnungszahl n durchgeführt, dabei $p < n$, so ist die Zählung sicher über a_p hinaus fortsetzbar. Sollte $T_n^{a_1}$ mit F identisch sein, so bricht die Zählung notwendig bei a_n ab. Genügt hierbei F noch der Forderung, dass zu verschiedenen Elementen stets auch verschiedene nächstfolgende gehören, so bezeichnen wir diese Folge als einen endlichen Zyklus, symbolisch Z_n . Für einen endlichen Zyklus Z_n heisst k_n auch die Anzahl der Elemente des Zyklus. Es gilt der Fundamentalsatz:

Ein endlicher Zyklus Z_n erweist sich als solcher, unabhängig von der Wahl des Anfangselements a_1 ; auch die Anzahl k_n der Elemente des Zyklus ist von der speziellen Wahl von a_1 unabhängig.

Um die Richtigkeit dieses Satzes einzusehen, hat man sich zunächst davon zu überzeugen, dass a_1 das a_n nächstfolgende Element von Z_n ist. Hierauf konstatiert man, dass eine Korrespondenz zwischen den Elementen von Z_n und k_n auch dann entsteht, wenn man der Ordnungszahl t das Element a_{t+1} zuordnet (unter a_{n+1} ist hierbei a_1 zu verstehen); der nächstfolgenden Ordnungszahl entspricht in der neuen Korrespondenz stets wieder das nächstfolgende Element. Diese neue Korrespondenz er-

weist sich deshalb einer mit a_2 beginnenden Zählung von Z_n gleichbedeutend, wobei $T_n^{a_2}$ mit Z_n identisch wird. Nimmt man a_x statt a_1 , so bedeutet dies:

„Erweist sich Z_n als endlicher Zyklus von der Anzahl k_n , sobald die Zählung mit dem Element a_x beginnt, wo $x < n + 1$, so gilt dasselbe auch dann, wenn die Zählung beim Element a_{x+1} , $x + 1 < n + 1$, begonnen wird“.

Durch v. I. folgt hieraus der obengenannte Fundamentalsatz.

Wir sagen, das Element a_p sei aus einem Z_n „ohne Störung der Anordnung“ entfernt, wenn in der Restmenge Z'_n im allgemeinen die frühere Aufeinanderfolge der Elemente gilt, dem a_p nächstvorhergehenden Element a_{p-1} aber das a_p nächstfolgende Element a_{p+1} als nächstfolgendes zugeordnet ist. Versteht man unter $n - 1$ die n nächstvorhergehende Ordnungszahl, so hat man den Satz:

Wird aus einem endlichen Zyklus Z_n ein beliebiges Element a_p ohne Störung der Anordnung entfernt, so verbleibt als Restmenge ein endlicher Zyklus Z_{n-1} .

Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptung, wenn man die Zählung der Restmenge mit dem Element a_{p+1} ($p < n$) resp. a_1 ($p = n$) beginnt.

Hierauf stützt sich dann der Beweis des Satzes:

Besteht zwischen den endlichen Zyklen Z_n und Z_m eine Korrespondenz, so ist n mit m identisch, d. h. diese Zyklen besitzen ein und dieselbe Anzahl von Elementen.

Es ist zunächst direkt ersichtlich, dass zwischen einem Z_1 und einem Z_n bei $n > 1$ keine Korrespondenz besteht. Wird nun bei fixiertem m angenommen, dass zwischen Z_m und Z_n keine Korrespondenz bestehe, solange m von n verschieden ist, so gilt dasselbe für Z_{m+1} und Z_n , solange $m + 1$ sich von n unterscheidet. Sollte nämlich im letztgenannten Falle doch eine Korrespondenz bestehen, wobei etwa das Element a aus Z_{m+1} dem Element b aus Z_n entspricht, so verbleibt nach Entfernung von a und b ohne Störung der Anordnung aus Z_{m+1} und Z_n , eine Korrespondenz zwischen einem Z_m und einem Z_{n-1} , was der Annahme widerspricht, da m von $n - 1$ verschieden sein muss, sobald

$m + 1$ von n verschieden ist. Der zu beweisende Satz ergibt sich somit durch v. I.

Ist es möglich, eine Korrespondenz zwischen einer gegebenen Menge E und einer Kardinalzahl k_n herzustellen, so ist es auch möglich, E in einen endlichen Zyklus Z_n umzuformen, denn die erwähnte Korrespondenz vermittelt ja für E die Umwandlung in eine Folge. Jede Menge E dieser Art heisst eine endliche Menge, k_n ist die Anzahl der Elemente von E . Der vorige Satz liefert direkt das Schroeder'sche Prinzip⁵⁾:

Die Anzahl k_n der Elemente einer endlichen Menge E ist unabhängig von der speziellen Art der hergestellten Korrespondenz.

Widrigenfalls würde nämlich E eine Korrespondenz zwischen verschiedenen Kardinalzahlen vermitteln, was nicht angeht, da sonst auch zwischen endlichen Zyklen von verschiedener Elementenanzahl eine Korrespondenz herstellbar wäre.

Statt von einer „endlichen Menge, bei welcher die Anzahl der Elemente k_n beträgt“, spricht man gewöhnlich einfacher von einer „aus n Elementen bestehenden (endlichen) Menge“. Die vorliegenden Betrachtungen präzisieren den Sinn, in welchem die Zahlwörter „eins“, „zwei“, „drei“, . . . „ n “, . . . (Lautsymbole der natürlichen Zahlen) im weiteren Verwendung finden.

Durch v. I. wird erkannt:

Jede echte Teilmenge einer endlichen Menge ist eine endliche Menge von kleinerer Elementenanzahl.

Ist $p < n$, so besitzt eine endliche Menge, die aus n Elementen besteht, Teilmengen aus p Elementen.

Die Vereinigung einer endlichen Menge endlicher Mengen liefert eine endliche Menge.

5) Nach O. Hölder (vgl. Anm. 4) S. 4, die „Grundtatsache des Anzahlbegriffs“. H. v. Helmholtz bezeichnet E. Schroeder als den ersten, „welcher erkannt hat, dass hierin ein Problem verborgen ist“ (H. v. Helmholtz, Philos. Aufsätze, 1887; Wiederabdruck in der Jubiläumssammlung „Schriften zur Erkenntnistheorie“, 1921, S. 71). Beweisversuch u. a. bei L. Kronecker, J. f. Math. 101 (1887).

„Unendliche“ Menge bedeutet soviel, wie „Menge, die nicht zur Kategorie der endlichen Mengen gehört“. Beispiele unendlicher Mengen sind N und K . Besteht zwischen einer Menge A und der Menge N eine Korrespondenz, so heisst die Menge A abzählbar-unendlich⁶⁾. Aus dieser Korrespondenz resultiert die Möglichkeit A in eine Folge umzuformen. Bezeichnet man die Elemente von A in der durch die Korrespondenz vermittelten Weise als

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots \quad (2)$$

und entfernt darauf das Element a_1 , wobei als Restmenge A' verbleiben möge, so besteht doch noch eine Korrespondenz zwischen A und A' , wie ersichtlich wird, wenn man dem Element a_t aus A das Element a_{t+1} aus A' zuordnet. Allgemeiner:

Wird aus einer abzählbar-unendlichen Menge eine endliche Menge endlicher Mengen entfernt, so verbleibt eine abzählbar-unendliche Restmenge.

Zwischen einer abzählbar-unendlichen Menge und jeder ihrer unendlichen Teilmengen besteht eine Korrespondenz, desgleichen zwischen jedem Paar abzählbar-unendlicher Mengen.

Jede endliche Menge abzählbar-unendlicher Mengen, desgleichen jede abzählbar-unendliche Menge abzählbar-unendlicher Mengen ist abzählbar-unendlich.

Eine aus natürlichen Zahlen gebildete Menge ist also entweder endlich oder abzählbar-unendlich (als Teilmenge von N). Wichtig ist der Satz:

Eine beliebig gegebene Menge natürlicher Zahlen enthält stets eine kleinste Zahl⁷⁾.

Als „kleinste“ Zahl ist hier eine solche bezeichnet, die in der Menge enthalten, dabei aber kleiner ist, als jede andere Zahl aus derselben Menge. Um die Existenz dieser kleinsten

6) G. Cantor, Math. Ann. 17 (1873), S. 355.

7) Die Menge der natürlichen Zahlen ist also im Cantor'schen Sinne „wohlgeordnet“ (Math. Ann. 49, S. 207).

Zahl nachzuweisen, fixiere man eine in der gegebenen Menge M enthaltene natürliche Zahl t und bilde k_{t-1} . Gehört keine Ordnungszahl aus k_{t-1} zu M , so erweist sich t als die gesuchte kleinste Zahl in M . Im anderen Falle erkennt man durch v. I., dass die kleinste Zahl von M unter den Ordnungszahlen aus k_{t-1} zu suchen ist und dort tatsächlich existiert.

Unendliche Mengen, die nicht zur Kategorie der abzählbar-unendlichen Mengen gehören, sollen hier ohne weitere Unterscheidung als nicht-abzählbare Mengen angesprochen werden. Eine spezielle Art der Konstruktion nicht-abzählbarer Mengen führt zum Begriff des Kontinuums (vgl. § 10, 11).

3. Axiome der Anordnung.

Als Grundlage der ferneren Betrachtungen dient uns der Begriff „zwischen“ in der durch die Hilbert'schen Axiome der Anordnung⁸⁾ präzisierten Gestalt. Die ersten drei dieser Axiome (II_{1-3}) enthalten Bestimmungen über die Anordnung von Punkten einer Geraden, das letzte, II_4 (das Pasch'sche Axiom), formuliert eine die Ebene betreffende Aussage. Die „linearen“ Axiome II_{1-3} sind allein noch nicht ausreichend, um die intuitiv geläufige lineare Anordnung der Punkte einer Geraden (doppelpunktfreien offenen Linie) begrifflich vollständig zu beschreiben, wohl aber definieren die „Axiome der Verknüpfung“ I_{1-3} zusammen mit den Anordnungsaxiomen die Anordnung der Elemente des ein-, zwei- und dreidimensionalen Raumes vollständig, sobald das „ebene Axiom“ II_4 zu den linearen Axiomen II_{1-3} hinzugefügt wird. Diese merkwürdige Tatsache dürfte damit zusammenhängen, dass das Pasch'sche Axiom eigentlich mehr aussagt, als von einem reinen Anordnungsaxiom gefordert werden sollte (es enthält u. a. ja auch eine Stetigkeitsaussage). D. Hilbert formuliert in einer Fussnote⁹⁾ die Aufgabe:

„Es ist wünschenswert ein solches System von unabhängigen Axiomen aufzustellen, dass die auf die Anordnung der Punkte einer Geraden bezüglichen Axiome diese Anordnung vollständig beschreiben“.

8) D. Hilbert, „Grundlagen der Geometrie“, 5. Aufl. 1922. In der ersten Auflage waren 5 Axiome der Anordnung aufgestellt, von denen das vierte von E. H. Moore (Trans. Am. Math. Soc. 1902) als überflüssig erkannt wurde; vgl. Anm. 18).

9) a. a. O., S. 6, Fussnote.

Man darf dies als Forderung ansehen, von dem Pasch'schen Axiom die in II_{1-3} noch nicht enthaltene Aussage über die lineare Anordnung explizite abzutrennen. Es soll hier zunächst dieses fehlende lineare Anordnungsaxiom als II'_4 formuliert und daraufhin später untersucht werden, welchen Abänderungen das Pasch'sche Axiom nach Abspaltung von II'_4 unterliegt; diese letztere Untersuchung ist übrigens für den Aufbau des Zahlbegriffs ohne wesentliche Bedeutung.

Punkte sollen durch kleine lateinische Buchstaben symbolisiert werden. Wenn von „zwei“, „drei“ usw. Punkten die Rede ist, sollen stets untereinander verschiedene Punkte damit gemeint sein. Als Symbol des Begriffs „zwischen“ soll das Zeichen \vee dienen¹⁰⁾, und zwar soll die Aussage:

„Der Punkt a liegt zwischen dem Punkt b und dem Punkt c “ symbolisch $a \vee bc$ geschrieben werden. Das umgekehrte Symbol \wedge soll die Verneinung „nicht zwischen“ bezeichnen (so dass \vee und \wedge sich gegenseitig ausschliessen). Die Relation $a \wedge bc$ ist also gleichbedeutend mit der Aussage:

„Der Punkt a auf der Geraden bc liegt nicht zwischen dem Punkt b und dem Punkt c “.

Die drei Axiome II_{1-3} lassen sich dann folgendermassen schreiben:

II_1 . Wenn $b \vee ac$, so auch $b \vee ca$.

II_2 . Wenn a und c einer Geraden angehören, so existiert b , so dass $b \vee ac$, und zugleich d , so dass $c \vee ad$.

II_3 . Sind a, b, c drei Punkte einer Geraden, so bildet das gleichzeitige Bestehen der drei Beziehungen $a \wedge bc, b \wedge ac, c \wedge ab$ einen Widerspruch, desgleichen bildet das gleichzeitige Bestehen der zwei Beziehungen $a \vee bc, b \vee ac$ einen Widerspruch.

Aus $a \wedge bc, b \wedge ac$ folgt also $c \vee ab$; aus $a \vee bc$ folgt $b \wedge ac$.

Wo nicht ausdrücklich anders erwähnt, beschränken wir uns fernerhin auf Punkte ein und derselben Geraden. Es seien

10) Eine Verwechslung mit den abweichenden Bedeutungen der Zeichen \vee, \wedge in den verschiedenen Begriffsschriftsystemen kommt hier nicht in Frage.

a, b zwei fixierte Punkte, x ein dritter veränderlicher Punkt. Man hat dann entweder $a \vee bx$ oder $a \wedge bx$. Im ersteren Falle sagen wir, x liege, in Bezug auf den Trennungspunkt a , mit b in verschiedenen Bereichen, — symbolisch geschrieben, x gehöre zum Bereich $T_b(a)$. Im letzteren Falle sagen wir, x liege, in Bezug auf den Trennungspunkt a , in demselben Bereich wie b , — symbolisch geschrieben, x gehöre zu $S_b(a)$. Den Punkt b selbst zählen wir dabei konsequent zum Bereich $S_b(a)$. Für jeden von a verschiedenen Punkt der Geraden ist es dann entschieden, welchem der beiden, durch a und b bestimmten Bereiche $S_b(a), T_b(a)$ er angehört. Die Axiome Π_{1-3} genügen aber nicht zum Nachweis, dass der Bereich $S_b(a)$ mit dem Bereich $S_c(a)$ übereinstimmt, sobald c dem Bereich $S_b(a)$ entnommen ist. Dies wird an folgendem Anschauungssubstrat ersichtlich, wobei allerdings schon der Begriff der reellen Zahl benutzt ist:

Die reellen Zahlen mögen in drei Kategorien verteilt sein, nämlich in 1) ganze Zahlen, 2) rationale Brüche (von ganzen Zahlen verschieden), 3) irrationale Zahlen. Als Symbole verwenden wir entsprechend g, r, i . Die Zwischenlage sei so fixiert, dass allemal $g \vee ri, g \vee ir$ bestehe, während in dem Falle, wo im Punkttripel mindestens zwei Punkte derselben Kategorie angehören (also zwei g -Punkte, oder zwei r -Punkte, oder zwei i -Punkte auftreten), die Zwischenlage auf „natürliche“ Weise durch die Grössenanordnung gegeben sein möge. Die Forderungen Π_{1-3} sind dann erfüllt. Fixiert man aber nun die Zahlen $a = 1, b = 2, c = \sqrt{2}, d = 1\frac{1}{2}$, so gehört offenbar c zu $S_b(a), d$ zu $S_b(a)$, nicht aber c zu $S_d(a)$, — die Bereiche $S_b(a)$ und $S_d(a)$ sind somit wesentlich verschieden.

Es soll nun noch das folgende lineare Anordnungsaxiom hinzukommen:

Π_4' . Gehören a, b, c, d einer Geraden an, und gilt $d \vee ab$, so bedeutet das gleichzeitige Bestehen der zwei Beziehungen $d \wedge ac, d \wedge bc$ einen Widerspruch¹¹⁾.

Diese Aussage lässt sich als eine spezielle Entartung des Pasch'schen Axioms deuten. Die Unabhängigkeit des Axioms

11) Bei M. Pasch, „Vorles. üb. neuere Geometrie“ (1882), dienen zur Beschreibung der linearen Anordnung 8 „Grundsätze“, aus denen sich u. a. das Axiom Π_4' unseres Textes direkt herauslesen lässt.

Π_4' von Π_{1-3} erhellt aus dem oben angeführten Anschauungssubstrat, wo Π_{1-3} erfüllt sind und doch $d \vee ab, d \wedge ac, d \wedge bc$ besteht. Es enthält das System der vier Axiome Π_{1-3}, Π_4' aber auch keinen Widerspruch, denn sämtliche vier Axiome zeigen sich erfüllt, wenn man die Zwischenlage im reellen Zahlenkontinuum für jedes Tripel durch die natürliche Grössenfolge bestimmt. Am deutlichsten ergibt sich dies auf analytischem Wege, sobald man die Definition der Zwischenlage dahin präzisiert, dass für die drei Zahlen ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Beziehung $\xi_1 \vee \xi_2 \xi_3$ zu gelten hat, wenn $(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) < 0$, dagegen die Beziehung $\xi_1 \wedge \xi_2 \xi_3$, wenn $(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 - \xi_3) > 0$.

4. Der Vierpunktsatz.

Die Kombination der vier linearen Aussagen Π_{1-3}, Π_4' führt sofort zu einer Verschärfung der in Π_4' enthaltenen Behauptung. Es ist nämlich nicht möglich, dass die drei Beziehungen

$$d \vee ab, d \vee ac, d \vee bc \quad (3)$$

alle zugleich richtig sind. Denn wegen Π_3 darf $a \vee bc$ angenommen werden, aus (3) folgt $a \wedge cd$, die Anwendung von Π_4' auf das Tripel b, c, d und den vierten Punkt a ergibt daher $a \vee bd$, im Widerspruch zu der in (3) enthaltenen Annahme $d \vee ab$.

Es gilt somit der folgende Vierpunktsatz:

$$\begin{aligned} \text{Wenn } d \vee ab, d \wedge bc, \text{ so } d \vee ac; \\ \text{wenn } d \vee ab, d \vee ac, \text{ so } d \wedge bc; \\ \text{wenn } d \wedge ab, d \wedge ac, \text{ so } d \wedge bc. \end{aligned}$$

Dieser Satz fixiert dem Gedächtnis sich leicht einprägende Gesetze, nach denen mit den Symbolen \vee, \wedge zu operieren ist.

Jetzt wird es möglich zu zeigen, dass $S_b(a)$ mit $S_c(a)$ identisch (also auch $T_b(a)$ mit $T_c(a)$ identisch) ist, sobald $a \wedge bc$ besteht, d. h. sobald c dem Bereich $S_b(a)$ entnommen ist. Es seien a, b fixiert, also $S_b(a), T_b(a)$ bestimmt. Wegen Π_2 existieren c und d der Art, dass $a \vee bd, c \vee ab$ gilt. Es gehört dann offenbar d zu $T_b(a)$, c zu $S_b(a)$, die Punkte c, d sind also sicher untereinander verschieden; dabei steht fest, dass diese Punkte auch von a, b verschieden sind. Es ist also stets möglich so-

wohl in $S_b(a)$ als auch in $T_b(a)$ Punkte zu nennen. Es sei ferner e ein fünfter Punkt. Liegt er in $S_b(a)$, so hat man

$$a \wedge bc, a \vee bd, a \wedge be, \quad (4)$$

also auf Grund des Vierpunktsatzes

$$a \vee de, a \vee cd, \quad (5)$$

hieraus endlich auf dieselbe Weise

$$a \wedge ce; \quad (6)$$

es gehört also e dann sicher auch zu $S_c(a)$. Analog ergibt sich im Falle der Zugehörigkeit von e zu $T_b(a)$ zwangsläufig die Beziehung $a \vee ce$, d. h. e gehört dann auch zu $T_c(a)$. Damit ist die Identität von $S_b(a)$ mit $S_c(a)$ und von $T_b(a)$ mit $T_c(a)$ erwiesen.

Die Bereiche S , T sind jeder für sich schon durch die alleinige Angabe des Trennungspunktes a gegeben. Besteht $a \vee bd$, so erweist sich $T_b(a)$ mit $S_d(a)$ als identisch; jeder der beiden Bereiche lässt sich also sowohl als S -Bereich, als auch als T -Bereich ansprechen, — die Unterscheidung ist nur dadurch bedingt, ob man eine positive Definition verwendet (einen Punkt b nennt, der dem Bereich angehört), oder von einer negativen Definition ausgeht (einen Punkt d nennt, der dem Bereich nicht angehört).

Die Bereiche S , T bilden die zwei Seiten der Geraden in Bezug auf a ; man spricht auch wohl von „rechts“ und „links“ bezüglich a .

Bedeutet $P < Q$, dass die Menge P ein echter Teil der Menge Q ist, so kann man schreiben $T_b(a) < S_a(b)$, — es ist dies eigentlich nur eine Umformung der Aussage II₃. Durch verschiedene Trennungspunkte erzeugte Bereiche sind daher nie identisch. Als weitere Folgerung wird erkannt, dass die Menge der Punkte eines Bereiches nicht endlich sein kann: es enthält nämlich ein Bereich $S_a(b)$ stets die echte, dabei nicht leere Teilmenge $T_b(a)$, welche letztere ihrerseits wiederum als ein $S_c(a)$ aufgefasst werden darf, worauf die Schlussweise sich wiederholen lässt; es existiert mithin sicher ein Punkt x_1 , der wohl $S_a(b)$, nicht aber der Teilmenge $S_c(a)$ angehört; durch v. I. gelangt man zu einer abzählbar unendlichen Punktfolge $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ in $S_a(b)$, welche nicht existieren könnte, wenn $S_a(b)$ eine endliche Menge wäre.

5. Reihenfolge in einer endlichen Punktmenge.

Es seien n Punkte auf einer Geraden zu einer endlichen Menge G_n zusammengefasst. Dann gilt der Satz:

Für die Punkte der Menge G_n und die Ordnungszahlen aus k_n besteht eine derartige Korrespondenz, dass in jedem Punkttupel a_p, a_l, a_m aus G_n dann und nur dann $a_l \vee a_m a_p$ ist, wenn entweder $p < l < m$, oder $m < l < p$, wo l, m, p Ordnungszahlen aus k_n bedeuten.

Dieser Satz ist sicher richtig für G_3 , wo $a_2 \vee a_1 a_3$ angenommen werden darf. Es sei die Richtigkeit des Satzes für G_n erkannt und eine G_{n+1} vorgelegt. Man entferne aus dieser G_{n+1} zunächst einen beliebigen Punkt b , — es verbleibt dann eine G_n , in der die Punkte im Einklang mit dem Satz als a_1, a_2, \dots, a_n bezeichnet werden können. Gilt dann im Tripel a_1, a_n, b die Beziehung $a_n \vee a_1 b$, so ordne man b der Ordnungszahl $n+1$ zu, bezeichne also b als a_{n+1} , — damit wird für G_{n+1} eine Korrespondenz der im Satz geforderten Art erhalten. Zum Nachweis braucht man nur solche Tripel zu untersuchen, die a_{n+1} wirklich enthalten. Für a_1, a_n, a_{n+1} besteht, wie erforderlich, $a_n \vee a_1 a_{n+1}$. Für ein Tripel a_p, a_n, a_{n+1} , wo $1 < p < n$, besteht $a_p \vee a_1 a_n, a_n \vee a_1 a_{n+1}$, — der Vierpunktsatz liefert dann, wie erforderlich, $a_n \vee a_p a_{n+1}$. Für $p < q < n$ im Tripel a_p, a_q, a_{n+1} ergibt sich aus $a_q \vee a_p a_n, a_n \vee a_q a_{n+1}$ sofort $a_q \vee a_p a_{n+1}$. Dass bei $x < y < n+1$ nicht gleichzeitig auch $a_x \vee a_y a_{n+1}$ oder $a_{n+1} \vee a_x a_y$ bestehen kann, ist eine Folge von II₃. Damit ist die erste Annahme erledigt. Macht man nun die zweite Annahme $b \vee a_1 a_n$, so lässt sich zunächst die kleinste Ordnungszahl x bestimmen, für welche $b \vee a_1 a_x$ gilt; es sei $t+1$ dieses kleinste x . Man hat dann $b \vee a_t a_{t+1}$ (für $t+1=2$ ist dies direkt ersichtlich, für $t+1>2$ folgert man es aus $b \wedge a_1 a_t, b \vee a_1 a_{t+1}$). Die Bezeichnung der Punkte von G_{n+1} werde hierauf abgeändert: bei $y > t$ soll jeder früher als a_y bezeichnete Punkt nunmehr a_{y+1} heißen; der Punkt b soll a_{t+1} benannt werden; bei $y < t+1$ sollen die früheren Bezeichnungen beibehalten werden. Damit ist die gesuchte Korrespondenz hergestellt. Zum Nachweis darf man sich auf die Untersuchung nur solcher Tripel beschränken, die b , also a_{t+1} enthalten. In der neuen Notation hat man $a_{t+1} \vee a_t a_{t+2}, a_{t+1} \vee a_1 a_{t+2}$. Für $1 < p < t$ folgt wegen $a_p \vee a_1 a_t$ und

$a_t \vee a_1 a_{t+2}$ zunächst $a_t \vee a_p a_{t+2}$, $a_t \vee a_p a_{t+1}$, hierauf $a_{t+1} \vee a_p a_{t+2}$. Ist ferner $p < q < t$, also $a_q \vee a_p a_{t+2}$, $a_{t+1} \vee a_q a_{t+2}$, so folgt $a_q \vee a_p a_{t+1}$. Ist $p < t$, $t+2 < m$, so folgert man aus $a_{t+1} \vee a_p a_{t+2}$, $a_{t+2} \vee a_p a_m$ zuerst $a_{t+2} \vee a_m a_{t+1}$, hierauf $a_{t+1} \vee a_p a_m$. Ist endlich $t+1 < m < s$, so resultiert aus $a_{t+1} \vee a_t a_m$, $a_m \vee a_t a_s$ die Folgerung $a_m \vee a_{t+1} a_s$. Damit ist auch die zweite Annahme erledigt. Die letzte Annahme wäre $a_1 \vee a_n b$. Man reserviere dann für b die Neubezeichnung a_1 und ändere jedes frühere a_z in a_{z+1} . Damit wird die Korrespondenz erhalten. Tatsächlich ist dann $a_2 \vee a_1 a_{n+1}$ und, falls $2 < p < n+1$, wegen $a_p \vee a_2 a_{n+1}$ auch notwendig $a_2 \vee a_1 a_p$; ist $2 < p < q$, also $a_p \vee a_2 a_q$, so zeigt sich $a_p \vee a_1 a_q$, wie gefordert war.

Durch v. I. ergibt sich nun die allgemeine Gültigkeit des zu beweisenden Satzes.

Ist die Korrespondenz zwischen G_n und k_n hergestellt, so sagt man, die Punkte a_x von G_n liegen auf der Geraden in der durch den Index bestimmten Reihenfolge.

Ist t aus k_n von 1 und von n verschieden, so gilt stets $a_t \vee a_1 a_n$; die beiden ausgezeichneten Punkte a_1, a_n heissen Randpunkte von G_n , jeder andere Punkt a_t aus G_n ist ein innerer Punkt der Menge. Wählt man nach II₂ die Punkte p, q gemäss den Forderungen

$$a_1 \vee p a_n, a_n \vee q a, \quad (7)$$

wobei p, q offenbar untereinander verschieden sein müssen und nicht G_n angehören können, so erweist es sich als zweckmässig, die Punkte p, q Schranken von G_n zu nennen, und zwar p die auf der Seite a_1, q die auf der Seite a_n gelegene Schranke. Aus (7) folgen die Beziehungen $a_1 \vee p q, a \vee p q$. Zieht man noch $a_t \vee a_1 a_n$ in Betracht, so folgt mit Hilfe von (7) zunächst $a_n \vee a_t q$, hierauf $a_t \vee a_1 q$; andererseits zeigt sich $a_1 \vee a_t p$, — mithin gilt $a_t \vee p q$. Es ist also jeder Punkt der Menge G_n zwischen den Schranken p, q gelegen.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob die Punkte einer G_n in verschiedenen Reihenfolgen gelesen werden können, d. h. ob es möglich ist, die erforderliche Korrespondenz für eine fixierte G_n auf voneinander abweichende Arten herzustellen. Es seien a_x und b_x Symbole zweier verschiedener Reihenfolgen ein und derselben Punktmenge G_n . Da nur zwei Randpunkte existieren, so muss der Randpunkt b_1 entweder mit a_1 oder mit a_n identisch

sein. Verfolgt man die Annahme $b_1 = a_1$, so ergibt sich durch v. I. $b_s = a_s$ für jedes s . Ist nämlich $b_s = a_s$ bei $s < m+1$ richtig, so muss b_{m+1} einem a_i entsprechen, wo $i > m$; sollte $i > m+1$, $a_{m+1} = b_j$, also $j > m+1$ sein, so genügt das Punkttupel b_1, b_j, b_{m+1} der Bedingung $b_{m+1} \vee b_1 b_j$, weshalb für die entsprechenden a_1, a_{m+1}, a_i notwendig $a_i \vee a_1 a_{m+1}$ gelten müsste, worin ein Widerspruch enthalten ist. Hieraus folgt, dass $b_1 = a_n$ sein muss, wenn die Reihenfolge der b_x von der Reihenfolge der a_x verschieden sein soll.

Man definiere nun eine Korrespondenz zwischen den Ordnungszahlen aus k_n und nochmals den Ordnungszahlen aus k_n auf folgende spezielle Weise: von k_{n+1} möge unter der Annahme $t < n+1$ die echte Teilmenge k_t abgespaltet werden, — es verbleibt dann eine Restmenge R , die sicher endlich ist; die Anzahl der Elemente von R sei k_τ , und es ist sicher $\tau < n+1$. In der zu definierenden speziellen Korrespondenz soll nun stets der Ordnungszahl t die Ordnungszahl τ entsprechen. Wir nennen τ die zu t komplementäre Zahl aus k_n . Mit Hilfe der Sätze des § 2 lässt sich zeigen, dass umgekehrt t die zu τ komplementäre Zahl darstellt; die Beziehung ist also eine wechselseitige. Für τ soll auch das Symbol $n+1-t$ Verwendung finden. Die Zahlen 1 und n erweisen sich als wechselseitig komplementär. Wenn die Reihenfolge der b_x von der Reihenfolge der a_x verschieden ist, so bedeutet b_1 den a -Punkt mit komplementärem Index. Durch v. I. zeigt sich mit Hilfe einer Betrachtung, die der oben durchgeführten analog ist, dass dann auch für jede Ordnungszahl t stets b_t den a -Punkt mit komplementärem Index bedeuten muss; die Reihenfolge der b_x ist also durch die Reihenfolge der a_x bestimmt. Sucht man aus der Reihenfolge der b_x nach demselben Gesetz eine neue Reihenfolge c_x abzuleiten, so folgt aus der Wechselseitigkeit der Komplementarität die Identität der Reihenfolge der c_x mit der Reihenfolge der a_x . Es existieren also stets zwei und nur zwei verschiedene Reihenfolgen für jede G_n . Diese beiden Reihenfolgen heissen einander wechselseitig entgegengesetzt.

Die in diesem Paragraphen entwickelten Resultate sind in ihrer Gesamtheit dem Satz 5 in D. Hilbert's „Grundlagen der Geometrie“ gleichwertig, der dort (fünfte Auflage, S. 6) lautet:

„Sind irgendeine endliche Anzahl von Punkten einer Geraden gegeben, so lassen sich dieselben stets in der Weise als $A, B, C, D, E, \dots K$ bezeichnen, dass der mit B

bezeichnete Punkt zwischen A einerseits und C, D, E, \dots , K andererseits, ferner C zwischen A, B einerseits und D, E, \dots , K andererseits, sodann D zwischen A, B, C einerseits und E, \dots , K andererseits usw. liegt. Ausser dieser Bezeichnungsweise gibt es nur noch die umgekehrte Bezeichnungsweise K, \dots, E, D, C, B, A , die von der nämlichen Beschaffenheit ist“.

Dieser Satz, der von Hilbert als für die lineare Anordnung charakteristisch gekennzeichnet wird, ist somit eine Folge der linearen Anordnungsaxiome II_{1-3} , II'_4 . Der Satz zeigt die Möglichkeit einer solchen Bezeichnung von n Punkten einer Geraden, dass die Lagenbeziehungen direkt aus den Benennungen ablesbar werden. Ein ergänzendes Kriterium lautet:

Auf einer Geraden liegen n Punkte a_x ($x = 1, 2, \dots, n$) dann und nur dann in der durch die Indizes x bestimmten Reihenfolge, wenn die $n-2$ Bedingungen

$$a_t \vee a_{t-1} a_{t+1} \quad (t = 2, 3, 4, \dots, n-1) \quad (8)$$

erfüllt sind.

Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Vierpunktsatzes durch v. I.

6. Abhängigkeitsbetrachtungen.

Auf die Unabhängigkeit des Axioms II'_4 von den Axiomen II_{1-3} ist schon im § 3 hingewiesen. Durch passend gewählte Anschauungssubstrate lässt sich zeigen, dass Systeme denkbar sind, in denen eines der drei Axiome II_{1-3} falsch wird, während die beiden anderen, desgleichen das Axiom II'_4 , gültig bleiben.

Ein System, wo II_{1-2} , II'_4 richtig sind, II_3 aber nicht, erhält man einfach durch die Forderung jeden Punkt als zwischen jedem Punktepaar liegend anzusehen, wie dies z. B. auf einer Kreislinie veranschaulicht werden kann.

Sucht man ferner ein System, wo II_2 nicht gelten soll, so könnte man dieses Axiom vor allem in zwei Aussagen spalten, die voneinander unabhängig richtig oder falsch sein dürfen: die eine fordert die Existenz eines b , für welches $b \vee ac$, die andere die Existenz eines d , für das $c \vee ad$ besteht. Die Folge der

(positiven und negativen) ganzen Zahlen bildet ein System, in welchem nur die erste Aussage falsch wird, wenn man die Zwischenlage nach der Grössenanordnung auf natürliche Weise definiert. Die reellen Zahlen eines abgeschlossenen Intervalls (also die beiden Randzahlen mit einbegriffen) erfüllen unter derselben Voraussetzung nur die Forderung der zweiten Aussage nicht. Die Punkte einer endlichen Menge G_n genügen keiner der beiden Aussagen von Π_2 , wohl aber den drei übrigen linearen Anordnungsaxiomen.

Um ein Beispiel zu konstruieren, wo Π_1 nicht gelten soll, muss man vor allem dem Axiom Π_4' eine die Nichtkommutativität berücksichtigende Fassung geben, etwa die folgende:

„Das gleichzeitige Bestehen der fünf Bedingungen $d \vee ab, d \wedge bc, d \wedge cb, d \wedge ac, d \wedge ca$ bildet einen Widerspruch“.

In der Menge der rationalen Zahlen r möge nun $r_1 \vee r_2 r_3$ dann und nur dann gelten, wenn

$$\begin{aligned} &\text{entweder } r_2 < r_1 < r_3, \quad r_3 - r_1 \leq r_1 - r_2, \\ &\text{oder } r_2 > r_1 > r_3, \quad r_2 - r_1 \geq r_1 - r_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Das Axiom Π_1 ist dann nicht erfüllt, denn es liegt z. B. der Punkt 1 wohl zwischen 0 und $1\frac{1}{2}$, und doch nicht zwischen $1\frac{1}{2}$ und 0, da $0 < 1 < 1\frac{1}{2}$ besteht und $1\frac{1}{2} - 1 < 1 - 0$ erfüllt wird, $1\frac{1}{2} - 1 > 1 - 0$ dagegen nicht. Die übrigen Axiome sind befriedigt.

Zur Charakteristik der linearen Anordnung ist also jedes der vier Axiome Π_{1-3}, Π_4' notwendig, die gleichzeitige Gültigkeit aller vier hinreichend. Die Forderungen Π_{1-3}, Π_4' sind voneinander absolut unabhängig.

Wird die Betrachtung auf die Ebene ausgedehnt, wobei $\Pi_{1-3}, \Pi_{1-3}, \Pi_4'$ als gültig angenommen sein mögen, so zeigt die Pasch'sche Forderung, die in der fünften Auflage der „Grundl. d. Geom.“ bei D. Hilbert als Π_4 auftritt¹²⁾, etwas wesentlich Neues, von dem vorigen Unabhängiges. Man erkennt dies sofort, sobald man als „Ebene“ den dreidimensionalen Raum selbst auffasst, Punkt und Gerade dagegen in gewöhnlichem Sinne interpretiert; eine Gerade kann dann nämlich eine einzige Dreiecksseite schneiden, ohne eine der anderen notwendig zu treffen. Es ist aber das System $\Pi_{1-3}, \Pi_{1-3}, \Pi_4', \Pi_4$ kein absolut

12) In der ersten Auflage als Π_5 bezeichnet.

unabhängiges, weil sich Π_4' aus den übrigen 7 Axiomen ableiten lässt, wie dies inhaltlich von E. H. Moore¹³⁾ erkannt worden ist. Ein Beweis sei kurz angedeutet:

Die Hilbert'sche Formulierung des Axioms Π_4 enthält eine unscharfe „Entweder-Oder“-Aussage, die auf zwei wesentlich verschiedene Arten verstanden werden kann. Es genügt aber die engere Auffassung, die darauf hinausläuft, dass eine Gerade in der Ebene mindestens zwei Seiten eines Dreiecks schneiden muss, sobald sie eine Seite schneidet, weil man leicht einsieht, dass alle drei Seiten nicht gleichzeitig geschnitten werden können¹⁴⁾. Sollte nämlich die Gerade L das Dreieck abc in 3 Punkten u, v, w treffen, für die entsprechend $u \vee bc, v \vee ca, w \vee ab$ gilt, so darf $u \vee vw$ angenommen werden. Dann wäre das Dreieck avw von der Geraden bc nur in dem einen Punkt u getroffen, was Π_4 widerspricht.

Es sei nun $d \vee ab$ beliebig und ein Dreieck abc konstruiert, ferner n ein vierter Punkt auf der Geraden ab . Die Gültigkeit von Π_4' für das Quadrupel a, b, d, n lässt sich dann folgendermassen nachweisen:

Annahme 1: $n \vee ab$. Man wähle $m \vee bc$ und betrachte die Gerade mn . Sie trifft das Dreieck bcd in m ; schneidet sie nach Π_4 zugleich die Seite bd , so kann dies nur im Punkt n geschehen, man hat also $n \vee bd$; wird aber die Seite cd getroffen, so übertrage man die Betrachtungen auf das Dreieck $cd a$. Es kann in letzterem ca nicht getroffen werden, weil sonst im Dreieck abc alle drei Seiten von mn geschnitten wären, — notwendigerweise existiert daher ein Schnitt mit ad und dieser kann nur n sein, d. h. es gilt $n \vee ad$.

Annahme 2: $n \vee ad$. Wieder wähle man $m \vee bc$ und betrachte die Gerade mn . Aus der Anwendung von Π_4 auf das Dreieck bcd folgt, dass mn eine der Seiten bd, cd treffen muss. Bei der ersten Voraussetzung gilt $n \vee bd$; bei der zweiten erkennt man aus dem Dreieck acd , dass ac nicht getroffen werden kann, — dann zeigt aber das Dreieck abc einen Schnitt der Seite ab mit mn , woraus $n \vee ab$ folgt.

Annahme 3: $n \vee bd$. Vertauscht man in der Behandlung

13) "On the projective axioms of geometry", Trans. Am. Math. Soc., 1902.

14) Vgl. O. Veblen, "A system of axioms for geometry", Trans. Am. Math. Soc., 1904, speziell S. 355—358.

der Annahme 2 die Punkte a, b , so ergibt sich entweder $n \vee ad$ oder $n \vee ab$.

Damit ist bewiesen, dass n stets zwischen zwei Punktepaaren des Tripels a, b, d gelegen ist, sobald n zwischen einem Punktepaar dieses Tripels liegt; dies ist nichts anderes, als die Aussage Π_4' .

7. Abtrennung der linearen Aussage vom Pasch'schen Axiom.

Wird für den Augenblick Π_4' ausgeschaltet, also auf die Gerade nur Π_{1-3} angewandt, so lässt sich, wie dies anlässlich des Begriffs der Dreiecksseite implizite schon im vorigen Paragraphen geschehen, die Strecke ab einer Geraden immer noch als Gesamtheit der zwischen a und b gelegenen Punkte definieren. Die Punkte einer solchen Strecke zerfallen aber in zwei wesentlich verschiedene Kategorien:

1) Es könnte bei $c \vee ab$ eine von ab verschiedene Strecke mn geben, die c enthält, wobei zugleich m, n und jeder Punkt der Strecke mn zu der Strecke ab gehört. Der Punkt c soll dann ein ordinärer Punkt von ab heissen.

2) Es könnte der Fall eintreten, dass eine solche Strecke mn nachweislich nicht existiert; dann soll c ein isolierter Punkt von ab heissen.

Dass sowohl ordinäre, als auch isolierte Punkte zu gleicher Zeit auf ab vorhanden sein können, ersieht man aus dem Beispiel: Gerade — die Menge der reellen Zahlen; Zwischenlagendefinition — für alle Tripel die natürliche, mit alleiniger Ausnahme des Tripels $0, 1, 2$, für welches $0 \vee 12$ gelten soll. Dann ist $1\frac{1}{2}$ ein ordinärer Punkt der Strecke 12 , dagegen 0 ein isolierter Punkt derselben Strecke.

Durch Hinzunahme des Axioms Π_4' , resp. des Vierpunktsatzes, werden in der Geometrie die isolierten Punkte ausgeschieden. Solange man aber ohne Π_4' operiert, darf zwischen ordinären und singulären Geraden unterschieden werden, — erstere sind solche, auf denen jede Strecke ausschliesslich ordinäre Punkte enthält, letztere Gerade dagegen solche, auf denen Strecken konstruierbar sind, die isolierte Punkte tatsächlich enthalten. Die isolierten Punkte können u. a. auch so liegen, dass sie in jeder Strecke ab , der sie angehören, isoliert er-

scheinen; es ist sogar möglich singuläre Gerade zu konstruieren, auf denen jeder Punkt in solcher Weise isoliert ist. Man hätte dazu z. B. auf der aus rationalen Zahlen r und irrationalen Zahlen i bestehenden Geraden folgende Festsetzungen zu treffen:

- $r_1 \vee r_2 r_3$, sobald r_1 die grösste der drei Zahlen r_1, r_2, r_3 ;
- $i \vee r_1 r_2$, sobald i ein Mittelwert für r_1, r_2 ;
- $r_1 \vee i r_2$, sobald r_2 ein Mittelwert für i, r_1 ;
- $r \vee i_1 i_2$, sobald r ein Mittelwert für i_1, i_2 ;
- $i_1 \vee i_2 r$, sobald i_1 ein Mittelwert für r, i_2 ;
- $i_1 \vee i_2 i_3$, sobald i_1 die kleinste der drei Zahlen i_1, i_2, i_3 .

Die Axiome II_{1-3} zeigen sich hier erfüllt, und es folgt durch erschöpfende Analyse der verschiedenen denkbaren Fälle, dass eine Strecke B inklusive Randpunkte niemals ein Teil einer anderen, von B verschiedenen Strecke A sein kann, sondern dass stets Punkte angebar sind, die zwar B , nicht aber A angehören. Diese Zwischenlagendefinition lässt sich dann auch auf jede andere Gerade der Ebene projizieren, so dass eine Ebene entsteht, wo jede Gerade ausschliesslich aus solcherweise isolierten Punkten gebildet ist.

Wünscht man der Hilbert'schen Forderung gemäss den linearen Teil II_4' vom Pasch'schen Axiom zu lösen, so genügt es letzteres Axiom in folgender, die mögliche Existenz singulärer Gerader berücksichtigenden Form auszusprechen:

II_5' . Es seien a, b, c drei nicht in gerader Linie gelegene Punkte und A eine Gerade in der Ebene abc , die keinen der Punkte a, b, c trifft; wenn dann die Gerade A durch einen Punkt der Strecke ab geht, und wenn ab, bc, ca ordinäre Gerade sind, so geht A entweder durch einen Punkt der Strecke bc oder durch einen Punkt der Strecke ac .

Wird II_4' hinzugenommen, m. a. W. die Existenz singulärer Gerader verneint, so resultiert aus II_5' sofort II_4 und damit das Hilbert'sche System. Andererseits kann aus $\text{I}_{1-3}, \text{II}_{1-3}, \text{II}_5'$ allein noch nicht II_4' gefolgert werden, denn es ist offenbar statthaft in der Cartesischen Ebene die X-Achse (etwa in oben geschilderter Weise) als singulär zu definieren, auf jeder anderen Geraden aber die Zwischenlage in natürlicher Weise aufzufassen, wobei dann II_5' Geltung hat, II_4' in der Gesamtebene aber nicht.

Das System der fünf Anordnungsaxiome Π_{1-3} , Π_6' , Π_4' genügt mithin der im § 3 zitierten, von Hilbert gestellten Forderung.

8. Verallgemeinerter Streckenbegriff.

Die linearen Anordnungsaxiome Π_{1-3} , Π_4' , die weiterhin allein benutzt werden sollen, gestatten einen topologischen Aufbau des Begriffs vom linearen Kontinuum in sehr allgemeiner Gestalt. Der eindimensionale Raumtypus, auf den die ferneren Betrachtungen beschränkt sind, ist durch die Gültigkeit der vier linearen Anordnungsaxiome ausreichend charakterisiert. Dieser eindimensionale oder „lineare“¹⁵⁾ Raum darf demnach durch folgende Definition eingeführt werden:

Sind die Elemente einer Menge R_1 als Punkte bezeichnet, dabei für diese Elemente der Begriff der Zwischenlage im Einklang mit den Forderungen Π_{1-3} , Π_4' fixiert, so soll R_1 als ein linearer Raum bezeichnet werden.

Diese synthetische Definition ist von jeglicher Koordinatendarstellung unabhängig. Solange von einem alleinstehenden linearen Raum die Rede ist (ohne Bezugnahme auf eventuell gleichzeitig gedachte andere Räume), kann man unbedenklich den Begriff des linearen Raumes mit dem Begriff der Geraden identifizieren. Infolge der Korrespondenz zwischen Koordinatenräumen verschiedener Dimensionszahl ist es möglich, jeden gewöhnlichen analytischen Raum mit Hilfe einer passenden Zwischenlagendefinition als linearen Raum zu interpretieren. Die Eindimensionalität ist somit nicht eine Eigenschaft des Raumes an sich, sondern erscheint bedingt durch eine spezielle subjektive Art der Auffassung.

Die obige Definition des linearen Raumes führt zunächst zum geläufigen Streckenbegriff, wie dies schon im § 7 angedeutet wurde: eine Strecke ab ist der Inbegriff der zwischen a, b gelegenen Punkte des R_1 . Wegen der anerkannten Gültigkeit von Π_4' können isolierte Punkte nicht vorkommen. Noch mehr: aus $m \vee ab$,

15) In dem elementaren Sinne, in dem Hilbert von „linearen“ Axiomen spricht. Der Gedanke an „lineare“ (euklidisch-affine) Mannigfaltigkeiten im Sinne der Differentialgeometrie liegt hier dem Wesen nach fern.

$n \vee ab, c \vee mn$ folgt nach dem Vierpunktsatz zwangsläufig $c \vee ab$, d. h. jeder Punkt der Strecke mn ist gleichzeitig ein Punkt der Strecke ab , sobald m, n der Strecke ab beliebig entnommen sind.

Zur Vermeidung von Missverständnissen sei betont, dass die Randpunkte a, b selbst nicht zu der durch sie definierten Strecke ab gezählt werden sollen. In den vereinzelt Fällen, wo wir die Vereinigungsmenge der Punkte einer Strecke mit ihren beiden Randpunkten zu betrachten haben werden, soll der Ausdruck „abgeschlossene Strecke“ und das Symbol $[ab]$ Verwendung finden, wenn a und b die Randpunkte sind.

Die Punkte einer Strecke bilden schon für sich allein, bei ungeänderter Definition der Zwischenlage, einen linearen Raum. Eine Strecke enthält daher allemal mindestens abzählbar-unendlich viele Punkte.

Die eine Strecke bildende Teilmenge S des R_1 zeigt folgende drei Streckeneigenschaften:

10. Sind c, d beliebige Punkte aus S , so gehört im R_1 jeder Punkt x , für den $x \vee cd$ gilt, gleichfalls zu S .
20. Es existieren zu S gehörige Punkte y, z , für die $c \vee dy$ und $d \vee cz$ gilt.
30. Es existieren im R_1 Punkte p, q , die S nicht angehören, wobei $c \vee dp$ und $d \vee cq$ gilt.

Die erste Eigenschaft ist schon oben erwähnt. Die zweite folgt aus der Möglichkeit y, z den Bedingungen $y \vee ac, z \vee db$ (wo a, b die Randpunkte von S bedeuten) zu unterwerfen, vorausgesetzt, dass die Bezeichnungen gemäss $c \vee ad, d \vee cb$ gewählt sind. Die dritte besteht, weil p, q sich so wählen lassen, dass $a \vee pc, b \vee dq$ wird.

Es existieren mithin tatsächlich Teilmengen S von R_1 , welche die genannten drei Eigenschaften 1—3 zeigen, — man braucht ja bloss S mit der Menge der zwischen a und b gelegenen Punkte zu identifizieren, um eine Teilmenge der geforderten Art zu erhalten. Diese spezielle Art der Konstruktion solcher Teilmengen mit Hilfe zweier ausgezeichnete Punkte a, b ist aber nicht die einzig denkbare: man könnte nämlich, nachdem S als Strecke ab gebildet worden ist, aus R_1 die Randpunkte a, b entfernt denken, wobei von R_1 eine Restmenge R_1' verbleibt, und es zeigt offenbar die ungeändert ge-

bliebene Menge S in Bezug auf R_1' dieselben drei Eigenschaften, wie vordem in Bezug auf R_1 . Man kann aber zeigen, dass R_1' bei ungeänderter Definition der Zwischenlage ebenfalls ein linearer Raum ist. Es gilt nämlich der Satz:

Wird aus einem linearen Raum eine endliche Menge von Punkten ohne Änderung der Definition der Zwischenlage entfernt, so verbleibt als Restmenge wiederum ein linearer Raum.

Es genügt diesen Satz für den Fall der Entfernung eines einzigen Punktes zu beweisen, weil dann das übrige durch v. I. folgt. Wegen der Invarianz der Zwischenlage bedarf hierbei nur das Existenzaxiom Π_2 einer näheren Untersuchung. Es sei x der aus R_1 entfernte Punkt. Zwischen m, n muss nach Π_2 stets ein Punkt s existieren. Gilt $x \wedge mn$, so ist $s \vee mn$ im R_1' vorhanden, weil s von x verschieden und im R_1 vorhanden ist. Gilt $x \vee mn$, so wähle man $s \vee mx$ im R_1 und hat dann auch $s \vee mn$ im R_1' . Der zweite Teil des Axioms fordert die Existenz eines Punktes t , für den bei vorgegebenen m, n die Beziehung $n \vee mt$ besteht. Im Falle $x \vee mn$ ist die Existenz von t sicher, ebenso im Falle $m \vee nx$; im Falle $n \vee mx$ wähle man $t \vee nx$, wodurch $n \vee mt$ erfüllt wird. Der Satz ist also richtig.

Die oben gebildete Menge S besitzt also im linearen Raum R_1' die drei Streckeneigenschaften, — andererseits ist aber leicht zu ersehen, dass S im R_1' nicht mehr als Menge der zwischen zwei Randpunkten gelegenen Punkte definierbar ist, aus dem einfachen Grunde, weil a, b im R_1' nicht mehr vorhanden sind.

Diese Erkenntnis gestattet folgenden verallgemeinerten Streckenbegriff aufzustellen:

Jede echte Teilmenge von Punkten eines linearen Raumes, welche die drei Streckeneigenschaften 1—3 aufweist, soll, gleichviel ob zu dieser Teilmenge Randpunkte existieren oder nicht, als eine Strecke in diesem Raume bezeichnet werden.

Existieren im linearen Raum beide Randpunkte zur dort gebildeten Strecke S , so sagen wir, die Strecke S sei in diesem Raume abschliessbar; es kann aber auch der Fall ein-

treten, dass nur einer der beiden Randpunkte im R_1 vorhanden ist, oder auch, dass beide fehlen, — im ersteren Falle soll die Strecke einseitig-abschliessbar oder auch halb-offen, im letzteren Falle offen heissen.

9. Streckenbüschel im linearen Raume.

Sind zwei Strecken M, N nicht punktfremd (d. h. besitzen sie gemeinsame Punkte), so bildet ihr Durchschnitt (die Menge ihrer gemeinsamen Punkte) notwendig wieder eine Strecke. Zum Beweis dieser Behauptung hat man die Punkte des Durchschnitts D in Bezug auf das Verhalten gegenüber den drei Streckeneigenschaften zu untersuchen. Ist i ein Punkt aus D , x ein beliebiger anderer Punkt des zu Grunde liegenden R_1 , so müssen in den Bereichen $S_x(i)$, $T_x(i)$ (vgl. §§ 3, 4) Punkte sowohl aus M , als auch aus N existieren (zweite Streckeneigenschaft). Gehört m aus M und n aus N zu $S_x(i)$, so darf $n \vee im$ vorausgesetzt werden, da $i \vee mn$ ausgeschlossen ist; wegen der ersten Streckeneigenschaft von M ist dann aber n auch zu M , mithin auch zu D gehörig. Nachdem so die Existenz zweier gemeinsamer Punkte gesichert ist, folgt weiter, dass jeder zwischen zwei Punkten aus D gelegene Punkt sicher wieder zu D gehört, weil er M und N gleichzeitig angehört. Die erste Streckeneigenschaft ist somit vorhanden. Gleichzeitig zeigen sich auf beiden Seiten bezüglich i Punkte, die zu D zählen, weshalb auch die zweite Streckeneigenschaft vorhanden erscheint. Da jeder nicht zu M und auch nicht zu N zählende Punkt sicher D nicht angehört, so ist auch die dritte Streckeneigenschaft vorhanden. Es ist also D tatsächlich eine Strecke.

Sind nun M, N zwei beliebige Strecken, so nennen wir die Menge U derjenigen Punkte, die entweder M oder N , nicht aber M und N gleichzeitig angehören, den Unterschied von M und N , oder gleichbedeutend, von N und M . Es lassen sich Beispiele angeben, wo dieser Unterschied eine Strecke ist (man definiere etwa M als ab , N als ac , wobei $c \vee ab$, und entferne hierauf den Punkt c aus dem R_1). Ist U eine Strecke, oder wird U nach Entfernung oder Hinzufügung eines einzigen Punktes zu einer Strecke, so sagen wir, die Strecken M, N seien im R_1 zusammenstossend; die Unterschiedsstrecke symbolisieren wir dann auch mittels $|M-N|$ oder $|N-M|$.

Ist zur Bildung der Unterschiedsstrecke die Hinzufügung eines Punktes zum Unterschied nötig, so sind M, N punktfremd; ist die Entfernung eines Punktes nötig, so ist eine der Strecken M, N ein echter Teil der anderen.

Eine einfache Untersuchung zeigt nämlich, dass die Hinzufügung oder die Entfernung eines Punktes nur dann vonnöten sein kann, wenn mindestens ein Randpunkt existiert; der hinzugefügte oder entfernte Punkt ist stets ein Randpunkt mindestens einer der Strecken M, N . Ist die Hinzufügung dieses Randpunktes zum Unterschied erforderlich, so zeigen sich M, N auf entgegengesetzten Seiten bezüglich dieses Randpunktes als Trennungspunkt gelegen und sind daher punktfremd. Ist die Entfernung des Randpunktes nötig, so erweist sich dieser zu entfernende Randpunkt zugleich als Randpunkt der Unterschiedsstrecke und als Randpunkt des Durchschnitts; letzterer ist dabei mit einer der Strecken M, N identisch. Sind M, N zusammenstossende offene Strecken, so ist $|M-N|$ mit dem Unterschied von M, N identisch. Halboffene oder abschliessbare Strecken mit gemeinsamem Randpunkt sind allemal zusammenstossend.

Die Strecken M, N, P sollen gleichsinnig zusammenstossend heissen, wenn jedes Paar dieses Tripels zusammenstossend ist, dabei aber jede dieser Strecken von der Unterschiedsstrecke der beiden anderen verschieden bleibt. Ist die letzte Bedingung nicht erfüllt, so reden wir von ungleichsinnig zusammenstossenden Strecken. Es sind ab, ac, ad gleichsinnig, ab, bc, ac ungleichsinnig zusammenstossende Strecken.

Stossen M, N, P in jeder Paarung zusammen, so kann nicht jedes Paar dieses Tripels punktfremd sein. Wählt man nämlich 3 Punkte, m aus M , n aus N , p aus P , so darf $m \vee np$ vorausgesetzt werden; sollten dann N, P punktfremd sein, so gehören n und p zu $|N-P|$, — in Folge der ersten Streckeneigenschaft muss jetzt aber auch m zu $|N-P|$ gehören, d. h. m gehört entweder zu N oder zu P .

Stossen M, N, P ungleichsinnig zusammen, so darf man P mit $|M-N|$ identifizieren, was symbolisch $P \equiv |M-N|$ geschrieben werden mag. Sind hierbei M, N punktfremd, so zeigt eine einfache Überlegung, dass dann auch $M \equiv |N-P|$ und $N \equiv |P-M|$. Sind jedoch M, N nicht punktfremd, so ist ihr

Durchschnitt entweder mit M oder mit N identisch, und wieder ergibt sich $M \equiv |N-P|$, $N \equiv |P-M|$. Bei der ersteren Annahme ist M, N das einzige punktfremde Paar, bei der letzteren Annahme P, N das einzige punktfremde Paar, wenn N den Durchschnitt von M, N darstellt. Also:

In einem ungleichsinnig zusammenstossenden Streckentripel ist jede Strecke die Unterschiedsstrecke der beiden anderen, dabei existiert im Tripel ein und nur ein punktfremdes Streckenpaar.

Für gleichsinnig zusammenstossende Strecken gilt daher der Satz:

Im gleichsinnig zusammenstossenden Tripel ist entweder kein einziges punktfremdes Streckenpaar vorhanden, oder es sind zwei und nur zwei Paare punktfremd.

Im Falle, wo M, N das einzige punktfremde Paar des Tripels ist, zeigt sich nämlich $P \equiv |M-N|$.

Eine (endliche oder unendliche) Menge Σ von Strecken des R_1 soll eine Verknotung von Strecken heissen, sobald jedes Streckenpaar aus Σ ein zusammenstossendes Paar bildet. Enthält Σ mehr als drei Strecken, so muss in Σ jedes Streckentripel gleichsinnig zusammenstossen. Wären nämlich A, B, C drei ungleichsinnig zusammenstossende Strecken aus Σ , so dürfte vorausgesetzt werden, dass A, B punktfremd sind, wobei $A < C$, $B < C$ (die Schreibweise $U < V$ soll hier und weiterhin besagen, dass die Menge U einen echten Teil der Menge V bildet). Ist dann eine vierte Strecke D aus Σ mit C punktfremd, so ist D auch mit A, B punktfremd. Dann könnten A, B, D aber nicht in jeder Paarung zusammenstossen. Es ist also notwendigerweise entweder $C < D$, oder $D < C$. Bei der ersteren Annahme gilt $A < D$, $B < D$; wählt man nun einen Punkt d aus D , der weder A noch B angehört, ferner zwei Punkte a, b entsprechend aus A, B , so gilt dann $d \wedge ab$, weil $|A-B|$ eine Strecke ist, desgleichen $b \wedge ad$, weil $|D-B|$ eine Strecke ist, ebenso $a \wedge bd$, weil $|A-D|$ eine Strecke ist; das Axiom Π_3 wäre also nicht befriedigt. Bei der zweiten Annahme $D < C$ hat man die drei Fälle 1^o: $A < D$, 2^o: $D < A$, 3^o: A, D punktfremd, zu unterscheiden. Im Falle 1 müssten Punkte existieren, die D, B gleichzeitig an-

gehören, ohne dass jedoch jeder Punkt von B zu D , oder jeder Punkt von D zu B gehörte, — dann könnten aber B , D nicht zusammenstossen. Im Falle 2 müssten D , B punktfremd sein, dann gilt im Punkttupel a , b , d , wo a nicht zu D gehört, sicher $a \wedge bd$, weil $|B-D|$ eine Strecke, desgleichen $b \wedge ad$, weil A , B punktfremd, ebenso $d \wedge ab$, weil $|C-D|$ eine Strecke ist; man gelangt also aufs neue zu einem Widerspruch mit Π_3 . Der Fall 3 bedingt $D < B$; er wird nach Vertauschung von A mit B ebenso erledigt, wie 2. Damit ist die oben aufgestellte Behauptung bewiesen.

Eine etwas langwierige, inhaltlich keine Schwierigkeiten bietende Untersuchung aller denkbaren Einzelfälle, die hier übergangen werden soll, führt zur Erkenntnis des Kriteriums:

Eine Menge Σ von Strecken des Raumes R_1 stellt eine Verknötung dar, sobald jede Strecke aus Σ mit zwei beliebig fixierten Strecken derselben Menge Σ gleichsinnig zusammenstösst.

M. a. W.: die Strecken A , B stossen zusammen, sobald A , M , N und B , M , N zwei gleichsinnig zusammenstossende Tripel sind. Das Kriterium enthält somit eine Aussage über die Transitivität des Begriffes zusammenstossender Strecken.

Man wähle nun zwei beliebige zusammenstossende Strecken M , N und rechne zu Σ zunächst diese beiden Strecken, ausserdem aber noch jede mit M , N gleichsinnig zusammenstossende Strecke. Die solcherweise definierte spezielle Verknötung soll der Streckenbüschel (M, N) heissen.

10. Nichtabzählbarkeit des Streckenbüschels.

Bedeutend X , Y beliebige Strecken aus (M, N) , so zeigt sich (X, Y) mit (M, N) identisch. Denn erstens sind X , Y sicher zusammenstossende Strecken, zweitens ist jede Strecke A , die mit M , N gleichsinnig zusammenstösst, notwendig auch mit X , Y zusammenstossend, drittens bildet die Menge der Strecken A eine Verknötung, weshalb A , X , Y als gleichsinnig zusammenstossendes Tripel erkennbar ist; analoge Betrachtungen gelten für X , Y , M und X , Y , N . Hieraus ergibt sich aber die Identität von (X, Y) mit (M, N) .

Es soll nun eine Definition der Zwischenlage gegeben werden, die es ermöglicht, (M, N) als linearen Raum aufzufassen, dessen „Punkte“ (Elemente) eben die Strecken des Büschels sind. Es läuft dies auf eine Substitution der Worte „Punkt“ für „Strecke“ und „linearer Raum“ für „Streckenbüschel“ hinaus.

Man treffe folgende Festsetzungen:

Sind A, B aus (M, N) nicht punktfremd, so darf $A < B$ gesetzt werden; es heisst dann A die kleinere, B die grössere der beiden Strecken. Es ist eine Konsequenz der mit dem Teilbegriff verknüpften Vorstellungen, dass $A < B, B < C$ allemal $A < C$ bedingt. B heisst in diesem Falle die mittlere der drei Strecken.

Es sei U, V, W ein beliebiges Tripel aus (M, N) . Sind die Paare dieses Tripels allesamt nicht punktfremd, so werde V durch die Forderungen $U < V, V < W$ als mittlere Strecke bestimmt; es soll in diesem Falle $V \vee UW$ gelten. Ist aber im Tripel nur ein einziges Paar V, W nicht punktfremd, so werde V durch die Forderung $V < W$ bestimmt; dann soll wieder $V \vee UW$ gelten. Diese Definitionen sind kommutativ zu verstehen, d. h. es soll gleichzeitig $V \vee WU$ sein. Die Axiome II_1 und II_3 sind auf diese Weise erfüllt. Es bleibt zu untersuchen, wie die hier getroffenen Verabredungen sich mit II_2 und II_4' vertragen.

Mit Hilfe der früher gefundenen Resultate lässt sich nachweisen, dass im Streckenbüschel zu jeder Strecke sowohl eine kleinere, als auch eine grössere Strecke angebbar ist. Noch mehr: ist im (M, N) ein Streckenpaar A, B beliebig vorgegeben, wobei $A < B$, so lässt sich im (M, N) eine Strecke C konstruieren, welche der Forderung $A < C, C < B$ Folge leistet. Der etwas langwierige, begrifflich nicht komplizierte Beweis dieser Behauptungen soll hier übergangen werden. Eine Paraphrase der Resultate zeigt die Gültigkeit des Axioms II_2 für die oben gegebene Zwischenlagendefinition der Strecken.

Auch II_4' ist erfüllt. Fixiert man nämlich A, B, C im Büschel, so darf $B \vee AC, B < C$ angenommen werden. Ist dabei $A < B$, so folgt die Gültigkeit von II_4' bei einer vierten Strecke D direkt aus der Transitivität des Begriffes „echter Teil“; ist aber A mit B punktfremd, so hat man drei Möglichkeiten:

1°. $D \vee BC$, also $D < C, B < D$, — dann ist auf Grund der Definitionen offenbar auch $D \vee AC$.

2^o. $D \vee AC$, also D entweder mit A oder mit C punktfremd. Im ersteren Falle gilt $D < C$; wenn dann auch $D < B$, so ist $D \vee AB$, wenn aber $B < D$, so besteht $D \vee BC$. Im letzteren Falle ist $D < A$, mithin $D \vee AB$.

3^o. $D < AB$, — dann ist stets auch $D \vee AC$.

Der Streckenbüschel erweist sich also tatsächlich infolge der oben gewählten Definition des Begriffs der Zwischenlage als ein linearer Raum. Als solcher muss er unendlich viele konstituierende Elemente enthalten. Eine Eigentümlichkeit des Streckenbüschels besteht aber darin, dass diese Unendlichkeit nicht-abzählbar ist. Der Gedankengang des Beweises dieser Behauptung sei kurz angedeutet¹⁶⁾:

Es seien die Strecken des (M, N) abgezählt als $A_1, A_2, A_3, \dots, A_t, \dots$ bezeichnet. Man bestimme dann eine Teilmenge Γ der A_t folgendermassen: Das Element A_1 soll zu Γ zählen; ausgeschieden werde jedes Element, welches grösser als A_1 , oder zu A_1 punktfremd ist; unter den verbliebenen Elementen soll dasjenige mit kleinstem Index zu Γ gezählt und in $A^{(2)}$ umbenannt werden, zugleich soll für das schon zu Γ gezählte A_1 die Umbenennung $A^{(1)}$ Verwendung finden; ausgeschieden werde nun noch jedes Element, welches kleiner ist als $A^{(2)}$; unter den verbliebenen soll dasjenige mit kleinstem Index als $A^{(3)}$ zu Γ gezählt werden; ausgeschieden werde weiterhin jedes Element, welches grösser ist als $A^{(3)}$; unter den nunmehr noch verbliebenen soll dasjenige mit kleinstem Index ausgesucht und als $A^{(4)}$ der Teilmenge Γ einverleibt werden; ausgeschieden werde jede Strecke, die kleiner ist als $A^{(4)}$ usw. Dieses Bildungsgesetz liefert Γ als abgezählte unendliche Menge

$$A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}, \dots, A^{(n)}, \dots \quad (10)$$

Durch v. I. erkennt man, dass

$$\begin{aligned} A^{(2g)} &< A^{(2f-1)} ; \\ A^{(2g)} &< A^{(2h)} \quad , \text{ sofern } g < h ; \\ A^{(2f-1)} &< A^{(2e-1)} \quad , \text{ sofern } e < f . \end{aligned} \quad (11)$$

Im R_1 , welchem der Streckenbüschel (M, N) entnommen ist, fixiere man nun die Punktmenge X , die aus solchen und nur solchen Punkten besteht, welche jeder Strecke $A^{(2f-1)}$ ange-

16) Die Idee des Beweisganges gehört G. Cantor (J. f. Math. 77, S. 259—260).

hören. Es ist denkbar, dass in X ein Punkt x_0 vorkommt, in Bezug auf welchen jeder andere Punkt x aus X in demselben Bereich $S_x(x_0)$ liegt; dieser ausgezeichnete Punkt x_0 soll, falls er existiert, aus X entfernt werden; die Restmenge sei X' . Eine Analyse zeigt dann, dass diese Menge X' die drei Streckeneigenschaften aufweist, und zwar ist X' eine Strecke des Büschels (M, N) , weil X' mit $A^{(2)}$ und $A^{(4)}$ gleichsinnig zusammenstösst. Man erkennt, dass

$$A^{(2g)} < X' < A^{(2f-1)}, \quad (12)$$

für jedes Paar von Ordnungszahlen f, g . Hieraus folgt, dass X' nicht zu Γ gehört, ebenso aber auch nicht zu den bei der Bildung von Γ „ausgeschiedenen“ Strecken. Sollte aber (M, N) abzählbar sein, so hätte man bei bestimmtem t sicher $X' \equiv A_t$, und dann müsste X' notwendig entweder in Γ , oder unter den „ausgeschiedenen“ Strecken auftreten. Damit ist ein Widerspruch erwiesen.

Die Existenz nicht-abzählbarer linearer Räume ist somit gesichert.

11. Begriff des Kontinuums.

Haben zwei Strecken A, B eines Streckenbüschels einen gemeinsamen Randpunkt o , so ist dieser Punkt o gemeinsamer Randpunkt einer jeden Strecke des Büschels; zugleich ist o der einzige Punkt, der keiner Strecke des Büschels angehört. Es soll in diesem Falle o der Ursprung des Streckenbüschels heissen.

Man fixiere im R_1 einen Büschel mit dem Ursprung o . Interpretiert man (M, N) , wie im § 10 dargelegt, als „linearen Raum“, so sind die „Punkte“ von (M, N) nichts anderes, als die Strecken des Büschels (M, N) im R_1 ; aus diesen „Punkten“ können wiederum „Strecken“ gebildet werden. Um Missverständnissen vorzubeugen, sollen hier die in der neuen Interpretation geltenden Begriffsbildungen durch Anführungszeichen gekennzeichnet werden. Eine „Strecke“ im „Raum“ (M, N) ist also eine gewissen Anforderungen genügende Menge von Strecken des Büschels (M, N) im R_1 . Es erweist sich als zweckmässig, auch den Ursprung o des Büschels (obgleich dieser Ursprung keine Strecke des Büschels ist) zu den „Punkten“ des „Raumes“ zu zählen, — wir reden dann auch von der Nullstrecke o . Es müssen

dann aber noch Vereinbarungen über die Zwischenlagendefinition für diese Nullstrecke getroffen werden. Sind A, B im (M, N) punktfremd, so soll $o \vee AB$ gelten, ist aber $A < B$, so hat $A \vee oB$ zu bestehen. In dem so ergänzten „Raum“ gelten dann tatsächlich, wie man sich direkt überzeugt, die linearen Anordnungsaxiome $\text{II}_{1-3}, \text{II}'_4$. Der nach Hinzunahme der Nullstrecke zum Streckenbüschel entstandene „lineare Raum“ werde mittels K_1 symbolisiert. Eine charakteristische Eigenschaft dieses K_1 besteht darin, dass im K_1 jede „Strecke“ abschliessbar ist. Man erkennt dies schrittweise nach folgendem Schema:

Es sei eine aus „Punkten“ J bestehende „Strecke“ Σ im K_1 fixiert. Man greife zunächst einen beliebigen „Punkt“ J dieser „Strecke“ heraus und konstruiere im R_1 die Menge P derjenigen Punkte, welche J oder einem zu J nicht punktfremden „Punkt“ von Σ angehören. Diese Menge P zeigt im R_1 die drei Streckeneigenschaften, wobei o sich als Randpunkt erweist; es ist demnach P eine Strecke des Büschels (M, N) . Dabei gehört P sicher nicht zu Σ , wohl aber liegen sämtliche „Punkte“ der „Strecke“ Σ auf einer „Seite“ bezüglich des „Punktes“ P , und jeder „Punkt“ L gehört zu Σ , falls $L \vee PJ$. P zeigt demnach alle Eigenschaften eines „Randpunktes“ der „Strecke“ Σ . Ein Randpunkt ist also sicher vorhanden. Sollte nun Σ „Punkte“ E enthalten, die dem vorhin benutzten „Punkt“ J gegenüber punktfremd sind, so greife man ein beliebiges solches E heraus und konstruiere mit seiner Hilfe, analog dem Vorigen, einen zweiten „Randpunkt“ Q . Sollte jedoch ein solcher „Punkt“ E in Σ nicht vorhanden sein, so sehe man, ob nicht eine Strecke U im Büschel existiert, die kleiner ist als J , dabei aber nicht zu Σ zählt. Im Falle der Existenz von U konstruiere man im R_1 die Punktmenge Q , die aus denjenigen Punkten besteht, welche solchen Strecken U angehören. Diese Menge Q erweist sich wieder als eine Strecke des Büschels (M, N) und zeigt in Bezug auf die „Strecke“ Σ die Eigenschaften des zweiten „Randpunktes“. Sollte aber auch keine Strecke U vorhanden sein, so hat man in der Nullstrecke o den gesuchten zweiten „Randpunkt“ Q von Σ . Es ist also wirklich jede „Strecke“ Σ im K_1 als Gesamtheit der zwischen zwei „Punkten“ P, Q gelegenen „Punkte“ darstellbar, m. a. W. jede „Strecke“ Σ ist im K_1 abschliessbar.

Unabhängig von der speziellen Erzeugungsart soll nun ein

linearer Raum, in welchem jede Strecke abschliessbar ist, ein lineares Kontinuum heissen und mit K_1 bezeichnet werden.

Der mit Hilfe des Streckenbüschels konstruierte „Raum“ ist hiernach ein Spezialfall eines Kontinuums; die Anzahl seiner „Punkte“ ist, nach § 10, sicher nicht-abzählbar. Letztere Eigenschaft gilt aber für jedes beliebige Kontinuum. Denn fixiert man im K_1 einen Ursprung o , so entsteht eine Korrespondenz zwischen den von o verschiedenen Punkten des K_1 und den Strecken des zu o gehörigen Büschels, — jeder Strecke entspricht nämlich ihr zweiter (sicher existierender) Randpunkt; weil aber die Strecken des Büschels nicht-abzählbar sind, so gilt dasselbe für die Punkte des K_1 .

Eine Konsequenz hiervon ist, dass in jedem R_1 , dessen Punkte abzählbar sind, stets nicht-abschliessbare Strecken angebar sein müssen.

12. Irrationale Punkte.

Es sei R_1 kein Kontinuum. Man fixiere einen beliebigen Punkt o als Ursprung eines Büschels (M, N) in diesem Raume R_1 und betrachte zugleich das durch diesen Büschel bestimmte „lineare Kontinuum“ K_1 . Zwischen den abschliessbaren Strecken des Büschels (M, N) und den von o verschiedenen Punkten des R_1 besteht eine, der am Schluss des vorigen Paragraphen erwähnten analoge, Korrespondenz: jeder Strecke entspricht eineindeutig ihr von o verschiedener zweiter Randpunkt. Es möge nun noch die Nullstrecke dem Punkte o entsprechen. Die Korrespondenz ist dann, wie leicht zu ersehen, anordnungstreu, d. h. die Zwischenlage ist für je drei Elemente dieselbe, wie im korrespondierenden Tripel.

Man bereichere nun die Punktmenge R_1 um neue Elemente, die wir irrationale Punkte nennen wollen, wobei folgende Forderungen zu erfüllen sind:

Es soll eine Korrespondenz zwischen den irrationalen Punkten und den nicht-abschliessbaren Strecken des Büschels bestehen, zugleich die frühere Korrespondenz zwischen den abschliessbaren Strecken und den Punkten des R_1 beibehalten werden. Es besteht dann eine Korrespondenz zwischen den Strecken von (M, N) und der Vereinigungsmenge der irrationalen Punkte mit dem R_1 , oder, was auf dasselbe hinausläuft, eine Korrespondenz zwischen

dem K_1 und dieser Vereinigungsmenge. Mittels dieser Korrespondenz soll nun die Definition der Zwischenlage auf jedes Elemententripel der Vereinigungsmenge übertragen sein. Die Zwischenlage für jedes Tripel von Punkten des R_1 bleibt dann offenbar unverändert die frühere.

Die Vereinigungsmenge wird dadurch in ein lineares Kontinuum verwandelt, welches infolge der anordnungstreu Korrespondenz von dem K_1 nicht wesentlich verschieden ist. Soll die Ableitung aus dem R_1 für die Vereinigungsmenge explizite angedeutet werden, so verwenden wir für diese Vereinigungsmenge das Symbol der Derivierten R_1' . Die ursprünglich schon im R_1 vorhandenen Punkte des R_1' nennen wir zur Unterscheidung dann rationale Punkte des R_1' . Die ursprüngliche Anordnung der rationalen Punkte erleidet durch das Hinzutreten der irrationalen Punkte keine Störung.

Zwischen zwei beliebigen Punkten des R_1' lässt sich stets ein rationaler Punkt angeben. Zwei verschiedene Strecken B, C des Büschels (M, N) müssen sich nämlich allemal mindestens um einen Punkt a aus R_1 unterscheiden; für die mit diesem a korrespondierende abschliessbare Strecke A gilt notwendig $A \vee BC$; entspricht also b aus R_1' der Strecke B , und c aus R_1' der Strecke C , so ist $a \vee bc$ sicher erfüllbar.

Die rationalen Punkte liegen also im R_1' überall dicht¹⁷⁾.

Entfernt man aus einem Kontinuum eine endliche Anzahl von Punkten, so verbleibt als Rest wohl ein linearer Raum, jedoch kein Kontinuum, denn jede Strecke, deren Randpunkt zu den entfernten gehört, ist im Restraum nicht mehr abschliessbar.

Ein lineares Kontinuum zeigt sich stets mit Punkten so weit gesättigt, dass es nicht mehr möglich ist, diesem Kontinuum ohne Störung der Anordnung eine endliche Anzahl neuer Punkte im Einklang mit den linearen Anordnungsaxiomen einzufügen. Denn nach dem vorigen könnte ja dieser hypothetische „ergänzte“ lineare Raum kein Kontinuum darstellen, — er müsste daher nicht-abschliessbare Strecken aufweisen; eine solche nicht-abschliessbare Strecke müsste dann aus der Vereinigung einer Strecke des ursprünglichen Kontinuums mit einer endlichen Anzahl neuer Punkte bestehen. Auf Grund des § 5

17) G. Cantor, Math. Ann. 15 (1879), S. 2.

lässt sich aber nachweisen, dass diese neuen Punkte zwischen den Randpunkten der ursprünglichen Strecke liegen müssen, d. h. die früheren Randpunkte sind auch jetzt noch Randpunkte der Vereinigungsmenge, die Strecke wäre also doch abschliessbar.

Hier ist zu beachten, dass ein Kontinuum sich aber wohl durch Hinzunahme einer unendlichen (eventuell abzählbaren) Menge neuer Punkte ohne Störung der ursprünglichen Anordnung zu einem neuen linearen Raum ergänzen lässt. Man braucht dazu z. B. nur einen beliebigen Punkt des Kontinuums durch einen linearen Raum zu „substituieren“ (den Punkt in eine Strecke „aufzulösen“) und zweckmässige Festsetzungen über die Zwischenlage der neuen Punkte zu treffen, analog den im nächsten Paragraphen getroffenen Vereinbarungen.

Bei der Bildung des R_1' aus dem R_1 hätte man etwas allgemeiner verfahren können, indem man zunächst den R_1 nur um einen Teil der Menge der irrationalen Punkte, nicht gleich um jeden fehlenden irrationalen Punkt bereicherte. Der Aufbau übereinanderliegender Zahlkörper bei algebraischen Untersuchungen liefert Beispiele solcher Raumbildungen. Jeden auf diese Art entstandenen Raum über R_1 wollen wir, um die Rolle des Streckenbüschels bei dieser Begriffserweiterung anzudeuten, einen Büschelraum über dem R_1 nennen; enthält dieser Büschelraum jeden irrationalen Punkt, so erhält man das R_1 nächstliegende Büschelkontinuum. Ist der R_1 schon selbst ein Kontinuum, also jede Strecke im R_1 abschliessbar, so werden durch den Streckenbüschel überhaupt keine irrationalen Punkte definiert, — der R_1 ist dann mit dem ihm nächstliegenden Kontinuum identisch. In jedem Falle ist das nächstliegende Kontinuum durch R_1 bis auf die Wahl des Punktes o vollkommen bestimmt.

Im Kontinuum ist jeder Streckenbüschel bestimmt, sobald sein Ursprung o (der im Kontinuum jedesmal sicher existiert) gegeben ist; der Ursprung darf daher als Symbol für den Büschel verwendet werden. Hat man zwei Büschel o, o' , und lässt man die Strecke oa des einen Büschels stets der Strecke $o'a$ des anderen entsprechen, so erhält man eine anordnungstreue Korrespondenz der Strecken beider Büschel. Diese anordnungstreue Korrespondenz bleibt offenbar bestehen, wenn man auf den R_1 zurückgeht, zu dem unser Kontinuum als nächstliegendes gebildet war, m. a. W.:

Zwischen zwei beliebigen Streckenbüs-
scheln eines beliebigen linearen Raumes
besteht stets eine anordnungstreue Korre-
spondenz.

Infolge der im Kontinuumsbegriff enthaltenen Konzentra-
tion der Ideen gestaltet sich die Formulierung der in
linearen Räumen geltenden Gesetze einfacher, sobald man
diese Räume als Kontinua voraussetzt.

13. Die Menge der Streckenbüschel.

Es sei ein K_1 vorgelegt und in diesem dann jeder Strecken-
büschel gebildet. Die Vereinigungsmenge der Elemente dieser
Streckenbüschel sei kurz als Menge der Streckenbüschel
bezeichnet, wobei aber zu beachten ist, dass die Elemente dieser
Menge nicht die Büschel, sondern die Strecken (inklusive
Nullstrecken) sein sollen. Diese Elemente sollen nun als „Punkte“
aufgefasst werden; man bedarf dann noch einer zweckmässigen
Definition der Zwischenlage, um die Menge der Streckenbüschel
in einen „linearen Raum“ zu verwandeln.

Das Kontinuum K_1 soll hierzu zunächst orientiert
werden, was folgendermassen geschieht: Man fixiere zwei
beliebige Punkte o, p im K_1 ; jeder zu $S_p(o)$ gehörige Punkt
soll dann positiv bezüglich o , jeder zu $T_p(o)$ gehörige Punkt
dagegen negativ gelegen heissen; ist o' ein beliebiger von o
und p verschiedener Punkt, so hat man entweder $p \wedge oo'$ oder
 $p \vee oo'$, — im ersteren Falle heisse jeder $S_p(o')$ entnommene Punkt
positiv bezüglich o' , jeder $T_p(o')$ entnommene Punkt dagegen
negativ bezüglich o' gelegen, im letzteren Falle soll umgekehrt
jeder zu $T_p(o')$ zählende Punkt positiv, jeder zu $S_p(o')$ zäh-
lende Punkt negativ bezüglich o' gelegen heissen; jeder Punkt
aus $T_o(p)$ soll als positiv bezüglich p , jeder Punkt aus $S_o(p)$
als negativ bezüglich p gelegen angesehen werden.

Ist nun ab eine Strecke des K_1 , so ist es bestimmt, welcher
der beiden Randpunkte a, b positiv bezüglich des anderen liegt.
Die Strecke ab gehört stets zwei verschiedenen Büscheln mit
den Ursprüngen a, b an. Ist b positiv bezüglich a gelegen, so
nennen wir ab eine positive Strecke des Büschels a .
In einem und nur einem der beiden Büschel a, b ist die Strecke

ab positiv; der Büschel a , dem ab positiv angehört, ist durch diese Strecke bestimmt.

Sind nun A, B, C Strecken im K_1 , also „Punkte“ des neuen „Raumes“, so wären drei Fälle zu unterscheiden:

1°. A, B, C sind positive Strecken dreier verschiedener Büschel a, b, c . Es soll dann $A \vee BC$ gelten, sobald $a \vee bc$ besteht.

2°. A, B sind positive Strecken eines Büschels a , dagegen C positiv in einem hiervon verschiedenen Büschel c . Weil positive Strecken ein und desselben Büschels nie punktfremd sein können, darf $A < B$ angenommen werden. Es soll dann $B \vee AC$ gelten, falls c positiv bezüglich a gelegen, dagegen $A \vee BC$, falls a positiv bezüglich c gelegen ist.

3°. A, B, C sind positive Strecken eines Büschels a . Die Zwischenlage $A \vee BC$ sei dann durch $B < A < C$ vorgeschrieben.

Die Nullstrecken sollen hierbei formal wie positive Strecken der durch sie bestimmten Büschel behandelt werden, mit der ergänzenden Bestimmung, dass die Nullstrecke kleiner sein soll, als jede andere positive Strecke des Büschels.

Man überzeugt sich dann direkt, dass die Axiome Π_{1-3}, Π_4' gelten. Die Menge der Streckenbüschel wird also auf diese Weise tatsächlich als ein „linearer Raum“ interpretiert. Dieser „Raum“ soll der über K_1 nächstliegende Streckenraum heissen. Er ist sicher kein Kontinuum. Fasst man nämlich in einem fixierten Büschel des K_1 die Menge der positiven Strecken dieses Büschels zusammen, so hat man damit eine Menge von „Punkten“, die den drei Eigenschaften einer „Strecke“ genügt. Diese „Strecke“ besitzt aber nur einen „Randpunkt“ im „Streckenraum“, nämlich die Nullstrecke des Büschels im K_1 , — diese „Strecke“ ist also nicht „abschliessbar“.

Durch Hinzunahme der fehlenden irrationalen „Punkte“, m. a. W. durch Bildung des nächstliegenden Büschelkontinuums (über dem Streckenraum), gelangt man zu einem neuen Kontinuum, welches das K_1 nächstliegende Streckenkontinuum heissen möge.

Da die Gesamtheit der Nullstrecken des K_1 mit der Gesamtheit der Punkte desselben K_1 wesentlich identisch ist, und da das K_1 nächstliegende Streckenkontinuum die Gesamtheit dieser Nullstrecken als Teilmenge enthält, so darf man sich das Streckenkontinuum auch durch Ergänzung des K_1 mittels einer Menge

idealer Punkte (derjenigen positiven Strecken des K_1 , die keine Nullstrecken sind) entstanden denken, welche dann noch um eine Menge irrationaler idealer Punkte (bei der Bildung des Büschelkontinuums über dem Streckenraum) zu bereichern ist. Im Streckenkontinuum existieren Strecken, die keinen Punkt des ursprünglichen K_1 enthalten, — die oben erwähnte „Strecke“ der positiven Strecken eines Büschels im K_1 liefert ein Beispiel hierfür.

Über dem Streckenkontinuum kann nun allemal ein neues nächstliegendes gebildet werden. Durch v. I. beweist man den Satz:

Ein beliebig gegebener linearer Raum R_1 bestimmt allemal zugleich eine abzählbar-unendliche Folge von Kontinuen

$$K_1^{(1)}, K_1^{(2)}, K_1^{(3)}, \dots, K_1^{(n)}, \dots \quad (13)$$

Hier bedeutet $K_1^{(1)}$ das R_1 nächstgelegene Büschelkontinuum und $K_1^{(i+1)}$ das $K_1^{(i)}$ nächstgelegene Streckenkontinuum. Im $K_1^{(1)}$, welches eventuell auch mit R_1 identisch sein kann, liegen die Punkte von R_1 stets überall dicht. Im $K_1^{(j)}$ liegen die Punkte des $K_1^{(i)}$ bei $i < j$ nirgends dicht.

Es ist daher nicht statthaft mit der intuitiv naheliegenden Idee einer Geraden, die alle überhaupt denkbaren Punkte enthält, zu operieren.

14. Stetige Deformation.

Zwei lineare Räume, für deren Punkte eine anordnungstreue Korrespondenz herstellbar ist, sind einander ähnlich. Die Substitution eines linearen Raumes durch denselben linearen Raum, aber mit Vermittelung einer anordnungstreuen Korrespondenz zwischen den Punkten in der ersten und zweiten Auffassung, soll eine stetige Deformation dieses Raumes heißen; die identische Deformation, bei der jeder Punkt sich selbst entspricht, ist hierbei als Spezialfall mit einbegriffen. Die Gesamtheit der stetigen Deformationen eines R_1 bildet dann eine Gruppe, indem die aufeinanderfolgende Aus-

führung zweier stetiger Deformationen einer neuen stetigen Deformation gleichbedeutend ist. Die zur stetigen Deformation σ inverse Deformation σ^{-1} macht σ rückgängig, die Verknüpfung $\sigma^{-1}\sigma$ bedeutet also die identische Deformation. Letztere Beziehung ist eine wechselseitige, d. h. $(\sigma^{-1})^{-1}$ ist mit σ gleichbedeutend. Die n -malige Verknüpfung von σ mit sich selbst werde σ^n geschrieben, analog sei die n -malige Verknüpfung von σ^{-1} mit sich selbst durch σ^{-n} symbolisiert; σ^n und σ^{-n} erweisen sich als wechselseitig inverse Deformationen.

Der Begriff der Strecke ist eine Invariante für jede stetige Deformation, d. h. eine Strecke S erweist sich auch nach ausgeführter stetiger Deformation stets wieder als eine Strecke des deformierten Raumes.

Als Knoten der stetigen Deformation σ sollen diejenigen Punkte bezeichnet werden, die bei der durch σ bestimmten Zuordnung sich selbst entsprechen. Jeder Knoten von σ ist zugleich auch Knoten von σ^n und σ^{-n} bei jedem n . Bei der identischen Deformation ist jeder Punkt ein Knoten.

Es möge der Punkt a durch σ in a' übergehen, ferner a' durch dieselbe Deformation σ in a'' , oder, was dasselbe besagt, a möge durch σ^2 in a'' übergehen. Besteht dann

$$a' \vee aa'', \quad (14)$$

so soll die Deformation σ monoton heißen. Diese Definition ist dadurch gerechtfertigt, dass in diesem Falle σ sich auch dann als monoton erweist, wenn statt a ein beliebiger anderer Ausgangspunkt b fixiert wird, wenn nur b kein Knoten von σ ist. Eine von der identischen Deformation verschiedene, nicht-monotone stetige Deformation besitzt höchstens einen Knoten. Ist für jeden Punkt a stets a'' mit a identisch, so reden wir von einer Spiegelung. Als ausgearteten Spezialfall darf man auch die identische Deformation unter die Spiegelungen zählen. Für eine Spiegelung ist σ^2 stets die identische Deformation.

Ist σ keine Spiegelung, so bedeutet σ^2 allemal eine monotone stetige Deformation. Damit ist die Frage der Bildung monotoner Deformationen auf die Frage der Bildung solcher Deformationen zurückgeführt, die keine Spiegelungen sind.

Ist σ monoton, so ist die inverse Deformation σ^{-1} gleichfalls monoton.

Ein charakteristischer Unterschied der Eigenschaften monotoner und nicht-monotoner Deformationen ist durch folgenden Satz gegeben :

Ist a' aus a und b' aus b durch σ entstanden, und ist hierbei $a' \vee ab$, so sind die abgeschlossenen Strecken $[aa']$, $[bb']$ punktfremd, sobald σ eine monotone Deformation darstellt; bei $b \wedge aa'$ sind $[aa']$, $[bb']$ nicht-punktfremd, sobald σ nicht-monoton ist.

Sämtliche in diesem Paragraphen angeführten Behauptungen ergeben sich als direkte Konsequenzen der Axiome Π_{1-3} , Π_4' .

Invariantes Verhalten in Bezug auf stetige Deformationen zeigen zusammenstossende Strecken, gleichsinnig zusammenstossende Strecken, Streckenbüschel, wovon man sich auf Grund derselben Axiome überzeugt.

15. Skala einer Deformation.

Es sei σ eine monotone stetige Deformation des R_1 , σ^n und σ^{-n} die n -fachen Wiederholungen von σ resp. σ^{-1} . Die identische Deformation lässt sich folgerichtig als nullte Potenz σ^0 in die Reihe der σ^n , σ^{-n} einordnen. Es soll ein Punkt a fixiert sein, der durch σ^n in $a^{(n)}$, durch σ^{-n} in $a^{(-n)}$ übergehen möge; statt a darf dann auch konsequenterweise $a^{(0)}$ geschrieben werden. Die Punktfolge

$$\dots, a^{(-n)}, a^{[-(n-1)]}, \dots, a^{(-2)}, a^{(-1)}, a^{(0)}, a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n-1)}, a^{(n)}, \dots \quad (15)$$

soll dann die mittels σ aus a entwickelte Skala heissen.

Die Grössenbeziehung der Indizes ist in transitiver Weise definiert, sobald man übereinkommt, dass $0 < m$, $-i < 0$ zu gelten hat, und dass $-m < -i$, sobald $i < m$. Aus dem Begriff der Monotonie ergibt sich dann mit Hilfe der Anordnungsaxiome, dass $a^{(y)} \vee a^{(x)} a^{(z)}$, sobald entweder $x < y < z$, oder $z < y < x$. Schreibt man für $a^{[-(n-1)]}$ auch $a^{(-n+1)}$, für $a^{(0)}$ auch $a^{(-1+1)}$, für $a^{(1)}$ auch $a^{(0+1)}$, so ist stets $a^{(x+1)}$ der auf $a^{(x)}$ folgende Punkt der Skala.

Jede Strecke $a^{(x)} a^{(x+1)}$ bildet eine Elementarstrecke der Skala. Zwei verschiedene Elementarstrecken einer Skala sind notwendigerweise punktfremd.

Vereinigt man die Menge der Skalenpunkte $a^{(\sigma)}$ mit der Menge der die Elementarstrecken bildenden Punkte zu einer neuen Punktmenge M , so zeigt M sämtliche drei Streckeneigenschaften, falls auf beiden Seiten von $a^{(0)}$ Knoten existieren. Ist der R_1 ein Kontinuum, so lassen sich dann zwei Randpunkte f, g für M angeben. Diese Punkte f, g sind dann sicher Knoten von σ , dabei ist aber die Menge M selbst knotenfrei, es ist also zwischen f, g kein Knoten mehr gelegen.

Die Menge M soll in allen Fällen ein durch σ erzeugter Massbereich heissen. Bei vorgegebener Deformation σ ist der Massbereich M durch Angabe eines einzigen beliebigen ihm angehörigen Punktes a bestimmt.

Ist der R_1 ein Kontinuum, dabei in Bezug auf die Deformation σ knotenfrei, so muss M mit dem Gesamtraum R_1 identisch sein.

Die Knoten einer monotonen stetigen Deformation σ können einen R_1 nicht überall dicht erfüllen, sofern σ von der identischen Deformation verschieden ist. Denn durch σ wird mindestens ein knotenfreier Massbereich definiert. Da eine nicht-monotone Deformation höchstens einen Knoten besitzt, so hat man den Satz:

Ist im Büschelkontinuum jeder rationale Punkt ein Knoten, so ist die ausgeführte Deformation die identische.

Wird in einem Kontinuum K_1 ein Massbereich M gebildet, hierauf aus K_1 jeder nicht zu M gehörige Punkt entfernt, so zeigt die verbliebene Punktmenge M bei ungeänderter Definition der Zwischenlage alle Eigenschaften eines Kontinuums. Hieraus folgt, dass es statthaft ist, solche monotone stetige Deformationen σ zu betrachten, für die der Massbereich das Gesamtkontinuum ist, sobald man die Existenz monotoner stetiger Deformationen überhaupt zugibt.

Es sei R_1' das R_1 nächstliegende Büschelkontinuum, σ eine monotone Deformation, für welche der Massbereich mit R_1' identisch wird, dabei r die Punkte aus R_1 , s die entsprechenden Punkte nach der Deformation. Da die r im R_1' überall dicht liegen, so gilt dasselbe auch für die s . Sollte nun σ_1 eine zweite monotone Deformation sein, die denselben Massbereich ergibt und dabei stets r ebenfalls in s deformiert, so

wäre auf Grund der Gruppeneigenschaft $\sigma_1 \sigma^{-1} = \tau$ gleichfalls eine stetige Deformation. Es führt aber σ^{-1} jeden Punkt s in den zugehörigen Punkt r über, andererseits σ_1 jeden Punkt r in s , — die Deformation τ lässt daher die s ungeändert, d. h. letztere sind Knoten von τ . Weil die s im R_1' überall dicht liegen, muss τ daher notwendig die identische Deformation sein, mithin ist σ_1 die zu σ^{-1} inverse Deformation, also mit σ identisch. Zwei verschiedene monotone Deformationen können somit nicht ein und dieselbe Deformation der Punkte des R_1 im R_1' erzeugen, m. a. W.:

Die Deformation σ im Bündelkontinuum ist definiert, sobald bekannt ist, welchen Punkten σ die rationalen Punkte zuordnet.

Ist der Massbereich M mit dem Gesamtraum identisch, so wollen wir die Skala (15) eine archimedische nennen. Bei vorgegebener Deformation σ erweist sich jede Skala als archimedisch, sobald eine Skala archimedisch ist. Es darf daher dann auch die Deformation σ selbst eine archimedische genannt werden. Eine archimedische Deformation ist knotenfrei; im Kontinuum ist umgekehrt jede knotenfreie monotone stetige Deformation eine archimedische.

Existiert in einem R_1 eine archimedische Deformation σ , so existiert im nächstgelegenen Bündelkontinuum R_1' eine und nur eine solche monotone stetige Deformation, welche im R_1' die Punkte des R_1 (also die rationalen Punkte) nach dem durch σ vermittelten Gesetz abbildet.

16. Das Dedekind'sche Kontinuum.

Abzählbare lineare Räume sind stets einander ähnlich. Sind nämlich $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ die abgezählten Punkte des Raumes $R_1^{(a)}$, analog $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ die abgezählten Punkte des Raumes $R_1^{(b)}$, dann erhält man eine anordnungstreue Korrespondenz zwischen den a und den b folgendermassen:

Es werde zunächst das Paar a_1, a_2 entsprechend dem Paar b_1, b_2 zugeordnet; man bestimme hierauf die Lagenbeziehung im Tripel a_1, a_2, a_3 und suche die kleinste Ordnungszahl m , bei welcher im Tripel b_1, b_2, b_m entsprechend dieselbe Lagenbeziehung gilt, — dann werde a_3 dem Punkte b_m zugeord-

net; ist nun m von 3 verschieden, so bestimme man die Reihenfolge der Punkte des Quadrupels b_1, b_2, b_m, b_3 und suche die kleinste Ordnungszahl n , für welche im Quadrupel a_1, a_2, a_3, a_n die entsprechende Reihenfolge besteht, — darauf werde a_n dem Punkt b_3 zugeordnet usw. Das hiermit ange-deutete Verfahren kann unbeschränkt fortgesetzt werden, wobei zu jedem a das entsprechende b , und umgekehrt, sich finden lässt. Durch v. I. erkennt man auf Grund der Anordnungs-axiome, dass auf diese Weise tatsächlich eine anordnungstreue Korrespondenz zwischen beiden Räumen entsteht.

Eine direkte Folge der Ähnlichkeit abzählbarer Räume besteht darin, dass Büschelkontinuen über abzählbaren Räumen sich ebenfalls als ähnlich erweisen müssen.

Da bei anordnungstreuer Korrespondenz jedes Gesetz eben mittels dieser Korrespondenz von dem einen Raum auf den anderen übertragbar ist, so darf man untereinander ähnliche Räume als nicht wesentlich verschiedene Vertreter eines und desselben Raumtypus ansehen.

Nach R. Dedekind kann man die Menge der reellen Zahlen als die Menge der Schnitte¹⁸⁾ in der Gesamtheit der rationalen Brüche definieren. Letztere Gesamtheit bildet aber bei natürlicher Definition der Zwischenlage einen abzählbaren linearen Raum. Man erkennt leicht, dass die Menge der Dedekind'schen Schnitte begrifflich mit dem Büschelkontinuum über dem Raum der rationalen Brüche zusammenfällt. Dieses spezielle Büschelkontinuum ist nun aber, laut dem oben Gesagten, dem nächstliegenden Büschelkontinuum über einem beliebigen abzählbaren Raume ähnlich. Man ist daher berechtigt diesen Kontinuumtyp als Dedekind'sches Kontinuum anzusprechen. Die Definition lässt sich auch dahin modifizieren, dass ein Kontinuum als ein Dedekind'sches zu gelten hat, sobald eine in diesem Kontinuum überall dicht liegende abzählbare Punktmenge angebar ist. Hieraus folgt, dass ein Dedekind'sches Kontinuum jeder diesem Kontinuum entnommenen Strecke ähnlich ist.

Da im Raum der rationalen Zahlen archimedische Deformationen ausführbar sind (eine solche Deformation bildet z. B. der Übergang vom Bruch $\frac{m}{n}$ zum Bruch $\frac{m+n}{n}$), so folgt sofort

18) R. Dedekind, „Stetigkeit und irrationale Zahlen“, 1872.

die Ausführbarkeit knotenfreier monotoner stetiger Deformationen im Dedekind'schen Kontinuum.

Eine charakteristische Eigenschaft des Dedekind'schen Kontinuums fixiert der Satz:

Jede Menge punktfremder Strecken eines Dedekind'schen Kontinuums ist endlich oder höchstens abzählbar-unendlich.

Es muss nämlich im Dedekind'schen Kontinuum K_1 eine überall dicht gelegene abzählbare Punktmenge R_1 vorhanden sein, und jede Strecke des K_1 muss mindestens einen Punkt dieser Menge enthalten, — es ist daher möglich, jeder Strecke einen nur ihr angehörigen Punkt der Menge R_1 zuzuordnen, sobald in der Menge der Strecken jedes Streckenpaar punktfremd erscheint. Eine Abzählung der zugeordneten Punkte liefert dann zugleich eine Abzählung der Strecken.

Bildet man das einem Dedekind'schen Kontinuum K_1 nächstgelegene Streckenkontinuum $K_1^{(2)}$, so erweist es sich als möglich, in diesem $K_1^{(2)}$ nicht-abzählbar unendlich viele punktfremde Strecken anzugeben. Man braucht dazu bloss mit solchen „Strecken“ (§ 13) zu operieren, deren „Punkte“ jedesmal positive Strecken ein und desselben Büschels sind. Das Streckenkontinuum $K_1^{(2)}$ ist daher dem Dedekind'schen Kontinuum sicher nicht ähnlich, da widrigenfalls mit Hilfe der anordnungstreuen Korrespondenz auch im Dedekind'schen Kontinuum nicht-abzählbar viele punktfremde Strecken angebar wären, was ausgeschlossen ist.

Untersucht man auf dieselbe Weise die gesamte Folge übereinanderliegender Streckenkontinuen (13), wo das Ausgangskontinuum $K_1^{(1)}$ als ein Dedekind'sches angenommen sein mag, so erweist sich $K_1^{(i)}$ mit $K_1^{(j)}$ als nicht-ähnlich, solange i von j verschieden ist. Es existieren somit unendlich viele wesentlich verschiedene Kontinuumtypen. In Anbetracht der schon von G. Veronese durchgeführten Konstruktionen¹⁹⁾ könnte man diese höheren Kontinuen als Veronese'sche bezeichnen. Fasst man $i-1$ als Ordnungsindex des Kontinuums $K_1^{(i)}$ auf, so ist das Dedekind'sche Kontinuum als uneigentlicher

¹⁹⁾ G. Veronese, „Fondamenti di geometria“, 1891 (deutsch v. A. Schepp, „Grundzüge der Geometrie“, 1894).

Spezialfall ein Veronese'sches Kontinuum nullter Ordnung. In einem eigentlichen Veronese'schen Kontinuum ist keine überall dicht liegende abzählbare Punktmenge enthalten. Man kann das $K_1^{(2)}$ durch eine Menge abgeschlossener Strecken erschöpfen, wobei keine zwei dieser abgeschlossenen Strecken zusammenstossen.

Der geläufige Begriff der reellen Zahl ist auf das Dedekind'sche Kontinuum beschränkt, auf welches man sofort geführt wird, sobald man mit abzählbaren Mengen operiert. Da die höheren Kontinuen ohne jegliche Metaphysik ebenso wohldefiniert sind, wie das Dedekind'sche, so ist es ein Akt der Willkür, nicht der Notwendigkeit, wenn man beim ersten Schritt stehen bleibt. An sich ist auch das Dedekind'sche Kontinuum in der Analysis entbehrlich, weil alles begrifflich nötige in nuce schon im Begriff des abzählbaren Raumes vorhanden ist; die Verwendung des Dedekind'schen Kontinuums bedeutet im wesentlichen nur eine konventionelle Vereinfachung der Formulierungen. Da kein Zwang vorliegt allen mathematischen Problemen ein und dasselbe Kontinuum zu Grunde zu legen, so entsteht die Frage, ob die Hinzuziehung passender höherer Kontinuen bei einzelnen Problemstellungen zweckmässig wäre, indem man dadurch z. B. zu formalen Vereinfachungen gelangen könnte. Man denke z. B. an die Methoden der Variationsrechnung. Weiter soll hier darauf aber nicht eingegangen werden.

17. Verfeinerung der Skala im Dedekind'schen Kontinuum.

Die Metrik des Dedekind'schen Kontinuums lässt sich schrittweise mit Hilfe des Begriffs der archimedischen Deformation aufbauen.

Man fixiere zunächst im Dedekind'schen Kontinuum K_1 einen Streckenbüschel o . Den zweiten Randpunkt p der positiven Strecke P dieses Büschels nenne man die Länge von P ; der Ursprung o werde hierbei auch als Länge null der Nullstrecke des Büschels zugesprochen. Für zwei Längen p_1, p_2 hat $p_1 < p_2$ zu gelten, sobald $p_1 \vee op_2$; null hat als kleiner zu gelten, als jede andere Länge. Die Grössenbeziehung der Strecken (§ 10) ist dann auf die Grössenbeziehung der Längen übertragen.

Es werde hierauf noch eine archimedische Deformation σ im K_1 fixiert. Nun komme man überein, die Länge p nicht nur der Strecke P , sondern auch jeder Strecke $P^{(n)}$, $P^{(-n)}$ zuzuordnen, in die P mittels σ^n resp. σ^{-n} deformierbar ist. Die Strecken $P^{(n)}$, $P^{(-n)}$ sind dann nicht mehr an den Büschel o gebunden. Strecken von identischer Länge sollen wechselseitig kongruent bezüglich σ heissen. Die Beziehung der Kongruenz ist dann auch transitiv.

Jede Strecke, der eine Länge zukommt, möge messbar heissen. Die bisherigen Festsetzungen definieren eine nicht-abzählbare Menge messbarer Strecken, — es bleiben aber immer noch gleichfalls nicht-abzählbar unendlich viele Strecken übrig, die nicht-messbar sind. Von zwei messbaren Strecken hat diejenige als kleinere zu gelten, deren Länge die kleinere ist.

In der Bezeichnung einer Strecke mit Hilfe ihrer beiden Randpunkte soll der negativ bezüglich des anderen gelegene Randpunkt weiterhin an erster Stelle stehen; es ist dann ab stets eine positive Strecke des Büschels a . Die positive Lage einer Strecke im Büschel bleibt bei monotonen stetigen Deformationen invariant.

Es sei $o^{(0)}$ mit o identisch und

$$\dots, o^{(-m)}, \dots, o^{(-1)}, o^{(0)}, o^{(1)}, \dots, o^{(m)}, \dots \quad (16)$$

die mittels σ aus o entwickelte Skala, wobei wir uns $o^{(1)}$ positiv bezüglich $o^{(0)}$ gelegen denken. Eine Strecke ab erweist sich nach den bisherigen Festsetzungen dann und nur dann als messbar, wenn ihr Ursprung a zur Skala (16) gehört. Gehört auch b zu dieser Skala, so ist die Länge von ab ein Skalenpunkt aus (16) mit positivem Index; ist $o^{(m)}$ diese Länge, so sagen wir auch, die Strecke ab enthalte genau m Masseinheiten. Es ist m die Anzahl der in ab enthaltenen Elementarstrecken der Skala (16).

Ist a nicht in (16) enthalten, so fixiere man die mittels σ aus a entwickelte Skala

$$\dots, a^{(-m)}, \dots, a^{(-1)}, a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(m)}, \dots \quad (17)$$

Hier ist $a^{(y)}$ positiv bezüglich $a^{(x)}$ gelegen, sobald $x < y$. Sollte nun b mit dem Punkt $a^{(m)}$ der Skala (17) identisch sein, so ordnen wir ab wiederum die Länge $o^{(m)}$ zu und sagen, m sei die Anzahl der in ab genau aufgehenden Masseinheiten. Der Be-

reich messbarer Strecken wird hierdurch erweitert. Man erkennt in den früheren Festsetzungen Spezialfälle der zuletzt getroffenen Vereinbarung.

Ist ab nun immer noch nicht messbar, so gehört b einer Elementarstrecke $a^{(m)}a^{(m+1)}$ der Skala (17) an. Wir sagen dann, die Strecke ab enthalte mehr als m und weniger als $m+1$ Masseneinheiten, und betrachten die Punkte $o^{(m)}$, $o^{(m+1)}$ als zwei Schranken der Länge von ab .

Zur Bestimmung der Anzahl der in ab genau oder näherungsweise enthaltenen Masseneinheiten bedarf man eines Eichmasses, d. h. einer Vorrichtung, die $a^{(m-1)}$ und $a^{(m+1)}$ bestimmt, sobald $a^{(m)}$ gegeben ist.

Strecken, die nun mittels σ messbar geworden sind, brauchen darum noch nicht mittels σ^2 messbar zu sein, wie das Beispiel $oo^{(1)}$, $o^{(1)}o^{(2)}$ lehrt, — dagegen folgt aus der Messbarkeit mittels σ^p umgekehrt stets die Messbarkeit mittels σ , weil die durch σ^p entwickelten Skalenpunkte notwendig in (16) bzw. (17) mit enthalten sind. Die Skala der Deformation σ soll, in Bezug auf die durch die Deformation σ^p entwickelte Skala, eine p -fach verfeinerte Skala heissen.

Ist eine archimedische Deformation σ gegeben, so lässt sich im Dedekind'schen Kontinuum K_1 allemal auch eine solche archimedische Deformation τ konstruieren, dass σ mit τ^p identisch wird, die Skala für τ also eine p -fache Verfeinerung der Skala für σ darstellt. Es sind nämlich zwei beliebige Strecken im Dedekind'schen Kontinuum stets ähnlich, und die anordnungstreue Korrespondenz dieser Strecken kann auch so bestimmt werden, dass zwei beliebig vorgeschriebenen Punkten der einen Strecke zwei beliebig vorgeschriebene Punkte der anderen entsprechen. Man kann daher die abgeschlossenen Strecken $[ab]$, $[bc]$ so aufeinander ähnlich abbilden, dass a in b , b in c übergeht. Soll also die Skala (16) p -fach verfeinert werden, so wähle man auf der Elementarstrecke $oo^{(1)}$ beliebig $p-1$ Punkte $o^{(x)}$ so, dass die Reihenfolge

$$o, 'o^{(1)}, 'o^{(2)}, \dots, 'o^{(p-1)}, o^{(1)} \quad (18)$$

entsteht, wobei noch o als $'o^{(0)}$ und $o^{(1)}$ als $'o^{(p)}$ aufgefasst werden darf. Für jede abgeschlossene Strecke $['o^{(x-1)} 'o^{(x)}]$ möge nun noch eine anordnungstreue Korrespondenz mit der Nachbarstrecke $['o^{(x)} 'o^{(x+1)}]$ fixiert sein, wobei $'o^{(x-1)}$ in $'o^{(x)}$,

' $o^{(x)}$ in ' $o^{(x+1)}$ überzugehen hat. Diese Korrespondenzen seien symbolisch unter τ_1 zusammengefasst. Durch σ wird der Strecke $o^{(0)}$ ' $o^{(1)}$ die Strecke $o^{(1)}$ ' $o^{(p+1)}$ zugeordnet; diese letztere möge nun noch durch τ_1 aus ' $o^{(p-1)}$ $o^{(1)}$ entstehend gedacht sein. Für jeden Punkt der abgeschlossenen Strecke $[oo^{(1)}]$ ist dann τ_1 definiert. Gehört a zur Elementarstrecke $o^{(i)}$ $o^{(i+1)}$ der durch σ erzeugten Skala (16), so bestimmen wir den mittels τ aus a entstehenden Punkt ' a , indem wir zunächst a durch σ^{-i} in einen Punkt a' von $oo^{(1)}$ überführen, hierauf τ_1 ausführen, wodurch a' in a'' übergeht, endlich σ^{-i} durch σ^i rückgängig machen, wobei man von a'' zu ' a gelangt. Analog verfähre man, wenn a zur Elementarstrecke $o^{(i)}$ $o^{(i-1)}$ gehört, oder wenn a ein Punkt der Skala (16) ist. In gruppentheoretischer Symbolik geschrieben, lautet also die Vorschrift:

$$\tau = \sigma^i \tau_1 \sigma^{-i}. \quad (19)$$

Eine direkte Untersuchung zeigt, dass tatsächlich τ eine monotone stetige Deformation darstellt, wobei wirklich τ^p mit σ identisch ist.

Der Verfeinerungskoeffizient p ist eine natürliche Zahl. Im Falle $p=2$ reden wir von einer Halbierung der Elementarstrecken.

Es soll nun eine abzählbar-unendliche Folge Σ von Deformationen bzw. Skalen fixiert werden, von der Art, dass jede nächstfolgende eine Verfeinerung der nächstvorhergehenden darstellt. Als Ausgangsdeformation diene σ . Jede Skala der Folge Σ ist dann zugleich eine Verfeinerung der Skala für σ , und zwar ist der Verfeinerungskoeffizient um so grösser, je höher der Folgenindex der betreffenden Deformation in Σ ist. Jede Potenz einer Deformation aus Σ von kleinerem Index ist zugleich die Potenz einer Deformation von grösserem Index. Die explizite Bestimmung dieser Potenzen bildet eine spezielle Aufgabe der Bruchrechnung. Wählt man in Σ für jedes Paar aufeinanderfolgender benachbarter Deformationen ständig den Verfeinerungskoeffizienten 2, so gelangt man zu den dyadischen Brüchen.

Bei jeder Verfeinerung erweitert sich der Bereich messbarer Strecken; trotzdem ist leicht zu erkennen, dass Strecken existieren müssen, die mittels der Deformationen der Folge Σ immer noch nicht messbar sind, — es ist dies bedingt durch den

Umstand, dass die Gesamtheit der durch Σ definierten Skalenpunkte abzählbar ist, die Gesamtheit der Punkte des K_1 dagegen nicht. Existiert eine Deformation aus Σ , in der eine gegebene Strecke A messbar wird, so sagen wir, A sei mittels Σ messbar.

Wir wollen diejenigen Punkte des Kontinuums, die irgendeiner zu Σ gehörigen, aus o entwickelten Skala angehören, zu den rationalen Punkten zählen, und die entsprechenden Längen mittels Σ messbarer Strecken als rationale Längen bezeichnen; jeder andere Punkt des K_1 soll als irrational gelten. Die immerhin noch denkbare Abweichung von den im § 12 gegebenen Bestimmungen besteht darin, dass die rationalen Punkte im Sinne der Skalenpunkte von Σ nicht überall dicht im K_1 zu liegen brauchen. Wie im nächsten Paragraphen dargelegt wird, ist es aber statthaft, Σ auch noch dieser Beschränkung zu unterwerfen.

18. Starre Verschiebungen.

Es ist möglich, Σ so zu bestimmen, dass sich Punkte x angeben lassen, die stets zwischen o und dem aus o deformierten Punkt liegen, gleichviel, welche zu Σ gehörige Skala betrachtet wird. Die Menge dieser Punkte x bildet dann die Vereinigungsmenge einer Strecke mit einem ihrer Randpunkte, — der andere Randpunkt dieser Strecke ist notwendigerweise o . Die Vereinigungsmenge der x mit o bildet also eine abgeschlossene Strecke ε . Der Punkt o ist der einzige rationale Punkt von ε .

Jede Deformation aus Σ führt ε in eine abgeschlossene Strecke ε' über, wo wiederum nur ein Randpunkt rational ist; ε und ε' sind notwendig punktfremd. Durch v. I. erkennt man die Existenz einer abzählbar-unendlichen Menge solcher mittels Σ aus ε gebildeten abgeschlossenen Strecken $\varepsilon^{(i)}$, die dabei in jeder Paarung punktfremd sein müssen. Die Menge dieser $\varepsilon^{(i)}$ kann durch eine naheliegende Definition der Zwischenlage in einen abzählbaren linearen Raum verwandelt werden (dessen „Punkte“ also eben diese $\varepsilon^{(i)}$ sind). Jeder rationale Punkt des K_1 erscheint als Randpunkt einer und nur einer Strecke $\varepsilon^{(i)}$. Die dadurch vermittelte anordnungstreue Korrespondenz lässt auch in der Menge der rationalen Punkte bei ungeänderter Definition der Zwischenlage einen abzählbaren linearen Raum erkennen.

Die irrationalen Punkte der $\varepsilon^{(i)}$ sollen jetzt als überschüssig aus dem K_1 entfernt gedacht werden; es verbleibt dann eine Punktmenge, die ausser den rationalen Punkten nur noch diejenigen irrationalen enthält, welche keiner $\varepsilon^{(i)}$ angehören. Diese Punktmenge genügt ohne Änderung der Definition der Zwischenlage den Axiomen Π_{1-3} , Π_4' , sie bildet also einen „reduzierten“ linearen Raum K'_1 . Dieser reduzierte Raum K'_1 erweist sich als ein Kontinuum, d. h. jede Strecke in ihm muss abschliessbar sein. Denn eine Strecke A' aus K'_1 verwandelt sich in eine Strecke A aus K_1 , sobald die entfernten irrationalen Punkte zurückgegeben werden; gehören die Randpunkte von A zu K'_1 , so sind dieselben Punkte auch Randpunkte von A' , — gehören die Randpunkte von A aber zu den irrationalen Punkten der $\varepsilon^{(i)}$, so erweisen sich die rationalen Punkte eben dieser $\varepsilon^{(i)}$ als Randpunkte von A' in K'_1 ; in allen Fällen ist also A' im K'_1 abschliessbar.

Die Deformationen und Skalen aus Σ behalten im reduzierten Kontinuum K'_1 ihren früheren Sinn, da die entfernten irrationalen Punkte ineinander übergehen müssen.

Sollten die rationalen Punkte im reduzierten Kontinuum K'_1 nun immer noch nicht überall dicht liegen, so lässt sich in $oo^{(1)}$ eine von rationalen Punkten freie Strecke angeben. Ist y ein beliebiger Punkt einer solchen Strecke, so fixiere man die Menge derjenigen Punkte u , für die zwischen u und y kein rationaler Punkt gelegen ist, und bilde die Vereinigungsmenge η der u mit y . Es zeigt sich auf Grund der Anordnungsaxiome, dass η eine abgeschlossene Strecke ist. Jede Strecke, von der η einen echten Teil bildet, enthält sicher rationale Punkte. Zwei verschiedene η sind stets punktfremd; die Menge der zu $oo^{(1)}$ gehörigen η ist abzählbar-unendlich, sofern ein η wirklich existiert.

Es können nicht beide Randpunkte von η rational sein, da sonst eine nicht-verfeinerbare Skala in Σ vorhanden wäre, was ausgeschlossen ist. Es kann auch nicht der negativ bezüglich des anderen gelegene Randpunkt von η rational sein, weil sonst η ein $\varepsilon^{(i)}$ wäre, — diese $\varepsilon^{(i)}$ sind aber im K'_1 nicht mehr vorhanden.

Die Deformationen der Folge Σ definieren analoge Strecken η in jeder Elementarstrecke von (16). Die Gesamtheit der so überhaupt denkbaren η ist abzählbar; wir reden demnach von Strecken $\eta^{(i)}$.

Wir lassen nun $\eta^{(i)}$ allemal auf den positiv bezüglich des anderen liegenden Randpunkt zusammenschrumpfen, m. a. W., wir denken uns aus dem K_1' jeden Punkt eines jeden $\eta^{(i)}$, mit Ausnahme der positiv gelegenen Randpunkte, entfernt. In dem solcherweise erneut reduzierten Raume K_1'' liegen die rationalen Punkte dann sicher überall dicht. Mit Hilfe der Anordnungsaxiome lässt sich nachweisen, dass K_1'' tatsächlich, bei ungeänderter Definition der Zwischenlage, ein linearer Raum, und zwar wieder ein Kontinuum ist; wegen der überall dichten Lage der abzählbaren rationalen Punkte ist K_1'' dann ein Dedekind'sches Kontinuum.

Infolge der wechselseitigen Ähnlichkeit Dedekind'scher Kontinua lässt sich alles, was im K_1'' erreicht ist, auch auf K_1 übertragen. Es ist also wirklich statthaft, von Beginn an mit einer solchen Folge Σ zu operieren, wo die rationalen Punkte im Kontinuum überall dicht zu liegen kommen. Σ soll dann ein starrer Massstab des vorliegenden Kontinuums heißen. Das Kontinuum selbst ist in diesem Falle mit dem den rationalen Punkten nächstliegenden Büschelkontinuum identisch.

Es sei J eine Strecke, die mittels dieses starren Massstabes Σ nicht messbar ist. In jeder Skala von Σ existieren dann jedesmal zwei Schranken der Länge von J . Zu den unteren Schranken zählt allemal der Ursprung des Fundamentalbüschels o .

Die Vereinigungsmenge der Menge der unteren Schranken von J mit der Menge der zwischen zwei unteren Schranken gelegenen Punkte des K_1 erweist sich als Vereinigung einer positiven Strecke des Büschels o mit dem Ursprung dieses Büschels. Der andere Randpunkt dieser Strecke, der dann sicher irrational ist, soll nun als Länge von J angesehen werden. In dem speziellen Falle, wo die Menge der unteren Schranken endlich ist, gelangt man zu der früher bestimmten rationalen Länge. Die bisherigen Längendefinitionen ordnen sich also folgerichtig in die zuletzt gegebene Definition ein.

Bei dieser erweiterten Längendefinition erweist sich also mittels des starren Massstabes jede Strecke im Dedekind'schen Kontinuum als messbar.

In jedem Streckenbüschel des K_1 existieren zwei und nur zwei Strecken, deren Länge den beliebig vorgeschriebenen Wert x hat; eine und nur eine dieser Strecken ist in diesem Büschel positiv. Dieser leicht zu beweisende Satz ist mit

dem Hilbert'schen ersten Axiom der Kongruenz²⁰⁾, III₁, gleichwertig.

Die Reduktion auf den Begriff der Länge bringt es mit sich, dass auch das zweite Axiom der Kongruenz, III₂ (die Transitivität des Begriffs der Kongruenz), bei den geltenden Festsetzungen erfüllt wird.

Fixiert man eine Strecke ox , wo x positiv bezüglich o gelegen ist, so erhält man eine knotenfreie monotone stetige Deformation μ des K_1 , sobald man jedem Punkt a denjenigen positiv bezüglich a liegenden Punkt a' zuordnet, für den aa' mit ox kongruent ist. Ähnliches gilt, wenn x negativ bezüglich o genommen ist, nur hat man dann auch a' negativ bezüglich a zu nehmen. Diese Deformation μ ist definiert, sobald bekannt ist, wie sie einen Punkt deformiert. Die Deformationen aus Σ sind Spezialfälle der μ . Man kann μ eine starre Verschiebung des Kontinuums nennen.

Ist i ein beliebiger fixierter Punkt der Strecke ox , ferner y die Länge von ix , so erweisen sich auf Grund unserer Festsetzungen die Strecken oi und yx als kongruent. In dieser Aussage dürfen die Rollen von i und y vertauscht werden. Hieraus folgert man dann allgemeiner, dass ai und by kongruent sein müssen, sofern $i \vee ab$ und ay mit ib kongruent ist. Sollte also in ab der Punkt d fixiert sein, für den db mit oy kongruent, ad mit yx kongruent ist, so lässt sich c in ab so bestimmen, dass db mit ac kongruent, ad mit cb kongruent wird; es ist dann sicher auch ab mit ox kongruent. Es gilt also der Satz:

Die Unterschiedsstrecken zweier Paare entsprechend punktfremd zusammenstossender Strecken sind kongruent, sobald die Komponenten dieser Unterschiedsstrecken paarweise kongruent sind.

Hierin ist das dritte Hilbert'sche Kongruenzaxiom III₃ enthalten.

Die Verknüpfung zweier starrer Verschiebungen erweist sich daher wieder als eine starre Verschiebung; diese starren Verschiebungen bilden demnach eine Gruppe M . Diese Gruppe

20) D. Hilbert, „Grundl. d. Geometrie“.

ist kommutativ. Eine Untergruppe von M bilden die Deformationen von Σ und ihre Potenzen. Eine naheliegende Definition der Zwischenlage zeigt M als ein Dedekind'sches Kontinuum, dessen „Punkte“ die einzelnen Verschiebungen μ sind. Die durch Σ definierte Untergruppe P ist gleichfalls ein linearer Raum, und zwar ist M das Büschelkontinuum über P . Jedes Dedekind'sche Kontinuum liefert eine spezielle Verkörperung der Gruppe M . Beim metrischen Aufbau des Zahlbegriffs dient die Gruppe P als Ausgangspunkt der Betrachtungen.

**PFLANZENÖKOLOGISCHE UNTERSUCHUNGEN
AUS NORWEGISCH- UND FINNISCH-LAPPLAND**

UNTER BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER LICHTFRAGE

VON

THEODOR LIPPMAA

TARTU 1929

C. Mattiesen, Tartu (Dorpat).

I. Einleitung.

Die arktischen Gebiete von Nord-Skandinavien sind wiederholt botanisch untersucht worden. Nach Wahlenberg's grundlegendem Werke „Flora Lapponica“ haben sich mit der Vegetation dieser Gebiete viele skandinavische und finnische Botaniker (Blytt, Hult, Brotherus, Kairamo (Kihlman), Sernander, G. Andersson, Cleve, Vestergren, Kivilinna (Borg), Sylvén, Birger, Haglund, Cajander, Th. Fries, Du Rietz, Tengwall, Häyrén und andere) beschäftigt, weshalb diese Länder pflanzensoziologisch für verhältnismässig gut untersucht gelten. Wenn der Verfasser seine Ergebnisse dennoch der Öffentlichkeit übergibt, so ist dies dadurch bedingt, dass die Aufgaben, die er sich während seines Aufenthaltes in Lappland stellte, in mancher Hinsicht andere waren, als bei den oben erwähnten Forschern.

In seinen Arbeiten „Beiträge zur Kenntnis des photochemischen Klimas im arktischen Gebiete“ und „Untersuchungen über den Lichtgenuss der Pflanzen im arktischen Gebiete“ hat Wiesner¹⁾ die Lehre über das hohe Lichtbedürfnis der Pflanzen des hohen Nordens aufgestellt. Bei seinen Untersuchungen in der Advent-Bai (Spitzbergen) fand Wiesner, dass die Minima des Lichtgenusses der dortigen Phanerogamen so hoch sind, dass sie sich in der Regel nicht mit Sicherheit von dem Maximum unterscheiden liessen. Bei einem Vergleich der arktischen Pflanzen mit den Gewächsen südlicher gelegener Steppen fand Wiesner, dass zwischen diesen kein Unterschied im Lichtgenuss zu bestehen scheint, denn letzterer ist auch bei den Pflanzen der Steppen nur wenigen Schwankungen unterworfen und befindet sich ebenfalls in der Nähe des möglichen Maximums. Wenn nun auch der faktische Lichtgenuss der Tundra-, der Steppen- und Wüsten-

1) Wiesner, J., Denkschr. d. Kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, Bd. 67 (1893) und Sitzungsber. Wiener Akad. Bd. 109 (1900).

pflanzen insofern annähernd der gleiche ist, als auf alle die genannten Pflanzen das Tageslicht uneingeschränkt einwirkt, so soll nach Wiesner doch keinem Zweifel unterliegen, dass in bezug auf die Auswertung des empfangenen Lichtes die Tundra- und die Steppenpflanzen scharf unterschieden sind, denn während die Steppen- und Wüstenpflanzen einen Lichtüberschuss empfangen, der oft hemmend in die Assimilationstätigkeit eingreift, sollen nach Wiesner die arktischen Pflanzen „in der Regel nur so viel Licht empfangen, als sie zum Leben benötigen“.

Obgleich seit dem Erscheinen der zusammenfassenden Arbeit von Wiesner über den Lichtgenuss der Pflanzen rund 20 Jahre vergangen sind, gilt diese Lehre für gut begründet. So schrieb Warming¹⁾: „Durch zahlreiche Versuche kommt Wiesner zu dem Resultat, dass je wärmer die Jahreszeit ist, desto niedriger das Minimum des relativen und absoluten Lichtgenusses für eine Pflanze liegt; je kälter es also ist, desto mehr bedeutet das wirksame Licht einen Wärmegegewinn. Je mehr wir uns also den Polen und den Gipfeln hoher Gebirge nähern, desto mehr muss sich das Lichtbedürfnis der Pflanzen steigern, besonders natürlich in den im Sommer so lange belichteten hohen Breiten.“ Allerdings werden die Angaben von Wiesner von Lundegårdh in seinem Werke „Klima und Boden in ihrer Wirkung auf das Pflanzenleben“ mit der Bemerkung: „vielleicht beruht aber der grössere relative Lichtbedarf auf der niedrigen Lufttemperatur. . .“ wiedergegeben.

Zehnjährige Arbeit auf dem Gebiete der Pflanzenpigmente hat den Verfasser zu der festen Überzeugung geführt, dass die roten Farbstoffe der Phanerogamen — die Anthocyane und Hämatokarotinoide — bei diesen Pflanzen eine Schutz Einrichtung gegen die schädliche Wirkung des intensiven Lichtes sind²⁾. Da nach Angaben von Thorild Wulff die Vegetation auf Spitzbergen sehr reich an Anthocyaninen ist und da auch die Daten anderer Autoren (Middendorff, Gertz) auf Anthocyanreichtum der Pflanzen des hohen Nordens schliessen lassen, gelangt man zu dem Schluss, dass die Pflanzen arktischer Gebiete oft Einrichtungen besitzen, deren Hauptaufgabe die Ver-

1) Warming, Eug. und Graebner, P., Eug. Warming's Lehrbuch der ökologischen Pflanzengeographie, 3. Aufl., Berlin 1918.

2) Lippman, Th., Über Pigmenttypen und ihre Bedeutung für die Anthocyanfrage. Ber. d. deutsch. bot. Gesellsch. Bd. 66 (1928), pp. 267—277.

ringering der Lichtintensität und die Veränderung der Strahlenqualität zu sein scheint. Also kommt man zum Gegenteil von dem, was man erwarten dürfte, falls die Lehre von Wiesner das Richtige treffen sollte, denn falls die Pflanzen im hohen Norden das volle Tageslicht zum Leben benötigen, so müsste man bei ihnen wohl Einrichtungen erwarten, die dafür günstig sind und die an solche der Schattenpflanzen erinnern.

Es ergab sich die Notwendigkeit, diese Verhältnisse an den Standorten der arktischen Pflanzenvereine näher zu untersuchen. In einer früheren Arbeit¹⁾ hat der Verfasser eine Methode ausgearbeitet, die es ermöglicht, eine Pflanzengesellschaft auf ihren Pigmentgehalt hin zu analysieren. Diese Methode, auf die wir noch unten zu sprechen kommen und die es ermöglicht, das „phytochromatische Spektrum“ einer Assoziation zu bestimmen, erlaubt es, verschiedene Pflanzengesellschaften in dieser Hinsicht untereinander zu vergleichen. Es war von nicht geringem Interesse, die Spektren der Wiesen- und Heidebirkenwälder, der arktischen Zwergstrauchheide, der *Salix herbacea*-Assoziationen usw. festzustellen. Andererseits galt es zu entscheiden, ob zwischen dem Pigmentgehalt und der anatomischen Struktur der Assimilationsorgane einer Pflanzengesellschaft irgendwelche Beziehungen bestehen, weshalb beschlossen wurde, die Blätter möglichst aller auf ihren Pigmentwert geprüften Pflanzenarten auch anatomisch zu untersuchen, eine Arbeit, die von Hilja Lippmaa durchgeführt wurde.

Neben diesen Untersuchungen war es unerlässlich, die betreffenden Pflanzenvereine mit Hilfe der üblichen pflanzensoziologischen Methoden zu analysieren.

Da von vornherein zu erwarten war, dass ausser Pigmenten noch andere Lichtschutzeinrichtungen vorhanden sein könnten, so sollte dieser Möglichkeit ebenfalls Aufmerksamkeit geschenkt werden. Auch erschien es notwendig, ausser den Anthophyta und Pteridophyta die Moose, Flechten und Algen (Luftalgen) soweit wie möglich sowohl auf ihren Pigmentgehalt als auch auf andere Schutzeinrichtungen hin zu untersuchen.

Die Bestimmungen des Pigmentgehaltes können zum Teil an entsprechend getrocknetem Material angestellt werden, bei Pha-

1) Lippmaa, Th., Pigmenttypen bei Pteridophyta und Anthophyta, Acta Instituti et Horti Bot. Tartuensis (Dorpatensis) vol. I, fasc. 1—3.

nerogamen ist es jedoch dringend nötig, frisches Material an Ort und Stelle mikroskopisch zu prüfen. Die Feststellung des phytochromatischen Spektrums einer Assoziation ist nur unter der Bedingung möglich, dass die Arten, aus denen letztere sich zusammensetzt, am Anfang, in der Mitte und am Schluss der Vegetationsperiode untersucht werden. Deshalb musste der Verfasser seine Studien auf 2½ Monate ausdehnen. Am 1. Juli 1927 wurde der Kaskamaoaiivi (SW von Pitkajärvi, Finn.-Lappl.) bestiegen und am 11. September 1927, nachdem der erste Schnee bei Siilastupa (Kilpisjärvi) am 8. Sept. gefallen war, Karesuando verlassen.

Die Beobachtungen wurden an folgenden Orten angestellt: Kaskamaoaiivi, Finnisch-Lappl. (1. Juli); Petsamon tunturit, Finn.-Lappl. (vom 4. bis 8. Juli); Pääskyspahta-tunturi, Finn.-Lappl. (vom 9. bis 22. Juli); Kolttaköngäs — Boris-Gleb, Finn.-Lappl. (vom 22. bis 27. Juli); Kirkenes und Skogeröfjeld, Norweg.-Lappl. (28. u. 29. Juli); Hammerfest (1. u. 2. August); Insel Seiland, Norw.-Lappl. (vom 3. bis 8. August); Kilpisjärvi-Gegend, Finn.-Lappl. (vom 13. August bis 8. Sept.).

Besonders geeignet für die geplanten Untersuchungen erwiesen sich die Petsamon tunturit, der Pääskyspahta, die Umgebung von Kolttaköngäs, die Insel Seiland und die Massive von Malla und Saana am Nordufer des Kilpisjärvi.

Während des Aufenthaltes in Petsamon tunturit und Pääskyspahta war dem Verfasser der Beistand seines Freundes Dr. Viljo Kujala von grossem Nutzen, der ihm in seinem Zelt in zuvorkommendster Weise Raum gewährte. Wenn schon das Mikroskopieren in dem allseitig geschlossenem engen Raum wegen der hohen Temperatur, die in Sommer 1927 in Lappland herrschte, nicht gerade angenehm war, so wäre diese Arbeit einerseits wegen der Mückenplage, andererseits wegen der grossen Entfernung von den nächsten Siedelungen ohne Zelt undenkbar gewesen.

Die Untersuchungen des Verfassers wurden durch Unterstützungen von seiten des Ministeriums für Volksaufklärung und der Universität Tartu ermöglicht, wofür der Verfasser dem Ministerium und der Universitätsverwaltung seinen tiefsten Dank ausspricht.

Die Untersuchung der mitgebrachten Pflanzenproben wurde, soweit es möglich war, vom Verfasser durchgeführt ¹⁾. Schwie-

1) Wichtigste benutzte Literatur: Lindman, C. A. M., Svensk Fanero-

riegere Proben und solche, wo sicher bestimmtes Vergleichsmaterial in Tartu nicht vorhanden war, wurden von mehreren Kennern bearbeitet, und zwar übernahmen die Durchmusterung der Lebermoosproben Herr Dr. H. Buch (Helsinki), die Bearbeitung der Flechten Herr Dr. Veli Räsänen (Kurkijoki, Finnland) und die der Moose Herr Dr. Mauno J. Kotilainen und zum Teil Herr Professor Dr. Brotherus. Herr Priv.-Doz. Dr. L. Geitler (Wien) hatte die Liebenswürdigkeit einige Algenproben zu bestimmen. Allen den genannten Herren ist der Verfasser zum tiefsten Dank verpflichtet, ebenso seinem Freunde Herrn Professor Dr. K. Linkola, der in vieler Hinsicht die Durchführung dieser Arbeit förderte.

Für die Mitteilung von wertvollen Daten lichtklimatischen Charakters dankt der Verfasser den Leitern der staatlichen meteorologischen Stationen in Finnland, Norwegen, Schweden und Estland, den Herrn Melander, Hesselberg, Wallén und Frisch, Herrn Professor Dr. Ångström (Stockholm) und Mag. A. Ohu (Tartu).

II. Vegetationsanalysen nebst Angaben über das Pigmentsystem der betreffenden Pflanzenarten.

1. Einleitende Bemerkungen über die grundlegenden Einheiten der Synökologie.

Auf dem dritten internationalen Botanikerkongress in Brüssel haben sich bekanntlich Briquet, Drude, Engler, Flahault, Schröter, Harshberger, Smith, Warburg und

gamflora, Stockholm 1926. Hermann, Flora von Deutschland und Fennoskandinavien sowie von Island und Spitzbergen, Leipzig 1912. Mela-Cajander, Suomen kasvio, Helsinki 1906. Hjelt, Hj., Conspectus Florae Fennicae, vol. I—VII, Helsinki 1888—1926. Roth, G., Die europäischen Laubmoose, Leipzig 1905. Brotherus, V. F., Die Laubmoose Fennoskandias, Helsingfors 1923. Limpricht, Laubmoose, in Rabenhorst's Kryptogamen-Flora IV. Bd. Abt. 1. u. 2. Warnstorf, C., Laubmoose, in Kryptogamenflora d. Mark Brandenburg, Leipzig 1906. Müller, K., Die Lebermoose Deutschlands, Oesterreichs u. der Schweiz, I. u. II. Abt., in Rabenhorst's Kryptogamenflora, 2. Aufl., VI. Bd., Leipzig 1906—1916. Warnstorf, C., Leber- u. Torfmoose, in Kryptogamenfl. d. Mark Brandenburg, Leipzig 1903. Zahlbruckner, A., Lichenes, in den Nat. Pflanzenfamil. von Engler, A., Bd. VIII, Leipzig 1926. Lindau, G., Die Flechten, Berlin 1913. Migula, W., Die Flechten, in Thomé-Migula, Flora von Deutschland, Oesterreich u. der Schweiz (soweit erschienen).

Warming für die von Warming gegebene Definition der Formation entschieden¹⁾, wonach diese aus Assoziationen besteht, die in ihrer floristischen Zusammensetzung verschieden sind, aber in erster Linie in ihren Standortsbedingungen, in zweiter Linie in ihren Lebensformen übereinstimmen.

Den höchsten Vegetationstypus in dem vom Verfasser untersuchten Gebiet repräsentieren die *Betula tortuosa*-Wälder. Man könnte zur Annahme neigen, dass alle diese Wälder zu einer Formation zu zählen seien. Jedoch erwähnt Warming unter der Formation der sommergrünen Laubwälder nur die *Betula graminosa* und *herbosa* mit Bodenvegetation aus Gräsern und breitblättrigen dikotylen Stauden, während die Heidebirkenwälder Lapplands unter der Serie der Formationen der Torfböden genannt werden. Diese Spaltung erscheint vollkommen berechtigt. Es lassen sich tatsächlich zwei Formationen unterscheiden: die Formation der Wiesenbirkenwälder und die Formation der Heidebirkenwälder. Diese zwei Formationen unterscheiden sich sowohl in ihren Standortsbedingungen als auch in den sie zusammensetzenden Lebensformen. Die artenreichsten Wiesenbirkenwälder wachsen auf nährstoffreichem neutralem Humus; dagegen bestehen die oberen Bodenschichten in den Heidebirkenwäldern aus Rohhumus. Für die ersteren ist das Auftreten von mehrjährigen mesophytischen dikotylen Stauden (*Geranium silvaticum*, *Cirsium heterophyllum*, *Solidago virgaurea*, *Trollius europaeus*, *Filipendula ulmaria*, *Chaerophyllum silvestre* usw.) bezeichnend, für die Heidebirkenwälder — das überaus reichliche Vorkommen mehrerer immergrüner Zwergsträucher (*Empetrum*, *Phylloce*, *Vaccinium vitis idaea*, *V. myrtillus*, *Lycopodium*-, *Pirola*-Arten usw.).

Was die andere Grundeinheit — die Assoziation — betrifft, so herrscht hier bis zur allerneuesten Zeit grosse Meinungsverschiedenheit. Auf dem Brüsseler Kongress wurde eine Assoziation einstimmig als eine Pflanzengesellschaft von bestimmter floristischer Zusammensetzung, einheitlichen Standortsbedingungen und einheitlicher Physiognomie definiert. Es kam jedoch bald zu Meinungsverschiedenheiten. Einige schwedische Forscher insbesondere haben der Assoziation einen anderen Inhalt gege-

1) Flahault u. Schröter, Berichte u. Vorschläge, Zürich 1910, und Votes et remarques des membres de la commission pour la nomenclature phytogéographique.

ben¹⁾. So ist nach Du Rietz²⁾ eine Assoziation eine in der Natur existierende, durch die Natur selbst mehr oder minder scharf und deutlich abgegrenzte Artenkombination.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass auf ähnlichen Standorten abweichende Pflanzenvereine auftreten können, da die Faktoren, die das Entstehen und das Bestehen einer Assoziation bedingen, sehr verschieden sind³⁾. Doch dürfte es kaum exakt bewiesen sein, dass eine und dieselbe Assoziation auf ganz verschiedenen Standorten (im Sinne des Brüsseler Kongresses) auftreten kann.

Auch über die Frage, ob eine Assoziation als eine Abstraktion zu betrachten sei oder nicht, herrschen verschiedene Ansichten. Nach vielen Autoren gibt es in der Natur Assoziationsindividuen — „individus d'association“ (Braun-Blanquet, Pavillard), die sich zu der betreffenden Assoziation ähnlich verhalten, wie einzelne Pflanzenindividuen zu der entsprechenden systematischen Art⁴⁾. Vor einigen Jahren hat Alechin⁵⁾ eine gänzlich abweichende Auffassung ausgesprochen, nach der die Assoziationen Realitäten sind und vermittels der Untersuchung von „Abschnitten“ erkannt werden, wobei ein Assoziationsabschnitt kein Individuum ist. Alechin ist der Meinung, „dass die Assoziation nach Raum verlangt und dass grosse Flächen erforderlich sind, damit sie ihren vollen Ausdruck finden kann“. Es ist somit eine Assoziation die Summe aller ihrer Abschnitte. Eine Assoziation in diesem Sinne würde wohl gewissermassen der Einheit der Geologen — Stufe — entsprechen. Der Verfasser schliesst sich der Auffassung von Alechin an. Allerdings wird die Erforschung der Pflanzenassoziationen im Vergleich mit derjenigen der geologischen Stufen dadurch erschwert, dass erstere oft in äusserst zahlreiche isolierte grosse, oder auch in ganz winzig kleine Abschnitte gespalten sind, zwischen die sich Abschnitte anderer Assoziationen hineinschieben.

• 1) Kylin, Harald, Über Begriffsbildung und Statistik in der Pflanzensoziologie. Botaniska Notiser, Lund 1926.

2) Du Rietz, G. Einar, Zur methodologischen Grundlage der modernen Pflanzensoziologie, Upsala 1921.

3) Du Rietz, G. Einar, Kritik an pflanzensoziologischen Kritikern. Botaniska Notiser, Lund 1928, pp. 10—12.

4) Braun-Blanquet, J., Pflanzensoziologie, Berlin 1928.

5) Alechin, W. W., Ist die Pflanzenassoziation eine Abstraktion oder eine Realität. Engler's Bot. Jahrb. Bd. 60, Beiblatt p. 18.

Fig. 1.

Fjeldregion nördlich von Kolttakönigäs (Boris-Gleb). Die Zwergstrauchheide wird hauptsächlich von *Diaperis*, *Arctostaphylos alpina*, *Empetrum*, *Betula nana* und *Juncus trifidus* gebildet. Im Hintergrunde Elvenäs. Verf. Photo. 28. Juli 1927.



Übrigens sind Assoziationsflecke, die durch die Vermehrungsweise der einzelnen Arten bedingt und durch massenhaftes Auftreten einer Art (oder einiger Arten) charakterisiert sind, z. T. als „Assoziationen“ beschrieben worden. Wertvolle Daten bezüglich der Begrenzung der Assoziationsabschnitte („Siedelungen“) bringt Kujala¹⁾.

2. Über die allgemeine Natur der untersuchten Gebiete.

Die Örtlichkeiten, aus denen die unten folgenden Vegetationsanalysen stammen, sind: die Gebiete von Pääskyspahta, Kolttakönigäs und Kilpisjärvi in Finnisch-Lappland und die Insel Seiland in Nord-Norwegen.

Wie aus der der Arbeit von Hausen²⁾ beigefügten Karte ersichtlich, wird das Massiv von Pääskyspahta-tunturi³⁾ (auf der Karte Ordzuoave) von Grünstein gebildet, der von einer schma-

1) Kujala, V., Über die Begrenzung der Siedelungen. Sonderabr. aus den Commun. ex Inst. quæstion. forestal. Finlandiae editae 10.

2) Hausen, H., Über die präquartäre Geologie des Petsamo-Gebietes am Eismeere. Suomen geologinen toimikonta, Helsinki 1926.

3) Pääskyspahta, Petsamon tunturit und Kolttakönigäs liegen ungef. auf dem 69.5° n. Br. und 30. 5° ö. L.

len Hälleflinta-Zone durchzogen ist. Kalkreiches Gestein fehlt. Eine Ausnahme ist die Umgebung der nordöstlichen Bucht des Kutsjärvi, wo geschichtete Dolomiten auftreten. Die üppigen Wiesenbirkenwälder in der Umgebung dieser Bucht (s. unten) stehen also zum Teil auf mehr oder weniger kalkhaltigem Boden. Dagegen fehlt kalkreiches Gestein oberhalb der Waldgrenze vollständig. Weiter im Süden, jenseits des Kolosjoki, treten Serpentinesteine und Tonschiefer auf. Auf diese verhältnismäßig schmale Zone folgt ein grosses Grün-

steingebiet, so dass auch die höchste Erhebung in den Petsamontunturit — der Säräslaki (559. 3 m) — sich in diesem befindet.

Fig. 2.

Kilpisjärvi-Gegend. Blick auf Pieni-Malla. Im Vordergrund Zwergstrauchheide auf dem Saana. Zwischen dieser und dem See die Birkenwälder. Im Hintergrunde die Bucht Kolttahti und die auf der schwedischen Seite gelegenen Fjelle. Verf. Photo. 19. August 1927.



Sehr kalkarm ist die Fjeldregion westlich von Kolttaköngäs (Boris-Gleb), wo, nach der Karte von Hausen zu urteilen, älteste Gneisse, Gneissgranite und Magmatite den Felsgrund bilden. Abgerundete, geschliffene Formen der Felsen sind für diese, aus so hartem Gestein aufgebaute Gegend charakteristisch (s. Fig. 1). In der Fjeldregion ist dort die Bodenschicht oft sehr dürrtig.

Die Gegend am Nordufer des Kilpisjärvi (69° n. Br., 20.4°—21° ö. L.) wird von den hohen Fjelden Iso-Malla, Pieni-Malla (Fig. 2) und Saana (Tab. VIII) beherrscht. Wie aus den

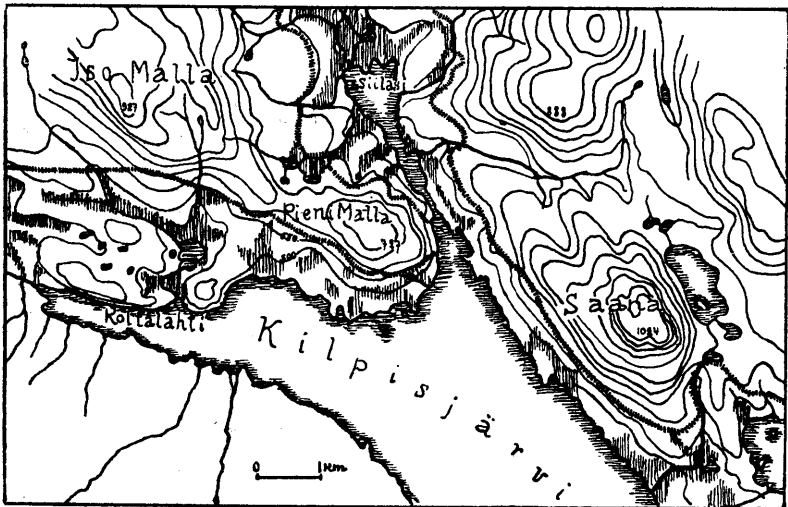


Fig. 3. Übersichtskarte der Gegend am Nordufer des Kilpisjärvi in Finnisch-Lappland. Vertikal schraffiert sind die Sümpfe. Die Waldgrenze ist durch das gestrichelte schmale Band angedeutet. Nach der „Suomen taloudellinen kartta“ (1926).

Angaben Tanner's ersichtlich, bildet diese Gegend einen Teil der skandinavischen Schieferzone. An mehreren Stellen, so an den Abhängen um den Pieni-Malla herum und am Südwestabhänge der Saana, tritt eine schiefrige Dolomitlage zutage, die ihrer hellen Färbung wegen von weitem auffällt. Über diesen Sedimentkomplexen liegen nach Tanner¹⁾ mächtige Schieferschollen. Besonders die niedrigen Teile auf der vom Siilasjärvi und vom Kilpisjärvi umgebenen Landzunge, ebenso die Hochebenen

1) Tanner, V., Zur geologischen Geschichte des Kilpisjärvi-Sees in Lappland. Fennia 25 (Helsingfors 1907).

in der Fjeldregion sind mit Moränmaterial bedeckt¹⁾. Die Waldgrenze verläuft in diesem Gebiete²⁾ in einer Höhe von 550 m — 650 m (vergl. Fig. 3). Die Wälder, die hier natürlich Birkenwälder sind, bedecken grosse Flächen am Nord- und Ostufer des Kilpisjärvi und um den Siilasjärvi herum. Oft werden diese Wälder durch braunmoorartige Sümpfe unterbrochen. — Oberhalb der Waldgrenze sind die Sümpfe von geringer Bedeutung. Dort herrschen verschiedene Heideassoziationen. In der Nähe von perennierenden Schneeflecken treten gut ausgebildete Schneewiesen

Fig. 4.

Insel Seiland
(Norwegisch-Lappland). St. Kulfjord. Auf dem Fjelde jenseits des Fjordes ist die riesige Ausdehnung des sterilen Fjeldteiles zu sehen.
Verf. Photo. 3. Aug. 1927.



1) Vergl. auch Kotilainen, M. J., Beobachtungen über die Moosvegetation und Moosflora in NW-Enontekiö in Lappland. Acta Soc. pro Fauna et Flora Fennica, 55, No. 1, 1924.

2) Tanner, V., Über die Verteilung einiger Vegetationslinien im finnländischen Enontekis-Lappland. Fennia 31 (Helsingfors 1909—1911). In dieser Arbeit wird als Mittelwert 577 m angegeben.

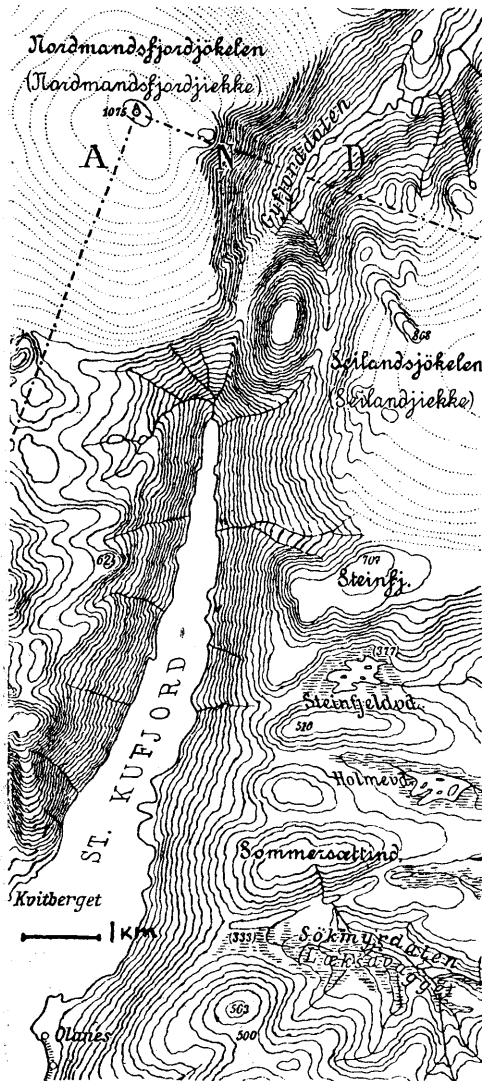


Fig. 5. Die Umgebung von St. Kufjord, Nordmandsfjordjiekke und Seilandsjiekke auf der Insel Seiland (Norwegisch-Lappland). „Topografisk kart over Norge“.

aus leichter zu erreichen sind als auf dem Landwege. Die sehr steilen Ufer des Fjords (Fig. 4) sind in den unteren Teilen mit nie-

(s. unten!) auf, so z. s. auf Iso-Malla.

Die mit hohen Fjelden bedeckte Insel Seiland (23° ö. L., $70,5^{\circ}$ n. Br.) gehört fast vollständig in die *regio alpina*. Was die geologische Beschaffenheit des Felsgrundes anbelangt, so treten im südwestlichen Teil der Insel Granite, im nordöstlichen Teil metamorphosierte Sedimentgesteine auf (Glimmerschiefer, Kalkstein, Quarzit), während der mittlere Teil der Insel bis zu den hohen vereisten Flächen den Gabbros gehört¹⁾ und daraus folgt, dass der Boden in diesem Teil überall kalkhaltig ist. Wie aus der beigegeführten kleinen Karte (die einen Teil des Blattes T 3 der „Topografisk kart over Norge“ darstellt) ersichtlich, dringt der St. Kufjord tief in das Innere der Insel, weshalb die mit Gletschern bedeckten Nordmandsfjordjiekke und Seilandsjiekke von hier

1) Geologisk oversiktskart over Nord-Norge, 1924.

drigem Birkenwald bedeckt, auf den die olivgrüne Heide folgt. Am grössten sind aber die fast vegetationslosen höheren Gebiete, wie dies deutlich in Fig. 4 zu sehen ist. — In dem am Nordufer des Kufjordes gelegenen Tale sind die unteren Teile der Abhänge von einer üppigen Hochstaudenwiese bedeckt, die hier analysiert wurde.

Die *regio alpina sterilis* bedeckt in den höheren Teilen der Insel riesige Flächen und wird zum Teil von Steinblockmeeren gebildet, die mit kleinen oder grösseren, mit feinerem Material bedeckten Flächen abwechseln, auf denen die Pflanzen der Schneewiese in + offenen Beständen wachsen. Unterhalb der vereisten höchsten Spitzen trägt der nackte

Felsboden oft nur spärliche Moose und Flechten (besonders *Gyrophora*- und *Andreaca*- Arten) Die Blütenpflanzen zeigen hier oft

Fig. 6.

Ein Blick auf den mit Gletschern bedeckten Seilandjökke bei etwas nebligem Wetter. Flechten und Moose sind in dem Blockmeer (Vordergrund!) von geringer Bedeutung. Von Blütenpflanzen treten Schneewiesensarten auf. Verfl. Photo. 3. Aug. 1927.

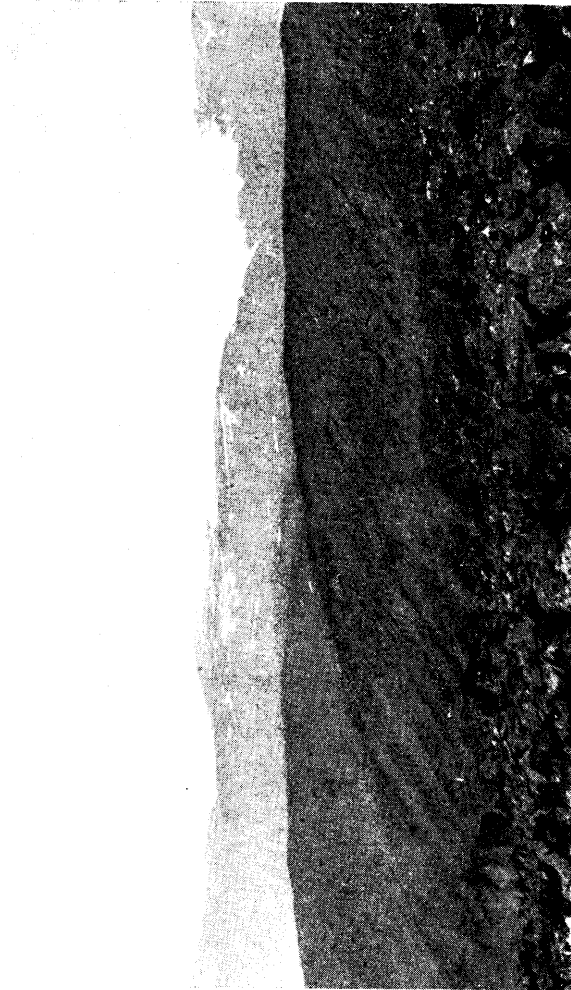


Tabelle 1¹⁾.
Inari, Finnisch-Lappland.

	Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr		
Niederschlags- mengen in mm	30 14 15 2 33 24	5 15 10 11 — —	6 12 16 11 — —	7 11 18 24 — —	39 33 22 12 30 36	72 14 57 82 64 51	67 25 64 13 104 87	33 46 52 58 51 69	59 74 39 22 33 51	71 22 8 30 23 44	31 27 15 32 15 33	31 27 17 14 11 22	12 17 330 308 — —	482 310 330 308 — —	
Mittlere Lufttemperatur	-8.8 -11.6 -5.2 -13.9 -14.3 -13.1	-12.2 -15.2 -11.4 -14.6 — -13.4	-5.5 -10.7 -13.1 -6.2 -8.1 -10.2	-3.9 -3.8 -1.0 -3.5 -3.8 -3.5	2.2 2.9 3.7 3.1 1.0 2.3	7.9 6.7 9.4 8.7 9.1 8.7	13.8 16.2 16.6 12.6 17.0 12.2	9.0 13.6 11.1 10.8 11.6 10.1	6.0 7.5 6.2 6.4 5.3 5.4	0.4 2.7 -3.0 -4.0 -4.6 -1.3	-7.9 — -10.1 -5.0 -10.7 -8.0	-10.7 -6.2 -14.8 -13.2 -9.2 -11.8	-0.8 — -1.0 -1.6 — -1.9	-0.8 — -1.0 -1.6 — -1.9	
Maxim. Lufttemperatur	0 6 4 -1	-1 3 4 —	4 3 3 8	9 10 14 4	12 22 18 12	20 22 22 26	28 32 24 30	27 22 22 26	16 14 17 18	12 8 7 10	5 4 4 2	4 0 5 -1	4 0 5 -1	28 32 24 30	28 32 24 30
Minim. Lufttemperatur	-36 -41 -30 -29 -32 -48	-31 -29 -33 -34 -28 -49	-28 -31 -35 -21 -28 -46	-21 -27 -20 -27 -19 -38	11 10 8 26 -11 -10	-2 -1 0 -1 -10	4 5 2 5 5 -4	-1 -1 -0 -0 -0 -6	-5 -2 -7 -3 -5 -13	-8 -10 -20 -24 -25 -29	-26 -27 -28 -26 -26 -42	-31 -28 -36 -35 -29 -46	-36 -41 -36 -35 -29 -49	-36 -41 -36 -35 -29 -49	

1) Kuukausikatsaus Suomen sääoloihin (Valtion meteorologinen keskuslaitos) 1923—1927.

genug dichten Polsterwuchs (z. B. *Gnaphalium supinum*, *Silene acaulis*, *Alsine biflora* usw.).

Das Klima weist in dem untersuchten Gebiet ziemlich beträchtliche Unterschiede auf. Die östlichere Gegend (Kolttaköngäs, Pääskyspahta, Petsamon tunturit) wird einigermaßen durch die Daten der Tabelle 1, welche Inari betreffen, charakterisiert.

Wie aus der Tabelle 1 ersichtlich, schwankten die während der Vegetationsperiode fallenden Regenmengen in den Jahren 1923—1927 zwischen 219 mm und 85 mm. Es kommen also sehr trockene Sommer vor. — Über die Temperatur ist zu bemerken, dass die minimale Temperatur sich nur während eines Monats — des Juli — meistens oberhalb von 0° hält. In der übrigen Zeit ist mindestens Nachtfrost möglich.

Bezüglich der Kilpisjärvi-Gegend sei an einige Angaben aus der Arbeit von Fries erinnert. In den dortigen Wäldern soll die Schneedecke zwischen dem 1. und 15. Juni vollständig verschwinden. Was die Länge der Vegetationsperiode betrifft, so dauert diese nach Fries in Torne-Lappmark in den höheren Teilen der *regio alpina* 1—1½ Monate, in den niedrigen Teilen — ca 2 Monate und in der *regio subalpina* (Birkenwaldgebiet) 2½ — 3 Monate. Daten über Temperatur und Niederschlagsmengen in Karesuando finden sich ebenfalls bei Fries¹⁾. Auch Kotilainen gibt eine klimatische Übersicht des Kilpisjärvigebietes²⁾.

Seit dem Jahre 1922 funktionieren in der Nähe des finnischen Kilpisjärvi-Gebietes zwei norwegische meteorologische Stationen 3. Ordnung: Frihetsli und Kautokeino. Da die Angaben dieser Stationen, von denen die eine westlich, die andere östlich vom Untersuchungsgebiet gelegen ist, verhältnismässig wenig voneinander abweichen, so dürften sie die Gegend am Nordufer des Kilpisjärvi gut charakterisieren. Sie geben eine Vorstellung von den klimatischen Verhältnissen in der dortigen Birkenregion. Daten für die *regio alpina* fehlen.

Bei der Vergleichung der Zahlen aus Frihetsli und Kautokeino zeigt es sich, dass die Niederschlagsmengen beider Stationen an-

1) Fries, Th., Botanische Untersuchungen im nördl. Schweden. Uppsala 1913, p. 10.

2) Kotilainen, l. c. p. 9.

Tabelle 2¹⁾.
Kautokeino, Norwegisch-Lappland, 68°59' n. Br., 23°7' ö. L. (Gr.), Seehöhe 317 m.

	Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr
Niederschlag: in mm	10.2	0.5	0.9	1.5	26.7	74.6	80.4	57.4	81.5	30.8	20.5	7.1	392.1
	10.7	3.4	3.9	7.3	25.1	32.2	39.1	37.6	54.6	10.4	19.1	7.3	250.7
	3.3	12.4	9.4	13.8	24.8	69.6	78.6	72.4	91.0	4.8	2.3	6.8	389.2
	3.9	4.4	6.8	28.6	20.9	46.5/	8.2	97.3	20.2	36.3	32.3	10.0	315.2
	21.7	6.7	14.5	5.1	16.1	83.4	16.8	67.4	33.1	33.8	4.5	3.9	307.0
Mittlere Lufttemperatur	-9.8	-14.6	-8.6	-6.5	0.7	6.4	12.9	8.6	5.2	-1.8	-9.7	-12.6	-2.5
	-14.0	-17.5	-15.9	-7.0	1.9	7.2	15.8	13.0	6.8	1.2	-8.2	-8.2	-2.1
	-5.8	-14.3	-16.2	-2.6	2.6	9.4	16.3	10.8	5.9	-4.9	-11.5	-14.4	-2.1
	-16.3	-17.3	-7.4	-5.8	2.0	8.9	12.6	10.3	4.6	-4.8	-7.6	-15.4	-3.0
	-15.9	-10.9	-12.5	-7.2	-0.4	8.4	17.1	11.2	4.4	-5.3	-13.7	-12.0	-3.0
Maxim. Lufttemperatur	-1.5	-0.9	3.4	2.6	11.7	17.7	22.6	17.2	13.1	5.2	1.6	2.5	22.6
	-2.5	-4.1	3.1	3.8	10.5	18.6	27.2	24.6	17.6	10.2	3.2	3.3	27.2
	3.9	-1.1	-2.5	6.1	18.5	16.3	27.6	20.3	12.9	7.1	2.9	1.0	27.6
	3.7	0.8	1.8	5.5	13.8	20.4	23.4	20.5	15.5	5.5	2.5	3.5	23.4
	-2.6	2.8	0.8	0.8	7.3	25.6	28.7	25.8	15.1	7.6	-2.6	-1.8	28.7
	-29.2	-34.1	-36.1	-24.2	-19.2	-4.7	3.6	-1.7	-4.8	-13.1	-29.1	-31.7	-36.1
	-46.0	-33.8	-35.1	-28.2	-11.6	-2.6	4.9	-3.5	-5.1	-14.1	-30.7	-35.6	-46.0
Mimim. Lufttemperatur	-27.1	-35.6	-35.4	-23.5	-10.0	-0.5	0.1	-2.6	-6.5	-21.2	-28.1	-34.7	-35.6
	-37.3	-43.0	-25.4	-31.8	-12.4	-1.1	1.1	-2.8	-7.9	-27.3	-32.3	-38.4	-43.0
	-37.5	-36.6	-33.8	-24.7	-12.1	-2.0	3.9	-0.9	-8.0	-26.1	-32.2	-33.3	-37.5

1) Zusammengestellt nach Daten des Jahrbuchs d. Norwegischen Meteorolog. Instituts für 1923—1927,

Tabelle 3¹⁾.
 Frihetsli, Norwegisch-Lappland, 68°47' n. L., 19°43' ö. L. (Gr.), Seehöhe 197 m.

	Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr	
Niederschlag in mm	13.7 20.4 75.9 4.6 6.9	1.9 3.3 9.6 9.7 45.4	12.6 13.3 7.9 18.3 12.7	4.2 8.3 9.9 25.9 4.5	28.5 25.0 18.2 5.8 1.3	62.0 29.0 38.4 35.4 51.9	120.2 48.4 35.1 23.2 41.6	31.5 29.6 31.7 65.1 40.9	51.3 54.8 7.3 32.7 26.3	17.2 17.3 7.3 84.6 30.7	26.5 41.9 5.2 38.0 0.2	16.4 17.1 6.1 35.9 18.2	386.0 308.4 6.1 379.2 280.6	
Relative Luftfeuchtigkeit	68 71 67 57	68 71 58 53	57 67 56 50	66 61 61 59	61 58 51 53	58 62 54 60	66 53 56 50	69 58 67 58	77 58 62 63	76 73 67 68	76 72 67 72	70 61 55 73	68 60 60 60	
Mittlere Lufttemperatur	-8.6 -7.1 -2.1 -9.7 -12.2	-10.8 -12.7 -8.0 -9.4 -7.0	-1.2 -12.0 -9.7 -3.9 -7.4	-2.5 -4.7 0.9 -1.4 -3.1	3.9 2.7 4.7 3.1 2.8	6.4 8.1 10.2 9.1 9.1	12.6 15.3 17.4 12.3 16.0	9.6 12.2 11.3 10.6 12.2	7.7 7.4 11.3 10.6 5.8	7.7 7.4 -3.3 -4.9 5.0	0.3 2.6 -3.3 -3.5 -9.6	6.3 -4.0 -9.5 -5.4 -9.6	11.0 -4.2 -11.2 -12.2 -8.8	0.0 0.3 -0.5 -0.5 -0.5
Maxim. Lufttemperatur	0.7 2.6 8.2 7.0	7.0 6.1 2.4 8.3	8.4 8.7 4.9 4.2	4.9 7.3 9.1 5.8	12.0 9.2 17.0 13.0	17.4 19.3 18.1 20.0	37.7 37.7 27.0 24.2	20.0 25.3 19.3 21.0	19.0 15.4 9.3 15.2	5.2 10.9 7.2 7.0	5.9 6.7 7.2 3.0	7.5 7.2 4.0 6.0	24.3 37.7 37.7 24.2	
Minim. Lufttemperatur	-22.5 -26.0 -15.3 -28.5	-31.7 -25.7 -22.4 -32.2	-28.7 -30.7 -25.6 -17.3	-19.3 -29.4 -13.2 -18.7	-6.3 -5.8 -7.0 -7.7	-3.6 -5.5 1.2 -0.6	4.1 3.6 -1.6 0.3	-2.6 -5.3 -0.6 -2.5	-6.2 -4.1 -0.6 -7.9	-13.1 -14.5 -19.9 -21.9	-21.0 -21.3 -26.0 -23.0	-31.5 -26.4 -31.9 -28.7	-31.7 -30.7 -32.2 -31.0	
	-31.0	-23.0	-22.0	-17.0	-13.5	-2.0	0.4	-2.1	-7.7	-20.0	-25.5	-27.9	-31.0	

1) Zusammengestellt nach Daten des Jahrbuchs d. Norwegischen Meteorologischen Instituts für 1923—1927.

Tabelle 4¹⁾.

Halde (Nord-Norwegen), 69°56' n. Br., 22°56' ö. L. (Gr.), Seehöhe 892.8 m.

	Jan.	Febr.	März	Apr.	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.	Jahr			
Niederschlag in mm	89.2 97.9 110.8 108.6 405.6	272.3 216.3 30.3 56.0 72.6	195.7 66.8 293.7 102.2 95.3	194.2 108.1 113.6 60.5 120.5	76.3 57.3 58.9 61.3 42.3	87.1 60.7 74.0 44.7 47.3	52.2 21.1 39.0 13.0 36.0	65.3 69.8 39.5 21.2 50.5	55.0 48.4 56.9 77.1 59.3	171.9 94.9 128.8 40.1 163.4	119.5 182.1 155.2 163.3 111.6	133.6 198.5 71.2 154.3 155.0	87 86 81 83 84	1512.3 1221.9 1171.9 907.3 1359.4		
Relative Luftfeuchtigkeit	83 88 88 76 88	80 78 73 77 82	84 83 82 81 79	82 87 83 85 86	87 89 90 89 84	92 90 90 83 90	86 76 84 77 80	91 90 88 85 80	92 90 91 90 91	88 91 83 83 87	85 89 86 83 84	89 87 81 83 83	87 86 81 83 84	87 86 81 83 83		
Mittlere Lufttemperatur	-12.3 -10.3 -8.9 -7.0 -6.3	-8.8 -8.5 -7.2 -12.3 -9.3	-7.8 -10.8 -5.2 -11.1 -12.6	-3.7 -6.1 -8.1 -2.6 -5.9	-0.9 -0.3 -3.6 -2.6 -2.4	3.3 6.2 -0.6 0.5 3.5	5.7 10.2 7.6 10.8 11.0	6.2 6.4 3.7 8.6 7.5	0.1 3.0 1.4 3.0 2.3	6.2 6.4 3.7 8.6 7.5	-5.5 -3.2 -3.9 -0.5 -5.5	-7.5 -7.4 -7.9 -5.6 -8.5	-9.2 -10.6 -8.6 -6.0 -11.9	-3.4 -2.6 -3.4 -2.6 -3.2	-3.4 -2.6 -3.4 -2.6 -3.2	
Maxim. Lufttemperatur	-1.5 -0.3 2.2 6.4 -21.2	0.2 3.0 -3.1 -22.2 -19.3	1.2 0.1 5.4 -20.4 -16.7	4.9 0.9 1.7 -11.6 -16.4	8.2 4.2 9.8 -10.7 -5.5	9.0 10.7 12.7 4.5 -5.0	14.8 18.2 14.3 14.8 11.6	15.6 15.9 16.0 -0.4 0.6	15.7 11.2 7.6 6.4 3.8	15.7 11.2 7.6 6.4 3.8	6.3 6.3 6.3 -12.6 -10.5	1.6 1.8 0.6 -17.6 -14.7	4.4 4.4 2.7 -18.8 -17.4	1.2 4.4 2.7 -22.2 -25.0	14.8 19.2 18.1 18.1 15.8	14.8 19.2 18.1 18.1 15.8
Minim. Lufttemperatur	-20.7 -14.9	-18.4 -17.2	-15.0 -23.2	-17.4 -14.6	-7.3 -10.2	-6.8 -0.6	1.1 0.3	0.1 -2.0	1.8 -3.7	-7.4 -10.3	-15.0 -17.7	-15.8 -22.5	-21.9 -23.2			

1) Nach Daten d. Jahrbuchs d. Norwegischen Meteorologischen Instituts für 1921—1925.

nähernd gleich sind (250—400 mm). Es kommt nicht selten vor, dass während der Vegetationsperiode (Juni, Juli, August) nur ca 100 mm Regen fällt. Die Regenmengen während der Vegetationsperiode betragen in den Jahren 1923 bis 1927: 213.7, 107.0, 105.2, 123.7, 134.4 (Frihetsli); 212.4, 108.9, 220.6, 152.0, 167.6 (Kautokeino). — Die mittleren Lufttemperaturen für Juni, Juli und August sind für beide Orte fast dieselben. Dagegen machen sich bei den monatlichen Minima und Maxima Unterschiede bemerkbar. Im allgemeinen ist die Lufttemperatur im östlicher und höher gelegenen Kautokeino niedriger. Seiner Höhenlage nach kommt Kautokeino dem Kilpisjärvicebiet (Kilpisjärvi selbst liegt in einer Höhe von 463 m) ziemlich nahe.

Für die Beurteilung der klimatischen Bedingungen auf der Insel Seiland sind die Daten der benachbarten meteorologischen Station von Haldde, die bis 1925 zurückreichen, von Bedeutung. Wenn schon die Niederschlagsmengen in Haldde im Vergleich zu denjenigen des Kilpisjärvi-Gebietes viel beträchtlicher sind¹⁾ und hier unter Umständen auf einen Monat ebensoviel Niederschläge kommen können wie dort auf ein Jahr (im Durchschnitt sind die jährlichen Mengen in Haldde 3—4 mal grösser als in Frihetsli oder Kautokeino), so sind trotzdem die Regenmengen während der Vegetationszeit nicht gross. Für die Jahre 1921—1925 betragen diese für Juli + August: 117.5, 90.9, 78.5, 34.2, 86.5.

Wie aus den Temperaturangaben ersichtlich, ist hier die Vegetationszeit auf Juli und August eingeschränkt. Im übrigen sind die Eigentümlichkeiten eines Seeklimas deutlich ausgeprägt, was aus einem Vergleich der Minimum-, Maximum- und Mitteltemperaturen in den Tabellen 1—4 klar hervorgeht.

3. Die Formation der Wiesenbirkenwälder.

A. Analysen.

Die Wiesenbirkenwälder Lapplands überraschen jeden vom Süden kommenden durch ihre Üppigkeit. Die Birke wird stellenweise über 10 m hoch. Mit ihr vergesellschaftet finden sich mehr oder weniger vereinzelt andere Laubbaumarten, so besonders die Soolweide, die Eberesche und zuweilen auch der Faulbaum. Dichte

1) Vergl. d. Karte über mittlere jährliche Niederschlagshöhe in H a n n - S ü r i n g, Lehrbuch der Meteorologie, Leipzig 1927.

Bestände von bis 1 m hohen Stauden wie *Geranium*, *Trollius*, *Chamaenerium*, *Chaerophyllum*, *Angelica*, *Athyrium* usw., zu denen sich noch viele andere niedrigere Stauden hinzugesellen, bilden die Bodenvegetation. Zur Blütezeit bietet das blumenreiche Innere dieser Wälder einen prächtigen Anblick, weshalb Thore Fries diese, was Farbenpracht, Wachstum und Üppigkeit betrifft, den Laubwiesen und wiesenartigen Laubwäldern in Mittel- und Süd-schweden zur Seite stellt.

Wie Thore Fries es besonders hervorgehoben hat, sind derartige Wälder auf das Vorhandensein fließenden Wassers angewiesen. Ein anderer, die Ausbildung dieser Wälder begünstigender Umstand ist ein gewisser Kalkgehalt des Bodens, der die Bildung von Rohhumus verhindert. Dass jedoch Wiesenbirkenwälder auch auf Rohhumus entstehen können, wenn nur fließendes Wasser vorhanden ist, unterliegt kaum einem Zweifel. Allerdings ist die floristische Zusammensetzung dieser letztgenannten Wälder ärmer, als diejenige der Wiesenwälder der Kalkgebiete, auch treten hier mehrere Rohhumuspflanzen auf, die in den artenreichsten Wiesenbirkenwäldern der Kalkgebiete fehlen.

Der untersuchte Wiesenbirkenwald-Assoziationsabschnitt auf den NW Abhängen des Pääskyspahta steht auf einem Boden, der folgenden Aufbau zeigt: Der 2—3 cm mächtigen Streuschicht aus nur zum Teil verwesenen Blättern folgt eine ca 5 cm mächtige braun gefärbte torfige Rohhumusschicht, die jedoch in ihren Eigenschaften von der Rohhumusschicht der Böden der Heidebirkenwälder abweichen muss, da eine gut ausgebildete Bleicherdschicht fehlte. Tiefer folgt aus Sand und Grus bestehender Unterboden. — Die analysierte Fläche befindet sich auf einem Abhänge, dessen Neigung ca 30° beträgt und auf dem die *Betula tortuosa*-Bäume eine Höhe von über 10 m erreichen. Grösstenteils beträgt der Durchmesser der Bäume in der Brusthöhe 10—15 cm, erreicht aber nicht gerade selten 30 cm. Einstämmige Bäume treten seltener auf, in der Regel entspringen einer mehrere dm hohen Bülte 3—10 Stämme, die sich oft allseitig nach aussen neigen oder sogar bogenförmig gekrümmt sind. Die Äste sind knorrig, oft gekrümmt und wenig, dabei aber sehr unregelmässig verzweigt. Spuren abgebrochener Äste sieht man an jedem beliebigen Baumstamm. Hie und da findet man auch in einer Höhe von 1 bis mehreren m abgebrochene Stämme, gipfellose Bäume, liegende und stehende Baumleichen, die alle Zeugen der schwe-

ren Schneeschädigungen sind, denen die Bäume in diesen Wäldern während des Winters ausgesetzt sind¹⁾. Die Baumstämme — insbesondere die Borke der älteren gipfellosen Stämme — sind mit vielen Flechten bedeckt. Besonders verbreitet sind *Parmelia olivacea*, *P. sulcata*, *P. ambigua*, *P. physodes*, *P. hyperopta*, hier und da auch *Cetraria caperata* u. a. — Die Kiefer fehlt dem untersuchten Assoziationsabschnitt vollständig, dagegen begegnet man der Eberesche und dem Faulbaum. Die Stauden — besonders wichtig sind *Geranium silvaticum*, *Aspidium phegopteris*, *Athyrium filix femina*, *Trollius europaeus*, *Chamaenerium angustifolium*, *Mulgedium alpinum*, *Cirsium heterophyllum* — sind so hochwüchsig (60—120 cm!) und üppig, dass die durch sie gebildete dichte Decke für die Moose nur wenig Raum frei lässt. Flechten fehlen vollständig.

Auf der analysierten Fläche²⁾ (Anal. 1) wuchsen von den Reisern *Vaccinium myrtillus*, von mehr oder weniger breitblättrigen Stauden: *Trollius*, *Rubus saxatilis*, *Geum rivale*, *Geranium silvaticum*, *Chamaenerium angustifolium*, *Epilobium* sp., *Cornus suecica*, *Pirola secunda*, *P. media*, *Trientalis europaea*, *Melampyrum silvaticum*, *M. pratense*, *Linnaea borealis*, *Solidago virgaurea*, *Saussurea alpina*, *Cirsium heterophyllum*, *Mulgedium alpinum*, *Paris quadrifolia*, *Listera cordata*, *Aspidium phegopteris*, *A. dryopteris*, *A. spinulosum*, *Athyrium filix femina*. Die Grasform ist durch *Calamagrostis purpurea*, *Deschampsia flexuosa*, *Luzula pilosa* vertreten. Von den *Lycopodium*- und *Equisetum*-Arten fanden sich *Lycopodium annotinum*, *Equisetum pratense* und *Equisetum silvaticum*.

Die Artenzahl auf 1 m² betrug im Mittel 22, die Gesamtzahl der Arten auf der tatsächlich analysierten Fläche 42 (darunter fanden sich folgende Moose: *Dicranum scoparium*, *Rhodobryum roseum*, *Mnium cinclidioides*, *Brachythecium* sp., *Rhytidiadelphus calvescens*, *Hylocomium proliferum*, *Pellia epiphylla*). Es sei bemerkt, dass die Zahl der Arten, die diesen Wäldern bei Pääsklys-

1) Heikinheimo, O., Die Schneeschadengebiete in Finnland und ihre Wälder, Communic. ex Institut. quaestion. forestal. Finlandiae. III. Haglund, E., Ur de högnordiska vedväxternas ekologi, Uppsala 1905.

2) Die analysierte Fläche betrug 100 m². Es wurden 10 Quadrate (zu 1 m²) untersucht. Zur Zeit der Analyse (20. Juli 1927) blühten: *Trollius*, *Geranium*, *Chamaenerium*, *Cornus*, *Melampyrum pratense* und *M. silvaticum*.

pahta eigen ist, naturgemäss höher ist, denn es fehlten z. B. auf der untersuchten Fläche *Milium effusum*, *Chaerophyllum silvestre*, *Angelica archangelica* usw. — also Arten, die hier fast nur in den

Fig. 7.

Betula tortuosa-
Wald am unteren
Teil des Nordabhan-
ges des Pääskys-
pahta (Analyse p.
23). Im Hinter-
grunde die NW-
Bucht des Kuots-
järvi. Verf. Photo.
17. Juli 1927.



Wiesenbirkenwäldern auftreten und für diese sehr bezeichnend sind. Wie oben angedeutet, treten hier mehrere Pflanzenarten auf, die Rohhumus bevorzugen: *Luzula pilosa*, *Cornus suecica*, *Trientalis europaea*, *Melampyrum silvaticum*, *M. pratense*, *Linnæa borealis*, *Aspidium dryopteris*, *Listera cordata*.

Weiter sollen die Resultate einer Analyse der Wiesenbirkenwälder am Fusse des Malla-tunturi am Nordufer des Kilpisjärvi mitgeteilt werden. Diese Wälder stehen auf einem Boden, dessen oberste Schichten (10 cm und mehr) reich an neutralem nährstoffreichem Humus sind. Die beige-fügten Abbildungen (Taf. I) geben eine Vorstellung von dem allgemeinen Charakter dieser Wälder. Es sind oft geradezu natürliche Gehölzwiesen, auf

denen die Bäume verhältnismässig weit voneinander stehen, da die Bedingungen für den Baumwuchs ungünstig sind. Wenn auf den Gehölzwiesen Südschwedens und Estlands die Umwandlung dieser Wiesen in Laubwald resp. Nadelwald durch die Menschentätigkeit verhindert wird, so sind die Wiesenbirkenwälder Lapplands natürliche Pflanzengesellschaften, in denen stellenweise der Wiese grössere Bedeutung beigemessen werden muss als dem Walde und bei denen die klimatischen Faktoren (vor allem die niedrige Wintertemperatur und die eigentümlichen Schneeverhältnisse) dafür Sorge tragen, dass kein dichter Birken-Hainwald entstehen kann¹⁾. — Die Birken sind hier im Durchschnitt bloss 6 m hoch und zeigen in der Brusthöhe ca 15—20 cm im Durchmesser. Der Flechtenüberzug auf den Ästen und Stämmen besteht im allgemeinen aus denselben Arten wie in Pääskyspahta, ist jedoch viel spärlicher und lückenhafter. Unter den Flechten ist auch *Alectoria prolixa* verhältnismässig häufig.

In den weiter folgenden Analysen wird die Abundanz nach Möglichkeit durch die Individuenzahl bzw. durch die Sprosszahl angegeben. Bei Arten dagegen, wo die Sprosszahl sich einigermaßen genau überhaupt nicht bestimmen lässt, wie bei den Teppich- und Polsterpflanzen und überhaupt bei Arten, die stark verzweigt sind und dichten Wuchs aufweisen, ist die Grösse der von diesen bedeckten Fläche angegeben. Der Deckungsgrad (das heisst die Raumverdrängung) der Arten, bei denen Spross- bzw. Individuenzahl angegeben sind, wurde in die Tabellen nicht aufgenommen. Es erschien wichtiger, die Höhe der Sprosse bzw. der Individuen (als Anhaltspunkt für andere Grössen) anzugeben.

Die übliche Bestimmung des „Deckungsgrades“²⁾, bei welcher man ohne Rücksicht auf die Zahl der Individuen bzw. Sprosse abschätzt, welchen Bruchteil der Quadrat-

1) Die Spuren von Schneeschädigungen sind in Form von gebrochenen Ästen, kipfellosen Bäumen usw. auf jedem Schritt zu sehen. Nach den Angaben des Buschwächters von Siilastupa erreicht die Schneedecke in den Wäldern um Kilpisjärvi im Winter eine Mächtigkeit von ca 0.5 m. Besonders im Herbst, aber auch später, können die Birken stark vereisen, wobei sich jeder Gipfel und jeder Ast unter der Schneelast zu Boden neigt. Es sollen zuweilen im Dezember länger anhaltende Westwinde herrschen, die den Schnee auf den Bäumen zur Schmelze bringen. Deshalb soll sich die oben beschriebene Vereisung nicht selten 2—3 mal jährlich wiederholen.

2) Vrgl. z. B. Markgraf, Kleines Praktikum der Vegetationskunde, Berlin 1926.

	10	10'	10	9	8	9	10	10'	11	10	12	10	4	10	33	12	26	10	15	8
<i>Scassurca alpina</i>																				
<i>Cirsium heterophyllum</i>	15	36	13	12	220	2	20	2				13	2	10	8			15	6	6
<i>Coeloglossum viride</i>	5	15	2	17	2													16	<1	2
<i>Selaginella selaginoides</i>	20	8	3	3	w				3	3,5	w	4	w	4	w	4	17	4	w	8
<i>Equisetum pratense</i>		1		18	217	w	w	17	15	12	5		12			8		15	5	8
<i>E. scirpoides</i>					w			w		w								w	w	3
<i>Anthoxanthum odoratum</i>				45	1740	20	20	20	30	30								38	11	4
<i>Phleum alpinum</i>				35	1				18									19	<1	1
<i>Deschampsia flexuosa</i>		w	60	55	w				50	w		50	w					35	<1	5
<i>Poa alpina</i>	10	54	1		50	1	52	1				45	3					54	w	4
<i>Festuca ovina</i>		w	18	w									15		w			50	<1	3
<i>Carex capillaris</i>																		14	w	6
<i>C. rigida</i>	15	10	20	42	>100	10	10	45	12	10	15	12	8	15	>100	70		27	>20	9
<i>Fissidens adianthoides</i>									w		w								14	>40
<i>Distichum montanum</i>					w														w	4
<i>Oncophorus virens</i>					w														w	1
<i>Dicranum congestum</i>	4	w	3	3	w														w	1
<i>Tortella tortuosa</i>					w														w	3
<i>Bryum capillare</i>					w														w	4
<i>Bryum sp.</i>		w			w	0.05		0.05	w		0.05				0.05				w	8
<i>Brachythecium salebrosum</i>		w				w		w	w	w	w				w				w	7
<i>Climacium dendroides</i>									0.1	w	w				w				w	1
<i>Campyllum protensum</i>									0.1	w	w				w				w	7
<i>Rhytidadelphus sp.</i>					w			w		w	w				w				0,1	7
<i>Hylacomium proliferum</i>					w			w		w	w				w				w	2
<i>Lophozia lycopodioides</i>		w			w			w		w	w				w				w	3
<i>L. Floerkei</i>					w			w		w	w				w				w	1
<i>L. quadriloba</i>					w			w		w	w				w				w	1
<i>Plagiochila asplenoides</i>		w			w			w		w	w				w				w	5
<i>Marchantia polymorpha</i>					w	0.05		0.05		w	w				w				w	6
<i>Peltigera aphthosa</i>		w			w			w		w	w				w				w	4
<i>Peltigera sp.</i>					w			w		w	w				w				w	1
59	28	31	31	39	39	31	31	26	26	30	30	28	28	39	27	25				

Erkl.: H = Höhe in cm. M = Zahl der Sprosse, bzw. der Individuen (letzt. bei *Rhinanthus*, *Euphrasia*, *Pinguicula*). Bei vielen Arten ist die Größe der von diesen bedeckten Bodenfläche (0.1, 0.05 etc.) angegeben. Wo diese Fläche kleiner als 0.05 gefunden wurde, ist „w“ („weniger als 0.05“) gesetzt worden. F = Frequenz.

fläche die einzelnen Arten im ganzen bedecken, gibt ohne Zweifel weniger Anhaltspunkte für die Beurteilung der Eigenart eines Assoziationsabschnittes. Wenn an einem „guten“ Standorte 10 starkwüchsige *Plantago major*-Pflanzen auf einer Probefläche von 1 m² wachsen, so kann der „Deckungsgrad“ u. U. gleich 4 gesetzt werden. Dagegen müssten in einer sehr ungünstigen Lokalität womöglich 100 *P. major*-Exemplare auf das Quadrat kommen, um dieselbe Zahl zu ergeben.

Ohne Zweifel ist die „kombinierte Schätzung von Abundanz und Deckungsgrad“ in der gebräuchlichen Art ihrer Anwendung sehr bequem.

Dagegen liesse sich die Sprosszahl (noch mehr die Individuenzahl) womöglich bei einer ökologischen Analyse verwerten. So z. B. erhält die Zahl der Individuen (bzw. Sprosse) bei der Beantwortung der Frage, wie gross der Wasserbedarf, die Menge der gebildeten Assimilate usw. bei einer Pflanzenart in einem gegebenen Assoziationsabschnitt ist, eine gewisse Bedeutung, während die Zahlen, die durch eine kombinierte Schätzung von Abundanz und Deckungsgrad erhalten worden sind, sich hierbei überhaupt nicht verwenden lassen.

Allerdings ist das Zählen der Individuen (Sprosse) sehr zeitraubend, und oft ist die Zählung nicht exakt durchzuführen. Zudem schwankt die Individuen- (Spross-)grösse in einer und derselben Assoziation oft beträchtlich.

Die Wiesenbirkenwälder des Kalkgebietes sind, wie aus einem Vergleich der Analysen 1 und 2 ersichtlich, viel artenreicher als diejenigen des kalkärmeren Gebiets (Pääskyspahta). Auf 1 m² kommen hier im Mittel 30 Arten (gegen 22); auf der ganzen analysierten Fläche wurden 59 Arten (gegen 42) konstatiert. Sowohl unter den Moosen als auch unter den Blütenpflanzen finden sich mehrere Arten, die kalkhaltigen Untergrund bevorzugen oder in Lappland sogar direkt kalkhold sind.

Thore Fries hält es für höchst wahrscheinlich, dass der Boden der Birkenwälder und zum Teil auch der Nadelwälder in Torne Lappmark in einer Tiefe von 2—5 m eine, wenn auch nur recht dünne Schicht beständiggefrorener Erde führt. Falls diese Annahme für Torne Lappmark zutreffen sollte, stehen wohl auch die östlicher gelegenen Wälder bei Kilpisjärvi und Pääskyspahta auf ebensolchem Boden. Dass die gefrorene Schicht in den Heidebirkenwäldern mächtiger sein dürfte als in den Wiesen-

birkenwäldern, erscheint dem Verfasser nicht unwahrscheinlich, es fehlen jedoch direkte Beweise hierfür. Jedenfalls ist zu beachten, dass die Schneedecke in den Wiesenbirkenwäldern nach Fries höher ist, als in den Heidebirkenwäldern. — Diese grösseren Schneemassen müssen den Boden im Frühjahr mit Wasser durchtränken. Da übrigens die Wiesenbirkenwälder sich wohl stets in der Nähe von fliessendem Wasser befinden und da die Beschattung des Bodens durch die Birke ebenfalls die Wasservorräte schützt, so leiden die Pflanzen der Wiesenbirkenwälder nur in Ausnahmefällen an Wassermangel. Somit wird hier die Assimilationstätigkeit im Sommer nicht unterbrochen.

Es ist deshalb sehr verständlich, dass die überwiegende Mehrzahl der hier gedeihenden Pflanzen ihrem anatomischen Bau nach Mesophyten sind.

B. Bemerkungen bezüglich der Methodik der Untersuchung des Pigmentgehaltes einer Assoziation.

Während sehr viele Pflanzenarten rote Zellsaftpigmente bilden können ¹⁾, gibt es eine Gruppe von Pflanzen (*Equisetum*-, *Selaginella*-, *Potamogeton*-, *Aloë*-, *Bulbine*-, *Reseda*-, *Buxus*-Arten u. a.), die nie diese, sondern Plastidenpigmente (Rhodoxanthin ²⁾, Buxin, Lycopin usw. ³⁾) bilden. Ausser den genannten Pflanzenarten treten noch andere auf, die in ihren vegetativen Organen nie rote Pigmente bilden.

Andererseits weisen viele Arten Unterschiede auf, indem sie das Pigment zu verschiedenen Zeiten der Vegetationsperiode ausbilden, oder sogar früher oder später in lebenskräftigen Blättern das Vermögen einbüßen solches zu bilden. Um die Kennzeichnung dieser verschiedenen vom Verfasser konstatierten Fälle zu

1) Buscalioni, L., e Pollacci, G., Le antocianine e il loro significato biologico nelle piante, Milano 1903. Gertz, O., Studier öfver Anthocyan, Akademisk affhandling, Lund 1906. M. Wheldale Onslow, The Anthocyanin Pigments of Plants, Cambridge 1925. Lippmaa, Th., Pigmenttypen bei Pteridophyta und Anthophyta, Acta Inst. et Horti Bot. Univ. Tartuensis (Dorpatensis), vol. I, fasc. 1—3, Tartu 1926.

2) Lippmaa, Th., Das Rhodoxanthin, seine Eigenschaften, Bildungsbedingungen und seine Funktion in der Pflanze. Schriften herausgeg. von d. Nat.-Gesellsch. bei der Univ. Tartu 24, Tartu 1925.

3) Lubimenko, V., Les pigments des plastes et leur transformation dans les tissus vivants de la plante. Rev. génér. de Botanique, Paris 1928.

ermöglichen, ist ein entsprechendes System ausgearbeitet worden. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in mehreren Abhandlungen veröffentlicht worden, so dass ihre eingehende Darlegung hier überflüssig sein dürfte. Es sei nur hervorgehoben, dass jede Art für sich untersucht wird, und zwar am Anfang, am Schluss und in der Mitte der Vegetationsperiode. Da die vegetativen Organe hierbei entweder das Pigment enthalten (Bez. : 1) oder bloss das latente Vermögen zu seiner Bildung aufweisen (Bez. :(1)) oder stets pigmentfrei sind und dieses zu der gegebenen Jahreszeit nie bilden (Bez. : 0), so erhält man Bezeichnungen wie [111], [1(1)(1)], [000] usw., die leicht verständlich sind (z. B. kommt die Bezeichnung [1(1)(1)] einer Art zu, die am Anfang der Vegetationsperiode in den Blättern ein Pigment bildet, in der Mitte und am Schluss der Vegetationsperiode pigmentfrei ist, jedoch das Vermögen besitzt u. U. dieses zu bilden. — Durch Hinzufügung von „A“ resp. „C“ vor diesen Symbolen wird angegeben, ob es sich um ein Anthocyanin oder ein Karotinoid (Hämatokarotinoid nach d. Verf. ¹⁾) handelt. Bei immergrünen Arten nehmen die Bezeichnungen eine etwas andere Form an. So z. B. besagt A[1(1)1...1], dass die betreffende Art in den jungen Blättern Anthocyanin bildet, nachher ergrünt, doch das Vermögen der Anthocyaninbildung auch weiter beibehält und im Winter gerötet ist, im folgenden Sommer aber grün wird, und dass die absterbenden Blätter wieder gerötet sind.

Es könnten Bedenken entstehen, inwiefern eine solche Untersuchung einer Assoziation berechtigt ist. Ohne Zweifel ist diese von ökologischem Standpunkte aus nur dann berechtigt, wenn den genannten Pigmenten eine ökologische Funktion beigegeben werden kann. Wenn schon die Aufgabe der Anthocyanine immer noch verschieden gedeutet wird, sprechen, wie Verf. a. a. O. gezeigt hat, verschiedene Umstände dafür, dass dieselbe nur in der Begünstigung gewisser Funktionen gesucht werden kann, am wahrscheinlichsten in der Schaffung günstiger Belichtungsbedingungen in den Plastiden, die für die sich dort abspielenden fermentativen Prozesse von Bedeutung sind. Von ökologischem Standpunkte aus lässt sich die Pigmentdecke am ehesten mit einer Haarbekleidung vergleichen, nur scheint sie

1) Vergl. Lippman, Th., Über Pigmenttypen und ihre Bedeutung für die Anthocyaninfrage. Berichte d. deutsch. bot. Gesellsch. Bd. 46, Berlin-Dahlem 1928.

für die Beurteilung der Lebensbedingungen einer Assoziation mehr Anhaltspunkte zu geben als die Analysierung der Behaarung.

Es ist selbstverständlich, dass die Untersuchung des Pigmentgehaltes einer Assoziation sozusagen nur einen Zug des komplizierten Gebäudes — der Assoziation — hervorhebt. Es ist jedoch beachtenswert, dass die so erzielten Ergebnisse, wie weiter gezeigt werden soll, deutliche Beziehungen zu anderen charakteristischen Zügen der entsprechenden Assoziation, so z. B. zu ihrem Chlorophyllgehalt und dem anatomischen Baue der Blattspreite, aufweisen.

Für die Ausbildung der roten Zellsaft- bzw. Plastidenpigmente — der Anthocyane und Hämatokarotinoide — sind bekanntlich folgende Bedingungen günstig: (1) eine Anhäufung von Assimilaten (Zucker), hervorgerufen durch mangelhaften Abfluss oder durch künstliche Zufuhr derselben; (2) eine genügend starke Belichtung. — Unter natürlichen Bedingungen wird eine Stauung der Assimilate auf verschiedene Weise hervorgerufen: einerseits kann bei geringer Luftfeuchtigkeit die Trockenheit des Substrates in dieser Richtung wirken, andererseits hat auch niedrige Bodentemperatur die gleichen Folgen, falls die entsprechenden Pflanzenarten nicht fähig sind sich Wasser aus Bodenschichten mit einer Temperatur um 0° herum zu verschaffen. Wo der aufsteigende Strom stark ist und u. a. genügend Nitrate führt, sind die Bedingungen für die Ausbildung der roten Pigmente ungünstig. Da eine Beschattung den Grad der Pigmentation herabsetzt, wenn nicht direkt verhindert, so ist zu erwarten, dass die Arten, die den Wiesenbirkenwäldern eigen sind, nicht gerade reich an Anthocyaninen und Hämatokarotinoiden sein dürften; umgekehrt müsste man vermuten, dass in den stark belichteten, oft mit Wassermangel kämpfenden Zwergstrauchheiden die Verhältnisse ganz anders liegen.

C. Das phytochromatische Spektrum der Wiesenbirkenwälder.

In der Tabelle 5 sind Angaben über die Pigmentkombinationen, die den Arten der Wiesenbirkenwälder eigen sind, kurz aufgeführt worden. Zu der Gruppe A sind die Pigmentkombinationen gezählt worden, bei denen es faktisch nicht zur Bildung der roten Pigmente kommt, die also während der gesamten Vegetationsperiode grün sind. Hierher gehören Arten, die das Vermögen Anthocyanin zu bilden überhaupt nicht besitzen

— [000], [000...0] — oder letzteres jedenfalls nicht in den Assimilationsorganen bilden: A [000]; andererseits gehören hierher solche Arten, die Anthocyanin oder Hämatokarotinoide bilden können, von dieser Fähigkeit aber keinen Gebrauch machen: A [(1)(1)(1)], A [(1)(1)(1)...(1)], C [(1)(1)(1)], C [(1)(1)(1)...(1)].

Die Vertreter der Gruppe B bilden in den jungen Assimilationsorganen rote Pigmente, ergrünen nachher ohne jemals im Herbst wieder Anthocyanin zu bilden (A[1(1)0]), oder aber es wird die Fähigkeit der Anthocyaninbildung allerdings beibehalten, es kommt aber in der Regel nicht zu einer herbstlichen Anthocyaninbildung (A [1(1)(1)]).

Die anthocyaninreiche Gruppe C wird durch starke Herbstfärbung charakterisiert. Es gehören hierher die Kombinationen A [(1)(1)1] und A [1(1)1].

In die pigmentreichste Gruppe D gehören die Kombinationen A [111], A [111...1], C [111], C [111...1].

Aus der Tabelle 5 ist zu ersehen, dass die Gruppe A, bei der es zu einer Pigmentbildung nicht kommt, durch 56 Prz. und die anthocyaninarme Gruppe B durch 22 Prz. vertreten sind. Nur bei 22 Prz. tritt eine Herbstfärbung auf. Die permanentrote Gruppe D fehlt ¹⁾.

Es sollen hier einige Bemerkungen über die Herbstfärbung in den Wiesenbirkenwäldern des Kilpisjärvigebietes mitgeteilt werden ²⁾.

Die herbstliche Laubfärbung war in den Wiesenbirkenwäldern Ende August (1927) verhältnismässig weit vorgeschritten. Am 30. August wurden in den Wäldern am Fusse des Malla-tunturi folgende Beobachtungen notiert:

Hier und da sieht man einen *Betula tortuosa*-Baum mit völlig gelbem Laube, im allgemeinen ist das Laub aber grün, nur an einzelnen Zweigen sind die Blätter gelb gefärbt. Bereits am 23. August waren derartige Zweige mindestens bei 50 Prz. der Bäume zu sehen, zurzeit findet man kaum einen Baum, wo diese fehlen würden ³⁾. Zum Teil

1) Nähere Angaben in betreff einzelner Arten im „Anhang“.

2) Es sei bemerkt, dass der Sommer und der Herbst 1927 der Anthocyaninbildung der vielen Sonne wegen sehr günstig waren.

3) Thore Fries schreibt über den Laubfall in Torne Lapmark: „Die Birken beginnen normal während der zweiten Hälfte oder des Endes des August innerhalb des ganzen Gebietes ihr Laub zu verlieren“. Es ist zu bemerken, dass der Sommer im Jahre 1927 sehr günstige Vegetationsbedingungen bot, weshalb der Laubfall ca 2 Wochen später eintrat als gewöhnlich.

Tabelle 5.

Pigmentgruppe	Beobacht. Pigmentkombin.	Zahl der Arten		
			in % der Gesamtzahl	
A	[000]	6	56.0	<i>Aspidium phegopteris</i> , <i>A. dryopteris</i> , <i>A. spinulosum</i> , <i>Athyrium filix femina</i> , <i>Carex capillaris</i> , <i>Listera cordata</i> .
	[000 .. 0]	1		<i>Lycopodium annotinum</i> .
	A [000]	5		<i>Coeloglossum viride</i> , <i>Carex rigida</i> , <i>Parnassia palustris</i> , <i>Viola biflora</i> , <i>Gnaphalium norvegicum</i> .
	A [(1)(1)(1)]	14		<i>Anthoxanthum odoratum</i> , <i>Milium effusum</i> , <i>Phleum alpinum</i> , <i>Poa alpina</i> , <i>Salix lapponum</i> , <i>Ranunculus acer</i> , <i>Astragalus alpinus</i> , <i>Chaerophyllum silvestre</i> , <i>Angelica archangelica</i> , <i>Euphrasia minima</i> , <i>Rhinanthus major</i> , <i>Pinguicula alpina</i> , <i>Paris quadrifolia</i> , <i>Antennaria alpina</i> .
	A [(1)(1)(1) .. (1)]	5		<i>Pirola secunda</i> , <i>P. minor</i> , <i>P. rotundifolia</i> , <i>Vaccinium vitis idaea</i> , <i>Linnæa borealis</i> .
	C [000]	2		<i>Equisetum pratense</i> , <i>E. silvaticum</i> .
	C [(1)(1)(1) .. (1)]	2		<i>Selaginella selaginoides</i> , <i>Equisetum scirpoides</i> (?).
B	A [1(1)0]	2	22.0	<i>Trollius europæus</i> , <i>Astragalus frigidus</i> (?).
	A [1(1)(1)]	12		<i>Deschampsia flexuosa</i> , <i>Festuca ovina</i> , <i>Salix reticulata</i> , <i>Betula tortuosa</i> , <i>Polygonum viviparum</i> , <i>Thalictrum alpinum</i> , <i>Filipendula ulmaria</i> , <i>Vaccinium myrtillus</i> (?), <i>Melampyrum silvaticum</i> , <i>M. pratense</i> , <i>Bartsia alpina</i> , <i>Mulgedium alpinum</i> .
	A [(1)(1)1]	2		<i>Cornus suecica</i> , <i>Vaccinium uliginosum</i> .
C	A [1(1)1]	12	22.0	<i>Sorbus aucuparia</i> , <i>Rubus saxatilis</i> , <i>R. arcticus</i> , <i>Alchemilla glomerulans</i> , <i>Geranium silvaticum</i> , <i>Chamaenerium angustifolium</i> , <i>Trientalis europæa</i> , <i>Solidago virgaurea</i> , <i>Saussurea alpina</i> , <i>Cirsium heterophyllum</i> , <i>Rumex acetosa</i> , <i>Geum rivale</i> (?).

hat sich in diesen Blättern Anthocyanin gebildet. Unter den verhältnismässig weit voneinander stehenden Bäumen hat sich die ca 0.5 m hohe Kraut- und Strauchschicht schön gefärbt. Lebhaft rot sind sehr viele Blätter von *Geranium silvaticum*, *Chamaenerium angustifolium*, *Cornus suecica*, *Solidago virgaurea*, auch *Saussurea alpina*, *Cirsium heterophyllum*

— doch sind die letztgenannten Arten noch chlorophyllreich und erscheinen deshalb in den pigmentierten Teilen bräunlich. *Vaccinium uliginosum*, *V. myrtillus* und *Alchemilla glomerulans* haben ebenfalls mit der Anthocyaninbildung begonnen. Bei letzterer Art sind die peripheren Teile der Spreite sehr anthocyaninreich. In schönem Kontrast zu diesen roten Blättern stehen die gelben von *Trollius*, *Salix*-Arten, *Parnassia* (teilweise!), *Viola biflora*. Viele Arten sind unverändert grün geblieben: *Salix reticulata*, *S. lapponum*, *Rubus arcticus*, *Pirola*-Arten, *Ranunculus acer*, *Selaginella selaginoides*, *Equisetum*-Arten. Die Hauptmasse von *Vaccinium myrtillus*, *V. uliginosum* und *V. vitis idaea* ist ebenfalls fast unverändert.

Am 3. September ist das Bild folgendes: Die Blätter von *Geranium* haben eine zinnoberrote Färbung angenommen, die jedenfalls viel heller ist, als die schöne violettrote Färbung von *Chamaenerium angustifolium*. Mit dieser Pflanze wetteifert in der Stärke der Rötung *Cornus suecica*. Auch bei *Vaccinium myrtillus* — die Pflanze ist im allgemeinen noch grün — ist hier und da Anthocyaninbildung bemerkbar. Vom Rot und Grün der genannten und vieler anderer Arten stechen ab *Trollius*, *Gnaphalium norvegicum*, *Viola biflora*, *Ranunculus acer*, *Salix phylicifolia*, *S. nigricans*, *S. reticulata* usw., die gelbes Laub besitzen. — Unter den Birken sieht man viele mit rotem Laube. Oft machen letztere nicht weniger als die Hälfte der in Herbstfärbung stehenden Bäume aus.

4. Die Formation der Heidebirkenwälder.

A. Analysen.

Die Heidebirkenwälder Lapplands (Taf. V, VI) bedecken in der *regio subalpina* viel grössere Flächen als die Wiesenbirkenwälder, wie dies z. B. aus den Karten, die den Arbeiten von Th. Fries und Tengwall beigelegt sind, klar hervorgeht. Der Grund für ein derartiges Verhalten ist ohne Zweifel in dem Umstand zu suchen, dass die Heidebirkenwälder viel anspruchsloser und an den in der Arktis so verbreiteten Rohhumus gebunden sind. In Finnisch-Lappland, wo ja kalkhaltiger Untergrund verhältnismässig selten ist, sind sie bei weitem die wichtigsten Birkenwälder. An ihren Standorten ist die Bodenfeuchtigkeit verhältnismässig gering. Im Einklange hiermit steht das ziemlich reichliche (resp. sehr reichliche) Auftreten von Flechten und das Vorherrschen immergrüner Zwergsträucher (*Vaccinium vitis idaea*, *Empetrum*, *Phyllodoce*).

In einem Heidebirkenwald auf den Nordwestabhängen der Petsamon-tunturit bestand die Bodenschicht stellenweise aus Zwergsträuchern¹⁾, stellenweise aber vorwiegend aus Flechten (*Peltigera* sp., *Nephroma arcticum*, *Cladonia alpestris*, *C. silvatica*, *C. rangiferina*, *C. crispata*, *C. deformis*, *C. gracilis*, *C. pleurota*, *Cetraria islandica*) und Moosen (*Dicranum scoparium*, *D. fuscescens* v. *congestum*, *Pleurozium Schreberi*, *Hylocomium proliferum*, *Polytrichum commune*, *P. juniperinum*, *Lophozia lycopodioides*, *L. excisa* u. a.). Für diese Wälder ist das reichliche Auftreten von *Nephroma arcticum*, Cladonien, *Dicranum fuscescens* v. *congestum* und von Lophozien sehr charakteristisch.

Tabelle 6.

Heidebirkenwald	Bodenschichten:		
	Rohhumus	Bleicherde	Anreicherungs- schicht
(1) auf dem NW Abhang d. Petsamon-tunturit	2 cm	7 cm	4 cm
(2) am Fusse der Saana ²⁾	4 „	6 „	5 „
(3) am Westufer des Siilasjärvi (Kilpisjärvi-Geb.)	3.5 „	6 „	2 „
4) am Nordufer des Kolttalahti (Kilpisjärvi-Geb.)	4 „	4 „	1 „
(5) auf dem Kaarevaara bei Kaarsuando	3 „	3 „	1 „

Die Bodenbeschaffenheit in den Heidebirkenwäldern ist in der Tabelle 6 gegeben. Unter der Moos- und Flechtendecke befindet sich bloss ca 2—3 cm Rohhumus, welchem eine ausgeprägte Bleicherdenschicht (ca 5 cm) folgt, tiefer aber liegt eine Anreicherungsschicht von verschiedener Mächtigkeit. Wie aus der Tabelle 6 ersichtlich, wurde in bezug auf letztere an einer Stelle — im Birkenwalde am Fusse des Saana — 5 cm gemessen. In der Regel ist in dieser Lokalität die Anreicherungsschicht schwächer. So weit die Erfahrungen des Verfassers reichen, stehen wenigstens in Finnisch-Lapland die Heidebirkenwälder stets auf Pod-

1) *Vaccinium vitis idaea*, *V. myrtillus*, *V. uliginosum*, *Empetrum hermaphroditum*, *Ledum palustre*. Diesen gesellen sich zu *Cornus suecica*, *Trientalis europaea*, *Pedicularis lapponica*, *Lycopodium selago*, *L. annotinum* und *L. alpinum*.

2) An dieser Stelle fehlten Bäume innerhalb einer Fläche von rund 300 m² vollständig.

solboden mit gut ausgeprägter Bleicherde. Da, wo die Heidebirkenwälder von kleinen (im Sommer oft gänzlich trockenen) Bächen durchzogen werden, besitzt die Umgebung der letzteren eine abweichende Vegetation, wobei verschiedene Elemente des Wiesenbirkenwaldes (*Trollius*, *Geranium*, *Angelica* usw.) auftreten. An derartigen Stellen ist die Humusschicht dicker, der Humus mehr oder weniger neutral, weshalb auch die Bleicherdenschicht kaum angedeutet ist oder vollkommen fehlt.

In den fruchtbarsten Wäldern der Heideserie ist *Cornus suecica* wichtig (z. B. am Westufer des Siilasjärvi). Weniger anspruchsvoll ist *Vaccinium myrtillus*. In den trockensten Heidewäldern übernehmen *Empetrum* und *Vaccinium vitis idaea* die Herrschaft (so z. B. in der Umgebung von Kolttaköngäs).

Den ungünstigen Standortsbedingungen entsprechend ist die Birke in den Heidebirkenwäldern gewöhnlich nicht über 4—5 m, unter besonders ungünstigen Bedingungen, z. B. auf den Inseln Skogerö und Seiland, auch nur 2—3 m hoch.

Analyse 3 (p. 37).

27. August 1927. Heidebirkenwald am Westufer des Siilasjärvi nördlich vom Pieni-Malla, in einer Höhe von ca 550 m über d. Meeresspiegel. Die 4—5 m hohen Birken stehen ca 5—20 m voneinander. Ihr Durchmesser in der Brusthöhe beträgt ca 10 cm. Abgebrochene, zum Teil verdorrte Äste sind sehr gewöhnlich. Die Strauchschicht fehlt fast ganz, nur vereinzelt stehen *Betula nana*, *Juniperus communis*, *Salix lapponum*. Die analysierte Fläche ist uneben, wobei jedoch die Höhenunterschiede 1 m nicht übersteigen. An den höheren Stellen hat das massenhaft auftretende *Vaccinium myrtillus* eine braunrote Färbung angenommen; an den niedrigeren Stellen mit frischerem Boden ist es noch sommerlich grün. Fast alle *Betula tortuosa*-Bäume besitzen zum Teil gelbe Blätter. Blühende Pflanzen fehlen, ausgenommen einige verspätete *Solidago virgaurea*-Exemplare. Bodenverhältnisse s. Tab. 6 (3).

B. Das phytochromatische Spektrum der Heidebirkenwälder.

Wie aus der unten folgenden Tabelle 7 ersichtlich, ist die Gruppe A durch 33.4 Prz., die Gruppe B (Anthocyaninbildung nur in den jungen Blättern) durch 20 Prz. vertreten. Die andere Hälfte (46.6 Prz.) enthält Arten, die im Herbst Anthocyanin bil-

Analyse 3.
Heidebirkenwald am Westufer des Sillasjärvi (Kilpisjärvi-Gebiet). 27. Aug. 1927.

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		Mittelwert		
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	F
<i>Empetrum hermaphroditum</i>	10	0.12	—	—	—	—	—	—	9	0.25	8	0.5	11	0.25	8	0.12	9	0.25	8	0.75	9	0.2	8
<i>Vaccinium myrtillus</i>	12	0.5	11	0.5	13	0.75	9	0.12	0.2	0.5	10	0.25	11	0.5	10	0.5	10	0.25	10	0.06	11	0.4	10
<i>V. vitis idaea</i>	9	0.12	—	—	8	w	—	8	w	9	0.12	10	0.06	6	w	7	w	5	0.06	8	w	8	
<i>Solidago virgaurea</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	30	4	—	—	—	—	8	3	7	3	6	1	30	1	5
<i>Gnaphalium supinum</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	8	1	1
<i>Deschampsia flexuosa</i>	30	w	—	—	45	0.06	37	0.12	38	w	10	w	w	w	10	w	w	w	10	w	11	w	9
<i>Dicranum scoparium</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
<i>D. congestum</i>	5	0.25	4	0.75	5	0.70	3	0.5	3	0.25	2.5	2.5	3	0.5	3	0.75	3	0.5	2	0.5	3.3	0.5	10
<i>Hylacomium proliferum</i>	5	0.12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	w	1
<i>Polytrichum commune</i>	5	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	w	5
<i>P. juniperinum</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	w	—	—	—	—	—	w	—	—	—	—	—	w	3
<i>Lophozia lycopodioides</i>	0.12	—	—	—	0.25	—	—	—	0.5	0.5	0.5	0.5	0.12	0.12	0.12	0.12	0.25	0.25	0.12	0.12	0.12	0.2	8
<i>Lophozia</i> spp.	w	—	—	—	w	—	w	w	—	—	w	w	—	—	—	—	—	—	—	w	w	w	5
<i>Nephroma arcticum</i>	—	—	—	0.25	—	—	—	—	—	—	0.12	0.12	0.25	0.25	w	w	w	w	w	0.06	6	0.06	6
<i>Cladonia rangiferina</i>	7	w	6	w	—	—	—	—	w	w	w	w	6	0.06	0.06	0.06	0.06	—	0.06	0.06	6	w	7
<i>C. sibiratica</i>	—	—	—	—	5	w	3	0.12	3	0.06	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7
<i>C. bellidiflora</i>	—	—	—	—	—	w	3	0.06	w	w	—	—	—	w	w	w	w	w	w	—	—	—	8
<i>C. uncinata</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	w	8
<i>C. crispata</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	w	1
<i>C. cenotea</i>	—	—	—	—	—	w	—	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	10
<i>C. gracilis</i>	7	w	6	w	—	w	w	w	w	w	w	w	7	0.06	w	w	w	0.06	w	w	7	w	10
<i>C. carneola</i>	—	—	—	—	—	w	2	0.12	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	w	10
<i>Stereocaulon tomentosum</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	w	w	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	w	1
<i>Cetraria islandica</i>	—	—	—	—	—	—	—	w	w	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	w	3

Erkl.: H = Höhe in cm. M = Grösse der von der betreffenden Art bedeckten Bodenfläche. Bei *Solidago* und *Gnaphalium* Zahl der Sprosse. F = Frequenz. „w“ (wenig) bedeutet, dass die entsprechende Art weniger als 0.05 der Probenfläche bedeckt.

Tabelle 7.

Pigmentgruppe	Beobacht. Pigmentkombin.	Zahl der Arten		
			in % der Gesamtzahl	
A	[000 . . 0]	1	33.4	<i>Lycopodium alpinum.</i>
	A [000]	1		<i>Carex rigida.</i>
	A [(1)(1)(1) .. (1)]	2		<i>Empetrum hermaphroditum, Vaccinium vitis idaea.</i>
	C [000]	1		<i>Equisetum silvaticum.</i>
B	A [1(1)(1)]	3	20.0	<i>Calamagrostis lapponica, Deschampsia flexuosa, Festuca ovina.</i>
C	A [(1)(1)1]	1	39.9	<i>Cornus suecica.</i>
	A [1(1)1]	4		<i>Arctostaphylos alpina, Vaccinium myrtillus, Solidago virgaurea, Trientalis europaea.</i>
	A [1(1)1 . . 1]	1		<i>Phyllodoce coerulea (?)</i>
D	A [111]	1	6.7	<i>Pedicularis lapponica.</i>

den und oft längere Zeit gerötet oder sogar wie *Pedicularis lapponica* permanent anthocyaninführend sind. Bei einem Vergleich mit den Wiesenbirkenwäldern fällt es auf, dass die anthocyanreichen Gruppen C und D in den Heidebirkenwäldern sehr viel stärker vertreten sind, während die Gruppen A und B das entgegengesetzte Verhalten zeigen (53.4 Prz. in den Heidebirkenwäldern, gegen 78 Prz. in den Wiesenbirkenwäldern). Tatsächlich ist der Anthocyanreichtum der Heidewälder in der zweiten Hälfte des nordischen Sommers und im Herbst noch grösser, als es diese Zahlen zeigen, denn einige anthocyanreiche Arten — *Vaccinium myrtillus* und *Cornus suecica* — treten oft als herrschende Arten auf.

In den Heidebirkenwäldern am Nordostufer des Kilpisjärvi hatte die Heidelbeere bereits am 15. August stark anthocyanhaltiges rotbraun gefärbtes Laub. Es ist leider dem Verfasser unbekannt geblieben, um welche Zeit dort die Rötung begann. Es ist jedoch sehr wahrscheinlich, dass diese kaum vor dem 1. August stattfinden konnte, denn um jene Zeit war die Heidelbeere in anderen sehr ähnlichen, damals besuchten Wäldern grün gefärbt. Jedoch erst am 3. Sept.

hatte die Heidelbeere in den genannten Wäldern ihr grellrotes Herbstlaub erhalten. Da inzwischen anhaltende Nachtfröste eingetreten waren und die Temperatur auch am Tage wenig über 5° stieg, so war eine Zunahme des Anthocyaningehaltes kaum möglich. Weil diese Temperatur aber den Chlorophyllabbau nicht hindert, war rosa angehauchtes (begonnene, durch Kälte verhinderte Anthocyaninbildung!) und gelbes Laub ebenfalls ziemlich verbreitet. Zu dieser Zeit war die Grenze zwischen den Heidewäldern und den Wiesenbirkenwäldern wegen der roten Färbung der ersteren sehr augenfällig. Es sei erwähnt, dass an dieser Färbung auch *Cornus*, *Trientalis* und *Arctostaphylos alpina* beteiligt waren.

Nur *Empetrum*-reiche Wälder hatten ihren Sommeraspekt fast unverändert beibehalten.

An dieser Stelle sei auch das Verhalten von *Betula tortuosa*¹⁾ näher besprochen. Die jungen Blätter enthalten in der Regel verhältnismässig wenig Anthocyanin. An der oberen Grenze des Baumwuchses aber sind auch im Sommer oft alle Blätter, die in Ausbildung begriffen sind, in den belichteten Teilen mehr oder weniger rötlichbraun. So hatten am 23. Juli bei Koltaköngäs die *Betula tortuosa*-Exemplare in der Fjeldregion ganz ausnahmslos braunrote junge Blätter. Den roten Zellsaft führten in diesen hauptsächlich zwei polare Vakuolen der Zellen der äusseren Palisadenschicht; die Epidermiszellen waren anthocyaninfrei. Auch auf dem Pääskyspahta wurde ein gleiches Verhalten konstatiert. Die herbstliche Verfärbung war in der Gegend von Kilpisjärvi am 24. August (1927) stellenweise so weit vorgeschritten, dass bereits 50 Prz. der Bäume Äste besaßen, die nur gelbes Laub trugen. Erst am 1. September sah man auf den steilen NO-Abhängen des Pieni-Malla einige Birken mit völlig vergilbtem Laube. Da der Blattrand bei diesen Bäumen rot gefärbt war, muss man annehmen, dass es sich um die Pigmentkombination A [1(1)(1)] handelt.

Allmählich änderte sich aber das Bild, denn bei vielen Bäumen begann eine reichliche Anthocyaninbildung, so dass man am 3. Sept. in den Wäldern am Fusse der Saana stellenweise ebensoviel Bäume mit rotem Laube wie mit gelbem zählen konnte. Es ist sehr wahrscheinlich, dass bei einem beträchtlichen Teil der geröteten Bäume die Stämme irgendwie beschädigt waren, weshalb durch eine Stauung von Assimilaten Anthocyaninbildung hervorgerufen worden war. Die Belich-

1) Andere Arten betreffende Daten im „Anhang.“

tungsverhältnisse im Herbst 1927 waren der Anthocyaninbildung sehr günstig. Doch scheint diese Erklärung allein nicht auszureichen. Der Verfasser ist geneigt, in bezug auf Pigmentbildung verschiedene Formen von *Betula tortuosa* anzunehmen. Sehr bemerkenswert ist die Tatsache, dass an der Baumgrenze und in höher gelegenen Birkenwäldern überhaupt — wenigstens in Enontekiö-Lappland — die Bäume mit rotem Herbstlaube viel häufiger sind als in Wäldern, die günstigeren Bedingungen unterworfen sind. Am Fusse des Saana, auf Letsavaara, auf dem Mukkavaara waren am 8. und 9. Sept. 1927 bis 50 Prz. von den Bäumen mit verfärbtem Laube rot. Auf dem südlicher gelegenen Kaarevaara dagegen besaßen nur ganz vereinzelt Bäume diese Färbung. Es unterliegt keinem Zweifel, dass *Betula tortuosa* in Lappland vorwiegend als A [1(1)(1)] auftritt, wenn schon unter ungünstigeren Bedingungen die Steigerung der Anthocyaninproduktion bis A [1(1)1], ganz ausnahmsweise sogar bis A [111] gehen kann.

Ob es aber ausserdem eine Rasse gibt, die sich wie A [1(1)1] verhält und die besonders in der Nähe der Baumgrenze verbreitet ist, oder ob das häufige Auftreten dieser Pigmentkombination in den höher gelegenen Beständen der Birke dadurch bedingt ist, dass in diesen die Anthocyaninbildung begünstigende Beschädigungen (Schnee, Frost!), häufiger auftreten, bleibt unentschieden, wenn schon die letztere Erklärung vieles für sich hat.

Was die Lokalisation des Anthocyanins in den Herbstblättern betrifft, so waren die grossen Vakuolen (je 2 in einer Zelle) der Palisadenzellen die hauptsächlichlichen Träger des rosaroten Zellsaftes. Anthocyanin führten zum Teil auch die Zellen des Schwammparenchyms.

5. Die Formation der arktischen Wiesen.

Die Heide- und Wiesenbirkenwälder gehen oberhalb der unteren Grenze der *regio alpina* Wahlenberg's in Gebüsche über, in denen *Salix myrsinites*, *glauca*, *lapponum*, *arbuscula*, *phyllicifolia*, *nigricans*, *lanata* und *Betula nana* an Stelle der Baumschicht treten. So verwandeln sich Wiesenwälder in Wiesengebüsche (Taf. III, oben), Heidewälder in Heidegebüsche (Taf. XII, oben). Während in ersteren *Salix lanata*, *S. glauca* u. a. wichtig sind, ist den letzteren insbesondere *Betula nana* eigen. Es finden sich freilich immer Stellen in der *regio alpina inferior*, wo die Bedingungen für das Wiesengebüsch ungünstig sind, wo aber frischer schwarzer Humus auftritt, so dass die Feldschicht der Wiesenwälder und Wiesengebüsche verhältnismässig wenig ver-

ändert weiterbestehen kann und als arktische Wiese dasteht. Naturgemäss befinden sich solche Wiesen oft in der Nähe der Weidengebüsche, indem sie deren unmittelbare Fortsetzung darstellen, aber es versteht sich, dass oberhalb der Waldgrenze auch ganz isolierte Wiesen auftreten können. — Die arktische Wiese ist gewiss weniger anspruchsvoll als die Wiesenbirkenwälder. Dennoch sind die wesentlichsten Bedingungen — mehr oder weniger neutraler Humus und genügende Zufuhr von sauerstoffreichem Wasser — für das Bestehen einer Wiesenvegetation unerlässlich. Deshalb ist ihr Auftreten besonders an die Kalkgebiete gebunden. In diesen aber entscheiden die Feuchtigkeitsverhältnisse und der Sauerstoffgehalt des Wassers.

Die Wiesengebüsche bleiben in dieser Darstellung unbeachtet, da sie ihrer intermediären Stellung wegen weniger Interesse beanspruchen. — Was die arktischen Wiesen betrifft, so können sie in Hochstaudenwiesen und kurzwüchsige Wiesen eingeteilt werden (Fries, Tengwall, Warming u. a.).

Am Nordufer des Kufjordes auf der Insel Seiland (s. Fig. 5.) hatte der Verfasser Gelegenheit, schöne Hochstaudenwiesen zu untersuchen. Dort sind die Abhänge der Fjelde, die die Ufer des Fjords bilden, sehr steil; das gilt besonders für das West- und das Ostufer. Nach Norden zu liegt eine trockene Fortsetzung des Kufjordes. Diese wird von mehreren schäumenden Bächen durchschnitten, die von grosser Höhe fallen und von den mit Schnee und Eis bedeckten Nordmandsfjordjiekke und Seilandjiekke getränkt werden. Die unteren Teile der West-, Nord- und Ostabhänge sind hier bis zu einer Höhe von über hundert Metern hauptsächlich mit üppiger Hochstaudenvegetation bedeckt, die nach oben zu und in trockeneren Lokalitäten niedriger wird, wobei sich gleichzeitig sehr deutliche floristische Unterschiede zeigen. Während in den unteren Teilen kleine Wasseradern überaus reichlich sind und Hochstauden (*Athyrium filix femina*, *Mulgedium alpinum*, *Chaerifolium silvestre*, *Angelica archangelica*, *Milium effusum*) die Grösse von 1 m übersteigen (Taf. IV), sind die Stauden an trockenen Stellen viel niedriger. In dieser zweiten Assoziation sind *Solidago virgaurea* und *Chamaenerium angustifolium* massgebend. Die Farne sind hier niedriger. Ausser *Athyrium* finden sich *Aspidium phegopteris*, *Aspidium filix mas* und *A. spinulosum*. Wichtig sind die Gräser: *Aira caespitosa*, *Aira flexuosa*, *Milium effusum*, *Calamagrostis purpurea* (Taf. III, unt.).

Auf Steinblöcken, die aus der Wiese emporragen, wachsen u. a. *Alchemilla alpestris*, *Vaccinium myrtillus*, *V. vitis idaea*, *Aira flexuosa*, *Cornus suecica*.

In diesen Wiesenassoziationen sind Moose von geringer Bedeutung. Flechten fehlen.

Es seien hier die Ergebnisse einer Analyse (10 Probeflächen à 1 m²) einer Fläche von ca 200 m² mitgeteilt. Durch diese wird die floristische Zusammensetzung des *Mulgedium-Athyrium*-Assoziationsabschnittes noch nicht erschöpft, alle wichtigeren Arten dürften darin jedoch enthalten sein.

Analyse 4.

4. August 1927. Nordufer des Kuffjordes auf der Insel Seiland (Norwegisch-Lappland) in einer Höhe von ca 50 m ü. d. M. Zu dieser Zeit blühten: *Geranium silvaticum*, *Chamaenerium angustifolium*, *Mulgedium alpinum* u. a. — In allen Proben fand sich *Viola biflora*. In mehr als der Hälfte der Proben: *Rumex acetosa*, *Stellaria nemorum*, *Trollius europaeus*, *Ranunculus acer*, *Filipendula ulmaria*, *Geranium silvaticum*, *Chaerophyllum silvestre*, *Angelica archangelica*, *Valeriana excelsa*, *Solidago virgaurea*, *Cirsium heterophyllum*, *Mulgedium alpinum*, *Taraxacum* sp., *Equisetum palustre*, *Athyrium filix femina*, *Calamagrostis purpurea*, *Deschampsia caespitosa*.

In nicht mehr als 40 Prz. der Proben traten auf: *Alchemilla glomerulans*, *Chamaenerium angustifolium*, *Cornus suecica*, *Trientalis europaea*, *Myosotis silvatica*, *Gnaphalium norvegicum*, *Equisetum silvaticum*, *Aspidium ptegopteris*, *Anthoxanthum odoratum*, *Milium effusum*, *Deschampsia flexuosa*.

Den grössten Wuchs — bis über 100 cm zeigen *Chaerophyllum silvestre*, *Angelica archangelica*, *Mulgedium alpinum*, *Athyrium filix femina*. Bloss 10—20 cm hoch sind *Viola biflora* und *Trientalis europaea*.

Es war dem Verfasser leider nicht möglich, diese Assoziation auf der genannten Insel längere Zeit zu beobachten. Doch treten sehr ähnliche Pflanzengesellschaften auch anderwärts in Lappland (auch in der Kilpisjärvi-Gegend) auf. Dort gemachte Beobachtungen erlauben es, das phytochromatische Spektrum dieser Assoziation annähernd zu bestimmen.

Phytochromatisches Spektrum der arktischen Hochstaudenwiese.

Wie aus der Tabelle 8 ersichtlich, sind die pigmentarmen Gruppen A und B mit rund 71 Prz. vertreten, die reichlich Herbst-

Tabelle 8.

Pigmentgruppe	Beobachtete Pigmentkombin.	Zahl der Arten		
			in % der Gesamtzahl	
A	[000]	4		<i>Athyrium filix femina</i> , <i>Aspidium phegopteris</i> , <i>Aspidium filix mas</i> , <i>Aspidium spinulosum</i> .
	A [000]	2	42.8	<i>Viola biflora</i> , <i>Gnaphalium norvegicum</i> .
	A [1(1)0]	1		<i>Trollius europaeus</i> .
	C [000]	2		<i>Equisetum silvaticum</i> , <i>E. pratense</i> .
	A [(1)(1)(1)]	3		<i>Ranunculus acer</i> , <i>Angelica archangelica</i> , <i>Milium effusum</i> .
B	A [1(1)(1)]	8	28.6	<i>Mulgedium alpinum</i> , <i>Filipendula ulmaria</i> , <i>Chaerophyllum silvestre</i> , <i>Valeriana excelsa</i> , <i>Taraxacum</i> sp., <i>Calamagrostis purpurea</i> , <i>Deschampsia caespitosa</i> , <i>D. flexuosa</i> .
C	A [(1)(1)1]	1		<i>Cornus suecica</i> .
	A [1(1)1]	7	28.6	<i>Rumex acetosa</i> , <i>Alchemilla glomerulans</i> , <i>Geranium silvaticum</i> , <i>Chamaenerium angustifolium</i> , <i>Solidago virgaurea</i> , <i>Cirsium heterophyllum</i> , <i>Trientalis europaea</i> .

anthocyanin bildende Gruppe mit 28.6 Prz. Diese Zahlen sind von derselben Grössenordnung wie diejenigen für Wiesenbirkenwälder (dort A+B = 78 Prz. und C = 22 Prz.).

6. Die Formation der Zwergstrauchheide.

A. Allgemeine Betrachtungen über die Formationen der arktischen Heide und der Kältestepppe.

Im nördlichen Lappland gehören die Zwergstrauchheiden (vergl. Taf. VI—IX) bekanntlich zu den wichtigsten Formationen. Im Sarekgebiet bedecken sie nach Tengwall über ein Drittel der *regio alpina fertilis*. Ohne Zweifel ist in östlicher gelegenen Teilen Lapplands ihr Areal noch grösser. Fries und Tengwall haben vorzügliche Beschreibungen und Analysen dieser Heiden geliefert, die eine klare Vorstellung über die Lebensbedingungen der diese Formation bildenden Assoziationen geben. Von grösster Bedeutung sind für die letzteren zwei Faktoren: die Beschaf-

fenheit des Felsgrundes — besonders sein Kalkgehalt — und die Dauer der Schneedecke. Sehr wichtig ist der letztgenannte Faktor. Von diesem hängt der Wassergehalt des Bodens während des Sommers und die Länge der Vegetationsperiode ab.

Während in den kalkarmen Gebieten *Empetrum*, *Loiseleuria procumbens*, *Vaccinium myrtillus*, *Phyllodoce coerulea*, *Cassiope hypnoides* und *Diapensia lapponica* zu den herrschenden Arten zählen, sind für kalkreiche Gebiete besonders *Dryas*-, *Cassiope tetragona*- und *Rhododendron lapponicum*-Heiden bezeichnend. Wenn wir die Reihe mit Assoziationen beginnen lassen, die die geringste Schneedecke vertragen, also auf besonders exponierten Standorten auftreten und im Sommer oft unter der Trockenheit leiden, so ist an erster Stelle ohne Zweifel die flechtenreiche *Diapensia lapponica*-Assoz. (Fries) und die flechtenreiche *Loiseleuria procumbens*-Assoz. (Fries) [Tengwall nennt diese Assoziationen flechtenreiche *Diapensia-Loiseleuria*-Heide] zu nennen. Der Verfasser kann auf die Aussage Fries' hinweisend nur bestätigen, dass diese Assoziation selten grössere Areale bedeckt und auf lokale Erhebungen über das umgebende Terrain beschränkt ist. Fries sagt in betreff der *Loiseleuria*-Assoziation: „Frühes Abschmelzen des schützenden Schnees und starkes Austrocknen dürften die meist entscheidenden und wichtigsten Faktoren in der Konkurrenz mit den flechtenreichen *Empetrum*- und *Phyllodoce*-Assoziationen sein.“ Die *Diapensia-Loiseleuria*-Heide tritt an Stellen auf, wo eine Humusschicht völlig fehlt, oder nur schwach angedeutet ist. Diese Assoziation wird von *Carex rigida*, *Luzula arcuata*, *L. spicata*, *Salix herbacea*, *Betula nana*, *Loiseleuria procumbens*, *Arctostaphylos alpina*, *Diapensia lapponica*, *Empetrum*, *Vaccinium myrtillus*, *V. uliginosum*, *V. vitis idaea* u. a. gebildet.

Dieser Assoziation folgt die flechtenreiche *Empetrum*-Heide. Die wichtigsten Arten sind: *Empetrum*, *Betula nana*, *Pedicularis lapponica*, *Arctostaphylos alpina*, *Vaccinium vitis idaea*, *Calamagrostis lapponica*.

Die flechtenreiche *Empetrum*-Heide hat in kalkarmen Gebieten eine riesige Ausbreitung. Eine der wichtigsten Bedingungen für ihr Vorkommen ist eine nicht lange dauernde Schneebedeckung. Auch hier fehlt dem Boden gewöhnlich die Humusschicht. In den moosreichen *Empetrum*-Heiden dürfte die Schneebedeckung länger anhalten. Die Humusschicht ist nach Fries oft 4—5 cm stark. Noch beträchtlicher ist die Humusschicht in

der moosreichen *Vaccinium myrtillus*-Heide. Nach Tengwall's Angaben, die sich mit den Beobachtungen des Verfassers decken, verträgt diese Assoziation keine Blosslegung während des Winters. Sie schmilzt im Frühjahr später ab als die *Empetrum*-Heide. Die *Phyllodoce coerulea*-Heide erträgt etwas länger andauernde Schneebedeckung als die vorhergehende, steht aber dieser sehr nahe. Nach Fries kann die flechtenreiche Assoziation auf Standorten mit unbedeutender Humusbildung auftreten. Dagegen soll nach Tengwall in den moosreichen *Phyllodoce*-Heiden die Humuslage nicht selten bis 10 cm dick und die Feuchtigkeit in dieser recht bedeutend sein.

Unter den Heideassoziationen verträgt die *Cassiope hypnoides*-Heide ohne Zweifel die grösste Schneebedeckung. Wenn bereits in der *Phyllodoce coerulea*-Heide *Empetrum* und *Betula nana* nur ausnahmsweise vorkommen, *Salix herbacea* aber verbreitet ist, so fehlt diese Weide in der *Cassiope hypnoides*-Heide wohl nie. Da, wo die Schneebedeckung noch länger anhält, verschwindet auch *Cassiope hypnoides*. Zu der *Salix herbacea* gesellen sich viele mesophytisch gebaute Stauden. Es scheint aber berechtigter zu sein, diese *Salix herbacea*-Assoziationen nicht in die Heideformation einzureihen.

Etwas abseits stehen die *Dryas octopetala*-, *Cassiope tetragona*- und *Rhododendron lapponicum*-Heiden, denn zu ihrem Bestehen brauchen sie genügend kalkhaltigen Boden. Auf freiliegenden Hügeln und Berggipfeln tritt als nicht selten offene Gesellschaft die *Dryas octopetala*-Heide auf. Nach Tengwall sind Hauptlebensbedingungen dieser Assoziation neben dem Kalkgehalt auch die sehr frühzeitige Blosslegung und grosse Trockenheit des Substrats. Humus fehlt an ihren Standorten. Überhaupt sind die ökologischen Bedingungen der *Dryas*-Assoziation und der flechtenreichen *Diapensia-Loiseleuria*-Heide einander (bis auf den Kalkgehalt des Bodens) sehr ähnlich. Diese Heiden sind (wie Kalkgebiete überhaupt) sehr artenreich. Es finden sich hier (vergl. Fries) ausser *Dryas*, *Festuca ovina*, *Carex rupestris*, *Elyna Bellardii*, *Carex pedata*, *Saxifraga oppositifolia*, *Loiseleuria procumbens*, *Rhododendron lapponicum*, *Diapensia lapponica* noch mehrere andere Arten. Noch artenreicher ist die *Dryas*-Heide an den Stellen, wo die Schneedecke im Winter günstiger ist, wo sie aber früh genug abschmilzt und wo sich eine mehrere cm starke Humusschicht vorfindet. — Die Lebensbedingungen für die flechten-

reiche und moosreiche *Rhododendron lapponicum*-Heide sind denjenigen der entsprechenden *Dryas*-Heiden sehr ähnlich. Dagegen verträgt die *Cassiope tetragona*-Heide viel grössere Schneebedeckung. Tengwall vergleicht sie in dieser Beziehung mit den *Phyllodoce*-Heiden. In den flechtenreichen *Cassiope tetragona*-Heiden ist die Humuslage unbedeutend, in den moosreichen dagegen ist sie gut ausgebildet und nach Tengwall nicht selten über 10 cm dick.

Ausser den hier erwähnten Heideassoziationen schreiben Fries und Tengwall noch eine Reihe von aus „Gräsern“ bestehenden Assoziationen den arktischen Heiden zu. Tengwall verwendet hierbei die Bezeichnung „Grasheide“. Er charakterisiert sie folgendermassen: „Die hierhergehörenden Pflanzengesellschaften zeichnen sich durch in der Feldschicht dominierende Gräser und grasähnliche Pflanzen sowie durch eine reichausgebildete, aus Moosen und Flechten bestehende Bodenschicht aus. Von „Gräsern“ findet man *Anthoxanthum odoratum*, *Trisetum spicatum*, *Festuca ovina*, *Deschampsia flexuosa*, *Carex rigida*, *C. Lachenalii*, *C. brunnescens*, *Nardus stricta* und *Juncus trifidus*. *Dicranum*- und *Polytrichum*-Arten sind unter den Moosen am häufigsten, es kommt aber auch eine nicht geringe Anzahl von Lebermoosen — bisweilen sogar in hoher Frequenz — vor. Die häufigsten Flechten sind *Cetraria islandica* und *nivalis*, *Stereocaulon*-Arten, *Cladonia uncinatis* sowie Krustenflechten, besonders *Pertusaria*-Arten.“

Obwohl es keinem Zweifel unterliegt, dass die fraglichen Assoziationen mit den Assoziationen der Heide in der Bodenschicht weitgehende Übereinstimmung aufweisen, scheint dem Verfasser dennoch die Berechtigung zu fehlen, diese Assoziationen in die Heideformation einzureihen. Bei der Frage, welcher Formation eine Assoziation untergeordnet werden muss, sind ja die Lebensformen der diese zusammensetzenden Pflanzenarten entscheidend. Wenn *Empetrum*-, *Loiseleuria*-, *Vaccinium*-, *Diapensia*-, *Cassiope*-Assoziationen zu der Heide gerechnet werden, so ist dies berechtigt, da die oberste Schicht — die Krautschicht — überall zum grossen Teil von immergrünen Zwergsträuchern gebildet wird. Anders ist es mit der „Grasheide“. Diese wird aus monokotylen Stauden vom Grastypus aufgebaut. Man könnte wohl eher von einer Steppe reden, denn für die Steppen ist die genannte Lebensform sehr bezeichnend. Dass sich die Bodenschicht dieser arktischen „Steppen“ von der Bodenschicht der

südlicher gelegenen Steppen unterscheidet, ist natürlich keinesfalls überraschend, und diese Tatsache ist noch kein triftiger Grund, weshalb diese Bezeichnung nicht anzuwenden wäre, denn auch die Wiesen und Wälder Lapplands weisen im Vergleich mit den Wiesen und Wäldern von südlicher gelegenen Lokalitäten ähnliche Unterschiede auf. Allerdings erheben sich in anderer Hinsicht Bedenken, denn viele den Steppen eigentümliche Lebensformen, wie Ephemere und Zwiebelpflanzen, fehlen hier, dagegen sind — der viel grösseren relativen Luftfeuchtigkeit entsprechend — Moose und Flechten sehr verbreitet. Auch ist der Boden nährstoffärmer und die Humusschicht — wenn überhaupt vorhanden — besteht aus Rohhumus. Eigentlich müsste diese physiognomisch einigermassen an eine dürftige Steppe erinnernde, in ihrer Ökologie von dieser aber scharf unterschiedene Formation der „Grasheide“ eine neue Benennung erhalten.

Die „Grasheide“ ist z. T. an dieselben Standortsfaktoren gebunden, wie die dortige Zwergstrauchheide. Es hat den Anschein, als ob im allgemeinen die Grasheide von der Zwergstrauchheide verdrängt würde und als ob sie sich in dazu geeigneten Lokalitäten immer wieder von neuem bildete, falls der Boden der Pflanzendecke irgendwie beraubt wird. Aus Fries' Angaben ist zu entnehmen, dass sowohl die flechtenreichen als auch die moosreichen *Calamagrostis lapponica*-Assoziationen wenigstens zum Teil auf abgebrannten Flechtenheiden entstanden sind. Auch erwähnt Fries, dass die moos- resp. flechtenreichen *Calamagrostis lapponica*-Assoziationen „auf den Feuerstellen alter Lappenkäten“ normal zu entstehen pflegen. Unter welchen Bedingungen grössere *Juncus trifidus*- und *Carex rigida*-Assoziationen entstehen und ob sie sich ebenfalls auf Brandflächen bilden können, scheint bis jetzt noch nicht entschieden zu sein.

Was die *Hierochloa alpina*-Assoziation betrifft, so ist ihr Vorkommen nach Fries „streng gesetzmässig, indem die Assoziation ganz und gar auf die Teile der Hügel und anderer Höhen beschränkt ist, welche während des Winters nicht von Schnee bedeckt sind.“ An ihren Standorten fehlt die Humuslage vollständig. Sie gedeiht also unter noch ungünstigeren Bedingungen als die *Diapensia-Loiseleuria*-Assoziation. Es hat nach allem Gesagten den Anschein, dass die „Grasheide“ in der Sukzessionsreihe auf den Heideböden in der *regio alpina* die Anfangsstadien repräsentiert, welche weiter an dazu günstigen Lokalitäten in Zwerg-

strauchheide übergehen. Falls wir uns den englischen Botanikern (Moss, Tansley) anschliessen wollten und alle Vegetationstypen, welche genetisch verbunden werden können, als Phasen einer einzigen Formation auffassten, so müsste man die Assoziation der „Grasheide“ ohne Zweifel der Heideformation zuweisen. Falls wir aber Warming folgend die Formationen nach den herrschenden Lebensformen bilden, so muss man hervorheben, dass die „Grasheide“ von der Zwergstrauchheide sehr verschieden ist. Die Assoziationen der „Grasheide“ müssten deshalb einer besonderen Formation — der F. der Kältesteppen — zugeschrieben werden, die in sich bis zu einem gewissen Grade die Eigentümlichkeiten der wahren Steppe und der Heide vereinigt.

B. Analysen.

Abschnitte der *Diapensia-Loiseleuria*-Assoziation finden sich u. a. auf den höchsten Erhebungen des Pääskyspahta-Massives (lapp.: Ordzuoaivi, südlich des Kuvernörinkoski) (Taf. VIII, oben).

Der felsige Untergrund besteht dort aus Metadiabasen. In der Nähe des Kuotsjärvi treten Dolomiten zutage, fehlen aber auf den Höhen von Pääskyspahta, wo nach Hausen ausser den Metadiabasen noch Hälleflinta vorkommt. Die Fjeldregion ist mit abgerundeten Steinblöcken übersät. An vielen Stellen tritt der nackte Felsboden zutage, oder aber der aus Moränmaterial bestehende Untergrund ist mit einer unterbrochenen Vegetation bedeckt. Auf dem Geröll und den Felsen wachsen Krustenflechten (*Rhizocarpon geographicum*-Formen, *Haematomma ventosum*, *Lecidea pannaecola*, *L. macrocarpa* u. a.), *Parmelia centrifuga*, *Gyrophora proboscidea*, *G. hyperborea*, *G. spodochroa* usw. — Auf dem nur zum Teil bewachsenen Boden wechseln weisslichgelbe flechtenreiche Flecke mit olivgrünen, in denen *Empetrum* herrscht, und mit rötlichen, hauptsächlich von *Arctostaphylos alpina* gebildeten Flecken ab. Die *Betula nana*-Matten sind dunkelgrün und glänzend.

Die Rohhumusschicht fehlt zum Teil vollständig, oder aber sie ist bis 5—10 cm mächtig. Überall sieht man Flecke von einigen dm bis mehreren m im Durchmesser, die ihrer lückelosen Pflanzendecke beraubt sind und auf denen *Festuca ovina*, *Diapensia lapponica*, *Carex rigida* überaus häufig sind. Auf feuchteren entblösten Stellen wachsen *Pinguicula vulgaris*, *Juncus biglumis*, *Tofieldia borealis*, von Moosen besonders das Lebermoos

Anthelia Juratzkana. Es ist oft deutlich zu sehen, wie das *Empetrum* bestrebt ist diese kahlen Flächen zu bewachsen. Die Zerstörung der Pflanzendecke schreitet an diesen windoffenen Stellen ununterbrochen fort und dürfte wohl zum grössten Teil auf dem Blosslegen, Ausfrieren und Vertrocknen während des Winters beruhen. Es hat den Anschein, als ob hier bis zu einem gewissen Grade ein Gleichgewicht zwischen der zerstörenden Wirkung der Winde, der Kälte und des Schneewassers einerseits und der Lebenstätigkeit der Pflanzen andererseits bestünde, denn während die Flecke allmählich zuwachsen, bilden sich in der Pflanzendecke immer neue Lücken. Dass bei der Entstehung dieser kahlen Stellen oft fliessendes Wasser tätig ist, unterliegt keinem Zweifel. In Torne Lappmark (Schwedisch-Lappland) südlich des Kolttalahti konnte der Verfasser in der *regio alpina fertilis* in einer *Cassiope tetragona*-Heide viele „kahle Flecke“ sehen, die oft ganz unzweideutig auf Wasserwirkung bei ihrem Entstehen deuteten, denn erstens lagen die Flächen fast horizontal und folgten einander stufenförmig, standen hier und da sogar unter sich in direkter Verbindung, zweitens waren diese „Stufen“ vorn abgerundet oder streckten sich sogar zungenförmig vor. Das häufige Auftreten von *Diapensia* an derartigen entblössten, im Sommer trockenen Stellen ist höchst bezeichnend. Es ist sehr oft deutlich zu sehen, dass diese Art in der *Empetrum*-Heide unterdrückt wird und dort in kleineren, gewöhnlich nicht zur Blüte kommenden Exemplaren vegetiert. Deshalb ist die Zerstörung der *Empetrum*-Decke für diese Art günstig. Dasselbe gilt auch in bezug auf *Arctostaphylos alpina* und manche andere Art.

Auf den höchsten Teilen des Pääskyspahta-tunturi (Anal. 5) traten als hochfrequente Arten auf einer analysierten Fläche (ca 200 m²) *Betula nana* (5—10)¹⁾, *Empetrum* (5—10), *Vaccinium vitis idaea* (4—10) auf. In nicht mehr als 50 Prz. der Probeflächen fanden sich *Loiseleuria* (5), *Arctostaphylos alpina* (5), *Diapensia lapponica* (5—10), *Vaccinium uliginosum* (5—10), *Cornus suecica* (5—7). Von den „Gräsern“ war *Carex rigida* (10) am häufigsten, weiter folgten *Juncus trifidus*, *Festuca ovina*, *Luzula spicata*, *Deschampsia flexuosa*, *Calamagrostis lapponica*. Flechten waren in der Bodenschicht bei weitem wichtiger als Moose. Von letzteren fanden sich: *Dicranum scoparium*, *D. fuscescens*, *Rhacomitrium hypnoides*, *Poly-*

1) Die Zahlen, die den Namen der Pflanzen folgen, bedeuten deren Höhe in cm.

B. „*Diapensia*-Flecke“.

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		H	M	F	
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M				H
<i>Salix herbacea</i>	—	—	1	w	—	—	—	—	0.5	0.06	—	—	—	—	1	0.06	1	w	—	1	0.06	0.9	5	5
<i>Cassiope tetragona</i>	—	—	—	—	—	—	—	5	0.06	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Diapensia lapponica</i>	—	—	—	—	—	—	—	0.5	w	—	—	—	—	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Empetrum hermaphroditum</i>	—	—	—	—	—	—	—	0.5	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Vaccinium vitis idaea</i>	—	—	—	—	—	—	—	1	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>V. uliginosum</i>	—	—	—	—	—	—	—	1.5	w	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Festuca ovina</i>	—	—	—	—	—	—	—	6	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Carex rigida</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Juncus trifidus</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Rhacomitrium hypnoides</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Pogonatum capillare</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Polytrichum piliferum</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Anethelia Juratzkana</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Sphaerophorus coralloides</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Solorina crocea</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Cetraria cucullata</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>C. islandica</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Alectoria ochroleuca</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

1) Vielleicht von einem Steinblock durch Wasser hinuntergespült. In dem Rasen fand sich *Sphaerophorus coralloides*.

Erkl.: H = Höhe in cm. M ist bei *Pedicularis* und *Calamagrostis* die Zahl der Sprosse, bei den anderen Arten die Größe der von diesen bedeckten Bodenfläche. F = Frequenz. w < 0.05.

trichum strictum, *P. piliferum*, von Lebermoosen *Chandonanthus setiformis*, auch *Ptilidium ciliare*, *Lophozia lycopodioides* und andere *Lophozia*-Arten. Von den Flechten waren besonders häufig *Sphaerophorus coralloides*, *Cladonia alpestris*, *C. silvatica*, *C. crispata* var. *infundibulifera*, *Cetraria nivalis*, *C. cucullata*, *C. islandica*, *Alectoria ochroleuca*, in weniger als der Hälfte der Aufnahmen fanden sich *Solorina crocea*, *Nephroma arcticum*, *Peltigera* sp., *Cladonia rangiferina*, *C. coccifera*, *Stereocaulon* spp., *Pertusaria infralapponica*, *Alectoria divergens*. — Die Höhe der Moos- und Flechtenschicht betrug in der Regel 4—8 cm.

Zur Zeit der Analyse (17. Juli 1927) waren die Zwergsträucher und Stauden zum Teil \pm anthocyaninführend (besonders *Vaccinium vitis idaea*, *Arctostaphylos alpina*, *Cornus suecica*, *Diapensia lapponica*).

Analyse 6 (p. 50 u. 51).

Ein Abschnitt derselben Assoziation wurde auch auf dem Pieni-Malla (Kilpisjärvi-Gebiet) in einer Höhe von ca 700 m über dem Meeresspiegel untersucht (Taf. VIII, unt.). Ungefähr ein Drittel der Gesamtfläche fiel hier auf „kahle Flecke“ = „*Diapensia*-Flecke“, die in der niedrigwüchsigen dürftigen Heide ziemlich gleichmässig verteilt waren. Die Heideflecke (A) und die „*Diapensia*-Flecke“ (B) wurden gesondert analysiert. Die Grösse der Probeflächen betrug hier 0.25 m². In der Heide liegen hier grössere und kleinere Steinblöcke, die mit verschiedenen Flechten bewachsen sind. Ausser *Rhizocarpon geographicum* und *Haematomma ventosum* wurden *Lecidea macrocarpa*, *L. Dicksonii*, *L. pantherina*, *Gyrophora proboscidea*, *Parmelia pubescens*, *P. alpicola*, *Cetraria hepatizon* gesammelt.

Es ist sehr bezeichnend, dass auf den „kahlen“ Flecken junge Exemplare (aber auch grössere, blühende) von *Diapensia* oft auftreten, obschon die von dieser Art bedeckte Bodenfläche nicht gross ist. Da hier *Salix herbacea*, *Anthelia Juratzkana* und *Solorina crocea* sich in mindestens 50 Prz. der untersuchten Quadrate vorfinden, so stehen die „*Diapensia*-Flecke“ den *Salix herbacea*-Assoziationen, den wichtigsten Assoziationen des Schneebodens, ziemlich nahe.

Einige hundert m von dem analysierten Assoziationsabschnitt entfernt wurde an einem geschützteren Standort die *Cassiope tetragona*-Heide untersucht. Der betreffende Abhang ist sanft nach Westen geneigt und dürfte im Winter eine ziemlich gute Schneedecke besitzen. Wegen der hohen Lage sind auf dieser

Analyse 7.
Cassiope tetragona-Heide auf dem Pieni-Malla (Kilpisjärvi-Gebiet).

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10				
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	F		
<i>Salix lapponum</i>	12	0.06	—	—	—	—	14	0.06	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13	w	3
<i>Betula nana</i>	12	0.25	8	w	—	—	9	w	—	—	9	w	9	0.12	—	—	8	0.25	10	w	9	0.07	8
<i>Cassiope tetragona</i>	10	0.25	10	0.25	8	0.4	9	0.06	7	0.25	9	0.06	10	0.25	15	0.75	12	0.25	10	0.12	10	0.3	9
<i>Arctostaphylos alpina</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3.5	0.06	—	—	—	—	3.5	w	1
<i>Diopansia lapponica</i>	—	—	3	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	w	—	—	3.5	w	2
<i>Empetrum hermaphroditum</i>	8	0.75	7	0.75	5	0.5	5	1.0	4	0.5	5	1.0	5	0.75	7	0.5	7	0.75	5	0.5	5.8	0.6	10
<i>Vaccinium uliginosum</i>	6	w	7	0.06	5	w	5	w	—	—	5	w	4	w	6	w	7	w	7	w	6	w	9
<i>V. vitis idaea</i>	4	0.25	3	w	4	0.12	4	0.06	3	w	4	0.12	4	w	5	w	5	w	3.5	0.25	4	0.09	10
<i>Lycopodium selago</i>	—	—	7	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	w	1
<i>Rubus chamaemorus</i>	6	2	5	1	7	1	6	2	6	1	—	—	—	—	—	—	3	2	—	—	5.5	<1	6
<i>Pedicularis lapponica</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	15	1	4	1	—	—	15	<1	2
<i>Calamagrostis lapponica</i>	20	1	—	—	—	—	55	1	25	2	—	—	20	10	—	—	45	6	20	20	21	4	6
<i>Carex rigida</i>	—	—	20	1	10	2	—	—	—	—	—	—	12	2	10	2	—	—	—	—	20	<1	4
<i>Dicranum congestum</i>	4	0.5	4	0.25	3	0.75	3.5	0.5	3.5	0.5	5	0.5	4.5	0.75	6	0.25	4	0.25	4	0.12	4.1	0.44	10
<i>Aulacomnium turgidum</i>	—	—	4	w	—	—	5	w	—	—	—	—	—	—	—	—	4	w	—	—	4.3	w	3
<i>Pleurozium Schreberi</i>	4	w	—	—	—	—	—	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	w	2
<i>Pogonatum capillare</i>	4	w	—	—	—	—	—	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	w	4
<i>Lophozia Binsteadii</i>	—	—	—	w	—	w	—	w	—	w	—	w	—	w	—	w	—	w	—	—	—	w	9

Fortsetzung der Analyse 7.

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		F
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	
<i>L. Hatcheri</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
<i>Sphenolobus minutus</i>	—	W	—	W	—	W	—	W	—	W	—	W	—	W	—	W	—	W	—	W	7
<i>Ptilidium ciliare</i>	40.25	40.06	W	W	W	5	0.06	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9
																					10
<i>Sphaerophorus coralloides</i>	—	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
<i>Nephroma arcticum</i>	0.06	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
<i>Peltigera polydactyla</i>	W	W	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
<i>Cladonia alpestris</i>	5 W	4 W	3 W	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5
<i>C. silvatica</i>	5 W	4 W	3 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	10
<i>C. rangiferina</i>	5 W	4 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	3.5 W	9
<i>C. uncinatis</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
<i>C. crispata</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4
<i>Stereocaulon tomentosum</i>	5 W	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2
<i>Ochrolechia tartarea</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3
<i>Imadophila aeruginosa</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
<i>Cetraria nivalis</i>	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	10
<i>C. cucullata</i>	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	W	10
<i>C. islandica</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6
<i>Thamnolia vermicularis</i>	W	—	W	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6

Erl.: H = Höhe in cm. M bedeutet bei *Rubus chamaemorus*, *Pedicularis lapponica*, *Calamagrostis lapponica* und *Carex rigida* die Zahl der Sprosse, bei den anderen Arten die Größe der von diesen bedeckten Fläche. F = Frequenz. W < 0.05.

Heide hier und da kahle Stellen vorhanden, wo auch *Solorina crocea*, *Anthelia Juratzkana* und *Salix herbacea* wachsen.

Analyse 7 (p. 53 u. 54).

24. August 1927. *Cassiope tetragona*-Heide (Taf. VII) auf dem Pieni-Malla (Kilpisjärvi-Gebiet).

Analyse 8 (p. 56 u. 57).

25. August 1927. *Vaccinium myrtillus*-Heide auf dem Saana-tunturi (Kilpisjärvi-Gebiet).

Die *Vaccinium*-Heide fällt in der zweiten Hälfte des August schon von weitem durch ihre rote Färbung auf. Diese wird hauptsächlich durch *V. myrtillus* — die herrschende Art — bedingt. Auf dem Saana, Iso- und Pieni-Malla (Kilpisjärvi-Gebiet) ist die *Vaccinium myrtillus*-Assoziation ziemlich verbreitet, bedeckt jedoch in der *regio alpina fertilis* verhältnismässig kleine Flächen und tritt an den Stellen auf, wo die Schneedecke genügend mächtig ist und später abschmilzt als in der *Empetrum*-Heide, jedoch früher als in den von *Salix herbacea* beherrschten Assoziationen des Schneebodens. — Der Boden besteht hier in den oberen 4—5 cm aus braunschwarzem Rohhumus, dem eine graue Bleicherdschicht von 3—4 cm folgt, unter der eine deutliche Anreicherungs-schicht liegt.

D. Das phytochromatische Spektrum der arktischen Zwergstrauchheide.

Die *regio alpina fertilis* ist in Lappland für die Blütenpflanzen die pigmentreichste Region. Im Herbst sind hier, der verschiedenen Assoziationen wegen, die Kontraste in der Färbung gross. In den *Empetrum*-Heiden herrscht Olivgrün. An mehr exponierten Standorten, wo *Betula nana*, *Arctostaphylos alpina*, *Diapensia*, *Vaccinium vitis idaea*, *Juncus trifidus* u. a. Arten wachsen, geht die Färbung in mehr oder weniger deutliches Rotbraun über. Über die Fjeldregion sind noch kleinere und grössere rote oder gelbe Flecke zerstreut. Erstere werden von den *Vaccinium myrtillus*-Heiden gebildet, die man nun aus grosser Entfernung erkennen kann, letztere deuten die Wiesen- und Weidenstrauchassoziationen an.

Aus der unten folgenden Tabelle 9 ist ersichtlich, dass von den in den Heiden herrschenden Pflanzen nur wenige Arten pigmentfrei sind oder vorwiegend in dieser Form auftreten. Vo

Analyse 8.

25. August 1927. Nordabhang des Saana-tunturi (Finnisch-Lappland), oberhalb des Skiurasjoki.
Regio alpina fertilis. Vaccinium myrtillus-Heide.

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10				
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	F		
<i>Salix lapponum</i>	—	7	0.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	7	1	
<i>S. herbacea</i>	—	2	0.06	1.5	0.25	5	2	0.12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	0.06	2	2.8	0.05	
<i>Empetrum hermaphroditum</i>	—	8	0.25	5	7	5	0.12	6	0.25	7	0.12	6	0.25	5.5	0.25	6	6	6	0.25	4	5.8	0.13	
<i>Phyllodoce coerulea</i>	—	—	—	7	0.06	8	0.25	7	W	W	W	8	W	10	0.5	9	9	0.25	10	0.06	8.4	0.12	
<i>Vaccinium myrtillus</i>	7	0.5	7	7	0.25	7	0.25	7	0.5	10	0.5	8	0.5	6	0.25	9	6	0.25	6	0.25	7.4	0.4	
<i>V. vitis idaea</i>	3	W	4	W	3	0.25	4	W	4.5	0.25	3.5	W	5	5.5	W	—	—	—	—	—	4	0.06	
<i>Lycopodium alpinum</i>	—	5	W	—	—	4	W	3	W	—	—	—	—	—	—	—	—	4	0.06	2	3.6	W	
<i>Pedicularis lapponica</i>	—	9	1	3	2	—	—	—	—	—	—	—	—	4	3	3	1	3	1	3	4	4.4	1
<i>Solidago virgaurea</i>	—	6	3	4	3	6	1	5	3	—	—	—	—	—	—	6	2	5	10	5.3	2	6	
<i>Gnaphalium supinum</i>	—	1	1	1.5	1.2	—	1	4	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	1	5	4.1	2	
<i>Hieracium</i> sp.	—	—	—	2	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	1	1	1	1	1.7	<1	
<i>Deschampsia flexuosa</i>	6	30	6	3	6	10	7	10	6	12	6	6	6	3	5	10	3	30	50	3.0	13	10	
<i>Carex rigida</i>	9	6	—	8	5	7	3	—	—	—	—	—	—	—	—	8	1	8	1	—	8	1	
<i>Juncus trifidus</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	9	1	9	1	10	1	9.5	
<i>Dicranum congestum</i>	2	0.25	2.5	0.25	1.5	—	0.12	0.12	0.12	2.5	0.75	0.25	0.06	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	2.1	0.26	

Fortsetzung der Analyse 8.

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10			
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	F	
<i>Pohlia nutans</i> (?)	w		0.06				w				w										w	5
<i>Polytrichum alpinum</i>							w				2.5			w		w					w	4
<i>P. piliferum</i>	w	0.08	1.5	0.05			w							w		0.06		w			w	8
<i>P. juniperinum</i>	w													w				w			w	5
<i>Lophozia ventricosa</i>		0.05					0.1		0.1					w		w					w	7
<i>Lophozia</i> spp.	0.5	w					w		w					w		w		0.25		0.5	0.13	8
<i>Ptilidium ciliare</i>														w		w					w	2
<i>Nephroma arcticum</i>																		0.05			w	4
<i>Peltigera polydactyla</i>																		w			w	1
<i>Cladonia uncinatis</i>	w						w							w		w					w	9
<i>C. sibiratica</i>	w						0.05							w		0.05					w	10
<i>C. rangiferina</i>																		w			w	1
<i>C. coccifera</i>	0.05						0.05							w		0.1		0.05			w	10
<i>C. gracilis</i>							w									w					w	3
<i>Stereocaulon tomentosum</i>	0.25						w									0.1		0.05		0.05	0.08	10
<i>Ochrolechia tartarea</i>	w						w														w	6
<i>Cetraria islandica</i>	w						w									w		w			w	7

Erkl.: H = Höhe in cm. M = bei *Pedicularis*, *Solidago*, *Gnaphalium*, *Hieracium*, *Deschampsia*, *Carex* und *Juncus* die Zahl der Sprosse, bei den anderen Arten die Größe der von diesen bedeckten Bodenfläche. F = Frequenz. w < 0.05.

Tabelle 9.
Das phytochromatische Spektrum der Zwergstrauchheide.

Pigmentgruppe	Beobacht. Pigmentkombin.	Zahl der Arten		
			in % der Gesamtzahl	
A	[000 . . 0]	2	19.2	<i>Lycopodium alpinum</i> , <i>L. selago</i> .
	A [000]	1		<i>Carex rigida</i> .
	A [(1)(1)(1)]	1		<i>Gnaphalium supinum</i> .
	A [(1)(1)(1) . . (1)]	1		<i>Empetrum hermaphroditum</i> .
B	A [1(1)(1)]	3	15.4	<i>Calamagrostis lapponica</i> , <i>Salix herbacea</i> , <i>Polygonum viviparum</i> .
	A [(1)1(1) . . (1)]	1		<i>Cassiope hypnoides</i> .
	A [(1)1(1) . . 1]	2		<i>Loiseleuria procumbens</i> , <i>Cassiope tetragona</i> , (<i>Empetrum hermaphroditum</i>).
C	A [1(1)1 . . 1]	1	42.3	<i>Phyllodoce coerulea</i> , (<i>Vaccinium vitis idaea</i>).
	A [(1)11]	1		<i>Diapensia lapponica</i> .
	A [1(1)1]	7		<i>Deschampsia flexuosa</i> , <i>Festuca ovina</i> , (<i>Juncus trifidus</i>), <i>Luzula spicata</i> , <i>L. arcuata</i> , <i>Betula nana</i> , <i>Rubus chamaemorus</i> , (<i>Arctostaphylos alpina</i> , <i>Vaccinium uliginosum</i>), <i>Solidago virgaurea</i> .
	A [111]	5		(<i>Calamagrostis lapponica</i>), <i>Juncus trifidus</i> , <i>Vaccinium uliginosum</i> , <i>V. myrtillus</i> , <i>Pedicularis lapponica</i> , <i>Arctostaphylos alpina</i> .
D	A [111 . . 1]	1	23.1	<i>Vaccinium vitis idaea</i> .

derartigen Arten sind *Carex rigida* und *Empetrum* am verbreitetsten. Während *Carex rigida* mit vielen anderen Vertretern dieser Gattung übereinstimmend sich wie A [000] verhält, ist bei *Empetrum* das überwiegende Auftreten als A[(1)(1)(1) . . (1)] sehr bemerkenswert. Auf den Hochmooren in Estland ist *Empetrum nigrum* im Winter anthocyaninführend. Die Färbung ist oft eine ausgesprochen braunrote. Auch die absterbenden Blätter sind anthocyaninreich, ebenso die jungen; daraus folgt, dass es sich bei *Empetrum nigrum* in Estland um die Pigmentkombination A[1(1)1 . . 1] handelt. Deshalb ist die Pigmentarmut bei dem arktischen *Empetrum* sehr beachtenswert. Diese Tatsache findet ihre Erklärung wohl darin, dass es sich dort um eine an-

dere Art — *Empetrum hermaphroditum* — handelt (vergl. „Anhang“). Es sei hervorgehoben, dass bei *E. hermaphroditum* auch A[(1)1(1)..1] beobachtet wurde, doch tritt diese Pigmentkombination selten auf. Überall, wo ausapernde *Empetrum*-Sträucher gesehen wurden, hatten sie anthocyaninfreie Blattspreiten. Warum die pigmentärmere Art — *E. hermaphroditum* — in der Arktis grössere Verbreitung erlangt hat als das leicht Anthocyanin bildende *E. nigrum*, ist unbekannt. Vielleicht war hierbei die Geschlechtsverteilung entscheidend.

Für die Zwergstrauchheiden der *regio alpina fertilis* ist es sehr bezeichnend, dass viele Arten als permanent anthocyaninführend auftreten. So verhalten sich *Calamagrostis lapponica*, *Juncus trifidus*, *Vaccinium myrtillus*, *Pedicularis lapponica*, *Arctostaphylos alpina*, *Vaccinium vitis idaea*. Dass diese Arten unter Umständen in den Heiden auch als A[1(1)1] auftreten können, braucht kaum hervorgehoben zu werden. Weiter ist es sehr bemerkenswert, dass die Arten, die im Sommer grün sind, im Herbst aber Anthocyanin bilden (*Loiseleuria*, *Cassiope tetragona*, *Phyllodoce*, *Diapensia lapponica*, *Deschampsia flexuosa*, *Festuca ovina*, *Luzula*-Arten, *Betula nana*, *Rubus chamaemorus*, *Solidago virgaurea*), ein lange andauerndes „rotes Stadium“ besitzen. So war bei *Betula nana* am 25. August auf dem Pieni-Malla der Anthocyaningehalt makroskopisch gut feststellbar. Nach zwei Wochen (am 7. Sept.) waren die Blätter wohl intensiv gerötet, hatten sich aber von den Ästen noch nicht losgelöst. Es ist anzunehmen, dass sie sich mindestens noch eine Woche gehalten haben.

7. Die Formation der Schneewiese.

A. Über die Begrenzung und die Lebensbedingungen der Formation der Schneewiese.

Da, wo in der *regio alpina fertilis* die Schneedecke länger als in den Heideassoziationen anhält, sowie in der Umgebung perennierender Schneeflecke finden sich Pflanzenvereine, die sich in gewisser Hinsicht den Heiden, in anderer wiederum den Wiesen nähern. Es sind hierunter die von Thore Fries beschriebenen flechtenreichen sowie lebermoosreichen *Salix herbacea*-Assoziationen und seine *Sibbaldia procumbens*-, *Anthoxanthum odoratum*-, *Trisetum airoides*-, *Ranunculus nivalis*-, *R. glacialis*-Wiesen gemeint, die Tengwall zum Teil unter „kurzwüchsigen Wiesen“ (*Sibbaldia*

procumbens-, *Saussurea alpina*-Wiesen), „Grasheiden“ (*Anthoxanthum odoratum*-Grasheide, *Trisetum spicatum*-Grasheide) und „Schneebodengesellschaften“ („*Saxifraga*-Schneeboden“, „*Ranunculus glacialis*-Schneeboden“ und „*Salix herbacea*-Assoziationen“) unterbringt.

Diese Assoziationen sind besonders in den oberen Teilen der *regio alpina fertilis* verbreitet, wo sie oft mit der Zwergstrauchheide abwechseln, wobei die Heiden die höher gelegenen trockeneren Stellen einnehmen. Eine Eigentümlichkeit dieser Assoziationen ist es, dass sie eine ganze Reihe mehr oder weniger mesomorpher dikotyler Stauden und Gräser vereinigen, die ihnen das Gepräge einer Wiese geben. Die Vegetation ist in der Krautschicht gewöhnlich ziemlich offen, in der Bodenschicht dagegen, die mit der Bodenschicht echter Wiesen wohl kaum etwas gemein hat, geschlossen. Abgesehen vom gänzlichen Fehlen vieler Moosarten, die den echten Wiesen Lapplands eigen sind, treten die Laubmoose in der Bodenschicht der erwähnten Assoziation oft ganz in den Hintergrund, wobei sie den Lebermoosen (*Anthelia*, *Lophozia*, *Sphenolobus*, *Pleuroclada*) die Herrschaft überlassen. Sehr bezeichnend ist auch das häufige Auftreten von Flechten, trotzdem ihnen hier nie eine solche Bedeutung zukommt wie in den Heiden. Von Zwergsträuchern sind *Salix herbacea* und *S. polaris* sehr wichtig und fehlen nur ausnahmsweise. Was die mono- und dikotylen Stauden betrifft, so sind *Anthoxanthum odoratum*, *Deschampsia flexuosa*, *Trisetum spicatum*, *Vahlodea atropurpurea*, *Poa alpina* f. *vivipara*, *Festuca ovina*, *Carex rigida*, *C. Lachenalii*, *Luzula sudetica*, *L. arcuata*, *Polygonum viviparum*, *Ranunculus nivalis*, *R. pygmaeus*, *Cardamine bellidifolia*, *Saxifraga stellaris*, *Sibbaldia procumbens*, *Viola biflora*, *Veronica alpina*, *Pedicularis lapponica*, *Solidago virgaurea*, *Gnaphalium supinum* sehr verbreitet. Die Höhe dieser Stauden übertrifft selten 20—30 cm, ist oft aber noch geringer.

Diese Vereinigung der Eigenschaften der kurzwüchsigen Wiese und der Heide hat zu den Versuchen Anlass gegeben, die in Rede stehende Assoziationen unter die echten Wiesen und Heiden einzureihen, die jedoch oft auf grosse Schwierigkeiten stossen (vergl. Tengwall 1920). Diese Versuche sind dadurch erklärbar, dass man die Schneebodengesellschaften nicht als eine natürliche Gruppe, sondern als zu getrennten Formationen gehörend betrachtete. Gegen eine derartige Auffassung sprechen mehrere Umstände. Erstens ist die floristische Zusammensetzung der Schneebodengesellschaften nicht minder charakteristisch und

eigenartig als die der *Trollius-Geranium*-Wiesen oder der Zwergstrauchheiden. Ferner ist es, wie Tengwall gezeigt hat, „in bezug auf die Phanerogamen, welche zur Schneebodenserie gehören“ . . . „oft äusserst schwierig“ . . . „zu entscheiden, ob sie Heide- oder Wiesenpflanzen sind“. Es erscheint deshalb berechtigt, die Schneebodengesellschaften, in denen Phanerogamen wichtig sind, als besondere Formation zu betrachten. Für diese will der Verfasser die Bezeichnung „**Schneewiese**“ vorschlagen, weil es sich im Grunde genommen um eine Wiesenformation handelt, deren Eigenart — niedere alpine Phanerogamen, Lebermoosreichtum in der Bodenschicht und Vorhandensein verschiedener Flechten — durch die langdauernde Schneebedeckung bedingt ist ¹⁾.

Gewiss ist die Formation der Schneewiesen von der Formation der echten Wiesen nicht minder scharf unterschieden, als diese z. B. von der Formation der Salzwiesen.

Wie bereits angedeutet, ist für die Schneewiesen Lapplands ausser den Flechten und Lebermoosen noch das häufige Auftreten von Zwergweiden (*Salix herbacea*, *S. polaris*) sehr bezeichnend. Diese Zwergweiden haben jedoch eine grössere Amplitude als viele andere Arten der Schneewiesen, denn ausser in diesen gedeihen sie auch in den *Vaccinium*-Heiden und den Lebermoosassoziationen des ewig gefrorenen Bodens (vergl. Taf. IX, X).

Sehr charakteristisch sind die Bodenprofile der Schneewiesenassoziationen. Auf dem Pieni-Malla wurde der Boden in einer *Salix herbacea-Trisetum spicatum-Gnaphalium supinum*-Assoziation

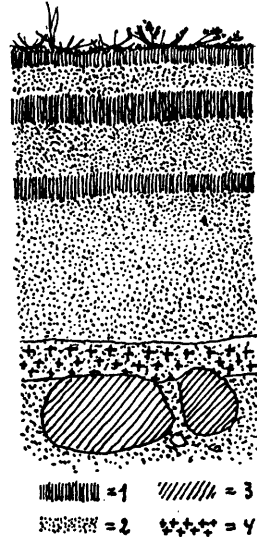


Fig. 8. Bodenprofil aus einem Schneewiesen-Assoziationsabschnitt auf dem Pieni-Malla (Finnisch-Lappland) in einer Höhe von 650 m. Erkl. d. Bezeichnungen: 1 = Rohhumusschicht (die oberste Schicht in Fig. 8 ist 1 cm stark); 2 = Sand + Kies-Zwischenschicht; 3 = Steine, Unterboden; 4 = Anreicherungsschicht (eisenreich).

1) Zu den Schneewiesen ist auch die Vegetation der „Schneetälchen des Urgesteins“ der Schweizer Alpen zu stellen (vergl. Brockmann-Jerosch, D. Flora d. Puschlav, I. Teil p. 338).

untersucht. Eine eigenartige Schichtung fiel hier auf (vergl. Fig. 8 und 9). Die rothumusreichen Lagen, deren Mächtigkeit etwa zwischen 0.5 und 3 cm schwankte, waren mehr oder weniger mit Sand gemischt und wechselten mit reinen Sand- oder Sand+Kies-Schichten ab. Derartige geschichtete Böden mit meh-

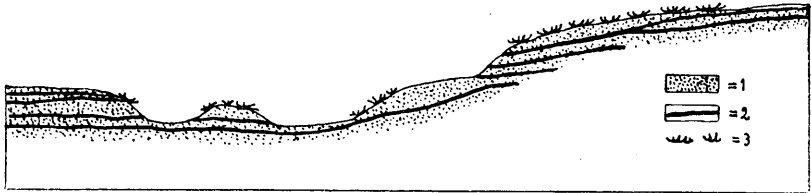


Fig. 9. Schematisch dargestelltes Bodenprofil in einer Schneewiese auf dem Pieni-Malla (Finnisch-Lappland). Erkl. der Bezeichnungen: 1 = Sand + Kies-Zwischenschicht; 2 = Rohhumusschicht; 3 = *Salix herbacea*. Nach einer vom Verf. an Ort und Stelle gezeichneten Skizze.

reren Humushorizonten scheinen den Schneewiesen eigentümlich zu sein. Allerdings reichen die Erfahrungen des Verfassers nicht so weit, um dies mit Bestimmtheit zu behaupten. Diese Schichtung bezeugt, dass an den entsprechenden Standorten die Pflanzendecke wiederholt zerstört worden ist. Auch ist es charakteristisch, dass das Grundwasser in derartigen Lokalitäten in einer geringen Tiefe von oft nur ca 10 cm angetroffen wird.

B. Analyse. Das phytochromatische Spektrum der Schneewiesenformation.

Die Schneewiesenformation wird, wie erwähnt, von verschiedenen Assoziationen gebildet. Eine Assoziation, die den *Sibbaldia procumbens*- und *Anthoxanthum odoratum*-Wiesen Fries's nahe steht und wohl zu den letzteren zu rechnen ist, wurde auf dem Pieni-Malla (Kilpisjärvi-Gebiet) untersucht.

Analyse 9 (p. 63).

29. August 1927. Nordabhang des Pieni-Malla in einer Höhe von ca 650 m auf einer geneigten Fläche, die sich in der Nähe (oberhalb) eines perennierenden Schneeflecks befindet. Über den Bodenbau und das Grundwasserniveau vergl. oben.

In den Schneewiesen ist die geringe Höhe der Stauden sehr auffallend: diese erreicht nur selten 20—35 cm, liegt aber grössten-

Sibbaldia-Trisetum-Schneewiese auf dem Pieni-Malla (Kilpisjärvi-Gebiet).

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10				
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	F		
<i>Salix herbacea</i>	2	0.5	2	0.75	1.5	0.5	1	0.75	1.5	0.75	2.5	0.5	3	0.25	2	0.10	1.5	0.5	2	0.5	1.9	0.5	10
<i>Betula nana</i> (Keiml.)	—	—	—	—	0.5	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.5	1	—	—	—	0.5	<1	2
<i>Cassiope hypnoides</i>	—	—	—	—	2	w	3	w	1.5	0.05	1.5	w	—	—	—	3	0.05	—	—	—	2.2	w	5
<i>Cassiope tetragona</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	1	—	—	—	3	<1	1
<i>Diapensia lapponica</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	1	—	—	—	1	<1	1
<i>Phyllococe coerulea</i>	—	—	—	—	1.5	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.5	<1	1
<i>Lycopodium alpinum</i>	—	—	—	—	—	—	4	w	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	w	1
<i>Polygonum viviparum</i>	7	1	8	7	—	—	—	—	—	—	—	—	12	6	8	65	7	11	6	3	8	9	6
<i>Oxyria digyna</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	—	—	—	—	2	<1	1
<i>Ranunculus pygmaeus</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	2	3	17	1	5	—	—	2	2	3
<i>Ranunculus nivalis</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18	1	17	1	17	2	—	—	17	<1	3
<i>Sibbaldia procumbens</i>	7	40	6	25	2	16	2	4	2	34	—	—	6	55	5	50	2	15	3.5	13	2.3	25	9
<i>Viola biflora</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	15	3	40	1.5	8	2	5	2.6	7	4
<i>Veronica alpina</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	10	3	—	—	—	—	—	—	5	3	3	6	7	1	4
<i>Pedicularis lapponica</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	4	<1	1
<i>Solidago virgaurea</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	<1	1
<i>Gnaphalium supinum</i>	1.5	21	1	60	—	—	—	—	—	—	1.5	2	3	15	2	25	4	82	1.5	20	2.1	22	7
<i>Anthoxanthum odoratum</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	35	30	30	4	2
<i>Deschampsia flexuosa</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	18	3	2
<i>Vahldeia atropurpurea</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	13	2	3
<i>Trisetum spicatum</i>	6	2	13	1	—	—	—	—	—	—	—	—	6	1	12	1	10	2	—	—	5.7	1	6
<i>Festuca ovina</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20	0.1	5	w	—	—	—	—	20	w	2
<i>Carex rigida</i>	10	43	11	30	8	3	5	13	6	121	9	78	15	70	12	13	9	24	8	8	9.3	40	10
<i>Carex Lachenalii</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20	5	10	6	—	—	10	2	13.3	1	3
<i>Juncus trifidus</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	<1	1
<i>Luzula arcuata</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	20	1	2
<i>Luzula sudetica</i>	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	23	8	—	—	15	—	—	—	19	1	2

Fortsetzung der Analyse 9.

	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		H	M	F
	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M	H	M			
<i>Kiaeria Starkei</i>	W		W		W		W		0.05		W		W		W		W		W		W		9
<i>Dicranum congestum</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		1
<i>Bryum</i> sp.	W		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		1
<i>Pohlia crassidens</i>	—		—		—		—		—		W		—		—		—		—		—		1
<i>Bartramia ihiphylla</i>	—		—		—		—		—		W		—		—		—		—		—		3
<i>Conostomum tetragonum</i>	—		—		—		0.05		—		—		—		—		—		—		—		2
<i>Drepanocladus uncinatus</i>	W		W		—		W		W		0.05		0.1		W		W		W		W		9
<i>Polytrichum alpinum</i>	—		—		—		W		W		W		W		W		W		W		W		8
<i>P. scanzulare</i>	1.5	0.5	0.05		—		W		W		0.1		—		—		0.05		W		W		9
<i>P. piliferum</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		2
<i>P. juniperinum</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		8
<i>P. commune</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		1
<i>Diplophyllum taxifolium</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		3
<i>Lophozia lycopodioides</i>	—		—		—		—		0.05		—		—		—		—		—		—		3
<i>Lophozia ventricosa</i>	W		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		1
<i>Pleuroclada albescens</i>	W		W		—		W		0.05		—		—		—		0.05		—		—		2
<i>Anethelia Juratzkana</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		0.1		—		—		10
<i>Lophozia</i> spp.	—		—		—		—		W		—		—		—		0.05		—		—		3
<i>Solorina crocea</i>	—		—		—		—		0.1		—		—		—		—		—		—		6
<i>Peltigera aphthosa</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		0.05		—		—		4
<i>Cladonia silvatica</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		2
<i>Cladonia coccifera</i>	—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		2
<i>Cladonia alpicola</i> f. <i>macrophylla</i> (?)	W		—		—		0.05		—		—		—		—		—		—		—		8
<i>Cladonia gracilis</i>	—		—		—		0.05		—		—		—		—		—		—		—		5
<i>Ochrolechia tartarea</i>	—		—		—		—		0.05		—		—		—		—		—		—		9
<i>Cetraria hiascens</i>	W		—		—		0.05		—		—		—		—		—		—		—		3
<i>Cetraria islandica</i>	W		—		—		—		—		—		—		—		—		—		—		7
<i>Stereocaulon</i> sp.	W		0.05		—		—		—		—		—		—		0.05		—		—		10
							W		—		—		—		—		—		—		—		4

Erkl.: H = Höhe in cm. M bei *Cassiope tetragona*, *Diapensia*, *Phyllocladus*, *Polygonum*, *Oxyria*, *Ranunculus*-Arten, *Sibbaldia*, *Viola*, *Veronica*, *Pedicularis*, *Solidago*, *Gnaphalium*, *Anthoxanthum*, *Deschampsia*, *Vahlodea*, *Trisetum*, *Carex*-Arten, *Juncus*, *Luzula*-Arten — Zahl der Sprosse; bei den anderen Arten geben die Zahlen die Grösse der von diesen bedeckten Bodenfläche an. F = Frequenz. w < 0.05.

teils unter 10 cm. In der Bodenschicht ist das Überwiegen Rohhumus bevorzugender Moose (*Kiaeria*, *Dicranum*, *Polytrichum*) und das häufige Auftreten von Lebermoosen (*Pleuroclada albescens*, *Anthelia Juratzkana*, *Lophozia*-Arten usw.) zusammen mit zahlreichen Flechten äusserst charakteristisch. Was die Phanerogamen anbetrifft, so sind einige, die in der analysierten Fläche auftraten, der Assoziation eigentlich fremd (*Phyllodoce coerulea*, *Cassiope tetragona*, *Diapensia lapponica*, *Juncus trifidus*) und sind zufällige Flüchtlinge aus den benachbarten Heiden.

Andere Analysen, die auf dem Iso-Malla und Raasa-tunturi vorgenommen wurden, zeigten, dass diese Assoziation sehr verbreitet ist. In ihr und in anderen, ihr nahestehenden Assozi-

Tabelle 10.

Das phytochromatische Spektrum der Schneewiesenformation.

Pigmentgruppe	Beobacht. Pigmentkombin.	Zahl der Arten		
			in % der Gesamtzahl	
A	[000]	1		<i>C. Lachenalii</i> .
	[000 . . 0]	1		<i>Lycopodium alpinum</i> .
	A [000]	4		<i>Carex rigida</i> , <i>Alsine biflora</i> (?), <i>Ranunculus pygmaeus</i> , <i>Viola biflora</i> .
	A [(1)(1)(1)]	11	54.5	<i>Deschampsia flexuosa</i> , <i>Festuca ovina</i> , <i>Poa alpina</i> f. <i>vivipara</i> , <i>Juncus trifidus</i> , <i>Cerastium lapponicum</i> , <i>Ranunculus glacialis</i> , <i>R. nivalis</i> , <i>Cardamine bellidifolia</i> , <i>Saxifraga cernua</i> , <i>S. rivularis</i> , <i>Gnaphalium supinum</i> .
	A [(1)(1)(1) . . (1)]	1		<i>Cassiope hypnoides</i> .
B	A [1(1)(1)]	4	12.2	<i>Salix herbacea</i> , <i>S. polaris</i> , <i>Cochlearia officinalis</i> , <i>Veronica alpina</i> , (<i>Pedicularis lapponica</i>).
C	A [(1)(1)1]	4		<i>Luzula arcuata</i> , <i>L. sudetica</i> , <i>Anthoxanthum odoratum</i> , <i>Sibbaldia procumbens</i> .
	A [1(1)1]	6	30.3	<i>Vahlodea atropurpurea</i> , (<i>Deschampsia flexuosa</i>), <i>Trisetum spicatum</i> , (<i>Festuca ovina</i> , <i>Luzula arcuata</i> , <i>L. sudetica</i>), <i>Polygonum viviparum</i> , <i>Oxyria digyna</i> , <i>Saxifraga stellaris</i> , <i>Solidago virgaurea</i> .
D	A [111]	1	3.0	(<i>Saxifraga stellaris</i>), <i>Pedicularis lapponica</i> .

ationen fanden sich noch *Salix polaris*, *Pirola minor*, *Ranunculus glacialis*, *Alsine biflora*, *Poa alpina*, *Cerastium lapponicum*, *Saxifraga cernua*, *S. stellaris*, *S. stellaris* f. *comosa*, *S. rivularis*.

Nach der Tabelle 10 zu schliessen, dominiert in der Formation der Schneewiesen die Pigmentgruppe A. Zusammen mit der pigmentarmen Gruppe B ergibt sie 66.7 Prz. der Gesamtzahl der Arten. Es ist nicht minder charakteristisch, dass die permanentrote Gruppe D nur durch eine Art — *Pedicularis lapponica* — repräsentiert wird, wobei diese Art gewiss den arktischen Heiden viel mehr eigen ist als der Schneewiesenformation.

Die Pigmentarmut dieser Formation ist sehr augenfällig, da so wichtige Arten wie *Salix herbacea*, *S. polaris*, *Carex Lachenalii*, *Poa alpina*, *Ranunculus glacialis*, *R. nivalis*, *R. pygmaeus*, *Veronica alpina*, *Gnaphalium supinum* usw. in die Gruppen A und B gehören. Zudem kommt es bei den Pflanzen, die sich wie A [1(1)1] verhalten, oft genug nicht zur herbstlichen Anthocyaninbildung, denn wegen der Kürze der Vegetationsperiode werden diese Pflanzen gewiss nicht selten von Schneefällen überrascht, bevor eine ausgiebige Anthocyaninbildung einsetzen konnte.

Viele Arten, die in den Schneewiesen auftreten, sind in der sehr offenen Vegetation der *regio alpina sterilis* besonders verbreitet.

Auf den hohen Fjelden der Insel Seiland (s. Fig. 5, 6) konnte der Verfasser diese Höhenstufe, die dort eine riesige Ausbreitung besitzt, näher studieren. Am SSO Rande des Nordmandsfjordjiekke in einer Höhe von ca 600 m über dem M. herrscht das sterile, öde Felstrümmermeer, das gelblichbraun bis dunkelbraun gefärbt ist, da die Steine in dieser Höhe nur wenig Flechten und Moose tragen. Von den Flechten sind besonders die dunkel bis schwarz gefärbten *Gyrophora*-Arten (*G. proboscidea*, *G. torrida*, *G. arctica*), die ebenso gefärbten *Parmelia pubescens* und *Cetraria nigricans* und die dunklen *Andreaea*-Arten (bes. *Andreaea Blyttii*) verbreitet. Der Boden ist hier und da mit einer braunen oder bläulichgrün bis silbergrauen, sehr niedrigen Lebermooschicht (*Alicularia Breidleri*, *Anthelia Juratzkana*, *Pleuroclada albescens* usw.) bedeckt. Auf dem nackten Boden bilden *Pogonatum capillare*, *Pohlia cucullata*, *Polytrichum alpinum*, *P. sexangulare*, *Dicranoweisia crispula* und stellenweise auch *Arctoa fulvella* kleine Polster (Fig. 10). Von Flechten sind *Stereocaulon subcoralloides*, *S. denudatum*, besonders aber *Solorina crocea* verbreitet.

Von Phanerogamen finden sich hier *Ranunculus glacialis*,

Epilobium anagallidifolium, *Luzula confusa*, *Saxifraga rivularis*, *S. groenlandica*, *S. nivalis*, *Ranunculus pygmaeus*, *Cerastium lapponicum*, *Gnaphalium supinum*, *Cardamine bellidifolia*, *Oxyria digyna*, wobei viele dieser Arten hier gut ausgeprägten Polsterwuchs aufweisen (*Saxifraga groenlandica*, *Ranunculus pygmaeus*, *Gnaphalium supinum*, *Silene acaulis* usw.).

Der krasse Unterschied in der Pigmentation der den Fels bewohnenden Flechten und Moose einerseits und der den Schnee-



Fig. 10. *Regio alpina sterilis* in einer Höhe von 600 m ü. d. M. auf der Insel Seiland (in der Höhe des SSO Randes des Nordmandsfjordjiekke). Die Vegetation ist offen, aus *Ranunculus glacialis*, *Oxyria digyna*, *Gnaphalium supinum* und Moosen (*Polytrichum sexangulare*, *P. alpinum*, *Pohlia cucullata*, *Andreaea*-Arten, *Dicranoweisia crispula*) bestehend. Verf. Photo. 5. Aug. 1927.

boden bewohnenden Phanerogamen andererseits ist hier höchst bemerkenswert. Während die ersteren oft sehr dunkel gefärbt sind, enthalten die Blütenpflanzen entweder überhaupt keine roten Pigmente oder aber ist ihr Anthocyaningehalt gering — eine Tatsache, auf die wir noch weiter unten zu sprechen kommen. — Die charakteristische Eigentümlichkeit der Schneewiesen — Armut an pigmentreichen Phanerogamen — ist also auch der offenen Vegetation der *regio alpina sterilis* eigen, sie ist hier sogar schärfer ausgeprägt als in den Schneewiesen.

III. Über die Anatomie der Blattspreite der Pflanzen der Wiesen-, Heide- und Schneewiesenformationen.

Die Anatomie der arktischen Pflanzen ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen gewesen. Besonders Warming und andere dänische Botaniker: Börgesen, Resvoll, Petersen, Jessen, Galløe, Mentz, Olsen, Hagerup, Porsild, Mathiesen haben in einer Reihe von Abhandlungen¹⁾ sehr wertvolle Beiträge hierzu geliefert. Über mehrere Arten liegen auch vergleichende Untersuchungen vor, wobei die Pflanzen aus Nord-Europa und Grönland mit den Exemplaren aus den Alpen, Pyrenäen und aus Dänemark verglichen wurden. Von vergleichenden Untersuchungen auch nur der wichtigeren Arten einer arktischen Formation ist dem Verfasser nur die von Warming (die arktische Heide in Grönland betreffend) bekannt.

Wie die Arbeiten der erwähnten Autoren und auch andere Untersuchungsergebnisse zeigen, ist die Blattspreite ohne Zweifel am empfindlichsten gegen eine Änderung der Aussenbedingungen. In ihrem Bau spiegelt sich die Eigenart des Standortes am meisten wider, obschon zwischen Standort und Anatomie einer Art nicht immer direkte Beziehungen zu bestehen brauchen, — was ja leicht begreiflich ist, denn oft muss man erst die extremsten Bedingungen kennen, unter welchen eine Art noch existieren kann, sowie die Bedingungen, unter welchen sie am konkurrenzfähigsten ist, um ihren Bau zu verstehen. — Die Anatomie der Spreite soll die Grundlage der weiter folgenden Vergleichung sein.

Es war hierbei von Interesse besonders auf solche Arten zu achten, die in verschiedenen Formationen auftreten. Es liess sich ver-

1) Warming, Eug., Om Grönlands vegetation, Medd. om Grönland 12 (1887) p. 1—245. Börgesen, F., Bidrag til kundskaben om arktisk planters bladbygning, Bot. Tidsskrift, Bd. 19 (1895). Resvoll, Thekla, Nogle arkt. Ranunklers morfologi og anatomi, Nyt Magaz. for Naturvidensk., Bd. 38 (1900). Petersen, H. E., Ericineae, Petersen, H. E., Diapensiaceae, Mentz, A., Empetraceae, Galløe, O., The Biological Leaf-anatomy of the Arctic Species of *Saxifraga* und Jessen, K., Ranunculaceae in Medd. om Grönland, 36. H. (1912). Jessen, K., Rosaceae, Olsen, C., Cornaceae, Hagerup, O., Caprifoliaceae, Warming, Eug., Caryophyllaceae, Porsild, M. P., Liliales und Mathiesen, Fr. J., Scrophulariaceae in Medd. om Grönland, 37. H. (1921).

muten, dass auf Grund der bei diesen Arten beobachteten Unterschiede im anatomischen Baue Rückschlüsse auf die Eigenart der Standorte möglich seien.

In einer bekannten Arbeit ¹⁾ hat Bonnier ca 20 Pflanzenarten (darunter *Oxyria digyna*, *Saxifraga oppositifolia*, *Salix reticulata*, *Silene acaulis*, *Cerastium alpinum*, *Potentilla nivea*, *Poa pratensis*) untersucht und die Schlussfolgerung gezogen, die arktischen Exemplare seien von den Exemplaren derselben Art aus den Alpen und Pyrenäen darin unterschieden, dass bei ersteren die Blätter gewöhnlich dicker sind und das Mesophyll weniger differenziert. Das Palisadengewebe wurde bei den arktischen Exemplaren weniger gut ausgebildet gefunden, die Interzellularen dagegen waren grösser. Die Epidermis der Blätter und Stengel erwies sich als kohärenter, die Kutikula als dünner. Ohne Zweifel sind diese Schlüsse nicht zu verallgemeinern. Es gibt, wie Warming mehrmals hervorgehoben hat, in der arktischen Vegetation eine Formation, die durch xerophytischen Bau der sie bildenden Arten ausgezeichnet ist — die arktische Zwergstrauchheide. Warming und andere oben erwähnte dänische Forscher zeigten, dass die immergrünen Zwergsträucher xeromorph gebaut sind. Doch meint Warming, dass daran nicht so sehr die Trockenheit des Substrates in den Heiden schuld ist, als die Tatsache, dass die Blätter mehrjährig sind und deshalb Einrichtungen benötigen, die sie während der Blosslegung in der kalten Jahreszeit schützen. Warming schreibt: „It is easy to understand that in woody plants the shoots must become xerophytic in structure, — which is, as usual, exhibited in the anatomical structure of the leaves, — because they are higher in growth than are herbs, and often may be without a snow-covering during the winter; their leaves will frequently be exposed to the dessicating power of cold and dry wind and this in a higher degree than those of herbs, and the cold soil will for a long time prevent the roots from absorbing water“. Dagegen wird die nicht xeromorphe Struktur der Caryophyllaceen Grönlands von Warming dadurch erklärt, dass die Feuchtigkeit der Atmosphäre in den arktischen Ländern gross, die Belichtung dagegen verhältnismässig schwach ist.

In der Tabelle 11 sind die Angaben in betreff der untersuchten Arten zusammengefasst, so dass Beschreibungen des anatomi-

1) Bonnier, G., Les plantes arctiques comparées aux mêmes espèces des Alpes et des Pyrénées. Rev. gén. de Bot., t. 6 (1894).

Tabelle 11.

A: Heidepflanzen. B: Wiesenpflanzen (Wiesenbirkenwälder, Hochstaudenwiesen und Wiesen). C: Pfl. der Schneewiesen.	I ¹⁾	II Dicke der Spreite in μ . III Höhe des Palisadengewebes in μ . IV Dicke der oberseitigen Epidermisaussenwand in μ .			Spaltöffnungen. Durchschnittszahl pro qmm der Blattoberseite (V), der Blattunterseite (VI).	
		II	III	IV	V	VI
A.						
<i>Calamagrostis lapponica</i>	Kl	190	—	5*)	78	0
<i>Carex rigida</i>	Pp	180—270	—	9	0	193
<i>Juncus trifidus</i> (Stengel)	Pp			9		
<i>Luzula confusa</i>	Pp	250	—	6	0	77
<i>L. spicata</i>	Pp	300	—	5	0	103
<i>Andromeda polifolia</i>	Kt	270	30—130	9	0	674
<i>Betula nana</i>	Pp	180—220	30—60	3.5	0	95
<i>Loiseleuria procumbens</i>	Pp	380	100	10	0	
<i>Cassiope tetragona</i>	Kl		60—120	10	0	405
<i>Arctostaphylos alpina</i>	Pp	210	30—75	3	0	275
<i>Empetrum hermaphroditum</i>	Kl	250	70	3.5	0	
<i>Diapensia lapponica</i>	Kl	540	30—90	20	0	290
<i>Cornus suecica</i>	Kt	180	60	2.5	0	117
<i>Phyllodoce coerulea</i>	Pp		75	4.5	0	
<i>Vaccinium myrtillus</i>	Kl	160	45—90	3	110	236
<i>V. uliginosum</i>	Kl	180—220	60—120	4	0	208
<i>V. vitis idaea</i>	Kl	410	60—200	7	0	497
<i>Pedicularis lapponica</i>	Kl	200	40—90	2.5	0	190
<i>Linnaea borealis</i>	Kl	230	30—60	3	0	457
<i>Aspidium dryopteris</i>	Pp	180	—	1	0	50
B.						
<i>Milium effusum</i>	Sl	160	—	2	48	29
<i>Calamagrostis purpurea</i>	Sl	130	—	4.5*)	112	0
<i>Salix lapponum</i>	Kl	160	100	3	0	450
<i>S. phylicifolia</i>	Kl	200	110	3	0	336
<i>Betula tortuosa</i>	Pp	220	30—90	5.5	0	97
<i>Rumex acetosa</i>	Sl	200	—	1.5	45	73
<i>Trollius europaeus</i>	Pp	200	30	1.5	0	71
<i>Ranunculus acer</i>	Kl	160	50	1.2	3	106
<i>Parnassia palustris</i>	Kl	300	—	2.5	0	80
<i>Rubus arcticus</i>	Pp	140	25	3	0	203
<i>Filipendula ulmaria</i>	Sl	110	40	2	0	502
<i>Alchemilla glomerulans</i>	Sl	160	45	2.2	65	168
<i>Astragalus alpinus</i>	Kl	110	30	3	78	95
<i>A. frigidus</i>	Pp	160	40—70	1.4	117	335
<i>Geranium silvaticum</i>	Pp	140	50	1.5	0	120
<i>Chaerophyllum silvestre</i>	Sl	130	50	5	0	226
<i>Angelica archangelica</i>	Sl	220	60—100	3	10	280

- 1) Kl = Kilpisjärvi-Gebiet.
Pt = Petsamon tunturit.
Pp = Pääskyspahta.
Kt = Kolttaköngäs.
Sl = Insel Seiland.

A: Heidepflanzen. B: Wiesenpflanzen (Wiesenbirkenwälder, Hochstaudenwiesen und Wiesen). C: Pfl. der Schneewiesen.	I ¹⁾	II Dicke der Spreite in μ . III Höhe des Palisadengewebes in μ . IV Dicke der oberseitigen Epidermisausseiwand in μ .			Spaltöffnungen. Durchschnittszahl pro qmm der Blattoberseite (V), der Blattunterseite (VI).	
		II	III	IV	V	VI
<i>Cornus suecica</i>	Pp	110	30	1.4	0	65
<i>Pirola secunda</i>	Kl	170	—	7	97	232
<i>P. minor</i>	Kl	180	—	4.5	48	219
<i>Vaccinium myrtillus</i>	Kl	135	45	2.2	44	142
<i>V. vitis idaea</i>	Kl	300—350	39—90	6	0	280
<i>Trientalis europaea</i>	Kl	115	—	3	0	98
<i>Bartsia alpina</i>	Pp	160	—	3	50	160
<i>Linnæa borealis</i>	Kl	200	30	3	0	225
<i>Solidago virgaurea</i>	Pp	220—250	40—75	2	46	115
<i>Gnaphalium norvegicum</i>	Pp	180	30	2	14	153
<i>Saussurea alpina</i>	Sl	290	60—100	2.5	23	168
<i>Mulgedium alpinum</i>	Pp	110	30	1	0	70
<i>Aspidium dryopteris</i>	Pp	140	—	1	0	24
<i>A. ptegopteris</i>	Pp	140	—	3	0	72
<i>A. spinulosum</i>	Pp	200	—	1.5	0	42
<i>Athyrium filix femina</i>	Pp	130	—	3	0	36
<i>Aspidium filix mas</i>	Sl	180—220	—	3	0	51
C.						
<i>Anthoxanthum odoratum</i>	Sl	140	—	8*)	59	0
<i>Trisetum spicatum</i>	Kl	160	—	1.5*)	60	50
<i>Poa alpina</i> f. <i>vivipara</i>	Sl	200	—	3.5*)	62	41
<i>Carex Lachenalii</i>	Kl	180	—	5	0	130
<i>Luzula arcuata</i>	Kl	270	—	6	0	85
<i>L. sudetica</i>	Kl	210	—	3	0	83
<i>Salix polaris</i>	Kl	220	40—120	3	92	127
<i>S. herbacea</i>	Kl	160—180	35—75	2—3	65	72
<i>Polygonum viviparum</i>	Kl	210	30—90	4.5	30	219
<i>Oxyria digyna</i>	Kl	300	90	1	10	102
<i>Alsine biflora</i>	Kl	450	120—150	6	267	196
<i>Ranunculus pygmaeus</i>	Kl	230	0—90	2.3	90	95
<i>R. nivalis</i>	Sl	190	—	1	35	70
<i>R. glacialis</i>	Kl	320	40—100	3	85	36
<i>Cardamine bellidifolia</i>	Sl	270	—	1.5	270	233
<i>Cochlearia officinalis</i>	Sl	400—700	—	6—7	76	160
<i>Saxifraga stellaris</i>	Pt	450	30—60	2	179	107
<i>S. rivularis</i>	Sl	400	—	3	53	25
<i>Sibbaldia procumbens</i>	Kl	160	60	2.2	210	122
<i>Viola biflora</i>	Kl	160	30	1.5	3	75
<i>Epilobium anagallidifolium</i>	Sl	140—180	40	2	213	110
<i>Cassiope hypnoides</i>	Pt	180	—	5*)	652	260
<i>Veronica alpina</i>	Kl	280	—	2	76	67
<i>Gnaphalium supinum</i>	Kl	160	—	1	195	60

*) Auf der morphologischen Blattunterseite!

schen Baues der einzelnen Arten in dieser Arbeit fortbleiben können. Um den Vergleich der einzelnen Arten untereinander und in den verschiedenen Formationen zu erleichtern, sind Blattquerschnitte fast aller jener Arten, die in der Tabelle 11 erwähnt werden, auf den Tafeln XIII—XXII in 110 maliger Vergrößerung abgebildet. Zu diesem Zweck wurde das vom Verfasser in Finnisch- und Norwegisch-Lappland gesammelte Material von Hilja Lippmaa untersucht und gezeichnet.

Die Gruppe A der Tabelle 11 enthält die Arten der Zwergstrauchheide (vergl. Tafel XIII, XVIII, XIX). Es sind hier auch einige Arten aufgenommen worden, die wohl in der Zwergstrauchheide oberhalb der Waldgrenze gedeihen können, aber in Lappland ihre Hauptverbreitung in den Wiesen- und Heidebirkenwäldern haben (*Cornus suecica*, *Linnaea borealis*, *Aspidium dryopteris*). Auffallend ist, dass hier viele Arten eine 250 μ bis 400 μ dicke Blattspreite besitzen (bei *Diapensia* sogar über 500 μ). Bei allen Arten der Gruppe A ist die Fläche der Spreite verhältnismässig gering. Besonders trifft dies für die immergrünen Zwergsträucher zu (Abbild. bei Haglund¹⁾). Die Lebensdauer der Blätter beträgt in der Gegend von Kilpisjärvi 10—15 J. bei *Lycopodium selago*, 8—10 J. bei *Juniperus communis*, 4—5 J. bei *Lycopodium annotinum* und *L. alpinum*, 3—4 J. bei *Cassiope tetragona*, ca 3 J. bei *Empetrum hermaphroditum*, 2—3 J. bei *Phyllodoce*, *Loiseleuria*, *Vaccinium vitis idaea* und *Linnaea*, 2 J. bei *Andromeda polifolia*²⁾ und 1—2 J. bei *Diapensia lapponica*³⁾. Bei den anderen Arten funktioniert die Blattspreite stets weniger als 1 Jahr, oft bloss einige Monate. Dass die Arten mit mehrjährigen Blättern in diesen xerophytischen Bau aufweisen, ist von Warming u. a. hervorgehoben worden. Nach Warming ist der Grund hierzu in dem höheren Wuchs dieser Zwergsträucher (im Vergleich zu den mono- und dikotylen Stauden mit nicht überwinternden Stengeln und Blättern) zu suchen, infolge dessen sie bei der oft mangelhaften Schneedecke auf den Zwergstrauchheiden im Winter nicht selten bloss liegen. Obschon diese Erklärung den Kern der Frage trifft,

1) Haglund, Emil, Ur de högnordiska vedväxternas ekologi, Akad. afhandl., Uppsala 1905.

2) Die untersuchten Exemplare stammen aus der *reg. alp. fert.* von Koltaköngäs (Finn.-Lappl.).

3) Ausnahmsweise können bei allen Arten auch ältere Blätter lebenskräftig sein.

scheint sie insofern ungenügend zu sein, als auch sommergrüne Arten der Zwergstrauchheide Einrichtungen aufweisen, die als xerophytisch zu deuten sind.

Die Aussenwände der Epidermiszellen sind nur selten unter $3\ \mu$ stark (so bei *Cornus suecica*, *Pedicularis lapponica* und *Aspidium dryopteris*). Bei anderen sommergrünen Arten wurden $3\text{--}9\ \mu$, bei den immergrünen $3\text{--}10\ \mu$ (bei *Diapensia* sogar $20\ \mu$) gemessen. Alle dikotylen Arten der Zwergstrauchheide besitzen gut ausgebildetes Palisadenparenchym. Die Höhe der Palisadenschicht schwankt zwischen 30 und $200\ \mu$.

Die Spaltöffnungen sind auf die Blattunterseite beschränkt. Eine scheinbare Ausnahme — Spaltöffnungen auf der Blattoberseite — bildet *Calamagrostis lapponica*, da bei dieser Art bei den eingerollten Blättern die Blattunterseite der Licht- und Windwirkung besonders ausgesetzt ist. Dagegen führt *Vaccinium myrtillus* Spaltöffnungen sowohl auf der Blattober- als auch auf der Blattunterseite. Es ist sehr bezeichnend, dass diese Art durchaus die trockensten Zwergstrauchheiden meidet. Die Zahl der Spaltöffnungen auf $1\ \text{mm}^2$ der Blattfläche ist nicht selten überraschend gross. So betrug diese Zahl bei *Andromeda polifolia* (aus einer Zwergstrauchheide bei Kolttaköngäs) 674, bei *Cassiope tetragona* (Kilpisjärvi-Geb.) 405, bei *Linnæa borealis* (Kilpisjärvi-Geb.) 457. Diese hohe Zahl wird gewiss durch die geringe Grösse der die Spaltöffnungen tragenden Spreitenfläche kompensiert.

Es seien hier Angaben über einige Arten, die den Zwergstrauchheiden und den Birkenwäldern gemeinsam sind, mitgeteilt.

Tabelle 11 a.

Zahl der Spaltöffnungen auf $1\ \text{mm}^2$.

Untersuchte Pflanzenarten	<i>Betula tortuosa</i> -Wald		Zwergstrauchheide	
	Blattobers.	Blattunt.	Blattobers.	Blattunt.
<i>Cornus suecica</i> (Pp)	0	65	0	158
" " (Kt)			0	117
<i>Vaccinium myrtillus</i> (Kl)	44	142	95	190
<i>V. vitis idaea</i> (Kt)			0	497
" " (Kl)	0	280		
<i>Linnæa borealis</i> (Kl)	0	225	0	457
<i>Aspidium dryopteris</i> (Pp)	0	24	0	50

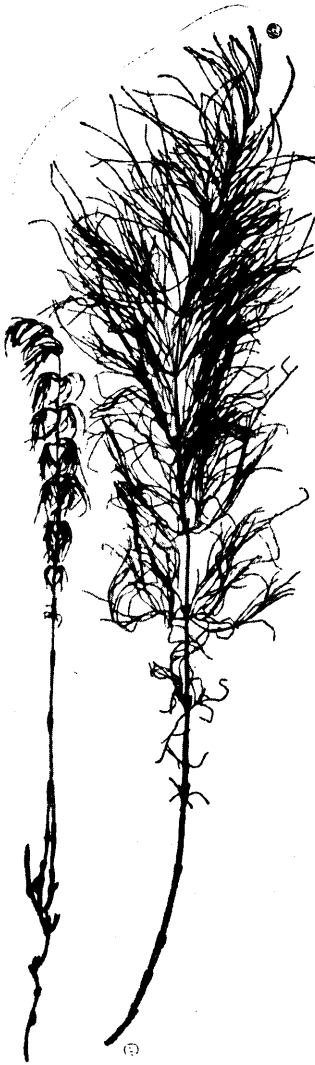


Fig. 11. *Equisetum silvaticum*. Rechts ein Exemplar aus einem Birkenwalde am Fusse des Pääskyspahta-tunturi in Finnisch-Lappland. Links eine Pflanze aus einer Zwergstrauchheide daselbst. 0.3 nat. Grösse.

Die Höhe der Spaltöffnungszahl bei den Exemplaren aus den Zwergstrauchheiden ist sehr beträchtlich. Oft genug übersteigt diese Zahl diejenige bei den Birkenwaldexemplaren um das Doppelte. Diese Eigentümlichkeit der Heidepflanzen scheint zu nicht geringem Teil davon abzuhängen, dass die Epidermiszellen bei den Exemplaren der baumlosen Heide beträchtlich kleiner sind, weshalb bei Beibehaltung des einer bestimmten Art eigenen Verteilungsmodus der Spaltöffnungen diese dichter zu liegen kommen. Es ist auch möglich, dass die ausserordentlich hohen Zahlen, die mehrere Zwergsträucher aufweisen, zum Teil auf eine ähnliche Ursache während der phylogenetischen Entwicklung zurückzuführen sind.

Dass die Zwergstrauchheide eine xerophytische Struktur aufweisende Vegetation ist, unterliegt bei Betrachtung der Angaben der Tabelle 11 keinem Zweifel. Ein Blick auf die Fig. 11—14, wo von mehreren Arten (*Equisetum silvaticum*, *Aspidium dryopteris*, *Vaccinium vitis idaea*, *V. myrtillus* und *Cornus suecica*) neben Exemplaren, die aus der Zwergstrauchheide stammen, auch solche, die in den *Betula*-Wäldern wuchsen, abgebildet sind, bestätigt in noch höherem Grade diese Annahme. Die Unterschiede sind frappant. Sie äussern sich (1) in der Tendenz der Exemplare aus der Zwergstrauchheide, die Assimilationsorgane mehr oder weniger steil nach oben (so bei *Vaccinium myrtillus*, *Aspidium dryopteris*) bzw. nach unten (*Equi-*

setum silvaticum) zu richten; (2) in der Abnahme der Grösse der Blattspreite, und (3) in dem Zwergwuchs der Heideexemplare.

Xerophytisch gebaut sind also nicht nur die Zwergsträucher der Heide, sondern auch Arten, die sommergrünes Laub besitzen. Das deutet darauf, dass in der Zwergstrauchheide auch im Sommer Wassermangel eintreten kann. Dieser findet seine Ursache zum Teil darin, dass die Zwergstrauchheide in der Arktis schneearme Standorte einnimmt, zum Teil in der Tatsache, dass die schützende Baumschicht, wie auch der ständige Zufluss von Schneewasser, der in den ebenso baumlosen Schneewiesen auftritt, hier gänzlich fehlt. Beobachtungen im Sommer 1927 zeigten oft genug, dass die Bodenfeuchtigkeit in den Zwergstrauchheiden (besonders in den *Diapensia*- und *Empetrum*-Heiden) sehr gering ist.

Die Vegetation der Wiesen- und Schneewiesenserie ist von derjenigen der Zwergstrauchheide dadurch unterschieden, dass in ihr mesophytisch gebaute dikotyle Stauden und \pm breitblättrige Gramineen vorwiegen. Die Gruppe B der Tabelle 11 (vergl. Taf. XIII—XVII) enthält Pflanzen der Wiesenbirkenwälder und der Hochstaudenwiesen. Die Dicke der Blattspreite beträgt bei diesen Pflanzen

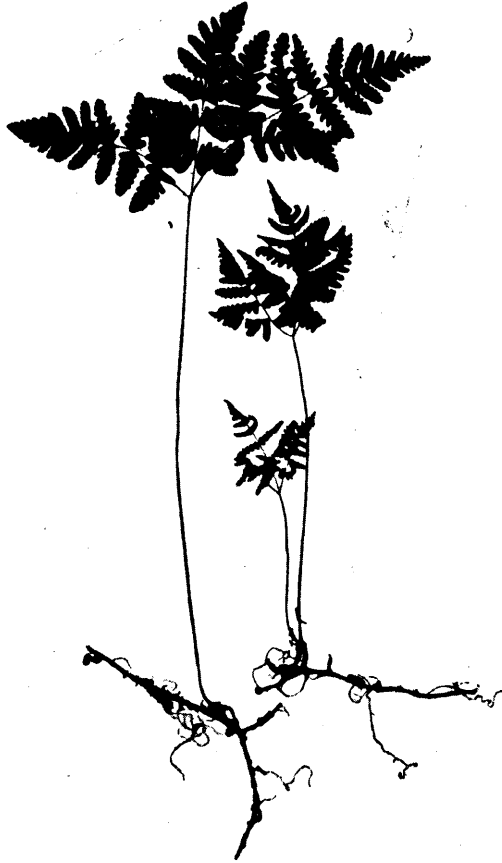


Fig. 12. *Aspidium dryopteris*. Links ein Exemplar aus einem Heidebirkenwalde am Fusse des Pääskyspahta-tunturi, rechts aus einer Zwergstrauchheide auf dem genannten „tunturi“. 0.4 nat. Grösse.

grösstenteils weniger als 200μ . Die Spreite ist hier oft, im Vergleich mit den Spreiten der Pflanzen der Schneewiesen und erst recht im Vergleich mit denen der Heidepflanzen, sehr gross. Die Epidermisaussenwand auf der Blattoberseite misst in der Regel $1-3 \mu$ (bei den wenigen Arten mit immergrünen Blättern $6-7 \mu$). Die Palisadenschicht ist bei den dikotylen Arten gut ausgebildet. Ihre Dicke beträgt $25-100$ (150) μ .



Fig. 13. *Vaccinium myrtillos* (rechts und in der Mitte) und *V. vitis idaea* (links und unten). Es ist der Unterschied zwischen den grossen, aus Heidebirkenwäldern vom Pääskyspahta (Finnisch-Lappland) herstammenden Exemplaren und den Zwergpflanzen aus den Zwergstrauchheiden des Koltaköngäs (Finn.-Lappl.) recht bedeutend. 0. 33 nat. Grösse.

Bei mehr als der Hälfte der untersuchten Arten sind die Spaltöffnungen auf die Blattunterseite beschränkt. Da, wo Spaltöffnungen sich auf beiden Blattseiten finden, ist ihre Zahl auf der Blattoberseite stets viel geringer.

In der Gruppe C (Taf. XX—XXII), die die Arten der Schneewiesen umfasst, ist die Blattspreite oft genug über 200 μ stark. Dünne (unter 140 μ) und grosse Spreiten, wie sie bei mehreren Wiesenpflanzen auftreten, fehlen hier. Dagegen finden sich mehrere Arten, die 400 und mehr μ dicke Spreiten besitzen. Diese Arten sind jedoch in ihrem inneren Bau den dickblättrigen Arten der Zwergstrauchheide keineswegs ähnlich. Erstens ist bei diesen Arten (*Alsine biflora*, *Cochlearia officinalis*, *Saxifraga stellaris*, *S. rivularis*) die Epidermisaussenwand zum Teil nur 2—3 μ stark (bei einigen 6—7 μ); weiter fehlt die Palisadenschicht oft vollständig, dagegen ist das Schwammparenchym locker und enthält grosse bis sehr grosse Interzellulare. Alle diese Arten führen Spaltöffnungen auf beiden Seiten der Spreite.

Die oft schwache Ausbildung der Palisadenschicht ist auch anderen Arten der Schneewiesen mehr oder weniger eigen. Die Epidermisaussenwand ist mit Ausnahme solcher Arten wie *Anthoxanthum odoratum*, *Carex Lachenalii*, *Luzula arcuata*, *Polygonum viviparum*, *Alsine biflora*, *Cochlearia officinalis*, *Cassiope hypnoides* (bei diesen 4—8 μ) bloss 1—3 μ dick.

Besonders bezeichnend ist die Verteilung der Spaltöffnungen. Diese finden sich bei allen untersuchten Arten der Schneewiesen (ausgenommen *Carex* und *Luzula*) auf beiden Blattseiten. Oft genug nähert sich die Zahl der Spaltöffnungen auf der Blattoberseite derjenigen auf der Blattunterseite, oder sie übersteigt diese sogar, wie bei *Trisetum spicatum*, *Poa alpina* f.



Fig. 14. *Cornus suecica*. Rechts — aus einem Heidebirkenwalde, links — aus einer Zwergstrauchheide. Pääskyspahta, Finnisch-Lappland. 0.35 nat. Gr.

vivipara, *Alsine biflora*, *Ranunculus glacialis*, *Cardamine bellidifolia*, *Saxifraga stellaris*, *S. rivularis*, *Sibbaldia procumbens*, *Epilobium anagallidifolium*, *Cassiope hypnoides* und *Gnaphalium supinum*. Das Auftreten von Spaltöffnungen auf der Blattoberseite ist noch deshalb bemerkenswert, weil es auch bei Arten wie *Salix herbacea*, *S. polaris*, *Cassiope hypnoides* vorkommt, obschon bei anderen vom Verfasser untersuchten *Salix*-Arten Lapplands¹⁾ und *Cassiope tetragona* die Spaltöffnungen auf die Blattunterseite beschränkt sind.

Das häufige Auftreten von Spaltöffnungen auch auf der Blattoberseite ist ein äusserst charakteristischer Zug vieler wichtiger Arten der Schneewiesen. Diese Eigentümlichkeit deutet darauf hin, dass die Ökologie dieser Formation eine ganz andere ist, als bei den Formationen der Hochstaudenwiese und des Wiesenbirkenwaldes. Die sehr kurze Vegetationsperiode, die den Schneewiesen eigen ist, gestattet den sie bildenden Kräutern und Gräsern die Vollendung ihres Lebenszyklus nur unter der Voraussetzung einer regen Assimilationstätigkeit. Andererseits dürfte die niedrige Temperatur der Bodenlösung der Aufnahme von Nährsalzen entgegenwirken, weil ja die Löslichkeit der Nährsalze in kaltem Wasser gewiss geringer ist. Man gelangt so zu der Annahme einer verhältnismässig lebhaften Transpiration bei den Pflanzen der Schneewiesen. Endgültig lässt sich diese Frage natürlich nur experimentell entscheiden. Es sei jedoch erwähnt, dass Thorild Wulff auf Spitzbergen bei *Polygonum viviparum*, *Saxifraga nivalis*, *Salix polaris* mittels der Kobaltprobe von Stahl eine verhältnismässig ausgiebige Transpiration feststellen konnte. Es ist zu vermuten, dass die Pflanzen der Schneewiese sich aus sehr kaltem Boden (um 0° herum?) Wasser holen können. Nur so ist es begreiflich, dass man bei ihnen auch bei trockener Luft und niedriger Bodentemperatur gewöhnlich kein Welken des Laubes wahrnehmen kann.

IV. Beziehungen zwischen den Pigmentspektra der untersuchten Formationen und dem anatomischen Bau der diese zusammensetzenden Arten.

Die oben besprochenen Formationen der Wiesen-, Heide- und Schneebodenserie bilden innerhalb einer jeden dieser Serien eine

1) Bei *Salix myrsinites* führt auch die Blattoberseite Spaltöffnungen.

kontinuierliche Reihe. Eine derartige Reihe kann mehr oder weniger Glieder enthalten, den Bedingungen der sie bildenden Formationen entsprechend. Die grösste Amplitude besitzt die anspruchslose Heideserie. Mit den Heidebirkenwäldern beginnend, schliesst sie mit reinen Flechtenassoziationen, in denen die Phanerogamen von ganz untergeordneter Bedeutung sind oder völlig fehlen. Zwischen den extremsten Ausbildungsarten dieser Serie stehen die Heidegebüsche (mit vorherrschender *Betula nana*), die *Phyllodoce coerulea*-, *Vaccinium myrtillus*-, *Cassiope tetragona*- und *Empetrum*-Zwergstrauchheiden und die offenen *Diapensia-Loiseleuria*-Heiden.

Die viel anspruchsvollere Wiesenserie gliedert sich in die Formationen der Wiesenbirkenwälder, der Wiesengebüsche, der Hochstaudenwiesen und der Wiesen.

Die Serie der Schneebodenformationen besteht nur aus den Schneewiesen, der offenen Schneebodenvegetation und den Schneemoosvereinen. Den kargen Existenzbedingungen entsprechend fehlen hier die ersten Glieder, die der Wiesen- und Heideserie eigen sind — die Wälder und Gebüsche.

In der Tabelle 12 sind die wichtigsten Züge der untersuchten Formationen und ihre gegenseitige Beziehungen schematisch dargestellt worden. Es sei bemerkt, dass die Moor- und Sumpfformationen unberücksichtigt geblieben sind, ebenso die Formationen, in denen den Phanerogamen keine Bedeutung zukommt. In dem Schema bedeutet eine Verschiebung von links nach rechts in einer gegebenen Serie eine Verschlechterung der Standortsbedingungen, die in erster Linie dadurch bedingt ist, dass die winterliche Schneedecke immer geringer wird (so in den Wiesen- und Heideformationen). In der Serie der Schneebodenformationen bedeutet eine Verschiebung von links nach rechts für die Phanerogamenvegetation zwar ebenfalls eine Verschlechterung der Standortsbedingungen, doch ist diese hier nicht durch die geringere Bedeckung im Winter, sondern durch zu lange dauernde Schneedecke verursacht.

Die Wasservorräte sind am grössten in den Formationen der Schneewiese. Ihnen folgt die Wiesenformation, während die Heideformation — besonders die Zwergstrauchheide und die offene Heide — oft unter Wassermangel leiden dürften. Es besteht also in dieser Hinsicht eine Übereinstimmung zwischen der „unteren“ (Wiesen-) und der „oberen“ (Schneewiesen-) Formation, während

Tabelle 12.

Serie	Die Pflanzendecke ist in der Krautschicht geschlossen. Die oberste Schicht bilden:			Die Pflanzendecke in d. Bodenschicht geschlossen. Flechten in dieser vorhanden. Die oberste Schicht bilden niedrigwüchsige mono- u. dikotyle Stauden	Die Pflanzendecke ist in der Krautschicht ± offen	Die Pflanzendecke ist in der Bodenschicht ± offen
	Bäume	Sträucher	Hohe mono- u. dikotyle Stauden. In der Bodenschicht fehlen Flechten			
d. Wiesenformationen	Wiesenbirkenwälder (<i>Trollius</i> , <i>Geranium</i> usw.)	Wiesengebüsche (<i>Salix glauca</i> , <i>S. lanata</i> usw. mit <i>Trollius</i> , <i>Geranium</i> u. a.)	Hochstaudenwiesen (<i>Angelica</i> , <i>Mulgedum</i> usw.) Wiesen (<i>Trollius</i> , <i>Geranium</i> , <i>Saussurea</i> , <i>Cirsium heterophyllum</i> usw.)			
d. Heideformationen	Heidebirkenwälder (<i>Vaccinium myrtillus</i> , <i>Empetrum</i> usw.)	Heidegebüsche (<i>Betula nana</i> mit <i>Vaccinium myrtillus</i> , <i>Empetrum</i> , <i>Phyllodoce</i> u. a.)	Zwergstrauchheiden (<i>Empetrum</i> , <i>Cassiope tetragona</i> , <i>Phyllodoce</i> , <i>coerulea</i> , <i>Vaccinium myrtillus</i> Heiden)		Offene Heiden ¹⁾ (<i>Diapensia</i> , <i>Loiseleuria</i> , Heide)	
d. Schneebodenformationen	—	—	—			Schneewiesen (<i>Trisetum spicatum</i> , <i>Ranunculus nivalis</i> , <i>Gnaphalium supinum</i> usw.) Offene Schneebodenvegetation ²⁾ (<i>Ranunculus glacialis</i> , <i>Saxifraga</i> -Arten usw.)

1) Die Fortsetzung der Heidereihe bilden die reinen Flechtenheiden (ohne Phanerogamen!).

2) Die Fortsetzung dieser Reihe bilden die Schneemoosvereine (*Anthelia*, *Alcualaria Breidleri*, *Pleuroclada albescens*, *Pohlia* u. *Polytrichum*-Arten usw.).

die „mittlere“ (Zwergstrauchheiden-) Formation von den beiden ersteren scharf unterschieden ist.

Ganz dieselben Verhältnisse finden wir bei einem Vergleich der phytochromatischen Spektren dieser Formationen. In den Tabellen 5, 7, 8, 9 und 10 sind die phytochromatischen Spektren des Wiesenbirkenwaldes, Heidebirkenwaldes, der Hochstaudenwiese, Zwergstrauchheide und Schneewiese gegeben.

Es sind hierbei vier Pigmentgruppen unterschieden worden:

Gruppe A	Gruppe B	Gruppe C	Gruppe D
[000], [000..0], A [000]	A [1(1)0]	A [(1)(1)1]	A [111]
A[(1)(1)(1)], A[(1)(1)(1)..(1)]	A [1(1)(1)]	A [1(1)1]	A [111..1]
C[(1)(1)(1)], C[(1)(1)(1)..(1)]	A [(1)1(1)..(1)]	A [(1)1(1)..1]	
		A [(1)1(1)..1]	

Die Gruppe A enthält Pigmenttypen, die entweder überhaupt nicht das Vermögen besitzen Anthocyane (A) oder Hämatokarotinoide (C) zu bilden ([000] und [000..0]), oder diese wohl in anderen Organen, nie aber in der Spreite bilden können (A [000]); hierher gehören ferner Typen, die das Vermögen der Pigmentbildung in den Assimilationsorganen bis zum Absterben derselben beibehalten, tatsächlich aber grün (anthocyanin- resp. hämatokarotinoidfrei) bleiben (A [(1)(1)(1)], C [(1)(1)(1)] bei nur eine Vegetationsperiode ausdauernden Assimilationsorganen, A [(1)(1)(1)..(1)] resp. C [(1)(1)(1)..(1)] bei mehrjährigen). Diese Gruppe ist dadurch charakterisiert, dass sie während der ganzen Vegetationsperiode grün ist und die roten Pigmente nicht enthält. Bei der Gruppe B bilden die jungen Blätter A., zuletzt aber verlieren die Blätter ebenfalls das Vermögen A. zu bilden (A [1(1)0]), oder aber dieses Vermögen wird bis zum Absterben der Blätter beibehalten (A [1(1)(1)]). Während des grössten Teiles der Vegetationsperiode sind die Pflanzen dieser Gruppe grün, nur die jungen bzw. die überwinterten Blätter während der kalten Jahreszeit sind gerötet. Bei der Gruppe C sind die jungen Blätter oft gerötet, im Hochsommer sind die Blätter grün. Sehr ausgiebig ist bei den Pflanzen dieser Gruppe die herbstliche Anthocyaninbildung, die bei vielen Arten sehr zeitig einsetzt und z. T. über einen Monat dauern kann. In der Gruppe D stehen Arten, bei welchen die sommerliche Ergrünung wegen der kargen Standortsbedingungen unterbleibt und

wo die Pflanzen den Sommer durch (oder sogar mehrere Vegetationsperioden nacheinander) ununterbrochen gerötet sind.

Diese Pigmentgruppen bilden also eine steigende Reihe ($A < B < C < D$), in der A „permanentgrün“, D „permanentrot“ ist.

In der unten folgenden Tabelle 13 sind die prozentualen Werte der einzelnen Pigmentgruppen in den vom Verfasser untersuchten Formationen aufgeführt.

Tabelle 13.

Formationen	Pigmentgruppen			
	A	B	C	D
Wiesenbirkenwald . . .	56.0 Prz.	22.0 Prz.	22.0 Prz.	0 Prz.
Hochstaudenwiese . . .	42.8 „	28.6 „	28.6 „	0 „
Heidebirkenwald	33.4 „	20.0 „	39.9 „	6.7 „
Zwergstrauchheide . . .	19.2 „	15.4 „	42.3 „	23.1 „
Schneewiese	54.5 „	12.2 „	30.3 „	3.0 „

Auf Grund der Zahlen der Tab. 13 sind die Kurven der Fig. 15 konstruiert.

An der Fig. 15 sieht man, dass die „grüne“ Kurve der Gruppe A zwei Maxima besitzt: ein Maximum in den Wiesenbirkenwäldern und ein zweites Maximum in den Schneewiesen. Ein gut ausgeprägtes Minimum befindet sich in der Zwergstrauchheide. Umgekehrt bildet die pigmentreichste „rote“ Gruppe D ein deutliches Maximum in der Zwergstrauchheide.

Der Anthocyaninreichtum der arktischen Pflanzen ist von mehreren Forschern — darunter auch Middendorff — hervorgehoben worden. Nach Middendorff¹⁾ ist in der sibirischen Tundra die Rötung nach den ersten herbstlichen Nachtfrösten so stark, dass „fast alle Blätter sich davon in Scharlach kleiden“. — Etwas eingehendere Untersuchungen über diesen Gegenstand verdanken wir Thorild Wulff²⁾, der auf Spitzbergen „an der äusserst kargen, im Vergleich mit dem Eisfjordgebiet erheblich

1) Middendorff, Reise in den äussersten Norden und Osten Sibiriens. Bd. IV, 1, p. 674, Petersburg 1864—67.

2) Wulff, Thorild, Botanische Beobachtungen aus Spitzbergen, Akademische Abhandlung, Lund 1902.

artenärmeren Nordküste“ ca 50 Arten, also etwa die Hälfte der auf Spitzbergen gefundenen höheren Pflanzen, untersuchte.

Bei folgenden Arten fand Wulff die in voller Lebenskraft stehenden Blätter sehr anthocyaninreich: *Taraxacum phymatocarpum*, *Pedicularis hirsuta*, *Cassiope tetragona*, *Potentilla pulchella*, *Saxifraga flagellaris*, *S. hirculus*, *S. cernua*, *Cardamine bellidifolia*, *Cochlearia fenestrata*, *Silene acaulis*, *Polygonum viviparum*, *Oxyria digyna*, *Koenigia islandica*, *Festuca rubra*. Seine Ergebnisse formuliert Thorild Wulff so: „Eine durchgängig charakteristische Eigenschaft der arktischen Gewächse ist eine besonders kräftige Entwicklung von Anthocyan und anderen färbenden Substanzen im vegetativen Systeme“.

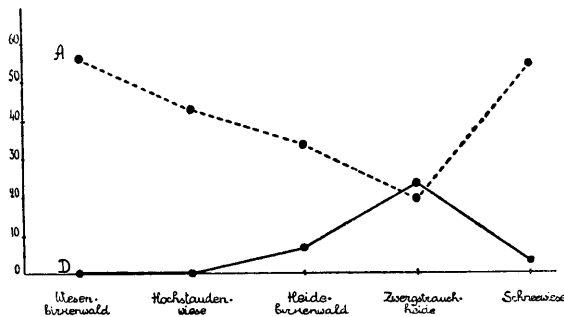


Fig. 15. Zwei Pigmentkurven aus Lappland, auf Grund der Zahlen der Tabelle 13 (p. 82) konstruiert. Auf der Ordinatenaxe sind die prozentualen Werte der „grünen“ Pigmentgruppe A (enthält Arten, denen das Vermögen Anthocyanin zu bilden nicht zukommt, sowie solche, die Anthocyanin bilden können, tatsächlich aber während der ganzen Vegetationszeit anthocyaninfrei sind) und der „roten“ Gruppe D (enthält Arten, die den Sommer durch gerötet sind) gegeben.

Wenn man diesen Satz von Thorild Wulff mit den oben mitgeteilten Ergebnissen des Verfassers vergleicht, so muss die relative (auch absolute) Pigmentarmut der Schneewiese überraschen. Sind doch die Schneewiesen sozusagen im höchsten Grade „arktische Vegetation“. Wenn schon die arktischen Heiden grossen Anthocyaninreichtum aufweisen, so könnte man vielleicht vermuten, dass die unter noch „ungünstigeren“ Bedingungen existierenden, höher gelegenen Schneewiesen einen noch höheren Anthocyaningehalt aufweisen. Eingehende Untersuchungen der entsprechenden Formation ergaben aber, wie bereits mitgeteilt, das merkwürdige Resultat, dass die Schneewiesen, was die Pigmente betrifft, den echten Wiesen viel näher stehen als den Heiden.

Der scheinbare Widerspruch mit den Ergebnissen Wulff's verschwindet, wenn man in Betracht zieht, unter welchen Bedingungen er bei den oben erwähnten Arten eine ergiebige Pigmentation konstatierte. Allerdings finden sich hierüber in der erwähnten Arbeit Wulff's nur kurze Bemerkungen. Es seien diese hier rekapituliert. *Potentilla pulchella*: „Die Pflanze ist gewöhnlich anthocyanführend, am kräftigsten bei Exemplaren von trockenen Standorten“. *Saxifraga cernua*: „Gedeiht meistens auf der Sonne exponierten Standorten. Die Farbe mehr weniger hell rotbraun“. *Cardamine bellidifolia*: „Die ganze Pflanze, Blätter und Früchte, dunkel rotviolett, wenn sie an trockenen, sandigen Standorten bzw. am Meeresstrande wächst“. *Cochlearia fenestrata*: „Die ganze Pflanze, Stengel, Blätter und Früchte, an trockenen exponierten Lokalitäten öfters violett mit rotem oder blauem Ton“. *Oxyria digyna*: „Die ganzen Exemplare, Blätter, Blattstiele und Blütenstände, sind gewöhnlich auffallend rot-rotviolett gefärbt, ganz besonders an trockenem, der Sonne exponiertem Boden“. Ähnliche Bemerkungen finden sich bezüglich *Stellaria longipes*, *Salix polaris* und *Poa pratensis*.

Aus diesen Bemerkungen Thorild Wulff's ist ersichtlich, dass die reichlichste Anthocyaninbildung an trockenen, stark exponierten Standorten beobachtet wurde. — Es ist anzunehmen, dass in den Schneewiesen Spitzbergens in betreff der Pigmentation ungefähr dieselben Verhältnisse herrschen, wie in den Schneewiesen Finnisch- und Norwegisch-Lapplands.

Wie oben angedeutet, ist die Serie der echten Wiesen und die der Schneewiesen an genügend feuchten Boden gebunden. Wie z. B. auf der Karte Thore Fries' deutlich zu sehen und wie es auch Beobachtungen des Verfassers zeigten, sind die Wiesenbirkenwälder an das Vorhandensein sauerstoffreichen Wassers gebunden und bedecken deshalb oft die Flussufer. — Frisch bis nass ist der Boden in den Schneewiesen.

Die Zwergstrauchheide, die ohne Zweifel die xerophilste Phanerogamenformation des untersuchten Gebietes ist, bewohnt die Standorte, die im Winter eine verhältnismässig dürftige bis geringe Schneedecke besitzen (Thore Fries, 1913), weshalb der Boden hier im Sommer oft sehr trocken ist. In völliger Übereinstimmung mit dem, was aus den Spitzbergen betreffenden Daten Thorild Wulff's zu entnehmen ist, weist gerade die Formation der arktischen Zwergstrauchheide den grössten Pigmentreichtum auf.

Dass Trockenheit des Substrats die Anthocyaninbildung fördert, ist von verschiedenen Verfassern hervorgehoben worden, so von Molisch, Eberhardt, Warming, Diels, Buscaglioni und Pollacci, Miyoshi, Gertz, Wheldale-Onslow. Der Verfasser hatte die Möglichkeit, sich in Estland während seiner Untersuchungen betreffend die Pigmenttypen von der Richtigkeit dieser Anschauung zu überzeugen. Es seien hier einige diesbezügliche Beobachtungen aus Finnisch-Lappland angeführt.

Auf dem Nordostabhänge des Pieni-Malla finden sich auf sanft geneigten Abhängen oberhalb der Waldgrenze mehrere mehr oder weniger runde bis ovale kahle Stellen, deren Durchmesser einige zehn m betragen dürfte und die abflusslose sanfte Vertiefungen darstellen. Im Sommer 1927 waren sie grösstenteils trocken, z. T. sogar sehr trocken. Die kahle Fläche war durch ziemlich regelmässige Risse in Polygone zerlegt, deren Durchmesser zwischen 10 und 200 cm schwankte. Die Oberfläche der Polygone war von einem lehmigen Schorfe bedeckt, der, dicht von Spalten durchsetzt, sich in kleinen Stücken abheben liess. Diese Stücke waren so trocken, dass ihre Ränder gewöhnlich nach oben gekrümmt waren. Von Phanerogamen fanden sich in den mittleren Teilen der untersuchten Vertiefung bloss *Ranunculus reptans* und *Veronica scutellata*, während *Alopecurus aequalis* nur in den Randpartien wuchs. Die Gestaltungsart von *A. aequalis* — die langen, liegenden, zu dieser Zeit stark geröteten Halme mit vertrockneten Schwimmblättern besetzt — liessen keinen Zweifel aufkommen, dass in der ersten Hälfte des Sommers an diesen Stellen Wasser gestanden hatte. Übrigens enthielt der tiefste Teil einiger ähnlicher Bildungen zwischen dem Iso- und Pieni-Malla auch im August etwas Wasser. Die Polygone bilden sich hier also alljährlich von neuem. Beide Pflanzen — *Ranunculus reptans* und *Veronica scutellata* — waren dort, wo sie auf den Polygonen wuchsen, intensiv gerötet. Sie traten hier als A [111] auf. Bei *Ranunculus reptans* waren Stengel und Blätter braunrot gefärbt. In den Blättern waren besonders die äussersten Mesophyllschichten auf der Blattoberseite reich an violettrottem Zellsaft. *Veronica scutellata* war oft stärker gerötet als *R. reptans*. Diese Art führte das Anthocyanin in den Epidermiszellen. — Ganz anders verhielten sich dieselben Pflanzen in den Spalten des Polygonbodens. Sie hatten dort merklich grössere Blätter, waren rein grün gefärbt

und verhielten sich wie A [(1)(1)(1)], obwohl sie, da die Spalten genügend breit und oft unter 10 cm tief sind, kaum weniger Licht empfangen als die Pflanzen, die auf den Polygonflächen wuchsen.

Ohne Zweifel war der reichliche Anthocyaningehalt der letzteren durch die Trockenheit des Substrats hervorgerufen.

Die Ähnlichkeit der Konstitution der Schneewiesen und der echten Wiesen, die sich in der Pigmentarmut beider Wiesenarten äussert, lässt sich auch im Bau der Assimilationsorgane nachweisen. Wie oben mitgeteilt, wurde zu diesem Zweck nach Möglichkeit bei allen Phanerogamen der analysierten Formationen auch die Anatomie des Blattes untersucht. Die Ergebnisse dieser anatomischen Studien sind bereits mitgeteilt worden. Eine kurze Zusammenfassung derselben besagt, dass die Zwergstrauchheide in ihrem Blattbau von den Wiesen und Schneewiesen scharf unterschieden ist, denn nicht nur die immergrünen Zwergsträucher, sondern auch die sommergrünen Arten, die der Heide eigen sind, weisen \pm xerophytischen Bau auf. — Anders ist das Verhalten der Wiesen und Schneewiesen. In diesen herrschen Arten mit mesophytischer, zum Teil sogar hygrophytischer Blattstruktur vor.

Es lässt sich also bei den untersuchten Formationen eine deutliche Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der anatomischen Untersuchung der Blattspreite einerseits und dem phytochromatischen Spektrum andererseits konstatieren.

Dadurch gewinnt die Bestimmung des phytochromatischen Spektrums einer Pflanzengesellschaft an Bedeutung. Es sei jedoch hervorgehoben, dass das Pigmentspektrum naturgemäss nur einen Zug im Bau der letzteren markiert. Allerdings gestattet dieses Spektrum die Lebensbedingungen der betreffenden Pflanzengesellschaft annähernd zu beurteilen, denn die Voraussetzungen für reichliche Pigmentation sind \pm intensive Belichtung und Trockenheit des Bodens resp. Reichtum an Salzen, Humussäuren usw.; doch wäre es gewiss einseitig, bei einer ökologischen Analyse einer Pflanzengesellschaft ganz besonderes Gewicht auf die Bestimmung des phytochromatischen Spektrums zu legen.

Aus einem Vergleich der Ergebnisse der phytochromatischen Analyse und der Befunde der Untersuchung der Blattanatomie der Wiesen- und Schneewiesenformationen geht u. a. folgendes

deutlich hervor: während das phytochromatische Spektrum beider genannten Formationen im allgemeinen weitgehende Übereinstimmung aufweist, liessen sich bei der Untersuchung des anatomischen Baues der Blattspreiten deutliche und charakteristische Unterschiede feststellen, die sich darin äussern, dass bei den Pflanzen der Schneewiesen im Gegensatz zu den Pflanzen der echten Wiesen Lapplands Spaltöffnungen vorwiegend auf beiden Blattflächen auftreten und nicht selten auf der Blattoberseite zahlreicher sind als auf der unteren Seite.

In anderen Fällen gestattet dagegen das phytochromatische Spektrum da Unterschiede aufzudecken, wo die andere Methode (anatomische Untersuchung des Blattspreitenbaues) versagt. Dieser Fall tritt u. a. dort ein, wo die Standorte sich hauptsächlich in den Belichtungsbedingungen, nicht aber in der Bodenbeschaffenheit unterscheiden. Als Beispiel seien die pigmentreichen rimpiartigen Moore Nordfinnlands (Cajander) erwähnt¹⁾, die sich wohl hauptsächlich durch den reichlichen Pigmentgehalt und nicht durch eine besondere Blattstruktur von den *Spaghnum*-Mooren Südfinnlands unterscheiden.

Hieraus folgt, dass die beiden Methoden einander ergänzen. Leider wissen wir zur Zeit nichts über die phytochromatischen Spektren der Formationen gemässiger und tropischer Zonen.

V. Über den Chlorophyllgehalt der arktischen Pflanzen.

A. Anthophyta und Pteridophyta.

Der Chlorophyllgehalt kann bei einer Pflanzenart an verschiedenen Standorten beträchtlichen Schwankungen unterworfen sein; auch ändert sich der Chlorophyllgehalt bei vielen Arten während der Vegetationsperiode. Das „Ausbleichen“ vieler Koniferen im Winter ist ja gut bekannt. — Nach den sorgfältigen Untersuchungen Stälfelt's²⁾ wissen wir, dass bei *Picea excelsa* und *Pinus silvestris* in Schweden der Gehalt an Chlorophyll Maxima im Winter und Sommer, Minima im Frühling und Herbst aufweist. Ungeachtet dieser Schwankungen sind nach Ljubimenko die

1) Cajander, A. K., Studien über die Moore Finnlands, Fennia 35, Helsingfors 1913—1915.

2) Stälfelt, M. G., Periodische Schwankungen im Chlorophyllgehalt wintergrüner Pflanzen, Planta, Arch. f. wiss. Botanik, 4. Bd. 1/2. Heft, Berlin 1927.

maximalen Chlorophyllmengen, die eine Art in ihren Assimilationsorganen bilden kann, eine erblich fixierte Eigenschaft.

Ljubimenko hat versucht festzustellen, wie gross der Chlorophyllgehalt der autotrophen Anthophyta unter verschiedenen Breitengraden ist. Er untersuchte über 600 Arten, und zwar in Petersburg, in der Krim und in Buitenzorg auf Java ¹⁾. Es sei hier eine Tabelle aus der russisch geschriebenen Arbeit Ljubimenko's in Übersetzung wiedergegeben:

Tabelle 14 (nach Ljubimenko).

In einem kg Rohgewicht der Blätter fand sich Chlorophyll	Prozentsatz der Arten		
	60° nördl. Br.	45° nördl. Br.	6° südl. Br.
0.8 g — 1.0 g	1.3	0.7	2.5
1.1 g — 2.0 g	15.5	26.5	36.0
2.1 g — 3.0 g	77.5	50.5	27.5
3.1 g — 4.0 g	5.7	16.5	16.0
4.1 g — 5.0 g	0	5.8	13.0
5.1 g — 6.0 g	0	0	4.0
6.1 g — 7.0 g	0	0	1.0

Wie aus dieser Tabelle ersichtlich, sind die Schwankungen im Chlorophyllgehalt am grössten in den Tropen, was seine Erklärung gewiss in den vielgestaltigen Lebensbedingungen derselben findet. Auch wird der maximale Chlorophyllgehalt (6.1—7 g auf 1 kg Rohgewicht) in den Regenwäldern gefunden. Weiter geht aus dieser Tabelle hervor, dass die Gruppe mit mittlerem Chlorophyllgehalt von 2.1—3 g unter dem 60. Breitengrade 77.5 Prz. ausmacht, während sie in den Tropen minder wichtig ist (27.5 Prz.). Dort nimmt die chlorophyllarme Gruppe (1.1—2 g Chlorophyll auf 1 kg) die erste Stelle ein.

Ljubimenko fasst seine Ergebnisse folgendermassen zusammen: „Bei Pflanzen verschiedener geographischer Breiten verändert sich der Chlorophyllgehalt hauptsächlich nach zwei Richtungen. Bei Arten, die das volle Tageslicht geniessen, vermindert sich der Chlorophyllgehalt mit

1) Ljubimenko, V., O prevraščenijach pigmentov plastid v živoj tkani rastenija, Mémoires de l'Acad. Impér. d. Sciences, VIII-e série, vol. XXXIII, № 12, Petrograd 1916.

der Abnahme des Breitengrades des Standortes. Bei Arten mit niedrigem Lichtminimum (Schattenpflanzen) vergrößert sich der Chlorophyllgehalt von den Polen zum Äquator.“ Weiter erscheint es Ljubimenko unzweifelhaft, dass, falls die Pflanzen isoliert voneinander wachsen würden, sich der Chlorophyllgehalt von den Polen zum Äquator hin regelmässig vermindern würde.

Die sehr wertvollen Daten Ljubimenko's sind gewiss für die von diesem Verfasser tatsächlich untersuchten Breitengrade zwischen Petersburg und Java zutreffend. Man könnte vielleicht aus den oben zitierten Äusserungen Ljubimenko's herauslesen wollen, dass seine Annahmen auch für die arktischen Länder Gültigkeit haben, und dass dort die dem vollen Tageslicht ausgesetzten Pflanzen noch chlorophyllreicher sind als in Petersburg. Tatsächlich herrschen aber nördlich der Waldgrenze ganz andere Verhältnisse, denn die Pflanzen sind in der Arktis nicht chlorophyllreicher als unter 60° n. Breite, sondern ganz im Gegenteil, sie sind ärmer, oft viel ärmer an Chlorophyll.

Dem Verfasser war es leider nicht möglich, bei den Pflanzen Lapplands quantitative Chlorophyllbestimmungen vorzunehmen. Doch gestattet die Färbung der Chloroplasten bei mikroskopischen Beobachtungen eine Einteilung in drei \pm scharf unterschiedene Gruppen. Bei der ersten (chlorophyllreichen) Gruppe sind die Chloroplasten grün bis sattgrün. Die mittlere (chlorophyllärmere) Gruppe führt viel weniger Chlorophyll: die Färbung der Plastiden ist hellgrün bis gelbgrün. Bei der dritten (chlorophyllärmsten) Gruppe findet man die „Chloroplasten“ bei mikroskopischer Untersuchung fast farblos oder gelblich (bräunlich), wobei der grüne Farbton kaum oder überhaupt nicht wahrnehmbar ist.

Im Wiesenbirkenwalde herrscht die chlorophyllreiche Gruppe. Die zweite und dritte Gruppe fehlen hier. Natürlich ist auch bei den Mesophyten des Wiesenbirkenwaldes der Chlorophyllgehalt Schwankungen unterworfen. So dürfte dieser bei *Viola biflora* gewiss viel geringer sein, als bei *Mulgedium alpinum* oder *Vaccinium vitis idaea*.

Sehr ähnlich verhalten sich die Schneewiesen. Die chlorophyllreiche Gruppe wird hier durch folgende Arten vertreten: *Anthoxanthum odoratum*, *Deschampsia flexuosa*, *Vahlodea atropurpurea*, *Trisetum spicatum*, *Poa alpina*, *Festuca ovina*, *Carex rigida*, *C. Lachenalii*, *Juncus trifidus*, *Luzula arcuata*, *L. sudetica*, *Salix*

herbacea, *S. polaris*, *Polygonum viviparum*, *Oxyria digyna*, *Cerastium lapponicum*, *Alsine biflora*, *Ranunculus glacialis*, *R. nivalis*, *R. pygmaeus*, *Cardamine bellidifolia*, *Cochlearia officinalis*, *Saxifraga rivularis*, (*S. stellaris*), *Sibbaldia procumbens*, *Viola biflora*, *Cassiope hypnoides*, *Veronica alpina*, (*Pedicularis lapponica*), *Solidago virgaurea*, *Gnaphalium supinum*, *Lycopodium alpinum*. Die mittlere, chlorophyllärmere Gruppe bilden *Saxifraga stellaris* und *Pedicularis lapponica*, doch sind auch bei diesen Arten die Chloroplasten oft rein grün gefärbt. Die dritte, chlorophyllärmste Gruppe fehlt in den Schneewiesen.

Ohne Zweifel stehen, was Chlorophyllgehalt betrifft, die Schneewiesen den echten Wiesen (auch den Wiesenbirkenwäldern) sehr nahe. Ob bei ihnen der Chlorophyllgehalt im allgemeinen doch niedriger ist, als bei letzteren, bleibt dahingestellt.

Ganz anders verhält sich die Zwergstrauchheide.

Der chlorophyllreichen Gruppe gehören an bzw. nähern sich *Calamagrostis lapponica*, *Deschampsia flexuosa*, *Carex rigida*, *Luzula spicata*, *L. arcuata*, *Polygonum viviparum*, *Betula nana*, *Rubus chamaemorus*, *Loiseleuria procumbens*, *Cassiope hypnoides*, *C. tetragona*, *Empetrum*, *Phyllodoce coerulea*, *Solidago virgaurea*, *Gnaphalium supinum*, *Lycopodium alpinum*. Die mittlere (chlorophyllärmere) Gruppe bilden: *Juncus trifidus*, *Arctostaphylos alpina*, *Diapensia lapponica*, *Vaccinium uliginosum*, *V. vitis idaea*, *Pedicularis lapponica*. Ausserordentlich chlorophyllarm sind *Lycopodium selago* und *Vaccinium myrtillus*.

Was zunächst die mittlere Gruppe betrifft, so ist sie eigentlich grösser, denn im Winter sind die Blätter von *Loiseleuria procumbens*, *Cassiope tetragona*, *C. hypnoides*, *Phyllodoce coerulea* in den von Anthocyanin geröteten Teilen (vgl. Anhang) chlorophyllarm. Bei vielen in die chlorophyllarme Gruppe gehörenden Pflanzen ist der Unterschied im Chlorophyllgehalt in den verschieden belichteten Teilen eines Individuums, ja eines und desselben Blattes so gross, dass dieser direkt an der Färbung erkenntlich ist. Das Verhalten dieser Arten erinnert somit an das von Ljubimenko in den Tropen beobachtete Ausbleichen der mehr belichteten Blatteile.

Ganz besonders chlorophyllarm sind in den Zwergstrauchheiden *Vaccinium myrtillus* und *Lycopodium selago*. Während die erstgenannte Art reichlich Anthocyanin bildet, besitzt *Lycopodium selago* nicht das Vermögen rote Pigmente zu bilden, weshalb es

gewöhnlich fast strohgelb gefärbt ist. Nur die jüngeren Blätter sind grüner und enthalten normal gefärbte Chloroplasten. Nicht immer verhält sich *L. selago* in der *regio alpina* in der angegebenen Weise. Wo der Boden reich genug an Wasser war — wie besonders in der Nähe von perennierenden Schneeflecken — wurden schön grün gefärbte Exemplare beobachtet. An trockenen Standorten jedoch (oft auch an Stellen, die nur einige Meter von dem Schneerande entfernt sind) ist *L. selago*, wie Beobachtungen in verschiedenen Teilen des besuchten Gebietes zeigten, den Sommer über gelb bis grünlichgelb gefärbt. Auf den untersten Stengelteil, der mit abgestorbenen Blättern besetzt ist, folgt eine 5—10 cm lange Zone, die grünlichgelb gefärbt ist und im unteren Teil Blätter führt, die oft über 10 Jahre alt sind. Dass diese Blätter, deren Chloroplasten vorwiegend das Aussehen von Xanthoplasten angenommen haben, noch lebenskräftig sind, liess sich leicht durch Plasmolysieren der Zellen feststellen. Dem Verfasser ist es unbekannt, auf welche Jahreszeit bei dieser Pflanze das Assimilationsmaximum fällt. Auch wäre es von Interesse, die jährlichen Schwankungen im Chlorophyllgehalt genau festzustellen.

Das oben Mitgeteilte zusammenfassend, muss man die Chlorophyllarmut der Pflanzen der wichtigsten Formation der Arktis — der Zwergstrauchheide — hervorheben.

B. Laub-, Torf- und Lebermoose.

Um die bis jetzt besprochenen Tatsachen einer weiteren Prüfung zu unterwerfen, wurden auch *Musci* nach Möglichkeit untersucht.

Die Moosarten, die in den Wiesenbirkenwäldern verbreitet sind, sind verhältnismässig chlorophyllreich ¹⁾. *Fissidens adiantoides*, *Distichium montanum*, *Oncophorus virens*, *Dicranum scoparium*, *D. congestum*, *Tortella tortuosa*, *Bryum capillare*, *Rhodobryum roseum*, *Brachythecium salebrosum*, *Climacium dendroides*, *Campylium protensum*, *Rhytidiadelphus triquetrus*, *R. calvescens*, *Hylocomium proliferum*, und ebenso die Lebermoose: *Marchantia polymorpha*, *Pellia epiphylla*, *Plagiochila asplenoides*, *Lophozia lycopodioides*, *L. Floerkei*, *L. quadriloba* u. a. sind grün und bilden in

1) Es sind hierunter die in der Bodenschicht auftretenden Moose gemeint.

den Assimilationsorganen keine Membranpigmente, oder aber die Membranen sind \pm gelblich gefärbt, nie braun, rot oder violett. Die Chloroplasten sind schön grün gefärbt, nur bei den *Dicranum*-Arten sind sie oft in den oberen Teilen der Blätter mehr oder weniger ausgebleichen.

In den Schneewiesen und in den reinen Moosassoziationen, die in der Umgebung von Schneelagen in der *regio alpina* auftreten, wurden folgende Arten untersucht: *Kiaeria Blyttii*, *K. Starkei*, *Dicranum congestum*, *Pohlia cucullata*, *P. commutata*, *P. erecta*, *P. crassidens*, *P. nutans*, *Conostomum tetragonum*, *Bartramia ithyphylla*, *Drepanocladus uncinatus*, *Polytrichum sexangulare*, *P. piliferum*, *P. juniperinum*, *P. commune*, *P. alpinum*, *Anthelia Juratzkana*, *Alicularia Breidleri*, *Diplophyllum taxifolium*, *Gymnomitrium concinnatum*, *Lophozia lycopodioides*, *L. ventricosa*, *Pleuroclada albescens*.

Alle oben genannten *Pohlia*- und *Polytrichum*-Arten, zum Teil auch *Bartramia ithyphylla* und *Drepanocladus uncinatus*, führten schöne grüne Chloroplasten. Von den Lebermoosen gehört hierher *Pleuroclada albescens*. Membranpigmente bilden diese Arten, ausgenommen *Polytrichum alpinum*, nicht. — Vorwiegend gelblich-grüne Chloroplasten enthielten *Kiaeria Starkei*, *Conostomum tetragonum*, *Diplophyllum taxifolium*, *Lophozia lycopodioides*, z. T. *Bartramia ithyphylla* und *Drepanocladus uncinatus*. — Sehr chlorophyllarm waren *Kiaeria Blyttii*, *Anthelia Juratzkana*, *Alicularia Breidleri* und *Gymnomitrium concinnatum*. Bei diesen Arten waren in stärker belichteten lebenden Blatteilen die Chloroplasten sehr schwach chlorophyllhaltig; oft konnte der grüne Farbton überhaupt nicht wahrgenommen werden, es lagen Xantho- oder sogar Leukoplasten vor. Hierbei bilden *Anthelia*, *Alicularia* und *Gymnomitrium*, besonders die *Alicularia*-Art, braune bis rotbraune Membranpigmente.

Also sind in den Schneewiesen nicht wenige Arten chlorophyllarm und pigmentiert, doch überwiegen hier „grüne“ Formen (*Pohlia*, *Polytrichum*).

In den Zwergstrauchheiden sind die Moose ohne Zweifel im allgemeinen chlorophyllarm. Untersucht wurden folgende Arten: *Cynodontium strumiferum*, *Dicranum congestum*, *Aulacomnium turgidum*, *Rhacomitrium hypnoides*, *Pogonatum capillare*, *Polytrichum alpinum*, *P. juniperinum*, *P. piliferum*, *Chandonanthus setiformis*, *Lophozia Binsteadii*, *L. ventricosa*, *Ptilidium ciliare*, *Sphenolobus minutus*.

Am meisten Chlorophyll enthielten *Pogonatum*-, *Polytrichum*- und *Lophozia*-Arten. Chlorophyllarm in den stärker belichteten Teilen waren *Cynodontium* und *Dicranum*. Als sehr chlorophyllarm erwiesen sich *Aulacomnium turgidum*, *Racomitrium hypnoides*, *Chandonanthus setiformis*, *Ptilidium ciliare*. Von diesen Arten bilden gelbe Membranpigmente *Aulacomnium*, *Racomitrium*, *Pogonatum* und *Chandonanthus*. *Ptilidium ciliare* bildet ein rotes Membranpigment.

Auch bei vielen anderen Moosarten, die in der *regio alpina* die Steine und den Boden bewohnen, ist oft ein sehr geringer Chlorophyllgehalt konstatiert worden. So verhielten sich z. B.: *Andreaea alpestris*, *A. Blyttii*, *A. petrophila*, *A. obovata*, *Dicranoweisia crispula*, *Arctoa fulvella*. In der Regel führen diese Arten in der *regio alpina sterilis* so wenig Chlorophyll, dass bei mikroskopischer Untersuchung die Plastiden fast farblos bis gelblich mit schwach grünlicher Nuance erscheinen. Alle diese Arten bilden gelbe bis rotbraune Membranpigmente.

Bei einer Durchsicht der bezüglich der Moose mitgeteilten Angaben fällt es auf, dass die trockensten Teile der *regio alpina* — die Zwergstrauchheide und der kahle Felsboden — von Moosarten bewohnt werden, die chlorophyllarm sind und oft Zellmembranpigmente bilden, während die Wiesen und Schneewiesen, besonders die ersteren, grüne, chlorophyllreiche Formen enthalten, — ein deutliches Spiegelbild des oben besprochenen Verhaltens der höheren Pflanzen.

Die Moore Lapplands hat der Verfasser nicht näher untersucht. Es ist jedoch sicher, dass die dominierenden *Sphagnum*-Arten (*Sph. Lindbergii*, *Sph. fuscum*, *Sph. papillosum*, *Sph. Dusenii* usw.) und viele in den Mooren wachsende Lebermoose sehr chlorophyllarm sind und oft reichlich Membranpigmente enthalten. Man findet die Sphagna weissgelb bis braun- oder rotbraun gefärbt (*Sph. compactum*, *Sph. fuscum*, *Sph. papillosum*, *Sph. Lindbergii*). Grüne Sphagna sind in der Regel überhaupt nicht zu erblicken. Von den Lebermoosen sind z. B. *Cephalozia fluitans*, *Gymnocolea inflata*, *Leptoscyphus anomalus* so pigmentreich, dass sie oft direkt schwarz erscheinen. Ihr Chlorophyllgehalt ist ganz minimal.

Diese eigenartigen Verhältnisse waren auch früheren Beobachtern nicht entgangen. In der Arbeit „Studien über die Moore

Finnlands“ behandelt Cajander¹⁾ u. a. die „rimpiartigen Weissmoore“ Lapplands. Nach Cajander ist in diesen die Moosvegetation ununterbrochen bis fehlend, „sie besteht aber immer aus sehr blassgelben bis bräunlich weisslichen Sphagneen (*Sph. papillosum*, *Sph. Dusenii*, *Sph. Lindbergii* u. a.), nicht selten mit beigemischten schwarzbraunen, -gelben, oder -roten Braunmoosen“. Ebenso bestehen die „Rimpi-Braunmoore“ Lapplands nach Cajander „aus schleimigen, schwarzbraunen oder schwarzgelben bis gelblichgrünen Amblystegien“ (*Campylium stellatum*, *Drepanocladus exannulatus*, *D. lycopodioides*, *D. revolvens*, *D. intermedius*, *D. badius*, *Scorpidium scorpioides* u. a.).

Also nähern sich die Moore in ihrem Pigmentgehalt (häufiges Auftreten von braunen resp. roten Membranpigmenten, geringer Chlorophyllgehalt der Chloroplasten) den Heiden, wie sie sich ja auch in anderen Beziehungen diesen nähern.

C. Flechten.

Sehr eigenartig und in hohem Grade bemerkenswert ist das Verhalten der Flechten. Infolge ihrer einzig dastehenden Konstitution befinden sich die Chlorophyll enthaltenden Zellen (Gonidien) bei den Flechten in ganz anderen Bedingungen, als es bei anderen Pflanzen der Fall ist. Die oft sehr ergiebige Pigmentbildung fällt hier den Pilzhyphen zu. Bei den Anthophyta, Pteridophyta und Bryophyta gilt als Regel ohne Ausnahme, dass infolge äusserer Einflüsse stark pigmentierte Formen (ganz gleich, ob das Pigment sich als Anthocyanin im Zellsaft gelöst findet, oder als rotes, gelbes oder braunes Pigment in den Membranen eingelagert ist, oder direkt in den Plastiden aufgespeichert wird²⁾) chlorophyllärmer (oft viel ärmer) sind als die nicht pigmentierten Pflanzen derselben Art. Die Flechten zeigen insofern ein abweichendes Verhalten, als sie unter bestimmten Umständen überaus dunkel gefärbt, dabei aber chlorophyllreich sein können.

In den Wiesenbirkenwäldern, Hochstaudenwiesen und echten Wiesen fehlen Flechten fast vollständig. Dagegen sind sie in den Heide- und Schneebodenformationen und ebenso in den Formationen des nackten Felsbodens sehr wichtig.

1) Cajander, A. K., Studien über die Moore Finnlands, Fennia 35, Helsingfors 1913—1915.

2) Lippmaa, Th., Das Rhodoxanthin, Schriften d. Naturf.-Ges. bei d. Univ. Tartu, Bd. 24, Tartu 1925.

Aus den Zwergstrauchheiden wurden folgende Arten untersucht: *Sphaerophorus coralloides*, *Nephroma arcticum*, *Peltigera polydactyla*, *Cladonia crispata*, *Cl. cenotea*, *Cl. carneola*, *Cl. bellidiflora*, *Cl. gracilis*, *Cl. uncinalis*, *Cetraria cucullata*, *C. nivalis*, *C. islandica*, *Alectoria divergens*, *A. nigricans*, *A. ochroleuca* und *Thamnolia vermicularis*.

Vorwiegend grüne Gonidien enthielten *Nephroma arcticum* und die dunkel gefärbten *Alectoria divergens* und *A. nigricans*. — Bräunliche bis gelbliche, oft nur kaum grünstichige Gonidien führten die helleren (weissen, gelben oder bräunlichen) Arten: *Sphaerophorus coralloides* (in den oberen, stärker belichteten Teilen), *Peltigera polydactyla*, *Cetraria cucullata*, *C. nivalis*, *Alectoria ochroleuca*, *Thamnolia vermicularis*. — Die übrigen Arten nahmen eine Mittelstellung ein.

In den Schneewiesen scheinen sehr chlorophyllarme Arten zu fehlen. Die in diesen auftretenden *Cladonia*-Arten, *Cetraria islandica*, *C. hiascens* und *Solorina crocea*, enthalten + grüne Gonidien. Äusserlich sind diese Flechten verhältnismässig hell, nur *Solorina crocea* ist auf der dem Boden zugewandten Thallusseite orangerot.

Sehr dunkel gefärbte Strauch- und Laubflechten sind in der *regio alpina* auf dem nackten Felsboden sehr verbreitet. Es seien hier bloss die schwarzen *Gyrophora*-Arten und *Parmelia pubescens* erwähnt. Auch sind die kalkhaltigen Gesteine bewohnenden, oft roten *Caloplaca* und *Xanthoria* schön pigmentiert. Bei allen diesen Arten ist äusserlich auch nicht eine Spur von Chlorophyll zu bemerken. Desto überraschender sind hier (untersucht wurden *Parmelia pubescens*, *Caloplaca elegans*, *Xanthoria parietina*, *Gyrophora cylindrica*, *G. hyperborea*, *G. proboscidea*, *G. cirrosa*, *G. vellea*) die Ergebnisse einer mikroskopischen Untersuchung. Bei allen diesen Arten haben die Gonidien (*Pleurococcus*, *Protococcus*) eine schön sattgrüne Farbe (besonders bei *Gyrophora cirrosa* und *G. vellea*), sind also ausnahmslos chlorophyllreich.

Bei den Flechten sind zwei Gruppen + scharf voneinander zu trennen: solche, welche eine helle Aussenrinde besitzen, und solche, bei denen letztere infolge von Ablagerung dunkler Ausscheidungen der Hyphen (vorwiegend Flechtensäuren) rot, braun, resp. schwarz sind. Während die hellen Flechten mit den anderen Pflanzen übereinstimmend bei stärker belichteten Exemplaren verhältnismässig geringen Chlorophyllgehalt der Gonidien aufweisen, bilden

die dunklen Flechten eine gesonderte Gruppe, da sie oft Chlorophyllreichtum mit Reichtum an gefärbten Substanzen in dem äusseren Hyphengewebe verbinden (*Gyrophora*-Arten, *Parmelia pubescens* u. a.). Wie bereits erwähnt, zeigte auch die Untersuchung der dunkel gefärbten Alectorien (*A. divergens* und *A. nigricans*), dass sie viel chlorophyllreicher sind als die blassgelbe *A. ochroleuca*. Immerhin sei bemerkt, dass die vorliegenden Beobachtungen nur so weit reichen, um zur Behauptung zu berechtigen, dass bei den dunkel gefärbten Flechten sehr chlorophyllreiche Gonidien auftreten können. Wie oft in diesen auch chlorophyllarme Gonidien zu beobachten sind, bleibt noch zu untersuchen. Dem Verfasser sind derartige Fälle als seltene Ausnahmen allerdings begegnet (so bei *Cetraria hepaticum*).

Dieses von den anderen Pflanzenformen abweichende Verhalten, wo sozusagen viel Pigment und viel Chlorophyll gleichzeitig auftritt, ist ohne Zweifel dadurch bedingt, dass die Bildung der gelb, rot bzw. braun gefärbten Substanzen dem Pilze zukommt, wobei die Gonidien sich daran direkt nicht beteiligen. Es ist leider noch nicht aufgeklärt, warum bei den Anthophyta, Pteridophyta und Bryophyta eine durch äussere Einflüsse hervorgerufene Bildung des gefärbten Zellsaftes, der braunen und roten Zellmembranpigmente sowie der Hämatokarotinoide (Rhodoxanthin, Lycopin etc.), soweit die bisherigen Kenntnisse reichen, stets mit gleichzeitiger Chlorophyllabnahme verknüpft ist. Es müssen jedenfalls irgendwelche „bindende Fäden“ zwischen den beiden Prozessen vorhanden sein. Dem „loseren“ Aufbau der Flechten entsprechend, bietet eine vom Pilz herrührende Pigmentbildung noch keinen Anlass für den Chlorophyllabbau der Alge. Im Gegenteil, unter der schützenden Decke der dunkel gefärbten Flechtensäuren verhalten sich die Algen wie wahre Höhlenpflanzen: sie sind chlorophyllreich.

D. Algen.

In vielen Lokalitäten in Finnisch- und Norwegisch-Lappland [Kilpisjärvi-Gebiet (Saana-, Raasa-, Malla-tunturi), Kolttaköngäs, Skogeröen u. a.] beobachtete der Verfasser in der *regio alpina* eigenartige Algenassoziationen, die den nackten Felsboden an mehr oder weniger steilen Abhängen und senkrechten Wänden bedecken. Sie finden sich sowohl auf kalkhaltigen wie auf kalkfreien Gesteinen. Auf hellerem Gestein fallen diese Assoziationen schon von weitem infolge ihrer sehr dunklen, oft fast schwarzen, in nassem

Zustand etwas kirschrötlichen Färbung auf. Es kommen ganz schmale Streifen vor, aber auch einige zehn m breite und viele m lange Bänder sind gesehen worden. Im Sommer können diese Assoziationen ganz trocken liegen, gewöhnlich befinden sie sich aber unterhalb perennierender Schneeflecke und werden durch eine niedrige, fließende, sauerstoffreiche Wasserschicht nass gehalten. Sie sind deshalb auf Nordabhängen häufiger als auf Südabhängen. In der Umgebung solcher Algenassoziationen (Fig. 16)



Fig. 16. Fjeldregion in der Umgebung von Kirkenes (Norwegisch-Lappland). Es sind die von Cyanophyceen (*Glococapsa*-, *Stigonema*-Arten u. a.) gebildeten „Tintenstriche“ deutlich zu sehen. Verf. Photo. 28. 7. 1927.

sind *Siphula subcylindrica*, *Anthelia Juratzkana*, *Conostomum tetragonum*, *Oncophorus Wahlenbergii*, *Cetraria hiascens* verbreitet.

Da, wo stets genügend Wasser vorhanden, finden sich grüne Algenüberzüge.

Die rötlichen bis schwarzen Streifen werden von Cyanophyceen gebildet, doch finden sich da auch andere Algen (bes. Kieselalgen). Eine kleine stark braunrot bis rot gefärbte *Glococapsa*-Art ist

sehr verbreitet. Nach Geitler ¹⁾ dürfte es sich um *Gloeocapsa rupicola* handeln. In einigen Fällen (so bei Kolttaköngäs, in der Gegend des Kilpisjärvi) bildete diese Art die Hauptmasse des Algenüberzuges. In derartigen Fällen ist die kirschrote Färbung besonders deutlich. Doch kommen nur von dieser Art gebildete reine Bestände kaum vor. Der *Gloeocapsa* gesellen sich mehrere gelb bis braun gefärbte *Stigonema*-Arten zu, ausserdem noch *Scytonema mirabile* und einige andere gelbe, braune, rote und violette Cyanophyceen. Blaugüne Formen fehlen. Unter den *Stigonema*-Arten findet sich eine grosse, vermutlich noch nicht beschriebene Form, deren Fäden bis über 90 μ breit sind. Von anderen Arten finden sich *Stigonema informe* und *S. hormoides*.

Diese Algen sind äusserst pigmentreich. Den rötlichen (bei *Gloeocapsa*) und bräunlichen (bei *Stigonema*) Farbstoff enthalten die kräftig entwickelten Scheiden. Es sei hervorgehoben, dass der Chlorophyllgehalt dieser Algen ganz unbedeutend ist.

Ähnliche Algenassoziationen sind von Diels ²⁾ beschrieben worden. Auf Südtiroler Dolomitschiefern erfolgt die erste Besiedelung durch Cyanophyceen, welche an Stellen, die während der feuchten Jahreszeit berieselt werden, s. g. „Tintenstriche“ bilden. In diesen „Tintenstrichen“ sind *Scytonema*-Arten wichtig. Viele Arten bilden rote und braune Membranpigmente. Über diese Cyanophyceengesellschaften schreibt Diels: „Die Ursache ihres Vorwaltens an den trockenen Dolomitwänden wird man in den lichtregulierenden Eigenschaften dieser Formen sehen dürfen. Darauf will ja F. E. Fritsch auch ihre massgebende Rolle in den Tropen zurückführen.“

Es ist deshalb von grossem Interesse, dass ähnliche, sehr pigmentreiche Cyanophyceen-Assoziationen im hohen Norden verbreitet sind. Solche hat neulich Johs. Boye Petersen auch auf Island beschrieben ³⁾. Dort wurden in den „Tintenstrichen“ folgende mit braunen oder violetten gut ausgebildeten Scheiden versehene Arten konstatiert: *Calothrix parietina*, *Gloeocapsa alpina*, *Nostoc* sp., *Schizothrix Heufleri*, *Scytonema crustaceum*.

1) Nach einer brieflichen Mitteilung des Herrn Doz. L. Geitler (Wien), der auch die weiter folgenden Bezeichnungen der Arten entnommen sind.

2) Diels, L., Die Algen-Vegetation der Südtiroler Dolomitriffe. Ber. d. deutsch. bot. Gesellsch., Bd. 32, Berlin 1914.

3) Petersen, Johs. Boye, The Aërial Algae of Iceland. Arbejder fra den botaniske have i København, Nr. 112, 1928.

VI. Lichtgenuss und Lichtklima im nördlichsten Skandinavien.

In mehreren Abhandlungen ¹⁾ hat Wiesner die Lehre über den „Lichtgenuss“ der Pflanze aufgestellt. Seine Untersuchungen erstrecken sich bekanntlich auch auf die arktische Pflanzenwelt, wo Wiesner die bemerkenswerte Tatsache konstatierte, dass dort bei vielen Arten der Lichtgenuss bedeutend grösser ist als in südlicher gelegenen Gegenden und nur eine geringe Schwankungsamplitude besitzt, oder überhaupt vom maximalen Werte = 1 nicht abweicht. So ist nach dem sehr bekannten Beispiel Wiesner's der relative Lichtgenuss für *Betula nana* in Oslo = $1 - \frac{1}{3.4}$, in Tromsö = $1 - \frac{1}{2.2}$, in der Advent-Bay = 1. Nach Wiesner fordert eine Pflanze des nördlichen Tundragebietes „grösstmöglichen Zufluss von Licht, sie erträgt nur eine geringe Einschränkung ihres Lichtgenusses“. Wiesner meint sogar, dass der Strauch- und Baumvegetation bei ihrer Wanderung in der Richtung nach dem Pole zu weniger durch die Winterkälte, als durch das nach Norden zu steigende Lichtbedürfnis eine Schranke gesetzt wurde, da die Lichtstärke in derselben Richtung abnimmt ²⁾. Natürlich gibt es auch in südlicher gelegenen Gegenden Vegetationstypen, die eine uneingeschränkte Lichtwirkung geniessen. Über diese schreibt Wiesner folgendes: „Vergleicht man die an den arktischen Vegetationsgrenzen vorkommenden Pflanzen mit den Gewächsen südlicher gelegener Steppen oder der subtropischen Wüsten, so scheint zwischen denselben kein Unterschied im Lichtgenusse zu bestehen, sofern der Lichtgenuss aller dieser Pflanzen nur wenigen Schwankungen ausgesetzt und in der Nähe des möglichen Maximums gelegen ist. — Wenn nun auch der factische Lichtgenuss der Tundra-, der Steppen- und Wüstenpflanze annähernd insoferne der gleiche ist,

1) Wiesner, J., Der Lichtgenuss der Pflanzen, Leipzig 1907. Dort weitere Literatur.

Wiesner, J., Untersuchungen über den Lichtgenuss der Pflanzen im arktischen Gebiete. Sitzungsber. d. mathem.-nat. Classe d. K. Akad. d. Wissensch. Bd. 109, Abt. I, pp. 371—439, Wien 1900.

2) Die bereits 1890 erschienene Arbeit Kihlman's, in der überzeugende Beweise dafür erbracht wurden, dass die Baumgrenze hauptsächlich durch die im Winter monatelang dauernde ununterbrochene Austrocknung der aus der Schneedecke hervorragenden jungen Triebe bedingt ist, war hierbei unbeachtet geblieben.

als auf all' die genannten Pflanzen das Tageslicht uneingeschränkt einwirkt, so kann es doch keinem Zweifel unterliegen, dass die Auswertung des dargebotenen Lichtes in den genannten Fällen eine ungleiche ist, was am meisten hervortritt, wenn man die extremsten Fälle — die Pflanzen der Tundra mit denen der heissen Wüsten vergleicht. Denn während die Wüstenpflanzen einen Lichtüberschuss empfangen, welcher mehr hemmend als fördernd in ihre Assimilations- und Wachstumsverhältnisse eingreift, empfangen die an der arktischen Vegetationsgrenze auftretenden Pflanzen in der Regel nur ebenso viel Licht, als sie zum Leben benötigen. Ein Lichtüberschuss ist hier nur ein Ausnahmefall . . . " ¹⁾).

Es ist jedoch nie geprüft worden, ob es sich tatsächlich nur um „notwendiges“ Licht handelt. Es ist die Vermutung Wiesners, dass in den arktischen Ländern alles Licht der Pflanze unentbehrlich ist, nicht ausreichend begründet. Es sei sogleich hervorgehoben, dass der Verfasser die grundlegenden Messungen Wiesners, die gezeigt haben, dass der relative Lichtgenuss nach dem Norden zu grösser wird, nicht bestreiten will. Im Gegenteil, die Richtigkeit dieser Befunde steht wohl ausser Zweifel. Nur ist aus dem relativen Lichtgenuss, mit dem ja der relative Wärmegenuss einigermassen parallel geht, noch nicht zu entnehmen, ob die Pflanzen im Norden deshalb keine Beschattung ertragen, weil sie mehr Licht brauchen, oder ob dieses dadurch bedingt ist, dass es ein Wärmeminimum gibt, unterhalb dessen die Existenz einer Pflanze nicht möglich ist.

Viele Autoren scheinen sich bis heute der Anschauung Wiesners anzuschliessen (vergl. Warming, Benecke-Jost). Auch Lundegårdh äussert in seinem bekannten Buche „Klima und Boden“ die Vermutung, dass der grössere relative Lichtbedarf im hohen Norden womöglich auf der dort herrschenden niedrigen Lufttemperatur beruhen könnte.

Wenn man die von Wiesner in Nordnorwegen und auf Spitzbergen (Advent-Bay) gesammelten Daten näher betrachtet,

1) Von mir gesperrt.

so findet man, dass vieles von Wiesner Beobachtete wohl eher gegen die von ihm gegebene Deutung zu sprechen scheint.

(1) Es ist Wiesner die Tatsache nicht entgangen, dass die arktische Vegetation im allgemeinen chlorophyllarm ist. Wiesner schreibt hierüber: „Da zur Chlorophyllbildung sehr geringe Lichtintensitäten ausreichen, welche im hocharktischen Gebiete zweifellos tief unter dem täglichen, zur Vegetationszeit herrschenden Lichtminimum gelegen sind und die Lichtintensität nicht so steigt, um eine Zerstörung des Chlorophylls wahrscheinlich zu machen, so scheinen dort Vorbedingungen zur reichlichen Chlorophyllbildung gegeben zu sein. Es fällt angesichts dieser Erwägung auf, dass die ganze Tundra ein fahlgrünes Aussehen darbietet, an keiner Stelle ein freudig grünes Plätzchen aufweist und überhaupt keine dort vorkommende Pflanze durch tiefes Grün ausgezeichnet ist. So erschien mir die Tundra, soweit ich selbe auf Spitzbergen und im nördlichen Norwegen zu sehen Gelegenheit hatte“¹⁾. Andererseits hebt Wiesner in seinem Buch über den Lichtgenuss hervor, dass in den subtropischen Wüsten und Steppen, wo ein Lichtüberschuss ganz unleugbar ist, das Laub der Gewächse den gleichen fahlen Farbenton darbietet.

(2) Wiesner untersuchte die fixe Lichtlage der Blätter von Pflanzen verschiedener Formationen und fand u. a., dass das Laub der Steppen- und Wüstenpflanzen vorwiegend aphotometrisch ist, also in seiner Lage zur Lichtrichtung keinen irgendwie ausgesprochenen Charakter aufweist. Zum Teil sind die Blätter bei den Pflanzen dieser Formationen „in niedrigstem Grade photometrisch“. Es ist deshalb von nicht geringer Bedeutung, dass Wiesner über die Verhältnisse jenseits der Baumgrenze folgendes berichtet: „So sind die Blätter der hochnordischen Vegetation aphotometrisch oder zeigen Übergänge zum photometrischen Blatte“. Da nun in allen Gebieten mit mittlerer Lichtstärke, wo auch sonst die Bedingungen der Vegetation günstig sind, das Laub gewöhnlich photometrischen Charakter aufweist (Wiesner), so sind merkwürdigerweise die Steppen- und Wüstenvegetation und die „Tundravegetation“ in dieser Hinsicht einander sehr ähnlich und von der Vegetation der gemäßigten Zone scharf unterschieden.

1) Wiesner, J., Unters. über den Lichtgenuss der Pflanzen im arktischen Gebiete, p. 388.

Diese Übereinstimmung deutet wohl darauf hin, dass die arktische Vegetation von Pflanzen gebildet wird, die grosse Lichtmengen ohne Schaden ertragen können. Allerdings suchte Wiesner diesen so auffallenden Reichtum der arktischen Vegetation an aphotometrischem und in geringem Grade photometrischem Laube zu erklären. Nach ihm sollen die arktischen Pflanzen bestrebt sein das Licht „auf das äusserste“ auszunutzen. Die Pflanzen seien nicht nur frei exponiert und dem Maximum des Lichtgenusses ausgesetzt, sondern es sei auch die Tendenz vorhanden die Blätter so zu stellen, dass sie von den anderen gar nicht oder nur in minimaler Weise beschattet werden. „Aber diese Freistellung der Blätter“, sagt Wiesner, „genügt: es ist nicht notwendig, dieses Blatt nach dem stärksten Himmelslicht zu orientieren“.

(3) Wiesner meint nachgewiesen zu haben, dass die grünen Vegetationsorgane der arktischen Pflanzen „so gut wie keinen Chlorophyllschutz aufzuweisen haben“. In Übereinstimmung damit, dass die arktischen Pflanzen im Allgemeinen keinen Lichtüberschuss empfangen, sei die Behaarung der jungen Blätter sehr selten (erwähnt werden *Potentilla emarginata*, *P. pulchella* var. *humilis*, *Cerastium arcticum*, *C. alpinum* β *lanatum*, *Papaver nudicaule*). Für eine Lichtschutzeinrichtung hält Wiesner auch die Anthocyanine, führt jedoch von Spitzbergen bloss zwei Pflanzen an, bei welchen er \pm reichliche Anthocyaninbildung antraf (*Cassiope tetragona* und *Saxifraga hirculus*). Ein Abwehren stärksten Sonnenlichtes soll bei den arktischen Gewächsen nie vorkommen (Lichtgen. bei d. arkt. Pfl., p. 393).

Was die Lichtschutzeinrichtungen betrifft, so ist zu bemerken, dass die Zahl der behaarten Arten in den hocharktischen Pflanzengesellschaften doch bestimmt grösser ist als der Ansicht Wiesners entspricht, wenschon der Prozentsatz, den die behaarten Formen ausmachen, gering ist. Die „fahlgrüne Tundra“ Wiesner's wird wohl in erster Linie die arktischen Heiden bezeichnen. Wie oben gezeigt, ist die Zahl der anthocyaninbildenden Formen dort sehr gross, ja die Anthocyaninbildung kann in dem Grade gesteigert sein, dass „permanentrote“ Formen — A [111] — entstehen. Übrigens sei auch an die Ergebnisse von Thorild Wulff erinnert, der auf Spitzbergen als „eine durchgängig charakteristische Eigenschaft der arktischen Gewächse eine besonders kräftige Entwicklung von Anthocyan und anderen färbenden Substanzen im vegetativen System“ fand.

In dem letzten Abschnitt der vorliegenden Abhandlung werden die Einrichtungen, die sich am wahrscheinlichsten als Lichtschutzeinrichtungen deuten lassen, näher besprochen. Es sei sogleich hervorgehoben, dass diese sehr verbreitet und mannigfaltig genug sind.

Wenden wir uns den Lichtbedingungen der arktischen Länder zu, so finden wir ohne Zweifel eine einfache Erklärung für die auffallende Chlorophyllarmut, für den Pigmentreichtum der Phanerogamen und Kryptogamen der arktischen Heiden, sowie für die Tatsache, dass das arktische Blatt übereinstimmend mit den Blättern der Wüsten- und Steppenpflanzen vorwiegend aphotometrisch ist.

Aus verschiedenen Daten ist ersichtlich, dass während des Sommerhöhepunkts im hohen Norden die auf die Pflanze fallenden Lichtmengen unter Umständen sehr gross sein können. Im Sommer 1927 gab es im nördlichsten Skandinavien Wochen, in denen die Vegetation fast ununterbrochen von Sonnenstrahlen getroffen wurde. Viele Verfasser haben die Häufigkeit von Nebel und bewölktem Himmel im arktischen Europa hervorgehoben. Die Richtigkeit dieser Angaben soll durchaus nicht bezweifelt werden. Doch ist es ebenso richtig, dass sich auch längere ununterbrochene Sonnenperioden einstellen.

Bei heiterem Himmel fehlt hier ja die nächtliche „Ruheperiode“, die die Pflanzen aller südlicher gelegenen Gegenden geniessen. Es ist bei der Lichtwirkung sicher nicht nur die Lichtintensität, sondern auch die Dauer der \pm ununterbrochenen Insolation zu beachten. Wollte man einwenden, dass so lange dauernde Insolation selten sei, so ist dem entgegenzuhalten, dass es der Vegetation nicht immer darauf ankommt, ob eine Erscheinung häufig oder seltener ist, sondern ob sie sich überhaupt von Zeit zu Zeit einstellen kann. Wo wiederholt von Jahr zu Jahr langdauernde Insolation eintritt, sind Schattenpflanzen ebenso ausgeschlossen wie Sumpfpflanzen an Stellen, die gewöhnlich verhältnismässig wasserreich sind, von Zeit zu Zeit aber völlig austrocknen.

Was das Lichtklima in Lappland betrifft, so sei zunächst an einige Daten aus der Arbeit Wiesners „Zur Kenntnis des photochemischen Klimas im arktischen Gebiete“ erinnert. Diese Arbeit

fusst hauptsächlich auf den Befunden Wiesners während eines achttägigen Aufenthalts auf Spitzbergen (Advent-Bay). Im Laufe dieser Tage war der Himmel leider fast die ganze Zeit bewölkt, weshalb über die Grösse der maximalen Insolation nur wenige Daten vorliegen. Zudem fiel der Aufenthalt Wiesners auf die Zeit vom 6. bis 13. August. Immerhin konnte Wiesner die bemerkenswerte Tatsache feststellen, dass bei gleicher Sonnenhöhe die Intensität der chemisch wirksamen Strahlen, welche in der Advent-Bay bei halb- oder unbedeckter Sonne vorwogen, im Durchschnitt grösser ist als in Wien, hingegen kleiner als in Buitenzorg.

Wiesner meinte jedoch, dass dieser hohen Lichtintensität für die Vegetation keine grössere Bedeutung beizumessen sei, denn der Himmel soll in dem arktischen Gebiet gewöhnlich bedeckt sein ¹⁾. Thorild Wulff gibt in seinen „Botanischen Beobachtungen aus Spitzbergen“ folgenden Satz von Hann wieder: „An

Tabelle 15.

Zahl der Sonnenstunden in Abisko (Schwed.-Lappland).

	Juni $S_t = 671,5$	Juli $S_t = 633,3$	August $S_t = 476,8$	September $S_t = 353,4$
1913	244.0	232.6	219.0	111.6
1914	185.7	308.3	212.6	72.5
1915	237.1	228.8	221.4	82.9
1916	253.5	314.0	126.7	82.4
1917	231.7	154.4	246.4	86.4
1918	163.1	424.6	250.2	122.2
1919	276.9	241.5	143.5	89.2
1920	232.4	307.6	185.3	125.5
1921	175.7	227.3	105.5	88.9
1922	250.8	276.4	152.4	102.4
1923	184.4	129.3	217.2	78.5
1924	245.3	298.4	197.2	78.2
1925	204.6	302.4	196.9	112.2
Mittelw.	221.9	264.6	190.3	94.8

Erklärung. S_t = grösstmögliche Anzahl der Sonnenstunden. Fettgedruckt sind Sonnenstundenzahlen, die 40 Prz. von S_t übersteigen.

1) Wiesner, J., Lichtgenuss d. Pflanze, p. 117.

jenem Pol, der sein Sommerhalbjahr hat, ist die Bestrahlung vor und nach der Sonnenwende, also durch 56 Tage stärker als an irgend einem Punkte der Erde und während 84 Tagen grösser als die gleichzeitige am Aequator¹⁾, fügt jedoch hinzu, dass klarer Himmel in diesen Gegenden, wo Regen, Nebel und Schnee fast immer vorherrschen, selten sei.

Genauere Daten über die Zahl und Verteilung der Sonnenstunden im nördlichsten Schwedisch-Lappland finden sich in den „Observations Météorologiques à Abisko rédigées par Bruno Rolf“. In der Tabelle 15 sind der genannten Publikation entnommene Angaben zusammengestellt worden²⁾. Wie aus dieser Tabelle ersichtlich, ist die Zahl der Sonnenstunden während der Vegetationsperiode wenigstens in diesem Teile von Lappland eine ganz beträchtliche.

Besonders gross ist die Zahl der Sonnenstunden im Juli und August, wo oft mehr als 40 Prz. der Stunden, während der sich die Sonne über dem tatsächlichen Sehkreis befindet, Sonnenstunden sind (für Juli + August 1918 ist das Verhältnis der faktischen Sonnenstunden zu den möglichen sogar gleich 60:100). Bei näherer Betrachtung der in Abisko gemachten Aufzeichnungen stellt es sich heraus, dass dort im Sommer von Zeit zu Zeit 1—3 Wochen lang wenn nicht gerade ununterbrochener, so doch einem solchen mehr oder weniger gleichkommender Sonnenschein herrschen kann. So wurden vom 23. bis 28. Juli 1916 — 91.5 St., vom 16. Juli bis 5. August 1918 — 342.5 St., vom 5. bis 11. Juli 1920 — 142.6 St., und vom 30. Juni bis 4. Juli 1925 — 103.3 St. als Sonnenstunden registriert usw.

Es kommen also verhältnismässig lange Perioden vor (vergl. p. 103), in denen die Vegetation fast ununterbrochen den Sonnenstrahlen ausgesetzt ist.

Es sei noch ein Beispiel aus Sodankylä herangezogen. Im Jahre 1927 gab es vom 28. Juni bis 10. Juli (13 Tage) 204.2 St und vom 22. Juli bis 5. August (15 Tage) 201.9 St. mit Sonnenschein.

1) H a n n, J., Handbuch der Klimatologie, Bd. I, Stuttgart 1908, p. 96.

2) Es sei erwähnt, dass sich die meteorologische Station von Abisko auf $68^{\circ} 20.5'$ n. Br. u. $18^{\circ} 49.3'$ östl. L. (Greenwich) in einer Höhe von 386 m über d. M. (regio subalpina!) befindet. Vom 28. Mai bis 17. Juli (also während 51 Tagen) steht in Abisko die Sonne ununterbrochen über dem astronomischen Horizont.

Die weiter folgenden Daten der finnischen meteorologischen Station in Sodankylä zeigen ebenfalls, dass der Juni und Juli in Lappland sonnenreich sind. Der Mittelwert für fünf Jahre ist für den Juli höher als der oben berechnete Mittelwert für Abisko.

Tabelle 16.

Zahl der Sonnenstunden in Sodankylä (Finnisch-Lappland)¹⁾.

	Juni	Juli	August	September
1927	261.9	380.2	193.5	65.9
Fünffähriges Mittel	201.9	303.5	188.6	78.8

Die Mengen des direkten Sonnenlichtes, die auf die Pflanzen fallen, werden natürlich nicht nur durch die Zahl der Sonnenstunden bestimmt. Es ist auch die absolute Lichtintensität von grösster Bedeutung. Wie bereits erwähnt, konstatierte Wiesner, dass die Intensität der chemisch wirksamen Lichtstrahlen sowohl bei direktem Sonnenlicht als bei diffusem Tageslicht für gleiche Sonnenhöhen und gleiche Himmelsbedeckung die Reihenfolge Buitenzorg > Advent-Bay > Wien innehält. In neuerer Zeit sind Messungen der Intensität der Sonnenstrahlung an verschiedenen Orten ausgeführt worden. Nach noch unpublizierten Messungen von Ångström und Kalitin im Sommer 1927 im nördlichen Lappland kann man mit ziemlicher Genauigkeit annehmen, dass einer absoluten Strahlungsmenge von 1 Gramm-Kalorie per cm² und Minute, im hohen Norden eine Lichtstärke von etwa 100.000 Normalkerzen entspricht. Die Relation ist also beinahe dieselbe wie bei grösseren Sonnenhöhen²⁾.

In einer Abhandlung von Westman³⁾ sind u. a. die Maxima der Stärke der Sonnenstrahlung an verschiedenen Orten nach Messungen mit dem Ångström'schen elektrischen Kompen-

1) Nach einer brieflichen Mitteilung des Valtion meteorologinen keskuslaitos, Helsinki, unterschrieben von G. Melander.

2) Nach einem von Axel Wallén und A. Ångström unterschriebenen Brief des Statens Meteorologisk-Hydrografiska Anstalt (Stockholm).

3) Westman, J., Stärke der Sonnenstrahlung im mittelschwedischen Ostseegebiet im Jahre 1912. Kngl. Svenska Vetensk. Handlingr, Bd. 58 № 8, p. 17. Stockholm 1918.

sationspyrheliometer zusammengestellt worden. Sie betragen in Gramm-Kalorien pro Minute und cm^2 : 1.37 (Modena), 1.39 (Warschau), 1.38 (Pawlowsk), 1.35 (Uppsala) und 1.28 (auf Spitzbergen bei der Treurenberg-Bay). Nach diesen Daten ist die maximale bisher beobachtete Gesamtstrahlung auf Spitzbergen nur wenig niedriger als in Italien (Modena). Dagegen ist die Intensität der chemisch wirksamen Strahlen, wie Wiesner zeigte, auf Spitzbergen grösser als in Mitteleuropa. Von grosser Bedeutung für die vorliegende Abhandlung sind die Daten Lindholm's, die sich auf Messungen beziehen, die in Vassijaure (Schwedisch-Lapland) mit Hilfe eines Pyrheliometers von Ångström ausgeführt wurden. Es seien hier einige Angaben aus der Arbeit von Lindholm ¹⁾ wiedergegeben.

Tabelle 17 (nach Lindholm).

Tägliche Mittelwerte für unbedeckte Sonne in Gr.-Kal. auf 1 cm^2 berechnet für eine	Vassijaure Höhe ü. d. M. 505 m		Potsdam	
	Juli	August	Juli	August
zur Strahlenrichtung senkrechte Ebene	1301	1015	978	822
horizontale Ebene	588	451	585	474

Wie aus diesen Zahlen ersichtlich, ist die Strahlenmenge, die während der Monate Juli und August bei klarem Himmel auf eine zu der Strahlenrichtung senkrecht stehende Fläche fällt, in Vassijaure bei weitem grösser als in Potsdam.

Weiter zeigen die strahlenbiologischen Forschungen der deutschen Islandexpeditionen in den Jahren 1926 und 1927, dass die Ultraviolettstrahlung im hohen Norden viel intensiver ist als in Mitteleuropa. Der Leiter dieser Expedition Dr. Dannmeyer schreibt hierüber: „Die Expedition dürfte es sich als Erfolg buchen, starke Ultraviolettstrahlung auf Island (und ebenso die Gesamtsonnenstrahlung) energetisch festgelegt zu haben. Zwar erreicht das Maximum der Sonnenstrahlung . . . etwa denselben Wert, wie im Hochsommer in Norddeutschland. Aber während auf dem flachen Lande und am Meere bei uns die Ultraviolett-

1) Lindholm, F., Sur l'insolation dans la Suède septentrionale. Kungl. Svenska Vetenskapsak. Handl. Bd. 60, № 2, p. 1–24, Stockholm 1919.

strahlung der Sonne etwa um 6 Uhr abends bereits ihr Ende erreicht, strahlt das Ultraviolett auf Island bis abends 9 Uhr. Hat der Himmel in Deutschland bestenfalls die gleiche Ultraviolettstrahlung wie die Sonne, so beträgt die Himmelsstrahlung auf Island oft das dreifache. Der Himmel strahlt zur Mittsommerzeit sogar um Mitternacht¹⁾.

Die Wirkung des Lichts auf die Pflanze wird hauptsächlich durch drei Momente bedingt: die Qualität der Strahlen, die Strahlenmenge und die Dauer der Bestrahlung. Wie oben gezeigt, ist sowohl diffuses wie direktes Licht im hohen Norden reich an ultravioletten Strahlen, deren schädliche Wirkung auf die Pflanze bekannt ist²⁾. Die chemisch wirksamen Lichtstrahlen übertreffen, wie es bereits Wiesner zeigte, bei gleicher Sonnenhöhe bei weitem die Lichtintensität in Mitteleuropa. Nirgends gibt es aber so langdauernde \pm ununterbrochene „Sonnenscheinperioden“ wie im Lande der Mitternachtssonne.

Es ist deshalb durchaus nicht überraschend, dass die arktische Vegetation im allgemeinen chlorophyllarm ist, dass die Blätter dortiger Pflanzen aphotometrisch sind oder bloss Übergänge zum photometrischen Blatte aufweisen (Wiesner), dass viele Arten sehr pigmentreich sind, und dass schliesslich, wie das folgende Kapitel zeigen wird, auch noch andere Einrichtungen vorhanden sind, die vermutlich zur Abwehr der übermässigen Lichtmengen dienen.

VII. Schutzeinrichtungen gegen übermässige Insolation bei den arktischen Pflanzen.

Es ist in der vorliegenden Arbeit der Nachweis erbracht worden, dass die Pflanzen der arktischen Zwergstrauchheide chlorophyllarm sind. Diese Chlorophyllarmut äussert sich bereits in der fahlgrünen Färbung der riesigen Heidegebiete. Ein-

1) Dannmeyer, F., Strahlenbiologische Ergebnisse der deutschen Islandexpeditionen 1926/1927.

2) Kluver, A., Beobachtungen über die Einwirkung von ultravioletten Strahlen auf höhere Pflanzen. Sitzungsber. d. Wiener Akad., Bd. 120, Abt. I, p. 1037; Rayband, L., Influence des radiations ultraviolettes sur la plante. Rev. gén. de bot. 25 (1913), p. 38; Ursprung, A. und Blum, G., Über die Schädlichkeit der ultravioletten Strahlen. Ber. d. deutsch. bot. Gesellsch., Bd. 35 (1917).

gehende Untersuchungen ergaben, dass sowohl die Anthophyta und Pteridophyta als auch die Bryophyta und Lichenes in diesen Gebieten, und auch, soweit untersucht, die Luftalgen in dem trockenen Teile der *regio alpina* verhältnismässig wenig Chlorophyll bilden, und in gewissen Fällen der Chlorophyllgehalt so gering sein kann, dass bei mikroskopischer Untersuchung der Chromatophoren eine grüne Färbung kaum oder überhaupt nicht wahrnehmbar ist. Als Beispiele solcher chlorophyllarmer Pflanzen seien genannt: *Lycopodium selago*, *Aulacomnium turgidum*, *Rhacomitrium hypnoides*, *Andreaea*-Arten, *Chandonanthus setiformis*, *Cetraria nivalis*, *C. cucullata*, *Alectoria ochroleuca*, *Thamnotia vermicularis*.

Dagegen sind die Schneewiesen und die echten Wiesen Lapplands im Vergleich mit der Zwergstrauchheide chlorophyllreich. Ein solches Verhalten ist ohne Zweifel dadurch bedingt, dass die Zwergstrauchheide vorwiegend eine xerophytische Vegetation ist, während die Wiesen und Schneewiesen von Mesophyten gebildet werden (vergl. Kap. III). Die beiden Wiesenserien sind nur an Standorten möglich, die genügend Feuchtigkeit im Boden enthalten, weshalb die Wiesenbirkenwälder auf die Umgebung von Flüssen und Seep beschränkt sind und die Schneewiesen sich in der Nähe von Schneelagen befinden.

Wennschon vergleichende Untersuchungen über die Grösse und die Schwankungen des osmotischen Druckes bei den Wiesen-, Schneewiesen- und Heidepflanzen gegenwärtig kaum vorliegen, ist anzunehmen, dass die Schwankungen bei den Pflanzen der Zwergstrauchheide grösseren Umfang haben, während sie bei den Arten der beiden Wiesenserien verhältnismässig gering sind. Obgleich nach dem Blattbau nicht ohne weiteres über die Grösse der Transpiration geurteilt werden kann¹⁾, ist anzunehmen, dass die Transpirationsgrösse in den arktischen Heiden (Taf. XVIII, XIX) niedrigere Werte aufweist als in den Schneewiesen (Taf. XX—XXII) und den echten Wiesen (Taf. XIV—XVII), wo Pflanzen mit verhältnismässig grosser und dünner Spreite nicht selten sind.

1) Montfort, C., Zeitschrift f. Botanik, Bd. 10 (1918), p. 257 und daselbst Bd. 14 (1922), p. 97. Stocker, O., Zeitschr. f. Botanik, Bd. 15 (1923), p. 1—41. Immerhin fand Stocker, dass die Transpirationsgrösse der Flächeneinheit Beziehungen zum Blattbau erkennen lässt, „die aber im einzelnen vorsichtig zu deuten sind“.

Schutzeinrichtungen gegen übermässige Insolation treten wohl stets nur da auf, wo durch Wassermangel von Zeit zu Zeit die Lebenstätigkeit der Pflanzen stark herabgesetzt wird. In Schneewiesen und Wiesen ist Wasser während der Vegetationsperiode stets vorhanden. Allerdings müssen die Pflanzen der Schneewiesen befähigt sein, dieses auch aus einem Boden, dessen Temperatur um 0° ist, aufzunehmen. Dass die Pflanzen der Schneewiese tatsächlich ein solches Vermögen besitzen, kann kaum bezweifelt werden, denn bei heiterem Himmel und niedriger Bodentemperatur (Lufttemperatur um 0° herum) war in den Schneewiesen auch bei so zart gebauten Arten wie *Viola biflora* (Taf. XXI, Fig. 64), wo man nach dem Blattbau eine ziemlich beträchtliche Transpirationsgrösse anzunehmen geneigt ist, ein Welken des Laubes nicht wahrnehmbar.

Ohne Zweifel wird die freudiggrüne Färbung der Schneewiesen und der echten Wiesen durch die genügende Wasserzufuhr ermöglicht und bedingt. Auch trägt der Wasserreichtum des Bodens dazu bei, dass bei den Pflanzen der Schneewiesen im Sommer wohl kaum je eine längere Unterbrechung der Assimilationstätigkeit eintritt. Anders liegen die Verhältnisse in der Zwergstrauchheide und den Moos-, Flechten- und Algen-Assoziationen des Felsbodens. Hier kann eine durch Trockenheit bedingte Sistierung der Assimilation leicht eintreten. Hier finden wir dementsprechend auch verschiedene Lichtschutzeinrichtungen.

Der geringe Chlorophyllgehalt bei den Pflanzen dieser Formationen ist mehrmals hervorgehoben worden. Es ist diese Erscheinung hier vielleicht ebenso scharf ausgeprägt wie in den südlichen Steppen und Wüsten, denn ein so geringer Chlorophyllgehalt, wie man ihn in Lappland bei *Lycopodium selago*-Heidepflanzen beobachten kann, dürfte bei autotrophen Anthophyta und Pteridophyta doch verhältnismässig selten sein. — In den Tropen wiederholt sich diese Erscheinung in überaus deutlicher Weise ¹⁾.

Von grundlegender Bedeutung für die Deutung dieser Chlorophyllarmut sind die Befunde von Willstätter und Stoll. Diese Autoren zeigten, dass die chlorophyllarmen gelbblättrigen

1) Nach Schimper „ist die Zerstörung des Chlorophylls durch das intensive Tropenlicht eine sehr in die Augen fallende und verbreitete Erscheinung“. „Überhaupt“, sagt Schimper, „sind gelbliche Verfärbungen des Laubes an sonnigen Standorten der Tropen ganz allgemein“ (Pflanzengeographie auf phytolog. Grundlage, Jena 1898, p. 242).

Formen von *Ulmus*, obwohl sie rund 14 mal weniger Chlorophyll als die normal grüne Form enthielten, dennoch u. U. etwas grössere CO₂-Mengen (auf 1 dm² Blattfläche bezogen) assimilierten als diese. Bei den entsprechenden Formen von *Sambucus nigra* verhielten sich die Unterschiede im Chlorophyllgehalt wie 1:25, die Assimilationsleistung unter gleichen Versuchsbedingungen (berechnet wie bei *Ulmus*) wie 1:1.6. Also braucht geringer Chlorophyllgehalt für die Assimilationstätigkeit noch keinen Nachteil zu bedeuten. — Willstätter und Stoll¹⁾ fanden, dass die obere Grenze der Assimilationsleistung bei normal grünen Blättern mit viel geringerer Lichtintensität erreicht wird als bei den chlorophyllarmen. Ferner konstatierten die genannten Autoren, dass bei den chlorophyllreichen Blättern eine Erhöhung der Temperatur eine Steigerung der Assimilation bewirkt. Anders bei den chlorophyllarmen. Willstätter und Stoll fanden bei diesen eine geringe Beeinflussung durch Temperatursteigerung von 15° auf 30°. Weiter schreiben diese Autoren: „Hingegen ist Steigerung des Lichtes von Nutzen; bei Verminderung der Lichtstärke erfolgt alsbald Rückgang der Assimilation. Nur wenn das Chlorophyll vollständig ausgenützt wird, nämlich bei stärkster Belichtung, lässt sich in den chlorophyllarmen Blättern die maximale Leistung . . . erzielen“.

Auf den Befunden von Willstätter und Stoll fussend haben wir den geringen Chlorophyllgehalt der Pflanzen der arktischen Heide- und Felsformationen als eine äusserst wichtige Anpassung zu deuten, die mit dem Lichtreichtum des Gebiets und der oft niedrigen Lufttemperatur im Zusammenhang steht.

Was die Einrichtungen betrifft, die die schädliche Wirkung des zu intensiven Lichtes²⁾, das u. a. zu vorübergehender (oder auch vollständiger) Inaktivierung der Chloroplasten führen kann, aufheben sollen, so sind Wachsüberzüge und Haarbekleidung oft als derartige Einrichtungen gedeutet worden. Diese fehlen in der Zwergstrauchheide nicht, sind jedoch von geringer

1) Willstätter, R. und Stoll, A., Untersuchungen über die Assimilation der Kohlensäure, Berlin 1918, pp. 56, 57.

2) Wiesner, J., Die natürlichen Einrichtungen zum Schutze d. Chlorophylls d. lebenden Pflanze. Festschrift, Wien 1876. Ewart, A., The Effects of Tropical Insolation, Ann. of Bot. 11 (Oxford 1897), pp. 439—480.

Bedeutung. Erwähnt sei der Wachsüberzug der Blätter von *Vaccinium uliginosum*, *Andromeda polifolia*, *Thalictrum alpinum*, *Lycopodium alpinum* und einiger Polytrichaceen. Von behaarten Formen sei *Gnaphalium supinum* genannt. Auch einige „Blatthaare“ bildende Moose (*Racomitrium hypnoides*, *Polytrichum piliferum*) sind hier¹⁾ zu erwähnen²⁾.

Als Lichtschutzeinrichtung ist auch das Auftreten von rotem Zellsaft und roten oder gelben Zellmembranpigmenten zu deuten. Da der Verfasser in mehreren Abhandlungen³⁾ dieses Thema besprochen hat, so sei hier auf jene verwiesen. — Bei den Bryophyta und zum Teil auch bei den Flechten und Algen lässt die Pigmentation kaum eine andere Deutung zu, weshalb sie auch von mehreren Autoren gegeben worden ist. Inbetreff der Moose haben sich Russow, Sapëhin, Buch, Müller, Herzog u. a. für eine solche Deutung ausgesprochen⁴⁾.

So schreibt Herzog in seiner Geographie der Moose: „Der Lichtschwäche des Standortes untergetauchter Moose entsprechend fehlen Färbungen zum Schutze des Chlorophylls vollständig; dieses selbst ist reichlich vorhanden, so dass die Wassermoose stets tiefgrün erscheinen. Nur bei einigen hochmontanen oder alpinen Wassermooseen, deren Standorte periodischer Austrocknung unter-

1) Herzog, Th., Geographie der Moose, Jena 1926, p. 12.

2) Die Blätter der in der *regio alpina* wachsenden Exemplare von *Solidago virgaurea* sind im Sommer chlorophyllreich und erscheinen etwas bläulichgrün, so dass man vermuten könnte, dass sich auch bei dieser Art eine gut ausgebildete Wachsschicht vorfindet. Tatsächlich jedoch ist diese Färbung durch eine sehr feine Runzelung der Kutikula der Blattoberseite hervorgerufen. Es ist möglich, dass diese Struktur der Kutikula in der Lichtaushaltung dieser Art von Bedeutung ist.

3) Lippmaa, Th., Das Rhodoxanthin, seine Eigenschaften, Bildungsbedingungen u. seine Funktion in der Pflanze. Schriften herausgeg. von d. Nat.-Ges. bei der Univ. Tartu 24 (Tartu 1925), pp. IV+104; Pigmenttypen bei Pteridophyta und Anthophyta. Acta Inst. et Horti Bot. Tartuensis (Dorpatensis), vol. 1, fasc. 1—3, pp. 71+229; Über Pigmenttypen und ihre Bedeutung für die Anthocyaninfrage. Ber. d. deutsch. bot. Gesellsch. 46 (1928), pp. 267—277.

4) Sapëhin, Laubmoose des Krimgebirges in ökologischer, geographischer u. floristischer Hinsicht. I. Engler's Botan. Jahrbücher, Beiblatt Nr. 104, Leipzig 1911.

Müller, K., Über Anpassungen der Lebermoose an extremen Lichtgenuss. Berichte d. deutsch. bot. Gesellsch., Bd. 34 (Berlin 1916).

Herzog, Th., Geographie der Moose, Jena 1926.

Buch, H., Die Scapanien Nordeuropas und Sibiriens. I. Soc. Scient. Fenn. Comment. Biologicae I. 4, p. 17—19.

liegen, findet sich starke Membranfärbung, so z. B. bei den fast schwarzen *Haplozia cordifolia* und *Alicularia grandistipula*“. Und weiter: „Diese glänzenden Färbungen sind fast stets eine Eigentümlichkeit lichtreicher Klimate, während das Dunkel des Regenwaldes fast nur Schattierungen des Grün und bleiche Färbungen . . . kennt“. Ähnlich äussern sich auch die anderen genannten Autoren.

Es ist höchst bemerkenswert, dass gerade bei den Moosen, wo die Blattspreite ja gewöhnlich einschichtig ist, die Zellwandungen die roten (gelben) Farbstoffe führen, während die Anthocyanine bei Anthophyta und Pteridophyta bekanntlich vorwiegend im Zellsaft gelöst auftreten. Allerdings gibt es sowohl unter den Laub- wie auch unter den Lebermoosen Ausnahmen von dieser Regel, doch sind diese äusserst selten. Von den in Lappland untersuchten Moosen führen bloss die Blätter von *Marsupella aquatica*, *Bryum pallens*, *B. Duvalii*, *B. purpurascens* im Zellsaft gelöstes Anthocyanin.

Wenn in den gefärbten Zellschichten und -membranen gewöhnlich eine Schutzeinrichtung für das Chlorophyll erblickt wird, so sei hier hervorgehoben, dass es wahrscheinlicher ist, dass nicht das Chlorophyll selbst, sondern das chlorophyllbildende Stroma der Plastiden geschützt wird. Es spielen sich in letzterem verschiedene enzymatische Prozesse ab, die ihr Optimum, wie es zum Teil direkt nachgewiesen ist, in gelbem und rotem Lichte haben¹⁾. Auch ist die Annahme, dass in der lebenden Pflanze eine direkte Zerstörung des Chlorophylls durch Licht unter natürlichen Bedingungen zustande kommt, kaum begründet²⁾. Bei der „Ausbleichung“ der Chloroplasten wirkt das intensive Licht wohl nur als auslösender Faktor.

Die Luftalgen verhalten sich den Moosen sehr ähnlich. In der oben (p. 96) besprochenen Cyanophyceen-Assoziation erwiesen sich diese bildenden Arten gleichzeitig als sehr chlorophyllarm und

1) Green, J. R., On the Action of Light on Diastase and its Biological Significance. Philos. Transact. 188 (London 1898), p. 167. Went, F. A. F. C., Über den Einfluss des Lichtes auf die Entstehung des Karotins und auf die Zersetzung der Enzyme. Rec. d. trav. bot. Néerl. Nr. 1 (1904). Heinsius en Koning, Over de beteekenis van de roode kleurstof (Anthocyaan) in planten. Ref. Biochem. Centr., Bd. 1 (1903), p. 638.

2) Vgl. auch Draheim, W. und Ziegenspeck, H., Beiträge zur Assimilationstheorie. Sonderabdr. aus dem Bot. Archiv, Bd. 22 (1928), Heft 3/4, pp. 385—413.

pigmentreich. Es hatten sich hier braune und rote Membranpigmente (Scytonemin, Gloeocapsin) gebildet. Dass auch diese Membranfärbung zum Lichtschutz dient, ist höchst wahrscheinlich ¹⁾. Über Membranfärbungen bei den Cyanophyceen schreibt Geitler ²⁾: „Eine deutliche Beziehung besteht zwischen der Belichtung der Lager und der Farbe der Scheiden und der Gallerte. Bei stärkeren Belichtungsintensitäten werden die Scheiden gelbbraun, bei manchen Formen auch rot oder violett. Dieses gilt nicht nur von den extrem xerophilen Formen, sondern auch von vielen anderen, wenn sich auch die Erscheinung am deutlichsten bei den terrestrischen Typen beobachten lässt. Häufig sind dabei nur die äusseren Teile des Lagers gefärbt und speziell wieder nur die Oberseite, während die basalen, festgehefteten und so dem Licht entzogenen Teile farblos sind. — Es ist naheliegend anzunehmen, dass die Färbung als Lichtschutz dient.“

Nach dem bereits Mitgeteilten ist es wohl keinesfalls überraschend, dass in den arktischen Pflanzenvereinen auch Arten auftreten, die das Vermögen besitzen, das auffallende Licht zu reflektieren.

Das glänzende Laub vieler Bäume der Tropen wurde von Haberlandt in seiner bekannten Arbeit: „Eine botanische Tropenreise“ beschrieben. Später haben diese Erscheinung Mi-

1) Bei den Cyanophyceen treten ausser diesen Pigmenten bekanntlich noch Chromatophorenpigmente (Phycocyan und Phycoerythrin) auf, die mit den Farbstoffen der Rhodophyceen übereinstimmen und die es verursachen, dass sich unter diesen Algen sowohl blaugrüne als rote Formen finden. Bekanntlich überwiegen die rot gefärbten Cyanophyceen in grösseren, schwächer belichteten Tiefen. Diese Rottfärbung hat mit der oben besprochenen nichts gemein — es handelt sich hier um ein Assimilationspigment, das dem Blattgrün der Landpflanzen entspricht und gewiss die gleiche Funktion wie dieses ausübt (vergl. Geitler, L., Cyanophyceen, p. 39). — Höchst bemerkenswert sind in dieser Hinsicht die Befunde Ljubimenko's bei den Rhodophyceen. Durch sorgfältige Analysen konnte Ljubimenko feststellen, dass das Verhältnis zwischen Chlorophyll- und Phycoerythrin-Gehalt bei verschiedenen Arten wohl Schwankungen unterworfen ist, dass es aber bei einer und derselben Art keine Veränderung zeigt. Seine Ergebnisse fasst Ljubimenko dahin zusammen, dass es sich bei den Rhodophyceen eigentlich um ein natürliches Pigment handelt, dessen Komponenten u. a. Chlorophyll und Phycoerythrin sind, und dass ihre chromatophore Gruppe komplizierteren Bau aufweist als bei den Landpflanzen (Ljubimenko, V., C. R. d. S. de l'Acad. d. Sc. à Paris, t. 181, p. 730, Paris 1925).

2) Geitler, L., Cyanophyceen. In Pascher, A., Die Süsswasser-Flora Deutschlands, Österreichs und der Schweiz. Jena 1925, p. 42.

yoshi¹⁾, Karsten²⁾ u. a. näher untersucht. So berichtet Karsten über die Sagowälder auf den Molukken, dass die Blätter der Sagopalme so grelles Licht zurückwerfen, dass „man die schmerzenden Augen schliessen muss, um nicht zu sehr geblendet zu werden“. Karsten bringt in seiner Arbeit Beispiele sowohl aus dem tropischen Asien als auch aus Amerika (Mexiko), wo die wurzelkletternden Araceen oft glänzendes Laub besitzen. Dieses Phänomen ist wohl von allen Autoren als Lichtschutz gedeutet worden³⁾. Es ist deshalb sehr bemerkenswert, dass die wichtigste Baumart der *regio subalpina* in Lappland — *Betula tortuosa* — ein glänzendes, Licht reflektierendes Laub besitzt. Dem Verfasser und Dr. Viljo Kujala fiel dieses Glänzen des Laubes besonders während des Aufenthaltes in den Petsamon-tunturit und dem Pääskyspahta-tunturi (vom 4. bis zum 22. Juli 1927) auf.

Bei näherer Untersuchung dieser Erscheinung wurde folgendes notiert: Die Kurztriebe der *Betula tortuosa* besitzen hier in der Regel 3—4 Blätter. Die Blattspreite ist \pm horizontal gerichtet, gewöhnlich befindet sich aber die Blattspitze niedriger als die Anheftungsstelle des Blattstieles an die Spreite. Dabei ist die Blattspreite etwas konkav.

Die Mengen des reflektierten Lichtes, die zum Auge gelangen, hängen deutlich von der Höhe der Sonne ab. Sie sind in den Morgenstunden und den entsprechenden Nachmittagsstunden besonders gross, was durch die fast horizontale Lage der Blätter (wobei, wie oben erwähnt, die Blattspitze sich etwas niedriger befindet als die Anheftungsstelle an den Blattstiel) bedingt wird. Es wäre leicht ein Schema zu konstruieren, welches zeigen würde, dass infolge des grösseren Einfallwinkels bei höherem Sonnenstande die Strahlen so reflektiert werden, dass sie in der Regel nicht in das Auge gelangen. Aus demselben Grunde sieht man auch die Lichtreflexion nicht, wenn man sich zwischen dem Objekte und der Sonne befindet. Die Lichtreflexion lässt sich also

1) Miyoshi, M., Botanische Studien aus den Tropen. 1910.

2) Karsten, G., Das Licht im tropischen Regenwalde. Vegetationsbilder, 16. Reihe, Heft 3, Jena 1925.

3) Es ist von Haberlandt auch darauf hingewiesen worden, dass die glatte Blattfläche in den Tropen dadurch von Nutzen sein könnte, dass sich auf einer solchen nicht so leicht eine Epiphyllvegetation (Algen, Flechten, Moose) ansiedeln kann, wie auf einem Blatt mit unebener Oberseite.

besonders schön beobachten, wenn man die Bäume bei verhältnismässig niedrigem Sonnenstande von der der Sonne direkt entgegengesetzten Seite betrachtet.

In betreff der lichtreflektierenden Blätter des tropischen Gebietes schreibt Wiesner: „In sehr lichtstarken Vegetationsgebieten — insbesondere in den Tropen — trachtet das Blatt das starke direkte Sonnenlicht mittels der gewonnenen Lage zum Horizont abzuwehren, indem es sich durch Annäherung an die vertikale Richtung so stellt, dass die Strahlen hoher Intensität nur unter kleinem Winkel auf die Blattfläche fallen“¹⁾. Es ist deshalb vielleicht von Interesse, dass in dem arktischen Gebiet der lichtreflektierende Baum dem Sonnenstande entsprechend seine Blätter \perp horizontal stellt.

Von anderen Arten, die glänzendes Laub besitzen, sind vor allem *Betula nana*, *Salix herbacea*, *S. polaris* zu nennen. Es sei bemerkt, dass die Arten, bei welchen die Blätter stark glänzen, verhältnismässig chlorophyllreich sind.

Das Glänzen des Laubes bei mehreren arktischen Pflanzen ist den Forschern, die die arktische Vegetation untersuchten, nicht entgangen. Doch wurde diese Erscheinung bisher bloss vorübergehend erwähnt: so von Pohle²⁾ das Glänzen der Blätter von *Betula nana*.

An dieser Stelle sei auch jener arktischen Lebermoose gedacht, die mehr oder weniger silbergrau gefärbt sind (*Anthelia*, *Gymnomitrium*). Solche Arten besitzen dicht übereinandergestellte Blätter, die in den Spitzen abgestorben sind. Diese abgestorbenen Blatteile sind es eigentlich, die der direkten Lichtwirkung ausgesetzt sind. In den toten Zellen, deren Lumen mit Luft gefüllt ist, tritt nach Müller³⁾ leicht eine mehr oder minder starke Totalreflexion der Lichtstrahlen ein, wodurch die Moose silbergrau erscheinen. Da die lebenden Blatteile von den abgestorbenen Teilen der niedriger stehenden Blätter bedeckt sind, so wird das

1) Wiesner, J., l. c. p. 392.

2) Pohle, R., Vegetationsbilder aus Nordrussland. Karsten u. Schenk, Vegetationsbilder, 5. Reihe, Heft 4, Jena 1927. Vergl. auch Tafel 27 in dieser Arbeit!

3) Müller, K., Über Anpassungen der Lebermoose an extremen Lichtgenuss. Berichte d. deutsch. bot. Gesellsch., Bd. 34, Berlin 1916.

Licht, bevor es die chlorophyllführenden Zellen trifft, stark abgeschwächt und in diffuses Licht umgewandelt.

Aus dem Mitgeteilten ergibt sich, dass in den xerophytisch ausgestatteten Heidewäldern und Zwergstrauchheiden Lapplands die Pflanzen ohne Zweifel verschiedene Einrichtungen (Chlorophyllarmut, Zellsaft- und Zellmembranpigmente, Wachsüberzüge, aphotometrisches, zum Teil lichtreflektierendes Laub) besitzen, die darauf hinweisen, dass die Pflanzen dieser Formationen sich keinesfalls in Belichtungsbedingungen befinden, wo Lichtüberschuss — wie es seinerzeit Wiesner annahm — ein seltener Fall ist. Ganz im Gegenteil: es wird die arktische Heide von lichtresistenten Artengebildet, die auch langedauerndes direktes Sonnenlicht ertragen können. Viel Licht wird im hohen Norden bloss deshalb „bevorzugt“, weil die gut belichteten Standorte oft auch die wärmsten sind. Wenn Wiesner die niedrige Zweigordnung der Bäume und der Sträucher in der *regio subalpina* und *alpina* von Lappland so deuten wollte, dass hierdurch eine bessere Belichtung des Laubes ermöglicht wird, so ist diese Deutung gegenwärtig unbefriedigend. Wenn man die Tatsache in Betracht zieht, dass das aphotometrische Laub in dem arktischen Gebiet so verbreitet ist, wird man wohl kaum annehmen wollen, dass es sich um eine Einrichtung zwecks möglichst hoher Wärmeausnutzung handelt. Es ist die niedrige Zweigordnung durch die geringe Stoffproduktion der arktischen Pflanzen bedingt.

Das wichtigste Ergebnis der vorliegenden Arbeit — die Erkennung der hochnordischen Vegetation als eine an hohe Lichtintensitäten und grosse Lichtmengen angepasste, mit mehreren oft sehr verbreiteten Lichtschutzeinrichtungen (Chlorophyllarmut, Zellsaft- und Zellmembranpigmente, Wachs-

überzüge, lichtreflektierendes Laub) ausgerüstete — ist in dem Schlusskapitel soeben formuliert worden. Im übrigen sei auf das Kap. IV verwiesen, wo die Resultate der Analysen des Pigmentgehalts der arktischen Formationen und der Untersuchung des Blattbaues in denselben zusammengefasst worden sind.

Anhang.

Daten über Pigmentgehalt und Pigmentkombinationen (-typen) bei den Pflanzen Finnisch- und Norwegisch-Lapplands¹⁾.

A. Formation der Wiesenbirkenwälder.

Coeloglossum viride. Die Hochblätter und Blüten enthalten u. U. A.²⁾, die Blätter sind stets a-frei. A [000].

Anthoxanthum odoratum. Führt violettroten Zellsaft in den äussersten Schichten des Assimilationsgewebes. Die Epidermiszellen sind stets a-frei. Obwohl die Blätter von *A. odoratum* A. bilden können, sind die Blattspreiten bei den Pflanzen der Wiesenbirkenwälder in der Regel a-frei. A [(1)(1)(1)].

Milium effusum ist während der ganzen Vegetationsperiode grün gefärbt. Besitzt bis zum Vergilben der Blätter das Vermögen A. zu bilden, was daraus hervorgeht, dass die verletzten Blattspreiten auch im Spätherbst A. bilden können. A [(1)(1)(1)].

Phleum alpinum. In den Wiesenbirkenwäldern in der Regel a-frei. Violettroten Zellsaft führen u. U. die Epidermiszellen und die peripheren subepidermalen Zellschichten, sowohl in den Blattspreiten als auch in den Scheiden. A [(1)(1)(1)].

Deschampsia flexuosa. In den jungen Blättern führen rosaroten Zellsaft die Epidermiszellen sowie die Zellen der äusseren Mesophyllschichten. Besonders reichlich können A. die apikalen Teile der Blattspreiten,

1) Die Beschreibungen und Daten fussen auf Beobachtungen, die, wie bereits mitgeteilt, im Sommer 1927 während einer dreimonatlichen Reise in Lappland gemacht worden sind. Verwendung fanden hierbei nicht nur die Aufzeichnungen in betreff der analysierten Flächen, sondern auch solche über andere Lokalitäten. Wo gewisse Beobachtungen im Sommer in Lappland so ziemlich überall gemacht werden können, sind Orts- und Datumangaben fortgelassen worden, um die Beschreibungen nicht mit ihnen zu überlasten.

2) A. = Anthocyanin; A-gehalt = Anthocyaningehalt; a-führend = anthocyaninführend; a-frei = anthocyaninfrei usw.

die Blattscheiden und der Stengel enthalten. Das Vermögen A. zu bilden wird bis zum Absterben der Blätter beibehalten. A [1(1)(1)].

Poa alpina. Die Lokalisation des Pigments dem Verfasser unbekannt. Die Blätter behalten bis zum Absterben das Vermögen A. zu bilden, sind aber in den Wiesenbirkenwäldern a-frei. A [(1)(1)(1)].

Carex capillaris. [000].

Carex rigida. Die Niederblätter enthalten ein rotes Zellwandpigment (A.). Die Wandungen der Epidermiszellen sind die Träger dieses Pigments, nur die Schliess- und Nebenzellen haben farblose W. Die Blattspreiten bilden nie A. A [000].

Paris quadrifolia. A [(1)(1)(1)]. (Vergl. Pigmenttypen II, p. 42).

Listera cordata. [000].

Salix reticulata. Führt A. im peripheren Mesophyll. Junge Blätter enthalten A. in ihrer apikalen Hälfte, am Blattrande, in den Blattnerven und den Blattstielen (5. Juli, Säräslaki). Mitte Juni erwiesen sich die Blattspreiten als a-frei, sie besaßen jedoch das Vermögen A. zu bilden, wie dies an verletzten Zweigen und Blättern deutlich zu sehen war. Ende August werden gelbe Herbstblätter häufig; am 4. Sept. waren sie in den Wiesenbirkenwäldern am Kilpisjärvi bei weitem in der Mehrzahl. A [1(1)(1)].

Salix lapponum. Kann während der ganzen Vegetationsperiode A. bilden, ist aber in der Regel a-frei. In den Wäldern der Gegend um den Kilpisjärvi traten die vergilbten Blätter erst am 4. Sept. massenhaft auf. A [(1)(1)(1)].

Betula tortuosa. Über den Pigmentgehalt nähere Angaben im Abschnitte über die Heidebirkenwälder (p. 39). In den Wiesenbirkenwäldern des Malla-tunturi beim Kilpisjärvi tritt A [1(1)(1)] häufig, A [1(1)] viel seltener auf.

Rumex acetosa. Die anatomische Lokalisation des A. war dieselbe wie bei den in Estland vom Verfasser untersuchten Exemplaren. Nur ist der A-gehalt der jungen Blätter in Lappland in der Regel höher als in Estland. Bis 5—6 cm lange Blätter sind im Frühjahr sehr a-reich. Am 5. Juli waren sie auf dem Säräslaki in der Nähe von Schneelagen dunkelbraunrot bis violettrot. — Im Sommer ist die Pflanze in den Wiesenbirkenwäldern grün. Die herbstliche Rötung trat in der Gegend beim Kilpisjärvi Anfang September ein. A [1(1)1].

Polygonum viviparum. Die Blattspreite enthält A. in den Epidermiszellen und in einem Teil des Mesophylls, besonders in dessen peripheren Schichten. — Junge Blätter mit noch stark zurückgerollter Spreite sind dunkelbraunrot (5. Juli, Säräslaki). Im Sommer sind die

Blätter bei den Pflanzen des Wiesenbirkenwaldes grün. Das Vermögen A. zu bilden wird bis zum Absterben der Blätter beibehalten, doch kommt es in den genannten Wäldern gewöhnlich nicht zu einer herbstlichen Rötung. A [1(1)(1)].

Trollius europaeus. Die Lokalisation des A. ist dieselbe wie bei den in Estland untersuchten Exemplaren (Pigmenttypen II, p. 84). Auch verhält sich diese Art in Lappland in bezug auf den Pigmenttypus ganz wie jene. Die Blattspreite, die anfangs verhältnissmässig a-reich ist, verliert bald vollkommen das Vermögen A. zu bilden, weshalb die Herbstblätter ausnahmslos schön gelb gefärbt sind. Bereits am 19. August waren die ersten gelben Blätter bei den Exemplaren in der Umgebung des Jehkats-tunturit (Kilpisjärvi-G.) zu sehen, am 30. August überwogen in den Birkenwäldern am Fusse des Malla-tunturi bereits die gelben Blätter und am 1. September war die schöne gelbe Herbstfärbung überall erreicht. A [1(1)0].

Ranunculus acer. Besitzt das Vermögen A. zu bilden, ist jedoch in den Wiesenbirkenwäldern stets a-frei angetroffen worden. A [(1)(1)(1)].

Thalictrum alpinum. Das A. ist bei *T. alpinum* bläulichviolett gefärbt, weshalb chlorophyllreiche Blätter fast schwarz erscheinen. Den farbigen Zellsaft führen in den Blattspreiten die Zellen des Palisadenparenchyms und die peripheren Zellschichten in der Nähe der unteren Epidermis, auch Blattstiele können sehr a-reich sein, ebenso die Stengel. In den Wiesenbirkenwäldern ist diese Pflanze im Sommer in der Regel grün gefärbt. Die absterbenden Blätter sind nicht selten rot, gelb gefärbte überwiegen aber bei weitem. A [1(1)(1)].

Parnassia palustris. Stimmt sowohl bezüglich der Lokalisation des A. wie auch des Pigmenttypus mit den estländischen Exemplaren überein (vergl. Pigmenttypen II, p. 110). Am 30. August waren in den Wäldern am Fusse des Malla-tunturi bei sehr vielen Exemplaren bereits vergilbte Blätter vorhanden. Nie fand sich ein gerötetes (a-führendes) Blatt. A [000].

Sorbus aucuparia f. *glabrata*. Die jungen Blätter führen A. sowohl in den Epidermiszellen als auch in den peripheren Mesophyllzellen. Viel ausgesprochener ist jedoch die Rötung bei den gealterten Blättern. In den Wäldern am Fusse des Pääskyspahta-tunturi hatte sich an beschädigten Ästen bereits am 17. Juli eine schöne rote Färbung der Blätter gezeigt. In der Kilpisjärvi-Gegend war die Herbstfärbung am 4. Sept. vollkommen ausgebildet. A [1(1)1].

Rubus saxatilis. Was die Lokalisation der a-führenden Zellen und das jahreszeitliche Auftreten des roten Pigments betrifft, so stimmen

die in Lappland gemachten Beobachtungen mit denen aus Estland (vergl. Pigmenttypen II, p. 117) vollkommen überein. In den Wiesenbirkenwäldern am Kilpisjärvi waren die Blätter dieser Pflanze am 29. August noch grün, zeigten jedoch einen bräunlichen Anflug, der von der begonnenen A-bildung herrührte. Am 1. Sept. war die herbstliche Rotfärbung gut ausgeprägt. A [1(1)1].

Rubus arcticus. Die anatomische Lokalisation des A. ist dem Verfasser unbekannt. Die Pflanze besitzt eine stark ausgeprägte Tendenz A. zu bilden. In den Wiesenbirkenwäldern beim Kilpisjärvi waren am 30. Aug. die Blätter aller gesehenen Exemplare grün, am 9. Sept. dagegen bei Mukkavuoma (Torne Lappmark) in offenen Lokalitäten ausnahmslos intensiv braunrot. A [1(1)1].

Alchemilla glomerulans. Die jungen Blätter dieser Art sind in für die Alchemillen üblicher Weise stark gefaltet, weshalb der grösste Teil der Blattfläche vor direkter Lichtwirkung geschützt ist. Die belichteten Teile führen besonders in der apikalen Hälfte der Spreite A., auch sind die Blattstiele und die Stipulae rötlich bis violettrot. In der Spreite führen die Epidermiszellen, zum Teil auch einzelne Mesophyllzellen das A. In den Blattstielen sind die subepidermalen Zellschichten reich an A., auch ist jedes Gefässbündel von einer „Anthocyaninscheide“ umgeben (5. Juli, Säräslaki, in der Nähe von Schneelagen). In den Wiesenbirkenwäldern am Kilpisjärvi hatte bereits am 15. August die herbstliche A-bildung begonnen, denn viele Blätter wiesen in den Randpartien der Spreite starke Rötung auf. Am 30. Aug. war die Rötung allgemein, doch vollständig gerötete Blätter waren noch selten. Im Sommer sind die Blattspreiten von *A. glomerulans* in den Wiesenbirkenwäldern anthocyaninfrei. A [1(1)1].

Geum rivale verhält sich in den Wiesenbirkenwäldern des Pääskyspahta-tunturi ähnlich wie in den Wiesen Estlands (Pigmenttypen II, p. 126—128). Dass auch hier A [1(1)1] auftritt, ist dem Verfasser äusserst wahrscheinlich, doch war es nicht möglich die Gegend im Herbst zu besuchen.

Filipendula ulmaria. Die jungen Blätter dieser Pflanze sind in Lappland ebenso a-reich wie in Estland (Pigmenttypen II, p. 130). Im Sommer sind die Blätter in der Regel a-frei. In den Wiesenbirkenwäldern um den Kilpisjärvi war am 22. August bei vielen Exemplaren schön ausgebildete Herbstfärbung zu beobachten. Die Blätter besitzen, wie aus verschiedenen Beobachtungen folgt, auch zu dieser Zeit die Fähigkeit A. zu bilden, jedoch unterblieb dies in den meisten Fällen. A [1(1)(1)].

Astragalus alpinus. Diese Art besitzt während der ganzen Vegetationsperiode die Fähigkeit A. zu bilden, weshalb a-führende Blätter sich in allen Entwicklungsstadien beobachten lassen. Sie besitzen violetten Zellsaft in peripheren Mesophyllzellen. A-freie Spreiten überwiegen aber stets bei weitem, weshalb auch die beobachteten Herbstblätter (1. Sept., Wiesenbirkenwälder am Fusse des Malla-tunturi) fast ausnahmslos gelb waren. — In Lappland dürfte im allgemeinen die Schneedecke sich früher ausbreiten, als die Gelbfärbung auch nur einigermaßen zur Geltung kommen kann. A [(1)(1)(1)].

Astragalus frigidus besitzt das Vermögen ein Zellsaftpigment zu bilden. Dieses kann die Stengel und Blattstiele braunrot färben; dagegen enthält die verhältnismässig stark behaarte Blattspreite auch in jungen Blättern nur wenig A. (auf der stärker belichteten Blattunterseite). A. führen periphere Zellschichten des Schwammparenchyms. Die dunkelgrüne Sommerfärbung wird bei dieser Art bis zum Spätherbst beibehalten, weshalb, ähnlich wie bei *A. alpinus*, noch grüne Blätter unter die Schneedecke kommen. Wo vergilbte Blätter beobachtet wurden, erwiesen sich diese als a-frei. Da auch die Umgebung der beschädigten Stellen in den Blattspreiten stets a-frei gefunden wurde, so dürfte es sich bei *A. frigidus* um A [1(1)0] handeln. Es bleibt jedoch vorläufig unentschieden, ob nicht dennoch A [1(1)(1)] vorliegt.

Geranium silvaticum. Die jungen Triebe dieser wichtigen Art der Wiesenbirkenwälder sind intensiv braunrot gefärbt. In den jungen Blattspreiten ist die Blattunterseite besonders a-reich — den gefärbten Zellsaft führen Epidermiszellen und die äussersten Zellschichten des Mesophylls. Die Blattstiele und Stengel enthalten reichlich A. in den Epidermiszellen, den äussersten Schichten der primären Rinde, im Grundgewebe in der Nähe der Gefässbündel und in nicht wenigen Markzellen (5. Juli, Säräslaki). Im Sommer sind die Blattspreiten der Exemplare aus Wiesenbirkenwäldern grün, nur kleine Zellgruppen in den apikalen Teilen der Blattzipfel enthalten A. Bereits am 15. August war in den Wäldern der Kilpisjärvi-Gegend der Beginn der Herbstströtung sehr deutlich. Am 4. Sept. sah man überall in den Wiesenbirkenwäldern äusserst intensiv zinnoberrote Herbstblätter von *Geranium*. A-freie Blätter waren kaum zu finden. — Die herbstroten Blätter enthalten A. in den Epidermiszellen, in den Zellen des Palisadengewebes und im peripheren Schwammparenchym. Am geringsten ist die Konzentration des A. in den Epidermis-, am höchsten in den Palisadenzellen. A [1(1)1].

Viola biflora. Diese Pflanze bildet in den Blattspreiten nie A., obwohl ihr die Fähigkeit A. zu bilden nicht gänzlich abgeht: man fin-

det nämlich oft die Blattstiele etwas violett angelaufen, welche Färbung von violetter Zellsaftfarbstoff (A.) herrührt. Die Herbstfärbung fand der Verfasser in den Wiesenbirkenwäldern (Malla-tunturi) am 30. Aug. schön ausgebildet. Ausnahmslos waren die gealterten Blätter gelb gefärbt. A [000].

Chamaenerium angustifolium. Junge Triebe dieser Art sind im Frühjahr äusserst stark gerötet. Stengel, Niederblätter und Blätter weisen eine auffallend intensive violettrote bis braunrote Färbung auf, nur die basalen Teile der Blätter sind in den geschützten Teilen grün. In der Blattspreite führen die Epidermiszellen A. (am 5. Juli in der Nähe perennierender Schneelagen auf dem Säräslaki-tunturi). Später untersuchte Exemplare waren grün und in der Regel a-frei. Die Herbstfärbung ist auch in Wiesenbirkenwäldern sehr intensiv. Besonders in der Nähe von gelben *Salix*-Sträucher tritt die schöne violettrote Färbung von *Chamaenerium* kontrastvoll hervor. Das Herbstblatt führt kein A. in den Epidermiszellen. Das Palisadengewebe ist ganz durchgehend violettrot gefärbt. A [1(1)1].

Chaeropholium silvestre. Die jungen Blätter sind nicht mikroskopisch untersucht worden, sie enthalten verhältnismässig wenig A. Wenn schon das Vermögen A. zu bilden bis zum Absterben der Blätter beibehalten wird, trat in den Wiesenbirkenwäldern des Kilpisjärvi-Gebietes keine herbstliche Rötung auf. A [(1)(1)(1)].

Angelica archangelica. Diese Art hat das Vermögen in Stengeln, Blattstielen und Blattspreiten A. zu bilden, wobei dieses Verhalten bis zum Vergilben der Blätter unverändert bleibt. Das A. befindet sich stets in den äussersten subepidermalen Schichten, nie in der Epidermis. In der Regel sind die Blätter bei den Exemplaren der Wiesenbirkenwälder in allen Entwicklungsstadien a-frei. A [(1)(1)(1)].

Cornus suecica. Obwohl diese Pflanze in ihren jungen Blättern A. bilden kann und unter gewissen Bedingungen sogar als A [111] auftritt, sind bei den Exemplaren der Wiesenbirkenwälder die Blätter im Frühjahr und Sommer in der Regel a-frei. — Die Herbstfärbung war am 31. August in den genannten Wäldern am Kilpisjärvi ziemlich deutlich; am 4. Sept. war die Herbstfärbung vollkommen. Oft genug waren nur die apikalen Teile der Blattspreiten violettrot, die basalen aber gelb. A. fand sich in den Palisadenzellen und zum Teil auch in den äusseren Zellschichten des Schwammparenchyms. A [(1)(1)1].

Pirola secunda. Diese Pflanze, deren Blätter in der Kilpisjärvi-Gegend bis 3—4 Jahre am Leben bleiben, bildet A. in verletzten Teilen der Blattspreite, ist jedoch in der Regel a-frei. A [(1)(1)(1) . . (1)].

Pirola minor und *P. rotundifolia*. Diese Arten verhalten sich in den Wiesenbirkenwäldern ähnlich der *P. secunda*. A [(1)(1)(1) . . (1)].

Trientalis europaea. Die jungen Blätter dieser Art und ebenso die absterbenden sind sehr a-reich (s. unten!). Tritt in Wiesenbirkenwäldern vorwiegend als A [1(1)1] auf.

Vaccinium uliginosum. In den Wiesenbirkenwäldern verhält sich *V. uliginosum* ähnlich wie in den Wäldern Estlands (vergl. Pigmenttypen II, p. 185), nur ist die Herbstfärbung intensiver. A [(1)(1)1]. Vielleicht auch A [1(1)1]?

Vaccinium vitis idaea wurde vom Verfasser bereits in Estland näher untersucht (Pigmenttypen II, p. 186). In den Wiesenbirkenwäldern tritt diese Art als A [(1)(1)(1) . . (1)] auf.

Vaccinium myrtillus. Bildet an trockenen Standorten viel A. und kommt in Lappland oft als A [111] vor. In den Wiesenbirkenwäldern sind die jungen Blätter a-reich, und zwar, weil die Blätter steil nach oben gerichtet sind, besonders auf der Blattunterseite. Den gefärbten Zellsaft führen die äusseren Schichten des Schwammparenchyms, zum Teil auch das Palisadenparenchym (5. Juli, Säräslaki). Im Sommer ist *V. myrtillus* in den genannten Wäldern a-frei. Die grüne Färbung wird hier sehr lange beibehalten. Zur Zeit wo die Heidebirkenwälder intensiv rot gefärbt sind (*V. myrtillus*!), sind die Blätter der Heidelbeere in den Wiesenbirkenwäldern kaum pigmentiert. Erst am 1. Sept. war bei nicht wenigen Blättern der Blattrand rötlich, doch überwogen vollständig grüne Blätter (Wälder am Fusse des Malla-tunturi). Dass in diesen Wäldern *V. myrtillus* am häufigsten als A [1(1)(1)] auftritt, ist höchst wahrscheinlich.

Melampyrum silvaticum. A [1(1)(1)].

Melampyrum pratense verhält sich der vorigen Art ganz ähnlich, ebenso *Euphrasia minima*. Die letztgenannte Art tritt vorwiegend als A [(1)(1)(1)] auf.

Bartsia alpina ist im Frühjahr sehr a-reich. In Wiesenbirkenwäldern des Pääskyspahta-tunturi waren am 10. Juli die jungen Blätter und Stengel bei stark pigmentierten Exemplaren (solche bildeten die Regel!) braun bis braunviolett. Den violetten Zellsaft führten stets die Epidermiszellen. Es liess sich bei den Blättern von *B. alpina* auch an Standorten, wo die Pflanze als A [111] auftritt, eine deutliche Abnahme des Pigmentgehaltes während der Vegetationsperiode beobachten. In Wiesenbirkenwäldern der Kilpisjärvi-Gegend waren die Pflanzen Mitte August grün. Neubildung von A. in den gealterten Blättern findet nicht statt. A [1(1)(1)].

Rhinanthus major. Diese Art besitzt während der ganzen Vegetationsperiode das Vermögen A. zu bilden, was daraus ersichtlich ist, dass sowohl junge als ausgewachsene Blätter und auch solche, bei denen die Trennungsschicht bereits ausgebildet ist, A. führen können. Der violett gefärbte Zellsaft tritt stets nur in den Epidermiszellen auf. In der Regel sind die Blätter bei den *R. major*-Pflanzen der Wiesenbirkenwälder a-frei. A [(1)(1)(1)].

Pinguicula alpina ist in den Wiesenbirkenwäldern im Frühjahr oft genug stark a-führend. In den eingerollten lateralen Teilen der Blattspreite ist sie auf ihrer morphologischen Unterseite violettrot gefärbt, was durch den A-gehalt der Epidermiszellen bedingt ist. In den Wiesenbirkenwäldern sind die Blätter im Hochsommer in der Regel a-frei, obgleich das Vermögen A. zu bilden auch den vergilbenden Blättern eigen ist. Diese Art tritt in den Wiesenbirkenwäldern als A [1(1)(1)] und auch als A [(1)(1)(1)] auf. Die letztgenannte Pigmentkombination dürfte die häufigere sein.

Linnaea borealis. Diese Art kann in ihren überwinternden Blättern (die, soviel sich in den Wäldern der Umgebung des Kilpisjärvi feststellen liess, bis 3 Vegetationsperioden überdauern) viel A. bilden. Unter Umständen tritt diese Art, oberhalb der Baumgrenze, auch als permanentrot auf. In den geröteten Exemplaren findet sich in den Palisadenzellen karminroter Zellsaft. — In den Wiesenbirkenwäldern sind die Blätter fast stets grün, die absterbenden sind gelb. A [(1)(1)(1) . . (1)].

Solidago virgaurea. Junge Triebe, deren Blätter eine noch mangelhaft ausgebildete Spreite besitzen, sind mehr oder weniger steil aufgerichtet und schön braunviolett gefärbt. Auch Blätter, die ihre definitive Grösse erreicht haben, sind oft a-führend, wobei die Blattunterseite stets stärker pigmentiert ist. A. findet sich in den Epidermiszellen und den 2—3 peripheren Schichten des Schwammparenchyms. Bei Pflanzen, die bereits ca 10 Blätter besitzen, sind die Blätter in dem Spreitenteil a-frei (5. Juli, Säräslaki). Im Sommer sind die Blätter von *Solidago* in den Wiesenbirkenwäldern dunkelgrün gefärbt. Im Herbst findet wiederum eine A-bildung statt. Am 1. Sept. waren sehr viele Exemplare in den Wäldern um den Kilpisjärvi äusserst a-reich. A [1(1)1].

Gnaphalium norvegicum. A [000]. A. wurde u. U. in den Stengeln und Blattstielen konstatiert.

Antennaria alpina. A [(1)(1)(1)].

Saussurea alpina. Diese Art führt im Frühjahr reichlich A., weshalb die Blattspreiten und die Blattstiele \pm braunrot bis violettrot ge-

färbt erscheinen. Die Epidermiszellen und die Zellen der peripheren Schichten des Schwamm- und Palisadenparenchyms enthalten A. Im Sommer sind die Blätter grün. In der zweiten Hälfte des August begann in der Umgebung des Kilpisjärvi die herbstliche A-bildung, wobei die Blätter allmählich eine rötlichviolette Färbung annahmen. Am 1. Sept. waren in den Wiesenbirkenwäldern am Fusse des Malla-tunturi bei sehr vielen Pflanzen alle Blätter a-reich. — Die gealterten Blätter enthalten den rötlichvioletten Zellsaft in den Epidermis- und Palisadenzellen, am Blattrande auch im Schwammparenchym. A [1(1)1].

Cirsium heterophyllum. Die jungen Blätter dieser Art sind in Lappland a-reich. Blätter, die ihre endgültige Grösse erreicht haben, sind grün und führen nur wenig A. am Blattrande, oder sind vollständig a-frei. — Die herbstliche Rötung beginnt bei noch blühenden Pflanzen. Anfang September waren in den Wiesenbirkenwäldern viele Exemplare stark gerötet: diese, die noch chlorophyllreich waren, wiesen eine dunkle rotbräunliche Färbung auf. In den Spreiten führen violetten Zellsaft Palisadenzellen und zum Teil periphere Zellen des Schwammparenchyms. A [1(1)1].

Mulgedium alpinum. Die Triebe dieser Pflanze sind im Frühjahr (10. Juli, Pääskyspahta) rötlich gefärbt und enthalten beträchtliche A-mengen. Die anatomische Lokalisation des Pigments ist dem Verfasser unbekannt. Im Sommer sind die Blätter der Exemplare der Wiesenbirkenwälder in der Regel a-frei, verletzte Blätter sind oft gerötet. Die Fähigkeit A. zu bilden wird bis zum Vergilben der Blätter beibehalten, doch sind die gealterten Blätter in der Regel a-frei (1. Sept., Wiesenbirkenwälder am Fusse des Malla-tunturi). A [1(1)(1)].

Selaginella selaginoides. Diese Pflanze besitzt bekanntlich nicht das Vermögen A. zu bilden, nimmt aber dessenungeachtet an exponierten Stellen eine orangerote bis kupferrote Färbung an, die durch Rhodoxanthin verursacht wird, das sich in den aus Chloroplasten sich bildenden Chromoplasten anhäuft. In den Wiesenbirkenwäldern ist diese Art wohl stets grün gefärbt. Es ist dem Verfasser unbekannt, wie viele Vegetationsperioden hindurch die Blätter assimilationsfähig sind, jedenfalls sind es mehrere. C [(1)(1)(1) . . (1)].

Lycopodium annotinum. [000 . . 0].

Equisetum pratense. Vermag in basalen Stengelteilen Rhodoxanthin enthaltende Chromoplasten zu bilden. In den Wiesenbirkenwäldern des Kilpisjärvi-Gebietes war am 4. Sept. die herbstliche Gelbfärbung überall völlig ausgebildet. C [000].

E. silvaticum verhält sich *E. pratense* sehr ähnlich. C [000].

E. scirpoides. C [(1)(1)(1) . . (1)]?

Aspidium phegopteris, *A. dryopteris*, *A. spinulosum*, *Athyrium filix femina* haben nicht die Fähigkeit rote Pigmente zu bilden. [000].

B. Formation der Heidebirkenwälder.

Calamagrostis lapponica. Bildet in den jungen Blättern A. in der apikalen Hälfte der Spreite, in den Blattscheiden und Stengeln. A. enthalten Epidermiszellen und periphere subepidermale Zellen. Tritt gewöhnlich als A [1(1)(1)] auf.

Deschampsia flexuosa und *Festuca ovina* verhalten sich ebenso wie in den Wiesenbirkenwäldern: A [1(1)(1)], doch scheint auch A [1(1)1] vorzukommen.

Carex rigida: A [000].

*Empetrum hermaphroditum*¹⁾, das in Finnisch-Lappland viel häufiger zu sein scheint als *E. nigrum*, hat das Vermögen A. zu bilden. Doch ist dieses viel schwächer ausgeprägt als bei *E. nigrum*, das auf den Hochmooren in Estland sowohl gut ausgeprägte Winter- als auch Herbstrote aufweist (vgl. Pigmenttypen II, pp. 147, 148). Im Sommer wurden bei *E. hermaphroditum* keine A. enthaltenden Blätter beobachtet. Erst Anfang September fand der Verfasser in der Fjeldregion der Kilpisjärvi-Gegend an besonders exponierten Standorten a-führende Exemplare. In den Heidebirkenwäldern waren die absterbenden Blätter stets gelb gefärbt. Bevor die Pflanzen zur A-bildung kommen, werden sie durch Kälte und Schnee überrascht. — Was das Alter betrifft, das die Blätter hier erreichen können, so beträgt dieses gewöhnlich 3 Jahre, wobei jedoch ein Teil der Blätter nach 2 Jahren abgeworfen wird, andere aber 4 Jahre ausdauern. A [(1)(1)(1) . . (1)].

Cornus suecica. Im Sommer wurden bei den Exemplaren der Birkenwälder stets grüne Blätter beobachtet, höchstens war der Blattrand a-führend. Bei jungen Blättern, die am 1. Juli auf dem Kaskamaoavi beobachtet wurden, war der A-gehalt sehr gering. Der Blattrand ent-

1) Hagerup, O., *Empetrum hermaphroditum* (Lge) Hagerup a new tetraploid bisexual species. Dansk Botanisk Arkiv, Bd. 5, Nr. 2, København 1927. — Bei der Bearbeitung der mitgebrachten *Empetrum*-Proben erwies es sich, dass diese *E. hermaphroditum* (Lge) Hagerup zugewiesen werden müssen, denn alle Blüten erwiesen sich als zwittrig. Die Pflanzen stammen aus folgenden Lokalitäten: Pääskyspahta, Kolttaköngäs, Pieni-Malla (Kilpisjärvi-Gebiet). Die Pflanzen vom Pääskyspahta sind leider steril, stimmen aber in allen Merkmalen vollkommen mit den Exemplaren vom Kolttaköngäs und vom Pieni-Malla überein.

hielt, wo er rot gefärbt war, A. in subepidermalen Zellen. — Im Herbst bilden die Blätter von *C. suecica* beträchtliche A-mengen. Die Blätter färben sich dunkel braunrot, zuerst in der apikalen Blatthälfte. Am 19. August war die Färbung in den Wäldern um den Kilpisjärvi sehr deutlich. Endgültig war die Herbströte aber erst am 4. Sept. erreicht. In der Spreite führten A. Palisadenzellen, periphere Mesophyllzellen und z. T. auch Mesophyllzellen in der Umgebung von Gefässbündeln. A [(1)(1)1].

Arctostaphylos alpina. Die jungen Blätter sind steil aufgerichtet und führen A. in der apikalen Blatthälfte, insbesondere auf der Blattunterseite (1. Juli, Kaskamaoaiivi). A. enthalten Epidermiszellen und zum Teil auch die peripheren Mesophyllzellen. Im Sommer sind die Blätter der Exemplare der Heidebirkenwälder grün gefärbt. Am 1. Sept. war diese Färbung in den Wäldern um den Kilpisjärvi unverändert. Am 11. Sept. auf dem Kaarevaara (Karesuando) zeigten die Blätter bei allen beobachteten Exemplaren eine starke Rötung. A. enthalten ausschliesslich die subepidermalen Mesophyllzellen. A [1(1)1].

Vaccinium myrtillus. Noch Anfang Juli waren die Blätter der Exemplare in der Nähe von Schneelagen sehr a-reich. Da die jungen Blätter steil aufgerichtet sind, so ist die Blattunterseite stark gerötet. A. führen die peripheren Schichten des Schwammparenchyms. Nachher ergrünen die Blätter, erhalten jedoch in Heidebirkenwäldern schon Anfang August eine starke Rötung. In den Wäldern der Kilpisjärvi-Gegend waren die *V. myrtillus*-Blätter am 15. August in trockenen Wäldern fast überall sehr a-reich. Die A-bildung schreitet fort, solange die Temperatur die dazu nötigen physiologischen Prozesse noch ermöglicht. Der Schnee fällt in den Wäldern wohl oft bevor die Blätter der Heidelbeere sich vollkommen gerötet haben. A [1(1)1].

V. vitis idaea. A [(1)(1)(1) . . (1)].

Trientalis europaea. Die frühjährliche Rötung konnte im Juli an vielen Standorten in der Nähe von Schneelagen in Heidebirkenwäldern beobachtet werden (Petsamon tunturit). In besonders trockenen Lokalisationen wird diese auch weiter bis zum Absterben der Blätter beibehalten. Also sind die Blätter noch ungefähr zwei Monate gerötet, denn fast chlorophyllose, rote, jedoch vollständig turgeszente Blätter waren am 4. Sept. noch überall in den Wäldern des Kilpisjärvi-Gebietes zu beobachten. Tritt oft als A [111] auf. In den Heidebirkenwäldern ist A [1(1)1] häufiger.

Pedicularis lapponica. A [111].

Solidago virgaurea. Die jungen Triebe dieser Pflanze enthalten reichlich A. (vergl. p. 126). Im Sommer sind die Blattspreiten gewöhnlich

a-frei. Am 27. August war in den Wäldern westlich vom Siilasjärvi die herbstliche Rötung deutlich. Am 30. Aug. waren in den Heidewäldern des Pieni-Malla gerötete Blätter ziemlich häufig, und am 3. Sept. bereits häufiger als grüne oder teilweise gerötete. A [1(1)1].

Lycopodium alpinum. [000 . . 0].

Equisetum silvaticum. C [000].

C. Formation der Zwergstrauchheide.

Calamagrostis lapponica. In der zweiten Hälfte des August waren die verblühten Triebe von *C. lapponica* überall im Absterben begriffen. Eine Vergrößerung des A-gehaltes tritt bei dieser Pflanze im Herbst gewöhnlich nicht ein. Da, wo sich im Sommer A. gebildet hat, bleibt dieses erhalten. Die Pflanze verhält sich oft wie A [111], obschon A [1(1)(1)] mehr verbreitet ist. Da die Blätter die Unterseite dem Licht exponieren, so ist der A-gehalt im grössten Teil der Spreite auf die Epidermiszellen der Blattunterseite und die diesen angrenzenden Mesophyllzellen beschränkt. Der Zellsaft ist violettrot.

Deschampsia flexuosa besitzt das Vermögen A. zu bilden. Die apikalen Blatteile waren bei den Pflanzen der Fjeldregion der Kilpisjärvi-Gegend Ende August a-führend. Anfang September vergrösserte sich der A-gehalt deutlich. In der Blattspreite waren die peripheren Mesophyllschichten, im Stengel und in den Blattscheiden auch die Epidermiszellen Träger des violettroten Zellsaftes. Tritt in der Heide als A [1(1)1] auf.

Festuca ovina. A [1(1)1].

Carex rigida. A [000].

Juncus trifidus. In der Fjeldregion von Koltaköngäs war diese Art (am 23. Juli) sehr a-reich; dies gilt besonders für das apikale Drittel der Blütenschäfte. A. enthielten die Wandungen der Epidermiszellen und das periphere Chlorenchym (hier im Zellsafte). Am 1. Sept. war auf dem Pieni-Malla bei *Juncus trifidus* eine deutliche Zunahme des A-gehaltes bemerkbar. Ohne Zweifel tritt die Pflanze in den arktischen Heiden vorwiegend als A [111], oft auch als A [1(1)1] auf.

Luzula spicata. Bei den am 10. Juli auf dem Pääskyspahta-tunturi untersuchten Exemplaren waren die jungen Blätter rötlichbraun gefärbt. Roter Zellsaft befand sich in den Spreiten besonders in subepidermalen Schichten. Im Sommer sind die Blätter oft am Rande und an der Spitze a-haltig, sonst sind sie a-frei. Im Herbst findet eine erneute A-bildung statt A [1(1)1].

L. arcuata verhält sich der vorher genannten Art sehr ähnlich, ist jedoch ärmer an A. A [1(1)1].

Salix herbacea. A [1(1)(1)].

Polygonum viviparum. Auf dem Säräsläki in der Nähe der Schneelagen waren die Epidermiszellen (am 5. Juli) bei jungen Blättern mit noch sehr stark zurückgerollter Spreite a-führend. Zum Teil enthielten A. auch die Mesophyllzellen. Wo auf dem Pieni-Malla *P. viviparum* in Heideassoziationen beobachtet wurde, verhielten sich die Pflanzen wie A [1(1)(1)], denn die Blätter vertrockneten, bevor es zu der zweiten A-bildung kommen konnte.

Betula nana. Auf dem Säräsläki waren am 5. Juli in der Umgebung von Schneelagen noch zum Teil junge A. enthaltende Blätter vorhanden. Im Sommer ist *B. nana* in der Regel dunkelgrün und in der Spreite a-frei, doch können sich an beschädigten Ästen oder Exemplaren trockener Lokalitäten mehr oder weniger a-führende Blätter bilden. Einen schönen Anblick bietet die Zwergbirke in der *regio alpina fertilis* im Herbst. Infolge günstiger Witterungsbedingungen trat die Färbung im Herbst 1927 erst Ende August ein, dürfte sich sonst aber früher einstellen. Die A-bildung begann, wie es auch sonst die Regel ist, in noch sehr chlorophyllreichen Blättern, weshalb diese eine mehr oder weniger grünlichbraune bis rotbraune Färbung annahmen. Da, wo die Blätter zu dieser Zeit bereits im Vergilben waren, unterblieb die A-bildung, weshalb die ersten Herbstblätter vorwiegend gelb waren. Am 1. Sept. fand der Verfasser ca. 50 Prz. der verfärbten Blätter gerötet. Mit jedem Tage vergrößerte sich ihre Zahl. Am 8. Sept. betrug sie an denselben Standorten 90 Prz. Zu dieser Zeit war die Färbung sehr verschieden, denn während ein Teil der Sträucher eine fast orangerote bis gelbe Färbung angenommen hatte, waren andere braun- bis rein karminrot gefärbt. Das A. befand sich im Blatte stets in den Mesophyllzellen, je nach der Lage des Blattes reichlicher in den Palisadenzellen oder in dem Schwammparenchym. A [1(1)1].

Rubus chamaemorus. Die jungen Blätter dieser Pflanze bilden ziemlich reichlich A. Die in der Fjeldregion des Pääskyspahta (10. Juli) untersuchten Exemplare enthielten A. vorwiegend in den Epidermiszellen der Blattunterseite, die bei den gefalteten Blättern z. T. gut belichtet ist. In den Heiden der Malla-tunturit war die herbstliche A-bildung gut ausgeprägt. A. führten die Epidermis- und Palisadenzellen. A [1(1)1].

Loiseleuria procumbens enthält im Winter in den Palisadenzellen der Blattspreite beträchtliche Mengen von A. Es ist deutlich zu sehen,

dass die A-Bildung in den irgendwie verdeckten Teilen unterbleibt (Säräslaki, 5. Juli). In der Fjeldregion in der Umgebung von Kolttaköngäs war diese Pflanze bräunlichgrün. Nur die jungen Blätter waren a-frei. Am 22. August (auf dem Saana und Malla) waren die Blätter grösstenteils a-frei. Am 25. August fiel es auf, dass eine deutliche Steigerung des A-gehaltes eingetreten war. Die absterbenden Blätter waren ausnahmslos in den belichteten Teilen rot gefärbt. Sie führten A. in derselben Lokalisation, wie in den überwinterten lebenskräftigen Blättern. Am 1. Sept. hatten die Pflanzen in den *Diapensia-Loiseleuria*-Heiden des Kilpisjärvi-Gebietes zum grössten Teil eine fast rotbraune Färbung angenommen. — Die Lebensdauer der Blätter beträgt hier 2—3 Jahre. A [(1)1(1) . . 1].

Cassiope tetragona. Im Sommer ist diese Pflanze, wie der Verfasser es in der Fjeldregion auf der Insel Seiland und im Kilpisjärvi-Gebiet beobachten konnte, grün und a-frei. Am 30. August war der A-gehalt in den *Cassiope tetragona*-Heiden auf dem Pieni-Malla deutlich. Am 1. Sept. war die überwiegende Mehrzahl der Sträucher auf ihrer Südseite stark gebräunt. Von Norden gesehen waren die Zwergsträucher grün. Am 3. September hatte sich die von A. herrührende Braunfärbung über die ganze *Cassiope*-Heide auf dem Saana ausgebreitet. Die Winterfärbung hatte sich also ungefähr im Laufe einer Woche eingestellt. Was die Lokalisation des A. betrifft, so tritt dieses stets in den peripheren, mehr belichteten Schichten des Assimilationsgewebes auf. — Die Blätter von *C. tetragona* assimilieren in der Kilpisjärvi-Gegend gewöhnlich 3 Jahre lang. A [(1)1(1) . . 1].

C. hypnoides. In der Nähe von Schneelagen (Säräslaki) enthielt diese Art am 5. Juli in den überwinterten Blättern in der der Lichtwirkung mehr ausgesetzten Blattunterseite verhältnismässig reichlich A. in dem peripheren Assimilationsgewebe. Im Sommer ist *C. hypnoides* in den Spreiten a-frei. Am 1. Sept. war deutlich zu sehen, dass die Pflanzen mit der Bildung des „Winteranthocyanins“ begonnen hatten (Iso und Pieni-Malla). A [(1)1(1) . . (1)].

Arctostaphylos alpina tritt in der *Diapensia-Loiseleuria*-Assoziation und der *Empetrum*-Heide sehr oft als A [111], aber auch als A [1(1)1] auf. Mitte Juni waren die Pflanzen auf dem Pääskyspahta verhältnismässig a-reich, ebenso am 25. Juli in der Gegend von Kolttaköngäs und am 15. August auf dem Malla und Saana (Kilpisjärvi-Gebiet). Am 1. Sept. war in den Heiden auf dem Pieni-Malla zum grössten Teil die Herbstfärbung erreicht. Die Intensität der Färbung übertraf hier bedeutend diejenige der *A. alpina*-Exemplare aus lichten Heidebirkenwäldern. Den karminroten Zell-

saft führten stets die peripheren Zellschichten des Mesophylls. Oft waren die A-mengen in den Herbstblättern enorm, wobei sämtliche Zellen des Palisaden- und Schwammparenchyms karmin- bis violettrote Färbung aufwiesen.

Empetrum hermaphroditum (vergl. p. 128). Die Blätter dieser Pflanze sind in Lappland 3 (bis 5) Jahre lebenskräftig. Im Sommer sind die Blätter a-frei. Gealterte Blätter sind in dieser Jahreszeit rein gelb. — Auf dem Kaskamaoaiivi (Pitkajärvi, Finnisch-Lappland) waren *Empetrum*-Blätter bei Pflanzen, die erst unlängst ausgeapert hatten, grün gefärbt und a-frei. In der Umgebung von Kolttaköngäs, wo sehr viele Heidepflanzen wegen der geringen Bodenfeuchtigkeit an Wassermangel litten und stark pigmentiert waren, war *Empetrum* grün. Allerdings wiesen die Blätter oft einen geringen A-gehalt auf. Ebenso a-arm waren die *Empetrum*-Heiden, die der Verfasser in Nordnorwegen und Finnisch-Lappland in der Umgebung des Kilpisjärvi sah. Anfang September war es jedoch klar, dass *Empetrum* mit der A-bildung begonnen hatte. Erstens waren zu dieser Zeit die gealterten Blätter in hoch gelegenen Heiden rot, zweitens hatten die überwinternden Blätter an solchen Standorten A. gebildet. Da zu dieser Zeit die Luft- und Bodentemperatur verhältnismässig niedrig war, wobei für viele Arten das für die A-bildung notwendige Temperaturminimum nicht mehr erreicht wurde, so ist es äusserst wahrscheinlich, dass *Empetrum hermaphroditum* überwiegend als A [(1)(1)(1) . . (1)] auftritt, obgleich, wie oben gezeigt worden ist, auch A [(1)1(1) . . 1] vorkommt. A. enthalten die Palisadenzellen.

Diapensia lapponica. In der *regio alpina fertilis* von Kolttaköngäs und vom Pääskyspahta war diese Pflanze in der zweiten Hälfte des Juli a-reich, obgleich neben braunroten auch fast grüne Exemplare vorkamen. Da die Blätter dieser Polsterpflanze dicht stehen, waren ausschliesslich die apikalen Blatteile gerötet. A. führten die Palisadenzellen, deren Chloroplasten sehr chlorophyllarm waren. Mitte August wurde *Diapensia* in der *regio alpina fertilis* grösstenteils a-frei gefunden. Am 7. Sept. überwogen in den Heiden um den Kilpisjärvi a-führende Exemplare, doch fanden sich ausser grünen auch solche, bei denen nur die absterbenden Blätter rot gefärbt waren. — Die jungen Blätter sind in der Regel a-frei, die überwinternden enthalten A., ergrünen nachher, oder aber sie gehen allmählich in das Karminrot der gealterten Blätter über. Die Blätter leben wohl kaum mehr als 1.5 Jahre. A [(1)11].

Phyllodoce coerulea. Bei auf dem Säräslaki (Petsamon tunturit) untersuchten Pflanzen waren am 5. Juli die überwinterten, besonders

aber die jungen Blätter a-reich, weshalb sie in den stärker belichteten Teilen braunrot waren. Im Sommer sind die Blattspreiten a-frei. Bereits Mitte August war *Phyllodoce* in der Fjeldregion am Nordufer des Kilpisjärvi in belichteten Teilen braun angehaucht. Am 24. August hatte sich eine rotbraune Färbung der Pflanzen sehr deutlich gemacht. Die absterbenden Blätter waren rot. Am 1. Sept. war die Winterfärbung vollendet: sowohl die jungen als die entwickelten und gealterten Blätter enthielten A. in den peripheren Zellagen des Assimilationsparenchyms. Infolge der vertikalen Stellung der jungen Blätter sind bei diesen die

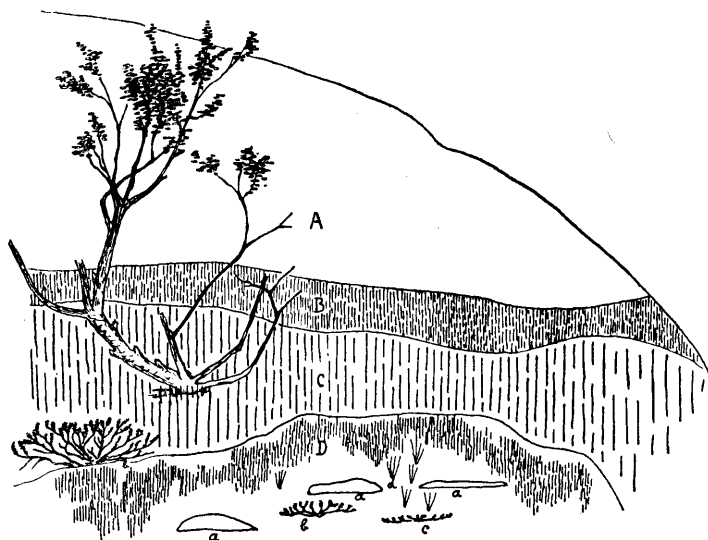


Fig. 17. *Regio alpina fertilis* am rechten Ufer des Paatsjoki gegenüber Koltta-köngäs (Finnisch-Lappland). A: kahler Felsboden (Gneiss) mit Krusten- und niedrigen Strauchflechten. B: Gürtel, von ca 10 cm. hohen *Vaccinium myrtillus* und 4–6 cm hohen *V. vitis idaea* gebildet. Färbung rot. C: *V. myrtillus* 15–20 cm hoch, *V. vitis idaea* ca 10 cm. Färbung grün. D: *Empetrum* (b) und *Loiseleuria* (c), grün. *V. myrtillus* 5–6 cm hoch, *Festuca ovina* (d) 4–5 cm; Färbung rot. 25. Juli 1927.

„Blattunterseiten“ gebräunt. Wie Beobachtungen in verschiedenen Teilen Lapplands zeigten, leben die Blätter von *Phyllodoce* gewöhnlich 2–3 Jahre, doch ausnahmsweise auch 4–5 Jahre. A [1(1)1 . . 1].

Vaccinium myrtillus, *V. uliginosum* und *V. vitis idaea*. Alle drei Arten sind in den Zwergstrauchheiden sehr a-reich. — In der *regio alpina fertilis* von Kolttaköngäs ist das Urgestein an sehr vielen Stellen bloss mit einer weniger als 1 dm dicken Schicht losen Materials bedeckt. Wo

auf derartigen Standorten *Vaccinium myrtillus* auftritt, verhält sich diese Art wie A [111].

Eine solche Lokalität ist in Fig. 17 und Fig. 18 nach einer an Ort und Stelle angefertigten Skizze dargestellt. In B und D ist die Trockenheit des Bodens so gross, dass nur die Flechten eine ununterbrochene, ca 3—5 cm hohe Decke bilden (*Cladonia silvatica*, *C. rangiferina*, *C. alpestris*, *C. gracilis* u. a. zusammen mit *Stereocaulon* spp.). Die Flechtendecke ist durch sich kreuzende Bodenrisse in kleine Polygone zerlegt.

V. myrtillus und *V. vitis idaea* bilden hier offene Bestände. In C ist die Heide ununterbrochen. Die Vaccinien sind ausser in C sehr a-reich. Bei *V. myrtillus* ist die Färbung fast braunrot, während *V.*

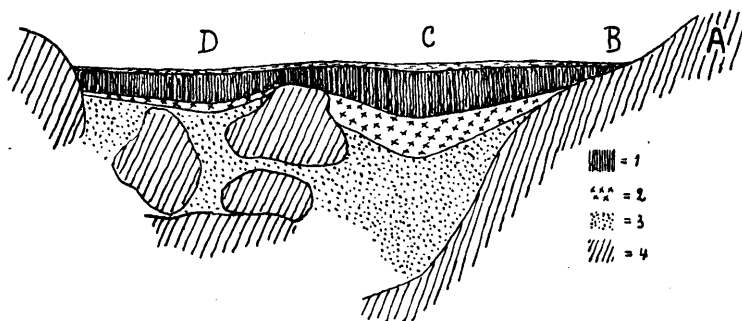


Fig. 18. Ein Bodenprofil in der Richtung ABCD in der Fig. 17. Die Breite ist 100 mal, die Tiefe 10 mal verkleinert. Die aus halbverwesten Blättern usw. bestehende Streudecke ist 1—2 cm dick. Unter ihr befindet sich eine bräunliche, mit Rohhumus gemischte Schicht (1), der die Bleicherde (2) folgt. Tiefer — aus Sand und Grus bestehendes Moränmaterial (3), Steine und Felsgrund (4).

vitis idaea rötlichbraun bis gelbgrün ist. Auch *Festuca ovina* ist in D stark a-haltig. Es unterliegt gar keinem Zweifel, dass unter so ungünstigen Bedingungen alle 3 Arten als A [111] (*V. vitis idaea* nat. als A [111 . . 1]) auftreten.

In den *Empetrum*-Heiden ist *V. vitis idaea* im Sommer in der Regel a-frei, bildet aber in den absterbenden und überwinternden Blättern reichlich A., verhält sich also wie A [1(1)1 . . 1]. In der *Loiseleuria-Diapensia* Heide verhält sich diese Art, wie es Beobachtungen auf dem Pääskyspahta und den Malla-tunturit zeigten, wie A [111 . . 1]. Überall war deutlich zu sehen, dass gleichzeitig mit einer Zunahme des A. eine Abnahme im Chlorophyllgehalt stattfand und dass bei mangelhaftem Lichtzutritt die A-bildung und die Chlorophyllabnahme unterblieben. Das A.

fand sich stets in den äussersten Schichten des Palisadenparenchyms, zum Teil auch in tiefer gelegenen Zellen.

V. uliginosum verhält sich, was die Lokalisation des Pigments anbetrifft, sehr ähnlich. Im Sommer ist diese Pflanze in der Fjeldregion blaugrün und pigmentfrei; eine Ausnahme bildet die *Loiseleuria-Diapensia*-Assoziation, wo sie oft als A [111] auftritt (wobei aber die basale Hälfte der Spreite in der Regel a-frei bleibt). — Bereits am 17. August hatten in den Heiden des Kilpisjärvicebietes viele Pflanzen die Herbstfärbung angenommen. Am 3. September stellte sich diese überall ein, wobei die Blätter eine schöne violettrote Färbung angenommen hatten.

Dass *V. myrtillos* in den trockenen flachgründigen Heiden von Kolttaköngäs (wo es übrigens, was Häufigkeit anbetrifft, bei weitem hinter *V. vitis idaea* zurücksteht) oft als A [111] auftritt, ist schon erwähnt worden. Dass diese Art sich in der echten *Vaccinium*-Heide ebenso verhält, unterliegt keinem Zweifel. In der Nähe der Schneelagen auf dem Kaskamaoivi, dem Pääskyspahta, in der Gegend von Kolttaköngäs u.s.w. waren die Pflanzen im Juli noch zum Teil unbelaubt, zum Teil mit nur einige Tage altem Laube bedeckt. Der A-gehalt war verhältnismässig beträchtlich, obwohl geringer als in der zweiten Hälfte des Sommers. Da auch die chlorophyllführenden Zweige stark gerötet sind, so fällt der *V. myrtillos*-Gürtel in der Nähe von Schneelagen schon von weitem durch seine braunrote Färbung auf. Da die Blätter bei den Fjeldindividuen der Heidelbeere steil nach oben wachsen, so ist die Blattunterseite gewöhnlich gut belichtet, weshalb die peripheren Schichten des Schwammparenchyms besonders viel A. führen. Wie die Beobachtungen in der Kilpisjärvi-Gegend und in anderen Teilen Lapplands zeigten, können die Pflanzen im Sommer auch in der *regio alpina* ergrünen, sind jedoch in der Regel a-führend, besonders in der zweiten Hälfte des Sommers. In *Vaccinium*-Heiden des Kilpisjärvi-Gebietes steigerte sich diese Färbung Anfang September so sehr, dass diese Heiden von weitem als blutrote Flecke auffielen. Bei den herbstroten Blättern enthält das gesamte Mesophyll oft karminroten Zellsaft.

Pedicularislapponica. Überall, wo diese sehr verbreitete Pflanze in der *regio alpina fertilis* beobachtet wurde, war sie während der ganzen Vegetationsperiode sehr a-reich. Stark a-führend sind schon ganz junge Triebe. A. enthalten die Epidermiszellen des Stengels, zum Teil auch die Zellen der primären Rinde. Im Blatt (auch im Niederblatt) sind ebenfalls die Epidermiszellen der Sitz des violettroten Zellsaftes, doch wurde bei Exemplaren, die aus der Fjeldregion in der Umgebung von Koltta-

köngäs stammten, schwache Färbung auch in den Palisadenzellen beobachtet. Diese Pflanzen waren ausserordentlich a-reich. A [111].

Solidago virgaurea. In den Zwergstrauchheiden sind sowohl Blätter junger Triebe als auch Herbstblätter sehr a-reich. A [1(1)1].

Gnaphalium supinum besitzt das Vermögen A. zu bilden, tritt jedoch fast ausnahmslos als A [(1)(1)(1)] auf. Da, wo die Blätter infolge von Verletzungen, an trockenen Lokalitäten usw. A. enthalten, befindet sich dieses in der ersten subepidermalen Mesophyllschicht.

Lycopodium alpinum und *L. selago* verhalten sich wie [000 . . 0].

D. Die Formation der Schneewiese.

Anthoxanthum odoratum.

Deschampsia flexuosa.

Vahlodea atropurpurea.

Trisetum spicatum.

Poa alpina f. *vivipara*.

Festuca ovina.

Alle diese Arten haben die Fähigkeit A. zu bilden und treten mehr oder weniger oft als A [(1)(1)(1)] auf. Die Blattspreiten führen in den geröteten Partien violettroten Zellsaft in den peripheren Mesophyllschichten. Bei einer Art (*Vahlodea atropurpurea*) wurde das Auftreten von A. in den Epidermiszellen beobachtet ¹⁾. — Das Vermögen A. zu bilden vermindert sich in der Reihenfolge: *Anthoxanthum*, *Vahlodea*, *Deschampsia*, *Festuca*, *Poa*. Was die wichtigste Pigmentkombination betrifft, so ist A [(1)(1)1] bei *Anthoxanthum odoratum* häufig, A [1(1)1] bei *Vahlodea* und *Trisetum*, A [(1)(1)(1)] bei *Deschampsia*, *Festuca* und *Poa*. Im allgemeinen ist der A-gehalt dieser Gräser unbedeutend.

Carex rigida. A [000].

C. Lachenalii. [000].

Juncus trifidus. Tritt in den Schneewiesenassoziationen vorwiegend als A [(1)(1)(1)] auf. Auch A [1(1)(1)] wurde beobachtet.

Luzula arcuata und *L. sudetica*. Beide Arten können reichlich A. bilden, sind aber während des grössten Teiles der Vegetationsperiode a-frei. Im Herbst röten sich die Blätter mit den apikalen Teilen beginnend. Roten Zellsaft enthalten die peripheren Schichten des Mesophylls, ebenso die Wände der Epidermiszellen. Die jungen Blätter können A. bilden (enthalten

1) *Poa alpina* und *Festuca ovina* betreffend liegen nur makroskopische Beobachtungen vor.

A. in den Wandungen der Epidermiszellen und in den peripheren Mesophyllzellen), sind aber in der Regel grün. A [(1)(1)1], auch A [1(1)1].

Salix herbacea und *S. polaris*. Die jungen Blätter dieser Weidenarten enthalten verhältnismässig viel A., besonders auf der dem Lichte mehr ausgesetzten Blattunterseite. Im Sommer sind sie in der Spreite a-frei. Die herbstliche Gelbfärbung tritt Ende August ein. Am 29. August war bei *S. polaris* in den Schneewiesen auf dem Pieni-Malla ca die Hälfte der Blätter gelb. Am 5. Sept. war die Gelbfärbung überall vollendet. Der Blattrand führte jedoch A., auch traten hier und da rot gefärbte Blätter auf. —

S. polaris kann an besonders ungünstigen Standorten, wo die Bodenschicht fast ausschliesslich von Lebermoosen wie *Anthelia Juratzkana*, *Alicularia Breidlerii* usw. gebildet wird, sogar als A [111] auftreten, wobei dann auch die absterbenden Blätter rot sind (Iso-Malla, 22. August 1927); sonst verhält sie sich, übereinstimmend mit *S. herbacea*, wie A [1(1)(1)]. A. führen bei den Weiden die peripheren Mesophyllschichten. In einigen Fällen war bei gealterten Blättern von *S. polaris* das gesamte Mesophyll karminrot. Epidermiszellen waren stets a-frei.

Polygonum viviparum verhält sich in den Schneewiesen wie A [1(1)1]. In den jungen, ebenso in den gealterten Blättern führen A. Palisadenzellen (insbes. die äusserste Schicht) und Epidermiszellen.

Oxyria digyna. Junge Blätter dieser Pflanze sind sehr a-reich. In der Nähe von Schneelagen auf dem Säräslaki (Petsamon tunturit) gesammelte Exemplare führten A. in den Palisadenzellen und auf der Blattunterseite in dem peripheren Mesophyll. Die Blätter der blühenden Pflanzen sind grün, der Blattrand auch bei diesen oft rot gefärbt. In den *Salix herbacea*-Assoziationen auf dem Pieni-Malla war die herbstliche Rötung Ende August gut ausgeprägt. Auch Epidermiszellen enthielten A., doch war die Konzentration des Farbstoffes in diesen schwächer als in den Palisadenzellen. A [1(1)1].

Cerastium lapponicum tritt vorwiegend als A [(1)(1)(1)] auf.

Alsine biflora. Diese Art ist fähig A. zu bilden, doch fand Verfasser die Blattspreiten stets a-frei. Es dürfte die Pigmentkombination A [000] vorliegen.

Ranunculus glacialis. Bei dieser Art können die Kronblätter reichlich A. bilden. Die Bildung des Zellsaftpigments ist vom Licht abhängig, denn beschattete Teile der Petala sind weiss gefärbt. Die Spreiten und Blattstiele können A. bilden, führen es aber in der Regel nur in geringen Mengen. Auch in der *regio alpina sterilis* der Insel Seiland verhielt sich diese Pflanze so. Die häufigste Pigmentkombination ist

A [(1)(1)(1)]. Besonders oft sind der Blattrand und die apikalen Teile der Blattabschnitte gerötet. A. enthalten die peripheren Mesophyllschichten. Die Herbstblätter waren in der Umgebung des Kilpisjärvi gelb, nur am Blattrande gerötet.

Ranunculus nivalis verhält sich, was die Blattspreite betrifft, dem *R. glacialis* ähnlich, ist aber noch ärmer an A. Verhält sich wie A [(1)(1)(1)].

Ranunculus pygmaeus. Bei dieser *Ranunculus*-Art ist das Vermögen A. zu bilden noch geringer als bei *R. nivalis*. A-führende Zellen (subepidermale) wurden in Blatt- und Blütenstielen und im Stengel beobachtet, nie in der Blattspreite. A [000].

Cardamine bellidifolia. Gewöhnlich ist die Pflanze vollkommen grün. Dass die Blattspreiten A. bilden können, steht fest. Bei jungen, steil aufrecht gerichteten Blättern ist die Blattunterseite oft bläulichbraun bis violettrot. Den violetten Zellsaft enthalten periphere Schichten des Mesophylls. A [(1)(1)(1)] bis A [1(1)(1)].

Cochlearia officinalis besitzt das Vermögen A. zu bilden, ist jedoch in der Regel grün und a-frei. Tritt in der *regio alpina sterilis* als A [1(1)(1)] und A [(1)(1)(1)] auf.

Saxifraga cernua. Besonders der basale Teil des Stengels und die Brutknospen führen in den Epidermiszellen reichlich A. Beobachtungen in verschiedenen Teilen Lapplands zeigten, dass *S. cernua* auch in der *regio alpina sterilis* als A [(1)(1)(1)] auftritt.

Saxifraga rivularis. Die Pflanzen, die in der Nähe von Hammerfest, auf der Insel Seiland und in der Umgebung des Kilpisjärvi untersucht wurden, erwiesen sich in allen Teilen als a-frei. Aus den Angaben Thorild Wulff's geht hervor, dass diese Art in den Blättern, Stengeln und Kelchblättern A. bilden kann. A [(1)(1)(1)].

Saxifraga stellaris bildet reichlich A. und tritt besonders oft als A [1(1)(1)] auf, doch auch A [111] ist sicher nicht selten. Am 5. Juli war diese Art in der Umgebung von Schneelagen (Säräslaki) braunrot gefärbt, die absterbenden Blätter gelblichrot. Im August hatten die auf der Insel Seiland und in der Kilpisjärvi-Gegend untersuchten Exemplare grösstenteils rein grüne Färbung angenommen. Anfang September war der A-gehalt bei dieser Art auf dem Pieni- und dem Iso-Malla sehr beträchtlich. In allen untersuchten Fällen war die Lokalisation des Pigments epidermal. Hier und da begegneten stets auch a-führende Mesophyllzellen. Die var. *comosa* verhält sich der „Hauptform“ sehr ähnlich. Die am 19. August auf den Jehkatstunturit untersuchten Exemplare hatten in den Blattachsen neue Rosetten gebildet, die bereits eine rötlichbraune Färbung angenommen hatten. Da diese jungen Blätter mehr oder weniger

steil nach oben gerichtet sind, so enthielt die Blattunterseite reichlich A. In den ausgewachsenen Rosetten waren die Blätter grün, nur der Blatt-
rand rötlich. Absterbende Blätter waren in den belichteten Teilen ge-
rötet. Die Lokalisation des A. wie bei der Hauptform.

Sibbaldia procumbens. Überall, wo die Pflanze in der Nähe von
Schneelagen im Juli und Anfang August untersucht wurde (Petsamon
tunturit, Pääskyspahta, Kolttaköngäs), waren die bläulichgrünen Blätter
in der Spreite mit Ausnahme der apikalen Teile der Blättzähne voll-
ständig a-frei. Dagegen führte ein Teil der jungen Blätter stets etwas
A. Im Herbst, nachdem die Triebe verblüht sind, setzt eine reichliche
A-bildung ein, die auf dem Skogeröfjeld (Nordnorwegen) stellenweise
bereits am 24. Juli gut ausgeprägt war. Zum Teil findet die A-bildung
in den gealterten Blättern erst Ende August und Anfang September
statt. Die geröteten Blätter führen A. in Epidermiszellen und in vielen
Zellen des Palisadenparenchyms. Die Pflanze tritt in den Schneewiesen
vorwiegend als A [(1)(1)1] auf, an besonders ungünstigen Stellen über-
wintern die Blätter grün und bilden A. erst in der ersten Hälfte der
folgenden Vegetationsperiode.

Viola biflora. A [000].

Cassiope hypnoides. A [(1)(1)(1) . . (1)].

Veronica alpina. Wie die Beobachtungen auf dem Pieni-Malla
(Kilpisjärvi-Geb.) zeigten, hatten sich bereits Mitte August die Knospen
der nächstjährigen Triebe gebildet, deren Blätter \pm bläulich gefärbt
waren. Sie enthielten A. in den Epidermiszellen der morphologischen
Blattunterseite. Im Sommer fällt es auf, dass in den Hochblättern und
in dem oberen Teil des Stengels die Färbung des Zellsaftes blau ist,
während die basalen Teile des Stengels (und der Blattrand) mehr vio-
lettrot gefärbtes A. führen. In den gealterten Blättern findet keine
A-bildung statt, obgleich das Vermögen A. zu bilden beibehalten wird.
A [1(1)(1)].

Pedicularis lapponica tritt auch in den Schneewiesen als A [111]
auf, doch ist der Pigmentgehalt geringer als in der Zwergstrauchheide.
Zum Teil tritt diese Art hier als A [1(1)(1)] auf.

Solidago virgaurea. A [1(1)1]. Während des grössten Teiles der
Vegetationsperiode ist diese Art a-frei.

Gnaphalium supinum. A [(1)(1)(1)].

Lycopodium alpinum. [0 0 0 . . 0].

Verzeichnis der im „Anhang“ erwähnten Arten.

- Alchemilla glomerulans* 122
Alsine biflora 138
Angelica archangelica 124
Antennaria alpina 126
Anthoxanthum odoratum 119, 137
Arctostaphylos alpina 129, 132
Aspidium dryopteris 128
A. phegopteris 128
A. spinulosum 128
Astragalus alpinus 123
A. frigidus 123
Athyrium filix femina 128
Bartsia alpina 125
Betula nana 131
B. tortuosa 120
Calamagrostis lapponica 128, 130
Cardamine bellidifolia 139
Carex capillaris 120
C. Lachenalii 137
C. rigida 120, 128, 130, 137
Cassiope hypnoides 132, 140
C. tetragona 132
Cerastium lapponicum 138
Chaerophyllum silvestre 124
Chamaenerium angustifolium 124
Cirsium heterophyllum 127
Cochlearia officinalis 139
Coeloglossum viride 119
Cornus suecica 124, 128
Deschampsia flexuosa 119, 128, 130, 137
Diapensia lapponica 133
Empetrum hermaphroditum 128, 133
Equisetum pratense 127
E. scirpoides 128
E. silvaticum 127, 130
Euphrasia minima 125
Festuca ovina 128, 130, 137
Filipendula ulmaria 122
Geranium silvaticum 123
Geum rivale 122
Gnaphalium norvegicum 126
G. supinum 137, 140
Juncus trifidus 130, 137
Linnaea borealis 126
Listera cordata 120
Loiseleuria procumbens 131
Luzula arcuata 131, 137
L. spicata 130
L. sudetica 137
Lycopodium alpinum 130, 137, 140
L. annotinum 127
L. selago 137
Melampyrum pratense 125
M. silvaticum 125
Milium effusum 119
Mulgedium alpinum 127
Oxyria digyna 138
Paris quadrifolia 120
Parnassia palustris 121
Pedicularis lapponica 129, 136, 140
Phleum alpinum 119
Phyllodoce coerulea 133
Pinguicula alpina 126
Pirola minor 125
P. rotundifolia 125
P. secunda 124
Poa alpina 120, 137
Polygonum viviparum 120, 131, 138
Ranunculus acer 121
R. glacialis 138
R. nivalis 139
R. pygmaeus 139
Rhinanthus major 126
Rubus arcticus 122
R. chamaemorus 131
R. saxatilis 121

- Rumex acetosa* 120
Salix herbacea 131, 138
S. lapponum 120
S. polaris 138
S. reticulata 120
Saussurea alpina 126
Saxifraga cernua 139
S. rivularis 139
S. stellaris 139
Selaginella selaginoides 127
Sibbaldia procumbens 140
Solidago virgaurea 126, 129, 137, 140
- Sorbus aucuparia* 121
Thalictrum alpinum 121
Trientalis europaea 125, 129
Trisetum spicatum 137
Trollius europaeus 121
Vaccinium myrtillus 125, 129, 134, 136
V. uliginosum 125, 134, 136
V. vitis idaea 125, 129, 134, 135
Vahlodea atropurpurea 137
Veronica alpina 140
Viola biflora 123, 140
-

Pflanzenverzeichnis.

Anthophyta.

- Alchemilla glomerulans* Bus.
Alopecurus aequalis Sobol.
Alsine biflora Whlbg.
Angelica archangelica L.
Antennaria alpina R. Br.
Anthoxanthum odoratum L.
Arctostaphylos alpina Spr.
Astragalus alpinus L.
A. frigidus Bunge
Bartsia alpina L.
Betula nana L.
B. tortuosa Ledeb.
Calamagrostis lapponica Hartm.
C. purpurea Trin.
Cardamine bellidifolia L.
Carex capillaris L.
C. Lachenalii Schkuhr
C. rigida Good.
Cassiope hypnoides Don
C. tetragona Don
Cerastium lapponicum Cr.
Chaerophyllum silvestre Sch. et Thell.
Chamaenerium angustifolium Scop.
Cirsium heterophyllum Hill
Cochlearia officinalis L.
Coeloglossum viride Hartm.
Cornus suecica L.
Deschampsia caespitosa PB.
D. flexuosa Trin.
Diapensia lapponica L.
Dryas octopetala L.
Empetrum hermaphroditum (Lge.)
Hagerup
Epilobium anagallidifolium Lam.
Euphrasia minima Jacq.
Festuca ovina L.
F. rubra L.
Filipendula ulmaria Maxim.
Geranium silvaticum L.
Geum rivale L.
Gnaphalium norvegicum Gunn.
G. supinum L.
Hierochloë alpina R. et Sch.
Juncus biglumis L.
J. trifidus L.
Linnaea borealis L.
Listera cordata R. Br.
Loiseleuria procumbens Desv.
Luzula arcuata Whlbg.
L. confusa Lindeb.
L. pilosa Willd.
L. spicata Lam.
L. sudetica DC.
Melampyrum pratense L.
M. silvaticum L.
Milium effusum L.
Mulgedium alpinum Less.
Oxyria digyna Hill
Paris quadrifolia L.
Parnassia palustris L.
Pedicularis hirsuta L.
P. lapponica L.
Phleum alpinum L.
Phyllodoce coerulea Bab.
Pinguicula alpina L.
P. vulgaris L.
Pirola minor L.
P. rotundifolia L.
P. secunda L.
Poa alpina L.
Polygonum viviparum L.
Ranunculus acer L.
R. glacialis L.
R. nivalis L.
R. pygmaeus Whlbg.
R. reptans L.
Rhododendron lapponicum L.
Rubus arcticus L.
R. chamaemorus L.

R. saxatilis L.
Rumex acetosa L.
Salix herbacea L.
S. lapponum L.
S. myrsinites L.
S. phylicifolia Sm.
S. polaris Whlbg.
S. reticulata L.
Saussurea alpina (L.) DC.
Saxifraga cernua L.
S. groenlandica L.
S. oppositifolia L.
S. rivularis L.
S. stellaris L.
S. stellaris L. var. *comosa* Retz.
Sibbaldia procumbens L.
Silene acaulis L.
Solidago virgaurea L.
Sorbus aucuparia L.
Stellaria nemorum L.
Thalictrum alpinum L.
Tofieldia palustris Huds.
Trientalis europaea L.
Trisetum spicatum Richt.
Trollius europaeus L.
Vaccinium myrtillus L.
V. uliginosum L.
V. vitis idaea L.
Vahlodea atropurpurea Fr.
Valeriana excelsa Poir.
Veronica alpina L.
V. scutellata L.
Viola biflora L.

Pteridophyta.

Aspidium dryopteris Baumg.
A. filix mas Sw.
A. phegopteris Baumg.
A. spinulosum Sw.
Athyrium filix femina Roth
Equisetum palustre L.
E. pratense Ehrh.
E. scirpoides Michaux
E. silvaticum L.
Lycopodium alpinum L.
L. annotinum L.
L. selago L.
Selaginella selaginoides Link.

Bryophyta.

Andreaea alpestris Schimp.
A. Blyttii Bryol. eur.
A. obovata Thed.
A. petrophila Ehrh.
Arctoa fulvella Bryol. eur.
Aulacomnium turgidum Schwaegr.
Bartramia ithyphylla Brid.
Brachythecium salebrosum Bryol. eur.
Bryum capillare L.
B. Duvalii Voit
B. pallens Sw.
B. purpurascens Bryol. eur.
Campylium protensum Kindb.
Climacium dendroides Web. et Mohr
Conostomum tetragonum Lindb.
Cynodontium strumiferum De Not.
Dicranoweisia crispula Lindb.
Dicranum congestum Brid.
D. scoparium Hedw.
Distichium montanum Hag.
Drepanocladus uncinatus Warnst.
Fissidens adianthoides Hedw.
Hylocomium proliferum Lindb.
Kiaeria Blyttii Broth.
K. Starkei Hag.
Mnium cinclidioides Hüb.
Oncophorus virens Brid.
Pleurozium Schreberi Mitt.
Pogonatum capillare Brid.
P. commutata Lindb.
P. crassidens Lindb.
P. cucullata Bruch
Pohlia erecta Lindb.
P. nutans Lindb.
Polytrichum alpinum L.
P. commune L.
P. juniperinum Willd.
P. piliferum Schreb.
P. sexangulare Flörk.
Rhacomitrium hypnoides Lindb.
Rhodobryum roseum Limpr.
Rhytidiadelphus calvescens Broth.
R. triquetrus Warnst.
Tortella tortuosa Limpr.

Sphagnum compactum DC.
S. Dusenii C. Jens.

S. fuscum (Schimp.) Kling.

S. Lindbergii Schimp.

S. papillosum Lindb.

Alicularia Breidlerii Limpr.

Anthelia Juratzkana (Limpr.) Trevisan

Cephalozia fluitans (Nees) Spruce

Chandonanthus setiformis (Ehrh.) S. O.
Lindberg

Diplophyllum taxifolium (Whlbg.) Du-
mortier

Gymnocolea inflata (Huds.) Dumortier

Gymnomitrium concinnatum (Lightf.)

Conda

Leptoscyphus anomalus (Hook.) Lindb.

Lophozia Binsedii (Kaal.) Evans

L. Floerkei (W. et M.) Schiffner

L. Hatcheri (Evans) Steph.

L. lycopodioides (Wallr.) Cogniaux

L. quadriloba (Lindb.) Evans

L. ventricosa (Dick.) Dumortier

Marchantia polymorpha L.

Marsupella aquatica (Lindb.) Schiffn.

Pellia epiphylla (L.) Lindb.

Plagiochila asplenoides (L.) Dumortier

Pleuroclada albescens (Hooker) Spruce

Ptilidium ciliare (L.) Nees

Sphenobolus minutus (Crantz) Steph.

Lichenes.

Alectoria divergens (Ach.) Nyl.

A. nigricans (Ach.) Nyl.

A. ochroleuca (Ehrh.) Nyl.

A. proluxa Ach.

Bacidia trisepta (Naeg.) Zhlbr.

Caloplaca elegans (Link) Th. Fr.

Cetraria caperata (L.) Wain.

C. cucullata (Bell.) Ach.

C. hepaticum (Ach.) Wainio

C. hiascens (Fr.) Th. Fr.

C. islandica (L.) Ach.

C. nivalis (L.) Ach.

Cladonia alpestris (L.) Rabh.

C. alpicola (Fw.) Wainio

C. bellidiflora (Ach.) Schaer.

C. carneola Fr.

C. cenotea (Ach.) Schaer.

C. coccifera (L.) Zopf

C. crispata (Ach.) Fw.

C. deformis Hoffm.

C. gracilis (L.) Willd.

C. pleurota (Flk.) Schaer.

C. rangiferina (L.) Web.

C. silvatica (L.) Hoffm.

C. uncinatis (L.) Web.

Gyrophora arctica Ach.

G. cirrosa (Hoffm.) Wainio

G. cylindrica (L.) Ach.

G. hyperborea (Hoffm.) Ach.

G. proboscidea (L.) Ach.

G. torrida Ach.

G. vellea (L.) Ach.

Haematomma ventosum (L.) Mass.

Icmadophila aeruginosa (Trev.)

Lecidea Dicksonii Ach.

L. macrocarpa (DC.) Th. Fr.

L. pannaeola Ach.

L. pantherina (Ach.) Th. Fr.

Nephroma arcticum (L.) E. Fr.

Ochrolechia tartarea (L.) Mass.

Parmelia alpicola Th. Fr.

P. ambigua Ach.

P. centrifuga (L.) Ach.

P. hyperopta Ach.

P. olivacea (L.) Nyl.

P. physodes (L.) Ach.

P. pubescens (L.) Wainio

P. sulcata Tayl.

Peltigera aphthosa (L.) Hoffm.

P. polydactyla (Neck.) Hoffm.

Pertusaria infralapponica Vain.

Solorina crocea (L.) Ach.

Sphaerophorus coralloides Pers.

Stereocaulon denudatum Flk.

S. subcoralloides Nyl. .

S. tomentosum E. Fr.

Thamnotia vermicularis (Sw.) Ach.

Xanthoria parietina (L.) Th. Fr.

Algae.

Gloeocapsa rupicola Kütz.

Scytonema mirabile (Dillwyn) Bornet

Stigonema hormoides (Kütz.) Bornet et

Flahault

S. informe Kütz.

Autorenverzeichnis.

Alechin p. 9; Andersson p. 3; Ångström pp. 106, 107; Birger p. 3; Blum p. 108; Blytt p. 3; Bonnier p. 69; Börgesen p. 68; Braun-Blanquet p. 9; Briquet p. 7; Brotherus pp. 3, 7; Buch p. 7, 112; Buscaglioni pp. 29, 85; Cajander pp. 3, 87, 94; Cleve p. 3; Dannmeyer pp. 107, 108; Diels pp. 85, 98; Draheim p. 113; Drude p. 7; Du-Rietz pp. 3, 9; Eberhardt p. 85; Engler p. 7; Ewart p. 111; Flahault p. 7; Fries pp. 3, 17, 22, 28, 29, 32, 34, 41, 43—47, 59, 84; Fritsch p. 98; Galløe p. 68; Geitler pp. 7, 98, 114; Gertz pp. 4, 29, 85; Green p. 113; Haberlandt pp. 114, 115; Hagerup pp. 68, 128; Haglund pp. 3, 23, 72; Harshberger p. 7; Hausen pp. 10, 12; Häyrén p. 3; Heikinheimo p. 23; Heinsius p. 113; Herzog p. 112; Hult p. 3; Jessen p. 68; Jost p. 100; Kairamo (Kihlman) pp. 3, 99; Kalitin p. 106; Karsten p. 115; Kivilinna (Borg) p. 3; Kluyver p. 108; Koning p. 113; Kotilainen pp. 7, 13, 17; Kujala pp. 10, 115; Kylin p. 9; Lindholm p. 107; Linkola p. 147; Lippmaa pp. 29, 30, 94, 112; Ljubimenko pp. 29, 87, 88, 89, 90, 114; Lundegårdh p. 100; Mathiesen p. 68; Mentz p. 68; Middendorff pp. 4, 82; Miyoshi pp. 85, 115; Molisch p. 85; Montfort p. 109; Moss p. 48; Müller pp. 112, 116; Olsen p. 68; Onslow pp. 29, 85; Pavillard p. 9; Pesola 147; Petersen pp. 68, 98; Pohle p. 116; Pollacci pp. 29, 85; Porsild p. 68; Rayband p. 108; Resvoll p. 68; Russow 112; Räsänen p. 7; Sapëhin p. 112; Schimper p. 110; Schröter p. 7; Sernander p. 3; Smith p. 7; Stälfelt p. 87; Stocker p. 109; Stoll pp. 110, 111; Sylvén p. 3; Tanner pp. 12, 13; Tansley p. 48; Tengwall pp. 3, 34, 41, 43, 44, 45, 46, 59, 60, 61; Ursprung p. 108; Vestergren p. 3; Wahlenberg pp. 3, 40; Warburg p. 7; Warming pp. 4, 41, 48, 68, 69, 85, 100; Went p. 113; Westman p. 106; Wiesner pp. 3, 4, 5, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 106, 111, 116, 117; Willstätter pp. 110, 111; Wulff pp. 4, 78, 82, 83, 84, 102, 104, 139; Ziegenspeck p. 113.

Erklärung der Tafeln.

I. Vegetationsbilder.

Die unten folgenden Vegetationsbilder aus Finnisch- und Norwegisch-Lappland stammen zum grössten Teil von den analysierten Probestellen. Einige Tafeln (IX, X, XII) sollen auch das glänzende Laub einiger arktischer Pflanzenarten illustrieren. Da die Sumpf- und Moorvegetation im Texte fast unbeachtet geblieben ist, sind entsprechende Aufnahmen unter die Vegetationsbilder nicht aufgenommen worden.

Schöne Abbildungen nördlichster fennoskandischer Vegetation enthalten die Arbeiten von Thore Fries (l. c.), Tengwall (l. c.), Linkola (Suunnitelma luonnonsuojelualueiden erottamiseksi Pohjois-Suomen valtionmailla, *Silva Fennica* 1, Helsinki 1926), Pesola (Kaltsiumkarbonaatti kasvi-
maantieteellisenä tekijänä Suomessa, *Ann. Soc. Zool.-Bot. Fenn.* Vanamo, t. 9, N:o 1, Helsinki 1928) u. a.

Tafel I (oben). Wiesenbirkenwald auf dem SW Abhange des Pieni-Malla (Kilpisjärvi-Gebiet), ca 50 m unterhalb der Waldgrenze. Der Charakter einer „natürlichen Gehölzwiese“ tritt deutlich hervor. In der Krautschicht sind *Geranium silvaticum*, *Trollius europaeus*, *Alchemilla glomerulans*, *Parnassia palustris* besonders massgebend. Diesen Arten gesellen sich zu *Rumex acetosa*, *Polygonum viviparum*, *Thalictrum alpinum*, *Viola biflora*, *Angelica archangelica*, *Bartsia alpina*, *Solidago virgaurea*, *Saussurea alpina*, *Cirsium heterophyllum*, *Carex capillaris*, *C. rigida* usw. In der Moosschicht: *Brachythecium salebrosum*, *Campylium protensum*, *Marchantia polymorpha*, *Fissidens adianthoides* usw. (s. Anal. 2, p. 26, 27). Verf. Photo. 30. Aug. 1927.

Tafel I (unten). Die Krautschicht in dem oben abgebildeten Wiesenbirkenwalde. *Trollius europaeus* (Früchte!), *Geranium silvaticum*, *Astragalus frigidus*, *Parnassia palustris*, *Saussurea alpina*, *Thalictrum alpinum* usw. Verf. Photo. 30. Aug. 1927.





Tafel II (oben). Pääskyspahta (Finnisch-Lapland). Wiesenbirkenwald in der Nähe des Kuotsjärvi. Ausser der Birke wachsen hier *Salix caprea*, *Sorbus aucuparia*, *Prunus padus*. Die Krautschicht bilden *Athyrium filix femina*, *Aspidium spinulosum*, *Geranium silvaticum*, *Solidago virgaurea*, *Chamaenerium angustifolium*, *Cornus suecica*, *Trollius europaeus*, *Melampyrum silvaticum*, *M. pratense*, *Milium effusum*, *Aspidium dryopteris*, *A. phegopteris*, *Equisetum silvaticum* u. a. (vergl. Anal. 1, p. 22—24). Verf. Photo. 17. Juli 1927.

Tafel II (unten). Pääskyspahta (Finnisch-Lapland). Wiesenbirkenwald. In der Bodenvegetation erkennt man *Aspidium dryopteris*, *Trollius europaeus*, *Geranium silvaticum*, *Cornus suecica*, *Vaccinium myrtillus*, *Lycopodium annotinum*, *Melampyrum silvaticum*. Ausser diesen wachsen hier *Vaccinium vitis idaea*, *Solidago virgaurea*, *Equisetum pratense*, *Aira flexuosa*. Verf. Photo. 17. Juli 1927.

Tafel III (oben). Ausgedehnte Bestände von Wiesenweidengebüsch in den Petsamon tunturit in der Nähe eines Sees (auf dem Photo nicht sichtbar!). In der ca meterhohen Strauchschicht herrschen vor *Salix*-Arten (bes. *S. lapponum*), in der Krautschicht: *Saussurea alpina*, *Geranium silvaticum*, *Vaccinium myrtillus* usw. Im Hintergrunde Schneelagen in der *regio alpina*. Verf. Photo. 14. Juli 1927.

Tafel III (unten). Hochstaudenwiese auf der Insel Seiland (Norwegisch-Lappland). Eine an trockenere Standorte gebundene Assoziation, gebildet von *Aspidium phegopteris*, *A. filix mas*, *A. spinulosum*, *Deschampsia caespitosa*, *D. flexuosa*, *Calamagrostis purpurea*, *Solidago virgaurea*, *Chamaenerium angustifolium* usw. Verf. Photo. 6. Aug. 1927.





Tafel IV (oben). Hochstaudenwiese auf der Insel Seiland (Norwegisch-Lapland), gebildet von *Athyrium filix femina*, *Mulgedium alpinum* (in Blüte!), *Alchemilla glomerulans*, *Gnaphalium norvegicum* usw. (s. Anal. 4, p. 42). Verf. Photo. 6. Aug. 1927.

Tafel IV (unten). Insel Seiland (Norwegisch-Lapland), Nordufer des Kuffjordes. Hochstaudenwiese. Man erkennt im Vordergrund *Taraxacum* sp., *Gnaphalium norvegicum*, *Athyrium filix femina*. Weiter folgen die stattlichen Blütenstände von *Mulgedium alpinum*. Die Umbellifere (rechts) ist *Angelica archangelica*. Verf. Photo. 6. Aug. 1927.

Tafel V (oben). Heidebirkenwald in der Gegend zwischen dem Pääskyspahta-tunturi und den Petsamon tunturit in Finnisch-Lappland. In der Strauchschicht: *Juniperus communis*; in der Krautschicht: *Empetrum*, *Vaccinium myrtillus*, *V. vitis idaea*, *Cornus suecica*, *Trientalis europaea* u. a.; in der Moosschicht: Cladonien, *Nephroma arcticum*, *Dicranum*-Arten usw. Verf. Photo. 14. Juli 1927.

Tafel V (unten). Heidebirkenwald in den Petsamon tunturit in Finnisch-Lappland. Höhe der *Betula tortuosa*-Bäume 2.5—5 m. In der Krautschicht herrschen vor *Empetrum*, *Vaccinium myrtillus*, *V. uliginosum*, *Betula nana*. Mit diesen zusammen finden sich: *Solidago*, *Trientalis*, *Cornus*, *Aira flexuosa*, *Aspidium dryopteris*. Von Flechten sind wichtig *Cladonia*-Arten und *Nephroma arcticum*. Verf. Photo. 5. Juli 1927.





Tafel VI (oben). Heidebirkenwald an der oberen Grenze der *regio subalpina* auf dem Pääskyspahta (Nordabhang!). Die Spuren der Schneeschädigung an den Birken sind hier recht deutlich. Verf. Photo. 10. Juli 1927.

Tafel VI (unten). Die Jehkats-tunturit (Kilpisjärvi-Gebiet, Finnisch-Lappland). *Phyllococe cocrulea*-Heide. Ausser *Phyllococe* wuchsen: *Vaccinium myrtillus*, *V. uliginosum*, *V. vitis idaea*, *Solidago virgaurea*, *Salix herbacea*, *Trientalis europaea*, *Gnaphalium supinum*, *Pedicularis lapponica*, *Lycopodium alpinum*, *Aira flexuosa* u. a. Verf. Photo. 19. Aug. 1927.

Tafel VII (oben). Die Jehkats-tunturit (Kilpisjärvi-Gebiet, Finnisch-Lapland). *Cassiope tetragona*-Heide. In der Heide herrscht vor *Cassiope tetragona*. Mit ihr vergesellschaftet finden sich *Empetrum hermaphroditum*, *Vaccinium uliginosum*, *V. vitis idaea*, *Betula nana*, *Salix lapponum*, *Lycopodium annotinum*, *L. selago*, *Carex rigida*, *Calamagrostis lapponica*. In der Mooschicht sind *Dicranum congestum*, *Lophozia*-Arten, besonders aber *Cladonia*- und *Cetraria*-Arten wichtig (vergl. Anal. 7, p. 53 u. 54). Verf. Photo. 19. Aug. 1927.

Tafel VII (unten). *Cassiope tetragona* daselbst. Höhe 15—20 cm. Verf. Photo. 19. Aug. 1927.





Tafel VIII (oben). Pääskyspahta (Finnisch-Lappland). Im Vordergrund *Loiseleuria-Diapensia*-Heide. Der Boden wird von der Vegetation (aus *Betula nana*, *Vaccinium vitis idaea*, *Empetrum*, *Arctostaphylos alpina*, *Loiseleuria procumbens*, *Diapensia lapponica* usw. bestehend) nur zum Teil bedeckt. Im Hintergrund das seereiche Gebiet zwischen Pääskyspahta und dem Eismeer. Verf. Photo. 14. Juli 1927.

Tafel VIII (unten). Kilpisjärvi-Gebiet (Finnisch-Lappland). Im Vordergrund *Empetrum-Diapensia*-Heide auf dem Pieni-Malla (s. Anal. 6, p. 50—52). Der Berg rechts im Hintergrunde ist der Saana-tunturi (vergl. Fig. 3). Verf. Photo. 26. Aug. 1927.

Tafel IX (oben). Pääskyspahta (Finnisch-Lappland). *Regio alpina fertilis*. *Loiseleuria-Diapensia*-Heide (s. Anal. 5, p. 48, 49, 52). Den Boden bedecken *Empetrum hermaphroditum* (links), *Arctostaphylos alpina*, *Betula nana* (in der Mitte). Von anderen Arten sind zu nennen: *Loiseleuria procumbens*, *Diapensia lapponica*, *Juncus trifidus*, *Vaccinium vitis idaea*. Das Geröll und die Felsen sind mit Krustenflechten (*Rhizocarpon geographicum*, *Lecidea*- und *Lecanora*-Arten usw.) und *Gyrophora*-Arten bedeckt. Im Hintergrund die Petsamon tunturit. Verf. Photo. 10. Juli 1927.

Tafel IX (unten). *Salix herbacea*-Bestand in einer Zwergstrauchheide auf dem Tyven (unw. Hammerfest). Ausser *S. herbacea* (lichtreflektierendes Laub!) wachsen hier vorwiegend Heidepflanzen: *Vaccinium myrtillus*, *Solidago virgaurea*, *Anthoxanthum odoratum*, *Juncus trifidus* (auf dem Bilde an den vorjährigen ausgebleichenen Halmen kenntlich), *Lycopodium selago*. Moose: *Bartramia ithyphylla*, *Polytrichum alpinum*, *Lophozia Floerkei* usw. Verf. Photo. 1. Aug. 1927.



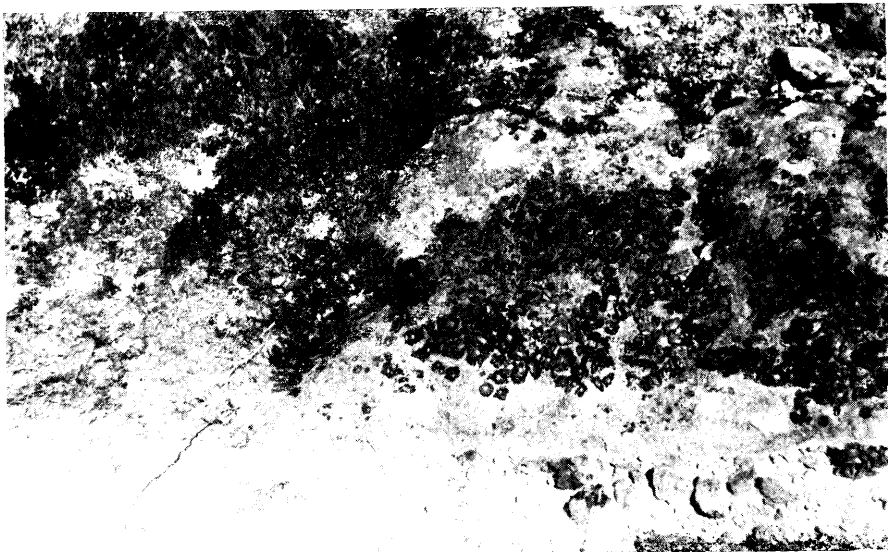


Tafel X (oben). Der Tyven-Fjeld in der Nähe von Hammerfest. Schneebodenvegetation unterhalb eines perennierenden Schneefleckes. *Silene acaulis* in der Blüte. Links von dem mittleren, kleinen *S. acaulis*-Polster — *Juncus trifidus*. Ausserdem auf dem Bilde *Festuca ovina*, *Luzula* sp., *Polygonum viviparum*, *Gnaphalium supinum*. Verf. Photo. 1. Aug. 1927.

Tafel X (unten). Insel Seiland (Norwegisch-Lappland). *Regio alpina sterilis* in der Nähe von Altenes. Eine Lebermoosassoziation des Schneebodens (*Anthelia Juratzkana*, *Pleuroclada albescens*, *Sphenolobus* sp.), in der sich einige Phanerogamen finden. Von diesen auf der Tafel *Salix herbacea* (mit glänzenden Blättern!) und *Cassiope hypnoides*. Verf. Photo. 3. Aug. 1927.

Tafel XI (oben). Oberhalb der Waldgrenze sind in Norwegisch-Lapland die kleinen, mit Schneewasser getränkten Bäche oft von weitem an der gelblichgrünen Färbung kenntlich; diese Farbe verdanken sie den Moosen, die die Bachufer und die Steine in den Bächen bedecken. Oft ist es *Mniobryum albicans* var. *glacialis*. Auf der Tafel (Tyven-Fjeld, unw. Hammerfest) bildet diese Art die Hauptmasse. Die dunkleren Flecken werden durch *Scapania undulata* verursacht. In dem Moospolster haben sich *Saxifraga stellaris* und *S. rivularis* (auf dem ersten Stein im Vordergrund) angesiedelt. Der Bach durchschneidet eine Schneewiese. Verf. Photo. 1. Aug. 1927.

Tafel XI (unten). Pääskyspahta (Finnisch-Lapland). *Loiseleuria-Diapsensia*-Heide. Die Vegetation ist \pm offen. An vielen Stellen sind vegetationslose Flecke entstanden, an denen der nackte Moränenboden sichtbar ist. Stellenweise ist der grünlichgraue Felsgrund (Metadiabas) entblösst. Dieser ist in längere Zeit bloss liegenden Teilen mit *Gyrophora*-Arten bedeckt. — Auf der Tafel ist es *G. proboscidea*. Links: *Empetrum hermaphroditum* (dunkel), *Festuca ovina* usw. Verf. Photo. 10. Juli 1927.





Tafel XII (oben). Die Petsamon tunturit (Finnisch-Lappland). *Betula nana*-Strauchheide in der Nähe der Baumgrenze. Die Glanzlichter (photogr. am 5. Juli 1927 um 10 Uhr morgens) werden von *Betula tortuosa* und *Betula nana* verursacht. Die Krautschicht bilden *Vaccinium myrtillus*, *Empetrum*, *Phyllococe coerulea*, *Trientalis europaea*, *Rubus chamaemorus*, *Solidago virgaurea*, *Aira flexuosa*. In der Moosschicht sind Flechten (*Cladonia*-Arten) wichtig. Verf. Photo. 5. Juli 1927.

Tafel XII (unten). Die Petsamon tunturit (Finnisch-Lappland). Heidebirkenwald. Die Aufnahme ist am 6. Juli 1927 um $1\frac{1}{2}$ 10 Uhr morgens gemacht. — Die Glanzlichter, die die Blätter der *Betula tortuosa* verursachen, sind sehr deutlich. — Die Krautschicht bilden hier *Vaccinium myrtillus*, *V. vitis idaea*, *V. uliginosum*, *Empetrum*, *Cornus suecica*, *Aira flexuosa*, *Pedicularis lapponica*. Die Moosschicht besteht aus Flechten und Moosen (*Nephroma arcticum*, *Cladonia rangiferina*, *C. alpestris*, *C. silvatica*, *C. crispata*, *C. pleurota*, *C. gracilis*, *Lophozia lycopodioides* und and. *Lophozia*-Arten, *Dicranum fuscescens*, *D. scoparium*, *Hylocomium proliferum*, *Pleurozium Schreberi*). Verf. Photo. 6. Juli 1927.

II. Blattquerschnitte von Pflanzen der Wiesen- und Heideformationen und der Schneewiesenformation.

Das verwendete Material stammt aus dem Kilpisjärvi-Gebiet (2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 21, 25, 35, 40, 41, 42, 46, 47, 49, 50, 53, 56, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 73), von Kolttaköngäs (1, 43, 55), dem Pääskyspaha-tunturi (3, 5, 7, 14, 17, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 37, 44, 45, 48, 52, 54, 57, 68, 70, 76), den Petsamon tunturit (11, 20, 51), der Insel Seiland in Nordnorwegen (15, 18, 19, 29, 31, 34, 36, 38, 60, 71, 72, 74, 75) und der Insel Skogeröen in Nordnorwegen (39). Alle Blattquerschnitte sind in ein und derselben Vergrößerung (110 mal) wiedergegeben worden, um die Zeichnungen direkt vergleichbar zu machen.

A. Vergleich von Pflanzen des Birkenwaldes mit Individuen derselben Art aus der Zwergstrauchheide.

Taf. XIII. Links (1—4) Exemplare aus der Zwergstrauchheide, rechts (5—8) — aus dem Birkenwalde. *Vaccinium vitis idaea* (1, 5); *Vaccinium myrtillus* (2, 6); *Cornus suecica* (3, 7); *Linnæa borealis* (4, 8). Fast bei allen Arten zeigen die Exemplare des Birkenwaldes deutliche Abnahme der Dicke der Blattspreite. Nur *Linnæa* bildet eine Ausnahme, die möglicherweise durch die Form der Mesophyllzellen bedingt ist, welche bei den Waldexemplaren \pm sternförmig, bei den Heideexemplaren mehr abgerundet sind. Die Palisadenschicht ist bei den Heideexemplaren gut ausgebildet. Bei *Vaccinium vitis idaea* (besonders bei den Heideexemplaren) fällt die Stärke der Zellwandungen des Schwammparenchyms auf.

B. Formationen der Wiesenbirkenwälder, der Wiesengebüsch und der Hochstaudenwiesen.

Taf. XIV. *Salix reticulata* (9), *Salix phylicifolia* (10), *Betula tortuosa* (11), *Salix glauca* (12), *Salix lapponum* (13), *Salix myrsinites* (14), *Filipendula ulmaria* (15). Alle Arten besitzen ein gut ausgebildetes Palisadengewebe, dessen Mächtigkeit bei den *Salix*-Arten besonders auffällt. Bei mehreren *Salix*-Arten (*S. phylicifolia*, *S. glauca*, *S. lapponum*, *S. myrsinites*) sind die Epidermiszellwände an der Innenseite verschleimt.

Taf. XV. *Trollius europaeus* (16, 17), *Angelica archangelica* (18), *Alchemilla glomerulans* (19), *Bartsia alpina* (20), *Trientalis europaea* (21), *Geranium silvaticum* (22), *Rubus arcticus* (23), *Solidago virgaurea* (24). Aus 16 und 17 folgt, dass die Blattanatomie bei *Trollius* auch in den Birkenwäldern grossen Schwankungen unterworfen ist. Die Exemplare mit dicker Spreite und gut ausgebildeter Palisadenschicht (16) stammen aus sehr lichten, hochgelegenen Wäldern des Kilpisjärvi-Gebietes, dagegen wuchsen die gross- und dünnblättrigen Pflanzen (17) in den üppigen Birkenwäldern am N-Abhange des Pääskyspahta-tunturi. Von den abgebildeten Arten führen *Alchemilla glomerulans*, *Bartsia alpina* und *Solidago virgaurea* Spaltöffnungen auch auf der Blattoberseite. Bei *Alchemilla glomerulans* sind die Schliesszellen der Spaltöffnungen etwas eingesenkt. Die Blattspreiten, ebenso die Aussenwände der Epidermiszellen sind dünn, die Palisadenschicht \pm ausgebildet.

Taf. XVI. *Astragalus alpinus* (25), *Gnaphalium norvegicum* (26), *Athyrium filix femina* (27), *Aspidium spinulosum* (28), *Aspidium filix mas* (29), *Mulgedium alpinum* (30), *Chaerophyllum silvestre* (31), *Aspidium phegopteris* (32), *Aspidium dryopteris* (33). Von diesen Arten besitzt nur *Chaerophyllum silvestre* (31) gut ausgebildetes Palisadengewebe. Bei *Astragalus alpinus* (25), *Gnaphalium norvegicum* (26) und *Mulgedium alpinum* (30) ist dieses bedeutend schwächer, den Farnen fehlt es ganz. Die Blattspreite ist im Vergleich mit derjenigen der Pflanzen der Zwergstrauchheide (Taf. XVIII, XIX) viel (oft mehrmals) dünner, ebenso die Epidermisaussenwand. — Bei *Astragalus alpinus* sind die tangentialen Wände der Epidermiszellen an der Innenseite verschleimt.

Taf. XVII. *Milium effusum* (34), *Parnassia palustris* (35), *Saussurea alpina* (36), *Astragalus frigidus* (37), *Anthoxanthum odoratum* (38), *Calamagrostis purpurea* (39), *Pirola secunda* (40), *Pirola rotundifolia* (41), *Pirola minor* (42). Von den Gramineen nähert sich *Milium effusum* am meisten dem Blattbau dikotyler Stauden der Birkenwälder. Eine verhältnismässig dicke, locker gebaute Blattspreite besitzen *Saussurea alpina* und *Parnassia palustris*. Besonders die letztgenannte Art zeigt im Blattbau Annäherung an die Schneewiesenpflanzen. — Das Mesophyll der *Pirola*-Arten ist wenig differenziert. Die beträchtliche Dicke der Epidermiszellwände steht vermutlich im Zusammenhang mit dem immergrünen Charakter der Blätter. — *Astragalus frigidus* besitzt gut ausgebildetes Palisadenparenchym. Die Interzellularen im Mesophyll sind klein. Die Schliesszellen etwas eingesenkt.

C. Formation der arktischen Zwergstrauchheide.

Taf. XVIII. *Andromeda polifolia* (43), *Phyllodoce coerulea* (44), *Loiseleuria procumbens* (45), *Cassiope tetragona* (46), *Diapensia lapponica* (47). Alle Arten besitzen eine xeromorphe Blattstruktur, die sich in der beträchtlichen Dicke der Epidermisaussenwände und zum Teil auch der Wände des Schwammgewebes

(bei *Loiseleuria*, *Cassiope tetragona*, insbesondere aber bei *Diapensia*), in der Ausbildung des Palisadengewebes und in einer besonderen Blattform (bei *Phyllodoce coerulea* und *Cassiope tetragona*) äussert.

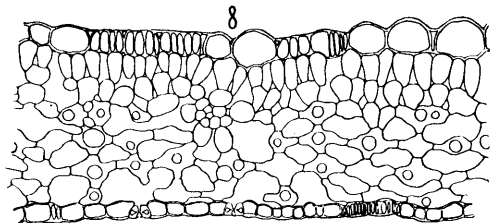
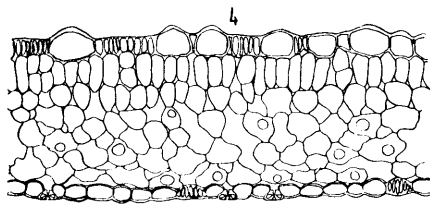
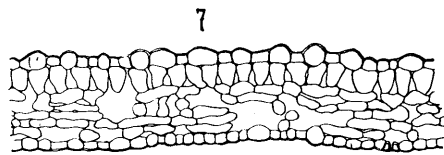
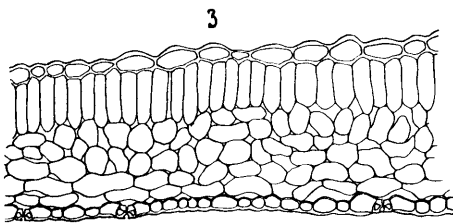
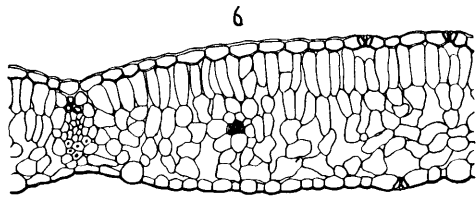
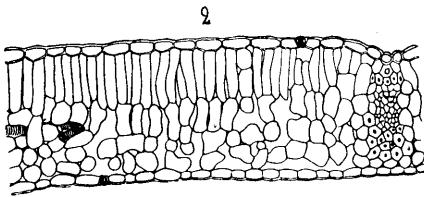
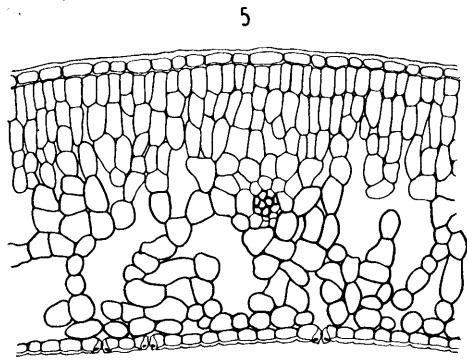
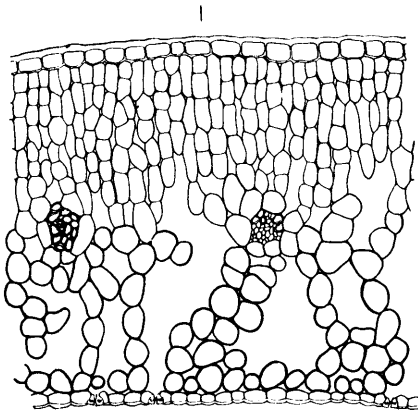
Taf. XIX. *Luzula confusa* (48), *Luzula spicata* (49), *Vaccinium uliginosum* (50), *Betula nana* (51), *Carex rigida* (52), *Calamagrostis lapponica* (53), *Arctostaphylos alpina* (54), *Pedicularis lapponica* (55). Es ist die verhältnismässige beträchtliche Dicke der Blattspreite sowie der Epidermisaussenwand zu betonen (eine Ausnahme ist *Pedicularis lapponica*). Letztgenannte Art besitzt von den auf der Tafel abgebildeten dikotylen Arten das am schwächsten ausgebildete Palisadenparenchym. Bei *Arctostaphylos alpina*, *Vaccinium uliginosum* und *Betula nana* ist dieses gut ausgebildet.

D. Formation der Schneewiese.

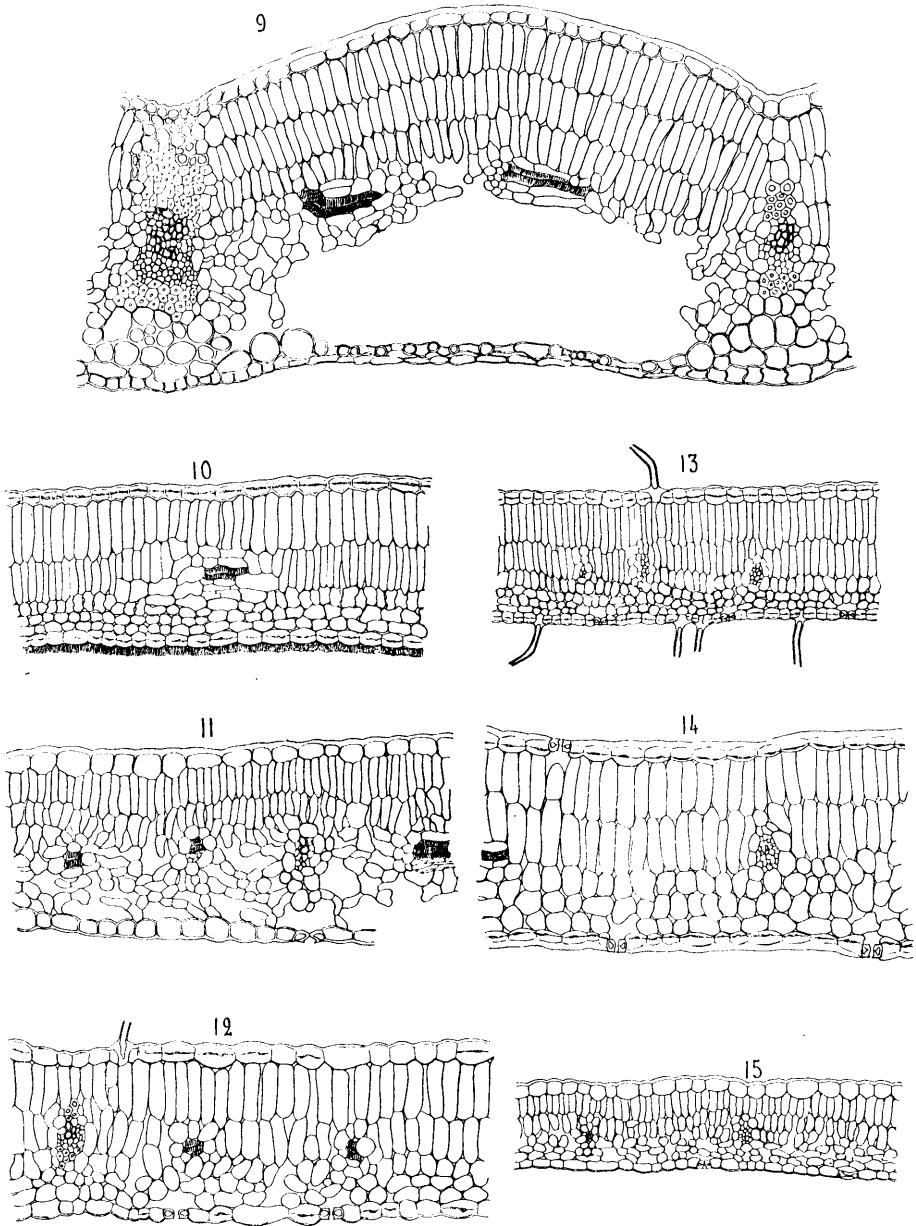
Taf. XX. *Salix polaris* (56), *Salix herbacea* (57), *Anthoxanthum odoratum* (58), *Luzula arcuata* (59), *Poa alpina* f. *vivipara* (60), *Trisetum spicatum* (61), *Luzula sudetica* (62), *Carex Lachenalii* (63). Die wichtigen Zwergsträucher der Schneewiesen — *Salix polaris* und *S. herbacea* — besitzen gut ausgebildetes Palisadenparenchym, auch ist das Schwammparenchym dicht. Beide Arten führen Spaltöffnungen sowohl auf der Blattunterseite als auch auf der Blattoberseite. Bei *S. polaris* (56) sind die Epidermiszellwände an der Innenseite verschleimt, weshalb das Lumen der Epidermiszellen klein ist. — *Poa alpina* f. *vivipara* und *Trisetum spicatum* führen Spaltöffnungen auf beiden Blattflächen. Bei diesen Arten sind die Epidermisaussenwände im Vergleich zu den in Heiden wachsenden Gramineen wenig verdickt. Eine ebensolche Epidermis besitzt *Luzula sudetica*. *Luzula arcuata* und *Carex Lachenalii*, die oft auch in den Zwergstrauchheiden gedeihen, besitzen dichtes, fast interzelluläres Mesophyll. Die Aussenwände der Epidermiszellen sind bei diesen beiden Pflanzen verhältnismässig stark verdickt.

Taf. XXI. *Viola biflora* (64), *Gnaphalium supinum* (65), *Ranunculus pygmaeus* (66), *Alsine biflora* (67), *Sibbaldia procumbens* (68), *Veronica alpina* (69), *Cassiope hypnoides* (70), *Epilobium anagallidifolium* (71). Alle diese Arten besitzen Spaltöffnungen auf den beiden Blattflächen (bei *Viola biflora* auf der Blattoberseite nur wenige). *Sibbaldia procumbens* (68) besitzt gut ausgebildetes Palisadenparenchym. Bei den anderen Arten ist das Palisadenparenchym schwächer ausgebildet oder fehlt sogar. Die Aussenwände der Epidermiszellen sind verhältnismässig dick bei *Alsine biflora* (67) und *Cassiope hypnoides* (70), dünn bis sehr dünn bei den anderen Arten.

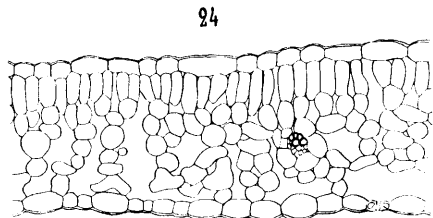
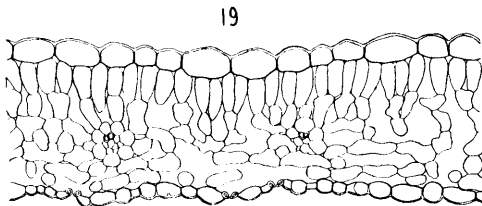
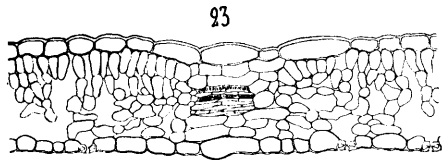
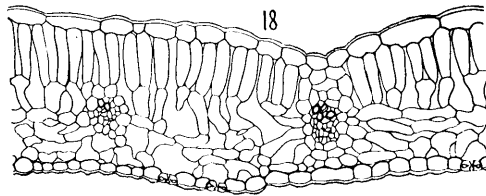
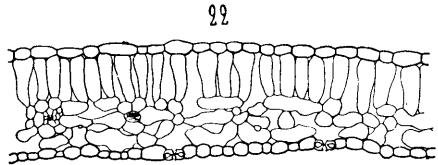
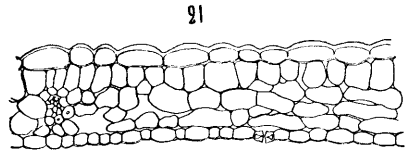
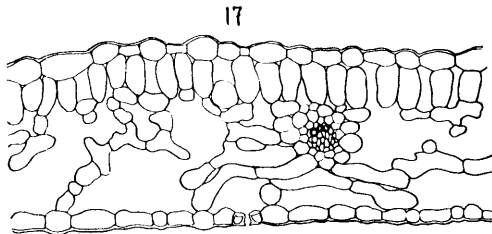
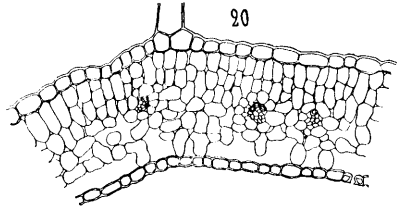
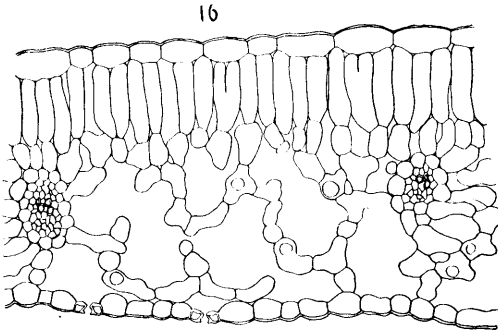
Taf. XXII. *Cochlearia officinalis* (72), *Ranunculus glacialis* (73), *Ranunculus nivalis* (74), *Saxifraga rivularis* (75), *Saxifraga stellaris* (76). Alle diese Arten besitzen lockeres wenig differenziertes Mesophyll mit \pm grossen bis sehr grossen Interzellularen. Die Grösse der Zellen und der Zwischenzellräume bedingt die beträchtliche Dicke der Blattspreiten. Spaltöffnungen finden sich auf der Blattunter- und Blattoberseite.



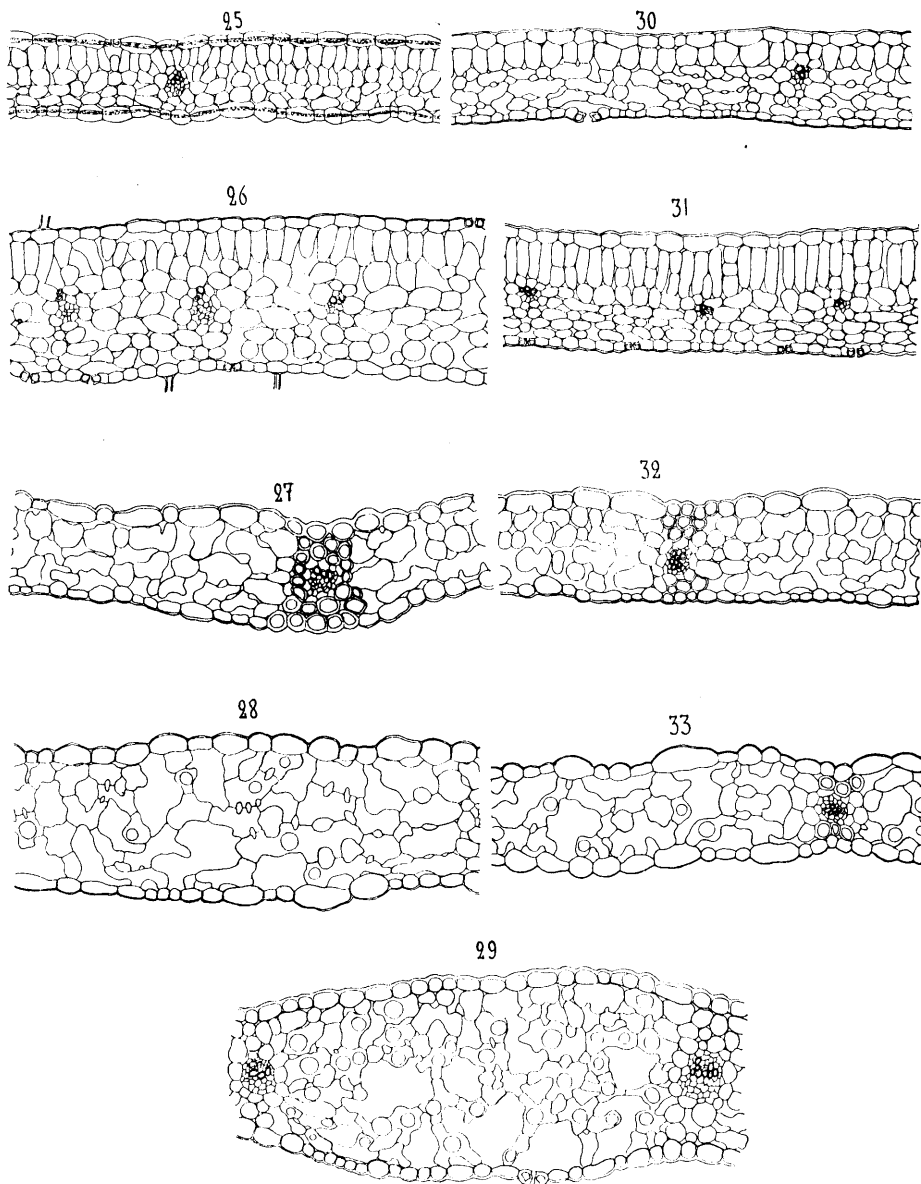
Hilja Lippmaa delin.



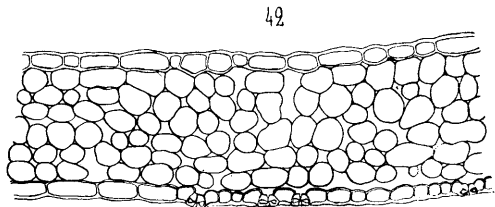
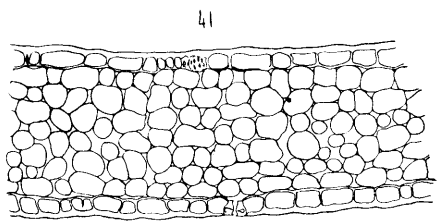
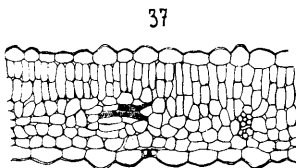
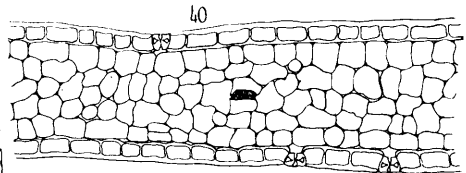
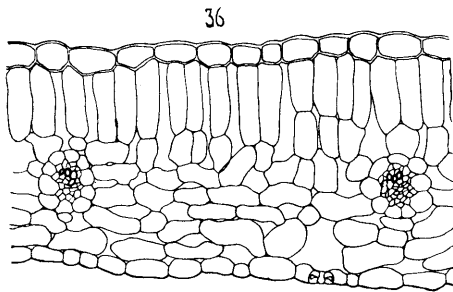
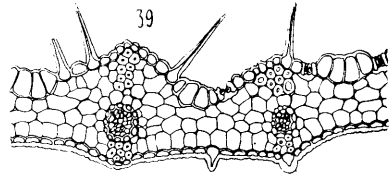
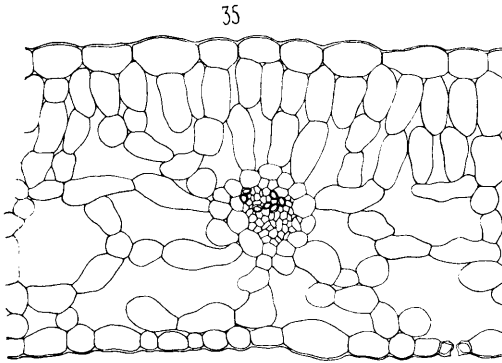
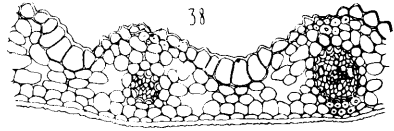
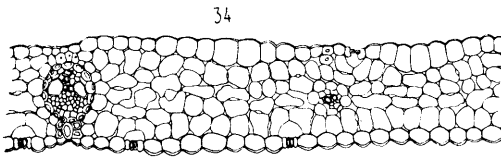
Hilja Lippmaa delin.



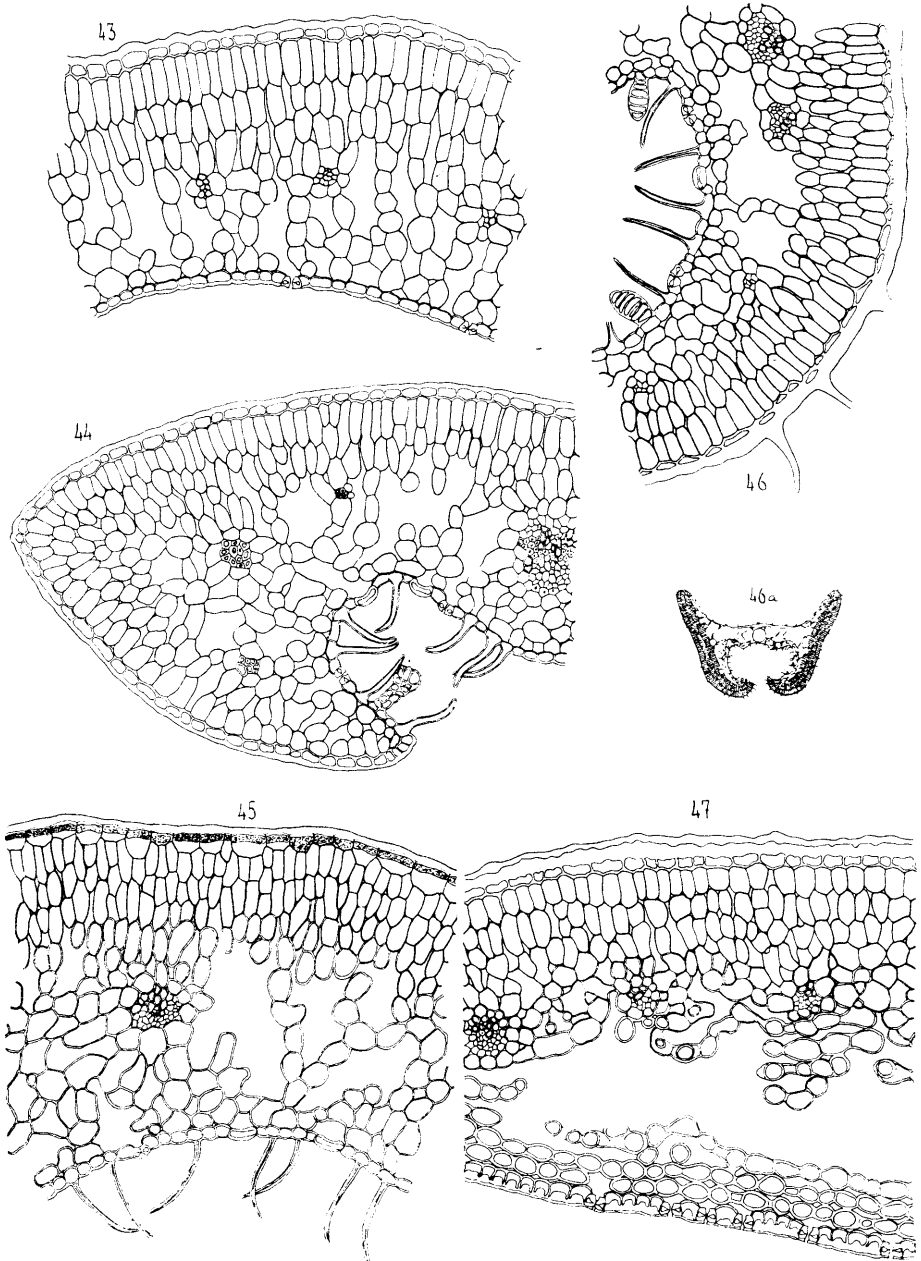
Hilja Lippmaa delin.

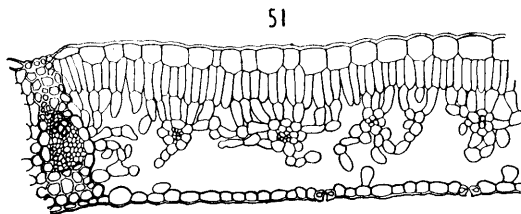
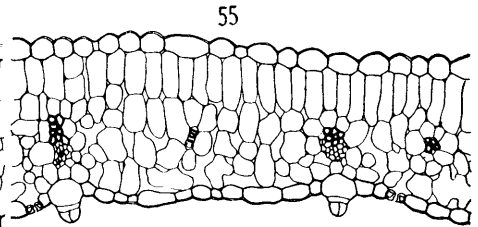
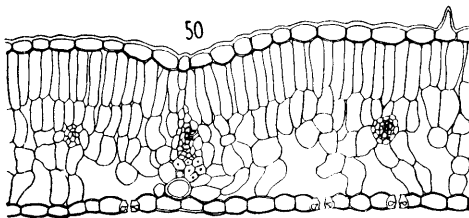
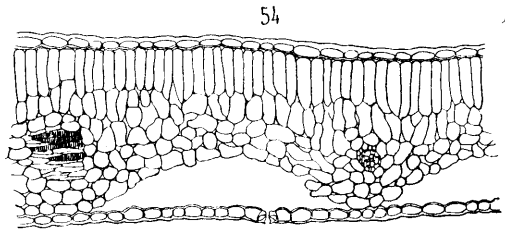
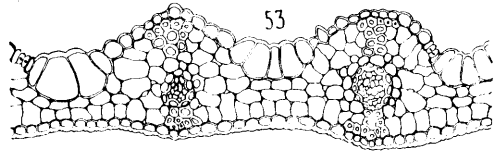
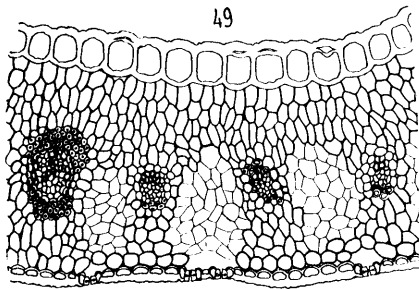
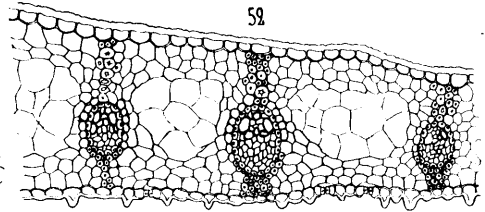
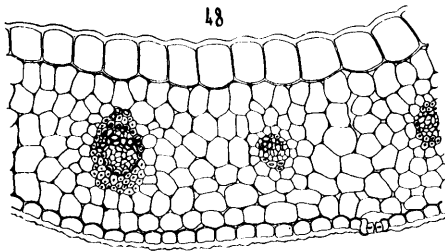


Hilja Lippmaa delin.

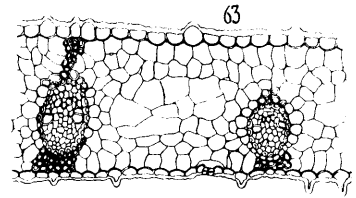
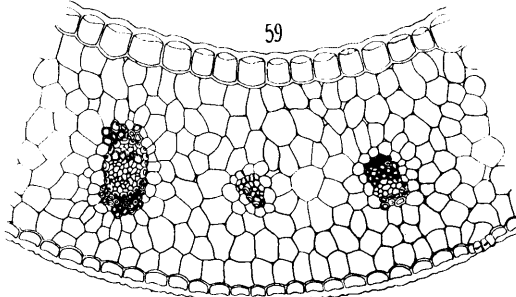
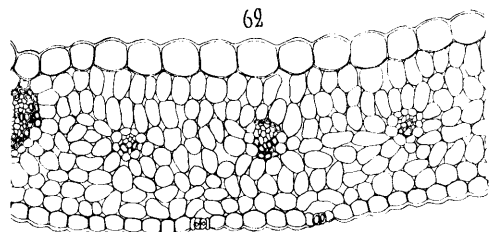
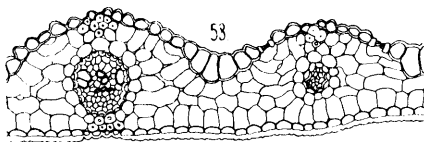
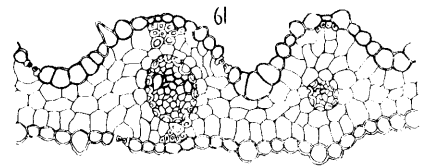
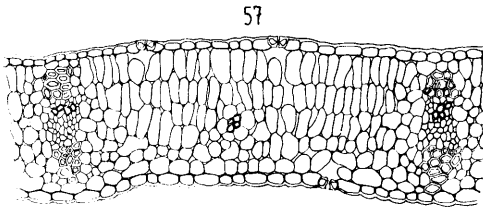
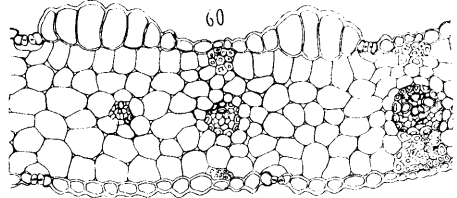
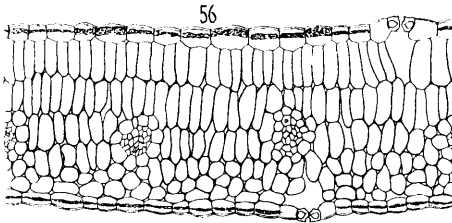


Hilja Lippmaa delin.

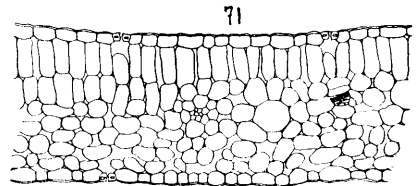
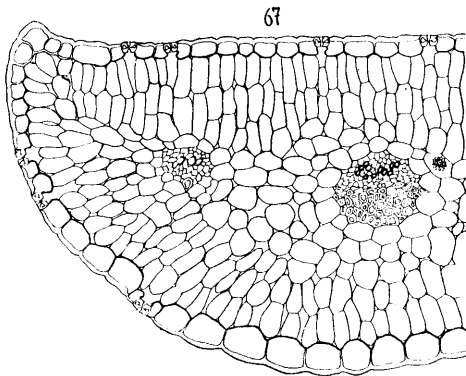
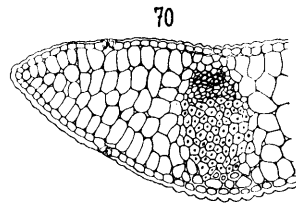
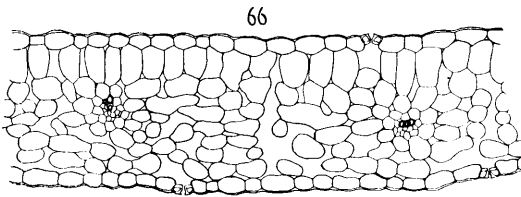
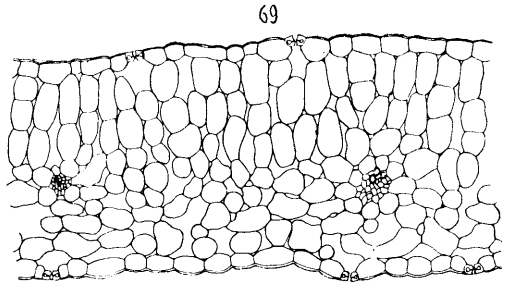
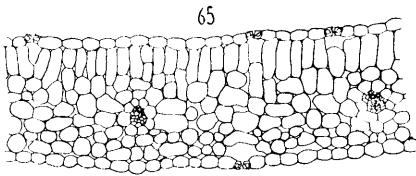
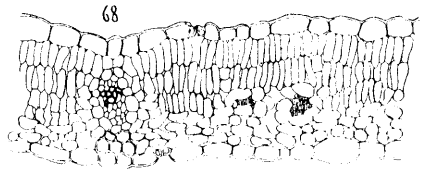
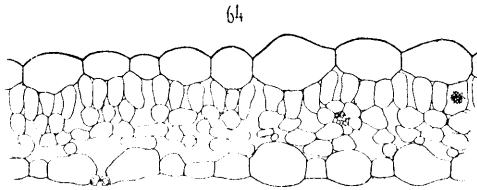


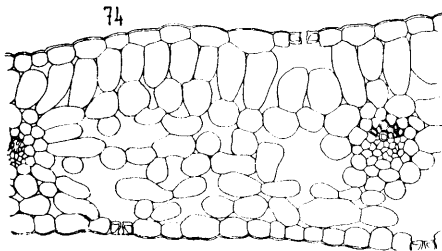
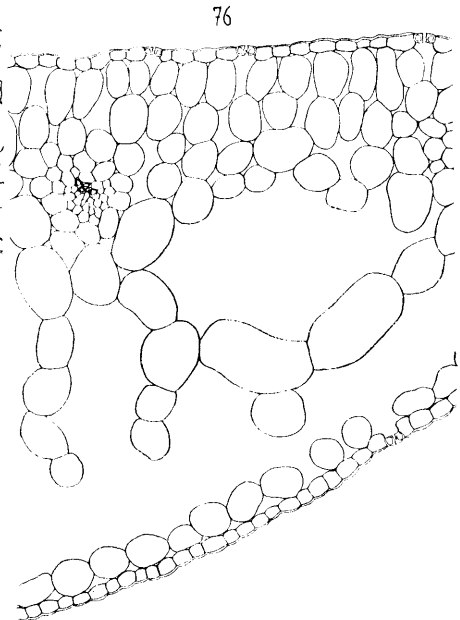
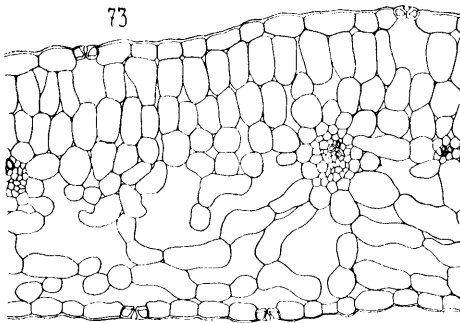
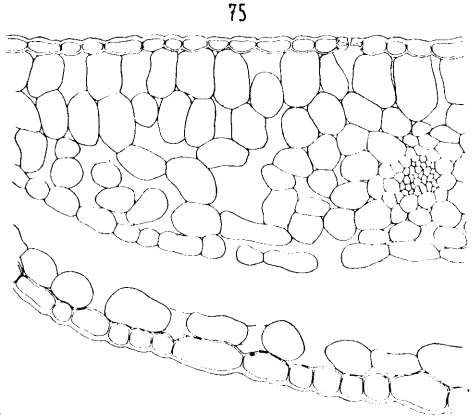
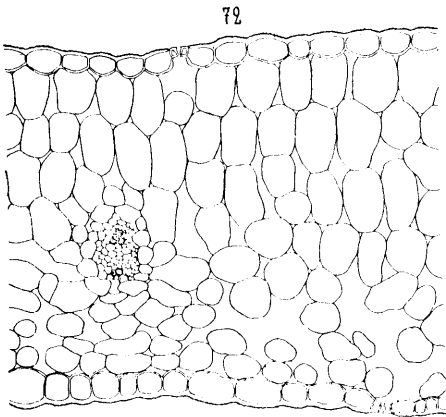


Hilja Lippmaa delin.



Hilja Lippmaa delin.





Hilja Lippmaa delin.

	Taf.	Fig.		Taf.	Fig.
<i>Alchemilla glomerulans</i> Bus.	XV	19	<i>Luzula arcuata</i> Whlbg.	XX	59
<i>Alsine biflora</i> Whlbg.	XXI	67	<i>L. confusa</i> Lindeb.	XIX	48
<i>Andromeda polifolia</i> L.	XVIII	43	<i>L. spicata</i> Lam.	XIX	49
<i>Angelica archangelica</i> L.	XV	18	<i>L. sudetica</i> DC.	XX	62
<i>Anthoxanthum odoratum</i> L.	XVII	38	<i>Milium effusum</i> L.	XVII	34
" " "	XX	58	<i>Mulgedium alpinum</i> Less.	XVI	30
<i>Arctostaphylos alpina</i> Spr.	XIX	54	<i>Parnassia palustris</i> L.	XVII	35
<i>Aspidium dryopteris</i> Baumg.	XVI	33	<i>Pedicularis lapponica</i> L.	XIX	55
<i>A. filix mas</i> Sw.	XVI	29	<i>Phyllodoce coerulea</i> Bab.	XVIII	44
<i>A. phegopteris</i> Baumg.	XVI	32	<i>Pirola minor</i> L.	XVII	42
<i>A. spinulosum</i> Sw.	XVI	28	<i>P. rotundifolia</i> L.	XVII	41
<i>Astragalus alpinus</i> L.	XVI	25	<i>P. secunda</i> L.	XVII	40
<i>A. frigidus</i> Bunge	XVII	37	<i>Poa alpina</i> L. f. <i>vivipara</i>	XX	60
<i>Athyrium filix femina</i> Roth	XVI	27	<i>Ranunculus glacialis</i> L.	XXII	73
<i>Bartsia alpina</i> L.	XV	20	<i>R. nivalis</i> L.	XXII	74
<i>Betula nana</i> L.	XIX	51	<i>R. pygmaeus</i> Whlbg.	XXI	66
<i>B. tortuosa</i> Ledeb.	XIV	11	<i>Rubus arcticus</i> L.	XV	23
<i>Calamagrostis lapponica</i>			<i>Salix glauca</i> L.	XIV	12
Hartm.	XIX	53	<i>S. herbacea</i> L.	XX	57
<i>C. purpurea</i> Trin.	XVII	39	<i>S. lapponum</i> L.	XIV	13
<i>Carex Lachenalii</i> Schkuhr	XX	63	<i>S. myrsinites</i> L.	XIV	14
<i>C. rigida</i> Good.	XIX	52	<i>S. phycifolia</i> Sm.	XIV	10
<i>Cassiope hypnoides</i> Don	XXI	70	<i>S. polaris</i> Whlbg.	XX	56
<i>C. tetragona</i> Don	XVIII	46	<i>S. reticulata</i> L.	XIV	9
<i>Chaerophyllum silvestre</i> Sch. et			<i>Saussurea alpina</i> (L)DC.	XVII	36
Thell.	XVI	31	<i>Saxifraga rivularis</i> L.	XXII	75
<i>Cochlearia officinalis</i> L.	XXII	72	<i>S. stellaris</i> L.	XXII	76
<i>Cornus suecica</i> L.	XIII	3, 7	<i>Sibbaldia procumbens</i> L.	XXI	68
<i>Diapensia lapponica</i> L.	XVIII	47	<i>Solidago virgaurea</i> L.	XV	24
<i>Epilobium anagallidifolium</i>			<i>Trientalis europaea</i> L.	XV	21
Lam.	XXI	71	<i>Trisetum spicatum</i> Richt.	XX	61
<i>Filipendula ulmaria</i> Maxim.	XIV	15	<i>Trollius europaeus</i> L.	XV	16, 17
<i>Geranium silvaticum</i> L.	XV	22	<i>Vaccinium myrtillus</i> L.	XIII	2, 6
<i>Gnaphalium norvegicum</i>			<i>V. uliginosum</i> L.	XIX	50
Gunn.	XVI	26	<i>V. vitis idaea</i> L.	XIII	1, 5
<i>G. supinum</i> L.	XXI	65	<i>Veronica alpina</i> L.	XXI	69
<i>Linnæa borealis</i> L.	XIII	4, 8	<i>Viola biflora</i> L.	XXI	64
<i>Loiseleuria procumbens</i>					
Desv.	XVIII	45			

Inhaltsverzeichnis.

I. Einleitung	3
II. Vegetationsanalysen nebst Angaben über das Pigmentsystem der betreffenden Pflanzenarten	7
1. Einleitende Bemerkungen über die grundlegenden Einheiten der Synökologie	7
2. Über die allgemeine Natur der untersuchten Gebiete	10
3. Die Formation der Wiesenbirkenwälder	21
A. Analysen	21
B. Bemerkungen bezüglich der Methodik der Bestimmung des phytochromatischen Spektrums einer Assoziation	29
C. Das phytochromatische Spektrum der Wiesenbirkenwälder	31
4. Die Formation der Heidebirkenwälder	34
A. Analysen	34
B. Das phytochromatische Spektrum der Heidebirkenwälder	36
5. Die Formation der arktischen Wiesen	40
A. Analysen	40
B. Das phytochr. Spektrum der arktischen Hochstaudenwiese	42
6. Die Formation der arktischen Zwergstrauchheide	43
A. Allgemeine Betrachtungen über die Formationen der arktischen Heide und der Kältestepppe	43
B. Analysen	48
C. Das phytochr. Spektrum der arktischen Zwergstrauchheide	55
7. Die Formation der Schneewiese	59
A. Über die Begrenzung und die Lebensbedingungen der Schneewiese	59
B. Analyse. Das phytochr. Spektrum der Schneewiesenformation	62
III. Über die Anatomie der Blattspreite bei den Pflanzen der Wiesen-, Heide- und Schneewiesenformationen	68
IV. Beziehungen zwischen den Pigmentspektra der untersuchten Formationen und dem anatomischen Bau der diese zusammensetzenden Arten	78
V. Über den Chlorophyllgehalt der arktischen Pflanzen	87
A. Anthophyta und Pteridophyta	87
B. Laub-, Torf- und Lebermoose	91
C. Flechten	94
D. Luftalgen	96
VI. Lichtgenuss und Lichtklima im nördlichsten Skandinavien	99

VII. Schutzrichtungen gegen übermässige Insolation bei den arktischen Pflanzen	108
Anhang. Daten über Pigmentgehalt und Pigmentkombinationen bei den Pflanzen Finnisch- und Norwegisch-Lapplands	119
A. Formation der Wiesenbirkenwälder	119
B. Formation der Heidebirkenwälder	128
C. Formation der Zwergstrauchheide	130
D. Formation der Schneewiese	137
Verzeichnis der im „Anhange“ erwähnten Arten	141
Pflanzenverzeichnis	143
Autorenverzeichnis	146
Erklärung der Tafeln.	
I. Vegetationsbilder.	
II. Blattquerschnitte von Pflanzen der Wiesen- und Heideformationen und der Schneewiesenformation.	
A. Vergleich von Pflanzen des Birkenwaldes mit Individuen derselben Art aus der Zwergstrauchheide.	
B. Formationen der Wiesenbirkenwälder, der Wiesengebüsche und der Hochstaudenwiesen.	
C. Formation der arktischen Zwergstrauchheide.	
D. Formation der Schneewiese.	
Inhaltsverzeichnis.	

Eelmiste köidete sisu. — Contenu des volumes précédents.

A I (1921). 1. A. Paldrock. Ein Beitrag zur Statistik der Geschlechtskrankheiten in Dorpat während der Jahre 1909—1918. — 2. K. Väisälä. Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen. — 3. C. Schlossmann. Hapete mõju kolloiidide peale ja selle tähtsus patoloogias. (L'action des acides sur les colloïdes et son rôle dans la pathologie.) — 4. K. Regel. Statistische und physiognomische Studien an Wiesen. Ein Beitrag zur Methodik der Wiesenuntersuchung. — 5. H. Reichenbach. Notes sur les microorganismes trouvés dans les pêches planctoniques des environs de Covda (gouv. d'Archangel) en été 1917. — **Misc.** F. Bucholtz. Der gegenwärtige Zustand des Botanischen Gartens zu Dorpat und Richtlinien für die Zukunft.

A II (1921). 1. H. Bekker. The Kuckers Stage of the Ordovician Rocks of NE Estonia. — 2. C. Schlossmann. Über die Darmspirochäten beim Menschen. — 3. J. Letzmann. Die Höhe der Schneedecke im Ostbaltischen Gebiet. — 4. H. Kaho. Neutraalsoolade mõjust ultramaksimum-temperatuuri peale *Tradescantia zebrina* juures. (Über den Einfluss der Neutralsalze auf die Temperatur des Ultramaximums bei *Tradescantia zebrina*.)

A III (1922). 1. J. Narbutt. Von den Kurven für die freie und die innere Energie bei Schmelz- und Umwandlungsvorgängen. — 2. A. Томсонъ (A. Thomson). Значение аммонийныхъ солей для питания высшихъ культурныхъ растений. (Der Wert der Ammonsalze für die Ernährung der höheren Kulturpflanzen.) — 3. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. I. Hälfte (S. I—VII und 1—96). — 4. A. Lüüs. Ein Beitrag zum Studium der Wirkung künstlicher Wildunger Helenenquellensalze auf die Diurese nierenkranker Kinder. — 5. E. Öpik. A statistical method of counting shooting stars and its application to the Perseid shower of 1920. — 6. P. N. Kogerman. The chemical composition of the Esthonian M.-Ordovician oil-bearing mineral „Kuckersite“. — 7. M. Wittlich und S. Weshnjakow. Beitrag zur Kenntnis des estländischen Ölschiefers, genannt Kuckersit. — **Misc.** J. Letzmann. Die Trombe von Odenpäh am 10. Mai 1920.

A IV (1922). 1. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. II. Hälfte (S. 97—188). — 2. A. Valdes. Glükogeeni hulka vähendavate tegurite mõju üle südame spetsiifilise lihassüsteemi glükogeeni peale. (Über den Einfluss der die Glykogenmenge vermindernenden Faktoren auf das Glykogen des spezifischen Muskelsystems des Herzens.) — 3. E. Öpik. Notes on stellar statistics and stellar evolution. — 4. H. Kaho. Raskemetallsoolade kihvtisusest taimelasma kohta. (Über die Schwermetallgiftwirkung in bezug auf das Pflanzenplasma.) — 5. J. Piiper und M. Härms. Der Kiefernkreuzschnabel der Insel Ösel *Loxia pityopsittacus estiae* subsp. nov. — 6. L. Poska-Teiss. Zur Frage über die vielkernigen Zellen des einschichtigen Plattenepithels.

A V (1924). 1. E. Öpik. Photographic observations of the brightness of Neptune. Method and preliminary results. — 2. A. Lüü s. Ergebnisse der Krüppelkinder-Statistik in Eesti. — 3. C. Schloßmann. Culture in vitro des protozoaires de l'intestin humain. — 4. H. Kaho. Über die physiologische Wirkung der Neutralsalze auf das Pflanzenplasma. — 5. Y. Kauko. Beiträge zur Kenntnis der Torfzersetzung und Vertorfung. — 6. A. Tammekan n. Eesti diktiõneema-kihi uurimine tema tekkimise, vanaduse ja levimise kohta. (Untersuchung des Dictyonema-Schiefers in Estland nach Entstehung, Alter und Verbreitung.) — 7. Y. Kauko. Zur Bestimmung des Vertorfungsgrades. — 8. N. Weiderpass. Eesti piparmündi-õli (*Oleum menthae esthicum*). (Das estnische Pfefferminzöl.)

A VI (1924). 1. H. Bekker. Mõned uued andmed Kukruse lademe stratigraafia ja faunast. (Stratigraphical and paleontological supplements on the Kukruse stage of the Ordovician Rocks of Eesti (Estonia).) — 2. J. Wilip. Experimentelle Studien über die Bestimmung von Isothermen und kritischen Konstanten. — 3. J. Letzmann. Das Bewegungsfeld im Fuss einer fortschreitenden Wind- oder Wasserhose. — 4. H. Scupin. Die Grundlagen paläogeographischer Karten. — 5. E. Öpik. Photometric measures on the moon and the earth-shine. — 6. Y. Kauko. Über die Vertorfungswärme. — 7. Y. Kauko. Eigentümlichkeiten der H_2O - und CO_2 -Gehalte bei der unvollständigen Verbrennung. — 8. M. Tilzen und Y. Kauko. Die wirtschaftlichen Möglichkeiten der Anwendung von Spiritus als Brennstoff. — 9. M. Wittlich. Beitrag zur Untersuchung des Öles aus estländischem Ölschiefer. — 10. J. Wilip. Emergenzwinkel, Unstetigkeitsflächen, Laufzeit. — 11. H. Scupin. Zur Petroleumfrage in den baltischen Ländern. — 12. H. Richter. Zwei Grundgesetze (Funktion- und Strukturprinzip) der lebendigen Masse.

A VII (1925). 1. J. Vilms. Kõhre glükogeeni püsivusest mõnesuguste glükogeeni vähendavate tegurite puhul. (Über die Stabilität des Knorpelglykogens unter verschiedenen Umständen.) — 2. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. Nachtrag. — 3. O. Kuriks. Trachoma Eestis (eriti Tartus) möödunud ajal ja praegu. (Das Trachom in Estland (insbesondere in Dorpat) einst und jetzt.) — 4. A. Brandt. Sexualität. Eine biologische Studie. — 5. M. Haltenberger. Gehört das Baltikum zu Ost-, Nord- oder zu Mitteleuropa? — 6. M. Haltenberger. Recent geographical work in Estonia.

A VIII (1925). 1. H. Jaakson. Sur certains types de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Sur l'interpolation. — 2. K. Frisch. Die Temperaturabweichungen in Tartu (Dorpat) und ihre Bedeutung für die Witterungsprognose. — 3. O. Kuriks. Muutused leeprahäigete silmas Eesti leprosooriumide haigete läbivaatamise põhjal. (Die Lepra des Auges.) — 4. A. Paldrock. Die Senkungsreaktion und ihr praktischer Wert. — 5. A. Öpik. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse- (C_2 -) Stufe in Eesti. I. — 6. M. Wittlich. Einiges über den Schwefel im estländischen Ölschiefer (Kukersit)

und dessen Verschmelgungsprodukten. — 7. H. Kaho. Orientierende Versuche über die stimulierende Wirkung einiger Salze auf das Wachstum der Getreidepflanzen. I.

A IX (1926). 1. E. Krahn. Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen. — 2. A. Mieler. Ein Beitrag zur Frage des Vorrückens des Peipus an der Embachmündung und auf der Peipusinsel Pirisaar in dem Zeitraum von 1682 bis 1900. — 3. M. Haltenberger. Der wirtschaftsgeographische Charakter der Städte der Republik Eesti. — 4. J. Rumma. Die Heimatforschung in Eesti. — 5. M. Haltenberger. Der Stand des Aufnahme- und Kartenwesens in Eesti. — 6. M. Haltenberger. Landeskunde von Eesti. I. — 7. A. Tammekann. Die Oberflächengestaltung des nordostestländischen Küstentafellandes. — 8. K. Frisch. Ein Versuch das Embachhochwasser im Frühling für Tartu (Dorpat) vorherzubestimmen.

A X (1926). 1. M. Haltenberger. Landeskunde von Eesti. II—III. — 2. H. Scupin. Alter und Herkunft der ostbaltischen Solquellen und ihre Bedeutung für die Frage nach dem Vorkommen von Steinsalz im baltischen Obersilur. — 3. Th. Lippmaa. Floristische Notizen aus dem Nord-Altai nebst Beschreibung einer neuen *Cardamine*-Art aus der Sektion *Dentaria*. — 4. Th. Lippmaa. Pigmenttypen bei Pteridophyta und Anthophyta. I. Allgemeiner Teil. — 5. E. Pipenberg. Eine städtemorphographische Skizze der estländischen Hafenstadt Pärnu (Pernau). — 6. E. Spohr. Über das Vorkommen von *Sium erectum* Huds. und *Lemna gibba* L. in Estland und über deren nordöstliche Verbreitungsgrenzen in Europa. — 7. J. Wilip. On new precision-seismographs.

A XI (1927). 1. Th. Lippmaa. Pigmenttypen bei Pteridophyta und Anthophyta. II. Spezieller Teil. — 2. M. Haltenberger. Landeskunde von Eesti. IV—V. — 3. H. Scupin. Epirogenese und Orogenese im Ostbaltikum. — 4. K. Schlossmann. Mikroorganismide kui bioloogiliste reaktiivide tähtsusest keemias. (Le rôle des ferments microbiens dans la chimie.) — 5. J. Sarw. Ahmese geometrilised joonised. (Die geometrischen Figuren des Ahmes.) — 6. K. Jaanson-Orviku. Beiträge zur Kenntnis der Aseri- und der Tallinna-Stufe in Eesti. I.

A XII (1927). 1. E. Reinwaldt. Beiträge zur Muriden-Fauna Estlands mit Berücksichtigung der Nachbargebiete. — 2. A. Öpik. Die Inseln Odensholm und Rogö. Ein Beitrag zur Geologie von NW-Estland. — 3. A. Öpik. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse-(C₂)-Stufe in Eesti. II. — 4. Th. Lippmaa. Beobachtungen über durch Pilzinfektion verursachte Anthocyaninbildung. — 5. A. Laur. Die Titration des Ammoniumhydrosulfides mit Ferricyankalium. — 6. N. King. Über die rhythmischen Niederschläge von PbJ₂, Ag₂CrO₄ und AgCl im kapillaren Raume. — 7. P. N. Kogerman and J. Kranig. Physical constants of some alkyl carbonates. — 8. E. Spohr. Über brunsterzeugende Stoffe im Pflanzenreich. Vorläufige Mitteilung.

A XIII (1928). 1. J. Sarw. Zum Beweis des Vierfarbensatzes. — 2. H. Scupin. Die stratigraphische Stellung der Devonschichten im Südosten Estlands. — 3. H. Perlitz. On the parallelism between

the rate of change in electric resistance at fusion and the degree of closeness of packing of metallic atoms in crystals. — 4. K. Frisch. Zur Frage der Luftdruckperioden. — 5. J. Port. Untersuchungen über die Plasmakoagulation von *Paramaecium caudatum*. — 6. J. Sarw. Direkte Herleitung der Lichtgeschwindigkeitsformeln. — 7. K. Frisch. Zur Frage des Temperaturanstiegens im Winter. — 8. E. Spöhr. Über die Verbreitung einiger bemerkenswerter und schutzbedürftiger Pflanzen im Ostbaltischen Gebiet. — 9. N. Rägo. Beiträge zur Kenntnis des estländischen Dictyonemaschiefers. — 10. C. Schlossmann. Études sur le rôle de la barrière hémato-encéphalique dans la genèse et le traitement des maladies infectieuses. — 11. A. Öpik. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse- (C_2-C_3) Stufe in Eesti. III.

A XIV (1929). 1. J. Rives. Über die histopathologischen Veränderungen im Zentralnervensystem bei experimenteller Nebenniereninsuffizienz. — 2. W. Wadi. Kopsutuberkuloosi areng ja kliinilised vormid. (Der Entwicklungsgang und die klinischen Formen der Lungentuberkulose.) — 3. E. Markus. Die Grenzverschiebung des Waldes und des Moores in Alatskivi. — 4. K. Frisch. Zur Frage über die Beziehung zwischen der Getreideernte und einigen meteorologischen Faktoren in Eesti.

B I (1921). 1. M. Vasmer. Studien zur albanesischen Wortforschung. I. — 2. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 1. — 3. M. Vasmer. Osteuropäische Ortsnamen. — 4. W. Anderson. Der Schwank von Kaiser und Abt bei den Minsker Juden. — 5. J. Bergman. Quaestiunculæ Horatianæ.

B II (1922). 1. J. Bergman. Aurelius Prudentius Clemens, der grösste christliche Dichter des Altertums. I. — 2. L. Kettunen. Lõunavepsa häälik-ajalugu. I. Konsonandid. (Südwepsische Lautgeschichte. I. Konsonantismus.) — 3. W. Wiget. Altgermanische Lautuntersuchungen.

B III (1922). 1. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 2. — 2. M. A. Курчинский (M. A. Kurtshinsky). Социальный законъ, случай и свобода. (Das soziale Gesetz, Zufall und Freiheit.) — 3. A. R. Cederberg. Die Erstlinge der estländischen Zeitungsliteratur. — 4. L. Kettunen. Lõunavepsa häälik-ajalugu. II. Vokaalid. (Südwepsische Lautgeschichte. II. Vokalismus.) — 5. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. [I.] — 6. A. M. Tallgren. Zur Archäologie Estis. I.

B IV (1923). 1. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. II. — 2. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 3. — 3. W. Anderson. Nordasiatische Flutsagen. — 4. A. M. Tallgren. L'ethnographie préhistorique de la Russie du nord et des États Baltiques du nord. — 5. R. Gutmann. Eine unklare Stelle in der Oxforder Handschrift des Rolandsliedes.

B V (1924). 1. H. Mutschmann. Milton's eyesight and the chronology of his works. — 2. A. Pridik. Mut-em-wija, die Mutter

Amenhotep's (Amenophis') III. — 3. A. Pridik. Der Mitregent des Königs Ptolemaios II Philadelphos. — 4. G. Suess. De Graecorum fabulis satyricis. — 5. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. I. Teil (S. 1—160). — 6. H. Mutschmann. Studies concerning the origin of „Paradise Lost“.

B VI (1925). 1. A. Saareste. Leksikaalseist vahekordadest eesti murretes. I. Analüüs. (Du sectionnement lexicologique dans les patois estoniens. I. Analyse.) — 2. A. Bjerre. Zur Psychologie des Mordes.

B VII (1926). 1. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 4. — 2. W. Anderson. Der Chalfenmünzfund von Kochtel. (Mit Beiträgen von R. Vasmer.) — 3. J. Mägiste. Rosona (Eesti Ingeri) murde pääjooned. (Die Hauptzüge der Mundart von Rosona). — 4. M. A. Курчинский (M. A. Kurtschinsky). Европейский хаосъ. Экономическія послѣдствія великой войны. (Das europäische Chaos.)

B VIII (1926). 1. A. M. Tallgren. Zur Archäologie Eestis. II. — 2. H. Mutschmann. The secret of John Milton. — 3. L. Kettunen. Untersuchung über die livische Sprache. I. Phonetische Einführung. Sprachproben.

B IX (1926). 1. N. Maim. Parlamentarismist Prantsuse restauratsiooniajal (1814—1830). (Du parlementarisme en France pendant la Restauration.) — 2. S. v. Csekey. Die Quellen des estnischen Verwaltungsrechts. I. Teil (S. 1—102). — 3. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. II. Teil (S. 161—288). — 4. G. Suess. De eo quem dicunt inesse Trimalchionis cenae sermone vulgari. — 5. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. III. — 6. C. Vilhelmsen. De ostraco quod Revaliae in museo provinciali servatur.

B X (1927). 1. H. B. Rahamägi. Eesti Evangeeliumi Luteri usu vaba rahvakirik vabas Eestis. (Die evangelisch-lutherische freie Volkskirche im freien Eesti. Anhang: Das Gesetz betreffend die religiösen Gemeinschaften und ihre Verbände.) — 2. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. IV. — 3. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. III. Teil (S. 289—416). — 4. W. Schmied-Kowarzik. Die Objektivation des Geistigen. (Der objektive Geist und seine Formen.) — 5. W. Anderson. Novelline popolari sammarinesi. I.

B XI (1927). 1. O. Looirts. Liivi rahva usund. (Der Volksglaube der Liven.) I. — 2. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. IV. Teil (S. 417—512). — 3. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. V.

B XII (1928). 1. O. Loo rits. Liivi rahva usund. (Der Volksglaube der Liven.) II. — 2. J. M ä g i s t e. *oi-*, *ei-*-deminutiivid lääne-meresoo me keelis. (Die *oi-*, *ei-*-Deminutiva der ostseefinnischen Sprachen.)

B XIII (1928). 1. G. S u e s s. Petronii imitatio sermonis plebei qua necessitate coniungatur cum grammatica illius aetatis doctrina. — 2. С. Ш т е й н (S. v. Stein). Пушкин и Гофман. (Puschkin und E. T. A. Hoffmann.) — 3. A. V. K õ r v. Värsimõõt Veske „Eesti rahvalauludes“. (Le mètre des „Chansons populaires estoniennes“ de Veske.)

B XIV (1929). 1. Н. М а й м (N. Maim). Парламентаризм и суверенное государство. (Der Parlamentarismus und der souveräne Staat.) — 2. S. v. C s e k e y. Die Quellen des estnischen Verwaltungsrechts. II. Teil (S. 103—134). — 3. E. V i r á n y i. Thalès Bernard, littérateur français, et ses relations avec la poésie populaire estonienne et finnoise.

B XV (1929). *Ilmub hiljemini. (Parañtra plus tard.)*

B XVI (1929). 1. O. Loo rits. Liivi rahva usund. (Der Volksglaube der Liven.) III. — 2. W. S ü s s. Karl Morgenstern (1770—1852). I. Teil (S. 1—160).

TARTU ÜLIKOOLI TOIMETUSED ilmuvad kolmes seerias:

A: Mathematica, physica, medica. (Matemaatika-loodusteaduskonna, arstiteaduskonna, loomaarstiteaduskonna ja põllumajandusteaduskonna tööd.)

B: Humaniora. (Usuteaduskonna, filosoofiateaduskonna ja õigusteaduskonna tööd.)

C: Annales. (Aastaruanded.)

Ladu: Ülikooli Raamatukogus, Tartus.

LES PUBLICATIONS DE L'UNIVERSITÉ DE TARTU (DORPAT) se font en trois séries:

A: Mathematica, physica, medica. (Mathématiques, sciences naturelles, médecine, sciences vétérinaires, agronomie.)

B: Humaniora. (Théologie, philosophie, philologie, histoire, jurisprudence.)

C: Annales.

Dépôt: La Bibliothèque de l'Université de Tartu, Estonie.
