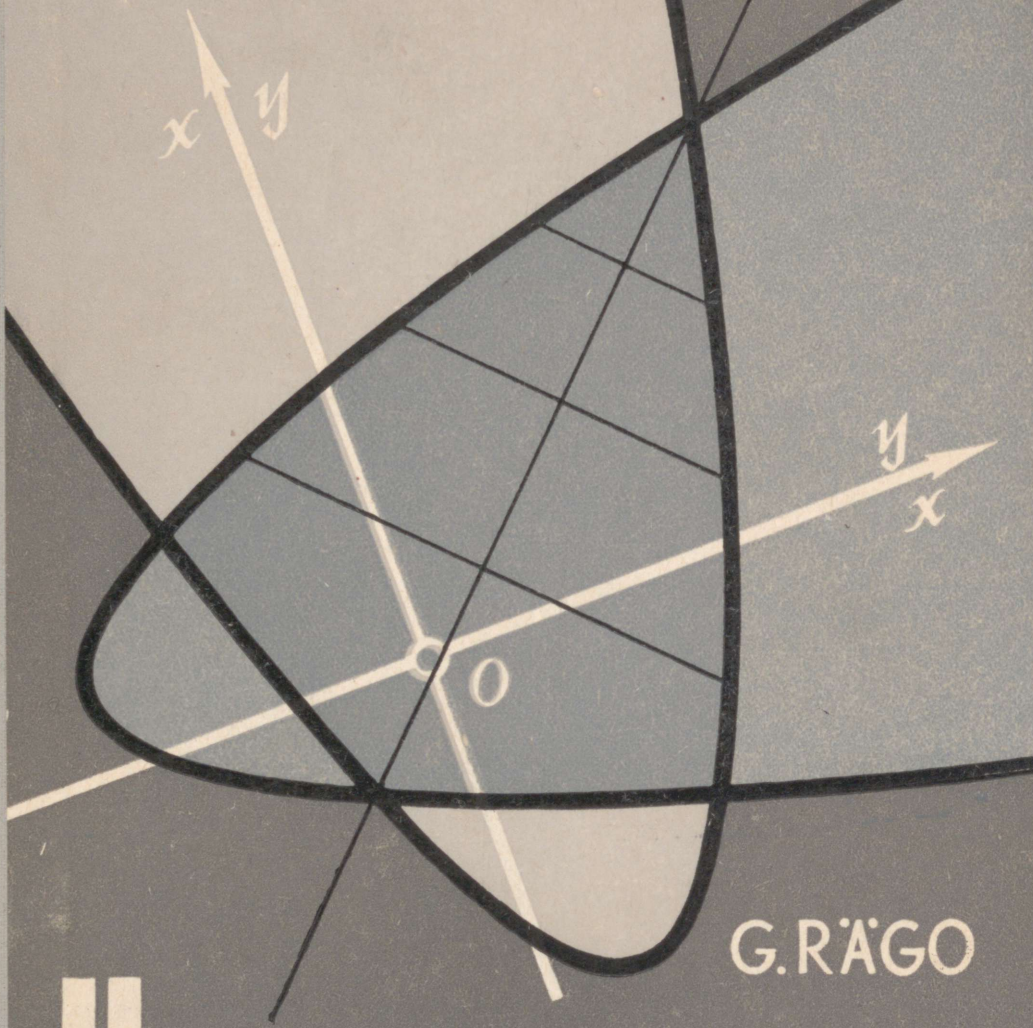


G. RÄGO

Kõrgem matemaatika

I

A-24280

GERHARD RÄGO
RAKENDUSMATEMAATIKA JA MEHAANIKA
PROFESSOR TARTU RIIKLIKUS ÜLIKOOLIS

KÕRGEM MATEMAATIKA I

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1962

51
R92

Eritoimetaja H. Epler

Kunstiliselt kujundanud E. Tali

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

„Elavalt kaemuselt abstraktsele mõtlemisele ja sellelt praktika juurde — see on tõe tunnetamise, objektiivse reaalsuse tunnetamise dialektiline tee.“

V. I. Lenin

LUGEJALE

Käesolev raamat on pühendatud meie noortele, kes oma esmast ülesannet näevad kommunistliku ühiskonna ülesehitamises.

See raamat on kavandatud kõrgema matemaatika õpikuna eeskätt Tartu Riikliku Ülikooli füüsika ja keemia osakondade üliõpilastele ning teiste kõrgemate õppeasutuste vastavate teaduskondade üliõpilastele. Ühtlasi on ta mõeldud käsiraamatuks arvukatele tehnika ja rahvamajanduse alal töötajatele, üldse kõigile neile, kellele kõrgem matemaatika on põhiliseks töövahendiks ja kes tahavad matemaatikat omandada nii, et nad saaksid seda täie arusaamisega kasutada oma erialases töös.

Raamat peaks kasulik olema ka neile, kes matemaatikat õpetavad erialastes tehnikumides ja eriti meie uues keskkoolis. Raamatut võivad kindlasti tulusalt kasutada ka kõik need, kellel pole võimalik kuulata kõrgema matemaatika loenguid ja kes peavad vajalikud teadmised omandama iseõppimise teel.

Raamat pole kirjutatud nende vaimus, kes matemaatikas näevad vaid ülimalt abstraktset teaduslikku distsipliini või kellele aine süsteemipärane ja loogiliselt range ülesehitus on uurimis- ja õppetöö ainueesmärgiks.

On kaheldamatu, et matemaatika on sündinud elupraktika rüpes ja ta areng on olnud suuresti mõjutatud tegeliku elu vajadustest. Sellepärast on käesoleva raamatu ainevalikus ja ta üksikteemade käsitluses püütud arvestada mitte niipalju matemaatika abstraktseid aspekte kui just ta laialdaste rakendusalade vajadusi. Kõigi põhiliste mõistete ja meetodite käsitlemisel toetume siin teadlikult eelkõige intuitsioonile, sest on ju teaduses intuitsioon alati olnud loovaks, loogika aga vaid korrigeerivaks, kindlustavaks ja korraldavaks teguriks. Raamatus toodavad mõttekäigud algavad ja lõpevad teaduse- ja elupraktikast võrsunud probleemidega. Kõikjal on püütud rõhutada matemaatika osa meid ümbritseva tegelikkuse õiges tunnetamises.

Mõned märkused raamatu kasutamise kohta

1. Raamatus käsitletu mõistmiseks on vaja ainult kõige olulisemate keskkooli matemaatika palade tundmist. On soovitatav, et lugejal oleksid alati käepärast aritmeetika, algebra, geomeetria ja trigonomeetria õpikud, mille järgi ta neid aineid õppis

keskkoolis. Nende õpikute järgi saab kergesti meelde tuletada vahepeal ununenud elementaarmatemaatika definitsioone, teoreeme, valemeid ja konstruktsioone. Tunduvat abi üksikute ainepalade kordamisel annavad ka niisugused raamatud, nagu näiteks

Выгодский, М. Я., Справочник по элементарной математике;

Бронштейн, И. Н. и Семендяев, К. А., Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.

2. Lugeja ärgu rahuldugu kunagi ainult raamatu lugemisega. Raamatus esitatava materjali täielikku omandamist võib saavutada vaid sel teel, et iga mõttekäik hoolikalt, lüli lüli järel läbi mõeldakse. Kõik vajalikud arvutused, avaldiste teisendused ja konstruktsioonid tuleb raamatu lugemisel iseseisvalt läbi viia ja raamatus esinevad joonised tekstis antud seletuste järgi iseseisvalt valmistada.

3. On tõenäoline, et raamatu läbitöötamisel tekivad lugejal kohati raskused. Tuleb soovitada nende ees mitte peatuma jääda; võetagu raskust tekitanud väited ja tõestused esialgu lihtsalt teatavaks. Raskused tavaliselt kaovad, kui sama teema juurde mõne aja möödudes uuesti tagasi tulla.

4. Suurem osa raamatus toodud matemaatilisi mõttekäike on arvatavasti arusaadavad juba esmakordsel lugemisel. Tuleb aga meeles pidada, et matemaatilise mõtte või võtte täielikuks omandamiseks on vaja tema korduvat läbitöötamist.

5. Memoreerimisele kuuluvad definitsioonid, teoreemid, tööjuhised jne. on raamatus toodud kursiivkirjas. Matemaatiliste tõdede ja tööjuhiste memoreerimisel on aga ainult siis väärtust, kui see toimub asja sisulise külje selgel mõistmisel.

6. Aja jooksul ununenud või muidu vajalike definitsioonide, teoreemide, töövõtete ja märkuste kiire ülesleidmise hõlbustamiseks on raamat varustatud aineregistriga.

7. Pole tingimata tarvilik, et käesolevat raamatut loetakse peatükk peatüki ja paragrahv paragrahvi järel: väga mitmed raamatu osad on lugejale arusaadavad ka ilma selleta, et kõik eelnevad palad oleksid läbi töötatud. Aine süstemaatilise ülesehituse suurt väärtust mõistetakse harilikult siis, kui on juba käes küllalt ulatuslik konkreetne materjal.

8. Lugeja püüdku eelkõige omandada järgmised mõisted: koordinaadid, funktsioon, piirväärtus, tuletis, diferentsiaal ja integraal. Koordinaatide mõiste rakendamise, diferentseerimise ja integreerimise tehnikat võib omandada järk-järgult selles ulatuses, nagu see on vajalik lugeja erialasel tööl. Matemaatika rakendamiseks teistes teaduslikes distsipliinides ja tehnikas on väga oluline arvutusvõtete, veaarvutuse ja arvutuslükatiga töötamise oskuse omandamine.

9. Raamatus käsitletava aine omandamiseks on tingimata tarvis, et lugeja iseseisvalt lahendaks küllaldase hulga ülesandeid. Neid leidub rikkalikus valikus sellekohastes vene- ja eestikeelsetes ülesandekogudes.

10. Töövahendeist peaks lugejal alati käepärast olema ruudulist paberit, millimeeter-jaotistega joonlaud, kolmnurk, sirkel, üks harilik ja paar eredavärvilist pliiatsit, taskunuga, kustutuskumm, neljakohalised tabelid (näiteks V. Bradise «Neljakohalised matemaatilised tabelid») ja 25-sentimeetrine arvutuslükati.

Ladina tähestik

Tähemärk		Nimetus
A	*a*	a
B	*b*	be
C	*c*	tse
D	*d*	de
E	*e*	e
F	*f*	ef
G	*g*	ge
H	*h*	ha
I	*i*	i
J	*j*	jot
K	*k*	ka
L	*l*	el
M	*m*	em
N	*n*	en
O	*o*	o
P	*p*	pe
Q	*q*	ku
R	*r*	är
S	*s*	es
Z	*z*	ze
T	*t*	te
U	*u*	u
V	*v*	ve
W	*w*	topeltve
X	*x*	iks
Y	*y*	ü

Kreeka tähestik

Tähemärk		Nimetus
A	*α*	alfa
B	*β*	beeta
Γ	*γ*	gamma
Δ	*δ*	delta
E	*ε*	epsilon
Z	*ζ*	dzeeta
H	*η*	eeta
Θ	*ϑ*	teeta
I	*ι*	ioota
K	*κ*	kapa
Λ	*λ*	lambda
M	*μ*	müü
N	*ν*	nüü
Ξ	*ξ*	ksii
O	*o*	omikron
Π	*π*	pii
P	*ϱ*	roo
Σ	*σ*	sigma
T	*τ*	tau
Υ	*υ*	üpsilon
Φ	*φ*	fii
X	*χ*	hii
Ψ	*ψ*	psii
Ω	*ω*	oomega

SISSEJUHATUS

I. Ajalooline ülevaade matemaatika arenemisest

Pole kahtlust, et ürginimene suutis juba väga varajasel arenemisastmel vahet teha ainsa ja mitme inimese, ainsa ja mitme puu, ainsa ja mitme looma vahel. Oma edaspidises arenemiskäigus õppis ta vahet tegema suure ja väikese perekonna, suure ja väikese vaenlaste salga, suure ja väikese loomakarja vahel. Veelgi hiljem jõudis ta arusaamisele, et oma lapsi, samuti loomi ja igasuguseid esemeid võib seada vastavusse käe pöidlaga või pöidla ja nimetissõrmega või pöidla, nimetissõrme ja keskmise sõrmega jne. Kuid arvude 1, 2, 3... kujutelmade tekkimiseks ja kujunemiseks kulus pärast seda tõenäoliselt siiski veel kümneid tuhandeid aastaid.

Geomeetrilisi ornamente, millele ürginimest võibolla viis roo ja kiudtaimede punumine hüti, magamisaseme või kehakatte valmistamisel, leiame peaaegu kõigi ürgrahvaste juures. Kaunistustena näeme niisuguseid ornamente küll koopaelaniku eluaseme seintel, küll enamikul ürgajast säilinud tootmisriistadel, tarbeesemeil ning ehteil. Nagu arvu kujutelm, nii on ka sirglõigu, kolmnurga, rombi ja teiste geomeetriliste kujundite kujutelmad tekkinud ja arenenud käsikäes inimese tootmistegevusega. On kindel, et seoses inimese praktilise tegevusega on välja kujunenud ka lihtsamad matemaatilised operatsioonid: loendamine, liitmine, lahutamine jne., sest ürgaja inimene pidi ju jahile minnes mingil algelisel viisil loendama oma vibunooli, tal ei saanud jääda tähele panemata peade arvu kasvamine lambakarjas äsjasündinud tallede arvu võrra või peade arvu vähenemine karja külastamisel huntide poolt. Lühidalt, F. Engelsi sõnadega: «Nagu kõik teised teadused, nii on ka matemaatika välja kasvanud inimeste praktilistest vajadustest...»*

Tsivilisatsiooni alusmüüriks on inimühiskonna tootmistegevus. Tootlikud jõud on kõigil aegadel arenenud eriti hoogsalt maakera neis osades, kus on leidu-

* F. Engels, Anti-Dühring, Tallinn, 1954, lk. 35.

nud rikkalikumaid, mitmekesisemaid ja diferentseeritumaid looduslikke eeldusi ühiskondlikuks tootmiseks, ja tootmistegevus on saavutanud suurimat edu seal, kus on osutunud võimalikuks rakendada mõnda loodusjõudu ühiskonna teenistusse. «Vajadus ühiskondlikult kontrollida mõnd loodusjõudu, et seda majandada, vajadus hakata seda kasulikuks tegema või alistama inimkäe loodud suureulatuslike ehituste abil, — see etendab tööstuse ajaloos otsustavat osa.» * Peamiseks jõuallikaks oli vanal ajal vesi (ta on seda ka praegugi, ainult selle vahega, et nüüd on tema kõrvale astunud ka veel kivisüsi, nafta, põlevkivi ja uraanimaak). Suured jõed — Niilus, Tigris, Eufrat ning Jangtse — niisutasid oma orge ja väetasid neid iga-aastastel üleujutustel oma mudaga. Nende jõgede kevadist suurvett tuli kõrvale juhtida ühelt poolt katastroofide ärahoidmiseks ja teiselt poolt võimalikult laiade maa-alade viljastamiseks. See nõudis aga ühiskondlikult kontrollitavate paisude ja kanalite ehitamist. Nende jõgede orgudes elanud vanade kultuurrahvaste — egiptlaste, babüloonlaste ja hiinlaste — tootmistegevuse rüpes on ilmale tulnud valdav enamik neid matemaatilisi teadmisi, mis moodustavad meie tänapäevase elementaarmatemaatika.

Tõsiasja, et kõik põhilisemad matemaatilised tõed on avastatud otseses seoses inimese tootmistegevusega, kinnitavad ka peaaegu kõik seni leitud vanimad matemaatilised tekstid, nii need, mis on kirjutatud hieroglüüfides papüürusele Egiptuses 15 sajandit e. m. a., kui ka need, mis on kirjutatud kiilkirjas savitahvlikestele Babüloonias 23 sajandit e. m. a. Nagu neist tekstidest nähtub, on vanimad matemaatilised arvutus- ja mõõtmisvõtted loodud põllunduse ja kaubanduse tarvete rahuldamiseks. Laialdasi nõudmisi seadis matemaatikale tollal ka täpse, astronoomilistele nähtustele rajatud ajaarvamise loomine, ilma milleta oli võimatu ette arvestada aastaaegadega seotud veeseisu jõgedes, mis määras maa harimise, külvi ning lõikuse ajad. Kevadise veeseisu kõrgusest sõltus ka maa viljakus, riigi tulude suurus ja nende laekumise aeg. Eriti suuri nõudmisi esitas matemaatikale kahtlemata tolleaegsete suurehituste püstitamine: sillad ja tammid, kanalid ja niisutussüsteemid, riigihooned, templid ja püramiidid ei saanud kerkida plaani ja arvestuseta.

Märgime, et Egiptuses kehtestati kalender (aasta pikkusega $12 \times 30 + 5 = 365$ päeva) IV—III aastatuhandel e. m. a., et aastaks 2900 e. m. a. oli juba valminud suur Cheopsi püramiid, ja viimaks, et aastal 1850 e. m. a. rajati Niiluse orgu suurejooneline niisutussüsteem. See kõik eeldas laialdasi teadmisi matemaatikas ning suurt vilumust maamõõtmise, nivelleeri-

* K. Marx, Kapital, Esimene köide, Tallinn, 1953, lk. 444.

mise ja planeerimise alal. On tähelepanu väärt, et sumerlastel oli juba 3000 aastat e. m. a. välja kujundatud oma kindel riiklik mõõtude süsteem. Nimetame lõpuks, et meie päeva jaotus 24 tunniks, tunni jaotus 60 minutiks ja minuti jaotus 60 sekundiks ning nurga kraadimõõtmise ühikud — nurgakraad, -minut ja -sekund — on pärit Babüloonia õitseajast, niisiis ajast umbes 3000 aastat e. m. a. Kokku võttes võime öelda F. Engelsi sõnadega: «... juba algusest peale on teaduste teke ja areng tingitud tootmisest.» *

Lõunamaade ja Lähis-Ida vanade kultuurrahvaste laialdastel praktilistel kogemustel põhinevate matemaatiliste tõsiasjade baasil arenes matemaatika antiikses Kreekas abstraktseks, teoreetiliselt ülesehitatavaks teaduseks. Üleminek empiiriliselt teelt teoreetilisele eeldab kõrgele arenenud abstraktsiooni ja märgib mõtlemise ajaloo üht vaieldamatult tähtsamat etappi. Alles abstraheerumine konkreetseist esemeist ja nende vahel valitsevaist konkreetseist sidemeist viib meid geomeetrilistele mõistetele ja neid mõisteid üksteisega siduvatele geomeetrilistele tõdedele. Neist tõdedest valitakse siis mõned eriti lihtsad aksioomideks, nagu näiteks: kaht punkti saab läbida ainult üks sirge; võrdsetele võrdseid liites saame võrdsed jne. Edasi saab geomeetria areneda oma sisemise loogika järgi: geomeetria saab deduktiivselt ülesehitatavaks teaduseks.

Küsimus, kas kasutatud abstraktsioonid on õigustatud või mitte, otsustatakse mitmes järgus: esiteks peavad nad võimaldama üles ehitada niisugust geomeetriliste tõdede süsteemi, mis on vaba igast sisemisest vasturääkivusest, süsteemi, mille kõik osad on üksteisega täielikus kooskõlas; teiseks peab see geomeetriliste tõdede süsteem õigesti peegeldama meid ümbritsevas tegelikkuses valitsevaid seoseid, sest vastasel korral oleks geomeetria ju vaid üheks eriliiki mõttemänguks; vaatlus, katse ja tootmispraktika otsustavad, kas geomeetria annab objektiivsest reaalsusest õige pildi või mitte; nad langetavad lõppotsuse geomeetrilise süsteemi väärtuse või väärtusetuse kohta.

Oma teoreetilises osas on kreeka ajastu matemaatika saavutused seotud Talese (ümmarguselt 600 a. e. m. a.), Eudoksose (ümmarguselt 400 a. e. m. a.), Eukleidese (ümmarguselt 300 a. e. m. a.) ja Apolloniose (ümmarguselt 100 a. e. m. a.) nimedega, oma rakenduslikus osas Arhimedese (ümmarguselt 250 a. e. m. a.) ja Heroni (ümmarguselt 100 a. e. m. a.) nimedega. Talesele võlgneme piirdenurga lause, Eudoksosele võrrete õpetuse ja ammendamismeetodi, Euk-

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1950, стр. 145.

leidesele geomeetria esimese süstemaatilise esituse ja ühtaegu esimese geomeetria õpiku, Arhimedesele ringjoone pikkuse määramise järkjärgulise lähendamise viisil, Heronile kolmnurga pindala avaldise tema külgede kaudu ja Apolloniosele esimese elementaargeomeetriast välja viiva suursammu — koonuslõigete põhiomaduste tõestuse.

Laialdane matemaatiliste tõsiasjade kogu, mis oli avastatud eelmise kahe tuhande aasta vältel Egiptuse ja Lähis-Ida kultuurrahvaste poolt ja mitmes osas oluliselt rikastatud Talese, Pütagorase ja Platoni poolt, nõudis *süstematiseerimist ja eelkõige kriitilist läbitöötamist*. Selle väga ulatusliku töö teostamise võlgneme suurele aleksandrialasele *Eukleidesele*. Temal õnnestus haarata oma «Elementides» kõiki tollal tuntud matemaatilisi tõdesid loogiliselt järjekindlasse süsteemi. Talle kuulub ka esimene katse tuletada neid tõdesid deduktiivselt vähesest hulgast lihtsaist, silmanähtavalt kehtivaist tõdedest — *aksioomidest*. Kõik õpikud, mille järgi on tänini elementaargeomeetriat õpitud, on Eukleidese «Elementide» teisendid suhteliselt väheste, enamasti vormiliste muudatustega.

Eukleidese «Elemendid» on üldse ajaloos esimene deduktiivsel teel ülesehitatud teaduslik süsteem; sellega algab deduktiivse mõtlemise suurvõitude jada matemaatikas, mehaanikas, füüsikas ja paljudes teistes teadustes. Eukleidese «Elemendid» on ühtlasi esimene matemaatiline teos, kus *matemaatilist mõtet arendati palju kaugemale kui tolleaegne elupraktika seda nõudis*, s. t. kaugemale kui orjanduslik tootmisviis seda rakendada suutis. Veel praegugi, 2250 aastat hiljem, sotsialismi ajastul, on Eukleidese suurteose teoreetiliste palade enamik loodusuurijate peamiseks töövahendiks ja insener-tehnilise personali hädavajalikuks tööriistaks iga tootmisprotsessi planeerimisel, rajamisel ja juhtimisel.

Kui *Eukleideses* näeme üht kõigi aegade suurimat *teoreetilise matemaatika* viljelejat, siis sitsiillases *Arhimedeses* austame ajaliselt esimest *rakendusmatemaatika* vaimuhiiglast. Temalt on pärit kangi seadus; tema õpetas, kuidas arvutada parabooli ja selle kõõlu poolt piiratud pindala; tema näitas, kuidas leida raskete kehade raskuspunkti asendit, kasutades seejuures sisult kõrgema matemaatika mõttekäike, mille süstemaatiline väljaarendamine toimus alles ligi 2000 aastat hiljem. Talesega algav ja Apolloniosega lõppev ajavahemik on matemaatika esimeseks rikkalikumaks ja kaunimaks õitseajaks.

Rooma maailmariigi pikk ajajärk pole matemaatika varasalve millegi nimetamisväärsega rikastanud.

Kui kreeklaste teeneks on paljude uute geomeetriliste tõdede avastamine ja nende tõdede teaduslikku süsteemi viimine, siis *hindudele ja araablastele võlgneme aritmeetika kümnendsüsteemi loomise ja sellel süs-*

teemil baseeruva arvutustehnika arendamise. Kümnendsüsteemile tugineb ka arvutamine arvelauaga ja paljude teiste mehaaniliste arvutusvahenditega. Märgime, et hindude ja araablaste töö langeb ümmarguselt aastatele 500 kuni 1000 — Euroopa keskaja kõige pimedamale ajajärgule. Samal ajavahemikul — Rooma impeeriumi lagunemisest keskaja lõpuni — avastati hindude ja araablaste poolt ka need tõed, mis moodustavad meie tänapäevase elementaaralgebra.

Ligi tuhandeaastane Euroopa keskaeg oma feodaalse ühiskondliku korraga ja kõikvõimsa kiriku ainuvalitsemisega on inimsoo ajaloo tumedamaid perioode: pime jumalausk kägistas vangla, mõõga, piinakambri ja tuleriidaga iga mõtteavalduse, mis oli või näis olevat vastuolus kiriku dogmadega. Keskaja ainsaks saavutuseks matemaatika alal tuleb lugeda kõigi tollal kättesaadavate kreeka- ja araabiakeelsete matemaatiliste tekstide ladinakeelsete tõlgete valmistamist, millega need tekstid tehti kättesaadavaks Euroopa rahvastele ja ühtaegu säilitati tulevastele põlvedele.

XV ja XVI sajandi vahetusel toimunud Ameerika avastamisega kaasnev vaimne murrang, mitmel maal korraga alanud kääramine usuelus, materialistliku maailmavaate taaselustumine, kujutava kunsti tormiline areng ja sõnakunsti ennenägematu õitseng (eriti Itaalias) — see kõik märkis uue ajajärgu algust Euroopa ajaloos. Tootlike jõudude areng oli saavutanud taseme, mis ei võimaldanud seni kehtinud ühiskondliku korra edasipüsimist; algas feodaalse ühiskondliku formatsiooni taganemine võimsalt pealetungiva uue, kapitalistliku ühiskondliku korra ees. Tootmise kiire areng Põhja-Itaalias ja Lõuna-Saksamaal, suuresti elavnenud maadevaheline kaubandus ja kõikjal tormiliselt arenev ehitustegevus esitasid matemaatikale ja mehaanikale järjest uusi probleeme, saades seega nende teaduste arengu peamiseks tõukejõuks. Võiksime F. Engelsi sõnadega öelda, et «kui pärast keskaja pimedat ööd äkki uuesti ootamatu jõuga elustusid teadused, mis hakkasid arenema imetaolise kiirusega, siis selle ime võlgneme me jällegi tootmisele».*

Koos tootva töö poolt matemaatikale esitatud ülesannetega kerkisid uuesti päevakorrale taevakehade liikumise probleemid: kuidas seletada taevavõlvil täheldatavaid tähtede ja planeetide liikumisi? Lihtsa vastuse andis sellele küsimusele Kopernik (1473—1543) oma 1543. aastal ilmunud teoses «Taevasfääride tiirlemisest»: planeedid tiirlevad mitte ümber Maa, vaid ümber Päikese. Maa on üks planeetidest. Koperniku raamat põhjustas maailmavaatelise murrangu, nagu seda varem polnud esile kutsunud ükski teine loodusteaduslik teos. Selle raamatu ilmumine pidi ära ootama autori surma, et mitte põhjustada tema tuleriidale

---

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1950, стр. 145.

saatmist. Matemaatika sai siin esmakordselt tõhusaks relvaks alanud võitluses inimese vabastamise eest kõikvõimsa kiriku köidikuist. Selle võitluse keskseks kujuks on Galileo Galilei (1564—1642). Temaga algab loodusteaduses uus ajajärk: kui kogu endisel ristiusu võimutsemise ajal oli lubatud loodustõde otsida vaid piibli fantastilistest jutustustest ja Aristotelese filosoofilistest spekulatsioonidest, siis Galileist peale rajatakse looduse tunnetamine eelkõige looduselt eneselt saadud andmetele, s. t. vaatlus- ja katsetulemustele. Nagu eespool nägime, ulatuvad taevakehade liikumise süstemaatilised vaatlused tagasi mitmesse aastatuhandesse. Teadlik, plaanikindel katsete korraldamine meie ümber toimuvate loodusnähtuste käigu jälgimiseks on pärit aga alles Galileilt. Siitpeale viib meid mitte spekulatsioon, vaid vaatlus- ja katseandmete matemaatiline läbitöötamine loodusseaduste avastamisele, ja jällegi otsustavad vaid vaatlus ja katse esimeses instantsis, kas loodusnähtustikust tehtud pilt on õige või vale. Lõppotsuse pildi tõetruuduse kohta annab aga alles ühiskondlik praktika. Viimases lauses sõnastatud mõte on üks meie revolutsioonilise maailmavaate — dialektilise materialismi — nurgakive.

Kopernikule, Galileile ja Keplerile (1571—1630) võlgneme esimesed suurvõidud matemaatika rakendamise alal looduse uurimise vahendina. Kopernik andis alused taevakehade nähtavate liikumiste mõistmiseks, Galilei avastas raskete kehade vaba langemise seadused, Kepler leidis planeetide tiirlemise seadused. Nende kolme uurija elutööd ei tule aga hinnata ainult nende konkreetsete töösaavutuste järgi: kaugemale ulatuva tähtsusega on nende poolt näidatud uurimismeetod, mida võib iseloomustada järgmiste märksõnadega: vaatlus ja katse, küsimuses olevate suuruste mõõtmine, seaduspärasuste avastamine mõõtmistulemuste matemaatilise läbitöötamise teel ja lõpuks leitud seaduspärasuste kontroll uue vaatlusmaterjali varal. See Koperniku, Galilei ja Kepleri näidatud uurimismeetod püsib tänini kogu loodusteaduse keskse meetodina.

Tärganud kapitalismi tootlike jõudude järjest kiirenev areng põhjustas tehnika ja loodusteaduse rikkaliku probleemistiku esilekerkimise, mille lahendamine polnud mõeldav matemaatikata. Nende uute probleemide pinnasel läks matemaatika vastu oma teisele suurõitsengule, mis on lahutamatult seotud Descartes'i (1596—1650), Leibniz'i (1646—1716) ja

Newtoni (1643—1727) nimedega. «Pöördepunktiks matemaatikas oli Descartes'i muutuv suurus. Tänu sellele tulid matemaatikasse liikumine ja dialektika...»* Kõigil eelnevatel aegadel vaadeldi suurusi muutumatuina ja kujundeid jäikadena, igaüht neist uuriti ikka omaette, isoleerituna teistest. Vasttoimunud murrangu tulemuseks oli kõigepealt matemaatika uurimisala tohutu laienemine. Suurusi ja kujundeid ei uuritud siitpeale mitte enam ainult mingis ühes nende oleku faasis, vaid kogu nende muutuvuses, keskendades peamise tähelepanu suurustevahelistele seostele ehk funktsionaalsetele vahekordadele. See matemaatilise uurimise temaatika uuenemine on sisemiselt kõige tihedamalt seotud samal ajal toimunud temaatika muutumisega loodusteaduses: Galilei ajast peale nihkub mehaanikas, füüsikas ja astronoomias hetkelise sündmuse kirjeldamine tagaplaanile; selle asemele astub meie ümber toimuvate nähtuste kulgemise uurimine.

Uus temaatika nõudis ka uusi meetodeid. Need meetodid moodustavad nn. kõrgema matemaatika tuumiku. Poolesajale aastale (1637—1687) langeb Descartes'i, Leibniz'i ja Newtoni matemaatiliste põhiteoste ilmumine: 1637. a. ilmus Descartes'i «Geomeetria», 1684. a. Leibniz'i «Suurimate ja väikseimate väärtuste ja puutujate leidmise uus meetod...» ja 1686. a. tema «Varjatud geomeetria ja jagamatute ning lõpmatuse analüüs...», lõpuks 1687. a. Newtoni «Loodusfilosoofia matemaatilised printsiibid».

Descartes'i raamatus anti koordinaatide meetod. Leibniz'i töödes esitati matemaatilise analüüsi tähtsaimad mõisted — diferentsiaal ja integraal —, peamised võtted nendega töötamiseks ning tänini püsiv ületamatult otstarbekas sümboolika. Viimaks, Newtoni suurteoses näidati matemaatilise meetodi võimsust ja selle suurt viljakust mehaanika ja taevamehaanika küsimuste käsitlemisel.

Neil XVII sajandi teisel poolel loodud alustel on matemaatika kasvanud ja arenenud tänapäevani, saades võimsaks vahendiks meie ümber toimuvate nähtuste haaramiseks ja juhtimiseks meile vajalikus ja kasulikus suunas.

Kui XVII sajandil rajasid Descartes, Leibniz ja Newton kõrgema matemaatika hoonele alusmüüri, siis XVIII sajand kulus hoone kandeseinte püstitamiseks. Kõrgema matemaatika edasiarendamise ja laialdase rakendamise kõige mitmekesisemate tegelikkuse poolt seatud probleemide lahendamisel võlgneb ülemaailmne teadus eelkõige Leonhard Eulerile (1707—1783) —

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1950, стр. 206

XVIII sajandi suurimale matemaatikule, kes ühtlasi on esimeseks kõrgema matemaatika ja selle rakenduste viljelejaks meie kodumaal. Sündinud Šveitsis ja saanud seal väga hea teadusliku ettevalmistuse, kutsuti ta kõigest 20-aastase noormehena Peterburi Teaduste Akadeemia liikmeks. Välja arvatud aastad 1741—1766, millal Euler oli Berliini Teaduste Akadeemia liige, töötas ta oma elu lõpuni Peterburis.

Euler oli üks viljakamaid ja laiema haardega uusaja matemaatikuid. Temalt on pärit lause, mis seob iga hulknurga tippude, tahkude ja servade arvu, ta avastas täisarvude põhilisi omadusi, viis tõhusalt edasi kõiki kõrgema matemaatika osi, rajas rakenduslikult väga tähtsa variatsioonarvutuse, pani aluse kindla keha mehaanikale ja töötas teedrajavalt taevamehaanika ja tehnilise mehaanika alal. Tänu Eulerile asus Peterburi Teaduste Akadeemia kohe oma asutamisest peale matemaatiliste teaduste alal juhtivale kohale, minnes mööda vanematest akadeemiatest. Selle koha on Peterburi ja hiljem NSV Liidu Teaduste Akadeemia enda käes hoidnud tänapäevani ja hoiab seda kahtlemata ka edaspidi.

Eulerile võlgneme peale suurte teaduslike avastuste ka esimesed laiahaardelised süstemaatilised õpikud kõrgema matemaatika alal. Nende ilmumine märkis ka väliselt, et kõrgema matemaatika hoone müürid olid oma peamistes osades valmis: loodud meetodid osutusid küllaldasteks enamiku probleemide lahendamisel, mida kõrgemale matemaatikale tol ajal seadsid taevamehaanika, füüsika, ehitustegevus ja tehnika. Kõrgem matemaatika oli jõudnud tasemele, kus suured, põhilised probleemid olid seatud ja lahendatud, kuid nagu puutüvest oksi, nii kasvas nendest põhiprobleemidest välja lugematuid uusi küsimusi, mis nõudsid vastamist. Seejuures selgus, et kõrgema matemaatika tormilisel arengul XVIII sajandil oli hoone alusmüüri lõplik väljaehitamine unarusse jäänud ja matemaatilise mõtteehitise loogiline kandevõime oli mitmes põhilises osas puudulik. Selle tõsiasja äratundmisest sai alguse kogu XIX sajandi matemaatikat iseloomustav kriitiline suund. Tolle sajandi matemaatilist tööd läbib punase joonena matemaatika aluste uurimine. Küsimuste hulgas, mis nõudsid lahendamist, olid näiteks järgmised. Milles seisab katkematu muutumise tunnus? Kas igal lõplikuks jääval muutuval suurusel on tingimata olemas maksimaalne väärtus? Kas igal katkematul joonel on igas punktis puutuja?

Lahtisi küsimusi leidus aga ka elementaarmatemaatika aluste valdkonnas. Kuulsaim neist on küsimus: kas väide, et väljaspool sirget asuvat punkti saab läbida ainult üks antud sirgega paralleelne sirge, on omaette aksioom või väide, mida saab tõestada teiste geomeetrias aksioomideks tunnistatud tõdede varal? Küsi-

mus seisis päevakorras Eukleidese ajast peale, seega üle 2000 aasta. Selle lahendas alles 1826. aastal suurim vene matemaatik Nikolai Ivanovitš Lobatševski (1792—1856), kes rajas geomeetria, mis eitab paralleelide aksioomi kehtivust, kuid on kõigis oma osades loogiliselt niisama range, nagu seda on Eukleidesegi geomeetria. Põhimõttelisest seisukohast vaadatuna on mitte-eukleidilise geomeetria loomine Lobatševski poolt vaieldamatult suurimaks saavutuseks geomeetria alal pärast Eukleidest.

Kõrvuti matemaatika aluste kriitilise läbitöötamisega õnnestus XIX sajandil lõplikult lahendada mitmed küsimused, mis olid seisnud päevakorras pikemat aega, näiteks kreeka ajastust pärinevad küsimused: kas saab sirkli ja joonlaua abil jagada iga nurka kolmeks võrdseks osaks, konstrueerida ringiga pindvõrdset ruutu, konstrueerida antud kuubi serva järgi kahekordse ruumalaga kuubi serva? Üheks eriti tõrksaks probleemiks oli nn. algarvude probleem: mitu algarvu leidub allpool mingit kindlat etteantud tõket? Esimese kaugeleulatuva tulemuse võlgneb teadus siin teisele vene matemaatika geeniusele — Pafnuti Lvovitš Tšebõševile (1821—1894). Tšebõševi võrratust algarvude hulga kohta allpool antud tõket tunnustatakse teaduses esimeseks suursammuks algarvude teoorias pärast Eukleidest, kes esimesena tõestas, et algarve on lõpmata palju. Tšebõševile kuuluvad ka sügavad uurimused tõenäosusteoorias ja teedrajavad saavutused varrasmehhanismide liikumise teooria alal. Tšebõševi vaieldamatult suurimaks teeneks on aga see, et ta rajas esimese vene matemaatikute koolkonna, mille mõju on laialdaselt tunda veel praegugi.

Kõrvuti Lobatševski ja Tšebõševiga andis Venemaa XIX sajandil ka kõigi aegade suurima naismatemaatiku Sofia Vassiljevna Kovalevskaja (1850—1891), kes aga tsaariaegse Venemaa tingimustes ei leidnud võimalusi kodumaal õppimiseks ja pidi neid otsima Saksamaal. Isegi olles omandanud ülemaailmse kuulsuse, ei saanud ta tööd kodumaal, vaid pidi tööle asuma Rootsis.

Uus ajajärk matemaatika arengus nagu kõigil poliitilise, majandusliku ja kultuurilise elu aladelgi algas Suurest Sotsialistlikust Oktoobrirevolutsioonist. Mitmed teenetega vanema põlve matemaatikud; kes olid juba tsaariajal tuntud oma progressiivsete vaadete poolest, andsid endid kõhklemata bolševike partei ja Nõukogude valitsuse käsutusse. Nad kindlustasid seega uurimistöö seisakuta edasimineku, tõmbasid kaasa lootustandvaid noorema põlvkonna uurijaid, rajasid Nõukogude valitsuse igakülgsel toetusel esimesed suurejoonelised uurimisinstituudid ja panid oma ustavusega uuele riigikorrale ning oma töö ja eeskujuga aluse matemaatika seninägematule arengule meie kodumaal. Kõige auväärsemate nimedena tuleb siin märkida mate-

maatilise füüsika meetodite viljelejat Vladimir Aleksandrovitš Steklovi (1864—1926), kes peatselt pärast Suurt Oktoobrirevolutsiooni asutas esimese NSV Liidu matemaatilise uurimisinstituudi, mis praegu kannab oma asutaja nime ja on võimsamaid sellelaadseid asutusi maailmas; sotsialistliku töö kangelast Aleksei Nikolajevitš Krõlovi (1863—1945), ülemaailmselt tunnustatud autoriteeti laevateooria alal; «vene lennuasjanduse isa» (V. I. Lenini sõnad) Nikolai Jegorovitš Žukovskit (1847—1921), kellele võlgneme lennuteooria alused; sotsialistliku töö kangelast Sergei Aleksandrovitš Tšaplõginit (1869—1942), gaasijugade teooria loojat.

Nõukogude matemaatika arengus võib täheldada mitmeid omapäraseid jooni.

Esiteks: Kui varem matemaatika ja tema rakendustega tegeles vaid väike arv uurijaid, kellest igaüks töötas omaette ja püüdis lahendada ikka ainult tema isiklikku huvipiirkonda langevaid juhuslikke probleeme, siis nüüd näeme hoopis teist pilti: nõukogude korra ajal on teaduse arendamine riiklik ülesanne. Vastavalt sellele toimub kogu uurimistöö, seega ka uurimistöö matemaatika alal, kindla riikliku plaani järgi.

Teiseks: Ühenduses sotsialistliku ülesehitustööga on tohutult tõusnud vajadus teadusliku kaadri järele kõigis teadusharudes, ka matemaatikas. Selle vajaduse rahuldamiseks on loodud laialdased ja soodsad kaadri kasvatamise tingimused.

Kolmandaks: On loodud suurejoonelised võimalused iga tähtsama uurimissaavutuse äramärkimiseks autasude, medalite ja preemiate määramisega.

Neljandaks: Kui revolutsioonieelsel perioodil üle kogu suure Venemaa tegeldi vaid üksikute väheste matemaatiliste probleemidega, siis praegu pole leida ühtki matemaatika osa, mida meil ei viljeldaks; on loodud pidev uurimisrinne kogu tänapäeva matemaatika probleemide ründamiseks.

Viiendaks: Kui tsaariaegsel Venemaal võis märkida vaid kaht peamist matemaatilise uurimise keskust — Peterburit ja Moskvat, siis näeme nüüd Leningradis ja Moskvas eriti viljakalt tegutsevate uurimiskeskuste kõrval mitut tunnustusväärse eduga töötavat uut keskust: Kaasan, Harkov, Tbilisi jt.

Kuuendaks: Paljud nõukogude uurijad töötavad kõige abstraktsemate ja üldisemate matemaatiliste probleemide kallal. Kui Lääne-Euroopa ja Ameerika idealistlikult häälestatud teadlased püüavad igas matemaatika abstraktses saavutuses näha kinnitust teesile, et matemaatika on puhas vaimu looming, millel pole mingit seost reaalse maailmaga, siis nõukogude matemaatikud seisavad vankumatult materialistlikul vaatekohal, mõistes matemaatikat reaalses maailmas valitsevate

vahekordade peegeldusena. Nad juhinduvad ikka Lobatševski sõnadest: «Jätke tühi vaevanägemine, püüdes leida kogu tarkust mõistuses; küsige looduselt, temas peituvad kõik saladused ja ta vastab teie küsimustele tingimata ja rahuldavalt.» Sellest tuleneb nõukogude matemaatikute püüe mitte kunagi rahulduda abstraktsete mõttekäikude tulemustega, vaid ikka otsida neile ka konkreetne tõlgendus. Nende konkretisatsioonipüüdluste loomulikuks jätkuks on tee matemaatikalt tema laialdastele rakendustele. Kui idealistlikult häälestatud Lääne matemaatikud loevad tööd matemaatika rakendamise alal teisejärguliseks, siis nõukogude matemaatikud on teinud selle töö oma auasjaks: kõrvuti puhtteoreetiliste uurimistega töötatakse kõigi aktuaalsete matemaatiliste probleemide kallal, mida seavad meie ehitustegevus ja kiiresti arenev tehnika. Meie kodumaal on matemaatika nagu kõik teisedki teadused rahva teenistuses.

On vaieldamatu, et Suur Sotsialistlik Oktoobrirevolutsioon ei märgi mitte ainult pöördepunkti inimsoo ühiskondlik-poliitilises arengus, vaid tähistab ka pöördepunkti inimsoo kultuuriajaloos. On rohkem kui tõenäoline, et Oktoobrirevolutsiooni poolt loodud eeldustel matemaatika juba lähematel aastakümnetel läheb vastu oma kolmandale suurõitsengule.

Praegu töötavaist juhtivaist nõukogude matemaatikuist nimetame ülemaailmse kuulsusega arvuteoreetikut, sotsialistliku töö kangelast akadeemik I. M. Vinogradovit; Tšebõševi kuulsusrikaste traditsioonide jätkajat akadeemik S. N. Bernsteini; maailma võimsaima Moskva topoloogia koolkonna loojat akadeemik P. S. Aleksandrovit; ülemaailmselt tunnustatud autoriteeti elastsusteooria alal, sotsialistliku töö kangelast, noore, kuid väga teovõimsa gruusia matemaatikute koolkonna loojat, Gruusia Teaduste Akadeemia presidenti N. I. Mushelišvilit; Moskva tõenäosusteoreetikute koolkonna loojat, käesoleva aja universaalseimat matemaatikut akadeemik A. N. Kolmogorovit; naismatemaatikuist — põhjavete liikumise teooria tagajärjekamat viljelejat, akadeemik P. V. Polubarinova-Kotšinat.

Kui laialdaselt Suur Sotsialistlik Oktoobrirevolutsioon vallandas rahva loomingulised võimed, seda näitab seegi asjaolu, et paljud suured matemaatilised probleemid, mis pikka aega, aastakümneid ja isegi aastasadu on seisnud päevakorras, on nüüd viimaks lahendatud nõukogude matemaatikute poolt. Niisugusteks probleemideks on näiteks Peterburi Teaduste Akadeemia liikme Goldbachi poolt püstitatud kuulus probleem (1742. a.): näidata, et iga paarisarv on kahe algarvu summa; Hilberti probleem (1900. a.): välja selgitada $2^{\sqrt{2}}$ tüüpi arvude loomus; Poincaré probleem: näidata, et igal

kumeral pinnal leidub 3 kinnist geodeetilist joont (kaht pinnapunkti ühendav geodeetiline joon on nende punktide vahel pinnal kulgev l ü h i m joon).

Nõukogude kõrgema matemaatika eelseisvas arengus on võimalik eritleda järgmist kolme põhisuunda.

a) Nii nagu Eukleidesegi ajal õnnestus tervet varem avastatud matemaatiliste tõsiasjade kogu viia ühtsesse loogilisse süsteemi vaid kaugelemineva abstraktsiooni vahendusel, püütakse ka praegu saavutada kõrgema matemaatika seniste tulemuste sünteesi, abstraktsiooni taset senisest kõrgemale viies. Selles suunas on praegu käimas suurejoonelised uurimised, kusjuures aparaadi sünteesi läbiviimiseks annavad tõenäoliselt moodne algebra, funktsionaalanalüüs ja topoloogia.

b) Kui klassikalise kõrgema matemaatika põhiosi — diferentsiaal- ja integraalarvutust — tuleb lugeda lõplikult väljakujunenuks, siis leidub ikkagi veel mitmeid kõrgema matemaatika harusid, mille edasiarendamine tõotab anda rikkalikke tulemusi. Niisugusteks meil viljeldavateks klassikalise kõrgema matemaatika aladeks on näiteks diferentsiaal- ja integraalvõrrandite teooria, variatsioonarvutus ja funktsiooniteooria.

c) Ühelgi varajasemal ajastul pole tegelik elu seadnud matemaatikale nii rikkalikke, nii mitmekesiseid, nii keerukaid ja raskeid probleeme nagu praegu. Et kindlustada nende kiiret lahendamist, osutavad nõukogude matemaatikud erilist tähelepanu kõigile rakenduslikust küljest tähtsatele matemaatilistele distsipliinidele. Siia kuuluvad meil suurejooneliselt viljeldav tõenäosusteooria, ligikaudsete meetodite teooria, elektronarvutusmasinate teooria ja mitmed teised.

Elu poolt seatud ülesanded nõuavad alati k o n k r e e t s e t a r v u l i s t v a s t u s t, mille leidmine sageli nõuab väga laialdast ja aeganõudvat arvutustööd. Selle töö kergendamine ja kiirendamine on mõeldav ainult a r v u t u s t e h n i k a m e h h a n i s e e r i m i s e, õigemini elektrifitseerimise teel. Seepärast on paljude nimekate nõukogude matemaatikute töö suunatud uute, võimsate arvutusvahendite konstrueerimisele. See töö on andnud tunnustusväärseid tulemusi: e l e k t r o n a r v u t u s m a s i n a d võimaldavad ühes sekundis läbi viia üle saja tuhande matemaatilise üksikoperatsiooni — nad teevad mõne sekundiga ära töö, mida aastas suudaks teha vaid suur vilunud arvutajate kollektiiv.

Paljude tänapäeva tegelikkuse poolt seatud probleemide lahendamine nõuab täiesti uute matemaatiliste meetodite loomist. Pole kahtlust, et just see muudab meie tegelikkuse tõhusaks ja lakkamatult mõjuvaks tõukejõuks nõukogude matemaatika edasisele arengule, sest ülesanded, mida seab k o m m u n i s t l i k u ü h i s k o n n a m a t e r i a a l s e b a a s i l o o m i n e teadusele üldiselt ja seega ka matemaatikale, ületavad oma ulatuselt ja süga-

vuselt kõik selle, mida teaduse senisest ajaloost tunneme. Nende ülesannete gigantseis mõõtmeis peegeldub meie veendumus, mille on nii kaunilt sõnastanud suur rakendusmatemaatik akadeemik A. N. Krõlov: «Teaduse jõud ja võimsus on piiritud ja niisama piiritud on tema praktilised rakendused inimsoo hüvanguks.»

II. Kõrgema matemaatika ülesanne

On kujunenud traditsioon kokku võtta kaht matemaatilist distsipliini — analüütilist geomeetriat ja matemaatilist analüüsi — nimetuse alla «kõrgem matemaatika». Sõna «kõrgem» tahab öelda vaid seda, et siin arendatavad meetodid on üldisemad ja võimsamad kui elementaarmatemaatika üksikküsimuste lahendamiseks loodud töövõtted. Iga distsipliini sisust ja olemusest, teoreetilisest väärtusest ja praktilisest kasulikkusest saame kujutluse alles järk-järgult aine põhiprobleemide ja tähtsamate töömeetoditega tutvudes. Nii on see ka kõrgema matemaatika puhul. Järgmised read valgustavad küsimust vaid kõige üldisemast seisukohast.

Teaduse ülesandeks on vaadelda meid ümbritsevas reaalsuses toimuvaid nähtusi, avastada nende käiku määravaid seadusi, uurida nende nähtuste vahel valitsevaid sõltuvusi, et neid nähtusi tunnetada ja õigesti mõista ning leida teid ja vahendeid nende juhtimiseks inimühiskonnale vajalikus suunas.

Iga esineva nähtuse puhul seame endale eelkõige kolm küsimust: 1. Millal nähtus toimub? 2. Kus nähtus aset leiab? 3. Kuidas nähtus kulgeb?

Vastused esimesele kahele küsimusele saame, määrates nähtuse paigutuse ajas ja ruumis. Oma toimumise aegade kaudu esinevad nähtused meile kindlas ajalises järjestuses, me näeme nähtusi toimumas kindlas korras üksteise järel. Oma toimumise kohtade kaudu esinevad nähtused meile kindlas ruumilises paigutuses üksteise suhtes.

Nähtuse aeg määratakse kronomeetri, pendelkella või teiste ajamõõtmisriistade abil, tarbe korral raadiosignaale ja astronoomilisi vaatlusi abiks võttes.

Nähtuse koha määramisega maismaal tegeleb geodeesia, merel nautika, taevavõlvil sfääriline astronoomia. Vaadeldava eseme, sündmuse või nähtuse koht fikseeritakse alati teatavate kindlate esemete suhtes teatava hulga arvuliste andmetega. Kindlaid esemeid, mille suhtes asend määratakse, nagu piirikive,

kindlaid leppejooni, leppetasapindu jne. nimetatakse üldiselt reeperiteks*. Arvulisi andmeid, mille abil asend määratakse, nimetatakse koordinaatideks. Nii näiteks määratakse mõne maakerale langenud suure meteoriidi asukoht tundras või oaasi asukoht kõrbes või veealuse kalju asukoht meres nende geograafilise laiusega φ ja geograafilise pikkusega λ. Geograafiline laius φ ja geograafiline pikkus λ on koha geograafilised koordinaadid. Koordinaatide aparaadi loomine asendi määramiseks sirgjoonel, tasapinnal ja ruumis on analüütilise geomeetria esimeseks ülesandeks. Tema teiseks ülesandeks on välja töötada võtted, mille abil saab punktide mõõdetud koordinaatidest arvutada punktidevahelised kaugused, sihtidevahelised nurgad ja paljud teised praktikas vajalikud suurused.

Koordinaatide mõiste on osutunud erakordselt viljakaks vahendiks ka analüütilise geomeetria kolmanda ülesande lahendamisel, nimelt kõverate joonte ja kõverate pindade omaduste uurimisel. Siin saadud tulemused on leidnud laialdast kasutamist maa-alade kaardistamise meetodite väljatöötamisel, ehitus- ja masinamehaanika teoreetiliste aluste loomisel ja paljudes teistes praktilise töö lõikudes.

Kolmanda küsimuse — kuidas nähtus kulgeb? — seadis täie teadlikkusega esmakordselt Galilei kehade langemise puhul püstsihis ja kaldtasapinda mööda. Kõnesoleva küsimuse seadmisega algas uue aja loodusteaduse võidukäik. Küsimusele, kuidas nähtus kulgeb, annab esialgse vastuse vaatlusprotokoll. Kehade langemise puhul koosneb see kahest veerust: esimesse on märgitud langemisajad, teise nendele vastavad langemisteed. Analoogilised on vaatlusprotokollid ka iga teise nähtuse puhul. Vaatlusprotokollis fikseeritud arvulistest andmetest tuletatakse siis nähtuse käiku valitsev seadus ja mitmed nähtuse käiku iseloomustavad näitajad.

Nähtuse käiku valitsev seadus avaldub alati kindla seosena teatavate suuruste vahel ja näitab, kuidas muutub üks neist teise muutumisel (näiteks kuidas muutub gaasi ruumala rõhu muutumisel, hõõglambi valgustugevus võrgupinge muutumisel, salpeetri lahustuvus vees temperatuuri muutumisel jne.). Kahe suuruse vahelist seost nimetatakse ka nende suuruste vaheliseks funktsionaalseks sõltuvuseks. Matemaatilise analüüsi esimeseks ülesandeks on luua funktsionaalsete sõltuvuste aparaat, mis on küllalt mitmekesine,

---

* Ladina keeles *repere* — millelegi toetuma.

painduv ja võimas, et sellega haarata kogu meie ümber arenevat nähtustikku.

Nähtuse käiku iseloomustavaist näitajaist on kõige tähtsamad kaks: 1) nähtuse toimumise kiirus (näiteks kiirus, millega aur paisub temperatuuri tõusmisel; kiirus, millega hõõglambi valgustugevus väheneb võrgupinge langemisel, jne.) ja 2) akumulatsiooniaste (näiteks autosõidul läbitud kaugus ehk akumuleerunud kilomeetrid üldiselt hetkelt hetkele muutuva kiiruse puhul; merevette akumuleerunud soojushulk muutuva päikesekiirguse puhul jne.). Näitajate kogu loomine, mille abil saab võimalikult hästi iseloomustada meie ümber toimuvaid protsesse, on matemaatilise analüüsi teiseks ülesandeks. Selle lahendamiseks loob ta tuletise ja integraali mõisted. Esimene neist kujutab nähtuse toimumise kiirust, teine akumulatsiooniastet.

Peale eespool nimetatute lahendab matemaatiline analüüs veel ühe suure ülesande, mis kerkib, kui tahame meid ümbritsevat reaalsust õigesti hinnata. Ta annab meile pidepunktid küsimuse otsustamiseks, missugune on vaatlusandmeist tuletatud tõdede usaldatavuse aste. Me teame, et eranditult kõik meie vaatlusvahendid, kaasa arvatud silm ja kõrv, samuti kõik mõõteriistad, on oma ehituselt puudulikud; teame ka, et eranditult alati häirivad vaatlusi ja mõõtmisi paljud oma väiksuse tõttu väljaspool meie kontrolli seisvad pisipõhjused (vaevaltmärgatav tuuletõmme, vaatluskoha aluse märkamatult väike kõikumine, tolmuübemekese langemine kaalukausile jne.). Nende asjaolude tõttu ei kujuta vaatlus- ja mõõtmistulemused kunagi tõelist olukorda täpselt, vaid ainult ligikaudu. Seega on juba iga teadusliku töö lähteandmed — vaatlus- ja mõõtmistulemused — ebatäpsed. Tekib küsimus, kui usaldatavad need vaatlus- ja mõõtmistulemused on. Küsimus lahendatakse andmete võimaliku vea ülemmäära hindamisega.

On selge, et puudulikest andmeist tehtud järeldused ei saa olla usaldatavad. Kerkib küsimus, missugune on nende järelduste usaldatavuse määr. Matemaatiline analüüs annab võimaluse sellele põhilisele küsimusele vastata. Seega on matemaatiline analüüs erakordselt tähtis mitte ainult lugematute praktiliste küsimuste lahendamise abinõuna, vaid ka meid ümbritseva tegelikkuse õige tunnetamise vahendina.

Matemaatiline analüüs oma praegusaegsel kujul on ainulaadseks range loogilise mõtlemise kooliks ja mõtlemise distsipliini arendava ainena ei ole tal võistlejat.

Ei saa lõpuks jätta märkimata, et matemaatilises analüüsis luuakse, arendatakse ja täpsustatakse mõisteid, mida me vajame oma teaduslikul alusel rajaneva maailmavaate kujundamisel. Niisugusteks mõisteteks on näiteks muutumatus ja muutuvus, lõplikkus ja lõpmatus, sõltuvus ja sõltumatus, tõkestamatult kasvamine ja tõkestamatult kahanemine, muutuva suuruse piirväärtus, pidev või katkev muutumine ja paljud teised.

ESIMENE OSA

ARVUTAMISE TEOREETILISED ALUSED
ARVUTAMISTEHNIKA
MÕÕTMISTULEMUSTE TÖÖTLEMINE

PEATÜKK I

ARVUTAMISE ALUSED

§ 1. RATSIONAALARVUD

Naturaalarvud

Matemaatiline mõtlemine algab naturaalarvude

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$$

kujutelma tekkimisega. Need arvud on olnud varem, on praegu ja jäävad edaspidigi matemaatilise uurimistöö põhiliseks objektiks; neile toetub kogu matemaatika teoreetiline edasiarendamine ja nad on tähtsaimaks töövahendiks kõigis matemaatika rakendustes.

Kirjutises 1, 2, 3, ..., n, ... tahame viimase kolme punktiga öelda, et naturaalarvude jada on lõpmatu. Siin tähendab see, et iga naturaalarvu puhul leidub ikka ka veel temale järgnev naturaalarv. Naturaalarvude hulk on esimene ja ühtlasi tähtsaim konkreetne lõpmatu hulga näide.

Naturaalarvule n järgnevat naturaalarvu märgime sümboliga $n+1$, naturaalarvule n eelnevat sümboliga $n-1$. Eelnev arv leidub kõigil naturaalarvudel, välja arvatud esimene: naturaalarvul 1 eelnevat pole.

Naturaalarvud esinevad jadas 1, 2, 3, ..., n, ... järjestatuna suuruse järgi: iga jadas võetud arv on suurem mistahes eelnevast ja väiksem mistahes järgnevast arvust. Kahe naturaalarvu korral on alati kehtiv ainult üks kolmest võimalusest: kas $a = b$ või $a > b$ või $a < b$.

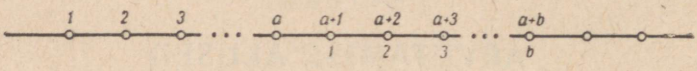
Arvutamise põhiseadused naturaalarvude vallas

Arvutamine naturaalarvudega allub teatavatele lihtsatele reeglitele. Need reeglid, nn. arvutamise põhiseadused, on saadud inimkonna aastatuhandete pikkustest kogemustest loendamisel ja nad võetakse tõestuseta aluseks edaspidistele mate-

maatilistele tuletuskäikudele nagu geomeetria aksioomidki. Allpool peatumegi nimetatud põhiseadustel.

Olgu a mingi naturaalarv. Sammudes naturaalarvude jadas arvust a alates 1, 2, 3, ..., b koha võrra edasi (joon. 1), jõuame arvu juurde, mida tähistame $a + b$:

$$a + \overset{1}{1},\ a + \overset{2}{2},\ a + \overset{3}{3},\ \ldots,\ a + \overset{b}{b}.$$



Joon. 1.

Naturaalarvude jadas arvust a edasisammumist b koha võrra nimetatakse arvu b liitmiseks arvuga a; toimingu tulemust nimetatakse arvude a ja b summaks, arve a ja b liidetavaiks.

Missugused ka ei ole naturaalarvud a ja b, ikka leidub naturaalarvude reas arv $a + b$; see tähendab, et

naturaalarvude vallas on liitmine piiramatult teostatav.

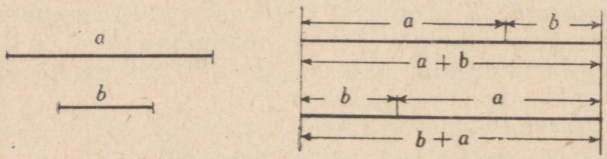
Liitmise operatsioon allub kahele põhiseadusele. Esimeseks neist on kommutatiivsuse* seadus, mis sümbolites kirjutatult avaldub kujul

$$a + b = b + a$$

ja sõnastatult ütleb, et

summa ei sõltu liidetavate järjekorrast.

Liitmise kommutatiivsust illustreerib joonis 2.



Joon. 2.

Teiseks allub liitmise operatsioon assotsiatiivsuse** seadusele, mis sümbolites kirjutatult avaldub kujul

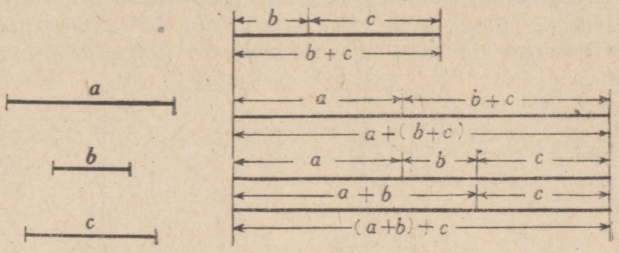
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

ja sõnastatult ütleb, et

* Lad. k. *commutare* — vahetama.
** Lad. k. *associare* — ühendama.

kolme arvu liitmisel ei sõltu resultaat sellest, kas liidame esimesele arvule teise ja kolmanda arvu summa või liidame kahe esimese arvu summale kolmanda arvu.

Liitmise assotsiatiivsust illustreerib joonis 3.



Joon. 3.

Kirjutistes $a + (b + c)$ ja $(a + b) + c$ on seega sulud tehete järjekorra märkijatena ülearused ning järelikult võime kolme arvu summat tähistada lihtsalt $a + b + c$ abil.

Erijuhul, kui summa koosneb b üksteisega võrdsest liidetavast a, nimetame liitmist k o r r u t a m i s e k s. Sel puhul tähistame summat $a + a + a + \ldots + a$ lühidalt $b \cdot a$ ja nimetame teda arvu a k o r r u t i s e k s arvuga b; arve a ja b nimetame t e g u r e i k s.

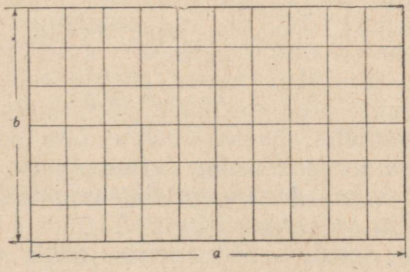
Korrutamise operatsioon allub kahele põhiseadusele. Esimeseks neist on k o m m u t a t i i v s u s e seadus, mis sümbolites kirjutatult avaldub kujul

$$a \cdot b = b \cdot a$$

ja sõnastatult ütleb, et

korrutis ei sõltu tegurite järjekorrast.

Korrutamise kommutatiivsust illustreerib joonis 4. Ruutude loendamine tulpade viisi annab $a \cdot b$ ruutu, loendamine ridade viisi aga $b \cdot a$ ruutu.



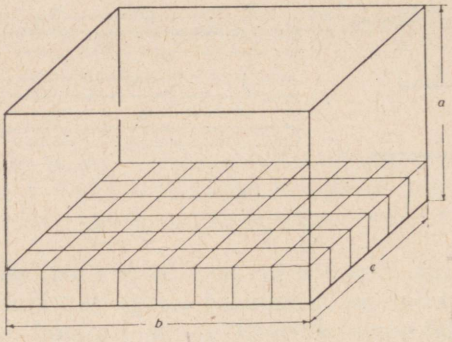
Joon. 4.

Teiseks allub korrutamise operatsioon veel assotsiatiivsuse seadusele, mis sümbolites kirjutatult avaldub kujul

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

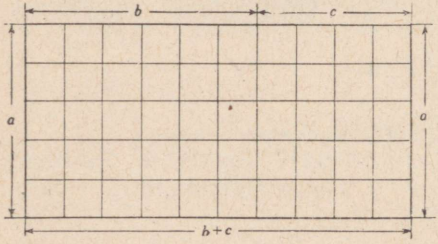
ja sõnastatult ütleb, et

kolme arvu korrutamisel ei sõltu resultaat sellest, kas korrutame esimese arvu teise ja kolmanda arvu korrutisega või korrutame esimese ja teise arvu korrutise kolmanda arvuga.



Joon. 5.

Korrutamise assotsiatiivsust illustreerib joonis 5. Kuupide loendamine rõhtkihtide viisi annab $a \cdot (b \cdot c)$ kuupi, loendamine esitahuga rööbikute püstkihtide viisi aga $c \cdot (a \cdot b)$ ehk $(a \cdot b) \cdot c$ kuupi.



Joon. 6.

Kirjutistes $a \cdot (b \cdot c)$ ja $(a \cdot b) \cdot c$ on seega sulud tehete järjekorra märkijatena ülearused ning järelikult võime kolme arvu korrutist tähistada lihtsalt $a \cdot b \cdot c$ abil.

Liitmise ja korrutamise operatsioone seob distributiivsuse* seadus, mis sümbolites kirjutatult avaldub kujul

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

ja sõnastatult ütleb, et

kahe arvu summa korrutamine kolmanda arvuga annab sama resultaadi, mille saame kummagi liidetava eraldi korrutamisel kolmanda arvuga ja korrutiste liitmisel.

Distributiivsuse seadust illustreerib joonis 6. Ruutude kor-

* Lad. k. *distribuere* — jaotama.

raga loendamine annab $a \cdot (b + c)$ ruutu, kahes osas loendamine aga $a \cdot b$ ja $a \cdot c$ ehk kokku $a \cdot b + a \cdot c$ ruutu.

Neid viit seadust nimetataksegi arvutamise põhiseadusteks.

Nende seaduste abil taandub kogu arvutamine «üks pluss ühe» ja «üks kord ühe» tabelite rakendamisele:

$1 + 1 = 2$	$9 + 1 = 10$	$1 \cdot 1 = 1$	$9 \cdot 1 = 9$
$1 + 2 = 3$	$9 + 2 = 11$	$1 \cdot 2 = 2$	$9 \cdot 2 = 18$
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$2 + 1 = 3$	$9 + 9 = 18$	$2 \cdot 1 = 2$	$9 \cdot 9 = 81$
$2 + 2 = 4$		$2 \cdot 2 = 4$	

Näide.

$$8 \cdot 73 \underset{1}{=} 8 \cdot (70 + 3) \underset{2}{=} 8 \cdot 70 + 8 \cdot 3 \underset{3}{=} 8 \cdot (7 \cdot 10) + 8 \cdot 3 \underset{4}{=}$$

$$= (8 \cdot 7) \cdot 10 + 8 \cdot 3 \underset{5}{=} 56 \cdot 10 + 24 \underset{6}{=}$$

$$= (50 + 6) \cdot 10 + (20 + 4) \underset{7}{=} 500 + 60 + 20 + 4 \underset{8}{=}$$

$$= 500 + (60 + 20) + 4 \underset{9}{=} 500 + 80 + 4 \underset{10}{=} 584.$$

Töö üksikute sammude põhjendus: 1) teine kirjutusviis kümnendsüsteemis; 2) distributiivsuse seadus; 3) teine kirjutusviis kümnendsüsteemis; 4) korrutamise assotsiatiivsuse seadus; 5) 1×1 tabel; 6) teine kirjutusviis kümnendsüsteemis; 7) distributiivsuse seadus ja liitmise assotsiatiivsuse seadus; 8) liitmise assotsiatiivsuse seadus; 9) $1 + 1$ tabel; 10) teine kirjutusviis kümnendsüsteemis.

Positiivsed ja negatiivsed täisarvud. Arv null

Naturaalarve 1, 2, 3, ..., n, ... kasutame eelkõige esemete hulga märkimiseks koguses; näiteks ütleme: linnupesas on 7 muna, vabrikus töötab 853 töölist, raamatukogus on 16 436 köidet. Sel puhul loendame esemeid kujul: üks, kaks, kolm, jne. Naturaalarve kasutame aga ka järjekorra märkimise vahenditena, järjekorranumbritena 1., 2., 3., ... näiteks raamatu lehekülgede nummerdamisel, sportlaste nummerdamisel võistkonna rivis, vabrikus toodetavate esemete nummerdamisel (taskukellad, voolumõõtjad, autod jne.). Sel puhul loendame esemeid nii: esimene, teine, kolmas, ... või ese nr. 1, nr. 2, nr. 3, jne. Lühiduse mõttes jäetakse sõna «nr.» mõnikord kirjutamata, nagu ka punkt järjekorranumbri järel.

Sageli tekib vajadus nummerdada reastatud esemeid mitte ühes suunas, nagu toodud näiteis, vaid kahes suunas, läh-

tudes ühest neist esemeist: näiteks s o o j a - ja k ü l m a p ü g a l a i d tähistavate kriipsude märkimisel termomeetri skaalal või järve veeseisu mõõtmiseks kasutatava mõõdulati kriipsude märkimisel ü l a l p o o l ja a l l p o o l veepinna normaalseisu. Säärastel juhtudel täpsustame ja täiustame järjekorra märkimist numbritega, mis on varustatud eriliste suunasümbolitega; viimastena võib kasutada näiteks noolekesi, kirjutades $3\uparrow$, $7\downarrow$, $\overrightarrow{2}$, $\overleftarrow{5}$ jne. Võib aga ka kasutada märke p l u s s ja m i i n u s: selle asemel, et öelda «13 kraadi sooja», ütleme, et «temperatuur on pluss 13 kraadi»; selle asemel, et öelda «veepinna kõrgus on 8 sentimeetrit alla normaalseisu», ütleme, et «veepinna kõrgus on miinus 8 sentimeetrit». Koha märkimiseks, millest lähtume skaala kriipsude nummerdamisel, kasutame sümbolit 0, mida loeme «n u l l». N u l l i l ei ole märki.

Märgiga $+$ või $-$ varustatud naturaalarve nimetame p o s i t i i v s e t e k s ja n e g a t i i v s e t e k s t ä i s a r v u d e k s. Kui positiivsete ja negatiivsete täisarvude hulka täiendame veel märgita arvuga null, siis saame arvude hulga, mille elemente nimetame lihtsalt t ä i s a r v u d e k s.

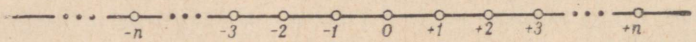
Täisarvude jada

$$\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0$$

ja edasi

$$+1, +2, +3, \ldots, +n, \ldots$$

saab graafiliselt kujutada arvteljel, nagu näeme joonisel 7.



Joon. 7.

Näeme, et täisarvude jadas leidub eranditult iga arvu puhul nii temale järgnev kui ka temale eelnev arv.

Positiivsed täisarvud on vaid teine nimetus naturaalarvudele. Negatiivsed arvud ja null on uued arvud, mille abil me laiendame esialgselt kasutusel olnud naturaalarvude ehk positiivsete täisarvude valda.

Senises käsitluses on täisarvud vaid sümbolid k o h a või j ä r j e k o r r a märkimiseks. Tekib küsimus, mis õigusega nimetame sümboleid $\ldots, -n, \ldots, -3, -2, -1, 0$ arvudeks. Õiguse selleks annab meile asjaolu, et neile sümboleile saab üle kanda nii s u u r u s j ä r j e s t u s e mõistet kui ka liitmise ning korrutamise t e h t e i d ja seda nii, et jäävad kehtima arvutamise põhiseadused samal kujul, nagu neid tunnistame kehtivaks tehete puhul naturaalarvude vallas. Skitseerime lühidalt sellele tulemusele viivat mõttekäiku.

Omistame igale positiivsele ja negatiivsele arvule ning nullile suuruse selle koha järgi, millel ta seisab täisarvude jadas: ütleme, et arv on suurem kui iga tema ees seisev ja väiksem kui iga tema järel seisev arv täisarvude jadas. Siis on näiteks arv null suurem kõigist negatiivsetest ja väiksem kõigist positiivsetest täisarvudest.

Arvu absoluutväärtus

Nägime, et positiivsed täisarvud ühtivad naturaalarvudega; kui n on naturaalarv, siis tähendavad sümbolid n ja $+n$ ühte ja sedasama. Negatiivse täisarvu $-n$ puhul ütleme, et n ehk $+n$ on arvu absoluutväärtuseks; kirjas märgime seda nii:

$$|-n| = n.$$

Ühtluse mõttes kantakse absoluutväärtuse mõiste üle ka positiivsetele arvudele ja kirjutatakse, et

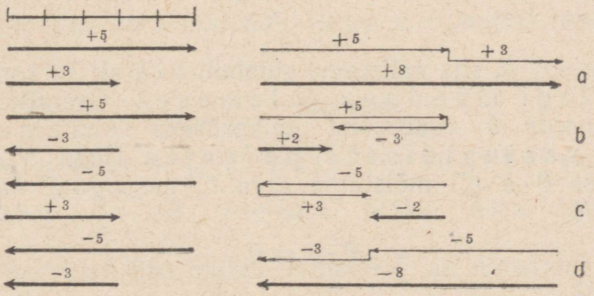
$$|+n| = n.$$

Olgu nüüd a ja b kaks negatiivset arvu. Siis, nagu nähtub positiivsete ja negatiivsete arvude järjestusest,

$$a < b, \quad \text{kui} \quad |a| > |b|.$$

Liitmine ja korrutamine täisarvude vallas

Tehteid täisarvudega on kohane uurida, tuginedes nende arvude näitlikele kujutustele suunatud lõikudena: joonised 8 *a*, *b*, *c*, *d* kujutavad liitmisi $(+5) + (+3)$, $(+5) + (-3)$,



Joon. 8.

$(-5) + (+3)$ ja $(-5) + (-3)$. Üldiselt: olgu a ja b mingid kaks arvu positiivsete ja negatiivsete täisarvude vallast; siis mõistame summa $a + b$ all arvu, mille saame, sammudes arvtel-

jel jaotisest a edasi b jaotise võrra paremale, kui b on positiivne, ja vasakule, kui b on negatiivne.

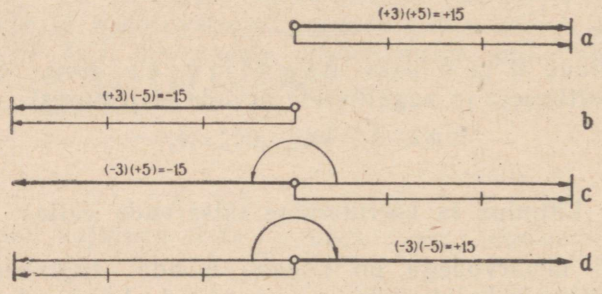
Summa $a + 0$ all mõistame kokkuleppeliselt alati arvu a, s. t.

$$a + 0 = a$$

iga a puhul.

Jooniste 8 a, b, c, d varal võime kergesti veenduda, et liitmisel täisarvude vallas, nagu seda praegu defineerisime, on mõlemad eespool nimetatud omadused: ta on kommutatiivne ja assotsiatiivne.

Olgu a ja b kaks nullist erinevat täisarvu. Küsime, mida mõista korrutise $a \cdot b$ all? Kui $a > 0$, mõistame sümboli $a \cdot b$ all a korda võetud arvu b. Graafiliselt tähendab see noole b *venitamist* a-kordseks tulemusnoole suunda muutmata jättes (joon. 9 a, b).



Joon. 9.

Kui aga $a < 0$, siis mõistame sümboli $a \cdot b$ all $|a|$ korda võetud arvu b *märgi muuduga tulemuses*. Graafiliselt tähendab see noole b venitamist $|a|$-kordseks *tulemusnoole suunda vastupidiseks pöörates* (joon. 9 c, d).

Korrutise $0 \cdot a$ all mõistame arvu 0, missugune ka ei oleks tegur a, s. t.

$$0 \cdot a = 0$$

iga a puhul.

Graafiliste kujutuste varal saab kergesti veenduda, et praegu antud korrutamise definitsiooni puhul jääb kehtima nii korrutamise kommutatiivsuse kui ka assotsiatiivsuse seadus; samuti jääb kehtima distributiivsuse seadus.

Nagu eespool öeldust näeme, on liitmine ja korrutamine täisarvude vallas piiramatult teostatavad.

Arvutamise põhiseaduste permanentsuse printsiip

Nagu näeme, toimub naturaalarvude valla laiendamine negatiivsete täisarvudega nii, et jäävad kehtima kõik arvutamise põhiseadused. Nagu peatselt näeme, on tõsiseid põhjusi arvuvalda veelgi laiendada. Seejuures püüame toimida alati nii, et arvutamise põhiseadused jääksid püsima, ja seda nii täielikult, kui see üldse osutub võimalikuks.

Nõuet, et arvuvalla laiendamine tema rikastamise teel uute arvuliikidega toimuks alati nii, et seejuures jääksid kehtima endised arvutamise põhiseadused, nimetatakse arvutamise põhiseaduste permanentsuse* printsiibiks.

Täisarvude lahutamine

Lahutamiseks nimetatakse tehet, mille abil antud summa ja ühe liidetava järgi leitakse teine liidetav. Seega on lahutamine liitmise pöördtehe. Olgu a summa ja b antud liidetav. Otsitavat teist liidetavat märgime sümboliga $a - b$, kus märk miinus ei ole mõeldud suuna tähisena nagu enne, vaid lahutamistehte märgina. Summa $a + b$ mõistet seletasime tulemusena, mille saame täisarvude jadas arvust a lähtudes b sammu võrra edasi astudes. Siit järeldub, et vahe $a - b$ mõistet tuleb seletada tulemusena, mille saame täisarvude jadas arvust a lähtudes b sammu võrra tagasi astudes. Naturaalarvude vallas on lahutamine seega teostatav vaid siis, kui $a > b$. Arvuvalla laiendamisel nulliga ja negatiivsete täisarvudega osutub lahutamine alati teostatavaks, olgu a ja b mistahes naturaalarvud, isegi mistahes täisarvud. Seega

lahutamine on täisarvude vallas piiramatult teostatav.

Murrud

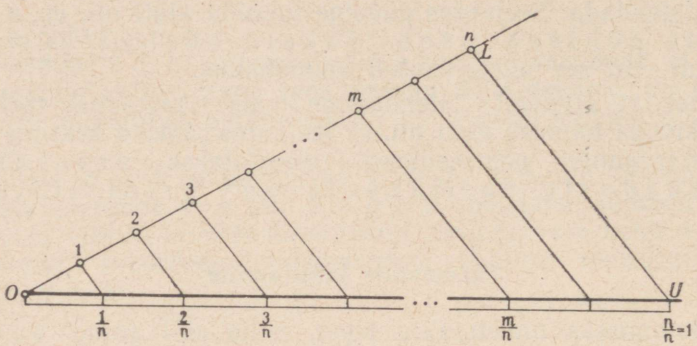
Olgu a, b, m, n ja λ positiivsed täisarvud.

Sümboli $\frac{1}{n}$ all mõistame ühiku osa, mille n-kordne annab parajasti ühe ühiku. Sümboli $\frac{m}{n}$ all mõistame m korda võetud praegu defineeritud ühikuosa. Sümbol $\frac{m}{n}$ tähistab murdu. Murru $\frac{m}{n}$ kujutuse konstrueerimine ühikust toimub järgmiselt

---

* Permanentne — püsiv, kestev.

(joon. 10): tõmbame ühiku OU algpunktist O mingi nurga all kiire, märgime sellel üksteise järel 1, 2, 3, ... n, ... võrdset lõiku, ühendame n-nda lõigu lõpp-punkti L punktiga U ja joonestame kiire jaotuspunktidest paralleelid sirgele LU. Need paral-



Joon. 10.

leelid eraldavad lõigul OU osad $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{m}{n}, \ldots$ Kui $m < n$, saame lihtmurru; kui $m = n$, saame arvu 1; kui $m > n$, saame liigmurru. Märgime veel, et iga täisarvu m on võimalik avaldada murruna $\frac{m}{1}$.

Näitame nüüd, et äsjadefineeritud murdude puhul jäävad kehtima kõik varem toodud arvutamise põhiseadused.

Eelkõige saab murdudele üle kanda järjestatuse mõiste: murd $\frac{p}{n}$ on suurem kui $\frac{q}{n}$, kui $p > q$; murd $\frac{p}{n}$ on väiksem kui $\frac{q}{n}$, kui $p < q$.

Edasi, arvu n suurenemisel λ korda väheneb murd $\frac{1}{n}$ ja seega ka murd $\frac{m}{n}$ samuti λ korda; arvu m suurenemisel λ korda suureneb murd $\frac{m}{n}$ samuti λ korda. Siit järeldub, et

murru $\frac{m}{n}$ suurus ei muutu tema lugeja ja nimetaja korrutamisel ühe ja sellesama arvuga λ.

See tõsiasi annab võimaluse iga kaht murdu nende suurust

muutmata nii teisendada, et mõlemal oleks sama nimetaja. Tõepoolest, murde

$$\frac{a}{b} \text{ ja } \frac{m}{n}$$

võime öeldu põhjal kirjutada kujul

$$\frac{an}{bn} \text{ ja } \frac{bm}{bn}.$$

Siit järeldub, et murrud $\frac{a}{b}$ ja $\frac{m}{n}$ on võrdsed, kui $an = bm$, ja edasi, et $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$, kui $an > bm$. Selle tunnuse abil saab kõiki murde järjestada nende suuruse järgi.

Kahe murru liitmise viis on näha kirjutisest

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} + \frac{bm}{bn} = \frac{an + bm}{bn}.$$

Analoogiliselt lahutame murde:

$$\frac{a}{b} - \frac{m}{n} = \frac{an}{bn} - \frac{bm}{bn} = \frac{an - bm}{bn}.$$

On kerge veenduda, et kui murdude liitmist mõistame kirjeldatud viisil, siis jäävad kehtima liitmise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadused.

Murdude korrutamine toimub skeemi järgi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{a \cdot m}{b \cdot n}.$$

On kerge veenduda, et kui murdude korrutamist mõistame sel viisil, siis jäävad kehtima korrutamise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadused ning korrutamist ja liitmist siduv distributiivsuse seadus.

Sümboleid $\frac{-m}{n}$ ja $\frac{m}{-n}$ mõistame alati murruna $-\frac{m}{n}$, sümbolit $\frac{-m}{-n}$ murruna $\frac{m}{n}$. Saab näidata, et kui murru sümbolit mõistame sel viisil, siis jäävad kõik arvutamise põhiseadused kehtima ka murdude puhul, mille lugeja ja nimetaja on ükskõik missugused positiivsed või negatiivsed täisarvud.

Jagamine

Jagamiseks nimetatakse tehet, mille abil antud korrutise ja ühe teguri järgi leitakse teine tegur. Jagamine on korrutamise pöördtehe.

Olgu a korrutis ja b antud tegur. Otsitava teguri märgime siis sümboliga $a : b$. Naturaalarvude vallas on sellel sümbolil vaid siis mõte, kui arv a on arvuga b jaguv ehk, teiste sõnadega, kui arv a on arvu b kordne. Murdudega rikastatud arvuvallas on sel sümbolil alati mõte, olgu a ja b mistahes naturaalarvud, isegi mistahes positiivsed või negatiivsed täisarvud: alati on $a : b$ murd $\frac{a}{b}$.

Murru jagamine murruga toimub skeemi järgi

$$\frac{a}{b} : \frac{m}{n} = \frac{a \cdot n}{b \cdot m}.$$

Kui võtame positiivsete ning negatiivsete täis- ja murdarvude vallast mingid kaks arvu ja liidame või korrutame need arvud teineteisega või lahutame ühe neist teisest või jagame ühe neist teisega, siis on niisuguse operatsiooni resultaat ikka jälle üks samasse arvuvalda kuuluv arv. Seega positiivsete ja negatiivsete täis- ja murdarvude vallas on liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine piiramatult teostatavad tehted.

Liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist nimetatakse ratsionaalseteks operatsioonideks.

Ülaltoodut võime formuleerida siis ka järgmiselt:

positiivsete ja negatiivsete täis- ja murdarvude vallas on ratsionaalsed operatsioonid piiramatult teostatavad.

Ratsionaalarvud. Nulliga jagamise teostamatus

Positiivsete ja negatiivsete täis- ja murdarvude valda, mida on täiendatud arvuga null, nimetatakse ratsionaalarvude vallaks. Eespool öeldust nähtub, et ratsionaalarvude vallas on ratsionaalsetest operatsioonidest liitmine, lahutamine ja korrutamine piiramatult teostatavad: mistahes kahe ratsionaalarvu summa, vahe ja korrutis on ikka jälle ratsionaalarv. Üldiselt on kahe ratsionaalarvu jagatiseks samuti ratsionaalarv, kuid siin moodustab erandi nulliga jagamine. Jagada arv a arvuga 0 tähendaks leida niisugune arv x, et $x \cdot 0 = a$. Kui arv $a = 0$, siis võtab meie nõue kuju $x \cdot 0 = 0$ ja seda rahuldab iga arv meie arvuvallast; vastus nõudele on lõpmata mitmene ja seega täiesti määramatu. Kui aga arv $a \neq 0$, siis ei leidu ühtegi nõudele vastavat arvu x, sest iga arvu korrutamine nulliga annab nulli, mitte aga mingi sellest erineva

arvu. Öeldu põhjal tuleb nulliga jagamine tunnistada mitteteostatavaks operatsiooniks, lühidalt:

nulliga jagamine on teostamatu.

Praegu formuleeritud tõe mittearvestamine on üks kardetavamaid vigu matemaatilistes mõttekäikudes. Ta võib kergesti viia täieliku mõttetuseni. Öeldu illustreerimiseks toome järgmise näite:

Olgu $x = n$;
siis $nx = n^2$.
Alati on $x^2 = x^2$.
Järelikult
$x^2 - nx = x^2 - n^2$
ehk $x(x - n) = (x + n)(x - n)$
ehk $x = x + n$.
Et $x = n$,
siis $n = n + n$
ehk $n = 2n$
ehk $1 = 2$.

Vasturäägivus tekkis nulliga võrdse teguriga $x - n$ jagamise tõttu.

Kõike ratsionaalarvude kohta öeldut kokku võttes võime öelda, et

ratsionaalarvude vallas on ratsionaalsed operatsioonid, välja arvatud nulliga jagamine, piiramatult teostatavad.

§ 2. NELJA ARITMEETILISE PÕHIOPERATSIOONI TEHNIKA

Kõigis teadusliku uurimistöö lõikudes ja kõigis praktilise tegevuse sektoreis, kus matemaatika leiab kasutamist, oodatakse ja nõutakse matemaatikalt rõhuval enamikul juhtudel töö viimist numbrilise resultaadini. See saadakse arvutamise teel. Arvutamise tulemus peab olema täiesti usaldatav ja saadav piiratud ajaga, mille määrab praktiline vajadus. Nende asjaolude tõttu on kiiresti saadavat ja veatut resultaati kindlustav arvutustehnika tähtsaimaks tööriistaks matemaatika töövahendite arsenalis.

Oskus kiiresti ja eksimusteta arvutada omandatakse vaid küllaldase harjutamisega.

Kogu arvutamine, arvutamine tabelite abil ja arvutamine mehaaniliste vahenditega taandub lõppkokkuvõttes neljale põhitehtele — liitmisele, lahutamisele, korrutamisele ja jagamisele.

Liitmise tehnika

Liitmiseks kirjutame arvud üksteise alla, rangelt selle järele valvates, et üht ja sama järku ühikud (ühelised, kümnelised, sajalised, ..., kümnendikud, sajandikud jne.) oleksid kirjutatud kohakuti. Liitmine toimub tulpade viisi, ülalt alla liikudes. Ülekanded kirjutame väikeste numbritega üles, ritta enne esimest liidetavat.

Näide.
$$\begin{array}{r} {}^{2\,2\,1} \\ 735 \\ 29 \\ 1283 \\ 961 \\ \hline 3008 \end{array}$$

Loeme: viis, neliteist, seitseteist, kaheksateist; kaheksa; üks; neli, kuus, neliteist, kakskümmend, null; kaks; üheksa, üksteist, kakskümmend, null; kaks; kolm.

Töö üksikute etappide tulemusi (sõrendatult trükitud arvsõnad) on otstarbekas rõhutatud lugemisega esile tõsta; vastavad arvud pannakse kirja.

Liitmisel pikkades tulpades saab mõnikord mitmeid liidetavaid silmapilkselt kokku võtta, näiteks $3+7=10$, $9+1=10$, $4+4+4=3\cdot4=12$, $4+5+6=3\cdot5=15$ jne.

Liitmise tulemuse kontrolliks toimetame liitmist üks kord ülalt alla, teine kord alt üles liikudes. Pikkade arvutulpade puhul võime täiendavat kontrolli teostada sel teel, et jätame esialgu mingi ühe liidetava tulbast välja, näiteks teda paberiribaga kinni kattes, ja pärast arvame nii saadud summale väljajäänud liidetava juurde.

Lihtsaimaks mehaaniliseks liitmisvahendiks on arvelaud.

Lahutamise tehnika

Lahutamist võib toimetada kahel viisil: üks kannab «laenamisviisi» nimetust, teist nimetatakse «lahutamiseks liitmise teel».

Näide.
$$\begin{array}{r} 7391 \\ 568 \\ \hline 6823 \end{array}$$

Teostades lahutamist laenamise teel, loeme: punkt, üksteist, maha kaheksa, kolm; kaheksa, maha kuus, kaks; punkt, kolmteist, maha viis, kaheksa; kuus.

$$\begin{array}{r} 7391 \\ 568 \\ \hline 6823 \end{array}$$

Teostades lahutamist liitmise teel, loeme: kaheksa ja kolm on üksteist; üks; üks ja kuus on seitse ja kaks on üheksa; viis ja kaheksa on kolmteist; üks; üks ja kuus on seitse.

Sõrendatult trükitud sõnu tuleb lugeda rõhuga; vastavad arvud ja punktid pannakse kirja.

Kui lahutamine $a-b=c$ on teostatud laenamisviisil, siis saab tema tulemust kontrollida arvusid b ja c liites; kui aga lahutamine on teostatud liitmise teel, siis tuleb kontrolliks teostada lahutamine laenamisviisil.

Kui on tarvis liita mitu positiivset ja negatiivset arvu, siis liidame omaette kõik positiivsed arvud, liidame omaette kõigi negatiivsete arvude absoluutväärtused ja lahutame esimesest tulemusest teise. Kaht viimati nimetatud operatsiooni võib ühendada. Järgmises näites näeme esimest arvutuskäiku I skeemis, teist arvutuskäiku II skeemis.

Näide.

I skeem:	II skeem:
4,983	6,754
—2,913	—2,913
—0,157	—0,157
1,771	—1,835
—1,835	1,849
6,754	
—4,905	
1,849	

Siin on liidetud negatiivsed arvud ja tulemus kohe liitmise teel lahutatud esimesest arvust.

Lihtsaimaks mehaaniliseks lahutamisvahendiks on arvelaud.

Korrutamise tehnika

Korrutamise kommutatiivsuse seadus annab meile õiguse võtta korrutajaks kas esimene või teine tegur. Korrutamise hõlbustamiseks valime korrutajaks ikka selle teguri, milles on vähem arvumärke; sel puhul tuleb osakorrutiste hulk väiksem.

Osakorrutised tulevad ikka ühed ja needsamad, sõltumatult sellest, kas alustame korrutamist kõige madalamat või kõige kõrgemat järku ühikutega. Esimesel juhul nihkub iga järgmine osakorrutis eelmisega võrreldes ühe koha võrra vasakule poole, teisel juhul paremale poole.

Kui korrutaja kirjutame korrutatava alla, saame esimesel juhul I skeemi, teisel juhul II skeemi.

I skeem:	II skeem:
1457	1457
259	259
13113	2914
7285	7285
2914	13113
377363	377363

Tundub loomulikum, et kõigepealt määratakse kõrgemat ja siis alles järjest madalamat järku ühikud kui vähem tähtsad. Seepärast tuleb eelistada II skeemi. Viimase

valiku kasuks räägib veel eriti see asjaolu, et II skeem, nagu hiljem näeme, võimaldab korrutist leida l ü h e n d a t u l t, arvutades temas vaid vajalikud arvumärgid ning määramata jättes kõik mõttetud ja üleliigsed arvumärgid.

Mehaaniliseks korrutamisvahendiks on a r v u t u s m a s i n.

Jagamise tehnika

I skeem näitab jagamise käiku kõigi osakorrutiste ja osajääkide väljakirjutamisel. II skeemis on osakorrutised lahutatud eespool kirjeldatud liitmisvõttega, mille tõttu jääb hulk liigset kirjutamist ära.

I skeem:

56901 : 78 = 729
546
230
156
741
702
39

II skeem:

56901 : 78 = 729
230
741
39

I skeemis loeme nagu tavaliselt korrutamisel ja lahutamisel.

II skeemis loeme järgmiselt: 7 korda 8 on 56 ja 3 on 59; 5; 5 ja 7 korda 7 ehk 49 on 54 ja 2 on 56; null alla; 2 korda 8 on 16 ja 4 on 20; 2; 2 ja 2 korda 7 ehk 14 on 16 ja 7 on 23; üks alla; 9 korda 8 on 72 ja 9 on 81; 8; 8 ja 9 korda 7 ehk 63 on 71 ja 3 on 74.

Ruumi kokkuhoiu mõttes on mõnikord sobiv jääkide rida veel kord ülalt alustada, näiteks

10000000 : 7 = 1428571
30 40
20 50
60 10
3

Jagamise tulemuse kontrollimiseks korrutame jagaja ja jagatise ning lisame tulemusele jäägi; saadus peab tulema võrdne jagatavaga.

Mehaaniliseks jagamisvahendiks on a r v u t u s m a s i n.

§ 3. NUMBRILISE TÖÖ KORRALDAMISE ÜLDKÜSIMUSI

Üldisi märkusi numbrilise töö korraldamise kohta

Arvutused, nagu neid vajame teaduse või ka tänapäeva tehnika ja sotsialistliku plaanimajanduse poolt seatud küsimuste lahendamiseks, esinevad tavaliselt pikkade *osaoperatsioonide ahelatena*. Suure hulga erisuguste tehete teostamisel, sageli kirjus ja kiiresti muutuvas järjekorras (teisendame, liidame, arendame, lahutame, koondame, korrutame, taandame, juurime jne.), tekib võrdlemisi ruttu *väsimus*; sellega kaasneb *kindlusetusetunne*; muutume rahutuks; kasvab kahtlus, kas veel saab vastutada selle eest, et *tulemus on õige*. Tekib vajadus tulemuse ja ühes sellega ka kõigi selle eel käivate osatulemuste *kontrollimise* järele. Arvutuste kiire ja täiusliku kontrollimise võimaluse olulisemaiks eeldusiks on *korralik käekiri* ja selge, ülevaatlik tehete järjekord ehk, teiste sõnadega, *hästi valitud arvutusskeem*.

On osutunud otstarbekaks kasutada arvutusteks paberit formaadis umbes 21 × 30 cm. Lehed tuleb *nummerdada*; arvutusi tuleb teha vaid lehe *ühel* küljel. See võimaldab lehti üksteise kõrvale lauale asetada ja ühe pilguga ülevaadet saada pikkadestki arvutustest. Tuleb hoiduda arvutusi tegemast enne *mustandil*, et neid siis hiljem puhtalt ümber kirjutada, nagu tuleb üldse hoiduda igasugustest arvutuste *ärakirjadest*: ümberkirjutamisel on raske vältida eksimusi.

Numbrid, tehete märgid ja muud sümbolid olgu alati kirjutatud *hoolikalt*, et hiljem, näiteks kontrollimisel, ei tekiks kahtlust nende tähenduses. Valvatagu selle järele, et iga sümbol seisaks oma *õigel kohal*, näiteks liitmisel ja lahutamisel ühelised üheliste all, kümnelised kümneliste all jne.

Hoidutagu abi- ja kõrvalarvutusi toimetamast hävitamisele määratud «lehekestel»: see teeb arvutuste süstemaatilise kontrolli võimatuks. Arvutusskeem tuleb valida nõnda, et ta hõlmaks *kõiki* vajalikke arvutusi, või vähemalt nõnda, et abiarvutuste hulk oleks minimaalne. Abiarvutused tuleb siis paigutada võimalikult selle koha lähedusse, kuhu nad kuuluvad, et kontrollimisel vältida vajadust neid siit-sealt kokku otsida.

Arvutusskeemi koostamisel tuleb üksikasjaliselt läbi mõelda viis, kuidas vajalik suurus saadakse, ja silmas pidada, et tehete ahelas ei esineks lünki ja ahela ühes lülis poleks rohkem kui *üks* tehe. Arvutusskeem koostatakse nõnda, et iga vajalik üksiktehe on märgitud skeemi «*peas*». Skeem ise tuleb täita mitte ridade, vaid *veergude* kaupa ülalt alla liikudes. Iga veeru täitmine nõuab siis ikka ainult *ühe ja sama* tehte teostamist. Tehete vahetus toimub üleminekul juba täidetud vee-

rult järgmisele, tühjale veerule; see üleminek toimugu ikka seotult lühikese puhkeajaga.

Arvutusskeemide näiteid

Näide 1. Olgu arvutada avaldise

$$\frac{1-2x}{1+x^2}$$

väärtused suuruse x täisarvuliste väärtuste -2, -1, 0, 1, 2, 3 korral.

Valides skeemi pea, täites skeemi veergude kaupa ja arvutades viimases veerus avaldise väärtused, saame:

1	2	3	4	5	6
x	$2x$	$1-2x$	x^2	$1+x^2$	$\frac{1-2x}{1+x^2}$
-2	-4	5	4	5	1,0
-1	-2	3	1	2	1,5
0	0	1	0	1	1,0
1	2	-1	1	2	$-0,5$
2	4	-3	4	5	$-0,6$
3	6	-5	9	10	$-0,5$

Kindla skeemi järgi arvutamisel on järgmised paremused, võrreldes igasuguse teise arvutusviisiga: a) ta on hästi ülevaatlik; b) ta on viimse võimaluseni kompaktne, olles arvulises osas vaba igast üleliigsest sümbolist, nagu on tehete märgid, sulumärgid, võrdusmärgid ja kirjavahemärgid; c) arvutamine skeemi järgi annab tulemuse tunduvalt väiksema vaeva ja ajakuluga kui igasugune teine arvutusviis; d) skeemi järgi arvutamine toimub nii-öelda mehaaniliselt, automaatselt, mis väsitab tunduvalt vähem kui arvutamine, mille puhul iga sammu järel tuleb jälle seada küsimus: mis nüüd edasi teha?; e) arvutuste kontrollimine skeemis on võrratult hõlpsam kui igasuguste teiste arvutuste kontrollimine.

Toome veel kaks skeemi arvutamiseks logaritmidega.

Näide 2. Olgu arvutada $\sqrt[3]{1{,}792^2 \cdot 5{,}8013}$.

Valemi

$$\log \sqrt[3]{a^2 b} = \frac{1}{3}(\log a^2 + \log b) = \frac{1}{3}(2 \log a + \log b)$$

kohaselt saame järgmised kaks võimalikku arvutusskeemi:

			num	log
1	$\log a =$			
2	$2 \log a =$	a	1	3
3	$\log b =$	a^2		5
4	$2 \log a + \log b =$	b	2	4
5	$\frac{1}{3}(2 \log a + \log b) =$	a^2b		6
6	$\sqrt[3]{a^2b} =$	$\sqrt[3]{a^2b}$	8	7

Väikesed numbrid märgivad skeemi täitmise sammude järjekorda. Teise skeemi paremuseks on see, et seal kõikjal arv ja tema logaritm seisavad kõrvuti, mis tunduvalt hõlbustab kontrollimist.

Arvutustulemuste kontrollimine

On soovitatav kontrollimisega mitte oodata, kuni lõpptulemus on käes, vaid teostada kontrolli arvutusprotsessi käigus järk-järgult. Sellega hoitakse ära vigasele kohale järgneva töö ümbertegemine kogu selle ulatuses.

Sobivaks kontrollimisvahendiks on resultaadi ligikaudne hindamine. On hea, kui iga arvu saab tuletada rohkem kui ühest allikast. Sageli on võimalik arvu kontrollida, arvutades teda veelkordselt, seejuures tehete järjekorda muutes. Pikemate arvutuste puhul on mõnikord vältimatu kogu töö uuesti tegemine eelmise arvutuse tulemusi kasutamata.

Harilikeks arvutusvigade põhjusteks on numbri valele kohale kirjutamine (näiteks kümneliste kirjutamine sajaliste alla), kahe kõrvuti seisva numbri äravahetamine, tehete äravahetamine (näiteks interpolatsiooni puhul koosinuse ja kootangensi tabeleis liitmise kasutamine lahutamise asemel), eriti aga korratu käekiri.

Kiire ja süstemaatilise kontrolli võimaluse kindlustamiseks tuleb arvutused alati korraldada kindla skeemi järgi ja arvutuste ahela üksiklülide tulemused alla kriipsutada. Kontrollitud üksiklülide tulemusi on viisiks märkida väikese «linnukesega».

§ 4. VÕRRATUSED

Rõhuv enamik koolikursuses käsitletavaid matemaatilisi seoseid antakse võrduste kujul: kolmnurga nurkade summa $\alpha + \beta + \gamma = 180°$; täisnurkses kolmnurgas on kehtiv Pütagorase lause $c^2 = a^2 + b^2$; kera pindala $S = 4\pi r^2$; koonuse ruumala

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ jne. Võrratusi kohtame koolimatemaatikas suhteliselt harva: kolmnurgas on kahe külje summa suurem kui kolmas külg: $b + c > a$; kolmnurgas asetseb suurema külje vastas ka suurem nurk: kui $a > b$, siis ka $\alpha > \beta$; kui $a > b$, siis ka $\log a > \log b$ jms.

Võrdused tuletatakse koolimatemaatikas võrdustest jällegi võrduste abil; võrratusi kasutatakse seejuures vaid harva. Kõrgemas matemaatikas on aga võrratused hädavajalikuks tõestusvahendiks, ka võrduste tõestamise puhul, ja matemaatika rakendustes on võrratused peamiseks vea ja täpsuse ning seega meie töötulemuste usaldatavuse hindamise abinõuks. Et saaksime edaspidi võrratusi vabalt kasutada töövahendina, peatume siin nende tähtsamatel omadustel.

Võrratuste põhiomadused

1°. Kahest teineteisega mitte võrdsest ratsionaalarvust a ja b on alati üks suurem, teine väiksem. Kui näiteks a on väiksem kui b, siis on b suurem kui a ja ümberpöördult. See tähendab, et kirjutised $a < b$ ja $b > a$ on vaid kaks erinevat vormi ühe ja sellesama mõtte avaldamiseks ehk, teiste sõnadega,

väide, et $a < b$, on samaväärne väitega, et $b > a$.

2°. Võrratuste transitiivsuse* seadus ütleb, et

kui $a < b$ ja $b \leq c$, siis $a < c$.

Graafiliselt tähendab see, et kui arvteljel arv a asetseb arvust b vasakul ja b omakorda arvust c vasakul, siis asetseb ka arv a arvust c vasakul.

3°. Liitmise puhul kehtiv monotoonsuse seadus väidab, et

kui $a < b$ ja c on suvaline arv, siis $a + c < b + c$.

Graafiliselt tähendab see, et kui arvteljel arv a asetseb arvust b vasakul, siis asetseb ka arv $a + c$ arvust $b + c$ vasakul.

4°. *Võrratusi võib teineteisega liikmeti liita.*
See tähendab, et

kui $a < b$ ja $c < d$, siis ka $a + c < b + d$.

Tõepoolest, monotoonsuse seaduse järgi järeldub võrratusest $a < b$ võrratus $a + c < b + c$ ja samuti võrratusest $c < d$ võrratus $b + c < b + d$. Seega transitiivsuse seaduse põhjal $a + c < b + d$.

5°. Analoogiliselt liitmise puhul kehtiva monotoonsuse seadusega kehtib lahutamise puhul seadus:

* Lad. k. *transitivus* — üleminev.

kui $a < b$ *ja* c *on suvaline arv, siis* $a - c < b - c$.

Graafiliselt tähendab see, et kui arvteljel arv a asetseb arvust b vasakul, siis asetseb ka arv $a - c$ arvust $b - c$ vasakul.

Liitmise ja lahutamise puhul kehtivaid monotoonsuse seadusi (võrratuste 3. ja 5. põhiomadus) kasutatakse mõnikord teises sõnastuses:

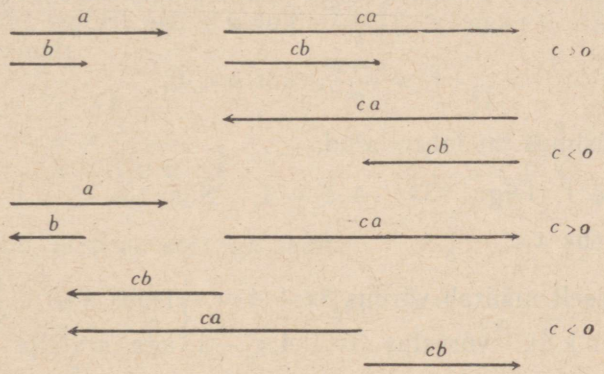
võrratuse mõlemale poolele võib liita ja võrratuse mõlemast poolest võib lahutada ühe ja sama arvu.

6°. Öeldust järeldub, et

võrratuse liiget võib võrratuse ühelt poolelt üle viia võrratuse teisele poolele liikme märki vastupidiseks muutes.

Tõepoolest, olgu $a + l < b$. Lahutades võrratuse kummastki poolest arvu l, saame, et $(a + l) - l < b - l$ ehk, lihtsamini, $a < b - l$. Vasakul poolel esinenud liige l seisab nüüd paremal poolel vastupidiseks muudetud märgiga.

7°. Korrutamise puhul kehtiv monotoonsuse seadus avaldub järgmiselt (joon. 11):



Joon. 11.

kui $a > b$ *ja* c *on positiivne, siis ka* $ca > cb$;

kui aga $a > b$ *ja* c *on negatiivne, siis, vastupidi,* $ca < cb$.

Kõne all olevat tõde formuleeritakse ka järgmiselt:

võrratuse kumbagi poolt võib korrutada ühe ja sellesama positiivse arvuga (võrratusmärgi suunda muutmata);

võrratuse kummagi poole korrutamisel ühe ja sellesama negatiivse arvuga tuleb võrratusmärgi suund muuta vastupidiseks.

8°. Jagamise puhul kehtiv monotoonsuse seadus avaldub järgmiselt:

kui $a > b$ *ja* c *on positiivne, siis ka* $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$;

kui aga $a > b$ *ja* c *on negatiivne, siis, vastupidi,* $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Nende väidete kehtivuses veendume otseteed, kui viimast kaht võrratust korrutame arvuga c, selle arvu märki arvestades.

Lineaarsete võrratuste lahendamine

Paljude probleemide lahendamine seab meid küsimuse ette, missuguste suuruse x väärtuste puhul on võrratus $ax + b < c$ kehtiv. Et selles võrratuses tundmatu x esineb esimeses astmes, siis nimetatakse niisugust võrratust lineaarseks, nagu see on viisiks võrranditegi puhul. Lineaarse võrratuse lahendamisel rakendame võrratuste põhiomadusi. Kõigepealt lahutame võrratuse kummastki poolest arvu b; saame $ax < c - b$. Jagades seejärel kumbagi poolt arvuga a, saame tulemuseks, et

$$x < \frac{c-b}{a}, \text{ kui } a > 0,$$

$$x > \frac{c-b}{a}, \text{ kui } a < 0,$$

millega küsimus on lahendatud.

Näide 1. Olgu $3x + 4 < -1$. Siis $3x < -1 - 4$ ehk $3x < -5$ ehk $x < -\frac{5}{3}$.

Graafiliselt määrab võrdus $3x + 4 = -1$ ehk $x = -\frac{5}{3}$ arvtelje ühe punkti, võrratus $3x + 4 < -1$ aga arvtelje piiramata vahemiku, mis jääb punktist $x = -\frac{5}{3}$ vasakule.

Näide 2. Olgu $\frac{3x-5}{2} > \frac{5x+1}{3}$. Siis, korrutades kumbagi poolt 6-ga, saame $3(3x - 5) > 2(5x + 1)$ ehk $9x - 15 > 10x + 2$ ehk $-x > 17$ ehk $x < -17$.

Näiteid mittelineaarsete võrratuste lahendamise kohta

Näide 1. Missuguste suuruse x väärtuste puhul on murd

$$\frac{x+4}{3x} > 1?$$

Liikmeti jagades leiame, et $\frac{1}{3} + \frac{4}{3x} > 1$ ehk $\frac{4}{3x} > \frac{2}{3}$ ehk $\frac{4}{x} > 2$.

Siit järeldub otseteed, et $x > 0$ ja $x < 2$. Niisiis kehtib antud võrratus suuruse x kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad vahemikus $0 < x < 2$. Geomeetriliselt määrab antud võrratus arvtelje vahemiku punktide $x = 0$ ja $x = 2$ vahel, need punktid välja arvatud.

N ä i d e 2. Missuguste suuruse x väärtuste korral on avaldis $x^2 - 2x - 15$ p o s i t i i v n e?

Nõude kohaselt

$$x^2 - 2x - 15 > 0.$$

Lahutades võrratuse vasaku poole tegureiks, saame

$$(x + 3)(x - 5) > 0.$$

Viimane avaldis kui korrutis saab positiivne olla ainult siis, kui mõlemal teguril on ü k s j a s a m a m ä r k. Selleks on kaks võimalust:

I	II
$x + 3 > 0$ $x - 5 > 0$	$x + 3 < 0$ $x - 5 < 0$

Siit järeldub, et peab korraga olema

kas $x > -3$, $x > +5$ või $x < -3$, $x < +5$.

See on võimalik ainult siis, kui

$$x > +5 \text{ või } x < -3.$$

Niisiis on avaldis $x^2 - 2x - 15$ positiivne suuruse x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui -3 või suuremad kui $+5$. Graafiliselt määrab võrratus $x^2 - 2x - 15 > 0$ arvteljel kaks osa: esimene neist ulatub vasakule kui kaugele tahes ja teda piirab paremalt poolt punkt $x = -3$; teine neist ulatub paremale kui kaugele tahes ja teda piirab vasakult poolt punkt $x = +5$. Ütluse asemel «ulatub kui kaugele tahes vasakule» kasutame ütlust «ulatub miinus lõpmatusse». Võrratuse asemel $x < -3$ kirjutame siis, et $-\infty < x < -3$, ja analoogiliselt võrratuse $x > +5$ asemel, et $+5 < x < +\infty$. Sümbol «∞» asendab sõna «l õ p m a t u s»; s e d a s ü m b o l i t e i t u l e m õ i s t a m i n g i a r v u t ä h i s e n a.

Lauseid arvude absoluutväärtuste kohta

Arvu a absoluutväärtust kirjutatakse $|a|$. Nii näiteks

$$|+5{,}3| = 5{,}3 \qquad |-0{,}78| = 0{,}78.$$

Üldiselt, kui $a > 0$, on $|a| = a$; kui $a < 0$, on $|a| = -a$.

Arvude absoluutväärtuste kohta kehtivad mõned tähtsad, sageli rakendamist leidvad laused. Märgime neist järgmist kahte.

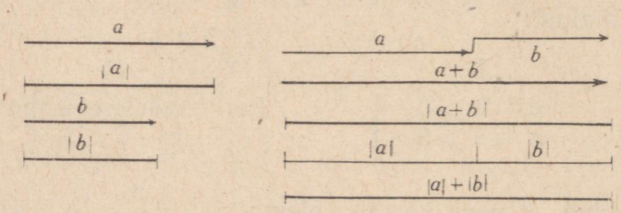
Lause 1.

Summa absoluutväärtus on kas väiksem kui liidetavate absoluutväärtuste summa või sellega võrdne.

Sümbolites:

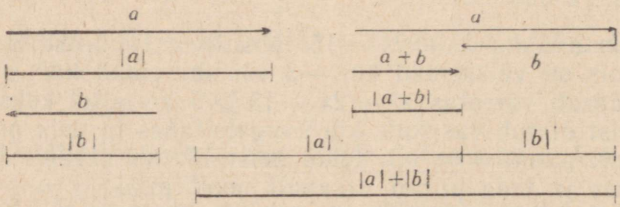
$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

Tõestuseks märgime, et juhul, kui arvudel a ja b on üks ja sama märk, siis on seesama märk ka summal $a + b$ ja summa absoluutväärtus saadakse liidetavate absoluutväärtuste liitmise teel (joon. 12). Kui aga arvudel a ja b on erinevad



Joon. 12.

märgid, siis tuleb summa absoluutväärtuse saamiseks võtta arvude a ja b absoluutväärtused ja lahutada väiksem suuremast; tulemus on kindlasti väiksem kui mõlema arvu absoluutväärtuste summa (joon. 13).



Joon. 13.

Vahet $a - b$ võib alati kirjutada summana $a + (-b)$. Seepärast ka

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|.$$

Lause 2.

Vahe absoluutväärtus on kas suurem kui vähendatava ja lahutatava absoluutväärtuste vahe või sellega võrdne.

Sümbolites:

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|.$$

Lause kehtivuses saab kergesti veenduda, kujutades suurusi a, b, $a - b$ ja $|a|$, $|b|$, $|a - b|$ ning $|a| - |b|$ graafiliselt, nagu seda tegime esimese lause puhul. Samuti saab veenduda, et

$$|a| - |b| \leqslant |a + b|.$$

Neid absoluutväärtuse omadusi kokku võttes kirjutame, et

$$|a| - |b| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

PEATÜKK II

ARVUTAMINE LIGIKAUDSETE ANDMETEGA

§ 5. VIGA. RELATIIVNE VIGA

Andmete täpsusetus

Andmed, millest lähtume tegelikkuse poolt seatud küsimuste matemaatilisel lahendamisel, on saadud *loendamise*, *mõõtmise* või *arvutamise* teel. Nii esimesel, teisel kui ka kolmandal viisil saadud arvud on enamasti *ligikaudsed*; täpse arvu esinemine on *erandiks*.

Loendamine ei tee raskusi, kui loendatavaid esemeid on vähe ja kui need loendamise ajal ei muuda oma asukohta. Loendamine võib aga muutuda tülikaks, kui nimetatud tingimused pole täidetud. Näiteks nõuab tunduvat vaeva puude loendamine metsasalus, veelgi raskem on lammaste loendamine suures lambakarjas. Eksimised loendamisel on neil juhtudel vältimatud: mõnda eset loendatakse ühe korra asemel kaks korda, mõni ese jääb loendamata. Oeldust järeldub, et neil juhtudel ei saa loendamise tulemust mõista arvuna, mis kujutab loendatavat esemete hulka *täpselt*.

Ka ühegi konkreetse mõõtmise tulemus ei kujuta mõõdetavat suurust täpselt. Kui näiteks mõõdame sammudega kaugust kahe koha vahel, siis saame üks kord ühe, teine kord aga eelmisest mõne sammu võrra erineva tulemuse. Erinevusi mõõtmistulemuste vahel näeme ka siis, kui nimetatud kaugust mõõdame meetripuuga või isegi teraslindiga, kuigi sel juhul on vahed mõõtmistulemuste vahel väiksemad kui esimese mõõtmisviisi puhul. Mõõtmistulemuste erinevust üksteisest seletame väljaspool meie kontrolli seisvate *juhuslike põhjustega*, mis mõjustavad mõõtmiskäiku ja selle tulemust. Näiteks võib teraslindi otsa kinnitamine tiku abil savise pinna puhul õnnestuda hästi, liivase või mullase pinna puhul võib aga tikk lindi pingutamisel järele anda. Olgugi lindi ots kinnitatud, ei saa linti ikkagi täpselt sirgeks tõmmata, sest oma kaalu mõjul võtab ta iga kahe tugipunkti vahel looga kuju, ja parimastki terasest valmistatud lint venib vähesel määral. Kui aga mõõdame maapinnal kahe

punkti vahelist kaugust mõõdulatiga, siis on võimatu latti asetada üks kord teise järel täpselt sirges joones, ja seda kõigepealt juhuslikult esinevate maapinna konaruste tõttu. Juhuslike asjaolude hulka tuleb lugeda ka seda, et lati pikkus veidi muutub, kui ta päikesepaistel soojeneb või külm tuul ja õhuniiskus talle mõju avaldavad.

Teiseks põhjuseks, mispärast mõõtmistulemused on ikka vaid ligikaudsed, on asjaolu, et mõõdetavad suurused pole enamasti täpselt defineeritavad. Kui näiteks räägime jõe sügavusest ja mõistame selle all kaugust jõe põhjast veepinnani, siis pole ei jõe põhi ega ka veepind midagi muutumatut ja kindlat: põhi muutub järjest vee voolamisel ja mineraalainete ning orgaaniliste olluste sadestumisel, veepind aga kõigub vee juurdevoolu, vee aurumise ja tuule rõhu mõjutusel. Veelgi raskem oleks defineerida pilve kõrgust maapinnast, soostunud järve pindala või heinakuhja ruumala.

Kolmandaks põhjuseks, mispärast me mõõtmisel ei saa mõõdetavate suuruste täpseid väärtusi, on see, et kõik meie mõõduriistad on puudulikud. On näiteks võimatu kanda mõõdulindile jaotisi täpselt (ka kõige peenema jaotusmasinaga mitte) juba sellepärast, et jaotiste kriipsud on ikkagi teatava jämedusega. Mõõtmisel aga oleme sunnitud pikkusi kahe järjestikuse kriipsu vahel hindama silma järgi, seega umbkaudu. Mõõtmise tulemusi mõjutab alati ka see asjaolu, et meie meelte eraldamisvõime on piiratud: näiteks ei suuda silm ka rahuldava nägemise korral hästi eraldada teineteisest kaht rööbiti asetsevat joont, kui nende vahe on väiksem kui 0,1 mm. Mõõtmistulemuste täpsusele seab piiri ka meie mõõtmisvahendite piiratud tundlikkus: hea varbsirkliga saame otsustada kahe pikkuse erinevuse üle vaid siis, kui see erinevus ületab vähemalt 0,05 mm; peenmikromeetriga vaid siis, kui see erinevus ületab vähemalt 0,001 mm; jne.

Kõik pikkuste mõõtmise kohta öeldu kandub vastavas sõnastuses üle ka nurga, aja, temperatuuri ja iga teise suuruse mõõtmisele. Öeldu põhjal ei kujuta mõõtmistulemused mõõdetavaid suurusi kunagi täpselt, vaid ikka ainult ligikaudu.

Valemites, mille järgi arvutatakse vajalikke suurusi, esineb sageli irratsionaalseid arve, mis arvutamisel harilikult asendatakse nende ligikaudsete väärtustega. Seepärast pole täpsed ka sellised andmed, nagu $\sqrt{2} = 1{,}4142$, $\log 2 = 0{,}30103$, $\pi = 3{,}14$, samuti siinuste, tangensite ja teiste suuruste tabeleist leitud väärtused.

Loendamise, mõõtmise või arvutamise tulemused on sageli niisugused, et saadud kujul on neid tülikas ja ka väheütlev andmetena kasutada. Nii näiteks on ühelt poolt tülikas meeles pidada,

et teatavas linnas oli viimase rahvaloenduse ajal 768 541 elanikku, teiselt poolt osutub see arv oma kiire kõikumise tõttu ka väheütlevaks. Arvutamise ja meelespidamise hõlbustamiseks asendatakse sageli nii ligikaudsed kui ka täpsed arvud neist ümardamise teel saadud lihtsamate arvudega. Kõik sel viisil saadud andmed on ligikaudsed.

Vea mõiste

Vahet suuruse tõelise väärtuse ja suuruse ligikaudse väärtuse vahel nimetatakse selle ligikaudse väärtuse veaks.

Mõõtmiste puhul ei tea me mitte kunagi tehtud vea märki ega suurust; küll aga on harilikult võimalik näidata positiivset arvu, mida vea absoluutväärtus kindlasti ei ületa. Seda arvu nimetatakse suuruse ligikaudse väärtuse vea ülemmääraks ehk vea tõkkeks.

Niisiis:

arvu, mis näitab, milleni võib ülimalt küündida suuruse ligikaudse väärtuse viga, nimetame selle ligikaudse väärtuse vea ülemmääraks.

Nii näiteks on Maa telje pikkus kilomeetreis

$$12\,712{,}2 \text{ veaga mitte üle } 0{,}05 \text{ km}$$

ja irratsionaalarv

$$\sqrt{2} = 1{,}4142 \text{ veaga mitte üle } 0{,}00005.$$

Tähistame suuruse tõelise väärtuse tähega x, tema ligikaudse väärtuse tähega a ja ligikaudse väärtuse vea ülemmäära sümboliga Δa (delta a). (Sümbolit Δa tuleb võtta kui tervikut, samuti nagu sümboleid $\sqrt{a}$, $\log a$, $|a|$ jne.; sümbol Δa ei tähenda kahe arvu Δ ja a korrutist; omaette võetuna pole vea sümbolil Δ üldse tähendust.)

Et suuruse tõeline väärtus x võib erineda tema ligikaudsest väärtusest a kõige rohkem Δa võrra, siis ei ole tõeline väärtus kindlasti väiksem arvust $a - \Delta a$ ega suurem arvust $a + \Delta a$. Arve $a - \Delta a$ ja $a + \Delta a$ nimetatakse suuruse x alam- ja ülemtõkkeks. Niisiis asetseb suuruse tõeline väärtus x vahemikus $a - \Delta a$ ja $a + \Delta a$ vahel:

$$a - \Delta a \leqslant x \leqslant a + \Delta a.$$

Lühidalt kirjutatakse seda kujul

$$x = a(\pm \Delta a)$$

ja loetakse: x võrdub a-ga veaga mitte üle Δa. Öeldu põhjal kirjutis

$$x = 34{,}8(\pm 0{,}3)$$

tähendab, et

$$34{,}5 \leqslant x \leqslant 35{,}1.$$

Vahemikku suuruse x alam- ja ülemtõkke vahel nimetatakse suuruse x määramatuse vahemikuks.

Kui vea ülemmäär ei ületa viimase kirjutatud kümnendkoha poolt ühikut, siis jäetakse tava kohaselt vea ülemmäär märkimata. Nii näiteks tähendab kirjutis

$$x = 53{,}8$$

õieti võrdust

$$x = 53{,}8\,(\pm 0{,}05)$$

ehk, täielikumalt, võrratusi

$$53{,}75 \leqslant x \leqslant 53{,}85.$$

Kui mõõtmistulemus on antud täisarvuna, siis tähendab see ikka, et viga ei ületa poolt mõõtühikut. Näiteks tähendab kirjutis $x = 378$ mm, et $x = 378\,(\pm 0{,}5)$ mm.

Arvude ümardamine

Paljud andmed, mida vajame meie ees seisvate küsimuste otsustamiseks, on ajaga võrdlemisi ruttu muutuvad, näiteks mõne võõrastemaja kasutajate arv, nisusaak mõne kolhoosi põllu hektarilt, mõne rajooni koolikohustuslike laste arv jne. Oleks mõttetu lähtuda eelarvestamistel ja planeerimistel niisuguste suuruste ühel või teisel ajal vahest isegi suure täpsusega leitud väärtustest. Seepärast niisugused andmed enne nende kasutamist ümardatakse. Arvu võib ümardada kas allapoole või ülespoole; esimesel juhul asendatakse arv väiksemaga, teisel juhul suuremaga.

Arve ümardatakse ikka nii, et sellest tekkiv viga ei ületa poolt viimase säilitatava koha ühikut.

Et seda nõuet rahuldada, käiakse arvude ümardamisel alati reegli järgi:

kui ärajätmisele kuuluv number on 5, 6, 7, 8 või 9, siis suurendatakse eelnevat kohta ühe võrra: kui aga ärajätmisele kuuluv number on 0, 1, 2, 3 või 4, siis jäetakse eelnev koht muutmata.

Antud reegli järgi ümardades saame näiteks arvu π ehk 3,14159... jaoks järgmised lähendid:

3,1416 3,142 3,14 3,1 3.

Sama reegli järgi on harilikult ümardatud ka kõik tabelites antavad arvud.

Ligikaudse arvu vea ülemmäära, mis on pool selle arvu viimase koha ühikut, nimetame vea standard-ülemmääraks.

Jättes ligikaudse arvu kirjutises vea standard-ülemmäära märkimata, saame ligikaudse arvu standardkirjutise. Seega tähendavad ligikaudse arvu standardkirjutised

$$4{,}2 \qquad 4{,}24 \qquad \text{ja} \qquad 4{,}238$$

vastavalt arve

$$4{,}2\ (\pm 0{,}05) \qquad 4{,}24\ (\pm 0{,}005) \qquad \text{ja} \qquad 4{,}238\ (\pm 0{,}0005).$$

Ligikaudse arvu standardkirjutise kohta öeldakse, et selles on kõik kohad õiged.

Standard-kirjutusviisi puhul on kirjutised

$$r = 7, \qquad r = 7{,}0 \qquad \text{ja} \qquad r = 7{,}00$$

kõik erineva tähendusega: esimene tähendab, et

$$r = 7\ (\pm 0{,}5) \qquad \text{ehk} \qquad 6{,}5 \leqslant r \leqslant 7{,}5;$$

teine tähendab, et

$$r = 7{,}0\ (\pm 0{,}05) \qquad \text{ehk} \qquad 6{,}95 \leqslant r \leqslant 7{,}05;$$

kolmas tähendab, et

$$r = 7{,}00\ (\pm 0{,}005) \qquad \text{ehk} \qquad 6{,}995 \leqslant r \leqslant 7{,}005.$$

Siit nähtub, et nulli ärajätmine või juurdekirjutamine ligikaudse arvu standardkirjutises muudab vea ülemmäära ja seega arvu tähendust.

Vaatleme juhtu, kus ligikaudse arvu vea ülemmäär on suurem kui pool viimase koha ühikut. Olgu näiteks

$$x = 7{,}86\ (\pm 0{,}008).$$

Et ka sel juhul rakendada arvu standardkirjutist, on vaja seda arvu niipalju ümardada, et sellest tekkiva vea ja endise vea ülemmäära summa ei ületaks poolt viimase säilitatava koha ühikut. Ümardades arvu 7,86 näiteks ühe koha võrra, saame arvu 7,9, mis ületab endise arvu 0,04 võrra. Et selle arvu vea ülemmäär enne ümardamist oli 0,008, siis on vea ülemmäär pärast ümardamist $0{,}04 + 0{,}008 = 0{,}048$ ehk ligikaudu 0,05. Seega kui

$$x = 7{,}86\ (\pm 0{,}008),$$

siis kindlasti

$$x = 7{,}9\ (\pm 0{,}05)$$

ehk, lühemalt,

$$x = 7{,}9.$$

Kui arvu ümardamisel ühe koha võrra uus vea ülemmäär on siiski veel suurem kui pool viimase koha ühikut, siis tuleb arvu ümardada ühe koha asemel kahe või rohkema koha võrra.

Erilist tähelepanu nõuab ligikaudsete arvude kirjutamine juhul, kui arvu vea ülemmäär on suurem kui 0,5 ühelist. Arvu

$$x = 1300\ (\pm 50),$$

mille vea ülemmäär on pool numbrilise koostise viimase koha ühikut, ei saa kirjutada kujul $x = 1300$, sest viimases kirjutises on vea ülemmäär kõigest 0,5. Et kirjutada arvu $x = 1300\ (\pm 50)$ vea tõket märkimata, selleks kasutame tõsiasja, et $1300 = 13 \cdot 10^2$ ja $50 = 0{,}5 \cdot 10^2$. Saame

$$x = 13 \cdot 10^2\ (\pm 0{,}5 \cdot 10^2)$$

ehk

$$x = 13 \cdot 10^2.$$

Mõõtarvude teisendamine

Kirjutusviis nagu $x = 13 \cdot 10^2$ leiab eriti laialdast rakendamist mõõtarvude teisendamisel ligikaudu teada olevate suuruste puhul. Täpsete arvude puhul tähendavad kirjutised 234 m ja 23 400 cm üht ja sedasama; ligikaudsete arvude puhul aga tähendab esimene kirjutis pikkust

234 m veaga mitte üle 0,5 m ehk 50 cm;

seevastu teine kirjutis tähendab pikkust

23 400 cm veaga mitte üle 0,5 cm,

niisiis 100 korda väiksema vea ülemmääraga kui esimesel juhul, seega 100 korda täpsemat arvu kui esimene.

Et vältida vea ülemmäära muutumist mõõtarvu teisendamisel, selleks kasutame kirjutusviisi, mis on tuntud meetermõõdustiku mõõtude teisendusvalemitest:

$$1\ \text{m} = 10^2\ \text{cm} = 10^{-3}\ \text{km};$$
$$1\ \text{g} = 10^{-3}\ \text{kg} = 10^{-6}\ \text{t} = 10^3\ \text{mg}.$$

Näiteks kirjutame

$$234\ \text{m} = 234 \cdot 10^2\ \text{cm} = 234 \cdot 10^{-3}\ \text{km};$$
$$0{,}78\ \text{g} = 0{,}78 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} = 0{,}78 \cdot 10^{-6}\ \text{t} = 0{,}78 \cdot 10^3\ \text{mg}.$$

Niisuguse kirjutusviisi puhul jääb mõõtarvude teisendamisel mõõtmisvea ülemmäär muutumatuks. Tõepoolest, esimeses näites on mõõtmisvea ülemmäärad vastavalt 0,5 m, $0{,}5 \cdot 10^2$ cm ja $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ km, seega igal juhul 50 cm.

Relatiivne viga

Nagu eespool nägime, ei piisa sellest, et anname mõõdetava suuruse ligikaudse väärtuse; arv, mille kohta pole teada vea ülemmäära, on teaduslikult väärtusetu; tuleb anda ka arvu vea ülemmäär; alles mõlemad andmed koos näitavad, kui suur ja kui usaldatav on mõõtmise tulemus.

Mõõtmistulemust usaldame seda enam, mida suurem on mõõtmise täpsus. Viimast aga hindame mõõtmise relatiivse vea järgi. Selle mõiste selgitamiseks vaatleme näiteks kolme mõõtmistulemust:

$$10\ (\pm 1), \qquad 100\ (\pm 1) \qquad \text{ja} \qquad 1000\ (\pm 1)\ \text{meetrit.}$$

Kõigil kolmel juhul on vea ülemmäär üks ja seesama, kuid see 1-meetrine vea ülemmäär tuleb kord 10, kord 100 ja kord 1000 meetri kohta ehk, teiste sõnadega, 1 meetri kohta tuleb esimesel juhul viga mitte üle 0,1, teisel juhul mitte üle 0,01 ja kolmandal juhul mitte üle 0,001 meetri. Järelikult esimene mõõtmine on kõige jämedam ja kolmas kõige peenem.

Olgu meil edasi kolm järgmist mõõtmistulemust:

$$100\ (\pm 1), \qquad 100\ (\pm 2) \qquad \text{ja} \qquad 100\ (\pm 3)\ \text{meetrit.}$$

Kõigil kolmel juhul on nüüd mõõtmistulemus üks ja seesama, kuid mõõtmise viga võib küündida esimesel juhul ainult ühe, teisel juhul kahe ja kolmandal juhul isegi kolme meetrini ehk, teiste sõnadega 1 meetri kohta tuleb esimesel juhul viga mitte üle 0,01, teisel mitte üle 0,02 ja kolmandal mitte üle 0,03 meetri. Seega on esimene mõõtmine kõige peenem ja kolmas kõige jämedam.

Üldiselt hinnatakse mõõtmise täpsust selle järgi, kui suur mõõtmisvea ülemmäär tuleb ühe mõõtühiku kohta. Kui näiteks mõõtmise tulemus on a ja vea ülemmäär Δa, siis mõõtühiku kohta tulev vea ülemmäär on

$$\frac{\Delta a}{a}.$$

Seda suhet nimetatakse mõõtmistulemuse relatiivse vea ülemmääraks. Seega:

mõõtmistulemuse relatiivse vea ülemmääraks nimetatakse mõõtmisvea ülemmäära suhet mõõtmistulemusse.

Et a ja Δa on alati ühe ja sama nimetusega arvud, siis on murd $\Delta a : a$ nimeta arv. On viisiks seda murdu anda protsentides või promillides.

Kui ühes mõõtmistulemusega soovitakse anda ka tema relatiivse vea ülemmäära, siis kirjutatakse seda kujul

$$a\left(1 \pm \frac{\Delta a}{a}\right).$$

N ä i d e. Olgu laua pikkuse mõõtmisel saadud tulemuseks 126 cm veaga mitte üle 3 mm. Siis on mõõtmistulemuse relatiivne viga 0,3 : 126 ehk 3 : 1260 ehk 1 : 420. See näitab, et meie mõõtmise puhul ühesentimeetrine viga tuleb 420-sentimeetrise pikkuse kohta. Et

$$\frac{1}{420} = \frac{100}{420}\,\% \approx \frac{1}{4}\,\%,$$

siis laua pikkuse mõõtmise relatiivne viga on ümmarguselt $\frac{1}{4}$ % ehk 2,5‰.

Mõõtmistulemust võime kirjutada kas kujul

$$126\ (\pm 0{,}3)\ \text{cm},$$

kust on näha mõõtmise a b s o l u u t n e v i g a, või kujul

$$126\ (1 \pm 0{,}0025)\ \text{cm},$$

kust on kohe näha mõõtmise r e l a t i i v n e v i g a.

Tava kohaselt on kirjutises $126(\pm 0{,}3)$ cm ära jäetud sulgude eest plussmärk, kirjutises $126\ (1 \pm 0{,}0025)$ korrutamismärk.

M ä r k u s. Vea p r o t s e n t ja vea p r o m i l l tuleb ikka anda küllaldaselt ümardatud arvuna, nagu seda tuleb teha alati protsendi ja promilliga töötamisel. Kui näiteks 87 katseloomast katsepookimise tõttu lõppes 28 looma, siis ei tule öelda, et lõpnud loomad moodustavad 32,18%, vaid 32%, sest juba 1% loomade arvust on pisut alla üht looma, kümnendik ja sajandik protsenti aga on meie näite puhul täielik mõttetus.

Matemaatika rakendustes pole lubatud kirjutada arvusid, mõtlemata, mida nad tähendavad.

Kui näiteks puu kõrguse mõõtmisel on saadud tulemuseks 23 $(\pm 0{,}4)$ meetrit, siis saame mõõtmise relatiivse vea mitte kujul 1,74%, vaid ümardatult ülespoole kujul 2%.

Mõõtmiste täpsusetus ja looduse tunnetamine

Vaatlus- ja katseteaduste ülesandeks on luua loodusnähtuste kulgemise tõetruu pilt, mis kõigis oma osades tugineb süstemaatiliselt toimetatud vaatluste ja plaanikindlalt korraldatud katsete ja mõõtmiste tulemustele. Põhjustel, mida eespool selgitasime, on igal konkreetsel mõõtmisel saadud arvuline tulemus vaid

ligikaudne. Mõõtmisvigade teooria õpetab, kuidas saada kõige usaldatavamaid tulemusi ebatäpseist vaatlusandmeist, samuti seda, kuidas arvutada mõõtmistulemuste usaldatavuse näitajaid. Mõõtmistehnika aga areneb järjest tõusva mõõtmistäpsuse suunas. Materialistliku maailmavaate seisukohalt pole mõõtmistäpsus põhimõtteliselt piiratud: teaduse arenemisel kasvab mõõtmistäpsus tõkestamatult. Mõned idealistlikult häälestatud Lääne-Euroopa ja Põhja-Ameerika füüsikud ja filosoofid tõlgendavad teatavaid subatomaarses maailmas avastatud seoseid nii, nagu oleks looduse enda poolt seatud kindlad tõkked mõõtmisvõimalustele ja mõõtmistäpsusele ja seega seatud tõkked ka looduse tunnetamisele üldse. Et teaduse senine ajalugu ja kogu elupraktika kinnitab vastupidist, siis on küllalt põhjust arvata, et looduse tunnetamise võimalused on piiritud. Kui mõned mõõtmisvõtted enam edasi ei vii või kasutatav mõistete süsteem loodusteaduse teataval etapil saab edasisele arengule kammitsaks, siis asendatakse nad uutega.

Teaduses saavutatud täpsuse näitajaid

Kujutluse sellest, kui suurt töötlemise peenust on saavutatud teaduslike uurimisriistade ehitamisel, annab täppispeeglite näide: peegli pinna konarused ei ületa 1 : 40 000 mm.

Kujutluse sellest, kui suurt täpsust on saavutatud mõõtmistes, annavad järgmised näited: Riesenfeldil õnnestus 5-milligrammise koormise puhul kaalumise relatiivset viga viia alla 1 : 30 000 000; Milleril õnnestus mõõta valguse kiirust (ümmarguselt 300 000 km/sec) relatiivse veaga alla 1 : 100 000 000.

Märgime, et Üleliidulises Metroloogia Teadusliku Uurimise Instituudis Leningradis ei ületa põhiliste pikkusetaloonide võrdlemisel viga murdu 12 : 100 000 000 ja kaaluetaloonide võrdlemisel murdu 2 : 1 000 000 000.

Tavalise pendelkella puhul saame aja mõõtmisel kõrvaga hinnata veel sekundi kümnendikke; erilisi seadeldisi abiks võttes saame ajavahemikke mõõta veaga alla tuhandikku sekundit; nn. kvartskell aga võimaldab ajavahemikke mõõta veaga alla 1 : 10 000 000 sekundit.

Iga uus kindlustatud kümnendkoht, mida teaduslik mõõtmistehnika suuruse mõõtmisel saavutab, kitsendab suuruse võimalikku kõikumisvahemikku 10-kordselt ja on sageli uue ajajärgu alguseks teaduses. Viies gaaside tiheduse määramise täpsuse kuuenda kümnendkohani, leidsid Ramsay ja Rayleigh, et õhulämmastiku tihedus on 0,0012567, keemilisist

ühendeist saadud lämmastiku tihedus aga 0,0012507. Arvude vahe kuuendal kümnendkohal viis otseteed argooni ja teiste õhus leiduvate väärisgaaside avastamisele.

§ 6. KAUDSE MÕÕTMISE VEA HINDAMINE

Otsene ja kaudne mõõtmine

Otsesteks mõõtmisteks nimetame mõõtmisi, kus mõõdetavat suurust võrreldakse otse mõõtühikuga.

Niisuguseks otseseks mõõtmiseks on näitēks pikkuse mõõtmine mõõdulati, mõõdulindi ja mõõdusirkliga. Otseseks mõõtmiseks võib pidada ka nurga mõõtmist malli või teodoliidiga. Samuti võib pidada otseseks mõõtmiseks keha kaalu määramist kaalude abil. Rõhuv enamik suurusi mõõdetakse aga mitte otseselt, vaid kaudselt. Näiteks mõõdame toa põranda pindala kaudselt, mõõtes põranda pikkuse p ja laiuse l ning arvutades otsitava pindala saadud andmeist valemi $S = p \cdot l$ järgi. Samuti leiame kera ruumala, mõõtes otseselt tema läbimõõdu d ja arvutades siis otsitava ruumala mõõtmistulemusest valemi $V = \frac{1}{6} \pi d^3$ järgi. Suurustest, mida eranditult mõõdame kaudselt, olgu nimetatud: kiirus, kiirendus, soojuse hulk, valguse tugevus; taevakeha suurus, mass, temperatuur ja kaugus Päikesest.

Üldiselt:

kaudseteks mõõtmisteks nimetame mõõtmisi, kus mõõdetav suurus arvutatakse teiste, otseselt mõõdetud suuruste väärtustest.

Kaudse mõõtmise vea hindamise probleem

Iga kaudne mõõtmine tugineb ühtede või teiste suuruste otsese mõõtmise tulemustele. On kergesti mõistetav, et kui need tulemused ise on ligikaudsed, siis on ka kõik väärtused, mis neist arvutatakse, jällegi vaid ligikaudsed. Tekib põhilise tähtsusega küsimus: kui kõrgele võib halvimal juhul küündida nende arvutustulemuste viga?

Iga arvutus koosneb teatavast hulgast liitmistest, lahutamistest, korrutamistest ja jagamistest. Seepärast seame küsimuse nii: kui suur on andmeist $x = a(\pm\Delta a)$ ja $y = b(\pm\Delta b)$ arvutatud summa, vahe, korrutise ja jagatise vea ülemmäär? Vastuse saamiseks leiame kõigepealt avaldiste

$$x + y, \qquad x - y, \qquad xy, \qquad \frac{x}{y}$$

kõikumisvahemikud ja nende järgi uuritavate avaldiste vea ülemmäärad.

Summa viga

Et summa omandab suurima väärtuse juhul, kui liidetavad on võimalikult suured, ja väikseima väärtuse juhul, kui liidetavad on võimalikult väikesed, siis

$$(a - \Delta a) + (b - \Delta b) \leqslant x + y \leqslant (a + \Delta a) + (b + \Delta b)$$

ehk

$$a + b - (\Delta a + \Delta b) \leqslant x + y \leqslant a + b + (\Delta a + \Delta b).$$

Tulemusest nähtub, et

ligikaudsete arvude summa vea ülemmäär võrdub nende arvude vigade ülemmäärade summaga.

Tähistame summa $a + b$ vea ülemmäära sümboliga $\Delta(a + b)$. Eelneva põhjal on siis

$$\Delta(a + b) = \Delta a + \Delta b.$$

Näide. Kui $x = 5{,}8(\pm 0{,}2)$ ja $y = 9{,}6(\pm 0{,}3)$, siis x ja y summa ligikaudne väärtus on

$$5{,}8 + 9{,}6 = 15{,}4$$

ja selle väärtuse vea ülemmäär on

$$0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5.$$

Seega

$$x + y = 15{,}4(\pm 0{,}5).$$

Vahe viga

Vahe omandab suurima väärtuse juhul, kui vähendatav on võimalikult suur ja lahutatav võimalikult väike. Seega vahe $x - y$ ülemtõke on

$$(a + \Delta a) - (b - \Delta b) = a - b + (\Delta a + \Delta b).$$

Analoogiliselt arutledes leiame, et $x - y$ alamtõke on

$$(a - \Delta a) - (b + \Delta b) = a - b - (\Delta a + \Delta b).$$

Järelikult

$$a - b - (\Delta a + \Delta b) \leqslant x - y \leqslant a - b + (\Delta a + \Delta b).$$

Sellest nähtub, et

$$\Delta(a - b) = \Delta a + \Delta b.$$

See tähendab, et ka

ligikaudsete arvude vahe vea ülemmäär võrdub nende arvude vigade ülemmäärade summaga.

Korrutise viga

Korrutis omandab suurima väärtuse, kui tegurid on võimalikult suured. Seetõttu xy ülemtõke on

$$(a + \Delta a)(b + \Delta b) = ab + a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b.$$

Analoogiliselt arutledes leiame, et xy alamtõke on

$$(a - \Delta a)(b - \Delta b) = ab - a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b.$$

Et Δa ja Δb on harilikult väikesed, siis liige $\Delta a \cdot \Delta b$ kui kahe väikese arvu korrutis on tõkete avaldiste teiste liikmetega võrreldes väga väike. Seepärast võime tõkete avaldistes viimase liikme jätta arvestamata. Seega

$$ab - (a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a) \leqslant xy \leqslant ab + (a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a).$$

Sellest nähtub, et

$$\Delta(ab) = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a.$$

Näide. Olgu ristküliku külgede mõõtmisel meetrites saadud arvud $24{,}6(\pm 0{,}04)$ ja $32{,}3(\pm 0{,}05)$. Leiame ristküliku pindala.

Pindala ligikaudne väärtus

$$S = 24{,}6 \cdot 32{,}3 = 794{,}58.$$

Viimase arvu vea ülemmäär

$$\Delta S = 24{,}6 \cdot 0{,}05 + 32{,}3 \cdot 0{,}04 = 2{,}522.$$

Niisiis on pindala ligikaudses väärtuses 794,58 juba üheliste number kahtlane. Järelikult pole mõtet anda selles arvus kümnendikke ja sajandikke. Seepärast ümardame S ja ΔS väärtused ühelisteni: otsitav pindala on

$$795(\pm 3)\ \text{m}^2.$$

Jagatise viga

Jagatis omandab suurima väärtuse juhul, kui jagatav on võimalikult suur ja jagaja võimalikult väike. Seetõttu $\frac{x}{y}$ ülemtõke on

$$\frac{a + \Delta a}{b - \Delta b} = \frac{(a + \Delta a)(b + \Delta b)}{(b - \Delta b)(b + \Delta b)} = \frac{ab + a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b}{b^2 - (\Delta b)^2}.$$

Analoogiliselt arutledes leiame, et $\frac{x}{y}$ alamtõke on

$$\frac{a - \Delta a}{b + \Delta b} = \frac{(a - \Delta a)(b - \Delta b)}{(b + \Delta b)(b - \Delta b)} = \frac{ab - a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a + \Delta a \cdot \Delta b}{b^2 - (\Delta b)^2}.$$

Jättes tõkete avaldistes arvestamata väikesed suurused $\Delta a \cdot \Delta b$ ja $(\Delta b)^2$, saame $\frac{x}{y}$ ülemtõkkena arvu

$$\frac{ab + a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2} = \frac{a}{b} + \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2}$$

ja $\frac{x}{y}$ alamtõkkena arvu

$$\frac{ab - a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a}{b^2} = \frac{a}{b} - \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2}.$$

Seega

$$\frac{a}{b} - \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{a}{b} + \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2}$$

ja

$$\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{b^2}.$$

N ä i d e. Leiame, mitme õige kohaga saab arvutada ligikaudsete arvude 8,31 ja 4,64 jagatist.

Jagatise ligikaudne väärtus

$$8{,}31 : 4{,}64 = 1{,}791;$$

selle väärtuse vea ülemmäär on

$$\frac{8{,}31 \cdot 0{,}005 + 4{,}64 \cdot 0{,}005}{4{,}64^2}$$

ehk

$$\frac{0{,}005 \cdot 12{,}95}{4{,}64^2}.$$

Ümardades lugeja teise teguri ülespoole ja võttes nimetaja väärtuse ruutude tabelist ümardatuna allapoole, saame vea tõkkena

$$\frac{0{,}005 \cdot 13}{21} \text{ ehk } 0{,}003.$$

Leitud vea ülemmäär näitab, et jagatises on kolm õiget kohta nagu andmeteski; seega

$$8{,}31 : 4{,}64 = 1{,}79.$$

Arvu ruudu ja kuubi viga

Võttes korrutise vea ülemmäära valemis $b = a$, leiame, et arvu ruudu vea ülemmäär

$$\Delta(a^2) = 2a \cdot \Delta a.$$

Korrutise ja ruudu vea ülemmäära valemite põhjal leiame, et arvu kuubi vea ülemmäär

$$\Delta(a^3) = \Delta(a^2 \cdot a) = a^2 \cdot \Delta a + a \cdot 2a \cdot \Delta a$$

ehk koondatult

$$\Delta(a^3) = 3a^2 \cdot \Delta a.$$

Arvu ruut- ja kuupjuure viga

Ruutjuure vea ülemmäära leidmiseks asendame valemis

$$\Delta(a^2) = 2a \cdot \Delta a$$

arvu a sümboliga $\sqrt{n}$. Siis

$$\Delta n = 2\sqrt{n} \cdot \Delta\sqrt{n},$$

millest leiame, et

$$\Delta\sqrt{n} = \frac{\Delta n}{2\sqrt{n}}$$

ehk, tähistades juuritavat tähega a,

$$\Delta\sqrt{a} = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}.$$

Analoogiliselt leiame kuubi vea ülemmäära valemi põhjal, et kuupjuure vea ülemmäär

$$\Delta\sqrt[3]{a} = \frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}.$$

Summa relatiivne viga

Summa relatiivne viga asetseb liidetavate relatiivsete vigade vahel.

Tõestuseks märgime väiksema relatiivse veaga liidetava tähega a, teise liidetava tähega b. Siis

$$\frac{\Delta a}{a} < \frac{\Delta b}{b} \text{ ehk } \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a}{a} > 0 \text{ ehk } \frac{a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a}{ab} > 0$$

ehk, et a ja b on positiivsed,

$$a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a > 0.$$

Kõne all olev teoreem väidab, et

$$\frac{\Delta a}{a} < \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} < \frac{\Delta b}{b}.$$

Et seda tõestada, moodustame vahed

$$\frac{\Delta a + \Delta b}{a + b} - \frac{\Delta a}{a} \text{ ja } \frac{\Delta b}{b} - \frac{\Delta a + \Delta b}{a + b}$$

ehk

$$\frac{a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a}{a(a + b)} \text{ ja } \frac{a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a}{b(a + b)}.$$

Nagu eespool nägime, on kummagi murru lugeja positiivne. Seega on eespool moodustatud vahed positiivsed ja väidetud võrratused õiged.

Kui kummagi liidetava relatiivsed vead on võrdsed, siis $a \cdot \Delta b - b \cdot \Delta a = 0$ ja summa relatiivne viga võrdub liidetavate relatiivse veaga.

Täpsuse kadu lahutamisel

Väikese vahe puhul võib vahe relatiivne viga saada väga suureks ja seega vahe ise muutuda mitteusaldatavaks. Vaatleme selle tõsiasja selgitamiseks järgmist näidet.

Tabelite järgi on

$$\sqrt{23} = 4{,}80 \quad \text{veaga mitte üle } 0{,}005,$$
$$\sqrt{22} = 4{,}69 \quad \text{„ „ „ } 0{,}005,$$

seega

$$\sqrt{23} - \sqrt{22} = 0{,}11 \quad \text{„ „ „ } 0{,}01.$$

Kui määrame relatiivsed vead, siis näeme, et andmeil on need ümmarguselt $\frac{0{,}005}{5}$ ehk 0,001, saadusel aga ümmarguselt $\frac{0{,}01}{0{,}1} = 0{,}1$. Seega on saaduse täpsus 100 korda väiksem andmete täpsusest.

Täpsuse kadu kahe lähestikku asetseva arvu lahutamisel on üldine nähtus. Seepärast

tuleb igati hoiduda arvu määramisest kahe lähestikuse arvu vahena.

Kui näiteks on tarvis analüüsida mõnd keemilist ühendit D, mille peamise osa moodustavad komponendid A ja B, siis ei tohi kolmanda komponendi C kaalu määrata ühendi kaalu ja komponentide A ja B kogukaalu vahena. Komponent C tuleb määrata otsesel teel.

Vahe täpsust saab mõnikord suurendada, teisendades otstarbekalt vahe avaldist enne vahe arvutamisele asumist.

Näide 1. Olgu vaja leida vahe $\sqrt{23} - \sqrt{22}$. Teisendades saame

$$\sqrt{23} - \sqrt{22} = \frac{(\sqrt{23} - \sqrt{22})(\sqrt{23} + \sqrt{22})}{\sqrt{23} + \sqrt{22}} = \frac{1}{\sqrt{23} + \sqrt{22}}.$$

Kui võtame viimases avaldises ruutjuured kõigest k a h e k o h a g a pärast koma nagu enne, siis leiame otsitava vahena arvu

$$\frac{1}{4{,}80 + 4{,}69} = \frac{1}{9{,}49} = 0{,}1054.$$

See tulemus erineb kõigest 0,00001 võrra vahe $\sqrt{23} - \sqrt{22}$ väärtusest, mille saame, võttes ruutjuured v i i e kohaga pärast koma:

$$\sqrt{23} - \sqrt{22} = 4{,}79583 - 4{,}69042 = 0{,}10541.$$

Näide 2. Olgu tarvis leida vahe $1 - \cos 3°16'$. Et $\cos 3°16'$ on lähedal ühele, siis kasutame valemit

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

ja saame otsitava vahe jaoks väärtuse $2\sin^2 1°38'$, mida on kerge täpsuse kaota arvutada tabelite abil.

Korrutise ja jagatise relatiivne viga

Eespool toodud vea ülemmäära valemeist on võimalik kergesti saada r e l a t i i v s e v e a ü l e m m ä ä r a v a l e m e i d.

Leiame näiteks korrutise relatiivse vea ülemmäära. Et korrutise vea ülemmäär

$$\Delta(ab) = a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a,$$

siis korrutise relatiivse vea ülemmäär

$$\frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{ab}$$

ehk, liikmeti jagades,

$$\frac{\Delta(ab)}{ab} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Seega

korrutise relatiivse vea ülemmäär võrdub tegurite relatiivsete vigade ülemmäärade summaga.

Samal viisil leiame, et jagatise relatiivse vea ülemmäär

$$\frac{\Delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b}} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}.$$

Seega

jagatise relatiivse vea ülemmäär võrdub jagatava ja jagaja relatiivsete vigade ülemmäärade summaga.

Arvu ruudu ja kuubi relatiivne viga

Arvu ruudu ja kuubi relatiivse vea ülemmäärad on

$$\frac{\Delta(a^2)}{a^2} = \frac{2a \cdot \Delta a}{a^2} = 2 \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

ja

$$\frac{\Delta(a^3)}{a^3} = \frac{3a^2 \cdot \Delta a}{a^3} = 3 \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Seega

arvu ruudu relatiivse vea ülemmäär on kaks korda suurem selle arvu relatiivse vea ülemmäärast

ja

arvu kuubi relatiivse vea ülemmäär on kolm korda suurem selle arvu relatiivse vea ülemmäärast.

Öeldust järeldub, et ruudu külje mõõtmisviga ühe protsendi suuruses tingib ruudu pindalas vea kahe protsendi suuruses ja kuubi serva mõõtmisviga ühe protsendi suuruses tingib kuubi ruumalas vea kolme protsendi suuruses.

Arvu ruut- ja kuupjuure relatiivne viga

Arvu ruut- ja kuupjuure relatiivse vea ülemmäärad on

$$\frac{\Delta(\sqrt{a})}{\sqrt{a}} = \frac{\frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta a}{a}$$

ja

$$\frac{\Delta(\sqrt[3]{a})}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\frac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Seega

arvu ruutjuure relatiivse vea ülemmäär võrdub poolega selle arvu relatiivse vea ülemmäärast

ja

arvu kuupjuure relatiivse vea ülemmäär võrdub kolmandikuga selle arvu relatiivse vea ülemmäärast.

Märkusi

1. Kõne lühendamise otstarbel asendatakse sageli sõnad «vea ülemmäär» lihtsalt sõnaga «viga».

2. Kõigis vigade hindamise küsimustes huvitab meid ikka ainult vea suuruse ülemmäär, mitte märk. Seepärast kasutame vigade hindamise küsimustes arvude x ja y ning nende vigade Δx ja Δy absoluutväärtusi.

3. Vigade ülemmäära arvutamise üksikuid samme tuleb püüda sooritada võimalikult ümmarguste arvudega. Iga niisuguse sammu eel tuleb kaaluda küsimust, kas üks või teine arv ümardada üles- või allapoole. Ümardamise suund tuleb valida ikka nõnda, et väidetav või nõutav võrratus selle ümardamise puhul kindlasti kehtiks.

4. Õiget arvutustulemust on ligikaudsete andmete puhul võimalik saada sel teel, et arvutamine toimetatakse nii, nagu oleksid andmed täpsed; siis hinnatakse tulemuse viga ja lõpuks ümardatakse vastus vea suuruse kohaselt. Sel puhul läheb kaduma töö kogu see osa, mis kulus hiljem kustutamisele määratud kümnendkohtade arvutamiseks. Lühendatud arvutuse võtted võimaldavad määrata tulemust liigseid kohti arvutamata. Neid võtteid käsitleme järgmises paragrahvis.

Veaarvutuse näiteid

Ülesanne 1. Silindri põhja raadiuse mõõtmise relatiivne viga ei ületa 2%; silindri kõrguse mõõtmise relatiivne viga ei ületa 1%. Mitme protsendini võib küündida neist andmeist arvutatud silindri ruumala viga?

Lahendus. Kui tähistada silindri raadius tähega r ja kõrgus tähega h, siis silindri ruumala

$$V = \pi r^2 h.$$

Esimese teguri π võime võtta nii täpselt, et ta viga ei mõjuta korrutise vea ülemmäära. Arvu r^2 relatiivne viga on $2 \cdot 2\%$ ehk 4%, h relatiivne viga 1%, järelikult korrutise r^2h relatiivne viga võib küündida 5 protsendini.

Ülesanne 2. Kuubi serva a mõõtmisel leiti, et $a = 9{,}60\,(\pm 0{,}04)$ cm. Milleni võib küündida kuubi serva põhjal arvutatud täispindala viga?

Lahendus. Kuubi täispindala $S = 6a^2$; seega

$$\Delta S = 6 \cdot 2a \cdot \Delta a = 12a \cdot \Delta a.$$

Asetades viimasesse avaldisse toodud mõõtmistulemused, leiame, et

$$S = 6 \cdot 9{,}6^2 = 552{,}96$$

ja

$$\Delta S = 12 \cdot 9{,}6 \cdot 0{,}04 = 4{,}608,$$

ehk, ümardades vea ülespoole, $\Delta S \approx 5$.

Näeme, et täispindala väärtuses juba *ühelised* pole *usaldatavad*, seega kümnendkohtadel 0,9 ja 0,06 ei ole enam mingit mõtet. Kuubi täispindala tuleks järelikult anda kujul

$$S = 553(\pm 5)\ \text{cm}^2.$$

Ülesanne 3. Arvu π jämedaks lähendiks on arv 3. Kui täpselt saab siit arvutada väärtust $\frac{1}{\pi}$?

Lahendus. Vaatleme jagatist $\frac{1}{a}$. Et lugeja on *täpne* arv, siis jagatise vea valemi järgi

$$\Delta\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a^2} \cdot \Delta a.$$

Meie juhul $a = \pi = 3$; selle võrduse viga ei ületa arvu 0,2; järelikult $\Delta a = 0{,}2$, seega

$$\Delta\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{3^2} \cdot 0{,}2 = \frac{0{,}2}{9} = 0{,}0222 < 0{,}03.$$

Niisiis, võttes π asemele arvu 3, ei tee me kindlasti suuremat viga kui 0,2; võttes $\frac{1}{\pi}$ asemele arvu $\frac{1}{3}$, ei tee me kindlasti suuremat viga kui 0,03.

Ülesanne 4. Kui täpselt tuleb mõõta kera umbes 10-sentimeetrist läbimõõtu, et oleks võimalik arvutada kera ruumala veaga alla 1 mm³?

Lahendus. Kera ruumala V avaldub diameetri d kaudu kujul

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3.$$

Et arvu π võime võtta nii täpselt kui tahame, siis

$$\Delta V = \frac{1}{6}\pi \cdot 3d^2 \cdot \Delta d = \frac{1}{2}\pi \cdot d^2 \cdot \Delta d$$

ja seega

$$\Delta d = \frac{2\Delta V}{\pi d^2}.$$

Asetame saadud valemisse sümbolite arvulised väärtused, võttes

seejuures π asemel temast suurema arvu, et vea tõket kindlasti mitte ületada; saame

$$\Delta d = \frac{2 \cdot 0{,}001}{4 \cdot 100} = 0{,}5 \cdot 0{,}00001 = 0{,}000005.$$

Niisiis tuleb kera diameeter mõõta veaga alla 0,000005 cm ehk veaga alla 0,00005 mm. Niisugust täpsust pole võimalik saavutada; seega pole ülesandel praktiliselt mõtet.

Ülesanne 5. Kui täpselt tuleb võtta arv π, et saada arvu $\sqrt{\pi}$ veaga alla 0,0005?

Lahendus. Ruutjuure vea ülemmäära valemist

$$\Delta \sqrt{a} = \frac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$$

leiame, et

$$\Delta a = 2\sqrt{a} \cdot \Delta \sqrt{a}.$$

Võttes $a = \pi$, saame

$$\Delta \pi = 2\sqrt{\pi} \cdot \Delta \sqrt{\pi}.$$

Tabelist leiame, et $\sqrt{\pi} \approx 1{,}7$; $\Delta \sqrt{\pi}$ ülemmäär on ülesandes antud, nimelt $\Delta \sqrt{\pi} = 0{,}0005$. Seega

$$\Delta \pi \approx 2 \cdot 1{,}7 \cdot 0{,}0005 = 0{,}0017,$$

mis on väiksem kui 0,005. Seega tuleb arv π võtta kolme õige kohaga. Märgime, et $\sqrt{\pi}$ väärtus on võetud puudusega, et kindlustada π vea küllalt väikeseks surumist.

§ 7. LÜHENDATUD ARVUTUSVÕTTEID

Mõttetud numbrid

Rõhuval enamikul juhtudel on arvutamise lähteandmed meile teada vaid ligikaudu. Siit järeldub, et ka neist andmeist arvutatud suuruste väärtused ei saa olla täpsed. Eespool nägime, kuidas saab hinnata arvutatud väärtuste võimaliku vea tõket. Selle vea tõkke suurus näitab muu kõrval siis ka, missugused arvutatud kümnendkohtadest on veel usaldatavad, missugused neist on kahtlased ja missugused on mõttetud. Mõttetud kümnendkohad kuuluvad lõpptulemuses loomulikult ärajätmisele.

Näide. Olgu tarvis määrata korrutis $39{,}87 \cdot 98{,}7352$, kus kummagi andme viga ei ületa viimase koha poolt ühikut, seega

esimese teguri puhul arvu 0,005, teise teguri puhul arvu 0,00005. Toimetades korrutamist tavalisel viisil, saame

$$\begin{array}{r} 98{,}73\,52 \\ 39{,}87 \\ \hline 29620 : 56 \\ 8886 : 168 \\ 789 : 8816 \\ 69 : 11464 \\ \hline 3936{,}5 : 72424 \end{array}$$

Korrutise vea tõkke hindamine annab väärtuse

$$0{,}005 \cdot 100 + 0{,}00005 \cdot 40 = 0{,}5 + 0{,}002 \approx 0{,}5.$$

Siit näeme, et korrutises juba kümnendikke ei saa usaldada. Endastmõistetavalt on siis kümnendikele järgnevad märgid 7, 2, 4, 2, 4 mõttetud. Niisiis on kõigi skeemis paremal pool punkteeritud joont seisvate arvumärkide määramine olnud tühine töö. Nõutud korrutis tuleb anda kujul

$$3936{,}6\,(\pm\,0{,}5).$$

Ei tule arvata, et arvutusi tuleb alati teha nii täpselt, kui andmed seda võimaldavad: tegelikkuse poolt seatud ülesandeis nõutakse tulemust enamikul juhtudel hoopis väiksema märkide hulgaga, kui neid võiks mõistlikult arvutada veatõket arvestades. Näiteks antakse meie riigiasutuste eelarvete koostamisel eelarve üksikpunktid ja kogusumma tuhandeis ja kümnendikes tuhandeis rublades. Eelarve koostamisel tuleks seega summa rbl. 3936,57 anda ümardatult arvuni rbl. $3{,}9 \cdot 10^3$. Järelikult aitaks siin juba tulemuse esimese kahe numbri arvutamisest või, ettevaatuse mõttes, esimese kolme numbri arvutamisest ja resultaadi ümardamisest kahekohaliseks.

Nii arvutamine maksimaalse täpsusega, mida andmed üldse võimaldavad, kui ka arvutamine sellest väiksema täpsusega peaks ikka toimuma nii, et ei kulutataks aega ega vaeva liigsete ja mõttetute arvumärkide määramisele. Arvutusvõtted, mis annavad arvutustulemuse kohe õige märkide hulgaga, kannavad lühendatud arvutusvõtete nimetust.

Lühendatud liitmine

Olgu tarvis liita arvud

14,567 3,1 17,24 9,0012,

mis kõik on kirjutatud standardkujul. Sel puhul on liidetavate vigade ülemmäärad vastavalt

0,0005 0,05 0,005 0,00005.

Halvimal juhul, kui kõigi liidetavate vead on ühe ja sama märgiga, on summa vea ülemmääraks 0,05555 ehk ümardatult 0,06. Seega pole summa sajandikud enam usaldatavad ja kõik järgmised kümnendkohad on mõttetud. Seepärast ümardame andmed sajandikeni ja liidame tulemused:

14,57	Vastus tuleb anda kujul
3,1	
17,24	$s = 43{,}91\ (\pm\ 0{,}06)$.
9,00	See tähendab, et
43,91	$43{,}85 \leqslant s \leqslant 43{,}97$.

Näide 1. Olgu tarvis võtta eelarvesse summad

87120,27 3853,85 569,50 21372,87 4218,42 739,41

rubla. Et eelarve summasid nõutakse tuhandeis ja kümnendikes tuhandeis, siis on võimalik eelarve summat arvutada kahel viisil: esiteks pikalt, antud arve liites ja tulemust paraja määrani ümardades; teiseks lühendatult, arve tuhandeis ja kümnendikes tuhandeis kirjutades ja neid siis liites:

I skeem:	II skeem:
12233 2	1 2
87120,27	$87{,}1 \cdot 10^3$
3853,85	3,9
569,50	0,6
21372,87	21,4
4218,42	4,2
739,41	0,7
117874,32	$117{,}9 \cdot 10^3$
$117{,}9 \cdot 10^3$	

Näide 2. See näide selgitab summa leidmist kolmekohaliselt.

I skeem:	II skeem:
tavalisel teel, andmeid muutmatuks jättes ja alles tulemust ümardades:	lühendatud teel, eelkõige andmeid paraja määrani ümardades:
78931,97	$789 \cdot 10^2$
3175,61	32
87,365	1
82194,945	$822 \cdot 10^2$
$822 \cdot 10^2$	

Arvumärkide hulk on teises skeemis rohkem kui poole võrra väiksem kui esimeses.

Kokku võttes toodud näiteist õpitut, saame järgmise lühendatud liitmise reegli:

et saada summat andmetekohase täpsusega, hindame eelkõige summa võimalikku viga; selle vea suuruse kohaselt ümardame kõiki liidetavaid ja summeerime tulemused. Kui piisab jämedamast tulemusest, kui seda tingib andmete täpsus, tuleb liidetavad enne liitmist vastavalt ümardada.

Lühendatud lahutamine

Lühendatud lahutamise meetodi selgitamisel lähtume järgmisest lihtsast ülesandest.

Ülesanne. Tööstuskombinaadi tsehhi möödunud aasta tulud ja kulud olid vastavalt 84794,17 ja 73559,82 rubla. Jooksva aasta tulude muutust võib hinnata ümmarguselt ± 200 rublale, kulude muutust ± 600 rublale. Kui suur on jooksva aasta oodatav puhaskasu?

Lahendus. Möödunud aasta puhaskasu on

$$84794{,}17 - 73559{,}82 = 11234{,}35$$

rubla. Jooksva aasta puhaskasu eelarve kindlusetus ulatub summani $200 + 600 = 800$ rubla. See on vaid vähe alla 1000 rubla. Järelikult oleks loomulik oodatavat puhaskasu määrata tuhandeis rublades. Teeme seda kahel viisil.

I skeem:

tavalisel teel, andmeid muutmatuks jättes ja alles tulemust ümardades:

$$\begin{array}{r} 84794{,}17 \\ -\ 73559{,}82 \\ \hline 11234{,}35 \\ \hline 11{,}2(\pm 0{,}8) \cdot 10^3 \end{array}$$

II skeem:

lühendatud teel, eelkõige andmeid paraja määrani ümardades:

$$\begin{array}{r} 84{,}8 \cdot 10^3 \\ -\ 73{,}6 \\ \hline 11{,}2(\pm 0{,}8) \cdot 10^3 \end{array}$$

Üldistades toodud mõttekäiku, saame järgmise lühendatud lahutamise reegli:

et saada vahet andmetekohase täpsusega, hindame eelkõige vahe võimalikku viga; selle vea suuruse kohaselt ümardame andmed ja teostame siis lahutamise ümardatud andmetega. Kui piisab jämedamast tulemusest, kui seda määrab vahe vea tõke, siis ümardame andmeid vastava jämeduseni.

Lühendatud korrutamine

Lühendatud korrutamise meetodi selgitamisel lähtume järgmistest ülesannetest.

Ülesanne 1. Ristkülikutaolise maatüki mõõtmed on 1293(±2) m ja 3128 (±3) m. Arvutada maatüki pindala.

Lahendus. Korrutise vea valemi järgi saame otsitava pindala veatõkkena arvu

$$3 \cdot 1293 + 2 \cdot 3128 = 3879 + 6256 = 10135$$

ruutmeetrit ehk pisut üle 10000 m² ehk 1 hektari. Toimetades korrutamist tavalisel viisil, saame I skeemi.

I skeem:

3128
1293
312 : 8
62 : 56
28 : 152
: 9384
404 : 4504

404 (±1) · 10^4 m²
ehk 404 (±1) hektarit.

Et korrutise viga võib antud juhul küündida ±10000-ni, siis pole kümnetuhandelised enam usaldatavad; järelikult tuhandelistel ja madalamat järku ühikutel pole mingit mõtet. Seega on punkteeritud joonest paremal seisvad arvumärgid mõttetud. Neid on 14 kümne mõtet omava märgi vastu. Et mitte teha mõttetut tööd ja mitte kirjutada mõttetuid numbreid, toimetame vajalikku korrutamist lühendatult; see annab II skeemi.

II skeem:

	| | |	
3128		
	1293	
313		
62		
28		
1		

404 (±1) · 10^4 m²
ehk 404 (±1) hektarit.

Seletuseks: korrutades 8 ühelist 1 tuhandelisega, saame 8000, mis on väiksem kui võimalik viga 10000. Need 8000 arvestame ülespoole 10000-ni ümardatult nendele kümnetuhandelistele juurde, mis saame 2 kümnelise korrutamisel 1 tuhandelisega. Korrutatavate kümneliste alla kirjutame korrutaja esimese numbri, sest selle koha alla tuleb kirjutada kõigi osakorrutiste esimene arvestatav number. 312 kümnelise korrutamine korrutaja esimese numbriga ja ülekande 1 arvestamine annab 313 kümnetuhandelist. Et korrutamisel sadadega ühelised midagi arvestatavat ei

anna, jätame üheliste numbri 8 edaspidi mängust välja, märkides seda kriipsukesega 8 ühelise kohal. 2 kümnelist, korrutatud 2 sajalisega, ei anna ka veel arvestatava suurusjärguga ühikuid. 31 sajalist, korrutatud korrutaja teise numbriga, annab 62 kümnetuhandelist. Et 2 kümnelise edaspidised korrutamised midagi arvestatavat ei anna, siis jätame kümneliste numbri 2 edaspidi välja, märkides seda kriipsukesega 2 kümnelise kohal. 1 sajaline, korrutatud 9 kümnelisega, annab 9 tuhandelist, mida ümardame ja arvestame ühe kümnetuhandelisena ülekandes. 3 tuhandelist, korrutatud 9 kümnelisega, on 27 kümnetuhandelist, mis koos ülekandega annab 28 kümnetuhandelist. Et sajaliste korrutamine kümnelistega midagi arvestatavat ei anna, siis jätame sajaliste numbri 1 mängust välja, märkides seda kriipsukesega 1 sajalise kohal. Veel ülejääva 3 tuhandelise korrutamisel 3 ühelisega saame 9 tuhandelist, mida arvestame ülekandes 1 kümnetuhandelisena. Kõiki osakorrutisi liites saame 404 kümnetuhandelist. Seega tuleb vastus anda kujul $404\ (\pm 1) \cdot 10^4$.

Ülesanne 2. Olgu korrutada arvud 1,7832 ja 594,83. Korrutise vea hindamine annab

$$2 \cdot 0{,}005 + 600 \cdot 0{,}00005 = 0{,}01 + 0{,}03 = 0{,}04.$$

Seega pole korrutises sajandikud enam usaldatavad ja kõik väiksema järguga kohad on mõttetud. Järgmine skeem illustreerib lühendatud korrutamise käiku.

		594,83
		1,7832
594,83 · 1	=	594,83
594,83 · 0,7	=	416,38
594,83 · 0,08	=	47,58
594,83 · 0,003	=	1,78
594,83 · 0,0002	=	0,12
		1060,69

Seletuseks:
3 · 7 = 21; 2 ülekandes arvestada, 3 kriipsuga märkida;
8 · 8 = 64; 6 ülekandes arvestada, 8 kriipsuga märkida;
4 · 3 = 12; 1 ülekandes arvestada, 4 kriipsuga märkida;
9 · 2 = 18; 2 ülekandes arvestada, 9 kriipsuga märkida.

Lühendatud korrutamise puhul pole võimalik koma asendit määrata tavalisel viisil, lugedes korrutises ära vastava hulga kohti paremalt vasakule liikudes. Koma asendi määramiseks muudame korrutatava ja korrutaja kirjutusviisi nii, et korrutaja algaks ühelistega. Näiteks arvude 342,795 ja 0,07856 korrutamise asemel võime korrutada arvud 3,42795 ja 7,856. Ümardatud vastus on 8 · 3 ehk 24; seega on korrutises kaks märki enne koma.

Korrutaja ühelised kirjutame korrutatava selle koha alla, mida

korrutises veel arvestame. Kui näiteks viimati toodud andmete puhul tahame saada vastust kümnendikeni, siis kirjutame

$$
\begin{array}{r}
\overset{\text{III}}{7{,}856} \\
\overset{\text{III}}{3{,}42795} \\
\hline
23{,}6 \\
3{,}1 \\
0{,}1 \\
\hline
26{,}8
\end{array}
$$

Seletuseks: kümnendikeni arvutamisel 6 tuhandiku korrutamine 3-ga midagi arvestatavat ei anna. Märgime need 6 tuhandikku ärajätmiskriipsuga. 5 sajandikku annavad korrutamisel 3-ga 1,5 kümnendikku, mida arvestame ülekandes 2-na. Märgime need 5 sajandikku ärajätmiskriipsuga. 8 kümnendikku annavad korrutamisel 3-ga 24 kümnendikku, millele lisandub 2 ülekantavat; see annab kokku 26. Neist paneme 6 kümnendikku kirja, 2 täit ühikut liituvad $7 \cdot 3$ ehk 21-ga, andes 23. Edasi korrutame 8 kümnendikku 4 kümnendikuga; saame 32 sajandikku, millest läheb ülekandena arvestamisele 3 kümnendikku. Märgime need 8 edasiseks ärajätmiskriipsuga. Nüüd korrutame arvu 7 arvuga 0,4; korrutiseks on 2,8, mis ühes ülekantud 3 kümnendikuga annab 3,1. Korrutades arvu 7 arvuga 0,02, saame 0,14, millest 0,1 tuleb arvestamisele. Korrutamine korrutaja järgmiste numbritega 7 ja 9 ning 5 annab kõik osakorrutised arvestamisele mitte kuuluvates suurusjärkudes. Seepärast märgime need kolm numbrit ärajätmiskriipsudega.

Vaadeldes andmeid täpselt teada olevate arvudena, saame korrutiseks arvu 26,92997520, mis kümnendikeni ümardamisel annab 26,9. Nagu näeme, erineb lühendatult saadud korrutis 26,8 õigest väärtusest 0,1 võrra. Täpsema väärtuse oleksime lühendatud korrutamisel saanud, kui oleksime arvutanud korrutise sajandikeni ja tulemuse ümardanud kümnendikeni.

Kokku võttes saame lühendatud korrutamiseks järgmise reegli:

korrutamise ülesanne korraldatakse ümber nii, et korrutaja algab ühelistega; korrutaja ühelised paigutatakse korrutatava selle koha alla, mille järguni toimub lühendatud korrutamine; korrutatavasse jäetakse kohti ühe võrra rohkem, kui neid peab olema saaduses, märkides kõik ärajäävad kohad kriipsukestega. Operatsioon algab korrutamisega korrutaja ühelistega. See annab ka koma asendi. Lisakohast tulenev korrutis arvestatakse ülekandena juurde esimesele osakorrutisele, mille järel lisakoht märgitakse edaspidi ärajätmisele. Iga järgmine osakorrutis arvutatakse lühendatult eelmise osakorrutise viimase kohani.

Lühendatud jagamine

Nagu korrutamiselgi, nii saavutame ka jagamisel suurt töö kokkuhoidu, teostades jagamist lühendatult. Et saaks kergesti hinnata jagatise suurusjärku ja selle kaudu leida koma asendit jagatises, korraldame asja nõnda, et *jagaja algaks ühelistega*. Näiteks kirjutame 484,1 : 153,7 asemel 4,841 : 1,537. Siit näeme kohe, et jagatis on ümmarguselt 3, millega koma asend jagatises on käes. Et jagada tuleb arvuga 1 ja 10 vahel, siis pole mõtet jätta jagatavas alles madalamat järku kohti kui viimane nõutav koht jagatises. Kui näiteks jagatis on tarvis leida sajandikeni, võime jagatavas juba enne kustutada tuhandikud, kümnetuhandikud jne.

Näide. Olgu tarvis jagada 484,1 arvuga 153,7 sajandikeni.

Alltoodud 2 skeemi kujutavad selle operatsiooni teostamist: esimene neist näitab otsitava jagatise lühendamatut arvutamist tuhandikeni ja tulemuse ümardamist sajandikeni. Teine skeem kujutab sama jagatise leidmist lühendatud viisil.

I skeem:

484,1 : 153,7

484	1 : 1537	= 3,149
461	1	≈ 3,15
23	00	
15	37	
7	630	
6	148	
1	4820	
1	3833	
	987	

II skeem:

484,1 : 153,7

	I	II	
4,841	: 1,537	=	3,15
4 61			
23			
15			
8			
8			

Nagu I skeemist näha, on kõik numbrid jagatavas punkteeritud joonest paremal liigsed, sest 1 ühelise jagamisel 1537-ga saame tulemuseks arvu alla 0,001, seega mitte enam arvestatava tulemuse. Seda enam oleksid mõttetud niisugused jagatised, mis tuleneksid kümnendike, sajandike jne. jagamisest.

Vaatleme nüüd II skeemi. Tuhandikud ühest suurema arvuga jagamisel sajandikke ei anna; seega võib nad algusest peale kustutada. Et $0{,}007 \cdot 3 = 0{,}021 \approx 0{,}02$, siis arvestame seda ülekandes ja märgime arvu 7 ärajätmisele. Saame $1{,}53 \cdot 3 + 0{,}02 = 4{,}61$. Lahutamine annab 0,23. See lisab jagatisele ühe kümnendiku. Et $0{,}03 \cdot 0{,}1 = 0{,}003$ ei tule arvestamisele, siis kuuluvad jagaja 3 sajandikku edaspidi ärajätmisele. Edasi saame $1{,}5 \cdot 0{,}1 = 0{,}15$, mis lahutamisel annab 0,08. Jagades selle 1,5-ga, saame 0,05, nii et vastus on 3,15.

Kokku võttes saame järgmise lühendatud jagamise reegli:

jagamise ülesanne korraldatakse ümber nii, et jagaja algab ühelistega. Jagatavas jäetakse alles nii mitu kohta, kui neid peab olema saaduses, märkides kõik liigsed kohad kriipsukestega. Nii kaua, kui on võimalik arvumärke alla tuua, toimub jagamine harilikul viisil. Kui pole enam märke alla võtta, kustutatakse jagajas järjest üks, teine, kolmas jne. koht. Kui jagajas on kohti, mida ei arvestata juba esimeses osakorrutises, tuleb need kohad märkida ärajätmisele juba enne jagamisele asumist.

M ä r k u s. Lühendatud arvutusvõtetest on mõistagi ainult siis kasu, kui neid valitsetakse sel määral, et nende kasutamine toimub m e h a a n i l i s e l t. Neid võtteid tuleb harjutada seni, kuni vastav vilumus on saavutatud. Sellele kulutatud vaev tasub ennast hiljem tegelikus töös rikkalikult.

§ 8. GRAAFILISE TÖÖ TÄPSUSE KÜSIMUSI

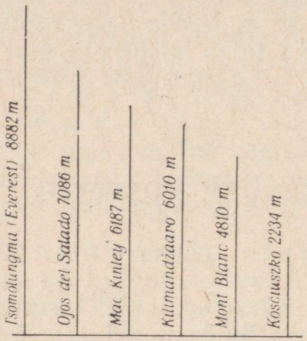
Kõrvuti arvutamise n u m b r i l i s t e m e e t o d i t e g a on viimase saja aasta jooksul tulemusrikkalt arendatud ka arvutamise g r a a f i l i s i m e e t o d e i d. Käesoleval ajal kasutatakse graafilisi arvutusvõtteid peaaegu kõigis loodusteaduse ja tehnika distsipliinides; nad kuuluvad laboratooriumis ja konstruktsioonibüroos möödapääsmatult vajalike töövahendite hulka.

Kõik graafilised arvutusvõtted põhinevad a r v u d e g r a a f i l i s e l k u j u t a m i s e l l õ i k u d e n a. Lõikude joonestamine täpselt ette antud suuruses ja nõutavas sihis on võimatu: arvude kujutised tulevad ebatäpsed. Seda põhjustavad silma piiratud lahutusvõime, joonlaua serva väike kõverjoonsus, sirkli konstruktsiooni puudulikkus, joonestuskolmnurga täisnurga väike erinevus 90-kraadisest nurgast, paberi konarlikkus jne. Samuti on võimatu joonisel oleva lõigu pikkust täpselt mõõta. Neil asjaoludel annavad graafilised võtted otsitava alati ainult l i g i k a u d u. Saadava tulemuse täpsus on aga sageli piisav. Esimene nimetatud asjaoludest kohustab tegelema g r a a f i l i s e t ö ö t ä p s u s e k ü s i m u s e g a, teine õigustab graafiliste võtete arendamist.

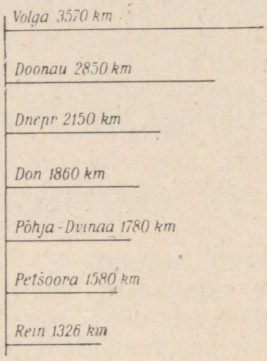
Arvu graafiline kujutamine algab m a s t a a b i v a l i k u g a. M a s t a a b i p i k k u s on üks tegureid, mis määrab graafilise töö tulemuse täpsuse. Teiseks teguriks on s i l m a l a h u t u s v õ i m e. A i n u l t n e i d k a h t t e g u r i t arvestamegi g r a a f i l i s e t ö ö t ä p s u s e h i n d a m i s e l. Kõik muud seda täpsust mõjutavad tegurid, nagu joonlaua, sirkli, paberi ja teiste töövahendite puudulikkus, joonise joonte paksus jne., jäävad arvestamata, sest nende tegurite osa hindamine oleks mõeldav vaid sellekohaste katsete tulemuste varal.

Lõik arvu kujutisena

Kõik tähtsamad graafilised töövõtted põhinevad arvude kujutamisel lõikudena. Seda arvude näitlikku esitusviisi kasutatakse kõigil neil juhtudel, kus on vaja luua võimalust mõnede suuruste väärtuste võrdlemiseks silma järgi. Nii kujutatakse maailma kõrgemate mägede kõrgusi püstlõikudena (joon. 14), Euroopa suuremate jõgede pikkusi rõhtlõikudena (joon. 15) jne. Sedasama



Joon. 14.



Joon. 15.

arvude näitlikku esitamist kasutame ka paljude kõrgema matemaatika mõistete näidistamiseks. Arvude graafilisel esitamisel lõikudena põhineb mitu tähtsat arvutamise mehhaniseerimise vahendit, nende seas arvutuslükati.

Kujutusühiku valik

Et arvu a kujutada lõiguna, on kõigepealt vaja valida kujutusühik, s. o. lõik, mis kujutab arvu 1. On üldiselt viisiks anda see lõik millimeetrites. Kujutusühikut märgime tähega l või λ, vajaduse korral ka mõne teise tähega.

Kui kujutusühikuks on l mm, siis

arvule 1 vastab joonisel lõik l mm,
„ a „ „ „ al „

Kujutusühiku valikul tuleb silmas pidada nelja asjaolu: 1° Kui suur on kujutamisele tulev arv. 2° Kui palju on paberil vaba ruumi kujutise mahutamiseks. 3° Kui peenelt soovitakse jooniselt arve lugeda. 4° Kui väikest lõiku silm (otse või luubi abil) veel selgesti näeb.

Olgu kujutamisele tulev arv a ja vaba ruumi kujutise mahutamiseks d mm. Siis

al suurim võimalik väärtus on d,

järelikult

l „ „ „ „ $\frac{d}{a}$.

Nõutagu, et jooniselt saaks veel lugeda arvu α (näiteks üht sajalist või kolme kümnendikku või viit tuhandikku). Nähku silm (otse või luubi abil) veel selgelt lõiku pikkusega δ mm (näiteks 1 mm või 0,5 mm või 0,2 mm vastavalt silmanägemise teravusele). Et arv α kujutub lõiguna pikkusega al mm, siis

al väikseim võimalik väärtus on δ,

järelikult

l „ „ „ „ $\frac{\delta}{\alpha}$.

Niisiis kujutusühiku alamtõkkeks on $\frac{\delta}{\alpha}$, ülemtõkkeks $\frac{d}{a}$; seega

$$\frac{\delta}{\alpha} \leqslant l \leqslant \frac{d}{a}.$$

Kõigist neid tingimusi rahuldavatest l väärtustest valitakse tööks mingi üks ümmargune väärtus (näiteks 10 või 240 või 0,08 jne.), võttes selle nii, et ühikut saaks vajaduse korral kergesti alajaotada kaheks või viieks või kümneks osaks (need on tavaliselt vajalikud alajaotused).

Näide. Olgu tarvis kujutada arv 12,8 lõiguna ja olgu selleks vaba ruumi 150 mm. Olgu vaja jooniselt lugeda kümnendikke ja nähku silm joonisel veel selgesti lõiku 0,5 mm. Siis eespool seletatu põhjal kujutusühik peab rahuldama võrratusi

$$\frac{0{,}5}{0{,}1} \leqslant l \leqslant \frac{150}{12{,}8}$$

ehk

$$5 \leqslant l \leqslant 11{,}7.$$

Nende võrratuste alusel võiks sobivaks kujutusühikuks olla 10 mm.

Joonise töötamistäpsus

Ülesanne. Joonis on valmistatud kujutusühikuga l mm. Silm eraldab veel selgelt lõiku δ mm. Kui suur on joonise töötamistäpsus?

Lahendus. Silm tunnistab kaht kõrvuti asetsevat lõiku pikkuselt erinevaiks, kui nende pikkused erinevad vähemalt δ mm

võrra. Järelikult võib jooniselt lõigu pikkuse mõõtmisel tulemuse viga ulatuda δ millimeetrini. Pikkuse arvulises väljenduses tingib see asjaolu vea $\varepsilon = \frac{\delta}{l}$. Niisiis: kui jooniselt määratakse lõikude mõõtmise teel arve, siis võib nende arvude viga küündida murruni $\frac{\delta}{l}$. Ümberpöördult, kui ε on mingi arvu viga, siis see viga esineb joonisel lõiguna εl mm. Viga ε ei tule joonisel nähtavale, kui $\varepsilon l < \delta$ ehk kui $\varepsilon < \frac{\delta}{l}$. Niisiis: joonisel arve lõikudena kujutades või jooniselt lõikude abil arve määrates peame nagu eespoolgi arvestama viga kuni $\frac{\delta}{l}$.

Kokku võttes

joonise töötamisviga on määratud suhtega $\frac{\delta}{l}$.

Et joonise töötamistäpsus on seda s u u r e m, mida v ä i k s e m on tema töötamisviga, siis on loomulik seda töötamistäpsust lugeda p ö ö r d v õ r d e l i s e k s joonise töötamisveaga. See tähendab, et joonise töötamistäpsust saab mõõta suhtega $\frac{l}{\delta}$.

Silma lahutusvõime on seda s u u r e m, mida v ä i k s e m on δ. Lugeda silma lahutusvõimet pöördvõrdeliseks suurusega δ, võime eelmist tulemust formuleerida ka nii:

joonise töötamistäpsus on võrdeline kujutusühiku pikkusega ja silma lahutusvõimega.

Joonise töötamistäpsuse tõstmiseks on öeldu põhjal kaks teed: suurendada kujutusühikut ja varustada silm luubiga.

Aritmeetilised põhitehted graafilises käsitluses

1° L i i t m i n e. Olgu liidetavad arvud

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

antud neid kujutavate lõikudega

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

ja kujutusühik märgitud tähega l. Liidetavate summa kujutub siis lõiguna, mille pikkus on

$$sl = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

nii et

$$s = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{l}.$$

Lugejas seisvat summat on hõlpus leida, kandes lõigud $a_1, a_2, \ldots, a_n$ üksteise järel paberiribale (näiteks serpentiinpaelale). Siis jääb vaid mõõta saadud lõikude summa kujutusühikuga l.

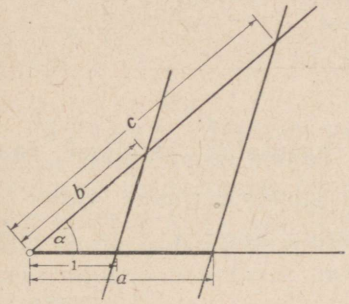
2° L a h u t a m i n e. Olgu arvud a ja b esitatud lõikudena α ja β ning olgu pikkusühikuks lõik l. Siis

$$\alpha - \beta = la - lb = l(a - b)$$

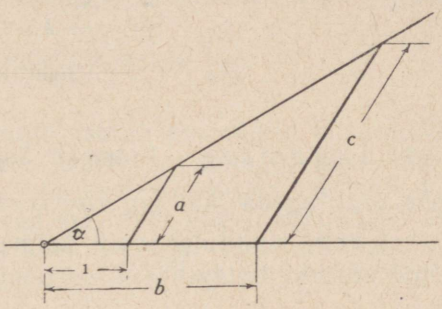
ja

$$a - b = \frac{\alpha - \beta}{l}.$$

M ä r k u s. Tähistuse lihtsustamise otstarbel märgime sageli arvu a kujutuslõiku sama sümboliga a, pidades meeles, et kujutuslõigu tegelik pikkus on al.



Joon. 16.

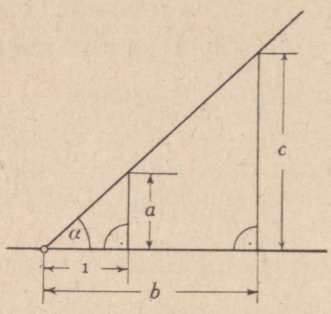


Joon. 17.

3° K o r r u t a m i n e. Arvude a ja b korrutise $c = ab$ konstrueerimisel lähtume sellest, et $1 : a = b : c$. See asjaolu võimaldab rajada arvu c graafilist määramist nn. k i i r t e l a u s e l e: võtame mingi nurga α (joon. 16) ja kanname selle nurga ühele haarale tipust lähtudes lõigud 1 ja a, teisele haarale aga lõigu b. Ühendame lõikude 1 ja b lõpud ja tõmbame lõigu a lõpust paralleeli äsjajoonestatud sirgele. See paralleel eraldab nurga α teisel haaral lõigu, mis kujutab otsitavat korrutist c.

Kiirte lause teine pool ütleb, et kaks rööpsirget, mis lõikuvad nurga haaradega, moodustavad viimastel kaks paari võrdelisi lõike, kusjuures vastavate haaradel asuvate lõikude suhe on sama mis rööbikute lõikude suhegi. Ka seda seost võib ära kasutada korrutise c graafilisel määramisel: võtame jälle mingi nurga α, kanname ühele haarale tipust lähtudes ühiklõigu ning paigutame selle lõigu lõpu ja nurga α teise haara vahele lõigu a (joon. 17). Paigutame edasi nurga α esimesele haarale lõigu b ja tõmbame selle lõpust sirge rööbiti viimati joonestatud lõiguga a. Selle sirge lõik nurga α haarade vahel kujutabki otsitavat arvu c.

Töö hõlbustamise otstarbel võib võtta nurga α nii, et ta tangens võrduks arvuga a. Niisuguse nurga saame, kui konstrueerime kaatetitel 1 ja a täisnurkse kolmnurga (joon. 18). Paigutades nüüd lõigu b selliselt, nagu on näidatud joonisel, saame tema lõpust püstitatud perpendikulaaril otsitava arvu c kujutuse.



Joon. 18.

4° J a g a m i n e. Kolmest äsja kasutatud joonisest saab kohe ära lugeda ka jagatise $a = \frac{c}{b}$ konstrueerimise võtte: et $a : 1 = c : b$, siis tuleb vaid kolme antud lõigu 1, c ja b järgi konstrueerida neljas lõik a.

Arvuvahemike graafiline kujutamine

Mastaabi valikuga seotud küsimused, nagu neid eespool käsitlesime seoses a r v u d e graafilise kujutamisega, kerkivad ka a r v u v a h e m i k e kujutamise puhul. On otstarbekohane neid küsimusi käsitleda konkreetsete näidete varal.

N ä i d e 1. Olgu tarvis kujutada arvsirgel vahemik arvude —500 ja +700 vahel ja olgu selleks kasutada ruumi 150 mm. Et arvuvahemiku pikkus on 700 — (—500) ehk 1200, siis võib kujutusühik olla ülimalt 150 mm : 1200 ehk 0,125 mm pikkune. Niisugune ühik poleks mõõtmiseks kuigi sobiv; ümardame seepärast tulemuse a l l a p o o l e ja võtame kujutusühikuks 0,1 mm, s. o. valmistame joonise mõõtkavas 10 ühikut 1 millimeetris. Sel puhul on antud arvuvahemikku kujutav lõik 120 mm pikkune, nii et jääb veel 30 mm vaba ruumi, mida kasutame lõigu pikendamiseks nii ühes kui teises suunas.

Selgitame lõpuks küsimust, kui täpselt saab jooniselt lugeda arve. Normaalse lugemiskauguse puhul eraldab silm pingutuseta kaht kriipsu veel enam-vähem selgelt, kui kriipsude vahe ei ole väiksem kui 0,2 mm. Et ühes millimeetris on kujutatud 10 ühikut,

siis 0,2 millimeetris on kujutatud 2 ühikut; seega ei ületa jooniselt loetud arvu viga väga hoolsa töö korral kaht ühikut. Vältimatute joonestamis- ja mõõtmisvigade tõttu tuleb ettevaatuse mõttes arvestada vea tõkkena 3 või isegi 4 ühikut.

N ä i d e 2. Olgu tarvis kujutada arvsirgel vahemik arvude 0,0004 ja 0,0017 vahel ja olgu selleks kasutada ruumi 300 mm. Ülevaatlikkuse mõttes kirjutame andmed kujul $4 \cdot 10^{-4}$ ja $17 \cdot 10^{-4}$. Et saada rohkem ruumi kujutise paigutamiseks, j ä t a m e n u l l - p u n k t i k u j u t a m a t a ja alustame kujutamist arvuga $4 \cdot 10^{-4}$. Kujutamisele tuleva arvuvahemiku pikkus on siis $13 \cdot 10^{-4}$; seega on kujutusühiku maksimaalne võimalik pikkus $300 : 13 \cdot 10^{-4} \approx 23 \cdot 10^{4}$ mm. Ümardades tulemust a l l a p o o l e, võtame kujutusühikuks lõigu $20 \cdot 10^{4}$ mm ehk 200 m. Jooniselt loetud arvu viga ei ületa sel puhul arvu $0{,}2 : 20 \cdot 10^{4} = 1 : 10^{6} = 1 \cdot 10^{-6}$. Halvimal juhul küüniks relatiivne viga arvuni

$$1 \cdot 10^{-6} : 4 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{4} \cdot 10^{-2} \text{ ehk } \frac{1}{4}\,\%.$$

M ä r k u s. Mastaabi valikuga seotud küsimused on esmajärgulise tähtsusega kõikjal, kus joonis on sõna otseses mõttes t ö ö v a h e n d, nagu tehnikas ja loodusteadustes. Matemaatika teoreetilistes arutlustes langevad mastaabi valiku küsimused ära, sest siin etendab joonis ainult abistavat osa, olles näitlikuks aluseks, millele toetutakse uute mõistete selgitamisel ja uute tõdede tõestamisel.

PEATÜKK III

LOGARITMILINE ARVUTUSLÜKATI

§ 9. REGULAARNE SKAALA ARVUTUSVAHENDINA

Enamiku mõõtmiste puhul saame mõõdetava suuruse väärtuse lugemina mõõduriista skaalalt*. Nii saame temperatuuri lugemina termomeetri skaalalt, aururõhu lugemina manomeetri skaalalt jne. Niisugused skaalad on ka mitmete tähtsate arvutusvahendite, nn. arvutuslükatite töötavateks osadeks.

Kui jälgime kriipsude paigutust mõõduriistade skaaladel, siis näeme, et mõnel neist, nagu näiteks vedrukaalu skaalal, kriipsud 1, 2, 3, ... järgnevad üksteisele võrdsete jaotiste järel, teistel seevastu, nagu näiteks kirjakaalu skaalal, kriipsude 1 ja 2, 2 ja 3 jne. vahed pole võrdsed. Esimesel juhul räägime regulaarsest, teisel mitteregulaarsest skaalast. Nii ühed kui teised leiavad kasutamist arvutuslükatite konstrueerimisel. Arvutuslükatite tööviisi on kõige lihtsam selgitada regulaarsetest skaaladest lähtudes.

Regulaarne skaala

Regulaarseks** skaalaks nimetatakse iga võrdsete jaotistega skaalat.

Regulaarsed on näiteks terasmõõdulindil, sentimeetripaelal ja tollipulgal märgitud skaalad, samuti igasugustel mastaapidel märgitud skaalad. Lühiduse mõttes ütleme «regulaarse skaala» asemel ka «regulaarskaala».

Liitmine ja lahutamine regulaarskaalade abil

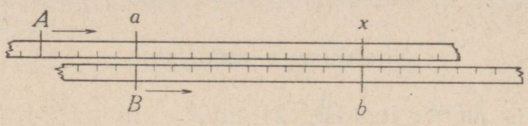
Olgu antud kaks kongruentset regulaarskaalat. Olgu esimese alguspunkt A, teise alguspunkt B. Asetame need skaalad teineteise vastu nii, et nende suunad ühtivad ning et ülemise

* Lad. k. *scala* — trepp, redel, astmik.

** Regulaarne — korrapärane, reeglipärane. Lad. k. *regula* — eeskiri, reegel.

skaala kriipsu a vastas seisab alumisel skaalal alguskriips B (joon. 19).

Küsime, missugune kriips seisab ülemisel skaalal alumise skaala mingi kriipsu b vastas.

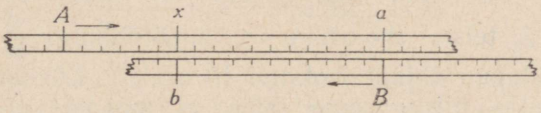


Joon. 19.

Märkides otsitava kriipsu tähega x, näeme, et missugust paari teineteise vastas seisvaid arve b ja x me ka ei vaatleks, ikka on

$$x = a + b.$$

See tähendab, et seades ülemise skaala kriipsu a vastu alumise skaala kriipsu B, leiame alumise skaala kriipsu b vastast ülemiselt skaalalt arvude a ja b summa.



Joon. 20.

Seame nüüd skaalad teineteise vastu nii, et nende positiivsed suunad on vastupidised. Lükkame alumise skaala asendisse, kus tema alguskriipsu B vastas seisab ülemise skaala kriips a. Küsime, missugune ülemise skaala kriips x seisab siis alumise skaala kriipsu b vastas. Nagu näitab joonis 20, on siis

$$a - b = x.$$

Mõõtude ümberarvutamine regulaarskaalade abil

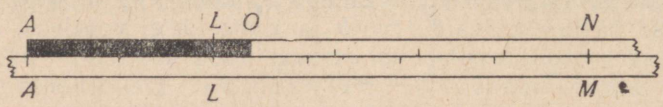
Asetades sentimeeter-jaotistega mõõdupuu kõrvuti toll-jaotistega mõõdupuuga nii, et nende alguspunktid asetsevad kohakuti, saame otsekohe määrata sentimeetrites antud pikkuse tollides ja, ümberpöördult, tollides antud pikkuse sentimeetrites. Seda saaks aga teha ka iga teise kahe regulaarskaala abil, kui ainult ühe jaotisèd on 2,54 korda pikemad teise omadest (100 tolli = 254 cm).

Seades kõrvuti Celsiuse skaala Réaumuri skaalaga, nagu seda sageli näeme termomeetritel, saame otsekohe

määrata antud C-kraadidele vastava R-kraadide arvu ja ümberpöördult. Seda saaks aga teha ka iga teise kahe regulaarskaala abil, kui ainult ühe jaotised on 1,25 korda pikemad teise omadest ($80° R = 100° C$).

Nooniusega mõõtmine

Olgu tarvis mõõta joonisel 21 musta ribana kujutatud eseme pikkus mõõdupuu lühimate jaotiste kümnendikeni. Jaotiste kümnendike silma järgi hindamine on tülikas ja ebakindel. Seepärast kasutame teist teed.



Joon. 21.

Seame kõrvuti kaks regulaarskaalat: ühe, mõõdupuu, mõõtühikuga λ, teise, nooniuse, mõõtühikuga $\frac{9}{10}\lambda$ (nooniusel on 9 mõõdupuu ühikut jaotatud 10 osaks). Lükkame skaalad teineteise vastas niisugusesse seisu, et mõõdetava eseme üks ots — algus — langeb ühte mõõdupuu nullpunktiga A, teine ots — lõpp — nooniuse nullpunktiga O (joon. 21). Mõõdetava eseme pikkuses peituva täisarvu λ-ühikuid (lõigu AL pikkuse) loeme mõõdupuult; murdosalise jäägi LO määrame otsides, missugune nooniuse kriips kõige paremini ühtib mõõdupuu mõne kriipsuga. Olgu niisugusteks kriipsudeks nooniusel N ja mõõdupuul M ja kandku nooniuse kriips N numbrit n. Siis

$$\overline{LM} = \overline{LO} + \overline{ON}$$

ehk

$$\overline{LO} = \overline{LN} - \overline{ON} = \overline{LM} \text{ (mõõdupuult)} - \overline{ON} \text{ (nooniuselt)} = \lambda n - \frac{9}{10}\lambda n = \lambda \cdot \frac{n}{10}.$$

See tähendab, et

otsitav jaotise murdosa on võrdne mõõdu nii mitme kümnendikuga, kui seda näitab arv, mis seisab nooniusel mõõdupuu kriipsuga kõige paremini ühtiva nooniuse kriipsu vastas.

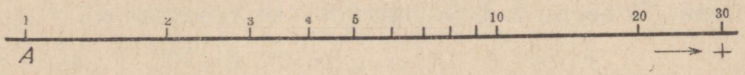
§ 10. LOGARITMILINE SKAALA

Logaritmilise skaala mõiste

Võtame logaritmide tabelist esimese 10 täisarvu logaritmid kolme kohaga:

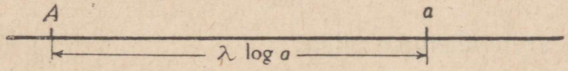
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	. . .
$\log a$	0,000	0,301	0,477	0,602	0,699	0,778	0,845	0,903	0,954	1,000	. . .

Valime mingi sirge kujutusteljeks (joon. 22), mingi punkti sel teljel, näiteks punkti A, alguspunktiks, märgime noo-



Joon. 22.

lega telje positiivse suuna ja valime kujutusühiku, näiteks λ. Siis skaala konstruktsiooniprintsiibi põhjal $\log a$ kujutub lõiguna, mille pikkus on $\lambda \cdot \log a$ (joon. 23). Kan-



Joon. 23.

name $\log 1$, $\log 2$, $\log 3$, ... kujutuslõigud teljele ja märgime iga niisuguse lõigu lõppkriipsu juurde arvu, mille logaritmi lõik kujutab. Öeldu järgi tuleb lähtekriipsu juurde kirjutada arv 1, sest $\log 1 = 0$. Samal viisil, nagu kujutasime täisarvude 1, 2, 3, ..., 10 logaritme, kujutame ka arvude 1,1; 1,2; 1,3; ...; 2,1; 2,2; ... logaritme ja mõtleme kujutatuina ka kõigi teiste arvude logaritme. Telge ühes temal märgitud kriipsudega nimetatakse logaritmiliseks skaalaks. Skaala osa, mis vastab vahemikule 1-st 10-ni, nimetatakse skaala põhilõiguks. Jooniselt näeme, et logaritmiline skaala pole regulaarne: jaotiskriipsud 1, 2, 3, ... ei järgne siin üksteisele võrdsete vahemikkude järel.

Logaritmilise skaala esimene põhiomadus

Vaatleme kõrvuti arvuvahemikuga

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ a,\ \ldots,\ 8,\ 9,\ 10$$

ka arvuvahemikku

$$10,\ 20,\ 30,\ \ldots,\ a \cdot 10,\ \ldots,\ 80,\ 90,\ 100.$$

Et

$$\log (a \cdot 10) = \log a + \log 10 = \log a + 1,$$

siis arvule $a \cdot 10$ vastav skaala kriips saadakse, lükates a-kriipsu ühe kujutusühiku võrra paremale. Et

$$\log (a \cdot 10^n) = \log a + n \log 10 = \log a + n,$$

siis arvule $a \cdot 10^n$ vastav kriips saadakse, lükates a-kriipsu n kujutusühiku võrra paremale või vasakule, vastavalt sellele, kas n on positiivne või negatiivne. Siit järeldub, et vahemikule

$$1 \cdot 10^n,\ 2 \cdot 10^n,\ \ldots,\ 9 \cdot 10^n,\ 10 \cdot 10^n$$

vastav logaritmilise skaala osa saadakse, lükates skaala lõiku 1, 2, ..., 9, 10 edasi n kujutusühiku võrra paremale või vasakule, sõltuvalt sellest, kas n on positiivne või negatiivne arv.

Öeldust näeme, et logaritmilise skaala osa, mis vastab vahemikule 1, 2, 3, ..., 9, 10, kordub muutumatult arvuvahemike puhul

10, 20, 30, ..., 90, 100;
100, 200, 300, ..., 900, 1000;
jne.

ning samuti arvuvahemike puhul

0,1, 0,2, 0,3, ..., 0,9, 1,0;
0,01, 0,02, 0,03, ..., 0,09, 0,1;
jne.

See tähendab, et logaritmiline skaala saadakse, märkides teljel skaala p õ h i l õ i g u, s. o. lõigu 1, 2, 3, ..., 10, edasi tema koopia, veel kord samasuguse koopia jne. piiramatu arv kordi positiivses suunas ning samuti piiramatu arv kordi negatiivses suunas.

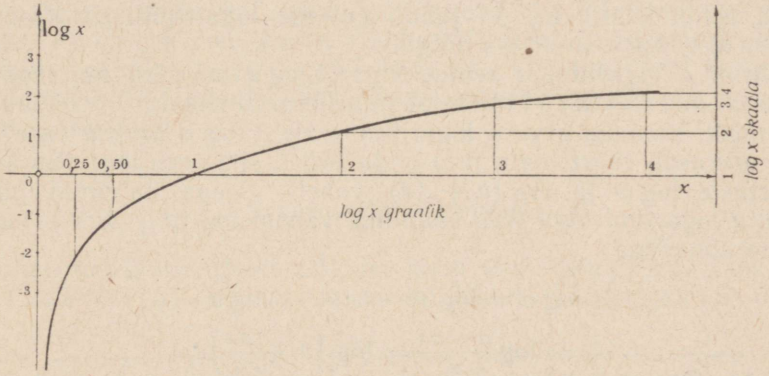
Nagu näeme, on pilt sarnane klaveri klaviatuuriga: nagu seal ikka jälle kordub o k t a a v *do*, *re*, *mi*, ..., *si*, *do*, nii kordub logaritmilisel skaalal p õ h i l õ i g u 1, 2, 3, ..., 10 p i l t. Nagu oktaavi koht määrab tema toonide kõrguse, nii määrab logaritmilisel skaalal esineva põhilõigu koopia koht tema arvude s u u r u s j ä r g u, s. o. astendaja n väärtuse teguris 10^n.

Kokku võttes saame logaritmilise skaala esimese põhiomaduse:

logaritmiline skaala koosneb perioodiliselt korduvatest lõikudest, mille algkujuks on lõik 1, 2, 3, . . . , 10.

Siit järeldub, et logaritmilise skaalaga töötamiseks piisab juba ainult skaala põhilõigu valmistamisest. Vastavalt vajadusele kujutab ta siis kord vahemikku 1 kuni 10, kord vahemikku 10 kuni 100, kord vahemikku 0,01 kuni 0,1 jne. Kui on tarvis töötada logaritmilise skaala pikemal vahemikul kui see, mis skaalal märgitud, siis kasutame skaala esimest põhiomadust. Kui näiteks on vaja töötada vahemikus arvust 17 arvuni 2340, siis lähtume põhilõigu algusest ja loeme 10, 11, . . . , 17, . . . , 20, 30, . . . , 90, 99, pöördume tagasi põhilõigu algusse, loeme 100, 200, . . . , 900, 999, pöördume uuesti tagasi põhilõigu algusse ja loeme 1000, 2000, 2300, 2340 jne.

Et oleks hõlpsam leida arve, mis asetsevad veidi allpool või ülalpool arvust 1, 10, 100 jne., on skaala tavaliselt pikendatud veidi vasakule poole skaala alguspunktist 1 ja veidi paremale poole skaala lõpp-punktist 10.



Joon. 24.

Logaritmiline skaala ei anna nii piltlikku kujutlust arvu ja logaritmi vahelisest seosest, kui seda annab logaritmi graafik (vt. joon. 24). Skaala suureks eeliseks on aga see, et ta võimaldab teostada arvutusi logaritmidega mehaanilisel teel. Arvutamise mehhaniseerimine saavutatakse kahe logaritmilise skaala või logaritmilise ning mõne teise skaala otstarbekohase teineteise vastu asetamisega. Seda võimaldav vahend kannab logaritmilise arvutuslükati nimetust.

Logaritmilise skaala teine põhiomadus

Oletame, et meie ees on ideaalse täpsusega valmistatud logaritmiline skaala. Kujutleme, et me tahame temal märkida arvu a logaritmi. Sellele vastava kujutuslõigu pikkus oleks $\lambda \log a$. Silma piiratud lahutusvõime tõttu on selle lõigu täpne märkimine skaalal võimatu: lõigu pikkus tuleb ebatäpne. Tava kohaselt tähistame selle lõigu viga sümboliga $\Delta(\lambda \log a)$. Kui δ on lühim lõik, mida silm veel selgesti eraldab, siis arvu a logaritmi kujutamise viga on kindlasti väiksem arvust δ:

$$\Delta(\lambda \log a) < \delta.$$

Oletame, et kujutusühiku λ ülekandmine võib toimuda täpselt. Siis vea $\Delta(\lambda \log a)$ põhjustajaks saab olla vaid $\log a$ viga:

$$\Delta(\lambda \log a) = \lambda \cdot \Delta \log a.$$

Siis aga

$$\Delta \log a < \frac{\delta}{\lambda}.$$

Kõik öeldu kehtib ka sel juhul, kui me logaritmiliselt skaalalt võtame $\log a$ kujutava lõigu.

Arvu a logaritmiga seotud viga $\Delta \log a$ mõjutab muidugi ka arvu a märkimist skaalal ja selle arvu skaalalt võtmise tulemust. Vastaku arvu a logaritmi veale $\Delta \log a$ arvu a viga Δa. Kui arv asub väärtuste a ja $a + \Delta a$ vahel, siis arvu logaritm asub väärtuste $\log a$ ja $\log (a + \Delta a)$ vahel. Seega halvimal juhul arvu a logaritmi viga võib küündida vaheni $\log (a + \Delta a) - \log a$, teiste sõnadega

$$\Delta \log a = \log (a + \Delta a) - \log a =$$
$$= \log \frac{a + \Delta a}{a} = \log \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right).$$

Eespool tuletatud võrratus omandab seega kuju

$$\log \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) < \frac{\delta}{\lambda}.$$

See võrratus on kehtiv igasuguse (suure ja väikese) arvu a puhul. Nagu näeme, $\log \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right)$ väärtus on tõkestatud: ta ei saa ületada murdu $\delta : \lambda$. Et logaritm kasvab ühtaegu arvuga, siis on selge, et ka logaritmi märgi all seisev arv $1 + \frac{\Delta a}{a}$ on ise tõkestatud. Sel puhul peab ka liidetav $\frac{\Delta a}{a}$ olema tõkestatud. Märkides murru $\frac{\Delta a}{a}$ suurust tõkestava arvu tähega τ, saame

igasuguse arvu a puhul kehtiva võrratuse

$$\frac{\Delta a}{a} < \tau.$$

Kui δ ja λ on teada, saab arvu τ kergesti määrata. Olgu näiteks $\delta = 0{,}2$ ja $\lambda = 200$, nii et $\delta : \lambda = 0{,}001$. Siis

$$\log\left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) < 0{,}001,$$

$$1 + \frac{\Delta a}{a} < 1{,}002$$

ja

$$\frac{\Delta a}{a} < 0{,}002 \quad \text{ehk} \quad \frac{\Delta a}{a} < 2\,^0/_{00}.$$

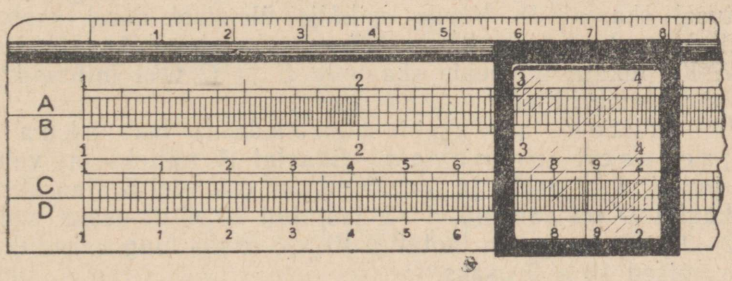
Küsime, mida tähendab leitud võrratus suhte $\Delta a : a$ jaoks. See suhe on logaritmilisel skaalal märgitava või sellelt skaalalt loetava arvu a relatiivne viga, lühidalt skaala töötamise relatiivne viga. Selle ülemmäär on kõigi arvude ehk kogu skaala ulatuses üks. ja seesama.

Arvu ligikaudse väärtuse relatiivse vea tõke on selle väärtuse täpsuse mõõduks: mida väiksem on relatiivse vea tõke, seda suurem on täpsus. Öeldu võimaldab formuleerida logaritmilise skaala teise põhiomaduse järgmisel kujul:

logaritmiline skaala töötab kogu arvupiirkonnas ühe ja sellesama täpsusega.

Arvutuslükati kirjeldus

Arvutuslükatil (joon. 25) on kolm osa: varras, lükati ja märkija. Varras on arvutuslükati liikumatu osa;



Joon. 25.

sellesse tehtud väljalõikesse mahub lükati, mida väljalõikes saab kergesti edasi-tagasi nihutada. Märkija on väike klaasplaat, mida saab vastava raami abil piki varrast edasi-tagasi liigutada. Mär-

kija kannab keskel lükatiga ristuvat kriipsu. Märkija kriipsu abil leiame, missugused kahe skaala arvud seisavad kohakuti.

Arvutuslükateid on ehitatud väga mitmesuguste arvutuste teostamiseks: on olemas arvutuslükateid mehaaniliseks korrutamiseks, jagamiseks, ruutimiseks jne., samuti spetsiaalseid arvutuslükateid kaubanduslikeks arvutusteks, elektrotehnilisteks arvutusteks jne. Meie peatume siin vaid lükatitel, mida kasutatakse matemaatikas ja kõigis ta rakendusis vajalike operatsioonide sooritamiseks. Mitmesugused arvutuslükatite süsteemid erinevad üksteisest skaalade hulga ja paigutusviisi poolest. Et aga töötamine kõigi logaritmiliste arvutuslükatitega tugineb ühtedele ja samadele printsiipidele, siis piisab, kui üksikasjalikult peatume mingil ühel arvutuslükatil. Selguse mõttes vaatleme kõige lihtsama ehitusega lükatit. Niisugusel arvutuslükatil on alati 4 põhiskaalat: skaalad *A* ja *D* vardal ning nendega kongruentsed skaalad *B* ja *C* lükatil. *A*-skaala kujutusühik on pool *D*-skaala kujutusühikust. Skaala *A* haarab arvuvahemikku 1 kuni 100, skaala *D* aga arvuvahemikku 1 kuni 10. Öeldu kehtib ka skaalade *B* ja *C* kohta.

Varda kaldu lõigatud tahk kannab millimeeter-jaotust, mis võimaldab varrast tarbe korral kasutada ka mõõdupuuna.

Arvutuslükati pikkuse all mõistetakse skaala *D* pikkusühikut λ. Tavaliselt on selleks 25 cm. Kasutusel on aga ka lükatid, millel $\lambda = 50$ cm või $\lambda = 100$ cm; nendel lükatitel saab töötada sama täpsusega, mida võimaldavad vastavalt nelja- ja viiekohaliste logaritmide tabelid. Lükatid, millel $\lambda = 12{,}5$ cm, kannavad «taskulükatite» nimetust ja annavad ainult jämedaid, kahekohalisi tulemusi. Lükatid, millel $\lambda = 25$ cm, võimaldavad arvutusi teha kolmekohaliselt.

Peale juba nimetatud ja joonisel 25 näha olevate *A*- ja *D*-skaalade on uuematel nõukogude arvutuslükatitel varda esikülje alumisel äärel regulaarne skaala *L* sama kujutusühikuga, mis on kasutusel skaalal *D*. Varda esikülje ülemisel äärel asub neil lükatitel skaala *K* kolm korda väiksema kujutusühikuga kui skaalal *D*. Ka lükatil on peale skaalade *B* ja *C* veel mitmeid teisi; neid kirjeldame hiljem.

Üksikutes arvupiirkondades on skaalade alajaotused erinevad. Skaalal *A* näiteks on vahemik 1—2 jaotatud 10 osaks ja iga niisugune osa veel 5 alaosaks.

Skaalal *D* on vahemik 1—2 jaotatud 10×10 osaks, vahemikud 2—3 ja 3—4 aga on jaotatud 10×5 osaks ning vahemik 4—5 ja järgmised 10×2 osaks.

Üksikutel skaaladel kasutatud jaotusviisidega tuleb tutvuda arvutuslükatil enesel.

Eri skaalade alguskriipsud kannavad erinevaid signatuure: logaritmilise skaala alguskriips näiteks kannab signatuuri 1, sest $\log 1 = 0$; $\log \sin \alpha$ skaala alguskriips kannab signatuuri 90°, sest

$\log \sin 90° = \log 1 = 0$, jne. Et need signatuurid ei sobi lõikude alguse või lõpu märkimiseks, siis kirjutame tekstis skaala alguskriipsu alati sama tähega, millega on märgitud skaala ise. Nii kirjutame $\log \sin \alpha$ skaala kriipsude 90° ja α vahelist lõiku kujul $S\alpha$.

Lepime veel kokku skaalal võetud lõigu tähistusviisi kohta: kui näiteks skaalal D on võetud kaks kriipsu märkidega d_1 ja d_2, siis kirjutame nende kriipsude vahelist lõiku $\overline{d_1 d_2}$. Kui lõik algab kriipsuga 1 ja lõpeb kriipsuga d, kirjutame lõiku kujul $\overline{Dd}$.

Märkus. Nagu iga teise tööriistaga töötama õppimiseks, nii ka arvutuslükatiga arvutamise oskuse omandamiseks kulub teatav hulk aega. On otstarbekohane õppida enne põhjalikult ära üks võte (näiteks arvu ruudu ja ruutjuure leidmine), siis teine, kolmas jne. Mõned väärad tulemused esialgsel katsetamisel on mõõdapääsmatud, kuid nende varal õpitakse. Kõiki juhatusi ei tule otsida raamatust: kui võte on olulises osas omandatud, ei tee enam raskusi pisiküsimuste iseseisev lahendamine.

§ 11. ARVUTAMINE LOGARITMILISE ARVUTUSLÜKATIGA I

Arvu logaritmi leidmine ja arvu leidmine logaritmi järgi

Tõmbame lükati vardast välja ja paneme ta ajutiselt kõrvale. Võtame vaatlusele vardal olevad skaalad, mis joonisel 26 on märgitud tähtedega L ja D. Kummalgi puhul on kujutusühikuks λ. Skaala L kriips 0 asetseb kohakuti skaala D kriipsuga 1. Olgu l ja d mingisugused kaks skaalade L ja D kohakuti seisvat kriipsu. Siis skaalade konstruktsiooniviisi kohaselt logaritmilisel skaalal

$$\overline{Dd} = \lambda \cdot \log d$$

ja regulaarsel skaalal

$$\overline{Ll} = \lambda \cdot l.$$

Et

$$\overline{Dd} = \overline{Ll},$$

siis

$$\lambda \cdot \log d = \lambda \cdot l$$

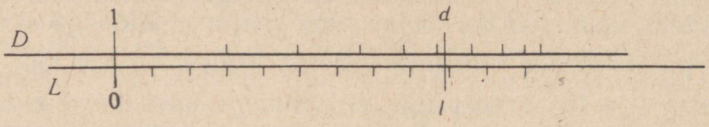
ehk

$$\log d = l.$$

See tähendab, et kui skaalal D võtame kriipsu, mis on märgitud arvuga d, siis skaalal L seisab selle vastas kriips, mille märgiks on $\log d$. Lühemalt:

skaalal D võetud arvu d vastas seisab skaalal L arvu d logaritm.

Nagu tabelitega töötamisel, nii saame ka siin ära lugeda üksnes logaritmi murdosa; logaritmi täisosa määrame sama reegli järgi, mida kasutame tabelitegagi töötamisel.



Joon. 26.

Näiteid.

Antud arvud:	4,8	23,9	147	0,00538
Arvutuslükatilt leitud logaritmid:	0,681	1,378	2,167	$\bar{3},731$

Seost

$$\log d = l$$

võime aga tõlgendada ka nõnda, et

skaalal L võetud logaritmi vastas seisab skaalal D sellele logaritmile vastav arv.

Näiteid.

Antud logaritmid:	0,258	1,396	3,582	$\bar{2},794$
Arvutuslükatilt leitud arvud:	1,81	24,9	3820	0,0622.

Nagu tabelitega töötamisel, nii saame ka siin ainult arvu numbrid; koma asendi (või vajaduse korral juurdekirjutamisele tulevate nullide arvu) määrame logaritmi täisosa järgi.

25 cm pikkustel arvutuslükatitel on võimalik nii arve kui ka nende logaritme ära lugeda kolmekohaliselt. Kirjeldatud kaks kohakuti asetatud skaalat asendavad seega täielikult kolmekohaliste logaritmide tabelit.

Arvu ruudu ja arvu ruutjuure leidmine

Tõmbame lükati vardast välja ja paneme ta ajutiselt kõrvale. Võtame vaatlusele vardal olevad skaalad, mis meie joonisel on märgitud tähtedega *A* ja *D*. Kui skaala *D* kujutusühikuks on λ, siis on skaala *A* kujutusühikuks $\frac{\lambda}{2}$. Skaalad *A* ja *D* on asetatud teineteise vastu nii, et nende algkriipsud on kohakuti (joon. 27).

Võtame alumisel skaalal mingi kriipsu; märkigu seda arv d. Seisku selle vastas ülemisel skaalal kriips märgiga a. Siis skaalade konstruktsiooni järgi

$$\overline{Dd} = \lambda \cdot \log d$$

ja

$$\overline{Aa} = \frac{\lambda}{2} \cdot \log a.$$

Et

$$\overline{Dd} = \overline{Aa},$$

siis

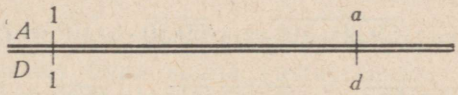
$$\lambda \cdot \log d = \frac{\lambda}{2} \cdot \log a.$$

Sellest järeldub kohe võrdus

$$d^2 = a.$$

See tähendab, et

skaalal D võetud arvu d vastas seisab skaalal A arvu d ruut.



Joon. 27.

Skaaladelt võtame ainult numbrid; koma koha arvu kirjutises määrame, leides peast vastuse ligikaudse väärtuse.

Näiteid.

Antud arvud:	1,58	2,96	5,24	8,75
Arvutuslükatilt leitud ruudud:	2,50	8,76	27,5	76,6

Kirjeldatud viisil saame vahemikust 1 kuni 10 pärinevate arvude ruudud. Väljaspool seda vahemikku asetsevad arvud kirjutame standardkujul nii, et esimene tegur mahuks vahemikku 1 kuni 10, teine aga oleks kümne aste. Nii on

$$3470 = 3{,}47 \cdot 10^3 \quad \text{ja} \quad 0{,}0782 = 7{,}82 \cdot 10^{-2}.$$

Kui näiteks

$$d = 0{,}000593,$$

siis kirjutame

$$d = 5{,}93 \cdot 10^{-4}$$

ja saame

$$d^2 = 5{,}93^2 \cdot 10^{-8} = 35{,}2 \cdot 10^{-8} = 0{,}000000352.$$

Seost

$$d^2 = a$$

võime aga tõlgendada ka võrrandina. Selle positiivne lahend

$$d = \sqrt{a}.$$

See tähendab, et

skaalal A võetud arvu a vastas seisab skaalal D arvu a ruutjuur.

Näiteid.

Antud arvud:	2,80	11,8	40,0	96,5
Arvutuslükatilt leitud ruutjuured:	1,67	3,44	6,33	9,82.

Nii saame leida kõigi vahemikust 1 kuni 100 pärinevate arvude ruutjuured. Väljaspool seda vahemikku asetsevad arvud kirjutame standardkujul nii, et esimene tegur mahuks vahemikku 1 kuni 100, teine aga oleks kümne aste paarisarvulise astendajaga. Nii saame näiteks, et

$$\sqrt{5930} = \sqrt{59{,}30 \cdot 10^2} = \sqrt{59{,}30} \cdot \sqrt{10^2} = 7{,}7 \cdot 10 = 77$$

ja

$$\sqrt{0{,}000834} = \sqrt{8{,}34 \cdot 10^{-4}} = \sqrt{8{,}34} \cdot \sqrt{10^{-4}} = \\ = 2{,}89 \cdot 10^{-2} = 0{,}0289.$$

Märkus. Skaala *A* koosneb kahest kongruentsest osast: esimene haarab arvuvahemikku 1 kuni 10, teine arvuvahemikku 10 kuni 100. Juuritava puhul 59,30 tuleb kasutamisele skaala *A* teine pool, juuritava puhul 8,34 skaala *A* esimene pool.

Arvu kuubi ja arvu kuupjuure leidmine

Vaatleme koos skaalasid *D* ja *K*. Esimese kujutusühikuks on λ, teise kujutusühikuks $\frac{\lambda}{3}$. Seisku neil skaaladel kohakuti arvud *d* ja *k*. Siis

$$\overline{Dd} = \lambda \cdot \log d$$

ja

$$\overline{Kk} = \frac{\lambda}{3} \cdot \log k.$$

Et

$$\overline{Dd} = \overline{Kk},$$

siis

$$\log d = \frac{1}{3} \log k$$

ehk

$$d^3 = k.$$

See tähendab, et

skaalal D võetud arvu d vastas seisab skaalal K arvu d kuup.

Seost $d^3 = k$ võime aga kirjutada ka kujul

$$d = \sqrt[3]{k}.$$

See ütleb, et

skaalal K võetud arvu k vastas seisab skaalal D arvu k kuupjuur.

Näide. $\sqrt[3]{1540} = \sqrt[3]{1{,}54 \cdot 10^3} = \sqrt[3]{1{,}54} \cdot 10 = 1{,}15 \cdot 10 = 11{,}5.$

Märkus. Skaala *K* koosneb kolmest kongruentsest osast, mis haaravad arvuvahemikke 1—10, 10—100, 100—1000. Juuritava 1,54 puhul tuleb kasutamisele esimene neist vahemikest.

Arvu pöördväärtuse leidmine

Mõnedel lükatitüüpidel on lükati keskel skaala *P*, mis on saadud skaalast *D*, pöörates tema suuna vastupidiseks. Kui skaala *P* kriips *p* seisab kohakuti skaala *D* kriipsuga *d*, siis

$$\overline{Dd} + \overline{pP} = \overline{DP}.$$

Et

$$\overline{pP} = \overline{Pp},$$

siis

$$\lambda \log d + \lambda \log p = \lambda$$

ehk

$$\log dp = 1,$$

nii et

$$dp = 10$$

ja

$$p = 10 \cdot \frac{1}{d}.$$

See tähendab, et

skaalal D võetud arvu d vastas seisab skaalal P arvu d kümnekordne pöördväärtus.

See võimaldab mehaaniliselt leida antud arvude pöördväärtusi.

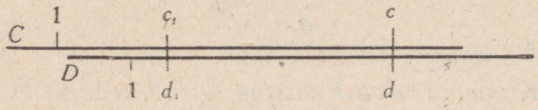
Näiteks arvudele

2 3 7 13 29

vastavad pöördväärtused

0,5 0,333 0,143 0,077 0,0345.

Vaatleme koos vardale märgitud skaalaga D lükatile märgitud skaalat C. Mõlema skaala ühine kujutusühik on λ. Asetame need skaalad kuidagiviisi teineteise vastu; seisku näiteks skaala C



Joon. 28.

arvu c vastas skaalal D arv d (joon. 28) ja arvu c_1 vastas arv d_1. Me näeme siis jooniselt, et lõigud c_1c ja d_1d on võrdsed; seega

$$\overline{Cc} - \overline{Cc_1} = \overline{Dd} - \overline{Dd_1}$$

ja järelikult

$$\lambda \log c - \lambda \log c_1 = \lambda \log d - \lambda \log d_1$$

ehk, pärast taandamist ja logaritmidelt arvudele üleminekut,

$$\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}.$$

Arvud c ja d, c_1 ja d_1 olid vabalt võetud kaks paari teineteise vastas seisvaid arve. Kui c_2 ja d_2 oleks mingi kolmas paar teineteise vastas seisvaid arve, saaksime

$$\frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2},$$

seega, kui arvud c, c_1, c_2, ... seisavad kohakuti arvudega d, d_1, d_2, ..., siis

$$\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \ldots$$

Sõnastatult see võrduste jada ütleb, et

kahe kongruentse logaritmilise skaala kõrvuseadel on kohakuti seisvad arvud võrdelised.

Sama tõsiasja võime tõlgendada ka teisiti ja nimelt: kui vaatleme skaalade C ja D vahelist kitsast pilu kui murrujoont, siis võrduste jada ütleb, et

kahe kongruentse logaritmilise skaala kõrvuseadel on kõik skaaladevahelise pilu kui murrujoone poolt moodustatud murrud võrdsed.

Rakendame äsjasõnastatud tõsiasja mõõtude teisendamiseks.

Näide. Teame, et

$$5° C = 4° R.$$

Asetades skaalal C võetud arvu 5 kohakuti skaala D arvuga 4, saame iga skaalal C võetud Celsiuse temperatuuri puhul skaalalt D vastava Réaumuri temperatuuri. Nii saame näiteks järgmise tabeli kokkukuuluvaid temperatuuride väärtusi:

C	−7,8	−5,2	+3,9	+17,6
R	−6,2	−4,1	+3,1	+14,0

Märkus. Arvud 3,9, 5,2 ja 7,8 leiame otse skaalalt C. Piki skaalat C edasi liikudes jõuame kriipsu 10 kohal skaala lõpule. Tuleme jälle skaala C alguse juurde tagasi, mõistes kriipsu 1 nüüd kriipsuna 10. Sellest paremalt leiame kriipsu 17,6 ja selle vastast kriipsu 14,1.

Omadust, et kahe ühtiva logaritmilise skaala kõrvuseadel kohakuti seisvad arvud on võrdelised, võime ära kasutada küsimuse otsustamiseks, kas kokkukuuluvate väärtuste tabeliga antud suurused on võrdelised või mitte. Olgu näiteks antud tabel.

u	3,2	7,8	13,5	24,8	39,6	42,1
v	5,0	12,2	21,0	38,8	62,0	65,7

Seades skaala C arvu 3,2 kohakuti skaala D arvuga 5,0, näeme, et ligikaudu kohakuti on arvud 7,8 ja 12,2, arvud 13,5 ja 21,0 jne. Seega on suurused u ja v võrdelised. Arvude u ja v suhte väärtused on

0,640 0,639 0,643 0,639 0,639 0,641.

Suhte $u : v$ väikesed kõikumised on seletatavad asjaoluga, et u ja v väärtused on ligikaudsed.

Märkus. Kriipsud 3,2 ja 7,8 leiduvad skaala C põhilõigul, vahemikus 1, 2, 3, ..., 10; järgmised arvud tuleb aga võtta vahemikust 10, 20, 30, ..., 100.

Võrrete lahendamine

Olgu kaks kongruentset logaritmilist skaalat asetatud teineteise vastu ja olgu a ja b ning m ja n kaks paari kohakuti seisvaid arve. Nagu eespool nägime, kehtib siis võrre

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}.$$

Kui kolm selles võrdes esinevat arvu on teada, saame määrata neljanda. Olgu näiteks lahendada võrre

$$\frac{2{,}3}{3{,}5} = \frac{x}{7{,}8}.$$

Asetame skaala C arvu 2,3 kohakuti skaala D arvuga 3,5 ja leiame skaalal D arvu 7,8; tema kohal seisab skaalal C arv 5,13. Et andmed on kahekohalised, siis anname ka vastuse kahekohalisena: $x = 5{,}1$.

Tarbe korral tuleb võrret enne lahendamist teisendada.

Märgime, et võrde lahendamist võib läbi viia nii skaaladel C ja D kui ka skaaladel A ja B. Esimesel juhul saavutame veidi suurema täpsuse, sest skaalade C ja D kujutusühik on 2 korda suurem skaalade A ja B kujutusühikust.

Näide. Olgu tarvis lahendada võrre

$$\frac{17{,}6}{0{,}0384} = \frac{x}{5{,}26}.$$

Korrutades kummagi poole nimetajat 1000-ga, saame

$$\frac{17{,}6}{38{,}4} = \frac{x}{1000 \cdot 5{,}26}$$

ehk

$$\frac{17{,}6}{38{,}4} = \frac{0{,}001\,x}{5{,}26}.$$

Töötades skaaladel C ja D, asetame arvud 17,6 ja 38,4 kohakuti (vt. märkusi lk. 101) ja leiame arvu 5,26 vastast arvu 2,41; seega

$$0{,}001x = 2{,}41$$

ja

$$\underline{x = 2410.}$$

Lihtsamini jõuame eesmärgile sel teel, et hindame jämedalt vastuse: $18 \cdot 5 : 0{,}04 \approx 2200$. Võttes nüüd endise võrde asemel võrde

$$\frac{176}{384} = \frac{x}{526},$$

leiame kohe, et $x = 241$. Arvestades ligikaudset vastust, saame lõplikult nagu ennegi, et

$$\underline{x = 2410.}$$

Protsendiülesannete lahendamine

Käsitletud võrrete lahendusvõtet võime tulusalt kasutada ülesande lahendamiseks: mitu % moodustab arv a arvust b?

Olgu otsitav protsendimäär x. Siis

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{100}.$$

Et leida arvu x, seame skaalad A ja B teineteise vastu nii, et skaala A arv a seisaks kohakuti skaala B arvuga b; skaala B arvu 100 vastas seisab siis skaalal A otsitav arv x. Näiteks on

$$\frac{31}{73} = 42\%, \quad \frac{27}{168} = 16\%.$$

Suhte 27 : 168 puhul võtame kriipsu 27 skaalal A vahemikus 10, 20, 30, ..., 100, arvu 168 skaalal B vahemikus 100, 200, 300, ..., 1000.

§ 12. ARVUTAMINE LOGARITMILISE ARVUTUSLÜKATIGA II

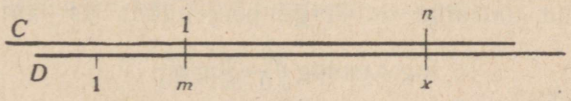
Arvude korrutamine

Olgu tarvis arvutada korrutis $x = m \cdot n$.

Kirjutame arvude m, n ja x vahelise seose võrde kujul:

$$\frac{1}{m} = \frac{n}{x}.$$

Selle võrde lahendamine x suhtes toimub eespool seletatud viisil: töötades skaaladega C ja D, seame skaala C kriipsu 1 vastu



Joon. 29.

skaala D kriipsu m; siis seisab skaala C kriipsu n vastas skaalal D meie otsitav korrutis x (joon. 29).

Samale võttele jõuaksime lähtudes võrdusest

$$\log x = \log m + \log n.$$

Joonisel kujutab lõik Dm arvu $\log m$ ja lõik Cn arvu $\log n$, nii et lõik Dn kujutab arvu $\log x$. Seega, kui skaaladel C ja D kriipsud 1 ja m asuvad kohakuti, siis seisavad kohakuti ka kriipsud n ja x.

Näiteid.

$$7{,}58 \cdot 1{,}24 = 9{,}40; \qquad 1{,}86 \cdot 1{,}94 = 3{,}61.$$

Kui tegurid m ja n ei kuulu vahemikku 1 kuni 10, siis kasutame korrutise teisendamise võtet.

Näide.

$$574 \cdot 0{,}000196 = 5{,}74 \cdot 10^2 \cdot 1{,}96 \cdot 10^{-4} =$$
$$= 5{,}74 \cdot 1{,}96 \cdot 10^{-2} = 11{,}25 \cdot 10^{-2} = 0{,}1125.$$

Korrutist võib arvutada skaalade C ja D asemel ka skaaladel A ja B: seades skaala B kriipsu m kohakuti skaala A kriipsuga 1, loeme skaala A kriipsu m vastast skaalalt B vastava x väärtuse.

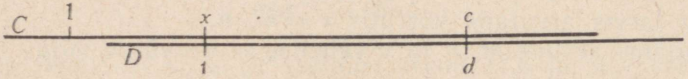
Arvude jagamine

Olgu arvutada jagatis $x = \frac{c}{d}$.

Kirjutame arvude c, d ja x vahelise seose võrde kujul:

$$\frac{c}{d} = \frac{x}{1}.$$

Selle võrde lahendamine x suhtes võib toimuda eespool seletatud viisil: seame skaala C kriipsu c vastu skaala D kriipsu d (joon. 30); siis seisab skaala D kriipsu 1 vastas skaalal C meie otsitav jagatis x.



Joon. 30.

Jagamiseks kasutame kas skaalasid C ja D või skaalasid A ja B. Esimene paar skaalasid võimaldab töötada pisut suurema täpsusega kui teine.

Kirjeldatud töökäiku on kerge põhjendada ka lähtudes võrdusest

$$\log x = \log c - \log d.$$

Näiteid.

$$\frac{9{,}8}{6{,}7} = 1{,}46; \quad \frac{5{,}75}{7{,}35} = 0{,}782.$$

Kui üks arvudest c ja d või mõlemad ei kuulu vahemikku 1 kuni 10, siis kasutame jagatise teisendamise võtet.

Näide.

$$\frac{0{,}0712}{34{,}8} = \frac{7{,}12 \cdot 10^{-2}}{3{,}48 \cdot 10^1} = \frac{7{,}12}{3{,}48} \cdot 10^{-3} = 2{,}05 \cdot 10^{-3} = 0{,}00205.$$

Mõned korrutamise ja jagamise erijuhud

1. Olgu arvutada murd

$$x = \frac{amp}{bnq}.$$

Märgime korrutise $\frac{a}{b} \cdot m$ tähega u; siis

$$x = \frac{u}{n} \cdot \frac{p}{q};$$

märgime edasi korrutise $\frac{u}{n} \cdot p$ tähega v; siis

$$x = \frac{v}{q}.$$

Otsitava x arvutame järgmiselt: esiteks määrame abiarvu u; ilma et seda arvu skaalalt loeksime, määrame edasi abiarvu v ja seejärel, ilma et seda arvu skaalalt loeksime, määrame otsitava arvu x.

N ä i d e. Olgu tarvis arvutada murd

$$x = \frac{7 \cdot 9 \cdot 13}{8 \cdot 17 \cdot 5}.$$

Saame $\frac{7}{8} \cdot 9 = 7{,}88$; seda arvu me ära ei loe, vaid jagame kohe 17-ga ja tulemust korrutame 13-ga; saame 6,02, mida me ära ei loe, vaid jagame kohe 5-ga; saame 1,20.

Kui arvud langevad väljapoole vahemikku 1 kuni 10, kasutame murru teisendamise võtet.

N ä i d e. Olgu tarvis arvutada murd

$$x = \frac{316 \cdot 0{,}0913 \cdot 0{,}285}{0{,}45 \cdot 149 \cdot 0{,}3765}.$$

Murru ligikaudse väärtuse hindamine annab

$$\frac{300 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3}{0{,}5 \cdot 150 \cdot 0{,}4} = 0{,}3.$$

Murru täpsema väärtuse saamiseks kirjutame

$$x = \frac{3{,}16 \cdot 10^2 \cdot 9{,}13 \cdot 10^{-2} \cdot 2{,}85 \cdot 10^{-1}}{4{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 1{,}49 \cdot 10^2 \cdot 3{,}765 \cdot 10^{-1}} = \frac{3{,}16 \cdot 9{,}13 \cdot 2{,}85}{4{,}5 \cdot 1{,}49 \cdot 3{,}77} \cdot 10^{-1}.$$

Arvutuslükatit kasutades leiame, et

$$x = 3{,}25 \cdot 10^{-1} = 0{,}325.$$

2. Olgu tarvis arvutada korrutis $x = m^2 \cdot n$.

Võtame skaalal D arvu m; sellega kohakuti on skaalal A arv m^2; ilma seda ära lugemata lükkame arvu n skaalal B arvu 1 alla skaalal A ja loeme skaalalt B arvu m^2 vastast nõutava x väärtuse.

Näide. Olgu $x = \pi \cdot 4{,}72^2$.
Saame $x = 70{,}0$.

3. Olgu tarvis arvutada jagatis $x = \frac{m^2}{n}$.

Võtame skaalal D arvu m ja leiame selle vastas skaalal A arvu m^2; ilma seda ära lugemata seame tema vastu arvu n skaalal B ja loeme skaala B arvu 1 vastast skaalalt A otsitava arvu x.

Näide. Olgu $x = \frac{0{,}48^2}{0{,}92}$.

Saame

$$x = \frac{4{,}8^2 \cdot 10^{-2}}{9{,}2 \cdot 10^{-1}} = \frac{4{,}8^2}{9{,}2} \cdot 10^{-1} = 2{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}25.$$

4. Olgu tarvis arvutada juur $x = \sqrt{mn}$.

Leiame skaalal A korrutise mn ja loeme selle vastast skaalalt D nõutava juure.

Näide. $x = \sqrt{3{,}4 \cdot 14{,}8} = 7{,}09$.

5. Olgu tarvis arvutada ruutjuur $x = \sqrt{\frac{m}{n}}$.

Leiame skaalal A jagatise $\frac{m}{n}$ ja loeme selle vastast skaalalt D nõutava ruutjuure.

Näide. $x = \sqrt{\frac{8{,}72}{3{,}14}} = 1{,}67$.

6. Olgu tarvis arvutada korrutis $x = m\sqrt{n}$.

Leiame skaalal A arvu n, selle vastas skaalal D arvu $\sqrt{n}$ ja korrutame selle skaala C abil arvuga m.

Näide. $x = 9{,}81 \cdot \sqrt{53{,}8} = 72{,}0$.

Ringi pindala arvutamine

Kui ringi diameeter on d, siis tema pindala

$$S = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2.$$

Märkides arvu $\sqrt{\frac{4}{\pi}} \approx 1{,}128$ lühidalt tähega C, saame, et

$$S = \left(\frac{d}{C}\right)^2.$$

Arv C on märgitud kahel alumisel skaalal e r i k r i i p s u g a. Seepärast:

et arvutada ringi pindala S ringi diameetri d järgi, seame kriipsu C skaalal C kriipsu d vastu skaalal D. Siis seisab skaala C kriipsu 1 vastas skaalal A kriips S.

N ä i d e. Olgu $d = 15{,}7$ cm. Siis $S = 193$ cm^2.

Kui ringi pindala on S, siis ringi diameeter

$$d = C\sqrt{S}.$$

Seepärast:

et arvutada ringi diameetrit d ringi pindala S järgi, võtame kriipsu S skaalal A; selle vastas leidub skaalal D kriips $\sqrt{S}$. *Korrutades viimase arvu C-ga, saame otsitava diameetri.*

N ä i d e. Olgu $S = 10$ cm^2. Siis $d = 3{,}57$ cm.

Silindri, koonuse ja kera ruumala arvutamine

Silindri läbimõõdu d ja kõrguse h puhul on silindri ruumala

$$V = Sh$$

ehk

$$V = \left(\frac{d}{C}\right)^2 \cdot h.$$

Samal viisil saame koonuse ruumala jaoks valemi

$$V = \left(\frac{d}{C}\right)^2 \cdot \frac{h}{3}$$

ja kera ruumala jaoks valemi

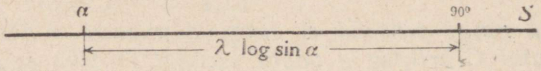
$$V = \left(\frac{d}{C}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} d.$$

Need valemid võimaldavad kerge vaevaga määrata arvutuslükatil silindri, koonuse ja kera ruumala.

Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused arvutuslükatil

Siinuse ja tangensi logaritmide skaalad leiduvad lükati tagaküljel. Neid skaalasid nimetame lühidalt skaalaks S ja skaalaks T. Kumbki neist on konstrueeritud, kasutades sama kujutusühikut λ, millega on valmistatud skaalad C ja D.

Nurkade α jaoks 0° ja 90° vahel on siinused positiivsed pärismurrud, seega on nende logaritmid negatiivsed. Funktsiooni $\log \sin \alpha$ skaala alguskriips kannaks signatuuri 90° ja kogu $\log \sin \alpha$ skaala paigutub sellest kriipsust vasakule poole (joon. 31). Nurga α lähenemisel 90°-le läheneb $\sin \alpha$ 1-le



Joon. 31.

ja tema logaritm 0-le; nurga α lähenemisel 0°-le läheneb $\sin \alpha$ 0-le ja tema logaritm $-\infty$-le. Loeme skaala D lõppkriipsu vastavaks 1-le; siis algkriips vastab 0,1-le. Väärtusele $\sin \alpha = 0{,}1$ vastab tabelites nurk 5°44′. Et siinus on vahemikus 0° ja 90° vahel positiivne ja kasvab koos nurgaga, siis kasvab ka $\log \sin \alpha$ samas vahemikus ja skaalaga D võrdpikkusel skaalal S saab kujutada siinuse logaritme nurkade vahemikus

$$5°44' \leqslant \alpha \leqslant 90°.$$

Skaalal S on märgitud nurgad 6°, 7°, 8°, ..., 90°. Kraadide alajaotused on antud algul 5′, siis 10′, 20′ ja viimaks 30′ järel. Skaala lõpuosas on kraadid alajaotusteta.

Kõik öeldu kandub üle skaalale T: skaala D pikkusel lõigul saab kujutada tangensi logaritme nurkade vahemikus

$$5°43' \leqslant \alpha \leqslant 45°.$$

Tõepoolest, $\tan 5°43' = 0{,}1$ ja $\tan 45° = 1$; märgitud vahemikus $\tan \alpha$ kasvab 0,1-st 1-ni ja ühes temaga $\log \tan \alpha$ väärtuselt -1 väärtuseni 0.

Siinuse ja tangensi väärtuste leidmine

Tõmbame lükati vardast välja, pöörame teda pikitelje ümber nii, et tema tagapool ette satuks, lükkame ta selles seisus vardasse ja seame skaalade S ja D otsmised kriipsud kohakuti (joon. 32). Seisku nüüd skaala S kriipsu α vastas skaala D kriips d. Siis

$$-\log \sin \alpha \cdot \lambda = -\log d \cdot \lambda$$

ehk

$$\sin \alpha = d.$$

See tähendab, et

skaalal S märgitud nurkade α vastas seisavad skaalal D nende nurkade siinused

ehk, teiste sõnadega,

skaalal D võetud sin α *väärtuste vastas seisavad skaalal S nurgad* α.

Kõik öeldu kandub sõna-sõnalt üle skaalale *T*. Nurkade α vahemik on sel puhul

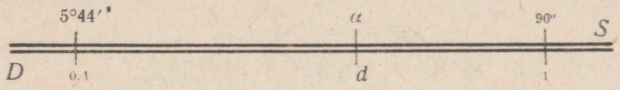
$$5°43' \leqslant \alpha \leqslant 45°.$$

Seades skaalade *T* ja *D* otsmised kriipsud kohakuti, näeme, et

skaalal T märgitud nurkade α *vastas seisavad skaalal D nende nurkade tangensid*

ehk, teiste sõnadega,

skaalal D võetud tan α *väärtuste vastas seisavad skaalal T nurgad* α.



Joon. 32.

Selle asemel, et lükati vardast välja tõmmata, tagakülg ette pöörata ja lükati selles seisus tagasi vardasse asetada, võib talitada hõlpsamini. Varda otstesse on tehtud väljalõiked; viimaste ääred kannavad varda tagaküljel skaala *D* otsmiste kriipsude vastas m ä r k j o o n t. On kerge veenduda, et siinuse puhul kehtivad järgmised reeglid:

Seades varda tagaküljel kriipsu α *kohakuti p a r e m p o o l s e märkjoonega, loeme esiküljel skaala D l õ p p k r i i p s u kohalt skaalalt C* sin α *väärtuse.*

Skaala C algkriipsu vastas seisab samal ajal skaalal D sin α *pöördväärtus, s. o.* 1 : sin α.

Tangensi kohta kõlavad need reeglid järgmiselt:

Seades varda tagaküljel kriipsu α *kohakuti v a s a k p o o l s e märkjoonega, loeme esiküljel skaala D a l g k r i i p s u kohalt skaalalt C* tan α *väärtuse.*

Skaala C lõppkriipsu vastas seisab samal ajal skaalal D tan α *pöördväärtus, s. o.* 1 : tan α.

Nurkade puhul, mis on väiksemad kui 5°44′, on tan $\alpha \approx$ sin α. Selle ligikaudse võrduse viga ei ületa poolt tuhandikku. Sellele vastab kujutusühiku 250 mm korral lõik $0{,}5 \cdot 0{,}25 = 0{,}12$ mm, mida silm vaid vaevu eraldab. Seega nurkade puhul, mis on väiksemad kui 5°44′, siinus- ja tangensskaala praktiliselt ühtivad. Niisuguse skaala — skaala *S* &* *T* — leiame lükati tagakülje keskelt. Ka see skaala on valmistatud sama kujutusühikuga nagu skaala *D*. Skaala *S* & *T* hõlmab siinuse ja tangensi väärtusi 0,01 ja 0,1 vahel, seega haarab ta nurga α väärtusi vahemikus

$$34' \leqslant \alpha \leqslant 5°44'.$$

* Sümbol & on moonutatud ladinakeelne *et* — ja.

Töötamine skaalaga S & T toimub samadel alustel nagu töötamine skaalaga S.

Märgime lõpuks järgmist: $\cos\alpha$ väärtused leiame, lähtudes võrdusest

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha).$$

Tangensi väärtused nurkade jaoks $\alpha > 45°$ leiame, lähtudes võrdusest

$$\tan\alpha = \cot(90° - \alpha) = 1 : \tan(90° - \alpha).$$

Kootangensi väärtused leiame kas võrdusest

$$\cot\alpha = \tan(90° - \alpha)$$

või võrdusest

$$\cot\alpha = 1 : \tan\alpha.$$

N ä i t e i d. $\cos 58°45' = \sin 31°15' = 0{,}519;$

$$\tan 64°20' = \cot 25°40' = 1 : \tan 25°40' = \\ = 1 : 0{,}480 = 2{,}08;$$

$$\cot 32°30' = 1 : \tan 32°30' = 1 : 0{,}637 = 1{,}57.$$

Väikeste nurkade siinused ja tangensid

Nurkade puhul, mis on väiksemad kui 34′, leiame siinused ja tangensid, lähtudes järgmistest kaalutlustest: olgu nurga suurus α'. Siis

1° Ühikringi kaar, mis vastab nurgale α', on $2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\alpha'}{360 \cdot 60}$ ehk $\frac{\alpha'}{\frac{360 \cdot 60}{2\pi}}$. Nimetajas seisev arv on märgitud skaaladel C ja D sümboliga ϱ', nii et (nelja kohaga piirdudes)

$$\varrho' = \frac{360 \cdot 60}{2\pi} = 3438.$$

Seega ühikringi kaare pikkus, mis vastab kesknurgale α', on $\alpha' : \varrho'$.

2° Ühikringi kaar, mis vastab nurgale α'', on $2\pi \cdot 1 \cdot \frac{\alpha''}{360 \cdot 60 \cdot 60}$ ehk $\frac{\alpha''}{\frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi}}$. Nimetajas seisev arv on märgitud skaaladel C ja D sümboliga ϱ'', nii et (vastust nelja õige kohaga andes)

$$\varrho'' = \frac{360 \cdot 60 \cdot 60}{2\pi} = 2063 \cdot 10^2.$$

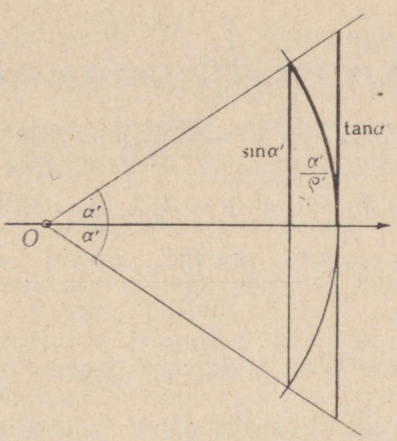
Seega ühikringi kaare pikkus, mis vastab kesknurgale α'', on $\alpha'' : \varrho''$.

3° Teravnurkade puhul kehtivad võrratused (joon. 33)

$$2 \sin \alpha' < 2 \frac{\alpha'}{\varrho'} < 2 \tan \alpha',$$

$$2 \sin \alpha'' < 2 \frac{\alpha''}{\varrho''} < 2 \tan \alpha''$$

ehk, pärast taandamist,



Joon. 33.

$$\sin \alpha' < \frac{\alpha'}{\varrho'} < \tan \alpha',$$

$$\sin \alpha'' < \frac{\alpha''}{\varrho''} < \tan \alpha''.$$

Kui nurk $\alpha < 34'$, siis kolme kohaga töötamisel pole vahet siinuse ja tangensi vahel; seepärast võime kummagi neist asendada nende vahel asetseva suurusega:

$$\sin \alpha' = \frac{\alpha'}{\varrho'} = \tan \alpha',$$

$$\sin \alpha'' = \frac{\alpha''}{\varrho''} = \tan \alpha''.$$

Seega on nende suuruste määramine taandatud lihtsale jagamisele skaaladel C ja D.

N ä i d e. $\sin 25' = \tan 25' = \frac{25}{3438} = 0{,}00727.$

Kolmnurga elementide arvutamise näiteid

Arvutuslükati on suurepärane vahend kolmnurkade lahendamiseks.

Näide 1. Olgu antud $\gamma = 90°$; $c = 28{,}4$; $\alpha = 36°50'$. Siis
$a = c \sin \alpha = 28{,}4 \cdot \sin 36°50' = 17{,}0$;
$b = c \cos \alpha = 28{,}4 \cdot \sin 53°10' = 22{,}7$.

Näide 2. Olgu antud $\gamma = 90°$; $a = 16{,}1$; $b = 20{,}2$. Siis

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{16{,}1}{20{,}2}; \quad \alpha = 38°30';$$

$$c = a : \sin \alpha = \frac{16{,}1}{\sin 38°30'} = 25{,}8.$$

Näide 3. Olgu antud $a = 34{,}5$; $\alpha = 43°13'$; $\beta = 36°20'$. Siis

$$\gamma = 180° - (43°13' + 36°20'), \quad \sin \gamma = \sin 79°33'.$$

Siinuslause järgi

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Seades lükati nii, et skaala S oleks peal ja kriips α skaalal S kohakuti kriipsuga a skaalal D, loeme β vastast $b = 29{,}7$ ja γ vastast $c = 49{,}5$.

Lõppmärkus

Arvutuslükati on üks lihtsamaid ja universaalsemaid mehaanilisi arvutusvahendeid. Vilumuse omandamine temaga töötamiseks ei võta kuigi palju aega ja selleks kulutatud aeg tasub ennast hiljem sajakordselt. Arvutuslükati annab tulemuse küll piiratud täpsusega (250 mm pikkune arvutuslükati kolmekohaliselt), kuid tegelikus elus, ka tehnikas ja paljudel kordadel teaduseski on see täpsus piisav. Arvutuslükati töötamise täpsus on kogu arvupiirkonnas üks ja seesama.

Selles peatükis on näidatud vaid arvutuslükati tähtsamad rakendused. Arvutuslükatit saab aga tulusalt kasutada ka veel paljude teiste küsimuste lahendamisel; nimetame siin ruutvõrrandi ja kuupvõrrandi lahendamist, töötamist logaritmidega kümnest erineval alusel ja palju muud. Täiendusi eespool toodud lühikirjeldusele lükatiga töötamise kohta võib leida lükatile pühendatud rikkalikust kirjandusest.

PEATÜKK IV

MÕÕTMISTULEMUSTE TÖÖTLEMINE

§ 13. KÕIKUMISVAHEMIK. VÄÄRTUSTE SUMMA. KESKMISED VÄÄRTUSED

Suuruse kõikumisvahemik

Rõhuv enamik suurusi, millega puutume kokku meid ümbritsevas tegelikkuses, ei oma püsivat, kindlat väärtust. Iga niisuguse suuruse väärtused kõiguvad tavaliselt teatavais piires, alates mingist väikseimast väärtusest ja lõppedes mingi suurima väärtusega. Näiteks koduhiire poegade arv pesakonnas kõigub 1 ja 14 vahel, inimese hammaste arv kõigub 0 ja 32 vahel, päeva pikkus Tartus kõigub 6 tunni 21 minuti ja 18 tunni 17 minuti vahel, laagrikuuli läbimõõt on mingi pikkus $d - \delta$ ja $d + \delta$ millimeetri vahel, kus d on kuuli nõutav läbimõõt ja δ on lubatav kõrvalekaldumine sellest ühele või teisele poole.

Väikseimat väärtust, mida suurus võib omada, nimetatakse selle suuruse *minimaalseks väärtuseks*, suurimat tema *maksimaalseks väärtuseks*. Nende kahe väärtusega määratud vahemik kannab suuruse *kõikumisvahemiku* nimetust. Märgime suuruse minimaalset ja maksimaalset väärtust vastavalt tähtedega a ja b. Vahe $b - a$ on siis suuruse *kõikumisvahemiku pikkus*. Näiteks Bermuuda saartel kõigub keskmine päevatemperatuur aastas 17° C ja 27° C vahel, seega 10° pikkuses vahemikus, Verhojanskis seevastu −68° C ja +15° C vahel, seega 83° pikkuses vahemikus.

Väärtuste summa

Mõõdetud või arvutatud muutujate väärtuste hulk paisub sageli niivõrd mahukaks, et väärtustest kaob ülevaade ja osutub raskeks selle väärtuste hulgaga töötamine. Niisuguse olukorra ees seisame näiteks juhul, kus pikema aja jooksul, ütleme suhkrupeedi vegetatsiooniperioodi kestel, on päevast päeva mõõdetud sademete hulka või päikesepaiste kestust. Töö hõlbustamiseks

luuakse siis saadud andmete hulka iseloomustavad summaarsed näitajad. Meie näites oleks niisuguseiks näitajaiks sademete üldhulk ja päikesepaiste tundide koguarv vegetatsiooniperioodil.

Kui muutuja väärtuste hulk moodustub väärtustest $x_1, x_2, \ldots, x_n$, siis arv

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

on summaarseks näitajaks, mis iseloomustab väärtuste hulga üldmahtu. Niisuguseks summaarseks näitajaks on ka kaupluse kassa seis tööpäeva lõpul, auto kilomeetrimõõtjal näha olev läbisõidetud kilomeetrite arv, lehma aastane piimatoodang jne.

Suure arvu liidetavatega summade väljakirjutamine teoreetilistes arutlustes nõuaks palju ruumi ja oleks ka muidu tülikas. Töö hõlbustub tunduvalt lühikese sümboolse märkimisviisi kasutuselevõtmisel:

$$\text{summat } x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ kirjutatakse kujul } \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu.$$

Selles sümbolis tähendab ν indeksit ehk järjekorranumbrit; täht Σ on summeerimissümboliks ja märgid $\nu = 1$ ja n annavad järjekorranumbri alg- ja lõppväärtuse.

Keskmised väärtused

Laialdast kasutamist leidvaiks väärtuste hulkade karakteristikuiks on mitmesugused keskmised. Nii räägime inimese keskmisest elueast ühel või teisel maal, metsa keskmisest puiduhulgast selle hulga kahe järjestikuse hindamise vahel, keskmisest kiirusest, kui üks osa teest on sõidetud ühe, teine osa teise kiirusega, jne. Nii teoreetilisest kui ka rakenduslikust seisukohast on tähtsaimad kolm keskmist: aritmeetiline, geomeetriline ja harmooniline keskmine.

Aritmeetiline keskmine

Olgu suuruse x kaks eriväärtust x_1 ja x_2 ja olgu $x_1 < x_2$. Arvude x_1 ja x_2 aritmeetiline keskmine defineeritakse siis kui arv a, millest arv x_2 on niisama palju suurem, kui palju arv x_1 on temast väiksem; sümboleis

$$x_2 - a = a - x_1.$$

Nagu arvu a definitsioonist näha, asetseb ta arvude x_1 ja x_2 vahel. Lihtne arvutus näitab, et

$$a = \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

See tähendab, et

kahe arvu aritmeetiline keskmine on võrdne nende arvude poolsummaga.

Aritmeetilise keskmise mõiste leiab eriti laialdast rakendamist mõõtmisküsimustes. Näitena lahendame järgmise ülesande.

Ülesanne. Arhimedes (III saj. e. m. a.) näitas, et ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe on suurem kui $3\frac{10}{71}$ ja väiksem kui $3\frac{10}{70}$. Kui täpselt saab neist andmeist määrata nimetatud suhet?

Lahendus. Märgime nagu tavaliselt ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhte sümboliga π. Andmed ütlevad vaid seda, et

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Et peale öeldu pole arvu π kohta midagi lähemat teada ja kumbki kahest tema jaoks saadud tõkkest $\left(3\frac{10}{71}\text{ ja }3\frac{10}{70}\right)$ pole millegi poolest eelistatav, siis on loomulik π väärtuseks lugeda arvu, mis asub võrdses kauguses nii ühest kui ka teisest tõkkest:

$$\pi - 3\frac{10}{71} = 3\frac{10}{70} - \pi$$

ehk

$$\pi = \frac{1}{2}\left(3\frac{10}{71} + 3\frac{10}{70}\right) = 3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1410}{4970} = 3 + \frac{141}{994} = 3{,}142.$$

On pikemata selge, et selle väärtuse viga ei ületa poolt tõkete vahet, seega väärtust $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{497}$ ehk, ümardatult, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{500}$ ehk 0,001. Leitud π väärtuse relatiivne viga ei ületa ümmarguselt $\frac{1}{3}\,{}^0/_{00}$.

Aritmeetilise keskmise definitsiooni üldistus x kolme eriväärtuse juhule annab

$$a = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$$

ja üldistus n eriväärtuse juhule vastavalt

$$a = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

ehk, sümboolses kirjutusviisis,

$$a = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu .$$

Selle eeskirja järgi saab määrata näiteks inimese keskmise eluea, võttes aluseks perekonnaseisu aktide büroos peetava surnute registri andmed.

Aritmeetilise keskmise konkreetse tähenduse selgitamiseks lahendame järgmise ülesande.

Ülesanne. Vabriku n tsehhis saavad juhatajad erinevat kuupalka: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rubla. Palkade reguleerimisel tahetakse nende palgad ühtlustada, kuid nii, et neile langev palgafondi osa jääks muutumatuks. Kui kõrgeks kujuneb tsehhijuhataja uus palk?

Lahendus. Kõnesolev palgafondi osa on

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \text{ ehk } \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$$

rubla. Sellest summast makstakse palka n töötajale. Ühtse palgamäära a rubla puhul

$$na = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu .$$

Seega

$$a = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu .$$

Geomeetriline keskmine

Olgu suuruse x kaks positiivset eriväärtust x_1 ja x_2 ja olgu $x_1 < x_2$. Nende arvude geomeetriline keskmine g defineeritakse siis kui arv, millest arv x_2 on nii mitu korda suurem, kui mitu korda arv x_1 on temast väiksem; sümboleis

$$x_2 : g = g : x_1 .$$

Nagu arvu g definitsioonist näha, asetseb ta arvude x_1 ja x_2 vahel. Arvu g definitsioonivõrdust võib kirjutada ka kujul

$$x_1 \cdot x_2 = g \cdot g,$$

millest näeme, et

$$g = \sqrt{x_1 \cdot x_2} \text{ ehk } g = (x_1 \cdot x_2)^{\frac{1}{2}}.$$

See tähendab, et

kahe arvu geomeetriline keskmine on võrdne ruutjuurega nende arvude korrutisest.

Definitsiooni üldistus x kolme eriväärtuse juhule annab

$$g = \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} \text{ ehk } g = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)^{\frac{1}{3}}$$

ja üldistus n eriväärtuse juhule vastavalt

$$g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \ldots x_n} \text{ ehk } g = (x_1 \cdot x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Viimase võrduse logaritmimine näitab, et

$$\log g = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \log x_\nu.$$

See tähendab, et

geomeetrilise keskmise logaritm on andmete logaritmide aritmeetiline keskmine.

Siit järeldub eeskiri geomeetrilise keskmise arvutamiseks: *otsime tabelitest andmete logaritmid, leiame nende logaritmide aritmeetilise keskmise ja selle kui* log g *järgi arvu* g.

Geomeetrilise keskmise mõiste rakenduslikku väärtust selgitab teiste hulgas järgmine näide.

N ä i d e. Mõõtmise ja töötlemise vahendite puudulikkuse tõttu ei tule kaalukangi õlgade l_1 ja l_2 pikkus kunagi täpselt võrdne. Hoolimata sellest on võimalik leida kaalutava eseme õ i g e t kaalu. Selleks paigutame eseme esiteks p a r e m p o o l s e l e kaalukausile; olgu sel puhul tema tasakaalustamiseks vaja x_1 grammi. Paigutame eseme teiseks v a s a k p o o l s e l e kaalukausile; olgu tema tasakaalustamiseks nüüd vaja x_2 grammi. Järelemõtlematult talitades võiks arvata, et õige kaal on leitud kaalude aritmeetiline keskmine. See pole aga nii: õ i g e k a a l x o n l e i t u d k a a l u d e g e o m e e t r i l i n e k e s k m i n e. Tõepoolest, esimese kaalumise puhul

$$x : x_1 = l_1 : l_2,$$

teise kaalumise puhul seevastu

$$x_2 : x = l_1 : l_2.$$

Järelikult

$$x : x_1 = x_2 : x$$

ja

$$x = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Ülesanne. Sõidetagu kohast A kohta B kiirusega v_1 kilomeetrit tunnis ja kohast B tagasi kohta A kiirusega v_2 kilomeetrit tunnis. Kui suur on keskmine kiirus edasi-tagasi sõidul?

Lahendus. Järelemõtlematult talitades võiks arvata, et keskmine kiirus $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. See pole aga nii. Tõepoolest, kui kohtade A ja B vaheline kaugus on l km, siis sõiduks kohast A kohta B kulub aega $\frac{l}{v_1}$ tundi, tagasisõiduks $\frac{l}{v_2}$ tundi ja kogu sõiduaeg on $l\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)$ tundi.

Keskmise kiirusega v kilomeetrit tunnis sõites kuluks edasi-tagasi sõiduks aega $\frac{2l}{v}$ tundi, nii et

$$\frac{2l}{v} = l\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right) \quad \text{ehk} \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right).$$

Nagu näeme, on keskmise kiiruse pöördväärtus sõidukiiruste pöördväärtuste aritmeetiline keskmine.

Kirjeldatud viisil moodustatud arv v kannab arvude v_1 ja v_2 harmoonilise keskmise nimetust. Üldiselt:

kahe arvu harmooniliseks keskmiseks nimetatakse arvu, mille pöördväärtus on antud arvude pöördväärtuste aritmeetiline keskmine.

Olgu antud arvud x_1 ja x_2, olgu nad mõlemad positiivsed ja $x_1 < x_2$. Antud definitsiooni järgi nende harmooniline keskmine h on määratud võrdusega

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)$$

ehk, teisiti, $\frac{2}{h} = \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ ehk, veel teisiti, $h = \frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$.

Näitame, et nõnda defineeritud harmooniline keskmine h asetseb arvude x_1 ja x_2 vahel. Tõepoolest, eelduse kohaselt $x_1 < x_2$; seepärast $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$. Arvestades nende kahe murru ja nende aritmeetilise keskmise $\frac{1}{h}$ suurusjärjestust

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{h} > \frac{1}{x_2},$$

saame väidet tõestava võrratuse

$$x_1 < h < x_2.$$

Asjaolu, et arv h asetseb x_1 ja x_2 vahel, õigustabki arvu h nimetamist nende arvude keskmiseks.

Harmoonilise keskmise definitsiooni üldistus suuruse x kolme eriväärtuse juhule annab

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)$$

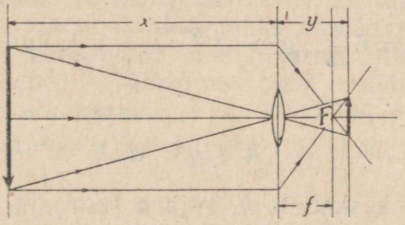
ja üldistus n eriväärtuse juhule vastavalt

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)$$

ehk, lühemas kirjutusviisis,

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x_\nu}.$$

Harmoonilise keskmise mõiste leiab muuhulgas kasutamist mõnede füüsika seaduste formuleerimisel. Tähendagu näiteks joonisel 34 sümbol x eseme kaugust läätse tsentraalpinnast ja y



Joon. 34.

kujutise kaugust samast pinnast. Kui läätse fookuse kaugust märkida tähega f, siis, nagu teame optikast,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f} \quad \text{ehk} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{2f}.$$

See seos näitab, et

läätse kahekordne fookuse kaugus on eseme ja kujutise kauguste harmooniline keskmine.

Aritmeetilise, geomeetrilise ja harmoonilise keskmise omavaheline seos

Keskmiste a, g ja h avaldiste

$$a = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad g = \sqrt{x_1 x_2}, \quad h = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}$$

võrdlemisel näeme, et

$$h = \frac{g^2}{a} \quad \text{ehk} \quad \frac{h}{g} = \frac{g}{a}.$$

See tähendab, et

arv g on arvude h ja a geomeetriline keskmine.

Viimast asjaolu saab kasutada arvutatud a, g ja h väärtuste kontrollimiseks.

Aritmeetilise, geomeetrilise ja harmoonilise keskmise suurusjärjestus

Nagu nähtub keskmiste a, g ja h avaldistest

$$a = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad g = \sqrt{x_1 x_2}, \quad h = \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2},$$

on arvude x_1 ja x_2 ühtelangemisel ($x_1 = x_2 = x$) ka kõik kolm keskmist üksteisega võrdsed: $a = g = h$. Nad kujutavad kõik suuruse x väärtust. Üldiselt aga pole see nii. Arvude x_1 ja x_2 erinevate väärtuste korral osutuvad kõik kolm nimetatud keskmist erinevateks.

Olgu näiteks $x_1 = 4$, $x_2 = 9$. Siis

$$h = \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{4 + 9} = \frac{72}{13} = 5\frac{7}{13}, \quad g = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \quad \text{ja} \quad a = \frac{1}{2}(4 + 9) = 6\frac{1}{2}.$$

Seega meie näite puhul

$$h < g < a.$$

Tõestame, et see keskmiste h, g ja a suurusjärjestus kehtib alati, kui arvud x_1 ja x_2 pole võrdsed.

Selleks arutleme järgmiselt: on vaja näidata, et

$$\frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} < \sqrt{x_1 x_2} < \frac{1}{2}(x_1 + x_2).$$

Võrratusi veidi teisendades näeme, et nii esimene kui teine võrratus on samaväärne võrratusega

$$2\sqrt{x_1 x_2} < x_1 + x_2.$$

Siit järeldub, et

$$4x_1 x_2 < (x_1 + x_2)^2$$

ehk

$$0 < (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$$

ehk

$$0 < (x_1 - x_2)^2.$$

See võrratus on aga tehtud oletusel kindlasti kehtiv, sest $x_1 - x_2 \neq 0$ ja järelikult $(x_1 - x_2)^2$ on kindlasti nullist suurem

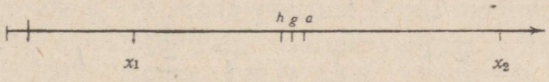
Öeldut kokku võttes näeme, et kõnesolevad kolm keskmist paiknevad arvude x_1 ja x_2 vahel järgmiselt (joon. 35):

$$x_1 < h < g < a < x_2.$$

Kui $x_1 = x_2$, asenduvad need võrratused võrdustega

$$x_1 = h = g = a = x_2.$$

Suurusjärjestus $h \leqslant g \leqslant a$ jääb püsima ka juhul, kui kahe väärtuse x_1 ja x_2 asemel on n väärtust $x_1, x_2, \ldots, x_n$.



Joon. 35.

Ruutkeskmine

Ülesanne. n kerakujulise verelible läbimõõdu mõõtmisel on saadud arvud $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Missuguste ühe ja sama läbimõõduga libledega nad tuleksid asendada, kui tahaksime, et vereliblede summaarne difusioonipind jääks endiseks?

Lahendus. Vereliblede summaarne difusioonipind on $\pi(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$. Märgime lible otsitava läbimõõdu tähega σ. Siis nõude kohaselt

$$n \cdot \pi\sigma^2 = \pi(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$$

ehk

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2.$$

Nagu näeme, on otsitava läbimõõdu ruut andmete ruutude aritmeetiline keskmine.

Tugedes öeldule, anname järgmise definitsiooni:

väärtuste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ruutkeskmiseks nimetatakse arvu, mille ruut on võrdne antud väärtuste ruutude aritmeetilise keskmisega.

Eespool saadud σ^2 definitsiooni võrrandi $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2$ võib asendada samaväärse võrrandiga

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2}{n}}.$$

Praegu loodud ruutkeskmise mõiste leiab laialdast rakendamist katsevigade teoorias ning bioloogilises, majanduslikus ja tööstustoodangu kontrollimise statistikas.

Märkus. Juhul, kui summeerimine haarab kõik suuruse u eriväärtused $u_1, u_2, \ldots, u_n$, võib kirjutiste lihtsustamiseks summeerimissümboli Σ juures jätta märgid $\nu = 1$ ja n ära ja kirjutada

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \text{ asemel lihtsalt } \Sigma u_\nu.$$

Näiteks

$$a = \frac{\Sigma x_\nu}{n}, \qquad \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2{}_\nu}{n}} \text{ jne.}$$

§ 14. MÕÕTMISVIGADE TEOORIA ELEMENDID

Mõõdetava suuruse sobivaima väärtuse probleem

Mõõdetagu mõnda suurust (pikkust, nurka, kaalu, juhtme takistust, aine sulamistemperatuuri jne.) korduvalt, ütleme n korda, ühtede ja samade mõõtmisvahenditega, ühtedes ja samades tingimustes, ühe ja sama vaatleja poolt, ühteviisi hoolikalt. Kogemused näitavad, et toodud eeldusist hoolimata mõõtmistulemused $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ometi ei lange ühte, vaid lähevad üksteisest pisut lahku. Väikesed erinevused mõõtmistulemustes kirjutatakse juhuslike, väljaspool meie kontrolli seisvate põhjuste arvele. Olgu mõõdetava suuruse tõeline väärtus X. Juhuslike, hetkelt hetkele muutuvate pisipõhjuste tõttu saame üldiselt iga kord erineva mõõtmistulemuse; suuruse tõeline väärtus aga jääb meile kättesaamatuks. Et kõik mõõtmised on tehtud ühe ja sama vaatleja poolt, ühe ja sama aparatuuriga, siis pole põhjust eelistada üht mõõtmistulemust teisele: nad on kõik võrdsel määral usaldatavad. See asjaolu seab meid küsimuse ette: missugust arvu ξ tuleks saadud mõõtmistulemuste põhjal lugeda kõige sobivamaks, kõige tõenäolisemaks mõõdetava suuruse väärtuseks? Teiste sõnadega: missuguse väärtusega tuleks asendada meile kättesaamatuks jääv X? Ühtaegu tõuseb muidugi ka küsimus: kui õigustatuks võib pidada väärtuse X asendamist väärtusega ξ? Teiste sõnadega: kuivõrd võib usaldada väärtust ξ tõelise väärtuse X asendajana?

Mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine

Mõõtmistulemuse x_ν erinevust suuruse tõelisest väärtusest X märgime sümboliga Δ_ν, nii et $X - x_\nu = \Delta_\nu$. Et $X = x_\nu + \Delta_\nu$, siis Δ_ν on parandus, mis tuleb lisada mõõtmistulemusele x_ν, et saada õiget väärtust X. Seega arvu Δ_ν võib nimetada ν-nda mõõtmistulemuse tõeliseks veaks. Mõõtmistulemus x_ν erineb suuruse sobivaimast väärtusest vahe $\xi - x_\nu = v_\nu$ võrra. Et $\xi = x_\nu + v_\nu$, siis v_ν on parandus, mis tuleb lisada mõõtmistulemusele x_ν, et saada väärtust ξ, mis mõõtmistulemuste põhjal näib olevat sobivaim suuruse väärtus. Nimetame arvu v_ν ν-nda mõõtmistulemuse näivaks veaks.

Seame nüüd küsimuse, mida nimetada mõõdetava suuruse sobivaimaks väärtuseks, s. o. väärtuseks, mis eriti hästi sobib mõõtmistulemuste seeriaga? Väärtuse ξ sobivuse mõõduks, kui vaatleme teda seoses ühe mõõtmistulemusega x_ν, on muidugi parandus v_ν: mida väiksem see arv on, seda parem on arvu ξ kooskõla arvuga x_ν. Näib olevat loomulik lugeda väärtuse ξ sobivust andmeteseeriaga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seda paremaks, mida väiksem on paranduste summa absoluutväärtus

$$|v_1 + v_2 + \ldots + v_n|.$$

Lepime kokku mõista suuruse sobivaima väärtuse all niisugust arvu ξ, mille puhul $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$. Siis on võrdne nulliga ka selle summa absoluutväärtus. Lühidalt:

mõõtmistulemuste seeria $x_1, x_2, \ldots x_n$ puhul loeme suuruse sobivaimaks väärtuseks seda arvu ξ, mille puhul näivate vigade summa saab nulliks.

Sümboleis kirjutatult avaldub see nõue kujul

$$\Sigma v_\nu = 0.$$

Kirjutades veel kord, et

$$\xi = x_\nu + v_\nu,$$

andes indeksile ν väärtused 1, 2, ..., n ja summeerides võrduste vasakud ja paremad pooled, saame, et

$$n\xi = \Sigma x_\nu + \Sigma v_\nu.$$

Et tehtud kokkuleppe kohaselt viimane summa on null, siis on arv $n\xi$ sel puhul kõige paremas kooskõlas summaga Σx_ν ja otsitav ξ avaldub kujul

$$\xi = \frac{\Sigma x_\nu}{n}.$$

See tähendab, et aluseks võetud kokkuleppe puhul *suuruse sobivaimaks väärtuseks on tema mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine.*

Küsimusele võib aga läheneda ka teisiti. Lähtume võrdustest

$$X = x_\nu + \Delta_\nu.$$

Andes indeksile ν väärtused 1, 2, ..., n ja summeerides võrduste vasakud ja paremad pooled, saame, et

$$nX = \Sigma x_\nu + \Sigma \Delta_\nu,$$

millest

$$X = \frac{\Sigma x_\nu}{n} + \frac{\Sigma \Delta_\nu}{n}$$

ehk

$$X = \xi + \mu, \text{ kus } \mu = \frac{\Sigma \Delta_\nu}{n}.$$

Võib arvata, et väljaspool meie kontrolli seisvad pisipõhjused, mis häirivad mõõtmiskäiku, mõjustavad oma juhuslikkuse tõttu ühtesid mõõtmistulemusi ühes suunas, teisi teises suunas — teiste sõnadega, võib arvata, et ühed tõelised vead on positiivsed, teised negatiivsed, ja seepärast nad summas $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ teataval määral kompenseeruvad, eriti kui mõõtmiste arv on küllalt suur. Mis puutub summa $\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$ kompenseerimata osasse, siis ei saa see olla suur, sest me eeldame ju, et mõõtmised on tehtud heade vahenditega, hoolikalt töötava vaatleja poolt, ja seepärast tõelised vead on väikesed. Niisiis kompenseerimata osa summast $\Sigma \Delta_\nu$ ei saa olla kuigi tunduv, seda enam ei saa omada kuigi suurt kaalu $\frac{1}{n}$ sellest osast. See arutlus viib otsusele, et teise liikme viimase võrduse paremal poolel võib jätta arvestamata, nii et

$$X \approx \xi.$$

See ütleb, et

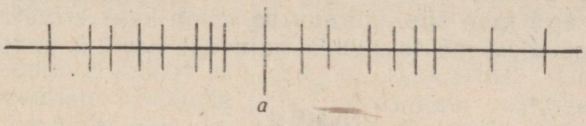
suuruse tõelise väärtuse heaks lähendiks on suuruse korduva mõõtmise tulemuste aritmeetiline keskmine.

Käsitletud küsimusele saab läheneda ka veel kolmandal viisil, lähtudes mõõtmistulemuste spektri pildist.

Mõõtmistulemuste spekter

Näitliku pildi saamiseks mõõtmistulemuste paigutusest kujutame neid kohaselt valitud mastaabis sirgjoonel, märkides saadud

punktid kriipsudega (joon. 36). Need kriipsud moodustavad siis, piltlikult öeldes, meie mõõtmistulemuste spektri.



Joon. 36.

Kus asub tõelisele väärtusele X vastav joon, pole teada ja jääb teadmatuks tänu iga mõõtmisega kaasnevatele kontrollimatutele pisimõjutustele. Küsimus seisab järelikult selles, missuguse väärtusega suurust X asendada. See väärtus peaks loomulikult olema tuletatud kõiki mõõtmistulemusi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ühte viisi ära kasutades; ta peaks olema kogu seda väärtuste varu kõige paremini iseloomustavaks, kõige paremini haaravaks, kõige paremini esindavaks, kõige paremini kujutavaks näitajaks. Mõte, mis peitub viimati tarvitatud kõnekäändudes, nõuab täpsustamist. See toimub alljärgnevalt hälbe mõistet kasutades.

Hälve

Arv a kujutab väärtust x seda paremini, mida vähem ta temast erineb, mida väiksem on nende vahe ehk mida väiksem on väärtuse kõrvalekaldumine arvust a ehk mida väiksem on väärtuse x hälve arvust a.

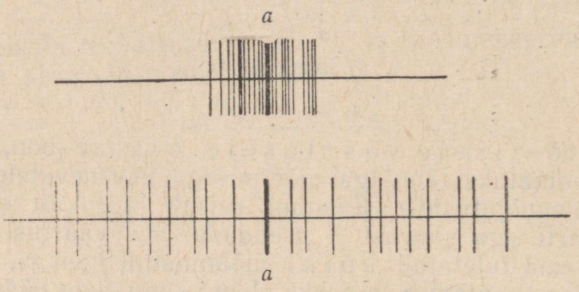
Väärtuse x hälve arvust a on vahe $a - x$.

See vahe võib olla positiivne või null või negatiivne. Kui räägime suurest või väikesest hälbest, siis ei huvita meid hälbe märk, vaid ainuüksi tema absoluutväärtus $|a - x|$ ehk sellega võrdne ruutjuur hälbe ruudust $\sqrt{(a-x)^2}$. Märgime, et viimane avaldis on vaid eelmise teine kirjutusviis. Ta on meile kasulik tähtsa hajuvuse mõiste käsitlemisel.

Hajuvus

Võib juhtuda, et väärtuste spektri jooned $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mõne fikseeritud abijoone a ümber tihedalt kuhjuvad, abijoone a teisiti paigutamisel aga selle ümber hõredalt jaotuvad (joon. 37). Esimesel juhul on spektri jooned joone a ümber vähe hajutatud, teisel juhul tugevasti hajutatud. Seame küsimuse: millega mõõta väärtuste kogu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hajuvust arvu a suhtes.

Hajuvuse küsimust ei teki, kui suurus omab ühtainsat väärtust x_1. Küsimus, kas ta asetseb arvu a lähedal või sellest kaugel, otsustatakse avaldise $\sqrt{(a-x_1)^2}$ arvutamisega. Hajuvuse küsimus kerkib aga juba siis, kui suurus omab kaks eriväärtust x_1 ja x_2. Oleks mõeldav mõõta nende hajuvust arvu a suhtes arvude

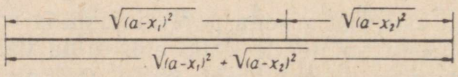


Joon. 37.

x_1 ja x_2 hälvete summaga, s. t. avaldisega

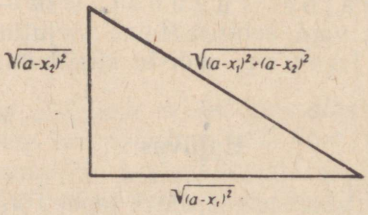
$$\sqrt{(a-x_1)^2}+\sqrt{(a-x_2)^2}$$

(joon. 38). Mõlemad hälbed on siin kujutatud ühes ja samas sihis võetud lõikudena. Et hälbeid teineteisest kergesti eristada,



Joon. 38.

võiksime esimest neist kujutada näiteks rõhtsihilise, teist püstsihilise lõiguna (joon. 39). Äsja vaadeldud hälvete summa kujutuks siis täisnurkse kolmnurga k a a t e t i t e s u m m a n a. Joonis 39



Joon. 39.

näitab aga ühtlasi seda, et mida väiksemad on hälbed, seda lühem on ka vaadeldava kolmnurga h ü p o t e n u u s ehk, teiste sõnadega, avaldis

$$\sqrt{(a-x_1)^2}+\sqrt{(a-x_2)^2}.$$

Avaldistest

$$\sqrt{(a-x_1)^2+(a-x_2)^2} \quad \text{ja} \quad \sqrt{(a-x_1)^2}+\sqrt{(a-x_2)^2}$$

on esimene oma ehituselt lihtsam kui teine. Ühesuguste a, x_1 ja x_2 arvuliste väärtuste puhul on esimese avaldise numbriline väärtus väiksem kui teise oma. See viib mõttele mõõta suuruste x_1 ja x_2 hajuvust arvu a suhtes just avaldisega

$$\sqrt{(a-x_1)^2+(a-x_2)^2}.$$

Hajuvuse niisuguse mõõtmisviisi juurde ongi peatuma jäädud.

Viimasel juhul suuruse kahe eriväärtuse hajuvus mingi arvu a suhtes on mõõdetud nende väärtuste hälvete ruutude summa ruutjuure kaudu. Öeldu võimaldab üldistada:

suuruse x eriväärtuste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hajuvust arvu a suhtes mõõdame avaldisega

$$\sqrt{(a-x_1)^2+(a-x_2)^2+\ldots+(a-x_n)^2}.$$

ehk

väärtuste seeria $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hajuvuseks arvu a suhtes nimetatakse suurust

$$\sqrt{(a-x_1)^2+(a-x_2)^2+\ldots+(a-x_n)^2}.$$

Hajuvust nimetatakse ka dispersiooniks.*

Märgime hajuvuse ehk dispersiooni arvu a suhtes sümboliga δ_a. Siis

$$\delta_a^2 = \Sigma(a-x_\nu)^2$$

ehk, sõnastatult,

suuruse väärtuste seeria hajuvuse ruut on võrdne suuruse üksikväärtuste hälvete ruutude summaga.

Hajuvuse muutumine lähtekoha vahetamisel

Võrdleme hajuvusi, kui üks kord võtame lähtearvuks arvu a, teine kord arvu b. Eriväärtuse x_ν hälbed nende lähtearvude puhul on vastavalt

$$b-x_\nu \quad \text{ja} \quad a-x_\nu.$$

Neist tuletuvad δ_b^2 ja δ_a^2 kujul

* Lad. k. *dispergere* — laiali paiskama, hajutama.

$$\delta_b^2 = \Sigma(b - x_\nu)^2 \quad \text{ja} \quad \delta_a^2 = \Sigma(a - x_\nu)^2.$$

Võime kirjutada, et

$$b - x_\nu = b - a + a - x_\nu = (a - x_\nu) + (b - a).$$

Seega

$$(b - x_\nu)^2 = (a - x_\nu)^2 + 2(b - a)(a - x_\nu) + (b - a)^2.$$

Anname nüüd indeksile ν järjest väärtused 1, 2, ..., n ja summeerime saadud võrdused liikmeti. Saame

$$\Sigma(b - x_\nu)^2 = \Sigma(a - x\nu)^2 + \Sigma 2(b - a)(a - x_\nu) + \Sigma(b - a)^2.$$

Et paremal pool teise summa kõikide liikmete ühiseks teguriks on $2(b - a)$, siis võime selle teguri võtta summa sümboli ette. Kolmandas summas esineb vahe $b - a$ ruut nii mitu korda, kui mitu on liidetavaid võrdusi. Neid aga on n. Seega

$$\Sigma(b - x_\nu)^2 = \Sigma(a - x_\nu)^2 + 2(b - a)\Sigma(a - x_\nu) + n(b - a)^2$$

ehk, kui märgime hajuvused vastavalt sümbolitega δ_a ja δ_b,

$$\delta_b^2 = \delta_a^2 + 2(b - a)\Sigma(a - x_\nu) + n(b - a)^2.$$

Võtame arvuks a mõõtmistulemuste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aritmeetilise keskmise ξ. Siis hälvete summa

$$\Sigma(\xi - x_\nu) = 0$$

ja valem δ_b jaoks omandab kuju

$$\delta_b^2 = \delta_\xi^2 + n(b - \xi)^2.$$

Kui $b \neq \xi$, siis $(b - \xi)^2$ on alati positiivne, seega $\delta_b^2 > \delta_\xi^2$ ehk $\delta_\xi^2 < \delta_b^2$, olgu b mistahes arv. Järelikult:

väärtuste seeria $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hajuvus on kõige väiksem, kui lähtearvuks võtta väärtuste aritmeetiline keskmine.

See asjaolu kinnitab veel kord aritmeetilise keskmise sobivust väärtuste seeria karakteristikuna:

suuruse sobivaimaks väärtuseks mõõtmistulemuste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ põhjal on nende mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine.

Uuritavat küsimust saab käsitleda ka teisest vaatekohast. Kui väärtused $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tihedalt kuhjuvad ümber oma aritmeetilise keskmise ξ, siis hälbed $\xi - x_\nu$ on väikesed, samuti nende ruudud ja nende ruutude summa, nii et δ_ξ on väike arv. Väärtuste spekter on sel juhul lühike, väärtuste kõikumised on väikesed, väärtused on heas omavahelises koos-

kõlas. Suure hajuvuse puhul on pilt vastupidine: väärtuste omavaheline kooskõla on halb. Niisiis

hajuvus δ_ξ on ühtlasi mõõtmistulemuste kooskõla näitajaks: suure δ_ξ korral on mõõtmistulemuste kooskõla halb, väikese δ_ξ puhul hea.

Võrratus $\delta_\xi < \delta_b$ ütleb, et

mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine ξ on paremas kooskõlas väärtustega $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kui ükski teine arv.

Mõõtmistulemuste kooskõla hindamine lähtudes nende hajuvusest aritmeetilise keskmise ümber

Mõõtmistulemused näitavad seda väiksemat hajumist oma aritmeetilise keskmise suhtes, seda paremat kooskõla temaga, mida väiksem on arv

$$\delta_\xi^2 = \Sigma(\xi - x_\nu)^2.$$

Võrdse pikkusega mõõtmisseeriate puhul oleks mõõtmistulemuste kooskõla küsimus selle valemiga lahendatud. Erineva pikkusega mõõtmisseeriate puhul aga oleks üksnes δ_ξ^2 väärtuse põhjal võimatu öelda, missugune mõõtmistulemuste seeria näitab paremat, missugune halvemat kooskõla: sama summa δ_ξ^2 võidakse saada nii lühikese seeria ja suurte hälvete kui ka pika seeria ja väikeste hälvete puhul. Et saada kooskõla näitajat, mis oleks sõltumatu seeria pikkusest, arvutame δ_ξ^2 selle osa σ_ξ^2, mis langeb ühele mõõtmisele:

$$\sigma_\xi^2 = \frac{1}{n} \sum (\xi - x_\nu)^2$$

ehk, kui soovime töötada σ_ξ esimese astmega,

$$\sigma_\xi = \sqrt{\frac{\Sigma(\xi - x_\nu)^2}{n}}.$$

Nagu näeme, on σ_ξ mõõtmistulemuste hälvete ruutkeskmine, hälbeid aritmeetilisest keskmisest arvates. Suure σ_ξ puhul on tegemist tunduvalt hajuvate, vähest kooskõla näitavate mõõtmistulemustega, väikese σ_ξ puhul vähe hajuvate, heas kooskõlas olevate mõõtmistulemustega.

Mõõtmistulemuste kooskõla hindamine lähtudes nende hajuvusest suuruse tõelise väärtuse ümber

Mõõtmistulemuste $x_1, x_2, \ldots, x_n$ hajuvuse näitajaks, s. o. kooskõla mõõduks nende paigutusel ümber aritmeetilise keskmise oli, nagu praegu nägime, arv σ_ξ. Meid huvitab aga hoopis rohkem mõõtmistulemuste hajuvus ümber suuruse tõelise väärtuse X, s. o. arv $\sigma_X = \sqrt{\frac{\Delta_\nu^2}{n}}$. Eespool toodu põhjal teame vaid, et kindlasti

$$\sigma_X \geqslant \sigma_\xi,$$

kus võrdusmärk tuleb arvesse vaid juhul, kui $X = \xi$. Et väärtus X jääb teadmatuks, siis pole mingit otsest teed tõeliste vigade $\Delta_\nu = X - x_\nu$ arvutamiseks. Seepärast ei saa arvutada ka σ_X väärtust. Võib vaid katsuda seda väärtust hinnata. Teeme seda järgmiselt.

Me teame, et

$$\delta_b^2 = \delta_\xi^2 + n(b - \xi)^2$$

ehk, jagamisel arvuga n,

$$\sigma_b^2 = \sigma_\xi^2 + (b - \xi)^2.$$

Võttes siin $b = X$, saame

$$\sigma_X^2 = \sigma_\xi^2 + (X - \xi)^2$$

ehk

$$\sigma_X^2 = \sigma_\xi^2 + \mu^2, \text{ kus } \mu = X - \xi = \frac{\Sigma \Delta_\nu}{n}.$$

Jääb hinnata liige μ^2. Et

$$\mu = \frac{1}{n}(\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n),$$

siis

$$\mu^2 = \frac{1}{n^2}\left\{(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2) + 2[\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3 + \Delta_2\Delta_3 + \ldots]\right\},$$

kus nurksulgudes seisavad kõigi paariti võetud Δ-de korrutised.

Oletame, et mõõtmised on tehtud heade vahenditega ja suure hoolikusega. Siis tõelised vead $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ on väikesed arvud; seda väiksemad on nende paaridest moodustatud korrutised $\Delta_1\Delta_2$, $\Delta_1\Delta_3$ jne. Et tõenäoliselt osa vigu on positiivsed, osa negatiivsed, siis mõned korrutistest $\Delta_1\Delta_2$, $\Delta_1\Delta_3$ jne. on samuti

positiivsed, mõned negatiivsed, mistõttu summa $\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3 + \ldots$ positiivne ja negatiivne osa osaliselt kompenseeruvad. Seepärast on summa $\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3 + \ldots$ tõenäoliselt väga väike ja seda väiksem on avaldis

$$\frac{2}{n^2}(\Delta_1\Delta_2 + \Delta_1\Delta_3 + \ldots + \Delta_{n-1}\Delta_n).$$

Järelikult võime tunduva veata selle liikme asendada nulliga, nii et

$$\mu^2 \approx \frac{1}{n^2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \ldots + \Delta_n^2)$$

ehk, lühemalt,

$$\mu^2 \approx \frac{1}{n^2}\sum \Delta_\nu^2.$$

Et $\Sigma\Delta_\nu^2$ on hälvete ruutude summa (arvates mõõtmistulemuste x_ν hälbeid suuruse tõelisest väärtusest X), siis

$$\Sigma\Delta_\nu^2 = n\sigma_X^2,$$

nii et

$$\mu^2 = \frac{1}{n}\sigma_X^2.$$

Asetades selle μ^2 väärtuse võrdusse

$$\sigma_X^2 = \sigma_\xi^2 + \mu^2,$$

saame

$$\sigma_X^2 = \sigma_\xi^2 + \frac{1}{n}\sigma_X^2,$$

millest

$$\sigma_X^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_\xi^2 = \frac{\Sigma v_\nu^2}{n-1}$$

ehk

$$\sigma_X = \pm\sqrt{\frac{\Sigma v_\nu^2}{n-1}}.$$

See on Gaussi valem mõõtmisseeria üksikmõõtmistulemuse hajuvuse mõõdu jaoks. Ta annab mõõdupuu üksikmõõtmistulemuse headuse, üksikmõõtmistulemuse usaldatavuse määra jaoks. Näitaja σ_X arvutamine ei tee raskusi: andmeist $x_1, x_2, \ldots, x_n$ arvutatakse nende aritmeetiline keskmine ξ, siis näivad vead $v_1, v_2, \ldots, v_n$, edasi nende ruudud $v_1^2, v_2^2, \ldots, v_n^2$, nende ruutude summa Σv_ν^2, siis murd $\frac{\Sigma v_\nu^2}{n-1}$ ja viimaks selle ruutjuur.

Märgime, et valem σ_X jaoks kaotab mõtte, kui on tehtud vaid üksainus mõõtmine. Sel puhul on n võrdne ühega ja $(n-1)=0$, nulliga aga jagada ei saa. Et valem σ_X jaoks on sel juhul mõttetu, on ilmne, sest üheainsa mõõtmise puhul ei saa seada küsimust mõõtmistulemuse usaldatavuse kohta; seda saab teha vaid juhul, kui peale nimetatud ühe mõõtmise on olemas ka veel kontrollmõõtmised. Kui kõiki mõõtmisi on n, siis võib üht neist eriti esile tõsta ja ülejäänud $n-1$ mõõtmist lugeda kontrollmõõtmisteks. See kontrollmõõtmiste arv esinebki σ_X valemis: näivate vigade ruutude summa jaotatakse võrdselt $n-1$ kontrollmõõtmisele.

Aritmeetilise keskmise usaldatavuse määr

Aritmeetiline keskmine ξ erineb suuruse tõelisest väärtusest X arvu μ võrra. Mida väiksem see μ on, seda täpsemini kujutab ξ arvu X, seda usaldatavam on ξ. Seepärast võib arvu μ võtta aritmeetilise keskmise usaldatavuse näitajana: mida väiksem on μ, seda usaldatavam on ξ. Et

$$\mu^2 = \frac{1}{n}\sigma_X^2,$$

siis

$$\mu = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}.$$

See tähendab, et aritmeetilise keskmise usaldatavuse näitaja on $\sqrt{n}$ korda väiksem kui üksikmõõtmistulemuse oma ehk *aritmeetiline keskmine väärib suuremat usaldust kui mõõtmiste seeria iga üksikmõõtmistulemus omaette.*

Asetades viimasesse võrdusse σ_X väärtuse, saame arvutusvalemi

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}}.$$

Suurust μ nimetatakse sageli ajalooliselt kujunenud, kuid sisult ebaõige nimega (aritmeetilise keskmise) «keskmiseks veaks».

Gaussi tähistusviis

Et kergendada trükkimisel valemite ladumist, loobus saksa matemaatik K. F. Gauss (1777—1855) sümbolite Σ, indeksite

ja astendajate kasutamisest. Gaussi sümboolikas asendatakse märk Σ nurksulgudega ja v^2 asendatakse korrutisega vv. Sel viisil kirjutades saame ξ ja μ jaoks valemid

$$\xi = \frac{[x]}{n}, \qquad \mu = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}.$$

Kokkuvõte

Suuruse väärtuse saamiseks mõõdetakse see suurus korduvalt, et oleks võimalik saada tema väärtust vabana juhuslike pisipõhjuste mõjutusist. Olgu mõõtmistulemused $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Suuruse sobivaim väärtus nende mõõtmistulemuste alusel on nende aritmeetiline keskmine:

$$\xi = \frac{\Sigma x_\nu}{n} \text{ ehk Gaussi tähistusviisis } \xi = \frac{[x]}{n}.$$

Numbrit ν kandva mõõtmistulemuse näiv viga

$$v_\nu = \xi - x_\nu.$$

Aritmeetilise keskmise usaldatavuse määr ehk aritmeetilise keskmise «keskmine viga»

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{\Sigma v_\nu^2}{n(n-1)}}$$

ehk Gaussi tähistusviisis

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}.$$

Suuruse tõenäoseim väärtus ühes selle usaldatavuse määraga antakse kujul

$$x = \xi(\pm\mu).$$

Elavhõbeda tihedus normaalrõhul ja temperatuuril 0° C on näiteks

$$d = 13{,}59504\,(\pm 0{,}00005)$$

grammi kuupsentimeetri kohta.

TEINE OSA

KOORDINAATIDE MÕISTE FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS

PEATÜKK V

KOORDINAATIDE MÕISTE

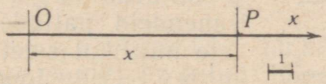
§ 15. PUNKTI ASUKOHA MÄÄRAMINE SIRGJOONEL

Sissejuhatuseks

Seame endale ülesandeks anda üldine võte punkti asukoha määramiseks sirgjoonel. Et saada pidepunkte küsimuse lahendamiseks, lähtume konkreetsest juhust: olgu raudteesõidul tekkinud veduririke. Abi saamiseks teatame lähemasse jaama seismajäänud rongi asukoha näiteks sõnadega: «Rong seisab Tallinna—Valga liinil, Tapalt 47 kilomeetrit Valga pool.» See teade sisaldab järgmisi andmeid: liin; nullpunkt, millest loetakse kaugust; suund, milles liigutakse; sündmuskoha kaugus nullpunktist. Tehtud tähelepanekud viivad meid üldise võtte juurde punkti asukoha määramiseks sirgjoonel.

Sirgjoone punkti abstsiss

Olgu antud sirge (joon. 40), märgitud temal teatav kindel punkt O ja kokku lepitud, et üht suundadest, milles võib sirgel liikuda, loetakse positiivseks suunaks; selle vastassuund



Joon. 40.

on siis negatiivseks suunaks; esimest neist suundadest märgime noolega. Valime lõpuks ühiku pikkuste mõõtmiseks, näiteks 1 cm.

Olgu nüüd P mingi punkt sirgel. Selle punkti asukoha määramiseks mõõdame sirglõigu OP pikkuse ja võtame saadud arvu märgiga +, kui punkt P asetseb punktist O positiivses suunas, ja märgiga —, kui ta asetseb punktist O negatiivses suunas. Nii

saadud märgiga arvu x nimetame punkti P **abstsissiks***. Punkti O nimetame seejuures abstsisside **alguspunktiks** ehk **nullpunktiks**, mõnikord ka lühidalt **alguseks**, ja sirget **abstsisstelje**ks ehk lühidalt x-teljeks. Niisiis:

sirgjoone punkti abstsiss on arv, mis näitab, mitme ühiku kaugusel alguspunktist ja kummal pool alguspunkti asetseb vaadeldav punkt.

Sellest punkti abstsissi definitsioonist nähtub, et abstsisstelje igale punktile vastab **üksainus** abstsiss ja, ümberpöördult, igale abstsissile vastab **üksainus** punkt; järelikult

punkti abstsiss määrab täielikult punkti asukoha sirgel.

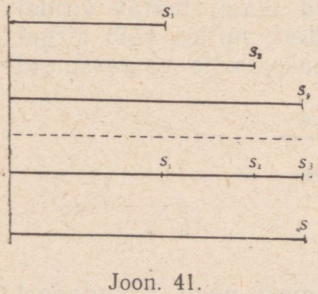
Seepärast võime ülesannet «leida sirge punkt P» ikka mõista ülesandena «leida punkti P abstsiss x». Sirge punkti abstsissiga x märgime sümboliga (x). Ütlusi «punkti P abstsiss on x» ja «punkt P abstsissiga x» kirjutatakse lühidalt kujul

$$P \equiv (x).$$

Samasuse tähis $\equiv$ rõhutab, et kaks erinevat sümbolit, P ja (x), märgivad **üht ja sedasama punkti**. Kirjutusviisi $P \equiv (x)$ asemel kasutatakse sageli lühemat kirjutusviisi $P(x)$.

Kaks punkti, mis asetsevad teljel võrdseil kaugusil nullpunktist, üks ühel pool, teine teisel pool seda, on nullpunkti suhtes **sümmeetrilised** punktid. Nende punktide abstsissid on võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega. Kui punktil on abstsiss a, siis temaga alguspunkti suhtes sümmeetrilisel punktil on abstsiss $-a$.

Eespool andsime sirgel ette punkti P ja otsisime temale vastavat abstsissi x. Võime aga ka ette anda arvu x ja otsida temale vastavat sirge punkti P. See punkt on siis arvu x **kujutuspunktiks** sirgel.



Joon. 41.

Kõnesolev võte arvude kujutamiseks punktidena sirgel on üks võimsamaid vahendeid paljude matemaatika mõistete näitlikul seletamisel.

Näide. Joonisel 41 kujutavad lõigud lõpmatu geomeetrilise rea

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

osasummasid $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{2}$, $s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ jne. ja nende piirväärtust $s = 2$. Joonis näitab kujukalt osasummade kiiret lähenemist piirväärtusele.

---

* Lad. k. *abstsissis* — äralõikamine.

§ 16. ABSTSISSTELJE LÕIGU JAOTAMISE ÜLESANDEID. ABSTSISSTELJE KAHE PUNKTI VAHELINE KAUGUS

Sirglõigu keskpunkti abstsiss

Olgu teljel asetsev lõik antud oma otspunktidega $P_1 \equiv (x_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2)$. Leiame selle lõigu keskpunkti abstsissi.

Olgu lõigu P_1P_2 keskpunkt $P \equiv (x)$. Siis

$$P_1P = PP_2$$

ehk

$$x - x_1 = x_2 - x.$$

Lahendades selle võrrandi suuruse x suhtes, saame

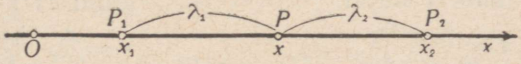
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Seega

sirglõigu keskpunkti abstsiss võrdub otspunktide abstsisside aritmeetilise keskmisega.

Lõigu jaotamine antud suhtes

Olgu teljel asetsev lõik antud oma otspunktidega $P_1 \equiv (x_1)$ ja $P_2 \equiv (x_2)$. Leiame punkti, mis jaotab antud lõigu suhtes $\lambda_1 : \lambda_2$.



Joon. 42.

I. Seespidise jaotamise juht

Asetsegu otsitav punkt P antud lõigul punktide P_1 ja P_2 vahel (joon. 42). Siis

$$P_1P : PP_2 = \lambda_1 : \lambda_2$$

ehk

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Selle võrrandi lahendamisel saame, et

$$x = \frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

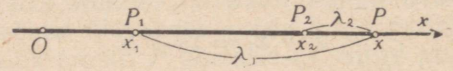
II. Välispidise jaotamise juht

Asetsegu otsitav punkt P antud lõigu pikendil punkti P_2 taga (joon. 43). Siis

$$P_1P : P_2P = \lambda_1 : \lambda_2$$

ehk

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$



Joon. 43.

Selle võrrandi lahendamisel saame, et

$$x = \frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Võrreldes tulemusi, näeme, et teine valem saadakse esimesest, muutes arvu λ_2 märgi vastupidiseks. See on ka arusaadav, sest võrret $P_1P : P_2P = \lambda_1 : \lambda_2$ võib kirjutada kujul $P_1P : (-PP_2) = \lambda_1 : \lambda_2$ ehk kujul $P_1P : PP_2 = \lambda_1 : (-\lambda_2)$.

Märkides suhte $\lambda_1 : \lambda_2$ tähega λ, saame otsitava abstsissi avaldist kirjutada

juhul I kujul $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$, juhul II kujul $x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$.

N ä i d e. Jaotame lõigu, mille otspunktid on (-2) ja $(+7)$, seespidiselt ja välispidiselt suhtes 4 : 5. Seespidise jaotamise korral saame tulemuseks

$$x = \frac{4 \cdot 7 + 5 \cdot (-2)}{4 + 5} = \frac{18}{9} = 2;$$

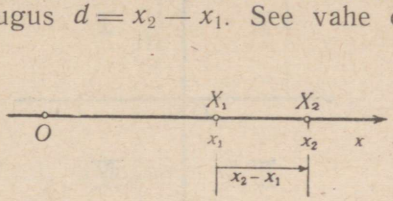
välispidise jaotamise korral vastavalt

$$x = \frac{4 \cdot 7 - 5 \cdot (-2)}{4 - 5} = \frac{38}{-1} = -38.$$

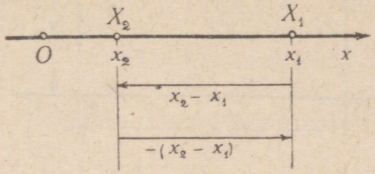
Abstsisstelje kahe punkti vaheline kaugus

Olgu antud kaks punkti $X_1 \equiv (x_1)$ ja $X_2 \equiv (x_2)$. Leiame nendevahelise kauguse.

Punktide X_1 ja X_2 vaheline kaugus on lõigu X_1X_2 ehk, mis on seesama, lõigu X_2X_1 pikkus. Seda pikkust mõistetakse alati positiivse arvuna. Joonisel 44 kujutatud juhul on otsitav kaugus $d = x_2 - x_1$. See vahe on positiivne. Joonisel 45 kujutatud juhul seevastu on $d = x_1 - x_2$ ehk, teisiti, $d = -(x_2 - x_1)$. Vahe $x_2 - x_1$ on negatiivne, $-(x_2 - x_1)$ positiivne. Mõlemaid juhte haaravaks valemiks on $d = |x_2 - x_1|$. Tehes joonised ka punktide X_1 ja X_2 teiste võimalike asetusviiside jaoks nullpunkti suhtes, näeme, et kõigil neil juhtudel jääb kehtima valem *



Joon. 44.



Joon. 45.

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Tulemust võime sõnastada järgmiselt:

abstsisstelje kahe punkti vaheline kaugus on võrdne nende punktide abstsisside vahe absoluutväärtusega.

Näide. Olgu $X_1 \equiv (-8)$, $X_2 \equiv (-15)$. Siis nende punktide vaheline kaugus

$$d = |(-15) - (-8)| = |-15 + 8| = |-7| = 7.$$

§ 17. PUNKTI ASUKOHA MÄÄRAMINE TASAPINNAL

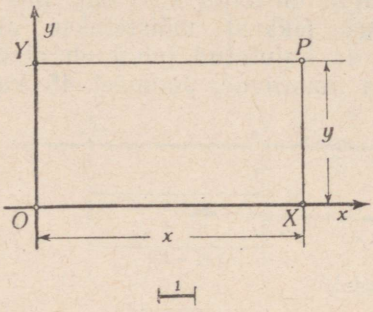
Ristkoordinaatide mõiste

Tegeliku elu küsimuste lahendamisel osutub sageli vajalikuks anda mõne eseme asukoht, fikseerida tema paiknemine. Niisuguse küsimuse ees seisame näiteks mõne muinaseseme leidmisel, mõne maavara avastamisel jne. Iga eseme asend määratakse ikka mingite teiste, kindlalt paigal püsivate objektide suhtes, nagu piirikivi, puutüvi, raudteetamm, metsasiht, kaks ristuvat tänavat jne. Sagedamaks juhuks on koha määramine tasapinnal kahe ristuva

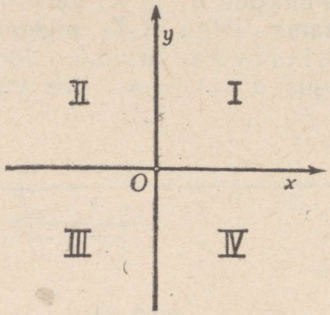
* Sümbol d on esitäht ladinakeelsest sõnast *distantia* — vahemaa, kaugus.

sihi suhtes, nagu kaks ristuvat majaseina, kaks ristuvat tänavat, kaks ristuvat metsasihti jne. Vaatleme küsimust üldiselt.

Olgu antud tasapind ja sellel kaks ristuvat sirget (joon. 46). Olgu P tasapinna mingi punkt. Seame endale ülesandeks määrata punkti P asukoht antud kahe sirge suhtes. Ülesande lahendamiseks märgime kummalgi sirgel eelkõige noolega positiivse suuna. Positiivse suuna vastassuunda nimetame negatiivseks suunaks. Lühiduse mõttes lepime kokku edaspidi nimetada sirget, millel on märgitud suund, teljeks. Vahe tegemiseks kahe meil oleva telje vahel nimetame üht neist x-teljeks, teist y-teljeks. Võtame telgede lõikepunkti O kummalgi teljel nullpunktiks ja valime pikkuste mõõtmiseks ühiku, näiteks 1 cm. Projekteerime nüüd punkti P kummalegi teljele; olgu punkt X punkti P projektsioon x-teljele ja punkt Y punkti P projektsioon y-teljele. Mõõdame lõigud OX ja OY ning võtame mõõtmistulemused märgiga pluss või miinus olenevalt sellest, kas punkti P projektsioon vastaval teljel asub nullpunktist positiivses või negatiivses suunas. Nii saadud arve märgime tähtedega x ja y; esimest arvu nimetame punkti P abstsissiks, teist punkti P ordinaadiks*. Sellele vastavalt nimetame x-telge ka abstsisstelje ks ja y-telge ordinaatteljeks. Mõlemaid arve x ja y koos nimetame punkti P koordinaatideks**. Abstsiss- ja ordinaattelg moodustavad koos koordinaatteljestiku. Koordinaattelgedega antud tasapinda nimetatakse koordinaattasapinnaks ehk ka xy-tasapinnaks.



Joon. 46.



Joon. 47.

Abstsiss- ja ordinaattelg jaotavad koordinaattasapinna neljaks veerandiks; neid nimetame joonisel 47 näidatud järjekorras esimeseks, teiseks, kolmandaks ja

* Lad. k. *ordinare* — korraldama.
** Lad. k. *coordinare* — vastavusse seadma.

neljandaks veerandiks. Arvestades telgede suundi, saame järgmise tabeli punkti koordinaatide märkide jaoks:

Veerand, milles punkt asetseb	Abstsissi märk	Ordinaadi märk
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

Jooniselt 46 näeme, et

$$YP = OX \quad \text{ja} \quad XP = OY$$

ehk

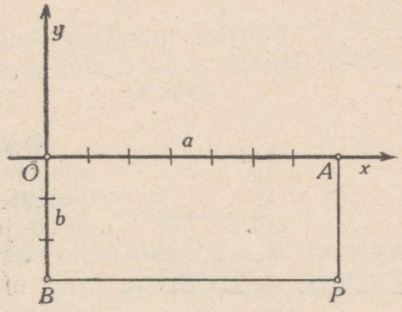
$$YP = x \quad \text{ja} \quad XP = y \text{ ühikut;}$$

seega punkti koordinaadid näitavad punkti kaugust koordinaattelgedest. Nimelt:

tasapinna punkti abstsiss on arv, mis näitab, kummal pool ordinaattelge ja mitme ühiku kaugusel ordinaatteljest punkt asetseb;

tasapinna punkti ordinaat on arv, mis näitab, kummal pool abstsisstelge ja mitme ühiku kaugusel abstsisteljest punkt asetseb.

Punkti koordinaatide kirjeldatud määramisviisist nähtub, et igale tasapinnal võetud punktile vastab üksainus paar koordinaate. On selge, et ümberpöördult ka igale etteantud koordinaatide paarile vastab üksainus punkt tasapinnal. Tõepoolest, olgu punkti abstsiss a ja ordinaat b. Arvude a ja b järgi märgime abstsiss- ja ordinaatteljel lõigud OA ja OB (joon. 48); tõmmates punktidest A ja B ristsirged lõikudele OA ja OB, näeme, et need ristsirged lõikuvad punktis P. Kiiremini kui praegu kirjeldatud võttega leiame punkti P, kui abstsissi a järgi märgime lõigu OA, punktist A tõmbame ristsirge x-teljele ja sellel ristsirgel märgime ordinaadi b järgi lõigu $AP = b$. Lõike OA ja AP nimetame vastavalt punkti abstsiss- ja ordinaatlõiguks. Nii näeme, et



Joon. 48.

punkti abstsiss ja ordinaat määravad täielikult punkti asukoha tasapinnal.

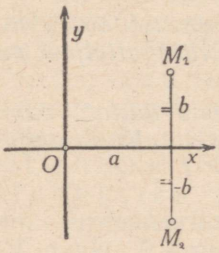
Seepärast võime ülesannet «leida tasapinna punkt P» mõista ülesandena «leida punkti P koordinaadid».

Punkti, mille koordinaadid on x ja y, märgime sümboliga (x, y). Abstsiss kirjutatakse alati esimesele, ordinaat teisele kohale. Üldjuhul, kui mõlemad koordinaadid on märgitud tähtedega, kasutame abstsissi ja ordinaadi eraldamiseks koma; juhul aga, kus koordinaatideks on konkreetsed arvud, eraldame abstsissi ordinaadist semikooloniga. Nii tähendab $(-3{,}4;\ 2{,}7)$ punkti abstsissiga $-3{,}4$ ja ordinaadiga $+2{,}7$.

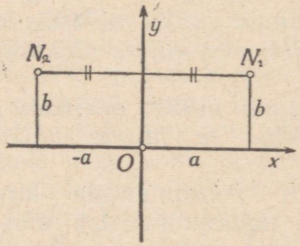
Ütlusi «punkti P abstsiss on x ja ordinaat y» ja «punkt P koordinaatidega x ja y» kirjutatakse lühidalt kujul

$$P \equiv (x, y).$$

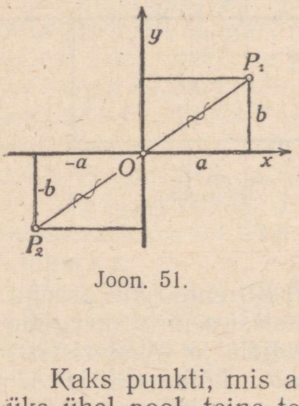
Tavaliselt jäetakse lühiduse huvides märk $\equiv$ ära ja kirjutatakse lihtsalt $P(x, y)$.



Joon. 49.



Joon. 50.



Joon. 51.

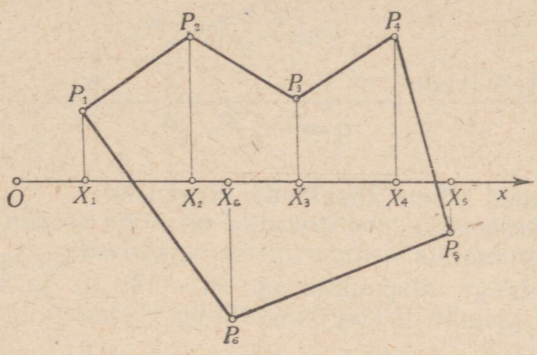
Kaks punkti, mis asetsevad x-telje ühel ja samal ristsirgel, üks ühel pool, teine teisel pool telge ja võrdseil kaugusil teljest, on selle telje suhtes sümmeetrilised punktid. Neil punktidel on üks ja seesama abstsiss ja võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega ordinaadid. Joonisel 49 näiteks on punktid $M_1(a, b)$ ja $M_2(a, -b)$ x-telje suhtes sümmeetrilised punktid. Joonisel 50 märgitud punktid $N_1(a, b)$ ja $N_2(-a, b)$ näiteks on y-telje suhtes sümmeetrilised punktid.

Kaks punkti, mis asetsevad nullpunktiga ühel ja samal sirgel, üks ühel pool, teine teisel pool nullpunkti võrdseil kaugusil nullpunktist, on sümmeetrilised nullpunkti suhtes. Nende punktide

samanimelised koordinaadid on võrdsete absoluutväärtustega, kuid vastupidiste märkidega. Joonisel 51 näiteks on punktid $P_1(a, b)$ ja $P_2(-a, -b)$ sümmeetrilised nullpunkti suhtes.

Koordinaatide mõiste rakenduslik väärtus

Koordinaatide mõistel on suur praktiline tähtsus: enamik kaardistamise ja plaanistamise võtteid tugineb koordinaatide mõistele. Kui on näiteks tarvis plaanistada maatükk $P_1P_2P_3 \ldots$ (joon. 52), siis võtame mingi sihi x-teljeks ja mingi selle telje



Joon. 52.

punkti O nullpunktiks, projekteerime vastavate optiliste riistade abil punktid P_1, P_2, P_3, ... sellele teljele, leides niiviisi punktid X_1, X_2, X_3, ..., ja mõõdame lõigud

$$OX_1,\ OX_2,\ OX_3,\ \ldots$$

ja

$$X_1P_1,\ X_2P_2,\ X_3P_3,\ \ldots$$

Varustades saadud arvud vajalike märkidega, saame punktide P_1, P_2, P_3, ... koordinaadid, mille järgi on lihtne neid punkte kohaselt valitud mõõdus plaanile märkida.

Töö hõlbustamiseks on plaani valmistamisel kohane kasutada koordinaatpaberit, s. o. ühtlase ruutvõrguga kaetud paberit, näiteks millimeetripaberit.

§ 18. LÕIGU JAOTAMISE ÜLESANDEID TASAPINNAL. TASAPINNA KAHE PUNKTI VAHELINE KAUGUS

Sirglõigu keskpunkti koordinaadid

Olgu antud tasapinnal sirglõik, mille otspunktid on $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$. Leiame selle lõigu keskpunkti koordinaadid. Olgu lõigu P_1P_2 keskpunkt $P(x, y)$ ja punktide P_1, P ja P_2 projektsioonid x-teljel vastavalt X_1, X ja X_2. Et $P_1P = PP_2$, siis on kiirte lause põhjal ka $X_1X = XX_2$. Seega punkt X on lõigu X_1X_2 keskpunkt ja järelikult tema abstsiss

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Analoogiliselt leiame, et

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Saadud valemeid võime sõnastada järgmiselt:

sirglõigu keskpunkti koordinaadid on lõigu otspunktide samanimeliste koordinaatide aritmeetilised keskmised.

N ä i d e. Lõigu otspunktid on $P_1(-14; 9)$ ja $P_2(6; -5)$. Selle lõigu keskpunkti P koordinaadid on vastavalt

$$x = \frac{-14 + 6}{2} = -4 \text{ ja } y = \frac{9 + (-5)}{2} = 2,$$

seega

$$P(-4; 2).$$

Lõigu jaotamine antud suhtes

Olgu xy-tasapinnal asetsev lõik antud oma otspunktidega $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$. Leiame punkti, mis jaotab antud lõigu suhtes $\lambda_1 : \lambda_2$.

I. S e e s p i d i s e j a o t a m i s e j u h t

Asetsegu otsitav punkt P antud lõigul punktide P_1 ja P_2 v a h e l (joon. 53). Siis

$$P_1P : PP_2 = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Olgu punktide P_1, P ja P_2 projektsioonid x-teljel vastavalt X_1, X ja X_2. Kiirte lause põhjal

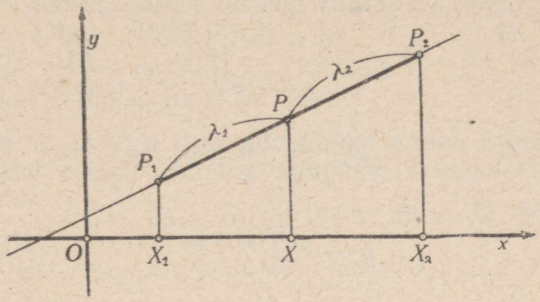
$$P_1P : PP_2 = X_1X : XX_2.$$

Järelikult

$$X_1X : XX_2 = \lambda_1 : \lambda_2.$$

Sellega on jaotuspunkti abstsissi leidmine taandatud juba eespool käsitletud ülesandele: jaotada abstsissteljel asetsev lõik antud suhtes. Kasutame varem saadud tulemust:

$$x = \frac{\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$



Joon. 53.

Analoogia põhjal

$$y = \frac{\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

II. Välispidise jaotamise juht

Asetsegu otsitav punkt P antud lõigu pikendil punkti P_2 taga (lugeja valmistagu ise vastav joonis). Korrates eespool toodud mõttekäiku, leiame, et

$$x = \frac{\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{ ja } y = \frac{\lambda_1 y_2 - \lambda_2 y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Märkides suhte $\lambda_1 : \lambda_2$ tähega λ, saame otsitavate koordinaatide avaldisi kirjutada

juhul I kujul

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

juhul II kujul

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda},$$

$$y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Kolmnurga raskuspunkti koordinaadid

Kolmnurgakujulise lesta tippudeks on punktid $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ja $P_3(x_3, y_3)$. Leiame lesta raskuspunkti koordinaadid. Teades, et kolmnurga raskuspunkt asetseb tema mediaanide

lõikepunktis ja seega jaotab mediaani suhtes 1 : 2, leiame näiteks külje P_2P_3 poolituspunkti P abstsissi

$$\frac{x_2 + x_3}{2}$$

ja seejärel lõiku PP_1 suhtes 1 : 2 jaotava punkti Q abstsissi:

$$x = \frac{1 \cdot x_1 + 2 \cdot \frac{x_2 + x_3}{2}}{1 + 2}$$

ehk

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}.$$

Samuti leiame, et

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

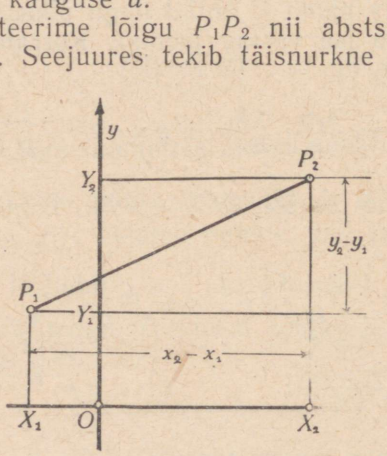
Niisiis:

kolmnurkse lesta raskuspunkti koordinaadid on tippude samanimeliste koordinaatide aritmeetilised keskmised.

Tasapinna kahe punkti vaheline kaugus

Olgu antud kaks punkti $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$. Leiame nende punktide vahelise kauguse d.

Selleks projekteerime lõigu P_1P_2 nii abstsiss- kui ordinaatteljele (joon. 54). Seejuures tekib täisnurkne kolmnurk hüpote-



Joon. 54.

nuusiga P_1P_2. Kolmnurga kaatetid aga võrduvad lõigu P_1P_2 projektsioonidega $X_1X_2 = |x_2 - x_1|$ ja $Y_1Y_2 = |y_2 - y_1|$. Nagu on kerge veenduda, jääb öeldu kehtivaks punktide P_1 ja P_2 igasuguse

asetuse puhul koordinaattelgede suhtes. Seepärast Pütagorase lause põhjal $d^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$. Et koordinaatide absoluutväärtuste ruudud on samad mis vahede endi ruudud, siis

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ehk, sõnastatult,

tasapinna kahe punkti vahelise kauguse ruut võrdub punktide ühenimeliste koordinaatide vahede ruutude summaga.

N ä i d e. Olgu $P_1(3; -2)$ ja $P_2(-5; 4)$. Siis $d^2 = [-5 - 3]^2 + [4 - (-2)]^2 = (-8)^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$. Järelikult $d = \sqrt{100} = 10$.

Märgime, et praegu tuletatud valem annab õigesti ka koordinaattelje kahe punkti vahelise kauguse. Tõepoolest, kui näiteks

$$P_1(x_1, 0) = X_1 \text{ ja } P_2(x_2, 0) = X_2,$$

siis

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (0 - 0)^2 = (x_2 - x_1)^2,$$

nii et

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}.$$

Missuguse märgiga ka ei oleks vahe $x_2 - x_1$, ikka on selle vahe ruut p o s i t i i v n e ja juurimine teostatav. Tulemus on sama, mille annab valem

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Saadud valem kahe punkti vahelise kauguse ruudu jaoks on Pütagorase teoreemi analüütiliseks väljenduseks. Ta on tähtsamaid valemeid kogu matemaatikas. See valem leiab laialdast kasutamist ka matemaatika kõigil rakendusaladel.

N ä i d e. Olgu mingi suuruse õige väärtus a. Olgu suurus mõõdetud kaks korda ja saadud tema väärtuseks esimene kord x_1 ja teine kord x_2. Kujutame xy-tasapinnal punkti $P(a, a)$ ja punktid $P_1(x_1, a)$ ning $P_2(a, x_2)$. Kaugused PP_1 ja PP_2 ehk

$$\sqrt{(a - x_1)^2} \text{ ja } \sqrt{(a - x_2)^2}$$

kujutavad siis mõõtmisvigu. Mõõtmistulemuste paar on ilmselt seda paremas kooskõlas arvuga a, mida väiksem on mõõtmisvigade summa

$$\sqrt{(a - x_1)^2} + \sqrt{(a - x_2)^2}.$$

Selle summa abil saab järelikult iseloomustada arvude x_1 ja x_2 hajuvust väärtuse a suhtes. See summa annab punktide P_1 ja P_2 vahelise kauguse liikumisel punktist P_1 punkti P_2 p u n k t i P k a u d u. Võiks aga arutleda ka teisiti: mõõtmistulemuste kooskõla arvuga a on silmanähtavalt seda parem, mida väiksem

on *otseteed mõõdetud* kaugus P_1P_2. Sel puhul iseloomustaks mõõtmistulemuste kooskõla arvuga a avaldis

$$\sqrt{(a-x_1)^2+(a-x_2)^2}.$$

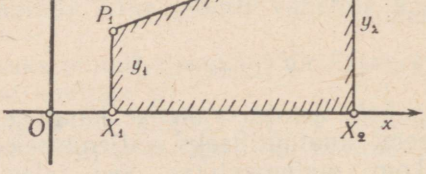
See avaldis sobib siis ka mõõtmistulemuste hajuvuse iseloomustamiseks. Kahest kirjeldatud hajuvusnäitajast on teine *väiksem* kui esimene. Tal on ka teisi eeliseid esimese ees. Seetõttu ongi jäädud peatuma hajuvuse iseloomustamisele just avaldisega

$$\sqrt{(a-x_1)^2+(a-x_2)^2}.$$

§ 19. PINDALADE ARVUTUSI

Lõigualuse trapetsi pindala

Olgu lõik antud oma otspunktidega $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$ (joon. 55). Langetades neist punktidest perpendikulaarid x-tel-



Joon. 55.

jele, saame «lõigualuse trapetsi» $X_1P_1P_2X_2$. See trapets on *täisnurkne*. Trapetsi rööbikute külgede poolsumma on $\frac{1}{2}(X_1P_1+X_2P_2)$ ehk $\frac{1}{2}(y_1+y_2)$. Joonisel on trapetsi mõlemad rööbikud küljed positiivsed, seega on positiivne ka nende külgede summa. Kui trapetsi kõrguse arvutame valemi $X_1X_2=x_2-x_1$ järgi, saame selle kõrguse positiivsena ja trapetsi pindala

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_2-x_1)$$

on *positiivne* arv. Kui aga kõrguse arvutame valemi $X_2X_1=x_1-x_2$ järgi, saame kõrguse negatiivsena ja trapetsi pindala

$$\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2)$$

on *negatiivne* arv. Tõlgendame seda märgi vahetust pindala avaldises. Liikumise suund tipust X_1 tipu X_2 poole määrab kindla *ümberkäigu suuna* liikumisel trapetsi piirjoont mööda: tipud esinevad siis järjekorras $X_1X_2P_2P_1X_1$. Liikumise suund tipust X_2 tipu X_1 poole viib tippude järjekorrale $X_2X_1P_1P_2X_2$. Ümberkäigu suund on nüüd endisega võrreldes vastupidine: kui enne toimus ümberkäik *vastu kellaosuti liikumise suunda*, siis nüüd toimub ta *kellaosuti liikumise suunas*. Nagu näeme, peegeldub trapetsi tippude koordinaatidest arvutatud trapetsi pindala märgis *ümberkäigu suund*, milles oleme liikunud piki trapetsi piirjoont.

Üldistame siin tähelepandut. Sirglõike ja nurki, nagu teame, on osutunud otstarbekohaseks vaadelda mitte üksnes suuruse järgi, vaid arvestada ka *suunda*, milles sirglõigul liigutakse või milles nurga esimesest haarast pöördutakse teise haara poole; sellele vastavalt antakse nende mõõtarve *märgiga arvudena*, näiteks

$$X_1X_2 = +7 \text{ ehk lühidalt } X_1X_2 = 7, \quad Y_1Y_2 = -10,$$
$$\alpha = +36° \text{ ehk lühidalt } \alpha = 36°, \quad \beta = -78° \text{ jne.}$$

Vaatleme ka pindala *märgiga suurusena*: kui mõne kujundi piirjoont mööda on liigutud ringi kellaosuti liikumise suunas, siis märgime seda ära, võttes kujundi pindala mõõtarvu märgiga *miinus*, kui aga see liikumine on toimunud vastu kellaosuti liikumise suunda, siis võtame pindala mõõtarvu märgiga *pluss*.

Kolmnurga pindala

Olgu kolmnurk antud oma tippudega $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ ja $P_3(x_3, y_3)$. Arvutame kolmnurga pindala tema tippude koordinaatidest.

Nagu nähtub jooniselt 56, on otsitav pindala võrdne lõikudele X_1X_2, X_2X_3 ja X_3X_1 toetuvate trapetsite pindalade summaga: tõepoolest, esimesed kaks pindala on positiivsed, kolmas aga on negatiivne. Seega otsitav pindala

$$S = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + \\ + \frac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_1 - x_3).$$

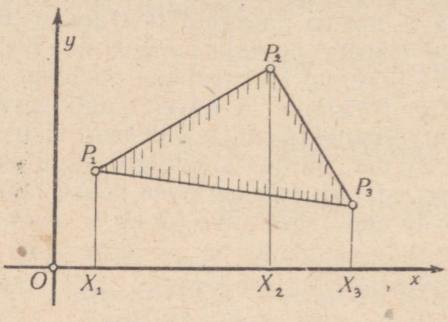
Avades sulud, koondades sarnased liikmed ja võttes ülejäänud liikmeis ordinaadid sulgude ette, saame valemi

$$S = \frac{1}{2}[y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)].$$

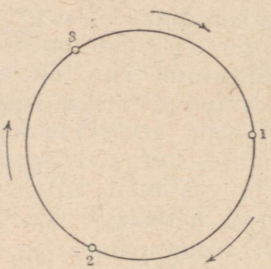
Valemi meelespidamiseks paneme tähele, et indeksid valemi kolmes liikmes on

$$1\ 2\ 3,\quad 2\ 3\ 1,\quad 3\ 1\ 2;$$

nad saadakse numbrite 1, 2 ja 3 tsüklilise ümberpaigutamise teel. Joonisel 57 on kujutatud negatiivse pindala juhule vastav indeksite tsükliline ümberpaigutus.



Joon. 56.



Joon. 57.

Märgime, et arv S tuleb negatiivne, kui võtame kolmnurga tipud järjekorras $P_1P_2P_3$ või $P_2P_3P_1$ või $P_3P_1P_2$, ja positiivne, kui võtame nad järjekorras $P_1P_3P_2$ või $P_3P_2P_1$ või $P_2P_1P_3$. Nagu näeme, tuleb kolmnurga pindala positiivne, kui liigume kolmnurga piirjoont mööda vastu kellaosuti liikumise suunda, ja negatiivne, kui liigume kolmnurga piirjoont mööda kellaosuti liikumise suunas.

Näide. Olgu kolmnurga tippudeks punktid $P_1(-3;\ -1)$, $P_2(5;\ 7)$ ja $P_3(0;\ -4)$. Siis kolmnurga $P_1P_2P_3$ pindala on

$$\frac{1}{2}\{(-1)(5-0)+7[0-(-3)]+(-4)[(-3)-5]\}=$$

$$=\frac{1}{2}(-5+21+32)=24.$$

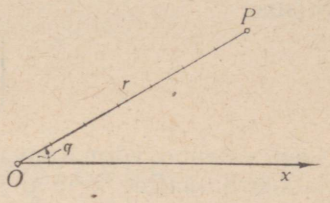
§ 20. POLAARKOORDINAADID

Polaarkoordinaatide mõiste

Punkti asukoha määramiseks tasapinnal pole tingimata tarvis kasutada abstsissi ja ordinaati; seda võib teha ka mitmel teisel viisil. Üks eriti laialt kasutatavaid võtteid selleks on järgmine.

Võtame tasapinnal mingi kindla punkti, näiteks punkti O (joon. 58), ja sellest punktist lähtuva kindla kiire, näiteks kiire Ox

positiivse suunaga punktist O eemale. Olgu P punkt, mille asendit tahame määrata. Ühendame punkti P punktiga O ja märgime lõigu OP pikkuse tähega r. Mõõdame ära nurga xOP, lugedes seda vastupidi kellaosuti liikumise suunale. Märgime tulemuse tähega φ.* On selge, et igale punktile P (välja arvatud punkt O) vastab üksainus paar suurusi r ja φ ja, ümberpöördult, igale etteantud väärtuste paarile r ja φ vastab üksainus punkt. Punktile O vastab üheselt väärtus $r = 0$ ja ümberpöördult; nurk φ pole punkti O korral määratav.



Joon. 58.

Arve r ja φ nimetatakse punkti P polaarkoordinaatideks, arvu r punkti P raadiusvektoriks ehk polaarkauguseks ja arvu φ polaarnurgaks. Punkti O nimetatakse pooluseks, kiirt Ox polaarteljeks.

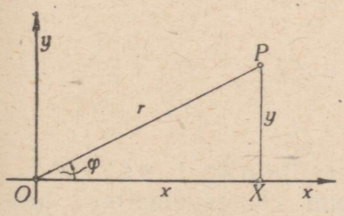
Tõsiasja, et punkti P polaarkoordinaadid on r ja φ, kirjutame kujul

$$P \equiv (r, \varphi).$$

Polaarkoordinaatide seos ristkoordinaatidega

Seame endale ülesandeks avaldada punkti ristkoordinaadid x ja y teada olevate polaarkoordinaatide kaudu.

Võttes x-telje piki polaartelge ja alguspunktiks pooluse, näeme jooniselt 59, et



Joon. 59.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

millega ülesanne on lahendatud.

Vastupidise ülesande — kuidas arvutada punkti polaarkoordinaate, kui on teada tema ristkoordinaadid — lahendamiseks arvutame eespool toodud võrdustest suurused r ja φ.

Tõstes need võrdused ruutu ja liites tulemused, leiame, et

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2.$$

* Nurga φ loeme asetsevaks 0° ja 360° vahel.

Jagades teise võrduse liikmeti esimesega, näeme, et

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \tan \varphi.$$

Niisiis

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Need valemid võimaldavad leida polaarkoordinaate r ja φ antud ristkoordinaatide x ja y järgi. Veerandi määramisel, milles asub nurk φ, tuleb abiks võtta abstsissi ja ordinaadi märgid.

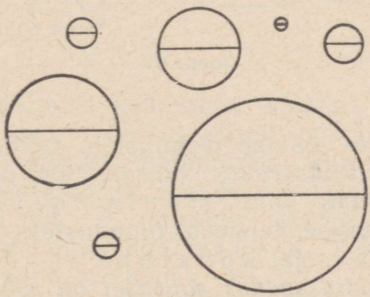
PEATÜKK VI

FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS

§ 21. MUUTUVAD JA MUUTUMATUD SUURUSED

Muutuvate ja muutumatute suuruste definitsioon

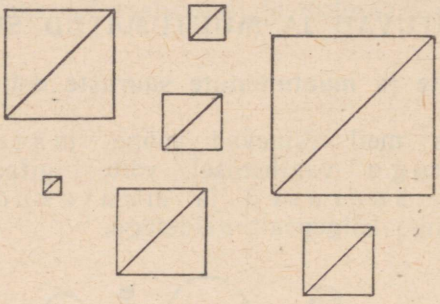
Suurusi, mis meil esinevad mõne matemaatiliste objektide kogu vaatlemisel, võib liigitada kahte liiki: muutumatud suurused ja muutuvad suurused. Selgitame küsimust kõigepealt näidetega.



Joon. 60.

Näide 1. Kujutleme kõiki mõeldavaid ringe (joon. 60). Kui vaatleme esiteks mingit üht neist, edasi järjest teist, kolmandat jne., siis näeme, et ühel neist on üks läbimõõt, teisel teine, kolmandal kolmas jne. Lühidalt — üleminekul ühelt ringilt teisele muutub ringi läbimõõt D ja muutub ka ringi ümbermõõt C. Meie ringide kogus on D ja C muutuvad suurused. Kui aga moodustame ümbermõõdu ja läbimõõdu suhte $C : D$, siis on see suhe kõigi ringide puhul üks ja seesama; kõnesolev suhe ei muutu üleminekul ühelt ringilt teisele. Suhte $C : D$ väärtuseks on arv π. Suurused C ja D on meie ringide kogus muutuvad suurused, nende suhe $C : D$ on aga muutumatu suurus.

Näide 2. Kujutleme kõiki mõeldavaid ruute (joon. 61). Üleminekul ühelt ruudult teisele muutub ruudu külje pikkus a, muutub ruudu diagonaali pikkus d, muutub ruudu ümbermõõt u ja muutub ka ruudu pindala S. Muutumatuks jäävad aga näiteks ruudu nurk α ning diagonaali ja külje suhe $d : a$. Iga nurk ruudus on iga ruudu puhul täisnurk; diagonaali ja külje suhte $d : a$ väärtuseks on iga ruudu puhul arv $\sqrt{2}$. Suurused a, d, u ja S on meie ruutude kogus muutuvad suurused, seevastu α ja $d : a$ on meie ruutude kogus muutumatud suurused.



Joon. 61.

Öeldut üldistades jõuame järgmistele definitsioonidele.

Kui mingis küsimusseades suurusel on ainult üks arvuline väärtus, siis nimetame teda muutumatuks suuruseks.

Muutumatu suuruse teisteks nimetusteks on jääv suurus, lühidalt jääv, ja konstant*.

Kui mingis küsimusseades suurusel on rohkem kui üks arvuline väärtus, siis nimetame teda muutuvaks suuruseks.

Muutuva suuruse teiseks nimetuseks on muutuja, ka variant**.

Konstandi sümboliks on *const*. Konstante tähistame harilikult tähtedega c, a, b, m, n, p ja q, tarbe korral ka teiste tähtedega, lisades aga ikka juurde, et need sümbolid tähendavad konstante, näiteks kujul $c = const$, $m = const$ jne.

On endastmõistetav, et kahe konstandi summa, vahe ja korrutis on jällegi konstandid. Ka kahe konstandi jagatis on jällegi konstant, kui ainult jagajaks olev konstant ei ole null.

Muutujaid märgime tähtedega x, y, z, s, t, u, v, w, tarbe

---

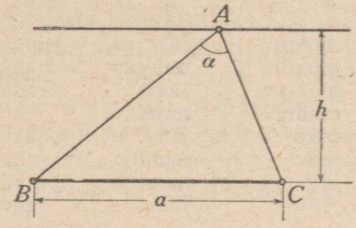
* Lad. k. *constantus* — püsiv, muutumatu.

** Lad. k. *variabilis* — muutuv.

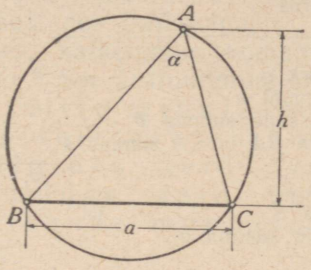
korral aga ka teiste tähtedega, nagu h, r, α, β, γ jne. Eksituste ärahoidmiseks võib lisada sõnades, et x, h, α jne. on muutuvad suurused ehk, sümbolites, $x = var$, $h = var$ jne.

Konstandid ja muutujad nähtuskäikude kirjeldamisel

Veel selgemini ja ilmekamalt kui eespool käsitletud näiteis tuleb vahe muutumatute ja muutuvate suuruste vahel esile, kui jälgime suuruste väärtusi ühenduses mõne nähtuse arenemisega või protsessi kulgemisega. Toome selleks järgmised näited.



Joon. 62.

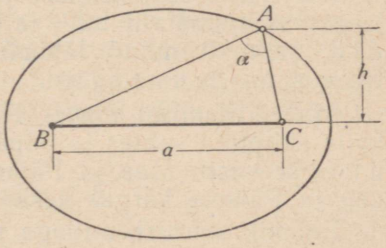


Joon. 63.

Näide 1. Vaatleme kolmnurka alusega $BC = a$ ja tipuga A, mis liigub alusega rööbikut sirget mööda (joon. 62). Seejuures muutub järjest kolmnurga kuju: muutub tipunurk α, muutub kolmnurga ümbermõõt u, muutub alusnurkade summa ϑ, muutub külgede BA ja CA summa s, ei muutu aga alus a, kõrgus h, pindala S ja nurkade summa σ.

Näide 2. Vaatleme kolmnurka, mille aluseks on ringi kõõl $BC = a$ ja mille tipp A liigub mööda ringjoone kaart (joon. 63). Seejuures muutub järjest kolmnurga kuju: ei muutu küll tipunurk α, muutub aga kolmnurga ümbermõõt u, ei muutu alusnurkade summa ϑ, ei muutu alus a, muutuvad aga külgede BA ja CA summa s, kõrgus h ja pindala S, ei muutu nurkade summa σ.

Näide 3. Vaatleme niitkolmnurka BAC, mille tippudeks B ja C on joonestuslauda torgatud nõelad (joon. 64). Punktis A olev pliiatsitipp, liikudes nii, et niit kogu aeg jääb pingule, kirjeldab joone, mida nimetatakse ellipsiks; punkte B ja C nimetatakse selle ellipsi fookus-



Joon. 64.

teks. Jälgides punkti A liikumist mööda ellipsit, näeme, et seejuures muutub tipunurk α, ei muutu aga kolmnurga ümbermõõt u, muutub alusnurkade summa ϑ, ei muutu alus a, ei muutu külgede BA ja CA summa s, muutub kõrgus h, muutub pindala S, ei muutu nurkade summa σ.

Asendades sõnad «ei muutu» sõnadega «on jääv», saame oma vaatlustulemused kokku võtta tabeliks:

Vaatlustulemuste tabel

Suurus \ Vaatlus	1	2	3
Tipunurk α	muutuv	jääv	muutuv
Ümbermõõt u	muutuv	muutuv	jääv
Alusnurkade summa ϑ	muutuv	jääv	muutuv
Külgede BA ja CA summa s	muutuv	muutuv	jääv
Alus a	jääv	jääv	jääv
Kõrgus h	jääv	muutuv	muutuv
Pindala S	jääv	muutuv	muutuv
Nurkade summa σ	jääv	jääv	jääv

Nagu näeme, võib suurus, mis ühes protsessis on jääv, teises protsessis olla muutuv; suuruste jäävuse või muutuvuse küsimust ei saa otsustada omaette, vaid ainult seoses selle protsessiga, milles need suurused esinevad. Vaatleme näiteks kõigil võimalikel viisidel suuruselt ja kujult muutuvat täisnurkset kolmnurka. Selles muutuvas täisnurkses kolmnurgas on muutuvad teravnurgad α ja β, kaatetid a ja b, hüpotenuus c, trigonomeetrilised suurused $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\tan\alpha$, $\tan\beta$, kolmnurga kõrgus h, pindala S ja ümbermõõt u. Samal ajal jäävad seal konstantseks täisnurk γ, teravnurkade summa $\alpha+\beta$, vahe $c^2-(a^2+b^2)$, korrutis $\tan\alpha\cdot\tan\beta$, jagatis $S:ch$, summa $\sin^2\alpha+\sin^2\beta$, vahe $ab-ch$, korrutis $\tan\alpha\cdot\cot\alpha$, ning kolmnurga tippudega määratud ringi pindala ja hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala suhe.

Kui münt soojenemisel paisub, siis on mündi kaal, mündis leiduv väärismetalli hulk ja mündi väärtus rahana konstandid; seevastu mündi läbimõõt, mündi ruumala ja mündi metalli tihedus on muutujad.

Maa tiirlemisel ümber Päikese on Maa läbimõõt, Maa telje kalle ekliptika suhtes ja ööpäeva pikkus praktiliselt konstandid; seevastu Maa ja Päikese vaheline kaugus, Päikese tõusuaeg ja Päikese kõrgus keskpäeval on muutujad.

Enamik suurusi, millega puutume kokku igapäevases elus, on muutuvad suurused: õhurõhk, õhu temperatuur, õhu rela-

tiivne niiskus, tuule kiirus, nisusaak hektarilt, inimese kehakaal, hoiuarvel seisev säästusumma jne.

Pikemat aega muutumatuna püsivatest suurustest võiks nimetada järgmisi: vabrikutöölise tööpäeva pikkus, õppeaja kestus kõrgemates koolides, püügiks lubatud vähi minimaalmõõt, suhkru kilogrammi hind, valgustusvoolu kilovatt-tunni hind jne.

Kui antiikaja matemaatika uuris arvusid ja kujundeid oleva ja püsiva peegelduse ja kehastusena, siis uue aja matemaatika on võtnud endale keskseks ülesandeks muutuvuse uurimise. Tahtes täielikumalt peegeldada meid ümbritsevat tõelisust, polnud võimalikki teha teist valikut. Sest, F. Engelsi sõnadega: «... kogu loodus, tema pisimatest osakestest suurimate kehadeni, alates liivaterakesest ja lõpetades Päikesega, ... oleleb igaveses tekkimises ja hävimises, katkematus voolamises, lakkamatus liikumises ja muutumises.» * See äratundmine kohustab meid vaatlema suurusi mitte ainult huvitudes nende ühtedest või teistest hetkelistest väärtustest, vaid jälgides neid nende muutumise protsessis, uurides neid nende põhilises oleluses, see on nende muutuvuses.

Muutuja väärtuste varu. Muutumispiirkond

Väärtused, mida muutuja antud protsessis omab, moodustavad selle muutuja väärtuste varu.

Muutuja väärtuste varu võib ühes protsessis olla näiteks kõigi täisarvude kogu: 1, 2, 3, ... ; teises protsessis kõigi algarvude kogu 2 ja 13 vahel, viimased kaasa arvatud, seega algarvude kogu: 2, 3, 5, 7, 11, 13; kolmandas protsessis võib see olla näiteks kõigi $\frac{n-1}{n}$-kujuliste murdude kogu: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$, jne. Nii on relatiivse niiskuse väärtuste varu 0, 1, 2, ..., 98, 99, 100, sest see suurus antakse täisprotsentides; korrapärase hulknurga sisenurga väärtuste varu on kraadides mõõdetult 60, 90, 108, ..., üldiselt $(n-2) \cdot 180 : n$, kus n on täisarv, mis on suurem kui 2; $\sin \alpha$ väärtuste varu moodustavad kõik arvud -1 ja $+1$ vahel, arvud -1 ja $+1$ kaasa arvatud; $\tan \alpha$ väärtuste varu moodustavad kõik reaalarvud.

Kui muutuja väärtuste varu koosneb kõigist reaalarvudest x, mis asetsevad kahe tõkke a ja b vahel (need välja arvatud või kaasa arvatud), näiteks

$$a < x < b \text{ või } a \leqslant x \leqslant b,$$

* Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1950, стр. 11.

siis räägime muutuja muutumispiirkonnast. Nii saame kirjutada $\sin \alpha$ muutumispiirkonna kujul

$$-1 \leqslant \sin \alpha \leqslant +1.$$

Muutumispiirkonna mõiste kanname üle ka juhtudele, nagu

$$a \leqslant x < \infty, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Esimesel juhul pole suuruse x muutumine tõkestatud ülaltpoolt, teisel juhul pole ta tõkestatud ei alt- ega ülaltpoolt. Sümbolid $-\infty$ ja $+\infty$ ei ole arvud, kuigi me siin seome neid suurusega x suurusjärjestusmärgi $<$ abil. Need sümbolid on vaid matemaatilise lühikirja märgid selle tõsiasja kirjas avaldamiseks, et suurus x võib oma absoluutselt väärtuselt ületada iga kindla etteantud arvu.

§ 22. FUNKTSIOONI MÕISTE

Sissejuhatuseks

Kommunistliku ühiskonna ideoloogia rajaneb dialektilisel mõtlemisviisil. See eitab kõigi mõistetamatute, üleloomulike jõudude olemasolu ja lähtub eeldusest, et maailm on tunnetatav; meie ümber toimuvad nähtused osutuvad mõistetavaiks ja seega juhitavaiks, kui neid vaadelda üksteisest sõltuvaina, üksteisest tingituina.

Sellest järeldub, et nähtustevaheliste seoste, nähtuste vastastikuste sõltuvuste avastamine ja uurimine on dialektilise materialismi vaatekohalt teaduse esmaseks ja peamiseks ülesandeks. Üheks tähtsamaks vahendiks selle suure ülesande lahendamisel on viimase kolmesaja aasta kestel välja kujunenud funktsionaalse sõltuvuse mõiste ja funktsionaalsete sõltuvuste avaldamisviiside laialdane tööaparaat.

Funktsiooni mõiste selgitamine, funktsioonide omaduste avastamine, funktsionaalsete sõltuvuste erikujude uurimine ja funktsionaalsete seoste väljendusvahendite loomine on kõrgema matemaatika tähtsaimaks ülesandeks.

Teineteisest sõltuvad ja teineteisest sõltumatud suurused

Kaks mõnes probleemis vaadeldavat suurust võivad esineda kas teineteisega seostatult või teineteisega

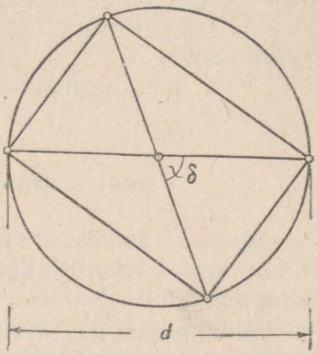
seostamatult ehk, teiste sõnadega, kaks suurust võivad esineda teineteisest sõltuvatena või teineteisest sõltumatutena. Selgitame küsimust näidete varal.

Näide 1. Kui anname ette korrapärase hulknurga tippude arvu n, siis selle arvuga on juba ette määratud ka selle hulknurga sisenurga suurus α. Tõepoolest, kui tõmbame kõik ühest tipust lähtuvad diagonaalid, laguneb hulknurk $n-2$ kolmnurgaks; nende kolmnurkade nurkade summa on $(n-2)\cdot 180°$. Teiselt poolt on see summa just hulknurga kõigi sisenurkade summa, seega $n\cdot\alpha$. Järelikult $n\alpha = (n-2)\cdot 180°$ ehk

$$\alpha = \frac{n-2}{n}\,180°.$$

Nagu näeme, on korrapärase hulknurga sisenurk ranges seoses hulknurga tippude arvuga. Seevastu selle hulknurga külg on vabalt valitav, ta pole mingil määral seotud arvuga n; me võime teda võtta nii suurena või nii väikesena kui tahame.

Näide 2. Kui anname ette ristküliku diagonaali d, siis on sellega juba ette määratud ka ristküliku ümber joonestatud ringjoone raadius (joon. 65). Seevastu ei määra diagonaal d veel mingil määral diagonaalidevahelist nurka δ: see on vabalt valitav vahemikus 0 ja 90 kraadi vahel.



Joon. 65.

Näide 3. Pileti hind kahe raudteejaama vaheliseks sõiduks ei sõltu reisija kaalust; seevastu pagasi veohind samade jaamade vahel sõltub pagasi kaalust.

Eelmises kolmes näites kasutatud kõneviis asendatakse kõrgemas matemaatikas teisega: me ütleme, et korrapärase hulknurga sisenurk sõltub hulknurga tippude arvust, hulknurga külg on sellest sõltumatu; ristküliku ümber joonestatud ringjoone raadius sõltub ristküliku diagonaalist, diagonaalidevaheline nurk on sellest sõltumatu; pagasi veohind sõltub pagasi kaalust, reisija sõidupileti hind on reisija kaalust sõltumatu.

Öeldu üldistamine viib järgmisele definitsioonile:

suurust y nimetame sõltuvaks suurusest x, kui kindlatele x väärtustele vastavad kindlad y väärtused.

Sõnastuste lühendamise eesmärgil nimetame suurust x sõltumatuks muutujaks, suurust y sõltuvaks muutujaks.

Nagu toodud sõnastusest näha, peitub kahe suuruse sõltuvuse

mõtte taga ühe suuruse väärtuste kindlakujuline vastavus teise suuruse väärtustele.

Sõltuvuse mõiste on üks neid põhilisi vahendeid, mille abil me orienteerume meid ümbritsevas nähtustikus. Jälgides mõnda protsessi, näeme, et ta kulg seisneb ikka ühe suuruse muutumises teise suuruse muutumisel: õhu temperatuur (antud kohas) muutub aja muutumisel; õhurõhk muutub kõrguse muutumisel; pendli võnkeaeg muutub pendli pikkuse muutumisel; soola lahustuvus vees muutub temperatuuri muutumisel; vee voolamiskiirus jões muutub veepinna kõrguse muutumisel jne. Täpsemalt: iga protsessi käigus vastavad ikka ühe muutuja kindlatele väärtustele teise muutuja kindlad väärtused: näiteks igale ajahetkele vastab (antud kohas) kindel õhu temperatuur; igale kõrgusele maapinnast vastab (antud ajal) kindel õhurõhk; igale pendli pikkusele vastab kindel võnkeaeg; igale temperatuurile vastab kindel liitris vees lahustuva soola hulk; igale veepinna kõrgusele jões vastab kindel vee voolamiskiirus jne. Me ütleme seepärast, et õhu temperatuur (antud kohas) sõltub ajast; et õhurõhk (antud ajal) sõltub kõrgusest maapinnast; et pendli võnkeaeg sõltub pendli pikkusest jne.

Funktsioon ja argument

Sõnade asemel sõltuv muutuja ja sõltumatu muutuja kasutatakse matemaatikas sõnu funktsioon ja argument. Niisiis:

kui ühe suuruse kindlatele väärtustele vastavad teise suuruse kindlad väärtused, siis räägime esimesest kui argumendist, teisest kui selle argumendi funktsioonist.

Veidi teiste sõnadega: kui suuruse x igale väärtusele tema väärtuste varust vastab kindel suuruse y väärtus, siis ütleme, et suurus y on suuruse x funktsioon. Nii on $\log x$ arvu x funktsioon, $\sin \alpha$ nurga α funktsioon, ringi pindala ringi läbimõõdu funktsioon, korrapärase hulknurga sisenurk selle hulknurga tippude arvu funktsioon, lõpmatu geomeetrilise rea $1, q, q^2, \ldots$ summa selle rea teguri funktsioon, hõõglambi heledus võrgupinge funktsioon, inimese keha kaal tema ea funktsioon jne.

Tabel suuruste sõltuvuse väljendajana

Praktikas üheks sagedamini kasutatavaks funktsionaalse sõltuvuse väljendamise vahendiks on tabel, millesse on märgitud argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvad väärtused:

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
.	.
.	.
.	.

Näiteina võiks nimetada arvude ruutude, kuupide, ruutjuurte, kuupjuurte ja logaritmide tabeleid; trigonomeetriliste funktsioonide väärtuste ja nende logaritmide tabeleid; igasuguste väärtuste tabeleid tehnika käsiraamatuis, näiteks: 1 km juhtmetraadi kaal sõltuvuses traadi jämedusest, auru rõhk aurukatlas sõltuvuses temperatuurist, merevee erikaal sõltuvuses lahustunud soola protsendist.

Maaliini autobussi piletile on trükitud sõidutariif tabeli kujul, milles on antud sõiduhind sõidukauguse funktsioonina. Kalendrist leiame Päikese tõusu aja, päeva pikkuse ja Päikese loojangu aja igal kuupäeval: kolme nimetatud suuruse sõltuvus kuupäeva numbrist on ka siin antud tabeli kujul.

Valem suuruste sõltuvuse väljendajana

Teine viis funktsionaalse sõltuvuse väljendamiseks seisab selles, et antakse *eeskiri*, kuidas arvutada etteantud argumendi väärtuse järgi temale vastavat funktsiooni väärtust. Matemaatikas kehtiva tava kohaselt märgitakse niisugust eeskirja ikka mõne *erisümboliga*, kusjuures sellesama sümboliga tähistatakse ka selle eeskirja rakendamise tulemust. Nii tähendab sümbol $\sqrt{x}$ nõuet leida arv, mille ruut on võrdne arvuga x; sama sümboliga märgitakse aga ka selle nõude täitmise tulemust. Sümbol $|x|$ tähendab *nõuet võtta arvu* x *absoluutväärtus*, ühtaegu aga ka *seda väärtust ennast*. Sümbol $n!$ nõuab, et moodustataks *korrutis* $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, ühtaegu tähendab ta aga ka selle korrutise arvutamise tulemust.

Et suuruse x igale väärtusele vastab oma $|x|$, siis $|x|$ on x funktsioon. Et suuruse x igale *positiivsele* väärtusele vastab oma $\sqrt{x}$ siis ka $\sqrt{x}$ on x positiivse väärtuse funktsioon. Et igale naturaalarvulisele x väärtusele vastab oma $x!$, siis see arv $x!$ on x naturaalarvuliste väärtuste funktsioon. Märkides kolme eespool toodud funktsiooni vastavalt tähtedega u, v ja w, saame nad anda valemite abil

$$u = |x|, \quad v = \sqrt{x}, \quad w = x!.$$

Iga valem on matemaatilises lühikirjas märgitud eeskiri mõne suuruse arvutamiseks. Kuubi pindala S näiteks arvutatakse kuubi servast a lähtudes valemi $S = 6a^2$ järgi; kera ruumala V arvutatakse kera läbimõõdust d lähtudes valemi $V = \frac{\pi}{6} d^3$ järgi; rööpa pikkus l arvutatakse temperatuurist t lähtudes valemi $l = l_0(1 + \alpha t)$ järgi, kus l on rööpa pikkus temperatuuril 0° ja α on rööpa aine joonpaisumistegur. Valem $S = 6a^2$ määrab kuubi pindala serva funktsioonina, valem $V = \frac{\pi}{6} d^3$ kera ruumala läbimõõdu funktsioonina, valem $l = l_0(1 + \alpha t)$ rööpa pikkuse temperatuuri funktsioonina.

Funktsioonide sümbolid

Argumendi x funktsioone on viisiks märkida sümbolitega, nagu

$$f(x), \quad \varphi(x), \quad F(x),$$

kasutades tähtede f, y ja F asemel vajaduse korral ka teisi, nagu g, ψ, H jne. Võrdusi $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$, $u = F(x)$ loeme vastavalt: «ü on ef iks», «ze on fii iks», «u on suur ef iks».

Tõsiasja, et mõni suurus S on argumendi x funktsioon, märgime mõnikord lühidalt ka nii:

$$S = S(x).$$

Täiendavate näidete saamiseks ühe suuruse avaldamise kohta teise suuruse funktsioonina lahendame järgmise ülesande.

Ülesanne. Vaadeldagu kõiki mõeldavaid ristkülikuid diagonaalidega 1. Avaldada nende kõrgus h, ümbermõõt u, külgede vahe v, pindala S ning diagonaali ja aluse vahelise nurga kootangens aluse x funktsioonina.

Lahendus. Võtame neist ristkülikuist mingi ühe, jättes ütlemata, missuguse nimelt. Selle ühe ristküliku puhul saadud seosed kehtivad siis iga niisuguse ristküliku kohta.

Joonestades võetud ristküliku ja märkides tema kõrguse h, ümbermõõdu u, pindala S ning diagonaali ja aluse vahelise nurga φ, saame Pütagorase lause põhjal, et

$$h = h(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

ja siit edasi, et

$$u = u(x) = 2(x + \sqrt{1 - x^2}),$$
$$v = v(x) = x - \sqrt{1 - x^2},$$

$$S = S(x) = x\sqrt{1-x^2},$$
$$\cot\varphi = \Phi(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Argumenti ei märgita alati tähega x; ta sümboliks võib olla ka iga teine täht.

N ä i t e i d. Ruudu ümbermõõt u on ruudu külje a funktsioon, ringi pindala S on ringi läbimõõdu D funktsioon, korrapärase hulknurga sisenurk α on tippude arvu n funktsioon. Me kirjutame:

$u = f(a)$, kus $f(a)$ tähendab avaldist $4a$;

$S = F(D)$, kus $F(D)$ tähendab avaldist $\frac{1}{4}\pi D^2$;

$\alpha = \varphi(n)$, kus $\varphi(n)$ tähendab avaldist $\frac{n-2}{n}\cdot 180°$.

Toodud näiteis, nagu

$$u(x) = 2(x + \sqrt{1-x^2}), \quad \varphi(n) = \frac{n-2}{n}\cdot 180° \text{ jne.},$$

on funktsionaalne sõltuvus sõltumatu ja sõltuva muutuja vahel väljendatud v a l e m i abil. Sel puhul on otsekohe näha ka e e s k i r i, mille järgi tuleb käia, et saada argumendi etteantud väärtusele vastavat funktsiooni väärtust.

Funktsiooni väärtus argumendi etteantud väärtusel

Funktsiooni $f(x)$ seda eriväärtust, mida ta omab argumendi eriväärtusel $x = a$, tähistame sümboliga $f(x)|_{x=a}$ ja loeme «ef iks, kui iks on võrdne a-ga». Kui ei ole kahtlust selles, et a on argumendi x eriväärtus ja mitte omaette muutuja, kirjutame eelmise veidi raskepärase sümboli asemel lihtsalt $f(a)$ ja loeme «ef a» või täpsemalt «ef kohal a».

N ä i d e. Olgu

$$f(x) = x^2 - 3x + 10.$$

Siis

$$f(x)|_{x=1} = 1^2 - 3\cdot 1 + 10 = 8,$$
$$f(x)|_{x=-2} = (-2)^2 - 3\cdot(-2) + 10 = 20,$$
$$f(0) = 0^2 - 3\cdot 0 + 10 = 10,$$
$$f(7) = 7^2 - 3\cdot 7 + 10 = 38.$$

Kui funktsiooni väärtusi on vaja arvutada argumendi paljude väärtuste jaoks, siis on kohane korraldada tööd kindlas a r v u t u s s k e e m i s, k u s i g a t e h t e t u l e m u s e l e o n e t t e n ä h t u d o m a v e e r g. Toodud näites võiks skeemi pea olla järgmine:

x	x^2	$3x$	x^2-3x	$x^2-3x+10$

Esimesse veergu märgime argumendi x väärtused, millede jaoks otsime $f(x)$ väärtusi, ja täidame siis skeemi veergude kaupa, ülalt alla liikudes.

Kahe muutuja funktsioon

Funktsiooni mõistet saab laiendada ka juhule, kus argumente on rohkem kui üks.

Näide 1. Pütagorase lause järgi avaldub täisnurkse kolmnurga hüpotenuus kaatetite a ja b kaudu kujul

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

See valem seab igale kaatetite a ja b väärtuspaarile vastavusse kindla hüpotenuusi pikkuse: hüpotenuus c on kahe muutuja a ja b funktsioon.

Näide 2. Silindri täispindala avaldub silindri raadiuse r ja kõrguse h kaudu kujul

$$S = 2\pi r(r + h).$$

Siit nähtub, et igale r ja h väärtuspaarile vastab kindel suuruse S väärtus: silindri täispindala on kahe muutuja r ja h funktsioon.

Näide 3. Koonuse ruumala V avaldub koonuse põhja raadiuse r ja moodustaja l kaudu kujul

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{l^2 - r^2}.$$

Siit nähtub, et igale r ja l väärtuspaarile vastab kindel V väärtus: koonuse ruumala on kahe muutuja r ja l funktsioon.

Kahe muutuja x ja y funktsiooni z kirjutame üldjuhul kujul

$$z = f(x, y)$$

ja loeme «ze on ef iks ü». Vajaduse korral kasutame tähe f asemel ka tähti φ, F, G jne.

Funktsiooni z eriväärtust argumentide x ja y eriväärtustel $x = a$, $y = b$ kirjutame kujul

$$f(x, y)\Big|_{\substack{x=a \\ y=b}}$$

või, kui pole kahtlust selles, et a ja b on x ja y eriväärtused, lühemalt: $f(a, b)$.

Kui on tarvis märkida mitut kahest argumendist x ja y sõltuvat funktsiooni, siis kirjutame neid kujul

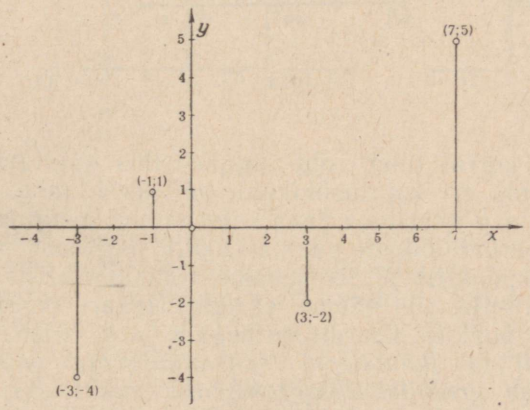
$$u = F(x, y), \qquad v = G(x, y) \text{ jne.}$$

§ 23. FUNKTSIOONI KÄIGUGRAAFIK

Eespool tutvusime suuruste x ja y funktsionaalse sõltuvuse $y = f(x)$ kahe esitusviisiga: väärtuspaaride (x, y) tabeli ja suuruse y arvutusvalemi kaudu. Palju näitlikuma kujutluse sellest sõltuvusest annavad graafilised esitusviisid. Neist võtame käsitlusele eelkõige funktsiooni käigugraafiku.

Funktsiooni käigugraafiku konstruktsiooni printsiip

Olgu (x, y) paar kokkukuuluvaid argumendi ja funktsiooni väärtusi. Valime mingi kujutusühiku l ning kujutame selle abil rõhtlõiguna arvu x ja selle lõigu lõpus püstlõiguna arvu y (joon. 66). Saame haagikujulise moodustise, mis kujutabki väärtusi x ja y kokkukuuluvaina.



Joon. 66.

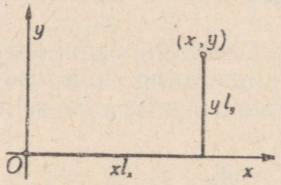
Praegu seletatud võtet rakendame funktsiooni väärtuste tabelis esineva iga väärtuspaari (x, y) kohta, alustades kõigi haakide joonistamist ühest ja samast punktist O ning arvestades väärtuste

x ja y märke haagi külje suuna valimisel: paremale ja ülespoole, kui märgiks on pluss, ning vasakule ja allapoole, kui märgiks on miinus. Kui x ja y väärtuspaaride kogu on märgitud näiteks tabelis

x	-3	-1	0	$+3$	$+7$
y	-4	$+1$	0	-2	$+5$

saame selle graafilise vastena joonisel 66 kujutatud pildi. Märgime, et pilt ei anna mõtteliselt midagi juurde tabelis toodule ega anna ka sellest vähem: ta esitab tabelis toodu vaid näitlikult.

Töö kergendamiseks võib joonise teha ruudulisel paberil, valides kujutusühikuks näiteks ruudu külje. Eriti hõlbus on töö millimeetripaberil.



Joon. 67.

Vajaduse korral tuleb rõht- ja püstsihis kujutatavate arvude puhul kasutada eri kujutusühikuid, näiteks l_x ja l_y mm. Kokkukuuluvate x ja y väärtuste paar kujutub siis haagina, mille rõht- ja püstkülje annab lõikude paar (xl_x, yl_y), nagu näeme joonisel 67.

Kui alguspunktist O joonestame rõhtsihis abstsiss- ja püstsihis ordinaattelje, siis näeme, et väärtuspaari (x, y) kujutamine haagina viib punktile koordinaatidega x ja y. Niisiis:

argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuste paari (x, y) esindab graafiliselt xy-tasapinna punkt abstsissiga x ja ordinaadiga y.

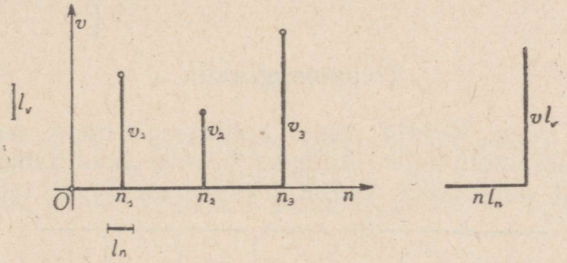
Öeldu võtamegi aluseks funktsioonide $y = f(x)$ käigugraafikute konstrueerimisel. Töö tehnilised detailid selguvad kõige paremini näidete varal. Valime teadlikult näited, mis on eriti lihtsad nii oma mõttelise sisu kui ka tehnilise käsitluse poolest.

Punktridagraafik

Jälgime mõne sportlase treeningut odaviskes ja märgime ta saavutused vaatlusprotokolli: ühte ritta viske numbrid n, teise viskekaugused v:

viske number n	n_1	n_2	n_3	...
viskekaugus v	v_1	v_2	v_3	...

Et igale tabelis märgitud n väärtusele vastab kindel v väärtus, siis on arv v arvu n funktsioon, sümbolites $v = f(n)$. See sõltuvus on antud argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuspaaride tabeliga. Et saada vaadeldavast nähtuskäigust ülevaatlikku pilti, selleks võtame tavaliselt rõhtsihilise abstsisstelje, valime tal nullpunkti ja joonestame sellest läbi ordinaattelje. Valime nüüd paraja kujutusühiku ja kujutame argumendi väär-



Joon. 68.

tused lõikudena abstsissteljel (joon. 68). Lõikude lõpp-punktidest joonestame perpendikulaarid abstsissteljele ja kujutame neil perpendikulaaridel, jälle kohaselt valitud kujutusühiku abil, arvud v. Saame rea püstlõike. Arvude v vastavus arvudele n peegeldub joonisel püstlõikude v juurdekuuluvuses rõhtlõikudele n; iga arvupaari (n, v) kujutab n- ja v-lõigust koosnev haak rõhtharuga nl_n ja püstharuga vl_v. Praegu saaduga analoogilisi jooniseid nimetatakse diagrammideks*; vaadeldavat diagrammi nimetame täpsemalt nv-diagrammiks.

Selle asemel et vaadelda nv-haake, võiksime pöörata tähelepanu koordinaadipaaridega (n, v) määratud punktidele. Nende punktide rida kujutab funktsiooni $v = f(n)$ muutu-

* Kr. k. *diagramma* — joonis.

miskäiku argumendi n muutumisel. Seepärast nimetame seda punktide rida funktsiooni $f(n)$ käigugraafikuks. Tema iseloomu alla kriipsutades räägime punktridagraafikust.

Andmete poolest ei anna meie diagramm (või funktsiooni käigugraafik) rohkem kui väärtuspaaride (n, v) tabel; joonise suureks eeliseks tabeli ees on aga näitlikkus.

Märgime, et antud juhul saavad argumendil n olla ainult naturaalarvulised väärtused: viske number ei saa olla murd- ega irratsionaalarv. Seepärast koosneb vaadeldav diagramm kahest teljest ja teatavast arvust üksikult seisvatest püstlõikudest; iga kahe teineteisele järgneva püstlõigu vahel seisab tühi riba. Seda tüüpi diagramme nimetame lõikdiagrammideks.

Kirjeldatud tüüpi diagrammid saaksime ka näiteks kujutades mitmel järjestikusel päeval kunstinäitust külastanud inimeste arvu, mitmel järjestikusel päeval meie poolt tehtud rahalisi kulutusi, järjestikuseil viisaastakuil toodetud malmi, terase, kivisöe, nafta ja kunstväetise hulki jne.

Treppjoongraafik

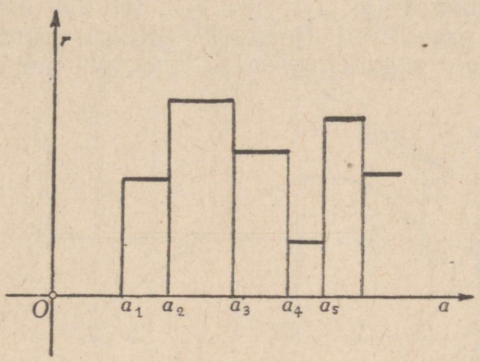
Jälgime mõne töötaja nimel hoiukassas hoiul seisva rahasumma ajalist muutumist. Andmed võtame hoiuraamatust. Neid korrapäraselt paigutades saame arvupaaride (a, r) tabeli:

Sissekande aeg a	a_1	a_2	a_3	...
Hoiul seisev rahasumma r	r_1	r_2	r_3	...

Nagu näeme, on arv r arvu a funktsioon. Eelmise näite puhul kirjeldatud viisil kujutame ka nüüd rõhtteljel a väärtused, püstitame saadud lõikude lõpp-punktidest perpendikulaarid ja kujutame neil joontel r väärtused. Saadud joonis annab pildi sellest, millal on hoiuraamatusse tehtud sissekanded, ta ei anna aga veel pilti hoiusumma ajalisest muutumisest. Selle pildi saamiseks paneme tähele, et iga hoiuraamatusse kantud summa püsib muutumatuna ühe sissekande tegemise ajast teise sissekande tegemise ajani, seega vahemikus a_1 ja a_2 vahel, vahemikus a_2 ja a_3 vahel jne. Sellest järeldub, et me võime oma joonist tunduvalt täiendada: riba r_1 ja r_2 kujutuslõigu vahel võime täis joonestada püstlõike r_1, riba a_2 ja a_3 vahel

püstlõike r_2 jne. Nagu näeme, igas vahemikus a_1 kuni a_2, a_2 kuni a_3 jne. moodustavad ordinaatide lõpud rõhtsa lõigu. Hoiusumma ajalise muutumise kujujooneks on *treppjoon* (joon. 69).

Saadud joonis näitab piltlikult, et suuruse r ajaline muutumine ei toimu sujuvalt; vastupidi, see toimub nii, et ajavahemikus a_1 ja a_2 vahel, a_2 ja a_3 vahel, a_3 ja a_4 vahel jne. püsib arv r



Joon. 69.

konstantsena, üleminekul ühelt ajavahemikult teisele aga muutub arv *järsku*, tehes teatava *hüppe*. Momendil a_2, a_3, a_4 jne. on hüpete suurused antud trepiastmete kõrgustega

$$r_2 - r_1, \qquad r_3 - r_2 \text{ jne.}$$

Need hüpped on positiivsed igal sissemaksu momendil ja negatiivsed igal väljamaksu momendil.

Suuruse mittesujuval muutumisel räägime suuruse *katkevast muutumisest*.

Käsitletud tüüpi funktsiooni käigugraafikuid nimetame *treppjoongraafikuiks*.

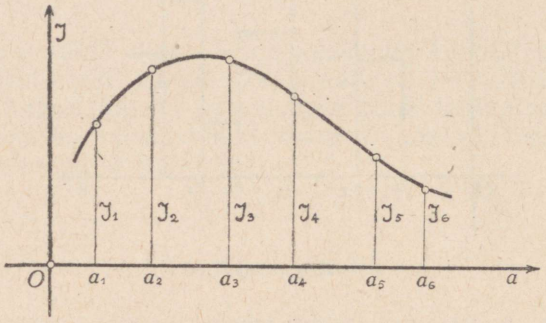
Analoogilise treppjoongraafiku saaksime näiteks ka siis, kui kujutaksime raamatukogu raamatufondi ajalist muutumist, kirja saatekulu suurenemist kirja kaalu suurenemisel, raudteepileti hinna muutumist sõidukauguse muutumisel jne.

Pidevjoongraafik

Näide 1. Fotoreporter mõõdab teataval päeval enne iga ülesvõtte tegemist valgustustugevust (valgustuse intensiivsust), et määrata õiget ekspositsiooniaega. Andmeid kirja pannes saab ta järgmise tabeli:

Kellaaeg a	a_1	a_2	a_3	...
Valgustustugevus I	I_1	I_2	I_3	...

Nagu näeme, on valgustustugevus I kellaaja funktsioon. Näitliku pildi saamiseks suuruse I muutumisest kellaaja a muutumisel kujutame arvupaarid (a_1, I_1), (a_2, I_2), (a_3, I_3) jne. eespool kirjeldatud viisil graafiliselt (joon. 70). Kuigi suuruse I mõõtmised toimusid vaid aegadel a_1, a_2, a_3 jne., on ometi ilmne, et ka



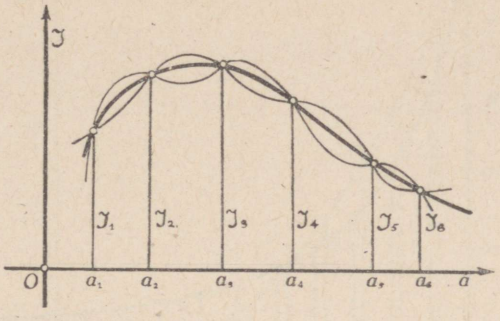
Joon. 70.

igale ajahetkele a_1 ja a_2 vahel, a_2 ja a_3 vahel jne. vastab oma kindel I väärtus, seega arv I on määratud nii argumendi väärtuste a_1, a_2, a_3, ... kui ka kõigi v a h e p e a l s e t e a väärtuste puhul. Mis puutub I muutumiskäigusse, siis on meil sellest niisugune kujutlus, et suurus I ei muutu hüppeliselt, vaid hüpeteta, kord võib-olla suurenemise, kord vähenemise suunas, kuid ikka sujuvalt ehk, nagu ütleme matemaatilises keeles, katkematult, p i d e v a l t. Selle kujutluse kohaselt ei ole uuritava nähtuskäigu piltlikuks kujutuseks üksikute punktide rida nagu esimeses näites ega treppjoon nagu teises näites, vaid k a t k e m a t u j o o n. Ühtede vaatlusandmete puhul võib see olla sirgjoon, teiste puhul kõverjoon, kuid igal juhul on see p i d e v j o o n.

Antud punktidest (a_1, I_1), (a_2, I_2), (a_3, I_3) jne. võib läbi panna väga mitmesuguseid pidevaid jooni (joon. 71). Kõigist mõeldavatest pidevatest joontest, mis nimetatud punkte läbivad, valime võimalikult l i h t s a j o o n e (see tähendab nukkideta ja kühmudeta joone). Me lähtume seejuures oletusest, et loodusnähtused kulgevad pidevalt ja alluvad lihtsatele seadustele.

Saadud tüüpi graafikuid nimetame pidevjoongraafikuiks.

Pidevjoongraafiku saaksime näiteks ka siis, kui kujutaksime vere viskoossuse muutumist temperatuuri suurenemisel, küttegaasi voolamiskiiruse muutumist gaasijuhtmes rõhu muutumisel, fotoplaadi ilmutamiskestuse muutumist ilmuti kontsentratsiooni muutumisel, terase tugevuse muutumist süsinikusisalduse muutumisel jne.



Joon. 71.

Igal juhul, kus funktsiooni käiku saab esitada treppjoone, murdjoone või pideva kõvera abil, räägime graafiku asemel ka funktsiooni käigujoonest või käigukõverast.

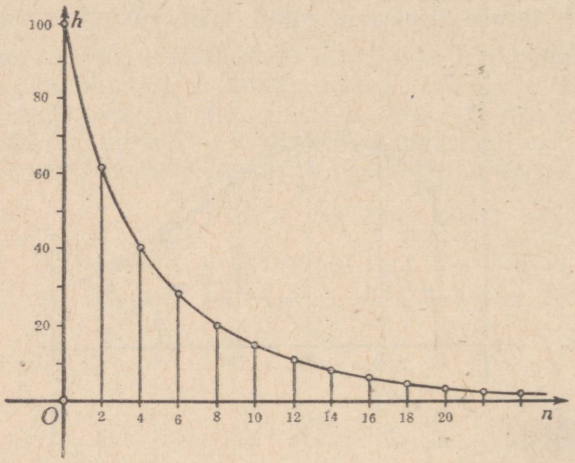
Näide 2. Järgmine tabel näitab raadiumi emanatsiooni — radooni — lagunemise ajalist käiku: esimeses reas on märgitud päevad, teises on esitatud vastava päeva lõpuks veel lagunemata radooni hulk:

Päeva number n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Radooni hulk h	100	62	40	28	20	15	12	8	5,5	4	3	2	1

Et iga päeva lõpul on kindel hulk lagunemata radooni alles, siis vastab igale n väärtusele kindel h väärtus, nii et $h = f(n)$. Kujutame päevade 0, 2, 4 ... lõpud punktidena graafiku rõhtteljel (joon. 72), püstitame neist punktidest perpendikulaarid ja kujutame neil perpendikulaaridel lagunemata radooni hulgad 100, 62, 40 ... Saame nagu varemgi rea püstlõike.

Siin tekib loomulikult küsimus, kui palju on lagunemata radooni alles 1. päeva lõpul, 3. päeva lõpul jne., samuti pool päeva pärast katse algust jne. Kujutleme, et radooni lagunemine

ei toimu astmeliselt, vaid pidevalt, sujuvalt. Sellele vastavalt tõmbame püstlõikude lõppudest läbi pideva, sujuva joone ja loeme selle joone uuritava nähtuse käiku kujutavaks graafikuks. Saadud graafik kuulub nagu eelminegi pidevjoongraafikute liiki.



Joon. 72.

Näide 3. Täpsed mõõtmised on näidanud, et vee hulk, mille ruumala temperatuuril 4° C on 1 liiter, paisub vahemikus 0° kuni 20° C järgmiselt:

Temperatuur t °C	0	2	4	6	8
Ruumala v liitrit	1,00013	1,00003	1,00000	1,00003	1,00011

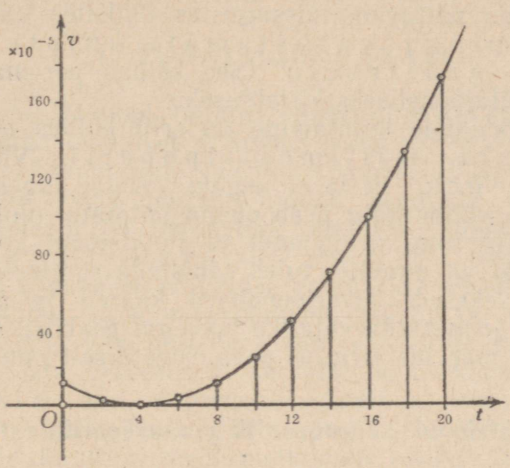
10	12	14	16	18	20
1,00025	1,00045	1,00070	1,00099	1,00135	1,00174

Kujutame seda nähtuskäiku graafiliselt paberitükil mõõtmetega 14 cm $\times$ 14 cm.

Temperatuuride kujutamiseks võiksime võtta kujutusühiku

5 mm; siis mahub arvuvahemik 0—20 lõigule 100 mm, nii et jääb veel pisut ruumi t-telje pikendamiseks nullpunktist vasakule poole ja suunanoole joonestamiseks.

Tunduvalt raskem on ruumalade kujutamine. Siin tuleb kujutamisele ümmarguselt 1 liiter ja kasutada on selleks ruumi pisut üle 10 cm ehk 100 mm. Sobivaks mastaabiks näib olevat 1 liiter



Joon. 73.

100 millimeetris. Sel puhul kujutaks 0,00001 liitrit 0,001-millimeetrine lõik ja kõige suuremat liitrilisa, 0,00174 liitrit, 0,174-millimeetrine lõik; see pikkus asub aga allpool silma lahutusvõime piiri. Seega ei saaks me niisugusel ühiku valimisel üldse joonisel esile tuua antud veehulga paisumisnähtust: vee ruumala *paistaks joonisel muutumatuna*. Seepärast toimime teisiti: kujutame ainult vee ruumala *juurdekasve*, võttes neid liitri sajatuhandikes. Siis tulevad kujutamisele arvud vahemikus $0 \cdot 10^{-5}$ kuni $174 \cdot 10^{-5}$. Võttes mastaabiks $2 \cdot 10^{-5}$ liitrit 1 millimeetris, näeme, et ruumala $174 \cdot 10^{-5}$ liitrit kujutab lõik 87 mm; seega jääb veel ümmarguselt 50 mm vaba ruumi v-telje pikendamiseks nullpunktist allapoole ja suunanoole joonestamiseks. Lihtsaim sile ja sujuv kõver, mille saadud püstlõikude lõpppunktidest läbi joonestame, annab vee *paisumiskäigu graafiku* (joon. 73, trükitud kaks korda vähendatud mõõdus).

Tehnilisi nõudeid funktsioonide graafikute kohta

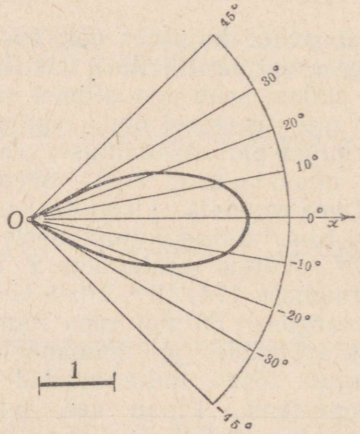
1. Iga nähtuskäigu graafiline kujutus peab kandma lühikest tabavat *pealkirja*, millest oleks näha, missuguse nähtusega on tegemist. Telgede juurde peab olema märgitud, missugused suurused on nendel või nende sihis kujutatud. Telgedel või telgedega rööbiti paigutatud sirgetel peavad olema märgitud mastaabid, mis näitavad, missugustes ühikutes kujutamine toimub. *Ühikutega varustamata kujutus on teaduslikult väärtusetu.* See kõlbab paremal juhul vaid nähtuskäigu üldjooneliseks kirjelduseks.

2. Nähtuskäikude kujutamine on eriti hõlbus millimeetrivõrguga paberil, nn. *millimeetripaberil*. Võrk peab aga olema küllalt õrn, et ta ei segaks joonise lugemist.

3. Joonise väline külg peab olema laitmatu: olulised punktid, nagu nullpunkt ning argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvaid väärtusi märkivad punktid, tuleb tähistada ringikestega; jaotiste kriipsud, noolekesed, kõverjoonelised kaared ja muud joonise detailid tuleb joonestada vajaliku hoolega; pealkiri, samuti numbrite ja muude märkide kirjutus peab esteetiliselt rahuldama.

Funktsiooni käigugraafik polaarkoordinaatides

Juhtudel, kus argumendiks on *nurk*, on tavaliselt otstarbekam kasutada funktsiooni käigu kujutamiseks mitte *rist-*, vaid



Joon. 74.

polaarkoordinaate. Olgu näiteks antud mõni funktsioon

$$r = f(\varphi),$$

kus argument φ tähendab nurka. Selle funktsiooni käigu graafili-

seks kujutamiseks märgime kokkukuuluvad väärtuspaarid (φ, r) punktidena, mille polaarnurk on φ ja polaarkaugus r. Ühendades need punktid katkematu lihtsa kõveraga, saamegi funktsiooni $r = f(\varphi)$ käigugraafiku. Kirjeldatud viisil on joonisel 74 kujutatud hõõglambilt saadava valgustuse tugevus sõltuvuses nurgast, mille valguskiir moodustab lambi teljega.

§ 24. FUNKTSIOONI SKAALA

Me õppisime eespool tundma funktsionaalse sõltuvuse mitut esitusviisi: funktsionaalset sõltuvust saab esitada argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuste paaride (x, y) tabelina, valemi abil, mis näitab, kuidas arvutada funktsiooni y väärtust argumendi x etteantud väärtusel, lõpuks funktsiooni käigugraafiku kaudu, mis annab eriti ülevaatliku pildi suuruste x ja y vahelise sõltuvuse omapärast. Funktsiooni mõiste teoreetiline tähtsus ja suur rakenduslik väärtus on matemaatikuid ajendanud otsima üha uusi funktsionaalse sõltuvuse esitusviise. Üheks uuema aja saavutuseks sel alal on funktsiooni esitamine tema skaala abil. Argumendi väärtused antakse sel juhul arvudena, funktsiooni väärtused neid kujutavate lõikudena. Selle kujutusviisiga puutusime kokku logaritmilise skaala käsitlemisel: logaritmilisel skaalal on $\log x$ väärtused kujutatud mingi kujutusühiku abil lõikudena, arvud aga on kirjutatud lõikude lõppkriipsude juurde numbritega. Oma suure tähtsuse tõttu nüüdisaja tehnikateadustes väärib see küsimus omaette käsitlemist.

Funktsiooni skaala konstruktsiooni printsiip

Alustame hästituntud näitest.

Näide. Lapse keha pikkus on aja funktsioon. Näitliku pildi saamiseks lapse kasvamiskäigust märgitakse lapse keha pikkus aeg-ajalt uksepiidale pliiatsikriipsuga, mille juurde kirjutatakse aeg. Sel viisil saadaval skaalal on funktsiooni väärtused — keha pikkused — kujutatud lõikudena, mille lõppkriipsudele on juurde kirjutatud vastavad argumendi väärtused.

Samal viisil võib sportlane graafiliselt kujutada isiklike rekordite käiku (hüppekõrgus, viskekaugus, distantsi katmise aeg).

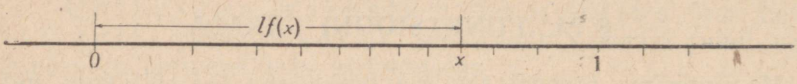
Üldistades näites toodud võtet, valmistame funktsiooni skaala järgmiselt: joonestame mingi sirge, võtame sellel mõne punkti alguspunktiks, märgime sirgel positiivse suuna, valime sobiva kujutusühiku l mm ja kujutame funktsiooni väärtused

$$f(x_1) \qquad f(x_2) \qquad f(x_3) \ldots$$

lõikudena pikkusega

$$lf(x_1) \quad lf(x_2) \quad lf(x_3) \ldots$$

millimeetrit, valides lõikude suunad kooskõlas kujutatavate väärtuste märkidega. Saadud lõikude lõppkriipsudele kirjutame nagu varemgi juurde argumendi väärtused $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Funktsiooni väärtuste vastavus argumendi väärtustele peegeldub



Joon. 75.

funktsiooni skaalal selles, et funktsiooni väärtust kujutav lõik lõpeb kriipsuga, mille numbriliseks tähiseks on argumendi väärtus (joon. 75).

Funktsiooni skaala näiteid

Näide 1. Funktsiooni skaala konstruktsiooniprintsiibi konkreetse rakendusena valmistame ruutfunktsiooni $y = x^2$ skaala argumendi positiivsete väärtuste jaoks.

Selle funktsiooni väärtuste tabel argumendi täisarvuliste väärtuste jaoks on järgmine:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...

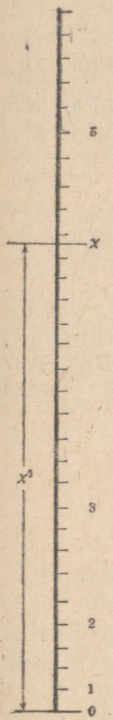
Kasutades pikkusühikut $l = 3$ mm, kanname sirgjoonele (joon. 76) funktsiooni väärtused, märgime saadud lõikude lõpp-punktid kriipsudega ja kirjutame iga kriipsu juurde vastava argumendi väärtuse. Nii saadud joonis kujutabki funktsiooni $y = x^2$ skaalat. Selle skaala lõik $0x$ kujutab argumendile x vastavat funktsiooni väärtust ehk, teiste sõnadega, funktsiooni väärtust kujutava lõigu lõppkriipsu juurde on märgitud argumendi suurus.

Näide 2. Lihtsaim skaala on funktsioonil $y = x$. Selle skaala kriipsud 1, 2, 3, ... järgnevad üksteisele võrdsete vahemike tagant (joon. 77).

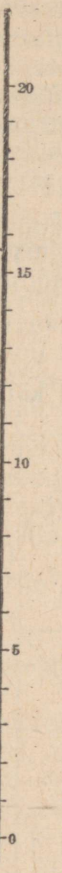
Näide 3. Valmistame funktsiooni $t = \tan \alpha$ skaala.

Selleks võtame ühikringi, s. o. ringi raadiusega 1 (joon. 78), tõmbame rõhtdiameetri otspunktist tangensjoone, jaotame poolringi, alates püstdiameetri lõpp-punktist,

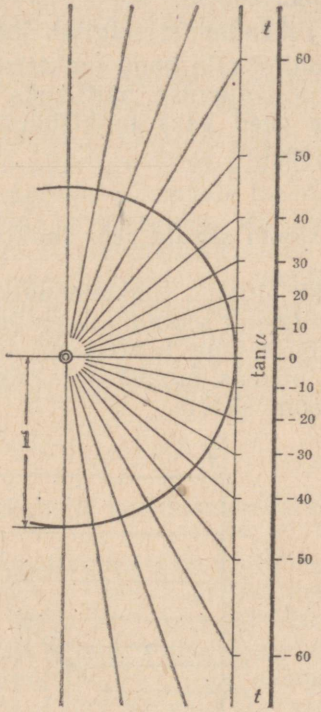
näiteks 18 osaks, joonestame saadud punktidesse viivad raadiused ja pikendame neid lõikumiseni tangensjoonega. Lõikepunktid kanname üle tangensjoonega rööbikule sirgele t, märkides ülekandekohad kriipsudega ja kirjutades iga kriipsu juurde vastava argumendi väärtuse kraadides: 0, 10, 20, ..., 0, —10, —20,



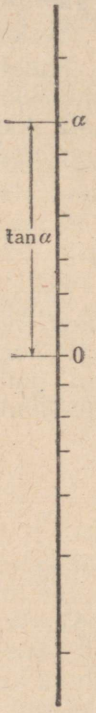
Joon. 76.



Joon. 77.



Joon. 78.



Joon. 79.

—30, ... Täielikuma pildi saamiseks nurga ja selle tangensi vahelisest seosest võiksime kriipsud võtta iga 5 kraadi järel; võiksime neid kujutleda võetuna iga kraadi või isegi iga minuti järel. Sirge t ühes temale märgitud kriipsudega ja nende juurde kirjutatud nurga α väärtustega ongi funktsiooni $t = \tan \alpha$ skaala: lõik 0α kujutab nurgale α vastavat tangensi väärtust; tangensit kujutava lõigu

lõppkriipsu juurde on märgitud nurga α suurus (joon. 79).

Öeldut kokku võttes näeme, et

funktsiooni skaalal esineb funktsiooni väärtus lõiguna, mille alguseks on nullpunkt ja lõpuks argumendi väärtusega märgitud kriips.

Siit saame eeskirja funktsiooni skaala konstrueerimiseks:

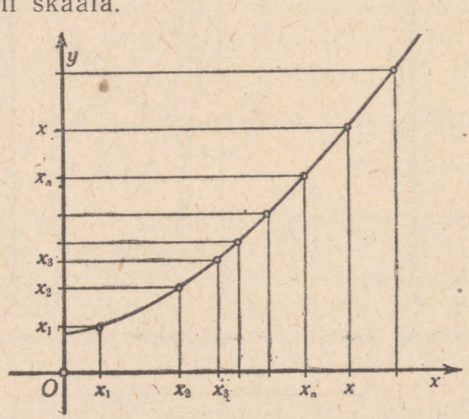
et saada funktsiooni $f(x)$ skaalat, võtame sirgjoone, valime sellel nullpunkti, märgime positiivse suuna, valime paraja kujutusühiku l, paigutame sirgele nullpunktist alates lõigu $lf(x)$, märgime selle lõigu lõpu kriipsuga ja kirjutame kriipsu juurde argumendi väärtuse x.

Eeskirja rakendamist selgitab joonis 75.

Funktsiooni skaala nagu funktsiooni käigugraafikki on vahend funktsionaalse sõltuvuse näitlikuks esitamiseks. Vaatame lähemalt, kuidas need kaks funktsionaalse sõltuvuse esitusviisi on teineteisega seotud.

Funktsiooni skaala seos funktsiooni käigugraafikuga

Eespool kirjeldatud funktsionaalse sõltuvuse kujutusvõtted on teineteisega tihedalt seotud: kui on juba olemas funktsiooni skaala, saab kohe joonestada funktsiooni käigugraafiku, ja ümberpöördult, kui on olemas funktsiooni käigugraafik, saab kohe valmistada funktsiooni skaala.



Joon. 80.

Olgu y-teljel (joon. 80) kujutatud funktsiooni $y = f(x)$ skaala ja kandku selle skaala kriipsud märke $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, x$. Siis y-teljel võetud lõik $Ox = l \cdot f(x)$, kus l on kujutusühik. Mär-

gime x-teljel väärtused $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, x$, kasutades kas sama kujutusühikut l või mingit teist kujutusühikut λ. Püstitame saadud punktidest perpendikulaarid; tõmbame skaala kriipsudest läbi sirged rööbiti x-teljega ja leiame ühesuguste märkidega tähistatud püst- ja rõhtsirgete lõikepunktid. Ühendades need punktid sujuva kõveraga, saame funktsiooni $y = f(x)$ käigukõvera.

Ümberpöördult: olgu y-teljel kasutatud kujutusühikut l, x-teljel kas sama või mingit teist kujutusühikut λ. Kujutagu kõver joonisel 80 funktsiooni $y = f(x)$ käiku. Võtame abstsissteljel mõned punktid, näiteks punktid abstsissidega $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, x$; projekteerime need kõverale ja kõveral saadud punktid edasi y-teljele. Märkides y-teljel leitud punktid kriipsudega ja kirjutades iga niisuguse kriipsu juurde vastava x väärtuse, saame funktsiooni y skaala.

Funktsiooni graafik annab sõltuvusest $y = f(x)$ tunduvalt n ä i t l i k u m a p i l d i kui funktsiooni y skaala. Ka on funktsiooni väärtuse leidmine argumendi väärtuse järgi ja argumendi väärtuse leidmine funktsiooni väärtuse järgi graafikul mõnevõrra kergem ja lihtsam kui nendesamade küsimuste lahendamine skaalal. Edasi on graafikul skaalaga võrreldes see paremus, et ta raskusteta võimaldab esitada ka funktsioone, mis mõnes argumendi vahemikus kasvavad, mõnes kahanevad, skaala seevastu on kohane vaid ü h e s u u n a l i s e l t muutuvate funktsioonide esitamiseks. Skaaladel on aga see suur eelis graafikute ees, et s k a a l a s i d s a a b k a s u t a d a a r v u t a m i s e m e h h a n i s e e r i m i s e v a h e n d i n a. Peatume selle küsimuse juures järgmises artiklis.

Funktsioonide skaalad arvutusvahendina

Funktsioonide skaalade kasutamine arvutusvahendina põhineb kahel lihtsal seosel, mis tekivad, kui kaks funktsiooni skaalat teineteisega kõrvuti seada. Olgu $f(x)$ ja $\varphi(\xi)$ kaks funktsiooni, mille argumendid on vastavalt x ja ξ. Valmistame nende skaalad, kasutades vastavalt kujutusühikuid l ja λ, ning seame nad kuidagi teineteisega kõrvuti (joon. 81), pidades vaid silmas, et funktsioonide $f(x)$ ja $\varphi(\xi)$ kasvamise suunad oleksid nendel skaaladel s a m a d. Seisku ülemise skaala kriips x kohakuti alumise skaala kriipsuga ξ. Siis saame

$$O_1x - O_2\xi = O_1O_2$$

ehk, tuletades meelde funktsiooni skaala konstruktsiooniprintsiipi,

$$l \cdot f(x) - \lambda \cdot \varphi(\xi) = O_1O_2.$$

See võrdus kehtib i g a kohakuti seisva väärtuste paari (x, ξ)

puhul. Märkides muutumatuna hoitava O_1 ja O_2 vahelise kauguse konstandi sümboliga, saame esimese põhiseose kujul

$$l \cdot f(x) - \lambda \cdot \varphi(\xi) = const.$$

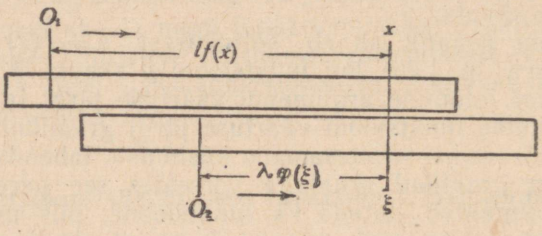
Juhul, kui skaalade alguskriipsud O_1 ja O_2 seisavad kohakuti, seos lihtsustub:

$$l \cdot f(x) - \lambda \cdot \varphi(\xi) = 0.$$

Võrdsete kujutusühikute puhul

$$f(x) = \varphi(\xi).$$

Illustreerime leitud seose kasutamist mõne näitega.



Joon. 81.

Näide 1. Olgu kujutusühikud l ja λ võrdsed ning $\varphi(\xi)$ asemel $\varphi(\sigma) = \sigma$, $f(x)$ asemel aga $f(\alpha) = \sin \alpha$. Seades funktsioonide $\varphi(\sigma)$ ja $f(\alpha)$ alguskriipsud kohakuti, näeme, et

$$\sigma = \sin \alpha.$$

Sõnalises väljenduses tähendab see, et alumisel skaalal võetud nurga α vastas seisab ülemisel skaalal selle nurga siinus. Ümberpöördult: ülemisel skaalal võetud σ-kriipsu vastas seisab alumisel skaalal nurk, mille siinus on σ. Nagu näeme, asendab vaadeldav kaksikskaala siinuste tabelit. Kui võtame kujutusühikuks 200 mm pikkuse lõigu ja loeme silma lahutusvõime piiriks 0,2 mm, siis näeme, et σ-skaalalt saame lugemi veaga 0,2 : 200 ehk 0,001. See vastab kolmekohaliste siinuse väärtuste tabelite täpsusele. Etteantud siinuse väärtuse σ puhul saame nurga α veaga $\frac{90° \cdot 0{,}2}{200} = 0{,}09°$ ehk ümmarguselt 0,1 kraadi.

Näide 2. Sageli on nurga tangensi väärtust teades vaja leida sama nurga siinus. Küsimust saab lahendada, kasutades trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid: antud tangensi järgi leiame nurga ja selle järgi siis vajaliku siinuse. On aga ka võimalik konstrueerida vahendit, mis küsimuse lahendab mehaaniliselt. Märgime kõigepealt, et

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}.$$

Võtame abiks tähised $\sin \alpha = \sigma$, $\tan \alpha = \tau$ ja konstrueerime funktsioonide

$$f(x) = f(\tau) = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}},$$

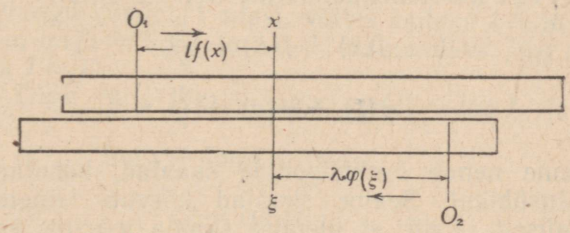
$$\varphi(\xi) = \varphi(\sigma) = \sigma$$

skaalad, kasutades üht ja sama kujutusühikut. Skaalade kõrvuti asetamisel nii, et nende alguskriipsud on kohakuti, näeme, et kohakuti seisvate kriipsude τ ja σ puhul

$$\sigma = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}.$$

Võttes ülemisel skaalal kriipsu τ, mis vastab antud tangensi väärtusele, saame alumiselt skaalalt vastava kriipsu σ juurest lugeda nõutava siinuse väärtuse.

Asume teise põhiseose tuletamisele.



Joon. 82.

Asetame funktsioonide $f(x)$ ja $\varphi(\xi)$ skaalad kuidagi teineteisega kõrvuti, tehes seda nii, et skaaladel esitatud funktsioonide $f(x)$ ja $\varphi(\xi)$ kasvamise suunad oleksid nendel skaaladel v a s t u p i d i s e d. Märkigu x ja ξ jälle kohakuti asetsevaid kriipse. Siis (joon. 82)

$$O_1x + O_2\xi = O_1O_2$$

ehk

$$l \cdot f(x) + \lambda \cdot \varphi(\xi) = O_1O_2.$$

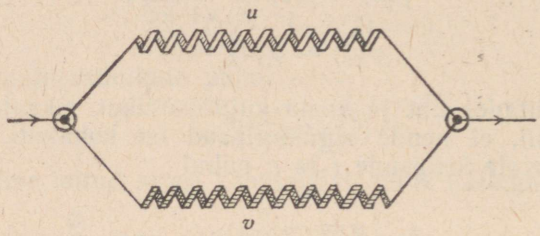
Seega joonisel kujutatud skaalade seisus

$$l \cdot f(x) + \lambda \cdot \varphi(\xi) = const.$$

See ongi otsitud t e i n e p õ h i s e o s.

Näide 3. Olgu u ja v kaks paralleelselt lülitatud takistust (joon. 83). Summaarse takistuse w määramiseks kasutatakse siis valemit

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}.$$



Joon. 83.

Ülesanne määrata w teadaolevate u ja v väärtuste põhjal esineb elektrikute töös väga sageli. Seepärast tasub konstrueerida vahendit selle ülesande — liita kaks paralleelselt lülitatud takistust — mehaaniliseks lahendamiseks. Selleks võtame

$$f(x) = f(u) = \frac{1}{u},$$

$$\varphi(\xi) = \varphi(v) = \frac{1}{v}$$

ja valmistame nende funktsioonide skaalad, kasutades üht ja sama kujutusühikut. Seame skaalad kõrvuti teineteise suhtes vastassuunaliselt ja nii, et ülemise skaala u-kriips seisab kohakuti alumise skaala v-kriipsuga. Siis teine põhiseos, rakendatuna meie juhule, ütleb, et

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = O_1O_2.$$

Arvestades skaalade konstruktsiooniprintsiipi, näeme, et w väärtuse saab lugeda ülemiselt skaalalt alumise skaala kriipsu O_2 vastast.

Logaritmilise arvutuslükati teooria

Eespool tuletatud põhiseosed

$$l \cdot f(x) - \lambda \cdot \varphi(\xi) = const$$

ja

$$l \cdot f(x) + \lambda \cdot \varphi(\xi) = const$$

(vt. joon. 81 ja 82) on sobivaks aluseks ka logaritmilise arvutuslükati tervikliku teooria arendamisel. Selgitame seda küsimust kahe näitega.

Näide 1. Olgu $f(x) = \log x$, $\varphi(\xi) = \log \xi$ ja $l = \lambda$. Siis

$$\log x - \log \xi = const,$$

nii et

$$\frac{x}{\xi} = const.$$

See tähendab, et

skaaladel kohakuti seisvate arvude jagatis on konstantne. Siit järelduvad kohe reeglid suhete $x : \xi$ ja korrutiste $const \cdot \xi$ määramiseks, võrrete $x : \xi = x_1 : \xi_1$ lahendamiseks, protsendi määramiseks, mille üks arv moodustab teisest arvust ($x : \xi = p : 100$), jne.

Kui võtame $\lambda = 2l$, saame

$$\frac{x}{\xi^2} = const.$$

Siit järelduvad reeglid suhete $x : \xi^2$ ja korrutiste $const \cdot \xi^2$ määramiseks ning võrrete $x : \xi^2 = x_1 : \xi_1^2$ lahendamiseks.

Lugeja arendagu küsimust edasi, võttes esiteks $\lambda = 3l$, teiseks $f(\alpha) = \log \sin \alpha$, $\varphi(\xi) = \log \xi$ ja $l = \lambda$, kolmandaks $f(\alpha) = \tan \alpha$, $\varphi(\xi) = \log \xi$ ja $l = \lambda$.

Näide 2. Olgu jälle $f(x) = \log x$, $\varphi(\xi) = \log \xi$ ja $l = \lambda$. Siis

$$\log x + \log \xi = const,$$

nii et ka

$$x\xi = const.$$

Seades funktsioonide $f(x)$ ja $\varphi(\xi)$ skaalad kõrvuti joonisel 82 näidatud viisil, saame, et

skaaladel kohakuti seisvate arvude korrutis on konstantne.

See annab kohe reeglid jagatiste $x = const : \xi$, pöördväärtuste $1 : \xi$, neljanda võrdelise jne. leidmiseks.

§ 25. VÕRRAND FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE ESITAJANA

Oleme tundma õppinud kahe suuruse funktsionaalse sõltuvuse mitmeid esitusvahendeid: tabelit, valemit, graafikut ja skaalat. Niisuguseks vahendiks on ka funktsiooni määrav võrrand. Kui eespool nimetatud vahendite kasutamisel funktsioon alati esines ilmutatult, kas oma väärtuste koguna, avaldisena, oma käigujoone punkti ordinaadina või skaala lõiguna,

siis võrrandiga antud funktsiooni puhul ei ole see enam nii: võrrand küll määrab funktsiooni, kuid ei anna teda ei arvuliselt ega graafiliselt ilmutatud kujul. Me räägime sel puhul ilmutamatult antud funktsioonist. Vaatleme küsimust üksikasjalikumalt.

Ilmutamatult antud funktsioon

Paljudel juhtudel, eriti geomeetriliste küsimuste käsitlemisel, aga ka tehnika teoreetiliste probleemide lahendamisel pole võimalik otseselt saada funktsiooni avaldist tema argumendi kaudu, küll aga võimaldavad tingimused, mis seovad argumenti, funktsiooni ja etteantud konstante, koostada võrrandit, mille lahendamine annab funktsiooni avaldise. Võrrandi tegelik lahendamine võib osutuda tülikaks või isegi ülesaamatult raskeks. Ent kuigi me temast võib-olla ei saa leida funktsiooni avaldist kujul $y = f(x)$, määrab võrrand siiski kaudselt selle funktsiooni: me võime võrrandis argumendile anda järjest väärtused $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ja eriliste arvutusvõtetega iga niisuguse väärtuse puhul leida (vähemalt ligikaudu, kuitahes suure täpsusega) väärtused $y_1, y_2, y_3, \ldots$ Väärtuspaarid (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots$ annavad otsitava funktsiooni tabellaarselt. Võrrand ei anna funktsiooni y ilmutatult, küll aga osutub funktsioon y võrrandi kaudu määratuks: võrrand annab ta ilmutamatult. Näiteks, kuni võrrandid

$$y(1 + x^2) - 3x = 0 \quad \text{ja} \quad \log y - x^2 + 1 = 0$$

pole tegelikult lahendatud, ütleme, et nende abil on ilmutamatult antud funktsioonid

$$y = \frac{3x}{1 + x^2} \quad \text{ja} \quad y = 10^{x^2-1}.$$

Funktsiooni määrava võrrandi kirjutusviis

Toome mõned näited funktsioone määravate võrrandite kohta:

$$3x + 4y - 12 = 0, \qquad 2xy - y^2 + 1 = 0,$$
$$5x^2y - 3y^3 + 10 = 0, \qquad x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$
$$2^x - \sin y + 1 = 0.$$

Siin on iga võrrandi kõik liikmed üle toodud vasakule poole, nii et parem pool on 0. Kui vaadelda võrrandite vasakuid pooli omaette, siis on nad kahe muutuja x ja y funktsioonid. Seepärast kirjutame funktsiooni $y = f(x)$ ilmutamatult andva võrrandi järgmisel kujul:

$$F(x, y) = 0.$$

Kui tegeleme ühtaegu mitme ilmutamatult antud funktsiooniga, siis kirjutame neid määravad võrrandid kujul

$$F(x, y) = 0, \qquad G(x, y) = 0, \qquad H(x, y) = 0.$$

Ilmutamatult antud funktsiooni definitsioon

Kui funktsioon $y = f(x)$ on võrrandi $F(x, y) = 0$ lahendiks ja see lahend on leitud õigesti, siis tema kontrollasetamine võrrandi vasakusse poolde peab andma nulli, sümbolites kirjutatult

$$F[x, f(x)] = 0,$$

ja seda argumendi x iga väärtuse korral, mil avaldistel $f(x)$ ja $F(x, y)$ on mõte. Teiste sõnadega, kõnesolev võrdus peab olema samasus ehk, veel kord teiste sõnadega, ta peab kehtima identselt*:

$$F[x, f(x)] \equiv 0.$$

Näiteks võrrand

$$y^3 - 2x^2 + 7 = 0$$

määrab funktsiooni

$$y = \sqrt[3]{2x^2 - 7},$$

sest

$$(\sqrt[3]{2x^2 - 7})^3 - 2x^2 + 7 = 2x^2 - 7 - 2x^2 + 7 = 0$$

muutuja x igal väärtusel.

Kuni y avaldis pole võrrandi $F(x, y) = 0$ tegeliku lahendamise teel leitud, ütleme, et võrrand $F(x, y) = 0$ määrab funktsiooni ilmutamatult. Niisiis:

võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud ilmutamatult antud funktsiooni all mõistame niisugust funktsiooni $y = f(x)$, mis võrrandisse asetamisel rahuldab seda identselt.

Võrrandi $F(x, y) = 0$ tegelik lahendamine, olgu suuruse y jaoks avaldise otsimise, olgu võrrandit rahuldavate väärtuspaaride otsimise suunas, võib osutuda aeganõudvaks ja väga töömahukaks toiminguks. Sageli on palju otstarbekam võrrandit $F(x, y) = 0$ üldse mitte lahendada, vaid otsustada funktsiooni $y = f(x)$ kohta käivad küsimused kaudselt, võrrandi $F(x, y) = 0$ uurimise teel.

Isegi siis, kui funktsioon on antud oma avaldisega, osutub mõnikord otstarbekaks üle minna töötamisele funktsiooni määrava võrrandiga. See on nii näiteks siis, kui y avaldises esineb

* Lad. k. *identicus* — samane, samasugune.

argumendist sõltuvaid *juuri*, nagu juhul

$$y = x + \sqrt{1 + x^2}.$$

Võrrandi saamiseks, mille lahendiks see y on, vabaneme juurest: võrdusest

$$y - x = \sqrt{1 + x^2}$$

järeldub, et

$$(y - x)^2 = 1 + x^2,$$

mis pärast teisendamist annab lihtsa võrrandi

$$y(y - 2x) = 1.$$

Selles võrrandis esinevad veel ainult *ratsionaalsed operatsioonid*, mis tunduvalt kergendab töötamist.

On üldiselt viisiks arutluste tulemusena saadavaid võrrandeid võimaluse korral teisendada nii, et nendes esineksid ainult ratsionaalsed operatsioonid.

Ühesed ja mitmesed funktsioonid

Oma avaldistega antud funktsioonide puhul, nagu juhtudel

$$y = x^2 - 7x + 12, \quad y = \frac{1}{2}\log(1 + x^2), \quad y = \frac{3x}{x(1+x)^2}$$

vastab argumendi igale väärtusele *üksainus* funktsiooni väärtus. Niisuguseid funktsioone nimetatakse *ühesteks funktsioonideks*.

Ilmutamatult võrrandiga antud funktsioonide puhul on olukord keerukam: näiteks juhul

$$y^3 - 4x^2 + 7 = 0$$

määrab võrrand *üheainsa funktsiooni*

$$y = \sqrt[3]{4x^2 - 7},$$

juhul

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

aga määrab võrrand *kaks erinevat funktsiooni*

$$y_{\text{I}} = +\sqrt{x(2-x)} \text{ ja } y_{\text{II}} = -\sqrt{x(2-x)}.$$

Sõnalise väljenduse ühtlustamise otstarbel ütleme ka käesoleval juhul, et võrrand $x^2 + y^2 - 2x = 0$ määrab *ühe* funktsiooni y, ja vaatleme muutujaid y_{I} ja y_{II} kui *funktsiooni* y *kaht*

haru. Funktsioon y on vaadeldaval juhul kahene funktsioon: argumendi iga väärtuse korral, mil y avaldistel y_{I} ja y_{II} on mõte, on funktsioonil y kaks erinevat väärtust.

Eespool arendatud mõtte üldistamine viib kolmestele, neljastele jne. funktsioonidele. Märgime siinkohal ära, et funktsiooni harude arv võib olla isegi piiramatult suur. Vaatleme näiteks võrrandiga

$$\tan \alpha = a$$

määratud nurka α, kui a on mingi kindel arv. Et nurga α kasvamisel väärtuselt $-90°$ väärtuseni $+90°$ omandab $\tan \alpha$ kõik reaalarvulised väärtused, siis vahemikus $-90° < \alpha < +90°$ leidub nurk $\alpha = \alpha_0$, mille puhul $\tan \alpha_0 = a$. Sama väärtuse omandab aga $\tan \alpha$ ka kõigi nurkade

$$\alpha = \alpha_0 \pm n \cdot 180°$$

puhul, kus n on mingi naturaalarv. Nagu näeme, on α kuitahes mitme haruga a funktsioon.

§ 26. FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE PARAMEETRILINE ESITUSVIIS

Kahe suuruse vaheline funktsionaalne seos on vastastikune: kui y sõltub funktsionaalselt suurusest x, siis ka x sõltub funktsionaalselt suurusest y. See asjaolu peegeldub selgesti x ja y väärtuste tabelis:

x	x_1	x_2	x_3 ...
y	y_1	y_2	y_3 ...

Lugedes seda tabelit ülalt alla, saame väärtuspaarid (x, y) ja x on argumendiks; lugedes tabelit alt üles, saame väärtuspaarid (y, x) ja siis on y argumendiks.

Funktsiooni andmisel valemi, käigugraafiku või skaala kaudu on muutujatele x ja y määratud erisugused osad. Funktsionaalse sõltuvuse andmisel võrrandi $F(x, y) = 0$ kaudu aga esinevad mõlemad muutujad ühesuguses osas, kumbki neist pole eelistatud teise ees. See tingimus on täiuslikult täidetud funktsionaalse sõltuvuse esitamisel nn. parameetrilisel* kujul. Tutvume selle esitusviisiga kõigepealt näidete varal.

* Kr. k. *parametron* — mõõtev. Nimetus «parameeter» omistatakse tavaliselt abisuurustele.

Funktsionaalse sõltuvuse parameetrilise esitusviisi näiteid

N ä i d e 1. On tõenäoline, et mistahes kujuga prisma servade arv sõltub tahkude arvust. Selle sõltuvuse leidmiseks vaatleme n-kandilist prismat. Märgime tema tahkude arvu tähega t ja servade arvu tähega s. Et n-kandilisel prismal on n külgtahku, 1 põhjatahk ja 1 kaanetahk, siis

$$t = n + 2.$$

n-kandilisel prismal on n külgserva; ta põhi ja kaas on kongruentsed n-nurgad ja neil on kummalgi n külge. Seega on prismal kokku $n + n + n$ serva, nii et

$$s = 3n.$$

Võrdustest

$$t = n + 2 \text{ ja } s = 3n$$

on selge, et etteantud t a h k u d e arvu t puhul on esimese võrdusega määratud kantide arv n; kui aga see on teada, siis teine võrdus määrab s e r v a d e arvu s. Niisiis on servade arv s funktsionaalselt seotud tahkude arvuga t. Seos pole aga o t s e n e, vaid on saadud p a r a m e e t r i n vahendusel. Otsese seose saamiseks määrame näiteks esimesest võrdusest parameetri n ja asetame saadud väärtuse teise võrdusse. Saame $n = t - 2$ ja seega

$$s = 3(t - 2).$$

Et n oli suvaline arv (ainsa kitsendusega, et ta oleks > 2), siis on tulemus kehtiv iga prisma kohta.

Niisiis: seos prisma tahkude arvu ja servade arvu vahel esineb o t s e s e s v o r m i s kujul

$$s = 3(t - 2),$$

p a r a m e e t r i l i s e s v o r m i s kujul

$$\begin{cases} t = n + 2 \\ s = 3n. \end{cases}$$

Parameetriks on meie näites prisma kantide arv.

Märgime, et p ü r a m i i d i puhul esineks t ja s vaheline seos o t s e s e s v o r m i s kujul

$$s = 2(t - 1),$$

p a r a m e e t r i l i s e s v o r m i s kujul

$$\begin{cases} t = n + 1 \\ s = 2n. \end{cases}$$

Parameetrilise vormi üheks sisuliseks eeliseks otsese vormiga võrreldes on see, et parameetrilise vormi puhul käsitletakse mõlemaid seostatud muutujaid üheväärseina, valimata üht sõltumatuks muutujaks.

Näide 2. On kindel, et kui kuubi ruumala V on ette antud, siis on määratud ka kuubi täispindala S, nii et

$$S = f(V).$$

Seejuures pole aga otse näha, missuguse kujuline see seos on. On selge, et kui kuubi ruumala on ette antud, siis on määratud ka kuubi serv λ; kui aga serv on teada, siis on määratud ka kuubi pindala. Nagu näeme, on S ja V teineteisega seotud kuubi serva λ kaudu, s. t. serv λ on vahendavaks lüliks, mille kaudu suurused S ja V on teineteisega seotud.

Teame, et

$$S = 6\lambda^2$$

ja

$$V = \lambda^3.$$

Et saada otsest seost S ja V vahel, see tähendab, et saada üht muutujat S või V avaldatuna teise kaudu, selleks peame S ja V avaldisist vahendava muutuja λ välja lülitama ehk, nagu öeldakse, elimineerima*. See võib toimuda näiteks sel teel, et määrame λ esimesest võrdusest ja asetame tulemuse teise võrdusse. See annab

$$S = 6(\sqrt[3]{V})^2$$

ehk

$$S = 6\sqrt[3]{V^2},$$

millega küsimus on lahendatud.

Selle asemel, et töötada otseseosega $S = 6\sqrt[3]{V^2}$, on mõnikord sobivam kasutada seose kaudset vormi

$$\begin{cases} S = 6\lambda^2 \\ V = \lambda^3. \end{cases}$$

Kaks viimast võrdust annavad V ja S vahelise seose parameetrilisel kujul. Parameetriks on sel puhul kuubi serva pikkus λ.

---

* Lad. k. *eliminare* — eemaldama.

Liikumiskäigu andmine parameetrilisel kujul

Tähendagu t aega. Liikugu punkt P xy-tasapinnas rõhtsihis nii, et tema abstsiss $x = \varphi(t)$, ja ühtaegu püstsihis nii, et tema ordinaat $y = \psi(t)$. Võrrandid

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

on punkti P liikumisvõrrandid. Nad määravad punkti P asukoha igal ajahetkel: andes parameetrile t rida väärtusi t_1, t_2, $t_3, \ldots$, saame liikumisvõrranditest arvutada väärtuspaarid (x_1, y_1), (x_2, y_2), $(x_3, y_3), \ldots$ ja niiviisi määrata liikuva punkti P üksteisele järgnevad asukohad. Seega määravad võrrandid $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ joone, mida mööda punkt P liigub, ehk punkti P trajektoori, ühtaegu sellega aga ka tema asendi selle trajektooril igal etteantud ajahetkel.

Niisiis: võrrandid $x = \varphi(t)$ ja $y = \psi(t)$ on punkti P liikumisseaduseks; nad on punkti P «analüütiliseks sõiduplaaniks».

Funktsionaalse sõltuvuse esitamine muutujate parameetriliste võrrandite kaudu

Üldistame öeldut. Tähendagu t mingisugust suurust, näiteks aega, temperatuuri, nurka. Olgu muutujad x ja y antud suuruse t kui parameetri funktsioonidena:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Siis igale t väärtusele vastab oma kindel x ja oma kindel y väärtus. Kokkukuuluvad t ja x, samuti t ja y väärtused saab üle-vaatlikult esitada tabeliga

t	t_1	t_2	t_3	$\ldots$
x	x_1	x_2	x_3	$\ldots$
y	y_1	y_2	y_3	$\ldots$

Jättes hetkeks esimese rea mõttes ära, näeme, et muutujad x ja y on teineteisega funktsionaalselt seotud. Niisiis

kaks võrrandit

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

kus t on parameeter, määravad teatava funktsionaalse seose muutujate x ja y vahel.

Et saada seda seost kujul $y = f(x)$, avaldame esimesest võrrandist parameetri t muutuja x kaudu ja asetame tulemuse $t = t(x)$ teise võrrandisse; saame

$$y = \psi[t(x)],$$

mis ongi otsitud y avaldis x kaudu. Niisiis:

et saada võrranditega $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ määratud funktsionaalset seost kujul $y = f(x)$, tuleb antud võrrandeist elimineerida parameeter t sel teel, et see määratakse esimesest võrrandist ja tulemus asetatakse teise võrrandisse.

Sageli on tehniliselt lihtsam otsida muutujate x ja y vahelist seost mitte kujul $y = f(x)$, vaid kujul $F(x, y) = 0$. Et võrrand $F(x, y) = 0$ kujutab s a m a seost mis võrrandid $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, siis peab ta olema nende k a h e v õ r r a n d i j ä r e l d u s või, veidi täpsemalt, võrrandite $x = \varphi(t)$ ja $y = \psi(t)$ p a r a m e e t r i s t v a b a j ä r e l d u s. Seega:

et saada parameetriliste võrranditega $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ antud muutujate x ja y vaheline seos kujul $F(x, y) = 0$, tuleb parameetrilistest võrranditest elimineerida parameeter t.

Parameetri t elimineerimiseks pole võimalik anda mingit kindlat võtet. See tuleb valida vastavalt olukorrale. Toome mõned näited.

N ä i d e 1. Olgu $x = \frac{a}{\cos t}$, $y = a \tan t$. Teades, et

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1,$$

saame koosinuse ja tangensi vahelise seose

$$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}.$$

Korrutades selle võrduse mõlemat poolt arvuga a^2, saame pärast lihtsaid teisendusi, et

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

mis ongi otsitud seoseks x ja y vahel.

N ä i d e 2. Olgu $x = a \cos^2 t$, $y = a \cos 2t$. Teades, et

$$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

ehk

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1,$$

näeme, et

$$x = a \cos^2 t,$$

$$y = a(2 \cos^2 t - 1).$$

Korrutades esimese võrrandi 2-ga ja lahutades tulemusest teise võrrandi, saame

$$2x - y = a,$$

millega otsitud x ja y vaheline seos on leitud.

Funktsionaalse sõltuvuse esitusviiside võrdlev hindamine

Kõigist funktsionaalse sõltuvuse esitusviisidest on kõige näitlikum funktsiooni andmine tema käigujoone abil. Nagu hiljem näeme, saab sel puhul väga näitlikult esitada ka funktsiooni muutumise kiirust. Funktsiooni skaala kasutamisel kaotame tunduvalt näitlikkuses, võidame aga võimaluse kasutada skaalat mehaanilise arvutusvahendina. Joonise valmistamise ja joonise lugemise ebatäpsuse tõttu võimaldavad nii käigugraafik kui ka skaala töötada vaid piiratud täpsusega.

Argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuste esitamine tabeli kujul on ainus funktsionaalse sõltuvuse esitusviis, mida kasutame vaatlus- ja katseandmete kiireks haaramiseks: kõik vaatlusprotokollid on oma sisult argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuste kogumikud. Tabel sobib hästi ka arvutusvahendiks, mille tõttu ta on laialdaselt kasutamisel teaduslikus töös ja tehnikas.

Vaieldamatult täiuslikumaks funktsionaalse sõltuvuse esitusviisiks on funktsiooni andmine tema avaldise kaudu. See annab võimaluse arvutada funktsiooni väärtust argumendi iga väärtuse jaoks, mille puhul funktsiooni avaldisel on mõte, ja saada funktsiooni väärtust nii täpselt, kui seda andmed üldse võimaldavad. Sageli osutub vajalikuks funktsiooniga teostada matemaatilisi operatsioone, nagu astendamist, juurimist, logaritmimist jne. Juhul kui funktsioon on antud oma avaldisega, on neid operatsioone tunduvalt kergem teostada kui siis, kui on antud funktsiooni väärtuste tabel, graafik, skaala või funktsiooni määrav võrrand. Kõik öeldu kehtib ka funktsionaalse sõltuvuse parameetrilise esitusviisi kohta.

Funktsionaalne seos ja põhjuslik seos

Iga kaht suurust on võimalik teineteisega funktsionaalselt siduda. Tõepoolest, välja arvatud vähesed universaalsed konstandid, nagu valguse kiirus tühjuses, elektroni laeng, nn. Plancki konstant jmt., muutuvad kõik suurused ajaliselt, ühed kiiremini, teised aeglasemalt. Kui võtame mingid kaks niisugust suurust u ja v, siis igale aja-

hetkele t vastab kindel u ja ka kindel v väärtus:

$$\begin{cases} u = \varphi(t) \\ v = \psi(t). \end{cases}$$

Need kaks võrdust koos võetuna annavad suuruste u ja v funktsionaalse seose parameetrilisel kujul. Sel viisil võib siduda teineteisega iga kaht mõeldavat nähtust, näiteks päikesepaiste tundide koguarvu suvekuudel ja viinamarja suhkrusisaldust lõikusajal, talve lumerohkust ja jõe veepinna kõrgust jäämineku, Kuu valgustugevust ja oma keha kaalu, mõne muutliku tähe heledust ja lehma piimaandi. Esimeses kahes näites on seos niihästi funktsionaalne kui ka põhjuslik, teises kahes näites ainult funktsionaalne. Viimasel juhul on seos puhtformaalne, ilma igasuguse põhjusliku aluseta.

KOLMAS OSA

JOONE VÕRRAND. SIRGJOON. DETERMINANDID KOONUSLÕIKED GEOMEETRILISED TEISENDUSED

PEATÜKK VII

JOON JA TEMA VÕRRAND

§ 27. JOONE VÕRRAND

Joone võrrandi mõiste

Olgu antud võrrand kahe muutujaga x ja y:

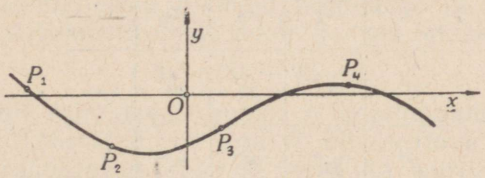
$$F(x, y) = 0.$$

Anname ühele muutujale, näiteks muutujale x, rea väärtusi: x_1, x_2, x_3, ... ja määrame võrrandist neile vastavad y väärtused. Olgu tulemuseks iga kord üksainus y väärtus: y_1, y_2, y_3, ... Sel puhul määrab antud võrrand ühese funktsiooni $y = f(x)$, mille väärtuste tabel on

x	x_1	x_2	x_3	...
y	y_1	y_2	y_3	...

Kujutame x ja y kokkukuuluvate väärtuste paarid punktidena xy-tasapinnal:

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ P_3(x_3, y_3),\ \ldots$$



Joon. 84.

ja ühendame need punktid joonega (joon. 84). Saame võrrandiga $F(x, y) = 0$ määratud funktsiooni $y = f(x)$ graafiku, mida märgime lühiduse mõttes tähega C. Näeme, et igal väärtuspaaril

(x, y), mis rahuldab võrrandit $F(x, y) = 0$, on olemas graafiline vaste kõvera C punkti $P(x, y)$ näol ja, ümberpöördult, joone C igal punktil P on koordinaadid, mis rahuldavad võrrandit $F(x, y) = 0$. Niisuguse vastavuse puhul võrrandit rahuldavate väärtuspaaride (x, y) ja joone C punktide vahel ütleme, et $F(x, y) = 0$ on joone C võrrand. Niisiis:

joone C võrrandiks nimetame niisugust seost $F(x, y) = 0$ kahe muutuja x ja y vahel, mida rahuldavad selle joone iga punkti koordinaadid ja ainult need.

Nagu näeme, kehtib joone C punktide ja tema võrrandi $F(x, y) = 0$ lahendite paaride (x, y) vahel üks-ühene vastavus: igale väärtuspaarile (x, y), mis rahuldab võrrandit $F(x, y) = 0$, vastab kõvera C üks punkt ja kõvera igal punktil P on koordinaadid, mis rahuldavad võrrandit $F(x, y) = 0$. Joon C on võrrandi geomeetriliseks vasteks, võrrandi kujutuseks, võrrandi pildiks; võrrand $F(x, y) = 0$ aga on joone C algebraliseks vasteks, joone algebraliseks esindajaks, joone algebraliseks väljendajaks. See asjaolu võimaldab joonte omadusi uurida nende joonte võrrandite abil ja võrrandite omadusi tõlgendada näitlikult joonte omadustega.

Joone ja selle võrrandi täielikul vastavusel teineteisele põhinevad mitmed matemaatilised kõnekäänud:

selle asemel, et öelda «joon, mille võrrand on $F(x, y) = 0$», ütleme lihtsalt «joon $F(x, y) = 0$». Lauset «leida joon» mõistame lausena «koostada joone võrrand».

Eespool toodud definitsioon haarab ka varem käsitletud juhtu $y = f(x)$: võrrandiks $F(x, y) = 0$ on sel puhul seos $y - f(x) = 0$. Funktsiooni $y = f(x)$ graafiku C võrrandiks on seos $y - f(x) = 0$ ehk $y = f(x)$.

Võib juhtuda, et võrrand $F(x, y) = 0$ määrab y argumendi x mitmese funktsioonina. Kahese funktsiooni puhul saame järgmise väärtuste tabeli:

x	x_1	x_2	x_3	...
y'	y_1'	y_2'	y_3'	...
y''	y_1''	y_2''	y_3''	...

Väärtuspaaride graafiline kujutamine annab siin kaks rida punkte:

$$(x_1, y_1'),\ (x_2, y_2'),\ (x_3, y_3'),\ \ldots$$

ja

$$(x_1, y_1''),\ (x_2, y_2''),\ (x_3, y_3''),\ \ldots$$

ning sellele vastavalt kaks joont C' ja C''. On viisiks neid jooni vaadelda kui ühe joone C kaht haru ja rääkida võrrandist $F(x, y) = 0$ kui joone C võrrandist.

Joone võrrandi koostamine

Joon antakse geomeetrias ikka mingi teda määrava omadusega, näiteks: ringjoon on niisugune tasapinnaline joon, mille kõik punktid asetsevad võrdseil kaugusil ühest kindlast punktist (ringjoone keskpunktist); tasapinnal asetseva lõigu keskristsirget iseloomustab omadus, et kõik tema punktid asetsevad võrdseil kaugusil lõigu otspunktidest.

Joone võrrand saadakse joont määrava omaduse avaldamisel koordinaatide keeles.

Selle lause mõtte selgitamiseks lahendame mõned joone võrrandi koostamise ülesanded.

Ülesanne 1. Punkt liigub xy-tasapinnal nii, et igas asendis tema kaugused punktidest $M(-3; 0)$ ja $N(0; 5)$ on võrdsed. Leida punkti liikumistee võrrand.

Lahendus. Olgu liikuva punkti mingi asukoht märgitud tähega P (jätame ütlemata, missugune asukoht nimelt). Punkti liikumistingimuste kohaselt peab olema

$$MP = NP,$$

seega ka

$$MP^2 = NP^2.$$

Olgu punkti P koordinaadid märgitud tähtedega x ja y. Siis punktidevahelise kauguse ruudu valemi järgi

$$MP^2 = (x + 3)^2 + (y - 0)^2,$$
$$NP^2 = (x - 0)^2 + (y - 5)^2$$

ja seega

$$(x + 3)^2 + (y - 0)^2 = (x - 0)^2 + (y - 5)^2.$$

Sulge avades, sarnaseid liikmeid koondades ja saadust taandades ning kõiki liikmeid ühele poole kandes leiame, et

$$3x + 5y - 8 = 0.$$

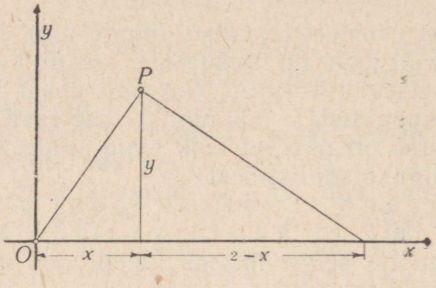
Seda võrrandit rahuldavad punkti P koordinaadid, sest võrrand on vastavalt koostatud. Et aga P oli uuritava joone mingi punkt, siis rahuldavad saadud võrrandit uuritava joone iga punkti koordinaadid, seega joone võrrand on

$$3x + 5y - 8 = 0.$$

Tingimus $MP = NP$ ütleb, et uuritav joon on lõigu MN keskristsirge. Seega lõigul otspunktidega $(-3; 0)$ ja $(0; 5)$ on keskristsirge võrrandiga $3x + 5y - 8 = 0$.

Ülesanne 2. Lõik otspunktidega (0; 0) ja (2; 0) on ringjoone diameetriks. Leida selle ringjoone võrrand.

Lahendus. Olgu P (joon. 85) üks kõnesoleva ringjoone punktidest (jätame ütlemata, missugune nimelt) ja olgu selle punkti koordinaadid x ja y. Joonestame punkti P ordinaatlõigu.



Joon. 85.

Selle alus jaotab antud diameetri kaheks osaks, mille pikkused on vastavalt x ja $2 - x$. Üheks ringjoont iseloomustavaks omaduseks on see, et tema punktist diameetrile langetatud ristlõik jaotab diameetri kaheks osaks, milledele see ristlõik on keskmiseks võrdeliseks. Seepärast

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{2-x}.$$

See võrrand on saadud punkti P koordinaatide jaoks. Et aga punkt P oli ringjoone mingi punkt, siis on leitud võrrand kehtiv ringjoone iga punkti kohta ja on seega ringjoone võrrand.

Saadud võrrandit on võimalik kirjutada murdudest vabal kujul. Tõepoolest, võrde põhiomaduse järgi

$$x(2 - x) = y^2$$

ehk, teisiti,

$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

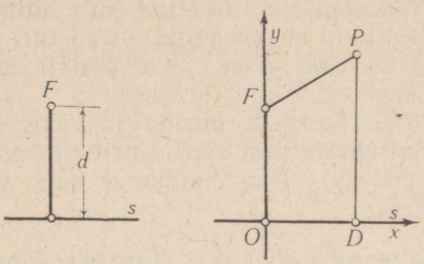
Eelmises kahes ülesandes oli teljestik antud. Võib aga juhtuda, et nõutakse joone võrrandi koostamist, andes ainult joont määrava omaduse, teljestikust rääkimata. Kui teljestik pole antud, siis tuleb ta valida enne joone võrrandi koostamisele asumist.

Ülesanne 3. Leida joone võrrand, teades, et joone punktid asetsevad antud sirgest kaks korda kaugemal kui antud punktist.

Lahendus. Olgu antud punkt märgitud tähega F ja antud sirge tähega s. Et punkt F ja sirge s on antud, siis võib

antuks lugeda ka nendevahelise kauguse. Märgime selle kauguse tähega d.

Valime teljestiku. Võtame näiteks sirge s abstsissteljeks (joon. 86) ja paneme ordinaattelje läbi punkti F risti sirgega s. Siis on punkti F abstsiss null ja ordinaat d, see tähendab $F \equiv (0, d)$. Märgime uuritava joone suvalise punkti tähega P ja olgu selle punkti koordinaadid x ja y.



Joon. 86.

Ühendame punkti P punktiga F ja langetame punktist P perpendikulaari PD sirgele s. Joont määrava omaduse kohaselt peab siis olema

$$PD = 2PF$$

ehk

$$PD^2 = 4PF^2.$$

Avaldame selle uuritavat joont määrava omaduse suvalise punkti koordinaatide kaudu:

$$PD = y, \quad PD^2 = y^2,$$
$$PF^2 = (x - 0)^2 + (y - d)^2$$

ja järelikult

$$y^2 = 4[(x - 0)^2 + (y - d)^2]$$

ehk, pärast sulgude avamist ja koondamist,

$$4x^2 + 3y^2 - 8dy + 4d^2 = 0.$$

See võrrand seob teineteisega punkti P koordinaate. Et aga punkt P oli joone mingi punkt, siis on seos kehtiv joone iga punkti kohta ja on seega joone võrrand.

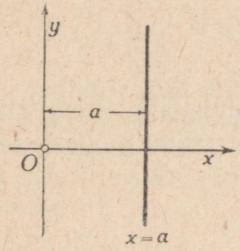
Kõnesolevat joont on kerge konstrueerida: võtame mõne paraja lõigu l ja joonestame selle lõigu kaugusel rööbiti antud sirgega s uue sirge; edasi joonestame ümber antud punkti F kui keskkoha raadiusega $\frac{1}{2}l$ ringjoone kaare; sirge ja kaar lõikuvad kahes punktis, mis mõlemad kuuluvad uuritavale joonele. Muutes lõigu l pikkust, saame veel joone kaks punkti. Nii jätkates konstrueerime kõvera joonestamiseks vajaliku hulga punkte.

Kokku võttes joone võrrandi koostamise näidete varal õpitut, saame järgmise juhise joone võrrandi koostamiseks:

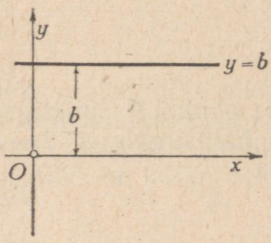
et saada joone võrrandit, valime sobiva teljestiku, võtame joonel mingi punkti (jättes ütlemata, missuguse nimelt), märgime punkti koordinaadid ja avaldame neis koordinaatides omaduse, mis on kõigil joone punktidel ühine, või tingimuse, mida kõik joone punktid peavad rahuldama.

Sel viisil saadud seos on tuletatud küll ainult võetud punkti koordinaatide kohta, kuid et see punkt oli võetud joonel v a b a l t, siis kehtib saadud võrrand joone i g a punkti kohta ja on seega tõepoolest joone võrrand.

Et võrrandit oleks kergem uurida ja rakendada, vabastame ta murdudest ja juuremärkidest (kui juuritavas esineb joone suvalise punkti koordinaate) ning kanname kõik võrrandi liikmed üle vasakule poolele.



Joon. 87.



Joon. 88.

Mõnikord on võimalik anda joone võrrand mõne väga lihtsa kaalutluse põhjal. Olgu näiteks tegemist sirgjoonega (joon. 87), mis on tõmmatud rööbiti y-teljega kaugusel a sellest teljest. Et kõigil selle sirge punktidel on üks ja seesama abstsiss a, siis on kõnesoleva sirgjoone võrrand

$$x = a.$$

Sirgjoonel, mis on tõmmatud rööbiti x-teljega kaugusel b sellest teljest (joon. 88), on võrrand

$$y = b.$$

Niisiis:

võrrand $x = a$ kujutab ordinaatteljega rööbikut sirget, võrrand $y = b$ abstsisssteljega rööbikut sirget.

Ordinaattelje võrrandiks on

$$x = 0,$$

abstsisstelje võrrandiks

$$y = 0.$$

Koordinaattasapinna I ja III veerandi nurgapoolitaja iga punkt asetseb võrdseil kaugusil abstsiss- ja ordinaatteljest; seega koordinaattasapinna esimese ja kolmanda veerandi nurgapoolitaja võrrandiks on

$$y = x$$

ehk

$$x - y = 0.$$

Teise ja neljanda veerandi nurgapoolitaja võrrandiks saame

$$y = -x$$

ehk

$$x + y = 0.$$

Joone võrrand polaarkoordinaatides

Laiendades eespool toodud joone võrrandi definitsiooni polaarkoordinaatide juhule, saame selle järgmisel kujul:

joone võrrand polaarkoordinaatides on niisugune seos muutujate φ ja r vahel, mida rahuldavad joone iga punkti polaarkoordinaadid ja ainult need.

Joone võrrandi koostamine polaarkoordinaatides toimub samal viisil nagu ristkoordinaatidegi puhul.

Ülesanne 1. Koostame ringjoone võrrandi polaarkoordinaatides, teades, et polaarteljeks on ringjoone puutuja ja pooluseks puutepunkt ning ringjoone raadius on a.

Lahendus. Võtame ringjoonel suvalise punkti P, mille polaarkoordinaadid on φ ja r. Siis joonise 89 põhjal

$$r = 2a \cos (90° - \varphi)$$

ehk

$$r = 2a \sin \varphi.$$

See seos φ ja r vahel on saadud ringjoone punkti P koordinaatide jaoks. Et aga see punkt oli ringjoone suvaline punkt, siis on saadud seos kehtiv ringjoone iga punkti kohta ja on seega otsitud võrrandiks.

Ülesanne 2. Ringjoone punktist O on tõmmatud kiir OR (joon. 90). Sellel kiirel on märgitud punktid P_1 ja P_2 diameetri kaugusel punktist R. Kiire OR pöörlemisel ümber punkti O kirjeldab kumbki punktidest P_1 ja P_2 teatava kõvera. Leida nende kõverate võrrandid polaarkoordinaatides.

Lahendus. Valime pooluse ja polaartelje: olgu punkt O pooluseks, seda punkti läbiv diameeter polaarteljeks. Olgu kiir

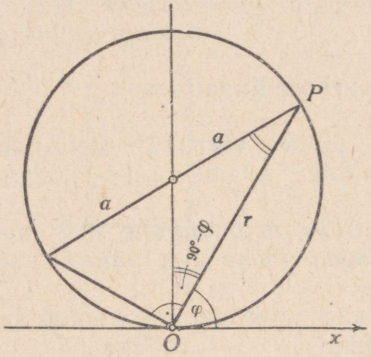
OR suvaline kiir läbi punkti O. Siis, nagu jooniselt näha, punkti P_1 jaoks

$$r = a\cos\varphi + a \text{ ehk } r = a(1 + \cos\varphi),$$

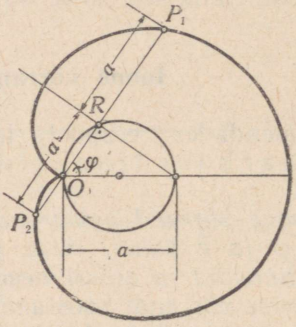
punkti P_2 jaoks aga

$$r = a\cos\varphi - a \text{ ehk } r = -a(1 - \cos\varphi).$$

Leitud seosed on saadud punktide P_1 ja P_2 kohta. Et aga kiir OR oli suvaline kiir läbi O, siis on need seosed kehtivad kõigi punktide P_1 ja kõigi punktide P_2 puhul. Seega need seosed ongi otsitud võrranditeks.



Joon. 89.



Joon. 90.

Märgime, et punktide P_1 ja P_2 poolt kirjeldatud jooni võib vaadelda kui ühe kõvera kaht haru. Tõepoolest, et $\cos(\varphi + 180°) = -\cos\varphi$, siis nurga φ vabal muutumisel avaldis $1 - \cos\varphi$ peitub juba avaldises $1 + \cos\varphi$. Seepärast võime mõlemad polaarkauguse r avaldised kokku võtta üheksainsaks avaldiseks

$$r = \pm a(1 + \cos\varphi),$$

kus märk pluss näitab, et polaarkaugus tuleb võtta kiirel tõusunurgaga φ, märk miinus aga, et polaarkaugus tuleb võtta kiirel tõusunurgaga $\varphi + 180°$. Viimati kirjutatud võrrand ongi ülesande lahendiks.

Kõver, mille võrrand on $r = \pm a(1 + \cos\varphi)$, kannab kardioidi* nimetust, sest ta meenutab mõningal määral südant. Kardioidikujulisi detaile kasutatakse mitmesugustes mehhanismides.

---

* Kr. k. *kardia* — süda.

Parameetri kasutamine joone võrrandi koostamisel

Paljudel juhtudel on joone võrrandi leidmine eriti hõlbus, kui joone punkti abstsissi ja ordinaadi vahelist seost otsida parameetrilisel kujul. Võtte seletamiseks vaatleme järgmisi lihtsaid näiteid.

Näide 1. Leiame sirgjoone võrrandi, teades, et sirgjoon läbib punkti $P_0(x_0, y_0)$ ja moodustab abstsissteljega nurga μ.

Küsimuse lahendamiseks võtame sirgel mingi punkti P, mille koordinaadid on x ja y. Valime parameetriks lõigu P_0P, mille märgime tähega l. Siis selle lõigu projektsioonid on ühelt poolt

$$x - x_0 \text{ ja } y - y_0,$$

teiselt poolt

$$l\cos\mu \text{ ja } l\sin\mu,$$

nii et

$$\begin{cases} x = x_0 + l\cos\mu \\ y = y_0 + l\sin\mu. \end{cases}$$

Et punkt P oli sirgjoone suvaline punkt, siis need seosed kehtivad iga tema punkti kohta. Et x_0, y_0 ja μ on konstandid ja l on parameeter (igale punktile P sirgjoonel vastab oma kindel lõik P_0P ehk l), siis viimased kaks võrdust ongi sirgjoone parameetrilised võrrandid.

Elimineerides parameetri l, saame

$$y - y_0 = \tan\mu \cdot (x - x_0)$$

ehk, kui tähistame $\tan\mu$ tähega m,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

See on sama sirgjoone võrrand ristkoordinaatides.

Näide 2. Leiame ringjoone võrrandi, teades, et ta keskpunkt on $P_0(x_0, y_0)$ ja raadius l.

Küsimuse lahendamiseks võtame ringjoonel mingi punkti P, mille koordinaadid on x ja y. Parameetriks võtame nurga μ, mille raadius P_0P moodustab abstsisstelje positiivse suunaga. Siis, täpselt nagu ennegi,

$$\begin{cases} x = x_0 + l\cos\mu \\ y = y_0 + l\sin\mu, \end{cases}$$

selle vahega, et nüüd $l = const$ ja μ on ringjoone punktilt punktile muutuv parameeter. Saadud kaks võrdust ongi ringjoone parameetrilised võrrandid.

Parameetri μ elimineerimine annab

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = l^2,$$

mis on ringjoone võrrand ristkoordinaatides.

§ 28. LIHTSAMAID JOONE VÕRRANDI ABIL LAHENDUVAID KÜSIMUSI

Joonte võrrandid võimaldavad kergesti lahendada mitmeid küsimusi joonte asendi kohta koordinaatteljestiku suhtes, punktide ja joonte vastastikuse asendi kohta, leida kahe joone lõikepunkte jne. Toome mõned näited.

1° Punkti asetsemine joonel. On antud joon C oma võrrandiga $F(x, y) = 0$. Kas punkt $P(a, b)$ asetseb joonel või mitte?

Lahendus. Kui punkt P asetseb joonel C, siis peavad tema koordinaadid rahuldama joone võrrandit. Seepärast asetame avaldisse $F(x, y)$ tähtede x ja y asemele a ja b ning arvutame tulemuse $F(a, b)$. Kui see on null, siis punkt P asetseb joonel C; kui see on nullist erinev, siis mitte.

2° Joone punkti ordinaadi leidmine antud abstsissi järgi. On antud joon C oma võrrandiga $F(x, y) = 0$ ja joonel asetseva punkti P abstsiss x_0. Missugune on punkti P ordinaat?

Lahendus. Olgu otsitav ordinaat y_0. Et punkt (x_0, y_0) peab asetsema joonel C, siis tema koordinaadid peavad rahuldama joone võrrandit; seega peab olema $F(x_0, y_0) = 0$. See on võrrand ühe tundmatuga y_0. Lahendades selle võrrandi y_0 suhtes, saame nõutud ordinaadi. Analoogiliselt leiame joone punkti abstsissi, kui on teada punkti ordinaat.

3° Joonte lõikepunktid. On antud kaks joont oma võrranditega $F(x, y) = 0$ ja $G(x, y) = 0$. Missugused on nende joonte lõikepunktide koordinaadid?

Lahendus. Joonte iga lõikepunkt asetseb nii ühel kui teisel joonel. Järelikult joonte lõikepunkti koordinaadid peavad rahuldama nii üht kui teist võrrandit. Seega lõikepunkti (või kui neid on mitu, siis lõikepunktide) koordinaadid saadakse, lahendades mõlemad antud võrrandid ühiselt:

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) = 0. \end{cases}$$

Näiteks joonte $x^2 + y^2 - 4y = 0$ ja $y = 2x$ lõikepunkti abstsiss rahuldab võrrandit $x^2 + (2x)^2 - 4 \cdot 2x = 0$ ehk $5x^2 - 8x = 0$. Selle võrrandi lahendamine annab $x_1 = 0$ ja $x_2 = 1{,}6$. Vastavad

y väärtused on $y_1 = 0$ ja $y_2 = 3{,}2$. Antud joontel on kaks lõikepunkti: (0; 0) ja (1,6; 3,2).

4° Joone ja telgede lõikepunktid. Kus lõikab joon $F(x, y) = 0$ koordinaattelgi?

Lahendus. Abstsiss- ja ordinaattelje võrrandid on vastavalt $y = 0$ ja $x = 0$. Seega joone ja telgede lõikepunktide koordinaadid saadakse, lahendades süsteemid

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} F(x, y) = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

5° Joone sümmeetria telgede suhtes. On antud joon oma võrrandiga $F(x, y) = 0$. Kas see joon on sümmeetriline abstsisstelje suhtes?

Lahendus. Olgu P üks joone punktidest. Siis tema koordinaadid x ja y rahuldavad joone võrrandit, nii et $F(x, y) = 0$. Olgu Q punkti P peegelpunkt abstsisstelje suhtes. Tema koordinaadid on $(x, -y)$. Kui ka punkt Q asetseb joonel, siis peab olema ka $F(x, -y) = 0$ ja ümberpöördult. Võrduste $F(x, y) = 0$ ja $F(x, -y) = 0$ üheaegse kehtimise järelduseks on võrdus $F(x, y) = F(x, -y)$. Nagu eelmised kaks, nii peab ka see võrdus kehtima x igal väärtusel, mil avaldisel F on mõte. Seega peab olema

$$F(x, y) \equiv F(x, -y).$$

Sõnastatult ütleb see, et

joone sümmeetria puhul abstsisstelje suhtes joone võrrandi kuju ei muutu, kui temas kõikjal y asemele paigutada $-y$.

Näiteks on võrrandiga $x^2 + y^2 - 2x = 0$ antud joon sümmeetriline abstsisstelje suhtes, sest $x^2 + (-y)^2 - 2x \equiv x^2 + y^2 - 2x$ ja seega võrrandi kuju ei muutu, kui temas y asemele paigutada $-y$.

Samal viisil veendume, et

joone sümmeetria puhul ordinaattelje suhtes joone võrrandi kuju ei muutu, kui temas kõikjal x asemele paigutada $-x$.

6° Joone sümmeetria alguspunkti suhtes. On antud joon oma võrrandiga $F(x, y) = 0$. Kas joon on sümmeetriline alguspunkti suhtes?

Lahendus. Olgu P üks joone punktidest. Olgu Q punkt, mis on sümmeetriline punktiga P koordinaatide alguspunkti suhtes. Kui punkti P koordinaadid on (x, y), siis punkti Q koordinaadid on $(-x, -y)$. Korrates punktide P ja Q koordinaatide kohta eespool toodud mõttekäiku, näeme, et

joone sümmeetria puhul alguspunkti suhtes joone võrrandi kuju ei muutu, kui temas kõikjal x ja y asemele paigutada $-x$ ja $-y$.

Näiteks joon $x^2 - 2xy + y^2 - 10 = 0$ on alguspunkti suhtes sümmeetriline, sest avaldis

$$(-x)^2 - 2(-x)(-y) + (-y)^2 - 10$$

on identne avaldisega $x^2 - 2xy + y^2 - 10$.

Koordinaatide meetod matemaatikas

Eespool nägime, et joone võrrand on joone algebraliseks vasteks. Seega joone võrrand võimaldab uurida algebra võtetega joone kuju ja omadusi. Samal ajal on joon oma võrrandi geomeetriliseks vasteks. Ta kujutab näitlikult muutujate x ja y vahel kehtivat seost, selle seose omadusi ja iseärasusi. «Võtmeks», mille abil geomeetrilised vahekorrad tõlgitakse algebra keelde ja, ümberpöördult, algebralised seosed tõlgitakse geomeetria keelde, on koordinaatide mõiste. Sellel mõistel põhinevat uurimismeetodit nimetatakse koordinaatide meetodiks ja geomeetria haru, mis on ehitatud koordinaatide mõistele ja koordinaatide meetodile, analüütiliseks geomeetriaks.

Koordinaatide meetodi loomine (aastal 1637) rajas tee geomeetria tõdede avastamiseks algebra vahenditega ja algebra tõdede selgitamiseks geomeetria abinõudega. Koordinaatide meetodi loojaks oli suur prantsuse matemaatik ja filosoof Descartes.

Koordinaatide meetod on osutunud võimsaks uurimisvahendiks matemaatikas. Ta on aga kandnud rikkalikku vilja ka loodusteaduse kõigis harudes ja leidnud laialdast rakendamist paljudel praktilise töö aladel.

PEATÜKK VIII

SIRGJOON

§ 29. PARAMEETRID SIRGJOONE MÄÄRAMISEKS

Suurusi, mille abil määratakse mõne geomeetrilise kujundi asend või täpsemalt piiritletakse mõne geomeetrilise objekti kuju või füüsikalise objekti olek, nimetatakse parameetriteks. Nii räägime ringjoone keskpunkti koordinaatidest ja raadiusest kui ringjoone parameetritest või auru temperatuurist ja rõhust kui auru parameetritest. Asudes sirgjoone võrrandi erikujude käsitlemisele ja sirgjoonte kohta käivate põhiliste küsimuste lahendamisele, peatume eelkõige küsimuse juures, missuguste parameetritega saab määrata sirgjoone asendit koordinaattasapinnal.

Sirgjoone tõusunurk

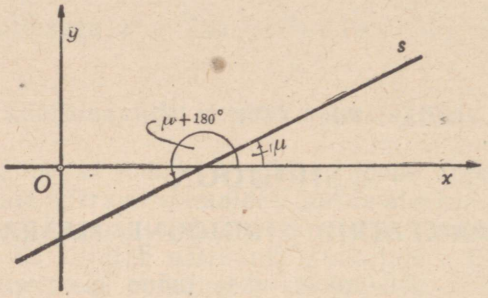
Igapäevases elus kerkivate liiklemise ja teede ehitamise küsimuste lahendamiseks on vaja teada, kui järsult tõuseb mäenõlv, raudtee või maantee. Vee juurde- või äravooluga seotud küsimuste lahendamiseks on vaja teada, kui järsult langeb jõesäng, kanalisatsioonitoru või jõujaama veetunnel. Kolmandal juhul on vaja teada, kui tugevasti on kallutatud maja katus, pesukoja põrand või küttekolde rest. Seatud küsimustele vastatakse tõusu, languse või kalde arvulise väärtuse andmisega.

Tõus, langus ja kalle on kolm erinevat nimetust ühe ja sellesama mõiste jaoks. See mõiste kuulub tähtsamate rakendusmatemaatiliste mõistete hulka. Tema nimetusena kasutame enamasti sõna «tõus», erijuhtudel ka «langus» ja «kalle».

Kui räägime mäenõlva tõusust või jõesängi langusest või katuse kaldest, siis mõistame neid kolme ikka rõhttasapinna suhtes arvatuna.

Kujutleme püsttasapinnas rõhtsihilise abstsissteljega koordinaatteljestikku (joon. 91). Olgu s mingi (x-telge lõikav) sirgjoon. See sirgjoon moodustab x-teljega kaks paari võrdseid nurki. Lepime kokku nurki lugeda positiivseiks kellaosuti liikumise vas-

tassuunas, lähtudes ikka x-telje positiivsest suunast. Sirge s moodustab x-telje positiivse suunaga kaks nurka, mis erinevad teineteisest 180° võrra. Väiksemat neist kahest nurgast



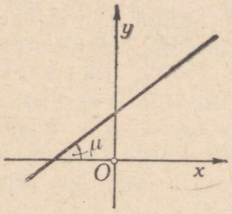
Joon. 91.

nimetame sirgjoone tõusunurgaks. Mõistes sirgjoone tõusunurka praegu käsitletud viisil ka xy-tasapinna igasuguse teise asendi puhul, anname järgmise definitsiooni:

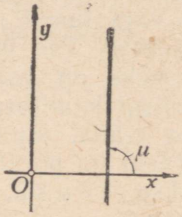
sirgjoone tõusunurgaks nimetatakse väiksemat positiivset nurka, mille lähtehaar on sihitud positiivses suunas piki x-telge, teine haar aga piki sirgjoont.

Öeldust järeldub, et

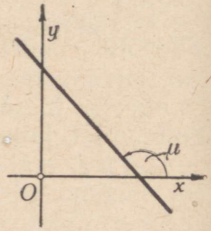
sirgjoone tõusunurk on alati 0° *ja* 180° *vahel.*



Joon. 92.



Joon. 93.



Joon. 94.

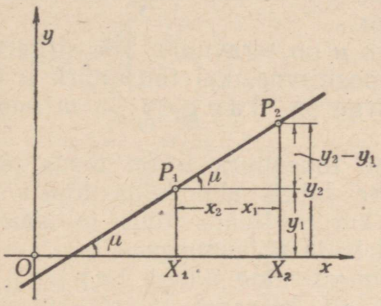
Sirgjoone tõusunurka tähistame tähega μ. Arvestades sirgjoone võimalikke asendeid x-telje suhtes, näeme, et nurk μ on kas teravnurk (joon. 92), täisnurk (joon. 93) või nürinurk (joon. 94).

Kui tõusunurk on terav, siis ütleme, et sirge tõuseb; kui tõusunurk on nüri, ütleme, et sirge langeb.

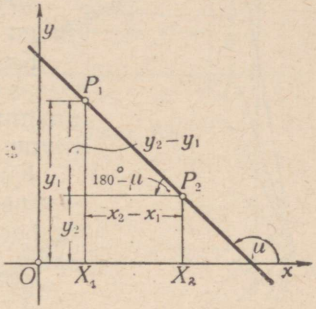
Kui sirgjoon ei lõika x-telge, see tähendab, kui ta on x-teljega paralleelne, siis loeme sirgjoone tõusunurgaks 0°.

Sirgjoone tõus

Tõusunurga otsene mõõtmine maastikul on tülikas; sirgjoone sihi märkimine joonisel sirgjoone tõusunurga järgi ei võimalda kuigi suurt täpsust; ka teoreetiliste küsimuste käsitlemisel ei ole tõusunurk sobiv töövahend. Seetõttu on loobutud tõusmise järskuse iseloomustamisest tõusunurga abil; selle asemel on otstarbekam kasutada erilist «tõusuks» nimetatavat näitajat. Asume tõusu mõiste selgitamisele. Vaatleme esiteks tõusva sirge juhtu (joon. 95). Võtame kaks selle sirge punkti $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$, kusjuures olgu $x_2 > x_1$. Kujutleme vaatlejat, kes liigub piki sirget punktist P_1 punkti P_2. Käsitleme seda liikumist liit-



Joon. 95.



Joon. 96.

liikumisena: vaatleja liigub rõhtsihis edasi lõigu $x_2 - x_1$ võrra ja tõuseb ühtaegu püstsihis lõigu $y_2 - y_1$ võrra. Seega rõhtsihilisele nihkumisele $x_2 - x_1$ ühiku võrra vastab tõusmine (püstsihis) $y_2 - y_1$ ühiku võrra. Järelikult rõhtsihilisele nihkumisele 1 ühiku võrra vastab tõusmine

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ühiku võrra. See suhe võetaksegi tõusmise järskuse näitajaks. Ta kannab lühikest nimetust «tõus». Me tähistame ta tähega *m*. Niisiis:

sirgjoone tõus näitab, mille võrra sirgel liikuv punkt tõuseb püstsihis, kui ta rõhtsihis nihkub edasi ühe ühiku võrra.

Sirgjoone tõus kui kahe lõigu suhe on nimeta arv. Nagu näeme jooniselt 88, on *x*-teljega rööbiku sirgjoone tõus 0. Lihtne skits näitab, et järsult tõusva sirge tõus on suur, pikaldaselt tõusva sirge tõus aga väike. Püstsirge tõus pole määratav, sest sel puhul $x_2 - x_1 = 0$ ja nulliga jagamisel pole mõtet.

Kõik öeldu kandub üle langeva sirge juhule (joon. 96).

Sel puhul vahe $y_2 - y_1$ on negatiivne ja tõusu väärtuseks tuleb n e g a t i i v n e a r v. Niisiis:

tõusval sirgel on positiivne tõus, langeval sirgel negatiivne tõus.

Sirgjoone tõusu geomeetriline tähendus

Sirgjoone tõusu on kerge siduda sirgjoone tõusunurgaga. Joonistelt 95 ja 96 näeme, et

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \mu,$$

seega

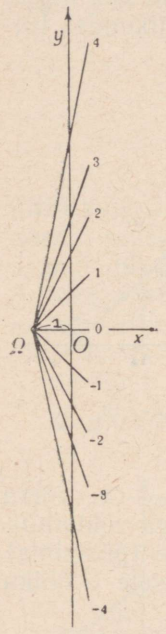
sirgjoone tõus on võrdne sirgjoone tõusunurga tangensiga.

Kui tõusunurk μ on teravnurk, siis sirge on t õ u s e v ja m positiivne, kui tõusunurk μ on nürinurk, siis sirge on l a n g e v ja m negatiivne.

Kui sirgjoone tõusunurk μ on teada, siis saame tangensite tabeli abil leida tõusu m; ümberpöördult, kui on teada tõus m, saame sama tabeli abil leida tõusunurga μ.

Et nurga joonestamine nurga t a n g e n s i järgi on tunduvalt hõlpsam ja täpsem kui näiteks malli abil nurga s u u r u s e järgi kraadides ja minutites, siis antakse sirgjoone siht enamasti mitte nurga, vaid tõusu m kaudu.

Sirgjoone t õ u s u ü h i k u k s on abstsisstelje suhtes 45-kraadise nurga all joonestatud sirgjoone tõus. Sirgjoone tõusude s k a a l a t näeme joonisel 97. See on tangensfunktsiooni skaala.

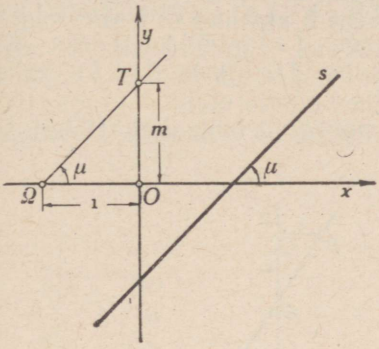


Joon. 97.

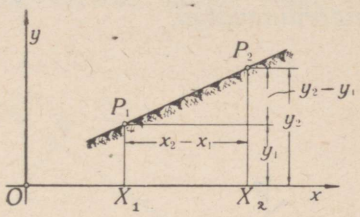
Sirgjoone tõusu väärtuse leidmine

Sirgjoone tõusu on kerge arvutada, võttes temal kaks punkti P_1 ja P_2, mõõtes vahed $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$ ja leides nende suhte. Tõusu saab aga hõlpsasti ka graafiliselt määrata: märgime abstsisstelje negatiivsel poolel lõigu $\Omega O = 1$ ja tõmbame p o o l u s e s t Ω kiire ΩT rööbiti sirgega (joon. 98). Lõik OT, mille see kiir eraldab y-teljel (alguspunktist O arvates), annab otsitava tõusu suuruse ja ka märgi. Abikolmnurga ΩOT võib joonestada ka omaette, paigutamata kaateteid ΩO ja OT koordinaattelgedele, võttes nad vaid rööbiti nende telgedega.

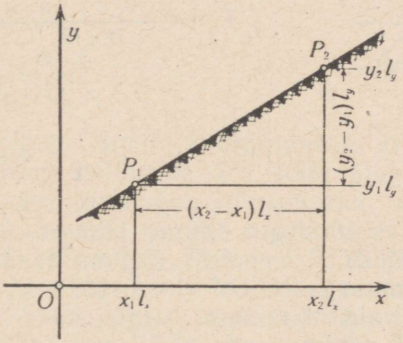
Maastiku sirgjoonelise profiili tõusu määramine nõuab ainult rõhtsihiliste kauguste ja püstsihiliste kõrgusvahede mõõtmist (joon. 99). Tõusval profiilil on tõus positiivne, langeval profiilil negatiivne.



Joon. 98.



Joon. 99.



Joon. 100.

Joonisel 100 on profiili kujutamisel kasutatud abstsiss- ja ordinaatteljel erinevaid ühikuid l_x ja l_y. Profiili tõusu tegeliku väärtuse saamiseks tuleb jooniselt leitud väärtus jagada murruga $l_y : l_x$. See murd kujutab tõusu ühikut.

Andmed sirgjoone määramiseks tasapinnal

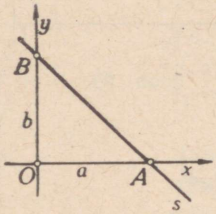
Kui koordinaatteljestik on antud, siis tasapinna iga punkt on määratud oma kahe koordinaadiga. Küsime, missuguste parameetritega saab määrata sirget sellel tasapinnal.

Sirget saame joonestada kõigepealt tema kahe punkti järgi, seega

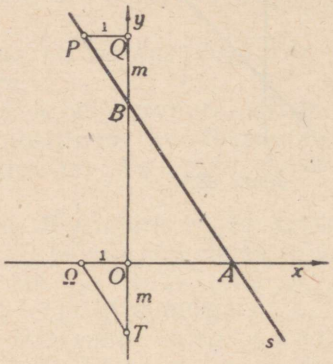
sirge on määratud oma kahe punkti koordinaatidega.

Kui sirge ei läbi koordinaatide alguspunkti (joon. 101), siis eraldab ta x-teljel lõigu $OA = a$ ja y-teljel lõigu $OB = b$. Neid lõike nimetame vastavalt sirge algabstsissiks ja algordinaadiks, mõlemaid koos sirge telglõikudeks. Et need lõigud määravad sirge kaks punkti $A(a, 0)$ ja $B(0, b)$, kaks punkti aga alati määravad sirge, siis näeme, et

sirge, mis ei läbi nullpunkti, on määratud oma algabstsissi ja algordinaadiga.



Joon. 101.



Joon. 102.

On kerge näha, et sirget saame joonestada, kui teame üht tema punkti ja tõusu. Tõepoolest, kui on teada tõus m, saame sirgjoone sihi kolmnurgast ΩOT (joon. 102), kus lõik OT kujutab arvu m. Jääb vaid tõmmata sirge läbi antud punkti P rööbiti kiirega ΩT. Kolmnurga ΩOT asemel võib muidugi kasutada ka kolmnurka PQB, võttes pikkusühikuks abstsissteljega rööbiku lõigu PQ ja märkides lõigu $QB = m$ ordinaatteljel. PB on siis sirge, mis läbib punkti P ja mille tõus on m. Seega

sirge on määratud ühe oma punkti ja oma tõusuga.

Et antud punktiks võib olla näiteks ka punkt, milles sirge lõikab y-telge (joon. 103), siis

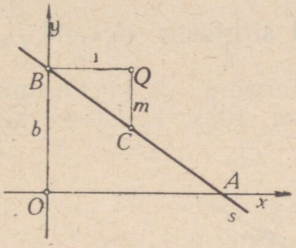
sirge on määratud oma algordinaadi ja tõusuga.

Jooniselt 103 on näha niisuguse sirge konstrueerimisviis.

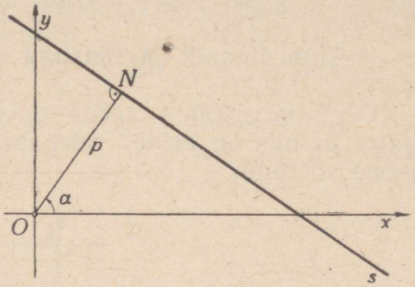
Igaüks nimetatud andmepaaridest ei sobi aga iga sirgjoone määramiseks. Näiteks pole võimalik anda sirgjoont telglõikudega, kui sirge läbib koordinaatide alguspunkti. Sel puhul on mõlemad telglõigud nullid. Andmeile $a = 0$ ja $b = 0$ vastab aga iga sirge, mis läbib alguspunkti. Seega andmed $a = 0$ ja $b = 0$ ei määra kindlat sirget.

Tõusu saab kasutada arvulise andmena sirgjoone määramiseks ainult tõusunurkade puhul, mis erinevad nurgast 90°, seega ainult sirgjoonte puhul, mis pole rööbikud ordinaatteljega.

Öeldut kokku võttes näeme, et sirget saab määrata parameetrite paariga a ja b, kui sirge ei läbi koordinaatide alguspunkti, ja parameetrite paariga b ja m, kui sirge pole rööbik ordinaatteljega. Kerkib küsimus, kas leidub niisugune parameetrite paar, millega sirge on määratud i g a l j u h u l, asetsegu ta koordinaattelgede suhtes kuidas tahes. Niisugune parameetrite paar on tõepoolest olemas. Et selles veenduda, võtame mingi sirge s



Joon. 103.



Joon. 104.

(joon. 104), joonestame temale koordinaatide alguspunktist perpendikulaari ON ning määrame ära selle pikkuse p ja tõusunurga α. Kasutame sel juhul sõna «tõusunurk» veidi laiemas mõttes kui seni. Nimelt lubame nurgal α muutuda mitte vahemikus $0° \leqslant \alpha < 180°$, vaid vahemikus $0° \leqslant \alpha < 360°$. Pole raske veenduda, et igal sirgel, kuidas ta ka poleks asetatud koordinaattelgede suhtes, on üksainus paar α ja p väärtusi. Tõepoolest, punktist O saab sirgele s joonestada ainult ü h e perpendikulaari. Ümberpöördult, igale etteantud väärtuspaarile p ja α vastab ü k s a i n u s lõik ON, ja selle lõpust N läheb läbi ü k s a i n u s sirge s risti selle lõiguga. Öeldu on kehtiv ka juhul, kui $p = 0$: sel puhul saab nurga α järgi määrata lõigu ON s i h i; sellele sihile alguspunktist tõmmatud ristjoon on siis sirge s. Samuti on öeldu kehtiv ka juhul, kui $\alpha = 0$: sel puhul tuleb lõik ON paigutada x-telje positiivses suunas; sirge s on siis risti abstsissteljega.

Sõna «perpendikulaar» asemel kasutatakse sageli sõna «normaal».

Järelikult

sirge on määratud temale koordinaatide alguspunktist joonestatud normaali tõusunurgaga ja normaali pikkusega.

Nurga α muutumisvahemikuks on $0° \leqslant \alpha < 360°$, normaali p muutumisvahemik algab nulliga ja on ülaltpoolt piiramata.

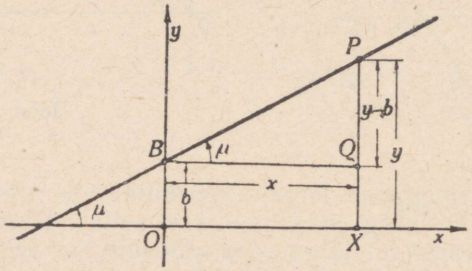
Andmete paar p ja α sobib igasuguse sirge määramiseks. Seepärast kasutatakse sirge kohta käivate üldküsimuste käsitlemisel just neid suurusi sirge parameetritena.

Hoolimata sellest, et algordinaadi ja tõusuga saame anda vaid neid sirgeid, mis on kaldu x-telje suhtes, ega saa nende andmetega haarata juhtu, kus sirge on risti x-teljega, on parameetrid b ja m ometi laialdaselt kasutatavaiks vahendeiks sirgjoone määramisel; selle põhjuseks on asjaolu, et nende parameetrite abil kirjutatud sirgjoone võrrand on eriti lihtne.

§ 30. SIRGJOONE VÕRRANDI ERIKUJUD

Algordinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand

Olgu sirgjoon s antud oma algordinaadiga b ja tõusunurgaga μ, mis on erinev nurgast 90° (joon. 105). Koostame sirgjoone võrrandi.



Joon. 105.

Järgides üldist reeglit joone võrrandi koostamiseks, arutleme järgmiselt.

Olgu P sirgjoone s suvaline punkt ning x ja y selle punkti koordinaadid. Joonestame punkti P ordinaatlõigu XP ja sellele punktist B ristjoone BQ. Täisnurkses kolmnurgas PBQ püstkaatet $QP = y - b$, rõhtkaatet $BQ = x$. Et $QP = BQ \cdot \tan \mu$, siis

$$y - b = x \cdot \tan \mu$$

ehk, teisiti kirjutatult,

$$y = x \cdot \tan \mu + b.$$

See võrdus seob punkti P koordinaate x ja y sirgjoont määravate parameetritega b ja μ. Et aga P oli sirgjoone suvaline punkt, siis on see seos kehtiv sirgjoone s iga punkti kohta ja on järelikult selle sirgjoone võrrand.

Märkides tõusunurga tangensi tähega m, saame tulemuse sõnastada kujul:

algordinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand on

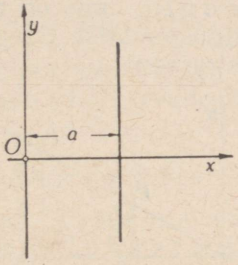
$$y = mx + b.$$

Kui sirgjoon läbib koordinaatide alguspunkti, siis $b = 0$. Järelikult

koordinaatide alguspunkti läbiva sirgjoone võrrand on

$$y = mx.$$

Viimati kirjutatud võrrand ei haara ordinaattelge ja sellega rööbikuid sirgeid, sest kummalgi neist p o l e t õ u s m ä ä r a t a v. Nagu teame,



Joon. 106.

ordinaattelje võrrandiks on $x = 0$, *ordinaatteljega rööbiku sirge võrrandiks* $x = a$ (joon. 106).

Kokku võttes näeme, et

kuidas ka asetseb sirgjoon koordinaattelgede suhtes, ikka esineb ta võrrand kas kujul $x = a$ *või kujul* $y = mx + b$.

Et need mõlemad võrrandid on tundmatute x ja y suhtes esimese astme võrrandid ehk l i n e a a r s e d* võrrandid, siis

iga sirgjoone algebraliseks vasteks on lineaarne võrrand.

Toome mõned näited.

N ä i d e 1. Sirgjoonel, mille tõus on —0,7 ja algordinaat 4,2, on võrrand

$$y = -0{,}7x + 4{,}2.$$

N ä i d e 2. Sirgjoonel, mis läbib alguspunkti ja mille tõus on $\frac{3}{4}$, on võrrand

$$y = \frac{3}{4}x.$$

* Lad. k. *linea* — joon, kitsamas mõttes sirgjoon.

Näide 3. Sirgjoonel, mis on rööbik ordinaatteljega ja asub sellest kaugusel $-5{,}8$, on võrrand

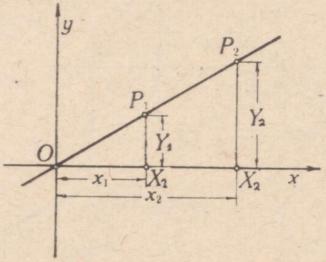
$$x = -5{,}8.$$

Pöördlause tõestus

Eespool näitasime, et iga sirgjoone võrrand esineb kas kujul $x = a$ või kujul $y = mx + b$. Tõestame nüüd, et ka ümberpöördult

võrrandid $x = a$ ja $y = mx + b$ esitavad parameetrite a, m ja b mistahes väärtuste puhul alati sirgjoont.

Tõepoolest, olgu esiteks $x = a$. Punktid, mille abstsiss on a, asetsevad kõik sirgjoonel, mis on risti abstsissteljega, lõigates teda kaugusel a alguspunktist. Seega võrrand $x = a$ esitab alati y-teljega rööbikut sirgjoont.



Joon. 107.

Olgu teiseks $Y = mx$ ja (x_1, Y_1) ning (x_2, Y_2) mingid kaks paari koordinaate, mis rahuldavad seda võrrandit; siis $Y_1 = mx_1$ ja $Y_2 = mx_2$ ehk $Y_2 : Y_1 = x_2 : x_1$. See tähendab, et täisnurksed kolmnurgad OX_1P_1 ja OX_2P_2 (joon. 107) on sarnased. Et nende tipud O, X_1 ja X_2 asetsevad ühel sirgel (abstsissteljel), siis peavad ka tipud O, P_1 ja P_2 asetsema ühel sirgel. Et (x_1, Y_1) ja (x_2, Y_2) olid mingid kaks paari koordinaate, mis rahuldavad võrrandit $Y = mx$, siis näeme, et kõik niisugused väärtuspaarid kujutuvad punktidena, mis asetsevad ühel ja samal alguspunkti läbival sirgel: võrrand $Y = mx$ kujutab alguspunkti läbivat sirget.

Olgu lõpuks $y = mx + b$. Võrreldes seda võrrandiga $Y = mx$, näeme, et $y = Y + b$. See tähendab, et punktid (x, y) saadakse punktidest (x, Y) ordinaadi muutmisel ühe ja sama lõigu b võrra. Et punktid (x, Y) asetsevad sirgel, siis asetsevad sirgel ka punktid (x, y). Võrrand $y = mx + b$ kujutab sirget tõusuga m ja algordinaadiga b.

Sirgjoone üldvõrrand

Sirgjoone võrrandi koostamisel algordinaadi ja tõusu järgi saame sageli tulemusena murruliste kordajatega võrrandi, näiteks

$$y = -\frac{3}{5}x + 1\frac{1}{4}.$$

Teame, et võrrandi lahendid, antud juhul kokkukuuluvate x ja y väärtuste paarid, ei muutu, kui võrrandi mõlemaid pooli korrutada ühe ja sellesama (nullist erineva) teguriga. Võttes selleks teguriks arvu 20, saame võrrandi

$$20y = -12x + 25$$

ehk, kui kõik liikmed viime vasakule poole,

$$12x + 20y - 25 = 0.$$

Kui kordajate ja vabaliikme konkreetsed väärtused 12, 20 ja —25 asendame mingisuguste arvudega A, B ja C, saame võrrandi

$$Ax + By + C = 0.$$

See üldkujul kirjutatud kahe tundmatuga esimese astme võrrand ehk lineaarne võrrand on sirgjoone üldvõrrand. Näitame, et selle nimetuse kasutamine on õigustatud.

Lineaarse võrrandi geomeetriline vaste

Olgu antud võrrand

$$Ax + By + C = 0$$

mistahes kordajatega A ja B ning vabaliikmega C. Näitame, et see teisendub kas võrrandiks $x = a$ või võrrandiks $y = mx + b$ ja esindab seega kordajate A, B ja C igasugustel väärtustel sirgjoont.

Arvudest A, B ja C võivad mõned olla nullid, kuid mitte kõik kolm korraga, sest siis muutub võrrand samasuseks $0 \equiv 0$. Lähtudes kordaja B suurusest, võib eristada kaht juhtu, nimelt $B \neq 0$ ja $B = 0$. Kui $B \neq 0$, siis lahendades antud võrrandi y suhtes, leiame, et

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

See on $y = mx + b$ tüüpi võrrand. (Erijuhul, kui $A = 0$, esitab antud võrrand x-teljega rööbikut sirget, ja erijuhul, kui $C = 0$,

esitab ta koordinaatide alguspunkti läbivat sirget.) Seega, kui $B \neq 0$, siis võrrand $Ax + By + C = 0$ esitab sirgjoont.

Kui $B = 0$, siis antud võrrand omandab kuju

$$Ax + C = 0,$$

kusjuures $A \neq 0$, sest vastasel korral järelduks, et ka $C = 0$. Et $A \neq 0$, siis saame võrrandi lahendada x suhtes:

$$x = -\frac{C}{A}.$$

See on $x = a$ tüüpi võrrand.

Seega ka siis, kui $B = 0$, esitab võrrand

$$Ax + By + C = 0$$

ikka sirgjoont.

Kokku võttes näeme, et

võrrand $Ax + By + C = 0$ *esitab sirgjoont kordajate* A *ja* B *ning vabaliikme* C *igasuguste väärtuste puhul (välja arvatud juht, kus ühtaegu* $A = 0$, $B = 0$).

Öeldust järeldub, et võrrandi $Ax + By + C = 0$ nimetamine sirgjoone üldvõrrandiks on õigustatud.

Nagu eespool öeldust näeme, on võrrand

$$Ax + By + C = 0$$

samaväärne kas võrrandiga $x = a$ või võrrandiga $y = mx + b$. Siit järeldub, et sirgjoone üldvõrrandit saab alati teisendada nii, et ta esineks kas kujul $x = a$ või kujul $y = mx + b$.

Näide 1. Võrrandis

$$2x + 5y - 10 = 0$$

ei ole kordaja tundmatu y juures null. Võrrandit saab kirjutada kujul

$$y = -0{,}4x + 2.$$

Näide 2. Võrrandis

$$10x + 23 = 0$$

on kordaja y juures null. Võrrandit saab kirjutada kujul

$$x = -2{,}3.$$

Kahe punktiga määratud sirgjoone võrrand

Ülesanne. Sirgjoon s on määratud oma kahe punktiga $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$. Koostada sirgjoone võrrand.

I lahendusviis. Võtame sirgel s suvalise punkti. Märgime ta tähega P. Olgu selle punkti koordinaadid x ja y. Avaldame lõikude P_1P ja P_1P_2 tõusud:

$$\text{lõigu } P_1P \text{ tõus on } \frac{y-y_1}{x-x_1},$$

$$\text{lõigu } P_1P_2 \text{ tõus on } \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Et mõlemad lõigud asetsevad ühel ja sellelsamal sirgel, siis mõlemad leitud tõusud peavad olema võrdsed; järelikult

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

See võrdus seob punkti P koordinaate x ja y andmetega x_1, y_1, x_2 ja y_2. Et P oli sirge s suvaline punkt (polnud öeldud, missugune nimelt), siis leitud seos kehtib sirge s i g a punkti koordinaatide kohta; seepärast on ta sirge s võrrand. Niisiis:

punktidega (x_1, y_1) *ja* (x_2, y_2) *määratud sirgjoone võrrand on*

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Toodud arutlust ei saa kasutada juhul, kui punktid P_1 ja P_2 asetsevad y-teljega rööbikul sirgel. Punktidel P_1 ja P_2 on sel juhul võrdsed abstsissid: $x_1=x_2$. Sama abstsiss on ka kõigil teistel sirge punktidel. Seega on siis sirge võrrand

$$x=x_1 \quad (\text{ehk } x=x_2).$$

II lahendusviis. Kui $y_1 \neq y_2$, siis sirge on x-telje suhtes k a l d u. Järelikult on ta võrrand

$$y=mx+b,$$

kus kordajad m ja b on algul teadmata. Et sirge peab läbima nii punkti P_1 kui ka punkti P_2, siis peab olema

$$y_1=mx_1+b$$

ja

$$y_2=mx_2+b.$$

Kaks viimast võrdust määravad kordajad m ja b. Asetades nende kordajate avaldised võrrandisse $y=mx+b$, saame seose x, y, x_1, y_1, x_2 ja y_2 vahel, m i l l e s p a r a m e e t r i d m ja b e i e s i n e. Parameetritest m ja b vaba seose koordinaatide x ja y vahel saame kolmest viimasest võrdusest kõige kergemini, kui võrduste vastavad pooled teineteisest lahutame ja tulemused jagame. Saame

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1),$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

See on sama võrrand, mille leidsime eespool, ainult teises kirjutusviisis.

N ä i d e. Koostada sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkte (—3; 2) ja (4; —8).

Asendades võrrandis

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

koordinaadid x_1, x_2, y_1, y_2 vastavate arvuliste väärtustega, saame

$$\frac{y - 2}{x - (-3)} = \frac{-8 - 2}{4 - (-3)}$$

ehk, lihtsustades,

$$10x + 7y + 16 = 0.$$

See ongi nõutud võrrand.

Telglõikudega määratud sirgjoone võrrand

Eriti sümmeetrilise kuju omandab sirgjoone võrrand, kui on teada sirgjoone telglõigud: algabstsiss a ja algordinaat b. Need andmed määravad sirge kaks punkti $A(a, 0)$ ja $B(0, b)$. Rakendades eespool tuletatud võrrandit sellele juhule, saame

$$\frac{y - 0}{x - a} = \frac{b - 0}{0 - a}$$

ehk, pärast teisendamist,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Niisiis:

algabstsissiga a ja algordinaadiga b määratud sirgjoone võrrand on

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

N ä i d e. Koostada sirgjoone võrrand, teades, et ta algabstsiss on 4 ja algordinaat —5.

Asendades võrrandis

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a ja b vastavate arvuliste väärtustega, saame võrrandi

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-5}=1$$

ehk

$$5x-4y-20=0.$$

Telglõigud on sobivaks vahendiks ka sirgjoone konstrueerimisel tema võrrandi järgi.

N ä i d e. Joonestada sirgjoon, mis on antud oma võrrandiga $5x-7y-35=0$.

Et punkti (0; 0) koordinaadid ei rahulda võrrandit, siis antud sirge ei läbi koordinaatide alguspunkti. Määrame lõigud a ja b, mis sirgjoon eraldab abstsiss- ja ordinaatteljel. Et sirge läbib punkte $A(a, 0)$ ja $B(0, b)$, siis peab kumbki paar neid koordinaate rahuldama antud võrrandit; seega

$$5\cdot a-7\cdot 0-35=0 \quad \text{ja} \quad 5\cdot 0-7\cdot b-35=0$$

ehk

$$a=7 \quad \text{ja} \quad b=-5.$$

Saadud lõikude järgi märgime telgedel punktid A ja B; neid läbiv sirge ongi otsitav.

Teisiti jõuame eesmärgile, kui antud võrrandit teisendame:

$$5x-7y=35,$$

$$\frac{5x}{35}-\frac{7y}{35}=1,$$

$$\frac{x}{7}+\frac{y}{-5}=1.$$

Siit näeme samuti, et sirge telglõigud on 7 ja —5.

Ühe oma punkti ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand

Ü l e s a n n e. Koostada sirgjoone s võrrand, teades, et sirgjoon läbib punkti $P_0(x_0, y_0)$ ja ta tõus on m.

L a h e n d u s. Et tõus m on antud kindla arvuna, siis pole sirge rööbik y-teljega ja järelikult lõikab seda telge. Märgime sirgjoone algordinaadi tähega b; sirgjoone võrrand on siis

$$y=mx+b,$$

kus x ja y tähendavad sirgjoone s vabalt võetud punkti koordinaate ja liige b on algul veel tundmatu. Liikme b määrame järgmiselt: et sirgjoon s läbib punkti P_0, siis koordinaadid x_0 ja y_0 peavad rahuldama sirgjoone võrrandit; seega

$$y_0=mx_0+b.$$

Siit saame

$$b = y_0 - mx_0,$$

järelikult

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

ehk

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Saadud võrdus seob sirgjoone s m i n g i punkti koordinaate x ja y andmetega x_0, y_0 ja m ning kehtib seega sirgjoone i g a punkti koordinaatide kohta; järelikult on ta selle sirgjoone võrrand. Niisiis:

sirgel, mis läbib punkti (x_0, y_0) *ja mille tõus on* m, *on võrrand*

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

N ä i d e. Sirgjoonel, mis läbib punkti $\left(-1\frac{1}{2}; 2\frac{3}{4}\right)$ ja mille tõus on $-\frac{1}{3}$, on võrrand

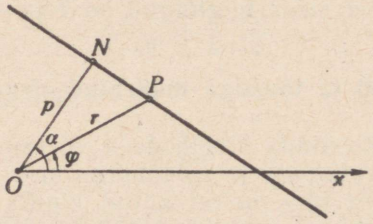
$$y - 2\frac{3}{4} = -\frac{1}{3}\left(x + 1\frac{1}{2}\right)$$

ehk, korrutatult 12-ga ja koondatult,

$$4x + 12y - 27 = 0.$$

Sirgjoone võrrand polaarkoordinaatides

Olgu antud poolus O, polaartelg Ox ja sirge oma parameetritega α ja p (joon. 108). Tuletame meelde, et normaali tõusunurk võib muutuda vahemikus $0 \leqslant \alpha < 360°$. Et saada selle sirgjoone



Joon. 108.

võrrandit, selleks võtame temal suvalise punkti P. Olgu selle punkti polaarkoordinaadid r ja φ. Nagu näeme kolmnurgast PON, on nurk $\widehat{PON} = \alpha - \varphi$. Seega täisnurkse kolmnurga PON hüpotenuus

$$r = \frac{p}{\cos(\alpha - \varphi)}.$$

See seos φ ja r vahel on saadud punkti P jaoks. Et see punkt oli sirgjoone suvaline punkt, siis on leitud seos kehtiv sirgjoone iga punkti kohta. Järelikult ta ongi otsitud võrrand.

Punkti P asetsemisel vasakul pool punkti N saaksime, et

$$r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}.$$

Mõlemad r jaoks saadud avaldised ühtivad, sest $\cos(\alpha - \varphi) = \cos(\varphi - \alpha)$.

Erijuhul, kui $\alpha = 0$, saame sirgjoone $x = p$ võrrandi polaarkoordinaatides:

$$r = \frac{p}{\cos\varphi};$$

erijuhul, kui $\alpha = 90°$, saame sirgjoone $y = p$ võrrandi polaarkoordinaatides:

$$r = \frac{p}{\sin\varphi}.$$

Sirgjoone normaalvõrrand

Olgu antud xy-teljestik alguspunktiga O. Olgu see alguspunkt ühtlasi pooluseks ja abstsisstelg polaarteljeks. Praegu tuletatud võrrandit saab kirjutada kujul

$$r\cos(\varphi - \alpha) = p$$

ehk

$$r(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = p.$$

Arvestades seoseid $r\cos\varphi = x$, $r\sin\varphi = y$, saame siit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p,$$

mis ongi sirgjoone n o r m a a l v õ r r a n d. Võrrandi nimetus tuleneb sellest, et sirget määravateks parameetriteks on siin n o r m a a l i t õ u s u n u r k α ja n o r m a a l i p i k k u s p.

Niisiis:

sirgjoont, mis on määratud oma normaali pikkusega p ja normaali tõusunurgaga α, esitab võrrand

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Märgime veel kord, et nurga α muutumisvahemikuks on vahemik $0° \leqslant \alpha < 360°$.

Sirgjoone normaalvõrrandi eeliseks sirgjoone võrrandi teiste kujude ees on ta ü l d i s u s: see võrrand haarab eranditult kõiki sirgeid, kuidas nad ka ei asetseks koordinaattelgede suhtes. Sirgjoone normaalvõrrand on ka asendamatuks vahendiks mõnede tähtsate ülesannete lahendamisel.

Sirgjoone üldvõrrandi teisendamine normaalkujuliseks

Sirgjoone üldvõrrandit kirjutasime kujul

$$Ax + By + C = 0.$$

See võrrand kas on juba normaalkujuline või pole seda. Näiteks võrrand

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2 = 0$$

on normaalkujuline, sest vabaliige on negatiivne ning kordajaid $\frac{3}{5}$ ja $-\frac{4}{5}$ võib vaadelda teatava nurga α koosinuse ja siinusena. Tõepoolest, kumbki neist suurustest on absoluutväärtuselt väiksem kui üks ja

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1,$$

nagu $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$ puhul peab olema. Võrrand

$$\frac{3}{5}x - \frac{5}{4}y - 2 = 0$$

aga pole normaalkujuline, sest pole nurka, mille siinus on $-\frac{5}{4}$.

Et iga esimese astme võrrand kujutab sirgjoont ja igal sirgjoonel on oma normaalvõrrand, siis peab olema võimalik teisendada iga esimese astme võrrandit temaga samaväärseks normaalkujuliseks võrrandiks. Selle teisenduse läbiviimiseks paneme tähele, et antud võrrandit

$$Ax + By + C = 0$$

rahuldavad needsamad väärtuspaarid (x, y), mis võrrandit

$$N(Ax + By + C) = 0,$$

kus N on mingi nullist erinev konstant, ja ümberpöördult: väärtuspaarid (x, y), mis rahuldavad teist võrrandit, rahuldavad ühtlasi ka esimest. Seega mõlemad võrrandid on s a m a v ä ä r s e d. Et viimati kirjutatud võrrand hõlmab k õ i k i antud võrrandiga samaväärseid võrrandeid, siis hõlmab ta ka võrrandit

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0.$$

Jääb leida kordaja N väärtus, mille puhul

$$N(Ax + By + C) \equiv x\cos\alpha + y\sin\alpha - p.$$

Selle samasuse rahuldamiseks on vaja ainult seda, et oleks

$$\begin{cases} NA = \cos\alpha \\ NB = \sin\alpha \\ NC = -p. \end{cases}$$

Neid kolme nõuet saab aga alati rahuldada. Tõepoolest, esimesest kahest saame, et

$$N^2(A^2 + B^2) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

ja siit edasi, et

$$N = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

kus on veel lahtine vaid ruutjuure ees seisva märgi küsimus. Selle märgi valime nii, et korrutis NC oleks n e g a t i i v n e, nagu seda nõuab tingimus $NC = -p$. Seepärast paigutame ruutjuure ette märgi pluss, kui C on negatiivne, ja märgi miinus, kui C on positiivne. Seega on kõik kolm nõuet rahuldatud ja normaalvõrrandi kordajad on

$$\cos\alpha = NA,\ \sin\alpha = NB \quad \text{ja} \quad p = -NC.$$

Esimesed kaks võrdust määravad sirgjoone normaali tõusunurga α, viimane normaali pikkuse. Niisiis:

võrrandile $Ax + By + C = 0$ vastavaks normaalkujuks on võrrand

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

kus ruutjuure ees olevaks märgiks tuleb valida vabaliikme C vastasmärk.

N ä i d e. Sirge $3x + 4y + 12 = 0$ normaalvõrrand on

$$\frac{3x + 4y + 12}{-\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0 \quad \text{ehk} \quad -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 2\frac{2}{5} = 0.$$

See sirge asetseb kaugusel $2\frac{2}{5}$ koordinaatide alguspunktist. Tema normaali tõusunurga α määrame tingimusist

$$\sin\alpha = -\frac{3}{5},\ \cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Nagu näeme siinuse ja koosinuse märkidest, asetseb nurk α III veerandis. Tabelite järgi saame

$$\alpha = 180° + 36°52' = 216°52'.$$

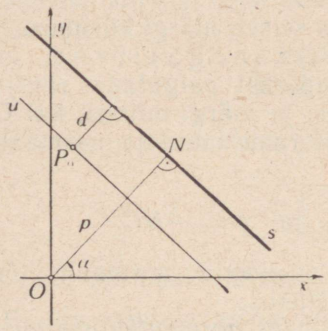
Punkti kaugus sirgest

Ülesanne. Olgu sirge s antud oma normaalvõrrandiga

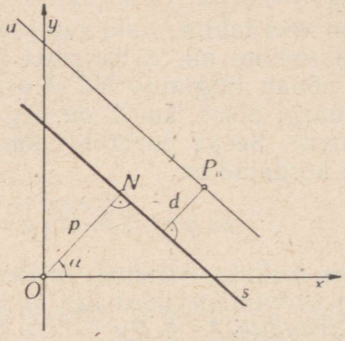
$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

ja punkt oma koordinaatidega $P_0(x_0, y_0)$. Leida selle punkti kaugus sirgest s.

Lahendus. Märgime otsitava kauguse tähega d. Vastavalt punkti P_0 asendile võib eristada kaht juhtu: a) punkt P_0 ja koordinaatide alguspunkt asetsevad mõlemad ühel pool sirget s (joon. 109); b) punkt P_0 ja koordinaatide alguspunkt asetsevad üks ühel, teine teisel pool sirget (joon. 110).



Joon. 109.



Joon. 110.

Joonestame läbi punkti P_0 abisirge u rööbiti sirgega s. Siis sirge u kaugus koordinaatide alguspunktist on vastavalt juhtudele a) ja b)

$$p - d \quad \text{või} \quad p + d.$$

Et sirgel u on normaali tõusunurk sama mis sirgel s, siis sirge u võrrand on kas

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p - d \quad \text{või} \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p + d.$$

Punkt P_0 asetseb sirgel u, mistõttu ta koordinaadid peavad rahuldama sirge u võrrandit. Seepärast kas

$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha = p - d$ või $x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha = p + d$.

Seega vastavalt juhtudele a) ja b)

$$d = \pm (x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p)$$

ehk

$$d = |x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p|.$$

Niisiis:

punkti kaugus sirgest saadakse, asetades punkti koordinaadid sirge normaalvõrrandi vasakpoolsesse ossa ja võttes tulemuse absoluutväärtuse.

Kui kõnesolevas ülesandes sirge on antud mitte parameetritega p ja α, vaid mingite teiste andmetega, siis tuleb sirge võrrand kõigepealt teisendada normaalkujuliseks.

N ä i d e. Punkti $(4; -5)$ kauguse sirgest $3x - 4y - 12 = 0$ saame selle sirge normaalvõrrandist

$$\frac{3x - 4y - 12}{+\sqrt{3^2 + 4^2}} = 0,$$

asetades tema vasakpoolsesse ossa x ja y asemele arvud 4 ja -5:

$$d = \left|\frac{3 \cdot 4 - 4 \cdot (-5) - 12}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = \left|\frac{12 + 20 - 12}{\sqrt{25}}\right| = \frac{20}{5} = 4.$$

§ 31. KAHE SIRGJOONE VASTASTIKUNE ASEND

Nurk kahe sirgjoone vahel

Olgu kaks sirget s_1 ja s_2 antud oma tõusu ja algordinaadiga; siis nende võrrandid on

$$y = m_1 x + b_1 \quad \text{ja} \quad y = m_2 x + b_2.$$

Leiame nurga nende sirgete vahel.

Joonestame sirged s_1 ja s_2 (joon. 111). Kui nende sirgete tõusunurgad on μ_1 ja μ_2 ja otsitav sirgetevaheline nurk on ω, siis kolmnurga välisnurga omaduse järgi $\mu_1 = \mu_2 + \omega$ ja seega $\omega = \mu_1 - \mu_2$. Et võrdsetel nurkadel on võrdsed tangensid, siis $\tan \omega = \tan (\mu_1 - \mu_2)$ ehk

$$\tan \omega = \frac{\tan \mu_1 - \tan \mu_2}{1 + \tan \mu_1 \cdot \tan \mu_2}.$$

Asendades $\tan \mu_1$ ja $\tan \mu_2$ nende väärtustega m_1 ja m_2, saame valemi $\tan \omega$ arvutamiseks:

$$\tan \omega = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

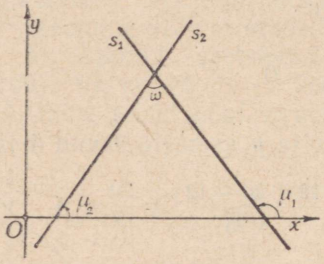
Teada oleva $\tan \omega$ järgi leiame tabelist nurga ω.

Kui sirged s_1 ja s_2 ei ole antud oma võrranditega kujul $y = mx + b$, siis tuleb $\tan \omega$ valemi rakendamiseks kõigepealt sirgete võrrandeist määrata sirgete tõusud.

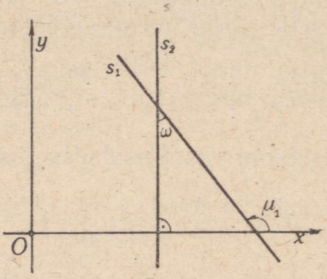
M ä r k u s 1. Kaks lõikuvat sirget moodustavad teineteisega neli paariti võrdset nurka; seejuures ühise haaraga nurgapaar

annab summas 180°. Nende kahe nurga tangensid on suuruselt võrdsed ja erinevad vaid märgilt. Kui ω tähendab kahe sirge vahelist teravnurka, siis $\tan\omega$ on positiivne. Selle teravnurga määramiseks on kohane kasutada valemit

$$\tan\omega = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|.$$



Joon. 111.



Joon. 112.

Märkus 2. Leitud valemit ei saa rakendada, kui üks antud sirge, näiteks s_2, on risti x-teljega, sest siis selle sirge tõus pole määratav ja ω avaldis kaotab mõtte. Sel juhul määrame kõigepealt sirge s_1 tõusunurga μ_1. Nagu nähtub jooniselt 112, avaldub otsitav nurk siis kujul

$$\omega = \mu_1 - 90°.$$

Joonisel 112 on sirge s_1 langev. Tõusva sirge puhul tuleks nurga ω arvutamiseks kasutada valemit $\omega = 90° - \mu_1$.

Kahe sirgjoone rööp- ja ristseisu tunnus

Kahe sirge vahelise nurga ω tangensi valemist saab kergesti leida sirgete rööpseisu ja ristseisu tunnuse.

Sirgete rööpseisu puhul on $\omega = 0°$, $\tan\omega = 0$ ja seepärast

$$m_1 = m_2.$$

Ümberpöördult, kui see tingimus on täidetud, siis on $\tan\omega = 0$ ja $\omega = 0°$ või $\omega = 180°$, seega on sirged rööbikud.

Sirgete ristseisu puhul on $\omega = 90°$ ja $\tan\omega$ pole määratav. Seega peab $\tan\omega$ avaldises nimetaja olema null. See tähendab, et

$$1 + m_1 m_2 = 0$$

ehk

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

Ümberpöördult, kui see tingimus on täidetud, on $1 + m_1 m_2 = 0$, $\tan \omega$ pole määratav ja $\omega = 90°$. Niisiis:

kahe sirge rööpseisu tunnus avaldub kujul $m_2 = m_1$,

kahe sirge ristseisu tunnus avaldub kujul $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

Ülesanne. Koostada sirge võrrand, teades, et sirge läbib punkti $(2; -3)$ ja on risti sirgega $4x - 3y - 6 = 0$.

Lahendus. Antud sirge tõus on $\frac{4}{3}$, seega otsitava sirge tõus on $-\frac{3}{4}$. Järelikult nõutud võrrand on

$$y - (-3) = -\frac{3}{4}(x - 2)$$

ehk, pärast lihtsustamist,

$$3x + 4y + 6 = 0.$$

Kahe sirgjoone lõikepunkt

Olgu kaks sirgjoont antud oma võrranditega

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \text{ja} \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0.$$

Et saada sirgjoonte lõikepunkti koordinaate, tuleb, nagu teame, lahendada antud sirgjoonte võrrandeist koosnev süsteem.

Näide.

Leiame sirgjoonte

$$3x + 5y - 1 = 0 \quad \text{ja} \quad y = 2x - 5$$

lõikepunkti koordinaadid.

Selleks lahendame antud võrrandeist koosneva süsteemi. Asendusvõtet kasutades saame

$$3x + 5(2x - 5) - 1 = 0,$$

millest $x = 2$ ja järelikult $y = 2 \cdot 2 - 5 = -1$.

Niisiis lõikuvad antud sirged punktis $(2; -1)$.

Asjaolu, et lineaarse võrrandi geomeetriliseks vasteks on sirgjoon, võime kasutada kahe tundmatuga lineaarvõrrandisüsteemi graafiliseks lahendamiseks. Selleks joonestame süsteemi võrranditega määratud sirgjooned ja leiame jooniselt nende lõikepunkti abstsissi ja ordinaadi. Et see lõikepunkt asetseb nii ühel kui ka teisel sirgel, siis rahuldavad ta koordinaadid nii üht kui ka teist

süsteemi kuuluvat võrrandit ja järelikult see koordinaadipaar ongi võrrandisüsteemi lahend.

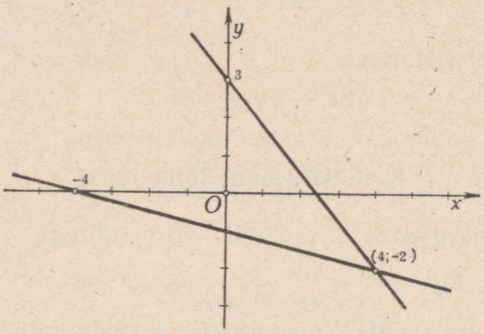
Näide. Olgu tarvis lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x + 4y + 4 = 0 \\ 5x + 4y - 12 = 0. \end{cases}$$

Joonestades algabstsissi ja algordinaadi järgi nii esimese kui ka teise sirgjoone (joon. 113), leiame nende lõikepunkti koordinaadid

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2. \end{cases}$$

See arvupaar ongi antud võrrandisüsteemi lahend, nagu võib kergesti veenduda nende väärtuste kontrollasetamisel antud võrrandeisse.



Joon. 113.

Märkus. Kahe sirge lõikepunkti leidmine on põhilise tähtsusega ülesanne, mille lahendamise vajadus ilmneb paljude probleemide käsitlemisel. Seepärast on loomulik käsitleda seda küsimust üldkujul, saada lahendite üldavaldised ja need võtta lähemale uurimisele, et selgitada kõiki esineda võivaid juhte. Selle küsimuse käsitlemine viib meid determinandi mõistele. Determinandid on erikujulised avaldised, mille kasutamine algebraliste ja geomeetriliste probleemide lahendamisel annab suurt kokkuhoidu nii töö mõttelises kui ka tehnilises osas.

PEATÜKK IX

DETERMINANDID

§ 32. KAHEREALINE DETERMINANT

Kaherealise determinandi mõiste

Paljude sisult hoopis erinevate probleemide lahendamine viib sageli ühe ja sellesama seaduse järgi koostatud avaldistele. Sellisel juhul tasub nende avaldiste omadusi uurida omaette küsimusena. Avaldis

$$\frac{nu + mv}{m + n}$$

näiteks kujutab x-telje punktidega (u) ja (v) määratud lõigu jaotuspunkti abstsissi antud jaotamissuhtel $m : n$, erinevate temperatuuridega u ja v veehulkade m ja n segamisel saadava segu temperatuuri, kõrgustel u ja v asetsevate masside n ja m raskuspunkti kõrgust jne.

Väga paljud probleemid viivad avaldistele, mida nimetatakse kaherealisteks determinantideks.

Näide 1. Kui neli arvu a, b, c ja d on võrdelised, s. t. $a : b = c : d$, siis on $ad = bc$ ehk

$$ad - bc = 0.$$

Me kirjutame seda võrdust teisiti kujul

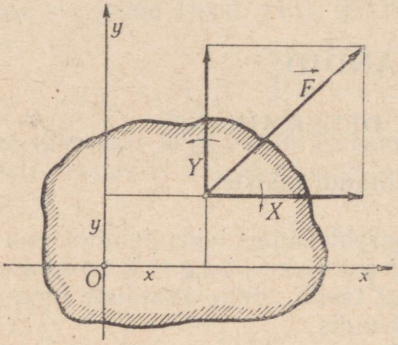
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0.$$

Vasakul poolel seisvat tabelikest tuleb mõista avaldisena, mis saadakse, korrutades tabelikese peadiagonaalil seisvad arvud a ja d ning lahutades tulemusest kaasdiagonaalil seisvate arvude b ja c korrutise.

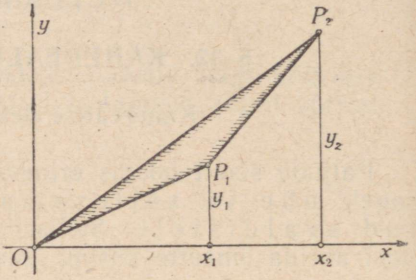
Näide 2. Olgu xy-tasapinnas asetsevale ja koordinaatide alguspunktis O kinnistatud lestale punktis (x, y) rakendatud tung F komponentidega X ja Y (joon. 114). Siis nende komponentide õlad alguspunkti suhtes on vastavalt y ja x. Kompo-

nent Y pöörab lesta positiivses suunas momendiga xY, komponent X seevastu negatiivses suunas momendiga yX. Seega tung F rakendab lestale kogumomendi $M = xY + (-yX) = xY - yX$ ehk, teisiti kirjutatult,

$$M = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}.$$



Joon. 114.



Joon. 115.

Näide 3. Kolmnurgal OP_1P_2 tippudega $O(0, 0)$, $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$ on pindala (joon. 115)

$$S = \frac{1}{2} x_2y_2 - \frac{1}{2} x_1y_1 - \frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_2 - x_1)$$

ehk, koondatult,

$$S = \frac{1}{2} (x_1y_2 - x_2y_1)$$

ehk, teisiti kirjutatult,

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Toodud tabelikesed

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

on vaid teiseks tähistuseks avaldistele

$$ad - bc, \quad xY - yX, \quad x_1y_2 - x_2y_1.$$

Neid tabelikesi nimetame determinantideks, täpsemini kahereal isteks determinantideks. Tabelikest moodustavaid arve nimetame determinandi elementideks. Kahereali-

ses determinandis on neid elemente neli. Nad on paigutatud kahte ritta ja kahte veergu.

Avaldisi nagu $ad - bc$, $xY - yX$ ja $x_1y_2 - x_2y_1$ nimetame determinandi arendisteks ja arendiste liikmeid determinandi liikmeteks.

Kaherealise determinandi omadusi

Omadus 1. *Determinant ei muutu, kui tema read teha veergudeks ja veerud ridadeks.*

Tõepoolest:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

seega

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Sellest järeldub, et kõik laused, mis kehtivad determinandi ridade kohta, kehtivad ühtlasi ka determinandi veergude kohta ja ümberpöördult. Kõik järgmised laused on tõestatud ainult veergude kohta. Äsjatoodud omaduse põhjal on nad siis kehtivad ka ridade kohta.

Omadus 2. *Kahe veeru vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.*

Tõepoolest:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = a_2b_1 - a_1b_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1)$$

ehk

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}.$$

Omadus 3. *Kahe võrdse veeru puhul on determinandi väärtus null.*

Tõepoolest, kahe võrdse veeru vahetamisel determinant ju ei muutu, teiselt poolt aga peab ta märk muutuma. Tähistades lühiduse mõttes determinandi üheainsa tähega D, saaksime veergude vahetamisel, et $D = -D$. Siit järeldub, et $D = 0$.

Omadus 4. *Veeru elementides esineva ühise kordaja võib tuua kordajaks determinandi sümboli ette.*

Tõepoolest:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = ka_1b_2 - ka_2b_1 = k(a_1b_2 - a_2b_1)$$

ja

$$k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = k(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Et viimaste võrduste paremad pooled on võrdsed, siis on võrdsed ka nende vasakud pooled, s. t.

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 \\ ka_2 & b_2 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Omadus 5. *Kui determinandi mõne veeru elemendid esinevad kahe liidetava summana, siis ka determinant ise avaldub kahe determinandi summana. Need determinandid saadakse antud determinandist üks kord ühe, teine kord teise liidetavate veeru kustutamisel.*

See väide ütleb, et näiteks

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1 & b_1 \\ a_2 + a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Tõepoolest, vasakul poolel seisab

$$(a_1 + a_1)b_2 - (a_2 + a_2)b_1 = (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1b_2 - a_2b_1)$$

ja sama avaldise saame parema poole arendamisel.

Omadus 6. *Determinandi väärtus ei muutu, kui ühe veeru elementidele liita ühe ja sama teguriga korrutatud teise veeru elemendid.*

See väide ütleb, et näiteks

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Tõepoolest, viienda ja neljanda omaduse põhjal

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 \\ \lambda b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \lambda\begin{vmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Viimasel kohal seisev determinant on aga kolmanda omaduse põhjal null ja seega on lause kehtivus tõestatud.

Omadus 7. *Kui kaherealine determinant on null, siis on kohakuti seisvad elemendid võrdelised ja ümberpöördult.*

Tõepoolest, kui

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0,$$

siis tähendab see, et $ad - bc = 0$ ehk, teisiti kirjutatult,

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Seega on lause esimene osa tõestatud. Lause teise osa tõestamiseks piisab, kui lugeda praegu toodud mõttekäiku alt üles.

Kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaatide avaldised

Olgu kaks sirgjoont antud oma võrranditega. Kirjutame need võrrandid paremale poolele üle viidud vabaliikmetega:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Leiame nende sirgjoonte lõikepunkti koordinaatide avaldised.

Et nende sirgjoonte lõikepunkt asetseb nii esimesel kui teisel sirgjoonel, siis selle punkti koordinaadid peavad rahuldama nii üht kui teist võrrandit. Järelikult need koordinaadid saadakse antud kahe võrrandi ühisel lahendamisel. Elimineerime ühe tundmatu, näiteks y. Selleks korrutame esimese võrrandi b_2-ga, teise võrrandi b_1-ga ja lahutame esimesest tulemusest teise; saame

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1$$

ehk

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ehk, kirjutades tulemust determinantide abil,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Samal viisil leiame, et

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Nimetajas olev determinant koosneb tundmatute ees seisvaist kordajaist. Teda nimetatakse antud võrrandisüsteemi determinandiks. Nagu näeme,

võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

lahend esineb murruna, mille nimetajaks on süsteemi determinant, lugeja aga saadakse nimetajast, asendades määratava tundmatu kordajad paremale poolele üle viidud vabaliikmetega.

Näide. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4x + 7y = 2 \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Süsteemi determinant on

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = 8 - 7 = 1.$$

Tundmatu x avaldise lugeja on

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 7 \cdot 1 = 4 - 7 = -3,$$

tundmatu y avaldise lugeja

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Seega

$$x = \frac{-3}{1} = -3, \quad y = \frac{2}{1} = 2.$$

Kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaatide avaldiste uurimine

Uurime lähemalt juhte, mis võivad esineda kahe sirgjoone lõikepunkti otsimisel.

I juht. Antud võrrandisüsteemi determinant on nullist erinev. Ükskõik missugused siis on lugejad leitud avaldistes, ikka saame suuruste x ja y jaoks kindla väärtuse. Niisiis: *kui lineaarvõrrandisüsteemi determinant on nullist erinev, siis on süsteemil kindel ühene lahend. Nende võrranditega esitatud sirgjoontel on kindel ühene lõikepunkt.*

II juht. Antud süsteemi determinant on võrdne nulliga ja ühe otsitava, näiteks x avaldises on lugeja null. Näitame, et siis ka teise tundmatu avaldises on lugeja null. Tõepoolest, eeldustest

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

järeldub, et

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{ja} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2},$$

millest

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ehk, teisiti,

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Seda aga tahtsimegi näidata.

Eeldustest järeldub seega, et otsitavate avaldised esinevad kujul

$$x = \frac{0}{0} \quad \text{ja} \quad y = \frac{0}{0}.$$

Sümbol $\frac{0}{0}$ ei määra aga mingit kindlat arvu.

Veendume, et tehtud eeldustel rahuldab käsitelda-vat võrrandisüsteemi piiramatu hulk lahendeid; võttes näiteks x jaoks vabalt mingi väärtuse, saame kas esimesest või teisest võrrandist leida vastava y. Kordajate kohta tehtud eeldusel on, nagu nägime,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Tähistades vastavate kordajate suhte ühise väärtuse tähega k, näeme, et

$$a_1 = ka_2, \quad b_1 = kb_2, \quad c_1 = kc_2$$

ja seega esimene antud võrrandeist on

$$ka_2x + kb_2y = kc_2.$$

Taandamisel teguriga k samastub esimene võrrand teisega. Siit järeldub, et kõik arvupaarid (x, y), mis rahuldavad esimest võrrandit, rahuldavad ka teist ja ümberpöördult, teiste sõnadega: nii üht kui teist võrrandit rahuldavad ühed ja needsamad arvupaarid (x, y). See tähendab aga, et nende võrranditega määratud sirged langevad ühte, teiste sõnadega, sirgete ühispunktide arv on piiramatu.

Niisiis:

kui lineaarvõrrandisüsteemis võrrandite vastavad kordajad ja vabaliikmed on võrdelised, siis on võrrandisüsteemil kuitahes palju lahendeid. Nende võrranditega esitatud sirgjooned langevad ühte.

III juht. Antud süsteemi determinant on võrdne nulliga ja ühe otsitava, näiteks x avaldises on lugeja nullist erinev. Siis järeldub eespool öeldust, et ka teise tundmatu avaldises on lugeja nullist erinev.

Tehtud eeldustel annavad eespool leitud valemid tundmatute jaoks avaldised

$$x = \frac{m}{0} \quad \text{ja} \quad y = \frac{n}{0},$$

kus m ja n on nullist erinevad arvud. Sümbolid $\frac{m}{0}$ ja $\frac{n}{0}$ on aga mõttetud. Veendume, et käesoleval juhul on võrrandisüsteem vasturääkiv. Tõepoolest, oletusele vastavalt

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ja } \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

ehk, teises kirjutusviisis,

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1}.$$

Tähistame esimese kahe suhte ühise väärtuse tähega l. Siis

$$a_2 = la_1, \quad b_2 = lb_1, \quad c_2 \neq lc_1$$

ja vaadeldav võrrandisüsteem omandab kuju

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ l(a_1x + b_1y) = c_2 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_1x + b_1y = \frac{c_2}{l}. \end{cases}$$

Et $c_2 \neq lc_1$, siis teise võrrandi parem pool pole võrdne vabaliikmega c_1. Nende võrrandite vasakud pooled on s a m a d, paremad pooled aga on e r i n e v a d. Kuid üks ja sama suurus $a_1x + b_1y$ ei saa ühtaegu võrduda kahe erineva arvuga. Niisiis, tehtud eeldustel on võrrandid vasturääkivad, mida tahtsimegi näidata.

Tõlgendame tulemust geomeetriliselt. Kumbki vaadeldavaist võrrandeist on l i n e a a r n e võrrand ja esitab seetõttu s i r g j o o n t. Et võrdusest $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$ järeldub võrdus $-\frac{a_2}{b_2} = -\frac{a_1}{b_1}$, siis on sirgete tõusud võrdsed ja järelikult need sirged on p a r a l l e e l s e d.

Niisiis:

kui lineaarvõrrandisüsteemi võrrandites vastavate tundmatute kordajad on võrdelised, kuid ei ole võrdelised vabaliikmetega, siis süsteemil ei ole lahendit; võrrandid on vasturääkivad. Nende võrranditega esitatud sirgjoontel ei ole ühispunkti, nad ei lõiku.

Tehtud eeldustel kujutavad vaadeldavad lineaarvõrrandid kaht mitte ühte langevat rööbikut sirget.

N ä i d e 1. On antud süsteem

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x - 3y + 9 = 0. \end{cases}$$

Tema determinant $1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -3 + 1 = -2 \neq 0$. Seega süsteemil on ü h e n e lahend. Arvutamine annab lahendi $x = -3$, $y = 2$. Võrranditega esitatud sirgjooned lõikuvad punktis $(-3; 2)$.

N ä i d e 2. On antud süsteem

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0 \\ 6x + 8y - 24 = 0. \end{cases}$$

Tema determinant $3 \cdot 8 - 6 \cdot 4 = 24 - 24 = 0$ ja kordajad on võrdelised vabaliikmetega:

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{-12}{-24}.$$

Võrrandeil on piiramatu hulk lahendeid. Võrrandid esitavad kahte ühtelangevat sirgjoont; esimese sirgjoone iga punkt on ühtlasi ka teise sirgjoone punktiks.

Näide 3. On antud süsteem

$$\begin{cases} 2x - 3y + 18 = 0 \\ 4x - 6y - 10 = 0. \end{cases}$$

Tema determinant $2 \cdot (-6) - 4 \cdot (-3) = -12 + 12 = 0$ ja kordajad pole võrdelised vabaliikmetega:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{18}{-10}.$$

Süsteemil pole lahendeid. Võrrandid esitavad mitte ühte langevaid rööbikuid sirgeid.

§ 33. KOLMEREALINE DETERMINANT

Lineaarvõrrandite simultaansus

Võrranditel

$$\begin{cases} a_1 x = b_1 \\ a_2 x = b_2 \end{cases}$$

on tavaliselt erinevad lahendid. Vaatame, missugust tingimust peavad rahuldama nende võrrandite kordajad, et mõlemal võrrandil oleks üks ja seesama lahend ehk et võrrandid oleksid kehtivad üheaegselt ehk et võrrandid oleksid simultaansed.

Teise võrrandi lahend on $x = b_2 : a_2$. Et see lahend peab rahuldama ka esimest võrrandit, siis peab olema

$$a_1 \cdot \frac{b_2}{a_2} = b_1 \text{ ehk } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ ehk } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Sõnastatult:

et võrrandid $a_1 x = b_1$, $a_2 x = b_2$ oleksid simultaansed, peab nende kordajaist ja vabaliikmeist moodustatud determinant olema võrdne nulliga.

Võrrandid

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

ei ole tavaliselt simultaansed; kui lahendame näiteks esimesed kaks ja asetame saadud lahendi (x, y) kolmandasse, siis tavaliselt kolmas võrrand ei osutu rahuldatuks. Vaatame, missugust tingimust peavad rahuldama nende võrrandite kordajad, et võrranditel oleks üks ja seesama lahend ehk et võrrandid oleksid kehtivad üheaegselt ehk et võrrandid oleksid simultaansed.

Esimese kahe võrrandi lahend on

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Et see lahend rahuldaks ka kolmandat võrrandit, selleks peab olema

$$a_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + b_3 \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c_3$$

ehk, kui vabaneme nimetajaist, viime kõik liikmed paremale poolele ja asendame determinandid nende arendistega,

$$c_3(a_1b_2 - a_2b_1) - a_3(c_1b_2 - c_2b_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) = 0.$$

Nagu näeme, koosneb saadud võrduse vasak pool pärast sulgude avamist kuuest liikmest. Kirjutame igaühes neist tähed a, b ja c alfabeetilises järjekorras. Me saame siis, et

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - \\ - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1 = 0.$$

Kolmerealise determinandi mõiste

Viimati kirjutatud võrduse vasakul poolel seisvat avaldist kirjutame kujul

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

mida nimetame kolmerealiseks determinandiks. Avaldist ennast nimetame selle determinandi arendiseks.

Nagu näeme,

kolme kahe tundmatuga lineaarvõrrandi simultaansuse tingimuseks on, et nende võrrandite kordajaist ja vabaliikmeist moodustatud determinant oleks võrdne nulliga.

Tõlgendame seda ka geomeetriliselt. Igaüks kolmest antud võrrandist kujutab sirget xy-tasapinnas. Et neil kolmel võrrandil on ühine lahend, tähendab seda, et kolm nende võrranditega antud sirget lõikuvad ühes punktis. Niisiis:

kolme sirge ühes punktis lõikumise tingimuseks on, et sirgete võrrandite kordajaist ja vabaliikmeist moodustatud determinant oleks võrdne nulliga.

Kolmerealisel determinandil on üheksa elementi, mis on paigutatud kolme ritta ja kolme veergu. Ruudukujulise tabeli diagonaali, millel asetsevad elemendid a_1, b_2 ja c_3, nimetatakse peadiagonaaliks, diagonaali, millel asetsevad elemendid c_1, b_2 ja a_3, kaasdiagonaaliks. Selle determinandi kõigil kuuel liikmel on ühtne kuju

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma,$$

kusjuures indeksid α, β, γ saadakse, võttes arve 1, 2 ja 3 tsüklilises järjekorras (vt. joon. 57): järjekord

1 2 3 2 3 1 3 1 2

annab plussmärgiga liikmed, vastupidine järjekord

1 3 2 3 2 1 2 1 3

miinusmärgiga liikmed.

Lihtsaim tee kolmerealise determinandi liikmete saamiseks on järgmine: kirjutame determinandi parempoolse kriipsu järele veel kord esimese ja teise veeru:

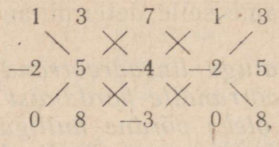
$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ & \diagdown & \times & \times & \diagup \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ & \diagup & \times & \times & \diagdown \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3. \end{array}$$

Peadiagonaalil ja sellega rööbikuil sirgeil asetsevad elemendid annavad siis korrutamisel kolm plussmärgiga liiget, kaasdiagonaalil ja sellega rööbikuil sirgeil asetsevad elemendid kolm miinusmärgiga liiget.

Näide. Arvutame determinandi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & 3 & 7 \\ -2 & 5 & -4 \\ \mathbf{0} & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

väärtuse. Koostades tabeli



saame, et

$$D = 1 \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot (-4) \cdot 0 + 7 \cdot (-2) \cdot 8 - \\ - 0 \cdot 5 \cdot 7 - 8 \cdot (-4) \cdot 1 - (-3) \cdot (-2) \cdot 3 = \\ = -15 + 0 - 112 - 0 + 32 - 18 = -113.$$

Kolmerealise determinandi omadusi

Omadus 1. *Determinant ei muutu, kui tema read teha veergudeks ja veerud ridadeks.*

Tõepoolest, kui võrdleme determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

siis näeme, et neil on ühed ja samad diagonaalliikmed

$$a_1b_2c_3 \text{ ja } -a_3b_2c_1,$$

seega ka kõik teised liikmed, mis saadakse indeksite 1, 2, 3 ja 3, 2, 1 tsüklilise vahetamise teel.

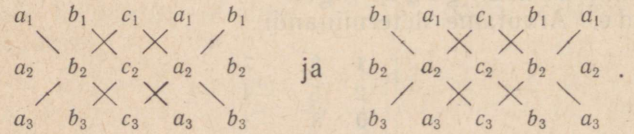
Sellest järeldub, et kõik laused, mis kehtivad determinandi ridade kohta, kehtivad ühtlasi ka determinandi veergude kohta ja ümberpöördult. Kõik järgmised laused on tõestatud ainult veergude kohta. Äsjatoodud omaduse põhjal on nad siis kehtivad ka ridade kohta.

Omadus 2. *Kahe veeru vahetamisel muutub determinandi märk vastupidiseks.*

Väite tõestamiseks vaatleme determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Teine neist on saadud esimesest kahe veeru vahetamise teel. Neile vastavad arvutustabelid on



Näeme, et liikmed, mis esimesest tulevad plussmärgiga, tulevad teisest miinusmärgiga ja ümberpöördult. Analoogiliselt võiksime lause kehtivuses veenduda mingisuguse kahe teise veeru ümbertõstmisel.

Omadus 3. *Kahe võrdse veeru puhul on determinandi väärtus null.*

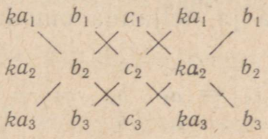
Tõepoolest, kahe võrdse veeru vahetamisel ühelt poolt determinant ju ei muutu, teiselt poolt aga peab ta märk muutuma. Tähistades determinandi üheainsa tähega D, saaksime veergude vahetamisel, et $D = -D$, seega $D = 0$.

Omadus 4. *Veeru elementides esineva ühise kordaja võib tuua kordajaks determinandi sümboli ette.*

Tõepoolest, determinandi

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

arvutustabel



näitab, et kordaja k esineb arendise kõigis liikmeis; seetõttu võib ta tuua sulgude ette. Sulgudesse jääb determinandi

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

arendis, nii et

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Omadus 5. *Kui determinandi mõne veeru elemendid esinevad kahe liidetava summana, siis ka determinant ise avaldub kahe determinandi summana. Need determinandid saadakse antud determinandist üks kord ühe, teine kord teise liidetavate veeru kustutamisel.*

See väide ütleb, et näiteks

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tõepoolest, vasakpoolse determinandi diagonaalliikmed on

$$(a_1 + \alpha_1) b_2 c_3 \quad \text{ja} \quad -(a_3 + \alpha_3) b_2 c_1,$$

paremal pool aga saame

$$a_1 b_2 c_3 + \alpha_1 b_2 c_3 \quad \text{ja} \quad -a_3 b_2 c_1 - \alpha_3 b_2 c_1.$$

Et kohakuti seisvad avaldised on võrdsed, siis on võrdsed ka kõik neist indeksite tsüklilise ümberpaigutamise teel saadavad avaldised. See tähendab aga, et kummalgi pool võrdusmärki seisavad samad avaldised.

O m a d u s 6. *Determinandi väärtus ei muutu, kui ühe veeru elementidele liita ühe ja sama teguriga korrutatud teise veeru elemendid.*

See väide ütleb, et näiteks

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Tõepoolest, viienda ja neljanda omaduse põhjal

$$\begin{vmatrix} a_1 + \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda b_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda b_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Viimasel kohal seisev determinant on aga kolmanda omaduse põhjal null ja seega on lause kehtivus tõestatud.

Praegu tõestatud lause kergendab tunduvalt kolmerealise determinandi arvutamist, sest kohase λ valikuga saab antud determinanti teisendada väiksemate elementidega determinandiks. Eriti sobiv on determinanti teisendada nii, et mõnes reas või veerus esineks võimalikult palju nulle. Viimasel juhul saab hulk determinandi liikmeid nulliks.

N ä i d e. Olgu tarvis arvutada determinant

$$D = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 28 & 33 & 8 \\ 40 & 54 & 13 \end{vmatrix}.$$

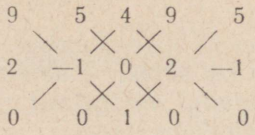
Lahutades liikmeti teisest reast kahega korrutatud esimese rea ja kolmandast reast kolmega korrutatud esimese rea, saame

$$D = \begin{vmatrix} 13 & 17 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Lahutades nüüd liikmeti esimesest veerust viimase veeru ja teisest veerust kolmega korrutatud viimase veeru, saame

$$D = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Selle determinandi arvutustabel on



Seega

$$D = 9 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 5 = -9 - 10 = -19.$$

Kolmest kolme tundmatuga lineaarvõrrandist koosneva süsteemi lahendamine

Olgu tarvis lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3. \end{cases}$$

Kujutleme hetkeks, et meil on õnnestunud leida ühe tundmatu, näiteks z väärtus. Siis saame tuntud kolmandate liikmete üleviimisel paremale poolele kolm s i m u l t a a n s e t võrrandit kahe tundmatuga x ja y. Simultaansuse tingimus ütleb, et

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 - c_1z \\ a_2 & b_2 & d_2 - c_2z \\ a_3 & b_3 & d_3 - c_3z \end{vmatrix} = 0$$

ehk, determinandi viienda ja neljanda omaduse järgi,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} - z \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ja siit

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Analoogiliselt leiame tundmatute x ja y avaldised kujul:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

Näeme, et

lineaarvõrrandisüsteemi lahendamisel avaldub tundmatu murruna, mille nimetajaks on süsteemi determinant, lugeja aga saadakse nimetajast, asendades määratava tundmatu kordajad paremal poolel seisvate vabaliikmetega.

N ä i d e. Olgu tarvis lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 19 \\ x - 7y + 2z = 25. \end{cases}$$

Süsteemi determinant on

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Tundmatute x, y ja z avaldiste lugejad on determinandid

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 19 & -1 & 3 \\ 25 & -7 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 19 & 3 \\ 1 & 25 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 19 \\ 1 & -7 & 25 \end{vmatrix}.$$

Nende nelja determinandi arvutamine annab vastavalt

$$40, \quad 40, \quad -80, \quad 200.$$

Seega

$$x = \frac{40}{40} = 1, \quad y = \frac{-80}{40} = -2, \quad z = \frac{200}{40} = 5.$$

Determinandi arendis ühe veeru elementide järgi

Võtame kolmerealise determinandi ja selle arvutustabeli

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ \searrow & & \times & & \nearrow \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ \nearrow & & \times & & \searrow \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

ning vaatleme selle tabeli elementide korrutamisel saadavaid liikmeid. Näeme, et i g a e l e m e n t esineb tegurina k a k s

korda: üks kord plussmärgiga liikmes, teine kord miinusmärgiga liikmes. Järelikult võib niisuguse kahe liikme summas selle teguri juba determinandi avaldise koostamisel võtta sulgude ette. Võttes mainitud tegureiks esimese veeru elemendid, saame determinandi arendise esimese veeru elementide järgi:

$$a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) + a_2 \cdot (b_3c_1 - b_1c_3) + a_3 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1).$$

Täpselt samal viisil saame vaadeldava determinandi arendise näiteks kolmanda veeru elementide järgi:

$$c_1 \cdot (a_2b_3 - a_3b_2) + c_2 \cdot (a_3b_1 - a_1b_3) + c_3 \cdot (a_1b_2 - a_2b_1).$$

Determinandi arendiseks teise veeru elementide järgi on avaldis

$$b_1 \cdot (c_2a_3 - c_3a_2) + b_2 \cdot (c_3a_1 - c_1a_3) + b_3 \cdot (c_1a_2 - c_2a_1).$$

Need arendised on sageli sobivaks vahendiks determinantidega töötamisel.

Neid arendisi saab kirjutada ka veidi teisiti, näiteks esimest neist kujul

$$a_1 \cdot (b_2c_3 - b_3c_2) - a_2 \cdot (b_1c_3 - b_3c_1) + a_3 \cdot (b_1c_2 - b_2c_1)$$

ehk, kaherealiste «alamdeterminantide» kasutamisel,

$$(-1)^{1+1} \cdot a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Selles avaldises esinevad kahereal i sed determinandid saadakse vaadeldavast kolmereal i sest determinandist, kustutades veeru ja rea, mille ristumiskohal asetseb esimesel juhul element a_1, teisel juhul element a_2 ja kolmandal juhul element a_3. Arvu —1 astendajad saadakse, liites selle rea ja veeru numbri, millest element a on pärit. Kõik öeldu kehtib ka iga teise veeru või rea elementide kohta.

PEATÜKK X

KOORDINAATIDE TEISENDAMINE

Maa-alade ümberplaneerimisel võib osutuda vajalikuks võtta endise reeperite süsteemi asemel kasutusele uus reeperite süsteem ehk, nagu ütleme matemaatikas, asendada varem kasutusel olnud koordinaatide süsteem uue süsteemiga. Sama küsimus võib kerkida ka mõne teoreetilise probleemi uurimise käigus: töö teataval etapil võib osutuda sobivaks kas mõttekäikude lihtsustamise või arvutuste kergendamise otstarbel üle minna uuele koordinaadistikule. Põhiliseks küsimuseks, mis sel puhul nõuab lahendamist, on see, kuidas teadaolevate «vanade» koordinaatide järgi saab arvutada «uusi» ja ümberpöördult, uute koordinaatide järgi leida vanu. Lühemalt sõnastame sama küsimuse nii: kuidas teisendada koordinaate üleminekul ühelt koordinaatide süsteemilt teisele? Me käsitleme siin ainult meile edaspidi vajalikke koordinaatide teisendamise juhte: koordinaatide teisendamist üleminekul polaarkoordinaatidelt ristkoordinaatidele ja vastupidi, ristkoordinaatide teisendamist teljestiku lükkamise puhul telgede sihte muutmata jättes ja ristkoordinaatide teisendamist teljestiku pööramise puhul alguspunkti muutmata jättes.

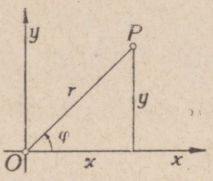
§ 34. KOORDINAATIDE TEISENDAMINE ÜLEMINEKUL RISTKOORDINAATIDELT POLAARKOORDINAATIDELE JA VASTUPIDI

Rist- ja polaarkoordinaatide vahelised seosed

Jooniselt 116 on kerge ära lugeda meile juba tuttavaid rist- ja polaarkoordinaatide vahelisi seoseid kahel samaväärsel kujul:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \text{ehk} \quad \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\varphi = \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Esimene võrduste paar võimaldab arvutada punkti ristkoordinaate, kui on teada punkti polaarkoordinaadid, ja teisendada seoseid ristkoordinaatide vahel kujul $F(x, y) = 0$ seosteks polaarkoordinaatide vahel kujul $G(\varphi, r) = 0$. Teine võrduste paar võimaldab lahendada vastupidiseid ülesandeid.



Joon. 116.

Näiteid suuruste arvutusvalemite teisendamise kohta

N ä i d e 1. Olgu antud kaks punkti

$$P_1 \equiv (x_1, x_2) \equiv (\varphi_1, r_1) \quad \text{ja} \quad P_2 \equiv (x_2, y_2) \equiv (\varphi_2, r_2).$$

R i s t k o o r d i n a a t i d e kasutamisel määrab nende punktide vahelise kauguse valem

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Abstsisse ja ordinaate p o l a a r k o o r d i n a a t i d e s avaldades saame

$$d^2 = (r_2 \cos \varphi_2 - r_1 \cos \varphi_1)^2 + (r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1)^2.$$

Avades sulud ja koondades leiame, et

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Sama valemit saab ära lugeda ka lihtsalt jooniselt, millele on märgitud alguspunkt O ja kaks punkti P_1 ja P_2 nende polaarkoordinaatidega; see on vaid k o o s i n u s l a u s e teine kirjutusviis.

N ä i d e 2. Olgu antud kaks punkti

$$P_1 \equiv (x_1, y_1) \equiv (\varphi_1, r_1) \quad \text{ja} \quad P_2 \equiv (x_2, y_2) \equiv (\varphi_2, r_2).$$

Kiirte OP_1 ja OP_2 vaheline nurk avaldub p o l a a r k o o r d i n a a t i d e s kujul

$$\varphi_2 - \varphi_1.$$

Anname selle nurga arvutusvalemi r i s t k o o r d i n a a t i d e s. Et abstsissi ja ordinaadi avaldistes esinevad polaarnurga trigonomeetrilised funktsioonid, siis otsime mitte nurka $\varphi_2 - \varphi_1$ ennast, vaid mõnda tema trigonomeetrilist funktsiooni. Väga sobiv on töötada tangensiga:

$$\tan (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1}{1 + \tan \varphi_1 \cdot \tan \varphi_2}.$$

Asendades $\tan \varphi_1$ ja $\tan \varphi_2$ suhetega $y_1 : x_1$ ja $y_2 : x_2$, saame pärast lihtsaid tehteid, et

$$\tan (\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2 + y_1 y_2}.$$

Näiteid joonte võrrandite teisendamise kohta

Näide 1. Olgu antud joone võrrand ristkoordinaatides

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2 (x^2 - y^2) = 0.$$

Leiame sama joone võrrandi polaarkoordinaatides.

Asendades x ja y nende avaldistega polaarkoordinaatides, saame

$$(r^2)^2 - a^2 (r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi) = 0$$

ehk, lühemalt,

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$

Näide 2. Olgu antud joone võrrand polaarkoordinaatides

$$r^2 = \frac{a^2}{1 - \sin 2\varphi}.$$

Leiame sama joone võrrandi ristkoordinaatides.

Et $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$, siis

$$r^2 = \frac{a^2}{1 - 2 \frac{x}{r} \frac{y}{r}}$$

ehk

$$r^2 = \frac{a^2 r^2}{r^2 - 2xy}$$

ehk, pärast taandamist ja nimetajast vabastamist,

$$x^2 + y^2 - 2xy - a^2 = 0.$$

§ 35. RISTKOORDINAATIDE TEISENDUSI

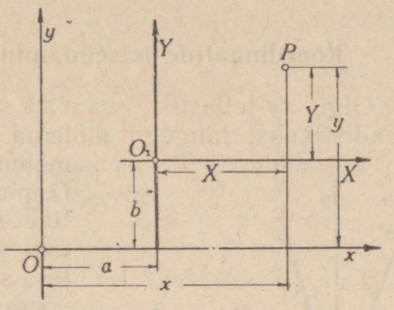
Koordinaatide teisendamine teljestiku rööplükke puhul

Olgu xy-teljestik vanaks, XY-teljestik uueks koordinaadistikuks, langegu xy- ja XY-tasapinnad ühte, olgu vanal ja uuel teljestikul samanimelised teljed ka samasihilised ja olgu uue teljestiku alguspunkti O_1 koordinaadid vana teljestiku suhtes a ja b. On selge, et uus teljestik saadakse vanast, kandes selle kõik punktid edasi ühe ja sama pikkuse, ühe ja sama sihilise

ning ühe ja sama suunalise l ü k k e võrra, mille esindajaks on lõik OO_1 suunaga punktist O punkti O_1 (joon. 117). On ilmne, et XY-teljestiku asend xy-teljestiku suhtes on määratud, kui on teada punkti O_1 koordinaadid xy-teljestiku suhtes.

Olgu P koordinaattasapinna mingi punkt ja olgu ta koordinaadid vanas teljestikus x ja y, uues teljestikus X ja Y. Siis, nagu nähtub jooniselt 117,

$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b. \end{cases}$$



Joon. 117.

See tähendab, et teljestiku rööplükke puhul

vana koordinaat saadakse uuest, liites sellele uue algus-punkti samanimelise koordinaadi vana teljestiku suhtes.

Uued koordinaadid avalduvad vanade kaudu kujul

$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b. \end{cases}$$

Lõigu projektsioonide ja lõigu pikkuse ruudu teisendamine teljestiku rööplükke puhul

Olgu lõik antud oma a l g u s e g a $P_1(x_1, y_1)$ ja l õ p u g a $P_2(x_2, y_2)$. Selle lõigu projektsioonid telgedel on siis

$$x_2 - x_1 \quad \text{ja} \quad y_2 - y_1.$$

Pärast teljestiku rööplüket on lõigu alguse ja lõpu koordinaadid vastavalt (X_1, Y_1) ja (X_2, Y_2) ning lõigu projektsioonid uutel telgedel

$$X_2 - X_1 = (x_2 - a) - (x_1 - a) = x_2 - x_1,$$
$$Y_2 - Y_1 = (y_2 - b) - (y_1 - b) = y_2 - y_1.$$

Nagu näeme,

teljestiku rööplükkel lõigu projektsioonid koordinaattelgedel ei muutu.

Kui moodustame lõigu pikkuse ruudu avaldised uues ja vanas teljestikus, siis saame

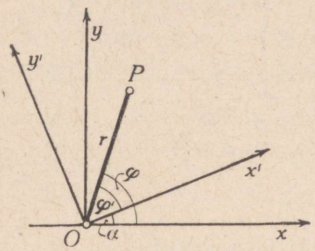
$$(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Nagu näeme, lõigu pikkuse ruudu avaldis teljestiku rööplükkel ei muutu ehk, teises sõnastuses,

kahe punkti vahelise kauguse ruudu avaldis on teljestiku rööplükke suhtes invariantne *.

Koordinaatide teisendamine teljestiku pööramise puhul

Olgu xy-teljestik vanaks, $x'y'$-teljestik uueks koordinaadistikuks; langegu mõlema teljestiku tasapinnad ühte; olgu mõlemal teljestikul ühine alguspunkt O ning olgu telgede Ox ja Ox' vaheline nurk α (joon. 118). On selge, et uus teljestik saadakse vanast, pöörates seda ümber alguspunkti nurga α võrra. Olgu P koordinaattasapinna mingi punkt ja olgu ta koordinaadid vanas ja uues süsteemis vastavalt x ja y ning x' ja y'. Avaldame vanad koordinaadid uute kaudu. Selleks võtame punkti P polaarkoordinaadid, lugedes polaarteljeks üks kord Ox, teine kord Ox'. Nagu nähtub jooniselt 118, on polaarkaugus kummalgi korral r ja polaarnurk



Joon. 118.

$$\varphi = \varphi' + \alpha.$$

Projekteerime polaarkauguse enne x-teljele, siis y-teljele. Saame

$$r\cos\varphi = r\cos(\varphi' + \alpha) = r\cos\varphi' \cdot \cos\alpha - r\sin\varphi' \cdot \sin\alpha,$$
$$r\sin\varphi = r\sin(\varphi' + \alpha) = r\cos\varphi' \cdot \sin\alpha + r\sin\varphi' \cdot \cos\alpha$$

ehk, lühemalt,

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{cases}$$

millega vanad koordinaadid on avaldatud uute kaudu.

Uute koordinaatide avaldisi saaks leida, vaadeldes kaht saadud võrdust võrrandeina x' ja y' suhtes. Need võrrandid on lineaarsed ja nende lahendamine (näiteks determinantide abil) ei tee raskusi. Lihtsam tee on aga järgmine: vaatleme $x'y'$-teljestikku kui vana ja xy-teljestikku kui uut teljestikku. Nurk, mille võrra teljestik on pööratud endise suhtes, on nüüd $-\alpha$. Seega

$$x' = x\cos(-\alpha) - y\sin(-\alpha),$$
$$y' = x\sin(-\alpha) + y\cos(-\alpha).$$

* Lad. k. *invariantus* — muutumatu.

Kui arvestame valemeid

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \quad \text{ja} \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

saame lõplikult

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Lõigu projektsioonide ja lõigu pikkuse ruudu teisendamine teljestiku pööramise puhul

Olgu lõik antud oma algusega $P_1 \equiv (x_1, y_1) \equiv (x_1', y_1')$ ja lõpuga $P_2 \equiv (x_2, y_2) \equiv (x_2', y_2')$. Selle lõigu projektsioonid telgedel on siis vanas ja uues süsteemis vastavalt

$$x_2 - x_1, \quad y_2 - y_1 \quad \text{ja} \quad x_2' - x_1', \quad y_2' - y_1'.$$

Kirjutades vanade koordinaatide avaldised uute kaudu, näeme, et

$$\begin{cases} x_2 - x_1 = (x_2' - x_1')\cos\alpha - (y_2' - y_1')\sin\alpha \\ y_2 - y_1 = (x_2' - x_1')\sin\alpha + (y_2' - y_1')\cos\alpha. \end{cases}$$

See tähendab, et

teljestiku pööramisel lõigu projektsioonid koordinaattelgedel teisenduvad nagu koordinaadidki.

Kasutades viimati kirjutatud valemite paari, leiame kergesti, et

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2.$$

Nagu näeme, lõigu pikkuse ruudu avaldise kuju on üks ja seesama nii vanas kui uues teljestikus ehk, teises sõnastuses,

lõigu pikkuse ruudu avaldis on teljestiku pööramise suhtes invariantne.

Koordinaatide teisendamise üldjuht

Olgu Oxy üks teljestikest, $O'x'y'$ teine, suvalise paigutusega esimese suhtes (joon. 119). Siis üleminek esimeselt teljestikult teisele võib toimuda kahes järgus: esiteks asendame teljestiku Oxy rööplükke teel saadud teljestikuga $O'XY$, teiseks pöörame viimase ümber punkti O' asendisse $O'x'y'$. Pöördenurgaks on nurk telgede Ox ja $O'x'$ sihtide vahel. Parameetriteks, mis määravad ülemineku teljestikult Oxy teljestikule $O'x'y'$, on uue alguspunkti O' koordinaadid vana teljestiku suhtes a ja b ning pöördenurk α.

N ä i d e. Olgu kõver antud oma võrrandiga

$$x^2 - 10xy + y^2 + 46x + 10y - 71 = 0$$

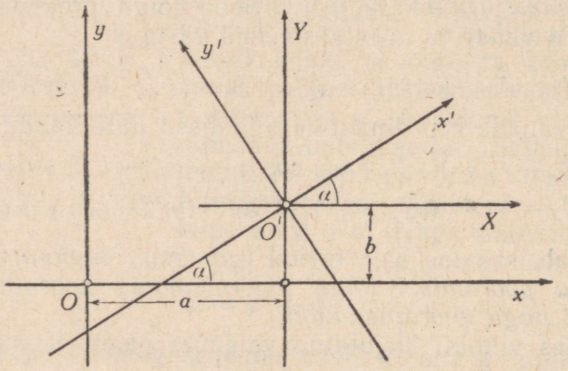
ja teisenduse parameetrid $a = 2$, $b = 5$, $\alpha = 135°$. Üleminek xy-teljestikult XY-teljestikule toimub siis valemite

$$x = X + 2, \qquad y = Y + 5$$

abil. Asetades need avaldised antud võrrandisse, saame pärast lihtsustamist võrrandi

$$X^2 - 10XY + Y^2 = 0.$$

Uus võrrand on esialgsest l i h t s a m. Teisendamise teiseks etapiks on teljestiku pööramine: üleminek teljestikult $O'XY$ teljestikule $O'x'y'$ toimub valemite



Joon. 119.

$$\begin{cases} X = x' \cos 135° - y' \sin 135° \\ Y = x' \sin 135° + y' \cos 135° \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} X = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \end{cases}$$

abil. Asetades need avaldised eespool saadud võrrandisse, leiame, et

$$3x'^2 - 2y'^2 = 0.$$

Saadud võrrand on veelgi lihtsam: ta vasak pool koosneb kõigest kahest liikmest. See võrrand on kirjutatav kujul

$$(\sqrt{3}x' + \sqrt{2}y')(\sqrt{3}x' - \sqrt{2}y') = 0.$$

Seega rahuldavad teda kõik arvupaarid (x', y'), mis rahuldavad ühte võrrandeist

$$\sqrt{3}x' + \sqrt{2}y' = 0,$$
$$\sqrt{3}x' - \sqrt{2}y' = 0.$$

Kumbki neist võrrandeist esitab sirget, mis läbib koordinaatide alguspunkti O'. Uuritavaks jooneks on järelikult paar lõikuvaid sirgeid.

PEATÜKK XI

TEIST JÄRKU JOONTE ERIKUJUDE UURIMINE

Kuju ja omaduste poolest lihtsaimaks jooneks on sirge: iga kaht sirget saab kõigi oma punktidega teineteisele asetada; kaks sirget erinevad teineteisest ainult asendi poolest. Vastandina näiteks ringjoonele ei teki sirge puhul küsimusi, missugune kahest sirgest on suurem või väiksem, missugune on kõverdunud rohkem, missugune vähem. Sirgjoone täielikuks määramiseks piisab juba kahest punktist, ringjoone puhul on selleks vaja kolme punkti. Sirgjoone võrrand on lihtsaim kõigist joonte võrrandeist: sirgjoone võrrandiks on alati esimese astme võrrand. Seda tõsiasja märgime ka ütlusega, et «sirgjoone järk on 1». Me asume nüüd uurima jooni, mille järk on 2, see tähendab jooni, mis on antud teise astme võrrandiga. Teiste hulgas kuulub siia ka ringjoon. Oma uurimist alustame üksikute konkreetsete teist järku joonte käsitlemisega.

§ 36. PARABOOL

Parabooli definitsioon. Parabooli joonestamine

Parabooliks nimetatakse niisugust tasapinnalist kõverjoont, mille iga punkti kaugused kindlast punktist ja kindlast sirgest on võrdsed.

Kindlat punkti F nimetatakse parabooli fookuseks, kindlat sirget j parabooli juhtjooneks. Fookuse ja juhtjoone vahelist kaugust nimetatakse parabooli parameetriks. Selle sümboliks on p.

Parabooli joonestamine rajaneb tema definitsioonil. Olgu (joon. 120) punkt F parabooli fookus ja sirge j parabooli juhtjoon. Võtame mingil kaugusel k juhtjoonest sirge rööbiti juhtjoonega ja joonestame raadiusega k ringjoone ümber fookuse. Sirge ja ringjoon lõikuvad punktides P_1 ja P_2, mis mõlemad kuuluvad paraboolile. Tõepoolest, kumbki neist punktidest asetseb võrdseil kaugusil fookusest ja juhtjoonest. Muutes k suurust,

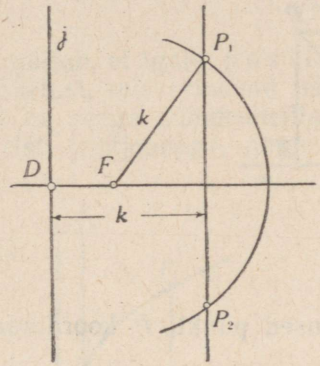
saame kaks uut parabooli punkti. Nii edasi toimides saame kuitahes palju parabooli punkte.

Parabooli definitsiooni järgi

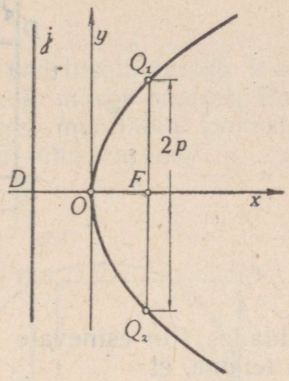
parabool on määratud oma fookuse ja juhtjoonega.

Sedasama kinnitab ka praegu kirjeldatud parabooli konstruktsioon.

Punktid P_1 ja P_2 asetsevad sümmeetriliselt sirge FD suhtes, mis läbib fookust F ja on risti juhtjoonega j. Seda sirget nimetatakse parabooli teljeks. Parabooli ja tema telje lõikepunkti nimetatakse parabooli haripunktiks.



Joon. 120.



Joon. 121.

Olgu Q_1 ja Q_2 parabooli punktid, mis asetsevad teljega ristuval ja fookust F läbival sirgel (joon. 121). Siis lõik Q_1Q_2 on parabooli ava laius fookuse kohal. Parabooli definitsiooni järgi $Q_1Q_2 = 2FD = 2p$. Niisiis:

parabooli kahekordne parameeter annab arvuliselt parabooli ava laiuse fookuse kohal.

Parabooli võrrand

Olgu parabooli fookuseks punkt F ja juhtjooneks sirge j (joon. 122). Tuletame parabooli võrrandi.

Valime x-teljeks parabooli telje; võtame koordinaatide alguspunktiks punkti, mis poolitab fookuse F ja juhtjoone j vahelise kauguse, ja y-teljeks alguspunkti läbiva sirge risti x-teljega. Et fookus ja juhtjoon on antud, siis on teada ka nendevaheline kaugus. Et see kaugus on võrdne parameetriga, siis märgime ta tähega p. Sel puhul fookus $F(\frac{p}{2}, 0)$ ja juhtjoone võrrandiks on

$x = -\frac{p}{2}$.

Võtame nüüd paraboolil mingi punkti P koordinaatidega x ja y. Parabooli definitsiooni järgi peab siis olema

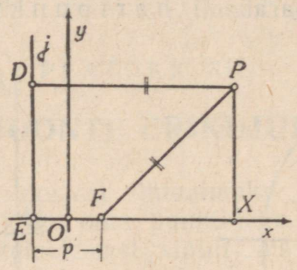
$$FP = DP \text{ ehk } FP = EX.$$

Et

$$EX = EO + OX,$$

siis

$$FP^2 = (EO + OX)^2.$$



Joon. 122.

Avaldades siin esinevate lõikude pikkused punkti P koordinaatides, leiame, et

$$FP^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \quad EO = \frac{p}{2}, \quad OX = x,$$

$$(EO + OX)^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2,$$

nii et

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2.$$

See seos punkti P koordinaatide vahel on kehtiv parabooli i g a punkti kohta, sest punkt P oli paraboolil valitud v a b a l t; järelikult see seos ongi parabooli võrrand. Et anda talle lihtsamat kuju, avame sulud ja koondame sarnased liikmed; saame

$$y^2 = 2px.$$

Niisiis:

kui x-teljeks on võetud parabooli telg ja alguspunkt on võetud poolel kaugusel fookuse ja juhtjoone vahel, siis parameetriga p määratud parabooli võrrandiks on

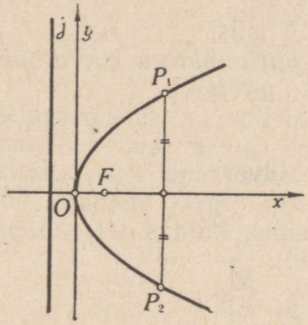
$$y^2 = 2px.$$

Parabooli uurimine tema võrrandi abil

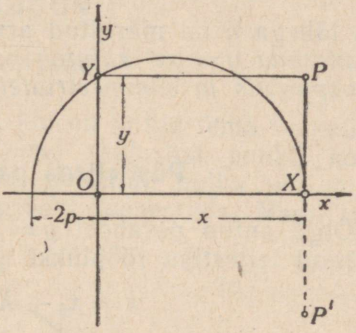
Asume parabooli kuju uurimisele eeldusel, et võrrandis $y^2 = 2px$ kordaja $p > 0$. Et alguspunkti koordinaadid rahuldavad parabooli võrrandit $y^2 = 2px$, siis parabool läbib koordinaatide alguspunkti. Igal muul punktil on $y \neq 0$, järelikult võrrandi $y^2 = 2px$ vasak pool on positiivne ja seega peab olema positiivne ka parem pool. Et $p > 0$, siis peab olema $x > 0$. See tähendab, et kõik muud parabooli punktid asetsevad paremal pool y-telge (joon. 123). Lahendades parabooli võrrandi y suhtes, saame

$$y = \pm \sqrt{2px}.$$

See näitab, et igale positiivsele x väärtusele vastab kaks y väärtust, mis erinevad teineteisest ainult märgi poolest. Parabool on seega sümmeetriline sirge suhtes, mis läbib fookust ja on risti juhtjoonega, nagu seda nägime juba varemgi.



Joon. 123.



Joon. 124.

Kui abstsiss x järjest kasvab, kasvab järjest ka ordinaat y. Arvestades parabooli sümmeetriat telje suhtes, näeme, et parabool on lahtine kõver.

Parabooli võrrandist näeme, et

$$2p : y = y : x;$$

see tähendab, et parabooli punkti ordinaat on kahekordse parameetri ja punkti abstsissi geomeetriline keskmine. Seda omadust saab hästi ära kasutada parabooli joonestamiseks (joon. 124); selleks märgime x-teljel negatiivses suunas lõigu, mis algab koordinaatide alguspunktist ja on võrdne kahekordse parameetriga; võtame mingi abstsissi x; joonestame lõiku $2p + x$ diameetriks võttes poolringjoone; selle lõikumispunkt y-teljega Y annab nõutava ordi-

naadi. Kandes selle ordinaadi abstsisslõigu lõpu X kohale, saame parabooli punkti P. Punkt P', mis on punktiga P sümmeetriline telje Ox suhtes, kuulub samuti paraboolile. Muutes x väärtust, saame uue paari parabooli punkte. Sama võtet korrates leiame nii palju parabooli punkte, kui palju vajame parabooli joonestamiseks.

Märkus 1. Võrrandil $y^2 = -2px$ on mõte ainult negatiivse x puhul. Ta kujutab siis parabooli, mis saadakse eelmisest peegeldamise teel y-telje suhtes. Nagu ennegi, nii ka nüüd kujutab p fookuse kaugust juhtjoonest. Fookus aga on nüüd juhtjoonest vasakul pool.

Märkus 2. Kui parabooli teljeks oleks x-telje asemel y-telg, siis parabooli võrrand oleks

$$x^2 = 2py$$

ehk, muutuja y suhtes lahendatult,

$$y = ax^2,$$

kus tähega a on märgitud arv $1 : 2p$. Niisiis:

võrrand $y = ax^2$ kujutab parabooli haripunktiga koordinaatide alguspunktis ja sümmeetriateljega piki y-telge.

Püstteljega parabooli üldvõrrand

Olgu antud parabool $y = ax^2$. Küsime, kuidas teisendub see võrrand teljestiku rööplükke puhul, kui

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y.$$

Parabooli võrrand uues teljestikus on

$$y_0 + Y = a(x_0 + X)^2$$

ehk

$$Y = aX^2 + 2ax_0X + (ax_0^2 - y_0)$$

ehk, lühemalt,

$$Y = aX^2 + bX + c.$$

Paremal pool võrdusmärki seisev avaldis on abstsissi ruut-trinoom.

Näitame, et ka ümberpöördult võrrand

$$y = ax^2 + bx + c$$

kujutab alati püstteljega parabooli.

Tõepoolest, täiendades paremat poolt täisruuduni, saame

$$y = a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + c$$

ehk

$$y + \frac{b^2}{4a} - c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Võttes

$$y + \frac{b^2}{4a} - c = \eta, \quad x + \frac{b}{2a} = \xi,$$

see tähendab lükates teljestikku rööbiti algseisuga edasi, saame

$$\eta = a\xi^2,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Niisiis:

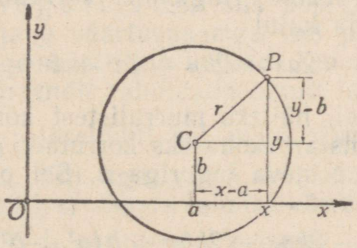
püstteljega parabooli üldvõrrandiks on võrrand

$$y = ax^2 + bx + c.$$

§ 37. RINGJOON

Ringjoone võrrand

Ringjoon on tasandil määratud, kui on antud tema keskpunkt ja raadius, sest nende andmete järgi saab iga punkti kohta otsustada, kas ta kuulub ringjoone punktide hulka või mitte. Nende andmete järgi saab ka ringjoont joonestada. Nagu kohe



Joon. 125.

näitame, saab nende andmete varal koostada ka r i n g j o o n e v õ r r a n d i. Tõepoolest, olgu punkt $C(a, b)$ ringjoone keskpunkt ja r ringjoone raadius. Olgu $P(x, y)$ ringjoonel vabalt võetud punkt (joon. 125). Siis on CP üks ringjoone raadiustest, seega $CP = r$, järelikult $CP^2 = r^2$. Avaldades viimase võrduse vasaku poole punktide C ja P koordinaatides, saame

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Et punkt P oli ringjoonel vabalt võetud punkt, siis leitud seos kehtib ringjoone i g a punkti puhul; järelikult see seos ongi ringjoone võrrand. Sel kujul kirjutatud ringjoone võrrandit nimetame ringjoone k a n o o n i l i s e k s* v õ r r a n d i k s. Sõna «k a n o o n i l i n e» kasutame siin ja edaspidi sõna «t a v a k o h a n e» mõttes.

Erijuhul, kui ringjoone keskpunktiks on koordinaatide alguspunkt, on keskpunkti koordinaadid a ja b võrdsed nulliga ja ringjoone võrrand esineb kujul

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Ümberpöördult, võrrand

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

esitab arvude a, b ja r igasugustel väärtustel ringjoont. Tõepoolest, vaadeldav võrrand ütleb, et punkt, mille koordinaadid x ja y teda rahuldavad, asetseb kindlast punktist (a, b) niisugusel kaugusel, mille ruut on konstantne; järelikult on ka kõnesolev kaugus ise konstantne (nimelt r). Punktid aga, mis asetsevad ühel ja samal kaugusel kindlast punktist, moodustavad ringjoone. Juhul, kui $r = 0$, kõdub ringjoon punktiks (a, b).

Tingimused, mil üldine teise astme võrrand kujutab ringjoont

Sulge avades saame ringjoone võrrandi $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ kirjutada kujul

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

Mõningatel juhtudel, näiteks murrulistest kordajatest vabanemisel, võib osutuda otstarbekohaseks korrutada kogu võrrand mõne konstantse, nullist erineva teguriga k. Sel puhul omandab võrrand kuju

$$kx^2 + ky^2 - 2kax - 2kby + k(a^2 + b^2 - r^2) = 0.$$

See võrrand on x ja y suhtes t e i s e a s t m e võrrand. Üldine teise astme võrrand sisaldab järgmisi liikmeid: liige x ruuduga, liige x ja y korrutisega, liige y ruuduga, liige x-iga, liige y-ga ja vabaliige. Niisugust võrrandit kirjutame kujul

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Viimati saadud ringjoone võrrand on selles mõttes e r i k u j u l i n e, et temas puudub liige muutujate korrutisega ja et muutujate ruutude kordajad on võrdsed. Näitame, et iga teiseastme-

* Lad. k. *canonus* — seaduspärane, tavakohane.

line võrrand muutujatega x ja y, mille puhul on täidetud praegu nimetatud tingimused, teisendub võrrandiks

$$(x-a)^2+(y-b)^2=const$$

ja esitab seega ringjoont, kui *const* osutub positiivseks.

Tõepoolest, olgu tegemist võrrandiga, mis rahuldab eespool nimetatud tingimusi. Kirjutame ta kujul

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0,$$

kus A, D, E ja F tähendavad mingisuguseid arve. Jagades võrrandi kõik liikmed kordajaga A ja kirjutades nad teises järjekorras, saame

$$x^2+\frac{D}{A}x+y^2+\frac{E}{A}y+\frac{F}{A}=0.$$

Täiendades esimese ja teise liikme summa, samuti kolmanda ja neljanda liikme summa täisruuduks, saame eelmisega samaväärse võrrandi

$$\left(x^2+\frac{D}{A}x+\frac{D^2}{4A^2}\right)+\left(y^2+\frac{E}{A}y+\frac{E^2}{4A^2}\right)=const$$

ehk

$$\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2A}\right)^2=K, \text{ kus } K=const.$$

Vasakul poolel seisab kahe ruudu summa; see ei ole kunagi negatiivne. Kui K on n e g a t i i v n e, siis pole võimalik võrrandit rahuldada ühegi x ja y väärtuspaariga; sel puhul võrrandile ei vasta mingisugune geomeetriline kujund. Kui K osutub võrdseks nulliga, siis saab võrrandit rahuldada ainult ühe väärtuspaariga: $x=-\frac{D}{2A}$, $y=-\frac{E}{2A}$; järelikult sel juhul võrrand esitab ü h t a i n s a t p u n k t i. Kui aga paremal poolel seisev konstant osutub p o s i t i i v s e k s, saame eelmise võrrandi kirjutada kujul

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2,$$

mis on r i n g j o o n e v õ r r a n d. Seega

teise astme võrrand muutujatega x ja y, milles puudub liige muutujate korrutisega ja milles muutujate ruutude kordajad on võrdsed, kas esitab ringjoont või talle vastab ainult üks punkt või talle ei vasta ühtki geomeetrilist kujundit.

N ä i d e. Võrrandit

$$2x^2+2y^2+5x-8y+10=0$$

saame pärast kõigi liikmete jagamist kahega kirjutada kujul

$$\left(x^2+\frac{5}{2}x\right)+(y^2-4y)+5=0.$$

Liites ja lahutades vastavalt $\frac{25}{16}$ ja 4, saame

$$\left(x^2+2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+(y^2-2\cdot 2y+4)+\left(5-\frac{25}{16}-4\right)=0$$

ehk

$$\left(x+\frac{5}{4}\right)^2+(y-2)^2=\frac{9}{16}.$$

See on niisuguse ringjoone võrrand, mille keskpunkti koordinaadid on $-\frac{5}{4}$ ja 2 ning raadius on $\frac{3}{4}$:

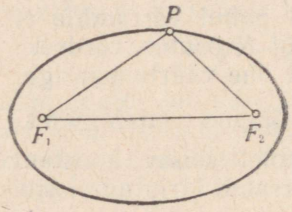
$$C\left(-\frac{5}{4};\ 2\right),\quad r=\frac{3}{4}.$$

Ringjoone võrrandi taandamisel kanoonilisele kujule ei tasu kasutada eeltoodu põhjal kergesti tuletatavaid valemeid a, b ja r^2 jaoks; otstarbekam on taandamine läbi viia näites toodud viisil.

§ 38. ELLIPS

Ellipsi definitsioon. Ellipsi joonestamine

Ellipsiks nimetatakse niisugust tasapinnalist kõverjoont, mille iga punkti kaugused kahest kindlast punktist annavad jääva suurusega summa.



Joon. 126.

Neid kindlaid punkte nimetatakse ellipsi f o o k u s t e k s. Olgu punktid F_1 ja F_2 ellipsi fookused ja P ellipsi vabalt valitud punkt. Ellipsi definitsiooni järgi siis

$$F_1P+F_2P=const.$$

Võrduse paremal poolel seisvat konstanti on viisiks tähistada sümboliga $2a$, nii et

$$F_1P+F_2P=2a.$$

Definitsioonist järeldub kohe järgmine võte ellipsi joonestamiseks: torkame fookustesse F_1 ja F_2 nõelad (joon. 126), paneme nõelte ümber kinnise niidi pikkusega F_1F_2+2a, tõmbame pliiatsi teravikuga niidi pingule ja juhime pliiatsi liikumist nii, nagu pingul olev niit seda lubab. Kõverjoon, mille joonestab sel juhul pliiatsi teravik, on ellips, sest märkides pliiatsi teraviku tähega P, leiame, et alati

$$F_1F_2+F_1P+F_2P=F_1F_2+2a$$

ehk

$$F_1P + F_2P = 2a,$$

see aga tähendab, et punkt P rahuldab ellipsi punkti kohta seatud nõuet.

Kirjeldatud võtet kasutavad iluaednikud ovaalsete lillepeenarde piirjoonte saamiseks.

Sirglõike, mis ühendavad ellipsi punkti fookustega, nimetatakse ellipsi punkti fokaalkaugusteks.

Fokaalkaugusi tähistatakse sümbolitega r_1 ja r_2. Ellipsi definitsiooni järgi on ikka

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Ellipsi definitsiooni järgi

ellips on määratud oma fookustega ja fokaalkauguste summaga.

Sedasama kinnitab ka praegu kirjeldatud ellipsi konstruktsioon.

Teine võte ellipsi joonestamiseks on järgmine. Võtame lõigul A_1A_2, mille pikkus on $2a$, mingi punkti A; siis $A_1A + AA_2 = 2a$, seega lõike A_1A ja AA_2 võib võtta ellipsi punkti fokaalkaugusteks. Joonestame raadiusega A_1A fookuse F_1 ümber ringjoone kaare ja raadiusega AA_2 fookuse F_2 ümber teise ringjoone kaare. Lõikugu need ringjoonte kaared punktides P_1 ja P_2. Siis

$$F_1P_1 + F_2P_1 = A_1A + AA_2 = 2a$$

ja

$$F_1P_2 + F_2P_2 = A_1A + AA_2 = 2a,$$

seega nii punkt P_1 kui ka punkt P_2 asetseb ellipsil.

Muutes punkti A asukohta lõigul A_1A_2 ja korrates eespool toodud võtet, saame veel kaks ellipsi punkti; nõnda jätkates võime leida nii palju ellipsi punkte, kui palju me neid ellipsi joonestamiseks soovime saada. Neid punkte kõverjoonlaua abil ühendades saame ellipsi.

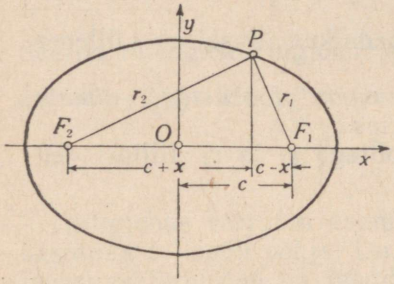
Et punktid P_1 ja P_2 asetsevad sümmeetriliselt fookusi ühendava sirge suhtes, siis on see sirge ellipsi sümmeetriateljeks. Seda telge nimetame ellipsi fokaalteljeks.

Et fookused asetsevad sümmeetriliselt lõigu F_1F_2 keskristsirge suhtes, siis on ellips sümmeetriline ka selle keskristsirge suhtes. Seda ellipsi teist sümmeetriatelge nimetame ellipsi kaasteljeks.

Olles sümmeetriline kahe ristuva sirge suhtes, on ellips sümmeetriline ka nende sirgete lõikepunkti suhtes. See punkt poolitab lõiku F_1F_2. Me nimetame seda punkti ellipsi keskpunktiks.

Ellipsi punkti fokaalkauguste avaldised punkti koordinaatides

Olgu antud ellipsi fookused F_1 ja F_2. Siis on teada ka nendevaheline kaugus F_1F_2. Tähistame selle kauguse, nagu üldiselt viisiks, sümboliga $2c$. Valime sirgjoone F_1F_2, see on fokaaltelje, abstsissteljeks suunaga fookusest F_2 fookusse F_1 ja paigutame ordinaattelje piki lõigu F_1F_2 keskristsirget (joon. 127). Nende telgede lõikepunkt on siis koordinaatide alguspunktiks. Selles teljestikus $F_1(c, 0)$ ja $F_2(-c, 0)$.



Joon. 127.

Olgu nüüd P üks ellipsi punktidest ja olgu tema koordinaadid x ja y. Siis kahe punkti vahelise kauguse ruudu valemi järgi

$$r_1^2 = (x-c)^2 + (y-0)^2 \quad \text{ja} \quad r_2^2 = (x+c)^2 + (y-0)^2,$$

kust

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Ellipsi võrrand

Ellipsi võrrandi tuletamiseks kasutame joonist 127 ja seal toodud tähistusi. Et ellipsi definitsiooni järgi

$$r_1 + r_2 = 2a,$$

siis

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Et punkt P oli ellipsi mingi punkt, siis leitud seos kehtib ellipsi iga punkti puhul; järelikult saadud võrrand ongi ellipsi võrrand.

Anname sellele võrrandile ruutjuurtest vaba kuju. Selleks viime ühe ruutjuure paremale poolele; saame

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Võrrandi kummagi poole ruutimine annab

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2;$$

pärast sulgude avamist ja koondamist leiame, et

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

Tõstes selle võrduse mõlemad pooled ruutu ja koondades sarnased liikmed, saame

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ehk

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Saadud võrrand ongi ellipsi võrrand.

Otsustame, missugune on vahe $a^2 - c^2$ märk. Kolmnurgast F_1PF_2 (joon. 127) näeme, et

$$F_1P + F_2P > F_1F_2$$

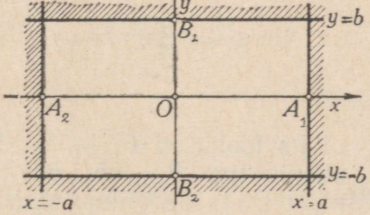
ehk $2a > 2c$, seega $a > c$, järelikult $a^2 > c^2$ ja lõpuks $a^2 - c^2 > 0$. Niisiis vahe $a^2 - c^2$ on igal juhul positiivne. Seepärast võime teda lühiduse mõttes kirjutada kujul b^2, mille järel ellipsi võrrand omandab kuju

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ellipsi haripunktid ja poolteljed

Vaatleme eelkõige, missugustes punktides ellips lõikab telgi.

Ellipsi lõikepunktis x-teljega on $y = 0$, seega $\frac{x^2}{a^2} = 1$ ehk $x^2 = a^2$ ehk $x = \pm a$. Samal viisil leiame, et lõikepunktis y-teljega on $y = \pm b$. Näeme, et ellips lõikab x-telge punktides (joon. 128)



Joon. 128.

$$A_1(a, 0) \quad \text{ja} \quad A_2(-a, 0)$$

ja y-telge punktides

$$B_1(0, b) \quad \text{ja} \quad B_2(0, -b).$$

Neid nelja punkti nimetatakse ellipsi haripunktideks, sirglõike $A_1A_2 = 2a$ ja $B_1B_2 = 2b$ ellipsi telgedeks. Arvud

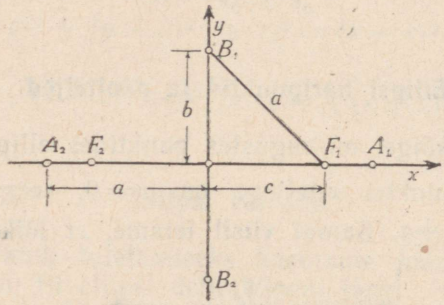
a ja b kujutavad ellipsi pooltelgi. Et $a^2 - c^2 = b^2$, siis $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 > b^2$, $a > b$ ja $2a > 2b$. Seepärast lõiku A_1A_2 nimetatakse ellipsi suureks teljeks, lõiku B_1B_2 ellipsi väikeseks teljeks. Vastavalt sellele on a ellipsi suur pooltelg ja b ellipsi väike pooltelg. Ellipsi suur telg asetseb alati ellipsi fokaalteljel.

Ellipsi fookuste konstrueerimine pooltelgedest

Kirjutades a, b ja c vahelise seose kujul

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

näeme, et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Seega on ellipsi pooltelgedega määratud ka fookustevaheline kaugus ehk, teiste sõnadega, punktid A_1,



Joon. 129.

A_2, B_1 ja B_2 määravad ka fookused F_1 ja F_2. Tõepoolest, joonestades väikese telje otspunktist B_1 (või B_2) (joon. 129) ringjoone raadiusega a, näeme, et see lõikab suurt telge just punktides F_1 ja F_2.

Ellipsi kuju uurimine tema võrrandi abil

Lahendades ellipsi võrrandi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ordinaadi y suhtes, leiame, et

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Saadud avaldisel on mõte ainult siis, kui juuritav pole negatiivne; see tähendab, et $a^2 - x^2 \geqslant 0$ ehk $x^2 \leqslant a^2$ ehk $|x| \leqslant a$ ehk, teisiti,

$$-a \leqslant x \leqslant a.$$

Sellest näeme, et ükski ellipsi punkt ei asetse vasakul pool sirget $x = -a$ ega paremal pool sirget $x = a$ (joon. 128). Analoogiliselt näeme ellipsi võrrandi lahendamisel abstsissi x suhtes, et

$$-b \leqslant y \leqslant b;$$

siit järeldame, et ükski ellipsi punkt ei asetse ülalpool sirget $y = b$ ega allpool sirget $y = -b$. Seega -

kõik ellipsi punktid asetsevad ristkülikus, mille sümmeetriatelgedeks on ellipsi teljed.

Selles, et ellips on sümmeetriline oma telgede suhtes, veendusime ellipsi konstrueerimist käsitledes. Seda omadust saame aga järeldada ka otseselt ellipsi võrrandist. Tõepoolest, ellipsi võrrand ei muutu, kui temas asendame väärtuspaari (x, y) väärtuspaariga $(x, -y)$ või väärtuspaariga $(-x, y)$. Ellipsi võrrand ei muutu ka siis, kui temas väärtuspaari (x, y) asendame väärtuspaariga $(-x, -y)$. See näitab, et ellips on sümmeetriline ka koordinaatide alguspunkti, s. t. oma telgede lõikepunkti suhtes. Seepärast nimetatakse seda punkti ellipsi k e s k p u n k t i k s.

Ellipsi parameeter

Arvutame ellipsi fookuse kohal asuva punkti koordinaadi. Siin on $x = \pm c$, seega

$$y_F = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

ehk

$$y_F = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Väärtust $b^2 : a$ märgitakse tähega p ja nimetatakse ellipsi p a r a m e e t r i k s. Nagu näeme, $2|y_F| = 2p$, seega

ellipsi kahekordne parameeter annab arvuliselt ellipsi ava laiuse fookuse kohal.

Võrdus $b^2 : a = p$ tähendab, et ellipsi väike pooltelg on suure pooltelje ja parameetri geomeetriline keskmine. Kui k a k s kolmest arvust a, b ja p on teada, saab kolmandat kohe arvutada või konstrueerida. Seega ellipsit saab määrata mitte ainult lõikudega a ja c või a ja b, vaid ka lõikudega a ja p või b ja p. Seetõttu nimetatakse lõike a, c, b ja p ellipsi l i n e a a r s e t e k s e l e m e n t i d e k s.

Ellipsi ekstsentrilisus

Ellipsi fookuste vahe suhet suuresse teljesse nimetatakse ellipsi ekstsentrilisuseks.

Tähistades ekstsentrilisust tähega e, saame

$$e = \frac{2c}{2a} \quad \text{ehk} \quad e = \frac{c}{a}$$

ehk ka

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Et ellipsi puhul alati $c < a$, siis $e < 1$. Niisiis:

ellipsi ekstsentrilisus $e = \frac{c}{a}$ *on alati väiksem kui üks.*

Sageli osutub otstarbekohaseks anda ellipsit mitte k a h e lineaarse elemendiga, näiteks a ja c või a ja b, vaid ü h e lineaarse elemendiga ja ekstsentrilisusega, näiteks a ja e väärtustega. Viimasel juhul

$$c = ae, \quad b = a\sqrt{1 - e^2} \quad \text{ja} \quad p = a(1 - e^2).$$

Kui aga anname ellipsi tema parameetri p ja ekstsentrilisuse e kaudu, siis

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}} \quad \text{ja} \quad c = \frac{pe}{1 - e^2}.$$

Saadud valemid võimaldavad uurida ellipsi kuju sõltuvuses tema ekstsentrilisusest. Vaatleme ellipseid ühe ja sama suure poolteljega a, kuid erinevate ekstsentrilisustega e. Siis valemitest $c = ae$ ja $b = a\sqrt{1 - e^2}$ järeldub, et ekstsentrilisuse kasvamisel nullist üheni fookuse kaugus keskpunktist kasvab nullist suure pooltelje väärtuseni, väikese pooltelje väärtus aga väheneb suure pooltelje väärtusest nullini. See tähendab, et ellipsi ekstsentrilisuse kasvamisel ellipsi fookuste vaheline kaugus järjest kasvab, väike telg aga järjest väheneb ja ellips muutub järjest lamedamaks. Ekstsentrilisuse e lähenemisel ühele läheneb c arvule a ja b nullile: ellips läheneb oma kujult sirgjoone lõigule. Ekstsentrilisuse e lähenemisel nullile läheneb ka c nullile, fookused lähenevad järjest keskpunktile ja b läheneb arvule a, teiste sõnadega, ellips läheneb oma kujult ringjoonele.

Ellipsi lamedus

Ellipsi pooltelgede vahe on $a - b$. Ellipsi kuju iseloomustatakse sageli näitajaga

$$\lambda = \frac{a-b}{a},$$

mis kannab ellipsi lameduse nimetust. Maakera telglõikel näiteks on $\lambda = 1 : 298$. Karakteristiku λ avaldamine ekstsentrilisuse e kaudu ja vastupidi ei tee raskusi: $\lambda = 1 - \sqrt{1 - e^2}$, $e = \sqrt{\lambda(2-\lambda)}$.

Et ellipsil alati $b \leqslant a$, siis on $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Erijuhul, kui $\lambda = 0$, on $b = a$ ja saame ringjoone; erijuhul, kui $\lambda = 1$, on $b = 0$ ja saame sirgjoone lõigu.

Ellipsi parameetrilised võrrandid

Kirjutades ellipsi võrrandi kujul

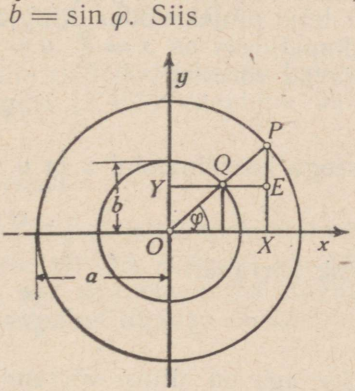
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ja meelde tuletades nurga koosinuse ja siinuse vahelise seose, näeme, et võib võtta $x : a = \cos\varphi$, $y : b = \sin\varphi$. Siis

$$x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi,$$

mis ongi ellipsi parameetrilisteks võrranditeks.

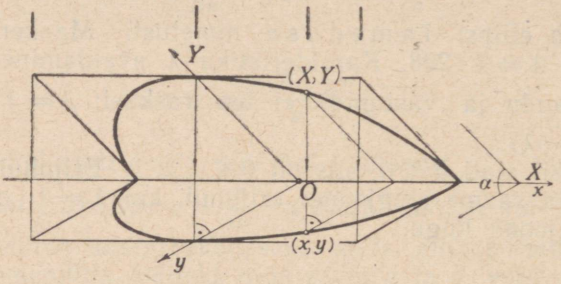
Saadud võrrandeist järeldub lihtne ellipsi konstruktsiooniviis: joonestame ümber koordinaatide alguspunkti kui tsentri ühe ringjoone raadiusega a, teise ringjoone raadiusega b ja võtame mingi nurga φ all alguspunktist lähtuva kiire (joon. 130). Lõigaku see kiir suurt ringjoont punktis P, väikest punktis Q. Siis lõigu OP projektsioon abstsissteljel $OX = a\cos\varphi$ ja lõigu OQ projektsioon ordinaatteljel $OY = b\sin\varphi$. Punkt $E(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ on ellipsi punkt. Muutes nurga φ väärtust, saame kuitahes palju ellipsi punkte.



Joon. 130.

Ellips ringjoone ortogonaalprojektsioonina

Olgu antud ringjoon raadiusega a kaldtasapinnas, mis moodustab rõhttasapinnaga nurga α (joon. 131). Võtame rõhttasapinna projektsioonitasapinnaks ja projekteerime sellele antud ringjoone püstsihis langevate kiirtega. Saadav projektsioon ei



Joon. 131.

muutu rõhttasapinna asetamisel ühele või teisele kõrgusele. Lihtsuse mõttes paneme ta läbi antud ringjoone rõhtdiameetri. Võtame kaks koordinaatteljestikku: x- ja X-teljena ringjoone rõhtdiameetri, alguspunktina ringjoone keskpunkti, y-teljena Y-telje projektsiooni. Ringjoone punkti (X, Y) projektsiooni koordinaatideks on $x = X$, $y = Y \cos \alpha$. Koordinaadid X ja Y rahuldavad võrrandit

$$X^2 + Y^2 = a^2,$$

seega koordinaadid x ja y vastavalt võrrandit

$$x^2 + \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} = a^2$$

ehk võrrandit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \alpha} = 1.$$

See aga on ellipsi võrrand. Niisiis:

ellips on ringjoone ortogonaalprojektsioon.

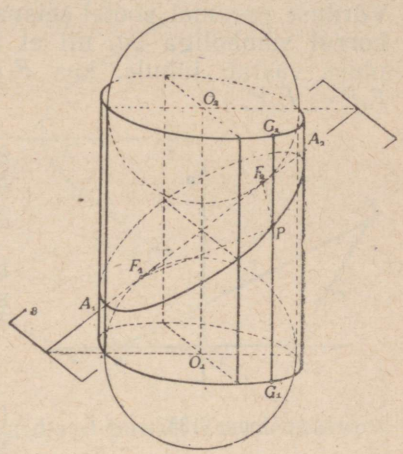
Saadud ellipsi poolteljed on a ja $a \cos \alpha$, parameeter $p = a \cos^2 \alpha$ ja ekstsentrilisus $e = \sin \alpha$.

Ellips silindri ja tasapinna lõikejoonena

Igapäevases elus esineb sageli ümmargune püstsilinder lõikes tasapinnaga. Näidetena võib nimetada süstlanõela teravikku, toru

kaldlõiget ühenduskohal samasuguse toruga, kuuli varju kontuuri, kui kuul on paigutatud Päikeselt tulevatesse rööbikutesse valguskiirtesse, veepinna äärjoont kaldu hoitavas veeklaasis jms.

Kõik need silindri lõikejooned silindri telje suhtes kaldu seisvate tasapindadega on e l l i p s i d. Selle väite tõestamiseks arutleme järgmiselt.



Joon. 132.

Lõikame ümmargust silindrit kaldtasapinnaga ε (joon. 132) ja võtame abiks kaks silindrisse joonestatud kera, mis puudutavad lõikavat kaldtasapinda. Märgime tasapinna ε ja nende kerade puutepunktid tähtedega F_1 ja F_2. Olgu P lõikejoonel vabalt võetud punkt. Lõigud PF_1 ja PF_2 on punktist P keradele tõmmatud puutelõigud. Samuti on kerade puutelõikudeks silindri moodustaja osad PG_1 ja PG_2. Lõigud PF_1 ja PG_1 on järelikult teineteisega võrdsed. Samuti on teineteisega võrdsed lõigud PF_2 ja PG_2. Seepärast

$$PF_1 + PF_2 = PG_1 + PG_2 \text{ ehk } PF_1 + PF_2 = G_1G_2.$$

Moodustaja lõik G_1G_2 kui silindri kahe ristlõike vaheline kaugus on sõltumatu punkti P asendist silindri ja lõiketasapinna ühisjoonel. Järelikult

$$PF_1 + PF_2 = const.$$

See tähendab, et uuritav kõver on e l l i p s, mille fookusteks on punktid F_1 ja F_2. Ellipsi suureks teljeks on lõik A_1A_2. Et see võrdub lõikude PF_1 ja PF_2 summaga, see aga omakorda lõiguga G_1G_2, siis ellipsi suure telje pikkus on antud lõiguga G_1G_2.

§ 39. HÜPERBOOL

Hüperbooli definitsioon. Hüperbooli joonestamine

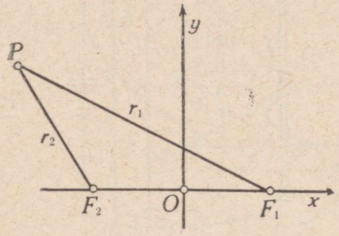
Hüperbooliks nimetatakse niisugust tasapinnalist kõverjoont, mille iga punkti kaugused kahest kindlast punktist annavad jääva suurusega vahe.

Neid kindlaid punkte nimetatakse hüperbooli f o o k u s t e k s. Nagu ellipsi korral, nii ka nüüd tähistame fookused tähtedega

F_1 ja F_2. Olgu P hüperboolil vabalt valitud punkt (joon. 133). Hüperbooli definitsiooni järgi on siis

$$F_1P - F_2P = const.$$

Võrduse paremal poolel seisvat konstanti tähistame nagu ellipsigi korral sümboliga $2a$, nii et $F_1P - F_2P = \pm 2a$, kusjuures märk pluss vastab juhule, kus $F_1P > F_2P$, märk miinus juhule, kus $F_1P < F_2P$.



Joon. 133.

Sirglõike, mis ühendavad hüperbooli punkti fookustega, nimetatakse hüperbooli punkti fokaalkaugusteks.

Fokaalkaugusi tähistatakse sümbolitega r_1 ja r_2. Hüperbooli definitsiooni järgi on ikka

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Hüperbooli joonestamine rajaneb tema definitsioonil. Olgu antud hüperbooli fookused F_1 ja F_2 ja fokaalkauguste vahe $2a$ (lugeja tehku ise vastav joonis). Võtame lõigu $A_1A_2 = 2a$ ja selle pikendil mingi punkti A. Siis $A_1A - A_2A = A_1A_2 = 2a$; lõigud A_1A ja A_2A võib seega võtta hüperbooli punkti fokaalkaugusteks. Joonestame fookuse F_1 ümber raadiusega A_1A ringjoone kaare ja punkti F_2 ümber raadiusega A_2A teise ringjoone kaare. Need kaared lõikuvad kahes punktis P_1 ja P_2, mis mõlemad kuuluvad hüperboolile. Joonestades punkti F_1 ümber ringjoone kaare raadiusega A_2A ja punkti F_2 ümber ringjoone kaare raadiusega A_1A, saame veel kaks hüperbooli punkti. Muutes punkti A asendit lõigu A_1A_2 pikendil ja korrates eespool kirjeldatud konstruktsiooni, saame veel neli hüperbooli punkti. Sel viisil jätkates leiame nii palju hüperbooli punkte, kui palju me neid tema joonestamiseks soovime saada. Hüperbool koosneb kahest harust, nagu seda näeme joonisel 134.

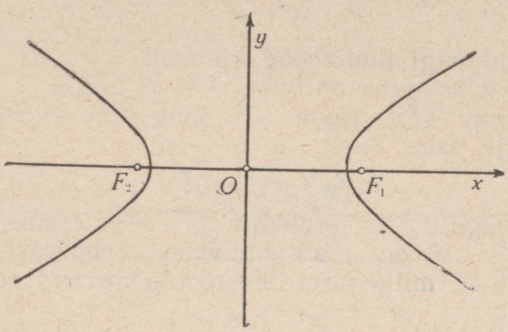
Hüperbooli definitsioonist näeme, et hüperbool on määratud oma fookustega ja oma punkti fokaalkauguste vahega. Sedasama kinnitab ka praegu kirjeldatud hüperbooli konstruktsioon.

Et punktid P_1 ja P_2 asetsevad sümmeetriliselt fookusi ühendava sirge suhtes, siis on see sirge hüperbooli sümmeetriateljeks. Seda telge nimetame hüperbooli fokaalteljeks.

Et fookused asetsevad sümmeetriliselt lõigu F_1F_2 keskristsirge suhtes, siis on hüperbool sümmeetriline ka selle keskristsirge suhtes. Seda hüperbooli teist sümmeetriatelge nimetame hüperbooli kaasteljeks.

Olles sümmeetriline kahe ristuva sirge suhtes, on hüperbool

sümmeetriline ka nende sirgete lõikepunkti suhtes. See punkt poolitab lõiku F_1F_2. Me nimetame seda punkti hüperbooli k e s k p u n k t i k s.



Joon. 134.

Hüperbooli punkti fokaalkauguste avaldised punkti koordinaatides

Korrates sõna-sõnalt ellipsi punkti fokaalkauguste puhul arendatud mõttekäiku, saame hüperbooli punkti fokaalkauguste avaldised, nagu ellipsigi juhul, järgmisel kujul:

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{ja} \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Hüperbooli võrrand

Valime koordinaadistiku nagu ellipsigi korral: abstsissteljeks võtame fokaaltelje suunaga fookusest F_2 fookusse F_1, ordinaatteljeks lõigu F_1F_2 keskristsirge. Olgu P hüperbooli suvaline punkt; olgu selle punkti koordinaadid x ja y ja fokaalkaugused r_1 ja r_2. Siis hüperbooli definitsiooni järgi

$$r_1 - r_2 = \pm 2a$$

ehk

$$(r_1 - r_2)^2 = 4a^2$$

ehk, teisiti,

$$r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 = 4a^2.$$

Paigutades siia r_1^2, r_2^2, r_1 ja r_2 jaoks saadud avaldised, koondades tulemust ja vabanedes lõpptulemuses esinevaist juuravaldisist, saame

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

ehk

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Saadud võrrand ongi hüperbooli võrrand.

Otsustame, missugune on vahe $c^2 - a^2$ märk.

Et kolmnurgas F_1PF_2 (joon. 133) külg F_1F_2 on suurem kui kahe teise külje vahe, siis

$$F_1F_2 > F_1P - F_2P$$

ehk $2c > 2a$, seega $c > a$, järelikult $c^2 > a^2$ ja lõpuks $c^2 - a^2 > 0$. Niisiis vahe $c^2 - a^2$ on positiivne. Seepärast võime teda kirjutada kujul b^2, mille järel hüperbooli võrrand omandab kuju

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Saadud võrrand annab võimaluse igakülgselt uurida hüperbooli kuju. Sellele küsimusele on pühendatud käesoleva paragrahvi järgmised osad.

Hüperbooli teljed. Hüperbooli sümmeetria telgede ja keskpunkti suhtes

Asetades hüperbooli võrrandisse $y = 0$, näeme, et hüperbool lõikab fokaaltelge kahes punktis: $A_1(a, 0)$ ja $A_2(-a, 0)$. Neid kahte punkti nimetatakse hüperbooli haripunktideks ja nendevahelist lõiku A_1A_2 pikkusega $2a$ hüperbooli reaalteljeks. Et hüperbooli puhul $a < c$, siis asetsevad hüperbooli haripunktid üks ühel pool, teine teisel pool koordinaatide alguspunkti, alguspunkti ja fookuse vahel (joon. 135).

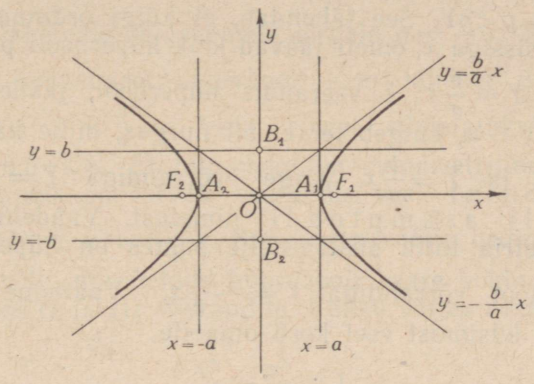
Et hüperbool on sümmeetriline ka kaastelje suhtes, siis nimetatakse lõiku B_1B_2, mille otspunktid on $B_1(0, b)$ ja $B_2(0, -b)$, hüperbooli imaginaarteljeks. Märgime, et hüperbool neid punkte ei läbi: tõepoolest, kui otsiksime hüperbooli ja ordinaattelje lõikepunkte, peaksime hüperbooli võrrandisse asetama $x = 0$, mis annab

$$y^2 = -b^2.$$

Siin seisab vasakul poolel igal juhul positiivne, paremal poolel negatiivne arv. Niisugune võrdus on aga võimatu. See tähendab, et hüperbool ordinaattelge ei lõika.

Et hüperbooli võrrand ei muutu, kui temasse arvupaari (x, y) asemel asetada arvupaar $(-x, -y)$, siis hüperbool on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti, see on hüperbooli keskpunkti suhtes. Samuti veenduksime, et hüperbool on sümmeetriline ka oma mõlema telje suhtes, nagu juba eespool märkisime.

Eespool määrasime hüperbooli reaal-pooltelgega a ja fookuse kaugusega c. Teiseks kaheks lõiguks, mille abil saab hüperbooli määrata, on a ja b. Tõepoolest, lõigu b



Joon. 135.

definitsioonivõrrandist $b^2 = c^2 - a^2$ järeldub, et $c^2 = a^2 + b^2$. See tähendab, et hüperbooli fookuse kaugus on pooltelgedele a ja b kui kaatetitele ehitatud täisnurkse kolmnurga hüpotenuus: $OF_1 = OF_2 = A_1B_1$.

Hüperbooli asend oma telgede suhtes

Hüperbooli sümmeetria tõttu kummagi oma telje suhtes piisab hüperbooli uurimisest xy-tasapinna I veerandis. Siin on ta antud oma võrrandiga

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

mis järeldub hüperbooli kanoonilisest võrrandist. Et ordinaadi y avaldisel oleks mõte, on vaja, et juurealune oleks positiivne või võrdne nulliga. Seepärast $x^2 \geqslant a^2$ ehk, kuna vaatleme ainult positiivseid abstsisse, $x \geqslant a$. See tähendab, et kõik hüperbooli punktid asetsevad I veerandis paremal pool sirget $x = a$, välja arvatud üks neist punktidest, mis asetseb sirgel enesel.

Märgime, et x võib kasvada kuitahes suureks, ilma et y avaldis kaotaks mõtet. Ühtaegu abstsissi kasvamisega kasvab aga ka tema ruut, vahe $x^2 - a^2$, juur $\sqrt{x^2 - a^2}$ ja seega ka y väärtus. Siit järeldub, et hüperbool on lahtine kõver.

Võrdleme kaht avaldist

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{ja} \quad Y = \frac{b}{a}\,x \quad \text{ehk} \quad Y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2}.$$

On ilmne, et $y < Y$. See tähendab, et kuigi ordinaat y kasvab ühtaegu abstsissiga x, ometi jäävad kõik hüperbooli punktid allapoole sirget $Y = \frac{b}{a}x$: I veerandis hüperbool, jäädes paremale poole sirget $x = a$, kulgeb tervenisti nurgas, mille haaradeks on sirged $y = 0$ ja $Y = \frac{b}{a}x$. Sirge võrrandiga $Y = \frac{b}{a}x$ kannab hüperbooli asümptoodi nimetust. Vaadeldava hüperbooli sümmeetria tõttu abstsisstelje suhtes on hüperboolil veel teine asümptoot võrrandiga $Y = -\frac{b}{a}x$. Vaatleme hüperbooli asümptootide küsimust veel kord omaette.

Hüperbooli asümptoodid

Koordinaattasapinna I veerandis asetseva hüperboolikaare võrrandiks on

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Võtame samas koordinaattasapinna veerandis suvalise sirge, mis läbib hüperbooli keskpunkti. Selle sirge võrrandiks on

$$y = mx, \qquad \text{kus} \qquad m > 0.$$

Leiame hüperbooli kaare ja selle sirge lõikepunkti. Kahe eespool seisva võrrandi ühine lahendamine annab

$$x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}, \quad y = \frac{mab}{\sqrt{b^2 - a^2m^2}}.$$

Neil avaldisil on mõte ainult siis, kui juurealune on positiivne. Seega sirge $y = mx$ lõikab hüperbooli ainult siis, kui $b^2 - a^2m^2 > 0$ ehk $m^2 < b^2 : a^2$. Positiivse m korral tähendab see, et

$$m < \frac{b}{a}.$$

Niisiis, iga seda tingimust rahuldava m puhul sirge $y = mx$ lõikab vaadeldavat hüperbooli, muidu mitte. Tõusu m lähenemisel väärtusele $b : a$ läheneb avaldis a^2m^2 järjest arvule b^2 ja vahe $b^2 - a^2m^2$ väheneb järjest, lähenedes nullile. Selle tulemuseks on, et ka $\sqrt{b^2 - a^2m^2}$ järjest väheneb, hüperbooli ja sirge lõikepunkti koordinaadid x ja y aga järjest kasvavad ja lõike-

punkt (x, y) järjest kaugeneb hüperbooli keskpunktist. Sirge $y = mx$ pöördumisel ümber alguspunkti O ikka lähemale ja lähemale sirgele $y = \frac{b}{a}x$ jõuab ka hüperbooli ja sirge $y = mx$ lõikepunkt ikka lähemale ja lähemale sirgele $y = \frac{b}{a}x$. See tähendab, et abstsissi kasvamisel hüperbooli kaar läheneb ikka enam ja enam sirgele $y = \frac{b}{a}x$. Seda sirget nimetatakse hüperbooli asümptoodiks. Et hüperbool on sümmeetriline oma reaaltelje suhtes, siis on tal IV veerandis veel teine asümptoot, mille võrrand on $y = -\frac{b}{a}x$. Sümmeetria tõttu ordinaattelje suhtes kandub kõik, mis öeldud hüperbooli kaare kohta I ja IV veerandis, üle ka II ja III veerandile. Kokku võttes näeme, et hüperbool

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

koosneb kahest lahus seisvast harust. Kumbki neist asetseb sirgete

$$y = +\frac{b}{a}x \quad \text{ja} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

vahel, millele need harud järjest lähenevad hüperbooli punkti kaugenemisel keskpunktist. Üks hüperbooli haru asetseb paremal pool sirget $x = a$, teine vasakul pool sirget $x = -a$.

Hüperbooli parameeter

Arvutame hüperbooli fookuse kohal asuva punkti ordinaadi. Saame

$$y_F = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Väärtust $b^2 : a$ märgitakse tähega p ja nimetatakse hüperbooli parameetriks.

Hüperbooli kahekordne parameeter annab arvuliselt hüperbooli ava laiuse fookuse kohal.

Hüperbooli ekstsentrilisus

Hüperbooli fookuste vahe suhet reaalteljesse nimetatakse hüperbooli ekstsentrilisuseks.

Tähistades ekstsentrilisust tähega e, saame

$$e = \frac{c}{a} \text{ ehk } e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Et hüperbooli puhul alati $c > a$, siis $e > 1$. Niisiis:

hüperbooli ekstsentrilisus $e = \frac{c}{a}$ *on alati suurem kui üks.*

Nagu ellipsit, nii saab ka hüperbooli anda ühe lineaarse elemendiga ja ekstsentrilisusega, näiteks a ja e väärtustega. Sel puhul

$$c = ae, \quad b = a\sqrt{e^2 - 1} \text{ ja } p = a(e^2 - 1).$$

Kui aga anname hüperbooli tema parameetri p ja ekstsentrilisuse e kaudu, siis

$$a = \frac{p}{e^2 - 1}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \text{ ja } c = \frac{pe}{e^2 - 1}.$$

Vaatleme hüperbooli kuju sõltuvuses tema ekstsentrilisusest e. Olgu näiteks antud a ja e. Siis hüperbooli asümptootide tõusu absoluutväärtus

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \sqrt{e^2 - 1}.$$

Kui e, olles suurem kui üks, läheneb ühele, siis ka e^2 läheneb ühele, $e^2 - 1$ läheneb nullile ja seepärast ka $\frac{b}{a}$ läheneb nullile: asümptoodid lähenevad x-teljele, nurk nende vahel muutub järjest teravamaks ja ka hüperbool muutub järjest teravamaks. Ekstsentrilisuse e kasvamisel vahe $e^2 - 1$ kasvab, murd $\frac{b}{a}$ kasvab, asümptootide tõusu absoluutväärtus kasvab, nendevaheline nurk järjest suureneb ja hüperbool muutub järjest lamedamaks.

Hüperbooli kaashüperbool

Hüperboolidel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ja } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

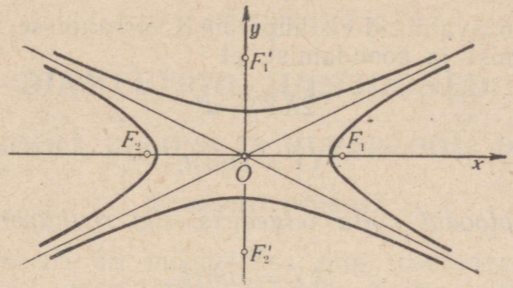
on ühed ja needsamad asümptoodid ning üks ja seesama fookustevaheline kaugus, kuid esimese hüperbooli fookused asetsevad x-teljel, teise omad y-teljel. Niisugust kaht hüperbooli nimetatakse teineteise k a a s h ü p e r b o o l i d e k s (joon. 136).

Nende ekstsentrilisused on vastavalt

$$e_1 = \frac{c}{a} \text{ ja } e_2 = \frac{c}{b},$$

nii et

$$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1.$$



Joon. 136.

Risthüperbool

Võrdsete telgedega hüperbooli nimetatakse risthüperblooliks. Kui $2a = 2b$, siis $a = b$ ja hüperbooli võrrand omandab kuju

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ehk

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Selle hüperbooli asümptoodi tõus on $\pm\frac{a}{a}$ ehk ± 1, seega asümptoodid moodustavad reaalteljega nurgad $+45°$ ja $-45°$ ja teineteisega nurga $90°$:

võrdsete telgedega hüperbooli asümptoodid on teineteisega risti.

Sellest tuleneb ka vaadeldava hüperbooli nimetus.

Võtame need asümptoodid koordinaattelgedeks ja vaatame, missuguse kuju omandab hüperbooli võrrand uues teljestikus. Võtame X-teljeks asümptoodi, mis poolitab IV veerandit, Y-teljeks asümptoodi, mis poolitab I veerandit. Uued teljed on pööratud vanade suhtes nurga $-45°$ võrra. Et $\sin(-45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, siis koordinaatide teisendusvalemid on

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-X + Y). \end{cases}$$

Asetades need avaldised risthüperbooli võrrandisse, saame pärast sulgude avamist ja koondamist, et

$$2XY = a^2$$

ehk

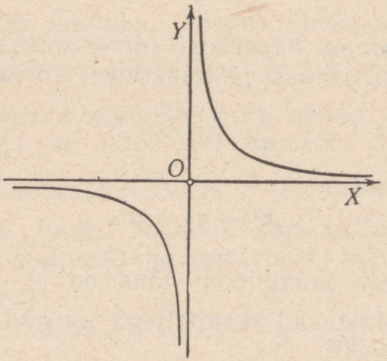
$$XY = const.$$

Niisiis:

kui asümptoodid võtta telgedeks, siis risthüperbooli võrrandiks on

$$XY = const.$$

Hüperbooli $XY = const$ asümptoodid paigutatakse tavaliselt üks rõht-, teine püstsihis. Me räägime siis hüperbooli $XY = const$ rõht- ja püstasümptoodist. Risthüperbool ja ta asümptoodid on kujutatud joonisel 137.



Joon. 137.

Risthüperbooli fookuse kaugus keskpunktist $c = a\sqrt{2}$. Seega selle hüperbooli ekstsentrilisus on $\sqrt{2}$.

PEATÜKK XII

DIAMEETRID. JUHTJOONED

§ 40. PARABOOLI, ELLIPSI JA HÜPERBOOLI DIAMEETRID

Diameetri mõiste

Ringi diameetri all mõistetakse ringi poolitavat kõõlu ehk, teisiti, ringi keskpunkti läbivat k õ õ l u. Selles mõttes kasutatud sõna «diameeter» tähendab l ä b i m õ õ t u. Sõna «diameeter» kasutatakse aga ka teises mõttes, nimelt ringi või ringjoont poolitava s i r g e tähenduses. Edaspidi mõistame sõna «diameeter» alati viimases tähenduses. Niisiis: ringjoone diameetriks nimetatakse iga sirget, mis läbib ringjoone keskpunkti. Iga niisuguse diameetri suhtes on ringjoon s ü m m e e t r i l i n e: kõõl, mis ristub diameetriga, jaotub viimasega pooleks (joon. 138) ja, ümberpöördult, ringjoone iga kõõlu keskristsirge on ringjoone diameetriks.

Ülal antud ringjoone diameetri definitsioon on aga liiga kitsas: seda pole võimalik üle kanda näiteks parabooli juhule, sest paraboolil pole keskpunkti. Seepärast võtame diameetri mõiste üldistamise aluseks ringjoone diameetri järgmise omaduse: kui ringjoones võtta kuitahes palju rööbikuid kõõle, siis kõigi nende kõõlude keskpunktid asetsevad ühel ja samal ringjoone diameetril (joon. 139). Nagu ringjoone puhul, nii mõistame ka iga teise joone kõõlu all lõiku, mille otspunktideks on joone kaks punkti.

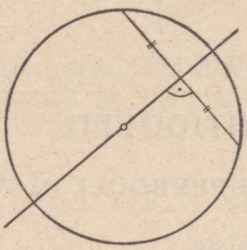
Olgu antud mõni teist järku kõver, nagu ringjoon, parabool või ellips oma kanoonilise võrrandiga ja süsteem rööbikuid sirgeid oma võrrandiga

$$y = mx + n,$$

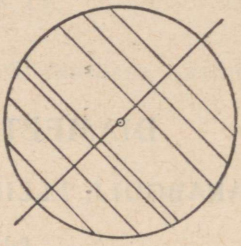
kus tõus m on kõigi sirgete jaoks ü k s j a s e e s a m a, algordinaat aga sirgelt sirgele m u u t u v.* Kõveraga lõikudes anna-

* Kõõlsirge algordinaat on tähistatud tähega n, sest b on kasutusel ellipsi väikese pooltelje sümbolina.

vad need sirged rea kõõle. Fikseerime tähelepanu mingile ühele neist s i r g e i s t. Kõõlu otspunktide koordinaadid saame, lahendades antud joone võrrandi ühiselt kõõlsirge võrrandiga $y = mx + n$. Esimese joone võrrand on teise astme võrrand, teise oma esimese astme võrrand. Võrrandisüsteemi lahendamiseks



Joon. 138.



Joon. 139.

asetame viimati kirjutatud y avaldise kõvera võrrandisse; see annab kõõlu otspunktide abstsisside määramiseks r u u t v õ r r a n d i. Kui sirge tõesti lõikab kõverat, siis on kõnesoleval ruutvõrrandil k a k s lahendit x_1 ja x_2. Kõõlu keskpunkti abstsiss on otspunktide abstsisside aritmeetiline keskmine: $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Sulgudes seisev avaldis on aga ruutvõrrandi lahendite summa ja võrdub ruutvõrrandi esimese astme liikme kordajaga, mis on võetud vastupidise märgiga. Kõõlu keskpunkti ordinaadi y saame kõõlu võrrandist $y = mx + n$, paigutades x asemele $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. Omandagu nüüd parameeter n kõik võimalikud väärtused, mille puhul võrrand $y = mx + n$ kujutab k õ õ l s i r g e t, see tähendab, mille puhul sirge $y = mx + n$ lõikab kõverat. Me saame siis kõõlu keskpunkti koordinaadid x ja y parameetri n funktsioonidena: $x = \varphi(n)$ ja $y = \psi(n)$. Kõõlude keskpunktide poolt moodustatud joone — diameetri — võrrandi leidmiseks jääb vaid elimineerida parameeter n kahest viimasest seosest. Toodud mõttekäiku rakendame kõigepealt parabooli juhule.

Parabooli diameetrid

Olgu parabool antud oma kanoonilise võrrandiga $y^2 = 2px$ (joon. 140). Lõikame seda parabooli sirgega $y = mx + n$. Lõikepunkti koordinaatide saamiseks tuleb mõlemad võrrandid ühiselt lahendada. Saame võrrandi

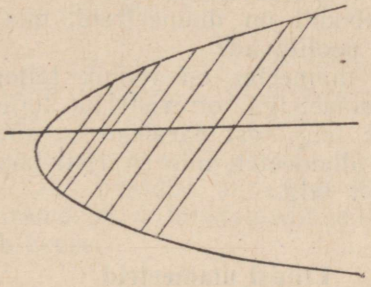
$$(mx + n)^2 = 2px$$

ehk

$$m^2x^2 + 2(mn - p)x + n^2 = 0.$$

Selle võrrandi lahendite poolsumma on

$$-\frac{mn-p}{m^2} \text{ ehk } -\frac{n}{m} + \frac{p}{m^2}.$$



Joon. 140.

Järelikult kõõlu keskpunkti jaoks saame abstsissi

$x = -\frac{n}{m} + \frac{p}{m^2}$ ja ordinaadi $y = \left(-n + \frac{p}{m}\right) + n$ ehk

$$x = -\frac{n}{m} + \frac{p}{m^2} \text{ ja } y = \frac{p}{m}.$$

Kõõlu keskpunkti koordinaadid on avaldatud parabooli parameetri ja kõõlsirge parameetrite m ja n kaudu. Hoiame nüüd parameetri m konstantsena ja laseme parameetril n muutuda. Siis igale n väärtusele vastab oma kõõl ja oma kõõlu keskpunkt, mille koordinaadid on antud kahe viimase võrdusega. Need koordinaadid on parameetri n funktsioonid. Kõõlude keskpunktide poolt moodustatud joone võrrandi saamiseks on vaid vaja elimineerida parameeter n. Kuid seegi töö jääb ära, sest teine leitud võrrandeist

$$y = \frac{p}{m}$$

on juba parameetrist n vaba; ta on seega kõõlude keskpunktide poolt moodustatud joone võrrand. See võrrand kujutab sirgjoont, mis on rööbik parabooli teljega. Niisiis: parabooli $y^2 = 2px$ lõikumisel kõõludega $y = mx + n$ asetsevad kõik kõõlude keskpunktid sirgel $y = \frac{p}{m}$, mis on rööbik parabooli teljega. Igale

kõõlude tõusule m vastab o m a diameeter $y = \frac{p}{m}$. Me nimetame seda diameetrit antud tõusuga kõõlude k a a s d i a m e e t r i k s. Niisiis:

parabooli $y^2 = 2px$ *kõõlude* $y = mx + n$ *kaasdiameeter on rööbik parabooli teljega ja asetseb kaugusel* $\frac{p}{m}$ *sellest teljest.*

Öeldust järeldub, et kõik parabooli diameetrid on üksteisega rööbikud ja kulgevad parabooli telje sihis.

Küsime, kas paraboolil on diameetreid, mis asetsevad risti kõõludega, mida nad poolitavad?

Et parabooli iga diameeter on rööbik teljega, siis kõõlud, mis on risti ühe diameetriga, on risti ka teljega. Niisuguseid kõõlusid aga poolitab telg, sest parabool on sümmeetriline telje suhtes. Niisiis: ainus diameeter, mis on risti kõõludega, mida ta poolitab, on parabooli telg.

Ellipsi diameetrid

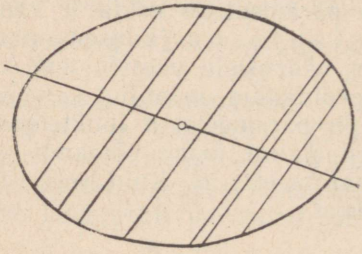
Olgu antud ellips oma kanoonilise võrrandiga

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ja süsteem rööbikuid kõõle

$$y = mx + n,$$

kus m on k o n s t a n t n e, n aga m u u t u v (joon. 141). Leiame nende kõõlude keskpunktide poolt moodustatud joone võrrandi.



Joon. 141.

Fikseerime tähelepanu mingile ühele kõõlule $y = mx + n$ ja leiame selle lõikepunktid ellipsiga. See viib võrrandi

$$b^2x^2 + a^2(mx + n)^2 = a^2b^2$$

lahendamisele. Kirjutades selle võrrandi kujul

$$(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2m^2nx + a^2(n^2 - b^2) = 0,$$

näeme, et tema lahendite poolsumma on

$$-\frac{mna^2}{b^2 + a^2m^2}.$$

Võetud kõõlu keskpunkti koordinaadid on järelikult

$$x = -\frac{mna^2}{b^2 + a^2m^2} \text{ ja } y = -\frac{m^2na^2}{b^2 + a^2m^2} + n$$

ehk

$$x = -\frac{mna^2}{b^2 + a^2m^2} \text{ ja } y = \frac{b^2n}{b^2 + a^2m^2}.$$

Neis valemeis on a, b ja m konstantsed, n aga muutuv. Viimased kaks avaldist annavad meile kõõlu keskpunkti koordinaadid parameetri n funktsioonidena. Parameetri n elimineerimine annab seose

$$y = -\frac{b^2}{ma^2}x,$$

see aga kujutab sirgjoont, mis läbib ellipsi keskpunkti. Märgime selle sirgjoone tõusu tähega m_1. Siis

$$mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Niisiis:

ellipsi rööbikute kõõlude keskpunktid asetsevad ühel ja samal ellipsi keskpunkti läbival sirgel.

Seda sirget nimetatakse kõõlude $y = mx + n$ kaasdiameetriks.

Ellipsi kõõlude ja nende kaasdiameetri tõusude korrutis on $-\frac{b^2}{a^2}$.

Uurime, kas ellipsil leidub kõõle, millede kaasdiameeter on kõõludega risti. Sel puhul peavad kõõlude ja nendele vastava diameetri tõusud rahuldama kaht tingimust:

$$mm_1 = -\frac{b^2}{a^2} \text{ ja } mm_1 = -1.$$

Seejuures on eeldatud, et mõlemad tõusud m ja m_1 on kindlad arvud. Selleks, et mõlemad tingimused kehtiksid üheaegselt, peab olema $b^2 : a^2 = 1$. Et a ja b kui ellipsi poolteljed on positiivsed suurused, siis järeldub siit, et $b = a$. Võrdus $b = a$ ütleb, et tegemist on ringjoonega kui ellipsi erijuhuga. Niisiis: erinevate pooltelgedega ellipsil pole kaldtõusuga kõõle,

millede kaasdiameeter ristuks nendega. Ellipsi kaldu seisvatel kõõludel on ka kaasdiameeter kaldu. Ta poolitab küll kõõle (joon. 141), kuid ei ristu nendega.

Eespool toodud käsitlus ei hõlma juhtu, kus $m = 0$, ega ka juhtu, kus m pole määratav. Esimesel korral on kõõlud rööbikud abstsissteljega, teisel korral ordinaatteljega. Kumbki neist juhtudest on aga käsitletud juba varem ühenduses ellipsi sümmeetriatelgede küsimusega.

Ellipsi kaasdiameetrid

Olgu antud süsteem ellipsi kaldkõõle ühise tõusuga m_1. Nende kõõlude hulgas leidub ka d i a m e e t e r tõusuga m_1. Diameetril, mis poolitab antud kõõle, on tõus m_2, kusjuures

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Selles võrduses esinevad mõlemad tõusud m_1 ja m_2 täiesti ühteviisi, sest valemit saab kirjutada ka kujul

$$m_2 m_1 = -\frac{b^2}{a^2}.$$

See tähendab aga, et esimene diameeter poolitab teisega rööbikuid kõõle. Ellipsi kaht diameetrit, millest kumbki poolitab teisega rööbikuid kõõle, nimetatakse ellipsi k a a s d i a m e e t r i t e k s.

Et ellipsi kahe kaasdiameetri tõusude korrutis on n e g a t i i v n e, siis tõusud peavad olema erinevate märkidega. See tähendab, et ühe diameetri asetsemisel koordinaattasapinna I ja III veerandis asetseb teine II ja IV veerandis.

N ä i d e. Leiame ellipsi $x^2 + 2y^2 = 2$ diameetri, mis on kaasdiameetriks koordinaattasapinna esimese ja kolmanda veerandi poolitajale. Selle nurgapoolitaja tõus on 1, seega temale vastava kaasdiameetri tõus on $-\frac{1}{2}$. Järelikult otsitava kaasdiameetri võrrand on $y = -\frac{1}{2}x$.

Ellipsi kaasdiameetrite konstruktsioon

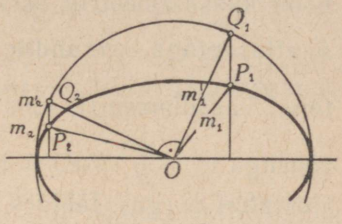
Joonestame ellipsi suurt telge diameetriks võttes ringjoone, lühidalt ellipsi ü m b e r r i n g j o o n e, ja võtame selles paari ristuvaid diameetreid OQ_1 ja OQ_2 (joon. 142). Olgu nende diameetrite tõusud m_1' ja m_2'. Projekteerime nende otspunktid ellip-

sile, võttes projekteerivad kiired rööbiti ellipsi väikese teljega. Sümmeetria tõttu keskpunkti suhtes saame kaks ellipsi diameetrit. Olgu nende tõusud m_1 ja m_2. Et kirjeldatud projekteerimisel ordinaadid lühenesid suhtes $b : a$, siis

$$m_1 = \frac{b}{a} m_1' \quad \text{ja} \quad m_2 = \frac{b}{a} m_2',$$

seega

$$m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot m_1' m_2'.$$



Joon. 142.

Et võetud ringjoone diameetrid olid teineteisega risti, siis $m_1' m_2' = -1$ ja seepärast

$$m_1 m_2 = -\frac{b^2}{a^2},$$

see aga on ellipsi kahe kaasdiameetri tõusude vaheline seos. Niisiis:

ellipsi ümberringjoone kaks ristuvat diameetrit projekteeruvad ellipsisse tema kahe kaasdiameetrina.

Sellest järeldub ellipsi antud diameetrile vastava kaasdiameetri lihtne konstruktsioon: olgu P_1 antud diameetri otspunkt ellipsil (joon. 142); leiame ümberringjoonel punkti Q_1, mille projektsiooniks on P_1; tõmbame ringjoone raadiuse OQ_1 ja sellega ristuva raadiuse OQ_2 ning projekteerime punkti Q_2 ellipsile. Saadud punkt P_2 on otsitava kaasdiameetri otspunkt.

Ellipsi kahe kaasdiameetri ja vastavate kõõlude süsteemide demonstreerimiseks saab hästi kasutada sõela põhja varju, mille päikesekiired heidavad seinale või põrandale.

Hüperbooli diameetrid

Korrates sõna-sõnalt ellipsi puhul arendatud mõttekäiku, näeme, et

hüperbooli rööbikute kõõlude keskpunktid asetsevad ühel ja samal hüperbooli keskpunkti läbival sirgel, kõõlude kaasdiameetril.

Vaadeldavate rööbikute kõõlude hulgas leidub ka üks kõõludega samasihiline diameeter. Koos varemnimetatuga moodustab see paari k a a s d i a m e e t r e i d. Kui nende diameetrite tõusud on m_1 ja m_2, siis

$$m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

Et tõusude m_1 ja m_2 korrutis on positiivne, siis peab mõlemal tõusul olema üks ja sama märk. Seega kummagi diameetri tõusunurk on kas terav või nüri, teiste sõnadega, mõlemad hüperbooli kaasdiameetrid asetsevad alati ühtedes ja samades koordinaattasapinna veerandites. Kui ühe diameetri tõus $m_1 < \frac{b}{a}$, siis teise, kaasdiameetri, tõus $m_2 > \frac{b}{a}$. See tähendab, et asümptoot tõusuga $m = \frac{b}{a}$ asetseb hüperbooli kahe kaasdiameetri poolt moodustatud nurgas, läbides selle nurga tippu.

§ 41. ELLIPSI JA HÜPERBOOLI JUHTJOONED

Parabooli defineerisime kõverana, mille iga punkti kaugused ühest kindlast punktist — fookusest — ja ühest kindlast sirgest — juhtjoonest — on võrdsed. Teiste sõnadega: parabooli punkti kaugus fookusest ja punkti kaugus juhtjoonest annavad jääva suurusega suhte, mille väärtuseks on 1. Tekib küsimus, kas ka ellipsi ja hüperbooli puhul on võimalik leida analoogilisi sirgeid, mis koos fookustega määraksid need jooned. Küsimuse lähemaks uurimiseks leiame ellipsi ja hüperbooli punkti fokaalkauguste avaldised ja anname neile võimalikult lihtsa kuju.

Ellipsi punkti fokaalkaugused

Eespool leidsime ellipsi punkti fokaalkauguste ruutude avaldised punkti koordinaatides x ja y:

$$r_1^2 = (x - c)^2 + y^2,$$
$$r_2^2 = (x + c)^2 + y^2.$$

Seame endale ülesandeks avaldada need kaks kaugust ainuüksi abstsissi x funktsioonina. Selleks on mitu teed. Lühim neist on järgmine: lahutades viimased võrdused liikmeti teineteisest, saame

$$r_1^2 - r_2^2 = -4cx$$

ehk

$$(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = -4cx.$$

Ellipsi definitsiooni kohaselt on aga $r_1 + r_2 = 2a$, seega

$$r_1 - r_2 = -2\frac{c}{a}x,$$

kust lõpuks saame

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x,$$

$$r_2 = a + \frac{c}{a}x.$$

Tuletades meelde, et suhe $c : a$ on ellipsi ekstsentrilisus, saame ellipsi punkti fokaalkaugused kujul

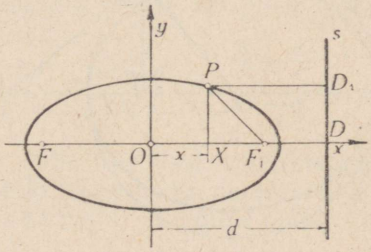
$$\begin{cases} r_1 = a - ex \\ r_2 = a + ex. \end{cases}$$

Me näeme, et ellipsi punkti fokaalkaugused on abstsissi lineaaravaldised.

Et ellipsi punkti suurim abstsiss on a, väikseim abstsiss $-a$, siis on fokaalkauguse suurim väärtus $a(1+e)$, väikseim väärtus $a(1-e)$.

Ellipsi juhtjooned

Võtame mingil kaugusel $d > a$ ordinaatteljest selle teljega rööbiku sirgjoone s. See sirge on risti ellipsi fokaalteljega (joon. 143). Olgu P ellipsi mingi punkt ja x selle punkti abstsiss.



Joon. 143.

Siis, nagu nähtub jooniselt, $D_1P = d - x$ ja, nagu leidsime eespool, $F_1P = a - ex$. Nende kahe kauguse suhe on

$$\frac{F_1P}{D_1P} = \frac{a - ex}{d - x} \quad \text{ehk} \quad \frac{F_1P}{D_1P} = e\,\frac{\frac{a}{e} - x}{d - x}.$$

Nagu näeme, on kõne all olev suhe abstsissi x funktsioon; ta muutub punkti P liikumisel piki ellipsit. Kuid leidub sirge s üks eriasend j, mille puhul suhe $F_1P : D_1P$

jääb konstantseks; selleks peab sirge s paiknema kaugusel $d = \frac{a}{e}$ ellipsi keskpunktist. Siis suhe

$$F_1P : D_1P = e,$$

mis on sõltumatu abstsissist x ja ühes sellega ka punkti P asendist ellipsil. Sirget, mis ristub ellipsi fokaalteljega ja asetseb kaugusel $a : e$ keskpunktist, nimetatakse ellipsi juhtjooneks. Fookusele F_1 vastab juhtjoon j_1, fookusele F_2 juhtjoon j_2.

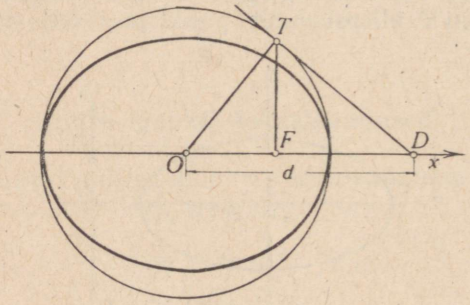
Niisiis osutub, et

ellips on tasapinnaline kõverjoon, mille iga punkti kaugus kindlast punktist — fookusest — ja kaugus kindlast sirgest — juhtjoonest — annavad jääva suurusega suhte, kusjuures selle suhte väärtuseks on ellipsi ekstsentrilisus.

Ellipsi juhtjoone konstrueerimiseks paneme tähele, et

$$d = a : e = a^2 : c \quad \text{ehk} \quad d : a = a : c.$$

See tähendab, et a on d ja c geomeetriline keskmine. Siit järeldub ellipsi juhtjoone konstruktsioon: joonestame ellipsi suurt telge diameetriks võttes ringjoone, püstitame fookusest F per-



Joon. 144.

pendikulaari lõikumiseni ringjoonega punktis T ja tõmbame sellest punktist ringjoonele puutuja; viimane eraldab fokaalteljel vajaliku lõigu $OD = d$ (joon. 144). Kirjeldatud võte järeldub täisnurkse kolmnurga kõrguse omadusest.

Et ellipsi puhul $e < 1$, siis $d > a$. Seega fookusele F_1 vastav juhtjoon asetseb paremal pool ellipsi parempoolset haripunkti. Et ellips on sümmeetriline ordinaattelje suhtes, siis fookusele F_2 vastav juhtjoon asetseb vasakul pool ellipsi vasakpoolset haripunkti.

Näide. Ellipsi $x^2 + 2y^2 = 2$ poolteljed on $\sqrt{2}$ ja 1. Pool fookustevahelisest kaugusest on $\sqrt{2-1} = 1$. Seega ekstsentrilisus on $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Juhtjoone kaugus alguspunktist on $\sqrt{2} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$. Niisiis antud ellipsi juhtjoonteks on sirged

$$x = 2 \quad \text{ja} \quad x = -2.$$

Esimene neist vastab fookusele $F_1(1; 0)$, teine fookusele $F_2(-1; 0)$.

Hüperbooli punkti fokaalkaugused ja juhtjooned

Korrates ellipsi puhul arendatud mõttekäiku, saame hüperbooli parempoolse haru punkti fokaalkaugused kujul

$$\begin{cases} r_1 = ex - a \\ r_2 = ex + a. \end{cases}$$

Võtame mingil kaugusel d, mis on väiksem kui a, sirgjoone s risti hüperbooli fokaalteljega. Olgu P hüperbooli mingi punkt ja x selle punkti abstsiss. Siis selle punkti kaugus fookusest F_1 on $F_1P = ex - a$ ja sama punkti kaugus sirgest s on $D_1P = x - d$. Moodustame nende kauguste suhte:

$$\frac{F_1P}{D_1P} = \frac{ex - a}{x - d} = e \cdot \frac{x - \frac{a}{e}}{x - d}.$$

Nagu näeme, on see suhe abstsissi x funktsioon; ta muutub punkti P liikumisel piki hüperbooli parempoolset haru. Kuid leidub sirge s üks eriasend j_1, mille puhul vaadeldav suhe on muutumatu. Kui nimelt võtame sirge s kaugusel $d = \frac{a}{e}$ hüperbooli keskpunktist, siis suhe

$$F_1P : D_1P = e,$$

mis on sõltumatu abstsissist x ja ühes sellega ka punkti P asendist hüperboolil. Sirget, mis ristub hüperbooli fokaalteljega ja asetseb kaugusel $a : e$ keskpunktist, nimetatakse hüperbooli juhtjooneks. Fookusele F_1 vastab juhtjoon j_1, fookusele F_2 juhtjoon j_2.

Niisiis osutub, et

hüperbool on tasapinnaline kõverjoon, mille iga punkti kaugus kindlast punktist — fookusest — ja kaugus kindlast sirgest —

juhtjoonest — annavad jääva suurusega suhte, kusjuures selle suhte väärtuseks on hüperbooli ekstsentrilisus.

Hüperbooli juhtjoone konstruktsioon rajaneb valemil $d = a : e$ ehk, teisiti, $d : a = a : c$.

Parabooli ekstsentrilisus

Parabooli definitsiooni kohaselt asetseb parabooli punkt P (vt. joon. 122) võrdseil kaugusil fookusest ja juhtjoonest: $FP = DP$. Ellipsi ja hüperbooli puhul tähendab suhe $FP : DP$ ekstsentrilisust. Laiendades ekstsentrilisuse mõistet ka parabooli juhule, mõistame ka sel korral ekstsentrilisuse e all suhet $FP : DP$. Et parabooli puhul $FP : DP = 1$, siis

parabooli ekstsentrilisus $e = 1$.

Nagu kohe näeme, avab see ekstsentrilisuse mõiste laiendus tee kõigi kolme joone — ellipsi, parabooli ja hüperbooli — käsitlemiseks ühtsetest vaatekohtadest.

§ 42. ELLIPSI, PARABOOLI JA HÜPERBOOLI ÜHTNE KÄSITLUS

Ellipsi, parabooli ja hüperbooli ühtne definitsioon

Nagu näeme, on kõigi kolme joone — ellipsi, parabooli ja hüperbooli — üheks ühiseks omaduseks see, et

ellipsi, parabooli ja hüperbooli punkti kaugused kindlast punktist — fookusest — ja kindlast sirgest — juhtjoonest — annavad jääva suurusega suhte. See suhe — joone ekstsentrilisus — on ellipsi puhul < 1, *parabooli puhul* $= 1$ *ja hüperbooli puhul* > 1.

Praegu sõnastatud ellipsi, parabooli ja hüperbooli ühtse omaduse võib võtta nende joonte ühtse defineerimise lähtekohaks:

ellips, parabool ja hüperbool on niisugused tasapinnalised kõverjooned, mille punkti kaugused kindlast punktist — fookusest — ja kindlast sirgest — juhtjoonest — annavad jääva suurusega suhte.

Ellipsi, parabooli ja hüperbooli ühine võrrand polaarkoordinaatides

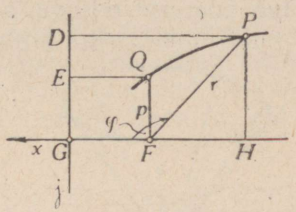
Olgu meie ees ellips, parabool või hüperbooli haru (joon. 145). Märgime joone fookuse tähega F ja sellele vastava juhtjoone tähega j. Võtame uuritava joone fookuse F pooluseks ja joone sümmeetriatelje polaarteljeks positiivse suunaga fookusest juht-

joone poole. Olgu P joone suvaline punkt ning r ja φ tema polaarkoordinaadid. Siis iga nimetatud joone puhul

$$FP : DP = e \quad \text{ehk} \quad DP = r : e,$$

kus e on joone ekstsentrilisus. Püstitame fookuse kohal perpendikulaari teljele ja olgu Q selle perpendikulaari lõikepunkt kõveraga ning QE punkti Q kaugus juhtjoonest. Siis

$$EQ = FQ : e = p : e,$$



Joon. 145.

kus p on joone parameeter. Nüüd on aga

$$DP = GF + FH = EQ + FH$$

ehk

$$DP = \frac{p}{e} + r \cos (180° - \varphi) = \frac{p}{e} - r \cos \varphi.$$

Kahe saadud DP avaldise võrrutamine annab

$$\frac{p}{e} - r \cos \varphi = \frac{r}{e}.$$

Avaldades sellest võrdusest polaarkauguse, saame otsitava seose kujul

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}.$$

Et P oli joone suvaline punkt, siis saadud seos ongi otsitav võrrand.

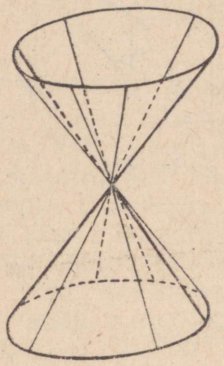
Ellips, parabool ja hüperbool koonuslõigetena

Tõsiasi, et ellipsit, parabooli ja hüperbooli on võimalik ühtselt defineerida ja haarata ühise võrrandiga polaarkoordinaatides, viib mõttele, et hoolimata nende joonte nii erinevatest konstruktsioonivõtetest ja hoolimata nii suurtest erinevustest nende välises kujus, peaks neid jooni ometi võimalik olema saada ühtse geomeetrilise operatsiooni teel. Ja see on tõepoolest nii: kõik kolm kõverat on püstkoonuse lõiked kohaselt valitud tasapindadega. Küsimuse suure põhimõttelise tähtsuse tõttu peatume tema juures üksikasjalikumalt.

Olgu antud püstkoonus. Pikendame tema moodustajaid teisele poole tippu. Saame kaksikkoonuse (joon. 146) ehk, nagu öeldakse,

kahekattelise koonuse. Mõlema katte ühiseks punktiks on koonuse tipp.

Kui lõikame seda kahekattelist koonust tasapinnaga, mis ristub koonuse teljega, saame lõikes ringjoone, ja nimelt seda suurema diameetriga ringjoone, mida kaugemal tipust asetseb lõiketasapind. Tasapinna läbiminekul tipust kõdub lõikeringjoon punktiks — ringjooneks raadiusega null.



Joon. 146.

Kui lõikame koonust teljest läbi mineva tasapinnaga, saame lõikekujundina kaks tipus lõikuvat sirget — kaks koonuse moodustajat.

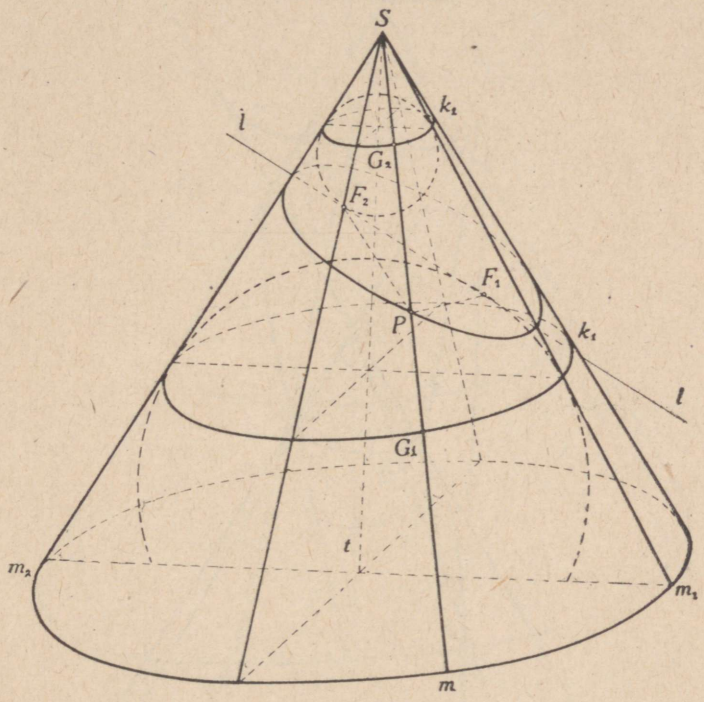
Seame endale ülesandeks uurida jooni, mis tekivad koonuse lõikamisel koonuse telje suhtes kaldu olevate tasapindadega. Seejuures uurime üksteise järel kolme juhtu: 1° nurk lõiketasapinna ja koonuse telje vahel on suurem kui pool koonuse avanurka; sel puhul lõiketasapind lõikab kõiki kahekattelise koonuse ühe katte moodustajaid, kuid mitte ühtegi teise katte moodustajat; 2° nurk lõiketasapinna ja koonuse telje vahel on väiksem kui pool koonuse avanurka; sel puhul lõiketasapind lõikab kõiki kahekattelise koonuse moodustajaid — ühtesid ühel, teisi teisel pool tippu; 3° nurk lõiketasapinna ja koonuse telje vahel on võrdne koonuse poole avanurgaga; sel puhul lõiketasapind lõikab kahekattelise koonuse ühe katte kõiki moodustajaid peale ühe moodustaja, millega ta on rööbik, ega lõika ühtegi teise katte moodustajat.

1. juht. Asugu koonuse telg t ja kaks koonuse moodustajat m_1 ja m_2 joonise tasapinnas (joon. 147) ning olgu sirge l lõiketasapinna jälg joonise tasapinnal. See lõiketasapind lõikab vaadeldava koonuse ühe katte kaheks osaks. Kujundame kummassegi ossa kera, mis puudutab nii koonust kui ka lõiketasapinda. Kumbki kera puudutab koonust piki ringjoont, mida joonisel tähistavad jooned k_1 ja k_2. Olgu kerapindade puutepunktid lõiketasapinnaga F_1 ja F_2. Võtame nüüd uuritaval koonuslõikel mingi punkti P. Ühendame selle punkti puutepunktidega F_1 ja F_2 ning tõmbame läbi punkti P koonuse moodustaja. Lõigaku see moodustaja puuteringjooni punktides G_1 ja G_2. Lõigud PF_1 ja PG_1 on punktist P alumisele kerale tõmmatud puutuja lõigud. Nad on järelikult teineteisega võrdsed. Samuti on teineteisega võrdsed lõigud PF_2 ja PG_2. Seepärast $F_1P + F_2P = G_1P + G_2P$ ehk $F_1P + F_2P = G_1G_2$. Moodustaja lõik G_1G_2 kui koonuse kahe ristlõike vaheline kaugus piki moodustajat on sõltumatu punkti P asendist uuritaval kõveral. Järelikult

$$F_1P + F_2P = const.$$

See näitab, et uuritav kõver on e l l i p s, mille fookusteks on punktid F_1 ja F_2.

2. j u h t. Asugu nagu esimeselgi juhul telg t ja kaks koonuse moodustajat m_1 ja m_2 joonise tasapinnas (joon. 148) ning olgu l lõiketasapinna jälg joonise tasapinnal. Lõiketasapind lõikab nüüd koonuse m õ l e m a i d k a t t e i d. Kumbki koonuse kat-



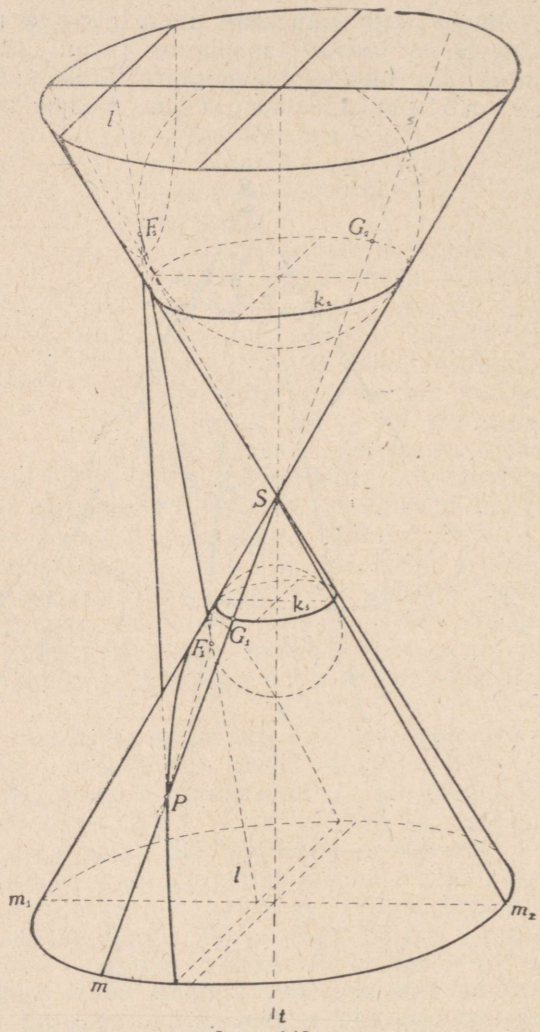
Joon. 147.

teist jaotub kaheks osaks: üheks, mida läbib koonuse telg, ja teiseks, mida koonuse telg ei läbi. Kujundame nii ühe kui teise katte esimesse ossa kera, mis puudutab koonuse külgpinda ja lõiketasapinda. Puudutagu kerapinnad koonuse külgpinda vastavalt piki ringjooni k_1 ja k_2, lõiketasapinda aga punktides F_1 ja F_2. Võtame uuritaval koonuslõikel mingi punkti P. Ühendame selle punkti puutepunktidega F_1 ja F_2 ning tõmbame läbi punkti P koonuse moodustaja. Lõigaku see moodustaja puuteringjooni punktides G_1 ja G_2. Nagu esimeselgi juhul saame siin

Seepärast

$$F_1P = G_1P \quad \text{ja} \quad F_2P = G_2P.$$

$$F_2P - F_1P = G_2P - G_1P = G_1G_2.$$



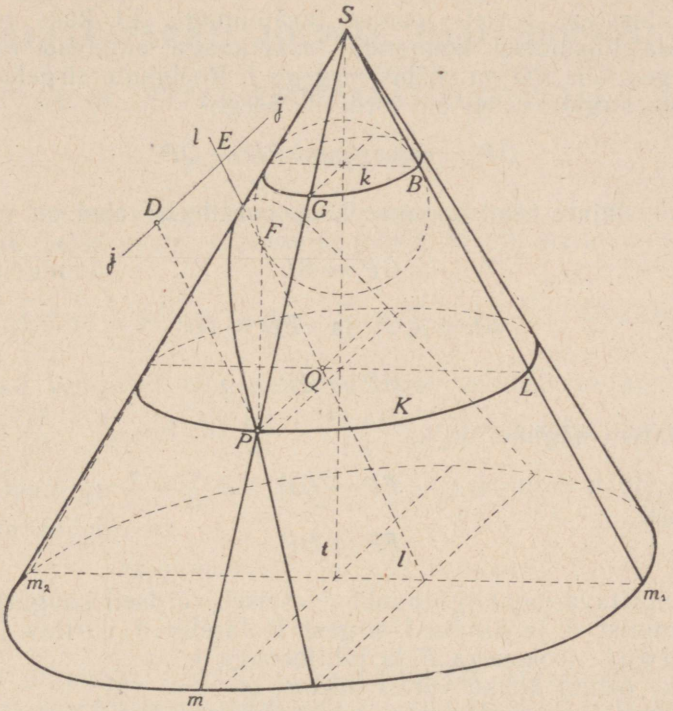
Joon. 148.

Moodustaja lõik G_1G_2 kui kaksikkoonuse kahe paralleeli vaheline kaugus piki moodustajat on sõltumatu punkti P asendist uuritaval kõveral. Järelikult

$$F_1P - F_2P = const.$$

See tähendab, et uuritav kõver on h ü p e r b o o l, mille fookusteks on punktid F_1 ja F_2.

3. j u h t. Paigutame jälle koonuse joonise tasapinna suhtes nagu eelmisel kahel juhulgi. Eelduse kohaselt moodustab lõiketasapind koonuse teljega nurga, mis võrdub koonuse poole avanurgaga (joon. 149). Sel juhul on lõiketasapind rööbik koonuse ühe moodustajaga, joonise kõige parempoolsema moodustajaga.



Joon. 149.

Nüüd lõikab lõiketasapind jälle a i n u l t ü h t k o o n u s e k a t e t, jaotades selle kaheks osaks. Fikseerime tähelepanu sellele osale, millele kuulub koonuse tipp. Kujundame sellesse koonuse ossa kera, mis puudutab nii koonuse pinda kui ka lõiketasapinda. Olgu kera ja lõiketasapinna puutepunkt märgitud tähega F. Tähistame edasi lõiketasapinna ja puuteringjoone tasapinna ühissirge tähega j. Võtame nüüd uuritaval lõikejoonel mingi punkti, näiteks punkti P. Ühendame ta puutepunktiga F ning joonestame punkti P läbiva moodustaja m. See lõikab puuteringjoont k punktis G ja järelikult puudutab kerapinda sel-

les punktis. Et FP ja GP on samast välispunktist kerapinnale tõmmatud puutujad, siis on nad võrdsed:

$$FP = GP.$$

Lõikame koonust tasapinnaga, mis läbib punkti P ja on risti koonuse teljega; see annab lõikumisel vaadeldava koonusega läbi punkti P mineva ringjoone K. Et puuteringjoone tasapind ühelt poolt ja lõiketasapind teiselt poolt ristuvad joonise tasapinnaga, siis on nende ühissirge j risti joonise tasapinnaga. Et kaks rööbikut tasapinda lõikumisel kolmanda tasapinnaga annavad rööbikud lõikesirged, siis PQ on rööbik sirgega j. Rööbikute sirgete lõigud rööbikute sirgete vahel on võrdsed. Seega

$$DP = EQ \quad \text{ja} \quad ED = QP.$$

Et moodustajate osad koonuse kahe paralleeli vahel on võrdsed, siis

$$GP = BL.$$

Et

$$BL = EQ \quad \text{ja} \quad EQ = DP,$$

siis

$$GP = DP.$$

Nagu varem nägime, on ka

$$FP = GP.$$

Seepärast

$$FP = DP.$$

Niisiis uuritava joone iga punkt P asetseb võrdseil kaugusil kindlast punktist F ja kindlast sirgest j. Järelikult uuritav joon on parabool fookusega F ja juhtjoonega j.

Kõike öeldut kokku võttes näeme, et

kahekatteline püstkoonus annab tasapinnaga lõikumisel kas üheainsa punkti — koonuse tipu — või kaks koonuse tipus lõikuvat sirget või ellipsi (erijuhul ringjoone) või parabooli või hüperbooli.

See loetelu on ammendav. Eespool öeldu õigustab ellipsi (erijuhul ringjoone), parabooli ja hüperbooli kokkuvõtmist koonuslõigete nimetuse alla.

Laiemas mõttes kuuluvad siia veel ka punkt ja paar lõikuvaid või ühtelangevaid sirgeid. Punkti saame, kui lõiketasapind läbib kaksikkoonuse tippu, lõikamata koonuse katteid, katete lõikamise korral aga saame kaks lõikuvat sirget. Kui lõiketasapind puutub koonust, saame kaks ühtelangevat sirget.

PEATÜKK XIII

TEIST JÄRKU JOONTE ÜLDVÕRRAND

§ 43. ETTEVALMISTAVAT MATERJALI

Probleemiseade

Nagu eespool nägime, kujutab iga esimese astme võrrand sirgjoont. Teise astme võrrandite puhul on pilt palju mitmekesisem: võrrandid

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad y^2 = 2px, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kujutavad vastavalt ringjoont, parabooli, ellipsit ja hüperbooli. Võrrand $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ehk $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0$, olles samaväärne võrrandipaariga $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ ja $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, kujutab paari sirgeid, mille võrrandeiks on

$$bx + ay = 0 \quad \text{ja} \quad bx - ay = 0.$$

Võrrand

$$x^2 + y^2 = 0$$

kujutab ühtainsat punkti — koordinaatide alguspunkti. Tekib küsimus, kas loetletud juhtudega on ammendatud kõik võimalused või kujutab kahe tundmatuga teise astme võrrand mõnikord ka veel jooni, mis toodud loetelus puuduvad. Allpool näitame, et teise astme võrrand, missugused ka ei oleks tema kordajad, kujutab ikka ühte loetletud kujundeist või talle ei vasta üldse mingit geomeetrilist kujundit. Selle väite tõestamiseks näitame, et iga teise astme võrrandit saab koordinaatteljestiku otstarbekohasel valikul taandada üheks eespool toodud võrrandikujudest või ta omandab niisuguse kuju, millele ei leidu ühtki geomeetrilist vastet.

Üldise kahe tundmatuga teise astme võrrandi kirjutusviis

Üldine kahe tundmatuga teise astme võrrand sisaldab kolme teise astme liiget, nimelt liiget x^2-ga, liiget korrutisega xy ja liiget y^2-ga; peale nende esinevad võrrandis esimese astme liikmed, nimelt liige x-ga, liige y-ga ja lõpuks muutujaist vaba liige — lühidalt vabaliige. On kasutusel mitmesuguseid viise nende liikmete kordajate märkimiseks; üldist teise astme võrrandit kirjutatakse näiteks kujul

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

või

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

kus tegurid 2 kordajate tähistes on kasutusel selleks, et mitmed valemid omandaksid võimalikult lihtsa, meelespidamiseks sobiva kuju. Formaalselt eriti rahuldav ja teoreetiliseks uurimiseks sobiv on kordajate kirjutamine kahe indeksiga tähtede abil:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Sümboleid a_{11}, a_{12}, a_{22} jne. tuleb lugeda: a üks üks, a üks kaks, a kaks kaks jne. Vaadeldaval tähistusviisil on veel ka see paremus, et ta on kergesti ülekantav kolme muutuja x, y, z juhule. Rakenduslikuks kasutamiseks aga ei sobi ta oma kohmakuse tõttu: üheainsa kordaja märkimiseks on siin vaja kolme või isegi nelja tähist, nagu näiteks kordajate a_{11} või $2a_{13}$ puhul. Me kasutame siin lihtsamat, nn. inglise tähistusviisi ja kirjutame üldist teise astme võrrandit kujul

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

See kirjutusviis tagab tuletatavate valemite küllaldase lihtsuse, ülevaatlikkuse ja kerge memoreerimise võimaluse. Viimati kirjutatud võrrandi vasakut poolt, nagu joone võrrandit ikka, kirjutame lühiduse mõttes mõnikord kujul

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Kolm lahendamisele tulevat ülesannet

Me seame endale nüüd kolm ülesannet:

1° uurida, kuidas teisendub üldine teise astme võrrand teljestiku rööplükkel,

2° uurida, kuidas teisendub üldine teise astme võrrand teljestiku pööramisel ja

3° uurida, kas saab teisendusparameetrite — uue alguspunkti koordinaatide ja teljestiku pöördenurga — otstarbeka valikuga võrrandit tunduvalt lihtsustada.

Abilause

Üheks sageli kasutatavaks tõestusvahendiks on järgmine abilause:

kui lineaaravaldis $px + q$, kus p ja q on konstandid, saab nulliks muutuja x rohkem kui ühel väärtusel, siis on ta identne nulliga.

Tõepoolest, olgu x_1 ja x_2 kaks erinevat x väärtust, mille puhul uuritav avaldis on null, nii et

$$px_1 + q = 0 \qquad \text{ja} \qquad px_2 + q = 0.$$

Siit järeldub otsekohe, et

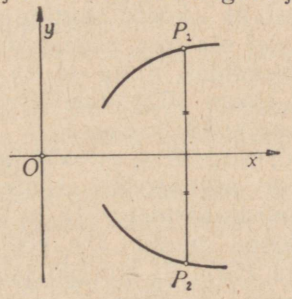
$$p(x_2 - x_1) = 0.$$

Et eelduse järgi $x_2 \neq x_1$, siis sulgudes seisev vahe pole null. Järelikult tegur p peab olema null. Kui aga $p = 0$, siis $px = 0$ muutuja x iga väärtuse puhul, ka näiteks väärtuse puhul $x = x_1$. Võrdustest $px_1 + q = 0$ ja $px_1 = 0$ järeldub aga kohe, et ka $q = 0$.

Kui $p = 0$ ja $q = 0$, siis avaldis $px + q = 0$ muutuja iga väärtuse puhul; see tähendab, et $px + q \equiv 0$.

Teist järku joone sümmeetria tunnused

Olgu joone C võrrand $\Phi(x, y) = 0$ ja olgu joon sümmeetriline abstsisstelje suhtes. Siis igale joone punktile $P_1(x, y)$



Joon. 150.

vastab peegelpildina joone punkt $P_2(x, -y)$ (joon. 150). Et kumbki punkt asetseb joonel C, siis kumbki paar koordinaate peab rahuldama joone võrrandit $\Phi(x, y) = 0$. Seega

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ja

$$ax^2 + 2hx(-y) + b(-y)^2 + 2gx + 2f(-y) + c = 0.$$

Nende võrduste liikmeti lahutamisel ja tulemuse taandamisel saame $hxy + fy = 0$, seega kõigis punktides, kus $y \neq 0$,

$$hx + f = 0.$$

Et joon C oli eelduse kohaselt sümmeetriline abstsisstelje suhtes, siis leidub temal kuitahes palju abstsisstelje suhtes sümmeetrilisi punkte. Seega lineaaravaldis $hx + f$ peab olema null kuitahes mitme muutuja x väärtuse puhul. Eespool tõestatud abilause põhjal aga on see võimalik ainult siis, kui kumbki kordajaist h ja f on ise null:

$$h = 0 \quad \text{ja} \quad f = 0.$$

Ümberpöördult on kohe näha, et kui $h = 0$ ja $f = 0$, siis võrrandit $\Phi(x, y) = 0$ rahuldab ühtaegu väärtuspaariga (x, y) ka väärtuspaar $(x, -y)$.

Kui kordajad h ja f on nullid, siis puuduvad võrrandis liikmed ordinaadi esimese astmega. Niisiis:

tunnuseks, et teist järku joon on sümmeetriline abstsisstelje suhtes, on see, et joone võrrandis puuduvad liikmed ordinaadi esimese astmega, s. t. liikmed 2hxy ja 2fy, ning ümberpöördult.

Abstsisstelje puhul arendatud mõttekäik kandub sõna-sõnalt üle ka ordinaatteljele. Seega:

tunnuseks, et teist järku joon on sümmeetriline ordinaattelje suhtes, on see, et joone võrrandis puuduvad liikmed abstsissi esimese astmega, s. t. liikmed 2hxy ja 2gx, ning ümberpöördult.

Joon, mis on sümmeetriline nii abstsiss- kui ordinaattelje suhtes, on sümmeetriline ka koordinaatide alguspunkti suhtes (joon. 151). See väide ei ole aga pööratav: joon võib olla sümmeetriline alguspunkti suhtes, ilma et ta oleks sümmeetriline kummagi telje suhtes (joon. 152). Seetõttu uurime sümmeetriat alguspunkti suhtes omaette küsimusena.

Olgu jälle joone võrrand $\Phi(x, y) = 0$ ja olgu see joon sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. Siis igale joone punktile Q_1 või R_1 koordinaatidega (x, y) vastab peegelpildina alguspunkti suhtes joone punkt Q_2 või R_2 koordinaatidega $(-x, -y)$ (joon. 151 ja 152). Et kumbki punkt asetseb uuritaval joonel, siis kumbki paar koordinaate peab rahuldama joone võrrandit $\Phi(x, y) = 0$. Seega

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

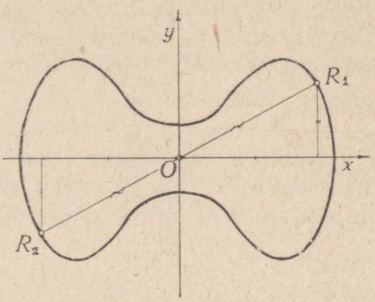
ja

$$a(-x)^2 + 2h(-x)(-y) + b(-y)^2 + 2g(-x) + 2f(-y) + c = 0.$$

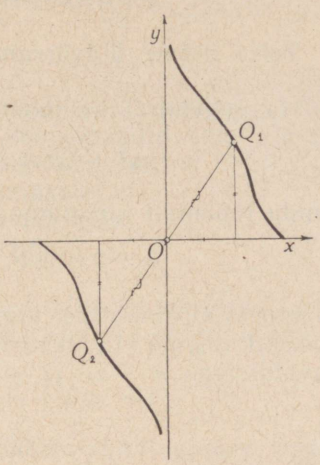
Nende võrduste liikmeti lahutamisel ja tulemuse taandamisel saame

$$gx + fy = 0.$$

Et vaadeldav joon oli eelduse kohaselt sümmeetriline alguspunkti suhtes, siis leidub temal kuitahes palju alguspunkti suhtes sümmeetrilisi punkte. Seega lineaaravaldis $gx + fy$ peab olema null kuitahes mitme väärtuspaari (x, y) puhul. Vaatleme neid väärtuspaare (x, y), milles $x \neq 0$. Kõigi nende puhul võib võrdust $gx + fy = 0$ kirjutada kujul $g + f\frac{y}{x} = 0$. Et see võrdus peab olema



Joon. 151.



Joon. 152.

kehtiv suhte $y : x$ kuitahes mitme üksteisest erineva väärtuse puhul, siis eespool tõestatud abilause järgi peab olema $g = 0$ ja $f = 0$. Ümberpöördult, kui need kaks tingimust on täidetud ja paar koordinaate (x, y) rahuldab võrrandit, siis rahuldab võrrandit ka paar $(-x, -y)$, teiste sõnadega, joon on sümmeetriline alguspunkti suhtes.

Kui kordajad g ja f on nullid, siis puuduvad võrrandis liikmed koordinaatide esimeste astmetega. Niisiis:

tunnuseks, et teist järku joon on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, on see, et joone võrrandis puuduvad liikmed koordinaatide esimeste astmetega, s. t. liikmed $2gx$ ja $2fy$, ning ümberpöördult.

Märkus koordinaatide tähistusviisi kohta eri süsteemides

Meil tuleb edaspidi korduvalt kasutada üleminekut ühelt koordinaatteljestikult teisele. Üha uute tähiste kasutuselevõtmine koordinaatide jaoks, nagu

$$x, y \qquad x', y' \qquad x'', y'' \qquad \xi, \eta \qquad X, Y,$$

teeb võrrandid ja valemid kirjuks ja kohmakaks. Seepärast tähistame koordinaate alati ühteviisi tähtedega x ja y, ütleme aga seejuures ikka, missuguses süsteemis me töötame.

§ 44. TEISE ASTME ÜLDVÕRRANDI KUJU MUUTUMINE KOORDINAATIDE TEISENDAMISEL

Teise astme üldvõrrandi teisendumine teljestiku rööplükkel

Olgu teist järku joon antud oma võrrandiga

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

mida lühemalt kirjutame kujul

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Viime koordinaatide alguspunkti teljestiku rööplükke teel üle punkti (x_0, y_0). Lähtesüsteemi koordinaadid x ja y asenduvad siis avaldistega $x + x_0$ ja $y + y_0$. Seda kirjutame sümboolselt kujul

$$\begin{array}{c|l} x & x + x_0 \\ y & y + y_0. \end{array}$$

Vanas süsteemis antud joone võrrand asendub uues süsteemis võrrandiga

$$a(x + x_0)^2 + 2h(x + x_0)(y + y_0) + b(y + y_0)^2 + \\ + 2g(x + x_0) + 2f(y + y_0) + c = 0.$$

Avades sulud ja korraldades liikmed ümber uute koordinaatide astmete järgi, saame joone võrrandi uues süsteemis kujul

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + \\ + 2(ax_0 + hy_0 + g)x + 2(hx_0 + by_0 + f)y + \\ + ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c = 0.$$

Teineteisele vastavad kordajad vanas ja uues võrrandis on järgmised:

$$\begin{array}{c|l} a & a \\ h & h \\ b & b \\ g & ax_0 + hy_0 + g \\ f & hx_0 + by_0 + f \\ c & ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c. \end{array}$$

Siit nähtub kõigepealt, et

teljestiku rööplükkel võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ *kordajad teise astme liikmeis ei muutu*

ehk, teises sõnastuses,

ruutvormi * $ax^2 + 2hxy + by^2$ *kordajad on invariantsed teljestiku rööplükke suhtes.*

Edasi näeme, et kordajad esimese astme liikmetes asenduvad uue alguspunkti koordinaatide lineaaravaldistega

$$ax_0 + hy_0 + g$$

ja

$$hx_0 + by_0 + f.$$

Lõpuks näeme, et uus vabaliige saadakse, asendades antud võrrandi vasakpoolses osas jooksvad koordinaadid uue alguspunkti koordinaatidega, ehk, lühidalt, uus vabaliige on $\Phi(x_0, y_0)$.

Kokku võttes jõuame järgmisele tulemusele:

teljestiku paralleellükkel teise astme võrrand

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

teisendub jällegi teise astme võrrandiks, kusjuures kordajad teise astme liikmeis jäävad endisteks, kordajad esimese astme liikmeis asenduvad avaldistega

$$ax_0 + hy_0 + g \qquad ja \qquad hx_0 + by_0 + f$$

ja uus vabaliige saadakse, arvutades lähtevõrrandi vasaku poole väärtuse uue süsteemi alguspunktis.

Teise astme üldvõrrandi teisendumine teljestiku pööramisel

Olgu teist järku joon antud oma võrrandiga

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

Pöörame teljestikku nurga α võrra. Nagu teame, asenduvad siis vanad koordinaadid x ja y järgmiste avaldistega:

$$\begin{array}{c|l} x & x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y & x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{array}$$

Järelikult uues teljestikus omandab teise astme joone võrrand kuju

$$a(x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 + 2h(x\cos\alpha - y\sin\alpha)(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + b(x\sin\alpha + y\cos\alpha)^2 + 2g(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + 2f(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + c = 0.$$

Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, saame joone võrrandi uues teljestikus:

* Kahe muutuja x ja y ruutvormide all mõistetakse $ax^2 + 2hxy + by^2$ tüüpi avaldisi, mille kordajad a, b ja h ei ole samaaegselt nullid.

$$(a\cos^2\alpha + 2h\sin\alpha\cos\alpha + b\sin^2\alpha)x^2 +$$
$$+ 2(-a\sin\alpha\cos\alpha + h\cos^2\alpha - h\sin^2\alpha + b\sin\alpha\cos\alpha)xy +$$
$$+ (a\sin^2\alpha - 2h\sin\alpha\cos\alpha + b\cos^2\alpha)y^2 +$$
$$+ 2(g\cos\alpha + f\sin\alpha)x + 2(-g\sin\alpha + f\cos\alpha)y + c = 0.$$

Kasutades valemeid $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$ jaoks, saame tulemuse kirjutada pisut kompaktsemalt:

$$(a\cos^2\alpha + h\sin 2\alpha + b\sin^2\alpha)x^2 +$$
$$+ [2h\cos 2\alpha - (a - b)\sin 2\alpha]xy +$$
$$+ (a\sin^2\alpha - h\sin 2\alpha + b\cos^2\alpha)y^2 +$$
$$+ 2(g\cos\alpha + f\sin\alpha)x + 2(-g\sin\alpha + f\cos\alpha)y + c = 0.$$

Teineteisele vastavad kordajad vanas ja uues võrrandis on järgmised:

a	$a\cos^2\alpha + h\sin 2\alpha + b\sin^2\alpha$
h	$2h\cos 2\alpha - (a - b)\sin 2\alpha$
b	$a\sin^2\alpha - h\sin 2\alpha + b\cos^2\alpha$
g	$g\cos\alpha + f\sin\alpha$
f	$-g\sin\alpha + f\cos\alpha$
c	c.

Siit nähtub kõigepealt, et

teljestiku pööramisel võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ *vabaliige ei muutu* ehk, teises sõnastuses,

võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ *vabaliige on invariantne teljestiku pööramise suhtes.*

Huvitava tulemuse saame, kui liidame koordinaatide ruute sisaldavate liikmete kordajad:

$$(a\cos^2\alpha + h\sin 2\alpha + b\sin^2\alpha) + (a\sin^2\alpha - h\sin 2\alpha + b\cos^2\alpha) =$$
$$= a(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + b(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = a + b.$$

See on aga sama ruutudega liikmete kordajate summa mis lähtevõrrandiski. See tähendab, et

teljestiku pööramisel koordinaatide ruutudega liikmete kordajate summa ei muutu

ehk, teises sõnastuses,

võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ *kordajad koordinaatide ruutudega liikmeis annavad teljestiku pööramise suhtes invariantse summa.*

Et teljestiku rööplükkel, nagu eespool nägime, kordajad a ja b ei muutu, siis ei muutu sel puhul ka nende summa $a + b$. Seega

muutujate ruutude ees seisvate kordajate summa üldises teise astme võrrandis on invariantne nii teljestiku rööplükke kui ka pööramise suhtes.

§ 45. TEIST JÄRKU JOONE KESKPUNKT JA PEASIHID

Teist järku joone keskpunkti leidmine

Oletame, et teist järku joonel võrrandiga

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

on olemas keskpunkt koordinaatidega x_0 ja y_0. Nihutame koordinaatteljestiku, telgede sihte muutmata jättes, uude asendisse, milles koordinaatide alguspunkt langeb ühte joone keskpunktiga. Et joon on sümmeetriline oma keskpunkti, järelikult ka uue alguspunkti suhtes, siis teisendamisel peavad võrrandist välja langema liikmed muutujate esimeste astmetega. Järelikult

$$\begin{aligned} ax_0 + hy_0 + g &= 0, \\ hx_0 + by_0 + f &= 0. \end{aligned}$$

Uuritava joone keskpunkti koordinaadid peavad niisiis rahuldama kaht kahe tundmatuga lineaarvõrrandit

$$\begin{cases} ax + hy + g = 0 \\ hx + by + f = 0. \end{cases}$$

Neid võrrandeid nimetame keskpunkti määravaiks võrrandeiks. Niisuguse kahe lineaarvõrrandi lahendamisel võib esineda kolm juhtu: võrrandeil on üksainus paar lahendeid, võrrandeil pole ühtki paari lahendeid ja lõpuks leidub lugematu hulk paare (x, y), mis neid võrrandeid rahuldavad. Keskpunkt on joonel olemas ainult esimesel juhul. Selleks aga, et neil võrrandeil leiduks ühine paar lahendeid, peab süsteemi determinant olema nullist erinev. Süsteemi determinant on

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} \text{ ehk } ab - h^2.$$

Seda avaldist nimetame võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ väikeseks diskriminandiks ning tähistame tähega δ. Niisiis:

teist järku joonel $\Phi(x, y) = 0$ on olemas keskpunkt sel juhul, kui võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ väike diskriminant

$$\delta = ab - h^2$$

on nullist erinev.

Teist järku joone $\Phi(x, y) = 0$ keskpunkt leitakse lineaarvõrrandite

$$\begin{cases} ax + hy + g = 0 \\ hx + by + f = 0 \end{cases}$$

ühisel lahendamisel.

Teist järku jooned, milledel on keskpunkt, kannavad teist järku tsentraalsete joonte nimetust.

Teise astme üldvõrrandi väikese diskriminandi invariantsus

Et väikese diskriminandi $\delta = ab - h^2$ nullist erinemine või nulliga võrdumine otsustab küsimuse, kas teist järku joonel on olemas keskpunkt või mitte, see asjaolu aga kuulub joone koordinaadistikust sõltumatute omaduste hulka, siis tekib arvamus, et ka see diskriminant ise on koordinaadistikust sõltumatu. See on tõepoolest nii. Esiteks: δ avaldises esinevad ainult teise astme liikmete kordajad, need aga ei muutu teljestiku rööplükkel. Järelikult on δ invariantne teljestiku rööplükke suhtes. Teiseks: telgede pööramisel asenduvad a, h ja b avaldistega, mis on antud leheküljel 312. Moodustades väikese diskriminandi avaldise teisendatud võrrandi kordajaist, saame

$$(a\cos^2\alpha + h\sin 2\alpha + b\sin^2\alpha)(a\sin^2\alpha - h\sin 2\alpha + b\cos^2\alpha) - [2h\cos 2\alpha - (a-b)\sin 2\alpha]^2,$$

mis sulgude avamisel ja sarnaste liikmete koondamisel taandub avaldiseks $ab - h^2$. See näitab, et väike diskriminant on invariantne ka teljestiku pööramise suhtes. Kokku võttes näeme, et

väike diskriminant $\delta = ab - h^2$ on invariantne nii teljestiku rööplükke kui ka teljestiku pööramise suhtes.

Teist järku joone peasihid

Ringjoone võrrandi üheks tunnuseks on see, et temas puudub liige tundmatute korrutisega; ka ellipsi, hüperbooli ja parabooli kanoonilistes võrrandites ei esine niisugust liiget. Tekib küsimus, kas saab otstarbekohaselt valitud koordinaatide teisenduse teel kaotada seda liiget ka üldisest teise astme võrrandist. Et teljestiku rööplükkel teise astme liikmete kordajad ei muutu, siis rööplükkega kõnesolevat liiget kaotada ei saa. Vaatame, kas seda saab teha teljestiku pööramise teel.

Kordajate avaldised, mis me saime teljestiku pööramisel, kehtivad igasuguse nurga α puhul. Katsume nüüd nurka α valida nii, et võrrandist kaoks liige tundmatute korrutisega. Selleks peab pöördenurk rahuldama tingimust

$$2h\cos 2\alpha - (a-b)\sin 2\alpha = 0$$

ehk

$$\cot 2\alpha = \frac{a-b}{2h}.$$

Kordaja h ei ole null (vastasel korral oleks võrrand juba vaba liikmest $2hxy$); seega on viimase võrduse paremal poolel seisval murrul kindel väärtus. Et argumendi 2α vahemikus 0°—180° kootangens läbib kogu aeg vähenedes kõik positiivsed ja nega-

tiivsed väärtused ja omandab igaühe neist väärtustest üksainus kord, siis leidub ka nurk, mille puhul kootangens saab võrdseks murruga $\frac{a-b}{2h}$. Olgu selle nurga tähiseks $2\alpha_0$. Et kootangensfunktsioon on perioodiline funktsioon perioodiga 180°, siis rahuldab vaadeldavat võrrandit ka nurk $2\alpha_0 + 180°$. Nagu näeme, on võrrandil $\cot 2\alpha = \frac{a-b}{2h}$ alati kaks väikseimat lahendit α_0 ja $\alpha_0 + 90°$, mis erinevad teineteisest 90° võrra. Niisiis leidub iga nullist erineva h puhul kaks nurka, mille võrra teljestiku pööramisel kaob võrrandist $\Phi(x, y) = 0$ liige muutujate korrutisega. Nurkadega α_0 ja $\alpha_0 + 90°$ määratud sihte nimetatakse teist järku joone p e a s i h t i d e k s. Niisiis:

iga nullist erineva h puhul on teist järku joonel kaks vastastikku risti seisvat peasihti.

Vaatleme lõpuks veel mõningaid erijuhte.

a) Kui $a \neq b$ ja $h = 0$, pole $\cot 2\alpha$ määratav, $2\alpha = 0$, $\alpha_0 = 0°$, $\alpha_0 + 90° = 90°$. See tähendab, et lähtesüsteemi teljed on rööbikud joone peasihtidega.

b) Kui $a = b$ ja $h = 0$, ei määra $\cot 2\alpha$ valem ühtki kindlat nurka α. See on ka arusaadav, sest antud juhul on tegemist r i n g j o o n e võrrandiga, ringjoone puhul aga ei ole peasihid määratavad, sest iga paar ristuvaid diameetreid annab kaks peasihti.

Niisiis:

igal teist järku joonel, välja arvatud ringjoon, on kaks üheselt määratud peasihti.

Ainsaks erandiks sellest reeglist on ringjoon, millel on kuitahes palju paare peasihte.

Teist järku tsentraalse joone sümmeetriateljed

Olgu teist järku joon antud oma üldvõrrandiga

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ ehk } \Phi(x, y) = 0.$$

Oletame, et selle võrrandi väike diskriminant

$$\delta = ab - h^2 \neq 0.$$

Siis on kõveral olemas keskpunkt. Olgu selle koordinaadid x_0 ja y_0. Nihutades koordinaatteljestiku, telgede sihte muutmata jättes, uude asendisse, milles koordinaatide alguspunkt langeb ühte joone keskpunktiga, kaotame võrrandist esimese astme liikmed ja saame joone võrrandiks

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c = 0,$$

kus $c = \Phi(x_0, y_0)$. Pöörame nüüd teljestikku ümber uue alguspunkti nurga α võrra, mille määrab valem

$$\cot 2\alpha = \frac{a-b}{2h}.$$

Siis kaob joone võrrandist liige muutujate korrutisega ja võrrand omandab kuju

$$Ax^2 + By^2 + C = 0.$$

Kui see võrrand kujutab mingit reaalset joont, siis sümmeetria tunnuste järgi on see joon sümmeetriline nii abstsiss- kui ordinaattelje suhtes. Seega abstsiss- ja ordinaattelg on joone sümmeetriatelgedeks. Nende telgede võrrandite saamiseks paneme tähele, et nad läbivad punkti (x_0, y_0) ja nende tõusud on vastavalt $\tan \alpha_0$ ja $\tan (\alpha_0 + 90°)$. Seega

teist järku tsentraalse joone sümmeetriatelgede võrranditeks on lähteteljestikus

$$y - y_0 = \tan \alpha_0 \cdot (x - x_0)$$

ja

$$y - y_0 = \tan (\alpha_0 + 90°) \cdot (x - x_0).$$

§ 46. TEISE ASTME ÜLDVÕRRANDI TAANDAMINE KANOONILISELE KUJULE

Teise astme üldvõrrandi taandamine kanoonilisele kujule keskpunktiga joone puhul

Teeme eespool saadud tulemustest lühikese kokkuvõtte, et neid oleks edaspidi hõlbus rakendada.

Olgu teist järku joon antud oma võrrandiga

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ ehk } \Phi(x, y) = 0.$$

Oletame, et selle võrrandi väike diskriminant $\delta = ab - h^2 \neq 0$. Siis joonel on keskpunkt, mille koordinaadid (x_0, y_0) saab määrata võrrandeist

$$\begin{cases} ax + hy + g = 0 \\ hx + by + f = 0. \end{cases}$$

Viies koordinaatide alguspunkti joone keskpunkti (x_0, y_0), vabaneme võrrandi liikmeist koordinaatide esimeste astmetega. Kui nüüd pöörame teljestikku nurga α_0 (või $\alpha_0 + 90°$) võrra, mille määrab valem

$$\cot 2\alpha = \frac{a-b}{2h},$$

siis on uued teljed rööbikud joone peasihtidega, me vabaneme liikmest koordinaatide korrutisega ja jõuame välja võrrandile

$$Ax^2 + By^2 + C = 0.$$

Vaatleme, missuguseid kujundeid see võrrand võib esitada.

Väikese diskriminandi invariantsuse põhjal kirjutame, et

$$\delta = ab - h^2 = AB - 0^2 = AB.$$

Et eelduse kohaselt $\delta \neq 0$, siis $AB \neq 0$ ja ükski kordajaist A ja B ei saa olla null. Võime ikka eeldada, et $A > 0$, sest vastasel korral võiks seda kohe saavutada, korrutades võrrandi mõlemaid pooli arvuga -1. Kui $C = 0$, siis võrrand omandab kuju

$$Ax^2 + By^2 = 0.$$

Kui B on p o s i t i i v n e nagu A-gi, siis selle võrrandi vasak pool on kahe p o s i t i i v s e liikme summa. See võib olla null ainult ühel juhul, nimelt siis, kui $x = 0$ ja $y = 0$. Teist võrrandit rahuldavaid väärtuspaare pole; võrrand kujutab ühtainsat punkti, nimelt punkti, mille koordinaadid lähtesüsteemis on x_0 ja y_0.

Kui aga B on n e g a t i i v n e, siis, kirjutades A asemel α^2, B asemel $-\beta^2$, võime võrrandi esitada kujul

$$\alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 = 0$$

ehk

$$(\alpha x + \beta y)(\alpha x - \beta y) = 0,$$

mis laguneb kaheks võrrandiks:

$$\alpha x + \beta y = 0$$

ja

$$\alpha x - \beta y = 0.$$

Antud võrrand $\Phi(x, y) = 0$ kujutab sel juhul kahte lõikuvat sirget.

Olgu lõpuks $C \neq 0$. Sel puhul saab uuritavat võrrandit kirjutada kujul

$$\frac{x^2}{-\frac{C}{A}} + \frac{y^2}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Kui mõlemad nimetajad on plussmärgiga, siis on tegemist ellipsiga; kui nad aga on erinevate märkidega, siis on tegemist hüperbooliga; lõpuks, kui nad on mõlemad negatiivsed, siis uuritavale võrrandile ei vasta ühtki geomeetrilist kujundit, sest kahe negatiivse arvu summa ei saa olla 1.

Niisiis:

kui võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ väike diskriminant on nullist erinev, siis võrrand kujutab kas ellipsit (või selle erijuhtu — ringjoont)

või hüperbooli või ühtainsat punkti või kahte lõikuvat sirget või võrrandile ei vasta ühtki geomeetrilist kujundit.

Näide. Olgu tarvis joonestada võrrandiga

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$$

määratud kõver.

Selleks võib antud võrrandi lahendada ühe tundmatu suhtes, leides rea kokkukuuluvaid x ja y väärtuspaare, ja siis joonestada nende abil kõvera. Et kõvera joonestamisega hõlpsamini toime tulla, püüame võrrandit lihtsustada. Väike diskriminant $\delta = 5 \cdot 0 - 6^2 = 0 - 36 = -36 \neq 0$, järelikult on tegemist tsentraalse kõveraga. Keskpunkti määravad võrrandid on

$$\begin{cases} 5x + 6y - 11 = 0 \\ 6x \quad\quad - 6 = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 5x + 6y - 11 = 0 \\ x \quad\quad - 1 = 0. \end{cases}$$

Neist saame kohe keskpunkti koordinaadid

$$x_0 = 1 \text{ ja } y_0 = 1.$$

Viime koordinaatide alguspunkti joone keskpunkti, telgede sihte muutmata jättes. Seejuures, nagu eelnevast teame, jäävad teise astme liikmetes kordajad samadeks mis ennegi, esimese astme liikmed jäävad ära ja vabaliige on

$$5 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 \cdot 1 - 22 \cdot 1 - 12 \cdot 1 - 19 = -36.$$

Seega uues teljestikus on joone võrrandiks

$$5x^2 + 12xy - 36 = 0.$$

Vabanemiseks liikmest koordinaatide korrutisega pöörame teljestikku nurga α võrra, mille määrame võrrandist

$$\cot 2\alpha = \frac{a-b}{2h} = \frac{5-0}{12} = \frac{5}{12}.$$

Üle minnes nurga 2α tangensile, saame võrrandi

$$\tan 2\alpha = \frac{12}{5}$$

ehk

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{12}{5}$$

ehk

$$6 \tan^2 \alpha + 5 \tan \alpha - 6 = 0.$$

Selle võrrandi lahendamine annab joone peasihtide tõusud:

$$\tan \alpha_0 = \frac{2}{3}, \quad \tan \alpha_1 = -\frac{3}{2}.$$

α_0 on teravnurk, α_1 nürinurk. Viimase kahe võrdusega määratud sihid ristuvad, sest

$$\tan \alpha_0 \cdot \tan \alpha_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1.$$

Võtame pöördenurgaks teravnurga α_0. Siis

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\sin \alpha}{2} = \frac{\cos \alpha}{3} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

millest

$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{13}},$$

kus $\sqrt{13}$ on võetud positiivsena, sest α on teravnurk. Teisendusvalemid on nüüd järgmised:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{13}} (3x - 2y) \\ \frac{1}{\sqrt{13}} (2x + 3y). \end{matrix} \right.$$

Tehes võrrandis

$$5x^2 + 12xy - 36 = 0$$

vastavad asendused, saame

$$5 \cdot \frac{1}{13} (3x - 2y)^2 + 12 \cdot \frac{1}{13} (3x - 2y)(2x + 3y) - 36 = 0$$

ehk, pärast korrutamist 13-ga, sulgude avamist, koondamist ja taandamist,

$$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$$

ehk lõpuks

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

See on hüperbooli võrrand.

Hüperbooli joonestamiseks märgime lähteteljestikus keskpunkti (1; 1), joonestame sellest läbi uued teljed rööbiti endiste telgedega, joonestame uue abstsisstelje, võttes ta sihis, mis moodustab eelmise abstsissteljega nurga, mille tangens on $\frac{2}{3}$, ja joonestame risti selle teljega y-telje. Jääb märkida hüperbooli

teljed, asümptoodid ja fookused ning konstrueerida teatav arv hüperbooli punkte, mis võimaldavad teda küllalt täpselt joonestada.

Teist järku paraboolset tüüpi jooned

Olgu võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ väike diskriminant $\delta = 0$. Antud võrrandiga esitatud joonel sel juhul keskpunkti pole. Tõepoolest, keskpunkti koordinaate määravates võrrandites

$$\begin{cases} ax + hy + g = 0 \\ hx + by + f = 0 \end{cases}$$

on $a : h = h : b$, mis järeldub tingimusest $ab - h^2 = 0$. Oletame, et

$$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} \neq \frac{g}{f}.$$

Nagu teame, kujutavad vaadeldavad lineaarvõrrandid sel juhul kaht mitte ühte langevat paralleelset sirget. Seega pole joone keskpunkt vaadeldavate sirgete lõikepunktina määratav. Teist järku keskpunktita jooni nimetatakse paraboolset tüüpi joonteks.

Paraboolset tüüpi joone võrrandis moodustavad teise astme liikmed alati täisruudu.

Tõepoolest, tingimusest $\delta = ab - h^2 = 0$ järeldub, et $h^2 = ab$, $h = \pm \sqrt{ab} = \pm \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ja seepärast

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = ax^2 \pm 2\sqrt{a}\sqrt{b}\,xy + by^2 =$$
$$= (\sqrt{a}\,x \pm \sqrt{b}\,y)^2.$$

Väike diskriminant δ on invariantne nii teljestiku rööplükke kui ka teljestiku pööramise suhtes. Kui δ oli null vanas teljestikus, siis jääb ta selleks ka igasuguses uues teljestikus. See tähendab, et ruutvorm $ax^2 + 2hxy + by^2$, olles ühes teljestikus täisruuduks, jääb ka pärast teljestiku teisendamist täisruuduks.

Teist järku paraboolset tüüpi joone üldvõrrandi teisendamine kanoonilisele kujule

On selge, et paraboolset tüüpi joone võrrandi lihtsustamiseks ei saa kasutada teljestiku rööplüket alguspunkti viimisega joone keskpunkti. Me alustame seepärast teljestiku pööramisest, valides

uute telgede sihtideks joone peasihid. Pöördenurk α peab siis rahuldama võrrandit

$$\cot 2\alpha = \frac{a-b}{2h}.$$

Nii valitud nurga α puhul kaob paraboolset tüüpi joone võrrandist mitte ainult liige koordinaatide korrutisega, vaid ka üks liige koordinaadi ruuduga. Tõepoolest, avaldis $ax^2 + 2hxy + by^2$ vanades koordinaatides asendub avaldisega $a_1x^2 + b_1y^2$ uutes koordinaatides. Et lähteavaldis oli täisruut, siis peab seda olema ka lõpuavaldis. See on aga võimalik ainult siis, kui on kas $a_1 = 0$ või $b_1 = 0$. Mõlemad kordajad a_1 ja b_1 ei saa üheaegselt nullid olla, sest kui nad oleksid nullid, siis saaksime avaldise $a_1x^2 + b_1y^2$ tagasiteisendamisel tulemuseks $ax^2 + 2hxy + by^2 \equiv 0$, see tähendaks aga, et ka

$$2gx + 2fy + c \equiv 0,$$

millest järelduks, et $g = 0$, $f = 0$, $c = 0$, mida me ju ei eeldanud.

Oletame, et teljestiku pööramisel langeb joone võrrandist välja peale liikme koordinaatide korrutisega veel liige abstsissi ruuduga. Siis võrrandi esimesed kolm liiget asenduvad üheainsa, ordinaadi ruutu sisaldava liikmega ja võrrand omandab kuju

$$by^2 + 2gx + 2fy + c = 0,$$

muidugi kordajate b, g, f ja c teiste numbriliste väärtustega kui algul. Korrutame viimase võrrandi b-ga ja kirjutame ta kujul

$$b^2y^2 + 2fby + f^2 = -2bgx - cb + f^2.$$

Siis

$$(by + f)^2 = -2bg\left(x + \frac{cb - f^2}{2bg}\right)$$

ehk

$$b\left(y + \frac{f}{b}\right)^2 = -2g\left(x + \frac{cb - f^2}{2bg}\right).$$

Viime teljestiku alguse punkti koordinaatidega

$$-\frac{cb - f^2}{2bg} \quad \text{ja} \quad -\frac{f}{b}$$

telgede sihte muutmatuks jättes. Eelmine võrrand asendub siis võrrandiga

$$by^2 = -2gx$$

ehk

$$y^2 = -2\frac{g}{b}x.$$

Saadud võrrand on parabooli võrrand. Selle parabooli parameetriks on $-\frac{g}{b}$.

N ä i d e. Olgu tarvis joonestada võrrandiga

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 20x + 30y + 100 = 0$$

määratud kõver. Võrrandi keerukuse tõttu on joone üksikute punktide koordinaatide arvutamine raske. Seepärast teisendame võrrandi lihtsamaks. Kordajateks

$$a \quad h \quad b \quad g \quad f \quad c$$

on antud juhul vastavalt arvud

$$16 \quad 12 \quad 9 \quad -10 \quad 15 \quad 100$$

Keskpunkti määravad võrrandid on

$$\begin{cases} 16x + 12y - 10 = 0 \\ 12x + 9y + 15 = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 8x + 6y - 5 = 0 \\ 4x + 3y + 5 = 0. \end{cases}$$

Et $8 : 4 = 6 : 3$, siis need võrrandid kujutavad kaht rööbikut sirget. Need sirged ei lange ühte, sest $8 : 4 = 6 : 3 \neq -5 : 5$. Seega joone keskpunkt pole määratav. Joon on p a r a b o o l.

Uuritava parabooli võrrandi lihtsustamist alustame sellest, et pöörame teljed rööbiti joone peasihtidega. Nurga α määramiseks kasutame valemit

$$\tan 2\alpha = \frac{24}{16 - 9} = \frac{24}{7}$$

ehk

$$\frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{24}{7}.$$

See annab ruutvõrrandi

$$12 \tan^2 \alpha + 7 \tan \alpha - 12 = 0,$$

mille lahendid on

$$\tan \alpha = \frac{1}{24}(-7 \pm 25),$$

nii et

$$\tan \alpha_0 = \frac{3}{4}, \quad \tan \alpha_1 = -\frac{4}{3}.$$

Et

$$\tan \alpha_0 \cdot \tan \alpha_1 = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1,$$

siis nurkadega α_0 ja α_1 määratud sihid ristuvad, nagu peabki olema. Paigutame teljestiku pööramisel uue abstsisstelje nurgaga α_1 määratud peasihis. Teisendusvalemite kirjutamiseks vajalikud $\sin \alpha_1$ ja $\cos \alpha_1$ saame valemeist

$$\frac{\sin \alpha_1}{-4} = \frac{\cos \alpha_1}{3} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1}}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$$

kujul

$$\sin \alpha_1 = -\frac{4}{5}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{3}{5}.$$

Ruutjuured on võetud p l u s s m ä r g i g a, sest $\tan \alpha_1$ on negatiivne, seega α_1 absoluutselt väikseim väärtus on n e g a t i i v n e, järelikult $\sin \alpha_1$ peab olema negatiivne, $\cos \alpha_1$ aga positiivne.

Teljestiku pööramisel nurga α_1 võrra asenduvad vanad koordinaadid uutega järgmiselt:

$$\begin{array}{c||l} x & \frac{1}{5}(3x + 4y) \\ y & -\frac{1}{5}(4x - 3y). \end{array}$$

Seega uues teljestikus on uuritav joon antud võrrandiga

$$16 \cdot \frac{1}{25}(3x + 4y)^2 - 24 \cdot \frac{1}{25}(3x + 4y)(4x - 3y) +$$

$$+ 9 \cdot \frac{1}{25}(4x - 3y)^2 - 20 \cdot \frac{1}{5}(3x + 4y) - 30 \cdot \frac{1}{5}(4x - 3y) + 100 = 0,$$

mis pärast 25-ga korrutamist, sulgude avamist, sarnaste liikmete koondamist ja taandamist omandab kuju

$$25y^2 - 36x + 2y + 4 = 0$$

ehk

$$\left(5y + \frac{1}{5}\right)^2 = 36x - \frac{99}{25}.$$

Valime uued muutujad vastavalt asendusvalemitele

$$\begin{array}{c||l} y & y - \frac{1}{25} \\ x & x + \frac{11}{100}, \end{array}$$

mis geomeetria keeles tähendab teljestiku rööplüket alguspunkti üleviimisega punkti $O_1\left(\frac{11}{100}; -\frac{1}{25}\right)$. Tulemuseks on võrrand

$$25y^2 = 36x.$$

See kujutab parabooli parameetriga $p = \frac{18}{25}$.

Selle parabooli joonestamiseks märgime eelkõige lähteteljestiku xOy, siis nurga α_1 võrra pööratud teljestiku x_1Oy_1, lõpuks rööplükke teel saadud teljestiku $x_2O_1y_2$. Parabooli sümmeetriateljeks on telg O_1x_2, haripunktiks O_1; fookuse koordinaadid teljestikus $x_2O_1y_2$ on $\left(\frac{9}{25};\ 0\right)$; puutujaks haripunktis on telg y_2, juhtjooneks sirge rööbiti teljega y_2 kaugusel $\frac{9}{25}$ sellest teljest. Parabooli ava suund on määratud fookuse asendiga. Viimati loetletud andmeil on kerge parabooli joonestada.

Kontrolliks võib mõõta parabooli mõne punkti koordinaadid lähteteljestikus ja asetada need lähtevõrrandi vasakpoolsesse ossa. Et mõõtmine ei saa toimuda täpselt, siis ka õigesti tehtud joonise puhul ei ole asetamistulemus üldjuhul täpselt null, nagu teoreetiliselt peaks olema, vaid nullile väga lähedane suurus. Vajalike arvutuste teostamiseks on kõige kohasem kasutada arvutuslükatit.

§ 47. TEIST JÄRKU JOONE LAGUNEMINE SIRGETE PAARIKS

Sirgete paariks lagunev teist järku joon

Uurime lõpuks juhtu, kus joone $\Phi(x, y) = 0$ keskpunkti asendit määravail võrrandeil kõik kolm kordajat on vastavalt võrdelised:

$$a : h = h : b = g : f.$$

Sel eeldusel on üks võrrandeist teise võrrandi kordne ja nad kujutavad kahte ühtelangevat sirget. Neil sirgeil on siis kuitahes palju ühiseid punkte. See tähendab, et tehtud eeldusel on uuritava joone keskpunkt määramatu.

Märgime suhete $a : h$, $h : b$ ja $g : f$ ühise väärtuse tähega λ; siis $g = \lambda f$, $h = \lambda b$, $a = \lambda h = \lambda^2 b$ ja joone $\Phi(x, y) = 0$ võrrand

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

avaldub kujul

$$\lambda^2 bx^2 + 2\lambda bxy + by^2 + 2\lambda fx + 2fy + c = 0$$

ehk

$$b(\lambda x + y)^2 + 2f(\lambda x + y) + c = 0.$$

See on binoomi $\lambda x + y$ suhtes ruutvõrrand. Olgu ta lahendid vastavalt $\varkappa_1$ ja $\varkappa_2$. Võrrandit $\Phi(x, y) = 0$ saab siis kirjutada kujul

$$(\lambda x + y - \varkappa_1)(\lambda x + y - \varkappa_2) = 0,$$

mis näitab, et võrrand $\Phi(x, y) = 0$ laguneb kaheks võrrandiks

$$\begin{cases} \lambda x + y = \varkappa_1 \\ \lambda x + y = \varkappa_2. \end{cases}$$

Kui $\varkappa_1 \neq \varkappa_2$, siis need võrrandid kujutavad kahte rööbikut sirget, kui aga $\varkappa_1 = \varkappa_2$, siis kahte ühtelangevat sirget. Niisiis:

kui võrrandis $\Phi(x, y) = 0$ kordajad a ja h, h ja b, g ja f on võrdelised, siis joon $\Phi(x, y) = 0$ laguneb kaheks rööbikuks sirgeks, mis erijuhul võivad osutuda ühtelangevaiks.

Teise astme üldvõrrandi suur diskriminant

Võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ kordajate a ja h, h ja b võrdelisust

$$a : h = h : b$$

saame väljendada kaherealise determinandi kaudu kujul

$$\begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = 0, \text{ lühidalt } \delta = 0.$$

Küsime, kas kordajate a ja h, h ja b, g ja f võrdelisust ei saa väljendada kolmerealise determinandi kaudu? See on tõesti võimalik. Paigutame nimelt kolmerealise determinandi esimesse ritta antud kolme suhte esimesed liikmed a, h, g ja teise ritta nende teised liikmed h, b, f. Missugune ka ei oleks siis kolmas rida, ikka on determinant null, sest esimese kahe rea elemendid on võrdelised. Lihtsuse mõttes valime kolmanda rea elemendid nii, et determinant tuleks sümmeetriline peadiagonaali suhtes. Nii saame joone $\Phi(x, y) = 0$ kaheks sirgeks lagunemise tingimuse kirjutada kujul

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0.$$

Vasakul poolel seisvat determinanti nimetatakse võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ suureks diskriminandiks ja märgitakse suure deltaga:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}.$$

Niisiis, keskpunktita joone $\Phi(x, y) = 0$ kaheks sirgeks lagunemise tunnuseks on joone võrrandi suure diskriminandi võrdumine nulliga.

Praegu püstitatud väite kehtivuses saab veenduda ka otsesel teel. Seejuures me lahendame teist järku joone kaheks sirgeks lagunemise küsimuse täiesti üldiselt, arvestamata joone tüüpi. Kujutleme nimelt hetkeks, et võrrandis $\Phi(x, y) = 0$ on tundmatuks võetud y. Seda võrrandit saab siis kirjutada kujul

$$by^2 + 2(hx + f)y + (ax^2 + 2gx + c) = 0.$$

See on y suhtes r u u t v õ r r a n d lahenditega

$$y = \frac{-(hx + f) \pm \sqrt{(hx + f)^2 - b(ax^2 + 2gx + c)}}{b}.$$

Kui joon $\Phi(x, y) = 0$ laguneb sirgeiks, siis peab ta võrrand lagunema kaheks esimese astme võrrandiks. Et viimati kirjutatud valem annaks y jaoks kaks x suhtes l i n e a a r s e t avaldist, selleks peab juurealune avaldis olema t ä i s r u u t. Juurealune avaldis on aga

$$(h^2 - ab)x^2 + 2(hf - bg)x + (f^2 - bc)$$

ja see on täisruut ainult siis, kui

$$(hf - bg)^2 - (h^2 - ab)(f^2 - bc) = 0$$

ehk, arendatult,

$$abc + 2hgf - (af^2 + bg^2 + ch^2) = 0.$$

Vasakul poolel seisab aga siin Δ avaldis, nagu kohe näha, kui determinandi Δ kolmele veerule juurde kirjutada esimesed kaks ja arvutada determinant harilikul viisil: tabel

$$\begin{array}{ccccc} a & h & g & a & h \\ & \diagdown & \times & \times & \diagup \\ h & b & f & h & b \\ & \diagup & \times & \times & \diagdown \\ g & f & c & g & f \end{array}$$

annab just avaldise

$$abc + 2hgf - (af^2 + bg^2 + ch^2).$$

Niisiis: kui teist järku joon $\Phi(x, y) = 0$ laguneb kaheks sirgeks, siis on ta võrrandi suur diskriminant kindlasti võrdne nulliga. Vaatame, kas see lause on pööratav. Selleks oletame, et tingimus $\Delta = 0$ on täidetud. Siis eespool leitud juurealune avaldis

$$(h^2 - ab)x^2 + 2(hf - bg)x + (f^2 - bc)$$

on täisruut, nimelt on ta võrdne avaldisega

$$(\sqrt{h^2 - ab}\, x + \sqrt{f^2 - bc})^2.$$

Seega by esineb kujul

$$by = -(hx + f) \pm (\sqrt{h^2 - ab}\, x + \sqrt{f^2 - bc})$$

ehk, teisiti kirjutatult,

$$(h \pm \sqrt{-\delta})x + by + (f \pm \sqrt{f^2 - bc}) = 0.$$

Uurime tulemust lähemalt. Olgu $\delta > 0$. Siis sümbolil $\sqrt{-\delta}$ ei ole mingit väärtust ja võrrand $\Phi(x, y) = 0$ ei esita ühtki geomeetrilist kujundit.

Olgu $\delta < 0$ ja $f^2 - bc > 0$. Siis võrrand $\Phi(x, y) = 0$ esitab kaht erineva tõusuga kulgevat, järelikult lõikuvat sirget.

Olgu $\delta < 0$ ja $f^2 - bc < 0$. Siis sümbolil $f^2 - bc$ ei ole mingit väärtust ja võrrand $\Phi(x, y) = 0$ ei esita ühtki geomeetrilist kujundit.

Olgu lõpuks $\delta = 0$. Siis võrrand $\Phi(x, y) = 0$ asendub võrranditega

$$hx + by + (f \pm \sqrt{f^2 - bc}) = 0.$$

Kui $f^2 - bc > 0$, saame kaks rööbikut sirget, kui $f^2 - bc = 0$, saame kaks ühtelangevat sirget. Viimaks, kui $f^2 - bc < 0$, pole ruutjuurel mingit väärtust ja võrrand $\Phi(x, y) = 0$ ei esita ühtki geomeetrilist kujundit. Toodud loetelu ammendab kõik võimalikud juhud. Niisiis:

tingimuseks, et oma üldvõrrandiga antud teist järku joon laguneks sirgete paariks, on selle võrrandi suure diskriminandi võrdumine nulliga.

Kui teise astme üldvõrrandi suur diskriminant on võrdne nulliga, siis esitab see võrrand kaht lõikuvat sirget, kaht rööbikut sirget või kaht ühtelangevat sirget või see võrrand ei esita ühtki geomeetrilist kujundit.

Märkus. Kui tingimus $\Delta = 0$ on täidetud ja on tarvis selgitada, mida sel puhul võrrand $\Phi(x, y) = 0$ kujutab, on kõige otstarbekohasem lahendada see võrrand ühe tundmatu suhtes. Selleks tundmatuks on sobiv võtta see, mille suhtes võrrandi lahendamine on lihtsam. Võrrandi $\Phi(x, y) = 0$ lahendi lähem vaatlemine otsustab küsimuse, missugust kujundit see võrrand esitab.

Näide. Joonestada võrrandiga

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 8x + 12y - 60 = 0$$

antud geomeetriline kujund.

Kordajateks

$$a \quad h \quad b \quad g \quad f \quad c$$

on siin vastavalt arvud

$$4 \quad -6 \quad 9 \quad -4 \quad 6 \quad -60.$$

Väike diskriminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0.$$

Seega on joon paraboolset tüüpi.
Suur diskriminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -6 & -4 \\ -6 & 9 & 6 \\ -4 & 6 & -60 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \\ -2 & -2 & -60 \end{vmatrix}.$$

Viimati kirjutatud determinant on null, sest tal on kaks võrdset veergu. Niisiis $\Delta = 2 \cdot (-3) \cdot 0 = 0$. Järelikult antud võrrand kujutab sirgete paariks lagunevat joont. Nende sirgete võrrandeid saame leida, lahendades antud võrrandi y suhtes. Selleks kirjutame antud võrrandi kujul

$$(2x - 3y)^2 - 4(2x - 3y) - 60 = 0.$$

Märkides sulgudes seisva avaldise tähega u, saame selle määramiseks ruutvõrrandi

$$u^2 - 4u - 60 = 0,$$

mille lahendid on

$$u_1 = 10 \quad \text{ja} \quad u_2 = -6.$$

Järelikult antud võrrandiga määratud joon laguneb kaheks sirgeks:

$$2x - 3y = 10$$

ja

$$2x - 3y = -6.$$

Nagu näeme, on sirged rööbikud. Seda tuligi oodata, sest antud joon $\Phi(x, y) = 0$ oli paraboolset tüüpi.

Kahe tundmatuga homogeenne teise astme võrrand

Homogeenseteks nimetatakse võrrandeid, milles kõik liikmed on ühe ja sama astmega.

Nii näiteks $3x + 5y = 0$ on homogeenne esimese astme võrrand, $2xy - 3y^2 = 0$ homogeenne teise astme võrrand.

Üldine homogeenne teise astme võrrand esineb kujul

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0.$$

On kohe näha, et ta laguneb kaheks lineaarseks võrrandiks:

$$y = \frac{-2hx \pm \sqrt{4h^2x^2 - 4abx^2}}{2b}$$

ehk

$$y = \frac{1}{b}\left[-h \pm \sqrt{-\delta}\right]x.$$

Kui $\delta = 0$, saame kaks ühtelangevat sirget ühise võrrandiga

$$hx + by = 0.$$

Kui $\delta > 0$, ei ole sümbolil $\sqrt{-\delta}$ mingit väärtust ja antud võrrand ei esita ühtki geomeetrilist kujundit.

Kui $\delta < 0$, saame kaks erineva tõusuga sirget, see tähendab kaks lõikuvat sirget võrranditega

$$\pm\sqrt{-\delta}x + by + h = 0.$$

Näide. Võrrand $2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$ on homogeenne teise astme võrrand. Ta esitab kaht sirgjoont, mille võrrandid on

$$y = 2x \qquad \text{ja} \qquad y = \frac{1}{3}x.$$

PEATÜKK XIV

TASAPINNA TRANSFORMATSIOONE

§ 48. PROBLEEMISEADE. TRANSLATSIOON. ROTATSIOON

Probleemiseade

Koordinaatide teisendamise küsimuste käsitlemisel eeldasime *kindlat*, *muutumatut* koordinaattasapinda ning sellel asetsevat *kindlat* punkti ja vaatlesime, kuidas teisenduvad selle punkti koordinaadid, kui ühe teljestiku asemel võtame kasutusele teise, teisiti paigutatud teljestiku. Nagu nägime, võis iga uut teljestikku saada antud teljestikust kas nihutades alguspunkti kindlas sihis ja suunas kindla lõigu võrra edasi ning hoides telgede sihid muutumatutena või hoides alguspunkti muutumatuna ja pöörates teljestikku kindla nurga võrra või, lõpuks, kasutades teineteise järel nii üht kui teist praegu nimetatud teisendust.

Eelseisvates arutlustes uurime küsimust, kuidas teisenduvad punkti koordinaadid ja kuidas teisenduvad kujundid, kui kord valitud teljestik jääb kinnistatuks, tasapind ise aga koos temal võetud punktiga ja kujunditega lükkub teljestikul kui kindlal alusel, pöördub tema suhtes, venib ühe telje sihis, venib nii ühe kui teise telje sihis, peegeldub mingi telje suhtes jne.

Elava kujutluse saamiseks uuritavatest teisendustest on otstarbekohane abiks võtta tasapind, mis on muutumatult seotud antud teljestikuga — *kinnistasapind*, lühidalt *alus* —, millel siis teine tasapind — *liikuv tasapind* — lükkub, pöördub, venib, peegeldub telje suhtes jne.

Me räägime sel puhul tasapinna punkti ja kujundite *transformatsioonidest**.

Translatsioon

Olgu antud teljestik, selle teljestikuga määratud *kinnistasapind* ja sellele kui alusele paigutatud *liikuv tasa-*

---

* Lad. k. *transformare* — muundama, teisendama.

p i n d. Nihkugu liikuv tasapind nõnda, et mingisugused kaks tema punkti A ja B liiguvad rööbikutes sihtides samas suunas võrdsete lõikude võrra. Tähistame punktide A ja B n i h k e i d ehk l ü k k e i d sümbolitega $\vec{AA'}$ ja $\vec{BB'}$. Nool sümboleis $\vec{AA'}$ ja $\vec{BB'}$ peab meelde tuletama, et punktid A ja B lükkuvad vastavalt AA' ja BB' s i h i s lõikude AA' ja BB' võrra s u u n a g a punktist A punkti A' ja punktist B punkti B'. Et lüketel $\vec{AA'}$ ja $\vec{BB'}$ on üks ja sama pikkus, siht ja suund, siis kirjutame, et

$$\vec{AA'} = \vec{BB'}.$$

Siis aga on lõik $A'B'$ võrdne ja paralleelne lõiguga AB:

$$A'B' \# AB.$$

See tähendab, et lõik AB on liikunud edasi, muutmata oma sihti ja suunda. Siit järeldub, et lõik AB ja ka sirge AB i g a p u n k t C on nihkunud samas sihis, suunas ja sama lõigu võrra nagu punktid A ja B:

$$\vec{CC'} = \vec{AA'} = \vec{BB'}.$$

Võtame nüüd mingi punkti D väljaspool sirget AB. Koos lõiguga AB määrab ta teatava kolmnurga ABD. Liikuva tasapinna nihkumisel eespool kirjeldatud viisil kandub kolmnurk ABD kuju muutmata uude asendisse $A'B'D'$. Et $A'B' \# AB$ ja $\triangle A'B'D' = \triangle ABD$, siis ka

$$DD' \# AA' \# BB',$$

nii et

$$\vec{DD'} = \vec{AA'} = \vec{BB'}.$$

Punkt D oli liikuval tasapinnal võetud vabalt, järelikult kõik tema kohta öeldu kehtib liikuva tasapinna iga punkti kohta. Niisiis:

kui tasapind liigub oma alusel nii, et kaks tema punkti nihkuvad võrdsete lükete võrra, siis nihkub ka iga muu tema punkt nendega võrdse ja samasuunalise lükke võrra.

Tasapinna kirjeldatud liikumisviisi nimetatakse t r a n s l a t s i o o n i k s. Niisiis:

translatsiooniks nimetatakse tasapinna niisugust liikumist oma alusel, mille puhul kõik tasapinna punktid nihkuvad samas sihis ja samas suunas võrdsete lõikude võrra.

Translatoorselt liiguvad näiteks rotilõksu uks, vaguni aken, järvel puksiiris liikuv palgiparv ja trükipressi ladu kandev plaat.

Definitsioonist järeldub, et tasapinna translatsioon on antud juba mingi üheainsa tema punkti lükkega, näiteks lükkega $\overrightarrow{AA'}$ või ka näiteks lükkega $\overrightarrow{OO'}$.

Nagu nägime, translatsiooni puhul $A'B' \# AB$ ja $\triangle A'B'D' = \triangle ABD$. See tähendab, et translatsioonil kolmnurk liigub oma kuju ja suurust muutmata. Kui märgiksime kolmnurgal mingi ümberkäigu suuna (näiteks võttes tipud kellaosuti liikumisega määratud järjekorras), näeksime, et translatsiooni puhul ka ümberkäigu suund jääb muutumatuks. Et iga hulknurka saab jaotada kolmnurkadeks, siis kandub öeldu üle ka igale hulknurgale. Kõiki kõverjooni saab kuitahes hästi lähendada hulknurkadega. Seega translatsiooni puhul kõik kujundid liiguvad oma orientatsiooni, kuju ja suurust muutmata. Kokku võttes näeme, et translatsiooni puhul

1° rööbikud lõigud ja rööbikud sirged jäävad rööbikuks;

2° lõikude pikkused jäävad muutumatuks, samuti nende projektsioonid;

3° lõikude tõusunurgad ja lõikudevahelised nurgad jäävad muutumatuks; eriti jäävad täisnurgad täisnurkadeks ja seega ristuvad sirged ristuvateks;

4° kujundite pindalad jäävad muutumatuks;

5° kujundite ümberkäigu suund jääb muutumatuks.

Pikkused, nurgad ja pindalad avalduvad arvudena. Need arvud jäävad translatsiooni puhul püsima muutumatutena. Seepärast sõnastatakse punktides 2°, 3° ja 4° öeldut ka järgmiselt:

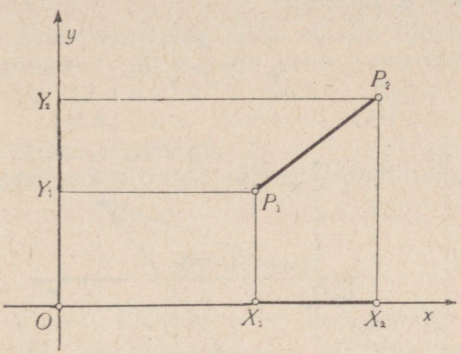
pikkused, nurgad ja pindalad on translatsiooni suhtes invariantsed.

Lükke komponendid

Kujutleme lüket $\overrightarrow{P_1P_2}$, mis algab punktist $P_1(x_1, y_1)$ ja lõpeb punktis $P_2(x_2, y_2)$. Punkti P lükkumisel kohast P_1 kohta P_2 tema projektsioon X abstsissteljel nihkub kohast X_1 kohta X_2 (joon. 153) lükke võrra, mis suuruselt, sihilt ja suunalt on antud vahega $x_2 - x_1$. Analoogiliselt nihkub punkti P projektsioon Y ordinaatteljel lükke võrra, mis oma suuruselt, sihilt ja suunalt on antud vahega $y_2 - y_1$. Vaadeldes punkti P liikumist liitliikumisena, nimelt abstsisstelje sihis (tavaliselt rõhtsihis) lükke $\overrightarrow{X_1X_2}$ võrra ja ordinaattelje sihis (tavaliselt püstsihis) lükke $\overrightarrow{Y_1Y_2}$ võrra, räägime lükkeist $\overrightarrow{X_1X_2}$ ja $\overrightarrow{Y_1Y_2}$ kui lükke $\overrightarrow{P_1P_2}$ komponentidest. Need komponendid on antud vahedega $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$. Nende komponentide järgi

saab otsekohe konstrueerida lüket $\overrightarrow{P_1P_2}$ tema õiges suuruses, sihis ja suunas. Niisiis:

lüke on täielikult määratud oma komponentidega.



Joon. 153.

Me kirjutame seepärast, nagu punktigi märkimisel tema koordinaatide kaudu,

$$\overrightarrow{P_1P_2} \equiv (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1).$$

Translatsiooni analüütiline avaldis

Teostame tasapinna translatsiooni ja anname selle tema punkti O lükkega OO', kus $O' \equiv (a, b)$. Nihkugu punkt $A(x, y)$ asendisse $A'(x', y')$ (joon. 154). Siis

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OO'}.$$

Projekteerides punktid A, O' ja A' abstsissteljele, näeme, et $x' = x + a$. Analoogiline seos kehtib y ja y' vahel. Seega

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Niisiis:

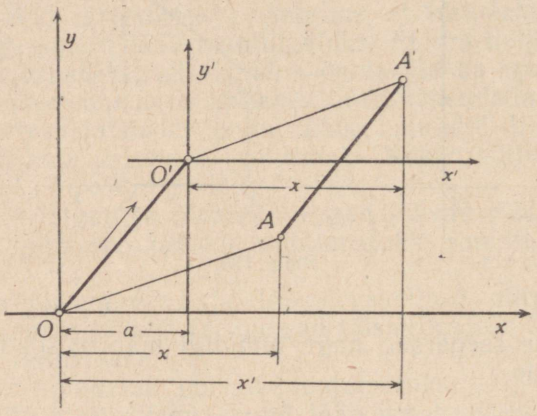
translatsiooni puhul, mis on määratud lükkega $\overrightarrow{OO'}$, avalduvad punkti koordinaadid uues asendis tema koordinaatide kaudu vanas asendis kujul

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Sama tõsiasja võime sõnastada ka järgmiselt:

translatsiooni puhul, mis on määratud lükkega $\overrightarrow{OO'}$, *kus* $O' \equiv (a, b)$, *asenduvad punkti vanad koordinaadid* x *ja* y *avaldistega* $x + a$ *ja* $y + b$, *lühidalt*

$$\begin{array}{c|c} x & x + a \\ y & y + b. \end{array}$$



Joon. 154.

Valemid on samad, mida õppisime tundma koordinaatide teisendamise puhul teljestiku rööplükkel, kuid valemite tõlgendus on eelmisest hoopis erinev: seal oli jutt kahest eri teljestikust, kuid ikka ühest ja samast punktist, mille koordinaadid olid vanas teljestikus x ja y, uues teljestikus vastavalt x' ja y', siin aga on tegemist ühe ja sama teljestikuga, kuid punkti erinevate asenditega.

Translatsioonide liitumine

Olgu tasapind π alus, O sellel tasapinnal võetud kindel punkt, π' alusel π translatoorselt liikuv tasapind ja $\overrightarrow{OO'}$ punkti O lüke komponentidega a ja b. Võtame nüüd tasapinna π' aluseks ja vaatleme temal translatoorselt liikuvat tasapinda π''. Olgu $\overrightarrow{O'O''}$ punkti O' lüke ning a' ja b' selle komponendid. Siis

$$\begin{array}{ll} x' = x + a, & y' = y + b, \\ x'' = x' + a', & y'' = y' + b' \end{array}$$

ehk

$$x'' = x + (a + a'), \quad y'' = y + (b + b')$$

ehk, lühemalt,

$$x'' = x + a'', \quad y'' = y + b''.$$

Siit nähtub, et kaks teineteise järel või ka üheaegselt toimunud translatsiooni annavad tulemusena jälle translatsiooni ehk, teiste sõnadega, kahe translatsiooni lõpptulemust võib alati saavutada ka üheainsa kohaselt valitud translatsiooniga ehk, veel kord teiste sõnadega,

kaks translatsiooni liituvad jällegi translatsiooniks.

Rotatsioon

Kinnistame liikuva tasapinna π' ühe punkti, nõudes näiteks, et püsivalt $O' \equiv O$. Tasapinna ainsaks liikumisvõimaluseks on siis pöörlemine ümber telje OT, mis seisab punktis O risti alusega π. Pöörlemist nimetatakse sageli ka rotatsiooniks*.

Olgu P mingi punkt tasapinnal π'. Tasapinna π' pöörlemisel ümber telje OT jääb punkti P kaugus punktist O muutumatuks. Järelikult punkt P ja seega ka tasapinna π' iga teine punkt kirjeldab ringjoone. Niisiis:

kui tasapind liigub oma alusel nii, et üks tema punktidest jääb paigale, siis tasapinna iga teine punkt kirjeldab ringjoone, mille keskpunktiks on kinnispunkt.

Pööreldes ümber telje OT pöörduvad kõik tasapinna π' lõigud võrdsete nurkade võrra. Siit järeldub, et iga kolmnurga POQ pöörlemisel ümber telje OT (lugeja tehku ise joonis)

$$OP' = OP, \; OQ' = OQ \quad \text{ja} \quad \widehat{P'OQ'} = \widehat{POQ},$$

ja sellest edasi, et

$$\triangle P'OQ' \equiv \triangle POQ.$$

Analoogiliselt

$$\triangle P'OR' \equiv \triangle POR,$$
$$\triangle Q'OR' \equiv \triangle QOR.$$

Seepärast

$$\triangle P'Q'R' \equiv \triangle PQR.$$

See tähendab, et rotatsioonil kolmnurk liigub oma kuju ja suurust muutmata. Küll aga muutub nurk, mida kolmnurga külg moodustab kindla sihiga, näiteks abstsissteljega; seda nurka nimetatakse kolmnurga külje tõusunurgaks. Kõigi külgede tõusunurgad muutuvad seejuures ühe ja sama suuruse võrra. Et iga hulknurka saab jaotada kolmnurkadeks, siis kandub öeldu

* Lad. k. *rotatio* — pöörlemine.

üle igale hulknurgale ja edasi mistahes joonte poolt piiratud kujunditele. Järelikult rotatsiooni puhul kõik kujundid liiguvad oma kuju ja suurust muutmata. Küll aga muutuvad nende külgede tõusunurgad, kusjuures kõigi külgede tõusunurgad muutuvad ühe ja sama suuruse võrra.

Kokku võttes näeme, et

r o t a t s i o o n i p u h u l

1° rööbikud lõigud ja rööbikud sirged jäävad rööbikuks;

2° lõikude pikkused jäävad muutumatuks;

3° lõikudevahelised nurgad jäävad muutumatuks; eriti jäävad täisnurgad täisnurkadeks ja seega ristuvad sirged ristuvateks;

4° kujundite pindalad jäävad muutumatuks;

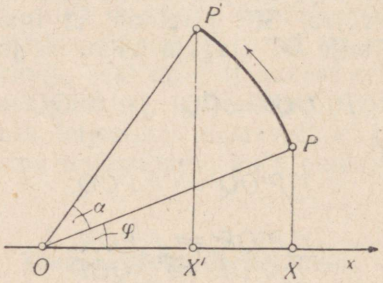
5° hulknurkade külgede tõusunurgad muutuvad ühe ja sama suuruse võrra;

6° kujundite ümberkäigu suund jääb muutumatuks.

Punktides 2°, 3° ja 4° öeldut saab sõnastada ka järgmiselt: *pikkused, nurgad ja pindalad on rotatsiooni suhtes invariantsed.*

Rotatsiooni analüütiline avaldis

Võtame, nagu eespoolgi, kinnispunkti koordinaatide alguspunktiks. Olgu P liikuva tasapinna ühe punkti algasend, P' selle punkti lõppasend (joon. 155). Siis $OP' = OP$. Lõigu OP pöörde-



Joon. 155.

nurk POP' olgu märgitud tähega α, nurk xOP tähega φ. Siis

$$OX' = OP' \cdot \cos(\varphi + \alpha)$$

ehk, kui tähistame lõigu $OP = OP'$ tähega r,

$$x' = r\cos\varphi\cos\alpha - r\sin\varphi\sin\alpha.$$

Tähele pannes, et $r\cos\varphi$ ja $r\sin\varphi$ on punkti P abstsiss ja ordi-

naat, saame kohe avaldise x' jaoks; kasutades sama arutlust y' määramiseks, saame lõpuks valemid

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \quad \text{ja} \quad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Niisiis:

rotatsiooni puhul, mis on määratud nurgaga α, avalduvad punkti koordinaadid uues asendis tema koordinaatide kaudu vanas asendis kujul

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Sama tõsiasja võime sõnastada ka järgmiselt:

rotatsiooni puhul, mis on määratud nurgaga α, asenduvad punkti vanad koordinaadid x ja y uute avaldistega

$$\begin{array}{c|l} x & x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y & x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{array}$$

Valemid on samakujulised koordinaatide teisendusvalemitega telgede pööramise juhul, kuid nende tõlgendus on teine.

Rotatsioonide liitumine

On pikemata selge, et kaks teineteise järel teostatud rotatsiooni ümber ühe ja sama punkti nurkade α ja β võrra on ekvivalentsed üheainsa rotatsiooniga nurga $\alpha + \beta$ võrra. See järeldub ka rotatsiooni analüütilistest avaldistest: kui nimelt avaldame x' ja y' koordinaatide x ja y ning nurga α funktsioonidena ja edasi x'' ja y'' koordinaatide x' ja y' ning nurga β funktsioonidena, saame x'' ja y'' lähtekoordinaatide x ja y ning nurga $\alpha + \beta$ funktsioonidena kujul, nagu nad rotatsiooni puhul peavad avalduma.

Invariantide näiteid

Kujundite geomeetrilised omadused peituvad kujundites enestes ega saa olla sõltuvad koordinaadistikest, mille valik on ju suvaline. Kujundeid iseloomustavad omadused, nende «seesmised omadused», nagu öeldakse teaduslikus keeles, võivad seega väljenduda vaid invariantides, see tähendab, need omadused võivad väljenduda vaid niisuguste avaldiste kaudu, milledel kõigis üht ja sama liiki koordinaadistikes on üks ja sama kuju ning väärtus. Toome mõned näited.

Näide 1. Kahe punktiga määratud lõigu pikkus on invariantne translatsiooni suhtes.

Tõepoolest, punktidega (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) määratud lõigu pikkuse ruut avaldub kujul

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Translatsiooni puhul, mis on antud lükkega $\overrightarrow{OO'}$ või selle komponentidega a ja b, avalduvad lõigu otspunktide koordinaadid kujul

$$x_1' = x_1 + a, \qquad y_1' = y_1 + b,$$
$$x_2' = x_2 + a, \qquad y_2' = y_2 + b.$$

Seega

$$x_2' - x_1' = x_2 - x_1, \quad y_2' - y_1' = y_2 - y_1$$

ja järelikult

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Nagu näeme, avaldub lõigu pikkus ühel ja samal kujul ning ühes ja samas suuruses nii enne kui ka pärast translatsiooni.

N ä i d e 2. Sirgjoone tõus on invariantne translatsiooni suhtes.

Tõepoolest, eelviimastest võrdustest järeldub, et

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Seda oleks võinud juba ette näha: translatsiooni puhul x-telg liigub, jäädes rööbikuks oma lähtesihiga; järelikult iga sirge tõusunurk x-telje suhtes on sama mis tõusunurk x'-telje suhteski ja seega on võrdsed ka sirge tõusud tema esimeses ja teises asendis.

N ä i d e 3. Ringjoone võrrand on invariantne rotatsiooni suhtes ümber ringjoone keskpunkti.

Tõepoolest, võtame selle ringjoone keskpunkti koordinaatide alguspunktiks. Ringjoone võrrandiks on siis

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Pöörame ringjoone tasapinda nurga α võrra ümber telje, mis läbib keskpunkti ja on ringjoone tasapinnaga risti. Punkt (x, y) paigutub siis kohale (x', y'), kusjuures

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases}$$

Moodustades avaldise $x'^2 + y'^2$, leiame, et

$$x'^2 + y'^2 = x^2 + y^2$$

ehk

$$x'^2 + y'^2 = r^2.$$

See võrrand on aga täpselt sama tüüpi mis lähtevõrrandki.

§ 49. SARNASUS-, PEEGELDUS- JA VENITUSTEISENDUS

Sarnasusteisendus

Kinnistame liikuva tasapinna π' ühe punkti, nõudes näiteks, et püsivalt $O' \equiv O$. Venitame tasapinda π' nii abstsiss- kui ka ordinaattelje sihis nii, et kõik neis sihtides võetud lõigud muutuksid λ-kordseteks. Siis punkt P koordinaatidega (x, y) nihkub kohale P' koordinaatidega

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

Kordajat λ nimetatakse s a r n a s u s t e g u r i k s. Siit järeldub, et $y' : x' = y : x$; see tähendab, et punktid O, P ja P' asetsevad ühel ja samal sirgel. Edasi on

$$x'^2 + y'^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2).$$

See tähendab aga, et

$$OP'^2 = \lambda^2 \cdot OP^2.$$

Arvestades lõikude OP ja OP' ning kordaja λ positiivsust, järeldame siit, et

$$OP' = \lambda \cdot OP.$$

Olgu $\lambda > 1$. Siis viimane võrdus näitab, et uuritava teisenduse puhul kõik alguspunktist algavad ja radiaalselt sihitud lõigud venitatakse λ-kordseteks ehk, teisiti, et tasapinda venitatakse r a d i a a l s e l t, kõigis radiaalsetes sihtides ühteviisi. Kui $\lambda < 1$, siis on tegemist tasapinna radiaalse k o k k u s u r u m i s e g a, mis toimub kõigis radiaalsetes sihtides ühteviisi.

Võtame lisaks punktile P veel mõne teise punkti Q ja joonestame kolmnurga POQ. Et $OP' = \lambda \cdot OP$ ja $OQ' = \lambda \cdot OQ$ ning punktid O, P ja P', samuti punktid O, Q ja Q' asetsevad ühel sirgel, siis nurk $P'OQ'$ võrdub nurgaga POQ ja $\triangle P'OQ' \sim \triangle POQ$. Sellest järeldub, et

$$P'Q' = \lambda \cdot PQ.$$

Niisiis, uuritava teisenduse puhul mitte ainult radiaalselt paigutatud lõigud, vaid ka kõik teised lõigud kasvavad λ-kordseks.

Vaatleme edasi kolmnurka PQR koos tema teisendiga $P'Q'R'$. Külgede võrdelisusest järeldub kolmnurkade sarnasus ja siit edasi, et nurgad tippude P ja P', Q ja Q', R ja R' juures on vastavalt võrdsed. See tähendab, et uuritava teisenduse puhul nurgad ei muutu.

Et iga hulknurk teisendub hulknurgaks, mille nurgad on endised, küljed aga endiste külgede λ-kordsed, siis hulknurgad teisenduvad sarnasteks hulknurkadeks. Et iga kinnist joont võib kuitahes hästi lähendada hulknurgaga, siis uuritava teisenduse

puhul üldse kõik kujundid teisenduvad sarnasteks kujunditeks. Teisendust

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

nimetatakse seepärast s a r n a s u s t e i s e n d u s e k s.

Kolmnurk pindalaga $\frac{1}{2}ah_a$ teisendub kolmnurgaks pindalaga $\frac{1}{2}a'h'_a = \frac{1}{2}\lambda a \cdot \lambda h_a = \lambda^2 \cdot \frac{1}{2}ah_a$. See tähendab, et lineaarmõõtmete kasvamisel λ-kordseks kasvavad pindalad λ^2-kordseks.

Kokku võttes näeme, et

s a r n a s u s t e i s e n d u s e p u h u l

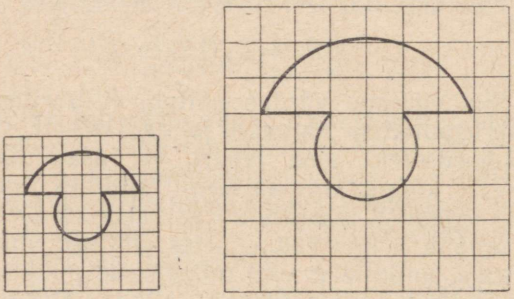
1° rööbikud lõigud ja rööbikud sirged jäävad rööbikuks;

2° lõikude pikkused kasvavad λ-kordseks;

3° nurgad jäävad muutumatuks; eriti jäävad täisnurgad täisnurkadeks ja ristuvad sirged ristuvateks;

4° kujundite pindalad kasvavad λ^2-kordseks;

5° kujundite ümberkäigu suund jääb muutumatuks.



Joon. 156.

Märgime lõpuks, et uuritav teisendus leiab rakendamist piltide käsitsi suurendamisel ja vähendamisel, mille puhul punktid kantakse ühes mastaabis joonestatud ruutvõrgust üle teises mastaabis joonestatud ruutvõrku (joon. 156). Seda teisendust saab tõlgendada ka kui m a s t a a b i t e i s e n d u s t, mis toimub ühteviisi abstsiss- ja ordinaattelje sihis.

Sarnasusteisenduse rakendusena lahendame järgmise ülesande.

Ü l e s a n n e. Näidata, et kõik risthüperboolid on üksteisega sarnased.

Kirjutame risthüperbooli võrrandi kujul

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Teisendus $x' = \frac{x}{a}$, $y' = \frac{y}{a}$ ehk $x = ax'$, $y = ay'$ viib võrrandile

$$x'^2 - y'^2 = 1.$$

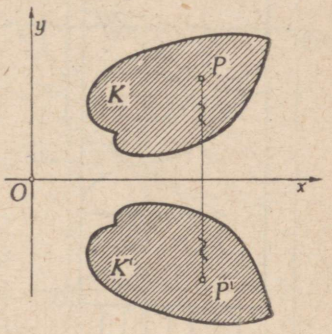
Nagu näeme, saab iga risthüperbooli sarnasusteisenduse abil teisendada hüperblooliks $x'^2 - y'^2 = 1$. Et kõik risthüperboolid on sarnased hüperblooliga $x'^2 - y'^2 = 1$, siis on nad sarnased ka üksteisega.

Peegeldusteisendus

Olgu K mingi kujund, K' selle peegelkujund abstsisstelje suhtes ning P ja P' nende kujundite kaks teineteisele vastavat punkti (joon. 157). Olgu punkti P koordinaadid x ja y, punkti P' koordinaadid vastavalt x' ja y'. Siis

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$$

Nende võrdustega määratud teisendust nimetatakse peegeldusteisenduseks.



Joon. 157.

Peegeldamisel ordinaattelje suhtes oleksid teisendusvalemid

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$$

On pikemata selge, et peegeldusteisenduse puhul

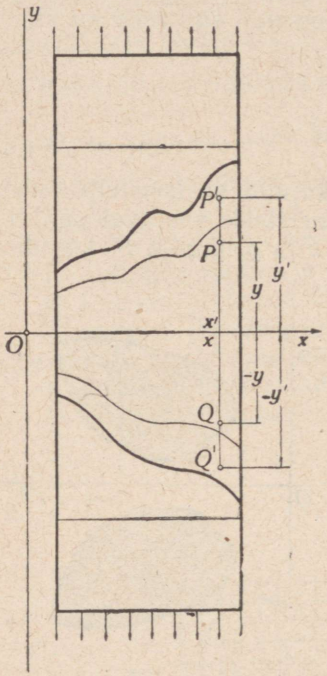
1° rööbikud lõigud ja rööbikud sirged jäävad rööbikuks;
2° lõikude pikkused jäävad muutumatuks;
3° lõikudevahelised nurgad jäävad muutumatuks; eriti jäävad täisnurgad täisnurkadeks ja ristuvad sirged ristuvateks;
4° kujundite pindalad jäävad muutumatuks;
5° kujundite ümberkäigu suund muutub vastupidiseks.

Märkus. Kõigi seni käsitletud teisenduste puhul jäävad nurgad muutumatuks. Öeldakse ka, et uuritud teisendused on isogonaalsed. Translatsiooni, rotatsiooni ja peegeldusteisenduste puhul jäävad muutumatuks ka kujundite pindalad.

Venitusteisendus

Kujutleme liikuvat tasapinda π' elastse, näiteks kummist kilena. Venitame seda tasapinda mingis ühes sihis. Ordinaattelje

võtame venituse sihis, abstsisstelje paigutame sellega risti (joon. 158). Positiivse y puhul toimugu venitus positiivses suunas, negatiivse y puhul negatiivses suunas. Abstsissteljel asetsevad punktid jäävad kohale.



Joon. 158.

Kirjeldatud teisendust nimetatakse *ühedimensiooniliseks venituseks* või, kui $\lambda < 1$, *ühedimensiooniliseks kokkusurumiseks*.

Toodud kirjeldusest on selge, et venitusteisendus, mis toimub ordinaattelje sihis, on antud valemitega

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = \lambda y. \end{cases}$$

Kordajat λ nimetatakse *venitusteguriks*. Vastavad valemid venitusteisenduse jaoks, mis toimub abstsisstelje sihis, on

$$\begin{cases} x' = \varkappa x \\ y' = y. \end{cases}$$

Ruut, mille küljed on rööbikud koordinaattelgedega, teisendub püstsihilise venitusteisenduse puhul ristkülikuks, mille lühem külg on rööbik abstsissteljega, pikem külg ordinaatteljega. Ringjoon $x^2 + y^2 = a^2$ teisendub ellipsiks võrrandiga

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\lambda^2} = a^2$$

ehk

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{\lambda^2 a^2} = 1.$$

Selle ellipsi pooltelgede suhe on λ.

Venitusteisenduse omadusi

Ühedimensioonilise venitusteisenduse tähtsaimaks omaduseks on see, et tema puhul *sirged teisenduvad jälle sir-*

geteks. Et selles veenduda, piisab märkusest, et iga lineaarne võrrand

$$ax + by + c = 0$$

teisendub jälle lineaarseks võrrandiks $ax' + b\frac{y'}{\lambda} + c = 0$ ehk

$$\lambda ax' + by' + \lambda c = 0.$$

Esimese võrrandiga määratud sirge tõus on $-\frac{a}{b}$, teise võrrandiga määratud sirge tõus $-\frac{\lambda a}{b}$ ehk $\lambda \cdot \left(-\frac{a}{b}\right)$. Seega $m' = \lambda m$.

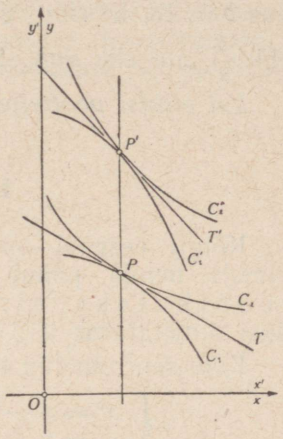
Kokkuvõttes

ühedimensioonilise venituse puhul teisenduvad sirgjooned sirgjoonteks;

ühedimensioonilise venituse puhul kasvavad sirgete tõusud venitusteguri kordseks.

Et võrdsed tõusud $m_1 = m_2$ teisenduvad venitusteisenduse puhul jälle võrdseteks tõusudeks $\lambda m_1 = \lambda m_2$, siis

ühedimensioonilise venituse puhul jäävad rööbikud sirged rööbikuteks.



Joon. 159.

Olgu C_1 ja C_2 kaks teineteist punktis P puutuvat * kõverat xy-tasapinnal (joon. 159) ning C_1' ja C_2' neile vastavad kõverad $x'y'$-tasapinnal. Kui joonte C_1 ja C_2 ühise puutuja PT tõus on m, siis joone C_1' puutuja $P'T'$ tõus punktis P' peab olema λm ja sama tõus peab olema joone C_2' puutujal punktis P'. Et joonte C_1' ja C_2' puutujail on joonte ühispunktis võrdsed tõusud, siis peavad need jooned teineteist puutuma. Niisiis:

ühedimensioonilise venituse puhul teisenduvad kaks teineteist puutuvat joont jälle kaheks teineteist puutuvaks jooneks.

Tõusu teisendusvalemist $m' = \lambda m$ järeldub, et nurgad abstsisstelje ja kaldsirgete vahel ei jää venitusteisenduse puhul muutumatuks, seega ei jää muutumatuks ka nurgad kahe kaldsirge vahel. Erandiks on ainult telgedega rööbikute haaradega täisnurgad; need nurgad jäävad venitusteisendusest puutumatuks.

Et ristkülikud, mille küljed on rööbikud telgedega, venivad venitusteisenduse puhul ordinaattelje või abstsisstelje sihis

---

* Puutumise mõiste loeme siin intuitiivselt antuks. Täpselt defineerime selle hiljem.

λ-kordseks, siis kasvab ka nende pindala λ-kordseks. See märkus jääb kehtivaks igasuguste kujundite pindalade puhul:

venitusteisenduse puhul teisendub kinnise joone poolt piiratud pindala λ-kordseks.

N ä i d e. Ringjoon

$$x^2 + y^2 = a^2$$

muundub venitusteisenduse puhul ellipsiks

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

kus $b = \lambda a$. Et ringi pindala on πa^2, siis ellipsi pindala on $\lambda \cdot \pi a^2$ ehk $\frac{b}{a} \cdot \pi a^2$ ehk πab. Niisiis:

kui ellipsi poolteljed on a ja b, siis on ellipsi pindala πab.

Lineaarsed teisendused

Kõigil eespool uuritud teisendustel on üks ühine omadus, nimelt nende puhul r ö ö b i k u d s i r g e d t e i s e n d u v a d r ö ö b i k u t e k s s i r g e t e k s. Kõiki selle omadusega teisendusi nimetatakse a f i i n s e t e k s* t e i s e n d u s t e k s.

Kõik seni uuritud teisendused

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ y' = \lambda y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -x \\ y' = y, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = \lambda y \end{cases}$$

on l i n e a a r s e d t e i s e n d u s e d: u u e d m u u t u j a d a v a l d u v a d e n d i s t e m u u t u j a t e l i n e a a r s e t e f u n k t s i o o o n i d e n a.

Muutujate üldisim lineaarne teisendus avaldub kujul

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2, \end{cases}$$

kus kordajad a_1, b_1, c_1 ja a_2, b_2, c_2 on mingisugused arvud, k u i d ü h e k i t s e n d u s e g a: nimelt, need valemid seavad igale punktile (x, y) vastavusse ü h e j a a i n u l t ü h e kindla punkti

---

* Lad. k. *affinis* — naabruses olev. Matemaatikas märgitakse sõnaga a f i i n n e geomeetriliste kujundite s u g u l u s t, mille puhul ühe kujundi paralleelseile sirgeile vastavad teise kujundi paralleelsed sirged.

(x', y'). Et ka ümberpöördult igale antud punktile (x', y') vastaks üks ja ainult üks punkt (x, y), selleks peavad x, y ja x', y' vahelised seosed olema üheselt lahenduvad x ja y suhtes. See aga, nagu teame, on nii ainult tingimusel, et determinant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Kõnesolevat determinanti nimetame teisendusdeterminandiks. Ruumi puudusel me neid üldisi lineaarseid teisendusi ei käsitle, võtame aga teatavaks nende kohta käiva lause, mis ütleb, et

iga üldist, nullist erineva determinandiga lineaarset teisendust saab teostada, otstarbekalt kombineerides translatsiooni, rotatsiooni, sarnasusteisendust, peegeldusteisendust ja venitusteisendust.

NELJAS OSA

FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE ERILIIKE EMPIIRILISED SEADUSED

PEATÜKK XV

FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS NÄHTUSKÄIKUDE KIRJELDAMISE VAHENDINA

Funktsionaalse sõltuvuse mõiste on peamiseks vahendiks, mille abil toimub meie ümber kulgeva nähtustiku teaduslik kirjeldamine: funktsionaalsed sõltuvused on nähtuskäike valitsevate seaduste matemaatilised vasted.

Nähtuskäikude üksikkülgede haaramiseks kasutatakse mitmeid otstarbekalt valitud näitajaid. Neid näitajaid kasutatakse kas ühiselt nähtuskäike määravate seadustega või neist sõltumatult, näiteks juhul, kui need seadused polegi veel leitud, viimasel juhul sageli nende seaduste avastamise vahenditena. Need näitajad on nähtuskäikude arvulised karakteristikud. Selgitame öeldut lühidalt järgmises kahes paragrahvis.

§ 50. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS KUI PROTSESSI KULGEMIST VALITSEVA SEADUSE VÄLJENDAJA

Loodusteaduse kaks ülesannet

Iga loodusteaduse haru arenemises võib eristada kaht faasi. Esimeses faasis seab teadus endale ülesandeks võimalikult täpselt ja täielikult kirjeldada olevat, see on kirjeldada meid ümbritseva maailma objekte, nii nagu nad antud hetkel meile paistavad: tähed oma heleduse, värvuse ja paigutusega taevavõlvil, maapõues leiduvad mineraalid oma reeglipäraste kristallivormidega, kümned tuhanded taimed ja loomad oma erineva välisilme ja kehaehitusega jne.

Juba pool aastatuhandet enne meie ajaarvamist õpetas kreeka mõttetark Herakleitos, et «kõik voolab». Kulus aga ligi kaks ja pool tuhat aastat, enne kui Herakleitose suur mõte leidis tunnustamist oma täies ulatuses ja kandevõimes: Karl Marx ja Friedrich Engels seadsid teesi, et maailmas eranditult kõik liigub, muutub ja areneb, kogu kommunistliku maailmavaate nurgakiviks. F. Engelsi sõnade järgi «maailmas pole midagi peale igavesti

liikuva, igavesti muutuva mateeria». See voolamine, liikumine, muutumine ja arenemine ilmneb kogu meie ümber toimuvas nähtustikus: rahetera langeb, jää sulab, vesi aurustub, taim kasvab, vili küpseb, uhtsavi sadestub jne.

Oma arenemise teises faasis seab loodusteadus endale ülesandeks võimalikult täielikult tunnetada toimuvat, see on jõuda meie ümber toimuva nähtustiku mõistmisele.

Lõigete meetod

Nähtuste kulgemist ei määra kunagi üksainus tegur, vaid alati mitu tegurit. Komeet ei liigu ainult Päikese gravitatsiooni mõjul, vaid talle mõjub ka Jupiteri ja teiste, väiksemate planeetide gravitatsioon. Samuti ei määra suhkrupeedi suhkrusisaldust ainuüksi päikesepaisteliste tundide arv vegetatsiooniperioodil, vaid ka keskmiste päevatemperatuuride summa ja sademete hulk vegetatsiooniperioodil, külvatud keemilise väetise hulk, umbrohutõrje ulatus jne., jne. Niisuguse keeruka tegurite põimiku mõju uurimiseks on meil ainult üks tee, mille näitas juba XIII sajandil suur inglise filosoof Roger Bacon: loodust tuleb uurida teda setseerides *. Meie esimesele näitele rakendatuna tähendab see, et komeedi liikumist tuleb (teoreetiliselt) uurida kord eeldusel, et teda mõjutab vaid Päike üksi, siis edasi, et teda mõjutab vaid Jupiter üksi, siis edasi, et teda mõjutab Saturn üksi jne. Meie teise näite puhul tähendab see, et suhkrupeedi suhkrusisaldust tuleb (katseliselt) uurida, vaadeldes seda sõltuvuses üksi päikesepaisteliste tundide arvust vegetatsiooniperioodil, kõigi teiste tingimuste muutumatuks jäädes; teine kord tuleb seda vaadelda sõltuvuses üksi keskmiste päevatemperatuuride summast, kõigi teiste tingimuste muutumatuks jäädes jne. Sel viisil taandame enda ümber toimuvate nähtuste uurimise üksikprotsesside vaatlemisele, mille kulgemist saab kirjeldada kui ühe muutuja muutumist teise muutuja taustal.

Protsessi kulgemist valitsev seadus

Protsessid, mille kirjeldamiseks piisab kahest muutujast, on näiteks uue tähe heleduse h muutumine aja t muutumisel, turba küttevääruse v muutumine turba niiskuse n muutumisel, vere suhkrusisalduse s muutumine veres leiduva insuliini ** hulga

* Lad. k. *sectio* — osadeks lõikamine, lahkamine.

** Insuliin on kõhunäärme sisenõre. Tema puudumisel ei saa keha rakud toituda veresuhkrust.

i muutumisel jne. Nende protsesside kulgemine peegeldub vastavates vaatlusandmete protokollides:

t	h
t_1	h_1
t_2	h_2
t_3	h_3
.	.
.	.
.	.

n	v
n_1	v_1
n_2	v_2
n_3	v_3
.	.
.	.
.	.

i	s
i_1	s_1
i_2	s_2
i_3	s_3
.	.
.	.
.	.

Need protokollid näitavad, et igale kindlale esimeses veerus märgitud suuruse väärtusele vastab sellele omane, selle juurde kuuluv kindel teises veerus märgitud suuruse väärtus. Me oletame, et sama on kehtiv ka nende t väärtuste, n väärtuste ja i väärtuste kohta, mida tabelis pole märgitud, kuid mis kuuluvad vaatluspiirkonda. Seega h on t funktsioon, v on n funktsioon ja s on i funktsioon ehk, sümboolses kirjutusviisis,

$$h = f(t), \qquad v = \varphi(n), \qquad s = F(i).$$

Funktsionaalses seoses muutujate t ja h vahel, n ja v vahel, i ja s vahel peegelduvadki seadused, mis valitsevad kolme vaadeldava protsessi kulgemist.

Nagu näeme, on meil iga protsessi puhul tegemist kahe suuruse seotud muutumisega; seejuures ühe suuruse — argumendi — muutumine on taustaks, millel vaadeldakse teise suuruse — funktsiooni — käiku. Mõnel juhul võib tekkida vajadus tausta vahetada. Näiteks võib üks kord vaadelda antud kohas õhurõhu muutumist aja muutumisel, teine kord õhurõhu muutumist kõrguse muutumisel. Esimene kord vaatleme nähtuse kulgemist ajalises, teine kord ruumilises lõikes.

Eespool toodud näidetes oli protsessi kulgemist valitsev seadus antud argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvate väärtuste tabeli abil. Seadust võib aga anda ka valemi kujul. Gaasi ruumala v muutumist välisrõhu p muutumisel näiteks valitseb seadus

$$v = \frac{const}{p};$$

varda pikkuse l muutumist temperatuuri t muutumisel valitseb seadus

$$l = l_0(1 + \alpha t),$$

kus l_0 on varda pikkus temperatuuril 0° ja α on joonpaisumis-

koefitsient; valguskiire murdumisnurga r muutumist langemisnurga i muutumisel valitseb seadus

$$\sin r = n \cdot \sin i,$$

kus n on murdumisnäitaja valguskiire ülemineku puhul ühest keskkonnast teise.

Seadust võib anda ka funktsiooni skaala või graafiku abil.

Ei ole oluline, missuguste vahendite abil loodusseadused antakse: kas väärtuste tabeli, valemi, skaala või graafiku kujul; see pole sisuline, vaid tehniline küsimus. Ent ükskõik missugust neist välistest vahenditest me kasutame, keel, milles need seadused avalduvad, on ikka matemaatika keel, täpsemalt:

keel, milles avalduvad loodusseadused, on funktsionaalsete sõltuvuste keel.

Vaatlusandmete graafiline tasandamine

Andmed seaduste tuletamiseks saadakse katse ja vaatluse teel. Mõõdetakse ja kantakse vaatlusprotokolli kogumik x ja y teineteisele vastavaid väärtusi. Vaatlusprotokoll esineb tavaliselt tabeli kujul:

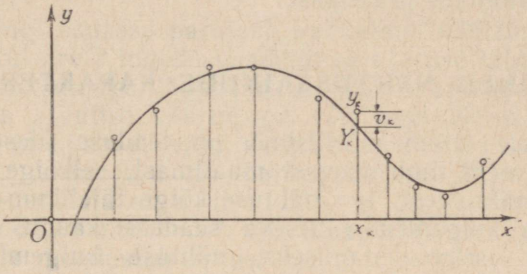
x	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n	...

Niisugune protokoll annab otsitava seose $y = f(x)$ tabellaarsel kujul.

Kujutame arvupaarid graafiliselt xy-tasapinna punktidena. Võib juhtuda, et need punktid asetsevad korrapäraselt, nii et neist saab vaevata läbi tõmmata mingi joone, näiteks sirgjoone, ringjoone kaare või mõne teise pideva, sujuva, võimalikult lihtsa kõvera. See joon on siis funktsiooni $y = f(x)$ käigujooneks ja ühtlasi otsitava seaduse graafiliseks väljendajaks.

Harilikult aga on punktide (x, y) asetus veidi korrapäratu: näib, nagu oleks võimalik nähtuskäigu üldpilti õigesti edasi anda mõne lihtsa joone abil, kuid punktid (x, y) paiknevad kord pisut ülalpool seda joont, kord temal, kord temast veidi allpool. Me oletame tavaliselt, et ka niisugusel korral valitsevad nähtuskäike lihtsad seadused ja seepärast nende graafilised vasted on lihtsad kõverad. Punktide (x, y) asetuse väikesi korrapäratusi seletame tõsiasjaga, et nii abstsissi kui ka ordinaadi väärtused on mõõtmistulemused ja kannavad endas juhuslikest tegureist tingitud vaatlusvigu, mille tõttu punktide (x, y)

rida ei anna nähtuse tõelise käigu pilti. Et saada kujutlust nähtuse tõelisest kulgemisest, tõmbame joone mitte läbi kõigi punktide, vaid osalt läbi punktide, osalt neist pisut kõrvale kaldudes, kuid ikka nii, et joon tuleks hästi lihtne ja sujuv. Niisugust joont loeme siis otsitava seaduse graafiliseks vasteks (joon. 160). Kui nähtuskäiku kujutav kõver on joonestatud, saame tema abil määrata katsevead. Tõepoolest, väärtusele x_k kui abstsissile vastab joonisel ühelt poolt mõõtmistulemust kujutav ordinaat y_k, teiselt poolt aga kõvera ordinaat Y_k. Vahe $Y_k - y_k$ kujutab katseviga v_k.



Joon. 160.

Ordinaati Y_k loeme y tõenäoliseks väärtuseks, mis tegelikult vastab antud argumendi väärtusele x_k. Paigutades kõikide katseliselt saadud y väärtuste asemele nende tõenäolised väärtused, saame tasandatud vaatlusandmete tabeli:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n	...
Y	Y_1	Y_2	Y_3	...	Y_n	...

Eespool kirjeldatud võtet nimetatakse vaatlusandmete graafiliseks tasandamiseks.

Graafiline interpolatsioon

Ükski vaatlusandmete tabel ei anna nähtuskäigust täielikku pilti, vaid ainult nii-öelda rea «momentülesvõtteid». Komeedi asukohta taevavõlvil näiteks saab määrata mõned korrad ööpäeva kohta, suhkrusisaldust haige veres määratakse võib-olla 3 päeva tagant jne.

Üks sagedamini esinev ja kiiret lahendamist nõudev küsimus on järgmine: on saadud vaatlusandmete tabel väärtuspaaridega (x, y); on ette antud kindel suuruse x väärtus, mida tabelis ei leidu, sest ta seisab kahe tabelis märgitud x väärtuse vahel; kui suur y sellele x väärtusele vastab?

Kui nähtuskäiku kujutav kõver on juba joonestatud, on sellele küsimusele kerge vastust saada: märgime abstsisslõigu x ja mõõdame sellele vastava ordinaatlõigu y. Praegu kirjeldatud võtet y määramiseks antud x väärtuste järgi nimetatakse graafiliseks interpolatsiooniks*. Võte leiab laialdast kasutamist laboratoorses praktikas.

§ 51. MÕNED NÄHTUSKÄIKUDE KARAKTERISTIKUD

Nagu juba varem märkisime, on teaduse ülesandeks anda tõetruu pilt meid ümbritsevast maailmast, eelkõige meie ümber kulgevatest nähtustest. Iga nähtuse kõige täielikum kirjeldamine toimub tema kulgemist valitseva seaduse kaudu. Nähtuskäigu üksikkülgede iseloomustamiseks, nähtuse kulgemise omapära väljaselgitamiseks, eriti aga üheliigiliste nähtuste omavaheliseks võrdlemiseks on loodud mitmeid karakteristikuid ehk näitajaid. Nii räägime Eesti NSV külviplaani täitmise protsendist, Hiina Rahvavabariigi rahvaarvu iibest (iive on promillides avaldatud aastane rahvaarvu juurdekasv), Tallinna linna hoonestatud pinna kasvamise kiirusest, Nõukogude Liidu rasketööstuse kasvamise tempost.

Mitmed kõrgema matemaatika mõisted on oma loomult funktsioonide käitumist karakteriseerivad näitajad. Nad esinevad matemaatikas sageli samade nimetuste all nagu igapäevases keelepruugiski, näiteks juurdekasv, kiirus. Teistel juhtudel kasutatakse oskussõnu; näiteks öeldakse funktsiooni muutumise kiiruse asemel ka funktsiooni tuletis. Peatume lühidalt mõnede lihtsate nähtuskäigu karakteristikute juures.

Juurdekasv

Üheks lihtsamaks ja ühtlasi tähtsamaks näitajaks nähtuskäikude kirjeldamisel on juurdekasv ehk muut. Nii räägime NSV Liidu rahvastiku juurdekasvust ajavahemikus Suurest Sotsialistlikust Oktoobrirevolutsioonist käesoleva ajani, elamispinna juurdekasvust sõjajärgsetel aastatel 1945—1948, riiklike elektrijaamade võimsuse juurdekasvust viiendal viisaastakul jne.

* Lad. k. *interpolatio* — vahelepaigutamine.

Tava kohaselt tähistatakse suuruse s juurdekasvu sümboliga Δs. Juurdekasvu otsene arvutamine toimub lahutamise teel. Kui suurusel s oli enne väärtus s_1, pärast väärtus s_2, siis $\Delta s = s_2 - s_1$. Arvu s_1 nimetame seejuures suuruse lähteväärtuseks, arvu s_2 suuruse lõppväärtuseks. Et Δs on suuruse s kahe järjestikuse väärtuse vahe, siis nimetatakse teda juurdekasvu asemel mõnikord ka vaheks.

Juurdekasvu protsent ja promill

Olgu s mingi suuruse parajasti vaadeldud väärtus ja Δs selle juurdekasv. Kui arv s lugeda vaadeldava suuruse lähteväärtuseks, siis $s + \Delta s$ on suuruse lõppväärtus. Sageli antakse juurdekasv Δs mitte oma arvulise väärtusega või, nagu öeldakse, absoluutse näitajana, vaid suhtelise näitajana, mis iseloomustab juurdekasvu Δs mahtu suuruse lähteväärtusega s võrreldes. See näitaja on nimeta arv. Ta avaldatakse sajandikes ehk protsentides* või tuhandikes ehk promillides*. Arv Δs moodustab arvust s

$$\frac{\Delta s}{s} \cdot 100 \text{ protsenti ehk } \frac{\Delta s}{s} \cdot 1000 \text{ promilli,}$$

sümboleis

$$\frac{\Delta s}{s} \cdot 100\% \quad \text{ehk} \quad \frac{\Delta s}{s} \cdot 1000‰.$$

Argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvad juurdekasvud

Sageli on otstarbekohane vaadelda koos argumendi ja funktsiooni juurdekasve. Olgu mõni nähtuskäik antud oma seadusega

$$u = u(t).$$

Vastaku argumendi väärtustele t_1 ja t_2 funktsiooni väärtused u_1 ja u_2 (joon. 161). Siis argumendi kasvamisel $t_2 - t_1$ võrra funktsioon kasvab $u_2 - u_1$ võrra. Tähistame juurdekasve lühidalt sümboliga Δ, nii et $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta u = u_2 - u_1$. Siis

argumendi juurdekasvule Δt

vastab

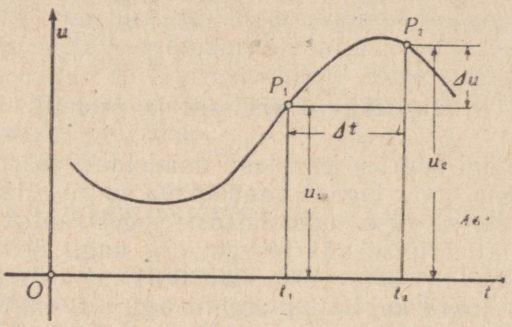
funktsiooni juurdekasv Δu.

Märgime, et argumendi ja funktsiooni lähteväärtuste t ja u ning

* Lad. k. *pro* — kohta, *centum* — sada, *mille* — tuhat.

juurdekasvude Δt ja Δu puhul argumendi ja funktsiooni lõppväärtused avalduvad kujul $t + \Delta t$ ja $u + \Delta u$.

Kahest kokkukuuluvast, teineteisele vastavast argumendi ja funktsiooni juurdekasvust tuletatakse keskmiseks kasvamiskiiruseks nimetatav näitaja, mille vaatlemisele kohe



Joon. 161.

asume. Juurdekasv ehk muut võib olla ka negatiivne. Sel puhul tuleks rääkida kahanemiskiirusest. Mõlemaid juhte hõlmab sõna muutumiskiirus.

Keskmine kasvamiskiirus

Tähendagu t aega ja u mingit ajaliselt muutuvat suurust. Olgu $u = f(t)$ seadus, mis valitseb vaadeldavat nähtuskäiku. Fikseerime mõttes mingi t väärtuse. Vastaku sellele sõltuva muutuja väärtus u. Olgu Δt aja t juurdekasv; aja Δt jooksul muutub suurus u Δu võrra. Niisiis vastab argumendi juurdekasvule Δt funktsiooni juurdekasv Δu. Küsime, kui suur funktsiooni juurdekasv tuleb vahemikus Δt keskmiselt ajaühiku kohta. Näeme, et

ajavahemiku Δt kestel u muutub Δu võrra,

„ 1 „ u „ keskmiselt $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ võrra.

See ajaühiku kohta arvutatud u juurdekasv kujutabki keskmist kiirust, millega u muutub ajavahemikus Δt. Niisiis

seose $u = f(t)$ puhul näitab suhe $\frac{\Delta u}{\Delta t}$ keskmist kiirust, millega protsess kulgeb ajavahemikus Δt.

Näide 1. Auto juhipuldi kellalt ja kilomeetrilugejalt saadi järgmised andmed:

aeg	läbisõidetud tee pikkus, km
16.48	22 746
17.24	22 770

Seega aja juurdekasv on 36 minutit; sellele ajavahemikule vastav läbisõidetud tee pikkuse juurdekasv on 24 km, nii et auto liikus keskmise kiirusega $\frac{24}{36}$ km/min, mis ümberarvutamisel annab $\frac{24}{36} \cdot 60$ km/h ehk 40 km/h.

Näide 2. Vaba langemine tühjuses toimub seaduse

$$s = 4{,}9t^2$$

järgi, kus t tähendab aega sekundites ja s käidud tee pikkust sentimeetrites. Küsime, kui pika tee käib langev keha ära $(n+1)$-nda langemissekundi jooksul ja kui suure keskmise kiirusega toimub sel sekundil liikumine.

Argumendi lähteväärtus on n, lõppväärtus $n+1$.

Väärtusele $t_1 = n$ vastab kaugus $s_1 = 4{,}9n^2$,

„ $t_2 = n+1$ „ „ $s_2 = 4{,}9(n+1)^2$.

Siit

$$\Delta t = t_2 - t_1 = (n+1) - n \text{ ja } \Delta s = s_2 - s_1 = 4{,}9(n+1)^2 - 4{,}9n^2$$

ehk

$\Delta t = 1$ ja sellele vastav $\Delta s = 4{,}9(2n+1)$,

nii et ka

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 4{,}9(2n+1).$$

Keskmine kasvamistempo

Tähendagu jälle t aega, u mingit ajaliselt muutuvat suurust ja $u = f(t)$ seadust, mis valitseb vaadeldavat nähtuskäiku.

Me nägime, et ajavahemikus Δt muutub suurus u keskmise kiirusega $\frac{\Delta u}{\Delta t}$. Järelikult suuruse u ühik muutub keskmise kiirusega $\frac{\frac{\Delta u}{\Delta t}}{u}$. Viimast suhet nimetatakse suuruse u keskmiseks kasvamistempoks ajavahemikus Δt. Niisiis

suuruse u keskmine kasvamistempo on näitaja, mis iseloomustab suuruse u ühiku muutumise kiirust.

Näide. Ajavahemikus 12 päeva kasvas üks katsetaim, mille algpikkus oli 18 cm, 24 cm pikkuseks, teine katsetaim, mille algpikkus oli 50 cm, 56 cm pikkuseks. Nende taimede keskmised kasvamiskiirused on vastavalt

$$\frac{24-18}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\text{ cm/päev ja }\frac{56-50}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}\text{ cm/päev.}$$

Nagu näeme, on mõlema taime kasvamiskiirused võrdsed. Hoopis teistsugune pilt avaneb kasvamistempode vaatlemisel:

esimese taime puhul kasvab pikkusühik päevas $\frac{1}{36}$ võrra,

teise „ „ „ „ „ $\frac{1}{100}$ „ .

Seega teise taime kasvamistempo on ümmarguselt 3 korda väiksem kui esimese taime kasvamistempo.

Siin käsitletud juurdekasvu, juurdekasvu protsendi, keskmise kasvamiskiiruse ja keskmise kasvamistempo mõisted leiavad edaspidi laialdast kasutamist. Näitajate kiirus ja tempo mõtte täpsustamine viib meid hiljem tuletise ja logaritmilise tuletise mõistetele, mis on kõrgemas matemaatikas tsentraalse tähtsusega.

PEATÜKK XVI

FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE TÄHTSAMAID ERILIIKE

Enamik senituntud nähtusi kulgeb seaduste järgi, mida on õnnestunud haarata väheste funktsionaalse sõltuvuse eriliikidega. Vaatleme nüüd neid funktsionaalse sõltuvuse eriliike üksikasjalikumalt. Eelkõige peatume võrdelisel sõltuvusel kui kõige lihtsamal.

§ 52. VÕRDELINE SÕLTUVUS

Võrdelise sõltuvuse definitsioon

Ruudu külje kasvamisel 2, 3, 4, ... korda kasvab sama arv korda ka tema ümbermõõt; terasplaadi kaalu kasvamisel 2, 3, 4, ... korda kasvab sama arv korda ka tema hind; hõõglambi põlemise aja kasvamisel 2, 3, 4, ... korda kasvab sama arv korda ka kuluv vooluhulk. Me ütleme, et ruudu ümbermõõt muutub võrdeliselt ruudu küljega, terasplaadi hind võrdeliselt plaadi kaaluga, hõõglambis kuluv vooluhulk võrdeliselt põlemisajaga. Üldiselt:

üks suurus sõltub teisest võrdeliselt, kui teise suuruse kasvamisel mingi arv korda ka esimene kasvab sama arv korda.

Muutujate võrdelise sõltuvuse vastastikkus

Sõltugu suurus y suurusest x võrdeliselt. Olgu x_1 ja x_2 kaks argumendi väärtust ning y_1 ja y_2 neile vastavad funktsiooni väärtused. Üleminekul esimeselt väärtuselt teisele kasvab argument $x_2 : x_1$ korda, funktsioon aga $y_2 : y_1$ korda. Et suurus y sõltub suurusest x võrdeliselt, siis peavad need suhted olema võrdsed, seega

$$y_2 : y_1 = x_2 : x_1.$$

Lugedes sama võrdust paremalt vasakule, näeme, et ka suurus x sõltub suurusest y võrdeliselt, teiste sõnadega,

kahe suuruse võrdelisus on nende suuruste vastastikune omadus.

Seepärast võime rääkida muutujatest x ja y kui teineteisest võrdeliselt sõltuvatest suurustest.

Teineteisest võrdeliselt sõltuvateks suurusteks on peale eespool nimetatute ka näiteks ringi läbimõõt ja ümbermõõt, ühtlaselt liikuva keha liikumise aeg ja selle aja jooksul käidud tee pikkus, hoiukassas seisev hoiusumma ja sellelt saadav aastaintress, ühele ja samale kaarele toetuv ringi kesknurk ja piirdenurk, koha sügavus veepinnast ja vee rõhk selles kohas.

Võrdelise sõltuvuse tunnus

Nagu eelmise punkti algul nägime, kehtib teineteisest võrdeliselt sõltuvate suuruste x ja y puhul võrdelisuse definitsioonist järelduv seos

$$y_2 : y_1 = x_2 : x_1.$$

Keskmiste liikmete vahetamisel saab seda seost kirjutada kujul

$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2$$

ehk, üldistatult,

$$y_1 : x_1 = y_2 : x_2 = y_3 : x_3 = \ldots$$

See annab võrdelise sõltuvuse tunnuse, mida võib sõnastada järgmiselt:

võrdelise sõltuvuse puhul on funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste suhted võrdsed.

Lugedes toodud mõttekäiku vastupidises suunas, jõuame tagasi lähtevõrde $y_2 : y_1 = x_2 : x_1$ juurde. See tähendab, et praegu sõnastatud võrdelise sõltuvuse tunnus on samaväärne algul antud võrdelise sõltuvuse definitsiooniga.

Võrdelise sõltuvuse väljendusvalem

Eespool toodud võrdelise sõltuvuse tunnust võib sõnastada ka kujul:

võrdelise sõltuvuse puhul on funktsiooni ja argumendi vastavate väärtuste suhe konstantne.

Seda konstantset suhte väärtust nimetame võrdeteguriks. Tähistame ta siin tähega a.

Olgu nüüd x mingi argumendi väärtus ja tähendagu y sellele vastavat argumendist võrdeliselt sõltuva funktsiooni väärtust. Siis öeldu järgi $y : x = a$ ehk $y = ax$. Seega

kui suurus y muutub võrdeliselt suurusega x, siis $y = ax$, *kus a on konstantne tegur.*

See tähendab, et võrdelise sõltuvuse korral avaldub funktsioon argumendi kordsena, kusjuures argumendi kordajaks on võrdetegur.

Kui anname argumendile väärtuse $x = 1$, siis $y = a$. Seega *võrdelise sõltuvuse korral kujutab võrdetegur funktsiooni väärtust, mis vastab argumendi väärtusele* 1.

Kui näiteks argumendiks on kullakangi kaal, funktsiooniks selle kangi väärtus, siis võrdeteguriks on kulla kaaluühiku hind; kui argumendiks on ühtlase liikumise aeg, funktsiooniks selle aja jooksul käidud tee pikkus, siis võrdeteguriks on ajaühiku kestel käidud tee pikkus, see tähendab liikumise kiirus.

Valemis $y = ax$ esineva võrdeteguri määramiseks pole tarvis teada rohkem kui ühte paari kokkukuuluvaid argumendi ja funktsiooni väärtusi: kui see paar on (x^*, y^*), siis $y^* = ax^*$ ja võrdetegur $a = y^* : x^*$. Näeme, et

võrdelise sõltuvusega haaratava nähtuskäigu määramiseks piisab ühestainsast vaatlusest.

Näide. Nii Celsiuse kui Réaumuri termomeetrites seisab jää sulamisel elavhõbe nullkriipsul. Vee keemisel näitab Celsiuse termomeeter 100°, Réaumuri oma aga 80°. Olgu nüüd õhu, vannivee või mõne muu keskkonna temperatuur esimese ja teise skaala järgi vastavalt C° ja R°. Et temperatuurid mõlemal skaalal kasvavad võrdeliselt, siis $R : C = 80 : 100$ ja järelikult võrdetegur (R avaldamisel C kaudu) on $8 : 10$ ehk $4 : 5$, nii et

$$R = \frac{4}{5} C.$$

See on valem Celsiuse kraadide ümberarvutamiseks Réaumuri kraadideks. Võrdetegur $\frac{4}{5}$ näitab, et Celsiuse skaala ühele kraadile vastab Réaumuri skaala $\frac{4}{5}$ kraadi. Valem, mis võimaldab Réaumuri skaala kraade ümber arvutada Celsiuse skaala kraadideks, on

$$C = \frac{5}{4} R.$$

Võrdeteguriks on siin $\frac{5}{4}$ — endise võrdeteguri pöördväärtus.

Võrdelise sõltuvuse mõiste laiendamine

Kõigis eespool toodud arutlustes võrdelise sõltuvuse kohta eeldasime, et argument ja funktsioon on positiivsed. Seega oli siis ka võrdetegur positiivne. Laiendame nüüd võrdelise sõltuvuse mõistet ka juhule, kus seoses $y = ax$ kordaja a on negatiivne:

suurusi x ja y nimetatakse teineteisest võrdeliselt sõltuvateks, kui

$$y = ax,$$

kus a on mingi nullist erinev konstant.

Võrdelise sõltuvuse geomeetriline vaste

Kaht teineteisest võrdeliselt sõltuvat suurust x ja y seob võrdus $y = ax$, kus a on mingi nullist erinev konstant. Vaadeldes seda seost kui kahe muutujaga võrrandit, järeldame eespool sirgjoone käsitlemisel leitust, et

võrdelise sõltuvuse $y = ax$ geomeetriliseks vasteks xy-tasapinnal on algpunkti läbiv sirge tõusuga a.

Nagu näeme,

võrdetegur a seoses $y = ax$ kujutub graafiliselt funktsiooni y käigusirge tõusunurga tangensina.

Vaatleme öeldu illustreerimiseks üht tehnikateaduste tähtsamat seadust — Hooke'i* seadust.

Olgu tegemist elastse vardaga, mille pikkus on l cm ja ristlõike pindala F cm^2. Koormame varrast venitava tungiga P kg. Venigu varras seejuures λ cm võrra. Ristlõike pindala ühiku kohta tulev koormus $\sigma = P : F$ annab varda materjalis valitseva pinge, suhe $\varepsilon = \lambda : l$ annab varda relatiivse pikenemise. Hooke'i seaduse järgi on pinge ja relatiivne pikenemine võrdelised suurused. Seepärast

$$\sigma = E\varepsilon,$$

kus E on elastsusmooduliks nimetatav võrdetegur. Varda relatiivne pikenemine ε venitava pinge σ kasvamisel kujutub $\varepsilon\sigma$-tasapinnas sirgjoonena (joon. 162). Selle sirge tõusunurga tangens kujutab elastsusmoodulit. Heal terasel on $E = 2 \cdot 10^6$ kG/cm^2.

Määrame varda relatiivse pikenemise λ koormuse P funktsioonina. Hooke'i seadusest saame, et $\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma$ ehk $\frac{\lambda}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{P}{F}$ ehk

---

* Robert Hooke (1635—1703) — inglise füüsik. Tema nime kandev seadus on aluseks, millele tugineb enamik tehnilise mehaanika arvutusi.

$$\lambda = \frac{l}{EF} \cdot P.$$

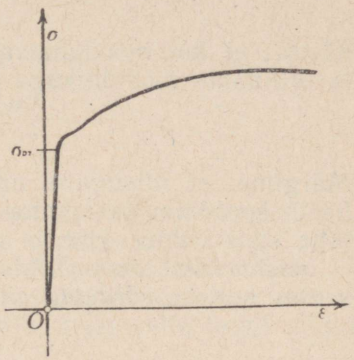
Varda lähtepikkus l ja ristlõike pindala F on vardale omased geomeetrilised konstandid, elastsusmoodul E on varda materjali konstant. Seega on jagatis $l : EF$ antud varda puhul konstantne. Tähistades teda tähega a, saame

$$\lambda = aP;$$

see tähendab, et varda pikenemine on võrdeline venitava tungiga ehk, Hooke'i sõnastuses,

nagu venitus, nii tung.

Seadus $\sigma = E\varepsilon$ ehk sellega samaväärne seadus $\lambda = aP$ kehtib ainult seni, kuni pinge jääb allapoole proportsionaalsuse piiri. Joonisel 162 on see piir märgitud sümboliga σ_{pr}. Proportsionaalsuse piiri ületamisel muutub varda materjal plastiliseks ja hakkab aeglaselt venima nagu sitke taigen. Sel puhul tekkivad deformatsioonid ei kao jäägitult varda vabastamisel koormusest, nagu see toimub, kui pinge jääb vahemikku $O \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{pr}$. Ehitiste kandesõrestikud ja masinate detailid peavad koormuse all töötama ohutult. Ühtlasi peab olema välditud nende kuju märgatav muutumine koormamisel ja deformatsiooni püsimajäämine koormusest vabastamisel. Seetõttu projekteeritakse kõik ehitiste ja masinate detailid nii, et neis tekkivad pinged ei ületaks proportsionaalsuse piiri. Seda nõuet väljendatakse teisiti ka sõnadega: «Detailid tuleb projekteerida nii, et pinged jääksid võrdelisuse seaduse kehtivuse piiridesse.»



Joon. 162.

Võrdetegur ja mõõtühikud

Sõltugu suurused x ja y teineteisest võrdeliselt, nii et $y = ax$. Vähendame suuruse x mõõtühikut λ korda, suuruse y mõõtühikut μ korda. Siis mõõtarv x asendub arvuga $X = \lambda x$, mõõtarv y vastavalt arvuga $Y = \mu y$ ja seos $y = ax$ seosega $Y = a\frac{\mu}{\lambda}X$. Me näeme, et üleminekul uuele mõõtude süsteemile asendub suurustevaheline võrdeline seos jällegi võrdelise seosega:

kahe suuruse võrdelisus on invariantne mõõtude teisendamise suhtes.

Teoreetilistes küsimustes võib võrdetegur olla ükskõik missugune reaalarv: ruudu diagonaal näiteks on külje $\sqrt{2}$-kordne. Kõigil juhtudel, kus võrdelisele sõltuvusele on jõutud mõõtmistulemuste varal, on võrdetegur a mingi (liht- või liig-) murd, näiteks $\frac{\beta}{\alpha}$. Võrdeline sõltuvus avaldub siis kujul $y = \frac{\beta}{\alpha} x$. Mõõtude kohase valikuga on alati võimalik taandada võrdetegurit arvule 1. Tõepoolest, kirjutades vaadeldavat seost kujul

$$\frac{y}{\beta} = \frac{x}{\alpha},$$

näeme, et kui mõõdame abstsisse mõõtühikuga α endist ühikut ja ordinaate mõõtühikuga β endist ühikut, siis esineb seos kujul

$$Y = X.$$

Märgime, et niisugune mõõtude teisendus tähendab geomeetriliselt koordinaattasapinna venitust või kokkusurumist abstsisstelje sihis suhtes $1 : \alpha$ ja ordinaattelje sihis suhtes $1 : \beta$. Niisiis:

mõõdustiku otstarbeka valikuga on alati võimalik taandada seoses $y = ax$ võrdetegurit arvule 1.

Võrdelisus kahe sõltumatu muutujaga

Sagedasti tekib vajadus vaadelda suurusi, mis on üheaegselt võrdelised kahe (teineteisest sõltumatu) suurusega. Kolmnurga pindala näiteks on võrdeline kolmnurga alusega ja samal ajal ka kolmnurga kõrgusega, tõstmisel tehtav töö on võrdeline tõstetava eseme kaaluga ja samal ajal ka tõstekõrgusega. Üldjuhu käsitlemiseks märgime argumente tähtedega u ja v ja nendest sõltuvat suurust — funktsiooni — tähega w. Siis kehtib lause:

kui suurus w on üheaegselt võrdeline nii suurusega u kui ka suurusega v, siis on ta võrdeline nende suuruste korrutisega.

Et selles veenduda, anname argumendile v suvalise konstantse väärtuse. Siis eelduse järgi

$$w(u, v)\Big|_{v=const} = a_1 u,$$

kus a_1 on konstantne võrdetegur. Kui nüüd moodustame suhte

$$\frac{w(u, v)\Big|_{v=const}}{a_1 u},$$

siis on see argumendi iga väärtuse puhul 1, seega *argumendist u sõltumatu*. Et v väärtuseks võetud konstant oli *suvaline*, siis pole märge $v = const$ vajalik ja argumendi v igal väärtusel suhe

$$\frac{w(u, v)}{a_1 u}$$

on argumendist u sõltumatu. Ta sõltub siis ainult argumendist v ja see sõltuvus võib eelduse kohaselt olla ainult võrdeline sõltuvus. Järelikult

$$\frac{w(u, v)}{a_1 u} = a_2 v,$$

kus a_2 on konstantne võrdetegur. Seega

$$w(u, v) = a_1 a_2 uv$$

ehk, lühemalt,

$$w = a \cdot uv,$$

kus a, mis asendab korrutist $a_1 a_2$, on konstantne võrdetegur.

Märgime, et u, v ja w mõõtühikute otstarbeka valikuga saab ka siin võrdeteguri arvulise väärtuse alati taandada arvule 1.

Näide. Newtoni II seaduse järgi on tung F võrdeline *massiga* m ja *kiirendusega* w, mille mass selle tungi mõjul omandab. Seega

$$F = Cmw,$$

kus C tähendab võrdetegurit. Valime tungi ühikuks ühe *düüni*, see on tungi, mis rakendatuna massile 1 gramm kutsub esile kiirenduse 1 cm/sec². Et seos $F = Cmw$ peab kehtima alati, siis praegu nimetatud massi, kiirenduse ja tungi ühikute puhul

$$1 = C \cdot 1 \cdot 1,$$

kust $C = 1$. Nimetatud mõõdustiku kasutamisel avaldub Newtoni II seadus seega kujul

$$F = mw.$$

§ 53. LINEAARNE SÕLTUVUS

Lineaarse sõltuvuse definitsioon

Vee rõhk meres, järves või kaevus kasvab võrdeliselt *sügavusega*. Kui vee rõhku tähistame tähega p, sügavust tähega h, siis

$$p = ch,$$

kus c on konstant. Sügavusel h valitsev kogurõhk r koosneb kahest osast: vee rõhust p ja vee kaudu kõikjale edasi kanduvast atmosfääri rõhust b. Niisiis $r = p + b$ ehk

$$r = ch + b.$$

Pikkus L, mille varras omandab venitava tungi P mõjul, koosneb kahest osast: varda lähtepikkusest l ja varda venitusest aP; seega

$$L = aP + l.$$

Avaldisi nagu $ch + b$ ja $aP + l$ nimetatakse vastavalt muutujate h ja P lineaarbinoomideks, funktsioone $r = ch + b$ ja $L = aP + l$ vastavalt oma argumentide h ja P lineaarfunktsioonideks.

Suurust y nimetame argumendi x lineaarfunktsiooniks, kui ta avaldub argumendi lineaarbinoomina.

Argumendi x lineaarfunktsiooni y kirjutame üldjuhul kujul

$$y = ax + b,$$

kus a ja b on mingisugused konstandid ja $a \neq 0$.

Lineaarse sõltuvuse omadusi

Avaldades võrdusest $y = ax + b$ muutuja x, saame

$$x = \frac{1}{a} y - \frac{b}{a}$$

ehk, tähistades konstante teisiti,

$$x = ay + \beta.$$

Viimane avaldis on suuruse y lineaarbinoom. Seega: kui suurus y sõltub suurusest x lineaarselt, siis sõltub ka suurus x suurusest y lineaarselt. See tähendab, et lineaarne sõltuvus kahe suuruse vahel on nende suuruste vastastikune omadus; seepärast võime edaspidi lineaarse sõltuvuse puhul ikka rääkida teineteisest lineaarselt sõltuvatest suurustest.

Lineaarselt sõltuvad teineteisest näiteks raudteerööpme pikkus ja temperatuur; hoiukassas hoiul seisev rahasumma ja hoiuaeg; ülesvisatud kivi kiirus ja liikumisaeg. Lineaarselt sõltuvad teineteisest ka iga kaks suurust, millel on kas konstantne summa või konstantne vahe. Tähistades neid suurusi tähtedega x ja y, saame esimesel juhul, et $x + y = const$, teisel juhul, et $x - y = const$. Teisiti kirjutatult annab see vastavalt $y = c - x$ ja $y = c + x$. Kummalgi juhul on tegemist lineaarse sõltuvusega.

Toome mõned näited.

Näide 1. Täisnurkses kolmnurgas on teravnurkade α ja β summa alati võrdne 90°-ga: $\alpha + \beta = 90°$, seega $\beta = 90° - \alpha$ ja nurk β on nurga α lineaarfunktsioon.

Näide 2. Kui isa vanuse märgime tähega i, poja vanuse tähega p ja isa vanuse poja sündimisel tähega s, siis on edaspidi alati $i - p = s$, seega $p = i - s$. Nagu näeme, on poja vanus isa vanuse lineaarfunktsioon.

Näide 3. Kui pendelkella keti ülespoole liikuva osa pikkus on x, allapoole liikuva osa pikkus y, ketti kandva hammasratta raadius r ning kogu keti pikkus l, siis $x + y + \pi r = l$ ehk

$$y = (l - \pi r) - x.$$

Näeme, et y on x lineaarfunktsioon.

Kordajate tähendus lineaarfunktsiooni avaldises

Selgitame lineaarfunktsiooni

$$f(x) = ax + b$$

avaldises esinevate kordajate tähenduse.

Andes argumendile x väärtuse 0, saame $f(0) = b$. Funktsiooni väärtust $f(0)$ nimetatakse sageli funktsiooni algväärtuseks. Seega *vabaliige lineaarfunktsiooni avaldises kujutab funktsiooni algväärtust.*

Et selgitada kordaja a tähendust, fikseerime mõttes argumendi mingi väärtuse x ja võtame sellele lisaks veel temast ühe võrra suurema väärtuse $x + 1$. Siis

$$f(x) = ax + b,$$
$$f(x + 1) = a(x + 1) + b = ax + a + b,$$

mis lahutamisel annab

$$f(x + 1) - f(x) = a.$$

Tulemusest nähtub, et argumendi kordaja lineaarfunktsiooni avaldises näitab, mille võrra muutub funktsiooni väärtus, kui argument kasvab ühiku võrra. Ühtlasi näeme, et funktsiooni muut ei sõltu sellest, missugune arv on võetud argumendi lähteväärtuseks: alati, kui argument muutub ühe ühiku võrra, muutub argumendi lineaarfunktsioon a ühiku võrra. Kui argument x tähendab aega, funktsioon $y = ax + b$ aga liikumisel käidud tee pikkust, näeme, et a on ajaühikus käidud tee pikkus ehk, teisiti, liikumiskiirus. Kui argument x tähendab aega, funktsioon $y = ax + b$ aga toodetud kauba

hulka, näeme, et a tähendab ajaühikus toodetud kauba hulka ehk, teisiti, tootmiskiirust.

Kui argument x tähendab temperatuuri, y varda pikkust ja b varda lähtepikkust temperatuuril 0°, siis a näitab varda pikenemist temperatuuri tõusul 1° võrra ehk, teisiti, varda paisumise «kiirust» temperatuuri muutumise taustal. Üldiselt:

lineaarfunktsiooni avaldises $y = ax + b$ esinev argumendi kordaja a kujutab selle funktsiooni muutumise kiirust argumendi muutumise taustal.

Lineaarfunktsioon $y = ax + b$ on määratud niipea, kui on teada kordajad a ja b:

lineaarfunktsioon on määratud oma algväärtuse ja muutumiskiirusega.

Kui a ja b pole otseselt antud, saab neid arvutada. Selleks piisab, kui on teada kaks paari kokkukuuluvaid x ja y väärtusi. Tõepoolest, olgu need väärtuspaarid (x_1, y_1) ja (x_2, y_2). Siis

$$y_1 = ax_1 + b,$$
$$y_2 = ax_2 + b,$$

mis annab kaks esimese astme võrrandit kahe tundmatu a ja b määramiseks. Niisiis:

lineaarselt kulgeva nähtuskäigu määramiseks piisab kahest vaatlusest.

Näide. Olgu teada, et nähtus kulgeb lineaarselt; vastaku argumendi x väärtustele -2 ja 3 funktsiooni y väärtused $-3{,}2$ ja 2,8. Leiame nähtuse kulgemise seaduse.

Otsitav seadus avaldub kujul $y = ax + b$, kus kordajad a ja b on alles teadmata. Nende määramiseks saame võrrandid

$$\begin{cases} -3{,}2 = -2a + b \\ 2{,}8 = 3a + b. \end{cases}$$

Lahutades teisest võrrandist esimese, saame $6{,}0 = 5a$, millest $a = 1{,}2$; see annab $-3{,}2 = -2{,}4 + b$, millest $b = -0{,}8$. Niisiis avaldub otsitav seadus kujul $y = 1{,}2x - 0{,}8$.

Lineaarse sõltuvuse tunnus

Küsime, mille võrra muutub lineaarfunktsioon $y = ax + b$, kui argument kasvab mingist oma lähteväärtusest x alates juurdekasvu Δx võrra.

Argumendi lähteväärtusele x vastab funktsiooni väärtus $ax + b$, argumendi lõppväärtusele $x + \Delta x$ aga funktsiooni väärtus $a(x + \Delta x) + b$. Seega kasvab funktsioon argumendi muutumisel

väärtuselt x väärtuseni $x + \Delta x$ vahe $[a(x + \Delta x) + b] - (ax + b)$ võrra. See vahe aga on $a \cdot \Delta x$. Teiste sõnadega: argumendi juurdekasvule Δx vastab funktsiooni juurdekasv

$$\Delta y = a \cdot \Delta x.$$

Saadud funktsiooni juurdekasvu valemis ei esine argumendi lähteväärtust; see tähendab, et missugusele argumendi väärtusele juurdekasv Δx ka lisandataks, ikka saab funktsioon ühe ja sellesama juurdekasvu ehk, teisiti,

lineaarse sõltuvuse puhul vastavad võrdsetele argumendi juurdekasvudele ikka võrdsed funktsiooni juurdekasvud.

Võtame nüüd valemis $\Delta y = a \cdot \Delta x$ argumendi juurdekasvu Δx üks kord ühe, teine kord teise väärtusega. Siis saame ka Δy jaoks erinevad väärtused. Valem näitab aga, et need funktsiooni juurdekasvud on võrdelised argumendi vastavate juurdekasvudega.

Nagu nägime, on võrdelise sõltuvuse puhul argumendi ja funktsiooni väärtused ise teineteisega võrdelised, lineaarse sõltuvuse puhul aga on võrdelised nende juurdekasvud.

Näitame, et praegu tõestatud omadus on ainult lineaarsel sõltuvusel, see tähendab, näitame, et kui argumendi ja funktsiooni juurdekasvud on võrdelised, siis on sõltuvus lineaarne.

Tõepoolest, olgu x_0 argumendi üks kindel eriväärtus ja y_0 sellele vastav funktsiooni väärtus; olgu edasi x argumendi mingi väärtus ja y sellele vastav funktsiooni väärtus. Ülemineku väärtuselt x_0 väärtusele x kasvab argument vahe $x - x_0$ võrra, funktsioon aga vahe $y - y_0$ võrra. Eelduse kohaselt on need juurdekasvud võrdelised, seega nende suhe jääv; tähistades selle jääva suhte väärtuse tähega a, saame

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = a$$

ehk

$$y = ax + (y_0 - ax_0)$$

ehk, vabaliiget tähega b märkides,

$$y = ax + b,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Võttes kokku eespool öeldu, saame lineaarse sõltuvuse tunnuse:

lineaarse sõltuvuse puhul on argumendi ja funktsiooni teineteisele vastavad juurdekasvud võrdelised ja ümberpöördult.

Viimati tõestatud tunnus on heaks vahendiks küsimuse otsustamisel, kas vaadeldav nähtus kulgeb lineaarselt või mitte. Olgu näiteks saadud vaatlusprotokoll:

x	-4	-2	1	6	13
y	13,0	9,4	4,0	$-5,0$	$-17,6$

Koostame selle põhjal x ja y juurdekasvude Δx ja Δy ning nende juurdekasvude suhete tabeli:

Δx	2	3	5	7
Δy	$-3,6$	$-5,4$	$-9,0$	$-12,6$
$\frac{\Delta y}{\Delta x}$	$-1,8$	$-1,8$	$-1,8$	$-1,8$

Et funktsiooni ja argumendi juurdekasvude suhe on kogu vaadeldavas vahemikus $-4 \leqslant x \leqslant 13$ üks ja seesama, siis on nähtuskäik selles vahemikus lineaarne.

Juurdekasvude valemist $\Delta y = a \cdot \Delta x$ näeme, et positiivse Δx korral Δy märk ühtib kordaja a märgiga:

$$\text{kui } a > 0, \text{ siis ka } \Delta y > 0,$$
$$\text{kui } a < 0, \text{ siis ka } \Delta y < 0.$$

Esimesel juhul argumendi kasvamisel ka funktsioon kasvab, teisel juhul argumendi kasvamisel funktsioon kahaneb. Niisiis: lineaarfunktsioon $y = ax + b$ on kasvav või kahanev vastavalt sellele, kas kordaja a on positiivne või negatiivne.

Lineaarse sõltuvuse graafik

Vaadeldes seost

$$y = ax + b$$

kahe tundmatuga võrrandina, näeme, et

lineaarse sõltuvuse graafiliseks vasteks on sirgjoon, mille tõusuks ja algordinaadiks on kordajad a ja b.

Eespool öeldu puhul on eelduseks, et nii argumendi kui ka funktsiooni väärtuste kujutamisel kasutatakse üht ja sedasama kujutusühikut. Näitame, et ka siis, kui argumendi ja funktsiooni väärtuste kujutamisel kasutatakse erinevaid ühikuid l_x ja l_y, on lineaarse funktsiooni graafikuks ikka sirgjoon.

Tõepoolest, kujutame lineaarfunktsiooni $y = ax + b$ esiteks xy-tasapinnas, võttes kujutusühikuks nii ühe kui teise telje sihis

näiteks l mm. Kokkukuuluvate x ja y väärtuste paarid kujutuvad siis punktidena (x, y), mis kõik asetsevad ühel sirgel. Kujutame teine kord samad väärtused XY-tasapinnas, kasutades argumendi väärtuste puhul kujutusühikut l_x, funktsiooni väärtuste puhul aga kujutusühikut l_y. Arv x kujutub siis lõiguna $X = xl_x$ ja arv y lõiguna $Y = yl_y$.

Et

$$y = ax + b$$

ning

$$x = \frac{X}{l_x} \quad \text{ja} \quad y = \frac{Y}{l_y},$$

siis

$$\frac{Y}{l_y} = a\frac{X}{l_x} + b$$

ehk

$$Y = a\frac{l_y}{l_x}X + bl_y$$

ehk, teiste tähtedega,

$$Y = AX + B.$$

Näeme, et muutujad X ja Y on jällegi seotud lineaarselt, nii et väärtuspaarid (X, Y) kujutuvad sirgjoone punktidena, mida oligi tarvis tõestada. Niisiis: et saada jooniselt XY-tasapinnas funktsiooni y algväärtust ja muutumiskiirust nende õiges arvulises suuruses, selleks kasutame valemeid

$$b = B : l_y, \quad a = A : \frac{l_y}{l_x};$$

see tähendab, et algordinaati tuleb mõõta ordinaatide mõõtühikuga l_y, tõusu aga ühikuga $l_y : l_x$.

Graafiline sõiduplaan

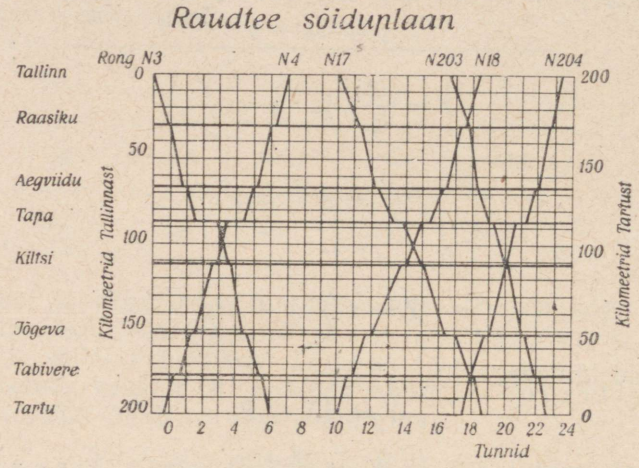
Kõik sõiduplaanid koostatakse eeldusel, et sõit iga kahe teineteisele järgneva peatuskoha vahel kulgeb ühtlaselt.

Ühtlase liikumise puhul käiakse võrdseis ajavahemikes ära võrdse pikkusega teed. Seega on käidud tee pikkus s aja t lineaarfunktsioon. Kirjutame ta kujul

$$s = s_0 + vt.$$

Siin tähendab s_0 lähtekaugust (kaugust nullpunktist ajamomendil $t = 0$), v aga liikumise kiirust. Et s on t lineaar-

funktsioon, siis on liikumise graafikuks sirgjoon; s_0 kujutab selle sirge algordinaati, v sirge tõusu. Suure kiiruse puhul graafik tõuseb (või langeb) järsku, väikese kiiruse puhul aeglaselt. Paigalseisule vastavais ajavahemikes kulgeb graafik rööbiti ajateljega.



Joon. 163.

Joonisel 163 on esitatud graafilise sõiduplaani näide. Sellest graafilisest sõiduplaanist nähtub otsekohe, missugune rong kus, millal ja kui kaua peatub, kus rongid vahetuvad, missugusel teeosal rong liigub kiiremini, missugusel teeosal aeglasemalt, kui kaugel on rong antud ajal lähtejaamast, kui kaugel sihtjaamast jne.

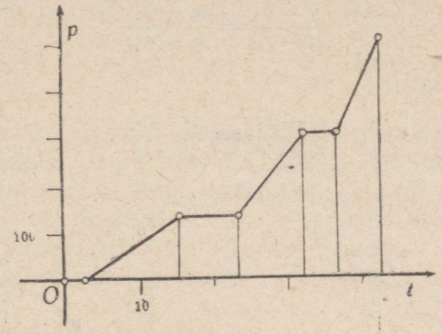
Märgime, et raudteevalitsuses liikluse planeerimisel valmistatakse graafiline sõiduplaan kõige enne ja alles selle järgi koostatakse tabelivormis trükitav sõiduplaan.

Graafilised tööplaanid

Massilist tootmist, mis on kommunismi ehitamise esimeseks eelduseks, organiseeritakse ikka nii, et tootmisprotsess kulgeks võimalikult ühtlaselt. Sel puhul osutub tootmisprotsess kõige efektiivsemaks. Niisuguse protsessi graafik on ideaalsel korral sirgjoon. Kui juhtub, et toormaterjali puudumise või mõne avarii tõttu tootmine ajutiselt seisab, siis kulgeb tootmise tegeliku käigu graafik vastavas ajavahemikus

rõhtsalt (joon. 164). Joonisel on aeg (päevades) märgitud tähega t, produktsioon (tonnides) tähega p.

Sirgjooneline graafik leiab sageli kasutamist ka kaubandustegevuse, viljakoristamise, metsavarumise jne. planeerimisel.



Joon. 164.

Lineaarne interpolatsioon

Graafilise interpolatsiooni võtte kasutamine põrkab raskustele, kui punkte funktsiooni graafiku joonestamiseks on vähe ja nad asetsevad hõredalt: sel juhul on raske öelda midagi kindlat funktsiooni käigujoone kulgemise kohta. Et küsimust kuidagi lahendada, asendame funktsiooni graafiku kaare P_1P_2 punkte $P_1(x_1, y_1)$ ja $P_2(x_2, y_2)$ ühendava sirgjoonega ja määrame selle abil abstsissile x vastava ordinaadi. Ilmselt ei või me sel viisil talitades loota, et saame otsitava väärtuse täpselt. Kui funktsiooni graafiku kaar punktide P_1 ja P_2 vahel erineb vaid vähe kõõlust P_1P_2 (joon. 165), annab võte küll ligikaudse, kuid ometi rahuldava tulemuse; viga ε on väike. Kui aga funktsiooni graafiku kaar P_1P_2 eemaldub kõõlust P_1P_2 tunduvalt, on vahe funktsiooni tõelise ja leitud väärtuse vahel suur, viga ε suur ja seepärast tulemus mitterahuldatav (joon. 166).

Kirjeldatud võtet — interpolatsiooni sirgjoone abil — nimetatakse lineaarseks interpolatsiooniks.

Kõigis arvuliste väärtuste tabelites antakse andmed, kui võimalik, ikka niivõrd tihedalt, et on lubatav interpolatsiooni teostada lineaarselt.

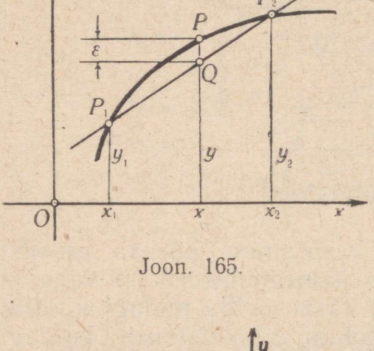
Graafiline interpolatsioon on võrdlemisi aeganõudev ja tülikas toiming. Kui on võimalik seda teostada lineaarselt, siis võib joonestamistöö hoopis ära jätta ja nõutava funktsiooni väärtuse leida arvutamise teel. Tõepoolest, argumendi

väärtused x_1, x ja x_2 määravad argumendi juurdekasvud $x - x_1$ ja $x_2 - x_1$, funktsiooni väärtused y_1, y ja y_2 vastavalt funktsiooni juurdekasvud $y - y_1$ ja $y_2 - y_1$. Lineaarse sõltuvuse puhul argumendi ja funktsiooni vahel peavad need juurdekasvud olema võrdelised. Seega

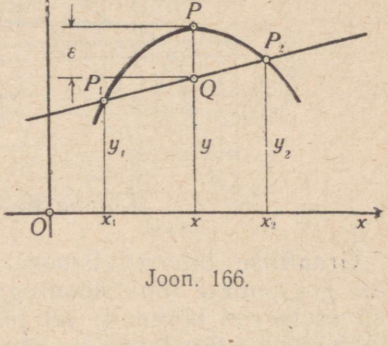
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ehk, teisiti kirjutatult,

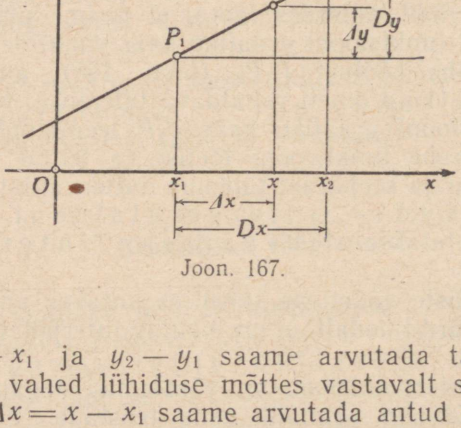
$$\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y - y_1}.$$



Joon. 165.



Joon. 166.



Joon. 167.

Vahed $x_2 - x_1$ ja $y_2 - y_1$ saame arvutada tabeli andmeist. Märgime need vahed lühiduse mõttes vastavalt sümbolitega Dx ja Dy. Kasvu $\Delta x = x - x_1$ saame arvutada antud arvu x ja tabelist võetud x_1 järgi. Vahed Dx, Dy ja Δx määravad Δy. Ülevaatlikkuse mõttes paigutame kirjutised järgmiselt (joon. 167):

Andmed		Vahed	
x_1	y_1	Dx	Dy
x	?	Δx	Δy
x_2	y_2	$\frac{Dx}{\Delta x} = \frac{Dy}{\Delta y}$	

$$\Delta y = \frac{Dy}{Dx} \cdot \Delta x.$$

Vahe $\Delta x = x - x_1$ on argumendi p a r a n d u s, mis tuleb lisada argumendi l ä h t e v ä ä r t u s e l e x_1, et saada antud väärtust $x = x_1 + \Delta x$. Selle paranduse saame arvutada andmeist. Vahe $\Delta y = y - y_1$ on funktsiooni p a r a n d u s, mis tuleb lisada funktsiooni lähteväärtusele y_1, et saada otsitavat väärtust $y = y_1 + \Delta y$. Lahendame selle võtte selgitamiseks mõned ülesanded.

Ü l e s a n n e 1. Arvudele

$$\ldots \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \ldots$$

vastavad ruudud

$$\ldots \quad 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100 \quad 121 \ldots$$

Missugune ruut vastab arvule 9,6?

L a h e n d u s. Arv 9,6 on 9 ja 10 vahel. Seega $9{,}6^2 = 81 +$ + parandus. Vahede tabel on antud juhul

$Dx = 10 - 9 = 1$	$Dy = 100 - 81 = 19$
$\Delta x = 9{,}6 - 9 = 0{,}6$	$\Delta y = ?$

ehk, lühemalt,

$$\begin{matrix} 1 & 19 \\ 0{,}6 & \Delta y. \end{matrix}$$

Seega

$$1 : 0{,}6 = 19 : \Delta y \quad \text{ehk} \quad \Delta y = \frac{19}{1} \cdot 0{,}6 = 11{,}4$$

ja

$$y = 81 + 11{,}4 = 92{,}4.$$

$9{,}6^2$ õige väärtus on 92,16; seega on leitud väärtuse viga 0,24 ehk $0{,}24 : 92{,}16 \approx 0{,}0026 \approx 3‰$ suuruse õigest väärtusest.

Ü l e s a n n e 2. Arvudele

$$\ldots \quad 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100 \quad 121 \ldots$$

vastavad ruutjuured

$$\ldots \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \ldots$$

Kui suur on $\sqrt{70}$?

Lahendus. Arv 70 on 64 ja 81 vahel. Seega $\sqrt{70} = 8 +$ + parandus. Vahede tabel on antud juhul

$$Dx = 81 - 64 = 17 \qquad Dy = 9 - 8 = 1$$
$$\Delta x = 70 - 64 = 6 \qquad \Delta y = ?$$

ehk, lühemalt,

$$\begin{matrix} 17 & 1 \\ 6 & \Delta y. \end{matrix}$$

Seega

$$17 : 6 = 1 : \Delta y \quad \text{ehk} \quad \Delta y = \frac{1}{17} \cdot 6 \approx 0{,}35$$

ja

$$y = \sqrt{70} = 8 + 0{,}35 = 8{,}35.$$

Kahe kümnendkohaga võetud $\sqrt{70}$ õige väärtus on 8,37; seega on leitud väärtuse viga 0,02. See viga on väiksem kui $\frac{0{,}02}{8} \cdot 100\%$ ehk $\frac{1}{4}\%$ suuruse õigest väärtusest.

Ülesanne 3. Tehnika käsiraamatu andmeil on 16-millimeetrise läbimõõduga kanepiköie kandejõud 200 kg, 20-millimeetrise läbimõõduga köie kandejõud aga 314 kg. Kui suur on 19-millimeetrise läbimõõduga kanepiköie kandejõud?

Lahendus.

Andmed		Vahed	
16	200	4	114
19	?	3	parandus
20	314		

$$\text{parandus} = \frac{114}{4} \cdot 3 \approx 86,$$

seega on otsitav kandejõud $200 + 86 = 286$ kg. Tulemuse viga pole võimalik hinnata, sest pole andmeid kandejõu tõelise suuruse kohta.

Kirjeldatud võte leiab laialdast rakendamist töötamisel arvude ruutude, kuupide, logaritmide, trigonomeetriliste funktsioonide ja igasuguste teiste funktsioonide väärtuste tabelitega. Töö hõlbustamiseks on logaritmide tabeleile tavaliselt kaasa antud abitabelid pealkirjaga P. p.* Neist abitabeleist saab vajalikud parandused võtta valmis kujul või arvutada vähese vaevaga.

---

* P. p. on lühend ladinakeelsest nimetusest *Partes proportionales* — võrdelised osad.

§ 54. PÖÖRDVÕRDELINE SÕLTUVUS

Pöördvõrdelise sõltuvuse definitsioon

Alustame näidetest.

Olgu silindris kolvi all teatav hulk õhku. Kolvile rakendatava surve suurenemisel 2, 3, 4, ... korda (konstantsel temperatuuril) väheneb õhu ruumala sama arv korda.

Olgu tarvis sõita ühest linnast teise. Sõiduki kiiruse suurenemisel 2, 3, 4, ... korda väheneb sõiduaeg sama arv korda.

Kauba hinna vähenemisel 2, 3, 4, ... korda saab antud summa eest osta 2, 3, 4, ... korda suurema hulga kaupa.

Me ütleme, et konstantse temperatuuri puhul on gaasi ruumala pöördvõrdeline rõhuga; kindla teepikkuse puhul on sõiduaeg pöördvõrdeline sõidukiirusega; antud rahasumma eest saadav kauba hulk on pöördvõrdeline kauba hinnaga. Üldiselt:

üks suurus sõltub teisest pöördvõrdeliselt, kui teise suuruse kasvamisel mingi arv korda esimene suurus kahaneb sama arv korda.

Muutujate pöördvõrdelise sõltuvuse vastastikkus

Sõltugu suurus y suurusest x pöördvõrdeliselt. Olgu x_1 ja x_2 kaks argumendi väärtust ning y_1 ja y_2 neile vastavad funktsiooni väärtused. Üleminekul esimeselt väärtuselt teisele suureneb argument $x_2 : x_1$ korda, funktsioon aga väheneb $y_1 : y_2$ korda. Et suurus y sõltub suurusest x pöördvõrdeliselt, siis peavad need suhted olema võrdsed, nii et

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1.$$

Vahetades teineteisega esiteks võrde välimised liikmed, siis võrde sisemised liikmed, saame võrde

$$x_1 : x_2 = y_2 : y_1.$$

See aga näitab, et ka suurus x sõltub suurusest y pöördvõrdeliselt. Seega

kahe suuruse pöördvõrdelisus on nende suuruste vastastikune omadus.

Seepärast võime rääkida muutujatest x ja y kui teineteisest pöördvõrdeliselt sõltuvatest suurustest.

Teineteisest pöördvõrdeliselt sõltuvateks suurusteks on peale eespool nimetatute ka näiteks elektrivoolu tugevus ja juhtme takistus antud pinge puhul, veevarustus-

toru ristlõike pindala ja vee voolukiirus ristlõike kohal, koormise kaal ja koormisele vastava õla pikkus tasakaalus oleva kangi puhul.

Pöördvõrdelise sõltuvuse tunnus

Nagu eespool nägime, kehtib teineteisest pöördvõrdeliselt sõltuvate suuruste x ja y puhul pöördvõrdelisuse definitsioonist järelduv seos

$$y_1 : y_2 = x_2 : x_1$$

ehk, teisiti kirjutatult,

$$x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Üldistades seda suuruste x ja y kokkukuuluvatele väärtustele (x_3, y_3) jne., saame võrduste rea

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = \ldots,$$

mis annab pöördvõrdelise sõltuvuse tunnuse: *pöördvõrdelise sõltuvuse puhul on argumendi ja funktsiooni vastavate väärtuste korrutis konstantne.*

Seda konstantset korrutise väärtust nimetame pöördvõrdelisuse konstandiks ja tähistame tähega a.

Olgu x suvaline argumendi väärtus ja y sellele vastav funktsiooni väärtus. Kui suurused x ja y on pöördvõrdelised, siis, nagu äsja nägime,

$$xy = a,$$

kus a on konstantne. See võrdus on sümboleis kirjutatud pöördvõrdelisuse tunnus; ta esitab x ja y vahelise sõltuvuse võrrandi kujul.

Konstandil a on iga pöördvõrdelise sõltuvuse puhul oma kindel sisuline tähendus: kui vaadeldavateks suurusteks x ja y on elektrivoolu tugevus ja juhtme takistus, siis a tähendab pinget; kui x ja y on kangi õla pikkus ja õlale rakendatud koormise kaal, siis a tähendab selle kaalu momenti tungipunkti suhtes; kui x on kauba hind ja y kauba hulk, siis a on kauba koguväärtus.

Pöördvõrdelisuse konstandi määramiseks valemist $xy = a$ pole tarvis teada rohkem kui ühte paari kokkukuuluvaid argumendi ja funktsiooni väärtusi: kui see paar on (x^*, y^*), siis pöördvõrdelisuse konstandi väärtus on $a = x^* y^*$.

Pöördvõrdelise sõltuvuse väljendusvalem

Lahendades võrrandi $xy = a$ muutuja y suhtes, saame

$$y = \frac{a}{x}.$$

Kirjutades seda võrdust kujul $y = a \cdot \frac{1}{x}$, näeme, et pöördvõrdelise sõltuvuse korral on funktsioon võrdeline argumendi pöördväärtusega.

Pöördvõrdelise sõltuvuse geomeetriline vaste

Pöördvõrdelist sõltuvust esitav võrrand

$$xy = a$$

näitab, et

pöördvõrdelise sõltuvuse geomeetriliseks vasteks on risthüperbool, mille asümptootideks on koordinaatteljed.

Kui kordaja a on positiivne, siis kulgeb see risthüperbool koordinaattasapinna I ja III veerandis; kui a on negatiivne, siis kulgeb ta II ja IV veerandis.

Märgime, et mõõtude otstarbeka valiku teel on alati võimalik saavutada konstandi a taandumist arvule 1.

Murdlineaarne sõltuvus

Esinegu üks muutuja teise muutuja kahe lineaarse funktsiooni jagatisena:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Siis räägime murdlineaarsest sõltuvusest. Kordajad a, b ja d võivad olla mistahes arvud; kordaja c kohta eeldame, et see on nullist erinev, sest vastasel korral taandub y lineaarseks funktsiooniks.

Murdlineaarne sõltuvus on muutujate vastastikune omadus. Tõepoolest,

$$\text{kui } y = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ siis } x = \frac{dy - b}{a - cy},$$

mis näitab, et ka x on muutuja y murdlineaarne funktsioon. Et funktsiooni y avaldises on lugeja sama astme polünoom mis nimetajagi, siis on võimalik teostada jagamist ja kõnesolevat murdu

kirjutada segaavaldisena:

$$y = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cx + d)}.$$

Eeldusel, et $ad - bc = 0$, saame $y = \frac{a}{c} = const.$ Tingimus $ad - bc = 0$ on samaväärne tingimusega $a : b = c : d$. Niisiis: kui murdlineaarse sõltuvuse avaldises kordajad a, b, c ja d on võrdelised, siis taandub funktsioon konstandiks.

Vaadeldes y ja x avaldisi, näeme, et esimene kaotab mõtte, kui $cx + d = 0$ ehk kui $x = -\frac{d}{c}$, ja teine kaotab mõtte, kui $cy - a = 0$ ehk kui $y = \frac{a}{c}$.

Viime koordinaatide alguse punkti $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, telgede sihte muutmata jättes. Siis

$$x = -\frac{d}{c} + X, \quad y = \frac{a}{c} + Y.$$

Asetades need avaldised võrdusse

$$y = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cx + d)}$$

ja märkides konstandi $\frac{ad - bc}{c^2}$ tähega $-k$, saame pärast lihtsustusi, et

$$XY = k,$$

mis on suuruste X ja Y pöördvõrdelisust esitav võrrand. See võrrand kujutab risthüperbooli, mille asümptootideks on X- ja Y-telg. Tagasi minnes endise koordinaatteljestiku juurde, näeme, et

murdlineaarse sõltuvuse

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

graafikuks on risthüperbool asümptootidega

$$y = \frac{a}{c} \quad ja \quad x = -\frac{d}{c}.$$

M ä r k u s. Sirge võrrandis $y = ax + b$ on k a k s määravat kordajat ehk, nagu öeldakse, p a r a m e e t r i t. Parabooli võrrandis $y = ax^2 + bx + c$ on niisuguseid kordajaid k o l m ja samuti k o l m on neid ka hüperbooli võrrandis

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Tõepoolest, et $c \neq 0$, siis võib lugejat ja nimetajat selle arvuga jagada; pärast jagamist on võrrandil kuju

$$y = \frac{ax + \beta}{x + \delta}.$$

Sirge puhul võime vabalt ette anda ainult k a k s punkti, millest sirge peab läbi minema; püstteljega parabooli ja telgedega rööbikute asümptootidega hüperbooli puhul võib neid punkte ette anda k o l m. See asjaolu teeb need kaks kõverat palju paindlikumaks vahendiks nähtuskäikude tasandamisel, kui seda on sirgjoon. Sel põhjusel antakse otse katseandmeist tuletatud seadused väga sageli kas üld-ruutsõltuvuse $y = ax^2 + bx + c$ või murdlineaarse sõltuvuse $y = \frac{ax + \beta}{x + \delta}$ kujul.

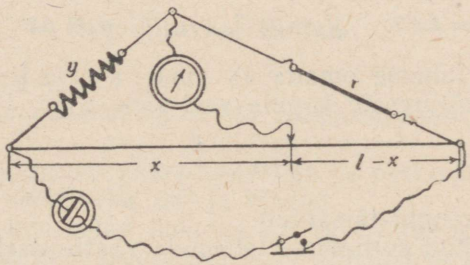
Murdlineaarse sõltuvuse näiteid

N ä i d e 1. Kui tähistame läätse fookuse kaugust tähega f, eseme kaugust läätsest tähega x ja kujutise kaugust samast kohast tähega y, siis, nagu optikas näidatakse, kehtib seos

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}.$$

Avaldades siit y, saame valemi

$$y = \frac{fx}{x - f}.$$



Joon. 168.

Seega on kujutise kaugus läätsest eseme kauguse murdlineaarne funktsioon. Antud juhul $a = f$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -f$.

N ä i d e 2. Takistuste võrdlemisel W h e a t s t o n e'i sillal lülitatakse vool sisse ja seatakse noolega märgitud liugkontakt nii, et galvanomeeter näitaks nulli. Sel puhul (joon. 168)

$$\frac{x}{l-x} = \frac{y}{r},$$

kus r on teadaolev ja y mõõdetav takistus. Siit

$$y = \frac{rx}{l-x}.$$

Nagu näeme, on takistus y kauguse x murdlineaarne funktsioon.

§ 55. ASTMESÕLTUVUS

Astmefunktsiooni üldavaldis

Peale kolme eespool käsitletud sõltuvuse (võrdelise, lineaarse ja pöördvõrdelise sõltuvuse) on üheks tähtsamaks sõltuvuseks astmesõltuvus, mis esineb sagedasti nii teoreetilistes kui ka rakenduslikes küsimustes.

Kirjutades võrdelist seost kujul $y = ax$, näeme, et funktsioon on siin võrdeline argumendi esimese astmega. Ruut-, kuup- ja üldiselt n-astme sõltuvuse puhul on funktsioon võrdeline argumendi teise, kolmanda ja üldiselt n-nda astmega. Kõne all olevad sõltuvused avalduvad seega kujul

$$y = ax^2, \quad y = ax^3, \ldots, \quad y = ax^n.$$

Kui astendajal lubame omada ka negatiivseid väärtusi, siis kuulub siia ka pöördvõrdeline sõltuvus, sest selle sõltuvuse puhul on $y = ax^{-1}$. Üldistades saame edasi sõltuvused

$$y = ax^{-2}, \quad y = ax^{-3}, \ldots, \quad y = ax^{-n}.$$

Kui astendajal lubame omada ka murrulisi väärtusi, siis lisandub astmesõltuvuste kogule veel seos

$$y = ax^{\frac{p}{q}},$$

kus p ja q on mingid täisarvud.

Asume loetletud sõltuvuste lähemale vaatlemisele.

Ruutsõltuvuse definitsioon

Liikuva auto hoog kasvab võrdeliselt kiiruse ruuduga; raske keha takistuseta langemisel kasvab langemistee võrdeliselt langemisaja ruuduga; voolu poolt küttekehas ajaühiku vältel tekitatav soojushulk kasvab võrdeliselt voolutugevuse ruuduga.

Olgu x ja y mingi paar argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvaid väärtusi ja kasvagu funktsioon võrdeliselt argumendi ruuduga; siis, nagu võrdelise sõltuvuse käsitlemisel nägime,

$$y = ax^2,$$

kus a on konstant. Funktsioon avaldub siin argumendi ruudu kordsena. Niisugust funktsiooni nimetame lühidalt ruutfunktsiooniks. Ringi pindala näiteks on ringi läbimõõdu ruutfunktsioon:

$$S = \frac{1}{4}\pi d^2,$$

kuubi täispindala kuubi serva pikkuse ruutfunktsioon:

$$T = 6s^2,$$

ülesvisatud keha tõusukõrgus keha lähtekiiruse ruutfunktsioon:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Sõltuvust, mille puhul üks suurus muutub võrdeliselt teise suuruse ruuduga, nimetatakse ruutsõltuvuseks.

Ruutsõltuvus ei ole muutuvate suuruste vastastikune omadus, sest kui $y = ax^2$, siis $x = \pm\sqrt{\frac{y}{a}}$, mitte aga $x = by^2$.

Ruutsõltuvuse tunnus

On kerge näha, et

argumendi x kasvamisel k korda ruutfunktsioon $y = ax^2$ kasvab k^2 korda.

Tõepoolest, argumendi väärtustele x ja kx vastavad funktsiooni väärtused ax^2 ja ak^2x^2 ehk ax^2 ja $k^2 \cdot ax^2$.

Tõestame, et kõnesolev omadus on ruutsõltuvuse tunnuseks. Tõepoolest, olgu x_0 ja x argumendi kaks väärtust — esimene neist kindel, teine mingi vabalt võetav väärtus — ja $f(x)$ selle argumendi funktsioon. Üleminekul väärtuselt x_0 väärtusele x kasvab argument $k = x : x_0$ korda; eelduse kohaselt peab olema

$$f(x) = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \cdot f(x_0)$$

ehk

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{x_0^2} \cdot x^2.$$

Et x_0 on k i n d e l väärtus, siis on seda ka $f(x_0)$ ja $f(x_0) : x_0^2$. Märkides selle konstandi tähega a, näeme, et

$$f(x) = ax^2,$$

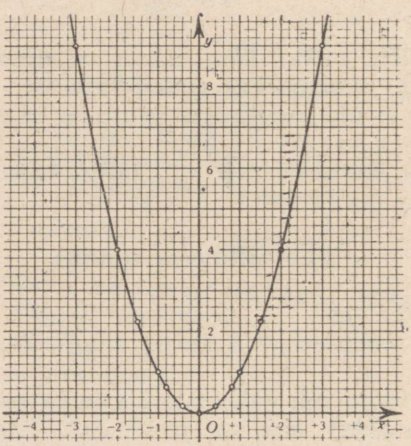
mida oligi tarvis tõestada. Niisiis:

kahe suuruse sõltuvus on r u u t s õ l t u v u s, kui argumendi kasvamisel k korda funktsioon kasvab k^2 korda.

Ruutsõltuvuse valem sisaldab ainult ü h t parameetrit — kordajat a. Tema määramiseks piisab argumendi ja funktsiooni ü h e a i n s a kokkukuuluvate väärtuste paari tundmisest. Olgu näiteks teada, et $y = ax^2$ ja x väärtusele 1,2 vastab y väärtus 0,8. Siis $0{,}8 = a \cdot 1{,}2^2$ ehk $a = 0{,}8 : 1{,}44 = \frac{5}{9}$ ja $f(x) = \frac{5}{9}x^2$.

Ruutsõltuvuse geomeetriline vaste

Lihtsaimal juhul on ruutsõltuvuse üldavaldises $y = ax^2$ kordaja $a = 1$. Siis $y = x^2$. Funktsiooni $y = x^2$ graafikuks on parabool, mille sümmeetriateljeks on y-telg. Selle parabooli para-



Joon. 169.

meeter $p = \frac{1}{2}$, seega fookuseks on punkt $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ ja juhtjooneks sirge $y = -\frac{1}{4}$. Nende andmete järgi on kerge parabooli konstrueerida (vt. lk. 260 ja 263). Lihtsam on seda parabooli joonestada, arvutades rea tema punktide koordinaadid. Joonis 169 kujutab sel viisil saadud parabooli. Märgime, et iga ruutfunkt-

sioon $y = ax^2$ taandub funktsiooniks $y = x^2$, kui funktsiooni mõõtühikuks valida a-kordne argumendi ühik, sest $\frac{y}{a} = x^2$. Asja tähtsuse tõttu uurime sõltuvust $y = ax^2$ ka veel omaette.

Kirjutades ruutfunktsiooni avaldise $y = ax^2$ kujul $x^2 = \frac{1}{a}y$ ja vaadeldes viimast võrdust võrrandina, näeme, et

ruutfunktsiooni $y = ax^2$ geomeetriliseks vasteks on püstteljega parabool.

Selle parabooli sümmeetriateljeks on ordinaattelg, puutujaks haripunktis abstsisstelg, parameetriks $p = \frac{1}{2a}$, fookuseks punkt $(0; \frac{1}{4a})$ ja juhtjooneks sirge võrrandiga $y = -\frac{1}{4a}$. Kui $a > 0$, siis on parabool oma avaga pööratud ülespoole, kui $a < 0$, siis allapoole. Tuletades meelde, et parabooli kahekordne parameeter kujutab parabooli ava laiust fookuse kohal, ja arvestades võrdust $2p = \frac{1}{a}$, näeme, et väikese a puhul on parabool lame, suure a puhul terav.

Kuupsõltuvus

Olgu x ja y mingi paar argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvaid väärtusi ja kasvagu funktsioon võrdeliselt argumendi kuubiga.

Sõltuvust, mille puhul üks suurus muutub võrdeliselt teise suuruse kuubiga, nimetatakse kuupsõltuvuseks.

Vaadeldava sõltuvuse puhul

$$y = ax^3,$$

kus a on konstant. Funktsioon avaldub siin argumendi kuubi kordsena. Niisugust funktsiooni nimetame lühidalt kuupfunktsiooniks. Kera ruumala V näiteks on kera läbimõõdu d kuupfunktsioon:

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

pesunööri looga sügavus l nööri pikkuse p kuupfunktsioon:

$$l = ap^3,$$

aine erisoojus c absoluutse nullpunkti lähedal absoluutse temperatuuri T kuupfunktsioon:

$$c = \gamma T^3.$$

Kuupsõltuvus ei ole muutuvate suuruste vastastikune omadus, sest kui $y = ax^3$, siis $x = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$, mitte aga $x = by^3$.

Käsitletava sõltuvuse puhul

argumendi x kasvamisel k korda kuupfunktsioon $y = ax^3$ kasvab k^3 korda.

Ümberpöördult:

kahe suuruse sõltuvus on kuupsõltuvus, kui argumendi kasvamisel k korda funktsioon kasvab k^3 korda.

Nii üks kui teine omadus tõestatakse skeemi järgi, mida kasutasime ruutfunktsiooni $y = ax^2$ vastavate omaduste tõestamisel.

Konstantset tegurit a võrduses $y = ax^3$ saab leida, kui on teada üks paar argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvaid väärtusi. Olgu näiteks $y = 12$, kui $x = 2$. Siis $12 = a \cdot 2^3$, millest $a = 1{,}5$ ja seega $y = 1{,}5x^3$.

Kuupsõltuvuse geomeetriline vaste

Funktsiooni $y = x^3$ käigukõverat — kuupparabooli — on kõige hõlpsam joonestada tabuleeritud väärtuspaaride (x, y) järgi. Et arvude kuubid kasvavad väga kiiresti, siis on otstarbekohane kasutada y-teljel tunduvalt väiksemat kujutusühikut kui x-teljel. Kui funktsiooni $y = x^3$ käigukõver on joonestatud, saame temast kuupsõltuvuse $y = ax^3$ graafiku, korrutades ordinaate arvuga a. Pole raske veenduda, et funktsiooni $y = ax^3$ käigujoon on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes.

Astmefunktsiooni $y = ax^n$ graafikud

Vaatleme lõpuks funktsioone

$$y = ax^n$$

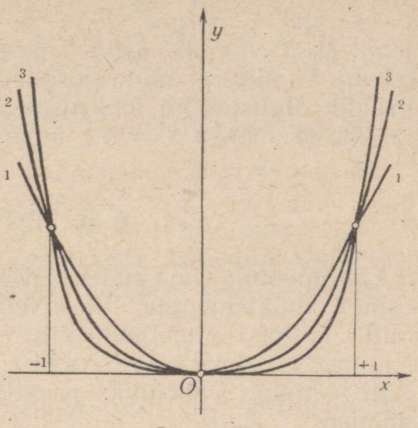
astendaja n mitmesuguste täisarvuliste väärtuste puhul. Nende funktsioonide graafikuid nimetatakse n-nda astme paraboolideks.

Et joone $y = ax^n$ ordinaadid saadakse, korrutades joone $y = x^n$ ordinaate konstantse teguriga a, siis piisab siin funktsioonide $y = x^n$ käigugraafikute uurimisest.

Juht: astendaja n on positiivne paarisarv.

Paarisarvulise n korral $(-x)^n = x^n$ ja y on iga x puhul positiivne. Seega asetseb paarisarvulise astendaja korral

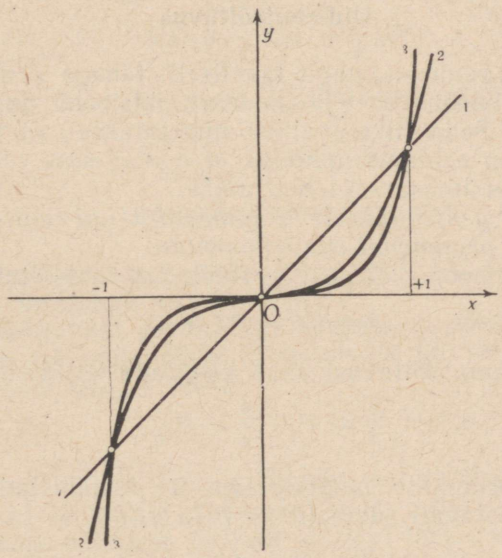
astmefunktsiooni graafik positiivses pooltasapinnas ja on sümmeetriline y-telje suhtes. Joonis 170 näitab funktsiooni $y = x^n$ graafikuid juhtudel $n = 2, 4, 6$ (joon 1—1 kujutab ruutparabooli $y = x^2$, joon 2—2 neljanda astme parabooli $y = x^4$, joon 3—3 kuuenda astme parabooli $y = x^6$). Mida kõrgem on aste n, seda tihedamalt liibub graafik alguspunkti ümbruses abstsissteljele ning seda järsemalt ta tõuseb sirgete $x = \pm 1$ ümbruses ja edasi.



Joon. 170.

II juht: astendaja n on positiivne paaritu arv.

Paarituarvulise n korral $(-x)^n = -x^n$, seega on positiivse x puhul $y > 0$ ja negatiivse x puhul $y < 0$. Funktsiooni



Joon. 171.

graafik kulgeb I ja III veerandis ning on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. Joonis 171 näitab funktsiooni $y = x^n$ graafikuid juhtudel $n = 1, 3, 5$ (joon 1—1 kujutab esimese astme

parabooli — sirget, joon 2—2 kolmanda astme parabooli, joon 3—3 viienda astme parabooli). Nagu eelmisel juhul, nii näeme ka siin, et mida kõrgem on aste n, seda tihedamalt liibub graafik alguspunkti ümbruses abstsissteljele ning seda järsemalt ta tõuseb sirgete $x = \pm 1$ ümbruses ja edasi.

§ 56. POLÜNOOMID

Polünoomid on matemaatika rakendustes kõige sagedamini esinev funktsioonide liik. Neil on mitmeid tähtsaid omadusi, mille hulgast nimetame siin vaid seda, et nende väärtused on kiiresti ja kergesti arvutatavad, mis teeb neid eriti sobivaks vahendiks praktikast võrsunud probleemide lahendamisel.

Eespool tutvusime üksikasjalikult lihtsaima polünomiaalse seosega — lineaarse sõltuvusega $y = ax + b$. Tähtsuselt järgmiseks polünomiaalseks seoseks on üld-ruutsõltuvus, mille vaatlemisele kohe asume.

Üld-ruutsõltuvus

Märgime argumendi, nagu tavaliselt, tähega x ning moodustame ruutfunktsiooni ax^2 ja lineaarfunktsiooni $bx + c$ summa $ax^2 + bx + c$. Seda liiki avaldisi nimetatakse ruuttrinoomideks. Siin eeldame muidugi, et $a \neq 0$, sest vastasel korral taandub avaldis lineaarseks binoomiks.

Funktsiooni y nimetatakse argumendi x üld-ruutfunktsiooniks, kui ta avaldub argumendi ruuttrinoomina.

Selle definitsiooni kohaselt avaldub üld-ruutsõltuvus kujul

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Märgime, et sama sõltuvust saab kirjutada kujul

$$\frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

ehk, mõõtes ordinaate mõõtühikuga a ja tähistades kordajad $b : a$ ja $c : a$ vastavalt sümbolitega p ja q,

$$Y = x^2 + px + q.$$

Nagu näeme, saab ordinaatide mõõtühiku kohasel valikul sõltuvust $y = ax^2 + bx + c$ alati taandada sõltuvuseks $Y = x^2 + px + q$.

Üld-ruutfunktsioonina avalduvad paljud geomeetrilised suurused, üld-ruutsõltuvusena avalduvad mitmed nähtuskäike valitsevad seadused. Toome mõned näited.

N ä i d e 1. Õõnsal keral välisdiameetriga D ja seina paksusega 1 on ruumala $V = \frac{1}{6}\pi[D^3 - (D-2)^3]$ ehk

$$V = \frac{1}{3}\pi(3D^2 - 6D + 4).$$

Sulgudes seisev avaldis ja seega ka õõnsa kera ruumala V on kera välisdiameetri D üld-ruutfunktsioon.

N ä i d e 2. Olgu ruudukujulise metall-lesta serva pikkus temperatuuril 0° C võrdne 1-ga ja olgu lesta materjali joonpaisumiskoefitsient α. Siis temperatuuril $t°$ on serva pikkus $1 + \alpha t$ ja lesta pindala $S = (1 + \alpha t)^2$ ehk

$$S = \alpha^2 t^2 + 2\alpha t + 1.$$

Nagu näeme, on lesta pindala temperatuuri üld-ruutfunktsioon.

N ä i d e 3. Paiskame mingi keha vertikaalselt üles. Olgu ta lähtekõrgus s_0 ja lähtekiirus v_0. Kui ei oleks raskusjõudu, siis jõuaks keha t sekundiga kõrgusele $s_0 + v_0 t$. Raskusjõu mõjul langeb ta t sekundi jooksul lõigu $\frac{1}{2}gt^2$ võrra, kus g tähendab raskuskiirendust. Seega t sekundi järel asetseb keha kõrgusel

$$S = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Nagu näeme, on keha poolt käidud tee pikkus aja üld-ruutfunktsioon.

Üld-ruutsõltuvuse graafik

Vaadeldes seost $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ kahe tundmatuga võrrandina, veendume (vt. lk. 264), et

üld-ruutsõltuvuse graafiliseks vasteks on püstteljega parabool.

Lihtsaim tee selle väite tõestamiseks on järgmine: teostame teljestiku rööplükke valemite

$$x = X + \alpha, \qquad y = Y + \beta$$

kohaselt ning valime uue alguspunkti koordinaadid α ja β nii, et teisendamisel langeksid võrrandist välja vabaliige ja liige argumendi esimese astmega. Selleks on vaid tarvis võtta

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{ja} \quad \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Seos $y = ax^2 + bx + c$ taandub siis seoseks $Y = aX^2$. Seega on need α ja β väärtused parabooli $y = ax^2 + bx + c$ h a r i p u n k t i k o o r d i n a a d i d. Kui $\beta < 0$ ehk $b^2 - 4ac > 0$, asetseb hari-

punkt allpool abstsisstelge ja parabool lõikab seda telge kahes punktis. Kui $\beta > 0$ ehk $b^2 - 4ac < 0$, asetseb haripunkt ülalpool abstsisstelge ja parabool ei lõika abstsisstelge. Vahepealsel juhul, kui $\beta = 0$ ehk $b^2 - 4ac = 0$, puutub parabool abstsisstelge. Öeldu annab näitliku geomeetrilise tõlgenduse algebrast tuntud tõsiasjale, et ruutvõrrandil $ax^2 + bx + c = 0$

on kaks erinevat lahendit, kui ta diskriminant $b^2 - 4ac > 0$,

ei ole ühtegi lahendit, kui ta diskriminant $b^2 - 4ac < 0$,

on kaks ühtelangevat lahendit, kui ta diskriminant $b^2 - 4ac = 0$.

Märgime, et juhul, kui diskriminant $b^2 - 4ac$ on positiivne, saab ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ esitada kujul

$$y = a(x - x_1)(x - x_2),$$

kus x_1 ja x_2 on funktsiooni y nullkohad, see on argumendi x väärtused, millele vastab y väärtus null. Kujul $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ kirjutatult esineb üldruutfunktsioon kahe lineaarfunktsiooni korrutisena.

Üld-kuupsõltuvust uurime hiljem, kasutades selleks tuletise mõistet.

Polünoomi kirjutusviis

Polünoomid on astmefunktsioonide summad, nagu näiteks

$$x^2 - 7x + 11, \qquad 2x^3 - 7x^2 + 5x - 11, \qquad x^5 - 2x^3 + 1.$$

Lihtsamate juhtudena kuuluvad siia lineaarbinoom $ax + b$ ja ruuttrinoom $ax^2 + bx + c$. Astmefunktsiooni mõiste hõlmab ka iga konstanti, sest $c = cx^0$.

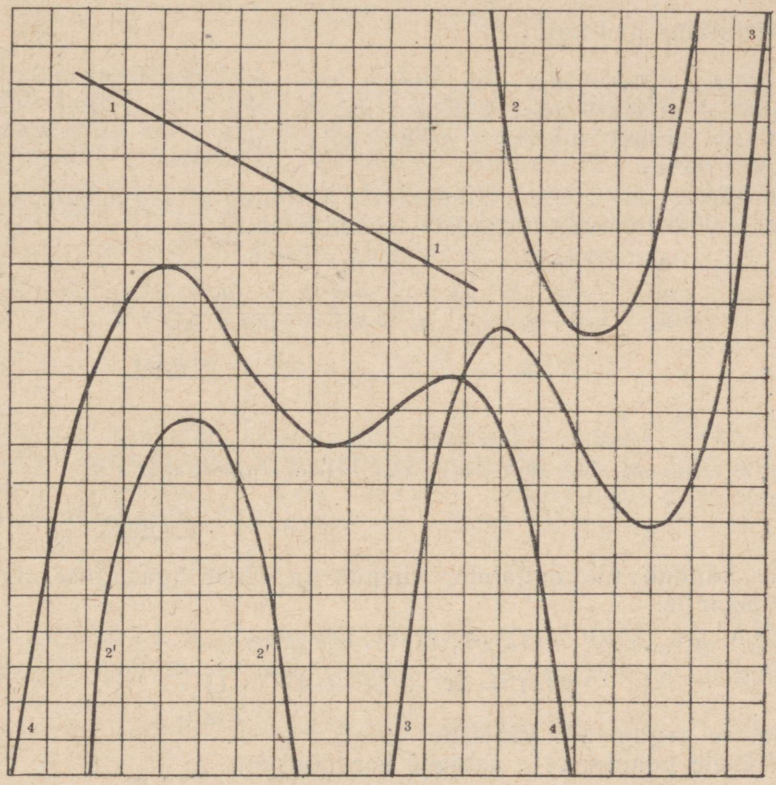
Polünoomi astmeks nimetatakse polünoomis esinevat muutuja kõrgeimat astet. Toodud näited on vastavalt teise, kolmanda ja viienda astme polünoomid.

Polünoomide graafikud on väga mitmekesised, nagu näeme jooniselt 172, kus

joon 1—1 kujutab funktsiooni $y = a_1x + a_0 (a_1 < 0)$;
joon 2—2 „ „ $y = a_2x^2 + a_1x + a_0 (a_2 > 0)$;
joon 2′—2′ „ „ $y = a_2x^2 + a_1x + a_0 (a_2 < 0)$;
joon 3—3 „ „ $y = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 (a_3 > 0)$;
joon 4—4 „ „ $y = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 (a_4 < 0)$.

Tänu sellele mitmekesisusele on ikka võimalik iga katkematult kulgeva nähtuskäigu jaoks leida polü-

noomi, mis seda nähtuskäiku kujutab nii hästi kui iganes tahame; on vaid vaja võtta küllalt kõrge astmega polünoom. Küsimuse tehnilist külge käsitleme üksikasjalikult hiljem, interpolatsiooniprobleemile pühendatud artikleis.



Joon. 172.

Horneri skeem

Üheks rakendusmatemaatika tähtsamaks arvutusskeemiks on Horneri poolt aastal 1819 antud skeem polünoomi väärtuse arvutamiseks argumendi etteantud väärtusel. Skeem on eriti väärtuslik sellepärast, et — üksikud erandjuhud välja arvatud — funktsiooni väärtuse leidmine taandub lõpuks ikka polünoomi väärtuse arvutamisele. Selleks lähendatakse funktsioon otstarbekalt valitud polünoomiga. Küsimust, kuidas funktsioone lähendada polünoomidega, käsitleme hiljem.

Horneri skeemi mõtte selgitamiseks võtame esimese, teise ja kolmanda astme polünoomid

$$p_1(x) = a_1x + a_0,$$
$$p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0,$$
$$p_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ja kirjutame nad kujul

$$p_1(x) = a_1x + a_0,$$
$$p_2(x) = (a_2x + a_1)x + a_0,$$
$$p_3(x) = [(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0.$$

Siit näeme, et nende polünoomide arvutamine argumendi väärtusel x võib toimuda järgmiste skeemide abil:

	a_1	a_0
	·	a_1x
	a_1	$a_1x + a_0$
		$= p_1(x)$

	a_2	a_1	a_0
	·	a_2x	$(a_2x + a_1)x$
	a_2	$a_2x + a_1$	$(a_2x + a_1)x + a_0$
			$= p_2(x)$

	a_3	a_2	a_1	a_0
	·	a_3x	$(a_3x + a_2)x$	$[(a_3x + a_2)x + a_1]x$
	a_3	$a_3x + a_2$	$(a_3x + a_2)x + a_1$	$[(a_3x + a_2)x + a_1]x + a_0$
				$= p_3(x)$

Võte kandub üle neljanda, viienda ja üldse igasuguse astme polünoomile.

Näide. Olgu tarvis arvutada polünoomi

$$p(x) = 3x^5 - 7x^3 + 4x^2 - 11$$

väärtuse argumendi väärtusel $x = 5$.

Tähele pannes, et x astmete kordajad on

$$3 \quad 0 \quad -7 \quad 4 \quad 0 \quad -11,$$

korraldame arvutuse järgmiselt:

$x = 5$	3	0	−7	4	0	−11
	·	15	75	340	1720	8600
	3	15	68	344	1720	8589

Horneri võtte rakendamine polünoomi väärtuse arvutamiseks argumendi etteantud väärtuse puhul nõuab korrutamist ikka ainult ühe ja sellesama arvuga. Võte annab suurt aja ja vaeva kokkuhoidu. Vajalikud korrutamised tehakse kas peast või mõne arvutusvahendi (arvutusmasina, arvutuslükati) abil.

Ratsionaalsed funktsioonid

Ratsionaalse funktsiooni all mõistetakse kahe polünoomi jagatist

$$y = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Sel murdavaldisel on mõte ainult neil argumendi väärtustel, millel $b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0$. Sõnaga «ratsionaalne» kriipsutatakse alla seda asjaolu, et funktsiooni väärtused arvutatakse argumendi väärtustest, kasutades argumendi suhtes ainult ratsionaalseid operatsioone: liitmist, lahutamist, korrutamist (erijuhul astendamist) ja jagamist.

Ratsionaalsed on näiteks järgmised funktsioonid:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{3}{4x+5}, \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y = \frac{3x}{1+x^2},$$

$$y = \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}.$$

Erijuhuna kuuluvad siia eespool vaadeldud positiivse täisarvulise astendajaga astmefunktsioonid $y = ax^n$ ja polünoomid. Teiseks erijuhuks on negatiivse täisarvulise astendajaga astmefunktsioonid. Niisugused on näiteks funktsioonid

$$y = \frac{a}{x}, \quad y = \frac{a}{x^2}, \quad y = \frac{a}{x^3} \text{ jne.}$$

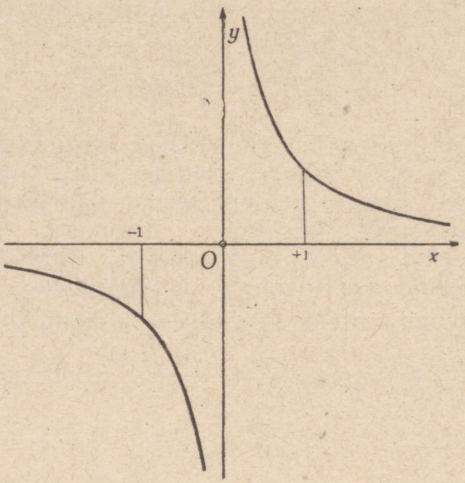
Kui ordinaatide mõõtühikuks valida a-kordne abstsisside mõõtühik, siis taanduvad need funktsioonid vastavalt funktsioonideks

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x^3} \text{ jne.}$$

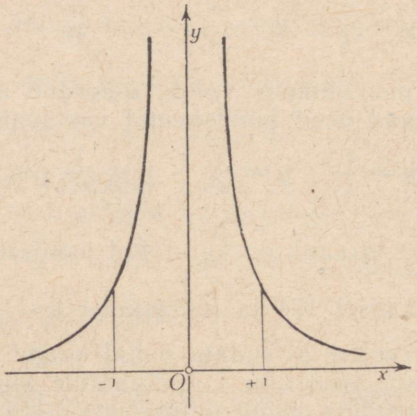
Funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ graafik on kujutatud joonisel 173, funktsiooni $y = \frac{1}{x^2}$ graafik joonisel 174 ja funktsiooni $y = \frac{1}{x^3}$ graafik joonisel 175. Paarituarvulise astendaja puhul kulgeb graafik I ja III veerandis ja on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes; paarisarvulise astendaja puhul kulgeb graafik I ja II veerandis, olles sümmeetriline ordinaattelje suhtes. Kõigil siin vaadeldavatel funktsioonidel on ühiseks omaduseks see, et nad pole määratud argumendi väärtusel $x = 0$. Argumendi lähenemisel nullile nende funktsioonide väärtused kasvavad (kas positiivses või negatiivses suunas) üle iga määra.

Sõltuvuses $y = \frac{a}{x}$ ja $y = \frac{a}{x^2}$ avalduvad mitmed tähtsad füü-

sika seadused, nagu Boyle'i seadus, Ohmi seadus, Newtoni gravitatsiooniseadus jt.



Joon. 173.



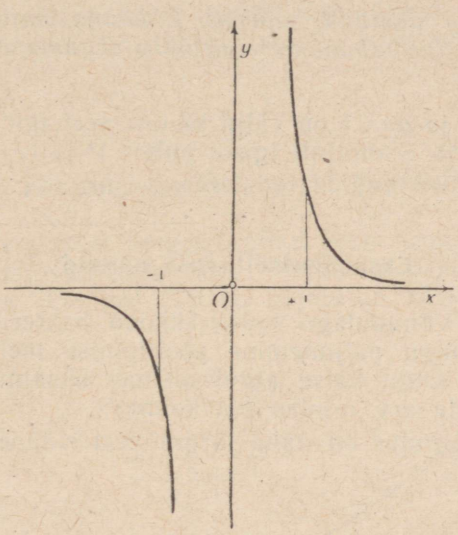
Joon. 174.

Nagu juba öeldud, kuuluvad ratsionaalsete funktsioonide hulka ka eespool vaadeldud täisratsionaalsed funktsioonid ehk polünoomid. Nende funktsioonide väärtused on arvutatavad ja seega funktsioonid määratud argumendi igal

väärtusel. Murdratsionaalsetel funktsioonidel seda omadust pole: nad pole määratud neil argumendi väärtustel, mille puhul nimetajas seisev polünoom saab nulliks. Funktsioon

$$y = \frac{2x+3}{x^2-x-2}$$

näiteks pole määratud argumendi väärtustel $x = -1$ ja $x = 2$.



Joon. 175.

§ 57. EKSPONENTSÕLTUVUS

Peale astmefunktsioonide, polünoomide ja trigonomeetriliste funktsioonide on eksponentsõltuvus * üks tähtsamaid sõltuvuse liike nii matemaatika teoreetilises osas kui ka praktilistes rakendustes. Eksponentsõltuvus valitseb kogu orgaanilist kasvamist; ta on põhiliseks sõltuvuseks, mille abil lahendatakse sündmuste tõenäosuse probleemid. Me selgitame siinkohal eksponentsõltuvuse mõistet üksikute tüüpiliste näidete varal. Täielikumalt käsitleme seda sõltuvust hiljem, kui meil on kasutada selleks vajalikud vahendid.

---

* Eksponent — astendaja. Lad. k. *exponere* — välja panema, esile tõstma.

Eksponentfunktsiooni avaldis

Astmesõltuvuse puhul on argumendiks olev a l u s muutuv; astendajaks on mingi konstant. Eksponentsõltuvuse puhul on argumendiks olev a s t e n d a j a muutuv; aluseks on mingi konstant. Astmesõltuvus avaldub kujul $y = cx^n$, ehk $y = x^n$, kui võrdetegur on taandatud arvule 1; eksponentsõltuvus avaldub kujul $y = ca^x$ ehk $y = a^x$, kui võrdetegur on taandatud arvule 1. Niisiis:

kui suurus y avaldub suuruse x kaudu kujul $y = a^x$, *kus* $a > 0$ *ja* $a \neq 1$, *siis nimetame suurust y argumendi x eksponentfunktsiooniks.*

Juhud $a = 0$ ja $a = 1$ on välja jäetud, sest iga nullist erineva x puhul $0^x = 0$ ja eranditult iga x puhul $1^x = 1$.

Eksponentsõltuvuse näiteid

N ä i d e 1. Võimaldagu toitekeskkond bakteritel piiramatult paljuneda. Toimugu paljunemine poolitumise teel kindlate ajavahemike järel. Olgu katse algul olemas üksainus bakter. Kui suur on bakterite arv n-ndas põlvkonnas?

Küsimuse lahendus on näha järgmistest ridadest:

põlvkonna järjekorranumber	1	2	3	...	n
bakterite arv	2	$2 \cdot 2$	$2 \cdot 2 \cdot 2$	...	$2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2$
ehk, lühemalt,	2^1	2^2	2^3	...	2^n

Nagu näeme, kasvab bakterite arv põlvkondades e k s p o n e n t s i a a l s e l t.

N ä i d e 2. Vähendatagu leiva hinda igal aastal $p\%$ võrra. Olgu ühe kilogrammi leiva hind antud aastal h rbl. Kui suur on leiva hind n aasta järel?

Küsimuse lahendamiseks võime arutleda järgmiselt: 1 aasta järel on leiva hind $h - h \cdot \frac{p}{100}$ ehk $h \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ ehk $h \cdot q$, kui sulgudes oleva avaldise tähistame lühiduse mõttes tähega q. Siit näeme, et järgmisel aastal kehtiv leiva hind saadakse eelmisel aastal kehtinud hinna korrutamisel teguriga q. Seepärast leiva hind on

1 aasta järel	2 aasta järel	3 aasta järel	...	n aasta järel
$h \cdot q$	$h \cdot q \cdot q$	$h \cdot q \cdot q \cdot q$	...	$h \cdot q \cdot q \ldots q$

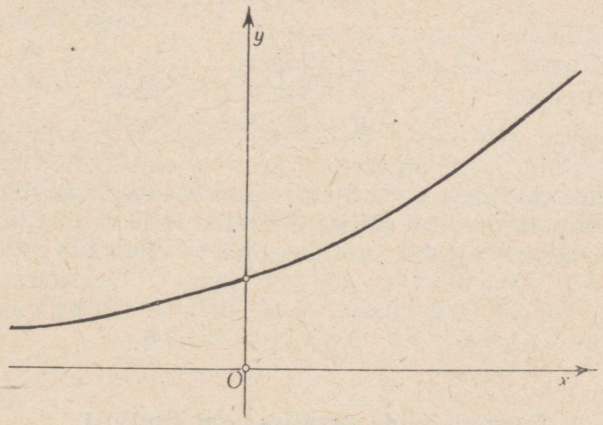
ehk

hq^1	hq^2	hq^3	...	hq^n

Nagu näeme, muutub leiva hind tehtud eeldusel eksponentsiaalselt. Et q, olles võrdne vahega $1 - \frac{p}{100}$, on väiksem kui 1, siis n suurenemisel avaldis hq^n järjest väheneb. Avaldises hq^n on tegur h konstantne, alus q konstantne, astendaja n muutuv.

Eksponentfunktsiooni käigugraafik

Funktsiooni $y = a^x$ käigugraafiku joonestamiseks tuleb koostada funktsiooni väärtuste tabel. Vajalikud arvutused saab teha arvutuslükatiga. Joonisel 176 on kujutatud kõver $y = 1{,}4^x$. Suu-



Joon. 176.

remate aluste puhul tõuseb kõver järsemalt, väiksemate aluste puhul aeglasemalt. Märgime lõpuks, et funktsioonide

$$y = a^x \quad \text{ja} \quad y = a^{-x}$$

käigugraafikud on teineteise peegelkujud y-telje suhtes. Tõepoolest, väärtusel

$x = +\xi$ on esimese graafiku ordinaat a^{ξ};

$x = -\xi$ „ teise „ „ $a^{-(-\xi)}$ ehk samuti a^{ξ}.

§ 58. FUNKTSIOONIDE LIIGITUS

Sõltuvuste loetelu

Koondame ühtsesse loetelusse kõik seni käsitletud sõltuvuse liigid, lisades neile ka koolikursusest tuntud sõltuvusi:

Sõltuvuse liik	Sõltuvuse väljendusvalem
Võrdeline sõltuvus	$y = ax$
Lineaarne sõltuvus	$y = ax + b$
Pöördvõrdeline sõltuvus	$y = \frac{a}{x}$
Ruutsõltuvus	$y = ax^2$
Kuupsõltuvus	$y = ax^3$
Astmesõltuvus	$y = ax^n$, kus n on mingi reaalarv
Polünomiaalne sõltuvus	$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
Ratsionaalne sõltuvus	$y = \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}$
Eksponentsõltuvus	$y = a^x$
Logaritmsõltuvus	$y = \log x$
Trigonomeetrilised sõltuvused	$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.

See nimestik täiendub hiljem väheste uute, loetletuist erivõtete teel tuletatud sõltuvustega. Kõik need sõltuvused koos moodustavad selle matemaatiliste töövahendite tuumiku, mille abil toimub elutu looduse, eluslooduse ja meie majanduselu nähtuste teaduslik käsitlemine.

Funktsioonide tavalisemaid liigitusi

On viisiks funktsioone liigitada ratsionaalseteks ja irratsionaalseteks. Esimeste puhul peab saama funktsiooni väärtust arvutada lõpliku arvu ratsionaalsete tehetega, see on lõpliku arvu liitmiste, lahutamiste, korrutamiste ja jagamistega (astendamist eraldi ei nimetata, sest see toimub järjestikuste korrutamiste teel). Teiste puhul lisandub neile tehetele veel ruut-, kuup- ja teiste juurte arvutamine.

Funktsioonid

$$y = 3x^2 - 5x + 17, \quad y = \frac{2x-1}{3x+5}, \quad y = \frac{x}{1+x^2}$$

näiteks on ratsionaalsed funktsioonid. Seevastu

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = \frac{x}{x + \sqrt{1 + x^2}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$$

on irratsionaalsed funktsioonid.

Funktsioone liigitatakse edasi algebralisteks ja transtsendentseteks. Esimeste puhul peab olema võimalik näidata, et nad rahuldavad võrrandit, milles argument x, funktsioon y ja konstandid on seotud ainult eespool loetletud nelja ratsionaalse tehtega. Teiste puhul pole võimalik niisugust võrrandit näidata.

Funktsioonid

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \text{ ja } y = \sqrt[3]{x^2}$$

näiteks on algebralised funktsioonid, sest esimene rahuldab võrrandit

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

teine võrrandit

$$y^3 - x^2 = 0.$$

Seevastu funktsioonid

$$y = \log x, \quad y = \sin x, \quad y = \tan x,$$

nagu on näidanud sügavam uurimine, ei saa olla ühegi algebralise võrrandi lahendeiks; nad on transtsendentsed funktsioonid.

Rakenduslikust seisukohast pole neil funktsioonide liigitustel tähtsust: küsimus seisab seal vaid selles, kas vajaduse korral saab funktsioonide väärtusi ruttu arvutada, konstrueerida või tabeleist leida.

PEATÜKK XVII

EMPIIRILISED SEADUSED

§ 59. NÄHTUSKÄIKE VALITSEVATE SEADUSTE LEIDMINE VAATLUSANDMEIST

Seadusi, mis on tuletatud vaatlus- või katseandmeist, ilma et neile oleks antud teoreetilist põhjendust, nimetatakse empiirilisteks seadusteks.

Nagu eespool nägime, tugineb iga nähtuskäiku valitseva seaduse otsimine vaatlusandmetele. Vaatlusandmete tabeli põhjal saame joonestada kõvera, mis on nähtuskäiku valitseva seaduse $y = f(x)$ graafiliseks vasteks ja ühtlasi vaatlusandmete tasandamise abinõuks. Seejuures jääb aga veel lahendamata ülesanne leida funktsiooni y avaldis. Paljudel juhtudel on seda ülesannet kõige hõlpsam lahendada graafilisel teel. Toome mõned näited ja selgitame töö käiku konkreetsete ülesannete lahendamise teel.

Lineaarse sõltuvuse juhtum

Ülesanne 1. Nähtuskäiku jälgides saadi järgmised andmed:

x	1,8	2,7	4,2	6,3	8,7	9,4	12,5
y	4,3	4,1	3,7	2,8	2,2	1,9	0,7

Tasandada vaatlusandmed ja leida nähtuskäiku valitsev seadus.

Lahendus. Kujutame andmete paarid punktidena xy-teljestikus (joon. 177). Saadud joonist vaadeldes näeme, et andmete paare kujutavad punktid asetsevad ligikaudu sirgel joonel. Et saada eriti sobivat sirget, tõmbame tüki niiti pingule ja asetame niidi punktide vahele nii, et ta neile oleks võimalikult lähedal. Kui niidi niisugune asend on leitud, tor-

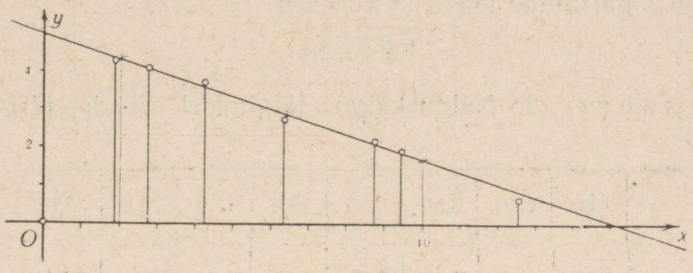
kame niidi kahe punkti kohal paberisse augukesed ja ühendame need joonlaua abil sirgega. Saadud sirge on otsitava seaduse graafiline vaste. Valides sirgel kaks punkti, näiteks $A(2;\ 4{,}3)$ ja $B(10;\ 1{,}7)$, saame sirgjoone võrrandi

$$\frac{y-4{,}3}{x-2}=\frac{1{,}7-4{,}3}{10-2}$$

ehk, pärast teisendamist,

$$y=-0{,}325x+4{,}95.$$

See muutujate x ja y vaheline seos ongi otsitav seadus.



Joon. 177.

Leitud seos võimaldab arvutada y tõenäoseid väärtusi, mis vastavad antud x-dele, ja seejärel leida vaatlusandmete vigu.

Astmesõltuvuse juhtum

Väga paljudel juhtudel saab nähtuskäiku kirjeldada astmesõltuvuse abil, mille üldkujuks on

$$y=ax^n,$$

kus a ja n on konstandid.

Näitame, et uute muutujate sobival valikul saab seadust $y=ax^n$ taandada lineaarseks seaduseks. Tõepoolest, kui

$$y=ax^n,$$

siis

$$\log y=\log a+n\log x.$$

Valides uued muutujad X ja Y nii, et

$$\log x=X \text{ ja } \log y=Y,$$

ning tähistades $\log a$ tähega b, näeme, et

$$Y = b + nX \text{ ehk } Y = nX + b.$$

See seos on XY-tasapinnal asetseva sirge võrrand.

Siit saame järgmise eeskirja astmelise empiirilise seaduse leidmiseks.

Lisaks algandmete xy-tabelile koostame XY-tabeli nii, et $X = \log x$ ja $Y = \log y$; teise tabeli andmed kujutame punktidena XY-tasapinnal ja vaatame, kas need punktid asetsevad ligikaudu sirgel joonel. Eitaval korral ei vii võte eesmärgile. Jaataval korral mõõdame sirge algordinaadi b ja tõusu m. Saadud m annab otsitavas seaduses esineva astendaja n, tegur a aga saadakse logaritmide tabeleist võrduse

$$\log a = b$$

põhjal.

Ülesanne 2. Nähtuskäigu jälgimisel saadi järgmised andmed:

x	1,60	2,40	3,55	5,89	10,0	12,9	20,0	38,9
y	1,78	1,86	2,04	2,29	2,51	2,69	2,88	3,24

On põhjust oletada astmelist seost x ja y vahel. Leida see seos.

Lahendus. Koostame abitabeli:

$X = \log x$	0,20	0,38	0,55	0,77	1,00	1,11	1,30	1,59
$Y = \log y$	0,25	0,27	0,31	0,36	0,40	0,43	0,46	0,51

Kujutades XY-paarid punktidena XY-tasapinnal (joon. 178), näeme, et need asetsevad ligikaudu sirgel joonel. Kaks selle sirgjoone punkti on $A(0; 0{,}20)$ ja $B(1{,}50; 0{,}50)$. Nende punktide koordinaatidest näeme, et sirgjoone algordinaat on 0,20 ja tõus

$$\frac{0{,}50 - 0{,}20}{1{,}50} = \frac{0{,}3}{1{,}5} = 0{,}20;$$

seega sirgjoone võrrand on

$$Y = 0{,}20X + 0{,}20.$$

Järelikult $n = 0{,}20$ ehk $\frac{1}{5}$.

Et

$$\log a = b = 0{,}20,$$

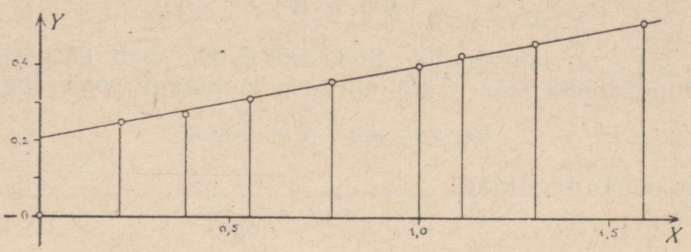
siis logaritmide tabeli järgi

$$a = 1{,}58.$$

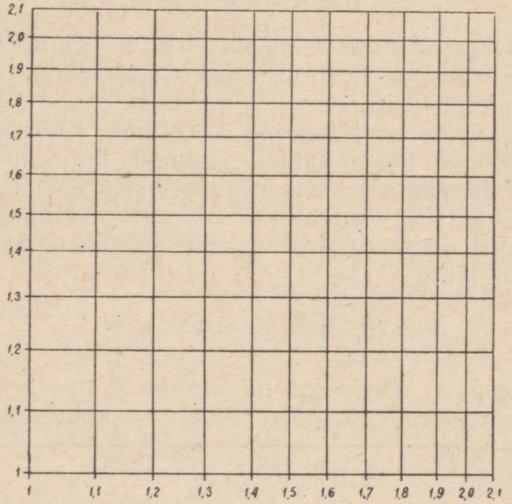
Seega otsitav seadus on

$$y = 1{,}58\, x^{\frac{1}{5}} \text{ ehk } y = 1{,}58 \sqrt[5]{x}.$$

Töö graafilise osa teostamiseks on otstarbekohane kasutada millimeetripaberit.



Joon. 178.



Joon. 179.

Tunduvalt kiiremini jõuaksime eesmärgile, kui kasutaksime võrku, kus kummalgi teljel on regulaarse skaala asemel kujutatud logaritmiline skaala. Niisuguse võrgu osa näeme

joonisel 179. Paber, millele on trükitud kirjeldatud võrk, kannab *logaritmilise paberi* nimetust. Niisugusesse võrku võib kohe märkida vaatlusprotokollis esinevad arvupaarid (x, y), koostamata abitabelit väärtuspaaride $(X = \log x,\ Y = \log y)$ jaoks.

Eksponentsõltuvuse juhtum

Üheks sageli esinevaks nähtuskäigu kirjeldamise vahendiks on *eksponentsiaalne seadus*, mida kirjutame kujul

$$y = c \cdot a^x,$$

kus c ja a on konstandid. Seda sõltuvust saab kergesti taandada lineaarseks, kui võtta võrduse kummagi poole logaritmid

$$\log y = \log c + x \cdot \log a.$$

Valides uued muutujad

$$X = x \text{ ja } Y = \log y$$

ning märkides $\log c$ tähega b ja $\log a$ tähega m, näeme, et

$$Y = b + mX \text{ ehk } Y = mX + b.$$

See aga on XY-tasapinnal asetseva sirge võrrand.

Öeldu põhjal saame järgmise eeskirja eksponentsiaalse empiirilise seaduse leidmiseks.

Lisaks algandmete xy-tabelile koostame XY-tabeli, kus $X = x$ ja $Y = \log y$; teise tabeli andmed kujutame punktidena XY-tasapinnal ja vaatame, kas need punktid asetsevad ligikaudu sirgel joonel. Eitaval korral ei vii võte eesmärgile. Jaataval korral mõõdame sirge algordinaadi b ja tõusu m. Nende järgi määrame võrdustest

$$\log c = b \text{ ja } \log a = m$$

arvud c ja a.

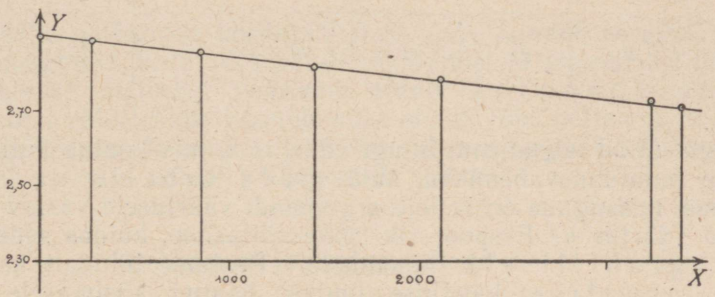
Ülesanne 3. Õhurõhu mõõtmine mitmesugusel kõrgusel maapinnast on andnud järgmise tabeli kokkukuuluvaid andmeid:

Kõrgus h meetrites	0	270	845	1453	2117	3230
Baromeetri lugem p millimeetrites	762	737	686	635	584	508

Teoreetilistel kaalutlustel on põhjust oletada eksponentsiaalset seost h ja p vahel. Leida see seos.

L a h e n d u s. Koostame abitabeli:

$X = h$	0	270	845	1453	2117	3230
$Y = \log p$	2,88	2,87	2,84	2,80	2,77	2,71



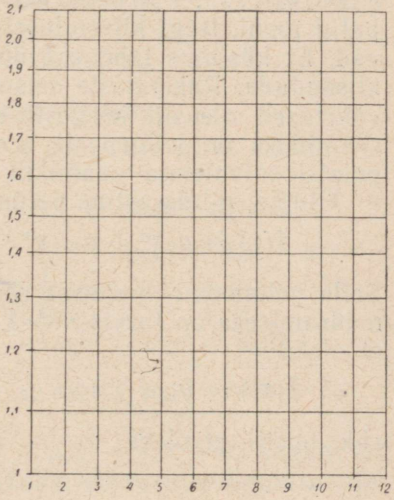
Joon. 180.

Kujutades XY-paarid punktidena XY-tasapinnal (joon. 180), näeme, et need asetsevad ligikaudu sirgel joonel. Kaks selle sirgjoone punkti on $A(0;\ 2{,}88)$ ja $B(2500;\ 2{,}74)$. Nende koordinaatide abil saab koostada sirgjoone AB võrrandi

$$\frac{Y - 2{,}88}{2{,}74 - 2{,}88} = \frac{X - 0}{2500 - 0}$$

ehk, lihtsustatult,

$$Y = -0{,}56 \cdot 10^{-4} X + 2{,}88.$$



Joon. 181.

Tunduvalt kiiremini jõuaksime eesmärgile, kui kasutaksime nn. p o o l l o g a r i t m i l i s t p a b e r i t, s. o. paberit võrguga, kus ühele teljele on kantud r e g u l a a r n e s k a a l a, teisele teljele aga logaritmiline skaala (joon. 181); niisugusesse võrku võib kohe märkida vaatlusprotokollis esinevad arvupaarid $(x,\ y)$, koostamata abitabelit väärtuspaaride $(X = x,\ Y = \log y)$ jaoks.

§ 60. INTERPOLATSIOONIPROBLEEM

Interpolatsiooniprobleemi seade

Olgu antud mõne nähtuskäigu vaatlusprotokoll, milles on $n+1$ paari kokkukuuluvaid argumendi ja funktsiooni väärtusi:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_{n+1}
y	y_1	y_2	y_3	...	y_{n+1}

ja olgu antud argumendi mingi väärtus x, mis kuulub küll argumendi muutumisvahemikku, kuid mida tabelis ei leidu. Küsime, missugune on sellele argumendi väärtusele vastav funktsiooni väärtus y? Eespool (lk. 353) näitasime, kuidas seda küsimust graafiliselt lahendada. Peatume lühidalt ka küsimuse arvulise käsitluse juures. Seatud küsimusele oleks kerge vastata, kui oleks teada funktsioon $y=f(x)$, millel argumendi antud väärtustel $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ on tabelis antud väärtused $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n+1}$. Kuid punktidest $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3), \ldots, P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$ on võimalik läbi tõmmata kuitahes palju jooni, isegi kitsendusel, et nad oleksid katkematud ja sujuvad. Et küsimus laheneks üheselt, on tarvis probleemi tunduvalt kitsendada. Rakenduste seisukohalt on tähtis, et funktsiooni $f(x)$ väärtused oleksid kergesti arvutatavad. Et niisugusteks funktsioonideks on kõigepealt polünoomid, siis rajatakse interpolatsioonivalemid enamikul juhtumeil polünoomidele.

Üldine, n-nda astme polünoom avaldub kujul

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Selle polünoomi avaldises esineb üldjuhul $n+1$ kordajat. Nende määramiseks on tarvis $n+1$ võrrandit. Need saame, kui nõuame, et oleks

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ f(x_3) = y_3,\ \ldots,\ f(x_{n+1}) = y_{n+1}$$

ehk, teisiti, et oleks

$$\begin{cases} a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + a_{n-2}x_1^{n-2} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_n x_2^n + a_{n-1}x_2^{n-1} + a_{n-2}x_2^{n-2} + \ldots + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x_{n+1}^n + a_{n-1}x_{n+1}^{n-1} + a_{n-2}x_{n+1}^{n-2} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 = y_{n+1} \end{cases}$$

See annab kokku $n+1$ lineaarset võrrandit $n+1$ tundmatuga $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. Määrates neist võrrandeist vajalikud korda-

jad, saame $f(x)$ avaldise. Asetades sellesse antud x väärtuse, saame nõutava y.

Küsimuse lahendamine kirjeldatud viisil on üsna tülikas, sest see eeldab paljudest võrranditest koosneva lineaarvõrrandisüsteemi lahendamist. Seepärast kasutame teist teed: tõestame, et otsitavat polünoomi saab ikka kirjutada kujul

$$f(x) = f(x_1) + f_1(x_2)(x - x_1) + f_2(x_3)(x - x_1)(x - x_2) + \\ + \ldots + f_n(x_{n+1})(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

ja et selle polünoomi kordajaid $f_1, f_2, \ldots, f_n$ saab kergesti määrata andmetest, kasutades ainult lahutamist ja jagamist. Lihtsuse ja lühiduse otstarbel vaatleme ainult kolmanda astme polünoomi. Mõttekäik kandub sõna-sõnalt üle neljanda, viienda ja kõigi kõrgemate astmete polünoomidele ning jääb kehtivaks ka esimese ja teise astme polünoomide kohta.

Polünoomi jagamine vahega $x - p$

Interpolatsioonivalemi tuletamise rajame nn. jäägiteoreemile ehk Bézout' teoreemile.

Teoreem. Jääk, mis tekib polünoomi jagamisel vahega $x - p$, on võrdne polünoomi väärtusega punktis $x = p$.

Tõestus. Jagame polünoomi

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

vahega $x - p$, kasutades harilikku jagamisskeemi:

$$\begin{array}{lll|l}
(a_3x^3 & +a_2x^2 & +a_1x + a_0) : (x - p) = a_3x^2 + & \\
a_3x^3 & -a_3px^2 & & \\
\hline
 & (a_3p + a_2)x^2 & +a_1x & + (a_3p + a_2)x + \\
 & (a_3p + a_2)x^2 & -(a_3p^2 + a_2p)x & + (a_3p^2 + a_2p + a_1) \\
\hline
 & & (a_3p^2 + a_2p + a_1)x + a_0 & \\
 & & (a_3p^2 + a_2p + a_1)x - (a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p) & \\
\hline
 & & a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0. &
\end{array}$$

Näeme, et polünoomi $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ jagamisel vahega $x - p$ on jagatis $f_1(x)$ antust ühe võrra madalama astme polünoom

$$f_1(x) = a_3x^2 + (a_3p + a_2)x + (a_3p^2 + a_2p + a_1),$$

jääk aga on

$$a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 \text{ ehk } f(p),$$

mida oligi tarvis tõestada.

Tõestatud teoreemi saab formuleerida ka järgmiselt:

olgu polünoom $f(x)$ ja arv p missugused tahes, ikka võib polünoomi $f(x)$ kirjutada kujul

$$f(x) = f(p) + f_1(x)(x - p),$$

kus $f_1(x)$ on ühe võrra madalama astmega polünoom kui $f(x)$.

Kujutleme, et arv p on võrrandi $f(x) = 0$ lahend. Siis $f(p) = 0$ ning polünoom $f(x)$ jagub vahega $x - p$ jäägita, ja ümberpöördult. Niisiis:

kui arv p on võrrandi $f(x) = 0$ lahend, siis jagub polünoom $f(x)$ vahega $x - p$ jäägita, ja ümberpöördult.

Arvutame $f(p)$ väärtuse Horneri skeemi järgi:

a_3	a_2	a_1	a_0
.	a_3p	$a_3p^2 + a_2p$	$a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p$
a_3	$a_3p + a_2$	$a_3p^2 + a_2p + a_1$	$a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0$

Nagu näeme,

Horneri skeemis seisab joone all viimasel kohal jääk, mis tekib polünoomi jagamisel binoomiga $x - p$; muud joone all seisvad avaldised on jagatise liikmete kordajad.

Öeldu põhjal saame polünoomi tülikat jagamist vahega $x - p$ teostada Horneri skeemi abil.

N ä i d e. Jagame polünoomi

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + 8x - 11$$

vahega $x - 5$.

Horneri skeem annab:

1	−7	0	8	−11
.	5	−10	−50	−210
1	−2	−10	−42	−221

Seega on jagamisel tekkiv jääk −221, jagatis aga on polünoom $x^3 - 2x^2 - 10x - 42$. Järelikult

$$x^4 - 7x^3 + 8x - 11 = -221 + (x^3 - 2x^2 - 10x - 42)(x - 5).$$

Interpolatsioonivalemi tuletamine

T e o r e e m. Olgu

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

mingi kolmanda astme polünoom ning p, q, r ja s neli mingisugust arvu. Siis on ikka võimalik kirjutada seda polünoomi kujul

$$f(x) = f(p) + f_1(q)(x-p) + f_2(r)(x-p)(x-q) + \\ + f_3(s)(x-p)(x-q)(x-r),$$

kus

$$f(p), \quad f_1(q); \quad f_2(r) \quad \text{ja} \quad f_3(s)$$

on kindlad arvud.

Tõestus. Jäägiteoreemi põhjal kirjutame, et

$$f(x) = f(p) + f_1(x)(x-p), \text{ kus } f_1(x) \text{ aste on 2;}$$

sama jäägiteoreemi põhjal on

$$f_1(x) = f_1(q) + f_2(x)(x-q), \text{ kus } f_2(x) \text{ aste on 1;}$$

sama jäägiteoreemi põhjal on edasi

$$f_2(x) = f_2(r) + f_3(x)(x-r), \text{ kus } f_3(x) \text{ aste on 0.}$$

Nullinda astme polünoom on aga konstant. Tähistades seda sümboliga $f_3(s)$, võime viimase võrduse kirjutada kujul

$$f_2(x) = f_2(r) + f_3(s)(x-r).$$

Asetades selle $f_2(x)$ avaldise $f_1(x)$ avaldisse, saame

$$f_1(x) = f_1(q) + f_2(r)(x-q) + f_3(s)(x-q)(x-r),$$

ja paigutades selle $f(x)$ avaldisse, saame lõpuks

$$f(x) = f(p) + f_1(q)(x-p) + f_2(r)(x-p)(x-q) + \\ + f_3(s)(x-p)(x-q)(x-r),$$

mida oligi tarvis tõestada.

Äsjasaadud polünoomi kuju kannab interpolatsioonivalemi nimetust.

Interpolatsioonivalemis esinev konstant $f_3(s)$ on kordajaks x kolmanda astme ees. Et

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv f(p) + f_1(q)(x-p) + \\ + f_2(r)(x-p)(x-q) + f_3(s)(x-p)(x-q)(x-r),$$

siis

$$f_3(s) = a_3.$$

Siit järeldub, et polünoomi $f(x)$ kirjutamiseks interpolatsioonivalemi kujul on vaid tarvis ette anda mingid kolm arvu p, q, r ja määrata kordajad $f(p)$, $f_1(q)$ ja $f_2(r)$. Neid kordajaid on kõige hõlpsam arvutada Horneri skeemi korduva rakendamise teel. Tõepoolest, rakendades seda skeemi funktsioonile $f(x)$ argumendi väärtusel $x = p$, saame joone all viimasel kohal väärtuse $f(p)$. Selle ees aga seisavad $f_1(x)$ kordajad. Võttes $x = q$, saame teise joone all viimasel kohal väärtuse $f_1(q)$, mille ees seisavad $f_2(x)$ kordajad. Võttes $x = r$, saame kolmanda joone all viimasel kohal $f_2(r)$, mille ees seisab $f_3(x) = f_3(s) = a_3$.

Näide. Olgu

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 13$$

ja $p = -3$, $q = -1$, $r = 5$.

Saame:

	1	−5	7	−13
$x = -3$	·	−3	24	−93
	1	−8	31	−106
$x = -1$	·	−1	9	
	1	−9	40	
$x = 5$	·	5		
	1	−4		
	1			

Seega

$$f(x) = -106 + 40(x + 3) - 4(x + 3)(x + 1) + \\ + (x + 3)(x + 1)(x - 5).$$

Sulgude avamine ja liikmete koondamine annab paremal poolel

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 13,$$

nagu peab olema.

Märkus. Polünoomi $f(x)$ kahe kirjutise

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

ja

$$f(x) = f(p) + f_1(q)(x - p) + f_2(r)(x - p)(x - q) + \\ + f_3(s)(x - p)(x - q)(x - r)$$

võrdlemisel näeme, et esimene on tunduvalt lühem ja lihtsam kui teine. Teise kirjutise paremuseks on aga asjaolu, et ta sobib hästi interpolatsiooniprobleemi lahendamiseks: etteantud funktsiooni väärtustest on kordajad $f(p)$, $f_1(q)$, $f_2(r)$ ja $f_3(s)$ võrratult kergemini määratavad kui kordajad a_3, a_2, a_1 ja a_0. Ja kui $f(x)$ on juba leitud interpolatsioonipolünoomi kujul, siis on veel ainult tarvis avada sulud ja koondada sarnased liikmed, et saada polünoomi korraldatuna liikmete tõusvate või alanevate astmete järgi.

Interpolatsiooniprobleemi lahendamine

Olgu antud neli paari kokkukuuluvaid argumendi ja funktsiooni väärtusi:

$$\begin{matrix} p & q & r & s \\ f(p) & f(q) & f(r) & f(s). \end{matrix}$$

Nõutagu polünoomi avaldist $f(x)$, mis argumendi antud väärtustel p, q, r ja s omandab etteantud väärtused $f(p)$, $f(q)$, $f(r)$ ja $f(s)$.

Nagu eespool nägime, määravad neli väärtuspaari just $(4-1)$-nda astme, see on kolmanda astme polünoomi. Kui avaldame selle polünoomi eespool toodud kujul

$$f(x) = f(p) + f_1(q)(x-p) + f_2(r)(x-p)(x-q) + f_3(s)(x-p)(x-q)(x-r),$$

siis jääb meil vaid määrata selle kordajad. Selleks asetame $f(x)$ avaldisse üksteise järel p, q, r ja s. Saame:

$$\begin{array}{ll} p & f(p) = f(p), \\ \hline q & f(q) = f(p) + f_1(q)(q-p), \\ r & f(r) = f(p) + f_1(q)(r-p) + f_2(r)(r-p)(r-q), \\ s & f(s) = f(p) + f_1(q)(s-p) + f_2(r)(s-p)(s-q) + \\ & \qquad + f_3(s)(s-p)(s-q)(s-r). \end{array}$$

Nagu näeme allakriipsutatud võrdusest, on esimene nõutav kordaja andmetest teada.

Lahutades allakriipsutatud võrduse liikmeti kolmest järgmisest, saame argumendi ja funktsiooni v a h e d:

$$\begin{array}{ll} q-p & f(q) - f(p) = f_1(q)(q-p), \\ r-p & f(r) - f(p) = f_1(q)(r-p) + f_2(r)(r-p)(r-q), \\ s-p & f(s) - f(p) = f_1(q)(s-p) + \\ & \qquad + f_2(r)(s-p)(s-q) + \\ & \qquad + f_3(s)(s-p)(s-q)(s-r). \end{array}$$

Jagades funktsiooni $f(x)$ vahed vastavate argumendi vahedega, saame jagatised

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p}, \quad \frac{f(r)-f(p)}{r-p}, \quad \frac{f(s)-f(p)}{s-p}.$$

Esimene neist on $f_1(q)$. Teine ja kolmas avaldis erinevad esimesest vaid selle poolest, et q asemel seisab r ja s. Järelikult on need kolm jagatist vastavalt $f_1(q)$, $f_1(r)$ ja $f_1(s)$. Seega saame tulba

$$\begin{array}{ll} q-p & f_1(q) = f_1(q), \\ \hline r-p & f_1(r) = f_1(q) + f_2(r)(r-q), \\ s-p & f_1(s) = f_1(q) + f_2(r)(s-q) + f_3(s)(s-q)(s-r). \end{array}$$

Lahutades allakriipsutatud rea liikmeti kahest järgmisest, saame tulba

$$\begin{array}{ll} r-q & f_1(r) - f_1(q) = f_2(r)(r-q), \\ s-q & f_1(s) - f_1(q) = f_2(r)(s-q) + f_3(s)(s-q)(s-r). \end{array}$$

Jagades funktsiooni $f_1(x)$ vahed vastavate argumendi vahedega, saame jagatised

$$\frac{f_1(r)-f_1(q)}{r-q}, \quad \frac{f_1(s)-f_1(q)}{s-q}.$$

Esimene neist on $f_2(r)$. Teine erineb esimesest vaid selle poolest, et r asemel seisab s. Järelikult on need kaks jagatist vastavalt $f_2(r)$ ja $f_2(s)$. Seega saame tulba

$$\begin{array}{ll} r-q & f_2(r)=f_2(r) \\ \hline s-q & f_2(s)=f_2(r)+f_3(s)\,(s-r). \end{array}$$

Lahutades allakriipsutatud rea järgmisest, saame

$$s-r \quad f_2(s)-f_2(r)=f_3(s)\,(s-r),$$

millest jagamisel vahega $s-r$ saame

$$\underline{s-r \quad f_3(s).}$$

Seega on polünoomi $f(x)$ kirjutamiseks vajalikud kordajad $f(p)$, $f_1(q)$, $f_2(r)$ ja $f_3(s)$ leitud.

Märgime, et kordaja $f(p)$ on teada andmeist, ülejäänute määramine toimub vaid lahutamise ja jagamise teel. Otstarbekal arvutuste paigutamisel mahub kogu numbriline töö mõnele reale.

N ä i d e 1. Leiame kolmanda astme polünoomi, mis

argumendi väärtustel	—5	—2	0	1
omandab väärtused	—17	13	—7	—11.

Arvutused korraldame järgmiselt:

x	$f(x)$			$f_1(x)$				$f_2(x)$				$f_3(x)$
—5	—17											
—2	13	3	30	3	10							
0	—7	5	10	5	2	2	—8	2	—4			
1	—11	6	6	6	1	3	—9	3	—3	1	1	1 1

Nagu näeme, on $f(p)$, $f_1(q)$, $f_2(r)$ ja $f_3(s)$ vastavalt —17, 10, —4 ja 1, nii et otsitav polünoom on

$$f(x)=-17+10(x+5)-4(x+5)(x+2)+(x+5)(x+2)x$$

ehk, pärast sulgude avamist ja koondamist,

$$f(x)=x^3+3x^2-8x-7.$$

Käsitletud võte on eriti väärtuslik selle poolest, et ta on ühtsel viisil rakendatav nii esimese kui ka teise, kolmanda jne. astme polünoomide puhul.

Näide 2. Leiame lineaarfunktsiooni, mis argumendi väärtustel —5 ja 10 omandab väärtused 8 ja —22.

Endisel viisil tööd korraldades saame tabeli

x	$f(x)$			$f_1(x)$	
—5	8				
10	—22	15	—30	15	—2

Seega

$$f(x) = 8 - 2(x + 5)$$

ehk, pärast sulgude avamist ja koondamist,

$$f(x) = -2x - 2.$$

Märkus. Võtte selgitamiseks on andmed eelmistes näidetes valitud nii, et kogu töö toimub täisarvudes. Tavaliselt on vahede jagatised murdarvud. Jagatiste määramise täpsus sõltub vahendeist, mida arvutamisel kasutame, ja sellest, kui suurt täpsust interpolatsioonivalem peab tagama.

Horneri skeemi kasutamine funktsiooni väärtuste arvutamisel interpolatsioonivalemi abil

Olgu teada, et argumendi väärtustel p, q, r ja s funktsioon omandab väärtused $f(p)$, $f(q)$, $f(r)$ ja $f(s)$. Nõutagu funktsiooni väärtust argumendi väärtusel ξ. Seda väärtust saab arvutada, niipea kui on leitud $f(x)$ avaldis

$$f(x) = c_0 + c_1(x - p) + c_2(x - p)(x - q) + \\ + c_3(x - p)(x - q)(x - r).$$

Seejuures pole tarvis sulgusid avada ja tulemust koondada. Asetades x asemele arvu ξ, saame

$$f(\xi) = c_0 + c_1(\xi - p) + c_2(\xi - p)(\xi - q) + \\ + c_3(\xi - p)(\xi - q)(\xi - r).$$

Paremal poolel seisva avaldise arvutame Horneri skeemi järgi, võttes korrutajateks vahed $\xi - r$, $\xi - q$, $\xi - p$:

$$\begin{array}{llll} c_3 & c_2 & & c_1 \\ & c_3(\xi - r) & & c_3(\xi - r)(\xi - q) + c_2(\xi - q) \\ \hline c_3 & c_3(\xi - r) + c_2 & c_3(\xi - r)(\xi - q) + c_2(\xi - q) & + c_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} c_0 \\ c_3(\xi - r)(\xi - q)(\xi - p) + c_2(\xi - q)(\xi - p) + c_1(\xi - p) \\ \hline c_3(\xi - r)(\xi - q)(\xi - p) + c_2(\xi - q)(\xi - p) + c_1(\xi - p) + c_0 \end{array}$$

Horneri skeemi joone all seisab viimasel kohal nõutud $f(x)$ väärtus $f(\xi)$.

VIIES OSA

ARVUKONTIINUUM
FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS

PEATÜKK XVIII

ARVUKONTIINUUMI MÕISTE

Sõnaga «arvukontiinuum» märgitakse kõigi suuruse järgi järjestatud reaalarvude hulka. See hulk hõlmab esiteks kõiki ratsionaalarve*, see tähendab naturaalarve, arvu null, negatiivseid täisarve ja kõiki positiivseid ja negatiivseid taandumatuid (liht- ja liig-) murde. Teiseks kuuluvad sellesse hulka kõik suuruse järgi järjestatud irratsionaalarvud**, nagu $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, log 3, sin 20°, tan 60°. Iga ratsionaalarvu saab esitada suhte $\frac{m}{n}$ kujul, kus m ja n on täisarvud. Irratsionaalarve niisuguse suhtena esitada ei saa; neid esitame tavaliselt lõpmatute mitteperioodiliste kümnendmurdudena.

Kui nimetus «suuruse järgi järjestatud reaalarvude hulk» asendatakse ühesõnalise nimetusega «arvukontiinuum», siis pole see tingitud ainuüksi soovist kasutada lühemat nimetust: uue nimetuse kasutuselevõtmine on tingitud eelkõige soovist rõhutada juba nimetuse enesega seda asjaolu, et reaalarvud täidavad reaalarvude valla. lünkadeta ehk, teisiti, et reaalarvude hulk on katkematu ehk, veel teisiti, et see hulk on pidev***.

Nagu aritmeetika ja algebra tuginevad naturaalarvude jadale 1, 2, 3, ... ja selles valitsevatele seadustele, nii tugineb matemaatiline analüüs arvukontiinuumile ja selles kehtivale seadustikule. Peale naturaalarvude jada kujundamise on arvukontiinuumi mõiste loomine matemaatilise mõtlemise suurimaks saavutuseks. Arvukontiinuum on kogu uuema aja matemaatika tsentraalseks mõisteks. See asjaolu kohustab meid hoolikalt jälgima tema kujunemise peamisi etappe. Sellele teemale pühendamegi järgmised paragrahvid.

---

* Lad. k. *ratio* — suhe.
** Irratsionaalne — mitteratsionaalne.
*** Lad. k. *continuus* — katkematu, pidev. Arvukontiinuum — katkematu, pidev arvuvald.

§ 61. RATSIONAALARVUDE VALLA KAKS PÕHILIST OMADUST

Ratsionaalarvud matemaatika rakendustes

Iga esemete koguse l o e n d a m i s e tulemuseks on mingi naturaalarv; esemete puudumist märgib arv null. Iga suuruse m õ õ t m i s e tulemuseks on positiivne või negatiivne täis- või murdarv. Loendamiseks ja mõõtmiseks vajalik ja piisav arvuvald on seega ratsionaalarvude vald ehk, teisiti,

matemaatika praktiliseks rakendamiseks vajalik ja selleks otstarbeks piisav arvuvald on ratsionaalarvude vald.

Iga mõõtmine toimub vaid teatava täpsusega. Järjest paremate mõõtmisriistade konstrueerimise ja täpsemate mõõtmismeetodite, eriti kaudse mõõtmise meetodite arendamisega surutakse mõõtmisviga järjest alla ja pole näha, et see mõõtmisvea allasurumine põrkaks tulevikus ületamatutele tõketele. Kerkib küsimus, kas ka tulevikus jääb ratsionaalarvude vald piisavaks mõõtmisprobleemi praktilisel käsitlemisel. Nagu kohe näeme, on vastus sellele küsimusele jaatav.

Ratsionaalarvude valla tihedus

Olgu a ja b mingid kaks ratsionaalarvu ja olgu näiteks $a < b$. Siis asetseb nende kahe arvu vahel veel kuitahes palju ratsionaalarve. Tõepoolest, moodustame arvude a ja b aritmeetilise keskmise c:

$$c = \frac{1}{2}(a + b).$$

Arv c on jällegi ratsionaalarv. Nagu teame, asetseb see arv arvude a ja b vahel, nii et $a < c < b$. Moodustades arvude a ja c ning c ja b aritmeetilised keskmised, saame kaks uut ratsionaalarvu: ühe a ja c, teise c ja b vahel, seega veel kaks uut ratsionaalarvu a ja b vahel. Nii edasi minnes saame kuitahes palju ratsionaalarve arvude a ja b vahel. Väide on kehtiv sõltumatult sellest, kui lähedal on teineteisele arvud a ja b, ja ka sellest, kus need arvud a ja b ratsionaalarvude vallas asetsevad. Niisiis i g a k a h e r a t s i o n a a l a r v u v a h e l a s e t s e b i k k a v e e l k u i t a h e s p a l j u r a t s i o n a a l a r v e. Seda omadust nimetatakse ratsionaalarvude valla t i h e d u s e k s. Seega

ratsionaalarvude vald on kõikjal tihe.

Olgu a mingi ratsionaalarv ja ε mingi etteantud positiivne, muidu aga kuitahes väike arv. Nagu praegu nägime, leidub siis vahemikus a ja $a + \varepsilon$ vahel (samuti vahemikus $a - \varepsilon$ ja a vahel)

kuitahes palju ratsionaalarve. Igaüks neist lähendab arvu a väiksema veaga kui ε. Niisiis

igale ratsionaalarvule leidub kuitahes palju kuitahes häid ratsionaalseid lähendeid.

Olgu mingi suuruse mõõtmistulemuseks arv a ja olgu mõõtmisvea tõkkeks arv ε. Suuruse õige väärtus peitub siis arvude $a-\varepsilon$ ja $a+\varepsilon$ vahel. Selles vahemikus leidub aga, nagu teame, kuitahes palju ratsionaalarve. Igaüks neist lähendab suuruse õiget väärtust väiksema veaga kui ε ja järelikult võib tulla kasutusele mõõdetava suuruse väärtusena. Niisiis: kui madalale me ka ei suruks mõõtmisviga, ikka leidub ratsionaalarve (ja isegi mistahes hulgal) suuruse arvuliseks väljendamiseks.

Ratsionaalarvude loenduvus

Ratsionaalarvude valla loomisel lähtusime naturaalarvude jadast

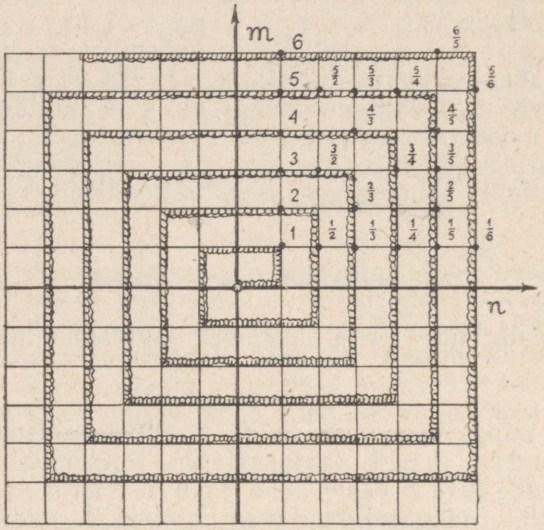
$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Selle jada mingi kahe arvu m ja n vahel asetseb $n-m-1$, seega kindel hulk naturaalarve. Ratsionaalarvude vallas asetseb arvude a ja b vahel üle iga määra palju ratsionaalarve. Naturaalarvud kuuluvad ratsionaalarvude hulka, kuid moodustavad nendest ainult osa: tõepoolest, iga ratsionaalarvu saab kirjutada kujul $\frac{m}{n}$, kus m ja n on täisarvud, murd $\frac{m}{n}$ taandub aga naturaalarvuks ainult siis, kui arvud m ja n on sama märgiga ja lugeja m on nimetaja n kordne. Sellest hoolimata on põhimõtteliselt võimalik kõiki ratsionaalarve nummerdada, järelikult ka loendada, ja seda nimelt nii, et iga ratsionaalarv saab oma numbri, seejuures iga number tuleb kasutamisele ja iga numbrit kasutatakse üksainus kord.

Tõestame selle väite kõigepealt nulli ja positiivsete ratsionaalarvude kohta.

1° Paneme tähele, et iga mõeldavat ratsionaalarvu saab kirjutada kujul $\frac{m}{n}$, kus m ja n on täisarvud ja $n>0$. Avaldis $\frac{m}{n}$ kujutab nulli, kui $m=0$, kõiki positiivseid täisarve, kui $n=1$, $m>0$, ja kõiki positiivseid taandumatuid murde, kui m ja n on positiivsed ühistegurita arvud. Niisiis: igale vaadeldavale ratsionaalarvule $\frac{m}{n}$ vastab üksainus paar täisarve (m, n), kus $m \geqslant 0$, $n>0$ ning m ja n on ühistegurita arvud. Ümberpöördult, iga niisugune arvupaar, milles m ja n kohta seatud tingimused on täidetud, kujutab üht kindlat ratsionaalarvu: nulli, positiivset täis- või murdarvu.

2° Kujutleme ruutvõrguga kaetud tasapinda (joon. 182). Võtame kaks ristuvat võrgusirget m- ja n-teljeks ja ruudu külje pikkusühikuks. Võrgu iga sõlmpunkt kujutab siis üht arvupaari (m, n) täisarvuliste m ja n väärtustega ja ümberpöördult.



Joon. 182.

Kustutame nüüd kõik võrgu sõlmpunktid, millel $n \leqslant 0$ ja $m \leqslant 0$. Kustutame edasi esimeses veerandis sõlmpunktid, mille koordinaadid n ja m omavad ühist tegurit. Järele jäävad mustade sõõridega märgitud punktid. Kõigil neil on $n > 0$, $m > 0$ ning m ja n ühistegurita. Seega iga sõõriga märgitud punkt kujutab üht kindlat positiivset ratsionaalarvu ja igale niisugusele ratsionaalarvule vastab oma kindel kujutuspunkt.

3° Joonestame «nurgelise spiraali», nagu näha joonisel 182. See läbib eranditult kõiki võrgu sõlmpunkte ja igaüht neist üksainus kord. See «spiraal» läbib siis ka iga sõõriga märgitud punkti ja seda ka muidugi üksainus kord. Kerime «spiraali» sirgjoonele, kaasa võttes spiraalil asetsevad sõõrid, ja kirjutame sirgele langevate sõõride juurde neile vastavad positiivsed ratsionaalarvud:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ 3,\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},$$

$$\frac{5}{4},\ \frac{5}{3},\ \frac{5}{2},\ 5,\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{5},\ 6 \text{ jne.}$$

Sammudes nüüd piki sirget, nummerdame sõõrid ja seega ka neile vastavad ratsionaalarvud numbritega 1, 2, 3 jne. Tulemuseks on tabel:

Ratsionaalarv	0	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	4	$\frac{1}{5}$	...
Number	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...

Nagu näeme, saab null ja iga positiivne ratsionaalarv oma numbri (arv $\frac{1}{5}$ näiteks saab numbri 13) ja ümberpöördult, numbrile 1 vastab arv 0 ja igale teisele numbrile vastab oma positiivne ratsionaalarv (numbrile 11 näiteks vastab ratsionaalarv $\frac{4}{3}$). On selge, et kirjeldatud võttega haaratakse null ja iga positiivne ratsionaalarv ja igaüks nimetatud arvudest üksainus kord. Samuti tuleb numbrina kasutusele iga naturaalarv ja iga niisugune arv üksainus kord. Kirjeldatud võttega luuakse nulli ja positiivsete ratsionaalarvude ning naturaalarvude vahele üksühene vastavus: igale ratsionaalarvule vastab üks naturaalarv ja, vastupidi, igale naturaalarvule üks ratsionaalarv. Seda tõsiasja väljendatakse ütlusega, et null ja positiivsed ratsionaalarvud moodustavad nummerduva hulga.

4° Eespool kasutatud võtet saab üle kanda sümboli m kõiki võimalikke täisarvulisi väärtusi haaravale juhule ($m < 0$, $m = 0$, $m > 0$). Järelikult null ja kõik positiivsed ja negatiivsed ratsionaalarvud moodustavad nummerduva hulga.

Kui mingi objektide hulk on niisugune, et igale temasse kuuluvale objektile saab anda oma numbri ja igale numbrile vastab oma objekt, siis nimetame hulka nummerduvaks. On selge, et niisuguse hulga objekte saab loendada: objekt nr. 1, objekt nr. 2, objekt nr. 3 jne. ehk esimene objekt, teine objekt, kolmas objekt jne.

Nummerduvat hulka nimetatakse seepärast ka loenduvaks hulgaks. Seega

null ja kõik positiivsed ja negatiivsed ratsionaalarvud moodustavad loenduva hulga.

§ 62. IRRATSIONAALARVUD

Nagu nägime, piisab naturaalarvudest loendamiseks ja ratsionaalarvudest tegeliku mõõtmisega seotud küsimuste lahendamiseks. Ratsionaalarvude valla tihedus viib mõttele, et neist arvudest piisab ka kõigi mõõtmisega seoses olevate teoreetiliste küsimuste otsustamiseks, numbriliste võrrandite lahendite leidmiseks ja teiste arvutamisprobleemide lahendamiseks. Ometi ei ole see nii. Selle tõe avastamine oli klassikalise Kreeka teaduse üks suuremaid saavutusi. Kui tahame avaldada kõik kvantitatiivsed vahekorrad arvudena, siis tuleb meil arvuvalda veelgi laiendada. See toimub irratsionaalarvude mõiste loomise teel.

Näiteid ratsionaalarvudes lahendamatute probleemide kohta

Näide 1. Ühikruuduks nimetatakse ruutu, mille külje pikkus on 1. Leiame ühikruudu diagonaali pikkuse.

Märkides otsitava tähega x, saame Pütagorase lause põhjal, et $x^2 = 1^2 + 1^2$ ehk

$$x^2 = 2.$$

Sama võrrandi lahendamisele viib ruudu duplikatsiooni* probleem.

Olgu antud ruut külje pikkusega a. Selle ruudu pindala on a^2. Kui pikk on kaks korda suurema pindalaga ruudu külg?

Märkides otsitava külje pikkuse ja antud külje pikkuse suhte tähega x, näeme, et otsitava külje pikkus avaldub kujul xa. Järelikult $x^2a^2 = 2a^2$ ehk

$$x^2 = 2.$$

Asume saadud võrrandi lahendi otsimisele. On selge, et pole täisarvu, mille ruut on 2. Tõepoolest, $1^2 = 1 < 2$, $2^2 = 4 > 2$ ja veelgi suuremad on 2-le järgnevate täisarvude ruudud. Katsume nõuet $x^2 = 2$ rahuldada taandumatu murruga $\frac{m}{n}$: olgu $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Siis on $m^2 = 2n^2$, millest nähtub, et m^2 on paarisarv. Seepärast peab ka m ise olema paarisarv: $m = 2\mu$, sest kui m oleks paaritu arv $2\mu + 1$, siis tema ruut oleks $4\mu^2 + 4\mu + 1$ ehk $4(\mu^2 + \mu) + 1$, seega kindlasti paaritu arv. Kui aga m on paarisarv 2μ, siis $m^2 = 4\mu^2$, $4\mu^2 = 2n^2$, $n^2 = 2\mu^2$. Et n^2 on paarisarv, siis on ka n ise paarisarv, ütleme 2ν. Murdu

$$\frac{m}{n} \quad \text{ehk} \quad \frac{2\mu}{2\nu}$$

---

* Lad. k. *duplus* — kahekordne.

saab järelikult 2-ga taandada, mis on vastuolus oletusega, et murd $\frac{m}{n}$ on taandumatu.

Niisiis pole ratsionaalarvude vallas arvu, mis oleks uuritava kolmnurga hüpotenuusi mõõtarvuks, ehk, teiste sõnadega, uuritava kolmnurga hüpotenuusil pole ratsionaalarvude vallas arvulist vastet. Teise näite puhul ütleksime, et kui kahe ruudu pindalad suhtuvad nagu 1 : 2, siis ei leidu niisugust ratsionaalarvu, mis võrduks nende ruutude külgede suhtega, ehk, teiste sõnadega, nende kahe ruudu külgede suhtel pole ratsionaalarvude vallas arvulist vastet.

Näide 2. Olgu antud kuup serva pikkusega a. Kui pikk on kaks korda suurema ruumalaga kuubi serv?

Selle ülesande — kuubi duplikatsiooni probleemi — lahendamine viib kuupvõrrandile

$$x^3 = 2.$$

Nagu eespool, nii saab siingi veenduda, et sellel võrrandil pole ratsionaalset lahendit — kuubi duplikatsiooni probleem on ratsionaalarvudes lahendamatu.

Näide 3. Leida log 7.

Otsides seda logaritmi kujul $\frac{m}{n}$, näeme, et

$$10^{\frac{m}{n}} = 7 \text{ ehk } 10^m = 7^n.$$

Viimane võrdus ei saa aga kehtida, sest vasakul poolel seisva arvu kirjutis lõpeb nulliga, paremal poolel seisva arvu kirjutis seevastu ühega numbritest 7, 9, 3, 1. Niisiis: ratsionaalarvude hulgas ei leidu arvu, mis rahuldaks log 7 definitsiooni; log 7 leidmise probleem on ratsionaalarvudes lahendamatu.

Tõsiasi, et ratsionaalarvudest ei piisa paljude matemaatiliste probleemide lahendamiseks, ilmneb eriti selgesti mõõtmisprobleemi teoreetilisel käsitlemisel. Seda probleemi vaatleme käesoleva paragrahvi kahes järgmises osas.

Ühismõõduga lõigud

Kaks lõiku m ja n on ühismõõduga, kui leidub niisugune kolmas lõik l, et see nii ühte kui teise lõiku mahub täisarv korda.

Sel puhul $m = \mu \cdot l$ ja $n = \nu \cdot l$, kus μ ja ν on täisarvud. Siis aga suhe $m : n = \mu : \nu$. See tähendab, et lõikude m ja n

suhe on ratsionaalarv. Ümberpöördult: võrre $m : n = \mu : \nu$ näitab, et on olemas lõik, mis täisarv korda mahub nii esimesse kui teise antud lõiku; tõepoolest, selle võrde kehtimisel

$$\frac{m}{\mu} = \frac{n}{\nu},$$

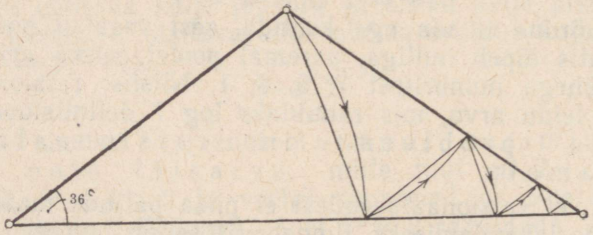
see tähendab aga, et üks μ-ndik lõigust m on sama mis üks ν-ndik lõigust n.

Toodud võrdest järeldub veel, et $m = \frac{\mu}{\nu} n$ ja $n = \frac{\nu}{\mu} m$, seega *ühismõõduga lõigud avalduvad teineteise kaudu ratsionaalselt.*

Lõikude m ja n $(m > n)$ ühismõõdu leidmine tugineb asjaolule, et lõikude m ja n ühismõõt on ühtlasi ühismõõduks lõikudele n ja $m - n$. Tõepoolest, kui $m = \mu \cdot l$ ja $n = \nu \cdot l$, siis $m - n = (\mu - \nu) \cdot l$. See tähendab, et lõik l, mis täisarv korda mahub lõikudesse m ja n, mahub täisarv korda ka nende vahesse. Seega taandub lõikude m ja n ühismõõdu otsimine väiksemate lõikude n ja $m - n$ ühismõõdu otsimisele.

Ühismõõduta lõigud

On lõike, millel pole ühismõõtu. Võtame näiteks võrdhaarse kolmnurga, mille tipunurk on 108° ja järelikult alusnurk on 36°. Otsime selle kolmnurga haara ja aluse



Joon. 183.

ühismõõtu. Et $108° > 36°$, siis on alus pikem kui haar. Kanname haara alusele ja leiame nende vahe. Uuritava kolmnurga haara ja aluse ühismõõt on eespool öeldu põhjal ka haara ja leitud vahe ühismõõt. Jooniselt on aga näha, et see vahe ja haar moodustavad jällegi võrdhaarse kolmnurga tipunurgaga 108°. Konstruktsiooni korrates saaksime uuesti samalaadse kolmnurga, edasi jälle samalaadse kolmnurga jne., jõudmata

kunagi lõpule. Et kolmnurkade mõõtmed iga sammuga vähenevad ja võtte jätkamisel muutuvad väiksemaks igast etteantud lõigust, siis järeldub, et otsitav ühismõõt peab olema väiksem igast etteantud lõigust, teiste sõnadega — seda ühismõõtu pole. Uuritava kolmnurga alust ei saa avaldada ratsionaalselt haara kaudu. Kui pikkusühikuks võtame uuritava kolmnurga haara, siis ei leidu meie senises arvuvallas arvu, mis oleks aluse mõõtarvuks.

Irratsionaalarvud

Eespool toodud näidetest selgub, et arvude varust, mis on meile antud ratsionaalarvude vallaga, ei piisa paljude silmanähtavalt mõistlikult seatud probleemide lahendamiseks; tuleb kas öelda, et need probleemid on lahendamatud, või püüda niigi juba tihedat ratsionaalarvude valda rikastada uut liiki arvude loomisega. Teadus on valinud viimase tee: ta on loonud irratsionaalarvud.

Irratsionaalarvu mõiste loomine oli järjekordseks sammuks arvu mõiste järkjärgulise laiendamise teel. Kõnesolev samm nagu varajasemadki sellesuunalised sammud oli tingitud püüdest arvuliselt haarata meie ümber toimuvas nähtustikus ilmnevaid kvantitatiivseid seoseid ja fikseerida neid võimalikult kompaktsel, lihtsal ja ülevaatlikul viisil.

Koos ratsionaalarvudega järjestuvad ka irratsionaalarvud suuruse järgi. Irratsionaalarvudega nii omaette kui ka koos ratsionaalarvudega saab toimetada kõiki aritmeetilisi tehteid, kusjuures säilib arvutamise põhiseaduste kehtivus. See asjaolu õigustab nende nimetamist irratsionaalarvudeks.

Irratsionaalarvud konstrueeritakse ratsionaalarvudest järkjärgulise lähendamise meetodit kasutades. Märgime, et see meetod on rakendusmatemaatika üheks põhiliseks töövahendiks. Käesoleva paragrahvi kaks järgmist osa on pühendatud selle meetodi põhimõtte selgitamisele.

Järkjärgulise lähendamise meetod

Nõutagu varem saadud võrrandi

$$x^2 = 2$$

positiivse lahendi leidmist. Me teame, et seda võrrandit ei saa ratsionaalarvude vallas lahendada täpselt. Katsume siis seda võrrandit lahendada ligikaudu. Et $1^2 < 2$ ja $2^2 > 2$, siis arv $a_1 = 1$ rahuldab nõuet $x^2 = 2$ puudusega, arv $b_1 = 2$

aga liiaga. Vahe $b_1 - a_1 = 1$. Moodustame arvude a_1 ja b_1 aritmeetilise keskmise: $\frac{1}{2}(a_1 + b_1) = \frac{3}{2}$. Selle ruut on $\frac{9}{4}$, järelikult > 2, seega arv $b_2 = \frac{3}{2}$ rahuldab nõuet liiaga. Niisiis arv $a_2 = 1$ rahuldab nõuet puudusega, arv $b_2 = \frac{3}{2}$ seevastu liiaga. Vahe $b_2 - a_2 = \frac{1}{2}$. Moodustame a_2 ja b_2 aritmeetilise keskmise: $\frac{1}{2}(a_2 + b_2) = \frac{5}{4}$. Selle ruut on $\frac{25}{16}$, järelikult < 2; seega arv $a_3 = \frac{5}{4}$ rahuldab nõuet puudusega, arv $b_3 = b_2 = \frac{3}{2}$ liiaga. Vahe $b_3 - a_3 = \frac{1}{4}$. Edasi saaksime, et arv $a_4 = \frac{11}{8}$ annab vastuse puudusega, arv $b_4 = \frac{3}{2}$ liiaga. Vahe $b_4 - a_4 = \frac{1}{8}$. On selge, et sel viisil edasi minnes saame nii mitu ligikaudset lahendit ehk lahendi lähisväärtust ehk lähendit kui soovime. Võtame nad kokku tabeliks:

Lähendi number	Lähend puudusega a	Lähend liiaga b	Lähendite vahe $b-a$
1	$a_1 = 1$	$b_1 = 2$	1
2	$a_2 = 1$	$b_2 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
3	$a_3 = \frac{5}{4}$	$b_3 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$
4	$a_4 = \frac{11}{8}$	$b_4 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$
5	$a_5 = \frac{23}{16}$	$b_5 = \frac{3}{2}$	$\frac{1}{16}$
6	$a_6 = \frac{23}{16}$	$b_6 = \frac{47}{32}$	$\frac{1}{32}$
...	...	...	...

Oleme saanud kaks jada arve: lähendid puudusega:
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, kus $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots$,
ja lähendid liiaga:
$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$, kus $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$
Esimene on jada mittevähenevaid, üldiselt kasvavaid arve,

teine seevastu on jada mittekasvavaid, üldiselt kahanevaid arve. Vahed liiaga ja puudusega lähendite vahel on:

$$b_1 - a_1 = 1,\ b_2 - a_2 = \frac{1}{2},\ b_3 - a_3 = \frac{1}{4},\ \ldots,\ b_n - a_n = \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots$$

Need vahed vähenevad geomeetrilises progressioonis teguriga $q = \frac{1}{2}$; see tähendab, et iga järgmine vahe on vaid pool eelmisest.

Seega küllalt suure järgunumbri n puhul saab vahe $b_n - a_n$ väiksemaks igast etteantud arvust. Niisiis: arvud a moodustavad jada järjest paremaid lähendeid puudusega, arvud b seevastu jada järjest paremaid lähendeid liiaga. Et otsitav x asetseb a_n ja b_n vahel, siis on n-järku lähendite viga väiksem kui $b_n - a_n$ ehk $1 : 2^{n-1}$. Järgunumbri n küllaldasel kasvamisel langeb lähendite a_n ja b_n viga alla iga määra: arvud a_n ja b_n lahendavad küsimuse küll ainult ligikaudu, kuid nii hästi kui iganes tahame.

Märgime, et praegu kirjeldatud võtte abil saab ligikaudselt lahendada paljusid võrrandeid, nende seas muidugi ka võrrandit $x^3 = 2$, millele viis kuubi duplikatsiooni ülesanne.

Lähendi parandamine

Eespool kirjeldatud võtte eeliseks on põhimõtte lihtsus, puuduseks aga veidi suur töö ja aja kulu iga uue lähendi leidmisel. Üks tee töö hõlbustamiseks ja kiirendamiseks seisab selles, et tuletatakse korduvalt rakendatav valem lähendi paranduse määramiseks. Võrrandi $x^2 = 2$ puhul võiks selle valemi saada näiteks järgmiselt: olgu a leitud lähend, näiteks lähend puudusega; siis $a^2 < 2$. Olgu α lähendi parandus; kui ka $a + \alpha$ peab olema lähend puudusega, siis peab olema $(a + \alpha)^2 < 2$ ehk $a^2 + 2a\alpha + \alpha^2 < 2$ ehk $2a\alpha + \alpha^2 < 2 - a^2$. Kui $\alpha = 1$ või > 1, siis α on kindlasti liihtmurd, seega $\alpha^2 < \alpha$. Järelikult on eelmine tingimus kindlasti täidetud, kui parandus α on valitud nii, et $2a\alpha + \alpha < 2 - a^2$ ehk $(2a + 1)\alpha < 2 - a^2$. Siin $a > 0$, järelikult ka $2a + 1 > 0$. Seega sobib lähendi a paranduseks iga positiivne arv α, mis rahuldab võrratust

$$\alpha < \frac{2 - a^2}{2a + 1}.$$

Selle võrratuse kohaselt valitud α puhul on $a + \alpha$ parem lähend kui a. Samal viisil näitaksime, et igale liiaga lähendile b saab leida paranduse

$$\beta < \frac{b^2 - 2}{2b + 1},$$

nii et $b - \beta$ oleks ikkagi veel lähend liiaga, kuid parem kui b. Tuletatud valemeid saab rakendada korduvalt, kuni võrrandi lahend on leitud nõutava täpsusega.

Kirjeldatud võtted lähendite eneste või nende paranduste leidmiseks pole ainsad. Samaks otstarbeks on loodud veel mitmeid teisi võtteid. Kõigil neil on aga üks ühine joon: nad põhinevad mingil kindlal, ikka jälle korduval skeemil. Seda liiki arvutusvõtteid nimetatakse algoritmideks.

Lähendite koonduvus

Pöördume tagasi võrrandi $x^2 = 2$ lahendamise küsimuse juurde. Nagu nägime, pole olemas ratsionaalarvu, mis rahuldaks seda võrrandit täpselt. Küll aga on võimalik saada kuitahes palju selle võrrandi ligikaudseid lahendeid:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \qquad \text{(a)}$$

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots \qquad \text{(b)}$$

Esimene jada on koostatud ligikaudseist lahendeist puudusega, teine ligikaudseist lahendeist liiaga:

$$a_n^2 < 2, \quad b_n^2 > 2 \text{ iga } n \text{ puhul.}$$

Seejuures lahendi järjekorranumbri n ikka suuremaks ja suuremaks kasvamisel saab vahet

$$b_n - a_n$$

suruda alla iga määra.

Mingi suuruse lähendite jadasid

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \text{ ja } b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$$

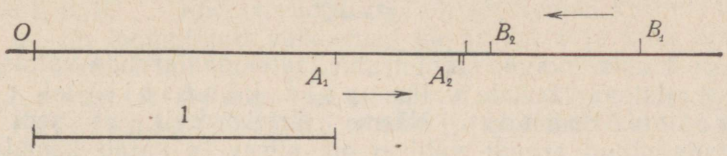
nimetatakse koonduvateks, kui järjekorranumbri n ikka suuremaks ja suuremaks kasvamisel vahe $b_n - a_n$ kahaneb alla iga määra.

Hea kujutluse sõna «koonduvus» tähendusest saame jadasid (a) ja (b) graafiliselt kujutades. Teeme seda kahel viisil.

Esimene viis. Kujutame arvteljel nii arvud a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... kui ka arvud b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...(joon. 184). Punkt $A_n \equiv (a_n)$ liigub siis numbri n kasvamisel järjest paremale poole või seisab kohati paigal, kui näiteks $a_{n+1} = a_n$. Punkt $B_n \equiv (b_n)$ liigub numbri n kasvamisel järjest vasakule poole või seisab kohati paigal, kui näiteks $b_{n+1} = b_n$. Alati aga jäävad kõik punktid A_n vasakule poole kõigist punktidest B_n ja kõik punktid B_n paremale poole kõigist punktidest A_n. Lõik $A_nB_n = b_n - a_n$. Seega numbri n küllalt suureks kasvamisel kahaneb lõigu A_nB_n pikkus alla iga määra. Joonisel 184

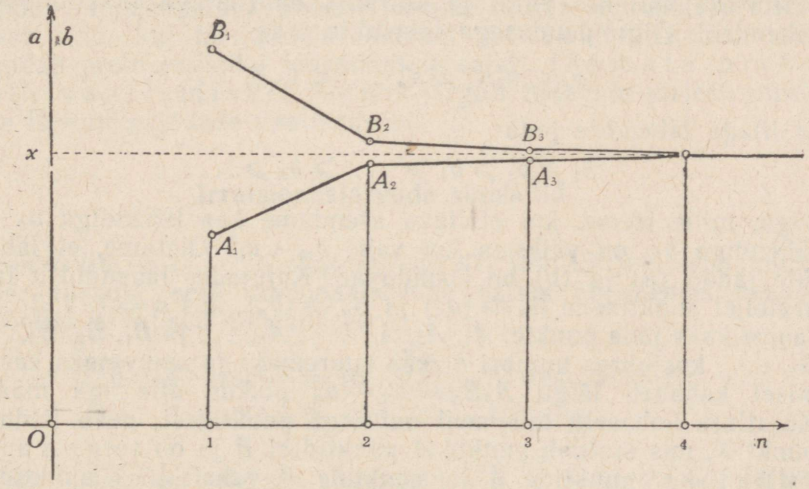
on hästi näha lõigud A_1B_1 ja A_2B_2. Lõik A_3B_3 on vaevu nähtav ja lõike A_4B_4, A_5B_5 jne. silm enam ei eraldaks.

T e i n e v i i s. Võtame kaks teineteisele asetatud teljestikku: *na*-teljestiku ja *nb*-teljestiku (joon. 185). Kasutame neis ühtesid ja samu kujutusühikuid. Märgime *na*-tasapinnal punktid



Joon. 184.

$A_n \equiv (n,\ a_n)$ ja *nb*-tasapinnal punktid $B_n \equiv (n,\ b_n)$. Punktiridade $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ja $B_1, B_2, B_3, \ldots$ jälgimise hõlbustamiseks joonestame murdjoone $A_1A_2A_3 \ldots$ ja $B_1B_2B_3 \ldots$ Esimene on t õ u s e v, teine l a n g e v ning kõikjal kulgeb esimene a l l p o o l



Joon. 185.

teist. Lõik $A_nB_n = b_n - a_n$ kahaneb meie joonisel juba väärtusel $n = 4$ alla määra, mida silm veel joonisel näeb, ja n veel suuremate väärtuste juures silm enam murdjooni $A_1A_2A_3 \ldots$ ja $B_1B_2B_3 \ldots$ teineteisest ei eralda. Mõlemad murdjooned lähenevad ikka enam ja enam teatavale sirgele, mis kulgeb rööbiti n-teljega. See sirge on r a j a k s, mis lahutab kõiki ordinaate a, mille puhul $a^2 < 2$, kõigist ordinaatidest b, mille puhul $b^2 > 2$. Kui

tähistame selle rajasirge kaugust abstsissteljest tähega x, siis on rajasirge võrrandiks

$$\text{kas } a = x \text{ või, mis on seesama, } b = x,$$

kusjuures peaks olema

$$x^2 = 2.$$

Niisugust arvu x aga, nagu teame, ratsionaalarvude vallas pole. Seega ratsionaalarvude vallas pole kõnesoleval rajasirgel võrrandit. Näeme järjekordselt, et seni meil kasutada olnud arvude vald ei ole piisav ja vajab laiendamist.

Irratsionaalarvu mõiste

Üldistame eespool öeldut. Olgu meil tegemist mingi probleemiga, millele ratsionaalarvude hulgas ei leidu täpset lahendit. Olgu võimalik probleemi lahendada ratsionaalarvudes ligikaudu ning kindlat algoritmi kasutades saada otsitavale kuitahes palju ja kuitahes häid liiaga ja puudusega lähendeid. Olgu puudusega lähendite jada

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \qquad \text{(a)}$$

ja liiaga lähendite jada

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots \qquad \text{(b)}$$

Viga, mille teeme, kui otsitava asendame kas lähendiga a_n või lähendiga b_n, on väiksem kui vahe $b_n - a_n$. Oletame, et lähendite jadad (a) ja (b) on koonduvad. Kujutades lähendid a ja b arvteljel punktidena $A_n \equiv (a_n)$ ja $B_n \equiv (b_n)$, kus $n = 1, 2, 3, \ldots$, saame kaks jada punkte: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ ja $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n, \ldots$, kusjuures numbri n ikka suuremaks ja suuremaks kasvamisel kahaneb lõigu $A_nB_n = b_n - a_n$ pikkus alla iga määra. Kujutluse kohaselt, mis meil on sirge punktidest, peab leiduma punkt X, mis eraldab punkte A punktidest B ja on seega rajapunktiks punktide A ja punktide B vahel: kõik punktid A asetsevad punktist X vasakul pool, kõik punktid B punktist X paremal pool. Ratsionaalarvude hulgas pole punktil X abstsissi, sest eelduse kohaselt ei leidunud antud probleemile ratsionaalarvude hulgas lahendit. Juhituna soovist, et igal arvtelje punktil oleks oma abstsiss, see tähendab, et telje igale punktile leiduks oma arvuline vaste, **loome** arvu x nii, et $X \equiv (x)$. See arv x on uut liiki arv, mis on määratud nii täpselt kui soovime oma lähendite jadadega (a) ja (b). Mitteratsionaalseid arve, mis on määratud oma lähendite jadadega,

nimetatakse irratsionaalarvudeks. Nagu punkt X on punktide A_n ja B_n jadasid eraldavaks punktiks, nii on arv x lähendeid a_n ja b_n eraldavaks arvuks:

$$a_n < x < b_n,$$

kus $n = 1, 2, 3, \ldots$ Kõik arvud a, mis on väiksemad kui mingi lähend a_n, on loomulikult väiksemad ka arvust x ja kõik arvud, mis on suuremad kui mingi lähend b_n, on loomulikult suuremad ka arvust x. Öelduga on arvule x antud oma kindel koht ratsionaalarvude vahel; ta esineb kindlas suurusjärjestuses.

Märgime, et arvu mõiste laiendamine irratsionaalarvudega toimub printsipiaalselt hoopis teisel viisil kui näiteks arvu mõiste laiendamine negatiivsete arvudega või murdarvudega: irratsionaalarv defineeritakse põhimõtteliselt mitte kunagi lõpule jõudva protsessi kaudu, arvu järkjärguliste lähendite jadade abil. Klassikalises Kreekas suudeti küll avastada ühismõõduta suuruste olemasolu, nende suuruste suhete avaldamiseks vajalike irratsionaalarvude loomine nõudis aga veel üle 2000 aasta pingsat vaimutööd. Irratsionaalarvu mõiste loomine osutus võimalikuks alles pärast seda, kui küsimusele läheneti dialektiliselt, see tähendab probleemistiku lahendamine rajati lõpmatu protsessi vaatlemisele — järk-järgult leitavate järjest paremate lähendite jadade vaatlemisele.

Irratsionaalarvude sümbolid

Sümbolite $\sqrt{16}$, $\sqrt[3]{27}$, log 100, sin 30°, tain 45° jne. seletamine ei tee raskusi, sest ratsionaalarvude vallas on olemas nende sümbolite arvulised tähendused:

$$\sqrt{16} = 4, \text{ sest } 4^2 = 16; \quad \sqrt[3]{27} = 3, \text{ sest } 3^3 = 27,$$
$$\log 100 = 2, \text{ sest } 10^2 = 100 \text{ jne.}$$

Hoopis raskem on seletada sümboleid $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, log 7 jne., millel ei ole ratsionaalarvude vallas täpset vastet. Me lepime kokku mõista nende sümbolite all irratsionaalarve, mis on loodud võrrandite

$$x^2 = 2, \; x^3 = 5, \; 10^x = 7 \text{ jne.}$$

ligikaudsete lahendite jadade varal, nagu eespool näidatud. Sümbolite $\sqrt{}$, $\sqrt[3]{}$, log jne. kasutamisvälja laiendamine ka nende sümbolite irratsionaalsele tähendusele hoiab ära matemaatiliste sümbolite hulga paisumise määrani, kus neist kaob ülevaade ja muu-

tub võimatuks nende memoreerimine. Nagu järk-järgult laiendame matemaatilisi mõisteid, nii laiendame ka sümbolite sisulist tähendust.

Ei tule arvata, et irratsionaalarv ülesande lahendina on e r a n d ja üldjuhuks on ratsionaalne lahend: juured, logaritmid, siinuse, koosinuse, tangensi ja kootangensi väärtused on rõhuvas enamikus irratsionaalarvud; irratsionaalne on ka ringi ümbermõõdu ja läbimõõdu suhe — arv π. Matemaatiliste sümbolite kogu muutuks lootusetult kohmakaks, kui tahaksime luua iga irratsionaalarvu jaoks o m a sümbolit. Seepärast peame otsima teisi teid nende arvude märkimiseks. Me teame, et kõigi t ä i s a r v u d e kirjutamiseks piisab kümnendsüsteemi puhul kümnest sümbolist:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 0.

Samade sümbolitega saame kirjutada ka kõiki r a t s i o n a a l a r v e, sest kõik need esinevad kahe täisarvu suhtena. Nagu kohe veendume, ei piisa kuitahes suurest k i n d l a s t arvust neist sümboleist irratsionaalarvu kirjutamiseks.

Kümnendmurrud arvude esitamise vahenditena

Arvude esitamise viisidest on kõige laialdasemalt kasutusel arvu andmine kümnendmurruna. Iga ratsionaalarv arendub ikka kas lõplikuks või lõpmatuks puhtperioodiliseks või segaperioodiliseks kümnendmurruks. Näiteks

$$\frac{4}{25} = 0{,}16, \quad \frac{7}{9} = 0{,}777\ldots, \quad \frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$$

Iga lõplikku kümnendmurdu võime aga ikka kirjutada perioodilise kümnendmurruna, vähendades viimast (nullist erinevat) kümnendkohta ühe võrra ja täiendades kirjutist lõpmatu üheksate jadaga; näiteks $0{,}16 = 0{,}15999\ldots$ Niisiis:

iga ratsionaalarv arendub lõpmatuks puht- või segaperioodiliseks kümnendmurruks.

Toetudes lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemile, on kerge näidata, et ka ümberpöördult

iga lõpmatu puht- või segaperioodiline kümnendmurd kujutab ratsionaalarvu.

Siit järeldub kohe, et

iga lõpmatu mitteperioodiline kümnendmurd kujutab irratsionaalarvu.

Niisugused on näiteks kümnendmurrud

0,101001000100001 . . .
1,010200100200010 . . .
5,012300123000123 . . .

Igaüks neist kümnendmurdudest kujutab irratsionaalarvu.

Irratsionaalarvu loeme antuks, kui on teada, missugune number seisab mistahes kümnendkohal, või kui on teada algoritm, mille järgi seda numbrit on põhimõtteliselt võimalik määrata.

Et perioodilisus on e r i o m a d u s, siis võib arvata, et mitteperioodilisi kümnendmurde on palju rohkem kui perioodilisi ehk, teisiti, et i r r a t s i o n a a l s e i d a r v e o n p a l j u r o h k e m k u i r a t s i o n a a l s e i d. Edaspidi näeme, et see on tõesti nii.

Matemaatika rakendustes, kus andmed peaaegu kunagi pole täpsed ja ka otsitavaid peaaegu kunagi ei nõuta täpselt, ümardatakse enne kasutamist kõik vajalikud suurused, olgu nad ratsionaalsed või irratsionaalsed. Tabuleerimisel antakse suurused vastavalt vajadusele 1, 2, 3 või 4 kümnendkohaga, väga harva ka suurema kümnendkohtade arvuga.

Tehted irratsionaalarvudega

Kõik tehted irratsionaalarvudega rajatakse tehetele nende arvude ratsionaalsete lähenditega. Kui näiteks arv x on määratud jadadega (a) ja (b), arv x' jadadega (a′) ja (b′), siis arv $x + x'$ defineeritakse jadade $(a + a')$ ja $(b + b')$ kaudu, jagatis $x : x'$ defineeritakse jadade $\left(\frac{a}{b'}\right)$ ja $\left(\frac{a'}{b}\right)$ kaudu jne. Saab näidata, et seejuures jäävad kehtivaks kõik arvutamise põhiseadused. Tegelikul arvutamisel töötatakse irratsionaalarvude 1, 2, 3 või 4 kümnendkohaliste lähenditega.

§ 63. ARVUKONTIINUUM

Reaalarvude vald

Ratsionaal- ja irratsionaalarve kokku nimetatakse r e a a l a r v u d e k s*. Suuruse järgi järjestatud reaalarvud moodustavad r e a a l a r v u d e v a l l a. Et mõista selle arvuvalla omapära, on otstarbekohane lühidalt tagasi vaadata arvu mõiste arenemise üksikutele etappidele.

1° P o s i t i i v s e d j a n e g a t i i v s e d t ä i s a r v u d j a

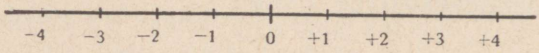
---

* Lad. k. *realis* — tõeliselt olev, tegelikkuses esinev. Arvu mõiste laiendamise järgmine samm — arvuvalla laiendamine i m a g i n a a r a r v u d e g a (lad. k. *imaginarius* — kujutletav, näiv) ja k o m p l e k s a r v u d e g a — jääb siinkohal puudutamata. Märgime siin ainult seda, et imaginaararvude vastandamine reaalarvudele on kujunenud ajalooliselt, pole aga sisuliselt millegagi õigustatud.

null. Arvu mõiste arenemise ahela lähtelüliks on naturaalarvud

$$1, 2, 3, \ldots$$

Arvu mõiste laiendamise esimeseks, formaalselt lihtsaimaks sammuks on nulli ja negatiivsete täisarvude loomine, mis viib positiivsetest ja negatiivsetest täisarvudest ja nullist koosnevale arvuvallale. Selle arvuvalla kujutamiseks sirgel loeme sirge ühe punkti nullpunktiks, võtame kujutusühiku sirklisse ja kanname selle ühiku 1, 2, 3, ... korda nullpunktist paremale poole ja 1, 2, 3, ... korda nullpunktist vasakule poole. Seejuures saame joonisel 186 kujutatud pildi.



Joon. 186.

Arvuvalla ..., —3, —2, —1, 0, +1, +2, +3, ... kujutiseks on diskreetsete* punktide kogu: iga kahe teineteisele järgneva punkti vahel asetseb kindla pikkusega lõik — kujutusühik; arve ..., —3, —2, —1, 0, +1, +2, +3, ... märkivad kriipsud on üksteisest eraldatavad: iga kahe teineteisele järgneva kriipsu vahel asetseb kriipsudest vaba lõik.

2° Ratsionaalarvude vald. Võttes abiks lõigu võrdseteks osadeks jaotamise konstruktsiooni (vt. joon. 10), näeme, et põhimõtteliselt on võimalik arvteljel ära märkida kõik ratsionaalarvudele $\frac{m}{n}$ (kus m ja n on ühistegurita arvud) vastavad punktid. Nagu teame, asetsevad need punktid arvteljel kõikjal tihedalt. See tähendab, et igal arvtelje lõigul (kui lühike ta ka poleks) leidub ikka lõpmatu hulk ratsionaalse abstsissiga punkte. Diskreetselt asetsevaid sirge punkte saab märkida kriipsukestega, nagu seda tegime eespool käsitletud juhul; tihedalt asetsevaid punkte kriipsudega märkida on tehniliselt võimatu; ka on võimatu selgesti kujutleda tiheda punktide kogu kõiki üksikuid punkte. Nagu paljudel teistelgi juhtudel, näeme siin, et meie kujutlusvõime ei jõua mõtlemisvõimele järele.

3° Reaalarvude vald. Hoolimata ratsionaalarvude valla tihedusest ei piisa ratsionaalarvudest kõigi matemaatiliste probleemide lahendamiseks. Nii ei leidu (peale eespool käsitletud näidete) ratsionaalarvude vallas arvulist vastet ühikkuubi diagonaalile, ühikringisse joonestatud korrapärase viisnurga küljele

---

* Lad. k. *discretus* — eraldatav.

ja üldiselt igale kujutusühikuga ühismõõduta lõigule. See näitab, et ratsionaalse abstsissiga punktide kogu, olles küll tihe, on ometi veel lünklik. Juhituna soovist, et igale suurusele leiduks oma arvuline vaste, et alati, igal esineda võival juhul oleks suurusel oma arvuline väärtus, luuakse irratsionaalarvud. Iga niisugune arv defineeritakse lõpmatu protsessi kaudu, andes võtte, mille abil on põhimõtteliselt võimalik saada loodavale arvule kuitahes palju ja kuitahes häid ratsionaalseid liiaga ja puudusega lähendeid.

Kui defineerime irratsionaalarvu x tema ratsionaalsete lähendite jadade

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots \geqslant b_n \geqslant \ldots$$

kaudu nii, et

$$a_n < x < b_n$$

ja vahe $b_n - a_n$ kahaneb numbri n ikka suuremaks ja suuremaks kasvamisel alla iga määra, siis paigutub irratsionaalarv x kindlale kohale ratsionaalarvude vahel, ta osutub koos ratsionaalarvudega suuruse järgi järjestatuks. Irratsionaalarvude paigutamisega ratsionaalarvude vahele saadakse suuruse järgi järjestatud ratsionaal- ja irratsionaalarvudest koosnev reaalarvude vald. On võimalik tõestada, et reaalarvude vald on lünkadeta ehk, teisiti, reaalarvude vald on katkematu ehk, veel teisiti,

reaalarvude vald on pidev.

Soovides alla kriipsutada just seda reaalarvude valla tähtsaimat omadust, räägitakse reaalarvude vallast kui arvukontiinuumist.

Reaalarvude loendamatus

Ratsionaalarvude valla omadusi uurides nägime, et see arvuvald on kõikjal tihe, kuid ometi on võimalik kõiki ta arve nummerdada: ratsionaalarvude kogu on loenduv. Reaalarvude vald on mitte ainult tihe, vaid ka pidev. Tekib küsimus, kas on ka selle valla arve võimalik nummerdada, kas on ka reaalarvude kogu loenduv. Vastus sellele küsimusele on eitav: juba igas lõplikus vahemikus on reaalarvude kogu loendamatu.

Selle väite tõestuseks võtame vahemiku alguse nullpunktiks ja vahemiku pikkuse pikkusühikuks. Iga vahemikku kuuluv arv avaldub siis kümnendmurruna kujul $0{,}\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \ldots$, kus α, β, γ, δ, ε, ... on mingid numbrid jadast 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9.

Nagu nägime eespool, saab iga lõplikku kümnendmurdu ikka kirjutada lõpmatu kümnendmurru kujul, vähendades viimast kümnendkohta ühe võrra ja kirjutades juurde lõpmatu rea üheksaid, näiteks $0{,}47 = 0{,}46999\ldots$

Oma tõestuse viime läbi vastuväiteliselt: oletame, et kõigi ratsionaal- ja irratsionaalarvude kogu vahemikus $0 < x < 1$ on nummerduv. Siis võime ühte tulpa kirjutada numbrid 1, 2, 3, ..., teise aga neile numbreile vastavad arvud:

Number	Arv
1	$0,\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1 \ldots$
2	$0,\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2\varepsilon_2 \ldots$
3	$0,\alpha_3\beta_3\gamma_3\delta_3\varepsilon_3 \ldots$
4	$0,\alpha_4\beta_4\gamma_4\delta_4\varepsilon_4 \ldots$
5	$0,\alpha_5\beta_5\gamma_5\delta_5\varepsilon_5 \ldots$
.	. . . . .

Moodustame nüüd uue kümnendmurru

$$0,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots,$$

võttes α, β, γ, δ, ε, ... numbrite 1, 2, 3, ... 7, 8 hulgast ja valides α erinevalt α_1-st, β erinevalt β_2-st, γ erinevalt γ_3-st jne. Kümnendmurd $0,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ on oma kirjutusviisilt lõpmatu kümnendmurd; ta on aga ka oma loomult lõpmatu kümnendmurd, sest ta ei lõpe ei nullide ega üheksate reaga. Et murrud pidid oletuse kohaselt olema nummerduvad, siis peab murd $0,\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\ldots$ leiduma meie tabelis mingi kindla järjekorranumbri all. Teiselt poolt ei saa ta seista tabelis, sest ta erineb esimesest murrust vähemalt esimese koha poolest (pärast koma), teisest murrust vähemalt teise koha poolest, kolmandast murrust vähemalt kolmanda koha poolest jne. Oleme jõudnud ilmsele vasturääkivusele. Seega lähteoletus, et reaalarvude kogu vahemikus $0 < x < 1$ on nummerduv, peab olema väär. Niisiis reaalarvude kogu 0 ja 1 vahel pole nummerduv. Seda enam ei saa siis olla nummerduv kõigi reaalarvude kogu. Järelikult

reaalarvude kogu pole loenduv.

Lõppmärkusi

1° Iga irratsionaalarv luuakse tuginedes ratsionaalarvude vallas moodustatud kahele koonduvale arvujadale. Moodustame nüüd kaks koonduvat jada reaalarvude vallas. Saab näidata, et ka need määravad üheselt teatava arvu, kuid mitte mingi uut liiki arvu, vaid reaalarvude vallas juba olemas oleva arvu. Arvukontiinuum ei ole laiendatav ega tihendatav uute

arvudega. Seda arvukontiinuumi omadust nimetatakse *arvukontiinuumi täiuslikkuseks*.

2° Arvukontiinuumi mõiste loomine avab tee üksikute funktsioonide ja mitmete funktsiooniliikide omaduste palju sügavamaks uurimiseks, kui seda võimaldab ratsionaalarvude vald. Ainult arvukontiinuumi mõistele tuginedes saab loogiliselt rangelt defineerida *funktsiooni piirväärtuse mõistet*, mis on hindamatuks vahendiks paljude rakenduslike küsimuste lahendamisel ja millele tuginevad kõrgema matemaatika kesksed mõisted: *tuletis* ja *integraal*.

PEATÜKK XIX

FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS

§ 64. FUNKTSIOONI MÄÄRAMISPIIRKOND

Funktsiooni määramispiirkonna definitsioon. Funktsiooni väärtuste varu

Vee vedela faasi omadused, nagu tihedus, murdumisnäitaja, erisoojus jne., on muutumatu õhurõhu puhul temperatuuri funktsioonid. Need funktsioonid on määratud ainult temperatuuridel t, mis asetsevad vahemikus $0° < t < 100°$. Allpool temperatuuri 0° tuleks rääkida jää omadustest, ülalpool temperatuuri 100° auru omadustest. Temperatuuril 0° peaksime vahet tegema selle vahel, kas on mõeldud jää või vee omadusi, temperatuuril 100° vastavalt selle vahel, kas on mõeldud vee või auru omadusi. Elavhõbeda vedela faasi pindpinevus, soojusjuhtivus, elektritakistus jne. on samuti temperatuuri funktsioonid. Need funktsioonid on määratud ainult temperatuuridel t, mis asetsevad vahemikus $-39° < t < 357°$. Lühidalt ütleme, et vee vedela faasi omaduste määramispiirkonnaks on vahemik $0° < t < 100°$, elavhõbeda vedela faasi omaduste määramispiirkonnaks vastavalt vahemik $-39° < t < 357°$. Üldiselt

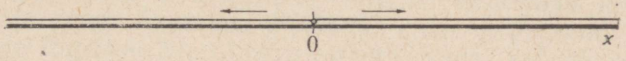
funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnaks nimetatakse nende argumendi väärtuste kogu, millede puhul funktsioonil $f(x)$ on kindel väärtus.

Funktsiooni määramispiirkonnas asuvatele argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused moodustavad funktsiooni väärtuste varu.

Kui funktsioon on antud oma väärtuste tabeliga või graafiliselt oma käigujoonega, on kohe näha, missuguste argumendi väärtuste puhul tal on kindel väärtus ehk, teisiti, missuguste argumendi väärtuste puhul ta on määratud. Kui funktsioon on antud valemiga, saame need argumendi väärtused funktsiooni avaldise sisulise analüüsi teel. Toome selle kohta mõned näited. Kõigil käsitletavatel juhtudel eeldame, et nii argumendi kui ka funktsiooni väärtused on reaalsed.

Funktsiooni määramispiirkonna leidmise näiteid

N ä i d e 1. Olgu $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. See funktsioon on määratud argumendi igal väärtusel. Tõepoolest, x^2 on alati positiivne, seega $1+x^2$ alati nullist erinev ja järelikult arvu 1 jagamine avaldisega $1+x^2$ igal juhul teostatav. Niisiis: funktsioon $f(x)$ on määratud argumendi igal väärtusel ehk, teisiti, argument võib muutuda tõkestamatult nii positiivses kui negatiivses suunas ehk, veel teisiti, funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnaks on v a h e m i k $-\infty < x < +\infty$. Viimati kirjutatud võrratusi loeme nii: x asetseb miinus lõpmatuse ja pluss lõpmatuse vahel. Rõhutame veel kord, et sümbolid $-\infty$ ja $+\infty$ ei tähenda mingisuguseid arve ja kirjutis $-\infty < x < +\infty$ märgib sümboleis ainult seda, et argumendil x võib olla mistahes reaalne väärtus. Graafiliselt kujutub funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond joonisel 187 esitatud viisil.



Joon. 187.

Et argumendi x igasuguse väärtuse puhul summa $1+x^2 > 0$, siis $f(x)$ on alati positiivne. Suurima väärtuse omandab $f(x)$ siis, kui nimetaja on kõige väiksem, seega siis, kui $x = 0$. Sel juhul on $f(x) = 1$. Seega $0 < f(x) \leqslant 1$. See tähendab, et funktsiooni $f(x)$ väärtused on t õ k e s t a t u d: altpoolt väärtusega n u l l, ülaltpoolt väärtusega ü k s.

N ä i d e 2. Olgu $f(x) = 5\sqrt{4-x^2}$. See funktsioon on määratud ainult neil argumendi väärtustel, mille puhul juurealune avaldis $4-x^2 \geqslant 0$. See annab $x^2 \leqslant 4$, millest $|x| \leqslant 2$ ehk $-2 \leqslant x \leqslant +2$. Niisiis: funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond on antud võrratustega

$$-2 \leqslant x \leqslant +2.$$

Siin märgitud väärtuste hulka kuuluvad arv -2, kõik arvud -2 ja $+2$ vahel ning arv $+2$. Lühiduse mõttes ütleme, et funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnaks on l õ i k otspunktidega -2 ja $+2$ ehk sümboleis $[-2; +2]$. Üldiselt ütleme, et

suurus x muutub lõigul $[a, b]$, kui

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Graafiliselt kujutub funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond joonisel 188 esitatud viisil.

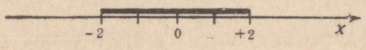
Argumendi muutumine on antud juhul tõkestatud nii alt- kui ka ülaltpoolt: altpoolt arvuga -2, ülaltpoolt arvuga $+2$.

Ka funktsiooni väärtused on uuritaval juhul tõkestatud: funktsioon omandab väikseima väärtuse, kui argument on absoluutväärtuselt kõige suurem, ja suurima väärtuse, kui argument on absoluutväärtuselt kõige väiksem; funktsiooni väikseim väärtus on 0, suurim väärtus 10, nii et

$$0 \leqslant y \leqslant 10.$$

Üldiselt,

kui on võimalik näidata niisugust arvu t, et muutuv suurus s on oma absoluutväärtuselt alati sellest arvust väiksem, siis ütleme, et suuruse muutumine on tõkestatud. Arvu t nimetame suuruse s tõkkeks.



Joon. 188.

Tõkestatult muutuvaid suurusi nimetame lõplikeks suurusteks.

Näide 3. Olgu $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Selleks, et funktsiooni $f(x)$ väärtus oleks määratav, on tarvilik ja ka piisav, et nimetaja oleks reaalne ja nullist erinev ehk, teisiti, et juurealune oleks positiivne. Niisiis peab olema $1-x^2>0$ ehk $x^2<1$ ehk $|x|<1$. See tähendab, et argumendi väärtused peavad asetsema -1 ja $+1$ vahel: $-1<x<+1$. Me ütleme, et funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnaks on vahemik arvude -1 ja $+1$ vahel ehk sümboleis $(-1;\ +1)$. See vahemik ei haara punkte $x=-1$ ja $x=+1$, mille vahel ta asub. Üldiselt:

suurus x muutub vahemikus (a, b), kui

$$a<x<b.$$

Funktsioon $f(x)$ ise võib omandada kuitahes suure väärtuse. Tõepoolest, olgu N mingi etteantud arv. Selleks, et $f(x)$ oleks suurem kui N, on ainult vaja, et $\sqrt{1-x^2}$ oleks väiksem kui $1:N$. Nagu näitab lihtne arvutus, on see tingimus kindlasti täidetud, kui x on valitud nii, et

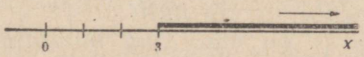
$$\sqrt{1-\frac{1}{N^2}}<|x|<1.$$

Öeldust järeldub, et funktsioon $f(x)$ pole tõkestatud.

Näide 4. Olgu $f(x) = \log(x-3)$. Et nullil ja negatiivsetel arvudel logaritme ei ole, siis on antud funktsioon määratud ainult neil x väärtustel, mille puhul $x-3>0$ ehk $x>3$. Muidu aga võib x olla kuitahes suur. Niisiis on funktsiooni $f(x)$ määramispiirkonnaks vahemik

$$3<x<+\infty.$$

Funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond on kujutatud joonisel 189.



Joon. 189.

Argumendi vahemikus $3<x<4$ on vahe $x-3$ murdarv ja selle logaritm negatiivne; väärtusel $x=4$ on $x-3=1$ ja selle logaritm 0; x väärtustel, mis on suuremad kui 4, on $x-3>1$ ja seega logaritm positiivne. Argumendi x lähenemisel 3-le $\log(x-3)$, olles negatiivne, kasvab absoluutselt üle iga määra; kui argument x ületab 4, siis muutub $\log(x-3)$ positiivseks ning x tõkestamatul kasvamisel kasvab ka vahe $x-3$ ja ühes sellega $\log(x-3)$ üle iga määra. Funktsiooni väärtuste varu moodustavad uuritaval juhul kõik reaalarvud, sümbolites

$$-\infty<f(x)<+\infty.$$

Näide 5. Vaatleme funktsiooni

$$f(x)=\frac{3x}{x-2}.$$

Lugejas seisev avaldis $3x$ on määratud argumendi igal väärtusel; samuti on määratud argumendi igal väärtusel nimetajas seisev avaldis $x-2$. Lugejat saab aga nimetajaga jagada ainult siis, kui nimetaja ei ole null. Kui nimetaja on null, see on kui $x-2=0$ ehk $x=2$, siis lugeja $3x=6$ ja funktsiooni avaldis omandab kuju $6:0$. Sellel sümbolil ei ole mõtet. Niisiis argumendi väärtusel $x=2$ ei ole uuritaval funktsioonil väärtust ehk, teiste sõnadega, argumendi väärtusel $x=2$ ei ole funktsioon $f(x)$ määratud.

Näide 6. Vaatleme funktsiooni

$$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x^2+4x+4}.$$

Nii lugejas kui nimetajas seisvad avaldised on määratud argumendi igal väärtusel, lugeja jagamine nimetajaga on aga teos-

tatav ainult siis, kui nimetaja ei ole null. Kui $x^2 + 4x + 4 = 0$ ehk $(x + 2)^2 = 0$ ehk $x = -2$, siis on ka lugeja null, sest $(-2)^2 - (-2) - 6 = 4 + 2 - 6 = 0$ ja uuritav avaldis omandab kuju $0 : 0$, osutudes seega määramatuks. Niisiis argumendi väärtusel $x = -2$ ei ole funktsioonil y väärtust ehk, teiste sõnadega, argumendi väärtusel $x = -2$ ei ole funktsioon $f(x)$ määratud.

Üldistades eespool toodud näidetest õpitut, võime öelda, et

funktsioon $\sqrt{\varphi(x)}$ *on määratud muutuja* x *neil väärtustel, milledel* $\varphi(x)$ *on positiivne või null;*

funktsioon $\log \psi(x)$ *on määratud muutuja* x *neil väärtustel, milledel* $\psi(x)$ *on positiivne;*

funktsioon $\frac{p(x)}{q(x)}$, *kus* $p(x)$ *ja* $q(x)$ *on polünoomid, on määratud muutuja* x *neil väärtustel, milledel nimetaja* $q(x) \neq 0$.

§ 65. TÕKESTAMATULT KASVAVAD SUURUSED

Kõigist suuruste muutumisviisidest on kõrgemas matemaatikas eriti tähtsad kaks: suuruste tõkestamatu kasvamine ja suuruste tõkestamatu kahanemine. Need kaks suuruste muutumisviisi on vahenditeks, mille abil luuakse kõrgema matemaatika põhilised mõisted, nagu piirväärtus, pidevus, tuletis, diferentsiaal ja integraal.

Igapäevases kõnes kasutame sageli sõnu ja ütlusi, nagu lõpmatu, igavene, hetkeline, mõõtmatult suur, kaduvväike jt. Nii neid kui paljusid teisigi sõnu kasutatakse tavaliselt endale aru andmata, mida nad õieti tähendavad, missuguseid kujutlusi nendega tuleb siduda. Teadust saab aga rajada ainult täpselt defineeritud mõistetele. See asjaolu sunnib meid pikemalt peatuma eespool nimetatud kahe kõnekäänu (tõkestamatu kasvamine, tõkestamatu kahanemine) analüüsimisel ja tooma küllaldaselt näiteid nendega väljendatava mõtte selgitamiseks.

Tõkestamatult kasvava suuruse definitsioon

Vaatleme veel kord naturaalarvude jada

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots,$$

millest lähtusime algul. Nagu nägime, on uuritaval jadal algus tema esimese elemendi, arvu 1 näol. Esimesel elemendil pole eelnevat elementi; igal muul jada elemendil on eelnev element olemas. Missuguse naturaalarvu me ka võtaksime, ikka leidub jadas ka

veel temale järgnev element. Seepärast naturaalarvude jadal pole viimast elementi, sel jadal pole lõppu, see jada on lõpmatu.

Vaadeldava jada elemendid, naturaalarvud 1, 2, 3 jne., esinevad järjestatuna suuruse järgi: jadas leidub kõige väiksem element arvu 1 näol; iga järgmine element on eelmisest suurem. Viimati nimetatud tõsiasjast ja sellest, et jada ise on lõpmatu, järeldub, et jadas pole kõige suuremat elementi. Teiste sõnadega: missuguse tõkke me ka mingi naturaalarvu T näol ette annaksime, ikka leidub jadas sellest tõkkest suuremaid arve ehk, teisiti, pole niisugust tõket, mida me ei ületaks, kui naturaalarvude jadas sammuksime järjest edasi väiksematest arvudest suuremate poole. Selle asemel, et kujutleda end sammuvana jadas ühelt arvult teisele, võime arvu n vaadelda muutuva suurusena, mis omandab üksteise järel väärtused

$$1, 2, 3, \ldots, 10, 11, \ldots, 100, 101, \ldots$$

Näeme, et suurus n ületab kasvades iga etteantud tõkke T ehk, teisiti, pole tõket, mida arv n kasvades ei ületaks ehk, lühemalt, arv n kasvab tõkestamatult.

Käsitletud juhul võis muutuv suurus n omandada ainult positiivseid täisarvulisi väärtusi. Jätame selle kitsenduse ära, lubades suurusel n omandada mistahes väärtusi, ja defineerime tõkestamatult kasvava suuruse (nüüd juba üldiselt) nii:

*kui suurus muutub nõnda, et ta oma absoluutväärtuselt saab ja siis ka jääb suuremaks igast kindlast positiivsest tõkkest, siis ütleme, et suurus kasvab tõkestamatult.**

Olgu s tõkestamatult kasvav suurus. Kui ta seejuures alates teatavast oma muutumisjärgust jääb positiivseks, siis kirjutame

$$s \to +\infty;$$

kui ta aga jääb negatiivseks, siis kirjutame

$$s \to -\infty.$$

Märgime veel kord, et sümbol ∞ ei kujuta mingit arvu. Seepärast ei saa pooldada kirjutise $s \to \infty$ lugemisviisi «s läheneb lõpmatusele». Et võiks rääkida lähenemisest, selleks peab olema objekt, antud juhul arv, millele lähenetakse. Niisugust arvu aga vaadeldaval juhul pole. Just seda mõtet väljendabki kirjutis $s \to \infty$. Selle kirjutise sisult õige sõnaline vaste on «s kasvab tõkestamatult (positiivses suunas)».

* Mõnikord esineb sõna «kindlast» järel täiend «muidu aga kuitahes suurena valitud ja ette antud». See täiend sisuliselt midagi juurde ei lisa; tal on vaid retooriline tähendus.

Tõkestamatult kasvavate avaldiste näiteid

Kui naturaalarv n kasvab tõkestamatult, siis kasvavad tõkestamatult ka paljud temast sõltuvad avaldised.

Näide 1. Olgu a mingi kindel positiivne arv. Siis $n \to \infty$ puhul ka $an \to \infty$. Tõepoolest, olgu T mingi etteantud positiivne tõke. Valime n suuremana kui $\frac{T}{a}$. Siis n iga niisuguse väärtuse puhul

$$an > a \cdot \frac{T}{a} \quad \text{ehk} \quad an > T.$$

Näide 2. On kerge näha, et kui $n \to \infty$, siis ka $n^2 \to \infty$. Tõepoolest, kui arvule n^2 seaksime mingi positiivse tõkke T, siis piisaks valida n suuremana kui $\sqrt{T}$, et n^2 oleks suurem kui T. Samuti veenduksime, et kui $n \to \infty$, siis ka $n^3 \to \infty$, $n^4 \to \infty$ jne.

Mida suurem on astendaja, seda kiiremini toimub astme kasvamine, nagu nähtub jadadest

n	1	2	3	4	5	6	7	. . .
n^2	1	4	9	16	25	36	49	. . .
n^3	1	8	27	64	125	216	343	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Näide 3. Kui $n \to \infty$, siis ka $\sqrt{n} \to \infty$. Tõepoolest, kui arvule $\sqrt{n}$ seaksime mingi positiivse tõkke T, siis piisaks valida n suuremana kui T^2, et $\sqrt{n}$ oleks suurem kui T. Samuti veenduksime, et kui $n \to \infty$, siis ka $\sqrt[3]{n} \to \infty$ jne.

Mida suurem on juurija, seda aeglasemalt toimub juure kasvamine, nagu nähtub jadadest

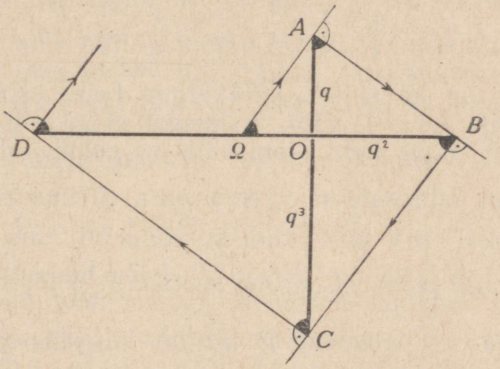
n	1	2	3	4	5	6	7	. . .
$\sqrt{n}$	1	1,41	1,73	2,00	2,24	2,45	2,65	. . .
$\sqrt[3]{n}$	1	1,26	1,44	1,59	1,71	1,82	1,91	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Viimases kahes näites vaatlesime mitmeid astmefunktsioone aluse naturaalarvulistel väärtustel. Vaatleme veel ka eksponentfunktsiooni astendaja naturaalarvulistel väärtustel. Esimesel juhul uurisime astet sõltuvuses alusest, nüüd uurime astet sõltuvuses astendajast.

Astme tõkestamatu kasvamine

Olgu q mingi arv, mis on suurem kui 1. Seame endale ülesandeks uurida astme q^n käitumist astendaja n tõkestamatul kasvamisel. Käsitleme küsimust näitlikult, kasutades graafilise korrutamise võtet.

Olgu tarvis korrutada arv a arvuga q. Joonestame täisnurkse kolmnurga kaatetitega 1 ja q. Tähistame kaateti q vastasnurga tähega φ. Joonestame teise täisnurkse, eelmisega sarnase kolmnurga kaatetiga a ja teravnurgaga φ. Siis selle nurga vastaskaatet kujutab korrutist $a \cdot q$. Märgime, et teise kolmnurga asetus esimese suhtes võib olla missugune tahes; soovi korral võib kaateti a joonestada näiteks risti kaatetiga 1.



Joon. 190.

Võtame nüüd kaks ristuvat sirget, kanname nende lõikepunktist ühele sirgele lõigu $\Omega O = 1$ (joon. 190), teisele lõigu $OA = q$ ja nimetame nurga $O\Omega A$ nurgaks φ. Selle nurga tangens on q. Konstrueerime üksteise järel astmed

$$q^2,\ q^3,\ q^4,\ \ldots,$$

mis esinevad lõikudena OB, OC, OD ... Täisnurksete kolmnurkade hüpotenuusid moodustavad «nurgelise spiraali». Et $\tan\varphi = q : 1 = q$ ja see on suurem kui 1, siis $\tan\varphi > 1$ ja nurk $\varphi > 45°$. Seepärast täisnurkse kolmnurga teine teravnurk on $< 45°$ ja selle vastaskaatet on väiksem nurga φ vastaskaatetist.

Seepärast

$$q < q^2, \qquad q^2 < q^3, \ \ldots$$

ehk

$$q < q^2 < q^3 < \ \ldots$$

Nurgelise spiraali järjest uute külgede joonestamist võib mõttes jätkata lõputult. Jooniselt nähtub, et astendaja n tõkestamatul kasvamisel ka aste q^n ületab iga tõkke, ta kasvab üle iga määra. Niisiis: kui $q > 1$, siis $n \to \infty$ puhul ka $q^n \to \infty$.

§ 66. TÕKESTAMATULT KAHANEVAD SUURUSED

Tõkestamatult kahaneva suuruse definitsioon

Vaatleme rööbiti naturaalarvude jadaga

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots \qquad (n)$$

nende arvude pöördväärtustest ehk, lühemalt, tüvimurdudest koosnevat jada

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots \qquad \left(\frac{1}{n}\right)$$

Nagu näeme, on ka sellel jadal algus tema esimese elemendi, arvu 1 : 1 ehk arvu 1 näol. Esimesel elemendil pole eelnevat elementi; igal muul jada elemendil on eelnev element olemas. Et igale naturaalarvule n vastab oma tüvimurd $\frac{1}{n}$ ja vastupidi ning jadal (n) pole viimast elementi, siis pole seda ka jadal $\left(\frac{1}{n}\right)$; nagu jada (n), nii on ka jada $\left(\frac{1}{n}\right)$ lõpmatu.

Nagu jada (n) elemendid, nii on ka jada $\left(\frac{1}{n}\right)$ elemendid järjestatud suuruse järgi, kuid jadas vasakult paremale sammumisel esimese jada elemendid kasvavad, teise omad kahanevad: samal ajal kui $n + 1 > n$, on $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$. Kui jadas (n) ei leidunud kõige suuremat elementi, siis jadas $\left(\frac{1}{n}\right)$ pole kõige väiksemat elementi, sest jada on lõpmatu ja iga järgmine element on eelmisest väiksem. On kerge näha, et pole niisugust positiivset tõket, millest jada elemendid ei saaks väiksemaks. Tõepoolest, olgu τ mingi suvaliselt ette antud positiivne (muidu aga kuitahes väike) arv. On selge, et kõigi n väärtuste puhul, mis on suuremad kui $\frac{1}{\tau}$, tüvimurd $\frac{1}{n} < \tau$. Seega pole võimalik näidata niisugust positiivset tõket τ, millest allapoole tüvimurd $\frac{1}{n}$ ei lange: järjekorranumbri n tõkestamatul kasvamisel kahaneb tüvimurd $\frac{1}{n}$ tõkestamatult. Märgime, et tüvimurru kahanemisele on tegelikult olemas tõke, arv null. Sõna

«tõkestamatult» on siin kasutusel vaid seoses tõsiasjaga, et tüvimurru kahanemisele pole olemas n u l l i s t e r i n e v a t (positiivset) t õ k e t. Seega oma kahanemise protsessis tüvimurd tuleb (ja olles kord tulnud, siis edasi ka jääb) nullile lähemale kui iga suvaliselt valitud k i n d e l tõke, olgu see kuitahes väike.

Kõnekäänud «suurus kahaneb tõkestamatult» ja «suurus läheneb tõkestamatult nullile» tähendavad antud seletuste järgi üht ja sedasama. Seepärast märgitakse suuruse s tõkestamatut kahanemist sümboolselt kujul

$$s \to 0,$$

mida loetakse «s k a h a n e b t õ k e s t a m a t u l t» ehk ka «s l ä h e n e b t õ k e s t a m a t u l t n u l l i l e».

Käsitletud mõttekäigus oli tüvimurd $\frac{1}{n}$ p o s i t i i v n e suurus ja tema lähenemine nullile toimus p o s i t i i v s e l t poolelt. Kõik öeldu kandub sõna-sõnalt üle juhule, kus suuruse lähenemine nullile toimub n e g a t i i v s e l t poolelt, ja ka juhule, kus suuruse lähenemine nullile toimub suuruse kõikumisel ümber nulli. Viimase juhu illustreerimiseks võiks tuua jada

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots, (-1)^n \cdot \frac{1}{n}, \ldots$$

Kui osa jada liikmeid või kõik liikmed on negatiivsed, siis asendame nad absoluutväärtustega ja uurime viimaste jada.

Kõigil praegu käsitletud juhtudel võis muutuv suurus n omandada ainult p o s i t i i v s e i d t ä i s a r v u l i s i v ä ä r t u s i. Jätame selle kitsenduse ära, lubades suurusel n omandada mistahes väärtusi, ja defineerime tõkestamatult kahaneva suuruse (nüüd juba üldiselt) nii:

*kui suurus muutub nõnda, et ta oma absoluutväärtuselt saab ja siis ka jääb väiksemaks igast kindlast positiivsest tõkkest, siis ütleme, et suurus kahaneb tõkestamatult.**

Murru tõkestamatu kahanemine

Tõestame, et

murru suurus kahaneb tõkestamatult, kui lugeja muutumatuks jäämisel nimetaja tõkestamatult kasvab.

Tõepoolest, olgu murru $\frac{a}{x}$ lugeja a mingi positiivne konstant

---

* Selle definitsiooni täiendamine sõnadega «muidu aga kuitahes väikesena valitud ja ette antud» omab ainult retoorilist tähendust (vrd. joonealust märkust lk. 443).

ja nimetaja x tõkestamatult kasvav suurus. Anname ette suvaliselt võetud positiivse tõkke τ ja näitame, et suuruse x teatavast väärtusest alates murru $\frac{a}{x}$ väärtus langeb alla seda tõket, sümbolites kirjutatult

$$\frac{a}{x} < \tau.$$

Selleks aga on ainult tarvis, et $\frac{x}{a} > \frac{1}{\tau}$ ehk $x > \frac{a}{\tau}$. Et x on eelduse järgi tõkestamatult kasvav, siis teatavast oma väärtusest alates ta saab ja jääb suuremaks kui $\frac{a}{\tau}$. Sellest x väärtusest peale murd $\frac{a}{x}$ saab ja jääb väiksemaks kui τ, millega väide on tõestatud. Väide jääb kehtima ka siis, kui a on negatiivne, ja ka siis, kui a on positiivne ja x kasvab tõkestamatult negatiivses suunas. Tõestuses tuleb siis ainult murru $\frac{a}{x}$ enese asemel kasutada selle absoluutväärtust.

Toome näite murru tõestatud omaduse rakendamise kohta.

N ä i d e. Vaatleme hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

haru, mis asub I veerandis, koos samas veerandis kulgeva asümptoodiga. Nende võrrandid on vastavalt

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{ja} \quad Y = \frac{b}{a}X,$$

kus x ja y ning X ja Y tähendavad vastavalt hüperbooli haru ja tema asümptoodi jooksva punkti koordinaate. Vaatleme ühele ja samale abstsissile $X = x$ vastavaid asümptoodi ja hüperbooli ordinaate Y ja y (joon. 191). Moodustame nende vahe

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

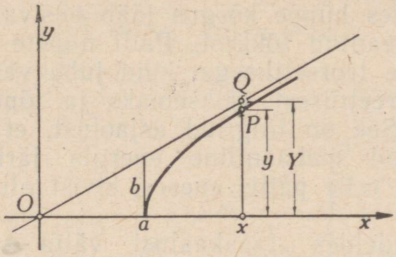
See kujutub joonisel lõiguna PQ.

Uurime selle vahe käitumist eeldusel, et abstsiss x tõkestamatult kasvab. Sulgudes seisvas avaldises kasvab siis x, x^2, $x^2 - a^2$ ja $\sqrt{x^2 - a^2}$ üle iga määra. Seepärast pole otsekohe näha, mis toimub vahega $x - \sqrt{x^2 - a^2}$. Et sellele küsimusele vastust saada, kirjutame vaadeldava vahe murruna ja vabaneme irratsionaalsusest lugejas:

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x - \sqrt{x^2 - a^2}}{1} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

nii et

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$



Joon. 191.

Kui nüüd abstsiss x tõkestamatult kasvab, siis kasvab tõkestamatult kumbki liidetavaist nimetajas, seega ka nimetaja ise, vaadeldav murd aga ja järelikult ka vahe $Y - y$ kahaneb tõkestamatult. Niisiis, hüperbooli punkti abstsissi tõkestamatul kasvamisel kahaneb piki ordinaatsirget mõõdetud kaugus asümptoodi ja hüperbooli vahel tõkestamatult ehk

hüperbooli punkti tõkestamatul kaugenemisel keskpunktist läheneb hüperbooli haru tõkestamatult oma asümptoodile.

Märkus. Selle asemel et mõõta kaugust asümptoodi ja hüperbooli haru vahel piki ordinaatsirget, oleksime võinud vaadelda hüperbooli punkti (x, y) kaugust asümptoodist $Y = \frac{b}{a}X$, seda kaugust otsesihis mõõtes. Kirjutades selle sirge võrrandi normaalkujul

$$\frac{aY - bX}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,$$

näeme, et punkt (x, y) asub asümptoodist kaugusel

$$\delta = \left| \frac{ay - bx}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{b(\sqrt{x^2 - a^2} - x)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|.$$

Lühike arvutus näitab, et

$$\delta = \left| \frac{\frac{-a^2 b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \right|,$$

ja siit järeldub kohe, et abstsissi tõkestamatul kasvamisel kaugus δ tõkestamatult kahaneb.

Tõkestamatult kahanevate suuruste näiteid

N ä i d e 1. Laseme lauatennise pallil langeda kõvale alusele, näiteks kiviparkettpõrandale, ja vaatleme palli järjestikuste hüpete kõrgusi. Esimeste hüpete kõrgust mõõtes leiaksime, et need vähenevad geomeetrilises progressioonis. Teoreetiliselt võib palli liikumine sel viisil kesta kuitahes kaua, kusjuures teatavast hüppenumbrist alates hüppe kõrgus jääb püsivalt allapoole kuitahes väikesest etteantud tõkkest. Palli hüpete tegelik käik on algul väga sarnane teoreetilisega, kuid juba varsti jääb hüpete tegelik kõrgus teoreetilisest väiksemaks ja lõpuks pall lakkab üldse hüppamast. See on tingitud asjaolust, et liikumise algul pallile kaasa antud mehaaniline energia järk-järgult hajub, tulles soojuse näol esile pallis eneses, kivist aluses ja liikumist pidurdavas õhus.

N ä i d e 2. Vaadeldes tasakaalust välja viidud laelambi edasi-tagasi võnkumist, näeme, et võngete amplituudid * on vaheldumisi positiivsed ja negatiivsed, kusjuures teatavast võnkenumbrist alates amplituudi suurus jääb püsivalt allapoole kuitahes väikesest etteantud tõkkest. Teoreetiliselt võiksid võnked järjest vähenedes kesta igavesti. Tegelikult kustub liikumine juba mõnekümne võnke järel. See on tingitud asjaolust, et võnkuva laelambi energia kulub hõõrdumistakistuse ületamisele.

Astme tõkestamatu kahanemine

Olgu q mingi positiivne arv, mis on väiksem kui 1. Seame endale ülesandeks uurida astme q^n käitumist astendaja tõkestamatul kasvamisel.

Kasutame eespool (lk. 445) antud q järjestikuste astmete konstruktsiooni võtet. Eeldusel, et $0 < q < 1$, annab võte joonisel 192 kujutatud pildi: lõik $\Omega O = 1$, lõik $OA = q$, lõigud OB, OC, OD, ... kujutavad arve q^2, q^3, q^4, ... Nagu näeme, astendaja n kasvamisel avaldis q^n järjest väheneb, saades varsti nii väikeseks, et seda joonisel pole enam võimalik esile tuua.

Saab ka rangelt tõestada, et kui $0 < q < 1$, siis astendaja n tõkestamatul kasvamisel q^n tõkestamatult kahaneb. Tõepoolest, et q on murd 0 ja 1 vahel, siis võib seda kirjutada kujul $q = \frac{a}{b}$, kus a ja b on täisarvud ja $a < b$. Nüüd on aga

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$$

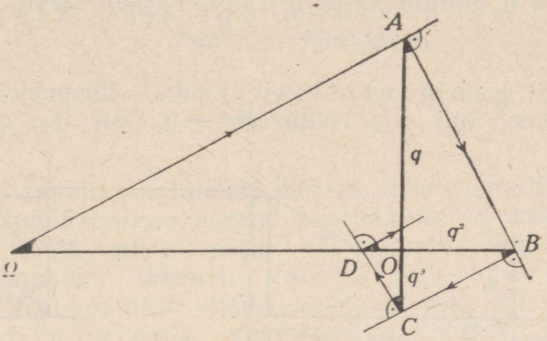
* Amplituud on võnkuva keha suurim kõrvalekalle tasakaaluasendist võnke ajal.

ja seepärast

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

Et $b > a$, siis $\frac{b}{a} > 1$, järelikult eespool nähtu põhjal

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n \to \infty, \quad \text{kui } n \to \infty.$$



Joon. 192.

Murrus $1 : \left(\frac{b}{a}\right)^n$ on lugeja konstantne, nimetaja tõkestamatult kasvav. Seega on murd ise tõkestamatult kahanev:

$$\text{kui } n \to \infty, \quad \text{siis} \quad q^n \to 0.$$

Tõestatud teoreem jääb kehtima ka siis, kui $-1 < q < 0$: tõestuskäigus tuleb ainult arvu q asemel töötada absoluutväärtusega $|q|$. Kokku võttes näeme, et

$$\text{kui } -1 < q < 1, \quad \text{siis} \quad n \to \infty \quad \text{puhul} \quad q^n \to 0.$$

Ülesanne. Leida astendaja täisarvuline väärtus, millest peale $\left(\frac{8}{13}\right)^n$ saab ja jääb väiksemaks kui 0,0001.

Lahendus. Et oleks

$$\left(\frac{8}{13}\right)^n < 0{,}0001,$$

selleks peab olema

$$n \log \frac{8}{13} < -4 \quad \text{ehk} \quad n(\log 8 - \log 13) < -4$$

ehk

$$n > \frac{4}{\log 13 - \log 8} = 19, \ldots$$

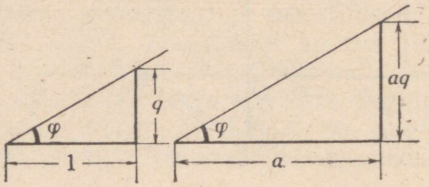
Et n on täisarv, siis ülesandes seatud tingimus on täidetud alates väärtusest $n = 20$.

Geomeetrilise jada elementide graafiline kujutamine

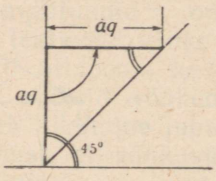
Olgu a ja q mingid kaks positiivset arvu. Siis arvud

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$$

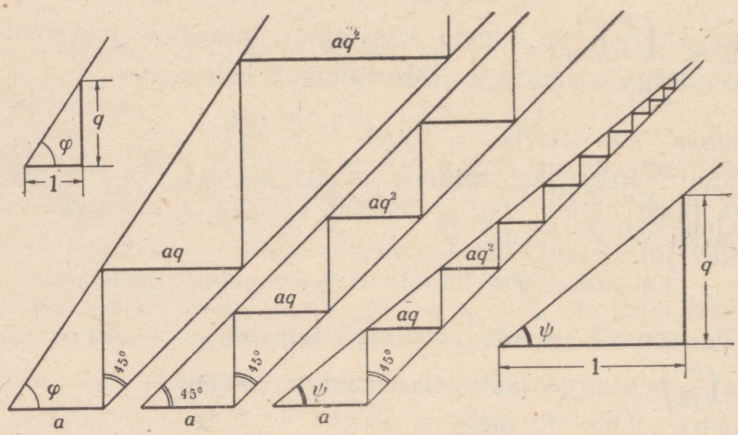
moodustavad geomeetrilise jada. Eespool öeldu põhjal $aq^n \to \infty$, kui $q > 1$, ja $aq^n \to 0$, kui $0 < q < 1$.



Joon. 193.



Joon. 194.



Joon. 195.

Kui $q = 1$, siis on $aq^n = a$ sõltumatu astendaja n väärtusest. Käsitletud kolme juhtu saab väga näitlikul viisil graafiliselt esitada. Selleks paneme tähele, et arvu a saab arvuga q graafiliselt

korrutada sarnaste kolmnurkade abil, nagu näeme joonisel 193. Joonestame täisnurkse kolmnurga kaatetitega 1 ja q; siis $\tan\varphi = q : 1 = q$; joonestame teise täisnurkse kolmnurga kaatetiga a ja teravnurgaga φ; siis kolmnurga teine kaatet on $a \cdot \tan\varphi = a \cdot q$. Märgime edasi, et püstsihis kujutatud korrutist $a \cdot q$ on võimalik pöörata rõhtsihile, kasutades nurga 45° all tõusvat kiirt, nagu näeme joonisel 194. Mõlemat konstruktsiooni ühendades saame joonisel 195 kujutatud graafilised vasted avaldise aq^n väärtustele juhtudel, kus $q > 1$, $q = 1$ ja $q < 1$; esimesel juhul n tõkestamatul kasvamisel aq^n kasvab üle iga määra, teisel juhul aq^n jääb muutumatuks ja kolmandal juhul aq^n kahaneb alla iga määra.

Märkusi

1° Väga sageli kasutatakse ütluste «tõkestamatult kasvav» ja «tõkestamatult kahanev» asemel kõnekäände «lõpmatult suur» ja «lõpmatult väike», mis on pärit XVII sajandist, kus eespool käsitletud küsimustele läheneti metafüüsiliselt, püüdes, nagu tollal veel enamasti viisiks, vaadelda asju olelevatena, mitte muutuvatena, vaadeldes neid nende staatikas, mitte dünaamikas.

Asjaolu, et mõisted «lõpmatult suur» ja «lõpmatult väike» polnud täpselt defineeritud, võimaldas ehtida neid rikkaliku müstilise kattega, milles leidus kirjus segus küll religioosset elementi, küll ebausku, küll ohjeldamatut fantaasiat.

Sõnad «lõpmatult suur» ja «lõpmatult väike» jätavad varju kõnesolevate suuruste olulise külje, nimelt asjaolu, et nad on muutuvad suurused. Üks miljard rubla on väga suur summa, üks miljon valgusaastat on väga suur kaugus, kuid kumbki pole «lõpmatult suur», sest kumbki neist pole muutuv: esimene on kindel rahasumma, teine kindel kaugus. Samal põhjusel on üks millimikron väga väike, kuid mitte lõpmatult väike pikkus, samuti on tolmuübemekesel väga väike, kuid mitte lõpmatult väike kaal.

2° Tunduvat mõttelist segadust tekitasid ka varem kasutusel olnud kirjutised, nagu $\frac{1}{0} = \infty$ ja $\frac{1}{\infty} = 0$, mis sõnasõnaliselt võetuna on mõttetud. Alles käesoleva sajandi teisel aastakümnel võeti tõkestamatu kasvamise märkimiseks kasutusele sümbol $\to \infty$, tõkestamatu kahanemise märkimiseks sümbol $\to 0$. Mõtet, mida taheti edasi anda kirjutisega

$$\frac{1}{0} = \infty \quad \text{ja} \quad \frac{1}{\infty} = 0,$$

märgime nüüd küll pikemate, kuid mõtet paremini haaravate kirjutistega

$$\text{kui } x \to 0, \text{ siis } \frac{1}{x} \to \infty,$$

$$\text{kui } x \to \infty, \text{ siis } \frac{1}{x} \to 0,$$

mida loeme nii: «kui x tõkestamatult kahaneb, siis kasvab $\frac{1}{x}$ tõkestamatult» ja «kui x tõkestamatult kasvab, siis kahaneb $\frac{1}{x}$ tõkestamatult». Mõttetutes kirjutistes $\frac{1}{0} = \infty$ ja $\frac{1}{\infty} = 0$ puudub igasugune viide sellele, et uurimisel on suuruste x ja $\frac{1}{x}$ muutumisviis. Just seda asjaolu tahetakse alla kriipsutada noolekestega.

Teoreeme tõkestamatult kahanevate suuruste kohta

1° *Kui u on tõkestamatult kahanev suurus, siis on seda ka korrutis ku, kus k on mistahes konstant.*

Tõepoolest, olgu ε mingi kindel, muidu aga kuitahes väike positiivne suurus. Moodustame sellest ühe k-ndiku. Et u on tõkestamatult kahanev suurus, siis teatavast muutumisjärgust alates $|u|$ saab ja jääb väiksemaks kui $\frac{\varepsilon}{k}$; sellest hetkest peale

$$k|u| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} \quad \text{ehk} \quad |ku| < \varepsilon.$$

See aga ütleb, et ku on tõkestamatult kahanev.

2° *Kahe tõkestamatult kahaneva suuruse summa ja vahe on samuti tõkestamatult kahanevad suurused.*

Olgu u ja v kaks tõkestamatult kahanevat suurust ja ε mingi kindel, muidu aga kuitahes väike positiivne suurus. Siis teatavast muutumisjärgust alates $|u| < \frac{\varepsilon}{2}$ ja teatavast muutumisjärgust alates ka $|v| < \frac{\varepsilon}{2}$. Vaatleme nüüd suuruste u ja v muutumist sellest järgust peale, kus nii $|u|$ kui ka $|v|$ on korraga väiksemad kui $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|u| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |v| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Lause summa absoluutväärtuse kohta ütleb, et

$$|u+v| \leqslant |u| + |v|,$$

seepärast eespool mainitud järgust peale

$$|u+v| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

ehk

$$|u+v| < \varepsilon.$$

Selle võrratusega on väide summa osas tõestatud.

Et

$$|u-v| = |u+(-v)| \leqslant |u| + |v|,$$

siis ka

$$|u-v| < \varepsilon.$$

Selle võrratusega on väide ka vahe osas tõestatud.

3° *Kahe tõkestamatult kahaneva suuruse korrutis on samuti tõkestamatult kahanev suurus.*

Valime tõkkeks ε mingi lihtmurru, nii et $0 < \varepsilon < 1$. Siis kindlasti $\varepsilon^2 < \varepsilon$. Alates muutumisjärgust, millest peale kumbki suurustest $|u|$ ja $|v|$ kahaneb alla tõket ε, on

$$|u| \cdot |v| < \varepsilon \cdot \varepsilon,$$

seega

$$|uv| < \varepsilon^2$$

ja seda enam

$$|uv| < \varepsilon,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Märkus. Kahe tõkestamatult kahaneva suuruse jagatis ei tarvitse olla tõkestamatult kahanev. Ta ei tarvitse isegi olla muutuv. Vaatleme näiteks suurusi α^n ja ω^n, kus α ja ω on lihtmurrud ja n kasvab tõkestamatult. Siis on α^n ja ω^n tõkestamatult kahanevad suurused. Jagatis

$$\frac{\alpha^n}{\omega^n} = \left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^n.$$

Kui $\alpha < \omega$, siis $\frac{\alpha}{\omega} < 1$ ja astendaja n tõkestamatul kasvamisel on $\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^n$, seega ka jagatis $\frac{\alpha^n}{\omega^n}$ tõkestamatult kahanev. Kui aga $\alpha > \omega$, siis $\frac{\alpha}{\omega} > 1$ ja astendaja n tõkestamatul kasvamisel on

$\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^n$, seega ka jagatis $\frac{\alpha^n}{\omega^n}$ tõkestamatult kasvav. Kui $\alpha = \omega$, siis on jagatis $\frac{\alpha}{\omega} = 1$, seega on $\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^n$ ehk $\frac{\alpha^n}{\omega^n}$ võrdne arvuga 1, niisiis konstantne.

§ 67. MUUTUVA SUURUSE PIIRVÄÄRTUS

Muutuva suuruse piirväärtuse mõiste

Eespool tutvusime muutuva suuruse x kahe tähtsa muutumisviisiga: suuruse tõkestamatu kasvamisega ($x \to \infty$) ja tõkestamatu kahanemisega ($x \to 0$). Juht $x \to 0$ on erijuhuks suuruse x tõkestamatust lähenemisest mingile kindlale väärtusele a, sümboleis $x \to a$. Me ütleme, et

muutuv suurus x läheneb tõkestamatult kindlale väärtusele a, kui nende vahe absoluutväärtus tõkestamatult kahaneb

ehk, sümboleis, $x \to a$, kui $|x - a| \to 0$. Suurus x, lähenedes kindlale arvule a, võib kogu oma muutumisel jääda arvust a väiksemaks; vahe $x - a$ on siis negatiivne. Suurus x võib aga kogu oma muutumisel jääda ka arvust a suuremaks; vahe $x - a$ on siis positiivne. Esimesel juhul läheneb suurus x arvule a kasvades, teisel juhul kahanedes. Muutuv suurus x võib aga läheneda arvule a ka kõikudes selle ümber; vahe $x - a$ on siis kord positiivne, kord negatiivne.

Selle asemel et öelda «muutuv suurus x läheneb tõkestamatult kindlale väärtusele a», öeldakse ka, et «arv a on muutuva suuruse x piirväärtuseks». Niisiis:

arv a on muutuva suuruse x piirväärtuseks, kui vahe selle kindla arvu a ja muutuva suuruse x vahel tõkestamatult kahaneb.

Öeldust ilmneb, et kirjutist $x \to a$ võib lugeda ka kujul: «muutuva suuruse x piirväärtuseks on arv a». Erijuhul $a = 0$ omandab kirjutis $x \to a$ kuju $x \to 0$. Seega

tõkestamatult kahaneva suuruse piirväärtuseks on 0 ja, vastupidi, muutuv suurus, mille piirväärtus on 0, on tõkestamatult kahanev.

Märgime, et lihtsa lineaarse teisendusega

$$x = a + \alpha$$

taandatakse muutuva suuruse x piirväärtusele a lähenemise uurimine suuruse α tõkestamatu kahanemise uurimisele. Nagu näeme, väljendavad kirjutised

$$x \to a \quad \text{ja} \quad x = a + \alpha, \quad \text{kus } \alpha \to 0,$$

üht ja sedasama mõtet.

Muutuva suuruse piirväärtuse näiteid

N ä i d e 1. Tühjuses langeks vihmapiisk oma raskuse mõjul ühtlase k i i r e n d u s e g a w. Õhu pidurdaval mõjul aga muutub piisa kiirendus järjest väiksemaks ja väiksemaks, lähenedes ikka enam ja enam nullile: õhus langemisel on vihmapiisa kiirenduse piirväärtuseks null ehk, teisiti, vihmapiisa kiirendus on tõkestamatult kahanev suurus, sümbolites $w \to 0$.

Vaatleme vihmapiisa k i i r u s e v muutumist. Piisa tekkimise hetkel on kiirus v null. Siitpeale ta kasvab, kuid järjest aeglasemalt ja aeglasemalt, lähenedes tõkestamatult teatavale konstantsele väärtusele — p i i r k i i r u s e l e c, sümbolites $v \to c$. Olles saavutanud piirkiiruse, langeb piisk edasi ü h t l a s e l t. Tõsiasi, et vihmapiisk langeb madalamates õhukihtides ü h t l a s e l t, ilmneb selles, et piisa jälg vaguni või lennuki aknal on s i r g j o o n e l i n e: vaguni või lennuki ühtlane sirgjooneline liikumine liitub vihmapiisa ühtlase sirgjoonelise liikumisega jällegi ühtlaseks sirgjooneliseks liikumiseks.

Märgime, et vihmapiisa kohta öeldu kandub üle õhus langevale parašütistile, õlis langevale tinakuulile, merepõhja vajuvale laevale jne.

N ä i d e 2. Paigutame purgi põhja kihi keedusoola, valame purgi vett täis ja jätame ta segamatult seisma. Kui nüüd näiteks ööpäevaste ajavahemike järel mõõdame ülemise veekihi s o o l s u s t s, siis selgub, et see aeglaselt kasvab, lähenedes järjest enam ja enam teatavale kindlale väärtusele — soolsuse piirväärtusele — soolaga küllastatud lahuse soolsusele k, sümboleis $s \to k$.

M ä r k u s i.

1° Igapäevases kõnes mõistame p i i r i all tavaliselt teatavat r a j a või t õ k e t, näiteks «sportlase saavutuste p i i r i k s odaviskes oli 60 m», «kolhoosi maa-ala läänepoolseks p i i r i k s on Võrtsjärve kallas», «ravimi ühekordse annuse p i i r i k s on 0,07 grammi». Muutuva suuruse piirväärtus v õ i b o l l a suuruse muutumise tõkkeks, ta võib aga seda ka mitte olla: r a j a, t õ k e j a p i i r v ä ä r t u s on matemaatikas erineva sisuga mõisted.

2° Muutuva suuruse piirväärtus võib ise olla üks selle suuruse väärtustest, kuid võib seda ka mitte olla. Kui näiteks muutuja väärtusteks on arvud

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots,$$

siis muutuja piirväärtuseks on 1. See arv ei kuulu aga muutuja väärtuste hulka.

Olgu teada, et

$$u \to a \quad \text{ja} \quad v \to b.$$

Siis

$$(u + v) \to a + b.$$

See tähendab, et

summa piirväärtus on võrdne liidetavate piirväärtuste summaga.

Tõepoolest, $u = a + \alpha$, $v = b + \beta$, kus $\alpha \to 0$ ja $\beta \to 0$. Seega $u + v = (a + b) + (\alpha + \beta)$. Et $\alpha + \beta \to 0$, siis

$$u + v \to a + b,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Analoogiliselt tõestame, et

$$u - v \to a - b.$$

Näitame edasi, et algul märgitud eeldustel

$$u \cdot v \to a \cdot b.$$

See tähendab, et

korrutise piirväärtus on võrdne tegurite piirväärtuste korrutisega.

Tõepoolest,

$$u \cdot v = (a + \alpha)(b + \beta) = ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta.$$

Et α ja β on tõkestamatult kahanevad suurused, siis on seda, nagu teame, ka $a\beta$ ja $b\alpha$. Samuti on tõkestamatult kahanev suurus ka $\alpha\beta$. Järelikult summa $a\beta + b\alpha + \alpha\beta$ on tõkestamatult kahanev. See tähendab aga, et

$$uv \to ab,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näitame lõpuks, et

kui $u \to a$, $v \to b$ ja $b \neq 0$,

siis

$$\frac{u}{v} \to \frac{a}{b}.$$

Tõepoolest,

$$\frac{u}{v} = \frac{a + \alpha}{b + \beta} = \frac{a}{b} + \frac{b\alpha - a\beta}{b(b + \beta)}.$$

Kui $\beta \to 0$, siis $b + \beta \to b$ ja nimetaja $b(b + \beta) \to b^2$, mis pole 0. Et $b\alpha$ ja $a\beta$ on tõkestamatult kahanevad suurused, siis on sama liiki suurus ka $b\alpha - a\beta$. Niisiis murru

$$\frac{b\alpha - a\beta}{b(b + \beta)}$$

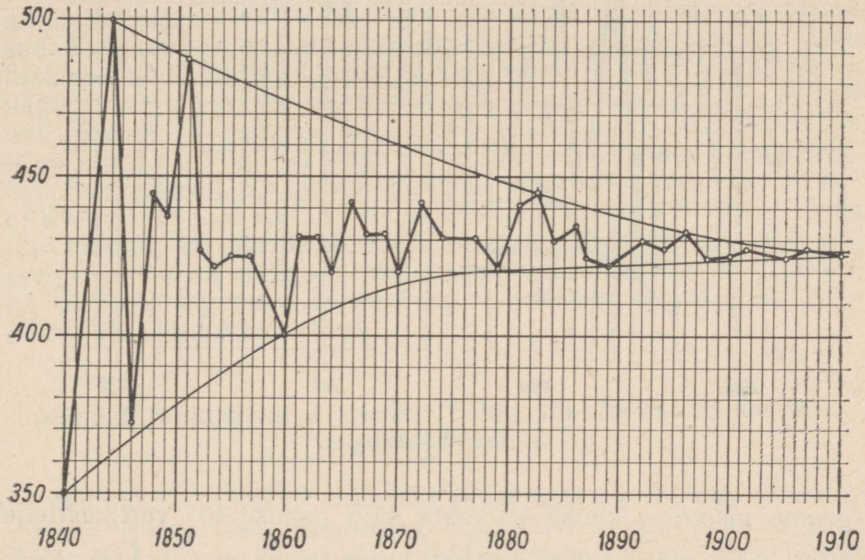
lugeja läheneb tõkestamatult nullile, nimetaja aga arvule b^2, mis pole null. Seega uuritav murd läheneb nullile ja

$$\frac{u}{v} \to \frac{a}{b},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Piirväärtuse mõiste täppisteadustes

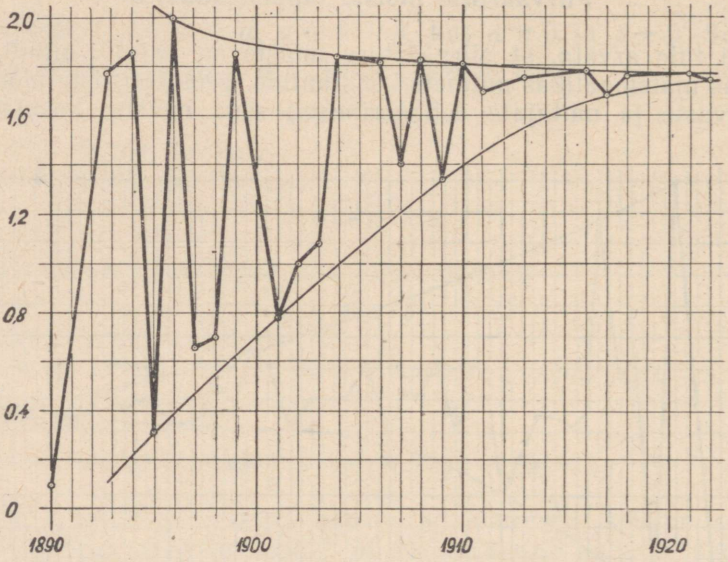
Ei tule arvata, et piirväärtuse mõiste on vajalik ainult kõrgemas matemaatikas mitmete konstantide, geomeetriliste mõistete, sõltuvuste ja näitajate defineerimisel; seda mõistet kasutatakse



Joon. 196.

juba elementaargeomeetrias, näiteks ringjoone pikkuse ja ringi pindala käsitlemisel, arvu π defineerimisel ning püramiidi ruumala määramisel. Nagu varsti näeme, tugineb kõrgemas matemaatikas piirväärtusele kõvera puutuja, eksponentsõltuvuse ja funktsiooni tuletise mõiste kujundamine. Piirväärtuse mõisteta jääksid kindlalt piiritlemata ka niisugused füüsikalised suurused, nagu soojuse mehaaniline ekvivalent J, keemilise elemendi aatomkaal, elektroni laengu ja massi suhe $\frac{e}{m}$, valguse kiirus, solaarkonstant jne. Tõepoolest, kõiki füüsikalisi suurusi mõõde-

takse ikka jälle uuesti, täpsemaid mõõtmisvahendeid ja paremaid mõõtmismeetodeid kasutades. Sel viisil saadakse otsitavate suuruste ikka täpsemad ja täpsemad väärtused. Joonised 196 ja 197 näitavad, kuidas aja jooksul on muutunud J ja $\frac{e}{m}$ väärtus (mõlema joonise horisontaalteljel on antud aastad, joonise 196 vertikaalteljel soojuse mehaanilise ekvivalendi mõõdetud väärtus kilo-



Joon. 197.

gramm-meetrites kilokalori kohta ning joonise 197 vertikaalteljel 10^{-8}-kordne mõõdetud $\frac{e}{m}$ väärtus kulonites grammi kohta). Väärtuste J, $\frac{e}{m}$ jne. muutlikkuse tõttu tekib küsimus, mida siis õieti mõista suuruste J, $\frac{e}{m}$ jne. *tõeliste väärtuste* all. Toodud joonised näitavad, et *mõõtmistulemuste kõikumine aja kasvamisel järjest väheneb. Mõõtmistulemused lähenevad aja kasvamisel silmanähtavalt teatavale piirväärtusele.* Seepärast:

füüsikalise suuruse tõelise väärtuse x all mõistame piirväärtust, millele lähenevad selle suuruse mõõtmise teel saadud väärtused x_1, x_2, x_3, ... *mõõtmistehnika tõkestamatul arenemisel.*

§ 68. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS ARGUMENDI TÕKESTAMATUL KASVAMISEL

Eelseisvate arutluste eesmärgiks on selgitada funktsioonide võimalikke käitumisviise argumendi tõkestamatul kasvamisel või tõkestamatul lähenemisel mõnele kindlale väärtusele. Siin vaadeldav küsimustik on keskse tähtsusega paljudes edaspidi arendatavates mõttekäikudes. Alustame tehniliselt lihtsamast juhust, nimelt juhust, kus argument tõkestamatult kasvab.

Meie ümber toimuvate nähtuste vaatlemisel kerkib sageli küsimus, kuidas kulgeb üks või teine protsess kauges tulevikus, näiteks kui intensiivselt kiirgab Päike miljardite aastate järel, kui palju on 1 grammist uraanist veel lagunemata miljonite aastate järel, kui suur on turba sõestumise protsent sadade tuhandete aastate järel jne. Küsimuse lahendamine nõuab funktsioonide käitumise uurimist argumendi — antud juhul aja — väga suureks kasvamisel. Protsessid kulgevad sageli nii, et nad kas lühema või pikema aja järel jõuavad järku, millele hiljem enam märgatavat muutust ei järgne, see tähendab teoreetiliselt olukorrani kuitahes pika aja järel ehk piirolukorrani aja tõkestamatul kasvamisel. Seda piirolukorda on tavaliselt palju kergem määrata kui olukorda mingi kindla pika aja järel. Analoogilised probleemid tekivad ka siis, kui argumendiks on kaugus, pöördenurk jne. Järgmised näited illustreerivad öeldut.

Näiteid funktsiooni käitumise kohta tõkestamatult kasvava argumendi puhul

Näide 1. Liikugu auto piki sirget teed Ox noolega näidatud suunas (joon. 198). Aknaluugi «silma» S kaudu kujutub tema tagatuli A seinale kohal K. Igale kaugusele $OA = a$ vastab oma kindel kujutise kõrgus $OK = k$, nii et $k = f(a)$. Kujutleme, et kaugus a tõkestamatult kasvab. Siis tule kujutise kõrgus k läheneb tõkestamatult väärtusele h ehk h on kõrguse k piirväärtuseks kauguse a tõkestamatul kasvamisel, lühidalt

$$\text{kui } a \to \infty, \text{ siis } k \to h$$

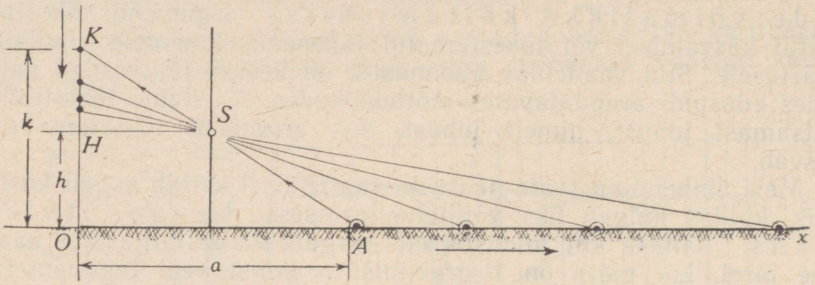
ehk, teisiti,

$$\text{kui } a \to \infty, \text{ siis } f(a) \to h$$

ehk, uues tähistusviisis

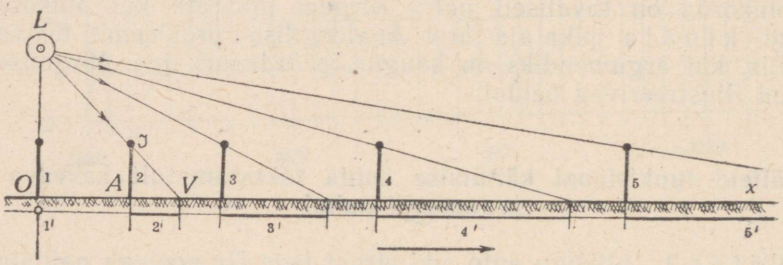
$$\lim_{a \to \infty} f(a) = h.$$

Esimest kirjutist loeme nii: «kui a kasvab tõkestamatult, siis k läheneb tõkestamatult arvule h». Teist kirjutist loeme nii: «a tõkestamatul kasvamisel on funktsiooni $f(a)$ piirväärtuseks h».*



Joon. 198.

Jooniselt on näha, et juba mõõdukategi kauguste OA puhul on lõigu OK pikkus väga lähedane lõigu OH pikkusele ja lõigu OA edaspidine suurenemine lõiku OK enam kuigi märgatavalt ei mõjuta.



Joon. 199.

Märgime, et läätse (või näiteks ka fotoaparaadi objektiivi) fookusekaugus f on piirkaugus, millele läheneb kujutise kaugus k läätse kesktasapinnast eseme kauguse e tõkestamatul kasvamisel, sümbolites

$$f = \lim_{e \to \infty} k.$$

Näide 2. Liikugu inimene piki sirget teed Ox, mille kohal ripub latern L (joon. 199). Otse laterna L all, asendis 1, on ini-

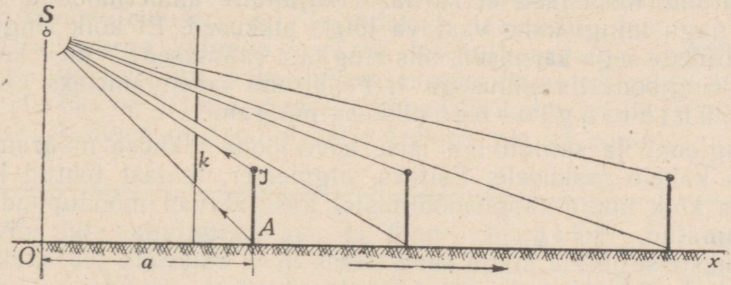
* Sümbol «lim» on lühend ladinakeelsest sõnast *limes*, mis tähendab piiri, antud juhul piirväärtust.

mese varju pikkus n u l l. Kui inimene edasi järjest läbib kohad 2, 3, ..., siis varju pikkus järjest kasvab: $1' < 2' < 3' \ldots$ Igale kaugusele OA (vt. joonisel asend 2) vastab oma kindel varju pikkus AV. Märgime kauguse OA tähega a, varju pikkuse AV tähega v. Siis $v = f(a)$. Kauguse a küllalt suureks saamisel kasvab varju pikkus v üle iga etteantud määra. Tõepoolest, anname varju pikkuse v ette. Inimese kõrgus AI ja vari AV annavad täisnurkse kolmnurga IAV. Jääb vaid nihutada see kolmnurk piki sirget Ox nii kaugele, et punktid L, I ja V asuvad ühel sirgel. Kui nüüd inimene liigub kohast A veel edasi, siis ületab ta varju pikkus etteantud määra. Kujutledes inimest püsivalt eemalduvana laternast piki sirget teed Ox, näeme, et t a v a r j u p i k k u s k a s v a b t õ k e s t a m a t u l t, lühidalt

$$\text{kui } a \to \infty, \text{ siis } v \to \infty.$$

Märkimisviisi ühtlustamiseks esimeses näites tooduga kasutame siingi limese sümbolit ja kirjutame

$$\lim_{a \to \infty} f(a) = \infty.$$



Joon. 200.

Sõna täpses mõttes pole lõigul AV õieti mingit piirväärtust, lõik AV kasvab tõkestamatult. Me laiendame aga ka sellele juhule limese sümboli kasutamist.

Vaadeldud varju pikkus AV on tõkestamatult kasvava suuruse heaks konkreetseks näiteks.

N ä i d e 3. Liikugu inimene piki sirget teed Ox (joon. 200) ja vaadelgu teda silm S läbi akna. Nagu nähtub jooniselt, vastab igale kaugusele $OA = a$ kindel inimese kujutise pikkus k, nii et $k = f(a)$. Kauguse a järjest suuremaks kasvamisel kujutise pikkus k järjest väheneb, lähenedes ikka enam ja enam nullile. Kül-

lalt suure kauguse a puhul saab kujutis k lühemaks igast etteantud lõigust ehk, teiste sõnadega, kauguse a tõkestamatul kasvamisel kujutis k kahaneb tõkestamatult:

$$\text{kui } a \to \infty, \text{ siis } k \to 0,$$

ehk

$$\lim_{a \to \infty} f(a) = 0.$$

Seda võrdust loeme nii: «a tõkestamatul kasvamisel on funktsiooni $f(a)$ piirväärtuseks 0».

Vaadeldud kujutise pikkus on tõkestamatult kahaneva suuruse heaks konkreetseks näiteks.

Ringjoone sirgestamise probleem

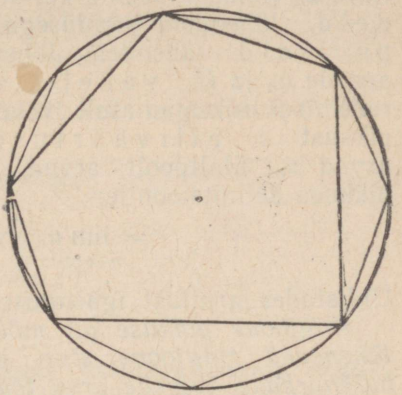
Paljud põhilise tähtsusega matemaatilised suurused defineeritakse ja arvutatakse teatavate funktsioonide piirväärtustena argumendi tõkestamatul kasvamisel. Vaatleme selle küsimuse selgitamiseks artikli pealkirjas nimetatud klassikalist probleemi: on antud ringjoon raadiusega r; määrata selle ringjoone pikkus.

Lähtume tõsiasjast, et sarnaste kujundite ümbermõõdud suhtuvad nagu mingi kahe vastava lõigu pikkused. Et kõik ringjooned on üksteisega sarnased, siis ringjoon raadiusega r on r korda pikem ringjoonest raadiusega 1. Probleemi lahendamiseks piisab seega ühikringjoone pikkuse määramisest.

Ringjoone ja samuti iga teise kõverjoone pikkuse määramine põrkab kahele raskusele. Esiteks, algmeeter, temast tehtud koopiad ja kõik muud täppismõõtmistel kasutatavad mõõdupuud on paindumatud, jäigad; neid ei saa paigutada piki kõvera kaart üksteise järele, nagu seda teeme laua, raudtala jne. pikkuse mõõtmisel. Teiseks pole ilma pikemata selge, mida üldse mõista ringjoone kui kõverjoone pikkuse all. Esimene raskus on tehnilist, teine põhimõttelist laadi.

Ühikringjoone pikkuse lähendeid võiksime mõõtmise teel saada järgmiselt. Joonestame näiteks sajamillimeetrise raadiusega võimalikult peene ringjoone ja sellesse mingi hulknurga, näiteks viisnurga (joon. 201). Selle hulknurga ümbermõõtu saab määrata jäiga mõõdupuuga. Tulemus kujutab ringjoone pikkust C ligikaudu. Parema lähendi C jaoks saame, kui viisnurga asendame kümmenurgaga, veel parema, kui töötame kakskümmendnurgaga jne. Nii saadavad arvud on C lähendid puudusega. Ümberjoonestatud hulknurgad annaksid C lähendid liiaga. Kui hulknurgad on korrapärased, siis saab nende ümber-

mõõtu ka arvutada. Seepärast kasutamegi edaspidi ainult korrapäraseid hulknurki. Joonestame ringjoone sisse ja ümber järjest korrapärase kolmnurga, nelinurga, viisnurga, kaheksa- ja kaksteistnurga. Nende hulknurkade ümbermõõdud annavad rea ühikringjoone pikkuse j ä m e d a i d l ä h e n d e i d. Ringi sise- ja välishulknurkade ümbermõõte on aga juba tunduvalt raskem vähegi täpselt määrata, kui külgede arv on suurem, näiteks 96: külje pikkus on siis v ä i k e ning mõõtmisvea protsent ja seega ka ringjoone ümbermõõdu relatiivne viga võib tõusta lubamatult kõrgele. Seepärast jätame kõrvale ringjoone pikkuse määramise tegeliku mõõtmise teel ja katsume seda pikkust a r v u t a d a. Lähtume k o r r a p ä r a s t e s t sise- ja välishulknurkadest. Arvutamise lihtsustamise otstarbel kasutame esimese hulknurgana kuusnurka, edasi aga hulknurki ikka kaks korda suurema külgede arvuga. Arvutamistulemused on koondatud tabelisse, kus n tähendab hulknurga külgede arvu, u_n sisehulknurga ja U_n välishulknurga ümbermõõtu. Tabeli viimases reas on antud vahed $U_n - u_n$. Võrdluseks on tabelis toodud andmed ka kolm-, neli- ja viisnurga kohta. Andmed on toodud nelja kohaga pärast koma.



Joon. 201.

n	3	4	5	6	12	24	...	96	...
U_n	10,3923	8,0000	7,2655	6,9282			...	6,2853	...
u_n	5,1963	5,6568	5,8780	6,0000			...	6,2820	...
$U_n - u_n$	5,1960	2,3432	1,3875	0,9282			...	0,0033	...

Näeme, et arvu n kasvamisel ümbermõõdud u_n järjest k a s v a v a d, ümbermõõdud U_n järjest k a h a n e v a d; vahe $U_n - u_n$ järjest k a h a n e b.

Märgime ühikringjoone pikkuse tähega c. Et iga sisehulknurga ümbermõõt on v ä i k s e m kui c, see aga on omakorda väik-

sem kui iga välishulknurga ümbermõõt, siis

$$u_n < c < U_n.$$

Arve u_n võime vaadelda kui otsitava c **altpoolseid lähendeid**, lähendeid puudusega, arve U_n kui otsitava c **ülaltpoolseid** lähendeid, lähendeid liiaga. Et arv c jääb ikka arvude u_n ja U_n **vahele**, vahe $U_n - u_n$ ise aga indeksi n suurenemisel tõkestamatult väheneb, siis on loomulik vaadelda pikkust c **piirväärtusena**, millele altpoolt lähenevad arvud u_n, ülaltpoolt arvud U_n. Seega jõuame ühikringjoone pikkuse definitsioonile:

$$c = \lim_{n\to\infty} u_n \quad \text{või ka} \quad c = \lim_{n\to\infty} U_n.$$

Üldistades arutlust igasugusele ringjoonele, ütleme:

ringjoone pikkuse all mõistetakse ühist piirväärtust, millele lähenevad ringjoone sise- ja välishulknurkade ümbermõõdud hulknurkade külgede arvu tõkestamatul kasvamisel.

Et ühikringjoone puhul erinevad u_{96} ja U_{96} teineteisest alles kolmandas kümnendmärgis pärast koma, siis nende vahel asetsev

$$c \approx 6{,}28,$$

kusjuures kõik kümnendmärgid on siin õiged. Arvu c lähendi 6,28 viga ei ületa $\frac{1}{2}\ (0{,}005 + 0{,}002) \approx 0{,}004$.

Et kõik ringjooned on sarnased, siis on ümbermõõdu C ja läbimõõdu D suhe kõigil ringjoontel üks ja seesama. Seda suhet märgitakse sümboliga π. Niisiis

$$\pi = \frac{C}{D} = \frac{c}{2} \approx 3{,}14.$$

Märgime, et $u_n = u(n)$ ja samuti $U_n = U(n)$. Me võime seepärast kirjutada, et

$$C = \lim_{n\to\infty} u(n) \quad \text{või ka} \quad C = \lim_{u\to\infty} U(n).$$

Nagu näeme, on ringjoone pikkus C defineeritud funktsioonide $u(n)$ ja $U(n)$ ühise piirväärtusena argumendi n tõkestamatul kasvamisel.

Esitatud arutluskäigus omandas argument n ainult naturaalarvulised väärtused 6, 12, 24, 48, 96, ... Tekib küsimus, kas me ei saa mingit eelmisest erinevat C väärtust, kui lähtume näiteks argumendi n väärtusest 4, 8, 16, 32, 64 jne. või väärtustest 5, 10, 20, 40, 80 jne. On võimalik näidata, et funktsioonid $u(n)$ ja $U(n)$ lähenevad ikka ühele ja samale piirväärtusele C sõltumatult sellest, missugused naturaalarvulised väärtused argument n oma tõkestamatul kasvamisel omandab.

Funktsiooni asümptootiline väärtus

Olgu $f(x)$ funktsioon, mille määramispiirkond haarab kuitahes suuri argumendi väärtusi. Olgu c arv, mida funktsiooni $f(x)$ väärtused lähendavad, ja nimelt nii, et lähendamise viga

$$|f(x) - c| \to 0, \text{ kui } x \to \infty.$$

Me ütleme siis, et arv c on $f(x)$ piirväärtuseks argumendi tõkestamatul kasvamisel, ja kirjutame, et

$$f(x) \to c, \text{ kui } x \to \infty,$$

ehk, limese sümbolit kasutades,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = c.$$

Niisiis:

kui funktsioon $f(x)$ jääb määratuks kuitahes suurte argumendi väärtuste puhul ja funktsiooni $f(x)$ väärtused lähendavad kindlat arvu c nii, et argumendi tõkestamatul kasvamisel lähendamise viga $|f(x) - c|$ tõkestamatult kahaneb, siis nimetatakse arvu c funktsiooni piirväärtuseks argumendi tõkestamatul kasvamisel.

Funktsiooni piirväärtust argumendi tõkestamatul kasvamisel nimetatakse lühemalt ka funktsiooni asümptootiliseks väärtuseks.

Näide. Vaatleme geomeetrilise progressiooni summat

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

See summa on ilmselt arvu n funktsioon:

$$f(n) = \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

ehk, pärast lihtsustamist,

$$f(n) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Igasuguse n puhul on $f(n)$ segaarv. Piirväärtus

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = 2$$

on täisarv. Funktsiooni $f(n)$ asümptootiliseks väärtuseks on 2. See ei kuulu funktsiooni $f(n)$ poolt omandatavate väärtuste hulka.

§ 69. FUNKTSIOONIDE ASÜMPTOOTILISE KÄITUMISE NÄITEID

Selgitame järgmiste näidete varal võtteid, mida kasutatakse oma avaldistega antud funktsioonide asümptootilise käitumise uurimisel.

N ä i d e 1. Uurime, kuidas käitub funktsioon

$$f(x) = \frac{2 + 3x^2}{1 + x^2}$$

argumendi x tõkestamatul kasvamisel.

Nagu kohe näha, on vaadeldav funktsioon määratud argumendi igasugustel väärtustel.

Argumendi tõkestamatul kasvamisel (kas positiivses või negatiivses suunas) $x^2 \to \infty$, $3x^2 \to \infty$, $2 + 3x^2 \to \infty$ ja $1 + x^2 \to \infty$. Et nii lugeja kui ka nimetaja kasvavad üle iga määra, siis ei saa murru käitumise kohta esialgu midagi kindlat öelda. Ülevaate saamiseks vaadeldava funktsiooni käitumisest argumendi tõkestamatul kasvamisel eraldame murrust täisosa murru lugejat nimetajaga jagades. Saame

$$f(x) = 3 - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Argumendi tõkestamatul kasvamisel $x^2 \to \infty$, $1 + x^2 \to \infty$, teise liikmena paremal poolel seisev murd läheneb nullile ja seega $f(x)$ läheneb arvule 3:

$$\text{kui } x \to \infty, \text{ siis } f(x) \to 3,$$

ehk arv 3 on funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks argumendi tõkestamatul kasvamisel:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 3$$

ehk funktsioon $f(x)$ läheneb asümptootiliselt arvule 3 ehk, teisiti, joon $y = f(x)$ läheneb asümptootiliselt sirgele $y = 3$ ehk, veel teisiti, funktsiooni asümptootiliseks väärtuseks on 3.

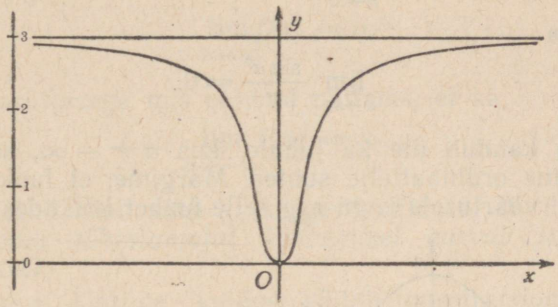
Märgime, et ka siis, kui $x \to -\infty$, funktsioon $f(x) \to 3$ ehk

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 3.$$

Joonisel 202 on kujutatud funktsiooni $f(x)$ käigujoon; argumendi x kasvamisel ka funktsioon $f(x)$ k a s v a b; küllalt suure x puhul ta saab ja argumendi edaspidisel kasvamisel jääb nii lähedale arvule 3, kui me iganes soovime. Seesama on kehtiv ka negatiivses suunas üle iga määra kasvava argumendi puhul. Kummalgi korral läheneb funktsioon $f(x)$ oma piirväärtusele a l t p o o l t.

Märgime, et pole niisugust argumendi väärtust, mille puhul $f(x) = 3$; funktsiooni asümptootiline väärtus ei kuulu antud juhul funktsiooni poolt omandatavate väärtuste hulka.

Geomeetria keeles sõnastame öeldut kujul: «kõver $y = f(x)$ läheneb (nii positiivses kui ka negatiivses suunas) altpoolt asümptootiliselt sirgele $y = 3$» ehk «sirge $y = 3$ on kõvera $y = f(x)$ asümptoodiks».



Joon. 202.

Näide 2. Olgu sõltumatuks muutujaks nurk suurusega α kraadi. Vaatleme, kuidas käitub funktsioon

$$f(\alpha) = \frac{\sin \alpha^\circ}{\alpha}$$

argumendi α tõkestamatul kasvamisel.

Vaadeldav funktsioon on määratud kõigil argumendi väärtustel peale väärtuse null: kui $\alpha = 0$, esineb $f(\alpha)$ kujul $\frac{0}{0}$, sel sümbolil pole aga mõtet. Kohal $\alpha = 0$ ei ole funktsiooni $f(\alpha)$ käigujoonel ordinaati.

Olgu $\alpha > 0$ ja α muutumise suund positiivne. Siis on vaadeldava murru nimetaja positiivne. Murru lugeja $\sin \alpha^\circ$ märk aga muutub nurga α läbiminekul igast 180° täisarvulisest kordsest. Seega on murd $\sin \alpha^\circ : \alpha$ vaheldumisi positiivne ja negatiivne. Et $|\sin \alpha^\circ| \leqslant 1$, α aga kasvab üle iga määra, siis teatavast α väärtusest alates

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin \alpha^\circ}{\alpha} \right| \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Et $\left| \frac{\sin \alpha^\circ}{\alpha} \right|$ püsib kogu aeg kindla väärtuse — nulli — ja sellele

tõkestamatult läheneva murru $\frac{1}{\alpha}$ vahel, siis peab ta ka ise tõkestamatult lähenema nullile:

$$\text{kui } \alpha \to \infty, \text{ siis } \left|\frac{\sin \alpha^\circ}{\alpha}\right| \to 0$$

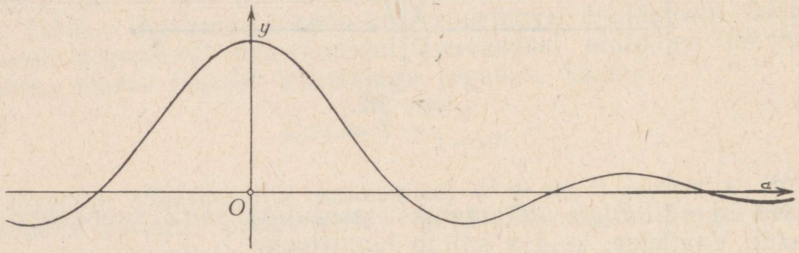
ehk

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left|\frac{\sin \alpha^\circ}{\alpha}\right| = 0$$

ja seega ka

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\sin \alpha^\circ}{\alpha} = 0.$$

Kõik öeldu kandub üle ka juhule, kus $\alpha \to -\infty$, sest joon on sümmeetriline ordinaattelje suhtes. Märgime, et funktsioon läheneb oma piirväärtusele kogu aeg selle ümber kõikudes (joon. 203).



Joon. 203.

Geomeetria keeles ütleksime, et «kõver $y = f(\alpha)$ läheneb (nii positiivses kui ka negatiivses suunas) asümptootiliselt abstsisstelje». Seejuures kõver $y = f(\alpha)$ lõikab seda telge piiramatu arv kordi. Abstsissi kasvamisel kõvera laineharjade kõrgused ja laineorgude sügavused kahanevad tõkestamatult.

Näide 3. Uurime polünoomi

$$f(x) = x^2 - 3x + 10$$

asümptootilist käitumist.

Argumendi x tõkestamatul kasvamisel kasvab tõkestamatult niihästi x^2 kui ka $3x$, kusjuures pole otsekohe näha, mis toimub vahega $x^2 - 3x$ ja summaga $(x^2 - 3x) + 10$. Küsimuse lahendamiseks võtame $f(x)$ avaldises x kõrgeima astme sulgude ette:

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{10}{x^2}\right).$$

Kui $x \to \infty$, siis $x^2 \to \infty$, $\frac{3}{x} \to 0$, $\frac{10}{x^2} \to 0$ ja

$$1 - \frac{3}{x} + \frac{10}{x^2} \to 1.$$

Et $f(x)$ avaldises esimene tegur kasvab tõkestamatult, teine aga läheneb arvule 1, siis nende korrutis kasvab tõkestamatult:

kui $x \to \infty$, siis $f(x) \to \infty$.

Üle kandes piirväärtuse kirjutusviisi ka sellele juhule, kirjutame

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Sama arutlusega mis eespool näitame, et ka

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty.$$

Kirjeldatud viisil saab ka kergesti näidata, et *argumendi tõkestamatul kasvamisel kasvab iga polünoom tõkestamatult.*

N ä i d e 4. Uurime, kuidas käitub murdratsionaalne funktsioon

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 10}$$

argumendi tõkestamatul kasvamisel.

Kirjutades

$$f(x) = \frac{x^2\left(2 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{10}{x^2}\right)},$$

näeme, et lugejas ja nimetajas seisvad sulgavaldised lähenevad argumendi tõkestamatul kasvamisel vastavalt arvudele 2 ja 1, esimeseks teguriks olev x^2 aga kasvab üle iga määra. Et nii lugeja kui ka nimetaja kasvab üle iga määra, siis ei saa otsekohe öelda, kuidas käitub nende jagatis. Taandades aga teguriga x^2, näeme, et

$$\text{kui } x \to \infty, \text{ siis } f(x) \to 2,$$

ehk, teises kirjutusviisis,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2.$$

Märgime, et kahe polünoomi jagatise piirväärtust argumendi tõkestamatul kasvamisel saab alati leida, jagades nii lugejat kui nimetajat nende avaldistes esineva argumendi k õ r g e i m a astmega ja arvutades siis tulemuse piirväärtuse.

Näide 5. Uurime murdratsionaalse funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x^3 + 3x - 11}$$

asümptootilist käitumist.

Jagame lugejat ja nimetajat argumendi kõrgeima astmega (see on lubatud, sest oma tõkestamatul kasvamisel jääb x teatavast muutumisfaasist alates nullist erinevaks):

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{7}{x^3}}{1 + \frac{3}{x^2} - \frac{11}{x^3}}.$$

Kõik murrud lugejas ja nimetajas lähenevad argumendi tõkestamatul kasvamisel nullile; lugeja läheneb nullile, nimetaja ühele, nii et

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

Uuritava funktsiooni asümptootiliseks väärtuseks on 0.

§ 70. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS ARGUMENDI TÕKESTAMATUL LÄHENEMISEL MÕNELE KINDLALE VÄÄRTUSELE

Paljud loodusteaduse ja tehnika küsimused seavad meid vajaduse ette uurida funktsiooni käitumist *argumendi lähenemisel mõnele kindlale väärtusele*. Näiteks võib meid huvitada küsimus, kuidas käitub vedeliku ruumala temperatuuri lähenemisel keemispunktile; kuidas käitub terasvarda venivus koormuse lähenemisel elastsuspiirile; kuidas käitub lahuse elektrijuhtivus lahuse kontsentratsiooni lähenemisel küllastumispunktile jne. Nendele küsimustele vastamine nõuab funktsioonide käitumise uurimist *argumendi mõne kindla väärtuse vahetus läheduses* ehk, teisiti, argumendi tõkestamatul lähenemisel mõnele kindlale väärtusele. Põhilise tähtsusega mõisteks on selles uurimiskäigus *funktsiooni $f(x)$ piirväärtus argumendi lähenemisel kindlale väärtusele a*.

Sümboli $\lim_{x \to a} f(x)$ definitsioon

Olgu a mingi *kindel arv*, mida saab kuitahes hästi lähendada argumendi x väärtustega $x_1, x_2, x_3, \ldots$ Vastaku viimastele funktsiooni $f(x)$ väärtused $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$ Võib juhtuda, et

need omakorda lähendavad teatavat konstanti, näiteks arvu b. Lühidalt:

$$\text{kui } x \to a, \text{ siis } f(x) \to b.$$

Teises sõnastuses tähendab see, et samal ajal kui argument x tõkestamatult läheneb arvule a, läheneb funktsioon $f(x)$ arvule b. Me ütleme siis, et arv b on funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks argumendi tõkestamatul lähenemisel arvule a, ja kirjutame

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Eespool antud seletused viivad järgmisele funktsiooni piirväärtuse definitsioonile:

kui argumendi väärtused lähendavad konstanti a ja samaaegselt vastavad funktsiooni väärtused lähendavad konstanti b, siis nimetatakse viimast funktsiooni piirväärtuseks argumendi tõkestamatul lähenemisel väärtusele a,

ehk veidi teises, kuid samaväärses sõnastuses:

kui argumendi x tõkestamatul lähenemisel arvule a funktsioon f(x) tõkestamatult läheneb arvule b, siis nimetatakse viimast funktsiooni piirväärtuseks argumendi tõkestamatul lähenemisel arvule a.

Sümbolist $\lim_{x \to a} f(x)$ rääkides ei öelnud me midagi selle kohta, missugusel viisil toimub argumendi lähenemine väärtusele a, näiteks kas x seejuures omandab ainult ratsionaalseid väärtusi või ainult irratsionaalseid väärtusi või mingeid valitud väärtusi koha $x = a$ vahetus läheduses. Nimetatud lisandi jätsime ära teadlikult: me räägime piirväärtusest $\lim_{x \to a} f(x)$ ainult siis, kui niisugune arv on olemas ja ta pole sõltuv sellest, missugusel viisil toimub argumendi lähenemine väärtusele a.

Võib juhtuda, et argumendi x lähenemisel teatavale kindlale väärtusele a funktsioon $f(x)$ tõkestamatult kasvab:

$$\text{kui } x \to a, \text{ siis } f(x) \to \infty.$$

Märkimisviisi ühtlustamise mõttes kirjutame ka siin

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty.$$

Kirjutis $x \to a$ tähendab, et argument oma teatavast muutumisjärgust peale jääb arvu a vahetusse lähedusse. Samal ajal funktsiooni $f(x)$ väärtused jäävad arvu b vahetusse lähedusse. Kui räägime funktsiooni piirväärtusest b argumendi

lähenemisel arvule a, keskendub meie huvi seega funktsiooni käitumisele argumendi muutumisel arvu a vahetus läheduses, mitte aga eriväärtusele, mille funktsioon omandab, kui argument peatub eriväärtusel a. Iga ütlus $f(x)\big|_{x=a}$ kohta kuulub funktsiooni $f(x)$ staatika valdkonda, iga ütlus $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ kohta aga funktsiooni $f(x)$ dünaamika valdkonda. Sümbol $f(x)\big|_{x=a}$ märgib hetkelist väärtust, mis funktsioonil $f(x)$ on, kui x on võrdne arvuga a, sümbol $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ seevastu iseloomustab funktsiooni $f(x)$ käitumist, kui x läheneb arvule a.

Funktsioonide piirväärtuste leidmise näiteid

Lihtsa ehitusega funktsiooni piirväärtust saab otseselt määrata funktsiooni avaldisest, kui selles argumenti lasta muutuda etteantud viisil. Sageli leitakse funktsiooni piirväärtus funktsiooni avaldist otstarbekalt teisendades.

Näide 1. Olgu

$$f(x) = \frac{3x+7}{8x-5}.$$

Arvutame

$$\lim_{x\to 8} f(x).$$

Kui x läheneb arvule 8, siis $3x \to 24$, $3x+7 \to 31$, $8x \to 64$, $8x-5 \to 59$, seega

$$\text{kui } x \to 8, \text{ siis } \frac{3x+7}{8x-5} \to \frac{31}{59}$$

ehk

$$\lim_{x\to 8} \frac{3x+7}{8x-5} = \frac{31}{59}.$$

Asetades väärtuse $x=8$ funktsiooni $f(x)$ avaldisse, leiame, et

$$f(x)\Big|_{x=8} = \frac{3\cdot 8+7}{8\cdot 8-5} = \frac{31}{59}.$$

See tähendab, et antud juhul

$$f(x)\Big|_{x=8} = \lim_{x\to 8} f(x).$$

Näide 2. Olgu

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12}.$$

Leiame $f(x)\Big|_{x=3}$ ja $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Asetades argumendi väärtuse funktsiooni avaldisse, saame

$$f(x)\Big|_{x=3} = \frac{3^2 - 2 \cdot 3 - 3}{3^2 + 3 - 12} = \frac{0}{0}.$$

Sümbolil $\frac{0}{0}$ ei ole mõtet, seega pole $f(x)\Big|_{x=3}$ määratav. Teiste sõnadega, argumendi väärtusel $x = 3$ pole funktsioonil väärtust: $f(x)\Big|_{x=3}$ pole olemas.

Argumendi lähenemisel arvule 3 läheneb nii lugeja kui ka nimetaja tõkestamatult nullile ja pole otsekohe näha, kuidas muutub nende jagatis. Selle selgitamiseks teisendame uuritavat murdu. Lahutades lugeja ja nimetaja tegureiks, saame

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + x - 12} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+4)(x-3)}.$$

Argumendi x lähenemisel arvule 3 on x arvust 3 erinev ja vahe $x - 3 \neq 0$; seepärast võime vaadeldavat murdu taandada teguriga $x - 3$ ja kõigi arvu 3 lähendavate argumendi väärtuste puhul asendada funktsiooni $f(x)$ temaga identselt võrdse funktsiooniga $\varphi(x) = \frac{x+1}{x+4}$. Seega

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \varphi(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x+1}{x+4}.$$

Argumendi x lähenemisel arvule 3 läheneb $x + 1$ arvule 4, $x + 4$ arvule 7 ja murd $\frac{x+1}{x+4}$ arvule $\frac{4}{7}$. Seega

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \frac{4}{7}.$$

Rõhutame veel kord, et kõigil arvust 3 erinevatel argumendi väärtustel $f(x) \equiv \varphi(x)$. Väärtusel $x = 3$ aga on mõlema funktsiooni olemus täiesti erinev: väärtusel $x = 3$ on $\varphi(x) = \frac{4}{7}$, kuna $f(x)$ pole üldse määratav. See erinevus aga ei takista meid kirjutamast, et $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \varphi(x)$, sest kõnesoleva piirväärtuse

küsimuses ei huvita meid üldse argumendi väärtus $x=3$, vaid ainult teda lähendavad väärtused. Märgime, et antud juhul pole arvu $f(x)\Big|_{x=3}$ olemas, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ aga on olemas, olles võrdne murruga $\frac{4}{7}$.

Näide 3. Olgu

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Leiame $f(x)\Big|_{x=0}$ ja $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Asetades funktsiooni $f(x)$ avaldisse x asemele nulli, näeme, et $f(x)$ omandab kuju $\frac{0}{0}$. Seega argumendi väärtusel $x=0$ pole funktsioon $f(x)$ määratav ehk, teisiti, väärtust $f(x)\Big|_{x=0}$ pole olemas.

Et $x\to 0$ puhul nii lugeja kui ka nimetaja läheneb tõkestamatult nullile, siis pole otsekohe näha, millele läheneb $f(x)$. Küsimuse selgitamiseks teisendame $f(x)$ avaldist. Vabanedes irratsionaalsusest lugejas, saame

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=\frac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)}.$$

Kõigi nullist erinevate argumendi väärtuste puhul võib saadud murdu taandada. See viib funktsioonile

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}+1},$$

kusjuures kõigi nullist erinevate argumendi väärtuste puhul $f(x)\equiv\varphi(x)$ ja $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ otsimise protsessis võib funktsiooni $f(x)$ asendada funktsiooniga $\varphi(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Kui $x\to 0$, siis $1+x\to 1$, $\sqrt{1+x}\to 1$ ja $\sqrt{1+x}+1\to 2$, nii et

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}.$$

Niisiis väärtust $f(x)\Big|_{x=0}$ pole olemas; $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$.

Viimase kahe näite varal õpitut kokku võttes võime anda järgmise juhise:

kui oma avaldisega antud funktsioon $f(x)$ pole kohal $x = a$ määratav, siis piirväärtuse $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ leidmiseks teisendame antud avaldist ja asendame uuritava funktsiooni $f(x)$ niisuguse funktsiooniga $\varphi(x)$, et kõigil arvust a erinevatel argumendi väärtustel $f(x) \equiv \varphi(x)$ ja $\varphi(x)$ on ka kohal $x = a$ määratav.

Märgime, et see juhis ei tarvitse kehtida kõigil esineda võivatel juhtudel.

Märkus. Rõhutame veel kord, et sümbolid $f(x)\Big|_{x=a}$ ja $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ kujutavad kahte oma loomuselt täiesti erinevat mõistet. Kui argumenti x tõlgendaksime ajana, siis sümbol $f(x)\Big|_{x=a}$ kujutaks midagi hetkel $x = a$ olevat. See olev pole seotud mingi kindla eelkäiguga, tal ei tarvitse üldse mingit eelkäiku olla, tal ei tarvitse ka mingit järelmängu olla: võib ju funktsiooni $f(x)$ määramispiirkond koosneda näiteks ühestainsast argumendi väärtusest $x = a$. Seevastu sümbol $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ märgib midagi nähtuse käigus saabuvat. See saabuv on mõeldav ainult ühenduses oma eelkäiguga ja on selle eelkäigu poolt määratud. Mõiste, mida märgime sümboliga

$$\lim_{x \to a} f(x),$$

on oma olemuselt dialektiline mõiste.

Kõrgema matemaatika mõtteviisi dialektiline loomus

Eespool käsitletu keskseteks mõisteteks on muutuva suuruse ja muutuvate suuruste funktsionaalse sõltuvuse mõisted. Nende mõistete loomisega XVII sajandil algas matemaatika ajaloo «uusaeg», algas «kõrgema matemaatika ajastu». Seda ajastut iseloomustab matemaatikas aastasadu püsinud metafüüsilise mõtteviisi järkjärguline asendamine dialektilise mõtteviisiga. Jõudes oma arenemises teistest teadustest palju ette, võis matemaatika enne kui teised teadused asuda dialektilisele teele, näidata selle erakordset viljakust ja anda oma saavutuste varasalvest laialdast ainet metafüüsilise ja dialektilise käsitlusviisi vahekorra ja eri-

nevuse mõistmiseks. F. Engels ütleb: «Matemaatika ise astub muutuvate suuruste käsitlusega dialektilisele alale, ning on iseloomulik, et selle edusammu matemaatikas teostas dialektiline filosoof Descartes. Dialektilise mõtlemise suhe metafüüsilise mõtlemisega on üldse niisugune, nagu seda on muutuvate suuruste matemaatika suhe konstantsete suuruste matemaatikaga.» *

Suuruse muutumine, suuruse tõkestamatu kasvamine, suuruse tõkestamatu kahanemine, argumendi ja funktsiooni vaheline seos, funktsiooni piirväärtus — kõik need kuuluvad mõistete hulka, mida tõi matemaatikasse dialektiline mõtteviis, kuigi pikka aega kasutati seal seda mõtteviisi stiihiliselt. Selle mõtteviisi teadlik ja järjekindel arendamine ja tema kasutuselevõtmise vajaduse põhjendamine kõigil inimese mõttetegevuse aladel on proletariaadi suurte õpetajate Karl Marxi ja Friedrich Engelsi teeneks. Revolutsioonilises praktikas kasutas dialektilist mõtteviisi teadlikult ja järjekindlalt Vladimir Iljitš Lenin, kes arendas seda mõtteviisi teoreetiliselt edasi ja rakendas seda uue, nõukogude ühiskonna loomisel. Sellele mõtteviisile võlgneb matemaatika oma saavutused viimase 300 aasta jooksul. Neile omakorda võlgneme maailma veel tunnetamata osade piiri nihutamise maakeralt miljonite valgusaastate kaugusele ühelt poolt ja liivateralt aatomituuma sügavustesse teiselt poolt. Ja dialektilise mõtteviisi lasteks on ka kõik viimase saja aasta tehnika suursaavutused.

§ 71. FUNKTSIOONI PIDEVUS

Igapäevases kõnekeeles on tuntud ütlused, nagu «elektrienergia toodangu hüppeline kasvamine», «katkematu sündmuste ahelik», «pidevalt töötav seadeldis» jne. Me arvame enam-vähem selge olevat, mida need sõnad tähendavad. Ütlused aga, nagu «funktsioon katkeb», «funktsiooni väärtuse hüpe», «funktsioon on pidev» jt. haaravad matemaatilisi mõisteid ja vajavad seetõttu täpset piiritlemist. Asudes selle ülesande lahendamisele, peatume eelkõige lineaarfunktsiooni juures.

---

* F. Engels, Anti-Dühring, Tallinn, 1954, lk. 108.

Lineaarfunktsiooni pidevus

Vaatleme lineaarfunktsiooni

$$f(x) = mx + n.$$

See funktsioon on määratud argumendi igal väärtusel, nii et ta määramispiirkond on

$$-\infty < x < +\infty.$$

Lineaarfunktsiooni graafiliseks vasteks on sirgjoon algordinaadiga n ja tõusuga m. Sirge joonestatakse pliiatsi teraviku katkematul libisemisel piki joonlauda, nii et sirge on katkematu ehk pidev joon. Selgitame selles sõnas peituva matemaatilise mõtte.

Olgu a argumendi mingi väärtus. Funktsiooni vastav väärtus on siis

$$f(a) = ma + n.$$

Teiselt poolt, kui $x \to a$, siis $mx \to ma$ ja $mx + n \to ma + n$ ehk

$$\lim_{x \to a} f(x) = ma + n.$$

Niisiis antud juhul on väärtus $f(a)$ olemas ja see väärtus on võrdne piirväärtusega:

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x).$$

See võrdus sisaldab kolm tingimust:

1° Funktsioonil $f(x)$ on olemas kindel väärtus argumendi väärtusel $x = a$.

2° Funktsioonil $f(x)$ on olemas kindel piirväärtus argumendi lähenemisel väärtusele a.

3° Funktsiooni $f(x)$ väärtus, kui $x = a$, on võrdne piirväärtusega, millele funktsioon läheneb, kui argument läheneb väärtusele a.

Kui loetletud kolm tingimust on täidetud, siis ütleme, et funktsioon on pidev argumendi väärtusel a. Et väärtus a oli võetud vabalt, siis järeldame, et

lineaarfunktsioon on pidev igal argumendi väärtusel.

Funktsiooni katkemisviise

Et eespool toodud kolm tingimust pole igal juhul täidetud, selles veendume järgmiste lihtsate näidete varal.

Näide 1. Olgu

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}.$$

Leiame $f(a)$ ja $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Asetades $f(x)$ avaldisse x asemele a, näeme, et $f(a) = \frac{0}{0}$. Järelikult kui $x = a$, siis funktsioonil $f(x)$ pole väärtust. Küll aga on olemas funktsiooni piirväärtus argumendi lähenemisel arvule a: on olemas arv

$$\lim_{x \to a} f(x).$$

Tõepoolest, lahutades lugeja tegureiks, näeme, et

$$f(x) = \frac{(x + a)(x - a)}{x - a}.$$

Argumendi x lähenemisel arvule a on $x \neq a$ ja $x - a \neq 0$. Seega võime vaadeldavat murdu taandada vahega $x - a$. Saame avaldise

$$\varphi(x) = x + a.$$

Kõigil arvust a erinevatel argumendi väärtustel $f(x) \equiv \varphi(x)$. Seega

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} (x + a) = a + a = 2a.$$

Niisiis: väärtust $f(a)$ pole olemas; küll aga on olemas arvuga $2a$ võrdne piirväärtus $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Tõlgendame öeldut geomeetriliselt. Funktsiooni $y = \varphi(x)$ käigujooneks on sirge tõusuga 1 ja algordinaadiga a. Kõikjal, kus $x \neq a$, langeb funktsiooni $y = f(x)$ graafik selle sirgega ühte. Ainult punktis $x = a$ on eriolukord: kui sirgel $y = \varphi(x)$ on ka abstsissi $x = a$ puhul olemas ordinaat $y = 2a$, siis joonel $y = f(x)$ sel kohal ordinaati pole ega ole ka punkti $P(a; 2a)$; kohal $x = a$ joon $y = f(x)$ katkeb (joon. 204).

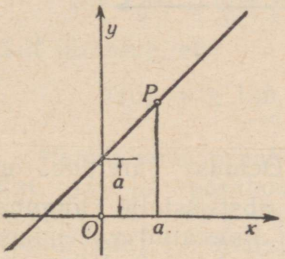
Näide 2. Olgu

$$f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

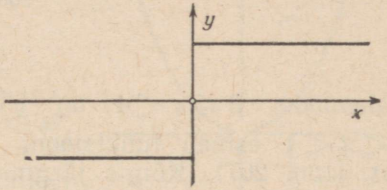
Funktsiooni avaldisest näeme, et

kui $x > 0$, siis $|x| = x$ ja $f(x) = +1$;
kui $x = 0$, siis $|x| = 0$ ja $f(x)$ on määramatu;
kui $x < 0$, siis $|x| = -x$ ja $f(x) = -1$.

Seega väärtust $f(0)$ pole olemas. Kui x läheneb nullile positiivselt poolelt, siis on $f(x)$ kogu aeg $+1$; kui x läheneb nullile negatiivselt poolelt, siis on $f(x)$ kogu aeg -1. Seega argumendi x lähenemisel väärtusele 0 ülaltpoolt võiks funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks olla ainult $+1$, argumendi lähenemisel väärtusele 0 altpoolt aga võiks funktsiooni $f(x)$ piirväärtuseks olla ainult -1. Seega puudub funktsioonil $f(x)$ piirväärtus, mis ei sõltu sellest, missugusel viisil toimub argumendi lähenemine nullile. Niisiis: uuritava funktsiooni puhul pole väärtust $f(0)$ olemas; ka piirväärtust $\lim_{x \to 0} f(x)$ pole olemas.



Joon. 204.



Joon. 205.

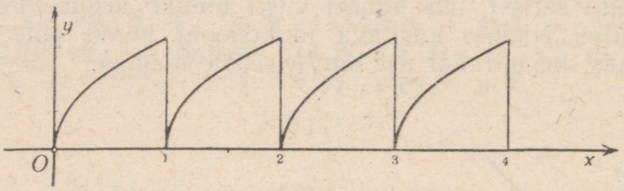
Funktsiooni graafik (joon. 205) koosneb kahest poolsirgest, mis on rööbikud x-teljega ja asetsevad temast kaugusel $+1$ ja -1. Kummalgi poolsirgel pole aga alguspunkti: puudub lõikepunkt ordinaatteljega. Väärtusel $x = 0$ funktsiooni käigujoon katkeb; argumendi läbiminekul väärtusest 0 teeb funktsiooni väärtus hüppe väärtuselt -1 väärtusele $+1$; hüppe suuruseks on 2 ühikut.

Näide 3. Olgu $y = \sqrt{x - T(x)}$, kus T tähendab arvu x täisarvulist osa. Siis on iga täisarvulise n puhul

$$(x + n) - T(x + n) = x - T(x)$$

ning abstsissidele x ja $x + n$ vastavad ühed ja samad ordinaadid. See näitab, et funktsiooni y graafik koosneb kõigis vahemikes kahe järjestikuse täisarvu vahel kongruentsetest kaartest. Vahemikus $0 \leqslant x \leqslant 1$ on $T(x) = 0$. Seega $y = \sqrt{x}$. Selle funktsiooni graafikuks on parabool parameetriga $p = \frac{1}{2}$. Vaadeldava funktsiooni graafik on esitatud joonisel 206. Et argumendi kasvamisel ühe ühiku võrra saab funktsioon jälle oma endise väärtuse, siis y on perioodiline funktsioon perioodiga 1.

Näide 4. Olgu $y = \frac{T(x)}{x}$, kus $T(x)$ tähendab jälle arvu x täisarvulist osa. Vahemikus $0 < x < 1$ on sel puhul $T(x) = 0$ ja seega ka $y = 0$. Vahemikus $1 \leqslant x < 2$ on $T(x) = 1$ ja funktsioon $y = \frac{1}{x}$. Vahemikus $2 \leqslant x < 3$ on $T(x) = 2$ ja seega $y = \frac{2}{x}$.

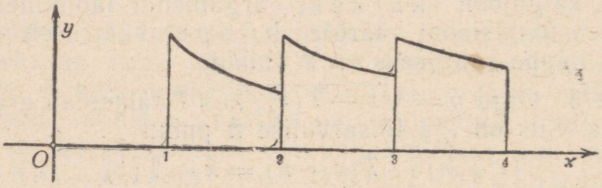


Joon. 206.

Vahemikus $3 \leqslant x < 4$ on $y = \frac{3}{x}$ jne. Öeldust järeldub, et $0 < x < 1$ esineb funktsiooni y graafik abstsisstelje lõiguna (vt. joon. 207). Kõigis järgmistes eespool nimetatud vahemikes on funktsiooni y graafikuks risthüperboolide kaared. Märgime, et funktsioon y ei ole perioodiline.

Näide 5. Vaatleme geomeetrilist progressiooni

$$x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots$$



Joon. 207.

Nagu näeme, on see progressioon kahanev, sest tegur $1 : (1 + x^2)$ on < 1 suuruse x iga nullist erineva väärtuse puhul. Defineerime funktsiooni $f(x)$ selle progressiooni summana. Kui $x \neq 0$, saame

$$f(x) = x^2\left[1 + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \ldots\right] = x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} =$$

$$= x^2 \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + x^2.$$

Seega, kui $x \neq 0$, siis $f(x) = 1 + x^2$.

Laiendame funktsiooni $f(x)$ definitsiooni ka juhule, kus $x = 0$. Sel puhul geomeetrilise progressiooni summa asendub summaga $0 + 0 + 0 + \ldots$, mis on võrdne nulliga. Niisiis:

$$f(0) = 0.$$

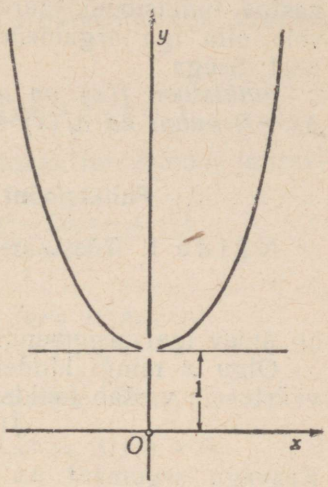
Kokku võttes näeme, et

kui $x = 0$, siis $f(x) = 0$;
kui $x \neq 0$, siis $f(x) = 1 + x^2$.

Siit järeldub, et

$$f(0) = 0; \lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Funktsiooni graafik koosneb punktist O ja paraboolist $y = 1 + x^2$, millel puudub haripunkt (joon. 208). Funktsioon $f(x)$ katkeb punktis $x = 0$. Kui argument kasvades läbib nulli, siis funktsioon hüppab arvust 1 suurematelt väärtustelt väärtusele null ja sealt jälle arvust 1 suurematele väärtustele, omandamata väärtust 1.



Joon. 208.

Funktsiooni pidevuse tunnus

Lineaarfunktsiooni pidevuse küsimust uurides nägime, et funktsiooni $f(x)$ pidevuse puhul peavad olema täidetud kolm nõuet:

on olemas väärtus $f(a)$;
on olemas piirväärtus $\lim_{x \to a} f(x)$;
$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Toodud näidetest selgub, et kui üksainuski nimetatud nõuetest pole täidetud, siis funktsioon katkeb. Et kolmas nõue saab olla täidetud ainult sel juhul, kui on täidetud esimesed kaks, siis

funktsioon $f(x)$ on kohal $x = a$ pidev, kui

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

See tähendab, et

$$x \to a \text{ puhul } f(x) \to f(a)$$

ehk

$$|x - a| \to 0 \text{ puhul } |f(x) - f(a)| \to 0.$$

Vahe $x - a$ on argumendi juurdekasv Δx, vahe $f(x) - f(a)$ on vastav funktsiooni juurdekasv $\Delta f(x)$. Argumendi väärtuseks a võib olla iga argumendi väärtus funktsiooni määramispiirkonnast. Seega

funktsioon $f(x)$ on argumendi x antud väärtusel pidev, kui $\Delta x \to 0$ puhul ka $\Delta f(x) \to 0$.

Funktsiooni pidevuse tunnuse rakendusi

N ä i d e 1. Tõestame, et funktsioon

$$f(x) = x^2 - 3x$$

on pidev igal argumendi väärtusel.

Olgu x mingi kindel argumendi väärtus; sellele argumendi väärtusele vastab funktsiooni väärtus

$$f(x) = x^2 - 3x.$$

Kasvagu argument Δx võrra. Siis on argumendi uus väärtus $x + \Delta x$ ja funktsiooni uus väärtus

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x).$$

Argumendi juurdekasvule Δx vastab seega funktsiooni juurdekasv

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) =$$
$$= (x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (x^2 - 3x)$$

ehk

$$\Delta f(x) = (2x - 3 + \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Laseme nüüd juurdekasvul Δx tõkestamatult läheneda nullile. Siis esimene tegur läheneb arvule $2x - 3$, kogu korrutis aga läheneb nullile. Järelikult:

$$\text{kui } \Delta x \to 0, \text{ siis ka } \Delta f(x) \to 0.$$

Et x oli argumendi m i n g i väärtus, siis kehtib tulemus i g a väärtuse puhul; seega on uuritav funktsioon pidev kogu oma määramispiirkonnas $-\infty < x < +\infty$.

N ä i d e 2. Tõestame, et funktsioon

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

on pidev argumendi igal nullist erineval väärtusel.

Antud funktsioon on määratud argumendi iga väärtuse puhul, välja arvatud väärtus 0. Olgu x mingi kindel argumendi väärtus, mis erineb nullist. Sellele argumendi väärtusele vastab funktsiooni väärtus

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Kasvagu argument Δx võrra. Siis on argumendi uus väärtus $x + \Delta x$, funktsiooni uus väärtus aga

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{(x + \Delta x)^2}$$

ja seega argumendi juurdekasvule Δx vastav funktsiooni juurdekasv

$$\Delta f(x) = \frac{1}{(x + \Delta x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - x^2 - 2x\Delta x - (\Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2 x^2}$$

ehk

$$\Delta f(x) = -\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2 x^2} = -\frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{(x + \Delta x)^2 x^2}.$$

Laseme nüüd juurdekasvul Δx läheneda nullile. Siis

$$(2x + \Delta x)\Delta x \to 0, \quad (x + \Delta x)^2 x^2 \to x^4 \text{ ja } \Delta f(x) \to 0.$$

Järelikult:

kui $\Delta x \to 0$, siis ka $\Delta f(x) \to 0$.

Et x oli argumendi m i n g i nullist erinev väärtus, siis kehtib tulemus x i g a niisuguse väärtuse puhul; seega on uuritav funktsioon pidev argumendi iga väärtuse puhul, mis erineb nullist.

Argumendi väärtusel 0 puudub funktsioonil $f(x)$ väärtus. Argumendi lähenemisel nullile kasvab funktsioon tõkestamatult:

kui $x \to 0$ kahanedes, siis $f(x) \to +\infty$;
kui $x \to 0$ kasvades, siis samuti $f(x) \to +\infty$.

Antud funktsiooni graafik (vt. joon. 174) katkeb abstsissi väärtusel $x = 0$. Funktsiooni graafik koosneb kahest harust, mis y-telje vahetus läheduses tõusevad üle iga määra; funktsioon $f(x)$ katkeb argumendi väärtusel $x = 0$ nii, et argumendi lähenemisel väärtusele 0 kas altpoolt või ülaltpoolt kasvab funktsioon $f(x)$ ise ikka p o s i t i i v s e s s u u n a s üle iga määra: kui $x \to 0$, siis $f(x) \to +\infty$ sõltumatult argumendi nullile lähenemise viisist.

Teistsugust pilti näeme funktsiooni $g(x) = \frac{1}{x}$ puhul. Ka see funktsioon katkeb väärtusel $x = 0$, sest argumendi väärtusel 0 pole funktsioon $g(x)$ määratav. Siin aga argumendi lähenemisel väärtusele 0 altpoolt funktsioon $g(x) \to -\infty$, seevastu argumendi lähenemisel väärtusele 0 ülaltpoolt funktsioon $g(x) \to +\infty$.

Seega funktsiooni $g(x)$ katkemisel kohal $x = 0$ funktsiooni $g(x)$ väärtus «hüppab miinus lõpmatusest pluss lõpmatusse». Näitlikult illustreerib funktsiooni $g(x) = \frac{1}{x}$ käitumist selle funktsiooni graafik — risthüperbool (vt. joon. 173).

Märgime, et viimastena kirjeldatud kaks funktsiooni katkemisviisi esinevad eriti sageli geomeetrilistes ja füüsikalistes probleemides.

Pidevate funktsioonide tähtsamaid omadusi

Pidevatel funktsioonidel on rida tähtsaid omadusi. Need omadused kuuluvad lahutamatu osana kujutelma juurde, mida seome pideva funktsiooni mõistega. Nimetame siin k o l m e niisugust omadust.

1° *Lõigul pideva funktsiooni väärtused on tõkestatud.*

See tähendab, et argumendi kulgemisel lõigu ühest otspunktist lõigu teise otspunktini (see kaasa arvatud) ei kasva funktsiooni absoluutväärtus üle iga määra: on võimalik näidata tõket, mida need väärtused ei ületa. Katkevatel funktsioonidel v õ i b see ka nii olla, nagu juhul $f(x) = \frac{x}{|x|}$ (joon. 205), e i t a r v i t s e aga nii olla, nagu seda näeme juhtudel $f(x) = \frac{1}{x}$ (joon. 173) ja $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (joon. 174).

2° *Kui $f(x)$ on oma argumendi pidev funktsioon ja omandab lõigu $[a, b]$ otspunktides väärtused $f(a)$ ja $f(b)$, siis argumendi läbides kõik väärtused $a \leqslant x \leqslant b$ omandab funktsioon $f(x)$ k õ i k väärtused $f(a)$ ja $f(b)$ vahel.*

Tõepoolest, kui anname ette mingi väärtuse C arvude $f(a)$ ja $f(b)$ vahelt (lugeja tehku ise teksti selgitav skits), siis sirge $y = C$ lõikab vähemalt üks kord joont $y = f(x)$. Lõikepunkti abstsiss c on argumendi väärtus, mille puhul $f(x) = C$.

Praegu kirjeldatud omadusest järeldub erijuhuna lause:

kui $f(x)$ on lõigul $[a, b]$ pidev funktsioon ja $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, siis leidub lõigul $[a, b]$ vähemalt üks koht c, kus $f(c) = 0$.

Lause kehtivuses veendume, heites pilgu tehtud skitsile.

Märgime, et katkevate funktsioonide puhul kõnesolev lause ei kehti, nagu näitavad funktsioonid

$$y = \frac{x}{|x|}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x^2}$$

(joonised 205, 173 ja 174; neil joonistel kujutatud funktsioonide

käigujooned näitavad, et ükski kõnesolevatest funktsioonidest ei omanda väärtust 0).

3° *Lõigul pidev funktsioon omandab vähemalt ühes lõigu punktis oma väikseima ja ühes lõigu punktis oma suurima väärtuse.* Väite kehtivuses veendume, vaadeldes pidevate funktsioonide graafikuid.

Märgime, et vahemikus (a, b) pidev funktsioon ei tarvitse selles vahemikus omandada ei oma suurimat ega väikseimat väärtust. Näitena võib tuua funktsiooni $f(x) = x$. Lõigul $[a, b]$ on selle funktsiooni väikseim väärtus $f(a) = a$, suurim väärtus vastavalt $f(b) = b$. Vahemikus (a, b) ei omanda funktsioon $f(x)$ kummatki neist kahest väärtusest, kuigi jõuab neile kuitahes lähedale.

Eespool nimetatud lauseid on võimalik rangelt tõestada, tuginemata joonisele. Need tõestused jätame siinkohal ära ja loeme toodud laused silmanähtavalt kehtivateks.

Teoreeme pidevate funktsioonide kohta

Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ kaks argumendi väärtusel $x = a$ pidevat funktsiooni. Siis on ka

$$f(x) + g(x),\quad f(x) - g(x) \quad \text{ja} \quad f(x) \cdot g(x)$$

argumendi väärtusel $x = a$ pidevad funktsioonid. Ka jagatis

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

on pidev funktsioon, kuid seda vaid tingimusel, et $g(a) \neq 0$. Kõigi nende teoreemide tõestused järelduvad vahetult funktsiooni pidevuse tunnusest ja varem tõestatud lausetest piirväärtuste kohta. Tõestame näiteks, et kahe punktis $x = a$ pideva funktsiooni korrutis on pidev. Tõepoolest, kui $f(x)$ ja $g(x)$ on punktis $x = a$ pidevad, siis

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a).$$

Seega

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = f(a) \cdot g(a).$$

Korrutise piirväärtuse kohta käiva lause järgi seisab vasakul poolel

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)],$$

nii et

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = f(a) \cdot g(a).$$

Sellega aga ongi tõestatud korrutise $f(x) \cdot g(x)$ pidevus.

Veidi raskem on tõestada teoreeme, et funktsiooni $f(x)$ pidevuse puhul punktis $x = a$ on sealsamas pidevad ka funktsioonid $[f(x)]^n$, $\sqrt{f(x)}$ [tingimusel, et $f(x) > 0$], $\sqrt[3]{f(x)}$, $\log f(x)$ [tingimusel, et $f(x) > 0$] jne. Nendel tõestustel me ei peatu.

Rakendusi.

1° Funktsioonid $f(x) = x$ ja $g(x) = 2x - 3$ on kõikjal pidevad. Seega on kõikjal pidevad ka funktsioonid $u(x) = x(2x - 3)$, $v(x) = (2x - 3)^2$ ja $w(x) = \sqrt{2x - 3}$ (viimane tingimusel, et $x > \frac{3}{2}$).

2° Funktsioonid $x \cdot x = x^2$, $x \cdot x \cdot x = x^3$ jne. on pidevad. Siis on pidevad ka funktsioonid $u(x) = x^2 - 3x + 10$, $v(x) = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$.

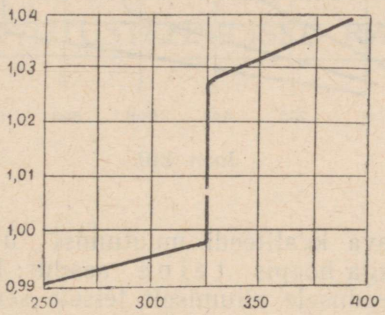
Trigonomeetriliste ja mõnede teiste funktsioonide pidevuse küsimuse lahendame hiljem.

Pidevus ja katkevus loodusnähtuste käigus

Küsimusega, kas loodusnähtused kulgevad pidevalt, sujuvalt või katkevalt, hüppeliselt, on filosoofid ja teadlased tegelnud kreeka klassikalisest ajastust peale. Üks vanemaid siiakuuluvaid probleeme on see, kas mateeria ise, millest koosnevad kõik kehad, on pideva või katkeva struktuuriga, kas aine ehitus on, piltlikult öeldes, sõmera kohupiima või sulatatud juustu struktuuri sarnane? Kord on valitsenud arvamus, et aine täidab keha ruumala pidevalt, kord jälle, et aine koosneb jagamatutest osakestest, aatomitest, mis võtavad keha näivast ruumalast enda alla vaid väga väikese osa, nii et keha ruumala on vaid näivalt täidetud ainega, tegelikult aga on ta peale väga väikese osa «tühjust täis»: aine on diskreetse struktuuriga. Pidevuse-katkevuse küsimus seati edasi ka liikumise kohta ja kandus siit üle igale looduses toimuvale protsessile. Võtame näiteks valguse levimise. Newton arvas, et valgus levib valguseosakeste vooluna, nagu liiguvad liivaterad liivatuisus või lumehelbed lumetormis. Huygens seevastu põhjendas veenvalt, et valgus on pidevalt kulgev võnkumisnähtus ruumi pidevalt täitvas eetris. Või võtame elektrivoolu: kas elekter voolab juhtmes pidevalt, vedelikutaoliselt, või on siin tegemist elektriosakeste «pilve» liikumisega juhtmes nagu haavlite liikumisega püssitorus? Tänapäeva füüsika andmeil koosneb aine aatomitest, elekter elektriosakestest — elektronidest — ja valgus valguseosakestest — footonitest. Niisiis on kõik aine lii-

gid, samuti elekter ja valgus, oma struktuurilt mitte kontiinuumid, vaid diskreetsete osakeste kogumid.

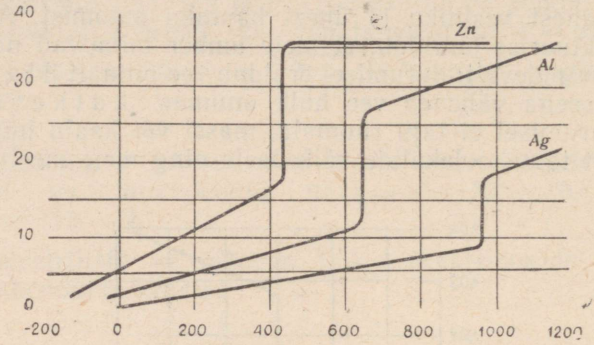
Üheliigilised aatomid ühinevad peaaegu alati lihtaine molekulideks; hapniku molekul näiteks sisaldab 2 hapniku aatomit, osooni molekul 3 hapniku aatomit. Eriliigilised aatomid seostuvad keemiliste ühendite molekulideks: vee molekul näiteks koosneb kahest vesiniku ja ühest hapniku aatomist. Aine molekulaarstruktuurist järeldub, et meie ümber toimuvad nähtused ei saa kulgeda pidevalt: aurumisel eraldub vee pinnalt ikka 1, 2, 3, ... molekuli; seega väheneb vee hulk anumas katkevalt. Kui me vee aurumisel ei taju ruumala, massi või kaalu hüppeid, siis seda ainult tänu molekulide väiksusele ning meie meelte ja tava-



Joon. 209.

liste mõõduriistade vähesele tundlikkusele. Tänapäeva mõõtmistehnika on aga loonud vahendeid, mille abil saab jälgida paljusid «elementaarprotsesse», kus mängus on vaid üksik molekul, aatom, elektron või footon. Leibniz pidas võimalikuks väita, et «loodus hüppeid ei tee». Iga vaadeldud elementaarprotsess kinnitab vastupidist: kogu loodussündmustik kulgeb katkevalt. Kui me seda tavaliselt ei taju, siis vaid selle tõttu, et massi, laengu, valgustugevuse jne. hüpete suurused asetsevad kõik kaugel allpool meie meelte tundlikkuse piire. Üeldu tõttu töötatakse loodusteadustes ja tehnikateadustes peaaegu eranditult pidevate funktsioonidega. Leidub aga külluses ka niisuguseid nähtusi, mille kulgemises esineb silmanähtava suurusega hüppeid. Näitena olgu toodud plii ruumala muutumine sulamistemperatuuril (joon. 209; horisontaalteljel temperatuur Celsiuse kraadides, vertikaalteljel plii ruumala kuupsentimeetrites) ja tsingi, alumiiniumi ning hõbeda elektritakistuse muutumine sulamistemperatuuril (joon. 210; horisontaalteljel temperatuur Celsiuse kraadides, vertikaalteljel

1-kuupsentimeetrise metalliploki takistus miljondikes oomides). Hüppeliselt muutub ka näiteks tiitritava lahuse elektrijuhtivus üleminekul neutralisatsioonipunktist ja vee erisoojus üleminekul keemispunktist. Keha ruumala, metalli elektritakistus, lahuse elektrijuhtivus ja aine erisoojus on kõik teatavad omadused ehk kvaliteedid. Nagu nähtub joonistelt 209 ja 210, valitseb argumendi piirkonnas allpool



Joon. 210.

hüppekohta uuritava kvaliteedi muutumist üks seadus, ülalpool hüppekohta aga hoopis teine seadus: hüppekohal toimub üleminek ühele seadusele allumiselt teisele seadusele allumisele. See näitab, et nähtuskäigus toimub sel kohal kvaliteedi sügav, põhiline muutumine: sel puhul räägime «kvalitatiivsest hüppest» nähtuskäigus. Niisiis:

hüppekoha esinemine nähtuskäigu graafikus on kvalitatiivse hüppe tunnuseks.

KUUES OSA

FUNKTSIOONI TULETIS. TULETISE GEOMEETRILISED JA ARVUTUSTEHNILISED RAKENDUSED

PEATÜKK XX

FUNKTSIOONI TULETIS

Tähtsaimaks arvuliseks näitajaks, mida vajame nähtuskäigu kirjeldamisel, on *nähtuskäigu kiirus*. See näitaja tuletatakse nähtuskäiku määravast seadusest matemaatilise operatsiooni abil, mis kannab *diferentseerimise* nimetust. Sellelesamale operatsioonile viib ka mõningate geomeetriliste probleemide lahendamine. Klassikaliseks sellealaseks näiteks on oma võrrandiga antud joone *puutuja* võrrandi leidmine. Diferentseerimise operatsiooni loomine Leibniz'i ja ligikaudu samaaegselt Newtoni poolt kuulub kõige suuremate saavutuste hulka matemaatika ajaloos. Sellega pandi alus *kõrgemale matemaatikale*. Diferentseerimise operatsioonile jõudis Leibniz lähtudes joone puutuja mõiste ja konstruktsiooni probleemist, Newton aga lähtudes liikumise kiiruse mõiste selgitamise ja selle kiiruse arvutamise küsimusest. Nii üks kui teine neist diferentseerimise operatsioonile viivatest teedest leiab üksikasjalikku käsitlemist käesolevas ja mitmes järgmises peatükis.

§ 72. KÕVERA PUUTUJA. FUNKTSIOONI TULETIS

Kõvera puutuja definitsioon

Ringjoone puutujaks nimetatakse sirgjoont, millel on ringjoonega *üksainus* ühine punkt (joon. 211). Seda puutuja definitsiooni ei saa aga üle kanda teiste kõverjoonte juhule. Joonistel 212, 213 ja 214 näeme sirget, millel on kõveraga küll üksainus ühine punkt, kuid mis sellest hoolimata ei ole kõvera puutujaks. Joonistel 215, 216 ja 217 näeme sirget, millel on kõveraga vastavalt kaks, kolm ja isegi kuitahes palju ühiseid punkte, kuid mis sellest hoolimata on kõvera puutujaks.

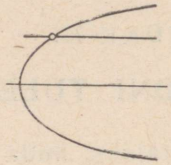
Et jõuda kõvera puutuja niisugusele definitsioonile, mis oleks kasutatav peale ringjoone ka teiste kõverate puhul, selleks arutleme järgmiselt.

Olgu antud mingi kõver ja olgu P üks selle kõvera punkt (joon. 218). Võtame kõveral punkti P naabruses teise punkti Q

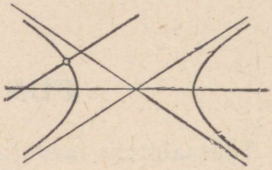
ja joonestame neid punkte läbiva lõikaja PQ. Kujutleme, et punkt Q kõverat mööda liikudes järjest läheneb punktile P. Seejuures pöördub lõikaja PQ ümber punkti P, üha enam lähenedes teatavale p i i r s i r g e l e PT; see piirsirge ongi kõvera puutujaks punktis P. Tuginedes sellele tähelepanekule, anname puutuja definitsiooni:



Joon. 211.

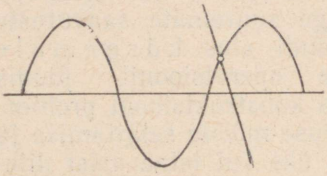


Joon. 212.

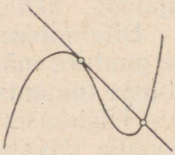


Joon. 213.

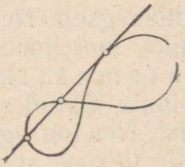
kõvera puutuja punktis P on piirsirge, millele kõvera lõikaja PQ tõkestamatult läheneb, kui teine lõikepunkt kõverat mööda ühes või teises suunas liikudes tõkestamatult läheneb esimesele.



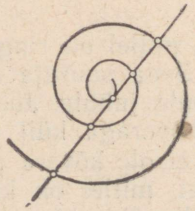
Joon. 214.



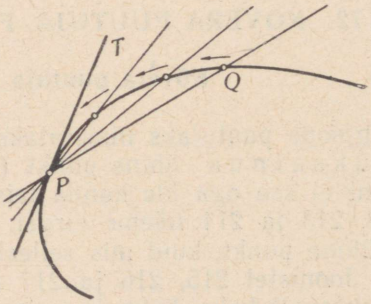
Joon. 215.



Joon. 216.



Joon. 217.

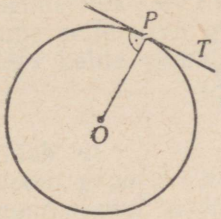


Joon. 218.

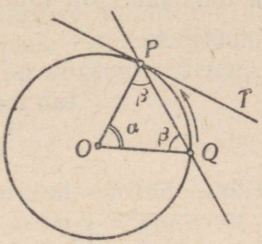
Näitame, et sellest kõverjoone puutuja definitsioonist järeldub erijuhuna elementaargeomeetriast tuntud ringjoone puutuja omadus: ringjoone puutuja on risti puutepunkti viiva raadiusega

(joon. 219). Selle ülesande lahendamiseks joonestame ringjoone, märgime sellel punkti P ning abipunkti Q ja ühendame nad ringjoone keskpunktiga (joon. 220). Võrdhaarsest kolmnurgast POQ saame siis, et nurk

$$\beta = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$



Joon. 219.



Joon. 220.

Punkti Q tõkestamatul lähenemisel ringjoont mööda punktile P läheneb kaar PQ nullile, seega ka nurk $\alpha \to 0$, nurk $\frac{\alpha}{2} \to 0$ ja nurk $\beta \to 90°$. Niisiis on ringjoone lõikaja PQ piirsirge PT risti raadiusega selle lõpp-punktis; järelikult on sel piirsirgel ringjoonega üksainus ühine punkt, nagu seda nõuab elementaargeomeetriast tuntud ringjoone puutuja definitsioon.

Märkus. Väärib märkimist, et mõningaid geomeetrilisi mõisteid, mida kasutame sageli ka oma igapäevases töös, ei saa defineerida liikumise mõistet kasutamata. Niisuguseks mõisteks on näiteks igaühele tuttav joone puutuja mõiste. Väidet kinnitavad puutuja definitsioonis esinevad sõnad «tõkestamatult läheneb». Seega on puutuja mõiste oma olemuselt dialektiline mõiste.

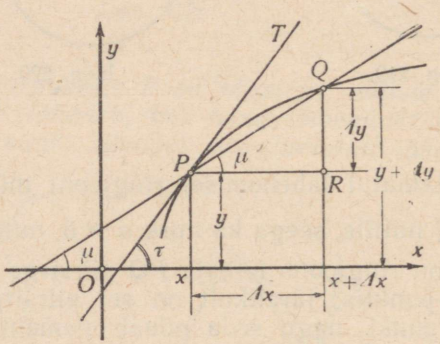
Kõvera puutuja tõus

Olgu mingi kõver antud oma võrrandiga $y = f(x)$ ja olgu $P(x, y)$ üks selle kõvera punkte (joon. 221). Võtame selle punkti naabruses teise punkti Q. Kasvagu kõvera punkti abstsiss ja ordinaat üleminekul punktilt P punktile Q vastavalt Δx ja Δy võrra. Siis on punkti Q koordinaadid $x + \Delta x$ ja $y + \Delta y$. Nagu näeme kolmnurgast PQR, on lõikaja PQ tõus

$$\tan \mu = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Puutuja PT on lõikaja PQ piirsirge, kui punkt Q piki kõverat tõkestamatult läheneb punktile P. Üheaegselt sellega läheneb abstsissi juurdekasv Δx tõkestamatult nullile. Niisiis: puutuja PT on lõikaja PQ piirsirge, kui $\Delta x \to 0$; seega: puutuja tõusunurk τ on lõikaja tõusunurga μ piirnurk, kui $\Delta x \to 0$; järelikult: puutuja tõus $\tan\tau$ on lõikaja tõusu $\tan\mu$ piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$, ehk puutuja tõus $\tan\tau$ on juurdekasvude suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$; sümbolites:

$$\tan\tau = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Joon. 221.

Funktsiooni tuletise definitsioon

Viimati kirjutatud piirväärtust nimetatakse funktsiooni y tuletiseks (argumendi x järgi, argumendi väärtusel x) ja tähistatakse sümboliga y'. Funktsiooni $f(x)$ tuletist tähistatakse vastavalt sümboliga $f'(x)$. Niisiis:

funktsiooni tuletis on piirväärtus, millele läheneb funktsiooni ja argumendi juurdekasvude suhe argumendi juurdekasvu tõkestamatul lähenemisel nullile.

Sümbolites:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tuletise tähistusviis y' ehk $f'(x)$ on pärit prantsuse matemaatikult Lagrange'ilt.

Nagu näeme, leitakse funktsiooni tuletis, lähtudes argumendi

ja funktsiooni juurdekasvudest, s. o. diferentsidest*. Sellele vastavalt nimetatakse funktsiooni tuletise leidmist funktsiooni diferentseerimiseks.

Tuletise geomeetriline vaste

Argumendi fikseeritud väärtuse puhul on $f'(x)$ teatav arv. Asume selle arvu geomeetrilisele tõlgendamisele.

Võrreldes kahte viimati kirjutatud võrdust, näeme, et

$$\tan \tau = y'.$$

See tähendab, et

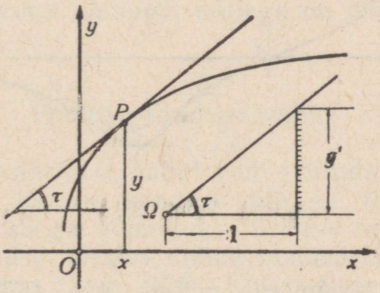
funktsiooni graafiku puutuja tõus on võrdne funktsiooni tuletisega (puutepunkti abstsissiga võrdsel argumendi väärtusel) ehk, teisiti sõnastatult,

funktsiooni tuletise geomeetriliseks vasteks on funktsiooni graafiku puutuja tõus (argumendiga võrdse abstsissiga puutepunktis).

Funktsiooni graafiku puutuja tõusu asemel räägime mõnikord ka lihtsalt funktsiooni graafiku tõusust.

Tuletise graafiline määramine

Kujutagu kõver joonisel 222 funktsiooni $y = f(x)$ käiku. Tuletise määramiseks argumendi väärtusel x püstitame abstsisslõigu x lõpust ordinaatlõigu ja tõmbame viimase lõpust (kui



Joon. 222.

puutepunktist) joone puutuja. Võtame edasi mingi punkti Ω — pooluse —, joonestame sellest poolusest rõhtlõigu pikkusega

* Lad. k. *differens* — vahe, erinevus.

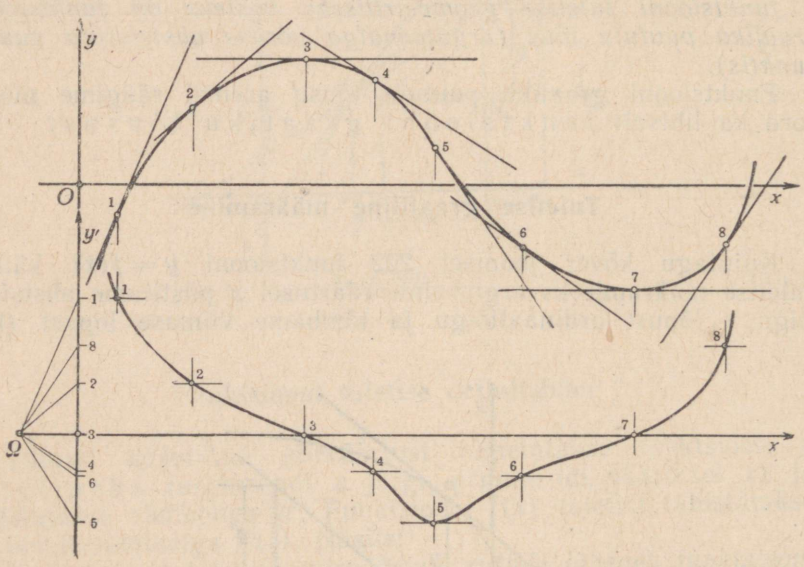
üks ühik ja selle lõigu lõpust püstsirge ning tõmbame poolusest Ω kiire rööbiti puutujaga. See kiir eraldab püstsirgel lõigu, mille pikkus on $\tan\tau$ ehk y'.

Tuletiskõvera joonestamine

Olgu antud mingi funktsiooni $y = f(x)$ graafik (joon. 223). Igale abstsissile x vastab graafikul oma punkt, sellele oma puutuja, oma puutuja tõus $\tan\tau$ ja seega oma y' väärtus. Järelikult on y' argumendi x funktsioon:

$$y' = f'(x).$$

Nimetame seda funktsiooni lühidalt tuletisfunktsiooniks ja tema käigujoont tuletiskõveraks.



Joon. 223.

Tuletiskõvera saamiseks valime uue teljestiku: uue x-telje paigutame rööbiti endise x-teljega, y'-telje aga y-telje pikendusele. Märgime uue x-telje negatiivsel poolel kaugusel 1 alguspunktist pooluse Ω tuletiste graafiliseks määramiseks. Võtame antud graafikul rea punkte 1, 2, 3, ..., tõmbame neis punktides puutujad ja leiame eespool kirjeldatud viisil vastavad tuletiste suurused. Kandes tuletislõigud neile vastavate abstsisside kohale, saame graafikul võetud punktide 1, 2, 3, ... all lõigud,

mis kujutavad neile punktidele vastavaid tuletisi. Ühendades nende lõikude lõpp-punktid kõveraga, saamegi tuletisfunktsiooni $y' = f'(x)$ graafiku.

Erinevate kujutusühikute juhtum

Sageli on otstarbekas kasutada x-telje ja y-telje sihis erinevaid kujutusühikuid. Olgu näiteks x-telje sihis kasutatud kujutusühikut l_x mm ja y-telje sihis kujutusühikut l_y mm. Siis

juurdekasvu Δx kujutiseks on lõik $l_x \cdot \Delta x$ mm;

„ Δy „ „ „ $l_y \cdot \Delta y$ mm;

juurdekasvude suhte $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kujutiseks on lõik $\frac{l_y}{l_x} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$ mm;

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ „ „ „ $\frac{l_y}{l_x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ mm;

teiste sõnadega

tuletise y' kujutiseks on lõik $\frac{l_y}{l_x} y'$ mm.

Seepärast:

kui telgedel on kasutatud erinevaid kujutusühikuid l_x ja l_y mm, siis tuletise arvulise väärtuse saamiseks tuleb tema kujutuslõiku mõõta ühikuga $l_y' = \frac{l_y}{l_x}$ mm.

Kui aga mõlemal teljel on kasutatud ühte ja sedasama kujutusühikut l, siis suhe $l_y : l_x$ on võrdne ühega ja tuletise kujutuslõiku tuleb mõõta sama ühikuga, millega on mõõdetud abstsissid ja ordinaadid.

Pooluse kauguse valik

Tuletise suurte väärtuste puhul võib juhtuda, et tuletise kujutuslõigud ulatuvad joonise pinnast üle ja tuletise graafiline kujutamine osutub seega võimatuks. Sellest raskusest on kerge üle saada, kui pooluse kaugus valida otstarbekalt. Olgu pooluse kaugus näiteks p mm (joon. 224). Kui pooluse kaugusel 1 ühik (l_x mm)

on tuletise y' kujutiseks lõik $\frac{l_y}{l_x} y'$ mm,

siis pooluse kaugusel p ühikut

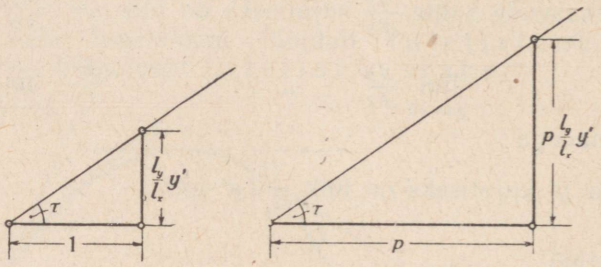
on tuletise y' kujutiseks lõik $p \frac{l_y}{l_x} y'$ mm.

Võttes p küllalt väikese, saame tuletise y' kujutuslõigu teha nii väikeseks, kui seda nõuavad joonise mõõtmed.

Ümberpöördult, kui tuletise y' väärtus on väike ja seetõttu tema kujutuslõigu konstrueerimine teeb raskusi, saab ikka pooluse kauguse p valida nii suure, et tuletise y' kujutuslõik tuleks parajas suuruses.

Kokku võttes näeme, et

kui telgedel on kasutatud erinevaid kujutusühikuid l_x ja l_y mm ja pooluse kaugus on p mm, siis tuletise arvulise väärtuse saamiseks tuleb tema kujutuslõiku mõõta ühikuga $p\frac{l_y}{l_x}$ mm.



Joon. 224.

Kui tuletise kujutuslõigu pikkus on a mm, siis tuletise arvuline väärtus on $a : p\frac{l_y}{l_x}$ ehk $a \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{l_x}{l_y}$.

§ 73. KÕVERA PUUTUJA JA KÕVERA NORMAALI VÕRRAND

Kõvera puutuja võrrandi koostamine

Olgu kõver antud oma võrrandiga $y = f(x)$ ja puutepunkt abstsissiga x_0. Siis on puutepunkti koordinaadid x_0 ja $y_0 = f(x_0)$. Puutuja tõus on funktsiooni y tuletis argumendi väärtusel x_0. Seda tõusu kirjutame kujul

$$y'\Big|_{x=x_0}$$

ehk lühidalt y'_0. Teades, et puutuja läbib punkti (x_0, y_0) ja omab tõusu y'_0, saame puutuja võrrandi kujul

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0).$$

Järgmistes artiklites toome näiteid kõvera puutuja võrrandi koostamise ja rakendamise kohta puutuja omaduste ning konstruktsioonivõtete leidmisel.

Ruutfunktsiooni tuletis

Tuletise avaldise määramise näitena vaatleme ruutfunktsiooni tuletise leidmist.

Olgu $y = ax^2$. Selle funktsiooni tuletise leidmiseks arutleme järgmiselt.

Fikseerime mõne argumendi väärtuse, näiteks väärtuse x. Sellele vastab funktsiooni väärtus ax^2. Anname argumendile juurdekasvu Δx; siis on argumendi uueks väärtuseks $x + \Delta x$. Sellele vastab funktsiooni uus väärtus $a(x + \Delta x)^2$. Argumendi kasvamisel Δx võrra kasvab funktsioon vahe

$$a(x + \Delta x)^2 - ax^2$$

võrra. Seega on funktsiooni juurdekasv

$$\Delta y = ax^2 + 2ax \cdot \Delta x + a \cdot (\Delta x)^2 - ax^2 = \\ = 2ax \cdot \Delta x + a \cdot (\Delta x)^2 = \Delta x(2ax + a \cdot \Delta x).$$

Funktsiooni ja argumendi kasvude suhe on

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a \cdot \Delta x.$$

Lastes argumendi kasvu Δx tõkestamatult läheneda nullile, näeme, et ka $a \cdot \Delta x \to 0$. Seega

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax$$

ehk

$$y' = 2ax$$

ehk

$$(ax^2)' = 2ax.$$

Märgime, et viimases kirjutises on funktsioon y asendatud oma konkreetse avaldisega. Niisugust tuletise kirjutusviisi kasutame edaspidigi.

Et me tuletise leidmise protsessis lähtume argumendi m i n-

gist väärtusest, siis on saadud tuletise avaldis kehtiv argumendi iga väärtuse korral.

Erijuhul, kui $a = 1$, saame

$$(x^2)' = 2x.$$

Parabooli $y = ax^2$ puutuja

Olgu antud parabool $y = ax^2$. Leiame selle parabooli puutuja võrrandi, teades, et puutepunkti abstsiss on x_0.

Puutepunkti ordinaat on $y_0 = ax_0^2$. Puutuja tõus on funktsiooni y tuletise väärtus argumendi väärtusel x_0, see on $2ax_0$. Seega puutuja võrrand on

$$y - y_0 = 2ax_0(x - x_0)$$

ehk

$$y - y_0 = 2ax_0x - 2ax_0^2$$

ehk

$$y - y_0 = 2ax_0x - 2y_0$$

ehk

$$y + y_0 = 2ax_0x.$$

Sellest võrrandist saab kergesti tuletada sobiva võtte parabooli puutuja konstrueerimiseks. Leiame nimelt puutuja ja y-telje lõikepunkti T (joon. 225). Selles punktis $x = 0$, seega $y_T + y_0 = 0$ ja $y_T = -y_0$. Siit järeldame, et puutuja joonestamiseks tuleb ainult märkida y-teljel ümberpööratud suunas puutepunkti ordinaat ja ühendada saadud punkt T puutepunktiga P. Sirge PT ongi otsitav puutuja. Joonis 225 vastab juhule, kus $a > 0$.

Juba vähestegi puutujate tundmine kergendab oluliselt kõvera joonestamist. Joonisel 226 on kujutatud parabool, mis on joonestatud 5 punkti ja läbi nende tõmmatud 5 puutuja järgi.

Tuginedes praegu toodud parabooli puutuja konstrueerimise võttele, saame hõlpsasti tuletada parabooli puutuja ühe tähtsa omaduse, mis teda seob fookuse ja juhtjoonega. Selleks arutleme järgmiselt.

Parabooli $y = ax^2$ võrrandit saab kirjutada ka kujul $x^2 = \frac{1}{a}y$. Seega on parabooli parameeter $p = \frac{1}{2a}$. Parabooli fookuseks on punkt $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ ja juhtjooneks sirge $y = -\frac{1}{4a}$. Ühendades puutepunkti P fookusega F (joon. 227) ja langetades puutepunktist juhtjoonele perpendikulaari PD, näeme, et

$$FT = \frac{p}{2} + y_0,$$

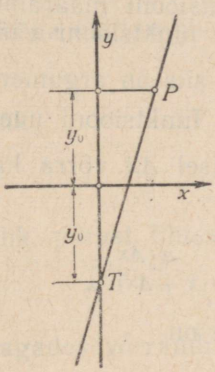
$$FP = PD = \frac{p}{2} + y_0$$

ja seega

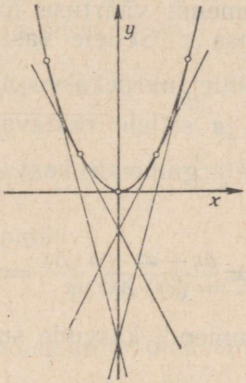
$$FP = FT.$$

See tähendab aga, et kolmnurk FPT on võrdhaarne, järelikult

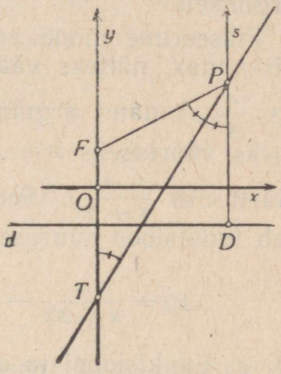
$$\widehat{FTP} = \widehat{FPT}.$$



Joon. 225.



Joon. 226.



Joon. 227.

Kui tõmbame nüüd punktist P sirge s rööbiti parabooli teljega ja paneme tähele, et see sirge moodustab puutujaga sama nurga mis telgki, siis näeme, et puutuja moodustab fokaalraadiusega FP ja sirgega s võrdsed nurgad. Siit järeldub, et kiir, mis väljub fookusest suunas FP, on pärast parabooli joonelt peegeldumist rööbik teljega, teiste sõnadega,

parabooli fookusest väljuvad kiired muutuvad parabooli joonelt peegeldudes teljega rööbikuteks kiirteks.

Sel omadusel põhineb paraboolsete peeglite kasutamine autolaternais ja helgiheitjais.

Pöörates kiirte levimissuuna vastupidiseks, näeme, et

kiired, mis langevad paraboolsele peeglile telje sihis, koonduvad pärast peegeldumist fookusse.

Paraboolse peegliga saab koondada ühte punkti kõik Päikeselt või mingilt tähelt tulevad rööbikud valgus- ja soojuskiired, mis langevad peeglile.

Paraboolsed peeglid valmistatakse pöördparaboloididena, mis saadakse, lastes paraboolil pöörelda ümber oma telje.

Funktsiooni $y = \frac{a}{x}$ tuletis

Tuletise avaldise määramise teise näitena toome argumendist pöördvõrdeliselt sõltuva funktsiooni tuletise leidmise.

Olgu $y = \frac{a}{x}$. Selle funktsiooni tuletise leidmiseks arutleme järgmiselt.

Fikseerime mõne argumendi väärtuse funktsiooni määramispiirkonnas, näiteks väärtuse x. Sellele vastab funktsiooni väärtus $\frac{a}{x}$. Anname argumendile juurdekasvu Δx; siis on argumendi uueks väärtuseks $x + \Delta x$ ja sellele vastavaks funktsiooni uueks väärtuseks $\frac{a}{x + \Delta x}$. Seega argumendi kasvamisel Δx võrra kasvab funktsioon suuruse

$$\Delta y = \frac{a}{x + \Delta x} - \frac{a}{x} = \frac{ax - ax - a \cdot \Delta x}{(x + \Delta x) \cdot x} = -\frac{a \cdot \Delta x}{(x + \Delta x) \cdot x}$$

võrra. Funktsiooni ja argumendi kasvude suhe on

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{(x + \Delta x) \cdot x}.$$

Kui nüüd $\Delta x \to 0$, siis $x + \Delta x \to x$. Seega läheneb viimase murru nimetaja $(x + \Delta x) \cdot x$ korrutisele $x \cdot x$ ehk avaldisele x^2. Järelikult

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{a}{x^2}$$

ehk

$$y' = -\frac{a}{x^2}$$

ehk

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}.$$

Nagu funktsioon $y = \frac{a}{x}$, nii on ka tema tuletis $y' = -\frac{a}{x^2}$ määratud kõigil nullist erinevatel argumendi väärtustel.

Kordaja a eriväärtusel 1 saame

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Risthüperbooli puutuja

Leiame risthüperbooli

$$xy = a$$

puutuja punktis, mille abstsiss on x_0.

Et $y = \frac{a}{x}$, siis on puutepunkti ordinaat $y_0 = \frac{a}{x_0}$. Eelmises artiklis leitud valemist näeme, et funktsiooni y tuletisel on puutepunktis väärtus

$$y'_0 = -\frac{a}{x_0^2}.$$

Seega otsitav puutuja võrrand on

$$y - y_0 = -\frac{a}{x_0^2}(x - x_0)$$

ehk

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

ehk, pärast lihtsustamist,

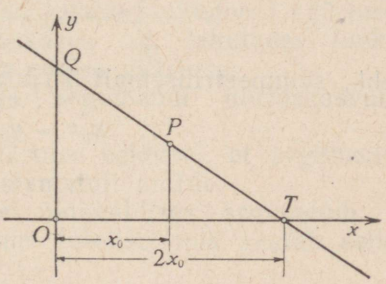
$$y_0 x + x_0 y = 2a.$$

Jagades võrrandi mõlemad pooled suurusega $2ax_0y_0$, saame

$$\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1.$$

Nagu saadud võrrandist nähtub, eraldab leitud puutuja x- ja y-teljel vastavalt lõigud $2x_0$ ja $2y_0$.

See annab meile lihtsa võtte risthüperbooli puutuja konstrueerimiseks: märgime x-teljel punkti T, mille abstsiss on kaks korda suurem puutepunkti P abstsissist, ja ühendame selle punkti puutepunktiga. Nende punktide ühendussirge ongi otsitav puutuja (joon. 228).



Joon. 228.

Vaatleme kolmnurka, mille moodustab risthüperbooli puutuja koos telgedega. Selle kolmnurga pindala on $\frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot 2y_0$ ehk $2x_0y_0$ ehk $2a$. See väärtus on konstantne; ta ei sõltu puutepunkti koordinaatidest. Et risthüperbooli $xy = a$ puhul on

teljed ühtlasi asümptootideks, siis võime tulemuse sõnastada järgmiselt:

risthüperbooli puutuja moodustab asümptootidega muutumatu pindalaga kolmnurga.

Kõvera normaali võrrand

Kõvera normaaliks kõvera antud punktis nimetatakse vaadeldavat punkti läbivat sirgjoont, mis ristub selles punktis kõverale tõmmatud puutujaga.

Olgu kõver antud oma võrrandiga $y = f(x)$ ja olgu x_0 kõvera antud punkti abstsiss. Siis on $y_0 = f(x_0)$ selle punkti ordinaat. Et puutuja tõus on $y'\big|_{x=x_0}$ ehk lühemalt y_0', siis normaali kui puutujaga ristuva sirge tõus on $-1 : y_0'$. Järelikult normaali võrrand on

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'_0}(x - x_0)$$

ehk

$$(x - x_0) + y'_0(y - y_0) = 0.$$

Näide 1. Parabooli $y = ax^2$ puhul on $y' = 2ax$, seega $y'_0 = 2ax_0$. Järelikult parabooli punktist (x_0, y_0) tõmmatud normaali võrrand on

$$(x - x_0) + 2ax_0(y - y_0) = 0.$$

Näide 2. Risthüperbooli $xy = a$ puhul on $y'_0 = -\frac{a}{x_0^2} = -y_0 : x_0$. Järelikult risthüperbooli normaali võrrand on

$$(x - x_0) - \frac{y_0}{x_0}(y - y_0) = 0$$

ehk, sümmeetrilisemalt kirjutatult,

$$x_0x - y_0y = x_0^2 - y_0^2.$$

PEATÜKK XXI

TEOREEME TULETISTE KOHTA

§ 74. TULETISE LEIDMISE ÜLDSKEEM JA SELLE RAKENDUSI

Tuletise leidmise üldskeem

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Tuletise definitsiooni kohaselt on siis

$$y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{ehk} \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

ehk, veidi täielikumalt,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Kooskõlas selle definitsiooniga toimub funktsiooni tuletise leidmine järgmiselt:

1) fikseerime argumendi mingi väärtuse x ja arvutame sellele vastava funktsiooni väärtuse;
2) anname argumendile juurdekasvu Δx ja arvutame uuele argumendi väärtusele $x + \Delta x$ vastava funktsiooni väärtuse;
3) arvutame funktsiooni juurdekasvu Δy, lahutades funktsiooni uuest väärtusest tema endise väärtuse;
4) moodustame funktsiooni ja argumendi juurdekasvude suhte;
5) määrame selle suhte piirväärtuse eeldusel, et argumendi juurdekasv Δx läheneb tõkestamatult nullile.

Asendades funktsiooni tuletise üldavaldises argumendi x mingi konkreetse väärtusega, saame tuletise, mis vastab sellel argumendi eriväärtusel.

Selgitame eespool toodud tuletise leidmise skeemi rakendamist kuupfunktsiooni $f(x) = ax^3$ juhul.

1. s a m m. Fikseerime argumendi mingi väärtuse x ja võtame ta argumendi l ä h t e v ä ä r t u s e k s. Sellele vastav funktsiooni väärtus on $f(x) = ax^3$.

2. s a m m. Anname argumendile juurdekasvu Δx; siis on argumendi uueks väärtuseks $x + \Delta x$ ja sellele vastavaks funktsiooni uueks väärtuseks

$$f(x + \Delta x) = a(x + \Delta x)^3.$$

3. s a m m. Arvutame funktsiooni juurdekasvu argumendi üleminekul endiselt väärtuselt uuele. Saame

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = a(x + \Delta x)^3 - ax^3$$

ehk, arendades ja koondades,

$$\Delta f(x) = ax^3 + 3ax^2 \cdot \Delta x + 3ax \cdot (\Delta x)^2 + a(\Delta x)^3 - ax^3 = \\ = 3ax^2 \cdot \Delta x + 3ax \cdot (\Delta x)^2 + a(\Delta x)^3$$

ehk, viies ühise teguri — argumendi kasvu — sulgude taha,

$$\Delta f(x) = [3ax^2 + 3ax \cdot \Delta x + a(\Delta x)^2] \cdot \Delta x.$$

4. s a m m. Moodustame funktsiooni ja argumendi juurdekasvude suhte:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3ax^2 + 3ax \cdot \Delta x + a(\Delta x)^2.$$

5. s a m m. Määrame piirväärtuse, millele see suhe läheneb argumendi juurdekasvu Δx tõkestamatul lähenemisel nullile. Kui $\Delta x \to 0$, siis ka $a(\Delta x)^2$ läheneb tõkestamatult nullile; samuti läheneb nullile liige $3ax \cdot \Delta x$. Järelikult

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 3ax^2$$

ehk, teises kirjutusviisis,

$$(ax^3)' = 3ax^2.$$

Erijuhul, kui $a = 1$, saame

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Edaspidi jätame seletused tuletise leidmise skeemi rakendamisel andmata, paigutades kirjutised ülevaatlikult, nii et neist oleks kohe näha kõik viis tuletise leidmise sammu.

Raskeimaks sammuks tuletise leidmise käigus on p i i r i l e ü l e m i n e k. Resultaadi saamiseks on siin mõnikord vältimatud

kunstlikud teisendusvõtted, mis nõuavad siis ka üksikasjalisi seletusi. Näitena toome ruutjuurfunktsiooni tuletise leidmise.

Ruutjuurfunktsiooni tuletis

Leiame funktsiooni $y = a\sqrt{x}$ tuletise.
Käies tuletise leidmise eeskirja järgi, koostame skeemi:

$$\begin{array}{ll} x & y = a\sqrt{x} \\ x + \Delta x & y + \Delta y = a\sqrt{x + \Delta x} \\ \Delta x & \Delta y = a(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}) \\ & \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a\,\dfrac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \end{array}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a\,\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Jääb leida viimane piirväärtus. Piirväärtuse märgi all seisvas avaldises lähenevad tõkestamatult väheneva Δx puhul nii nimetaja kui ka lugeja nullile; kuid seejuures pole näha, kuidas käitub nende suhe. See ilmneb aga kohe, kui teisendame piirväärtuse märgi alust avaldist, vabastades selle juurtest lugejas. Korrutades selleks lugejat ja nimetajat lugejas seisvate juurte summaga, saame

$$\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} =$$

$$= \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Võrdsetel avaldistel on võrdsed piirväärtused; järelikult

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis $x + \Delta x \to x$, $\sqrt{x + \Delta x} \to \sqrt{x}$ ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ehk

$$y' = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

ehk

$$(a\sqrt{x})' = \frac{a}{2\sqrt{x}}.$$

Erijuhul, kui $a = 1$, saame

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Tuletise olemasolu küsimus

Tuletise leidmise skeemi rakendades määrasime funktsioonide

$$y = ax^2, \quad y = \frac{a}{x}, \quad y = ax^3 \text{ ja } y = a\sqrt{x}$$

tuletised. Nende funktsioonide tuletiste avaldiste leidmisega on ühtlasi tõestatud ka nende tuletiste olemasolu. Teiste sõnadega: nende funktsioonide puhul on olemas piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tuletise geomeetriliseks vasteks on puutuja tõus ja, ümberpöördult, puutuja tõusu analüütiliseks vasteks on tuletis. Et näib olevat võimalik igale kujutletavale pidevale kõverale läbi iga tema punkti joonestada puutujat, siis võiks arvata, et igal pideval funktsioonil on igal argumendi väärtusel olemas tuletis. Rohkem kui 200 aastat püüti seda arvatavat tõde tõestada, kuid ikka tulemusteta. Alles möödunud sajandi kaheksakümnendail aastail selgus, et kõne all olev «silmanähtavalt õige tõde» ei olegi üldiselt kehtiv: õnnestus konstrueerida niisuguseid pidevaid funktsioone, millel ühelgi argumendi väärtusel pole tuletist. See avastus matemaatiliste mõistete vallas näitas uuesti, kui ettevaatlik peab olema «silmanähtavalt kehtivate tõdedega».

Oma avaldistega antud pidevate funktsioonide puhul, millega tegeldakse matemaatika rakendustes, on võimalik piirväärtust

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

arvutada, millega ühtlasi on tõestatud ka selle piirväärtuse olemasolu. Funktsioonide puhul, mis pole antud oma avaldisega, postuleerime matemaatika rakendusis alati tuletise olemasolu igal argumendi väärtusel, millel funktsioon on pidev, välja arvatud vahest mõned vähesed erandväärtused.

Funktsioone, milledel piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

on olemas, nimetatakse diferentseeruvateks funktsioonideks.

Nagu nägime, ei tarvitse iga pidev funktsioon veel olla diferentseeruv; küll aga on iga diferentseeruv funktsioon kindlasti pidev. Tõepoolest, eelduse kohaselt on olemas

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Juurdekasvu Δy kohta võib teha ainult kaks oletust: 1° Δy läheneb ühes Δx-ga nullile. Siis on funktsiooni y pidevuse tingimus täidetud. 2° Δy ei lähene ühes Δx-ga nullile. Siis Δx nullile lähenemisel kasvab suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ üle iga etteantud määra, mis räägib vastu eeldusele. Seega jääb püsima vaid oletus 1° ja funktsioon y on pidev.

§ 75. TULETISE LEIDMISE TEOREEME

Funktsiooni tuletise leidmine antud eeskirja järgi on küllaltki tülikas, kui funktsiooni avaldis on vähegi keerukama ehitusega. Tuletiste leidmine lihtsustub tunduvalt, kui rakendada mõningaid üldisi lauseid tuletiste kohta. Asume nende lausete formuleerimisele ja tõestamisele.

Konstandi tuletis

Igale argumendi väärtusele funktsiooni määramispiirkonnast võib erijuhul vastata üks ja seesama funktsiooni väärtus; funktsioon on siis konstantne ja me võime rääkida konstandi tuletisest. Näitame, et see on null. Tõepoolest, funktsiooni $y = const$ graafikuks on x-teljega rööbik sirgjoon; selle joone tõusunurk ja järelikult ka tõus on 0. Et funktsiooni graafiku tõus kujutab tuletist, siis $(const)' = 0$. Seega

konstandi tuletis on 0.

Argumendi tuletis

Igale argumendi väärtusele funktsiooni määramispiirkonnast võib erijuhul vastata niisama suur funktsiooni väärtus; funktsioon on siis võrdne argumendiga ja me võime rääkida argumendi tuletisest. Näitame, et see on 1. Tõepoolest, funktsiooni $y = x$

graafikuks on esimese (ja kolmanda) veerandi nurgapoolitaja; selle joone tõusunurk on 45° ja tõus 1. Et funktsiooni graafiku tõus kujutab tuletist, siis $(x)' = 1$. Seega

argumendi tuletis on 1.

Konstantse teguri teoreem

Funktsiooni $cf(x)$ *tuletis on* $cf'(x)$

ehk, teisiti,

funktsiooni ees olev konstantne tegur kandub muutumatult üle tuletise ette.

Tõestus. Olgu $y = cf(x)$. Käies tuletise leidmise üldise eeskirja järgi, saame skeemi:

$$\begin{array}{cll} x & & y = cf(x) \\ x + \Delta x & y + \Delta y = & cf(x + \Delta x) \\ \Delta x & \Delta y = & cf(x + \Delta x) - cf(x) = \\ & & = c[f(x + \Delta x) - f(x)] = c \cdot \Delta f(x); \end{array}$$

siit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = c \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

ja seega

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

ehk

$$y' = cf'(x)$$

ehk, teisiti,

$$[cf(x)]' = cf'(x).$$

Summa tuletis

Funktsioonide summa tuletis on võrdne liidetavate funktsioonide tuletiste summaga.

Tõestus. Olgu $y = f(x) + g(x)$. Käies tuletise leidmise üldise eeskirja järgi, saame skeemi:

$$\begin{array}{cll} x & & y = f(x) + g(x) \\ x + \Delta x & y + \Delta y = & f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) \\ \Delta x & \Delta y = & f(x + \Delta x) - f(x) + \\ & & + g(x + \Delta x) - g(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x). \end{array}$$

Siit

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}.$$

Minnes piirile tõkestamatult kahaneva Δx puhul, saame

$$y' = f' + g',$$

kus argument on lühiduse mõttes jäetud kirjutamata.

Tulemust võime kirjutada ka kujul

$$(f+g)'=f'+g'.$$

Samal viisil tõestame funktsioonide vahe tuletise valemi:

$$(f-g)'=f'-g'.$$

Näiteid.

1° $(ax+b)'=(ax)'+b'=a.$

2° $(ax^2+bx+c)'=(ax^2)'+(bx)'+c'=2ax+b.$

3° $(x^3-4x^2-7x+8)'=(x^3)'-(4x^2)'-(7x)'+8'=$
$=3x^2-8x-7.$

Kahe funktsiooni korrutise tuletis

Olgu $y=f(x)\cdot g(x)$. Leiame selle korrutise tuletise tegurite ja nende tuletiste kaudu. Käies tuletise leidmise üldise eeskirja järgi, saame skeemi:

$$\begin{array}{lll} x & & y=f(x)\cdot g(x) \\ x+\Delta x & y+\Delta y= & f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x) \\ \Delta x & \Delta y= & f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x) \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x)\cdot g(x)}{\Delta x}.$$

Et näha, millele läheneb juurdekasvude Δy ja Δx suhe nimetajas seisva Δx tõkestamatul vähenemisel, anname lugejas seisvale avaldisele sobivama kuju. Selleks lahutame temast ja liidame temaga korrutise

$$f(x+\Delta x)\cdot g(x);$$

saame

$$\begin{aligned} \Delta y=&f(x+\Delta x)\cdot g(x+\Delta x)-f(x+\Delta x)\cdot g(x)+ \\ &+f(x+\Delta x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)= \\ &=f(x+\Delta x)[g(x+\Delta x)-g(x)]+ \\ &+g(x)[f(x+\Delta x)-f(x)]. \end{aligned}$$

Nurksulgudes seisavad vastavalt funktsioonide $g(x)$ ja $f(x)$ juurdekasvud $\Delta g(x)$ ja $\Delta f(x)$. Järelikult,

$$\Delta y=f(x+\Delta x)\cdot\Delta g(x)+g(x)\cdot\Delta f(x).$$

Jagamine kasvuga Δx annab

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f(x+\Delta x)\cdot\frac{\Delta g(x)}{\Delta x}+g(x)\cdot\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$, $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} \to g'(x)$; funktsiooni $f(x)$ pidevuse korral $f(x+\Delta x) \to f(x)$. Järelikult

$$y' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

ehk

$$(f \cdot g)' = f \cdot g' + g \cdot f'.$$

Niisiis:

kahe funktsiooni korrutise tuletis saadakse, korrutades esimest tegurit teise teguri tuletisega ja teist tegurit esimese teguri tuletisega ning liites tulemused.

Näide. Olgu $y = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$. Siis

$$y' = \frac{2}{3}(x\sqrt{x})' = \frac{2}{3}[x \cdot (\sqrt{x})' + \sqrt{x} \cdot (x)'] =$$

$$= \frac{2}{3}\left(x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cdot 1\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x} = \sqrt{x}.$$

Kahe funktsiooni jagatise tuletis

Olgu

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{kus} \quad g(x) \neq 0,$$

ehk lühidalt

$$y = \frac{f}{g}, \quad \text{kus} \quad g \neq 0.$$

Leiame selle jagatise tuletise. Ka siin oleks võimalik käia tuletise leidmise üldise eeskirja järgi. Kiiremini aga jõuame eesmärgile, kui paneme tähele, et

$$y \cdot g = f,$$

ja eeldame, et funktsioonil y on tuletis olemas. Siis

$$y \cdot g' + g \cdot y' = f'.$$

Lahendades selle võrrandi y' suhtes ja paigutades tulemusse y avaldise, saame

$$\left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{g \cdot f' - f \cdot g'}{g^2}.$$

Seega näeme, et

murru tuletis on jällegi murd; selle nimetaja on antud nimetaja ruut, lugeja aga saadakse antud murrust, korrutades nimetajat lugeja tuletisega ja lahutades tulemusest lugeja korrutise nimetaja tuletisega.

Erijuhul, kui $f = 1$, on $f' = 0$ ja funktsiooni g pöördväärtuse tuletis

$$\left[\frac{1}{g}\right]' = -\frac{g'}{g^2}.$$

Näide. Olgu $y = \frac{x-1}{x+1}$. Siis

$$y' = \frac{(x+1)(x-1)' - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)\cdot 1 - (x-1)\cdot 1}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Astmefunktsiooni tuletis positiivse täisarvulise astendaja puhul

Olgu $y = x^n$, kus n on mingi naturaalarv. Leiame selle funktsiooni tuletise.

Teame, et

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Korrutise tuletise valemit rakendades saame

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = x^3 \cdot x' + x \cdot (x^3)' = x^3 \cdot 1 + x \cdot 3x^2 = x^3 + 3x^3$$

ehk

$$(x^4)' = 4x^3.$$

Näeme, et argumendi kolmanda ja neljanda astme tuletised saadakse, vähendades astendajat ühe võrra ja korrutades tulemust endise astendajaga.

Sellesama eeskirja järgi saame ka argumendi teise ja esimese astme tuletised:

$$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x, \quad (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

Analoogia põhjal võib oodata, et astendaja n iga täisarvulise väärtuse puhul $(x^n)' = nx^{n-1}$. Tõestame selle valemi *täieliku induktsiooni võtte* abil. See toimub järgmiselt.

Eeldame, et valem on kehtiv astendaja n *mingil erivääritusel*, ütleme väärtusel N; see tähendab, eeldame, et

$$(x^N)' = Nx^{N-1}.$$

Näitame, et valem jääb siis kehtima ka *ühe võrra suurema astendaja* puhul. Tõepoolest, rakendades korrutise tuletise valemit avaldisele $x^N \cdot x$, saame

$$(x^N \cdot x)' = x^N \cdot x' + x \cdot (x^N)' = x^N \cdot 1 + x \cdot Nx^{N-1} = x^N + Nx^N$$

ehk

$$(x^{N+1})' = (N+1)x^N.$$

Näeme, et kui valem kehtib astendaja N puhul, siis kehtib ta kindlasti ka astendaja $N+1$ puhul.

Nagu eespool veendusime, on valem kehtiv astendajate 1, 2, 3 ja 4 puhul; tõestatu põhjal on ta siis kehtiv ka astendaja $4+1$ ehk 5 puhul, samuti astendaja $5+1$ ehk 6 puhul, edasi astendaja $6+1$ ehk 7 puhul, $7+1$ ehk 8 puhul jne. Seega valem

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

on kehtiv iga positiivse täisarvulise astendaja puhul. Niisiis:

positiivse täisarvulise astendaja n puhul on

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Polünoomi tuletis

Tuginedes äsjatõestatud lausele ja kasutades summa ja vahe tuletise valemit ning konstantse teguri kohta käivat lauset, saame polünoomi tuletise avaldise:

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)' =$$
$$= na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1.$$

Näide.

$$(x^4 - 7x^3 + 5x^2 - 11x + 19)' = 4x^3 - 21x^2 + 10x - 11.$$

Astmefunktsiooni tuletis negatiivse täisarvulise astendaja puhul

Laiendame eespool tõestatud lauset ka juhule, kus n on negatiivne täisarv. Olgu nimelt astmefunktsiooni avaldises $y = x^n$ astendaja $n = -m$, kus $m > 0$. Siis

$$y = x^{-m}$$

ehk

$$y = \frac{1}{x^m}$$

ja seepärast murru tuletise valemi põhjal

$$y' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

ehk

$$y' = (-m) \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = (-m)x^{-m-1}.$$

Niisiis

$$(x^{-m})' = (-m)x^{-m-1}.$$

See tähendab, et eespool tuletatud valem $(x^n)'$ jaoks kehtib ka negatiivse täisarvulise astendaja puhul. Niisiis:

iga täisarvulise astendaja n puhul on

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

§ 76. FUNKTSIOONI FUNKTSIOONI TULETIS

Funktsiooni funktsiooni mõiste

Funktsioon ei sõltu oma argumendist iga kord otseselt: väga paljudel juhtudel on see sõltuvus kaudne. Toome näiteid.

Näide 1. Pendelkella võnkeperiood T sõltub pendli pikkusest l, see pikkus aga omakorda temperatuurist t, nii et võnkeperiood sõltub ka temperatuurist, kuid mitte otseselt, vaid pendli pikkuse kaudu. Sümbolites

$$T = f(l), \quad l = \lambda(t),$$

nii et

$$T = f[\lambda(t)].$$

Me ütleme, et aeg T on temperatuuri t funktsiooni funktsioon. f-märgi all seisvat funktsiooni $\lambda(t)$ nimetame argumentfunktsiooniks.

Näide 2. Selge taeva puhul sõltub päikesekiirguse intensiivsus I Päikese kõrgusnurgast h, see aga omakorda sõltub ajast t, nii et päikesekiirguse intensiivsus on ka aja funktsioon. I sõltuvus ajast t pole aga otsene, vaid kaudne; vahendavaks muutujaks suuruste t ja I vahel on nurk h:

$$I = F(h), \quad h = \varphi(t),$$

nii et

$$I = F[\varphi(t)].$$

See tähendab, et kiirguse intensiivsus I on aja t funktsiooni funktsioon. F-märgi all seisev funktsioon $\varphi(t)$ on argumentfunktsioon.

Avaldised, nagu

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sin(mx + n), \quad \log \tan x$$

on kõik argumendi x funktsioonid, kuid nad ei sõltu sellest argumendist otseselt, vaid teiste funktsioonide vahendusel.

Funktsioonideks, mille kaudu nad sõltuvad argumendist x, on vastavalt

$$a^2 - x^2, \quad mx + n, \quad \tan x.$$

Märkus. Funktsiooni funktsioone nimetatakse mõnikord ka liitfunktsioonideks. Nimetus vihjab asjaolule, et argumendi ja funktsiooni vaheline seos teostub kahe- või rohkemalülilise sõltuvuste ahela kaudu.

Funktsiooni funktsiooni pidevus

Kui $y = f(u)$ on argumendi u pidev funktsioon ja $u = g(x)$ on argumendi x pidev funktsioon, siis on ka $y = f[g(x)]$ argumendi x pidev funktsioon. Tõepoolest, olgu x mingi kindel väärtus ja $x + \Delta x$ selle x mingi naaberväärtus. Vastaku neile x väärtustele u väärtused u ja $u + \Delta u$. Kui $\Delta x \to 0$, siis funktsiooni u pidevuse tõttu ka $\Delta u \to 0$; kui $\Delta u \to 0$, siis funktsiooni y pidevuse tõttu ka $\Delta y \to 0$. Seega, kui $\Delta x \to 0$, siis $\Delta y \to 0$. Selles aga seisabki funktsiooni y kui x funktsiooni pidevuse tunnus.

Meie ülesandeks on nüüd saada eeskiri funktsiooni tuletise leidmiseks kaudse sõltuvuse puhul.

Funktsiooni funktsiooni tuletis

Olgu

$$y = f(u) \quad \text{ja} \quad u = g(x),$$

nii et

$$y = f[g(x)].$$

Seega on y argumendi x funktsiooni funktsioon. Tähendagu edaspidi x argumendi mingit kindlat väärtust ja vastaku sellele väärtusele otseselt u väärtus $u = g(x)$ ja kaudselt y väärtus $y = f(u)$:

$$x \qquad u = g(x) \qquad y = f(u).$$

Kasvagu argument Δx võrra; argumendi uuele väärtusele vastab siis otseselt u väärtus $u + \Delta u = g(x + \Delta x)$ ja kaudselt y väärtus $y + \Delta y = f(u + \Delta u)$. Seega argumendi kasvamisel Δx võrra u kasvab Δu võrra ja y kasvab Δy võrra. Olgu funktsioonil y olemas tuletis muutuja u järgi ja funktsioonil u tuletis muutuja x järgi. Märgime neid tuletisi vastavalt y'_u ja u'_x, nii et

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x.$$

See tähendab, et

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \beta \quad \text{ja} \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x + \alpha,$$

kus $\beta \to 0$, kui $\Delta u \to 0$, ja $\alpha \to 0$, kui $\Delta x \to 0$.

Siit

$$\Delta y = (y'_u + \beta) \cdot \Delta u \quad \text{ja} \quad \Delta u = (u'_x + \alpha) \cdot \Delta x$$

ja seepärast

$$\Delta y = (y'_u + \beta) \cdot (u'_x + \alpha) \cdot \Delta x.$$

Laseme juurdekasvu Δx läheneda nullile nullist erinevate väärtuste kaudu. Siis võime viimase võrduse mõlemaid pooli jagada juurdekasvuga Δx; saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = (y'_u + \beta)(u'_x + \alpha) = y'_u \cdot u'_x + (\alpha y'_u + \beta u'_x + \alpha\beta).$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis, nagu nägime, ka $\alpha \to 0$. Et eelduse kohaselt on funktsioonil u olemas tuletis x järgi, siis on u argumendi x pidev funktsioon. Järelikult kui $\Delta x \to 0$, siis ka $\Delta u \to 0$ ja seepärast ka $\beta \to 0$. Tulemuseks on, et $\Delta x \to 0$ puhul summa $\alpha y'_u + \beta u'_x + \alpha\beta$ läheneb nullile. See tähendab aga, et

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Niisiis:

funktsiooni funktsiooni tuletis on võrdne funktsiooni tuletisega vahendava muutuja järgi, mis on korrutatud vahendava muutuja tuletisega argumendi järgi.

Märkus. Valemit $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ on võimalik tuletada ka käies tuletise leidmise skeemi järgi ja kasutades võimalust kirjutada murdu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ kujul $\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Sel puhul tekib aga raskus siis, kui argumendi mõnedel väärtustel $\Delta u = 0$. Niisugusel korral pole lubatud juurdekasvuga Δu jagada.

Näide 1. Leiame funktsiooni $y = (2x - 1)^3$ tuletise.

Vaadeldes x ja y vahelist sõltuvust kujul

$$y = u^3,$$
$$u = 2x - 1,$$

leiame saadud eeskirja järgi, et

$$y'_x = (u^3)'_u \cdot u'_x$$

ehk

$$y' = 3u^2 \cdot 2 = 6u^2$$

ehk

$$y' = 6(2x - 1)^2.$$

Näide 2. Leiame funktsiooni $y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ tuletise. Vaadeldes x ja y vahelist sõltuvust kujul

$$y = \sqrt{u},$$

$$u = x^2 - 5x + 6,$$

leiame, et

$$y'_x = (\sqrt{u})'_u \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot (2x - 5)$$

ehk

$$y' = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 6}}.$$

Kahe vahendava funktsiooni juhtum

Muna keetmise aeg a sõltub vee keemistemperatuurist t, vee keemistemperatuur t sõltub õhurõhust b, õhurõhk b sõltub koha kõrgusest h üle merepinna:

$$a = \varphi(t), \quad t = \psi(b), \quad b = \omega(h).$$

Seega

$$a = \varphi(t) = \varphi[\psi(b)] = \varphi\{\psi[\omega(h)]\}.$$

Kõnesolevas näites sõltub suurus a suurusest h kahe vahendava funktsiooni ω ja ψ kaudu. Olgu üldiselt

$$y = f\{u[v(x)]\}.$$

Siis funktsiooni funktsiooni tuletise valemi järgi

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

ehk, kui arvestada võrdust $u'_x = u'_v \cdot v'_x$,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x.$$

Saadud valemit, mis kannab «ahelreegli» nimetust, saab kergesti üldistada rohkem kui kahe vahelüli juhule.

Näide. Olgu $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + px + q}}$. Leiame y'. Selleks paneme tähele, et suuruste x ja y vahelist sõltuvust võib vaadelda kaudse sõltuvusena näiteks kujul

$$y = \frac{1}{u}, \quad u = \sqrt{v}, \quad v = x^2 + px + q.$$

Siis

$$y'_u = -\frac{1}{u^2}, \quad u'_v = \frac{1}{2\sqrt{v}}, \quad v'_x = 2x + p.$$

Järelikult eespool toodud valemi järgi

$$y'_x = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot (2x + p)$$

ehk

$$y'_x = -\frac{2x + p}{2u^2\sqrt{v}} = -\frac{2x + p}{2(x^2 + px + q)\sqrt{x^2 + px + q}}.$$

§ 77. ELLIPSI JA HÜPERBOOLI PUUTUJA

Funktsiooni funktsiooni tuletise leidmise valem võimaldab kerge vaevaga saada paljude kõverate puutuja tõusu avaldisi, mille otsene leidmine on võimalik ainult kunstlike võtete abil. Näitena toome ellipsi ja hüperbooli juhu.

Ellipsi ja hüperbooli puutuja tõus

Olgu ellips antud oma pooltelgedega a ja b. Tema võrrandiks on

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Lahendades selle võrrandi y suhtes, saame y jaoks kaks ainult märgilt erinevat avaldist. Plussmärgiga avaldiseks on

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Siit

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Kasutamiseks veidi sobivam on eelmisega samaväärne avaldis

$$y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

mille saame, kui paneme tähele, et

$$yy' = -\frac{b^2}{a^2}x.$$

Ellipsi punktis $P_0(x_0, y_0)$ on puutuja tõus

$$y'_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0}.$$

Teades puutepunkti koordinaate ja puutuja tõusu avaldist neis koordinaatides, saame kirjutada ellipsi puutuja võrrandi kujul

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$$

ehk

$$b^2 x x_0 + a^2 y y_0 = b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2.$$

Et puutepunkt (x_0, y_0) asetseb ellipsil, siis on paremal poolel seisev avaldis võrdne avaldisega $a^2 b^2$. Jagades selle korrutisega võrrandi kõiki liikmeid, saame võrrandi lõpuks kujul

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

Korrates sama mõttekäiku sõna-sõnalt hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

puhul, näeme, et hüperboolile punktis (x_0, y_0) tõmmatud puutuja võrrand on

$$\frac{x x_0}{a^2} - \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

Ringjoone puutuja võrrand

Kui ellipsi ja ta puutuja võrrandis võtame $a = b = r$, saame ringjoone ja ta puutuja võrrandi:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ja

$$x x_0 + y y_0 = r^2.$$

M ä r k u s. Ringjoone, ellipsi, hüperbooli ja parabooli puutujate võrrandite kirjutamiseks nende kõverate võrrandite järgi võime kasutada järgmist reeglit: kirjutame kõvera võrrandi arvuliste kordajateta ja astendajateta koordinaatide juures ja lisame indeksi null ühes liikmes ühele, teises teisele koordinaadile; saadav võrrand on puutuja võrrand. Näiteks ellipsi puhul:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x x}{a^2} + \frac{y y}{b^2} = 1, \quad \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

Ellipsi puutuja konstrueerimise võte

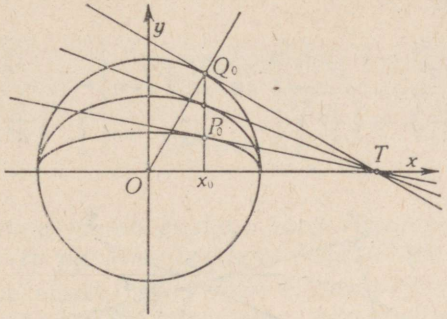
Ellipsi puutuja konstrueerimise võtte leidmiseks määrame puutuja algabstsissi. Võttes puutuja võrrandis $y = 0$, saame

$$\frac{x x_0}{a^2} = 1$$

ehk

$$x = \frac{a^2}{x_0}.$$

Nagu näeme, ei sõltu algabstsissi avaldis ellipsi väikesest poolteljest b. See tähendab, et kui antud ellipsi suurel teljel joonestame rea erinevate väikeste telgedega ellipseid (joon. 229), võtame



Joon. 229.

igaühel neist punkti abstsissiga x_0 ja tõmbame ellipseile neis punktides puutujad, siis kõik need puutujad lõikavad suure telje pikendust ühes ja samas punktis T kaugusel $\frac{a^2}{x_0}$ keskpunktist. Nende ellipsite hulgas on aga ka ringjoon, millele puutuja tõmbamine ei tee raskusi. Öeldust järeldub juhis ellipsi puutuja joonestamiseks:

joonestame ellipsi suurt telge diameetriks võttes ringjoone; tõmbame ellipsil võetud puutepunktist P_0 ordinaadi lõikumiseni ringjoonega punktis Q_0; tõmbame selles punktis ringjoone puutuja ja pikendame seda lõikumiseni ellipsi suure telje pikendusega; sirge, mis ühendab lõikumispunkti T ellipsil võetud puutepunktiga, on otsitav puutuja.

Ellipsi puutuja fokaalomadus

Näitame, et

ellipsi puutepunkti viivad fokaalkiired moodustavad puutujaga võrdsed nurgad.

Selleks tõmbame kummastki fookusest perpendikulaari puutujale (joon. 230). Seejuures tekkivatest täisnurksetest kolmnurkadest näeme, et

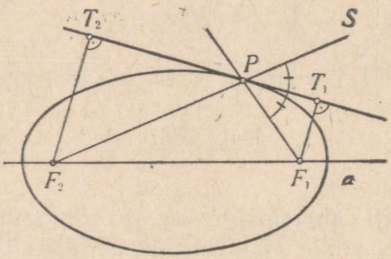
$$\sin \widehat{F_1PT_1} = \frac{F_1T_1}{F_1P}$$

ja

$$\sin \widehat{F_2PT_2} = \frac{F_2T_2}{F_2P}.$$

Ellipsi fookuste koordinaadid on $F_1(c, 0)$ ja $F_2(-c, 0)$, kusjuures $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Rakendades võtet punkti ja sirge vahelise kauguse leidmiseks, saame

$$F_1T_1 = \left| \frac{\frac{cx_0}{a^2} - 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right| \quad \text{ja} \quad F_2T_2 = \left| \frac{\frac{cx_0}{a^2} + 1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}} \right|$$



Joon. 230.

ehk, tähistades nimetajas seisvat ruutjuurt tähega R,

$$F_1T_1 = \left| \frac{cx_0 - a^2}{a^2R} \right| \quad \text{ja} \quad F_2T_2 = \left| \frac{cx_0 + a^2}{a^2R} \right|.$$

Arvutades puutepunkti P fokaalkaugused, leiame, et

$$F_1P = \frac{a^2 - cx_0}{a} \quad \text{ja} \quad F_2P = \frac{a^2 + cx_0}{a}.$$

Järelikult

$$\sin \widehat{F_1PT_1} = \frac{1}{aR} \quad \text{ja} \quad \sin \widehat{F_2PT_2} = \frac{1}{aR}$$

ehk

$$\sin \widehat{F_1PT_1} = \sin \widehat{F_2PT_2}.$$

Et kumbki kõnesolevatest nurkadest on teravnurk, siis

$$\widehat{F_1PT_1} = \widehat{F_2PT_2}.$$

See tähendab, et kiir, mis väljub ellipsi fookusest suunas F_1P, peegeldub ellipsi joonelt suunas PF_2; teiste sõnadega:

ellipsi ühest fookusest väljuvad kiired koonduvad pärast peegeldumist ellipsi joonelt teise fookusse.

Pikendame lõiku F_2P. Siis

$$\widehat{F_2PT_2} = \widehat{SPT_1}$$

ja

$$\widehat{F_2PT_2} = \widehat{F_1PT_1};$$

järelikult

$$\widehat{SPT_1} = \widehat{F_1PT_1}$$

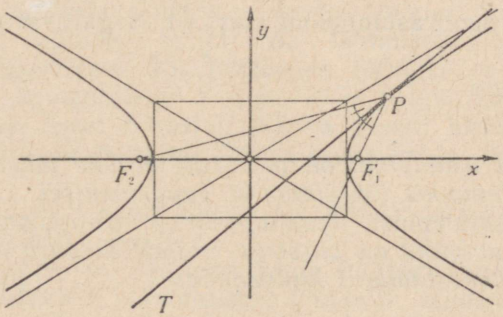
ehk

ellipsi puutuja jaotab pooleks nurga puutepunkti viiva fokaallõigu ja samasse punkti viiva teise fokaallõigu pikendi vahel.

See omadus annab lihtsa võtte ellipsi puutuja joonestamiseks: ühendame puutepunkti fookustega; pikendame ühte fokaalkiirt väljapoole puutepunkti; poolitame tekkivad nurgad; saadav nurgapoolitaja ongi ellipsi puutuja.

Hüperbooli puutuja fokaalomadus

Korrates ellipsi puhul arendatud mõttekäiku, näeksime, et *hüperbooli puutuja jaotab pooleks s i s e n u r g a puutepunkti viivate fokaalkiirte vahel.*



Joon. 231.

Selle omaduse põhjal on kerge konstrueerida hüperbooli puutujat (joon. 231).

Hüperbooli asümptoodid puutujaina

Vaatame, missuguse kuju omandab hüperbooli puutuja võrrand, kui puutepunkt liigub piki hüperbooli lõpmatult kaugele. Jagades puutuja võrrandi kõiki liikmeid x_0-ga, saame

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

Kui puutepunkt liigub piki hüperbooli lõpmatult kaugele, siis tema abstsiss x_0 kasvab üle iga määra, sümbolites $x_0 \to \infty$, murd $\frac{1}{x_0}$ aga kahaneb alla iga määra ja läheneb nullile: $\frac{1}{x_0} \to 0$. Mis puutub murrusse $\frac{y_0}{x_0}$, siis positiivse y_0 puhul saame ta kirjutada kujul

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x_0^2 - a^2}}{x_0} = \frac{b}{a}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_0}\right)^2}.$$

Kui $x_0 \to \infty$, siis $\frac{a}{x_0} \to 0$ ja seega $\frac{y_0}{x_0} \to \frac{b}{a}$. Niisiis, hüperbooli puutuja piirsirge võrrand puutepunkti lõpmatul kaugenemisel on

$$\frac{x}{a^2} - \frac{y}{b^2} \cdot \frac{b}{a} = 0$$

ehk

$$y = \frac{b}{a} x,$$

mis on hüperbooli asümptoodi võrrand. Negatiivse y_0 puhul

$$y = -\frac{b}{a} x.$$

Niisiis:

hüperbooli asümptoot on piirsirge, millele läheneb hüperbooli puutuja puutepunkti tõkestamatul kaugenemisel.

Üldistades tulemust, anname kõvera asümptoodi definitsiooni:

kõvera asümptoot on piirsirge, millele läheneb kõvera puutuja puutepunkti tõkestamatul kaugenemisel.

PEATÜKK XXII

TULETIS KIIRUSENA

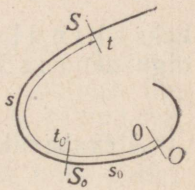
§ 78. ÜHTLANE LIIKUMINE JA SELLE KIIRUS

Orbiit. Liikumise seadus

Liikugu punkt mingit joont mööda tasapinnal või ruumis (joon. 232), näiteks vedur raudteel, paat merel, lennuk õhus, komeet maailmaruumis.

Joont, mida mööda liikumine toimub, nimetatakse orbiidiks, sageli ka trajektooriks.

Raudteel ja maanteel liikumisel saab käidud tee pikkust määrata kilomeetripostide järgi, mis on paigutatud tee äärde iga kilomeetri tagant, alates mõnest kindlast nullpunktist O. Hõlpsam on käidud tee pikkust lugeda kaasaliikuva kaugusemõõtja numbrilaualt. Liikumisaja määramiseks kasutame kaasaliikuvat ajamõõtjat, näiteks stopperkella.



Joon. 232.

Seame ajamõõtja nõnda, et ta mõne kindla koha, näiteks punkti S_0 läbimisel näitaks t_0. Olgu kaare OS_0 pikkus s_0. Läbigu liikuv punkt ajamomendil t koha S ja olgu kaare OS pikkus s. Et igale ajale t vastab liikuva punkti kindel asukoht S, sellele omakorda kindel kaar OS ja seega kindel kaare pikkus s, siis

liikumisel punkti poolt käidud tee pikkus on liikumiseks kulunud aja funktsioon: $s = s(t)$.

Seost $s = s(t)$, *mis määrab igale kulgenud ajale* t *vastava käidud tee pikkuse* s, *nimetatakse liikumise seaduseks.*

Rahvusvaheliselt kasutatavad aja ja käidud tee sümbolid t ja s on vastavate ladinakeelsete nimetuste esimesed tähed: t — *tempus* = aeg, s — *spatium* = vahemaa, kaugus.

Liikumise seadus $s = s(t)$ on punkti P sõiduplaan, mis on kirjutatud valemi kujul. Sama sõiduplaani võib anda, nagu tavaliselt, tabeli kujul või ka graafiliselt.

Ühtlase liikumise definitsioon, seadus ja graafik

Kui liikumine toimub nõnda, et võrdseis, kuid muidu mistahes ajavahemikes käiakse ära võrdse pikkusega teed, siis nimetatakse liikumist ühtlaseks.

Olgu Δt mingi ajavahemik ja Δs selles ajavahemikus käidud tee pikkus. Võtame rea üksteisele järgnevaid võrdseid ajavahemikke Δt. Et ühtlase liikumise puhul on igas niisuguses ajavahemikus käidud tee pikkus Δs, siis

ajavahemikus $2 \cdot \Delta t$ käidud tee pikkus on $2 \cdot \Delta s$,
„ $3 \cdot \Delta t$ „ „ „ „ $3 \cdot \Delta s$,
. . . . . .
„ $n \cdot \Delta t$ „ „ „ „ $n \cdot \Delta s$.

See tähendab, et

ühtlase liikumise korral on käidud tee pikkused võrdelised nende käimiseks vajalike ajavahemikega.

See ühtlase liikumise omadus võimaldab kergesti tuletada ühtlase liikumise seadust. Olgu nimelt

t_1 t_2 ja t

kaks kindlat hetke ja üks vabalt valitud hetk ning olgu nendeks hetkedeks käidud tee pikkused vastavalt

s_1 s_2 ja s.

Ajavahemikes

$t - t_1$ ja $t_2 - t_1$

käidud tee pikkused on siis

$s - s_1$ ja $s_2 - s_1$.

Et ühtlase liikumise korral on käidud tee pikkused võrdelised nende käimiseks vajalike ajavahemikega, siis

$$\frac{s - s_1}{t - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

See seos t ja s vahel on kehtiv iga hetke ja sellele vastava käidud tee pikkuse puhul, sest t oli vabalt valitud hetk. Järelikult on leitud seos kehtiv igasuguste kokkukuuluvate t ja s väärtuste puhul ja on seega otsitud liikumisseadus.

Leitud liikumisseaduses on s_1, s_2, t_1 ja t_2 kindlad arvud, t ja s muutujad. Et nii aeg t kui ka käidud tee pikkus s esinevad esimeses astmes, siis on ühtlase liikumise seadus lineaarne seadus. Ümberpöördult, iga lineaarne seos suuruste t ja s vahel kujutab ühtlast liikumist. Tõepoolest, lineaarse seose puhul suuruste t ja s vahel on nende suuruste kasvud võrdelised ja järelikult liikumine ühtlane.

Märgime ts-tasapinnal punktid (t_1, s_1) ja (t_2, s_2). Võrrand

$$\frac{s - s_1}{t - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

kujutab siis neid kahte punkti läbivat sirgjoont. Seega

ühtlase liikumise graafikuks on sirgjoon.

Punktid (t_1, s_1) ja (t_2, s_2) määravad ühtlase liikumise graafiku täielikult. Seega

ühtlase liikumise käik on täielikult määratud kahe vaatlusega.

Ühtlase liikumise kiirus

Märkides ühtlase liikumise seaduses vahed $s_2 - s_1$ ja $t_2 - t_1$ vastavalt sümbolitega Δs ja Δt, saame ühtlase liikumise korral käidud tee pikkuse avaldise kujul

$$s = \frac{\Delta s}{\Delta t}(t - t_1) + s_1.$$

Seame endale ülesandeks selgitada suhte $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ mehaaniline tähendus. Selleks vaatleme korraga kahte ühtlast liikumist. Olgu nende liikumiste puhul ajavahemikus Δt käidud tee pikkused vastavalt $(\Delta s)_I$ ja $(\Delta s)_{II}$. Ühe ja sama ajavahemiku Δt puhul nimetame kiiremaks seda ühtlast liikumist, mille puhul käiakse ära pikem tee. Vaatleme veel kord neid kahte ühtlast liikumist. Kulugu nende puhul ühe ja sama pikkusega tee Δs käimiseks aega vastavalt $(\Delta t)_I$ ja $(\Delta t)_{II}$. Ühe ja sama käidud tee pikkuse puhul nimetame kiiremaks seda ühtlast liikumist, mille puhul tee Δs käiakse ära lühema aja jooksul. Antud seletustest näeme, et ühtlase liikumise kiirus v sõltub käidud tee pikkusest Δs ja selle käimiseks kulunud ajast Δt. Seejuures kiirus v suureneb käidud tee pikkuse Δs suurenemisel ajavahemiku muutumatuks jäädes ja suureneb ka selle käimiseks vajaliku aja Δt vähenemisel käidud tee pikkuse muutumatuks jäädes. Kuidas me kiirust ka defineeriksime, iga! juhul peab definitsioonist järelduma praegu formuleeritud kiiruse omadus. Lihtsaim sõltuvus, mille puhul argumendi Δs kasvamisel ka funktsioon kasvab, on võrdeline sõltuvus; lihtsaim sõltuvus, mille puhul argumendi Δt kasvamisel funktsioon kahaneb, on pöördvõrdeline sõltuvus. Toodud seletused viivad meid arusaamisele, et

ühtlase liikumise kiirus on eriliiki suurus, mis on võrdeline liikumisel käidud tee pikkusega ja pöördvõrdeline selle käimiseks kulunud ajaga.

Öeldu põhjal avaldub ühtlase liikumise kiirus kujul

$$const \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

See suurus ei sõltu sellest, m i s s u g u s t ajavahemikku Δt kasutatakse tema arvutamiseks: et Δs ja Δt on ühtlase liikumise puhul · v õ r d e l i s e d, siis nende suhe on j ä ä v. See suhe ei sõltu ka sellest, missugusest hetkest t arvates on loetud aja juurdekasv Δt: ühtlase liikumise puhul on kiirus igal hetkel üks ja seesama ehk

ühtlase liikumise kiirus on muutumatu.

Kiiruse mõõtühik

Kiiruse mõõtühikuks võtame niisuguse ühtlase liikumise kiiruse, mille puhul ajaühikus käidava tee pikkus võrdub ühe pikkusühikuga.

Niisiis, kui ühtlase liikumise puhul kulub 1 pikkusühikuga võrdse tee käimiseks 1 ajaühik, siis toimub liikumine kiirusega 1 kiirusühik. Järelikult, kui Δs pikkusühikuga võrdse tee käimiseks kulub 1 ajaühik, siis toimub liikumine kiirusega Δs kiirusühikut, ja kui Δs pikkusühikuga võrdse tee käimiseks kulub Δt ajaühikut, siis toimub liikumine kiirusega $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ kiirusühikut.

Näeme, et kirjeldatud viisil valitud kiirusühiku puhul avaldub ühtlase liikumise kiirus kujul

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

ja konstant eespool toodud kiiruse üldavaldises on 1.

Kiirust tähistame tähega v,* nii et ühtlase liikumise korral

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Toome mõned kiirusühikute n ä i t e d.

Kui pikkusühik on	ja ajaühik siis on	kiirusühiku tähis on
sentimeeter (cm)	sekund (sec)	1 cm/sec
meeter (m)	päev (d)**	1 m/d
kilomeeter (km)	tund (h)***	1 km/h

* Täht v on esimene täht kiiruse ladinakeelsest nimetusest *velocitas*.
** Täht *d* on esimene täht päeva ladinakeelsest nimetusest *dies*.
*** Täht *h* on esimene täht tunni ladinakeelsest nimetusest *hora*.

Ühtlase liikumise seaduse lihtsaim kuju

Asendades võrrandis

$$s = \frac{\Delta s}{\Delta t}(t - t_1) + s_1$$

käidud tee ja aja juurdekasvude suhte kiiruse sümboliga v, saame

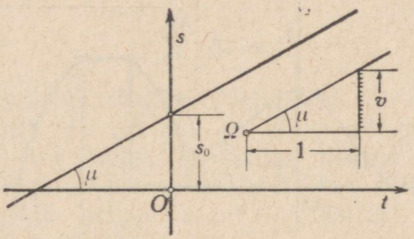
$$s = v(t - t_1) + s_1.$$

Asetsegu liikuv punkt hetkel $t = 0$ orbiidil kaugusel s_0 algus-punktist; siis

$$s_0 = v(0 - t_1) + s_1.$$

Lahutades selle võrduse eelmisest ja koondades, saame lõpuks

$$s = s_0 + vt.$$



Joon. 233.

See on ühtlase liikumise seadus tema lihtsaimal kujul. Esitades selle graafiliselt (joon. 233), näeme, et

ühtlase liikumise graafik on sirgjoon, mille algordinaat kujutab liikuva punkti lähtekaugust, tõus aga liikumise kiirust.

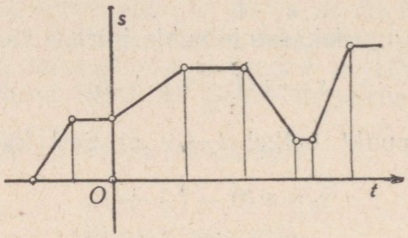
§ 79. MITTEÜHTLASE LIIKUMISE KIIRUS

Mitteühtlase liikumise definitsioon, seadus ja graafik

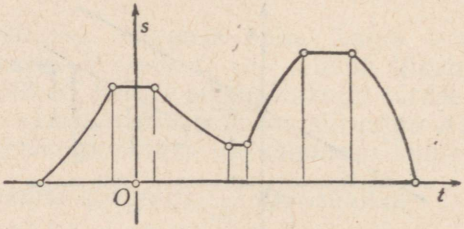
Kui liikumine toimub nõnda, et võrdseis, kuid muidu mistahes ajavahemikes käiakse ära üldiselt mittevõrdse pikkusega teed, siis nimetatakse liikumist mitteühtlaseks.

Mitteühtlase liikumise seadus e i o l e l i n e a a r n e, sest eespool nägime, et lineaarsele liikumisseadusele vastab ühtlane liikumiskäik. Mitteühtlase liikumise graafikuks *ts*-tasapinnal e i o l e s i r g j o o n. Kui liikumine on o s i t i ühtlane, siis ühtluse vahemikes on liikumise graafikuks s i r g j o o n e l õ i k ja kogu liiku-

mise graafik koosneb niisugustest lõikudest (joon. 234). Kui liikumine ei ole ühtlane ega kogu ulatuses ka ositi ühtlane, siis on ta graafikuks *ts*-tasapinnal kas kõvera kaar või ta graafik koosneb niisugustest kaartest (joon. 235).



Joon. 234.



Joon. 235.

Mitteühtlase liikumise keskmine kiirus antud ajavahemikus

Mitteühtlase liikumise puhul ei ole võimalik rääkida «liikumise kiirusest» ilma neile sõnadele midagi täiendavat lisamata, nagu seda võisime teha ühtlase liikumise puhul. Mitteühtlase liikumise puhul kujutleme kiirust muutuvana hetkest hetkesse ja sõnad «liikumise kiirus» saavad sisu alles siis, kui lisame juurde, missugusel hetkel me liikumist vaatleme. Küsime, mida tuleb mõista mitteühtlase liikumise puhul sõnade all «kiirus antud hetkel *t*»?

Vaatleme liikumist hetkele t järgnevas ajavahemikus Δt. Olgu selles ajavahemikus käidava tee pikkus Δs. Siis kujutab suhe

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

keskmist kiirust, millega liikumine toimub ajavahemikus Δt.

Mitteühtlase liikumise keskmine kiirus ajavahemikus Δt on kiirus, millega liikuv punkt ajavahemikus Δt käiks ära tõeliselt käidud tee Δs, kui liikumine oleks ühtlane.

Mitteühtlase liikumise hetkeline kiirus antud momendil

Vaatleme nüüd keskmisi kiirusi, mis on arvutatud hetkele t järgnevate üha väiksemate ajavahemike jaoks. Igaüks neist keskmistest kiirustest kujutab kiirust hetkel t ligikaudu ja annab seega otsitava kiiruse lähendi. Hetkele t jõuame seda lähemale, mida väiksema võtame Δt; keskmine kiirus on hetkelise kiiruse seda parem lähend, mida väiksem on ajavahemik Δt. Seega tekib küsimus, kas kiirust antud hetkel t ei saaks mõista murru $\Delta s : \Delta t$ väärtusena, kui $\Delta t = 0$. Kiirust hetkel t tuleks sel puhul märkida sümboliga

$$\left.\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|_{\Delta t = 0}.$$

Kuid see katse ei vii eesmärgile. Tõepoolest, kui $\Delta t = 0$, siis liikumise pidevuse tõttu ka $\Delta s = 0$ ja kõne all olev murd esineb kujul $0 : 0$, millel pole mõtet. Tuletades meelde funktsiooni väärtuse ja funktsiooni piirväärtuse kohta öeldut, võiksime teha katset mõista kiirust antud hetkel murru $\Delta s : \Delta t$ piirväärtusena, kui $\Delta t \to 0$; sümbolites:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Kõigil juhtudel, mis tegelikkuses esinevad, on suhtel $\Delta s : \Delta t$ kindel piirväärtus tõkestamatult väheneva Δt puhul, ja piirväärtuse definitsiooni kohaselt suhe $\Delta s : \Delta t$ kujutab kõne all olevat piirväärtust seda täpsemalt, mida väiksem on Δt. Neil kaalutlustel defineerime hetkelise kiiruse järgmiselt:

hetkeline kiirus momendil t on piirväärtus, millele läheneb keskmine kiirus hetkele t järgnevas ajavahemikus Δt selle ajavahemiku tõkestamatul lähenemisel nullile.

Et liikumisseaduseks oli seos

$$s = s(t)$$

ja tuletise definitsiooni järgi

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t),$$

siis

$$v = s'(t).$$

See annab meile järgmise eeskirja mitteühtlase liikumise hetkelise kiiruse arvutamiseks:

hetkeline kiirus momendil t on käidud tee pikkuse s tuletis aja t järgi (arvutatud vastava t väärtuse puhul).

Hetkelise kiiruse definitsioon ja sellest tulenev kiiruse arvutamise eeskiri hõlmab ka ühtlase liikumise kiirust. Tõepoolest, ühtlase liikumise puhul on käidud tee pikkus aja lineaarne funktsioon:

$$s = s_0 + vt,$$

kus v tähendab kiirust. Teiselt poolt annab tuletise leidmise reeglite rakendamine, et

$$s' = v.$$

Niisiis, ka ühtlase liikumise puhul jääb kehtima valem

$$v = s'(t).$$

Seega saame üldise, kõigil juhtudel kehtiva eeskirja kiiruse arvutamiseks:

kiirus on käidud tee pikkuse tuletis aja järgi.

§ 80. NÄHTUSKÄIGU KIIRUS

Eelmises paragrahvis arendatud mõttekäik, mis viis liikumise kiiruse mõistele, on tüüpiline ja kandub sõna-sõnalt üle teistele aja taustal vaadeldavatele nähtustele. Et nähtuskäigu kiirus on tähtsaim nähtuse ajalist kulgu iseloomustav näitaja, siis töötame selle mõiste üksikasjalikult ja hoolikalt välja, tuginedes eelmisest paragrahvist tuntud šabloonile. Selguse mõttes vaatleme algul konkreetset näidet, milleks valime tootmisprotsessi.

Tootmiskiirus

Olgu tegemist mõne tootmisseadeldisega, näiteks elektri-sulatusahjuga alumiiniumi tootmiseks, teraviljaveskiga, linaropsimismasinaga või mõne muu pidevalt töötava seadeldisega. Näidaku ajamõõtja vaatluse algul nulli ja olgu selle hetkeni seadeldise käikulaskmisest arvates toodetud ainehulk m_0. Igale hetkele t vastab siis kindel selle hetkeni toodetud ainehulk m nii, et m on aja funktsioon:

$$m = m(t).$$

Seost $m = m(t)$, mis määrab igale kulgenud ajale t vastava toodetud ainehulga m, nimetame tootmiskäigu seaduseks.

Seda seadust võib anda tabeli kujul, valemina või ka graafiliselt — tootmisgraafikuna.

Kui tootmine toimub nõnda, et võrdseis, kuid muidu mistahes ajavahemikes toodetakse võrdsed hulgad ainet, siis nimetame tootmiskäiku ühtlaseks.

Olgu Δt mingi ajavahemik ja Δm selles ajavahemikus toodetud ainehulk. Võttes rea üksteisele järgnevaid võrdseid ajavahemikke Δt, näeme, et 2-, 3-, ..., n-kordses vahemikus Δt toodetakse 2-, 3-, ..., n-kordne ainehulk Δm; seega

ühtlase tootmiskäigu puhul on toodetud ainehulgad võrdelised nende tootmiseks kulunud ajavahemikega.

Sellele tuginedes saame kergesti tuletada ühtlase tootmiskäigu seaduse.

Olgu nimelt

$$t_1,\ t_2 \text{ ja } t$$

kaks kindlat hetke ja üks vabalt valitud hetk ning olgu nendeks hetkedeks toodetud ainehulgad vastavalt

$$m_1,\ m_2 \text{ ja } m.$$

Siis ainehulgad $m - m_1$ ja $m_2 - m_1$ on võrdelised ajavahemikega $t - t_1$ ja $t_2 - t_1$, nii et

$$\frac{m - m_1}{t - t_1} = \frac{m_2 - m_1}{t_2 - t_1}.$$

See seos on kehtiv kõigi kokkukuuluvate t ja m väärtuste puhul ja on seega tootmiskäigu seaduseks.

Nagu näeme,

ühtlase tootmiskäigu seadus on lineaarne seadus.

Sellest järeldub, et

ühtlase tootmiskäigu graafikuks on sirgjoon.

Tähistades vahed $m_2 - m_1$ ja $t_2 - t_1$ vastavalt sümbolitega Δm ja Δt, kirjutame

$$m = \frac{\Delta m}{\Delta t}(t - t_1) + m_1.$$

Näitame, et suhet $\Delta m : \Delta t$ saab tõlgendada tootmiskiirusena.

Ühtlase tootmiskäigu kiiruse all mõistame eriliiki suurust, mis on võrdeline toodetud ainehulgaga ja pöördvõrdeline selle tootmiseks kulunud ajaga.

Selle definitsiooni kohaselt avaldub ühtlase tootmiskäigu kiirus kujul

$$const \cdot \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Tootmiskäigu kiiruse ühikuks valime niisuguse ühtlase tootmiskäigu kiiruse, mille puhul ajaühikus toodetakse üks ainehulga ühik.

Kasutades eespool toodud tootmiskiiruse avaldist selle kiiruse ühiku puhul, saame

$$const \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

Niisiis valitud ühiku puhul $const = 1$, seega ühtlase tootmiskäigu kiirus

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

Mõõtes ainehulka kilogrammides ja aega minutites, tähistame tootmiskiiruse ühikut 1 kg/min, mõõtes ainehulka tonnides ja aega päevades, tähistame tootmiskiiruse ühikut 1 t/d, jne. Automaatkangastelgede, elektrikeevitusmasina jne. töötamiskiirust võime mõõta ühikutes m/h. Tootmiskiiruse mõistet saab laiendada ka tükk-kaupade tootmisele. Ühikuteks on sel puhul tk./h (tükki tunnis) või tk./d (tükki päevas).

Kui eeldame, et tootmine toimub ühtlaselt kiirusega k ja hetkeks $t = 0$ oli toodetud ainehulk m_0, siis saame ühtlase tootmiskäigu seaduse kujul

$$m = m_0 + kt.$$

Ühtlase tootmise graafikuks tm-tasapinnas on sirgjoon; selle algordinaat m_0 kujutab toodetud aine lähtehulka (ainehulka hetkel $t = 0$), tõus aga tootmiskiirust.

Ütleme edasi:

kui võrdseis, kuid muidu mistahes ajavahemikes toodetakse mittevõrdsed hulgad ainet, siis nimetame tootmiskäiku mitteühtlaseks.

Sel juhul tootmiskäigu seadus e i o l e lineaarne, tootmiskäigu graafik e i o l e sirgjoon ja tootmiskiirus muutub hetkest hetkesse. Murd $\Delta m : \Delta t$ tähendab sel puhul tootmise k e s k m i s t k i i r u s t ajavahemikus Δt, see on kiirust, millega oleks kulgenud tootmine, kui ta oleks toimunud ü h t l a s e l t, andes ajavahemikus Δt produktsiooni Δm. See keskmine kiirus kujutab hetkelist kiirust momendil t seda täpsemalt, mida väiksem on ajavahemik Δt. Seepärast defineerime:

hetkeline tootmiskiirus momendil t on piirväärtus, millele läheneb keskmine kiirus hetkele t järgnevas ajavahemikus Δt selle ajavahemiku tõkestamatul lähenemisel nullile.

Sümbolites:

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

See annab eeskirja hetkelise tootmiskiiruse arvutamiseks:

hetkeline tootmiskiirus momendil t on toodetud ainehulga m tuletis aja t järgi (arvutatud vastava t väärtuse puhul):

$$k = m'(t).$$

See eeskiri hõlmab ka ühtlase tootmiskäigu juhtu. Tõepoolest, kui

$$m = m_0 + kt,$$

siis

$$m' = k.$$

Mingi ajaliselt kulgeva nähtuskäigu kiirus

Üldistame eelmise mõttekäigu tulemusi. Selleks vaatleme näiteks õhurõhu muutumist ajaga, puu pikkuse suurenemist ajaga, radioaktiivse aine hulga vähenemist ajaga aine lagunemise tõttu, vererõhu muutumist ajaga, elektrienergia üleliidulise toodangu muutumist ajaga või mingit muud ajaliselt kulgevat nähtust. Märgime sõltumatu muutuja (aja) tähega t ja sõltuva muutuja (õhurõhu, puu pikkuse, radioaktiivse aine hulga, vererõhu, elektrienergia toodangu) tähega f.

Seost $f = f(t)$, mis määrab ajale t vastava teise muutuja väärtuse f, nimetame nähtuskäiku valitsevaks seaduseks (või ka protsessi kulgemise seaduseks).

Kui nähtus kulgeb nõnda, et võrdseis, kuid muidu mistahes ajavahemikes sõltuv suurus f muutub võrdsete osade võrra, siis nimetame nähtuskäiku ühtlaseks.

Sel puhul on f kasvud võrdelised t kasvudega. Sellele toetudes saab tuletada ühtlase nähtuskäigu seaduse. Olgu nimelt

$$t_1,\ t_2 \text{ ja } t$$

kaks kindlat hetke ja üks vabalt valitud hetk. Vastaku neile hetkedele sõltuva muutuja väärtused

$$f_1,\ f_2 \text{ ja } f.$$

Siis kasvud $f - f_1$ ja $f_2 - f_1$ on võrdelised kasvudega $t - t_1$ ja $t_2 - t_1$, nii et

$$\frac{f - f_1}{t - t_1} = \frac{f_2 - f_1}{t_2 - t_1}.$$

See seos on kehtiv kõigi kokkukuuluvate t ja f väärtuste puhul ja on seega nähtuskäiku valitsevaks seaduseks. Nagu näeme,

iga ühtlaselt kulgevat nähtust valitseb lineaarne seadus.

Sellest järeldub, et

iga ühtlaselt kulgeva nähtuskäigu graafikuks on sirgjoon.

Tähistades vahed $f_2 - f_1$ ja $t_2 - t_1$ vastavalt sümbolitega Δf ja Δt, kirjutame

$$f = \frac{\Delta f}{\Delta t}(t - t_1) + f_1.$$

Suhe $\Delta f : \Delta t$ kujutab ühtlaselt kulgeva nähtuskäigu kiirust, mille ühikuks on f-ühik/t-ühik (lugeda: üks f-ühik ühe t-ühiku kohta).

Tähistades nähtuskäigu kiirust tähega k ja eeldades, et hetkel $t = 0$ on sõltuva muutuja väärtus f_0, saame nähtuskäiku valitseva seaduse kujul

$$f = f_0 + kt.$$

Ühtlase nähtuskäigu graafikuks tf-tasapinnas on sirgjoon; selle algordinaat kujutab sõltuva muutuja lähteväärtust, tõus aga nähtuskäigu kiirust.

Kui võrdseis, kuid muidu mistahes ajavahemikes funktsioon muutub mittevõrdsete osade võrra, siis on nähtuskäik mitteühtlane. Nähtuskäigu seadus pole siis lineaarne ja nähtuskäigu graafik pole sirgjoon. Murd $\Delta f : \Delta t$ tähendab sel puhul k e s k m i s t k i i r u s t ajavahemikus Δt.

Nähtuskäigu hetkelist kiirust momendil t defineerime kui piirväärtust, millele läheneb keskmine kiirus hetkele t järgnevas ajavahemikus Δt selle ajavahemiku tõkestamatul lähenemisel nullile. Sümbolites:

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t}$$

ehk, sõnastatult,

nähtuskäigu hetkeline kiirus momendil t on sõltuva muutuja tuletis aja järgi:

$$k = f'(t).$$

See eeskiri hõlmab ka ühtlase nähtuskäigu juhtu.

Nähtuskäigu kiiruse üldmõiste

Vaatleme mingit nähtuskäiku, kus sõltumatuks muutujaks e i o l e a e g, vaid mingi teine suurus. Näiteks vaatleme õhu tihedust δ sõltuvuses kõrgusest h, vere viskoossust η sõltuvuses temperatuurist T, juhtmes tekkivat soojushulka q sõltuvuses juhtme takistusest r. Valitsegu neid nähtuskäike seadused

$$\delta = \delta(h), \quad \eta = \eta(T), \quad q = q(r).$$

Kui need nähtused kulgevad ü h t l a s e l t, siis on neid valitsevad seadused lineaarsed. Seejuures

juurdekasvude suhe $\frac{\Delta\delta}{\Delta h}$ kujutab õhu tiheduse muutumise kiirust kõrguse suurenemisel;

juurdekasvude suhe $\frac{\Delta\eta}{\Delta T}$ kujutab vere viskoossuse muutumise kiirust temperatuuri tõusmisel;

juurdekasvude suhe $\frac{\Delta q}{\Delta r}$ kujutab soojushulga muutumise kiirust takistuse suurenemisel.

Suhe $\Delta\delta : \Delta h$ ei sõltu h ega Δh väärtusest, suhe $\Delta\eta : \Delta T$ ei sõltu T ega ΔT väärtusest, suhe $\Delta q : \Delta r$ ei sõltu r ega Δr väärtusest; kõik kolm vaadeldavat suhet on konstantsed.

Kui aga kõne all olevad nähtused ei kulge ühtlaselt, siis neid valitsevad seadused ei ole lineaarsed. Suhted

$$\frac{\Delta\delta}{\Delta h}, \quad \frac{\Delta\eta}{\Delta T} \text{ ja } \frac{\Delta q}{\Delta r}$$

kujutavad siis kõne all oleva kolme nähtuse keskmisi kiirusi vastavalt vahemikes Δh, ΔT ja Δr. Need keskmised kiirused sõltuvad nii argumentide h, T ja r kui ka nende juurdekasvude Δh, ΔT ja Δr väärtusest; need keskmised kiirused ei ole konstantsed.

Üldiselt:

sõltuvuse $f = f(x)$ puhul kujutab juurdekasvude suhe $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ funktsiooni f muutumise keskmist kiirust argumendi vahemikus Δx.

See suhe sõltub üldiselt nii argumendi x kui ka tema juurdekasvu Δx suurusest.

Moodustame eespool toodud suhete piirväärtused argumentide juurdekasvude tõkestamatul lähenemisel nullile. Siis

tuletis $\delta'(h)$ kujutab kiirust, millega muutub õhu tihedus kõrgusel h, kui kõrgus h muutub;

tuletis $\eta'(T)$ kujutab kiirust, millega muutub vere viskoossus temperatuuril T, kui temperatuur T muutub;

tuletis $q'(r)$ kujutab kiirust, millega muutub soojushulk q takistusel r, kui takistus r muutub.

Üldiselt:

sõltuvuse $f = f(x)$ puhul kujutab tuletis $f'(x)$ kiirust, millega muutub argumendi väärtusel x funktsioon f, kui argument x muutub.

Kiiruse kujutamine tuletisena hõlmab ka ühtlaselt kulgeva nähtuskäigu juhtu: sel puhul $\Delta f : \Delta x = const$ ja sama konstandiga on võrdne ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ ehk } f'.$$

Kõnesolevate nähtuste kiirusühikute sümbolid on vastavalt tihedusühik/pikkusühik, puaas/kraad, kalor/oom ja f-ühik/x-ühik (lugeda: üks tihedusühik ühe pikkusühiku kohta, üks puaas ühe kraadi kohta, üks kalor ühe oomi kohta, üks f-ühik ühe x-ühiku kohta).

Tuletis temperatuurikoefitsiendina

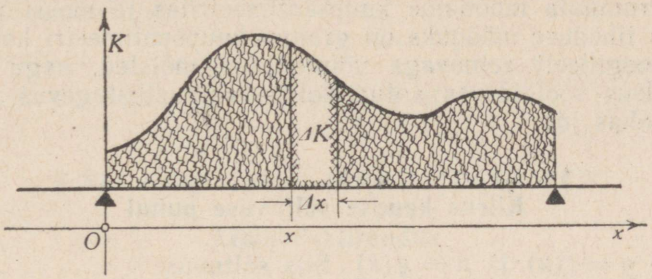
Füüsikas, keemias ja tehnilises mehaanikas nimetatakse kiirusi sageli koefitsientideks, eriti kui sõltumatuks muutujaks on temperatuur. Nii räägime näiteks metalli joonpaisumiskoefitsiendist, gaasi ruumpaisumiskoefitsiendist, määrdeõli viskoossuse temperatuurikoefitsiendist, soola lahustuvuse temperatuurikoefitsiendist, vedeliku murdumisnäitaja temperatuurikoefitsiendist jne.

Olgu x mingi temperatuurist t sõltuv suurus, näiteks metallvarda pikkus, gaasi ruumala, määrdeõli viskoossus, mõrusoola lahustuvus, väävelsüsiniku murdumisnäitaja. Siis $x = x(t)$. Vastaku temperatuuridele t_1 ja t_2 muutuja x väärtused x_1 ja x_2. Temperatuuri juurdekasvule $t_2 - t_1$ vastab siis x juurdekasv $x_2 - x_1$. Suhe $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ annab suuruse x keskmise juurdekasvu temperatuurivahemikus $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$; see on suuruse x juurdekasv, mis on arvutatud temperatuuri ühekraadise juurdekasvu kohta. See suhe on suuruse x keskmiseks temperatuurikoefitsiendiks vahemikus $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Juurdekasvu sümboli Δ kaudu saame seda kirjutada ka kujul $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Minnes üle piirile eeldusel, et $\Delta t \to 0$, saame tuletise $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$ näol suuruse temperatuurikoefitsiendi temperatuuril $t°$.

Tuletise teisi füüsikalisi tõlgendusi

Kiiruse mõiste käsitlemisel lähtusime eespool alati mõne konkreetse, reaalselt kulgeva protsessi vaatlemisest. Niisuguseks protsessiks võib olla näiteks värtna pöörlemine, maapinna soojenemine, taime kasvamine, suurvee alanemine, auru paisumine jne. Me nägime, et iga niisuguse nähtuse kiirus avaldub matemaatiliselt alati tuletisena. Et iga protsessi kõige olulisemaks karakteristikuks on tema kulgemise kiirus, siis näeme, et tuletise mõiste on tähtsaimaks vahendiks kõigi liikumiste ja muutumiste uurimisel: tuletise mõiste kaudu jõuame nähtuste dünaamika mõistmisele.

Tuletise mõiste leiab aga laialdast rakendamist ka muutumatult püsiva, oleleva uurimisel, see tähendab *nähtuste staatika küsimuste käsitlemisel*: paljud siin vajalikud mõisted ei ole küll seotud meid ümbritsevas reaalsuses tegelikult kulgevate protsessidega, on aga oma loomult *tuletised*. Toome mõned näited.



Joon. 236.

Näide 1. Olgu tegemist mingi mitteühtlaselt koormatud kandjaga (joon. 236). Küsime, mida mõista *koormuse intensiivsuse* all kohas abstsissiga x? Selle mõiste juurde jõudmiseks vaatleme kandja osa abstsisside x ja $x+\Delta x$ vahel. Lasugu sel kandja osal koormus ΔK. Siis tuleb sellel kandja lõigul jooksva pikkusühiku kohta koormus $\Delta K : \Delta x$. See suhe on *keskmine koormuse intensiivsus* lõigul Δx. Laseme nüüd mõttes lõigul Δx tõkestamatult väheneda ja määrame piirväärtuse, millele seejuures läheneb keskmine koormuse intensiivsus:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x}.$$

See arv on koormuse K tuletis kauguse x järgi; ta annabki koormuse intensiivsuse kohal x.

Kui pikkust mõõdame meetrites ja koormust tonnides, siis koormuse intensiivsuse mõõduks on tonn meetri kohta.

Näide 2. Olgu tegemist mõne mittehomogeense, s. t. massiga mitteühtlaselt täidetud kehaga, näiteks maakeraga. Küsime, mida mõista *aine tiheduse* all mingis selle keha sees võetud kohas?

Selle mõiste juurde jõudmiseks ümbritseme näidatud koha mingi kuitahes väikese ja mistahes kujulise kinnise pinnaga. Olgu selle pinnaga piiratud ruumala ΔV ja sisaldugu ruumalas ΔV mass ΔM. Siis tuleb selles ruumalas ruumalaühiku kohta mass $\Delta M : \Delta V$. See suhe on keha aine *keskmine tihedus* ruumalas ΔV. Laseme nüüd mõttes ruumalal ΔV tõkestamatult

väheneda ja määrame piirväärtuse, millele seejuures läheneb keskmine tihedus:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

See arv on massi tuletis ruumala järgi; ta annabki aine tiheduse vaadeldavas kohas.

Kui ruumala mõõdame kuupsentimeetrites ja massi grammides, siis tiheduse mõõduks on gramm kuupsentimeetri kohta.

Analoogiliselt eelnevaga võime luua mõisted, nagu näiteks vee soolsus soolajärves antud kohas, valgustustugevus töölaual antud kohas jne.

Kiirus kaudse sõltuvuse puhul

Olgu $y = f(u)$ ja $u = g(x)$. Siis sõltuvus
$y = f(u)$ annab y muutumise pildi vaadelduna u taustal,
$u = g(x)$ „ u „ „ „ x „
Tekib küsimus, missugune on y muutumise pilt, kui seda muutumist vaadelda x taustal. Vastuse annab valem

$$y = f[g(x)].$$

Tuletis
y'_u annab y muutumise kiiruse, kui y-d vaadelda u taustal,
u'_x „ u „ „ „ u-d „ x „
Tekib küsimus, missugune on y muutumise kiirus, kui seda muutumist vaadelda x taustal. Vastuse annab valem

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Üleminekut u-vaatlustaustalt x-vaatlustaustale võib vaadelda kui argumendi u teisendamist valemi $u = g(x)$ järgi. Valem

$$y = f[g(x)]$$

annab siis funktsiooni y teisendamise eeskirja üleminekuks argumendilt u argumendile x, ja valem

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

vastavalt funktsiooni y muutumise kiiruse teisendamise eeskirja. Niisiis:

funktsiooni funktsiooni tuletise valemis kajastub kiiruste ümberarvutamise eeskiri üleminekuks ühelt vaatlustaustalt teisele.

Näide. Vaatleme ringi pindala S muutumist raadiuse r muutumise taustal. Sel puhul $S = \pi r^2$ ja $S' = 2\pi r$. See tähendab, et

ringi pindala tuletis raadiuse järgi on võrdne ringi ümbermõõduga.

Suurenegu metallketta raadius r temperatuuri t tõusmisel valemi $r = r_0(1 + \alpha t)$ järgi, kus r_0 on raadiuse väärtus temperatuuril 0° ja α on joonpaisumiskoefitsient. Siis $r'_t = r_0\alpha$. Kui nüüd vaatleme ketta pindala muutumist temperatuuri muutumise taustal, siis näeme, et kiirus, millega suureneb ketta pindala temperatuuri tõusmisel, on

$$S'_t = S'_r \cdot r'_t = 2\pi r \cdot r_0\alpha$$

ehk

$$S'_t = 2\pi r_0^2\alpha(1 + \alpha t).$$

§ 81. KÕRGEMAT JÄRKU TULETISED

Liikumiskiirendus

Olgu teada liikumisseadus $s = s(t)$. See annab liikumiskäigu. Võttes tuletise, saame kiiruskäiku valitseva seaduse

$$v = s'(t).$$

Üldiselt on v ajaga muutuv suurus. Kiirus, millega see suurus muutub, on

$$w = v' = [s'(t)]'$$

ehk, lihtsamalt kirjutatult,

$$w = v' = s''(t).$$

Kiirust, millega muutub liikumiskiirus, nimetatakse liikumiskiirenduseks.

Nagu näeme,

liikumiskiirendus on liikumiskiiruse tuletis aja järgi

ehk teisiti sõnastatult,

liikumiskiirendus on käidud tee pikkuse s teine tuletis aja t järgi.

Liikumiskiirenduse ühikuks on kiirusühik ajaühiku kohta, näiteks

cm/sec/sec, km/h/h, m/min/min

(lugeda vastavalt: sentimeeter sekundi kohta sekundis, kilomeeter tunni kohta tunnis, meeter minuti kohta minutis). Lühemas, sümboolses kirjutusviisis märgime neid ühikuid

cm/sec^2, km/h^2, m/min^2

(lugeda vastavalt: sentimeeter sekundi ruudu kohta, kilomeeter tunni ruudu kohta, meeter minuti ruudu kohta).

Kiirenduse mõiste erakordne tähtsus mehaaniliste liikumis-

nähtuste käsitlemisel põhineb sellel, et liikumiskiirendus on lihtsas võrdelises seoses liikumist põhjustavate teguritega, see on liikumist määravate jõududega.

Tuletiste tähistusviis Newtoni järgi

Kujutleme mõnda ajaliselt kulgevat protsessi. Tähistame aega tähega t ja temast sõltuvat muutujat tähega s. Olgu protsessi käiku valitsev seadus

$$s = f(t).$$

Siis on protsessi kulgemiskiirus ja -kiirendus muutuja s esimene ja teine tuletis aja järgi, nagu eespool nägime. Newtoni poolt kasutusele võetud tähistusviisi kohaselt märgime tuletisi punktidega muutuva suuruse tähise kohal ning kirjutame ajaliselt kulgeva protsessi kiirust ja kiirendust vastavalt $\dot{s}$ ja $\ddot{s}$. See tähistusviis on viimastel aastakümnetel eriti laialdaselt kasutusele võetud mehaanikas ning leiab järjest rohkem kasutamist ka matemaatikas.

Näide. Olgu tegemist liikumisega, mille seaduseks on

$$s = \frac{1}{2}a(t-1)^2 + b.$$

Siis kiirus

$$\dot{s} = \frac{1}{2}a \cdot 2(t-1) \cdot 1 + 0 = a(t-1)$$

ja kiirendus

$$\ddot{s} = a \cdot 1 = a.$$

Kõrgemat järku tuletised

Olgu antud mingi funktsioon $f(x)$. Definitsiooni kohaselt selle funktsiooni tuletis

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Funktsiooni tuletis näitab funktsiooni muutumise kiirust või funktsiooni muutumise intensiivsust argumendi muutumisel. Võttes funktsiooni $f(x)$ asemel lähtefunktsiooniks $f'(x)$, saame funktsiooni tuletise tuletise ehk, lühemalt, funktsiooni teise tuletise:

$$[f'(x)]' = f''(x).$$

Funktsiooni teine tuletis näitab funktsiooni muutumise kiirendust argumendi muutumisel. Sama teed edasi minnes saame funktsiooni kolmanda tuletise $[f''(x)]' = f'''(x)$, edasi neljanda tuletise, mida kirjutame $f^{IV}(x)$, siis viienda tuletise $f^{V}(x)$ jne. n-ndat järku tuletise tähistame $f^{(n)}(x)$ abil. Neile kõrgemat järku tuletistele ei ole võimalik anda käegakatsutavat konkreetset tõlgendust. Sellest hoolimata etendavad nad tähtsat osa funktsioonide omaduste uurimisel.

Toome mõned näited funktsiooni kõrgemat järku tuletiste kohta.

Näide 1. Olgu $f(x) = x^m$, kus m on positiivne täisarv. Siis

$$(x^m)' = mx^{m-1}, \quad (x^m)'' = m(m-1)x^{m-2}, \ldots,$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}, \text{ kus } n < m,$$

ja

$$(x^m)^{(m)} = m(m-1)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = m!$$

Et $m!$ on konstant, siis $(x^m)^{(m+1)} = 0$, selle kui konstandi tuletis on jälle null jne. Seega kõik funktsiooni x^m tuletised alates $(m+1)$-ndast tuletisest on nullid.

Öeldust järeldub, et m-nda astme polünoomi m-s tuletis on konstantne, kõik kõrgemat järku tuletised nullid.

Näide 2. Olgu $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Siis $f'(x) = (-1)x^{-2}$, $f''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$ jne., $f^{(n)} = (-1)(-2)\ldots(-n)x^{-(n+1)}$ ehk

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

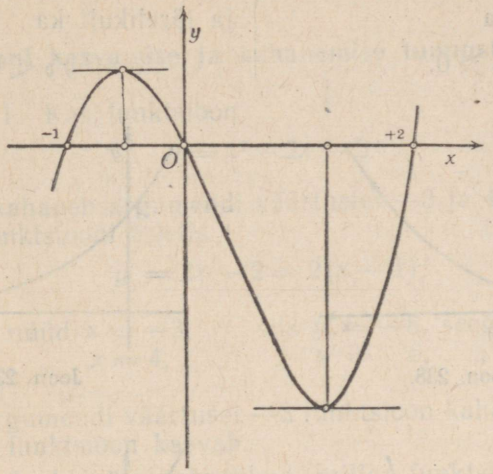
PEATÜKK XXIII

TULETISE MÕISTE RAKENDUSI FUNKTSIOONI KÄIGU UURIMISEL

Teadus loob meid ümbritsevast objektiivsest reaalsusest tõetruu pildi, vaadeldes seal toimuvaid nähtusi üksteisega seostatuna, *järgides ühe nähtuse kulgemist teise nähtuse taustal*. Matemaatiliselt avaldub niisuguse vaatlemise tulemus alati kahe suuruse teatava funktsionaalse seosena kujul $y = f(x)$. Ainsaks nähtuse *staatikasse* puutuvaks küsimuseks on seejuures küsimus: missugune on funktsiooni väärtus argumendi etteantud väärtusel? Nähtuse *dünaamikat* puudutavate küsimuste hulk on märksa suurem. Siia kuuluvad näiteks meile juba tuttavad küsimused: kui suur on $\lim\limits_{x \to a} f(x)$? Kui suur on funktsiooni muutumise kiirus $f'(a)$? Siia kuuluvad aga ka küsimused, mis iseloomustavad funktsiooni muutumise *kvalitatiivset külge*, nagu näiteks küsimused: kas argumendi läbiminekul väärtusest x_0 funktsioon *kasvab* või *kahaneb*? Kas kasvamine või kahanemine toimub *kiirenevalt* või *aeglustuvalt*? Siia kuulub ka küsimus, missuguse argumendi väärtuseni funktsioon muutub kasvades ja sealt peale kahanedes või vastupidi ehk, kui kasutame vastavaid oskussõnu, missugusel argumendi väärtusel funktsioon omab *maksimumi* või *miinimumi*. Kõik need küsimused on oma loomult *funktsiooni käitumise küsimused*. Kui funktsiooni muutumiskäik on esitatud graafiliselt, siis võib neile küsimustele vastuse saada otse jooniselt. Näitena on joonisel 237 kujutatud polünoomi $y = x(x + 1)(x - 2)$ ehk $y = x^3 - x^2 - 2x$ käik. Näeme, et argumendi väärtustel $x < -0{,}5$ (ümmarguselt) funktsiooni käigukõver kõikjal tõuseb ja funktsioon y kasvab; see kestab, kuni argument jõuab väärtuseni $x \approx -0{,}5$, kus funktsiooni käigukõver omab *pöördepunkti* ordinaadiga $y \approx 0{,}6$. Argumendi edasisel kasvamisel funktsiooni käigukõver langeb ja funktsioon kahaneb. See kestab, kuni argument jõuab väärtuseni $x \approx 1{,}2$, kus funktsiooni käigukõver omab teist *pöördepunkti* ordinaadiga $y \approx -2{,}3$. Siit peale funktsioon jälle kasvab. Funkt-

siooni käigukõvera esimene pöördepunkt vastab funktsiooni maksimumile, teine funktsiooni miinimumile.

Seame endale ülesandeks leida vahendid funktsioonide käitumise küsimuste lahendamiseks juhul, kui funktsioon on antud oma avaldisega. Küsimusi käsitleme näitlikult, toetudes funktsiooni käigukõverale.



Joon. 237.

§ 82. FUNKTSIOONI KASVAMINE JA KAHANEMINE

Funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnused

Leiame tunnused, mille järgi saab otsustada, kas argumendi läbiminekul mõnest antud väärtusest x_0 funktsioon $f(x)$ kasvab või kahaneb või vahetab oma muutumise suunda (enne kasvab ja siis kahaneb või, vastupidi, enne kahaneb ja siis kasvab). Lühidalt öeldes, uurime funktsiooni käitumist argumendi läbiminekul väärtusest x_0 ehk, veel lühemas sõnastuses, uurime funktsiooni $f(x)$ käitumist argumendi väärtusel x_0 ehk funktsiooni $f(x)$ käitumist punktis $x = x_0$. Seejuures eeldame alati, et argument muutub kasvades.

Kasvaval funktsioonil on tõusev, kahaneval funktsioonil aga langev käigukõver (joon. 238 ja 239). Võtame nii kasvava kui ka kahaneva funktsiooni käigukõveral mingi punkti, näiteks punkti P_0 abstsissiga x_0 (joon. 240 ja 241) ja joonestame selles punktis kõverale puutuja. Siis näeme, et

k a s v a v a funktsiooni ja seega tõusva käigukõvera puhul puutuja tõusunurk

τ on t e r a v n u r k,

seepärast

$$\tan\tau > 0$$

ja järelikult ka

$$y'_0 > 0.$$

k a h a n e v a funktsiooni ja seega langeva käigukõvera puhul puutuja tõusunurk

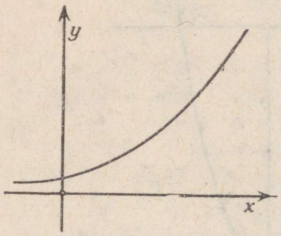
τ on n ü r i n u r k,

seepärast

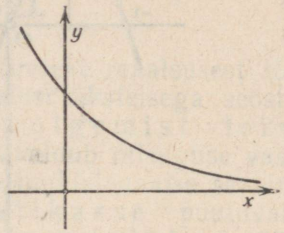
$$\tan\tau < 0$$

ja järelikult ka

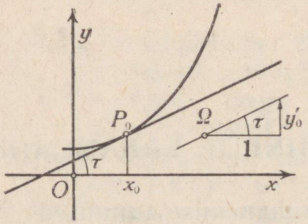
$$y'_0 < 0.$$



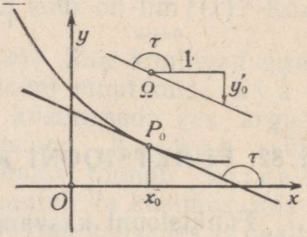
Joon. 238.



Joon. 239.



Joon. 240.



Joon. 241.

Niisiis:

kui argumendi väärtusel x_0 funktsioon k a s v a b, siis on ta tuletis y'_0 p o s i t i i v n e; kui argumendi väärtusel x_0 funktsioon k a h a n e b, siis on ta tuletis y'_0 n e g a t i i v n e.

Ümberpöördult: kui y'_0 on positiivne, siis funktsiooni käigukõvera puutuja tõus on positiivne, punktis P_0 käigukõverale tõmmatud puutuja tõuseb, seega peab punktis P_0 ka käigukõver ise tõusma ja järelikult funktsioon y kasvama; kui y'_0 on negatiivne, siis funktsiooni käigukõvera puutuja tõus on negatiivne, punktis P_0 käigukõverale tõmmatud puutuja langeb, seega peab punktis P_0 ka käigukõver ise langema ja järelikult funktsioon y kahanema. Nii jõuame funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnustele:

funktsioon kasvab argumendi antud väärtusel, kui tuletis sellel argumendi väärtusel on positiivne; funktsioon kahaneb argumendi antud väärtusel, kui tuletis sellel argumendi väärtusel on negatiivne.

Argumendi vahemikku, mille igas punktis funktsioon kasvab, nimetatakse lühidalt funktsiooni k a s v a m i s v a h e m i k u k s. Analoogiliselt on defineeritud funktsiooni k a h a n e m i s v a h e m i k.

Funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnuste rakendusi

N ä i d e 1. Kas funktsioon

$$y = x^2 - 2x - 5$$

kasvab või kahaneb argumendi väärtustel -3 ja 4?

Antud funktsiooni tuletis

$$y' = 2x - 2 = 2(x - 1).$$

Kui nüüd $x = -3$, siis $y' = -8$, seega $y' < 0$;
„ „ $x = 4$, „ $y' = 6$, „ $y' > 0$.

Järelikult argumendi väärtusel -3 funktsioon kahaneb, argumendi väärtusel 4 funktsioon kasvab.

N ä i d e 2. Leiame vahemikud, milles funktsioon

$$y = x^3 - 4{,}5x^2 - 30x$$

kasvab ja milles ta kahaneb.

Antud funktsiooni tuletis on

$$y' = 3x^2 - 9x - 30.$$

Kirjutame saadud avaldise kujul

$$y' = 3(x^2 - 3x - 10)$$

ehk, lahutades sulgudes seisva trinoomi tegureiks, kujul

$$y' = 3(x + 2)(x - 5).$$

See avaldis muutub nulliks, kui $x = -2$ ja kui $x = 5$.

Vaatleme vahemikke

$$-\infty < x < -2; \quad -2 < x < 5 \quad \text{ja} \quad 5 < x < +\infty.$$

Iga x puhul, mis kuulub esimesse vahemikku, on kumbki sulgavaldis negatiivne, seega nende korrutis positiivne ja $y' > 0$. Iga x puhul, mis kuulub teise vahemikku, on esimene sulgavaldis

positiivne, teine aga negatiivne, seega nende korrutis negatiivne ja $y' < 0$. Iga x puhul, mis kuulub kolmandasse vahemikku, on nii esimene kui ka teine sulgavaldis positiivne, seega nende korrutis positiivne ja $y' > 0$.

Öeldust järeldame, et esimeses vahemikus funktsioon y kasvab, teises kahaneb ja kolmandas kasvab.

Vaatleme veel lähemalt funktsiooni muutumist argumendi läbiminekul väärtustest $x_1 = -2$ ja $x_2 = 5$.

Argumendi läbiminekul väärtusest $x_1 = -2$ on tuletis esiteks positiivne, siis negatiivne; see tähendab, et funktsioon esiteks kasvab, siis kahaneb. Järelikult omab funktsioon argumendi väärtusel -2 oma suurimat väärtust, võrreldes naabruses olevatega.

Argumendi läbiminekul väärtusest $x_2 = 5$ on tuletis esiteks negatiivne, siis positiivne; see tähendab, et funktsioon esiteks kahaneb, siis kasvab. Järelikult omab funktsioon argumendi väärtusel 5 oma väikseimat väärtust, võrreldes naabruses olevatega. Me ütleme: argumendi väärtusel $x = -2$ on funktsioonil maksimum, argumendi väärtusel $x = 5$ on funktsioonil miinimum. Väärtuste -2 ja 5 paigutamisel x asemele y avaldisse saame y maksimum- ja miinimumväärtused:

$$y_{max} = (-2)^3 - 4{,}5 \cdot (-2)^2 - 30 \cdot (-2) = 34$$

ja

$$y_{min} = 5^3 - 4{,}5 \cdot 5^2 - 30 \cdot 5 = -137{,}5.$$

§ 83. FUNKTSIOONI EKSTREEMUMID

Funktsiooni maksimumi ja miinimumi definitsioon

Punkti x_0 ümbruse all mõistame kuitahes lühikest vahemikku, millesse kuulub väärtus x_0.

Olgu x mingi x_0 ümbrusse kuuluv x_0-st erinev argumendi väärtus. Sel puhul ütleme, et iga $f(x)$ on $f(x_0)$ naabersväärtus.

Vaatleme joonisel 242 kujutatud funktsiooni käigukõverat. Punkt P_0 on selle kõvera pöördepunktiks, täpsemalt haripunktiks. Siin $f(x_0)$ on suurem kõigist oma naabersväärtustest $f(x)$ ja me ütleme, et arv $f(x_0)$ on funktsiooni $f(x)$ maksimum*.

Ka joonisel 243 on kujutatud mingi funktsiooni käigukõver. Punkt P_0 on ka selle kõvera pöördepunktiks, kuid mitte haripunktiks, vaid lohupunktiks. Siin $f(x_0)$ on väiksem kõigist oma naabersväärtustest $f(x)$ ja me ütleme, et arv $f(x_0)$ on funktsiooni $f(x)$ miinimum**.

---

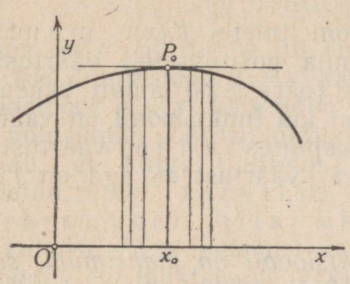
* Lad. k. *maximus* — kõige suurem.

** Lad. k. *minimus* — kõige väiksem.

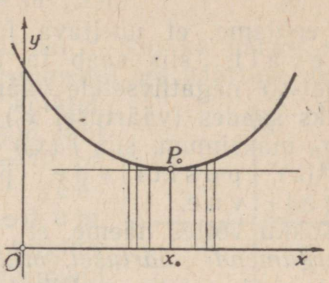
Niisiis:

kui funktsioon $y = f(x)$ omab argumendi väärtusel x_0 kõigist naabervääртustest suuremat väärtust, siis nimetatakse seda väärtust funktsiooni maksimumiks;

kui funktsioon $y = f(x)$ omab argumendi väärtusel x_0 kõigist naabervääртustest väiksemat väärtust, siis nimetatakse seda väärtust funktsiooni miinimumiks.



Joon. 242.



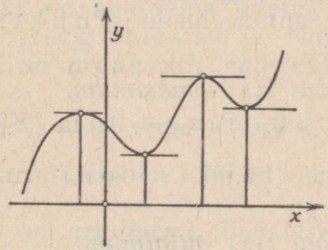
Joon. 243.

Esimesel juhul kirjutame, et

$$y_{max} = f(x_0),$$

teisel juhul vastavalt, et

$$y_{min} = f(x_0).$$



Joon. 244.

Funktsiooni maksimumid ja miinimumid moodustavad koos funktsiooni e k s t r e e m u m i d*. Joonisel 244 kujutatud funktsiooni käigujoonel on neli ekstreemumit: kaks maksimumi ja kaks miinimumi.

---

* Lad. k. *extremus* — äärmine.

Funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnused

Olgu funktsioonil $y = f(x)$ maksimum argumendi väärtusel x_0. Siis leidub ikka kuitahes väike positiivne arv h, nii et argumendi väärtusel $x_0 - h$ funktsioon $f(x)$ kasvab, argumendi väärtusel $x_0 + h$ funktsioon $f(x)$ kahaneb. Järelikult

$$f'(x-h) > 0, \qquad f'(x+h) < 0.$$

Kui eeldame, et uuritava funktsiooni tuletis $f'(x)$ muutub pidevalt, siis saab ta üle minna positiivsetelt väärtustelt (enne x_0) negatiivsetele väärtustele (pärast x_0) ainult vahepeal nulliks saades (väärtusel x_0). Seega: kui funktsioonil on väärtusel x_0 maksimum, siis $f'(x_0) = 0$, kusjuures enne väärtust x_0 on $f'(x)$ positiivne, pärast väärtust x_0 aga on $f'(x)$ negatiivne.

Kokku võttes näeme, et

argumendi väärtusel, millel funktsioonil on maksimum, saab funktsiooni tuletis nulliks; argumendi läbiminekul nimetatud väärtusest muutub funktsiooni tuletise märk plussist miinuseks.

Ümberpöördult:

kui argumendi väärtusel x_0 on funktsiooni tuletis null ja läbiminekul sellest väärtusest tuletise märk muutub plussist miinuseks, siis on $f(x_0)$ funktsiooni maksimum.

Tõepoolest, eelduse järgi $f'(x_0 - h) > 0$, seevastu aga $f'(x_0 + h) < 0$; x_0-st väiksematel argumendi väärtustel funktsioon kasvab, x_0-st suurematel argumendi väärtustel funktsioon kahaneb. Seega on $f(x_0)$ suurem oma naabruses olevatest väärtustest ja on seega funktsiooni maksimum.

Eespool tõestatu annab meile funktsiooni maksimumi tunnuse:

$f(x_0)$ on funktsiooni $f(x)$ maksimum,
kui $f'(x_0 - h) > 0$, $f'(x_0) = 0$ ja $f'(x_0 + h) < 0$.

Samal viisil tõestame funktsiooni miinimumi tunnuse:

$f(x_0)$ on funktsiooni $f(x)$ miinimum,
kui $f'(x_0 - h) < 0$, $f'(x_0) = 0$ ja $f'(x_0 + h) > 0$.

Neis funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnustes on oluliseks osaks funktsiooni tuletise märgi muutumine. Tingimusest, et tuletis oleks null, ei piisa selleks, et funktsioonil oleks ekstreemväärtus. Selle asjaolu selgitamiseks toome järgmise näite.

Näide. Olgu antud funktsioon $y = x^3$. Selle funktsiooni tuletis $y' = 3x^2$. Näeme, et tuletis muutub nulliks argumendi väärtusel $x_0 = 0$, kuid sel väärtusel ei ole funktsioonil y maksi-

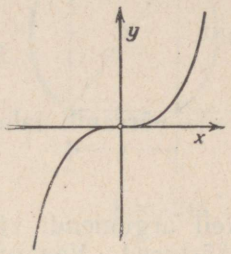
mumi ega miinimumi, nagu nähtub kuupparabooli joonisest (joon. 245). Väärtusel $x_0 = 0$ saab uuritava funktsiooni tuletis küll nulliks, kuid sellest väärtusest üleminekul t a e i m u u d a o m a m ä r k i. Tõepoolest, enne väärtust x_0, kui $x = 0 - h$, on

$$y' = 3(0-h)^2 = 3(-h)^2 = 3h^2 > 0,$$

pärast väärtust x_0, kui $x = 0 + h$, on

$$y' = 3(0+h)^2 = 3h^2 > 0.$$

Seega on y' positiivne nii enne väärtust x_0 kui ka pärast seda väärtust: funktsioon $y = x^3$ kasvab argumendi iga väärtuse puhul, funktsiooni $y = x^3$ käigujoon tõuseb kõikjal, tal pole ühtki pöördepunkti. Käsitletud juht näitab, et kuigi tingimus $f'(x_0) = 0$ on täidetud, e i t a r v i t s e $f(x_0)$ s e e - p ä r a s t v e e l o l l a e k s t r e e m u m.



Joon. 245.

Tuletise $f'(x)$ pidevust eeldades nägime eespool, et funktsiooni $f(x)$ ekstreemumi puhul peab $f'(x)$ olema null. Vastupidine väide ei pea aga paika. Tingimus, et $f'(x_0)$ oleks null, on küll t a r v i l i k, kuid mitte p i i s a v selleks, et funktsioonil oleks argumendi väärtusel x_0 ekstreemum.

Eespool formuleeritud funktsiooni ekstreemumite tunnustele saab anda kompaktsema kuju. Näeme nimelt, et kui funktsioon läbib m a k s i m u m i, siis ta tuletis l ä b i b n u l l i, minnes üle p o s i t i i v s e t e l t väärtustelt n e g a t i i v s e t e l e, see tähendab v ä h e n e d e s. Tuletise vähenemise tunnuseks on aga tema tuletise, see on funktsiooni t e i s e t u l e t i s e n e g a t i i v s u s. Niisiis

funktsioonil $f(x)$ on argumendi väärtusel $x = x_0$ miinimum, kui

$$f'(x_0) = 0 \quad ja \quad f''(x_0) < 0.$$

Rakendades sama mõttekäiku m i i n i m u m i juhule, näeme, et

funktsioonil $f(x)$ on argumendi väärtusel $x = x_0$ miinimum, kui

$$f'(x_0) = 0 \quad ja \quad f''(x) > 0.$$

Ekstreemväärtuste leidmise ülesandeid

Ü l e s a n n e 1. On antud funktsioon

$$y = \frac{1}{6}(x^3 - 12x^2 + 36x - 7).$$

Leida selle funktsiooni maksimumid ja miinimumid.

L a h e n d u s. Moodustame funktsiooni esimese ja teise tuletise:

$$y' = \frac{1}{6}(3x^2 - 24x + 36) = \frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12);$$

$$y'' = \frac{1}{2}(2x - 8) = x - 4.$$

Võrrutame esimese tuletise nulliga:

$$\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 12) = 0.$$

Siit

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Selle võrrandi lahenditeks on

$$x_1 = 2, \qquad x_2 = 6.$$

Neil argumendi väärtustel v õ i v a d funktsioonil olla ekstreemväärtused. Vaatame, k a s o n tegemist ekstreemväärtustega, ja kui on, siis m i s s u g u s t e g a n i m e l t. Selleks uurime teise tuletise märki saadud argumendi väärtustel:

$$y''\Big|_{x=2} = 2 - 4 = -2 < 0;$$

$$y''\Big|_{x=6} = 6 - 4 = 2 > 0.$$

Seega väärtusel $x_1 = 2$ on antud funktsioonil maksimum, väärtusel $x_2 = 6$ miinimum. Niisiis

$$y_{max} = \frac{1}{6}(2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 - 7) = 4\frac{1}{6}$$

ja

$$y_{min} = \frac{1}{6}(6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 - 7) = -1\frac{1}{6}.$$

Ü l e s a n n e 2. Ümmargusest puutüvest, mille läbimõõt on d, tahetakse välja saagida maksimaalse kandejõuga ristkülikukujulise ristlõikega tala (joon. 246). Kuidas tuleb valida ristlõike mõõtmed, kui on teada, et tala kandejõud on võrdeline tala ristlõike alusega ja ristlõike kõrguse ruuduga?

L a h e n d u s. Märgime tala ristlõike aluse tähega x ja kõrguse tähega h. Tala kandejõud on siis

$$J = const \cdot xh^2.$$

Võttes suuruse x argumendiks, avaldame suuruse J ainult selle argumendi funktsioonina.

Jooniselt näeme, et $x^2 + h^2 = d^2$, seega $h^2 = d^2 - x^2$, ja seepärast

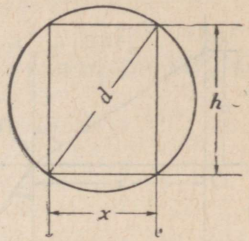
$$J = const \cdot x(d^2 - x^2).$$

Saadud avaldis on kahe teguri korrutis; esimene tegur on konstantne, järelikult võib suurusel J olla maksimum ainult siis, kui on maksimum J avaldise muutuval osal

$$u = x(d^2 - x^2)$$

ehk

$$u = d^2x - x^3.$$



Joon. 246.

Selle avaldise esimene ja teine tuletis on vastavalt

$$u' = d^2 - 3x^2$$

ja

$$u'' = -6x.$$

Võrrutame esimese tuletise nulliga:

$$d^2 - 3x^2 = 0$$

ja lahendame saadud võrrandi:

$$x = \pm \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Et tala ristlõike alus on oma loomult p o s i t i i v n e, siis tuleb arvesse ainult positiivne lahend

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

Et sel argumendi väärtusel $u'' < 0$, siis annab see väärtus u ja seega ka J maksimumi:

$$J_{max} = const \cdot \frac{d}{\sqrt{3}}\left(d^2 - \frac{d^2}{3}\right) = const \cdot \frac{2}{3 \cdot \sqrt{3}} d^3$$

ehk

$$J_{max} = const \cdot \frac{2}{9}\sqrt{3}d^3.$$

Ristlõike laius $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$; ristlõike kõrgus avaldub üldjuhul kujul $h = \sqrt{d^2 - x^2}$, seega meie juhul $h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$ ja

$$h : x = \sqrt{2} : 1$$

ehk ümmarguselt

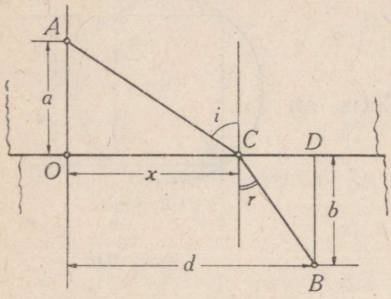
$$h : x = 1{,}4 : 1,$$

see on

$$h : x = 7 : 5.$$

Selle võrduse kohaselt tahutakse kandetalad.

Ülesanne 3. Kaks keskkonda (näiteks õhk ja vesi või vesi ja klaas või mingi teine paar läbipaistvaid aineid) on teineteisest lahutatud tasapinnaga (joon. 247). Esimeses keskkonnas on valguse kiirus v_1, teises v_2. Valgus väljub punktist A esimeses keskkonnas ja jõuab punkti B teises keskkonnas. Missuguses punktis C peaks valgus läbima keskkondi lahutava tasapinna, et ta käiks tee ACB ära minimaalse ajaga?



Joon. 247.

Lahendus. Valime koordinaatide alguseks punkti A projektsiooni tasapinnal, mis lahutab keskkondi, ja x-teljeks selle tasapinna ja joonise tasapinna lõikejoone OD. Olgu punkti A koordinaadid $(0; a)$, punkti B koordinaadid $(d; -b)$ ja otsitava punkti C koordinaadid $(x; 0)$. Siis

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{ja} \quad CB = \sqrt{(d-x)^2 + b^2}.$$

Teede AC ja CB käimiseks kulub aega

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} \quad \text{ja} \quad \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2},$$

seega kogu tee ACB käimiseks kulub aega

$$t(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}{v_2}.$$

Aeg t, mis valgusel kulub punktist A punkti B jõudmiseks, on siin avaldatud kauguse x funktsioonina. Et aeg t oleks minimaalne, selleks peab funktsiooni $t(x)$ tuletis x järgi olema null:

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = 0.$$

See on tarvilik tingimus, et funktsioonil $t(x)$ oleks miinimum. Sellest saaks määrata vajaliku x väärtuse. Saadud võrrandi jätame aga ta keerukuse tõttu lahendamata, selgitades selle

asemel, mida tähendab leitud tarvilik tingimus füüsika seisukohalt. Nagu nähtub jooniselt, võime oma võrrandi kirjutada kujul

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{OC}{AC} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{CD}{CB} = 0$$

ehk

$$\frac{1}{v_1} \cdot \cos \widehat{ACO} - \frac{1}{v_2} \cdot \cos \widehat{BCD} = 0.$$

Et nurk ACO täiendab l a n g e m i s n u r k a i nurgani 90° ja nurk BCD täiendab m u r d u m i s n u r k a r nurgani 90°, siis

$$\frac{1}{v_1} \cdot \sin i - \frac{1}{v_2} \cdot \sin r = 0$$

ehk

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Niisiis: t a r v i l i k u k s tingimuseks, et valgus jõuaks punktist A punkti B lühima ajaga, on see, et langemis- ja murdumisnurga siinused suhtuksid nagu valguse kiirused esimeses ja teises keskkonnas. Selle langemis- ja murdumisnurga vahelise seose kehtimisel on aja t tuletis x järgi null. Kui see seos kehtib, siis v õ i b ajal olla ekstreemväärtus. Kas see tegelikult nii on, seda otsustab t'' märk. Et t' avaldis sisaldab nimetajas juuri, siis on t'' moodustamine küllaltki tülikas. Asendame t'' moodustamise ja selle märgi uurimise sisuliste kaalutlustega.

Nihutades punkti C küllalt kaugele v a s a k u l e punktist O, saame AC ja CB ja ühes nendega ka ACB teha kuitahes suureks ja seega ka tee ACB käimiseks vajaliku aja kuitahes pikaks. Sama lugu kordub, kui nihutame punkti C küllalt kaugele p a r e m a l e punktist O. Ajal t ei saa seega olla maksimumi. Punkti C liikumisel abstsisstelge mööda muutub aeg t p i d e v a l t. Kui t omab vasakul pool abstsisside alguspunkti kuitahes suuri väärtusi, siitpeale väheneb ja hiljem saab jälle kuitahes suureks, siis peab t kusagil vahepeal omama minimaalset väärtust. Seos

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}$$

võib seega vastata ainult aja m i i n i m u m i l e. Mõõtmised on näidanud, et üleminekul ühest keskkonnast teise tõepoolest

$$\frac{\sin i}{\sin r} = const.$$

Seega näeme, et

valgus liigub ühest keskkonnast teise nii, nagu püüaks ta käia oma teed lühima ajaga.

Suhe $\sin i : \sin r$ on murdumisnäitaja. Eelnevast näeme, et

valguse liikumisel ühest keskkonnast teise kujutab murdumisnäitaja nende kiiruste suhet, millega valgus liigub esimeses ja teises keskkonnas.

«Lühima levimisaja printsiip» väidab, et valgus levib igas keskkonnas nii, et ta «kiirteks» on alati lühimale käiguajale vastavad jooned. See printsiip võimaldab valguskiire kuju määramist ka optiliselt mitteühtlases keskkonnas, nagu seda on näiteks Maa atmosfäär: õhk muutub seda hõredamaks, mida kõrgemale me tõuseme; maapinnalähedastes kihtides on õhk nii mehaanilises kui ka optilises mõttes tihedam kui kõrgemal asetsevates kihtides; seetõttu valguskiir, tulles mõnelt taevakehalt Maa atmosfäärisse kaldu, paindub kõveraks; valguskiire paindumise tõttu näeme Päikest juba enne ta tõusu ja ka veel pärast ta loojumist.

Ei tule arvata, et «lühima käiguaja printsiip» viitab mingile loodust valitsevale «kõrgemale vaimule»; kõnesoleva ja ka mitme teise loodusseaduse formulatsioon miinimumiprintsiipidena on vaid lühike ja kasutamiseks hästi sobiv loodusseaduste avaldamise vorm.

Kaks märkust funktsioonide ekstreemumite kohta

1° Funktsiooni maksimum ei ole suurem kõigist teistest selle funktsiooni väärtustest, vaid ainult nendest, mis asetsevad ta otseses naabruses: x muutumisel võib funktsioon y oma maksimumi edaspidi tunduvalt ületada. Analoogiline märkus kehtib ka funktsiooni miinimumi kohta. Märgime lõpuks, et funktsiooni mõni maksimum võib olla väiksem kui mõni selle funktsiooni miinimum (vt. joon. 244).

2° Ekstreemumiülesannete lahendamist saame mõnikord tunduvalt lihtsustada, pannes tähele, et argumendi väärtused, mille puhul funktsioonidel

$$af(x), \quad [f(x)]^n \quad \text{ja} \quad \sqrt[n]{f(x)}$$

on maksimum, on samad, millé puhul on maksimum funktsioonil $f(x)$. Samuti argumendi väärtused, mille puhul funktsioonil

$$\frac{a}{f(x)}$$

on maksimum, on samad, mille puhul funktsioonil $f(x)$ on miinimum. Mõnikord saab ära kasutada ka tõsiasja, et argumendi väärtused, mille puhul funktsioonil $f(x)$ on maksi-

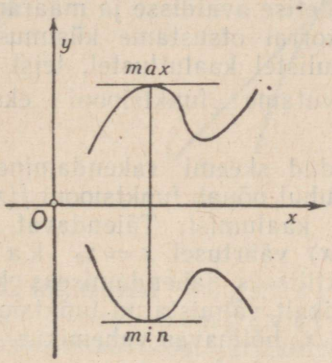
mum, on samad, mille puhul funktsioonil $-f(x)$ on miinimum (joon. 248).

Näide. Otsitagu funktsiooni

$$y = \frac{a}{\sqrt{(x^2 + px + q)^3}}$$

maksimumi. Sel funktsioonil on maksimum siis, kui nimetajal $\sqrt{(x^2 + px + q)^3}$ on miinimum, see tähendab, kui funktsioonil

$$z = \sqrt{x^2 + px + q}$$



Joon. 248.

on miinimum. Selleks aga peab olema miinimum funktsioonil

$$u = x^2 + px + q.$$

On kerge veenduda, et sel funktsioonil on miinimum argumendi väärtusel $x_0 = -\frac{p}{2}$. Ruutjuure all seisev avaldis on sel puhul

$$\left(-\frac{p}{2}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2}\right) + q = q - \frac{p^2}{4} = \frac{1}{4}(4q - p^2),$$

ruutjuur sellest on

$$\frac{1}{2}\sqrt{4q - p^2}$$

ja seepärast

$$y_{max} = \frac{8a}{\sqrt{(4q - p^2)^3}}.$$

1. s a m m. Valime argumendi. Avaldame suuruse, mille ekstreemumit on tarvis leida. Võimaluse korral asendame uuritava funktsiooni lihtsamaga.

2. s a m m. Moodustame funktsiooni esimese tuletise.

3. s a m m. Võrrutame esimese tuletise nulliga ja lahendame saadud võrrandi. Kui võrrandil lahendeid pole, siis ei ole ka funktsioonil ekstreemumit.

4. s a m m. Arvutame funktsiooni teise tuletise. Asetame leitud lahendid teise tuletise avaldisse ja määrame asetamistulemuse märgi. Võimaluse korral otsustame küsimuse: «Kas maksimum või miinimum?» sisulistel kaalutlustel, teist tuletist kasutamata.

5. s a m m. Arvutame funktsiooni ekstreemväärtuse või ekstreemväärtused.

M ä r k u s. Toodud skeemi rakendamine ei vii eesmärgile, kui $f''(x_0) = 0$. Sel juhul nõuab funktsiooni $f(x)$ ekstreemväärtuste küsimus täiendavat kaalumist. Täiendavat uurimist nõuab ka juht, kus tuletis $f'(x)$ väärtusel $x = x_0$ k a t k e b. Ühe võimaluse küsimuse praktiliseks lahendamiseks kõnesolevatel erandjuhtudel annab hoolikalt valmistatud funktsiooni käigujoone skits väikeses, punkti $x = x_0$ hõlmavas vahemikus.

§ 84. FUNKTSIOONI KÄIGUKÕVERA KUMERUS JA NÕGUSUS. KÕVERA KÄÄNUPUNKT

Jätkame funktsiooni käigukõverate omapära uurimist. Seejuures vaatleme kõverail ainult neid punkte, milles puutuja p o l e v e r t i k a a l n e, see tähendab punkte, milles vaadeldava funktsiooni tuletis on määratav. Juhtu, kus puutuja on vertikaalne, saab aga alati taandada h o r i s o n t a a l s e puutuja juhule, mille uurimine ei tee raskusi. Selleks piisab muutujate teisendusest $x = Y$, $y = X$. Siis x-telg asendub Y-teljega ja y-telg X-teljega. Puutuja, mis xy-teljestikus oli vertikaalne, on YX-teljestikus horisontaalne.

Kõvera kumeruse ja nõgususe tunnused

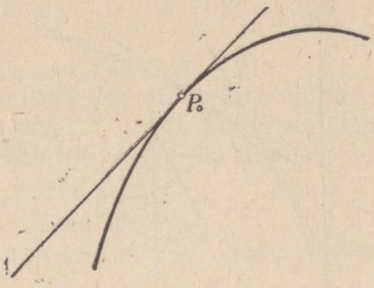
Vaatleme mingi funktsiooni $y = f(x)$ käigukõverat. Võtame sellel kõveral mingi punkti P_0 ja joonestame seda punkti läbiva puutuja. Võib juhtuda, et punkti P_0 lähemas ümbruses asetseb kõver oma puutuja suhtes nii, nagu on näidatud joonisel 249, või nii, nagu on kujutatud joonisel 250.

Kui kõver mingi oma punkti lähemas ümbruses asetseb tervenisti ülalpool seda punkti läbivat puutujat, siis ütleme, et kõver on selles punktis nõgus.

Kui kõver mingi oma punkti lähemas ümbruses asetseb tervenisti allpool seda punkti läbivat puutujat, siis ütleme, et kõver on selles punktis kumer.

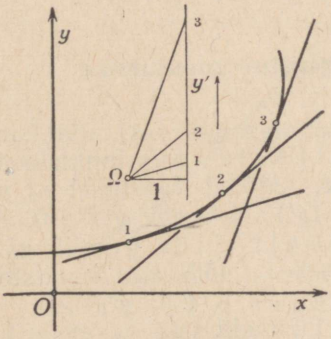


Joon. 249.

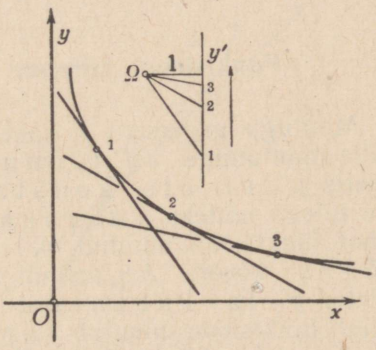


Joon. 250.

Joonised 251 ja 252 kujutavad nõgusaid kõveraid; esimesel näeme tõusvat, teisel langevat kõverat. Võtame kummalgi kõveral kasvava abstsissi järjekorras rea punkte 1, 2, 3, ..., joonestame neis punktides puutujad ja määrame graafiliselt tuletise väärtused igaühes neist punktidest. Tuletise joonis



Joon. 251.

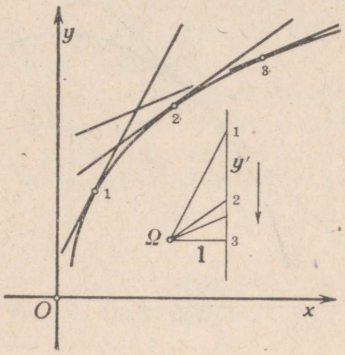


Joon. 252.

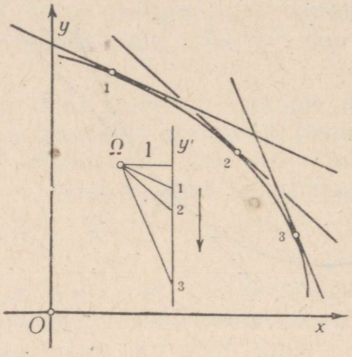
näitab, et mõlemal juhul y' muutub kasvades. See tähendab, et $(y')' > 0$ ehk $y'' > 0$.

Mõttekäik on raskuseta pööratav: kui $y'' > 0$, siis on kõver $y = f(x)$ nõgus.

Joonised 253 ja 254 kujutavad kumeraid kõveraid; esimesel näeme tõusvat, teisel langevat kõverat. Võtame kummalgi kõveral kasvava abstsissi järjekorras rea punkte 1, 2, 3, ..., joonestame neis punktides puutujad ja määrame graafiliselt tuletise väärtused igaühes neist punktidest. Tuletise joonis näitab, et mõlemal juhul y' muutub kahanedes. See tähendab, et $(y')' < 0$ ehk $y'' < 0$.



Joon. 253.



Joon. 254.

Mõttekäik on raskuseta pööratav.

Kokku võttes näeme, et

kõver $y = f(x)$ on mingis oma punktis P_0 nõgus või kumer vastavalt sellele, kas $y''_0 > 0$ või $y''_0 < 0$, ja ümberpöördult.

Funktsiooni kiirenev ja aeglustuv muutumine

Muutugu argument x kasvades ja olgu $y = f(x)$ funktsioon, mille muutumine ei toimu ühtlaselt. Siis funktsiooni y tuletis y' ei ole konstantne. Mõnel väärtusel x_0 võib see tuletis näiteks kasvada; siis $(y')'_0 > 0$ ehk $y''_0 > 0$. Sel juhul funktsioon muutub kiirenevalt ja ta graafikuks on nõgus kõver. Argumendi väärtusel x_0 võib aga funktsiooni tuletis y'_0 ka kahaneda; siis $(y')'_0 < 0$ ehk $y''_0 < 0$. Sel juhul funktsioon muutub aeglustuvalt ja ta graafikuks on kumer kõver. Esitatud mõttekäik on pööratav.

Seega funktsioon muutub argumendi antud väärtusel kiirenevalt, kui funktsiooni teine tuletis sellel argumendi väärtusel on positiivne, ja ümberpöördult; funktsioon muutub argumendi antud väärtusel aeglustuvalt, kui funktsiooni teine tuletis sellel argumendi väärtusel on negatiivne, ja ümberpöördult.

Teiste sõnadega:

tunnus, et funktsioon $f(x)$ muutub kohal $x = x_0$ kiirenevalt, on antud võrratusega $f''(x_0) > 0$; tunnus, et ta muutub sellel kohal aeglustuvalt, on antud vastavalt võrratusega $f''(x_0) < 0$.

Näide 1. Olgu antud kõver $y = x^2 - 4x - 5$. Siin on $y' = 2x - 4$ ja $y'' = 2$. Et teine tuletis on positiivne abstsissi igasugustel väärtustel, siis on antud kõver kogu ulatuses nõgus.

Näide 2. Olgu antud kõver $y = x^3 + 9x^2 - 21x + 13$. Siin on $y' = 3x^2 + 18x - 21$ ja $y'' = 6x + 18$. Kõver on nõgus, kui $y'' > 0$ ehk kui $6x + 18 > 0$ ehk kui $x > -3$; kõver on kumer, kui $y'' < 0$ ehk kui $6x + 18 < 0$ ehk kui $x < -3$. Niisiis

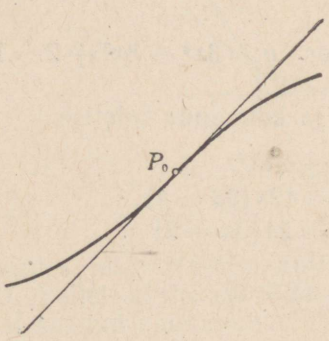
vahemikus $-\infty < x < -3$ on kõver kumer,

vahemikus $-3 < x < +\infty$ on kõver nõgus.

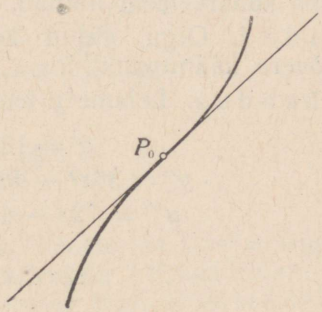
Abstsissi läbiminekul väärtusest $x = -3$ muutub kõver kumerast nõgusaks.

Kõvera käänupunkt

Vaatleme jooniseid 255 ja 256. Esimesel neist on kujutatud juht, kus kõver on enne punkti P_0 nõgus ja pärast punkti P_0 kumer. Teisel joonisel on kõver enne punkti P_0 kumer ja pärast punkti P_0 nõgus.



Joon. 255.



Joon. 256

Punkti, millest läbiminekul kõver muutub nõgusast kumeraks või kumerast nõgusaks, nimetatakse käänupunktiks.

Käänupunkti läbimisel peab y'' märk muutuma kas plussist miinuseks või miinusest plussiks: enne käänupunkti P_0 ja sellele nii lähedal kui tahes on y'' märk üks, pärast käänu-

punkti P_0 ja sellele nii lähedal kui tahes on y'' märk eelmisele vastupidine. Pideva y'' korral võib niisugune märgi muutumine toimuda ainult siis, kui y'' läbib nulli. Esitatud mõttekäik on pööratav. Öeldut kokku võttes saame funktsiooni käigukõvera käänupunkti esinemise tunnuse:

funktsiooni $y = f(x)$ *käigukõveral on abstsissi väärtusel* $x = x_0$ *käänupunkt, kui*

$$f''(x_0) = 0 \quad ja \quad f''(x_0 - h) > 0, \quad f''(x_0 + h) < 0$$

või

$$f''(x_0) = 0 \quad ja \quad f''(x_0 - h) < 0, \quad f''(x_0 + h) > 0,$$

kus h on kindel positiivne, muidu aga kuitahes väike arv.

Käänupunktid funktsiooni graafikul märgivad neid momente, kus funktsiooni muutumine läheb kiirenevast üle aeglustuvaks või vastupidi.

Teise tuletise y'' läbiminek nullist märgi muutumisega tähendab seda, et ta läheb nullist läbi kas kasvades või kahanedes. Esimesel juhul on y'' tuletis käänupunktis > 0, teisel juhul < 0. Öeldu annab meile funktsiooni $y = f(x)$ käigukõvera käänupunkti esinemise tunnuse järgmises sõnastuses:

funktsiooni $y = f(x)$ *käigukõveral on abstsissi väärtusel* $x = x_0$ *käänupunkt, kui*

$$f''(x_0) = 0 \quad ja \quad f'''(x_0) \neq 0.$$

Vaatleme konkreetseid näiteid.

Näide 1. Olgu antud kõver $y = 3x^4 - 8x^3 + 2$. Leiame selle kõvera käänupunktid.

Lahendus. Leiame y teise ja kolmanda tuletise:

$$y' = 12x^3 - 24x^2,$$
$$y'' = 36x^2 - 48x = 12x(3x - 4),$$
$$y''' = 72x - 48 = 24(3x - 2).$$

Võrrandi

$$12x(3x - 4) = 0$$

lahendamine annab kaks abstsissi väärtust:

$$x_1 = 0 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{4}{3}.$$

Asetades need väärtused y''' avaldisse, saame

$$y'''\Big|_{x=x_1} = -48 < 0, \quad y'''\Big|_{x=x_2} = +48 > 0.$$

See tähendab, et abstsissidel

$$x_1 = 0 \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{4}{3}$$

on antud kõveral käänupunktid.

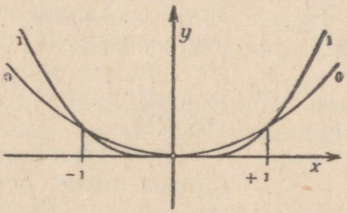
M ä r k u s. Tingimus, et $f''(x_0) = 0$, on funktsiooni $y = f(x)$ käigukõvera punktis P_0 käänupunkti olemasoluks t a r v i l i k, mitte aga veel p i i s a v, nagu selgub kas või lihtsa näite $y = x^4$ uurimisel. Kui tarvilik tingimus $f''(x_0) = 0$ on täidetud, on võrratus $f'''(x_0) \neq 0$ selle piisavaks tingimuseks, et punkt P_0 on käänupunkt. Juht, kus $f'''(x_0) = 0$, nõuab täiendavat uurimist, näiteks funktsiooni $y = f(x)$ käigukõvera hoolika skitseerimise teel punkti P_0 ümbruses.

N ä i d e 2. Olgu antud kõver $y = \frac{3}{10}x^4$. Leiame selle kõvera käänupunktid.

L a h e n d u s. Leiame y teise ja kolmanda tuletise:

$$y' = \frac{3}{10} \cdot 4x^3 = 1{,}2x^3,$$

$$y'' = 3{,}6x^2,$$
$$y''' = 7{,}2x.$$



Joon. 257.

Võrrutades teise tuletise nulliga, näeme, et $36x^2 = 0$ ja seega $x_0 = 0$. Sellel abstsissi väärtusel on ka kolmas tuletis null ja eespool saadud käänupunkti olemasolu tunnust ei saa rakendada. Uurime y'' käitumist punkti $x_0 = 0$ ümbruses otseselt, kolmandat tuletist kasutamata. Olgu h mingi positiivne, muidu aga kuitahes väike arv. Siis e n n e punkti P_0 on $y'' = 36(-h)^2 > 0$ ja p ä r a s t punkti P_0 on $y'' = 36h^2 > 0$. Seega läbiminekul punktist P_0 e i m u u t u y'' m ä r k: y'' on sel puhul kogu aeg positiivne. Järelikult punktis P_0 käänupunkti pole. Seda kinnitab ka pilk joonisele 257, kus joon 0—0 kujutab parabooli $y = \frac{3}{10}x^2$ ja joon 1—1 parabooli $y = \frac{3}{10}x^4$.

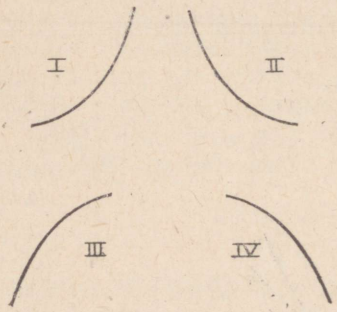
Funktsiooni muutumise viise antud argumendi väärtusel

Teeme eespool öeldust kokkuvõtte. Funktsiooni $y = f(x)$ esimese ja teise tuletise märgid võivad esineda järgmises neljas kombinatsioonis:

$$\text{I} \begin{cases} y' > 0 \\ y'' > 0 \end{cases} \qquad \text{III} \begin{cases} y' > 0 \\ y'' < 0 \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} y' < 0 \\ y'' > 0 \end{cases} \qquad \text{IV} \begin{cases} y' < 0 \\ y'' < 0 \end{cases}$$

I juhul on funktsiooni muutumise kiirus positiivne; funktsioon on kasvav. Et funktsiooni muutumise kiirendus on positiivne, siis funktsiooni kasvamine toimub üha kiiremini. Funktsiooni käigukõver on tõusev; selle kõvera tõusmine toimub üha kiiremalt (joon. 258, I).



Joon. 258.

II juhul on funktsiooni muutumise kiirus negatiivne; funktsioon on kahanev. Et funktsiooni muutumise kiirendus on positiivne, siis funktsiooni muutumise kiiruse absoluutväärtus üha väheneb ja funktsiooni kahanemine toimub üha aeglasemalt. Funktsiooni käigukõver on langev; selle kõvera langemine toimub järjest aeglasemalt (joon. 258, II).

III juhul on funktsiooni muutumise kiirus positiivne; funktsioon on kasvav. Et funktsiooni muutumise kiirendus on negatiivne, siis funktsiooni kasvamine toimub üha aeglasemalt. Funktsiooni käigukõver on tõusev; selle kõvera tõusmine toimub järjest aeglasemalt (joon. 259, III).

IV juhul on funktsiooni muutumise kiirus negatiivne; funktsioon on kahanev. Et funktsiooni muutumise kiirendus on negatiivne, siis funktsiooni muutumise kiiruse absoluutväärtus üha suureneb ja funktsiooni kahanemine toimub üha kiiremini. Funktsiooni käigukõver on langev; selle kõvera langemine toimub üha kiiremalt (joon. 259, IV).

Funktsiooni $y = f(x)$ käigukõvera haripunktis on selle kõvera puutuja rõhtsihiline ja kõver ise kumer. Märkides kõvera haripunkti abstsissi sümboliga x_0, näeme, et funktsioonil $f(x)$ on maksimum punktis $x = x_0$, kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) < 0$.

Funktsiooni $y = f(x)$ käigukõvera lohupunktis on selle kõvera puutuja rõhtsihiline ja kõver ise nõgus. Mär-

kides kõvera lohupunkti abstsissi sümboliga x_0, näeme, et funktsioonil $f(x)$ on miinimum punktis $x = x_0$, kui $f'(x_0) = 0$ ja $f''(x_0) > 0$.

Funktsiooni $f(x)$ käigukõveral on kohas $x = x_0$ käänupunkt, kui $f''(x_0) = 0$ ja $f'''(x_0) \neq 0$.

§ 85. KÕVERATE JOONESTAMINE NENDE ISELOOMULIKE PUNKTIDE JA KULGEMISE OMAPÄRASUSTE JÄRGI

Probleemiseade

Üheks oluliseks raskuseks funktsiooni graafiku valmistamisel funktsiooni väärtuste järgi on see, et pole võimalik öelda, kas punkte on küllalt funktsiooni käigust õige pildi saamiseks: ikka jääb lahtiseks, kas kahe antud punkti vahel ei leidu mõnda graafiku omapärasust, nagu katkemiskohta, lõpmatusse minekut, maksimum- või miinimumpunkti, käänupunkti jne. Kui funktsioon on antud oma valemiga $y = f(x)$, siis saab neile küsimustele anda kindlad vastused ja graafikut õigesti joonestada sageli isegi juba väheste punktide järgi.

Küsimuse ees, missugused on funktsiooni $y = f(x)$ omapärasused ja kuidas nad kajastuvad selle funktsiooni käigukõveras, seisame alati, kui on õnnestunud haarata mõnda nähtuskäiku seadusega $y = f(x)$ või anda mõne geomeetrilise probleemi lahendus valemi $y = f(x)$ kujul.

Äsja nimetatud küsimustiku lahendamisviise on kõige parem tundma õppida näidete varal. Nii toimimegi.

Üld-ruutfunktsiooni uurimine

Uurime funktsiooni

$$y = ax^2 + bx + c$$

eeldusel, et a on nullist erinev.

Me teame juba, et selle funktsiooni käigukõveraks on püsttelgega parabool. Üld-ruutsõltuvuse suure rakendusliku tähtsuse tõttu uurime seda veel kord, nüüd juba meil kasutada olevate uute vahenditega.

1° Funktsiooni y määramispiirkond ja pidevus.

Funktsiooni y väärtuste arvutamine nõuab ainult argumendi ruutu tõstmist, korrutamist ning liitmist. Need tehted on aga piiramatult teostatavad. Seega on funktsioon y määratud igal argu-

mendi väärtusel ehk funktsiooni määramispiirkonnaks on vahemik $-\infty < x < +\infty$.

Funktsiooni y kasvu arvutamine viib avaldisele

$$\Delta y = (2ax + b) \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Argumendi etteantud väärtuse puhul on sulgavaldis kindel arv. Teguri Δx nullile lähenemisel läheneb ka korrutis $(2ax + b) \cdot \Delta x$ nullile. Samuti läheneb nullile $(\Delta x)^2$. Järelikult

$$\text{kui } \Delta x \to 0, \text{ siis ka } \Delta y \to 0$$

ja seda argumendi iga väärtuse puhul. See tähendab, et funktsioon y on kõikjal pidev, funktsiooni käigukõveral pole katkemiskohti. Seepärast ei saa funktsiooni y käigukõveral olla püstasümptoote.

2° Sümmeetria telgede ja alguspunkti suhtes.

Rahuldagu väärtuspaar (x, y) võrrandit

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Siis väärtuspaar $(x, -y)$ seda võrrandit üldiselt ei rahulda, sest $y \neq -y$. Ta rahuldab seda ainult erijuhul, kus $ax^2 + bx + c = 0$, see tähendab, kui x on juhtumisi selle ruutvõrrandi lahend. Niisiis, vaadeldava funktsiooni y käigukõver pole sümmeetriline x-telje suhtes.

Vaatleme edasi väärtuspaari $(-x, y)$. Et $a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c$ ja see pole võrdne avaldisega $ax^2 + bx + c$, siis funktsiooni y käigukõver pole sümmeetriline y-telje suhtes, välja arvatud erijuht, kus kordaja b on null.

Vaatleme lõpuks väärtuspaari $(-x, -y)$. Et $a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c$ ja see pole võrdne avaldisega $-(ax^2 + bx + c)$, siis funktsiooni käigukõver pole sümmeetriline alguspunkti suhtes.

3° Lõikepunktid koordinaattelgedega.

Lõikepunktides x-teljega on $y = 0$ ja seega peab olema

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Sellel võrrandil on kas kaks erinevat lahendit või kaks ühtelangevat lahendit või tal ei ole ühtki lahendit. Seega vaadeldava funktsiooni käigukõver võib lõigata abstsisstelge kas kahes erinevas punktis või omada abstsisssteljega üht ühist punkti või mitte ühtki ühist punkti.

Lõikepunktis y-teljega on $x = 0$, $y = c$.

4° Piirkonnad, kus $y > 0$ ja $y < 0$.

Oletame, et $a > 0$. Märgime võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid tähtedega α ja β. Olgu $\alpha < \beta$. Siis, nagu teame, saab vaadeldava ruutvõrrandi esitada kujul

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

Kui $x < \alpha$, siis on kindlasti ka $x < \beta$, mõlemad sulgavaldised on negatiivsed ja seega $y > 0$. Kui $\alpha < x < \beta$, siis on vahe $x - \alpha$ positiivne, vahe $x - \beta$ negatiivne ja seega $y < 0$. Kui lõpuks $x > \beta$, siis on ka $x > \alpha$, mõlemad sulgavaldised on positiivsed ja seega $y > 0$.

Kokku võttes näeme, et kui $a > 0$ ja võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ on kaks erinevat lahendit, siis

vahemikus	$-\infty < x < \alpha$	$\alpha < x < \beta$	$\beta < x < +\infty$
	$y > 0$	$y < 0$	$y > 0$.

Täpselt samuti käsitleme juhtu, kus $a < 0$.

Erijuhul, kui $\alpha = \beta$, on $y = a(x - \alpha)^2$. Seega on y kõikjal sama märgiga, mis on kordajal a.

Kui võrrandil $ax^2 + bx + c = 0$ pole lahendit, siis tähendab see, et funktsiooni y graafik ei lõika x-telge. Ta kulgeb siis tervenisti kas ülalpool või allpool abstsisstelge. Missugusel pool nimelt, seda saame otsustada, võttes mingi abstsissi väärtuse ja leides sellele vastava ordinaadi märgi.

5° Funktsiooni y käitumine tõkestamatult kasvava argumendi puhul.

Kirjutades $ax^2 + bx + c$ asemel

$$ax^2 \left(1 + \frac{b}{ax} + \frac{c}{ax^2}\right),$$

näeme, et argumendi tõkestamatul kasvamisel ükskõik kummas suunas läheneb sulgudes seisev avaldis ühele. Liige ax^2 aga kasvab tõkestamatult, kusjuures tal on sama märk mis kordajal a. See tähendab, et positiivse a puhul $y \to +\infty$, hoolimata sellest, kas $x \to +\infty$ või $x \to -\infty$. Negatiivse a puhul $y \to -\infty$. Siit järeldame, et y käigujoon on ülespoole või allapoole lahtine kõver.

6° Funktsiooni y ekstreemumid.

Funktsiooni y esimene ja teine tuletis avalduvad kujul

$$y' = 2ax + b \quad \text{ja} \quad y'' = 2a.$$

Esimene tuletis saab nulliks väärtusel

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Teine tuletis on konstantne, seega argumendist sõltumatu, ja ta märgi määrab kordaja a märk. Vaadeldaval funktsioonil on niisiis ekstreemum kohas $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ja nimelt

maksimum, kui $a < 0$,
miinimum, kui $a > 0$.

Lihtne arvutus näitab, et funktsiooni y ekstreemum

$$y_0 = -\frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

nii et funktsiooni käigukõvera hari- või lohupunkt on

$$\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).$$

7° Funktsiooni y kasvamine ja kahanemine.

Kirjutades y tuletise kujul

$$y' = 2a\left(x + \frac{b}{2a}\right),$$

näeme, et positiivse a korral

$$y' > 0 \text{ ehk } y \text{ kasvab, kui } x > -\frac{b}{2a},$$

ja

$$y' < 0 \text{ ehk } y \text{ kahaneb, kui } x < -\frac{b}{2a}.$$

Negatiivse a korral on olukord vastupidine.

8° Funktsiooni y käigukõvera käänupunktid.

Et $y'' = 2a \neq 0$, siis y käigukõveral käänupunkte pole.

9° Funktsiooni y käigukõvera kumerus ja nõgusus.

Et y'' märk ühtib a märgiga, siis

kui $a > 0$, on käigukõver kõikjal nõgus,
„ $a < 0$, „ „ „ kumer.

10° Võrrandi $y = ax^2 + bx + c$ lihtsustamine.

Viime koordinaatide alguse telgede sihte muutmatuks jättes punkti

$$\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right).$$

Kui uued teljed märgime tähtedega X ja Y, siis

$$x = -\frac{b}{2a} + X, \quad y = -\frac{b^2-4ac}{4a} + Y$$

ja võrrand $y = ax^2 + bx + c$ teisendub võrrandiks

$$Y = aX^2.$$

See on tuntud parabooli võrrand. Kirjutades teda kujul

$$X^2 = \frac{1}{a} Y,$$

näeme, et parabooli teljeks on Y-telg ja puutujaks haripunktis X-telg. Parabooli $Y = aX^2$ parameeter $p = \frac{1}{2|a|}$ mõõdab parabooli ava laiust fookuse kohal. Seega suure $|a|$ puhul on p väike, järelikult parabool kitsas ja «t e r a v», väikese $|a|$ puhul on p suur, järelikult parabool lai ja «l a m e».

Rakendame eespool toodud parabooli võrrandi lihtsustamise võtet juhul, kus $y = 3x^2 + 12x - 7$. Siis $y' = 6x + 12$ ja $y'' = 6$. Et $y'' > 0$, siis on parabool nõgus. Ta haripunkti abstsiss $x = -2$; haripunkti ordinaat $y = -19$. Võttes $x = -2 + X$, $y = -19 + Y$, saame $Y = 3X^2$. Selle võrrandi järgi on parabooli kerge konstrueerida.

Murdratsionaalsete funktsioonide uurimine

N ä i d e 1. Joonestame funktsiooni

$$y = \frac{5x}{1+x^2}$$

graafiku.

Selleks vaatleme kõigepealt mõningaid tema omadusi.

1° Funktsiooni y määramispiirkond ja pidevus.

Et funktsiooni y avaldise nimetaja $1+x^2$ on alati $\geqslant 1$, siis ei saa ta kunagi nulliks. Lugejal on kindel väärtus igal argumendi väärtusel. Seega on vaadeldav funktsioon määratud igal argumendi väärtusel ehk funktsiooni määramispiirkonnaks on vahemik

$$-\infty < x < +\infty.$$

Et funktsiooni y avaldise lugeja on pidev ja nimetaja alati nullist erinev, siis funktsioon y on kõikjal pidev. Katkemiskohtade puudumise tõttu ei saa funktsiooni y käigukõveral olla püstasümptoote.

2° Piirkonnad, kus $y>0$ ja $y<0$.

Funktsiooni avaldisest järeldub, et

$$y>0, \text{ kui } x>0, \text{ ja } y<0, \text{ kui } x<0.$$

3° Lõikepunktid koordinaattelgedega.

Lõikepunktis x-teljega on $y=0$, seega $5x=0$, järelikult $x=0$ ja funktsiooni y käigukõver lõikab x-telge koordinaatide alguspunktis. Lõikepunktis y-teljega on $x=0$, seega $y=0$ ja käigukõver lõikab ka y-telge koordinaatide alguspunktis. Teisi lõikepunkte telgedega pole.

4° Sümmeetria telgede ja alguspunkti suhtes.

Rahuldagu väärtuspaar (x, y) võrrandit. Nagu võrrandisse asetamine näitab, ei rahulda teda siis paar $(x, -y)$ ega ka paar $(-x, y)$. See tähendab, et funktsiooni y käigukõver ei ole sümmeetriline x-telje ega ka y-telje suhtes. Et aga võrrandit rahuldab väärtuspaar $(-x, -y)$, siis on käigukõver sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes. Positiivse argumendi puhul kulgeb käigukõver koordinaattasapinna I veerandis, negatiivse x puhul vastavalt III veerandis. Et käigukõver on sümmeetriline koordinaatide alguspunkti suhtes, siis saadakse ta III veerandis asuv osa I veerandis asuvast osast, peegeldades selle koordinaatide alguspunkti suhtes. Seega piisab funktsiooni y käigukõvera uurimisest vahemikus $0 \leqslant x < +\infty$.

5° Funktsiooni y käitumine tõkestamatult kasvava argumendi puhul.

Näeme, et

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{5x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Seega argumendi tõkestamatul kasvamisel on funktsiooni piirväärtuseks null ja x-telg on funktsiooni y käigukõvera rõhtasümptoodiks.

6° Funktsiooni y ekstreemumid.

Funktsiooni y esimese ja teise tuletise arvutamine annab

$$y' = \frac{5(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \quad \text{ja} \quad y'' = \frac{10x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

Võrrutades y' nulliga, näeme, et $5(1-x^2)=0$; siit $1-x^2=0$, seega $x_1=+1$ ja $x_2=-1$. Asetades need väärtused y'' avaldisse, näeme, et $x=+1$ puhul $y''<0$ ja $x=-1$ puhul $y''>0$. Seega argumendi väärtusel $x_1=+1$ on funktsioonil maksimum, argumendi väärtusel $x_2=-1$ miinimum. Lühike arvutus näitab, et

$$y_{max} = +2{,}5 \quad \text{ja} \quad y_{min} = -2{,}5.$$

Maksimum- ja miinimumpunkt asetsevad koordinaatide algus-punkti suhtes sümmeetriliselt.

7° Funktsiooni y kasvamine ja kahanemine.

Vahemikus $-\infty < x < -1$ on $y' < 0$, seega funktsioon kahaneb; vahemikus $-1 < x < +1$ on $y' > 0$, seega funktsioon kasvab; vahemikus $+1 < x < +\infty$ on $y' < 0$, seega funktsioon kahaneb. Küsimust võime käsitleda ka nii, et vaatleme funktsiooni käigukõvera kulgemist esialgu ainult I veerandis ja kasutame siis käigukõvera sümmeetriat koordinaatide alguspunkti suhtes.

8° Funktsiooni y käigukõvera käänupunktid.

Võrrutades y'' nulliga, saame

$$x(x^2-3)=0,$$

millest

$$x_3=0, \quad x_4=+\sqrt{3} \quad \text{ja} \quad x_5=-\sqrt{3}.$$

Argumendi läbiminekul kõigist neist kolmest väärtusest muutub y'' märk, nii et funktsiooni y käigukõveral on kolm käänupunkti. Käänupunktide ordinaadid on vastavalt

$$y_3 = 0, \quad y_4 = +\frac{5}{4}\sqrt{3} \approx +2{,}16 \quad \text{ja} \quad y_5 = -\frac{5}{4}\sqrt{3} \approx -2{,}16.$$

Funktsiooni käigukõvera tõus käänupunktides on

$$y'_3 = 5, \quad y'_4 = -\frac{10}{16} \approx -0{,}62 \quad \text{ja} \quad y'_5 \approx -0{,}62.$$

9° Funktsiooni y käigukõvera kumerus ja nõgusus.

Vahemikus $0 < x < +\sqrt{3}$ on $y'' < 0$ ja käigukõver seega kumer; vahemikus $+\sqrt{3} < x < +\infty$ on $y'' > 0$ ja käigukõver seega nõgus. Sümmeetria tõttu koordinaatide alguspunkti suhtes on käigukõver vahemikus $-\infty < x < -\sqrt{3}$ kumer, vahemikus $-\sqrt{3} < x < 0$ nõgus.

10° Mõned funktsiooni y käigukõvera punktid ja tõusud.

Lihtne arvutus annab tabeli:

x	0	0,50	1,00	2,00	3,00	4,00
y	0	2,00	2,50	2,00	1,50	1,18
y'	5,00	2,40	0	−0,60	−0,40	−0,26

11° Graafiku joonestamine.

Märkides joonisele teada olevad punktid ja teada olevad puutujad ning arvestades saadud andmeid kõvera kulgemise iseärasuste kohta, joonestame lekaali abil funktsiooni käigukõvera osa I veerandis ja seejärel selle osa peegelpildi III veerandis. Uuritud kõvera skitsi näeme joonisel 259.

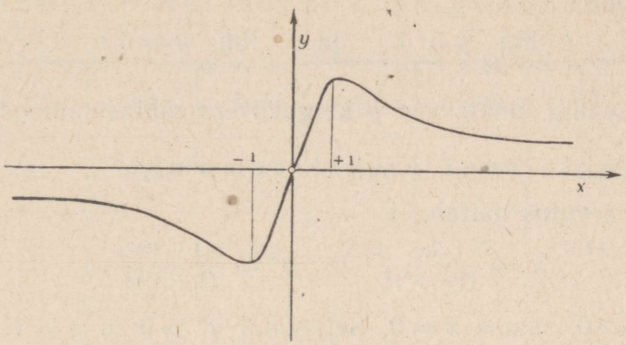
Näide 2. Joonestame funktsiooni

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

graafiku.

1° Funktsiooni y määramispiirkond ja katkemiskohad.

Antud funktsioon on määratud argumendi iga väärtuse puhul, välja arvatud need väärtused, mille puhul nimetaja saab nulliks; tingimus $1 - x^2 = 0$ annab väärtused $x = +1$ ja $x = -1$. Neil väärtustel pole y määratud. Kui $x \to -1$ altpoolt, on nimetaja negatiivne ja $y \to -\infty$; kui $x \to -1$ ülaltpoolt, on nimetaja positiivne ja $y \to +\infty$. Kui $x \to +1$ altpoolt, on nimetaja positiivne ja



Joon. 259.

$y \to +\infty$; kui $x \to +1$ ülaltpoolt, on nimetaja negatiivne ja $y \to -\infty$. Seega on funktsiooni y käigukõveral kaks püstasümptooti: $x = -1$ ja $x = +1$. Funktsioonil y on niisiis kaks katkemiskohta: $x = -1$ ja $x = +1$; funktsiooni määramispiirkond koosneb kolmest osast:

$$-\infty < x < -1, \quad -1 < x < +1, \quad +1 < x < +\infty.$$

2° Sümmeetria telgede ja alguspunkti suhtes.

Väärtuspaaride $(x, -y)$, $(-x, y)$ ja $(-x, -y)$ asetamine antud võrrandisse näitab, et funktsiooni y käigukõver ei ole sümmeetriline x-telje ega koordinaatide alguspunkti suhtes, küll aga on ta sümmeetriline y-telje suhtes.

3° Lõikepunktid koordinaattelgedega.

Võttes $y = 0$, näeme, et pole argumendi väärtust, mille puhul y saab nulliks. See tähendab, et funktsiooni y käigukõver ei lõika x-telge. Võttes $x = 0$, näeme, et ta lõikab y-telge punktis $(0; 1)$.

4° Piirkonnad, kus $y > 0$ ja $y < 0$.

Ordinaat $y > 0$, kui $1 - x^2 > 0$ ehk $x^2 < 1$ ehk $|x| < 1$ ehk $-1 < x < +1$. Ordinaat $y < 0$ kõigil teistel argumendi väärtustel, seega $y < 0$ vahemikes $-\infty < x < -1$ ja $+1 < x < +\infty$.

5° Funktsiooni y käitumine tõkestamatult kasvava argumendi puhul.

Ühes või teises suunas tõkestamatult kasvava argumendi puhul saame

$$\lim_{x \to +\infty} y = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to -\infty} y = 0.$$

Seega on x-telg funktsiooni y käigukõvera rõhtasümptoodiks.

6° Funktsiooni y ekstreemumid.

Lihtne arvutus näitab, et

$$y' = \frac{2x}{(1-x^2)^2} \quad \text{ja} \quad y'' = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Võttes $y' = 0$, saame $x = 0$. Sel puhul $y'' > 0$ ja $y = 1$. Seega (0; 1) on funktsiooni y käigukõvera miinimumpunkt.

7° Funktsiooni y kasvamine ja kahanemine.

Nagu funktsioon y, nii ka tuletis y' katkeb kahes punktis: $x = -1$ ja $x = +1$. Tuletisel on sama määramispiirkond mis funktsioonilgi. Tuletise y' märk ühtib argumendi märgiga, sest y' avaldise nimetaja on alati positiivne. Vaadeldes tuletist järjest tema määramispiirkonna kolmes osas, näeme, et ta on vahemikus $-\infty < x < -1$ negatiivne, vahemikus $-1 < x < 0$ samuti negatiivne, punktis $x = 0$ võrdne nulliga, vahemikus $0 < x < +1$ positiivne ja vahemikus $+1 < x + \infty$ samuti positiivne. Järelikult vahemikus $-\infty < x < -1$ ordinaat, olles negatiivne, kahaneb 0-st $-\infty$-ni; vahemikus $-1 < x < 0$ ordinaat, olles positiivne, kahaneb $+\infty$-st $+1$-ni, vahemikus $0 < x < +1$ aga kasvab $+1$-st jälle $+\infty$-ni; vahemikus $+1 < x < +\infty$ ordinaat, olles negatiivne, kasvab $-\infty$-st 0-ni. Küsimust võime käsitleda ka nii, et vaatleme funktsiooni käigukõvera kulgemist esialgu ainult I ja IV veerandis ja kasutame siis käigukõvera sümmeetriat ordinaattelje suhtes.

8° Funktsiooni y käigukõvera käänupunktid.

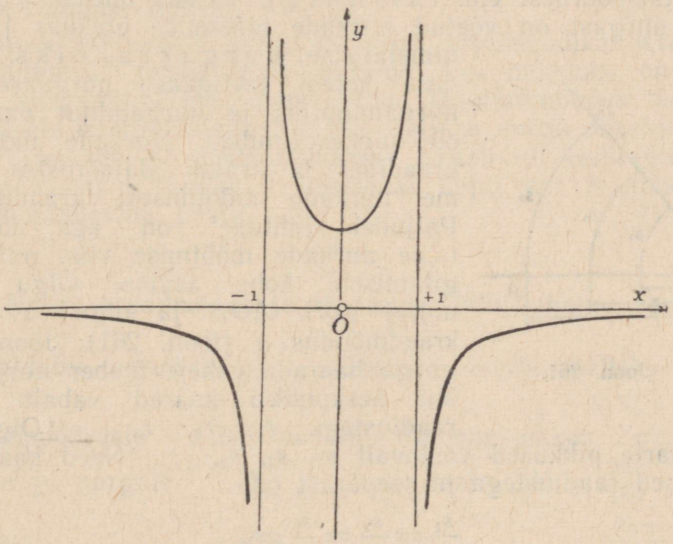
Et $2(1 + 3x^2)$ on alati nullist suurem, siis ei saa y'' ühelgi argumendi väärtusel nulliks ja funktsiooni y käigukõveral pole käänupunkte.

9° Funktsiooni y käigukõvera kumerus ja nõgusus.

Teise tuletise märgi määrab antud juhul selle tuletise avaldise nimetaja, nimetaja märgi aga määrab vahe $1 - x^2$. Seega ühtib y'' märk y märgiga. Järelikult on funktsiooni y käigukõver vahemikus $-1 < x < +1$ nõgus ja vahemikes $-\infty < x < -1$ ning $+1 < x < +\infty$ kumer.

10° Mõned funktsiooni y käigukõvera punktid ja tõusud.

x	0	0,5	0,75	1,25	1,50	2,0	3,0
y	1	1,33	2,29	—1,78	—0,80	—0,33	—0,12
y'	0	1,78	7,85	7,91	1,92	0,44	0,09



Joon. 260.

11° Graafiku joonestamine.

Märkides joonisele teada olevad punktid ja puutujad ning arvestades saadud andmeid kõvera kulgemise iseärasuste kohta, joonestame funktsiooni käigukõvera osa I ja IV veerandis ning seejärel selle osa peegelpildi y-telje suhtes (joon. 260).

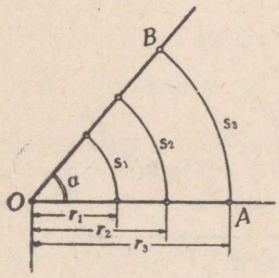
PEATÜKK XXIV

TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE TULETISED

§ 86. NURGA ABSOLUUTÜHIK

Nurga kraadmõõt ja nurga absoluutmõõt

Juba babüloonlased rajasid nurga mõõtmise ühele neljandikule täispöördest ehk *täisnurgale*; üks üheksakümnendik sellest nurgast on võetud nurkade mõõtmise ühikuks ja seda nimetatakse *nurgakraadiks*. Vajaduse korral jaotatakse nurgakraad 60 nurgaminutiks ja nurgaminut omakorda 60 nurgasekundiks. Nurkade mõõtmisel kraadides ja kraadi alajaotustes räägime nurkade mõõtmisest kraadmõõdus. Paljudel juhtudel on aga kohasem teine nurkade mõõtmise viis, mille selgitamisele kohe asume. Olgu antud mingi nurk AOB ja olgu ta suurus kraadmõõdus α (joon. 261). Joonestame nurga haarade vahele ümber nurga tipu kui keskpunkti kaared vabalt võetud raadiustega r_1, r_2, r_3, ... Olgu saadud kaarte pikkused vastavalt s_1, s_2, s_3, ... Need kaared on võrdelised raadiustega ja seepärast on



Joon. 261.

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{s_3}{r_3} = \dots$$

See tähendab, et nurgale AOB kui kesknurgale vastab küll kuitahes palju kaari s_1, s_2, s_3, ..., kuid ikka ainult *üks kaare ja raadiuse suhe*. Olgu r mingi raadius ja s selle raadiusega ümber nurga α tipu kui keskpunkti joonestatud kaar nurga α haarade vahel. Siis

$$\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2} = \frac{s_3}{r_3} = \dots = \frac{s}{r}.$$

See tähendab, et antud nurga puhul on sellele vastava kaare ja raadiuse suhe j ä ä v. Tähistame selle muutumatu suhte tähega x, see tähendab, kirjutame

$$\frac{s}{r} = x.$$

Öeldu põhjal vastab igale nurgale α a i n u l t ü k s arv x. Nurga α suurenemisel või vähenemisel 2, 3, 4, ... korda suureneb või väheneb ka kaar s ja seega ka suhe $\frac{s}{r}$ ehk arv x niisama palju kordi. Teiste sõnadega: igale nurgale α vastab oma arv x, mis nurga α muutumisel muutub temaga võrdeliselt. Ümberpöördult: igale arvule x vastab oma nurk α, mis arvu x muutumisel muutub temaga võrdeliselt. Seepärast võime nurga suuruse anda ka arvu x kaudu. Et arv x kui kaare ja raadiuse suhe on n i m e t a ehk, nagu öeldakse, a b s o l u u t n e arv, siis nimetatakse arvu x n u r g a a b s o l u u t m õ õ d u k s. Niisiis:

nurga absoluutmõõduks nimetatakse nurgale vastava kaare ja selle raadiuse suhet.

Paljude sõltuvuste puhul on nurk argumendiks. Kraadmõõdus töötamisel tuleks alati märkida, kas mõõduks on nurgakraad, nurgaminut või nurgasekund. Absoluutmõõdus töötamisel selle järele mingit vajadust ei ole. Teiseks nurga absoluutmõõdu eeliseks on see, et absoluutmõõdus töötamisel esinevad paljud tähtsad valemid tunduvalt lihtsamal kujul kui mistahes teise nurgamõõtmisviisi puhul.

Nurga kraadmõõdu ja absoluutmõõdu vaheline seos

Avaldame arvud α ja x teineteise kaudu. Selleks paneme tähele, et

täispöördele 360° vastab ringjoone pikkus $2\pi r$,
seega nurgale 1° „ „ kaare pikkus $\frac{2\pi r}{360}$
ja „ α° „ „ „ „ $\frac{2\pi r\alpha}{360}$.

Niisiis nurga kraadmõõdule α vastab absoluutmõõt

$$x = \frac{2\pi r\alpha}{360r} = \frac{\pi\alpha}{180}.$$

Ümberpöördult, nurga absoluutmõõdule x vastab kraadmõõt

$$\alpha = \frac{180x}{\pi}.$$

Radiaani mõiste

Nurga mõõtmisel absoluutmõõdus on mõõtühikuks nurk, millele vastav kaar on raadiuse pikkune. Seda nurka nimetatakse radiaaniks.

Võttes nurga kraadmõõdu valemis x väärtuseks arvu 1, saame, et

$$\text{radiaan} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

ehk, teisiti,

$$\text{radiaan} \approx 57°18'.$$

Näeme, et radiaan on pisut väiksem nurgast 60° ehk kahest kolmandikust täisnurgast.

Võttes nurga absoluutmõõdu valemis α väärtuseks arvu 1, saame, et

$$1 \text{ kraad} = \frac{\pi}{180} \text{ radiaani}$$

ehk, teisiti,

$$1 \text{ kraad} \approx 0{,}0175 \text{ radiaani}.$$

Üleminek kraadmõõdult absoluutmõõdule ja vastupidi

Kõrgema matemaatika teoreetilistes arutlustes töötatakse eranditult absoluutmõõdus antud nurkadega. Arvutuste puhul kasutatavates trigonomeetrilistes tabelites on aga nurgad antud kraadmõõdus. See asjaolu teeb vajalikuks oskuse nurki ühest mõõdusüsteemist teise ümber arvutada. Selleks kasutatakse valemeid $x = \frac{\pi\alpha}{180}$ ja $\alpha = \frac{180x}{\pi}$. Nurgad

$$0° \quad 30° \quad 45° \quad 60° \quad 90°$$

näiteks avalduvad absoluutmõõdus kujul

$$0 \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$$

ja nurgad

$$120° \quad 180° \quad 270° \quad 360°$$

vastavalt kujul

$$\frac{2\pi}{3} \quad \pi \quad \frac{3\pi}{2} \quad 2\pi$$

Nurk 72°48′ ehk 4368′ avaldub absoluutmõõdus arvuna $\frac{4368}{3438}$ ehk 1,27.

Sageli on vaja leida trigonomeetriliste funktsioonide väärtusi absoluutmõõdus antud nurga puhul. Et oleks

võimalik tabeleid kasutada, avaldame kõigepealt nurga kraadmõõdus ja otsime selle järgi tabeleist vajalikud suurused. Nii näiteks

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin 30° = \frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi}{4} = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\tan 1 = \tan 57°18' = 1{,}5577,$$
$$\cot 0{,}25 = \cot 14°20' = 3{,}9137.$$

Valemid ringjoone kaare pikkuse ja ringi sektori ning segmendi pindala arvutamiseks

Ülesanne 1. Olgu ringjoone raadius r. Anda valem kesknurgale x vastava kaare pikkuse arvutamiseks.

Lahendus. Nurga absoluutmõõtu määravast võrdusest

$$x = \frac{s}{r}$$

järeldub, et

$$s = rx$$

ehk, sõnastatult,

kesknurgale vastava kaare pikkus võrdub kaare raadiuse ja kesknurga absoluutmõõdu korrutisega.

Kui võtame $r = 1$, saame võrdusest $s = rx$, et $x = s$. See tähendab, et absoluutmõõdus antud nurk on arvuliselt võrdne nurga tipu kui keskpunkti ümber joonestatud ühikringjoone kaare pikkusega nurga haarade vahel. Seepärast nimetatakse nurga absoluutmõõtu ka nurga kaarmõõduks.

Ülesanne 2. Olgu ringi raadius r. Anda valem kesknurgale x vastava sektori ja segmendi pindala arvutamiseks.

Lahendus. Tähistame kõnesoleva sektori pindala tähega S. Täispöördele vastab ringi täispindala, see tähendab,

nurgale 2π vastab pindala πr^2.

Et sektori pindala on võrdeline sektori nurga suurusega, siis

nurgale 1 vastab pindala $\frac{\pi r^2}{2\pi}$ ehk $\frac{1}{2} r^2$

ja järelikult

nurgale x vastab pindala $\frac{1}{2} r^2 x$.

Niisiis

$$S = \frac{1}{2} r^2 x$$

ehk, sõnastatult,

sektori pindala võrdub tema kesknurga absoluutmõõdu ja raadiuse ruudu poole korrutisega.

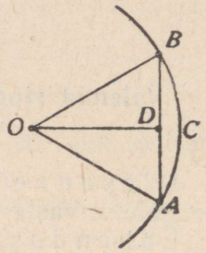
Leitud valemit saab sõnastada ka kujul:

sektori pindala võrdub tema kaare pikkuse ja raadiuse poole korrutisega.

Nagu näeme jooniselt 262, on segmendi $ADBCA$ pindala võrdne sektori $OACB$ ja kolmnurga OAB pindalade vahega. Kui nurga AOB suurus absoluutmõõdus on x, siis kolmnurga OAB pindala on

$$\frac{1}{2}AB \cdot OD = AD \cdot OD = r \sin\frac{x}{2} \cdot r \cos\frac{x}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}r^2 \sin x$$



Joon. 262.

ja otsitav segmendi pindala

$$S = \frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{2}r^2 \sin x$$

ehk

$$S = \frac{1}{2}r^2(x - \sin x).$$

Nurk parameetrina

Üheks sagedamini parameetrina kasutatavaks suuruseks on nurk. Sel puhul on sobiv nurka mõõta absoluutmõõdus. Selleks on kaks põhjust: esiteks lihtsustuvad valemid, teiseks on siis kindel mõte ka niisugustel avaldistel, nagu nurga ruut, nurga ja ta tangensi vahe, siinuse ja sellele vastava nurga suhe jne., samal ajal kui avaldised

$$(\alpha^\circ)^2, \quad \alpha^\circ - \tan\alpha^\circ, \quad \frac{\sin\alpha^\circ}{\alpha^\circ}$$

on mõttetud. Näitena nurga kasutamisest parameetrina toome tsükloidi parameetriliste võrrandite koostamise.

T s ü k l o i d i k s nimetatakse kõverat, mille kujundab ringjoone punkt, kui ring veereb mööda sirgjoonelist alust.

Märgime veereva ringi raadiuse AC tähega a. Võtame alussirge x-teljeks ja loeme alguspunktiks punkti O, milles tsükloidi kujundav punkt P puudutab alussirget (joon. 263). Kui ring on veerenud uude asendisse, siis on puutepunktiks uus punkt, mille märgime tähega A. Et veeremine toimub libisemiseta, siis on lõik OA igas ringi asendis võrdne kaarega AP. Märgime nurga ACP, mille võrra ring on pöördunud veeremisel algasendist vaadeldavasse asendisse, tähega φ ja võtame selle nurga

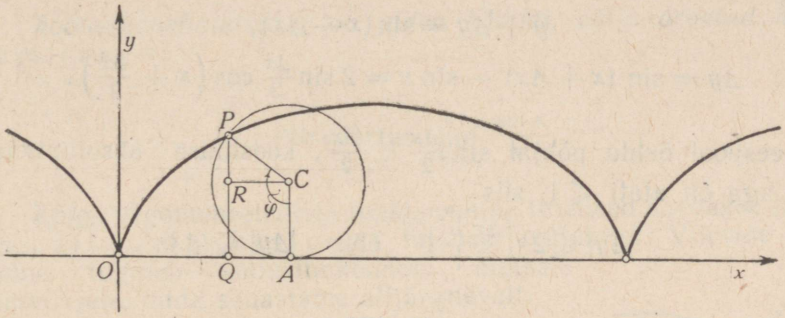
parameetriks. Siis $\overline{OA} = \widehat{AP} = a\varphi$. Punkti P abstsisslõik $OQ = OA - RC$ ja ordinaatlõik $QP = AC + RP$. Seepärast

$$x = a\varphi - a\sin\varphi \quad \text{ja} \quad y = a - a\cos\varphi$$

ehk

$$\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$

Et φ oli veerenurga suvaline väärtus, siis saadud võrdused ongi otsitavad võrrandid.



Joon. 263.

Kui veerenurk oleks mõõdetud kraadmõõdus, siis saaksime tsükloidi parameetrilised võrrandid kujul

$$\begin{cases} x = a\left(\frac{\pi\varphi}{180} - \sin\varphi\right) \\ y = a(1 - \cos\varphi). \end{cases}$$

§ 87. TRIGONOMEETRILISTE FUNKTSIOONIDE TULETISED

Kui ei ole öeldud vastupidist, siis eeldame selles paragrahvis kõikjal, et nurgad on antud absoluutmõõdus.

Trigonomeetriliste funktsioonide pidevus

Võtame trigonomeetrilistest funktsioonidest lähema uurimise alla kõigepealt siinusfunktsiooni. Joonestame ühikringi (joon. 264) ja vaatleme mõnda positiivset nurka $x < \pi$.

Nagu näitab joonis, on $2 \sin x < 2x$; seega

$$\sin x < x.$$

See x ja tema siinuse suurusjärjestus jääb muidugi püsima ka siis, kui $x > \pi$. Nurga $x = 0$ puhul asendub märk $<$ võrdusmärgiga $=$, nii et alati on

$$\sin x \leqslant x.$$

Selle võrratuse abil saame tõestada siinusfunktsiooni pidevuse. Olgu

$$y = \sin x.$$

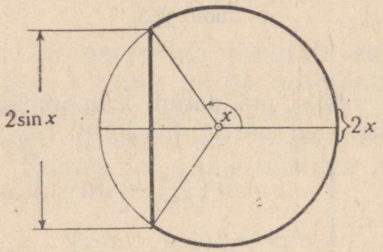
Siis

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x),$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Et eespool öeldu põhjal $\sin \frac{\Delta x}{2} \leqslant \frac{\Delta x}{2}$, koosinuse absoluutväärtus aga on alati $\leqslant 1$, siis

$$|\Delta y| \leqslant 2 \cdot \left|\frac{\Delta x}{2}\right| \cdot 1 \quad \text{ehk} \quad |\Delta y| \leqslant |\Delta x|.$$



Joon. 264.

Kui argumendi kasv Δx läheneb nullile, siis näeme, et ka Δy läheneb nullile. See aga tähendabki, et

siinusfunktsioon on pidev argumendi iga väärtuse puhul.

Et $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ ja siinusfunktsioon on pidev, siis on seda ka koosinusfunktsioon.

Öeldu põhjal

koosinusfunktsioon on pidev argumendi iga väärtuse puhul.

Tangensfunktsioon avaldub siinus- ja koosinusfunktsiooni kaudu kujul

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kahe pideva funktsiooni jagatis on samuti pidev funktsioon, kui ainult nimetaja pole null. Viimasel juhul tangensfunktsioon katkeb. Katkemiskohtadeks on koosinusfunktsiooni nullkohad: $\pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$, kus n on 0 või mingi naturaalarv. Seega

tangensfunktsioon on pidev kõikjal, välja arvatud kohad $x = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

Et $\cot x = -\tan(x+\frac{\pi}{2})$ ja tangensfunktsioon on pidev, välja arvatud kohad $\pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$, siis

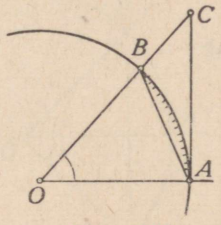
kootangensfunktsioon on pidev kõikjal, välja arvatud kohad $x = \pm n\pi$.

Piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

Kõigi trigonomeetriliste funktsioonide tuletised saadakse lähtudes siinusfunktsiooni tuletise avaldisest. Viimase leidmine tugineb siinusfunktsiooni tähtsale omadusele, mida sõnastame alljärgnevalt.

Teoreem. Argumendi tõkestamatul vähenemisel läheneb siinuse ja tema argumendi suhe tõkestamatult ühele;
sümbolites

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$



Joon. 265.

Tõestus. Joonestame ühikringi; olgu $\widehat{AOB} = x$; siis on ka $\overset{\frown}{AB} = x$. Tõmbame selle nurga haarade ja ringjoone lõikepunkte A ja B ühendava kõõlu ja nurga x tangenslõigu. Siis (joon. 265) kolmnurga AOB pindala $<$ sektori AOB pindala $<$ kolmnurga AOC pindala.

Erijuhul, kui $\widehat{AOB} = 0$, asenduvad mõlemad märgid $<$ võrdusmärkidega $=$. Avaldades esimesed kaks pindala kahe külje ja nendevahelise nurga kaudu, kolmanda aga kahe kaateti kaudu, saame suurusjärjestuse

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin x \leqslant \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot x \leqslant \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x$$

ehk, lihtsamini,

$$\sin x \leqslant x \leqslant \tan x.$$

Argumendi x nullile lähenemisel on $x \neq 0$, järelikult ka

$\sin x \neq 0$. Seepärast võib viimased võrratused liikmeti jagada $\sin x$-ga. See annab võrratused

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}.$$

Võttes siin esineva kolme arvu pöördväärtused, saame

$$1 \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \cos x$$

ehk, teisiti,

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1.$$

Peegeldades joonise telje OA suhtes, näeksime, et toodud mõttekäik viib ka negatiivsete nurkade puhul samale tulemusele nagu varem. Kui argument $x \to 0$, siis $\cos x \to 1$. Tõepoolest, koosinusfunktsioon on pidev funktsioon, seega $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$.

Suhe $\frac{\sin x}{x}$, asetsedes arvu 1 ja sellele tõkestamatult läheneva $\cos x$ vahel, peab tõkestamatult lähenema arvule 1; seega $x \to 0$ puhul

$$\frac{\sin x}{x} \to 1$$

ehk

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Valem $\sin x \approx x$

Siinusfunktsiooni tõestatud omadus ütleb, et k ü l l a l t v ä i k e s t e n u r k a d e p u h u l

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1$$

ehk, teisiti, et küllalt väikeste nurkade puhul

$$\sin x \approx x.$$

See tähendab, et

küllalt väikeste nurkade puhul on siinus ligikaudu võrdne oma absoluutmõõdus mõõdetud argumendiga.

Illustreerime seda paari näitega.

N ä i d e 1. Olgu nurk $\alpha = 2°$ ehk absoluutmõõdus $\alpha = 0{,}0349$. Sellele vastav

$$\sin \alpha = 0{,}0349.$$

Nagu näeme, ühtivad nurga $\alpha = 2°$ puhul x ja $\sin x$ väärtused vähemalt kümnetuhandikeni.

Näide 2. Olgu nurk $\alpha = 5°$ ehk absoluutmõõdus $x = 0{,}0873$. Sellele vastav

$$\sin \alpha = 0{,}0872.$$

Nagu näeme, erinevad x ja $\sin x$ väärtused teineteisest ainult 0,0001 võrra.

Valemi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ **geomeetriline tähendus**

Siinusfunktsiooni tõestatud omadust saab avaldada ka geomeetrilises keeles. Suhe

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{2 \sin x}{2x}.$$

Jooniselt 266 näeme, et $2 \sin x = \overline{P_1P_2}$ ja $2x = \overset{\frown}{P_1P_2}$, seega $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\overline{P_1P_2}}{\overset{\frown}{P_1P_2}}$. Nurga x nullile lähenemisel läheneb nullile ka kaar P_1P_2. Et viimase võrduse esimene suhe läheneb ühele, siis läheneb ühele ka teine suhe; seega

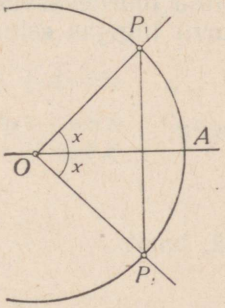
$$\lim_{\overset{\frown}{P_1P_2} \to 0} \frac{\overline{P_1P_2}}{\overset{\frown}{P_1P_2}} = 1$$

ja järelikult ka

$$\lim_{\overset{\frown}{P_1P_2} \to 0} \frac{\overset{\frown}{P_1P_2}}{\overline{P_1P_2}} = 1.$$

See tähendab, et

ringjoone kaare tõkestamatul vähenemisel läheneb kaare ja sellele vastava kõõlu suhe ühele.



Joon. 266.

Valem $\tan \alpha \approx \alpha$

Vaatleme suhte $\dfrac{\tan \alpha}{\alpha}$ käitumist nurga α tõkestamatul vähenemisel. Et iga nullist erineva α puhul

$$\frac{\tan \alpha}{\alpha} = \frac{\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

ja α tõkestamatul lähenemisel nullile nii esimene kui ka teine tegur viimases avaldises läheneb ühele, siis

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\tan \alpha}{\alpha} = 1.$$

Siit järeldub, et
väikeste nurkade puhul

$$\tan \alpha \approx \alpha.$$

Vaadeldes tulemust koos võrdusega $\sin \alpha \approx \alpha$, näeme, et *väikeste nurkade puhul*

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha.$$

Siinusfunktsiooni tuletis

Asume $\sin x$ tuletise leidmisele. Käies tuletise leidmise üldise eeskirja järgi, saame skeemi:

$$\begin{array}{cc} x & y = \sin x \\ x + \Delta x & y + \Delta y = \sin (x + \Delta x) \\ \Delta x & \Delta y = \sin (x + \Delta x) - \sin x \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin (x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Leitud juurdekasvude suhte piirväärtuse arvutamiseks teisendame murru lugejas esineva siinuste vahe korrutiseks:

$$\sin (x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Seega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

ehk, teisiti,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis ka $\frac{\Delta x}{2} \to 0$; koosinusfunktsiooni pidevuse tõttu $\cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \to \cos x$; siinuse ja tema argumendi suhe läheneb ühele. Järelikult

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$$

ehk

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Näide. $[\sin (nx + \varepsilon)]' = \cos (nx + \varepsilon) \cdot (nx + \varepsilon)' =$
$= \cos (nx + \varepsilon) \cdot n = n \cos (nx + \varepsilon).$

Koosinusfunktsiooni tuletis

Teame, et

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Järelikult funktsiooni funktsiooni tuletise valemi järgi

$$(\cos x)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (-1)$$

ehk

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Näide. $(\cos 2\pi Nx)' = -\sin 2\pi Nx \cdot (2\pi Nx)' =$
$= -\sin 2\pi Nx \cdot 2\pi N = -2\pi N \sin 2\pi Nx.$

Tangens- ja kootangensfunktsiooni tuletis

Tangensfunktsiooni tuletise leidmisel lähtume seosest

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Jagatise tuletise valemit kasutades saame

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot (\sin x)' - \sin x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Niisiis

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Samal viisil saame, et

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Näide. $\left[\tan^2 \frac{1}{2} x\right]' = 2 \tan \frac{1}{2} x \cdot \left(\tan \frac{1}{2} x\right)' =$

$$= 2 \tan \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \cdot \left(\frac{1}{2} x\right)' =$$

$$= 2 \tan \frac{1}{2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2} x} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\cos^3 \frac{1}{2} x}.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised kraadmõõdus töötamisel

Vaatame, missuguse kuju omandab siinusfunktsiooni tuletise valem, kui nurka mõõta mitte absoluutmõõdus, nagu seni, vaid kraadmõõdus. Vastaku nurga absoluutmõõdule x kraadmõõt α. Siis

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha.$$

Et $\sin \alpha = \sin x$, siis

$$(\sin \alpha)'_\alpha = (\sin x)'_\alpha = (\sin x)'_x \cdot x'_\alpha = \cos x \cdot \frac{\pi}{180}$$

ehk

$$(\sin \alpha)'_\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \cos \alpha.$$

Nagu näeme, on siinusfunktsiooni tuletise valem kraadmõõdu kasutamisel keerukam kui absoluutmõõdu kasutamisel. Sama nähtus kordub ka teiste trigonomeetriliste funktsioonide puhul. See asjaolu on üheks põhjuseks, mispärast matemaatilises analüüsis eelistatakse nurga mõõtmist absoluutmõõdus.

PEATÜKK XXV

PÖÖRDFUNKTSIOONID JA NENDE TULETISED

§ 88. FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE PÖÖRAMINE

Pöördfunktsiooni mõiste

Olgu tegemist funktsiooniga $y = f(x)$. Selle võrdusega on argumendi väärtustele $x_1, x_2, x_3, \ldots$ seatud vastavusse funktsiooni väärtused $y_1, y_2, y_3, \ldots$ Ühtaegu on seega väärtustele $y_1, y_2, y_3, \ldots$ seatud vastavusse väärtused $x_1, x_2, x_3, \ldots$ nii, et ka x on y funktsioon; kirjutame seda kujul $x = g(y)$. Nagu näeme, on suuruste x ja y vaheline sõltuvus suuruste x ja y vastastikune omadus. Funktsiooni $x = g(y)$ saime, võttes varem funktsiooniks olnud suuruse argumendiks ehk, nagu ütleme, funktsiooni $x = g(y)$ saime pöörates sõltuvust $y = f(x)$. Suurust $x = g(y)$ nimetame funktsiooni $y = f(x)$ pöördfunktsiooniks. Tema avaldise saamiseks vaatleme võrduses $y = f(x)$ arvu y antuna ja arvu x tundmatuna. Lahendades võrrandi $f(x) = y$ tundmatu x suhtes, saame $x = g(y)$.

Näiteid.

Kui $y = x^3$, siis $x = \sqrt[3]{y}$.

Kui $y = \sqrt{x - 1}$, siis $x = y^2 + 1$.

Kui $y = ax + b$, siis $x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Galilei seadus ütleb, et kõrguselt h vabalt langeva keha kiiruse määrab valem $v^2 = 2gh$. Siit

$$\text{kas } v = \sqrt{2gh} \text{ või } h = \frac{v^2}{2g}.$$

Esimene valem annab lõppkiiruse v, mille keha omandab kõrguselt h langedes; teine annab kõrguse h, millelt keha peab langema, et omandada lõppkiirust v. Funktsioonid v ja h on teineteise suhtes pöördfunktsioonid.

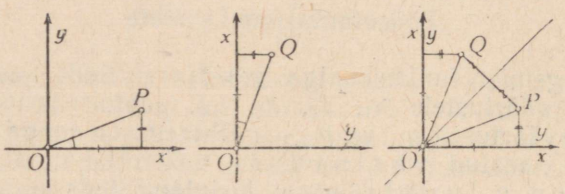
Funktsionaalse sõltuvuse pööramine ei ole iga kord nii kergesti teostatav kui praegu vaadeldud näidete puhul. Üldjuhul kirjutame $y = f(x)$ pöördfunktsiooni kujul

$$x = g(y),$$

sõltumatult sellest, kas on õnnestunud viimase funktsiooni avaldist leida või mitte.

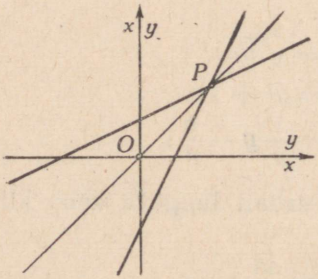
Pöördfunktsiooni graafiku joonestamine

Olgu antud sõltuvus $y = f(x)$, nii et (x, y) on paar kokkukuuluvaid argumendi ja funktsiooni väärtusi. Vahetades sulgudes arvude x ja y järjekorra nii, et nüüd y on argumendiks ja x

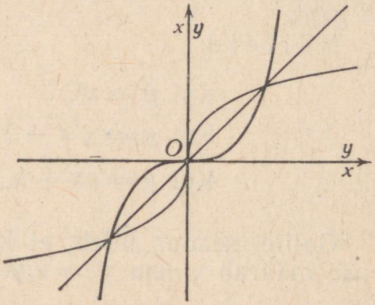


Joon. 267.

tema funktsiooniks, näeme, et paar (y, x) rahuldab võrdust $x = g(y)$. Kujutame arvupaari (x, y) punktina P xy-tasapinnal ja arvupaari (y, x) punktina Q yx-tasapinnal (joon. 267) ning asetame yx-tasapinna xy-tasapinnale nii, et nende teljestikud ühtiksid. Siis näeme, et alguspunktist O punktidesse $P(x, y)$ ja



Joon. 268.



Joon. 269.

$Q(y, x)$ viivad lõigud on p i k k u s e l t v õ r d s e d ja moodustavad I veerandi nurgapoolitajaga võrdsed nurgad. Siit järeldub, et punktid (x, y) ja (y, x) asetsevad I veerandi nurgapoolitaja

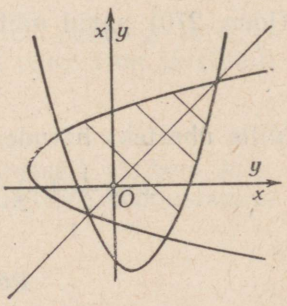
suhtes s ü m m e e t r i l i s e l t, ehk, teiste sõnadega, punkt (y, x) on punkti (x, y) p e e g e l p u n k t i k s I veerandi nurgapoolitaja suhtes ja vastupidi. See kehtib iga punkti P kohta kõveral $y = f(x)$ ja punkti Q kohta kõveral $x = g(y)$. Öeldu põhjal

pöördfunktsiooni $x = g(y)$ graafik saadakse funktsiooni $y = f(x)$ graafikust, peegeldades seda I veerandi nurgapoolitaja suhtes ja telgede nimetusi vahetades.

Joonisel 268 näeme funktsiooni $y = \frac{1}{2}x + 1$ ja selle pöördfunktsiooni $x = 2y - 2$ graafikute skitse. Joonis 269 kujutab funktsiooni $y = \frac{1}{8}x^3$ ja selle pöördfunktsiooni $x = 2\sqrt[3]{y}$ graafikute skitse.

Ühesed ja mitmesed funktsioonid

Vaadeldes jooniseid 268 ja 269, näeme, et funktsioon $y = f(x)$ on seal määratud argumendi x iga väärtuse puhul ja sama kehtib funktsiooni $x = g(y)$ kohta. Seejuures vastab igale x-le ü k s a i n u s y ja igale y-le ü k s a i n u s x. Nagu y on argumendi x ü h e n e funktsioon, nii on ka x argumendi y ü h e n e funktsioon. Praegu märgitud asjaolud on aga üldiselt e r a n d i k s. Funktsionaalse sõltuvuse $y = f(x)$ pööramisel saadud funktsiooni $x = g(y)$ määramispiirkond erineb tavaliselt lähtefunktsiooni määramispiirkonnast ja ühele y väärtusele vastab m i t u x väärtust. Joonis 270 kujutab juhtu, kus sõltuvuse pööramisel igale y väärtusele, millel x on määratud, vastab k a k s suuruselt mittevõrdset x väärtust, ja joonisel 271 näeme juhtu, kus teatavas vahemikus igale y väärtusele vastab k o l m x väärtust. Viimati käsitletud juhtudel on tegemist vastavalt k a h e s e ja k o l m e s e pöördfunktsiooniga. Üldiselt:



Joon. 270.

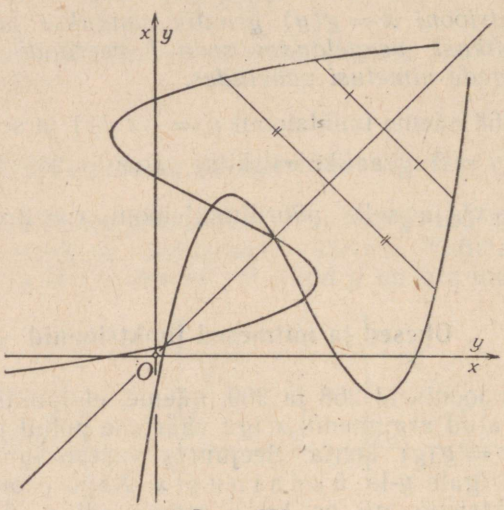
kui mõnes argumendi vahemikus argumendi ühele väärtusele vastab üks, kaks, kolm jne. funktsiooni väärtust, siis ütleme, et funktsioon on selles vahemikus ü h e n e, k a h e n e, k o l m e n e jne.

Kui antud argumendi väärtusele vastab m i t u funktsiooni väärtust, räägime m i t m e s e s t funktsioonist.

Kahest funktsiooni on alati võimalik vaadelda koosnevana kahest h a r u s t, kolmest funktsiooni koosnevana kolmest

harust jne., kusjuures iga haru on ühene funktsioon. Sõltuvuse

$$y = x^2 - x - 2$$



Joon. 271.

(joon. 270) puhul näiteks saame kahese pöördfunktsiooni

$$x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4y - 9},$$

mille ühesteks harudeks on

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4y + 9} \text{ ja } x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4y + 9}.$$

Pöördfunktsiooni pidevus

Oletame, et funktsioon $y = f(x)$ on pidev. Siis on tema käigukõver pidev joon, ka selle peegelpilt I veerandi nurgapoolitaja suhtes on pidev joon ja kujutab seega pidevat funktsiooni. Niisiis:

pideva funktsiooni $y = f(x)$ *pöördfunktsioon* $x = g(y)$ *on samuti pidev funktsioon.*

Eeldame, et argument x muutub kasvades. Vaatleme mingit ühesuunaliselt ehk, nagu öeldakse, monotoonselt* muutuvat ühest funktsiooni $y = f(x)$. Selle graafik on siis ka mono-

* Sõna monotoonne tähendab otseses mõttes ühetooniline.

toonselt tõusev või monotoonselt langev kõver. Viimase peegeldamine I veerandi nurgapoolitaja suhtes annab jälle monotoonselt kulgeva kõvera ja selle kõvera iga punkti abstsissile vastab üksainus ordinaat ning ümberpöördult. Seega

monotoonselt muutuva ühese funktsiooni pöördfunktsioon on jällegi monotoonselt muutuv ühene funktsioon.

Ühene pidev funktsioon muutub oma kahe järjestikuse ekstreemumi vahel alati monotoonselt. Seega

kahe järjestikuse ekstreemumi vahel võetud ühese pideva funktsiooni pöördfunktsioon on alati ühene ja pidev.

Pöördfunktsiooni tuletis

Olgu antud monotoonselt muutuv ühene ja pidev funktsioon

$$y = f(x).$$

Samad kolm omadust on siis ka ta pöördfunktsioonil

$$x = g(y).$$

Tehtud oletustel $f'(x) \neq 0$. Leiame $g'(y)$.

Asetades võrduses $y = f(x)$ argumendi x asemele tema avaldise $g(y)$, saame

$$y = f[g(y)].$$

Seda võrdust rahuldab i g a y väärtus, mille puhul g ja selle kaudu ka f on määratud. Viimati kirjutatud võrdus on järelikult s a m a s u s:

$$y \equiv f[g(y)].$$

Samaselt võrdsetel suurustel on aga ka samaselt võrdsed tuletised. Tuginedes funktsiooni funktsiooni tuletise moodustamise lausele, saame antud juhul, kus

$$y = f(x) \quad \text{ja} \quad x = g(y),$$

et

$$y'_y = f'_x \cdot x'_y$$

ehk

$$1 = f'_x \cdot g'_y$$

ehk, kui $f'_x \neq 0$,

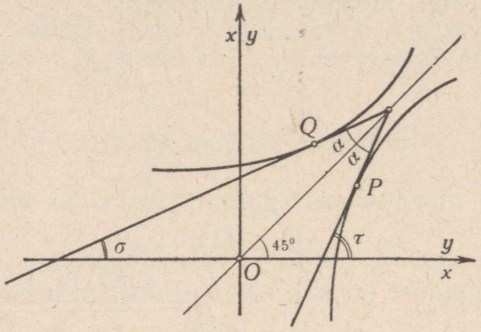
$$g'_y = \frac{1}{f'_x}.$$

See tähendab, et

pöördfunktsiooni tuletis on lähtefunktsiooni tuletise pöördväärtus.

Leitud seost lähte- ja pöördfunktsiooni tuletiste vahel saab kergesti järeldada ka geomeetrilistest kaalutlustest: funktsiooni

$x = g(y)$ graafik saadakse funktsiooni $y = f(x)$ graafiku peegeldamisel I veerandi nurgapoolitaja suhtes; seega ka joone $x = g(y)$ puutuja saadakse joone $y = f(x)$ puutuja peegeldamisel sama I veerandi nurgapoolitaja suhtes. Kui joone $y = f(x)$ puutuja moodustab rõhtteljega nurga τ, joone $x = g(y)$ puutuja sama rõhtteljega nurga σ ja kumbki puutuja I



Joon. 272.

veerandi nurgapoolitajaga nurga α (joon. 272), siis

$$\tau = 45° + \alpha \text{ ja } \sigma = 45° - \alpha.$$

Seega

$$\tan \sigma = \tan (45° - \alpha) = \cot [90° - (45° - \alpha)] =$$

$$= \cot (45° + \alpha) = \frac{1}{\tan (45° + \alpha)} = \frac{1}{\tan \tau}.$$

Et $\tan \sigma$ ja $\tan \tau$ on tuletiste g'_y ja f'_x geomeetrilised vasted, siis

$$g'_y = \frac{1}{f'_x},$$

mida oligi vaja tõestada.

Näide 1. Olgu $y = x^2$. Vahemikus $0 < x < +\infty$ kasvab y monotoonselt. Funktsioonile y vastab siis pöördfunktsioonina $x = \sqrt{y}$. Pöördfunktsiooni tuletise valemit rakendades saame

$$(\sqrt{y})'_y = x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(x^2)'_x} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

ehk, kirjutades y asemel x,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Näide 2. Olgu $y = x^3$. Vahemikus $-\infty < x < +\infty$ on y ühene ja kasvab monotoonselt. Sama on kehtiv pöördfunktsiooni $x = \sqrt[3]{y}$ kohta. Pöördfunktsiooni tuletise valemit rakendades saame

$$(\sqrt[3]{y})' = \frac{1}{(x^3)'_x} = \frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{y})^2} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

ehk, kirjutades y asemel x,

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Funktsionaalse sõltuvuse pööramise konkreetne tõlgendus

Kujutleme protsessi, mille kulgemine on määratud seadusega $y = f(x)$. Nagu nähtub kirjutusviisist, vaadeldakse siin y muutumist x muutumise taustal. Sõltuvuse $y = f(x)$ pööramisel saame seose $x = g(y)$. See näitab, et nüüd vaadeldakse x muutumist y muutumise taustal. Seega on $x = g(y)$ pöördnähtuse kulgemise seadus.

Sõltuvuse pööramisel taust ja temal vaadeldav nähtus vahetavad osad.

Tuletis f'_x tähendab kiirust, millega muutub y, kui seda vaadelda x taustal; tuletis g'_y tähendab kiirust, millega muutub x, kui seda vaadelda y taustal. Valem

$$g'_y = \frac{1}{f'_x}$$

annab seega nähtuse ja selle pöördnähtuse kulgemise kiiruste vahelise seose. Valem näitab, et

nähtuse ja selle pöördnähtuse kulgemise kiirused on teineteisega pöördvõrdelised.

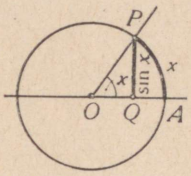
§ 89. ARKUSFUNKTSIOONID JA NENDE TULETISED

Järgmised artiklid on pühendatud trigonomeetriliste funktsioonide pöördfunktsioonidele ehk, nagu neid nimetatakse, arkusfunktsioonidele*. See nimetus tuleneb asjaolust, et nurgad on siin antud absoluutmõõdus. Nendele funktsioonidele viivad paljud tähtsad teoreetilised ja praktilised küsimused, nagu näiteks klassikaline ringi pindala ruutimise probleem, masinat kandva aluse võnkumisega seotud küsimused masina käigul jne.

* Lad. k. *arcus* — kaar.

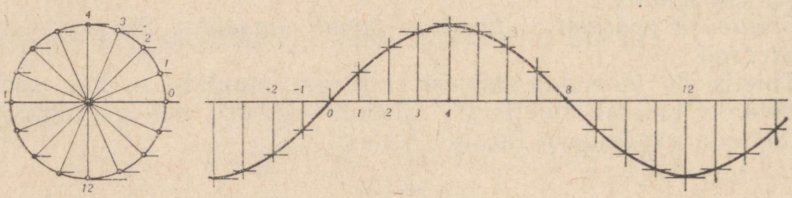
Funktsioon $y = \sin x$ ja selle pöördfunktsioon

Arv $\sin x$ on siinuslõigu PQ (joon. 273) ja raadiuse OP jagatis. Kui raadiuse OP võtame pikkusühikuks, siis siinuslõik PQ kujutab $\sin x$ väärtust, kaar AP aga kujutab nurga AOP suurust: tõepoolest, $\overset{\frown}{AP} = OA \cdot x = 1 \cdot x = x$.



Joon. 273.

Siinusfunktsiooni käigukõvera saamiseks võtame ühikringjoone (ringjoone raadiusega 1), jaotame ta näiteks 16 osaks, nummerdame saadud jaotuspunktid numbritega 0, 1, 2, ..., 14, 15 ja joonestame neile punktidele vastavad siinuslõigud. Lõikame ringjoone punktis 0 läbi, tõmbame ta mõttes sirgeks ning asetame saadud lõigu $2\pi \cdot 1 = 6{,}28$ ringjoone rõhtdiameetri pikendile. Jaotame selle lõigu 16 osaks, nummerdame saadud punktid numbritega 0, 1, 2, ..., 14, 15, tõmbame neist punktidest perpendikulaarid ja kanname viimastele vastavate numbritega märgitud siinuslõigud (joon. 274). Ühendades nende lõikude lõpp-punktid pideva sileda kõveraga, saame



Joon. 274.

siinusfunktsiooni käigujoone — siinuskõvera — argumendi vahemikus 0 kuni 2π. Jätkates jaotuspunktide nummerdamist ühele ja teisele poole: 16, 17, 18, ... ; —1, —2, —3, ... ja jätkates eespool kirjeldatud konstruktsiooni, saame siinuskõvera vahemikus $-\infty$ kuni $+\infty$.

Nagu näeme, on siinusfunktsiooni käigujoon kõver, mis lookleb sirgete $y = -1$ ja $y = +1$ vahel. See kõver lõikab x-telge punktides $x = n\pi$, kus $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$; —1, —2, —3, ...: $\sin n\pi = 0$, kus n on negatiivne või positiivne täisarv. Siinusfunktsioon on perioodiline funktsioon perioodiga 2π. See tähendab, et kui x_0 on argumendi mingi väärtus, siis

$$\sin (x_0 + 2\pi) = \sin x_0.$$

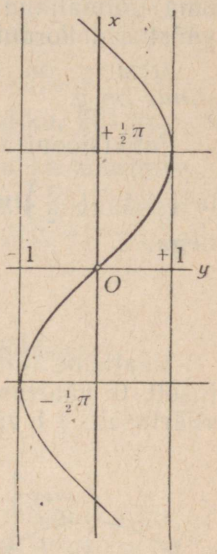
Üldiselt:

funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse perioodiliseks funktsiooniks perioodiga p, kui argumendi igasuguse väärtuse x_0 puhul

$$f(x_0 + p) = f(x_0)$$

ja seejuures p on väikseim arv, mis rahuldab toodud võrdust.

Et $\sin(x_0 + 2\pi) = \sin x_0$, siis on seda ka $\sin(x_0 + 2\pi + 2\pi)$ ehk $\sin(x_0 + 2 \cdot 2\pi)$, edasi $\sin(x_0 + 3 \cdot 2\pi)$ jne., üldiselt $\sin(x_0 + n \cdot 2\pi)$, kus n on mingi naturaalarv. See tähendab, et siinusjoone pilt vahemikus $0 \leqslant x < 2\pi$ kordub uuesti vahemikus $2\pi \leqslant x < 4\pi$, vahemikus $4\pi \leqslant x < 6\pi$ jne. Siinusjoon koosneb niisiis ikka jälle korduvaist laineist; piisab siinuskõvera osa joonestamisest vahemikus $x_0 \leqslant x < x_0 + 2\pi$, et saada pilti kogu siinuskõverast. Siinuskõvera lainepikkus on 2π ja poollainepikkus π. Laine alguspunktiks võib võtta siinusjoone mistahes punkti.



Joon. 275.

Peegeldades siinuskõvera I veerandi nurgapoolitaja suhtes, saame siinusfunktsiooni $y = \sin x$ pöördfunktsiooni graafiku (joon. 275). See graafik paikneb tervenisti sirgete $y = -1$ ja $y = +1$ vahel. See tähendab, et uuritava pöördfunktsiooni määramispiirkonnaks on vahemik $-1 \leqslant y \leqslant +1$.

Kui anname ette mõne y väärtuse -1 ja $+1$ vahel, siis vastab sellele väärtusele kuitahes palju x väärtusi; seega

siinusfunktsiooni pöördfunktsioon on lõpmatult mitmene.

Kui nurk muutub kasvades $-\frac{\pi}{2}$-st $+\frac{\pi}{2}$-ni, siis omandab siinusfunktsioon järjest kasvades kõik väärtused -1 ja $+1$ vahel ja igaühe neist üksainus kord. Ümberpöördult, kui anname ette siinuse väärtuse y, nii et $-1 \leqslant y \leqslant +1$, siis leidub vahemikus $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel ikka niisugune nurk x, mille siinus on y. Funktsiooni $y = \sin x$ pöörde osa $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel kannab siinuse pöördfunktsiooni peaharu ehk, lühemalt, arkussiinuse nimetust. Kõik teised nurgad, mille puhul siinus omandab sellesama väärtuse y, on siis antud avaldistega

$$\arcsin * \; y + n \cdot 2\pi \quad \text{ja} \quad \pi - \arcsin y + n \cdot 2\pi,$$

kus n on positiivne või negatiivne täisarv.

---

* Sümbol arc on lühend ladinakeelsest sõnast *arcus*.

Niisiis:

arcsin y *on absoluutmõõdus avaldatud nurk* $-\frac{\pi}{2}$ *ja* $+\frac{\pi}{2}$ *vahel, mille siinus on* y

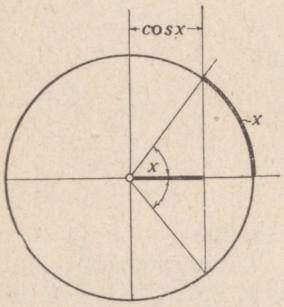
ehk, et siinus omandab juba vahemikus $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\pi}{2}$ kõik oma võimalikud väärtused ja väljaspool seda vahemikku need väärtused korduvad, siis

arcsin y *on absoluutväärtuse poolest väikseim nurk, mille siinus on* y.

Funktsiooni $x = \arcsin y$ graafik kulgeb punktide $\left(-1; -\frac{\pi}{2}\right)$ ja $\left(+1; +\frac{\pi}{2}\right)$ vahel ja on joonisel 275 märgitud jämedama joonega.

Arkuskoosinusfunktsioon

Vaatleme funktsiooni $y = \cos x$. Argumendi muutumisel väärtuselt 0 väärtuseni π muutub vaadeldav funktsioon vähenedes väärtuselt $+1$ väärtuseni -1 ja omandab kõik vahepealsed väärtused üksainus kord. Kui anname ette ühe niisuguse y väärtuse, siis leidub ikka kaks suuruselt võrdset, märgilt vastupidist nurka, mille puhul $\cos x = y$ (joon. 276). Positiivset nurka x nimetatakse arvu y arkuskoosinuseks ja kirjutatakse arccos y, sümbolites



Joon. 276.

$$x = \arccos y.$$

Niisiis:

arccos y *on absoluutmõõdus avaldatud nurk* 0 *ja* π *vahel, mille koosinus on* y.

Avaldatud nurk x pole ainus, mille koosinus on y; sama koosinus on ka nurgal $-\arccos y$.

Nagu $\sin x$, nii on ka $\cos x$ perioodiline funktsioon perioodiga 2π: igasuguse x_0 puhul

$$\cos(x_0 + 2\pi) = \cos x_0.$$

Kõik nurgad, mille koosinused on võrdsed arvuga y, on seepärast antud avaldistega

$$\arccos y + n \cdot 2\pi \quad \text{ja} \quad -\arccos y + n \cdot 2\pi,$$

kus n on mingi positiivne või negatiivne täisarv.

Arkuskoosinusfunktsiooni käigukõvera saamiseks võiksime joonestada koosinuskõvera ja peegeldada selle I veerandi nurgapoolitaja suhtes. Lihtsamini jõuame aga eesmärgile, kui paneme tähele, et

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Järelikult koosinuskõver langeb siinuskõveraga ühte, kui ainult nihutame argumendi $\frac{\pi}{2}$ võrra edasi. Seepärast kujutab joonisel 275 toodud kõver koosinuse pöördfunktsiooni käiku, kui abstsisstelg viia $\frac{\pi}{2}$ võrra kõrgemale. Nagu näeme, on ka koosinusfunktsiooni pöördfunktsioon lõpmatult mitmene. Selle funktsiooni peaharu käik kujutub kaarena, mis algab punktist (1; 0) ja lõpeb punktis $(-1; \pi)$.

Arkussiinuse ja arkuskoosinuse vaheline põhiseos

Näitame, et

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}.$$

See järeldub kohe joonisest 275, kui seal ette anda mingi y väärtus -1 ja $+1$ vahel, võtta sellele vastavad lõigud arcsin y ja arccos y ja need liita.

Samale tulemusele jõuame aga ka järgmise lihtsa arutluse teel. Teame, et iga nurga u puhul

$$\sin u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right).$$

Märgime kummagi kahest võrdsest suurusest tähega y:

$$\sin u = y, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = y.$$

Siis

$$u = \arcsin y,$$

$$\frac{\pi}{2} - u = \arccos y.$$

Liites võrdused liikmeti, saame tõestatava seose

$$\arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}.$$

Märkus. Et argumenti tähistatakse tavaliselt tähega x, siis kirjutame edaspidi ka siinuse ja koosinuse pöördfunktsioone kujul arcsin x ja arccos x.

Arkussiinuse ja arkuskoosinuse tuletised

Pöördfunktsiooni tuletise valemi

$$g'_y = \frac{1}{f'_x}$$

põhjal saame, et

$$(\arcsin y)'_y = \frac{1}{(\sin x)'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Et $\arcsin y$ on $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel, siis on ka x samade tõkete vahel; järelikult $\cos x > 0$ ja ruutjuur saadud valemis tuleb võtta plussmärgiga.

Niisiis,

$$(\arcsin y)'_y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Tähistades argumendi, nagu tavaliselt, tähega x, saame

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Et

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

siis

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

sest $\frac{\pi}{2}$ on konstant ja konstandi tuletis on 0.

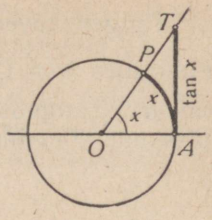
Näide. $$\left(\arcsin \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{x^2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

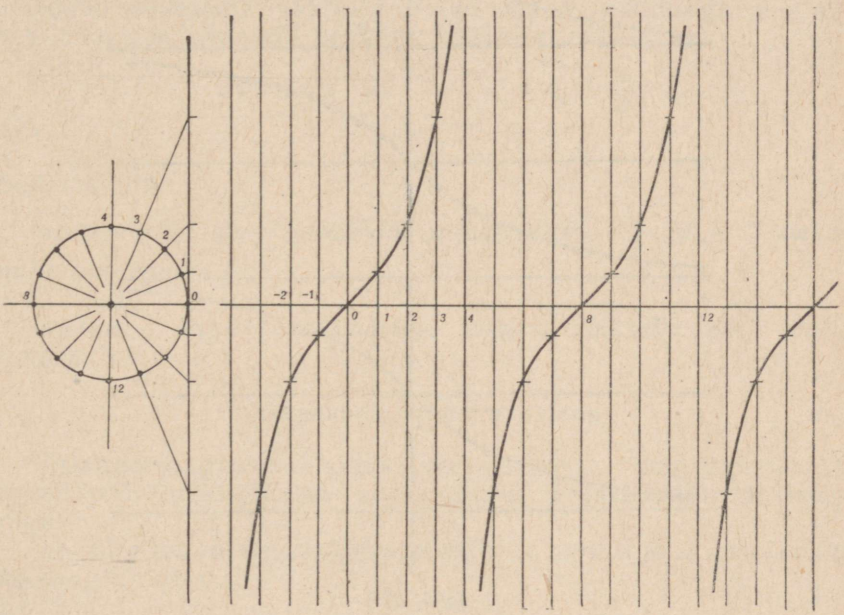
Funktsioon $y = \tan x$ ja selle pöördfunktsioon

Arv $\tan x$ on tangenslõigu AT (joon. 277) ja raadiuse OA jagatis. Kui võtame pikkusühikuks raadiuse OA, siis tangenslõik AT kujutab $\tan x$ väärtust, kaar AP aga kujutab nurga AOT suurust: $\widehat{AP} = OA \cdot x = 1 \cdot x = x$.

Tangensfunktsiooni käigukõvera saamiseks toimime samuti nagu siinuskõvera joonestamise puhul: võtame ühikringjoone (joon. 278), jaotame selle 16 osaks, nummerdame jaotuspunktid ja joonestame neile punktidele vastavad tangenslõigud. Tõmbame ringjoone sirgeks, asetame saadud lõigu x-teljele, märgime jaotuspunktid 0, 1, 2, ..., tõmbame neist punktidest perpendikulaarid ja kanname viimastele vastavate numbritega märgitud tangenslõigud. Ühendades nende lõikude lõpp-punktid pideva sileda jõonega, saame tangenskõvera argumendi vahemikes $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$. Jätkates jaotus-



Joon. 277.



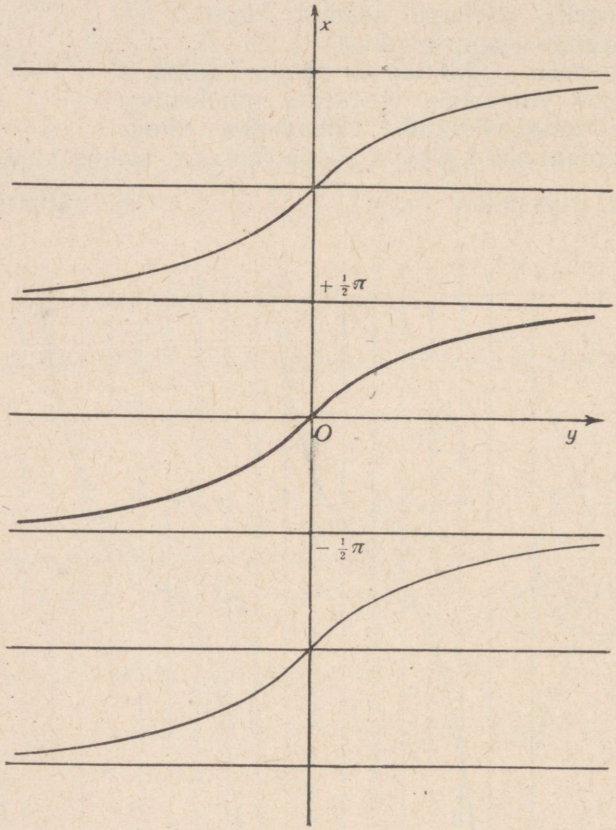
Joon. 278.

punktide nummerdamist ühele ja teisele poole: 16, 17, 18, ...; —1, —2, —3, ... ja jätkates eespool kirjeldatud konstruktsiooni, saame tangenskõvera vahemikus $-\infty$ kuni $+\infty$.

Tangenskõver lõikab x-telge punktides $x = n\pi$, kus $n = 0, 1, 2, 3, \ldots; -1, -2, -3, \ldots$:

$\tan n\pi = 0$, kus n on negatiivne või positiivne täisarv.

Tangenskõver on katkev kõver; katkemiskohad asetsevad punktides $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$, kus n on positiivne või negatiivne täisarv. Tangenskõvera katkemine toimub lõpmatute hüpetega, järskude üleminekutega «pluss lõpmatuselt miinus lõpmatusele».



Joon. 279.

Tangenskõver on perioodiline kõver perioodiga π: kui x_0 on argumendi mingi väärtus, siis on tangenskõveral väärtustel $x_0 \pm n\pi$ üks ja seesama ordinaat:

$$\tan (x_0 \pm n\pi) = \tan x_0.$$

Tangensfunktsiooni periood on järelikult kaks korda lühem kui siinusfunktsiooni ja koosinusfunktsiooni periood.

Peegeldades tangenskõvera I veerandi nurgapoolitaja suhtes, saame tangensfunktsiooni $y = \tan x$ pöördfunktsiooni graafiku (joon. 279).

Kui anname ette mõne y väärtuse $-\infty$ ja $+\infty$ vahel, siis vastab sellele väärtusele kuitahes palju x väärtusi; seega

tangensfunktsiooni pöördfunktsioon on lõpmatult mitmene.

Kui nurk muutub kasvades vahemikus $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, siis omandab tangensfunktsioon järjest kasvades kõik väärtused $-\infty$ ja $+\infty$ vahel ja igaühe neist üksainus kord. Ümberpöördult, kui anname ette tangensi väärtuse y vahemikus $-\infty < y < +\infty$, siis leidub väärtuste $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel ikka niisugune nurk x, mille tangens on y. Seda nurka nimetame arkustangens y ja kirjutame arctan y. Kõik teised nurgad, mille puhul tangens omandab sellesama väärtuse y, on antud avaldisega $y + n\pi$, kus n on positiivne või negatiivne täisarv. Niisiis: kui

$$y = \tan x \quad \text{ja} \quad -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2},$$

siis

$$x = \arctan y.$$

Sõnastatult:

arctan y *on absoluutmõõdus antud nurk* $-\frac{\pi}{2}$ *ja* $+\frac{\pi}{2}$ *vahel, mille tangens on* y,

ehk, teisiti,

arctan y *on absoluutväärtuse poolest väikseim nurk, mille tangens on* y.

Arkuskootangensfunktsioon

Arkuskootangensfunktsioon defineeritakse kootangensfunktsiooni pöördfunktsioonina analoogiliselt arkuskoosinusfunktsiooniga:

arccot y *on absoluutmõõdus avaldatud nurk* 0 *ja* π *vahel, mille kootangens on* y.

Et

$$\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

siis saab kootangensfunktsiooni graafikut kergesti joonestada tangensfunktsiooni käigujoone andmeil. Peegeldades $\cot x$ graafiku sirge $y = x$ suhtes, saame $\operatorname{arccot} x$ graafiku.

Nagu eespool $\arcsin x$ ja $\arccos x$ puhul, nii on ka siin kerge näidata, et

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}.$$

Arkustangensi ja arkuskootangensi tuletised

Pöördfunktsiooni tuletise valemi

$$g'_y = \frac{1}{f'_x}$$

põhjal saame, et

$$(\arctan y)'_y = \frac{1}{(\tan x)'_x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Tähistades argumendi, nagu tavaliselt, tähega x, saame valemi

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Et

$$\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x,$$

siis

$$(\operatorname{arccot} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)' = -\frac{1}{1+x^2},$$

sest $\frac{\pi}{2}$ on konstant ja konstandi tuletis on 0.

Näide. $\left(\arctan \frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$

$$= \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2} \cdot \frac{(1+x)(-1)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} =$$

$$= -\frac{1+x+1-x}{1+2x+x^2+1-2x+x^2} = -\frac{2}{2+2x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Vastus on arkuskootangensi tuletis. Näitame, et see peabki nii olema. Selleks arutleme järgmiselt. Olgu $x = \tan\varphi$. Siis

$$\frac{1-x}{1+x} = \frac{1-\tan\varphi}{1+\tan\varphi} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\varphi}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\varphi} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right).$$

Järelikult

$$\arctan\frac{1-x}{1+x} = \arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)\right] = \frac{\pi}{4} - \varphi =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \arctan x = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x\right) = \operatorname{arccot} x - \frac{\pi}{4}$$

ja seepärast

$$\left(\arctan\frac{1-x}{1+x}\right)' = (\operatorname{arccot} x)'.$$

Arkusfunktsioone sisaldavate avaldiste lihtsustamine

Tuginedes arkusfunktsioonide definitsioonidele, on mõnikord võimalik tunduvalt lihtsustada neid funktsioone sisaldavaid avaldisi. Toome mõned näited.

N ä i d e 1. Olgu $u = \sin(\arcsin x)$. Siis $\arcsin u = \arcsin x$ ja seega $u = x$.

N ä i d e 2. Olgu $u = \arccos(\sin x)$. Siis $\cos u = \sin x$, $\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ja seega $u = \frac{\pi}{2} - x$.

N ä i d e 3. Avaldame $\sin(2 \arctan x)$ võimalikult lihtsal viisil.

Tähistame ajutiselt nurga $\arctan x$ mingi tähega, näiteks φ; siis

$$\arctan x = \varphi \quad \text{ja} \quad x = \tan \varphi.$$

Sel puhul

$$\sin(2 \arctan x) = \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Edasi on aga

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

ja

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

kus juured on võetud p l u s s m ä r g i g a, sest nurga φ tähenduse kohaselt $-\frac{\pi}{2} < \varphi < +\frac{\pi}{2}$ ja seepärast $\cos \varphi > 0$. Asetades leitud avaldised korrutisse $2 \sin \varphi \cos \varphi$, saame lõpuks, et

$$\sin(2 \arctan x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Arkustangensi rakendamise näide

Nagu edaspidi näeme, on arkusfunktsioonid väga tulusaks vahendiks integraalarvutuse laia ülesannete klassi lahendamisel. Praegu näitame, kuidas arkustangensfunktsiooni kasutada ühe praktilise küsimuse otsustamisel.

Ü l e s a n n e. Kõrgehitise torn, mille kõrgus on h meetrit, kannab oma ülemisel platvormil a meetri kõrgust monumenti (joon. 280). Kui kaugel tornist peab seisma vaatleja, et ta saaks monumendist võimalikult hea pildi, see tähendab, et monument paistaks võimalikult suure nurga all?

L a h e n d u s. Märgime otsitava kauguse vaatleja ja torni vahel tähega d. Olgu silma kõrgus maapinnast c kõrgusega $h + a$ võrreldes väike, nii et $h + a - c \approx h + a$. Siis

$$\tan(\varphi+\alpha)=\frac{h+a}{d},\quad \tan\varphi=\frac{h}{d};$$

$$\varphi+\alpha=\operatorname{arctan}\frac{h+a}{d},\quad \varphi=\operatorname{arctan}\frac{h}{d};$$

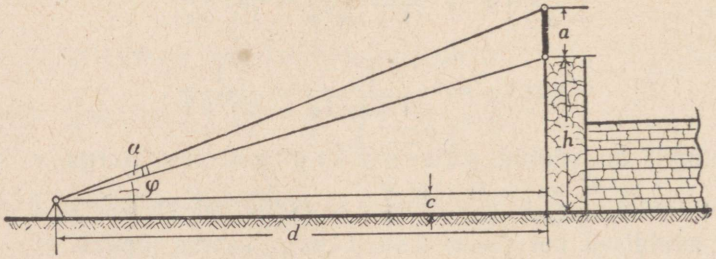
$$\alpha=\operatorname{arctan}\frac{h+a}{d}-\operatorname{arctan}\frac{h}{d}.$$

Nurk α on kauguse d funktsioon. Et nurk α oleks maksimaalne, selleks peab α tuletis d järgi olema null:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{h+a}{d}\right)^2}\cdot\left(-\frac{h+a}{d^2}\right)-\frac{1}{1+\left(\frac{h}{d}\right)^2}\cdot\left(-\frac{h}{d^2}\right)=0.$$

Saadud võrrandit on võimalik tunduvalt lihtsustada. Lõpptulemuseks on

$$d=\sqrt{h(h+a)}.$$



Joon. 280.

Vaatleja tõkestamatul lähenemisel tornile läheneb vaatenurk α nullile; nurk α läheneb nullile ka vaatleja tõkestamatul kaugenemisel tornist. Et vaatenurk on alati positiivne suurus, siis saab nullväärtus olla ainult vaatenurga miinimumiks. Ühelt miinimumväärtuselt teisele saab vaatenurk α oma pidevalt muutumisel üle minna ainult läbides vahepeal maksimumi. Seega vastab leitud kauguse väärtus maksimumile. Nagu näeme, on sobivaimaks kauguseks kõrguste h ja $h+a$ geomeetriline keskmine. Kui kõrgus a on kõrgusega h võrreldes väike, siis võib kauguse lugeda ligikaudu võrdseks h-ga. Kui torni kõrgus pole teada, hinnatakse ta silma järgi ja mõõdetakse kaugus sammudega.

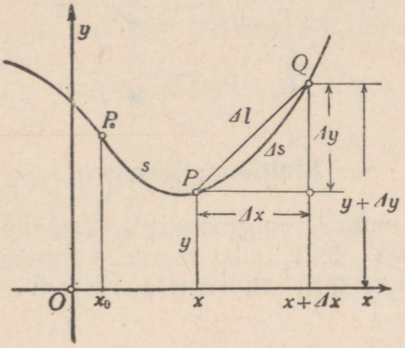
§ 90. JOONE KÕVERUS

Kõverjoone kaare pikkus ja selle tuletis

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$ ja olgu kõver joonisel 281 selle funktsiooni käigukõveraks. Fikseerime sel joonel ühe kindla punkti P_0; olgu selle punkti abstsiss x_0. Siis joone igale punktile P abstsissiga x vastab oma kindel kaar P_0P ja seega kindel kaare pikkus s. See kaare pikkus s on abstsissi x funktsioon:

$$s = s(x).$$

Selle funktsiooni tuletise leidmiseks arutleme järgmiselt.



Joon. 281.

Abstsissi x kasvamisel Δx võrra liigub punkt (x, y) asendist P asendisse Q. Olgu $\widehat{PQ} = \Delta s$ ja olgu lõigu PQ pikkus Δl. Suhe $\Delta s : \Delta l$ on siis kaare ja sellele vastava kõõlu suhe. Ringjoone puhul näitasime (vt. lk. 587), et selle suhte piirväärtus kaare tõkestamatul vähenemisel on 1. Loeme seda kehtivaks ka iga teise meie poolt vaadeldava joone kohta; et Δs ja Δl lähenevad nullile ühtaegu, siis kehtib kõigi nende joonte puhul ühes võrdusega

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta l} = 1 \quad \text{ka võrdus} \quad \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta l} = 1.$$

Et saada kaare pikkuse tuletist abstsissi järgi, vaatleme kaare olenevust abstsissist kaudse olenevusena, võttes vahendavaks muutujaks kõõlu:

$$s = s(l), \quad l = l(x).$$

Siis funktsiooni funktsiooni tuletise valemi järgi

$$s'_x = s'_l \cdot l'_x.$$

Et

$$s'_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta l} = 1,$$

siis

$$s'_x = l'_x.$$

Nagu näeme jooniselt 281, on kõõl Δl hüpotenuus täisnurkses kolmnurgas kaatetitega Δx ja Δy. Järelikult

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Määrates siit suhte $\Delta l : \Delta x$ ja minnes üle piirile eeldusel, et $\Delta x \to 0$, saame

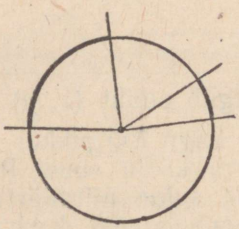
$$l'_x = \sqrt{1 + y'^2}$$

ja seepärast ka

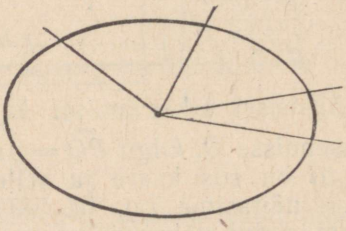
$$s'_x = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Ringjoone kõverus

Kui ühest ja samast ringjoonest lõikame välja kaks mingisugust kaart (joon. 282), siis saame väiksema neist kõigi tema punktidega suuremale asetada. See on tingitud



Joon. 282.



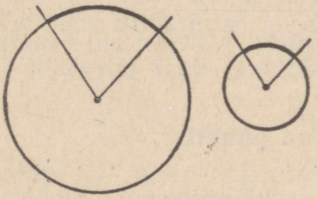
Joon. 283.

asjaolust, et ringjoone kõigis punktides on «joone kõverus» üks ja seesama. Katse ei õnnestuks, kui püüaksime asetada teineteisele näiteks kaht ühest ja samast ellipsist vabalt välja lõigatud kaart (joon. 283): ellipsi kõverus muutub ühest punktist teise. Samal põhjusel ei saa spiraali ühest kohast võetud kaart viia kattumisele mõnest spiraali teisest kohast võetud kaarega. Katse ei õnnestu ka siis, kui lõikame kaared kahest erineva suurusega ringjoonest (joon. 284): erineva raadiusega ringjoontel on erinev kõverus.

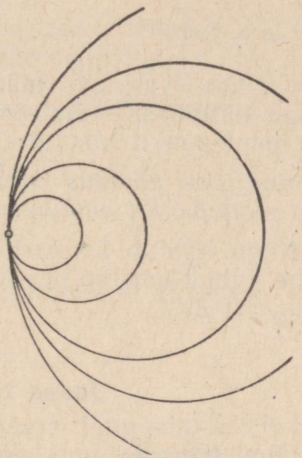
Kui joonestame rea ringjooni järjest suurenevate raadiustega (joon. 285), siis näeme, et mida suurem on raadius, seda

lamedam on ringjoon; teiste sõnadega: mida suurem on raadius, seda väiksem on ringjoone kõverus. Lepime kokku mõista ringjoone kõveruse all eriliiki suurust, mis muutub pöördvõrdeliselt raadiusega. Sel puhul ringjoone kõverus

$$k = \frac{const}{r}.$$



Joon. 284.



Joon. 285.

Valides kõveruse mõõduks sellise ringjoone kõveruse, mille raadius on 1, saaksime, et $1 = const : 1$. Sellest järeldub, et $const = 1$ ja seepärast

$$k = \frac{1}{r}.$$

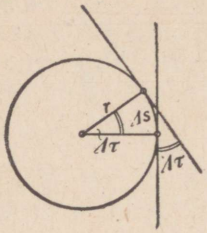
Niisiis:

ringjoone kõverus on raadiuse pöördväärtus.

Teine avaldis ringjoone kõveruse jaoks

Ringjoone puhul antud kõveruse definitsiooni ei saa otseselt üle kanda teistele joontele. Seepärast katsume ringjoone kõveruse avaldist teisendada niisuguseks, et seda saaks rakendada ka iga muu kõvera juhul. Selleks paneme tähele (joon. 286), et ringis raadiusega r kesknurgale $\Delta\tau$ vastav kaar

$$\Delta s = r \cdot \Delta\tau$$



Joon. 286.

ja seepärast

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}=\frac{1}{r}.$$

Näeme, et ringi puhul

$$k=\frac{\Delta\tau}{\Delta s}.$$

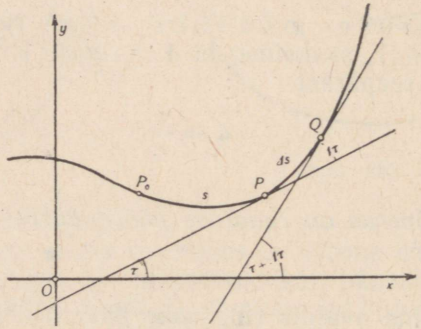
Nurk $\Delta\tau$ kaare Δs lõppu viivate raadiuste vahel on aga ka nurgaks nende raadiuste lõpp-punktides ringjoonele tõmmatud puutujate vahel. Nurk $\Delta\tau$ määrab ringjoone puutuja sihi muutuse. Seega näitab suhe $\Delta\tau:\Delta s$ k i i r u s t, millega muutub puutuja siht puutepunkti liikumisel piki ringjoont. Niisiis:

ringjoone kõverus on kiirus, millega pöördub ringjoone puutuja puutepunkti nihkumisel mööda ringjoont.

Nagu nähtub äsjakirjutatud võrdusest, on suhe $\Delta\tau:\Delta s$ ringjoone puhul konstantne; see tähendab, et ta ei sõltu võetud kaare pikkusest Δs.

Joone kõverus antud punktis

Olgu tegemist funktsiooni $y=f(x)$ käigujoonega (joon. 287). Fikseerime sel joonel ühe kindla punkti P_0, millest alates loeme kaare pikkusi. Olgu P joonel võetud punkt abstsissiga x ja



Joon. 287.

$\widehat{P_0P}=s$. Olgu Q joone punkt abstsissiga $x+\Delta x$ ja $\widehat{P_0Q}=s+\Delta s$, nii et $\widehat{PQ}=\Delta s$. Olgu punktis P tõmmatud puutuja tõusunurk τ ja punktis Q tõmmatud puutuja tõusunurk $\tau+\Delta\tau$.

Puutepunkti nihkumisel kohast P kaare Δs võrra pöördub puutuja nurga $\Delta\tau$ võrra. Seega puutuja pöördumise keskmine kiirus kaarel Δs on $\Delta\tau : \Delta s$ ja puutuja pöördumise hetkeline kiirus punktis P on

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s}.$$

Seda suurust loeme joone kõveruseks punktis P. Niisiis:

joone kõverus antud punktis on puutuja sihi muutumise hetkeline kiirus

ehk, teisiti,

joone kõverus antud punktis on puutuja tõusunurga tuletis kaare pikkuse järgi.

Kirjutades kasvude suhte $\Delta\tau : \Delta s$ kujul

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta x} : \frac{\Delta s}{\Delta x}$$

ja minnes üle piirile eeldusel, et Δx tõkestamatult väheneb, saame joone kõveruse jaoks avaldise

$$k = \tau'_x : s'_x.$$

Nimetaja — kaare pikkuse tuletis kaare lõpp-punkti abstsissi järgi — on leitud varem. Lugeja saamiseks paneme tähele, et

$$\tan \tau = y',$$
$$\tau = \arctan y'$$

ja seega

$$\tau'_x = \frac{1}{1 + y'^2} \cdot (y')'_x = \frac{y''}{1 + y'^2}.$$

Et

$$s'_x = \sqrt{1 + y'^2} = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}},$$

siis saame kõveruse jaoks valemi

$$k = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Kõverust mõistetakse tavaliselt märgita suurusena. Seepärast kirjutame

$$k = \left| \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.$$

Funktsiooni teine tuletis ja funktsiooni käigujoone kõverus

Nagu teame, määrab funktsiooni $y = f(x)$ esimene tuletis kõvera tõusmise järskuse:

$$y' = \tan \tau;$$

mida suurem on y', seda lähemal täisnurgale on τ, seda järsemalt tõuseb kõver. Võrdsete y' väärtuste puhul on funktsiooni teine tuletis võrdeline kõverusega: mida suurem on y'', seda «kõveram» on joon vaadeldavas punktis. Lühidalt:

funktsiooni esimene tuletis peegeldub joone kulgemise järskuses, funktsiooni teine tuletis joone kõveruse suuruses.

Kui võtame kõveral $y = f(x)$ kaks võrdsete tõusudega punkti, siis neis punktides joone kõverused on võrdelised teise tuletise absoluutväärtustega.

Joone $y = f(x)$ maksimum- ja miinimumpunktides on $y' = 0$. Sel puhul on

$$k = |y''|.$$

Niisiis:

joone ekstreemumpunktides on kõverus arvuliselt antud teise tuletise absoluutväärtusega.

Sama pilti näeme neis joone punktides, kus y' on nii väike, et pole vajadust arvestada y'^2 väärtust. Nimetaja k avaldises asendub siis arvuga 1, nii et

$$k \approx |y''|.$$

Niisugune olukord esineb sageli ehitusmehaanikas: talade, varraste, sammaste jne. läbipainded on niivõrd väikesed ja nende teljed painutatud olekus niivõrd lähedased sirgjoonele, et y' on väike ja y'^2 ei tule üldse arvestamisele. Kõigil niisugustel juhtudel rakendatakse viimast ligikaudset valemit.

Kõverusraadius ja kõveruskeskpunkt

Ringjoone raadius on risti puutujaga; ta on sihitud ringjoone normaali mööda ringjoone nõgususe suunas ja ta väärtus avaldub kõveruse kaudu kujul $r = 1 : k$. Seda üldistades ütleme, et

kõverusraadius on kõvera normaalil kõvera nõgususe suunas võetud lõik kõveruse pöördväärtuse suuruses.

Kõverusraadiuse üheks otspunktiks on joone punkt, teiseks otspunktiks kõveruskeskpunkt. Ringjoone puhul langeb kõveruskeskpunkt ühte ringjoone keskpunktiga.

Sirgjoone kõverus

Võttes sirgjoone võrrandi kujul

$$y = mx + b,$$

saame, et

$$y' = m, \quad y'' = 0.$$

Seega sirgjoone puhul

$$k = 0.$$

Niisiis

sirgjoone kõverus on null.

Kui kõverjoone kõverus $k \to 0$, siis kõverusraadius $r \to \infty$. Vaadeldes sirgjoont kõverjoone piirjuhuna, ütleme siis, et

sirgjoone kõverusraadius on lõpmatult suur.

Punktis, kus $y'' = 0$, kulgeb kõver sirgjoone sarnaselt, ja seda niihästi juhul, kus punkt on kõvera käänupunkt, kui ka juhul, kus ta seda pole.

Kõverusringjoon kõvera antud punktis

Kõverusringjooneks kõvera antud punktis nimetatakse kõveruskeskpunkti ümber kõverusraadiusega joonestatud ringjoont.

See ringjoon on kõvera heaks lähendiks nende ühise punkti naabruses.

Näide. Olgu antud parabool $y = ax^2$. Siis

$$y' = 2ax, \quad y'' = 2a,$$

$$1 + y'^2 = 1 + 4a^2x^2, \quad (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = (1 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}},$$

seega kõverusraadius

$$r = \frac{(1 + 4a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{2a}.$$

Parabooli haripunktis $x = 0$ ja seega selles punktis

$$r = \frac{1}{2a}.$$

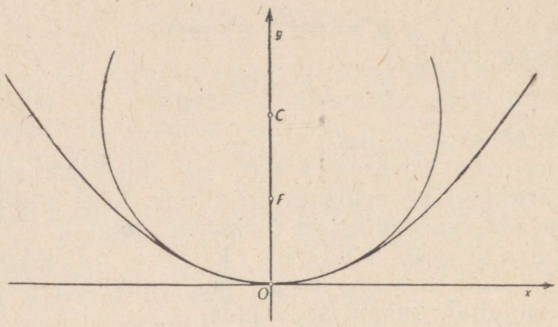
Suurus $1 : 2a$ on aga antud parabooli parameeter. Niisiis:

haripunktis on parabooli kõverusraadius võrdne parameetriga.

Joonis 288 näitab, kui hästi kõverusringjoon parabooli haripunktis lähendab parabooli.

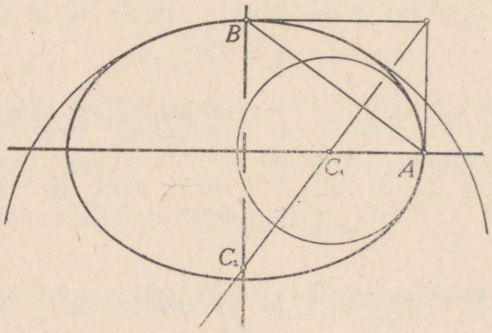
Vaatleme edasi kõverusringjooni ellipsi haripunktides. Lihtne arvutus näitab, et ellipsi suure ja väikese telje otspunktides on kõverusraadius vastavalt $b^2 : a$ ja $a^2 : b$. Nende mõlema avaldise järgi saab kergesti konstrueerida kõveruskeskpunkte C_1 ja C_2 ning edasi neile vastavaid kõverusringjooni (joon. 289). Nagu

näeme jooniselt, lähendavad need ringjooned ellipsi kaart puutepunkti naabruses erakordselt hästi. Seepärast kasutatakse neid sageli ka ellipsi joonestamiseks. Pilk ellipsile ütleb, et suure telje otspunktides on ellipsi kõverus kõige suurem; liikumisel piki



Joon. 288.

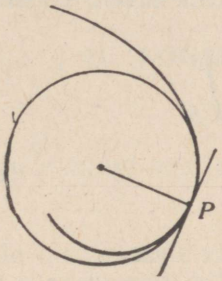
ellipsit väheneb ta järjest, jõudes oma väikseima väärtuseni ellipsi väikese telje otspunktides. Ellipsi kõverusraadius on suure telje otspunktis minimaalne, väikese telje otspunktis maksimaalne. Suure telje otspunktis joonestatud kõverusringjoon kulgeb tervenisti ellipsi sees, väikese telje otspunktis joonestatud kõverusringjoon tervenisti väljaspool ellipsit. Liikumisel piki ellipsit punktist *A* punkti *B* poole muutub ellipsi kõverus pidevalt; pidevalt muutuvad siis ka kõverusraadius ja kõverusringjoon. Kõverusringjoone pidev üleminek asendist tervenisti seespool ellipsit asendisse tervenisti väljaspool ellipsit võib toimuda ainult nii, et ta punktides *A* ja *B*



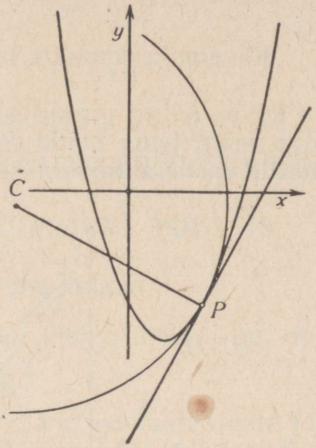
Joon. 289.

vahel osalt kulgeb seespool, osalt väljaspool ellipsit. Nii on see üldjuhul ka teiste kõverate puhul (joon. 290). Niisiis:

kui P on joone punkt, kus kõverus pole ekstremaalne, siis selles punktis kõverusringjoon, tulles ühelt poolt joont, läheb üle teisele poole.



Joon. 290.



Joon. 291.

Öeldut illustreerib joonis 291, kus näeme parabooli $y = x^2 - 5x + 6$ ühes oma kõverusringjoonega punktis P, mille abstsiss on $x = 2$.

Kõveruse mõiste rakendamine teede trasseerimisel

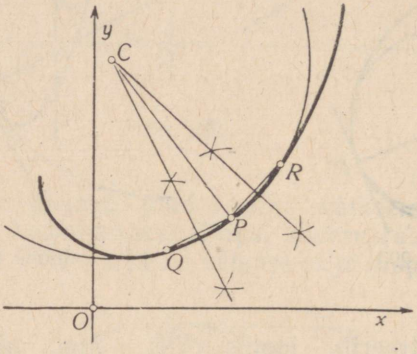
Teede käänakud trasseeritakse ringjoone kaartena. Üleminekul sirgelt teeosalt ringjoonelisele asendub kõverusraadiuse lõpmata suur väärtus järsku ringjoone kaare raadiuse lõpliku väärtusega. Kõverusraadiuse järsk muutumine kutsub esile normaalkiirenduse järsu muutumise ja seega Newtoni II seaduse järgi külgrõhu järsu muutumise (nullist tunduva suuruseni). See annab ennast tunda järsu, tugeva tõukena. Et muuta sõitu võimalikult tõukevabaks, korraldatakse üleminek sirgjooneliselt teelt ringjoonelisele järkjärguliselt, lülitades sirge ja ringjoone vahele näiteks kolmanda astme parabooli $y = ax^3$ kaare. Selle jaoks on kõverusraadius

$$r = \frac{(1 + 9a^2x^4)^{\frac{3}{2}}}{6ax}.$$

Argumendi x muutumisel vahemikus $-\infty < x < +\infty$ muutub r alates lõpmata suurest väärtusest väärtuseni r_{min} ja sealt edasi jälle lõpmata suure väärtuseni. See annab võimaluse leida ikka sobivat kaart, mis viiks sõiduki sirgelt teeosalt ringjoonelisele ja vastupidi kõveruse järsu muutumiseta.

Kõveruskeskpunkti ligikaudne konstruktsioon

Olgu kõver antud graafiliselt või märgitud maastikul ja olgu ette antud mõni tema punkt P (joon. 292). Olgu vaja teada sellele punktile vastavat kõveruskeskpunkti C. Et kõvera võrrand pole



Joon. 292.

teada, siis pole võimalik arvutada punkti C koordinaate. Seda punkti saab aga konstrueerida. Selleks võtame lisaks punktile P kaks teist kõveral asuvat punkti Q ja R ning konstrueerime lõikude PQ ja PR keskristjooned. Viimaste lõikepunkt annab kolmest punktist P, Q ja R läbi mineva ringjoone tsentri, mis on otsitava punkti C heaks, praktilisi nõudeid rahuldavaks lähendiks.

PEATÜKK XXVI

LOGARITM- JA EKSPONENTFUNKTSIOONI TULETIS

§ 91. LOGARITMFUNKTSIOONI TULETIS

Kümnendlogaritmi tuletis

Olgu x mingi arv ja y selle arvu kümnendlogaritm, nii et

$$y = \log x.$$

Et igale x väärtusele vahemikus $0 < x < \infty$ vastab oma logaritm, siis on y argumendi x funktsioon. Leiame selle kümnendlogaritmfunktsiooni tuletise.

Käies tuletise leidmise üldise eeskirja järgi, saame skeemi:

$$\begin{array}{ll} x & y = \log x \\ x + \Delta x & y + \Delta y = \log (x + \Delta x) \\ \Delta x & \Delta y = \log (x + \Delta x) - \log x \end{array}$$

ehk, teisiti kirjutades,

$$\Delta y = \log \frac{x + \Delta x}{x} = \log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right),$$

seega

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

Korrutades ja jagades nimetajat x-ga, saame

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Üleminekul piirile eeldusel, et $\Delta x \to 0$, tuleb arv x lugeda jääväraks; siis on ka selle arvu pöördväärtus jääv. Järelikult

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Märgime argumendi x kasvu relatiivse suuruse $\frac{\Delta x}{x}$ sümboliga δx, nii et

$$\frac{\Delta x}{x} = \delta x;$$

siis Δx lähenemisel nullile läheneb ka arv δx nullile. Järelikult

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \lim_{\delta x \to 0} \frac{\log (1 + \delta x)}{\delta x}.$$

Nagu näeme, taandub $\log x$ tuletise üldvalemi leidmine viimati kirjutatud piirväärtuse määramisele. Selgitame kõigepealt, mida see piirväärtus kujutab. Et $\log 1 = 0$, siis võime kirjutada

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\log (1 + \delta x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\log (1 + \delta x) - \log 1}{\delta x}.$$

Vahe $\log (1 + \delta x) - \log 1$ on logaritmi juurdekasv argumendi kasvamisel väärtuselt 1 väärtuseni $1 + \delta x$. Et argumendi juurdekasvu sümboliks on meil δ, siis kasutame seda ka logaritmi kasvu märkimiseks:

$$\log (1 + \delta x) - \log 1 = \delta \log x,$$

kusjuures peame meeles, et argumendi fikseeritud väärtuseks on 1. Niisiis

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\log (1 + \delta x)}{\delta x} = \left[\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta \log x}{\delta x} \right]_{x=1}.$$

Võrduse paremal poolel seisab funktsiooni $\log x$ tuletis argumendi väärtusel $x = 1$:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\log (1 + \delta x)}{\delta x} = [(\log x)']_{x=1}.$$

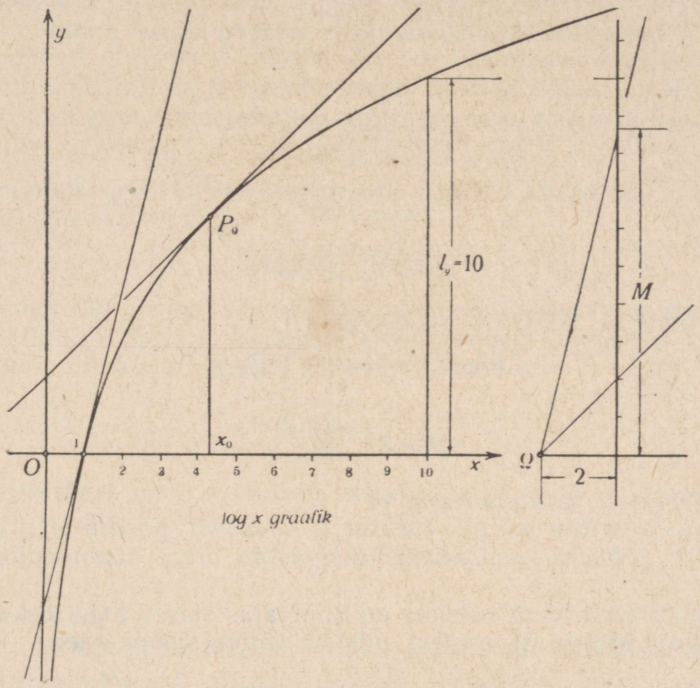
Seepärast

$$(\log x)' = \frac{1}{x} \cdot [(\log x)']_{x=1}.$$

See näitab, et logaritmfunktsiooni tuletise üldvalemi saamiseks on meil ainult tarvis määrata logaritmfunktsiooni tuletise väärtus ühelainsal argumendi väärtusel, nimelt väärtusel $x = 1$. Geomeetriliselt tähendab $[(\log x)']_{x=1}$ logaritmkõvera puutuja tõusu, kui puutepunkti abstsiss on 1. Logaritmkõvera punkt abstsissiga 1 on logaritmkõvera lõikepunkt abstsisstelgega. Niisiis on $[(\log x)']_{x=1}$ logaritmkõvera selle puutuja tõus, mis on tõmmatud logaritmkõverale tema lõikepunktis abstsisstelgega. Märgime otsitava tõusu tähega M. Tema arvulise väärtuse saame määrata graafiliselt. Selleks joonestame võimalikult hoolsalt logaritmkõvera (joon. 293), leiame selle

kõvera lõikepunkti x-teljega, joonestame selles punktis kõverale puutuja ja määrame tuntud viisil graafiliselt selle puutuja tõusu. Saame

$$M \approx 0{,}43.$$



log x graafik

Joon. 293.

Täpsem M väärtus, nagu hiljem võime leida arvutamise teel, on 0,4342944819 ... ehk, neljakohaliselt,

$$M = 0{,}4343.$$

Arvu M nimetatakse k ü m n e n d l o g a r i t m i d e m o o d u l i k s. Niisiis:

kümnendlogaritmide moodul on logaritmkõvera tõus logaritmkõvera lõikepunktis abstsissteljega.

Kirjutades $(\log x)'$ valemis $[(\log x)']_{x=1}$ asemele mooduli M, saame lõpuks, et

$$(\log x)' = \frac{M}{x}.$$

Siit nähtub, et

logaritmfunktsiooni tuletis on pöördvõrdeline argumendiga ehk, teisiti,

logaritmfunktsiooni muutumise kiirus väheneb argumendi kasvamisel; ta on argumendiga pöördvõrdeline.

Logaritmi tuletis kümnest erineva aluse puhul

Vaatleme rööbiti harilike logaritmidega logaritme, mis on võetud mingil alusel a. Siis logaritmi definitsiooni kohaselt

$$x = 10^{\log_{10} x}$$

ja

$$x = a^{\log_a x},$$

nii et

$$a^{\log_a x} = 10^{\log_{10} x}.$$

Logaritmimine alusel 10 annab, et

$$\log_a x \cdot \log_{10} a = \log_{10} x$$

ja

$$\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}.$$

Sõnastatult tähendab see, et

arvu logaritm mingil (arvust 1 *erineval positiivsel) alusel saadakse, jagades arvu kümnendlogaritmi aluse kümnendlogaritmiga.*

Viimati kirjutatud valemis on nimetajas seisev $\log_{10} a$ konstantne. Mõlemast poolest tuletist võttes saame seega

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\log_{10} a} \cdot (\log_{10} x)' = \frac{1}{\log_{10} a} \cdot \frac{M}{x}$$

ehk

$$(\log_a x)' = \frac{M}{\log_{10} a} \cdot \frac{1}{x}.$$

Naturaallogaritmi tuletis

Küsime, missuguses logaritmisüsteemis on logaritmfunktsiooni tuletise valemil lihtsaim kuju?

Lihtsaim kuju on kõnesoleval valemil siis, kui

$$M : \log_{10} a = 1$$

ehk

$$\log_{10} a = M$$

ehk

$$\log_{10} a = 0{,}4343,$$

see tähendab, kui

$$a = 2{,}718.$$

Täpsem, teistele arutlustele tuginev arvutamine annab a jaoks väärtuse 2,7182818284 ... See arv etendab matemaatikas erakordselt tähtsat osa. Ta on arvu π järel **teine tähtsam matemaatiline konstant**. Teda tähistatakse rahvusvahelise tava kohaselt tähega e. Rakenduslike küsimuste lahendamiseks piisab, kui võtta see arv neljakohaliselt:

$$e = 2{,}7183.$$

Valides selle arvu logaritmisüsteemi aluseks, saame nn. **naturaallogaritmid**:

$$\log_e x = \log \text{nat}\, x.$$

Sümbol log nat on ladinakeelse nimetuse *logarithmus naturalis* lühend. Arvu x naturaallogaritmi veel lühemaks sümboliks on $\ln x$.

Võttes viimati kirjutatud tuletise valemis $a = e$, saame

$$(\ln x)' = \frac{M}{\log_{10} e} \cdot \frac{1}{x}$$

ehk, arvestades arvu e defineerivat võrdust,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Sõnastatult:

naturaallogaritmi tuletis võrdub argumendi pöördväärtusega.

Naturaallogaritmi tuletise valemi erakordne **lihtsus** on põhjuseks, miks matemaatilises analüüsis peaaegu eranditult kasutatakse naturaallogaritme. Arvutamiseks sobivad aga paremini meie arvusüsteemiga otseselt seotud kümnendlogaritmid. Üleminekuks ühelt logaritmisüsteemilt teisele kasutatakse valemeid

$$\ln x = \frac{\log x}{M},$$

$$\log x = M \cdot \ln x,$$

mis otsekohe järelduvad eespool tuletatud võrdusest $\log_a x = \log_{10} x : \log_{10} a$, kui selles võtta $a = e$.

Sõnastatult:

et saada arvu naturaallogaritmi, tuleb tema kümnendlogaritm jagada kümnendlogaritmide mooduliga;

et saada arvu kümnendlogaritmi, tuleb tema naturaallogaritm korrutada kümnendlogaritmide mooduliga.

Funktsiooni naturaallogaritmi tuletis

Olgu $u(x)$ mingi positiivseks jääv x funktsioon. Funktsiooni funktsiooni tuletise valemit rakendades saame siis

$$[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Sõnastatult:

funktsiooni naturaallogaritmi tuletis saadakse funktsiooni tuletise jagamisel funktsiooni enesega.

Tuletis $u'(x)$ annab funktsiooni $u(x)$ kasvamiskiiruse; seega suhe $u'(x) : u(x)$ annab funktsiooni $u(x)$ ühiku kasvamiskiiruse ehk funktsiooni $u(x)$ relatiivse kasvamiskiiruse. Niisiis:

funktsiooni naturaallogaritmi tuletis määrab funktsiooni relatiivse kasvamiskiiruse.

Suuruse ühiku kasvamiskiirust ehk suuruse relatiivset kasvamiskiirust nimetatakse lühidalt ka suuruse kasvamistempoks. Niisiis:

suuruse kasvamistempo on määratud suuruse naturaallogaritmi tuletisega.

Saadud valemite rakendusi

Eespool tuletatud valemite kasutamisega tutvumiseks lahendame mõned ülesanded.

Ülesanne 1. Leida arvu 7 naturaallogaritm.

Lahendus.

$$\ln 7 = \log 7 : M = 0{,}8451 : 0{,}4343 = 1{,}9459.$$

Ülesanne 2. Arvu naturaallogaritm on 1,7218. Leida arv.

Lahendus. Tähistades otsitava arvu tähega a, võime kirjutada, et

$$\ln a = 1{,}7218,$$

seega

$$\log a = M \cdot 1{,}7218 = 0{,}4343 \cdot 1{,}7218 = 0{,}7478$$

ja siit edasi tabelite järgi

$$a = 5{,}595.$$

Ülesanne 3. Leida funktsiooni $y = \ln \sqrt{1 + x^2}$ tuletis.

Lahendus. Et mitte töötada juurtega, kirjutame

$$y = \frac{1}{2} \ln (1 + x^2);$$

seega

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}$$

ehk

$$y' = \frac{x}{1+x^2}.$$

Ülesanne 4. Leida funktsiooni

$$y = \ln (x + \sqrt{1+x^2})$$

tuletis.

Lahendus. $\ln u(x)$ tuletise valemi järgi

$$y' = \frac{(x+\sqrt{1+x^2})'}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

Et

$$(x+\sqrt{1+x^2})' = 1 + \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}} = 1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}},$$

siis

$$y' = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

ehk

$$[\ln (x+\sqrt{1+x^2})]' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

§ 92. NATURAALLOGARITMIDE ALUS

Arvu *e* kujutamine piirväärtusena

Logaritmfunktsiooni tuletise valemi tõestamisel osutus vajalikuks teada piirväärtust

$$M = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\log (1+\delta x)}{\delta x}.$$

Me määrasime selle väärtuse graafilise võtte abil, mis võimaldas saada arvu M esimesi kümnendkohti. Anname nüüd võtte, mille abil saab M arvutada igasuguse soovitava täpsusega.

Selleks teisendame kõigepealt mooduli M avaldise, kirjutades δx murru kujul:

$$\delta x = \frac{1}{m}.$$

Et δx läheneks nullile, peab arv m tõkestamatult kasvama:

$$\text{kui } m \to \infty, \text{ siis } \delta x \to 0.$$

Seepärast

$$M = \lim_{m\to\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty} m \log\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

ehk

$$M = \lim_{m\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Arvestades logaritmfunktsiooni pidevust, vahetame viimases avaldises logaritmi ja piirväärtuse leidmise järjekorra:

$$M = \log \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Et

$$M = \log e,$$

siis

$$e = \lim_{m\to\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m.$$

Sellele piirväärtusele viivad väga paljud matemaatika ja selle rakendusalade küsimusseaded. Toome neist mõned näited.

Suuruste liitprotsendiline kasvamine

N ä i d e 1. Olgu hoiukassas hoiul säästusumma a rbl. Maksku hoiukassa säästusummadelt intressi $p\%$ aastas. Siis 1 rbl. toob aastas $\frac{p}{100}$ rbl. intressi ehk, teisiti,

1 rbl. kasvab 1 aasta kestel summaks $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ rbl.,

seega

a „ „ „ „ „ $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ „ .

Niisiis: et saada säästusumma väärtust aasta lõpul, tuleb aasta algul olnud säästusumma korrutada kasvamisteguriga $(1+\frac{p}{100})$.

Teise aasta algul on hoiukassas summa $a(1+\frac{p}{100})$, seega teise aasta lõpuks on säästusumma suurus

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ ehk } a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,$$

kolmanda aasta lõpuks on säästusumma suurus

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^2\left(1+\frac{p}{100}\right) \text{ ehk } a\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$$

ja üldiselt n-nda aasta lõpuks on säästusumma suurus

$$a\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$

Oletame nüüd, et intresse ei lisata säästusummale mitte iga aasta, vaid iga k u u tagant. Siis on

esimese kuu lõpuks hoiuarvel summa $a\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)$,

teise „ „ „ „ $a\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^2$.

. . . . . .

esimese aasta „ „ „ $a\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12}$.

. . . . . .

n-nda „ „ „ „ $a\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12n}$.

Kui intressid lisataks säästusummale iga n ä d a l a tagant, siis kasvaks algsumma a rbl. n-nda aasta lõpuks väärtuseni

$$a\left(1+\frac{p}{52\cdot 100}\right)^{52n},$$

ja kui intressid lisataks säästusummale iga p ä e v a tagant, siis kasvaks algsumma a rbl. n-nda aasta lõpuks väärtuseni

$$a\left(1+\frac{p}{360\cdot 100}\right)^{360n}.$$

Üldiselt, kui intressid lisataks säästusummale iga $\frac{1}{k}$ aasta tagant, siis kasvaks algsumma a rbl. n-nda aasta lõpuks väärtuseni

$$a\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{kn}.$$

Märgime sulgudes seisva murru sümboliga $\frac{1}{m}$ ja murru $\frac{p}{100}$ sümboliga q; siis $k=qm$ ja säästusumma väärtus n-nda aasta lõpuks on

$$a\left(1+\frac{1}{m}\right)^{qmn}$$

ehk

$$a\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{qn}.$$

Vaatleme lõpuks praktiliselt mitte esinevat, kuid teoreetiliselt huvitavat juhtu, kus ajavahemik $\frac{1}{k}$ aastat tõkestamatult kahaneb. Siis kahanevad tõkestamatult ka säästusumma juurdekasvud ja säästusumma kasvab pidevalt. Tingimus $\frac{1}{k}\to 0$ on samaväärne nõudega, et $k\to\infty$. Järelikult säästusumma pideva kasvamise puhul saame säästu lõppväärtuse eespool leitud avaldise piirväärtusena eeldusel, et $k\to\infty$. Sel eeldusel ka $m\to\infty$ ja säästusumma lõppväärtus n-nda aasta lõpuks on

$$a\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{qn} \text{ ehk } ae^{qn}.$$

Näide 2. Olgu puidu hulk metsasalus aasta algul a tihumeetrit. Kasvagu puidu hulk igal aastal $p\%$ võrra tema algväärtusest arvates. Siis on

esimese aasta lõpuks metsasalus puitu $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ tm,

teise „ „ „ „ $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{2}$ „

. . . . . .

n-nda „ „ „ „ $a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n}$ „

Kui vaatleksime puidu hulka metsasalus iga kuu tagant ja loeksime puidu hulga juurdekasvu % kuu kohta võrdseks $\frac{p}{12}$-ga, siis saaksime puidu hulga jaoks esimese kuu lõpuks, teise kuu lõpuks, ..., kaheteistkümnenda kuu lõpuks avaldised

$$a\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right),\quad a\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{2},\ \ldots,\ a\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12}$$

ja $n\cdot 12$ kuu lõpuks ehk n-nda aasta lõpuks avaldise

$$a\left(1+\frac{p}{12\cdot 100}\right)^{12n}.$$

Kui vaatleksime puidu hulka iga päeva tagant ja loeksime puidu hulga juurdekasvu % päeva kohta võrdseks $\frac{p}{360}$-ga, siis saaksime, nagu eelmises näites, n-nda aasta lõpuks puidu hulga

$$a\left(1+\frac{p}{360\cdot 100}\right)^{360n}.$$

Jätkame seda mõttekäiku, asendades aasta, kuu ja päeva $\frac{1}{k}$ aasta pikkuste ajavahemikega. Puidu hulk metsasalus n-nda aasta lõpuks avaldub siis kujul

$$a\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{kn}.$$

Vaatame, missuguse kuju omandab see avaldis, kui eeldame, et aastaosad $\frac{1}{k}$ tõkestamatult kahanevad, nii et puidu hulk metsasalus p i d e v a l t kasvab, nagu see tegelikult toimubki. Viimati kirjutatud avaldis asendub siis piirväärtusega

$$\lim_{k\to\infty} a\left(1+\frac{p}{k\cdot 100}\right)^{kn}.$$

Teisendades seda samal viisil nagu eelmises näites, saame vastuse kujul

$$a\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{qn} \text{ ehk } ae^{qn}, \text{ kus } q=\frac{p}{100}.$$

Arvu e avaldamine lõpmatu summana

Arendame arvu e definitsioonivõrduses piirväärtusmärgi all seisva avaldise Newtoni binoomi valemi järgi. Eeldades, et m on naturaalarv, saame

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=1+\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{m}+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{m^3}+$$
$$+\ldots+\frac{m(m-1)\ \ldots\ (m-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ k}\cdot\frac{1}{m^k}+\ldots$$

Jagades lugejaid m astmetega, saame

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=1+1+\frac{1-\frac{1}{m}}{1\cdot 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ k}+\ldots$$

Selles arendises on $m+1$ liiget. Kui laseme astendajat m lõpmatult kasvada, siis kasvab lõpmatult ka arendise liikmete arv. Seejuures

$$\frac{1}{m}\to 0,\ \frac{2}{m}\to 0,\ \ldots,\ \frac{k-1}{m}\to 0,\ \ldots$$

Kummalgi poolel piirile minnes saame

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k} + \ldots,$$

kus paremal poolel seisva summa liikmete jada ei lõpe. Võttes selles summas küllalt palju liikmeid, saame uuritava piirväärtuse arvutada nii täpselt kui soovime.

Arvu e avaldist lõpmatu summana nimetatakse lühidalt arvu e arendiseks.*

Arvu e tõkked

Arvu e arendis annab võimaluse arvutada seda arvu nii täpselt kui soovime. Et arvu e avaldises on kõik liikmed positiivsed, siis on e suurem esimese kahe liikme summast, seega $e > 2$. Asendame e avaldise liikmete nimetajais kõik tegurid 3, 4, 5, ... kahtedega; sellega vähendame nimetajaid, suurendame murde ja suurendame nende murdude summat. Järelikult

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2} + \ldots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \ldots 2} + \ldots$$

ehk, kui kasutame geomeetrilise rea summa valemit,

$$e < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 = 3.$$

Niisiis peitub arv e tõkete 2 ja 3 vahel.

Arvu e numbriline arvutamine

Arvu e arendise liikmete arvutamine ei tee raskusi: kui näiteks liige $\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n}$ on leitud, saame järgmise liikme $\frac{1}{1 \cdot 2 \ldots n(n+1)}$, jagades eelmise liikme arvuga $n + 1$. Arvuni $n + 1 = 10$ võib see jagamine toimuda peast. Kui võtame jagatised 6 kohaga pärast koma, tulemusi harilikul viisil ümardades, siis saame:

---

* Märgime, et esitatud klassikaline mõttekäik pole loogiliselt päris range: uuritava summa liikmeis minnakse piirile eeldusel, et m tõkestamatult kasvab; sel eeldusel kasvab aga ka summa liikmete arv tõkestamatult. Siinkohal jääb küsitavaks, kas niisugusel summal on üldse mõtet. Kogu siia kuuluv probleemistik tuleb üksikasjalisele käsitlemisele käesoleva raamatu teises köites.

$$1 + 1 = 2{,}000000 \qquad \frac{1}{6!} = 0{,}001389$$

$$\frac{1}{2!} = 0{,}500000 \qquad \frac{1}{7!} = 0{,}000198$$

$$\frac{1}{3!} = 0{,}166667 \qquad \frac{1}{8!} = 0{,}000025$$

$$\frac{1}{4!} = 0{,}041667 \qquad \frac{1}{9!} = 0{,}000003$$

$$\frac{1}{5!} = 0{,}008333 \qquad \frac{1}{10!} = 0{,}000000$$

$$e = 2{,}718282$$

Esimesed kaks liidetavat on täpsed arvud. Iga järgmise liidetava viga on $\leqslant 0{,}0000005$, seega summa viga $\leqslant 0{,}000004$. Järelikult

$$2{,}718278 < e < 2{,}718286.$$

Mõlemas arvu e tõkkes on esimesed 5 numbrit samad; seepärast

$$e = 2{,}7183,$$

kus kõik kohad on õiged.

Võttes arvu e arendises küllalt palju liikmeid ja neid küllalt täpselt arvutades saame arvu e määrata nii täpselt kui soovime.

Teades arvu e, saame logaritmide tabelist mooduli:

$$M = \log 2{,}7183 = 0{,}4343.$$

§ 93. EKSPONENTFUNKTSIOONI TULETIS

Funktsiooni e^x tuletis

Eksponentfunktsiooniks nimetatakse, nagu teame, funktsiooni a^x, kus $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Kitsamas mõttes mõistetakse eksponentfunktsiooni all funktsiooni $y = e^x$.

Arvu e astendajaks võib olla ka mõni keerukama avaldisega x funktsioon $f(x)$, nagu näiteks mõni murd- või juuravaldis. Et eespool toodud kirjaviis muutub niisugusel korral kohmakaks, siis kasutatakse sel puhul kirjaviisi $\exp f(x)$.*

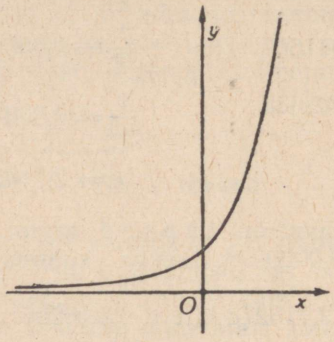
Kirjutades $y = e^x$, näeme, et $x = \ln y$. See tähendab, et eksponentfunktsioon on naturaallogaritmi pöördfunktsioon. Et funktsioon $\ln x$ on ühene, monotoonselt kasvav ja pidev, siis on samad

* Lad. k. *exponentus* — välja tõstetud, esile tõstetud. Sümbol exp on lühend sellest ladinakeelsest sõnast.

omadused ka eksponentfunktsioonil. Tema graafikut näeme joonisel 294. Leiame selle funktsiooni tuletise.

Selleks võtame e^x naturaallogaritmi:

$$\ln e^x = x.$$



Joon. 294.

Rakendades vasakule poolele funktsiooni naturaallogaritmi tuletise valemit ja pannes tähele, et paremal poolel $x' = 1$, leiame, et $(e^x)' : e^x = 1$ ehk

$$(e^x)' = e^x.$$

See tähendab, et

eksponentfunktsiooni tuletis on võrdne funktsiooni enesega ehk, teises sõnastuses,

eksponentfunktsiooni kasvamise kiirus igal argumendi väärtusel on võrdne antud funktsiooni väärtusega.

Näide 1. $(e^{nx})' = e^{nx} \cdot (nx)' = e^{nx} \cdot n = ne^{nx}$.

Näide 2. $(e^{-h^2x^2})' = e^{-h^2x^2} \cdot (-h^2x^2)' = -2h^2xe^{-h^2x^2}$.

Funktsiooni a^x tuletis

Vaatleme eksponentfunktsiooni laiemas mõttes, see on funktsiooni a^x, kus a on mingi 0-st ja 1-st erinev positiivne arv.

Leiame selle funktsiooni tuletise.

Selleks paneme tähele, et

$$\ln a^x = x \cdot \ln a.$$

Järelikult

$$\frac{(a^x)'}{a^x} = \ln a \cdot 1 = \ln a$$

ja seepärast

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

Näide. $(7^x)' = 7^x \cdot \ln 7 = 1{,}9459 \cdot 7^x$.

Funktsiooni x^n tuletis reaalarvulise astendaja puhul

Tõestame, et valem

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

on kehtiv igasuguse reaalarvulise astendaja n puhul.

Tõepoolest, logaritmi definitsiooni järgi igasuguse n puhul

$$x^n = e^{\ln x^n}$$

ehk

$$x^n = e^{n \ln x}.$$

Seega

$$(x^n)' = e^{n \ln x} \cdot (n \ln x)' =$$

$$= e^{n \ln x} \cdot n \cdot \frac{1}{x} = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x}$$

ehk, pärast taandamist,

$$(x^n)' = nx^{n-1},$$

mis kehtib igasuguse reaalarvulise n puhul.

Näide. $(\sqrt[3]{x^2})' = (x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$

ehk

$$(\sqrt[3]{x^2})' = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

PEATÜKK XXVII

TULETISE ARVUTUSTEHNILISI RAKENDUSI

Funktsiooni tuletis on väärtuslikuks arvutustehniliseks vahendiks mitmete tähtsate ülesandetüüpide lahendamisel, mis väga tihti esinevad matemaatika kõigil rakendusaladel. Neist ülesandetüüpidest tuleks eelkõige nimetada järgmist kolme.

1° Argumendi *väikesest* muudust tingitud funktsiooni *muudu* hindamine.

2° Mitte täpselt teada oleva argumendi väärtuse veast tingitud funktsiooni väärtuse *vea* hindamine.

3° Numbriliste kordajatega *võrrandite* lahendamine juhul, kui nende võrrandite jaoks puudub sobiv lahendusvalem, puudub üldse lahendusvalem või ei saagi lahendusvalemit olla.

Neile kolmele küsimusele pühendamegi käesoleva peatüki.

§ 94. FUNKTSIOONI MUUDU HINDAMISE VALEM

Probleemiseade

Olgu mingi funktsioon antud oma avaldisega $y = f(x)$ ja tähendagu x edaspidises mõttekäigus mingit fikseeritud argumendi väärtust. Probleem, mille ees seisame, on järgmine: mille võrra *ümmarguselt* muutub funktsioon argumendi väärtuse *väikese* muudu Δx puhul? Näiteks: Päikese kõrguse $h°$ puhul on rõhtsa pinna valgustustugevus $i = I \sin h°$, kus I on sama pinna valgustustugevus kiirte vertikaalsel langemisel. Mille võrra muutub i kõrgusnurga $h°$ väikese muudu $\Delta h°$ puhul? Või: on teada, et läbimõõdu d puhul on teatava juhtme takistus $r = Rd^{-2}$, kus R tähendab juhtme takistust läbimõõdu 1 puhul. Kui suur on juhtme takistuse muut, kui juhe asendatakse teise, samast materjalist juhtmega, mille läbimõõt erineb endisest väikese muudu Δd võrra?

Seatud probleemi lahendamiseks võiks määrata järjest $x + \Delta x$, $f(x)$, $f(x + \Delta x)$ ja lõpuks $f(x + \Delta x) - f(x)$ ehk Δy väärtuse. See tee on aga pikk ja keerukas. Tuletame üldise valemi, mille abil saab kergesti muutu hinnata.

Funktsiooni muudu hindamise valem

Suuna leidmiseks, milles lahendust otsida, vaatleme erijuhtu, kus vaadeldav sõltuvus $y = f(x)$ on lineaarne. Siis $f(x) = ax + b$. On kohe näha, et sel puhul

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a.$$

Et ka

$$f'(x) = a,$$

siis

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

ehk

$$\Delta y = f'(x)\Delta x.$$

Lineaarse sõltuvuse puhul on see valem täpne.

See pole aga enam nii, kui $f(x)$ on mingi mittelineaarne funktsioon. Siis mitte suhe $\Delta y : \Delta x$ ise, vaid selle piirväärtus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Kui teeme argumendi juurdekasvu Δx küllalt väikeseks, siis võime suhte $\Delta y : \Delta x$ viia tuletisele $f'(x)$ nii lähedale, kui iganes tahame. Argumendi väikeste muutude korral on siis $\Delta y : \Delta x \approx f'(x)$ ehk

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Sõnastatult:

argumendi väikese muudu puhul on funktsiooni muut ligikaudu võrdne funktsiooni tuletise ja argumendi muudu korrutisega.

Kerkib küsimus, kui usaldatav on valemi $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ järgi arvutatud Δy väärtus ehk, teiste sõnadega, kui täpselt annab see valem funktsiooni otsitava muudu väärtuse. Selle küsimuse lahendamine pole võimalik meil praegu kasutada olevate vahenditega. Me toome need vahendid — nn. keskväärtuse laused — veidi hiljem ja tuleme siis tagasi äsjapüstitatud küsimuse juurde.

Funktsiooni relatiivse muudu hindamise valem

Olgu mingi funktsioon antud oma avaldisega $y = f(x)$. Tähendagu x mingit fikseeritud argumendi väärtust ja muutugu x väikese suuruse Δx võrra. Küsime, missuguse relatiivse muudu see kutsub esile funktsiooni väärtuses.

Et $y = f(x)$ ja $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, siis

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x.$$

Kui tahame seda relatiivset muutu avaldada protsentides, peame ainult tulemuse kirjutama kujul

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\Delta x \cdot 100\%.$$

Funktsiooni muudu hindamise valemi rakendamise näiteid

Näide 1. Voolutugevus ahelas $i = \frac{e}{r}$, kus e on potentsiaalide vahe ja r takistus. Takistuse suurenemine Δr võrra (näiteks kontaktide oksüdeerumisel) tingib voolutugevuse muudu

$$\Delta i \approx -\frac{e}{r^2}\Delta r.$$

Näide 2. Verekapillaarist ajaühikus läbi voolav vere hulk $q = const \cdot d^4$, kus d on kapillaari sisemine läbimõõt. Kui mõne ravimi toimel kapillaari läbimõõt d muutub Δd võrra, siis on sellele vastav

$$\Delta q \approx const \cdot 4d^3 \cdot \Delta d$$

ja läbivoolu protsentuaalne muut

$$\frac{\Delta q}{q} \cdot 100\% = 4\frac{\Delta d}{d} \cdot 100\%.$$

Nagu näeme, on läbivoolu protsentuaalne muut neli korda suurem läbimõõdu protsentuaalsest muudust.

Näide 3. Ellipsi suur pooltelg on a ja ekstsentrilisus e. Vähenegu e väikese muudu Δe võrra. Küsime, mille võrra see ümmarguselt mõjustab ellipsi pindala.

Teame, et ellipsi pindala arvutatakse valemi $S = \pi ab$ järgi, kus b on väike pooltelg. See pooltelg avaldub meie andmeis kujul $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Seega

$$S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

Järelikult ellipsi pindala muut

$$\Delta S \approx \pi a^2 \frac{-e}{\sqrt{1 - e^2}}\Delta e$$

ehk

$$\Delta S \approx -S\frac{e\Delta e}{1 - e^2}.$$

Ekstsentrilisuse vähenemisel Δe võrra suureneb ellipsi pindala

$$\frac{e\Delta e}{1-e^2}\cdot 100\%$$

võrra.

N ä i d e 4. Suurenegu ellipsi lamedus λ väikese muudu $\Delta\lambda$ võrra. Leiame, mille võrra see ümmarguselt mõjustab ellipsi ekstsentrilisust.

Teame, et $e=\sqrt{2\lambda-\lambda^2}$. Seega

$$\Delta e\approx\frac{1-\lambda}{\sqrt{2\lambda-\lambda^2}}\Delta\lambda.$$

Ekstsentrilisuse relatiivne muut

$$\frac{\Delta e}{e}\cdot 100\%=\frac{(1-\lambda)\Delta\lambda}{2\lambda-\lambda^2}\cdot 100\%.$$

Funktsiooni muudu hindamise valemi kasutamine numbrilisel arvutamisel

Olgu teada funktsiooni väärtus argumendi mingisugusel konkreetsel eriväärtusel x. Sageli on meil tarvis hinnata väärtust, mille see funktsioon omandab endisest pisut erineval argumendi väärtusel $x+\Delta x$.

Küsimuse lahendamiseks arutleme järgmiselt. Olgu $y=f(x)$ kõnesolev funktsioon. Argumendi väikese muudu Δx puhul muutub funktsioon $f(x)$ ümmarguselt $f'(x)\cdot\Delta x$ võrra, nii et

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x.$$

Erijuhul, kui $f(x)$ on l i n e a a r n e f u n k t s i o o n, asendub ligikaudne võrdus täpse võrdusega.

Et võrduse parem pool on argumendi muudu Δx suhtes lineaarne, siis nimetame summat $f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$ avaldise $f(x+\Delta x)$ l i n e a a r s e k s l ä h e n d i k s. Küsimuse suure teoreetilise ja rakendusliku tähtsuse tõttu pühendame talle hiljem eripeatüki. Siinkohal piirdume ainult kahe näite käsitlemisega.

N ä i d e 1. Hindame $e^{1,03}$ väärtust. Selleks vaatleme funktsiooni $y=e^x$. Argumendi lähteväärtusel $x=1$ on $y=e^1=2{,}718$. Argumendi väärtuse muutumisel Δx võrra

$$\Delta y\approx(e^x)'\Delta x=e^x\Delta x.$$

Kui $x=1$ ja $\Delta x=0{,}03$, siis

$$\Delta y\approx 2{,}718\cdot 0{,}03\approx 0{,}082.$$

Seega

$$e^{1,03}\approx 2{,}718+0{,}082=2{,}800.$$

Näide 2. Hindame arctan 1,1 väärtust. Paigutades valemis $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$ funktsiooni $f(x)$ asemele arctan x, saame

$$\arctan (x+\Delta x) \approx \arctan x + \frac{\Delta x}{1+x^2}$$

ehk, antud arvulistel andmetel,

$$\arctan 1{,}1 \approx \arctan 1 + \frac{0{,}1}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} + 0{,}05 = 0{,}78 + 0{,}05 = 0{,}83.$$

§ 95. KAUDSE MÕÕTMISE VEA HINDAMISE PROBLEEM

Probleemiseade

Kõigi ühest argumendist sõltuvate suuruste $y = f(x)$ määramisel seisame kahe küsimuse ees.

1° Argumendi mõõdetud väärtus on x. Missugune on sellele vastav funktsiooni väärtus? Vastus saadakse $f(x)$ väärtuse arvutamisel.

2° Argumendi x väärtus on teada ligikaudu, vea ülemmääraga Δx. Milleni võib küündida funktsiooni y väärtuse viga ehk, teisiti, kui suur on Δy? Sellele küsimusele annab vastuse vea hindamise valem.

Kaudse mõõtmise vea hindamise valem

Määratagu suurus x otseselt, suurus y aga kaudselt valemi $y = f(x)$ järgi. Kui ütleme, et argumendi väärtus on $x \pm \Delta x$, siis mõistame seda nii, et see argumendi väärtus on x, kusjuures võimalik kõrvalekaldumine sellest on maksimaalselt Δx. Halvimal juhul, kui argumendi viga küünib oma maksimaalse väärtuseni Δx, on sellest tingitud funktsiooni muut ehk funktsiooni viga

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x.$$

Sümboli Δx esinemisel argumendi väärtuse veana nimetame saadud valemit vea hindamise valemiks ehk, lühemalt, vea valemiks. Mõtet, mida väljendab see valem, võime sõnastada järgmiselt:

funktsiooni viga on ligikaudu võrdne funktsiooni tuletise ja argumendi vea korrutisega.

Vea valem on üks tähtsamaid rakendusmatemaatika valemeid. Ta on aluseks mõõtmistulemustest arvutatud suuruste väärtuste usaldatavuse hindamisel ja tõhusaks vahendiks mõõtmiste planeerimi-

sel: tema abil otsustatakse küsimus, kuidas antud riistadega korraldada mõõtmisi, et saavutada maksimaalset täpsust.

Vea valemist saame kohe ka valemi relatiivse vea jaoks:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot \Delta x.$$

Märkus. Vea valemi rakendamisel tuleb arvutused teha sobivalt ümardatud arvudega, ikka meeles pidades, et on tegemist mitte vea täpse suuruse määramisega, vaid vea ligikaudse väärtuse hindamisega. Et viga tuleb alati anda pigemini suuremana kui väiksemana tõelisest veast, siis tuleb kõik arvutuskäigus esinevad ümardamised teha nii, et arvutuse lõpptulemus ei väheneks.

Vea hindamise näiteid

Näide 1. Astme viga.

Olgu $y = x^n$, kus n on mingi naturaalarv. Siis $f'(x) = nx^{n-1}$ ja

$$\Delta y \approx nx^{n-1} \cdot \Delta x,$$

seega astme relatiivne viga

$$\frac{\Delta y}{y} \approx n \frac{\Delta x}{x}.$$

Mõlemad valemid jäävad püsima ka positiivse murdarvulise astendaja puhul. Negatiivse astendaja korral tuleb töötada absoluutväärtustega:

$$\Delta y \approx |n| x^{n-1} \Delta x \quad \text{ja} \quad \frac{\Delta y}{y} \approx |n| \frac{\Delta x}{x}.$$

Suuruse n-nda astme relatiivne viga on n korda suurem aluse relatiivsest veast. Siit järelduvad erijuhtudena kohe ruudu, kuubi, ruutjuure ja kuupjuure relatiivse vea valemid.

Näide 2. Temperatuuri mõõtmise vea mõju kõrguse baromeetrilise määramise tulemusele.

Kui maapinnal baromeeter näitab B_0, kõrgusel H meetrit aga B mm Hg ja kui sel kõrgusel valitseb mõõtmise ajal temperatuur $t°$, siis kehtib valem

$$H = 18\,464(1 + \alpha t) \log \frac{B}{B_0},$$

kus α on gaaside paisumistegur 1 : 273. Valem võimaldab kõrguse arvutamist baromeetri lugemitest. Seda kõrguse kaudset määramist õhurõhu järgi kasutatakse laialdaselt kõrglendudel, eriti aga mägimaastiku üksikpunktide kõrguse määramisel.

Arvutame kõrguse vea ΔH, mida põhjustab temperatuuri mõõtmise viga $\Delta t°$.

Funktsiooni H relatiivne viga

$$\frac{\Delta H}{H} \approx \frac{\alpha \Delta t}{1 + \alpha t}$$

ehk, teisiti kirjutatult,

$$\Delta H \approx \frac{H}{273 + t} \cdot \Delta t.$$

See aga tähendab, et

$$\Delta H \approx \frac{H}{300} \cdot \Delta t = \frac{1}{3} \frac{H}{100} \cdot \Delta t.$$

Saadud võrdusest nähtub, et temperatuuri mõõtmise viga 1° põhjustab kõrguse määramise vea $\frac{1}{3}$ % kõrguse väärtusest. Meie kodumaa kõrgeimal mäel põhjustab temperatuuri mõõtmise viga 1° kõrguse määramise vea

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{100} \cdot 7500 \text{ m ehk } 25 \text{ m}.$$

Vea valemi kasutamine mõõtmiste planeerimisel

Vea valem on tähtsaks vahendiks mõõtmiste ratsionaalsel planeerimisel. Ta annab näpunäiteid niihästi selle kohta, missuguseid suurusi tuleb mõõta erilise hoolega, kui ka selle kohta, kuidas kindlustada võimalikult head mõõtmistulemust.

Näide 1. Kauguse valik puu kõrguse mõõtmisel. Paistku puu kõrguse osa $h - h_0$ kauguselt d m nurga α all. Siis, nagu nähtub jooniselt 295,

$$h - h_0 = d \cdot \tan \alpha.$$

Et h_0 on arvuga h võrreldes väike, siis $h - h_0 \approx h$ ja seepärast $\Delta (h - h_0) \approx \Delta h$. Seega

$$\Delta h \approx \frac{d}{\cos^2 \alpha} \cdot \Delta \alpha,$$

kus α ja $\Delta \alpha$ on antud absoluutmõõdus. Sellele valemile saab anda sobivama kuju: nimelt on $d \approx h : \tan \alpha$ ja seega

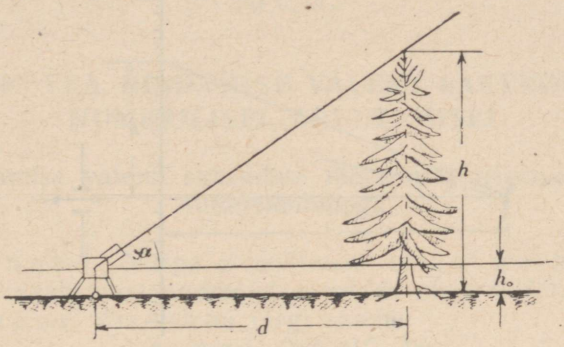
$$\Delta h \approx \frac{h}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \Delta \alpha,$$

ehk

$$\Delta h \approx \frac{2h}{\sin 2\alpha} \cdot \Delta\alpha.$$

Viga Δh, mida põhjustab nurga α mõõtmise viga, on seda väiksem, mida suurem on nimetaja $\sin 2\alpha$. Funktsiooni $\sin 2\alpha$ suurim väärtus on 1, millele vastab nurk $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ehk 45°. Sel puhul on $d \approx h$. Niisiis:

puu kõrguse mõõtmisel valitagu kaugus d ligikaudu võrdne puu kõrgusega.



Joon. 295.

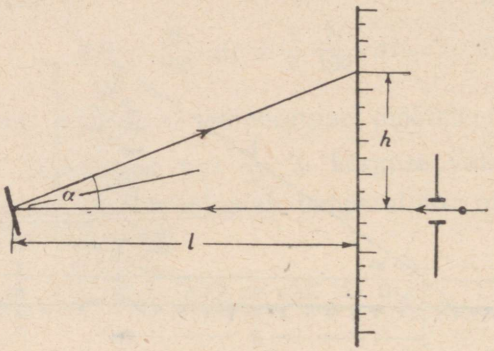
Et puu kõrgus tuleb alles leida, siis hinnatakse teda esiotsa silma järgi ning mõõdetakse vastav kaugus d sammudega. Samuti toimitakse mõne torni, raadiomasti jne. kõrguse mõõtmisel.

Kui α on antud kraadides, saame

$$\Delta h \approx \frac{2h}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \Delta\alpha.$$

Näide 2. Peegellugemi meetod. Tänapäeva teaduslikus ja praktilises mõõtmistehnikas etendab tähtsat osa nn. peegellugemi meetod, mille puhul mõõtmisvahendid konstrueeritakse nii, et näiteks varda pikenemine venitava jõu mõjul või soojenemisel, samuti elektrivoolu tugevus, pinge jne. avalduvad mõõteriista tundliku osa pöördumises mingi nurga α võrra. Et selle nurga otsene mõõtmine on tülikas, eriti nurga väikeste väärtuste puhul, siis mõõdetakse teda kaudselt: riista tundliku, pöörduva osa külge kinnitatakse väike kerge peeglike (joon. 296) ja sellele langev valguskiir peegeldatakse skaalale, millel liikuvat peegeldunud kiirt jälgitakse pikksilma abil. Nurka, mille võrra riista tundlik osa on pöördunud, saab siis arvutada

pikksilma abil mõõdetavast peegeldunud kiire hälbest h ja peegli ning skaala vahelisest kaugusest l. Mõõteriist ise asetatakse kivisambale või seina raudkonsoolile. Ka skaala kinnitatakse võimalikult püsivalt, nii et kaugus l on k o n s t a n t n e. Seega kaugus määratakse korduva mõõtmise teel nii täpselt, et nurga α ja selle vea $\Delta\alpha$ arvutamisel võib kaugust l käsitleda kui täpselt teada olevat suurust. Oletame, et hälbe h määramisel on tehtud viga Δh. Seame endale ülesandeks arvutada nurk α ja selle viga $\Delta\alpha$ teadaolevaist andmeist l, h ja Δh. Märgime siinkohal ära, et tegeliku mõõtmise puhul antakse α ja $\Delta\alpha$ k r a a d m õ õ d u s.



Joon. 296.

Jooniselt 296 nähtub, et $\tan\alpha = h : l$, mille järgi saame nurga α vahetult tabelist. Pöörates sõltuvuse ja pidades meeles, et sel puhul tuleb nurk võtta a b s o l u u t m õ õ d u s, saame

$$x = \operatorname{arctan}\frac{h}{l},$$

kus x on nurga α suurus absoluutmõõdus. Edasi saame vea Δx:

$$\Delta x \approx \frac{1}{1+\left(\frac{h}{l}\right)^2}\cdot\frac{1}{l}\cdot\Delta h = \frac{l\cdot\Delta h}{l^2+h^2};$$

jääb ainult üle see nurk ümber arvutada nurgaks $\Delta\alpha$ k r a a d m õ õ d u s.

Olgu näiteks $l = 2000$ mm, $h = 250$ mm, $\Delta h = 1$ mm. Siis

$$\tan\alpha = \frac{250}{2000} = \frac{1}{8} = 0{,}1250,$$

nii et

$$\alpha = 7°6'.$$

Edasi

$$\Delta x \approx \frac{2000 \cdot 1}{4\,000\,000 + 62\,500} = \frac{1}{2031},$$

seega

$$\Delta x < \frac{1}{2000}$$

ja

$$\Delta \alpha < \frac{57°18'}{2000}$$

ehk

$$\Delta \alpha < 2'.$$

§ 96. VEA HINDAMISE VALEMI RAKENDUSI NUMBRILISEL ARVUTAMISEL

Vea hindamise valemi rakendusi töötamisel trigonomeetriliste funktsioonidega

Ülesanne 1. Nurga α mõõtmisel leiti, et $\alpha = 24°35'(\pm 3')$. Kui täpselt saab neist andmeist arvutada $\sin \alpha$ väärtuse?

Lahendus. Vea valemi järgi saame

$$\Delta \sin \alpha \approx (\sin \alpha)' \cdot \Delta \alpha$$

ehk

$$\Delta \sin \alpha \approx \frac{\pi}{180} \cdot \cos \alpha \cdot \Delta \alpha.$$

Meie andmeil

$$\Delta \sin \alpha \approx \frac{3{,}142}{180} \cdot 0{,}9094 \cdot \frac{3}{60}.$$

seega

$$\Delta \sin \alpha \approx 0{,}0008.$$

Tabelist saame, et $\sin \alpha = 0{,}4160$, seega

$$\sin \alpha = 0{,}4160\,(\pm 0{,}0008).$$

Ülesanne 2. Nurga tangensi mõõtmisel leiti, et

$$\tan \alpha = 0{,}78\,(\pm 0{,}04).$$

Kui täpselt saab neist andmeist määrata nurga α, kui seda otsitakse kraadmõõdus?

Lahendus. Vea valemi järgi saame

$$\Delta \tan \alpha \approx (\tan \alpha)' \cdot \Delta \alpha$$

ehk

$$\Delta \tan \alpha \approx \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \Delta \alpha.$$

Siit

$$\Delta\alpha \approx \frac{180}{\pi} \cdot \cos^2 \alpha \cdot \Delta \tan \alpha.$$

Tangensi väärtusele 0,78 vastab nurk $\alpha = 37°57'$; sellele vastab neljakohalistes tabelites koosinuse väärtus 0,7886; niisiis

$$\Delta\alpha \approx \frac{180}{3{,}142} \cdot 0{,}7886^2 \cdot 0{,}04 \approx \frac{180}{3} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}04 =$$

$$= 60 \cdot 0{,}64 \cdot 0{,}04 = 60 \cdot 0{,}0256 = 6 \cdot 0{,}256 = 1{,}536,$$

seega

$$\Delta\alpha \approx 1{,}5°.$$

Et nurga α viga võib ulatuda 90′-ni, siis pole mõtet vastuses anda minuteid. Seepärast ümardame leitud α väärtuse 38°-ni ja kirjutame, et

$$\alpha = 38° (\pm 1{,}5°).$$

Kümnendlogaritmi vea avaldis

Olgu arv x teada veaga, mis ei ületa Δx. Küsime, milleni võib küündida arvu x logaritmi viga.

Vea valemi järgi

$$\Delta f \approx f' \cdot \Delta x.$$

Kui siin võtame $f = \log x$ ja tuletame meelde, et siis $f' = M : x$, saame

$$\Delta \log x \approx \frac{M}{x} \cdot \Delta x$$

ehk, teisiti kirjutades,

$$\Delta \log x \approx M \cdot \frac{\Delta x}{x}.$$

Suhe $\Delta x : x$ on argumendi relatiivne viga. Seega:

arvu logaritmi absoluutne viga on võrdne arvu relatiivse vea ja mooduli korrutisega.

Tavaliselt antakse suhe $\Delta x : x$ protsentides. Olgu näiteks

$$\frac{\Delta x}{x} = p\%.$$

Siis

$$\Delta \log x \approx \frac{M \cdot p}{100}.$$

Et $M \approx 0{,}4343 \approx 0{,}5$, siis võib esimeses lähenduses võtta

$$\Delta \log x \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{100}.$$

See tähendab, et

arvu logaritmi absoluutne viga on ligikaudu võrdne poolega arvu protsentuaalsest veast.

Ülesanne 1. Olgu arv n teada veaga, mis ei ületa 2%. Mitmekohalisi logaritme tuleb kasutada arvutamisel arvuga n?

Lahendus. Eespool tuletatud valemi põhjal

$$\Delta \log n \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{100} = 0{,}01.$$

Et arvu n logaritmis pole juba sajandikud täiesti usaldatavad (nende arv võib erineda õigest sajandike arvust ühe võrra), siis pole mõtet kasutada rohkem kui kahekohalisi logaritme.

Ülesanne 2. Neljakohaliste logaritmide tabelites antakse logaritmid veaga kuni 0,00005. Kui täpselt saab nende logaritmide järgi määrata arve?

Lahendus. Nagu teame, on

$$\Delta \log n \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{100};$$

seega

$$\frac{p}{100} \approx 2 \cdot \Delta \log n = 2 \cdot 0{,}00005 = 0{,}0001.$$

Näeme, et arvu relatiivne viga on kogu tabeli ulatuses üks ja seesama, nimelt 0,0001. Võrdusest $\Delta n : n = 0{,}0001$ järeldub, et $\Delta n = 0{,}0001 \cdot n$ ja seega suurim Δn vastab suurimale n-le. Suurim neljakohaline arv on 9999. Et see on väiksem kui 10 000, siis

$$\Delta n < 0{,}0001 \cdot 10\,000 = 1.$$

See tähendab, et neljakohalise arvu määramisel tabelist ei ületa viga üht ühikut ühelistes. Teiste sõnadega:

neljakohalistest tabelitest saame logaritmi järgi arve määrata neljakohaliselt.

Samuti on võimalik näidata, et kolmekohalistest tabelitest saaksime arvud leida kolmekohaliselt, viiekohalistest viiekohaliselt jne.

Üldiselt:

töötada tuleb nii mitme kohaliste logaritmide tabelitega, kui mitme kohaliselt on teada andmed.

Vea hindamine arvutamisel logaritmilise arvutuslükatiga

Olgu antud logaritmiline skaala kujutusühikuga l mm. Arvude x ja $x + \Delta x$ logaritmid on siis skaalal kujutatud lõikudena $l \cdot \log x$ ja $l \cdot \log (x + \Delta x)$. Nende lõikude vahe on

$$l \cdot [\log (x + \Delta x) - \log x] \quad \text{ehk} \quad l \cdot \Delta \log x.$$

Silm eraldab veel vabalt kahte kriipsu, millede vahe on 0,2 mm. Väikseim logaritmi kasvu kujutis, mida silm skaalal veel näeb, on seega

$$l \cdot \Delta \log x = 0{,}2.$$

Et

$$\Delta \log x \approx \mathrm{M} \frac{\Delta x}{x},$$

siis

$$l \cdot M \frac{\Delta x}{x} \approx 0{,}2$$

ehk

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{0{,}2}{Ml}.$$

Suhe $\Delta x : x$ on skaalalt võetava arvu x r e l a t i i v n e v i g a. Nagu viimane võrdus näitab, on see viga sõltumatu skaalal võetud kohast. Seega

logaritmiliselt skaalalt saadud lugemite relatiivne viga on kogu skaala ulatuses üks ja seesama

ehk, teiste sõnadega,

logaritmiline arvutuslükati annab lugemid sõltumatult nende suurusest ühe ja sellesama relatiivse täpsusega.

Sellel omadusel põhineb logaritmilise arvutuslükati erakordne väärtus arvutusvahendina.

Viimati kirjutatud võrdusest nähtub, et logaritmiliselt skaalalt saadud lugemite relatiivne viga on pöördvõrdeline kujutusühikuga l, teiste sõnadega:

logaritmilise arvutuslükati lugemi relatiivne täpsus kasvab võrdeliselt kujutusühikuga.

Tavaliselt kasutatavatel arvutuslükatitel on kujutusühikuks 250 mm. Järelikult saadakse neilt lugemid veaga

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{0{,}2}{0{,}4 \cdot 250} = \frac{2}{1000} = 2{}^0/_{00}.$$

Ühe meetri ehk 1000 mm pikkune arvutuslükati annaks lugemid teoreetiliselt relatiivse veaga mitte üle $\frac{1}{2}\,{}^0/_{00}$, mis vastab neljakohaliste tabelite täpsusele. Arvutuslükati tehnilised puudused ja arvutaja juhuslikud pisieksitused võivad praegu arvutatud veale anda oma lisandid. Ettevaatuse mõttes on seetõttu õigem arvestada lugemi viga suuremana tema teoreetilisest väärtusest, võttes suhte $\Delta x : x$ väärtuseks näiteks $1{}^0/_{00}$.

§ 97. NUMBRILISTE KORDAJATEGA VÕRRANDITE LAHENDAMINE

Nagu eespool (lk. 61) nägime, on meil vaid harva võimalik leida vajalikke suurusi otsese mõõtmise teel; enamik suurusi määratakse kaudselt, arvutades neid otseste mõõtmiste tulemustest vastavate valemite järgi. Kuid tihtipeale puuduvad valemid ja otsitava suuruse leidmiseks tuleb lahendada võrrand, mis seob otsitavat suurust teiste, numbriliselt teada olevate suurustega. Esimese astme võrrandi $ax + b = 0$ lahendame skeemi $ax = -b$, $x = -b : a$ järgi; teise astme võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendamiseks kasutame valemit

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ka kolmanda ja neljanda astme võrrandi lahendamiseks on olemas ruut- ja kuupjuurtega valemid, kuid need on numbrilise tulemuse saamiseks sobimatud, kõrgemate kui neljanda astme võrrandite lahendamiseks aga pole üldse võimalik anda üldisi radikaalides kirjutatud lahendusvalemeid. Samuti pole võimalik anda lahendusvalemeid mittealgebralistele ehk transtsendentsetele võrranditele, näiteks võrranditele

$$\sin 2x - 3x = 0, \qquad (x + 1) \tan x - x = 0,$$
$$e^x - 2x^2 + 1 = 0.$$

Kõigil eespool nimetatud juhtudel lahendatakse võrrandid nii, et esialgu leitakse lahendi mingi ligikaudne väärtus ehk lähisväärtus ehk lähend, otsitakse selle parandus ja saadakse täpsem lähend; leitakse teine parandus ja saadakse veelgi täpsem lähend jne. Lähendi järkjärgulist parandamist jätkatakse, kuni lähend on saadud nõutava täpsusega. Kõiki lähendi järkjärgulisi parandusi püütakse saada ühe ja sama võttega, nii et lähendi järkjärguline parandamine toimuks nii-öelda mehaaniliselt. Arvutustöö kergendamiseks on kohane kasutada arvutusvahendeid, nagu arvutuslükatit, arvutusmasinat ja igasuguseid matemaatilisi tabeleid.

Newtoni võte graafilises käsitluses

Üheks lihtsamaks võrrandi lahendi lähisväärtuse parandamise võtteks on Newtoni võte. Selgitame selle võtte olemust eeskätt graafiliselt.

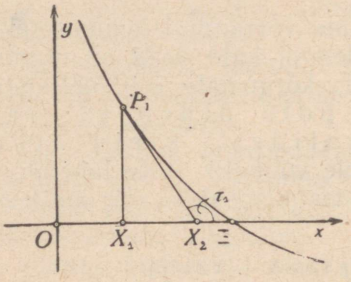
Olgu tarvis lahendada mingi võrrand. Viime kõik tema liikmed vasakule poolele, nii et paremale poolele jääb 0. Tähistades

võrrandi vasaku poole sümboliga $f(x)$, saame võrrandi kirjutada kujul

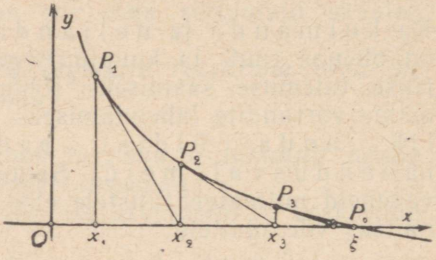
$$f(x) = 0.$$

Vaatleme kõverat $y = f(x)$. Selle kõvera ja x-telje lõikepunktis on $y = 0$, nii et lõikepunkti abstsiss ξ on meie võrrandi lahendiks: $f(\xi) = 0$. Lahendi ξ ligikaudse väärtuse saab leida kas graafiliselt, joonestades kõvera $y = f(x)$ ja otsides selle lõikepunkte x-teljega, või ka lihtsalt katsetamise teel.

Olgu lahendi ξ ligikaudne väärtus x_1; erinevus lahendi täpsest väärtusest on siis $\xi - x_1 = a$; see on ühtlasi parandus, mis tuleb lisada x_1-le, et saada ξ; s. t. $\xi = x_1 + a$. Paranduse a ligikaudse väärtuse α saame, kui joonestame punktis P_1 abstsissiga x_1 kõvera puutuja ja leiame selle puutuja lõikepunkti x-teljega



Joon. 297.



Joon. 298.

(joon. 297). Märkides selle lõikepunkti tähega X_2, näeme, et X_2 on punktile Ξ lähemal kui X_1, seega on x_2 otsitava ξ parem lähend kui x_1. Jooniselt näeme, et

$$X_1X_2 = X_1P_1 : \tan(180° - \tau_1) = -X_1P_1 : \tan\tau_1.$$

Et $X_1X_2 = \alpha$, $X_1P_1 = f(x_1)$ ja $\tan\tau_1 = f'(x_1)$, siis

$$\alpha = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Lähendi parandatud väärtus $x_2 = x_1 + \alpha$ pole aga ka veel täpne. Samal teel, nagu lähendist x_1 tuletasime paranduse α, saame lähendist x_2 tuletada uue paranduse β:

$$\beta = -\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Selle abil saame järgmise lähendi $x_3 = x_2 + \beta$ ja samal viisil edasi minnes leiame üksteise järel üha paremad lähendid $x_4 = x_3 + \gamma$, $x_5 = x_4 + \delta$ jne. (joon. 298).

Et

$$x_2 = x_1 + \alpha,$$
$$x_3 = x_2 + \beta = x_1 + \alpha + \beta,$$
$$x_4 = x_3 + \gamma = x_1 + \alpha + \beta + \gamma,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

siis paranduste määramist tõkestamatult jätkates saame

$$\xi = x_1 + \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

Seega: lahend ξ esineb oma esimese lähisväärtuse ja kõigi järk-järgult määratud paranduste summana. Tegelikus töös pole tarvis teada võrrandi lahendit piiramatu täpsusega; tavaliselt piisab lahendi 2, 3 või 4 kümnendkoha tundmisest; need on aga antud juba 2—3 esimese parandusega. Kas arvutamisel saadud lahendi kümnendkoht on õige, seda saab kõige hõlpsamini otsustada järgmist parandust määrates: kui see kõne all olevat kümnendkohta ei muuda, siis võib seda kohta pidada õigeks. Paranduste arvutamisel on otstarbekohane piirduda paraja hulga kümnendkohtadega, et vältida töötamist paljude, sageli isegi mitteusaldatavate kümnendmärkidega. Käsitletud võtte rakendusviisi selgitamiseks lahendame kaks võrrandit — ühe algebralise, teise transtsendentse.

Newtoni võtte rakendamise näiteid

Ülesanne 1. Leida võrrandi $x^3 + 3x^2 - 12x - 10 = 0$ lahend kolme õige kohaga.

Lahendus. Asetades võrrandi vasakusse poolde prooviks väärtused 0, 1, 2, 3, saame vastavalt —10, —18, —14, +8, millest järeldame, et üks võrrandi lahendeist peab asetsema 2 ja 3 vahel, olles lähemal 3-le kui 2-le. Võtame lahendi esimeseks lähisväärtuseks 3. Paranduse saamiseks kirjutame

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x - 10, \quad f'(x) = 3x^2 + 6x - 12.$$

Arvutades funktsiooni $f(x)$ ja tema tuletise väärtuse Horneri skeemi järgi x väärtusel 3, saame

1	3	—12	—10	3	6	—12
·	3	18	18	·	9	45
1	6	6	8	3	15	33

Seega on lähendi esimene parandus $-8 : 33 \approx -0{,}2$ ja lähendi parandatud väärtus $3 - 0{,}2 = 2{,}8$. Asetades selle väärtuse funktsiooni ja selle tuletise avaldisse ja arvutades nagu täpselt teada olevate andmetega, saame

1	3	−12	−10	3	6	−12
·	2,8	16,24	11,872	·	8,4	40,32
1	5,8	4,24	1,872	3	14,4	28,32

Neil andmeil on lähendi teine parandus $-1{,}872 : 28{,}32 \approx -0{,}066$ ja seega lähendi teine parandatud väärtus 2,734. Arvutades samal viisil järgmise paranduse, näeme, et see on umbes −0,002, nii et väärtus

$$\underline{x = 2{,}73}$$

annab meile otsitava lahendi, nagu nõutud, kolme õige kohaga.

Ülesanne 2. Leida võrrandi $2x - \log x - 7 = 0$ lahend nelja õige kohaga.

Lahendus. Tähistades võrrandi vasaku poole $f(x)$-ga, näeme logaritmide tabelitest, et

$$f(4) = 2 \cdot 4 - \log 4 - 7 = 8 - 0{,}6021 - 7 = 0{,}3979;$$

see pole nullist palju erinev arv, nii et võiksime katseks võtta otsitava lahendi lähisväärtuseks $x = 4$.

Et

$$f'(x) = 2 - \frac{M}{x} = 2 - \frac{0{,}4343}{x},$$

siis

$$f'(4) = 2 - \frac{0{,}4343}{4} = 2 - 0{,}1086 = 1{,}8914,$$

seega lähendi esimene parandus on

$$-0{,}3979 : 1{,}8914 = -0{,}2104$$

ja lähendi esimene parandatud väärtus on

$$4 - 0{,}2104 = 3{,}7896.$$

Et kasutatavad tabelid on neljakohalised, siis töötame edasi lahendi neljakohalise lähisväärtusega. Võttes selleks puudusega lähisväärtuse 3,789, saame

$$f(3{,}789) = 2 \cdot 3{,}789 - \log 3{,}789 - 7 = \\ = 7{,}578 - 0{,}5785 - 7 = -0{,}0005,$$

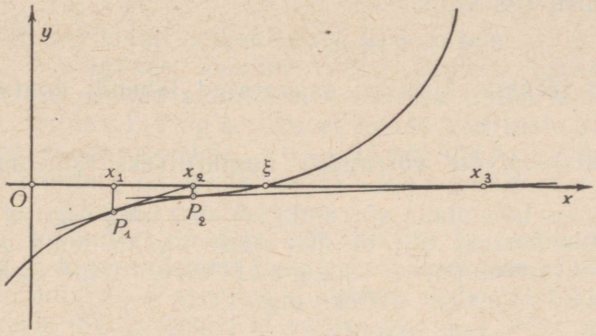
mis näitab, et lähend 3,789 on juba üsna lähedal lahendi õigele väärtusele. Järgmine parandus on ümmarguselt −0,0003, mis enam ei mõjuta varem leitud märke. Seega

$$\underline{x = 3{,}789},$$

kus kõik kohad on õiged.

Kardetav juhtum Newtoni võtte rakendamisel

Newtoni võtte korduv rakendamine viib eesmärgile ainult siis, kui iga järgmine parandus on eelmisest väiksem. See on alati nõnda, kui esimene lähend x_1 on küllalt lähedal lahendile ξ ja kui funktsiooni $y = f(x)$ graafikul ei ole iseärasusi selle punkti läheduses, milles ta lõikab x-telge. Juhul, kui funktsiooni graafikul on punkti $x = \xi$ läheduses k ä ä n u p u n k t, võib Newtoni võtte rakendamine otsitavast lahendist eemale viia (joon. 299).



Joon. 299.

Kas võte annab kõlbliku lähendi või mitte, seda näitab võttes nõutava $f(x)$ väärtuse arvutamine: kui $f(x)$ iga parandusega järjest läheneb nullile, on võte kasutatav; kui aga $f(x)$ väärtus kasvab või hakkab tugevasti kõikuma, on võtte kasutamine väärtusetu. Sel puhul tuleb rakendada mõnda teist lähendi parandamise võtet, näiteks interpolatsioonivõtet (vt. lk. 652).

Newtoni võtte analüütiline käsitlus

Olgu tarvis lahendada võrrand $f(x) = 0$ ning olgu ξ lahendi täpne väärtus ja x_1 selle teadaolev lähend, nii et $\xi = x_1 + a$, kus a on lähendi x_1 parandus. Et $\xi = x_1 + a$, siis

$$f(\xi) = f(x_1 + a)$$

ehk, kui kasutame funktsiooni muudu valemit,

$$f(\xi) \approx f(x_1) + af'(x_1).$$

Et ξ oli lahendi täpne väärtus, siis $f(\xi) = 0$. Järelikult $f(x_1) + af'(x) \approx 0$, nii et a ligikaudse väärtuse a saab määrata võrrandist

$$f(x_1) + af'(x) = 0.$$

See annab paranduse

$$\alpha = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

nagu seda leidsime varemgi. Parandades väärtust x_1 leitud α võrra, saame otsitava t e i s e lähendi $x_2 = x_1 + \alpha$. Seda saab omakorda parandada väärtuse

$$\beta = -\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

võrra. Samal viisil leiame järjestikused parandused γ, δ, ε jne. Otsitav esineb siis kujul

$$\xi = x_1 + \alpha + \beta + \gamma + \ldots$$

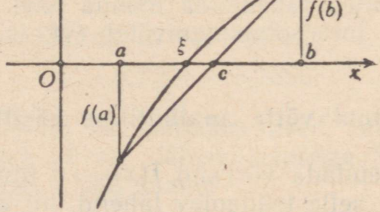
Võtet tuleb jätkata, kuni on saavutatud lähendi nõutav täpsus.

Interpolatsioonivõte võrrandite numbriliseks lahendamiseks

Olgu tarvis lahendada võrrand $f(x) = 0$ ning olgu a ja b kaks lähendi lähisväärtust nii, et üks neist annab tema asetamisel võrrandi vasakusse poolde n e g a t i i v s e, teine aga p o s i t i i v s e v ä ä r t u s e; näiteks olgu

$$f(a) < 0 \quad \text{ja} \quad f(b) > 0.$$

Kujutleme joonestatuna funktsiooni $f(x)$ graafikut. Tehtud oletusel asetseb punkt $[a, f(a)]$ allpool, punkt $[b, f(b)]$ ülalpool abstsiss-



Joon. 300.

telge. Ühendades need punktid k õ õ l u g a ja leides selle kõõlu ja x-telje lõikepunkti abstsissi c, saame üldiselt lahendi ξ parema lähendi, kui seda olid a ja b. Nagu jooniselt 300 näha, moodustavad kõõl, x-telg, negatiivne ordinaat $f(a)$ ja ordinaat $f(b)$ kaks sarnast täisnurkset kolmnurka. Selle põhjal

$$\frac{b-c}{c-a} = \frac{f(b)}{-f(a)}.$$

Lahendades selle võrde tundmatu c suhtes, saame

$$c = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Kui c kontrollasetamine võrrandi vasakusse poolde annab nullist erineva väärtuse, näiteks kui $f(c) > 0$, siis võib eelmist mõttekäiku rakendada $f(a)$ ja $f(c)$ kohta ja tuletada uus, veelgi parem lähend

$$d = \frac{af(c) - cf(a)}{f(c) - f(a)}.$$

Sama võtet korduvalt rakendades saame lahendi ξ nii suure täpsusega, kui iganes soovime. Võtte suureks paremuseks on asjaolu, et iga sammu puhul üks x väärtus annab lähendi puudusega, teine liiaga, nii et nende väärtuste vahe annab kohe ka kummagi väärtuse vea ülemmäära, teiste sõnadega, igal sammul on teada, kui kaugele on jõutud lahendi lähendamisega.

Eespool toodud valemid jäävad kehtima ka siis, kui lahendi ξ lähendid a ja b on mõlemad kas lähendid puudusega või lähendid liiaga. Interpolatsioon asendub sel puhul ekstrapolatsiooniga.

Märkus. Selle asemel et väärtustest a, b, $f(a)$ ja $f(b)$ lähtudes määrata kohe arv c, võib määrata paranduse, mis tuleb lisada a-le, et saada järgmist lähendit c. Jagades c avaldise lugeja nimetajaga, saame

$$c = a - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a).$$

Teine liige selles avaldises kujutab lähendi a parandust. Märgime, et suhe $\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ on kõõlu tõusunurga kootangens ehk kõõlu tõusunurga tangensi pöördväärtus. Suhte piirväärtus, kui $b \to a$, on siis puutuja tõusunurga tangensi pöördväärtus ehk $1 : f'(a)$. Nagu näeme, on Newtoni võte interpolatsioonivõtte piirjuhuks.

Vastavalt sellele, kas c kontrollasetamine $f(x)$ avaldisse annab negatiivse või positiivse tulemuse, saame järgmise paranduse, kirjutades paranduse avaldises kas a või b asemele c. Lähendi väärtust järk-järgult parandades saame lahendi määrata iga nõutava täpsusega.

Ülesanne. Leida võrrandi $x^3 - 2x - 5 = 0$ lahend veaga alla 0,005.

Lahendus. Antud juhul $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Asetades $x = 0, 1, 2, 3$ funktsiooni $f(x)$ avaldisse, näeme, et $f(2) = -1$, $f(3) = 16$. Seega peab üks lahend asetsema 2 ja 3 vahel. Et $f'(x) = 3x^2 - 2$ on kogu vahemikus $2 < x < 3$ positiivne, siis $f(x)$ selles vahemikus kasvab. Järelikult saab selles vahemikus olla ainult üks lahend. Võtame tema lähendite lähte-

väärtuseks 2. Esimene parandus on siis

$$-\frac{(3-2)\cdot(-1)}{16-(-1)}=\frac{1}{17}\approx 0{,}06.$$

Otsitava teine lähend on $2+0{,}06=2{,}06$. Sellele vastab $f(2{,}06)\approx -0{,}378$. Edasi arvutades näeme, et teine parandus on 0,02, kolmas 0,01, neljas 0,003, nii et $x\approx 2+0{,}06+0{,}02+$ $+0{,}01+0{,}003$. Et viimane parandus on $<0{,}005$, siis

$$\underline{x=2{,}09,}$$

kus kõik kolm kohta on õiged.

PEATÜKK XXVIII

ARVUDE JA FUNKTSIOONIDE SUURUS- JA VÄIKSUSJÄRK

§ 98. ARVUDE SUURUS- JA VÄIKSUSJÄRK

Arvude suurusjärgu mõiste

Kui ütleme, et Valgerannal ulatub liivaluidete kõrgus mõne meetrini, Kesk-Eestis on künkad mõnekümne meetri kõrgused, Haanja maastikul küünib kuppelmägede kõrgus mõnesaja meetrini ja Pamiiris on mitme tuhande meetri kõrgusi mägesid, siis on see näide kõrguste märkimisest mitte nende arvulise väärtuse, vaid ainult suurusjärgu kaudu. Sedasama teed käime sageli ka teaduses, nimelt juhul, kus meil suuruse arvuline väärtus pole kuigi täpselt teada, samuti juhul, kus lihtsuse mõttes kasutame suuruste jämedalt ümardatud väärtusi. Näiteks ütleme, et gaasi molekulide kiiruse suurusjärk on 10^3 m/sec (tavalistes rõhu- ja temperatuuritingimustes), nähtava valguse lainepikkuse suurusjärk 10^{-4} mm ja maakera massi suurusjärk 10^{27} grammi.

Iga suurusjärkude skaala on alati mõeldud ühtainsat liiki suuruste (pikkus, kaal, aeg jne.) suurusjärkude hindamiseks. Et skaalal oleks mõte, peab olema antud mõõduühik, millel skaala baseerub, näiteks kilomeeter, tonn, aasta jne. Suurusjärkude skaala on mõttekonstruktsioon. Skaala kujutletavad «kriipsud» asetsevad kohtadel

$$\ldots 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 1,\ 10^{1},\ 10^{2},\ 10^{3}\ldots$$

ühikut. Suurusjärkude skaala haarab vahemikku $-\infty$-st $+\infty$-ni. Realiseerida või joonisel kujutada saab sellest aga ainult mõnda väikest osa.

Andes suuruse suurusjärkudena näiteks arvud 10^2, 10^6 ja 10^{-3} ühikut, ütleme ainult seda, et suurus avaldub vastavalt ühiku sadades, miljonites või tuhandikes ehk, teiste sõnadega, et suurus asetseb vahemikus 100 ja 1000 ühiku vahel, 1 000 000 ja 10 000 000 ühiku vahel ja 0,001 ja 0,01 ühiku vahel. Öeldes näi-

teks, et nähtava valguse lainepikkuse λ suurusjärk on 10^{-4} mm või et maakera massi M suurusjärk on 10^{27} g, väidame ainult seda, et

$$1 \cdot 10^{-4} \leqslant \lambda < 10 \cdot 10^{-4} \quad \text{ja} \quad 1 \cdot 10^{27} \leqslant M < 10 \cdot 10^{27}.$$

Üldiselt,

kui $1 \cdot 10^n \leqslant a < 10 \cdot 10^n$, *siis ütleme, et arvu a suurusjärk on* 10^n.

Kirjutades viimase võrratuse kujul $1 \leqslant \frac{a}{10^n} < 10$, näeme, et arvu jagamisel ta suurusjärguga tekib jagatis, mille täisosa on üks arvudest 1, 2, 3, ..., 9. Arvu suurusjärgu määramiseks piisab niisiis selle arvu esitamisest standardkirjutusviisis $a \cdot 10^n$, kus $1 \leqslant a < 10$. Näiteks:

$$5376 = 5{,}376 \cdot 10^3, \qquad 0{,}00728 = 7{,}28 \cdot 10^{-3}.$$

Esimese arvu suurusjärk on 10^3, teise oma vastavalt 10^{-3}.

Võrratustest

$$10^n \leqslant a < 10^{n+1}$$

järeldub, et

$$n \leqslant \log a < n + 1.$$

See tähendab, et

arvu suurusjärgu näitaja on arvu logaritmi karakteristik.

Suurusjärk on abimõiste arvude rühmitamiseks suurusklassidesse. Kui näiteks ütleme, et arvu a suurusjärk on 10^3, siis tähendab see, et arv a kuulub suurusklassi, mis algab arvuga 1 000 ja ulatub arvuni 10 000, see arv ise välja arvatud. Elava kujutluse sellest, mida tähendab arvu suurusjärk, annab arvude kujutamine pindaladena. Võtame pindala ühikuks 1 dm². Tuletiku ristlõike pindala suurusjärk on siis 10^{-4}, tahvlikriidi ristlõike pindala suurusjärk 10^{-2}, raamatukaane pindala suurusjärk 10^0, kirjutuslaua pindala suurusjärk 10^2 ning toa põranda pindala suurusjärk 10^3.

Suurusjärgu mõiste kasutamine arvude ümardamisel

Enamik vajalikke väärtusi arvutatakse mõõtmistulemustest. Need pole kunagi täpsed. Seepärast pole ka neist arvutatud väärtused täpsed. Kui arvutamine toimub arvutusmasinatega, võib lõpptulemuses esineda suur arv kohti, millest vaid vähesed on usaldatavad ja ka vajalikud. Tekib vajadus tulemust ümardada. Hea pidepunkti küsimuse otsustamiseks, missugused kohad jätta alles, missugused kustutada, annab kohtade suurusjärkude võrdlemine. Võtame näiteks arvu 72 451,925 083. Number 7 märgib siin arvu, mille suurusjärk on 10^4, number 3 arvu, mille suurusjärk on 10^{-6}. Esimese ja viimase koha järkude vahe on $4 - (-6) = 10$. 3 ühiku arvestamine kohal 10^{-6} kõrvuti 7 ühi-

kuga kohal 10^4 tähendaks piltlikult öeldes 3 mm^2 arvestamist 7-hektarilise pindala kõrval (1 ha $= 100 \times 100$ $m^2 = 10^4$ $m^2 = 10^{10}$ mm^2). Missugused kohad arvu ümardamisel alles jätta ja missugused kustutada, see on küsimus, mis tuleb otsustada eranditult iga arvutatud väärtuse puhul. Iga niisuguse väärtuse ümardamisel tuleb juhinduda sellest, kui täpsed on andmed ja kui täpne peab olema tulemus.

Kõik öeldu kandub üle ka avaldistele, mis koosnevad mitmest erineva kaaluga liikmest: nagu arvud nõuavad mõistlikku ümardamist, nii nõuavad avaldised kõigi tähtsusetute liikmete kärpimist. Ka see toimub avaldise liikmete suurusjärkude võrdlemise põhjal.

Märkus. Ei tule arvata, et arvu suurusjärk leitakse alati alles pärast seda, kui arv ise on juba teada; just vastupidi, sageli on andmete puudulikkuse tõttu võimatu määrata vajalike suuruste arvulisi väärtusi ja saab ainult leida nende suurusjärke, mille teadmine avab siis juba tee edaspidiste vaatluste ja mõõtmiste planeerimiseks, mida tehakse nii, et saadavatest tulemustest oleks võimalik arvutada nõutavaid väärtusi. Eriti laialdaselt töötatakse suurusjärkudega suuruste numbriliste väärtuste asendajaina tänapäeva astronoomias kosmogooniliste küsimuste käsitlemisel ning aatomifüüsikas tuumaprotsesside uurimisel.

Arvude väiksusjärk

Konkreetseid arvulisi väärtusi käsitledes on nii suurte kui ka väikeste arvude puhul viisiks rääkida «suurusjärgust». On mõeldav aga ka teistsugune käsitlus: ühest suuremate arvude puhul võiks rääkida suurusjärgust, ühest väiksemate arvude puhul väiksusjärgust. Sel puhul oleks näiteks arvu 8741 suurusjärguks 10^3, arvu 0,0792 väiksusjärguks 10^{-2}. Igapäevases keeles väljendatult tähendaks see, et esimene arv koosneb tuhandeist ja lisaks neile sisaldab võib-olla veel ka sadasid, kümneid jne.; teine arv aga koosneb sajandikest ja lisaks neile sisaldab võib-olla veel ka tuhandikke, kümnetuhandikke jne. Nii suurus- kui ka väiksusjärk on arvu koostise kõige kaalukama osa esiletõstmise vahendiks; esimeses näites on selleks osaks tuhanded, teises näites sajandikud.

Ühe arvu suurus- või väiksusjärk teise arvuga võrreldes

Suurusjärkude skaala moodustamine arvu 10 alusel, samuti väiksusjärkude skaala moodustamine $\frac{1}{10}$ alusel, on tingitud asja-

olust, et meie arvusüsteemi aluseks on arv 10 ja meetermõõdustikus üht ja sama liiki suuruste mõõdud on tuletatud põhiühikust (m, l, kg jne.) selle korrutamisel või jagamisel kümne astmetega 10^1, 10^2, 10^3 jne. Küsimuse lahendamiseks, missugune on arvu B suurusjärk arvu A suhtes, koostame skaala

$$\ldots A^{-2},\ A^{-1},\ 1,\ A^1,\ A^2,\ \ldots$$

ja vaatame, missuguse A astme kohale või missuguse kahe järjestikuse A astme vahele paigutub arv B. Kui $A^N \leqslant B < A^{N+1}$, siis

$$B = \beta A^N, \quad \text{kus} \quad 1 \leqslant \beta < A.$$

Väiksema vaevaga saame arvu N leida, kui paneme tähele, et võrratusest $A^N \leqslant B < A^{N+1}$ järeldub võrratus

$$N \log A \leqslant \log B < (N+1) \log A,$$

millest kohe saab leida arvu N. Sel juhul ütleme, et arv B on arvu A suhtes suurusjärku A^N.

Korrutise, astme ja jagatise suurusjärk

Olgu arvude a ja b suurusjärgud arvu c suhtes vastavalt m ja n:

$$a = \alpha c^m,$$
$$b = \beta c^n.$$

Moodustades arvude a ja b korrutise, näeme, et

arvude korrutamisel tegurite suurusjärgud liituvad.

Lause üldistub kahe teguri juhult kuitahes mitme teguri juhule. Kui võtame k tegurit ja loeme nad kõik üksteisega võrdseks, siis näeme, et

astme a^k suurusjärk on k korda suurem aluse a suurusjärgust.

Moodustades arvude a ja b jagatise, näeme, et jagatise $a : b$ suurusjärgu saamiseks tuleb arvu a suurusjärgust lahutada arvu b suurusjärk ehk, lühidalt,

arvude jagamisel suurusjärgud lahutuvad.

Konkreetseid näiteid arvu väiksusjärgu mõiste kasutamise kohta avaldiste kärpimisel

N ä i d e 1. Vaatleme ristkülikut pikkusega a mm ja laiusega b mm. Ulatugu nii ristküliku pikkuse kui ka laiuse mõõtmisviga γ millimeetrini, kusjuures γ olgu arvudega a ja b võrreldes väike, nagu ikka heade vahenditega ja hoolikalt tehtud mõõtmiste puhul. Arvutame ristküliku pindala S ja määrame tulemuse võimaliku vea ε.

On selge, et

$$(a-\gamma)(b-\gamma) < S < (a+\gamma)(b+\gamma)$$

ehk, pärast lihtsaid tehteid,

$$-(a+b)\gamma+\gamma^2<S-ab<(a+b)\gamma+\gamma^2.$$

Korrutis ab annab arvutatud S väärtuse; selle väärtuse vea ülemmäär on antud avaldisega

$$\varepsilon=(a+b)\gamma+\gamma^2,$$

mis koosneb kahest osast:

$$\varepsilon_1=(a+b)\gamma \quad \text{ja} \quad \varepsilon_2=\gamma^2.$$

Esimene neist on γ suhtes esimest järku, teine teist järku väike. Teine osa moodustab esimesest ainult

$$\frac{100\gamma}{a+b}\,\%,$$

mis väikese γ puhul võib osutuda nii väikeseks, et pole mõtet teda üldse arvestada. See õigustab ε asendamist tema p e a o s a g a $(a+b)\gamma$. Nüüd kirjutame, et

$$S=ab(\pm\varepsilon), \text{ kus } \varepsilon\approx(a+b)\gamma.$$

Märgime, et antud juhul on arvu ε ligikaudne väärtus γ suhtes l i n e a a r n e ja avaldis $(a+b)\gamma$ on vea ε l i n e a a r n e l ä h e n d.

Võtame a, b ja γ jaoks ümmargused arvud, näiteks

$$a=60 \text{ mm}, \quad b=40 \text{ mm}, \quad \gamma=0{,}1 \text{ mm}.$$

Siis $S=2400 \text{ mm}^2$, $\varepsilon\approx\varepsilon_1=(60+40)\cdot 0{,}1=10 \text{ mm}^2$,

$$\varepsilon_2=0{,}01 \text{ mm}^2, \quad \frac{100\gamma}{a+b}\,\%=0{,}1\% \text{ ehk } 1\,‰.$$

N ä i d e 2. Ristkülikukujulise kristallplaadi pikkus on a mm ja laius b mm. Olgu joonpaisumistegur plaadi pikkuse sihis α, laiuse sihis β. Neist andmeist saame arvutada p i n d p a i s u m i s t e g u r i σ. Teeme seda järgmiselt. Temperatuuri tõusmisel 1° võrra asendub pikkus a pikkusega $a(1+\alpha)$, laius b laiusega $b(1+\beta)$ ja pindala ab pindalaga $a(1+\alpha)b(1+\beta)$ ehk $ab(1+\alpha)(1+\beta)$ ehk $ab(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)$. Seega temperatuuri tõusmisel 1° võrra suureneb kristallplaadi pindala $ab(\alpha+\beta+\alpha\beta)$ võrra ja pindalaühik

$$\alpha+\beta+\alpha\beta$$

võrra. Kui α ja β on suurusjärgult võrdsed, siis liige $\alpha\beta$ on α või β suhtes t e i s t järku väike. See liige moodustab summast $\alpha+\beta$ ainult $\frac{100\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ %, mistõttu teda pole mõtet arvestada, ja

$$\sigma\approx\alpha+\beta.$$

Võtame α ja β jaoks ümmargused arvud, näiteks $\alpha = 0{,}002$ ja $\beta = 0{,}003$. Siis $\alpha\beta = 0{,}000006$, mis moodustab summast $\alpha + \beta$ kõigest ümmarguselt $\frac{1}{1000}$.

Märgime, et avaldis $\sigma \approx \alpha + \beta$ on saadud avaldisest $\alpha + \beta + \alpha\beta$ viimase liikme $\alpha\beta$ kui teist järku väikese suuruse ärajätmise teel ehk, teiste sõnadega, avaldisest $\alpha + \beta + \alpha\beta$ lineaarosa $\alpha + \beta$ eraldamise teel.

Valem $\sigma \approx \alpha + \beta$ ütleb sõnastatult, et

pindpaisumistegur on võrdne pikkusele ja laiusele vastavate joonpaisumistegurite summaga.

Kui pikkuse ja laiuse sihilised joonpaisumistegurid α ja β on võrdsed, siis

pindpaisumistegur on kaks korda suurem joonpaisumistegurist.

Samal viisil saame näidata, et ruumpaisumistegur

$$\varrho \approx \alpha + \beta + \gamma,$$

kus α, β ja γ on risttahuka joonpaisumistegurid pikkuse, laiuse ja kõrguse sihis. Kui need kolm paisumistegurit on võrdsed, siis

ruumpaisumistegur on kolm korda suurem joonpaisumistegurist.

Näide 3. Ehitusmaterjali proovikuubik serva pikkusega a mm surutakse survemasinas ühtlaselt kokku, kusjuures ta serv lüheneb α mm võrra, mis on serva pikkusega võrreldes väike suurus. Servade kogupikkus $12a$ väheneb sel puhul pikkuseni $12(a - \alpha)$, nii et servade kogupikkuse vähenemine

$$\lambda = 12\alpha.$$

Näeme, et λ avaldub α kaudu lineaarselt. Serva pikkuse a vähenemisel α võrra väheneb kuubi tahkude kogupindala $6a^2 - 6(a - \alpha)^2$ võrra ehk suuruse

$$\sigma = 12a\alpha - 6\alpha^2$$

võrra. Liige $6\alpha^2$ moodustab liikmest $12a\alpha$ kõigest $\frac{100\alpha}{2a}\%$, mis α kohta tehtud eeldusel on väike. Järelikult

$$\sigma \approx 12a\alpha.$$

Liige $12a\alpha$ moodustab avaldise $12a\alpha - 6\alpha^2$ peaosa. Märgime, et $12a\alpha$ on avaldise $12a\alpha - 6\alpha^2$ lineaarne liige.

Kuubi serva a lühenemisel α võrra väheneb kuubi ruumala vahe $a^3 - (a - \alpha)^3$ võrra. Lihtne arvutus näitab, et see vahe

$$\tau = 3a^2\alpha - 3a\alpha^2 + \alpha^3.$$

Selles avaldises moodustab teine liige $\frac{\alpha}{a}100\%$ ja kolmas liige

$\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2 100\%$ esimesest. Kui α on arvuga a võrreldes väike, siis liikmed $3a\alpha^2$ ja α^3 mingit olulist lisandit liikmele $3a^2\alpha$ ei anna ja seepärast

$$\tau \approx 3a^2\alpha.$$

See valem on saadud α suhtes teist ja kolmandat järku väikeste liikmete ärajätmisel ehk, teiste sõnadega, lineaarse liikme eraldamisel: see lineaarne liige $3a^2\alpha$ moodustab avaldise $3a^2\alpha - 3a\alpha^2 + \alpha^3$ peaosa.

Võtame $a = 100$ mm ja $\alpha = 0{,}1$ mm. Siis τ täpne avaldis on $\tau = 3 \cdot 100^2 \cdot 0{,}1 - 3 \cdot 100 \cdot (0{,}1)^2 + (0{,}1)^3 = 3000 - 3 + 0{,}001$. Liikmetel 3 ja 0,001 ei ole liikmega 3000 võrreldes arvestamisväärset kaalu, mistõttu me jätamegi nad ära.

§ 99. FUNKTSIOONIDE SUURUS- JA VÄIKSUSJÄRK

Tõkestamatult kasvava funktsiooni suurusjärkude skaala

Nii matemaatikas kui ka ta rakendustes esineb sageli juhte, kus mõne probleemi lahendamisel tuleb korraga tegelda mitme tõkestamatult kasvava funktsiooniga. Võrdlemist võimaldava pildi saamiseks nende asümptootilisest käitumisest on osutunud otstarbekohaseks iseloomustada iga funktsiooni teatava näitajaga — funktsiooni suurusjärguga. Tavalisim funktsioonide suurusjärkude skaala moodustatakse argumendi positiivsetest astmetest

$$x^1, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots$$

Oluliseks erinevuseks eespool kasutatud skaalade ja praegu vaadeldava skaala vahel on see, et seal moodustati skaala konstantse arvu 10 alusel, siin aga on aluseks tõkestamatult kasvav arv x.

Et eelmises paragrahvis kasutasime arvu a suurusjärgu määramisel suhet $a : 10^n$, siis näib olevat loomulik käesoleval juhul kasutada suhet $f(x) : x^n$. See suhe aga muutub argumendi x muutumisel (ainsaks erandiks on $ax^n : x^n$). Analoogia säilitamiseks peaksime astendaja n saama konstantsena. Et saada näitaja n väärtust sõltumatuna argumendi juhuslikust väärtusest, selleks rajame n määramise mitte suhtele $f(x) : x^n$, vaid selle suhte piirväärtusele

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^n}.$$

Kui see piirväärtus on kindel nullist erinev arv, siis ütleme, et funktsiooni $f(x)$ suurusjärk on antud argumendi n-nda astmega.

Polünoomi suurusjärk

Eespool nägime, et argumendi tõkestamatul kasvamisel kasvab iga polünoomi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

absoluutväärtus tõkestamatult; sümbolites: kui $x \to \infty$, siis ka $|p(x)| \to \infty$. Määrame selle polünoomi suurusjärgu.

Et

$$\frac{p(x)}{x^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right),$$

siis

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{x^n} = a_n.$$

See tähendab aga, et polünoomi $p(x)$ suurusjärk on antud funktsiooniga x^n.

Viimati kirjutatud võrdust saab esitada ka kujul

$$\lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{a_n x^n} = 1.$$

See ütleb, et funktsioonid $p(x)$ ja $a_n x^n$ on asümptootiliselt võrdsed ehk

polünoomi asümptootilise käitumise määrab ta kõrgeima astmega liige.

Murdratsionaalse funktsiooni suurusjärk

Vaatleme mõnda murdratsionaalset funktsiooni, mille avaldises lugeja on kõrgema astme polünoom kui nimetaja, näiteks

$$f(x) = \frac{x^5 + x^3 + x}{x^2 + 1}.$$

Eraldades selle murru täisosa, saame $f(x)$ avaldise kirjutada kujul

$$f(x) = x^3 + \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Nagu selgesti näha, on

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0.$$

Tulemust üldistades näeme, et murdratsionaalse funktsiooni asümptootilise käitumise määrab funktsiooni avaldise täisosa

ehk, teiste sõnadega, murdratsionaalse funktsiooni suurusjärk argumendi tõkestamatul kasvamisel on antud selle funktsiooni täisosaga.

Tõkestamatult kahaneva funktsiooni väiksusjärkude skaala

Sageli tuleb ühe ja sama probleemi raames vaadelda mitut tõkestamatult kahanevat funktsiooni. On osutunud otstarbekaks omistada igale niisugusele funktsioonile teda iseloomustav väiksusjärk. Et saada väiksusjärkude skaalat, tuleb mingi üks neist funktsioonidest võtta nii-öelda «mõõtühikuks». Olgu selleks võetud tõkestamatult kahanev argument x. Moodustame selle argumendi positiivsete astmete jada

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

See annab meile väiksusjärkude skaala alusel x. Oluliseks erinevuseks arvuliste väärtuste suurusjärkude skaalaga võrreldes on siin see, et endine skaala oli rajatud konstantsele alusele, praegu moodustatud skaala alus x aga on muutuv, tõkestamatult nullile lähenev suurus.

Olgu nüüd $f(x)$ mingi x-st sõltuv lõpmatult kahanev funktsioon. Võrdleme teda funktsiooniga x^n. Moodustades suhte $f(x) : x^n$, näeme, et see on üldiselt muutuv. Kindla võrdlustulemuse saamiseks läheme üle piirile, lähendades x tõkestamatult nullile.

Kui

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n}$$

on kindel nullist erinev arv, siis ütleme, et $f(x)$ on sama väiksusjärku mis x^n ehk $f(x)$ on argumendiga võrreldes n-ndat järku väike.

Järgunäitaja n, mille puhul nimetatud piirväärtus on kindel nullist erinev arv, leitakse üksikuid n väärtusi proovides.

Näide. Määrame vahe $v(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ väiksusjärgu argumendi x suhtes.

1° Proovime astendajat $n = 1$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{v(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{1 + x^2} + 1)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Seega $n = 1$ ei lahenda küsimust.

2° Proovime astendajat $n = 2$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{v(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} =$$

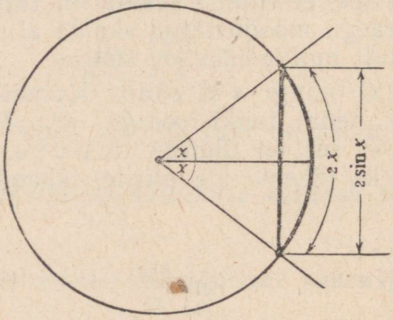
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} = \frac{1}{2}.$$

Et tulemuseks on konstantne, nullist erinev arv, siis funktsioon $v(x)$ on argumendi x suhtes t e i s t järku väike.

Trigonomeetriliste suuruste väiksusjärgu määramise näiteid

Näidete käsitlemisele asudes märgime, et geomeetrilistel kaalutlustel on mõnikord otstarbekohane rajada väiksusjärkude skaala mitte alusele x, vaid näiteks alusele $2x$. Et

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 2^n \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{(2x)^n},$$



Joon. 301.

siis mõlemad piirväärtused on ühtaegu kas kindlad, nullist erinevad arvud või nad pole seda. Esimesel juhul annab nii üks kui teine piirväärtus otsitava n jaoks ühe ja sama väärtuse. Seejuures pole vahet, kas kirjutada $x \to 0$ või $2x \to 0$.

N ä i d e 1. Määrame $2 \sin x$ väiksusjärgu nurga $2x$ suhtes. Võttes $n = 1$, saame

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Geomeetriliselt tähendab see, et ringjoone tõkestamatult kahanev kõõl on sama suurusjärku kui temale vastav väiksem kaargi (joon. 301).

N ä i d e 2. Määrame vahe $1 - \cos x$ väiksusjärgu nurga $2x$ suhtes. Võttes $n = 1$, saame

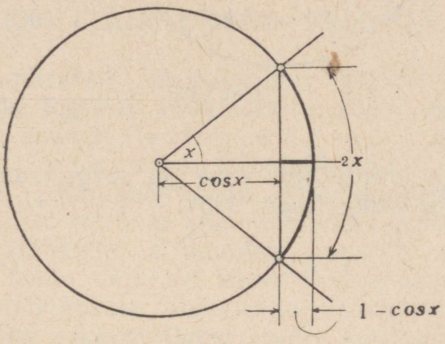
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}=1\cdot 0=0.$$

Seega astendaja $n=1$ ei lahenda küsimust.

Asendame $2x$ selle r u u d u g a. Siis

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{16\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{8}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{8}.$$

See tähendab, et ringjoone tõkestamatult kahaneva kaare «n o o l» on selle kaare suhtes t e i s t järku väike (joon. 302).



Joon. 302.

N ä i d e 3. Määrame vahe $\tan x-\sin x$ väiksusjärgu nurga x suhtes. Võttes $n=1$, saame

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{\cos x}=1\cdot\frac{0}{1}=0.$$

Astendaja $n=1$ niisiis ei lahenda küsimust. Proovime astendajat $n=2$. Paigutades x asemele x^2, saame

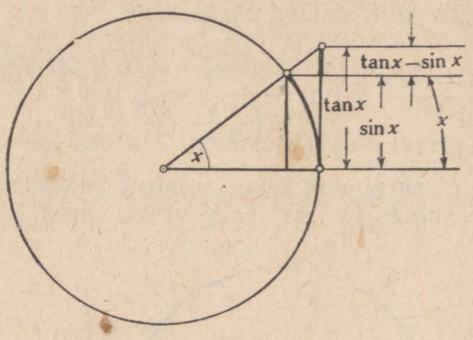
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x\cos x}=$$

$$=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x}=1\cdot\frac{0}{1}=0.$$

Seega ka astendaja 2 ei lahenda küsimust. Proovime astendajat $n=3$. Sel puhul

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$



Joon. 303.

Tangenslõigu ja siinuslõigu vahe on seega kaare suhtes kolmandat järku väike (joon. 303).

PEATÜKK XXIX

FUNKTSIOONIDE LOKAALNE LÄHENDAMINE LINEAARSETE AVALDISTEGA JA RUUTAVALDISTEGA

§ 100. LIGIKAUDSED VALEMID

Meie meelte piiratud lahutusvõime, mõõduriistade puudulikkuse ja juhuslike tegurite mõju tõttu ei kujuta mõõtmistulemused mõõdetavaid suurusi täpselt; *nad kujutavad neid alati ainult ligikaudu*. Tööpinkide ja teiste seadeldiste möödapääsmatute pisipuuduste ja tootmisprotsessi häirivate juhuslike pisipõhjuste tõttu ei anna tööstused oma produktsiooni kunagi täpselt mõõtudele ja muudele nõuetele vastavalt, vaid ikka ühtede või teiste väikeste kõrvalekaldumistega normidest. Tööpinkide töötlemistäpsuse tõstmisega, tehnoloogilise protsessi parandamisega ning selle protsessi pideva kontrollimisega saame toodete kõrvalekaldumisi normidest küll järjest vähendada, mitte aga päris olematuks teha. Neil asjaoludel oleks mõttetu projekteerimisel vajalikke suurusi *täpselt* arvutada. Peaaegu kunagi ei vaja me oma töös mõne avaldise *täpset väärtust* — piisab selle avaldise *ligikaudse väärtuse* tundmisest. See asjaolu võimaldab arvutamist tunduvalt hõlbustada. Selleks asendame täpse avaldise lihtsama *ligikaudse* avaldisega, mille väärtuse siis arvutame.

Funktsiooni ligikaudne avaldis. Funktsiooni lineaarne lähend. Funktsiooni ruutlähend

Näide 1. Olgu tarvis leida polünoomi

$$p(x) = 25 + 4x + 8x^2 - 12x^3$$

numbriline väärtus, mis vastab argumendi väärtusele $x = 0{,}003$. Sel juhul

polünoomi esimene liige on 25
„ teine „ „ $4 \cdot 0{,}003 = 0{,}012$,
„ kolmas „ „ $8 \cdot 0{,}003^2 = 0{,}000072$,
„ neljas „ „ $-12 \cdot 0{,}003^3 = -0{,}000000324$.

Nagu näeme, on uuritava polünoomi esimene, teine, kolmas ja neljas liige vastavalt suurusjärguga 10^1, 10^{-2}, 10^{-5} ja 10^{-7}, seega väga erinevatesse suurusklassidesse kuuluvad arvud.

Polünoomi väärtuseks saame seega 11-kohalise arvu 25,012071676. Et praktiliselt pole arvutuse tulemust kunagi vaja teada nii paljude kohtadega ja et niisuguse arvuga on vajaduse korral tülikas teostada järgmisi tehteid, siis tuleb seda arvu sobivalt ümardada. Ümardades seda näiteks viiekohaliseks arvuks, saame 25,012. Sama väärtuse oleksime aga saanud juba siis, kui oleksime arvestanud ainult polünoomi esimest ja teist liiget. Seega osutus kolmanda ja neljanda liikme arvutamine asjatuks. Aja ja vaeva säästmiseks oleksime võinud arvutamisel lähtuda kahe viimase liikme võrra kärbitud polünoomist $25 + 4x$. Seega, kui $x = 0{,}003$ ja antud polünoomi väärtust ei nõuta rohkem kui viie kohaga, võime kirjutada, et

$$p(x) = 25 + 4x + 8x^2 - 12x^3 \approx 25 + 4x.$$

Viimane lineaarne binoom on antud polünoomi ligikaudseks avaldiseks.

Ta on selle polünoomi lähendiks, ja nimelt lineaarseks lähendiks, mis teatavas argumendi vahemikus kujutab polünoomi ligikaudu, võimaldades polünoomi väärtusi arvutada soovitud täpsusega.

Eespool kasutatud ligikaudne avaldis ei võimalda antud polünoomi numbriliste väärtuste arvutamist x igasuguste väärtuste puhul, vaid ainult niisuguste väärtuste puhul, mis on tunduvalt väiksemad kui 1, sest ainult niisuguste x väärtuste puhul on liikmed x^2-ga ja x^3-ga nii väikesed, et neid võib jätta arvestamata. Kui näiteks $x = 0{,}02$, siis on $x^2 = 0{,}0004$ ja $x^3 = 0{,}000008$. Arvutamisel sajandikeni ei mõjuta tulemust liikme $12x^3$ ega ka liikme $8x^2$ väärtus.

Näide 2. Olgu tarvis leida murdratsionaalse funktsiooni

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{2x - 2}$$

numbriline väärtus, mis vastab argumendi väärtusele $x = 123{,}4$ ja mille viga ei ületa 0,01.

Funktsiooni otsene arvutamine nõuaks mitut tülikat operatsiooni, nagu arvu 123,4 kuupi tõstmist ja lugeja jagamist arvuga 244,8. Palju kiiremini jõuame eesmärgile, kui eraldame $f(x)$ murdavaldisest täisosa:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x-1}.$$

Argumendi väärtusel $x = 123{,}4$ on $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{122{,}4} < 0{,}01$. Seega võib $f(x)$ ligikaudseks avaldiseks võtta ruutfunktsiooni $\frac{1}{2}x^2$. Leides arvu 123,4 ruudu, näeme kohe, et x väärtusel 123,4

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 15227{,}56 = 7613{,}78.$$

$\frac{1}{2}x^2$ on funktsiooni $f(x)$ ligikaudne avaldis. Ta on funktsiooni ruutlähend. Tema abil saab kergesti arvutada funktsiooni väärtuse veaga alla 0,01 kõigi x-de puhul, mis on suuremad arvust 101.

Üldiselt:

funktsiooni $f(x)$ ligikaudseks avaldiseks nimetame iga lihtsama ehitusega funktsiooni $\varphi(x)$, mis võimaldab teatavas argumendi vahemikus vajaliku täpsusega arvutada funktsiooni $f(x)$ väärtusi.

Nii geomeetrilise kujutuse kui ka arvutustehnilise käsitluse poolest lihtsaimaks muutuja x funktsiooniks on lineaarne funktsioon $ax + b$. Seepärast püüame kõikjal, kus see võimalik, funktsioone ikka lähendada lineaarsete avaldistega. Nii toimisime ka eespool, võttes $p(x) = 25 + 4x$.

Funktsiooni lineaarseks lähendiks on argumendi lineaarne avaldis, mis võimaldab teatavas argumendi vahemikus vajaliku täpsusega arvutada antud funktsiooni väärtusi.

See definitsioon kandub üle ka kahe ja rohkema muutuja funktsioonidele.

Mõnede sageli esinevate avaldiste lineaarsed lähendid

Tuletame nüüd mõned sageli kasutamist leidvad ligikaudsed valemid. Otstarbekalt valitud teisendustega saab käsitletavatele juhtudele taandada ka mitmeid teisi.

Ühtluse mõttes tähistame selles artiklis arvust 1 tunduvalt väiksemaid positiivseid arve, see on väikesi positiivseid murde, kreeka tähtedega α, β, γ jne.

Kahe arvu a ja b summat, milles teine liidetav on tunduvalt väiksem esimesest, kirjutame kujul

$$a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right),$$

kus siis murd $\frac{b}{a}$ on tunduvalt väiksem arvust 1.

Korrutis $(1+\alpha)(1+\beta)$

Vaadeldav avaldis on kahe muutuja α ja β funktsioon. Kaksliikmete korrutise valemi järgi on

$$(1+\alpha)(1+\beta)=1+\alpha+\beta+\alpha\beta.$$

Et eelduse kohaselt α ja β on tunduvalt väiksemad kui 1, siis on korrutis $\alpha\beta$ tunduvalt väiksem kui viimase avaldise liidetavad α ja β. Seetõttu jätame selles avaldises liikme $\alpha\beta$ arvestamata. Nii saame ligikaudse valemi

$$(1+\alpha)(1+\beta)\approx 1+\alpha+\beta.$$

Võrduse paremal poolel seisab α ja β suhtes lineaarne avaldis.

Näide 1. Praegu tuletatud valemi järgi on

$$1{,}02\cdot 1{,}03=(1+0{,}02)(1+0{,}03)\approx 1+0{,}02+0{,}03=1{,}05.$$

Tulemuses on kõik kolm kohta õiged, sest ärajääv liidetav $0{,}02\cdot 0{,}03$ ehk 0,0006 on väiksem kui pool tulemuse viimase koha ühikut.

Näide 2. $0{,}98\cdot 1{,}015=(1-0{,}02)(1+0{,}015)\approx$
$\approx 1-0{,}02+0{,}015=0{,}995.$

Tulemuses on kõik kolm kohta õiged, sest ärajääv liidetav $-0{,}02\cdot 0{,}015$ ehk $-0{,}00030$ on väiksem kui 0,0005.

Näide 3. $2{,}08\cdot 3{,}96=(2+0{,}08)\cdot(4-0{,}04)=$
$=2(1+0{,}04)\cdot 4(1-0{,}01)=8(1+0{,}04)(1-0{,}01)\approx$
$\approx 8(1+0{,}04-0{,}01)=8\cdot 1{,}03=8{,}24.$

On kerge veenduda, et tulemuses on kõik kohad õiged.

Murd $1:(1+\alpha)$

Teame, et

$$(1+\alpha)(1-\alpha)=1-\alpha^2.$$

Väikeste α-de puhul, kus α^2 enam ei tule arvestamisele, on

$$(1+\alpha)(1-\alpha)\approx 1,$$

seega

$$\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha$$

ja

$$\frac{1}{1-\alpha}\approx 1+\alpha.$$

Võrduste paremat pooltel seisavad α suhtes lineaarsed avaldised.

Näide.

$$\frac{1}{1{,}003}=\frac{1}{1+0{,}003}\approx 1-0{,}003=0{,}997.$$

Murd $(1+\alpha):(1+\beta)$

Vaadeldav avaldis on kahe muutuja α ja β funktsioon. Jagamine annab avaldise $1+\alpha-\beta-\alpha\beta+\beta^2-\ldots$ Piirdudes lineaarsete liikmetega, saame

$$\frac{1+\alpha}{1+\beta}\approx 1+\alpha-\beta.$$

Näide.

$$\frac{0{,}998}{1{,}025}=\frac{1-0{,}002}{1+0{,}025}\approx 1-0{,}002-0{,}025=1-0{,}027=0{,}973.$$

Avaldis $(1+\alpha)^2$

Kaksliikme ruudu valemi järgi on

$$(1+\alpha)^2=1+2\alpha+\alpha^2.$$

Jättes valemi paremas pooles arvestamata liikme α^2, saame ligikaudse valemi

$$(1+\alpha)^2\approx 1+2\alpha.$$

Uurime selle valemi puhul lähemalt, kui suur tohib olla α, et valem annaks tulemuse näiteks kolme õige kohaga. Valemi vasaku ja parema poole vahe on α^2. Et tulemuse viga ei tohi ületada arvu 0,005, siis peab olema

$$\alpha^2\leqslant 0{,}005$$

ehk

$$|\alpha|\leqslant\sqrt{0{,}005}$$

ehk

$$|\alpha|\leqslant 0{,}071.$$

Seega, kui tulemus peab olema kolme õige kohaga, siis võib valemit $(1+\alpha)^2\approx 1+2\alpha$ rakendada juhul, kui $|\alpha|\leqslant 0{,}07$.

Vajaduse korral võime samal viisil leida, missugustel tingimustel on lubatav rakendada teisi ligikaudseid valemeid.

Avaldis $(1+\alpha)^3$

Kaksliikme kuubi valemi järgi on

$$(1+\alpha)^3=1+3\alpha+3\alpha^2+\alpha^3.$$

Jättes selle valemi paremas pooles arvestamata liikmed, milles esinevad α^2 ja α^3, saame ligikaudse valemi

$$(1+\alpha)^3\approx 1+3\alpha.$$

Avaldise $1+\alpha$ ruut- ja kuupjuur

Eespool tõestatu põhjal kirjutame, et

$$1+2\gamma\approx(1+\gamma)^2.$$

Võttes võrdúse mõlemast poolest ruutjuure, saame

$$\sqrt{1+2\gamma} \approx 1+\gamma,$$

millest 2γ asendamisel α-ga saame ligikaudse valemi

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{2}.$$

Samal viisil tuletame valemi

$$\sqrt[3]{1+\alpha} \approx 1+\frac{\alpha}{3}.$$

Näide 1. $\sqrt{1{,}06} \approx 1+\frac{0{,}06}{2} = 1+0{,}03 = 1{,}03.$

Näide 2. $\sqrt[3]{0{,}982} = \sqrt[3]{1-0{,}018} \approx 1-\frac{0{,}018}{3} =$

$$= 1-0{,}006 = 0{,}994.$$

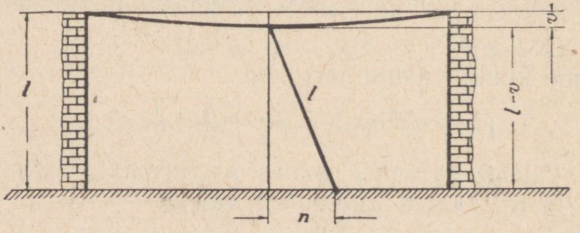
Näide 3. $\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{2}{27}\right)} =$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{27}} \approx 3\left(1+\frac{2}{3\cdot 27}\right) = 3+\frac{2}{27} \approx 3{,}07.$$

Enamik siin märgitud vahepealseid arvutussamme ei nõua kirjapanemist. Nad on siin täielikult ära toodud ainult näitlikkuse huvides.

Konkreetseid näiteid ligikaudsete valemite kasutamise kohta

Näide 1. Lae toe pikkus on l m. Juhusliku tõuke mõjul nihkub tema alumine ots n cm võrra püstsihist kõrvale (joon. 304).



Joon. 304.

Leiame, mitme mm võrra vajub seejuures lagi. Anname ligikaudse valemi vajumise arvutamiseks.

Nagu jooniselt näha, on lae vajumine sentimeetrites

$$v = 100l - \sqrt{(100l)^2 - n^2} =$$

$$= 100l - 100l\sqrt{1 - \left(\frac{n}{100l}\right)^2} = 100l\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{n}{100l}\right)^2}\right].$$

Et murd $n : 100l$ on väike arv, siis

$$v \approx 100l\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{100l}\right)^2\right]$$

ehk

$$v \approx \frac{1}{2}\frac{n^2}{100l}.$$

Kui näiteks $l = 3$, $n = 10$, saame sentimeetrites

$$v \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{10^2}{100 \cdot 3} = \frac{1}{6}.$$

See on vaevumärgatav suurus (umbes 1,7 mm).

N ä i d e 2. Jões laiusega l m voolab vesi kiirusega v m/sec. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega c m/sec. Leiame esiteks, kui palju aega kulub ujujal, et jõuda vastuvett l m kaugusele ja sealt tagasi lähtekohta, ja teiseks, kui palju aega kulub ujujal, et jõuda otsesihis üle jõe ja sealt jälle otsesihis tagasi lähtekohta. Arutleme järgmiselt.

1° Vastuvett ujumisel on ujuja kiirus kallaste suhtes $(c - v)$ m/sec, pärivett ujumisel aga $(c + v)$ m/sec. Järelikult «aeg sinna» on $\frac{l}{c - v}$ sec, «aeg tagasi» aga $\frac{l}{c + v}$ sec. Murdude liitmine ja tulemuse teisendamine annab otsitava aja kujul

$$\tau = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Murd $\frac{2l}{c}$ on aeg τ_0, mis kuluks ujujal distantsi $2l$ katmiseks seisvas vees. Seega

$$\tau = \tau_0 \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Olgu voolu kiirus v ujuja kiirusega c võrreldes väike. Murd $\beta = \frac{v}{c}$ on siis väike, seda enam on väike murd β^2 ja seepärast

$$\tau \approx \tau_0(1 + \beta^2).$$

Nagu näeme, p i k e n d a b voolu olemasolu ujumisaega suuruse $\tau_0\beta^2$ võrra.

2° Tähistame «aja sinna» tähega t, mõistes teda mõõdetuna sekundites. Et seisvas vees ujuks ujuja t sec jooksul ct m, jões aga kannab vool teda sama aja jooksul vt m võrra pärivett, siis tuleb ujujal otsesihis üle jõe jõudmiseks läbida kaugus s m, mis on hüpotenuusiks täisnurkses kolmnurgas kaatetitega l ja vt. Seepärast

$$s^2 = l^2 + v^2t^2.$$

Kaugus s tuleb ujujal läbida nii, nagu liiguks ta seisvas vees. Järelikult $s = ct$ ja

$$c^2t^2 = l^2 + v^2t^2$$

ehk

$$(c^2 - v^2)t^2 = l^2.$$

Määrates siit aja t, saame

$$t = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

«Aeg sinna ja tagasi» $T = 2t$, seega

$$T = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

ehk, tehtud eeldusel murru β väiksuse kohta,

$$T \approx \tau_0(1 + \tfrac{1}{2}\beta^2).$$

Nagu näeme,

$$T - \tau \approx -\tfrac{1}{2}\tau_0\beta^2.$$

See tähendab, et aegade vahe $T - \tau$ on β suhtes teist järku väike: voolu olemasolu veekogus ilmneb ujumisaegades nii piki voolu kui risti voolu liikumisel teist järku väikese efektina.

Käsitletud küsimusel on põhimõtteline tähtsus: kogu XIX sajandil valitses füüsikas arvamus, et maailmaruum on täidetud eetriga. Astronoomilised vaatlused näitasid, et mateeria liigub selles eetris ilma mingi pidurduseta ehk, teiste sõnadega, eeter läbib mateeriat takistuseta. Kui maailmaruum on täidetud eetriga, siis peab maailmaruumis liikuvale maakerale vastu puhuma eetrituul. Olgu maakera liikumise kiirus eetri suhtes v. Siis on ka eetrituule kiirus v. Levigu valgus eetris kiirusega c. Kui saadame valgussignaali maakera liikumise sihis kaugusele l ja peegeldame ta sealt tagasi, peab valguse levimisaeg sinna ja tagasi ületama levimisaja eetrituuleta juhul suuruse $\tau_0\beta^2$ võrra. Kui aga saadame valgussignaali maakera liikumise sihiga risti olevas sihis kaugusele l ja peegeldame ta sealt tagasi, peab valguse levimisaeg sinna ja tagasi ületama

levimisaja eetrituuleta juhul $\frac{1}{2}\tau_0\beta^2$ võrra. Mõõtes nende kahe aja diferentsi ja teades c väärtust, saaksime arvutada eetrituule kiiruse v. Seega aga oleks teada maakera kiirus eetri suhtes ehk maakera absoluutne kiirus maailmaruumis. Mitmete vaatlejate poolt erinevatel aegadel ülitäpsete mõõtmisviisidega saadud tulemused on näidanud, et oodatud levimisaja vahet pole olemas. Seega pole olemas eetrituult ja pole olemas eetrit ennast. Eetri olemasolu hüpoteesi ümberlükkamine eespool nimetatud katsetega oli üheks tähtsamaks pöördepunktiks füüsika arenemises. Siit peale algas relativistliku füüsika võidukäik.

§ 101. FUNKTSIOONI LINEAARSE JA RUUTTRINOOMILISE LÄHENDI ÜLDAVALDIS

Kõigil eespool käsitletud juhtudel (peale ühe) kasutasime funktsiooni väärtuse arvutamisel funktsiooni lineaarset lähendit. See lähend on arvutustehniliselt eriti väärtuslik, sest ta võimaldab enamikku arvutustööd sooritada peast.

Eespool toodud funktsioonide lineaarsete lähendite leidmisel käisime iga kord ise teed. Seejuures olid kõik lähendatavad funktsioonid kas lihtsa ehitusega ratsionaalsed funktsioonid või lihtsa juurealusega ruut- või kuupjuured. Tekib küsimus, kas ei saa anda üldist võtet, mis ühtse skeemi järgi võimaldab leida funktsiooni lineaarset lähendit igal juhul, ka siis, kui lähendatav funktsioon, nagu näiteks $\sin x$, $\arctan x$, $\log x$ jne., ei avaldu üldse ratsionaalsete murdudena ega juuravaldistena. Asume selle küsimuse lahendamisele.

Funktsiooni lineaarse lähendi üldavaldis

Kujutagu kõver joonisel 305 funktsiooni $f(x)$ käiku, olgu $x = a$ punkti P abstsiss ja sirge PT selles punktis kõverale tõmmatud puutuja. Tõsiasi, et puutuja lõik puutepunkti vahetus läheduses hästi lähendab kõvera kaart, viib mõttele kasutada funktsiooni $f(x)$ lähendajana puutuja ordinaati. Puutujal, mis läbib punkti $P[a, f(a)]$ ja omab tõusu $f'(a)$, on võrrand $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$ ehk, teisiti kirjutatult,

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Paremal pool võrdusmärki seisab argumendi x suhtes line-

a a r n e a v a l d i s. Võttes selle avaldise funktsiooni $f(x)$ lähendiks:

$$f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a),$$

saame temast argumendi lähteväärtusel $x = a$ nii funktsiooni enese kui ka tema tuletise õ i g e v ä ä r t u s e.

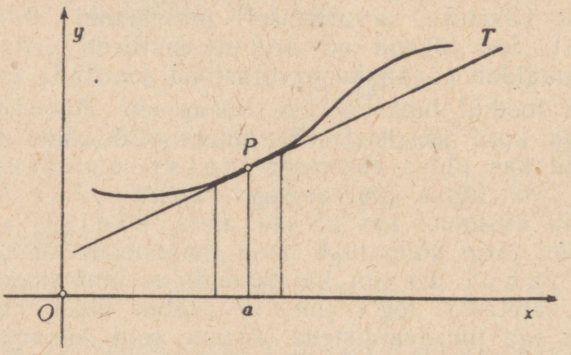
Näitame, et funktsioonil on ainult üks lineaarne lähend, mis argumendi väärtusel $x = a$ annab nii funktsiooni enese kui ka tema tuletise õige väärtuse. Tõepoolest, iga lineaarfunktsioon avaldub kujul

$$y = \alpha x + \beta.$$

Selle funktsiooni tuletis on α. Nõude kohaselt peab olema

$$\alpha a + \beta = f(a) \text{ ja } \alpha = f'(a).$$

Määrates siit β ja asendades y avaldises α ja β nende väärtustega, saame $y = f(a) + (x-a)f'(a)$. See on aga funktsiooni $f(x)$ eespool saadud lineaarne lähend.



Joon. 305.

Jooniselt 305 nähtub, et lineaarse lähendiga saame funktsiooni aproksimeerida* ainult argumendi ü h e v ä ä r t u s e v a h e t u s l ä h e d u s e s ehk, teisiti,

lineaarse lähendiga $f(a) + (x-a)f'(a)$ saab funktsiooni $f(x)$ aproksimeerida ainult lokaalselt argumendi väärtuse $x = a$ naabruses.

Nagu funktsiooni lineaarse lähendi avaldisest näha, saame viimast kasutada ainult nende punktide $x = a$ ümbruses, kus nii funktsioon $f(x)$ ise kui ka tema tuletis $f'(x)$ jäävad l õ p l i k u k s.

Põhiline küsimus, kui suure vea teeme, asendades funktsiooni $f(x)$ tema lineaarse lähendiga $f(a) + (x-a)f'(a)$, jääb praegu lahtiseks. Vastuse sellele saame järgmises peatükis.

* Lad. k. *proximus* — lähim.

Funktsiooni lineaarse lähendamise näiteid

Valem

$$f(x) \approx f(a) + (x - a)f'(a)$$

annab ühtse meetodi funktsioonide lineaarsete lähendite saamiseks.

Näide 1. Olgu $f(x) = x^2$, $a = 1$. Siis $f'(x) = 2x$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$ ja $x^2 \approx 1 + (x - 1) \cdot 2$.

Kirjutades $x - 1$ asemele a ja x asemele $1 + a$, saame nagu varemgi, et

$$(1 + a)^2 \approx 1 + 2a.$$

Samal viisil saaksime ligikaudsed valemid $(1 + a)^3$, $1 : (1 + a)$ ja $\sqrt{1 + a}$ jaoks.

Näide 2. Olgu $f(x) = \sin x$, $a = 0$. Siis $f'(x) = \cos x$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ ja $\sin x \approx 0 + (x - 0) \cdot 1$, ehk $\sin x \approx x$, nagu see väikeste x-de puhul tõepoolest on.

Näide 3. Olgu $f(x) = \log x$. Siis $f'(x) = M : x$. Siin ei saa argumendi lähteväärtuseks võtta $a = 0$, sest $f(0)$ ja $f'(0)$ ei ole määratud. Võttes näiteks $a = 1$, saame, et $f(1) = 0$ ja $f'(1) = M$, seega $\log x \approx 0 + (x - 1) \cdot M$. Kirjutades x asemele $1 + a$, saame

$$\log (1 + a) \approx Ma.$$

Funktsiooni lähendamine ruuttrinoomiga

Eespool nägime, et funktsiooni $f(x)$, mis koos oma tuletisega punktis $x = a$ on lõplik, on võimalik lokaalselt lähendada lineaarse avaldisega kujul

$$f(x) \approx f(a) + (x - a)f'(a).$$

Geomeetriliselt tähendab see funktsiooni käigujoone kaare asendamist sirgega — käigujoone puutujaga. Funktsiooni $f(x)$ käigujoonel on kõverus üldiselt punktilt punktile muutuv ja üldiselt nullist erinev. Puutujal kui sirgel on kõverus konstantne: ta on kõikjal null. Kõvera lähendamine puutujaga on seetõttu võimalik ainult puutepunkti vahetus ümbruses. On tõenäoline, et kõverat saab hoopis paremini lähendada ruutparabooliga, sest selle kõverus on punktilt punktile muutuv: pealegi leidub paraboolil kaari suure kõverusega (parabooli haripunkti ümbruses) ja kaari väikese kõverusega (haripunktist kaugemal).

Ruutparabooli võrrandiks on

$$y \equiv y(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Kui sel joonel on $f(x)$ käigujoonega ühine punkt $x = a$, siis peab olema $y(a) = f(a)$. Kui neil kõverail on samas punktis ka ühine puutuja, siis peab olema $y'(a) = f'(a)$ ja kui neil kõverail samas punktis on ka veel ühine kõverus, siis peab olema $y''(a) = f''(a)$. Seega peavad ruuttrinoomi $y(x)$ kordajad α, β, ja γ rahuldama järgmist kolme nõuet:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha a^2 + \beta a + \gamma = f(a) \\ 2\alpha a + \beta \quad\quad = f'(a) \\ 2\alpha \quad\quad\quad = f''(a) \end{array}\right\}.$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi α, β ja γ suhtes ja asetades tulemused y avaldisse, saame funktsiooni $f(x)$ lähendi ruuttrinoomi kujul:

$$f(x) \approx f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a).$$

Ka see avaldis lähendab funktsiooni $f(x)$ ainult lokaalselt, kuid paremini kui lineaarne lähend.

Samal viisil edasi minnes võiksime funktsiooni $f(x)$ lähendada kolmanda, neljanda, ..., n-nda astme polünoomiga. Lähendpolünoomide käsitletud koostamisviisi oluliseks puuduseks on see, et ta ei anna mingit näpunäidet lähendi headuse hindamiseks, see on lähendamisvea hindamiseks. Seda eesmärki silmas pidades käsitleme kogu küsimustikku veel kord nn. keskväärtuse valemi taustal.

Näide. Olgu $f(x) = \cos x$, $a = 0$. Siis $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$. Edasi $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$. Seega koosinuse lineaarne lähend koordinaatide alguspunkti ümbruses on

$$\cos x \approx 1,$$

ruuttrinoomiline lähend aga on

$$\cos x \approx 1 + (x - 0) \cdot 0 + \frac{(x-0)^2}{2} \cdot (-1)$$

ehk

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}.$$

PEATÜKK XXX

KESKVÄÄRTUSE LAUSED

Tuntakse mitmeid keskväärtuse lauseid. Lihtsamal juhul seob keskväärtuse lause kaht argumendi väärtust ja neile vastavaid funktsiooni väärtusi tuletise väärtusega teataval vahepealsel argumendi väärtusel. Üldistatud keskväärtuse lause seob kahe funktsiooni väärtusi kahel argumendi väärtusel ja nende funktsioonide tuletisi teataval vahepealsel argumendi väärtusel. Asjaolu, et kõnesolevates lausetes on oluliseks elemendiks argumendi vahepealne väärtus, tingibki nende nimetamise keskväärtuse lauseteks.

Keskväärtuse laused kuuluvad kõrgema matemaatika tähtsaimate töövahendite hulka. Nende abil tõestatakse mitmed põhilised kõrgema matemaatika teoreemid. Märgime siin eriti seda, et keskväärtuse valemid on peamiseks vahendiks funktsioonide lähendite headuse hindamisel.

§ 102. LAGRANGE'I KESKVÄÄRTUSE LAUSE NÄITLIK KÄSITLUS

Lagrange'i keskväärtuse lause sõnastus

Keskväärtuse lause võib sõnastada järgmiselt:

kui funktsioon $f(x)$ *on lõigul* $a \leqslant x \leqslant b$ *pidev ja tal on vahemikus* $a < x < b$ *tuletis, siis leidub selles vahemikus ikka niisugune väärtus* $\xi (a < \xi < b)$, *et*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Lause nimetus viitab asjaolule, et argumendi väärtus ξ on mingi vahepealne väärtus a ja b vahel.

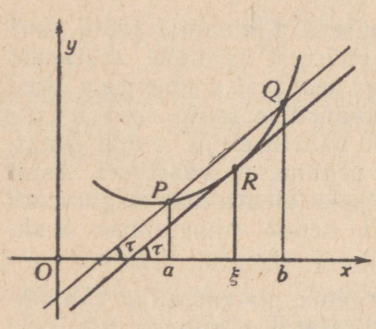
Viimati kirjutatud võrdust nimetame keskväärtuse valemiks.

Keskväärtuse lause geomeetriline käsitlus

Geomeetriliselt saame kõnesoleva lause kehtivuses veenduda vahetult joonise põhjal: tõepoolest, võttes funktsiooni graafikul (joon. 306) punktid $P(a, f(a))$ ja $Q(b, f(b))$, näeme, et vahe $b-a$ on abstsissi kasv, vahe $f(b)-f(a)$ on ordinaadi kasv ja nende suhe

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

on lõikaja PQ tõus.



Joon. 306.

Joonestame graafiku kaarele PQ puutuja, mis on rööbik lõikajaga PQ. Olgu selle puutuja puutepunkt R ja selle puutepunkti abstsiss ξ. Siis puutuja tõus on

$$f'(\xi).$$

Et puutuja on rööbik lõikajaga, siis on mõlemal sirgel võrdsed tõusunurgad ja seega ka võrdsed tõusud. Seega

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

kus, nagu nähtub jooniselt, $a<\xi<b$. Seda aga oligi tarvis tõestada.

Sel kujul antud keskväärtuse valem kannab Lagrange'i keskväärtuse valemi nimetust.

Arvu ξ määramine ruutsõltuvuse puhul

Olgu tegemist ruutsõltuvusega (kitsamas mõttes)

$$y=kx^2$$

ning olgu a ja b kaks argumendi väärtust. Leiame selle sõltuvuse jaoks keskväärtuse valemis esineva arvu ξ.

Antud argumendi väärtustele vastavad funktsiooni väärtused ka^2 ja kb^2. Seega funktsiooni kasv vahemikus a-st b-ni

$$kb^2-ka^2=k(b^2-a^2).$$

Järelikult funktsiooni ja argumendi kasvude suhe on

$$\frac{k(b^2-a^2)}{b-a}=k(b+a)=k(a+b).$$

Antud funktsiooni tuletise avaldis on $2kx$. Argumendi väärtusel ξ on see $2k\xi$. Niisiis:

$$2k\xi = k(a+b)$$

ehk

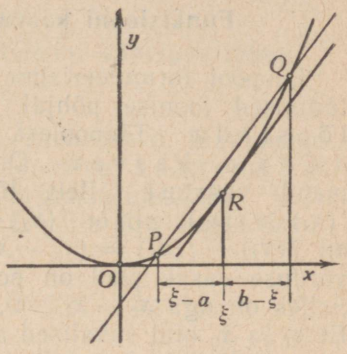
$$\xi = \frac{1}{2}(a+b);$$

see tähendab, et sõltuvuse $y = kx^2$ puhul on argumendi keskväärtus ξ võrdne antud argumendi väärtuste a ja b aritmeetilise keskmisega (joon. 307).

Et iga ruutsõltuvust $y = kx^2 + lx + m$ saab koordinaatteljestiku rööplükke teel teisendada kujule $Y = kX^2$, siis on tõestatud omadus kehtiv ka üldise ruutsõltuvuse korral. Niisiis:

ruutsõltuvuse korral poolitab keskväärtus argumendi vahemiku ehk, geomeetrilises keeles,

parabooli lõikajaga rööbiti tõmmatud puutuja korral on puutepunkti abstsiss lõikaja ja kõvera vihispunktide abstsisside aritmeetiline keskmine.



Joon. 307.

Märkus. Teiste sõltuvuste puhul on argumendi keskväärtuse määramine tunduvalt raskem. On juhtusid, kus arv ξ sõltub ainult vahest $b-a$; enamasti sõltub ta aga nii arvust a kui ka lõigu pikkusest $b-a$. Seepärast jäetakse tavaliselt ξ üldse määramata ja leitakse ainult tuletise $f'(\xi)$ alam- ja ülemtõke, millest sageli piisab vajalikeks hindamisteks.

Keskväärtuse valemi kirjutusviise

Vabastades keskväärtuse valemi nimetajast, saame

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi), \quad \text{kus} \quad a < \xi < b.$$

Sel kujul kirjutatuna annab keskväärtuse valem funktsiooni lõpliku juurdekasvu avaldise argumendi juurdekasvu kaudu. Seetõttu nimetatakse viimast valemit mõnikord ka lõplike juurdekasvude valemiks.

Avaldades $f(b)$, leiame, et

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(\xi), \quad \text{kus} \quad a < \xi < b.$$

Kirjutades b asemele x, näeme, et

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi), \quad \text{kus} \quad a < \xi < x.$$

Vaadeldes arvu a argumendi lähteväärtusena, saame funktsiooni $f(x)$ avaldatuna tema lähteväärtuse $f(a)$ ja argumendi juurdekasvu $x-a$ kaudu.

§ 103. LAGRANGE'I KESKVÄÄRTUSE LAUSE RAKENDUSI

Funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnused

Eespool formuleerisime funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnused joonise põhjal. Keskväärtuse lause võimaldab neid tõestada. Tõepoolest, olgu funktsioon $y = f(x)$ lõigul $a \leqslant x \leqslant b$ kasvav. Olgu x_1 ja x_2 mingisugused kaks argumendi väärtust sellelt lõigult ja $x_2 > x_1$. Eelduse kohaselt $f(x_2) > f(x_1)$, nii et $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Keskväärtuse lause järgi on $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$, kus $x_1 < \xi < x_2$. Et viimase võrduse vasak pool on positiivne, siis on seda ka parem pool. Selles on aga $x_2 - x_1 > 0$, nii et ka $f'(\xi)$ peab olema positiivne. Et x_1 ja x_2 olid suvalised argumendi väärtused lõigult $a \leqslant x \leqslant b$, siis on $f'(\xi) > 0$ iga ξ väärtuse puhul argumendi vaadeldaval lõigul. Ümberpöördult, olgu $f'(x) > 0$ iga x puhul lõigult $a \leqslant x \leqslant b$ ning olgu x_1 ja x_2 kaks suvalist argumendi väärtust, kusjuures $x_2 > x_1$. Siis $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(\xi)$, kus $x_1 < \xi < x_2$. Et $x_2 - x_1 > 0$ ja eelduse kohaselt ka $f'(\xi) > 0$, siis $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ehk $f(x_2) > f(x_1)$. See aga tähendabki, et funktsioon $f(x)$ on kasvav. Niisiis,

funktsiooni kasvamise tarvilikuks ja piisavaks tingimuseks on funktsiooni tuletise positiivsus.

Samal viisil saab käsitleda funktsiooni kahanemise tunnust.

Null-tuletisteoreem

Nagu eespool nägime, on iga konstandi tuletis null. Tõestame nüüd pöördlause:

kui funktsioonil $f(x)$ on lõigu $a \leqslant x \leqslant b$ igas punktis tuletis ja kui see tuletis on kõikjal null, siis on funktsioon konstantne.

Tõepoolest, eelduse kohaselt on funktsioonil $f(x)$ lõigu $a \leqslant x \leqslant b$ igas punktis tuletis. Seepärast

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(\xi), \quad \text{kus} \quad a < \xi < x.$$

Et tuletis on null lõigu $a \leqslant x \leqslant b$ igas punktis, siis on ta seda ka punktis ξ:

$$f'(\xi) = 0.$$

Seepärast igal x väärtusel $(x - a)f'(\xi) = 0$ ja järelikult

$$f(x) = f(a);$$

see aga tähendab, et funktsioon on konstantne.

Praegu tõestatud teoreem on põhilise tähtsusega lauseks integraalarvutuses.

Keskväärtuse lause rakendamine funktsiooni väärtuse tõkete leidmiseks

Keskväärtuse valem leiab laialdast rakendamist funktsiooni väärtuste hindamisel funktsiooni mõne teadaoleva lähteväärtuse järgi. Asja selgitamiseks toome järgmise ülesande.

Ülesanne. Olgu teada $\log a$. Hinnata selle järgi $\log(a + x)$.

Lahendus. Paigutades valemis

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi), \quad a < \xi < b,$$

b asemele $a + x$ ja viies $f(a)$ paremale poolele, saame

$$f(a + x) = f(a) + xf'(\xi), \quad a < \xi < a + x;$$

seega

$$\log(a + x) = \log a + x\frac{M}{\xi}.$$

Et iga positiivse x puhul

$$a < \xi < a + x,$$

siis

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{\xi} > \frac{1}{a + x}$$

ja

$$\frac{Mx}{a} > \frac{Mx}{\xi} > \frac{Mx}{a + x}.$$

Seepärast

$$\log a + \frac{Mx}{a} > \log a + \frac{Mx}{\xi} > \log a + \frac{Mx}{a + x}$$

ehk, teisiti,

$$\log a + \frac{Mx}{a + x} < \log(a + x) < \log a + \frac{Mx}{a}.$$

Tõkked, mille vahele on sulustatud $\log(a + x)$, erinevad teineteisest vahe

$$\frac{Mx}{a} - \frac{Mx}{a+x} = \frac{Mx^2}{a(a+x)}$$

võrra; positiivse x puhul on see vahe väiksem kui $Mx^2 : a^2$.

N ä i d e. Võttes $a = 200$, $\log 200 = 2{,}3010$, $M = 0{,}4343$, saame $\log 201$ sulustada tõkete vahele, mis erinevad teineteisest vähem kui

$$\frac{0{,}43 \cdot 1^2}{200^2} \approx 0{,}11 \cdot 10^{-4} < 0{,}00002$$

võrra. See võimaldab leida $\log 201$ nelja õige kohaga: pannes tähele, et $\log 201 = \log (200 + 1)$ ja võttes selle asemel tema ülemise tõkke eespool leitud võrratusest, saame

$$\log 201 = \log (200 + 1) = \log 200 + \frac{0{,}4343 \cdot 1}{200} =$$
$$= 2{,}3010 + 0{,}0022 = 2{,}3032.$$

Üldistades näites kasutatud mõttekäiku, leiame, et

$$\log (a + x) \approx \log a + \frac{M}{a} x$$

veaga mitte üle $M\left(\frac{x}{a}\right)^2$. Paremal pool võrdusmärki seisev avaldis on x suhtes l i n e a a r n e; ta on $\log (a + x)$ l i n e a a r s e k s l ä h e n d i k s.

§ 104. KESKVÄÄRTUSE LAUSETE ANALÜÜTILINE KÄSITLUS

Lagrange'i keskväärtuse lauset kirjutasime kujul

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \text{kus} \quad a < \xi < b.$$

Selle lause suure tähtsuse tõttu käsitleme seda veel kord, nüüd analüütiliste vahenditega, ja anname siis selle lause üldistuse C a u c h y lause näol:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \text{kus} \quad a < \xi < b.$$

Keskväärtuse lausete tuletamisel toetume R o l l e'i teoreemile.

Rolle'i teoreem

Kui funktsioon on pidev lõigul $a \leqslant x \leqslant b$ ja funktsiooni väärtus lõigu otspunktides on null ning funktsioonil on vahemikus

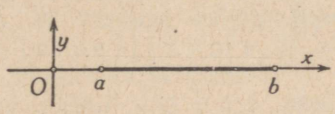
$a < x < b$ tuletis, siis vähemalt ühes selle vahemiku punktis on funktsiooni tuletis null.

Tõepoolest, funktsioon $f(x)$ on lõigul $a \leqslant x \leqslant b$ kas konstantne või ta ei ole seda. Esimesel juhul on ta tuletis null igal x väärtusel, mis on pärit vahemikust a ja b vahel. Seega leidub kuitahes palju väärtusi ξ, mille puhul $f'(\xi) = 0$.

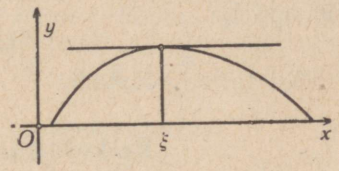
Teisel juhul $f(x) \not\equiv \mathrm{const}$. Et funktsioon $f(x)$ on lõigul $a \leqslant x \leqslant b$ pidev, siis ei ole ta püsivalt null, vaid on vähemalt mõnes vahemiku osas kas positiivne või negatiivne. Esimesel juhul peab funktsioonil olema vahemiku mingis sisemises punktis ξ maksimum, teisel juhul miinimum. Kummalgi korral

$$f'(\xi) = 0, \quad \text{kus} \quad a < \xi < b,$$

mida oligi tarvis tõestada.

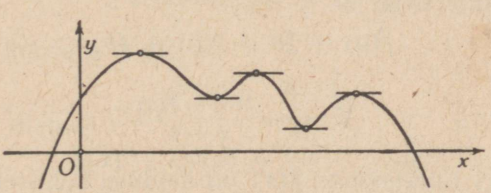


Joon. 308.



Joon. 309.

Geomeetriliselt saab Rolle'i teoreemi ära lugeda jooniselt. Kujutagu lõik ab joonisel 308 või kõver joonisel 309 või kõver joonisel 310 funktsiooni $f(x)$ käiku lõigul $a \leqslant x \leqslant b$ ja olgu



Joon. 310.

$f(a) = f(b) = 0$. Kõigil kujutatud juhtudel saab joonele tõmmata rõhtsa puutuja: esimesel joonisel lõigu $[a, b]$ igas punktis, teisel joonisel kõvera ühes punktis, kolmandal joonisel kõvera viies punktis. Niisiis leidub tehtud eeldustel funktsiooni käigujoonel alati punkte, milles puutuja on rõhtne. Neis punktides tõmmatud puutuja tõus on null. See tähendab aga, et leidub argumendi väärtusi, mille puhul funktsiooni $f(x)$ tuletis on null.

Rolle'i teoreemi võime formuleerida pisut üldisemal kujul järgmiselt:

kui pideval funktsioonil on lõigu $a \leqslant x \leqslant b$ otspunktides võrdsed väärtused ja kõigis lõigu sisemistes punktides tuletis, siis vähemalt ühes lõigu sisemises punktis on funktsiooni tuletis null.

Tõepoolest, olgu nimetatud vahemiku otspunktides funktsiooni väärtus c:

$$f(a) = c, \qquad f(b) = c.$$

Siis on funktsiooni $F(x) = f(x) - c$ väärtus vahemiku otspunktides null. Et funktsioonil $f(x)$ on igas vahemiku sisemises punktis tuletis, siis on seal tuletis ka funktsioonil $F(x)$:

$$F'(x) = f'(x).$$

Järelikult leidub niisugune argumendi väärtus ξ, et $F'(\xi) = 0$. Siis on aga ka

$$f'(\xi) = 0,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Keskväärtuse lause tõestus

Moodustame abifunktsiooni

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda x,$$

kus λ on konstantne tegur. Valime selle teguri nii, et

$$\varphi(a) = \varphi(b).$$

Selleks on ainult vaja, et

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b,$$

millest

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teiselt poolt, et funktsioonil $f(x)$ on eelduse kohaselt tuletis iga x puhul vahemikust $a < x < b$, siis on tuletis ka funktsioonil $\varphi(x)$, nimelt on

$$\varphi'(x) = f'(x) + \lambda.$$

Rolle'i teoreemi üldistuse põhjal peab leiduma niisugune ξ, $a < \xi < b$, et

$$\varphi'(\xi) = 0.$$

Seega

$$f'(\xi) + \lambda = 0, \quad \lambda = -f'(\xi)$$

ja seepärast

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi), \quad \text{kus} \quad a < \xi < b.$$

Üldistatud keskväärtuse lause

Eespool käsitletud keskväärtuse valemis seisab vasaku poole nimetajas a r g u m e n d i kahe väärtuse vahe. Üldistatud keskväärtuse valemis seisab vasaku poole nimetajas nagu lugejaski mingi f u n k t s i o o n i kahe väärtuse vahe. Olgu $f(x)$ ja $g(x)$ kaks diferentseeruvat funktsiooni. Eespool tõestatud keskväärtuse valemi järgi on siis

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi_1), \text{ kus } a < \xi_1 < b,$$
$$g(b) - g(a) = (b-a)g'(\xi_2), \text{ kus } a < \xi_2 < b.$$

Siit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)},$$

kus paremal poolel esinevad ξ_1 ja ξ_2 on üldiselt teineteisest erinevad. Üldistatud keskväärtuse lause tähtsus seisab eelkõige selles, et viimase valemi paremat poolt on võimalik kirjutada ü h e j a s e l l e s a m a ξ v ä ä r t u s e g a. Kõnesolevat lauset saab sõnastada järgmiselt:

kui lõigul $a \leqslant x \leqslant b$ pidevatel funktsioonidel $f(x)$ ja $g(x)$ on tuletis vahemikus $a < x < b$ ning $f'(x)$ ja $g'(x)$ pole ühelgi argumendi väärtusel korraga võrdsed nulliga, siis leidub selles vahemikus ikka niisugune väärtus ξ, et

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ kus } a < \xi < b.$$

Selle tõestamiseks moodustame abifunktsiooni

$$\Phi(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

ja määrame kordaja λ nii, et

$$\Phi(a) = \Phi(b).$$

Selleks peab olema

$$f(a) + \lambda g(a) = f(b) + \lambda g(b)$$

ehk

$$\lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Funktsioon $\Phi(x)$ täidab Rolle'i teoreemi eeldusi, sest neid eeldusi täidavad funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$, seega ka $\lambda g(x)$ ja järelikult ka summa $f(x) + \lambda g(x)$. Seepärast peab leiduma niisugune ξ, $a < \xi < b$, et $\Phi'(\xi) = 0$. Sel puhul on aga

$$f'(\xi) + \lambda g'(\xi) = 0$$

ja järelikult

$$\lambda = -\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Võrrutades teineteisega mõlemad λ väärtused, saame

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

mida oligi tarvis tõestada.

See üldistatud keskväärtuse valem on pärit Cauchy'lt. Lagrange'i keskväärtuse valem tuleneb sellest, kui asendada $g(x)$ argumendiga x: siis $g(b)-g(a)=b-a$, $g'(x)$ aga on iga x väärtuse puhul 1.

§ 105. CAUCHY KESKVÄÄRTUSE LAUSE RAKENDUSI PIIRVÄÄRTUSTE LEIDMISEL

Cauchy keskväärtuse lause on asendamatuks vahendiks paljude piirväärtuste leidmisel, mille otseseks arvutamiseks puuduvad võimalused. Kõnesolev lause aitab tõhusalt kaasa ka funktsioonide suurus- ja väiksusjärkude määramisele ja on tähtsaimaks vahendiks funktsioonide lähendite vigade hindamisel.

L'Hôpitali lause tõkestamatult kahanevate funktsioonide suhte kohta

Olgu

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$$

ja $g(a)=h(a)=0$. Siis $f(a)=\frac{g(a)}{h(a)}=\frac{0}{0}$; sellel sümbolil pole aga mõtet; see tähendab, et pole olemas väärtust $f(a)$. Kirjutades nüüd

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)}=\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)},\ \text{kus}\ a<\xi<x,$$

saame piirile ülemineku, et

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{\xi\to a}\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}.$$

Funktsiooni piirväärtus ei sõltu argumendi tähistusviisist. Seepärast oleme õigustatud kirjutama, et

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}$$

ehk, ülevaatlikumalt,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

See võrdus kannab prantsuse matemaatiku L'Hôpitali nime. Sõnastatult:

kui argumendi väärtusel $x = a$ murd kaotab mõtte lugeja ja nimetaja üheaegse nulliks saamise tõttu, siis selle murru piirväärtuse saamiseks tingimusel, et $x \to a$, tuleb moodustada lugeja ja nimetaja tuletiste suhe ja määrata selle suhte piirväärtus eeldusel, et $x \to a$.

Näide 1. Olgu $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 5x - 14}$. Siis $f(2) = \frac{0}{0}$.

L'Hôpitali reegli rakendamine annab:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 5x - 14} = \lim_{x \to 2} \frac{2x - 3}{2x + 5} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 + 5} = \frac{1}{9}.$$

Kui kõrvuti võrdustega $g(a) = 0$ ja $h(a) = 0$ on ka $g'(a) = 0$ ja $h'(a) = 0$, võime L'Hôpitali reeglit rakendada veel kord:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g''(x)}{h''(x)}.$$

Seda võtet saab vajaduse korral rakendada korduvalt.

Näide 2. Vaatleme funktsiooni

$$f(x) = \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$$

argumendi vahemikus $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Iga selles vahemikus võetud argumendi väärtuse puhul $\pi - 2x \neq 0$, $0 < \sin x < 1$, seega $f(x)$ on kindel negatiivne arv. Argumendi vahemiku parempoolsel rajal $x = \frac{\pi}{2}$ on $\sin x = 1$, seega $\ln \sin x = 0$. Samuti on seal $\pi - 2x = 0$.

Järelikult argumendi väärtusel $x = \frac{\pi}{2}$ esineb funktsioon $f(x)$ kujul $\frac{0}{0}$, nii et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ pole määratav ja väärtust $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ pole olemas. Küll aga on olemas

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x).$$

Tõepoolest,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{2(\pi - 2x)(-2)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\cot x}{4(\pi - 2x)}.$$

Kui paigutame x asemele $\frac{\pi}{2}$, siis näeme, et ka viimase murru väärtus pole määratav. Rakendades veel kord L'Hôpitali reeglit, saame

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}}{-8} = -\frac{1}{8}.$$

Näeme, et argumendi lähenemisel väärtusele $\frac{\pi}{2}$ on $\ln \sin x$ vahe $\pi - 2x$ suhtes teist järku väike suurus.

Et funktsioonid $g(x)$ ja $h(x)$ on diferentseeruvad, siis on nad ka p i d e v a d. Järelikult

$$g(a) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \text{ ja } h(a) = \lim_{x\to a} h(x) = 0.$$

See tähendab, et funktsioonid $g(x)$ ja $h(x)$ on tõkestamatult kahanevad. Seepärast võib võrduses

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$$

peituvat mõtet sõnastada ka järgmiselt:

tõkestamatult kahanevad funktsioonid suhtuvad piiril nagu nende funktsioonide tuletised.

Märgime, et kõik öeldu jääb püsima ka juhul, kui $x \to \infty$.

L'Hôpitali lause kasutamine funktsioonide väiksusjärkude võrdlemisel

Olgu $g(x)$ ja $h(x)$ kaks tõkestamatult kahanevat funktsiooni, kui $x \to a$. Kui

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)}$$

on k i n d e l, n u l l i s t e r i n e v a r v, siis ütleme, et need funktsioonid on sama järku väikesed. Kui vaadeldav piirväärtus on n u l l, siis ütleme, et $g(x)$ on kõrgemat järku väike kui $h(x)$. Kui uuritav suhe t õ k e s t a m a t u l t k a s v a b, siis ütleme, et $g(x)$ on madalamat järku väike kui $h(x)$.

Et

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{g'(x)}{h'(x)},$$

siis võime esimesel juhul öelda, et piiril funktsioonid $g(x)$ ja

$h(x)$ kahanevad võrreldavate kiirustega, teisel juhul, et $g(x)$ kahaneb kiiremini kui $h(x)$, kolmandal juhul, et $g(x)$ kahaneb aeglasemalt kui $h(x)$.

Näide 1. Vaatleme funktsioone

$$1 - \ln x \text{ ja } e - x.$$

Et

$$\lim_{x \to e} \frac{1 - \ln x}{e - x} = \lim_{x \to e} \frac{-\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x \to e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \neq 0,$$

siis funktsioonid $1 - \ln x$ ja $e - x$ on x lähenemisel arvule e sama järku väikesed.

Näide 2. Vaatleme parabooli $y^2 = 2px$ ava laiust kohal abstsissiga x. See ava laius on $2\sqrt{2px}$. Et

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{2\sqrt{2px}} = \frac{1}{2\sqrt{2p}} \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0,$$

siis parabooli kaare «nool» on kaare ava laiusega võrreldes kõrgemat järku väike.

L'Hôpitali lause tõkestamatult kasvavate funktsioonide suhte kohta

Olgu

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

ja $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$ ning samuti $\lim_{x \to a} h(x) = \infty$. Näitame, et ka sel puhul

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Et selles veenduda, kirjutame $f(x)$ avaldise veidi teisendatud kujul:

$$f(x) = \frac{\frac{1}{h(x)}}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Kui $x \to a$, siis $h(x) \to \infty$ ja $g(x) \to \infty$, murrud $1 : h(x)$ ja $1 : g(x)$ aga lähenevad nullile. Seepärast

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{-\frac{1}{h^2(x)}\cdot h'(x)}{-\frac{1}{g^2(x)}\cdot g'(x)} = \lim_{x\to a}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right]^2 \cdot \lim_{x\to a}\frac{h'(x)}{g'(x)} =$$

$$= [\lim_{x\to a} f(x)]^2 \cdot \lim_{x\to a}\frac{h'(x)}{g'(x)}.$$

Taandades nurksulgudes seisva avaldisega ning teisendades saame

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}$$

ehk, ülevaatlikumalt,

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{h'(x)}.$$

Sõnastatult:

kui argumendi lähenemisel väärtusele a murd kaotab mõtte lugeja ja nimetaja tõkestamatu kasvamise tõttu, siis selle murru piirväärtuse saamiseks tingimusel, et $x \to a$, tuleb moodustada lugeja ja nimetaja tuletiste suhe ja määrata selle suhte piirväärtus eeldusel, et $x \to a$

ehk, teisiti,

tõkestamatult kasvavad funktsioonid suhtuvad piiril nagu nende funktsioonide tuletised.

Märgime, et kõik öeldu jääb püsima ka juhul, kui $x \to \infty$.

Funktsioonide asümptootilise kasvamise kiiruste võrdlemine

N ä i d e 1. Vaatleme funktsioone $\log x$ ja x^n, kus n on mingi positiivne arv. Nende kasvamise kiirused on vastavalt $M : x$ ja nx^{n-1}, kus M on kümnendlogaritmide moodul. Nende kiiruste suhe on $M : nx^n$ ja selle suhte piirväärtus tõkestamatult kasvava argumendi puhul

$$\lim_{x\to\infty}\frac{M}{nx^n} = 0$$

sõltumatult astendaja n väärtusest. Me ütleme, et

logaritmfunktsioon kasvab asümptootiliselt a e g l a s e m a l t kui ükski kuitahes väikese positiivse astendajaga astmefunktsioon.

N ä i d e 2. Vaatleme funktsioone $a^x (a > 1)$ ja x^n tõkestamatult kasvava argumendi puhul.

Et

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x\ln a}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x(\ln a)^2}{n(n-1)x^{n-2}}=\ldots=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x(\ln a)^n}{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}$$

ja $\lim_{x\to\infty}a^x=\infty$, siis $\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty$ sõltumatult astendaja n väärtusest. Seega

eksponentfunktsioon alusega $a>1$ kasvab asümptootiliselt kiiremini kui ükski kuitahes suure astendajaga astmefunktsioon.

Eespool rajasime funktsioonide asümptootilise käitumise uurimise skaalale

$$x^1,\ x^2,\ x^3,\ \ldots,\ x^n,\ \ldots$$

Mõnedel juhtudel on otstarbekohane kasutada teisi skaalasid, näiteks faktoriaalile rajatud skaalat

$$1!,\ 2!,\ 3!,\ \ldots,\ n!,\ \ldots$$

Et $n!$ on määratav ainult täisarvuliste n väärtuste puhul, siis on $n!$-skaala sobiv ainult täisarvuliste argumentide jaoks määratud funktsioonide uurimiseks.

Näide 3. Uurime funktsiooni $a^n\,(a>1)$ asümptootilist käitumist, vaadeldes seda faktoriaalide skaala taustal.

Moodustame suhte $a^n:n!$ ja arvutame selle piirväärtuse. Selleks kirjutame

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{N-1}\cdot\frac{a}{N}\cdot\frac{a}{N+1}\cdots\frac{a}{n}.$$

Vaatleme paremal poolel tegureina esinevaid murde. Kõigil neil on üks ja seesama lugeja, nimetaja aga kasvab murrult murrule. Olgu esimene nimetaja, mis ületab arvu a, märgitud tähega N. Esimesed $N-1$ murdu avaldises

$$\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdots\frac{a}{N-1}\cdot\frac{a}{N}\cdot\frac{a}{N+1}\cdots\frac{a}{n}$$

annavad korrutamisel mingi konstandi A. Alates murrust $\frac{a}{N}$ on kõik tegurid lihtmurrud, kahanedes tõkestamatult nimetaja n kasvamisel. Seepärast

$$\lim_{n\to\infty}A\cdot\frac{a}{N}\cdot\frac{a}{N+1}\cdots\frac{a}{n}=0,\ \text{nii et}\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

Et n on täisarv, siis pole funktsioonid a^n ja $n!$ diferentseeruvad ja nende kasvamise kiirusest selle sõna tavalises mõttes rääkida ei saa. Et aga n tõkestamatul kasvamisel arv a^n moodustab ikka väiksema ja väiksema osa arvust $n!$, siis kasutame

ka siin eespool tarvitatud kõnekäändu: funktsioon a^n kasvab astendaja n tõkestamatul kasvamisel aeglasemalt kui faktoriaal $n!$ ehk

faktoriaal $n!$ kasvab asümptootiliselt kiiremini kui ükski kuitahes suure alusega eksponentfunktsioon a^n.

§ 106. FUNKTSIOONI LINEAARSE JA RUUTTRINOOMILISE LÄHENDI TÄPSUSE KÜSIMUS

Funktsiooni lähendi headust hindame selle järgi, kui väikese veaga ta annab funktsiooni väärtuse. Kui vea tõkke leidmine on raske, tuleb rahulduda vea väiksusjärgu määramisega. Viimase määramisel võetakse tavaliselt aluseks argumendi kasvu astmete skaala.

Funktsiooni lineaarse lähendi vea väiksusjärk

1° Funktsiooni $f(x)$ tuletise definitsiooni järgi punktis $x = a$

$$\lim_{x-a\to 0} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a).$$

See tähendab, et

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) + \alpha,$$

kus $\alpha \to 0$, kui $x - a \to 0$ ehk kui $x \to a$. Siit

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \alpha(x-a).$$

Vasakul poolel seisab funktsiooni $f(x)$ ja selle lineaarse lähendi vahe, see tähendab lineaarse lähendi viga. Märkides selle vea sümboliga $v(x)$, näeme, et

$$v(x) = \alpha(x-a),$$

kus $\alpha \to 0$, kui $x \to a$. Paremal poolel seisab kahe tõkestamatult nullile läheneva teguri korrutis, seega igal juhul kõrgemat järku väike suurus kui vahe $x - a$. Seda tõsiasja kinnitab veenvalt ka joonis 311, kui seal eeldame, et $x \to a$.

2° Määrame selle vea väiksusjärgu arvuliselt. Et

$$\lim_{x\to a} \frac{v(x)}{(x-a)^1} \overset{\cdot}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{1} = 0,$$

siis on vea $v(x)$ väiksusjärk tõepoolest kõrgem kui 1, nagu seda juba äsja nägime. Proovime astendajat 2. L'Hôpitali reegli kohaselt

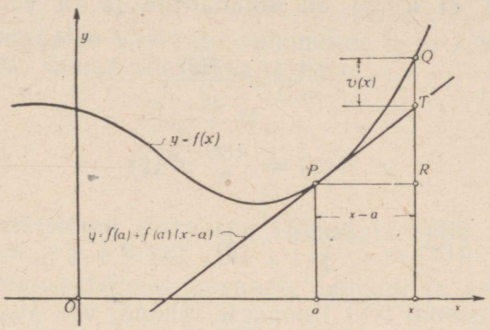
$$\lim_{x\to a}\frac{v(x)}{(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)},$$

mis edasi viib piirväärtusele

$$\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2}.$$

See aga on $\frac{1}{2}f''(a)$. Niisiis:

kui $f''(a)\neq 0$, on funktsiooni $f(x)$ lineaarse lähendi viga argumendi vahe $x-a$ suhtes teist järku väike.



Joon. 311.

Funktsiooni lineaarse lähendi vea hindamise valem

Funktsiooni $f(x)$ lineaarse lähendi

$$f(a)+(x-a)f'(a)$$

viga avaldub kujul

$$v(x)=f(x)-f(a)-(x-a)f'(a).$$

Sellest avaldisest saame

$$v'(x)=f'(x)-f'(a),\qquad v''(x)=f''(x),$$

nii et

$$v(a)=0 \text{ ja ka } v'(a)=0.$$

Eelmises punktis toodud kaalutluste lõpptulemus viib mõttele võrrelda viga $v(x)$ vahe $x-a$ ruuduga, see on funktsiooniga $u(x)=(x-a)^2$. Sel korral

$$u'(x)=2(x-a),\qquad u''(x)=2,$$

nii et ka

$$u(a) = 0, \quad u'(a) = 0.$$

Öeldut arvestades saame Cauchy keskväärtuse lause põhjal, et

$$\frac{v(x)}{u(x)} = \frac{v(x) - v(a)}{u(x) - u(a)} = \frac{v'(\zeta)}{u'(\zeta)}, \text{ kus } a < \zeta < x.$$

Sama võtet veel kord rakendades leiame, et

$$\frac{v'(\zeta)}{u'(\zeta)} = \frac{v'(\zeta) - v(a)}{u'(\zeta) - u(a)} = \frac{v''(\xi)}{u''(\xi)}, \text{ kus } a < \xi < \zeta < x.$$

Pannes tähele, et $u''(x)$ on konstantne ja ta väärtuseks on 2, saame

$$\frac{v(x)}{u(x)} = \frac{v''(\xi)}{2},$$

millest

$$v(x) = \frac{u(x)}{2} v''(\xi)$$

ehk, lõpuks,

$$v(x) = \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi), \text{ kus } a < \xi < x.$$

See ongi funktsiooni $f(x)$ lineaarse lähendi vea avaldis. Ta annab selle vea argumendi väärtuste jaoks, mis asetsevad arvu a läheduses.

Saadud valem ei anna võimalust viga $v(x)$ arvutada, sest argumendi keskmine väärtus ξ pole ju teada. Valem võimaldab aga vea $v(x)$ suurust hinnata. Tõepoolest, olgu $f''(x)$ maksimaalne väärtus vahemikus a ja x vahel m; siis

$$|v(x)| \leqslant \frac{(x-a)^2}{2} m.$$

Seega on vea tõke leitud.

Näide. Olgu $f(x) = \sin x$, $a = 0$. Et $(\sin x)'' = -\sin x$, siis m on antud juhul 1. Seega võrduse $\sin x \approx x$ puhul

$$|v(x)| \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

Märkus. Kui kirjutaksime a asemele x ja x asemele $x + \Delta x$, siis saaksime funktsiooni $f(x)$ lineaarse lähendi avaldiseks summa $f(x) + f'(x)\Delta x$ ja selle lähendi vea tõkkeks arvu

$$\frac{(\Delta x)^2}{2} \mu,$$

kus μ on tuletise $f''(x)$ maksimaalne väärtus vahemikus x ja $x + \Delta x$ vahel.

Funktsiooni ruuttrinoomilise lähendi vea hindamine

Võttes funktsiooni $f(x)$ ruuttrinoomilise lähendi kujul

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$$

ja käies eespool näidatud teed, leiame, et funktsiooni ruuttrinoomilise lähendi viga on argumendi juurdekasvuga võrreldes kolmandat järku väike ja avaldub kujul

$$\frac{(x-a)^3}{6} f'''(\xi), \text{ kus } a < \xi < x.$$

Kui $|f'''(x)|$ maksimaalse väärtuse vahemikus a ja x vahel tähistame sümboliga M, saame vea tõkkena arvu

$$\frac{|x-a|^3}{6} M.$$

Logaritmfunktsiooni lineaarne lähend ja selle viga

Leiame logaritmfunktsiooni lineaarse lähendi ja selle lähendi vea.

Olgu $f(x) = \log x$. Siis

$$f'(x) = \frac{M}{x}, \quad f''(x) = -\frac{M}{x^2}$$

ja järelikult

$$f(x)\Big|_{x=a} = \log a, \quad f'(x)\Big|_{x=a} = \frac{M}{a}.$$

Arvude a ja x vahepealset väärtust saab kirjutada kujul

$$a + \vartheta(x-a),$$

kus $0 < \vartheta < 1$. Seda kirjutusviisi kasutades näeme, et

$$f''(x)\Big|_{x=a+\vartheta(x-a)} = -\frac{M}{[a+\vartheta(x-a)]^2}.$$

Seepärast logaritmfunktsiooni lineaarsel lähendamisel

$$\log x \approx \log a + \frac{M}{a}(x-a)$$

ja leitud lähendi viga

$$v(x) = \frac{(x-a)^2}{2} \cdot \left\{ -\frac{M}{[a+\vartheta(x-a)]^2} \right\}, \text{ kus } 0 < \vartheta < 1.$$

Et tulemust võrrelda varem saadud valemitega, muudame tähistusviisi: kirjutame x asemele kõikjal $a+x$. Siis

$$\log(a+x) \approx \log a + \frac{M}{a}x.$$

See on sama valem, mille varem saime leheküljel 677. Seal tuleb ainult asendada $a = x : a$. Sama valemiga töötasime juba ka leheküljel 644, nagu kohe näha, kui seal sümboli x asemele kirjutada a ja sümboli Δx asemele x. Praegu kasutatud lineaarse lähendiga $\log(a+x)$ töötasime ka leheküljel 684.

Vea valem annab tähe x asendamisel summaga $a+x$, et

$$|v(a+x)| = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{M}{(a+\vartheta x)^2}.$$

Kui oletame, et x on positiivne, siis $a+\vartheta x > a$, $(a+\vartheta x)^2 > a^2$, seega

$$|v(a+x)| < \frac{x^2}{2} \cdot \frac{M}{a^2}$$

ehk

$$|v(a+x)| < \frac{1}{2} M \left(\frac{x}{a}\right)^2.$$

See on p o o l vea suurusest, mille saime leheküljel 684. Vea tõkke vähenemine on seletatav meil praegu kasutada olevate võimsamate hindamisvahenditega (Cauchy keskväärtuse lause).

Lineaarse interpolatsiooni lubatavus logaritmide tabelites

Praegu tuletatud valemite

$$\log(a+x) \approx \log a + \frac{M}{a}x$$

ja

$$|v(a+x)| < \frac{1}{2} M \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

varal on võimalik põhjendada i n t e r p o l a t s i o o n i l u b a t a v u s t l o g a r i t m i d e t a b e l i t e s. Tõepoolest, esimene valem näitab, et argumendi kasvamisel lähteväärtuselt a juurdekasvu x võrra kasvab logaritm ligikaudu s e l l e g a v õ r d e l i s e l t ja nimelt $\frac{M}{a}x$ võrra. Arv $\frac{M}{a}$ on võrdeteguriks. Võttes $x = 1$, näeme, et $\frac{M}{a} \approx \log(a+1) - \log a$, teiste sõnadega, $\frac{M}{a}$ on t a b e l i v a h e, see on vahe tabelis antud kahe järjestikuse arvu vahel.

Vea küsimust kaalume eeldusel, et on kasutada mingi konk-

reetne, näiteks neljakohaline logaritmide tabel. Arv a on selles antud kujul 100, 101, 102, ..., seega alati $a \geqslant 100$. Arv x on antud kujul 0,1, 0,2, ..., 0,9, seega alati $x < 1$. Et $M = 0{,}4343 < \frac{1}{2}$, siis

$$|v(a+x)| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0{,}000025.$$

See näitab, et lineaarsest interpolatsioonist tingitud viga logaritmi väärtuses mõjutab alles viiendat ega mõjuta kunagi neljandat kümnendkohta pärast koma. Niisiis annab lineaarne interpolatsioon neljakohalistes tabelites neljanda kümnendkoha õiges suuruses; teiste sõnadega, lineaarne interpolatsioon on logaritmide tabelites lubatav ja õigustatud võte. Mõttekäik kandub üle ka 3-, 5- jne. kohalistele tabelitele.

Märkus. Äsja toodud arutlused logaritmi kohta omavad üldist tähtsust: analoogiliselt toimitakse ka siinuse, tangensi jt. funktsioonide lähendamisel ja nende funktsioonide tabelitega töötamisel. Argumendi väärtused püütakse tabeleis anda ikka nii tihedalt, et nende vahel oleks lubatav lineaarne interpolatsioon.

PEATÜKK XXXI

FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL

Funktsiooni ja tuletise mõiste kõrval on diferentsiaal üks kõrgema matemaatika tähtsamaid mõisteid. Selle mõiste väärtus seisab eeskätt asjaolus, et tema abil saab kõiki kõrgema matemaatika mõttekäike ja operatsioone haarata vähestesse kindlatesse vormidesse: diferentsiaali mõiste abil luuakse matemaatilise analüüsi formaalne, arvutustehniline aparaat. Eespool oli funktsiooni diferentsiaal meile eelkõige mitme varem käsitletud mõiste loomulik üldistus. Nendeks mõisteteks on funktsiooni muut, funktsiooni viga ja funktsiooni lineaarse lähendi kasv. Selle raamatu teises köites näeme, et funktsiooni diferentsiaali mõiste on vahelüliks, mis seob diferentsiaal- ja integraalarvutuse üheks ühtseks tervikuks.

§ 107. FUNKTSIOONI DIFERENTSIAAL

Funktsiooni diferentsiaali definitsioon tuletise mõiste kaudu

Väga mitmed küsimusseaded funktsiooni $f(x)$ kohta viisid meid eespool ikka jälle avaldise $f'(x)\Delta x$ juurde. See avaldis annab ligikaudu

1° funktsiooni $f(x)$ muudu, mille põhjustab argumendi muutumine Δx võrra;

2° funktsiooni $f(x)$ arvutatud väärtuse vea, kui argumendi väärtuse viga ei ületa arvu Δx;

3° funktsiooni $f(x)$ lineaarse lähendi muudu, mille põhjustab argumendi muutumine Δx võrra.

Öeldu viib mõttele, et avaldis $f'(x)\Delta x$ väärib omaette uurimist sõltumatult ta päritolust ja juhuslikust konkreetsest tähendusest. Sel juhul tuleb ta jaoks luua ka oma nimetus ja oma sümbol.

Olgu Δx argumendi suvaline muut. Korrutist $f'(x)\Delta x$ nimetame siis funktsiooni $f(x)$ diferentsiaaliks ja kirjutame kujul $df(x)$. Kui $f(x) = x$, siis $f'(x) = (x)' = 1$ ja $df(x) = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Seega

$$dx \equiv \Delta x$$

ja

$$df(x) = f'(x)\,dx.$$

Need kaks allakriipsutatud võrdust defineerivad argumendi ja funktsiooni diferentsiaali. Sõnastatult kõlaksid need definitsioonid järgmiselt:

argumendi diferentsiaaliks nimetatakse argumendi suvalist muutu;

funktsiooni diferentsiaaliks nimetatakse funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutist.

Diferentsiaali * nimetus ja sümbol on pärit Leibniz'ilt. Sümboleid dx ja $df(x)$ tuleb mõista samasuguste ühtsete sümbolitena nagu sümboleid Δx, $\log f(x)$, $\arctan x^2$ jne.

Märkusi diferentsiaali kohta

1° Kui $y = f(x)$, siis sümbolid

$$dy \quad \text{ja} \quad df(x)$$

tähendavad üht ja sedasama, nimelt korrutist $f'(x)\,dx$. Kui näiteks $y = f(x) = x^2 - 3x + 4$, siis kirjutame, et $dy = df(x) = d(x^2 - 3x + 4) = (2x - 3)\,dx$. Analoogiliselt

$$d \sin x = \cos x\,dx, \quad d \ln x = \frac{dx}{x},$$

$$d \arctan \frac{x}{a} = \frac{a\,dx}{a^2 + x^2}.$$

2° Funktsiooni $f(x)$ diferentsiaali definitsioonivõrdusest

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

nähtub, et funktsiooni diferentsiaal on kahe muutuja funktsioon: üheks muutujaks on argumendi väärtus x, teiseks argumendi diferentsiaal dx. Et dx on suvaline argumendi muut, siis nimetatud kaks muutujat x ja dx on teineteisest sõltumatud.

3° Funktsiooni diferentsiaali definitsioonivõrdus $df(x) = f'(x)\,dx$ ütleb, et argumendi fikseeritud väärtuse puhul, mille puhul ka $f'(x)$ on teatav kindel arv, on $df(x)$ võrdeline argumendi diferentsiaaliga dx:

---

* Lad. k. *differens* — vahe, erinevus. Argumendi diferentsiaal on argumendi muut, seega argumendi kahe teineteisele järgneva eriväärtuse vahe. Nagu peatselt näeme, tõlgendub ka funktsiooni diferentsiaal teatava vahena.

argumendi fikseeritud väärtuse puhul on funktsiooni diferentsiaal võrdeline argumendi diferentsiaaliga, kusjuures võrdeteguriks on funktsiooni tuletis.

4° Märgime funktsiooni $y = f(x)$ lineaarse lähendi sümboliga $\varphi(x)$. Siis, nagu teame, $\varphi(x) = f(x) + f'(x)\Delta x$. Argumendi kasvamisel väärtuselt x väärtuseni $x + \Delta x$ kasvab funktsioon $f(x)$ vahe $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ võrra ja funktsiooni lineaarne lähend vahe $\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$ võrra, mis avaldub kujul $f(x) + f'(x)\Delta x - f(x)$; see annab koondamisel $f'(x)\Delta x$ ehk diferentsiaali dy. Niisiis

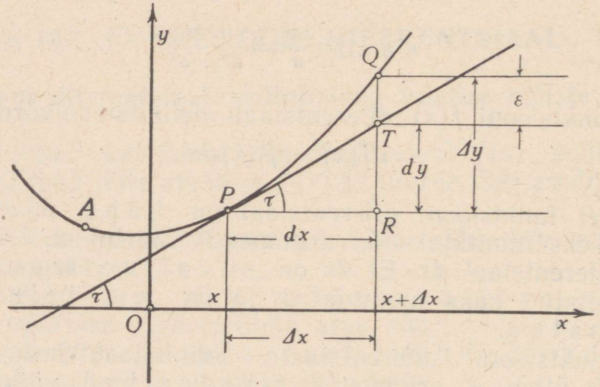
$$\begin{cases} \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f(x) \\ dy = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) = \Delta\varphi(x). \end{cases}$$

Et $\varphi(x)$ on funktsiooni $f(x)$ lähend, siis $\Delta\varphi(x)$ on $\Delta f(x)$ lähend ehk dy on Δy lähend:

funktsiooni diferentsiaal on funktsiooni lineaarse lähendi avaldisest arvutatud funktsiooni juurdekasvu lähend.

Funktsiooni diferentsiaali geomeetriline tõlgendus

Kujutagu kaar PQ joonisel 312 funktsiooni $y = f(x)$ käigujoont argumendi muutumisel väärtuselt x väärtuseni $x + \Delta x$, nii et lõik $PR = \Delta x = dx$. Siis lõik RQ kujutab funktsiooni juurde-



Joon. 312.

kasvu Δy. Lõik PT on funktsiooni $f(x)$ käigujoone puutujaks punktis P. Selle puutuja tõusunurga tangens on $f'(x)$, nii et lõik $RT = \Delta x \cdot f'(x)$ ehk $RT = f'(x)\Delta x = f'(x)dx = dy$. Nagu näeme, kujutab lõik RT funktsiooni diferentsiaali dy.

Funktsiooni juurdekasvu Δy ja diferentsiaali dy vahe $\Delta y - dy = \varepsilon$ on esitatud lõiguna $RQ - RT$, see on lõiguna TQ. Lõik TQ kujutab siis v i g a, mille teeme, asendades juurdekasvu Δy t ä i s v ä ä r t u s e $\Delta y = RQ$ selle juurdekasvu p e a - o s a g a $dy = RT$. Niisiis näeme, et

$$\Delta x = PR, \qquad \Delta y = RQ,$$
$$dx = PR, \qquad dy = RT,$$
$$\varepsilon = \Delta y - dy = TQ.$$

Juurdekasvude ja diferentsiaalide väiksusjärk

Et dx ja Δx on ainult kaks eri sümbolit argumendi ühe ja sellesama juurdekasvu jaoks, siis langeb ära vajadus võrrelda nende suurusjärke. Võtame nad aluseks meil esinenud

$$\Delta y, \quad dy \quad \text{ja} \quad \Delta y - dy$$

väiksusjärgu määramisel.

Et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x),$$

siis on ta iga fikseeritud x puhul kindel arv. Kui see arv pole null, siis

funktsiooni juurdekasv on sama järku väike kui argumendi juurdekasvgi.

Kui aga $f'(x) = 0$, siis on vaadeldav vahe kõrgemat järku väike kui argumendi juurdekasv.

Diferentsiaali definitsioonivõrdus

$$dy = f'(x)\,dx$$

näitab, et fikseeritud x puhul on dy võrdeline dx-iga. Seega

ka funktsiooni diferentsiaal on sama järku väike kui argumendi diferentsiaalgi.

Mis puutub vahesse $\Delta y - dy$, siis saame ta kirjutada kujul

$$[f(x + \Delta x) - f(x)] - f'(x)\,dx$$

ehk, lihtsamini, meile juba tuntud avaldisena

$$f(x + \Delta x) - f(x) - f'(x)\,\Delta x.$$

See aga on funktsiooni lineaarse lähendi vea avaldis $v(x)$ (vt. lk. 695), milles a asemel on x ja x asemel $x + \Delta x$. Nagu teame, on see Δx suhtes t e i s t j ä r k u v ä i k e. Niisiis:

funktsiooni juurdekasvu ja funktsiooni diferentsiaali vahe on argumendi juurdekasvu suhtes teist järku väike suurus.

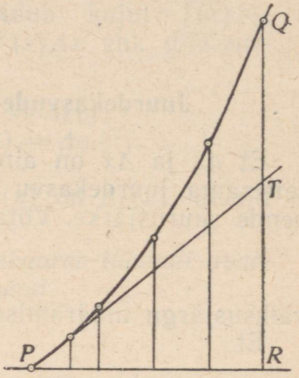
Et Δy ja dy väiksusjärk Δx suhtes on üks ja seesama, siis $\Delta y = dy + \varepsilon$ ja järelikult dy on juurdekasvu Δy peaosa. Niisiis:

funktsiooni diferentsiaal on funktsiooni juurdekasvu peaosa.

See asjaolu ilmneb eriti näitlikult, kui määrame vahe $\Delta y - dy$ protsendi kogu juurdekasvust. See avaldub kujul

$$\frac{\Delta y - dy}{\Delta y} 100\% \quad \text{ehk} \quad \frac{\varepsilon}{\Delta y} 100\%$$

$$\text{ehk} \quad \frac{\frac{\varepsilon}{\Delta x}}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} 100\%.$$



Joon. 313.

Kahanegu Δx tõkestamatult. Siis murru lugeja piirväärtus on 0 ja nimetaja piirväärtus y', seega murru piirväärtus 0. See tähendab, et relatiivne viga, millega funktsiooni diferentsiaal kujutab funktsiooni juurdekasvu, läheneb koos argumendi juurdekasvuga tõkestamatult nullile. See ilmneb näitlikult ka jooniselt 313: tõepoolest, suhe

$$\frac{RQ - RT}{RQ}$$

väheneb järjest vastavalt sellele, mida väiksema valime PR, ehk, täpsustatult,

$$\lim_{PR \to 0} \frac{RQ - RT}{RQ} = 0.$$

Kokku võttes näeme, et

funktsiooni diferentsiaal kujutab funktsiooni juurdekasvu seda suurema relatiivse täpsusega, mida väiksema argumendi vahemikuga töötame.

Sel tõsiasjal põhineb võimalus väikeste argumendi vahemike puhul asendada funktsiooni juurdekasvu funktsiooni diferentsiaaliga. Konkreetselt tähendab see võimalust arvutada funktsiooni väikesi muute ja vigu valemi

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x$$

asemel valemi

$$dy = f'(x)\,dx$$

järgi. See ei puuduta asja sisulist külge ega too enesega kaasa muudatusi töö käigus. Erinevus seisneb ainult kirjutusviisis.

Diferentsiaal arvutusvahendina

Tõsiasi, et funktsiooni diferentsiaal argumendi väikeste juurdekasvude puhul suure täpsusega vastab funktsiooni juurdekasvule, võimaldab diferentsiaali kasutada arvutusvahendina. See tasub ennast eriti juhtudel, kus funktsiooni diferentsiaali avaldis on lihtsam ja arvutamiseks sobivam kui funktsiooni juurdekasvu avaldis, nagu näiteks järgmistel juhtudel:

funktsioon	juurdekasv	diferentsiaal
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$	$-\frac{2\,dx}{x^3}$
$\log(x+\sqrt{1+x^2})$	$\log\frac{(x+\Delta x)+\sqrt{1+(x+\Delta x)^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{M\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$
$\tan x$	$\frac{\sin \Delta x}{\cos x \cos(x+\Delta x)}$	$\frac{dx}{\cos^2 x}$.

N ä i d e. Olgu tarvis arvutada funktsiooni $F(x) = e^{-x^2}$ väärtus argumendi väärtusel $x = 1{,}01$. Võtame argumendi lähteväärtuseks $x = 1$. Selle väärtuse puhul $F(x) = e^{-1} = \frac{1}{e} = \frac{1}{2{,}718} = 0{,}368$. Et $F'(x) = -2xe^{-x^2}$, siis $dF(x) = -2xe^{-x^2}dx$. Võttes $dx = 0{,}01$, leiame, et $dF(x) = -2 \cdot 0{,}01 \cdot e^{-1} = \frac{-0{,}02}{2{,}718} \approx -0{,}007$. Et

$$F(x+\Delta x) = F(x) + \Delta F(x) \approx F(x) + dF(x),$$

siis

$$e^{-x^2}\Big|_{x=1{,}01} \approx 0{,}368 - 0{,}007 = 0{,}361.$$

§ 108. DIFERENTSIAAL FUNKTSIOONI KASVU LINEAARSE LÄHENDINA

Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaali defineerisime eespool võrdusega

$$dy = f'(x)\,dx.$$

See kirjutis on mõistetav ainult eeldusel, et funktsiooni tuletis on juba varem defineeritud:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Tuletise ja diferentsiaali niisuguse käsitlusviisi puhul on tuletis primaarne, diferentsiaal aga sekundaarne mõiste: ta defineeritakse tuletise kaudu. Matemaatilise analüüsi ajalooline areng läks vastupidist teed: Leibniz'i ja Newtoni ajastul oli diferentsiaal primaarne ning tuletis sellel põhinev mõiste. Diferentsiaali nimetusest on tuletatudki nimetus «diferentsiaalarvutus», mis hõlmab kõiki meie teadmisi tuletistest, diferentsiaalidest ja nende rakendustest matemaatikas. Alles pärast piirväärtuse mõiste väljakujundamist Lagrange'i ja Cauchy ajastul asus tuletis lähtemõiste kohale.

Tuletise kirjutusviis diferentsiaalide kaudu

Võrduses $f'(x)\,dx = df(x)$ tähendab dx kui argumendi diferentsiaal argumendi suvalist juurdekasvu. Me võime seda ikka võtta nullist erinevana. Järelikult võib temaga jagada viimase võrduse mõlemaid pooli. See annab tuletise avaldatuna diferentsiaalides

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ ehk, lühemalt, } y' = \frac{dy}{dx}.$$

Siit nähtub, et

funktsiooni tuletis on funktsiooni ja argumendi diferentsiaalide jagatis.

Praegu toodud tuletise kirjutusviis diferentsiaalides on pärit Leibniz'ilt ja on seega vanim tuletise märkimisviis. Leibniz'i suurepäraselt õnnestunud tähistusviisis antakse tänaseni matemaatilise analüüsi tehniline aparaat, see tähendab matemaatilise analüüsi valemite ja eeskirjade kogu.

Et me funktsiooni diferentsiaali defineerisime tuletise kaudu, siis tuletise kirjutusviisil diferentsiaalides on praegusel astmel ainult formaalne tähendus. Sisuliselt ei anna ta midagi uut, sest kirjutusviisid

$$f'(x)\,dx = df(x) \quad \text{ja} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

tähendavad ju üht ja sedasama. Sisuliselt rikastaks meid uus kirjutusviis ainult siis, kui saaksime diferentsiaali defineerida tuletisest sõltumatult. Sellele küsimusele pühendame järgmise artikli.

Diferentsiaal funktsiooni juurdekasvu lineaarse lähendina

Defineerime argumendi diferentsiaali nagu varemgi argumendi suvalise juurdekasvuna:

$$dx \equiv \Delta x.$$

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$ ja tähendagu edaspidi x teatavat kindlat argumendi väärtust ja Δx selle väärtuse juurdekasvu. Viimasele vastab siis funktsiooni juurdekasv

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Et x oli argumendi fikseeritud väärtus, siis Δy sõltub ainuüksi juurdekasvust Δx. Oletame, et juurdekasvud Δy ja Δx on üht ja sama järku väikesed. See tähendab, et $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ on lõplik, nullist erinev arv. Näeme, et tehtud oletusel on funktsioonil $f(x)$ vaadeldaval argumendi väärtusel olemas tuletis, funktsioon on sel argumendi väärtusel diferentseeruv.

Suurust lähendada on võimalik väga mitmel viisil. Ütlus «juurdekasvu lähend» saab seepärast kindla mõtte alles siis, kui on fikseeritud tingimused, mida see lähend peab rahuldama. Seame juurdekasvu Δy lineaarse lähendi δy kohta järgmised nõuded:

1° δy peab olema argumendi juurdekasvu lineaarfunktsioon;

2° δy peab lähendama juurdekasvu Δy nii hästi, et lähendamise viga $\Delta y - \delta y$ oleks argumendi juurdekasvuga võrreldes kõrgemat järku väike.

Näitame, et nende nõuetega on lähend δy täielikult määratud. Tõepoolest, esimese nõude kohaselt

$$\delta y = a\Delta x + b,$$

kus a ja b on kindlad, seega juurdekasvust Δx sõltumatud arvud. Teise nõude järgi vahe

$$\Delta y - \delta y = \varepsilon$$

peab olema juurdekasvuga Δx võrreldes kõrgemat järku väike. Et juurdekasvu Δx nullile lähenemisel $\Delta y \to 0$ ja $\varepsilon \to 0$, siis ka $\delta y \to 0$. Kui aga $\Delta x \to 0$, siis ka $(a\Delta x + b) \to 0$. See on võimalik ainult siis, kui $b = 0$. Järelikult

$$\delta y = a\Delta x.$$

Näeme, et otsitav δy on võrdeline argumendi juurdekasvuga. Teise nõude kohaselt

$$\Delta y - a\Delta x = \varepsilon$$

ehk

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - a = \frac{\varepsilon}{\Delta x},$$

kus ε on juurdekasvuga Δx võrreldes kõrgemat järku väike. See tähendab, et

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varepsilon}{\Delta x} = 0.$$

Järelikult ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - a \right) = 0$$

ehk

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a$$

ehk

$$y' = a.$$

Asetades a väärtuse δy avaldisse, saame

$$\delta y = y' \Delta x$$

ehk, teisiti kirjutades,

$$\delta y = f'(x)\, dx.$$

Paremal pool seisab funktsiooni y diferentsiaal, nii et

$$\delta y = dy.$$

Niisiis:

funktsiooni diferentsiaal on funktsiooni juurdekasvu lineaarne lähend, mille viga on argumendi juurdekasvuga võrreldes kõrgemat järku väike.

Öelduga on funktsiooni diferentsiaal defineeritud sõltumatult tuletisest.

Diferentsiaal, tuletis ja integraal

Asjaolu, et funktsiooni diferentsiaali saab defineerida sõltumatult tuletisest, avab tee tuletise defineerimiseks diferentsiaalide kaudu:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \text{ ehk, lihtsamalt, } y' = \frac{dy}{dx}.$$

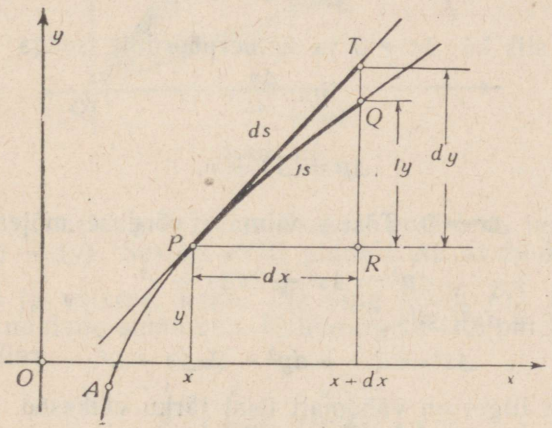
Seda tuletise kirjutusviisi on sobiv kasutada juhtudel, kus diferentsiaali avaldist saab jooniselt ära lugeda või teatavatest eeldustest lähtudes lihtsate kaalutluste põhjal üles kirjutada.

Nagu nägime, on funktsiooni diferentsiaal dy funktsiooni juurdekasvu Δy l i n e a a r s e k s l ä h e n d i k s; ta esitab funktsiooni kasvu p e a o s a. Esimesel pilgul on vähe usutav, et juba

see juurdekasvu lähend määrab täielikult funktsiooni y käitumise. Selle tõe avastamine Leibniz'i ja Newtoni poolt kuulub matemaatikateaduse tähtsamate saavutuste hulka. Funktsiooni $\Phi(x)$, mille diferentsiaal $d\Phi = \varphi(x)\,dx$, nimetatakse selle diferentsiaali integraalfunktsiooniks. Meetodid, mille abil diferentsiaalist $\varphi(x)\,dx$ saadakse integraalfunktsiooni avaldis, moodustavad integraalarvutuse. Nendele meetoditele on pühendatud käesoleva raamatu II köite vastavad peatükid.

Diferentsiaali avaldise otsene koostamisviis

Diferentsiaali avaldise koostamisel tuletist kasutamata räägime diferentsiaali avaldise otsesest koostamisviisist. Seda otsest teed diferentsiaali avaldise saamiseks kasutatakse sageli geomeetriliste küsimuste lahendamisel, peaaegu eranditult aga matemaatika rakendusaladel. Piirdume siinkohal kahe näitega. Mitmeid teisi näiteid selle kohta leidub käesoleva raamatu II köites.



Joon. 314.

Näide 1. Leiame kõvera $y = f(x)$ kaare diferentsiaali.

Olgu A (joon. 314) kõvera $y = f(x)$ kindlaks punktiks, millest loeme kaare pikkusi. Olgu $P(x, y)$ kõvera suvaline punkt ja $\widehat{AP} = s$. Olgu edasi $\widehat{PQ} = \Delta s$ ja $Q(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$. Eespool (lk. 587) tõestasime, et ringjoone kõõlu ja kaare suhe läheneb tõkestamatult ühele, kui kaar tõkestamatult kahaneb, ja hiljem (lk. 609)

lugesime selle omaduse aksiomaatiliselt kehtivaks ka teiste meie poolt vaadeldavate kõverate puhul:

$$\lim_{\overset{\frown}{PQ}\to 0} \frac{\overline{PQ}}{\overset{\frown}{PQ}} = 1.$$

Võrdleme endiste kaare $\overset{\frown}{PQ}$ ja kõõlu $\overline{PQ}$ asemel nüüd kaart $\overset{\frown}{PQ}$ ja temale vastavat puutuja lõiku $\overline{PT}$. Joonistelt 313 ja 314 nähtub, et ka puutuja lõik $\overline{PT}$ on kaare $\overset{\frown}{PQ}$ lähendiks ja seda paremaks lähendiks, mida lühem on kaar $\overset{\frown}{PQ}$. Võtame aksioomina, et ka

$$\lim_{\overset{\frown}{PQ}\to 0} \frac{\overline{PT}}{\overset{\frown}{PQ}} = 1.$$

Tähistades puutuja lõigu $\overline{PT}$ pikkuse sümboliga Δp, saame viimase võrduse kirjutada kujul

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta p}{\Delta s} = 1.$$

Kui $\Delta s \to 0$, siis ka $\Delta x \to 0$ ja ümberpöördult, seega

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta p}{\Delta s} = 1.$$

ehk

$$\Delta p = \Delta s + \varkappa,$$

kus $\varkappa \to 0$, kui $\Delta x \to 0$. Tõstes viimase võrduse mõlemad pooled ruutu, näeme, et

$$\Delta p^2 = \Delta s^2 + 2\varkappa\Delta s + \varkappa^2.$$

Et $\Delta p^2 = dx^2 + dy^2$, siis

$$\Delta s^2 = dx^2 + dy^2 - 2\varkappa\Delta s - \varkappa^2.$$

Kaks viimast liiget on vähemalt teist järku väikesed. Et avaldise Δs^2 peaosaks on ds^2, siis

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Nagu näeme,

kõvera kaare diferentsiaali ruut võrdub kõvera punkti koordinaatide diferentsiaalide ruutude summaga.

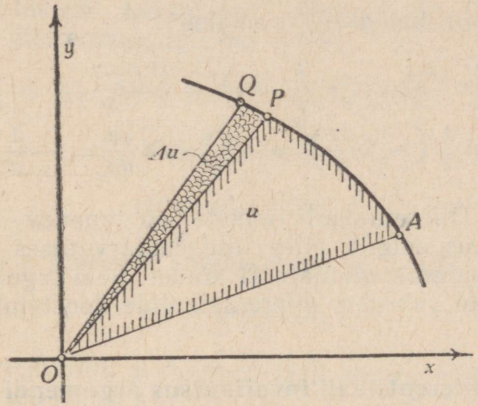
Leitud tulemusest järeldub juba varem (lk. 613) saadud valem

$$s' = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Märkus. Joonisel 314 on kõver $y = f(x)$, mille kaare diferentsiaali määrasime, kumer. Siin on silmanähtavalt $ds > \Delta s$ ja $dy > \Delta y$. Vastupidist olukorda näeme joonisel 312: kõver $y = f(x)$

on siin nõgus. Sel puhul on $ds = \overline{PT}$, $\Delta s = \overset{\frown}{PQ}$ ja silmanähtavalt $\overline{PT} < \overset{\frown}{PQ}$ ehk $ds < \Delta s$, samuti $\overline{RT} < \overline{RQ}$ ehk $dy < \Delta y$ (vt. ka joon. 313).

Näide 2. Vaatleme sektorit AOP (joon. 315), mille tipp on koordinaatide alguspunktis ja mida piiravad kõver $y = f(x)$ ning kaks alguspunktist tõmmatud kiirt: üks, mis viib kõvera kindlasse punkti $A(a, f(a))$, ja teine, mis viib kõvera suvalisse punkti $P(x, f(x))$, lühidalt kõvera punkti $P(x, y)$. Tähistame kõnesoleva sektori pindala tähega u ja leiame selle pindala diferentsiaali. Selleks toimime järgmiselt.



Joon. 315.

Võtame joonel $y = f(x)$ lisaks endistele veel punkti $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Sektori POQ pindala Δu avaldub siis kolmnurga POQ ja väikese, kaare $\overset{\frown}{PQ}$ ning kõõlu $\overline{PQ}$ vahel asuva segmendi pindalade summana. Kolmnurga POQ pindala avaldub determinandina

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ x + \Delta x & y + \Delta y \end{vmatrix}.$$

Märkides segmendi pindala tähega σ, saame

$$\Delta u = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ x + \Delta x & y + \Delta y \end{vmatrix} + \sigma$$

ehk

$$\Delta u = \frac{1}{2}\,(x\,\Delta y - y\,\Delta x) + \sigma.$$

Kolmnurgal POQ on joonisel 315 silmaga hästi nähtav pindala, segmendi pindala σ silm aga ei eralda, sest kaar $\overset{\frown}{PQ}$ ja kõõl $\overline{PQ}$

langevad joonisel ühte. Segmendi pindala σ on silmanähtavalt kõrgemat järku väike kui kolmnurga POQ pindala. Kirjutades sümboli Δx asemele dx ning asendades juurdekasvu Δu tema lineaarse lähendiga, diferentsiaaliga du, ja juurdekasvu Δy tema lähendiga dy, saame lõpuks, et

$$du = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Siit järeldub tuletise $du : dx$ jaoks avaldis

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}(xy' - y).$$

Konkreetsel juhul, kui $y = \frac{1}{x}$, saame

$$du = \frac{1}{2}\left(x \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot dx - \frac{1}{x} \cdot dx\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x}dx - \frac{1}{x}dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-2\frac{dx}{x}\right) = -\frac{dx}{x} \text{ ehk } \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}.$$

Märkus. Diferentsiaali mõiste põhjapanev teoreetiline ja praktiline tähtsus selgub alles integraalarvutuses, mille käsitlemisega alustame oma raamatu II köidet. Seal tegeleme veel kord ka mitmesuguste suuruste diferentsiaalide koostamisega.

Funktsiooni diferentsiaali invariantsus argumendi vahetamisel

Olgu antud funktsiooni funktsioon

$$y = f(u),$$
$$u = g(x).$$

Nagu teame, sel puhul

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Kirjutades viimase võrduse diferentsiaalides, saame

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Esimesel pilgul näib, et see võrdus kehtib endastmõistetavalt, sest murru $dy : dx$ lugejat ja nimetajat on korrutatud ühe ja sama arvuga du, mille puhul murru väärtus ei muutu. Teiste sõnadega, näib, et paremal poolel seisva avaldise taandamine ühise teguri du puhul lugejas ja nimetajas viib tagasi murru $dy : dx$ juurde. Niisugune tõlgendus on aga väär, sest lugejas ja nimetajas seisev diferentsiaal du ei tähenda üht ja sedasama: esimeses teguris $dy : du$ on ta mõeldud sõltumatu muutuja u diferentsiaalina [$y = f(u)$], teises teguris $du : dx$ aga sõltuva muutuja dife-

rentsiaalina $[u = g(x)]$. Et murdu $\frac{dy}{dx}$ võib laiendada murruks $\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$ ja murdu $\frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$ taandada murruks $\frac{dy}{dx}$ hoolimata sümboli du erinevast sisulisest tähendusest lugejas ja nimetajas, on omaette tähtis ja kaugeleulatuvate järeldustega matemaatiline tõde.

Öeldu otseseks järelduseks on tähtis lause diferentsiaali invariantsuse kohta argumendi vahetamisel:

funktsiooni $y = y(t)$ diferentsiaal avaldub ikka kujul $dy = y'(t)\,dt$, sõltumatult sellest, kas muutuja t on argument või mõne teise muutuja funktsioon.

Lause tõestuseks korrutame võrduse $y'_x = y'_u(u) \cdot u'_x(x)$ kumbagi poolt diferentsiaaliga dx:

$$y'_x \cdot dx = y'_u(u) \cdot u'_x(x) \cdot dx.$$

Et

$$u'_x(x)\,dx = du,$$

siis

$$dy = y'_u(u)\,du.$$

Nüüd on aga y argumendi x funktsioon ja seepärast

$$dy = y'_x(x)\,dx.$$

Kahe viimati kirjutatud y diferentsiaali avaldise võrdlemine näitab nende kujuühtsust:

funktsiooni diferentsiaal on invariantne argumendi igasuguse teisenduse suhtes.

Diferentsiaali invariantsuse lause põhjal saab iga kahe muutuja vahelist seost tõlgendada kaudse seosena kuitahes mitme vahepealse lüliga:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx} = \dots$$

Lühidalt: tuletise avaldises $\frac{dy}{dx}$ võime lugejat ja nimetajat korrutada nii mitme suuruse diferentsiaaliga kui tahame. Selles lauses on sõnastatud diferentsiaalarvutuse põhimõtteliselt tähtsaim tõde, mis kergendab tunduvalt avaldiste kirjutamist diferentsiaalides ja on suureks abiks keerukamate avaldiste diferentseerimisel.

Näide 1. Olgu $u = u(x)$ ja $v = v(x)$. Teame, et

$$[u(x)\,v(x)]' = u(x)\,v'(x) + v(x)\,u'(x).$$

Korrutades selle võrduse mõlemaid pooli diferentsiaaliga dx, saame korrutise diferentsiaali avaldise

$$d[u(x)\,v(x)] = u(x)\,dv(x) + v(x)\,du(x)$$

ehk, lihtsamalt,

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Diferentsiaali avaldise invariantsuse põhjal jääb see valem kehtima ka sel juhul, kui u ja v ei sõltu argumendist x otse, vaid kuitahes mitme vahendava muutuja kaudu.

Samal viisil näeksime, et

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Üht ja sama lauset diferentseerimise kohta võib seega kirjutada nii tuletiste kui ka diferentsiaalide kaudu. Viimasel kirjutusviisil on esimesega võrreldes see eelis, et pole tarvis nimetada, missugune suurus on sõltumatu muutuja. Selle kohta võib kokku leppida üks kord nii, teine kord teisiti, küsimust iga kord lihtsuse ja otstarbekuse seisukohalt otsustades. Küllalt suure tähtsusega on ka asjaolu, et paljud diferentsiaalides kirjutatud valemid on palju sümmeetrilisemad ja seega kergemini meelde jäävad kui samasisulised tuletistes kirjutatud valemid. Toome mõned võrdlused:

Tuletistes kirjutatud valem	Diferentsiaalides kirjutatud valem
Kui s tähendab kõverjoone kaare pikkust, siis	
$s' = \sqrt{1 + y'^2}$	$ds^2 = dx^2 + dy^2.$
Kui τ tähendab kõverjoone kaare puutuja tõusunurka, siis	
$\sin\tau = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$	$\sin\tau = \frac{dy}{ds}$
$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}$	$\cos\tau = \frac{dx}{ds}.$

Kui u tähendab pindala kõvera ja kahe koordinaatide alguspunktist lähtuva kiire vahel, siis

$$u' = \frac{1}{2}(xy' - y) \qquad du = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

Kui joone ja ta normaali ühise punkti märgime (x, y) ja normaali suvalise punkti (X, Y), siis normaali võrrand avaldub kujul

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x) \quad \text{ehk} \quad (X - x)dx + (Y - y)dy = 0.$$

Näide 2. Leiame funktsiooni

$$y = \ln\cos\sqrt{1 + x^2}$$

tuletise.

Töötades diferentsiaalides, saame

$$dy = d \ln \cos \sqrt{1+x^2} = \frac{d \cos \sqrt{1+x^2}}{\cos \sqrt{1+x^2}} = \frac{-\sin \sqrt{1+x^2}\ d\sqrt{1+x^2}}{\cos \sqrt{1+x^2}} =$$

$$= -\tan \sqrt{1+x^2}\ \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}} = -\tan \sqrt{1+x^2}\ \frac{2x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}},$$

nii et

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x \tan \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Teist järku diferentsiaal

Nagu teame, tähendab avaldises $dy = f'(x)\,dx$ diferentsiaal dx argumendi suvalist juurdekasvu, mis on sõltumatu argumendi väärtusest. Seepärast

$$d(dy) = d[f'(x)\,dx] = [df'(x)]\,dx = f''(x)\,dx\,dx.$$

On viisiks kirjutada $d(dy)$ asemel d^2y ja $dx\,dx$ asemel dx^2, lugedes neid «ü teine diferentsiaal» ja «de iks ruudus»:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Siit saame funktsiooni teist järku tuletise ehk funktsiooni teise tuletise märkimisviisi Leibniz'i järgi:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

mida loeme «de teine ü-st iksi järgi kaks korda». Analoogiliselt saab tähistada kolmandat, neljandat jne. järku tuletisi.

AINEREGISTER

A

Absoluutne viga 59
Absoluutväärtus 33, 50, 51
Abstsiss 138, 142—144
Abstsisside alguspunkt 138
Abstsisslõik 143
Abstsisstelg 138, 142
Abstsisstelje kahe punkti vaheline kaugus 141
Afiinsed teisendused 344
Ahelreegel 520
Ajaliselt kulgeva nähtuskäigu kiirus 537, 538
Aksioomid 11, 12
Alamdeterminandid 251
Aleksandrov, P. S. 19
Algabstsiss 216
Algebralised funktsioonid 399
Algordinaat 216
Algoritmid 428
Amplituud 450
Analüütiline geomeetria 22, 210
Andmete täpsusetus 52—54
Apollonios 11, 12
Argumendi diferentsiaal 701
— tuletis 511, 512
Argument 162, 351
Argumentfunktsioon 517
Arhimedes 11, 12, 115
Aristoteles 14
Aritmeetiline keskmine 114—116, 119—121
— — mõõtmistulemuste 124, 128, 129, 132
Aritmeetilise keskmise «keskmine viga» 132
— — usaldatavuse määr 132
Arkusfunktsioonid 597—608
Arkuskoosinuse tuletis 602
Arkuskoosinusfunktsioon 600, 601
Arkuskootangensfunktsioon 605
Arkuskootangensi tuletis 606
Arkussiinuse tuletis 602
Arkussiinusfunktsioon 599, 600
Arkustangensfunktsioon 605
Arkustangensi tuletis 606
Arv *e* 623, 625, 626, 629—631
— — lõpmatu summana 629, 630
— — piirväärtusena 625, 626
Arvelaud 40, 41
Arvu absoluutväärtus 33, 50, 51
— *e* tõkked 630, 631
— kuubi leidmine arvutuslükatil 99
— — relatiivne viga 68
— — viga 65
— kuupjuure leidmine arvutuslükatil 99
— — relatiivne viga 68
— — viga 65
— leidmine logaritmi järgi arvutuslükatil 96
— logaritmi leidmine arvutuslükatil 96
— pöördväärtuse leidmine arvutuslükatil 99
— ruudu leidmine arvutuslükatil 97
— — relatiivne viga 68
— — viga 64
— ruutjuure leidmine arvutuslükatil 98
— — relatiivne viga 68
— — viga 65
Arvude jagamine arvutuslükatil 104—106
— korrutamine arvutuslükatil 103—106
— kujutamine lõikudena 79, 80
— suurusjärk 655—658
— suurusklassid 656
— väiksusjärk 657—661
— ümardamine 55—57
Arvukontiinuum 417, 435—437
Arvukontiinuumi täiuslikkus 437
Arvutamise põhiseadused 27—31
— põhiseaduste permanentsuse printsiip 35
Arvutuslükati 91, 93—112
Arvutusmasin 42
Arvutusskeemid 43—45, 165, 166
Arvutustulemuste kontrollimine 43, 45

Arvuvahemike graafiline kujutamine 84, 85
Assotsiatiivsus, korrutamise 30
— liitmise 28, 29
Astme suurusjärk 658
— tõkestamatu kahanemine 450—452
— — kasvamine 445, 446
Astmefunktsiooni graafikud 386—388
— tuletis 515—517, 633
Astmesõltuvus 382—388, 398, 401—404
Asümptoot 526

B

Bacon, R. 350
Bernstein, S. N. 19
Bézout' teoreem 407

C

Cauchy, A. L. 706
— keskväärtuse lause 687, 688
— — valem 688
Celsiuse skaala 87, 88, 361

D

Descartes, R. 14, 15, 210, 478
Determinandi arendis 237, 245
— — ühe veeru elementide järgi 251
— elemendid 236, 245
— liikmed 237, 245
— read 237, 245
— veerud 237, 245
Determinandid 235—251
Determinant, kaherealine 235—238
— kolmerealine 244—249
— teisendus- 345
— võrrandisüsteemi 239
Diagramm 169
— lõik- 170
Diameetrid 287—294
— ellipsi 290—292
— hüperbooli 293, 294
— parabooli 288—290
— ringjoone 297
Diferents 497
Diferentseerimine 493, 497
Diferentseeruvad funktsioonid 511
Diferentsiaal, argumendi 701
— funktsiooni 700—715
Diferentsiaalarvutus 706
Dispersioon 127
Distributiivsus 30

E

Eksponentfunktsioon 396, 631
Eksponentfunktsiooni käigugraafik 397
— tuletis 631, 632
Eksponentsõltuvus 395—398, 404, 405
Ekstreemumid 550—560
Ekstsentrilisus, ellipsi 274
— hüperbooli 283, 284
— parabooli 298
Elastsusmoodul 362
Elektronarvutusmasinad 20
Ellips 157, 158, 268—277, 296
Ellipsi diameetrid 290—292
— ekstsentrilisus 274
— fokaaltelg 269
— fookused 158, 268
— haripunktid 271
— juhtjooned 295—297
— kaasdiameetrid 292, 293
— kaastelg 269
— keskpunkt 269, 273
— kõverus 616
— kõverusraadius 616
— kõverusringjoon 616
— kõõlude kaasdiameetrid 291
— lamedus 274
— lineaarsed elemendid 273
— parameeter 273
— parameetrilised võrrandid 275
— pindala 344
— poolteljed 272
— punkti fokaalkaugused 269, 270, 294, 295
— puutuja 521—525
— — fokaalomadus 523—525
— teljed 271, 272
— võrrand 270, 271
Empiirilised seadused 400
Engels, F. 9, 11, 13, 159, 349, 477, 478
Eudoksos 11
Eukleides 11, 12, 16, 17, 20
Euler, L. 15, 16

F

Fokaalkaugused, ellipsi punkti 269, 270, 294, 295
— hüperbooli punkti 278, 297
Fokaaltelg, ellipsi 269
— hüperbooli 278
Fookus, parabooli 260
Fookused, ellipsi 158, 268
— hüperbooli 277
Formaalne seos 195

Funktsionaalne seos 195
— sõltuvus 22, 161—194, 349, 352, 359—399
Funktsionaalse sõltuvuse parameetriline esitusviis 189—194
— — pööramine 591—597
Funktsioon 162, 351
— arkuskoosinus- 600, 601
— arkuskootangens- 605
— arkussiinus- 599, 600
— arkustangens- 605
— eksponent- 396, 631
— funktsiooni 517
— ilmutamatult antud 186—188
— integraal- 709
— kahe muutuja 166, 167
— kuup- 385
— liit- 518
— lineaar- 366—368
— mitmene 188, 189, 593, 594
— perioodiline 598
— pöörd- 591, 592
— ruut- 383
— tuletis- 498
— ühene 188, 583
— üld-ruut- 388, 567—571
Funktsiooni aeglustuv muutumine 562, 563
— algväärtus 367
— asümptootiline väärtus 467
— asümptootilise kasvamise kiirus 692—694
— diferentsiaal 700—715
— diferentsiaali geomeetriline tõlgendus 702
— — invariantsus argumendi vahetamisel 712—715
— — väiksusjärk 703
— ekstreemumid 550—560
— funktsioon 517
— funktsiooni pidevus 518
— — tuletis 517—521, 542
— graafiku tõus 497
— juurdekasvu väiksusjärk 703
— kahanemine 547—550, 682
— kasvamine 547—550, 682
— katkevus 479—483
— kiirenev muutumine 562, 563
— käigugraafik 167—177
— — polaarkoordinaatides 176, 177
— käigujoon 173
— käigukõver 173
— käigukõvera haripunkt 550, 566
— — käänupunkt 563—565, 567
— — lohupunkt 550, 566
— — pöördepunkt 550
— ligikaudne avaldis 669
— lineaarne lähend 669, 675—677
— lineaarse lähendi viga 694—698
— maksimum 550—553, 558, 559
— maksimumi tunnus 552, 553
— miinimum 550—553, 558, 559
— miinimumi tunnus 552, 553
— muudu hindamise valem 635—638
— määramispiirkond 438—442
— naturaallogaritmi tuletis 624
— pidevus 478, 479, 483—488
— pidevuse tunnus 483—486
— piirväärtus 461—467, 472—477
— relatiivne kasvamiskiirus 624
— ruutlähend 669
— ruuttrinoomiline lähend 677, 678
— ruuttrinoomilise lähendi viga 697
— skaala 177—184
— sümbol 164
— tuletis 496—500, 706
— väärtuste varu 438
Funktsioonid, algebralised 399
— arkus- 597, 598
— diferentseeruvad 511
— irratsionaalsed 398, 399
— murdratsionaalsed 395, 571—577
— ratsionaalsed 393—395, 398, 399
— transtsendentsed 399
— täisratsionaalsed 394
Funktsioonide asümptootiline käitumine 468—472
Füüsikalise suuruse tõeline väärtus 460

G

Galilei, G. 14, 15, 22
Gauss, K. F. 132
Gaussi tähistusviis 132, 133
— valem 131
Geomeetriline jada 452
— keskmine 116, 117, 119—121
Goldbach, C. 19
Graafiline interpolatsioon 353, 354
Graafilised arvutusvõtted 79

H

Hajuvus 125—130, 149, 150
Haripunkt, funktsiooni käigukõvera 550, 566
— parabooli 261
Haripunktid, ellipsi 271
— hüperbooli 280
Harmooniline keskmine 118—121

Herakleitos 349
Heron 11, 12
Hetkeline tootmiskiirus 536, 537
Hilbert, D. 19
Hooke, R. 362
Hooke'i seadus 362, 363
Horner, J. K. 391
Horneri skeem 391, 392, 408, 413
Huygens, C. 488
Hälve 125
Hüperbool 277—286, 297, 298
— rist- 285, 286
Hüperbooli asümptoodid 282, 283, 526
— diameetrid 293, 294
— ekstsentrilisus 283, 284
— fokaaltelg 278
— fookused 277
— haripunktid 280
— imaginaartelg 280
— juhtjooned 297, 298
— kaasdiameetrid 293, 294
— kaashüperbool 284, 285
— kaastelg 278
— keskpunkt 279
— kõõlude kaasdiameetrid 293
— parameeter 283
— punkti fokaalkaugused 278, 297
— puutuja 522, 525, 526
— — fokaalomadus 525
— reaaltelg 280
— võrrand 279, 280

I

Ilmutamatult antud funktsioon 186—188
Imaginaararvud 433
Imaginaartelg, hüperbooli 280
Integraal 23
Integraalarvutus 709
Integraalfunktsioon 709
Interpolatsioon 406—413
— graafiline 353, 354
Interpolatsioonivalem 409
Interpolatsioonivõte võrrandite numbriliseks lahendamiseks 652—654
Invariandid 337, 338
Irratsionaalarvud 417, 425, 430—433
Irratsionaalsed funktsioonid 398, 399
Isogonaalsed teisendused 341

J

Jagamine 38
— graafilises käsitluses 84
— lühendatud 78, 79
Jagamise tehnika 42
Jagatise piirväärtus 458, 459
— relatiivne viga 67, 68
— suurusjärk 658
— tuletis 514, 515
— viga 63, 64
Joone ja telgede lõikepunktid 209
— kõverus 610—618
— — antud punktis 613
— punkti ordinaadi leidmine antud abstsissi järgi 208
— sümmeetria alguspunkti suhtes 209, 210
— — telgede suhtes 209
— võrrand 199—208
— — polaarkoordinaatides 205, 206
— võrrandi koostamine 201—205, 207—210
Joonise töötamistäpsus 81, 82
— töötamisviga 82
Joonte lõikepunktid 208
Juhtjoon, parabooli 260
Juhtjooned 260, 294—298
— ellipsi 295—297
— hüperbooli 297, 298
Juurdekasv 354, 355
Järkjärgulise lähendamise meetod 425—427
Jäägiteoreem 407
Jääv suurus 156

K

Kaasdiameetrid, ellipsi 292, 293
— — kõõlude 291
— hüperbooli 293, 294
— — — kõõlude 293
— parabooli kõõlude 290
Kaashüperboolid 284
Kaastelg, ellipsi 269
— hüperbooli 278
Kahanemiskiirus 356
Kahe muutuja funktsioon 166, 167
— sirgjoone lõikepunkt 233, 234, 239—243
— — risfseisu tunnus 233
— — rööpseisu tunnus 233
— — vastastikune asend 231—234
Kahekatteline koonus 300
Kaherealine determinant 235—238
Kaksikkoonus 299
Kalle 211
Karakteristikud 354
Kardioid 206
Kasvamiskiirus 356, 357
Kasvamistempo 357, 358

Kaudne mõõtmine 61
Kaudse mõõtmise vea hindamine 61
— — — hindamise valem 638—644
Kepler, J. 14
Kera ruumala arvutamine arvutuslükatil 107
Keskmine, aritmeetiline 114—116, 119—121
— geomeetriline 116, 117, 119—121
— harmooniline 118—121
— kasvamiskiirus 356, 357
— kasvamistempo 357, 358
— mõõtmistulemuste 124, 128, 129, 132
— ruut- 121, 122
Keskmised väärtused 114—122
Keskpunkt, ellipsi 269, 273
— hüperbooli 279
Keskväärtuse lause, Cauchy 688
— — Lagrange'i 680
— valem, Cauchy 688
— — Lagrange'i 680
Kiiruse mõõtühikud 530
Kinnistasapind 330
Kolmerealine determinant 244—249
Kolmnurga külje tõusunurk 335
— pindala 151, 152
— raskuspunkti koordinaadid 147, 148
Kolmogorov, A. N. 19
Kommutatiivsus, korrutamise 29
— liitmise 28
Kompleksarvud 433
Konstandi tuletis 511
Konstant 156
Konstantse teguri teoreem 512
Koonuse ruumala arvutamine arvutuslükatil 107
Koonuslõiked 299—304
Koordinaadid 22, 142, 152—154, 210
— polaar- 152—154
— rist- 141—145, 153, 154
Koordinaatide meetod 210
— teisendamine 252—259
Koordinaatpaber 145
Koordinaattasapind 142
Koordinaattasapinna veerandid 142, 143
Koordinaatteljestik 142
Koosinusfunktsiooni pidevus 584
— tuletis 589
Kootangensfunktsiooni pidevus 585
— tuletis 589
Kopernik, M. 13, 14
Korrutamine graafilises käsitluses 83, 84
— lühendatud 75—77
Korrutamise assotsiatiivsuse seadus 30
— kommutatiivsuse seadus 29
— tehnika 41, 42
Korrutis 29
Korrutise piirväärtus 458
— relatiivne viga 67
— suurusjärk 658
— tuletis 513, 514
— viga 63
Kovalevskaja, S. V. 17
Krõlov, A. N. 18, 21
Kujutusühik 80, 81
Kumer kõver 561, 562
Kuubi duplikatsioon 423
Kuupfunktsioon 385
Kuupparabool 386
Kuupsõltuvus 385, 386, 398
Kuupsõltuvuse geomeetriline vaste 386
Kõrgem matemaatika 21, 493
Kõrgemat järku tuletised 544, 545
Kõver, kumer 561, 562
— langev 561, 562
— nõgus 561, 562
— siinus- 598, 599
— tangens- 603, 604
— tuletis- 498
— tõusev 561, 562
Kõvera asümptoot 526
— haripunkt 550, 566
— kaare pikkus 609
— — pikkuse tuletis 609, 610
— kumeruse tunnus 561, 562
— käänupunkt 563—565, 567
— lohupunkt 550, 566
— normaal 506
— nõgususe tunnus 561, 562
— puutuja 493—496, 500, 501
— — tõus 495—497
— pöördepunkt 550
Kõverus, ellipsi 616
— joone 610—618
— ringjoone 610—612
— sirgjoone 615
Kõveruskeskpunkt 614, 618
Kõverusraadius 614
— ellipsi 616
— parabooli 615
— sirgjoone 615
Kõverusringjoon 615—617
— ellipsi 616
Kõõl 287
Käänupunkt 563—565, 567
Kümnendlogaritmi tuletis 619—622
— viga 644, 645
Kümnendlogaritmide moodul 621

L

Lagrange, J. L. 496, 706
Lagrange'i keskväärtuse lause 679—684
— — valem 680
Lahutamine graafilises käsitluses 83
— laenamisviisil 40
— liitmise teel 40
— lühendatud 74
— regulaarskaalade abil 86, 87
Lahutamise tehnika 40, 41
Langev kõver 561, 562
— sirgjoon 214
Langus 211
Leibniz, G. W. 14, 15, 489, 493, 701, 706, 709, 715
Lenin, V. I. 18, 478
L'Hôpitali lause 688—692
Ligikaudse arvu standardkirjutis 56
Ligikaudsed valemid 667—675
Lihtmurrud 36
Liidetavad 28
Liigmurrud 36
Liikumise seadus 527
Liikumiskiirendus 543, 544
Liikuv tasapind 330
Liitfunktsioon 518
Liitmine graafilises käsitluses 82, 83
— lühendatud 72—74
— regulaarskaalade abil 86, 87
Liitmise assotsiatiivsuse seadus 28, 29
— ja korrutamise distributiivsuse seadus 30
— kommutatiivsuse seadus 28
— tehnika 40
Limes 461—463
Lineaarbinoom 366, 390
Lineaarfunktsioon 366—368
Lineaarfunktsiooni pidevus 479
Lineaarne interpolatsioon 373—376
— — logaritmide tabelites 698, 699
— lähend, funktsiooni 669, 675—677
— — polünoomi 668
— sõltuvus 365—376, 398, 400, 401
— võrrand 219
— võrratus 48
Lineaarse sõltuvuse definitsioon 365, 366
— — graafik 370, 371
— — tunnus 368—370
— — vastastikkus 366
Lineaarsed teisendused 344, 345
Lineaarsete võrratuste lahendamine 48
Lineaarvõrrandite simultaansus 243—245
Lobatševski, N. I. 17, 19
Loenduv hulk 421
Logaritmfunktsiooni lineaarne lähend 697, 698
— tuletis 619—625
Logaritmiline arvutuslükati 91, 93—112, 184, 185, 645, 646
— paber 404
— skaala 89—93, 177
Logaritmilise skaala esimene põhiomadus 90, 91
— — põhilõik 89
— — teine põhiomadus 92, 93
Logaritmsõltuvus 398
Lohupunkt 550, 566
Loodusnähtuste pidevus ja katkevus 488—490
Lõigete meetod 350
Lõigu jaotamine antud suhtes 139, 140, 146, 147
— keskristsirge 201
Lõigualuse trapetsi pindala 150, 151
Lõikdiagramm 170
Lõplike juurdekasvude valem 681
Lõplikud suurused 440
Lõpmatus 49, 160
Lähendi parandamine 427, 428
Lähendite koonduvus 428—430
Lühendatud arvutusvõtted 72—79
— jagamine 78, 79
— korrutamine 75—77
— lahutamine 74
— liitmine 72—74
Lükke komponendid 332, 333
Lükked 331—333

M

Marx, K. 349, 478
Mastaabi teisendus 340
Matemaatiline analüüs 22—24
Miller, D. K. 60
Millimeetripaber 145, 176
Mitmene funktsioon 188, 189, 593, 594
Mittelineaarsete võrratuste lahendamine 48, 49
Mitteühtlane liikumine 531—534
— tootmiskäik 536
Mitteühtlase liikumise graafik 531, 532
— — hetkeline kiirus 533, 534
— — keskmine kiirus 532, 533
— — seadus 531
Murdlineaarne sõltuvus 379—382
Murdlineaarse sõltuvuse graafik 380
Murdratsionaalse funktsiooni suurusjärk 662, 663

Murdratsionaalsed funktsioonid 395, 571—577
Murdude jagamine 38
— korrutamine 37
— lahutamine 37
— liitmine 37
Murdumisnäitaja 558
Murru tuletis 514
— tõkestamatu kahanemine 447—449
Murrud 35—37
Mushelišvili, N. I. 19
Muut 354
Muutuja 156
— muutumispiirkond 159, 160
— väärtuste varu 159
Muutumatud suurused 155—159
Muutumiskiirus 356
Muutuva suuruse piirväärtus 456—460
Muutuvad suurused 155—159
Mõttetud numbrid 71, 72
Mõõdetava suuruse sobivaim väärtus 122—124
— — tõeline väärtus 122, 124, 125, 130
Mõõtarvude teisendamine 57
Mõõtmine, kaudne 61
— otsene 61
Mõõtmise absoluutne viga 59
— relatiivne viga 59
Mõõtmistulemuse näiv viga 123
— relatiivse vea ülemäär 58
— tõeline viga 123, 124
— usaldatavuse määr 131
Mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine 124, 128, 129, 132
— spekter 124, 125
Mõõtude ümberarvutamine regulaarskaalade abil 87

N

Naturaalarvud 27, 434
Naturaalarvude korrutamine 29, 30
— liitmine 28, 29
Naturaallogaritmi tuletis 622, 623
Naturaallogaritmid 623
Naturaallogaritmide alus 623, 625, 626, 629—631
Negatiivsed täisarvud 32
Newton, I. 15, 488, 493, 544, 706, 709
Newtoni binoom 629
— II seadus 365
— võte võrrandite numbriliseks lahendamiseks 647—652
Nihked 331
n-nda astme paraboolid 386
Noonius 88
Normaal 217, 506
Null 32
Nulliga jagamise teostamatus 38, 39
Nullpunkt 138, 142
Null-tuletisteoreem 682, 683
Nummerduv hulk 421
Nurga absoluutmõõt 579—581
— kaarmõõt 581
— kraadmõõt 578—581
Nurgakraad 578
Nurk kahe sirgjoone vahel 231, 232
Nõgus kõver 561, 562
Nähtuskäigu hetkeline kiirus 538
— kiirus 493, 538—540
Nähtuskäiku valitsev seadus 537
Näitajad 354

O

Orbiit 527
Ordinaat 142, 144
Ordinaatlõik 143
Ordinaattelg 142
Otsene mõõtmine 61

P

Parabool 260—265
— kuup- 386
Parabooli diameetrid 288—290
— ekstsentrilisus 298
— fookus 260
— haripunkt 261
— juhtjoon 260
— kõverusraadius haripunktis 615
— kõõlude kaasdiameetrid 290
— parameeter 260
— puutuja 502, 503
— telg 261
— võrrand 261—265
Parameeter, ellipsi 273
— hüperbooli 283
— parabooli 260
Parameetrid 189, 190, 192, 193, 207, 211, 218, 380, 581, 582
Parameetrilised võrrandid, ellipsi 275
Partes proportionales 376
Peegeldusteisendus 341
Peegellugemi meetod 641—643
Perioodiline funktsioon 598
Perpendikulaar 217
Pidevjoongraafik 171—175
Pidevus, funktsiooni 478, 479, 483—488
— funktsiooni funktsiooni 518
— koosinusfunktsiooni 584

— kootangensfunktsiooni 585
— pöördfunktsiooni 594, 595
— siinusfunktsiooni 584
— tangensfunktsiooni 585
Piirväärtus 456
— jagatise 458, 459
— korrutise 458
— muutuva suuruse 456—460
— summa 458
— tõkestamatult kahaneva suuruse 456
— vahe 458
Pindala, ellipsi 344
— kolmnurga 151, 152
— lõigualuse trapetsi 150, 151
— ringi segmendi 582
— — sektori 581, 582
Platon 12
Poincaré, H. 19
Polaarkaugus 153
Polaarkoordinaadid 152—154
Polaarnurk 153
Polaartelg 153
Polubarinova-Kotšina, P. V. 19
Polünomiaalne sõltuvus 398
Polünoomi aste 390
— ligikaudne avaldis 668
— lineaarne lähend 668
— suurusjärk 662
— tuletis 516
Polünoomid 388—395
Poollogaritmiline paber 405
Poolus 153
Proportsionaalsuse piir 363
Protsendiülesannete lahendamine arvutuslükatil 103
Protsessi kulgemise seadus 537
Positiivsed täisarvud 32
Punkti asetsemine joonel 208
— kaugus sirgest 230, 231
— ümbrus 550
Punktridagraafik 169, 170
Puutuja, ellipsi 521—525
— hüperbooli 522, 525, 526
— kõvera 493—496, 500, 501
— parabooli 502, 503
— ringjoone 493, 522
— risthüperbooli 505, 506
Pöördfunktsioon 591, 592
Pöördfunktsiooni graafik 592, 593
— pidevus 594, 595
— tuletis 595—597
Pöördparaboloid 504
Pöördvõrdeline sõltuvus 377—382, 398
Pöördvõrdelise sõltuvuse definitsioon 377
— — geomeetriline vaste 379
— — tunnus 378
— — vastastikkus 377
— — väljendusvalem 379
Pöördvõrdelisuse konstant 378
Püstteljega parabooli üldvõrrand 264, 265
Pütagoras 12, 45, 149, 164, 166
Põhjuslik seos 195

R

Raadiusvektor 153
Radiaan 580
Ramsay, G. 60
Ratsionaalarvud 38, 39, 417—421
Ratsionaalarvude loenduvus 419—421
— vald 418, 434
— valla tihedus 418, 419
Ratsionaalne sõltuvus 398
Ratsionaalsed funktsioonid 393—395, 398, 399
— operatsioonid 38
Rayleigh, J. W. 60
Reaalarvud 417, 433
Reaalarvude loendamatus 435, 436
— vald 433—435
Réaumuri skaala 87, 88, 361
Reeperid 22
Regulaarne skaala 86—88
Relatiivne viga 58, 59
— — arvu kuubi 65
— — — kuupjuure 65
— — — ruudu 68
— — — ruutjuure 68
— — jagatise 67, 68
— — summa 65, 66
Relatiivse vea ülemmäär 58
Riesenfeld, E. H. 60
Ringi pindala arvutamine arvutuslükatil 106, 107
— segmendi pindala 582
— sektori pindala 581, 582
Ringjoon 265—268
Ringjoone diameetrid 287
— kaare pikkus 581
— kanooniline võrrand 266
— kõverus 610—612
— pikkus 466
— puutuja 493, 522
— sirgestamine 464—466
— võrrand 265, 266
Risthüperbool 285, 286
Risthüperbooli puutuja 505, 506
Ristkoordinaadid 141—145, 153, 154
Rolle'i teoreem 684—686
Rotatsioon 335—337

Rotatsiooni analüütiline avaldis 336, 337
Rotatsioonide liitumine 337
Ruudu duplikatsioon 422
Ruutfunktsioon 383
Ruutfunktsiooni skaala 178
— tuletis 501, 502
Ruutjuurfunktsiooni tuletis 504
Ruutkeskmine 121, 122
Ruutsõltuvus 382—385, 398
Ruutsõltuvuse definitsioon 382, 383
— geomeetriline vaste 384, 385
— tunnus 383, 384
Ruuttrinoom 388, 390

S

Sarnasustegur 339
Sarnasusteisendus 339—341
Seadus, Hooke'i 362, 363
— korrutamise assotsiatiivsuse 30
— — kommutatiivsuse 29
— liikumise 527
— liitmise assotsiatiivsuse 28, 29
— — ja korrutamise distributiivsuse 30
— — kommutatiivsuse 28
— mitteühtlase liikumise 531
— nähtuskäiku valitsev 537
— protsessi kulgemise 537
— tootmiskäigu 534, 535
— ühtlase liikumise 528, 531
— — tootmiskäigu 535
Seos, formaalne 195
— funktsionaalne 195
— põhjuslik 195
Siinuse väärtuste leidmine arvutuslükatil 108—111
Siinusfunktsiooni pidevus 584
— tuletis 588
Siinuskõver 598, 599
Silindri ruumala arvutamine arvutuslükatil 107
Simultaansed lineaarvõrrandid 243—245
Sirgete paariks lagunev teist järku joon 324, 325
Sirgjoone algabstsiss 216
— algordinaat 216
— kõverus 615
— kõverusraadius 615
— normaalvõrrand 227—229
— punkti abstsiss 137, 138
— telglõigud 216
— tõus 213—215
— tõusunurk 211, 212, 214
— võrrand polaarkoordinaatides 226, 227
— võrrandid 218—229
— üldvõrrand 221, 228, 229
Sirglõigu keskpunkti abstsiss 139
— — koordinaadid 146
Skaala, logaritmiline 89—93, 177
— põhilõik 89
— Réaumuri 87, 88, 361
— regulaarne 86—88
— ruutfunktsiooni 178
— töötamise relatiivne viga 93
Steklov, V. A. 17
Summa 28
— absoluutväärtus 50
— piirväärtus 458
— relatiivne viga 65, 66
— tuletis 512, 513
— viga 62
Suuruse kasvamistempo 624
— katkev muutumine 171
— kõikumisvahemik 113
— ligikaudse väärtuse viga 54
— lõppväärtus 355
— lähteväärtus 355
— maksimaalne väärtus 113
— minimaalne väärtus 113
— määramatuse vahemik 55
— pidev muutumine 172
— tõke 440
Suurusjärk, arvude 655, 658
— astme 658
— jagatise 658
— korrutise 658
— polünoomi 662
— tõkestamatult kasvava funktsiooni 661
Suuruste liitprotsendiline kasvamine 626—629
— sõltuvus 161—163
Sõltumatu muutuja 161
Sõltuv muutuja 161
Sõltuvus, astme- 382—388, 398, 401—404
— eksponent- 395—398, 404, 405
— funktsionaalne 22, 161—194, 349, 352, 359—399
— kuup- 385, 386, 398
— lineaarne 365—376, 398, 400, 401
— logaritm- 398
— murdlineaarne 379—382
— polünomiaalne 398
— pöördvõrdeline 377—382, 398
— ratsionaalne 398
— ruut- 382—385, 398
— suuruste 161—163
— võrdeline 359—365, 398
— üld-ruut- 388—390
Sõltuvused, trigonomeetrilised 398

Ž

Zukovski, N. J. 18

T

Tabel suuruste sõltuvuse väljendajana 162, 163, 351, 352
Tabelivahe 698
Tales 11, 12
Tangensfunktsiooni pidevus 585
— tuletis 589
Tangensi väärtuste leidmine arvutuslükatil 109—111
Tangenskõver 603, 604
Tasandatud vaatlusandmete tabel 353
Tasapinna kahe punkti vaheline kaugus 148—150
Tegurid 29
Teineteisest sõltumatud suurused 160—162
— sõltuvad suurused 160—162
Teise astme üldvõrrand 306
— — üldvõrrandi suur diskriminant 325—328
— — — taandamine kanoonilisele kujule 316—324
— — — teisendumine teljestiku pööramisel 311, 312
— — — — — rööplükkel 310, 311
— — — väike diskriminant 313, 314
Teisendusdeterminant 345
Teist järku diferentsiaal 715
— — joone keskpunkt 313
— — — peasihid 314, 315
— — — sümmeetria 307—309
— — — üldvõrrand 306
— — jooned 260
— — paraboolset tüüpi jooned 320—324
— — tsentraalse joone sümmeetriateljed 315, 316
— — tsentraalsed jooned 313
Telglõigud 216
Teljed 138, 142
— ellipsi 271, 272
Teljestiku pööramine 256, 257
— rööplüke 254—256
Teoreem, jäägi- 407
— konstantse tuletise 512
— null-tuletis- 682, 683
— Rolle'i 684—686
Tootmisgraafik 535
Tootmiskiirus 534—537
Tootmiskäigu seadus 534, 535
Trajektoor 192, 527
Transformatsioonid 330
Translatsioon 331, 335
Translatsiooni analüütiline avaldis 333, 334
Translatsioonide liitumine 334, 335
Transtsendentsed funktsioonid 399
Treppjoongraafik 170, 171
Trigonomeetrilised sõltuvused 398
Trigonomeetriliste funktsioonide pidevus 583—585
— — tuletised 588—590
— — väärtused arvutuslükatil 107—111
Tsükloid 582, 583
Tšaplõgin, S. A. 18
Tuletis 23, 496, 497, 501, 504, 507—521, 534, 539—542, 544, 545
— argumendi 511, 512
— arkuskoosinuse 602
— arkuskootangensi 606
— arkussiinuse 602
— arkustangensi 606
— astmefunktsiooni 515—517, 633
— eksponentfunktsiooni 631, 632
— funktsiooni 496—500, 706
— funktsiooni funktsiooni 517—521, 542
— — naturaallogaritmi 624
— jagatise 514, 515
— konstandi 511
— koosinusfunktsiooni 589
— kootangensfunktsiooni 589
— korrutise 513, 514
— kõvera kaare pikkuse 609, 610
— kümnendlogaritmi 619—622
— logaritmfunktsiooni 619—625
— murru 514
— naturaallogaritmi 622, 623
— polünoomi 516
— pöördfunktsiooni 595—597
— ruutfunktsiooni 501, 502
— ruutjuurfunktsiooni 504
— siinusfunktsiooni 588
— summa 512, 513
— tangensfunktsiooni 589
— temperatuurikoefitsiendina 540
— vahe 513
Tuletise geomeetriline vaste 497
— graafiline määramine 497—500
— leidmise üldskeem 507
Tuletised, trigonomeetriliste funktsioonide 588—590
Tuletisfunktsioon 498
Tuletiskõver 498
Tuletiskõvera joonestamine 498, 499
Tuletiste tähistusviis Newtoni järgi 544

Tõkestamatu kahanemine, astme 450—452
— — murru 447—449
— kasvamine, astme 445, 446
Tõkestamatult kahaneva funktsiooni väiksusjärk 663
— — suuruse piirväärtus 456
— kahanevad suurused 446—456
— kahanevate suuruste jagatis 455, 456
— — — korrutis 455
— — — summa 454, 455
— — — vahe 454, 455
— kasvava funktsiooni suurusjärk 661
— kasvavad suurused 442—446
Tõus 211, 213—215
— funktsiooni graafiku 497
— kõvera puutuja 495—497
— sirgjoone 213—215
Tõusev kõver 561, 562
— sirgjoon 214
Täieliku induktsiooni võte 515, 516
Täisarvud 32
Täisarvude korrutamine 33—35
— lahutamine 35
— liitmine 33—35
Täisnurk 578
Täisratsionaalsed funktsioonid 394
Täpsuse kadu lahutamisel 66, 67
Tüvimurrud 446

U

Universaalsed konstandid 194

V

Vaatlusandmete graafiline tasandamine 352, 353
Vaatlusprotokoll 22, 351, 352
Vahe absoluutväärtus 51
— piirväärtus 458
— tuletis 513
— viga 62
Valem, funktsiooni muudu hindamise 635—638
— Gaussi 131
— interpolatsiooni- 409
— kaudse mõõtmise vea hindamise 638—644
— lõplike juurdekasvude 681
— suuruste sõltuvuse väljendajana 163, 164, 351
— vea 638—644
Variant 156
Vea promill 58, 59
— protsent 58, 59
— standard-ülemmäär 56
— tõke 54
— valem 638—644
— ülemmäär 54
Venitustegur 342
Venitusteisendus 341—344
Viga 54
— absoluutne 59
— arvu kuubi 65
— — — relatiivne 68
— — kuupjuure 65
— — — relatiivne 68
— — ruudu 64
— — — relatiivne 68
— — ruutjuure 65
— — — relatiivne 68
— funktsiooni lineaarse lähendi 694—698
— — ruuttrinoomilise lähendi 697
— jagatise 63, 64
— — relatiivne 67, 68
— korrutise 63
— — relatiivne 67
— kümnendlogaritmi 644, 645
— mõõtmistulemuse näiv 123
— — tõeline 123, 124
— relatiivne 58, 59
— skaala töötamise relatiivne 93
— summa 62
— — relatiivne 65, 66
— suuruse ligikaudse väärtuse 54
— vahe 62
Võrdeline sõltuvus 359—365, 398
Võrdelise sõltuvuse definitsioon 359
— — geomeetriline vaste 362
— — tunnus 360
— — vastastikkus 359, 360
— — väljendusvalem 360, 361
Võrdeliste suuruste käsitlemine arvutuslükatil 100
Võrdelisus kahe sõltumatu muutujaga 364, 365
Võrdetegur 360, 361, 364
Võrdused 45
Võrrand, ellipsi 270, 271
— funktsionaalse sõltuvuse esitajana 185—188
— homogeenne teise astme 328, 329
— hüperbooli 279, 280
— joone 199—208
— lineaarne 219
— parabooli 261—265
— püstteljega parabooli 264, 265
— ringjoone 265, 266
— — kanooniline 266

— sirgjoone normaal- 227—229
— — polaarkoordinaatides 226, 227
— — üld- 221, 228, 229
— teise astme üld- 306
— teist järku joone üld- 306
Võrrandid, simultaansed lineaar- 243—245
— sirgjoone 218—229
Võrratused 45—49
Võrratuste lahendamine 48, 49
— põhiomadused 46—48
Võrrete lahendamine arvutuslükatil 101, 102
Väiksusjärk, arvude 657—661
— funktsiooni diferentsiaali 703
— — juurdekasvu 703
— tõkestamatult kahaneva funktsiooni 663
Väärtuste summa 113, 114

Ü

Ühedimensiooniline kokkusurumine 342
— venitus 342
Ühene funktsioon 188, 583
Ühikring 178
Ühismõõduga lõigud 423, 424
Ühismõõduta lõigud 424, 425
Ühtlane liikumine 528—531
— nähtuskäik 537
— tootmiskäik 535
Ühtlase liikumise graafik 529, 531
— — kiirus 529, 530
— — seadus 528, 531
— nähtuskäigu graafik 537, 538
— tootmise graafik 536
— tootmiskäigu kiirus 535, 536
— — seadus 535
Üldistatud keskväärtuse lause 687, 688
Üld-ruutfunktsioon 388, 567—571
Üld-ruutsõltuvus 388—390
Üld-ruutsõltuvuse graafik 389, 390

SISUKORD

Lugejale 5
Ladina tähestik 8
Kreeka tähestik 8

SISSEJUHATUS

I. Ajalooline ülevaade matemaatika arenemisest 9
II. Kõrgema matemaatika ülesanne 21

ESIMENE OSA

ARVUTAMISE TEOREETILISED ALUSED. ARVUTAMISTEHNIKA. MÕÕTMISTULEMUSTE TÖÖTLEMINE

Peatükk I. **Arvutamise alused**

§ 1. Ratsionaalarvud 27
Naturaalarvud. Arvutamise põhiseadused naturaalarvude vallas. Positiivsed ja negatiivsed täisarvud. Arv null. Arvu absoluutväärtus. Liitmine ja korrutamine täisarvude vallas. Arvutamise põhiseaduste permanentsuse printsiip. Täisarvude lahutamine. Murrud. Jagamine. Ratsionaalarvud. Nulliga jagamise teostamatus.
§ 2. Nelja aritmeetilise põhioperatsiooni tehnika 39
Liitmise tehnika. Lahutamise tehnika. Korrutamise tehnika. Jagamise tehnika.
§ 3. Numbrilise töö korraldamise üldküsimusi . . . 43
Üldisi märkusi numbrilise töö korraldamise kohta. Arvutusskeemide näiteid. Arvutustulemuste kontrollimine.
§ 4. Võrratused 45
Võrratuste põhiomadused. Lineaarsete võrratuste lahendamine. Näiteid mittelineaarsete võrratuste lahendamise kohta. Lauseid arvude absoluutväärtuste kohta.

Peatükk II. **Arvutamine ligikaudsete andmetega**

§ 5. Viga. Relatiivne viga 52
Andmete täpsusetus. Vea mõiste. Arvude ümardamine. Mõõtarvude teisendamine. Relatiivne viga. Mõõtmiste täpsusetus ja looduse tunnetamine. Teaduses saavutatud täpsuse näitajaid.
§ 6. Kaudse mõõtmise vea hindamine 61
Otsene ja kaudne mõõtmine. Kaudse mõõtmise vea hindamise probleem. Summa viga. Vahe viga. Korrutise viga. Jagatise viga. Arvu ruudu ja kuubi viga. Arvu ruut- ja kuupjuure viga. Summa relatiivne viga. Täpsuse kadu lahutamisel. Korrutise ja jagatise

relatiivne viga. Arvu ruudu ja kuubi relatiivne viga. Arvu ruut- ja kuupjuure relatiivne viga. Märkusi. Veaarvutuse näiteid.
§ 7. Lühendatud arvutusvõtteid 71
Mõõtetud numbrid. Lühendatud liitmine. Lühendatud lahutamine. Lühendatud korrutamine. Lühendatud jagamine.
§ 8. Graafilise töö täpsuse küsimusi 79
Lõik arvu kujutisena. Kujutusühiku valik. Joonise töötamistäpsus. Aritmeetilised põhitehted graafilises käsitluses. Arvuvahemike graafiline kujutamine.

Peatükk III. **Logaritmiline arvutuslükati**

§ 9. Regulaarne skaala arvutusvahendina 86
Regulaarne skaala. Liitmine ja lahutamine regulaarskaalade abil. Mõõtude ümberarvutamine regulaarskaalade abil. Nooniusega mõõtmine.
§ 10. Logaritmiline skaala 89
Logaritmilise skaala mõiste. Logaritmilise skaala esimene põhiomadus. Logaritmilise skaala teine põhiomadus. Arvutuslükati kirjeldus.
§ 11. Arvutamine logaritmilise arvutuslükatiga I . 95
Arvu logaritmi leidmine ja arvu leidmine logaritmi järgi. Arvu ruudu ja arvu ruutjuure leidmine. Arvu kuubi ja arvu kuupjuure leidmine. Arvu pöördväärtuse leidmine. Võrdeliste suuruste käsitlemine. Võrrete lahendamine. Protsendiülesannete lahendamine.
§ 12. Arvutamine logaritmilise arvutuslükatiga II 103
Arvude korrutamine. Arvude jagamine. Mõned korrutamise ja jagamise erijuhud. Ringi pindala arvutamine. Silindri, koonuse ja kera ruumala arvutamine. Trigonomeetriliste funktsioonide väärtused arvutuslükatil. Siinuse ja tangensi väärtuste leidmine. Väikeste nurkade siinused ja tangensid. Kolmnurga elementide arvutamise näiteid. Lõppmärkus.

Peatükk IV. **Mõõtmistulemuste töötlemine**

§ 13. Kõikumisvahemik. Väärtuste summa. Keskmised väärtused 113
Suuruse kõikumisvahemik. Väärtuste summa. Keskmised väärtused. Aritmeetiline keskmine. Geomeetriline keskmine. Harmooniline keskmine. Aritmeetilise, geomeetrilise ja harmoonilise keskmise omavaheline seos. Aritmeetilise, geomeetrilise ja harmoonilise keskmise suurusjärjestus. Ruutkeskmine.
§ 14. Mõõtmisvigade teooria elemendid 122
Mõõdetava suuruse sobivaima väärtuse probleem. Mõõtmistulemuste aritmeetiline keskmine. Mõõtmistulemuste spekter. Hälve. Hajuvus. Hajuvuse muutumine lähtekoha vahetamisel. Mõõtmistulemuste kooskõla hindamine lähtudes nende hajuvusest aritmeetilise keskmise ümber. Mõõtmistulemuste kooskõla hindamine lähtudes nende hajuvusest suuruse tõelise väärtuse ümber. Aritmeetilise keskmise usaldatavuse määr. Gaussi tähistusviis. Kokkuvõte.

TEINE OSA

KOORDINAATIDE MÕISTE. FUNKTSIONAALNE SÕLTUVUS

Peatükk V. **Koordinaatide mõiste**

§ 15. Punkti asukoha määramine sirgjoonel 137
Sissejuhatuseks. Sirgjoone punkti abstsiss.

§ 16. Abstsisstelje lõigu jaotamise ülesandeid. Abstsisstelje kahe punkti vaheline kaugus 139
Sirglõigu keskpunkti abstsiss. Lõigu jaotamine antud suhtes. Abstsisstelje kahe punkti vaheline kaugus.
§ 17. Punkti asukoha määramine tasapinnal 141
Ristkoordinaatide mõiste. Koordinaatide mõiste rakenduslik väärtus.
§ 18. Lõigu jaotamise ülesandeid tasapinnal. Tasapinna kahe punkti vaheline kaugus 146
Sirglõigu keskpunkti koordinaadid. Lõigu jaotamine antud suhtes. Kolmnurga raskuspunkti koordinaadid. Tasapinna kahe punkti vaheline kaugus.
§ 19. Pindalade arvutusi 150
Lõigualuse trapetsi pindala. Kolmnurga pindala.
§ 20. Polaarkoordinaadid 152
Polaarkoordinaatide mõiste. Polaarkoordinaatide seos ristkoordinaatidega.

Peatükk VI. **Funktsionaalne sõltuvus**

§ 21. Muutuvad ja muutumatud suurused 155
Muutuvate ja muutumatute suuruste definitsioon. Konstandid ja muutujad nähtuskäikude kirjeldamisel. Muutuja väärtuste varu. Muutumispiirkond.
§ 22. Funktsiooni mõiste 160
Sissejuhatuseks. Teineteisest sõltuvad ja teineteisest sõltumatud suurused. Funktsioon ja argument. Tabel suuruste sõltuvuse väljendajana. Valem suuruste sõltuvuse väljendajana. Funktsioonide sümbolid. Funktsiooni väärtus argumendi etteantud väärtusel. Kahe muutuja funktsioon.
§ 23. Funktsiooni käigugraafik 167
Funktsiooni käigugraafiku konstruktsiooni printsiip. Punktridagraafik. Treppjoongraafik. Pidevjoongraafik. Tehnilisi nõudeid funktsioonide graafikute kohta. Funktsiooni käigugraafik polaarkoordinaatides.
§ 24. Funktsiooni skaala 177
Funktsiooni skaala konstruktsiooni printsiip. Funktsiooni skaala näiteid. Funktsiooni skaala seos funktsiooni käigugraafikuga. Funktsioonide skaalad arvutusvahendina. Logaritmilise arvutuslükati teooria.
§ 25. Võrrand funktsionaalse sõltuvuse esitajana . 185
Ilmutamatult antud funktsioon. Funktsiooni määrava võrrandi kirjutusviis. Ilmutamatult antud funktsiooni definitsioon. Ühesed ja mitmesed funktsioonid.
§ 26. Funktsionaalse sõltuvuse parameetriline esitusviis 189
Funktsionaalse sõltuvuse parameetrilise esitusviisi näiteid. Liikumiskäigu andmine parameetrilisel kujul. Funktsionaalse sõltuvuse esitamine muutujate parameetriliste võrrandite kaudu. Funktsionaalse sõltuvuse esitusviiside võrdlev hindamine. Funktsionaalne seos ja põhjuslik seos.

KOLMAS OSA

JOONE VÕRRAND. SIRGJOON. DETERMINANDID. KOONUSLÕIKED. GEOMEETRILISED TEISENDUSED

Peatükk VII. **Joon ja tema võrrand**

§ 27. Joone võrrand 199
Joone võrrandi mõiste. Joone võrrandi koostamine. Joone võrrand

polaarkoordinaatides. Parameetri kasutamine joone võrrandi koostamisel.
§ 28. Lihtsamaid joone võrrandi abil lahenduvaid küsimusi 208
1° Punkti asetsemine joonel. 2° Joone punkti ordinaadi leidmine antud abstsissi järgi. 3° Joonte lõikepunktid. 4° Joone ja telgede lõikepunktid. 5° Joone sümmeetria telgede suhtes. 6° Joone sümmeetria alguspunkti suhtes. Koordinaatide meetod matemaatikas.

Peatükk VIII. **Sirgjoon**

§ 29. Parameetrid sirgjoone määramiseks 211
Sirgjoone tõusunurk. Sirgjoone tõus. Sirgjoone tõusu geomeetriline tähendus. Sirgjoone tõusu väärtuse leidmine. Andmed sirgjoone määramiseks tasapinnal.
§ 30. Sirgjoone võrrandi erikujud 218
Algordinaadi ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand. Pöördlause tõestus. Sirgjoone üldvõrrand. Lineaarse võrrandi geomeetriline vaste. Kahe punktiga määratud sirgjoone võrrand. Telglõikudega määratud sirgjoone võrrand. Ühe oma punkti ja tõusuga määratud sirgjoone võrrand. Sirgjoone võrrand polaarkoordinaatides. Sirgjoone normaalvõrrand. Sirgjoone üldvõrrandi teisendamine normaalkujuliseks. Punkti kaugus sirgest.
§ 31. Kahe sirgjoone vastastikune asend 231
Nurk kahe sirgjoone vahel. Kahe sirgjoone rööp- ja ristseisu tunnus. Kahe sirgjoone lõikepunkt.

Peatükk IX. **Determinandid**

§ 32. Kaherealine determinant 235
Kaherealise determinandi mõiste. Kaherealise determinandi omadusi. Kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaatide avaldised. Kahe sirgjoone lõikepunkti koordinaatide avaldiste uurimine.
§ 33. Kolmerealine determinant 243
Lineaarvõrrandite simultaansus. Kolmerealise determinandi mõiste. Kolmerealise determinandi omadusi. Kolmest kolme tundmatuga lineaarvõrrandist koosneva süsteemi lahendamine. Determinandi arendis ühe veeru elementide järgi.

Peatükk X. **Koordinaatide teisendamine**

§ 34. Koordinaatide teisendamine üleminekul ristkoordinaatidelt polaarkoordinaatidele ja vastupidi 252
Rist- ja polaarkoordinaatide vahelised seosed. Näiteid suuruste arvutusvalemite teisendamise kohta. Näiteid joonte võrrandite teisendamise kohta.
§ 35. Ristkoordinaatide teisendusi 254
Koordinaatide teisendamine teljestiku rööplükke puhul. Lõigu projektsioonide ja lõigu pikkuse ruudu teisendamine teljestiku rööplükke puhul. Koordinaatide teisendamine teljestiku pööramise puhul. Lõigu projektsioonide ja lõigu pikkuse ruudu teisendamine teljestiku pööramise puhul. Koordinaatide teisendamise üldjuht.

Peatükk XI. **Teist järku joonte erikujude uurimine**

§ 36. Parabool 260
Parabooli definitsioon. Parabooli joonestamine. Parabooli võrrand.

Parabooli uurimine tema võrrandi abil. Püstteljega parabooli üldvõrrand.
§ 37. Ringjoon 265
Ringjoone võrrand. Tingimused, mil üldine teise astme võrrand kujutab ringjoont.
§ 38. Ellips 268
Ellipsi definitsioon. Ellipsi joonestamine. Ellipsi punkti fokaalkauguste avaldised punkti koordinaatides. Ellipsi võrrand. Ellipsi haripunktid ja poolteljed. Ellipsi fookuste konstrueerimine poolteljedest. Ellipsi kuju uurimine tema võrrandi abil. Ellipsi parameeter. Ellipsi ekstsentrilisus. Ellipsi lamedus. Ellipsi parameetrilised võrrandid. Ellips ringjoone ortogonaalprojektsioonina. Ellips silindri ja tasapinna lõikejoonena.
§ 39. Hüperbool 277
Hüperbooli definitsioon. Hüperbooli joonestamine. Hüperbooli punkti fokaalkauguste avaldised punkti koordinaatides. Hüperbooli võrrand. Hüperbooli teljed. Hüperbooli sümmeetria telgede ja keskpunkti suhtes. Hüperbooli asend oma telgede suhtes. Hüperbooli asümptoodid. Hüperbooli parameeter. Hüperbooli ekstsentrilisus. Hüperbooli kaashüperbool. Risthüperbool.

Peatükk XII. **Diameetrid. Juhtjooned**

§ 40. Parabooli, ellipsi ja hüperbooli diameetrid . . 287
Diameetri mõiste. Parabooli diameetrid. Ellipsi diameetrid. Ellipsi kaasdiameetrid. Ellipsi kaasdiameetrite konstruktsioon. Hüperbooli diameetrid.
§ 41. Ellipsi ja hüperbooli juhtjooned 294
Ellipsi punkti fokaalkaugused. Ellipsi juhtjooned. Hüperbooli punkti fokaalkaugused ja juhtjooned. Parabooli ekstsentrilisus.
§ 42. Ellipsi, parabooli ja hüperbooli ühtne käsitlus 298
Ellipsi, parabooli ja hüperbooli ühtne definitsioon. Ellipsi, parabooli ja hüperbooli ühine võrrand polaarkoordinaatides. Ellips, parabool ja hüperbool koonuslõigetena.

Peatükk XIII. **Teist järku joone üldvõrrand**

§ 43. Ettevalmistavat materjali 305
Probleemiseade. Üldise kahe tundmatuga teise astme võrrandi kirjutusviis. Kolm lahendamisele tulevat ülesannet. Abilause. Teist järku joone sümmeetria tunnused. Märkus koordinaatide tähistusviisi kohta eri süsteemides.
§ 44. Teise astme üldvõrrandi kuju muutumine koordinaatide teisendamisel 310
Teise astme üldvõrrandi teisendumine teljestiku rööplükkel. Teise astme üldvõrrandi teisendumine teljestiku pööramisel.
§ 45. Teist järku joone keskpunkt ja peasihid 313
Teist järku joone keskpunkti leidmine. Teise astme üldvõrrandi väikese diskriminandi invariantsus. Teist järku joone peasihid. Teist järku tsentraalse joone sümmeetriateljed.
§ 46. Teise astme üldvõrrandi taandamine kanoonilisele kujule 316
Teise astme üldvõrrandi taandamine kanoonilisele kujule keskpunktiga joone puhul. Teist järku paraboolset tüüpi jooned. Teist järku paraboolset tüüpi joone üldvõrrandi teisendamine kanoonilisele kujule.

§ 47. Teist järku joone lagunemine sirgete paariks 324
Sirgete paariks lagunev teist järku joon. Teise astme üldvõrrandi suur diskriminant. Kahe tundmatuga homogeenne teise astme võrrand.

Peatükk XIV. **Tasapinna transformatsioone**

§ 48. Probleemiseade. Translatsioon. Rotatsioon . . 330
Probleemiseade. Translatsioon. Lükke komponendid. Translatsiooni analüütiline avaldis. Translatsioonide liitumine. Rotatsioon. Rotatsiooni analüütiline avaldis. Rotatsioonide liitumine. Invariantide näiteid.
§ 49. Sarnasus-, peegeldus- ja venitusteisendus . . 339
Sarnasusteisendus. Peegeldusteisendus. Venitusteisendus. Venitusteisenduse omadusi. Lineaarsed teisendused.

NELJAS OSA

FUNKTSIONAALSE SÕLTUVUSE ERILIIKE. EMPIIRILISED SEADUSED

Peatükk XV. **Funktsionaalne sõltuvus nähtuskäikude kirjeldamise vahendina**

§ 50. Funktsionaalne sõltuvus kui protsessi kulgemist valitseva seaduse väljendaja 349
Loodusteaduse kaks ülesannet. Lõigete meetod. Protsessi kulgemist valitsev seadus. Vaatlusandmete graafiline tasandamine. Graafiline interpolatsioon.
§ 51. Mõned nähtuskäikude karakteristikud 354
Juurdekasv. Juurdekasvu protsent ja promill. Argumendi ja funktsiooni kokkukuuluvad juurdekasvud. Keskmine kasvamiskiirus. Keskmine kasvamistempo.

Peatükk XVI. **Funktsionaalse sõltuvuse tähtsamaid eriliike**

§ 52. Võrdeline sõltuvus 359
Võrdelise sõltuvuse definitsioon. Muutujate võrdelise sõltuvuse vastastikkus. Võrdelise sõltuvuse tunnus. Võrdelise sõltuvuse väljendusvalem. Võrdelise sõltuvuse mõiste laiendamine. Võrdelise sõltuvuse geomeetriline vaste. Võrdetegur ja mõõtühikud. Võrdelisus kahe sõltumatu muutujaga.
§ 53. Lineaarne sõltuvus 365
Lineaarse sõltuvuse definitsioon. Lineaarse sõltuvuse omadusi. Kordajate tähendus lineaarfunktsiooni avaldises. Lineaarse sõltuvuse tunnus. Lineaarse sõltuvuse graafik. Graafiline sõiduplaan. Graafilised tööplaanid. Lineaarne interpolatsioon.
§ 54. Pöördvõrdeline sõltuvus 377
Pöördvõrdelise sõltuvuse definitsioon. Muutujate pöördvõrdelise sõltuvuse vastastikkus. Pöördvõrdelise sõltuvuse tunnus. Pöördvõrdelise sõltuvuse väljendusvalem. Pöördvõrdelise sõltuvuse geomeetriline vaste. Murdlineaarne sõltuvus. Murdlineaarse sõltuvuse näiteid.
§ 55. Astmesõltuvus 382
Astmefunktsiooni üldavaldis. Ruutsõltuvuse definitsioon. Ruutsõltuvuse tunnus. Ruutsõltuvuse geomeetriline vaste. Kuupsõltuvus. Kuupsõltuvuse geomeetriline vaste. Astmefunktsiooni $y = ax^n$ graafikud.

§ 56. Polünoomid 388
Üld-ruutsõltuvus. Üld-ruutsõltuvuse graafik. Polünoomi kirjutusviis. Horneri skeem. Ratsionaalsed funktsioonid.
§ 57. Eksponentsõltuvus 395
Eksponentfunktsiooni avaldis. Eksponentsõltuvuse näiteid. Eksponentfunktsiooni käigugraafik.
§ 58. Funktsioonide liigitus 398
Sõltuvuste loetelu. Funktsioonide tavalisemaid liigitusi.

Peatükk XVII. **Empiirilised seadused**

§ 59. Nähtuskäike valitsevate seaduste leidmine vaatlusandmeist 400
Lineaarse sõltuvuse juhtum. Astmesõltuvuse juhtum. Eksponentsõltuvuse juhtum.
§ 60. Interpolatsiooniprobleem 406
Interpolatsiooniprobleemi seade. Polünoomi jagamine vahega $x - p$. Interpolatsioonivalemi tuletamine. Interpolatsiooniprobleemi lahendamine. Horneri skeemi kasutamine funktsiooni väärtuste arvutamisel interpolatsioonivalemi abil.

VIIES OSA

ARVUKONTIINUUM. FUNKTSIOONI PIIRVÄÄRTUS

Peatükk XVIII. **Arvukontiinuumi mõiste**

§ 61. Ratsionaalarvude valla kaks põhilist omadust . 418
Ratsionaalarvud matemaatika rakendustes. Ratsionaalarvude valla tihedus. Ratsionaalarvude loenduvus.
§ 62. Irratsionaalarvud 422
Näiteid ratsionaalarvudes lahendamatute probleemide kohta. Ühismõõduga lõigud. Ühismõõduta lõigud. Irratsionaalarvud. Järkjärgulise lähendamise meetod. Lähendi parandamine. Lähendite koonduvus. Irratsionaalarvu mõiste. Irratsionaalarvude sümbolid. Kümnendmurrud arvude esitamise vahenditena. Tehted irratsionaalarvudega.
§ 63. Arvukontiinuum 433
Reaalarvude vald. Reaalarvude loendamatus. Lõppmärkusi.

Peatükk XIX. **Funktsiooni piirväärtus**

§ 64. Funktsiooni määramispiirkond 438
Funktsiooni määramispiirkonna definitsioon. Funktsiooni väärtuste varu. Funktsiooni määramispiirkonna leidmise näiteid.
§ 65. Tõkestamatult kasvavad suurused 442
Tõkestamatult kasvava suuruse definitsioon. Tõkestamatult kasvavate avaldiste näiteid. Astme tõkestamatu kasvamine.
§ 66. Tõkestamatult kahanevad suurused 446
Tõkestamatult kahaneva suuruse definitsioon. Murru tõkestamatu kahanemine. Tõkestamatult kahanevate suuruste näited. Astme tõkestamatu kahanemine. Geomeetrilise jada elementide graafiline kujutamine. Märkusi. Teoreeme tõkestamatult kahanevate suuruste kohta.
§ 67. Muutuva suuruse piirväärtus 456
Muutuva suuruse piirväärtuse mõiste. Muutuva suuruse piirväär-

tuse näiteid. Teoreeme piirväärtuste kohta. Piirväärtuse mõiste täppisteadustes.
§ 68. Funktsiooni piirväärtus argumendi tõkestamatul kasvamisel 461
Näiteid funktsiooni käitumise kohta tõkestamatult kasvava argumendi puhul. Ringjoone sirgestamise probleem. Funktsiooni asümptootiline väärtus.
§ 69. Funktsioonide asümptootilise käitumise näiteid 468
§ 70. Funktsiooni piirväärtus argumendi tõkestamatul lähenemisel mõnele kindlale väärtusele 472
Sümboli $\lim_{x \to a} f(x)$ definitsioon. Funktsioonide piirväärtuste leidmise näiteid. Kõrgema matemaatika mõtteviisi dialektiline loomus.
§ 71. Funktsiooni pidevus 478
Lineaarfunktsiooni pidevus. Funktsiooni katkemisviise. Funktsiooni pidevuse tunnus. Funktsiooni pidevuse tunnuse rakendusi. Pidevate funktsioonide tähtsamaid omadusi. Teoreeme pidevate funktsioonide kohta. Pidevus ja katkevus loodusnähtuste käigus.

KUUES OSA

FUNKTSIOONI TULETIS. TULETISE GEOMEETRILISED JA ARVUTUSTEHNILISED RAKENDUSED

Peatükk XX. **Funktsiooni tuletis**

§ 72. Kõvera puutuja. Funktsiooni tuletis 493
Kõvera puutuja definitsioon. Kõvera puutuja tõus. Funktsiooni tuletise definitsioon. Tuletise geomeetriline vaste. Tuletise graafiline määramine. Tuletiskõvera joonestamine. Erinevate kujutusühikute juhtum. Pooluse kauguse valik.
§ 73. Kõvera puutuja ja kõvera normaali võrrand . . 500
Kõvera puutuja võrrandi koostamine. Ruutfunktsiooni tuletis. Parabooli $y = ax^2$ puutuja. Funktsiooni $y = \frac{a}{x}$ tuletis. Risthüperbooli puutuja. Kõvera normaali võrrand.

Peatükk XXI. **Teoreeme tuletiste kohta**

§ 74. Tuletise leidmise üldskeem ja selle rakendusi 507
Tuletise leidmise üldskeem. Kuupfunktsiooni tuletis. Ruutjuurfunktsiooni tuletis. Tuletise olemasolu küsimus.
§ 75. Tuletise leidmise teoreeme 511
Konstandi tuletis. Argumendi tuletis. Konstantse teguri teoreem. Summa tuletis. Kahe funktsiooni korrutise tuletis. Kahe funktsiooni jagatise tuletis. Astmefunktsiooni tuletis positiivse täisarvulise astendaja puhul. Polünoomi tuletis. Astmefunktsiooni tuletis negatiivse täisarvulise astendaja puhul.
§ 76. Funktsiooni funktsiooni tuletis 517
Funktsiooni funktsiooni mõiste. Funktsiooni funktsiooni pidevus. Funktsiooni funktsiooni tuletis. Kahe vahendava funktsiooni juhtum.
§ 77. Ellipsi ja hüperbooli puutuja 521
Ellipsi ja hüperbooli puutuja tõus. Ringjoone puutuja võrrand. Ellipsi puutuja konstrueerimise võte. Ellipsi puutuja fokaalomadus. Hüperbooli puutuja fokaalomadus. Hüperbooli asümptoodid puutujaina.

Peatükk XXII. **Tuletis kiirusena**

§ 78. Ühtlane liikumine ja selle kiirus 527
Orbiit. Liikumise seadus. Ühtlase liikumise definitsioon, seadus ja graafik. Ühtlase liikumise kiirus. Kiiruse mõõtühik. Ühtlase liikumise seaduse lihtsaim kuju.

§ 79. Mitteühtlase liikumise kiirus 531
Mitteühtlase liikumise definitsioon, seadus ja graafik. Mitteühtlase liikumise keskmine kiirus antud ajavahemikus. Mitteühtlase liikumise hetkeline kiirus antud momendil.

§ 80. Nähtuskäigu kiirus 534
Tootmiskiirus. Mingi ajaliselt kulgeva nähtuskäigu kiirus. Nähtuskäigu kiiruse üldmõiste. Tuletis temperatuurikoefitsiendina. Tuletise teisi füüsikalisi tõlgendusi. Kiirus kaudse sõltuvuse puhul.

§ 81. Kõrgemat järku tuletised 543
Liikumiskiirendus. Tuletiste tähistusviis Newtoni järgi. Kõrgemat järku tuletised.

Peatükk XXIII. **Tuletise mõiste rakendusi funktsiooni käigu uurimisel**

§ 82. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine 547
Funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnused. Funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnuste rakendusi.

§ 83. Funktsiooni ekstreemumid 550
Funktsiooni maksimumi ja miinimumi definitsioon. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnused. Ekstreemväärtuste leidmise ülesandeid. Kaks märkust funktsioonide ekstreemumite kohta. Üldskeem funktsiooni ekstreemväärtuste leidmiseks.

§ 84. Funktsiooni käigukõvera kumerus ja nõgusus. Kõvera käänupunkt 560
Kõvera kumeruse ja nõgususe tunnused. Funktsiooni kiirenev ja aeglustuv muutumine. Kõvera käänupunkt. Funktsiooni muutumise viise antud argumendi väärtusel.

§ 85. Kõverate joonestamine nende iseloomulike punktide ja kulgemise omapärasuste järgi . . 567
Probleemiseade. Üld-ruutfunktsiooni uurimine. Murdratsionaalsete funktsioonide uurimine.

Peatükk XXIV. **Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised**

§ 86. Nurga absoluutühik 578
Nurga kraadmõõt ja nurga absoluutmõõt. Nurga kraadmõõdu ja absoluutmõõdu vaheline seos. Radiaani mõiste. Üleminek kraadmõõdult absoluutmõõdule ja vastupidi. Valemid ringjoone kaare pikkuse ja ringi sektori ning segmendi pindala arvutamiseks. Nurk parameetrina.

§ 87. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised . . 583
Trigonomeetriliste funktsioonide pidevus. Piirväärtus $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.
Valem $\sin x \approx x$. Valemi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ geomeetriline tähendus.
Valem $\tan \alpha \approx \alpha$. Siinusfunktsiooni tuletis. Koosinusfunktsiooni tuletis. Tangens- ja kootangensfunktsiooni tuletis. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised kraadmõõdus töötamisel.

Peatükk XXV. **Pöördfunktsioonid ja nende tuletised**

§ 88. Funktsionaalse sõltuvuse pööramine 591
Pöördfunktsiooni mõiste. Pöördfunktsiooni graafiku joonestamine. Ühesed ja mitmesed funktsioonid. Pöördfunktsiooni pidevus. Pöördfunktsiooni tuletis. Funktsionaalse sõltuvuse pööramise konkreetne tõlgendus.

§ 89. Arkusfunktsioonid ja nende tuletised 597
Funktsioon $y = \sin x$ ja selle pöördfunktsioon. Arkuskoosinusiunktsioon. Arkussiinuse ja arkuskoosinuse vaheline põhiseos. Arkussiinuse ja arkuskoosinuse tuletised. Funktsioon $y = \tan x$ ja selle pöördfunktsioon. Arkuskootangensfunktsioon. Arkustangensi ja arkuskootangensi tuletised. Arkusfunktsioone sisaldavate avaldiste lihtsustamine. Arkustangensi rakendamise näide.

§ 90. Joone kõverus 609
Kõverjoone kaare pikkus ja selle tuletis. Ringjoone kõverus. Teine avaldis ringjoone kõveruse jaoks. Joone kõverus antud punktis. Funktsiooni teine tuletis ja funktsiooni käigujoone kõverus. Kõverusraadius ja kõveruskeskpunkt. Sirgjoone kõverus. Kõverusringjoon kõvera antud punktis. Kõveruse mõiste rakendamine teede trasseerimisel. Kõveruskeskpunkti ligikaudne konstruktsioon.

Peatükk XXVI. **Logaritm- ja eksponentfunktsiooni tuletis**

§ 91. Logaritmfunktsiooni tuletis 619
Kümnendlogaritmi tuletis. Logaritmi tuletis kümnest erineva aluse puhul. Naturaallogaritmi tuletis. Funktsiooni naturaallogaritmi tuletis. Saadud valemite rakendusi.

§ 92. Naturaallogaritmide alus 625
Arvu e kujutamine piirväärtusena. Suuruste liitprotsendiline kasvamine. Arvu e avaldamine lõpmatu summana. Arvu e tõkked. Arvu e numbriline arvutamine.

§ 93. Eksponentfunktsiooni tuletis 631
Funktsiooni e^x tuletis. Funktsiooni a^x tuletis. Funktsiooni x^n tuletis reaalarvulise astendaja puhul.

Peatükk XXVII. **Tuletise arvutustehnilisi rakendusi**

§ 94. Funktsiooni muudu hindamise valem 634
Probleemiseade. Funktsiooni muudu hindamise valem. Funktsiooni relatiivse muudu hindamise valem. Funktsiooni muudu hindamise valemi rakendamise näiteid. Funktsiooni muudu hindamise valemi kasutamine numbrilisel arvutamisel.

§ 95. Kaudse mõõtmise vea hindamise probleem . . 638
Probleemiseade. Kaudse mõõtmise vea hindamise valem. Vea hindamise näiteid. Vea valemi kasutamine mõõtmiste planeerimisel.

§ 96. Vea hindamise valemi rakendusi numbrilisel arvutamisel 643
Vea hindamise valemi rakendusi töötamisel trigonomeetriliste funktsioonidega. Kümnendlogaritmi vea avaldis. Vea hindamine arvutamisel logaritmilise arvutuslükatiga.

§ 97. Numbriliste kordajatega võrrandite lahendamine 647
Newtoni võte graafilises käsitluses. Newtoni võtte rakendamise näiteid. Kardetav juhtum Newtoni võtte rakendamisel. Newtoni võtte analüütiline käsitlus. Interpolatsioonivõte võrrandite numbriliseks lahendamiseks.

Peatükk XXVIII. **Arvude ja funktsioonide suurus- ja väiksusjärk**

§ 98. Arvude suurus- ja väiksusjärk 655
Arvude suurusjärgu mõiste. Suurusjärgu mõiste kasutamine arvude ümardamisel. Arvude väiksusjärk. Ühe arvu suurus- või väiksusjärk teise arvuga võrreldes. Korrutise, astme ja jagatise suurusjärk. Konkreetseid näiteid arvu väiksusjärgu mõiste kasutamise kohta avaldiste kärpimisel.

§ 99. Funktsioonide suurus- ja väiksusjärk 661
Tõkestamatult kasvava funktsiooni suurusjärkude skaala. Polünoomi suurusjärk. Murdratsionaalse funktsiooni suurusjärk. Tõkestamatult kahaneva funktsiooni väiksusjärkude skaala. Trigonomeetriliste suuruste väiksusjärgu määramise näiteid.

Peatükk XXIX. **Funktsioonide lokaalne lähendamine lineaarsete avaldistega ja ruutavaldistega**

§ 100. Ligikaudsed valemid 667
Funktsiooni ligikaudne avaldis. Funktsiooni lineaarne lähend. Funktsiooni ruutlähend. Mõnede sageli esinevate avaldiste lineaarsed lähendid. Konkreetseid näiteid ligikaudsete valemite kasutamise kohta.

§ 101. Funktsiooni lineaarse ja ruuttrinoomilise lähendi üldavaldis 675
Funktsiooni lineaarse lähendi üldavaldis. Funktsiooni lineaarse lähendamise näiteid. Funktsiooni lähendamine ruuttrinoomiga.

Peatükk XXX. **Keskväärtuse laused**

§ 102. Lagrange'i keskväärtuse lause näitlik käsitlus 679
Langrange'i keskväärtuse lause sõnastus. Keskväärtuse lause geomeetriline käsitlus. Arvu ξ määramine ruutsõltuvuse puhul. Keskväärtuse valemi kirjutusviise.

§ 103. Lagrange'i keskväärtuse lause rakendusi . . . 682
Funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnused. Null-tuletisteoreem. Keskväärtuse lause rakendamine funktsiooni väärtuse tõkete leidmiseks.

§ 104. Keskväärtuse lausete analüütiline käsitlus . . 684
Rolle'i teoreem. Keskväärtuse lause tõestus. Üldistatud keskväärtuse lause.

§ 105. Cauchy keskväärtuse lause rakendusi piirväärtuste leidmisel 688
L'Hôpitali lause tõkestamatult kahanevate funktsioonide suhte kohta. L'Hôpitali lause kasutamine funktsioonide väiksusjärkude võrdlemisel. L'Hôpitali lause tõkestamatult kasvavate funktsioonide suhte kohta. Funktsioonide asümptootilise kasvamise kiiruste võrdlemine.

§ 106. Funktsiooni lineaarse ja ruuttrinoomilise lähendi täpsuse küsimus 694
Funktsiooni lineaarse lähendi vea väiksusjärk. Funktsiooni lineaarse lähendi vea hindamise valem. Funktsiooni ruuttrinoomilise lähendi vea hindamine. Logaritmfunktsiooni lineaarne lähend ja selle viga. Lineaarse interpolatsiooni lubatavus logaritmide tabelites.

Peatükk XXXI. **Funktsiooni diferentsiaal**

§ 107. Funktsiooni diferentsiaal 700
Funktsiooni diferentsiaali definitsioon tuletise mõiste kaudu. Märkusi diferentsiaali kohta. Funktsiooni diferentsiaali geomeetriline tõlgendus. Juurdekasvude ja diferentsiaalide väiksusjärk. Diferentsiaal arvutusvahendina.

§ 108. Diferentsiaal funktsiooni kasvu lineaarse lähendina 705
Tuletise kirjutusviis diferentsiaalide kaudu. Diferentsiaal funktsiooni juurdekasvu lineaarse lähendina. Diferentsiaal, tuletis ja integraal. Diferentsiaali avaldise otsene koostamisviis. Funktsiooni diferentsiaali invariantsus argumendi vahetamisel. Teist järku diferentsiaal.

Aineregister 716

Ряго Герхард Аугустович
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА I

На эстонском языке

Оформление Э. Тали

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja R. Toming
Kunstiline toimetaja I. Torn
Tehniline toimetaja H. Kohu
Korrektorid P. Hiie ja V. Leibak

Ladumisele antud 26. IV 1961. Trükkimisele antud 18. I 1962. Paber 60 × 90, 1/16. Trükipoognaid 46,25. Arvutuspoognaid 37,25. Trükiarv 5000. MB-00323. Tellimuse nr. 4201. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind rbl. 1.46

2--2

A-24280

Rbl. 1.46