

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Erko Olumets
Kumerusruumid
Matemaatika
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Ülo Reimaa

TARTU 2024

KUMERUSRUUMID

Bakalaureusetöö

Erko Olumets

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös uuritakse kumerusruume, mis on kumeruse mõistet üldistavad algebralised struktuurid. Peamise tulemusena näidatakse samaväärsust erinevate aksiomaatiliste kirjelduste vahel. Rakendusena kasutatakse üht aksiomaatilistest kirjeldustest vabade kumerusruumide defineerimiseks.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria.

Märksõnad: Algebra, kumerus, kumerusruum.

CONVEX SPACES

Bachelor thesis

Erko Olumets

Abstract

This thesis studies convex spaces, which are algebraic structures that generalize the notion of convexity. The main result is a proof of equivalency between two axiomatic representations of convex spaces. As an application, we use one of the axiomatizations to define free convex spaces.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory.

Key Words: Algebra, convexity, convex space.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Definiitsioonid ja mõisted	4
1.1 Kumerusruum	4
1.2 Geomeetrilised kumerusruumid	7
2 N-aarsed kumerad kombinatsioonid	10
3 Vaba kumerusruum hulgal	31
Kokkuvõte	33
Kasutatud allikad	34

Sissejuhatus

Kumerusruumi, kui eraldiseisva algebraise struktuurini on jõudnud mitmed erinevad matemaatikud: (Stone, 1949), (Neumann, 1970), (Flood, 1981), (Fritz, 2015). Abstraktne kumerusruumi definitsioon on motiveeritud kumerate tehete ja kumeruse kui operatsiooni üldistamisest.

Käesolev töö põhineb peamiselt Tobias Fritzi artiklil “Convex Spaces I: Definition and Examples” ja kasutame antud töös toodud kumerusruumi mõistet. Selle mõistega analoogilisi struktuure tuntakse ka nimede kumer hulk (*convex set*) ja barütsentriline algebra (*barycentric algebra*) all.

Esimeses peatükis tuuakse välja kumerusruumi definitsioon, näited kumerusruumidest ja mõisted näidete mõistmiseks. Teises peatükis esitatakse multiaarse kumerusruumi definitsioon ja töö põhitulemusena näidatakse, kuidas binaarseid tehteid laiendada kõrgema aarsusega teheteks ja kuidas karakteriseerida kõrgema aarsusega tehteid aksiomaatiliselt. Kolmas peatükk on vabadest kumerusruumidest.

Originaalse osana defineeritakse multiaarne kumerusruum ja näidatakse selle samaväärsust varasema kumerusruumi definitsiooniga.

Lugejalt eeldatakse algteadmisi algebrast kursuse Algebra I tasemel (vektorruumi, homomorfismi, alamruumide mõisted) ning mõnede näidete mõistmiseks mõningast kokkupuudet funktsionaalanalüüsiga.

1 Definiitsioonid ja mõisted

Selles peatükis defineeritakse töös vaja minevad definiitsioonid ja mõisted ning sõnastatakse abitulemused.

Definiitsioon 1.1. (Kaarli, 1989) Kui n on täisarv $n \geq 0$, siis n -**aarseks tehteks** hulgal A nimetatakse funktsiooni

$$A^n \rightarrow A.$$

Definiitsioon 1.2. (Kaarli, 1989) **Algebraalne struktuur** (universaalalgebra mõttes) on hulk A koos tehete perega hulgal A .

Näide 1.3. Vektorruumi üle reaalarvude saame anda algebraalse struktuurina, kui määratleme tehted

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A, & (x, y) &\mapsto x + y, & & \text{(liitmine)} \\ A &\rightarrow A, & x &\mapsto -x, & & \text{(vastandelemendi võtmine)} \\ \{*\} &\rightarrow A, & * &\mapsto 0, & & \text{(nullelement)} \end{aligned}$$

ning lisaks iga reaalarvu $\lambda \in \mathbb{R}$ korral tehte

$$A \rightarrow A, \quad x \mapsto \lambda x. \quad \text{(skalaariga } \lambda \text{ korrutamine)}$$

Seega, vektorruumi algebraalises esituses on lõpmatult palju tehteid.

1.1 Kumerusruum

Analoogiliselt vektorruumile, on ka kumerusruumil lõpmatult palju tehteid. See tähendab, et iga $\lambda \in [0, 1]$ korral on meil tehe, mida saame interpreteerida kumera kombinatsiooni võtmise operatsioonina.

Definiitsioon 1.4. (Fritz, 2015) Hulka C nimetatakse **kumerusruumiks**, kui on defineeritud kujutuste pere

$$cc_\lambda : C \times C \rightarrow C, \quad \lambda \in [0, 1]$$

nii, et

C1. $cc_0(x, y) = y$ iga $x, y \in C$ korral;

C2. $cc_\lambda(x, x) = x$ iga $x \in C$ korral;

C3. $cc_\lambda(x, y) = cc_{1-\lambda}(y, x)$ iga $x, y \in C$ korral;

C4. $cc_\lambda(cc_\mu(x, y), z) = cc_{\tilde{\lambda}}(x, cc_{\tilde{\mu}}(y, z))$, iga $x, y, z \in C$ korral, kus

$$\tilde{\lambda} = \lambda\mu, \quad \tilde{\mu} = \begin{cases} \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}, & \text{kui } \lambda\mu \neq 1; \\ \text{meelevaldne}, & \text{kui } \lambda = \mu = 1. \end{cases}$$

Märkus 1.5. Definitsioonis 1.4 toodud tingimustest C1-C4 rääkides ütleme ka C1 kohta *ühikseadus*, C2 kohta *idempotentsus*, C3 kohta *parameetriline kommutatiivsus* ja C4 kohta *parameetriline assotsiatiivsus*.

Märkus 1.6. Vaatame 1.4 C4 juhtu kui $\tilde{\lambda} = 1$. Kuna $\tilde{\lambda} = \lambda\mu$ ja $\lambda, \mu \in [0, 1]$, siis $\tilde{\lambda} = 1$ parajasti siis, kui $\lambda = \mu = 1$.

$$\begin{aligned} cc_\lambda(cc_\mu(x, y), z) &= cc_0(z, cc_\mu(x, y)) && \text{(1.4 C3 ehk parameetriline kommutatiivsus)} \\ &= cc_\mu(x, y) && \text{(1.4 C1 ehk ühikseadus)} \\ &= cc_0(y, x) && \text{(parameetriline kommutatiivsus)} \\ &= x && \text{(ühikseadus)} \\ cc_{\tilde{\lambda}}(x, cc_{\tilde{\mu}}(y, z)) &= cc_0(cc_{\tilde{\mu}}(y, z), x) && \text{(parameetriline kommutatiivsus)} \\ &= x && \text{(ühikseadus)} \end{aligned}$$

Seega $cc_\lambda(cc_\mu(x, y), z) = cc_{\tilde{\lambda}}(x, cc_{\tilde{\mu}}(y, z))$ ja $\tilde{\mu}$ on juhul $\tilde{\lambda} = 1$ suvaline.

Näide 1.7. (Fritz, 2015) Iga vektorruum üle \mathbb{R} on kumerusruum. Sel juhul defineerime kujutuste pere tehted vektorruumis V üle \mathbb{R} :

$$\forall x, y \in V, \quad \forall \lambda \in [0, 1]: \quad cc_\lambda(x, y) := \lambda x + (1 - \lambda)y$$

ehk defineerime kumerusruumi tehted vektorruumi liitmistest.

Kontrollime kumerusruumi definitsiooni järgi:

$$\begin{aligned}
cc_0(x, y) &= 0x + (1 - 0)y = 1y = y \\
cc_\lambda(x, x) &= \lambda x + (1 - \lambda)x = \lambda x - \lambda x + x = x \\
cc_\lambda(x, y) &= \lambda x + (1 - \lambda)y = (1 - \lambda)y + \lambda x = cc_{1-\lambda}(y, x) \\
cc_\lambda(cc_\mu(x, y), z) &= \lambda(\mu x + (1 - \mu)y) + (1 - \lambda)z \\
&= \lambda\mu x + \lambda(1 - \mu)y + (1 - \lambda)z \\
&= \lambda\mu x + \frac{1 - \lambda\mu}{1 - \lambda\mu} \lambda(1 - \mu)y + \frac{1 - \lambda\mu}{1 - \lambda\mu} (1 - \lambda)z \quad (\lambda\mu \neq 1) \\
&= \lambda\mu x + (1 - \lambda\mu) \left(\frac{\lambda(1 - \mu)}{1 - \lambda\mu} y + \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda\mu} z \right) \\
&= cc_{\tilde{\lambda}}(x, cc_{\tilde{\mu}}(y, z)),
\end{aligned}$$

sest $\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu} + \frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu} = \frac{\lambda-\lambda\mu+1-\lambda}{1-\lambda\mu} = \frac{1-\lambda\mu}{1-\lambda\mu} = 1$.

Sarnaselt vektorruumidele ja teistele algebralistele struktuuridele saab kumerusruumide vahel vaadata kujutusi ning alamhulki. Toome järgnevalt välja kumerusruumi homomorfismi ja alamkumerusruumi definitsioonid ning mõned näited.

Definitsioon 1.8. (Fritz, 2015) Olgu C ja C' kumerusruumid. Kujutust $f : C \rightarrow C'$ nimetatakse kumerusruumide **homomorfismiks**, kui iga $\lambda \in [0, 1]$ ja $x, y \in C$ korral

$$f(cc_\lambda(x, y)) = cc_\lambda(f(x), f(y))$$

ehk f säilitab iga kumera kombinatsiooni võtmise operatsiooni.

Näide 1.9. Olgu V, V' vektorruumid üle \mathbb{R} ja $f : V \rightarrow V'$ vektorruumide homomorfism. Näite 1.7 järgi on iga vektorruum üle \mathbb{R} kumerusruum. Näitame, et iga selline vektorruumide vaheline homomorfism on ka neile vektorruumidele vastavate kumerusruumide homomorfism. Olgu $x, y \in V$ ja $\lambda \in [0, 1]$. Siis vektorruumi homomorfismi definitsiooni järgi:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = f(\lambda x) + f((1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Kumerusruumi V tehtest $cc_\lambda(x, y) := \lambda x + (1 - \lambda)y$ saame

$$f(cc_\lambda(x, y)) = f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) = cc_\lambda(f(x), f(y)),$$

järelikult on kujutus $f : V \rightarrow V'$ kumerusruumide homomorfism.

Definitsioon 1.10. (Oja ja Oja, 1991) Olgu V vektorruum. Vektorruumi V alamhulka $A \subseteq V$ nimetatakse **kumeraks**, kui iga $x_1, x_2 \in A$ ja $\lambda \in [0, 1]$ korral $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in A$.

Definitsioon 1.11. Kumerusruumi C alamhulka A nimetame **alamkumerusruumiks**, kui mistahes $x, y \in A$ ja $\lambda \in [0, 1]$ korral $cc_\lambda(x, y) \in A$ ehk A on kinnine kõigi kumerate kombinatsioonide võtmise operatsioonide suhtes.

Näide 1.12. Olgu V vektorruum üle \mathbb{R} ja A vektorruumi V kumer alamhulk. Näite 1.7 järgi on V kumerusruum.

Olgu $x, y \in A$ ja $\lambda \in [0, 1]$. V kui kumerusruumi tehtest saame, et $cc_\lambda(x, y) = \lambda x + (1 - \lambda)y$ ning sellest, et A on V kumer alamhulk saame, et $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ ehk $cc_\lambda(x, y) \in A$.

Järelikult on vektorruumi V kumer alamhulk A kumerusruumi V alamkumerusruum.

1.2 Geomeetrilised kumerusruumid

Definitsioon 1.13. (Fritz, 2015) Kumerusruumi C nimetatakse **geomeetriliseks kumerusruumiks**, kui ta on mingisuguse vektorruumi kumer alamhulk.

Definitsioon 1.14. (Oja ja Oja, 1991) Funktsiooni $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ **kandjaks** nimetatakse lähtehulga X elemente, mille korral on funktsiooni f väärtus nullist erinev, tähistatakse

$$\text{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Definitsioon 1.15. (Fritz, 2015) Olgu X hulk, siis nimetatakse **simpleksiks** üle X -i hulka

$$\Delta_X := \left\{ f : X \rightarrow [0, 1] \mid \text{funktsiooni } f \text{ kandja on lõplik ja } \sum_{x \in X} f(x) = 1 \right\}.$$

Näide 1.16. Olgu X hulk, siis simpleks Δ_X on vektorruumi \mathbb{R}^X kumer alamhulk. Siis näite 1.12 järgi on Δ_X geomeetiline kumerusruum.

Näide 1.17. (Fritz, 2015) Olgu $(E, \|x\|)$ normeeritud ruum. Siis ühikker

$$B_1 \equiv \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$$

on E kumer alamhulk ja seega alamkumerusruum (näide 1.12) vektorruumis E . Järelikult on iga normeeritud ruumi ühikera geomeetriline kumerusruum.

Järgnevalt toome mõned näited mittegeomeetristest kumerusruumidest.

Definitsioon 1.18. (Kilp, 1998) Olgu (X, \leq) osaliselt järjestatud hulk. Öeldakse, et X on **alumine (ülemine) poolvõre** kui igal kahel hulga X elemendil on alumine (ülemine) raja $x \wedge y$ ($x \vee y$).

Käesolevas töös, kui pole öeldud teisiti, mõtleme poolvõre all alumist poolvõre.

Näide 1.19. (Fritz, 2015) Olgu X poolvõre. Defineerime kumerusruumi tehte alumise raja leidmise kaudu, kui $\lambda \in (0, 1)$, siis $cc_\lambda(x, y) := x \wedge y$ ning kui $\lambda \in \{0, 1\}$, siis kumerusruumi aksioomide järgi $cc_0(x, y) = y$ ja $cc_1(x, y) = cc_0(y, x) = x$. Vahetu kontroll näitab, et selline kumera tehte defineerimine on kumerusruumi aksioomidega (definitsioon 1.4 C1-C4) kooskõlas.

Definitsioon 1.20. (Fritz, 2015) Kumerusruumi C nimetatakse **kombinatoorseks**, kui iga $x, y \in C$ korral on funktsioonid kujul

$$(0, 1) \rightarrow C, \quad \lambda \mapsto cc_\lambda(x, y)$$

konstantsed. Võib näidata, et kumerusruumi tehe $cc_\lambda(x, y)$ on iga $\lambda \in (0, 1)$ korral on λ suhtes konstantne, siis on see kumerusruum näites 1.19 toodud kujul.

Näite 1.19 järgi saame igat alumist poolvõre vaadelda kumerusruumina. Toome mõned näited.

Näide 1.21. Olgu X hulk ja $\mathcal{P}(X)$ hulga X kõigi alamhulkade hulk. Hulk $\mathcal{P}(X)$ koos ühisosa leidmise operatsiooniga on poolvõre, iga $Y, Y' \in \mathcal{P}(X)$ korral $Y \wedge Y' := Y \cap Y'$ (hulga $\mathcal{P}(X)$ vähim element on tühi hulk). Näite 1.19 järgi defineerides saame, et $\mathcal{P}(X)$ on kumerusruum koos tehetega $cc_\lambda(Y, Y') := Y \cap Y'$, kui $\lambda \in (0, 1)$.

Näide 1.22. Olgu V vektorruum üle \mathbb{R} ja $\text{Sub}(V)$ vektorruumi V kõigi alamruumide hulk. Sarnaselt näitele 1.21 on $\text{Sub}(V)$ poolvõre, kus kahe alamruumi alumine raja on nende ühisosa.

Samuti saame vaadata hulka $\text{Conv}(V)$, mis on vektorruumi V kõigi kumerate alamhulkade hulk. Ka $\text{Conv}(V)$ on poolvõre, kus kahe alamhulga alumine raja on nende ühisosa. Seega näite 1.19 ja näite 1.12 järgi on $\text{Conv}(V)$ koos ühisosa operatsiooniga kumerusruum, mille elemendid on kumerusruumi V alamkumerusruumid.

Vektorruumi V kõigi kumerate alamhulkade hulgal saab defineerida kumerusruumi ka kumerusruumi V tehte kaudu.

Näide 1.23. (Fritz, 2015) Olgu V vektorruum üle \mathbb{R} ja $\text{Conv}(V)$, mis on vektorruumi V kõigi kumerate alamhulkade hulk. Kahe kumera alamhulga C_1, C_2 kumera kombinatsiooni saame anda iga $\lambda \in [0, 1]$ korral nii:

$$cc_\lambda(C_1, C_2) := \{cc_\lambda(c_1, c_2) \mid c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\}.$$

Sellise konstruktsiooniga kumerusruum ei ole geomeetriline ega kombinatoorne kumerusruum.

2 N-aarsed kumerad kombinatsioonid

Definitsioon 1.4 annab meile kumerusruumi mõiste koos binaarsete tehete. Kuna praktikas on tihti peale tarvis kasutada ka suurema aarsusega kumeraid kombinatsioone, defineerime kumerusruumi, kus tehete pere moodustab kõikide võimalike n -aarse tehete hulk. Selle peatüki eesmärk on näidata multiaarse kumerusruumi vastavust definitsioonile 1.4.

Definitsioon 2.1. Multiaarseks kumerusruumiks nimetame hulka C koos tehete

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} : C^n \rightarrow C, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n),$$

mis on antud iga $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ korral ja rahuldavad tingimusi:

C1. Iga $x_1, \dots, x_n \in C$ korral, kui leidub selline $i \in \{1, \dots, n\}$, et $\lambda_i = 1$, siis

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \lambda_j = 0 \text{ ja } \mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = x_i.$$

C2. Iga $x \in C$ korral

$$\mathbf{c}(\lambda_1 x, \dots, \lambda_n x) = x.$$

C3. Iga $x_1, \dots, x_n \in C$ ja iga bijektsiooni σ hulgal $\{1, \dots, n\}$ korral

$$\mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \mathbf{c}(\lambda_{\sigma(1)} x_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)} x_{\sigma(n)}).$$

C4. Iga $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \in C$ korral

$$\mathbf{c}(\lambda \cdot \mathbf{c}(\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n), \mu_1 y_1, \dots, \lambda_m y_m) = \mathbf{c}(\lambda \mu_1 x_1, \dots, \lambda \mu_n x_n, \lambda_1 y_1, \dots, \lambda_m y_m).$$

Märkus 2.2. Multiaarse kumerusruumi aksioomidest järeldub, et unaarsel juhul tähendab tehe $\mathbf{c}(\lambda x) = x$ (unaarsel juhul alati $\lambda = 1$) multiaarse kumerusruumi elemendi x samasusfunktsiooni.

Märkus 2.3. Multiaarse kumerusruumi tehete jaoks kasutame kahte erinevat kuju:

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n).$$

Vasakul pool võrdusmärgi olevat kuju ehk tehet \mathbf{c} koos indeksitega kasutame kui tahame rõhutada, millised on tehet ära määravad kordajad. Parempoolset kuju kasutame kui tahame, et oleks lihtsam näha, millistele hulga elementidele kujutuse kordajad vastavad.

Lause 2.4. *Olgu C multiaarne kumerusruum (def. 2.1). Siis kehtivad väited:*

1. *Olgu $n > 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ ja $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Kui leidub $i \in \{1, \dots, n\}$ nii, et $\lambda_i = 0$, siis iga $x_1, \dots, x_n \in C$ korral kehtib võrdus*

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n).$$

2. *Olgu $n > 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1)$ ja $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, siis iga $x_1, \dots, x_n \in C$ korral kehtib võrdus*

$$\mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \mathbf{c}(\mu \cdot \mathbf{c}(\nu_1 x_1, \nu_2 x_2, \dots, \nu_{n-1} x_{n-1}), \lambda_n x_n),$$

kusjuures $\mu = 1 - \lambda_n$, $\nu_1, \dots, \nu_{n-1} \in [0, 1]$ ja $\nu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}}$ iga $i \in \{1, \dots, n-1\}$ korral.

Tõestus. Kehtigu lause esimese osa eeldused, siis

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_i, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n}(x_1, x_i, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n}(\mathbf{c}_{1,0}(x_1, x_i), \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Siin esimene võrdus kehtib definitsiooni 2.1 tingimuse C3 tõttu ja teine võrdus sama definitsiooni tingimuse C4 tõttu. Definitsiooni 2.1 tingimusest C1 saame, et $\mathbf{c}_{1,0}(x_1, x_i) = x_1$ ehk oleme näidanud, et

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n}(\mathbf{c}_{1,0}(x_1, x_i), \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Nüüd kehtigu lause teise osa eeldused, siis definitsiooni 2.1 tingimuse C4 järgi

$$\mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \mathbf{c} \left((\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{c} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_1, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_2 \right), \lambda_3 x_3, \dots, \lambda_n x_n \right)$$

Kuna $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ eelduse järgi, siis saame nende summaga jagada, samuti kehtib $\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 1$ ehk tehe $\mathbf{c}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}x_1, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}x_2\right)$ on korrektne. Analoogiliselt saame, et

$$\mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \mathbf{c}((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot \mathbf{c}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}x_1, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}x_2, \frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}x_3\right), \lambda_4 x_4, \dots, \lambda_n x_n).$$

Kordame selliselt kordajate kokkuvõtmist kuni λ_{n-1} -ni, kaasa arvatud, siis saame võrduse

$$\mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \mathbf{c}((\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) \cdot \mathbf{c}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}}x_1, \dots, \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}}x_{n-1}\right), \lambda_n x_n).$$

Olgu nüüd $\mu = \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}$ ehk $\mu = 1 - \lambda_n$ ja $\nu_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}}$, iga $i \in \{1, \dots, n-1\}$ korral. Oleme näidanud, et

$$\mathbf{c}(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \mathbf{c}(\mu \cdot \mathbf{c}(\nu_1 x_1, \nu_2 x_2, \dots, \nu_{n-1} x_{n-1}), \lambda_n x_n). \quad \square$$

Järeldus 2.5. Olgu C hulk. Kui hulk C koos tehete perega $\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ ja hulk C koos tehete perega $\mathbf{c}'_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$ on multiaarsed kumerusruumid (def. 2.1) ning $\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2} = \mathbf{c}'_{\lambda_1, \lambda_2}$ iga $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, korral, kus $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, siis langevad kokku ka nende kumerusruumide suurema aarsusega tehted.

Tõestus. Olgu $n > 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ ja $x_1, \dots, x_n \in C$. Tahame näidata, et

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}'_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.4)$$

Kui kordajate $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hulgas on ülimalt kaks nullist erinevat kordajat λ_k ja λ_l , siis saame kasutada lause 2.4 esimest väidet ning saame, et $\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}_{k,l}(x_k, x_l)$ ja $\mathbf{c}'_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}'_{k,l}(x_k, x_l)$ ehk võrdus 2.4 järeldub lause 2.4 esimesest väitest.

Seega eeldame, et kordajate $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hulgas on vähemalt kolm nullist erinevat kordajat, olgu need $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}$, kus $3 \leq j \leq n$. Kordajad $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}$ täidavad

lause 2.4 teise väite eeldusi ehk

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_j}) &= \mathbf{c}_{1-\lambda_{k_j}, \lambda_{k_j}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_{k_1}}{1-\lambda_{k_j}}, \dots, \frac{\lambda_{k_{j-1}}}{1-\lambda_{k_j}}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_{j-1}}), x_{k_j}\right); \\ \mathbf{c}'_{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_j}) &= \mathbf{c}'_{1-\lambda_{k_j}, \lambda_{k_j}}\left(\mathbf{c}'_{\frac{\lambda_{k_1}}{1-\lambda_{k_j}}, \dots, \frac{\lambda_{k_{j-1}}}{1-\lambda_{k_j}}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_{j-1}}), x_{k_j}\right).\end{aligned}$$

Kui $j = 3$, siis eelduse järgi

$$\mathbf{c}_{\frac{\lambda_{k_1}}{\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}}, \frac{\lambda_{k_2}}{\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}}}(x_{k_1}, x_{k_2}) = \mathbf{c}'_{\frac{\lambda_{k_1}}{\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}}, \frac{\lambda_{k_2}}{\lambda_{k_1} + \lambda_{k_2}}}(x_{k_1}, x_{k_2}).$$

Kui $j > 3$, siis kasutame lause 2.4 teist väidet, kuni kõik sisemised tehted on binaarsed. Eelduse tõttu kõik nii saadud binaarsed tehted võrduvad ja seega iga sellise j korral

$$\mathbf{c}_{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_j}) = \mathbf{c}'_{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_j}).$$

Lause 2.4 esimesest väitest saame, et $\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}_{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_j})$ ja $\mathbf{c}'_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{c}'_{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_j}}(x_{k_1}, \dots, x_{k_j})$, millest järeldub, et võrdus (2.4) kehtib. \square

Teoreem 2.6. *Olgu C hulk. Kui hulk C koos tehetega cc_λ , $\lambda \in [0, 1]$ on kumerusruum (def. 1.4), siis leidub parajasti üks tingimust $\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2} = cc_{\lambda_1}$ rahuldav tehete pere $\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum_i \lambda_i = 1$, mis annab multiaarse kumerusruumi (def. 2.1).*

Olgu C kumerusruum definitsiooni 1.4 mõttes. Defineerime teoreemi 2.6 tõestamiseks sobiva tehete pere. Defineerime kõigepealt 2-aarse ja 3-aarse tehte definitsiooni 1.4 kaudu ning iteratiivselt induktsiooniga järgnevad aarsused. Kuigi 3-aarsete tehete eeskiri on n -aarsete tehetega analoogiline, siis toome selle eraldi välja, et näidata, kuidas binaarsetest tehetest koostatakse suuremaid aarsusi. Unaarsel juhul on tehe üheselt määratud definitsiooni 2.1 aksioomidest, seega vaatame suurema aarsusega tehteid.

Baas.

1. Kui $n=2$, siis defineerime pere 2-aarsed tehted definitsiooni 1.4 kaudu.

Iga $\lambda_1 \in [0, 1]$, $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$, $x_1, x_2 \in C$ korral olgu

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2}(x_1, x_2) := cc_{\lambda_1}(x_1, x_2). \quad (2a)$$

Siin saame justkui kordaja λ_2 “ära kaotada”, sest binaarse tehete korral määrab üks kordaja ka teise.

2. Kui $n=3$, siis defineerime 3-aarsed tehete binaarsete tehete kaudu.

Iga $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$, $x_1, x_2, x_3 \in C$ korral, kui $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, siis olgu

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) := \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3}(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3) \quad (2b)$$

ja kui $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, siis

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) := \mathbf{c}_{0, \lambda_3}(x_1, x_3). \quad (2c)$$

Kuna esimene kordaja on juhul $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ defineerides 0, siis ei loe, millise C elemendi me võtame esimesele kohale, aga et seal mingi element peab olema, siis sobib selleks ka näiteks x_1 . Samamoodi käitume ka suuremate aarsuste korral.

Samm. Olgu $n > 3$ ja kõik tehete kuni $(n - 1)$ -aarsuseni defineeritud, siis defineerime n -aarse tehete $(n - 1)$ -aarse tehete kaudu.

Iga $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, $x_1, \dots, x_n \in C$ korral, kui $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, siis olgu

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n}(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_n) \quad (2d)$$

ja kui $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, siis

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) := \mathbf{c}_{0, \lambda_3, \dots, \lambda_n}(x_1, x_3, \dots, x_n). \quad (2e)$$

Nüüd kui oleme defineerinud induktiivselt n -aarsed tehete binaarse kumerusruumi definitsiooni järgi, näitame, et selline tehete pere rahuldab ka definitsiooni 2.1 tingimusi.

Teoreemi 2.6 tõestamiseks tõestame enne eraldi lemma 2.7 ja lause 2.9 tingimuse C1 ehk ühikseaduse 2- ja 3-aarsete tehete jaoks ning tingimuse C3 ehk parameetrilise kommutatiivsuse kõikide aarsuste korral. Parameetrilise kommutatiivsuse seaduse eraldi tõestamine võimaldab esitada teoreemi 2.6 tõestuse lühemalt, aga kuna selle tingimuse tõestamiseks on vaja ka 2- ja 3-aarsete tehete ühikseadust, siis tõestame need laused antud järjekorras.

Lemma 2.7 (Ühikseadus). *Defineeritud tehete pere (2a-2e) 2- ja 3-aarsed tehted rahuldavad definitsiooni 2.1 tingimust C1.*

Tõestus. Olgu C kumerusruum definitsiooni 1.4 järgi. Tahame näidata, et definitsiooni 1.4 tehtest defineeritud 2- ja 3-aarsete tehted täidavad tingimust C1 definitsiooni 2.1 mõttes.

Seega peame näitama, et juhul kui üks kumera tehte kordajatest on 1, siis võrdub tehe sellele kordajale vastava C elemendiga.

1. Olgu $x_1, x_2 \in C$ ja $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Kasutame varem defineeritud tehet binaarsel juhul:

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2}(x_1, x_2) = cc_{\lambda_1}(x_1, x_2) = cc_0(x_1, x_2) = x_2,$$

kus esimese võrduse jaoks kasutame võrdust (2a) ja viimane võrdus kehtib definitsiooni 1.4 C1 ehk kumerusruumi ühikseaduse tõttu.

Kui $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, siis

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2}(x_1, x_2) = cc_{\lambda_1}(x_1, x_2) = cc_{1-\lambda_1}(x_2, x_1) = cc_0(x_2, x_1) = x_1,$$

kus teine võrdus kehtib definitsiooni 1.4 C3 ehk kumerusruumi parameetrilise kommutatiivsuse järgi ja viimane võrdus kehtib sama definitsiooni ühikseaduse tõttu.

2. Olgu $x_1, x_2, x_3 \in C$. Vaatame läbi kõik kolm erinevat juhtu $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ väärtuste jaoks.

Esiteks, kui $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, siis:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3}(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3) && (2b) \\ &= \mathbf{c}_{1, 0}(\mathbf{c}_{1, 0}(x_1, x_2), x_3) && (\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 0) \\ &= cc_1(cc_1(x_1, x_2), x_3) && (2a) \\ &= cc_0(x_3, cc_0(x_2, x_1)) && (\text{def. 1.4 C3}) \\ &= cc_0(x_3, x_1) && (\text{def. 1.4 C1}) \\ &= x_1. && (\text{def. 1.4 C1}) \end{aligned}$$

Teiseks, kui $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = 0$, siis

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3}(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3) && (2b) \\
&= \mathbf{c}_{1, 0}(\mathbf{c}_{0, 1}(x_1, x_2), x_3) && (\lambda_2 = 1, \lambda_1 = \lambda_3 = 0) \\
&= cc_1(cc_0(x_1, x_2), x_3) && (2a) \\
&= cc_0(x_3, cc_0(x_1, x_2)) && (\text{def. 1.4 C3}) \\
&= cc_0(x_3, x_2) && (\text{def. 1.4 C1}) \\
&= x_2. && (\text{def. 1.4 C1})
\end{aligned}$$

Viimaseks, juhul kui $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = 1$, siis

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{c}_{0, \lambda_3}(x_1, x_3) = cc_0(x_1, x_3) = x_3,$$

kus esimene võrdus tuleb sellest, kuidas on defineeritud 3-aarne tehe kui $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (2c). □

Märkus 2.8. Lause 2.9 tõestuses ei lähe meil vaja n -aarse tehte teisi tingimusi, vaid saame iga aarsuse juures tõestada parameetrilise kommutatiivsuse toetudes binaarse tehte tingimustele. See tuleb meile teoreemi 2.6 tõestamisel kasuks, kuna saame kordajaid vabalt ringi liigutada, ilma, et toetuksime teistele n -aarsuse tingimustele.

Lause 2.9 (Parameetriline kommutatiivsus). *Defineeritud tehete pere (2a-2e) rahuldab definitsiooni 2.1 tingimust C3.*

Tõestus. Olgu C kumerusruum definitsiooni 1.4 järgi. Tõestame kasutades tugevat matemaatilist induktsiooni, baasjuhtudeks on 2-aarsed ja 3-aarsed tehted.

Baas.

1. Olgu $x_1, x_2 \in C$ ja $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ nii, et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Kasutame varem defineeritud tehet binaarsel juhul:

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2}(x_1, x_2) = cc_{\lambda_1}(x_1, x_2) = cc_{1 - \lambda_1}(x_2, x_1) = \mathbf{c}_{\lambda_2, \lambda_1}(x_2, x_1),$$

kus teine võrdus kehtib kumerusruumi definitsioon 1.4 parameetrilise kommutatiivsuse tõttu.

2. Olgu $x_1, x_2, x_3 \in C$ ja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ nii, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$.

Kui kaks kordajatest on $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ on nullid, siis eelduse $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ tõttu on kolmas kordaja 1. Kui $\lambda_1, \lambda_2 = 0$ ja $\lambda_3 = 1$, siis 3-aarse tehte ühikseaduse (lemma 2.7) tõttu:

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{c}_{0, 0, 1}(x_1, x_2, x_3) = x_3,$$

millest saame lemmas 2.7 tõestatud ühikseadust tagurpidi kasutades, et

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) &= x_3 \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2}(x_1, x_3, x_2) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1}(x_3, x_2, x_1) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2}(x_3, x_1, x_2) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3}(x_2, x_1, x_3) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1}(x_3, x_2, x_1) \end{aligned}$$

ehk kuna kordajad λ_1 ja λ_2 on nullid, siis ei loe kordajate järjekord ning iga toodud tehe on võrdne x_3 -ga. Ülejäänud kahe juhu, kus $\lambda_1 = 1$ või $\lambda_2 = 1$, tõestused on analoogilised.

Eeldame nüüd, et vähemalt kaks kordajat kolmikust $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ on nullist erinevad. Kasutame (2b) defineeritud tehet 3-aarsel juhul:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3 \right) & (2b) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_2, x_1), x_3 \right) & (\text{ind. baasi 1.}) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3}(x_2, x_1, x_3), & (2b) \end{aligned}$$

kus esimene võrdus kehtib tehte definitsiooni tõttu, teine võrdus 2-aarse tehte kommutatiivsuse tõttu ja kolmas võrdus jälle tehte definitsioonist.

Kuna teatud kombinatsioonide saamiseks peame kasutama kumerusruumi definitsiooni 1.4 järgi tingimust C4, siis on peame kasutama seda kuidas on tehete pere 2-aarsed tehted defineeritud, et parameetrilist assotsiatiivsust rakendada.

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3 \right) & (2b) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2} \left(x_3, \mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2) \right) & (\text{ind. baasi 1.}) \\
&= \mathbf{c} \mathbf{c}_{\lambda_3} \left(x_3, \mathbf{c} \mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2) \right) & (2a) \\
&= \mathbf{c} \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_3} \left(\mathbf{c} \mathbf{c}_{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}}(x_3, x_1), x_2 \right) & (\text{def. 1.4 C4}) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_3}{\lambda_1 + \lambda_3}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_3}}(x_3, x_1), x_2 \right) & (2a) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2}(x_3, x_1, x_2). & (2b)
\end{aligned}$$

Samu omadusi kasutame ka ülejäänud kolme kombinatsiooni jaoks:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2}(x_3, x_1, x_2) &= \mathbf{c}_{\lambda_3 + \lambda_1, \lambda_2} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_1}, \frac{\lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1}}(x_3, x_1), x_2 \right) & (2b) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_3 + \lambda_1, \lambda_1} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_3 + \lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_1}}(x_1, x_3), x_2 \right) & (\text{ind. baasi 1.}) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_3, \lambda_2}(x_1, x_3, x_2); & (2b) \\
\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3 \right) & (2b) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2} \left(x_3, \mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_2, x_1) \right) & (\text{ind. baasi 1.}) \\
&= \mathbf{c} \mathbf{c}_{\lambda_3} \left(x_3, \mathbf{c} \mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_2, x_1) \right) & (2a) \\
&= \mathbf{c} \mathbf{c}_{\lambda_3 + \lambda_2} \left(\mathbf{c} \mathbf{c}_{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_2}}(x_3, x_2), x_1 \right) & (\text{def. 1.4 C4}) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_3 + \lambda_2, \lambda_1} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + \lambda_2}}(x_3, x_2), x_1 \right) & (2a) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1}(x_3, x_2, x_1); & (2b) \\
\mathbf{c}_{\lambda_3, \lambda_2, \lambda_1}(x_3, x_2, x_1) &= \mathbf{c}_{\lambda_3 + \lambda_2, \lambda_1} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_3 + \lambda_2}}(x_3, x_2), x_1 \right) & (2b) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_3 + \lambda_2, \lambda_1} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_3 + \lambda_2}, \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \lambda_2}}(x_2, x_3), x_1 \right) & (\text{ind. baasi 1.}) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1}(x_2, x_3, x_1). & (2b)
\end{aligned}$$

Samm. Kehtigu tingimus C3 igal k -aarsusel, kus $3 < k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Tõestame, et siis kehtib parameetriline kommutatiivsus ka $(n+1)$ -aarse tehte puhul.

Olgu $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1} \in C$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ nii, et $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$.

Peame näitama, et kui valime $i, j \in \{1, \dots, n+1\}$ nii, et $i \neq j$, siis iga sellise i ja

j korral kehtib võrdus

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} = \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_j, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_i, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}}.$$

Vaatame induktiivselt defineeritud $(n+1)$ -aarse tehte kuju:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}\right). \end{aligned}$$

Vaatame läbi kõik juhud erinevate indeksite i ja j valimiseks. Eeldame üldisust kitsendamata, et $i < j$.

1. Olgu $i = 1, j = 2$. Siis parameetriline kommutatiivsus tuleb otse sellest, kuidas tehe on defineeritud ja 2-aarse tehte parameetrilisest kommutatiivsusest:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}\right) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_2, x_1), x_3, \dots, x_{n+1}\right) \quad (\text{ind. baasi 1.}) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_2, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}}(x_2, x_1, x_3, \dots, x_{n+1}). \quad (2d) \end{aligned}$$

2. Olgu $i \in \{3, \dots, n+1\}$ ja $j \in \{3, \dots, n+1\}$. Siis saame kasutades n -aarse tehte parameetrilist kommutatiivsust ära vahetada λ_i ja λ_j :

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\ & \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j-1}, \dots, x_{n+1}\right) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_j, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_i, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\ & \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j-1}, \dots, x_{n+1}\right). \end{aligned}$$

3. Olgu $i = 1$ ja $j \in \{3, \dots, n+1\}$. Kõigepealt viime tehte n -aarseks kasutades tehte definitsiooni (2d), siis saame kasutades n -aarse tehte parameetrilist kommutatiivsust ära vahetada λ_3 ja λ_j , et teha kordajatest $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_j$ 3-aarne tehe, et saaksime hiljem kasutada 3-aarse tehte parameetrilist kommutatiiv-

sust:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\
& \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right) \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_j, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_3, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\
& \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_j, \dots, x_{j-1}, x_3, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right) \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j, \lambda_4, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_3, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}} \right. \\
& \quad \left. \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2), x_j \right), x_4 \dots, x_{j-1}, x_3, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right) \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j, \lambda_4, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_3, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\
& \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}}(x_1, x_2, x_j), x_4 \dots, x_{j-1}, x_3, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Kasutame saadud 3-aarse tehte parameetrilist kommutatiivsust ja vahetame ära λ_j ning λ_1 ning viime esimese tehte tagasi binaarseks:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j, \lambda_4, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_3, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\
& \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}}(x_1, x_2, x_j), x_4 \dots, x_{j-1}, x_3, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j, \lambda_4, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_3, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\
& \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_j}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_j}}(x_j, x_2, x_1), x_4 \dots, x_{j-1}, x_3, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right) \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_j + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_4, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_3, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\
& \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_j}{\lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_j}}(x_j, x_2), x_1, x_4 \dots, x_{j-1}, x_3, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Nüüd kasutame uuesti n -aarse tehte parameetrilist kommutatiivsust ehk induktsiooni sammu eeldust ning saame tehte, kus λ_1 ja λ_j on vahetatud:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_j + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_4, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_3, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\
& \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_j}{\lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_j}}(x_j, x_2), x_1, x_4 \dots, x_{j-1}, x_3, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_j + \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}} \\
& \quad \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_j}{\lambda_2 + \lambda_j}, \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_j}}(x_j, x_2), x_3, x_4 \dots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \dots, x_{n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{c}_{\lambda_j, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_j, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{n+1}}(x_j, x_2, x_3, x_4 \dots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \dots, x_{n+1}).$$

Eelnevaga analoogiline juht on siis kui $i = 2$, selle tõestuses kasutame samamoodi kõigepealt parameetrilist kommutatiivsust n -aarse ning siis 3-aarse tehete jaoks.

Kui peaks juhtuma, et $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ja me ei saa nende summaga läbi jagada, siis eelneva tõestuse asemel kasutame seda, kuidas tehe on defineeritud nende kahe kordaja võrdumisel nulliga (2e). Sel juhul kehtib parameetiline kommutatiivsus otse induktsiooni eeldusest, sest siis

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \mathbf{c}_{0, \lambda_3, \dots, \lambda_{n+1}}(x_1, x_3, \dots, x_{n+1})$$

ehk saadud tehe on n -aarne.

Oleme näidanud, et saame $(n + 1)$ -aarse tehete puhul ära vahetada mistahes kaks kordajat ning seega on $(n + 1)$ -aarse tehete jaoks täidetud parameetrilise kommutatiivsuse tingimus.

Kuna oleme näidanud, et kehtivad induktsiooni baas ja samm, siis antud tehete pere rahuldab definitsiooni 2.1 C3 tingimust ehk parameetrilist kommutatiivsust. \square

Teoreemi 2.6 tõestus. Defineeritud tehete pere (2a-2e) ühesus on tõestatud järelduses 2.5. Tõestame, et defineeritud tehete pere rahuldab definitsiooni 2.1 tingimusi. Olgu C kumerusruum definitsiooni 1.4 järgi. Kasutame lause tõestamiseks tugevat matemaatilist induktsiooni üle $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$, baasjuhtudeks on 2-aarsed ja 3-aarsed tehted.

Tingimuse C4 tõestamisel mõtleme tehete n -aarsuse all sisemise tehete aarsust.

Baas.

1. Olgu $n = 1$. Kontrollime tingimusi C1-C4 2-aarsete tehete jaoks.

C1. Kumerusruumi ühikseadus on tõestatud lemmas 2.7.

C2. Olgu $x \in C$ ja $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ nii, et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Kasutame defineeritud tehet binaarsel juhul:

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2}(x, x) = c_{\lambda_1}(x, x) = x,$$

siin viimane võrdus kehtib definitsiooni 1.4 C2 ehk kumerusruumi idempotentsuse tõttu.

C3. Parameetiline kommutatiivsus on tõestatud lauses 2.9.

C4. Olgu $x_1, x_2 \in C$ ja $\mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$ nii, et $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Tõestame tingimuse C4 kasutades induktsiooni üle m -i, definitsiooni 2.1 tingimuse C4 mõttes.

Baas. Baasjuhiks on $m = 1$. Olgu $y_1 \in C$ ja $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Kui $\lambda_1 = \mu_1 = 1$, siis defineeritud tehete pere 2-aarsed tehted rahuldavad tingimust C4, sest $\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1) = x_1$ ja

$$\mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_2}(x_1, x_2, y_1) = \mathbf{c}_{1, 0, 0}(x_1, x_2, y_1) = x_1.$$

Eeldame, et ülimalt üks kahest kordajast λ_1, μ_1 on võrdne ühega. Siis

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1) &= cc_{\lambda_1}(cc_{\mu_1}(x_1, x_2), y_1) & (2a) \\ &= cc_{\lambda_1 \mu_1}(x_1, cc_{\frac{\lambda_1(1-\mu_1)}{1-\lambda_1 \mu_1}}(x_2, y_1)). & (1.4 C4) \end{aligned}$$

Sisemise tehete kordaja saame viia alternatiivsele kujule

$$\frac{\lambda_1(1-\mu_1)}{1-\lambda_1 \mu_1} = \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \mu_1} = \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2}.$$

Kasutades parameetrilist kommutatiivsust saame:

$$cc_{\lambda_1 \mu_1}(x_1, cc_{\frac{\lambda_1(1-\mu_1)}{1-\lambda_1 \mu_1}}(x_2, y_1)) = cc_{1-\lambda_1 \mu_1}(cc_{\frac{\lambda_1(1-\mu_1)}{1-\lambda_1 \mu_1}}(x_2, y_1), x_1).$$

Viime kordajad sobivale kujule, et saaksime kasutada tehete definitsiooni ja seejärel 3-aarse tehete parameetrilist kommutatiivsust:

$$\begin{aligned} cc_{1-\lambda_1 \mu_1}(cc_{\frac{\lambda_1(1-\mu_1)}{1-\lambda_1 \mu_1}}(x_2, y_1), x_1) &= cc_{\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2}(cc_{\frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2}}(x_2, y_1), x_1) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2, \lambda_1 \mu_1}(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2}}(x_2, y_1), x_1) & (2a) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_2, \lambda_2, \lambda_1 \mu_1}(x_2, y_1, x_1) & (2b) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_2}(x_1, x_2, y_1). & (\text{lause 2.9}) \end{aligned}$$

Oleme näidanud, et

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1) = \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_2}(x_1, x_2, y_1).$$

Samm. Kehtigu defineeritud tehete pere 2-aarsete tehete jaoks tingimus C4 kui $m = k - 1$, kus $k \geq 3$. Näitame induktsiooni sammu tõestamiseks, et tingimus C4 kehtib ka siis, kui $m = k$.

Olgu $y_1, \dots, y_k \in C$, $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$.

Peame induktsiooni sammu tõestamiseks näitama, et

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1, \dots, y_k) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(x_1, x_2, y_1, \dots, y_k). \end{aligned}$$

Kui $\mu_1 = 0$, siis ühelt poolt

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1, \dots, y_k) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{0, 1}(x_1, x_2), y_1, \dots, y_k) \quad (\mu_1 = 0, \mu_2 = 1 - \mu_1) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(x_2, y_1, \dots, y_k), \quad (\text{lemma 2.7}) \end{aligned}$$

teiselt poolt, aga

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(x_1, x_2, y_1, \dots, y_k) = \\ & = \mathbf{c}_{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(x_1, x_2, y_1, \dots, y_k) \quad (\mu_1 = 1, \mu_2 = 1) \\ & = \mathbf{c}_{0 + \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\frac{0}{0 + \lambda_1}, \frac{\lambda_1}{0 + \lambda_1}}(x_1, x_2), y_1, \dots, y_k) \quad (2d) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{0, 1}(x_1, x_2), y_1, \dots, y_k) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(x_2, y_1, \dots, y_k). \quad (\text{lemma 2.7}) \end{aligned}$$

Tõestus, et tingimus kehtib kui $\mu_2 = 0$ on analoogiline.

Eeldame nüüd, et $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ ja $\mu_1, \mu_2 \neq 0$. Alustame võrduse vasakult poolt ja kasutame seda kuidas antud tehete pere on defineeritud (2d):

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1, \dots, y_k) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1), y_2, \dots, y_k). \end{aligned}$$

Vaatame eraldi sisemist tehet ja kasutame sellel induktsiooni baasis tõestatud:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1) & = \mathbf{c}_{\frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x_1, x_2, y_1) \quad (\text{ind. baas}) \\ & = \mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}(y_1, x_2, x_1) \quad (\text{lause 2.9}) \\ & = \mathbf{c}_{\frac{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}, \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}}(y_1, x_2), x_1). \quad (\text{ind. baas}) \end{aligned}$$

Paneme sisemise tehte tagasi algseesse kujusse ja kasutame induktsiooni sammu eeldust:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1, \dots, y_k) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}, \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}}(y_1, x_2), x_1\right), y_2, \dots, y_k\right) \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2, \lambda_1 \mu_1, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}, \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}}(y_1, x_2), x_1, y_2, \dots, y_k\right).
\end{aligned}$$

(ind. sammu eeldus)

Viimaseks, kasutame tehete pere definitsiooni ja parameetrilist kommutatiivsust:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1, \dots, y_k) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2, \lambda_1 \mu_1, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}, \frac{\lambda_1 \mu_2}{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}}(y_1, x_2), x_1, y_2, \dots, y_k\right) \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_2, \lambda_1 \mu_2, \lambda_1 \mu_1, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}}(y_1, x_2, x_1, y_2, \dots, y_k) \tag{2d} \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}}(x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_k). \tag{lause 2.9}
\end{aligned}$$

Oleme näidanud, et tingimus C4 kehtib, kui $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$. Eeldame nüüd, et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, siis tehete pere definitsioonist (2e) saame, et

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_1, y_2, \dots, y_k) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_3, \dots, \lambda_{k+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2}(x_1, x_2), y_2, \dots, y_k),
\end{aligned}$$

mis induktsiooni sammu eelduse põhjal rahuldab tingimust C4.

Oleme tõestanud induktsiooni baasi ja sammu ning seega tõestanud, et tingimus C4 kehtib defineeritud 2-aarsete tehete jaoks.

2. Olgu $n = 3$. Kontrollime tingimusi C1-C4 3-aarsete tehete jaoks.

C1. Kumerusruumi ühikseadus on tõestatud lemmas 2.7.

C2. Olgu $x \in C$ ja $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$ nii, et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$. Kasutame defineeritud tehet binaarsel juhul:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x, x, x) & = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x, x), x\right) \tag{2b} \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3}(x, x) \tag{ind. baasi 1.} \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2}(x, x) \tag{2a} \\
& = x. \tag{def. 1.4 C2}
\end{aligned}$$

Kui $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, siis ei saa me jagada läbi nende summaga, tehete pere definitsioonist (2c) ja lemmast 2.7 saame

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x, x, x) = \mathbf{c}_{0,1}(x, x) = x.$$

C3. Parameetiline kommutatiivsus on tõestatud lauses 2.9.

C4. Olgu $x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_m \in C$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in [0, 1]$ nii, et $\lambda_1 + \dots + \lambda_{m+1} = 1$ ja $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Peame näitama, et

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_m) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_1 \mu_3, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_m). \end{aligned}$$

Kui $\mu_1 + \mu_2 = 0$, siis

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_m) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{0,0,1}(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_m) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_3, y_1, \dots, y_m). \end{aligned} \quad (\text{lemma 2.7})$$

Teiselt poolt, aga

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_1 \mu_3, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_m) = \\ & = \mathbf{c}_{0,0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_m) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, 0, 0, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_3, x_1, x_2, y_1, \dots, y_m) \quad (\text{lause 2.9}) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, 0, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{1,0}(x_3, x_1), x_2, y_1, \dots, y_m) \quad (2d) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, 0, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_3, x_2, y_1, \dots, y_m) \quad (\text{lemma 2.7}) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{1,0}(x_3, x_2), y_1, \dots, y_m) \quad (2d) \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_3, y_1, \dots, y_m). \quad (\text{lemma 2.7}) \end{aligned}$$

Eeldame nüüd, et $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$. Siis saame nende summaga läbi jagada, kasutame 3-aarse tehte definitsiooni (2b)

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3}(x_1, x_2, x_3), y_1, \dots, y_m) = \\ & = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1 + \mu_2, \mu_3}(\mathbf{c}_{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}(x_1, x_2), x_3), y_1, \dots, y_m). \end{aligned}$$

Nüüd saame kasutada juba induktsiooni baasi jooksul tõestatud C4 tingimust 2-

aarse tehte jaoks:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}} \left(\mathbf{c}_{\mu_1 + \mu_2, \mu_3} \left(\mathbf{c}_{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}} (x_1, x_2), x_3 \right), y_1, \dots, y_m \right) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1(\mu_1 + \mu_2), \lambda_1 \mu_3, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}} \left(\mathbf{c}_{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}} (x_1, x_2), x_3, y_1, \dots, y_m \right) \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_1 \mu_3, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}} (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_m).
\end{aligned}$$

Samm. Kehtigu tehete pere jaoks definitsiooni tingimused C1-C4 igal n -aarsusel, kus $3 < k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Tõestame, et siis kehtivad antud tingimused ka $(n+1)$ -aarse tehte puhul.

C3. Parameetiline kommutatiivsus on tõestatud lauses 2.9.

C1. Olgu $x_1, \dots, x_{n+1} \in C$ ning $i \in \{1, \dots, n+1\}$, $i \neq j$ nii, et $\lambda_i = 1$. Siis iga $j \in \{1, \dots, n+1\}$, $j \neq i$ korral $\lambda_j = 0$. Kasutame $(n+1)$ -aarse tehte kommutatiivsust:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_{n+1}} (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_i, \lambda_2, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}} (x_i, x_2, \dots, x_1, \dots, x_{n+1}).
\end{aligned}$$

Nüüd kasutame defineeritud pere tehet ja viime $(n+1)$ -aarse tehte n -aarseks:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_i, \lambda_2, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}} (x_i, x_2, \dots, x_1, \dots, x_{n+1}) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_i + \lambda_2, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_i + \lambda_2}} (x_i, x_2), \dots, x_1, \dots, x_{n+1} \right).
\end{aligned}$$

Kasutame siin ära binaarse tehte C1 tingimust ja seda, et $\lambda_i + \lambda_2 = \lambda_i$:

$$\mathbf{c}_{\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_i + \lambda_2}} (x_i, x_2) = \mathbf{c}_{1,0}(x_i, x_2) = \mathbf{c}_{0,1}(x_2, x_i) = cc_0(x_2, x_i) = x_i.$$

Seega saame nüüd kasutada n -aarse tehte C1 tingimust

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{\lambda_i + \lambda_2, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_i + \lambda_2}} (x_i, x_2), \dots, x_1, \dots, x_{n+1} \right) = \\
& = \mathbf{c}_{\lambda_i, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}} (x_i, \dots, x_1, \dots, x_{n+1}) = x_i.
\end{aligned}$$

C2. Olgu $x \in C$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ nii, et $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$. Kasutame

varem defineeritud tehet binaarsel juhul:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n+1}}(x, x, x, \dots, x) &= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n+1}}\left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}}(x, x), x, \dots, x\right) \\ &= \mathbf{c}_{\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n+1}}(x, x, \dots, x) = x,\end{aligned}$$

siin viimane võrdus kehtib, kuna induktsiooni sammu eelduse põhjal rahuldavad n -aarsed tehted tingimust C2.

Kui $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ei saa me jagada läbi nende summaga, sel juhul tehte definitsiooni järgi ja induktsiooni sammu eelduse põhjal saame:

$$\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n+1}}(x, x, x, \dots, x) = \mathbf{c}_{0, \lambda_3, \dots, \lambda_{n+1}}(x, x, \dots, x) = x.$$

C4. Olgu $x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_m \in C$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}, \mu_1, \dots, \mu_{n+1} \in [0, 1]$ nii, et $\lambda_1 + \dots + \lambda_{m+1} = 1$ ja $\mu_1 + \dots + \mu_{n+1} = 1$. Peame näitama, et

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \dots, \mu_{n+1}}(x_1, \dots, x_{n+1}), y_1, \dots, y_m) &= \\ = \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_1 \mu_{n+1}, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_m).\end{aligned}$$

Kui $\mu_1 + \mu_2 = 0$, siis on tingimuse C4 tõestus analoogiline baasijuhu $n = 3$ tõestusega, kus $\mu_1 + \mu_2 = 0$.

Eeldame, et $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$. Siis

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n+1}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}), y_1, \dots, y_m) &= \\ = \mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n+1}}(\mathbf{c}_{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}), y_1, \dots, y_m).\end{aligned}$$

Induktsiooni eelduse kohaselt kehtib tingimus C4 iga n -aarse tehte jaoks, seega

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\mu_1 + \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_{n+1}}(\mathbf{c}_{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}), y_1, \dots, y_m) &= \\ = \mathbf{c}_{\lambda_1(\mu_1 + \mu_2), \lambda_1 \mu_3, \dots, \lambda_1 \mu_{n+1}, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(\mathbf{c}_{\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}, \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}}(x_1, x_2), x_3, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_m) & \\ & \text{(ind. sammu eeldus)} \\ = \mathbf{c}_{\lambda_1 \mu_1, \lambda_1 \mu_2, \lambda_1 \mu_3, \dots, \lambda_1 \mu_{n+1}, \lambda_2, \dots, \lambda_{m+1}}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_m). & \quad (2d)\end{aligned}$$

Kuna oleme näidanud, et kehtivad induktsiooni baas ja samm, siis antud tehete pere rahuldab definitsiooni 2.1 tingimusi C1-C4. \square

Tõestatud teoreem 2.6 annab meile eeskirja binaarsest kumerusruumist n -aarsete

tehetega kumerusruumi koostamiseks. Vastupidine konstruktsioon on toodud järgnevas teoreemis.

Teoreem 2.10. *Olgu C hulk. Kui hulk C koos tehetega $\mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}$, $\lambda_i \in [0, 1]$, $\sum_i \lambda_i = 1$ on multiaarne kumerusruum (def. 2.1), siis tehete pere $cc_\lambda := \mathbf{c}_{\lambda, 1-\lambda}$, $\lambda \in [0, 1]$ annab kumerusruumi (def. 1.4).*

Tõestus. Kontrollime definitsiooni 1.4 tingimusi C1-C4.

C1. Olgu $x, y \in C$, $cc_0(x, y) = \mathbf{c}_{0,1}(x, y) = y$.

C2. Olgu $x \in C$, $\lambda \in [0, 1]$, $cc_\lambda(x, x) = \mathbf{c}_{\lambda, 1-\lambda}(x, x) = x$.

C3. Olgu $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$, $cc_\lambda(x, y) = \mathbf{c}_{\lambda, 1-\lambda}(x, y) = \mathbf{c}_{1-\lambda, \lambda}(y, x) = cc_{1-\lambda}(y, x)$.

C4. Olgu $x, y, z \in C$, $\lambda, \mu \in [0, 1]$, $\tilde{\lambda} = \lambda\mu$. Eeldame, et $\tilde{\lambda} \neq 1$

$$\begin{aligned}
cc_\lambda(cc_\mu(x, y), z) &= \mathbf{c}_{\lambda, 1-\lambda}(\mathbf{c}_{\mu, 1-\mu}(x, y), z) \\
&= \mathbf{c}_{\lambda\mu, \lambda(1-\mu), 1-\lambda}(x, y, z) && \text{(def. 2.1 C4)} \\
&= \mathbf{c}_{\lambda(1-\mu), 1-\lambda, \lambda\mu}(y, z, x) && \text{(def. 2.1 C3)} \\
&= \mathbf{c}_{\lambda(1-\mu)+1-\lambda, \lambda\mu} \left(\mathbf{c}_{\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}, \frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu}}(y, z), x \right) && \text{(def. 2.1 C4)} \\
&= \mathbf{c}_{\lambda\mu, 1-\lambda\mu} \left(x, \mathbf{c}_{\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}, \frac{1-\lambda}{1-\lambda\mu}}(y, z) \right) && \text{(def. 2.1 C3)} \\
&= cc_{\lambda\mu} \left(x, cc_{\frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}}(y, z) \right) \\
&= cc_{\tilde{\lambda}}(x, cc_{\tilde{\mu}}(y, z)),
\end{aligned}$$

kus $\tilde{\mu} = \frac{\lambda(1-\mu)}{1-\lambda\mu}$. Kui $\tilde{\lambda} = 1$, siis vastavalt märkuse 1.6 järgi

$$cc_\lambda(cc_\mu(x, y), z) = cc_{\tilde{\lambda}}(x, cc_{\tilde{\mu}}(y, z)). \quad \square$$

Teoreemid 2.6 ja 2.10 annavad koos võimaluse minna ühest kumerusruumi definitsioonist üle teisele ja vastupidi, kasutades antud teoreemides toodud eeskirju. On lihtne näha, et need on üksteise pöördoperatsioonid. Samuti, kui kujutus $f : C \rightarrow C'$ on kumerusruumide homomorfism, siis on ta ka C, C' vastavate multiaarsete kumerusruumide homomorfism ja ka vastupidi.

Definitsioon 2.11. Olgu C ja C' multiaarsed kumerusruumid. Kujutust $f : C \rightarrow C'$ nimetame multiaarsete kumerusruumide **homomorfismiks**, kui iga $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in$

$[0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ja $x_1, \dots, x_n \in C$ korral

$$f(cc_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n)) = cc_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(f(x_1), \dots, f(x_n)).$$

Definitsioon 2.12. Multiaarse kumerusruumi C alamhulka A nimetame **alamkumerusruumiks**, kui mistahes $x_1, \dots, x_n \in A$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ korral $cc_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) \in A$ ehk A on kinnine kõigi kumerate kombinatsioonide võtmise operatsioonide suhtes.

Järgnevalt toome näited, kuidas näevad välja esimese peatüki kumerusruumi näidete korral nende kumerusruumide n -aarsed tehted.

Näide 2.13. Näite 1.7 järgi on iga vektorruum üle \mathbb{R} on kumerusruum definitsiooni 1.4 mõttes. Olgu V vektorruum, kus kumerusruumi tehe on defineeritud läbi vektorruumi V liitmistehte:

$$\forall \lambda \in [0, 1]: \quad cc_{\lambda}(x, y) := \lambda x + (1 - \lambda)y. \quad (2.9)$$

Defineerime tehted iga $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ korral

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1: \quad \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) := \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

On lihtne kontrollida, et sellised tehted rahuldavad definitsiooni 2.1 tingimusi C1-C4. Kuna $\mathbf{c}_{\lambda_1, \lambda_2} = cc_{\lambda_1}$, siis teoreemi 2.6 järgi on see ainuke viis, kuidas defineerida tehte 2.9 vastav multiaarne kumerusruum.

Näide 2.14. Näite 1.16 järgi on vektorruumi \mathbb{R}^X kumer alamhulk simpleks Δ_X kumerusruum definitsiooni 1.4 järgi. Näite 2.13 järgi on \mathbb{R}^X multiaarne kumerusruum koos funktsioonide punktiviisiliselt liitmise tehtega:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1: \quad \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(f_1, \dots, f_n) := \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n.$$

Simpleks Δ_X on multiaarse kumerusruumi \mathbb{R}^X alamkumerusruum, kuna ta on kinnine antud tehte suhtes.

Näide 2.15. Olgu X poolvõrest konstrueeritud kumerusruum näite 1.19 põhjal.

Vastavad n -aarsed tehted multiarse kumerusruumi jaoks esituvad järgnevalt:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1: \quad \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(x_1, \dots, x_n) := x_1 \wedge \dots \wedge x_n.$$

3 Vaba kumerusruum hulgal

Selles peatükis defineerime vaba kumerusruumi kasutades lineaaralgebrast tuttavaid mõisteid. Kumerusruum n -aarse tehtega võimaldab meil vaadata ka baasi mõistet.

Definitsioon 3.1. Hulka $X \subseteq C$ nimetame multiaarse kumerusruumi C **baasiks** kui iga $c \in C$ korral leiduvad (järjestuse täpsuseni) unikaalsed $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in (0, 1]$, $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ (kus $\sum_i \lambda_i = 1$) ja paarikaupa erinevad elemendid $e_1, \dots, e_n \in X$ nii, et

$$c = \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}(e_1, \dots, e_n).$$

Definitsioon 3.2. Multiaarset kumerusruumi nimetatakse **vabaks** kui temas leidub baas.

Soovime tõestada, et Δ_X on vaba kumerusruum ning saame hulgast X konstrueerida kumerusruumi Δ_X baasi. Selleks defineerime hulga X "sisestuse" hulka Δ_X :

$$\delta: X \rightarrow \Delta_X, \quad x \mapsto \delta_x,$$

kus $\delta_x: X \rightarrow [0, 1]$ on defineeritud skeemiga

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = y; \\ 0, & \text{kui } x \neq y. \end{cases}$$

Kuna iga $f \in \Delta_X$ korral on $\text{supp}(f)$ lõplik, siis saame esitada kujutuse f funktsioonide δ_x , $x \in \text{supp}(f)$ punktiviisilise summana:

$$f = \sum_{x \in \text{supp}(f)} f(x) \delta_x.$$

Lause 3.3. Olgu X hulk. Siis simpleks Δ_X (def. 1.15) on vaba multiaarne kumerusruum.

Tõestus. Näite 2.14 järgi on Δ_X multiaarne kumerusruum. Näitame, et hulk $B := \{\delta_x \mid x \in X\}$ on kumerusruumi Δ_X baas.

Olgu $f \in \Delta_X$. Tähistades $\text{supp}(f) = \{x_1, \dots, x_n\}$, kus x_1, \dots, x_n on paarikaupa erinevad, saame esitada kujutuse f kujul:

$$f = f(x_1)\delta_{x_1} + \dots + f(x_n)\delta_{x_n} = \mathbf{c}_{f(x_1), \dots, f(x_n)}(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}). \quad (3.1)$$

Olgu nüüd $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in (0, 1]$, $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ ja paarikaupa erinevad $\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_m} \in B$, sellised, et $f = \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_m})$. Näitame, et see esitus langeb (elementide $\{x_1, \dots, x_n\}$ ümberjärjestuse täpsuseni), kokku esitusega (3.1).

Vaatame funktsiooni f kohal y_i , siis

$$\begin{aligned} f(y_i) &= \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_m})(y_i) \\ &= \lambda_1 \delta_{y_1}(y_i) + \dots + \lambda_i \delta_{y_i}(y_i) + \dots + \lambda_m \delta_{y_m}(y_i) \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_i \cdot 1 + \dots + \lambda_m \cdot 0 \\ &= \lambda_i. \end{aligned}$$

Eelviimane võrdus kehtib seetõttu, et y_1, \dots, y_m on paarikaupa erinevad, kuna kujutused $\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_m}$ on paarikaupa erinevad. Kuna iga y_i korral $f(y_i) = \lambda_i \neq 0$, siis $y_i \in \text{supp}(f)$. Olgu $y \in \text{supp}(f)$, näitame, et $y \in \{y_1, \dots, y_m\}$. Oletame vastuväiteliselt, et $y \notin \{y_1, \dots, y_m\}$, siis

$$\begin{aligned} f(y) &= \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_m})(y) \\ &= \lambda_1 \delta_{y_1}(y) + \dots + \lambda_m \delta_{y_m}(y) \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \dots + \lambda_m \cdot 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

mis on vastuolus sellega, et $y \in \text{supp}(f)$. Järelikult $\text{supp}(f) = \{y_1, \dots, y_m\}$, mistõttu $n = m$ ja $f = \mathbf{c}_{\lambda_1, \dots, \lambda_m}(\delta_{y_1}, \dots, \delta_{y_m}) = \mathbf{c}_{f(x_1), \dots, f(x_n)}(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$, mis on (baasielementide ümberjärjestamise täpsuseni) võrdne punktis 3.1 toodud esitusega. Järelikult oleme näidanud, et nõutud esitus on ühene ning B on kumerusruumi Δ_X baas. \square

Kokkuvõte

Selles bakalaureusetöös vaadeldi kumerusruume ja toodi näiteid erinevatest teistest algebralistest struktuuridest, millel saab defineerida tehete pere, mis annab kumerusruumi. Defineeriti n -aarse tehete kumerusruum binaarse tehete kumerusruumi kaudu ning tõestati, kuidas ühest definitsioonist teise definitsiooni tehteid moodustada ja vastupidi.

Kui sel teemal uurimistööd jätkata, siis järgmine samm oleks sõnastada vaba kumerusruumi universaalomadus ning anda ka kolmas kumerusruumi definitsioon kasutades vaba kumerusruumi konstruktsiooni.

Veel oleks võimalik uurida lähteartiklis välja toodud väidet, et iga kumerusruum esitub geomeetrilist tüüpi kumerusruumide poolvõrena ning arendada seoseid kumerusruumide, normeeritud ruumide ja meetriliste ruumide vahel.

Kasutatud allikad

- Flood, Joe (1981). “Semiconvex geometry”. *Journal of the Australian Mathematical Society* 30.4, 496–510. DOI: [10.1017/S1446788700017973](https://doi.org/10.1017/S1446788700017973).
- Fritz, Tobias (2015). *Convex Spaces I: Definition and Examples*. arXiv: [0903.5522](https://arxiv.org/abs/0903.5522) [math.MG].
- Kaarli, K. (1989). *Sissejuhatus universaalalgebrasse*. Tartu: Tartu Riiklik Ülikool.
- Kilp, M. (1998). *Algebra II*. Tartu.
- Neumann, W.D (1970). “On the quasivariety of convex subsets of affine spaces”. *Arch. Math* 21, 11–16. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01220869>.
- Oja, E. ja P. Oja (1991). *Funktsionaalanalüüs*. Tartu: Tartu Ülikool.
- Stone, M.H (1949). “Postulates for the barycentric calculus”. *Annali di Matematica* 29, lk. 25–30. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02413910>.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Erko Olumets,

1. Annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose “Kumerusruumid”, mille juhendaja on Ülo Reimaa, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Erko Olumets

15.05.2024