Leitfaden

für den

Unterricht im Rechnen.

Bearbeitet

von

Johann Pahnsch,

Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasio zu Reval, Russisch Kaiserlichem Collegien-Rathe, Ritter des Ordens der heiligen Anna dritter Klasse, Inhaber des Ehrenzeichens für XX-jährigen tadellosen Dienst und der Kriegsmedaille von 1853.

Zweite verbesserte Auflage.

Reval.

Verlag von Franz Kluge.

1860.

Leitfaden

für den

Unterricht im Rechnen.

Bearbeitet

von

Johann Pahnsch,
Oberlehrer der Mathematik und Physik am Gymnasio zu Reval, Russisch Kaiserlichem Collegien-Rathe, Ritter des Ordens der heiligen Anna dritter Klasse, Inhaber des Ehrenzeichens für XX-jährigen tadellosen Dienst und der Kriegsmedaille von 1853.

Zweite verbesserte Auflage.

Reval.
Verlag von Franz Kluge.

1860.

Der Druck wird unter der Bedingung gestattet, daß nach Vollendung desselben die vorschriftmäßige Anzahl von Exemplaren an das hiesige Censur-Comité eingesandt werde.

Riga, den 2. September 1858.

Censor Dr. J. G. Krohl.

Gedruckt bei Lindfors Erben in Reval.

Vorrede.

Seit einer Reihe von Jahren mit dem Rechnenunterrichte, theils in öffentlichen Schulen, theils in Privat-Lehranstalten, beschäftigt, sah ich mich genöthigt, einen meinen Wünschen und den Anforderungen der Schule entsprechenden Leitfaden auszuarbeiten. Mein Bestreben war besonders darauf gerichtet:

1) in der größten Kürze dem Schüler ein Heft zu bieten, nach dem er das im mündlichen Vortrage Behandelte für sich wiederholen könnte, —
2) durch vorgelegte nicht zu schwere Aufgaben das Denkvermögen dadurch zu üben, daß der Schüler sich frühzeitig gewöhne, aus der Fassung der Frage selbst zu entscheiden, durch welche arithmetischen Operationen das Geforderte zu finden sei.

Für den ersten Zweck soll vorliegende Schrift, — für den zweiten ein besonderes Aufgabenheft dienen.

Daß ich die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten durch Raisonnement und Zurückgehen auf die Einheit zu begründen und soviel als möglich jede für sich durch Definitionen zu charakterisiren versucht habe, wird hoffentlich Billigung finden.

In der Zinsrechnung bin ich im Verhältniß zu den andern Abschnitten viel ausführlicher gewesen, weil die darin behandelten Aufgaben dem Schüler mehr Schwierigkeiten dadurch bieten, daß sie ihn nöthigen, sich in Beziehungen hinein zu denken, die ihm, seiner Stellung nach, noch fremd sind.

Als Anhang habe ich noch eine Anleitung zum Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel, so wie eine kurze Behandlung der Proportionen und ihre Anwendung zur Begründung der sogenannten Ansätze der bürgerlichen Rechnungsarten, hinzugefügt. Durch diese Zugabe glaube ich das Buch für diejenigen Schüler brauchbar zu machen, die sich durch häusliche Erziehung oder Privatunterricht für die dritte Klasse unserer Gymnasien vorbereiten. — Eine strenge Theorie der Proportionen, worin die Irrationalität der Glieder mit Berücksichtigung findet, schien mir für den Standpunkt des Schülers auf dieser Stufe seiner Entwickelung zu schwer und ist deshalb weggelassen.

Ob es mir gelungen, aus dem reichen und vielfach verarbeiteten Materiale das Nothwendige und Zweckmäßige auszuwählen, überlasse ich der billigen Beurtheilung sachkundiger Männer!

Der Verfasser.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Außer einigen kleinern Zusätzen enthält diese Auflage

1) eine Erklärung der Methode der abgekürzten Multiplication und Division der Decimalbrüche;
2) eine Umarbeitung des Abschnitts vom Resolviren und Reduciren benannter Zahlen;
3) eine Bezeichnung passender Beispiele zu den entwickelten Regeln aus meinen „arithmetischen Aufgaben", durch beigedruckte Nummern am Schlusse jedes Abschnitts;
4) eine Zusammenstellung von Uebungsfragen zur Erleichterung der Repetition des in jedem Abschnitte Vorgetragenen.

Möchte es mir gelungen sein durch diese Zusätze und Veränderungen eine wesentliche Verbesserung des Buches erzielt zu haben.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

1. Einleitung 1
2. Erklärung des dekadischen Zahlensystems 2
3. Das Numeriren 7
4. Die Addition 9
5. Die Subtraction 13
6. Die Multiplication 16
7. Die Division 20
8. Vom größten gemeinsamen Maaße zweier Zahlen. — Kennzeichen der Theilbarkeit einer Zahl durch 2, 4, 8, 5, 3, 9, 6, 11. — Vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrer Zahlen . . 28
9. Von den Brüchen 33
10. Addition der Brüche 41
11. Subtraction der Brüche 42
12. Multiplication der Brüche 44
13. Division der Brüche 46
14. Von den Decimalbrüchen 50
15. Addition der Decimalbrüche 54
16. Subtraction der Decimalbrüche 55
17. Multiplication der Decimalbrüche 55
18. Division der Decimalbrüche 56
19. Verwandlung eines gewöhnlichen Bruchs in einen Decimalbruch . 58
20. Verwandlung eines Decimalbruchs in einen gewöhnlichen Bruch . 61
Die abgekürzte Multiplication und Division der Decimalbrüche.
21. Von den benannten Zahlen; das Resolviren und Reduciren . . 70
22. Addition benannter Zahlen 81

		Seite
23.	Subtraction benannter Zahlen	83
24.	Die Zeitrechnung	84
25.	Multiplication benannter Zahlen	65
26.	Division benannter Zahlen	98
27.	Die Regeldetri	104
28.	Regeldetri mit indirecten Verhältnissen	107
29.	Die zusammengesetzte Regeldetri	110
30.	Die Zinsrechnung	115
31.	Die Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung	135
32.	Die Vermischungsrechnung	146
33.	Die Kettenregel	154
34.	Vom Quadriren und Ausziehen der Quadratwurzel	163
35.	Vom Kubiren und Ausziehen der Kubikwurzel	172
36.	Von den Verhältnissen und Proportionen	180
37.	Anwendung der Verhältnisse auf benannte Zahlen	193
38.	Die einfache Regeldetri, durch Proportionen begründet	197
39.	Die zusammengesetzte Regeldetri desgl.	198
40.	Die Repartitionsrechnung desgl.	203
41.	Die Kettenregel desgl.	204
42.	Die Vermischungsrechnung desgl.	205

Einleitung.

§ 1. Betrachten wir einzelne Dinge nach gewissen Merkmalen, die sie mit einander gemein haben, so heißen sie gleichartig. Man nennt jedes derselben die Einheit oder Eins, z. B. ein Stuhl; ein Mensch; ein Haus u. s. w.

§ 2. Sehen wir die Einheit bloß als ein Etwas an, und entfernen alle Nebenvorstellungen der besondern Art des Gleichartigen, so heißt sie abstract oder unbenannt. Für die abstracte Einheit bedienen wir uns des Zeichens

„1."

§ 3. Wir können uns die Einheit fortwährend wiederholt denken, wodurch wir folgende Reihe

1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1 . . . . .

erhalten, die bis ins Unendliche fortgeht. — Fassen wir nun nach jedesmaliger Wiederholung der Einheit die Menge derselben zu einem Ganzen zusammen, so entsteht folgende Reihe

1; (1, 1); (1, 1, 1); (1, 1, 1, 1); (1, 1, 1, 1, 1); . . . .

die ebenfalls bis ins Unendliche fortläuft. — Diese Reihe nennt man

„Zahlenreihe"

und jedes Glied derselben

„Zahl."

§ 4. Jede Zahl ist also der Inbegriff einer Menge von Einheiten. — Durch Wiederholung der benannten Einheit entstehen die benannten Zahlen.

Da die Zahlenreihe bis ins Unendliche fortläuft so giebt es keine absolut größte Zahl. — Die Größe einer Zahl hängt von der Menge Einheiten ab die wir uns zu einem Ganzen vereinigt denken; demnach ist in der Zahlenreihe § 3 jede Zahl größer als die vorhergehende und kleiner als die darauf folgende. Zugleich übersieht man daß jede gegebene oder gedachte Zahl sich in obiger Reihe § 3 vorfinden muß, weil diese Reihe alle Zahlen von 1 bis ins Unendliche umfaßt.

§ 5. Diejenige Wissenschaft, deren Gegenstand die Untersuchung der Zahlen und der Gesetze ihrer Verbindung unter einander ist, heißt Arithmetik. — Sie begründet Regeln, nach denen man unbekannte Zahlen gegebenen Bedingungen gemäß herzuleiten hat. — Das Verfahren selbst heißt rechnen. Jede Veränderung, die man mit Zahlen vornimmt, um neue Zahlen zu erzeugen, wird arithmetische Operation genannt. — Die einfachste Veränderung einer Zahl geschieht dadurch, daß man durch Hinzulegen von Gleichartigem dieselbe vergrößert und durch Wegnehmen von Gleichartigem dieselbe vermindert. — Auf diesen beiden Veränderungen beruhen die vier einfachen Grundrechnungen oder Species, nehmlich die Addition, Subtraction, Multiplication und Division.

Das dekadische Zahlensystem.

§ 6. Wir lernen mit der Sprache zugleich auch Zählen, d. h. das Hersagen der Zahlenreihe (§ 3). — Erst später im reifern Alter wird uns der Mechanismus des Zählens klar. Dieser besteht nehmlich darin, daß wir eine bestimmte Menge von Einheiten als eine neue Einheit betrachten, und auf gleichförmige Weise dieses Verfahren wiederholen. Der Inbegriff aller Zahlen nach einer solchen Eintheilung in verschiedene Klassen heißt — Zahlensystem. Das unsrige wird dekadisches oder Decimalsystem genannt, weil wir nur bis zehn zählen, und für zehn mal zehn, zehn mal zehn mal zehn u. s. w die abkürzenden Benennungen — Hundert, Tausend u. s. w. gebrauchen. Die Zahl zehn nennt man die Grundzahl oder Basis des Decimalsystems.

Zehn Einer machen einen Zehner, zehn Zehner einen Hunderter aus. Die Einer bilden die niedrigste oder nullte*) Ordnung, die Zehner die erste und die Hunderter die zweite Ordnung unseres Zahlensystems. Aus diesen drei Ordnungen besteht die Unterabtheilung der ersten Hauptklasse.

Zehn Hunderter machen einen Tausender, zehn Tausender einen Zehntausender, zehn Zehntausender einen Hunderttausender aus. Die Tausender bilden die dritte, die Zehntausender die vierte und die Hunderttausender die fünfte Ordnung unseres Zahlensystems. Die drei letzten Ordnungen machen die Oberabtheilung der ersten Hauptklasse aus. Dieselbe besteht also auch aus Einern, Zehnern und Hundertern, die aber — Tausende heißen.

Wegen dieser Einrichtung ist es von der größten Wichtigkeit daß der Schüler sich die nöthige Fertigkeit und Sicherheit erwerbe, Zahlen zu bilden und richtig auszusprechen die blos die Unterabtheilungen der ersten Hauptklasse enthalten, denn dadurch wird er in den Stand gesetzt, jede noch so große Zahl zu übersehen. — Kommen nehmlich Einer, Zehner und Hunderter der Oberabtheilung vor so nennt man diese zuerst als wären sie Einheiten der Ordnungen der Unterabtheilung und fügt nur zur Bezeichnung daß sie zur obern Abtheilung gehören, die Benennung — Tausend hinzu, — hierauf läßt man die Einheiten der Ordnungen der Unterabtheilung folgen.

Uebungsbeispiele.

a) Für Zahlen die blos aus Einheiten der Unterabtheilung der ersten Hauptklasse bestehen.

1) Drei Einheiten der ersten und sieben Einheiten der nullten Ordnung heißen? Antw.: Sieben und dreißig.

2) Vier Einheiten der ersten und sieben Einheiten der zweiten Ordnung heißen? Antw.: Siebenhundert und vierzig

3) Zwei Einheiten der zweiten, drei der ersten und sechs der nullten Ordnung heißen? Antw.: Zweihundert sechsunddreißig.

*) Warum die Einer die nullte Ordnung heißen, kann erst in der allgemeinen Zahlenlehre gezeigt werden.

b) Für Zahlen die blos aus Einheiten der Oberabtheilung der ersten Hauptklasse bestehen.

4) Zwei Einheiten der dritten und sechs der fünften Ordnung heißen? Antw.: Fünfhundert zwei — Tausend.

5) Neun Einheiten der dritten, acht der vierten und fünf der fünften Ordnung heißen? Antw.: Fünfhundert neunundachtzig Tausend.

c) Für Zahlen die beliebig aus den Ordnungen der ganzen ersten Hauptklasse zusammengesetzt sind.

6) Fünf Einheiten der dritten, zwei der zweiten, acht der ersten und sieben der nullten Ordnung heißen? Antw.: Fünf — Tausend zweihundert siebenundachtzig.

7) Sieben Einheiten der vierten, vier der dritten, zwei der zweiten und sechs der nullten Ordnung heißen? Antw.: Vierundsiebzig — Tausend zweihundert und sechs.

8) Zwei Einheiten der fünften, acht der vierten, sechs der dritten, vier der zweiten Ordnung heißen? Antw.: Zweihundert sechsundachtzig — Tausend, vierhundert.

Die zweite Hauptklasse beginnt mit der sechsten Ordnung, und heißt — Million. Sie enthält ebenfalls sechs Ordnungen, nehmlich:

Eine Million Zehn Millionen Hundert „	Unterabtheilung der zweiten Hauptklasse
Tausend Millionen Zehntausend „ Hunderttausend „	Oberabtheilung der zweiten Hauptklasse.

Eine Zahl, die aus Einheiten irgend welcher Ordnungen dieser Hauptklasse besteht, wird eben so ausgesprochen, als gehörten jene Ordnungen zur ersten Hauptklasse; nur nach den Einheiten der niedrigsten Ordnung fügt man die Benennung — Million hinzu. — Da jede folgende Hauptklasse immer aus sechs Ordnungen besteht, so hat man dasselbe Verfahren zu beobachten, die vorliegende Zahl möge zu irgend welcher Hauptklasse gehören.

§ 7. Die Namen der Klassen sind folgende:

Die erste Klasse hat keinen besondern Namen,
„ zweite „ heißt — Million
„ dritte „ „ — Billion
„ vierte „ „ — Trillion
„ fünfte „ „ — Quadrillion
„ sechste „ „ — Quintillion
„ siebente „ „ — Sextillion
„ achte „ „ — Septillion
„ neunte „ „ — Octillion
„ zehnte „ „ — Nonillion u. s. w.

Uebungsbeispiele.

a) Wie werden Zahlen ausgesprochen, die bestehen aus:

1) Acht Einheiten der ersten und acht Einheiten der nullten Ordnung? Antw.: Achtunddreißig.
2) Fünf Einheiten der vierten, vier der dritten, sechs der ersten Ordnung? Antw.: Vierundfünfzig — Tausend und sechzig.
3) Zwei Einheiten der siebenten, acht der vierten, sechs der ersten Ordnung? Antw.: Zwanzig — Millionen, achtzig — Tausend und sechzig.

b) Aus wie viel Einheiten von jeder Ordnung bestehen folgende Zahlen:

4) Achthundert dreiundvierzig? Antw.: Acht Einheiten der zweiten, vier der ersten und drei der nullten Ordnung.
5) Sieben — Tausend vierunddreißig? Antw.: Sieben Einheiten der dritten, drei der ersten und vier der nullten Ordnung.
6) Zwei Millionen, dreißig Tausend vierhundert? Antw.: Zwei Einheiten der sechsten, drei der vierten, vier der zweiten Ordnung.

Exempel Nr. 1—12 *).

§ **8.** Zur Andeutung der Zahlen sind gewisse Zeichen erdacht und allgemein angenommen, die Ziffern heißen. Um mit wenigen Ziffern alle Zahlen zu schreiben, bedient man sich eines Kunstgriffes. Man wählte nehmlich für jede der ersten neun

*) Diese Hinweisung bezieht sich auf das Exempelbuch „Arithemtische Aufgaben" von J. Pahnsch.

Zahlen ein eigenes Zeichen und setzte fest, daß jede Ziffer für sich allein bloß einfache Einheiten bezeichnen sollte, — in Verbindung mit andern sollte die links stehende Ziffer einen zehn mal größern Werth haben, als ihr zukäme, wenn sie an dem Platze der rechts stehenden Ziffer wäre. Man legte also jeder Ziffer zweierlei Werth zu, nehmlich:

1) den absoluten Werth, der an die Form des Zeichens geknüpft ist, und
1) den relativen Werth, der durch die Stelle bedingt wird die die Ziffer in Verbindung mit andern einnimmt.

Die neun gebräuchlichen Ziffern sind folgende:

Eins,	Zwei,	Drei,	Vier,	Fünf,	Sechs,	Sieben.	Acht,	Neun.
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Hierzu kommt noch ein Zeichen 0 (Null), um anzuzeigen, daß keine Einheiten vorhanden sind.

Nach obiger Feststellung bezeichnet also eine einzeln stehende Ziffer Einer. In der zweiten Stelle, von der Rechten zur Linken gesehen, Zehner; in der dritten Stelle Hunderter; in der vierten Stelle Tausender; in der fünften Stelle Zehntausender; in der sechsten Stelle Hunderttausender; in der siebenten Stelle einfache Millionen .....; in der dreizehnten Stelle einfache Billionen ..... z. B. 5 sind Einer; 37 sind 3 Zehner und 7 Einer; 527 sind 5 Hunderter, 2 Zehner und 7 Einer; 4567 sind 4 Tausender, 5 Hunderter, 6 Zehner, 7 Einer, 12453 sind 1 Zehntausender, 2 Tausender, 4 Hunderter, 5 Zehner, 3 Einer, u. s. w. Fehlen Einheiten irgend einer Ordnung, so wird deren Stelle durch Nullen ausgefüllt, z. B. 40 sind 4 Zehner; 504 sind 5 Hunderter, 4 Einer.

§ 9. Die von uns gebrauchten Ziffern sollen indischen Ursprungs sein; weil sie aber in Europa durch die Araber bekannt wurden, nennt man sie arabische.

Die Römer und Griechen hatten ebenfalls das Decimalsystem, besaßen aber eine unbehülfliche Art und Weise die Zahlen zu schreiben, wodurch die Arithmetik bei denselben auf einer niedrigen Stufe stehen blieb. Die römischen Ziffern deren man sich zuweilen bedient sind folgende:

I;	II;	III;	IV;	V;	VI;	VII;	VIII;	IX;	X;	XI;	XII;
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
XIII;	XIV;	XV;	XVI;	XVII;	XVIII;	XIX;	XX;	XXX;	XL;		
13	14	15	16	17	18	19	20	30	40		
L;	LX;	LXX;	LXXX;	XC;	C;	CC;	CCC;	CD;	D;	DC;	
50	60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	
DCC;	DCCC;	CM;	M.								
700	800	900	1000.								

Exempel Nr. 13—35.

Das Numeriren.

§ **10.** Die Kunst, gegebene Zahlen zu schreiben, und geschriebene richtig zu lesen, heißt — numeriren. — Nach der oben gegebenen Erklärung der Einrichtung unseres Decimalsystems und des Gebrauchs der Ziffern hat es weiter keine Schwierigkeit, jede gegebene Zahl mit Ziffern zu schreiben. — Enthält die zu schreibende Zahl bloß Ordnungen der ersten Klasse, so macht man zuerst ein Komma (,), setzt vor dasselbe die Einheiten der Oberabtheilung, d. h. die drei Ordnungen der Tausender, und nach demselben die drei andern Ordnungen, z. B.

Sechshundert drei und vierzig — Tausend, vier und dreißig wird geschrieben

643,034;

Vier und zwanzig — Tausend, achthundert und sechs

24,806.

Da die Ordnungen der höhern Klasse ebenso wie die der ersten Klasse ausgesprochen werden, so macht man dieselbe Marke mit dem Komma, wie bei der ersten Klasse, um die Stellen der Oberabtheilung von denen der untern zu sondern. — Um aber die Stelle zu erkennen, wo jede Klasse beginnt, so schreibt man zuerst Fächer von 6 Nullen hin, und setzt bei jedem Fache eine kleine Ziffer oben, um anzuzeigen, daß dort die nächst niedrigere Klasse anfange, z. B.

4te Klasse	3te Klasse	2te Klasse	1ste Klasse
^{4}000,000	^{3}000,000	^{2}000,000	^{1}000,000

Hierauf füllt man mit Ziffern diejenigen Stellen aus, deren Einheiten gegeben sind, z. B.

Vier und achtzig — Millionen, sieben Tausend, achthundert und funfzehn

$84^{1}007,815.$

Achthundert drei und vierzig — Billionen, sechshundert Tausend, zwei — Millionen, vier und neunzig — Tausend, siebenhundert und sechs

$843^{2}600,002^{1}094,706.$

Wie Zahlen ausgesprochen werden, wenn die Einheiten jeder vorkommenden Ordnung gegeben sind, ist bereits § 6 und § 7 gezeigt worden und man könnte das Lesen jeder mit Ziffern geschriebenen Zahl darauf zurückführen, indem man zuerst angäbe welche Einheiten jeder Ordnung darin enthalten sind z. B. in

78046

kommen vor: 7 Zehn — Tausender, 8 Tausender, 4 Zehner und 6 Einer (§ 8); demnach wird 78046 ausgesprochen:

Achtundsiebzig — Tausend sechsundvierzig.

Es führt aber schneller zum Ziele, wenn man von der Rechten gegen die Linke, die vorgelegte Zahl in Fächer zu 3 Stellen abtheilt, diese Abtheilungen mit dem Komma markirt und die Klassen durch kleinere Ziffern oben, sich merkt. Hätten wir z. B. die Zahl

5678096038407396

so wird sie auf folgende Art abgetheilt

$5,678^{2}096,038^{1}407,396$

und alsdann ausgesprochen:

Fünf — Tausend sechshundert acht und siebzig — Billionen, sechs und neunzig — Tausend acht und dreißig — Millionen, vierhundert sieben — Tausend dreihundert sechs und neunzig.

Die Zahl

16983000065003200700

theile man ab

$16^{3}983,000^{2}065,003^{1}200,700$

und spreche sie aus.

Sechzehn — Trillionen, neunhundert drei und achtzig — Billionen, fünfundsechzig — Tausend drei — Millionen, zweihundert — Tausend siebenhundert.

Die Zahl

30060078092

wird abgetheilt

$30,060^{1}078,092$

und ausgesprochen:

Dreißig — Tausend sechzig — Millionen, achtundsiebzig — Tausend zweiundneunzig.

Exempel Nr. 36—61.

Addition.

§ 11. Zahlen addiren heißt, eine Zahl finden, welche so viel Einheiten enthält, als mehre gegebene Zahlen zusammengenommen enthalten.

Die gegebenen Zahlen heißen Summanden (Addenden, Posten); die gefundene Zahl wird Summe genannt. Das Zeichen der Addition ist ein stehendes Kreuz (+) und wird zwischen die Summanden gesetzt, z. B. $3+4+5$ bedeutet, daß die Zahlen 3, 4 und 5 addirt werden sollen.

Die natürlichste Art zu addiren würde darin bestehen, daß wir die Summanden in Einheiten zerlegen und diese dann zählen. Der Inbegriff aller wird die gesuchte Summe geben. Hieraus folgt, daß es gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge wir die Summanden nehmen; denn denken wir uns jeden Summandus in seine Einheiten zerlegt, und ordnen diese Einheiten in Gedanken in eine Reihe von der Linken zur Rechten neben einander, so wird immer dieselbe Menge von Einheiten entstehen, bei welchem Summandus wir auch anfangen mögen, z. B.

$$3+4+5=(1,1,1)+(1,1,1,1)+(1,1,1,1,1)$$
$$=1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,=12,$$
$$4+3+5=(1,1,1,1)+(1,1,1)+(1,1,1,1,1)$$
$$=1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1=12 \text{ u. s. w.}$$

daher $3+4+5=4+3+5=5+3+4$ u. s. w.

Es wird durch die Versetzung der Summanden nichts an der Größe der Summe geändert.

Daß auf diese Art die Addition großer Zahlen wegen der Menge der Einheiten unausführbar ist, leuchtet ein; daher sind bei der Addition großer Zahlen folgende Regeln anzuwenden:

1) Man stelle die Summanden so unter einander, daß Einer unter Einern, Zehner unter Zehnern stehen, und überhaupt gleichnamige Ordnungen eine Verticalreihe bilden;

2) man beginne die Addition bei den Einern, und setze die Arbeit bei den Zehnern, Hundertern u. s. w. fort;

3) die Summe jeder Verticalreihe schreibe man unter die addirten Ziffern. Kommen in einer solchen Summe Einheiten der nächst höhern Ordnung vor, so werden diese zu der nächst folgenden Columne gezählt. Die Summe der letzten Verticalreihe wird vollständig hingeschrieben, z. B. 984 + 398 + 298 + 497.

Ansatz und Ausrechnung:

$$\left.\begin{array}{r}984\\398\\298\\497\end{array}\right\}\text{(Summanden)}$$

$$\overline{2177}\ \text{(Summe).}$$

In der Einercolumne erhalten wir 4 + 8 + 8 + 7 = 27 Einer = 7 Einer + 2 Zehner; setzen 7 unter die Einer und zählen 2 zu den Zehnern der Summanden. In der Zehnercolumne finden wir 8 + 9 + 9 + 9 + (2) = 37 Zehner = 7 Zehner + 3 Hunderter; setzen 7 unter die Zehner und zählen 3 zu den Hundertern der Summanden. Die dritte Reihe giebt endlich 9 + 3 + 2 + 4 + (3) = 21 Hunderter. Diese werden ganz hingeschrieben, weil keine höhere Ordnung vorkommt. Haben die Posten noch eine Benennung, d. h. bezeichnen sie eine besondere Art von Dingen, so erhält die Summe dieselbe Benennung, z. B. 7 Rubel + 19 Rubel + 24 Rubel = 50 Rubel.

Um rasch die nöthige Geläufigkeit im Addiren zu erlangen, lerne man zuerst das Einsundeins auswendig. Dieses ist nachfolgende Tabelle aus den Summen von je zwei Einern bestehend.

Das Einsundeins.

$2 + 2 = 4$
$3 + 2 = 5$
$4 + 2 = 6$
$5 + 2 = 7$
$6 + 2 = 8$
$7 + 2 = 9$
$8 + 2 = 10$
$9 + 2 = 11$

$3 + 3 = 6$
$4 + 3 = 7$
$5 + 3 = 8$
$6 + 3 = 9$
$7 + 3 = 10$
$8 + 3 = 11$
$9 + 3 = 12$

$4 + 4 = 8$
$5 + 4 = 9$
$6 + 4 = 10$
$7 + 4 = 11$
$8 + 4 = 12$
$9 + 4 = 13$

$5 + 5 = 10$
$6 + 5 = 11$
$7 + 5 = 12$
$8 + 5 = 13$
$9 + 5 = 14$

$6 + 6 = 12$
$7 + 6 = 13$
$8 + 6 = 14$
$9 + 6 = 15$

$7 + 7 = 14$
$8 + 7 = 15$
$9 + 7 = 16$

$8 + 8 = 16$
$9 + 8 = 17$

$9 + 9 = 18$

In dieser Tabelle fehlen alle Paare in denen die zweite Zahl 1 ist weil deren Summe durch bloßes Zuzählen sogleich gefunden wird und jedes Paar Einer kommt nur ein Mal vor da es einerlei ist ob man sagt

$$3 + 4 = 7 \text{ oder } 4 + 3 = 7.$$

Es versteht sich von selbst daß das Einsundeins auch auf Zehner, Hunderter u. s. w. anzuwenden ist; denn

2 Zehner + 3 Zehner = 5 Zehner oder $20 + 30 = 50$
5 Hunderter + 8 Hunderter = 13 Hunderter oder $500 + 800 = 1300$ u. s. w.

Im Ganzen ist es einerlei, bei welcher Columne der unter einander geschriebenen Posten man zuerst zu addiren anfängt; —

da man jedoch nicht wissen kann ob nicht noch Etwas von der Columne der niedrigern Ordnung zur folgenden nächst höhern hinzukommt, so thut man wohl bei den Einern anzufangen.

Dem Anfänger ist zu rathen, — jedes Exempel zweimal und zwar zuerst von oben nach unten und dann von unten nach oben zu addiren, um etwa begangene Fehler zu entdecken. — Eben so ist die Vorsicht zu empfehlen, beim Anordnen der Summanden, wenn sie nicht alle mit gleich viel Ziffern geschrieben werden, die bei einigen fehlenden Ordnungen durch Punkte zu ergänzen, nach der Art folgenden Beispiels:

$$13 + 349 + 7867 + 8698 + 7098 + 8 + 16$$

gut geordnet

```
 ..13
 .349
 7867
 8698
 7098
 ...8
 ..16
 ----
24049
```

Uebungsbeispiele.

1) $7 + 8 + 9 = 24$.

2) $16 + 87 + 124 + 50 = 277$.

3) $378 + 5694 + 7307 + 16 + 8 = 13403$.

4) Wie viel betragen: 8 Hunderter + 3 Zehner + 9 Zehner + 34 Hunderter + 19 Einer? Antw.: 4339.

5) Jemand ersparte im ersten Jahre 150 Rubel. im zweiten 175 Rubel und im dritten 250 Rubel; wieviel im Ganzen? Antw.: 575 Rubel.

6) In einer Kiste befinden sich 138 Apfelsinen; in der zweiten 50 Stück mehr. a) Wieviel enthält die zweite Kiste: b) Wieviel beide zusammen? Antw.: a) 188 Apfelsinen. b) 326 Apfelsinen.

Exempel Nr. 69 — 173.

Subtraction.

§ **12.** Subtrahiren heißt, eine Zahl finden, die angiebt, um wie viel Einheiten eine gegebene größere Zahl eine gegebene kleinere übertrifft. Die größere Zahl heißt der Minuendus, die kleinere der Subtrahendus, die gesuchte Zahl Unterschied (Differenz, Rest).

Das Zeichen der Subtraction ist ein horizontaler Strich (—) und wird minus ausgesprochen, z. B. 5 — 2 bedeutet, daß von der Zahl 5 die Zahl 2 zu subtrahiren ist.

Für die Bequemlichkeit der Rechnung muß man, wie bei der Addition, das Exempel gut ordnen. Hierzu dienen folgende Regeln. Man schreibe:

1) unter den Minuendus den Subtrahendus dergestalt, daß die Zahlen einer und derselben Ordnung gerade über einander zu stehen kommen;
2) ziehe unter die so geordneten Zahlen einen Strich, um den Rest von den beiden gegebenen Zahlen zu trennen;
3) subtrahire, von den Einern anfangend, die Zahlen der gleichartigen Ordnungen von einander und schreibe die Reste genau in die Stelle der Ordnungen; z. B.

86954 — 13241 bekommt, gut geordnet, folgendes Ansehen.

86954 (Minuendus)
13241 (Subtrahendus)
―――――
73713 (Rest).

Ausrechnung: 4 — 1 = 3; 5 — 4 = 1; 9 — 2 = 7; 6 — 3 = 3; 8 — 1 = 7; d. h. 4 Einer — 1 Einer = 3 Einer; 5 Zehner — 4 Zehner = 1 Zehner; 9 Hunderter — 2 Hunderter = 7 Hunderter; 6 Tausender — 3 Tausender = 3 Tausender; 8 Zehntausender — 1 Zehntausender = 7 Zehntausender.

Häufig trifft es sich, daß in irgend einer Stelle im Subtrahendus eine größere Zahl als im Minuendus vorkommt. Hier erinnere man sich, daß eine Einheit jeder höhern Ordnung zehn Einheiten der vorhergehenden niedern beträgt. Man vermindere daher die Zahl in der benachbarten höhern Stelle um Eins, und zähle der Zahl in der niedrigern Stelle Zehn zu, dann wird sich die Subtraction jederzeit verrichten lassen. Dieses Vermindern um Eins heißt — Borgen. — Daß bei einer Stelle geborgt worden, zeigt man gewöhnlich durch einen Punkt an, der neben die Zahl, von der geborgt worden, gesetzt wird. Im folgenden gut geordneten Beispiele kommt in der 2ten und 4ten Stelle dieser Fall vor:

4·7 8·4 6 (Minuendus)
2 9 7 5 6 (Subtrahendus)

1 8 0 9 0 (Rest).

Ausrechnung: 6 Einer von 6 Einern geben zum Reste 0 Einer. — Da 5 Zehner größer als 4 Zehner, so borgt man einen Hunderter = 10 Zehner, und zählt diese zu den schon vorhandenen 4 Zehnern; dann hat man 14 — 5 = 9 Zehner. — Die 8 Hunderter des Minuendus sind jetzt 7 Hunderter geworden, deshalb 7 — 7 = 0 Hunderter. Endlich borgt man bei den 4 Zehntausendern, und erhält 17 — 9 = 8 Tausender; 3 — 2 = 1 Zehntausender.

Kommt im Minuendus in irgend einer Stelle eine Null vor, so borgt man gleichfalls bei der nächstfolgenden Stelle und zählt der Null zehn zu. Wenn aber mehre Nullen im Minuendus auf einander folgen, so kann erst bei der nächsten Stelle geborgt werden, die keine Null ist. Diese Eins in Einheiten der vorhergehenden Null aufgelöst, macht diese zu Zehn; weil aber von dieser Zehn für die ihr vorhergehende Null Eins geborgt wird, so verwandelt sie sich in 9; daher merke man, daß jede Null bei der geborgt ist, bloß 9, bei der nicht geborgt worden, immer 10 gilt, z. B.

9 9 9 10
3·0·0·0·0 5
1 9 3 7 1 4

1 0 6 2 9 1

Hier werden die Nullen in der 3ten, 4ten und 5ten Stelle 9, und die Null der 2ten Stelle bleibt 10.

Soll die Subtraction benannter Zahlen gemacht werden, so müssen sie gleichnamig sein; z. B. Jemand besitzt 240 Rubel und giebt davon 134 Rubel aus; wie viel hat er noch übrig?

Ausrechnung: 2 4·0 Rubel (Minuendus)
1 3 4 „ (Subtrahendus)

1 0 6 Rubel (Rest).

Um sich zu überzeugen, ob man richtig subtrahirt habe, addire man Subtrahendus und Rest, und sehe zu, ob deren Summe, wie es sein soll, dem Minuendus gleich wird, z. B.

8·1·3·0 9 (Minuendus)
1 7 3 1 6 (Subtrahendus)

+ { 6 3 9 9 3 (Rest)
1 7 3 1 6 }

8 1 3 0 9.

Zur Förderung der Arbeit könnte man aus dem Einsundeins eine neue Tabelle entwerfen in der alle Sätze umgekehrt wären. Weiß man z. B. daß 7 + 8 = 15 so hat man umgekehrt 15 — 8 = 7 und 15 — 7 = 8. — Es würde also jeder Satz des Einsundeins, zwei Sätze für die neue Tabelle, die Einsvoneins zu nennen wäre, geben. Doch scheint solches nur für Schüler rathsam die sich langsam entwickeln, denn jeder andere Schüler, dem das Einsundeins geläufig, wird die Umkehrung leicht machen. Am Schnellsten erlangen die Schüler die nöthige Sicherheit dadurch daß man mit ihnen Uebungen im Kopfrechnen anstellt und hierzu die Beispiele aus dieser Tabelle wählt.

Uebungsbeispiele.

1) 846209 — 398536 = 447673.

2) Wie viel bleibt übrig wenn man von 860 wegnimmt 576? Antw.: 284.

3) A nahm in einem Jahre 368 Rubel ein; im zweiten Jahre 510 Rubel; — wie viel im letztern mehr als im erstern? Antw.: 142 Rubel.

4) Wie viel muß man zu 364 hinzufügen damit 1000 entstehe? Antw.: 636.

5) Von einer Million werden weggenommen 789438; wie viel bleibt zurück? Antw.: 210562.

Exempel Nr. 174—248.

Multiplication.

§ 13. Multipliciren heißt, eine Zahl (den Multiplicandus) so oft mal nehmen, als eine zweite Zahl (der Multiplicator) Einheiten enthält; z. B. 7 multiplicirt mit 3 zeigt an, daß die Zahl 7 als Summand 3 mal zu nehmen ist, daher die gesuchte Zahl den Werth von $7 + 7 + 7$ habe. Die herauskommende Zahl heißt Product. — Da der Multiplicator bloß anzeigt, wie viel gleiche Summanden vorkommen, so muß derselbe unter allen Umständen eine abstracte Zahl und das Product mit dem Multiplicandus gleichnamig sein. — Multiplicandus und Multiplicator haben auch den gemeinsamen Namen Factoren. Das Zeichen der Multiplication ist ein liegendes Kreuz ($\times$) oder ein zwischen die Factoren gesetzter Punkt (.), so daß durch 5×6 oder $5 . 6$ die Multiplication der Zahlen 5 und 6 angedeutet wird.

Um zwei Zahlen rasch und mit Sicherheit zu multipliciren, muß man die Producte von je zwei Einern kennen. Diese Producte stellt man gewöhnlich in eine Tabelle zusammen und lernt sie auswendig. Diese Tabelle heißt das Einmaleins. Es ist folgendes:

2 mal 2 = 4
2 „ 3 = 6
2 „ 4 = 8
2 „ 5 = 10
2 „ 6 = 12
2 „ 7 = 14
2 „ 8 = 16
2 „ 9 = 18

3 mal 3 = 9
3 „ 4 = 12
3 „ 5 = 15
3 „ 6 = 18
3 „ 7 = 21
3 „ 8 = 24
3 „ 9 = 27

4 mal 4 = 16
4 „ 5 = 20
4 „ 6 = 24
4 „ 7 = 28
4 „ 8 = 32
4 „ 9 = 36

5 mal 5 = 25
5 „ 6 = 30
5 „ 7 = 35
5 „ 8 = 40
5 „ 9 = 45

6 mal 6 = 36
6 „ 7 = 42
6 „ 8 = 48
6 „ 9 = 54

7 mal 7 = 49
7 „ 8 = 56
7 „ 9 = 63

8 mal 8 = 64
8 „ 9 = 72

9 mal 9 = 81

Soll eine mehrstellige Zahl mit einer einstelligen multiplicirt werden, so setze man den Multiplicandus über den Multiplicator, nämlich: 4357 (Multiplicandus)
8 (Multiplicator)
verrichte die Multiplication, bei den Einern anfangend, mit jeder Stelle des Multiplicandus, und addire darauf die Partialproducte. Die Rechnung erhält folgendes Ansehen:

$$\begin{array}{r}
4357 \\
8 \\
\hline
56 = 7 \times 8 \\
400 = 50 \times 8 \\
2400 = 300 \times 8 \\
32000 = 4000 \times 8 \\
\hline
34856 = 4357 \times 8.
\end{array}$$

Die Rechnung wird dadurch abgekürzt, daß man die einzelnen Partialproducte nicht wirklich aufschreibt und dann addirt, sondern die Addition sogleich im Kopfe verrichtet. Man hat nämlich (7 Einer) $\times$ 8 = 56 Einer = 5 Zehner + 6 Einer. Die Einer schreibt man unter den Strich in die Stelle der Einer, und behält die Zehner im Sinne. Nun hat man ferner (5 Zehner) $\times$ 8 = 40 Zehner, und hierzu die im Sinne behaltenen 5 Zehner geben 45 Zehner = 4 Hunderter + 5 Zehner. — Die 5 Zehner werden unter den Strich in die Stelle der Zehner geschrieben und die 4 Hunderter im Sinne behalten u. s. w. Auf diese Art erhält unser Exempel folgende Gestalt:

$$\begin{array}{r}
4357 \\
8 \\
\hline
34856.
\end{array}$$

Hat man einen mehrstelligen Multiplicator, so multiplicirt man den Multiplicandus mit jeder einzelnen Ziffer des Multiplicators nach der Reihe von der Rechten zur Linken, und addirt die einzelnen Partialproducte, z. B.

$$\begin{array}{r}
3459 \times 375 \\
\hline
17295 = 3459 \times 5 \\
242130 = 3459 \times 70 \\
1037700 = 3459 \times 300 \\
\hline
1297125 = 3459 \times 375
\end{array}$$

oder abgekürzt:

3459	
375	
17295	Product der Einer.
24213	— — Zehner, fängt bei der 2ten Stelle an.
10377	— — Hunderter, — — — 3ten — —
1297125.	

Ueber die Anordnung der Producte aus dem ganzen Multiplicandus und den verschiedenen Stellen des Multiplicators merke man sich Folgendes. Die erste Stelle des zweiten Products wird unter die zweite des ersten, die erste Stelle des dritten Products unter die zweite des zweiten, d. h. die dritte des ersten, u. s. w. gesetzt, oder was dasselbe ist: man rücke jedes Product um so viel Stellen ein, als durch die Ordnung, mit der multiplicirt worden, angezeigt wird, z. B. das Product der Hunderter geht bei der 3ten Stelle an u. s. w.

Wenn der Multiplicator in einigen Stellen Nullen hat, so übergeht man diese; muß aber die aus der Multiplication der folgenden Stelle mit dem Multiplicandus sich ergebende Zahl richtig ordnen, z. B.

```
    457093
     20079
   -------
   4113837
  3199651
 914186
 ----------
 9177970347
```

Haben beide Factoren oder nur einer zur Rechten mehre Nullen, so läßt man diese weg, multiplicirt die übrigbleibenden Zahlen, und hängt dem Producte zur Rechten so viel Nullen an, als beide zusammen haben, z. B.

```
  28400
   21000
 -------
   284
  568
 ----------
 596400000.
```

Sind mehrere Zahlen mit einander zu multipliciren, so multiplicire man zuerst zwei der gegebenen Zahlen mit einander und alsdann das erhaltene Product mit der dritten, vierten u. s. w. — Natürlich wird man denjenigen Factor zum ersten Multiplicandus machen, der die meisten Stellen hat. Z. B. 34 × 5847 × 102.

Ausrechnung:

```
    5847
      34
  ------
   23388
  17541
  ------
  198798 = 34 × 5847
     102
  ------
  397596
 1987980
 -------
20277396 = 34 × 5847 × 102.
```

Die Anwendung der Multiplication auf benannte Zahlen führt uns zuweilen auf Aufgaben, wo es scheint, als ob zwei benannte Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen. In diesem Falle muß man durch Beurtheilung des Zusammenhanges bestimmen, welche der beiden Zahlen als Multiplicator zu nehmen sei; z. B. wenn 1 Pfund mit 3 Rubel bezahlt wird, wie theuer sind 5 Pfund?

Ausrechnung: Da 5 Pfund 5 mal mehr betragen als 1 Pfund, so ist klar, daß man 3 Rubel, d. h. den Werth eines Pfundes, 5 mal nehmen müsse; also 5 Pfund gelten (3 Rubel) × 5 = 15 Rubel.

2) Ein Pferd braucht 3 Tschetwert Hafer; wie viel wird für 12 Pferde nöthig sein?

Ausrechnung. Da 12 Pferde 12 mal mehr bedürfen als 1 Pferd, so ist klar, daß für diese (3 Tschetwert) × 12 = 36 Tschetwert erforderlich sein werden.

Uebungsbeispiele.

1) 753 × 9 = 6777.
2) 3064 × 24 = 73536
3) 1765 × 708 = 1248620

4) Wieviel erhält man, wenn 83, 84 und 85 mit einander multiplicirt werden? Antw.: 592620.
5) Um wie viel ist das Product von 75 $\times$ 18 größer als 35 $\times$ 24? Antw. 510.
6) 350 $\times$ 12 + 16 $\times$ 50 = 12000.
7) 234 $\times$ 18 — 30 $\times$ 63 = 2262.
8) Wie viel erhält man, wenn die Summe der Zahlen 65 und 38 mit 52 multiplicirt wird? Antw. 5356.
9) Wie groß ist der 25fache Unterschied von 87 und 32? Antw. 1375.
10) Ein Pfund kostet 4 Rubel; wie theuer sind 35 Pfund? Antw. 140 Rubel.
11) Ein Vater will jedem von seinen 6 Kindern 8 Aepfel geben; — wie viel muß er kaufen? Antw. 48 Aepfel.
12) Ein Arbeiter verdient täglich 18 Kopeken; wie viel ist zu zahlen für 3 Tage? Antw. 54 Kop.

Exempel Nr. 299 — 398.

Division.

§. **14.** Dividiren heißt angeben, wie viel mal eine Zahl (der Divisor) in einer andern (Dividendus) enthalten sei, oder auch eine Zahl (Dividendus) in so viel gleiche Theile zerlegen, als eine andere (Divisor) Einheiten enthält. — Ob wir die Aufgabe im erstern oder letztern Sinne zu nehmen haben, wird durch die Form der Frage näher bestimmt. Das Erstere heißt messen, das Letztere theilen; z. B. wie oft steckt 4 in 12? — ist eine Aufgabe des Messens. — Wie groß ist der 4te Theil von 12? — eine Aufgabe des Theilens.

Die gesuchte Zahl wird Quotient genannt. Das Zeichen der Division ist ein Kolon (:) und wird so gesetzt, daß der Dividendus vor und der Divisor nach demselben steht.

Betrachten wir die Division als ein Messen, so werden wir den Quotienten durch wiederholte Subtractionen des Divisors vom Dividendus finden, denn es ist klar, daß der Divisor so viel mal im Dividendus stecken muß, als er von demselben weggenommen werden kann. Für obiges Beispiel würde die Ausrechnung sein:

Von 12
die 4 das erste Mal subtrahirt, läßt
den Rest 8
die 4 „ zweite „ „ „
den Rest 4
die 4 „ dritte „ „ „
den Rest 0.

Da der Divisor 4 von dem Dividendus 12 3 mal weggenommen werden kann, so heißt der Quotient: 3 mal.

Im Sinne des Theilens müssen wir angeben, aus wie viel Einheiten jeder der gleichen Theile bestehe. Rechnen wir in obiger Aufgabe auf jeden Theil eine Einheit, so macht dieses für alle 4 Theike vier Einheiten aus. Diese subtrahiren wir von 12 und erhalten den Rest = 8. — Nehmen wir wiederum auf jeden Theil eine Einheit, so haben wir aufs Neue vier Einheiten abzuziehen, und jetzt kommen auf jeden Theil 2 Einheiten. Von dem neuen Reste = 4 können wir noch zu jedem Theile eine Einheit hinzuthun und dann bleibt nichts übrig; folglich enthält jeder Theil 3 Einheiten, d. h. der vierte Theil von 12 ist = 3.

Wir sehen aus dieser Auflösung, daß die absolute Größe des Quotienten unverändert bleibt, nur die Form der Antwort ändert sich mit der Frage. Hieraus folgt, daß wir die Frage vor der Operation verwechseln können, und ändern nachher die Antwort entsprechend um. Diese Veränderung der Frage ist deshalb zweckmäßig, weil wir das Verfahren beim Dividiren am leichtesten dadurch erklären können, daß wir die Aufgabe bloß als ein Theilen ansehen.

§. **15.** In dem vorhin gegebenen Beispiele blieb nach wiederholter Subtraction kein Rest; man übersieht aber leicht, daß dieses nicht eine nothwendige Bedingung sein kann, denn eben so gut, wie wir 12 in 4 gleiche Theile theilen wollen, können wir auch verlangen, daß jede andere Zahl, z. B. 11, in vier gleiche Theile getheilt werde. — Hier hätten wir gefunden, daß die 4 2 mal subtrahirt werden kann, und daß noch ein Rest von 3 Einheiten des Dividendus übrig bleibt. — Im Sinne der ersten Frage würde demnach die Antwort heißen: der Divisor steckt 2 mal im Dividendus und es bleibt ein Rest von 3 Einheiten. Im Sinne der zweiten Frage: der vierte Theil von 11 besteht aus 2 Einheiten, und es bleiben noch ungetheilt 3 Einheiten. — Es versteht sich von selbst, daß der Divisor immer größer sein muß, als der Rest, indem man entgegengesetzten Falles noch ein Mal denselben hätte subtrahiren können.

§. 16. Der Quotient ist mit dem Dividendus immer gleichartig. Wissen wir nun, daß der dritte Theil von 6 gleich 2 ist, so folgt, daß der dritte Theil von 6 Einheiten irgend einer Ordnung auch zwei Einheiten derselben Ordnung sein muß; also:

$$6 : 3 = 2$$
$$60 : 3 = 20$$
$$600 : 3 = 200$$
$$6000 : 3 = 2000 \text{ u. s. w.}$$

Um die Arbeit zu fördern, hat man nur nöthig, rasch und mit Sicherheit anzugeben, wie viel mal ein einstelliger Divisor in einem Producte aus zwei einstelligen Zahlen enthalten sei. Man bedient sich hierzu des umgekehrten Einmaleins; denn weiß man, daß $8 \times 9 = 72$ ist, so ist umgekehrt der 8te Theil von $72 = 9$, und der 9te Theil von $72 = 8$, d. h. $72 : 8 = 9$ und $72 : 9 = 8$. — Befindet sich im Einmaleins kein solches Product wie die vorliegende Zahl, so nimmt man das nächst kleinere Product; z. B. bei $42 : 5$ sieht man, da $5 \times 8 = 40$ und $5 \times 9 = 45$ ist, daß $5 \times 8 = 40$ zu nehmen ist.

§. 17. Die gebräuchlichste Art, die Zahlen bei der Division zu ordnen, ist folgende: Man schreibt Divisor, Dividendus und Quotient in eine horizontale Reihe und trennt sie durch verticale Striche. — Gewöhnlich wird die Division auf folgende Weise verrichtet:

	Divisor	Dividendus	Quotient
1)	5	780	

Hier soll man zuerst 7 Hunderter in 5 gleiche Theile theilen, also kommt auf jeden Theil 1 Hunderter. — Jetzt sind

5 Hunderter vertheilt, und es bleiben 2 Hunderter übrig. Diese verwandeln wir in 20 Zehner, und zählen die im Dividendus vorkommenden 8 Zehner dazu. — Von 28 Zehnern kommen auf jeden Theil 5 Zehner, weil 5 . (5 Zehner) = 25 Zehner. Der Rest von 3 Zehnern ist = 30 Einern, wozu nichts aus dem Dividendus zu setzen ist, da in demselben die Einer fehlen. — Der 5te Theil von 30 Einern ist = 6 Einern; daher der ganze Quotient = 1 Hunderter + 5 Zehner + 6 Einer.

$$= 100 + 50 + 6$$
$$= 156.$$

Auf die gebräuchliche Art die Division geordnet, giebt folgendes Schema:

$$\begin{array}{rl} & 5 \mid 780 \mid 156 \\ 5 \times 1 = & \underline{5\,.\,.} \\ & 28\,. \\ 5 \times 5 = & \underline{25\,.} \\ & 30 \\ 5 \times 6 = & \underline{30.} \end{array}$$

Zweites Beispiel:

$$\begin{array}{rl} & 7 \mid 2415 \mid 245 \\ 7 \times 3 = & \underline{21\,.\,.} \\ & 31\,. \\ 7 \times 4 = & \underline{28\,.} \\ & 35 \\ 7 \times 5 = & \underline{35.} \end{array}$$

Da von 2 Tausendern der 7te Theil keine ganze Einheit ist, so verwandle ich die Tausender sogleich in 20 Hunderter und suche den 7ten Theil von 24 Hundertern. Dieser ist = 3 Hundertern; 7 × (3 Hunderter) = 21 Hunderter lassen einen Rest = 3 Hunderter = 30 Zehner, wozu noch aus dem Dividendus 1 Zehner hinzukommt. Der 7te Theil von 31 Zehnern ist = 4 Zehner; 7 × (4 Zehner) = 28 Zehner, von 31 Zehnern subtrahirt, geben den Rest = 3 Zehner = 30 Einer. Zu diesen noch die Einer aus dem Dividendus genommen, machen 35 Einer, deren 7ter Theil = 5 Einer ist.

Ist in der Mitte oder am Ende der Rechnung die Zahl, in welche man dividiren soll, kleiner als der Divisor, so muß man im Quotienten 0 setzen, und die folgende Stelle, wenn eine im Dividendus vorhanden sein sollte, herunterziehen. Zur Verdeutlichung des eben Gesagten diene folgendes Beispiel:

6 | 18638 | 3106
$6 \times 3 = 18...$
6..
$6 \times 1 = 6..$
3.
$6 \times 0 = 0.$
38
$6 \times 6 = 36$
Rest = 2.

§. 18. Wenn der Divisor eine mehrstellige Zahl ist, so wird die Division auf gleiche Weise verrichtet, nur ist es schwieriger, den jedesmaligen Theil des Quotienten zu finden. Diese Schwierigkeit entsteht dadurch, daß wir den ganzen Divisor auf einmal in Betracht ziehen müssen. — Hier hilft man sich durch Probiren, indem man mehre mal versucht, bis das nächst kleinere abzuziehende Product gefunden ist. Daß solches wirklich geschehen, ersieht man aus dem jedesmaligen Reste, der immer kleiner sein muß als der Divisor; z. B.

45 | 1710 | 38
$45 \times 3 = 135.$
360
$45 \times 8 = 360.$

17 : 45 geht nicht, also 171 : 45. — Nimmt man nun zum Quotienten 4, so ist $45 \times 4 = 180$ zu groß, daher nehme man zum Quotienten 3, denn $45 \times 3 = 135$, welches Product von 171 subtrahirt werden kann. Der übrigbleibende Rest = 36 ist kleiner als der Divisor, daher 3 der richtige Theil des Quotienten. Setzt man nun die 0 aus dem Dividendus zu 36 herunter, so giebt 360 : 45 zum Quotienten 8, denn $45 \times 8 = 360$, weshalb kein Rest übrig bleibt.

Man kürzt das Probiren ab dadurch, daß man mit der höchsten Stelle des Divisors allein in eine, wenn es angeht, oder in zwei Zahlen der höchsten Stelle des jedesmaligen Restes dividirt. — Findet es sich, daß das Product aus dem Divisor und dem gefundenen Theile des Quotienten zu groß ist, so verkleinert man den Quotienten um 1; ist dagegen nach geschehenem Abzuge der Rest größer als der Divisor, so hat man im Quotienten zu wenig genommen, und muß den gefundenen Theil um 1 vergrößern, z. B.

$$\begin{array}{rr} & 345 \mid 91425 \mid 265 \\ 345 \times 2 = & \underline{690\,.\,.} \\ & 2242\,. \\ 345 \times 6 = & \underline{2070\,.} \\ & 1\;\;725 \\ 345 \times 5 = & \underline{1725.} \end{array}$$

Man sagt statt 345 in 914 bloß 3 in 9 geht 3 mal; aber $345 \times 3 = 1035$ ist größer als 914, daher verkleinere man den Quotienten 3 um 1, wodurch erhalten wird $3 - 1 = 2$; $345 \times 2 = 690$ abgezogen, giebt den Rest $= 224$, wozu die folgende Stelle aus dem Dividendus gesetzt wird; 3 in 22 geht 7 mal, aber $345 \times 7 = 2415$ ist zu groß, daher nehme man 6; $345 \times 6 = 2070$ abgezogen läßt den Rest $= 172$; hierzu die 5 aus dem Dividendus gesetzt; 3 in 17 geht 5 mal; $345 \times 5 = 1725$.

§. **19.** Aus den vorhergehenden Paragraphen ergiebt sich:

1) daß das Product aus dem Divisor und dem gefundenen Theile des Quotienten sich immer müsse abziehen lassen von den entsprechenden Stellen des Dividendus;

2) daß der Rest nach geschehenem Abzuge immer kleiner sein müsse als der Divisor;

3) daß für jede Stelle des Dividendus, die herunter gesetzt wird, der Quotient auch eine Stelle erhält.

§. **20.** Ob man richtig dividirt habe, läßt sich dadurch prüfen, daß man den Divisor mit dem Quotienten multiplicirt und zusieht, ob auch das Product dem Dividendus gleich wird.

Ist bei der Division ein Rest geblieben, so zählt man denselben zum Producte in den entsprechenden Stellen zu; z. B.

	Probe:
406 | 100903 | 248	248
812..	406
1970.	1488
1624.	992
3463	100688 } +
3248	215 }
Rest = 215	100903.

§. 21. In der Anwendung der Division auf benannte Zahlen unterscheiden wir die beiden Divisionsformen leichter; z. B.

1) Wie oft sind 3 Rubel in 24 Rubel enthalten?

Ausrechnung: (24 Rubel) : (3 Rubel) = 8 mal; eine Aufgabe des Messens.

2) Wie groß ist der 5te Theil von 35 Pfund?

Ausrechnung: (35 Pfund) : 5 = 7 Pfund; eine Aufgabe des Theilens.

Eben so verhält es sich mit Aufgaben, bei denen erst zu entscheiden ist, ob und mit welcher Zahl zu dividiren sei; z. B.

3) Wenn 5 Arbeiter 20 Rubel verdient haben, wieviel bekommt ein Arbeiter?

Ausrechnung: Offenbar bekommt 1 Arbeiter den 5ten Theil von dem ganzen Arbeitslohne, demnach 1 Arbeiter ..... (20 Rubel) : 5 = 4 Rubel.

Uebungsbeispiele.

1) Wie oft ist 9 enthalten in 342? Antw. 38 mal
2) Wie groß ist der 12te Theil von 384? Antw. 32.
3) 28470 : 365 = 78.
4) 1474880 : 704 = 2095.
5) Der Multiplicator war 5327, das Product ergab sich = 13658428; wie groß war der Multiplicandus? Antw. 2564.
6) Wie groß ist der 5te Theil von 6 × 9 + 11? Antw. 13.
7) (28 + 3 × 9 + 125) : 45 = 4.
8) 510 : 17 + 285 : 5 + 460 : 4 = 202.

9) Unter 4 Arbeiter werden 48 Rubel vertheilt; wie viel erhält jeder? Antw. 12 Rubel.
10) Wie groß ist der 8te Theil von 160 Federn? Antw. 20 Federn.
11) Wie oft sind drei Tage enthalten in 24 Tagen? Antw. 8 mal.

Exempel Nr. 399 — Nr. 478.

Uebungsfragen:
1) Was sind gleichartige Dinge?
2) Wie nennt man eine Menge gleichartiger Dinge?
3) Was sind benannte und was unbenannte Zahlen?
4) Was heißt rechnen?
5) Was heißt ein Zahlensystem?
6) Was sind Ordnungen, was Klassen im Decimalsystem?
7) Aus wie viel Ordnungen besteht jede Klasse?
8) Was sind Ziffern?
9) Wie viel Ziffern giebt es?
10) Wie sind Zahlen, Zahlwörter und Ziffern von einander verschieden?
11) Warum werden die gebräuchlicheu Ziffern arabische genannt?
12) Wodurch wird es möglich, mit den neun Ziffern und der Null alle Zahlen zu schreiben?
13) Was heißt numeriren?
14) Was versteht man unter Species oder Grundrechnungen?
15) Welche Zahlen nennt man Summanden, welche Factoren?
16) Welche Zahlen können nur addirt werden?
17) Bei welcher Ordnung fängt man an zu addiren?
18) Welche Benennung erhält die Summe, wenn die Posten benannte Zahlen sind?
19) Was thut man, wenn die Summe der Ziffern einer Ordnung mehr als 9 beträgt?
20) Was versteht man unter dem sogenannten Einsundeins?
21) Was heißt subtrahiren?
22) Wieviel Zahlen sind zur Subtraction erforderlich?
23) Worin besteht die Probe der Subtraction?
24)* Was versteht man bei der Subtraction unter — Borgen?
25) Wie verfährt man, wenn bei einer Null geborgt werden muß?
26) Was wird aus den Nullen, über die weggeborgt worden?

27) Was heißt multipliciren?
28) Was ist das Einmaleins?
29) Warum fängt man die Multiplication bei der niedrigsten und nicht bei der höchsten Stelle an?
30) Was giebt 0 mit jeder Zahl multiplicirt und wie viel erhält man, wenn irgend eine Zahl mit 0 multiplicirt wird?
31) Wie werden mehr als zwei Zahlen mit einander multiplicirt?
32) Kann der Multiplicator eine benannte Zahl sein?
33) Welche Benennung erhält das Product, wenn der Multiplicandus eine benannte Zahl ist?
34) Was heißt messen, was theilen?
35) Wie muß ein Divisionsrest der Größe nach im Vergleiche mit dem Divisor beschaffen sein?
36) Wie verfährt man, wenn der Divisionsrest mit der heruntergezogenen Ziffer des Dividendus kleiner ist, als der Divisor?
37) Welches ist die Probe der Division?

Vom größten gemeinsamen Maße zweier Zahlen. — Kennzeichen der Theilbarkeit einer Zahl durch 2, 4, 8, 5, 3, 9, 6, 11. — Vom kleinsten gemeinsamen Vielfachen mehrer Zahlen.

§. **22.** Jede Zahl können wir uns als Einheit denken, und davon irgend ein Vielfaches nehmen; — jede Zahl kann also Factor sein. Umgekehrt ist aber jede Zahl nicht ein Product. Hiernach theilen wir die Zahlen ein in solche, die andere als Factoren enthalten, und in solche, die keine Factoren haben. Jene heißen zusammengesetzte, diese Grund- oder Primzahlen. — Haben zwei Zahlen keine anderen gemeinsamen Factoren als 1, so heißen sie relative Primzahlen, oder Primzahlen unter sich.

§. **23.** Eine Zahl, die in zwei andere Zahlen aufgeht, heißt ihr gemeinschaftlicher Theiler. Den größten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen zu bestimmen, ist von besonderer Wichtigkeit beim Rechnen. Derselbe wird durch folgendes Verfahren gefunden:

Man dividire mit der kleinern Zahl in die größere; hierauf mit dem übrigbleibenden Reste in den vorigen Divisor u. s. w., bis man auf einen Rest = 0 kommt, d. h. bis die Dision aufgeht. — Der letzte Divisor ist der gesuchte größte Theiler.

Am folgenden Beispiele übersieht man das zu beobachtende Verfahren:

```
455 | 805 | 1
      455
    -----
      350 | 455 | 1
            350
          -----
            105 | 350 | 3
                  315
                -----
                   35 | 105 | 3
                        105
                      -----
                          0.
```

Also ist 35 der größte gemeinsame Theiler der beiden gegebenen Zahlen 455 und 805. — Dieses Verfahren heißt: *den größten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen durch Kettendivision finden.*

§. **24**. Jede Zahl als Factor giebt ihren Producten eigenthümliche Kennzeichen. Aus diesen Kennzeichen kann man rückwärts auf das Vorhandensein des Factors schließen.

1) Jede Zahl ist durch 2 theilbar, deren letzte Ziffer (die Einer) 0, 2 oder ein Vielfaches von 2 ist.

Anmerkung. Jede Zahl, welche 2 zum Theiler hat, nennt man eine *gerade* Zahl, jede andere eine *ungerade*. Die geraden Zahlen endigen daher mit 0, 2, 4, 6, 8 und die ungeraden mit 1, 3, 5, 7, 9.

2) Jede Zahl ist durch 5 theilbar, deren letzte Ziffer 0 oder 5 ist;

z. B. 25, 130, 275 u. s. w.

3) Durch 4 ist jede Zahl theilbar, deren zwei letzten Ziffern (die Zehner und Einer) entweder Nullen oder ein Vielfaches von 4 sind;

z. B. 212, 324, 1200, 1700 u. s. w.

4) Durch 8 ist jede Zahl theilbar, deren drei letzten Ziffern (die Hunderter, Zehner und Einer) entweder Nullen oder ein Vielfaches von 8 sind;

z. B. 784136, weil 136 durch 8 theilbar ist.

Erklärung. Die Summe der absoluten Werthe der Ziffern einer Zahl heißt die Quersumme; z. B. von 378946 ist die Quersumme $= 3 + 7 + 8 + 9 + 4 + 6 = 37$.

5) Durch 3 und 9 ist jede Zahl theilbar, wenn die Quersumme durch 3 oder 9 sich theilen läßt; z. B.

durch 3 die Zahl 723, weil $7 + 2 + 3 = 12$ durch 3,

und durch 9 die Zahl 1845, weil $1 + 8 + 4 + 5 = 18$ durch 9 theilbar ist.

6) Weil $6 = 2 \times 3$, so muß 6 in jeder Zahl aufgehen, in welcher 2 und 3 zugleich aufgehen, d. h. jede gerade Zahl, die durch 3 theilbar ist, wird auch durch 6 getheilt.

7) Durch 11 ist jede Zahl theilbar, wenn der Unterschied der Quersumme aus den geraden und ungeraden Stellen der Zahl entweder $= 0$ oder ein Vielfaches von 11 ist; z. B.

a) 3267 ist durch 11 theilbar, weil

die Quersumme der geraden Stellen $= 3 + 6 = 9$,

" " " ungeraden " $= 2 + 7 = 9$,

und $9 - 9 = 0$.

b) 3014809171, weil

$3 + 1 + 8 + 9 + 7 = 28$ und $0 + 4 + 0 + 1 + 1 = 6$;

daher $28 - 6 = 22 = 2 . 11$.

§ 25. Man findet den größten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen auch dadurch, daß man beide Zahlen in ihre Primfactoren zerlegt und diejenigen heraushebt, welche sie mit einander gemein haben; — das Product derselben ist der größte gemeinsame Theiler; z. B.

1) den größten gemeinsamen Theiler von 78 und 104 zu bestimmen.

Ausrechnung: 78 = 2 . 13 . 3.

104 = 2 . 2 . 2 . 13.

Beide haben die Factoren 2 und 13 gemeinschaftlich, also ist der größte Theiler für beide Zahlen = 2 . 13 = 26.

2) Den größten Theiler von 693 und 780 zu bestimmen.

Ausrechnung: 693 = 3 . 3 . 7 . 11.

780 = 3 . 2 . 2 . 5 . 13.

Beide Zahlen haben nur den Factor 3 gemeinschaftlich; also ist der größte Theiler = 3.

3) Den größten Theiler von 25 und 12 zu bestimmen.

Ausrechnung: 25 = 5 . 5.

12 = 3 . 4.

Beide sind Primzahlen unter sich, da sie keinen Factor gemein haben.

Man nennt dieses Verfahren: die Bestimmung des größten gemeinsamen Theilers zweier Zahlen durch Zerlegung in ihre Primfactoren.

Exempel Nr. 584—613.

§ **26.** Multiplicirt man mehre Zahlen mit einander, so muß das Product durch jede dieser Zahlen theilbar sein; z. B. da 2 . 3 . 5 . 11 = 330, so ist 330 durch jeden seiner Factoren theilbar. Sollen wir nun eine Zahl bestimmen, in der mehre gegebene Zahlen aufgehen, so haben wir nur nöthig, ihr Product zu nehmen. Dieses Product heißt das gemeinsame Vielfache der gegebenen Zahlen. — Nach Beschaffenheit der vorliegenden Zahlen erhält man deren gemeinsame Vielfache, die viel kleiner sind als ihr Product. Am besten und für das praktische Rechnen am zweckmäßigsten ist das kleinste gemeinsame Vielfache. — Hierzu dient folgendes methodisches Verfahren:

1) Man lasse erst alle diejenigen Zahlen, die in den andern gegebenen Zahlen aufgehen, weg. — Kommt eine Zahl mehre Mal vor, so hat man nur nöthig, sie ein einziges Mal zu nehmen.

2) Man dividire mit einer Primzahl, die in zwei oder mehren der gegebenen Zahlen als Factor vorkommt, diese Zahlen; — bemerke sich den Divisor und die Quotienten; — dividire auf's Neue mit einer Primzahl, die noch als Factor in

den erhaltenen Quotienten und den anderen gegebenen Zahlen enthalten sein möchte; — bemerke diesen Divisor und setze die neuen Quotienten hin; — und fahre auf diese Weise fort, bis die herauskommenden Quotienten keinen gemeinsamen Factor haben; — hierauf multiplicire man die Quotienten mit den gebrauchten Divisoren.

Erstes Beispiel: Es ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 4, 5, 12, 20, 15, 24, 30, 25, 40, 50, 75 zu suchen.

Ausrechnung:

	$\cancel{4}$,	$\cancel{5}$,	$\cancel{12}$,	$\cancel{20}$,	$\cancel{15}$,	24,	30,	$\cancel{25}$,	40,	50,	75
a) 2						12,	15,		20,	25,	75
b) 2						6,	15,		10,	25,	75
c) 2						3,	15,		5,	25,	75
d) 3						1,	5,		5,	25,	25
e) 5						1,	1,		1,	5,	5
f) 5						1,	1,		1,	1,	1

Zuerst wurden 4, 5, 12, 20, 15 und 25 als Factoren anderer vorkommenden Zahlen gestrichen; hierauf dividirte man mit der Primzahl 2 in 24, 30, 40 und 50, — setzte den Divisor an den Rand und die herauskommenden Quotienten unter die correspondirenden Zahlen; 75 wurde unverändert heruntergezogen, weil 2 in 75 nicht aufgeht. — Die Quotientenreihe (a) dividirte man noch ein Mal mit 2, — setzte den Divisor an den Rand, und die sich ergebenden Quotienten unter die correspondirenden Zahlen. — Der dritte Divisor für die Quotientenreihe (b) ist gleichfalls die Zahl 2, weil sie sich als Factor in den Zahlen 6 und 10 vorfindet. Da jetzt in keinem der vorkommenden Quotienten in der Reihe (c) die Primzahl 2 aufgeht, so wählen wir zum Divisor die nächst größere Primzahl, nehmlich 3. — Die beiden darauf folgenden Divisoren sind 5. — Nun werden die Divisoren mit einander multiplicirt, und man hat zum kleinsten Vielfachen der gegebenen Zahlen

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 600.$$

Noch schneller kommt man zum Ziele, wenn in der Quotientenreihe (a) die Zahlen 15 und 25 gestrichen werden, weil sie in 75 aufgehen, dann bleiben in der Reihe (b) bloß die Zahlen 6, 10 und 75, und wenn diese mit 2 dividirt werden, in der Reihe (c) nur die Zahlen 3, 5 und 75. — Streicht man hier ebenfalls 3 und 5 weg, weil sie in 75 aufgehen, so bleibt nur die Zahl 75 zurück. — Das kleinste gemeinsame Vielfache ist nun:

$$2 . 2 . 2 . 75 = 600.$$

Zweites Beispiel:

	$\cancel{2}$,	$\cancel{4}$,	$\cancel{7}$,	$\cancel{8}$,	12,	$\cancel{16}$,	21,	15,	32
2					6,		21,	15,	16
2					$\cancel{3}$,		21,	15,	8
3							7,	5,	8

Da 7, 5 und 8 relative Primzahlen sind, also keinen gemeinsamen Theiler haben, so ist das kleinste gemeinsame Vielfache

$$= 2 . 2 . 3 . 7 . 5 . 8 = 3360.$$

Exempel Nr. 634—663.

Von den Brüchen.

§ 27. Denken wir uns was immer für eine Einheit in lauter gleiche Theile getheilt, so heißt jeder einzelne Theil ein Stammbruch oder eine Brucheinheit. — Man bezeichnet die Brucheinheiten, je nachdem das Ganze in 2, 3, 4, 5 u. s. w. gleiche Theile getheilt worden, durch:

$$\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{3};\ \tfrac{1}{4};\ \tfrac{1}{5} \text{ u. s. w.}$$

Jedes Vielfache einer Brucheinheit heißt ein Bruch. Die Brüche entstehen dadurch, daß man ein Ganzes in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilt, und einen oder mehre dieser Theile nimmt.

Die Größe eines Bruches wird demnach durch zwei Zahlen bestimmt, von denen die eine angiebt,

a) in wieviel gleiche Theile die Einheit getheilt worden, und die andere,

b) wieviel solcher Theile genommen sind.

Die erstere Zahl heißt der **Nenner**, die letztere — der **Zähler** des Bruches.

Zur Bezeichnung der Brüche bedient man sich zweier Ziffern, die, durch einen horizontalen Strich getrennt, über einander stehen. Die obere Zahl ist der Zähler, die untere der Nenner; z. B.

$$\frac{2}{3};\ \frac{7}{8};\ \frac{9}{10};\ \frac{15}{23}\ \ldots\ \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}.$$

Es heißt demnach:

$\frac{2}{3}$ = zwei Drittel,

$\frac{7}{8}$ = sieben Achtel,

$\frac{15}{23}$ = funfzehn Dreiundzwanzigstel u. s. w.

§ 28. Aus der Erklärung der Brüche ergiebt sich unmittelbar:

1) daß jeder Stammbruch erhalten wird, wenn man die Einheit durch den Nenner dividirt; z. B. $\frac{1}{2} = 1:2$; $\frac{1}{5} = 1:5$; $\frac{1}{9} = 1:9$ u. s. w.;

2) daß jeder andere Bruch als eine Summe so vieler Stammbrüche desselben Nenners gedacht werden kann, als der Zähler angiebt, oder als ein Product, dessen Multiplicandus der Stammbruch, und dessen Multiplicator der Zähler vorstellt; z. B.

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = (\tfrac{1}{7}) \,.\, 5.$$
$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = (\tfrac{1}{4}) \,.\, 3.;$$

3) daß jeder Bruch als Quotient anzusehen ist, bei welchem der Zähler den Dividendus und der Nenner den Divisor vorstellt, denn

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = (1:5) + (1:5) + (1:5) = (1+1+1):5 = 3:5;$$

4) daß der Zähler eines Bruches (d. h. der Dividendus) erhalten wird, wenn man den Bruch (d. h. Quotienten) mit seinem Nenner (d. h. Divisor) multiplicirt; denn

$$\begin{aligned}(\tfrac{3}{5}).5 &= (\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}).5 = (\tfrac{1}{5}).5 + (\tfrac{1}{5}).5 + (\tfrac{1}{5}).5\\ &= (1:5).5 + (1:5).5 + (1:5).5\\ &= \quad 1 \quad + \quad 1 \quad + \quad 1 \quad = 3.\end{aligned}$$

§ 29. **Lehrsatz.** Brüche mit gleichen Nennern werden zu einander addirt, wenn man ihre Zähler addirt und den gemeinsamen Nenner beibehält.

Beweis. Da nur Gleichartiges mit Gleichartigem verbunden werden kann, und der Nenner die Gattung der Einheiten angiebt, aus denen ein Bruch besteht, so fällt die Richtigkeit des Satzes von selbst in die Augen. Es ist nehmlich offenbar:

1 Siebentel + 3 Siebentel + 2 Siebentel = (1 + 3 + 2) Siebentel

oder $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{1+3+2}{7} = \frac{6}{7}$.

§ 30. Ein Bruch heißt ächt, wenn sein Zähler kleiner ist als der Nenner, — unächt, wenn sein Zähler entweder dem Nenner gleich oder größer ist als dieser.

Ächte Brüche sind: $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{11}{13}$; $\frac{5}{118}$ u. s. w.

Unächte „ „ $\frac{7}{7}$; $\frac{11}{11}$; $\frac{12}{5}$; $\frac{13}{4}$ u. s. w.

Jede ganze Zahl kann als ein unächter Bruch angesehen werden, dessen Zähler diese ganze Zahl, und dessen Nenner die Einheit ist; z. B. $3 = \frac{3}{1}$; $7 = \frac{7}{1}$ u. s. w.

Jeder ächte Bruch ist kleiner als die Einheit, — jeder unächte Bruch, dessen Zähler und Nenner einander gleich, ist der Einheit gleich, — jeder unächte Bruch, dessen Zähler größer ist als sein Nenner, ist größer als die Einheit.

§ 31. Aufgabe. Eine gegebene Zahl in einen Bruch mit vorgeschriebenem Nenner zu verwandeln.

Auflösung. Man multiplicirt die Zahl mit dem Nenner des Bruches, und schreibt unter das Product den gegebenen Nenner als Nenner; z. B. 7 soll in 5tel verwandelt werden, so ist $7 = \frac{7 \cdot 5}{5} = \frac{35}{5}$.

Beweis. Da 1 Ganzes = 5 Fünftel, so sind 7 Ganze 7 mal mehr, also

7 Ganze = 7 . (5 Fünftel) = 7 . 5 Fünftel = 35 Fünftel = $\frac{35}{5}$.

§ 32. Eine ganze Zahl mit einem Bruche heißt eine gemischte Zahl; z. B. $3\frac{4}{5}$; $5\frac{7}{8}$; $2\frac{1}{8}$ u. s. w. Sie stellt eine Summe vor aus der ganzen Zahl und dem Bruche; z. B. $3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5}$; $7\frac{2}{3} = 7 + \frac{2}{3}$ u. s. w.

Eine gemischte Zahl einrichten, heißt sie in einen unächten Bruch verwandeln.

§ 33. Aufgabe. Man soll eine gemischte Zahl einrichten.

Auflösung. Man multiplicirt die ganze Zahl mit dem Nenner des angehängten Bruches und zählt den Zähler zum Producte.

Beweis. Da $7\frac{5}{8} = 7 + \frac{5}{8}$ und 7 zu 8teln gemacht $= \frac{7 \cdot 8}{8} = \frac{56}{8}$ (§ 31), so ist

$$7\tfrac{5}{8} = \frac{56}{8} + \frac{5}{8} = \frac{56 + 5}{8} = \frac{61}{8} \text{ (§ 29).}$$

§ 34. Aufgabe. Einen gegebenen unächten Bruch als ganze oder als gemischte Zahl darzustellen.

Auflösung. Man dividire mit dem Nenner in den Zähler. Geht die Division auf, so ist der Quotient die dem Bruche gleiche ganze Zahl; — geht die Division nicht auf, so hängt man an den Quotienten einen Bruch, dessen Zähler der Divisionsrest, und dessen Nenner der Divisor ist.

Beweis. Bei $\frac{37}{8}$ ist der Quotient $= 4$ und der Divisionsrest $= 5$; also $\frac{37}{8} = 4 + \frac{5}{8} = 4\frac{5}{8}$, denn $4\frac{5}{8}$ eingerichtet giebt $\frac{37}{8}$, wie es sein soll.

§ 35. Der Nenner eines Bruches giebt die *Gattung* der Theile an, in welche die Einheit getheilt worden, und der Zähler die *Menge* der genommenen Theile; deshalb wird von zwei Brüchen mit gleichen Nennern der größere den größern Zähler haben; z. B.

$\frac{7}{9}$ ist größer als $\frac{5}{9}$, oder durch Zeichen ausgedrückt:

$$\tfrac{7}{9} > \tfrac{5}{9};$$

ebenso $\frac{11}{17} > \frac{3}{17}$ u. s. w.

Je größer der Zähler eines Bruches bei unverändertem Nenner wird, desto größer wird auch sein Werth. — Multipliciren wir also den Zähler eines Bruches mit 2, 3, 4 u. s. w. so wird auch der Werth des Bruches resp. 2, 3, 4 mal so groß; hieraus folgt:

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man den Zähler mit der ganzen Zahl multiplicirt, den Nenner aber unverändert läßt.

Durch Zeichen drücken wir diesen Satz aus:

$$\left(\tfrac{3}{4}\right) \times 5 = \frac{3 \times 5}{4} = \frac{15}{4};$$

$$\left(\tfrac{11}{3}\right) \times 7 = \frac{11 \times 7}{3} = \frac{77}{3}.$$

Hieraus folgt umgekehrt, daß ein Bruch 2, 3, 4 mal so klein werden muß, wenn man den Zähler resp. mit 2, 3, 4 dividirt und den Nenner unverändert läßt, d. h. ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Zähler durch die ganze Zahl dividirt, den Nenner aber unverändert läßt.

Durch Zeichen ausgedrückt:

$$\left(\tfrac{12}{7}\right) : 3 = \frac{12 : 3}{7} = \frac{4}{7}.$$

$$\left(\tfrac{135}{11}\right) : 9 = \frac{135 : 9}{11} = \frac{15}{11}.$$

§ 36. In je mehr gleiche Theile ein Ganzes getheilt wird, desto kleiner wird jeder einzelne Theil, d. h. von zwei Brucheinheiten ist diejenige die größere, welche den kleinern Nenner hat, demnach

$$\tfrac{1}{5} > \tfrac{1}{7}; \tfrac{1}{3} > \tfrac{1}{10}; \tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{18} \text{ u. s. w.}$$

Nehmen wir nun die größere Brucheinheit ebenso oftmal als die kleinere, so müssen wir im erstern Falle mehr erhalten als im letztern; daher muß sein

$$9 \times \left(\tfrac{1}{5}\right) > 9 \cdot \left(\tfrac{1}{7}\right) \text{ oder } \tfrac{9}{5} > \tfrac{9}{7};$$

$$11 \times \left(\tfrac{1}{3}\right) > 11 \cdot \left(\tfrac{1}{10}\right) \text{ oder } \tfrac{11}{3} > \tfrac{11}{10} \text{ u. s. w.}$$

d. h. von Brüchen mit gleichen Zählern ist derjenige Bruch der größere, der den kleinern Nenner hat.

Dividiren wir also den Nenner eines Bruches mit 2, 3, 4 u. s. w. und lassen den Zähler unverändert, so wird sein Nenner 2, 3, 4 mal so klein, deshalb aber sein Werth 2, 3, 4 mal so groß werden, daher

wird ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt, wenn man seinen Nenner mit dieser ganzen Zahl dividirt und den Zähler unverändert läßt.

Durch Zeichen wird dieser Satz ausgedrückt:

$$(\tfrac{11}{12}) \times 2 = \frac{11}{12:2} = \frac{11}{6};$$

$$(\tfrac{17}{18}) \times 9 = \frac{17}{18:9} = \frac{17}{2}.$$

Hieraus folgt umgekehrt, daß ein Bruch 2, 3, 4 mal so klein werden muß, wenn man den Nenner resp. mit 2, 3, 4 . . . multiplicirt und den Zähler unverändert läßt, d. h.

ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man den Nenner mit dieser ganzen Zahl multiplicirt und den Zähler unverändert läßt; z. B.

$$(\tfrac{12}{7}) : 3 = \frac{12}{7 \times 3} = \frac{12}{21};$$

$$(\tfrac{135}{11}) : 9 = \frac{135}{11 \times 9} = \frac{135}{99}.$$

§ 37. Fassen wir beide Arten der Multiplication und Division eines Bruches durch ganze Zahlen zusammen, so haben wir durch Zeichen:

$$(\tfrac{5}{9}) \times 3 = \frac{5 \times 3}{9} \text{ (§ 35)} = \frac{5}{9:3} \text{ (§ 36)};$$

$$(\tfrac{12}{7}) : 4 = \frac{12:4}{7} \text{ (§ 35)} = \frac{12}{7 \times 4} \text{ (§ 36)}.$$

Hierbei ist nicht zu übersehen, daß die Division mit der ganzen Zahl nur dann ausführbar ist, wenn die zu dividirende Zahl keinen Rest übrig läßt.

§ 38. Lehrsatz. Ein Bruch behält seinen Werth, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einer und derselben Zahl multiplicirt; z. B.

$$\tfrac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \tfrac{15}{20}.$$

Beweis. Multipliciren wir den Zähler mit 5, so ist $\frac{3 \times 5}{4}$ 5 mal größer geworden als $\frac{3}{4}$ (§ 35); multipliciren wir den Nenner des vergrößerten Bruchs $\frac{3 \cdot 5}{4}$ mit 5, so wird dessen Werth wieder 5 mal kleiner gemacht (§ 36); folglich

$$\tfrac{3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 5} = \tfrac{15}{20}.$$

§ 39. Der vorhergehende Lehrsatz wird benutzt, um Brüche ohne Aenderung ihres Werthes durch andere Zahlen auszudrücken, oder mehre Brüche gleichnamig zu machen, d. h. auf gleiche Nenner zu bringen; z. B.

$$\tfrac{1}{2} = \frac{1 \,.\, 2}{2 \,.\, 2} = \tfrac{2}{4} = \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 3} = \tfrac{3}{6} = \frac{1 \,.\, 4}{2 \,.\, 4} = \tfrac{4}{8} \text{ u. s. w.}$$

$$\tfrac{3}{7} = \tfrac{6}{14} = \tfrac{9}{21} = \tfrac{12}{28} = \tfrac{15}{35} = \tfrac{18}{42} \text{ u. s. w.}$$

Man bringt mehre Brüche auf gleiche Nenner dadurch, daß man Zähler und Nenner jedes einzelnen Bruches mit dem Producte der Nenner aller übrigen Brüche multiplicirt; z. B. $\tfrac{2}{3}$, $\tfrac{3}{5}$, $\tfrac{7}{8}$.

$$\tfrac{2}{3} = \frac{2 \,.\, (5 \,.\, 8)}{3 \,.\, (5 \,.\, 8)} = \frac{2 \,.\, 40}{3 \,.\, 40} = \tfrac{80}{120};$$

$$\tfrac{3}{5} = \frac{3 \,.\, (3 \,.\, 8)}{5 \,.\, (3 \,.\, 8)} = \frac{3 \,.\, 24}{5 \,.\, 24} = \tfrac{72}{120};$$

$$\tfrac{7}{8} = \frac{7 \,.\, (3 \,.\, 5)}{8 \,.\, (3 \,.\, 5)} = \frac{7 \,.\, 15}{8 \,.\, 15} = \tfrac{105}{120}.$$

Dieses Verfahren erleidet in speciellen Fällen eine Abkürzung. Sind nehmlich die Nenner der einzelnen Brüche in anderen Nennern als Factoren enthalten, oder haben mehre Nenner einen gemeinsamen Theiler: so sucht man für alle Nenner das kleinste gemeinsame Vielfache; dividirt mit dem Nenner jedes Bruches in dieses Vielfache und multiplicirt mit dem sich ergebenden Quotienten den Zähler und Nenner desselben; z. B. für $\tfrac{3}{4}$, $\tfrac{7}{8}$, $\tfrac{2}{3}$, $\tfrac{5}{9}$ ist das kleinste gemeinsame Vielfache $= 72$. Dividirt man nun 72 mit jedem Nenner der gegebenen Brüche, so ist

$$72 : 4 = 18; \quad 72 : 8 = 9; \quad 72 : 3 = 24; \quad 72 : 9 = 8.$$

und multiplicirt mit dem erhaltenen Quotienten den Zähler und Nenner des zugehörigen Bruches, so ergiebt sich:

$$\tfrac{3}{4} = \frac{3 \,.\, 18}{4 \,.\, 18} = \tfrac{54}{72};$$

$$\tfrac{7}{8} = \frac{7 \,.\, 9}{8 \,.\, 9} = \tfrac{63}{72};$$

$$\tfrac{2}{3} = \frac{2 \,.\, 24}{3 \,.\, 24} = \tfrac{48}{72};$$

$$\tfrac{5}{9} = \frac{5 \,.\, 8}{9 \,.\, 8} = \tfrac{40}{72}.$$

Das Verfahren, Brüche ohne Aenderung ihres Werthes durch andere Zahlen auszudrücken, heißt: Brüche erweitern.

Da jede ganze Zahl in einen Bruch verwandelt, und dieser dann erweitert werden kann, so folgt, daß es für jede Zahl unendlich viele Ausdrücke von gleichem Werthe giebt.

§ 40. Aus § 38 folgt umgekehrt, daß jeder Bruch seinen Werth behält, wenn man Zähler und Nenner desselben mit einer und derselben Zahl dividirt. Man nennt dieses Verfahren: Brüche aufheben. — So oft ein Bruch aus einer Rechnung hervorgeht, reducirt man denselben entweder dadurch, daß man Zähler und Nenner mit dem größten gemeinsamen Theiler dividirt, oder man benutzt die Kennzeichen der Theilbarkeit dekadischer Zahlen, und vollzieht die Reduction durch auf einander folgende Divisionen mit den im Zähler und Nenner enthaltenen Theilern. Es soll z. B. $\frac{168}{192}$ abgekürzt oder durch die kleinsten Zahlen ausgedrückt werden. — Der größte Theiler für 168 und 192 ist $= 24$, daher

$$\tfrac{168}{192} = \frac{168:24}{192:24} = \tfrac{7}{8},$$

$$\text{oder:}\quad \frac{168}{192}\Big|\frac{\overset{2}{\smile}}{}\!\frac{84}{96}\;\Big|\frac{\overset{2}{\smile}}{}\!\frac{42}{48}\;\Big|\frac{\overset{6}{\smile}}{}\!\frac{7}{8}.$$

Die Reduction durch das letztere Verfahren muß so lange fortgesetzt werden, bis der Zähler und Nenner des zuletzt gefundenen Bruches Primzahlen unter einander sind.

Uebungsfragen:

1) Was versteht man unter Brucheinheit?
2) Was sind Stammbrüche?
3) Wie entstehen die ganzen, wie die gebrochenen Zahlen oder Brüche?
4) Welches ist die Bedeutung des Zählers, welches die des Nenners?
5) Wie werden die Brüche geschrieben?
6) Welche Brüche nennt man ächte, welche unächte?
7) Was sind gemischte Zahlen?
8) Wie verwandelt man eine ganze Zahl in einen Bruch mit vorgeschriebenem Nenner?

9) Wie addirt man Brüche mit gleichen Nennern?
10) Was heißt eine gemischte Zahl einrichten?
11) Wie stellt man einen unächten Bruch als ganze oder als gemischte Zahl dar?
12) Welche Veränderung erleidet ein Bruch:
   1) wenn man seinen Zähler mit einer ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt;
   2) wenn man seinen Nenner mit einer ganzen Zahl multiplicirt oder dividirt;
   3) wenn man seinen Zähler und Nenner mit einer und derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.
13) Was versteht man unter Erweitern, was unter Heben der Brüche?
14) Auf welche Weise kann ein Bruch gehoben oder reducirt werden?
15) Wie bringt man Brüche unter gleiche Benennung.

Exempel. Vorübungen im Bruchrechnen. Nr. 664—748.

Addition der Brüche.

41. Wie gleichnamige Brüche zu addiren sind, haben wir § 29 gesehen. Sind die Brüche ungleichnamig, so bringe man sie auf gleiche Nenner (§ 39), addire dann die Zähler und setze den gemeinsamen Nenner darunter. — Es ist bequem für die Praxis, jede Addition von Brüchen folgendermaßen auszuführen:

	Generalnenner = 72.	Neue Zähler.
$\frac{3}{4}$	18	54
$+ \frac{5}{8}$	9	45
$+ \frac{7}{9}$	8	56

$$= \tfrac{155}{72} = 2\tfrac{11}{72}.$$

Man schreibt alle Summanden unter einander; sucht den gemeinsamen kleinsten Nenner (Generalnenner), bei uns = 72; — dividirt denselben durch jeden einzelnen Nenner und schreibt die erhaltenen Quotienten neben den entsprechenden Bruch. Diese Quotienten, bei uns 18, 9 und 8 sind Zahlen, mit denen Zähler und Nenner des vorliegenden Bruches zu multipliciren sind, damit alle denselben Nenner bekommen. — Nun haben wir statt $\frac{3}{4}$ den Bruch $\frac{3 \cdot 18}{4 \cdot 18} = \frac{54}{72}$; für $\frac{5}{8}$ den Bruch $\frac{5 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{45}{72}$; für $\frac{7}{9}$ den Bruch $\frac{7 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{56}{72}$. — Weil aber alle denselben Nenner $= 72$ haben, so schreibt man bloß die Zähler 54, 45, 56 hin. Diese werden addirt, und unter ihre Summe der gemeinsame Nenner gesetzt.

Sind gemischte Zahlen zu addiren, so addire man zuerst die Brüche, nehme die Ganzen aus deren Summe, und addire diese zu den Ganzen der Summanden. Der etwa sich ergebende Bruch wird der Summe der Ganzen angehängt.

	5100	
$7\frac{3}{5}$	1020	3060
$+ 8\frac{11}{12}$	425	4675
$+ 9\frac{12}{17}$	300	3600
$+ 11\frac{3}{4}$	1275	3825
$+ 15\frac{7}{10}$	510	3570
$+ 34\frac{7}{25}$	204	1428

$84 \quad + \quad \frac{20158}{5100} = 84 + 3\frac{4858}{5100} = 87\frac{2429}{2550}$.

	40	
$\frac{7}{8}$ Pud	5	35
$+ \frac{3}{4}$ "	10	30
$+ \frac{7}{10}$ "	4	28
$+ \frac{3}{5}$ "	8	24
$+ \frac{1}{2}$ "	20	20

$\frac{137}{40}$ Pud $= 3\frac{17}{40}$ Pud.

Exempel Nr. 749—778.

Subtraction der Brüche.

§ **42.** 1) Haben die Brüche gleiche Nenner, so subtrahirt man den Zähler des Subtrahendus vom Zähler des Minuendus und der Rest erhält den gemeinsamen Nenner; z. B. $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$.

2) Bei *ungleichen* Nennern macht man die Brüche gleichnamig, und verfährt wie vorhin; z. B. $\frac{5}{7} - \frac{1}{4} = \frac{20}{28} - \frac{7}{28}$ $= \dfrac{20-7}{28} = \frac{13}{28}$.

3) Bei gemischten Zahlen subtrahirt man zuerst die Brüche von einander, und dann die Ganzen; z. B. $7\frac{5}{8} - 3\frac{3}{7} = \frac{5}{8} - \frac{3}{7}$ $+ 7 - 3 = \dfrac{35 - 24}{56} + 7 - 3 = \frac{11}{56} + 4 = 4\frac{11}{56}$.

Die gewöhnlichste Form des Ansatzes für die Praxis ist folgende:

$$\begin{array}{l|c}
 & 56 \\
\hline
-\left\{\begin{array}{l} 7\frac{5}{8} \\ 3\frac{3}{7} \end{array}\right. & \begin{array}{c} 35 \\ 24 \end{array} \\
\hline
\quad 4 & \frac{11}{56}.
\end{array}$$

Ist der Bruch des Subtrahendus größer als der des Minuendus, so borgt man von den Ganzen des Minuendus eine Einheit, zählt diese zum Bruche des Minuendus hinzu und verrichtet dann die Subtraction; z. B.

$$\begin{array}{l|c}
 & \left.\begin{array}{c} 24 \\ \hline 21 \end{array}\right\}+ \\
-\left\{\begin{array}{l} 5.\frac{7}{8} \\ \\ 3\frac{11}{12} \end{array}\right. & \begin{array}{c} \hline 45 \\ 22 \end{array} \\
\hline
\quad 1 & \frac{23}{24}.
\end{array}$$

Da $\frac{7}{8} = \frac{21}{24}$ und $\frac{11}{12} = \frac{22}{24}$, so borgt man von den Ganzen des Minuendus eine Einheit, verwandelt diese in $\frac{24}{24}$ und addirt sie zu $\frac{21}{24}$ hinzu, wodurch man $\frac{45}{24}$ erhält; nimmt davon $\frac{22}{24}$ hinweg, und hat zum Rest $\frac{23}{24}$. Bei den Ganzen sind jetzt statt $5 - 3$ bloß $4 - 3 = 1$, also der gesuchte Rest $= 1\frac{23}{24}$.

Der bessern Übersicht wegen ist der Nenner bei den Brüchen überall weggelassen, und man hat zum Zähler des Minuendus den gemeinsamen Nenner hinzugezählt, wodurch die unter dem Strich stehenden 45 (nehmlich $\frac{45}{24}$) entstanden.

Hat der Minuendus keinen Bruch, so borgt man eine Einheit, verwandelt diese in einen Bruch mit dem Nenner des Bruches im Subtrahendus und subtrahirt dann; z. B.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 4. & 6 \\ 1\frac{5}{6} & 5 \\ \hline 2 & \frac{1}{6}. \end{array}$$

Sind benannte Zahlen gegeben, so subtrahirt man diese wie gewöhnlich, und giebt dem Reste dieselbe Benennung; z. B.

$\frac{11}{12}$ Pfund — $\frac{7}{8}$ Pfund $= (\frac{11}{12} - \frac{7}{8})$ Pfund $= \left(\frac{22-21}{24}\right)$ Pfund $= \frac{1}{24}$ Pfund.

Exempel Nr. 779—808.

Multiplication der Brüche.

§ 43. Die Multiplication eines Bruches mit einer ganzen Zahl hat keine Schwierigkeit (§ 37). — Ist der Multiplicator aber ein Bruch, so erscheint die ursprüngliche Bedeutung desselben unstatthaft, denn es kann der Multiplicandus alsdann nicht wiederholt zu sich selbst addirt werden. Jetzt entsteht die Frage: welches ist der Sinn der Aufgabe, wenn der Multiplicator ein Bruch wird?

Betrachten wir zuerst den Fall, wenn der Multiplicandus eine beliebige Zahl = a, und der Multiplicator ein Stammbruch ist. — Soll a mit $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. multiplicirt werden, so heißt es, man soll von der Zahl a die Hälfte, das Drittel, das Viertel u. s. w. nehmen, d. h. die Zahl a mit 2, 3, 4 u. s. w. dividiren, daher: Multiplication einer Zahl a mit einem Stammbruche ist Division derselben mit dem Nenner des Stammbruches; folglich:

$$[a] \times \tfrac{1}{5} = [a] : 5 = \frac{a}{5},$$

$$(7) \times \tfrac{1}{5} = (7) : 5 = \tfrac{7}{5},$$

$$(\tfrac{3}{4}) \times \tfrac{1}{5} = (\tfrac{3}{4}) : 5 = \tfrac{3}{20} \text{ (§ 36).}$$

Ist der Multiplicator ein beliebiger Bruch, z. B. $\frac{7}{8}$, so können wir denselben zerlegen in $7 \,.\, (\frac{1}{8})$ und es wird daher sein:

$$(a) \cdot \tfrac{7}{8} = [(a) \cdot 7] \cdot \tfrac{1}{8} = [7a] \cdot \tfrac{1}{8} = (7a) : 8 = \frac{7a}{8},$$

d. h. Multiplication einer Zahl a mit einem beliebigen Bruche ist Multiplication derselben mit dem Zähler und Division mit dem Nenner des Multiplicators.

Wenn also $a = \frac{5}{6}$ wäre, so hätten wir

$$(\tfrac{5}{6}) \cdot (\tfrac{7}{8}) = [(\tfrac{5}{6}) \cdot 7] : 8 = \left(\frac{5 \cdot 7}{6}\right) : 8 \,(\S\ 35) = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 8} \,(\S\ 36) = \tfrac{35}{48},$$

d. h. Brüche werden multiplicirt, wenn man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt; demnach

$$\tfrac{2}{3} \times \tfrac{7}{9} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 9} = \tfrac{14}{27}.$$

Hat man gemischte Zahlen zu multipliciren, so richtet man beide Factoren ein, und verfährt dann wie mit gewöhnlichen Brüchen; z. B.

$$(7\tfrac{3}{4}) \times (5\tfrac{2}{3}) = (\tfrac{31}{4}) \times (\tfrac{17}{3}) = \frac{31 \cdot 17}{4 \cdot 3} = \tfrac{527}{12} = 43\tfrac{11}{12}.$$

Man kann aber auch die Multiplication dadurch verrichten, daß man die Ganzen und den Bruch des Multiplicandus, zuerst mit der ganzen Zahl des Multiplicators und dann mit dem Bruche desselben, multiplicirt, und die hervorgehenden partiellen Producte zuletzt addirt, z. B.

$$\begin{aligned}(7\tfrac{3}{4}) \cdot (5\tfrac{2}{3}) = (7 + \tfrac{3}{4}) \cdot (5 + \tfrac{2}{3}) &= (7 + \tfrac{3}{4}) \cdot 5 + (7 + \tfrac{3}{4})\, \tfrac{2}{3} \\ &= 35 + \tfrac{15}{4} + \tfrac{14}{3} + \tfrac{1}{2} \\ &= 43\tfrac{11}{12}.\end{aligned}$$

Da $(\frac{3}{4}) \cdot (\frac{5}{7}) = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7}$ und $(\frac{5}{7}) \cdot (\frac{3}{4}) = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 4}$; aber $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ $4 \cdot 7 = 7 \cdot 4$, so folgt, daß $(\frac{3}{4}) \cdot (\frac{5}{7}) = (\frac{5}{7}) \cdot (\frac{3}{4})$, d. h. das Product zweier Brüche ändert sich nicht, wenn man die Factoren vertauscht.

Durch Multiplication des Zählers wird der Bruch vergrößert; durch Multiplication des Nenners aber verkleinert. Ist also der Multiplicator ein ächter Bruch, so muß das Product kleiner werden als der Multiplicandus, z. B. in $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$ ist $\frac{15}{56}$ kleiner als $\frac{5}{8}$, da aber $\frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{56}$ so muß $\frac{15}{56}$ auch kleiner sein als $\frac{5}{7}$, daher bei der Multiplication ächter Brüche das Product immer kleiner als jeder einzelne Factor.

Ist der Multiplicandus eine benannte Zahl, so erleidet das Verfahren keine Abänderung, nur muß man dem Producte dieselbe Benennung geben; z. B.

1) (4 Pud) $\times \frac{3}{5} = \frac{3 \,.\, (4 \text{ Pud})}{5} = \frac{12}{5}$ Pud $= 2\frac{2}{5}$ Pud;

2) ($\frac{1}{2}$ Arschin) $\times \frac{5}{8} = (\frac{1}{2} \,.\, \frac{5}{8})$ Arschin $= \frac{5}{16}$ Arschin;

3) ($\frac{7}{8}$ Tschetwert) $\times 2\frac{1}{3} = (\frac{7}{8} \,.\, \frac{7}{3})$ Tschetwert $= \frac{49}{24}$ Tschetwert $= 2\frac{1}{24}$ Tschetwert.

Dasselbe gilt von Aufgaben, bei denen erst aus dem Zusammenhange bestimmt werden muß, welche der vorkommenden Zahlen als Multiplicator zu nehmen ist; z. B.

4) Für 1 Tag zahlt man $\frac{1}{2}$ Rubel Arbeitslohn; wieviel für $\frac{3}{4}$ Tage?

Ausrechnung. Für 1 Tag wird gezahlt $\frac{1}{2}$ Rubel; für $\frac{1}{4}$ Tag offenbar der 4te Theil davon, also $\frac{1}{4}$ Tag ... ($\frac{1}{2}$ Rubel) $.\, \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ Rubel; für $\frac{3}{4}$ Tage muß man 3 mal mehr geben, daher $\frac{3}{4}$ Tage ... ($\frac{1}{2}$ Rubel) $\times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ Rubel.

5) 1 Pfund kostet $5\frac{1}{2}$ Kopeken; wie theuer sind $3\frac{1}{4}$ Pfund?

Ausrechnung. 1 Pfund ... $\frac{11}{2}$ Kopeken,
demnach $3\frac{1}{4}$ Pfund $= \frac{13}{4}$ Pfund ... ($\frac{11}{2}$ Kopeken) $.\, \frac{13}{4} = \frac{143}{8}$ Kopeken $= 17\frac{7}{8}$ Kopeken.

Exempel Nr. 839—863.

Division der Brüche.

§ 44. Bei der Division der Brüche haben wir wie bei der Division ganzer Zahlen zwei Fälle zu unterscheiden:

a) ob durch dieselbe ein Messen oder
b) ob ein Theilen

bezweckt wird.

Im erstern Fall müssen Divisor und Dividendus gleichartig sein; deshalb sind beide Brüche gleichnamig zu machen und dann mit dem Zähler des Divisors in den Zähler des Dividendus zu dividiren, die Nenner aber ganz wegzulassen, z. B.

1) $(\frac{3}{5}) : (\frac{1}{2}) = \left(\frac{3 \,.\, 2}{5 \,.\, 2}\right) : \left(\frac{5 \,.\, 1}{5 \,.\, 2}\right) = (3 \,.\, 2)$ Zehntel : $(5 \,.\, 1)$

Zehntel $= \frac{3 \,.\, 2}{5 \,.\, 1}$ mal $= (\frac{3}{5}) \times (\frac{2}{1})$;

2) $(\frac{5}{6}) \,.\, (\frac{7}{11}) = \left(\frac{5 \,.\, 11}{6 \,.\, 11}\right) : \left(\frac{7 \,.\, 6}{6 \,.\, 11}\right) = (5 \,.\, 11) : (7 \,.\, 6) =$

$\frac{5 \,.\, 11}{6 \,.\, 7} = (\frac{5}{6}) \times (\frac{11}{7})$,

d. h. der Quotient wird gefunden, wenn wir den Dividendus mit dem umgekehrten Divisor multipliciren.

Zu dieser Regel gelangen wir auch durch folgende Betrachtung. Gesetzt, der Dividendus sei eine beliebige Größe (a) und der Divisor ein Stammbruch, so sehen wir sogleich, daß in der Einheit der Divisor $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. 2, 3, 4 mal enthalten sein muß; also

$1 : (\frac{1}{2}) = 2$; denn $(\frac{1}{2}) \,.\, 2 = 1$
$1 : (\frac{1}{3}) = 3$; „ $(\frac{1}{3}) \,.\, 3 = 1$
$1 : (\frac{1}{1}) = 4$; „ $(\frac{1}{4}) \,.\, 4 = 1$, folglich

$a : (\frac{1}{2}) = 2a$; denn $[\frac{1}{2}] \,.\, 2a = \frac{2a}{2} = a$;

d. h. die Division einer Zahl (a) durch einen Stammbruch wird verrichtet, wenn man dieselbe mit dem Nenner des Stammbruches multiplicirt.

Ist der Divisor ein beliebiger Bruch, z. B. $\frac{15}{17}$, so zerlegen wir denselben in $15 \,.\, (\frac{1}{17})$ und haben alsdann

$$a : (\tfrac{15}{17}) = a : [15 \,.\, (\tfrac{1}{17})] = [a : 15] : \tfrac{1}{17} = (\tfrac{a}{15}) : \tfrac{1}{17}$$
$$= \tfrac{a \cdot 17}{15} = a \,.\, (\tfrac{17}{15}),$$

d. h. eine Zahl a wird durch einen beliebigen Bruch dividirt, wenn man sie mit dem Nenner des Divisors multiplicirt und mit dem Zähler dividirt.

Wenn der Dividendus (a) selbst ein Bruch ist, z. B. $a = \frac{13}{14}$, so haben wir:

$(\frac{13}{14}) : (\frac{15}{17}) = [(\frac{13}{14}) \times 17] : 15 = \left(\frac{13 \,.\, 17}{14}\right) : 15 =$

$\frac{13 \,.\, 17}{14 \,.\, 15} = (\frac{13}{14}) \,.\, (\frac{17}{15})$.

Auch durch folgende Betrachtung kann diese Regel hergeleitet werden. — Gesetzt der Dividendus sei $= \frac{15}{16}$ und der Divisor $= \frac{3}{4}$, so müssen wir einen noch unbekannten Bruch $\frac{x}{y}$ finden, der mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, zum Producte $\frac{15}{16}$ giebt. — Also

$$\tfrac{15}{16} = \tfrac{3}{4} \,.\, \frac{x}{y} = \frac{3 \,.\, x}{4 \,.\, y}$$

daher muß sein $3 \,.\, x = 15$ und $4 \,.\, y = 16$, folglich $x = 15 : 3$ und $y = 16 : 4$, woraus sich ergiebt $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$;

$$\text{also } (\tfrac{15}{16}) : (\tfrac{3}{4}) = \frac{15 : 3}{16 : 4},$$

d. h. **man dividirt einen Bruch durch einen andern dadurch, daß man den Zähler des Dividendus durch den Zähler des Divisors und den Nenner des Dividendus durch den Nenner des Divisors dividirt.**

Dieses Verfahren ist aber nur dann ausführbar, wenn die Zahlen im Zähler und Nenner in einander aufgehen. Da aber durch die Division des Zählers beim Dividendus, der Dividendus selbst **dividirt** und durch die Division des Nenners, derselbe **multiplicirt** wird so erreicht man dieses auch dadurch, daß man mit dem Zähler des Divisors den Nenner, und mit dem Nenner des Divisors, den Zähler des Dividendus multiplicirt, d. h. mit dem umgekehrten Divisor den Dividendus multiplicirt. Also

$$(\tfrac{15}{19}) : (\tfrac{18}{17}) = \frac{15 : 18}{19 : 17} = [(\tfrac{15}{19}) : 18] \,.\, 17 = \left[\frac{15}{19 \,.\, 18}\right] \,.\, 17$$

$$= \frac{15 \,.\, 17}{19 \,.\, 18} = (\tfrac{15}{19}) \,.\, (\tfrac{17}{18}).$$

Bezweckt die Division ein **Theilen**, so hat dieses keinen Einfluß auf die Größe des Quotienten, weil wir immer eine Zahl finden, die mit dem Divisor multiplicirt, zum Producte den Dividendus giebt, daher gilt die gegebene Regel auch für diesen Fall.

Kommen gemischte Zahlen vor, so richtet man dieselben ein, und verfährt wie mit ächten Brüchen; z. B.

$$(3\tfrac{1}{2}) : \tfrac{7}{8} = \tfrac{7}{2} : \tfrac{7}{8} = \tfrac{7}{2} \times \tfrac{8}{7} = 4.$$

In der Anwendung auf benannte Zahlen wird der Quotient bei Aufgaben des Messens eine unbenannte, und bei Aufgaben des Theilens eine benannte Zahl; z. B.

1) ($^3/_4$ Rubel) : ($^1/_5$ Rubel) = ($^3/_4 : {}^1/_5$) mal = $^{15}/_4$ mal;
2) ($^7/_8$ Pud) : ($^4/_5$ Pud) = ($^7/_8$) . ($^5/_4$) mal = $^{35}/_{32}$ mal;
3) ($^3/_4$ Tage) : $^2/_3$ = ($^3/_4 : {}^2/_3$) Tage = $^9/_8$ Tage;
4) Wenn $^3/_4$ Pfund mit 2 Rubel bezahlt werden; wie theuer ist 1 Pfund?

Ausrechnung: $^3/_4$ Pfund . . . 2 Rubel; daher $^1/_4$ Pfund 3 mal weniger, also $^1/_4$ Pfund . . . $\frac{2 \text{ Rubel}}{3}$ und 1 ganzes Pfund 4 mal mehr als $^1/_4$ desselben,

folglich 1 Pfund . . . $\frac{2 \text{ Rubel} . 4}{3}$ = (2 Rubel) $\times$ $^4/_3$ = (2 Rubel) : $^3/_4$.

5) Für $2^1/_2$ Tage zahlt man $1^3/_4$ Rubel Arbeitslohn; wieviel für 1 Tag?

Ausrechnung: $^5/_2$ Tage . . . $^7/_4$ Rubel

daher $^1/_2$ Tag . . . ($^7/_4$ Rubel) : 5 = $\frac{7 \text{ Rubel}}{4 . 5}$

folglich: 1 Tag . . . $\left(\frac{7 \text{ Rubel}}{4 . 5}\right) . 2 = \left(\frac{7 \text{ Rubel}}{4 . 5}\right) . 2$

= ($^7/_4$ Rubel) $\times$ $^2/_5$ = ($^7/_4$ Rubel) : $^5/_2$.

Exempel Nr. 864—893.

§ 45. Wird die Division der Brüche nicht ausgeführt, sondern nur angedeutet, so entstehen die Doppelbrüche oder Bruchbrüche. Sie können folgende Formen haben:

1) $7 : ({}^3/_4) = \frac{7}{({}^3/_4)}$;

2) $({}^{11}/_{12}) : ({}^3/_4) = \frac{({}^{11}/_{12})}{({}^3/_4)}$;

3) $({}^{11}/_{12}) : 9 = \frac{({}^{11}/_{12})}{9}$.

Kommen irgend wo solche Doppelbrüche vor, so thut man wohl, sie zuerst nach den Regeln der Division in einfache Brüche aufzulösen.

Uebungsfragen:

1) Wie addirt man Brüche?
2) Wie werden gemischte Zahlen addirt?
3) Wie subtrahirt man Brüche von einander?
4) Wie werden gemischte Zahlen von einander subtrahirt?
5) Was heißt mit der Brucheinheit multipliciren?
6) Wie multiplicirt man eine beliebige Zahl mit einem Bruche?
7) Wie multiplicirt man zwei Brüche mit einander?
8) Wie werden gemischte Zahlen multiplicirt?
9) Wie dividirt man eine beliebige Zahl mit der Brucheinheit?
10) Wie verfährt man, wenn der Divisor ein beliebiger Bruch ist?
11) Wie dividirt man einen Bruch durch einen andern?
12) Wie werden gemischte Zahlen dividirt?
13) Wie entstehen Doppelbrüche?
14) Wie verwandelt man Doppelbrüche in einfache Brüche?
15) Warum ist das Product ächter Brüche kleiner als jeder einzelne Factor?

Von den Decimalbrüchen.

§ 46. In unserem Zahlensysteme hat bei einer Zahl jede Stelle zur Rechten einen zehnmal kleinern Werth, und die Einer nehmen die letzte Stelle ein; z. B. bei der Zahl 325

ist die	erste	Stelle	von	der	Linken	zur	Rechten	= 3 Hunderter
„	zweite	„	„	„	„	„	„	= 2 Zehner
„	dritte	„	„	„	„	„	„	= 5 Einer.

Lassen wir den Einern noch einige Stellen folgen unter derselben Bedingung, daß jede folgende Stelle zur Rechten zehnmal kleiner sein soll, so wird die erste Stelle rechts von den Einern Zehntel, die zweite Hundertstel, die dritte Tausendstel u. s. w. enthalten müssen. — Ueberhaupt werden diese Stellen Brüche anzeigen, deren Nenner aus einer Eins und Nullen bestehen. — Um die Stelle anzugeben, welche die Einer einnehmen, bedient man sich eines Komma, das den Einern rechts beigesetzt wird; z. B. die Zahl

274,761

hat vor dem Komma drei Stellen, welche, von der Rechten zur Linken gelesen, 2 Hunderter, 7 Zehner 4 Einer bedeuten, — die erste Stelle nach dem Komma heißt $^7/_{10}$, die zweite $^6/_{100}$, die dritte $^1/_{1000}$. — Folgen noch mehr Stellen, so erhalten wir Zehntausendstel, Hunderttausendstel u. s. w.

Solche Brüche, deren Nenner aus einer Eins mit mehren Nullen bestehen, heißen **Decimalbrüche**. Sie bilden eigentlich, wie wir sehen, eine Ergänzung des Decimalsystems. Jeder Decimalbruch wird in Form einer ganzen Zahl dargestellt, ohne daß der Nenner besonders anzugeben wäre, weil das den Einern beigesetzte Komma den Werth des Decimalbruches vollständig bestimmt. — Es sei z. B. die Zahl 37,483 gegeben, so ist der Werth derselben:

$$1)\quad 37 + {^4/_{10}} + {^8/_{100}} + {^3/_{1000}},$$

oder, die drei vorkommenden Decimalbrüche auf gleiche Benennung gebracht:

$$2)\quad 37 + {^{400}/_{1000}} + {^{80}/_{1000}} + {^9/_{1000}} = 37 + {^{483}/_{1000}},$$

oder, alle drei Decimalbrüche und die Ganzen zu einer Zahl vereinigt:

$$3)\quad 37 + {^{483}/_{1000}} = {^{37483}/_{1000}}.$$

Bei einem ächten Decimalbruche wird das Fehlen der Ganzen durch eine dem Komma vorgesetzte Null angedeutet; z. B. $0{,}432 = {^{432}/_{1000}}$; $0{,}056 = {^{56}/_{1000}}$; $0{,}003 = {^3/_{1000}}$ u. s. w

Aus dieser Darstellung folgt, daß das **Lesen** und **Aussprechen** der Decimalbrüche auf drei verschiedene Arten geschehen kann:

A. indem man zuerst die Ganzen nennt, und hierauf die Werthe aller Stellen des Decimalbruches einzeln angiebt; z. B. 21,674 = 21 Ganze, 6 Zehntel, 7 Hundertstel, 4 Tausendstel;

B. indem man zuerst die Ganzen und hierauf alle Stellen des Decimalbruches unter einer Benennung angiebt; z. B.

27,654 = 27 Ganze, 654 Tausendstel,
0,34 = 34 Hundertstel;

C. indem man sowohl die Ganzen als auch alle Stellen des Decimalbruches unter einer Benennung auf einmal angiebt; z. B. 27,654 = 27654 Tausendstel.

Eine vierte Art des Aussprechens besteht darin, daß man die verschiedenen Stellen des Decimalbruches der Reihe nach ohne weitere Benennung folgen läßt; z. B.

157,37062 = 157 Ganze (oder 157, Komma) 3, 7, 0, 6, 2.

Diese ist die gebräuchlichste, weil in praxi bequemste Leseart.

§ 47. Da $^5/_{10} = {}^{50}/_{100} = {}^{50}/_{1000}$ und $^5/_{10} = 0,5$; $^{50}/_{100} = 0,50$; $^{500}/_{1000} = 0,500$, so muß auch sein:

$$0,5 = 0,50 = 0,500,$$

d. h. ein Decimalbruch behält seinen Werth und ändert nur den Namen, wenn man ihm zur Rechten Nullen anhängt.

Hierdurch haben wir ein bequemes Mittel, Decimalbrüche von verschiedener Benennung gleichnamig zu machen; z. B. 0,7; 0,843; 9,6502 verwandeln sich in:

$$0,7 \quad = 0,7000$$
$$0,843 \quad = 0,8430$$
$$9,6502 = 9,6502.$$

§ 48. Da $4,57 = {}^{457}/_{100}$ und $({}^{457}/_{100}) \times 10 = {}^{457}/_{10} = 45^7/_{10} = 45,7$, so muß auch $(4,57) \times 10 = 45,7$ sein; d. h. ein Decimalbruch wird mit 10 multiplicirt, wenn man das Komma um eine Stelle zur Rechten weiter rückt.

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß überhaupt ein Decimalbruch mit 100, 1000 u. s. w. multiplicirt wird, wenn man das Komma um so viele Stellen zur Rechten weiter rückt, als der Multiplicator Nullen hat. Demnach ist

$$5,478 \times 10 \qquad 54,78$$
$$5,478 \times 100 \qquad 547,8$$
$$5,478 \times 1000 \qquad 5478.$$

Hat der Multiplicandus weniger Stellen als im Multiplicator Nullen vorkommen, so werden die fehlenden Stellen durch Nullen ersetzt; z. B.

$$23,471 \times 10000 \qquad 234710$$
$$1,06 \times 10000 \qquad 10600$$
$$0,7 \times 10000 \qquad 7000.$$

Hieraus folgt umgekehrt, daß ein Decimalbruch mit 10, 100, 1000 u. s. w. dividirt wird, wenn man das

Komma um so viel Stellen zur Linken weiter rückt, als der Divisor Nullen hat; z. B.

$$478,3 : 10 = 47,83$$
$$478,3 : 100 = 4,783$$
$$478,3 : 1000 = 0,4783$$
$$478,3 : 10000 = 0,04783.$$

§ 49. Die Anzahl der Decimalstellen bei jedem Decimalbruche kann ohne Aenderung seines Werthes durch angehängte Nullen beliebig vermehrt werden. Läßt man aber einige Stellen weg, so ändert sich Werth und Benennung. Häufig kommt der Fall vor, daß man weniger Decimalstellen benutzt als vorhanden sind, weil der Grad der Genauigkeit des zu erzielenden Resultats nicht so viele Decimalstellen fordert. Hat man z. B. für einen bestimmten Fall die Zahl 37,76843 gefunden, und ist überzeugt, daß eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ genüge, so nimmt man statt 37,76843 bloß die Zahl 37,768, weil das außer Acht gelassene $0,00043 = \frac{43}{100000}$ weniger als $\frac{1}{1000}$ beträgt.

Das Weglassen einer oder mehrerer Stellen eines Decimalbruches heißt den Decimalbruch *verkürzen*. — Wird der Decimalbruch bei irgend einer Stelle verkürzt, und steht in der folgenden Stelle eine kleinere Zahl als 5, so beträgt der Werth aller weggelassenen Stellen weniger als die *Hälfte* einer Einheit der niedrigsten noch benutzten Stelle. Z. B. wir verkürzen den Decimalbruch 7,37923 bei der dritten Stelle, und setzen statt desselben bloß 7,379, so beträgt der wirkliche Fehler 0,00023 $= \frac{23}{100000}$. Eine Einheit der dritten Stelle ist aber $= \frac{1}{1000}$, daher die Hälfte davon $= \frac{1}{1000} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1000} \times \frac{5}{10} = \frac{5}{10000} = \frac{50}{100000}$; folglich $> \frac{23}{100000}$.

Wird ein Decimalbruch bei irgend einer Stelle verkürzt, und steht in der folgenden Stelle eine größere Zahl als 5 oder 5 selbst, so ist der Werth aller weggelassenen Stellen *mehr* oder wenigstens gerade *so viel* als die Hälfte von einer Einheit der niedrigsten noch benutzten Stelle. Z. B. wir verkürzen den Bruch 7,37984 bei der dritten Stelle, und setzen statt desselben bloß 7,379, so ist der Fehler $= 0,00084 = \frac{84}{100000}$. Oben haben wir für die Hälfte der Einheit der dritten Decimalstelle gerade $\frac{50}{100000}$ gefunden, daher $\frac{84}{100000} > \frac{50}{100000}$. Um nun den Fehler möglichst auszugleichen, und geringer als die Hälfte einer Einheit der niedrigsten benutzten Stelle zu machen, pflegt man dieselbe um eine Einheit zu vergrößern, wenn die nächste Stelle des weggeworfenen Theils entweder 5 oder größer als 5 ist. Setzen wir z. B. statt 5,38279 den Decimalbruch 5,383, so ist

$$5{,}383 - 5{,}38279 = \frac{5383}{1000} - \frac{538279}{100000} = \frac{538\,00 - 538279}{100000} = \frac{21}{100000},$$

daher $< \frac{50}{100000}$, d. h. $< \frac{1}{1000}$.

Wird diese Correctur angewandt bei der dritten Stelle, so haben wir zu setzen statt

750,68134	den Decimalbruch	750,681
109,74558	„ „	109,746
10,84162	„ „	0,842.

§ 50. Aufgabe. **Decimalbrüche zu addiren.**

Auflösung. Man macht sämmtliche Decimalbrüche dadurch gleichnamig, daß man jedem Addenden durch angehängte Nullen so viele Decimalstellen giebt, als der Bruch hat, bei welchem die meisten Decimalstellen vorkommen; addirt hierauf wie bei ganzen Zahlen, und giebt der Summe so viele Decimalstellen, als jeder der addirten Brüche hat; z. B.

$$5{,}7 + 16{,}894 + 3{,}0094 + 16{,}17 + 358{,}76.$$

Ausführung:

$$\begin{array}{r} 5{,}7000 \\ +\ 16{,}8940 \\ +\ 3{,}0094 \\ +\ 16{,}1700 \\ +\ 358{,}7600 \\ \hline 400{,}5334. \end{array}$$

Beweis. Aus der Auflösung geht hervor, daß man nur die Zähler sämmtlicher Brüche addirt, und unter deren Summe den gemeinschaftlichen Nenner setzt. Dividirt man mit diesem Nenner, der aus einer Eins und mehren Nullen besteht, so geschieht solches nach § 48 dadurch, daß man vom Zähler so viele Stellen abschneidet, als der gemeinsame Nenner Nullen, d. h. jeder der addirten Decimalbrüche Stellen hat.

Exempel Nr. 1028 — 1047.

§ 51. Aufgabe. **Decimalbrüche zu subtrahiren.**

Auflösung. Man setze den Subtrahendus so unter den Minuendus, daß die gleichnamigen Stellen unter einander zu stehen kommen, und subtrahire wie bei ganzen Zahlen. Das Komma im Reste stellt man unter die Kommata des Minuendus und Subtrahendus.

Beweis. 1) Haben Minuendus und Subtrahendus gleichviel Decimalstellen, z. B.

$$\begin{array}{rl} 7,643 & \text{(Minuendus)} \\ 1,872 & \text{(Subtrahendus)} \\ \hline 5,771 & \text{(Rest),} \end{array}$$

so sind beide gleichnamig; der Rest ist der Unterschied der Zähler der beiden Decimalbrüche, und muß eben so viel Decimalstellen haben als jeder von ihnen.

2) Fehlen einige Stellen im Minuendus, z. B.

$$\begin{array}{ll} 13,4 & \text{(Minuendus)} \\ 7,863 & \text{(Subtrahendus)} \\ \hline 5,537 & \text{(Rest),} \end{array}$$

oder im Subtrahendus, z. B.

$$\begin{array}{l} 2,6874 \\ 1,95 \\ \hline 0,7374, \end{array}$$

so denkt man sich dieselben durch Nullen ergänzt, und hat dann Brüche mit gleich viel Decimalstellen.

Exempel Nr. 1048 — 1067.

§ 52. Aufgabe. **Decimalbrüche zu multipliciren.**

Auflösung. Man multiplicire die beiden gegebenen Decimalbrüche ohne Rücksicht auf die Kommata, wie zwei ganze Zahlen und schneide von dem erhaltenen Producte so viel Decimalstellen ab, als beide Factoren zusammen haben; z. B.

$$\begin{array}{r} 15{,}48 \\ 0{,}347 \\ \hline 10836 \\ 6192 \\ 4644 \\ \hline 5{,}37156. \end{array}$$

Beweis. Geben wir beiden Factoren ihre zugehörigen Nenner, so wird jeder Factor im Nenner so viel Nullen haben, als Decimalstellen vorkommen. (Für unser Beispiel haben wir $15{,}48 = \frac{1548}{100}$; $0{,}347 = \frac{347}{1000}$.) Die Zähler sind dann ganze Zahlen. Multipliciren wir nun beide Brüche, so ist der Zähler das Product der beiden Decimalbrüche ohne Rücksicht auf das Komma, und der Nenner enthält so viel Nullen, als die Nenner beider Factoren zusammen haben. (Für unser Beispiel $\frac{1548}{100} \times \frac{347}{1000} = \frac{1548 \times 347}{100000} = \frac{537156}{100000}$.) Dividiren wir nach § 48, so müssen wir vom Producte der beiden Zähler so viel Stellen abschneiden, als im Nenner Nullen, d. h. in beiden Factoren Decimalstellen, vorkommen.

Sind im Producte weniger Decimalstellen als beide Factoren zusammen haben, so werden die fehlenden Stellen durch vorgesetzte Nullen ergänzt; z. B.

$$0{,}07 \times 0{,}0085 = \frac{7}{100} \times \frac{85}{10000} = \frac{7 \times 85}{1000000} = \frac{595}{1000000} = 0{,}000595.$$

Kommen mehr als zwei Factoren vor, so multiplicirt man wie mit ganzen Zahlen, und schneidet vom Producte so viel Decimalstellen ab, als sämmtliche Factoren zusammen haben; z. B.

$$3{,}07 \times 0{,}045 \times 0{,}003 = \frac{307 \times 45 \times 3}{100000000} = 0{,}00041445.$$

Exempel Nr. 1088—1126.

§ 53. Aufgabe. **Decimalbrüche zu dividiren.**

Auflösung. Man dividire mit dem Divisor in den Dividendus, ohne Rücksicht auf das Komma, als wären beide ganze Zahlen, und schneide vom Quotienten so viel Decimalstellen ab, als der Dividendus mehr hat wie der Divisor; z. B.

2,3145704 : 0,345.

Ausführung: 0,345 | 2,3145705 | 67089
2 070
2445
2415
3070
2760
3105
3105.

Hier hat der Dividendus 7 und der Divisor 3 Decimalstellen, folglich muß der Quotient 7 — 3 = 4 Decimalstellen haben, daher

2,3145705 : 0,345 = 6,7089.

Beweis. Da der Dividendus gleich dem Producte aus Divisor und Quotienten ist, so muß derselbe so viel Decimalstellen haben, als Divisor und Quotient zusammen, folglich hat der Quotient so viele Decimalstellen, als im Dividendus mehr vorkommen wie im Divisor.

Hat der Dividendus eben so viele Decimalstellen als der Divisor, so kann der Quotient keine bekommen, und wird eine ganze Zahl; z. B. 711,54 : 2,01.

Ausführung: 2,01 | 711,54 | 354
603
108 5
100 5
8 04
8 04.

Also 711,54 : 2,01 = 354.

Kommen endlich im Dividendus weniger Decimalstellen vor als im Divisor, so hängt man dem Dividendus so viele Nullen an als nothwendig sind; z. B. 205,568 : 0,00256.

Ausführung: 0,00256 | 205,56800 | 80300
204 8
768
768
00.

Also 205,568 : 0,00256 = 80300.

Exempel Nr. 1127 — 1161.

§ **54**. Aufgabe. Den Quotienten zweier Decimalbrüche, wenn die Division nicht aufgeht, mit einer beliebig kleinen Unrichtigkeit als Decimalbruch zu entwickeln.

Auflösung und Beweis. Geht der Divisor in den Dividendus nicht auf, so folgt daraus, daß der Quotient als Decimalbruch nicht g e n a u anzugeben ist. — Man dividirt in einem solchen Falle nach § 53, hängt, wenn es verlangt wird, dem Dividendus Nullen an, und setzt die Division fort; — stellt bei irgend einer Decimalstelle die Division ein, kümmert sich nicht weiter um den Divisionsrest, und bestimmt die Stelle für das Komma, als wäre die Division aufgegangen. — Dem auf diese Art erhaltenen Quotienten fehlt Etwas, das aber desto kleiner wird, je mehr Decimalstellen man berechnet, und kann so klein werden als man will; z. B. 3,4689 : 10,7.

Ausführung: 10,7 | 3,46890000 | 324196
3 21
―――
258
214
―――
449
428
―――
1ster Rest = 210
107
―――
2ter Rest = 1030
963
―――
3ter Rest = 670
642
―――
28.

Also 3,4689 : 10,7 = 0,324196 . . . .

Hätte man die Division mit der dritten Stelle im Quotienten abgebrochen, so würde der Divisor (10,7) mit dem gefundenen Quotienten = 0,324 multiplicirt, noch nicht den ganzen Dividendus geben, weil ein Rest = 21 nachblieb. Also würde 0,324 zu klein, dagegen 0,325 zu groß sein. Da nun 0,325 — 0,324 = 0,001, so würde der begangene Fehler kleiner sein als 0,001. — Setzt man dem Dividendus eine Null an, und fährt in der Division fort, so erhält man im Quotienten eine Stelle mehr, und hat statt des vorhergehenden Quotienten den neuen = 0,3241 mit einem Divisionsreste = 103. Dieser Quotient ist ebenfalls zu klein, dagegen 0,4242 zu groß. Da nun 0,3242 — 0,3241 = 0,0001, so ist der Fehler kleiner als 0,0001. Setzt man die Division noch weiter fort, so wird auf dieselbe Art gezeigt, daß der Fehler in dem Quotienten = 0,32419 kleiner als 0,00001 und beim Quotienten 0,324196 kleiner als 0,000001 geworden wäre.

Es kommt nun darauf an, ob die erzielte Genauigkeit für den vorliegenden Fall ausreicht, weshalb auch bei Divisionen, die nicht aufgehen, vorher angegeben wird, wie genau, d. h. auf wie viel Decimalstellen, der Quotient zu entwickeln ist.

Daß ein Decimalbruch nicht ganz genau, sondern nur annähernd richtig ausgedrückt ist, pflegt man durch einige an seine Decimalstellen gereihte Punkte anzudeuten; z. B.

$$0{,}426 : 0{,}35 = 0{,}1217 \ldots\ldots$$

§ 55. Aufgabe. Einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln.

Auflösung und Beweis. Jeder gewöhnliche Bruch stellt eine nicht ausgeführte Division des Nenners in den Zähler vor. — Führt man diese Division aus, so erhält man den Werth des Quotienten als Decimalbruch und hat alsdann einen gewöhnlichen Bruch durch einen Decimalbruch ausgedrückt. — Die Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche erfolgt also nach den Regeln der Division mit Decimalbrüchen. Sollte man z. B. $^7/_{16}$ in einen Decimalbruch verwandeln, so hängt man dem Zähler eine beliebige Menge Nullen an, die als Decimalstellen zu betrachten sind, und dividirt hierauf mit dem Nenner. Die Division wird so lange fortgesetzt, bis kein Rest übrig bleibt, oder bis man eine solche Menge von Decimalstellen entwickelt hat, daß der Fehler im Quotienten kleiner ist als eine beliebige Größe; z. B. $^7/_{16}$ und $^{13}/_{19}$ in Decimalbrüche verwandelt, fordern folgende Ausführung:

```
16 | 7,0000 | 4375
     64
     ——
      60
      48
      ———
      120
      112
      ———
       80
       80
```

```
19 | 13,0000 | 68421
     114
     ———
      160
      152
      ———
       80
       76
       ——
       40
       38
       ——
        20
        19
        ——
         1.
```

daher $^{7}/_{16} = 0{,}4375$,

$^{13}/_{19} = 0{,}68421 \ldots$ mit einem Fehler, der kleiner ist als 0,00001.

Auf diese Art findet man:

1) $^{3}/_{5} = 0{,}6$
2) $^{11}/_{25} = 0{,}44$
3) $^{13}/_{64} = 0{,}2046875$
4) $^{13}/_{57} = 0{,}2280701 \ldots$
5) $^{5}/_{47} = 0{,}1063808 \ldots$
6) $^{2}/_{3} = 0{,}6666 \ldots$ (Periode = 6)
7) $^{7}/_{11} = 0{,}636363 \ldots$ (Periode = 63)
8) $^{14}/_{27} = 0{,}518518518 \ldots$ (Periode = 518)
9) $^{7}/_{12} = 0{,}583333 \ldots$ (Periode = 3)
10) $^{27}/_{88} = 0{,}306818181 \ldots$ (Periode = 81).

§ **56.** Aus den im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Beispielen geht hervor, daß bei Verwandlung gewöhnlicher Brüche in Decimalbrüche für letztere 3 Formen sich ergeben:

1) Sie sind entweder geschlossen oder vollständig, wie in den Beispielen 1, 2 und 3;
2) sie sind periodisch, d. h. eine Reihe von Ziffern wiederholt sich in derselben Ordnung. Hierbei können 2 Arten vorkommen:
   a. die Periode beginnt gleich nach dem Komma, und umfaßt eine gewisse Anzahl von Stellen, wie in den Beispielen 6, 7 und 8. Diese Decimalbrüche heißen vollständig periodische;

b. oder es weichen die ersten Decimalstellen, deren Anzahl größer oder kleiner sein kann, von der später folgenden Periode ab, wie die Beispiele 9 und 10 zeigen. Diese Decimalbrüche werden unvollständig periodische genannt..

In den Beispielen 4 und 5 bemerkt man zwar keine Periode; es wird aber durch nachfolgende Betrachtung sogleich erhellen, daß auch da eine Periode vorkommen muß, nur besteht dieselbe aus einer größern Reihe von Ziffern, als dort durch die Division Decimalstellen entwickelt worden. — Eine Periode muß nehmlich immer erscheinen, wenn in der Division ein Rest übrig bleibt, der bereits ein Mal da gewesen. Ist der Divisor, d. h. der Nenner des gegebenen gewöhnlichen Bruches, kein Theiler irgend einer Ordnungseinheit, so bleiben bei fortgesetzter Division immer Reste nach, die aber kleiner sein müssen als der Divisor. Hätten wir z. B. $\frac{5}{7}$ in einen Decimalbruch zu verwandeln, so können nur folgende Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 nachbleiben. Nach 6 Divisionen, die 6 Decimalstellen geben, muß bei der 7ten Division einer der Reste erscheinen, der schon einmal da war, und von diesem an müssen bei fortgesetzter Division die Ziffern im Quotienten sich wiederholen, die dann die Periode geben. Hieraus folgt der Satz: jede Periode muß wenigstens eine Stelle weniger haben als der Nenner des gegebenen Bruches Einheiten hat.

Ein gewöhnlicher Bruch wird durch einen geschlossenen Decimalbruch nur dann ausgedrückt werden können, wenn sein Nenner in irgend eine Ordnungseinheit aufgeht, d. h. wenn er nur die Factoren 2 und 5 allein, oder 2 und 5 zugleich enthält.

Exempel Nr. 1207—1255.

§ 57 a. Aufgabe. Einen Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln.

Auflösung und Beweis. 1) Ist der Decimalbruch ein geschlossener, so giebt man ihm seinen zugehörigen Nenner und reducirt, z. B.

$$0{,}75 = {}^{75}/_{100} = {}^{3}/_{4}$$
$$0{,}125 = {}^{125}/_{1000} = {}^{1}/_{8}$$
$$0{,}035 = {}^{35}/_{1000} = {}^{7}/_{200}.$$

2) Soll ein vollständig periodischer Decimalbruch in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt werden, so nimmt man die erste Periode als Zähler, und setzt zum Nenner eine Zahl mit soviel Neunen geschrieben, als die Periode Stellen enthält, und hebt ihn dann auf; z. B.

$$0{,}6666\ldots\ldots = {}^{6}/_{9} = {}^{2}/_{3}$$
$$0{,}727272\ldots = {}^{72}/_{99} = {}^{8}/_{11}$$
$$0{,}592592\ldots = {}^{592}/_{999} = {}^{16}/_{27}.$$

Multiplicirt man nehmlich den Decimalbruch mit einer Ordnungseinheit, die soviel Nullen als die Periode Stellen hat, so wird die erste Periode eine ganze Zahl. Es sei z. B. gesetzt

$$0{,}345345345\ldots = b$$

und werde mit 1000 multiplicirt, so erhält man

$$345{,}345345\ldots = 1000\ b.$$

Subtrahirt man hiervon den gegebenen Decimalbruch, so erhält man die Periode als ganze Zahl, nehmlich:

$$\begin{array}{rcr} 345{,}345345\ldots & = & 1000\ b \\ 0{,}345345\ldots & = & 1\ b \\ \hline 345 & = & 999\ b, \end{array}$$

mithin durch Division mit 999

$$\text{Bruch} = b = {}^{345}/_{999} = {}^{115}/_{333}.$$

3) Um einen unvollständig periodischen Decimalbruch in einen gewöhnlichen zu verwandeln, multiplicire man den Decimalbruch zuerst mit einer solchen Ordnungseinheit, die ihn zu einem vollständig periodischen macht. Es sei z. B. 0,1447272... in einen gewöhnlichen Bruch zu verwandeln, so setze man

$$0{,}1447272\ldots = b,$$

multiplicire mit 1000, weil drei Stellen der Periode vorangehen, und man erhält

$$144{,}7272\ldots = 1000\,.\,b.$$

Hierauf multiplicire man noch ein Mal mit einer solchen Ordnungseinheit, daß auch eine Periode vor dem Komma zu stehen kommt. Im vorliegenden Falle ist diese Ordnungseinheit = 100, weil die Periode aus 2 Stellen besteht; dadurch erhält man

$$\left.\begin{array}{rrcl} & 14472{,}7272\ldots & = & 100000 \cdot b \\ \text{Nun war} & 144{,}7272\ldots & = & 1000 \cdot b \end{array}\right\} \text{ also durch}$$

$$\text{Subtraction } 14328 = 99000 \cdot b,$$

daher $h = {}^{14328}/_{99000} = {}^{199}/_{1375}$.

Hieraus entsteht folgende praktische Regel: Man nehme den nicht periodischen Theil und eine Periode; subtrahire davon den nicht periodischen Theil, und dividire die erhaltene Zahl mit einer Zahl, die aus soviel Neunen, als die Periode Stellen, und soviel Nullen besteht, als der nicht periodische Theil Stellen hat; z. B.

$$0{,}16666\ldots = \frac{16-1}{90} = {}^{15}/_{90} = {}^{1}/_{6};$$

$$0{,}068181\ldots = \frac{681-6}{9900} = {}^{675}/_{9900} = {}^{3}/_{44};$$

$$0{,}74326326\ldots = \frac{74326-74}{99900} = {}^{74252}/_{99900} = {}^{18563}/_{24975}.$$

Exempel Nr. 1256 — Nr. 1281.

§ 57 b. Wird ein Product oder Quotient blos auf eine bestimmte Anzahl Decimalstellen genau verlangt, so führt man die Multiplication oder Division vollständig aus und verkürzt den Decimalbruch bei der verlangten Decimalstelle nach vorhergegangener Correctur der letzten übrigbleibenden Stelle. Es ist aber viel Zeit und Mühe zu ersparen wenn man sich der abgekürzten Multiplications- und Divisions-Methode bedient. Das Wesen dieser Methode besteht darin, daß sie schon während des Multiplicirens die überflüssigen Decimalstellen weglassen und nur so viel angeben lehrt, als verlangt werden.

Die abgekürzte Multiplication.

1tes Beispiel. Es sei verlangt das Product von 15,3427 × 7,8196 auf vier Decimalstellen genau!

Auf dem gewöhnlichen Wege erhalten wir, indem wir mit der höchsten Stelle des Multiplicators anfangen:

$$\begin{array}{r|l} 15{,}3427 & \\ 7{,}8196 & \\ \hline 1073989 & \\ 122741 & 6 \\ 1534 & 27 \\ 1380 & 843 \\ 92 & 0562 \\ \hline 119{,}9737 & 7692 \end{array}$$

Also vier Decimalstellen, d. h. die rechts von dem gezogenen Striche belegenen Theile der einzelnen Partialproducte, mehr als verlangt werden! — Diese überflüssigen Stellen können sogleich weggelassen werden, wenn wir bedenken, daß die Einer des Multiplicators mit den Zehntausendsteln des Multiplicandus multiplicirt zum Producte, Zehntausendstel liefern; ebenso die Zehntel des Multiplicators mit den Tausendsteln des Multiplicandus; — die Hundertstel des Multiplicators mit den Hundertsteln des Multiplicandus u. s. w. — immer Zehntausendstel geben werden. Nach Weglassung aller Theile, die niedriger als Zehntausendstel sind, haben wir:

$$
\begin{array}{r l}
15{,}3427 & \\
7{,}8196 & \\
\hline
1073989 & = 15{,}3427 \times 7 \\
122736 & = 15{,}342 \times 0{,}8 \\
1534 & = 15{,}34 \times 0{,}01 \\
1377 & = 15{,}3 \times 0{,}009 \\
90 & = 15 \times 0{,}0006 \\
\hline
119{,}9726 &
\end{array}
$$

Wir sehen, daß hier ein Unterschied $= 0{,}0011$ in beiden Producten vorkommt. Diese Differenz wird durch die Correctur jedes einzelnen Theilproducts vermindert.

$$
\begin{array}{r}
15{,}3427 \\
7{,}8196 \\
\hline
1073989 \\
122742 \\
1534 \\
1381 \\
92 \\
\hline
119{,}9738
\end{array}
$$

Ziehen wir in Betracht daß beim zweiten Theilproducte $7 \times 8 = 56$ Hunderttausendstel weggeworfen werden und diese 5 Zehntausendstel $+ 6$ Hunderttausendstel betragen, so sehen wir, daß zur niedrigsten Stelle dieses Theilproducts nicht blos 5 Zehntausendstel, sondern weil die wegfallenden 6 Hunderttausendstel mehr als 5 betragen, $5 + 1 = 6$ Zehntausendstel hinzu zu fügen sind; demnach haben wir $2 \times 8 = 16 + 6 = 22$ Zehntausendstel.

Im dritten Theilproducte haben wir $1 \times 2 = 2$ Hunderttausendstel, also keine Correctur nöthig.

Im vierten Theilproducte ist $9 \times 4 = 36$ Hunderttausendstel, daher die Correctur $= 4$.

Im fünften Theilproducte endlich, weil 3 $\times$ 6 = 18 Hunderttausendstel, die Correctur = 2.

Das auf diese Art erzielte Product ist um 1 Einheit in der vierten Stelle größer als das durch die gewöhnliche Multiplication gefundene. Wenn wir aber dort das Product bei der vierten Stelle verkürzen so muß wegen der wegfallenden 7, in der fünften Decimalstelle, die vierte Stelle um eine Einheit erhöht werden und wir hätten dann eben so die Zahl 119,9738 erhalten.

Zweites Beispiel. 35,786989 $\times$ 2,30507 auf 5 Stellen genau!

35,78691^{9}
2,30507
7157398
1073609
17893
250
82,49150

Da nur 5 Stellen verlangt werden so haben wir bei der Multiplication mit den Einern des Multiplicators bei der 5ten Stelle des Multiplicandus anzufangen und die 6te Stelle blos zur Correctur zu benutzen.

1) $8 \times 2 = 16 + 2$ (2 als Correctur von $9 \times 2 = 18$) $= 18$

2) $9 \times 3 = 27 + 2$ (2 als Correctur von $8 \times 3 = 24$) $= 29$

3) $6 \times 0 = 0$

4) $8 \times 5 = 40 + 3$ (3 als Correctur von $6 \times 5 = 30$) $= 43$

5) $5 \times 7 = 35 + 5$ (5 als Correctur von $7 \times 7 = 49$)

Drittes Beispiel. 0,07896 $\times$ 3,78645 auf 4 Decimalstellen!

Ausrechnung.

0,07816	0,07896	
3,78645	3,78645	
2369	2368	8
552	552	72
62	63	168
4	4	7378
0,2987		31584
		39430
	0,2989	780920

Viertes Beispiel. 0,284673 $\times$ 0,007658 auf 5 Decimalstellen!

Ausrechnnng.

0,284673
0,007658
199
17
1
0,00217

Die fünfte Decimalstelle sind 100000stel. Um 100000stel zu erhalten müssen wir die vorkommende höchste Stelle des Multiplicators nehmlich die 1000stel mit den 100steln des Multiplicandus multipliciren also bei der zweiten Decimalstelle anfangen und die dritte Stelle zur Correctur benutzen.

Rechnen wir diese Aufgabe auf die gewöhnliche Art aus so finden wir das Product = 0,0021800253834.

Aus dem dritten und vierten Beispiele ersehen wir daß trotz der angewandten Correctur dennoch ein Unterschied von zwei und von einer Einheit in der letzten Stelle vorkommt. Um ganz sicher zu gehen und das Resultat bis zu der bestimmten Decimalstelle genau zu erhalten, berechnet man nach der abgekürzten Multiplications-Methode immer eine Stelle mehr als verlangt wird und wirft diese hernach wieder nach vorgenommener Correctur weg.

Die abgekürzte Divisions-Methode.

Erstes Beispiel. Den Quotienten 0,847654 : 3,28962 auf 4 Decimalstellen genau anzugeben!

3,28962	0,847654	0,2577....
	6579	
	1897	
	1644	
	253	
	230	
	23	
	21	
	2	

Da der Divisor in seiner höchsten Stelle, Einer und der Dividendus Zehntel hat so wird die höchste Stelle des Quotienten entweder Zehntel oder Hundertstel geben je nachdem die Ziffer des Dividendus größer oder kleiner ist als die Ziffer des Divisors. Im vorliegenden Beispiele erhalten wir weil $8 > 3$ ist, zur ersten Stelle des Quotienten — Zehntel. Hieraus schließen wir, da der Quotient 4 Stellen

Auf gewöhnliche Art.

3,28962	0,8476	54	0,25767....
	6579	24	
	1897	300	
	1644	810	
	252	4900	
	230	2734	
	22	21660	
	19	73772	
	2	478880	
	2	302734	
		176146	

haben soll, daß wir im Ganzen vier Mal zu dividiren haben.

Bei den Partial-Divisionen entscheiden die ersten Ziffern des Divisors und Dividendus über den jedesmaligen Partialquotienten; es werden daher bei den vorzunehmenden 4 Partial-Divisionen auch nur die vier ersten Ziffern des Divisors und die vier ersten Ziffern des Dividendus in Betracht kommen. — Wir nehmen deshalb zur ersten Partial-Division die vier ersten Ziffern des Divisors und Dividendus und berücksichtigen die fünfte Ziffer des Divisors nur zur Correctur des abzuziehenden Products aus dem ersten Theile des Quotienten nnd des Divisors. — Zu dem Reste = 1897 ziehen wir keine neue Ziffer herunter, sondern werfen die 4te Stelle des Divisors weg und dividiren mit 328 in 1897, wobei wir die durch die weggelassene 4te Ziffer des Divisors nöthige Correctur, berücksichtigen. Bei der dritten Partialdivision lassen wir wieder eine Ziffer des Divisors weg und dividiren mit 32 in den Rest = 253 u. s. w.

In dem auf die gewöhnliche Weise gefundenen Quotienten differirt die vierte Stelle um eine Einheit. Verkürzen wir aber, so werden wir, eben so wie vorhin, einen Quotienten = 0,2577.... erhalten.

Zweites Beispiel. 3,4794876 : 0,959867 auf 4 Stellen!

Ausführung. 0,959867 | 3,4794876 | = 3,6249.....

2,87960	
59988	
57592	
2396	
1920	
476	
384	
92	
86	
6	

Da wir mit Zehnteln in Einer dividiren sollen so erhalten wir zur ersten Stelle im Quotienten ebenfalls Einer, deshalb sind um 4 Decimalstellen zu bekommen, fünf Partialdivisionen erforderlich. — Wir nehmen also 5 Ziffern aus dem Divisor und weil 9 > 3, 6 Ziffern aus dem Dividendus. Auf diese Weise haben wir:

1) 347948 : 95986 = 3 [= 3,]; subtrahiren 287860 = 95986 × 3 + 2 (die Correctur von 3 × 7 = 21) und erhalten den Rest = 59988.

2) 59988 : 9598 = 6 [= 0,6]; subtrahiren 57592 = 9598 × 6 + 4 (die Correctur von 6 × 6 = 36) und erhalten den Rest = 2396.

3) 2396:959=2 [=0,02]; subtrahiren 1920=959×2+2 (die Correctur von 2×8=16) und erhalten den Rest = 476.

4) 476 : 95 = 4 [=0,004]; subtrahiren 384 = 95 × 4 + 4 (die Correctur von 4 × 9 = 36) und erhalten den Rest = 92.

5) 92 : 9 = 9 [= 0,0009]; subtrahiren 86 = 9 × 9 + 5 (die Correctur von 5 × 9 = 45).

Drittes Beispiel. 0,0079843 : 0,861945 auf 5 Stellen!

Auflösung.

$$
\begin{array}{r|r|l}
0,\dot{8}\dot{6}\dot{1}945 & 0,00\dot{7}\dot{9}\dot{8}\dot{4}3 & = 0,00926\ldots.. \\
 & 7757 & \\
\cline{2-2}
 & 227 & \\
 & 172 & \\
\cline{2-2}
 & 55 & \\
 & 52 & \\
\cline{2-2}
 & 3 &
\end{array}
$$

Da die Zehntel des Divisors in die Tausendstel des Dividendus dividirt, zur ersten Stelle des Quotienten Hundertstel geben müssen, — weil aber 8 > 7 schon Tausendstel geben werden so haben wir um 5 Decimalstellen im Quotienten zu erhalten nur 3 Partial-Divisionen; deshalb nehmen wir drei Ziffern des Divisors und 4 Ziffern des Dividendus.

Viertes Beispiel.

```
2,78964 | 7,89435 | = 2,82989....
        | 5,57928 |
          231507
          223171
            8336
            5579
            2757
            2510
             247
             222
              25
              24
               1
```

Uebungsfragen.

1) Wie entstehen Decimalbrüche?

2) Wie schreibt man Decimalbrüche?

3) Wie werden Decimalbrüche ausgesprochen?

4) Welchen Einfluß haben Nullen die dem Decimalbrucher zu Rechten angehängt werden?

5) Wie wird ein Decimalbruch durch eine Ordnungseinheit multiplicirt?

6) Wie dividirt man einen Decimalbruch durch eine Ordnungseinheit?

7) Was versteht man unter Correctur eines Decimalbruches?

8 Wie bringt man Decimalbrüche auf gleiche Benennung?

9) Wie addirt man Decimalbrüche?

10) Wie werden Decimalbrüche subtrahirt?

11) Wie multiplicirt man Decimalbrüche?

12) Wie zeigt man die Richtigkeit des Verfahrens bei der Multiplication der Decimalbrüche?

13) Welche Regel hat man für die Division der Decimalbrüche?

14) Wie verwandelt man einen gewöhnlichen Bruch in einen Decimalbruch?

15) Wie viele Arten von Decimalbrüchen giebt es?

16) Was versteht man unter geschlossenen, periodischen und unvollständig periodischen Decimalbrüchen?
17) Wie viele Stellen kann eine Periode höchstens haben?
18) Welche gewöhnlichen Brüche geben geschlossene Decimalbrüche?
19) Wie verwandelt man in einen gewöhnlichen Bruch:
   a) einen geschlossenen Decimalbruch?
   b) einen vollständig periodischen Decimalbruch?
   c) einen unvollständig periodischen Decimalbruch?
20) Worin besteht die abgekürzte Multiplication der Decimalbrüche?
21) Worin besteht die abgekürzte Division der Decimalbrüche?

Von den benannten Zahlen.

§ 58. Jede benannte Zahl ist ein Vielfaches der benannten Einheit (§ 4). Der bequemern Uebersicht wegen hat man die Einheit einer höhern Sorte in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt, die Einheiten der niedrigern Sorte heißen; z. B. in 1 Pud = 40 Pfund ist 1 Pud die höhere und 1 Pfund die niedrigere Sorte. Diejenige Zahl, welche angiebt, wieviel Einheiten der niedrigern Sorte eine Einheit der höhern ausmachen, heißt Reductionszahl.

Die verschiedenen Einheiten der benannten Zahlen beziehen sich auf Maaße, Münzen und Gewichte, — wozu noch die Zeitgrößen kommen.

Die Bestimmung, wieviel Einheiten einer niedrigern Sorte eine Einheit der nächst höhern betragen sollen, ist durch locale und anderweitige Umstände veranlaßt worden, weshalb auch eine Verschiedenheit in verschiedenen Staaten in Maaßen und Gewichten entstehen mußte. — Die Gesammtheit aller Maaßsysteme eines Landes bildet das metrische System desselben.

Eine benannte Zahl besteht entweder aus einer oder aus mehreren Sorten: z. B. 7 Saschen hat nur eine Sorte; die Zahl: 6 Saschen 2 Arschinen 13 Werschok aber drei Sorten. Jene heißt eine einsortige, diese, eine mehrsortige benannte Zahl. Die mehrsortigen Zahlen, obgleich sie Einheiten verschiedener Unterabtheilungen enthalten, betrachtet man doch nur als eine Zahl, eben so wie eine unbenannte Zahl die mehrere Ordnungen enthielt als eine Zahl betrachtet wurde. — Wir besitzen in jedem Maaßsystem eigentlich ein besonderes, kleines Zahlensystem für jede einzelne Gattung benannter Zahlen. Dieses ist aber deshalb sehr mangelhaft weil die überall gleiche Eintheilungszahl fehlt um von einer Sorte zur andern über zu gehen und weil bei derselben Größenart in verschiedenen Ländern weder die Haupteinheiten noch die ihnen untergeordneten Eintheilungen übereinstimmen.

Für mehrsortige benannte Zahlen gelten folgende allgemeine Bestimmungen:

1) Die jedesmaligen höhern Benennungen stehen zur Linken der nachfolgenden kleineren Sorten z. B. 18 Tschetwert 5 Tschetwerik 4 Garnetz.

2) Die Zahl bei irgend einer Benennung darf nie größer sein als die zugehörige Reductionszahl. z. B. Man darf nicht sagen 5 Tschetwert 9 Tschetwerik sondern muß dafür setzen 6 Tschetwert 1 Tschetwerik weil 9 Tschetwerik = 8 Tschetwerik + 1 Tscherwerik d. h. = 1 Tschetwert + 1 Tschetwerik sind.

3) Brüche dürfen nur bei der kleinsten vorkommenden Benennung erscheinen z. B. 30 Wedro 6¾ Kruschken.

Ehe wir zu den Species mit benannten Zahlen übergehen, müssen wir zwei Rechnungsarten vorausschicken die sich auf die Namensänderung der Sorten beziehen. Es sind diese: das Resolviren und Reduciren.

Unter Resolviren versteht man das Verwandeln der höhern Sorten in niedrigere; — unter Reduciren das Zurückführen niedrigerer Sorten auf höhere. Ersteres wird durch Multiplication, letzteres durch Division bewerkstelligt. Die nöthigen Reductionszahlen findet man in eigends dazu entworfenen Tabellen.

A. Das Resolviren höherer Sorten in niedrigere

I. Ganzer Zahlen.

Hier können folgende Fälle vorkommen:

a) Man verlangt die Verwandlung einer höhern Sorte in die nächst niedrigere z. B.

1) Wie viel Pfund sind 4 Pud?

Ausrechnung. 1 Pud = 40 Pfund

folglich 4 Pud = 4 (40 Pfund) = 160 Pfund.

2) Wieviel Tschetwerik sind 14 Tschetwert?

Ausrechnung. 1 Tschetwert = 8 Tschetwerik

daher 14 Tschetwert = 14 (8 Tschetwerik) = 112 Tschetwerik.

b) Man verlangt die Verwandlung einer höhern Sorte in die entfernteren niedrigern Sorten. z. B.

3) 4 Pud sind wieviel Solotnik?

Ausrechnung. 1 Pud = 40 Pfund; 1 Pfund = 96 Solotnik.

daher 40 Pfund = 40.(96 Sol.)

Folglich 1 Pud = 40 . (96 Solotnik)

mithin 4 Pud = 4 . (1 Pud) = 4 . 40 . (96 Solotnik)

= 15360 Solotnik.

4) 3 Werst sind wieviel Fuß?

Ausrechnung. 1 Werst = 500 Sashen; 1 Sashen = 7 Fuß

500 Sashen = 500 . (7 Fuß)

folglich: 1 Werst = 500 . (7 Fuß)

daher 3 Werst = 3 . 500 . (7 Fuß)

= 10500 Fuß.

Aus der Auflösung der Aufgaben unter (a) und (b) folgt die allgemeine Regel: man resolvirt dadurch daß man die Reductionszahl mit der Anzahl der gegebenen höhern Sorte multiplicirt.

Da es auf die Größe des Products keinen Einfluß hat wenn man die Factoren vertauscht so abstrachirt man sich folgendes für die Praxis bequemeres Verfahren. Statt nehmlich bei der Frage: „Wieviel Werschock sind 354 Arschinen?“ — die Reductionszahl — 16 Werschock — zum Multiplicandus zu machen und mit 354 zu multipliciren, setzen wir unter 354 Arschinen die Zahl 16 und geben dem Producte die richtige Benennung — Werschock; also

354 Arschinen
16
2124
354
5664 Werschock.

Dieses Verfahren fördert die Rechnung, weil in der Regel die Reductionszahlen klein sind und man das Umschreiben erspart. Diesem nach werden wir künftig rechnen nach folgendem Schema:

Wie viel sind 35 Pud in Solotnik?
40
1400 Pfund
96
8400
126
134400 Solotnik.

c) Man verlangt endlich die Verwandlung mehrsortiger benannter Zahlen in die niedrigste Benennung. z. B.

5) Wieviel Solotnik sind
3 Berkowetz 5 Pud 27 Pfund 48 Solotnik?

10
30 Pud +
5
35 Pud
40
1400 Pfund +
27
1427 Pfund
96
8562
12843
136992 Solotnik +
48
137040 Solotnik.

Auflösung. Man resolvirt zuerst die höchste vorkommende Sorte in die nächst niedrigere und addirt zu dem Producte die vorkommende Menge dieser niedrigern Sorte. Dieses Verfahren wiederholt man bei allen Unterabtheilungen bis man auf die niedrigste Benennung gekommen ist.

6) Wieviel Bogen betragen:

4 Ballen 7 Rieß 12 Buch 10 Bogan
10
47 Rieß = (4 × 10 + 7) Rieß
20
958 Buch = (47 × 20 + 18) Buch
24
3832
1917
23002 Bogen = (958 × 24 + 10) Bogen.

Exempel Nr. 1302 — Nr. 1319.

II. Bruchzahlen.

Ist die höhere Sorte durch einen Bruch gegeben, so resolvirt man dieselbe ebenfalls dadurch, daß man die Reductionszahl mit dem Bruche multiplicirt. z. B.

1) Wieviel Kruschken sind $\frac{3}{5}$ Wedro?

Ausrechnung: 1 Wedro = 10 Kruschken

also 3 Wedro = 3 . (10 Kruschken)

folglich $\frac{3 \text{ Wedro}}{5} = \frac{3}{5}$ Wedro $= \frac{3 \cdot (10 \text{ Kruschken})}{5} = (\frac{3}{5})$ 10 Kruschken
= 6 Kruschken.

Oder: 1 Wedro = 10 Kruschken

daher $\frac{1}{5}$ Wedro $= \frac{10 \text{ Kruschken}}{5} =$ 2 Kruschken

folglich $\frac{3}{5}$ Wedro $= \frac{3 \cdot (10 \text{ Kruschken})}{5} =$ 3 . (2 Kruschken)
= 6 Kruschken.

2) Wieviel Werschok sind $\frac{3}{4}$ Arschinen?

Ausrechnung: 1 Arschin = 16 Werschok

$\frac{3}{4}$ Arschinen $= (\frac{3}{4}) \cdot 10$ Werschok $= \frac{3 \cdot 16 \text{ Werschok}}{4}$
$= \frac{48 \text{ Werschok}}{4} =$ 12 Werschok.

Oder: $\frac{3}{4}$ Arschinen $= (\frac{3}{4}) \cdot 16$ Werschok $= (\frac{16}{4}) \cdot 3$ Werschok
$= 4 \cdot 3$ Werschok $= 12$ Werschok.

Hieraus folgt: Man resolvirt einen benannten Bruch, wenn man

a) entweder die Reductionszahl mit dem Zähler des Bruchs multiplicirt und das Product mit dem Nenner dividirt, oder

b) wenn man die Reductionszahl mit dem Nenner dividirt und den Quotienten mit dem Zähler multiplicirt.

Im ersten Falle ist der Quotient, — im letztern das Product die gesuchte niedrigere Benennung. — Allgemeiner in der Anwendung ist das erstere Verfahren, weil bei der Division der Reductionszahl, wenn sie nicht durch den Nenner theilbar ist, eine gemischte Zahl entsteht, die unbequemer mit dem Zähler zu multipliciren ist, als die Reductionszahl selber.

Ein großer Vortheil entspringt auch daraus, daß man die Multiplication blos andeutet und dann im Zähler und Nenner mit dem gemeinschaftlichen Theiler aufhebt. z. B.

a) $\frac{14}{15}$ Pud, wieviel Pfund?

Ausrechnung: $\frac{14}{15}$ Pud $= \dfrac{14 \cdot \overset{8}{\cancel{40}}}{\underset{3}{\cancel{15}}}$ Pfund $= \frac{112}{3}$ Pfd. $= 37\frac{1}{3}$ Pfd.

b) $\frac{5}{16}$ Tschetwert, wieviel Tschetwerik?

Ausrechnung: $\frac{5}{16}$ Tschetwert $= \dfrac{5 \cdot \cancel{8}}{\underset{2}{\cancel{16}}}$ Tschetwerik $= \frac{5}{2}$ Tschetwerik
$= 2\frac{1}{2}$ Tschetwerik.

c) $2\frac{1}{4}$ Berkowetz, wieviel Pud?

Ausrechnung: $2\frac{1}{4}$ Berkowetz $= \frac{9}{4}$ Berkowetz $= \dfrac{9 \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{2}{\cancel{4}}}$ Pud
$= \frac{45}{2}$ Pud $= 22\frac{1}{2}$ Pud.

Sollen Brüche höherer Sorten nicht allein in die nächst niedrigere Sorte verwandelt, sondern durch alle noch vorhandenen niedrigern Sorten ausgedrückt werden, so resolvirt man zuerst den gegebenen Bruch in die nächst niedrigere Sorte und den bei dieser vorkommenden Bruch auf gleiche Weise in die folgende Sorte u. s. w. z. B.

3) $\frac{7}{9}$ Berkowetz, wieviel Pud, Pfund und Solotnik?

Ausrechnung: $\frac{7}{9}$ Berkowetz $= \frac{10 \,.\, 7 \text{ Pud}}{9} = \frac{70 \text{ Pud}}{9} = 7\frac{7}{9}$ Pud

$= 7 \text{ Pud} + \frac{40 \,.\, 7 \text{ Pfund}}{9}$; aber $\frac{40 \,.\, 7}{9}$ Pfund $= 31\frac{1}{9}$ Pfund,

daher $\frac{7}{9}$ Berkowetz $=$ 7 Pud $31\frac{1}{9}$ Pfund; da nun $\frac{1}{9}$ Pfund

$= \frac{96 \,.\, \text{Solotnik}}{9} = 10\frac{2}{3}$ Solotnik, so ist

$\frac{7}{9}$ Berkowetz $=$ 7 Pud 31 Pfund $10\frac{2}{3}$ Solotnik.

Exempel Nr. 1320 — Nr. 1328.

Ist der gegebene Bruch der höhern Sorte ein Decimalbruch, so ändert sich das Verfahren durchaus garnicht; nur muß man die Regeln für die Multiplication mit einem Decimalbruche vor Augen haben. z. B.

4) 0,485 Rubel, wieviel Kopeken?

Ausrechnung: 1 Rubel $=$ 100 Kopeken

0,485 Rubel $=$ 0,485 . (100 Kopeken) $=$ 48,5 Kop.

5) 0,78 Pud, wieviel Pfund?

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 0{,}78 \text{ Pud} \\ 40 \\ \hline 31{,}20 \text{ Pfund} \end{array}$$

6) 0,654 Pud, wieviel Solotnik?

Ausrechnung:

$$\begin{array}{r} 0{,}654 \text{ Pud} \\ 40 \\ \hline 26{,}16 \text{ Pfund} \\ 96 \\ \hline 15696 \\ 23544 \\ \hline 2511{,}36 \text{ Solotnik.} \end{array}$$

Wäre die Frage gewesen: 0,654 Pud, wieviel Pfund und Solotnik? so hätte man folgendermaaßen rechnen müssen:

$$
\begin{array}{l}
0{,}654 \text{ Pud} \\
\underline{\quad 40} \\
26{,}16 \text{ Pfund} = 26 \text{ Pfund} + 0{,}16 \text{ Pfund} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\quad 96} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \quad 96 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{144} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 15{,}36 \text{ Solotnik.}
\end{array}
$$

Also 0,654 Pud = 26 Pfund 15,36 Solotnik.

Exempel Nr. 1329 — Nr. 1336.

Wie sich von selbst versteht, erfolgt das Resolviren der ausländischen Maaße, Münzen und Gewichte in ihre correspondirenden Sorten auf dieselbe Weise. Sind die nöthigen Reductionszahlen gegeben, so findet in der Ausführung nicht die geringste Schwierigkeit statt.

Exempel Nr. 1337 — Nr. 1341.

B. Das Reduciren niedriger Sorten in höhere.

I. Die gegebenen Zahlen sind einsortig.

Um niedrigere Sorten auf höhere zurückzuführen, dividire man mit der Reductionszahl in die gegebene Zahl und schreibe zum Quotienten den Namen der höhern Benennung. z. B.

1) 64 Werschok, wieviel Arschinen?

Ausrechnung: Da 16 Werschok = 1 Arschin

so ist 1 Werschok = $\frac{1}{16}$ Arschin

daher 64 Werschok = 64 . (1 Werschok) = 64 . ($\frac{1}{16}$) Arschinen
= [64 : 16] Arschinen = 4 Arschinen.

2) 288 Garnetz, wieviel Tschetwerik?

Ausrechnung: 8 Garnetz = 1 Tschetwerik

also, 1 Garnetz = $\frac{1}{8}$ Tschetwerik

daher 288 Garnetz = 288 . ($\frac{1}{8}$) Tschetwerik = [288 : 8] Tschetwerik
= 36 Tschetwerik.

3) 25 Kopeken, wieviel Rubel?

Ausrechnung: 100 Kopeken = 1 Rubel

also 1 Kopeken = $\frac{1}{100}$ Rubel

daher 25 Kopeken = 25 . ($\frac{1}{100}$) Rubel = (25 : 100) Rubel
= $\frac{25}{100}$ Rubel = $\frac{1}{4}$ Rubel.

4) 1320 Pfund, wieviel Pud?

Ausrechnung: 40 Pfund | 1320 Pfund | 33 Pud
120
120
120.

Der Quotient 33 zeigt eigentlich an, daß 40 Pfund in 1320 Pfund, 33 mal enthalten sind; da aber 40 Pfund einem Pude gleich sind, so ist 33 . (40 Pfund) = 33 . (1 Pud) = 33 Pud.

Bleibt bei der Division mit der Reductionszahl ein Rest, so giebt der Quotient die Menge der Einheiten der höhern Sorte an und der Rest hat die Benennung der vorliegenden niedern Sorte. Dieser Rest kann als Bruch dem Quotienten angehängt werden. z. B.

5) 1534 Pfund, sind wieviel Pud?

Ausrechnung: 40 Pfund | 1534 Pfund | = 38 Pud
120
314
320
14 Pfund.

Da aber 14 Pfund = $\frac{14}{40}$ Pud = $\frac{7}{20}$ Pud, so können wir schreiben:

1534 Pfund = 38 Pud 14 Pfund = $38\frac{7}{20}$ Pfund.

6) $620\frac{7}{8}$ Arschinen, wieviel Saschen?

Ausrechnung. Auf den Bruch $\frac{7}{8}$, brauchen wir bei der Division gar keine Rücksicht zu nehmen, sondern hängen ihn wieder dem übrigbleibenden Reste unverändert an, also

3 Arschinen | 620 Arschinen | = 206 Saschen
6
20
18
2 Arschinen + $\frac{7}{8}$ Arschinen.

Mithin 620$\frac{7}{8}$ Arschinen = 206 Saschen 2$\frac{7}{8}$ Arschinen = 206$\frac{23}{24}$ Saschen.

Häufig wird der der höhern Sorte angehängte Bruch in einen Decimalbruch verwandelt. z. B.

7) 3746 Secunden, wieviel Minuten?

Ausrechnung: (3746 Secunden) : (60 Sec.) = 62$\frac{26}{60}$ Minuten = 62,4833 . . . . Minuten.

Exempel Nr. 1342 — Nr. 1347.

Verlangt man eine einsortige Zahl nicht blos in die nächst höhere Benennung, sondern in allen entferntern höhern Sorten auszudrücken, so hat man den jedesmaligen Quotienten mit der Reductionszahl der nächst höhern Sorte zu dividiren. z. B.

8) Wieviel Tschetwert und Tschetwerik sind 3450 Garnetz?

Ausrechnung:

8 Garnetz | 3450 Garnetz | = $\overset{8}{431}$ Tschetwerik | = 53 Tschetwert.

Rest = 2 Garn. Rest = 7 Tschetwk.

Also 3450 Garnetz = 53 Tschetwert 7 Tschetwerik 2 Garnetz.

Ob das eine oder das andere Verfahren anzuwenden sei, wird in der Aufgabe jedesmal ausdrücklich gesagt.

Exempel Nr. 1348 — Nr. 1359.

II. Die gegebenen Zahlen sind mehrsortig.

Die Reduction einer mehrsortigen Zahl kann auf drei verschiedene Arten gemacht werden, nehmlich

a) man verwandelt die niedrigste Sorte in die zunächst folgende höhere, addirt hiezu die Einheiten dieser gleichartigen höhern Sorte und wiederholt dasselbe Verfahren so oft, als es nöthig ist, um zur höchsten Sorte zu gelangen, oder

b) man resolvirt den ganzen Ausdruck auf die niedrigste Sorte und dividirt dann mit dem Producte sämmtlicher vorkommenden Reductionszahlen bis zur höchsten Benennung, oder

c) man reducirt jede Sorte für sich auf die verlangte höchste Sorte und addirt die einzelnen Resultate. z. B.

9) Wieviel Werst sind 150 Saschen 2 Arschinen $2\frac{1}{2}$ Werschok?

Ausrechnung: a) $2\frac{1}{2}$ Werschok $= (\frac{5}{2} : 16)$ Arschin. $= \frac{5}{32}$ Arschin.; also 2 Arschinen $2\frac{1}{2}$ Werschok $= 2\frac{5}{32}$ Arschinen $= [\frac{69}{32} : 3]$ Saschen $= \frac{23}{32}$ Saschen;
daher 150 Saschen 2 Arschin $2\frac{1}{2}$ Werschok $= 150\frac{23}{32}$ Saschen $= \frac{4823}{32}$ Saschen $= [\frac{4823}{32} : 500]$ Werst $= \frac{4823}{16000}$ Werst $= 0{,}3014375$ Werst.

b) 150 Saschen 2 Arschin $2\frac{1}{2}$ Werschok

$$\begin{array}{l} 150 \\ \underline{\quad 3} \\ 452 \text{ Arschinen} \\ \underline{\quad 16} \\ 2714\frac{1}{2} \\ \underline{452} \\ 7234\frac{1}{2} \text{ Werschok} = \frac{14469}{2} \text{ Werschok.} \end{array}$$

Da nun 1 Werst = 500 Saschen = 3.500 Arschinen = 16.3.500 Werschok = 24000 Werschok, so haben wir
150 Saschen 2 Arschin $2\frac{1}{2}$ Werschok $= [\frac{14469}{2} : 24000]$ Werst $= \frac{4823}{16000}$ Werst.

c) Weil 1 Werst = 500 Saschen = 1500 Arschinen = 24000 Werschok, so haben wir:

$$\begin{array}{rll|r} & & & 48000 \\ \hline 150 \text{ Saschen} & = \frac{150}{500} & \text{Werst} & 14400 \\ 2 \text{ Arschinen} & = \frac{2}{1500} & " & 64 \\ 2\frac{1}{2} \text{ Werschok} & = \frac{5}{48000} & " & 5 \end{array} \Bigg\} +$$

150 Saschen 2 Arschin $2\frac{1}{2}$ Werschok $= \frac{14469}{48000}$ Werst $= \frac{4823}{16000}$ W.

Exempel Nr. 1360 — Nr. 1368.

Addition benannter Zahlen.

§ 59. Da wir nur Gleichartiges mit Gleichartigem zu einem Ganzen verbinden können, so haben wir die Summanden so zu schreiben, daß die Sorten einerlei Art in derselben Vertical-Columne unter einander zu stehen kommen. Hierauf suchen wir die Summe der niedrigsten Sorte, reduciren diese, wenn es angeht, in die nächst höhere; fügen den Quotienten zu den Summanden der nächst höhern Sorte, und setzen die übrigbleibenden Einheiten unter die addirten Posten. — Dasselbe Verfahren wiederholen wir bei jeder vorkommenden höhern Sorte; z. B.

3 Berkowez 7 Pud 28 Pfund 91 Solotnik + 15 Berkowez 8 Pud 37 Pfund 87 Solotnik + 7 Berkowez 6 Pud 27 Pfund 60 Solotnik + 17 Berkowez 5 Pud 29 Pfund 78 Solotnik.

Ausrechnung.

3 Berkowez		7 Pud		28 Pfund		91 Solotnik
15 „		8 „		37 „		87 „
7 „		6 „		27 „		60 „
17 „		5 „		29 „		78 „
2		3		3		
44 Berk.	10	29 | 2	40	124 | 3	96	316 | 3
		20		120		288
		9 Pud		4 Pfund		28 Solotnik.

Die Summe der Solotnik beträgt 316, und diese geben 3 Pfund 28 Solotnik. Es werden also 3 Pfund zu den Pfunden addirt, und die übrigbleibenden Solotnik unter den Solotnik bemerkt. Ferner ist die Summe bei den Pfunden mit Einschluß der von den Solotnik herübergenommenen 3 Pfund = 124 Pfund = 3 Pud 4 Pfund. — Es werden die 4 Pfund unter der Columne der Pfunde bemerkt, und der Quotient 3 zu den Puden gezählt. — Die Summe der Pude ist = 29 Pud = 2 Berkowez 9 Pud. — Zählen wir die 2 Berkowez zu den Berkowez der Summanden, so ist die Totalsumme

= 44 Berkowez 9 Pud 4 Pfund 28 Solotnik.

Exempel Nr. 1377 — Nr. 1392.

Kommen bei der niedrigsten Sorte Brüche oder Decimalbrüche vor, so fängt man die Addition bei diesen an; z. B.

1) 8 Saschen 2 Arschin $3\frac{1}{2}$ Werschok + 7 Saschen 1 Arschin $15\frac{3}{4}$ Werschok + 17 Saschen 2 Arschin $14\frac{5}{8}$ Werschok + 16 Saschen 1 Arschin $12\frac{15}{16}$ Werschok.

Ausrechnung.

				16
8 Saschen	2 Arschin	$3\frac{1}{2}$	Werschok	8
7 „	1 „	$15\frac{3}{4}$	„	12
17 „	2 „	$14\frac{5}{8}$	„	10
16 „	1 „	$12\frac{15}{16}$	„	15
3	2	2		
50 Saschen	${}_3\vert 8 \vert_2$	${}_{16}\vert 46 \vert_3$		$\frac{45}{16} = 2\frac{13}{16}$.
	6	32		
	2 Arschin	$14\frac{13}{16}$ Werschok.		

Hier haben wir zuerst die Brüche gleichnamig zu machen, und dann deren Zähler 8, 12, 10, 15 zu addiren, wodurch sich ergiebt $^{45}/_{16} = 2^{13}/_{16}$. Hiervon werden die 2 Ganzen zu den Werschok addirt; — die Summe derselben, = 46 Werschok, reducirt, und zu dem Reste 14 der Bruch $^{13}/_{16}$ hinzugefügt. — Das Verfahren bei den folgenden höhern Sorten ist ganz analog dem vorhin gelehrten.

Exempel Nr. 1393 — Nr. 1400.

2) 8 Stunden 30 Minuten 15,06 Secunden + 18 Stunden 45 Minuten 47,98 Secunden + 21 Stunden 27 Minuten 38,65 Secunden + 18 Stunden 14 Minuten 54,8 Secunden.

Ausrechnung.	8 Stunden	30 Minuten	15,06 Secunden
	18 „	45 „	47,98 „
	21 „	27 „	38,65 „
	18 „	14 „	54,8 „
	65 „	116 „	156,49 „

Totalsumme = 66 Stunden 58 Minuten 36,49 Secunden.

Exempel Nr. 1401 — Nr. 1407.

Subtraction benannter Zahlen.

§ 60. Die hier vorkommenden Fälle sind folgende:

a) Jede Sorte des Minuendus ist größer als die entsprechende des Subtrahendus; z. B. 7 Tschetwert 5 Tschetwerik 7 Garnez — (3 Tschetwert 2 Tschetwerik 6 Garnez).

Ausrechnung.

(Minuendus)	7 Tschetwert	5 Tschetwerik	7 Garnez
(Subtrahendus)	3 „	2 „	6 „
(Rest)	4 Tschetwert	3 Tschetwerik	1 Garnez,

denn es ist 7 Garnez — 6 Garnez = 1 Garnez; 5 Tschetwerik — 2 Tschetwerik = 3 Tschetwerik, und 7 Tschetwert — 3 Tschetwert = 4 Tschetwert.

b) Einige oder alle Sorten, ausgenommen die höchste vorkommende Sorte, des Subtrahendus sind größer als die entsprechenden des Minuendus; z. B. 18 Berkowez 2 Pud 30 Pfund 15 Solotnik — (7 Berkowez 8 Pud 18 Pfund 90 Solotnik).

Ausrechnung.

(Minuendus	18· Berkowez	$\overset{10}{2}$ Pud	30· Pfund	$\overset{96}{15}$ Solotnik
		12		111
(Subtrahendus)	7 „	8 „	18 „	90
(Rest)	10 Berkowez	4 Pud	11 Pfund	21 Solotnik.

Da 90 Solotnik von 15 Solotnik nicht zu subtrahiren sind, so borgt man bei der nächst höhern Sorte, d. h. bei den Pfunden — eine Einheit, und zählt, weil 1 Pfund = 96 Solotnik, diese 96 Solotnik zu den schon vorhandenen 15 Solotnik, wodurch sich ergiebt (96 + 15) Solotnik = 111 Solotnik, und hat jetzt zum Reste (111 — 90) Solotnik = 21 Solotnik. — Bei den Pfunden war 1 Pfund geborgt, daher haben wir (29 — 18) Pfund = 11 Pfund. — Um die Subtraction der Pude verrichten zu können, müssen wir ein Berkowez borgen, und dieses in Pude resolviren, daher (12 — 8) Pud = 4 Pud, und endlich (17 — 7) Berkowez = 10 Berkowez.

c) Es fehlen im Minuendus einige niedere Sorten, z. B. 5 Werst — Saschen — Arschin 11 Werschok — (1 Werst 374 Saschen 2 Arschin 14 Werschok).

6*

Ausrechnung.

			500·		3·		16	
(Minuendus)	5·	Werst	—	Saschen	—	Arschin	11	Werschok
							27	
(Subtrahendus)	1	„	374	„	2	„	14	„
(Rest)	3	Werst	125	Saschen	0	Arschin	13	Werschok.

Da 14 Werschok von 11 Werschok nicht zu subtrahiren sind, so geht man, weil Arschin und Saschen fehlen, sogleich zu den Wersten, resolvirt die geborgte eine Werst in die nächst niedrigere Sorte, d. h. in 500 Saschen; nimmt von diesen eine Saschen weg, und resolvirt dieselbe zu 3 Arschin; — endlich borgt man von diesen 1 Arschin, — die in 16 Werschok resolvirt und zu den schon vorhandenen 11 Werschok hinzu addirt werden, dann erhalten wir im Rest: (27 — 14) Werschok = 13 Werschok; (2 — 2) Arschin = 0 Arschin; (499 — 374) Saschen = 125 Saschen; (4 — 1) Werst = 3 Werst.

Exempel Nr. 1408 — Nr. 1425.

Kommen Brüche oder Decimalbrüche vor, so subtrahirt man diese zuerst, und dann die verschiedenen Sorten. An folgenden ausgerechneten Beispielen ersieht man das übliche Verfahren.

			500		3·		16		8
1) (Min.)	3·	Werst	150·	Saschen	—	Arschin	10·¼	Werschok	2
			649				25		10
(Subtr.)	1	„	375	„	1	„	14 ⅞	„	7
(Rest)	1	Werst	274	Saschen	1	Arschin	11⅜	Werschok	⅜.

			8		8	
2) (Minuendus)	18.	Tschetwert	5.	Tschetwerik	3,47	Garnez
			12		11,47	
(Subtrahendus)	6	„	7		4,19	„
(Rest)	11	Tschetwert	5	Tschetwerik	7,28	Garnez.

Exempel Nr. 1426 — Nr. 1447.

Die Zeitrechnung.

§ 61. Das Messen der Zeiträume oder Zeitgrößen heißt die Zeitrechnung, und die dabei verwendete Einheit die Zeiteinheit oder das Zeitmaaß. Diese Einheit muß von unveränderlicher Größe und hinreichend bekannt sein. — Wir haben kein anderes Mittel, die Zeit zu messen, als die Dauer der Zeiträume, die durch wiederkehrende Erscheinungen am Himmel begrenzt sind. — Seit den frühesten Zeiten maßen die Menschen nach der Bewegung des Mondes und der Sonne.

Der einmalige Umschwung der Erde um ihre Achse giebt einen Zeitraum von stets gleicher Dauer. Diesen Zeitraum nennt man im gemeinen Leben Tag und Nacht. Er ist das Grundmaaß der Zeit, und aus ihm werden die andern Maaße hergeleitet. Man theilt ihn ein in 24 Stunden, jede Stunde in 60 Minuten und eine Minute in 60 Secunden. Der Auf- und Untergang der Sonne theilt diesen Zeitraum in zwei Theile von nicht immer gleicher Dauer, und hieraus entstehen die vier Tageszeiten, Morgen, Mittag, Abend und Mitternacht.

Der Anfang eines Tages wird auf Mitternacht gesetzt, und von da an werden bis zum Mittage 12 Stunden gezählt; ebenso wieder vom Mittage bis zur Mitternacht 12 Stunden.

Die Erde vollendet ihren Lauf um die Sonne in einer bestimmten Zeit, und diesen Zeitraum nennt man ein Jahr. Die Bestimmung der Länge eines Jahres war in den ältesten Zeiten ungenau. — Man setzte diesen Zeitraum = 365 Tagen. — Der dieser Bestimmung anklebende Fehler bewirkte nach Verlauf von Jahrhunderten einen bemerkbaren Unterschied in den Erscheinungen am Himmel und den Bestimmungen, wie sie aus dieser Zeitrechnung hätten eintreten sollen. — Julius Cäsar verbesserte diese Zeitrechnung dahin, daß er das Jahr = 365¼ Tage setzte. Weil aber die bürgerlichen Verhältnisse es nothwendig machen, daß der Anfang eines Jahres immer mit dem Anfange eines Tages zusammenfalle, so bestimmte er, daß drei auf einander folgende Jahre 365 Tage, und das vierte ein Schaltjahr 366 Tage haben sollte. Auf diese Art glaubte er das astronomische Jahr mit dem bürgerlichen in Uebereinstimmung zu bringen.

Das Jahr wird in zwölf Unterabtheilungen oder Monate getheilt, die aber eine ungleiche Anzahl Tage haben, bald 30, bald 31, und im Monate Februar 28 oder 29 Tage, je nachdem das zugehörige Jahr ein gemeines von 365 Tagen oder ein Schaltjahr von 366 Tagen ist. — Die auf einander folgenden Monate mit ihrer Tagezahl sind folgende: Januar (31), Februar (28), März (31), April (30), Mai (31), Juni (30), Juli (31), August (31), September (30), October (31), November (30), December (31).

Alle christlichen Völker zählen die Jahre von der Geburt Jesu Christi, und beziehen eine Thatsache auf diesen Zeitpunkt durch die Angabe, wieviel Jahre, Monate, Tage vor oder nach Christi Geburt vorkommen. Diese Angabe in Jahren, Monaten und Tagen nennt man das Datum der Begebenheit.

Ein Verzeichniß aller einzelnen in Wochen und Monaten an einander gereihten Tage eines Jahres heißt der Calender.

Der bei uns in Rußland gebräuchliche Calender rührt her von Julius Cäsar, der ihn um das Jahr 45 vor Christo einführte. Dem julianischen Calender liegt die Annahme zum Grunde, daß das astronomische Jahr genau 365¼ Tage enthalte. Die eigentliche Jahreslänge beläuft sich auf 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 47,8 Secunden; mithin rechnet man beim Einschalten eines Tages in jedem 4ten Jahre statt 5 Stunden 48 Minuten 47,8 Secunden, — 6 volle Stunden, — also jedes Mal 11 Minuten 12,2 Secunden zu viel. — Durch diesen Fehler trat im Laufe der Zeit dieselbe Erscheinung, wie vor der Verbesserung des Calenders durch Julius Cäsar, hervor. Die bürgerliche Zeitrechnung stimmte nicht mit den Erscheinungen am Himmel überein.

Im Jahre 1582 nach Chr. betrug der Fehler bereits 10 Tage; deshalb ordnete Papst Gregor XIII. an, die zuviel gerechneten Tage wegzulassen und nach Donnerstag den 4. October, ohne Unterbrechung im Laufe der Wochentage, sogleich Freitag den 15. October zu schreiben, und setzte fest, daß

1) jedes vierte Jahr ein Schaltjahr sein, daß aber

2) das letzte oder hundertste Jahr eines Jahrhunderts, dessen Jahreszahl nicht durch 400 theilbar ist, ein gemeines Jahr von 365 Tagen bleiben sollte.

Nach der zweiten Bestimmung werden in 4 Jahrhunderten nach dem gregorianischen Calender 3 Tage weniger eingeschaltet, als es nach dem julianischen geschieht. Durch dieses Verfahren wird eine fortwährende Correctur und eine Ausgleichung des bürgerlichen Jahres mit dem astronomischen zu Wege gebracht. Freilich ist auch der gregorianische Calender nicht absolut genau, aber ein merklicher Fehler, d. h. von einem ganzen Tage, kann erst nach Verlauf von ungefähr 3450 Jahren eintreten. — Diesemnach waren seit Einführung des gregorianischen Calenders die Jahre 1700, 1800 gemeine Jahre, und es differirt die julianische Zeitrechnung vom 1sten März 1700 an mit der gregorianischen Zeitrechnung um 11 Tage, und vom 1sten März 1800 an um 12 Tage.

Der julianische Calender wird auch der alte, und der gregorianische der neue Styl genannt.

Das Datum bestimmt nicht die von Christi Geburt an verflossene Zeit, sondern giebt bloß an, in welchem Monate und Tage eines gewissen Jahres Etwas sich zugetragen hat, oder noch sich ereignen wird.

Diese Calender-Angabe müssen wir in die wirklich verflossene Zeit umsetzen; z. B. wieviel Jahre, Monate und Tage waren verflossen, als man schrieb den 15ten April 1846?

Auflösung. Man lebte im Jahre 1846, also waren verflossen 1845 Jahre; der April ist der vierte Monat des 1845sten Jahres, also waren verflossen 3 Monate; — der 15te Tag des April zeigt, daß 14 Tage verflossen waren. Die wirklich verflossene Zeit ist demnach:

1845 Jahre 3 Monate 14 Tage.

Hieraus sehen wir, daß man die wirklich verflossene Zeit in Jahren, Monaten und Tagen ausgedrückt erhält, wenn man von jedem dieser Zeiträume, wie sie das Datum anführt, 1 subtrahirt.

Rückwärts wird aus der verflossenen Zeit das Datum in Jahren, Monaten und Tagen ausgedrückt werden, wenn man jedem dieser Zeiträume 1 hinzu addirt, und dann den Eigennamen des Monats statt der für denselben erhaltenen Ordinalzahl setzt; z. B. als 1784 Jahre 4 Monate und 16 Tage verflossen waren, schrieb man das Datum: im Jahre 1785 den 17ten Tag des 5ten Monats. — Der 5te Monat heißt aber Mai, daher

im Jahre 1785 den 17ten Mai.

Die kleinere Zeitabtheilung, als: Stunden, Minuten und Secunden werden als verflossene Zeiten im Datum angegeben, wobei nicht zu übersehen, daß die Stunden von Mitternacht eines jeden Tages gezählt werden. Wenn es z. B. heißt: um 10 Uhr 18 Minuten 50 Secunden Vormittags, so sind an dem laufenden Tage wirklich 10 Stunden 18 Minuten 50 Secunden verflossen.

Bei der Zeitrechnung haben wir drei Aufgaben zu lösen:

I.	Es ist gegeben:	der Anfang und das Ende,	man sucht	die Dauer,	
II.	„ „ „	das Ende	„ die Dauer,	„	„ den Anfang,
III	„ „ „	die Dauer	„ der Anfang,	„	„ das Ende.

Die Aufgaben (I) und (II) werden durch Subtraction und die Aufgabe (III) durch Addition aufgelöst.

Das in jedem Falle übliche Verfahren wird aus nachfolgenden ausgerechneten Beispielen und deren Erklärung erhellen.

Es werde hier noch nachträglich erwähnt, daß jedes Jahr, dessen Jahreszahl durch 4 ohne Rest theilbar, ein Schaltjahr ist.

I. Berechnung der Dauer.

a) Jemand war geboren im Jahre 1765 den 23sten December um 6 Uhr 15 Minuten Abends, und starb 1824 den 15ten November um 8 Uhr 20 Minuten Morgens; wie alt war er?

Ausrechnung.

	12	31	24		
1823· Jahre	10· Monate	14· Tage	8 Stunden	20 Minuten	(Ende)
	21	44	32		
1764 „	11 „	22 „	18 „	15 „	(Anfang)
58 Jahre	10 Monate	22 Tage	14 Stunden	5 Minuten	(Dauer.)

Erklärung. Zuerst werden die beiden Data in die wirklich verflossene Zeit umgesetzt. Die Subtraction der Minuten und Stunden geschieht ganz gewöhnlich. Bei den Tagen muß man einen Monat borgen, d. h. den 10ten des laufenden Jahres, also den Monat October, der 31 Tage hat, folglich haben wir da (31 + 13) Tage = 44 Tage; — (44 — 22) Tage = 22 Tage. Bei der Subtraction der Monate und Jahre ist nichts zu bemerken.

Das gesuchte Alter ist demnach:

58 Jahre 10 Monate 22 Tage 14 Stunden 5 Minuten.

b) Jemand starb im Jahre 1840 den 15ten März um 5 Uhr Abends, und war geboren den 16ten September 1802 um 4 Uhr 15 Minuten Morgens; in welchem Alter?

Ausrechnung.

1839· Jahre	$\overset{12}{2}$· Monate	$\overset{29}{14}$ Tage	17· Stunden	$\overset{60}{—}$ Minuten	(Ende)
	13	43			
1801 „	8 „	15 „	4 „	15 „	(Anfang)
37 Jahre	5 Monate	28 Tage	12 Stunden	45 Minuten	(Dauer).

Erklärung. Hier mußte ein Monat zu Tagen gemacht werden. Da es der zweite Monat des laufenden 1840sten Jahres, also eines Schaltjahres, ist, so zählen wir 29 Tage zu den schon vorhandenen 14 Tagen hinzu. Die Subtraction der übrigen Zeitabtheilungen erfolgt nach bekannten Regeln. Das gesuchte Alter ist demnach:

27 Jahre 5 Monate 28 Tage 12 Stunden 45 Minuten.

c) Wer am 1sten März 1827 um 5 Uhr Abends starb und am 31sten October 1785 um 3 Uhr Morgens geboren war, hatte ein wie hohes Alter erreicht?

Ausrechnung.

1826· Jahre	$\overset{12}{2}$· Monate	$\overset{59}{—}$ Tage	17 Stunden	(Ende)
	12			
1784 „	9 „	30 „	3 „	(Anfang)
41 Jahre	3 Monate	29 Tage	14 Stunden	(Dauer).

Erklärung. Bei den Monaten ist zu borgen. — Da man aber den 2ten Monat des 1827sten Jahres borgt, und dieser nur 28 Tage hat, so kann die Subtraction nicht vollzogen werden, und wir müssen den Januar noch hinzunehmen, dann sind aber (28 + 31) = 59 Tage im Minuendus; mithin ist der Rest = (59 — 30) = 29 Tage. Bei den Monaten finden wir (12 — 9) Monate = 3 Monate, weil die 2 Monate des Minuendus geborgt und in Tage resolvirt sind. Das gesuchte Alter ist demnach:

41 Jahre 3 Monate 29 Tage 14 Stunden.

Exempel Nr. 1455 — Nr. 1459.

II. Berechnung des Anfanges.

Im Jahre 1846 den 15ten April um 5 Uhr Abends hatte Jemand ein Alter von 48 Jahren 9 Monaten 27 Tagen 18 Stunden erreicht, wann war er geboren?

Ausrechnung.

		12		31		24		
1845·	Jahre	3·	Monate	14·	Tage	17	Stunden	(Ende)
		14		44		41		
48	"	9	"	27	"	18	"	(Dauer)
1796	Jahre	5	Monate	17	Tage	23	Stunden	(Anfang).

Erklärung. Man schreibt die bis zum angegebenen Moment verflossene Zeit hin und subtrahirt davon das gegebene Alter. Beim Borgen der Monate hat man sich nach der unter (I) gegebenen Anweisung zu richten. Die Antwort heißt nun: bei der Geburt des Mannes waren seit Christi Geburt verflossen 1796 Jahre 5 Monate 17 Tage 23 Stunden, demnach fiel seine Geburt

auf den 18ten Juni 1797 um 11 Uhr Mitternacht.

Exempel Nr. 1460 — Nr. 1465.

III. Berechnung des Endes.

a) Jemand war geboren 1808 den 6ten December um 10 Uhr Abends; wann wird er 65 Jahre 9 Monate 28 Tage 16 Stunden alt sein?

Ausrechnung.

1807 Jahre 11 Monate 5 Tage 22 St. (Anfang) } +
65 „ 9 „ 28 „ 16 „ (Dauer) }

1873 Jahre 12|20 Mon.|1 — { 34 Tage 24|38|1
12 { 30 24
+ { 8 4 Tage 14 Stunden.
{ 1
9 Monate

Erklärung. Die Stunden reducirt man sogleich. — Die Summe der Tage, = 34 Tage, kann erst dann reducirt werden, wenn man weiß, welcher Monat des laufenden Jahres zu den Monaten hinzuzufügen ist, deshalb reduciren wir zuerst die Monate. Aus dem zurückbleibenden Reste = 8 Monate sehen wir, daß der 9te Monat, d. h. der September von 30 Tagen, hinzukommen muß; deshalb nehmen wir diese 30 Tage weg. Es werden also verflossen sein 1873 Jahre 9 Monate 4 Tage 14 Stunden, wenn das verlangte Alter erreicht worden, und wir schreiben dann das Datum

1874 den 5ten October, 2 Uhr Nachmittags.

b) Jemand war geboren im Jahre 1811 den 30sten April um 5 Uhr Morgen; wann war er 20 Jahre 10 Monate 30 Tage 22 Stunden alt?

Ausrechnung.

1810 Jahre 3 Monate 29 Tage 5 St. (Anfang) } +
20 „ 10 „ 30 „ 22 „ (Dauer) }

1831 Jahre 12|13 Mon.|1 — { 60 Tage 24|27|1
12 { 29 „ (Febr.) 24
1 Monat 31 „ 3 Stunden.
+ { 1 „ (Febr.) 31 „ (März)
{ 1 „ (März) 0 Tage
3 Monate

Erklärung. Die Summe der Stunden und Monate kann sogleich reducirt werden. — Wir sehen, daß die 60 Tage dem 1832sten Jahre angehören. Da nun 1 Monat in diesem Jahre verflossen, und dasselbe ein Schaltjahr ist, so nehmen wir von

60 Tagen zuerst die Tagezahl des Februar=Monats, d. h. 29 Tage, weg. — Die dann übrigbleibenden 31 Tage geben den Monat März, also bleiben 0 Tage zurück, und es kommen zu den Monaten des 1832sten Jahres noch der 2te und 3te Monat hinzu; folglich wird der Mann das geforderte Alter erreicht haben

1832 den 1sten April um 3 Uhr Morgens.

Exempel Nr. 1466 — Nr. 1470.

Multiplication benannter Zahlen.

§ 62. Bei einem einsortigen Multiplicandus reduciren wir das erhaltene Product auf die nächst höhere Sorte, oder wenn es angeht und verlangt wird, auf alle vorhandenen höhern Sorten; z. B.

1) Wieviel sind 95 Solotnik 138 mal?

Ausrechnung.

```
        95 Solotnik
       138
      ----
       760
      285
      95
   ---------
96 | 13110 Solotnik | 136 Pfund | 3 Pud.
                                  40
   Rest = 54 Solotn.   16 Pfund
```

Also 95 Solotnik × 138 = 3 Pud 16 Pfund 54 Solotnik.

2) Wieviel sind $18^3/_4$ Werschok × 125?

Ausrechnung.

$18^3/_4$ Werschok = $^{75}/_4$ Werschok

daher ($18^3/_4$ Werschok) . 125 = ($^{75}/_4$ Werschok) × 125
= $^{9375}/_4$ Werschok
= $2343^3/_4$ Werschok
= 146 Arschin $7^3/_4$ Werschok
= 48 Saschen 2 Arschin $7^3/_4$ Werschok.

3) Wieviel sind (75,25 Minuten) × 53?

Ausrechnung.

75,25 Minuten × 53 = 3988,25 Minuten
= 66 Stunden 28,25 Minuten
= 2 Tage 18 Stunden 28,25 Minuten.

Ist der Multiplicandus mehrsortig, so resolvirt man ihn auf die niedrigste Sorte, multiplicirt mit dem gegebenen Multiplicator, und reducirt dann wieder auf alle höhern Sorten; z. B.

(4 Pud 39 ℔ 92 Solotnik) × 4

Ausrechnung. 4 Pud 39 ℔ 92 Solotnik
40
199 ℔
96
1196
1800
19196 Solotnik
4
96 | 76784 Solotnik | 799 Pfund | 19 Pud.
40
Rest = 80 Solotn. 39 Pfund.

Demnach: (4 Pud 39 ℔ 92 Solotnik) × 4 = 19 Pud 39 ℔ 80 Solotnik.

Dieses Verfahren ist wegen seiner Weitläufigkeit nicht zu empfehlen. — Ein anderes sehr einfaches besteht darin, daß wir jede Sorte des Multiplicandus mit dem Multiplicator multipliciren, nehmlich:

4 Pud	39 ℔	92 Solotnik
4	4	4
16 Pud	156 ℔	368 Solotnik,

hierauf die niedern Sorten zu nächst höheren reduciren, und die Quotienten zu den schon vorhandenen Mengen derselben Art addiren. In unserem Beispiele geben 368 Solotnik überhaupt 3 Pfund 80 Solotnik. Addiren wir die 3 Pfund zu den schon vorhandenen 156 Pfund, so erhalten wir 159 Pfund = 3 Pud 39 Pfund, und endlich die 3 Pud zu den 16 Pud hinzugefügt, gibt 19 Pud, also das gesuchte Product

= 19 Pud 39 ℔ 80 Solotnik.

Hiernach sind folgende ausgerechnete Beispiele ohne weitere Erklärung zu vergleichen.

[5 Werst 370 Saschen 2 Arschin $15\frac{3}{4}$ Werschok] × 14

```
5 Werst         370 Saschen        2 Arschin           15¾ Werschok] × 14
14               14                14                  63
70 )             1480              28 )                14
10 ) +           370               13 ) +              252
80 Werst         5180 )         3 | 41 Arschin | 13    63
                 13   ) +          3                   882/4 = 220½ Werst | 13 (16)
           600 | 5193 Sasch. | 10  11                          16
                 500               9                           60
                 193               2 Arschin                   48
                                                               12½ Wersch.
```

Also Product = 80 Werst 193 Saschen 2 Arschin $12\frac{1}{2}$ Werschok.

```
[1 Grad          54 Minuten              56,31 Secunden] × 49
49               49                      49
49 )             486                     50679
44 ) +           216                     22524
93 Grad          2646 )             60 | 2759,19 Secunden | 44
                 45   ) +                240
            60 | 2691 Minuten | 44       359
                 240                     300
                 291                     59,19 Secunden.
                 240
                 51 Minuten
```

Also Product = 93 Grad 51 Minuten 59,19 Secunden.

Exempel Nr. 1480 — Nr. 1502.

Ist der Multiplicator ein Bruch, eine gemischte Zahl oder ein Decimalbruch, so können wir dasselbe Verfahren anwenden; wir werden aber in den meisten Fällen für jede Sorte eine ganze Zahl und einen Bruch bekommen. Diese Brüche sind dann durch Resolviren in die niedrigern Sorten wegzuschaffen; z. B. wieviel erhält man, wenn 17 Tage 18 Stunden 41 Minuten $1\frac{7}{8}$ mal genommen werden?

Ausrechnung.

[17 Tage	18 Stunden	41 Minuten] $\times \frac{15}{8}$
15	15	15
85	90	205
17	18	41
8 | 255 | $31\frac{7}{8}$ Tage	8 | 270 | $33\frac{3}{4}$ Stunden	8 | 615 | $76\frac{7}{8}$ Minuten
24	24	56
15	30	55
8	24	48
7	6	7.

Wir erhalten zum Producte die Zahl: $31\frac{7}{8}$ Tage $33\frac{3}{4}$ Stunden $76\frac{7}{8}$ Minuten. Da nun $\frac{7}{8}$ Tage $= 24 \cdot {}^7/_8$ Stunden $= 21$ Stunden, und $\frac{3}{4}$ Stunden $= 60 \cdot {}^3/_4$ Minuten $= 45$ Minuten sind, so haben wir eigentlich:

31 Tage 54 Stunden $121^7/_8$ Minuten.

Nun sind $121^7/_8$ Minuten $=$ 2 Stunden $1\frac{7}{8}$ Minuten; — die 2 Stunden zu 54 Stunden addirt und hierauf reducirt, geben 2 Tage 8 Stunden; — endlich werden die 2 Tage zu 31 Tagen addirt, und wir haben

33 Tage 8 Stunden $1^7/_8$ Minuten.

Bringen wir den ganzen Multiplicandus auf die niedrigste Sorte; multipliciren dann mit $\frac{15}{8}$ und reduciren hierauf, so ist die Rechnung eben so schnell gemacht; nehmlich:

17 Tage 18 Stunden 41 Minuten
24
86
34
426 Std.
60
25601 Minuten
15
128005
25601

		60	24
8 | 384015 Minuten	$48001\frac{7}{8}$ Minuten	800 Stunden	33 Tage.
Rest $=$ 7	Rest $= 1\frac{7}{8}$ Min.	Rest $=$ 8 Std.	

Also wie vorhin das Product $=$ 33 Tage 8 Stunden $1\frac{7}{8}$ Minuten.

Exempel Nr. 1503 — Nr. 1529.

§ 63. Wie aus dem Werthe der Einheit der Werth einer bestimmten Menge gleichnamiger Dinge durch Multiplication gefunden wird, haben wir bereits früher angedeutet. Jetzt erweitern wir dieselbe Aufgabe dahin, daß wir uns die Frage stellen: Wie finden wir aus dem Werthe der Einheit den Werth einer beliebigen Zahl gleichartiger, aber nicht gleichnamiger Dinge? z. B. wenn 1 Solotnik 2 Kopeken kostet, wie theuer sind 3 Pfund 58 Solotnik?

Offenbar wird diese Aufgabe auf die frühere zurückgeführt sein, wenn wir die Zahl, deren Werth gesucht wird, auf ein Vielfaches der Einheit bringen, deren Werth gegeben ist. Im vorliegenden Falle müssen wir daher 3 Pfund 58 Solotnik resolviren. Da nun 3 Pfund 58 Solotnik = 346 Solotnik, so haben wir:

1 Solotnik.... 2 Kopeken; daher 346 Solotnik 346 mal mehr;

346 Solotnik.... 346 . (2 Kopeken)

oder 692 Kopeken = 6 Rubel 92 Kopeken.

Wir bemerken, daß aus einer solchen Aufgabe 2 Gleichungen sich bilden lassen. Die erste drückt den Werth der Einheit aus, und die zweite den Werth eines Vielfachen derselben Einheit; z. B. wenn 1 Arschin mit 2 Rubel 45 Kopeken bezahlt wird; wie theuer sind 5 Arschin?

1 Arschin...... 2 Rubel 45 Kop.; 5 Arschin...... x Kop.?

Diesen Ansatz lesen wir: 1 Arschin hat den Werth von 2 Rubel 45 Kopeken; welchen Werth haben 5 Arschin? — Offenbar muß der gesuchte Werth von 5 Arschin 5 mal größer sein, also

x....... (2 Rubel 45 Kopeken) × 5

oder 10 Rubel 225 Kopeken = 12 Rubel 25 Kopeken.

Ist die Anordnung der beiden Gleichungen in der Art gemacht, daß das erste Glied die Einheit, und das dritte ihr Vielfaches enthält, so muß das zweite Glied den Werth der Einheit, und die gesuchte Zahl den Werth des Vielfachen haben. Es sind demnach das erste und dritte Glied, sowie das zweite und vierte Glied, gleichnamig. Die Ausrechnung erfolgt nun dadurch, daß man das zweite und dritte Glied mit einander multiplicirt und dem Producte die Benennung des zweiten Gliedes giebt.

Aus nachfolgenden, vollständig ausgerechneten Beispielen wird das übliche Verfahren hinlänglich erhellen.

1) 1 Garnez kostet $12\frac{1}{2}$ Kopeken; wie theuer 8 Tschetwert 4 Tschetwerik 2 Garnez?

Ansatz und Ausrechnung.

1 Garn..... $12\frac{1}{2}$ Kop.; 8 Tschetwert 4 Tschetwerik 2 Garn..... x Kop.?

$^{25}/_{2}$ 8

68 Tschetwk.

8

546 Garnez.

x ...... ($\frac{25}{2}$ Kopeken) $\times$ 546 = 6825 Kop. = 68 Rubel 25 Kop.

2) Für 1 Rubel erhält man 2 Arschin $15\frac{1}{2}$ Werschok; wieviel für $5\frac{3}{4}$ Rubel?

Ansatz und Ausrechnung.

1 Rubel ...... 2 Arschin $15\frac{1}{2}$ Werschok; $5\frac{3}{4}$ Rubel ..... x Werschok?

16 $^{23}/_{4}$

$47\frac{1}{2}$ Werschok

$^{95}/_{2}$ Werschok;

folglich x = ($\frac{95}{2}$ Werschok) $\times$ $\frac{23}{4}$ = $\frac{2185}{8}$ Werschok = $273\frac{1}{8}$ Werschok = 17 Arschin $1\frac{1}{8}$ Werschok.

3) Für 1 Tag zahlt man an Arbeitslohn 1 Rubel 40,5 Kopeken; wieviel für 3 Wochen 5,75 Tage?

Ansatz und Ausrechuung.

1 Tag ..... 1 Rubel 40,5 Kop.; 3 Wochen 5,75 Tage ..... x Kop.?

100 6

140,5 Kop. 23,75

23,75

7025

9835

4215

2810

x = 3336,875 Kopeken = 33 Rubel 36,875 Kopeken.

7

Das Verfahren, aus dem Werthe der Einheit den Werth des Vielfachen zu bestimmen, heißt die **Multiplications-Regeldetri.**

Exempel Nr. 1530 — Nr. 1566.

Division benannter Zahlen.

§ 64. Die Division bezweckt ein Theilen oder ein Messen (§ 14). — Bei unbenannten Zahlen erkennen wir den Sinn der Aufgabe an der Form der Frage. Bei benannten Zahlen wird die Aufgabe durch die Beschaffenheit des Divisors näher bestimmt. Ist der Divisor eine unbenannte Zahl, so muß der Quotient mit dem Dividendus gleichnamig werden; ein benannter Divisor giebt zum Quotienten eine abstracte Zahl.

Divisionsaufgaben im Sinne des Theilens.

1) Wie groß ist der 4te Theil von 8 Rubel 28 Kopeken?

Ausrechnung. Der 4te Theil von 8 Rubel ist = (8 Rubel) : 4 = 2 Rubel, und der 4te Theil von 28 Kopeken = (28 Kop.) : 4 = 7 Kopeken, daher zusammen

(8 Rubel 28 Kopeken) : 4 = (8 Rubel) : 4 + (28 Kopeken) : 4
= 2 Rubel 7 Kopeken.

2) Wie groß ist der 5te Theil von 40 Pud 30 Pfund 25 Solotnik?

Ausrechnnng.

40 Pud : 5 = 8 Pud
30 Pfund 5 = 6 Pfund
25 Solotnik : 5 = 5 Solotnik

daher (40 Pud) : 5 + (30 ℔) : 5 + (25 Solotnik) : 5 = 8 Pud + 6 ℔ + 5 Solotnik, oder

(40 Pud 30 ℔ 25 Solotnik) : 5 = 8 Pud 6 ℔ 5 Solotnik.

Wir dividiren jede einzelne Sorte mit dem Divisor, und verbinden die einzelnen Quotienten zu einer mehrsortigen benannten Zahl.

Geht der Divisor in einer Sorte des Dividendus nicht auf, so muß der übrigbleibende Rest in die nächst niedrigere Sorte resolvirt, — hierzu die im Dividendus vorkommende gleichnamige Sorte addirt, und dann mit dem Divisor weiter dividirt werden; z. B.

3) dividire 44 Pud 15 Pfund 20 Solotnik durch 5.

Ausrechnung. 44 Pud : 5 = 8 Pud mit einem Reste = 4 Pud. — Diese 4 Pud geben 4 . (40 Pud) = 160 Pfund, und hierzu die 15 Pfd. gezählt, 175 Pfd. — Nun ist (175 Pfd) : 5 = 35 Pfund und endlich (20 Solotnik) : 5 = 4 Solotnik; daher der gesuchte Quotient = 8 Pud 35 Pfund 4 Solotnik.

Für die Division mehrsortiger benannter Zahlen haben wir daher folgende Regel:

Theile die höchste Benennung zuerst; bleibt ein Rest, so resolvire man ihn in die nächst niedrigere Sorte; zähle hierzu die Zahl derselben Benennung (wenn eine solche vorkommt) aus dem Dividendus und fahre mit dem Theilen so fort, bis alle Sorten dividirt sind; z. B.

[38 Tage 17 Stunden 29 Minuten 40 Secunden] : 13.

```
13 | 38 Tage | 2 Tage
     26
     12 Tage
     24
     48
     24
   { 288 Stunden
 + {  17
13 | 305 Stunden | 23 Stunden
     26
      45
      39
       6 Stunden
      60
   { 360
 + {  29
13 | 389 Minuten | 29 Minuten
     26
     129
     117
      12 Minuten
      60
   { 720 Secunden
 + {  40
13 | 760 Secunden | 58 6/13 Secunden
     65
     110
     104
       6.
```

Der gesuchte Quotient ist = 2 Tage 23 Stunden 29 Minuten $58^6/_{13}$ Secunden.

(Exempel Nr. 1567 — Nr. 1574.)

Ist der Divisor ein Bruch oder eine gemischte Zahl, so müssen wir den Divisor umkehren und dann multipliciren (§ 62). Wir können aber auch die Aufgabe als aus zwei Theilen bestehend ansehen, nehmlich einer Multiplication mit dem Nenner und einer Division durch den Zähler, und haben dann nur mit ganzen Zahlen zu thun; z. B.

(21 Pud 14 ℔ $24\frac{1}{5}$ Solotn.) : $\frac{5}{8}$ = (21 Pud 14 ℔ $24\frac{1}{5}$ Solotn.) $\times \frac{8}{5}$
= [(21 Pud 14 ℔ $24\frac{1}{5}$ Solotn.) $\times$ 8] : 5.

Multipliciren wir zuerst mit 8

21 Pud
8
+(168 Pud
2
170 Pud

14 ℔
8
+(112
2
40 | 114 ℔ | 2
80
34 ℔

$24\frac{1}{5}$ Solotnik
($^{121}/_{5}$ Solotnik) $\times$ 8 = $^{968}/_{5}$ Solotn.
= 96 | $193\frac{3}{5}$ Solotnik | 2
192
$1^{3}/_{5}$ Solotnik,

so haben wir 170 Pud 34 ℔ $1\frac{3}{5}$ Solotnik mit 5 zu dividiren.

5 | 170 Pud | 34 Pud
15
20
20
5 | 34 Pfund | 6 Pfund
30
4 Pfund
96
+(384 Solotnik
$1\frac{3}{5}$
$385\frac{3}{5}$ Solotnik
25 | 1928 | $77^{3}/_{25}$ Solotnik
175
178
175
3.

Also der Quotient = 34 Pud 6 Pfund $77\frac{3}{25}$ Solotnik.

Man hätte aber auch zuerst mit 5 dividiren und hernach mit 8 multipliciren können.

Exempel Nr. 1575 — Nr. 1586.

Divisionsaufgaben im Sinne des Messens.

Die Regel für diese Aufgaben heißt: Bringe Divisor und Dividendus zuerst auf die in einer von ihnen vorkommende niedrigste Sorte, und dividire wie mit unbenannten Zahlen; z. B.

1) Wie oft sind 3 Arschinen enhalten in 18 Saschen 3½ Werschok?

Ausrechnung.

3 Arschin; 18 Saschen — Arschin 3½ Werschok
16 3
48 54 Arschin
16
327½
54
867½ Werschok
96 | 1735 Werschok | 18⁷⁄₉₆ mal
Rest = 7.

2) Wie oft sind 0,44 Miuuten enthalten in 18 Stunden 13 Minuten 12,4 Secunden?

Ausrechnrng.

0,44 Minuten; 18 Stunden 13 Minuten 12,4 Secunden
60 60
26,4 Secunden 1093 Minuten
60
| 65592,40 Secunden | 2484,5 . . . . mal
160.

Exempel Nr. 1587 — Nr. 1597.

§ 65. Die Anwendung der Division in benannten Zahlen auf Aufgaben aus dem gemeinen Leben findet statt, wenn wir aus dem Werthe einer bestimmten Anzahl von Dingen den Werth der Einheit zu berechnen haben. Das Verfahren heißt die Divisions-Regeldetri; z. B.

1) Wenn 8 Pfund mit 3 Rubel 50 Kopeken bezahlt werden; wie theuer ist 1 Pfund?

Hier ist der Werth von 8 Pfund gegeben, und man hat den Werth eines Pfundes zu ermitteln. Offenbar wird dieser 8 mal kleiner sein, und dadurch gefunden werden, daß wir den 8ten Theil von 3 Rubel 50 Kopeken nehmen, d. h. mit 8 dividiren. — Bilden wir, wie bei der Multiplications-Regeldetri (§ 63), zwei Gleichungen, so wird das erste Glied die Anzahl der gegebenen Dinge, das zweite ihren Werth enthalten; im dritten wird die Einheit und im vierten deren Werth zu stehen kommen.

Also für unser Beispiel

8 Pfund .... 3 Rubel 50 Kopeken; 1 Pfund .... x Kopeken?
100
| 350 Kopeken | $43^3/_4$ Kopeken = x
32
30
24 $\quad$ 2
$\frac{6}{8}$ $\quad$ | $\frac{3}{4}$.

Bevor man mit dem ersten Gliede dividirt, muß dasselbe (wenn es nicht von gleicher Benennung ist) mit dem dritten Gliede gleichnamig gemacht werden; z. B.

2) Wenn 5 Arschin 2 Werschok mit 14 Rubel $16\frac{1}{2}$ Kopeken bezahlt werden; wie theuer ist 1 Werschok?

Ansatz und Ausrechnung.

5 Arschin 2 Werschok.... 14 Rbl. $16\frac{1}{2}$ Kop.; 1 Werschok.... x Kop.?
16 $\qquad$ 100
82 $\qquad$ $1416\frac{1}{2}$
164 | 2833 Kopeken | $17^{45}/_{164}$ Kopeken = x
164
1193
1148
45.

Erklärung. Das zweite Glied enthält $\frac{2833}{2}$; da diese mit 82 zu dividiren sind, so multipliciren wir mit 82 den Nenner, und haben zum Divisor die Zahl 164.

3) Ein Arbeiter verdient in 7 Wochen $6\frac{1}{2}$ Tagen 26 Rubel $6\frac{7}{8}$ Kopeken; wieviel in 1 Tage?

Ansatz und Ausrechnung.

7 Wochen $6\frac{1}{2}$ Tage ..... 26 Rubel $6\frac{7}{8}$ Kop.; 1 Tag ..... x Kop.?

$$
\begin{array}{l l}
6 & 100 \\
\hline
48\frac{1}{2} & 2606\frac{7}{8} \\
\hline
\left(\frac{97}{\cancel{2}}\right) \cdot \cancel{8}^{4} & \vert\; 20855 \text{ Kopeken} \;\vert\; 53\frac{3}{4} \text{ Kopeken} = x \\
 & 1940 \\
\hline
388 & 1455 \\
 & 1164 \\
\hline
 & \frac{291}{388} \quad \frac{97}{\vert\frac{3}{4}}
\end{array}
$$

Erklärung. Da das erste Glied in Tage resolvirt $\frac{97}{2}$ Tage gab, und das zweite Glied in Kopeken verwandelt $= \frac{20855}{8}$ Kopeken war, so hätte man $x = \frac{20855}{8} \times \frac{2}{97}$; da aber 2 in 8 sich heben läßt, so haben wir 97 mit dem Quotienten 4 multiplicirt und dann mit dem sich ergebenden Producte = 388 dividirt.

Exempel Nr. 1598 — Nr. 1634.

Uebungsfragen.

1) Was ist eine benannte Zahl?
2) Was sind einsortige und was mehrsortige benannte Zahlen?
3) Was sind gleichartige und was ungleichartige benannte Zahlen?
4) Was heißt Resolviren?
5) Wie resolvirt man eine ganze Zahl, — einen Bruch, — einen Decimalbruch?
6) Wie resolvirt man mehrsortige benannte Zahlen?
7) Was heißt Reduciren?
8) Wie reducirt man eine ganze Zahl; einen Bruch; — einen Decimalbruch?
9) Wie addirt man benannte Zahlen?
10) Wie subtrahirt man benannte Zahlen?
11) Welches ist der Gegenstand der Zeitrechnung?
12) Wie zählt der christliche Calender die Jahre, Monate und Tage? Wie die Stunden, Minuten und Secunden?
13) Was versteht man unter dem alten und dem neuen Styl?
14) Wie viele verschiedene Aufgaben können bei der Zeitrechnung vorkommen?

15) Wie wird eine mehrsortige benannte Zahl multiplicirt, wenn der Multiplicator a) eine ganze Zahl? b) ein Bruch? c) ein Decimalbruch?

16) Was versteht man unter der Multiplications-Regeldetri?

17) Wie dividirt man benannte Zahlen, wenn der Divisor a) eine ganze Zahl? b) ein Bruch? c) ein Decimalbruch?

18) Wann erscheint die Division als ein Messen, wann als ein Theilen?

19) Wie dividirt man, wenn der Divisor eine benannte Zahl?

20) Was versteht man unter der Divisions-Regeldetri?

Regeldetri.

§ 66. Bei Anwendung der Multiplication sahen wir, wie

1) aus dem Werthe der Einheit der Werth einer bestimmten Menge, und

bei Anwendnng der Division, wie

2) aus dem Werthe des Vielfachen der Werth der Einheit zu finden ist. — Die Verbindung beider Rechnungsarten führt uns zur Auflösung der ganz allgemeinen Aufgabe:

3) aus dem Werthe des Vielfachen den Werth eines andern Vielfachen zu bestimmen.

Die Auflösung dieser Aufgabe besteht offenbar aus zwei Theilen. — Wir werden mittelst der Division aus dem Werthe des Vielfachen den Werth der Einheit bestimmen, und durch die Multiplication den gesuchten Werth der gegebenen Menge herleiten.

Derjenige Theil der Aufgabe, aus dem wir den Werth der Einheit zu bestimmen haben, heißt die Angabe oder Bedingung; der andere Theil die Frage. — Jeder Theil giebt uns eine Werthgleichung; mithin haben wir zwei Werthgleichungen, in denen 3 Glieder bekannt sind, und das vierte Glied gesucht wird.

Die praktische Regel, nach der man das vierte Glied zu berechnen hat, heißt Regeldetri. — Zur Erläuterung des Gesagten diene folgende Aufgabe: „3 Pfund kosten 8 Rubel, wie theuer sind 7 Pfund? " — Setzen wir den Werth von 7 Pfund gleich x Rubel, so haben wir:

(Angabe) 3 Pfund ...... 8 Rubel; (Frage) 7 Pfund ...... x Rubel?

Es darf nicht übersehen werden, daß die Anordnung der einzelnen Glieder in beiden Gleichungen ebenso, wie es bereits bei der Multiplication und Division angedeutet, in der Art geschehen müsse, daß das erste mit dem dritten und das zweite mit dem vierten Gliede gleiche Benennung habe. Der Werth der Einheit wird gefunden, wenn wir den ganzen Werth mit der Menge der Einheiten dividiren (§ 65), also müssen wir bei unserem Ansatze das zweite Glied mit dem ersten Gliede dividiren; da nehmlich

3 Pfund .... 8 Rubel

so ist 1 Pfund .... $\frac{8 \text{ Rubel}}{3}$.

Dieser Werth der Einheit muß nun nach den Regeln für die Multiplication mit der Menge, deren Werth man sucht, d. h. mit dem dritten Gliede unseres Ansatzes, multiplicirt werden, also

7 Pfund .... 7 . ($\frac{8}{3}$ Rubel $= \frac{7 \times 8 \text{ Rubel}}{3}$ (§ 35)

also $x = \frac{7 \times 8 \text{ Rubel}}{3} = \frac{56}{3}$ Rubel $= 18\frac{2}{3}$ Rubel,

d. h. man multiplicire zuerst die beiden Mittelglieder, und dividire das Product mit dem ersten Gliede; der Quotient hat immer die Benennung des zweiten Gliedes.

Beispiele.

1) 8 Pfund kosten 16 Rubel 24 Kopeken; wie theuer sind 2 Pfund 24 Solotnik?

Angabe — Frage

8 Pfund .... 16 Rubel 24 Kop.; 2 Pfund 24 Solotn..... x Kop.?
96 — 100 — 96
768 — 1624 Kopeken — 216 Solotnik
216
9744
1624
3248
| 350784 Kopeken | 456¾ Kop. = 4 Rub. 56¾ Kop. = x
576/768 | 192/ 3/4.

Erklärung. Wir machen erst alle drei Glieder einsortig. — Das erste Glied muß in Solotnik resolvirt werden, weil das dritte Solotnik enthält. Darauf multipliciren wir das zweite Glied, nehmlich 1624 Kopeken mit dem dritten Gliede, d. h. mit 216, und bekommen 350784 Kopeken; — zuletzt werden diese mit dem ersten Gliede, d. h. mit 768 dividirt, und die gesuchte Zahl findet sich = 4 Rubel $56\frac{1}{4}$ Kopeken.

Will man sich einiger Rechnenvortheile bedienen, so muß man, nachdem alle drei Glieder einsortig gemacht worden, das erste Glied gegen das zweite oder auch gegen das dritte durch gemeinsame Divisoren aufheben; dann ist

$$x = \frac{\overset{203}{\cancel{1624}} \cdot \overset{9}{\cancel{216}}}{\underset{\underset{4}{\cancel{96}}}{\cancel{768}}} \text{ Kopeken} = \frac{203 \cdot 9}{4} = 456\tfrac{3}{4} \text{ Kopeken.}$$

Zuerst heben wir mit 8 die Zahlen 1624 und 768 und hernach mit 24 die Zahlen 96 und 216.

2) $\frac{3}{7}$ Garnez kosten $12\frac{3}{5}$ Kop.; wie theuer sind 4 Tschetwerik?

Ansatz und Ausrechnung.

$\frac{3}{7}$ Garnez ..... $12\frac{3}{5}$ Kopeken; 4 Tschetwerik ..... x Kopeken?

$\frac{63}{5}$ Kopeken $\quad \frac{8}{32}$

$$x = \left[\left(\tfrac{63}{5} \text{ Kop.}\right) \times 32\right] : \tfrac{3}{7} = \frac{\overset{21}{\cancel{63}} \cdot 32 \cdot 7}{5 \cdot \cancel{3}} \text{ Kop.} = 9 \text{ Rub. } 40\tfrac{4}{5} \text{ Kop.}$$

3) 5 Pud $13\frac{5}{8}$ ℔ .... 18 Rbl. $65\frac{1}{2}$ Kop.; 14 ℔ $34\frac{1}{3}$ Sol. .... x Kop.?

$$\begin{array}{l} \underline{40} \\ \underline{213\frac{5}{8}} \\ \left(\frac{1709}{\cancel{8}}\right) \cdot \overset{12}{\cancel{96}} \\ \hline 3418 \\ \underline{1709} \\ 20508 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{100} \\ \underline{1865\frac{1}{2}} \\ \frac{3731}{2} \text{ Kopeken} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{96} \\ 118\frac{1}{3} \\ \underline{126} \\ \underline{1378\frac{1}{3}} \\ \frac{4135}{3} \end{array}$$

$$x = \frac{4135 \cdot 3731}{3 \cdot 2 \cdot 20508} \text{ Kopeken}$$

$$= \frac{15427685}{123048} \text{ Kopeken} = 1 \text{ Rubel } 25\tfrac{46685}{123048} \text{ Kopeken.}$$

Exempel Nr. 1685 — Nr. 1855.

Regeldetri mit indirecten Verhältnissen.

§ 67. Durch eine Werthgleichung ist die Abhängigkeit der einen Zahl von der andern angezeigt, d. h. eine Änderung der einen Zahl bedingt nothwendig eine Änderung der andern. — Ist die Abhängigkeit von der Art, daß bei der Verdoppelung der einen Zahl eine Verdoppelung der andern folgen muß, so sagt man, „beide Zahlen stehen im directen Verhältnisse"; z. B. wir hätten die Werthgleichung

5 Pfund .... 12 Rubel,

so sehen wir, daß 2 mal 5 Pfund auch 2 mal 12 Rubel gelten müssen, oder

10 Pfund .... 24 Rubel.

Ist die Abhängigkeit beider Zahlen aber von der Art, daß mit der Verdoppelung der einen Zahl die andere um die Hälfte kleiner werden muß, so sagt man, „beide Zahlen stehen im indirecten oder umgekehrten Verhältnisse"; z. B. wenn 8 Arbeiter in 10 Tagen eine Arbeit vollenden, so ist klar, daß die doppelte Anzahl Arbeiter, also 2 . (8 Arbeiter), in der halben Zeit, d. h. in $\frac{10 \text{ Tagen}}{2}$ dieselbe Arbeit ausführen können.

Da vor der Rechnung durch Beurtheilung des Zusammenhanges entschieden werden muß, ob man mit directen oder indirecten Verhältnissen zu thun habe, so gehören bei Auflösung solcher Aufgaben einige Kenntnisse des bürgerlichen Lebens.

Das Verfahren zu zwei Werthgleichungen mit indirecten Verhältnissen das vierte Glied zu finden, heißt die umgekehrte Regeldetri; z.B. wenn 7 Menschen einen gewissen Vorrath von Lebensmitteln in 8 Tagen verzehren; wie lange reichen 14 Menschen damit aus?

Auflösung. Zuerst haben wir die Werthgleichung

(Angabe) 7 Menschen .... 8 Tage.

Um auf den Werth der Einheit zu kommen, schließen wir: je weniger Menschen von dem Vorrathe zehren, desto längere Zeit werden sie auskommen, d. h. desto mehr Tage; daher

1 Mensch .... 7 . (8 Tage).

Da nun 14 Menschen 14 mal mehr verbrauchen als 1 Mensch, so können 14 Menschen nur

$$\frac{7 \,.\, (8 \text{ Tage})}{14} = 4 \text{ Tage}$$

mit demselben Vorrathe ausreichen.

Setzen wir die beiden Theile der Aufgabe hin, nehmlich

(Angabe) 7 Menschen ..... 8 Tage; (Frage) 14 Menschen ..... x Tage?

so sehen wir, da

$$x = \frac{7 \,.\, (8 \text{ Tage})}{14}$$

daß die unbekannte Zahl gefunden wird, wenn wir bei indirecten Verhältnissen „das Product der beiden ersten Glieder mit dem dritten Gliede dividiren."

Ist der Ansatz gemacht, und finden wir bei der Beurtheilung, daß indirecte Verhältnisse vorkommen, so kann das Verfahren mit dem für die grade Regeldetri in Übereinstimmung gebracht werden dadurch, daß wir das erste mit dem dritten Gliede vertauschen, und dann das Product der beiden Mittelglieder mit dem ersten Gliede dividiren.

Als Anwendung des Gesagten mögen hier einige vollständig ausgerechnete Beispiele folgen.

1) 16 Personen haben zu einer Arbeit $19\frac{3}{8}$ Tage nöthig; wieviel Personen werden dieselbe Arbeit in 31 Tagen ausführen?

Ansatz.

(Angabe) $19\frac{3}{8}$ Tage.... 16 Personen; (Frage) 31 Tage.... x Person.?

Beurtheilung. Je mehr Tage, desto weniger Personen sind nöthig, um dasselbe zu leisten, daher ein indirectes Verhältniß; folglich zu setzen

31 Tage .... 16 Pers.; $19\frac{3}{8}$ Tage .... x,

woraus sich ergiebt

$$x = \frac{19\frac{3}{8} \,.\, (16 \text{ Personen})}{31} = \frac{\overset{5}{\cancel{155}} \,.\, \overset{2}{\cancel{16}}}{\cancel{8} \,.\, \cancel{31}} = 10 \text{ Personen}.$$

2) Zur Bekleidung einer Wand braucht man 180 Arschin Tapeten, wenn sie eine Breite von 0,75 Arschinen haben; wieviel sind nöthig, wenn die Tapeten 1 Arschin 3,75 Wersch. breit sind.

Ansatz.

0,75 A. Breite .... 180 A. Länge; 1 A. 3,75 W. Breite .... x.

Beurtheilung. Wenn die Tapete noch einmal so breit ist, so wird man nur die halbe Anzahl Arschinen brauchen, demnach ein indirectes Verhältniß; also

1 Arschin 3,75 W.	180 Arschin;	0,75 Arschin.... x?
16	12	16
19,75	360	450
	180	75
	| 2160,00 | 109,3...A. Länge	12,00.

Die Hauptregeln für die gesammte Regeldetri sind demnach folgende:

1) Diejenige Einheit oder ein Vielfaches, deren Werth bekannt ist, wird in das erste Glied gesetzt.

2) Der Werth der Einheit oder des Vielfachen kommt in das zweite Glied.

3) Diejenige Einheit oder ein Vielfaches, deren Werth gesucht wird, kommt in das dritte Glied.

4) Das erste und dritte Glied müssen stets gleichnamig sein, oder wenn sie es noch nicht sind, gleichnamig gemacht werden.

5) Nach diesen Vorbereitungen ist zu beurtheilen, ob die vorliegenden Größen in directer oder indirecter Beziehung stehen.

6) Findet sich eine indirecte Beziehung, so ist das dritte mit dem ersten Gliede zu vertauschen.

7) Hierauf multiplicirt man die beiden Mittelglieder und dividirt mit dem ersten Gliede.

8) Das erste Glied kann gegen jedes der beiden Mittelglieder mit ein und derselben Zahl aufgehoben werden; — nie aber die Mittelglieder gegen einander.

Uebungsfragen.

1) Was ist die sogenannte Regeldetri?

2) Woraus besteht jede Regeldetri-Aufgabe und wie löst man dieselbe auf?

3) Was versteht man unter directen und indirecten Verhältnissen?

4) Worin weicht das Verfahren bei indirecten Verhältnissen von dem für directe Verhältnisse ab?

5) Durch welches Mittel beseitigt man die Abweichung für indirecte Verhältnisse?

6) Welches sind die Regeln für die gesammte Regeldetri?

Zusammengesetzte Regeldetri.

A. Mit directen Verhältnissen.

§ 68. Es giebt Aufgaben, zu deren Lösung mehr als ein Regeldetri-Exempel nöthig wird, weil das Gesuchte von mehren Zahlen abhängig ist, die in verschiedener Beziehung zu einander stehen. — Eine genauere Betrachtung wird uns lehren, daß solche Aufgaben durch eine einzige Rechnung aufzulösen sind, die man zusammengesetzte Regeldetri nennt. Jede hierher gehörige Aufgabe besteht, wie die einfache Regeldetri, aus zwei Theilen. In der Angabe kommen mehre Dinge verschiedener Art und in der Frage eben solche Dinge, worunter sich aber die unbekannte Zahl findet, vor. Auch hier werden Angabe und Frage in Werthgleichungen gefaßt; z. B.

1) Wenn 1 Arbeiter in einem Tage 45 Kopeken Lohn erhält; wieviel werden 10 Arbeiter in 18 Tagen bekommen?

Ausrechnung.

(Angabe) 1 Arbeiter in 1 Tage .... 45 Kopeken;
(Frage) 10 „ „ 18 Tagen .... x Kopeken?

Hier haben wir offenbar zwei Regeldetri-Aufgaben. Zuerst bekommen wir den täglichen Lohn von 10 Arbeitern, und dann den Lohn derselben für 18 Tage. Also

a) 1 Arbeiter ..... 45 Kopeken
10 Arbeiter ..... 10 . (45 Kop.) = 450 Kop. (für 1 Tag).

Nun schließen wir

b) 1 Tag ..... 450 Kopeken
18 Tage ..... 18 . (450 Kop.) = 8100 Kop. = 81 Rubel.

Oder wir bestimmen zuerst den Lohn von einem Arbeiter für 18 Tage und darauf den Lohn der 10 Arbeiter für 18 Tage. Hiernach stellt sich die Rechnung folgendermaaßen:

a) 1 Tag ..... 45 Kopeken

18 Tage ..... 18 . (45 Kop.) = 810 Kop. (für 1 Arbeiter)

b) 1 Arbeiter ..... 810 Kopeken

10 Arbeiter ..... 10 . (810 Kop.) = 81 Rubel.

In dieser Aufgabe war der Werth für die Einheit jeder in der Angabe vorkommenden Zahl gegeben, und wir fanden das gesuchte x dadurch, daß wir diesen Werth mit dem Vielfachen jeder vorkommenden Zahlengröße in der Frage multiplicirten.

Umgekehrt werden wir, wenn in der Angabe der Werth der Vielfachen und in der Frage die Einheiten derselben Zahlen vorkommen, das gesuchte x dadurch finden, daß wir den Werth aus der Angabe durch die Vielfachen dividiren; z. B.

2) Es verzehren 16 Personen in 14 Tagen $268\frac{4}{5}$ Rubel; wieviel kommt auf 1 Person in 1 Tage?

(Angabe) 16 Personen in 14 Tagen ..... $268\frac{4}{5}$ Rubel
(Frage) 1 Person „ 1 Tage ..... x Rubel?

Ausrechnung. 1 Person braucht 16 mal weniger als 16 Personen, und für 1 Tag zahlt man 14 mal weniger als für 14 Tage; folglich

$$x = \frac{268\frac{4}{5} \text{ Rubel}}{16 \,.\, 14} = \frac{1344 \text{ Rubel}}{16 \,.\, 14 \,.\, 5} = \frac{6}{5} \text{ Rubel.}$$

Endlich kommt der Fall vor, daß wir aus dem Werthe mehrer Vielfachen den Werth anderer Vielfachen zu bestimmen haben; z. B.

3) Es verdienen 10 Personen in 8 Monaten 2400 Rubel; wieviel werden 12 Person in 16 Monaten an Lohn erhalten?

(Angabe) 10 Personen in 8 Monaten .... 2400 Rubel;
(Frage) 12 „ „ 16 „ .... x Rubel?

Ausrechnung. Aus der Angabe folgt:

$$1 \text{ Person in } 1 \text{ Monate} \,\ldots\ldots\, \frac{2400 \text{ Rubel}}{10 \,.\, 8}$$

und hieraus

$$12 \text{ Personen in } 16 \text{ Monaten} \,\ldots\, \frac{12 \,.\, 16 \,.\, \overset{30}{\cancel{2400}}}{\cancel{10} \,.\, \cancel{8}} \text{ Rubel} = 5760 \text{ Rbl.}$$

Wir sehen hieraus, daß die gesuchte Zahl x gefunden wird, wenn wir den Werth aus der Angabe mit den in der Angabe noch sonst vorkommenden Größen dividiren, und den Quotienten mit den in der Frage enthaltenen Zahlen multipliciren.

Am Vortheilhaftesten stellt sich die Rechnung, wenn wir den gesuchten Werth von x (wie bereits oben geschehen) durch einen Bruch darstellen, dessen Zähler den Werth nebst den Multiplicatoren aus der Frage, und dessen Nenner die Divisoren aus der Angabe enthält.

Es versteht sich von selbst, daß bei vorkommenden Brüchen diejenigen Regeln anzuwenden sind, die bei der Multiplication und Division derselben gelehrt worden.

B. Mit directen und indirecten Verhältnissen.

Kommen in der Aufgabe indirecte Beziehungen vor, so erhalten wir den Werth für die Einheit nicht durch Division, sondern durch Multiplication mit dem gegebenen Vielfachen, und haben daraus den gesuchten Werth des Vielfachen nicht durch Multiplication, sondern durch Division abzuleiten. Wir werden daher jede Zahl der Angabe einer Beurtheilung ihres Verhaltens zu der gesuchten Zahl unterwerfen, und je nachdem sie in indirecter oder directer Beziehung steht, an den entsprechenden Platz im Zähler oder Nenner des Bruches, der den gesuchten Werth ausdrücken soll, setzen. Finden wir bei dieser Beurtheilung, daß sie in indirecter Beziehung steht, so ist das Vielfache in der Angabe ein Multiplicator, und das gleichnamige Vielfache in der Frage ein Divisor; ergiebt sich eine directe Beziehung, so ist das Vielfache in der Angabe ein Divisor, und das gleichnamige Vielfache in der Frage ein Multiplicator; z. B. 8 Arbeiter vollenden eine Arbeit in 12 Tagen, wenn sie täglich 9 Stunden arbeiten; wieviel Tage werden 6 Arbeiter brauchen, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten sollen?

(Angabe) 8 Arbeiter bei 9 Stunden täglich .... 12 Tage
(Frage) 6 „ „ 10 „ „ .... x Tage?

Beurtheilung. Je mehr Arbeiter sind, desto weniger Tage brauchen dieselben; also stehen Arbeiter und Tage in indi=

recter Beziehung, folglich ist 8 ein Multiplicator und 6 ein Divisor.

Je mehr Stunden täglich gearbeitet wird, desto weniger Tage sind nöthig, also ebenfalls indirect, weshalb 9 ein Multiplicator und 10 ein Divisor.

Es wird hiernach gefunden:

$$x = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}\ \text{Tage}\ .\ 8\ .\ 9}{\cancel{6}\ .\ \underset{5}{\cancel{10}}} = 14\tfrac{2}{5}\ \text{Tage}.$$

Wünscht man durch auf einander folgende Schlüsse das gesuchte Resultat herzuleiten, so hat man aus der Angabe:

a) Weil 1 Arbeiter, wenn er täglich 9 Stunden arbeitet, 8 mal mehr Tage brauchen wird als 8 Arbeiter, die ebenfalls 9 Stunden arbeiten,

1 Arbeiter bei 9 Stunden täglich ...... (12 Tage) . 8,

und wenn 1 Arbeiter täglich bloß 1 Stunde statt 9 Stunden arbeitet, so wird er 9 mal mehr Tage brauchen, um dasselbe zu leisten; also

1 Arbeiter bei 1 Stunde täglich .... (12 Tage).8.9.

Aus der Frage ergiebt sich:

b) 6 Arbeiter bei 1 Stunde täglich brauchen 6 mal weniger Tage als 1 Arbeiter bei 1 Stunde täglich, mithin

6 Arbeiter bei 1 Stunde täglich .... $\frac{(12\ \text{Tage})\ .\ 8\ .\ 9}{6}$,

und wenn 6 Arbeiter statt 1 Stunde 10 Stunden täglich arbeiten, so werden sie 10 mal weniger Tage brauchen, also

6 Arbeiter bei 10 Stunden täglich .... $\frac{(12\ \text{Tage})\ .\ 8\ .\ 9}{6\ .\ 10}$,

wie oben.

Kommen mehr als drei von einander abhängige Zahlengrößen vor, so macht es in der Rechnung keinen Unterschied. In diesem Falle wird die Auflösung durch auf einander folgende Schlüsse zu weitläufig, weshalb der Ausdruck von x in der Bruchform vorzuziehen ist; z. B.

Wenn 4 Arbeiter täglich 8 Stunden arbeiten, so können sie in 10 Wochen einen Graben von 180 Saschen Länge 8 Fuß

Breite auswerfen; wie lange werden 12 Arbeiter bei 9 Stunden täglich an einem Graben von 240 Saschen Länge 14 Fuß Breite zu thun haben?

(Angabe) 4 Arbeiter 8 Std. tägl. 180 S. L. 8 Fuß Br. .... 10 Wochen,
(Frage) 12 „ 9 „ „ 240 „ 14 „ .... x Wochen?

Beurtheilung. Je mehr Arbeiter, desto weniger Wochen sind nöthig; also indirect, deshalb 4 ein Multiplicator und 12 ein Divisor.

Je mehr Stunden täglich gearbeitet wird, desto weniger Wochen; also ebenfalls indirect.

Je mehr Saschen Länge zu graben sind, desto mehr Wochen wird man brauchen, also direct; deshalb 180 ein Divisor und 240 ein Multiplicator.

Je mehr Fuß Breite der Graben hat, desto mehr Wochen sind nöthig; also direct.

Hiernach wird sein

$$x = \frac{10\text{ Wochen} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{8} \cdot \overset{4}{\cancel{240}} \cdot 14}{\underset{3}{\cancel{12}} \cdot 9 \cdot \underset{3}{\cancel{180}} \cdot \cancel{8}} = \tfrac{560}{81}\text{ Wochen} = 6\tfrac{74}{81}\text{ Wochen.}$$

Statt der Bruchform, die wir für den Ausdruck des Werthes von x gewählt, wird von vielen Rechnenmeistern der sogenannte Säulensatz empfohlen, der nach seinem Erfinder die Basedow'sche Regel heißt. — Man zieht nehmlich einen Verticalstrich, setzt links die Fragezahl x und nebenan rechts die mit ihr gleichnamige; — hierauf werden die durch Beurtheilung sich ergebenden Multiplicatoren auf die rechte Seite und die Divisoren auf die linke Seite des Striches geschrieben. — Nach dieser Anordnung hebt man die Zahlen auf der Seite der Multiplicatoren durch zweckmäßige Theiler gegen die Zahlen auf der Seite der Divisoren; zuletzt dividirt man das Product der Multiplicatoren mit dem Producte der Divisoren. Obiges Exempel wäre hiernach:

x Wochen	10 Wochen
12 Arbeiter	4 Arbeiter
9 Stunden	8 Stunden
180 Saschen	240 Saschen (Länge)
8 Fuß	14 Fuß (Breite)

Es muß nicht übersehen werden, daß die in der Angabe vorkommenden mit den in der Frage correspondirenden Zahlen stets gleichnamig sein müssen. Wo solches nicht stattfindet, muß man dieselben vor der Rechnung erst gleichnamig machen.

Die Zinsrechnung.

§ 69. Leiht Jemand Geld von einem Andern, und verwendet es zu seinem Vortheil, so entrichtet er dem Besitzer des geliehenen Geldes eine Entschädigung. Man nennt den das Geld Hergebenden Gläubiger oder Creditor; den, der das Geld für sich aufnimmt, Schuldner oder Debitor. Die geliehene Geldsumme wird Kapital und die zu zahlende Vergütung Zins oder Interesse genannt. — Der Zins hängt ab von der Größe des Kapitals und von der Länge der Zeit, während welcher das Kapital benutzt wird. Die Zinsen eines Kapitals von 100 für 1 Jahr heißen Procente, oder die jährlichen Zinsen für ein Kapital = 1 der Zinsfuß. In Rußland ist das Maximum der gesetzlichen Zinsen = 6 Procent.

Gewöhnlich werden die Interessen in jedem Jahre abgetragen und deren Berechnung mit der Lösung anderer damit zusammenhängender Fragen ist der Gegenstand der einfachen Interessenrechnung. Trägt man die Zinsen aber nicht ab, sondern werden dieselben am Schlusse des Jahres zum Kapitale geschlagen und wieder verzinset, so spricht man von Interesse auf Interesse, was Gegenstand der zusammengesetzten Zinsrechnung oder Zinseszinsrechnung ist. Ist die Zeit in Monaten gegeben, so wird gewöhnlich der Monat zu 30 Tagen, oder das Jahr zu 360 Tagen gerechnet; in besondern Fälle aber, wenn bloß einzelne Tage vorkommen, die mit der Zeiteinheit, d. h. einem Jahre, verglichen werden, rechnet man das Jahr zu 365 Tagen.

Wir werden im Nachstehenden nur die einfache Zinsrechnung erklären, weil zur Beantwortung der meisten Fragen, die bei der Zinseszinsrechnung vorkommen können, algebraische Kenntnisse erforderlich sind.

§ 70. Die bei der Zinsrechnung vorkommenden von einander abhängigen Größen sind: Kapital, Procente, Zinsen und Zeitdauer. Aus je drei gegebenen kann die vierte Größe hergeleitet werden. Wir haben demnach folgende Aufgaben zu lösen:

1) die Interessen zu finden aus Procenten, Kapital und Zeit;
2) die Procente „ „ „ Kapital, Zeit und Zinsen;
3) das Kapital „ „ „ Zeit, Zinsen und Procenten;
4) die Zeit „ „ „ Zinsen, Procenten und Kapital.

I. Berechnung der Zinsen aus Kapital, Procenten und Zeit.

1) Wieviel betragen die Zinsen von 600 Rubeln Kapital bei 5% in einem Jahre?

1ste Auflösung. Da man von 100 Rubel an Zinsen 5 Rubel erhält, so wird 1 Rubel 100 mal weniger, d. h. $\frac{5}{100}$ Rubel oder $\frac{1}{20}$ Rubel geben; folglich 600 Rubel Kapital 600 mal mehr, d. h. $600 \,.\, (\frac{1}{20}$ Rubel$) = 30$ Rubel.

2te Auflösung. Da 100 Rubel an Zinsen 5 Rubel geben, so muß man für 600 Rubel $= 6 \,.\, (100$ Rubel$)$ — 6 mal mehr, d. h. $6 \,.\, (5$ Rubel$) = 30$ Rubel erhalten.

3te Auflösung. Als einfaches Regeldetri-Exempel.

$$\underbrace{\text{100 Rbl. Kapital ..... 5 Rbl. Zinsen;}}_{\text{Angabe.}}\ \underbrace{\text{600 Rbl. Kapital ..... x?}}_{\text{Frage.}}$$

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen, folglich stehen Kapital und Zinsen in directem Verhältnisse; daher $x = \frac{6\cancel{00} \,.\, (5 \text{ Rubel Zinsen})}{1\cancel{00}} = 30$ Rubel Zinsen.

2) Wieviel Zinsen tragen 300 Rubel Kapital bei $4\frac{3}{4}$ % in 5 Jahren?

Auflösung. Aus der vorhergehenden Aufgabe geht hervor, daß wir die jährlichen Zinsen finden, wenn wir das Kapital mit den Procenten multipliciren und das Product mit 100 dividiren. Für unsern vorliegenden Fall hätten wir demnach:

jährliche Zinsen $= \frac{3\cancel{00} \cdot (4\frac{3}{4} \text{ Rubel})}{1\cancel{00}} = \frac{3 \cdot 19}{4}$ Rbl. $= \frac{57}{4}$ Rbl.

Also für 5 Jahre 5 mal mehr; daher

Zinsen $= 5 \cdot (\frac{57}{4})$ Rubel) $= 71\frac{1}{4}$ Rubel.

Oder nach der zusammengesetzten Regeldetri:

(Angabe) 100 Rubel Kapital in 1 Jahre ..... $4\frac{3}{4}$ Rbl. Zinsen;
(Frage) 300 „ „ „ 5 Jahren ..... x Rbl. Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen, und je länger ein Kapital aussteht, desto mehr Zinsen wird man haben; also stehen beide in directem Verhältnisse, deshalb

$$x = \frac{(4\frac{3}{4} \text{ Rubel Zinsen}) \times 3\cancel{00} \times 5}{1\cancel{00} \times 1} = 71\frac{1}{4} \text{ Rubel Zinsen.}$$

Aus diesem Ausdrucke für x abstrahiren wir uns folgende Regel für alle ähnlichen Fälle: Die Zinsen werden gefunden, wenn man Procente, Kapital und Zeit mit einander multiplicirt und das Product durch 100 dividirt.

Hierbei ist die Bedingung, daß die Zeit in Jahren ausgedrückt worden. — Wäre die Zeit in Monaten oder Tagen gegeben, so müßte man vorher die Zeit auf Jahre reduciren; z. B.

3) Wieviel betragen die Zinsen von 75 Rubeln bei 5% in 9 Monaten?

Auflösung. Da 9 Monate $= \frac{9}{12}$ Jahr $= \frac{3}{4}$ Jahr, so haben wir:

$$x = \frac{(75 \cdot 5 \cdot \frac{3}{4})}{100} \text{ Rubel Zinsen} = \frac{\overset{3}{\cancel{75}} \cdot 5 \cdot 3}{\underset{4}{\cancel{100}} \cdot 4} \text{ Rbl.} = 2\frac{13}{16} \text{ Rbl.}$$

Nach dieser Formel können die Zinsen in allen den Fällen berechnet werden, wo Kapital, Procente und Zeit gegeben sind. Zuweilen ist aber eine dieser 3 Größen versteckt, und es sind z. B. gegeben: die Zinsen für einen bestimmten Zeitraum bei gewissen Procenten; man will wissen, wieviel Zinsen dasselbe Kapital tragen würde, wenn Zeit und Zinsfuß sich ändern. Hier geschieht die Ausrechnung nach der zusammengesetzten Regeldetri; z. B.

4) In 3 Jahren erhielt man von einem gewissen Kapitale bei 5% 800 Rubel Zinsen; wieviel wird man in 9 Jahren bei 6% von demselben Kapitale erhalten?

(Angabe) In 3 Jahren bei 5% .... 800 Rubel Zinsen;
(Frage) „ 9 „ „ 6% .... x Rubel Zinsen?

Beurtheilung. Je mehr Jahre ein Kapital aussteht, desto mehr Zinsen wird man erhalten; also Zeit und Zinsen in directem Verhältnisse.

Je höhere Procente genommen werden, d. h. je mehr für jedes Hundert, das im Kapitale steckt, gezahlt wird, desto mehr Zinsen wird man haben; also stehen Procente und Zinsen ebenfalls in directem Verhältnisse; daher

$$x = \frac{(\overset{160}{\cancel{800}}\text{ Rubel Zinsen}) \times \overset{3}{\cancel{9}} \times 6}{\cancel{3} \cdot \cancel{5}} = 2880 \text{ Rubel Zinsen.}$$

5) Ein Kapital von 3000 Rubeln gab in 5 Jahren 775 Rubel Zinsen; wieviel wird man bei gleichen Procenten von 4500 Rubeln Kapital in 9 Jahren erhalten?

(Angabe) 3000 Rbl. Kapital in 5 Jahren ..... 775 Rbl. Zinsen;
(Frage) 4500 „ „ „ 9 „ ..... x Rbl. Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen wird man in derselben Zeit bei gleichem Zinsfuße erhalten; daher Kapital und Zinsen in directem Verhältnisse.

Je länger ein Kapital aussteht, desto mehr Zinsen wird man haben, deshalb Zeit und Zinsen in directem Verhältnisse; also

$$x = \frac{(\overset{155}{\cancel{775}}\text{ Rubel Zinsen}) \times \overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{9}{\cancel{4500}}}{\cancel{5} \times \underset{\underset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{3000}}} = 2092\tfrac{1}{2} \text{ Rubel Zinsen.}$$

6) Ein Kapital von 600 Rubeln trug bei 5% 180 Rubel Zinsen; wieviel Zinsen wird man in derselben Zeit von 800 Rubeln Kapital bei 6% erhalten?

(Angabe) 600 Rubel Kapital bei 5% ...... 180 Rubel Zinsen?
(Frage) 800 „ „ „ 6% ...... x Rubel Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen wird man in derselben Zeit und bei demselben Zinsfuße erhalten; daher Kapital und Zinsen in directem Verhältnisse.

Je höhere Procente man nimmt, desto mehr Zinsen wird man in derselben Zeit von demselben Kapital ziehen; also Procente und Zinsen in directem Verhältnisse; daher

$$x = \frac{(\overset{36}{\cancel{120}}\ \text{Rubel Zinsen} \times \cancel{6} \times 8\cancel{00}}{\cancel{600} \times \cancel{5}} = 288\ \text{Rubel Zinsen.}$$

Aus den drei letzten Beispielen ergiebt sich:

a) Zinsen und Kapital stehen in directem Verhältnisse, wenn Zeit und Zinsfuß sich nicht ändern;

b) Zinsen und Zeit stehen in directem Verhältnisse, wenn Procente und Kapital sich nicht ändern;

c) Zinsen und Procente stehen in directem Verhältnisse, wenn Kapital und Zeit sich nicht ändern.

Exempel Nr. 1965 — Nr. 1975.

II. Berechnung der Procente aus Kapital, Zeit und Zinsen.

1) Wenn 500 Rubel Kapital jährlich 20 Rubel Zinsen geben; zu wieviel Procent ist dieses Geld ausgeliehen?

Auflösung.

500 Rubel Kapital ...... 20 Rubel Zinsen

1 Rubel Kapital ...... $\frac{2\cancel{0}}{50\cancel{0}}$ Rubel Zinsen

daher 100 Rbl. Kapital ...... $\frac{\overset{2}{\cancel{100}} \cdot 2}{\cancel{50}}$ Rbl. Zinsen, d. h. = 4%.

Oder durch einen Regeldetri-Ansatz.

$\underbrace{}$Angabe. $\underbrace{}$Frage

500 Rbl. Kapital ..... 20 Rbl. Zinsen; 100 Rbl. Kapital ..... x?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen wird es tragen; folglich stehen Kapital und Zinsen in directem Verhältnisse, also

$$x = \frac{\overset{4}{\cancel{100}} \cdot \cancel{28} \text{ Rubel}}{\cancel{700}} = 4 \text{ Rubel Zinsen, d. h. } 4\%.$$

2) Jemand nimmt von 600 Rubeln Kapital in 3 Jahren 108 Rubel Zinsen ein; zu wieviel Procent war dieses Kapital ausgeliehen?

Auflösung. Wenn man in 3 Jahren 108 Rubel Zinsen bekommt, so fallen auf 1 Jahr 3 mal weniger; daher sind die jährlichen Zinsen $= \frac{108}{3}$ Rubel $= 36$ Rubel. Nun haben wir:

600 Rubel Kapital .... 36 Rubel Zinsen (in 1 Jahre)

1 Rubel Kapital .... $\frac{36}{600}$ Rubel Zinsen

folglich 100 Rubel .... $\frac{\cancel{100} \cdot \overset{6}{\cancel{36}}}{\cancel{600}}$ Rubel Zinsen $= 6\%$.

Oder durch die zusammengesetzte Regeldetri:

(Angabe) 600 Rubel Kapital in 3 Jahren ..... 108 Rbl. Zinsen;
(Frage) 100 „ „ „ 1 „ ..... x Rbl. Zinsen?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto mehr Zinsen, und je länger es aussteht, desto mehr Zinsen wird man haben, deshalb beide Verhältnisse direct; also

$$x = \frac{\overset{\overset{6}{\cancel{18}}}{\cancel{108}} \text{ Rubel} \cdot 1\cancel{00}}{\cancel{600} \cdot \cancel{3}} = 6 \text{ Rubel Zinsen, d. h. } 6\%.$$

Wir können uns eine Formel zur Berechnung der Procente, wenn Zeit, Kapital und Zinsen gegeben sind, leicht entwickeln aus der schon bekannten Relation, daß

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Zeit} \times \text{Procente}}{100},$$

denn es muß alsdann sein, wenn wir mit 100 multipliciren,

$$\text{Kapital} \times \text{Zeit} \times \text{Procente} = 100 \times \text{Zinsen},$$

d. h. die hundertfachen Zinsen sind gleich einem Producte aus Kapital, Zeit und Procenten. Dividiren wir jetzt mit dem Producte aus Kapital und Zeit, so erhalten wir

$$\text{Procente} = \frac{100 \cdot \text{Zinsen}}{\text{Kapital} \times \text{Zeit}}; \text{ z. B.}$$

3) Zu wieviel Procent müssen 800 Rubel Kapital ausgeliehen werden, wenn man in $3\frac{1}{2}$ Jahren 150 Rubel Zinsen haben will?

$$x = \frac{100 \,.\, 150}{800 \,.\, \left(\frac{10}{3}\right)} = \frac{1\cancel{00} \,.\, 15\cancel{0} \,.\, 3}{8\cancel{00} \,.\, 1\cancel{0}} = \tfrac{45}{8}\,\% = 5\tfrac{5}{8}\,\%.$$

Natürlich ist bei Benutzung dieser Formel die Zeit immer in Jahren auszudrücken. Die Formel findet aber nur dann Anwendung, wenn von den bei der Zinsrechnung vorkommenden vier Größen drei wirklich gegeben sind, nehmlich Kapital, Zeit und Zinsen. Man muß jederzeit zu der zusammengesetzten Regeldetri zurückkehren, wenn eine dieser 3 Größen in der Aufgabe versteckt vorkommt; z. B.

4) Von einem gewissen Kapitale, das zu 5% ausgeliehen war, erhielt man in 3 Jahren 420 Rubel Zinsen; zu wieviel Procent muß dasselbe Kapital ausgeliehen werden, um in 4 Jahren 480 Rubel Zinsen zu haben?

(Angabe) 420 Rubel Zinsen in 3 Jahren 5%;
(Frage) 480 " " " 4 " .... x%?

Beurtheilung. Je mehr Zinsen von einem Kapitale in derselben Zeit gezahlt werden, desto höhere Procente sind genommen; daher Zinsen und Procente in directem Verhältnisse.

Je länger ein Kapital aussteht, desto kleinere Procente muß man nehmen, um dieselben Zinsen zu erhalten, daher Zeit und Procente in indirectem Verhältnisse; folglich

$$x = \frac{5\% \times 480 \times 3}{420 \times 4} = 4\tfrac{2}{7}\,\%.$$

5) In einer gewissen Zeit erhielt man von 2000 Rubeln Kapital bei 4% 600 Rubel Zinsen; zu wieviel Procent muß man 1500 Rubel ausleihen, um in derselben Zeit 700 Rubel Zinsen zu haben?

(Angabe) 2000 Rubel Kapital 600 Rubel Zinsen 4%;
(Frage) 1500 " " 700 " " ...... x%?

Beurtheilung. Je mehr Zinsen (von demselben Kapitale in derselben Zeit) verlangt werden, desto höhere Procente muß man nehmen; deshalb Zinsen und Procente in directem Verhältnisse.

Je größer das Kapital, desto kleinere Procente braucht man zu nehmen (um in derselben Zeit dieselben Zinsen zu haben); deshalb Kapital und Procente in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{4\% \times 700 \times 2000}{600 \times 1500} = 6\tfrac{2}{9}\ \%.$$

6) Von 1000 Rubeln Kapital erhielt man in 4 Jahren bei 5% eine gewisse Summe Zinsen; zu wieviel Procent muß man 3200 Rubel Kapital ausleihen, um in 2 Jahren ebensoviel Zinsen zu haben?

(Angabe) 1000 Rubel Kapital in 4 Jahren 5%;
(Frage) 3200 „ „ „ 2 „ ...... x%?

Beurtheilung. Je größer das Kapital ist, desto kleinere Procente braucht man zu nehmen (um in derselben Zeit dieselben Zinsen zu haben); deshalb Kapital und Procente in indirectem Verhältnisse.

Je länger ein Kapital aussteht, desto kleinere Procente sind zu nehmen (um von demselben Kapitale dieselben Zinsen zu haben); deshalb Zeit und Procente in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{5\% \times 4 \times 1000}{2 \times 3200} = 3\tfrac{1}{8}\ \%.$$

Aus den drei letzten Aufgaben folgt:

a) Procente und Zinsen (bei gleichen Zeiten und gleichen Kapitalien) stehen in directem Verhältnisse.
b) Procente und Zeit (bei gleichen Zinsen und gleichen Kapitalien) stehen in indirectem Verhältnisse.
c) Procente und Kapital (bei gleichen Zinsen und gleichen Zeiten) stehen in indirectem Verhältnisse.

Exempel Nr. 1976 — Nr. 1984.

III. Berechnung des Kapitals aus Zeit, Zinsen und Procenten.

1) Welches Kapital bringt zu 4% in einem Jahre 80 Rubel Zinsen?

1ste Auflösung. Wenn 4 Rubel die Zinsen von 100 Rubel Kapital sind; so müssen 80 Rubel Zinsen von soviel mal (100 Rubel Kapital) sein, als 4 Rubel in 80 Rubel enthalten sind. Nun ist (80 Rubel) : (4 Rubel) = 20 mal; demnach das gesuchte Kapital = 20 . (100 Rubel) = 2000 Rubel.

2te Auflösung. 4 Rubel Zinsen .... 100 Rubel Kapital

also 1 Rubel Zinsen .... $\frac{100 \text{ Rubel Kapital}}{4}$

folglich 80 Rubel Zinsen ...... $\frac{80 \,.\, 100 \text{ Rubel Kapital}}{4} = 2000$ Rbl.

3te Auflösung. Durch einen Regeldetri-Ansatz.

$\underbrace{\text{4 Rubel Zinsen ...... 100 Rubel Kapital;}}_{\text{Angabe}}$ $\underbrace{\text{80 Rubel Zinsen ...... x?}}_{\text{Frage}}$

Beurtheilung. Je mehr Zinsen, desto größer muß das Kapital sein; demnach Zinsen und Kapital in directem Verhältnisse; also

$$x = \frac{(100 \text{ Rubel Kapital}) \times 80}{4} = 2000 \text{ Rubel.}$$

2) Wie groß ist ein Kapital, dessen 4jährige Zinsen zu $3\frac{3}{4}$ % 450 Rubel betragen?

Auflösung. 100 Rubel Kapital geben in einem Jahre $3\frac{3}{4}$ Rubel Zinsen, also in 4 Jahren 4 mal mehr, demnach $4 \,.\, (3\frac{3}{4}$ Rubel) = 15 Rubel. Wenn nun

15 Rubel Zinsen .... 100 Rubel Kapital

so muß 1 Rubel Zinsen .... $\frac{100}{15}$ Rbl. Kapital entsprechen,

daher 450 Rbl. Zinsen .... $\frac{450 \times 100}{15}$ Rbl. Kapit. = 3000 Rbl.

Oder nach der zusammengesetzten Regeldetri:

(Angabe) 1 Jahr $3\frac{3}{4}$ Rubel Zinsen ..... 100 Rubel Kapital;
(Frage) 4 Jahre 450 „ „ ..... x Rubel Kapital?

Beurtheilung. Je längere Zeit, desto weniger Kapital wird man brauchen, um dieselben Zinsen zu erhalten; daher Zeit und Kapital in indirectem Verhältnisse.

Je mehr Zinsen, desto mehr Kapital ist nöthig; also Zinsen und Kapital in directem Verhältnisse, mithin

$$x = \frac{(100 \text{ Rubel Kapital}) \times 1 \times 450}{4 \times (3\frac{3}{4})} = 3000 \text{ Rubel.}$$

Für alle ähnlichen Fälle erhalten wir zur Berechnung des Kapitals eine Formel aus der bekannten Relation

$$\text{Kapital} \times \text{Zeit} \times \text{Procente} = 100 \times \text{Zinsen}$$

dadurch, daß wir die 100fachen Zinsen mit dem Producte aus Zeit und Procenten dividiren, daher

$$\text{Kapital} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Zeit} \times \text{Procente}}; \text{ z. B.}$$

3) Welches Kapital giebt bei 4 % in 7 Jahren 980 Rubel Zinsen?

$$x = \frac{100 \times 980}{7 \times 4} \text{ Rbl. Kapital} = 3500 \text{ Rbl. Kapital.}$$

Diese Formel wird mit Vortheil angewandt, wenn man das Kapital aus Zeit, Procenten und Zinsen zu berechnen hat; dagegen wird man immer nach der zusammengesetzten Regeldetri rechnen, wenn eine dieser 3 Größen nicht direct gegeben ist, sondern in der Aufgabe sich versteckt vorfindet; z. B. in nachfolgenden 3 Aufgaben.

4) Welches Kapital trägt bei 4% in 5 Jahren eben soviel Zinsen als 7800 Rubel in 2 Jahren bei 3%?

(Angabe) 2 Jahre 3% .... 7800 Rubel Kapital;
(Frage) 5 „ 4% .... x Rubel Kapital?

Beurtheilung. Je länger ein Kapital aussteht, desto kleiner braucht es zu sein (um bei gleichen Procenten dieselben Zinsen zu tragen); also Zeit und Kapital in indirectem Verhältnisse.

Je höhere Procente, ein desto kleineres Kapital wird nöthig sein (um in derselben Zeit dieselben Zinsen abzuwerfen); deshalb Procente und Kapital in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{(7800 \text{ Rubel Kapital}) \times 3 \times 2}{5 \times 4} = 2340 \text{ Rubel.}$$

5) Welches Kapital trägt in 3 Jahren 450 Rubel Zinsen, wenn man bei denselben Procenten von 780 Rubel Kapital in 6 Jahren 210 Rubel Zinsen erhält?

(Angabe) 6 Jahre 210 Rubel Zinsen .... 780 Rubel Kapital;
(Frage) 3 „ 450 „ „ .... x Rubel Kapital?

Beurtheilung. Je längere Zeit, desto kleineres Kapital ist nöthig (um bei demselben Zinsfuße gleiche Zinsen zu erhalten); deswegen Zeit und Kapital in indirectem Verhältnisse.

Je mehr Zinsen, desto mehr Kapital ist nöthig (wenn Zinsfuß und Zeit sich nicht ändern); daher Zinsen und Kapital in directem Verhältnisse; also

$$x = \frac{780 \text{ Rubel Kapital} \times 450 \times 6}{210 \times 3} = 3342\tfrac{6}{7} \text{ Rubel.}$$

6) Welches Kapital trägt bei 4% 520 Rubel Zinsen, wenn man in einer gewissen Zeit von 1000 Rubeln Kapital bei 5% 70 Rubel Zinsen erhält?

(Angabe) 5%, 70 Rubel Zinsen .... 1000 Rubel Kapital;
(Frage) 4%, 520 „ „ .... x „ „ ?

Beurtheilung. Je mehr Zinsen, desto größer muß das Kapital sein (wenn Zeit und Procente dieselben bleiben); deshalb Zinsen und Kapital in directem Verhältnisse.

Je höhere Procente, desto kleineres Kapital wird in derselben Zeit dieselben Zinsen tragen; daher Procente und Kapital in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{1000 \text{ Rubel Kapital} \times 520 \times 5}{70 \times 4} = 9285\tfrac{5}{7} \text{ Rubel.}$$

Aus den drei letzten Aufgaben sehen wir, daß

a) die Größe des Kapitals und die Größe der Zinsen in directem Verhältnisse stehen, wenn Procente und Zeiten gleich sind.

b) Die Größe des Kapitals und die Länge der Zeit in indirectem Verhältnisse bei gleichen Procenten und gleichen Zeiten.

c) Die Größe des Kapitals und die Größe der Procente in indirectem Verhältnisse bei gleichen Zinsen in gleichen Zeiten.

Exempel Nr. 1985 — Nr. 1992.

IV. Berechnung der Zeit aus Procenten, Zinsen und Kapital.

1) Wie lange müssen 400 Rubel Kapital ausstehen, um bei 5% 80 Rubel Zinsen zu tragen?

Auflösung. Da 100 Rubel Kapital 5 Rubel Zinsen geben, so sind die jährlichen Zinsen von 400 Rubeln Kapital 4 × (5 Rubel) = 20 Rubel. Wir haben also

20 Rubel Zinsen .... 1 Jahr

1 Rubel Zinsen .... $\frac{1}{20}$ Jahr

daher 80 Rubel Zinsen .... 80 ($\frac{1}{20}$ Jahr) = 4 Jahr.

Oder nach der zusammengesetzten Regeldetri:

(Angabe) 100 Rubel Kapital, 5 Rubel Zinsen .... 1 Jahr;
(Frage) 400 „ „ 80 „ „ .... x „ ?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, in desto kürzerer Zeit wird es dieselben Zinsen geben; deshalb Kapital und Zeit in indirectem Verhältnisse.

Je mehr Zinsen von einem Kapitale verlangt werden, je länger muß es ausstehen; also Zinsen und Zeit in directem Verhältnisse; daher

$$x = \frac{(1\ \text{Jahr}) \times 100 \times 80}{400 \times 5} = 4\ \text{Jahr}.$$

Aus der Relation:

$$\text{Zeit} \times \text{Kapital} \times \text{Procente} = 100 \times \text{Zinsen}$$

leiten wir uns eine Formel zur Berechnung aller ähnlichen Aufgaben her. Dividiren wir nehmlich die 100fachen Zinsen mit dem Producte aus Kapital und Procenten, so haben wir für die Zeit (in Jahren ausgedrückt)

$$\text{Zeit} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Kapital} \times \text{Procente}}.$$

z. B. 2) Wie lange müssen 3000 Rubel bei 6% ausstehen, um 330 Rubel Zinsen zu tragen?

$$x = \frac{100 \times 330}{3000 \times 6}\ \text{Jahr} = 1\tfrac{5}{6}\ \text{Jahr}.$$

Ist eine dieser vier Größen versteckt gegeben, so können wir uns dieser Formel nicht bedienen, und müssen die Auflösung der Aufgabe nach der zusammengesetzten Regeldetri machen, z. B.

3) Wie lange muß ein Kapital von 500 Rubel bei 6% ausstehen, um eben so viel Zinsen zu tragen, als 1200 Rubel bei 4% in 7 Jahren?

(Angabe) 1200 Rubel Kapital bei 4% .... 6 Jahre;
(Frage) 500 „ „ „ 5% .... x „ ?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto weniger Zeit ist nöthig, um bei demselben Zinsfuße dieselben Zinsen zu erhalten; also Kapital und Zeit in indirectem Verhältnisse.

Je höhere Procente man nimmt, in desto kürzerer Zeit wird man von demselben Kapitale dieselben Zinsen bekommen; daher Procente und Zeit in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{(6 \text{ Jahre}) \times 4 \times 1200}{6 \times 500} = 9\tfrac{3}{5} \text{ Jahre.}$$

4) In welcher Zeit tragen 1000 Rubel Kapital 450 Rubel Zinsen, wenn man in 5 Jahren bei demselben Zinsfuße von 800 Rubel Kapital 180 Rubel Zinsen erhalten hat?

(Angabe) 800 Rubel Kapital 180 Rubel Zinsen ...... 5 Jahre;
(Frage) 1000 „ „ 450 „ „ ...... x „ ?

Beurtheilung. Je größer das Kapital, desto weniger Zeit ist nöthig, um bei gleichem Zinsfuße dieselben Zinsen zu haben; daher Kapital und Zinsen in indirectem Verhältnisse.

Je mehr Zinsen, desto mehr Jahre sind nöthig für dasselbe Kapital und denselben Zinsfuß; demnach Zinsen und Zeit in indirectem Verhältnisse; also

$$x = \frac{(5 \text{ Jahre}) \times 800 \times 450}{1000 \times 180} = 10 \text{ Jahre.}$$

5) In 3 Jahren erhielt man 160 Rubel Zinsen bei 4%; in welcher Zeit trägt dasselbe Kapital 300 Rubel Zinsen bei 6%?

(Angabe) 160 Rubel Zinsen 4% .... 3 Jahre;
(Frage) 300 „ „ 6% .... x „ ?

Beurtheilung. Je mehr Zinsen, desto länger muß das Kapital ausstehen; deshalb Zinsen und Zeit in directem Verhältnisse.

Je höhere Procente, in desto weniger Jahren wird man von demselben Kapital dieselben Zinsen erhalten; also Procente und Zeit in indirectem Verhältnisse; deshalb

$$x = \frac{(3 \text{ Jahre}) \times 300 \times 4}{160 \times 6} = 3\tfrac{1}{4} \text{ Jahre.}$$

Aus den drei letzten Aufgaben ersehen wir, daß

a) Zeit und Zinsen (bei gleichem Kapitale und demselben Zinsfuße) in directem Verhältnisse,

b) Zeit und Procente (bei gleichem Kapitale und denselben Zinsen) in indirectem Verhältnisse,

c) Zeit und Kapital (bei gleichen Zinsen und demselben Zinsfuße) in indirectem Verhältnisse, stehen.

Exempel Nr. 1993 — Nr. 2000.

§ 71. In dem vorhergehenden § haben wir zur Berechnung einer Größe, wenn die drei andern bei der Zinsrechnung vorkommenden gegeben waren, folgende Formeln gefunden:

$$\text{I. Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \times \text{Procente} \times \text{Zeit}}{100}.$$

$$\text{II. Procente} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Kapital} \times \text{Zeit}}.$$

$$\text{III. Kapital} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Procente} \times \text{Zeit}}.$$

$$\text{IV. Zeit} = \frac{100 \times \text{Zinsen}}{\text{Procente} \times \text{Kapital}}.$$

Zugleich machten wir die Bemerkung, daß die Anwendung dieser Formeln nur eine beschränkte sei. Zu dieser Bemerkung wurden wir dadurch veranlaßt, daß wir nicht sogleich zeigen konnten, wie man die in der Aufgabe versteckt gegebene Größe herzuleiten habe. Jetzt wollen wir die Anwendbarkeit der Formeln in allen Fällen nachweisen.

1) Von einem gewissen Kapitale erhält man in 3 Jahren bei 5% 150 Rubel Zinsen; wieviel wird man in 7 Jahren bei 4% von demselben Kapitale erhalten?

(Angabe) 3 Jahre 5% ...... 150 Rubel Zinsen;
(Frage) 7 „ 4% ...... x „ „ ?

Die Angabe ist eigentlich eine Aufgabe für sich, und lautet: Welches Kapital giebt in 3 Jahren 150 Rubel Zinsen bei 5%?

Nach Formel (III) haben wir:

$$\text{Kapital} = \frac{100 \times 150}{3 \times 5} \text{ Rubel} = 1000 \text{ Rubel}$$

und jetzt verwandelt sich die Frage in eine zweite Aufgabe, nehmlich: Wieviel Zinsen bringt ein Kapital von 1000 Rubeln bis 4% in 7 Jahren?

Nach Formel (I) sind

$$\text{Zinsen} = \frac{1000 \times 4 \times 7}{100} \text{ Rubel} = 280 \text{ Rubel.}$$

2) Zu wieviel Procent muß ein Kapital von 720 Rubeln ausgeliehen werden, um in 3 Jahren an Zinsen ebensoviel zu tragen, als 1200 Rubel in 2 Jahren bei 4%?

(Angabe) 1200 Rbl. Kapital 2 Jahre .... 4% (zu suchen die Zinsen)
(Frage) 720 „ „ 3 „ .... x%?

Aus der Angabe haben wir nach Formel (I)

$$\text{Zinsen} = \frac{1200 \times 2 \times 4}{100} \text{ Rubel} = 96 \text{ Rubel.}$$

und jetzt aus der Frage, nach Formel (II)

$$\text{Procente} = \frac{100 \times 96}{720 \times 3} \% = 4\tfrac{4}{9} \%.$$

3) In welcher Zeit erhält man von 420 Rubeln Kapital bei 4% eben so viel Zinsen, als von 1600 Rubeln Kapital in 5 Jahren bei 3%?

(Angabe) 1600 Rubel Kapital 3% .... 5 Jahre (zu suchen d. Zinsen)
(Frage) 4200 „ „ 4% .... x „ ?

Aus der Angabe folgt nach Formel (I)

$$\text{Zinsen} = \frac{1600 \times 5 \times 3}{100} \text{ Rubel} = 240 \text{ Rubel}$$

und aus der Frage nach Formel (III)

$$\text{Zeit} = \frac{100 \times 240}{4200 \times 4} \text{ Jahre} = 1\tfrac{3}{7} \text{ Jahre.}$$

4) Von 1500 Rubeln Kapital erhält man bei gewissen Procenten in 5 Jahren 180 Rubel Zinsen; in welcher Zeit wird man bei demselben Zinsfuße von 3500 Rubeln Kapital 400 Rbl. Zinsen erhalten?

(Angabe)	1500 R. Kapital	180 R. Zinsen	5 Jahre	(zu suchen
(Frage)	3500 „ „	400 „ „	x „ ?	Procente)

Aus der Angabe folgt nach Formel (II)

$$\text{Procente} = \left(\frac{100 \times 180}{1500 \times 5}\right) \% = \tfrac{12}{5} \%.$$

Aus der Frage nach Formel (IV)

$$\text{Zeit} = \frac{100 \times 400}{3500 \times (\frac{12}{5})} \text{ Jahr} = 4\tfrac{16}{21} \text{ Jahr}.$$

---

§ **72.** Bei der einfachen Zinsrechnung können noch folgende Fälle vorkommen:

A. Die Zinsen zu finden, wenn mehre Kapitale zu gleichem Zinsfuße und auf gleiche Zeit ausgegeben werden.

B. Die Zinsen zn berechnen, wenn mehre Kapitale zu gleichem Zinsfuße, aber auf verschiedene Zeiten, oder zu verschiedenem Zinsfuße und auf gleiche Zeit ausgegeben werden.

C. Die Zinsen zu berechnen, wenn mehre Kapitale zu verschiedenem Zinsfuße und auf verschiedene Zeiten ausgegeben worden.

Das Verfahren und die Begründung desselben für jeden einzelnen Fall ersieht man aus folgenden vollständig ausgerechneten Beispielen:

A. Wie groß sind die Zinsen von a) 1500 Rubeln, b) 2500 Rubeln, c) 3000 Rubeln nach 3 Jahren bei 5%?

Die Zinsen von 1500 Rbl. bei 5% in 3 Jahren sind	225 Rbl.		
„ „ „ 2500 „ „ 5% „ 3 „ „	375 „		+
„ „ „ 3000 „ „ 5% „ 3 „ „	450 „		
Zusammen	1050 Rubel.		

Oder: die Zinsen von [1500 Rbl. + 2500 Rbl. + 3000 Rbl.] = 7000 Rubel bei 5% in 3 Jahren betragen

$$\frac{7000 \times 5 \times 3}{100} \text{ Rubel} = 1050 \text{ Rubel, wie vorhin.}$$

Man berechnet entweder die Zinsen jedes einzelnen Kapitals und addirt dieselben, oder man addirt zuerst die Kapitale und berechnet von der Summe derselben die Zinsen.

B. a) Wieviel Zinsen geben 300 Rubel in 5 Jahren, 800 Rubel in 4 Jahren, 700 Rubel in 3 Jahren, wenn alle zu 4% ausstehen?

Auflösung:

300 R.	in	5	Jahren	tragen	ebensoviel	Zinsen	als	300 R.	× 5	=	1500 R.	in	1	Jahre
800	„	„ 4	„	„	„	„	„	800 „	× 4	=	3200 „	„	1	„
700	„	„ 3	„	„	„	„	„	700 „	× 3	=	2100 „	„	1	„

Die Zinsen für alle Kapitale werden gleich sein den Zinsen von der Summe [1500 Rubel + 3200 Rubel + 2100 Rubel] = 6800 Rubel in 1 Jahre. — Bei 4% sind dieselben

$$= \frac{6800 \times 4 \times 1}{100} \text{ Rubel} = 272 \text{ Rubel.}$$

Man multiplicirt jedes Kapital mit der Zeit (wodurch man Kapitale erhält, die in 1 Jahre ebensoviel Zinsen tragen würden) und nimmt nachher von der Summe der erhaltenen Producte die Zinsen eines Jahres bei dem gegebenen Zinsfuße.

b) Wieviel Zinsen erhält man in 5 Jahren von 1200 Rubeln à 4%, 720 Rubeln à 3%, 600 Rubeln à 5%?

Auflösung:

1200 R	à 4%	geben	ebensoviel	als	1200 R	× 4	=	4800 R.	à 1%	+
720 „	à 3%	„	„	„	720 „	× 3	=	2160 „	à 1%	
600 „	à 5%	„	„	„	600 „	× 5	=	3000 „	à 1%	

Alle zusammen ebensoviel als 9960 R. à 1%.

Daher sind für 5 Jahre die gesuchten Zinsen

$$= \frac{9960 \times 5 \times 1}{100} \text{ Rubel} = 498 \text{ Rubel.}$$

Man multiplicirt jedes einzelne Kapital mit seinem Zinsfuße (wodurch man ein anderes Kapital erhält, das zu 1% ebensoviel Zinsen trägt) und nimmt nachher von der Summe der Producte die Zinsen für 5 Jahre à 1%.

C. Wieviel betragen die Zinsen von 350 Rubeln à 3% in 5 Jahren, 150 Rubeln à 4% in 6 Jahren und 200 Rubeln à 6% in 2 Jahren zusammen?

Auflösung. 350 Rubel à 3% tragen ebensoviel Zinsen als 350 Rubel $\times$ 3 = 1050 Rubel à 1%; in 5 Jahren 1050 Rubel $\times$ 5 = 5250 Rubel in 1 Jahre à 1%; wir haben daher zu setzen:

für 350 R. à 3% in 5 J.	350 R. $\times 3 \times 5 = 5250$ R. à 1% in 1 J.	+
„ 150 „ à 4% „ 6 „	150 „ $\times 4 \times 6 = 3600$ „ à 1% „ 1 „	
„ 200 „ à 6% „ 2 „	200 „ $\times 6 \times 2 = 2400$ „ à 1% „ 1 „	

Statt der Zinsen sämmtlicher Kapitale die Zinsen von 11250 R. à 1% in 1 Jahre.

$$\text{Diese sind} = \frac{11250 \text{ Rubel} \times 1 \times 1}{100} = 112\tfrac{1}{2} \text{ Rubel.}$$

Man multiplicirt jedes einzelne Kapital mit seinem Zinsfuße und mit der Zeit (wodurch man ein Kapital erhält, das in 1 Jahre bei 1% eben so viel Zinsen tragen würde), addirt hierauf sämmtliche Kapitale und nimmt davon die Zinsen für 1 Jahr à 1%.

Exempel Nr. 2013 — Nr. 2026.

§ 73. Wir haben noch einige besondere Fälle anzuführen, die in der Zinsrechnung vorkommen können. Es sind diejenigen Aufgaben, in denen die Zinsen mit dem Kapitale zusammen als eine Zahl gegeben sind, z. B.

1) Wieviel betragen Zinsen und Kapital nach 4 Jahren, wenn 800 Rubel zu $3\frac{1}{2}$% ausstehen?

Auflösung. Die vierjährigen Zinsen sind

$$= \frac{800 \text{ Rubel} \times 4 \times 7}{100 \times 2} = 112 \text{ Rubel;}$$

daher Kapital + Zinsen = 800 Rbl. + 112 Rbl. = 912 Rbl.

2) Welches Kapital beträgt bei 5% mit seinen Zinsen zusammen nach einem Jahre 4200 Rbl. Kapital?

Auflösung. 100 Rubel Kapital sind bei 5% nach einem Jahre mit den Zinsen zusammen = 105 Rubel; also können wir schließen:

105 R. nach einem Jahre sind 100 R. gleich baar;

mithin 1 R. nach einem Jahre ist $\frac{100}{105}$ „ „ „ $= \frac{20}{21}$ R.

folgl. 4200 R. nach 1 Jahre sind $\frac{4200 \cdot 20}{21}$ R. = 4000 Rubel.

Von der Richtigkeit überzeugt man sich leicht durch eine Probe. — Es sind die Zinsen von 4000 für 1 Jahre bei 5%

$$= \frac{4000 \text{ Rubel} \times 5}{100} = 200 \text{ Rubel};$$

daher Kapital + Zinsen = 4200 Rubel, wie es sein soll.

3) Welches Kapital beträgt bei $3\frac{1}{5}$ % mit seinen 6jährigen Zinsen zusammen 6500 Rubel?

Auflösung. Die Zinsen von 100 Rbl. für 1 Jahr sind = $\frac{16}{5}$ Rbl.; daher für 6 Jahre 6 mal mehr, d. h. = 6 . ($\frac{16}{5}$ Rubel) = $19\frac{1}{5}$ Rubel; also

$119\frac{1}{5}$ R. nach 6 Jahren = 100 R. gleich baar;

also 1 R. nach 6 Jahren = $\frac{100}{119^1/_5}$ R. „ „ = $\frac{500}{596}$ R.;

mithin 6500 R. nach 6 Jahren = 6500 . ($\frac{500}{596}$ Rubel) = $5453\frac{3}{149}$ Rubel = dem gesuchten Kapitale.

4) Jemand hat 350 Rubel ausgeliehen, und erhält nach einem Jahre mit den Zinsen zusammen $367\frac{1}{2}$ Rubel zurückgezahlt; wieviel Procente waren genommen?

Auflösung. Da $367\frac{1}{2}$ Rubel = Kapital + Zinsen = 350 Rubel + Zinsen, so muß $367\frac{1}{2}$ Rubel — 350 Rubel = Zinsen sein, demnach haben wir Zinsen = $17\frac{1}{2}$ Rbl. Nun schließen wir weiter:

350 Rubel Kapital geben $17\frac{1}{2}$ Rubel Zinsen;

folglich 1 Rubel Kapital giebt $\frac{35}{2 \cdot 350}$ Rubel Zinsen = $\frac{1}{20}$ Rubel;

also 100 Rubel Kapital geben 100 ($\frac{1}{20}$ R.) Zinsen = 5 Rubel, d. h. die gesuchte Zahl = $5\frac{0}{0}$.

5) Jemand hatte ausgeliehen 250 Rubel, und erhielt nach 8 Jahren nebst den Zinsen zurückgezahlt 340 Rubel; wieviel Procent waren gerechnet?

Auflösung: 340 Rubel = Kapital + Zinsen
250 „ = Kapital —

90 Rubel = den Zinsen für 8 Jahre,
daher die Zinsen für 1 Jahr $\frac{90}{8}$ Rubel = $11\frac{1}{4}$ Rubel;
folglich haben wir:

250 Rubel Kapital geben $11\frac{1}{4}$ Rubel Zinsen;

1 Rubel Kapital giebt $\frac{45}{4 \cdot 250}$ Rubel Zinsen = $\frac{9}{200}$ Rubel;

also 100 Rubel Kapital geben $\frac{100 \cdot 9}{200}$ Rubel Zinsen = $4\frac{1}{2}$ Rubel,
d. h. $4\frac{1}{2}$ %.

6) Wie lange müssen 480 Rubel ausstehen zu 4%, damit sie mit den Zinsen zusammen 520 Rubel betragen?

Auflösung. 520 Rubel = Kapital + Zinsen
480 „ = Kapital —

40 Rubel = Zinsen für die gesuchte Zeit.

Nun geben 480 Rubel in einem Jahre an Zinsen

$$\frac{480 \times 4}{100} \text{ Rubel} = 19\tfrac{1}{5} \text{ Rubel};$$

wir schließen also:

$19\frac{1}{5}$ Rubel Zinsen in 1 Jahre;

1 Rubel Zinsen in $\frac{5}{96}$ Jahren;

daher 40 Rubel Zinsen in $40 \cdot (\frac{5}{96}$ Jahre$) = 2\frac{1}{12}$ Jahren.

Exempel Nr. 2027 — Nr. 2036.

Uebungsfragen.

1) Was versteht man unter zusammengesetzter Regeldetri?
2) Auf welchem Wege findet man den Werth der gesuchten Zahl?
3) Worin besteht die sogenannte Basedowsche Regel?
4) Was versteht man unter Kapital, Zinsen, Procenten?
5) Welches ist der Gegenstand der einfachen und welches der, der zusammengesetzten Zinsrechnung?

6) Durch welchen Ausdruck findet man die Zinsen, wenn Kapital, Zeit und Procente gegeben sind?
7) Durch welchen Ausdruck findet man die Procente, wenn Kapital, Zeit und Zinsen gegeben sind?
8) Durch welchen Ausdruck findet man das Kapital, wenn Zinsen, Zeit und Procente gegeben sind?
9) Durch welchen Ausdruck findet man die Zeit, wenn Zinsen, Procente und Kapital gegeben sind?
10) Wie berechnet man die Zinsen von mehreren Kapitalien, die zu gleichen Zeiten und zu gleichem Zinsfuße ausgeliehen sind?
11) Wie findet man die Zinsen von mehreren Kapitalien, die zu gleichen Zeiten aber verschiedenem Zinsfuße und die zu verschiedenen Zeiten aber gleichem Zinsfuße ausgeliehen sind?
12) Wie findet man die Zinsen mehrerer Kapitale bei verschiedenen Zeiten und verschiedenem Zinsfuße?

Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung.

§ 74. Zur Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung zählt man alle diejenigen Aufgaben, welche ein gegebenes Ganze in ungleiche Theile nach einer gegebenen Bedingung zu zerlegen verlangen. Die ausgesprochene Bedingung, nach der die Theilung geschehen soll, wird der Theilungsfuß genannt. Der Theilungsfuß ist entweder einfach, oder, wenn er aus den Bedingungen der Aufgabe durch Multiplication zweier oder mehrer Zahlen herzuleiten ist, zusammengesetzt; deshalb haben wir eine einfache und eine zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnung.

Es giebt eine unendliche Menge von Fällen, wo eine Theilung in ungleiche Theile erforderlich wird. Wird z. B. durch ein gemeinsames Unternehmen ein Totalgewinn erzielt oder ein Verlust herbeigeführt, so fordert die Billigkeit, daß demjenigen der Theilnehmer mehr zufalle, der bei dem Unternehmen durch einen größern Einsatz sich betheiligte, und daß er mehr verliere, wenn bei dem Unternehmen ein Verlust sich ergab.

Diese Rechnung wird nicht allein im Handel, sondern auch bei Erbschaften, Repartitionen der Steuern, Einquartierungen u. s. w. angewendet.

a) Einfache Gesellschafts-Rechnung.

1) A und B handeln in Gemeinschaft und verdienen 2000 Rbl. A hat 1500 Rubel, B 2500 Rubel zum Geschäfte hergegeben; wieviel erhält jeder?

Ausrechnung. A hat gegeben 1500 Rubel
B " " 2500 "
Beide zusammen 4000 Rubel.

Nun schließen wir:

Mit 4000 Rubel sind gewonnen 2000 Rubel,

deshalb mit 1 Rubel gewonnen $\frac{2000}{4000}$ Rubel = $\frac{1}{2}$ Rubel.

Daher muß bekommen:

A 1500 . ($\frac{1}{2}$ Rubel) = 750 Rubel
B 2500 . ($\frac{1}{2}$ ") = 1250 "
Ganzer Gewinn = 2000 Rubel.

2) Zu einem Unternehmen geben A 350 Rubel, B 240 Rubel, C 210 Rubel, D 200 Rubel. Sie gewinnen 800 Rubel. Wieviel erhält jeder?

Ausrechnng. A = 350 Rubel
B = 240 "
C = 210 "
D = 200 "
Alle zusammen = 1000 Rubel.

Also 1000 Rubel Einlage geben 800 Rubel Gewinn;

folglich 1 Rubel Einlage giebt $\frac{800}{1000}$ Rubel Gewinn = $\frac{4}{5}$ Rbl.

Mithin erhält: A 350 . ($\frac{4}{5}$ Rubel) = 280 Rubel
B 240 . ($\frac{4}{5}$ " = 192 "
C 210 . ($\frac{4}{5}$ " = 168 "
D 200 . ($\frac{4}{5}$ " = 160 "
Ganzer Gewinn = 800 Rubel.

Hieraus ergiebt sich folgende Regel: Man addire sämmtliche Einlagen; dividire mit der Summe in den Totalgewinn (wodurch der Gewinn für die Einheit gefunden wird) und multiplicire mit dem Quotienten die Einlage jedes einzelnen Theilhabers.

3) A, B und C geben gleich viel Kapital zu einem Geschäfte; A auf 5 Monate, B auf 9 Monate und C auf 11 Monate. Ihr Gewinn beträgt 320 Rubel. Was erhält jeder?

Ausrechnung.

$$\left.\begin{array}{l} \text{A} \ldots\ldots 5 \text{ Monate} \\ \text{B} \ldots\ldots 9 \quad ,, \\ \text{C} \ldots\ldots 11 \quad ,, \end{array}\right\} +$$

25 Monate.

Für 1 Monat ist der Gewinn $= \frac{320}{25}$ Rubel $= \frac{64}{5}$ Rubel;

daher erhält:

$$\begin{array}{ll} \text{A } 5 \,.\, (^{64}/_5 \text{ Rubel}) = & 64 \text{ Rubel}, \\ \text{B } 9 \,.\, (^{64}/_5 \quad ,, \quad) = & 115\tfrac{1}{5} \quad ,, \\ \text{C } 11 \,.\, (^{64}/_5 \quad ,, \quad) = & 140\tfrac{4}{5} \quad ,, \end{array}$$

Ganzer Gewinn = 320 Rubel.

Man kann die Aufgabe auch umkehren, nehmlich aus dem Gewinn jedes Einzelnen und der Totaleinlage auf die Einlage jedes Theilhabers schließen, z. B.

4) Mit 3200 Rubeln wurde so viel gewonnen, daß erhalten konnte A 280 Rubel, B 420 Rubel, C 500 Rubel; wieviel hatte jeder eingelegt?

Ausrechnung.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Gewinn des A} = 280 \text{ Rubel} \\ \quad ,, \quad ,, \quad \text{B} = 420 \quad ,, \\ \quad ,, \quad ,, \quad \text{C} = 500 \quad ,, \end{array}\right\} +$$

Totalgewinn = 1200 Rubel.

Nun schließen wir:

1200 R. sind gewonnen durch 3200 R. Einlage;

folgl. 1 R. ist gewonnen durch $\frac{32\cancel{00}}{12\cancel{00}}$ R. Einlage $= \frac{8}{3}$ R. Einlage.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Also hat A eingelegt: } & 280 \,.\, (^8/_3 \text{ Rbl.}) = & 746^2/_3 \text{ Rubel} \\ \quad ,, \quad ,, \quad \text{B} \quad ,, & 420 \,.\, (^8/_3 \quad ,, \quad) = & 1120 \quad ,, \\ \quad ,, \quad ,, \quad \text{C} \quad ,, & 500 \,.\, (^8/_3 \quad ,, \quad) = & 1333\tfrac{1}{3} \quad ,, \end{array}\right\} +$$

Totaleinlage = 3200 Rubel.

5) Ein Geschäft brachte einen Gewinn, von welchem A 150 Rubel, B 250 Rubel, C 340 Rubel, D 160 Rubel erhielt. A hatte eingelegt 1000 Rubel.

a) Wieviel jeder andere? b) Wieviel alle zusammen?

Ausrechnung.

150 R. Gewinn gab eine Einlage von 1000 R.;

folglich 1 R. Gewinn gab eine Einlage von $\frac{100\cancel{0}}{15\cancel{0}}$ R. = $^{20}/_{3}$ Rubel.

a) Demnach ist die Einlage des A = ... 1000 R.
„ „ „ B = 250 . ($\frac{20}{3}$ R.) = $1666\frac{2}{3}$ „
„ „ „ C = 340 . ($\frac{20}{3}$ „) = $2266\frac{2}{3}$ „
„ „ „ D = 160 . ($\frac{20}{3}$ „) = $1066\frac{2}{3}$ „ +

b) Ueberhaupt = 6000 Rubel.

Zuweilen wird der Antheil des Einen nach dem Antheile des Andern bestimmt, z. B.

6) A, B, C, und D sollen sich in 440 Rubel so theilen, daß B $\frac{2}{5}$ von A, C $\frac{1}{2}$ von B, und D soviel als B und C zusammen erhalte. Wieviel bekommt jeder?

Ausrechnung.

Antheil des A = 1 Theil; deshalb ist
„ „ B = $\frac{2}{5}$ „ (1 Theil × $\frac{2}{5}$)
„ „ C = $\frac{1}{5}$ „ (1 Theil × $\frac{2}{5}$ × $\frac{1}{2}$)
„ „ D = $\frac{3}{5}$ „ ($\frac{2}{5}$ + $\frac{1}{5}$ = B + C)

Zusammen = $2\frac{1}{5}$ Theile.

Es kommen also auf $\frac{11}{5}$ Theile .... 440 Rubel;

folglich auf 1 Theil .... $\frac{440}{11}$ Rbl. × 5 = 200 Rbl. für A
„ $\frac{2}{5}$ Theile .... (200 „) × $\frac{2}{5}$ = 80 „ „ B
„ $\frac{1}{5}$ Theil .... (200 „) × $\frac{1}{5}$ = 40 „ „ C
„ $\frac{3}{5}$ Theile .... (200 „) × $\frac{3}{5}$ = 120 „ „ D

Summe = 440 Rubel.

Häufig giebt man bloß relativ an, in welcher Beziehung die einzelnen Theile des zu theilenden Ganzen zu einander stehen sollen, z. B.

7) Man soll 50 in zwei Theile theilen, die sich zu einander verhalten, wie 2 zu 3, d. h. wenn man den ersten Theil durch den zweiten dividirt, so soll ein Bruch entstehen, der $= \frac{2}{3}$ ist, oder auch, so oft auf den ersten Theil 2 fallen, soll der zweite 3 bekommen. Durch Zeichen wird dieser Theilungsfuß folgendermaßen ausgedrückt:

$$A : B = 2 : 3.$$

Ausrechnung. Da A 2 erhält, wenn B 3 nimmt, so nehmen beide auf einmal $2 + 3 = 5$. So oft also 5 in der zu theilenden Zahl enthalten ist, eben so oft kann A 2 und B 3 erhalten.

$$\text{Also } \left.\begin{array}{r} A = 2 \\ B = 3 \end{array}\right\} +$$
$$\overline{\text{Beide} = 5.}$$

Nun ist $50 : 5 = 10$, folglich der eine Theil $A = (10) \times 2 = 20$, und der andere Theil $B = (10) \times 3 = 30$.

8) 780 Rubel sollen unter A, B, C so getheilt werden, daß sich ihre Antheile verhalten wie $3 : 4 : 5$. Wie groß ist jeder Theil?

Ausrechnung. Summe der Verhältnißzahlen $= 3 + 4 + 5 = 12$; daher 12 Theile $= 780$ R.; folglich 1 Theil $= \frac{780}{12}$ R. $= 65$ R.;

$$\left.\begin{array}{lllll} \text{mithin erhält } A & 3 \,.\, (65 \text{ Rubel}) & = & 195 & \text{Rubel} \\ B & 4 \,.\, (65 \;\;\text{,,}\;\;) & = & 260 & \text{,,} \\ C & 5 \,.\, (65 \;\;\text{,,}\;\;) & = & 325 & \text{,,} \end{array}\right\} +$$
$$\overline{\text{Summe} = 780 \text{ Rubel.}}$$

§ 75. Zwei Brüche von gleichen Nennern verhalten sich wie ihre Zähler; denn

$$(^5/_{12}) : (^7/_{12}) = {^5/_{12}} \times {^{12}/_7} = {^5/_7} = 5 : 7.$$

Sind nun Verhältnißzahlen durch Brüche gegeben, so bringt man sie auf gleiche Benennung, und hat an ihren Zählern ganze Zahlen, die dasselbe Verhältniß ausdrücken. Wenn daher sein soll:

$$A : B : C : D = {^2/_3} : {^5/_6} : {^8/_9} : {^1/_{12}},$$

so erhält man dnrch Multiplication mit dem Generalnenner 36:

$$A : B : C : D = \tfrac{24}{36} : \tfrac{30}{36} : \tfrac{32}{36} : \tfrac{3}{36}$$
$$= 24 : 30 : 32 : 3.$$

9) A, B, C sollen sich in 115 Rubel so theilen, daß sich die Antheile verhalten wie $(\frac{1}{2}) : (\frac{2}{3}) : (\frac{3}{4})$; wie groß ist jeder Theil?

Ausrechnung. $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} : = \frac{6}{12} : \frac{8}{12} : \frac{9}{12} = 6 : 8 : 9$, daher $6 + 8 + 9 = 23$ Theile $= 115$ Rubel, mithin 1 Theil $= \frac{115}{23}$ Rubel; also erhält

$$\left.\begin{array}{llll} A & 6 \,.\, (5 \text{ Rubel}) & = 30 & \text{Rubel} \\ B & 8 \,.\, (5 \;\;\text{"}\;\;) & = 40 & \text{"} \\ C & 9 \,.\, (5 \;\;\text{"}\;\;) & = 45 & \text{"} \end{array}\right\} +$$

Summe $= 115$ Rubel.

§ **76.** Zuweilen tritt der Fall ein, daß in einer Aufgabe nicht ein gleiches Verhältniß für alle Theile, sondern verschiedene Verhältnisse gegeben sind. Hier müssen wir die verschiedenen Verhältnisse auf ein gleiches Verhältniß bringen, und dann die Ausrechnung nach den bekannten Regeln ausführen, z. B.

10) Von 450 Rubeln soll, so oft A 3 Rubel erhält, B 5 Rubel bekommen; so oft aber B 4 Rubel nimmt, sollen dem C 7 Rubel zufallen. Was erhält jeder?

Ausrechnung. Wir haben hier:

$$A : B = 3 : 5$$
$$B : C = 4 : 7.$$

Um ein gleiches Verhältniß zwischen A, B und C herzustellen, müssen wir entweder:

a) zu 3 und 5, oder

b) zu 4 und 7 die dritte Verhältnißzahl suchen.

Wir schließen bei (a):

So oft B 4 Rubel, — erhält C 7 Rubel.

So oft B 1 Rubel, — erhält C $\frac{7}{4}$ Rubel.

So oft B 5 Rubel, — erhält C $5 \,.\, (\frac{7}{4}$ Rubel), d. h. $\frac{35}{4}$ Rbl.

Also $A : B : C = 3 : 5 : \frac{35}{4}$; oder mit 4 multiplicirt $= 12 : 20 : 35$.

Bei (b) ist die Schlußfolge:

So oft B 5 Rubel, — erhält A 3 Rubel.

So oft B 1 Rubel, — erhält A $\frac{3}{5}$ Rubel.

So oft B 4 Rubel, — erhält A $4 \,.\, (\frac{3}{5}$ Rubel), d. h. $\frac{12}{5}$ Rbl.

Also $A : B : C = \frac{12}{5} : 4 : 7$; oder mit 5 multiplicirt
$= 12 : 20 : 35$.

Nun haben wir $12 + 20 + 35 = 67$ Theile $= 450$ Rubel.

$$1 \text{ Theil} = \frac{450 \text{ Rubel}}{67}.$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Also } A \text{ bekommt} & 12 \,.\, (\frac{450}{67} \text{ Rubel} & = 80\frac{40}{67} & \text{Rbl.} \\ \quad B \quad\text{"} & 20 \,.\, (\frac{450}{67} \text{ Rubel} & = 134\frac{22}{67} & \text{"} \\ \quad C \quad\text{"} & 35 \,.\, (\frac{450}{67} \text{ Rubel} & = 235\frac{5}{67} & \text{"} \end{array}\right\} +$$

$$\text{Summe} = 450 \text{ Rubel.}$$

11) Es soll eine Zahl so unter A, B, C und D getheilt werden, daß sich der Antheil des A zu dem Antheile des B wie $3 : 4$; des $B : C = 5 : 9$; des $C : D = 6 : 11$ verhalte. Welches ist das gemeinsame Verhältniß der vier Antheile?

Auflösung. Wir haben
$$A : B = 3 : 4$$
$$B : C = 5 : 9$$
$$C : D = 6 : 11$$
und können auf 3 Wegen die zwei fehlenden Verhältnißzahlen bestimmen.

Entweder, a) $A : B : C : D = 3 : 4 : (?) : (?)$
oder, b) $A : B : C : D = (?) : 5 : 9 : (?)$
oder, c) $A : B : C : D = (?) : (?) : 6 : 11$.

a) Da sein soll $A : B = 3 : 4$ und $B : C = 5 : 9$, so schließen wir:

So oft B 5, erhält C . . . 9

So oft B 1, erhält C . . . $\frac{9}{5}$

So oft B 4, erhält C . . . $4 \,.\, (\frac{9}{5}) = \frac{36}{5}$.

Also $A : B : C = 3 : 4 : \frac{36}{5}$; — da ferner sein soll $C : D = 6 : 11$, so schließen wir:

So oft C 6, erhält D . . . 11

So oft C 1, erhält D . . . $\frac{11}{6}$

So oft C $\frac{36}{5}$, erhält D . . . $(\frac{36}{5}) \,.\, \frac{11}{6} = \frac{66}{5}$,

daher: $A : B : C : D = 3 : 4 : \frac{36}{5} : \frac{66}{5}$
$= 15 : 20 : 36 : 66$.

b) Da wir haben sollen A : B = 3 : 4 und B : C = 5 : 9, so schließen wir:

So oft B 4, erhält A . . . 3

So oft B 1, erhält A . . . $\frac{3}{4}$

So oft B 5, erhält A . . . 5 . ($\frac{3}{4}$) = $^{15}/_{4}$.

Also A : B : C = $^{15}/_{4}$: 5 : 9; — da ferner C : D = 6 : 11 sein soll, so haben wir:

So oft C 6, erhält D . . . 11

So oft C 1, erhält D . . . $^{11}/_{6}$

So oft C 9, erhält D . . . 9 . ($^{11}/_{6}$) = $^{33}/_{2}$

demnach A : B : C : D = $\frac{15}{4}$: 5 : 9 : $\frac{33}{2}$, und multiplicirt mit 4
= 15 : 20 : 36 : 66.

c) Aus B : C = 5 : 9 und C : D = 6 : 11 folgt:

So oft C 9, erhält B . . . 5

So oft C 1, erhält B . . . $\frac{5}{9}$

So oft C 6, erhält B . . . 6 . ($\frac{5}{9}$) = $\frac{10}{3}$.

Also B : C : D = $\frac{10}{3}$: 6 : 11; da nun sein soll A : B = 3 : 4, so schließen wir:

So oft B 4, erhält A . . . 3

So oft B 1, erhält A . . . $^{3}/_{4}$

So oft B $^{10}/_{3}$, erhält A . . . ($^{10}/_{3}$) . ($^{3}/_{4}$) = $^{5}/_{2}$,

folglich A : B : C : D = $^{5}/_{2}$: $^{10}/_{3}$: 6 : 11 und mit 6 multiplicirt
= 15 : 20 : 36 : 66.

Dieses Verfahren ist weitläufig, und wird bei Aufgaben, die mehr als 4 Theile enthalten, noch weitläufiger, deshalb merke man sich folgende praktische Regel zur Herstellung eines gleichen Verhältnisses für alle Theile aus den gegebenen Verhältnissen der einzelnen Theile.

12) Es sei z. B. gegeben: A : B = 2 : 3
B : C = **5** : 7
C : D = **8** : 9
D : E = **10** : 11,

dann setze man: A = 2 . **5** . **8** . **10**, und leite hieraus die Werthe für B, C, D und E dadurch her, daß man den vorkommenden Factor mit dem daneben stehenden Divisor vertauscht; also wird sein

$$B = \mathbf{3} \,.\, 5 \,.\, 8 \,.\, 10$$
$$C = 3 \,.\, \mathbf{7} \,.\, 8 \,.\, 10$$
$$D = 3 \,.\, 7 \,.\, \mathbf{9} \,.\, 10$$
$$E = 3 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, \mathbf{11}.$$

Von der Richtigkeit der erhaltenen Zahlen überzeugt man sich leicht; denn es ist:

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{2 \,.\, \cancel{5} \,.\, \cancel{8} \,.\, \cancel{10}}{3 \,.\, \cancel{5} \,.\, \cancel{8} \,.\, \cancel{10}} = \tfrac{2}{3} = 2 : 3$$

$$\frac{\mathbf{B}}{\mathbf{C}} = \frac{\cancel{3} \,.\, 5 \,.\, \cancel{8} \,.\, \cancel{10}}{\cancel{3} \,.\, 7 \,.\, \cancel{8} \,.\, \cancel{10}} = \tfrac{5}{7} = 5 : 7$$

$$\frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \frac{\cancel{3} \,.\, \cancel{7} \,.\, 8 \,.\, \cancel{10}}{\cancel{3} \,.\, \cancel{7} \,.\, 9 \,.\, \cancel{10}} = \tfrac{8}{9} = 8 : 9$$

$$\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} = \frac{\cancel{3} \,.\, \cancel{7} \,.\, \cancel{9} \,.\, 10}{\cancel{3} \,.\, \cancel{7} \,.\, \cancel{9} \,.\, 11} = \tfrac{10}{11} = 10 : 11.$$

Dieses Verfahren hat den einzigen Nachtheil, daß die erhaltenen Verhältnißzahlen nicht immer die kleinsten sind, die vorkommen können; es empfiehlt sich aber durch Kürze, und möchte deshalb als das brauchbarste sich bewähren.

§ **77.** Es giebt Aufgaben, die neben den Verhältnißzahlen noch andere Zahlen enthalten, die hinzu addirt oder davon subtrahirt werden sollen. Die Auflösung solcher Aufgaben macht man dadurch, daß man die Summe der Verhältnißzahlen erst von den hinzu addirten oder davon subtrahirten Zahlen trennt, und das Suchen der Theile auf die gewöhnliche Weise ausführt; z. B.

13) Drei Personen theilen sich in 1600 Rubel dergestalt, daß B 60 Rubel mehr als A und C 40 Rubel mehr als A erhalten soll; wieviel bekommt jeder?

Ausrechnung. A = 1 Theil
B = 1 Theil + 60 Rubel
C = 1 Theil + 40 Rubel

Zusammen 3 Theile + 100 Rubel.

Da A keinen Antheil davon hat, was B und C zum voraus bekommen, so müssen wir die 100 Rubel von der zu theilenden Summe = 1600 Rubel zuvor wegnehmen; also 1600 Rubel — 100 Rubel = 1500 Rubel = 3 Theile setzen, woraus sich ergiebt:

$$1 \text{ Theil} = \frac{1500 \text{ Rubel}}{3} = 500 \text{ Rubel};$$

folglich erhält A ... 500 Rubel
B ... 560 Rubel (nehmlich 500 Rubel + 60 Rbl.)
C ... 540 Rubel (nehmlich 500 Rubel + 40 Rbl.)

Zusammen 1600 Rubel.

14) Drei Personen theilen sich in 110 Rubel so, daß B 20 Rubel weniger als A und C 30 Rubel weniger als B bekommen soll; wieviel erhält jeder?

Ausrechnung.

A = 1 Theil
B = 1 Theil — 20 Rubel
C = 1 Theil — 50 R. (nehmlich 1 Theil — 20 R. — 30 R.)

Zusammen 3 Theile — 70 Rubel.

3 Theile — 70 Rubel sind gleich der zu theilenden Summe. Da man von 3 Theilen erst 70 Rubel wegnehmen muß, um die zu vertheilende Summe zu erhalten, so müssen 3 Theile um 70 Rubel zu groß sein. Addiren wir demnach 70 Rubel zu der Hauptsumme, so wird sich ergeben:

3 Theile = 110 Rubel + 70 Rubel = 180 Rubel

$$1 \text{ Theil} = \frac{180 \text{ Rubel}}{3} = 60 \text{ Rubel},$$

folglich: A ..... 60 Rubel
B ..... 40 Rubel (nehmlich 60 Rubel — 20 Rubel)
C ..... 10 Rubel (nehmlich 60 Rubel — 50 Rubel)

Zusammen 110 Rubel.

Aus den beiden letzten Beispielen leiten wir uns folgende Regel ab: Was zu den Theilen addirt ist, wird von der Hauptsumme abgezogen, und was von den Theilen subtrahirt ist, wird zu der Hauptsumme addirt.

Exempel Nr. 2037 — Nr. 2078.

b) Zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnung.

§ 78. Der Theilungsfuß ist zusammengesetzt, wenn die Verhältnißzahl jedes einzelnen Theiles nicht unmittelbar gegeben ist, sondern aus gegebenen Bedingungen, die sich eine auf die andere beziehen, erst abgeleitet werden muß; z. B. die Theilung eines Gewinnes nach Maaßgabe des eingelegten Kapitals und der Zeit, oder des eingelegten Kapitals und der Procente, die jedem Theilnehmer nach gemeinsamer Uebereinkunft zugestanden werden. — In allen Fällen erhält man die nöthigen einfachen Verhältnißzahlen dadurch, daß man die Bedingungszahlen mit einander multiplicirt oder dividirt, je nachdem sie in directer oder indirecter Beziehung zu den gesuchten Zahlen stehen. — Sind die einfachen Verhältnißzahlen gefunden, so geschieht die fernere Ausrechnung nach dem oben entwickelten Verfahren; z. B.

15) Drei Personen treten zu einem gemeinschaftlichen Geschäfte zusammen. A giebt 200 Rubel auf 5 Monate, B 100 Rubel auf 8 Monate, C 320 Rubel auf $3\frac{1}{2}$ Monate. Sie gewinnen 584 Rubel; wieviel erhält jeder?

Auflösung. Hier hängt offenbar der Antheil jedes Einzelnen von dem eingelegten Kapitale und der Zeit, die es im Geschäfte stand, ab; deshalb schließen wir:

200 Rubel Kapital tragen in 5 Monaten ebensoviel Zinsen als (200 Rubel) $\times$ 5 = 1000 Rubel in 1 Monate. Die einfachen gemeinsamen Verhältnißzahlen sind daher:

A .... (200 Rubel) $\times$ 5 = 1000 Rubel
B .... (100 Rubel) $\times$ 8 = 800 Rubel
C .... (320 Rubel) $\times$ $\frac{7}{2}$ = 1120 Rubel
584 Rbl. (gemeinsamer Gewinn)

Zusammen = 2920 Rubel.

2920 Rubel Einlage .... 584 Rubel Gewinn

1 Rubel Einlage .... $\frac{584}{2920}$ Rubel Gewinn = $\frac{1}{5}$ Rubel Gewinn,

folglich erhält A .... 1000 . ($\frac{1}{5}$ Rubel) = 200 Rubel
B .... 800 . ($\frac{1}{5}$ Rubel) = 160 Rubel
C .... 1120 . ($\frac{1}{5}$ Rubel) = 224 Rubel

Summe = 584 Rubel.

10

16) Bei einem Bau sind beschäftigt in dem ersten Zeitraume 5 Arbeiter, in dem zweiten 12 Arbeiter. Der Arbeitslohn für den ersten Zeitraum beträgt 30 Rubel, für den zweiten 60 Rubel. — Der ganze Bau währte 22 Tage und der Tagelohn für jeden Arbeiter war derselbe. Aus wieviel Tagen bestand jeder Zeitraum?

Ausrechnung.

(Der Arbeitslohn des 1sten Zeitraums) : (Arbeitslohne des 2ten Zeitraums) = 30 : 60
(Die Zahl d. Arbeiter d. „ „) : (Zahl d. Arbeiter d. „ „) = 5 : 12.

Nun steht die Zahl der Arbeitstage mit dem Arbeitslohne in directem, mit der Zahl der Arbeiter in indirectem Verhältnisse; folglich werden wir das Verhältniß der Arbeitstage erhalten, wenn wir mit den Verhältnißzahlen der Arbeiter in die Verhältnißzahlen des Arbeitslohnes dividiren; also

(Arbeitstage des 1sten Zeitraums) : (Arbeitstage des 2ten Zeitraums) = $^{30}/_{5}$: $^{60}/_{12}$
= 6 : 5.

Nun ist 6 + 5 = 11 Theile = 22 Tage
1 Theil = 2 Tage;

folglich bestand der erste Zeitraum aus 6 . (2 Tagen) = 12 Tagen
und der zweite „ „ 5 . (2 Tagen) = 10 Tagen.

Exempel Nr. 2079 — Nr. 2111.

Vermischungsrechnung.

§ 79. Verbinden sich zwei Stoffe so miteinander, daß eine gleichartige Masse entsteht, und ist man nicht im Stande, die einzelnen Theilchen nach geschehener Verbindung von einander zu unterscheiden, so nennt man dieses eine Mischung. Können aber in der Verbindung die einzelnen Theile der verschiedenartigen mit einander verbundenen Stoffe noch von einander unterschieden werden, so nennt man es ein Gemenge. Eine Mischung erhalten wir z. B., wenn Wein und Wasser zusammengegossen, und zwei Metalle zusammengeschmolzen werden; ein Gemenge, wenn wir zwei Getreidearten zusammenschütten.

Jede Mischung oder jedes Gemenge erhält einen Werth, der von dem Werthe der Bestandtheile abhängt. Wir setzen voraus, daß die Quantität der Mischung immer gleich bleibt der Summe der Quantitäten der Theile; z. B. wenn 5 Maaß Spiritus mit 3 Maaß Wasser gemischt werden, so nehmen wir an, daß das Gemisch aus (5 + 3) Maaß = 8 Maaß bestehe. — Die Erfahrung bestätigt diese Annahme nicht, indessen ist der Unterschied so gering, daß wir ohne bedeutenden Irrthum bei unserer Voraussetzung bleiben können.

Außer der Menge (Quantität) haben wir die Güte (Qualität) der mit einander verbundenen Stoffe zu berücksichtigen. — Die Menge wird durch die entsprechenden Maaße, — die Güte meist durch den Preis bestimmt. — Bei der Mischung der Metalle befolgt man ein eigenthümliches Verfahren, den Gehalt an edlen Metallen, die in der Mischung vorkommen, anzugeben. Sind z. B. in dem Grundgewichte = 1 Pfund = 96 Solotnik 84 Solotnik reines Silber und 12 Solotnik Zusatz enthalten, so sagt man, die Mischung sei von der vierundachtziger Probe, und umgekehrt, eine Mischung von der 60ger Probe enthält 60 Solotnik edles Metall und (96 — 60) Solotnik = 36 Solotnik Zusatz.

In Deutschland ist das Grundgewicht für Gold und Silber eine kölnische Mark, so daß 1 Mark = 16 Loth = 24 Karat. — Beim Golde giebt man an, wieviel Karat reines Gold in einer kölnischen Mark vorkommen, und nennt dann die Mischung karatig; z. B. 18karatiges Gold enthält auf 1 Mark = 24 Karat 18 Karat reines Gold und 6 Karat Zusatz; beim Silber wird angegeben, wieviel Loth reines Silber in einer kölnischen Mark vorkommt, und nennt dann die Mischung löthig; z. B. 14löthiges Silber enthält auf einer Mark = 16 Loth 14 Loth feines Silber und 2 Loth Zusatz.

Ist das Silber und Gold ganz rein, ohne Zusatz, so nennt man es fein; mit einem Zusatz dagegen rauh. — Weil man das Zusammenschmelzen der Metalle legiren nennt, und die Vermischungsrechnung sich vorzüglich mit Aufgaben beschäftigt, die sich darauf beziehen, so nennt man diese Rechnungsart auch Alligations-Regel.

Es können hauptsächlich folgende Fälle vorkommen:

1. Man soll aus der gegebenen Quantität und Qualität eines jeden der mit einander zu verbindenden Theile die Qualität der Mischung bestimmen.

(Die Quantität der Mischung ist nach dem oben Angeführten gleich der Summe der Quantitäten der Bestandtheile.)

Die Qualität wird gewöhnlich durch den Preis der Einheit bestimmt, und die Quantität giebt die Menge der Einheiten an, daher wird das Product der Quantität und Qualität den Werth des Ganzen angeben; z. B.

a) Von 10 Maaß Wein, wovon jedes Maaß $1\frac{1}{2}$ Rubel kostet, ist 10 Maaß die Quantität und $1\frac{1}{2}$ Rubel die Qualität; daher 10 . ($1\frac{1}{2}$ Rubel) = 15 Rubel der Werth des ganzen Weins.

b) Dieser Satz findet auch seine Anwendung, wenn die Qualität den Preis nur mittelbar angiebt; z. B. bei 5 Pfund Silber von der 84ger Probe ist 5 Pfund die Quantität und 84ger Probe die Qualität, so daß 5 . (84 Solotnik) = 420 Solotnik angiebt, wieviel feines Silber in 5 Pfund enthalten ist. — Wenn man nun den Preis von 1 Solotnik feines Silber kennt, so ist dadurch der Werth der ganzen Mischung angegeben.

1) Es werden gemischt 15 Maaß Wein à 80 Kopeken; 20 Maaß à 120 Kopeken; 25 Maaß à 140 Kopeken. — Wie hoch kommt jedes Maaß der Mischung?

Ausrechnung.

Quantität der Theile	Qualität der Theile		Producte gleich dem Werthe der Theile
+ 15 Maaß	à 80 Kopeken	......	1200 Kopeken +
20 „	à 120 „	......	2400 „
25 „	à 140 „	......	3500 „

60 Maaß kosten zusammen ...... 7100 Kopeken,

daher jedes Maaß der Mischung ...... $\frac{7100}{60}$ Kopeken = $118\frac{1}{3}$ Kopeken.

2) Es werden zusammengeschmolzen 15 Pfund Silber von der 84ger Probe, 12 Pfund von der 60ger und 13 Pfund von der 48ger Probe. Welchen Gehalt hat die Mischung?

Ausrechnung.

Quantität der Theile	Qualität der Theile	Producte gleich dem Werthe der Theile
+ 15 Pfund	von der 84ger Probe	1260 Solotnik fein +
12 „	„ „ 60ger „	720 „ „
13 „	„ „ 48ger „	624 „ „

40 Pfund enthalten also .... 2604 Solotnik fein, folglich 1 Pfund enthält $\frac{2604}{40}$ Solotnik $= 65\frac{1}{10}$ Solotnik fein; das Gemisch ist demnach von der $65\frac{1}{10}$ Probe.

Die Regel für die Auflösung ähnlicher Aufgaben ist daher: Man multiplicirt die Quantität mit der Qualität, und dividirt mit der Summe der Bestandtheile in die Summe der Producte.

(Exempel Nr. 2112 — Nr. 2122).

II. Man soll bei einer Mischung, die aus **zwei** Theilen besteht, die Quantität und Qualität des einen Bestandtheils finden, wenn die Quantität und Qualität sowohl des Ganzen, als des andern Bestandtheils gegeben ist; z. B.

3) Jemand braucht 150 Kruschken Spiritus, wovon jede Kruschke 35 Kopeken kostet, und will dazu 70 Kruschken à 40 Kopeken nehmen; wie hoch kommt jede Kruschke einer schlechtern Sorte, die er hinzuthun muß?

Ausrechnung.

	Quantität	Qualität		Producte
— Er braucht	150 Kruschken	à 35 Kop.;	diese kosten	5250 Kop. —
und hat	70 „	à 40 „ ;	„ „	2800 „

Es fehlen 80 Kruschken à x Kop.; diese kosten 2450 Kop., folglich $x = \frac{2450}{80}$ Kopeken $= 30\frac{5}{8}$ Kopeken.

4) Von welchem Gehalt muß das Silber sein, wenn man es mit $2\frac{1}{2}$ Pfund von der 60ger Probe mischen soll, um 7 Pfund von der 72ger Probe zu erhalten?

Ausrechnung.

Quantität	Qualität	Producte
— 7 Pfund	von der 72ger Probe enthalten	504 Solotnik fein —
$2\frac{1}{2}$ „	„ „ 60ger „ „	150 „ „

$4\frac{1}{2}$ Pfund von der x Probe enthalten - 354 Solotnik fein, also $x = \frac{354 \text{ Solotnik}}{4\frac{1}{2}} = \frac{708 \text{ Solotnik}}{9} = 78\frac{2}{3}$ Solotnik; daher ist der andere Bestandtheil von der $78\frac{2}{3}$ Probe.

Besteht die Mischung, deren Quantität und Qualität gegeben ist, aus mehr als zwei Bestandtheilen, und man kennt von jedem dieser Bestandtheile, mit Ausnahme eines **einzigen**, die Quantität und Qualität, so ist das Fehlende auf dieselbe Weise zu finden; z. B.

5) Eine Composition wiegt 120 Pfund, und es kostet jedes Pfund 25 Kopeken; in derselben kommen vier Substanzen vor: die erste Substanz wiegt 25 Pfund à 30 Kopeken; die zweite wiegt 30 Pfund à 20 Kopeken; die dritte wiegt 15 Pfund à 15 Kopeken; wie hoch kommt jedes Pfund der vierten Substanz?

Ausrechnung.

	Quantität	Qualität		Producte
	120 Pfund	à 25 Kop.	kosten	.... 3000 Kop.
−	+ 25 Pfund	à 30 „	„	750 Kop. +
	30 „	à 20 „	„	600 „
	15 „	à 15 „	„	225 „
	70 Pfund			1575 Kop.
	70 Pfund			1575 Kop.

fehlen 50 Pfund .... à x Kopeken und kosten 1425 Kopeken, folglich wird 1 Pfund der vierten Substanz auf $\frac{1425}{50}$ Kopeken $= 28\frac{1}{2}$ Kop. zu stehen kommen.

Die Regel zur Ausrechnung ähnlicher Aufgaben heißt: Man **multiplicirt Quantität und Qualität und dividirt mit dem Unterschiede der Quantitäten in den Unterschied der Producte.**

(Exempel Nr. 2123 — Nr. 2129).

III. **In einer Mischung, die aus zwei Stoffen besteht, kennt man die Quantität und Qualität der Mischung, und außerdem die Qualität jedes einzelnen Bestandtheils; man soll die Quantitäten dieser Bestandtheile ermitteln; z. B.**

6) Aus 22karatigem und 14karatigem Golde soll eine Mittelsorte hergestellt werden, die 20karatig ist.

Ausrechnung. Nimmt man eine Mark von 22karatigem Golde in die Mischung, so erleidet man einen Verlust von 2 Karat = (22 — 20) Karat; wird von der schlechtern Sorte 1 Mark genommen, so bringt das einen Vortheil von 6 Karat = (20—14) Karat zu Wege. Es entsteht jetzt die Frage: „Wieviel muß man von der schlechtern Sorte zu einer Mark der bessern hinzufügen, damit Schaden und Vortheil sich ausgleichen, d. h. einander gleich werden?" — Wir schließen:

6 Karat Vortheil geben 1 Mark der schlechtern Sorte

daher 1 Karat Vortheil ...... $\frac{1}{6}$ Mark der schlechtern Sorte

folglich 2 Karat Vortheil ...... $\frac{2}{6}$ Mark der schlechtern Sorte $= \frac{1}{3}$ Mark.

Wenn wir also 1 Mark von 22 karatigem und $\frac{1}{3}$ Mark von 14karatigem Golde nehmen, so erhalten wir $1\frac{1}{3}$ Mark von 20karatigem Golde.

Probe. 1 Mark	22karatiges	Gold	enthält	22	Karat fein
$\frac{1}{3}$ „	14karatiges	„	„	$4\frac{2}{3}$	„ „

Beide zusammen ..... $26\frac{2}{3}$ Karat fein.

In der Mischung von $1\frac{1}{3}$ Mark sind enthalten $26\frac{2}{3}$ Karat fein, folglich kommen auf 1 Mark $\frac{26\frac{2}{3}}{1\frac{1}{3}}$ Karat = 20 Karat, wie es sein soll.

Wir sehen hieraus, daß der Zusatz von der schlechtern Sorte zu einer Einheit der bessern Sorte gefunden wird, wenn wir mit dem Unterschiede zwischen der Mittel- und schlechtern Sorte in den Unterschied der bessern und Mittelsorte dividiren; nehmlich:

Bessere Sorte 22		(22—20) = 2
	Mittelsorte 20	
Schlechtere Sorte ... 14		(20—14) = 6.

Setzt man also 1 von der bessern Sorte, so muß man $\frac{2}{6}$ von der schlechtern Sorte nehmen. Es verhält sich demnach die

Menge der bessern Sorte zu der Menge der schlechtern Sorte wie 1 : $^2/_6$, oder mit 6 multiplicirt, wie 6 : 2, d. h.

Die Quantitäten der mit einander zu verbindenden Theile müssen sich umgekehrt zu einander verhalten, wie die Unterschiede ihrer Qualitäten von der Qualität der zu bildenden Verbindung.

Soll eine bestimmte Quantität der Verbindung hervorgebracht werden, so hat man nur nöthig, nach der Gesellschafts-Regel in dem gefundenen Verhältnisse der Quantitäten beider Theile zu rechnen; z. B.

7) Wieviel muß man von 14löthigem und 8löthigem Silber nehmen, um 14 Mark 10löthiges Silber zu erhalten?

Ausrechnung.

Die bessere Sorte enthält 14 Loth auf 1 Mark
„ Mittelsorte „ 10 „ „ 1 „

Also ist der Schaden = 4 Loth auf 1 Mark.

Die Mittelsorte enthält 10 Loth auf 1 Mark
„ schlechtere Sorte „ 8 „ „ 1 „

Also ist der Vortheil = 2 Loth auf 1 Mark.

Mithin muß sich verhalten: Quantität der bessern Sorte zur Quantität der schlechtern, wie 2 : 4.

Es soll die Mischung 14 Mark enthalten, daher haben wir diese Zahl in 2 Theile zu theilen, die sich verhalten wie 2 : 4. — Da nun $2 + 4 = 6$, so ist zu nehmen:

von der bessern Sorte: $2\left(\frac{14 \text{ Mark}}{6}\right) = 4\frac{2}{3}$ Mark

„ „ schlechtern „ : $4\left(\frac{14 \text{ Mark}}{6}\right) = 9\frac{1}{3}$ „

Zusammen = 14 Mark.

Probe.

14 Mark 10löthiges Silber enthalten 14 . (10 Loth) = 140 Loth fein; aber

$4\frac{2}{3}$ Mark 14löth. Silber enthalten $4\frac{2}{3}$. (14 Loth) = $65\frac{1}{3}$ Loth fein
$9\frac{1}{3}$ „ 8löth. „ „ $9\frac{1}{3}$. (8 Loth) = $74\frac{2}{3}$ „ „ +

Beide zusammen .... 140 Loth fein, wie die Mittelsorte allein.

8) Wieviel Kupfer muß man zu Silber von der 84ger Probe hinzuthun, damit man 16 Pfund von der 60ger Probe erhalte?

Ausrechnung.

Bessere Sorte 74		14 = (74—60)	
Mittelsorte	60		16 Pfund
Schlechtere Sorte 0		60 = (60—0)	
		74.	

Nun ist $\frac{16 \text{ Pfund}}{74} = \frac{8}{37}$ Pfund; daher ist zu nehmen:

von der bessern Sorte ...... 60 . ($\frac{8}{37}$ Pfund) = $12\frac{36}{37}$ Pfund
vom Kupfer ...... 14 . ($\frac{8}{37}$ Pfund) = $3\frac{1}{37}$ „

Zusammen = 16 Pfund.

Probe.

$12^{36}/_{37}$ Pfd. Silber von der 84ger Probe enth. $12^{36}/_{37}$. (74 Solotn.) = 960 Solotn.
$3^{1}/_{37}$ „ Kupfer enthalten an Silber $3^{1}/_{37}$. (0 Solotn.) = 0 „

Zusammen = 960 Solotn.

Aber 16 Pfund Silber von der 60ger Probe enthalten ebenfalls 960 Solotnik fein; daher unsere Rechnung richtig.

Exempel Nr. 2130 — Nr. 2138.

IV. Man kennt die Qualität der Verbindung sowohl, als auch die Qualitäten der beiden Bestandtheile, und es ist außerdem die Quantität eines der Theile gegeben; man soll hieraus die Quantität des andern Theils, sowie die Quantität der Mischung bestimmen.

Auflösung. Durch die gegebenen Qualitäten der Bestandtheile ist das Verhältniß ihrer Quantitäten bekannt (III). Da außerdem die Quantität des einen Bestandtheils als bekannt vorausgesetzt wird, so haben wir die Quantität des andern Bestandtheils nach einem einfachen Regeldetri-Satz herzuleiten. — Die Quantität der Mischung ist gleich der Summe der Quantitäten der Bestandtheile; z. B.

9) Es sollen 40 Pfund einer Masse, von welcher jedes Pfund 18 Kopeken kostet, mit einer andern Masse, von der

1 Pfund auf 9 Kopeken zu stehen kommt, zusammengeschmolzen werden, so daß jedes Pfund der Mischung 13 Kopeken werth sei. — Wieviel Pfund sind von der zweiten Masse zu nehmen?

Ausrechnung.

Bessere Sorte 18		5 = (18 — 13)
Mittelsorte	13	
Schlechtere Sorte 9		4 = (13 — 9).

Nun verhält sich die Quantität der bessern Sorte zur Quantität der schlechtern Sorte, wie 4 : 5, d. h.

auf 4 Pfd. der bessern Sorte kommen 5 Pfd. der schlechtern

deshalb auf 1 Pfd. der bessern Sorte kommen $\frac{5}{4}$ Pfd. der schlechtern

daher auf 40 Pfd. der bessern Sorte kommen 40 . ($\frac{5}{4}$ Pfund) der schlechtern = 50 Pfund,

deshalb besteht die ganze Mischung aus 40 Pfd. + 50 Pfd. = 90 Pf.

Probe.

40 Pfund à 18 Kopeken .... 720 Kopeken
50 „ à 9 „ .... 450 „

Kosten zusammen 1170 Kopeken.

Die Mischung von 90 Pfund à 13 Kopeken giebt ebenfalls einen Werth von 90 . (13 Kop.) = 1170 Kop., wie es sein soll.

Exempel Nr. 2139 — Nr. 2152.

Die Kettenregel.

§ **80.** Beim Resolviren und Reduciren lernten wir ein Verfahren kennen, wie man eine benannte Zahl in eine andere Benennung verwandeln kann. Diese zweite Benennung gehörte aber zu demselben Maaßsysteme, so daß durch einfache Multiplication oder Division mit der entsprechenden Reductionszahl das Verlangte gefunden wurde. Ist aber die Beziehung zweier Maaßeinheiten nicht unmittelbar gegeben, sondern erst aus mehren Zwischenverhältnissen abzuleiten, so dient dazu eine praktische Regel, die man den Kettensatz nennt. Die einfache Kettenregel zeigt, wie die Maaße, Münzen und Gewichte verschiedener Länder aus gegebenen Zwischenverhältnissen in einander zu verwandeln sind, weshalb sie eigentlich Reductionsrechnung heißen sollte. Der Name Kettensatz rührt von der Form des Ansatzes beim Ausrechnen einer solchen Aufgabe. — Verbindet man mit der Verwandlung der Einheiten verschiedener metrischen Systeme noch eine oder mehre Regeldetri-Aufgaben, so entsteht die zusammengesetzte Kettenregel.

a) Der einfache Kettensatz.

Die Kette besteht aus lauter Gleichungen, welche in der Art mit einander zusammenhängen, daß jede nachfolgende Gleichung mit derselben Benennung anfängt, mit welcher die vorhergehende schließt. Allgemein wird der Kettensatz nach folgender Regel gebildet:

„Man beginnt den Ansatz mit der gesuchten Zahl „(x) und verbindet mit dem Gleichheitszeichen die„jenige Zahl, welche mit x gleichen Werth haben soll. „— Unter diese setzt man eine zweite Gleichung, „deren erster Theil links mit den vorhergehenden „zweiten Theil rechts gleichnamig ist; unter diese „eine dritte Gleichung, deren erster Theil gleichnamig „ist mit dem zweiten Theil der vorhergehenden Glei„chung u. s. w., bis man zu einer Gleichung gelangt, „deren zweiter Theil gleichnamig ist mit dem ersten „Theile der ersten Gleichung, d. h. mit x"; z. B.

1) Wieviel würtembergsche Gulden betragen 400 Rubel, wenn 14 Rubel = 5 Dukaten; 6 Dukaten = 17 sächsische Thaler; 20 sächsische Thaler = 21 preußische Thaler; 4 preußische Thaler = 7 würtembergsche Gulden sind?

(1ste Gleichung)	x würtembergsche Gulden	=	400 Rubel
(2te Gleichung)	14 Rubel	=	5 Dukaten
(3te Gleichung)	6 Dukaten	=	17 sächsische Thaler
(4te Gleichung)	20 sächsische Thaler	=	21 preußische Thaler
(5te Gleichung)	4 preußische Thaler	=	7 würtembergsche Gulden.

Die Ausrechnung geschieht dadurch, daß man das Product aller rechts stehenden Zahlen durch das Product aller links stehenden dividirt, und dem Quotienten die bei x stehende Benennung giebt. Hiernach wäre also

$$x = \frac{400 \,.\, 5 \,.\, 17 \,.\, 21 \,.\, 7}{14 \,.\, 6 \,.\, 20 \,.\, 4} \text{ würtembergsche Gulden.}$$

Die Richtigkeit des Ansatzes und der Ausrechnung läßt sich folgendermaßen begründen:

Da 14 Rubel = 5 Dukaten

so ist 1 Rubel $= \frac{5 \text{ Dukaten}}{14}$;

folglich 400 Rubel $= \frac{400 \,.\, 5 \text{ Dukaten}}{14}$.

Weil 6 Dukaten = 17 sächsische Thaler

so ist 1 Dukaten $= \frac{17 \text{ sächsische Thaler}}{6}$;

also $\frac{400 \,.\, 5 \text{ Dukaten}}{14} = \frac{400 \,.\, 5 \,.\, 17 \text{ sächsische Thaler}}{14 \,.\, 6} = (400 \text{ Rubel})$.

Da 20 sächsische Thaler = 21 preußische Thaler

so ist 1 sächsischer Thaler $= \frac{21 \text{ preußische Thaler}}{20}$;

also $\frac{400 \,.\, 5 \,.\, 17 \text{ sächs. Thaler}}{14 \,.\, 6} = \frac{400 \,.\, 5 \,.\, 17 \,.\, 21 \text{ preußische Thaler}}{14 \,.\, 6 \,.\, 20} = (400 \text{ Rubel})$.

Da endlich 4 preußische Thaler = 7 würtembergsche Gulden

also 1 preußischer Thaler $= \frac{7 \text{ würtembergsche Gulden}}{4}$;

so müssen sein:

$$\frac{400 \,.\, 5 \,.\, 17 \,.\, 21 \text{ preußische Thaler}}{14 \,.\, 6 \,.\, 20} = \frac{400 \,.\, 5 \,.\, 17 \,.\, 21 \,.\, 7 \text{ würtembergsche Gulden}}{14 \,.\, 6 \,.\, 20 \,.\, 4}$$

$= 400$ Rubel $= x$.

2) In England gilt 1 Pfund Sterling = 10 Schilling und 1 Schilling = 12 Pence; wieviel betragen 450 Pfund Sterling in Silber-Rubeln, wenn 1 Pence = $2^1/_2$ Kopeken gesetzt wird?

Ansatz und Ausrechnung.

$$\begin{array}{rcl} x \text{ Rubel} & = & 450 \text{ Pfund Sterling} \\ 1 \text{ Pfund St.} & = & 20 \text{ Schilling} \\ 1 \text{ Schilling} & = & 12 \text{ Pence} \\ 1 \text{ Pence} & = & (2\tfrac{1}{2}) \text{ Kopeken} \\ 100 \text{ Kopeken} & = & 1 \text{ Rubel} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Also } x = \frac{450 \,.\, 20 \,.\, 12 \,.\, (2\tfrac{1}{2})}{1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 100} \text{ Rubel.}$$

Zu den Vortheilen, welche der Kettensatz bietet, gehört das Aufheben der Zahlen aus beiden Kolumnen gegen einander. Dieses kann entweder sogleich geschehen, oder erst dann, wenn der Ausdruck für die gesuchte Zahl in Bruchform hingeschrieben; z. B.

3) Wieviel Ellen sind 28 Yards, wenn man weiß, daß 4 Ellen = 3 Arschinen, und 9 Arschinen = 7 Yards betragen?

Ansatz und Ausrechnung.

$$\begin{array}{rcll} x \text{ Ellen?} & = & \cancel{28} \text{ Yards} & 4 \\ \cancel{7} \text{ Yards} & = & \cancel{9} \text{ Arschinen} & 3 \\ \cancel{3} \text{ Arschinen} & = & 4 \text{ Ellen} & \\ \hline \end{array}$$

7 geht in 28 auf, deshalb schreibt man statt 28 auf der rechten Seite den Quotienten 4; 3 geht in 9 auf, deshalb kommt auf der rechten Seite der Quotient 3. Nach dieser Vereinfachung wird sein:

$$x = \frac{4 \,.\, 3 \,.\, 4}{1 \,.\, 1} \text{ Ellen} = 48 \text{ Ellen.}$$

Erscheint in der Multiplicatoren-Kolumne ein Bruch, so ist der Nenner desselben ein Divisor, und kann als solcher zu den andern Divisoren, d. h. auf die linke Seite gesetzt werden. — Kommt ein Bruch unter den Divisoren vor, so müssen wir ihn bei der wirklichen Division umkehren, also den Nenner zum Multiplicator machen; daher wird derselbe ohne Weiteres auf die andere Seite zu den Multiplicatoren gesetzt. Durch dieses Verfahren fördert man das Aufheben der einzelnen Zahlen gegen einander. — Es darf nicht übersehen werden, daß der Kettensatz in den einzelnen Gleichungen durchaus einsortige benannte Zahlen verlangt. Sollten in der Aufgabe mehrsortige

Zahlen erscheinen, so sind diese vor der Rechnung in einsortige umzuwandeln; z. B.

4) Wenn 1 Mark Banco in Hamburg 47 Kopeken, und 1 preußischer Thaler $92\frac{1}{2}$ Kopeken gerechnet ist, wieviel Mark Banco betragen 50 preußische Thaler 10 Silbergroschen?

Ansatz und Ausrechnung.

x Mark Banco?	=	$50\frac{1}{3}$ Thaler (10 Sgr. = $\frac{1}{3}$ Thaler)
1 preuß. Thaler	=	$92\frac{1}{2}$ Kopeken
47 Kopeken	=	1 Mark Banco.

Oder nach gehöriger Einrichtung der Brüche:

3	x Mark Banko?	=	151 preußische Thaler
2	1 preuß. Thaler	=	185 Kopeken
	47 Kopeken	=	1 Mark Banco.

$$x = \frac{151 . 185}{3 . 2 . 47} \text{ Mark Banco} = 99\tfrac{77}{282} \text{ Mark Banco.}$$

(Exempel Nr. 2164 — Nr. 2192).

b) Die zusammengesetzte Kettenregel.

Ehe wir diese Regel anwenden, schicken wir erst einige Aufgaben voraus, die zur einfachen Regeldetri gehören, um zu zeigen, bei welchen dieser Aufgaben der Kettensatz nicht anwendbar ist.

5) Wieviel kosten 18 Pud, wenn $\frac{3}{4}$ Pfund mit 15 Kopeken bezahlt werden?

Ausrechnung nach der Regeldetri:

(Angabe) $\frac{3}{4}$ Pfund ...... 15 Kopeken; (Frage) 18 Pud ...... x Rubel?

Beurtheilung. Je mehr Waare, desto mehr hat man zu zahlen, folglich eine directe Beziehung, deshalb richtiger Ansatz:

$\frac{3}{4}$ Pfund ..... 15 Kopeken; 18 Pud ..... x Rubel?

$$\begin{array}{r} 40 \\ \hline 720 \end{array}$$

$$\text{Also } x = \frac{720 . \overset{5}{\cancel{15}} . 4}{\cancel{3}} \text{ Kopeken} = 14400 \text{ Kopeken} = 144 \text{ Rubel.}$$

Nach der Kettenregel:

$$\begin{array}{rcl} x \text{ Rubel?} & \ldots & 18 \text{ Pud} \\ 1 \text{ Pud} & = & 40 \text{ Pfund} \\ 3 \text{ Pfund} & \ldots & 15 \text{ Kopeken} \quad 4 \\ 100 \text{ Kopeken} & = & 1 \text{ Rubel} \end{array}$$

$$x = \frac{18 \,.\, 40 \,.\, 15 \,.\, 4}{3 \,.\, 100} \text{ Rubel} = 144 \text{ Rubel.}$$

6) 5 Arbeiter brauchen 8 Wochen; in welcher Zeit werden 12 Arbeiter dasselbe leisten?

Ausrechuung. Nach der Regeldetri:

(Angabe) 5 Arbeiter ... 8 Wochen; (Frage) 12 Arbeiter .... x Wochen?

Beurtheilung. Je mehr Arbeiter sind, desto weniger Wochen brauchen sie; daher eine indirecte Beziehung, folglich richtiger Ansatz:

12 Arbeiter .... 8 Wochen; 5 Arbeiter .... x Wochen?

$$x = \frac{5 \,.\, 8}{12} \text{ Wochen} = 3\tfrac{1}{3} \text{ Wochen.}$$

Nach dem Kettensatze:

$$\begin{array}{l} x \text{ Wochen? } \ldots\ldots \ 12 \text{ Arbeiter} \\ 5 \text{ Arbeiter } \ldots\ldots \ 8 \text{ Wochen} \end{array}$$

$$x = \frac{12 \,.\, 8}{5} \text{ Wochen} = 19\tfrac{1}{5} \text{ Wochen.}$$

Dieses Resultat ist aber mit dem vorhin gefundenen nicht übereinstimmend, woraus wir sehen, daß der Kettensatz „bei Aufgaben mit indirecten Verhältnissen keine Anwendung findet". — Man könnte zwar die Zahlen so umstellen, daß sie ein richtiges Resultat liefern, dadurch würde aber der Ansatz zu künstlich, und eben deshalb nicht brauchbar sein.

7) Für 119 Yards Tuch bezahlte man 82 Pfund Sterling; wieviel Arschin hätte man für 32 Rubel gekauft, wenn der Cours 1 Rubel = $38\,^7/_{16}$ Pence war, und 7 Yards = 9 Arschin betragen?

Ansatz und Ausrechnung.

		x Arschin	....	$\cancel{32}$ Rubel	$\cancel{2}$
	$\cancel{16}$	1 Rubel	=	$\cancel{64\frac{1}{2}}$ Pence	$\cancel{129}$ $\cancel{3}$
	4	$\cancel{12}$ Pence	=	1 Schilling	
2	$\cancel{4}$	$\cancel{20}$ Schilling	=	1 Pfund Sterling	
	2	$\cancel{82}$ Pfund Sterl.	....	$\cancel{119}$ Yards	17
		$\cancel{7}$ Yards	=	9 Arschin	

$$x = \frac{17 \cdot 9}{4 \cdot 2 \cdot 2} \text{ Arschin} = 9^9/_{16} \text{ Arschin.}$$

Soll der Kettensatz auf Procentrechnungen angewandt werden, so müssen wir Einkaufs- und Verkaufspreis unterscheiden. Hat man z. B. 12 Procent gewonnen, so sind 100 Rubel im Einkaufe = (100 + 12) Rubel = 112 Rubel im Verkaufe, und 8 Procent Verlust würde man ausdrücken: 100 Rubel im Einkaufe = (100 — 8) Rubel = 92 Rubel im Verkaufe. Geht die Frage auf Ermittelung der Procente, so können wir nicht setzen:

x Procent? ...... der gegebenen Summe,

sondern wir müssen bestimmen, wieviel man für 100 Rubel im Einkaufe beim Verkaufe erhalten habe; demnach

x Rubel Verkauf? = 100 Rubel Einkauf.

An diesen ersten Satz knüpfen sich dann die übrigen Gleichungen. — Findet man bei dieser Gattung von Aufgaben für x mehr als 100, so ist der Ueberschuß der Gewinn in Procenten ergiebt sich für x weniger als 100, so ist das daran Fehlende der Verlust in Procenten; z. B.

8) Jemand kaufte Waaren für 500 Rubel und verkaufte dieselben nach einiger Zeit für 580 Rubel; wieviel Procent wurden gewonnen?

Ansatz und Ausrechnung.

	x Rubel Verkauf?	=	$\cancel{100}$ Rubel Einkauf
5	$\cancel{500}$ Rubel Einkauf	=	580 Rubel Verkauf

$$x = \frac{580}{5} \text{ Rubel} = 116 \text{ Rubel.}$$

Also 116 — 100 = 16%.

9) Jemand kaufte Waaren, und zahlte für $2\frac{1}{2}$ Pfund 45 Kopeken; wie theuer muß er 12 Pud verkaufen, um 20% zu gewinnen?

Ansatz und Ausrechnung.

x Rubel Verkauf?	... 12 Pud
1 Pud	= 40 Pfund
5 Pfund	... 45 Kopeken (Einkauf)
100 Kopeken Einkauf	= 120 Kopeken Verkauf
100 Kop. Verkauf	= 1 Rubel Verkauf

$x = 103\frac{17}{25}$ Rubel.

Werden neben dem Einkaufspreise noch etwaige Unkosten in Procenten angegeben, und man will ermitteln, für wieviel irgend eine Menge dieser Waare verkauft werden könne, um gewisse Procente zu gewinnen, so müssen wir Einkauf nebst Unkosten als den wahren Einkaufspreis ansehen, und dann erst die Gleichung zwischen Einkauf und Verkauf (natürlich mit Zuschlag der Procente) anbringen; z. B.

10) Jemand kauft für 120 Rubel Waaren; die Unkosten an Zoll und Transport betragen 40%; für wieviel muß er diese Waare verkaufen, um 20% zu gewinnen?

Ansatz und Ausrechnung.

x Rubel Verkauf?	= 120 Rubel Einkauf
100 Rubel Einkauf	= 140 Rubel Einkauf (wegen Unkosten)
100 Rubel Einkauf	= 120 Rubel Verkauf

$x = 201\frac{3}{5}$ Rubel.

11) Jemand kauft in England 5 Stücke Tuch à 40 Yards und bezahlt dafür 145 Pfund Sterling; die Unkosten betragen 30%; wie theuer muß er eine Arschin verkaufen, um 20% zu gewinnen, wenn 7 Yards = 9 Arschinen sind und der Cours 1 Rubel = $36\frac{1}{4}$ Pence steht?

Ansatz und Ausrechnung.

x	Rubel Verkauf?	... 1 Arschin
9	Arschinen	= 7 Yards
40	Yards	= 1 Stück
5	Stücke	... 145 Pfund Sterling (Einkauf)
1	Pfund Sterling	= 20 Schilling
1	Schilling	= 12 Pence
100	Pence	= 130 Pence Einkauf (wegen Unkosten)
100	Pence Einkauf	= 120 Pence Verkauf
145	Pence Verkauf	= 1 Rubel Verkauf 4

$$x = 5\tfrac{103}{105} \text{ Rubel.}$$

Exempel Nr. 2193 — Nr. 2235.

Uebungsfragen.

1) Worin besteht die Gesellschafts- oder Repartitions-Rechnung?

2) Was versteht man unter dem einfachen und zusammengesetzten Theilungsfuß?

3) Welche allgemeine Regel gilt für die Ausrechnung der zur Gesellschaftsregel gehörigen Aufgaben?

4) Wie verfährt man, wenn blos relativ die Beziehung der einzelnen Theile zu einander angegeben ist?

5) Was versteht man unter dem Verhältnisse zweier Zahlen?

6) Wie verwandelt man das Verhältniß zweier Brüche in ein gleiches Verhältniß ganzer Zahlen?

7) Wie bildet man ein gleiches Verhältniß für alle Theile einer zu theilenden Zahl?

8) Wie verfährt man, wenn neben den Verhältnißzahlen noch andere Zahlen durch Addition und Subtraction gegeben sind?

9) Was versteht man unter zusammengesetzter Gesellschaftsrechnung?

10) Wie unterscheidet man Gemisch und Gemenge von einander?

11) Wie wird die Quantität und Qualität eines Gemisches bestimmt?

12) Welches sind die 4 Hauptfälle bei der Vermischungsrechnung?

13) Welches ist die Aufgabe der Kettenregel?

Vom Erheben ins Quadrat und vom Ausziehen der Quadratwurzel.

§ 81. Ein Product aus zwei gleichen Factoren heißt das Quadrat des Factors, und umgekehrt der Factor die Quadratwurzel des Products.

Daß eine Zahl ins Quadrat zu erheben ist, wird durch eine kleine ₂ angedeutet, die man oben rechts an die Zahl setzt; z. B. 5^2 bedeutet $5 \times 5 = 25$. Diesen Ausdruck lies't man: 5 zum Quadrat erhoben, giebt 25.

Soll eine Zahl in zwei gleiche Factoren zerlegt werden, so heißt das die Quadratwurzel ausziehen. Das Zeichen für die Quadratwurzel ist ein verzogenes r (radix). Demnach zeigt $\sqrt{49}$ an, daß aus 49 die Quadratwurzel ausgezogen werden soll.

§ 82. Die Quadrate der Einer findet man im Einmaleins, oder stellt sie sich in dem sogenannten Quadratwurzeltäfelchen zusammen.

Quadratwurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81

Aus dieser Tafel sehen wir, daß $6^2 = 36$, also umgekehrt $\sqrt{36} = 6$, und ebenso $8^2 = 64$, daher $\sqrt{64} = 8$ sein muß.

§ 83. Sind die Wurzeln mehrziffrig, so können die Quadrate durch einfache Multiplication gebildet werden. Nicht so leicht ist das Ausziehen der Quadratwurzeln. — Um hierzu einen sichern Weg zu gewinnen, müssen wir ein eigenes Verfahren anwenden, um eine Zahl zum Quadrate zu erheben, woraus rückwärts das Verfahren für das Ausziehen der Quadratwurzel sich ableiten läßt. Wir gelangen hierzu durch folgende Betrachtung.

Zerlegen wir eine zweistellige Zahl in zwei Summanden, von denen der erste die Zehner, der zweite die Einer vorstellt, so haben wir z. B.

$$\begin{aligned} 45^2 = (40 + 5)^2 &= (40 + 5) \cdot (40 + 5) \\ &= (40 + 5) \cdot 40 + (40 + 5) \cdot 5 \\ &= 40^2 + 40 \cdot 5 + 40 \cdot 5 + 5^2 \\ &= 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 5^2, \end{aligned}$$

d. h. das Quadrat einer zweistelligen Zahl besteht:

1) aus dem Quadrate des ersten Theils (40^2),
2) aus dem doppelten Producte beider Theile ($2 \cdot 40 \cdot 5$),
3) aus dem Quadrate des zweiten Theiles (5^2).

Bezeichnen wir mit a die Zehner und mit b die Einer, so daß $a + b$ das Bild einer zweistelligen Zahl vorstellt, so ist

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

das Bild ihres Quadrats.

Anwendung.

1) $19^2 = (\overset{a}{10} + \overset{b}{9})^2$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 10^2 &&= 100 \\ 2 \cdot a \cdot b &= 2 \cdot 10 \cdot 9 &&= 180 \\ b^2 &= 9^2 &&= 81 \end{aligned}\right\} +$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 361 = 19^2.$$

2) $78^2 = (\overset{a}{70} + \overset{b}{8})^2$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 70^2 &&= 4900 \\ 2 \cdot a \cdot b &= 2 \cdot 70 \cdot 8 &&= 1120 \\ b^2 &= 8^2 &&= 64 \end{aligned}\right\} +$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 6084 = 78^2.$$

Wir lernen hieraus:

A. daß das Quadrat einer zweistelligen Zahl nie weniger als 3 und nicht mehr als 4 Stellen haben kann, weil das Quadrat der kleinsten zweitheiligen

Zahl, nehmlich $10^2 = 100$, und das Quadrat der kleinsten dreitheiligen Zahl, nehmlich $100^2 = 10000$ ist;

B. daß in dem Quadrate einer zweistelligen Zahl das Quadrat der Zehner der dazu gehörigen Wurzel (a^2) in den Tausendern und Hundertern zu suchen ist;

C. daß der zweite Theil des Quadrats einer zweistelligen Zahl Tausender, Hunderter und Zehner, nie aber Einer enthalten kann;

D. daß das Quadrat der Einer (b^2) immer unter 100 sein muß.

§ 84. Soll nun rückwärts die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierstelligen Zahl gezogen werden, so müssen wir die 3 Theile, aus denen das Quadrat zusammengesetzt ist, von der vorliegenden Zahl abziehen. Es entsteht also die Frage: wo finden sich diese Theile?

Aus § 83, B, wissen wir, daß das Quadrat der Zehner (a^2), d. h. des ersten Theiles (a) der Wurzel in den Hundertern (bei einem dreistelligen Quadrate) und in den Tausendern und Hundertern (bei einem vierstelligen Quadrate) zu suchen ist; die beiden übrigen Ordnungen enthalten vorzugsweise die zwei andern abzuziehenden Theile $2ab + b^2$. Scheiden wir diese beiden letzten Ordnungen von dem vorliegenden Quadrate ab, so findet sich in den höhern Ordnungen das Quadrat des Zehners; z. B.

$$
\begin{array}{rl}
 & \qquad\qquad a + b \\
 & \sqrt{5|76} = 20 + 4 \\
a^2 = & 4|00 \\
\hline
2a = 40 & \quad 1\,76 \\
2a \cdot b = 40 \cdot 4 = & \left.\begin{array}{r} \cancel{1}\cancel{6}\cancel{0} \\ \cancel{1}\cancel{6} \end{array}\right\} + \Bigg\} - \\
\text{also } 2ab + b^2 = & 176 \\
\hline
 & \quad 0.
\end{array}
$$

(wobei $b^2 = 4^2 = \cancel{1}\cancel{6}$)

Suchen wir im obigen Täfelchen, § 82, dasjenige Quadrat, welches 5 am nächsten kommt, so finden wir $a^2 = 4$ Hunderter, also $a = 2$ Zehner. — a^2 abgezogen, giebt den Rest $= 176 = 2ab + b^2$. Um den unbekannten zweiten Theil der Wurzel (b) zu finden, verdoppeln wir a und dividiren mit $2a =$

$2 . 20 = 40$ in 176, wodurch der Quotient $= 4 = b$ sich ergiebt. Hierauf erhalten wir:

$$
\begin{array}{r}
2 . a . b = 160 \\
b^2 = 16 \\
\hline
\text{folglich } 2ab + b^2 = 176.
\end{array}
$$

Diesemnach ist $\sqrt{576} = 24$.

$$
\begin{array}{l}
\quad\quad\quad\quad\quad\; a + b \\
\sqrt{39|69} = 60 + 3 = 63 \\
a^2 = 36|00 \\
\;\; 3\;69
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
2a = 120 & \\
2ab = 360 & \\
b^2 = 9 & \left.\right\} + \\
2ab + b^2 = 369 & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

§ **85.** Um eine dreistellige Zahl ins Quadrat zu erheben, betrachtet man die Hunderter und Zehner als den ersten und die Einer als den zweiten Theil. Man erhält z. B.

$$524^2 = (520 + 4)^2 = 520^2 + 2 . 520 . 4 + 4^2,$$

oder allgemein, wenn man mit a die Hunderter, mit b die Zehner und mit c die Einer bezeichnet:

$$[(a + b) + c]^2 = (a + b)^2 + 2 . (a + b) . c + c^2.$$

Da aber $(a + b)^2 = a^2 + 2 . a . b + b^2$, so ergiebt sich, wenn wir diesen Ausdruck einführen, für das Bild des Quadrats einer dreistelligen Zahl

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2 (a + b) c + c^2.$$

Anwendung.

$$1)\ 249^2 = (\overset{a}{200} + \overset{b}{40} + \overset{c}{9})^2$$

$$
\left.
\begin{array}{rlr}
a^2 = & 200^2 & = 40000 \\
2ab = & 2 . 200 . 40 & = 16000 \\
b^2 = & 40^2 & = 1600 \\
2 (a + b) c = & 2 . 240 . 9 & = 4320 \\
c^2 = & 9^2 & = 81
\end{array}
\right\} +
$$

$$(a + b + c)^2 = 62001.$$

$$2)\ 983^2 = (\overset{a}{900} + \overset{b}{80} + \overset{c}{3})^2$$

$$\left.\begin{array}{rcrcr} a^2 & = & 900^2 & = & 810000 \\ 2ab & = & 2\,.\,900\,.\,80 & = & 144000 \\ b^2 & = & 80^2 & = & 6400 \\ 2(a+b)c & = & 2\,.\,980\,.\,3 & = & 5880 \\ c^2 & = & 3^2 & = & 9 \end{array}\right\} +$$

$$(a+b+c)^2 = 966289.$$

Wir sehen hieraus, daß das Quadrat einer dreistelligen Zahl nicht weniger als 5, aber nicht mehr als 6 Stellen haben kann. Die Quadrate aller dreistelligen Zahlen werden demnach nur 5 oder 6 Stellen haben können.

§ **86.** Ueberhaupt können wir aus der Anzahl der Stellen des vorliegenden Quadrats auf die Menge der Stellen, die der Wurzel zukommen, schließen. Das Quadrat besteht entweder aus noch ein Mal so viel Stellen, als die Wurzel hat, oder noch ein Mal so viel weniger einer Stelle. Der Grund liegt darin, daß

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100 \\ 100^2 &= 10000 \\ 1000^2 &= 1000000 \\ 10000^2 &= 100000000 \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

Es werden daher die Quadrate zweistelliger Wurzeln zwischen 100 und 10000, d. h. zwischen 10^2 und 100^2; die Quadrate dreistelliger Wurzeln zwischen 10000 und 1000000, d. h. zwischen 100^2 und 1000^2 u. s. w. sich befinden.

Theilen wir demnach die vorliegende Zahl von der Rechten zur Linken in Fächer zu 2 Stellen ab, so wird die Menge der Fächer die Anzahl der Stellen der Wurzel angeben. Das letzte Fach zur Linken wird auch eine einzige Stelle haben können. Nach dieser Regel sind die Quadratwurzeln von 6|89 und 50|41 zweistellig, die Quadratwurzeln von 1 | 51 | 29 und 82 | 62 | 81 dreistellig u. s. w.

§ **87.** Vergleichen wir ferner die Formeln

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$,

2) $(a + b + c)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$,

so überzeugen wir uns leicht, daß die erste die zweite vertreten kann. Die drei ersten Theile sind in beiden vollkommen gleich. Der vierte Theil von 2 ist ein doppeltes Product, ebenso wie der zweite Theil in 1, nur mit dem Unterschiede, daß statt a in 1, $a + b$ in 2, und b in 1, c in 2 tritt. Der letzte Theil in 2 ist das Quadrat des letzten Theils der Wurzel, wie der dritte Theil in 1.

Sollen wir jetzt aus einer Zahl, deren Wurzel aus 3 Stellen besteht, die Quadratwurzel wirklich ausziehen, so theilen wir erst von der Rechten zur Linken die vorgelegte Zahl in Fächer zu 2 Stellen ab (§ 86). — Darauf suchen wir die Theile $a^2 + 2ab + b^2$, und ziehen diese vollständig ab, d. h. wir subtrahiren $(a + b)^2$; betrachten jetzt die zwei gefundenen Theile der Wurzel $a + b$ als a, und setzen die Rechnung fort, indem wir von 2ab weiter rechnen, so daß die Formel 1 als Bild des anzustellenden Verfahrens dient; z. B.

$$\begin{array}{lr}
 & \qquad\qquad a + b + c \\
 & \sqrt{21|34|44} = 400 + 60 + 2 = 462 \\
 & a^2 = 16|00|00 \\
\hline
 & 5|34|44 \\
2a = 800 & \\
2ab = 800 \,.\, 60 = 48000 & \\
b^2 = 60^2 \quad = \quad 3600 & \\
\hline
2ab + b^2 = 51600 & -\;5|16|00 \\
\hline
 & 18|44 \\
2(a+b) = 2 \,.\, 460 = 920 & \\
2(a+b) \,.\, c = 920 \,.\, 2 = 1840 & \\
c^2 \;=\; 2^2 \;=\; 4 & \\
\hline
2(a+b)\,c + c^2 \quad = 1844 & -\;18|44 \\
\hline
 & 0.
\end{array}$$

Eine Abkürzung des Verfahrens erhalten wir durch die Betrachtung, daß

$$2ab + b^2 = (2a + b) \,.\, b$$

$$2(a + b) \,.\, c + c^2 = [2(a + b) + c] \,.\, c.$$

Man bestimmt durch Division mit dem doppelten gefundenen Theile der Wurzel den folgenden Theil, hängt diesen Theil dem

Divisor an und multiplicirt die so entstehende Zahl mit diesem Theile, wodurch man auf ein Mal das zu Subtrahirende erhält. Bei diesem Verfahren zieht man auf ein Mal ein ganzes Fach von 2 Stellen zu dem jedesmaligen Reste herunter, und läßt die Nullen ganz weg. Obiges Exempel wäre demnach folgendermaßen zu rechnen:

$$
\begin{array}{lr|l|l}
 & \sqrt{21} & 34 & 44 = 462 \\
 & a^2 = 16 & & \\
\hline
2a = 8 & 5 & 34 & \\
2a + b = 8\,(6) & & & \\
(2a + b)\,b = \;.\;.\;.\;.\;. & 5 & 16 & \\
\hline
 & & 18 & 44 \\
2(a + b) = 92 & & & \\
2(a + b) + c = 92\,(2) & & & \\
[2(a + b) + c]\,c = \;.\;.\;.\;. & & 18 & 44 \\
\hline
 & & & 0.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lr|l|l}
 & \sqrt{26} & 83 & 24 = 518 \\
 & a^2 = 25 & & \\
\hline
 & 1 & 83 & \\
2a = 10 & & & \\
2a + b = 10\,(1) & & & \\
(2a + b)\,b = \;.\;.\;.\;. & 1 & 01 & \\
\hline
 & & 82 & 24 \\
2a = 102 & & & \\
2a + b = 102\,(8) & & & \\
(2a + b)\,b = \;.\;.\;.\;.\;. & & 82 & 24 \\
\hline
 & & & 0.
\end{array}
$$

§ **88.** Nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ können wir auch mehr als dreistellige Quadratwurzeln ausziehen, denn bei einer vierstelligen Wurzel betrachten wir die drei ersten Stellen als den ersten und die 4te Stelle als den zweiten Theil derselben. — Das Bild des Quadrats einer vierstelligen Wurzel wird sein:

$$
\begin{aligned}
[(a+b+c)+d]^2 &= (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)\,.\,d+d^2 \\
&= (a+b)^2+2(a+b)\,.\,c+c^2+2(a+b+c)d+d^2 \\
&= a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2.
\end{aligned}
$$

Anwendung.

$$\sqrt{52|66|40|49} = 7257$$

$$a^2 = 49$$

$$3|66$$

$$2a = 14$$

$$2a + b = 14\,(2)$$

$$(2a + b)b = \ldots\ldots 2|84$$

$$82|40$$

$$2(a+b) = 2\dot{a} = 144$$

$$2(a+b)+c = 2\dot{a}+\dot{b} = 144\,(5)$$

$$[2(a+b)+c]c = (2\dot{a}+\dot{b})\dot{b} = \ldots\; 72|25$$

$$10|15|49$$

$$2(a+b+c) = 2\dot{a} = 1450$$

$$2(a+b+c)+d = 2\dot{a}+\dot{b} = 1450\,(7)$$

$$[2(a+b+c)+d]\,d = (2\dot{a}+\dot{b})\dot{b} = \ldots\ldots\; 10|15|49$$

§ 89. Wenn die gegebene Zahl kein volles Quadrat ist, so kann die Wurzel zwar mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, wird aber nie weder durch gewöhnliche noch durch Decimalbrüche absolut genau auszudrücken sein, und heißt in diesem Falle irrational.

§ 90. $(\frac{7}{8}) \times (\frac{7}{8}) = \frac{7 \times 7}{8 \times 8} = \frac{7^2}{8^2} = {}^{49}/_{64}$, so muß umgekehrt $\sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{64}} = \frac{7}{8}$ sein, d. h. die Quadratwurzel aus einem Bruche wird gefunden, wenn man die Quadratwurzel aus Zähler und Nenner nimmt und erstere durch letztere dividirt.

Wenden wir diesen Satz auf Decimalbrüche an, und bedenken wir, daß die Quadratwurzel nur aus solchen Ordnungseinheiten gezogen werden kann, die eine gerade Anzahl Nullen haben, nehmlich aus

$$10^2 = 100$$
$$100^2 = 10000$$
$$1000^2 = 1000000 \text{ u. s. w.},$$

so können wir durch Anhängen von Nullen den Nenner des Decimalbruches jedes Mal zu einem vollen Quadrate machen; z. B.

$$0{,}5 \;=\; 0{,}50 \;=\; \tfrac{50}{100}$$
$$2{,}347 = 2{,}3470 = \tfrac{23470}{10000} \text{ u. s. w.,}$$

woraus folgt, daß

$$\sqrt{0{,}5} = \sqrt{\tfrac{50}{100}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{50}}{10}$$

$$\sqrt{2{,}347} = \sqrt{\tfrac{23470}{10000}} = \frac{\sqrt{23470}}{\sqrt{10000}} = \frac{\sqrt{23470}}{100},$$

d. h. nach dieser Vorbereitung (durch Anhängen der Nullen) ziehen wir die Quadratwurzel ohne Rücksicht auf den Decimalstrich aus, und dividiren dieselbe durch die Wurzel des Nenners.

§ 91. Bei ganzen Zahlen, deren Wurzel irrational, wird es auf die Genauigkeit ankommen, die man erreichen soll. Soll z. B. $\sqrt{17}$ bis auf die dritte Decimalstelle genau gefunden werden, so verwandle man 17 in einen unächten Bruch, dessen Nenner 3 Nullen-Paare enthält, also

$$17 = \tfrac{17000000}{1000000} \text{ oder } 17 = 17{,}000000,$$

d. h. man hänge der gegebenen Zahl so viel Paare Nullen an, als in der Wurzel Stellen verlangt werden; ziehe aus dieser Zahl die Quadratwurzel,

$$\begin{array}{lr}
 & \sqrt{17|00|00|00} = 4123 \\
 & 16 \\
\hline
8\ (1) & 100 \\
 & 81 \\
\hline
 & 1900 \\
82\ (2) & 1644 \\
\hline
 & 25600 \\
824\ (3) & 24729 \\
\hline
 & 871
\end{array}$$

werfe den Rest (871) weg und schneide von der gefundenen Wurzel so viel Stellen ab, als Nullen-Paare angehängt sind. Also

$$\sqrt{17} = 4{,}123 \ldots\ldots$$

§ 92. Besteht die vorliegende Zahl aus Ganzen und einem Decimalbruche, so erfolgt das Abtheilen in Fächer zu 2 Stellen vom Komma aus, — bei den Ganzen nach links und beim Decimalbruche nach rechts fortschreitend. Der Platz des

Decimalstrichs in der Wurzel wird bestimmt durch die Menge der Fächer, die der Decimalbruch hat; z. B.

$$\sqrt{153{,}478} = \sqrt{1|53,|47|80} = 12{,}38\ldots.$$

```
            1|53,|47|80
            1|
    2 (2)     53
              44
             947
   24 (3)    729
           21880
  246 (8)  19744
            2136.
```

§ **93**. Ist endlich die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche zu ziehen, dessen Nenner kein volles Quadrat ist, so verwandelt man denselben vorher in einen Decimalbruch, und verfährt, wie vorhin gezeigt worden.

Vom Erheben zum Kubus und vom Ausziehen der Kubikwurzel.

§ **94**. Ein Product aus drei gleichen Factoren heißt der Kubus des Factors, und umgekehrt der Factor die Kubikwurzel des Products. Daß eine Zahl zum Kubus erhoben oder kubirt werden soll, wird durch eine kleine $_3$ angedeutet, die man oben rechts an die Zahl setzt; z. B. 6^3 bedeutet $6 \times 6 \times 6 = 216$. Diesen Ausdruck lieset man: 6 zum Kubus erhoben, giebt 216.

Soll eine Zahl in drei gleiche Factoren zerlegt werden, so heißt das die Kubikwurzel ausziehen. Das Zeichen für die Kubikwurzel ist ein verzogenes $\sqrt{\ }$, in dessen Oeffnung die Zahl $_3$ gesetzt wird. Demnach zeigt $\sqrt[3]{216}$ an, daß aus der Zahl 216 die Kubikwurzel auszuziehen sei.

§ **95**. Für die Kuben der Einer stellt man sich das sogenannte Kubikwurzeltäfelchen zusammen.

Kubikwurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Kuben	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Aus dieser Tafel sehen wir, daß z. B. $5^3 = 125$, also $\sqrt[3]{125} = 5$, $7^3 = 343$, also $\sqrt[3]{343} = 7$ sein muß.

§ 96. Das Kubiren kann durch einfache Multiplication verrichtet werden; — um aber eine Einsicht für das umgekehrte Verfahren, d. h. für das Ausziehen der Kubikwurzel zu gewinnen, müssen wir die vorliegende Zahl in 2 Theile zerlegen, und uns eine Formel wie beim Quadriren § 83 zu verschaffen suchen. — Wenn $a + b$ das Bild einer zweistelligen Zahl vorstellt, so ist das Bild ihres Quadrats dargestellt durch $a^2 + 2ab + b^2$. Bedenken wir aber, daß

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b) \,.\, (a+b) \,.\, (a+b)\\ &= (a+b)^2 \,.\, (a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2) \,.\, (a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2) \,.\, a + (a^2+2ab+b^2) \,.\, b\\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3\\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,\end{aligned}$$

so sehen wir, daß der Kubus einer zweistelligen Zahl bestehen muß

1) aus dem Kubus des ersten Theils (a^3);
2) aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theils in den zweiten ($3a^2 \,.\, b$);
3) aus dem dreifachen Quadrate des zweiten Theils in den ersten ($3\,ab^2$);
4) aus dem Kubus des zweiten Theils (b^3).

Anwendung.

1)
$$\begin{array}{rlll} & 35^3 & = (30+5)^3 & = (a+b)^3 \\ a^3 = & 30^3 & = 30 \,.\, 30 \,.\, 30 & = \left.\begin{array}{r} 27000 \\ 13500 \\ 2250 \\ 125 \end{array}\right\} + \\ 3a^2b = & 3 \,.\, 30^2 \,.\, 5 & = 3 \,.\, 30 \,.\, 30 \,.\, 5 & \\ 3ab = & 3 \,.\, 30 \,.\, 5^2 & = 3 \,.\, 30 \,.\, 5 \,.\, 5 & \\ b^3 = & 5^3 & = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 & \end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 42875 = 35^3.$$

2)
$$\begin{array}{rlll} & 98^3 & = (90+8)^3 & = (a+b)^3 \\ a^3 = & 90^3 & = 90 \,.\, 90 \,.\, 90 & = \left.\begin{array}{r} 729000 \\ 194400 \\ 17280 \\ 512 \end{array}\right\} + \\ 3a\,b = & 3 \,.\, 90^2 \,.\, 8 & = 3 \,.\, 90 \,.\, 90 \,.\, 8 & \\ 3ab^2 = & 3 \,.\, 90 \,.\, 8^2 & = 3 \,.\, 90 \,.\, 8 \,.\, 8 & \\ b^3 = & 8^3 & = 8 \,.\, 8 \,.\, 8 & \end{array}$$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 941192 = 98^3.$$

§ **97.** Aus dem Kubikwurzeltäfelchen § 95 ersehen wir, daß eine einstellige Wurzel einen Kubus von einer Stelle, nehmlich $1^3 = 1$ und $2^3 = 8$, — von zwei Stellen, nehmlich $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, und von drei Stellen, nehmlich $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ und $9^3 = 729$ haben kann.

Der kleinste Zehner ist 10 und der kleinste Hunderter ist 100. Da nun $10^3 = 1000$ und $100^3 = 1000000$, so folgt, daß die Kuben aller zweistelligen Zahlen mehr als 3, aber weniger als 7 Stellen haben müssen; mithin werden sie entweder aus 4 oder 5 oder aus 6 Stellen bestehen. Hieraus folgt weiter, daß bei dem Kubus einer zweistelligen Wurzel der Kubus der Zehner (a^3) nie in den drei letzten Ordnungen vorkommen kann, und diese vorzugsweise die andern Theile der Formel $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ enthalten.

§ **98.** Soll aus dem Kubus einer zweistelligen Wurzel die Kubikwurzel ausgezogen werden, so theilen wir die vorliegende Zahl von rechts nach links fortschreitend in Fächer zu 3 Stellen ab; z. B.

$$\begin{array}{rrl}
 & & \quad a + b \\
 & \sqrt[3]{97|507} & = 40 + 3 = 43 \\
 & a^3 = \underline{64|} & \\
 & 15507 & \\
3a^2 = 4800 & & \\
3a^2b = \ldots . & \underline{14400} & - \\
 & 1107 & \\
 & 3ab^2 = \underline{1080} & - \\
 & 27 & \\
 & b^3 = \underline{27} & - \\
 & 0. &
\end{array}$$

Aus dem ersten Fach zur Linken zieht man die Kubikwurzel, indem man in dem Täfelchen § 95 den größten Kubus aufsucht, der sich abziehen läßt. Bei uns ist $a^3 = 64$ Zehner, daher $a = 4$ Zehner $= 40$. Zu dem Reste $= 15$ nimmt man das zweite Fach herunter. Um den zweiten Theil der Wurzel zu finden, dividire man mit $3a^2 = 3 \,.\, 40^2 = 4800$ in die Zahl 15507. Man findet $b = 3$. — Jetzt ist abzuziehen $3a^2b = 14400$ von 15507. — Von dem Reste $= 1107$ ist noch zu subtrahiren

$2ab^2 = 3 \,.\, 40 \,.\, 3 \,.\, 3 = 1080$ und endlich von dem Reste $= 27$ der letzte Theil der Formel $b^3 = 27$; also $\sqrt[3]{79507} = 43$.

Statt der auf einander folgenden Subtractionen kann man auch die einzelnen Theile $3a^2b$, $3ab^2$, b^3 zuerst addiren und dann $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ auf ein Mal subtrahiren. Hiernach hätten wir:

1)
$$
\begin{array}{lr}
 & \sqrt[3]{79|507} = 43 \\
 & a^3 = 64| \qquad \\
 & \overline{15507} \\
3a^2 = 4800 & \\
3a^2b = 14400 & \\
3ab^2 = 1080 & \\
b^3 = 27 & \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 15507 \\
 & \overline{0.}
\end{array}
$$

2)
$$
\begin{array}{lr}
 & \overset{a \;+\; b}{\sqrt[3]{474|552} = 70 + 8 = 78} \\
 & a^3 = 343| \qquad \\
 & \overline{131552} \\
3a^2 = 14700 & \\
3a^2b = 117600 & \\
3ab^2 = 13440 & \\
b^2 = 512 & \\
\hline
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = & 131552 \\
 & \overline{0.}
\end{array}
$$

§ 99. Um eine dreistellige Zahl zu kubiren, betrachtet man die Hunderter und Zehner als den ersten und die Einer als den zweiten Theil. Man erhält z. B.

$$(235)^3 = (230 + 5)^3 = 230^3 + 2 \,.\, 230^2 \,.\, 5 + 3 \,.\, 230 \,.\, 5^2 + 5^3,$$

oder allgemein, wenn man die Hunderter mit a, die Zehner mit b und die Einer mit c bezeichnet:

$$[(a + b) + c]^3 = (a + b)^3 + 3(a + b)^2 c + 3(a + b)c^2 + c^3.$$

Da aber $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (§ 83), so ergiebt sich, wenn wir diesen Ausdruck einführen, für den Kubus einer dreistelligen Zahl die Formel:

$$[(a + b) + c]^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3\,(a + b)^2 \,.\, c + 3\,(a + b)\, c^2 + c^3.$$

Anwendung.

$$\begin{array}{rcll} & & a + b + c & \\ & (245)^3 = & (200 + 40 + 5)^3 & \\ a^3 = 200^3 & = 200.200.200 & = 8000000 \\ 3a^2b = 3.200^2.40 & = 3.200.200.40 & = 4800000 \\ 3ab^2 = 3.200.40^2 & = 3.200.40.40 & = 960000 \\ b^3 = 40^3 & = 40.40.40 & = 64000 \\ 3(a+b)^2c = 3.240^2.5 & = 3.240.240.5 & = 864000 \\ 3(a+b).c^2 = 3.240.5^2 & = 3.240.5.5 & = 18000 \\ c^3 = 5^3 & = 5.5.5 & = 125 \\ \hline (a+b+c)^3 = \ldots & & 14706125 = 245^3. \end{array}$$

§ 100. Da $100^3 = 1000000$,
$1000^3 = 1000000000$,
so müssen die Kuben aller dreistelligen Zahlen mehr als 7, aber weniger als 10 Stellen haben. Eine gleiche Betrachtung, wie § 86 für die Quadrate, zeigt uns, daß wir aus der Anzahl der Stellen des Kubus auf die Anzahl der Stellen für die Wurzel schließen können. — Theilen wir die vorliegende Zahl von der Rechten zur Linken in Fächer zu 3 Stellen, so wird die Menge der Fächer die Anzahl der Stellen der Wurzel angeben. Nach dieser Regel sind die Kubikwurzeln von 6|859, 59|304, 117|649 zweistellig; — die Kubikwurzeln von 1|860|867, 28|094|464, 156|590|819 dreistellig u. s. w.

§ 101. Hat man eine mehr als zweistellige Kubikwurzel auszuziehen, so zieht man zuerst die vier Theile der Formel $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ ab, und fängt dann vom zweiten Theile derselben ($3a^2b$) wieder an, indem man die zwei bereits gefundenen Theile der Kubikwurzel als a betrachtet. Den Grund für dieses Verfahren findet man durch dieselbe Betrachtung, die wir bei der Quadratwurzel § 87 austellten, daß die Formel

1) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

vollständig die Formel

2) $[(a+b)+c]^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2.c + 3(a+b)c^2 + c^3$
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2.c + 3(a+b)c^2 + c^3$

repräsentirt, wenn wir (in 2) nach Abzug der 4 ersten Theile, d. h. des Kubus von $(a+b)$, die gefundenen zwei ersten Theile der Kubikwurzel $a+b$ für a setzen. Hiernach haben wir:

$$\sqrt[3]{78|402|752} = \overset{a}{400} + \overset{b}{20} + \overset{c}{8} = 428$$

$$a^3 = 64|000|000$$

$$\begin{array}{ll}
3a^2 = 480000 & 14|402|752 \\
\left.\begin{array}{r} 3a^2b = 9600000 \\ 3ab^2 = 480000 \\ b^3 = 8000 \end{array}\right\} + & \\
3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \ldots & 10|088|000 \\
\end{array} \Big\} -$$

$$\begin{array}{ll}
3(a+b)^2 = 3.(420)^2 = 529200 & 4|314|752 \\
\left.\begin{array}{r} 3(a+b)^2.c = 4233600 \\ 3(a+b).c^2 = 80640 \\ c^3 = 512 \end{array}\right\} + & \\
3(a+b)^2.c + 3(a+b).c^2 + c^3 = & 4|314|752 \\
& 0. \\
\end{array} \Big\} -$$

Ebenso verfährt man, wenn die Kubikwurzel aus einer beliebigen Anzahl Stellen besteht. Man betrachtet nehmlich die bereits gefundenen Theile der Kubikwurzel als den ersten Theil, und rechnet mit dem hinzutretenden Theil, als wäre die Wurzel bloß zweitheilig; z. B.

$$\sqrt[3]{45|729|086|976} = \overset{a}{3000} + \overset{b}{500} + \overset{c}{70} + \overset{d}{6} = 3576$$

$$a^3 = 27$$

$$\begin{array}{ll}
3a^2 = 27 & 18729 \\
\left.\begin{array}{r} 3a^2b = 135 \\ 3ab^2 = 225 \\ b^3 = 125 \end{array}\right\} + & \\
15875 \ldots & 15875 \\
\end{array} \Big\} -$$

$$\begin{array}{ll}
 & 2854086 \\
\left.\begin{array}{r} 3(a+b)^2 = 3\dot{a}^2 = 3675 \\ 3(a+b)^2c = 3\dot{a}^2.\dot{b} = 25725 \\ 3(a+b).c^2 = 3\dot{a}.\dot{b}^2 = 5145 \\ c^3 = \dot{b}^3 = 343 \end{array}\right\} + & \\
2624293 \ldots & 2624293 \\
\end{array} \Big\} -$$

$$\begin{array}{ll}
 & 229793976 \\
3(a+b+c)^2 = 3\dot{a}^2 = 382347 & \\
\left.\begin{array}{r} 3(a+b+c)^2.d = 3\dot{a}^2.\dot{b} = 2294082 \\ 2(a+b+c).d^2 = 3\dot{a}.\dot{b}^2 = 38556 \\ d^3 = \dot{b}^3 = 216 \end{array}\right\} + & \\
229793976 \ldots & 229793976 \\
 & 0. \\
\end{array} \Big\} -$$

§ 102. Beim Ausziehen der Kubikwurzeln sind dieselben Fälle zu unterscheiden, wie beim Ausziehen der Quadratwurzeln. Es sind folgende:

1) Aus einem Bruche wird die Kubikwurzel gefunden, wenn man die Kubikwurzel aus Zähler und Nenner nimmt, und erstere durch letztere dividirt, also $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$.

2) Bei einem Decimalbruche muß die Anzahl der Decimalstellen durch 3 theilbar sein.

3) Bei ganzen Zahlen, deren Kubikwurzeln irrational sind, hängt man so viele Fächer von drei Nullen an, als Stellen in der Kubikwurzel verlangt werden.

Man soll $\sqrt[3]{15}$ auf 3 Stellen ausziehen.

Ausrechnung.

$$\sqrt[3]{15|000|000|000|} = 2{,}466\ldots$$

$$a^3 = 8$$

$$7000$$

$$3a^2 = 12$$

$$\left.\begin{array}{r} 3a^2b = 48 \\ 3ab^2 = 96 \\ b^3 = 64 \end{array}\right\} +$$

$$5824 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; 5824$$

$$1176000$$

$$3a^2 = 1728$$

$$\left.\begin{array}{r} 3a^2b = 10368 \\ 3ab^2 = 2592 \\ b^3 = 216 \end{array}\right\} +$$

$$1062936 \;.\;.\;.\;.\;.\; 1062936$$

$$113064000$$

$$3a^2 = 181548$$

$$\left.\begin{array}{r} 3a^2b = 1089288 \\ 3ab^2 = 26568 \\ b^3 = 216 \end{array}\right\} +$$

$$109194696 \;.\;.\;.\;. \; 109194696$$

$$3869304.$$

4) Das Abtheilen einer Zahl, die Ganze und Decimalbrüche enthält, in Fächer zu drei Stellen erfolgt vom Komma aus. Die

Zahl der Fächer zur Linken giebt die Menge der Stellen für die Ganzen, und die Zahl der Fächer zur Rechten des Decimalstrichs die Menge der Decimalstellen in der Kubikwurzel; z. B. $\sqrt[3]{17523{,}0678254}$ richtig abgetheilt wird geben $\sqrt[3]{17|523,|067|825|400}$ 2 Ganze und 3 Decimalstellen in der Kubikwurzel.

5) Um aus einem Bruche, dessen Nenner eine irrationale Kubikwurzel hat, dieselbe auszuziehen, verwandelt man ihn in einen Decimalbruch.

Uebungsfragen.

1) Woraus besteht das Quadrat einer zweitheiligen Größe?

2) Woraus besteht das Quadrat einer Zahl, die beliebig viele Addenden hat?

3) Aus wieviel Ziffern besteht das Quadrat einer n ziffrigen Zahl?

4) Woran erkennt man, aus wieviel Ziffern die Wurzel einer gegebenen Zahl bestehen werde?

5) Welches sind die Regeln für das Ausziehen der Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl?

6) Wie zieht man die Quadratwurzel aus einem gewöhnlichen Bruche?

7) Wie zieht man die Quadratwurzel aus einer Zahl, die kein volles Quadrat ist?

8) Wie zieht man die Quadratwurzel aus einem Decimalbruche?

9) Woraus besteht der Kubus einer zweitheiligen Zahl?

10) Durch welche Formel wird der Kubus einer mehrtheiligen Zahl ausgedrückt?

11) Aus wieviel Ziffern besteht der Kubus einer n ziffrigen Zahl?

12) Woran erkennt man, wieviel Ziffern die Kubikwurzel einer gegebenen Zahl haben werde?

13) Welches sind die Regeln für das Ausziehen der Kubikwurzel?

14) Wie zieht man die Kubikwurzel aus einer Zahl, die kein voller Kubus?

15) Wie zieht man die Kubikwurzel aus einem Decimalbruche und wie aus einem gewöhnlichen Bruche aus?

Exempel N. 2332 — N. 2417.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

§ 103. Werden zwei Zahlen a und b in Rücksicht auf ihre Größe verglichen, so kann man fragen:

1) Um wieviel Einheiten ist a größer als b?
2) Wieviel mal ist a größer als b?

Die erste Frage wird durch die Subtraction, die zweite durch die Division beantwortet. Im erstern Falle wird die Beziehung, in der wir uns die beiden Zahlen gestellt denken — arithmetisches Verhältniß, — im zweiten — geometrisches Verhältniß genannt.

Die beiden Zahlen, welche verglichen werden, nennt man die beiden Glieder des Verhältnisses, und zwar heißt die erste Zahl a das Vorder-, und die zweite b das Hinterglied.

§ 104. Diejenige Zahl, um welche bei einem arithmetischen Verhältnisse das Vorderglied größer ist als das Hinterglied, nennt man die Differenz dieses Verhältnisses; z. B. in $9 - 5 = 4$ ist 4 die Differenz, 9 das Vorder- und 5 das Hinterglied.

Diejenige Zahl, welche bei einem geometrischen Verhältnisse angiebt, wieviel mal das Vorderglied größer ist als das Hinterglied, heißt der Quotient oder Exponent dieses Verhältnisses; z. B. in $16 : 2 = 8$ ist 8 der Exponent, 16 das Vorder- und 2 das Hinterglied.

§ 105. Die Glieder eines Verhältnisses müssen gleichartige Größen sein. Beim arithmetischen Verhältnisse ist die Differenz gleichnamig mit den Gliedern desselben; beim geometrischen Verhältnisse wird, weil die Division ein Messen ist, der Exponent eine abstracte Zahl; z. B.

14 Werschok — 2 Werschok = 12 Werschok,
und (14 Werschok) : (2 Werschok) = 7 mal,

also die Differenz = 12 Werschok und der Exponent = 7.

Die arithmetischen Verhältnisse und die daraus hervorgehenden arithmetischen Proportionen sind für die Arithmetik von geringem oder gar keinem Nutzen, deshalb übergehen wir diese ganz und werden uns nur mit den geometrischen Verhältnissen beschäftigen. Ueberhaupt soll von nun an überall, wenn von Verhältnissen die Rede ist, nur das geometrische Verhältniß verstanden werden.

§ 106. Da jedes geometrische Verhältniß ein Bruch ist, dessen Zähler den Dividendus und dessen Nenner den Divisor, dessen Exponent aber den Quotienten vorstellt, so wird das Vorderglied gleich sein dem Producte aus dem Hintergliede und dem Exponenten (§ 20). Wenn also

$$a : b = \left(\frac{a}{b}\right) = c,$$

so muß sein: $a = b \,.\, c.$

Zusatz. Ein Verhältniß bleibt unverändert, wenn man Vorder- und Hinterglied mit derselben Zahl *multiplicirt* oder *dividirt*; also

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a \,.\, n}{b \,.\, n} \text{ (§ 38)} = (a \,.\, n) : (b \,.\, n)$$

$$a : b = \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n} \text{ (§ 40)} = (a : n) : (b : n).$$

Hiernach läßt sich jedes Verhältniß gebrochener oder gemischter Zahlen durch Multiplication in ein gleich großes Verhältniß ganzer Zahlen umformen;

z. B. 1) $\frac{3}{5} : 5\frac{1}{4}$ durch ganze Zahlen auszudrücken.

Auflösung. Wir richten das Hinterglied ein und multipliciren beide Glieder mit dem Generalnenner (5 . 4). Es ergiebt sich:

$$\tfrac{3}{5} : \tfrac{21}{4} = (\tfrac{3}{5}) \,.\, 20 : (\tfrac{21}{4}) \,.\, 20 = 12 : 105.$$

Ebenso:

2) $(7\frac{1}{8}) : (3\frac{1}{5}) = \frac{57}{8} : \frac{16}{5} = (\frac{57}{8}) \,.\, 40 : (\frac{16}{5}) \,.\, 40 = 285 : 128.$

3) $0{,}32 : 0{,}047 = {}^{32}\!/_{100} : {}^{47}\!/_{1000} = 320 : 47.$

4) $(0{,}3333\ldots) : (0{,}616161\ldots) = \frac{1}{3} : \frac{61}{99}$ (§ 57) $= 33 : 61.$

Allgemein:

5) $\left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) . \, bq : \left(\frac{p}{q}\right) . \, bq = (aq) : (pb).$

Durch Division beider Glieder wird jedes Verhältniß auf seine einfachste Form gebracht; z. B.

6) 48 : 28 auf seine einfachste Form zu bringen.

Auflösung. Dividiren wir beide Glieder mit ihrem größten gemeinschaftlichen Theiler = 4, so ergiebt sich:

$$48 : 28 = (48 : 4) : (28 : 4) = 12 : 7.$$

Zusatz. Verhältnisse mit gleichen Exponenten sind einander gleich; wenn also

$$16 : 8 = 2;\ 24 : 12 = 2;\ 98 : 49 = 2,$$

so muß sein:

$$16 : 8 = 24 : 12 = 98 : 49.$$

Oder allgemein, wenn $a : b = e$; $c : d = e$; $m : n = e$; $p : q = e$, so muß sein:

$$a : b = c : d = m : n = p : q.$$

§ **107.** Zwei gleiche Verhältnisse bilden eine Proportion. Wenn also $a : b = e$ und $c : d = e$, so ist $a : b = c : d$ eine Proportion. — In jeder Proportion kommen vier Zahlen vor, die Glieder der Proportion heißen. Das erste und dritte Glied einer Proportion werden (als Vorderglieder) und das zweite und vierte Glied (als Hinterglieder beider Verhältnisse) gleichnamige oder homologe Glieder genannt. Das erste und vierte Glied heißen äußere, das zweite und dritte Glied innere Glieder der Proportion.

Sind alle vier Glieder ungleich, so wird die Proportion unterbrochen oder diskret genannt; sind dagegen die mittlern oder äußern Glieder einander gleich, so heißt die Proportion stetig. — Diskret sind folgende Proportionen:

1) $a : b = m : n$;
2) $3 : 4 = 9 : 12$;

stetig dagegen folgende:

3) $a : p = p : d$, oder 4) $n : a \quad b : n$;
5) $9 : 6 = 6 : 4$; 6) $12 : 18 = 8 : 12$.

In einer diskreten Proportion heißt jedes Glied die vierte Proportionale zu den drei andern Gliedern; z. B. in $a : b = c : d$

ist a die vierte Proportionale zu b, c und d,
„ b „ „ „ „ a, c „ d,
„ c „ „ „ „ a, b „ d,
„ d „ „ „ „ a, b „ c.

In einer stetigen Proportion heißt das mittlere Glied (wenn das 2te und 3te einander gleich), und das äußere Glied (wenn das 1ste und 4te einander gleich sind) — die mittlere Proportionale; z. B.

in $a : b = b : c$ ist b die mittlere Proportionale zu a und c,
„ $m : n = p : m$ „ m „ „ „ „ n „ p.

Die ungleichen Glieder einer stetigen Proportion werden dritte Proportionale genannt; z. B.

in $a : b = b : c$ heißen a und c die dritte Proportionale.

§ **108**. Lehrsatz. In jeder Proportion sind die Producte der innern und äußern Glieder einander gleich.

Beweis. Wenn $a : b = c : d$

so muß sein $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§ 106). Multipliciren wir mit dem Producte der beiden Nenner, nehmlich mit $b \cdot d$, so ergiebt sich

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot b \cdot d = \left(\frac{c}{d}\right) \cdot b \cdot d$$

oder $\frac{a \cdot \cancel{b} \cdot d}{\cancel{b}} = \frac{c \cdot b \cdot \cancel{d}}{\cancel{d}}$

d. h. $a \cdot d = c \cdot b$.

Diesen wichtigen Lehrsatz kann man auch folgendermaßen beweisen:

Da $a : b = e$ und $c : d = e$, so muß sein:

$a = b \cdot e$ (§ 106),
$d \cdot e = c$

folglich: $a \cdot (d \cdot e) = (b \cdot e) \cdot c$,
oder $a \cdot d \cdot \cancel{e} = b \cdot \cancel{e} \cdot c$.

Dividiren wir auf beiden Seiten mit e, so ist

$a \cdot d = b \cdot c$.

§ 109. Lehrsatz. Aus zwei gleichen Producten läßt sich immer eine Proportion dadurch bilden, daß man die Factoren des einen Products zu mittlern und die des andern zu äußern Gliedern macht. Wenn also $a \cdot n = b \cdot p$, so ist immer $a : b = p : n$.

Beweis. Weil $a \cdot n = b \cdot p$, so wird, wenn wir auf beiden Seiten mit $b \cdot n$ dividiren, sein

$$\frac{a \cdot \cancel{n}}{b \cdot \cancel{n}} = \frac{\cancel{b} \cdot p}{\cancel{b} \cdot n}$$

$$\text{d. h. } \frac{a}{b} = \frac{p}{n}$$

$$\text{oder } a : b = p : n.$$

Anmerkung. Die beiden vorhergehenden Sätze sind sehr bequem zur Prüfung für die Richtigkeit einer Zahlen-Proportion.

§ 110. Aufgabe. Zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion die vierte Proportionalzahl zu finden.

Auflösung und Beweis. Die gesuchte vierte Proportionalzahl sei $= x$, so kann sie entweder eins der beiden äußern Glieder oder eins der beiden innern Glieder vorstellen. Im ersten Falle haben wir:

$$a : b = c : x$$

$$\text{oder } x : b = c : a.$$

Aus beiden Proportionen folgt: $b \cdot c = a \cdot x$ (§ 108). Also mit a dividirt:

$$x = \frac{b \cdot c}{a},$$

d. h. man findet das fehlende äußere Glied, wenn man das Product der Mittelglieder durch das bekannte äußere Glied dividirt.

Im zweiten Falle muß sein:

$$a : x = c : b$$

$$\text{oder } a : c = x : b.$$

Aus beiden Proportionen folgt: $a \cdot b = c \cdot x$ (§ 108). Also mit c dividirt

$$x = \frac{a \cdot b}{c},$$

d. h. man findet das fehlende mittlere Glied, wenn man das Product der äußern Glieder durch das bekannte mittlere Glied dividirt.

Anwendung auf Zahlenbeispiele:

1) $(\frac{3}{4}) : (\frac{2}{3}) = 8 : x$

$$x = \frac{(\frac{2}{3}) \cdot 8}{\frac{3}{4}} = (^{16}/_3) \times (\frac{4}{3}) = 7\frac{1}{9}.$$

2) $0{,}75 : 5{,}5 = 3{,}6 : x$

$$x = \frac{5{,}5 \cdot 3{,}6}{0{,}75} = \frac{19{,}8}{0{,}75} = 26{,}4.$$

3) $8 : x = 13 : 5$

$$x = \frac{5 \cdot 8}{13} = {}^{40}/_{13} = 3^1/_{13}.$$

4) $x : 6 = 5{,}25 : 1{,}5$

$$x = \frac{6 \cdot 5{,}25}{1{,}5} = \frac{31{,}5}{1{,}5} = 21.$$

5) $7\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3} = x : 0{,}45$

$$x = \frac{(7\frac{1}{2}) \cdot (0{,}45)}{(4\frac{1}{3})} = \frac{15 \cdot 0{,}45 \cdot 3}{2 \cdot 13} = 0{,}778\ldots$$

§ **111**. Aufgabe. Zu zwei gegebenen Zahlen a und b die dritte Proportionalzahl zu finden.

Auflösung und Beweis. Die gesuchte dritte Proportionalzahl sei $= x$, so haben wir:

$$a : b = b : x \quad (\S\ 107)$$

also $a \cdot x = b \cdot b = b^2$ (§ 108). Mit a dividirt

$$x = \frac{b^2}{a},$$

d. h. man findet zu zwei gegebenen Zahlen die dritte Proportionalzahl, wenn man das Quadrat der zweiten durch die erste dividirt.

§ **112**. Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Zahlen a und b die mittlere Proportionale zu finden.

Auflösung und Beweis. Es sei x die gesuchte mittlere Proportionalzahl, so muß sein

$$a : x = x : b \quad (\S\ 107)$$

folglich $x^2 = a \cdot b$ (§ 108),

und daher, wenn wir auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausziehen: $x = \sqrt{a \cdot b}$,

d. h. die mittlere Proportionale ist die Quadratwurzel aus dem Producte der beiden gegebenen Zahlen.

Anwendung auf Zahlenbeispiele.

1) $6 : x = x : 54$

also $x = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{324} = 18.$

2) $5 : x = x : 3$

folglich $x = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15} = 3{,}8729\ldots$

3) $4{,}25 : x = x : 0{,}04$

daher $x = \sqrt{4{,}25 \cdot 0{,}04} = \sqrt{0{,}17} = 0{,}41231\ldots$

4) $3\frac{1}{2} : x = x : \frac{3}{4}$

$x = \sqrt{(3\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4})} = \sqrt{\frac{21}{8}} = \sqrt{2{,}625} = 1{,}620\ldots$

§ 113. Lehrsatz. Jede Proportion bleibt richtig, wenn man

A) die Mittelglieder unter einander,
B) die Außenglieder unter einander,
C) die Mittelglieder mit den Außengliedern vertauscht.

Wenn also $a : b = c : d$ ist, so muß auch sein:

1) $a : c = b : d$
2) $b : a = d : c$
3) $b : d = a : c$
4) $c : a = d : b$
5) $c : d = a : b$
6) $d : b = c : a$
7) $d : c = b : a.$

Beweis. Aus der gegebenen Proportion $a : b = c : d$ folgt: $a \cdot d = b \cdot c$ (§ 108). Dieselben Producte erhält man aber, wenn man in jeder der 7 andern Proportionen die Außenglieder mit den Außengliedern und die Mittelglieder mit den Mittelgliedern multiplicirt; folglich sind alle diese Proportionen richtig.

Anmerkung 1. Aus der gegebenen Proportion und den 7 daraus hergeleiteten Proportionen ersehen wir, daß jedes Glied 2 mal die Stelle eines jeden der vier Glieder der Proportion einnehmen kann.

Anmerkung 2. Vergleichen wir die Exponenten, so zeigt es sich, daß die Verhältnisse immer in 2 Proportionen gleiche Exponenten haben. Die Verschiedenheit besteht nur in ihrer Stellung gegen das Gleichheitszeichen.

§ 114. Lehrsatz. Jede Proportion bleibt richtig, wenn man die Glieder der einzelnen Verhältnisse mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt.

Wenn also $a : b = c : d$, so muß auch sein:

1) $m . a : m . b = n . c : n . d$,

2) $\left(\frac{a}{m}\right) : \left(\frac{b}{m}\right) = \left(\frac{c}{n}\right) : \left(\frac{d}{n}\right)$.

Beweis. Da $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{c}{d}\right)$ (nach der Voraussetzung), so muß auch sein: $\frac{m . a}{m . b} = \frac{n . c}{n . d}$ (§ 38), und ebenso $\frac{a : m}{b : m} = \frac{c : n}{d : n}$ (§ 40), folglich die beiden abgeleiteten Proportionen richtig.

Zusatz. Vertauschen wir in (1) und (2) die Mittelglieder, so folgt:

3) $ma : n . c = m . b : nd$

4) $\frac{a}{m} : \frac{c}{n} = \frac{b}{m} : \frac{d}{n}$,

d. h. eine Proportion bleibt richtig, wenn man die homologen Glieder mit gleichen Zahlen multiplicirt oder dividirt.

§ 115. Lehrsatz. In jeder Proportion verhält sich die Summe oder der Unterschied des ersten und zweiten Gliedes zur Summe oder zum Unterschiede des dritten und vierten Gliedes wie die homologen Glieder. Wenn also $a : b = c : d$, so muß auch sein $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c$

oder $= b : d$.

Beweis. Aus $a : b = c : d$

folgt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§ 107).

Auf beiden Seiten 1 addirt oder subtrahirt giebt uns

$$\left(\frac{a}{b}\right) \pm 1 = \left(\frac{c}{d}\right) \pm 1.$$

Die Einheit mit dem Bruche auf gleiche Benennung gebracht:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = \frac{c}{d} \pm \frac{d}{d}$$

oder $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$

d. h. $(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$

oder $(a \pm b) : (c \pm d) = b : d$ (§ 113, A)

$= a : c.$

Zusatz. In jeder Proportion $a : b = c : d$ verhält sich die Summe oder die Differenz der homologen Glieder wie das erste Glied zum zweiten, oder das dritte Glied zum vierten, d. h.

$$(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$$
$$= c : d.$$

Beweis. Aus $a : b = c : d$ folgt durch Vertauschung der Mittelglieder (§ 113)

$$a : c = b : d,$$

also $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$

$= c : d$ (§ 115).

Zahlenbeispiel.

$18 : 6 = 24 : 8$

giebt $(18 \pm 6) : (24 \pm 8) = 18 : 24$

d. h. $24 : 32 = 18 : 24$ (Durch Anwendung des obern Zeichens)

$12 : 16 = 18 : 24$ („ „ „ untern „)

§ **116**. Wenn beliebig viele Verhältnisse gleiche Exponenten haben und einander gleichgesetzt werden, so entsteht eine fortlaufende Proportion; z. B.

$$a : b = a' : b' = a'' : b'' = a''' : b''' \text{ u. s. w.}$$

Man schreibt eine fortlaufende Proportion auch folgendermaßen:

$$(a : a' : a'' : a''' : \ldots) = (b : b' : b'' : b''' : \ldots)$$

§ **117**. Lehrsatz. In jeder fortlaufenden Proportion verhält sich die Summe sämmtlicher Vorderglieder zur Summe sämmtlicher Hinterglieder wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglieder. Wenn also $a : b = a' : b' = a'' : b'' : = a''' : b'''$ u. s. w., so soll sein:

$$\begin{aligned}(a+a'+a''+a'''+\ldots) : (b+b'+b''+b'''+\ldots) &= a : b \\ &= a' : b' \\ &= a'' : b'' \\ &= a''' : b''' \\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Beweis. Aus $a : b = a' : b'$
folgt $(a + a') : (b + b') = a : b$ (§ 116, Zusatz)

Nun ist $a : b = a'' : b''$ nach der Voraussetzung,
also $(a + a') : (b + b') = a'' : b''$
folglich $(a+a'+a'') : (b+b'+b'') = a'' : b''$ (§ 116, Zusatz).

Aber $a'' : b'' = a''' : b'''$ (Voraussetzung)
daher $(a+a'+a'') : (b+b'+b'') = a''' : b'''$
mithin $(a+a'+a''+a''') : (b+b'+b''+b''') = a''' : b'''$.

Daß dieser Satz für jede beliebige Anzahl von Verhältnissen richtig ist, übersieht man leicht.

Anwendung. $2 : 3 = 10 : 15 = 8 : 12 = 6 : 9$
giebt: $(2+10+8+6) : 3+15+12+9) = 2 : 3$
d. h. $26 : 39 = 2 : 3$.

Anmerkung. Für den Fall, daß die fortlaufende Proportion nach der zweiten Art geschrieben wäre, nehmlich:

$$(a : a' : a'' : a''' : \ldots) = (b : b' : b'' : b''' : \ldots)$$

würde unser Lehrsatz heißen: Die Summe sämmtlicher Glieder auf der einen Seite des Gleichheitszeichens verhält sich zur Summe der Glieder auf der andern Seite, wie irgend ein Glied auf der linken Seite zum gleichstelligen Gliede auf der rechten Seite.

§ 118. Lehrsatz. Aus zwei gegebenen Proportionen erhält man wieder eine richtige Proportion, wenn man die gleichstelligen Glieder mit einander multiplicirt. Wenn also

1) $a : b = c : d$
2) $a' : b' = c' : d'$,

so muß sein: $aa' : bb' = cc' : dd'$.

Beweis. Aus 1 folgt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§ 107)

und aus 2 folgt: $\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$.

$$\text{daher } \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c'}{d'}\right)$$

$$\text{d. h. } \frac{a \cdot a'}{b \cdot b'} = \frac{c \cdot c'}{d \cdot d'}.$$

Also: $aa' : bb' = cc' : dd'$.

Zusatz 1. Setzen wir $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$ und $d' = d$, so verwandelt sich die Proportion $aa' : bb' = cc' : dd'$ in $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$, d. h. aus einer Proportion $a : b = c : d$ erhält man wieder eine richtige Proportion, indem man jedes Glied quadrirt.

Zusatz 2. Umgekehrt muß aus $a : b = c : d$

folgen $\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{c} : \sqrt{d}$,

d. h. aus einer richtigen Proportion erhält man eine neue Proportion, wenn man aus allen vier Gliedern die Quadratwurzel auszieht.

§ 119. Lehrsatz. Sind mehre Proportionen in beliebiger Anzahl gegeben, so erhält man immer eine richtige Proportion, wenn man alle gleichstelligen Glieder der gegebenen Proportionen in einander multiplicirt. Wenn also

1) $a : b = c : d$
2) $a' : b' = c' : d'$
3) $a'' : b'' = c'' : d''$
4) $a''' : b''' = c''' : d'''$ u. s. w.,

so soll sein: $(a \cdot a' \cdot a'' \cdot a''' \ldots) : (b \cdot b' \cdot b'' \cdot b''' \ldots = (c \cdot c' \cdot c'' \cdot c''' \ldots) : (d \cdot d' \cdot d'' \cdot d''' \ldots)$

Beweis. Wegen der Voraussetzung haben wir:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (§ 107)

$\frac{a'}{b'} = \frac{c'}{d'}$

$$\frac{a''}{b''} = \frac{c''}{d''}$$

$$\frac{a'''}{b'''} = \frac{c'''}{d'''} \text{ u. s. w.}$$

daher durch Multiplication:

$$\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a'}{b'}\right) \cdot \left(\frac{a''}{b''}\right) \cdot \left(\frac{a'''}{b'''}\right) = \left(\frac{c}{d}\right) \cdot \left(\frac{c'}{d'}\right) \cdot \left(\frac{c''}{d''}\right) \cdot \left(\frac{c'''}{d'''}\right)$$

$$\text{oder } \frac{a \cdot a' \cdot a'' \cdot a''' \ldots}{b \cdot b' \cdot b'' \cdot b''' \ldots} = \frac{c \cdot c' \cdot c'' \cdot c''' \ldots}{d \cdot d' \cdot d'' \cdot d''' \ldots}$$

d. h. $(a \cdot a' \cdot a'' \cdot a''' \ldots) : (b \cdot b' \cdot b'' \cdot b''' \ldots) = (c \cdot c' \cdot c'' \cdot c''' \ldots) : (d \cdot d' \cdot d'' \cdot d''' \ldots)$.

§ 120. Werden Proportionen dadurch hergeleitet, daß man in den gegebenen Proportionen die gleichstelligen Glieder multiplicirt, so nennt man es Zusammensetzung der Proportionen.

§ 121. Wenn bei mehren gegebenen Verhältnissen das Vorderglied jedes folgenden dem Hintergliede des vorhergehenden Verhältnisses gleich ist, so heißen dieselben aneinanderhängende Verhältnisse.

§ 122. Lehrsatz. Wenn bei mehren gegebenen Proportionen auf der einen Seite des Gleichheitszeichens lauter aneinanderhängende Verhältnisse sich befinden, so ist das Verhältniß des ersten Vordergliedes dieser Verhältnisse zum letzten Hintergliede, dem Verhältnisse der Producte aller auf der andern Seite stehenden Glieder gleich, d. h. wenn

$$\begin{array}{l} a : b = a' : b' \\ c : d = b' : c' \\ e : f = c' : d' \\ k : l = d' : e' \\ \hline \end{array}$$

so ist $(a \cdot c \cdot e \cdot k) : (b \cdot d \cdot f \cdot l) = a' : e'$.

Beweis. Nach § 119 muß sein:

$(a \cdot c \cdot e \cdot k) : (b \cdot d \cdot f \cdot l) = (a' \cdot b' \cdot c' \cdot d') : (b' \cdot c' \cdot d' \cdot e')$, dividiren wir die beiden Glieder rechts mit $b' \cdot c' \cdot d'$ (§ 106, Zusatz 1), so folgt:

$$(a \cdot c \cdot e \cdot k) : (b \cdot d \cdot f \cdot l) = a' : e'.$$

Uebungsfragen.

1) Was ist ein arithmetisches, was ein geometrisches Verhältniß?
2) Wie heißen die Glieder eines Verhältnisses?
3) Was versteht man unter Differenz, was unter Exponenten eines Verhältnisses?
4) Wie drückt man ein Verhältniß durch andere Zahlen aus ohne seinen Werth zu ändern?
5) Wie bringt man das Verhältniß zweier Brüche auf ganze Zahlen?
6) Was ist eine Proportion?
7) Was versteht man unter discreten, — was unter stetigen Proportionen?
8) Was sind gleichnamige oder homologe Glieder?
9) Was versteht man unter der vierten, dritten und mittlern Proportionale?
10) Durch welche Sätze prüft man die Richtigkeit einer Proportion?
11) Wie berechnet man die vierte Proportionale?
12) Wie findet man die dritte Proportionale?
13) Wie berechnet man die mittlere Proportionale?
14) Wie viele neue Proportionen lassen sich aus einer gegebenen Proportion berechnen?
15) Welche Veränderungen können durch Multiplication und Division einzelner Glieder gemacht werden, ohne die Richtigkeit der Proportion zu stören?
16) Wie leitet man durch Addition und Subtraction gewisser Glieder aus einer Proportion andere her?
17) Was versteht man unter fortlaufender Proportion?
18) Welchen Satz haben wir für fortlaufende Proportionen?
19) Was versteht man unter Zusammensetzung der Proportionen?
20) Welche Sätze leitet man durch Zusammensetzung der Proportionen her?
21) Was sind zusammenhängende Verhältnisse?
22) Welchen Satz erhält man aus Proportionen mit zusammenhängenden Verhältnissen?

23) Wie müssen die Glieder eines Verhältnisses bei benannten Zahlen beschaffen sein?
24) Wie bildet man aus benannten Zahlen eine Proportion?
25) Wie drückt man allgemein directe und indirecte Verhältnisse aus?
26) Wie bildet man eine richtige Proportion bei directen, — wie bei indirecten Verhältnissen?

Exempel Nr. 2428 — Nr. 2434.

Anwendung der Verhältnisse auf benannte Zahlen.

§ **123.** Ein geometrisches Verhältniß entsteht aus der Division des ersten Gliedes durch das zweite (§ 105). Es müssen also, wenn zwei benannte Zahlen ein Verhältniß bilden sollen, die Bedingungen erfüllt werden, die wir bei der Division benannter Zahlen als nothwendig angeführt haben. Es sind folgende:

1) Nur gleichartige benannte Zahlen können Glieder eines und desselben Verhältnisses sein; z. B. Längenmaaße und Längenmaaße, Münzen und Münzen, Gewichte und Gewichte, Zeitgrößen und Zeitgrößen u. s. w., aber nicht Münzen und Zeitgrößen, Gewichte und Münzen u. s. w.

2) Beide Glieder des Verhältnisses müssen einsortig und von gleicher Benennung sein.

Sind die gegebenen Glieder zwar gleichartig, aber nicht gleichnamig, und bestehen sie aus mehren Unterordnungen, so muß man sie durch Reduciren oder Resolviren gleichnamig machen; z. B.

1) Es ist das Verhältniß von 3 Pud und 5 Pfund zu ermitteln.

Auflösung.

a) 3 Pud = (40 Pfund) . 3 = 120 Pfund

also: (3 Pud): (5 Pfd.) = (120 Pfd.): (5 Pfd.) = 24 mal.

b) 5 Pfund = ($\frac{5}{40}$) Pud = $\frac{1}{8}$ Pud,

daher: (3 Pud.): (5 Pfd.) = (3 Pud): ($\frac{1}{8}$ Pud) = 24 mal.

In beiden Fällen der Exponent = 24.

2) Man soll das Verhältniß von 3 Arschin 12 Werschok und 2 Arschin bestimmen.

Auflösung.

a) 3 Arschin 12 Werschok $=$ 3 . (16 Werschok) $+$ 12 Werschok $=$ 60 Werschok,

da nun 2 Arschin $=$ 32 Werschok, so muß sein:

(3 Arschin 12 Werschok) : (2 Arschin) $=$ (60 Werschok) : (32 Werschok) $= 1\frac{7}{8}$ mal.

b) 3 Arschin 12 Werschok $= 3\frac{3}{4}$ Arschin; also

(3 Arschin 12 Werschok) : (2 Arschin) $=$ ($3\frac{3}{4}$ Arschin) : (2 Arschin) $=$ ($\frac{15}{4}$ Arschin) : (2 Arschin) $= 1\frac{7}{8}$ mal.

Der Exponent in beiden Fällen $= 1\frac{7}{8}$.

§ 124. Jede benannte Zahl müssen wir als ein Product ansehen, dessen Multiplicandus die benannte Einheit, und dessen Multiplicator die davor stehende Ziffer ist (§ 58); z. B. 7 Pfd. $=$ 7 . (1 Pfund); 5 Rubel $=$ 5 . (1 Rubel) u. s. w. Die vor der Benennung stehende Ziffer heißt Coefficient.

§ 125. Lehrsatz. Das Verhältniß zweier einsortigen benannten Zahlen (a . Z) : (b . Z) ist dem Verhältnisse der Coefficienten gleich.

Beweis. Der Exponent von $(a . Z) : (b . Z) = \frac{a . Z}{b . Z}$ ist $= \frac{a}{b}$; der Exponent von $a : b$ ist ebenfalls $= \frac{a}{b}$, folglich

$$(aZ) : (bZ) = a : b.$$

Zusatz. Bezeichnen M und N zwei beliebige Maaßeinheiten, a, b, c und d aber abstracte Zahlen, so daß $a : b = c : d$, so muß auch:

$$(aM) : (bM) = (cN) : (dN),$$

d. h. jede Proportion giebt eine richtige Proportion in benannten Zahlen, wenn man beide Glieder in **jedem** Verhältnisse auf dieselbe Maaßeinheit bezieht; z. B. aus $5 : 8 = 15 : 24$ können wir bilden:

1) 5 Rubel : 8 Rubel $=$ 15 Pfund : 24 Pfund.

2) 5 Tage : 8 Tage $=$ 15 Rubel : 24 Rubel.

3) 5 Arschin : 8 Arschin $=$ 15 Solotnik : 24 Solotnik ꝛc.

Umgekehrt können wir bei einer Proportion in benannten Zahlen die Benennungen des einen Verhältnisses allein, oder bei beiden Verhältnissen zugleich weglassen; z. B. aus (7 Pfd.) : (13 Pfd.) $=$ (21 Rubel) : (39 Rubel) können wir herleiten:

7 : 13 = 21 Rubel : 39 Rubel
7 Pfund : 13 Pfund = 21 : 39
7 : 13 = 21 : 39.

§ **126**. Lehrsatz. Wenn Vielfache von benannten Zahlen einander gleich sind, so stehen die benannten Einheiten im umgekehrten Verhältnisse ihrer Coefficienten. Wenn also (a . M) = (b . N), so muß sein:

$$1\,M : 1\,N = \mathbf{b} : \mathbf{a}$$

Beweis. Die Richtigkeit des Lehrsatzes folgt unmittelbar aus § 109.

Anwendung.

1) 7 Yards = 9 Arschin

giebt; 1 Yards : 1 Arschin = 9 : 7.

2) 100 Thaler = 92 Rubel

1 Rubel : 1 Thaler = 100 : 92.

---

§ **127**. Die Abhängigkeit zweier ungleichartiger Dinge haben wir eine Werthgleichung genannt (§ 67). Dabei lernten wir zwei Beziehungen kennen, die wir directe und indirecte Verhältnisse nannten. — Allgemein werden wir diese folgendermaaßen ausdrücken. Es sei

A . . . . . . B

die gegebene Werthgleichung; dann haben wir, wenn A und B in directem Verhältnisse stehen,

nA . . . . nB,

d. h. wenn A zu nA ansteigt, so muß der Werth von, A d. h. die Zahl B zu nB ansteigen. Wir haben also hier zwischen zwei beliebigen Quantitäten A und nA und zwei anderen Quantitäten B und nB dasselbe geometrische Verhältniß, so daß

$$A : (nA) = B : nB = 1 : n;$$

z. B. die Werthgleichung sei:

4 Pfund . . . . . . 7 Rubel,

so ist klar, daß das Doppelte, Dreifache . . . . nfache von 4 Pfd. zwei, drei . . . . . . n mal so viel gelten wird, daher muß sein:

$$2 \cdot (4 \text{ Pfund}) \ldots\ldots 2 \cdot (7 \text{ Rubel})$$
$$3 \cdot (4 \text{ Pfund}) \ldots\ldots 3 \cdot (7 \text{ Rubel})$$
$$\vdots$$
$$n \cdot (4 \text{ Pfund}) \ldots\ldots n \cdot (7 \text{ Rubel})$$

mithin:

$$(4 \text{ Pfd.}) : n\,(4 \text{ Pfd.}) = (7 \text{ Rubel}) : n\,(7 \text{ Rubel}) = 1 : n$$

Stehen aber A und B in indirectem Verhältnisse; stellt z. B. A die Zahl der Arbeiter und B die Zeit vor, in welcher eine gewisse Arbeit geleistet wird, so werden wir bekommen:

$$n \cdot A \ldots\ldots \frac{B}{n},$$

d. h. wenn A zu nA ansteigt, so vermindert sich B zu $\frac{B}{n}$.

Hier findet zwischen den beiden Quantitäten der ersten Größe und den beiden Quantitäten der anderen nur dann ein richtiges geometrisches Verhältniß statt, wenn wir das eine Paar in umgekehrter Ordnung nehmen; also

$$A : nA = \left(\frac{B}{n}\right) : B;$$

z. B. die Werthgleichung sei:

$$5 \text{ Arbeiter} \ldots\ldots 8 \text{ Tage}.$$

Nun wird offenbar die doppelte, dreifache .... nfache Anzahl der Arbeiter, in der halben, dritten .... ntel Zeit dasselbe leisten; es muß also sein:

$$2 \cdot (5 \text{ Arbeiter}) \ldots\ldots \frac{8 \text{ Tage}}{2}$$
$$3 \cdot (5 \text{ Arbeiter}) \ldots\ldots \frac{8 \text{ Tage}}{3}$$
$$\vdots$$
$$n \cdot (5 \text{ Arbeiter}) \ldots\ldots \frac{8 \text{ Tage}}{n}$$

folglich:

$$(5 \text{ Arbeiter}) : n \cdot (5 \text{ Arbeiter}) = \frac{8 \text{ Tage}}{n} : 8 \text{ Tagen} = 1 : n.$$

Die einfache Regeldetri.

§ 128. Die einfache Regeldetri ist nichts Anderes, als eine Vorschrift, nach der man aus einer in Worte gekleideten Aufgabe eine Proportion zu bilden und ein darin fehlendes Glied zu berechnen hat.

Jede Aufgabe, in der zwei Werthgleichungen vorkommen, gehört zur Regeldetri. Die erste Werthgleichung heißt die Angabe und besteht aus zwei bekannten, von einander abhängigen Größen; die zweite Werthgleichung wird die Frage genannt, in welcher eben solche Größen vorkommen, wie in der Angabe, von denen aber eine unbekannt ist (§ 66). Die gleichnamigen Größen aus der Angabe und Frage geben die Glieder der beiden Verhältnisse in der zu bildenden Proportion. Wir wollen an bestimmten Zahlenbeispielen das zu beobachtende Verfahren erläutern.

1) Wenn 5 Pfund mit 15 Rubeln bezahlt werden; wie theuer sind 12 Pfund?

Ausrechnung. Hier ist

(die Angabe) 5 Pfund . . . . . . 15 Rubel,

(die Frage) 12 Pfund . . . . . . x Rubel?

Beurtheilung. Wenn 5 Pfund . . . . . 15 Rubel, so muß offenbar das Doppelte, Dreifache . . . . nfache von 8 Pfund . . . . zwei, drei . . . . nmal so viel gelten, daher stehen die Mengen der Waare und die Größe des Preises in directem Verhältnisse (§ 127). Hieraus schließen wir: so oft 12 Pfund in 5 Pfund enthalten sind, eben so oft müssen x Rubel in 15 Rubel stecken, woraus sich ergiebt:

(1ste Größe der Angabe) : (1sten Größe der Frage) = (2te Größe der Angabe : x.

Oder für unsern vorliegenden Fall:

5 Pfund : 12 Pfund = 15 Rubel : x Rubel?

Sind nach diesem Ansatze die beiden ersten Glieder bereits gleichnamig, so läßt man sogleich die Benennung weg (§ 125); sind diese Glieder von verschiedener Benennung oder mehrsortig, so bringt man sie erst auf gleiche Benennung und läßt dann die Benennung weg. Hiernach haben wir:

5 : 12 = 15 Rubel : x Rubeln?

Woraus folgt:

$$x = \frac{12 \cdot (15 \text{ Rubel})}{5} = 36 \text{ Rubel } (\S\ 110).$$

2) 8 Arbeiter brauchen zu einer Arbeit 19 Tage; in welcher Zeit wird diese Arbeit ausgeführt von 10 Arbeitern?

Auflösung:

(Angabe) 8 Arbeiter . . . . . . 19 Tage
(Frage) 10 Arbeiter . . . . . . x Tage?

Beurtheilung. Wenn 8 Arbeiter 19 Tage brauchen, so werden 2 mal, 3 mal . . . n mal so viel Arbeiter die Hälfte, den dritten . . . . den n ten Theil von 19 Tagen nöthig haben; folglich steht die Menge der Arbeiter mit der Zahl der Tage in indirectem Verhältnisse. Wir haben demnach nach § 127:

(1stes Glied der Frage) : (1sten Gliede der Angabe) = (2tes Glied der Angabe) : x

Oder für den vorliegenden Fall:

10 Arbeiter : 8 Arbeitern = 19 Tage : x Tagen?

Mithin, nach Weglassung der Benennung in den beiden ersten Gliedern,

10 : 8 = 19 Tage : x Tagen?

Also:

$$x = \frac{8 \cdot (19 \text{ Tage})}{10} = 15\tfrac{1}{5} \text{ Tage}.$$

Anmerkung. Im Vorliegenden sind die wesentlichen Regeln zur Behandlung der Aufgaben für directe und indirecte Verhältnisse enthalten. Mancherlei Kunstgriffe zur Förderung der Ausrechnung, als das Wegschaffen der Brüche, das Heben gemeinsamer Factoren aus dem ersten Gliede und den Mittelgliedern der Proportion beruhen auf den Sätzen § 106 und § 113, A.

Die zusammengesetzte Regeldetri.

§ 129. Bei der einfachen Regeldetri waren drei Zahlengrößen gegeben; — man suchte aus ihnen eine Proportion zu bilden, und bestimmte das fehlende vierte Glied derselben. Auf ähnliche Art kann man zu 5, 7, 9 u. s. w. gegebenen Größen die 6te, 8te, 10te u. s. w. zu bestimmen verlangen. Natürlich müssen die gegebenen Größen von der Art sein, daß sich daraus mehre Proportionen bilden lassen, die man nachher mit einander verbindet. Die ältern Rechenmeister hatten nach der Anzahl der gegebenen Größen verschiedene Benennungen für die Ausrechnung solcher Aufgaben. Sie unterschieden eine Regula quinque, Regula septem u. s. w., je nachdem 5, 7 u. s. w. Größen als bekannt vorausgesetzt wurden. Gegenwärtig fassen wir alle diese Aufgaben unter den gemeinsamen Namen: zusammengesetzte Proportionsrechnung oder zusammengesetzte Regeldetri zusammen. Jede hierher gehörige Aufgabe besteht, wie die einfache Regeldetri-Aufgabe, aus 2 Theilen, nehmlich aus der Angabe und aus der Frage. In der Angabe kommen lauter bekannte Zahlen vor, die aber von einander abhängen, d. h. eine Änderung der einen bedingt nothwendig eine Änderung der andern. In der Frage müssen dieselben Benennungen vorkommen, wie in der Angabe, und alle bis auf eine bekannt sein. Wie solche Aufgaben durch aufeinanderfolgende Schlüsse aufzulösen sind, haben wir bereits nachgewiesen in § 67 bis § 68; hier haben wir die Methode zu erläutern, wie solche Aufgaben mit Hülfe der Proportionen zu behandeln sind. Wir werden an bestimmten Zahlenbeispielen das Verfahren in einer solchen Weise zu erläutern suchen, daß daraus die Allgemeinheit der Methode hervorgeht.

1) Wenn 7 Arbeiter in 8 Tagen 60 Rubel verdienen; wieviel werden 10 Arbeiter in 14 Tagen erhalten?

Auflösung. Es ist im vorliegenden Fall:

(die Angabe) 7 Arbeiter in 8 Tagen . . . . . . 60 Rubel;
(die Frage) 10 „ „ 14 „ . . . . . . x „ ?

Wir denken uns jetzt folgende Zwischengrößen:

7 Arbeiter in 8 Tagen . . . . . . 60 Rubel
10 „ „ 8 „ . . . . . . u „ ?
10 „ „ 14 „ . . . . . . x „ ?

Es ist nehmlich die Aufgabe zu lösen:

7 Arbeiter verdienen 60 Rubel (in 8 Tagen)
also 10 „ „ u „ (ebenfalls in 8 Tagen).

Nach der Regeldetri haben wir:

(7 Arbeiter) : (10 Arbeitern) = 60 Rubel : u Rubeln?

Da nun bei der Beurtheilung sich ergiebt, daß die Zahl der Arbeiter mit ihrem Arbeitslohne in directem Verhältnisse steht, so muß sein

$$\text{I.}\quad 7 : 10 = 60 : u?\ (\S\ 128).$$

Also $$u = \frac{10 \cdot 60}{7}.$$

Jetzt ist u eine bekannte Zahl, und wir haben für die zweite Aufgabe:

In 8 Tagen zahlt man . . . . u Rubel (an 10 Arbeiter)
also, in 14 „ „ „ . . . . x „ ? (ebenfalls an 10 Arbeiter).

Hieraus ergiebt sich die neue Proportion:

$$8 \text{ Tage} : 14 \text{ Tagen} = u \text{ Rubel} : x \text{ Rubeln?}$$

Da die Beurtheilung zeigt, daß die Anzahl der Tage mit dem Arbeitslohne in directem Verhältnisse steht, so muß sein:

$$\text{II.}\quad 8 : 14 = u : x.$$

Also

$$x = \frac{14 \cdot u}{8}.$$

Setzen wir nun statt u seinen aus I gezogenen Werth (nehmlich $u = \frac{10 \cdot 60}{7}$), so ergiebt sich:

$$x = \frac{14 \cdot 10 \cdot 60}{8 \cdot 7} = 150.$$

Wenn wir die beiden Proportionen (I) und (II) unter einander schreiben, nehmlich:

$$7 : 10 = 60 : u$$
$$8 : 14 = u : x,$$

so haben wir rechts zusammenhängende Verhältnisse, daher nach § 122:

$$(7 \cdot 8) : (10 \cdot 14) = 60 : x,$$

woraus sich ergiebt:

$$x = \frac{(10 \cdot 14) \cdot 60}{7 \cdot 8} = 150,$$

wie vorhin.

Wir haben nur jetzt die gefundene Zahl 150 auf dieselbe Benennung zu beziehen, die x ursprünglich hatte, und erhalten

$$x \text{ Rubel} = 150 \text{ Rubel}.$$

2) In 5 Tagen beendigen 10 Arbeiter, wenn sie täglich 10 Stunden arbeiten, einen Graben von 160 Saschen Länge; wie viel Tage brauchen 15 Arbeiter auf 384 Saschen Länge bei 8 Stunden täglich?

Auflösung.

(Angabe)	10 Arbeiter,	10 Stund. tägl.,	160 Saschen Länge	... 5 Tage
(Frage)	15 „	8 „ „	384 „ „	... x „ ?

Wir denken uns jetzt folgende unbekannte Zwischengrößen:

10 Arbeiter,	10 Stunden täglich,	160 Saschen Länge	.... 5 Tage
15 „	10 „ „	160 „ „	.... t „
15 „	8 „ „	160 „ „	.... u „
15 „	8 „ „	384 „ „	.... x „

Wir sollen nehmlich berechnen:

1) wieviel Tage (t) 15 Arbeiter bei 10 St. tägl. und 160 Sasch. Länge
2) „ „ (u) 15 „ „ 8 „ „ „ 160 „ „
3) „ „ (x) 15 „ „ 8 „ „ „ 334 „ „
brauchen werden.

Überhaupt geht man mit der Einführung der Zwischengrößen so lange fort, bis man auf die Frage selbst, d. h. auf die eigentlich gesuchte Zahl x kommt.

Für die erste Zwischengröße haben wir die Proportion:

(10 Arbeiter) : (15 Arbeitern) = (5 Tage) : (t Tagen).

Beurtheilung. Je mehr Arbeiter sind, desto weniger Tage werden nöthig sein; daher die Zahl der Arbeiter und die Zahl der Tage in indirectem Verhältnisse; folglich die zur Berechnung von t richtige Proportion:

I) 15 : 10 = 5 : t (§ 129, 2)

Für die zweite Zwischengröße haben wir die Proportion:

(10 Stunden täglich) : (8 Stunden täglich) = (t Tage) : (u Tagen)?

Beurtheilung. Je mehr Stunden täglich gearbeitet wird, desto weniger Tage sind nöthig, deshalb ein indirectes Verhältniß; folglich die zur Berechnung von u richtige Proportion:

II) 8 : 10 = (t) : u.

Für die letzte Größe x haben wir endlich:

(160 Sasch. Länge) : (384 Sasch. Länge) = (u Tage) : (x Tagen)?

Beurtheilung. Je mehr Saschen Länge sind, desto mehr Tage wird man brauchen; deshalb die zur Berechnung von x richtige Proportion:

$$\text{III)}\quad 160 : 384 = u : x.$$

Stellen wir die drei Proportionen unter einander

$$15 : 10 = 5 : (t)$$
$$8 : 10 = (t) : (u)$$
$$160 : 384 = (u) : x,$$

so muß sein:

$$(15 \,.\, 8 \,.\, 160) : (10 \,.\, 10 \,.\, 384) = 5 : x \text{ (§ 122).}$$

Also $$x = \frac{(10 \,.\, 10 \,.\, 384) \,.\, 5}{(15 \,.\, 8 \,.\, 160)} = 10 \text{ Tage.}$$

Da die Zwischengrößen t und u gar nicht berechnet zu werden brauchen, weil sie bei der Zusammensetzung der Proportionen herausfallen, so schreibt man sogleich aus der Angabe und Frage:

$$\left.\begin{array}{l}(10 \text{ Arbeiter}) : (15 \text{ Arbeitern}) \\ (10 \text{ Stunden täglich}) : (8 \text{ Stunden täglich}) \\ (160 \text{ Sasch. Länge}) : (384 \text{ Sasch. Länge})\end{array}\right\} = 5 \text{ Tage} : x \text{ Tagen?}$$

und nennt dieses den vorläufigen Ansatz.

Hierauf untersucht man, ob die Zahlen der ersten Reihe (bei uns 10 Arbeiter, 10 Stunden täglich, 160 Saschen Länge) mit dem dritten Gliede (d. h. 5 Tage) in directem oder in indirectem Verhältnisse stehen. Wir haben bereits oben gesehen, daß die beiden ersten Zahlen in indirectem und die dritte Zahl in directem Verhältnisse zu 5 Tagen stehen, deshalb kehren wir die beiden ersten Verhältnisse um, — lassen die Benennungen der Verhältnißglieder weg, und haben dann als richtigen Ansatz:

$$\left.\begin{array}{r}15 : 10 \\ 8 : 10 \\ 160 : 384\end{array}\right\} = 5 \text{ Tage} : x \text{ Tagen?}$$

Hierauf multipliciren wir die mittlern Zahlen und dividiren mit dem Producte der Zahlen im ersten Gliede, so daß

$$x = \frac{10 \,.\, 10 \,.\, 384 \,.\, (5 \text{ Tage})}{15 \,.\, 8 \,.\, 160} = 10 \text{ Tage}$$

gefunden wird.

Daß es in dem Verfahren keinen Unterschied machen kann, wenn mehr als drei Proportionen nöthig werden, ist klar.

Handelt es sich darum, eine Aufgabe auszurechnen, so wird man natürlich diejenigen Vortheile benutzen, die durch Aufheben der Zahlen im Zähler und Nenner sich bieten. Ebenso wenig kann es eine Schwierigkeit abgeben, wenn Brüche oder gemischte Zahlen irgend wo vorkommen, weil wir das hier übliche Verfahren (§ 67 — 68) hinlänglich erläutert haben. Hier lag uns nur die Aufgabe vor, zu zeigen, wie mit Hülfe der Proportionen die Multiplicatoren und Divisoren ihren Platz erhalten.

Die Repartitionsrechnung.

§ 130. Bei den Aufgaben der Gesellschafts- oder Repartitionsrechnung soll die Theilung einer Zahl P dergestalt geschehen, daß sich die einzelnen Theile wie gegebene Zahlen a, b, c, d verhalten.

Setzen wir nun, diese Theile seien u, x, y, z so haben wir:

$$a:b:c:d = u:x:y:z;$$

also

$$(a+b+c+d):(u+x+y+z) = a:u = b:x = c:y = d:z \text{ (§117. Anm.)}$$

Nun ist $u + x + y + z = P$; folglich

$$(a + b + c + d):P = a:u = b:x = c:y = d:z,$$

woraus sich sogleich ergiebt:

$$u = \left(\frac{P}{a + b + c + d}\right) . a,$$

d. h. man erhält jeden zu suchenden Theil, wenn man den Quotienten aus der Summe aller Verhältnißzahlen in die zu theilende Zahl mit der, jedem Theile entsprechenden Verhältnißzahl multiplicirt.

Setzen wir die Summe der Theilungszahlen $a+b+c+d = S$, so muß sein:

$$u = \left(\frac{P}{S}\right) . a$$

$$x = \left(\frac{P}{S}\right) . b$$

$$y = \left(\frac{P}{S}\right) . c$$

$$z = \left(\frac{P}{S}\right) . d$$

Mithin

$$u + x + y + z = \left(\frac{P}{S}\right) a + \left(\frac{P}{S}\right) b + \left(\frac{P}{S}\right) c + \left(\frac{P}{S}\right) d$$
$$= \left(\frac{P}{S}\right) [a + b + c + d]$$
$$= \left(\frac{P}{S}\right) . S = P.$$

Ferner haben wir:

$$u : x = \left(\frac{P}{S}\right) . a : \left(\frac{P}{S}\right) . b = a : b$$
$$x : y = \left(\frac{P}{S}\right) . b : \left(\frac{P}{S}\right) . c = b : c$$
$$y : z = \left(\frac{P}{S}\right) . c : \left(\frac{P}{S}\right) . d = c : d.$$

Also verhalten sich die gefundenen Theile wie die gegebenen Größen und ihre Summe ist $= P$, wie es sein soll.

Gehört die Aufgabe zur zusammengesetzten Gesellschaftsrechnung, so ist eine doppelte Reihe von Verhältnißzahlen gegeben. Man verschafft sich durch Multiplication oder Division derselben, je nachdem sie directe oder indirecte Beziehungen ausdrücken, eine einfache Reihe und verfährt wie vorhin.

Die Kettenregel.

§ 131. In der einfachen Kettenregel haben wir aus gegebenen Zwischenverhältnissen die Größen verschiedener metrischen Systeme durch einander auszudrücken (§ 80). Setzen wir, daß a Einheiten einer gewissen Gattung $= b$ Einheiten einer andern Gattung; a_1 Einheiten dieser zweiten Gattung $= b_1$ Einheiten einer dritten Gattung; a_2 Einheiten dieser dritten Gattung $= b_2$ Einheiten einer vierten Gattung seien, so daß, wenn wir die Einheiten dieser 4 Gattungen mit B; B_1; B_2; B_3 bezeichnen, es darauf ankommt, die Einheiten der ersten Sorte B durch die Einheiten der vierten Sorte B_3 ausdrücken; dann haben wir nach der Voraussetzung:

1) $a \; B = b \; . B_1$
2) $a_1 B_1 = b_1 \; . B_2$
3) $a_2 B_2 = b_2 \; . B_3$

Aus diesen Gleichungen folgt nach § 126.

$$
\begin{aligned}
1\,B &: 1\,B_1 = b : a \\
1\,B_1 &: 1\,B_2 = b_1 : a_1 \\
1\,B_2 &: 1\,B_3 = b_2 : a_2
\end{aligned}
$$

daher $1\,B : 1\,B_3 = b \,.\, b_1 \,.\, b_2 : a \,.\, a_1 \,.\, a_2$ (§ 122),

also $$1\,B = \frac{b \,.\, b_1 \,.\, b_2}{a \,.\, a_1 \,.\, a_2} \,.\, B_3$$

Wären nun m Einheiten der Gattung B durch B_3 auszudrücken, so hätten wir

$$m\,B = \frac{m \,.\, b \,.\, b_1 \,.\, b_2}{a \,.\, a_1 \,.\, a_2} \,.\, B_3.$$

Setzen wir nun:

$$
\begin{aligned}
x\ B_3 ? &= m\ B \\
a\ B &= b\ B_1 \\
a_1\ B_1 &= b_1\ B_2 \\
a_2\ B_2 &= b_2\ B_3
\end{aligned}
$$

so folgt: $x = \left(\frac{m \,.\, b \,.\, b_1 \,.\, b_2}{a \,.\, a_1 \,.\, a_2}\right) B_3$ (§ 80).

Daß mehre Gleichungen in dem Verfahren keinen Unterschied machen können, übersieht man leicht. Ebenso ist klar, daß das Verfahren sich gleich bleiben muß, wenn außer den Reductionen noch eine Werthgleichung hinzukommt, wodurch man nur eine Proportion mehr erhält und die Aufgabe der zusammengesetzten Kettenregel angehört.

Die Alligations-Rechnung.

§ **132**. Bezeichnet a die Menge der Einheiten (Quantität) und q den Werth jeder Einheit derselben (Qualität), so wird durch a . q der Werth des Ganzen ausgedrückt (§ 79); z. B. Wie theuer sind a Pfund einer Waare, wenn 1 Pfund mit b Kopeken bezahlt wird?

Auflösung. Offenbar werden a Pfund a mal so viel als 1 Pfund gelten, deshalb ihr Werth .... a . q Kopeken sein.

Gesetzt nun, man wollte mischen:

1) a Einheiten, von denen jede q Rubel kostet
b " " " " q' " "
c " " " " q'' " "

und verlangt zu wissen, wie theuer 1 Pfund der ganzen Mischung; so haben wir:

a Einheiten kosten . . . . . . a . q Rubel
b " " . . . . . . b . q' "
c " " . . . . . . c . q'' "

folglich $(a + b + c)$ Einheiten . . . . . . $(aq + b \cdot q' + cq'')$ Rubel
daher (1 Einheit) : $(a + b + c)$ Einheiten $=$ x Rbl. : $(aq + bq' + cq'')$ R.

also $$x = \frac{aq + bq' + cq''}{a + b + c} \text{ Rubel } (\S\ 110),$$

d. h. man dividirt die Summe der Producte aus Quantität und Qualität jedes Bestandtheiles mit der Summe der Quantitäten der Bestandtheile (§ 79).

2) Jemand braucht P Pfund einer Waare à Q Kopeken und hat vorräthig p Pfund von derselben Sorte à q Kopeken; wie hoch kommt 1 Pfund einer schlechtern Sorte, die er mit der letztern Waare mischen will?

Auflösung.

P Pfund à Q Kopeken haben einen Werth . . . . . P . Q Kopeken
p " à q " " " " . . . . . p . q "

Es fehlen $(P - p)$ Pfd. à x Kop.; diese kosten . . . $(Pq - pq)$ Kop.; folglich:

1 Pfund : $(P - p)$ Pfund $=$ x Kopeken : $(PQ - pq)$ Kopeken

daher $$x = \frac{PQ - pq}{P - p} \text{ Kopeken } (\S\ 110),$$

wie wir gefunden im § 79.

3) Man hat zwei Sorten einer Waare, — die Einheit der bessern zum Preise a, die der schlechtern zum Preise b; wieviel muß man von jeder Sorte nehmen, um P Einheiten einer Mittelsorte zu bekommen, von denen jede den Preis m habe?

Auflösung. Gesetzt, es seien von der bessern Sorte x Einheiten genommen, — dann kommen nothwendig von der schlechtern $(P - x)$ Einheiten dazu.

Der Werth der bessern Sorte ist ..... $a\,x$

„ „ „ schlechtern „ „ ..... $b\,(p - x)$

also der Werth von beiden .... $ax + b\,(p - x) = ax + bp - bx$.

Da die Mischung p Einheiten erhalten soll, von denen jede den Preis m hat, so wird der ganze Werth der Mischung ausgedrückt durch $p\,.\,m$.

Wir haben jetzt zwei Werthe für die Mischung, die einander gleich sein müssen, daher

$$ax + bP - bx = Pm.$$

Nun ist $bp = bp$. Subtrahiren wir, so muß

sein $ax - bx = pm - bp$.

Oder $(a - b)\,.\,x = (m - b)\,.\,P$,

folglich $x = \frac{(m-b).p}{a-b}$ = der Menge der Einheiten der bessern Sorte.

Die Quantität der schlechtern Sorte ergiebt sich dadurch, daß wir x von P subtrahiren. Dieses giebt:

$p - x = p - \frac{p\,(m-b)}{a-b}$. Auf gleiche Nenner gebracht, haben wir:

$= \frac{p\,(a-b) - p(m-b)}{a-b}$. Die Klammern im Zähler aufgelöst:

$$= \frac{pa - pb - pm + pb\ ^{*)}}{a - b}$$

$$= \frac{pa - pm}{a-b} = \frac{p\,(a-m)}{a-b},$$

folglich:

(Quantität der bessern Sorte) : (Quantität der schlechtern Sorte)

$$= \frac{p\,(m-b)}{a-b} : \frac{p\,(a-m)}{a-b}$$

$$= (m - b) : (a - m)\ (\S\ 106),$$

---

*) Diese Umformung begründet folgender Satz: Eine Differenz $b - z$ wird von einer Zahl a subtrahirt, wenn man den Minuendus (b) von ihr subtrahirt, und den Subtrahendus (z) addirt; also $a - (b - z) = a - b + z$.

Dieser Satz ergiebt sich durch folgende Betrachtung: Nehmen wir von a, b Einheiten weg, so ist der Rest $(a - b)$ zu klein, weil wir nicht b selbst, sondern $b - z$, d. h. z Einheiten weniger zu subtrahiren hatten. Um diesen Fehler auszugleichen, addiren wir zu dem gefundenen Reste $(a - b)$ die z Einheiten, und haben dann $a - (b - z) = a - b + z$.

d. h. die Quantitäten der mit einander zu verbindenden Theile verhalten sich umgekehrt wie die Unterschiede ihrer Qualitäten von der Qualität der zu bildenden Verbindung (§ 79, III).

4) Man hat zwei Sorten Waare, — die Einheit der bessern zum Preise a, die der schlechtern zum Preise b; ferner weiß man, daß die Mischung den Preis m haben soll, und daß sich k Einheiten der bessern Sorte darin befinden; wieviel Einheiten kommen von dem andern Bestandtheile dazu?

Auflösung. Gesetzt, es seien vom 2ten Bestandtheile x Einheiten nöthig, so haben wir

$$k : x = (m - b) : (a - m) \quad \text{(nach 3) dieses §)}$$

$$\text{also } x = \frac{k \cdot (a - m)}{m - b}.$$

Die Menge der Mischung ist gleich der Summe der beiden Bestandtheile, also:

$$= k + x = k + \frac{k(a-m)}{m-b}$$

$$= \frac{k(m-b) + k(a-m)}{m-b} = \frac{km - kb + ka - km}{m-b}$$

$$= \frac{ka - kb}{m-b} = \frac{k(a-b)}{m-b}. \quad \text{Vergleiche § 79, IV.)}$$

In demselben Verlage sind erschienen:

Ahrens, Ed., Abriß einer geographischen und genealogi[...] sämmtlicher Staaten alter und neuer Zeit. [...] beim Gebrauche histor. Werke. 1858. 1 Rbl. 20 Cop. S.

Blagoweschtschensky, W., Chrestomathie zum Uebersetzen aus dem Deutschen in's Russische. 2. Aufl. 1844. 1 Rbl. 15 Cop. S.

Golotusow, F., Leitfaden zum ersten Unterricht in der russischen Sprache. 4. verb. Aufl. 1859. 40 Cop. S.

Іорданъ, П., *Краткое руководство къ географіи Россійской Имперіи въ физическомъ и политическомъ отношеніи.* 1857. 60 Cop. S.

Pahnsch, J., Arithmetische Aufgaben. Eine Zugabe zum Leitfaden für den Unterricht im Rechnen. 2. Aufl. 1857. 70 Cop. S.

— Resultate der arithmetischen Aufgaben. 2. Aufl. 1857. 40 Cop. S.

Pihlemann, J., Practischer Leitfaden zum Erlernen der russischen Sprache. 2. verb. Aufl. 1859. 1 Rbl. S.

Santo, G. M., Kurze Grammatik der deutschen Sprache. 1851. 60 Cop. S.

Schafranow, S., Mustersammlung deutscher Prosa. Zum Uebersetzen aus dem Deutschen in's Russische, für höhere Lehr-Anstalten. 1857. 1 Rbl. S.

Serno-Solowjewitsch, A., Praktische russische Grammatik für Deutsche. 2. verb. Aufl. 1858. 1 Rbl. S.

Tschereschewitsch, A., Chrestomathie zum Uebersetzen aus dem Deutschen in's Russische. 2. Aufl. 1856. 1 Rbl. 20 Cop. S.

— Lesebuch zum Uebersetzen aus dem Russischen in's Deutsche. 1857. 1 Rbl. S.

Weber, Ed., „Zu uns komme dein Reich!“ Gebet- und Andachtsbuch für Haus und Schule. 2 Abthl. 1851. 2 Rbl. 25 Cop. S.

Westberg, H., Grundzüge der Physik für Kreisschulen des Dorpatschen Lehrbezirks. 2. verb. Aufl. 1858. Carton. 80 Cop. S.

— Die Elemente der Geometrie. 2. verb. Aufl. 1855. Carton. 70 Cop. S.

— Der kleine Rechner oder Leitfaden zum theoretisch-practischen Rechnen nebst einer hinlänglichen Anzahl von Uebungs-Aufgaben. I. Lehrstufe. 1856. Carton. 30 Cop. S.

— — — II. Lehrstufe. 1857. Carton. 35 Kop. S.