Geometrie.

Neunter Cursus.

Coordinatenlehre.

IX.

Vom Professor Dr. *G. Paucker.*

Mitau 18/30 Mai 1842.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.
Riga, am 20. u. 29. July 1842.

Dr. *C. E. Napiersky*,
Censor.

Erste Folge. *Der Punct und die Linie.*

(In diesem Cursus wird die »*grade Linie*« schlechthin durch »*Linie*« bezeichnet.)

1.

Die Lage eines Puncts in der Ebene durch Coordinaten zu bestimmen.

Man nimmt in der Ebene zwei feste Linien wx, wy, an. Diese Linien heifsen die ***Coordinatenaxen***, oder die ***Axe der*** x, und die ***Axe der*** y. Ihr Durchschnittspunct w ist der ***Anfangspunct*** der Coordinaten. Ihr Winkel ist entweder ein rechter Winkel, in welchem Falle sie ***rechtwinklige*** Axen heifsen; oder er ist ein spitzer oder stumpfer Winkel, in welchem Falle sie ***schiefwinklige*** Axen heifsen.

Es sey nun die Lage eines Puncts a in der Ebene der Axen zu bestimmen. Man ziehe durch a mit der Axe der y eine Parallellinie, welche die Axe der x in d schneidet, und mit der Axe der x eine Parallellinie, welche die Axe der y in d' schneidet. Alsdann heifst der Abschnitt $wd = d'a = x$ die ***Abscisse***, und der Abschnitt $wd' = da = y$ die ***Ordinate*** des Puncts a. Beide Abschnitte gemeinschaftlich heifsen die ***Coordinaten*** von a.

Durch die beiden Coordinaten ist die Lage des Puncts a in der Ebene der Axen vollständig bestimmt. Denn wenn man vom Anfangspunct w aus, auf die Axe der x einen Abschnitt, welcher der gegebenen Abscisse gleich ist, und auf die Axe der y einen Abschnitt, welcher der gegebenen Ordinate gleich ist, aufsetzt, und durch die Endpuncte dieser Abschnitte Parallellinien mit den entsprechenden Axen zieht, so können diese Parallellinien einander nur in einem einzigen Punkte schneiden. Dieser Durchschnittspunct ist der zu bestimmende Punct a.

Auf jeder Axe setzt man, vom Anfangspunct w aus genommen, eine gewisse Richtung fest, welche man den ***positiven Theil*** der Axe nennt. Die entgegengesetzte Richtung heifst alsdann der ***negative Theil.*** Es seyen also wx, wy, die positiven Theile der entsprechenden Axen, so sind die den Richtungen wx, wy, entgegengesetzten die negativen Theile. Die positiven Coordinaten werden also nach den Richtungen wx, wy, aufgesetzt, die negativen Coordinaten aber nach der entgegengesetzten Richtung.

Der vom Anfangspunct w nach dem Puncte a genommene Abschnitt $wa = z$ heiſst die ***Leitlinie*** (Radius vector). Die Winkel, welche die Leitlinie mit den positiven Theilen der Axen bildet, heiſsen die ***Positionswinkel***, nämlich $xwa = p$, $ywa = p'$. Diese Winkel werden von 0 bis 360° im Umfange herum, oder von 0 bis 180° im positiven Halbkreise, von 0 bis — 180° im entgegengesetzten Halbkreise gezählt. Beim Winkel p geht die positive Richtung vom positiven Theile der Axe der x zum positiven Theile der Axe der y. Beim Winkel p' geht die positive Richtung vom positiven Theile der Axe der y zum positiven Theile der Axe der x. Der Winkel, welchen die positiven Theile der beiden Axen mit einander bilden, heiſst der ***Ordinatenwinkel***, $xwy = w$. Es ist also immer:

$$p + p' = w \quad \text{oder} \quad p + p' = 360^\circ + w.$$

Die Gröſsen z, p, p', heiſsen die ***polaren Coordinatan*** des Puncts a. Die Trigonometrie giebt folgende Gleichungen:

$$z \cdot \sin p = y \cdot \sin w$$
$$z \cdot \cos p = x + y \cdot \cos w$$
$$z \cdot \sin p' = x \cdot \sin w$$
$$z \cdot \cos p' = y + x \cdot \cos w$$
$$z^2 = x^2 + 2x \cdot y \cdot \cos w + y^2$$
$$z \cdot \sin \tfrac{1}{2}(p - p') = (y - x) \sin \tfrac{1}{2} w$$
$$z \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p - p') = (y + x) \cos \tfrac{1}{2} w$$

Jede Linie hat in zwei bestimmten Puncten zwei verschiedene Positionswinkel gegen die Axen. Man erkennt sie, wenn man durch beide Puncte Parallellinien mit den positiven Theilen der Axen zieht. Der Unterschied dieser Positionswinkel ist daher immer gleich 180°. Wenn also der Punct a, gesehen aus w, mit den Axen der x, y, die Positionswinkel p, p', bildet, so bildet der Punct w, gesehen aus a, mit den Axen der x, y, die Positionswinkel $180^\circ + p$ und $180^\circ + p'$.

Beispiel.

x	y	w	$\sin w$	$\cos w$
17,	$11\frac{1}{2}$,	53° 7,8;	0,8;	0,6

$y - x$	$-\,0{,}74036$
$\sin \tfrac{1}{2} w$	$9{,}65052$
$z \,.\, \sin \tfrac{1}{2}(p - p')$	$-\,0{,}39088$
$y + x$	$1{,}45484$
$\cos \tfrac{1}{2} w$	$9{,}95155$
$z \,.\, \cos \tfrac{1}{2}(p - p')$	$1{,}40639$
$\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}(p - p')$	$-\,8{,}98449$
$\sin \tfrac{1}{2}(p - p')$	$-\,8{,}98247$
$\cos \tfrac{1}{2}(p - p')$	$9{,}99798$
$z \ldots\ldots$	$1{,}40841$
$\tfrac{1}{2}(p - p') =$	$-\,5^0\ 30{,}7$
$\tfrac{1}{2}(p + p') =$	$26\ \ 33{,}9$
$p =$	$21\ \ 3{,}2$
$p' =$	$32\ \ 4{,}6$
$z =$	$25{,}61$

$z \,.\, \sin p =$	$9{,}2$
$z \,.\, \cos p =$	$23{,}9$
$z \,.\, \sin p' =$	$13{,}6$
$z \,.\, \cos p' =$	$21{,}7$
$z \sin p \,.\,.$	$0{,}96379$
$z \cos p \,.\,.$	$1{,}37840$
$\mathrm{tg}\, p$	$9{,}58539$
$\sin p$	$9{,}55539$
$\cos p$	$9{,}97000$
z	$1{,}40840$
$z \sin p'$	$1{,}13354$
$z \cos p'$	$1{,}33646$
$\mathrm{tg}\, p'$	$9{,}79708$
$\sin p'$	$9{,}72514$
$\cos p'$	$9{,}92806$
z	$1{,}40840$

2.

Transformation der Coordinaten, wenn die gleichnamigen Axen parallel sind.

Das primitive Axensystem sey xwy, und die Coordinaten eines Puncts a in diesem System seyen $wb = x$, $ba = y$. Es soll derselbe Punct a auf ein secundäres Axensystem $x'w'y'$ bezogen werden, wobei angenommen wird, daſs die gleichnamigen Axen parallel seyen, nämlich $w'x'$ mit wx, und $w'y'$ mit wy. Die Coordinaten des secundären Anfangspuncts w', bezogen auf den primitiven Anfangspunct w seyen $wc = a$, $cw' = a'$. Die Coordinaten des Puncts a im secundären System seyen $w'b' = x'$ und $b'a = y'$. Man hat alsdann die Gleichungen

$$x' = x - a \qquad y' = y - a'$$
$$x = x' + a \qquad y = y' + a'$$

Wenn also in einer Gleichung die auf das primitive Axensystem bezogenen Coordinaten x, y, durch die auf das secundäre Axensystem bezogenen Coordinaten ersetzt werden sollen, so muſs man überall $x' + a$ statt x, und $y' + a'$ statt y setzen.

3.

Aus den Coordinaten zweier Puncte, die Lage dieser Puncte zu bestimmen.

Diese Puncte seyen a, b; ihre Coordinaten a, a' und b, b'; ihre Leitlinien A, B, ihre Positionswinkel p, p' und q, q', so ist (IX. 1.)

$$A \,.\, \sin p = a' \,.\, \sin w \qquad B \,.\, \sin q = b' \,.\, \sin w$$
$$A \,.\, \cos p = a + a' \,.\, \cos w \qquad B \,.\, \cos q = b + b' \,.\, \cos w$$
$$A \,.\, \sin p' = a \sin w \qquad B \,.\, \sin q' = b \,.\, \sin w$$
$$A \,.\, \cos p' = a' + a \cos w \qquad B \,.\, \cos q' = b' + b \,.\, \cos w$$
$$A^2 = a^2 + 2\,a a' \cos w + a'a'$$
$$B^2 = b^2 + 2\,b b' \cos w + b'b'$$

Um die Lage des Puncts b gegen a zu bestimmen, zieht man (IX. 2.) die Coordinaten des Puncts a von den gleichnamigen Coordinaten des Puncts b ab. Dann sey die Leitlinie $ab = C$, ihre Positionswinkel r, r', so ist:

$$C \,.\, \sin r = (b' - a') \,.\, \sin w$$
$$C \,.\, \cos r = b - a + (b' - a') \cos w$$
$$C \,.\, \sin r' = (b - a) \sin w$$
$$C \,.\, \cos r' = b' - a' + (b - a) \cos w$$
$$C^2 = (b - a)^2 + 2\,(b - a)\,(b' - a') \cos w + (b' - a')^2$$

Die innern Winkel des $\triangle\, wab$ sind

$$awb = q - p \qquad = p' - q'$$
$$wab = 180^\circ - r + p = 180^\circ + r' - p'$$
$$abw = r - q \qquad = q' - r'$$

Aus den obigen Gleichungen folgt noch:

$$A \,.\, B \,.\, \sin q \,.\, \cos p = a \,.\, b' \,.\, \sin w + a' \,.\, b' \sin w \cos w$$
$$A \,.\, B \,.\, \sin p \,.\, \cos q = a' \,.\, b \,.\, \sin w + a' \,.\, b' \sin w \,.\, \cos w$$

Bezeichnet man den Inhalt des $\triangle\, wab$ durch F, so ist

$$2\,F = A \,.\, B \sin (q - p) = A \,.\, B \,.\, \sin (p' - q')$$

Setzt man also $a \,.\, b' - a' \,.\, b = h$

so ist . . . . $2\,F = h \,.\, \sin w$

Die Gröfse $a \,.\, b' - a' \,.\, b = h$ heifst daher die *Areale* der beiden Puncte a, b.

Beispiel.

a	a'	b	b'	w
83,	32,	57,	65,	$53^\circ\, 7',8$

$$A \,.\, \sin p = 25{,}6\,; \quad B \,.\, \sin q = 52\,; \quad C \,.\, \sin r = 26{,}4$$
$$A \,.\, \cos p = 102{,}2\,; \quad B \,.\, \cos q = 96\,; \quad C \,.\, \cos r = -\,6{,}2$$
$$h = 5395 - 1824 = 3571$$
$$F = 1428{,}4$$

25,6 . .	1,40824	52	1,71600	26,4	1,42160
102,2	2,00945	96	1,98227	− 6,2	− 0,79239
tg p	9,39879	tg q	9,73373	tg r	− 0,62921
sin p	9,38558	sin q	9,67786	sin r	9,98834
A	2,02266	B	2,03814	C	1,43326
$A =$	105,36	$B =$	109,18	$C =$	27,118
$q =$	28° 26,6	$p =$	14° 3,8	$r =$	103° 13,0
$p =$	14 3,8		180	$q =$	28 26,6
$awb =$	14 22,8	$r =$	103 13,	$abw =$	74 46,4
		$wab =$	90 50,8		

4.

Aus den Coordinaten dreier Puncte, die Lage dieser Puncte zu bestimmen.

Die Puncte seyen a, b, c; ihre Coordinaten seyen a, b, c, und a', b', c'; die Seiten des $\triangle\, abc$ seyen $bc = A$, $ca = B$, $ab = C$; ihre Positionswinkel gegen die Axen seyen p, p'; q, q'; r, r', so dafs $p + p' = q + q' = r + r' = w$. so hat man (IX. 3.) die Gleichungen:

$$\begin{array}{ll}
A \,.\, \sin p = (c' - b') \sin w & A \,.\, \sin p' = (c - b) \sin w \\
A \,.\, \cos p = c - b + (c' - b') \cos w & A \,.\, \cos p' = c' - b' + (c - b) \cos w \\
B \,.\, \sin q = (a' - c') \sin w & B \,.\, \sin q' = (a - c) \sin w \\
B \,.\, \cos q = a - c + (a' - c') \cos w & B \,.\, \cos q' = a' - c' + (a - c) \cos w \\
C \,.\, \sin r = (b' - a') \sin w & C \,.\, \sin r' = (b - a) \sin w \\
C \,.\, \cos r = b - a + (b' - a') \cos w & C \,.\, \cos r' = b' - a' + (b - a) \cos w
\end{array}$$

Die Winkel des $\triangle\, abc$ sind:

$$\begin{array}{lll}
a = & -180° + q - r = & -180° + r' - q' \\
b = & 180 + r - p = & 180° + p' - r' \\
c = & 180° + p - q = & 180° + q' - p'
\end{array}$$

Die Arealen je zweier Puncte sind:

$$a \,.\, b' - a' \,.\, b = h, \quad b \,.\, c' - b' \,.\, c = f, \quad c \,.\, a' - c' \,.\, a = g$$

Der Inhalt der durch je zwei Leitlinien im Anfangspunct gebildeten Dreiecke ist alsdann:

$$wba = \tfrac{1}{2} h \,.\, \sin w; \quad wac = \tfrac{1}{2} g \,.\, \sin w; \quad - wcb = \tfrac{1}{2} f \,.\, \sin w$$

Bezeichnet man also den Inhalt des $\triangle\, abc$ durch F, und die Summe der Arealen je zweier Puncte, welche die *Areale der drei Puncte* heifst, durch P; nämlich

$$f + g + h = P,$$

oder $a \,.\, b' - a' \,.\, b + b \,.\, c' - b' \,.\, c + c \,.\, a' - c' \,.\, a = P$

so ist $\quad 2F = P \,.\, \sin w$

Für diese Areale P ergeben sich leicht auch noch folgende Ausdrücke:

$$P = a(b' - c') + b(c' - a') + c(a' - b')$$
$$P = a'(c - b) + b'(a - c) + c'(b - a)$$
$$P = (a.b' + b.c' + c.a') - (a'.b + b'.c + c'.a)$$
$$P = (b - a)(c' - a') - (b' - a')(c - a)$$
$$P = (c - b)(a' - b') - (c' - b')(a - b)$$
$$P = (a - c)(b' - c') - (a' - c')(b - c)$$

Beispiel.

a	a'	b	b'	c	c'	w
17,	32,	13,	24,	29,	15,	53° 7,8

$A.\sin p =$	$-7{,}2$	$B.\sin q =$	$13{,}6$	$C.\sin r =$	$-6{,}4$
$A.\cos p =$	$10{,}6$	$B \cos q =$	$-1{,}8$	$C.\cos r =$	$-8{,}8$
$A.\sin p' =$	$12{,}8$	$B \sin q' =$	$-9{,}6$	$C.\sin r' =$	$-3{,}2$
$A.\cos p' =$	$0{,}6$	$B.\cos q' =$	$9{,}8$	$C.\cos r' =$	$-10{,}4$
7,2	− 0,85733	13,6	1,13354	6,4	− 0,80618
10,6	1,02531	1,8	− 0,25527	8,8	− 0,94448
$\text{tg}\, p$	− 9,83202	$\text{tg}\, q$	− 0,87827	$\text{tg}\, r$	9,86170
$\sin p$	− 9,74964	$\sin q$	9,99623	$\sin r$	− 9,76951
A	1,10769	B	1,13731	C	1,03667
12,8	1,10721	9,6	− 0,98227	3,2	− 0,50515
0,6	9,77815	9,8	0,99123	10,4	− 1,01703
$\text{tg}\, p'$	1,32906	$\text{tg}\, q'$	− 9,99104	$\text{tg}\, r'$	9,48812
$\sin p'$	9,99952	$\sin q'$	− 9,84496	$\sin r'$	9,46848
A	1,10769	B	1,13731	C	1,03667
$A =$	12,814	$B =$	13,719	$C =$	10,881
$p =$	− 34° 11,2	$q =$	97° 32,4	$r =$	− 143° 58,4
$p' =$	87 19,0	$q' =$	− 44 24,6	$r' =$	197 6,2
$w =$	53 7,8	$w =$	53 7,8	$w =$	53 7,8
	− 180		180		180°
$q =$	97 32,4	$r =$	− 143 58,4	$p =$	− 34 11,2
$-r =$	143 58,4	$-p =$	34 11,2	$-q =$	− 97 32,4
$a =$	61 30,8	$b =$	70 12,8	$c =$	48 16,4

$f = -501$, $g = 673$, $h = -8$, $P = 164$

$F = 65{,}6$

5.

Aus den Coordinaten einer Reihe von Puncten, welche ein Vieleck bilden, die Lage dieser Puncte zu bestimmen.

Die gegebenen Puncte seyen a, b, c, d, f, g, h. Ihre Coordinaten seyen mit denselben Buchstaben bezeichnet. Wenn es nur auf die gegenseitige Lage dieser Puncte ankommt, so wählt man einen derselben zum Anfangspunct, indem man (IX. 2.) die Coordinaten dieses Puncts von den gleichnamigen Coordinaten der übrigen Puncte abzieht. Mann berechnet sodann die Lage der übrigen Puncte gegen diesen neuen Anfangspunct nach IX. 1.

Der Inhalt der im Anfangspunct durch die Leitlinien je zweier auf einander folgenden Puncte gebildeten Dreiecke ist:

$$wab = \tfrac{1}{2}(a \,.\, b' - a' \,.\, b) \sin w, \quad wbc = \tfrac{1}{2}(b \,.\, c' - b' \,.\, c) \sin w$$
$$wcd = \tfrac{1}{2}(c \,.\, d' - c' \,.\, d) \sin w, \quad wdf = \tfrac{1}{2}(d \,.\, f' - d' \,.\, f) \sin w$$
$$wfg = \tfrac{1}{2}(f \,.\, g' - f' \,.\, g) \sin w, \quad wgh = \tfrac{1}{2}(g \,.\, h' - g' \,.\, h) \sin w$$
$$wha = \tfrac{1}{2}(h \,.\, a' - h' \,.\, a) \sin w \,.$$

Die algebraische Summe aller dieser Dreiecke giebt den Inhalt der ganzen Figur $= F$. Die algebraische Summe P der Arealen je zweier auf einander folgenden Puncte, vom ersten bis wieder zum ersten zurück, heiſst die Areale der ganzen Figur. Also wenn:

$$P = (a \,.\, b' - a' \,.\, b) + (b \,.\, c' - b' \,.\, c) + (c \,.\, d' - c' \,.\, d) + (d \,.\, f' - d' \,.\, f) + (f \,.\, g' - f' \,.\, g) + (g \,.\, h' - g' \,.\, h) + (h \,.\, a' - h' \,.\, a) \,.$$

so ist $\quad 2 \,.\, F = P \,.\, \sin w \,.$

Die Areale läſst sich noch auf verschiedene andre Formen bringen, z. B.

$$P = (a \,.\, b' + b \,.\, c' + c \,.\, d' + d \,.\, f' + f \,.\, g' + g \,.\, h' + h \,.\, a') - (a' \,.\, b + b' \,.\, c + c' \,.\, d + d' \,.\, f + f' \,.\, g + g' \,.\, h + h' \,.\, a)$$

$$P = a(b' - h') + b(c' - a') + c(d' - b') + d(f' - c') + f(g' - d') + g(h' - f') + h(a' - g') \,.$$

$$P = a'(h - b) + b'(a - c) + c'(b - d) + d'(c - f) + f'(d - g) + g'(f - h) + h'(g - a) \,.$$

$$P = (a+b)(b'-a') + (b+c)(c'-b') + (c+d)(d'-c') + (d+f)(f'-d') + (f+g)(g'-f') + (g+h)(h'-g') + (h+a)(a'-h') \,.$$

$$P = (a'+b')(a-b) + (b'+c')(b-c) + (c'+d')(c-d) + (d'+f')(d-f) + (f'+g')(f-g) + (g'+h')(g-h) + (h'+a')(h-a) \,.$$

Dieselbe Areale ergiebt sich auch, indem man einen der Puncte zum Anfangspunct annimmt, und die Coordinaten desselben von den gleichnamigen Coordinaten der übrigen Puncte abzieht. Z. B. für den Punct a als Anfangspunct ist:

$$\begin{aligned} P = & (b-a)(c'-a') - (b'-a')(c-a) \\ & + (c-a)(d'-a') - (c'-a')(d-a) \\ & + (d-a)(f'-a') - (d'-a')(f-a) \\ & + (f-a)(g'-a') - (f'-a')(g-a) \\ & + (g-a)(h'-a') - (g'-a')(h-a) \end{aligned}$$

Beispiel.

a	a'	b	b'	c	c'	d	d'	f	f'	g	g'	h	h'	w
13,	15,	17,	24,	29,	32,	34,	25,	41,	18,	26,	23,	20,	5;	53° 7′,8

$a.b' =$	312	$a'.b =$	255	$(b-a)(c'-a') =$	68
$b.c'$	544	$b'.c$	696	$(c-a)(d'-a')$	160
$c.d'$	725	$c'.d$	1088	$(d-a)(f'-a')$	63
$d.f'$	612	$d'.f$	1025	$(f-a)(g'-a')$	224
$f.g'$	943	$f'.g$	468	$(g-a)(h'-a')$	−130
$g.h'$	130	$g'.h$	460		385
$h.a'$	300	$h'.a$	65	$(b'-a')(c-a) =$	144
	3566		4057	$(c'-a')(d-a)$	357
				$(d'-a')(f-a)$	280
				$(f'-a')(g-a)$	39
				$(g'-a')(h-a)$	56
					876

4057	876	$P = 491$
3566	385	$\sin w =$ 0,8
$P = 491$	$= 491$	$F = 196,4$

Die Abstände ab, ac, ad u. s. w. seyen $= b''$, c'', d'' u. s. w., ihre Positionswinkel gegen die Axen $= p, p'$; q, q'; r, r', u. s. w., so ist

$b''.\sin p =$	7,2	$c''.\sin q =$	13,6	$d''.\sin r =$	8
$b''.\cos p$	9,4	$c''.\cos q$	26,2	$d''.\cos r$	27
$b''.\sin p'$	3,2	$c''.\sin q'$	12,8	$d''.\sin r'$	16,8
$b''.\cos p'$	11,4	$c''.\cos q'$	26,6	$d''.\cos r'$	22,6
$f''.\sin s =$	2,4	$g''.\sin t =$	6,4	$h''.\sin u =$	−8,
$f''.\cos s$	29,8	$g''.\cos t$	17,8	$h''.\cos u$	1
$f''.\sin s'$	22,4	$g''.\sin t'$	10,4	$h''.\sin u'$	5,6
$f''.\cos s'$	19,8	$g''.\cos t'$	15,8	$h''.\cos u'$	−5,8
$p =$	37° 27,0	$q =$	27° 26,0	$r =$	16 30,3
$p' =$	15 40,8	$q' =$	25 41,8	$r' =$	36 57,5
$s =$	4 36,3	$t =$	19 46,6	$u =$	277 7,5
$s' =$	48 31,5	$t' =$	33 21,2	$u' =$	136 0,3

b''	$= 11{,}841$	$bac =$	$10^0\ 1{,}0$	$\triangle bac =$	30,4
c''	$= 29{,}520$	$cad =$	$10\ 55{,}7$	$\triangle cad =$	78,8
d''	$= 28{,}160$	$daf =$	$11\ 54{,}0$	$\triangle daf =$	86,8
f''	$= 29{,}896$	$fag =$	$-15\ 10{,}3$	$\triangle fag =$	$-74{,}0$
g''	$= 18{,}916$	$gah =$	$102\ 39{,}1$	$\triangle gah =$	74,4
h''	$= 8{,}062$			$F =$	196,4

6.

Transformation rechtwinkliger Coordinaten.

Das primitive Axensystem sey xwy; die Coordinaten eines Puncts a in diesem System seyen $wb = x$, $ba = y$. Das secundäre Axensystem sey $x'w'y'$. Die Coordinaten desselben Puncts a in diesem System seyen $w'b' = x'$, $b'a = y'$. Die Coordinaten des secundären Anfangspuncts im primitiven System seyen $wc = a$, $cw' = a'$. Die Coordinaten des primitiven Anfangspuncts im secundären System seyen $-w'c' = b$, $-c'w = b'$. Der Positionswinkel der Axe der x' gegen die Axe der x, sey $= p$, so ist der Positionswinkel der Axe der y' gegen die Axe der y, gleich $-p$. Die geometrische Betrachtung zeigt die nachstehenden Gleichungen an:

$$x = a + x' . \cos p - y' . \sin p$$

$$y = a' + x' . \sin p + y' . \cos p$$

$$b = -a . \cos p - a' . \sin p\ ,\quad b' = a . \sin p - a' . \cos p$$

$$a = -b . \cos p + b' . \sin p\ ,\quad a' = -b . \sin p - b' . \cos p$$

$$x' = b + x . \cos p + y \sin p$$

$$y' = b' - x . \sin p + y . \cos p$$

Die beiden ersten Gleichungen wendet man an, wenn man einen Ausdruck, welcher die Coordinaten eines beliebigen Puncts in einem primitiven System enthält, in einen andern umzuwandeln hat, welcher denselben Punct in Coordinaten eines secundären Systems darstellt. Durch die beiden letzten Gleichungen berechnet man aus gegebenen Coordinaten eines Puncts im primitiven System, die Coordinaten desselben Puncts im secundärem System.

Beispiel.

a	a'	x'	y'	p
35	14	54	11	$37^0\ 28'$

x' . .	1,73239	a . .	1,54407	$x' \cos p$	1,63205 =	42,86
y'	1,04139	a'	1,14613	$y' \sin p$	0,82551 =	− 6,69
$\cos p$	9,89966	$\cos p$	9,89966		a . .	35
$\sin p$	9,78412	$\sin p$	9,78412		x =	71,17

$x' \sin p$	1,51651 = 32,848	$a . \cos p$	1,44373	=	27,78
$y' \cos p$	0,94105 8,731	$a' \sin p$	0,93025		8,516
a' . .	14			b =	− 36,296
y =	55,579	$a . \sin p$	1,32819	=	21,290
		$a' \cos p$	1,04579		− 11,112
				b' =	10,178

Probe.

x	1,85229	$x . \cos p$	1,75195	=	56,488
y	1,74491	$y . \sin p$	1,52903	=	33,808
$\cos p$	9,89966		b	= −	36,296
$\sin p$	9,78412		x'	=	54,
		$x . \sin p$	1,63641	= −	43,292
		$y . \cos p$	1,64457	=	44,113
			b'	=	10,178
			y'	=	11,

7.

Transformation rechtwinkliger Coordinaten in schiefwinklige.

Das rechtwinklige System sey xwy. Die Coordinaten eines beliebigen Puncts a seyen in diesem System $wb = x$, $ba = y$; im schiefwinkligen System aber, welches mit dem rechtwinkligen einerlei Anfangspunct hat, und dessen schiefer Ordinatenwinkel $= w$ ist, seyen die Coordinaten desselben Puncts a $wb' = x'$, $b'a = y'$.

Wenn nun beide Systeme einerlei Axe der x haben, so ist

$$x = x' + y' . \cos w, \qquad y = y' . \sin w$$
$$x' = x - y . \cot w, \qquad y' = \frac{y}{\sin w}$$

Wenn aber beide Systeme einerlei Axe der y haben, so ist

$$y = y' + x' . \cos w, \qquad x = x' . \sin w$$
$$y' = y - x . \cot w, \qquad x' = \frac{x}{\sin w}$$

8.

Transformation schiefwinkliger Coordinaten.

Das primitive System sey xwy, das secundäre System sey $x'w'y'$. Im primitiven System seyen die Coordinaten eines beliebigen Puncts a $wb = x$, $ba = y$, die Coordinaten des secundären Anfangspuncts $wc = a$, $cw' = a'$. Im secundären System seyen die Coordinaten von a $w'b' = x'$, $b'a = y'$, die Coordinaten des primitiven Anfangspuncts $-w'c' = b$, $-c'w = b'$.

Man bezieht immer drei Axen auf die vierte, fället also Lothe von den entsprechenden Puncten auf diese vierte Axe. Das von dem letzten Puncte gefällte Loth ist gleich der Summe der Producte der einzelnen Coordinaten mit den Sinus der Winkel, welche die ihnen parallelen Axen mit der vierten Axe bilden. Um die Winkel auf die kürzeste Art anzuzeigen, darf man nur die beiden Zeichen der Axen neben einander setzen. Z. B. die Winkel der Axen der x, der x', der y', mit der Axe der y, werden angezeigt durch yx, yx', yy' u. s. w. Die Winkel werden nach einerlei Richtung von 0 bis 360° genommen. Die Sinus der Winkel zwischen 180° und 360° haben ein negatives Vorzeichen. Hierdurch ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x \,.\, \sin yx &= a \,.\, \sin yx + x' \,.\, \sin yx' + y' \,.\, \sin yy' \\
y \,.\, \sin xy &= a' \,.\, \sin xy + x' \,.\, \sin xx' + y' \,.\, \sin xy' \\
x' \,.\, \sin y'x' &= b \,.\, \sin y'x' + x \,.\, \sin y'x + y \,.\, \sin y'y \\
y' \,.\, \sin x'y' &= b' \,.\, \sin x'y' + x \,.\, \sin x'x + y \,.\, \sin x'y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a \,.\, \sin yx + b \, \sin yx' + b' \,.\, \sin yy' &= 0 \\
a' \,.\, \sin xy + b \,.\, \sin xx' + b' \,.\, \sin xy' &= 0 \\
b \,.\, \sin y'x' + a \,.\, \sin y'x + a' \,.\, \sin y'y &= 0 \\
b' \,.\, \sin x'y' + a' \, \sin x'x + a \, \sin x'y &= 0
\end{aligned}$$

Beispiel.

a	a'	x	y
32,	43,	57,	72

$yx = 65^\circ 30'$ $\quad xy = 65^\circ 30'$ $\quad y'x' = 31^\circ 15'$ $\quad x'y' = 328^\circ 45'$

$yx' = 43 \; 15$ $\quad xx' = 22 \; 15$ $\quad y'x = 53 \; 30$ $\quad x'x = 22 \; 15$

$yy' = 12 \; 0$ $\quad xy' = 53 \; 30$ $\quad y'y = 348^\circ \; 0$ $\quad x'y = 316 \; 45$

$\frac{a\,.\,\sin y'x}{\sin y'x'} = 49{,}585$	$\frac{a\,.\,\sin x'x}{\sin x'y'} = -\,23{,}357$
$\frac{a'\,.\,\sin y'y}{\sin y'x'} = -\,17{,}233$	$\frac{a'\,.\,\sin x'y}{\sin x'y'} = 56{,}794$
$b = -\,32{,}352$	$b' = -\,33{,}437$
$\frac{x\,.\,\sin y'x}{\sin y'x'} = 88{,}322$	$\frac{x\,.\,\sin x'x}{\sin x'y'} = -\,41{,}604$
$\frac{y\,.\,\sin y'y}{\sin y'x'} = -\,28{,}855$	$\frac{y\,.\,\sin x'y}{\sin x'y'} = 95{,}096$
$b = -\,32{,}352$	$b' = -\,33{,}437$
$x' = 27{,}115$	$y' = 20{,}055$

Probe.

$\frac{b\,.\,\sin yx'}{\sin yx} = -\,24{,}360$	$\frac{b\,.\,\sin xx'}{\sin xy} = -\,13{,}462$
$\frac{b'\,.\,\sin yy'}{\sin yx} = -\,7{,}640$	$\frac{b'\,.\,\sin xy'}{\sin xy} = -\,29{,}538$
$a = 32,$	$a' = -\,43,$
$\frac{x'\,.\,\sin yx'}{\sin yx} = 20{,}418$	$\frac{x'\,.\,\sin xx'}{\sin xy} = 11{,}283$
$\frac{y'\,.\,\sin yy'}{\sin yx} = 4{,}582$	$\frac{y'\,.\,\sin xy'}{\sin xy} = 17{,}717$
$a = 32,$	$a' = 43,$
$x = 57,$	$y = 72,$

9.

Die Lage eines Puncts ist durch eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen parallelen Ordinaten einer beliebigen durch diesen Punct gezogenen Linie gegeben.

Das Axensystem sey xwy. Auf der Axe der x seyen die Puncte b, c, d, durch ihre Abscissen $wb = b$, $wc = c$, $wd = d$, bestimmt. Durch diese Puncte seyen Parallellinien mit der Axe der y gezogen, und es sey der Punct a durch seine Ordinate $ba = a'$ bestimmt. Man ziehe durch den Punct a eine beliebige Linie, welche die Parallellinie in u, v, schneidet, und es seyen die parallelen Ordinaten $cu = u$, $dv = v$.

Man ziehe afg der Axe der x parallel, so ist $\triangle afu \sim agv$, also $\frac{u - a'}{v - a'} = \frac{a - c}{a - d}$, woraus die Gleichung folgt:

$$(a - d)\, u + (c - a)\, v + a'\,(d - c) = o$$

Man wähle die Gröfsen A, A', A'', so dafs

$$A \,.\, a'\,(c - d) + A''.\,(a - d) = o$$
$$A'.\, a'\,(d - c) + A''\,(a - c) = o$$

so hat die gefundene Gleichung die allgemeine Form

$$A\,.\,u + A'.\,v + A'' = o$$

Hier heifsen A, A', die ***Parameter***, und A'' die ***Distantiale.*** Umgekehrt, müssen alle Linien, deren parallele Ordinaten u, v, eine Gleichung von der angezeigten Form befriedigen, durch einen gegebenen, d. h. durch A, A', A'', bestimmbaren Punct a gehen, oder diesem Puncte umschrieben seyn.

Denn wenn diese Gleichung für $v = o$, den Werth $u = c'$, und für $u = o$ den Werth $v = d'$ liefert, so ist:

$$A\,.\,c' + A'' = o, \quad A\,.\,d' + A'' = o$$

$$A = -\frac{A''}{c'}, \quad A' = -\frac{A''}{d'}$$

Setzt man diese Werthe von A, A', in die gegebene Gleichung, so fällt A'' heraus, und man erhält

$$\frac{u}{c'} + \frac{v}{d'} - 1 = o$$

oder $\frac{v}{d'} = \frac{c' - u}{c'}$, $\frac{u}{c'} = \frac{d' - v}{d'}$.

Man setze auf die Parallellinien von den Puncten c, d, aus, die Abschnitte $ch = c'$, $dk = d'$, nach den ihren Vorzeichen entsprechenden Richtungen, so schneiden die Linien ck, dh, einander in einem bestimmten Puncte a. Man setze auf dieselben Parallellinien die Abschnitte u, v, nach den entsprechenden Richtungen. Man ziehe au, welche die Parallellinie dk in v'' schneiden mag, so ist $\frac{cu}{ch} = \frac{kv''}{dk}$. Aber $\frac{cu}{ch} = \frac{u}{c'}$.

Also $\frac{u}{c'} = \frac{kv''}{dk}$, also $\frac{d' - v}{d'} = \frac{kv''}{dk}$. Folglich geht die Linie au durch den Punct v. Folglich geht auch die Linie uv durch den bestimmten Punct a.

Um die Lage des Puncts a aus den Parametern A, A' und der Distantiale A'' zu bestimmen, so geben die obigen Gleichungen folgende Werthe:

$$(A + A')a' + A'' = o$$
$$(A + A')a = A.c + A'.d$$
$$(A + A')(a - c) = A'(d - c), \quad (A + A')(d - a) = A(d - c)$$
$$\frac{a - c}{d - a} = \frac{A'}{A}$$

Wenn die Parameter A, A', gleich und entgegengesetzt sind, so liegt der Punct a im Unendlichen, d. h. alle Linien, welche der Gleichung $A(u - v) + A'' = o$ entsprechen, sind einander parallel.

Beispiel.

c	d	A	A'	A''
5,	37,	7,	25,	-150

Hieraus $a = 30$, $a' = 4\frac{11}{16}$, $c' = 21\frac{3}{7}$, $d' = 6$

10.

Die Lage eines Puncts ist durch eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen den reciproken Werthen der Coordinaten einer beliebigen durch diesen Punct gezogenen Linie in einem beliebigen Axensystem, gegeben.

Das Axensystem sey xwy, die Coordinaten des Puncts a seyen $wb = ca = a$, $ba = wc = a'$. Durch den Punct a sey eine beliebige Linie gezogen, welche die Axen in u, v, schneidet. Die Abschnitte $wu = u$, $wv = v$, heifsen die Coordinaten der Linie. Die Quotienten $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, sind also die *reciproken* Werthe der Coordinaten. Es folgt aber aus der Aehnlichkeit der Dreiecke vca, vwu, die Proportion

$$\frac{a}{u} = \frac{v - a'}{v}$$

und hieraus die Gleichung:

$$\frac{a}{u} + \frac{a'}{v} - 1 = o$$

oder . . . . . $\frac{A}{u} + \frac{A'}{v} + A'' = o$

Umgekehrt müssen alle Linien, deren Coordinaten eine Gleichung von der angezeigten Form befriedigen, durch einen gegebenen, d. h. aus den Gröfsen A, A', A'', bestimmbaren Punct a gehen, oder demselben *umschrieben* seyn.

Denn man nehme in dieser Gleichung u unendlich grofs an, so verschwindet das erste Glied. Der entsprechende Werth von v sey $= a'$. Man nehme v unendlich grofs an, so verschwindet das zweite Glied. Der entsprechende Werth von u sey $= a$. Man hat also $\frac{A'}{a'} + A'' = o$, $\frac{A}{a} + A'' = o$. Man setze die Werthe von a, a', in die gegebene Gleichung, so fällt A'' heraus, und es ist $\frac{a}{u} + \frac{a'}{v} - 1 = o$, oder $\frac{a}{u} = \frac{v - a'}{v}$. Man nehme $wb = a$, $wc = a'$, $wu = u$, $wv = v$, so ist $cv = v - a'$. Man ziehe ca parallel mit wu, so ist $\frac{ca}{u} = \frac{v - a'}{v}$, aber vermöge der Gleichung $\frac{v - a'}{v} = \frac{a}{u}$, also $ca = a$. Also sind die Abschnitte ca, wb, parallel und gleich, also auch die Abschnitte ba, wc, parallel und gleich. Also ist die Linie uv einem gegebenen Punct a umschrieben.

Die Gleichung läfst sich noch auf eine andre Form bringen. Es seyen auf den Axen der x, y, gegebene Puncte d, f, deren Coordinaten $wd = d$, $wf = f$ seyen. Man setze $du = u'$, $fv = v'$, so dafs $u - u' = d$, $v - v' = f$. Aus der obigen Gleichung

$$\frac{a}{u} + \frac{a'}{v} - 1 = o$$

wird also $\frac{a}{d} \cdot \frac{u - u'}{u} + \frac{a'}{f} \cdot \frac{v - v'}{v} - 1 = o$

oder $\frac{a}{d} \cdot \frac{u'}{u} + \frac{a'}{f} \cdot \frac{v'}{v} + 1 - \frac{a}{d} - \frac{a'}{f} = o$

oder $M \cdot \frac{u'}{u} + M' \cdot \frac{v'}{v} + M'' = o$

Siehe *Chasles* Geschichte der Geometrie, deutsch von *Sohncke*, Halle 1839. Note III. über die Porismen des Euklid. S. 280. Zweites Porisma.

Hier sind $\frac{u'}{u}$, $\frac{v'}{v}$, die Verhältnisse der Abstände des Durchschnitts auf jeder Axe von einem festen Puncte und vom Anfangspuncte der Coordinaten. Die Factoren M, M', heifsen die Massen, und die Producte der Massen mit den Verhältnissen heifsen die Momente der Verhältnisse. Die Gleichung läfst sich also als Satz so aussprechen:

Wenn zwei geneigte Axen von einer Linie so durchschnitten werden, dafs die Summe der Momente der Verhältnisse der Abschnitte gegen einen festen Punct auf jeder Axe und gegen den Anfangspunct, einer gegebenen Gröfse gleich ist, so ist die Linie einem gegebenen Puncte umschrieben.

11.

Die Gleichung einer Linie ist eine unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen den Coordinaten eines beliebigen Puncts der Linie.

Das Axensystem xwy werde von den parallelen Linien A, B, in d, d' und g, g', geschnitten. Die Coordinaten dieser Puncte seyen ebenfalls d, d', g, g'. In der Linie A sey ein unbestimmter Punct x, dessen Coordinaten $wl = x$, $lx = y$. Die Aehnlichkeit der Dreiecke xld, $d'wd$, $g'wg$, giebt die Proportionen

$$\frac{d - x}{y} = \frac{d}{d'} = \frac{g}{g'},$$

oder $g' \cdot x + g \cdot y - g' \cdot d = 0$

Die Gleichung der Linie A hat also die Form

$$A \cdot x + A' \cdot y + A'' = 0$$

Die Factoren A, A', der Coordinaten x, y, heifsen die ***Parameter.*** Die Gröfse A'' heifst die ***Distantiale.*** Eine Linie B, welche der A parallel ist, und die Axen so schneidet, dafs ihre Coordinaten g', g, den Parametern A, A' gleich sind, bildet mit dem Anfangspunct w ein Dreieck wgg', welches das ***characteristische Dreieck*** heifst.

12.

Jede unbestimmte Gleichung des ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Gröfsen, ist die Gleichung einer Linie.

Die gegebene Gleichung sey $Ax + A' \cdot y + A'' = 0$, wo x, y, Linien bedeuten sollen.

Man wähle drei beliebige Linien a, b, c, setze dieselben an die Stelle von x in die gegebene Gleichung, und bestimme aus derselben die entsprechenden Werthe von y, welche a', b', c', seyn mögen. Man hat also folgende Gleichungen:

$$A \, . \, a + A' \, . \, a' + A'' = o$$
$$A \, . \, b + A' \, . \, b' + A'' = o$$
$$A \, . \, c + A' \, . \, c' + A'' = o$$

woraus folgt $A\,(b - a) + A'\,(b' - a') = o$

$$A\,(c - a) + A'\,(c' - a') = o$$

hieraus $(b - a)(c' - a') - (b' - a')(c - a) = o$

oder . . . . . $\dfrac{a' - b'}{b - a} = \dfrac{a' - c'}{c - a}$

Man mache in einem beliebigen Axensystem xwy die Abschnitte $wl = a$, $wm = b$, $wn = c$, $wo = a'$, $wp = b'$, $wq = c'$, ziehe durch die Puncte l, m, n, und o, p, q, Parallelen mit den entsprechenden Axen. Diese Parallelen mögen einander in den Puncten a, b, c, schneiden. Wenn nun die Linie la von den Linien pb, qc, in r, s, geschnitten wird, so ist $ar = a' - b'$, $as = a' - c'$, $br = b - a$, $cs = c - a$,

also ist, vermöge der obigen Proportion $\dfrac{ar}{br} = \dfrac{as}{cs}$. Aber $arb = asc = w$, also (II. 62.) $\triangle\, arb \sim asc$, also $abr = acs$, also liegen die Puncte a, b, c, in einer Linie.

Jeder Punct c, dessen Coordinaten die gegebene Gleichung befriedigen, liegt also mit zwei festen Puncten a, b, dessen Coordinaten die gegebene Gleichung befriedigen, in einer Linie. Folglich entspricht jede Gleichung von der Form $Ax + A' \, . \, y + A'' = o$, einer Linie.

Beispiel.

Die Gleichung sey $7\,x + 25\,y - 150 = o$. Man setze

$x = a = 3$ so ist $y = a' = 5{,}16$
$x = b = 4$ - - $y = b' = 4{,}88$
$x = c = 5$ - - $y = c' = 4{,}60$

also $\dfrac{a' - b'}{b - a} = 0{,}28$; $\dfrac{a' - c'}{c - a} = 0{,}28$ u. s. w.

13.

In der Gleichung einer Linie sind die Parameter den Cosinus der Positionswinkel des vom Anfangspunct auf die Linie gefällten Loths proportionirt, die Distantiale aber ist diesem Lothe selbst proportionirt.

Die Coordinaten eines beliebigen Puncts der Linie dd' seyen $wl = x$, $lx = y$. Das vom Anfangspunct auf die Linie dd' gefällte Loth sey $wh = l$, die Positionswinkel desselben gegen die Axen seyen $dwh = p$, $d'wh = p'$, so dafs $p + p' = w$. Man fälle lk senkrecht auf wh, so ist $wk + kh = l$, $wk = x \cdot \cos p$, $kh = y \cdot \cos p'$. Hieraus folgt die Gleichung

$$\cos p \cdot x + \cos p' \cdot y - l = o$$

Vergleicht man sie mit der Gleichung

$$A \cdot x + A' \cdot y + A' = o$$

so ist $A : A' : A'' = \cos p : \cos p' : l$.

14.

Die Lage einer Linie gegen die Axen aus ihrer Gleichung zu berechnen.

Die Gleichung der Linie sey

$$A \cdot x + A' \cdot y + A'' = o$$

Die Coordinaten der Linie auf den Axen findet man durch die Gleichungen, welche man durch Annahme von $y = o$ und $x = o$ erhält

$$A \cdot d + A'' = o \qquad A' \cdot d' + A'' = o$$

Man nehme eine Gröfse D so an, dafs

$$D \cdot \cos p = A, \qquad D \cdot \cos p' = A', \qquad D \cdot l = -A''$$

so ist (IX. 13.) das vom Anfangspunct auf die Linie gefällte Loth $= l$, die Winkel p, p', sind die Positionswinkel desselben gegen die Axen, so dafs $p + p' = w$, also $p = w - p'$ $p' = w - p$. Hieraus folgt:

$$\cos p - \cos p' \cdot \cos w = \sin p' \cdot \sin w$$
$$\cos p' - \cos p \cdot \cos w = \sin p \cdot \sin w$$

$$D \cdot \sin w \cdot \sin p' = A - A' \cdot \cos w$$
$$D \cdot \sin w \cdot \sin p = A' - A \cdot \cos w$$
$$D \cdot 2 \sin \tfrac{1}{2} w \cdot \sin \tfrac{1}{2} (p' - p) = A - A'$$
$$D \cdot 2 \cos \tfrac{1}{2} w \cdot \cos \tfrac{1}{2} (p' - p) = A + A'$$
$$D^2 \cdot \sin w \sin p' \cdot \cos p = A (A - A' \cdot \cos w)$$
$$D^2 \cdot \sin w \cdot \sin p \cdot \cos p' = A' (A' - A \cdot \cos w)$$
$$D^2 \cdot \sin^2 w = A^2 - 2 A \cdot A' \cdot \cos w + A'^2$$

Hieraus ergiebt sich, dafs D der Durchmesser des umschriebenen Kreises des *characteristischen* Dreiecks ist, in welchem die Seiten A, A' den Ordinatenwinkel w einschliefsen. Daher heifst die Gröfse D die ***Diametrale*** der Linie. Man hat noch $d \,.\, \cos p = d' \,.\, \cos p' = l$, also

$$D \,.\, l = A \,.\, d \qquad D \,.\, l = A' \,.\, d'$$

Der Abschnitt der Linie zwischen den Axen sey $= S$, so ist

$$S \,.\, \cos p = d' \,.\, \sin w\,, \qquad S \,.\, \cos p' = d \,.\, \sin w$$

$$S \,.\, A = D \,.\, d' \sin w \qquad S \,.\, A' = D \,.\, d \,.\, \sin w$$

$$S \,.\, A \,.\, A' = - A'' \,.\, D \,.\, \sin w$$

$$S \,.\, A \,.\, A' \,.\, l = A'' \,.\, A'' \,.\, \sin w$$

Beispiel.

A	A'	A''	w
7,	−25,	150	$53^0\,7{,}8$

$\cot \frac{1}{2} w$	0,30103	$A - A'$	1,50515	$A + A'$ −	1,25527
$A - A'$	1,50515	$\sin \frac{1}{2}(p'-p)$ −	9,98347	$\cos \frac{1}{2}(p'-p)$	9,43255
$A + A'$ −	1,25527	$\sin \frac{1}{2} w$	9,65052	$\cos \frac{1}{2} w$	9,95155
$\mathrm{tg} \frac{1}{2}(p'-p)$ −	0,55091	2	0,30103	2	0,30103
$\frac{1}{2}(p'-p) = -$	$74^0\,17{,}5$	D −	1,57013	D −	1,57014
$\frac{1}{2}(p'+p) =$	26 33,9	A	1,84510	A' −	1,39794
$p' =$	− 47 43,6	$\cos p$ −	9,27497	$\cos p'$	9,82780
$p =$	100 51,4	D −	1,57013	D −	1,57014
D −	1,57013	d' . .	0,77815	$D =$	− 37,164
A''	2,17609	$\sin w$	9,90309	$S =$	− 25,484
l . .	0,60596	$\cos p$ −	9,27497	$l =$	4,0361
		S −	1,40627	$d' =$	6,
				$d =$	$-21\frac{3}{7}$

15.

Wenn die Areale zweier Linien gleich Null ist, so sind die Linien identisch oder parallel, je nachdem die Distantialen den Parametern proportionirt oder nicht proportionirt sind.

Die Gleichungen zweier Linien A, B, seyen

$$A \ldots A x + A' \,.\, y + A'' = o$$

$$B \ldots B x + B' \,.\, y + B'' = o$$

Der Unterschied der Producte der wechselnamigen Parameter der beiden Gleichungen heifst die *Areale der beiden Linien*, nämlich

$$A \,.\, B' - A' \,.\, B = H$$

Die Coordinaten der Linien seyen, bei der Linie A d und d', bei der Linie B g und g', so ist (IX. 14.)

$$A \cdot d + A'' = o \qquad A' \cdot d' + A'' = o$$
$$B \cdot g + B'' = o \qquad B' \cdot g' + B'' = o$$

Es sey nun $A \cdot B' - A' \cdot B = o$, oder $\frac{A}{A'} - \frac{B}{B'} = o$

so ist auch $d \cdot g' - d' \cdot g = o$, oder $\frac{d}{d'} - \frac{g}{g'} = o$.

Also sind die Linien A, B, entweder identisch oder parallel (II. 56.). Welches von beiden der Fall sey, entscheidet sich darnach, ob die Puncte d, g, zusammenfallen oder nicht. Es ist aber . . $A \cdot B'' \cdot d - B \cdot A' \cdot g = o$

$$A' \cdot B'' \cdot d' - B' \cdot A'' \cdot g' = o$$

Wenn also die drei Gleichungen statt finden

$$A.B' - A'.B = o, \quad A.B'' - B.A'' = o, \quad A'.B'' - B'.A'' = o$$

so sind die Linien identisch. Wenn aber blofs die erste der Gleichungen statt findet, die andern aber nicht, so sind die Linien parallel.

Linien sind also parallel, wenn in ihren Gleichungen die gleichnamigen Parameter gleich oder proportionirt sind, die Distantialen aber den Parametern nicht proportionirt sind.

Wenn eine Linie einer gegebenen parallel seyn soll, so ist das *Verhältnifs* der Parameter ihrer Gleichung gegeben.

16.

Die Gleichung einer Linie zu finden, welche durch einen gegebenen Punct gehen, oder demselben umschrieben seyn soll.

Die gesuchte Gleichung sey $A \cdot x + A' \cdot y + A'' = o$. Die Coordinaten des gegebenen Puncts seyen a, a'. Da dieser Punct in der Linie liegen, oder dieser Linie eingeschrieben seyn soll, so mufs die Gleichung der Linie durch die Coordinaten des Puncts befriedigt werden.

Man hat also . . $A \cdot a + A' \cdot a' + A'' = o$

aber auch . . . . . $A \cdot x + A' \cdot y + A'' = o$

also ist . . . $A(x - a) + A'(y - a') = o$

oder . . $A \cdot x + A' \cdot y - A \cdot a - A' \cdot a' = o$

Dieses ist die gesuchte Gleichung. Die Lage der Linie ist also nicht völlig bestimmt, d. h. es giebt unzählig viele Linien, welche einem und demselben gegebenen Puncte umschrieben sind. Für $y = o$ sey $x = u$; und für $x = o$ sey $y = v$, so ist:

$$A(u - a) - A'.a' = o\,,\quad A'(v - a') - A.a = o$$

Eliminirt man hieraus A, A', so ist

$$u.v - a.v - a'.u = o$$

oder

$$\frac{a}{u} + \frac{a'}{v} - 1 = o$$

welche Gleichung mit der in IX. 10. übereinstimmt.

17.

Die Gleichung einer Linie zu finden, welche einem gegebenen Punct umschrieben, und einer gegebenen Linie parallel sey.

Die Gleichung der gegebenen Linie sey

$$Ax + A'.y + A'' = o$$

so ist die Gleichung der gesuchten Parallellinie (IX. 15.)

$$A.x + A'.y + B'' = o$$

Die Coordinaten des gegebenen Puncts a seyen a, a', so ist (IX. 16.)

$$A.a + A'.a' + B'' = o$$

Die Gleichung der gesuchten Parallellinie ist also

$$A.x + A'.y - A.a - A'.a' = o$$

Beispiel.

a	a'	A	A'	A''
7,	6,	6,	-2,	-6

Die gesuchte Gleichung ist $6x - 2y - 30 = o$

18.

Die Gleichung einer Linie zu finden, welche durch zwei gegebene Puncte gehen soll.

Die Coordinaten der gegebenen Puncte a, b, seyen a, b und a', b'. Die Gleichung der gesuchten Linie sey

$$Ax + A'.y + A'' = o$$

so muſs sie durch die beiden Puncte a, b, befriedigt werden. Hieraus folgen die Gleichungen

$$A.a + A'.a' + A'' = o$$
$$A.b + A'.b' + A'' = o$$

Aus diesen beiden Gleichungen können die Gröfsen A, A', A'', bestimmt werden. Bezeichnet man nämlich die Areale der beiden Puncte a, b, durch h (IX. 3.), $a \,.\, b' - a' \,.\, b = h$, so findet man aus jenen Gleichungen durch Elimination die folgenden:

$$A \,.\, h + A'' \,.\, (b' - a') = o\,, \quad A' \,.\, h + A'' \,.\, (a - b) = o$$

Bestimmt man hieraus A, A', durch A'', und setzt man diese Werthe in die angenommene Gleichung

$$A \,.\, x + A' \,.\, y + A'' = o$$

so fällt A'' heraus, und man erhält für die gesuchte Gleichung folgende Formen:

$$(a' - b')\, x + (b - a)\, y + h = o$$

oder $(a' - b')\, x + (b - a)\, y + a \,.\, b' - a' \,.\, b = o$

oder . $(a' - b')(x - a) + (b - a)(y - a') = o$

oder . $(a' - b')(x - b) + (b - a)(y - b') = o$

oder . $(x - a)(y - b') - (x - b)(y - a') = o$

Beispiel.

a	a'	b	b'
5	9	11	13

Die gesuchte Gleichung ist $2x - 3y + 17 = o$

19.

Die Coordinaten des Durchschnittspuncts oder der Collineation zweier Linien sind diejenigen, welche die Gleichungen beider Linien befriedigen.

Wenn man in die Gleichung einer Linie, statt der Gröfsen x, y, Werthe einsetzt, welche die Gleichung befriedigen, d. h. welche bewirken, dafs alle Theile der Gleichung einander aufheben, so sind diese Werthe Coordinaten eines in dieser Linie liegenden oder ihr eingeschriebenen Puncts. Die Gleichung sey z. B. $2x - 3y + 2 = o$, so wird sie durch folgende zusammengehörige Werthe von x, y, befriedigt:

$x = \frac{1}{2}$, $y = 1$; $x = 1$, $y = 1\frac{1}{3}$; $x = 2$, $y = 2$;
$x = 3$, $y = 2\frac{2}{3}$; $x = 4$, $y = 3\frac{1}{3}$; u. s. w.

Je zwei zusammengehörige Werthe sind also die Coordinaten eines Puncts, welcher der Linie eingeschrieben ist, die durch jene Gleichung dargestellt wird.

Die Gleichungen zweier Linien A, B, seyen

$$A x + A' y + A'' = o \qquad B x + B' y + B'' = o$$

Wenn also diese Linien einander in einem Puncte a schneiden, dessen Coordinaten $wl = a$, $la = a'$ sind, so müssen die Gleichungen beider Linien durch $x = a$, $y = a'$ befriedigt werden, weil der Punct a, dessen Coordinaten sie sind, in beiden Linien liegt. Umgekehrt, müssen die Werthe $x = a$, $y = a'$, welche die Gleichungen beider Linien befriedigen, Coordinaten eines beiden Linien zugleich eingeschriebenen Puncts seyn, welcher daher ihr Durchschnittspunct oder ihre Collineation ist. Die Gleichungen seyen z. B.

$$6x - 2y - 6 = 0, \quad 2x - 3y + 2 = 0$$

Nimmt man hier $x = 1\tfrac{4}{7}$, $y = 1\tfrac{5}{7}$ an, so ist

$$6x = 9\tfrac{3}{7}, \quad 2y = 3\tfrac{3}{7}, \quad \text{also } 6x - 2y - 6 = 0$$

$$2x = 3\tfrac{1}{7}, \quad 3y = 5\tfrac{1}{7}, \quad \text{also } 2x - 3y + 2 = 0$$

Diese Werthe von $x = 1\tfrac{4}{7}$ und $y = 1\tfrac{5}{7}$, befriedigen also beide Gleichungen, und sind mithin die Coordinaten der Collineation der diesen Gleichungen entsprechenden Linien. Setzt man in die Gleichungen beider Linien A, B, einen Werth von x ein, welcher nicht die Abscisse der Collineation a ist, etwa $x = wk$, so werden die beiden den Gleichungen von A, B, entsprechenden Ordinaten $y = kc$, $y = kh$, verschieden seyn. Eben so, wenn man für y in beide Gleichungen einen Werth einsetzt, welcher nicht die Ordinate der Collineation a ist, etwa $y = wf$, so werden die beiden in den Gleichungen von A, B, diesen Werth entsprechenden Abscissen $x = fb$, $x = fh$, verschieden seyn.

Hieraus ergiebt sich folgendes Verfahren: Man nehme in den beiden Gleichungen, sowohl die beiden x, als auch die beiden y einander gleich an, und bestimme durch Elimination von y den Werth von x, durch Elimination von x den Werth von y. Diese beiden Werthe von x, y, sind die Coordinaten der Collineation dieser beiden Linien. Die Gleichungen der Linien seyen also:

$$A.x + A'.y + A'' = 0 \qquad B.x + B'.y + B'' = 0$$

Bezeichnet man die Areale der beiden Linien (IX. 15.) durch $A.B' - A'.B = H$, so erhält man für die Coordinaten a, a', der Collineation folgende Gleichungen:

$$H.a + A''.B' - A'.B'' = 0$$

$$H.a' + A.B'' - A''.B = 0$$

Wenn die Areale $H = 0$ ist, so findet also kein Durchschnitt statt, d. h. die Linien A, B, sind identisch oder parallel, wie schon (IX. 15.) bewiesen wurde.

Man kann die Coordinaten der Collineation auch durch die Coordinaten der Linien, nämlich durch d, d' und g, g', bestimmen. Denn da (IX. 14.)

$$A \,.\, d + A'' = o\,, \qquad A' \,.\, d' + A'' = o$$
$$B \,.\, g + B'' = o \qquad B' \,.\, g' + B'' = o$$

so erhält man die Gleichungen:

$$\left(\frac{d'}{d} - \frac{g'}{g}\right) a + g' - d' = o\,, \quad \left(\frac{d}{d'} - \frac{g}{g'}\right) a' + g - d = o$$

Wenn man die Gleichungen, bei ungeänderten Parametern und Distantialen, auf einen andern Ordinatenwinkel bezieht, so werden die Coordinaten der Collineation dadurch nicht geändert.

Die Lage eines Puncts ist durch die Gleichungen der beiden Linien, denen er eingeschrieben ist, bestimmt. Denn da er sich in der Collineation beider Linien befindet, und zwei Linien nur eine einzige Collineation haben, so findet man aus ihren Gleichungen durch Elimination auch nur einfache Werthe für die Coordinaten dieses Puncts. Indefs ist es nicht immer nöthig, diese Elimination wirklich vorzunehmen. Man kann es vorziehen, die Linien aus ihren Gleichungen geometrisch zu verzeichnen, um in ihrem Durchschnitt den verlangten Punct zu erhalten, wodurch die Auflösung der Aufgabe meist einfacher und eleganter ausfällt.

20.

Wenn die Summe der Producte der Parameter und Distantialen dreier Linien mit denselben Factoren, jede für sich gleich Null ist, so sind die Linien collinear. Umgekehrt, wenn die Linien collinear sind, so sind diese Summen gleich Null.

Linien heifsen nämlich ***collinear***, wenn sie durch einen und denselben Punct gehen, oder diesem Punct umschrieben sind. Dieser Punct heifst ihre ***Collineation.***

Die Gleichungen dreier Linien A, B, C, seyen

$$A \,.\, x + A' y + A'' = o\,, \qquad B x + B' y + B'' = o$$
$$C \,.\, x + C' \,.\, y + C'' = o$$

Es seyen ferner h, k, l, drei Factoren von der Beschaffenheit, dafs:

$$h \,.\, A + k \,.\, B + l \,.\, C = o\,, \qquad h \,.\, A' + k \,.\, B' + l \,.\, C' = o$$
$$h \,.\, A'' + k \,.\, B'' + l \,.\, C'' = o$$

Es seyen endlich m, m', die Coordinaten der Collineation der Linien A, B, so befriedigen sie die Gleichungen:

$$A.m + A'.m' + A'' = o\,, \quad B.m + B'.m' + B'' = o$$

Also befriedigen sie auch die Gleichungen:

$$h.Am + h.A'm' + h.A'' = o\,, \quad k.Bm + k.B'm' + kB'' = o$$

Also befriedigen sie auch die Summe dieser Gleichungen, nämlich:

$$(hA + kB)\,m + (h.A' + k.B')\,m' + hA'' + kB'' = o$$

Vermöge der Annahme ist aber:

$$hA + kB = -lC, \quad hA' + kB' = -l.C'$$
$$hA'' + k.B'' = -l.C''$$

Also befriedigen die Coordinaten m, m', auch die Gleichung:

$$-l.C.m - l.C'.m' - l.C'' = o$$

Also befriedigen sie auch die Gleichung:

$$Cm + C'.m + C'' = o$$

Also (IX. 19.) ist die Linie C den Linien A, B, collinear.

Nimmt man umgekehrt an, dafs die Linien A, B, C, collinear seyen, und dafs m, m', die Coordinaten ihrer Collineation sind, so ist

$$A.m + A'.m' + A'' = o\,, \quad B.m + B'.m' + B'' = o$$
$$C.m + C'.m' + C'' = o$$

Hieraus folgen die beiden Gleichungen:

$$(h.A + k.B)\,m + (h.A' + kB')\,m' + hA'' + kB'' = o$$
$$l.Cm + l.C'm' + l.C'' = o$$

Es seyen nun h, k, l so bestimmt, dafs

$$hA + kB + l.C = o\,, \quad hA' + k.B' + l.C' = o$$

so folgt aus der Addition jener beiden Gleichungen, dafs auch $h.A'' + kB'' + l.C'' = o$ seyn müsse.

Mit Hülfe dieses Satzes, welchen zuerst Lamé (examen des différentes méthodes pour resoudre les problémes de Géométrie. Paris 1818. p. 28) aufgestellt hat, kann man aus den Gleichungen zweier Linien die Gleichung einer collinearen Linie finden, indem man die gleichnamigen Parameter und Distantialen jener Gleichungen auf beliebige Art durch Addition oder Subtraction verbindet.

Beispiel.

Die Gleichungen zweier Linien seyen

$$3x + 5y + 7 = o\,, \quad 4x + 7.y + 9 = o$$

Die Coordinaten ihrer Collineation sind $x = -4$, $y = 1$.

Durch Addition oder Subtraction findet man die Gleichungen

$$7x + 12y + 16 = o\,, \quad x + 2y + 2 = o$$

Man kann aber auch zwei beliebige Factoren, z. B. $h = 2$, $k = 7$, wählen, mit diesen jene beiden Gleichungen multipliciren, und dann addiren oder subtrahiren, so erhält man:

$$34x + 59y + 77 = o \quad 22x + 39y + 49 = o$$

Alle diese Gleichungen gehören collinearen Linien an, da sie durch $x = -4$, $y = 1$, befriedigt werden.

21.

Wenn die Summe dreier Factoren gleich Null ist, und die Summe der Producte dieser Factoren mit den gleichnamigen Coordinaten dreier Puncte, jede für sich, gleich Null ist, so sind diese drei Puncte collinear. Umgekehrt, wenn diese drei Puncte collinear sind, so sind jene Summen gleich Null.

Puncte heifsen *collinear*, wenn sie in einer und derselben Linie liegen, oder dieser Linie eingeschrieben sind. Die Coordinaten dreier Puncte a, b, c, seyen a, a'; b, b'; c, c'. Es seyen ferner h, k, l, drei Factoren von der Beschaffenheit, dafs

$$h + k + l = o\,, \quad h.a + k.b + l.c = o$$
$$h.a' + k.b' + l.c' = o$$

Endlich sey $A.x + A'.y + A'' = o$ die Gleichung der Linie, in welcher die Puncte a, b, liegen, so ist

$$A.a + A'.a' + A'' = o \quad A.b + A'.b' + A'' = o$$

Multiplicirt man mit h, k, so ist auch:

$$A.ha + A'.ha' + A''h = o \quad A.kb + A'kb' + A''k = o$$

Also ist auch durch Summirung:

$$A(ha + kb) + A'(ha' + kb') + A''(h + k) = o$$

Vermöge der Bedingung ist aber:

$$ha + kb = -l.c \quad ha' + k.b' = -l.c' \quad h + k = -l$$

Also ist $A.l.c + A'.l.c' + A''.l = o$

Also auch $A.c + A'.c' + A'' = o$

Also (IX. 12.) sind die Puncte a, b, c, collinear.

Nimmt man umgekehrt an, dafs die Puncte a, b, c, collinear seyen, so sey die Gleichung ihrer Linie $Ax + A'.y + A'' = o$.

Man hat also die Gleichungen

$$A.a + A'.a' + A'' = o \qquad A.b + A'.b' + A'' = o$$

$$A.c + A'.c' + A'' = o$$

Hieraus folgen die beiden Gleichungen:

$$A(ha + k.b) + A'(ha' + kb') + A''(h + k) = o$$

$$A.l.c + A'.l.c' + A''.l = o$$

Es seyen nun h, k, l so bestimmt, dafs

$$ha + kb + l.c = o \qquad ha' + kb' + l.c' = o$$

so folgt aus der Addition jener beiden Gleichungen, dafs auch $h + k + l = o$ seyn müsse.

22.

Wenn die Puncte collinear sind, so ist die Areale ihres Systems gleich Null. Umgekehrt, wenn diese Areale gleich Null ist, so sind die drei Puncte collinear.

Die drei Puncte seyen a, b, c; ihre Coordinaten seyen a, a'; b, b'; c, c'; die Puncte seyen collinear, und die Gleichung ihrer Linie sey $Ax + A'y + A'' = o$, so folgen hieraus die Gleichungen:

$$A.a + A'.a' + A'' = o \qquad A.b + A'.b' + A'' = o$$

$$A.c + A'.c' + A'' = o$$

Die Arealen je zweier Puncte seyen

$$a.b' - a'.b = h, \qquad b.c' - b'.c = f,$$

$$c.a' - c'.a = g$$

Eliminirt man A' aus den obigen Gleichungen, so erhält man

$$A.f + A''.(c' - b') = o, \qquad A.g + A''(a' - c') = o$$

$$A.h + A''(b' - a') = o$$

Es ist aber $(c' - b') + (a' - c') + (b' - a') = o$ also ist auch $f + g + h = o$ oder $P = o$, wo $P = a.b' - a'.b + b.c' - b'.c + c.a' - c'a$

Man nehme umgekehrt an, dafs $f + g + h = o$ sey. Es ist aber

$$f.a + g.b + h.c = (bc' - b'c)a + (ca' - c'a)b + (ab' - a'b)c$$

$$f.a' + g.b' + h.c' = (bc' - b'c)a' + (ca' - c'a)b' + (ab' - a'b)c'$$

In beiden Gleichungen sind die Summen der Glieder rechts offenbar gleich Null. Man hat also folgende drei Gleichungen:

$$f + g + h = o, \qquad f.a + g.b + h.c = o$$

$$f.a' + g.b' + h.c' = o$$

Also (IX. 21.) sind die Puncte a, b, c, collinear. Aus den obigen Ausdrücken der Arealen je zweier Puncte folgt noch:

$$f + g + h = (b' - c')\,a + (c - b)\,a' + f = o$$
$$f + g + h = (c' - a')\,b + (a - c)\,b' + g = o$$
$$f + g + h = (a' - b')\,c + (b - a)\,c' + h = o$$

Durch Division mit f, g, h, folgt hieraus:

$$\frac{b' - c'}{f} \,.\, a + \frac{c - b}{f} \,.\, a' + 1 = o$$
$$\frac{c' - a'}{g} \,.\, b + \frac{a - c}{g} \,.\, b' + 1 = o$$
$$\frac{a' - b'}{h} \,.\, c + \frac{b - a}{h} \,.\, c' + 1 = o$$

Es sey also die Gleichung der Linie, in welcher die Puncte a, b, c, liegen: $Ax + A'y + A'' = o$, so sind aus A'' die Parameter A, A', durch folgende Gleichungen gegeben:

$$A = \frac{b' - c'}{f} \,.\, A'' = \frac{c' - a'}{g} \,.\, A'' = \frac{a' - b'}{h} \,.\, A''$$
$$A' = \frac{c - b}{f} \,.\, A'' = \frac{a - c}{g} \,.\, A'' = \frac{b - a}{h} \,.\, A''$$

Beispiel.

a	a'	b	b'	c	c'
7,	31,	15,	25,	27,	16

$$h = 175 - 465 = -290 \,, \quad f = 240 - 675 = -435$$
$$g = 837 - 112 = 725$$

also $P = f + g + h = o$, also die Puncte a, b, c collinear. Aber $f = -3 \,.\, 145$, $g = 5 \,.\, 145$, $h = -2 \,.\, 145$. Setzt man also $A'' = -145$, so ist die Gleichung der Linie:

$$3x + 4y - 145 = o \,.$$

23.

Wenn drei Linien collinear sind, so ist die Areale ihres Systems gleich Null. Umgekehrt, wenn diese Areale gleich Null ist, so sind die drei Linien collinear.

Die Gleichungen dreier Linien A, B, C, seyen

$$Ax + A'y + A'' = o \,, \qquad Bx + B'y + B'' = o$$
$$Cx + C'y + C'' = o$$

Die Arealen je zweier Linien (IX. 15.) sind

$$AB' - A'B = H, \quad B.C' - B'.C = F, \quad CA' - C'A = G$$

Die Coordinaten der Collineation der drei Linien, seyen m, m', so ist vermöge der Voraussetzung

$$Am + A'm' + A'' = o, \quad Bm + B'm' + B'' = o$$
$$C.m + C'.m' + C'' = o$$

Eliminirt man die Gröfse m' aus diesen Gleichungen, so ist

$$F.m + B''C' - B'C'' = o \quad G.m + C''A' - C'A'' = o$$
$$H.m + A''.B' - A'.B'' = o$$

Multiplicirt man mit A'', B'', C'', so ist:

$$F.A''.m + A''B''C' - A''B'C'' = o$$
$$GB''m + B''C''A' - B''C'A'' = o$$
$$HC''m + C''A''B' - C''A'B'' = o$$

Addirt man diese Gleichungen, so heben sich die nicht mit m behafteten Glieder von selbst auf, also ist

$$F.A''.m + G.B''.m + H.C''.m = o$$

also ist $P = F.A'' + G.B'' + H.C'' = o$

Diese aus den Parametern und Distantialen der drei Linien symmetrisch zusammengesetzte Gröfse P heifst die *Areale der drei Linien.* Wenn also die Linien collinear sind, so ist ihre Areale $P = o$.

Multiplicirt man die obigen Werthe der Arealen je zweier Linien, nämlich

$$AB' - A'B = H, \quad BC' - B'C = F, \quad CA' - C'A = G$$

mit A, B, C, und A', B', C', so ist

$$FA = ABC' - AB'C, \quad GB = BCA' - BC'A$$
$$HC = CAB' - CA'B$$
$$FA' = A'BC' - A'B'C, \quad GB' = B'CA' - B'C'A$$
$$HC' = C'AB' - C'A'B$$

Hier heben sich die Glieder rechts bei der Addition von selbst auf, man hat also immer, die Linien mögen collinear seyn, oder nicht, die Gleichungen:

$$F.A + G.B + H.C = o \quad F.A' + G.B' + H.C' = o$$

Nimmt man also an, dafs noch überdiefs die Areale $P = o$ sey, so ist

$$F.A'' + GB'' + HC'' = o$$

Die Parameter und Distantialen erfüllen alsdann die in IX. 20. aufgestellte Bedingung, und die Linien sind also collinear.

Die Bedingung wird offenbar erfüllt, wenn es zwei Gröfsen m, m', von der Beschaffenheit giebt, dafs

$$A.m + A'm' + A'' = o \qquad Bm + B'm' + B'' = o$$
$$Cm + C'm' + C'' = o$$

Denn wenn man diese Gleichungen mit F, G, H multiplicirt, und dann addirt, so ist

$$(FA + GB + HC)\,m + (FA' + GB' + HC')\,m' \;\ldots\ldots\; + FA'' + GB'' + HC'' = o$$

Da, wie oben gefunden wurde, die Factoren von m, m', von selbst immer $= o$ sind, so mufs auch $FA'' + GB'' + HC'' = o$ seyn.

Die Coordinaten der Collineation m der drei Linien sind also durch folgende Gleichungen gegeben:

$$F.m + B''C' - B'C'' = o \qquad Gm + C''A' - C'A'' = o$$
$$H.m + A''B' - A'B'' = o$$
$$F.m' + BC'' - B''C = o, \qquad G.m' + C.A'' - C''A = o$$
$$H.m' + AB'' - A''B = o$$

Wenn drei collineare Linien durch drei bestimmte Puncte a, b, c, gehen, so müssen sich ihre Gleichungen auf folgende Form bringen lassen:

$$(a' - m')\,x + (m - a)\,y + a.m' - a'.m = o$$
$$(b' - m')\,x + (m - b)\,y + b.m' - b'm = o$$
$$(c' - m')\,x + (m - c)\,y + c.m' - c'.m = o$$

Beispiel.

Die Gleichungen der drei Linien seyen

$$A \ldots 27x + 16y - 1000 = o$$
$$B \ldots 15x + 25y - 1000 = o$$
$$C \ldots 7x + 31y - 1000 = o$$

Hier ist $A'' = B'' = C'' = -1000$, also $P = (F + G + H)\,A''$. Aber $F = 290$, $G = -725$ $H = 435$. Also $P = o$, also die Linien collinear.

$$(C' - B')\,A'' = -6000 \qquad (B - C)\,A'' = -8000$$

also $\quad 29.m - 600 = o \qquad 29.m' - 800 = o$

24.

Wenn die Summe der Producte der gleichnamigen Parameter, dividirt mit der Summe der Producte der wechselnamigen Parameter den Cosinus des Ordinatenwinkels giebt, so haben die Linien eine senkrechte Lage gegen einander.

Die Gleichungen der Linien A, B, seyen

$$A.x + A'.y + A'' = o \qquad Bx + B'y + B'' = o$$

Die vom Anfangspunct der Coordinaten auf die Linien A, B, gefällten Lothe l, n, bilden mit den Axen die Positionswinkel p, p' und q, q', so dafs $p + p' = q + q' = w$. Dann sind die Gleichungen der Linien auch:

$$\cos p . x + \cos p' . y - l = o \qquad \cos q . x + \cos q' . y - n = o$$

Die *Diametralen* der Parameter der Linien A, B, seyen D, E, so ist (IX. 14.)

$$D . \cos p = A, \quad D . \cos p' = A'$$

$$D . \sin w . \sin p' = A - A' . \cos w, \quad D \sin w \sin p = A' - A . \cos w$$

$$E . \cos q = B, \quad E . \cos q' = B'$$

$$E \sin w . \sin q' = B - B' \cos w, \quad E \sin w \sin q = B' - B \cos w$$

Bilden nun die Linien A, B, einen rechten Winkel gegen einander, so ist $q - p = p' - q' = 90^0$

also $\sin q = \cos p$, $\cos q = -\sin p$,

$\sin q' = -\cos p'$, $\cos q' = \sin p'$. Hieraus folgt:

$$E \sin w . A = D (B' - B \cos w),$$

$$E \sin w \, A' = - D (B - B' \cos w)$$

$$D . \sin w . B = - E (A' - A \cos w)$$

$$D \sin w . B' = E (A - A' \cos w)$$

Die Bedingung der rechtwinkligen Lage ist also

$$\frac{B}{B'} = - \frac{A' - A \cos w}{A - A' \cos w} \quad \text{oder} \quad \frac{A}{A'} = - \frac{B' - B \cos w}{B - B' \cos w}$$

Es sey $A . B + A' . B' = K \quad A . B' + A' . B = L$, so folgt aus jenen beiden Gleichungen die Bedingung der rechtwinkligen Lage:

$$K - L . \cos w = o \quad \text{oder} \quad \cos w = \frac{A . B + A' . B'}{A . B' + A' . B}$$

Man hat ferner allgemein:

$$D^2 . \sin^2 w = A^2 - 2 A A' \cos w + A'^2$$
$$E^2 . \sin^2 w = B^2 - 2 B . B' \cos w + B'^2$$

und die Areale der beiden Linien ist

$$H = A . B' - A' B$$

für die senkrechte Lage ist also

$$H = D . E . \sin w$$

Umgekehrt läfst sich beweisen, dafs wenn die Parameter der beiden Linien die obige Bedingungsgleichung befriedigen, die Linien einander rechtwinklig schneiden. Man nehme auf der Axe der x einen beliebigen Punct c an, ziehe aus demselben die ca, cb, den Linien A, B, parallel, und bezeichne die Coordinaten wa, wb, wc, durch a, b, c, so ist

$$A . c = A' . a \,, \quad B . c = B' . b$$

Hieraus folgt:

$$A . B . c^2 = A' . B' . a . b \,, \quad (A . B + A' . B') . c^2 = A' B' (ab + c^2)$$
$$A . B' . c = A' B' a \,, \quad A' . B . c = A' . B' . b$$
$$(A B' + A' B) . c^2 = A' B' (a + b) c$$

Es sey nun $\cos w = \dfrac{A . B + A' . B'}{A . B' + A' . B}$

so ist auch $\cos w = \dfrac{a . b + c . c}{(a + b) c}$

also $(a + b) c . \cos w = a . b + c . c = a . b + c^2 . \sin^2 w + c^2 . \cos^2 w$

also $(c . \cos w - b)(a - c . \cos w) = c^2 . \sin^2 w$

Man fälle aus dem Puncte c auf die Axe der y das Loth cd, so ist

$$c . \sin w = cd \,, \quad c . \cos w - b = bd \,, \quad a - c . \cos w = ad$$

Also ist $bd . ad = cd . cd$, also ist $acb = 90^\circ$.

Wenn die gegebene Gleichung einer Linie $A x + A' . y + A'' = o$ ist, so kann man also nach dem Vorhergehenden die Gleichung der senkrechten Linie speciell auf folgende Art bezeichnen:

$$(A' - A \cos w) x - (A - A' \cos w) y + B'' = o$$

Denn alsdann ist

$$B = A' - A \cos w \,, \quad - B' = A - A' \cos w$$

also . . $A . B + A' . B' = (A' . A' - A . A) \cos w$

$$A . B' + A' . B = A' . A' - A . A$$

also $\cos w = \dfrac{A . B + A' . B'}{A . B' + A' . B}$

In diesem speciellen Falle ist die Diametrale der Parameter der senkrechten Linie; $E = -D \cdot \sin w$, und die Areale der beiden Linien: $H = -D^2 \cdot \sin^2 w$

Beispiel.

$$w = 53^0\, 7{,}8 \qquad \cos w = 0{,}6$$

$$A \ldots 3x - 4y + A'' \qquad B \ldots 29x + 27y + B'' = o$$

Hier ist

$$A \cdot B + A' \cdot B' = 87 - 108 = -21$$
$$A \cdot B' + A' \cdot B = 81 - 116 = -35$$

also $\dfrac{A \cdot B + A' \cdot B'}{A \cdot B' + A' \cdot B} = \frac{21}{35} = 0{,}6 = \cos w$

also schneiden die Linien einander rechtwinklig.

25.

Der Sinus des Winkels zweier Linien ist der Areale oder dem Werth der Parametergleichung für die parallele Lage proportionirt.

Der Cosinus dieses Winkels ist dem Werth der Parametergleichung für die senkrechte Lage proportionirt.

Die Gleichungen der Linien seyen:

$$A x + A' \cdot y + A'' = o \qquad B x + B' y + B'' = o$$

Die vom Anfangspunct der Coordinaten auf die Linien A, B, gefällten Lothe l, n, bilden mit den Axen die Positionswinkel p, p' und q, q', so dafs $p + p' = q + q' = w$. Die Diametralen der Parameter der Linien seyen D, E, so ist (IX. 14.):

$$D \cdot \cos p = A, \quad D \cdot \cos p' = A'$$
$$D \sin w \cdot \sin p' = A - A' \cdot \cos w, \quad D \sin w \cdot \sin p = A' - A \cdot \cos w$$
$$D^2 \cdot \sin^2 w = A^2 - 2A \cdot A' \cdot \cos w + A'^2$$
$$E \cdot \cos q = B, \quad E \cdot \cos q' = B'$$
$$E \sin w \sin q' = B - B' \cos w, \quad E \sin w \sin q = B' - B \cos w$$
$$E^2 \sin^2 w = B^2 - 2B \cdot B' \cdot \cos w + B'^2$$

Hieraus folgt:

$$D \cdot E \cdot \sin w \cdot \sin p \cdot \cos q = A' \cdot B - A \cdot B \cdot \cos w$$
$$D \cdot E \sin w \cdot \cos p \cdot \sin q = A \cdot B' - A \cdot B \cdot \cos w$$
$$D \cdot E \cdot \sin^2 w \cdot \cos q \cdot \cos p = A \cdot B \cdot \sin^2 w$$
$$D \cdot E \sin^2 w \cdot \sin q \cdot \sin p = (A' - A \cos w)(B' - B \cos w)$$

Der Winkel der Linien A, B, ist aber gleich dem Winkel der Lothe l, n, also gleich $q - p$. Auch ist

$$\sin(q - p) = \sin q \cdot \cos p - \cos q \cdot \sin p$$
$$\cos(q - p) = \cos q \cdot \cos p + \sin q \cdot \sin p.$$

Setzt man also die Areale

$$A \cdot B' - A' \cdot B = H \quad \text{und} \quad A \cdot B + A' \cdot B' = K$$
$$A \cdot B' + A' \cdot B = L$$

so erhält man

$$D \cdot E \cdot \sin^2 w \sin(q - p) = H \cdot \sin w$$
$$D \cdot E \cdot \sin^2 w \cdot \cos(q - p) = K - L \cdot \cos w$$
$$\operatorname{tg}(q - p) = \frac{H \cdot \sin w}{K - L \cdot \cos w}$$

Die Parametergleichung für die parallele Lage war aber (IX. 15.) $H = o$; und für die rechtwinklige Lage (IX. 24.) $K - L \cdot \cos w = o$, daher heißen die Größen H und $K - L \cdot \cos w$ die *Werthe* der Parametergleichungen für die senkrechte und parallele Lage. Aus diesem allgemeinen Satze kann man also auch die beiden speciellen Sätze IX. 15. 24. ableiten, indem für $H = o$ auch $\sin(q - p) = o$, also $q - p = o$ und für $K - L \cdot \cos w = o$ auch $\cos(q - p) = o$ also $q - p = \pm 90^0$ wird.

Für die Berechnung des Winkels $q - p$ sind aber folgende Gleichungen bequemer (IX. 14.):

$$D \cdot 2 \sin \tfrac{1}{2} w \sin \tfrac{1}{2}(p' - p) = A - A'$$
$$D \cdot 2 \cdot \cos \tfrac{1}{2} w \cdot \cos \tfrac{1}{2}(p' - p) = A + A'$$
$$E \cdot 2 \sin \tfrac{1}{2} w \cdot \sin \tfrac{1}{2}(q' - q) = B - B'$$
$$E \cdot 2 \cos \tfrac{1}{2} w \cos \tfrac{1}{2}(q' - q) = B + B'$$
$$\tfrac{1}{2}(p' - p) - \tfrac{1}{2}(q' - q) = q - p.$$

Beispiel.

$$w = 53^0\, 7{,}8; \quad \sin w = 0{,}8; \quad \cos w = 0{,}6$$
$$A \,..\, 6x - 2y - 6 = 0 \qquad B \,..\, 2x - 3y + 2 = o$$
$$H = -14 \qquad K = 18 \qquad L = -22$$
$$H \cdot \sin w = -11{,}2 \qquad K - L \cdot \cos w = 31{,}2$$
$$\operatorname{tg}(q - p) = -\tfrac{112}{312}$$

112 ..	2,04922	$\cot \frac{1}{2} w$	0,30103	$\cot \frac{1}{2} w$	0,30103
312 ..	2,49415	$A - A'$	0,90309	$B - B'$	0,69897
$\operatorname{tg}(q-p)$	$-$ 9,55507	$A + A'$	0,60206	$B + B'$	$-$ 0
$q - p =$	$-19^0\, 44{,}8$	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(p' - p)$	0,60206	$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(q' - q)$	$-$ 1,00000

$$\tfrac{1}{2}(p' - p) = 75^0\, 57{,}8$$
$$\tfrac{1}{2}(q' - q) = 95\;\; 42{,}6$$
$$q - p = -19\;\; 44{,}8$$

26.

Aus der Gleichung einer Linie die Gleichung einer andern zu finden, welche mit ihr einen gegebenen Winkel bildet.

Die Gleichungen der Linien seyen

$$Ax + A'y + A'' = o \qquad Bx + B'y + B'' = o$$

Die vom Anfangspunct auf diese Linien gefällten Lothe bilden mit den Axen die Positionswinkel p, p' und q, q', so dafs $p + p' = q + q' = w$. Der gegebene Winkel der Linien sey $c = q - p = p' - q'$, so ist

$$\cos q = \cos c \cos p - \sin p \sin c$$
$$\cos q' = \cos c . \cos p' + \sin p' . \sin c$$

Die Diametralen der Parameter der Linien A, B, seyen D, E, so ist (IX. 14.)

$$E . \cos q = B, \quad E \cos q' = B', \quad D . \cos p = A, \quad D . \cos p' = A'$$
$$D . \sin w \sin p = A' - A . \cos w, \quad D \sin w \sin p' = A - A' . \cos w$$

Hieraus folgt:

$$\frac{D \sin w . B}{E} = A \sin w \cos c - (A' - A \cos w) \sin c$$

$$\frac{D \sin w . B'}{E} = A' . \sin w . \cos c + (A - A' . \cos w) \sin c$$

oder

$$\frac{D \sin w . B}{E} = A . \sin (w + c) - A' . \sin c$$

$$\frac{D . \sin w . B'}{E} = A' . \sin (w - c) + A . \sin c$$

Setzt man also

$$AB' - A'B = H, \quad AB + A'B' = K, \quad AB' + A'B = L$$

so ist die gesuchte Parametergleichung

$$B [A' \sin (w - c) + A \sin c] = B' [A \sin (w + c) - A' \sin c]$$

oder $H . \sin w \cos c - (K - L . \cos w) \sin c = o$

Beispiel.

$$A \ldots \quad 6x - 2y - 6 = o$$

w	$=$	$53^0\ 7{,}8$	$w + c$	$=$	$33^0 23{,}0$
c	$=$	$-19\ 44{,}8$	$w - c$	$=$	$72\ 52{,}6$

$$\begin{array}{lr}
A' & -\ 0{,}30103 \\
\sin(w-c) & 9{,}98031 \\ \hline
 & -\ 0{,}28134 = -\ 1{,}9114 \\
A & 0{,}77815 \\
\sin c & -\ 9{,}52874 \\ \hline
 & -\ 0{,}30689 = -\ 2{,}0272 \\ \hline
 & -\ 3{,}9386
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
A & 0{,}77815 \\
\sin(w+c) & 9{,}74055 \\ \hline
 & 0{,}51870 = 3{,}3014 \\
A' & -\ 0{,}30103 \\
\sin c & -\ 9{,}52874 \\ \hline
 & 9{,}82977 = -\ 0{,}6757 \\ \hline
 & 2{,}6257
\end{array}$$

also $\dfrac{B}{B'} = -\dfrac{2{,}6257}{3{,}9386} = -\tfrac{2}{3}$

27.

Das von einem Puncte auf eine Linie gefällte Loth, ist gleich dem Werth, welchen die Gleichung der Linie für die Coordinaten des gegebenen Puncts annimmt, dividirt mit der Diametrale der Gleichung.

Die Gleichung der Linie sey $Ax + A'y + A'' = o$, ihre Diametrale $= D$, das vom Anfangspuncte der Coordinaten auf die Linie A gefällte Loth $= l'$, so ist (IX. 14.) $D.l' = -A''$. Die Coordinaten des gegebenen Puncts a seyen a, a', so ist die Gleichung der dem Punct a umschriebenen, der Linie A parallelen Linie (IX. 17.)

$$A.x + A'.y - A.a - A'.a' = o$$

Das vom Anfangspunct auf diese Parallellinie gefällte Loth sey $= l''$, so ist (IX. 14.) $D.l'' = A.a + A'.a'$

Das vom gegebenen Puncte a auf die Linie A gefällte Loth sey $= l$. Liegen nun beide Linien, nämlich A und ihre Parallele auf einerlei Seite des Anfangspuncts, so ist $l = l'' - l'$. Setzt man daher:

$$A.a + A'.a' + A'' = M$$

so ist $D.l = M$.

Hier ist M der Werth der Gleichung von A für den Punct a, d. h. der Werth, den die algebraische Summe aller auf eine Seite gebrachten Glieder für den Fall annimmt, wo $x = a$, $y = a'$ gesetzt wird.

Es seyen also die Gleichungen zweier Parallellinien $Ax + A'y + A'' = o$, $\quad Ax + A'y + A''' = o$ so ist ihr Abstand gleich dem Unterschied der Distantialen, dividirt mit der Diametrale, nämlich

$$= \frac{A'' - A'''}{D}$$

Wenn das vom Puncte a auf die Linie A gefällte Loth, diese Linie in dem Puncte b schneidet, dessen Coordinaten b, b' seyen, so hat man, wenn B die Gleichung der Senkrechten ist, nach IX. 24.

$$B = A' - A \cdot \cos w \qquad - B' = A - A' \cos w$$
$$B \cdot a + B' \cdot a' + B'' = o \qquad B \cdot b + B' \cdot b' + B'' = o$$

Nach IX. 19.: $\quad A \cdot B' - A' \cdot B = H$

$$H \cdot b + A'' \cdot B' - A' \cdot B'' = o \qquad H \cdot b' + A \cdot B'' - A'' B = o$$

Hieraus folgt:

$$H(b - a) + B'(A \cdot a + A'') - A'(B \cdot a + B'') = o$$
$$H(b' - a') - B(A' \cdot a' + A'') + A(B' a' + B'') = o$$

Setzt man also (IX. 27.) $\quad A \cdot a + A' \cdot a' + A'' = M$

so ist $\quad H(b - a) + B' \cdot M = o, \quad H(b' - a') - B \cdot M = o$

aber (IX. 24.) $\quad H = - D^2 \cdot \sin^2 w$

also $\quad D^2 \sin^2 w \, (b - a) = - (A - A' \cos w) \cdot M$

$$D^2 \cdot \sin^2 w \, (b' - a') = - (A' - A \cdot \cos w) \, M$$

Das vom Anfangspunct auf die Linie A gefällte Loth bilde mit den Axen die Positionswinkel p, p', so ist (IX. 14.)

$$D \cdot \sin w \sin p' = A - A' \cos w, \quad D \sin w \sin p = A' - A \cos w$$

also $\quad . \; . \quad D \cdot \sin w \, (b - a) = - M \cdot \sin p'$

$$D \cdot \sin w \, (b' - a') = - M \cdot \sin p$$

Beispiel.

a	a'	A	A'	A''	w
15,	8,	7,	25,	-150,	$53^0\, 7{,}8$

$$M = 105 + 200 - 150 = 155$$
$$D^2 \cdot \sin^2 w = 49 - 210 + 625 = 464$$
$$D \cdot \sin w = 4\sqrt{29}, \quad D = 5\sqrt{29}$$
$$464\,(b - a) = 8 \cdot 155 = 1240$$
$$464\,(b' - a') = - 20{,}8 \cdot 155 = - 3224$$
$$l = \frac{155}{5 \cdot \sqrt{29}} = 5{,}7565$$

28.

Von einem gegebenen Puncte an eine gegebene Linie eine andre Linie unter einem gegebenen Winkel zu ziehen.

Die Coordinaten des gegebenen Puncts a seyen a, a', die Gleichung der gegebenen Linie A sey $A x + A' y + A'' = o$, ihre Diametrale $= D$, die Gleichung der gesuchten Linie B

sey $Bx + B'y + B'' = o$, ihre Diametrale $= E$. Die vom Anfangspunct auf die Linien A, B, gefällten Lothe l, n, bilden mit den Axen die Winkel p, p' und q, q', so daſs $p + p' = q + q' = w$. Der Winkel der Linien A, B, nämlich $q - p = p' - q'$ ist gegeben, auch sind p, p', gegeben, also sind auch q, q', gegeben. Aber $B = E.\cos q$ $B' = E.\cos q'$. Also ist das Verhältniſs der Parameter $\frac{B}{B'} = \frac{\cos q}{\cos q'}$ gegeben. Man kann nun einen der beiden Parameter, z. B. B, beliebig annehmen. Also ist auch der andre Parameter B' gegeben. Es ist aber, weil die Linie B durch den Punct a gehen soll, $B.a + B'a' + B'' = o$, also ist auch B'' gegeben.

Wenn die Linien A, B, einander in dem Puncte b, dessen Coordinaten b, b' sind, schneiden, so ist der Abstand der Puncte a, b, gleich $\frac{l}{\sin(q - p)} = \frac{M}{D \sin(q - p)}$, wenn $M = Aa + A'a' + A''$. Aber (IX. 25.)

$$H = D.E \sin w \sin(q - p),$$

also der Abstand $ab = \frac{E.\sin w.M}{H}$

Um die Coordinaten des Puncts b, nämlich b, b' zu bestimmen, so ist die Areale $H = AB' - A'B$ gegeben. Man hat also die Gleichungen:

$$H.a - A.B'a + A'B.a = o$$
$$H.a' - A.B'a' + A'B.a' = o$$

Nach IX. 19. hat man aber auch die Gleichungen:

$$H.b + A''B' - A'B'' = o$$
$$H.b + A.B'' - A''B = o$$

Hieraus folgen die Gleichungen:

$$H(b - a) + B'(Aa + A'') - A'(Ba + B'') = o$$
$$H(b' - a') - B(A'a' + A'') + A(B'a' + B'') = o$$

Aber $Ba + B'a' + B'' = o$, also:

$$H(b - a) + B'.M = o, \quad H(b' - a') - B.M = o$$

Beispiel.

a	a'	A	A'	A''	w
15,	8,	6,	-2,	-6,	$53^{\circ}\,7,8$

$$q - p = -19^{\circ}\,44',8$$

$\cot \frac{1}{2} w$	0,30103
$A - A'$	0,90309
$A + A'$	0,60206
$\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}(p' - p)$	0,60206
$\frac{1}{2}(p' - p) =$	$75^{\circ}\ 57,8$
$\frac{1}{2}(p' + p) =$	$26^{\circ}\ 33,9$
$p =$	$-49\ \ 23,9$
$q - p =$	$-19\ \ 44,8$
$q =$	$-69\ \ 8,7$
$w =$	$53\ \ 7,8$
$q' =$	$122\ \ 16,5$
$\cos q$	9,55146
$\cos q'$	$-$ 9,72753
* $\frac{B}{B'}$	$-$ 9,82393

* Hieraus folgt $\frac{B}{B'} = -\frac{2}{3}$

Man nimmt $B = 2$, so ist $B' = -3$

$$B'' = -30 + 24 = -6$$

Also die Gleichung der Linie B ist

$$2x - 3y - 6 = 0$$

$$H = -18 + 4 = -14$$

$$M = 90 - 16 - 6 = 68$$

$$-14(b - a) - 204 = 0, \quad b = \tfrac{3}{7}$$

$$-14(b' - a') - 136 = 0, \quad b' = -\tfrac{12}{7}$$

$A - A'$	0,90309
$\sin \frac{1}{2}(p' - p)$	9,98684
$\sin \frac{1}{2} w$	9,65052
2	0,30103
D	0,96470

D . .	0,96470
$\sin(q - p)$	9,52874
M	1,83251
ab	1,33907

$$ab = 21,83$$

29.

Den Abstand eines gegebenen Puncts von dem Durchschnitt zweier gegebenen Linien zu bestimmen.

Die Coordinaten des gegebenen Puncts a seyen a, a'; die Gleichungen der gegebenen Linien A, B, seyen

$$Ax + A'y + A'' = 0, \quad Bx + B'y + B'' = 0$$

Die Coordinaten des Durchschnitts b der Linien A, B, seyen b, b'. Die Diametralen dieser Linien seyen D, E, die vom Anfangspunct auf die Linien A, B, gefällten Lothe bilden mit den Axen die Positionswinkel p, p' und q, q', so dafs $p + p' = q + q' = w$. Der Neigungswinkel der Linien A, B, ist also $= q - p$. Man hat also (IX. 25.)

$$D^2 \sin^2 w = A^2 - 2A.A'.\cos w + A'^2$$

$$E^2 \sin^2 w = B^2 - 2B.B'.\cos w + B'^2$$

$$A.B' - A'.B = H, \quad A.B + A'.B' = K$$

$$A.B' + A'.B = L$$

$$D.E.\sin^2 w.\sin(q - p) = H.\sin w$$

$$D.E.\sin^2 w.\cos(q - p) = K - L.\cos w$$

Die Werthe der Gleichungen A, B, für den gegebenen Punct a seyen M, N, so ist (IX. 28.)

$$A.a + A'.a' + A'' = M$$

$$B.a + B'.a' + B'' = N$$

Man ziehe aus dem Puncte a mit den Linien A, B, die parallelen Abschnitte ac, ad, bis an die Linien B, A, so ist (IX. 28.)

$$H \,.\, ad = E \,.\, \sin w \,.\, M \;, \qquad H \,.\, ac = D \,.\, \sin w \,.\, N$$

In dem Parallelogramm $acbd$, sind ab, cd, die Diagonallinien, also ist:

$$ab^2 = ac^2 - 2\, ac \,.\, ad \,.\, \cos(q-p) + ad^2$$
$$ad^2 = ac^2 + 2\, ac \,.\, ad \,.\, \cos(q-p) + ad^2$$

Verbindet man diese Gleichungen mit den obigen, so ergiebt sich:

$$H^2 \,.\, ab^2 = D^2 \sin^2 w \,.\, N^2 - 2\, MN(K - L \cos w) + E^2 \sin^2 w \,.\, M^2$$
$$H^2 \,.\, cd^2 = D^2 \sin^2 w \,.\, N^2 + 2\, MN(K - L \cos w) + E^2 \sin^2 w \,.\, M^2$$

Beispiel.

a	a'	A	A'	A''	B	B'	B''	w
15,	8,	6,	−2,	−6,	2,	−3,	2,	$53^0 7{,}8$

$H = -18 + 4 = -14 \qquad K = 12 + 6 = 18,$

$L = -18 - 4 = -22 \qquad K - L \,.\, \cos w = 31{,}2$

$M = 90 - 16 - 6 = 68 \;, \qquad N = 30 - 24 + 2 = 8$

$$D^2 \,.\, \sin^2 w = 36 + 14{,}4 + 4 = 54{,}4$$
$$E^2 \,.\, \sin^2 w = 4 + 7{,}2 + 9 = 20{,}2$$

$$14^2 \,.\, ab^2 = 3481{,}6 - 33945{,}6 + 93404{,}8 = 62940{,}8$$
$$14^2 \,.\, cd^2 = 3481{,}6 + 33945{,}6 + 93404{,}8 = 130832$$

also $ab = 17{,}92 \qquad cd = 25{,}836$

30.

Eine Linie aus ihren Durchschnitten auf den Axen zu verzeichnen.

Die Gleichung der Linie A sey $Ax + A'y + A'' = o$, ihre Coordinaten auf den Axen seyen d, d', so hat man (IX. 14.) $A \,.\, d + A'' = o$, $A' \,.\, d' + A'' = o$. Die Verzeichnung dieser Gleichungen hat keine Schwierigkeit, wenn die Parameter und die Distantiale A, A', A'', einfache Gröſsen sind.

Beispiel.

Die gegebene Gleichung sey:

$$a \,.\, x + a' \,.\, y = r^2,$$

wo a, a', r, Linien bedeuten.

Man trage aus dem Anfangspunct auf die Axen der x, y, die Abschnitte $wf = a$, $wf' = a'$, bestimme mittelst eines Kreises vom Halbmesser r auf denselben Axen die Abschnitte wd, wd', so daſs $wf \,.\, wd = wf' \,.\, wd' = r^2$, so sind die Puncte d, d', die Durchschnittspuncte der Linie A auf den Axen.

31.

Eine Linie aus ihrer Gleichung durch die Puncte der gleichen Coordinaten zu verzeichnen.

Die Gleichung der Linie A sey $Ax + A'y + A'' = o$. Man verzeichne die Gleichung $(A + A')\, a + A'' = o$, indem man auf den Axen die Abschnitte $wf = wf' = a$ nimmt, durch die Puncte f, f', Parallellinien mit den Axen zieht, welche einander in a schneiden, so ist a ein Punct der Linie A, weil die Gleichung von A durch $x = y = a$ befriedigt wird. Man verzeichne ferner die Gleichung $(A - A').b + A'' = o$, indem man auf den Axen die Abschnitte $wg = -wg' = b$ nimmt, durch die Puncte g, g' Parallellinien mit den Axen zieht, welche einander in b schneiden, so ist b ein Punct der Linie A, weil die Gleichung von A durch $x = -y = b$ befriedigt wird. Durch die Puncte a, b, ist die Linie A gegeben.

32.

Eine Linie zu verzeichnen, deren Gleichung aus zwei einfachen Theilen besteht.

Die Gleichung der Linie A sey:

$$h(Bx + B'y + B'') + k(Cx + C'y + C'') = o$$

Man verzeichne zwei Linien B, C, deren Gleichungen

$$Bx + B'y + B'' = o \qquad Cx + C'y + C'' = o$$

Man verzeichne zwei Linien B', C', deren Gleichungen

$$Bx + B'y + B'' + \frac{p}{h} = o \qquad Cx + C'y + C'' - \frac{p}{k} = o$$

Die Linien B, B', und C, C', sind (IX. 15.) parallel, die Linien A, B, C, und A, B', C', sind (IX. 20.) collinear. Wenn also a, b, die Durchschnitte von B, C, und B', C', sind, so sind a, b, Puncte der Linie A. Da der Werth der Gröfse p beliebig ist, so lassen sich durch Abänderung desselben beliebig viele Puncte von A verzeichnen.

Anders.

Man verzeichne zwei Linien B, C, deren Gleichungen

$$B.x + B'.y + B'' = o, \qquad Cx + C'y + C'' = o$$

und zwei Linien B', C', deren Gleichungen

$$B.x + B'.y + B'' + \frac{p}{h} = o, \qquad Cx + C'.y + C'' + \frac{p}{k} = o$$

Die Linien B, B' und C, C', sind (IX. 15.) parallel. Die Linien A, B, C, sind (IX. 24.) collinear. Die Linien B, C' und B', C, sind (IX. 24.) einer Linie D collinear, deren Gleichung:

$$h(Bx + B'.y + B'') + k(Cx + C'y + C'') + p = o$$

Wenn also die Puncte a, b, c, die Collineationen von B, C; B, C'; B', C; sind, so geht die Linie D durch die Puncte b, c, und ist (IX. 15.) der Linie A parallel. Man darf also nur durch a eine Parallellinie mit bc ziehen, um die Linie A zu erhalten.

33.

Eine Linie zu verzeichnen, deren Gleichung aus drei oder mehreren einfachen Theilen besteht.

Die Gleichung der Linie A sey:

$$h(Bx + B'y + B'') + k(Cx + C'y + C'') + l(Dx + D'y + D'') = o$$

Man verzeichne die Linien B, C, D, und B', C', D', deren Gleichungen:

$$B \,..\, Bx + B'y + B'' = o \qquad B' \,..\, Bx + B'y + B'' + \frac{p}{h} = o$$

$$C \,..\, Cx + C'y + C'' = o \qquad C' \,..\, Cx + C'y + C'' - \frac{p}{k} = o$$

$$D \,..\, Dx + D'y + D'' = o \qquad D' \,..\, Dx + D'y + D'' - \frac{p}{l} = o$$

Die Gleichungen dreier Linien F, G, H, seyen

$$F \ldots h(Bx + B'y + B'') + k(Cx + C'y + C'') = o$$
$$G \ldots h(Bx + B'y + B'') + l(Dx + D'y + D'') = o$$
$$H \ldots k(Cx + C'y + C'') + l(Dx + D'y + D'') - p = o$$

so ist F sowohl den Linien B, C, als den Linien B', C', collinear; G sowohl den Linien B, D, als den Linien B', D', collinear, und H sowohl den Linien C, D' als den Linien C', D, collinear. Also ist die Linie F durch die Verbindung der Collineationen von B, C, und B', C', die Linie G durch die Verbindung der Collineationen von B, D und B', D', und die Linie H durch die Verbindung der Collineationen von C, D' und C', D, gegeben. Aber die Linien A, F, D; A, G, C und A, H, B', sind collinear. Also ist die Linie A durch Verbindung der Collineationen von F, D, von G, C, und H, B' gegeben.

Die Gröfse p ist beliebig anzunehmen.

Die Gleichung der Linie A sey:

$$h(Bx + B'y + B'') + k(Cx + C'y + C'') \ldots \ldots \\ \ldots + l(Dx + D'y + D'') + m(Ex + E'y + E'') = 0$$

Man verzeichne die Linien B, C, D, E und B', C', D', E', deren Gleichungen:

$$B \,..\, Bx + B'y + B'' = 0 \quad B' \,..\, Bx + B'y + B'' + \frac{p}{h} = 0$$

$$C \,..\, Cx + C'y + C'' = 0 \quad C' \,..\, Cx + C'y + C'' - \frac{p}{k} = 0$$

$$D \,..\, Dx + D'y + D'' = 0 \quad D' \,..\, Dx + D'y + D'' - \frac{p}{l} = 0$$

$$E \,..\, Ex + E'y + E'' = 0 \quad E' \,..\, Ex + E'y + E'' - \frac{p}{m} = 0$$

Die Gleichungen von vier Linien F, G, H, K, seyen

$$F \ldots h(Bx + B'y + B'') + k(Cx + C'y + C'') \ldots \\ \ldots \ldots + l(Dx + D'y + D'') = 0$$

$$G \ldots h(Bx + B'y + B'') + k(Cx + C'y + C'') \ldots \\ \ldots \ldots + m(Ex + E'y + E'') = 0$$

$$H \ldots h(Bx + B'y + B'') + l(Dx + D'y + D'') \ldots \\ \ldots \ldots + m(Ex + E'y + E'') = 0$$

$$K \ldots k(Cx + C'y + C'') + l(Dx + D'y + D'') \ldots \\ \ldots \ldots + m(Ex + E'y + E'') - p = 0$$

Die Verbindungslinie der Collineationen von B, C; und B', C', schneidet die D in einem Puncte der F. Die Verbindungslinie der Collineationen von B, D; und B', D', schneidet die C in einem zweiten Puncte der F. Also ist die Linie F gegeben.

Die Verbindungslinte der Collineationen von B, C; und B', C', schneidet die E in einem Puncte der G. Die Verbindungslinie der Collineationen der B, E, und B', E', schneidet die C in einem zweiten Puncte der G. Also ist die Linie G gegeben.

Die Verbindungslinie der Collineationen von B, D, und B', D', schneidet die E in einem Puncte der H. Die Verbindungslinie der Collineationen von B, E und B', E' schneidet die D in einem zweiten Puncte der H. Also ist die Linie H gegeben.

Die Verbindungslinie der Collineationen von C, D' und C', D, schneidet die E in einem Puncte der K. Die Verbindungslinie der Collineationen von C, E' und C', E, schneidet die D in einem zweiten Puncte der K. Also ist die Linie K gegeben.

Die Linien A, F, E; A, G, D; A, H, C; A, K, B', sind collinear. Also sind die vier Collineationen von F, E; G, D; H, C; K, B'; Puncte der Linie A.

Die Gröfse p kann beliebig angenommen werden.

Beispiel.

$$A \,..\, 5(2x + 3y - 18) + 6(5x + 2y - 27) \;.\;.\;.\;.\;.$$
$$.\;.\;.\;.\;.\;.\; + 8(3x - 7y - 9) + 9(4x + 5y - 8) = 0$$

oder $A \,...\, 100x + 16y - 396 = 0$

Man nehme $p = 360$ an, und setze also

$$\begin{array}{ll}
B \,..\, 2x + 3y - 18 = 0 & B' \,..\, 2x + 3y + 54 = 0 \\
C \,..\, 5x + 2y - 27 = 0 & C' \,..\, 5x + 2y - 87 = 0 \\
D \,..\, 3x - 7y - 9 = 0 & D' \,..\, 3x - 7y - 54 = 0 \\
E \,..\, 4x + 5y - 8 = 0 & E' \,..\, 4x + 5y - 48 = 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
B, C \text{ u. } B', C' \;...\; & 40x + 27y - 252 = 0 \\
D \;......\; & 24x - 56y - 72 = 0 \\
\hline
B, D \text{ u. } B', D' \;..\; & 34x - 41y - 162 = 0 \\
C \;......\; & 30x + 12y - 162 = 0 \\
\hline
\text{aus beiden } F \;...\; & 64x - 29y - 324 = 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
B, C \text{ u. } B', C' \;...\; & 40x + 27y - 252 = 0 \\
E \;......\; & 36x + 45y - 72 = 0 \\
\hline
B, E \text{ u. } B' E' \;...\; & 46x + 60y - 162 = 0 \\
C \;......\; & 30x + 12y - 162 = 0 \\
\hline
\text{aus beiden } G \;...\; & 76x + 72y - 324 = 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
B, D \text{ u. } B', D' \;..\; & 34x - 41y - 162 = 0 \\
E \;......\; & 36x + 45y - 72 = 0 \\
\hline
B, E \text{ u. } B', E' \;..\; & 46x + 60y - 162 = 0 \\
D \;......\; & 24x - 56y - 72 = 0 \\
\hline
\text{aus beiden } H \;..\; & 70x + 4y - 234 = 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
C, D' \text{ u. } C', D \;..\; & 54x - 44y - 594 = 0 \\
E \;......\; & 36x + 45y - 72 = 0 \\
\hline
D, E' \text{ u. } D', E \;..\; & 60x - 11y - 504 = 0 \\
C \;......\; & 30x + 12y - 162 = 0 \\
\hline
\text{aus beiden } K \;...\; & 90x + y - 666 = 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{lrl} F \ldots & 64x - 29y - 324 & = 0 \\ E \ldots & 36x + 45y - 72 & = 0 \\ A \ldots & 100x + 16y - 396 & = 0 \end{array}\right\} \text{collinear.}$$

$$\left.\begin{array}{lrl} G \ldots & 76x + 72y - 324 & = 0 \\ D \ldots & 24x - 56y - 72 & = 0 \\ A \ldots & 100x + 16y - 396 & = 0 \end{array}\right\} \text{collinear.}$$

$$\left.\begin{array}{lrl} H \ldots & 70x + 4y - 234 & = 0 \\ C \ldots & 30x + 12y - 162 & = 0 \\ A \ldots & 100x + 16y - 396 & = 0 \end{array}\right\} \text{collinear.}$$

$$\left.\begin{array}{lrl} K \ldots & 90x + y - 666 & = 0 \\ B' \ldots & 10x + 15y + 270 & = 0 \\ A \ldots & 100x + 16y - 396 & = 0 \end{array}\right\} \text{collinear.}$$

Zweite Folge. *Der Kreis.*

34.

Die Summe der Quadrate der Coordinaten weniger dem Quadrate des Halbmessers, gleich Null gesetzt; giebt die Gleichung des Kreises für rechtwinklige Coordinaten vom Mittelpunct.

Durch den Mittelpunct m sey ein beliebiger Durchmesser als Axe der x gezogen. Aus einem beliebigen Puncte b des Kreises sey auf diesen Durchmesser ein Loth bc gefällt. Man setze $mc = x$, $cb = y$, $mb = r$, so giebt der Satz II. 45. die Gleichung des Kreises:

$$x^2 + y^2 - r^2 = o$$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $y = o$, $x = \pm r$; welches anzeigt, daſs der Kreis die Axe der x in zwei Puncten schneidet, welche auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpuncts den gleichen Abstand $= r$ von demselben haben.

Die Gleichung wird befriedigt durch $x = o$, $y = \pm r$; welches anzeigt, daſs der Kreis die Axe der y in zwei Puncten schneidet, welche auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpuncts den gleichen Abstand $= r$ von demselben haben.

Die Gleichung giebt $y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$, welches anzeigt, daſs jedem Werthe von x zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von y entsprechen.

Die Gleichung giebt $x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}$, welches anzeigt, daſs jedem Werthe von y zwei gleiche nnd entgegengesetzte Werthe von x gehören.

Hieraus folgt, daſs die durch den Mittelpunct gehenden Axen den Kreis in vier einander deckende Quadranten theilen. Da in der Gleichung die Coordinaten x, y, vertauscht werden können, so decken diese Quadranten einander auch dann, wenn man die Axe der x auf die Axe der y bringt.

Wenn man die Gleichung auf folgende Form bringt:

$$y^2 - (r + x)(r - x) = o$$

so erhält man den Satz: ***Die Ordinate ist die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten des Durchmessers.***

35.

Die Summe der Quadrate der Coordinaten weniger dem Product des Durchmessers mit der Abscisse, gleich Null gesetzt, giebt die Gleichung des Kreises für rechtwinklige Coordinaten vom Endpunct des Durchmessers.

In die Gleichung IX. 34 setzt man $x - r$ statt x, so ergiebt sich:

$$(x - r)^2 + y^2 - r^2 = 0$$
$$\text{oder } x^2 + y^2 - 2r \cdot x = 0$$
$$\text{oder } y^2 - x \cdot (2r - x) = 0$$

Diese Gleichung spricht den Satz aus: ***Die vom Endpunct des Durchmessers nach einem beliebigen Puncte des Kreises gezogene Sehne ist die mittlere Proportionallinie zwischen dem Durchmesser und dem Nebenabschnitt desselben.***

Setzt man $y = x \cdot \operatorname{tg} p$, $y = (2r - x) \cdot \operatorname{tg} q$, so folgt aus der obigen Gleichung diese:

$$\operatorname{tg} p \cdot \operatorname{tg} q - 1 = 0$$
$$\text{oder } \ldots \; p + q = 0$$

welches den Satz giebt: ***Der auf dem Durchmesser ruhende Umfangswinkel ist ein rechter Winkel.***

Derselbe Satz ergiebt sich auch, wenn man die Gleichung auf folgende Form bringt:

$$x^2 + y^2 + (2r - x)^2 + y^2 - 4r^2 = 0$$

welche besagt: ***Die Summe der Quadrate der von einem Puncte des Kreises nach den Endpuncten des Durchmessers gezogenen Sehnen ist gleich dem Quadrate des Durchmessers.***

36.

Die Summe der Producte der auf den Axen genommenen Abschnitte gleich Null gesetzt, giebt die Gleichung des Kreises für rechtwinklige Coordinaten vom Endpunct der Sehne.

In die Gleichung IX. 34 setzt man $x - m$ statt x, und $y - m'$ statt y, so erhält man

$$(x - m)^2 + (y - m')^2 - r^2 = 0$$
$$\text{aber auch } \ldots \; m^2 + m'^2 - r^2 = 0$$
$$\text{also } \ldots \; x^2 + y^2 - 2m \cdot x - 2m' \cdot y = 0$$
$$\text{oder } \ldots \; x(2m - x) + y(2m' - y) = 0$$

Hier sind m, m', die Coordinaten des Mittelpuncts m. Die Gleichung wird befriedigt durch $x = 0$, $y = 0$; ferner durch $x = 2m$, $y = 0$; ferner durch $y = 2m'$, $x = 0$; welches besagt, *daſs die beiden durch einen Punct des Kreises senkrecht auf einander gezogenen Sehnen, durch die vom Mittelpunct gefällten Lothe halbirt werden.*

Die Form $x(2m - x) - y(y - 2m') = 0$
oder $wc \,.\, ca = cb \,.\, dc = wg \,.\, gf$

besagt: *Zwei rechtwinklige Sehnen wa, db, theilen einander in Abschnitte, deren Producte gleich sind.*

Die Form $\frac{x}{y} = \frac{y - 2m'}{2m - x}$ oder $\operatorname{tg} wbc = \operatorname{tg} cad$

drückt aus, *daſs die auf der Sehne wd ruhenden Umfangswinkel einander gleich sind.*

Die Form $\frac{x}{y - 2m'} = \frac{y}{2m - x}$ oder $\operatorname{tg} wdc = \operatorname{tg} bac$

drückt aus, *daſs die auf der Sehne wb ruhenden Umfangswinkel einander gleich sind* u. s. w.

Die Form $\frac{m}{m'} = \frac{y(x + 2m - x)}{y^2 - x(2m - x)}$
oder $\operatorname{tg} \frac{1}{2} wma = \operatorname{tg}(wbc + abc)$

drückt aus, *daſs der auf der Sehne wa ruhende Umfangswinkel wba die Hälfte des Centralwinkels ist.*

37.

Die Gleichung des Kreises auf einen beliebigen Anfangspunct für rechtwinklige Coordinaten zu beziehen.

In die Gleichung IX. 34. setzt man $x - m$ statt x und $y - m'$ statt y, so erhält man

$$(x - m)^2 + (y - m')^2 - r^2 = 0$$

oder $x^2 + y^2 - 2mx - 2m'y + m^2 + m'^2 - r^2 = 0$

Diese Gleichung wird befriedigt durch $x = m$, $y - m' = \pm r$; und durch $y = m'$, $x - m' = \pm r$. Folglich entspricht der Abscisse $m \pm r$, nur ein einziger Werth der Ordinate; und der Ordinate $m' \pm r$ nur ein einziger Werth der Abscisse. Diese Puncte bezeichnen die Grenzen des Kreises in den Richtungen der Axen. Denn für $(y - m')^2 > r^2$ ist $(x - m)^2$ negativ, also x unmöglich. Eben so, für $(x - m)^2 > r^2$, ist $(y - m')^2$ negativ, also y unmöglich. Innerhalb dieser Grenzen entsprechen jeder Abscisse zwei Ordinaten, und jeder Ordinate zwei Abscissen. Denn die Gleichung giebt:

$$y = m' \pm \sqrt{r^2 - (x - m)^2}, \quad x = m \pm \sqrt{r^2 - (y - m')^2}$$

38.

Die Summe der Quadrate der Coordinaten nebst dem doppelten Product derselben mit dem Cosinus des Ordinatenwinkels weniger dem Quadrat des Halbmessers, gleich Null gesetzt, giebt die allgemeine Gleichung des Kreises für Coordinaten vom Mittelpunct.

In die Gleichung IX. 34. setzt man nach IX. 7. $y \sin w$ statt y, und $x + y \cos w$ statt x, so erhält man für den Ordinatenwinkel w die Gleichung:

$$(x + y \cos w)^2 + y^2 \,.\, \sin^2 w - r^2 = 0$$

oder $\quad . \; . \; . \; x^2 + 2xy \cos w + y^2 - r^2 = 0$

oder (IX. 1.) $\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; z^2 - r^2 = 0$

oder $\quad (x + y \cos w)\, x + (y + x \cos w)\, y - r^2 = 0$

Hier gehören jeder Abscisse x zwei Ordinaten y und y' nämlich:

$$y = - x \cos w + \sqrt{r^2 - x^2 \,.\, \sin^2 w}$$

$$y' = - x \,.\, \cos w - \sqrt{r^2 - x^2 \,.\, \sin^2 w}$$

Eben so gehören jeder Ordinate y zwei Abscissen x und x', nämlich:

$$x = - y \cos w + \sqrt{r^2 - y^2 \,.\, \sin^2 w}$$

$$x' = - y \cos w - \sqrt{r^2 - y^2 \,.\, \sin^2 w}$$

Hieraus folgt:

$2x \,.\, \cos w + y + y' = 0, \; 2y \,.\, \cos w + x + x' = 0$

aber auch $\quad . \; . \; . \; . \; x^2 + 2xy \cos w + y^2 - r^2 = 0$

also $\quad . \; . \; . \; . \; y \,.\, y' + r^2 - x^2 = 0$

$$x \,.\, x' + r^2 - y^2 = 0$$

Dieses giebt den Satz: ***Für jede Abscisse ist das Product der beiden Ordinaten, und für jede Ordinate ist das Product der beiden Abscissen vom Ordinatenwinkel unabhängig, also unveränderlich.*** Auf allen collinearen Linien bb' ist also das Product der beiden von der gemeinschaftlichen Collineation c zum Kreise genommenen Abschnitte $bc \,.\, cb'$ eine unveränderliche Gröfse, welche die ***Potenz des Kreises*** für diese Collineation c heifst (VIII. 2. 42.).

Wenn die Collineation c innerhalb des Kreises liegt, so ist diese Potenz negativ, d. h. die Abschnitte cb, cb' haben eine entgegengesetzte Richtung. Wenn aber die Collineation c aufserhalb des Kreises liegt, so ist die Potenz positiv, d. h. die beiden Abschnitte cb, cb' haben einerlei Richtung.

39.

Das Product eines Factors mit dem Quadrat der Leitlinie, und der Werth der Gleichung einer Linie, beide zusammen gleich Null gesetzt, geben die allgemeine Gleichung des Kreises für einen beliebigen Anfangspunct.

In die Gleichung IX. 38. setze man $x - m$ statt x, und $y - m'$ statt y; wo m, m', die Coordinaten des Mittelpuncts m sind, so erhält man die allgemeine Gleichung:

$$(x-m)^2 + 2(x-m)(y-m')\cos w + (y-m')^2 - r^2 = o$$

$$\text{oder} \quad x^2 + 2xy\cos w + y^2 - 2(m + m'\cos w)x \; \ldots\ldots$$

$$\ldots - 2(m' + m.\cos w)y + m^2 + 2m.m'.\cos w + m'^2 - r^2 = o$$

Die vom Anfangspunct nach einem beliebigen Punct des Kreises, und nach dem Mittelpunct gezogenen Leitlinien seyen $wb = z$, $wm = l$. Die letzte bilde mit den Axen die Positionswinkel p, p', so dafs $p + p' = w$. Die allgemeinste Gleichung des Kreises wird also diese Form haben:

$$2A.x + 2A'.y + A'' + C.z^2 = o$$

$$\text{wo} \quad z^2 = x^2 + 2xy\cos w + y^2$$

$$-\frac{A}{C} = m + m'.\cos w = l.\cos p$$

$$-\frac{A'}{C} = m' + m.\cos w = l.\cos p'$$

$$\frac{A''}{C} = l^2 - r^2$$

40.

Die Polargleichung des Kreises zu finden.

Es sey w ein fester Punct oder Pol, um welchen sich die Leitlinie $wb = z$ dreht, und dabei mit der festen Mittelpunctslinie $wm = l$ einen Winkel $mwb = u$ bildet. Das Dreieck wmb giebt (VI. 28.) die Gleichung:

$$z^2 - 2l.z.\cos u + l^2 - r^2 = o$$

Da diese Gleichung vom zweiten Grade ist, so zeigt sie an, dafs im Allgemeinen jede Linie den Kreis in zwei Puncten b, b', schneidet. Die beiden Wurzeln dieser Gleichung, nämlich z und z', entsprechen folgenden Bedingungen:

$$z + z' - 2l.\cos u = o, \qquad z.z' - l^2 + r^2 = o$$

$$\text{oder} \quad z = l.\cos u + \sqrt{r^2 - l^2.\sin^2 u}$$

$$z' = l.\cos u - \sqrt{r^2 - l^2.\sin^2 u}$$

Das Product der Wurzeln $z \,.\, z' = l^2 - r^2$ ist vom Winkel u unabhängig, also für denselben Pol w unveränderlich, und heifst (IX. 38.) die *Potenz* des Puncts w gegen den Kreis. Aus dieser Gleichung lassen sich nachstehende Folgerungen ziehen:

1) Wenn der Pol w innerhalb des Kreises liegt, also $l < r$ ist, so hat die Leitlinie z für jeden Winkel u zwei reelle Werthe. Sie hat einen gröfsten und kleinsten Werth $z = l \pm r$, wenn die Leitlinie mit der Mittelpunctslinie zusammenfällt, also $u = o$ ist; und zwei mittlere Werthe $z = \pm \sqrt{r^2 - l^2}$, wenn die Leitlinie auf der Axe senkrecht, also $u = 90^o$ ist.

2) Wenn der Pol in einem Puncte des Kreisumfangs angenommen wird, also $l = r$ ist, so hat man die Gleichung:

$$z^2 - 2r \,.\, z \,.\, \cos u = o \quad \text{oder} \quad z - 2r \,.\, \cos u = o$$

Die Leitlinie hat alsdann für jeden Winkel u nur einen Werth $z = 2r \,.\, \cos u$, und für $u = 90^o$ ist $z = o$. Hieraus folgt der Satz: *Die Berührungslinie ist auf dem Halbmesser des Berührungspuncts senkrecht.*

3) Wenn der Pol w ausserhalb des Kreises liegt, also $l > r$ ist, so hat die Leitlinie für jeden Winkel u nur so lange zwei reelle Werthe, als $\sin^2 u$ nicht gröfser als $\frac{r^2}{l^2}$ ist. Sie hat einen gröfsten und kleinsten Werth $z = l \pm r$, wenn sie mit der Mittelpunctslinie zusammenfällt, also $u = o$ ist. Sie hat zwei gleiche mittlere Werthe $z = \sqrt{l^2 - r^2}$, wenn $\sin u = \frac{r^2}{l^2}$, und ist alsdann die Berührungslinie des Kreises. Sie hat zwei *unmögliche Werthe*, wenn $\sin^2 u > \frac{r^2}{l^2}$ ist. Aber *auch alsdann bleibt die Potenz, d. h. das Product der beiden unmöglichen Werthe von z, möglich, und ist $= l^2 - r^2$.*

41.

Aus den Coordinaten des Mittelpuncts und Berührungspuncts die Gleichung der Berührungslinie zu finden.

Die Coordinaten des Mittelpuncts m seyen m, m', die des Berührungspuncts b seyen b, b', die Berührungslinie B ist (IX. 40.) auf dem Halbmesser mb senkrecht. Das vom Anfangspunct w auf die Linie B gefällte Loth bilde mit den Axen die Winkel p, p', so dafs $p + p' = w$. Die Coordinaten eines beliebigen Puncts x der Linie B seyen $x, y,$ so ist die Gleichung der Berührungslinie B folgende:

$$\cos p\,(x - m) + \cos p' \,.\, (y - m') - r = 0$$

oder . . . $B\,(x - m) + B'\,(y - m') - r^2 = 0$

Hier ist:

$$B = r \,.\, \cos p = b - m + (b' - m') \cos w$$
$$B' = r \,.\, \cos p' = b' - m' + (b - m) \cos w$$
$$B\,(b - m) + B'\,(b' - m') - r^2 = 0$$
$$B - B' \,.\, \cos w = r \sin p' \sin w = (b - m) \sin^2 w$$
$$B' - B \,.\, \cos w = r \sin p \sin w = (b' - m') \sin^2 w$$
$$D^2 \sin^2 w = B^2 - 2\,B B' \cos w + B'^2 = r^2 \,.\, \sin^2 w$$

also die Diametrale $D = r$

Die Coordinaten eines beliebigen Puncts a welcher nicht in der Linie B liegt, seyen a, a', das vom Puncte a auf die Linie B gefällte Loth $= l$, der Werth der obigen Gleichung für den Punct a sey M, so dafs

$$B\,(a - m) + B'\,(a' - m') - r^2 = M$$

so ist (IX. 27.) $r \,.\, l = M$

Beispiel.

a	a'	b	b'	m	m'	w
25,	41,	20,	27,	17,	22,	$53^0\ 7{,}8$

$$B = 3 + 3 = 6, \quad B' = 5 + 1{,}8 = 6{,}8$$
$$r^2 = 18 + 34 = 52, \quad B \,.\, m = 102, \quad B' \,.\, m' = 149{,}6$$

also die Gleichung der Berührungslinie

$$B \ldots 6\,x + 6{,}8 \,.\, y - 303{,}6 = 0$$
$$\text{oder} \quad 15\,x + 17 \,.\, y - 759 = 0$$
$$M = 15 \,.\, 25 + 17 \,.\, 41 - 759 = 313$$
$$l = \frac{313}{\sqrt{52}} = 43{,}405$$

42.

Die Berührungspuncte und die Gleichungen der beiden Berührungslinien zu bestimmen, wenn die letztern einer gegebenen Linie parallel seyn sollen.

Die Gleichung der Berührungslinie ist (IX. 41.)

$$\cos p\,(x - m) + \cos p'\,(y - m') - r = 0$$

Wenn dieselbe einer gegebenen Linie A parallel seyn soll, deren Gleichung $Ax + A'.y = o$ und deren Diametrale $= D$ ist, so ist die Gleichung der Berührungslinie

$$A(x-m) + A'(y-m') \mp D.r = o$$

wo $D.\cos p = A, \quad D.\cos p' = A'$

$$\cot\tfrac{1}{2}w . \frac{A-A'}{A+A'} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(p'-p)$$

Alsdann hat man für die Coordinaten der Berührungspuncte

$$\pm r.\sin p = (b'-m')\sin w, \quad \pm r \sin p' = (b-m)\sin w$$

Beispiel.

m	m'	A	A'	w
17	22	29	27	53 7,8

$\cot\frac{1}{2}w$	0,30103	A	1,46240	$\sin p$	9,58247
$A-A'$	0,30103	$\cos p$	9,96568	$\sin p'$	9,70739
$A+A'$	1,74819	D	1,49672	$\sin w$	9,90309
$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(p'-p)$	8,85387	A'	1,43136		9,67938
$\frac{1}{2}(p'-p) =$	4° 5,1	$\cos p'$	9,93465		9,80430
$\frac{1}{2}(p'+p) =$	26 33,9	D	1,49671		0,47795
$p' =$	30 39,0	$D =$	31,385		0,63723
$p =$	22 28,8				

$$B \ldots 29x + 27.y - 1087 \mp 31{,}385.r = o$$

$$b = 17 \pm 0{,}63723.r, \quad b' = 22 \pm 0{,}47795.r$$

43.

Die Gleichung der harmonischen Polare zu finden.

Jeder Punct kann in Beziehung auf einen Kreis als **Pol** angesehen werden. Man verbindet den Mittelpunct mit dem Pol, und nimmt auf dieser Linie einen zweiten Punct, welcher der ***harmonische Pol*** des erstern heifst, wenn beide auf einerlei Seite des Mittelpuncts so liegen, *dafs das Rechteck ihrer Abstände vom Mittelpunct dem Quadrat des Halbmessers gleich ist.* Zieht man durch den harmonischen Pol eine auf die Mittelpunctslinie senkrechte Linie, so heifst sie die ***harmonische Polare.***

Es sey a der Pol, b sein harmonischer Pol, $ma = k$, $mb = l$, also $k.l = r^2$. Wenn einer dieser Pole aufserhalb des Kreises liegt, so liegt der andere innerhalb des Kreises.

Durch die Puncte a, b, seyen die Linien A, B, senkrecht auf die Mittelpunctslinie gezogen, so ist B die harmonische Polare des Pols a, und A die harmonische Polare des Pols b. Eben so hat jede Linie A ihren harmonischen Pol b, und jede Linie B ihren harmonischen Pol a.

Wenn der Pol ausserhalb des Kreises liegt, so berühren die von ihm an den Kreis gezogenen Berührungslinien, den Kreis in den Puncten f, g, in welchen seine harmonische Polare den Kreis schneidet.

Wenn der Pol innerhalb des Kreises liegt, so schneidet seine Senkrechte den Kreis in den beiden Puncten f, g, wo die von seinem harmonischen Pol an den Kreis gezogenen Berührungslinien den Kreis berühren.

Wenn die Linie ma mit den Axen der x, y, die Positionswinkel p, p', bildet, so dafs $p + p' = w$, so sind die Gleichungen der Linien A, B, folgende:

$$\cos p\,(x - m) + \cos p'\,(y - m') - k = o$$
$$\cos p\,(x - m) + \cos p'\,(y - m') - l = o$$

oder, wenn man sie mit k multiplicirt

$$A \;.\;.\;.\; A\,(x - m) + A'\,(y - m') - k^2 = o$$
$$B \;.\;.\;.\; A\,(x - m) + A'\,(y - m') - r^2 = o$$

Die Parameter A, A', sind durch die Coordinaten des Pols a gegeben, nämlich:

$$A = k\,.\cos p = a - m + (a' - m')\cos w$$
$$A' = k\,.\cos p' = a' - m' + (a - m)\cos w$$

Diese Parameter können aber auch durch die Coordinaten des harmonischen Pols b bestimmt werden, denn es ist

$$b - m = \frac{l}{k}(a - m) = \frac{r^2}{k^2}(a - m)$$

$$b' - m' = \frac{l}{k}(a' - m') = \frac{r^2}{k^2}(a' - m')$$

Setzt man also:

$$B = b - m + (b' - m')\cos w$$
$$B' = b' - m' + (b - m)\cos w$$

so sind die Gleichungen der Linien A, B, folgende:

$$A \;.\;.\;.\; B\,(x - m) + B'\,(y - m') - r^2 = o$$
$$B \;.\;.\;.\; B\,(x - m) + B'\,(y - m') - l^2 = o$$

Die Linie A hängt also eben so von dem harmonischen Pol b ab, wie die harmonische Polare B von dem Pole a. Also ist die Linie A die harmonische Polare des harmonischen Pols b.

Wenn der Pol a im Umfange des Kreises liegt, so ist $k = l = r$. Alsdann fallen die Puncte a, b, und die Linien A, B, zusammen, und ihre Gleichungen werden mit derjenigen der Berührungslinie (IX. 41.) identisch. ***Die Berührungslinie ist also die harmonische Polare des Berührungspuncts.***

Man hat noch folgende Gleichungen:

$$A\,(a-m) + A'\,(a'-m') - k^2 = 0$$
$$B\,(b-m) + B'\,(b'-m') - l^2 = 0$$
$$A\,(b-m) + A'\,(b'-m') - r^2 = 0$$
$$B\,(a-m) + B'\,(a'-m') - r^2 = 0$$

$$A - A'\cos w = (a-m)\sin^2 w\,,\quad A' - A\cos w = (a'-m')\sin^2 w$$
$$B - B'\cos w = (b-m)\sin^2 w\,,\quad B' - B\cos w = (b'-m')\sin^2 w$$
$$A^2 - 2A\,.\,A'\cos w + A'^2 = k^2\,.\,\sin^2 w$$
$$B^2 - 2B\,.\,B'\cos w + B'^2 = l^2\,.\,\sin^2 w$$

Also sind k, l, die Diametralen der Parameter A, A' und B, B'.

Von einem beliebigen Puncte c, dessen Coordinaten c, c' seyen, sey auf die harmonische Polare B des Puncts a ein Loth $cd = n$ gefället, welches dieselbe in einem Puncte d schneidet, dessen Coordinaten d, d', seyen. Der Werth der Gleichung der harmonischen Polare B für den Punct c sey $= M$, so dafs $A\,(c-m) + A'\,(c'-m') - r^2 = M$
so ist (IX. 27.),
$$k^2.(c-d) = (a-m)\,M\,,\quad k^2\,(c'-d') = (a'-m')\,M\,,\quad k\,.\,n = M$$

Beispiel.

a	a'	m	m'	r^2	w
25,	41,	17,	22,	52,	$53^0\,7{,}8$

$$A = 8 + 11{,}4 = 19{,}4 \qquad A' = 19 + 4{,}8 = 23{,}8$$
$$k^2 = 19{,}4\,.\,8 + 23{,}8\,.\,19 = 607{,}4 \qquad l^2 = \tfrac{520}{6074}\,.\,52 = 4{,}4517$$
$$b = 17 + \tfrac{520}{6074}\,.\,8 = 17{,}6849\,,\quad b' = 22 + \tfrac{520}{6074}\,.\,19 = 23{,}6266$$
$$A\,.\,m + A'\,.\,m' = 19{,}4\,.\,17 + 23{,}8\,.\,22 = 853{,}4$$
$$Am + A'm' + k^2 = 1460{,}8\,;\quad Am + A'm' + r^2 = 905{,}4$$

Die Gleichungen der Linien A, B, sind also

$$A\;\ldots\;194\,.\,x + 238\,.\,y - 14608 = 0$$
$$B\;\ldots\;194\,.\,x + 238\,.\,y - 9054 = 0$$

44.

Die Berührungssehne eines Puncts ist die harmonische Polare desselben.

Eine Linie berühre den Kreis in einem Puncte f, dessen Coordinaten f, f', seyen, so ist ihre Gleichung (IX. 41.)

$$B\,(x-m) + B'\,(y-m') - r^2 = 0$$

wo $B = f - m + (f'-m')\cos w$, $B' = f' - m' + (f-m)\cos w$

Wenn diese Linie durch den Punct a geht, dessen Coordinaten a, a', sind, so wird ihre Gleichung durch $x = a$, $y = a'$ befriedigt, also ist

$$B(a-m) + B'(a'-m') - r^2 = a$$

Setzt man nun

$$A = a - m + (a' - m')\cos w, \quad A' = a' - m' + (a-m)\cos w$$

so ist $B(a-m) + B'(a'-m') = A(f-m) + A'(f'-m')$

also . . . $A(f-m) + A'(f'-m') - r^2 = o$

Wenn eine zweite Linie den Kreis in dem Puncte g berührt, dessen Coordinaten g, g' sind, so ist aus gleichem Grunde:

$$A(g-m) + A'(g'-m') - r^2 = o$$

Aber eine Linie, welche durch die Puncte f, g, geht, in welchen die beiden aus dem Puncte a an den Kreis gezogenen Berührungslinien denselben berühren, heifst die *Berührungssehne* des Puncts a. Ihre Gleichung wird also seyn

$$A(x-m) + A'(y-m') - r^2 = o$$

da diese Gleichung sowohl durch $x = f$, $y = f'$, als auch durch $x = g$, $y = g'$, befriedigt wird. Diese Gleichung gehört aber auch der harmonischen Polare des Puncts a an (IX. 43.). Also ist die Berührungssehne des Puncts a mit der harmonischen Polare dieses Puncts a identisch.

45.

An einem Kreise die Coordinaten der beiden Berührungspuncte, welche einem gegebenen äufsern Puncte; oder die Coordinaten der beiden Durchschnittspuncte, welche einer gegebenen schneidenden Linie entsprechen, zu bestimmen.

Diese beiden Forderungen entsprechen einer und derselben Aufgabe. Denn es sey ein Punct a aufserhalb des Kreises gegeben, aus welchem an denselben die Berührungslinien af, ag, gezogen werden, so läfst sich zu a als Pol die harmonische Polare B finden, welche den Kreis in den Puncten f, g, schneidet (IX. 44.). Umgekehrt, wenn eine in f, g, schneidende Linie B gegeben ist, so läfst sich ihr harmonischer Pol a bestimmen, und die aus demselben gezogenen Linien af, ag, werden den Kreis berühren.

Es sey also zuerst aufserhalb des Kreises der Punct a gegeben, dessen Coordinaten a, a', seyen, und die Linie $ma = k$ bilde mit den Axen die Winkel p, p', so dafs $p + p' = w$, so hat man die Gleichungen:

$$k \,.\, \sin p = (a' - m')\sin w, \quad k \sin p' = (a-m)\sin w$$

woraus $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(p'-p) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} w \,.\, \dfrac{a - m - (a' - m')}{a - m + a' - m'}$

Hierdurch lassen sich p, p', k, bestimmen.

Der harmonische Pol von a sey b, dessen Coordinaten b, b'. Der Winkel, welchen die Halbmesser mf, mg, mit der Linie ma bilden, sey $= c$, so ist:

$$k \,.\, \cos c = r\,, \qquad k\,.\,l = r^2$$

$$l\,.\sin p = (b' - m')\sin w\,, \quad l\,.\sin p' = (b - m)\sin w$$

$$r\sin(p + c) = (f' - m')\sin w\,, \quad r\,.\sin(p' - c) = (f - m)\sin w$$

$$r\sin(p - c) = (g' - m')\sin w\,, \quad r\sin(p' + c) = (g - m)\sin w$$

Hierdurch sind die Coordinaten der Puncte b, f, g, bestimmt.

Beispiel.

a	a'	m	m'	r	w
32,	45,	17,	22,	9,	53° 7,8

$$a - m - (a' - m) = 15 - 23 = -8$$

$$a - m + a' - m' = 15 + 23 = 38$$

$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}w$		9,69897
8	—	0,90309
38		1,57978
$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(p' - p)$	—	9,02228
$\frac{1}{2}(p' - p)$	—	6° 0,55
$\frac{1}{2}(p' + p)$		26 33,9
$p' =$		20 33,35
$p =$		32 34,45
$c =$		74 43,9
$p + c =$		107 18,35
$p' - c =$	—	54 10,55
$p - c =$	—	42 9,45
$p' + c =$		95 17,25
$f =$		7,878
$b =$		18,040
$g =$		28,202
$f' =$		32,741
$b' =$		23,595
$g' =$		14,449

$a - m$		1,17609
$\sin w$		9,90309
$\sin p'$		9,54546
k		1,53372
r		0,95424
$\cos c$		9,42052
l		0,37476
$\dfrac{l}{\sin w}$		0,47167
$\sin p$		9,73110
$\sin p'$		9,54546
$b' - m'$		0,01713
$b - m$		0,20277
$\dfrac{r}{\sin w}$		1,05115
$\sin(p + c)$		9,97988
$\sin(p' - c)$	—	9,90892
$\sin(p - c)$	—	9,82683
$\sin(p' + c)$		9,99815
$f' - m'$		1,03103
$f - m$	—	0,96007
$g' - m'$	—	0,87798
$g - m$		1,04930

Es sey zweitens eine Linie B gegeben, welche den Kreis durchschneidet. Ihre Gleichung sey $Ax + A'y + A'' = o$, und ihre Diametrale sey $= D$. Das vom Mittelpunct auf die Linie B gefällte Loth $= l$, bilde mit den Axen die Winkel p, p', so dafs $p + p' = w$, so hat man die Gleichungen:

$$D . \cos p = A, \quad D . \cos p' = A', \quad D . l = - A''$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (p' - p) = \cot \tfrac{1}{2} w . \frac{A - A'}{A + A'}, \quad \frac{l}{r} = \cos c$$

$$l . \sin p = (b' - m') \sin w \qquad l . \sin p' = (b - m) \sin w$$

$$r \sin (p + c) = (f' - m') \sin w, \quad r \sin (p' - c) = (f - m) \sin w$$

$$r \sin (p - c) = (g' - m') \sin w, \quad r \sin (p' + c) = (g - m) \sin w$$

Beispiel.

m	m'	A	A'	A''	r	w
17,	22,	7,	— 25,	150,	8,	55° 7,8

$\cot \frac{1}{2} w$		0,30103	
$A - A'$		1,50515	
$A + A'$	—	1,25527	
$\operatorname{tg} \frac{1}{2} (p' - p)$	—	0,55091	
$\frac{1}{2} (p' - p)$	$= -$	74	17,5
$\frac{1}{2} (p' + p)$	$=$	26	33,9
p'	$= -$	47	43,6
p	$=$	100	51,4
c	$=$	59	42,1
$p + c$	$=$	160	33,5
$p' - c$	$= -$	107	25,7
$p - c$	$=$	41	9,3
$p' + c$	$=$	11	58,5
f	$=$	7,459	
b	$=$	13,267	
g	$=$	19,075	
f'	$=$	25,329	
b'	$=$	26,955	
g'	$=$	28,581	

A	. .	0,84510
$\cos p$	—	9,27497
D	—	1,57013
$- A''$	—	2,17609
l		0,60596
r		0,90309
$\cos c$		9,70287
$\sin w$		9,90309
$\frac{l}{\sin w}$		0,70287
$\sin p'$	—	9,86920
$\sin p$		9,99216
$b - m$	—	0,57207
$b' - m'$		0,69503
$\frac{r}{\sin w}$		1,00000
$\sin (p + c)$		9,52225
$\sin (p' - c)$	—	9,97959
$\sin (p - c)$		9,81829
$\sin (p' + c)$		9,31699

46.

Die Gleichung der Berührungslinie zu finden, welche von einem gegebenen Punct an den Kreis gezogen wird.

Die Coordinaten des Mittelpuncts m und des gegebenen Puncts a seyen m, m' und a, a'; der Abschnitt $ma = k$. Die Gleichungen der aus a nach dem Mittelpunct m und senkrecht dagegen gezogenen Linien sind (IX. 18. 43.)

$$am \ldots (a'-m')(x-m) - (a-m)(y-m') = o$$

$$A \ldots A\,(x-m) + A'\,(y-m') - k^2 = o$$

wo $A = a - m + (a'-m')\cos w$, $A' = a' - m' + (a-m)\cos w$

Da die Berührungslinie af oder ag durch den Punct a gehen soll, so ist sie den Linien am und A collinear. Ihre Gleichung ist also (IX. 20.)

$$A\,(x-m) - A'\,(y-m') - k^2 \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots \pm h\,[(a'-m')(x-m) - (a-m)(y-m')] = o$$

wo h ein zu bestimmender Factor ist.

Die Diametralen der Parameter der Gleichungen von am und A, seyen D, E; die Werthe, welche diese Gleichungen annehmen, wenn man statt x, y, die Coordinaten des Berührungspuncts setzt, seyen M, N; auch seyen u, v, die vom Berührungspunct auf die Linien am, A, gefällten Lothe, so ist (IX. 27.) $D\,.\,u = M$, $E\,.\,v = N$. Vermöge der obigen Gleichung ist aber auch

$$N \pm h\,.\,M = o\,, \quad \text{also} \quad E\,.\,v \pm h\,.\,D\,.\,u = o$$

Da die Linien am, A, einander rechtwinklig schneiden; so ist (IX. 24.) $E = -D\,.\sin w$, also

$$-\sin w\,.\,v \pm h\,.\,u = o$$

Setzt man $k\,.\cos c = r$, so ist $v = u\,.\,\mathrm{tg}\,c$

Hieraus folgt also $h = \mathrm{tg}\,c\,.\sin w$. Die gesuchte Gleichung der Berührungslinie ist also:

$$A\,(x-m) + A'\,(y-m') - k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$.\ \pm\,\mathrm{tg}\,c\,.\sin w\,[(a'-m')(x-m) - (a-m)(y-m')] = o$$

Vermöge des doppelten Vorzeichens erhält man hiedurch die Gleichungen beider Berührungslinien af, ag.

Beispiel (IX. 43.).

a	a'	m	m'	r^2	w
25,	41,	17,	22,	52,	$53^0\,7{,}8$

$A = 19{,}4\,,\quad A' = 23{,}8\,,\quad k^2 = 607{,}4\,,\quad k^2 - r^2 = 555{,}4$

$k^2 - r^2$	2,74461
r^2	1,71600
$\mathrm{tg}\ ^2c$	1,02816
$\mathrm{tg}\ c$	0,51430
$\sin w$	9,90309
h	0,41739
$a' - m'$	1,27875
$a - m$	0,90309
$h(a' - m')$	1,69614
$h(a - m)$	1,32048

$$\begin{array}{rr}
A & 19{,}4 \\
h(a'-m') & \pm\ 49{,}675 \\ \hline
 & 69{,}075 \\
 & -\ 30{,}275 \\
m\ = & 17 \\ \hline
m\,.\ 69{,}075 & = 1174{,}27 \\
m'\,.\ 2{,}884 & = 63{,}45 \\
k^2 & = 607{,}4 \\ \hline
 & = 1845{,}12
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
A' & 23{,}8 \\
h(a-m) & \mp\ 20{,}916 \\ \hline
 & 2{,}884 \\
 & 44{,}716 \\
m'\ = & 22 \\ \hline
m\,.\ 30{,}275 & = -514{,}67 \\
m'\,.\ 44{,}716 & = 983{,}75 \\
k^2 & = 607{,}4 \\ \hline
 & = 1076{,}48
\end{array}$$

Die Gleichungen der beiden Berührungslinien sind also

$$ag\ \ldots\quad 69{,}075\,.\,x + 2{,}884\,.\,y - 1845{,}12 = o$$

$$af\ \ldots - 30{,}275\,.\,x + 44{,}716\,.\,y - 1076{,}48 = o$$

Die Coordinaten der Berührungspuncte f, g, findet man nach IX. 45.

$$f = 9{,}3613\,,\quad f' = 30{,}411\,,\quad g = 26{,}008\,,\quad g' = 16{,}842$$

Diese Coordinaten, so wie die Coordinaten von a, befriedigen die gefundenen Gleichungen.

47.

Die Gleichung der Potenzlinie eines Puncts gegen einen Kreis zu finden.

Die Coordinaten des Mittelpuncts m, eines gegebenen Puncts a, und eines veränderlichen Puncts x, seyen m, m'; a, a'; x, y. Wenn der Punct x die Eigenschaft haben soll, dafs die von ihm an den Kreis gezogene Berührende seinem Abstande vom festen Puncte a gleich sey, oder dafs die Potenz des Puncts x gegen den Kreis, dem Quadrat des Abstandes ax gleich sey, so heifst die Linie C, welcher der Punct x eingeschrieben ist, *die Potenzlinie des Puncts a gegen den Kreis* (VIII. 43.). Die Bedingung ist also:

$$mx^2 - ax^2 - r^2 = 0$$

Hier ist (IX. 3.), wenn $ma = k$

$$mx^2 = (x-m)^2 + 2(x-m)(y-m')\cos w + (y-m')^2$$
$$ax^2 = (x-a)^2 + 2(x-a)(y-a')\cos w + (y-a')^2$$
$$k^2 = (a-m)^2 + 2(a-m)(a'-m')\cos w + (a'-m')^2$$

Setzt man also (IX. 43.)

$$A = a - m + (a'-m')\cos w,\quad A' = a' - m' + (a-m)\cos w$$

so erhält man für die Potenzlinie C die Gleichung

$$2A.(x-m) + 2A'(y-m') - k^2 - r^2 = 0$$

Die Gleichung der harmonischen Polare B des Puncts a gegen den Kreis ist (IX. 43.)

$$A(x-m) + A'(y-m') - r^2 = 0$$

Die Potenzlinie C ist also (IX. 15.) der harmonischen Polare B parallel, also senkrecht auf der Mittelpunctslinie ma. Auch ist (IX. 43.)

$$A^2 - 2A.A'\cos w + A'^2 = k^2.\sin^2 w$$

Die Diametralen der Gleichungen von B und C sind also k und $2k$; die Werthe dieser Gleichungen für $x = m$, $y = m'$, sind r^2 und $k^2 + r^2$, folglich sind (IX. 27.) die Abstände dieser Linien vom Mittelpunct gleich $\frac{r^2}{k}$ und $\frac{k^2+r^2}{2k} = \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}.\frac{r^2}{k}$. Also liegen der Punct a, seine harmonische Polare B, und seine Potenzlinie C auf einerlei Seite des Mittelpuncts m, und die Potenzlinie C halbirt den Abstand des Puncts a von seiner harmonischen Polare B.

Setzt man den Abstand des Mittelpuncts vom Anfangspunct $wm = l$, und versetzt man den Punct a in den Anfangspunct w, so dafs $a = 0$, $a' = 0$, so ist die Gleichung der Potenzlinie des Anfangspuncts w gegen den Kreis folgende:

$$-2(m + m'\cos w)x - 2(m' + m\cos w)y + l^2 - r^2 = 0$$

48.

Einen Kreis aus seiner Gleichung zu bestimmen.

Die Coordinaten des Mittelpuncts m seyen m, m', die Mittelpunctslinie $wm = l$ bilde mit den Axen der x, y, die Positionswinkel p, p', so daſs $p + p' = w$ sey. Die allgemeine Gleichung des Kreises ist (IX. 39.).

$$2Ax + 2A'y + A'' + C.z^2 = o$$

wo . . . $z^2 = x^2 + 2xy \cos w + y^2$

$$A = -C.(m + m' \cos w) = -C.l.\cos p$$

$$A' = -C.(m' + m \cos w) = -C.l.\cos p'$$

$$A'' = C.(l^2 - r^2)$$

Die Potenzlinie A und harmonische Polare B des Anfangspuncts w gegen den Kreis schneiden die Mittelpunctslinie wm in den Puncten a, b, deren Coordinaten a, a' und b, b', seyen. Die Gleichungen dieser Linien sind (IX. 47. 43.).

$$A \;.\; . -2(m + m'\cos w)x - 2(m' + m\cos w)y + l^2 - r^2 = o$$

$$B \;.\; . -(m + m'\cos w)x - (m' + m\cos w)y + l^2 - r^2 = o$$

Die Gleichung des Kreises besteht also aus einem lineären Theil $2Ax + 2A'y + A''$ und einem quadratischen Theil $C.z^2$. Der lineäre Theil ist der Werth der Gleichung der Potenzlinie des Anfangspuncts gegen den Kreis.

Man verzeichne also eine Linie A, deren Gleichung

$$2Ax + 2A'y + A'' = o$$

nach IX. 30. — 33. Das vom Anfangspunct w auf die Linie A gefällte Loth giebt den Punct a. In dieser Linie wa liegt der Mittelpunct m.

Da $A = -C.l.\cos p$, $A' = -C.l.\cos p'$, so nehme man auf den Axen der x, y, die Abschnitte $wc = -\frac{A}{C}$, $wd = -\frac{A'}{C}$, errichte in c, d, Lothe auf die Axen. Diese Lothe schneiden einander in dem Mittelpunct m. Man nehme in der Richtung wa den Punct b so an, daſs $wb = 2wa$ sey, so ist der Punct b der harmonische Pol des Anfangspuncts gegen den Kreis.

Die Potenz des Anfangspuncts gegen den Kreis ist $l^2 - r^2 = \frac{A''}{C}$. Wenn also diese Gröſse $\frac{A''}{C} = o$ ist, so ist (IX. 35. 36.) der Anfangspunct der Coordinaten im Umfange des Kreises. Wenn die Gröſse $\frac{A''}{C}$ positiv ist, so liegt der Anfangspunct auſserhalb des Kreises. Alsdann muſs noch auſserdem $\frac{A''}{C} < l^2$ seyn. Setzt man die zu den Parametern A, A', gehörige Diametrale $= D$, so ist

$$A = D \,.\, \cos p = - C \,.\, l \cos p$$

also $D = - C \,.\, l$, also

$$D^2 \,.\, \sin^2 w = A^2 - 2 A A' \cos w + A'^2 = C^2 \,.\, l^2 \,.\, \sin^2 w$$

Es entsprechen also nicht alle Gleichungen, welche die Form

$$2 A x + 2 A' y + A'' + C \,.\, z^2 = o$$

einer Kreisgleichung haben, auch wirklich einem Kreise, sondern es muſs

$$A^2 - 2 A A' \cos w + A'^2 - A'' \,.\, C \,.\, \sin^2 w$$

eine positive Gröſse seyn.

Wenn in diesem Falle die Gröſse $A'' \,.\, C$ positiv ist, so wird der Kreis die Axen der x oder y, schneiden, berühren, oder gar nicht treffen, je nachdem $\sqrt{A'' \,.\, C}$ kleiner, gleich, oder gröſser A oder A' ist.

Wenn aber die Potenz $\frac{A''}{C}$ negativ ist, so ist $r^2 < l^2$, also liegt der Anfangspunct innerhalb des Kreises. Sind nun die Puncte m, b, auf oben angezeigte Art bestimmt worden, so beschreibt man über $m b$ als Durchmesser einen Kreis, welcher von dem in w auf $m b$ errichteten Loth in zwei Puncten f, g, geschnitten wird, welche Puncte des verlangten Kreises sind.

Die Berechnung geschieht nach folgenden Formeln:

$$A = D \,.\, \cos p, \qquad A' = D \,.\, \cos p', \qquad D = - C \,.\, l$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} (p' - p) = \cot \tfrac{1}{2} w \,.\, \frac{A - A'}{A + A'}$$

$$m \,.\, \sin w = l \,.\, \sin p', \qquad m' \,.\, \sin w = l \,.\, \sin p$$

Ist nun $A'' \,.\, C$ positiv und kleiner als D^2, so ist

$$A'' \,.\, C = D^2 \,.\, \sin^2 q, \qquad r = l \,.\, \cos q$$

$$b \,.\, \sin w = l \,.\, \sin^2 q \,.\, \sin p' \qquad b' \sin w = l \,.\, \sin^2 q \,.\, \sin p$$

$$a = \tfrac{1}{2} b, \qquad a' = \tfrac{1}{2} b'$$

Für die etwanigen Durchschnitte auf den Axen ist:

$$A \,.\, \sin 2u = A' \,.\, \sin 2u' = -C \,.\, l \,.\, \sin q = D \,.\, \sin q$$

$$x = l \,.\, \sin q \,.\, \mathrm{tg}\, u\,, \qquad x' = l \,.\, \sin q \,.\, \cot u$$

$$y = l \,.\, \sin q \,.\, \mathrm{tg}\, u'\,, \qquad y' = l \,.\, \sin q \,.\, \cot u'$$

Wenn $A'' \,.\, C$ negativ ist, so hat man:

$$-A'' \,.\, C = D^2 \,.\, \mathrm{tg}^2 q \qquad l = r \,.\, \cos q$$

$$b \,.\, \sin w = -l \,.\, \mathrm{tg}^2 q \,.\, \sin p'\,, \quad b' \,.\, \sin w = -l \,.\, \mathrm{tg}^2 q \,.\, \sin p$$

$$a = \tfrac{1}{2} b \qquad a' = \tfrac{1}{2} b'$$

$$A \,.\, \mathrm{tg}\, 2u = A' \,.\, \mathrm{tg}\, 2u' = -C \,.\, l \,.\, \mathrm{tg}\, q = D \,.\, \mathrm{tg}\, q$$

Für die Durchschnitte auf den Axen ist dann:

$$x = l \,.\, \mathrm{tg}\, q \,.\, \mathrm{tg}\, u\,, \qquad x' = -l \,.\, \mathrm{tg}\, q \,.\, \cot u$$

$$y = l \,.\, \mathrm{tg}\, q \,.\, \mathrm{tg}\, u'\,, \qquad y' = -l \,.\, \mathrm{tg}\, q \,.\, \cot u'$$

Erstes Beispiel.

$$154x + 150y - 6000 - z^2 = 0 \qquad w = 53^\circ\, 7',8$$

$$A = 77 \quad A' = 75 \quad A'' = -6000\,, \quad C = -1$$

Das Maximum von A'' ist hier $= 7225$. Da $\sqrt{A'' \,.\, C} > A$ und $> A'$, so schneidet der Krsis keine der beiden Axen.

$\cot \frac{1}{2} w$	0,30103
$A - A'$	0,30103
$A + A'$	2,18184
$\mathrm{tg}\, \frac{1}{2}(p' - p)$	8,42022
$\frac{1}{2}(p' - p) =$	1° 30,4
$\frac{1}{2}(p' + p) =$	26 33,9
$p' =$	28 4,3
$p =$	25 3,5
A	1,88649
$\cos p$	9,95707
A'	1,87506
$\cos p'$	9,94564
D	1,92942

D	1,92942
$-C$	0
l	1,92942
$\sin w$	9,90309
$\frac{l}{\sin w}$	2,02633
$\sin p'$	9,67264
$\sin p$	9,62688
m	1,69897
m'	1,65321

$m = 50$	$b = 41{,}522$
$m' = 45$	$b' = 37{,}37$
$l = 85$	$a = 20{,}76$
$r = 35$	$a' = 18{,}68$

$A'' \,.\, C$	3,77815
77,459	1,88907
D	1,92942
$\sin q$	9,95965
$\cos q$	9,61466
l	1,92942
r	1,54408
$\frac{l}{\sin w}$	2,02633
$\sin^2 q$	9,91931
	1,94564
$\sin p'$	9,67264
$\sin p$	9,62638
b	1,61828
b'	1,57252

Zweites Beispiel.

$154\,x + 150\,y - 5781 - z^2 = o \qquad w = 53^0\,7{,}8$

$A''.C$	3,76200	$D \sin q$	1,88100	r	$= 38$
76,033	1,88100	A	1,88649	$x_,$	$= 64{,}835$
D	1,92942	$\sin 2u$	9,99451	x'	$= 89{,}164$
$\sin q$	9,95158	$\mathrm{tg}\, u$	9,93081		
$\cos q$	9,65036	$l.\sin q$	1,88100		
l	1,92942	$x_,$	1,81181		
r	1,57978	x'	1,95019		

Drittes Beispiel.

$154\,x + 150\,y - 4725 - z^2 = o \qquad w = 53^0\,7{,}8$

$A''.C$	3,67440	$D.\sin q$	1,83720	$x_,$	1,62636
68,74	1,83720	$A_,$	1,88649	x'	2,04804
D	1,92942	A'	1,87506	$y_,$	1,65323
$\sin q$	9,90778	$\sin 2u_,$	9,95071	y'	2,02117
$\cos q$	9,76955	$\sin 2u'$	9,96214	$x_,$	$= 42{,}30$
l	1,92942	$l.\sin q$	1,83720	x'	$= 111{,}70$
r	1,69897	$\mathrm{tg}\, u_,$	9,78916	$y_,$	$= 45$
$r = 50$		$\mathrm{tg}\, u'$	9,81603	y'	$= 105$

Viertes Beispiel.

$154\,x + 150\,y - z^2 = o \qquad w = 53^0\,7{,}8$

Der Kreis geht durch den Anfangspunct.

$q = o\,,\quad r = l = 85\,,\quad x = 154\,,\quad y = 150$

Fünftes Beispiel.

$154\,x + 150\,y + 2775 - z^2 = o \qquad w = 53^0\,7{,}8$

$-A''.C$	3,44326	$D.\mathrm{tg}\, q$	1,72163	$x_,$	1,21205
	1,72163	$A_,$	1,88649	x'	2,23121
D	1,92942	A'	1,87506	$y_,$	1,22145
$\mathrm{tg}\, q$	9,79221	$\mathrm{tg}\, 2u_,$	9,83514	y'	1,22181
$\cos q$	9,92942	$\mathrm{tg}\, 2u'$	9,84657	$x_,$	$= -16{,}295$
l	1,92942	$l.\mathrm{tg}\, q$	1,72163	x'	$= 170{,}295$
r	2,00000	$\mathrm{tg}\, u_,$	9,49042	$y_,$	$= -16{,}652$
$r = 100$		$\mathrm{tg}\, u'$	9,49982	y'	$= 166{,}652$

49.

Die Gleichung der Berührungslinie zweier Kreise zu finden.

Die Mittelpuncte der Kreise seyen a, b, ihre Coordinaten a, a' und b, b'; ihre Halbmesser r, s. Die Linie G berühre die Kreise in den Puncten d, f, deren Coordinaten d, d' und f, f' seyen, und schneide die Mittelpunctslinie in dem Puncte c, dessen Coordinaten c, c' seyen. Dieser Punct c heifst der *Aehnlichkeitspunct* und theilt die Mittelpunctslinie im Verhältnifs der Halbmesser (VIII. 1.). Man hat also für den äufsern Aehnlichkeitspunct

$$c - a = (a - b) \cdot \frac{r}{s - r}, \quad c' - a' = (a' - b') \cdot \frac{r}{s - r}$$

$$c - b = (a - b) \cdot \frac{s}{s - r}, \quad c' - b' = (a' - b') \cdot \frac{s}{s - r}$$

Für den innern Aehnlichkeitspunct nimmt man r negativ, und hat also

$$c - a = -(a - b) \cdot \frac{r}{s + r}, \quad c' - a' = -(a' - b') \cdot \frac{r}{s + r}$$

$$c - b = (a - b) \cdot \frac{s}{s + r}, \quad c' - b' = (a' - b') \cdot \frac{s}{s + r}$$

Die Gleichung der Mittelpunctslinie H ist (IX. 18.)

$$(a' - b')x - (a - b)y + a.b' - a'.b = 0$$

oder . . . $A.x + A'.y + A'' = 0$

Die Gleichung einer durch den Punct c senkrecht auf ab gezogenen Linie K sey

$$B.x + B'.y + B'' = 0$$

so ist (IX. 24.) wenn der Abstand der Mittelpuncte $ab = k$

$$B = a - b + (a' - b')\cos w, \quad B' = a' - b' + (a - b)\cos w$$

$$B.c + B'.c' + B'' = 0, \quad B(a - b) + B'(a' - b') = k^2$$

Man hat also für den äufsern Aehnlichkeitspunct

$$-B'' = B.a + B'.a' + k^2 \cdot \frac{r}{s - r}$$

oder $$-B'' = B.b + B'.b' + k^2 \cdot \frac{s}{s - r}$$

Für den innern Aehnlichkeitspunct hat man

$$-B'' = B.a + B'.a' - k^2.\frac{r}{s+r}$$

oder
$$-B'' = B.b + B'.b' + k^2.\frac{s}{s+r}$$

Man fälle von den Mittelpuncten a, b, auf die Berührungslinie G Lothe, welche dieselben in d, f schneiden, und setze den Winkel $cad = cbf = c$, so ist für den äufsern Aehnlichkeitspunct

$$\cos c = \frac{s-r}{k}, \quad \text{für den innern} \quad \cos c = \frac{s+r}{k}$$

Die Gleichung der Berührungslinie G ist also nach IX. 46., wenn $h = \operatorname{tg} c . \sin w$

$$Bx + B'y + B'' \pm h(Ax + A'y + A'') = 0$$

Wenn die Mittelpunctslinie H mit den Axen die Winkel p, p', bildet, so dafs $p + p' = w$, so ist für die vier Berührungslinien, die beiden äufsern und die beiden innern:

	$k.\sin p = (a' - b')\sin w,$	$k.\sin p' = (a-b)\sin w$
1. äufs.	$r\sin(p-c) = (d'-a')\sin w,$	$r\sin(p'+c) = (d-a)\sin w$
2. äufs.	$r.\sin(p+c) = (d'-a')\sin w,$	$r\sin(p'-c) = (d-a)\sin w$
1. inn.	$-r.\sin(p-c) = (d'-a')\sin w,$	$-r\sin(p'+c) = (d-a)\sin w$
2. inn.	$-r.\sin(p+c) = (d'-a')\sin w,$	$-r\sin(p'-c) = (d-a)\sin w$

Die Gleichungen der harmonischen Polaren D, F des Aehnlichkeitspuncts c gegen die Kreise a, b, sind

äufs. Ä. P.	$D\ldots$	$Bx + B'y - Ba - B'a' - r(s-r) = 0$
äufs. Ä. P.	$F\ldots$	$Bx + B'y - B.b - B'.b' - s(s-r) = 0$
inn. Ä. P.	$D\ldots$	$Bx + B'y - Ba - B'a' + r(s+r) = 0$
inn. Ä. P.	$F\ldots$	$Bx + B'y - B.b - B'b' - s(s+r) = 0$

Beispiel.

a	a'	b	b'	r	s	w
14	20	30	7	2	5	53° 7,8

$$A = a' - b' = 13, \quad A' = b - a = 16$$

$$A'' = ab' - a'b = -502$$

$$k^2 = 256 - 249{,}6 + 169 = 175{,}4$$

k^2	2,24403	k	1,12202	tg c	0,63345
k	1,12202	sin w	9,90309	tg c	0,20578
$s-r$	0,47712	$\frac{k}{\sin w}$	1,21893	sin w	9,90309
$s+r$	0,84510	$a'-b'$	1,11394	h	0,53654
cos c	9,35510	$a-b$	− 1,20412	h	0,10887
cos c	9,72308	sin p	9,89501	A	1,11394
$c = 76$	54,45	sin p'	− 9,98519	A'	1,20412
$c = 58$	5,57	$p = 128$	15,3	A''	− 2,70070
		$p' = -75$	7,5	44,718	1,65048
				55,038	1,74066
				1726,8	− 3,23724
				16,706	1,22281
				20,558	1,31299
				645,02	− 2,80957

$B = -8{,}2 \qquad B' = 3{,}4$

$-B'' = -114{,}8 + 68 + 116{,}933\,\ldots$

$-B'' = -246 + 23{,}8 + 292{,}333\,\ldots$

$-B'' = -114{,}8 + 68 - 50{,}114\,\ldots$

$-B'' = -246 + 23{,}8 + 125{,}285\,\ldots$

also äufs. $B'' = -70{,}133$

inn. $B'' = 96{,}914$

Die Gleichungen der Berührungslinien sind also:

äufsere:

$$-8{,}2x + 3{,}4y - 70{,}133 \pm (44{,}718x + 55{,}038y - 1726{,}8) = 0$$

innere:

$$-8{,}2x + 3{,}4y + 96{,}914 \pm (16{,}706x + 20{,}558y - 645{,}02) = 0$$

oder reducirt:

äufs. erste	$36{,}518 \cdot x + 58{,}438 \cdot y - 1796{,}93 = 0$
„ zweite	$-52{,}918 \cdot x - 51{,}638 \cdot y + 1656{,}67 = 0$
inn. erste	$8{,}506 \cdot x + 23{,}958 \cdot y - 548{,}106 = 0$
„ zweite	$-24{,}906 \cdot x - 17{,}158 \cdot y + 741{,}934 = 0$

Die Coordinaten der Berührungspuncte sind:

äufs. erste	$d = 14{,}0778$	$f = 30{,}1945$
„ „	$d' = 21{,}9525$	$f' = 11{,}8813$
äufs. zweite	$d = 12{,}8276$	$f = 27{,}0689$
„ „	$d' = 18{,}937$	$f' = 4{,}3425$
inn. erste	$d = 14{,}7323$	$f = 28{,}1693$
„ „	$d' = 17{,}6484$	$f' = 12{,}879$
inn. zweite	$d = 15{,}8219$	$f = 25{,}4452$
„ „	$d' = 20{,}2764$	$f' = 6{,}309$

50.

Die Gleichung der Durchschnittslinie oder Potenzlinie zweier Kreise zu finden.

Die Coordinaten der Mittelpuncte a, b, seyen a, a', und b, b', die Halbmesser der Kreise seyen r, s, so sind die Gleichungen der Kreise (IX. 39.).

$$-2Ax - 2A'y + l^2 - r^2 + z^2 = 0$$

$$-2Bx - 2B'y + n^2 - s^2 + z^2 = 0$$

wo . . . . $z^2 = x^2 + 2xy \cos w\, y^2$

$$A = a + a' \cos w, \qquad A' = a' + a \,.\, \cos w$$

$$B = b + b' \cos w, \qquad B' = b' + b \,.\, \cos w$$

$$l^2 = a^2 - 2aa' \cos w + a'^2, \qquad n^2 = b^2 + 2bb' \cos w + b'^2$$

Der Unterschied dieser Gleichungen ist die Gleichung der Potenzlinie C, nämlich

$$2C.x + 2C.y + C'' = 0$$

wo $C = A - B = a - b + (a' - b') \cos w$

$C' = A' - B' = a' - b' + (a - b) \cos w$

$C'' = l^2 - n^2 + s^2 - r^2$

oder $C'' = C(a + b) + C'(a' + b') + s^2 - r^2$

Denn die Linien A, B, deren Gleichungen

$$-2Ax - 2A'y + l^2 - r^2 = 0, \quad -2By - 2B'.y + n^2 - s^2 = 0$$

sind (IX. 47. 48.) die Potenzlinien des Anfangspuncts gegen die Kreise a, b. Die aus einem Puncte von A an den Kreis a gezogene Berührende ist also dem Abstande dieses Puncts vom Anfangspunct gleich. Eben so ist die aus einem Puncte von B an den Kreis b gezogene Berührende dem Abstande dieses Puncts vom Anfangspunct gleich. Folglich sind die aus der Collineation von A, B, an die Kreise a, b, gezogenen Berührenden einander gleich, also ist diese Collineation ein Punct der Potenzlinie beider Kreise. Aber die Linien A, B, C sind (IX. 20) collinear. Folglich ist ein Punct von C in der Potenzlinie der beiden Kreise. Die Gleichung der Mittelpunctslinie H ist

$$(a' - b')\, x - (a - b)\, y + a.b' - a'.b = 0$$

Die Linie C ist (IX. 24.) auf der Linie H senkrecht. Die Potenzlinie mufs ebenfalls (VIII. 43.) auf der Mittelpunctslinie H senkrecht seyn. Folglich ist die Linie C die Potenzlinie der beiden Kreise.

Es sey der Abstand der Mittelpuncte $ab = k$, so ist $k^2 = (a-b)^2 + 2(a-b)(a'-b')\cos w + (a'-b')^2$, also ist $\frac{k}{\sin w}$ gleich der Diametrale der Gleichung von H, und $2k$ gleich der Diametrale der Gleichung von C, also sind die vom Anfangspunct auf die Linien H, C, gefällten Lothe (IX. 27.) gleich $\frac{(a.b'-a'b)\sin w}{k}$ und gleich $\frac{C''}{2k}$.

Die Gleichungen der harmonischen Polaren der Aehnlichkeitspuncte der Kreise a, b, gegen diese Kreise sind (IX. 49.).

äufs. Ä. P. $D \ldots Cx + C'y - Ca - C'a' - r(s-r) = 0$

äufs. Ä. P. $F \ldots Cx + C'y - C.b - C'.b' - s(s-r) = 0$

inn. Ä. P. $D \ldots Cx + C'y - Ca - C'a' + r(s+r) = 0$

inn. Ä. P. $F \ldots Cx + C'y - Cb - C'b' - s(s+r) = 0$

Die Diametrale dieser Gleichungen ist $= k$, Die Summe der Distantialen in den Gleichungen der Polaren jedes Aehnlichkeitspuncts ist $= C(a+b) + C'(a'+b') + s^2 - r^2 = C''$. Also ist die Summe der Lothe, welche vom Anfangspunct auf die beiden Polaren jedes Aehnlichkeitspuncts gefället werden $= \frac{C''}{k}$. *Folglich halbirt die Potenzlinie den Abstand der Polaren des äufsern Aehnlichkeitspuncts und den Abstand der Polaren des innern Aehnlichkeitspuncts.*

Aufgaben.

Constructionen des ersten Grades.

51. $a.x = b.b$ (Siehe Cursus III. 51.).
Man mache $mn = a$, $mo = b$, $\angle mop = mno$, so ist $mp = x$

52. $a.x = b.c$ (siehe C. V. 11.).
Man ziehe $mn = a$ senkrecht auf op, $mo = b$, $mp = c$, oq senkrecht auf np, so ist $mq = x$

53. $(a \pm b)\, x = a.c$, oder $x \pm y = c$, $b.x = a.y$ (siehe VIII. 1.). Man ziehe $op \frown mn$, $mn = a$, $op = \pm b$, $mo = c$, so ist $mq = x$, $oq = y$

54. $a.x = b^2 - a^2$, $a.y = 3.a^2 - b^2$
Wenn $2a > b$, so ziehe man no senkrecht auf mn, mache $mn = b$, $mo = 2a$, $np = a$, so ist $mp = x$, $op = y$, und $\angle p = q = 2m$

55. $2a.x = b^2 - c^2$.
Wenn $b > a + c$, so nehme man $mn = c$, $no = a$, op senkrecht auf mo, $mp = b$, halbire np in q, errichte in q auf np das Loth qr, so ist $mr = x$.
Man kann auch nt senkrecht auf so ziehen, $st = c$, $su = b$, nehmen, tu in v halbiren, und in v auf tu das Loth vw ziehen, so ist $sw = x$.

56. $2a.x = a^2 + b^2$, $2a.y = a^2 - b^2$.
Man errichte $mn = b$ senkrecht auf mo, mache $mo = a$, halbire no in p, errichte in p auf no das Loth pq, so ist $nq = x$, $mq = y$.

57. $2a.x = a^2 + b^2 - c^2$, $2a.y = a^2 - b^2 + c^2$
Wenn $b + c > a$ und $b - c < \pm a$, so mache man $mo = a$, $mn = b$, $on = c$, fälle np senkrecht auf mo, so ist $mp = x$, $op = y$.
Wenn aber $b + c < a$ oder $b - c > a$, so mache man $mo = a$, $mn = c$, mp lothrecht auf mo, und $np = b$, ziehe op, halbire op in q, errichte in q auf op das Loth qr, so ist $pr = x$, $mr = y$.

58. $(m + m')\,x = a.m + b.m'$, $(m + m')\,y = a'.m + b'.m'$

Man nehme $wc = a$, $wd = b$, $wf = a'$, $wg = b'$ theile cd, fg, in h, k, so daſs $\frac{ch}{dh} = \frac{fk}{gk} = \frac{m'}{m}$ ziehe durch h, k, $hl \parallel wy$, $kl \parallel wx$, so schneiden sie einander in einem Puncte l der Linie ab, und es ist $wh = x$, $wk = y$. Die Puncte h, k, l, heiſsen *die Schwerpuncte der Linien* cd, fg, ab, *für die Massen* m, m'.

59. $(m + m' + m'').x = a.m + b.m' + c.m''$
$(m + m' + m'').y = a'.m + b'.m' + c'.m''$
oder den *Massenschwerpunct* eines Dreiecks zu finden.

Man nehme auf der Axe der x die Abscissen $wa = a$, $wb = b$, $wc = c$, auf der Axe der y die Ordinaten $wa' = a'$, $wb' = b'$, $wc' = c'$. Man theile auf der Axe der x den Abschnitt ab in p, so daſs $\frac{p - a}{b - p} = \frac{m'}{m}$, und den Abschnitt pc in q, so daſs $\frac{p - q}{q - c} = \frac{m''}{m + m'}$, so ist p der Massenschwerpunct von ab, und q der Massenschwerpunct von pc, und man hat $(m + m')p = a.m + b.m'$ und $(m + m' + m'')\,q = (m + m')\,p + c.m''$ also $q = x$ Eben so verfahre man auf der Axe der Ordinaten.

Wenn man nun durch die auf den Axen bestimmten Massenschwerpuncte Parallelen mit den Axen zieht, so schneiden die Parallelen von p, p', einander in dem Massenschwerpunct der Seite ab, und die Parallelen von q, q', einander in dem Massenschwerpunct der Diagonallinie pc, welcher auch der Massenschwerpunct des Dreiecks abc ist.

Oder man ziehe durch den Dreieckspunct c die Linie $ch \parallel ck \parallel ab$ und nehme $ch = ab.\frac{m}{m''}$, $ck = ab.\frac{m'}{m''}$, verbinde ak, bh, welche einander im Massenschwerpunct q schneiden.

Nimmt man $ch = ck = ab$, so schneiden ak, bh, einander im *geometrischen Schwerpunct* q. (V. 13 — 16.)

60. $(m + m' + m'' + m''')\,x = a.m + b.m' + c.m'' + d.m'''$
$(m + m' + m'' + m''')\,y = a'.m + b'.m' + c'.m'' + d'.m'''$

Oder den *Massenschwerpunct* eines Vierecks zu bestimmen.

Man nehme auf der Axe der x die Abscissen a, b, c, d, auf der Axe der y die Ordinaten a', b', c', d'. Auf der Axe der x bestimme man der Reihe nach die Massenschwerpuncte s, t, u, so dafs

$$\frac{s-a}{b-s} = \frac{m'}{m},\ \frac{t-s}{c-t} = \frac{m''}{m+m'},\ \frac{u-t}{d-u} = \frac{m'''}{m+m'+m''}$$

so ist $(m + m').s = a.m + b.m'$, $(m + m' + m'')\,t = (m + m')\,s + c.m''$, $(m + m' + m'' + m''').u = (m + m' + m'')\,t + d.m'''$, also $u = x$.

Eben so verfahre man auf der Axe der y. Durch die auf den Axen bestimmten Massenschwerpuncte ziehe man Parallelen mit den Axen, so schneiden sie einander in dem Massenschwerpunct q des Vierecks $abcd$.

Oder man ziehe in dem Viereck $abcd$ die ck ⌓ ad, cl ⌓ ab, bestimme die Puncte f, g, so dafs $\frac{bf}{kf} = \frac{m''}{m'}$, $\frac{dg}{lg} = \frac{m''}{m'''}$

und die Puncte n, p, so dafs $\frac{fn}{an} = \frac{m+m'''}{m'+m''}$, $\frac{gp}{ap} = \frac{m+m'}{m''+m'''}$

so ist $(m + m' + m'' + m''').an = ab.m' + ak.m''$
und $(m + m' + m'' + m''').ap = ad.m''' + al.m''$.

Zieht man also durch n, p, Parallelen mit ad, ab, so schneiden sie einander in dem Massenschwerpunct q des Vierecks $abcd$.

Halbirt man bk in f, dl in g, af in n, ag in p, so ist q der *geometrische Schwerpunct* des Vierecks $abcd$ und des Parallelogramms $afgh$.

61. $(m + m' \ldots)\,x = a.m + b.m' \ldots$
$(m + m' \ldots).y = a'.m + b'.m' \ldots$

Oder den *Massenschwerpunct* eines Vielecks zu finden.

Man nehme auf der Axe der x, die Abschnitte $a, b, c, d, f \ldots$, auf der Axe der y die Abschnitte $a', b', c', d', f' \ldots$, als

Coordinaten der Winkelpuncte des Vielecks $abcdf$. Man bestimme auf jeder Axe der Reihe nach die Schwerpuncte $n, p, q, r \ldots$, so dafs

$$\frac{p-a}{b-p} = \frac{m'}{m}, \quad \frac{q-p}{c-q} = \frac{m''}{m+m'}, \quad \frac{r-q}{d-r} = \frac{m'''}{m+m'+m''}$$

u. s. w.

$$\frac{p'-a'}{b'-p'} = \frac{m'}{m}, \quad \frac{q'-p'}{c'-q'} = \frac{m''}{m+m'}, \quad \frac{r'-q'}{d'-r'} = \frac{m'''}{m+m'+m''}$$

u. s. w.

so erhält man der Reihe nach die Gleichungen:

$$(m+m')\,p = a\,.\,m + b\,.\,m'$$
$$(m+m'+m'')\,q = (m+m')\,p + c\,.\,m''$$
$$(m+m'+m''+m''')\,r = (m+m'+m'')\,q + d\,.\,m'''$$

u. s. w.

$$(m+m')\,p' = a'\,.\,m + b'\,.\,m'$$
$$(m+m'+m'')\,q' = (m+m')\,p' + c'\,.\,m''$$
$$(m+m'+m''+m''')\,r' = (m+m'+m'')\,q' + d'\,.\,m'''$$

u. s. w.

Man ziehe durch den letzten auf jeder Axe bestimmten Schwerpunct Parallelen mit den Axen, so schneiden sie einander in dem Massenschwerpunct des Vielecks. Die Coordinaten dieses Schwerpuncts sind x und y.

Um den *geometrischen Schwerpunct* zu erhalten, für welchen $m = m' = m'' = m''' \ldots = 1$ ist, kann man auch auf folgende Art verfahren: Man ziehe $bl \frown = ac$, $ln \frown = ad$, $no \frown = af$ u. s. w. Man nehme $\frac{1}{2}\,ab$, $\frac{1}{3}\,al$, $\frac{1}{4}\,an$, $\frac{1}{5}\,ao$ u. s. w., so erhält man die geometrischen Schwerpuncte der Linie ab, des Dreiecks abc, des Vierecks $abcd$, des Fünfecks $abcdf$ u. s. w.

62. $(a^2 + b^2)\,.\,x = a^2\,.\,c$, $\quad (a^2 + b^2)\,.\,y = b^2\,.\,c$

Man nehme $mn = c$, beschreibe über mn das $\triangle\, mon$, so dafs $\frac{mo}{no} = \frac{a}{b}$, halbire mn in p, mache $\angle\, moq = nop$, so ist $mq = x$, $nq = y$.

Oder man nehme $mn = c$, beschreibe über mn das $\triangle\, mon$, so dafs $\frac{mo}{mn} = \frac{a}{b}$, mache $\angle\, nmp = mon$, ziehe $np \parallel mo$, verbinde op welche die mn in q schneidet, so ist $mq = x$, $nq = y$.

63. $(a.b + c.d)\,x = a.b.f$, $(a.b + c.d)\,y = c.d.f$

Man mache $mn = f$, nehme den Punct o und die Richtung om beliebig an, bestimme den Punct p so dafs $\frac{om}{op} = \frac{a}{c}$, und den Punct r so dafs $\frac{pr}{rn} = \frac{b}{d}$; verbinde or, welche die mn in q schneidet, so ist (V. 22.) $mq = x$, $nq = y$.

Oder man beschreibe über $mn = f$ ein beliebiges Dreieck mpn, theile mp in o so dafs $\frac{mo}{op} = \frac{a}{c}$, theile pn in r so dafs $\frac{pr}{rn} = \frac{b}{d}$, verbinde mr, no, welche einander in s schneiden, ziehe ps welche die mn in q schneidet, so ist (V. 25.) $mq = x$, $nq = y$.

Constructionen des zweiten Grades.

64. $x^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = a^2 - b^2$ } siehe II. 45.
65. $x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + f^2$ }

66. $x^2 = a . b$, siehe III. 59.

67. $n . x^2 = m . a^2$, wo m, n, ganze Zahlen sind. Siehe III. 63.

68. $x^2 = a^2 + b^2 + 2a . c$, $y^2 = a^2 + b^2 - 2a . c$ Siehe V. 8, 9.

69. $(c + d) . x^2 = a^2 . c + b^2 . d - c . d (c + d)$. Siehe V. 10. 11. 12.

70. $a . b (c^2 + d^2 - x^2) = c . d (a^2 + b^2 - f^2)$
Man mache $mn = f$, $mo = a$, $no = b$, $po = c$, $qo = d$, so ist $pq = x$.

71. $x^2 : y^2 : z^2 = a : b : c$.
Wenn $(b + c - a)^2 < 4 . b . c$, so nehme man $mn : mo : np = a : b : c$, beschreibe über mn einen Halbkreis, errichte die Lothe oq, pr, mache $ms = mq$, $ns = nr$, so ist $mn = x$, $ms = y$, $ns = z$.

72. $x^2 + y^2 = a^2$, $(x - y)^2 = x . y$
Man mache $mn = a$, beschreibe über mn einen Halbkreis, mache das Loth $po = \frac{1}{3} a$, so ist $mo = x$, $no = y$.

73. $a . \frac{c^2}{x^2} - b . \frac{c^2}{y^2} = (a - b) . m$
Man mache $ma = a$, $mb = b$, $cd = c$, $df = d$, und $\frown$ ma, ziehe af, bf, welche die md in g, h, schneiden. Es seyen gk, hl parallel cd und $gk = x$, $hl = y$, so ist $a . \frac{c}{x} = a + d$, $b . \frac{c}{y} = b + d$, also $a . \frac{c^2}{x^2} - b . \frac{c^2}{y^2} = (a - b)\left(1 - \frac{d^2}{a . b}\right) = (a - b) . m$

Z. B. Wenn $b = \frac{1}{2} a$, $d^2 = \frac{3}{4} a^2$, so ist $\frac{c^2}{2 y^2} - \frac{c^2}{x^2} = \frac{1}{4}$.
Siehe VIII. 5.

74. $5 \cdot x^2 = a^2 + b^2$

Man mache $bf = fk = b$, $fh = fm = \frac{1}{3} b$, beschreibe über fk einen Halbkreis, trage darin $ma = \frac{2}{3} a$, mache $ad = a$, ziehe af, bd, welche einander in c schneiden, so ist $c = 90^\circ$, und $cg = x$.

75. $A \cdot x - x^2 = B \cdot C$, $A \cdot y - y^2 = B \cdot C$

Man errichte über $ab = A$, die Lothe $af = B$, $bk = C$ nach einerlei Richtung, beschreibe über fk als Durchmesser einen Kreis, welcher die ab in d schneidet, so ist $ad = x$, $bd = y$.

Quadr. Gleichung der 1sten Art. Siehe VIII. 23.

76. $x^2 - A \cdot x = B \cdot C$, $y^2 + A \cdot y = B \cdot C$

Man errichte über $ab = A$, die Lothe $af = B$, $bk = C$ nach entgegengesetzter Richtung, beschreibe über fk als Durchmesser einen Kreis, welcher die ab in d schneidet, so ist $ad = x$, $bd = y$.

Quadr. Gleichung der 2ten Art. Siehe VIII. 24.

77. $x^2 + rx = r^2$, $y^2 - rx = r^2$

x die Seite, y die Diagonallinie des Zehnecks, für den Halbmesser r. Siehe V. 41. 42.

$ab = r$, $abf = 90^\circ$, $bf = fg = \frac{1}{2} r$, $ag = ad = x$. Beschreibt man über ab einen Halbkreis, und macht man $bc = ad = x$, so ist cd senkrecht auf ab, und $cd : bc = bc : ac = ac : ab$.

78. $x^2 = N \cdot (a + x)^2$. Siehe VIII. 40.

79. $x^2 = E \cdot (a + x)$. Siehe VIII. 41.

80. $(a + x)^2 - E \cdot (b + x) = c^2$. Siehe VIII. 42.

81. $(a + x)^2 + (b + x)^2 = c^2$. Siehe VIII. 43.

82. $(a + x)^2 = N \cdot (b + x)^2 - N \cdot c^2$. Siehe VIII. 44.

83. $(a + x)^2 - d^2 = N \cdot (b + x)^2 - N \cdot c^2$. Siehe VIII. 46.

Zur Uebung im Gebrauch der Coordinaten.

84.

Gegeben $ab = a$, Winkel $abc = b$, Länge $bc = l$. Man theile l in mehrere gleiche Theile, und bestimme die rechtwinkligen Coordinaten der Theilpuncte für den Anfangspunct a.

85.

Gegeben für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten von b und c, nämlich b, b' und c, c'. Man berechne hieraus die Länge und Lage der Linie bc, theile sie in mehrere gleiche Theile, und bestimme die Coordinaten der Theilpuncte.

86.

Gegeben $ab = a$, Winkel $abc = b$, Länge $bc = l$. Man theile l in mehrere gleiche Theile, und bestimme die Coordinaten der Theilpuncte für den Anfangspunct a und den Ordinatenwinkel $bac = w$.

87.

Gegeben für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten des Puncts b, nämlich b, b'. Mit dem Halbmesser $ab = r$ beschreibe man einen Bogen $bc = l$ von gegebener Länge, theile denselben in mehrere gleiche Theile, und bestimme die rechtwinkligen Coordinaten der Theilpuncte.

88.

Gegeben $ab = b$, und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten von c, nämlich c, c'. Man theile die Linien bc, ca, in mehrere gleiche Theile, bestimme die Coordinaten der Theilpuncte, und hieraus die Länge und Lage der Transversallinien 11, 22, 33, 44, 55, 66 u. s. w.

89.

Gegeben $ab = b$, und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten c, c' und d, d'. Man theile ab, cd, in f, g, nach gegebenem Verhältnifs, berechne die Coordinaten von g, und hieraus die Länge und Lage der Transversallinie fg.

90.

Gegeben $ab = b$, und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten c, c'. Man halbire die Winkel des Dreiecks abc durch ad, bf, cg, und bestimme die Coordinaten der Puncte d, f, g.

91.

Gegeben $ab = ac = r$ im Quadranten, und auf ab die Abscisse $ad = d$. Man theile den Quadrantbogen in mehrere gleiche Theile, bestimme die Coordinaten der Theilpuncte, die Länge und Lage der von d nach den Theilpuncten gezogenen Leitlinien, und die Sectoren welche je zwei Leitlinien mit dem Zwischenbogen bilden.

92.

Gegeben $ab = b$, und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten c, c'. Man theile die Linien bc, ca, nach gegebenem Verhältnifs in d, f, und berechne die Coordinaten d, d', und f, f', und den Inhalt des $\triangle\ cdf$.

93.

Gegeben $ab = b$ und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten c, c' und d, d'. Man bestimme hieraus die Seiten und Diagonallinien des Vierecks $abcd$, und den Inhalt der Dreiecke abc, acd, abd, bcd.

94.

Gegeben die rechtwinkligen Coordinaten a, a'; b, b'; c, c'. Man theile die Linien bc, ca, ab, in d, f, g, nach gegebenem Verhältnifs, und bestimme hieraus die Coordinaten d, d'; f, f'; g, g'; und den Inhalt der Dreiecke abc, dfg.

95.

Gegeben der Halbmesser $= r$, und die Positionswinkel der Halbmesser ma, mb, mc gegen die Axe der x. Man berechne hieraus die rechtwinkligen Coordinaten gegen den Mittelpunct m als Anfangspunct, a, a'; b, b'; c, c'; und dann die Seiten, Winkel und den Inhalt des $\triangle\ abc$.

96.

Gegeben der Winkel w, und die rechtwinkligen Coordinaten wb, ba. Man berechne hieraus die rechtwinkligen Coordinaten wc, ca.

97.

Gegeben der Winkel w und die schiefwinkligen Coordinaten wb, ba. Man berechne hieraus die rechtwinkligen Coordinaten wc, ca.

98.

Gegeben ab, ad, cd, wf, af, wg, ag. Man berechne hieraus die rechtwinklingen Coordinaten a, a'; b, b'; c, c'.

99.

Gegeben $wa = a$, $wb = b'$. Man bestimme hieraus die Gleichung der Linie ab für den Ordinatenwinkel w.

100.

Gegeben $wa = a$, und die rechtwinkligen Coordinaten b, b'. Man bestimme hieraus die Gleichungen der Linien wb, ab.

101.

Gegeben die rechtw. Coordinaten $wa = -a$, $wb = b$, $wc = c'$. Man bestimme hieraus die Gleichungen der Linien ac, bc.

102.

Gegeben $ab = b$, und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten c, c'. Man theile bc in mehrere gleiche Theile, und bestimme die Gleichungen der durch die Theilpuncte mit ca gezogenen Parallellinien.

103.

Gegeben $ab = b$, und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten c, c' und d, d'. Man theile bc in mehrere gleiche Theile, und bestimme die Gleichungen der durch die Theilpuncte mit cd, da, gezogenen Parallellinien.

104.

Gegeben $ab = b$ und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten c, c' und d, d'. Man bestimme hieraus die Coordinaten der Collineationen f, g, h.

105.

Gegeben $ab = b$, und für den Anfangspunct a die rechtwinkligen Coordinaten f, f'. Man theile die Seiten bf, fa, nach gleichem Verhältnifs, und bestimme die Coordinaten c, c' und d, d', so dafs $c' = d'$, ferner die Gleichungen der Linien ac, bd, hieraus die Coordinaten ihrer Collineation g, g'; aus f, f' und g, g', die Gleichung der Linie fg, hieraus endlich die Collineation derselben auf der Grundlinie in k, wo $k' = o$; so mufs $k = \frac{1}{2} b$ seyn.

106.

Für rechtw. Coordinaten und den Anfangspunct g, sind gegeben: $ga = -a$, $gb = b$, $gc = c'$. Man bestimme hieraus die Gleichungen der auf bc, ca, senkrechten Linien ad, gf, und die Coordinaten ihrer Collineation m, wo $m = o$, $m' = gm$.

107.

Die Seiten bc, ca, ab, sind in d, f, g, halbirt. Man nehme g zum Anfangspunct; gb, gc, als Axen der x, y, $gb = b$, $ga = -b$, $gc = c'$, bestimme hieraus die Gleichungen der Linien ad, bc, und die Coordinaten ihrer Collineation m, wo $m = o$, $m' = gm$.

108.

Die Seiten bc, ca, ab, sind in d, f, g, halbirt, und in den Halbirungspuncten auf die Seiten Lothe dd', ff', gg' errichtet. Man nehme g zum Anfangspunct, gb, gg' als Axen der x, y; $gb = b$, $ga = -b$, $gh = -c$, $hc = c'$, bestimme hieraus die Gleichungen der Linien dd', ff', und die Coordinaten ihrer Collineation m, wo $m = o$, $m' = gm$. Ferner, wenn D der Durchmesser des umschriebenen Kreises, F der Inhalt des Dreiecks abc, so beweise man hieraus die bekannten Ausdrücke:

$$2D.F = ab.bc.ca \ldots \text{V. 5.}$$

$$16F^2 = 2(ca^2.ab^2 + ab^2.bc^2 + bc^2.ca^2) - (bc^4 + ca^4 + ab^4)$$

109.

In dem Dreieck abc seyen die Winkel a, b, c, durch die Linien ad, bf, cg, halbirt, welche einander in m schneiden. Auf diesen seyen Senkrechte errichtet, welche einander in n, o, p, und die Seiten bc, ca, ab in D, F, G schneiden, so sind (V. 19 — 23.), m der Mittelpunct des innern eingeschriebenen Kreises, n, o, p die Mittelpuncte der äufsern eingeschriebenen Kreise und die Puncte D, F, G, collinear. Nun sey für den Anfangspunct a gegeben $ab = b$, und die rechtwinckligen Coordinaten c, c'. Hieraus bestimme man die Coordinaten der Puncte d, f, g, D, F, G, m, n, o, p, die Gleichungen der Linien ad, bf, cg, aD, bF, cG. Die Ordinaten m', n', o', p' geben auch die vier Halbmesser der Kreise.

Beispiel.

$$b = 4, \quad c = 9, \quad c' = 12.$$

Die Gleichungen sind:

von $ad \ldots\ x - 2y = o$, von $bf \ldots 3y + 2y - 12 = o$
von $cg \ldots 7x - 4y - 15 = o$, von $aD \ldots\ 2x + y = o$
von $bF \ldots 2x - 3y - 8 = o$, von $cG = 4x + 7y - 120 = o$

Die Coordinaten sind:

$$m = 3, \quad m' = 1\tfrac{1}{2}; \quad n = 16, \quad n' = 8;$$
$$o = -12, \quad o' = 24, \quad p = 1, \quad p' = -2.$$

110.

Im Dreiecke abc seyen vom Mittelpuncte m des umschriebenen Kreises auf die Seiten die Lothe md, mf, mg, und aus den Ecken die senkrechten Diagonallinien ah, bk, cl, gefällt, deren Collineation n ist (V. 17.). Man ziehe am, welche den Kreis in u schneidet, so sind bu, cu, auf ab, ca, senkrecht, also $cnbu$ ein Parallelogramm, also $cn = bu = 2\,mg$, $bn = cu = 2\,mf$, $an = 2\,md$. Also liegt der ***geometrische Schwerpunct*** des Dreiecks a, b, c, als Collineation der Linien ad, bf, cg, (V. 13.) in der Linie mn. Beschreibt man über mn als Durchmesser einen Kreis, welcher die Diagonallinien in r, s, t, schneidet, und verlängert man mn, welche die Seiten bc, ca, ab, in o, p, q, schneidet, so ist $\triangle\, apq \sim nts$, $\triangle\, bqo \sim nrt$, $\triangle\, cop \sim nst$.

Hiernach läfst sich leicht folgende Aufgabe auflösen: Für den Anfangspunct a seyen gegeben die rechtw. Coordinaten $ab = b$, und $al = c$, $lc = c'$. Man bestimme die Gleichung der Linie mn, und die Puncte, in welchen sie die Seiten und Axen schneidet. Die Gleichung ist:

$$[3\,c(b-c) - c'c']\,x + (b-2c)\,c'.y + (cc + c'c' - bb)\,c = 0$$

Beispiel.

$$b = 15\,; \quad c = 6{,}6\,; \quad c' = 11{,}2$$

Die Gleichung ist:

$$73\,x + 336\,y - 660 = 0$$

Hieraus lassen sich noch mannigfache Beziehungen zwischen den Abschnitten der Linie mn auf den Seiten des Dreiecks herleiten.

111.

Für den Anfangspunct a, gegeben die rechtw. Coordinaten $ab = b$, und c, c'. Man bestimme die Gleichung einer Linie ad, welche von den Lothen bd, cf, nach gegebenem Verhältnifs geschnitten wird, so dafs $\dfrac{ad}{af} = N$. Man nehme nämlich $\dfrac{ab}{ag} = N$, und ziehe ad senkrecht auf cg.

112.

Aus den Seiten eines Dreiecks und den rechtw. Coordinaten zweier Winkelpuncte, die rechtw. Coordinaten des dritten Winkelpuncts zu finden.

Im $\triangle\, abc$ seyen gegeben $bc = K$, $ca = L$, $ab = M$, $ad = A$, $db = B$, $dc = \pm H$. Die Coordinaten der Puncte a, b, nämlich a, a' und b, b', seyen gegeben, die

Coordinaten c, c' seyen zu bestimmen. Der Positionswinkel der Linie ab gegen die Axe der x sey $= l$, so ist

$$c - a = A . \cos l \mp H . \sin l, \quad c' - a' = A . \sin l \pm H . \cos l$$

$$b - a = M . \cos l, \quad b' - a' = M . \sin l .$$

Hieraus folgt:

$$M . c = M . a + A . (b - a) \mp H . (b' - a')$$

$$M . c' = M . a' + A . (b' - a') \pm H . (b - a)$$

oder

$$M . c = A . b + B . a \pm H . (a' - b')$$

$$M . c' = A . b' + B . a' \pm H . (b - a)$$

oder

$$2 M^2 . c = (L^2 + M^2 - K^2) . b + (K^2 + M^2 - L^2) . a \pm 4 F . (a' - b')$$

$$2 M^2 . c' = (L^2 + M^2 - K^2) . b' + (K^2 + M^2 - L^2) . a' \pm 4 F . (b - a)$$

Beispiel.

a	a'	b	b'	K	L	M	F
20,	30,	32,	21,	13,	14,	15,	84

Hieraus $c = 33{,}44$ oder $c = 20$

$c' = 33{,}92$ oder $c' = 16$

113.

Aus dem Verzeichnisse der Längen und Breiten der Grenzpuncte von Kurland (VI. Aufg. 82.) berechne man nach der daselbst angezeigten Methode die Abstände vom Meridian und Perpendikel von Mitau auf der Oberfläche einer Kugel, deren Grade dem Breitengrad von Mitau $= 104{,}3627$ Werst gleich sind. Man denke sich nun diese sphärischen Bögen als grade Linien auf eine Ebene ausgebreitet, nehme den Punct von Mitau als Anfangspunct der Coordinaten, den nördlichen Meridian von Mitau als positiven Theil der Axe der x, die Ostlinie als positiven Theil der Axe der y an. Das hier folgende Verzeichniſs enthält die auf diese Weise sphärisch berechneten Werthe von $x =$ Abstand vom Perpendikel von Mitau, $y =$ Abstand vom Meridian von Mitau, $r =$ kürzester Abstand von Mitau auf der Kugel, $u =$ Azimuth oder Positionswinkel des Orts, von Norden über Osten im Umfange herum gezählt. Aus den als gradlinig angenommenen Werthen von x, y, ist in der letzten Columne der doppelte Inhalt des ebenen Dreiecks angegeben, welches Mitau mit je zwei benachbarten Grenzpuncten bildet, nach der Formel $x . y' - x' . y$. Dieser Inhalt kann natürlich nicht ganz genau mit der Fläche $r . r' . \sin (u' - u)$ übereinstimmen, weil die Werthe von r und u sphärisch berechnet sind.

	Azimuth. u	Werst. r	Werst. x	Werst. y	Q. Werst.
Libau	265° 36,24	156,97	—12,034	—156,51	7684,2
Felixberg . .	285 58,7	140,58	38,706	—135,15	6072,5
Windau . .	303 12,44	145,82	79,87	—122,00	9172,8
Domesnes .	331 40,29	131,99	116,19	— 62,63	887,9
Angern . . .	337 22,33	67,747	62,532	— 26,065	1136,5
Peterhof . .	37 5,1	19,427	15,498	11,715	314,1
Brambergshof	58 48,75	43,675	22,617	37,363	1856,6
Friedrichstadt	92 0,17	77,653	— 2,714	77,607	730,9
Jakobstadt .	96 21,11	124,10	—13,732	123,34	7209,2
Dünaburg .	115 10,73	179,96	—76,582	162,86	—3244,9
Warnowicz	110 36,92	226,69	—79,85	212,17	6704,0
Ilgen	118 56,23	204,29	—98,878	178,78	1390,0
Egipten . . .	121 8,93	176,46	—91,298	151,01	—1760,1
Subbat . . .	117 9,78	143,38	—65,468	127,57	— 650,1
Ellern	114 56,24	116,72	—49,218	105,83	342,8
Schönberg .	117 45,51	59,743	—27,826	52,868	1254,4
Sessau . . .	179 32,25	23,83	—23,829	0,1924	550,7
Grenzhof . .	221 55,68	34,278	—25,502	— 22,904	1389,2
Essern . . .	253 5,64	78,308	—22,774	— 74,927	712,9
Gramsden .	257 14,27	126,02	—27,843	—122,91	—4702,0
Polangen . .	244 43,76	172,21	—73,531	—155,72	9634,0
Libau	265 36,24	156,97	—12,034	—156,51	——
				Summa	46685,6

Inhalt □ Werst 23343

It. VII. 47. sphärisch berechnet 23351

114.

Aus den Coordinaten der Winkelpuncte eines Dreiecks die Gleichungen der Seiten zu finden.

Für einen beliebigen Anfangspunct und Ordinatenwinkel seyen die Coordinaten der Winkelpuncte a, a'; b, b'; c, c'; die Gegenseiten A, B, C, so ist

$$A \ldots (b' - c')\,x + (c - b)\,y + b\,.\,c' - b'\,.\,c = o$$
$$B \ldots (c' - a')\,x + (a - c)\,y + c\,.\,a' - c'\,.\,a = o$$
$$C \ldots (a' - b')\,x + (b - a)\,y + a\,.\,b' - a'\,.\,b = o$$

Beispiel.

a	a'	b	b'	c	c'
10,	11,	7,	9,	18,	6

$$A \;..\; 3x + 11y - 120 = o$$
$$B \;..\; -5x - 8y + 138 = o$$
$$C \;..\; 2x - 3y + 13 = o$$

115.

Aus den Gleichungen der Seiten eines Dreiecks die Coordinaten der Winkelpuncte zu finden.

Die Gleichungen seyen:

$$A \ldots Ax + A'y + A'' = 0$$
$$B \ldots Bx + B'y + B'' = 0$$
$$C \ldots Cx + C'y + C'' = 0$$

Man setze:

$$BC' - B'C = F, \quad CA' - C'A = G, \quad AB' - A'B = H$$

so hat man für die Coordinaten der Durchschnittspuncte folgende Gleichungen:

$$H.c + A''B' - A'B'' = 0 \qquad H.c' + AB'' - A''B = 0$$
$$F.a + B''C' - B'C'' = 0 \qquad F.a' + BC'' - B''C = 0$$
$$G.b + C''A' - C'A'' = 0 \qquad G.b' + CA'' - C''A = 0$$

Beispiel.

$$A \ldots 7x + 8y - 9 = 0$$
$$B \ldots 8x + 9y - 10 = 0, \qquad C \ldots 9x + 10y - 12 = 0$$

Hieraus $a = 8, \quad a' = -6;$
$b = 3, \quad b' = -1\tfrac{1}{2}; \quad c = -1, \quad c' = 2$

116.

Aus den Abständen der Seiten eines Dreiecks vom Anfangspunct der Coordinaten, und ihren Positionswinkeln gegen die Axen, die Gleichungen der Seiten zu finden.

Die vom Anfangspunct auf die Seiten bc, ca, ab, gefällten Lothe seyen k, l, n, die Positionswinkel dieser Lothe gegen die Axen der x, y, seyen p, p'; q, q'; r, r', so dafs $p + p' = q + q' = r + r' = w$, so ist

$$A \ldots \cos p . x + \cos p' . y - k = 0$$
$$B \ldots \cos q . x + \cos q' . y - l = 0$$
$$C \ldots \cos r . x + \cos r' . y - n = 0$$

117.

Aus den Coordinaten der Winkelpuncte eines Dreiecks die Gleichungen der durch die Winkelpuncte auf die Gegenseiten senkrecht gezogenen Diagonallinien zu finden.

In der Gleichung der Seite bc sind die Parameter (IX. 114.) $b' - c'$ und $c - b$. Die Gleichung einer auf bc senkrechten Linie hat also (IX. 24.) die Parameter

$$c - b + (c' - b') \cos w = s$$
$$\text{und} \quad c' - b' + (c - b) \cos w = s'$$

Soll diese Linie durch den Punct a gehen, so ist die Distantiale ihrer Gleichung (IX. 16.) $= - s.a - s'.a'$. Setzt man also:

$$c - b + (c' - b') \cos w = s \qquad c' - b' + (c - b) \cos w = s'$$
$$a - c + (a' - c') \cos w = t \qquad a' - c' + (a - c) \cos w = t'$$
$$b - a + (b' - a') \cos w = u \qquad b' - a' + (b - u) \cos w = u'$$

so sind die Gleichungen der senkrechten Diagonallinien folgende:

$$A \ldots s.x + s'.y - s.a - s'.a' = o$$
$$B \ldots t.x + t'.y - t.b - t'.b' = o$$
$$C \ldots u.x + u'.y - u.c - u'.c' = o$$

Hier ist: 1) $s + t + u = o$ 2) $s' + t' + u' = o$

Wenn (IX. 4.) die Areale $ab' - a'b + bc' - b'c + ca' - c'a = P$ so ist

$$s.a + t.b + u.c = -P.\cos w, \quad s'.a' + t'.b' + u'.c' = P.\cos w$$

also 3) $s.a + t.b + u.c + s'.a' + t'.b' + u'.c' = o$

Also sind (IX. 20.) die Diagonallinien A, B, C, collinear.

118.

Aus den Coordinaten der Winkelpuncte eines Dreiecks und den Positionswinkeln ihrer Seiten, die Gleichungen der durch die Winkelpuncte auf die Gegenseiten senkrecht gezogenen Diagonallinien zu finden.

Die Positionswinkel der vom Anfangspunct auf die Seiten bc, ca, ab, gezogenen Lothe gegen die Axen der x, y, seyen p, p'; q, q'; r, r'; so dafs $p + p' = q + q' = r + r' = w$, so sind die Parameter der Gleichung von bc (IX. 13.) den Werthen von $\cos p$, $\cos p'$, also die Parameter der Gleichung der auf ihr senkrechten Diagonallinie (IX. 24.) den Werthen von $\sin p$ und $- \sin p'$ proportionirt. Die Gleichungen dieser senkrechten Diagonallinien sind also

$$A \ldots \sin p.x - \sin p'.y - a.\sin p + a'.\sin p' = o$$
$$B \ldots \sin q.y - \sin q'.y - b.\sin q + b'.\sin q' = o$$
$$C \ldots \sin r.x - \sin r'.y - c.\sin r + c'.\sin r' = o$$

119.

Aus den Coordinaten der Winkelpuncte eines Dreiecks die Coordinaten der Collineation der durch die Winkelpuncte auf die Gegenseiten senkrecht gezogenen Diagonallinien zu finden.

Da (IX. 117.) diese Diagonallinien collinear sind, so findet man die Coordinaten ihrer Collineation m aus den Gleichungen zweier Diagonallinien nach IX. 17.

$$A \ldots s x + s' y - s a - s' a' = 0$$
$$B \ldots t x + t' y - t b - t' b' = 0$$
$$(s t' - s' t) m - s t' a + s' t b + s' t' (b' - a') = 0$$
$$(s t' - s' t) m' - s t' b' + s' t a' + s t (a - b) = 0$$

Um diese Ausdrücke zu vereinfachen, bemerke man, dafs sich in den Producten $s t'$ und $s' t$ die beiden Glieder

$$(a - c)(c - b) \cos w, \quad \text{und} \quad (a' - c')(c' - b') \cos w,$$

gegenseitig aufheben. Folglich ist:

$$s t' - s' t = [(a' - c')(c - b) - (a - c)(c' - b')] \sin^2 w,$$

Es ist aber (IX. 4.) die Areale der drei Puncte a, b, c,

$$P = (a' - c')(c - b) - (a - c)(c' - b')$$

also $s t' - s' t = P \sin^2 w$

Ferner ist:

$$- s t' a + s' t b + s' t' (b' - a')$$
$$= - s t' a + s' t b + s' t' [u' - (b - a) \cos w]$$
$$= t' a (s' \cos w - s) + s' b (t - t' \cos w) + s' t' u'$$
$$= - t' a (c - b) \sin^2 w + s' b (a - c) \sin^2 w + s' t' u'$$
$$= (s' + t') a b \sin^2 w - s' b c \sin^2 w - t' c a \sin^2 w + s' t' u'$$
$$= - u' a b \sin^2 w - s' b c \sin^2 w - t' c a \sin^2 w + s' t' u'$$

Auf dieselbe Art erhält man

$$- s t' b' + s' t a' + s t (a - b)$$
$$= - s t' b' + s' t a' + s t [(b' - a') \cos w - u]$$
$$= s b' (t \cos w - t') + t a' (s' - s \cos w) - s t u$$
$$= - s b' (a' - c') \sin^2 w + t a' (c' - b') \sin^2 w - s t u$$
$$= - (s + t) a' b' \sin^2 w + s b' c' \sin^2 w + t c' a' \sin^2 w - s t u$$
$$= u a' b' \sin^2 w + s b' c' \sin^2 w + t c' a' \sin^2 w - s t u$$

Setzt man also

$$a b u' + b c s' + c a t' = Q'$$
$$a' b' u + b' c' s + c' a' t = Q, \quad \text{so ist}$$

$$P . m + \frac{s' t' u'}{\sin^2 w} - Q' = 0, \quad P . m' - \frac{s t u}{\sin^2 w} + Q = 0$$

Hat man hieraus m, m', bestimmt, so werden die Gleichungen seyn (IX. 23.)

$$A \ldots . (a' - m') x + (m - a) y + a m' - a' m = 0$$
$$B \ldots . (b' - m') x + (m - b) y + b m' - b' m = 0$$
$$C \ldots . (c' - m') x + (m - c) y + c m' - c' m = 0$$

Beispiel.

a	a'	b	b'	c	c'	w
10,	11,	7,	9,	18,	6,	53° 7,8

$s = 9{,}2 \qquad t = -5 \qquad u = -4{,}2$

$s' = 3{,}6 \qquad t' = 0{,}2 \qquad u' = -3{,}8$

$$A \ldots\ 92x + 36 \cdot y - 1316 = 0$$
$$B \ldots -50x + 2y + 332 = 0$$
$$C \ldots -42x - 38y + 984 = 0$$
$$P = 31, \quad \frac{s' t' u'}{\sin^2 w} = -4{,}275, \quad \frac{s t u}{\sin^2 w} = 301\tfrac{7}{8}$$
$$Q' = 223{,}6 \qquad Q = -249$$
also $31 \cdot m - 227\frac{7}{8} = 0$, $31 \cdot m' - 550\frac{7}{8} = 0$

120.

Aus den Coordinaten der Winkelpuncte eines Dreiecks, die Gleichungen der die Seiten senkrecht halbirenden Linien zu finden.

Die Coordinaten der Mitte von bc seyen d, d', so mufs die Gleichung jeder die Seite bc halbirenden Linie durch $x = d$, $y = d'$ befriedigt werden. Aber $d = \frac{1}{2}(b + c)$, $d' = \frac{1}{2}(b' + c')$, also mufs diese Gleichung auch durch $2x = b + c$, und $2y = b' + c'$ befriedigt werden.

Wenn also s, t, u und s', t', u', dieselbe Bedeutung wie in IX. 117. haben, so sind die Gleichungen der die Seiten bc, ca, ab, senkrecht halbirenden Linien folgende:

$$A \ldots 2sx + 2s'y - s(b + c) - s'(b' + c') = 0$$
$$B \ldots 2tx + 2t'y - t(c + a) - t'(c' + a') = 0$$
$$C \ldots 2ux + 2u'y - u(a + b) - u'(a' + b') = 0$$

Bezeichnet man die Abstände der Puncte a, b, c, vom Anfangspunct der Coordinaten durch A, B, C, so ist

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos w$$
$$B^2 = b^2 + b'^2 + 2bb' \cos w$$
$$C^2 = c^2 + c'^2 + 2cc' \cos w$$

Jene Gleichungen werden also seyn:

$$A \ldots 2s \cdot x + 2s' \cdot y + B^2 - C^2 = 0$$
$$B \ldots 2t \cdot x + 2t' \cdot y + C^2 - A^2 = 0$$
$$C \ldots 2u \cdot x + 2u' \cdot y + A^2 - B^2 = 0$$

Hier sind die Summen der Parameter und Distantialen jede für sich gleich Null, also (IX. 20.) die Linien collinear.

121.

Aus den Coordinaten der Winkelpuncte eines Dreiecks den Mittelpunct des umschriebenen Kreises zu finden.

Dieser Mittelpuuct ist die Collineation der die drei Seiten senkrecht halbirenden Linien. Man findet also die Coordinaten m, m' dieses Mittelpuncts aus den Gleichungen zweier dieser Linien nach IX. 17.

$$A \ldots 2s.x + 2s'.y + B^2 - C^2 = o$$
$$B \ldots 2t.x + 2t'.y + C^2 - A^2 = o$$

Man erhält also:

$$2(st' - s't)m + A^2.s' + B^2.t' - C^2(s' + t') = o$$
$$2(st' - s't)m' - A^2.s - B^2.t + C^2(s + t) = o$$

Aber (IX. 117.) $s + t + u = o, \quad s' + t' + u' = o$

(IX. 119.) $st' - s't = P.\sin^2 w$

Setzt man also:

$$A^2.s + B^2.t + C^2.u = R$$
$$A^2.s' + B^2.t' + C^2.u' = R', \text{ so ist}$$

$$2P.m + \frac{R'}{\sin^2 w} = o, \quad 2P.m' - \frac{R}{\sin^2 w} = o$$

Oder setzt man:

$$a^2.s' + b^2.t' + c^2.u' = S'$$
$$a'^2.s + b'^2.t + c'^2.u = S, \text{ so ist}$$

$$2P.m - \frac{s't'u'}{\sin^2 w} + S' = o$$

$$2P.m' + \frac{s\,t\,u}{\sin^2 w} - S = o$$

Beispiel.

a	a'	b	b'	c	c'	w
10,	11,	7,	9,	18,	6,	$53^0\,7,8$

$$s = 9,2 \qquad t = -5 \qquad u = -4,2$$
$$s' = 3,6 \qquad t' = 0,2 \qquad u' = -3,8$$
$$A^2 = 353 \qquad B^2 = 205,6 \qquad C^2 = 489,6$$
$$A \ldots \quad 184\,x + 72\,y - 2840 = o$$
$$B \ldots - 100.x + 4\,y + 1366 = o$$
$$C \ldots - 84\,x - 76\,y + 1474 = o$$
$$P = 31 \qquad R = 163,28 \qquad R' = -548,56$$

$$\frac{R}{\sin^2 w} = 255\tfrac{1}{8}, \qquad \frac{R'}{\sin^2 w} = -857\tfrac{1}{8}$$

also $62\,m - 857\frac{1}{8} = o \qquad 62\,m' - 255\frac{1}{8} = o$

oder $\dfrac{s\,t\,u}{\sin^2 w} = 301\frac{7}{8} \qquad \dfrac{s't'u'}{\sin^2 w} = -4,275$

$S = 557 \qquad S' = -861,4$, also ebenfalls:

$$-\frac{s't'u'}{\sin^2 w} + S' = -857\tfrac{1}{8}, \quad \frac{s\,t\,u}{\sin^2 w} - S = -255\tfrac{1}{8}$$

$$m = 13\tfrac{409}{496}, \qquad m' = 4\tfrac{57}{496}$$

122.

Aus den Coordinaten der Winkelpuncte eines Dreiecks die Gleichungen der durch diese Puncte gezogenen und die Gegenseiten halbirenden Diagonallinien zu finden.

Die Gegenseite des Puncts a ist bc, die Coordinaten ihrer Mitte seyen d, d', so ist $2d = b + c$, $2d' = b' + c'$. Die Gleichung der Linie ad hat also (IX. 18.) die Parameter

$$a' - d' \quad \text{oder} \quad 2a' - 2d' = 2a' - b' - c'$$
$$d - a \quad \text{oder} \quad 2d - 2a = b + c - 2a$$

Setzt man also $a + b + c = 3m$, $a' + b' + c' = 3m'$ so sind diese Parameter auch

$$3a' - a' - b' - c' = 3a' - 3m' \quad \text{oder} \quad a' - m'$$
und $$a + b + c - 3a = 3m - 3a \quad \text{oder} \quad m - a$$

Hieraus folgen sofort die Gleichungen der drei halbirenden Diagonallinien

$$A \ldots (a' - m')x + (m - a)y + am' - a'm = 0$$
$$B \ldots (b' - m')x + (m - b)y + bm' - b'm = 0$$
$$C \ldots (c' - m')x + (m - c)y + cm' - c'm = 0$$

Hieraus folgt (IX. 23.) dafs die drei Diagonallinien collinear sind, und dafs m, m', die Coordinaten ihrer Collineation sind. Diese Collineation ist also (IX. 59.) der *geometrische Schwerpunct* des Dreiecks.

Beispiel.

a	a'	b	b'	c	c'
10,	11,	7,	9,	18,	6

$$3m = 35, \quad 3m' = 26 \quad m = 11\tfrac{2}{3}, \quad m' = 8\tfrac{2}{3}$$

$$A \ldots 7x + 5y - 125 = 0$$
$$B \ldots x + 14y - 133 = 0$$
$$C \ldots -8x - 19y + 258 = 0$$

123.

Aus den Coordinaten der Winkelpuncte eines Dreiecks die Coordinaten der Mittelpuncte der vier eingeschriebenen Kreise zu finden.

Die Längen der Seiten des Dreiecks abc seyen $bc = A$, $ca = B$, $ab = C$. Die Diagonallinie welche den Winkel a halbirt, schneide die Gegenseite bc in einem Puncte, dessen Coordinaten d, d' seyen, so ist (V. 19.)

$$B(d - b) = C(c - d)$$
$$B(d' - b') = C(c' - d')$$

Hieraus: $(B+C)d = Bb + Cc$

$$(B+C)d' = Bb' + Cc'$$

Die Gleichung der Diagonallinie ad hat also (IX. 18.) die Parameter

$$a' - d' \quad \text{oder} \quad (B+C)a' - (B+C)d'$$

$$d - a \quad \text{oder} \quad (B+C)d - (B+C)a$$

oder diese Parameter sind

$$(B+C)\,a' - (Bb' + Cc')$$

und . . . $(Bb + Cc) - (B+C)\,a$

oder $(A+B+C)\,a' - (Aa' + Bb' + Cc')$

und $Aa + Bb + Cc - (A+B+C)\,a$

Bestimmt man also zwei Gröfsen m, m' so dafs

$$Aa + Bb + Cc = (A+B+C)m$$

$$Aa' + Bb' + Cc' = (A+B+C)m'$$

so sind die Parameter der Gleichung der Diagonallinie ad

$$(A+B+C)(a' - m') \quad \text{oder} \quad a' - m'$$

und . . $(A+B+C)(m-a)$ oder $m - a$

Also sind die Gleichungen der drei die Winkel $a, b, c,$ halbirenden Diagonallinien

$$A \ldots (a' - m')x + (m-a)y + am' - a'm = o$$

$$B \ldots (b' - m')x + (m-b)y + bm' - b'm = o$$

$$C \ldots (c' - m')x + (m-c)y + cm' - c'm = o$$

Diese Linien sind also (IX. 23.) collinear, die Coordinaten ihrer Collineation sind m, m', und diese Collineation ist (V. 6. 7. 21.) der Mittelpunct des eingeschriebenen Kreises. Das von dieser Collineation auf eine der drei Seiten des Dreiecks gefällte Loth ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises. Diesen Halbmesser $= r$ findet man nach IX. 27. Die Gleichung der Seite bc ist (IX. 114.)

$$(b' - c')x + (c-b)y + bc' - b'c = o$$

Der Werth dieser Gleichung für $x = m$, $y = m'$ sey $= M$, so ist

$$M = (b' - c')m + (c-b)m' + bc' - b'c$$

Aber $(A+B+C)m = Aa + Bb + Cc$

$$(A+B+C)m' = Aa' + Bb' + Cc'$$

Also $(A+B+C)M = (b' - c')(Aa + Bb + Cc)$

$$+ (c-b)(Aa' + Bb' + Cc')$$

$$+ (bc' - b'c)(A+B+C)$$

Hier heben sich rechts die mit B, C, behafteten Glieder auf, also

$$(A + B + C) . M = A (ab' - a'b + bc' - b'c + ca' - c'a)$$

oder . . . $(A + B + C) . M = A . P$.

Die Diametrale der Gleichung der Linie bc sey $= D$, und der Positionswinkel des auf bc gefällten Loths gegen die Axe x, sey $= p$, so ist (IX. 14.) $D = \frac{b' - c'}{\cos p}$

Da A die Länge der Linie bc bezeichnet, so ist

$$A . \cos p = (b' - c') \sin w, \text{ also } D = \frac{A}{\sin w}$$

Aber (IX. 27.) $D . r = M$ und $P \sin w = 2F$, wo F den Inhalt des $\triangle$ abc bezeichnet (IX. 4.).

Man hat also für den Halbmesser des eingeschrieben Kreises die Gleichung

$$(A + B + C) r = P . \sin w = 2F$$

Indem man in den vorstehenden Gleichungen jede der drei Seiten des Dreiecks positiv oder negativ annimmt, erhält man vier Systeme collinearer Linien, also auch vier Collineationen m, n, o, p, welche die Mittelpuncte der vier eingeschriebenen Kreise sind.

Diese vier Systeme sind:

$$Aa + Bb + Cc = (A + B + C) m$$
$$Aa' + Bb' + Cc' = (A + B + C) m'$$
$$2F = P \sin w = (A + B + C) r$$

$$A \ldots (a' - m') x + (m - a) y + am' - a'm = o$$
$$B \ldots (b' - m') x + (m - b) y + bm' - b'm = o$$
$$C \ldots (c' - m') x + (m - c) y + cm' - c'm = o$$

$$- A . a + B . b + C . c = (- A + B + C) n$$
$$- A . a' + B . b' + C . c' = (- A + B + C) n'$$
$$2F = P \sin w = (- A + B + C) r'$$

$$A \ldots (a' - n') x + (n - a) y + an' - a'n = o$$
$$B' \ldots (b' - n') x + (n - b) y + bn' - b'n = o$$
$$C' \ldots (c' - n') x + (n - c) y + cn' - c'n = o$$

$$A.a - B.b + C.c = (A - B + C).o$$
$$A.a' - B.b' + C.c' = (A - B + C).o'$$
$$2F = P \sin w = (A - B + C).r''$$

$$A' \ldots (a' - o')x + (o - a)y + a.o' - a'.o = o$$
$$B \ldots (b' - o')x + (o - b)y + b.o' - b'.o = o$$
$$C \ldots (c' - o')x + (o - c)y + c.o' - c'.o = o$$

$$A.a + B.b - C.c = (A + B - C).p$$
$$A.a' + B.b' - C.c' = (A + B - C)\,p'$$
$$2F = P.\sin w = (A + B - C).r'''$$

$$A' \ldots (a' - p')x + (p - a)y + a.p' - a'.p = o$$
$$B' \ldots (b' - p')x + (p - b)y + b.p' - b'.p = o$$
$$C \ldots (c' - p')x + (p - c)y + c.p' - c'.p = o$$

Beispiel.

a	a'	b	b'	c	c'	w
43,	75,	10,	50,	85,	5,	$53^0\,7{,}8$

$A = 60$, $B = 56$, $C = 52$

$P = 3360$ $\quad P.\sin w = 2F = 2688$

$A.a = 2580$ $\quad A.a' = 4500$

$B.b = 560$ $\quad B.b' = 2800$

$C.c = 4420$ $\quad C.c' = 260$

amn oder $A \ldots 15x + y - 720 = o$

bmo oder $B \ldots x + 7y - 360 = o$

cmp oder $C \ldots x + y - 90 = o$

aop oder $A' \ldots 5x + 9y - 890 = o$

bpn oder $B' \ldots 2x + y - 70 = o$

cno oder $C' \ldots x - y - 80 = o$

$m = 45$	$m' = 45$	$r = 16$
$n = 50$	$n' = -30$	$r' = 56$
$o = 115$	$o' = 35$	$r'' = 48$
$p = -20$	$p' = 110$	$r''' = 42$

124.

Aus den Gleichungen der Seiten eines Parallelogramms die Gleichungen der Diagonallinien zu finden.

Die Gleichungen der auf einander folgenden Seiten seyen:

$$A \ldots Ax + A'y + A'' = 0$$
$$B \ldots Bx + B'y + B'' = 0$$
$$C \ldots Ax + A'y + A''' = 0$$
$$D \ldots Bx + B'y + B''' = 0$$

Da die Gegenseiten A, C und B, D, parallel sind, so sind ihre gleichnamigen Parameter gleich angenommen worden (IX. 15.), und nur die Distantialen sind verschieden.

Die Diagonallinie E geht durch die Collineationen von A, B und von C, D, sie ist also sowohl den Linien A, B als auch den Linien C, D, collinear. Die Gleichung der Diagonallinie E ist also (IX. 20.)

sowohl $h(Ax + A'y + A'') + k(Bx + B'y + B'') = 0$

als auch $h(Ax + A'y + A''') + k(Bx + B'y + B''') = 0$

wo die Factoren h, k, so bestimmt werden müssen, dafs

$$hA'' + kB'' = hA''' + k.B'''$$

dafs also $h(A'' - A''') = k(B''' - B'')$

Demnach ist die Gleichung der Diagonallinie E

$$(B''-B''')(Ax+A'y+A'') - (A''-A''')(Bx+B'y+B'') = 0$$

Aus gleichem Grunde ist die Gleichung der mit B, C und D, A, collinearen Diagonallinie F

$$(B''-B''')(Ax+A'y+A'') + (A''-A''')(Bx+B'y+B'') = 0$$

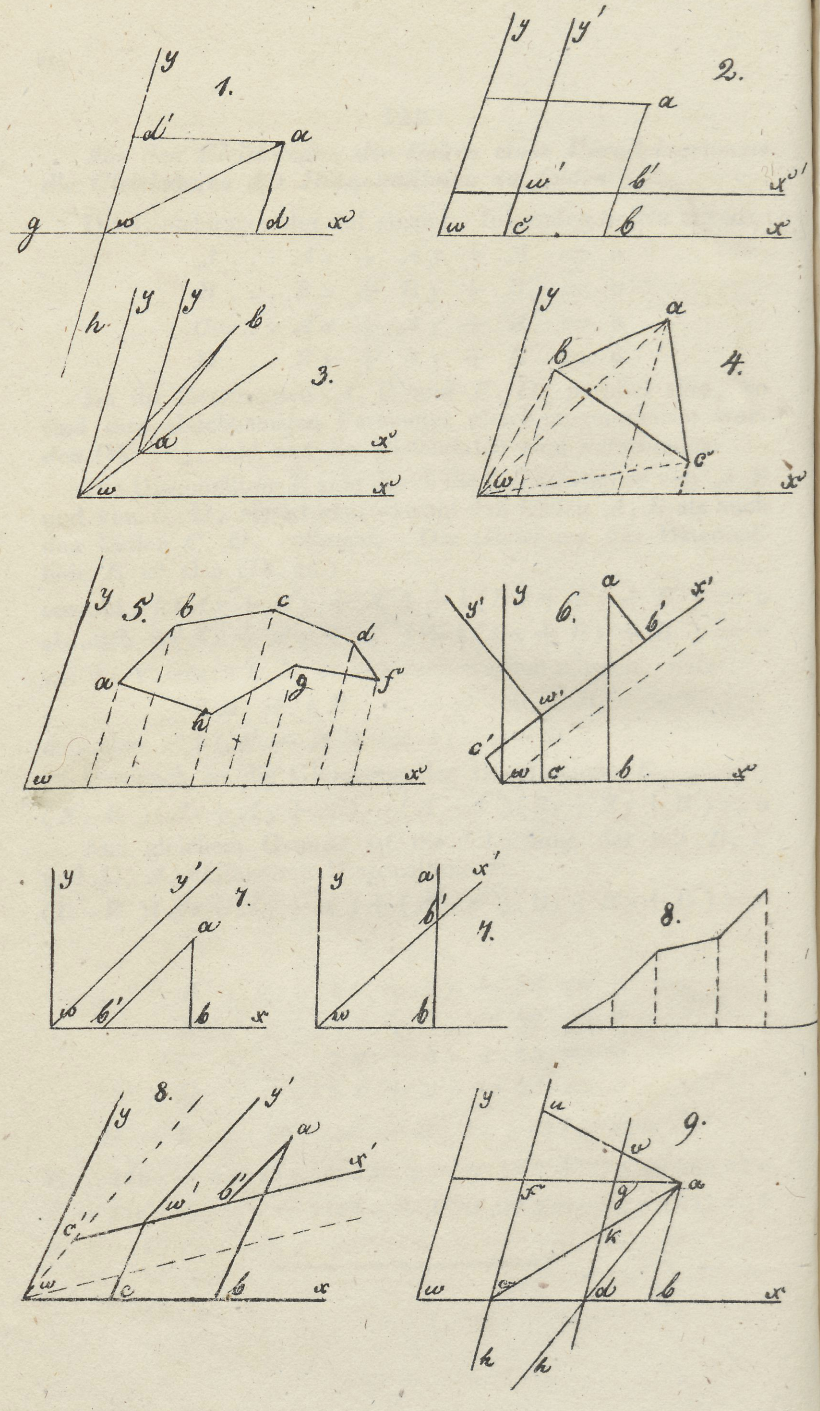
Beispiel.

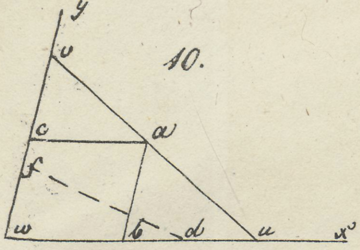
$$A \ldots 2x + 3y - 18 = 0$$
$$B \ldots 5x + 2y - 27 = 0$$
$$C \ldots 2x + 3y + 54 = 0$$
$$D \ldots 5x + 2y - 87 = 0$$

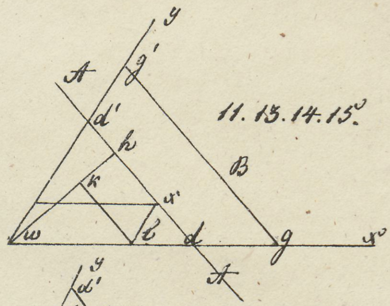
$B'' - B''' = 60$, $A'' - A''' = -72$, also

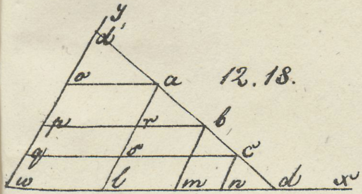
$E \ldots 480x + 324y - 3024 = 0$ oder $40x + 27y - 252 = 0$

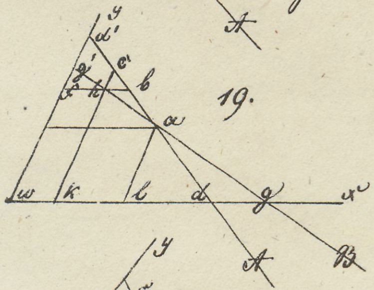
$F - 240x + 36y + 5184 = 0$ oder $20x - 3y - 432 = 0$

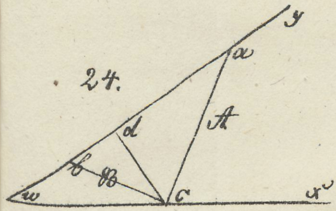

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
7.
8.
8.
9.

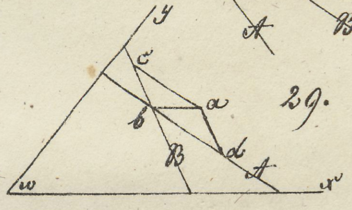

10.

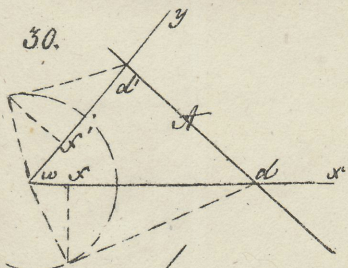

11. 13. 14. 15.

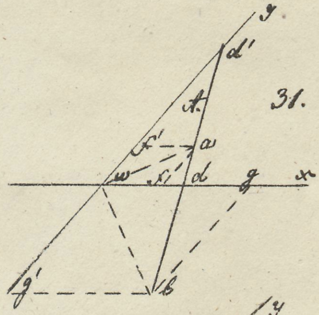

12. 18.

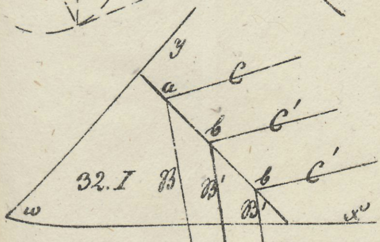

19.

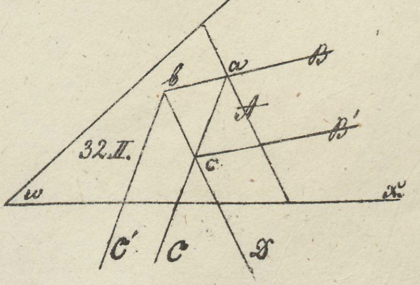

24.


29.

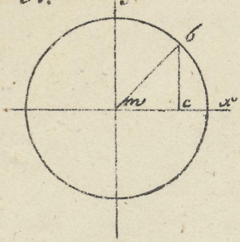

30.


31.

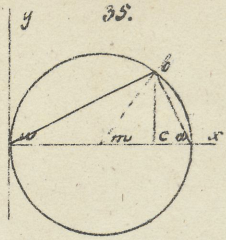

32. I


32. II.

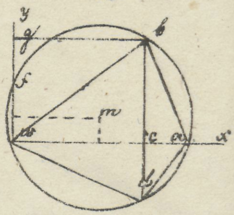
34.



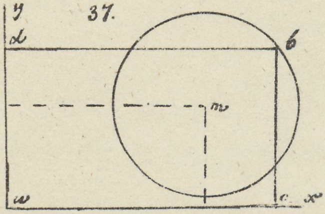
35.



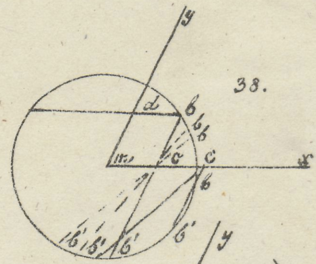
36.



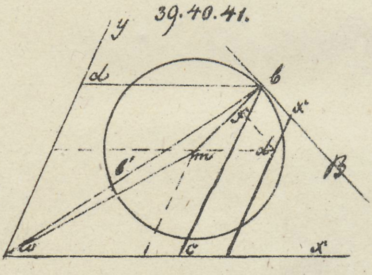
37.



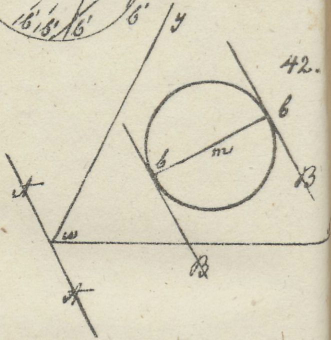
38.



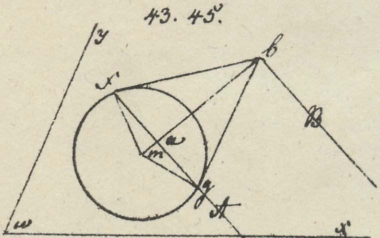
39. 40. 41.



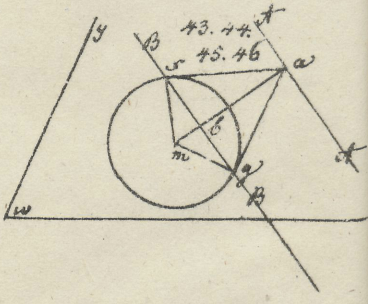
42.



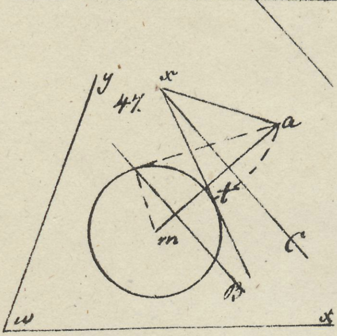
43. 45.



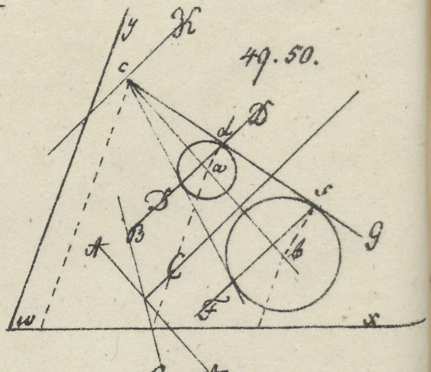
43. 44. 45. 46

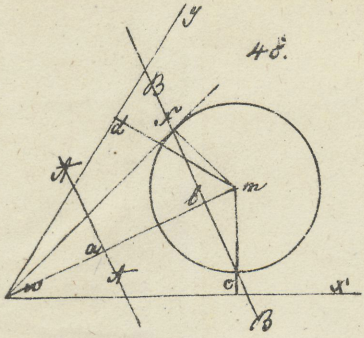


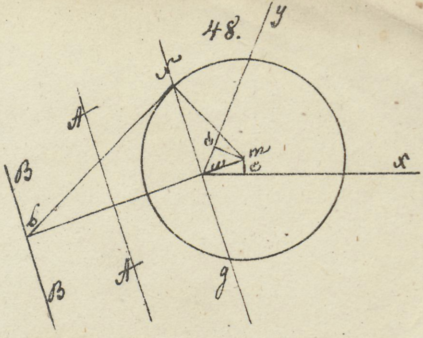
47.

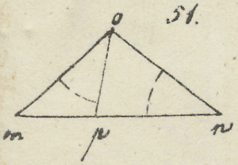


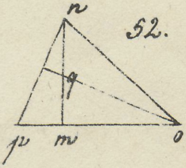
49. 50.

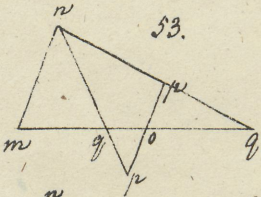


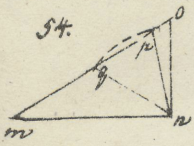

48.

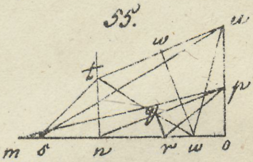

48.

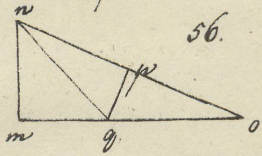

51.

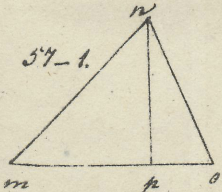

52.

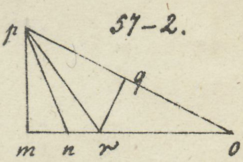

53.

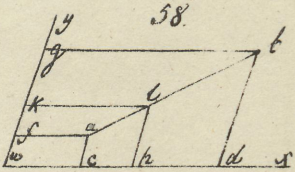

54.

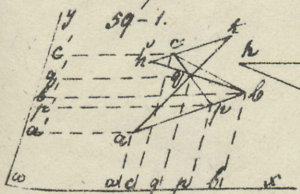

55.

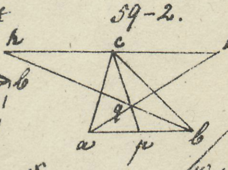

56.

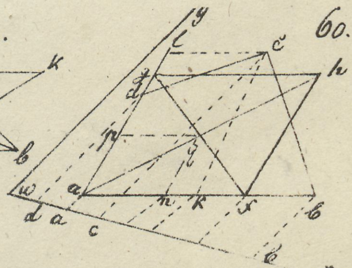

57–1.


57–2.

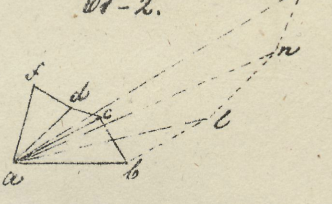

58.

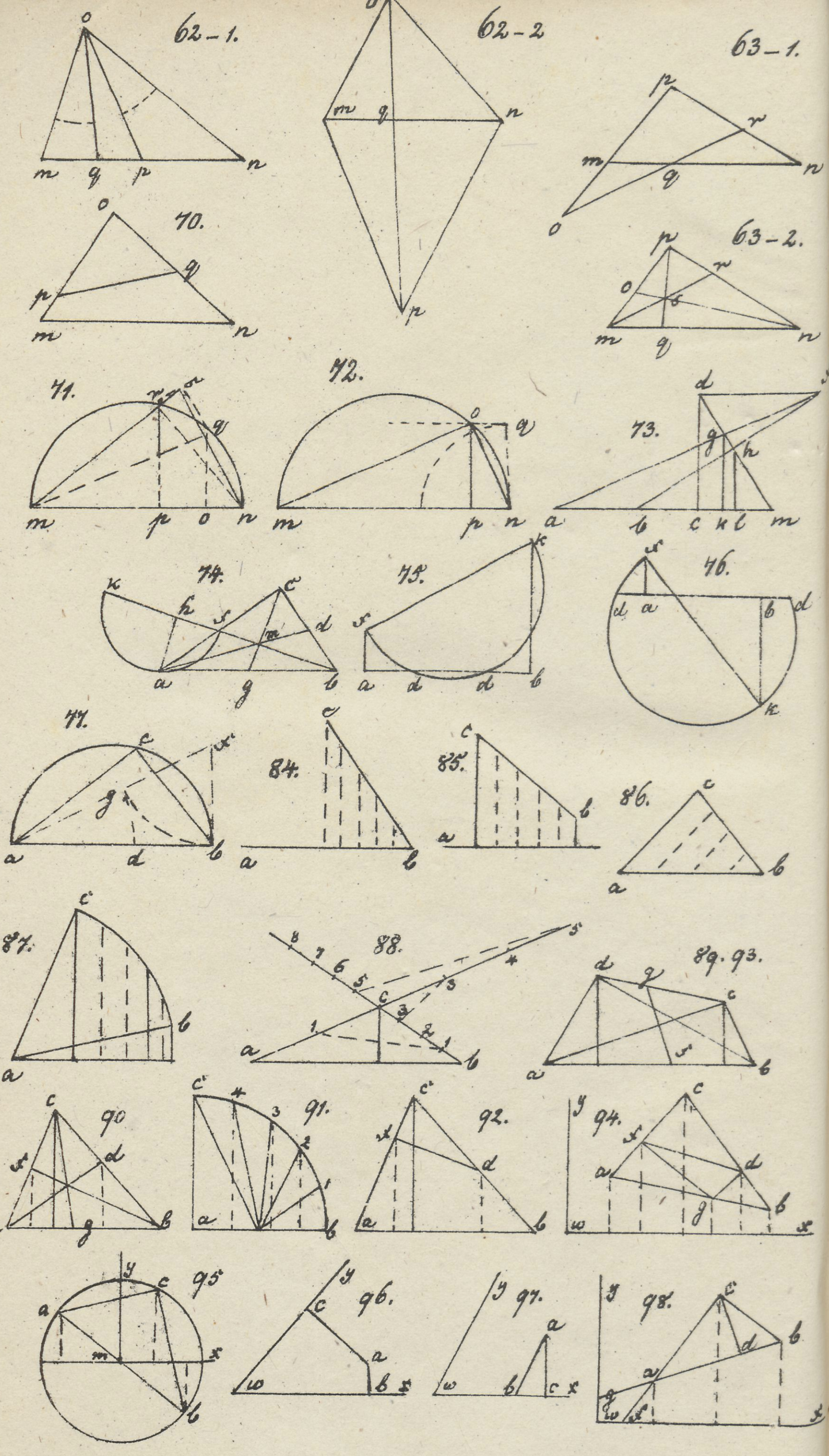

59–1.

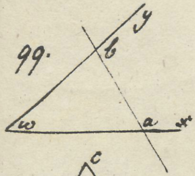

59–2.

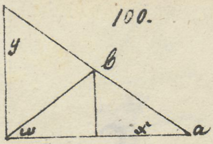

60.

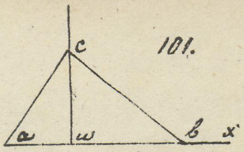

61–1.

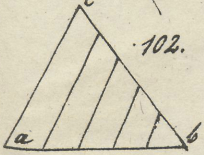

61–2.

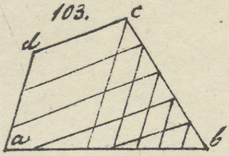

62-1.
62-2
63-1.
70.
63-2.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
84.
85.
86.
87.
88.
89. 93.
90
91.
92.
94.
95
96.
97.
98.

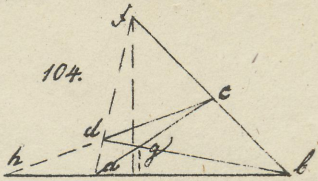

99.

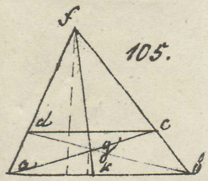

100.

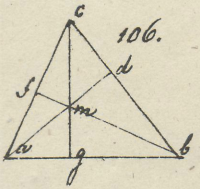

101.

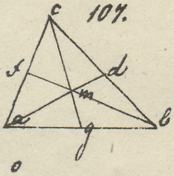

102.

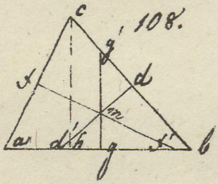

103.

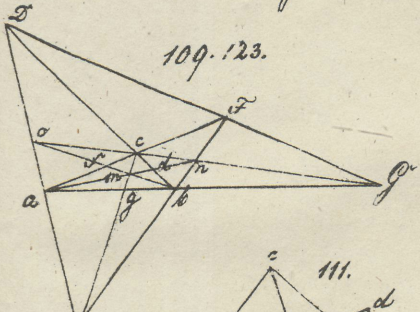

104.

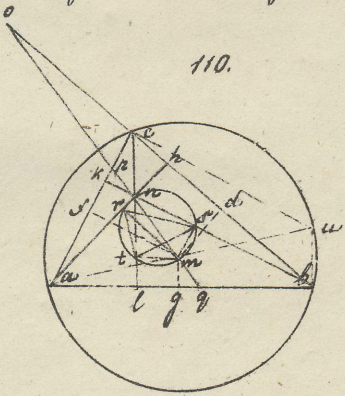

105.

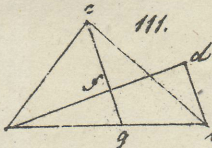

106.

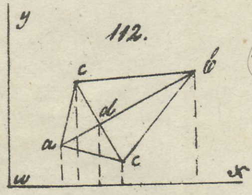

107.

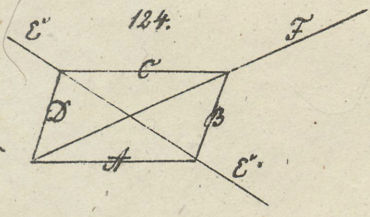

108.


109. 123.


110.


111.


112.


124.