

Peel A-1169
-336



TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. Vihik 336 Выпуск ОСНОВАНЫ В 1893.г.

**МАТЕМАТИКА- JA МЕННААНИКА-
АЛАСЕИД ТÕИД**

**ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ**

XIII



TARTU 1974

Pe. 2. 1169
-236
TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

ALUSTATUD 1893.a

Vihik 336 Выпуск

ОСНОВАНЫ В 1893.g.

**МАТЕМААТИКА- JA МЕННААНИКА-
АЛАСЕИД ТÕИД**

**ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ
И МЕХАНИКЕ**

XIII

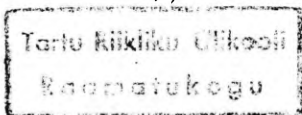
ТАРТУ 1974

Redaktsioenikolleegium:

**G.Kangro (esimees), S. Baron, J. Hiion (toimetaja),
Ü. Lepik, Ü. Lumiste, E. Reimers (vaat. toimetaja),
E. Tamme**

Редакционная коллегия:

**Г. Кангро (председатель), С. Барон, Ю. Лепик,
Ю. Лумисте, Э. Реймерс (отв. редактор),
Э. Тамме, Я. Хион (редактор)**



ФОРМАЛЬНЫЙ ВЫВОД ТАВТОЛОГИЧНЫХ ВЫСКАЗЫВАНИЙ В ПСЕВДОБУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

А. Таутс

Кафедра математического анализа

В данной статье рассматриваются бесконечные формулы исчисления предикатов, имеющие сколь угодно высокие порядки. Рассуждения основываются на теории типов. Бесконечность формул заключается в использовании бесконечных конъюнкций и дизъюнкций, предикаты могут также иметь бесконечное множество аргументных мест. Кроме того, кванторы можно применить сразу и к бесконечным семействам переменных, которые могут к тому же иметь разные типы. Точные определения понятий типа, формулы, высказывания, терма, переменной и константы приведены в [2].

Для интерпретации бесконечных высказываний в статье применяются модели, где роль значений истинности играют элементы некоторой псевдобоулевой алгебры. Как известно, псевдобоулевы алгебры применяются обычно для моделирования интуиционистской логики. Хотя логику, рассматриваемую в данной статье, нельзя назвать интуиционистской, так как бесконечные выражения считаются актуально существующими, но моделирование этих бесконечных выражений вполне аналогично моделированию конечных выражений интуиционистской логики. Последнее описано многими авторами, например Бертолини [3]. Моделирование, используемое в данной статье, получается естественным обобщением упомянутых моделирований на бесконечные высказывания. Такое обобщение оказывается возможным, если интуиционистскую логику интерпретировать с классической точки зрения.

Точное определение моделирования дано в конце статьи [2]. Понятия модели, интерпретации, нормальности и исчисления надо в данной статье понимать так, как они определены в [2] для полных псевдобоулевых алгебр на страницах 17-19.

Это позволяет нам определить и понятие тавтологического высказывания. А именно, высказывание будем называть тавтоло-

Гичным, если при любой нормальной модели, позволяющей интерпретировать данное высказывание (т.е. содержащей объекты требуемых типов) и при любой интерпретации констант данного высказывания в этой модели значение истинности высказывания оказывается наибольшим элементом данной псевдобулевой алгебры.

1. Подстановка

Будем определять подстановку как операцию, ставящую формуле α , семейству переменных $\langle x'_i : i \in J \rangle$, не содержащихся в α связано, и семейству термов $\langle a'_i : i \in J \rangle$, где при каждом $i \in J$ тип терма a'_i совпадает с типом переменной x'_i , в соответствие некоторую формулу

$$\alpha = \int_{\langle a'_i : i \in J \rangle} \alpha \langle x'_i : i \in J \rangle$$

При этом требуется, чтобы связанные переменные формулы α не содержались в термах $a'_i, i \in J$, ни свободно, ни связано, а также, чтобы связанные переменные любого из термов $a'_i, i \in J$, не содержались ни в α , ни в остальных термах этого семейства. Впрочем, здесь мы будем предполагать, что формула и терм в сущности не изменятся, если связанную переменную везде заменить некоторой новой, так что указанное требование можно всегда выполнить, переименовывая в случае необходимости связанные переменные.

Так как каждая переменная x'_i , а также терм a'_i имеют некоторый определенный тип, то вместе с каждой подстановкой будет определен и некоторый конкретный тип $\langle a''_i : i \in J \rangle$, где каждый $a''_i, i \in J$, — тип переменной x'_i , а также терма a'_i . Этот тип $\langle a''_i : i \in J \rangle$ будем для краткости называть типом подстановки. Итак, тип подстановки всегда элементарный.

Чтобы определить подстановку, нам нужно понятие внешнего вхождения терма в формулу. Будем называть внешними вхождениями термов в формулу такие вхождения ее термов, которые не содержатся в составе других термов. Для краткости будем в дальнейшем говорить о внешних термах формулы, понимая под этим внешние вхождения термов формулы.

Определим теперь подстановку, применяя индукцию по типу.

1. Пусть тип подстановки $\langle a'_i : i \in J \rangle$ такой, что каждый $a'_i, i \in J$, — элементарный тип. Тогда каждый $a'_i, i \in J$, — терм элементарного типа, следовательно, константа или переменная. Тогда пусть Φ получается из \mathfrak{A} заменой всех вхождений переменных $x'_i, i \in J$, в формуле \mathfrak{A} соответствующими термами a'_i . В частном случае, если J пусто, то это означает, что $\Phi = \mathfrak{A}$.

2. Пусть теперь подстановка имеет такой тип $\langle a'_i : i \in J \rangle$, что для всех неэлементарных типов $a'_i, i \in J$ из данного семейства подстановка типа a'_i уже определена. Для определения подстановки типа $\langle a'_i : i \in J \rangle$ применяем индукцию по рангу формулы \mathfrak{A} .

2.1. Пусть \mathfrak{A} — формула ранга 0. Тогда \mathfrak{A} не содержит термов и переменные в ней имеют тип $\langle \rangle$. Если некоторая переменная $x'_i, i \in J$, имеет вхождение в \mathfrak{A} , то a'_i имеет вид $\delta \langle \rangle \delta$, а вхождения переменного x'_i находятся только в подформулах вида $x'_i \langle \rangle$. Тогда Φ получается из \mathfrak{A} заменой каждой подформулы вида $x'_i \langle \rangle, i \in J$, на формулу δ .

2.2. Предположим теперь, что \mathfrak{A} — такая формула, что для всех формул меньшего ранга подстановка типа $\langle a'_i : i \in J \rangle$ уже определена. Тогда пусть Φ получается в результате двух шагов.

2.2.а) На первом шаге подстановки заменяем вхождения переменных $x'_i, i \in J$, во внешних термах формулы \mathfrak{A} . Каждый такой терм или является термом элементарного типа, или имеет вид $\delta \langle y'_\eta : \eta \in X \rangle \delta$, где ранг формулы \mathfrak{A} меньше ранга формулы \mathfrak{A} . Внешний терм элементарного типа, имеющий вид $x'_i, i \in J$, заменяется термом a'_i . Во внешних термах вида $\delta \langle y'_\eta : \eta \in X \rangle \delta$ формула \mathfrak{A} заменяется формулой

$$\delta \langle a'_i : i \in J \rangle \delta$$

которую, по предположению, мы можем считать определенной. Формулу, полученную таким образом в результате первого шага, обозначаем через \mathfrak{A}_1 .

2.2.б) В ходе второго шага заменяем в формуле \mathfrak{A}_1 те вхождения переменных $x'_i, i \in J$, которые имеются вне термов. Если переменная $x'_i, i \in J$, имеет тип $a'_i = \langle a''_j : j \in J \rangle$, то терм a'_i

должен иметь вид $d \langle z'_i : i \in J_c \rangle z'_i$, где каждая $z'_i, i \in J_c$, - переменная типа a'_i . Каждое вхождение этой переменной z'_i не в термы, имеется в подформуле вида $x'_i \langle b'_j : j \in J_c \rangle$, где каждое $b'_j, j \in J_c$, - терм типа a''_j . Теперь эта подформула заменяется формулой

$$\langle b'_j : j \in J_c \rangle z'_i$$

Последнюю формулу можно считать определенной, так как подстановка типа $a''_j = \langle a''_j : j \in J_c \rangle$ уже определена. Результат всех этих замен и обозначим через Φ .

Пусть α - формула, а $\langle x'_i : i \in J \rangle$ и $\langle a'_i : i \in J \rangle$ такие семейства переменных и термов, при которых подстановка термов $a'_i, i \in J$, вместо x'_i допустима. Предположим, что в α нет свободных переменных, отличных от $x'_i, i \in J$, а в термах $a'_i, i \in J$, нет свободных переменных. Так как из определения подстановки индукцией по типу подстановки и рангу формулы α вытекает, что Φ в качестве свободных переменных может содержать лишь свободные переменные формулы α , отличные от $x'_i, i \in J$, и свободные переменные термов $a'_i, i \in J$, то в данном случае Φ окажется высказыванием.

Пусть α' - высказывание, полученное из α заменой переменных $x'_i, i \in J$, на константы c'_i соответствующих типов. Пусть \mathfrak{M} - нормальная модель и φ - интерпретация всех констант формулы α и термов $a'_i, i \in J$, в модели \mathfrak{M} . Тогда φ является интерпретацией всех констант высказывания Φ , также и всех констант высказывания α' , отличных от $c'_i, i \in I$.

Индукцией по типу подстановки и рангу формулы α доказывается что интерпретацию φ можно расширить до такой интерпретации φ' , определенной и на константах $c'_i, i \in I$, что имеет место равенство

$$A.\varphi(\Phi) = A.\varphi'(\alpha'). \quad (I)$$

Здесь φ' следующая: если a'_i - константа элементарного типа, то пусть $\varphi'(c'_i) = \varphi(a'_i)$, а если a'_i имеет вид $d \langle z'_i : i \in J_c \rangle z'_i$, то пусть $\varphi'(c'_i)$ равняется такому объекту u_i , существующему

из-за нормальности модели \mathfrak{M} , что a_c^* есть наибольший элемент псевдобулевой алгебры и $a_c \langle \mathcal{L}'_c : \xi \in -J_c \rangle^*$ совпадает с $\mathfrak{B}_c^{\mathfrak{M}}$.

Интуитивно этот результат вполне естественен, так как значением для каждого $c \in J$, считается тот объект, который соответствует терму a'_c при интерпретации φ . Равенство (I) выражает тот факт, что результат подстановки содержательно оказывается высказыванием, которое получается из формулы \mathfrak{A} , если значения переменных $x'_c, c \in J$, фиксировать как значения термов a'_c .

Из описанного результата вытекает, что высказывание \mathfrak{A} , полученное подстановкой, не может при интерпретации φ иметь таких значений истинности, которые высказывание \mathfrak{A}' не может принимать при продолжениях интерпретации φ . Это позволяет нам оценить значения истинности результата подстановки при помощи значений истинности некоторого более простого высказывания \mathfrak{A}' . Например, если последнее высказывание тавтологично, то и результат подстановки должен быть тавтологичным. Таким же образом, если значение истинности высказывания \mathfrak{A}' при всяком расширении интерпретации φ удовлетворяет некоторому условию, которое, может быть, зависит от φ , но не от способа его расширения, то и результат подстановки должен удовлетворять этому условию. Таким условием может быть свойство быть больше или меньше некоторого элемента, зависящего от φ . Отмеченное обстоятельство позволяет применять подстановку в дедуктивных системах.

2. Дедуктивная система

Чтобы дать дедуктивную систему, приведем ряд записей, содержащих латинские буквы J, x, c и ρ , готические буквы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} , греческие буквы $\eta, \nu, \iota, \eta, \xi$ и \mathfrak{E} , логические символы $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, <, >, \forall, \exists$ и \mathfrak{d} , а еще символы $\vdash, \in, :, ;, \circ, \{, \} \cup$ и $'$. Кроме них, каждая запись содержит и

черту. Эти записи мы будем называть правилами вывода и они имеют следующий вид

- $$0. \frac{\forall x \in V: \mu \vdash \mathfrak{B}; \nu \vdash \mathfrak{A}}{\mu \vdash \mathfrak{A}}$$
1. а) $\frac{\forall \iota \in J: \mu \vdash \mathfrak{A}_\iota}{\mu \vdash \bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota}$ б) $\frac{\mu \vdash \bigwedge_\iota \mathfrak{A}_\iota}{\mu \vdash \mathfrak{A}_\iota}$
2. а) $\frac{\mu \vdash \mathfrak{A}_\iota}{\mu \vdash \bigvee_\iota \mathfrak{A}_\iota}$ б) $\frac{\mu \vdash \mathfrak{A}_\iota; \forall \iota \in J: \mu \cup \{\mathfrak{A}_\iota\} \vdash \mathfrak{B}}{\mu \vdash \mathfrak{B}}$
3. а) $\frac{\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{B}}{\mu \vdash \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}$ б) $\frac{\mu \vdash \mathfrak{A}; \mu \vdash \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mu \vdash \mathfrak{B}}$
4. а) $\frac{\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{B}; \mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \neg \mathfrak{B}}{\mu \vdash \neg \mathfrak{A}}$ б) $\frac{\mu \vdash \neg \mathfrak{A}}{\mu \cup \{\mathfrak{A}\} \vdash \mathfrak{B}}$
5. а) $\frac{\mu \vdash \mathfrak{A}'}{\mu \vdash \forall \langle x'_\iota: \iota \in J \rangle \mathfrak{A}}$ б) $\frac{\mu \vdash \forall \langle x'_\iota: \iota \in J \rangle \mathfrak{A}}{\mu \vdash \mathfrak{A}'}$
6. а) $\frac{\mu \vdash \mathfrak{A}'}{\mu \vdash \exists \langle x'_\iota: \iota \in J \rangle \mathfrak{A}}$ б) $\frac{\mu \vdash \exists \langle x'_\iota: \iota \in J \rangle \mathfrak{A}; \mu \cup \{\mathfrak{A}'\} \vdash \mathfrak{B}}{\mu \vdash \mathfrak{B}}$
7. $\frac{\forall \iota \in J: \mu \cup \{\mathfrak{A}'_\iota\} \vdash \mathfrak{B}'_\iota; \mu \cup \{\mathfrak{B}'_\iota\} \vdash \mathfrak{A}'_\iota}{\mu \cup \{ \langle x'_\iota: \iota \in J \rangle \mathfrak{A}'_\iota, \mathfrak{B}'_\iota: \iota \in J \} \vdash \langle x'_\iota: \iota \in J \rangle \mathfrak{B}'_\iota, \langle x'_\iota: \iota \in J \rangle \mathfrak{A}'_\iota}$

Если μ — множество высказываний некоторой сигнатуры, а \mathfrak{A} — высказывание той же сигнатуры, то запись $\mu \vdash \mathfrak{A}$ будем называть секвенцией данной сигнатуры. Секвенцией с приложением, мы будем называть секвенцию вместе с некоторым множеством констант той же сигнатуры. Эти константы могут в секвенции как встречаться, так и не встречаться. В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что всякая секвенция снабжена некоторым приложением.

Запись, состоящая из черты, множества секвенций некоторой сигнатуры над чертой и одной секвенции той же сигнатуры под чертой, мы будем называть применением некоторого конкретного правила вывода в данной сигнатуре, если эту запись можно получить из данного правила вывода заменой букв μ и ν на некоторые множества высказываний, а \mathfrak{B} и \mathfrak{A} — на формулы данной сигнатуры. Приложения секвенции в применении правила могут быть различными. При этом в правиле 0 запись $\forall x \in V$, а в правилах 1. а), 2. б) и 7. запись $\forall \iota \in J$ означает, что в применениях соответствующих правил на этом месте будет соот-

ветствующее множество секвенций; это множество может быть бесконечным или конечным, в том числе и пустым. Записи $\eta \in J$, $\eta \in J_c$ и $\xi \in X$ в правилах 5., 6. и 7. означают, что в применениях на этом месте должны быть семейства выражений. В применениях правил 1.б) и 2.а) высказывание α_c должно быть одним из высказываний $\alpha_c, c \in J$. В применениях правил 5.а) и 6.б) высказывание α' должно быть получено из формулы α путем замены переменных $x'_c, c \in J$, некоторыми константами a'_c соответствующих типов, попарно различными и не содержащимися в μ , α и α' . В применениях правил 5.б) и 6.а) высказывание α' должно быть получено подстановкой в формулу α вместо переменных $x'_c, c \in J$, термов $a'_c, c \in J$, не содержащих свободных переменных и содержащих из констант только элементы приложения секвенции μ, α . В применениях правила 7. при каждом $c \in J$ формулы α_c и α'_c должны иметь одинаковый тип a''_c , выражения $c'_\xi, \xi \in X$, должны быть термами некоторых типов c''_ξ , а ρ должно быть константой типа $a'' = \langle a''_c : c \in J; c''_\xi : \xi \in X \rangle$. Высказывания α'_c и α'_η должны быть получены из формул α_c и α_η соответственно заменой в них переменных $x'_c, c \in J$, в обеих одними и теми же константами a''_c , $\eta \in J_c$, $\eta \in J_c$, отличными друг от друга и не содержащимися в μ , α_c и α_η .

Кроме того, должно быть выполнено следующее условие: если над чертой имеется константа некоторого элементарного типа, то под чертой тоже имеется константа того же типа; при этом учитываются и константы в приложениях. Это условие не касается констант $a'_c, c \in J$, в правилах 5.а) и 6.б) в секвенциях, содержащих α' , и констант $a''_c, c \in J, \eta \in J_c$, в правиле 7. во всех секвенциях над чертой, а также не касается тех констант в приложениях названных секвенций, которые имеют тип некоторой переменной $x'_c, c \in J$, соответственно переменной $x'_\eta, c \in J, \eta \in J_c$.

Класс секвенций некоторой сигнатуры назовем замкнутым относительно вывода, если любое применение в данной сигнатуре правила вывода, имеющее над чертой только секвенции данного класса, имеет и под чертой секвенции данного класса. Секвенцию называем выводимой, если она содержится в любом

классе секвенций, замкнутом относительно вывода и содержащем все секвенции вида $\mu \vdash \alpha$, где $\mu \in \mathcal{M}$. Высказывание χ назовем выводимым, если секвенция $\vdash \chi$ с пустым предположением выводима.

Чтобы решить проблему: являются ли все выводимые высказывания тавтологичными, нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

3. Расширение сигнатуры модели

Пусть у нас имеется некоторая нормальная модель \mathfrak{M}_0 в некоторой сигнатуре Σ_0 . Пусть теперь имеется некоторая другая, более обширная сигнатура Σ , т.е. сигнатура, содержащая все типы сигнатуры Σ_0 и еще добавочные типы. Ставим себе задачу, расширить модель \mathfrak{M}_0 до нормальной модели \mathfrak{M} в сигнатуре Σ , т.е. построить нормальную модель \mathfrak{M} в сигнатуре Σ такую, что для каждого типа α'' в Σ_0 сохраняется класс $O(\alpha'')$ из \mathfrak{M}_0 , а также сохраняется α^* и $\alpha < \alpha_\nu : \nu \in J \rangle^*$ для каждого $\alpha \in O(\alpha'')$.

Чтобы расширить модель \mathfrak{M}_0 до некоторой модели \mathfrak{M} в сигнатуре Σ , надо определить классы $O(\alpha'')$ для типов $\alpha'' \in \Sigma \setminus \Sigma_0$, а также надо определить α^* и $\alpha < \alpha_\nu : \nu \in J \rangle^*$ при $\alpha \in O(\alpha'')$.

Прежде всего определим оператор τ , ставящий каждому неэлементарному типу $\alpha'' \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ в соответствие некоторый тип $\tau(\alpha'') \in \Sigma_0$. Определение индуктивно.

Пусть $\alpha'' = \langle \alpha'_\nu : \nu \in J \rangle \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ и пусть для тех $\alpha'_\nu \in \Sigma \setminus \Sigma_0$, $\nu \in J$, которые неэлементарны, уже фиксировано значение $\tau(\alpha'_\nu) \in \Sigma_0$. Тогда $\tau(\alpha'')$ определится как семейство, получаемое из семейства $\alpha'_\nu = \langle \alpha'_\nu : \nu \in J \rangle$ в результате опускания всех элементарных типов $\alpha'_\nu \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ и замены неэлементарных типов $\alpha'_\nu \in \Sigma \setminus \Sigma_0$ на $\tau(\alpha'_\nu)$. Типы $\alpha'_\nu \in \Sigma_0$ остаются в семействе неизменными.

Теперь переходим к определению классов $O(\alpha'')$ для $\alpha'' \in \Sigma \setminus \Sigma_0$. Если α'' есть элементарный тип, то $O(\alpha'')$ считаем одноэлементным, а для его единственного элемента α значение α^* считаем равным наибольшему элементу нашей псевдобулевой алгебры. Если α'' есть неэлементарный тип, то класс $O(\alpha'')$ определяется как класс, находящийся во взаимно-однозначном соответствии с классом

$O(\tau(a''))$, а значение a^* для каждого $a \in O(a')$ считается равным значению b^* для соответствующего $b \in O(\tau(a''))$.

Остается определить $a \langle a_i : i \in J \rangle^*$, где $a \in O(a')$ и $a \in \Sigma \setminus \Sigma_0$. Пусть $a'' = \langle a''_i : i \in J \rangle$. Тогда $\tau(a'') = \langle b''_i : i \in J' \rangle$, где $J' \subset J$ и b''_i есть или a''_i или $\tau(a''_i)$. Индексы $i \in J \setminus J'$ соответствуют элементарным типам $a''_i \in \Sigma \setminus \Sigma_0$. Теперь классы семейств $\langle a_i : i \in J \rangle$, где $a_i \in O(a'_i)$, и $\langle b_i : i \in J' \rangle$, где $b_i \in O(b''_i)$, находятся во взаимно однозначном соответствии, так как для $i \in J'$ такое соответствие между классами $O(a''_i)$ и $O(b''_i)$ уже фиксировано, а при $i \in J \setminus J'$ классы $O(a''_i)$ одноэлементны.

Пусть объекту a соответствует объект b из класса $O(\tau(a''))$, а семейству $\langle a_i : i \in J \rangle$ соответствует $\langle b_i : i \in J' \rangle$. Тогда $a \langle a_i : i \in J \rangle^*$ считаем равным $b \langle b_i : i \in J' \rangle^*$. Последнее значение истинности существует, так как тип объекта b совпадает с семейством типов объектов $b_i, i \in J'$. Кроме того, так как $b \langle b_i : i \in J' \rangle^* \leq \leq b^* \wedge (\bigwedge_{i \in J'} b_i^*)$, то $a \langle a_i : i \in J \rangle^* \leq a^* \wedge (\bigwedge_{i \in J} a_i^*)$, так как $a^* = b^*$, для $i \in J'$ имеет место $a_i^* = b_i^*$, а для $i \in J \setminus J'$ значение a_i^* является наибольшим элементом нашей псевдобулевой алгебры.

Пусть теперь $a'' = \langle a''_i : i \in J \rangle$ есть некоторый тип сигнатуры Σ . Пусть $a \in O(a'')$, а $\langle a_i : i \in J \rangle$ и $\langle b_i : i \in J \rangle$ — такие семейства объектов, что $a_i \in O(a''_i)$ и $b_i \in O(a''_i)$ при $i \in J$. Пусть при каждом таком i , где $a_i \neq b_i$, тип a''_i имеет вид $\langle x''_{\eta} : \eta \in J_i \rangle$.

Проверим неравенство:

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{i, a_i \neq b_i} \bigwedge \langle x''_{\eta} : \eta \in J_i \rangle \langle a_i \langle x''_{\eta} : \eta \in J_i \rangle^* \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow b_i \langle x''_{\eta} : \eta \in J_i \rangle^* \leq a \langle a_i : i \in J \rangle^* \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow a \langle b_i : i \in J \rangle^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Конечно, проверять надо только в таком случае, если $a'' \in \Sigma \setminus \Sigma_0$, так как из $a'' \in \Sigma_0$ вытекает $a''_i \in \Sigma_0$ при $i \in J$, а также и $x''_{\eta} \in \Sigma_0$ при $i \in J, \eta \in J_i$, и неравенство (2) имеет место в модели $\mathfrak{M}_{a''}$.

Пусть объекту a соответствует объект b из класса $O(\tau(a''))$. Пусть семействам $\langle a_i : i \in J \rangle$ и

$\langle b_i : i \in J \rangle$ соответствует семейства $\langle c_i : i \in J' \rangle$ и $\langle d_i : i \in J' \rangle$ соответственно. Тогда $a_i \neq b_i$ имеет место в точности тогда, когда $i \in J'$ и $c_i \neq d_i$. При таких i каждому семейству $\langle x_i^j : j \in J_i \rangle$ соответствует семейство $\langle y_i^j : j \in J'_i \rangle$. По определению имеет место $a_i \langle x_i^j : j \in J_i \rangle^* = c_i \langle y_i^j : j \in J'_i \rangle^*$ и $b_i \langle x_i^j : j \in J_i \rangle^* = d_i \langle y_i^j : j \in J'_i \rangle^*$, также $a \langle a_i : i \in J \rangle^* = b \langle c_i : i \in J' \rangle^*$ и $a \langle b_i : i \in J \rangle^* = b \langle d_i : i \in J' \rangle^*$. А так как неравенство $\wedge_{i \in J} (c_i \langle y_i^j : j \in J'_i \rangle^* \leftrightarrow d_i \langle y_i^j : j \in J'_i \rangle^* \leq b \langle c_i : i \in J' \rangle^* \leftrightarrow b \langle d_i : i \in J' \rangle^*)$

имеет место, то имеет место и (2).

Следовательно, мы получили некоторую модель \mathfrak{M} . Является ли эта модель нормальной?

Пусть у нас имеется некоторый класс констант и переменных сигнатуры Σ и пусть фиксировано отображение ψ , ставящее каждой такой константе (переменной) данного класса, тип a'' которой неэлементарный и принадлежит $\Sigma \setminus \Sigma_0$, в соответствие некоторую константу (переменную) типа $\tau(a'')$, не принадлежащую данному классу, притом так, что образы разных констант (переменных) при отображении ψ не совпадают. Тогда ставим каждой формуле \mathfrak{A} , содержащей только константы и переменные данного класса, в соответствие формулу $\mathfrak{A}\psi$, полученную таким образом, что в \mathfrak{A} константы и переменные, тип которых принадлежит $\Sigma \setminus \Sigma_0$, или опускаются, если тип элементарный, или заменяются их образами при ψ в противоположном случае.

Далее, для любой интерпретации φ констант данного класса в модели \mathfrak{M} определим интерпретацию φ_ψ (или $\varphi[\psi]$), область определения которой опять получается из области определения φ опусканием или заменой на их образы при ψ всех констант с типами из $\Sigma \setminus \Sigma_0$ в зависимости от того, является ли тип константы элементарным или нет. Интерпретация $\varphi[\psi]$ определяется следующим образом. Если тип константы a' принадлежит Σ_0 , то $\varphi_\psi(a') = \varphi(a')$. В противоположном случае $\varphi_\psi(\psi(a')) = b$, где b есть тот объект из $O(\tau(a''))$, который соответствует $\varphi(a') = a \in O(a'')$.

Из определения вытекает, что если φ есть интерпре-

тация высказывания \mathfrak{A} в \mathfrak{M} , то φ_{ψ} есть интерпретация высказывания \mathfrak{A}_{ψ} в \mathfrak{M}_0 .

Теперь исследуем, какое будет значение $A^{\varphi}(\mathfrak{A})$.

Будем сравнивать значения $A^{\varphi}(\mathfrak{A})$ и $A^{\varphi[\psi]}(\mathfrak{A}_{\psi})$.

Пусть \mathfrak{A} имеет вид $P < >$, где P — константа, тип которой — пустое семейство. Тогда $A^{\varphi}(\mathfrak{A}) = \varphi(P) < >$. Так как тип P принадлежит \sum_0 , то $\varphi(P) = \varphi_{\psi}(P)$ и $\mathfrak{A}_{\psi} = \mathfrak{A}$. Но тогда $A^{\varphi[\psi]}(\mathfrak{A}_{\psi}) = \varphi_{\psi}(P) < >^* = \varphi(P) < >^* = A^{\varphi}(\mathfrak{A})$.

Так как $(\forall x_i \mathfrak{A}_i)_{\psi} = \forall x_i (\mathfrak{A}_i)_{\psi}$, $(\wedge \mathfrak{A})_{\psi} = \wedge (\mathfrak{A})_{\psi}$, $(\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B})_{\psi} = \mathfrak{A}_{\psi} \rightarrow \mathfrak{B}_{\psi}$ и $(\neg \mathfrak{A})_{\psi} = \neg \mathfrak{A}_{\psi}$, то из справедливости равенства $A^{\varphi}(\mathfrak{A}) = A^{\varphi[\psi]}(\mathfrak{A}_{\psi})$

для каждого \mathfrak{A}_i , для \mathfrak{A} и \mathfrak{B} следует выполнимость этого равенства для $\wedge \mathfrak{A}_i$, $\forall x_i \mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ и $\neg \mathfrak{A}$.

Пусть теперь \mathfrak{A} имеет вид $\forall \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{B}$.

Тогда по определению $A^{\varphi}(\mathfrak{A}) = \bigwedge \{x'_i : i \in J\} \wedge \bigwedge x'_i \rightarrow$
 $\rightarrow A^{\varphi}(\mathfrak{B}')$, где $\bigwedge \{x'_i : i \in J\}$ обозначает конъюнкцию по всевозможным семействам объектов, имеющих типы переменных $x'_i, i \in J$; далее \mathfrak{B}' есть высказывание, полученное из \mathfrak{B} подстановкой вместо x'_i некоторых констант a'_i , не содержащихся в \mathfrak{B} , а φ' есть интерпретация высказывания \mathfrak{B} в сужении модели \mathfrak{M} объектами $x'_i, i \in J$, являющаяся таким продолжением для φ , что $\varphi'(a'_i) = x'_i$ при всех $i \in J$.

По определению, \mathfrak{A}_{ψ} имеет вид $\forall \langle y'_i : i \in J' \rangle \mathfrak{B}_{\psi}$ где $J' \subset J$. Чтобы найти $A^{\varphi[\psi]}(\mathfrak{A}_{\psi})$, нам надо прежде всего найти $(\mathfrak{B}_{\psi})'$ полученное из \mathfrak{B}_{ψ} подстановкой некоторых констант вместо переменных $y'_i, i \in J'$. Без ограничения общности мы можем предполагать, что в качестве $(\mathfrak{B}_{\psi})'$ можно взять \mathfrak{B}_{ψ} . Как известно, семейства объектов $\langle y'_i : i \in J' \rangle$, имеющих типы переменных $y'_i, i \in J'$, и семейства объектов $\langle x'_i : i \in J \rangle$, имеющих типы переменных $x'_i, i \in J$, находятся во взаимно однозначном соответствии. Следовательно, если некоторое семейство $\langle x'_i : i \in J \rangle$ дает продолжение φ' интерпретации φ , то соответствующее семейство $\langle y'_i : i \in J' \rangle$ дает продолжение φ_{ψ} интерпретации φ_{ψ} . Кроме того $\bigwedge_{i \in J} x'_i = \bigwedge_{i \in J} y'_i$, так как для $i \in J'$ имеет место $x'_i = y'_i$, а для $i \in J \setminus J'$ значение x'_i есть наибольший элемент нашей псевдобулевой алгебры. Значит, \mathfrak{M}_0 , полученное из \mathfrak{M} сужением объектами $y'_i, i \in J'$, основывается на той же

псевдобелевой алгебре, что и \mathfrak{M}' , полученное из \mathfrak{M} сужением объектами $x_\iota, \iota \in J$. Кроме того, та часть модели \mathfrak{M}' , которая касается только сигнатуры Σ_0 , совпадает с \mathfrak{M}_0' , т.е. отношение между \mathfrak{M}_0' и \mathfrak{M}' аналогично отношению между \mathfrak{M}_0 и \mathfrak{M} .

Если мы предположим, что при каждой φ' имеет место $A^{\varphi'}(\mathfrak{M}') = A^{\varphi'[\psi]}(\mathfrak{M}'_\psi)$, то $A^{\varphi'[\psi]}(\mathfrak{M}'_\psi) = \bigwedge_{y_\iota: \iota \in J'} (\bigwedge_{x'_\iota} \rightarrow A^{\varphi'[\psi]}(\mathfrak{M}'_\psi)) = \bigwedge_{x_\iota: \iota \in J} (\bigwedge_{x'_\iota} \rightarrow A^{\varphi'}(\mathfrak{M}')) = A^{\varphi'}(\mathfrak{M})$

В случае, если \mathfrak{M} имеет вид $\exists \langle x'_\iota: \iota \in J \rangle$, то по определению $A^{\varphi}(\mathfrak{M}) = \bigvee_{\langle x_\iota: \iota \in J \rangle} A^{\varphi'}(\mathfrak{M}')$, где $\langle x_\iota: \iota \in J \rangle$, φ' и \mathfrak{M}' имеют прежнее значение. Тогда \mathfrak{M}_ψ имеет вид $\exists \langle y'_\iota: \iota \in J' \rangle \mathfrak{M}'_\psi$. И здесь мы можем в качестве $(\mathfrak{M}'_\psi)'$ взять \mathfrak{M}''_ψ , здесь также имеется взаимно однозначное соответствие между семействами $\langle x_\iota: \iota \in J \rangle$ и $\langle y'_\iota: \iota \in J' \rangle$, задающими φ' и φ'_ψ соответственно. Значит, если предполагать равенство $A^{\varphi'}(\mathfrak{M}') = A^{\varphi'[\psi]}(\mathfrak{M}'_\psi)$ для каждого φ' , то получаем $A^{\varphi'[\psi]}(\mathfrak{M}'_\psi) = \bigvee_{\langle y'_\iota: \iota \in J' \rangle} A^{\varphi'[\psi]}(\mathfrak{M}'_\psi) = \bigvee_{\langle x_\iota: \iota \in J \rangle} A^{\varphi'}(\mathfrak{M}') = A^{\varphi}(\mathfrak{M})$.

Теперь по определению формулы получим, что равенство $A^{\varphi'[\psi]}(\mathfrak{M}'_\psi) = A^{\varphi'}(\mathfrak{M}')$ имеет место для всех высказываний \mathfrak{M} ранга 0.

Предположим, что это равенство имеет место для всех высказываний, ранг которых меньше некоторого определенного ординала ξ . Пусть теперь \mathfrak{M} — формула, ранг которой меньше ξ . Пусть \mathfrak{M}' — высказывание, полученное из \mathfrak{M} подстановкой констант, не содержащихся в \mathfrak{M} , вместо свободных переменных. Как и раньше, мы можем взять \mathfrak{M}'_ψ в роли высказывания, полученного из \mathfrak{M}_ψ подстановкой констант вместо свободных переменных. Если $\langle y'_\iota: \iota \in J' \rangle$ и $\langle x'_\iota: \iota \in J \rangle$ — семейства свободных переменных формул \mathfrak{M}'_ψ и \mathfrak{M} соответственно, то в силу нормальности модели \mathfrak{M} в ней для каждой интерпретации φ_0 существует такой объект a , что $\langle a, y'_\iota: \iota \in J' \rangle$ как истинностная функция совпадает с \mathfrak{M}'_ψ . В частном случае это имеет место и тогда, когда в роли φ_0 будет φ , где φ есть интерпретация формулы \mathfrak{M} в \mathfrak{M} . Пусть φ' — продолжение φ на новые константы, прибавленные в \mathfrak{M} . По

предположения индукции $A^{\varphi}(\mathfrak{M}') = A^{\varphi[\psi]}(\mathfrak{M}'_{\varphi})$. Но значения $A^{\varphi[\psi]}(\mathfrak{M}'_{\varphi})$ и являются значениями функции \mathfrak{M}'_{φ} .

Пусть типами формул \mathfrak{M} и \mathfrak{M}_{φ} соответственно являются α'' и $\tau(\alpha'')$, тогда $\alpha \in O(\tau(\alpha''))$. Как известно, в $O(\alpha'')$ существует объект ξ , соответствующий объекту α . Семейства значений переменных $x'_i, i \in J$, и $y'_i, i \in J'$, находятся во взаимно однозначном соответствии и $\xi \langle x'_i : i \in J \rangle^* = \alpha \langle y'_i : i \in J' \rangle^*$ в каждом случае. Поэтому $\xi \langle x'_i : i \in J \rangle^* = \alpha \langle y'_i : i \in J' \rangle^* = \mathfrak{M}_{\varphi}^{\varphi[\psi]}(y'_i : i \in J) = \mathfrak{M}_{\varphi}^{\varphi}(x'_i : i \in J)$.

Это значит, что объект ξ является объектом, требуемым в определении нормальности для формулы \mathfrak{M} и интерпретации φ . Следовательно, \mathfrak{M} является ξ' -нормальной для всех $\xi' \langle \xi \rangle$. А именно, если \mathfrak{M} — формула ранга $\xi' \langle \xi \rangle$, а φ — её интерпретация в \mathfrak{M}_0 , то объект, определяемый в \mathfrak{M} через \mathfrak{M}_{φ} , есть тот объект, который соответствует объекту, определяемому через $\mathfrak{M}_{\varphi}^{\varphi[\psi]}$ в \mathfrak{M}_0 .

Если теперь взять высказывание $\mathfrak{M} = P \langle \alpha'_i : i \in J \rangle$ ранга ξ , то $A^{\varphi}(\mathfrak{M}) = \varphi(P) \langle \alpha'_i : i \in J \rangle^*$, где $\alpha'_i, i \in J$, суть объекты, указанные определением нормальности для термов $\alpha'_i, i \in J$. Но как известно, это значение не изменяется, если $\varphi(P)$ заменить на объект, соответствующий ему в \mathfrak{M}_0 , а семейство $\langle \alpha'_i : i \in J \rangle$ заменить соответствующим семейством. Но как раз в этом случае мы и получаем $A^{\varphi[\psi]}(\mathfrak{M}_{\varphi})$, как это вытекает из процедуры, приведенной выше для нахождения объектов, требуемых в определении нормальности. Значит, равенство $A^{\varphi}(\mathfrak{M}) = A^{\varphi[\psi]}(\mathfrak{M}_{\varphi})$ имеет место и для высказываний ранга ξ .

По индукции доказывается, что это равенство имеет место для всех высказываний. Из этого вытекает, что \mathfrak{M} — нормальная модель.

Итак, мы доказали, что всякую нормальную модель можно расширить до новой нормальной модели путем прибавления произвольной совокупности типов. Следовательно, если у нас имеется применение некоторого правила вывода и для секвенции под чертой есть нормальная модель \mathfrak{M}_0 , то эту модель можно расширить до нормальной модели \mathfrak{M} , содержащей и все типы, имеющиеся над чертой. При этом сохраняется её от-

ношение к секвенции под чертой.

Отметим, что в нормальной модели класс $O(a^n)$ может быть пустым только в случае элементарного типа a^n , так как в случае неэлементарного a^n для любой формулы \mathcal{A} типа a^n и любой ее интерпретации φ в определении нормальности требуется существование объекта $a \in O(a^n)$. Значит, в случае, если над чертой нет констант такого элементарного типа, константы которого под чертой отсутствуют, то и любую интерпретацию φ_0 секвенции под чертой в \mathfrak{M}_0 можно расширить до интерпретации φ секвенций над чертой в \mathfrak{M} . Здесь модель \mathfrak{M} и интерпретация φ называются моделью и интерпретацией данной секвенции соответственно, если все типы секвенции имеются в сигнатуре модели \mathfrak{M} и если φ является интерпретацией всех констант секвенции вместе с её приложением.

4. Проекция

Перейдем к следующей проблеме. Пусть M есть полная псевдобулева алгебра и пусть $A \in M$. Как известно, $M(A) = \{B : B \leq A\}$ тоже является псевдобулевой алгеброй (см. [1]). Для каждого $C \in M$ определим проекцию элемента C в $M(A)$, равную $C \wedge A$. Если $C \in M(A)$, то, конечно, проекция элемента C совпадает с самым C .

Рассмотрим, как проектирование связано с порядком и логическими операциями. Если $B, C \in M$ и $B \leq C$, то $B \wedge A \leq C \wedge A$. Значит, проектирование сохраняет порядок, может быть, нестрого, так как между проекциями может иметь место равенство, если между B и C имеет место строгое неравенство.

Пусть теперь $\{B_\alpha : \alpha \in J\}$ — семейство элементов из M . В случае непустого J имеет место $(\bigwedge_{\alpha \in J} B_\alpha) \wedge A = \bigwedge_{\alpha \in J} (B_\alpha \wedge A)$. Правую сторону этого равенства можно рассматривать как конъюнкцию в смысле $M(A)$ элементов $B_\alpha \wedge A$. В случае пустого J имеет место $(\bigwedge_{\alpha \in J} B_\alpha) \wedge A = A$. Но так как в этом случае множество элементов $B_\alpha \wedge A$ пустое, то их конъюнкция в смысле псевдобулевой алгебры $M(A)$ равняется A . Итак, в обоих случаях проекция конъюнкции элементов $B_\alpha, \alpha \in J$, совпадает с конъюнкцией их проекций, если эту последнюю

конъюнкцию рассматривать в смысле псевдобоулевой алгебры $M(A)$.

Значение выражения $V_c(B \wedge A)$ не зависит от того, рассматривать дизъюнкцию в M или в $M(A)$. Сравним значение этого выражения с $A \wedge (V_c B_c)$. При каждом $v_c \in J$ имеет место $A \wedge B_{v_c} \leq A \wedge (V_c B_c)$. Значит, $V_c(A \wedge B_c) \leq A \wedge (V_c B_c)$. С другой стороны для каждого $v_c \in J$ имеет место $A \wedge B_{v_c} \leq V_c(A \wedge B_c)$. Значит, $B_{v_c} \leq A \rightarrow V_c(A \wedge B_c)$. Из-за произвольности $v_c \in J$ отсюда вытекает $V_c B_c \leq A \rightarrow V_c(A \wedge B_c)$, следовательно, $A \wedge (V_c B_c) \leq V_c(A \wedge B_c)$. Итак, $A \wedge (V_c B_c) = V_c(A \wedge B_c)$, т.е. проекция дизъюнкции элементов $B_c, c \in J$, равняется дизъюнкции их проекций. Последнюю дизъюнкцию можно рассматривать в смысле псевдобоулевой алгебры $M(A)$.

Пусть теперь $B, C \in M$. Их проекциями являются $B \wedge A$ и $C \wedge A$ соответственно. Импликацией этих элементов в смысле $M(A)$ является $[(B \wedge A) \rightarrow (C \wedge A)] \wedge A$ (см. [1]). Обозначим этот элемент через E . Очевидно, $E \leq A$. Так как $E \wedge B \leq A$, то $E \wedge B = E \wedge (B \wedge A) = [(B \wedge A) \rightarrow (C \wedge A)] \wedge (B \wedge A) \leq C \wedge A \leq C$. Значит, $E \leq B \rightarrow C$ и $E \leq (B \rightarrow C) \wedge A$. С другой стороны $(B \rightarrow C) \wedge A \leq A$. Кроме того, $[(B \rightarrow C) \wedge A] \wedge (B \wedge A) = [(B \rightarrow C) \wedge B] \wedge A \leq C \wedge A$. Значит, $(B \rightarrow C) \wedge A \leq [(B \wedge A) \rightarrow (C \wedge A)]$. Следовательно, имеет место и $(B \rightarrow C) \wedge A \leq E$.

Итак, мы получили $(B \rightarrow C) \wedge A = E$, т.е. E является проекцией элемента $B \rightarrow C$ или, иначе говоря, проекция импликации элементов B и C равняется импликации их проекций, если эту последнюю импликацию понимать в смысле псевдобоулевой алгебры $M(A)$.

Проекцией наибольшего элемента в M является A , а проекцией наименьшего элемента — он сам. Они являются соответственно наибольшим и наименьшим элементом в $M(A)$.

Так как отрицание элемента B определяется импликацией и наименьшим элементом, то проекция элемента $\neg B$ как проекция импликации равняется, учитывая доказанное, импликации в смысле $M(A)$ проекций этих элементов, т.е. проекция элемента $\neg B$ равна отрицанию элемента $B \wedge A$ в смысле псевдобоулевой алгебры $M(A)$.

Аналогично доказывается, что проекция элемента $B \leftrightarrow C$ равняется эквивалентности в смысле $M(A)$ элементов $B \wedge A$ и $C \wedge A$.

Итак, мы доказали, что проектирование сохраняет все логические операции в том смысле, что проекция результата операции равняется элементу, который мы получим, если в псевдобулевой алгебре $M(A)$ сделаем такую же операцию с проекциями аргументов.

Пусть у нас имеется модель \mathfrak{M} , основывающаяся на псевдобулевой алгебре M . При сужении модели \mathfrak{M} на $M(A)$, как известно, (см. [2]) все значения a^* и $a \langle a_i : i \in J \rangle^*$ заменяются их проекциями. Известное из [2] неравенство

$$\wedge_i a_i * b_i \wedge \langle x_i^i : i \in J \rangle \langle a_i \langle x_i^i : i \in J \rangle^* \leftrightarrow b_i \langle x_i^i : i \in J \rangle^* \rangle \leq \langle a \langle a_i : i \in J \rangle^* \leftrightarrow a \langle b_i : i \in J \rangle^* \rangle,$$

обязательное для каждой модели, при этом сохраняет силу в $M(A)$, так как проектирование сохраняет все операции и порядок.

Полученную модель с основой $M(A)$ мы будем обозначать через $\mathfrak{M}(A)$.

Пусть у нас имеется некоторая интерпретация φ в модели \mathfrak{M} . Тогда φ является интерпретацией в модели $\mathfrak{M}(A)$, так как объекты в этих моделях одинаковые, а наибольший элемент псевдобулевой алгебры M проектируется в наибольший элемент псевдобулевой алгебры $M(A)$. Будем обозначать φ , как интерпретацию в $\mathfrak{M}(A)$, через $\varphi[A]$ или φ_A .

Будем теперь сравнивать значения $A^{\varphi(\alpha)}$ и $A^{\varphi[A](\alpha)}$ для всех высказываний α . Если α состоит только из константы P типа $\langle \rangle$, то $A^{\varphi[A](\alpha)} = \varphi_A(P) \langle \rangle^* = \varphi(P) \langle \rangle^* \wedge A = A^{\varphi(\alpha)} \wedge A$. Это значит, что в этом случае $A^{\varphi[A](\alpha)}$ является проекцией элемента $A^{\varphi(\alpha)}$ в $M(A)$. А так как проектирование сохраняет логические операции, то из этого вытекает аналогичное свойство для всех высказываний α ранга 0, не содержащих кванторов.

Пусть теперь α имеет вид $\forall \langle x_i^i : i \in J \rangle \beta$ или $\exists \langle x_i^i : i \in J \rangle \beta$. Обозначим через β' высказывание, полученное из β заменой переменных $x_i^i, i \in J$, константами a_i^i , не содержащимися в β . Пусть φ' пробегает все такие продолжения отображения φ , при которых значениями $\varphi'(a_i^i), i \in J$, являются любые объекты a_i^i

соответствующих типов из модели \mathfrak{M} . Каждое такое φ' рассматривается как интерпретация в модели \mathfrak{M}' с основой M' , полученной из \mathfrak{M} сужением семейством объектов $\langle a_\nu : \nu \in J \rangle$ (см. [2]). При каждом φ' обозначим через A' элемент $A \wedge (\bigwedge_\nu a_\nu^*)$. Предположим, что при каждом φ' имеет место следующее утверждение:

$A^{\varphi'(A')}(B')$ есть проекция в $M'(A')$ элемента $A^{\varphi'}(B')$. Здесь $M'(A')$ есть множество $\{b : b \leq A'\}$, которую мы можем рассматривать как часть псевдобулевой алгебры M'^* , а $\varphi'[A']$ есть φ' как интерпретация в модели $\mathfrak{M}'(A')$, имеющей основу $M'(A')$. Но, кроме того, если взять конъюнкцию в смысле $M(A)$ элементов $a_\nu^* \wedge A$, то, как известно, получим $(\bigwedge_\nu a_\nu^*) \wedge A = A'$, поэтому $M'(A')$ можно рассматривать как часть псевдобулевой алгебры $M(A)$, а $\mathfrak{M}'(A')$ — как модель, полученная из $\mathfrak{M}(A)$ сужением элементами $a_\nu, \nu \in J$.

В случае, если \mathfrak{M} имеет вид $\forall \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{B}$, то $A^{\varphi'(A')}(A)$ будет, по определению, $\bigwedge_{\varphi'} [\bigwedge_\nu (a_\nu^* \wedge A) \rightarrow \rightarrow A^{\varphi'(A')}(B')]$, где все логические операции, кроме $a_\nu^* \wedge A$, рассматриваются в смысле модели $\mathfrak{M}(A)$.

Но, по предположению $A^{\varphi'(A')}(B') = A^{\varphi'}(B') \wedge A' = A^{\varphi'}(B') \wedge A \wedge (\bigwedge_\nu a_\nu^*) = A^{\varphi'}(B') \wedge A$, так как $A^{\varphi'}(B') \leq \leq \bigwedge_\nu a_\nu^*$. Итак, выражение для $A^{\varphi'(A')}(B')$ мы получим из выражения $\bigwedge_{\varphi'} [\bigwedge_\nu (a_\nu^* \wedge A) \rightarrow A^{\varphi'}(B')]$, значение которого есть $A^{\varphi'}(B')$, заменяя $a_\nu^*, \nu \in J$, и $A^{\varphi'}(B')$

их проекциями и рассматривая все логические операции в смысле псевдобулевой алгебры $M(A)$. Но так как проецирование сохраняет все операции, то $A^{\varphi'(A')}(B')$ есть проекция элемента $A^{\varphi'}(B')$ в $M(A)$.

В случае, если \mathfrak{M} имеет вид $\exists \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{B}$, то $A^{\varphi'(A')}(B')$ будет, по определению, $\bigvee_{\varphi'} A^{\varphi'(A')}(B')$

(здесь дизъюнкцию, по определению, надо понимать в смысле $M(A)$, но дизъюнкция в смысле M имеет такое же значение). Значит, $A^{\varphi'(A')}(B') = \bigvee_{\varphi'} [A^{\varphi'}(B') \wedge A'] = \bigvee_{\varphi'} [A^{\varphi'}(B') \wedge A \wedge (\bigwedge_\nu a_\nu^*)] = \bigvee_{\varphi'} [A^{\varphi'}(B') \wedge A]$,

так как $A^{\varphi'}(B') \leq \bigwedge_\nu a_\nu^*$. Следовательно, $A^{\varphi'(A')}(B') = (\bigvee_{\varphi'} A^{\varphi'}(B')) \wedge A$, которое является проекцией $A^{\varphi'}(B')$ в $M(A)$.

Итак, мы показали, что утверждение о совпадении значения истинности высказывания при φ с проекцией в $M(A)$ его

значения истинности при φ (для любой модели \mathfrak{M} , интерпретации φ и элемента A) переносится с высказывания \mathfrak{A} на высказывания $\forall \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{B}$ и $\exists \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{B}$. Из этого вытекает правильность данного утверждения для всех высказываний ранга 0.

Пусть теперь ξ — такой ординал, что утверждение имеет место для всех высказываний, ранг которых меньше ξ . Пусть теперь \mathfrak{A} — высказывание ранга ξ , имеющее вид $\rho \langle a'_\nu : \nu \in J \rangle$.

В таком случае каждое a'_ν есть терм ранга $\xi_\nu < \xi$. Пусть φ — интерпретация, $a = \varphi(\rho)$ и $a_\nu = \varphi(a'_\nu)$ для тех ν , при которых a'_ν есть константа элементарного типа. Если a'_ν есть терм вида $\sigma \langle x''_\eta : \eta \in J_\nu \rangle \mathfrak{B}_\nu$, то в роли a_ν как известно, будет такой объект, что $a_\nu \langle x''_\eta : \eta \in J_\nu \rangle^*$ как истинностная функция совпадает с \mathfrak{B}_ν^φ . Но так как \mathfrak{B}_ν — формула ранга $\xi_\nu < \xi$, то высказывание \mathfrak{B}'_ν , полученное из \mathfrak{B}_ν заменой переменных константами, — высказывание ранга ξ_ν . Значит, для него утверждение имеет место, т.е. при переходе от φ к φ_A значение заменяется его проекцией в $M(A)$. Но это же имеет место и для значений истинностной функции $a_\nu \langle x''_\eta : \eta \in J_\nu \rangle^*$ при переходе от модели \mathfrak{M} к $\mathfrak{M}(A)$. Следовательно, истинностные функции $\mathfrak{B}'_\nu \varphi_A$ и $a_\nu \langle x''_\eta : \eta \in J_\nu \rangle^* \varphi_A$ совпадают в $\mathfrak{M}(A)$. Следовательно, в модели $\mathfrak{M}(A)$ мы можем в качестве объектов a_ν взять те же объекты, что и в модели \mathfrak{M} . Но это значит, что $A^{\varphi_A}(\mathfrak{A})$ есть значение истинности отношения $a \langle a_\nu : \nu \in J \rangle$ в $\mathfrak{M}(A)$, т.е. $A^{\varphi_A}(\mathfrak{A}) = a \langle a_\nu : \nu \in J \rangle \wedge A = A^\varphi(\mathfrak{A}) \wedge A$.

Следовательно, утверждение имеет место и для указанного высказывания \mathfrak{A} . Но учитывая то, что уже известно для логических операций и кванторов, мы видим, что доказанное утверждение переносится на все высказывания ранга ξ . Значит, для любого высказывания \mathfrak{A} имеет место $A^{\varphi_A}(\mathfrak{A}) = A^\varphi(\mathfrak{A}) \wedge A$.

5. Тавтологичность выводимых высказываний

Вернемся теперь к проверке тавтологичности выводимых высказываний. Пусть \mathcal{M} — некоторое множество высказываний, а φ — некоторая интерпретация всех высказываний $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$

в некоторой нормальной модели \mathfrak{M} . Тогда мы будем через $A^\varphi(\mu)$ обозначать конъюнкцию элементов $A^\varphi(\mathfrak{M})$ по всем $\mathfrak{M} \in \mathcal{M}$.

Пусть $\mu \vdash \mathfrak{M}$ — некоторая секвенция. Пусть φ — некоторая ее интерпретация в нормальной модели \mathfrak{M} . Будем говорить, что φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{M}$, если $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{M})$.

Мы будем говорить, что некоторое правило вывода сохраняет некоторое свойство секвенций, если всякое его применение, имеющее над чертой только секвенции с данным свойством, имеет и под чертой секвенцию с данным свойством. Иначе можно это выразить и так: если секвенция под чертой в некотором применении данного правила не имеет этого свойства, то и некоторая имеющаяся над чертой секвенция не имеет данного свойства.

Непосредственно из определения вытекает, что если некоторое свойство сохраняется всеми правилами вывода, то класс всех секвенций, имеющих данное свойство, замкнут относительно вывода.

Теперь проверим, что правила вывода сохраняют следующее свойство: любая интерпретация в любой нормальной модели данной секвенции удовлетворяет этой секвенции.

Пусть у нас имеется применение правила \circ , имеющее вид

$$\frac{\forall \mathfrak{B} \in \mathcal{V} : \mu \vdash \mathfrak{B} ; \nu \vdash \mathfrak{M}}{\mu \vdash \mathfrak{M}}$$

Предположим, что у нас имеется нормальная модель \mathfrak{M} и интерпретация φ секвенции $\mu \vdash \mathfrak{M}$ в \mathfrak{M} . Так как все элементарные типы констант, имеющихся над чертой, встречаются и под чертой как типы некоторых констант, то модель \mathfrak{M} может быть расширена и интерпретация φ продолжена так, чтобы они стали моделью и интерпретацией всех секвенций над чертой. Поэтому без ограничения общности можем предполагать, что \mathfrak{M} и φ являются таковыми уже с самого начала. Если φ удовлетворяет всем секвенциям над чертой, то для каждого $\mathfrak{B} \in \mathcal{V}$ имеет место $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$. Кроме того имеет место $A^\varphi(\nu) \leq A^\varphi(\mathfrak{M})$. Но тогда $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\nu) \leq A^\varphi(\mathfrak{M})$ и интерпретация удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{M}$. Поэтому правило \circ сохраняет указанное свойство.

Пусть у нас теперь имеется применение правила I.a),

имеющее вид

$$\frac{\forall i \in J: \mu \vdash \mathfrak{A}_i}{\mu \vdash \bigwedge_i \mathfrak{A}_i}$$

Предположим, что у нас имеется нормальная модель \mathfrak{M} и интерпретация φ секвенции $\mu \vdash \bigwedge_i \mathfrak{A}_i$ в \mathfrak{M} . Тогда φ является и интерпретацией для всех секвенций $\mu \vdash \mathfrak{A}_i, i \in J$, (или её можно продолжить до такой на их приложения). Если φ удовлетворяет всем этим секвенциям, то для каждого $i \in J$ имеет место $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{A}_i)$. Но тогда $A^\varphi(\mu) \leq \bigwedge_i A^\varphi(\mathfrak{A}_i) = A^\varphi(\bigwedge_i \mathfrak{A}_i)$ и следовательно, φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \bigwedge_i \mathfrak{A}_i$. Значит, правило 1а) сохраняет указанное свойство. Отметим, что этому не мешает и обстоятельство, что J может быть пустым. В этом случае над чертой нет секвенций.

Пусть имеется применение правила 1.б), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \bigwedge_i \mathfrak{A}_i}{\mu \vdash \mathfrak{A}_j}$$

Пусть имеется нормальная модель \mathfrak{M} и интерпретация φ секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}_j$ в \mathfrak{M} . Как и при правиле 0. мы можем без ограничения общности предполагать, что \mathfrak{M} и φ являются соответственно моделью и интерпретацией секвенции $\mu \vdash \bigwedge_i \mathfrak{A}_i$. Если φ удовлетворяет этой секвенции, то $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\bigwedge_i \mathfrak{A}_i) = \bigwedge_i A^\varphi(\mathfrak{A}_i) \leq A^\varphi(\mathfrak{A}_j)$ и, следовательно, φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}_j$. Значит, правило 1б) сохраняет указанное свойство.

Рассмотрим некоторое применение правила 2а), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \mathfrak{A}_{i_0}}{\mu \vdash \bigvee_i \mathfrak{A}_i}$$

Пусть φ - интерпретация секвенции $\mu \vdash \bigvee_i \mathfrak{A}_i$ в некоторой нормальной модели \mathfrak{M} . Тогда φ является и интерпретацией секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}_{i_0}$. Пусть φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}_{i_0}$. Тогда $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{A}_{i_0}) \leq \bigvee_i A^\varphi(\mathfrak{A}_i) = A^\varphi(\bigvee_i \mathfrak{A}_i)$. Получим, что φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \bigvee_i \mathfrak{A}_i$. Итак, правило 2а) сохраняет указанное свойство.

Рассмотрим некоторое применение правила 2б), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \bigvee_i \mathfrak{A}_i; \forall i \in J: \mu \cup \{\mathfrak{A}_i\} \vdash \mathfrak{B}}{\mu \vdash \mathfrak{B}}$$

Пусть \mathfrak{M} - нормальная модель и пусть φ - интерпретация секвенции $\mu \vdash \mathfrak{B}$ в \mathfrak{M} . Как и выше, мы можем без ограничения общности предполагать, что φ является интерпретацией всех секвенций над чертой. Если φ

удовлетворяет всем этим секвенциям, то при каждом $\alpha \in J$ имеет место $A^\varphi(\mu \cup \{\alpha\}) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$, т.е. $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$. Следовательно, $A^\varphi(\alpha) \leq A^\varphi(\mu) \rightarrow A^\varphi(\mathfrak{B})$. Из этого вытекает, что $A^\varphi(\bigvee_{\alpha \in J} \alpha) = \bigvee_{\alpha \in J} A^\varphi(\alpha) \leq A^\varphi(\mu) \rightarrow A^\varphi(\mathfrak{B})$. Отметим, что в случае пустого множества J это выполняется тривиально, так как $A^\varphi(\bigvee_{\alpha \in J} \alpha)$ равняется в этом случае наименьшему элементу нашей псевдобулевой алгебры.

Из полученного неравенства вытекает $A^\varphi(\bigvee_{\alpha \in J} \alpha) \wedge A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$. Но так как φ , по предположению, удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \bigvee_{\alpha \in J} \alpha$, то $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\bigvee_{\alpha \in J} \alpha)$ и, следовательно, $A^\varphi(\bigvee_{\alpha \in J} \alpha) \wedge A^\varphi(\mu) = A^\varphi(\mu)$. Поэтому $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$, т.е. φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{B}$. Значит, правило 2б) сохраняет указанное свойство.

Пусть теперь у нас имеется некоторое применение правила 3а), имеющее вид

$$\frac{\mu \cup \{\alpha\} \vdash \mathfrak{B}}{\mu \vdash \alpha \rightarrow \mathfrak{B}}$$

Пусть φ есть некоторая интерпретация секвенции $\mu \vdash \alpha \rightarrow \mathfrak{B}$ в некоторой нормальной модели. Тогда можно предполагать, что φ является и интерпретацией секвенции $\mu \cup \{\alpha\} \vdash \mathfrak{B}$. Если φ удовлетворяет этой секвенции, то $A^\varphi(\mu \cup \{\alpha\}) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$, т.е. $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$. Но тогда $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\alpha) \rightarrow A^\varphi(\mathfrak{B}) = A^\varphi(\alpha \rightarrow \mathfrak{B})$ и, следовательно, φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \alpha \rightarrow \mathfrak{B}$. Следовательно, правило 3а) сохраняет указанное свойство.

Рассмотрим теперь произвольное применение правила 3б), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \alpha; \mu \vdash \alpha \rightarrow \mathfrak{B}}{\mu \vdash \mathfrak{B}}$$

Пусть φ есть интерпретация секвенции $\mu \vdash \mathfrak{B}$ в некоторой нормальной модели. Без ограничения общности можно предполагать, что φ является и интерпретацией обеих секвенций над чертой. Если φ им удовлетворяет, то $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\alpha)$ и $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\alpha \rightarrow \mathfrak{B}) = A^\varphi(\alpha) \rightarrow A^\varphi(\mathfrak{B})$. Но в этом случае $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\alpha) \wedge [A^\varphi(\alpha) \rightarrow A^\varphi(\mathfrak{B})] \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$ и, следовательно, φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{B}$. Следовательно, правило 3б) сохраняет указанное свойство.

Рассмотрим теперь произвольное применение правила 4а), имеющее вид

$$\frac{\mu \cup \{\alpha\} \vdash \beta, \mu \cup \{\alpha\} \vdash \neg \beta}{\mu \vdash \neg \alpha}$$

Пусть \mathfrak{M} — нормальная модель и φ — интерпретация секвенции $\mu \vdash \neg \alpha$ в \mathfrak{M} . Без ограничения общности можно предполагать, что φ является интерпретацией и для обеих секвенций над чертой. Если φ им обоим удовлетворяет, то $A^\varphi(\mu \cup \{\alpha\}) \leq A^\varphi(\beta)$ и $A^\varphi(\mu \cup \{\alpha\}) \leq A^\varphi(\neg \beta) = \neg A^\varphi(\beta)$. Но в этом случае $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha) = A^\varphi(\mu \cup \{\alpha\}) \leq A^\varphi(\beta) \wedge \neg A^\varphi(\beta)$. Так как правая сторона неравенства есть наименьший элемент псевдобоулевой алгебры, то таким же является и левая сторона. Но если $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha)$ есть наименьший элемент псевдобоулевой алгебры, то, по определению операции отрицания, имеет место $A^\varphi(\mu) \leq \neg A^\varphi(\alpha) = A^\varphi(\neg \alpha)$ и, следовательно, φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \neg \alpha$. Значит, правило 4а) сохраняет указанное свойство.

Пусть теперь у нас имеется некоторое применение правила 4б), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \neg \alpha}{\mu \cup \{\alpha\} \vdash \beta}$$

Пусть \mathfrak{M} — нормальная модель и φ — интерпретация секвенции $\mu \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ в \mathfrak{M} . Можно предполагать, что φ является и интерпретацией секвенции $\mu \vdash \neg \alpha$. Пусть φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \neg \alpha$. Тогда $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\neg \alpha) = \neg A^\varphi(\alpha)$. Но в этом случае $A^\varphi(\mu \cup \{\alpha\}) = A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha)$ является наименьшим элементом нашей псевдобоулевой алгебры и неравенство $A^\varphi(\mu \cup \{\alpha\}) \leq A^\varphi(\beta)$ имеет место, т.е. φ удовлетворяет секвенции $\mu \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. Значит, правило 4б) сохраняет указанное свойство.

Пусть у нас имеется применение правила 5а), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \alpha'}{\mu \vdash \forall \langle x'_i : i \in J \rangle \alpha'}$$

где высказывание α' получено из формулы α заменой переменных $x'_i, i \in J$, константами a'_i , не содержащимися в μ и α и отличными друг от друга. Пусть теперь \mathfrak{M} — нормальная модель и φ — интерпретация секвенции $\mu \vdash \forall \langle x'_i : i \in J \rangle \alpha'$ в \mathfrak{M} . Если класс семейств $\langle a'_i : i \in J \rangle$ где $a'_i \in O(a''_i)$, а a''_i — тип

переменной x'_ν , пуст, то $A^\varphi(\forall \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{A})$ является наибольшим элементом нашей псевдобулевой алгебры и φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \forall \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{A}$. Рассмотрим случай, когда класс семейств $\langle a_\nu : \nu \in J \rangle$, $a_\nu \in \mathcal{O}(a''_\nu)$, не пуст. Если для каждого такого семейства объектов имеет место $A^\varphi(\mu) \leq \bigwedge_\nu a''_\nu \rightarrow A^{\varphi'}(\mathfrak{A}')$, где φ' есть такое продолжение интерпретации φ , что $\varphi'(a'_\nu) = a_\nu$, рассматриваемое как интерпретация в модели \mathfrak{M}' , полученной из \mathfrak{M} сужением объектами a_ν , $\nu \in J$, то

$$A^\varphi(\mu) \leq \bigwedge_{\nu} (\bigwedge_{\nu} \varphi'(a'_\nu) \rightarrow A^{\varphi'}(\mathfrak{A}')) = A^\varphi(\forall \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{A})$$

и φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \forall \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{A}$.

А если, наоборот, существует такое семейство объектов $\langle a_\nu : \nu \in J \rangle$, что $A^\varphi(\mu) \leq \bigwedge_\nu a''_\nu \rightarrow A^{\varphi'}(\mathfrak{A}')$ не имеет места, то не имеет места и $A^\varphi(\mu) \wedge (\bigwedge_\nu a''_\nu) \leq A^{\varphi'}(\mathfrak{A}')$. Но $A^\varphi(\mu) \wedge (\bigwedge_\nu a''_\nu)$ есть проекция элемента $A^\varphi(\mu)$ в \mathfrak{M}' и поэтому совпадает с $A^{\varphi'}(\mu)$. Следовательно, в этом случае $A^{\varphi'}(\mu) \leq A^{\varphi'}(\mathfrak{A}')$ не имеет места и φ' не удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}'$. Отметим, что если в приложении секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}'$ имеются некоторые добавочные константы, то φ' надо продолжить и на эти константы. Это возможно, так как для каждой такой константы элементарного типа или существует константа того же типа под чертой, или эта константа принадлежит типу a''_ν , но $\mathcal{O}(a''_\nu)$,

по предположению, не пуст.

Итак, правило 5а) сохраняет указанное свойство.

Пусть у нас имеется применение правила 5б), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \forall \langle x'_\nu : \nu \in J \rangle \mathfrak{A}}{\mu \vdash \mathfrak{A}'}$$

где \mathfrak{A}' получено из формулы \mathfrak{A} подстановкой термов a'_ν , не содержащих переменных, вместо x'_ν , $\nu \in J$. Пусть $\langle b'_\nu : \nu \in J \rangle$ - семейство констант, попарно различных и не содержащихся в μ и \mathfrak{A} , имеющих типы переменных x'_ν , $\nu \in J$. Пусть \mathfrak{A}'' - высказывание, полученное из формулы \mathfrak{A} заменой переменных x'_ν , $\nu \in J$, константами b'_ν .

Предположим, что у нас имеется нормальная модель \mathfrak{M} и интерпретация φ секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}'$ в \mathfrak{M} . Как и раньше, можно предполагать, что φ является интерпретацией секвенции над чертой. Так как все константы термов a'_ν , $\nu \in J$, принадлежат приложению секвенции $\mu \vdash \mathfrak{A}'$, то

φ является и интерпретацией для каждого термина $a'_i, i \in J$, даже если a'_i в \mathfrak{M}' явно не встречается. Как известно, существует такое продолжение φ' интерпретации φ , что $A^\varphi(\mathfrak{M}') = A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'')$. Учитывая, что $\bigwedge_i (\varphi'(b'_i))^*$ есть наибольший элемент псевдобоулевой алгебры, получим, что $A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'') = \bigwedge_i \varphi'(b'_i) \rightarrow A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'') \geq A^{\varphi'}(\forall \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M}')$. Значит, $A^\varphi(\forall \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M}) \leq A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'')$. Если φ удовлетворяет секвенции над чертой, то $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\forall \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M}) \leq A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'')$. Значит, φ удовлетворяет секвенции под чертой. Итак, правило 5б) сохраняет указанное свойство.

Пусть имеется применение правила 6а), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M}'}{\mu \vdash \exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M}}$$

где \mathfrak{M}' получено из \mathfrak{M} таким же образом, как в предыдущем случае, т.е. подстановкой термов a'_i вместо $x'_i, i \in J$. Пусть \mathfrak{M} - нормальная модель и φ - интерпретация секвенции $\mu \vdash \exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M}$ в \mathfrak{M} . Как и раньше, можно предполагать, что φ является интерпретацией для $\mu \vdash \mathfrak{M}'$, а также и для всех термов $a'_i, i \in J$, независимо от их явного существования в \mathfrak{M}' . Пусть семейство констант $\langle b'_i : i \in J \rangle$, высказывание \mathfrak{M}'' и интерпретация φ' также же, как в предыдущем случае. Опять $A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'') = A^\varphi(\mathfrak{M}')$. Если φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{M}'$, то $A^\varphi(\mu) \leq A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'')$, значит $A^\varphi(\mu) \leq A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'')$. Так как $\bigwedge_i (\varphi'(b'_i))^*$ есть наибольший элемент нашей псевдобоулевой алгебры, то φ' является интерпретацией высказывания \mathfrak{M}'' в \mathfrak{M} , а $A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'')$ является дизъюнктивным членом в выражении, определяющем значение $A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M})$. Следовательно, $A^{\varphi'}(\mathfrak{M}'') \leq A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M})$. Значит, $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M})$ и φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M}$. Итак, правило 6а) сохраняет указанное свойство.

Пусть имеется некоторое применение правила 6б), имеющее вид

$$\frac{\mu \vdash \exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{M}; \mu \cup \{a'_i\} \vdash \mathfrak{M}'}{\mu \vdash \mathfrak{M}}$$

где высказывание \mathfrak{M}' получено из формулы \mathfrak{M} заменой переменных $x_i, i \in J$, попарно различными константами a'_i , не содержащимися в μ, \mathfrak{M} и \mathfrak{M}' .

Пусть \mathfrak{M} - нормальная модель и φ - интерпретация секвенции $\mu \vdash \mathfrak{B}$ в \mathfrak{M} . Как и раньше, мы можем без ограничения общности предполагать, что φ является интерпретацией и для секвенции $\mu \vdash \exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A}$, но, может быть, не для секвенции $\mu \cup \{\mathfrak{A}'\} \vdash \mathfrak{B}$, так как \mathfrak{M}' может содержать константы таких элементарных типов, которых в роли типов константы под чертой нет. Предположим, что φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A}$, т.е.

$$A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A})$$

Если класс семейств $\langle a_i : i \in J \rangle$, где $a_i \in O(a''_i)$, а a''_i - тип переменной x'_i , пуст, то значение $A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A})$ является наименьшим элементом нашей псевдобулевой алгебры, а так как $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A})$, то таким же является и $A^\varphi(\mu)$. В этом случае $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$ и φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{B}$.

Пусть теперь класс семейств $\langle a_i : i \in J \rangle$, $a_i \in O(a''_i)$, не пуст. Для каждого такого семейства получим такое продолжение φ' интерпретации φ , что $\varphi'(a''_i) = a_i$, где φ' рассматривается как интерпретация в сужении \mathfrak{M}' модели \mathfrak{M} объектами $a_i, i \in J$. Если при каждом таком семействе $\langle a_i : i \in J \rangle, a_i \in O(a''_i)$, имеет место $A^\varphi(\mu) \wedge A^{\varphi'}(\mathfrak{A}') \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$, то $A^{\varphi'}(\mathfrak{A}') \leq A^\varphi(\mu) \rightarrow A^\varphi(\mathfrak{B})$. Но тогда $A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A}) = \bigvee_{\varphi'} A^{\varphi'}(\mathfrak{A}') \leq A^\varphi(\mu) \rightarrow A^\varphi(\mathfrak{B})$ и $A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A}) \wedge A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$. Но так как $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A})$, то $A^\varphi(\exists \langle x'_i : i \in J \rangle \mathfrak{A}) \wedge A^\varphi(\mu) = A^\varphi(\mu)$ и, следовательно, $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$. Значит, в этом случае φ удовлетворяет секвенции $\mu \vdash \mathfrak{B}$.

Если же, наоборот, существует семейство $\langle a_i : i \in J \rangle, a_i \in O(a''_i)$, такое, что $A^\varphi(\mu) \wedge A^{\varphi'}(\mathfrak{A}') \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$ не имеет места, то $A^\varphi(\mu) \wedge A^{\varphi'}(\mathfrak{A}') \wedge \wedge (\wedge_i a''_i) \leq A^\varphi(\mathfrak{B}) \wedge \wedge (\wedge_i a''_i)$ тоже не имеет места, так как прибавленный конъюнктивный член $\wedge_i a''_i$ на левой стороне больше или равен $A^{\varphi'}(\mathfrak{A}')$. Но $A^\varphi(\mu) \wedge \wedge (\wedge_i a''_i)$ и $A^\varphi(\mathfrak{B}) \wedge \wedge (\wedge_i a''_i)$ являются проекциями элементов $A^\varphi(\mu)$ и $A^\varphi(\mathfrak{B})$ в \mathfrak{M}' и поэтому равняются соответственно $A^{\varphi'}(\mu)$ и $A^{\varphi'}(\mathfrak{B})$. Поэтому $A^\varphi(\mu) \wedge A^{\varphi'}(\mathfrak{A}') \leq A^\varphi(\mathfrak{B})$ не имеет места в модели \mathfrak{M}' и интерпретация φ' не удовлетворяет секвенции $\mu \cup \{\mathfrak{A}'\} \vdash \mathfrak{B}$. Как и в случае правила 5 а), φ' про-

должается на приложение этой секвенции.

Итак, мы получили, что правило 6 б) сохраняет указанное свойство.

Наконец, пусть у нас имеется применение правила 7, имеющее вид

$$\frac{\forall \iota \in J: \mu \cup \{a'_\iota\} \vdash \mathfrak{A}'_\iota; \mu \cup \{b'_\iota\} \vdash \mathfrak{A}'_\iota}{\mu \cup \{ \langle \rho \rangle \langle x'_\eta: \eta \in J \rangle \langle a'_\iota: \iota \in J, c'_\xi: \xi \in X \rangle \} \vdash \vdash \langle \rho \rangle \langle x'_\eta: \eta \in J \rangle \langle b'_\iota: \iota \in J, c'_\xi: \xi \in X \rangle,}$$

где при каждом $\iota \in J$ высказывания \mathfrak{A}'_ι и \mathfrak{B}'_ι получены из \mathfrak{A}_ι и \mathfrak{B}_ι соответственно заменой переменных x'_η , $\eta \in J$, константами a'_η , отличными друг от друга и не содержащимися в высказываниях под чертой. Для краткости будем обозначать два высказывания под чертой, начинающиеся с ρ , через \mathfrak{P}_1 и \mathfrak{P}_2 соответственно.

Пусть теперь \mathfrak{M} — нормальная модель и φ — интерпретация секвенции $\mu \cup \{ \rho \} \vdash \mathfrak{P}_2$. Предположим, что φ не удовлетворяет этой секвенции. Это значит, что $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\mathfrak{P}_1) \not\subseteq A^\varphi(\mathfrak{P}_2)$ не имеет места. Но в этом случае не имеет места и $A^\varphi(\mu) \subseteq A^\varphi(\mathfrak{P}_1) \rightarrow A^\varphi(\mathfrak{P}_2)$, а также $A^\varphi(\mu) \subseteq A^\varphi(\mathfrak{P}_1) \leftrightarrow A^\varphi(\mathfrak{P}_2)$. Правая сторона последнего неравенства равна элементу $E = \varphi(\rho) \langle a_\iota: \iota \in J, c_\xi: \xi \in X \rangle^* \leftrightarrow \varphi(\rho) \langle b_\iota: \iota \in J, c_\xi: \xi \in X \rangle^*$

где a_ι (соответственно b_ι) при $\iota \in J$ есть тот объект, при котором $a_\iota \langle x'_\eta: \eta \in J \rangle^*$ (соответственно $b_\iota \langle x'_\eta: \eta \in J \rangle^*$) совпадает с \mathfrak{A}'_ι (соответственно с \mathfrak{B}'_ι), а $c_\xi = \varphi(c'_\xi)$ при $\xi \in X$. Но элемент $F = \bigwedge_{\iota \in J} a_\iota \neq b_\iota \wedge \bigwedge_{\eta \in J} \langle a_\iota \langle x'_\eta: \eta \in J \rangle^* \leftrightarrow b_\iota \langle x'_\eta: \eta \in J \rangle^* \rangle \leq E$. Следовательно, $A^\varphi(\mu) \subseteq F$ тоже не имеет места. Следовательно, должны существовать такие $\iota \in J$ и семейство $\langle a'_\eta: \eta \in J \rangle$ что $A^\varphi(\mu) \subseteq a_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^* \leftrightarrow b_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^*$ не имеет места. В этом случае либо $A^\varphi(\mu) \subseteq a_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^* \rightarrow b_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^*$ либо $A^\varphi(\mu) \subseteq b_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^* \rightarrow a_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^*$ не имеет места. Следовательно, одно из неравенств, или $A^\varphi(\mu) \wedge a_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^* \leq b_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^*$, или $A^\varphi(\mu) \wedge b_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^* \leq a_\iota \langle a'_\eta: \eta \in J \rangle^*$ не имеет места. Пусть \mathfrak{M}' — модель, полученная из \mathfrak{M} сужением объектами a'_η , $\eta \in J$, а φ' — интерпретация в модели \mathfrak{M}' , являющаяся таким продолжением интерпретаций φ .

что $\varphi'(a'_i) = \tau_i$ при $i \in J_c$. Тогда из определения объектов a_i и b_i следует, что имеет место равенства $A^\varphi(\alpha'_i) = a_i \langle a'_i : i \in J_c \rangle^*$ и $A^\varphi(\alpha'_i) = \tau_i \langle a'_i : i \in J_c \rangle^*$. Следовательно, одно из неравенств $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha'_i) \leq A^\varphi(\alpha'_i)$ или $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha'_i) \leq A^\varphi(\alpha'_i)$ не имеет места. Если в этом неравенстве $A^\varphi(\mu)$ заменить на $A^\varphi(\mu) \wedge (\bigwedge_{i \in J_c} a'_i)^*$, то это не меняет положения, так как $A^\varphi(\alpha'_i)$ и $A^\varphi(\alpha'_i)$ оба меньше чем $\bigwedge_{i \in J_c} a'_i$. Но $A^\varphi(\mu) \wedge (\bigwedge_{i \in J_c} a'_i)^*$ есть проекция элемента $A^\varphi(\mu)$ в \mathfrak{M}' и поэтому равняется $A^\varphi(\mu)$. Но это значит, что либо $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha'_i) \leq A^\varphi(\alpha'_i)$, либо $A^\varphi(\mu) \wedge A^\varphi(\alpha'_i) \leq A^\varphi(\alpha'_i)$ не имеет места, т.е. φ' не удовлетворяет или секвенции $\mu \cup \{\alpha'_i\} \vdash \alpha'_i$, или секвенции $\mu \cup \{\alpha'_i\} \vdash \alpha'_i$. Опять φ' может быть продолжена и на приложение этой секвенции. Итак, правило 7. сохраняет указанное свойство.

Таким образом, мы доказали, что все правила вывода сохраняют указанное свойство, т.е. класс всех секвенций с указанным свойством замкнут относительно вывода. Кроме того, этот класс содержит все секвенции вида $\mu \vdash \alpha$, где $\alpha \in \mu$. Следовательно, любая выводимая секвенция имеет данное свойство, т.е. если $\mu \vdash \alpha$ выводима, то при любой интерпретации φ этой секвенции в некоторой нормальной модели имеет место $A^\varphi(\mu) \leq A^\varphi(\alpha)$.

Наконец, если α - выводимое высказывание, то, по определению, $\vdash \alpha$ с пустым приложением - выводимая секвенция. Следовательно, при любой интерпретации φ высказывания α в любой нормальной модели \mathfrak{M} имеет место $A^\varphi(\emptyset) \leq A^\varphi(\alpha)$. А так как $A^\varphi(\emptyset)$ - наибольший элемент данной псевдобулевой алгебры, то $A^\varphi(\alpha)$ такой же. Итак, α тавтологично. Всякое выводимое высказывание тавтологично. Обратное пока открыто.

Литература

1. Таутс А., Связь обобщенных моделей Бета с топологическими псевдобулевыми алгебрами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 3-8.

2. T a u t s A., Семантическая интерпретация формул в обобщённых моделях Бета и в псевдобулевых алгебрах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972. 305, 9-20.
3. B e r t o l i n i, F., Kripke models and many-valued logics II. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1970, 44, 355-381.

Поступило
7 II 1973

Pseudo-Boole'i algebrate tautoloogiliste
valemite formaalne tuletus

A. Tauts

R e s ü m e e

Artiklis esitatakse deduktiivne süsteem lõpmatute valemite jaoks. Tõestatakse, et kõik selle süsteemi abil tuletatud valemid on tautoloogilised, s.t. nende interpreteerimine pseudo-Boole'i algebrate abil artiklis [2] näidatud viisil annab alati antud pseudo-Boole'i algebra maksimaalse elemendi.

Die formale Deduktion der tautologischen
Formeln in pseudo-Booleschen Algebren

A.Tauts

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dem Artikel wird ein deduktives System für unendliche Formeln vorgelegt. Es wird bewiesen, daß alle durch dieses System ableitbaren Formeln tautologisch sind, d.h. ihr Interpretieren mittels pseudo-Booleschen Algebren auf die in dem Artikel [2] gezeigte Weise gibt immer das maximale Element der gegebenen pseudo-Booleschen Algebra.

ОДНОСТОРОННИЕ ИДЕАЛЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ

ПОЛИКАТЕГОРИЙ

Э. Реди

Кафедра алгебры и геометрии

Рассматриваемые в настоящей работе поликатегории типа \mathcal{R} являются обобщениями полугрупп, идущими в другом направлении, чем системы Менгера [13]. Идея пользования бинарных операций для исследования суперпозиций n -местных функций принадлежит Мальцеву [7]. Операции π^1, π^2, \dots этой статьи в частном случае $J = \{1\}$ совпадают операциями τ^1, τ^2, \dots Белоусова [2]. Суперпозиция Артамонова [1] также близка к суперпозиции, получающейся при помощи операций π^1, π^2, \dots .

Идеалы полугрупп преобразований [3], идеалы симметрических операторов [9], а также идеалы \sim -полугрупп ([11], [12]) и идеалы систем Менгера ([4]) уже исследовались.

После приведения основных понятий исследуются односторонние идеалы слабо полных полиграфов. Далее исследуются сперва левые, затем строгие правые и правые идеалы симметрических поликатегорий типа \mathcal{R} над слабо полным полиграфом.

Левым идеалам симметрической поликатегории соответствуют семейства множеств функций со своеобразным свойством включения. Правым и строгим правым идеалам симметрической поликатегории соответствуют системы эквивалентностей, замкнутые относительно надэквивалентностей специальных прямых произведений эквивалентностей системы. Установлено, в каких условиях такие соответствия являются взаимно однозначными.

Можно считать, что все односторонние идеалы симметрических поликатегорий над слабо полным полиграфом найдены.

1. Основные понятия

Пусть (J, J) — полиграф (понятие введено Я.В.Хионом [10]) над непустым множеством J , т.е. $\phi \neq J \subseteq J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J^n$ (J —

объединение декартовых степеней множества J). Элементы подмножества $J^m = J \cap J^{m+1}$ обозначаются через $(i_1, \dots, i_m; j)$ и называются m -мерными гранями для J . При этом набор (i_1, \dots, i_m) называется началом этой грани, а элемент j — её концом.

Определим частичные бинарные операции π^1, π^2, \dots в полном полиграфе (J, \bar{J}) следующим образом: если вторым сомножителем является ρ -мерная грань $(j_1, \dots, j_\rho; k)$ ($\rho > 0$), то применены операции π^1, \dots, π^ρ , если только первый сомножитель имеет концом j_1, \dots, j_ρ соответственно, и

$$(i_1, \dots, i_m; j_u) \pi^u(j_1, \dots, j_\rho; k) = (j_1, \dots, j_{u-1}, i_1, \dots, i_m, j_{u+1}, \dots, j_\rho; k). \quad (1)$$

Мы допускаем и случай $m = 0$, т.е.

$$(j_u) \pi^u(j_1, \dots, j_\rho; k) = (j_1, \dots, j_{u-1}, j_{u+1}, \dots, j_\rho; k).$$

Полиграф (J, \bar{J}) назовем π -замкнутым полиграфом, если для любых $u \leq \rho$, $(i_1, \dots, i_m; j_u)$, $(j_1, \dots, j_\rho; k) \in \bar{J}$ их произведение $(j_1, \dots, j_{u-1}, i_1, \dots, i_m, j_{u+1}, \dots, j_\rho; k) \in \bar{J}$.

Замечание. Если $\bar{J} = J \subseteq J^+$, то получаем обычный граф, для которого π -замкнутость совпадает с транзитивностью ([8]).

В дальнейшем предполагаем, что все рассматриваемые полиграфы π -замкнуты, хотя будем называть их просто полиграфами.

Поликатегорией типа \mathcal{K} над полиграфом (J, \bar{J}) называется набор

$$A = (J, \bar{J}, \mathcal{A}_{i_1, \dots, i_m}^k, \pi),$$

если

I. Каждой грани $(i_1, \dots, i_m; j) \in \bar{J}$ взаимно однозначно сопоставлено непустое множество $\mathcal{A}_{i_1, \dots, i_m}^j$ (\mathcal{A}^j — 0-мерной грани (j)).

II. Для всякого $k \in \mathcal{A}_{j_1, \dots, j_\rho}^k$ и всяких $u \leq \rho$, $a \in \mathcal{A}_{i_1, \dots, i_m}^{j_u}$ однозначно определено произведение

$$a \pi^u k \in \mathcal{A}_{j_1, \dots, j_{u-1}, i_1, \dots, i_m, j_{u+1}, \dots, j_\rho}^k.$$

III. При $u < v \leq \rho$ для всяких $a \in \mathcal{A}_{i_1, \dots, i_m}^{j_u}$, $k \in \mathcal{A}_{j_1, \dots, j_\rho}^k$, $s \in \mathcal{A}_{i_1, \dots, i_m}^{j_v}$ выполняется равенство коммутатив-

ности¹

$$u\pi^u(\nu\pi^v c) = \nu\pi^{u+v}(\pi^u c). \quad (2)$$

IV. Для любых $u \leq p, v \leq r, a \in \mathcal{A}_{i_1 \dots i_m}^{ju}, b \in \mathcal{A}_{j_1 \dots j_p}^{kv}, c \in \mathcal{A}_{k_1 \dots k_n}^l$ выполняется равенство ассоциативности

$$(\pi^u a) \pi^v c = \pi^{u+v} (b \pi^r c). \quad (3)$$

Мы назовем эти системы поликатегориями типа \mathcal{Q} , чтобы отличить их от поликатегорий, определенных Я.В. Уилоном [10], которые можно называть поликатегориями типа \mathcal{H} . Если мы говорим просто поликатегория, то понимаем под этим поликатегорию типа \mathcal{Q} .

Пример 1. Пусть даны система непустых множеств $M = (M_i; i \in J)$ и полиграф (J, J) . Для всякой грани $(i_1, \dots, i_m; j) \in J$ рассматриваем полные функции из декартова произведения $M_{i_1} \times \dots \times M_{i_m}$ в M_j . Множество всех таких функций обозначим через $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_m}^j$. Значение функции $a \in \mathcal{F}_{i_1 \dots i_m}^j$ при аргументах $x_1 \in M_{i_1}, \dots, x_m \in M_{i_m}$ обозначим через $x_1 \dots x_m a$. Для декартова произведения введем обозначение

$$M_{i_1 \dots i_m} = M_{i_1} \times \dots \times M_{i_m}.$$

Операции π^1, π^2, \dots определим следующим образом: для любых $u \leq p$ ($p > 0$), $a \in \mathcal{F}_{i_1 \dots i_m}^{ju}$, $b \in \mathcal{F}_{j_1 \dots j_p}^{kv}$ произведение $\pi^u b \in \mathcal{F}_{i_1 \dots i_m}^{ju}$ такая функция, что

$$x_1 \dots x_{m+p} (\pi^u b) = x_1 \dots x_{m-1} (x_m \dots x_{m+u} a) x_{m+u+1} \dots x_{m+p} b \quad (4)$$

для всякого набора $(x_1, \dots, x_{m+p}) \in M_{j_1 \dots j_{u-1} i_1 \dots i_m j_{u+1} \dots j_p}$.

Обозначим:

$$\mathcal{F}_J(M_i; i \in J) = (J, J, \mathcal{F}_{i_1 \dots i_m}^j, \pi).$$

Предложение 1.1. Система $\mathcal{F}_J(M_i, i \in J)$ является поликатегорией, называемой J -симметрической поликатегорией над $(M_i; i \in J)$.

Доказательство. Множества $\mathcal{F}_{i_1 \dots i_m}^j$ и операции π_i^1, π_i^2, \dots определены так, что требования I и II выполнены.

¹ Здесь и в дальнейшем будем применять обозначение $m + \nu - 1 = m \oplus \nu$. Множество \mathcal{N} натуральных чисел относительно операции \oplus является коммутативной полугруппой. На множестве $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N} \cup 0$ операция \oplus является частичной, она не определена, если 0 является вторым элементом.

Пусть $u < v \leq n$, $a \in \mathcal{P}_{i_1 \dots i_m}^{k_u}$, $b \in \mathcal{P}_{j_1 \dots j_r}^{k_v}$,
 $c \in \mathcal{P}_{k_1 \dots k_n}$ произвольные. Тогда имеем

$$\begin{aligned} & x_1 \dots x_{m \oplus r \oplus n} [b \pi^{m \oplus r} (a \pi^u c)] = \\ & = x_1 \dots x_{m \oplus v - 2} (x_{m \oplus v} \dots x_{m \oplus v + r - 1} b) x_{m \oplus v + r} \dots x_{m \oplus r \oplus n} (a \pi^u c) = \\ & = x_1 \dots x_{u-1} (x_u \dots x_{u+m} a) x_{u+m} \dots x_{m \oplus v - 2} (x_{m \oplus v} \dots x_{m \oplus v + r - 1} b) x_{m \oplus v + r} \dots x_{m \oplus r \oplus n} c \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & x_1 \dots x_{m \oplus r \oplus n} [a \pi^u (b \pi^v c)] = \\ & = x_1 \dots x_{u-1} (x_u \dots x_{u+m} a) x_{u+m} \dots x_{m \oplus r \oplus n} (b \pi^v c) = \\ & = x_1 \dots x_{u-1} (x_u \dots x_{u+m} a) x_{u+m} \dots x_{m \oplus v - 2} (x_{m \oplus v} \dots x_{m \oplus v + r - 1} b) x_{m \oplus v + r} \dots x_{m \oplus r \oplus n} c \end{aligned}$$

для всякого $(x_1, \dots, x_{m \oplus r \oplus n}) \in \mathcal{M}_{k_1 \dots k_{u-1} i_1 \dots i_m k_{u+m} \dots k_{m \oplus v - 2} j_1 \dots j_r k_{m \oplus v + r} \dots k_n}$.

Значит, частичная коммутативность имеет место.

Пусть $u \leq r$, $v \leq n$, $a \in \mathcal{P}_{i_1 \dots i_m}^{k_u}$, $b \in \mathcal{P}_{j_1 \dots j_r}^{k_v}$,
 $c \in \mathcal{P}_{k_1 \dots k_n}$ произвольные. Тогда

$$\begin{aligned} & x_1 \dots x_{m \oplus r \oplus n} [a \pi^u b \pi^v c] = \\ & = x_1 \dots x_{r-1} [x_r \dots x_{r+m} (a \pi^u b)] x_{r+m} \dots x_{m \oplus r \oplus n} c = \\ & = x_1 \dots x_{r-1} [x_r \dots x_{u \oplus v - 2} (x_{u \oplus v} \dots x_{u \oplus v + m - 1} a) x_{u \oplus v + m} \dots x_{r+m} b] x_{r+m} \dots x_{m \oplus r \oplus n} c = \\ & = x_1 \dots x_{u \oplus v - 2} (x_{u \oplus v} \dots x_{u \oplus v + m - 1} a) x_{u \oplus v + m} \dots x_{m \oplus r \oplus n} (b \pi^v c) = \\ & = x_1 \dots x_{m \oplus r \oplus n} [a \pi^{u \oplus v} (b \pi^v c)] \end{aligned}$$

для всякого $(x_1, \dots, x_{m \oplus r \oplus n}) \in \mathcal{M}_{k_1 \dots k_{r-1} i_1 \dots i_m j_1 \dots j_r k_{r+m} \dots k_n}$.
 Следовательно, равенство ассоциативности тоже имеет место
 и $\mathcal{F}_j(\mathcal{M}_i; i \in \mathcal{J})$ является поликатегорией.

Пример 2. Всякий полиграф $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ можно рассматривать как тривиальную поликатегорию, если для всякой грани $(i_1, \dots, i_m; j) \in \mathcal{J}$ взять $\mathcal{A}_{i_1 \dots i_m}^j = \{(i_1, \dots, i_m; j)\}$ и операции определить по (1). Полиграфы можно считать симметрическими поликатегориями на системе одноэлементных множеств, поэтому выполнение аксиом III, IV в них следует из 1.1.

Под(поли)категорией поликатегории $A_j = (\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{A}_{i_1 \dots i_m}^j, \pi)$ называется такая поликатегория $B = (\mathcal{J}', \mathcal{J}', \mathcal{B}_{i_1 \dots i_m}^j, \bar{\pi})$,

что

- 1) $(\mathcal{J}', \mathcal{J}')$ подполиграф полиграфа $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$, т.е. $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J}$
- и $\mathcal{J}' \subseteq \mathcal{J} \cap \mathcal{J}'$,
- 2) $\mathcal{B}_{i_1 \dots i_m}^j \subseteq \mathcal{A}_{i_1 \dots i_m}^j$ при всякой $(i_1, \dots, i_m; j) \in \mathcal{J}'$,

3) для любых $u \leq p$, $a \in B_{i_1 \dots i_m}^u$, $b \in B_{j_1 \dots j_p}^k$
 $a \pi^u b \in B_{j_1 \dots j_{m-1} i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_p}^k$.

Подкатегория B называется левым идеалом поликатегории A , если для любых $u \leq p$ ($p > 0$), $a \in B_{i_1 \dots i_m}^u$, $b \in B_{j_1 \dots j_p}^k$ имеем

$$a \pi^u b \in B_{j_1 \dots j_{m-1} i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_p}^k$$

Подкатегория B называется строгим правым идеалом поликатегории A , если для любых $u \leq p$ ($p > 0$),

$a \in B_{i_1 \dots i_m}^u$, $b \in B_{j_1 \dots j_p}^k$ имеем

$$a \pi^u b \in B_{j_1 \dots j_{m-1} i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_p}^k$$

Подсистема B (выполнены условия 1) и 2)) называется правым идеалом поликатегории A , если

$$b_1 \pi^1 [b_2 \pi^2 [\dots [b_p \pi^p a] \dots]] \in B_{i_1 \dots i_m}^k$$

для любых $i_1 \in B_{i_1}^{j_1}, \dots, i_m \in B_{i_m}^{j_m}, \dots, b_p \in B_{j_p}^{i_p}, a \in B_{j_1 \dots j_p}^k$. В дальнейшем будем обозначать

$$b_1 \pi^1 \dots b_p \pi^p a = b_1 \pi^1 [b_2 \pi^2 [\dots [b_p \pi^p a] \dots]]. \quad (5)$$

Поликатегория, которая является одновременно левым и (строгим) правым идеалами поликатегории A называется (строгим) двусторонним идеалом поликатегории A .

Идеалы тривиальной поликатегории будем называть идеалами соответствующего полиграфа.

Заметим, что в произвольной поликатегории $A = (J, B_{i_1 \dots i_m}^u, \pi)$ произведению элементов соответствует произведение наборов индексов как граней полиграфа, т.е. для всяких $u \leq p$, $a \in B_{i_1 \dots i_m}^u$, $b \in B_{j_1 \dots j_p}^k$ произведению $a \pi^u b$ соответствует произведение

$$(i_1, \dots, i_m, j_m) \pi^u (j_1, \dots, j_p; k) = (j_1, \dots, j_{m-1}, i_1, \dots, i_m, j_{m+1}, \dots, j_p; k)$$

Из этого следует, что если $B = (J', J, B_{i_1 \dots i_m}^u, \pi)$ является левым, (строгим) правым или (строгим) двусторонним идеалом поликатегории $A = (J, J, B_{i_1 \dots i_m}^u, \pi)$, то (J', J') является соответственно левым, (строгим) правым или (строгим) двусторонним идеалом полиграфа (J, J) . Верно и обратное, если (J', J') является левым, (строгим) правым или (строгим) двусторонним идеалом полиграфа (J, J) , то система

$B = (J', J, B_{i_1 \dots i_m}^u, \pi)$ является соответственно левым, (строгим) правым или (строгим) двусторонним идеалом поликатегории

рии $A = (J, J, A_{i_1, \dots, i_m}, \pi)$. Значит, для того, чтобы характеризовать все идеалы какой-то поликатегории, надо найти все идеалы соответствующего полиграфа.

2. Левые идеалы слабо полных полиграфов

Нахождение всех идеалов произвольного полиграфа не является легкой задачей. Но для некоторых полиграфов идеалы получаются просто. Например, для слабо полных полиграфов. Полиграф (J, J) называется слабо полным, если $J_1 = J^2$.

Множество

$$\mathcal{P}(J, J) = \{m \in \mathcal{N}_0 \mid J_m \neq \emptyset\} \quad (6)$$

называется спектром полиграфа (J, J) .

Предложение 2.1. Слабо полный полиграф вполне определяется множеством J и спектром \mathcal{P} . Он содержит все наборы из \bar{J} , размерности которых содержатся в \mathcal{P} .

Доказательство. Пусть $J_m \neq \emptyset$, т.е. существует хотя бы одна грань $(i_1, \dots, i_m; j) \in J_m$. Тогда для любой грани $(k_1, \dots, k_m; k) \in J^{m+1}$ имеем

$$(k_1; i_1) \pi^1 \dots (k_m; i_m) \pi^m (i_1, \dots, i_m; j) \pi^1 (j; k) = (k_1, \dots, k_m; k) \in J_m.$$

Следовательно, либо $J_m = \emptyset$ и m не принадлежит $\mathcal{P}(J, J)$, либо $m \in \mathcal{P}(J, J)$ и $J_m = J^{m+1}$. Слабо полный полиграф над J со спектром \mathcal{P} обозначим через $(\mathcal{P}; J)$.

Предложение 2.2. Спектр слабо полного полиграфа является подполугруппой в (\mathcal{N}_0, \oplus) или совпадает с одним из множеств $\{0, 1\}$, \mathcal{N}_0 .

Доказательство. Пусть (J, J) слабо полный полиграф и $m, \rho (\rho > 0) \in \mathcal{P}(J, J)$. Тогда $J_m = J^{m+1}$, $J_\rho = J^{\rho+1}$ и обязательно существуют грани $(i_1, \dots, i_m; j_u)$ и $(j_1, \dots, j_\rho; k)$ ($u \leq \rho$), к которым применима операция π^u

$$(i_1, \dots, i_m; j_u) \pi^u (j_1, \dots, j_\rho; k) = (j_1, \dots, j_{u-1}, i_1, \dots, i_m, j_{u+1}, \dots, j_\rho; k), \quad (7)$$

т.е. $m \oplus \rho \in \mathcal{P}(J, J)$ и $\mathcal{P}(J, J)$ является подполугруппой (\mathcal{N}_0, \oplus) .

Спектром полиграфа $(J, J \cup J^2)$ является множество $\{0, 1\}$. По предложению 2.1 нет иных слабо полных полиграфов с этим спектром.

Пусть $0, n \in \mathcal{P}(J, J)$, $n > 1$. Тогда по (7) при $m = 0$ получаем

$$(0 \otimes (\dots \otimes (0 \otimes n) \dots)) = 2 \in \mathcal{P}(J, J).$$

А из 2, $n \in \mathcal{P}(J, J)$ следует
 $n \otimes 2 = n+1 \in \mathcal{P}(J, J)$

Следовательно, из $0, n \in \mathcal{P}(J, J), n > 1$ следует $\mathcal{P}(J, J) = \mathcal{N}_e$.

В общем $\mathcal{P}(J, J)$ не является подполугруппой (\mathcal{N}_e, \otimes) : хотя грани размерностей m и $p \neq 0$ существуют, может не оказаться граней, к которым применимы операции. Например, пусть $J = \{i, j, k\}$, $J = \{(i; k), (j; k), (i, i; k), (i, j; k), (j, i; k), (j, j; k)\}$. Спектр $\mathcal{P}(J, J) = \{1, 2\}$ не является ε -подполугруппой, так как $2 \otimes 2 = 3 \notin \{1, 2\}$.

Из предложений 2.1 и 2.2 следует, что существуют только два слабо полных полиграфа с 0-мерными гранями: $(J, J \cup J^2)$ и (J, \bar{J}) . В этих полиграфах идеалы, состоящие только из 0-мерных граней, назовем тривиальными, остальные нетривиальными.

Предложение 2.3. Все (J, J') (где $\phi \neq J' \subset J$ произвольное) являются тривиальными левыми идеалами полиграфов $(J, J \cup J^2)$ и (J, \bar{J}) .

Утверждение следует из того, что 0-мерная грань не может быть правым множителем.

Предложение 2.4. Единственным тривиальным правым идеалом полиграфов (J, \bar{J}) и $(J, J \cup J^2)$ является (J, J) . Этот идеал является даже двусторонним.

Доказательство. Из равенства

$$(i_1)\pi^1 \dots (i_m)\pi^m (i_1, \dots, i_m; k) = (k),$$

верного при любой $(i_1, \dots, i_m; k) \in J^{m+1}$ ($m > 0$), следует, что (J, J) является правым идеалом в (J, \bar{J}) . По предложению 2.3 (J, J) есть также левый идеал. Единственность следует из того, что если (i) принадлежит правому идеалу, то в силу

$$(i)\pi^1 (i; k) = (k)$$

для любого $k \in J$ правый идеал содержит все 0-мерные грани.

Для $(J, J \cup J^2)$ понятия правого (двустороннего) идеала и строгого правого (строгого двустороннего) идеала совпадают.

Предложение 2.5. Собственный строгий правый идеал полного полиграфа (J, \bar{J}) не содержит 0-мерных граней. Полный полиграф (J, \bar{J}) не имеет тривиальных строгих правых, а,

следовательно, и тривиальных строгих двусторонних идеалов.

Доказательство. Предположим, что строгий правый идеал (J', J') содержит 0-мерную грань (i) . Для произвольной грани $(i_1, \dots, i_m; j) \in \bar{J}$ и грань $(i, i_1, \dots, i_m; j) \in J$. В силу требования строгого правого идеала, из $(i) \in J'$ следует

$$(i)\pi^1(i, i_1, i_2, \dots, i_m; j) = (i_1, \dots, i_m; j) \in J'$$

Значит, $J' = \bar{J}$ и (J', J') совпадает с (J, \bar{J}) .

Для исследования левых идеалов введем обозначения: через $f(k) = \{J_p(k)\}$ обозначим множество всех (p -мерных) граней множества J , которые имеют концом элемент k , а через $J^{m+1}(k)$ обозначим множество

$$J^{m+1}(k) = J^m_x \{k\} = \{(i_1, \dots, i_m; k) \mid (i_1, \dots, i_m) \in J^m\} \quad (8)$$

Пусть задан слабо полный полиграф $(P; J)$. Выберем произвольное непустое подмножество $J^* \subseteq J$ и для каждого $k \in J^*$ по одному идеалу \mathcal{L}_k в $(P; \theta)$. Обозначим

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_k; k \in J^*\} \quad \text{и}$$

$$J(J^*, \mathcal{L}, P) = \bigcup_{k \in J^*} \bigcup_{m \in \mathcal{L}_k} J^{m+1}(k). \quad (9)$$

Теорема 2.6. Все полиграфы $(J, J(J^*, \mathcal{L}, P))$ являются левыми идеалами слабо полного полиграфа $(P; J)$. Все левые идеалы без 0-мерных граней в $(P; J)$ имеют такой вид.

Доказательство. Пусть задана пара $(J, J(J^*, \mathcal{L}, P))$. Сперва убедимся в том, что $(J, J(J^*, \mathcal{L}, P))$ содержится в (P, J) . В силу того, что $J^* \subseteq J$ и $\mathcal{L}_k \subseteq P$ при каждом $k \in J^*$, имеем

$$\bigcup_{k \in J^*} \bigcup_{m \in \mathcal{L}_k} J^{m+1}(k) \subseteq \bigcup_{k \in J} \bigcup_{m \in P} J^{m+1}(k) = \bigcup_{n \in P} J^{n+1}$$

По предложению 2.1 слабо полный полиграф $(P; J)$ состоит только из всех граней всех размерностей из P .

Покажем, что $(J, J(J^*, \mathcal{L}, P))$ является левым идеалом в $(P; J)$. Пусть $u \in P \neq c, (j_1, \dots, j_p; k) \in J^{m+1}(k) \in J(J^*, \mathcal{L}, P)$ и $(i_1, \dots, i_m; j) \in (P; J), m \in P$ произвольные. Тогда $k \in J^*$ и $j \in \mathcal{L}_k$. По предположению \mathcal{L}_k есть идеал в $(P; \theta)$, т.е. из $m \in P, r \in \mathcal{L}_k (r \neq c)$ следует $m \theta r \in \mathcal{L}_k$. Тогда по формуле (9) $(j_1, \dots, j_{p-1}, i_1, \dots, i_m, j_{p+1}, \dots, j_p; k) \in J(J^*, \mathcal{L}, P)$ и произведение

$(i_1, \dots, i_m, j) \pi^u (j_1, \dots, j_p; k) = (j_1, \dots, j_{p-1}, i_1, \dots, i_m, j_{p+1}, \dots, j_p; k)$ принадлежит $J(J^*, \mathcal{L}, P)$. В силу произвольности этих граней мы показали, что $(J, J(J^*, \mathcal{L}, P))$ удовлетворяет требованию

левого идеала.

Наоборот, пусть (J', J') произвольный левый идеал без 0-мерных граней полиграфа $(P; J)$. Положим

$$J^* = \{k \in J \mid J'(k) \neq \emptyset\}, \quad \mathcal{L}_k = P(J', J'(k)) \quad (k \in J^*).$$

Каждое $\mathcal{L}_k \neq \emptyset$ при $k \in J^*$ и является идеалом в (P, θ)

В самом деле, пусть $p \in \mathcal{L}_k, m \in P$ ($p \neq 0$) произвольные.

Тогда существует $(j_1, \dots, j_p; k) \in J'_p(k)$. По предложению

2.1 полиграф $(P; J)$ содержит при $m \in P$ все грани из J^{m+1} , в частности $(i_1, \dots, i_m; j_1)$. Тогда по условию левого идеала

$$(i_1, \dots, i_m; j_1) \pi^1(j_1, \dots, j_p; k) = (i_1, \dots, i_m; j_2, \dots, j_p; k) \in J'.$$

Следовательно, $m + p - 1 = m \in p \in \mathcal{L}_k$.

По выбору J^* и \mathcal{L}_k ($k \in J^*$) имеем

$$J' = \bigcup_{k \in J^*} J'(k) = \bigcup_{k \in J^*} \bigcup_{m \in \mathcal{L}_k} J'_m(k) \subseteq \bigcup_{k \in J^*} \bigcup_{m \in \mathcal{L}_k} J^{m+1}(k) = J(J^*, \mathcal{L}, P).$$

Убедимся и в обратном включении. Если $p \in \mathcal{L}_k, k \in J^*$

произвольные, то $J'_p(k) \neq \emptyset$ и содержит хотя бы одну грань

$(j_1, \dots, j_p; k)$. Так как (J', J') не содержит 0-мерных

граней, то $p \neq 0$. По определению слабо полный полиграф

(P, J) содержит J^2 . Следовательно, по требованию левого идеала

$$(i_1, j_1) \pi^1 \dots (i_p, j_p) \pi^p(j_1, \dots, j_p; k) = (i_1, \dots, i_p; k)$$

принадлежит $J'_p(k)$ для произвольных $i_1, \dots, i_p \in J$.

Значит, $J^{p+1}(k) \subseteq J'_p(k)$ и $J(J^*, \mathcal{L}, P) \subseteq J'$. Полученное

равенство $J' = J(J^*, \mathcal{L}, P)$ завершает доказательство теоремы.

Следствие 2.7. Все графы $(J, J \times J^*)$ (где $\emptyset \neq J^* \subseteq J$ произвольное) и только они являются левыми идеалами в (J, J^2) .

Доказательство. Спектром полиграфа (J, J^2) является

множество $\{1\}$. Поэтому $\mathcal{L}_k = \{1\}$ для любого $k \in J^*$.

Следовательно,

$$J(J^*, \mathcal{L}, \{1\}) = \bigcup_{k \in J^*} J^2(k) = \bigcup_{k \in J^*} J \times \{k\} = J \times J^*.$$

Утверждение является частным случаем теоремы 2.6.

Следствие 2.8. Нетривиальными левыми идеалами в $(J, J \cup J^2)$ являются все полиграфы $(J, J^* \cup (J \times J_1))$ (где $\emptyset \neq J_1 \subseteq J^* \subseteq J$ произвольные) и только они.

Доказательство. Спектром полиграфа $(J, J \cup J^2)$ является множество $\{0, 1\}$, а идеалами в $(\{0, 1\}, \theta)$ являются

$\{0\}$ и $\{0, 1\}$. Если считать $\mathcal{L}_k = \{0, 1\}$ при $k \in J_1$ и $\mathcal{L}_k = \{0\}$ при $k \in J^* \setminus J_1$, то $J^* \cup (J \times J_1) = J(J^* \cup \mathcal{L}, \{0, 1\})$. Следовательно, по теореме 2.6 все $(J, J^* \cup (J \times J_1))$ являются левыми идеалами в $(J, J \cup J^2)$. Пусть (J', J') произвольный левый идеал в $(J, J \cup J^2)$. Из $(j; k) \in J'$ для произвольного $i \in J$ следует $(i; j) \pi^1(j; k) = (i; k) \in J'_1$ $(j; k) \pi^1(j; k) = (k) \in J'_0$.

т.е. $J'_1 = J \times J_1$ для подходящего J_1 и $J'_0 = J^*$. Значит, произвольный левый идеал имеет указанный вид.

Лемма 2.9. Частичная полугруппа (N, \oplus) не содержит собственных левых идеалов, кроме тривиального идеала $\{0\}$.

Доказательство. Множество $\{0\}$ является левым идеалом в силу того, что операция не определена, если 0 является вторым элементом. Если левый идеал \mathcal{L} содержит $m \neq 0$, то при $m=1$ из $n \oplus 1 = n+1-1=n$ для всякого $n \in N_c$ следует $\mathcal{L} = N_c$. Если $m > 1$, то

$$0 \oplus (\dots \oplus (0 \oplus m) \dots) = 1 \in \mathcal{L}.$$

(m-1) раз

Лемма доказана.

Введем обозначения

$$\bar{J}(k) = \bigcup_{m=0}^{\infty} J^{m+1}(k), \quad \bar{J}(J_1) = \bigcup_{k \in J_1} \bar{J}(k). \quad (10)$$

Следствие 2.10. Все полиграфы $(J, J_2 \cup \bar{J}(J_1))$ (где $\varphi \neq J_1 \subseteq J$, $J_2 \subseteq J \setminus J_1$ произвольные) и только они являются нетривиальными левыми идеалами полного полиграфа (J, \bar{J}) .

Доказательство. В доказательстве теоремы 2.6 мы пользовались собственно только тем фактом, что все \mathcal{L}_k являются левыми идеалами в (P, \oplus) . Если считать $\mathcal{L}_k = N_c$ при $k \in J_1$ и $\mathcal{L}_k = \{0\}$ при $k \in J_2$ и $J^* = J_1 \cup J_2$, то $J \cup \bar{J}(J) = J(J^*, \mathcal{L}, N_c)$ и по теореме 2.6 полиграфы $(J, J_2 \cup \bar{J}(J_1))$ являются левыми идеалами в (J, \bar{J}) .

Если (J', J') произвольный левый идеал в (J, \bar{J}) , то из $(j_1, \dots, j_p, k) \in J'_p(k)$, $p \neq 0$ для любых $m \in N_c$, $i_1, \dots, i_m \in J$ следует $(i_1, \dots, i_m, j_1), (j_2), \dots, (j_p) \in J'$, откуда получим

$$(i_1, \dots, i_m, j_1) \pi^1(j_2) \pi^2 \dots (j_p) \pi^p(j_1, \dots, j_p, k) = (i_1, \dots, i_m, k) \in J'(k)$$

т.е. $J'(k) = \bar{J}(k)$ как только $\emptyset \neq J'(k) = \{k\}$. Значит, (J', J') имеет указанный вид, если считать $J_2 = \{k \in J \mid J'(k) = \{k\}\}$ и $J_1 = \{k \in J \mid J'(k) = \bar{J}(k)\}$.

3. Правные и строгие правные идеалы слабо полных полиграфов

Множество \bar{J} образует относительно операции

$$(i_1, \dots, i_m)(j_1, \dots, j_p) = (i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_p)$$

полугруппу. Если одноэлементные наборы (i) отождествить со соответствующими элементами $i \in \bar{J}$, то \bar{J} является свободной полугруппой со системой образующих \bar{J} .

Спектром $\mathcal{P}(X)$ подмножества $X \subseteq \bar{J}$ считаем спектр полиграфа (\bar{J}, X) (не обязательно π -замкнутого), т.е. $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(\bar{J}, X)$ (см. (6)).

Пусть $p \geq 2$ есть натуральное число. Непустое подмножество $X \subseteq \bar{J}$ называется p -идеалом в \bar{J} , если из $(i_1, \dots, i_m) \in X$ следует

$$(j_1) \dots (j_{u-1})(i_1, \dots, i_m)(j_{u+1}) \dots (j_p) = (j_1, \dots, j_{u-1}, i_1, \dots, i_m, j_{u+1}, \dots, j_p) \in X \quad (11)$$

для всяких $u \leq p$, $j_1, \dots, j_{u-1}, j_{u+1}, \dots, j_p \in \bar{J}$.

Пусть \mathcal{P} произвольное подмножество в \mathcal{N}_2 . Подмножество $X \subseteq \bar{J}$ называется \mathcal{P} -идеалом в \bar{J} , если оно является p -идеалом для каждого $p \geq 2$ из \mathcal{P} .

Лемма 3.1. При $2 \in \mathcal{P}$ \mathcal{P} -идеалами в \bar{J} являются все двусторонние идеалы свободной полугруппы \bar{J} и только они.

Доказательство. Пусть $X \subseteq \bar{J}$ является двусторонним идеалом свободной полугруппы и $p \geq 2$ произвольное из \mathcal{P} . Тогда для любого $(i_1, \dots, i_m) \in X$ и любых $j_1, \dots, j_{u-1}, j_{u+1}, \dots, j_p \in \bar{J}$ произведение $(j_1) \dots (j_{u-1})(i_1, \dots, i_m)(j_{u+1}) \dots (j_p) \in X$, т.е. X является p -идеалом при любом $p \geq 2$ из \mathcal{P} .

Пусть X является \mathcal{P} -идеалом и $2 \in \mathcal{P}$. Тогда из $(i_1, \dots, i_m) \in X$ по (II) следует $(j_1)(i_1, \dots, i_m) \in X$ и $(i_1, \dots, i_m)(j_2) \in X$ для любых образующих $j_1, j_2 \in \bar{J}$.

Тогда для любого $(j_1, \dots, j_p) \in \bar{J}$ имеем $(j_1, \dots, j_p)(i_1, \dots, i_m) = (j_1) \dots (j_p)(i_1, \dots, i_m) \in X$ и $(i_1, \dots, i_m)(j_1, \dots, j_p) = (i_1, \dots, i_m)(j_1) \dots (j_p) \in X$.

Для произвольного полиграфа (\bar{J}, J) обозначим через $\mathcal{X}(\bar{J}, J)$ множество всех начал граней из J т.е.

$$\mathcal{X}(\bar{J}, J) = \{(i_1, \dots, i_m) \in \bar{J} \mid \exists j \in J (i_1, \dots, i_m, j) \in J\}. \quad (12)$$

Теорема 3.2. Если X есть \mathcal{P} -идеал свободной полугруппы \bar{J} и $\mathcal{P}(X) + 1 \in \mathcal{P}$, то $(\bar{J}, X \cup J)$ является строгим правым идеалом полиграфа (\bar{J}, J) . Если (\bar{J}, J) произвольный

строгий правый идеал без нульмерных граней в $(P; J)$, то $\mathcal{K} = \mathcal{K}(J'J')$ является \mathcal{P} -идеалом в J , $\mathcal{P}(\mathcal{K})+1 \subseteq \mathcal{P}$ и $(J', J') = (J, \mathcal{K} \times J)$.

Доказательство. Пусть \mathcal{K} есть \mathcal{P} -идеал в J и $\mathcal{P}(\mathcal{K})+1 \subseteq \mathcal{P}$. Множество $\mathcal{K} \times J$ состоит только из граней, размерности которых принадлежат \mathcal{P} . По предложению 2.1 полиграф $(P; J)$ состоит из всевозможных таких граней. Значит, $(J, \mathcal{K} \times J) \in (P; J)$.

Покажем, что $(J, \mathcal{K} \times J)$ является строгим правым идеалом в $(P; J)$. Возьмем произвольные $(i_1, \dots, i_m; j_u) \in \mathcal{K} \times J$, $\rho \geq u$ и $(j_1, \dots, j_\rho; k)$ из $(P; J)$. Тогда $(i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{K}$ и $\rho \in \mathcal{P}$. Если $\rho = 1$, то $(i_1, \dots, i_m; j_1) \pi^1(j_1; k) = (i_1, \dots, i_m; k) \in \mathcal{K} \times J$.

Если $\rho \geq 2$, то по условию (11)

$$(j_1, \dots, j_{u-1}, i_1, \dots, i_m, j_{u+1}, \dots, j_\rho) \in \mathcal{K}$$

и по определению операции π^u

$$(i_1, \dots, i_m; j_u) \pi^u(j_1, \dots, j_\rho; k) = (j_1, \dots, j_{u-1}, i_1, \dots, i_m, j_{u+1}, \dots, j_\rho; k) \in \mathcal{K} \times J$$

Значит, $(J, \mathcal{K} \times J)$ является строгим правым идеалом. Заметим, что $(J, \mathcal{K} \times J)$ не содержит 0-мерных граней.

Пусть (J', J') есть произвольный строгий правый идеал без 0-мерных граней в (P, J) . Образует $\mathcal{K} = \mathcal{K}(J'J')$. Тогда $\mathcal{P}(\mathcal{K})+1 = \mathcal{P}(J'J') \subseteq \mathcal{P}$. Докажем, что $(J', J') = (J, \mathcal{K} \times J)$. По определению \mathcal{K} получим, что $J' \subseteq \mathcal{K} \times J$. Берем произвольный $(i_1, \dots, i_m; k) \in \mathcal{K} \times J$, тогда $(i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{K}$ и по определению \mathcal{K} существует $j \in J'$ такой, что $(i_1, \dots, i_m; j) \in J'$. Так как $(j, k) \in (P; J)$ (по определению слабо полного полиграфа), то

$$(i_1, \dots, i_m; j) \pi^1(j; k) = (i_1, \dots, i_m; k) \in J'.$$

Мы получили обратное включение $\mathcal{K} \times J \subseteq J'$. Значит, $J' = \mathcal{K} \times J$ и $J' = J$, т.е. $(J', J') = (J, \mathcal{K} \times J)$.

Проверим, что \mathcal{K} есть \mathcal{P} -идеал. Пусть $(i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{K}$, $\rho \geq 2$ из \mathcal{P} произвольные и взяты любые $j_1, \dots, j_\rho \in J$ и $u \leq \rho$. В силу $(J', J') = (J, \mathcal{K} \times J)$ имеем $(i_1, \dots, i_m; j_u) \in J'$, а по предложению 2.1 имеем $(j_1, \dots, j_\rho; k) \in (P; J)$ при любом $k \in J$. Тогда по условию строгого правого идеала

$$(i_1, \dots, i_m; j_u) \pi^u(j_1, \dots, j_\rho; k) = (j_1, \dots, j_{u-1}, i_1, \dots, i_m, j_{u+1}, \dots, j_\rho; k) \in J'$$

и по построению \mathcal{X} начало этой грани принадлежит \mathcal{X} . Это означает

$$(j_1, \dots, j_{i-1}, i_1, \dots, i_m, j_{i+1}, \dots, j_p) = (j_1) \dots (j_{i-1}) (i_1, \dots, i_m) (j_{i+1}) \dots (j_p) \in \mathcal{X}.$$

Значит, \mathcal{X} является \mathcal{P} -идеалом в \bar{J} .

Следствие 3.3. Все графы $(J, J^* \times J)$ (где $\phi \neq J^* \subseteq J$ любое) и только они являются правыми идеалами в (J, J^2) .

Доказательство. Любое непустое подмножество $J^* \subseteq J$ является $\{1\}$ -идеалом в \bar{J} , так как условие (11) отпадает, и $\mathcal{P}(J^*) + 1 = \{1\}$.

Следствие 3.4. Все графы $(J, J^* \times J)$ и $(J, J \cup (J^* \times J))$ (где $\phi \neq J^* \subseteq J$ произвольное) и только они являются нетривиальными правыми идеалами в $(J, J \cup J^2)$.

Доказательство. Любое $\phi \neq J^* \subseteq J$ является $\{0, 1\}$ -идеалом в J . Поэтому для идеалов без нульмерных граней утверждение является частным случаем теоремы 3.2. Отметим, что если из правого идеала $(J', J') \subseteq (J, J \cup J^2)$ выбросить все 0-мерные грани, то получится снова правый идеал $(J', J' \setminus J^0)$, имеющий по следствию 3.3 вид $(J, J^* \times J)$. Если $J^0 \neq \phi$, то существует $(i) \in J^0$. Так как $(i, j) \in J^2$, то $(i) \pi^{-1}(i, j) = (j) \in J^0$ для всякого $j \in J$. Значит, $J^0 = J$ и $(J', J') = (J, J \cup (J^* \times J))$.

Следствие 3.5. Все полиграфы $(J, \mathcal{X} \times J)$, где \mathcal{X} двусторонний идеал свободной полугруппы \bar{J} , и только они являются собственными строгими правыми идеалами полного полиграфа (J, \bar{J}) .

Доказательство. Пусть (J', J') произвольный собственный строгий правый идеал в (J, \bar{J}) . По предложению 2.5 идеал (J', J') не может содержать 0-мерных граней. Из $2 \in \mathcal{N}_0$ по лемме 3.1 следует, что \mathcal{N}_0 -идеалами в \bar{J} являются точно все двусторонние идеалы свободной полугруппы \bar{J} . Значит, утверждение вытекает из теоремы 3.2.

Для исследования правых идеалов введем следующие понятия.

Пусть $\rho > 2$ есть натуральное число. Непустое подмножество $\mathcal{X} \subseteq \bar{J}$ называется ρ -подполугруппой в \bar{J} , если из $(i_1, \dots, i_{m_1}, \dots, (j_1, \dots, j_{m_2})) \in \mathcal{X}$ всегда следует

$$(i_1, \dots, i_{m_1}, \dots, j_1, \dots, j_{m_2}) \in \mathcal{X} \quad (13)$$

Заметим, что 2-подполугруппами в \bar{J} являются точно все подполугруппы свободной полугруппы \bar{J} . Пусть $\rho \in \mathcal{N}_0$. Не-

пустое подмножество $X \subseteq \bar{J}$ называется \mathcal{P} -подполугруппой в \bar{J} , если X является \mathcal{P} -подполугруппой для любого $p \geq 2$ из \mathcal{P} .

Лемма 3.6. Если $2 \in \mathcal{P}$, то \mathcal{P} -подполугруппами в \bar{J} являются точно все подполугруппы свободной полугруппы \bar{J} .

Теорема 3.7. Если X является \mathcal{P} -подполугруппой свободной полугруппы \bar{J} и $\mathcal{P}(X)+1 \in \mathcal{P}$, то $(J, X \times J)$ является правым идеалом в (\mathcal{P}, J) . Наоборот, если (J', J') является правым идеалом без нульмерных граней в (\mathcal{P}, J) , то $X = X(J', J')$ является \mathcal{P} -подполугруппой в \bar{J} , $\mathcal{P}(X)+1 \in \mathcal{P}$ и $(J', J') = (J, X \times J)$.

Доказательство. Пусть X является \mathcal{P} -подполугруппой в \bar{J} и $\mathcal{P}(X)+1 \in \mathcal{P}$. Пара $(J, X \times J)$ содержится в (\mathcal{P}, J) так как по предложению 2.1 (\mathcal{P}, J) содержит все грани, размерности которых принадлежат \mathcal{P} , а $X \times J$ состоит только из граней, размерности которых принадлежат $\mathcal{P}(X)+1 \in \mathcal{P}$.

Покажем, что $(J, X \times J)$ является правым идеалом. Пусть заданы любые $(i_{11}, \dots, i_{1m_1}, j_1), \dots, (i_{p1}, \dots, i_{pm_p}, j_p) \in X \times J$, $k \in J$ и $p \in \mathcal{P}$ ($p > 0$), т.е. $(i_{11}, \dots, i_{1m_1}), \dots, (i_{p1}, \dots, i_{pm_p}) \in X$. Если $p = 1$, то для всякого $k \in J$ имеем $(i_{11}, \dots, i_{1m_1}, j_1) \pi^1(j_1, k) = (i_{11}, \dots, i_{1m_1}, k) \in X \times J$.

Если $p \geq 2$, то по (I3)

$$(i_{11}, \dots, i_{1m_1}, \dots, i_{p1}, \dots, i_{pm_p}) \in X$$

и

$$(i_{11}, \dots, i_{1m_1}, j_1) \pi^1 \dots (i_{p1}, \dots, i_{pm_p}, j_p) \pi^p(j_1, \dots, j_p, k) = (i_{11}, \dots, i_{1m_1}, \dots, i_{p1}, \dots, i_{pm_p}, k) \in X \times J.$$

Значит, $(J, X \times J)$ является правым идеалом. Заметим, что $(J, X \times J)$ не содержит 0-мерных граней.

Пусть (J', J') произвольный правый идеал без 0-мерных граней в (\mathcal{P}, J) . Образует $X = X(J', J')$. Тогда $\mathcal{P}(X)+1 = \mathcal{P}(J', J') \in \mathcal{P}$ и равенство $(J', J') = (J, X \times J)$ докажем аналогично теореме 3.2.

Осталось показать, что X является \mathcal{P} -подполугруппой в \bar{J} . Пусть $(i_{11}, \dots, i_{1m_1}), \dots, (i_{p1}, \dots, i_{pm_p}) \in X$, $p \geq 2$ из \mathcal{P} произвольные. В силу равенства $(J', J') = (J, X \times J)$ для любых $j_1, \dots, j_p \in J$ имеем $(i_{11}, \dots, i_{1m_1}, j_1), \dots, (i_{p1}, \dots, i_{pm_p}, j_p) \in J'$. Поскольку $p \in \mathcal{P}$, то $(j_1, \dots, j_p, k) \in (J', J')$. Тогда по условию правого идеала

$$(i_{11}, \dots, i_{m_1}, j_1) \pi^1 \dots (i_{r_1}, \dots, i_{r_m}, j_r) \pi^{\rho} (j_1, \dots, j_r, k) = \\ = (i_{11}, \dots, i_{m_1}, \dots, i_{r_1}, \dots, i_{r_m}, k) \in J'$$

и $(i_{11}, \dots, i_{m_1}, \dots, i_{r_1}, \dots, i_{r_m}) \in X$. Значит, X является ρ -подполугруппой в \bar{J} .

Следствие 3.8. Нетривиальными правыми идеалами полного полиграфа (J, \bar{J}) являются все полиграфы $(J, X \times J)$ и $(J, J \cup (X \times J))$, где X является подполугруппой свободной полугруппы \bar{J} , и только они.

Доказательство. Если из произвольного идеала (J', J') полиграфа (J, \bar{J}) выбросить все 0-мерные грани, то получим опять правый идеал полиграфа (J, \bar{J}) . Значит, по теореме 3.7 и лемме 3.6 все $(J, X \times J)$, где X подполугруппа в \bar{J} , и только они являются правыми идеалами без 0-мерных граней в (J, \bar{J}) . Следовательно, $(J', J' \setminus J'_0)$ тоже имеет такой вид. Из $(i) \in J'_0$ следует, в силу $(i; j) \in J^2$, что при любом $j \in J$ выполняется

$$(i) \pi^1 (i; j) = (j) \in J'_0,$$

т.е. $J'_0 = J$. Значит, произвольный правый идеал с нуль-мерными гранями имеет вид $(J, J \cup (X \times J))$, где X подполугруппа в \bar{J} .

Покажем также обратное. Пусть задан полиграф $(J, J \cup (X \times J))$, где X произвольная подполугруппа в \bar{J} . Пусть $(j_1, \dots, j_r; k) \in J \setminus J$, числа $\rho_1 < \dots < \rho_r \leq \rho \neq 0$ и взяты произвольные элементы $(i_{11}, \dots, i_{m_1}, j_{\rho_1}, j_{\rho_1+1}, \dots, j_{\rho_2-1}, (i_{21}, \dots, i_{m_2}, j_{\rho_2}), j_{\rho_2+1}, \dots, j_{\rho_r})$ из $J \cup (X \times J)$. Тогда $(i_{11}, \dots, i_{m_1}, \dots, (i_{21}, \dots, i_{m_2}))$ принадлежат X .
Имеем

$$(j_1) \pi^1 \dots (j_{\rho_1-1}) \pi^{\rho_1-1} (i_{11}, \dots, i_{m_1}, j_{\rho_1}) \pi^{\rho_1} (j_{\rho_1+1}, \dots, j_{\rho_2-1}) \pi^{\rho_2-1} (i_{21}, \dots, i_{m_2}, j_{\rho_2}) \pi^{\rho_2} (j_{\rho_2+1}, \dots, j_{\rho_r}) \pi^{\rho_r} (j_1, \dots, j_r, k) = (i_{11}, \dots, i_{m_1}, \dots, i_{21}, \dots, i_{m_2}, k).$$

Рассматриваемое произведение при $\nu=0$ равно $(k) \in J$, а при $\nu > 0$ принадлежит $X \times J$, ибо $(i_{11}, \dots, i_{m_1}, \dots, i_{21}, \dots, i_{m_2}) \in X$, так как X - подполугруппа в \bar{J} . Следовательно, $(J, J \cup (X \times J))$ является правым идеалом в (J, \bar{J}) .

4. Левые идеалы симметрических поликатегорий

Напомним некоторые общеизвестные понятия. Пусть

$a \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_m}^k$ произвольная. Образом функции a называется множество

$$Ma = \{y \in M_j \mid y = x_1 \dots x_m a, (x_1, \dots, x_m) \in M_{i_1, \dots, i_m}\}.$$

Эквивалентность ρ_a на M_{i_1, \dots, i_m} , определенная правилом: $(y_1, \dots, y_m) \rho_a (x_1, \dots, x_m)$ тогда и только тогда, когда

$$x_1 \dots x_m a = y_1 \dots y_m a,$$

называется эквивалентностью, индуцированной функцией a .

Класс эквивалентности по ρ_a , содержащий набор (x_1, \dots, x_m) , обозначим через $[x_1, \dots, x_m]_{\rho_a}$. Через $y a^{-1}$ обозначим полный прообраз элемента $y \in M_j$, т.е.

$$y a^{-1} = \{(x_1, \dots, x_m) \in M_{i_1, \dots, i_m} \mid x_1 \dots x_m a = y\}.$$

Явно, $y a^{-1} \neq \emptyset$, если $y \in Ma$. Все элементы из $y a^{-1}$ называются прообразами элемента y при a .

Кардинальное число $r(a) = |M_{i_1, \dots, i_m} / \rho_a| = |Ma|$ называется рангом функции a .

Свяжем с каждой функцией множества производных функций следующим образом. Пусть $\xi \in \mathcal{F}_{j_1, \dots, j_r}^k$, $u \geq p$, $u \neq m \in \rho$. Фиксируем произвольный набор $(y_u, \dots, y_{u+m}) \in M_{j_1, \dots, j_r}$ и обозначим через $\xi(y_u, \dots, y_{u+m})$ функцию, определенную формулой

$$y_1 \dots y_{u-1} y_{u+m} \dots y_{u+r} \xi(y_u, \dots, y_{u+m}) = y_1 \dots y_{u+r} \xi \quad (14)$$

для любого $(y_1, \dots, y_{u-1}, y_{u+m}, \dots, y_{u+r}) \in M_{j_1, \dots, j_r}$. Каждое $\xi(y_u, \dots, y_{u+m})$ есть элемент в $\mathcal{F}_{j_1, \dots, j_r}^k$. Множество всех функций $\xi(y_u, \dots, y_{u+m})$, получающихся при данном ξ и всевозможных $(y_u, \dots, y_{u+m}) \in M_{j_1, \dots, j_r}$ обозначим через $\mathcal{T}_{u,m}(\xi)$. Множество $\mathcal{T}_{u,m}(\xi)$ является подмножеством в $\mathcal{F}_{j_1, \dots, j_r}^k$. При $m=0$ будет $\mathcal{T}_{u,0}(\xi) = \xi$.

Лемма 4.1. Для данных функций $a \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_m}^k$, $\xi \in \mathcal{F}_{j_1, \dots, j_r}^k$, $\xi \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_m}^k$ существует такая функция ξ , что

$$\xi = \xi \pi^u a, \quad (15)$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{T}_{u,m}(\xi) \subseteq \mathcal{T}_{u,1}(a). \quad (16)$$

Доказательство. Предположим сперва, что такое ξ су-

существует. Тогда $c \in \prod_{i_1, \dots, i_m}^{\mathcal{M}_i}$. Пусть $\psi = \psi'(x_1, \dots, x_m)$ произвольная функция из $\mathcal{T}_{i_1, \dots, i_m}(\psi)$. Тогда

$$\begin{aligned} y_1 \dots y_{i_1-1} y_{i_1+1} \dots y_r \psi &\stackrel{(14)}{=} y_1 \dots y_{i_1-1} x_1 \dots x_m y_{i_1+1} \dots y_r \psi \stackrel{(15)}{=} \\ &= y_1 \dots y_{i_1-1} x_1 \dots x_m y_{i_1+1} \dots y_r (c \pi^{i_1} a) \stackrel{(17)}{=} \\ &= y_1 \dots y_{i_1-1} (x_1 \dots x_m c) y_{i_1+1} \dots y_r a \stackrel{(14)}{=} \\ &= y_1 \dots y_{i_1-1} y_{i_1+1} \dots y_r [\psi'(x_1, \dots, x_m c)] \end{aligned}$$

для всякого $(y_1, \dots, y_{i_1-1}, y_{i_1+1}, \dots, y_r) \in \mathcal{M}_{j_1, \dots, j_{i_1-1}, j_{i_1+1}, \dots, j_r}$, т.е.

$$\psi'(x_1, \dots, x_m) = a'(x_1, \dots, x_m c).$$

Так как $a'(x_1, \dots, x_m c) \in \mathcal{T}_{i_1}(a)$, то включение (16) имеет место.

Наоборот, пусть даны a и ψ и выполнено (16). Для каждой функции $a_1 \in \mathcal{T}_{i_1}(a)$ выберем по одному элементу $z \in \mathcal{M}_{j_i}$ так, что $a_1 = a'(z)$. Построенное отображение обозначим через φ , т.е. положим $a_1 \varphi = z$. Тогда

$$a'(a_1 \varphi) = a'(z) = a_1. \quad (17)$$

Для построения c берем произвольный $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{M}_{i_1, \dots, i_m}$ и образуем функцию $\psi'(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{T}_{i_1, \dots, i_m}(\psi)$. В силу $\mathcal{T}_{i_1, \dots, i_m}(\psi) \subseteq \mathcal{T}_{i_1}(a)$, к функции $\psi'(x_1, \dots, x_m)$ применимо φ . Положим

$$x_1 \dots x_m c = [\psi'(x_1, \dots, x_m)] \varphi \quad (18)$$

для всякого $(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{M}_{i_1, \dots, i_m}$. Проверим, удовлетворяет ли c равенству (16):

$$\begin{aligned} y_1 \dots y_{i_1-1} y_{i_1+1} \dots y_r (c \pi^{i_1} a) &= y_1 \dots y_{i_1-1} (y_{i_1+1} \dots y_{i_1+m} c) y_{i_1+m} \dots y_r a \stackrel{(14)}{=} \\ &= y_1 \dots y_{i_1-1} y_{i_1+m} \dots y_r [a'(y_{i_1+1} \dots y_{i_1+m} c)] \stackrel{(18)}{=} \\ &= y_1 \dots y_{i_1-1} y_{i_1+m} \dots y_r \{a'[\psi'(y_{i_1+1}, \dots, y_{i_1+m})] \varphi\} \stackrel{(17)}{=} \\ &= y_1 \dots y_{i_1-1} y_{i_1+m} \dots y_r [\psi'(y_{i_1+1}, \dots, y_{i_1+m})] \stackrel{(14)}{=} \\ &= y_1 \dots y_{i_1-1} y_{i_1+1} \dots y_{i_1+m} y_{i_1+m} \dots y_r \psi \end{aligned}$$

для всякого $(y_1, \dots, y_{i_1-1}, y_{i_1+1}, \dots, y_{i_1+m}, y_{i_1+m}, \dots, y_r) \in \mathcal{M}_{j_1, \dots, j_{i_1-1}, j_{i_1+1}, \dots, j_{i_1+m}, j_{i_1+m}, \dots, j_r}$.

Пусть даны система непустых множеств $M = (\mathcal{M}_i; i \in J)$ и слабо полный полиграф (P, Π) . Симметрическую поликатегорию над $(\mathcal{M}_i; i \in J)$ и (P, Π) обозначим через $\mathcal{P}(\mathcal{M}_i; i \in J)$, если $c \notin P$.

Обозначим через $\beta(X)$ множество всех подмножеств множества X , а через $|X|$ мощность множества X . Наименьшее кардинальное число q , для которого $q > |M_k|$ при всех $k \in J$, будем называть весом системы $(M_k; k \in J)$.

Пусть заданы $\emptyset \neq J^* \subseteq J$ и $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_k; k \in J^*\}$, где каждое \mathcal{L}_k есть идеал в $(P; \oplus)$.

Семейство

$$F = \{ \overline{f}_{i_1 j_1 \dots j_{n-1} j_n}^k \mid u \leq p \neq 0, p \in \mathcal{L}_k, k \in J^* \}$$

называется ℓ -семейством над $(M; P; J)$, если

- 1) $\overline{f}_{i_1 j_1 \dots j_{n-1} j_n}^k \in \beta(Y_{j_1 \dots j_{n-1} j_n}^k)$,
- 2) $|J| < q$ для всякого $J \in \overline{f}_{i_1 j_1 \dots j_{n-1} j_n}^k \in F$,
- 3) из $J \in \overline{f}_{i_1 j_1 \dots j_{n-1} j_n}^k$, $k \in J_{j_1 \dots j_{n-1} j_n}^k$, $m \in P$ и $J_{im}(b) \subseteq J$ всегда следует $J_{11}(b) \in \overline{f}_{i_1 j_1 \dots j_{n-1} j_n}^k, \dots, J_{m \oplus p, 1}(b) \in \overline{f}_{m \oplus p, j_1 \dots j_{n-1} j_n}^k$.

В дальнейшем все 0-местные функции из $J^k (k \in J)$ отождествляем с выделенными ими элементами из множества M_k , т.е. $f^k = M_k$. Поэтому при $a \in f^k$, $y \in M_i = J^i$ имеем $a(y) = ya$ и $J_{11}(a) = \{z \in M_k \mid z = ya, y \in M_i\} = Ma$. Значит, множество \overline{f}_1^k является подмножеством в $\beta(M_k)$.

Предложение 4.2. ℓ -семействами над $(M; \{1\}; J)$ являются системы множеств $F = \{ \overline{f}^k \subseteq \beta(M_k) \mid k \in J^* \}$, где $\emptyset \neq J^* \subseteq J$ и каждое \overline{f}^k замкнуто относительно взятия подмножеств, и только они.

Доказательство. Пусть $F = \{ \overline{f}^k \mid k \in J^* \}$ является ℓ -семейством над $(M; \{1\}; J)$. Тогда $\overline{f}^k \subseteq \beta(J^k) = \beta(M_k)$.

Множество J^k содержит для любого $x \in M_k$ такую функцию b_x , что $M b_x = x$ (например, положим $y b_x = y$ при $y \in x$ и $y b_x = z$ при $y \in M_k \setminus x$, где z фиксированный элемент из x). Пусть $x \subseteq J \in \overline{f}^k$ произвольное. Образует b_x и применим к J и b_x третье требование ℓ -семейства. Получим, что $J_{11}(b_x) = M b_x = x$ принадлежит \overline{f}^k , т.е. F замкнуто относительно взятия подмножеств.

Наоборот, пусть $F_{J^*} = \{ \overline{f}^k \subseteq \beta(M_k) \mid k \in J^* \}$ замкнуто относительно взятия подмножеств. Тогда первое и второе требования ℓ -семейства выполнены. При $J \in \overline{f}^k$,

$\ell \in \mathcal{F}^k$ из $\mathcal{J}_{i_1}(b) \in \mathcal{T}$ следует $\mathcal{J}_{i_1}(b) \in \mathcal{F}^k$ в силу замкнутости относительно взятия подмножеств. Значит, $\mathcal{F}_{\mathcal{J}^*}$ является ℓ -семейством над $(M; \{1\}, \mathcal{J})$.

Теорема 4.3. Существует взаимно однозначное соответствие между левыми идеалами поликатегории $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}(M; i \in \mathcal{J})$ и между всеми ℓ -семействами над $(M; \mathcal{P}; \mathcal{J})$.

Доказательство. Пусть \mathcal{F} является ℓ -семейством над $(M; \mathcal{P}; \mathcal{J})$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{J}^* \dots \mathcal{J}^*}(\mathcal{F}) &= \{a \in \mathcal{F}_{j_1 \dots j_p}^k \mid \mathcal{J}_{i_1}(a) \in \mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k, a \in \rho\}, \\ \mathcal{B}(\mathcal{F}) &= (\mathcal{J}, \mathcal{J}(\mathcal{J}^*, \mathcal{L}, \mathcal{P}), \mathcal{B}_{\mathcal{J}^* \dots \mathcal{J}^*}(\mathcal{F}), \pi). \end{aligned} \quad (19)$$

Покажем, что $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ является левым идеалом. Пусть $c \in \mathcal{P}_{i_1 \dots i_m}^k$, $m \in \mathcal{P}$, $a \in \mathcal{B}_{j_1 \dots j_p}^k(\mathcal{F})$, $u \in \rho$ произвольные. Тогда по (19) $\mathcal{J}_{i_1}(a) \in \mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k$ и в силу $m \in \mathcal{P}$ по предложению 2.1 $(i_1, \dots, i_m, \{u\}) \in (\mathcal{P}; \mathcal{J})$. Значит, функция $\hat{c} = c\pi^u$, в силу леммы 4.1, удовлетворяет условию $\mathcal{J}_{i_1}(\hat{c}) \in \mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k$ и по третьему свойству ℓ -семейства $\mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k$ $\hat{c} \in \mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k$. Теперь по построению (19) функция $\hat{c} \in \mathcal{B}_{j_1 \dots j_p}^k(\mathcal{F})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ является левым идеалом.

Наоборот, пусть $\mathcal{B} = (\mathcal{J}', \mathcal{J}', \mathcal{B}_{i_1 \dots i_m}, \pi)$ есть левый идеал в $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}(M; i \in \mathcal{J})$. Тогда $(\mathcal{J}', \mathcal{J}')$ является левым идеалом в $(\mathcal{P}; \mathcal{J})$ и по теореме 2.6 имеет вид $(\mathcal{J}, \mathcal{J}(\mathcal{J}^*, \mathcal{L}, \mathcal{P}))$, где $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}_k = \mathcal{P}(\mathcal{J}', \mathcal{J}'(k)), k \in \mathcal{J}^*\}$, $\mathcal{J}^* = \{k \in \mathcal{J} \mid \mathcal{J}'(k) \neq \emptyset\}$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{J}^* \dots \mathcal{J}^*}(\mathcal{B}) &= \{\mathcal{J}_{i_1}(a) \mid a \in \mathcal{B}_{j_1 \dots j_p}^k, j \in \mathcal{J}\}, \\ \mathcal{F}(\mathcal{B}) &= \{\mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k(\mathcal{B}) \mid u \in \rho, \rho \in \mathcal{L}_k, k \in \mathcal{J}^*\} \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда для всякого $\mathcal{J} \in \mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k(\mathcal{B})$ имеем $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{i_1}(a)$, где $a \in \mathcal{B}_{j_1 \dots j_p}^k$ и $|\mathcal{J}| \leq |\mathcal{M}| \leq q$. Проверим и последнее свойство: пусть $\mathcal{J} \in \mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k(\mathcal{B})$, $\hat{c} \in \mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k$, $m \in \mathcal{P}$, $\mathcal{J}_{i_1}(\hat{c}) \in \mathcal{F}_{i_1, j_1 \dots j_{p-1}, j_{p+1} \dots j_p}^k$ т.е. $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{i_1}(a)$, где $a \in \mathcal{B}_{j_1 \dots j_p}^k$ (по построению (20)). По предложению 2.1 из $m \in \mathcal{P}$ следует $(i_1, \dots, i_m, j) \in (\mathcal{P}; \mathcal{J})$. Значит, функции a и \hat{c} удовлетворяют условиям леммы 4.1 и существует функция $c \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_m}^k$ такая, что $\hat{c} = c\pi^u$. Но, в силу требования левого идеала, $\hat{c} \in \mathcal{B}_{j_1 \dots j_p}^k$. Теперь по построению

(20) заключаем, что $\bar{J}_{i_1}(b) \in \bar{F}_{i_1, j_2 \dots j_{i_1-1} i_1 \dots i_m j_{i_1+1} \dots j_p}^k(B), \dots$
 $\dots, \bar{J}_{m, p, 1}(b) \in \bar{F}_{m, p, j_1 \dots j_{m-1} i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_{p-1}}^k(B)$. Значит, $F(B)$
является ℓ -семейством над $(M; \mathcal{P}; J)$.

Из последнего рассуждения при $m=1$,
 $b \in \bar{F}_{j_1 \dots j_{i_1-1} i_1 \dots i_m j_{i_1+1} \dots j_p}^k$ и $\bar{J}_{i_1}(b) = \bar{J}_{i_1}(a)$ вытекает, что всякий ле-
вый идеал содержит вместе с функцией $a \in \mathcal{B}^k$
все функции в из $\bar{F}_{j_1 \dots j_{i_1-1} i_1 \dots i_m j_{i_1+1} \dots j_p}^k$ такие, что $\bar{J}_{i_1}(b) =$
 $= \bar{J}_{i_1}(a)$. Из этого следует взаимная однозначность обо-
роженного соответствия.

Следствие 4.4. Существует взаимно однозначное соответст-
вие между всеми левыми идеалами симметрической категории
 $\mathcal{P}_J(M_i; i \in J)$ и между всеми системами подмножеств $\bar{F}_J =$
 $= \{F \subseteq \mathcal{P}(M_i) \mid i \in J\}$ замкнутыми относительно взятия подмно-
жеств.

Доказательство. По предложению 4.2 утверждение является
частным случаем теоремы 4.3.

Следствие 4.5. Существует взаимно однозначное соответ-
ствие между всеми левыми идеалами симметрической подгруппы
 $\mathcal{P}(M)$ и между всеми множествами подмножеств множества
 M , замкнутыми относительно взятия подмножеств.

Доказательство. Частный случай следствия 4.4 при $J = \{i\}$.

Пусть заданы подмножество $\emptyset \neq J_1 \subseteq J$ и ℓ -семейство $\bar{F}_{J_1} =$
 $= \{F_{i_1, j_1 \dots j_{i_1-1} i_1 \dots i_m j_{i_1+1} \dots j_p} \mid i_1 \in \mathcal{P}, p \in \mathcal{N}, k \in J_1\}$ над $(M; \mathcal{N}_0; J)$ и
произвольное $J_2 \subseteq J \setminus J_1$. При $m > 0$ образуем
 $\mathcal{B}_{i_1 \dots i_m}^j(F)$ по формуле (19). Если $j \in J_1$, то вы-
бираем $\mathcal{B}^j(F_{j_1}) \subseteq M_j$ так, что $\bar{J} \subseteq \mathcal{B}^j(F_{j_1})$, для всякого
 $\bar{J} \in \bar{F}_{j_1}^j$. Если $j \in J_2$, то выбираем $\mathcal{B}^j(F_{j_1}) \subseteq M_j$
произвольно. Положим

$$\mathcal{B}^j(F_{j_1}) = (\bar{J}, J_2 \cup \bar{J}(J_1), \mathcal{B}_{i_1 \dots i_m}^j(F_{j_1}), \pi).$$

Теорема 4.6. Все поликатегории вида $\mathcal{B}^j(F_{j_1})$, где $\emptyset \neq J_1 \subseteq J$,
 F_{j_1} - ℓ -семейство над $(M; \mathcal{N}_0; J)$ и $J_2 \subseteq J \setminus J_1$
произвольное, и только они являются левыми идеалами, не сос-
тоящими только из 0-местных функций, полной симметрической
полюкатегории $\mathcal{P}_J(M_i; i \in J)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = (J', J', \mathcal{B}_{i_1 \dots i_m}^j, \pi)$ произволь-
ный левый идеал, не состоящий только из 0-местных функций,
в $\mathcal{P}_J(M_i; i \in J)$. Тогда по следствию 2.10 левый идеал
 $(J', J') = (J, J_2 \cup \bar{J}(J_1))$. Построим $F(B)$ по формулам (20).
В нашем случае $\mathcal{L}_k = \mathcal{N}_0$ для каждого $k \in J_1$. Аналогично

доказательству теоремы 4.3 проверяется, что $F(\beta)$ является ℓ -семейством над $(M; N_0; J)$. Пусть $\mathcal{T} \in \mathcal{F}_1^k(\beta)$ произвольное. По формулам (20) $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{11}(a) = Ma$ для некоторого $a \in \mathcal{F}_i^k (i \in J)$. По требованию левого идеала

$$y\mathcal{T}^1 a = ya \in \beta^k$$

для всякого $y \in M_i = \mathcal{F}^i$. Значит, $\mathcal{T} = Ma \in \beta^k$. Следовательно, β имеет указанный вид.

Проверка того, что $\beta(F)$ является левым идеалом, точно такая же как в теореме 4.3, так как нульместная функция не может быть вторым сомножителем, а третье свойство ℓ -семейства применимо и при $m=0$. Выбор $\beta^k(F)$ при $k \in J_1$ гарантирует, что при всяких $y \in M_i = \mathcal{F}^i$, $a \in \beta^k(F)$ (т.е. $Ma = \mathcal{T} \in \mathcal{F}_1^k$) имеем

$$y\mathcal{T}^1 a = ya \in Ma = \mathcal{T} \in \beta^k.$$

5. Строгие правые идеалы симметрических поликатегорий

Пусть ρ_1, \dots, ρ_r - эквивалентности соответственно на множествах M_1, \dots, M_r . Их декартовым произведением называется эквивалентность $\rho_1 \times \dots \times \rho_r$ на $M_1 \times \dots \times M_r$, определенная правилом:

$(x_1, \dots, x_r)(\rho_1 \times \dots \times \rho_r)(y_1, \dots, y_r)$ тогда и только тогда, когда

$$x_1 \rho_1 y_1, \dots, x_r \rho_r y_r. \quad (21)$$

Через ε_j обозначим эквивалентность равенства на M_j .

Лемма 5.1. Для данных $a \in \mathcal{F}_{i_1 \dots i_m}^{j_1 \dots j_r}$, $b \in \mathcal{F}_{j_1 \dots j_{m-1} i_1 \dots i_m j_{m+1} \dots j_r}$ существует в $\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ такая функция c , что

$$b = a \mathcal{T}^u c \quad (22)$$

тогда и только тогда, когда $(j_1, \dots, j_r; k) \in J$ и

$$(\varepsilon_{j_1} \times \dots \times \varepsilon_{j_{m-1}} \times \rho_a \times \varepsilon_{j_{m+1}} \times \dots \times \varepsilon_{j_r}) \in \beta^k. \quad (23)$$

Доказательство. Предположим, что для данных a и b такая функция c существует. Тогда из $(x_1, \dots, x_m) \rho_a (x'_1, \dots, x'_m)$ или из $x_1 \dots x_m a = x'_1 \dots x'_m a$ следует

$$\begin{aligned} y_1 \dots y_{m-1} x_1 \dots x_m y_{m+1} \dots y_r &= y_1 \dots y_{m-1} x_1 \dots x_m y_{m+1} \dots y_r (a \mathcal{T}^u c) \\ &= y_1 \dots y_{m-1} (x_1 \dots x_m a) y_{m+1} \dots y_r c = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= y_1 \dots y_{i-1} (x_1' \dots x_m') z_{i+1} \dots z_r c = \\
 &= y_1 \dots y_{i-1} x_1' \dots x_m' y_{i+1} \dots y_r b
 \end{aligned}$$

для всякого $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_r) \in M_{j_1 \dots j_{i-1} j_{i+1} \dots j_r}$. Значит, (23) имеет место.

Наоборот, пусть для a и b выполнено (23). На подмножестве $\mathcal{D} = \{(y_1, \dots, y_r) \in M_{j_1 \dots j_r} \mid y_i \in M a\}$ определим функцию c при помощи формулы

$$y_1 \dots y_r c = y_1 \dots y_{i-1} x_1' \dots x_m' y_{i+1} \dots y_r b, \text{ где } (x_1, \dots, x_m) \in y_i a', \quad (24)$$

т.е. $x_1, \dots, x_m a = y_i$, для любого $(y_1, \dots, y_r) \in \mathcal{D}$.

Проверим корректность этого определения. Пусть выбран другой прообраз $(x_1', \dots, x_m') \in y_i a'$. Тогда $(x_1, \dots, x_m) \in a (x_1', \dots, x_m')$ и для всякого $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_r) \in M_{j_1 \dots j_{i-1} j_{i+1} \dots j_r}$ имеем

$$(y_1, \dots, y_{i-1}, x_1, \dots, x_m, y_{i+1}, \dots, y_r) \in a (y_1, \dots, y_{i-1}, x_1' \dots x_m' y_{i+1} a \dots z_{j_{i+1}} x_1 \dots x_m' z_{j_r})$$

$$(y_1, \dots, y_{i-1}, x_1', \dots, x_m', y_{i+1}, \dots, y_r).$$

Оттуда, в силу (23), получим

$$(y_1, \dots, y_{i-1}, x_1, \dots, x_m, y_{i+1}, \dots, y_r) \in a (y_1, \dots, y_{i-1}, x_1', \dots, x_m', y_{i+1}, \dots, y_r),$$

т.е.

$$y_1 \dots y_{i-1} x_1 \dots x_m y_{i+1} \dots y_r b = y_1 \dots y_{i-1} x_1' \dots x_m' y_{i+1} \dots y_r b$$

и значение функции c определено однозначно для любого набора из \mathcal{D} . На дополнении $M_{j_1 \dots j_r} \setminus \mathcal{D}$ определим c произвольно. Для любого $(y_1, \dots, y_r) \in$

$$\begin{aligned}
 &\in M_{j_1 \dots j_{i-1} j_{i+1} \dots j_r} \text{ имеем по формулам (4) и (24), что} \\
 &y_1 \dots y_r c = y_1 \dots y_{i-1} (y_i \dots y_{i+m} a) y_{i+m+1} \dots y_r c = \\
 &= y_1 \dots y_{i-1} y_i \dots y_{i+m} y_{i+m+1} \dots y_r b.
 \end{aligned}$$

Значит, равенство (22) выполнено.

Через $\xi(\mathcal{X})$ обозначим множество всех эквивалентностей на множестве \mathcal{X} .

Пусть даны слабо полный полиграф $(\mathcal{P}; \mathcal{J})$, \mathcal{P} -идеал \mathcal{X} в \mathcal{J} , где $\mathcal{P}(\mathcal{X}) + 1 \in \mathcal{P}$, и система множеств $M = (M_i; i \in \mathcal{J})$ с весом q . Семейство множеств

$$E = \{\delta_{i_1} \dots \delta_{i_m} \in \delta(M_{i_1} \dots M_{i_m}) \mid (i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}\}$$

называется строгим ν -семейством над $(M; \mathcal{P}; \mathcal{J})$, если

- 1) $|M_{i_1} \dots M_{i_m} / \rho| < q$ для всякой $\rho \in \delta_{i_1} \dots \delta_{i_m}$,
- 2) для любых $\rho_1 \in \delta_{i_1} \dots \delta_{i_m}$, $\rho \in \mathcal{P}(\rho > 0)$,

$\beta = \rho \in \mathcal{P}_{j_1, \dots, j_{i-1}, i_1, \dots, i_{j_{i+1}}, \dots, j_r}$. Следовательно, выполнено и второе условие строгого ν -семейства над $(M; P; J)$.

Наоборот, пусть дано строгое ν -семейство над $(M; P; J)$

$$E = \{ \delta_{i_1, \dots, i_m} \mid (i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{K} \}.$$

Положим

$$\beta_{i_1, \dots, i_m}^j(E) = \{ a \in \mathcal{P}_{i_1, \dots, i_m}^j \mid \rho a \in \delta_{i_1, \dots, i_m} \}, \quad B(E) = (J, \mathcal{K} \times J, \beta_{i_1, \dots, i_m}^j(E), \pi). \quad (27)$$

По конструкции $B(E)$ не содержит нульместных функций.

Покажем, что $B(E)$ является строгим правым идеалом в $\mathcal{P}^j(M_i; i \in J)$. Пусть $a \in \beta_{i_1, \dots, i_m}^j(E)$, $c \in \mathcal{P}_{j_1, \dots, j_r}^k$,

$u \leq \rho$, $\rho \in \mathcal{P}$ ($\rho > 0$) произвольные. Тогда

$\rho a \in \delta_{i_1, \dots, i_m}$ и по лемме 5.1 эквивалентность ρb , индуцированная функцией $\delta = a \pi^u c$, удовлетворяет условию

(25). Имеем еще $(M_{j_1, \dots, j_{i-1}, i_1, \dots, i_{j_{i+1}}, \dots, j_r} / \rho a) \leq M_k < q$.

Следовательно, $\rho b \in \delta_{j_1, \dots, j_{i-1}, i_1, \dots, i_{j_{i+1}}, \dots, j_r}^k$ и по (27) получаем $b \in \beta_{j_1, \dots, j_{i-1}, i_1, \dots, i_{j_{i+1}}, \dots, j_r}^k(E)$. Этим мы убедились в том, что $B(E)$ является строгим правым идеалом в $\mathcal{P}^j(M_i; i \in J)$.

Взаимная однозначность построенного соответствия вытекает из следующего свойства строгого правого идеала

$B = (J, \mathcal{K} \times J, \beta_{i_1, \dots, i_m}^j(E), \pi)$ поликатегории $\mathcal{P}^j(M_i; i \in J)$: из

$a \in \beta_{i_1, \dots, i_m}^k$ и $(M_{i_1, \dots, i_m} / \rho a) \leq M_k$, $k \in J$ следует, что $\beta_{i_1, \dots, i_m}^k$ содержит все функции $b \in \mathcal{P}_{i_1, \dots, i_m}^k$ такие, что $\rho b = \rho a$.

В самом деле, по определению $(P; J)$ содержит грань $(j; k)$, а из этого и из $\rho b = \rho a$ по лемме 5.1 (при $\rho = u = 1$) получим, что $b = a \pi^u c$ и, следовательно, $b \in \beta_{i_1, \dots, i_m}^k$.

6. Правные идеалы симметрических поликатегорий

Для исследования правых идеалов сформулируем следующую лемму.

Лемма 6.1. Для данных $a_1 \in \mathcal{P}_{i_1, \dots, i_{m_1}}^{j_1}, \dots, a_r \in \mathcal{P}_{i_1, \dots, i_{m_r}}^{j_r}$, $b \in \mathcal{P}_{i_1, \dots, i_{m_r}}^k$ существует в $\mathcal{P}^j(M_i; i \in J)$ такая функция c , что

$$a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r c = b, \quad (28)$$

тогда и только тогда, когда $(j_1, \dots, j_r; k) \in J$ и

$$\rho a_1 \times \dots \times \rho a_r \in \mathcal{P}^k, \quad (29)$$

Доказательство. Если

$$x_{11} \cdots x_{1m_1} a_1 = y_{11} \cdots y_{1m_1} a_1, \dots, x_{r1} \cdots x_{rm_1} a_r = y_{r1} \cdots y_{rm_1} a_r,$$

тогда

$$\begin{aligned} x_{11} \cdots x_{rm_1} b &= x_{11} \cdots x_{rm_1} (a_1 \pi^1 \cdots a_r \pi^r c) = \\ &= (x_{11} \cdots x_{1m_1} a_1) \cdots (x_{r1} \cdots x_{rm_1} a_r) c = \\ &= (y_{11} \cdots y_{1m_1} a_1) \cdots (y_{r1} \cdots y_{rm_1} a_r) c = \\ &= (y_{11} \cdots y_{rm_1}) (a_1 \pi^1 \cdots a_r \pi^r c) = y_{11} \cdots y_{rm_1} b. \end{aligned}$$

Из этого следует, что равенство (28) влечет за собой включение (29).

Наоборот, если удовлетворено (29), то можем определить функцию c сперва на подмножестве

$$\mathcal{D} = (M a_1) \times \cdots \times (M a_r) \subseteq M_{j_1} \cdots j_r$$

следующим образом:

$$y_{11} \cdots y_{r1} c = x_{11} \cdots x_{1m_1} \cdots x_{r1} \cdots x_{rm_1} b,$$

где $(x_{11}, \dots, x_{1m_1}) \in y_{11} a_1^{-1}, \dots, (x_{r1}, \dots, x_{rm_1}) \in y_{r1} a_r^{-1}$. Корректность этого определения можно вывести из (29) аналогично тому, как было сделано в доказательстве леммы 5.1.

На дополнении $M_{j_1} \cdots j_r \setminus \mathcal{D}$ определим c произвольно. Равенство (28) проверяется непосредственной подстановкой.

Пусть даны система множеств $\{M_i; i \in J\}$ с весом q , слабо полный полиграф (P, J) , а также \mathcal{P} -подполугруппа \mathcal{K} в J так, что $P(\mathcal{K}) + 1 \in \mathcal{P}$. Семейство множеств

$$E = \{ \delta_{i_1 \dots i_m} \in \delta(M_{i_1} \dots i_m) \mid (i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{K} \}$$

называется q -семейством над $(M, P; J)$ если

$$1) \quad |M_{i_1 \dots i_m} \cap \rho| < q \quad \text{для всякого } \rho \in \delta_{i_1 \dots i_m}.$$

$$2) \quad \text{для } \rho_1 \in \delta_{i_1 \dots i_{m_1}}, \dots, \rho_r \in \delta_{i_{r1} \dots i_{rm_r}}, \rho \in P(\rho > 0), \\ \rho \in \delta(M_{i_1 \dots i_{rm_r}})$$

и из

$$(\rho_1 \times \cdots \times \rho_r) \in \mathcal{P}, \quad |M_{i_1 \dots i_{rm_r}} \cap \rho| < q \quad (30)$$

следует $\rho \in \delta_{i_1 \dots i_{rm_r}}$.

Теорема 6.2. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми правыми идеалами без нульместных функций в

$\rho \in \mathcal{E}(M_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r})$ из

$$(\xi_{j_1} \times \dots \times \xi_{j_{i-1}} \times \rho \times \xi_{i+1} \times \dots \times \xi_{j_r}) \in \mathcal{E}(M_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r} / \rho) < \varphi \quad (25)$$

следует $\rho \in \mathcal{E}_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r}$.

Теорема 5.2. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми строгими правыми идеалами без нульместных функций поликатегории $\mathcal{P}^J(M_i; i \in J)$ и между всеми строгими τ -семействами над $(M_i; \mathcal{P}, J)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B} = (J', J', \mathcal{B}_{i_1, \dots, i_n}, \pi)$ произвольный строгий правый идеал без нульместных функций в $\mathcal{P}^J(M_i; i \in J)$. Тогда (J', J') является строгим правым идеалом без 0-мерных граней в $(\mathcal{P}; J)$ и по теореме 3.2 имеет вид $(J', J') = (J, \mathcal{X} \times J)$, где $\mathcal{X} = \mathcal{X}(J', J')$ является \mathcal{P} -идеалом в J . Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{i_1, \dots, i_n}(\mathcal{B}) &= \{ \rho \in \mathcal{E}(M_{i_1, \dots, i_n}) \mid \rho = \rho_a, a \in \mathcal{B}_{i_1, \dots, i_n}, j \in J \}, \\ \mathcal{E}(\mathcal{B}) &= \{ \mathcal{E}_{i_1, \dots, i_n}(\mathcal{B}) \mid (i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{X} \}. \end{aligned} \quad (26)$$

Покажем, что $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ является строгим τ -семейством над $(M_i; \mathcal{P}; J)$. Пусть $\rho \in \mathcal{E}_{i_1, \dots, i_n}(\mathcal{B})$, $(i_1, \dots, i_n) \in \mathcal{X}$ произвольные. Тогда $\rho = \rho_a$ для некоторой $a \in \mathcal{B}_{i_1, \dots, i_n}$ ($j \in J$) и, в силу $M_a \subseteq M_{j_i}$, имеем $|M_{i_1, \dots, i_n} / \rho_a| = |M_a| \leq |M_{j_i}| < \varphi$.

Значит, первое условие выполняется.

Пусть теперь $\rho_1 \in \mathcal{E}_{i_1, \dots, i_n}(\mathcal{B})$, $\rho \in \mathcal{P}$ ($\rho > 0$) и $\rho \in \mathcal{E}(M_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r})$ произвольные эквивалентности, удовлетворяющие (25). Тогда $\rho_1 = \rho_a$ для некоторой $a \in \mathcal{B}_{i_1, \dots, i_n}$ ($j \in J$). В силу $\tau = |M_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r} / \rho| < \varphi$ и определения веса φ , существует такое $k \in J$, что $\tau \leq |M_k|$. Значит, в M_k существует подмножество M' мощности τ . Следовательно, существует взаимно однозначное отображение ψ множества $|M_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r} / \rho|$ на M' . Построим функцию $\hat{\rho} \in \mathcal{E}_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r}$ по правилу:

$$x_1, \dots, x_{m \circ \rho} \hat{\rho} = ([x_1, \dots, x_{m \circ \rho}] \rho) \psi$$

для всякого $(x_1, \dots, x_{m \circ \rho}) \in M_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r}$. В силу взаимной однозначности ψ , имеем $\rho \hat{\rho} = \rho$. Так как выполняется (25) и $\rho \in \mathcal{P}$, то применима лемма 5.1 и функция $\hat{\rho}$ представима в виде $\hat{\rho} = \alpha \pi^c$, где $c \in \mathcal{E}_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r}$.

Поскольку \mathcal{B} строгий правый идеал, то $\hat{\rho} \in \mathcal{E}_{j_1, \dots, j_{i-1}, i, i+1, \dots, j_r}$ и по (26) имеем

$\varphi^{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_i; i \in J)$ и между всеми ν -семействами над $(M; \mathcal{P}; J)$.

Доказательство. Пусть $B = (J, J', B_{i_1}^{\mathcal{P}}, \dots, i_{m_1}, \pi)$ произвольный правый идеал без 0-местных функций в $\varphi^{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_i; i \in J)$. Тогда (J', J') правый идеал без 0-мерных граней в $(\mathcal{P}; J)$ и по теореме 3.7 он имеет вид $(J', J') = (J, \mathcal{K} \times J)$, где $\mathcal{K} = \mathcal{K}(J', J')$ является \mathcal{P} -подполугруппой в J' . Построим $E(B)$ по формулам (26). Тогда первое требование ν -семейства для $E(B)$ выполняется.

Проверим второе условие. Пусть $\varphi_1 \in \mathcal{E}_{i_1, \dots, i_{m_1}}$, $\varphi_r \in \mathcal{E}_{i_{r_1}, \dots, i_{r_{m_r}}}$, $r \in \mathcal{P}$ ($r > 0$) и $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{M}_{i_1, \dots, i_{r_{m_r}}})$ такие, что удовлетворено (30). В силу неравенства $|\mathcal{M}_{i_1, \dots, i_{r_{m_r}}}/\varphi| < q$ и определения веса получим (также, как в теореме 5.2), что существует взаимно однозначное отображение ψ множества $\mathcal{M}_{i_1, \dots, i_{r_{m_r}}}/\varphi$ на некоторое подмножество множества \mathcal{M}_k при подходящем $k \in J$. Построим функцию ϵ по правилу

$$x_{i_1} \dots x_{r_{m_r}} \epsilon = ([x_{i_1}, \dots, x_{r_{m_r}}] \varphi) \psi.$$

Аналогично теореме 5.2 (только с применением леммы 6.1 вместо леммы 5.1) получим, что $\epsilon = a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r \epsilon$, где $\varphi_1 = \varphi_{a_1}, \dots, \varphi_r = \varphi_{a_r}$. По требованию правого идеала ϵ принадлежит $B_{i_1, \dots, i_{r_{m_r}}}$ и по (26) $\varphi \epsilon = \varphi \in \mathcal{E}_{i_1, \dots, i_{r_{m_r}}}$.

Наоборот, пусть дано ν -семейство $E = \{\mathcal{E}_{i_1, \dots, i_{m_1}}(i_1, \dots, i_{m_1}) \in \mathcal{K}\}$ над $(M; \mathcal{P}; J)$. Построим $B(E)$ по формулами (27). Пусть $a_1 \in B_{i_1, \dots, i_{m_1}}^{\mathcal{P}}(E), \dots, a_r \in B_{i_{r_1}, \dots, i_{r_{m_r}}}^{\mathcal{P}}(E)$, $r \in \mathcal{P}$, $c \in J^k, \dots, j_r$ произвольные. Тогда функция $\epsilon = a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r c^{j_1} \dots j_r$ по лемме 6.1 удовлетворяет включению $(\varphi_{a_1} \times \dots \times \varphi_{a_r}) \epsilon \in \varphi_k$. Кроме того,

$$|\mathcal{M}_{i_1, \dots, i_{r_{m_r}}}/\varphi \epsilon| = |M \epsilon| \leq |\mathcal{M}_k| < q.$$

Так как $\varphi_{a_1} \in \mathcal{E}_{i_1, \dots, i_{m_1}}, \dots, \varphi_{a_r} \in \mathcal{E}_{i_{r_1}, \dots, i_{r_{m_r}}}$, то $\varphi \epsilon$ удовлетворяет условиям (30) и по второму требованию ν -семейства $\varphi \epsilon \in \mathcal{E}_{i_1, \dots, i_{r_{m_r}}}$, т.е. $\epsilon \in B_{i_1, \dots, i_{r_{m_r}}}(E)$. Значит, $B(E)$ является правым идеалом в $\varphi^{\mathcal{P}}(\mathcal{M}_i; i \in J)$.

Взаимная однозначность построенного соответствия доказывается аналогично теореме 5.2, только с использованием леммы 6.1 вместо 5.1. А это возможно, так как при $\nu = \mu = 1$ они совпадают.

Лемма 6.3. Все системы множеств $E = \{\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}(\mathcal{M}_i) \mid i \in J, J\}$, где $\mathcal{P} \neq J, \subseteq J$ и каждое \mathcal{E}_i замкнуто относительно взятия над-

эквивалентностей, и только они являются ν -семействами над $(M; \{1\}; J)$.

Доказательство. Все такие системы являются ν -семействами над $(M; \{1\}; J)$, так как первое условие выполняется автоматически и второе условие выполняется в силу замкнутости относительно взятия надэквивалентностей. Наоборот, если $E = \{\delta_i; i \in J_1\}$ является ν -семейством над $(M; \{1\}; J)$, то для любых $\rho_1 \in \delta_i$ и $\rho \geq \rho_1$ выполнены условия второго требования. Следовательно, $\rho \in \delta_i$ и система E замкнута относительно взятия надэквивалентностей.

Следствие 6.4. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми правыми идеалами симметрической категории $\mathcal{P}_2(M; i \in J)$ и всеми системами множеств $E = \{\delta_i \subseteq \mathcal{E}(M_i) \mid i \in J_1\}$, где каждое δ_i замкнуто относительно взятия надэквивалентностей.

Доказательство. По лемме 6.3 это утверждение является частным случаем теоремы 6.2 при $\rho = \{1\}$.

Следствие 6.5. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми правыми идеалами симметрической полугруппы $\mathcal{P}(M)$ и между всеми множествами эквивалентностей над M , замкнутыми относительно взятия надэквивалентностей.

Доказательство. Частный случай следствия 6.4 при $J = \{i\}$.

Предложение 6.6. В полной симметрической поликатегории $\mathcal{P}_3(M; i \in J)$ существует взаимно однозначное соответствие между всеми нетривиальными правыми идеалами, содержащими нульместные функции, и между всеми ν -семействами над $(M; N; J)$.

Доказательство. Пусть $\beta = (J', \bar{J}', \beta_{i_1}^{\beta}, \dots, \beta_{i_m}^{\beta}, \pi)$ правый идеал с 0-местными функциями, но не состоящий только из 0-местных функций. Тогда (J', \bar{J}') правый идеал (причем $J'_0 \neq \emptyset$) в (J, \bar{J}) и по следствию 3.8 имеет вид $(J', \bar{J}') = (J, J \cup (X \times J))$, где $X = X'(J', \bar{J}')$ является подполугруппой свободной полугруппы \bar{J} .

Если из β выбросить все 0-местные функции, то полученная система

$$\beta' = (J, X \times J, \beta_{i_1}^{\beta}, \dots, \beta_{i_m}^{\beta}, \pi)$$

является тоже правым идеалом в $\mathcal{P}_3(M; i \in J)$ и по тео-

реме 6.2 ему соответствует взаимно однозначно τ -семейство над $(M; N_0; J)$, построенное по (26).

Заметим, что если правый идеал B в $\mathcal{F}_J(M_i; i \in J)$ содержит 0-местную функцию $y \in M_i$, то B содержит все 0-местные функции (B отмечает все элементы множеств $M_k, k \in J$). В самом деле, по определению $(P; J)$ содержит $(i; k)$ и \mathcal{F}_i^k обязательно содержит для любых $z \in M_k, k \in J$ такую функцию $a \in \mathcal{F}_i^k$, что $ya = z$. Тогда по требованию правого идеала

$$y\tau^k a = ya \in B^k.$$

Значит, $B^k = M_k$ для любого $k \in J$.

Следовательно, из правого идеала без 0-местных функций можно получить снова правый идеал только тогда, когда присоединяем все нульместные функции над $(M_i; i \in J)$.

Покажем, что из произвольного правого идеала $B = (J, K \times J, B_{i_1, \dots, i_m}^l)$ без нульместных функций в $\mathcal{F}_J(M_i; i \in J)$ получим при помощи такого присоединения снова правый идеал в $\mathcal{F}_J(M_i; i \in J)$. Пусть $B' = (J, J \cup (K \times J), B_{i_1, \dots, i_m, \pi}^l)$, где $B_{i_1, \dots, i_m, \pi}^l = M_i$ для всякого $i \in J$. Возьмем произвольные

$$\begin{aligned} a_1 \in B_{i_1, \dots, i_1, m_1}^{l, p_1}, a_2 \in B_{i_2, \dots, i_2, m_2}^{l, p_2}, \dots, \\ a_r \in B_{i_1, \dots, i_r, m_r}^{l, p_1 \dots p_r} \quad (p_1 < \dots < p_r \leq \rho), d_1 \in M_{j_1}, \dots, d_{p_1-1} \in \\ \in M_{j_{p_1-1}}, d_{p_1+1} \in M_{j_{p_1+1}}, \dots, d_{p_r-1} \in M_{j_{p_r-1}}, d_{p_r+1} \in M_{j_{p_r+1}}, \dots, \\ d_\rho \in M_{j_\rho}, c \in \mathcal{F}_{j_1, \dots, j_\rho}^k \quad (\rho > 0). \end{aligned}$$

Функция

$$b = d_1 \pi^1 \dots d_{p_1-1} \pi^{p_1-1} a_1 \pi^{p_1} d_{p_1+1} \pi^{p_1+1} \dots d_{p_r-1} \pi^{p_r-1} a_r \pi^{p_r} d_{p_r+1} \pi^{p_r+1} \dots d_\rho \pi^\rho \quad (31)$$

принадлежит $\mathcal{F}_{i_1, \dots, i_m, \pi}^k$. При $l > 0$ из

$$(x_{11}, \dots, x_{1, m_1}, \dots, x_{21}, \dots, x_{m_r, 1}, \dots, x_{m_r, m_r}) (\beta a_1 \times \dots \times \beta a_\rho) (y_{11}, \dots, y_{1, m_1}, \dots, y_{21}, \dots, y_{m_r, 1}, \dots, y_{m_r, m_r})$$

или из

$$x_{11} \dots x_{1, m_1} a_1 = y_{11} \dots y_{1, m_1} a_1, \dots, x_{i_1} \dots x_{i_1, m_{i_1}} a_{i_1} = y_{i_1} \dots y_{i_1, m_{i_1}} a_{i_1}$$

следует по (31) и (4), что

$$\begin{aligned} & x_{11} \dots x_{1, m_1} \dots x_{i_1} \dots x_{i_1, m_{i_1}} b = \\ & = d_1 \dots d_{p_1-1} (x_{11} \dots x_{1, m_1} a_1) d_{p_1+1} \dots d_{p_r-1} (x_{i_1} \dots x_{i_1, m_{i_1}} a_{i_1}) d_{p_r+1} \dots d_\rho c = \\ & = d_1 \dots d_{p_1-1} (y_{11} \dots y_{1, m_1} a_1) d_{p_1+1} \dots d_{p_r-1} (y_{i_1} \dots y_{i_1, m_{i_1}} a_{i_1}) d_{p_r+1} \dots d_\rho c = \\ & = y_{11} \dots y_{1, m_1} \dots y_{i_1} \dots y_{i_1, m_{i_1}} b, \end{aligned}$$

т.е. $(x_{11}, \dots, x_{1m_1}, \dots, x_{21}, \dots, x_{2m_2}) \rho (y_{11}, \dots, y_{1m_1}, \dots, y_{21}, \dots, y_{2m_2})$.
 Поскольку $F(\beta)$ является r -семейством над $(M; N_0; J)$,
 то $\rho_i \in F(\beta)$ принадлежит $F(\beta)$ и β принадлежит

$\beta_{i_1, \dots, i_{m_i}}$

При $l=0$ имеем

$$\beta = d_1 \pi^1 \dots d_r \pi^r e = d_1 \dots d_r e \in M_k.$$

Значит, β' является правым идеалом в $\mathcal{F}_J(M_i; i \in J)$.

Следствие 6.7. Существует взаимно однозначное соответствие между всеми нетривиальными правыми идеалами, содержащими 0-местные функции, в $\mathcal{F}_{J \cup J^2}(M_i; i \in J)$ и между всеми системами эквивалентностей над $(M_i; i \in J)$, замкнутыми относительно взятия надэквивалентностей.

Доказательство. Если $\beta = (J, J \cup (J, \times J), \beta_i^j, \beta_j^i, \pi)$ правый идеал в $\mathcal{F}_{J \cup J^2}(M_i; i \in J)$, то

$\beta' = (J, J, \wedge J, \beta_i^j, \pi)$ снова правый идеал. Также как в предложении 6.6 получим, что $\beta_i^j = M_j$ для всякого $j \in J$ и что из произвольного правого идеала β' получим снова правый идеал, если присоединяем все 0-местные функции над $(M_i; i \in J)$, т.е. если образуем

$$\beta = (J, J \cup (J, \times J), \beta_i^j, M_j, \pi).$$

Литература

1. Артамонов В.А., Клоны полилинейных операций и мультиоператорные алгебры. Успехи матем. наук., 1969, 24, № 1, 47-59.
2. Белоусов В.Д., 0 функциональном уравнении общей ассоциативности. Мат. зап. Уральск. ун-т, 1970, 7, № 3, 20-35.
3. Глускин Л.М., Идеалы полугрупп преобразований. Матем. сб., 1959, 47, 111-130.
4. Глускин Л.М., Суперпозиция многоместных функций. Publ. Math., 1970, 17, №1-4, 349-378.
5. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп I. Москва, 1972.
6. Мальцев А.И., Симметрические группоиды. Матем. сб., 1952, 43, 136-151.
7. Мальцев А.И., Итеративные алгебры и многообразия Поста. Алгебра и логика, 1966, 5, № 2, 5-24.
8. Оре О., Теория графов. Москва, 1968.

9. Слипенко А.К., Идеалы симметрических оперативов. Докл. АН УССР, 1959, А, 12, 1093-1096.
10. Хюн Я.В., Поликольциоды. IX Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме научн. сообщений. Гомель, 1968.
11. Nöbauer, W., Philipp, W., Die Einfachkeit der mehrdimensionalen Funktionenalgebren. Arch. Math., 1964, 15, №1, 1-5.
12. Sioson, F.M., Ideals in $(m+1)$ -semigroups. Ann. mat. pura ed appl., 1965, 68, 161-200.
13. Whitlock, H., A composition algebra for multiplace functions. Math. Ann., 1964, 157, №2, 167-178.

Поступило
22 II 1973

SÜMMEETRILISTE POLÜKATEGOORIALE ÜHEPOOLSED IDEAALID

E.Redl

R e s ü m e e

Töös on antud \mathcal{R} tüüpi polükategooriade definitsioon ja näidatud, et kõigi mitmekohaliste funktsioonide kogum üle antud hulkade süsteemi moodustab polükategooria, mida nimetame sümmeetriliseks polükategooriaks. Sümmeetriliste polükategooriade vasakpoolsetele ideaalidele on vastavusse seatud omapärase sisalduvuse omadusega funktsioonide pered. Sümmeetriliste polükategooriade parempoolsetele ja rangetele parempoolsetele ideaalidele on seatud vastavusse teatud ekvivalentside pered, mis on kinnised antud pere ekvivalentside spetsiaalseid otsekorrutisi sisaldavate ekvivalentside suhtes. Töös on leitud tingimused, millal sellised vastavused on üksühesed. Uurimise käigus on leitud kõigi nõrgalt kinniste polügraafide kõik ühepoolsed ideaalid.

EINSEITIGE IDEALE DER SYMMETRISCHEN POLYKATEGORIEN

E.Redl

Z u s a m m e n f a s s u n g

In der Arbeit sind Polykategorien definiert. Es ist bewiesen, daß mehrdimensionale Funktionen auf einem Sy-

stem von Mengen unter Komposition (4) eine Polykategorie bilden. Diese Polykategorie nennen wir symmetrische Polykategorie. Symmetrische Polykategorie auf dem System von einelementigen Mengen nennen wir Polygraphe. Alle einseitigen Ideale der schwach vollständigen Polygraphen sind gefunden.

Allen Linksidealen der symmetrischen Polykategorien ordnen wir eindeutig Funktionenfamilien zu, die besondere Inklusionseigenschaft haben. Allen Rechtsidealen und allen strengen Rechtsidealen der symmetrischen Polykategorien ordnen wir eindeutig Äquivalenzfamilien zu. Solche Äquivalenzfamilien enthalten alle Äquivalenze, die besondere direkte Produkte von Äquivalenzen dieser Familie enthalten.

Es ist erklärt, wann solche Zuordnungen eineindeutig sind.

О СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИКОЛЬЦОИДАХ

Э. Реди

Кафедра алгебры и геометрии

Суперпозицию многоместных функций, отображающих декартовы степени непустого множества в это же множество, исследовали многие математики. Например, регулярную суперпозицию рассматривали Менгер [13], Уйтлок [14], Глускин [3] и др.

Для абстрактного исследования регулярной суперпозиции многоместных функций над системой непустых алгебр, т. е. функций, отображающих прямые произведения алгебр (может быть, разных) в новую алгебру, Я.В.Хион [10] ввел понятие поликольцоида.

С другой стороны, рассматривались суперпозиции многоместных функций, при которых число мест функций увеличивается. Менгер [13] рассматривал подстановку функций вместо всех аргументов некоторой функции без отождествления аргументов. Мальцев [5] исследовал подстановку функции вместо первого аргумента другой, при этом он рассматривал еще некоторые операции. Белоусов [2] и Чупона [11] пользовались серией бинарных операций, отвечающих подстановке функции вместо соответствующего аргумента другой.

В настоящей работе определены поликольцоиды типа \mathcal{R} , которые приспособлены для исследования такой суперпозиции многоместных функций над системой множеств, при которой функция подставлена вместо одного аргумента другой.

Во втором параграфе доказано отсутствие строгих двухсторонних идеалов в полном симметрическом поликольцоиде и найдены все двухсторонние идеалы этого поликольцоида. В третьем параграфе доказано, что эти идеалы являются плотно вложенными и дана абстрактная характеристика симметрического поликольцоида над рефлексивным полиграфом.

В последнем параграфе доказано, что все изоморфизмы

симметрического поликольцоида над рефлексивным полиграфом на другой симметрический поликольцоид являются внутренними. Затем указано строение группы автоморфизмов симметрического поликольцоида.

§ 1. Определения и понятия

Пусть (J, j) — (π -замкнутый) полиграф ([7]), и Ω — сигнатура (см. [4] стр. 62). Значение операции $\omega \in \Omega_n$ ($n \geq 1$) на элементах a_1, \dots, a_n обозначим через $\sum_{\omega} a_i$. Элемент, выделенный 0-арной операцией ν , обозначим через 0^{ν} .

Для кортежей элементов введем короткие обозначения

$$i_n^m = i_n i_{n+1} \dots i_m, \quad (i_n^m) = (i_n, i_{n+1}, \dots, i_m), \quad \text{если } m \geq n,$$

$$i_n^m = \phi, \quad \text{если } m < n.$$

Если кортеж получается из двух так, что они пишутся подряд (как произведение в свободной полугруппе), то используем обозначения

$$j_1 i_1^m = j_1 j_2 \dots j_u i_1 i_2 \dots i_m,$$

$$(j_1 i_1^m) = (j_1, j_2, \dots, j_u, i_1, i_2, \dots, i_m).$$

Аналогично обозначаются и кортежи, составленные из большего числа кусков.

Поликольцоидом типа \mathcal{R} над (J, j) и Ω называется набор

$$\mathcal{A} = (J, j, \mathcal{A}_{i_1^m}^j, \Omega, \pi),$$

если

1) каждой грани $(i_1^m; j) = (i_1, i_2, \dots, i_m; j) \in J$ взаимно однозначно соответствует Ω -алгебра $\mathcal{A}_{i_1^m}^j = \mathcal{A}_{i_1 i_2 \dots i_m}^j$ (\mathcal{A} — 0-мерной грани (j)),

2) операция π^u применима ко всяким элементам $a \in \mathcal{A}_{i_1^m}^j$, $b \in \mathcal{A}_{j_1^p}^k$, $1 \leq u \leq p$ и произведение

$$a \pi^u b \in \mathcal{A}_{j_1^{u-1} i_1^m j_1^p}^k,$$

3) для всяких $\omega \in \Omega_n$ ($n \geq 1$), $a \in \mathcal{A}_{i_1^m}^j$, $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{A}_{j_1^p}^k$, $1 \leq u \leq p$ выполняется равенство дистрибутивности

$$a \pi^u \left(\sum_{\omega} b_i \right) = \sum_{\omega} a \pi^u b_i, \quad (1)$$

4) если через $O_{j_1, p}^{vk}$ обозначен элемент алгебры $A_{j_1, p}^k$, выделенный операцией $\forall \in \Omega$, то для любого $a \in A_{i_1, m}^u$, $u \in p$ имеем равенство

$$a\pi^u O_{j_1, p}^{vk} = O_{j_1, i_1, j_{k+1}, p}^{u-1, m} a \quad (2)$$

5) при $1 \leq u < v \leq n$ для всяких $a \in A_{i_1, m}^u$, $b \in A_{j_1, p}^{kv}$, $c \in A_{k_1, r}^{lv}$ выполняется равенство частичной коммутативности

$$a\pi^u (b\pi^v c) = b\pi^{u+m-1} (a\pi^v c) \quad (3)$$

6) для любых $a \in A_{i_1, m}^u$, $b \in A_{j_1, p}^{kv}$, $c \in A_{k_1, r}^{lv}$, $u \in p$, $v \leq n$ выполняется равенство ассоциативности

$$(a\pi^u b)\pi^v c = a\pi^{u+v-1} (b\pi^v c). \quad (4)$$

Замечание 1. Мы применяем (как и для поликатегорий в [7]) название поликольцоид типа \mathcal{R} , чтобы отличить эти системы от поликольцоидов, определенных Я.В.Хуоном [10]. В этой работе термин поликольцоид означает поликольцоид типа \mathcal{R} .

Замечание 2. Поликольцоиды вида $(J, j, A_{i_1, m}^d, \phi, \pi)$ совпадают с поликатегориями из [7].

Набор $B = (J', j', B_{i_1, m}^d, \Omega, \pi)$ называется подсистемой поликольцоида $A = (J, j, A_{i_1, m}^d, \Omega, \pi)$, если $J' \subset J$, $J' \subset J \cap \bar{J}'$ (где $\bar{J}' = \bigcup_{i=1}^n J_i^m$) и $B_{i_1, m}^d$ является подалгеброй в $A_{i_1, m}^d$ для всякого $(i_1; j) \in J'$.

Подсистема B называется подкольцоидом поликольцоида A , если для любых $b_1 \in B_{i_1, m}^{u_1}$, $b_2 \in B_{j_1, p}^{kv}$, $u \in p$ произведение

$$b_1 \pi^u b_2 \in B_{j_1, i_1, j_{k+1}, p}^{u-1, m}.$$

Подсистема B называется левым идеалом поликольцоида A , если для любых $a \in A_{i_1, m}^u$, $b \in B_{j_1, p}^{kv}$, $u \in p$ произведение

$$a\pi^u b \in B_{j_1, i_1, j_{k+1}, p}^{u-1, m}.$$

Подсистема B называется строгим правым идеалом поликольцоида A , если для любых $b \in B_{i_1, m}^{u_1}$, $a \in A_{j_1, p}^{kv}$, $u \in p$ произведение

$$b\pi^u a \in B_{j_1, i_1, j_{k+1}, p}^{u-1, m}.$$

Подсистема B называется правым идеалом поликольцоида A , если для всяких $b_1 \in B_{i_1, m}^{u_1, \dots, i_1, m_1, \dots}$, $b_p \in B_{i_1, m_1, \dots, i_1, m_p, r}^{u_p}$, $a \in A_{j_1, p}^{kv}$ произведение

$$b_1 \pi^1 \dots b_p \pi^p a = b_1 \pi^1 [\dots [b_p \pi^p a] \dots] \in B_{i_1, \dots, i_m, \dots, i_r}^k$$

Подсистема, являющаяся одновременно левым и (строгим) правым идеалами поликольцоида \mathcal{A} , называется (строгим) двусторонним идеалом в \mathcal{A} .

Пример 1. Для любого (π -замкнутого) полиграфа (J, \mathcal{J}) соответствующую тривиальную поликатегорию ([7]) $\mathcal{J}_\pi(J) = (J, \mathcal{J}, \mathcal{I}_1^k, \pi)$ можно рассматривать как поликольцоид при любой сигнатуре Ω , если определить во множествах $\mathcal{I}_1^k = \{(i_1^m; j)\}$ операции из Ω обычным для одноэлементных алгебр образом.

Пример 2. Пусть $(\mathcal{M}_i; i \in J)$ есть система Ω -алгебр и (J, \mathcal{J}) - полиграф. Введем следующие обозначения

$$C_{i_1^m}^j = \{(i_1^m; x, j) \mid x \in \mathcal{M}_j\}, \quad C^j = \{(x, j) \mid x \in \mathcal{M}_j\},$$

где $(i_1^m; x, j) = (i_1, i_2, \dots, i_m; x, j)$.

Определим операции следующим образом:

$$\sum_x (i_1^m; x, j) = (i_1^m; \sum_x x, j), \quad (5)$$

$$O_{i_1^m}^j = (i_1^m; O_j^v, j) \quad (6)$$

$$(i_1^m; x, j_u) \pi^u (j_1^p; y, k) = (j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^p; y, k) \quad (7)$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{M}_j$, $x \in \mathcal{M}_j$, $y \in \mathcal{M}_k$, $1 \leq u \leq p$, $w \in \Omega_n$ ($n \geq 1$), $v \in \Omega_c$, причем O_j^v является элементом алгебры \mathcal{M}_j , выделенным операцией v .

Предложение 1. Набор $C_J(\mathcal{M}_i; i \in J) = (J, \mathcal{J}, C_{i_1^m}^j, \Omega, \pi)$ является поликольцоидом, называемым \mathcal{J} -сингулярным поликольцоидом над $(\mathcal{M}_i; i \in J)$.

Доказательство. Сперва проверим дистрибутивность.

Пусть $x \in \mathcal{M}_j$, $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{M}_k$, $1 \leq u \leq p$, $w \in \Omega_n$ ($n \geq 1$) произвольные. Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} (i_1^m; x, j_u) \pi^u \left[\sum_x (j_1^p; y, k) \right] & \stackrel{(5)}{=} (i_1^m; x, j_u) \pi^u (j_1^p; \sum_x y, k) \stackrel{(3)}{=} \\ & = (j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^p; \sum_x y, k) \stackrel{(5)}{=} \sum_x (j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^p; y, k) \stackrel{(3)}{=} \\ & = \sum_x (i_1^m; x, j_u) \pi^u (j_1^p; y, k) \end{aligned}$$

для любых $(i_1^m; j_u)$, $(j_1^p; k) \in \mathcal{J}$. Значит, равенство (1) удовлетворяется в $C_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$.

По определениям (6) и (7) имеем, что

$$(i_1^m; x, j_u) \pi^u(j_u^p; 0_k^v, k) = (j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^p; 0_k^v, k) = 0_{j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^p, k}^{v, k}$$

т.е. равенство (2) выполняется для всяких $x \in M_{j_u}$, $1 \leq u \leq r$.

Для проверки частичной коммутативности берем произвольные $x \in M_{k_u}$, $y \in M_{k_r}$, $z \in M_\ell$, $1 \leq u < r \leq r$. Тогда по (7) имеем, что

$$\begin{aligned} & (i_1^m; x, k_u) \pi^u(j_u^p; y, k_r) \pi^r(k_1^v; z, \ell) = \\ & = (i_1^m; x, k_u) \pi^u(k_1^{r-1}, j_u^p, k_{r+1}^v; z, \ell) = \\ & = (k_1^{u-1}, i_1^m, k_{u+1}^{r-1}, j_u^p, k_{r+1}^v; z, \ell) = \\ & = (j_u^p; y, k_r) \pi^{r-m-1}(k_1^{u-1}, i_1^m, k_{u+1}^v; z, \ell) = \\ & = (j_u^p; y, k_r) \pi^{r-m-1}[(i_1^m; x, k_u) \pi^u(k_1^v; z, \ell)] \end{aligned}$$

т.е. в $\mathcal{C}_J(M_i; i \in J)$ имеет место равенство (3).

Пусть, наконец, $x \in M_{j_u}$, $y \in M_{k_u}$, $z \in M_\ell$, $1 \leq u \leq r$, $1 \leq v \leq r$ произвольные. Тогда по (7) имеем, что

$$\begin{aligned} & [(i_1^m; x, j_u) \pi^u(j_u^p; y, k_r)] \pi^v(k_1^v; z, \ell) = \\ & = (j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^p; y, k_r) \pi^v(k_1^v; z, \ell) = \\ & = (k_1^{v-1}, j_1^{u-1}, i_1^m, j_{u+1}^p, k_{v+1}^v; z, \ell) = \\ & = (i_1^m; x, j_u) \pi^{u+v-1}(k_1^{v-1}, j_u^p, k_{v+1}^v; z, \ell) = \\ & = (i_1^m; x, j_u) \pi^{u+v-1}[(j_u^p; y, k_r) \pi^v(k_1^v; z, \ell)] \end{aligned}$$

т.е. равенство ассоциативности выполняется в $\mathcal{C}_J(M_i; i \in J)$.

Предложение доказано.

Пример 3. Пусть $\mathcal{F}_J = \mathcal{F}_J(M_i; i \in J)$ есть J -симметрическая полкатегория ([7]) над системой $(M_i; i \in J)$. Если все $M_i (i \in J)$ суть Ω -алгебры, то определим на каж-

дом $\mathcal{F}_{i_1}^{j_1} ((i_1^m, j_1) \in \mathcal{J})$ операции из Ω следующим образом:

$$x_1^m \left(\sum_{\ell}^{\omega} a_{\ell} \right) = \sum_{\ell}^{\omega} x_1^m a_{\ell}, \quad (8)$$

$$x_1^m \circ_{j_1}^{i_1} = 0_{j_1}^{i_1} \quad (9)$$

(здесь $x_1^m a = x_1 x_2 \dots x_m a$ означает значение функции a при данных аргументах) для всяких $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$, $\omega \in \Omega_n$ ($n \geq 1$), $\nu \in \Omega$, $(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1} \times \dots \times \mathcal{M}_{i_m}$.

Как в [7], введем для декартова произведения обозначения

$$\mathcal{M}_{i_1}^m = \mathcal{M}_{i_1 i_2 \dots i_m} = \mathcal{M}_{i_1} \times \mathcal{M}_{i_2} \times \dots \times \mathcal{M}_{i_m} \quad (m \geq 1),$$

$$\mathcal{M}_{i_1}^0 = \phi.$$

Предложение 2. Набор $\mathcal{F}_{\mathcal{J}} = \mathcal{F}_{\mathcal{J}}(\mathcal{M}_{i_i}; i \in \mathcal{J}) = (\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{F}_{i_i}^{j_i}, \Omega, \pi)$ является поликольцоидом, называемым \mathcal{J} -симметрическим поликольцоидом над $(\mathcal{M}_{i_i}; i \in \mathcal{J})$.

Доказательство. По предложению 1.1 из [7] $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$ является поликатегорией. Напомним, что операция π^u определена формулой¹

$$x_1^{m \oplus p} (a \pi^u b) = x_1^{u-1} (x_1^{u \oplus m} a) x_{u+m}^{m \oplus p} b \quad (10)$$

для любых $a \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$, $b \in \mathcal{F}_{j_1}^{k_1}$, $1 \leq u \leq p$, $(x_1^{m \oplus p}) \in \mathcal{M}_{j_1^{u-1} i_1^m j_1^p}$.

Для проверки дистрибутивности берем произвольные $a \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{F}_{j_1}^{k_1}$, $1 \leq u \leq p$, $\omega \in \Omega_n$ ($n \geq 1$). Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} x_1^{m \oplus p} [a \pi^u (\sum_{\ell}^{\omega} b_{\ell})] &\stackrel{(10)}{=} x_1^{u-1} (x_1^{u \oplus m} a) x_{u+m}^{m \oplus p} (\sum_{\ell}^{\omega} b_{\ell}) \stackrel{(8)}{=} \\ &= \sum_{\ell}^{\omega} x_1^{u-1} (x_1^{u \oplus m} a) x_{u+m}^{m \oplus p} b_{\ell} \stackrel{(10)}{=} \sum_{\ell}^{\omega} x_1^{m \oplus p} (a \pi^u b_{\ell}) \stackrel{(8)}{=} x_1^{m \oplus p} [\sum_{\ell}^{\omega} a \pi^u b_{\ell}] \end{aligned}$$

для любого $(x_1^{m \oplus p}) \in \mathcal{M}_{j_1^{u-1} i_1^m j_1^p}$. Следовательно, равенство (1) выполняется.

Если $a \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$, $\nu \in \Omega_0$, $1 \leq u \leq p$, $(j_1^i; k_1) \in \mathcal{J}$ произвольные, то

$$x_1^{m \oplus p} (a \pi^u 0_{j_1}^{k_1}) \stackrel{(10)}{=} x_1^{u-1} (x_1^{u \oplus m} a) x_{u+m}^{m \oplus p} 0_{j_1}^{k_1} \stackrel{(8)}{=} 0_{j_1}^{k_1} \quad (9)$$

¹ В работе введено обозначение $m \oplus p = m + p - 1$ для всех натуральных чисел $m \geq 0, p \geq 0$.

$$= 0^{\nu} = x_1^{m \circ p} 0^{\nu k p} j_{i-1}^{m} j_{i+1}^{m}$$

для всякого $(x_1^{m \circ p}) \in M_{j_{i-1}^{m}; i_{i-1}^{m}; j_{i+1}^{m}}$. Значит, равенство (2) выполняется и \mathcal{F}_J является поликольцом.

Предложение доказано.

§ 2. Идеалы

В данном, а также в следующем параграфе считаем $(M_i; i \in J)$ фиксированной системой Ω -алгебр. Поэтому используем обозначение \mathcal{F}_J вместо $\mathcal{F}_J(M_i; i \in J)$.

Для каждой $a \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$ введем обозначение

$$Ma = \{y \in M_j \mid y = x_1^{m_i} a \text{ для некоторого } (x_1^{m_i}) \in M_{i_1}^{j_1}\} \quad (11)$$

для образа функции a . Как обычно, мощность $|Ma|$ назовем рангом функции a .

Пусть q произвольное кардинальное число и пусть $w = w(M)$ вес системы $(M_i; i \in J)$, т.е. w является минимальным кардинальным числом, удовлетворяющим условию $|M_i| < w$ для каждого $i \in J$.

Введем обозначения

$$\mathcal{F}_{i_1}^{j_1} = \{a \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1} \mid |Ma| < q\} \quad \mathcal{F}_J = (J, J, \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}, \Omega, \pi).$$

Предложение 3. Все \mathcal{F}_J являются левыми идеалами поликатегории \mathcal{F}_J . Если $q = 2$ или бесконечное, то \mathcal{F}_J является двусторонним идеалом поликольца \mathcal{F}_J .

Доказательство. Для доказательства первого утверждения берем произвольные $b \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$, $a \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$, $1 \leq u \leq p$. Тогда $|Mb| < q$. Покажем, что $M(a\pi^u b) \subset Mb$. В самом деле, для любого $y \in M(a\pi^u b)$ существует $(x_1^{m \circ p}) \in M_{j_{i-1}^{m}; i_{i-1}^{m}; j_{i+1}^{m}}$ такой, что тогда по (10) имеем

$$y = x_1^{m \circ p} (a\pi^u b) = x_1^{u-1} (x_u^{u \circ m} a) x_{u+m}^{m \circ p} b$$

Так как здесь $x_u^{u \circ m} a \in M_{j_i}$, то по (11) элемент $y \in Mb$ и $M(a\pi^u b) \subset Mb$. Поэтому $|M(a\pi^u b)| \leq |Mb| < q$

и $a\pi^u b \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$. Следовательно, \mathcal{F}_J является левым идеалом поликатегории \mathcal{F}_J . При конечном $q (q > 2)$ множества $\mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$ могут оказаться не замкнутыми относи-

тельно операций из Ω , если $\Omega_n \neq \emptyset$ для некоторого $n \geq 2$.

Множество $\mathcal{F}_{i_1}^j$ состоит из всех константных функций, определенных на $\mathcal{M}_{i_1}^j$ и принимающих значения в \mathcal{M}_j . Постоянную функцию, имеющую значением $y \in \mathcal{M}_j$, обозначим в дальнейшем через $c_{i_1}^j(y)$.

Пусть $c_{i_1, \dots, i_1 m_1}^{j_1}(y_1), \dots, c_{i_r, \dots, i_r m_r}^{j_r}(y_r), c_{j_1}^k(y), a \in \mathcal{F}_{i_1}^{j_1}$, $\forall \epsilon \in \mathcal{F}_{j_1}^k$ $u \leq r, w \in \Omega_m (m \geq 1), v \in \Omega_0$ произвольные. Тогда имеем следующие равенства

$$c_{i_1, \dots, i_1 m_1}^{j_1}(y_1) \pi^1 \dots c_{i_r, \dots, i_r m_r}^{j_r}(y_r) \pi^r \bar{v} = c_{i_1, \dots, i_1 m_1, \dots, i_r m_r}^k(y_1^r \bar{v}), \quad (12)$$

$$a \pi^u c_{j_1}^k(y) = c_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}}^k(y), \quad (13)$$

$$c_{i_1}^{j_1 u}(x) \pi^u c_{j_1}^k(y) = c_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}}^k(y), \quad (14)$$

$$\sum_{z \in \Omega} c_{i_1}^{j_1}(z) = c_{i_1}^{j_1}(\sum_{z \in \Omega} z), \quad (15)$$

$$O_{i_1}^{j_1 p} = c_{i_1}^{j_1}(O^p). \quad (16)$$

Докажем сперва равенство (12). Для произвольного $(x_1, \dots, x_{r m_r}) \in \mathcal{M}_{i_1, \dots, i_r m_r}$ имеем по (10), что

$$\begin{aligned} & x_1 \dots x_{1 m_1} \dots x_{r_1} \dots x_{r m_r} [c_{i_1, \dots, i_1 m_1}^{j_1}(y_1) \pi^1 \dots c_{i_r, \dots, i_r m_r}^{j_r}(y_r) \pi^r \bar{v}] = \\ &= [x_1 \dots x_{1 m_1} c_{i_1, \dots, i_1 m_1}^{j_1}(y_1)] \dots [x_{r_1} \dots x_{r m_r} c_{i_r, \dots, i_r m_r}^{j_r}(y_r)] \bar{v} = \\ &= y_1 \dots y_r \bar{v} = x_1 \dots x_{1 m_1} \dots x_{r_1} \dots x_{r m_r} c_{i_1, \dots, i_r m_r}^k(y_1^r \bar{v}). \end{aligned}$$

Проверим еще и равенство (13). Для этого применим левую сторону этого равенства к произвольному набору $(x_1^{m \circ p}) \in \mathcal{M}_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}}$. По (10) имеем

$$\begin{aligned} x_1^{m \circ p} [a \pi^u c_{j_1}^k(y)] &= x_1^{u-1} (x_{u+m} a) x_{u+m}^{m \circ p} c_{j_1}^k(y) = \\ &= y = x_1^{m \circ p} c_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}}^k(y). \end{aligned}$$

Значит, равенство (13) выполняется. Равенство (14) является частным случаем равенства (13). Равенства (15) и (16) доказываются аналогично.

Равенства (12), (13), (15) и (16) показывают, что $\mathcal{M}(a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r \nu)$ является двусторонним идеалом поликольцоида \mathcal{F}_r .

Пусть теперь q бесконечное кардинальное число. Заметим, что

$$\mathcal{M}(a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r \nu) \subset [M_{a_1} \times \dots \times M_{a_r}] \nu. \quad (17)$$

В самом деле, для любого $z \in \mathcal{M}(a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r \nu)$ существует по (11) набор $(x_1, \dots, x_r, m_r) \in \mathcal{M}_{i_1, \dots, i_r, m_r}$ такой, что

$$z = x_1 \dots x_r m_r (a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r \nu) = (x_1 \dots x_{i_1} a_1) \dots (x_{i_r} \dots x_{r m_r} a_r) \nu$$

Значит, $x_1 \dots x_{i_1} a_1 \in M_{a_1}, \dots, x_{i_r} \dots x_{r m_r} a_r \in M_{a_r}$ и $z \in [M_{a_1} \times \dots \times M_{a_r}] \nu$, т.е. принадлежит образу указанного декартового произведения при ν .

Поэтому имеем для произвольных $a_i \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_{i_1}, \dots}^k$, $a_r \in \mathcal{F}_{i_r, \dots, i_{r m_r}}^k$, $\nu \in \mathcal{F}_r^k$, что

$$|\mathcal{M}(a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r \nu)| \leq |[M_{a_1} \times \dots \times M_{a_r}] \nu| \leq |M_{a_1} \times \dots \times M_{a_r}| =$$

$$= |M_{a_1}| \dots |M_{a_r}| < q \dots q = q.$$

Следовательно, $a_1 \pi^1 \dots a_r \pi^r \nu \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_r, m_r}^k$.

При любом $\omega \in \Omega_n$ ($n \geq 1$), $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_r, m_r}^k$ имеем, что

$$|\mathcal{M}(\sum_{\nu} a_{\nu})| \leq |M_{a_1} \times \dots \times M_{a_n}| \quad (18)$$

так как для всякого $y \in \mathcal{M}(\sum_{\nu} a_{\nu})$ по (11) существует набор $(x_1) \in \mathcal{M}_{i_1}$ такой, что

$$y = x_1 (\sum_{\nu} a_{\nu}) \stackrel{(18)}{=} \sum_{\nu} x_1 a_{\nu} \in \sum_{\nu} M_{a_{\nu}},$$

т.е.

$$\mathcal{M}(\sum_{\nu} a_{\nu}) \subset \sum_{\nu} M_{a_{\nu}}.$$

Операция ω может склеивать некоторые наборы из $M_{a_1} \times \dots \times M_{a_n}$, поэтому получим неравенства

$$|\mathcal{M}(\sum_{\nu} a_{\nu})| \leq |\sum_{\nu} M_{a_{\nu}}| \leq |M_{a_1} \times \dots \times M_{a_n}| = |M_{a_1}| \dots |M_{a_n}|.$$

Если теперь $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_r, m_r}^k$, то $|M_{a_1}| < q, \dots, |M_{a_n}| < q$ и

$$|\mathcal{M}(\sum_{\nu} a_{\nu})| \leq |M_{a_1}| \dots |M_{a_n}| < q \dots q = q,$$

т.е. $\sum_{\nu} a_{\nu} \in \mathcal{F}_{i_1, \dots, i_r, m_r}^k$.

Отметим, что $\mathcal{O}_{i_1}^k \in \mathcal{F}_{i_1}^k$, так как по (9)

$$|\mathcal{M} \mathcal{O}_{i_1}^k| = 1 < q.$$

Следовательно, при бесконечном q набор \mathcal{F}_r^k является-

ся двусторонним идеалом поликольцоида \mathcal{P}_J .

Лемма 4. Полный полиграф (J, \bar{J}) не имеет нетривиальных собственных двусторонних идеалов и не имеет собственных строгих двусторонних идеалов.

Доказательство. Если (J', J') нетривиальный двусторонний идеал (\bar{J}) в (J, \bar{J}) , то существует такой $m \geq 1$, что $(i_1^m; j) \in J'$. Для любого $(j_1^p; k) \in \bar{J}$ по (1) из [6] имеем, что

$$(j_1^p; i_1) \pi^1(i_2) \pi^2 \dots (i_m) \pi^m [(i_1^m; j) \pi^1(j_1^p; k)] = (j_1^p; k).$$

По определению двустороннего идеала это произведение принадлежит J' . Значит, $J' = \bar{J}$ и идеал не является собственным.

Пусть (J', J') строгий двусторонний (даже только строгий правый) идеал в (J, \bar{J}) и известно, что $(i) \in J'$. Тогда для любого $(j_1^p; k) \in \bar{J}$ имеем

$$(i) \pi^1(i, j_1^p; k) = (j_1^p; k) \in J',$$

т.е. $J' = \bar{J}$ и идеал не является собственным.

Лемма доказана.

В дальнейшем запишем вместо $\mathcal{P}_J (\mathcal{P} \mathcal{P}_J)$ просто \mathcal{P} ($\mathcal{P} \mathcal{P}$) и назовем этот поликольцоид полным симметрическим поликольцоидом (ранга q) над $(\mathcal{M}_i; i \in J)$.

Идеалы, состоящие только из 0-местных функций, назовем тривиальными, остальные нетривиальными.

Теорема 5. Поликольцоид всех константных функций \mathcal{P}^2 является наименьшим нетривиальным двусторонним идеалом поликатегории $\mathcal{P}^2 (2 \leq v \leq \omega)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (J', J', \mathcal{A}_{i_1^m}^j, \Omega, \pi)$ произвольный нетривиальный двусторонний идеал поликатегории $\mathcal{P}^2 (2 \leq v)$. В силу нетривиальности идеала \mathcal{A} для некоторого $m > 0$ существует такая грань $(i_1^m; j)$, что $\mathcal{A}_{i_1^m}^j = \emptyset$, т.е. найдется $\alpha \in \mathcal{A}_{i_1^m}^j$.

Наша цель показать, что в этом случае $\mathcal{P}^2 \subset \mathcal{A}$, т.е. при произвольной грани $(j_1^p; k) \in \bar{J}$ и произвольном элементе $z \in \mathcal{M}_k$ функция $c_{j_1^p}^k(z) \in \mathcal{A}_{j_1^p}^k$. Возьмем произвольные $x_t \in \mathcal{M}_{i_t} (t=1, \dots, m)$. Поскольку полиграф полный, то функции

$$c_{j_1^p}^{i_1}(x_1), c_{j_1^p}^{i_2}(x_2), \dots, c_{j_1^p}^{i_m}(x_m), c_{j_1^p}^k(z)$$

принадлежат \mathcal{P}^2 . По требованиям правого и левого идеалов

поликатегории для \mathcal{A} - произведение

$$\begin{aligned} & [c_{j_1^i}^{i_1}(x_1)\pi^1 c_{j_2^i}^{i_2}(x_2)\pi^2 \dots c_{j_m^i}^{i_m}(x_m)\pi^m \alpha] \pi^1 c_j^k(z) \stackrel{(12)}{=} \\ & = c_{j_1^i}^{i_1}(x_1 \alpha) \pi^1 c_j^k(z) \stackrel{(14)}{=} c_{j_1^i}^{i_1}(z) \end{aligned}$$

принадлежит множеству $\mathcal{A}_{j_1^i}^k$. Значит, ${}^2\mathcal{J} \in \mathcal{A}$. По предположению 3 ${}^2\mathcal{J}$ является поликольцоидом в ${}^v\mathcal{J}$, а ${}^v\mathcal{J}$ является поликольцоидом лишь при $v=2$, $v=w$ или бесконечным v . Теорема доказана.

Следствие. Поликатегория ${}^2\mathcal{J}$ не содержит нетривиальных собственных двусторонних идеалов, но содержит нетривиальные минимальные левые идеалы.

Доказательство. Первое утверждение является частным случаем предыдущей теоремы.

Пусть $k \in \mathcal{J}$ и $z \in \mathcal{M}_k$ произвольные. Введем обозначения

$$C_{i_1^m}^k(z) = \{c_{i_1^m}^k(z)\}, C(z) = (\mathcal{J}, \bar{\mathcal{J}}(k), C_{i_1^m}^k(z), \pi),$$

где $\bar{\mathcal{J}}(k) = \bigcup_{m=0}^{\infty} (\mathcal{J}^{m \times 1} k)$. В силу равенства (13) все $C(z)$ являются левыми идеалами поликатегории ${}^2\mathcal{J}$.

Из следствия 2.10 работы [7] вытекает, что все $(\mathcal{J}, \bar{\mathcal{J}}(k))$ и только они являются минимальными нетривиальными левыми идеалами полного полиграфа $(\mathcal{J}, \bar{\mathcal{J}})$. Так как все $C_{i_1^m}^k(z)$ одноэлементны, то из этого следует минимальность левого идеала $C(z)$. Следствие доказано.

Теперь обобщим этот результат для поликольцоидов над рефлексивным полиграфом [7].

Идеал \mathcal{B} называется \mathcal{J} -идеалом поликольцоида $\mathcal{A} = (\mathcal{J}, \mathcal{J}, \mathcal{A}_{i_1^m}^k, \Omega, \pi)$, если все $\mathcal{B}_{i_1^m}^k \neq \emptyset$ при любом $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$, т.е. полиграфом для \mathcal{B} является полиграф самого \mathcal{A} .

Теорема 6. Поликольцоид ${}^2\mathcal{J}$ является наименьшим правым (двусторонним) \mathcal{J} -идеалом поликольцоида ${}^v\mathcal{J}$ ($v \leq w$) над рефлексивным $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$.

Доказательство. Пусть \mathcal{B} произвольный правый (двусторонний) \mathcal{J} -идеал поликольцоида ${}^v\mathcal{J}$ и пусть $(\mathcal{J}, \mathcal{J})$ рефлексивен. Поскольку \mathcal{B} \mathcal{J} -идеал, то для любого $(i_1^m; j) \in \mathcal{J}$ существует $b \in \mathcal{B}_{i_1^m}^j$. Наша цель показать, что ${}^2\mathcal{J}_{j_1^m} \subset \mathcal{B}_{i_1^m}^j$.

Пусть $y \in \mathcal{M}_j$ произвольный. В силу рефлексивности полиграфа грань $(j; j) \in \mathcal{J}$ и функция $c_j^j(y) \in {}^v\mathcal{J}_j^j$. По

(13) имеем

$$c_{i_1}^j(y) = \delta \pi^1 c_j^i(y),$$

причем $c_{i_1}^j(y)$ принадлежит B как правому идеалу. Следовательно, ${}^2\mathcal{Y}_j \subset B$. Подсистема ${}^2\mathcal{Y}_j$ является по предложению 3 двусторонним идеалом в ${}^2\mathcal{Y}_j$ ($v \leq w$), притом j -идеалом.

Теорема доказана.

Теорема 7. Поликольцоид ${}^2\mathcal{Y}$ ($v \leq w$) не содержит собственных строгих правых \bar{J} -идеалов и строгих двусторонних идеалов.

Доказательство. Пусть $B = (J', j', B_{i_1}^j, \Omega, \pi)$ строгий правый \bar{J} -идеал (строгий двусторонний идеал) в \mathcal{Y} . Тогда $J' = \bar{J}$ по определению \bar{J} -идеала или по лемме 4. Поскольку, все строгие правые (строгие двусторонние) идеалы являются правыми (двусторонними) идеалами, то по предыдущей теореме ${}^2\mathcal{Y} \subset B$.

Пусть теперь $\delta \in {}^2\mathcal{Y}_{i_1}^j$, $(i_1^m; j) \in \bar{J}$ произвольные. Фиксируем какой-нибудь элемент $z \in Mb$ и определим функцию $\delta \in \mathcal{Y}_{ij}^j$ (здесь $(j, j, j) \in J' = \bar{J}$) формулой

$$yxd = \begin{cases} x, & \text{если } y = z \text{ и } x \in Mb, \\ z, & \text{если } y \neq z \text{ или } x \in Mj \setminus Mb. \end{cases}$$

Тогда $Md = Mb$ и поэтому $d \in {}^2\mathcal{Y}_{ij}^j$.

Поскольку $c_j^i(z) \in {}^2\mathcal{Y}_{ij}^j \subset B$, $(j) \in \bar{J} = J'$ и B строгий правый идеал, то произведение $c_j^i(z) \pi^1 (\delta \pi^2 d) \in B_{i_1}^j$.

Кроме того, $c_j^i(z) \pi^1 (\delta \pi^2 d) = \delta$, так как для любого

$$x_1^m \in M_{i_1}^m \quad \text{имеем, что}$$

$$x_1^m [c_j^i(z) \pi^1 (\delta \pi^2 d)] = z (x_1^m \delta) d = x_1^m \delta.$$

В силу произвольности элемента $\delta \in {}^2\mathcal{Y}_{ij}^j$ и грани $(i_1^m; j) \in \bar{J}$ мы заключаем, что $B = {}^2\mathcal{Y}^j$.

Теорема доказана.

§ 3. Плотные вложения

Пусть $A = (J, j, A_{i_1}^j, \Omega, \pi)$ и $B = (J, j, B_{i_1}^j, \Omega, \pi)$ поликольцоиды с одними и теми же полиграфом (\bar{J}, j) и сигнатурой Ω . Гомоморфизмом поликольцоида A в B называется набор

$$\alpha = (\alpha_i, \alpha_{i_1}^j; (i_1^m; j) \in \bar{J}),$$

где: 1) α_0 является таким взаимно однозначным отображением множества J на себя, что продолжение его до отображения множества J отображает J взаимно однозначно на себя ($J\alpha_0 = J$, причем $(i_1^m; j)\alpha_0 = (i_1\alpha_0, \dots, i_m\alpha_0; j\alpha_0) \in J$),

2) $\alpha_{i_1^m}^j : \mathcal{A}_{i_1^m}^j \rightarrow \mathcal{B}_{i_1^m}^j$, где $i' = i_0$ для $i \in J$ являются гомоморфизмами Ω -алгебр т.е.

$$\left(\sum_{\ell} a_{\ell}\right)\alpha_{i_1^m}^j = \sum_{\ell} (a_{\ell}\alpha_{i_1^m}^j), \quad (22)$$

$$0_{i_1^m}^j \alpha_{i_1^m}^j = 0_{i_1^m}^{j\beta} \quad (23)$$

для любых $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}_{i_1^m}^j$,

3)

$$(a\pi^u b)\alpha_{i_1^m}^j = (a\alpha_{i_1^m}^j)\pi^u(b\alpha_{j_1^k}^l) \quad (24)$$

для всех $a \in \mathcal{A}_{i_1^m}^j$, $b \in \mathcal{B}_{j_1^k}^l$, $1 \leq u \leq p$.

Отметим, что можно дать более общее определение гомоморфизма поликольцоидов, но в работе понадобятся только такие гомоморфизмы.

Гомоморфизм α называется моно(эпи)морфизмом, если все отображения $\alpha_{i_1^m}^j$ ($(i_1^m; j) \in J$) являются моно(эпи)морфизмами. Если α одновременно моно- и эпиморфизм, то α называется изоморфизмом. Эндоморфизм и автоморфизм определяются обычным образом. Гомоморфизм, не являющийся изоморфизмом, называется собственным, а собственный гомоморфизм, не являющийся отображением в систему, состоящую из одноэлементных алгебр, называется нетривиальным.

Рассмотрим класс всех поликольцоидов с фиксированными полиграфом (J, j) и сигнатурой Ω . Обозначим этот класс через \mathcal{K}_j .

В целях упрощения следующих доказательств выведем из аксиом поликольцоида несколько формул. Соответствующее утверждение сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 8. В произвольном поликольцоиде $\mathcal{A} = (J, j, \mathcal{A}_{i_1^m}^j, \Omega, \pi)$ имеют место следующие равенства

$$a\pi^u(b\pi^v c) = b\pi^{u+v} (a\pi^u c), \text{ если } 1 \leq u < v \leq r,$$

$$a\pi^u(b\pi^v c) = (a\pi^{u-v} b)\pi^v c, \text{ если } v \leq u < v+r, v \leq r, \quad (25)$$

$$a\pi^u(b\pi^v c) = b\pi^v (a\pi^{u+r} c), \text{ если } v+r \leq u < r+v, v \leq r, \quad (26)$$

$$a\pi^t(b_1\pi^{t_1} \dots b_n\pi^{t_n} c) = b_1\pi^{t_1} \dots (a\pi^t b_n)\pi^{t_2} \dots b_n\pi^{t_n} c, \quad (27)$$

если $1 \leq t' \leq p_\ell$, $\ell \leq v$,

$$a_1 \pi^1 \dots a_{p_\ell} \pi^{p_\ell} (b \pi^c) = a_1 \pi^1 \dots (a_{v \oplus p} \pi^{p_\ell} b) \pi^{c'} \dots a_{p_\ell} \pi^{c'} \quad (28)$$

если

$v \leq v$,

где $a \in A_{i_1, m}^{j_1}$, $b \in A_{j_1}^k$, $c \in A_{\ell_1}^{\ell}$, $d \in A_{i_1, m}^{j_1}$, $b_1 \in A_{j_1}^{\ell_1} \dots j_1 p_1$ ($s=1, \dots, v$),
 $a_2 \in A_{i_2, m}^{j_2} \dots i_2 m_2$ ($s=v, \dots, v \oplus p$), $a_3 \in A_{i_3, m}^{\ell_3} \dots i_3 m_3$ ($s=$
 $= 1, \dots, v-1, v \oplus p, \dots, p \oplus v$) — любые элементы соответствующих мно-
 жеств и $t = t' + p_1 + \dots + p_{\ell-1}$.

Доказательство. Первое равенство является равенством частичной коммутативности. Правая сторона равенства (25) (равенства (26)) удовлетворяет условиям применимости формулы (4) (соответственно (3)). В результате получим левую сторону этого равенства. Следовательно, первые три равенства выполняются в любом поликольцоиде.

Пусть $d \in A_{i_1, m}^{j_1}$, $b_1 \in A_{j_1}^{\ell_1} \dots j_1 p_1$ ($s=1, \dots, v$), $c \in A_{\ell_1}^{\ell}$,
 $1 \leq t' \leq p_\ell$, $1 \leq \ell \leq v$ произвольные и $t = t' + p_1 + \dots + p_{\ell-1}$.
 По выбору числа t' имеем, что

$$1 + p_1 \leq t' + p_1(p_2 + \dots + p_{\ell-1}) = t \leq p_\ell + p_1 + (p_2 + \dots + p_{\ell-1} + 1),$$

$$2 + p_2 \leq t' + p_2 + (p_3 + \dots + p_{\ell-1} + 1) = t - p_1 + 1 \leq p_\ell + p_2 + (p_3 + \dots + p_{\ell-1} + 2),$$

$$v-1 + p_{v-1} \leq t' + p_{v-1} + \ell + 2 \leq p_\ell + p_{v-1} + (p_\ell + \dots + p_{v-1} + \ell - 1).$$

Поэтому, повторно применяя (26), имеем

$$d \pi^t [b_1 \pi^1 (b_2 \pi^2 \dots b_v \pi^v c)] = b_1 \pi^1 [d \pi^{t-p_1+1} (b_2 \pi^2 \dots b_v \pi^v c)] = \dots =$$

$$= b_1 \pi^1 \dots b_{v-1} \pi^{v-1} \{d \pi^{t+\ell-1} [b_v \pi^\ell (\dots b_1 \pi^c c)]\}.$$

Поскольку $\ell \leq t' + \ell - 1 \leq \ell + p_\ell$, то к выражению в фигурных скобках применимо равенство (25). Значит, имеем

$$d \pi^t (b_1 \pi^1 \dots b_v \pi^v c) = b_1 \pi^1 \dots \{d \pi^{t+\ell-1} [b_v \pi^\ell (b_{v-1} \pi^{v-1} \dots b_1 \pi^c c)]\} =$$

$$= b_1 \pi^1 \dots (d \pi^{t'} b_2) \pi^\ell (b_{v-1} \pi^{v-1} \dots b_1 \pi^c c) =$$

$$= b_1 \pi^1 \dots (d \pi^{t'} b_2) \pi^\ell \dots b_v \pi^v c,$$

т.е. равенство (27) выполняется в поликольцоиде A .

Пусть теперь $a_1 \in A_{i_1, m}^{j_1} \dots i_1 m_1$ ($s=v, \dots, v \oplus p$), $a_2 \in$
 $\in A_{i_2, m}^{\ell_2} \dots i_2 m_2$ ($s=1, \dots, v-1$), $a_3 \in A_{i_3, m}^{\ell_3} \dots i_3 m_3$ ($s=v \oplus p, \dots, p \oplus v$), $b \in A_{j_1}^k$, $c \in A_{\ell_1}^{\ell}$.

произвольные. Если $v = v$, то применим сразу равенство (25) (см. следующий абзац). В случае $v < v$ будет

$$v+r \leq r+v-1 < r+v, \dots, v+r \leq r+v < r+v$$

и мы можем $v-v$ раз применить (26). Продолжив это, имеем

$$\begin{aligned} a_1 \pi^1 \dots \{a_{r+v-1} \pi^{r+v-1} (b \pi^v)\} &= a_1 \pi^1 \dots \{a_{r+v-2} \pi^{r+v-2} [b \pi^v \{a_{r+v-1} \pi^1 c\}]\} = \\ &= a_1 \pi^1 \dots \{a_{r+p-1} \pi^{r+p-1} [b \pi^v \{a_{r+p} \pi^1 \dots a_{r+v} \pi^1 c\}]\} \end{aligned}$$

К выражению в фигурных скобках применимо равенство (25), поскольку $v \leq v+p-1 < v+p$. Аналогично можем продолжать по (25), пока перед квадратными скобками стоит π^v , ибо $v \leq v < v+p$. По описанному методу получим

$$\begin{aligned} a_1 \pi^1 \dots a_{r+v-1} \pi^{r+v-1} (b \pi^v c) &= a_1 \pi^1 \dots \{a_{r+p-1} \pi^{r+p-1} [b \pi^v \{a_{r+p} \pi^1 \dots a_{r+v} \pi^1 c\}]\} = \\ &= a_1 \pi^1 \dots \pi^{v+p-2} \{[a_{r+p-1} \pi^1 \dots a_{r+v} \pi^1] b \pi^v c\} = \\ &= a_1 \pi^1 \dots \pi^{v-1} (a_r \pi^1 \dots a_{r+p-1} \pi^1 b) \pi^v \dots a_{r+v} \pi^1 c. \end{aligned}$$

Значит, равенство (28) вытекает из аксиом поликольцоида.

Отметим, что при $r_1 = \dots = r_n = 1$ равенство (27) принимает для любого $1 \leq t \leq n$ вид

$$d \pi^t (b_1 \pi^1 \dots b_n \pi^1 c) = b_1 \pi^1 \dots (d \pi^t b_n) \pi^t \dots b_n \pi^1 c. \quad (29)$$

Лемма доказана.

Теорема 9. Если (I, J) рефлексивный полиграф, то для каждого $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}_J$, содержащего $\mathcal{V}_{J,J}$ в качестве правого (двустороннего) идеала, существует гомоморфизм поликольцоида \mathfrak{D} в $\mathcal{V}_{J,J}$, являющийся тождественным на $\mathcal{V}_{J,J}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}_{J,J}$ является правым (двусторонним) идеалом в $\mathfrak{D} \in \mathcal{K}_J$ и пусть (I, J) рефлексивен. Тогда $(i, i) \in J$ при всяком $i \in I$ и $c_{i_1}^{i_1} x_1 \in \mathcal{V}_{i_1, i_1}, \dots, c_{i_m}^{i_m} (x_m) \in \mathcal{V}_{i_m, i_m}$ для любых $x_1 \in M_{i_1}, \dots, x_m \in M_{i_m}$. Поэтому для любого $d \in \mathfrak{D}_{i_1}^{i_1}$ произведение

$$c_{i_1}^{i_1} (x_1) \pi^1 \dots c_{i_m}^{i_m} (x_m) \pi^m d \in \mathcal{V}_{i_1, i_1}^{J,J}$$

Определим отображение $\alpha = (\alpha_i: \mathfrak{D}_{i_1}^{i_1} \rightarrow \mathcal{V}_{i_1, i_1}^{J,J})$ из \mathfrak{D} в $\mathcal{V}_{J,J}$ следующим образом: положим, что α_i есть тождественное отображение множества J на себя и

$$x_1 \pi^1 (d \mathfrak{D}_{i_1}^{i_1}) = x_1 \pi^1 [c_{i_1}^{i_1} (x_1) \pi^1 \dots c_{i_m}^{i_m} (x_m) \pi^m d] \quad (30)$$

для всяких $d \in \mathcal{D}_{i_1}^j$, $(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1}^m$, $(i_1^m; j) \in J$.

Покажем, что каждое $\alpha_{i_1}^j$ является гомоморфизмом Ω -алгебр. Пусть $d_1, \dots, d_n \in \mathcal{D}_{i_1}^j$, $\omega \in \Omega_n$ ($n \geq 1$), $\forall \epsilon \in \Omega_n$ произвольные. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \chi_1^m \left[\left(\sum_{\epsilon} d_{\epsilon} \right) \alpha_{i_1}^j \right] &= \chi_1^m \left[\left(\sum_{\epsilon} c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^{\epsilon} \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m \left(\sum_{\epsilon} d_{\epsilon} \right) \right) \right]_{(1)} \\ &= \chi_1^m \left[\sum_{\epsilon} c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^{\epsilon} \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m d_{\epsilon} \right]_{(8)} \\ &= \sum_{\epsilon} \chi_1^m \left[c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^{\epsilon} \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m d_{\epsilon} \right]_{(30)} \\ &= \sum_{\epsilon} [d_{\epsilon} \alpha_{i_1}^j]_{(8)} \chi_1^m \left[\sum_{\epsilon} d_{\epsilon} \alpha_{i_1}^j \right], \end{aligned}$$

для всякого $(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1}^m$. Значит, условия (22) и (23) выполняются.

Докажем следующую вспомогательную формулу

$$\begin{aligned} c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m [c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m d] &= \\ &= c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m d \end{aligned} \quad (31)$$

для любых $(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1}^m$, $d \in \mathcal{D}_{i_1}^j$. Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned} &c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots \{ c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m [c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m d] \}_{(27)} \\ &= c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_{m-1}}^{i_{m-1}^m}(x_{m-1}) \pi^{m-1} [c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots (c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^1 c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m) \pi^m d] = \\ &\dots \dots \dots \\ &= [c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1] \pi^1 \dots [c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^1 c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^1] \pi^m d =_{(14)} \\ &= c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m d. \end{aligned}$$

Значит, формула (31) имеет место.

Покажем, что α удовлетворяет и равенству (24). Пусть $a_1 \in \mathcal{D}_{i_1}^k$, $a_2 \in \mathcal{D}_{j_1}^k$, $1 \leq a \leq p$ произвольные. Введем обозначения

$$c_{i_1}^{i_1^m}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m}^{i_m^m}(x_m) \pi^m d_1 = a, \quad (32)$$

$$x_a^{a \circ a} a = y \quad (33)$$

для произвольно фиксированного набора $(x_1^{m\theta p}) \in \mathcal{M}_{j_1^{u-1} j_2^m j_3^l}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 & x_1^{m\theta p} [(d_1 \alpha_{i_1}^{j_1^u}) \pi^u (d_2 \alpha_{j_2}^k)] \stackrel{(10)}{=} x_1^{u-1} [x_u^{u\theta m} (d_1 \alpha_{i_1}^{j_1^u})] x_{u+m}^{m\theta p} (d_2 \alpha_{j_2}^k) \stackrel{(30)}{=} \\
 & = x_1^{u-1} \{ x_u^{u\theta m} [c_{i_1}^{j_1^u}(x_u) \pi^u \dots c_{i_m}^{j_1^u}(x_{u+m}) \pi^u] x_{u+m}^{m\theta p} (d_2 \alpha_{j_2}^k) \stackrel{(31)}{=} \\
 & = x_1^{u-1} (x_u^{u\theta m} \alpha) x_{u+m}^{m\theta p} (d_2 \alpha_{j_2}^k) \stackrel{(33)}{=} x_1^{u-1} y x_{u+m}^{m\theta p} (d_2 \alpha_{j_2}^k) \stackrel{(30)}{=} \\
 & = x_1^{u-1} y x_{u+m}^{m\theta p} [c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{j_u^u}^{j_1^u}(y) \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2] \stackrel{(32)}{=} \\
 & = x_1^{u-1} (x_u^{u\theta m} \alpha) x_{u+m}^{m\theta p} [c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{j_u^u}^{j_1^u}(y) \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2] \stackrel{(10)}{=} \\
 & = x_1^{m\theta p} \{ \alpha \pi^u [c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{j_u^u}^{j_1^u}(y) \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2] \}.
 \end{aligned}$$

Теперь преобразуем выражение в фигурных скобках следующим образом

$$\begin{aligned}
 & \alpha \pi^u [c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{j_u^u}^{j_1^u}(y) \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2] \stackrel{(23)}{=} \\
 & = c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots [\alpha \pi^u c_{j_u^u}^{j_1^u}(y) \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2] \stackrel{(13)}{=} \\
 & = c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{j_1^u}^{j_1^u}(y) \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2 \stackrel{(35)}{=} \\
 & = c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_u^{u\theta m} \alpha) \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2 \stackrel{(12)}{=} \\
 & = c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots [c_{i_1}^{j_1^u}(x_u) \pi^u \dots c_{i_m}^{j_1^u}(x_{u+m}) \pi^u \alpha] \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2 \stackrel{(34)}{=} \\
 & = c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots \{ c_{i_1}^{j_1^u}(x_u) \pi^u \dots c_{i_m}^{j_1^u}(x_{u+m}) \pi^u [c_{i_1}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{i_m}^{j_1^u}(x_{u+m}) \pi^u d_1] \} \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2 \\
 & = c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots [c_{i_1}^{j_1^u}(x_u) \pi^u \dots c_{i_m}^{j_1^u}(x_{u+m}) \pi^u] \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2 \stackrel{(28)}{=} \\
 & = c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{i_1}^{j_1^u}(x_u) \pi^u \dots c_{i_m}^{j_1^u}(x_{u+m}) \pi^{u\theta m} \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^{m\theta p} (d_1 \pi^u d_2).
 \end{aligned}$$

Вернемся к исходному выражению. Нами доказано, что

$$\begin{aligned}
 & x_1^{m\theta p} [(d_1 \alpha_{i_1}^{j_1^u}) \pi^u (d_2 \alpha_{j_2}^k)] = \\
 & = x_1^{m\theta p} \{ \alpha \pi^u [c_{j_1^u}^{j_1^u}(x_1) \pi^u \dots c_{j_u^u}^{j_1^u}(y) \pi^u \dots c_{j_p}^{j_1^u}(x_{m\theta p}) \pi^u d_2] \}.
 \end{aligned}$$

Заменив выражение в фигурных скобках по формуле, доказанной

выше, получим

$$\begin{aligned} & x_1^{m\Phi P}[(a_1 \alpha_{i_1}^{j_1}) \pi^u (a_2 \alpha_{i_2}^{j_2})] = \\ & = x_1^{m\Phi P} [c_{j_1}^{i_1}(x_1) \pi^u \dots c_{i_1}^{j_1}(x_u) \pi^u \dots c_{i_m}^{j_m}(x_{u\Phi P}) \pi^{u\Phi P} \dots c_{j_p}^{i_p}(x_{m\Phi P}) \pi^{m\Phi P} [(a_1 \pi^u a_2)]_{(30)}] = \\ & = x_1^{m\Phi P} [(a_1 \pi^u a_2) a_{j_1}^{i_1} \dots a_{j_m}^{i_m}] \end{aligned}$$

для всякого $(x_1^{m\Phi P}) \in \mathcal{M}_{j_1, i_1}^{m, p}$

Значит, равенство (24) выполняется и α является гомоморфизмом поликольцоидов.

Покажем, что α является тождественным на $\mathcal{V}_{\mathcal{J}}$. Пусть $a \in \mathcal{V}_{\mathcal{J}}^{i_1}$ и $(i_1; j) \in \mathcal{J}$ произвольны. Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} x_1^m (a \alpha_{i_1}^{j_1}) & \stackrel{(30)}{=} x_1^m [c_{i_1}^{j_1}(x_1) \pi^u \dots c_{i_m}^{j_m}(x_m) \pi^u a] \stackrel{(12)}{=} \\ & = x_1^m c_{i_1}^{j_1}(x_1 a) = x_1^m a \end{aligned}$$

для всякого $(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1}^m$. Значит, $a \alpha_{i_1}^{j_1} = a$ и α является тождественным на $\mathcal{V}_{\mathcal{J}}$.

Теорема доказана.

Мы говорим, что правый (двусторонний) идеал \mathcal{B} поликольцоида $\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{\mathcal{J}}$ является существенным правым (двусторонним) идеалом в \mathcal{A} , если всякий собственный гомоморфизм поликольцоида \mathcal{A} индуцирует собственный гомоморфизм на \mathcal{B} .

Мы говорим, что правый (двусторонний) идеал \mathcal{B} является плотно вложенным правым (двусторонним) идеалом поликольцоида \mathcal{A} в классе $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$, если

- 1) \mathcal{B} существенный идеал в \mathcal{A} ,
- 2) \mathcal{A} максимальный поликольцоид из $\mathcal{K}_{\mathcal{J}}$, в котором

\mathcal{B} является существенным идеалом, т.е. если поликольцоид $\mathcal{D} \in \mathcal{K}_{\mathcal{J}}$ содержит \mathcal{A} в качестве собственного подполикольцоида и \mathcal{B} в качестве идеала, то \mathcal{B} не является существенным в \mathcal{D} .

Теорема 10. Если полиграф (J, j) рефлексивен, то $\mathcal{V}_{\mathcal{J}}$ при $q = 2$ или при бесконечном q ($q \leq \omega$) является плотно вложенным правым (двусторонним) идеалом поликольцоида

$\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$.

Доказательство. По предложению 3 $\mathcal{V}_{\mathcal{J}}$ при $q = 2$ или при бесконечном q является двусторонним идеалом в $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$.

Покажем, что $\mathcal{V}_{\mathcal{J}}$ существенен в $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$.

Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_{i_1}^{d_{i_1}}; (i_1^m, j) \in J)$ является собственным гомоморфизмом поликольцоида \mathcal{F}_J . Тогда существуют $(i_1^m, j) \in J$ и $a, b (a \neq b) \in \mathcal{F}_{i_1^m}$ такие, что $\alpha \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}} = \text{br} \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}}$. Так как $a \neq b$, то для некоторого набора $(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1^m}$ имеем, что

$$y = x_1^m a \neq x_1^m b = z.$$

Возьмем $c_{i_1^m}^{i_1}(x_1) \in {}^2\mathcal{F}_{i_1^m}^{i_1}, \dots, c_{i_m^m}^{i_m}(x_m) \in {}^2\mathcal{F}_{i_m^m}^{i_m}$. Здесь $(i; i) \in J$ для всякого $i \in J$, поскольку (J, J) рефлексивен. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} c_{i_1^m}^{d_{i_1}}(y) \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}} &= [c_{i_1^m}^{i_1}(x_1^m a)] \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}} \stackrel{(12)}{=} \\ &= [c_{i_1^m}^{i_1}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m^m}^{i_m}(x_m) \pi^m a] \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}} \stackrel{(24)}{=} \\ &= [c_{i_1^m}^{i_1}(x_1) \alpha_{i_1^m}^{i_1} \pi^1 \dots [c_{i_m^m}^{i_m}(x_m) \alpha_{i_m^m}^{i_m}] \pi^m] \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}} = \\ &= [c_{i_1^m}^{i_1}(x_1) \alpha_{i_1^m}^{i_1} \pi^1 \dots [c_{i_m^m}^{i_m}(x_m) \alpha_{i_m^m}^{i_m}] \pi^m] \text{br} \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}} \stackrel{(24)}{=} \\ &= [c_{i_1^m}^{i_1}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m^m}^{i_m}(x_m) \pi^m b] \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}} = \\ &= c_{i_1^m}^{d_{i_1}}(x_1^m b) \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}} = c_{i_1^m}^{d_{i_1}}(z) \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}}. \end{aligned}$$

Но $c_{i_1^m}^{d_{i_1}}(y) \neq c_{i_1^m}^{d_{i_1}}(z)$. Значит, ограничение $\alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}}$ на ${}^2\mathcal{F}_{i_1^m}^{d_{i_1}}$ является собственным гомоморфизмом и α индуцирует на $\mathcal{F}_J \supset {}^2\mathcal{F}_J$ собственный гомоморфизм, т.е. \mathcal{F}_J существенен в \mathcal{F}_J .

Покажем, что \mathcal{F}_J является максимальным поликольцоидом в \mathcal{K}_J , в котором \mathcal{F}_J существенен. Пусть $\mathcal{D} \in \mathcal{K}_J$ такой, что $\mathcal{F}_J \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \neq \mathcal{F}_J$ и \mathcal{F}_J является правым (двусторонним) идеалом в \mathcal{D} .

По теореме 9 существует гомоморфизм $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}_J$, являющийся тождественным на \mathcal{F}_J . Здесь α определяется формулой (30). Отображение α является тождественным на всем \mathcal{F}_J . Действительно, для любых $a \in \mathcal{F}_{i_1^m}$,

$(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1^m}$ и $(i_1^m, j) \in J$ имеем, что

$$\begin{aligned} x_1^m (\alpha \alpha_{i_1^m}^{d_{i_1}}) &\stackrel{(30)}{=} x_1^m [c_{i_1^m}^{i_1}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_m^m}^{i_m}(x_m) \pi^m a] \stackrel{(12)}{=} \\ &= x_1^m c_{i_1^m}^{d_{i_1}}(x_1^m a) = x_1^m a, \end{aligned}$$

т.е. $\alpha \alpha_{i_1 m}^j = a$.

Так как $\mathcal{D} \neq \mathcal{F}_j$, то при некотором $(i_1, ij) \in J$ существует $a \in \mathcal{D}_{i_1 m}^j \setminus \mathcal{F}_{i_1 m}^j$. Пусть $\alpha \alpha_{i_1 m}^j = a \in \mathcal{F}_{i_1 m}^j$.
Имеем также $\alpha \alpha_{i_1 m}^j = a$, но $a \neq \alpha$. Значит, α является собственным гомоморфизмом поликольцоида \mathcal{D} , индуцирующим на $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$ (даже на \mathcal{F}_j) тождественный автоморфизм. Поэтому $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$ не является существенным идеалом в \mathcal{D} . Следовательно, $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$ является плотно вложенным правым (двусторонним) идеалом в \mathcal{F}_j .

Теорема доказана.

Теорема 11. Если (J, j) рефлексивный полиграф, то поликольцоид $\mathcal{D} \in \mathcal{K}_j$ изоморфен поликольцоиду \mathcal{F}_j тогда и только тогда, когда \mathcal{D} содержит плотно вложенный правый (двусторонний) идеал \mathcal{B} , изоморфный поликольцоиду $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$, где $q = 2$ или q бесконечно и $q < \omega$.

Доказательство. Необходимость вытекает из предыдущей теоремы.

Достаточность. Пусть \mathcal{D} содержит плотно вложенный правый (двусторонний) идеал \mathcal{B} , изоморфный поликольцоиду $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$, где $q = 2$ или q бесконечно ($q < \omega$). Для простоты записей отождествим поликольцоиды \mathcal{B} и $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$. Тогда по теореме 9 существует гомоморфизм α из \mathcal{D} в \mathcal{F}_j , являющийся тождественным на $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$.

Если α не являлся бы мономорфизмом, то α был бы собственным гомоморфизмом поликольцоида \mathcal{D} , индуцирующим на $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$ тождественный автоморфизм. Но это противоречит тому, что $\mathcal{B} = \mathcal{V}\mathcal{F}_j$ существенный правый идеал в \mathcal{D} .

Допустим, что α не является эпиморфизмом, т.е. образ $\mathcal{D}\alpha \neq \mathcal{F}_j$. Так как α мономорфизм, то можем считать \mathcal{D} подполикольцоидом (притом собственным) в \mathcal{F}_j . По теореме 10 поликольцоид \mathcal{F}_j , но \mathcal{D} является максимальным поликольцоидом в \mathcal{K}_j , в котором $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$ существенный правый (двусторонний) идеал. Полученное противоречие со вторым условием плотной вложенности $\mathcal{V}\mathcal{F}_j$ в \mathcal{D} доказывает, что α является эпиморфизмом, тем самым даже изоморфизмом.

Теорема доказана.

Теорема 12. Поликольцоиды \mathcal{F}_j и \mathcal{C}_j изоморфны.

Доказательство. Определим $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_{i_1 m}^j, (i_1, ij) \in J\}$ следующим образом: α_0 - тождественное отображение множеств-

ва J на себя и

$$\alpha_{i_1}^{j_1}(y) \alpha_{i_1}^{j_1} = (i_1^m; y, j) \quad (34)$$

для всяких $\alpha_{i_1}^{j_1}(y) \in {}^2\mathcal{P}_{i_1}^{j_1}$, $(i_1^m; j) \in J$.

Каждое $\alpha_{i_1}^{j_1}$ является гомоморфизмом Ω -алгебр: для любых $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{M}_j$, $\omega \in \Omega_n$ ($n \geq 1$), $\nu \in \Omega_0$ имеем

$$\begin{aligned} \left[\sum_{\mathcal{L}} \alpha_{i_1}^{j_1}(y_\nu) \right] \alpha_{i_1}^{j_1} &= \alpha_{i_1}^{j_1} \left(\sum_{\mathcal{L}} y_\nu \right) \alpha_{i_1}^{j_1} \stackrel{(34)}{=} (i_1^m; \sum_{\mathcal{L}} y_\nu, j) \stackrel{(5)}{=} \\ &= \sum_{\mathcal{L}} (i_1^m; y_\nu, j) \stackrel{(34)}{=} \sum_{\mathcal{L}} [\alpha_{i_1}^{j_1}(y_\nu) \alpha_{i_1}^{j_1}], \end{aligned}$$

$$O_{i_1}^{j_1} \alpha_{i_1}^{j_1} \stackrel{(16)}{=} \alpha_{i_1}^{j_1}(O_j^p) \alpha_{i_1}^{j_1} \stackrel{(34)}{=} (i_1^m; O_j^p, j) \stackrel{(6)}{=} O_{i_1}^{j_1}.$$

Значит, каждое $\alpha_{i_1}^{j_1}$ действительно является гомоморфизмом Ω -алгебр. Непосредственно видно, что каждое

$\alpha_{i_1}^{j_1}$ является моно- и эпиморфизмом.

Покажем, что α удовлетворяет равенству (24). Для всяких $y \in \mathcal{M}_j$, $z \in \mathcal{M}_k$, $i \leq u \leq p$ имеем

$$\begin{aligned} [\alpha_{i_1}^{j_1}(y) \pi_{j_1}^k(z)] \alpha_{i_1}^{j_1} &\stackrel{(14)}{=} \alpha_{i_1}^{j_1}(y) \alpha_{i_1}^{j_1} \pi_{j_1}^k(z) \stackrel{(14)}{=} \alpha_{i_1}^{j_1}(y) \alpha_{i_1}^{j_1} \pi_{j_1}^k(z) \stackrel{(14)}{=} \\ &= (j_1^{u-1}, i_1^m; j, j_1^p; z, k) \stackrel{(33)}{=} (i_1^m; y, j_1^p) \pi_{j_1}^k(z, k) \stackrel{(34)}{=} \\ &= [\alpha_{i_1}^{j_1}(y) \alpha_{i_1}^{j_1}] \pi_{j_1}^k(z) \alpha_{i_1}^{j_1}. \end{aligned}$$

Следовательно, α удовлетворяет равенству (24) и является изоморфизмом поликольцоидов ${}^2\mathcal{P}_j$ на \mathcal{C}_j .

Теорема доказана.

Следствие. Если (J, J) рефлексивный полиграф, то поликольцоид $\mathcal{D} \in \mathcal{K}_J$ изоморфен поликольцоиду \mathcal{P}_J тогда и только тогда, когда \mathcal{D} содержит плотно вложенный в класс \mathcal{K}_J правый (двусторонний) идеал, изоморфный \mathcal{C}_J .

Это утверждение вытекает из теорем 10 и 11 и дает абстрактную характеристику J -симметрических поликольцоидов над рефлексивным (J, J) .

Теорема 13. Если (J, J) рефлексивный полиграф, то всякий изоморфизм поликольцоидов ${}^2\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$, где $q = 2$ или q бесконечно и $q < \omega(\mathcal{M})$, на поликольцоид

$\mathcal{F}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$ можно, и притом однозначно, продолжить до изоморфизма поликольцоида $\mathcal{F}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ на поликольцоид $\mathcal{F}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$.

Доказательство. Пусть $\rho = (\rho_0, \beta_{i_1}^j; (i_1^m; j) \in J)$ является изоморфизмом поликольцоида $\mathcal{F}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ на $\mathcal{F}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$. Определим отображение $\bar{\rho}$ поликольцоида $\mathcal{F}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ в $\mathcal{F}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} 1) \quad \bar{\rho}_0 &= \rho_0, \\ 2) \quad x_1^m(a \beta_{i_1}^j) &= x_1^m[(a \alpha_{i_1}^j) \beta_{i_1}^j] = \\ &= x_1^m\{[c_{i_1}^{i_1}(x_1) \pi^1 \dots c_{i_1}^{i_m}(x_m) \pi^m a] \beta_{i_1}^j\} \end{aligned} \quad (35)$$

для всяких $a \in \mathcal{F}_{i_1}^j, (x_1^m) \in \mathcal{P}_{i_1}^m, (i_1^m; j) \in J$. Здесь $\alpha = (\alpha_0, \alpha_{i_1}^j; (i_1^m; j) \in J)$ определено формулой (30).

Каждое $\beta_{i_1}^j$ является гомоморфизмом Ω -алгебр: для всяких $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{F}_{i_1}^j, \omega \in \Omega_n (n \geq 1), \forall \epsilon \in \Omega_\infty$ имеем

$$\begin{aligned} x_1^m\left[\left(\sum_{\epsilon} a_{\epsilon}\right) \beta_{i_1}^j\right] &\stackrel{(35)}{=} x_1^m\left\{\left[\sum_{\epsilon} a_{\epsilon}\right] \alpha_{i_1}^j\right\} \beta_{i_1}^j \stackrel{(22)}{=} \\ &= x_1^m\left\{\left[\sum_{\epsilon} (a_{\epsilon} \alpha_{i_1}^j)\right] \beta_{i_1}^j\right\} \stackrel{(22)}{=} \\ &= x_1^m\left\{\sum_{\epsilon} [(a_{\epsilon} \alpha_{i_1}^j) \beta_{i_1}^j]\right\} \stackrel{(35)}{=} \\ &= x_1^m\left[\sum_{\epsilon} (a_{\epsilon} \beta_{i_1}^j)\right], \end{aligned}$$

$$O_{i_1}^{j, M} \beta_{i_1}^j = (O_{i_1}^{j, M} \alpha_{i_1}^j) \beta_{i_1}^j = O_{i_1}^{j, M} \beta_{i_1}^j = O_{i_1}^{j, P}$$

для всякого $(x_1^m) \in \mathcal{P}_{i_1}^m$.

Отображение $\bar{\rho}$ удовлетворяет условию (24). Действительно, для всяких $a \in \mathcal{F}_{i_1}^j, b \in \mathcal{F}_{j_1}^k, 1 \leq u \leq p$ имеем

$$\begin{aligned} (a \pi^u b) \bar{\rho}_{j_1}^{k, u-1, m} j_{i_1}^m &\stackrel{(35)}{=} [(a \pi^u b) \alpha_{j_1}^{k, u-1, m} j_{i_1}^m] \beta_{j_1}^{k, u-1, m} j_{i_1}^m \stackrel{(24)}{=} \\ &= [(a \alpha_{i_1}^j) \pi^u (b \alpha_{j_1}^k)] \beta_{j_1}^{k, u-1, m} j_{i_1}^m \stackrel{(24)}{=} \\ &= [(a \alpha_{i_1}^j) \beta_{i_1}^j] \pi^u [(b \alpha_{j_1}^k) \beta_{j_1}^k] \stackrel{(35)}{=} \\ &= (a \bar{\rho}_{i_1}^j) \pi^u (b \bar{\rho}_{j_1}^k). \end{aligned}$$

Значит, ρ является гомоморфизмом поликольцоидов. Так как

по теореме 9 α является тождественным на $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$, то $\bar{\beta}$ совпадает с β на подкольцоиде $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$, т.е. $\bar{\beta}$ является продолжением изоморфизма β .

Из плотной вложенности $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ в $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$, а также $\mathcal{P}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$ в $\mathcal{P}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$ вытекает, аналогично теореме 10, что $\bar{\beta}$ является моно- и эпиморфизмом.

Покажем, что только тождественный автоморфизм поликольцоида $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ индуцирует тождественный автоморфизм на подкольцоиде $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$, где $q=2$, или q бесконечно. Допустим, что автоморфизм $\gamma = (\gamma_{i_1}^{j_1}; (i_1^m; j) \in J)$ поликольцоида $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ индуцирует на $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ тождественный автоморфизм. Предположим от противного, что существуют $(i_1^m; j) \in J$ и $a \in \mathcal{P}_{i_1}^{j_1}$ такие, что $a\gamma_{i_1}^{j_1} \neq a$, т.е. для некоторого $(x_1^m) \in \mathcal{M}_i$ имеем $z = x_1(a\gamma_{i_1}^{j_1}) \neq x_1 a = y$. Тогда $c_{i_1}^{j_1}(y)\gamma_{i_1}^{j_1} \neq c_{i_1}^{j_1}(y)$. В самом деле, в силу рефлексивности (J, J) грань $(i; i) \in J$ при всяком $i \in J$ и поэтому по предположению имеем, что

$$\begin{aligned} c_{i_1}^{j_1}(y)\gamma_{i_1}^{j_1} &= c_{i_1}^{j_1}(x_1^m a)\gamma_{i_1}^{j_1} \stackrel{(12)}{=} \\ &= [c_{i_1}^{i_1}(x_1)\pi^1 \dots c_{i_1}^{i_m}(x_m)\pi^m a]\gamma_{i_1}^{j_1} \stackrel{(2m)}{=} \\ &= [c_{i_1}^{i_1}(x_1)\gamma_{i_1}^{i_1}]\pi^1 \dots [c_{i_1}^{i_m}(x_m)\gamma_{i_1}^{i_m}]\pi^m (a\gamma_{i_1}^{j_1}) = \\ &= c_{i_1}^{i_1}(x_1)\pi^1 \dots c_{i_1}^{i_m}(x_m)\pi^m (a\gamma_{i_1}^{j_1}) \stackrel{(12)}{=} \\ &= c_{i_1}^{j_1}(x_1^m (a\gamma_{i_1}^{j_1})) = c_{i_1}^{j_1}(z) \neq c_{i_1}^{j_1}(y), \end{aligned}$$

т.е. γ не является тождественным на $\mathcal{P}_J \subset \mathcal{P}_J$. Полученное противоречие с тем, что γ индуцирует на \mathcal{P}_J тождественный автоморфизм, показывает, что предположение ложно и γ является тождественным на всем $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$.

Покажем теперь единственность продолжения $\bar{\beta}$. Допустим, что изоморфизм $\delta = (\delta_0, \delta_{i_1}^{j_1}; (i_1^m; j) \in J)$ поликольцоида $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ на $\mathcal{P}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$ также индуцирует на $\mathcal{P}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ изоморфизм β . Тогда автоморфизм $\gamma = (\gamma_0, \gamma_{i_1}^{j_1}; (i_1^m; j) \in J)$, где γ_0 тождественное отображение множества J на себя и

$$\gamma_{i_1}^{j_1} = \bar{\beta}_{i_1}^{j_1}(\delta_{i_1}^{j_1})^{-1}, ((i_1^m; j) \in J),$$

является тождественным на $\Psi_J(M_i; i \in J)$. Действительно, при любом $a \in \Psi_{i_1}^{i_2}$ имеем

$$a[(\beta_{i_1}^{i_2}(\delta_{i_1}^{i_2})^{-1})] = (a\beta_{i_1}^{i_2})(\delta_{i_1}^{i_2})^{-1} = (a\beta_{i_1}^{i_2})(\beta_{i_1}^{i_2})^{-1} = a,$$

так как на $\Psi_{i_1}^{i_2}(M)$ оба изоморфизма $\beta_{i_1}^{i_2}$ и $\delta_{i_1}^{i_2}$ совпадают с $\beta_{i_1}^{i_2}$.

В силу доказанного выше из тождественности автоморфизма γ на $\Psi_J(M_i; i \in J)$ вытекает тождественность его на всем $\Psi_J(M_i; i \in J)$. Поэтому $\bar{\beta}_{i_1}^{i_2} = \delta_{i_1}^{i_2}$ для всякого $(i_1, i_2) \in J$ и $\bar{\beta} = \delta$. Следовательно, $\bar{\beta}$ является единственным продолжением изоморфизма β до изоморфизма поликольцоидов $\Psi_J(M_i; i \in J)$ и $\Psi_J(R_i; i \in J)$.

Теорема доказана.

§ 4. Автоморфизмы

Пусть $(M_i; i \in J)$ и $(P_i; i \in J)$ — две системы Ω -алгебр. Изоморфизмом системы $(M_i; i \in J)$ на систему $(P_i; i \in J)$ называется набор $f = (f_0, f_i; i \in J)$, где f_0 взаимно однозначное отображение множества J на себя и каждое f_i является изоморфизмом Ω -алгебры M_i на P_i (обозначим $i f_0 = i'$ для всякого $i \in J$). Изоморфизм назовем J -изоморфизмом, если f_0 является автоморфизмом полиграфа (J, J) , т.е. продолжение f_0 на J , определенное формулой

$$(i_1^m; j) f_0 = (i_1^m; j') = (i_1 f_0; i_2 f_0; \dots; i_m f_0; j f_0),$$

является (взаимно однозначным) отображением множества J на себя. Ясно, что f_0 сохраняет произведения граней (см. (I) из [7]). Изоморфизм (J -изоморфизм) системы на себя называется автоморфизмом (J -автоморфизмом) системы.

Отметим, что веса (см. стр. 68) изоморфных между собой систем алгебр являются равными.

Через $\mathcal{G}(M, P)$ обозначим множество всех изоморфизмов системы $(M_i; i \in J)$ на $(P_i; i \in J)$, а через $\mathcal{G}(M)$ — множество всех автоморфизмов системы $(M_i; i \in J)$. Множество всех J -изоморфизмов системы $(M_i; i \in J)$ на $(P_i; i \in J)$ обозначим через $\Psi_J(M, P)$, а множество всех J -автоморфизмов системы $(M_i; i \in J)$ обозначим через $\Psi_J(M)$. Определим умножение в $\Psi_J(M)$ следующим образом: для любых

$f = (f_0, f_i; i \in J)$ и $g = (g_0, g_i; i \in J)$ из $\mathcal{U}_J(M)$ считаем их произведением набор

$$fg = (f_0g_0, f_i g_i; i \in J), \quad \psi = i f_0. \quad (36)$$

Здесь f_0g_0 и $f_i g_i$ означают последовательное применение отображений.

Лемма 14. Для каждой системы $(M_i; i \in J)$ и каждого полиграфа (J, J) J -автоморфизмы этой системы образуют группу.

Доказательство. Если $f, g \in \mathcal{U}_J(M)$, т.е. $Jf_0 = J$ и $Jg_0 = J$, то $J(f_0g_0) = (Jf_0)g_0 = Jg_0 = J$. Значит, f_0g_0 отображает множество J на себя и $fg \in \mathcal{U}_J(M)$, т.е. определение (36) корректно.

Умножение является ассоциативным, так как для любых f, g, h (при обозначении $\psi' = i(f_0g_0) = i'g_0$ и $\psi = i f_0$) по (36) имеем

$$\begin{aligned} (fg)h &= (f_0g_0, f_i g_i; i \in J)h = ((f_0g_0)h_0, (f_i g_i)h_i; i \in J) = \\ &= (f_0(g_0h_0), f_i(g_i h_i); i \in J) = f(g_0h_0, g_i h_i; i \in J) = fgh, \end{aligned}$$

в силу ассоциативности последовательного применения отображений.

Введем для тождественного автоморфизма обозначение $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_i; i \in J)$, где $\varepsilon_0, \varepsilon_i$ — тождественные отображения соответственно множеств J, M_i на себя. Непосредственная проверка показывает, что ε является единицей в $\mathcal{U}_J(M)$.

Для J -автоморфизма f обратным является J -автоморфизм $f^{-1} = (f_0^{-1}, f_i^{-1}; i \in J)$, где $f_i^{-1} = (f_i)^{-1}$. В самом деле, $i f_0 f_0^{-1} = i$ для любого $i \in J$ и $x (f f^{-1})_i = (x f_i) f_i^{-1} = (x f_i) f_i^{-1} = x$ для любого $x \in M_i$. Значит, ff^{-1} (аналогично $f^{-1}f$) является тождественным отображением системы на себя.

Лемма доказана.

Пусть $f \in \mathcal{U}_J(M, P)$. Определим $\alpha(f) = (\alpha_0(f), \alpha(f)_{i_1^m}^j; (i_1^m, j) \in J)$ на $\mathcal{P}_J(P)$ следующим образом: положим $\alpha_0(f) = f_0$ и

$$\alpha_1^m[\alpha(f)_{i_1^m}^j] = [(x_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) \alpha] f_j \quad (37)$$

для всех $(x_1^m) \in P_{i_1^m}, a \in P_{i_1^m}^j, (i_1^m, j) \in J$.

Лемма 15. Если $f \in \mathcal{U}_J(M, P)$, то $\alpha(f)$ является изоморфизмом поликольцоида $\mathcal{P}_J(M_i; i \in J)$ на

$\mathcal{F}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$, отображающим подкольцо $\mathcal{V}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ (где $q < \omega$) на $\mathcal{V}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$.

Доказательство. Поскольку $f \in \mathcal{F}_J(\mathcal{M}, \mathcal{P})$, то $\alpha(f)$ является отображением подкольца $\mathcal{V}_J(\mathcal{M}_i; i \in J)$ в $\mathcal{V}_J(\mathcal{P}_i; i \in J)$. Покажем, что каждое $\alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}$ является гомоморфизмом Ω -алгебр. Для всяких $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}$, $\omega \in \Omega_n$ ($n \geq 1$), $\nu \in \Omega_0$, в силу того, что f_i является изоморфизмом Ω -алгебр, имеем:

$$\begin{aligned} x_1^{\omega} [(\sum_{\ell} a_{\ell}) \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}] &= [(x_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) (\sum_{\ell} a_{\ell})] f_j \stackrel{(31)}{=} \\ &= [\sum_{\ell} (x_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) a_{\ell}] f_j = \\ &= \sum_{\ell} [(x_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) a_{\ell}] f_j \stackrel{(32)}{=} \\ &= \sum_{\ell} x_1^{\omega} [a_{\ell} \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}] \stackrel{(3)}{=} x_1^{\omega} [\sum_{\ell} (a_{\ell} \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}})], \\ x_1^{\omega} [O_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}^{\nu, \mathcal{M}} \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}] &= [(x_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) O_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}^{\nu, \mathcal{M}}] f_j = \\ &= O_j^{\nu, \mathcal{M}} f_j = O_j^{\nu, \mathcal{P}} = x_1^{\omega} [O_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}^{\nu, \mathcal{P}}] \end{aligned}$$

для всякого $(x_1^{\omega}) \in \mathcal{P}_i^{\omega}$. Значит, $\alpha(f)$ является гомоморфизмом Ω -алгебр.

Покажем, что $\alpha(f)$ удовлетворяет и условию (24).

Пусть $a \in \mathcal{F}_{j_1}^{\mathcal{M}}$, $b \in \mathcal{F}_{j_2}^{\mathcal{P}}$, $1 \leq i \leq p$ произвольные. Тогда, в силу взаимной однозначности f_i ($i \in J$) имеем, что

$$\begin{aligned} x_1^{\omega \rho} [(a \pi^u b) \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}} \cdot \pi^u] &= [(x_1 f_{j_1}^{-1}) \dots (x_{m \oplus \rho} f_{j_{\rho}}^{-1}) (a \pi^u b)] f_{\ell} \stackrel{(10)}{=} \\ &= [(x_1 f_{j_1}^{-1}) \dots [(x_u f_{i_1}^{-1}) \dots (x_{u \oplus m} f_{i_m}^{-1}) a] \dots (x_{m \oplus \rho} f_{j_{\rho}}^{-1}) b] f_{\ell} = \\ &= [(x_1 f_{j_1}^{-1}) \dots \{[(x_u f_{i_1}^{-1}) \dots (x_{u \oplus m} f_{i_m}^{-1}) a] f_{j_u}\} f_{j_u}^{-1} \dots (x_{m \oplus \rho} f_{j_{\rho}}^{-1}) b] f_{\ell} \stackrel{(32)}{=} \\ &= [(x_1 f_{j_1}^{-1}) \dots \{[x_{i_u}^{\omega \rho} (a \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}})] f_{j_u}\} f_{j_u}^{-1} \dots (x_{m \oplus \rho} f_{j_{\rho}}^{-1}) b] f_{\ell} \stackrel{(31)}{=} \\ &= x_1^{\omega \rho} [x_{i_u}^{\omega \rho} (a \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}})] x_{i_u+m}^{\omega \rho} [b \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}}] \stackrel{(10)}{=} x_1^{\omega \rho} [(a \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}) \pi^u (b \alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{P}}})] \end{aligned}$$

для всякого $(x_1^{\omega \rho}) \in \mathcal{P}_{j_1}^{\omega \rho} \cdot \dots \cdot \mathcal{P}_{j_{\rho}}^{\omega \rho}$. Следовательно, $\alpha(f)$ является гомоморфизмом подколец.

Покажем, что каждое $\alpha(f)|_{\mathcal{V}_i^{\mathcal{M}}}$ является мономорфизмом.

Допустим, что для некоторых $a, b \in \mathcal{P}_{i_1}^{j_1}$ их образы совпадают, т.е. при всяком $(x_1^m) \in \mathcal{P}_{i_1}^{j_1}$ имеем

$$x_1^m [\alpha \alpha(f)_{i_1}^{j_1}] = x_1^m [b \alpha(f)_{i_1}^{j_1}]. \quad (38)$$

Поскольку каждое f_i ($i \in J$) является изоморфизмом \mathcal{M}_i на \mathcal{P}_i , то для всякого $(y_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1}$ существует один и только один $(x_1^m) \in \mathcal{P}_{i_1}^{j_1}$ такой, что

$$y_1 = x_1 f_{i_1}^{-1}, \dots, y_m = x_m f_{i_m}^{-1}. \quad (39)$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} y_1^m a &= [(y_1^m a) f_j] f_j^{-1} \stackrel{(39)}{=} \{[(x_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) a] f_j\} f_j^{-1} \stackrel{(37)}{=} \\ &= [x_1^m \alpha \alpha(f)_{i_1}^{j_1}] f_j^{-1} \stackrel{(38)}{=} [x_1^m b \alpha(f)_{i_1}^{j_1}] f_j^{-1} \stackrel{(37)}{=} \\ &= \{[(x_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) b] f_j\} f_j^{-1} \stackrel{(39)}{=} (y_1^m b) f_j f_j^{-1} = y_1^m b \end{aligned}$$

для всякого $(y_1^m) \in \mathcal{P}_{i_1}^{j_1}$, т.е. $a = b$ и $\alpha(f)_{i_1}^{j_1}$ является мономорфизмом.

Покажем, что для всякой функции $a \in \mathcal{P}_{i_1}^{j_1}(\mathcal{P})$ существует прообраз при $\alpha(f)_{i_1}^{j_1}$. Определим функцию $a \in \mathcal{P}_{i_1}^{j_1}(\mathcal{M})$ формулой

$$x_1^m a = [(x_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) a'] f_j^{-1} \quad (40)$$

для любого $(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1}$. Функция a и является прообразом для a' . В самом деле, в силу взаимной однозначности f_i ($i \in J$) имеем

$$\begin{aligned} y_1^m a \alpha(f)_{i_1}^{j_1} &= [(y_1 f_{i_1}^{-1}) \dots (y_m f_{i_m}^{-1}) a] f_j \stackrel{(40)}{=} \\ &= \{[(y_1 f_{i_1}^{-1}) f_{i_1}] \dots [(y_m f_{i_m}^{-1}) f_{i_m}] a'\} f_j^{-1} f_j = \\ &= (y_1^m a') (y_j^{-1} f_j) = y_1^m a' \end{aligned}$$

для всякого $(y_1^m) \in \mathcal{P}_{i_1}^{j_1}$. Следовательно, $\alpha(f)$ является изоморфизмом поликольцоида $\mathcal{P}_j(\mathcal{M}_i; i \in J)$ на $\mathcal{P}_j(\mathcal{P}_i; i \in J)$. Покажем, что изоморфизм $\alpha(f)$ сохраняет ранг отображаемой функции. Для этого докажем, что f_j отображает множество $\mathcal{M}a$ (образ функции a) на множество $\mathcal{M}(a \alpha(f)_{i_1}^{j_1})$ (образ функции $a \alpha(f)_{i_1}^{j_1}$). С одной стороны, имеем $(\mathcal{M}a) f_j \subset \mathcal{M}(a \alpha(f)_{i_1}^{j_1})$. В самом деле, для

любого $y \in M_a$ существует $(x_i^m) \in M_i^m$ такой, что $x_i^m a = y$. Поскольку f есть изоморфизм систем, то существует один и только один $(x_i^m) \in P_i^m$ такой, что $x_i = x_i^m f_i^{-1}, \dots, x_m = x_m^m f_m^{-1}$. Поэтому

$$y f_j = (x_i^m a) f_j = [(x_i^m f_i^{-1}) \dots (x_m^m f_m^{-1}) a] f_j \stackrel{(37)}{=} x_i^m a \alpha(f)_{i_m}^j \subset M(\alpha(f)_{i_m}^j).$$

Докажем и обратное включение. Для всякого $y \in M(\alpha(f)_{i_m}^j)$ существует $(x_i^m) \in P_i^m$ такой, что

$$y = x_i^m a \alpha(f)_{i_m}^j \stackrel{(37)}{=} [(x_i^m f_i^{-1}) \dots (x_m^m f_m^{-1}) a] f_j.$$

Поэтому, с другой стороны, $M(\alpha(f)_{i_m}^j) \subset (M a) f_j$. Значит,

$(M a) f_j = M(\alpha(f)_{i_m}^j)$. Так как f_j взаимно однозначно, то $|M(\alpha(f)_{i_m}^j)| = |M a|$ и $\alpha(f)$ отображает все ${}^2\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на ${}^2\mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$.

Лемма доказана.

Изоморфизмы вида $\alpha(f)$ назовем внутренними.

Теорема 16. Если полиграф (J, j) рефлексивен, то все изоморфизмы поликольцоида $\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на поликольцоид $\mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$ являются внутренними.

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_{i_m}^j; (i_1^m; j) \in J)$ произвольный изоморфизм поликольцоида $\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на $\mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$ и полиграф (J, j) рефлексивен. Изоморфизм отображает все j -идеалы снова на j -идеалы. Поэтому α отображает подкольцоид ${}^2\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ как наименьший правый (двусторонний) j -идеал (по теореме 5) на ${}^2\mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$.

По формулам (15) и (16) соответственно $c_{i_1}^j(x) \rightarrow x$ является изоморфизмом Ω -алгебры ${}^2\mathcal{F}_{i_1}^j(M)$ на M_{i_1} при всяком $i_1 \in J$ и при любой системе $(M_i; i \in J)$. Определим набор $f = (f_0, f_i; i \in J)$ следующим образом: положим $f_0 = \alpha_0$ и для всякого $y \in M_j$ положим

$$y f_j = z \text{ тогда и только тогда, когда } c_{i_1}^j(y) \alpha_{i_1}^j = c_{i_1}^j(z). \quad (41)$$

По сказанному выше каждое f_j является изоморфизмом Ω -алгебры M_j на P_j . Отметим, что $J f_0 = J$, поскольку $f_0 = \alpha_0$ и α есть изоморфизм поликольцоидов с одним и тем же полиграфом (J, j) . Значит, $f \in \mathcal{F}_j(M, P)$.

Образуем теперь по формуле (37) изоморфизм $\alpha(f)$. Тогда ограничения отображений α и $\alpha(f)$ на ${}^2\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ совпадают. В самом деле, если $y \in M_j$, $a \in \mathcal{F}_{i_m}^j(M)$

произвольные и $z = y f_j$, то в силу рефлексивности полиграфа (J, J) будет $(j; j) \in J$ и имеем

$$\begin{aligned} c_{i_1}^{j, m}(y) \alpha_{i_1}^{j, m} &= [a \pi^1 c_j^j(y)] \alpha_{i_1}^{j, m} = (\alpha \alpha_{i_1}^{j, m}) \pi^1 [c_j^j(y) \alpha_j^j] = \\ &= (\alpha \alpha_{i_1}^{j, m}) \pi^1 c_j^j(y f_j) = (\alpha \alpha_{i_1}^{j, m}) \pi^1 c_j^j(z) = c_{i_1}^{j, m}(z), \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} x_i^m [c_{i_1}^{j, m}(y) \alpha_{i_1}^{j, m}] &= [(x_i f_{i_1}^{-1}) \dots (x_m f_{i_m}^{-1}) c_{i_1}^{j, m}(y)] f_j = \\ &= y f_j = z = x_i^m c_{i_1}^{j, m}(z) \end{aligned}$$

для всякого $(x_i^m) \in P_{i_1}^m$, т.е. $c_{i_1}^{j, m}(y) \alpha_{i_1}^{j, m} = c_{i_1}^{j, m}(z) \alpha_{i_1}^{j, m}$.

По теореме 13 всякий изоморфизм подкольцоида ${}^2 \mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на ${}^2 \mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$ можно, и притом однозначно, продолжить до изоморфизма поликольцоида $\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на $\mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$. Поэтому $\alpha = \alpha(f)$.

Теорема доказана.

Следствие. Если (J, J) рефлексивный полиграф, то все автоморфизмы поликольцоида $\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ являются внутренними.

Доказательство. Утверждение является частным случаем предыдущей теоремы.

Теорема 17. Если (J, J) рефлексивный полиграф, то поликольцоиды ${}^r \mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ и ${}^q \mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ (где $r, q \leq \min(\omega(M), \omega(P))$) изоморфны тогда и только тогда, когда $r = q$ и системы $(M_i; i \in J)$ и $(P_i; i \in J)$ J -изоморфны.

Доказательство. Пусть $r = q$ и $f = (f_0, f_i; i \in J)$ есть J -изоморфизм системы $(M_i; i \in J)$ на $(P_i; i \in J)$. Тогда образуем $\alpha(f)$ по формуле (37). По лемме 15 $\alpha(f)$ является изоморфизмом поликольцоида ${}^r \mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на ${}^r \mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$.

Наоборот, пусть $\alpha = (\alpha_0, \alpha_{i_1}^{j, m}; (i_1; j) \in J)$ изоморфизм поликольцоида ${}^r \mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на поликольцоид ${}^r \mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$. По теореме 13 изоморфизм подкольцоида ${}^r \mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ можно, и притом однозначно, продолжить до изоморфизма всего поликольцоида $\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на все $\mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$. А по теореме 16 все изоморфизмы поликольцоида $\mathcal{F}_j(M_i; i \in J)$ на $\mathcal{F}_j(P_i; i \in J)$ имеют вид $\alpha =$

$= \alpha(f)$ для подходящего J -изоморфизма $f = (f_0, f_i; i \in J)$ системы $(M_i; i \in J)$ на $(P_i; i \in J)$. По лемме 15 $\alpha(f)$ сохраняет ранги функций. Поэтому $v = q$.

Теорема доказана.

Множество всех автоморфизмов поликольцоида $\mathcal{A} = (J, J, \mathcal{A}_{i_1}^d, \Omega, \pi)$ обозначим через $\mathcal{G}(\mathcal{A})$. Определим на $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ умножение следующим образом: произведением автоморфизмов $\alpha = (\alpha_0, \alpha_{i_1}^d; (i_1^m; j) \in J)$ и $\beta = (\beta_0, \beta_{i_1}^d; (i_1^m; j) \in J)$ считаем автоморфизм

$$\alpha\beta = (\alpha_0\beta_0, \alpha_{i_1}^d \beta_{i_1}^d; (i_1^m; j) \in J), (i_1 = i f_0). \quad (42)$$

Лемма 18. Автоморфизмы всякого поликольцоида образуют группу.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (J, J, \mathcal{A}_{i_1}^d, \Omega, \pi)$ произвольный поликольцоид. Тожественный автоморфизм $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_{i_1}^d; (i_1^m; j) \in J)$, где $\varepsilon_0, \varepsilon_{i_1}^d$ тождественные отображения соответственно множеств J и $\mathcal{A}_{i_1}^d$ на себя, является единицей относительно умножения (42).

Умножение является ассоциативным: для всяких автоморфизмов α, β, γ по (42) имеем, что

$$\begin{aligned} (\alpha\beta)\gamma &= (\alpha_0\beta_0, \alpha_{i_1}^d \beta_{i_1}^d; (i_1^m; j) \in J)\gamma = \\ &= ((\alpha_0\beta_0)\gamma_0, (\alpha_{i_1}^d \beta_{i_1}^d)\gamma_{i_1}^d; (i_1^m; j) \in J) = \\ &= (\alpha_0(\beta_0\gamma_0), \alpha_{i_1}^d(\beta_{i_1}^d\gamma_{i_1}^d); (i_1^m; j) \in J) = \\ &= \alpha(\beta_0\gamma_0, \beta_{i_1}^d\gamma_{i_1}^d; (i_1^m; j) \in J) = \alpha(\beta\gamma). \end{aligned}$$

Обратным для α является автоморфизм

$$\alpha^{-1} = (\alpha_0^{-1}, \beta_{i_1}^d; (i_1^m; j) \in J), \beta_{i_1}^d = (\alpha_{i_1}^d)^{-1}. \quad (43)$$

В самом деле, $\alpha_0\alpha_0^{-1} = \alpha_0^{-1}\alpha_0 = \varepsilon_0$ и для всякого $a \in \mathcal{A}_{i_1}^d$ имеем

$$a(\alpha_{i_1}^d \beta_{i_1}^d) = (a\alpha_{i_1}^d) \beta_{i_1}^d \stackrel{(42)}{=} (a\alpha_{i_1}^d)(\alpha_{i_1}^d)^{-1} = a = a \varepsilon_{i_1}^d,$$

т.е. $(\alpha\alpha^{-1})_{i_1}^d = \varepsilon_{i_1}^d, \alpha\alpha^{-1} = \varepsilon$. Аналогично имеем $\alpha^{-1}\alpha = \varepsilon$. Следовательно, $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ является группой.

Лемма доказана.

Теорема 19. Если полиграф (J, J) рефлексивен, то группы $\mathcal{G}_J(M)$ и $\mathcal{G}(\mathcal{G}_J)$ изоморфны.

Доказательство. Соответствие $f \rightarrow \alpha(f)$, где $\alpha(f)$ определено формулой (37), является по лемме 15 отображением $\mathcal{C}_J(\mathcal{M})$ в $\mathcal{C}(\mathcal{F}_J)$, а по теореме 16 даже отображением на $\mathcal{C}(\mathcal{F}_J)$. Покажем взаимную однозначность этого соответствия. Если $f \neq g$ и $f, g \in \mathcal{C}_J(\mathcal{M})$, то или $f_0 \neq g_0$, или $y f_j \neq y g_j$ для некоторых $j \in J$, $y \in \mathcal{M}_j$. Поэтому или $\alpha_0(f) \neq \alpha_0(g)$ или, в силу рефлексивности полиграфа (J, J) , имеем

$$\begin{aligned} x[\mathcal{C}_j^i(y)\alpha(f)_j^i] &= [(\alpha f_j^{-1})\mathcal{C}_j^i(y)]f_j = y f_j \neq \\ &\neq y g_j = [(\alpha g_j^{-1})\mathcal{C}_j^i(y)]g_j = x[\mathcal{C}_j^i(y)\alpha(g)_j^i] \end{aligned}$$

для любого $x \in \mathcal{M}_j$. Значит, $\alpha(f) \neq \alpha(g)$ в обоих случаях. Следовательно, соответствие является взаимно однозначным.

Покажем, что это соответствие согласовано с умножением гомоморфизмов. Пусть $f, g \in \mathcal{C}_J(\mathcal{M})$ произвольные и пусть $\alpha(f)$ и $\alpha(g)$ построены по формуле (37). Тогда имеем

$$\begin{aligned} x_1^m [\alpha(fg)_{i_1}^m] &= \{ [x_1(fg)_{i_1}^{-1}] \dots [x_m(fg)_{i_m}^{-1}] \alpha \} (fg)_j =_{(36)} \\ &= \{ [x_1(f_1 g_1)_{i_1}^{-1}] \dots [x_m(f_m g_m)_{i_m}^{-1}] \alpha \} (f_j g_j) = \\ &= [\{ [x_1 g_{i_1}^{-1}] f_{i_1}^{-1} \} \dots [x_m g_{i_m}^{-1}] f_{i_m}^{-1} \} \alpha] f_j =_{(37)} \\ &= [(x_1 g_{i_1}^{-1}) \dots (x_m g_{i_m}^{-1}) \alpha \alpha(f)_{i_1}^m] g_j = \\ &= x_1^m [\{ \alpha \alpha(f)_{i_1}^m \} \alpha (g)_{i_1}^m] =_{(142)} x_1^m \alpha(\alpha(f)\alpha(g))_{i_1}^m \end{aligned}$$

для всякого $(x_1^m) \in \mathcal{M}_{i_1}^m$, где $i'' = i f_0 g_0$. Значит, $\alpha(fg) = \alpha(f)\alpha(g)$ и рассматриваемое соответствие является изоморфизмом группы $\mathcal{C}_J(\mathcal{M})$ на $\mathcal{C}(\mathcal{F}_J)$.

Теорема доказана.

Отметим, что если полиграф (J, J) слабо полный, т.е. $J^2 \subset J$, то $\mathcal{C}_J(\mathcal{M}) = \mathcal{C}(\mathcal{M})$. По работе [7] известно, что в слабо полном полиграфе или $J_m = \emptyset$ или $J_m = J^{m+1}$. Поэтому любое взаимно однозначное отобра-

ражение f_0 множества J на себя отображает все $\phi \neq J_m = J^{m+1}$ на себя, т.е. $Jf_0 = J$. Следовательно, все автоморфизмы системы $\{M_i; i \in J\}$ являются J -автоморфизмами при любом слабо полном полиграфе (J, J) .

Следствие. Если полиграф (J, J) слабо полный, то группы $\mathcal{G}(M)$ и $\mathcal{G}(J)$ изоморфны.

Доказательство. Утверждение следует, в силу сказанного выше, из предыдущей теоремы.

Исследуем группу $\mathcal{G}(M)$. При автоморфизме системы только изоморфные между собой Ω -алгебры могут отображаться друг на друга. Поэтому разобьем J на классы так, чтобы каждый класс состоял из индексов изоморфных между собой Ω -алгебр M_i . Пусть σ есть соответствующая эквивалентность на J , т.е.

$i \sim j$ тогда и только тогда, когда $M_i \cong M_j$.

Элементы фактормножества J/σ обозначим через λ, μ, ν, \dots . Через $\mathcal{G}_\lambda(M)$ обозначим группу всех автоморфизмов системы $(M_i; i \in \lambda)$.

Теорема 20. Группа $\mathcal{G}(M)$ является полным прямым произведением групп $\mathcal{G}_\lambda(M)$, $\lambda \in J/\sigma$.

Доказательство. Пусть $f = (f_0, f_i; i \in J)$ произвольный элемент из $\mathcal{G}(M)$. Обозначим через f^λ ограниченный автоморфизм f на систему $(M_i; i \in \lambda)$, т.е.

$$f^\lambda = (f_0^\lambda, f_i^\lambda; i \in \lambda), f_i^\lambda = f_i, f_0^\lambda = f_0|_\lambda. \quad (45)$$

По сказанному раньше имеем $\lambda f_0 = \lambda$, поэтому f^λ является автоморфизмом системы $(M_i; i \in \lambda)$. Построим соответствие

$$f \rightarrow (f^\lambda; \lambda \in J/\sigma). \quad (46)$$

Такие кортежи являются элементами полного прямого произведения $\prod_{\lambda \in J/\sigma} \mathcal{G}_\lambda(M)$.

Соответствие (46) является взаимно однозначным. Действительно, если $f \neq g$, то или $f_0 \neq g_0$ или $f_j \neq g_j$ для некоторого $j \in J$. В первом случае $f_0^\lambda \neq g_0^\lambda$ для некоторого $\lambda \in J/\sigma$. Во втором случае $f_j^\lambda = f_j \neq g_j = g_j^\lambda$ при $j \in \lambda$. Поэтому в обоих случаях $f^\lambda \neq g^\lambda$ и кортежи $(f^\lambda; \lambda \in J/\sigma)$ и $(g^\lambda; \lambda \in J/\sigma)$ не равны.

Пусть $(f^\lambda; \lambda \in J/\sigma)$ - произвольный из $\prod_{\lambda \in J/\sigma} \mathfrak{G}_\lambda(\mathcal{M})$.
 Образует автоморфизм $f = (f_\alpha, f_i; i \in J)$, где $j f_\alpha = j f_\alpha^\lambda$
 при $j \in \lambda$ и $f_j = f_j^\lambda$, если $j \in \lambda$. По формуле
 (45) соответствие (46) сопоставляет так построенному авто-
 морфизму выбранный нами кортеж. Значит, соответствие (46)
 является отображением на все полное произведение.

Покажем, что это соответствие является изоморфизмом
 групп. Для любых $f_\alpha = (f_\alpha, f_i; i \in J)$, $g = (g_\alpha, g_i; i \in J)$
 из $\mathfrak{G}(\mathcal{M})$ произведению fg соответствует кортеж
 $((fg)^\lambda; \lambda \in J/\sigma)$, где

$$\begin{aligned} (fg)^\lambda &= ((fg)_\alpha, (fg)_i; i \in \lambda) =_{(36)} \\ &= ((f_\alpha g_\alpha), (f_i g_i); i \in \lambda) =_{(45)} \\ &= (f_\alpha^\lambda g_\alpha^\lambda, f_i g_i; i \in \lambda) =_{(36)} f^\lambda g^\lambda. \end{aligned}$$

Значит, имеем

$$fg \rightarrow (f^\lambda g^\lambda; \lambda \in J/\sigma) = (f^\lambda; \lambda \in J/\sigma)(g^\lambda; \lambda \in J/\sigma)$$

т.е. соответствие (46) согласовано с умножением.

Теорема доказана.

Пусть (J, J) полиграф. Кортеж $(f^\lambda; \lambda \in J/\sigma)$
 называется J -кортежем, если объединение всех f_α^λ ото-
 бражает J на себя.

Следствие. Группа $\mathfrak{G}_J(\mathcal{M})$ является подгруппой пол-
 ного прямого произведения групп $\mathfrak{G}_\lambda(\mathcal{M})$, $\lambda \in J/\sigma$, состоящей
 из всех J -кортежей.

Доказательство. Если $f \in \mathfrak{G}_J(\mathcal{M})$, т.е. если
 $Jf = J$, то образом для f при (46) является J -кор-
 теж. Верно и обратное, если нами выбран J -кортеж
 $(f^\lambda; \lambda \in J/\sigma)$, то его прообраз при (46) является J -
 автоморфизмом системы $(\mathcal{M}_i; i \in J)$.

Исследуем теперь группу $\mathfrak{G}_\lambda(\mathcal{M})$. Пусть \mathfrak{G} есть
 группа автоморфизмов Ω -алгебры \mathcal{M}_i , где i фиксирован-
 ный индекс из λ . Пусть еще фиксированы изоморфизмы
 $\varphi_j: \mathcal{M}_i \rightarrow \mathcal{M}_j$ для всякого $j \in \lambda$, причем $\varphi_i = \varepsilon_i$,
 где ε_i - тождественный автоморфизм Ω -алгебры \mathcal{M}_i .
 Пусть Γ есть группа всех подстановок множества λ .

Воспользуемся определением сплетения группы \mathcal{G} с группой Γ , группой подстановок на множестве λ , приведенным в [6] стр. 100-101. Каждому $i \in \lambda$ сопоставляем экземпляр \mathcal{G}_i группы \mathcal{G} и пусть $\bar{\mathcal{G}}$ есть полное прямое произведение всех этих \mathcal{G}_i . Элементы из $\bar{\mathcal{G}}$ обозначим через $\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{f}, \dots$, а через $\bar{a}(i)$ обозначается значение \bar{a} (как функции из λ в \mathcal{G}) в точке i . Тогда (полным) сплетением $\mathcal{G} \wr \Gamma$ группы \mathcal{G} с Γ называется группа всех пар (\bar{a}, ρ) , $\bar{a} \in \bar{\mathcal{G}}$, $\rho \in \Gamma$ относительно умножения

$$(\bar{a}, \rho)(\bar{b}, \tau) = (\bar{a}(\bar{b} \circ \rho), \rho\tau), \quad (47)$$

где

$$(\bar{b} \circ \rho)(j) = \bar{b}(j\rho) \quad (j \in \lambda), \quad (48)$$

для всех $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{\mathcal{G}}$, $\rho, \tau \in \Gamma$.

Теорема 21. Группа $\mathcal{G}_\lambda(\mathcal{M})$ является полным сплетением группы автоморфизмов одной алгебры из системы $(\mathcal{M}_i; i \in \lambda)$ с группой всех подстановок на множестве λ .

Доказательство. Пусть $f = (f_0; f_i; i \in \lambda)$ произвольный элемент из $\mathcal{G}_\lambda(\mathcal{M})$. Построим элемент $\bar{f} \in \bar{\mathcal{G}}$ следующим образом: если обозначим $f_j f_i$ через f'_j , то

$$\bar{f}(j) = f_j f_j^{-1} f'_j \quad (j \in \lambda). \quad (49)$$

Определим отображение $\psi: \mathcal{G}_\lambda(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{G} \wr \Gamma$ по формуле

$$f\psi = (\bar{f}, f_0) \quad (50)$$

для всякого $f \in \mathcal{G}_\lambda(\mathcal{M})$.

Покажем, что ψ является взаимно однозначным. Пусть $f, g \in \mathcal{G}_\lambda(\mathcal{M})$ такие, что $f\psi = g\psi$, т.е. $\bar{f} = \bar{g}$ и $f_0 = g_0$. По определению равенства элементов прямого произведения имеем, что $\bar{f}(j) = \bar{g}(j)$, т.е. по (49) имеем $f_j f_j^{-1} f'_j = g_j g_j^{-1} g'_j$ для всякого $j \in \lambda$. Поскольку все f_j ($j \in \lambda$) изоморфизмы, то из последнего равенства вытекает, что $f'_j = g'_j$ для всех $j \in \lambda$. Значит, $f = (f_0; f_i; i \in \lambda)$ и $g = (g_0; g_i; i \in \lambda)$ равны и ψ является взаимно однозначным.

Покажем, что для любого $(\bar{g}, \rho) \in \mathcal{G} \wr \Gamma$ существует прообраз при ψ . Построим автоморфизм $f = (f_0; f_j; j \in \lambda)$ следующим образом: положим, что $f_0 = \rho$ и $f_j = f_j^{-1} \bar{g}(j) f_j$ для всякого $j \in \lambda$

(здесь $j' = j f_0$). Тогда f отображается при ψ на пару (\bar{g}, φ) . Действительно,

$$f\psi = (\bar{f}, f_0) = (\bar{f}, \varphi) = (\bar{g}, \varphi)$$

так как по выбору $f_j (j \in \lambda)$ имеем

$$\bar{f}(j) \underset{(49)}{=} \varphi_j f_j \varphi_j^{-1} = \varphi_j (\varphi_j^{-1} \bar{g}(j) \varphi_j) \varphi_j^{-1} = \bar{g}(j)$$

для всякого $j \in \lambda$. Значит, ψ является отображением на все $\mathcal{U} \mathcal{W} \mathcal{V} \Gamma$.

Покажем, что ψ согласовано с произведением. Пусть

$f = (f_0, f_j; j \in \lambda)$ и $g = (g_0, g_j; j \in \lambda)$ произвольные из $\mathcal{U}_\lambda(\mathcal{M})$. Тогда имеем

$$(f\psi)(g\psi) \underset{(50)}{=} (\bar{f}, f_0)(\bar{g}, g_0) \underset{(47)}{=} (\bar{f}(\bar{g} \circ f_0), f_0 g_0),$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{g} \circ f_0)(j) &= \bar{f}(j)(\bar{g} \circ f_0)(j) \underset{(48)}{=} \bar{f}(j) \bar{g}(j f_0) \underset{(49)}{=} \varphi_j f_j \varphi_j^{-1} \varphi_j g_j' \varphi_j^{-1} g_0 = \\ &= \varphi_j f_j g_j' \varphi_j^{-1} g_0. \end{aligned}$$

С другой стороны, по (36) имеем $fg = (f_0 g_0, f_j g_j'; j \in \lambda)$ и

$$(fg)\psi \underset{(50)}{=} (\bar{fg}, f_0 g_0),$$

где

$$\bar{fg}(j) \underset{(49)}{=} \varphi_j (fg)_j \varphi_j^{-1} f_0 g_0 = \varphi_j f_j g_j' \varphi_j^{-1} g_0 \quad (j \in \lambda).$$

Поэтому соответствующие пары равны и $(f\psi)(g\psi) = (fg)\psi$

для любых $f, g \in \mathcal{U}_\lambda(\mathcal{M})$, т.е. ψ является изоморфизмом группы $\mathcal{U}_\lambda(\mathcal{M})$ на сплетение $\mathcal{U} \mathcal{W} \mathcal{V} \Gamma$.

Теорема доказана.

Литература

1. Артамонов В.А., Клоны полилинейных операций и мультиоператорные алгебры. Успехи мат. н., 1969, 24, № 1(145), 47-59.
2. Белоусов В.Д., Позиционные алгебры с подстановками. Вопросы теории квазигрупп и луп, Кишинев, 1971, 131-139.
3. Глускин Л.М., Суперпозиция многоместных функций. Publ. Math., 1970, 17, № 1-4, 349-378.

4. К о н Ц., Универсальная алгебра. Москва, 1968.
5. М а л ь ц е в А.И., Итеративные алгебры и многообразия Поста. Алгебра и логика, 1966, 5, № 2, 5-24.
6. П л о т к и н Б.И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.
7. Р е д и Э., Односторонние идеалы симметрических поликатегорий. Настоящий сб., стр. 31-61.
8. С а н д и к М.Д., Алгебра мультиопераций. Изв. АН Молд. ССР, Мат., 1972, № 1, 31-38.
9. Т р о х и м е н к о В.С., Позиционные системы многоместных функций. Исследования по теории квазигрупп и луп, Кишинев, 1973, 165-174.
10. Х и о н Я.В., Поликольцоиды. Всесоюзный алгебраический коллоквиум. Резюме научн. сообщений. Гомель, 1968, 198-199.
11. Ч у п о н а Г., За алгебрите на семствуванья, Годишен сб. Природо-мат. фак. Ун-т Скопје, 1970, 20, А, 15-24.
12. Ч у п о н а Г., Една класа делумни алгебри. Годишен сб. Природно-мат. фак. Ун-т - Скопје, 1972, 22, А, 5-22.
13. М е н г е р, К., On substitutive algebra and its syntax. Z. math. Log. und Grundl. Math., 1964, 10, № 1, 81-104.
14. W h i t l o c k Н., A composition algebra for multiple functions. Math. Ann., 1964, 157, № 2, 167-178.

Поступило

2 IX 1973

SÜMMEETRILISTEST POLÜRINGOIDIDEST

E. Redi

R e s ü m e e

Töös on antud R tüüpi polüringoidi definitsioon ja on näidatud, et kõigi mitmekohaliste funktsioonide kogum üle antud Ω -algebrate süsteemi ja üle (π -kinnise) polügraafi moodustab nn. sümmeetrilise polüringoidi.

Sümmeetrilises polüringoidis üle täieliku polügraafi puuduvad ranged kahepoolsed ideaalid, kuid kahepoolseid ideaalid on olemas. Osutub, et kõik leitud kahepoolsed ideaalid on tihedalt sisestatud parempoolseid (kahepoolseid) ideaalid. See võimaldab anda sümmeetrilise polüringoidi abstraktse iseloomustuse.

Töös on tõestatud, et sümmeetrilise polüringoidi kõik isomorfismid teisele sümmeetrilisele polüringoidile (üle sama refleksiivse polügraafi) on siseisomorfismid. Osutub, et nõrgalt kinnise polügraafi korral on sümmeetrilise polüringoidi automorfism isomorfne vastava Ω -algebra süsteemi automorfismirühmaga. Selle rühma ehitus on kirjeldatud teoreemidega 20 ja 21.

ÜBER SYMMETRISCHE POLYRINGOIDE

E. Redi

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es sei (J, \bar{j}) ein Polygraph, d.h. $\bar{j} \subseteq \bar{j} = \bigcup_{m=1}^{\infty} J^m$. Elemente aus $J^m = \bar{j} \cap J^{m+1}$ bezeichnen wir durch $(i^m; j)$ und nennen m -dimensionale Kanten.

Wir nennen das System

$$k = (J, \bar{j}, A_{i^m; j}^m, \Omega, \pi)$$

ein Polyringoid auf (J, \bar{j}) und Ω , wenn

1) zu allen Kanten $(i^m; j)$ aus \bar{j} eindeutig Ω -Algebren $A_{i^m; j}^m$ zugeordnet sind (A^j zu (j)),

2) die partielle binäre Operation π^u zu allen Elementen $u \in A_{i^u; j}^u$, $l \in A_{i^l; p}^l$ ($u \leq p$) anwendbar ist und das Produkt $\pi^u u$ zu Ω -Algebra $A_{i^u; i^l, j}^u$ gehört,

3) daraus, daß alle Produkte definiert sind, die Gleichungen (1)-(4) folgen.

Im Satz 2 bewiesen wir, daß mehrdimensionale Funktionen auf einem System von Ω -Algebren unter Operationen (8)-(10) ein sogenanntes symmetrisches Polyringoid bilden.

Wir beschrieben (Sätze 3,5) einige zweiseitige Ideale einiger symmetrischen Polyringoide. Wenn das Polygraph (J, δ) reflexiv ist, d.h. $(i; i) \in J$ für alle $i \in J$, so sind solche Ideale dicht eingebettete zweiseitige Ideale (Satz 10). Der Satz 11 gibt eine abstrakte Beschreibung des symmetrischen Polyringoids auf einem reflexiven (J, δ) .

Wir bewiesen, daß alle Isomorphisme eines symmetrischen Polyringoids auf anderes symmetrische Polyringoid auf demselben reflexiven Polygraph innere Isomorphisme sind (Satz 16). Die Sätze 20 und 21 beschrieben die Struktur der Automorphismengruppe eines beliebigen Systems von Ω -Algebren und dadurch auch die Struktur der Automorphismengruppe eines beliebigen symmetrischen Polyringoids auf einem reflexiven Polygraph.

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ ДВУХ КЛАССОВ

МЕТАЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

П. Пуусемп

Кафедра алгебры и геометрии

Строение полугрупп эндоморфизмов групп и связь между свойствами группы и ее полугруппы эндоморфизмов до сих пор мало исследованы. Для коммутативных групп рассмотрены некоторые вопросы такого рода, но в общем случае можно отметить лишь некоторые отдельные работы [5, 6, 10]. Например, в [10] для некоторого класса групп изучается полугруппа всех эндоморфизмов, переводящих нормальные делители в нормальные делители (подполугруппа в $\text{End } G$). Целью данной статьи является описание полугруппы эндоморфизмов для двух классов некоммутативных групп (групп порядка p^3 с двумя образующими и групп порядка pq , где p, q — различные простые числа). Поскольку методика для нахождения полугрупп эндоморфизмов для этих двух классов групп одинакова, то в § 1 найдем некоторое удобное представление полугрупп эндоморфизмов для этих классов групп, а в § 2 и § 3 детализируем полученные в § 1 результаты для обоих классов групп отдельно.

В работе будем придерживаться обозначений: $\text{End } G$ — полугруппа всех эндоморфизмов группы G ; $\text{Aut } G$ — группа всех автоморфизмов группы G ; $Z_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$ — кольцо вычетов по модулю p ; Z_p^+ — аддитивная группа кольца Z_p ; Z_p^\times — мультипликативная группа кольца Z_p ; (i, j) — наибольший общий делитель целых чисел i и j ; $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$ — подгруппа, порожденная элементами g_1, \dots, g_n ; $I(x) = \{y \in \text{End } G \mid y^n = x \text{ для некоторого целого числа } n > 0\}$, где x — идемпотент полугруппы $\text{End } G$; J_0 — совокупность всех отличных от нуля и единицы идемпотентов полугруппы $\text{End } G$; $|X|$ — мощность множества X ; $x \times y$ — элемент прямого произ-

ведения $P \times Q$ подгрупп P и Q ; $F(G) = \text{End } G \setminus \{\text{Aut } G, J(0)\}$.

Все использованные факты теории чисел взяты из книг [1], [2] и [7]. Основой подгрупповых понятий взята книга [4].

§ 1. Подгруппа эндоморфизмов конечной метациклической группы

Напомним, что метациклической называется группа, которая является расширением циклической группы при помощи циклической группы. Определяющие соотношения конечной метациклической группы G даны в работе [9] и имеют вид:

$$a^n = 1, a^{\kappa} = b^h, b^{-1}ab = a^r, \quad (1)$$

где для натуральных чисел n, κ, h и r выполнены условия

$$n \equiv 0 \pmod{\kappa}, r^h \equiv 1 \pmod{n}, \kappa(r-1) \equiv 0 \pmod{n}. \quad (2)$$

Поскольку из соотношений (1) индукцией по j получается равенство

$$a^i b^j = b^j a^{i r^j}, \quad (3)$$

то каждый элемент группы G можно записать в виде $b^j a^i$, где $i \in \mathbb{Z}_n$ и $j \in \{0, 1, \dots, h-1\}$. Мы будем рассматривать только случай $\kappa = 0$.

Пусть даны числа n, h, κ , удовлетворяющие условиям (2) при $\kappa = 0$. Всюду в этом параграфе через G обозначена метациклическая группа с соответствующими определяющими соотношениями (1). Рассмотрим множество пар $H = \{ [t, s] \mid t \in \mathbb{Z}_n, s \in \mathbb{Z}_h \}$. Легко проверить, что множество H является группой относительно следующего закона умножения:

$$[t, s][u, v] = [t+u, v+sr^u]. \quad (3a)$$

Для элементов $[0, 1]$ и $[1, 0]$ группы H выполнены соотношения, аналогичные соотношениям (1), где $h = 0$ (следует из правила (3a)). По теореме Дика (см. [3], стр. 111) группа H изоморфна факторгруппе G/N для некоторого нормального делителя N . Поскольку каждый элемент группы G выражается в виде $b^j a^i$, где $j \in \mathbb{Z}_h, i \in \mathbb{Z}_n$, то

$$|G| \leq n^h = |H| = |G/N|. \quad (3b)$$

Из неравенства (3b) следует, что $N = \{1\}$. Поэтому каждый элемент группы G выражается единственным образом в ука-

занном виде $b^j a^i$. Нашей целью является определить полугруппу эндоморфизмов $\text{End } G$. Поскольку каждый элемент группы G единственным образом выражается в виде $b^j a^i$, то каждый эндоморфизм τ группы G однозначно определен образами $a\tau$ и $b\tau$ при помощи формулы $(b^j a^i)\tau = (b\tau)^j (a\tau)^i$. Надо найти, как выбрать $a\tau$ и $b\tau$ в данной группе так, чтобы мы получили эндоморфизм.

Лемма 1.1. Отображение $\tau: G \rightarrow G$, заданное правилами $a\tau = b^j a^i$, $b\tau = b^m a^l$, $(b^t a^u)\tau = (b\tau)^t (a\tau)^u$, является эндоморфизмом тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} i(1+r^j+\dots+r^{j(n-1)}) &\equiv 0 \pmod{n}; & jn &\equiv 0 \pmod{h}; \\ l(1+r^m+\dots+r^{m(h-1)}) &\equiv 0 \pmod{n}; & j &\equiv jr \pmod{h}; \\ l+ir^m &\equiv lrv^j + (1+r^j+\dots+r^{j(r-1)}) \pmod{n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Доказательство. Для доказательства леммы надо найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы отображение τ сохраняло определяющие соотношения (1) группы G , т.е.

$$(a\tau)^n = 1, \quad (b\tau)^h = 1, \quad (b\tau)^{-1}(a\tau)(b\tau) = (a\tau)^r.$$

При помощи математической индукции и формулы (3) можно убедиться, что в группе G справедливы следующие законы:

$$\begin{aligned} (b^t a^j)(b^u a^v) &= b^{t+u} a^{r^t v + j} \\ (b^t a^j)^g &= b^{gt} a^{j(1+r^t+\dots+r^{t(g-1)})} \end{aligned} \quad (5)$$

Поэтому

$$(a\tau)^n = (b^j a^i)^n = b^{jn} a^{i(1+r^j+\dots+r^{j(n-1)})} = 1$$

тогда и только тогда, когда

$$nj \equiv 0 \pmod{h}, \quad i(1+r^j+\dots+r^{j(n-1)}) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Аналогично, $(b\tau)^h = 1$ тогда и только тогда, когда

$$hm \equiv 0 \pmod{h}, \quad l(1+r^m+\dots+r^{m(h-1)}) \equiv 0 \pmod{n}.$$

По формулам (3) и (5) равенство $(a\tau)(b\tau) = (b\tau)(a\tau)^r$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} (b^t a^j)(b^m a^l) &= b^t (a^j b^m) a^l = b^{t+m} a^{l+ir^m} \\ &= (b^m a^l)(b^t a^j)^r = (b^m a^l)(b^{tr} a^{j(1+r^t+\dots+r^{t(r-1)}))} = \end{aligned}$$

$$= b^{m+jr} a b^i v^i + i(1+r^i + \dots + r^{i(r-1)}),$$

т.е. тогда и только тогда, когда

$$j = jr \pmod{r}, \quad b^i v^i = b^i v^i + i(1+r^i + \dots + r^{i(r-1)}) \pmod{r}.$$

Из полученных сравнений следует справедливость леммы.

Теорема 1.2. Полугруппа $\text{End } G$ изоморфна полугруппе A , где

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} i & j \\ l & m \end{pmatrix} \mid i, l \in \mathbb{Z}_r; j, m \in \mathbb{Z}_r; \text{ выполнены условия (4)} \right\}$$

и произведение в полугруппе A задано следующим правилом умножения:

$$\begin{pmatrix} i & j \\ l & m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i' & j' \\ l' & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(1+r^i + \dots + r^{i(r-1)}) + l'v^{i'}(1+r^{m'} + \dots + r^{m'(j'-1)}) & ij' + jm' \\ i'(1+r^{i'} + \dots + r^{i'(l'-1)}) + l'v^{i'}(1+r^{m'} + \dots + r^{m'(m'-1)}) & j'j' + m'm' \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть эндоморфизм τ группы G задан как и в лемме 1.1. Тогда соответствие

$$\tau \longrightarrow \begin{pmatrix} i & j \\ l & m \end{pmatrix} \quad (7)$$

осуществляет взаимно однозначное соответствие между множествами $\text{End } G$ и A (см. лемму 1.1). Покажем, что соответствие (7) сохраняет произведение. Пусть еще

$$\tau' \longrightarrow \begin{pmatrix} i' & j' \\ l' & m' \end{pmatrix}.$$

Тогда $a\tau' = b^{i'} a^{i'}$, $b\tau' = b^{m'} a^{l'}$, $a\tau = b^i a^i$, $b\tau = b^m a^l$ и по формулам (5) получим

$$\begin{aligned} a(\tau\tau') &= (a\tau)\tau' = (b^i a^i)\tau' = (b^{i'})^{i'} (a\tau')^{i'} = (b^{m'} a^{l'})^{i'} (b^{j'} a^{i'})^{i'} = \\ &= b^{j m'} a^{l'(1+r^{m'} + \dots + r^{m'(j'-1)})} \cdot b^{j' i'} a^{i'(1+r^{i'} + \dots + r^{i'(l'-1)})} = \\ &= b^{j m' + j' i'} a^{i'(1+r^{i'} + \dots + r^{i'(l'-1)}) + l'v^{i'}(1+r^{m'} + \dots + r^{m'(j'-1)})} \end{aligned}$$

Аналогично

$$b(\tau\tau') = b^{m m' + j' l} a^{i'(1+r^{i'} + \dots + r^{i'(l'-1)}) + l'v^{i'}(1+r^{m'} + \dots + r^{m'(j'-1)})}$$

Из двух последних равенств уже следует, что произведение \circ определено на множестве A корректно, множество A является относительно произведению \circ полугруппой и соответствие (7) задает изоморфизм между полугруппами $\text{End } G$ и A . Теорема доказана.

В дальнейшем отождествим эндоморфизм τ с соответ-

ствующей матрицей из A .

§ 2. Полугруппа эндоморфизмов некоммутативной группы порядка pq

Пусть в этом параграфе G является некоммутативной группой порядка pq , где p, q — различные простые числа ($p < q$). Из [8] (стр. 63) известно, что G является метациклической группой с параметрами

$$k = 0, \quad n = q, \quad h = p. \quad (8)$$

Там же отмечается, что число p по существу должно быть порядком элемента τ в группе Z_q^* .

Лемма 2.1. Полугруппа $End G$ изоморфна полугруппе матриц

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \ell & m \end{pmatrix} \mid \ell \in Z_q, m \in Z_p, m \neq 0 \right\} \cup \\ \cup \left\{ \begin{pmatrix} i & 0 \\ \ell & i \end{pmatrix} \mid i, \ell \in Z_q; i \neq 0 \right\}$$

с правилом умножения

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ \ell & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i' & 0 \\ \ell' & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ii' & 0 \\ \ell i' + \ell'(1 + \tau^m + \dots + \tau^{m(m-1)}) & m m' \end{pmatrix}. \quad (8a)$$

Доказательство. Для доказательства леммы надо решить систему (4) в случае (8) и применить теорему 1.2. Из второго сравнения системы (4) получим сравнение $j \equiv 0 \pmod{p}$. Ввиду этого система сравнений (4) эквивалентна системе

$$j \equiv 0 \pmod{p}, \quad \tau i \equiv i \tau^m \pmod{q}, \quad \ell(1 + \tau^m + \dots + \tau^{m(p-1)}) \equiv 0 \pmod{q}. \quad (9)$$

Если $\tau^m \equiv 1 \pmod{q}$, то $m \equiv 0 \pmod{p}$ (ведь p — наименьшее натуральное число, при котором $\tau^p \equiv 1 \pmod{q}$), и из системы (9) получим $p\ell \equiv 0 \pmod{q}$ и $\tau i \equiv i \pmod{q}$, т.е. $\ell \equiv 0 \pmod{q}$ и $i \equiv c \pmod{q}$, так как $\tau \neq 1$ ввиду некоммутативности группы G .

Пусть $\tau^m \not\equiv 1 \pmod{q}$, т.е. $m \not\equiv 0 \pmod{p}$. Тогда третье сравнение системы (9) эквивалентно сравнению

$$\ell(\tau^m - 1)(1 + \tau^m + \dots + \tau^{m(p-1)}) \equiv 0 \pmod{q},$$

т.е. сравнению $\ell(\tau^{mp} - 1) \equiv 0 \pmod{q}$, которое по

формулам (2) и (8) выполняется для каждого $l \in Z_q$. Решениями второго сравнения системы (9) являются:

а) $i = 0, m \in Z_p, m \neq 0;$

б) $m = 1, i \in Z_q, i \neq 0.$

Таким образом, найдены все решения системы (4) и тем самым определены матрицы, принадлежащие подгруппе A .

Ввиду $j = 0 = j'$ правило умножения (6) примет вид

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ l & m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i' & 0 \\ l' & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ii' & 0 \\ li' + l'(1 + r^{m'} + \dots + r^{m'(m-1)}) & mm' \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Следствие 2.2. Группа $Aut G$ состоит в точности из матриц

$$\|i, l\| = \begin{pmatrix} i & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $i, l \in Z_q$ и $i \neq 0$.

Доказательство. По лемме 2.1, если учитывать соответствие (7), получим, что только в случае (10) элемент a отображается в неединичный элемент a^i группы G . В этом случае элементы $a \|i, l\| = a^i$ и $l \|i, l\| = l a^l$ порождают ввиду $(i, q) = 1$ всю группу G и следовательно $\|i, l\| \in Aut G$. Следствие доказано.

Следствие 2.3. Подгруппа $End G$ является подгруппой со внешне присоединенным нулем.

Это следует сразу из леммы 2.1.

Теорема 2.4. Группа $Aut G$ задается следующими определяющими соотношениями:

$$\alpha^q = 1, \beta^{q-1} = 1, \beta^{-1} \alpha \beta = \alpha^t,$$

где t - первообразный корень по модулю q . Следовательно, группа $Aut G$ в данном случае тоже метациклическа.

Доказательство. Согласно следствию 2.2, автоморфизмами группы G являются элементы $\|i, l\|$, где $i, l \in Z_q$ и $i \neq 0$. Их умножение производится по формуле (8a), которая в данном случае имеет вид

$$\|i, l\| \cdot \|i', l'\| = \|ii', li' + l'l'\|. \quad (11)$$

Обозначим $\alpha = \|1, 1\|$ и $\beta = \|t, 0\|$, где t - первообразный корень по модулю q . При помощи формулы (11) легко вывести, что

$$\alpha^l = \|1, l\|, \quad \beta^i = \|t^i, 0\|, \quad \beta^i \alpha^l = \|t^i, l\|,$$

$$\alpha \beta = \beta \alpha^t, \quad \beta^{q-1} = \alpha^q = 1.$$

Значит, каждый элемент группы $\text{Aut } G$ выражается единственным образом в виде $\beta^i \alpha^l$, где $i \in Z_{q-1}$ и $l \in Z_q$. Отсюда получим равенство

$$|\text{Aut } G| = q(q-1). \quad (12)$$

Пусть группа B задается определяющими соотношениями

$$\alpha^q = \beta^{q-1} = 1, \quad \alpha \beta = \beta \alpha^t. \quad (13)$$

Из последней формулы при помощи индукции по i получим равенство

$$\alpha^l \beta^i = \beta^i \alpha^{lt^i}, \quad (14)$$

откуда следует, что каждый элемент группы B выражается в виде $\beta^i \alpha^l$, где $i \in Z_{q-1}$ и $l \in Z_q$. Еще получим неравенство $|B| \leq q(q-1)$. Поскольку в группе $\text{Aut } G$ выполняются соотношения (13), то по теореме Дика группа $\text{Aut } G$ изоморфна факторгруппе группы B , т.е. $|\text{Aut } G| \leq |B|$, откуда по равенству (12) и по неравенству $|B| \leq q(q-1)$ получим равенство $|\text{Aut } G| = |B|$. Значит, группы $\text{Aut } G$ и B изоморфны. Теорема доказана.

Пусть τ — первообразный корень по модулю p и обозначим

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку

$$\tau^m = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau^m \end{pmatrix},$$

то эндоморфизмы $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{p-1}$ различны, но $\tau^p = \tau$.

Теорема 2.5. Совокупность всех ненулевых собственных эндоморфизмов группы G состоит из всевозможных произведений вида $\tau^m \alpha^l$, где $m \in \{1, \dots, p-1\}$ и

$l \in Z_q$, и является правой группой над циклической группой порядка $p-1$ и q -элементным множеством. Для элементов τ, α и β справедливы равенства

$$\tau^p = \tau, \quad \beta \tau = \tau \beta = \alpha \tau = \tau, \quad (15)$$

$$(\tau^m \alpha^l)(\tau^u \alpha^i) = \tau^{m+u} \alpha^i. \quad (15a)$$

Доказательство. В справедливости равенств (15) можно убедиться непосредственной проверкой при помощи формулы умножения матриц. Так же получим

$$\tau^m \alpha^l = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & s^m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ l(1+r+\dots+r^{s^m-1}) & s^m \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Если $\tau^i \alpha^j = \tau^m \alpha^l$, где $i, m \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, и $i, j \in \mathbb{Z}_q^*$, то по формуле (16) получим равенство $i = m$ и сравнение

$$l(1+r+\dots+r^{s^m-1}) \equiv j(1+r+\dots+r^{i-1}) \pmod{q}.$$

Поскольку $r \neq 1$ и $i = m$, то полученное сравнение равносильно сравнению

$$l(r-1)(1+r+\dots+r^{s^m-1}) \equiv j(r-1)(1+r+\dots+r^{i-1}) \pmod{q},$$

т.е. сравнению

$$l(r^{s^m} - 1) \equiv j(r^{i-1} - 1) \pmod{q}.$$

Нам известно, что $s^m \not\equiv 0 \pmod{p}$. Так как порядок числа r в \mathbb{Z}_q^* равен p , получим неравенство

$$r^{s^m} - 1 \not\equiv 0 \pmod{q}$$

и равенство $l = j$. Значит, количество ненулевых собственных эндоморфизмов вида $\tau^m \alpha^l$ равно $q(p-1)$, т.е. равно количеству ненулевых собственных эндоморфизмов группы G (следует из леммы 2.1 и из следствия 2.2). Формула (15a) следует из формул (15), ибо $\alpha^l \tau^u = \tau^u \alpha^l$. Теперь формула (15a) показывает, что собственные ненулевые эндоморфизмы составляют правую группу (см. [4], стр. 314). Теорема доказана.

Следствие 2.6. Совокупность всех ненулевых эндоморфизмов группы G образует полугруппу

$$\text{End } G \setminus \{0\} = \{\beta^j \alpha^i \mid i \in \mathbb{Z}_q^*, j \in \mathbb{Z}_{q-1}\} \cup \{\tau^m \alpha^l \mid l \in \mathbb{Z}_q^*, 0 < m < p-1\}$$

с правилами умножения

$$(\beta^j \alpha^i)(\beta^k \alpha^l) = \beta^{j+k} \alpha^{i+l},$$

$$(\beta^j \alpha^i)(\tau^m \alpha^l) = \tau^m \alpha^l,$$

$$(\tau^m \alpha^l)(\beta^j \alpha^i) = \tau^m \alpha^{l+i},$$

$$(\tau^m a^k)(\tau^u a^i) = \tau^{m+u} a^i. \quad (17)$$

Доказательство следует сразу из следствия 2.3, из теоремы 2.5 и из формул (14) и (15).

Следствие 2.7. Множество $F(G)$ образует изоморфную с полугруппой $Z_{p-1}^+ \times C$ полугруппу, где полугруппа C содержит q элементов и является полугруппой с правым умножением.

Данное следствие получается из последней формулы системы (17).

Следствие 2.8. Полугруппа $End G$ является коммутативной связкой вполне простых полугрупп $\{0\}$, $Aut G$ и $F(G)$. Соответствующая факторполугруппа есть трехэлементная цепь.

Доказательство. Подполугруппа $\{0\}$ явно вполне проста, $Aut G$ также вполне проста, ибо является группой. Полугруппа $F(G)$ является по теореме 2.5 правой группой и поэтому полугруппой матричного типа над группой Z_{p-1}^+ , где множество Γ' имеет один, а множество Γ q элементов и P — матрица, состоящая из единиц (см. [4], стр. 278). Поэтому $F(G)$ является вполне простой полугруппой.

Ясно, что $\{0\}$ составляет отдельный класс связки и $Aut G \cdot F(G) \subset F(G)$, $F(G) \cdot Aut G \subset F(G)$. Следствие доказано.

Следствие 2.9. Полугруппа $End G$ является вполне регулярной.

Утверждение следует из того, что $End G$ есть объединение групп: $\{0\}$ и $Aut G$ суть группы, а $F(G)$ есть по теореме 2.5 объединение групп (см. [4], стр. 424).

Следствие 2.10. Множество J_0 является полугруппой и $J_0 \simeq C$. Для каждого $x \in J_0$ множество $J(x)$ является группой и $J(x) \simeq Z_{p-1}^+$.

Эти утверждения вытекают из следствия 2.7.

§ 3. Полугруппа эндоморфизмов некоммутативной метациклической группы порядка p^3

При простом $p > 2$ существует ровно две некоммутативные группы порядка p^3 (см. [8], стр. 63). Одна из них метациклическая и задается определяющими соотношениями

$$a^p = 1, \quad b^p = 1, \quad b^{-1} a b = a^{1+p}. \quad (18)$$

В данном параграфе найдем строение полугруппы эндоморфизмов $End G$ для группы G с определяющими соотношениями (18).

Теорема 3.1. Полугруппа $End G$ изоморфна полугруппе матриц

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} i\rho & j \\ l\rho & m \end{pmatrix} \mid i, j, l, m \in Z_p \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} i & j \\ l\rho & m \end{pmatrix} \mid j, l \in Z_p; i \in Z_p; (i, p) = 1 \right\}$$

с правилом умножения

$$\begin{pmatrix} i & j \\ l\rho & m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i' & j' \\ l'\rho & m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i'(i+j'\rho(i-1)/2) + j'l'\rho & ij' + jm' \\ (li' + ml')\rho & mm' \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Доказательство. Исходим из теоремы 1.2 и найдем все решения системы сравнений (4). В данном случае

$$h = p, \quad n = p^2, \quad v = 1 + p, \quad k = 0,$$

и система (4) принимает вид

$$\begin{aligned} i(1 + v + \dots + v^{p^2-1}) &\equiv 0 \pmod{p^2}, \\ l(1 + v^m + \dots + v^{m(p-1)}) &\equiv 0 \pmod{p^2}, \\ l + iv^m &\equiv lvj + i(1 + v + \dots + v^p) \pmod{p^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку $v = p + 1$, то $v^u \equiv up + 1 \pmod{p^2}$ и $1 + v + \dots + v^{(q-1)} \equiv q + jp + 2j\rho + \dots + (q-1)j\rho \equiv q + j\rho \frac{q-1}{2} \pmod{p^2}$.

Поэтому из системы (20) получим сравнения

$$\begin{aligned} ij\rho \frac{p^2(p^2-1)}{2} &\equiv 0 \pmod{p^2}, \\ l(p + m\rho \frac{p-1}{2}) &\equiv 0 \pmod{p^2}, \\ l + i + im\rho &\equiv l + lvj + ip + i + ij\rho \frac{p+1}{2} \pmod{p^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, система (20) эквивалентна системе

$$l \equiv 0 \pmod{p}, \quad i(m-1) \equiv 0 \pmod{p}. \quad (21)$$

Все решения системы (21) даются формулами:

$$\begin{aligned} 1) \quad l &= l_0\rho, \quad l_0 \in Z_p, \quad i = i_0\rho, \quad i_0 \in Z_p, \quad m \in Z_p; \\ 2) \quad l &= l_0\rho, \quad l_0 \in Z_p, \quad i \in Z_p^*, \quad (i, p) = 1, \quad m = 1. \end{aligned} \quad (21a)$$

Тем самым определены матрицы, из которых состоит полугруппа

A . Формулу (19) получим из формулы (6) также как при упрощении системы (20), учитывая только сравнение $l \equiv 0 \pmod{p}$. Теорема доказана.

Следствие 3.2. Имеет место равенство

$$|End G| = 2p^4 - p^3.$$

Доказательство. Из теории чисел известно, что среди чисел $0, 1, 2, \dots, p^2$ существует $p^2 - p$ чисел, взаимно простых с p^2 . Поэтому получим $p^4 + (p^2 - p)p^2 = 2p^4 - p^3$ эндоморфизмов.

Следствие 3.3. Группа $\text{Aut } G$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} i & j \\ \ell p & m \end{pmatrix},$$

где $i \in \mathbb{Z}_{p^2}$, $(i, p) = 1$ и $j, \ell \in \mathbb{Z}_p$, и только из них.

Доказательство. Пусть $\tau \in \text{End } G$ и

$$\tau = \begin{pmatrix} i p & j \\ \ell p & m \end{pmatrix},$$

где $i, j, \ell, m \in \mathbb{Z}_p$, т.е. имеем случай 1) формул (21а). Тогда по значению матрицы $a\tau = b\delta a^i p$ и по формуле (5) получим

$$(a\tau)^p = (b\delta a^i p)^p = b^p \delta^p a^{i p (1 + \ell + \dots + \ell^{p-1})},$$

откуда ввиду $\tau = p + 1$ и формул (18) получим

$$(a\tau)^p = a^{i p (p + j p + \ell j p + \dots + (p-1) j p)} = 1,$$

т.е. эндоморфизм τ отображает элемент порядка p^2 в элемент меньшего порядка и эндоморфизм τ не является автоморфизмом.

Пусть теперь имеет место случай 2), т.е.

$$\tau = \begin{pmatrix} i & j \\ \ell p & m \end{pmatrix},$$

где $j, \ell \in \mathbb{Z}_p$ и $i \in \mathbb{Z}_{p^2}$, $(i, p) = 1$. Тогда $a\tau = b\delta a^i$ и $b\tau = b\delta a^{\ell p}$. Как и в первой части доказательства, получим

$$(a\tau)^p = a^{i(p + j p \frac{p-1}{2})} = a^{i p} \neq 1$$

ввиду $(i, p) = 1$. Значит, для некоторого числа m имеет место равенство $(a\tau)^{m p} = a^p$. Тогда получим равенство

$$b = (b\tau) \cdot a^{-\ell p} = (b\tau) \cdot (a\tau)^{-\ell m p}. \quad (22)$$

Если выбрать число t так, что $t + j = 0 \pmod{p}$, то при помощи формул (5) получим, что $(b\tau)^t (a\tau) = (b\delta a^{\ell p})^t (b\delta a^i) = b^t \delta^t a^{\ell p t} b \delta a^i = b^{t+1} \delta^{t+1} a^{\ell p t + i} = a^{i + t \ell p}$ для некоторого числа u . Из равенства $(i, p) = 1$ следует равенство $(i + t \ell p, p) = 1$ и существует такое число v , что имеет место равенство

$$a = ((b\tau)^t (a\tau))^v. \quad (23)$$

Из равенств (22) и (23) следует, что элементы $a\tau$ и $b\tau$

порождают всю группу G . Значит, эндоморфизм τ является автоморфизмом. Следствие доказано.

Теорема 3.4. Группа $\text{Aut } G$ задается образующими α, β, ν, π и следующими определяющими соотношениями:

$$\alpha^p = \beta^p = \nu^p = \pi^{p-1} = 1, \quad \pi\nu = \nu\pi, \quad \alpha\nu = \nu\alpha, \\ \beta\nu = \nu\beta, \quad \pi^{-1}\alpha\pi = \alpha^t, \quad \alpha\beta\nu = \beta\alpha, \quad \pi\beta\pi^{-1} = \beta^t\nu^{(t-1)/2}$$

где t — первообразный корень по модулю p^2 .

Доказательство. Обозначим через α, β, ν и π следующие автоморфизмы:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \nu = \begin{pmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi = \begin{pmatrix} t^p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (19) можно убедиться, что имеют место равенства

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ip & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta^j = \begin{pmatrix} 1 & j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nu^k = \begin{pmatrix} 1+kp & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \beta\alpha = \begin{pmatrix} t^p & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^\ell = \begin{pmatrix} t^{p\ell} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha^i\beta^j\nu^k = \begin{pmatrix} 1+kp & j \\ ip & 1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Получаем также равенства

$$\pi\nu = \nu\pi, \quad \alpha\pi = \pi\alpha^t, \quad \alpha\beta\nu = \beta\alpha, \quad \alpha\nu = \nu\alpha, \quad \beta\nu = \nu\beta, \\ \alpha^p = \beta^p = \nu^p = \pi^{p-1} = 1. \quad (25)$$

При помощи индукции по i выводим из равенств (25) равенство $\beta^j\alpha^i = \alpha^i\beta^j\nu^{ij}$. Поэтому каждый элемент из подгруппы $\langle \alpha, \beta, \nu \rangle$, порожденной элементами α, β и ν , выражается в виде $\alpha^i\beta^j\nu^k$, где $i, j, k \in \mathbb{Z}_p$. Ввиду последней из формул (24) и единственности частного при делении на p это представление единственно.

Пусть $x \in \langle \pi \rangle \cap \langle \alpha, \beta, \nu \rangle$. Тогда $x = \pi^\ell = \alpha^i\beta^j\nu^k$ для некоторых чисел $\ell \in \mathbb{Z}_{p-1}$ и $i, j, k \in \mathbb{Z}_p$. Из формул (24) получим теперь сравнение $t^{p\ell} \equiv 1 + kp \pmod{p^2}$. По теореме Ферма (см. [2], стр. 47) $t^{(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$. Поэтому получим сравнение $t^{p\ell} \equiv 1 \equiv t^0 \pmod{p}$, которое имеет место лишь в случае $\ell = 0$. Следовательно $x = 1$ и

$$\langle \pi \rangle \cap \langle \alpha, \beta, \nu \rangle = \{1\}. \quad (26)$$

Из равенства (26) следует, что элементы группы $Aut G$ вида $\pi^l \alpha^i \beta^j \nu^k$ при различных $l \in \mathbb{Z}_{p-1}$; $i, j, k \in \mathbb{Z}_p$ различны. Количество элементов такого вида равно числу $p^3(p-1)$, т.е. равно числу $|Aut G|$. Значит, каждый элемент группы $Aut G$ выражается в виде $\pi^l \alpha^i \beta^j \nu^k$.

Для вывода последнего определяющего соотношения рассмотрим сначала произведение $\beta\pi$. Найдутся такие $l \in \mathbb{Z}_{p-1}$ и $i, j, k \in \mathbb{Z}_p$, что

$$\beta\pi = \pi^l \alpha^i \beta^j \nu^k. \quad (27)$$

Из формул (24) и (19) вытекает ввиду сравнений $t^l \equiv t \pmod{p}$, $t^l \equiv t^l \pmod{p}$, $\pi^l \beta^j \nu^k \equiv \pi^l \beta^j \nu^k \pmod{p^2}$, что

$$\begin{aligned} \pi^l \alpha^i \beta^j \nu^k &= \begin{pmatrix} t^l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i+kp & j \\ ip & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} t^l + kt^l_p + jpt^l(t^l-1)/2 & jt^l \\ ip & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь из равенств (24) и (27) получим систему уравнений $i=0, jt^l \equiv 1 \pmod{p}, t^l + kpt^l + jpt^l(t^l-1)/2 \equiv t^l \pmod{p^2}$, (28)

которая имеет единственное решение. Из последнего сравнения получаем $t^l - t^l \equiv -p[kt^l + jt^l(t^l-1)/2] \pmod{p^2}$, откуда $t^l \equiv t^l \pmod{p}$. По теореме Ферма ([2], стр. 48) $t^l \equiv t^l \pmod{p}$, $t^l \equiv t \pmod{p}$, поэтому $t^l \equiv t \pmod{p}$. Так как t по построению есть первообразный корень по модулю p^2 , он является первообразным и по модулю p ([1], стр. 148). Поскольку $0 \leq l < p-1$, то из $t^l \equiv t \pmod{p}$ следует $l=1$. Система (28) принимает теперь вид

$$i=0, jt \equiv 1 \pmod{p}, kt + (t-1)/2 \equiv 0 \pmod{p}, l=1,$$

т.е. вид

$$i=0, l=1, j=1/t, k=(1-t)/2t,$$

где деление осуществлено в поле \mathbb{Z}_p . Обозначим $u=1/t$. Значит, выполнено равенство

$$\beta\pi = \pi \beta^u \nu^{u(1-t)/2}.$$

Отсюда получим при помощи индукции для каждого натурального i равенство

$$\beta^i \pi = \pi \rho^{iu} \nu^{iu(1-t)/2},$$

а при $i=t$ ввиду $tu=1$ и $\nu\pi = \pi\nu$ соотношение

$$\pi \rho \pi^{-1} = \rho^t \nu^{(t-1)/2}. \quad (29)$$

Пусть H — группа с определяющими соотношениями (25) и (29). Из этих формул следует, что каждый элемент группы H выражается в виде $\pi \rho^{\alpha} \beta^i \nu^k$, где $k \in \mathbb{Z}_{p-1}$ и $i, j, k \in \mathbb{Z}_p$, т.е. $|H| \leq p^3(p-1)$. По теореме Дика группа $\text{Aut } G$ изоморфна факторгруппе группы H . Следовательно $|H| \geq |\text{Aut } G| = p^3(p-1)$ и по неравенству $|H| \leq p^3(p-1)$ уже $|H| = |\text{Aut } G|$. Значит, группы H и $\text{Aut } G$ изоморфны. Теорема доказана.

Теорема 3.5. Совокупность всех идемпотентов полугруппы $\text{End } G$ образует подполугруппу $J_0 \cup \{0, 1\}$ со внешне присоединенными нулем и единицей. Полугруппа J_0 изоморфна полугруппе $N = \{[j, \ell] \mid j, \ell \in \mathbb{Z}_p\}$ с правилом умножения

$$[j, \ell] \cdot [j', \ell'] = [j, \ell'].$$

Доказательство. Среди автоморфизмов идемпотентом является только тождественное отображение. Всякий собственный эндоморфизм имеет вид

$$\begin{pmatrix} ip & j \\ \ell p & m \end{pmatrix}, \quad (29a)$$

где $i, j, \ell, m \in \mathbb{Z}_p$. Определим среди них идемпотенты из условия

$$\begin{pmatrix} ip & j \\ \ell p & m \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} ip & j \\ \ell p & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\ell p & jm \\ m\ell p & m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ip & j \\ \ell p & m \end{pmatrix},$$

откуда получим

$$j\ell = i, \quad jm = j, \quad m\ell = \ell, \quad m^2 = m.$$

Если $m=0$, то также $i=j=\ell=0$ и получим нулевой эндоморфизм. Если $m \neq 0$, то $m=1$, j и ℓ — произвольные элементы из поля \mathbb{Z}_p , а $i=j\ell$.

Мы определили множество J_0 :

$$J_0 = \left\{ \begin{pmatrix} j\ell p & j \\ \ell p & 1 \end{pmatrix} \mid j, \ell \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Поскольку

$$\begin{pmatrix} j\ell p & j \\ ip & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} j'\ell' p & j' \\ \ell' p & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\ell' p & j \\ \ell' p & 1 \end{pmatrix},$$

то множество J_0 образует подполугруппу в полугруппе $\text{End } G$ и соответствие

$$[j, \ell] \longrightarrow \begin{pmatrix} i & j \\ \ell & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

задает изоморфизм между полугруппами N и J_0 . Теорема доказана.

В дальнейшем отождествим соответствующие элементы при помощи соответствия (30).

Теорема 3.6. Совокупность всех нильпотентных элементов $J(0)$ полугруппы $\text{End } G$ состоит из элементов

$$\begin{pmatrix} i & j \\ \ell & 0 \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где $i, j, \ell \in Z_p$, является идеалом в $\text{End } G$ и образует изоморфизм с полугруппой

$$K = \{ \|i, j, \ell\| \mid i, j, \ell \in Z_p \} \quad \text{полугруппу,} \quad \text{где}$$

$$\|i, j, \ell\| \cdot \|i', j', \ell'\| = \|j\ell', 0, 0\|.$$

Доказательство. При помощи математической индукции и правила умножения (19) можно убедиться, что имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} i & j \\ \ell & m \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} j\ell m^{k-2} & j m^{k-1} \\ \ell m^{k-1} & m^k \end{pmatrix} \quad (32)$$

для каждого $k \geq 2$. Поскольку всякий собственный эндоморфизм γ имеет вид (29а), то из формулы (32) видно, что для нильпотентности элемента γ необходимо и достаточно, что $m = 0$. Значит, множество $J(0)$ состоит в точности из элементов вида (31). Из правила (19) следует, что $J(0)$ является идеалом полугруппы $\text{End } G$ и соответствие

$$\begin{pmatrix} i & j \\ \ell & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \|i, j, \ell\|$$

задает изоморфизм между полугруппами $J(0)$ и K . Теорема доказана.

Лемма 3.7. Если $[j, \ell] \in J_0$, то $|J([j, \ell])| = p^{(p-1)}$ и

$$J([j, \ell]) = \{ \begin{pmatrix} i & j \\ \ell & m \end{pmatrix} \mid m, i \in Z_p; m \neq 0 \}.$$

Доказательство. Множество $J([j, \ell])$ состоит в точности из таких элементов

$$x = \begin{pmatrix} ip & g \\ sp & m \end{pmatrix}, \quad (33)$$

для которых найдется такое $k \geq 2$, что $x^k = [j, \ell]$.
 Последнее равенство ввиду равенств (32), (33) и значения обозначения $[j, \ell]$ дает систему сравнений

$$\begin{aligned} gsm^{k-2} &\equiv j\ell \pmod{p}, & gm^{k-1} &\equiv j \pmod{p}, \\ sm^{k-1} &\equiv \ell \pmod{p}, & m^k &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned} \quad (34)$$

Решим систему (34) при $k \geq 2$. Из последнего сравнения следует, что $m \neq 0$. Пусть $m \neq 0$. Тогда существует такое число $k \geq 2$, что $m^k \equiv 1 \pmod{p}$.
 Из остальных сравнений получим равенства

$$s = \ell m, \quad g = jm \quad (35)$$

ввиду $m^k \equiv 1 \pmod{p}$. Таким образом, элемент x принадлежит множеству $J([j, \ell])$ тогда и только тогда, когда $m \neq 0$ и выполнены условия (35). Отсюда следует также утверждение леммы о мощности. Лемма доказана.

Теорема 3.8. Множество $J(x)$ является подполугруппой для каждого идемпотента x полугруппы $\text{End } G$. При $x \in J_0$ полугруппа $J(x)$ изоморфна полугруппе $L = Z_p^* \times \mathcal{D}$, где \mathcal{D} — полугруппа p -го порядка с нулевым умножением, $\mathcal{D} = \{0, 1, \dots, p-1\}$.

Доказательство. Если $x = 1$, то $J(1) = \text{Aut } G$ и $J(1)$ является подполугруппой. По теореме 3.6 множество $J(0)$ является подполугруппой. Пусть теперь $[j, \ell] \in J_0$ и $y, z \in J([j, \ell])$. Тогда по лемме 3.7 найдутся такие $i, m, i', m' \in Z_p$, что $m, m' \neq 0$ и

$$y = \begin{pmatrix} ip & jm \\ \ell m & m \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} i'p & jm' \\ \ell m' & m' \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Отсюда

$$yz = \begin{pmatrix} j\ell m m' p & jm m' \\ \ell m m' p & m m' \end{pmatrix}, \quad (37)$$

т.е. $yz \in J([j, \ell])$ и множество $J([j, \ell])$ является подполугруппой. Первая часть теоремы доказана.

Фиксируем $[j, \ell] \in J_0$ и определим отображение $\Gamma: J([j, \ell]) \rightarrow L$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} ip & jm \\ lmp & m \end{pmatrix}_T = \begin{cases} m \times 0, & \text{если } i = jlm; \\ m \times i, & \text{если } i \neq jlm, i \neq 0; \\ m \times (jlm), & \text{если } i \neq jlm, i = 0, \end{cases} \quad (38)$$

где $i, m \in \mathbb{Z}_p$ и $m \neq 0$. По лемме 3.7 каждый элемент из $J([j, l])$ представляется формулой (36), т.е. отображение T определено на всем $J([j, l])$. Покажем, что отображение T является взаимно однозначным отображением на все L . Отметим, что по определению полугруппы L имеет место $|L| = p(p-1)$ и по лемме 3.7 имеем $|J([j, l])| = p(p-1)$. Для проверки взаимной однозначности отображения T достаточно доказать, что каждый элемент полугруппы L имеет прообраз при этом отображении.

Пусть $m \times g \in L$. Тогда $m \neq 0$. Если $g = 0$, то по определению отображения T будет

$$\begin{pmatrix} jlm & jm \\ lmp & m \end{pmatrix}_T = m \times 0 = m \times g$$

и элемент $m \times 0$ имеет прообраз. Если $g \neq 0$, то в случае $g \neq jlm$ имеем

$$\begin{pmatrix} qp & jm \\ lmp & m \end{pmatrix}_T = m \times g.$$

В случае же $g = jlm$ имеем по третьему случаю формулы (38)

$$\begin{pmatrix} 0 & jm \\ lmp & m \end{pmatrix}_T = m \times (jlm) = m \times g.$$

Значит, элемент $m \times g$ имеет прообраз во всех случаях. Ввиду леммы 3.7 эти прообразы являются действительно элементами из полугруппы $J([j, l])$. Взаимная однозначность отображения T на все L доказана.

Покажем, наконец, что T является изоморфизмом. Пусть $y, z \in J([j, l])$ и имеют место равенства (36). Тогда по формулам (37) и (38) получим с одной стороны равенство $(y_2)_T = (mm') \times 0$. С другой стороны, по правилу умножения в полугруппе L получим $(yT)(zT) = (m \times i)(m \times i') = (mm') \times 0$. Значит, отображение T является изоморфизмом. Теорема доказана.

Теорема 3.9. Совокупность $F(G)$ всех ненильпотентных собственных эндоморфизмов группы G образует в $\text{End } G$ подполугруппу, изоморфную полугруппе $L \times J$.

Доказательство. Ввиду теоремы 3.6 множество $F(G)$

состоит из элементов вида (29а), где $m \neq 0$. Отсюда следует по правилу (19), что $F(G)$ является подполугруппой в $\text{End } G$.

Для идемпотента $x \in J_0$ обозначим через T_x изоморфизм $J(x) \rightarrow L$, построенный в доказательстве теоремы 3.8. Определим отображение $W : F(G) \rightarrow L \times J_0$ следующим образом:

$$yW = (yT_x) \times x, \quad (39)$$

где $y \in J(x)$. Ввиду конечности подполугруппы $\text{End } G$ для каждого $y \in F(G)$ существует единственный $x \in J_0$ такой, что $y \in J(x)$. Поэтому отображение W определено корректно. Поскольку множества $J(x)$ ($x \in J_0$) задают разбиение на множестве $F(G)$, то сравнивая мощности множеств $J(x)$, J_0 и L , получим равенство $|F(G)| = |L \times J_0| = p^3(p-1)$. Поэтому для доказательства взаимной однозначности отображения W достаточно доказать, что каждый элемент из подполугруппы $L \times J_0$ имеет прообраз.

Пусть $z \in L \times J_0$. Тогда $z \in L$ и ввиду изоморфизма $T_x : J(x) \rightarrow L$ найдется такой $y \in J(x)$, что $yT_x = z$. Мы получим равенство $yW = (yT_x) \times x = z \times x$, т.е. для произвольно выбранного элемента множества $L \times J_0$ найдется прообраз. Следовательно, отображение W является взаимно однозначным отображением на все $L \times J_0$. Покажем, что отображение W является изоморфизмом. Для этого возьмем произвольные элементы $y, y' \in F(G)$. Тогда найдутся такие $x, x' \in J_0$, что $y \in J(x)$ и $y' \in J(x')$. Надо показать, что

$$(yy')W = (yW) \cdot (y'W) = ((yT_x) \times x) \cdot ((y'T_{x'}) \times x') = ((yT_x)(y'T_{x'})) \times (xx'),$$

т.е.

$$yy' \in J(xx'), (yy')T_{xx'} = (yT_x)(y'T_{x'}). \quad (40)$$

Пусть $x = [j, l]$, $x' = [j', l']$ и

$$y = \begin{pmatrix} i_p & j_m \\ i_m p & m \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} i'_p & j'_m \\ i'_m p & m' \end{pmatrix}.$$

Это можно предполагать в силу леммы 3.7. Отношение $yy' \in J(xx')$ следует из леммы 3.7, правила умножения идемпотентов и из равенства

$$yy' = \begin{pmatrix} j_m i'_m p & j_m m' \\ m i'_m p & m m' \end{pmatrix}.$$

Значит, отображение $T_{xx'}$ применимо к элементу yy' и по формуле (38) получим

$$(yy')T_{xx'} = (mm') \times 0.$$

С другой стороны, $yT_x = m \times s$ и $y'T_{x'} = m' \times s'$ для некоторых $s, s' \in \mathbb{Z}_p$. Ввиду $(m \times s)(m' \times s') = (mm') \times 0$ получим равенство

$$(yy')T_{xx'} = (yT_x)(y'T_{x'}).$$

Теорема доказана.

Теорема 3.9. показывает, что $F(G)$ можно рассматривать как полугруппу матричного типа (см. [4], стр. 278) над полугруппой L , где множества Γ и Γ' оба имеют p элементов и P - матрица, состоящая из единиц.

Мы разбили полугруппу $\text{End } G$ в сумму попарно непересекающихся подполугрупп $\text{Aut } G$, $J^{(0)}$ и $F(G)$, строение которых задано теоремами 3.4, 3.6, 3.8 и 3.9. Остается указать связь между этими подполугруппами, т.е. по какому правилу умножаются элементы разных компонент. Это происходит по формуле (19), которая задает обычное умножение матриц, если только один из сомножителей является собственным эндоморфизмом.

В отличие от некоммутативной группы порядка pq , у которой полугруппа эндоморфизмов вполне регулярна, полугруппа $\text{End } G$ не является регулярной.

Теорема 3.10. Регулярными элементами полугруппы $\text{End } G$ являются автоморфизмы, нулевой эндоморфизм и эндоморфизмы

$$[j, \ell, m] = \begin{pmatrix} j & \ell p/m & j \\ \ell p & & m \end{pmatrix},$$

где $j, \ell, m \in \mathbb{Z}_p$ и $m \neq 0$. Регулярные ненулевые собственные эндоморфизмы $[j, \ell, m]$ образуют подполугруппу с правилом умножения

$$[j, \ell, m] \cdot [j', \ell', m'] = [jm', m\ell', mm']. \quad (41)$$

Доказательство. Автоморфизмы и 0 являются регулярными. Пусть x - регулярный собственный эндоморфизм, т.е. найдется такой $y \in \text{End } G$, что $xyx = x$. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} i p & j \\ \ell p & m \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} i' & j' \\ \ell' & m' \end{pmatrix}$$

для некоторых значений параметров и

$$x y x = \begin{pmatrix} j \ell m' & j m m' \\ \ell m m' & m^2 m' \end{pmatrix} = x = \begin{pmatrix} i & j \\ \ell & m \end{pmatrix},$$

откуда получим

$$i = j \ell m', \quad j = j m m', \quad \ell = \ell m m', \quad m = m^2 m' \quad (42)$$

(равенства в поле Z_p). Если $m = 0$, то $i = j = \ell = 0$ и $x = 0$. Пусть $m \neq 0$. Тогда система (42) эквивалентна системе

$$m' = 1/m, \quad i = j \ell / m.$$

Наоборот, пусть x — собственный эндоморфизм, у которого $m \neq 0$ и $i = j \ell / m$. Если выбрать $m' = 1/m$, а параметры i' , j' и ℓ' произвольно, то $x y x = x$ и x является регулярным. Первая часть теоремы доказана. Второе утверждение теоремы следует сразу из правила умножения (19). Теорема доказана.

Литература

1. Б у х ш т а б А.А., Теория чисел. Москва, 1966.
2. В и н о г р а д о в И.М., Основы теории чисел. Москва, 1965.
3. К у р о ш А.Г., Теория групп. Москва, 1967.
4. Л я п и н Е.С., Полугруппы. Москва, 1960.
5. П у у с е м п П., Полугруппы эндоморфизмов некоторых конечных групп. В сб. "XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум". Кишинев, 1971.
6. П у у с е м п П., Полугруппы эндоморфизмов групп диэдра. В сб. "Студенческие труды по алгебре и геометрии". Тарту, 1972.
7. Х а с с е Г., Лекции по теории чисел. Москва, 1953.
8. Х о л л М., Теория групп. Москва, 1962.
9. В а з м а j i, B.G., On the isomorphisms of two metacyclic groups. Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 22, N° 1, 175 - 182.
10. G a b r i e l e, G., Gruppi per i quali $E_N(\alpha) - A(\alpha)$ e nilpotente. Rend. Accad. sci. fis. e mat. Soc. naz. sci. lettere ed arti Napoli, 1968 (1969), 35, 593 - 598.

Поступило
22 III 1973

Kahe metatsükliiliste rühmade klassi
endomorfismipoolrühmad

P. Puusemp

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis uuritakse põhjalikult kahe mittekommutatiivsete metatsükliiliste rühmade klassi endomorfismipoolrühmi. Paragrahvis 2 antakse mittekommutatiivse pq järku rühma G endomorfismipoolrühma $\text{End } G$ kirjeldus, kus p, q on erinevad algarvud. Vaadeldaval juhul on poolrühm $\text{End } G$ täielikult regulaarne ja lihtsa ehitusega. Paragrahvis 3 leitakse määravate seostega (18) antud p^3 järku rühma endomorfismipoolrühma ehitus ja tähtsamad omadused. Sel juhul on endomorfismipoolrühma ehitus keerukas.

Die Endomorphismenhalbgruppen der metazyklischen
Gruppen von zwei Arten

P. Puusemp

Z u s a m m e n f a s s u n g

In dem vorliegenden Artikel untersuchen wir eingehend den Aufbau der Endomorphismenhalbgruppen der nichtabelschen metazyklischen Gruppen von zwei Arten. In § 2 geben wir die Beschreibung der Endomorphismenhalbgruppe $\text{End } G$ für die Gruppe G von Ordnung pq , wo p und q die verschiedenen Primzahlen sind. In diesem Fall ist die Halbgruppe $\text{End } G$ völlig regulär und hat einen sehr einfachen Aufbau. Im § 3 untersuchen wir aber wichtigste Eigenschaften der Endomorphismenhalbgruppen der Gruppen von Ordnung p^3 ($p > 2$, p - eine Primzahl), die mit den definierenden Relationen (18) gegeben sind. In diesem Fall ist die Untersuchung des Aufbaus der Endomorphismenhalbgruppe kompliziert.

СВОБОДНЫЕ В СЕБЕ НИЛЬПОЛУГРУППЫ С ИЗОМОРФНЫМИ

ПОЛУГРУППАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

М.С.Трепетин

Кафедра алгебры и геометрии

1. Теорию эндоморфизмов алгебр (моделей) принято считать частью общей теории о соответствиях (см. [12], стр. 375; [14] стр. 41; [4] стр. 3). Здесь известны задачи - прямая: описать алгебру эндоморфизмов по некоторой исходной алгебре (модели), и - обратная: описать свойства алгебры (модели) по свойствам ее алгебры эндоморфизмов (см. [25], стр. 47). Эти задачи затрагивались в ряде работ (см. [1, 3-5, 7, 8, 10, 15-17, 19, 20, 26, 28]). В нашей работе мы рассматриваем их применительно к свободным в себе нильполугруппам.

2. Основные результаты статьи (в порядке их расположения): а) доказано (§3), что полугруппу эндоморфизмов свободной в себе нильполугруппы можно нормировать при помощи упорядоченной полугруппы, причем полугруппа эндоморфизмов свободной нильполугруппы допускает в точности одно подходящее α -естественное нормирование (см. определение 14). б) Доказано (§4) с использованием результата а), что свободные в себе нильполугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов либо изоморфны, либо антиизоморфны (этот результат обобщает анонсированные в [22, 23] теоремы для нильпотентных - в кольцевом смысле - полугрупп).

3. Теорию полугрупп эндоморфизмов алгебр (моделей) начали развивать Е.С.Ляпин и Л.М.Глускин (см. работы [7, 8, 15]). В дальнейшем ими и также Л.А.Скорняковым поставлены ряд вопросов (см. [17, 24]), стимулирующих изучение эндоморфизмов алгебр (моделей) и, в частности, полугрупп. В настоящей работе дается решение некоторых из поставленных в [17, 25] проблем.

Определение 1. Говорят, что полугруппа S свободна в

себе, если она обладает таким порождающим множеством X , что всякое отображение $X \rightarrow S$ можно продолжить до эндоморфизма полугруппы S (см. [11], стр. 469).

В этом случае говорят, что X — система свободных образующих в S .

4. В статье приняты следующие обозначения:

- S — полугруппа с нулем 0 .
- A — произвольная система образующих полугруппы S , называемая алфавитом (обычно алфавит фиксирован).
- $\langle P \rangle$ — подполугруппа полугруппы S , порожденная некоторым ее подмножеством P , в частности, $S = \langle A \rangle$.
- $w \in \langle A \rangle$ — слово w , являющееся элементом полугруппы S , составлено из букв алфавита A .
- $X(w)$ — множество всех букв слова w ; называемое носителем этого слова.
- $d_A(w) = d_A(w)$ — длина слова w (т.е. число всех букв с повторениями, содержащихся в слове w).
- $\rho(s)$ — показатель нильпотентности элемента $s \in S$, т.е. такое число $\rho \in \{1, 2, \dots\}$, что $s^\rho = 0 \neq s^{\rho-1}$.
- $\mathcal{E}(S)$ — полугруппа всех полных эндоморфизмов полугруппы S .
- \mathcal{D}, \mathcal{C} — свободные в себе нильполугруппы.
- $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^2$ — множество всех неразложимых в \mathcal{D} элементов.
- $\rho \stackrel{\text{def}}{=} Q$ по определению считаем ρ равным Q .

5. Формулы в каждом параграфе нумеруются независимо. В ссылках на формулы из другого параграфа указываются номера параграфа и формулы (например, ссылка вида "см. (I.19)" означает: "см. условие (19) из § I"). В ссылках внутри параграфа указывается только номер формулы (например, "...ввиду (6)...") означает: "ввиду условия (6) настоящего параграфа").

Одноэлементные множества отождествляются с самими элементами.

§ 1. Некоторые свойства свободных в себе
 нильполугрупп и их идемпотентных
 эндоморфизмов

Определение 2 (см. [29]). Полугруппа S называется нильполугруппой, если каждый ее элемент в некоторой степени равен нулю.

1. Пусть здесь и в дальнейшем (до конца статьи) \mathcal{Q} — свободная в себе нильполугруппа, отличная от нуля.

Ниже (см. лемму 4) устанавливается, что \mathcal{Q} обладает единственной системой свободных образующих, состоящей из элементов множества $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q} \setminus \mathcal{Q}_2$. Отсюда и из результатов для свободных в себе универсальных алгебр (см. [31]), следует, что \mathcal{Q} можно задать при помощи некоторого множества образующих и (конечной или бесконечной) совокупности тождеств, включающей в себя тождество $\xi^n \eta = \xi^n = \eta \xi^n$ (последнее, как известно, см. [20], задает многообразие нильполугрупп класса n) при некотором $n \geq 2$.

2. В заметках [24, 25] получен вид тождеств, которыми описываются свободные в себе нильпотентные полугруппы. Аналогично можно описывать нильполугруппы, свободные в себе. Здесь, по-видимому, интересной может оказаться проблема — описать структуру многообразий нильполугрупп, которая могла бы служить темой отдельного исследования.

Предложение 1. Существуют нильполугруппы, свободные в себе, не являющиеся нильпотентными.

Доказательство. Построим следующий пример. Пусть N — множество $1, 2, \dots$ натуральных чисел и B — множество его непустых конечных подмножеств. Для всяких $a, b \in B$ обычным образом задается их объединение $a \cup b$ и пересечение $a \cap b$ (как подмножеств из N). На множестве $C = B \cup 0$ определим умножение, полагая

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0 \cdot 0 = 0 \quad (1)$$

$$a \cdot b = \begin{cases} a \cup b, & \text{если } a \cap b = \emptyset \\ 0, & \text{если } a \cap b \neq \emptyset \end{cases} \quad (2)$$

Замкнутость, однозначность, ассоциативность и коммутативность операции \cdot в C — очевидны. Из определения операции на множестве $B \cup 0$ следует, что каждый элемент $a \in B$ однозначно с точностью до порядка множителей разлагается в

произведение чисел $i \in a$. Далее, из $a \neq \emptyset$ для всякого $a \in B$ и из (2) следует, что $a \circ a = 0$. Следовательно, S — нильполугруппа. В то же время S не является нильпотентной полугруппой, т.е. $S^h \neq 0$ ни при одном $h = 1, 2, \dots$. Действительно, произведение $i \circ 2 \circ \dots \circ n = \{1, 2, \dots, n\}$ принадлежит B и ввиду $0 \notin B$ является ненулевым элементом полугруппы S . Мы хотим показать, что S свободна в себе и множество N^* — всех одноэлементных подмножеств множества N является свободной системой образующих в S .

То, что N^* — система образующих полугруппы S , ясно. Покажем, что S свободна над N^* . Пусть φ — произвольное отображение вида $N^* \rightarrow S$. Распространим φ на всем S , полагая $a\varphi = i_1\varphi \circ i_2\varphi \circ \dots \circ i_n\varphi$ для всякого $a = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ и $0\varphi = 0$.

Покажем, что φ — гомоморфное отображение. Из (1) и определения φ следует, что $(a \circ c)\varphi = (0 \circ a)\varphi = 0 = 0\varphi \circ a\varphi = a\varphi \circ 0\varphi$ при любом

$a \in S$. Пусть $a = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, $b = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. Если $a \circ b = 0$, то $a \cap b \neq \emptyset$ и пусть $i_s = j_t \in a \cap b$. Тогда $(a \circ b)\varphi = 0 = (i_1\varphi \circ i_2\varphi \circ \dots \circ i_n\varphi) \circ (j_1\varphi \circ j_2\varphi \circ \dots \circ j_m\varphi) = a\varphi \circ b\varphi$. Если же $a \circ b \neq 0$, то $a \circ b = a \cup b = \{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m\}$, и в этом случае $(a \circ b)\varphi = i_1\varphi \circ \dots \circ i_n\varphi \circ j_1\varphi \circ \dots \circ j_m\varphi = (i_1\varphi \circ \dots \circ i_n\varphi) \circ (j_1\varphi \circ \dots \circ j_m\varphi) = a\varphi \circ b\varphi$. Следовательно, φ — гомоморфное отображение, т.е. является эндоморфизмом полугруппы S . Ввиду произвольности φ полугруппа S свободна в себе.

Лемма доказана.

Примечание. Ясно, что счетность N в рассмотренном примере не существенна: в качестве N можно взять множество произвольной бесконечной мощности, а в качестве B — множество всех его конечных подмножеств. При этом рассуждения не меняются. Следовательно, существуют нильполугруппы произвольной бесконечной мощности, свободные в себе, не являющиеся нильпотентными.

Лемма 1. Пусть S есть нильполугруппа с двумя образующими (которые обозначим через x, y) и удовлетворяющая тождеству $\xi^2 = 0$. Тогда S нильпотентна класса $h \leq 4$ и xyx, yxy — ее единственные элементы длины 3, которые могут быть отличны от нуля.

Доказательство. Пусть w - некоторое слово, имеющее в алфавите $A = \{x, y\}$ длину $h \geq 4$. Тогда w содержит или x^2 , или y^2 , или $xyxy = (xy)^2$, или $yxxy = (yx)^2$. Во всех случаях $w=0$ ввиду тождества $\xi^2=0$, справедливого в S . Следовательно, $S^4=0$. Пусть ненулевое слово w имеет длину 3. Тогда w не содержит ни x^2 ни y^2 , равных нулю, и, следовательно, имеет вид xyx или yxy .

Лемма доказана.

Ранее, см. [22], автором получена теорема об изоморфизме свободных коммутативных нильпотентных полугрупп, имеющих изоморфные полугруппы эндоморфизмов. В дальнейшем этот результат был усилен и в [23] теорема об определяемости сформулирована для коммутативных нильпотентных полугрупп, свободных в себе. Здесь основные результаты заметок [22, 23] об определяемости нильпотентных полугрупп их полугруппами эндоморфизмов обобщаются в двух направлениях. Во-первых, от нильпотентных полугрупп мы переходим к нильполугруппам, свободным в себе (такие существуют по предложению I), и, во-вторых, рассматриваемые нильполугруппы предполагаются не обязательно абелевыми.

Лемма 2 ([29], стр. 378), В нильполугруппе S ни один отличный от нуля элемент не может быть своим собственным делителем, т.е. если $x \neq 0$, то равенства $x = ux$, $x = xv$, $x = uxv$ ни при каких $u, v \in S$ - невозможны.

Лемма 3. Пусть A - свободное порождающее множество в $\mathcal{D} (\neq 0)$. Тогда элементы A неразложимы в \mathcal{D} .

Доказательство. Предположим противное, т.е. что найдется $z \in A$, $x, y \in \mathcal{D}$, такие что $z = xy$; выразим x, y через элементы из A . Пусть $x = a_{i_1}^{r_1} \dots a_{i_n}^{r_n}$, $y = a_{j_1}^{p_1} \dots a_{j_m}^{p_m}$. Тогда $z = a_{i_1}^{r_1} \dots a_{i_n}^{r_n} a_{j_1}^{p_1} \dots a_{j_m}^{p_m}$. Отметим, что $0 \notin A$ (ибо из $0 \in A$ следовало бы, что каждый элемент \mathcal{D} является идемпотентным, и так как 0 - единственный идемпотент нильполугруппы \mathcal{D} , то $\mathcal{D} = 0$, что невозможно). Следовательно, $z \neq 0$ и из леммы 2 имеем $z \neq a_{i_k} a_{j_s}$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ такое, что $z\varphi = z$, $a\varphi = 0$ для всех $a \in A \setminus z$ (требуемое φ существует, поскольку \mathcal{D} свободна над A). Тогда $z = z\varphi = (a_{i_1}^{r_1} \dots a_{i_n}^{r_n} a_{j_1}^{p_1} \dots a_{j_m}^{p_m})\varphi = 0$, хотя $z \neq 0$. Полученное против-

речие завершает доказательство.

Лемма 4. Множество $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^2$ является единственным свободным порождающим множеством полугруппы \mathcal{D} .

Доказательство. Пусть M — произвольное свободное порождающее множество в \mathcal{D} . Тогда в силу леммы 3 имеем $M \subseteq \mathcal{D}_0$. В свою очередь, множество \mathcal{D}_0 , состоящее из неразложимых элементов полугруппы \mathcal{D} , входит во всякое ее порождающее множество (ибо неразложимые элементы невозпроизводимы за счет других элементов полугруппы \mathcal{D}), т.е. $\mathcal{D}_0 \subseteq M$ и, значит, $\mathcal{D}_0 = M$. Ввиду произвольности M лемма доказана.

В дальнейшем мы фиксируем множество \mathcal{D}_0 в качестве алфавита полугруппы \mathcal{D} .

3. Так как всякий эндоморфизм полугруппы \mathcal{D} однозначно определен его действием на множество образующих \mathcal{D}_0 , то в дальнейшем мы отождествляем эндоморфизмы полугруппы \mathcal{D} с определяющими их отображениями вида $\mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$. Ввиду этого и того, что \mathcal{D}_0 — свободное порождающее \mathcal{D} множество, то всякое отображение вида $\mathcal{D}_0 \rightarrow \mathcal{D}$ есть эндоморфизм полугруппы \mathcal{D} . Условимся также там, где это удобно, эндоморфизмы полугруппы \mathcal{D} записывать как отображения вида $(a_\lambda), x_\lambda \in \mathcal{D}_0, a_\lambda \in \mathcal{D}$.

4. Пусть Ω — некоторое множество индексов, равносильное \mathcal{D}_0 и такое, что $\mathcal{D}_0 = \{x_\lambda \mid \lambda \in \Omega\}$. Считаем, что $x_\lambda \neq x_\mu$ для всех $\lambda, \mu \in \Omega, \lambda \neq \mu$. Так как \mathcal{D}_0 — порождает \mathcal{D} , то каждый элемент $a \in \mathcal{D}$ можно записать в виде слова в алфавите \mathcal{D}_0 , т.е.

$$a = x_{\lambda_1}^{l_1} x_{\lambda_2}^{l_2} \dots x_{\lambda_s}^{l_s}, \quad x_{\lambda_i} \neq x_{\lambda_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, s-1, \quad (3)$$

где i_1, l_2, \dots, l_s — некоторые целые положительные числа.

Лемма 5. 1) Показатели nilпотентности элементов множества \mathcal{D}_0 равны между собой. 2) Носители¹ равных ненулевых слов в алфавите \mathcal{D}_0 — совпадают.

Доказательство. 1) Пусть $x, y \in \mathcal{D}_0$. Пусть ψ — эндоморфизм, отображающий x в y , φ — эндоморфизм, отображающий y в x . Тогда $\psi = \psi \varphi = x^{p(x)} \varphi = y^{p(x)}$, откуда $p(y) \leq p(x)$. Аналогично получим $p(x) \leq p(y)$. Следовательно, $p(x) = p(y)$ для всех

¹ т.е. множества всех букв

$x, y \in \mathcal{D}_0$.

Этим первое утверждение леммы доказано.

2) Пусть $v_1 = x_{\lambda_1}^{n_1} \dots x_{\lambda_{k_1}}^{n_{k_1}}$, $v_2 = x_{\mu_1}^{m_1} \dots x_{\mu_{k_2}}^{m_{k_2}}$ — некоторые ненулевые слова в алфавите \mathcal{D}_0 , причем $v_1 \neq v_2$. Предположим, что $\mathcal{X}(v_1) \not\subseteq \mathcal{X}(v_2)$, и пусть $x_\lambda \in \mathcal{X}(v_1) \setminus \mathcal{X}(v_2)$. Пусть ψ — эндоморфизм \mathcal{D} , определенный формулой $x_\lambda \psi = 0$, $x_\alpha \psi = x_\alpha$, $\alpha \in \Omega \setminus \lambda$. Так как все буквы слова v_2 неподвижны при действии ψ , ибо $x_\lambda \notin \mathcal{X}(v_2)$, то $v_2 \psi = v_2$. В свою очередь, $v_1 \psi = (x_{\lambda_1} \psi)^{n_1} \dots (x_{\lambda_{k_1}} \psi)^{n_{k_1}} = 0$, ибо $x_\lambda \psi = 0$ для некоторого $\lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_{k_1}\}$. Отсюда $0 \neq v_1 = v_2 = v_2 \psi = v_1 \psi = 0$, что невозможно. Следовательно, $\mathcal{X}(v_1) \setminus \mathcal{X}(v_2) = \emptyset$ и, значит, $\mathcal{X}(v_1) \subseteq \mathcal{X}(v_2)$. Но v_1 и v_2 — равноправны и, значит, аналогично получим $\mathcal{X}(v_2) \subseteq \mathcal{X}(v_1)$, т.е. $\mathcal{X}(v_1) = \mathcal{X}(v_2)$.

Лемма доказана.

5. В силу 1) леммы 5 фиксируем далее число k , являющееся показателем нильпотентности некоторого $x \in \mathcal{D}_0$. Ясно, что $\rho(y) = k$ для всех $y \in \mathcal{D}_0$.

В силу 2) леммы 5 каждому элементу $0 \neq a \in \mathcal{D}$ сопоставляется однозначно определенное множество $\mathcal{X}(a)$, являющееся носителем какой-нибудь записи этого элемента в алфавите \mathcal{D}_0 . Например, если a записано, как в (3), то

$$\mathcal{X}(a) = \cup \{x_{\lambda_i} \mid i = 1, 2, \dots, j\}. \quad (4)$$

Полагаем также $\mathcal{X}(0) = \emptyset$.

Лемма 6. Пусть $\theta \neq \varphi = \varphi^2 \in \mathfrak{b}(\mathcal{D})$ и $x_\lambda \varphi \neq 0$ для некоторого $\lambda \in \Omega$. Тогда

$$x_\lambda = x_\lambda \varphi \vee x_\lambda \notin \mathcal{X}(x_\lambda \varphi). \quad (5)$$

Доказательство. Допустим, что $0 \neq x_\lambda \varphi \neq x_\lambda$, но $x_\lambda \in \mathcal{X}(x_\lambda \varphi)$. Тогда $x_\lambda \varphi = ux_\lambda v$ для каких-то $\emptyset \neq \{u, v\} \subseteq \mathcal{D} \cup \emptyset$. Отсюда $x_\lambda \varphi = x_\lambda \varphi^2 = (ux_\lambda v) \varphi = (u\varphi)(x_\lambda \varphi)(v\varphi)$, что невозможно ввиду $x_\lambda \varphi \neq 0$ и леммы 2.

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $\theta \neq \varphi = \varphi^2 \in \mathfrak{b}(\mathcal{D})$, $0 \neq w \in \mathcal{D} \varphi$, $x_\alpha \in \mathcal{X}(w)$, $w \neq x_\alpha \neq x_\alpha \varphi$. Тогда

$$x_\alpha \varphi \neq 0, \quad |\mathcal{X}(x_\alpha \varphi)| < |\mathcal{X}(w)|. \quad (6)$$

Доказательство. Поскольку $w = ux_\alpha v$ для некоторых $\emptyset \neq \{u, v\} \subseteq \mathcal{D} \cup \emptyset$, то $w = w \varphi = (ux_\alpha v) \varphi =$

$= (u\varphi)(x_\alpha\varphi)(v\varphi)$ следовательно, $x_\alpha\varphi \neq 0$ ввиду $w \neq 0$. Далее из последнего же равенства выводим $X(w) = X[(u\varphi)(x_\alpha\varphi)(v\varphi)]$ в силу леммы 5 и, значит, $X(x_\alpha\varphi) \subseteq X(w)$. При этом поскольку $x_\alpha \neq x_\alpha\varphi$, то $x_\alpha \notin X(x_\alpha\varphi)$ по лемме 6. Но $x_\alpha \in X(w)$. Значит, $|X(x_\alpha\varphi)| < |X(w)|$.

Лемма доказана.

Лемма 8². Пусть $\theta \neq \varphi = \varphi^2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D})$. Тогда

$$\mathfrak{D}_\theta \cap \mathfrak{D}_\varphi \neq \emptyset. \quad (7)$$

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{D}_\theta \cap \mathfrak{D}_\varphi = \emptyset$. Тогда $\mathfrak{D}_\varphi \subseteq \mathfrak{D}^2$. Пусть $0 \neq w \in \mathfrak{D}_\varphi$ имеет носитель с наименьшим числом элементов среди всех ненулевых элементов множества \mathfrak{D}_φ . Пусть $x_\alpha \in X(w)$. Тогда $w = x_\alpha$ невозможно, ибо $x_\alpha \in \mathfrak{D}^2$ противоречит лемме 3. По той же причине невозможно $x_\alpha = x_\alpha\varphi$. Следовательно, $w \neq x_\alpha \neq x_\alpha\varphi$. Отсюда ввиду леммы 7 получим $|X(x_\alpha\varphi)| < |X(w)|$, вопреки выбору w . Этим лемма доказана.

5. Пусть $\varphi \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D})$. Обозначим

$$I_\varphi = \bigcup \{X(x_\alpha\varphi) \mid \alpha \in \Omega\}. \quad (8)$$

Множество I_φ есть объединение носителей всех образов образующих при эндоморфизме φ . Оказывается, что, в случае, когда φ идемпотент, I_φ совпадает с множеством всех его инвариантных образующих.

Теорема 1. Пусть $\theta \neq \varphi = \varphi^2 \in \mathfrak{L}(\mathfrak{D})$. Тогда

$$\mathfrak{D}\varphi = \langle \mathfrak{D}_\theta \cap \mathfrak{D}_\varphi \rangle \quad (9)$$

$$I_\varphi = \mathfrak{D}_\theta \cap \mathfrak{D}_\varphi. \quad (10)$$

Доказательство. Установим сначала справедливость формулы (9), а затем (10). Обозначим для краткости $\langle \mathfrak{D}_\theta \cap \mathfrak{D}_\varphi \rangle$ через \mathfrak{B} . Так как $\mathfrak{D}_\varphi \subseteq \mathfrak{D}\varphi$, то также $\mathfrak{D}_\theta \cap \mathfrak{D}_\varphi \subseteq \mathfrak{D}\varphi$ и $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}\varphi$. Допустим, что вопреки (9) выполнено $\mathfrak{D}\varphi \neq \mathfrak{B}$, и пусть w имеет носитель с наименьшим числом элементов среди всех элементов множества $\mathfrak{D}\varphi \setminus \mathfrak{B}$. Очевидно, что $w \neq 0$ (ввиду $0 \in \mathfrak{B}$). Пусть также $x_\alpha \in X(w)$ таково, что $x_\alpha\varphi \notin \mathfrak{B}$ (требуемое x_α найдется ибо если $x_\alpha\varphi \in \mathfrak{B}$ для всех $x_\alpha \in X(w)$, то

² При выводе этой леммы мы используем некоторые рассуждения из доказательства леммы 2 работы [20].

$w = w\varphi \in \langle B \rangle = B$, вопреки предположению). При этом $x_\alpha \neq w$, ибо из $x_\alpha = w \in \mathfrak{D}\varphi$ следовало бы, что $x_\alpha\varphi = w\varphi = w = x_\alpha \in B$, хотя $x_\alpha\varphi \notin B$. Тот же вывод показывает, что $x_\alpha \neq x_\alpha\varphi$. Но тогда ввиду $x_\alpha\varphi \in \mathfrak{D}\varphi \setminus B$ условие (6) приводит к противоречию с выбором w .

Следовательно, $\mathfrak{D}\varphi = B = \langle \mathfrak{D}_c \cap \mathfrak{D}_c\varphi \rangle$.

Покажем теперь справедливость условия (10). Пусть $x_\alpha \in \mathfrak{D}_c \cap \mathfrak{D}_c\varphi$. Тогда $x_\alpha = x_\beta\varphi$ при некотором $\beta \in \Omega$. Отсюда

$$x_\alpha = x_\beta\varphi = x_\beta\varphi^2 = (x_\beta\varphi)\varphi = x_\alpha\varphi, \quad (11)$$

т.е. элементы из $\mathfrak{D}_c \cap \mathfrak{D}_c\varphi$ являются неподвижными точками эндоморфизма φ . При этом для всех $x \in \mathfrak{D}_c \cap \mathfrak{D}_c\varphi$ из условий (11) и (8) следует $x_\alpha = \chi(x_\alpha) = \chi(x_\alpha\varphi) \in J_\varphi$, т.е. $\mathfrak{D}_c \cap \mathfrak{D}_c\varphi \subseteq J_\varphi$. Чтобы показать обратное включение, учтем, что из $x_\alpha\varphi \in \mathfrak{D}\varphi$, условия (9) и леммы 5 вытекает $\chi(x_\alpha\varphi) \subseteq \mathfrak{D}_c \cap \mathfrak{D}_c\varphi$. Следовательно, $J_\varphi \subseteq \mathfrak{D}_c \cap \mathfrak{D}_c\varphi$ и равенство (10) доказано.

Теорема также доказана.

§ 2. Простейшие эндоморфизмы свободных нильполугрупп

I. Пусть $W(\Omega)$ — полугруппа всех частичных преобразований непустого множества Ω , см. [2]. Для произвольного частичного преобразования $\alpha \in W(\Omega)$ определим эндоморфизм $\rho_\alpha \in \mathfrak{E}(\mathfrak{L})$, положив

$$x_\alpha \rho_\alpha = \begin{cases} x_\beta, & \text{если } \alpha a \text{ определено и равно } \beta \\ 0, & \text{если } \alpha a \text{ не определено} \end{cases} \quad (1)$$

(здесь $\alpha, \beta \in \Omega$, $x_\alpha, x_\beta \in \mathfrak{D}_c$, нуль 0 является нулем полугруппы \mathfrak{L}).

Произведение $\alpha\beta$ частичных преобразований $\alpha, \beta \in W(\Omega)$ понимается в обычном смысле ([2], стр. 21).

Лемма I. Справедлива формула

$$\rho_\alpha \rho_\beta = \rho_{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Omega$. Имеются 2 возможности: 1) $\alpha(\alpha\beta)$ определено и равно β ; 2) $\alpha(\alpha\beta)$

не определено. В случае 1) определено $\alpha\alpha$ и равно μ при каком-то $\mu \in \Omega$. Определено также $\mu\beta$ и оно равно β . Отсюда $x_\alpha(\rho_a \rho_b) = x_\mu \rho_b = x_\beta = x_\alpha \rho_a \rho_b$. В случае 2) либо $\alpha\alpha$ не определено и тогда $x_\alpha \rho_a \rho_b = 0 \rho_b = 0 = x_\alpha \rho_a \rho_b$, либо $\alpha\alpha$ определено и равно μ , но $\mu\beta$ не определено. В последнем случае $x_\alpha \rho_a \rho_b = x_\mu \rho_b = 0 = x_\alpha \rho_a \rho_b$. Таким образом, в обоих случаях $x_\alpha \rho_a \rho_b = x_\alpha \rho_a \rho_b$ для всех $\alpha \in \Omega$.

Лемма доказана.

2. Частные случаи. Если $\alpha = e_\Sigma$ (здесь e_Σ - тождественное преобразование подмножества $\Sigma \subseteq \Omega$), то обозначим

$$\rho_\alpha = \rho_{e_\Sigma} = \rho_\Sigma.$$

Легко видеть, что

$$\rho(\Sigma) \rho(\Sigma_1) = \rho(\Sigma \cap \Sigma_1). \quad (3)$$

Действительно, $\rho(\Sigma) \rho(\Sigma_1) = \rho_{e_\Sigma} e_{\Sigma_1} = \rho_{e_\Sigma \cap \Sigma_1} = \rho(\Sigma \cap \Sigma_1)$.

3. Обозначим через $\left(\frac{\Sigma}{\beta}\right)$ частичное преобразование, определенное на подмножестве $\Sigma \subseteq \Omega$ и переводящее его в $\beta \in \Omega$. Если $\Sigma = \alpha$ ($\Sigma = \Omega$), то обозначим

$\rho_{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \left(\rho_{\left(\frac{\Sigma}{\beta}\right)}\right)$ через $\rho(\alpha, \beta)$ ($\nu(\beta)$).

Лемма 2. Для всяких $\alpha, \beta, \mu, \delta \in \Omega$ справедливы формулы

$$\rho(\alpha, \beta) \rho(\mu, \delta) = \begin{cases} \rho(\alpha, \delta), & \text{если } \beta = \mu \\ \theta, & \text{если } \beta \neq \mu, \end{cases} \quad (4)$$

$$\nu(\alpha) \rho(\alpha) = \nu(\alpha), \quad (5)$$

$$\nu(\alpha) \nu(\beta) = \nu(\beta), \quad (6)$$

$$\rho(\alpha, \beta) \nu(\mu) = \rho(\alpha, \mu). \quad (7)$$

Доказательство. Соотношения (4) - (7) докажем по порядку. Сделаем это сперва для формулы (4). Допустим, что

$$\beta = \mu. \quad \text{Тогда}$$

$$x_\lambda \rho(\alpha, \beta) \rho(\mu, \delta) = \begin{cases} x_\beta \rho(\mu, \delta), & \lambda = \alpha \\ 0, & \lambda \neq \alpha \end{cases} = \begin{cases} x_\delta, & \lambda = \alpha \\ 0, & \lambda \neq \alpha \end{cases} = x_\lambda \rho(\alpha, \delta).$$

Далее пусть $\beta \neq \mu$. Тогда

$$x_\lambda \rho(\alpha, \beta) \rho(\mu, \delta) = \begin{cases} x_\beta \rho(\mu, \delta), & \lambda = \alpha \\ 0, & \lambda \neq \alpha \end{cases} = 0 = x_\lambda \theta.$$

Этим соотношение (4) доказано.

Формулы (5) и (6) очевидны, поскольку для всех $\lambda \in \Omega$ выполнено $x_\lambda \vee (\alpha) \rho(\alpha) = x_\alpha = x_\lambda \vee (\alpha)$ и соответственно $x_\lambda \vee (\beta) = x_\beta = x_\alpha \vee (\beta) = x_\lambda \vee (\alpha) \vee (\beta)$. Наконец, чтобы проверить (7), заметим, что $x_\lambda \rho(\alpha, \beta) \vee (\mu) = 0 = x_\lambda \rho(\alpha, \mu)$ при $\lambda \neq \alpha$ и $x_\alpha \rho(\alpha, \beta) \vee (\mu) = x_\beta \vee (\mu) = x_\mu = x_\alpha \rho(\alpha, \mu)$. Отсюда, очевидно, следует справедливость (7).

Лемма доказана.

В силу леммы 2 полугруппа $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ обладает подполугруппой $\{\rho(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Omega\} \cup \theta$ матричных единиц. Эта полугруппа хорошо известна в теории полугрупп (см., например, [16]).

Сределение 3. Ненулевой идемпотент $\rho \in S$ называется ортом, если для всякого $f = f^2 \in S$ удовлетворяется условие

$$\rho f = \rho \vee f \rho = 0. \quad (8)$$

Через $\mathcal{P} = \mathcal{P}(S)$ обозначим множество всех ортов полугруппы S .

4. Обозначим $\rho(\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \Omega$, через $\rho(\alpha)$. Из п. 3 следует, что

$$\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\lambda \\ x_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Omega \setminus \alpha. \quad (9)$$

Очевидно, что $x_\lambda \rho^2(\alpha) = x_\lambda \rho(\alpha)$ для всех $\lambda \in \Omega$. Следовательно, $\rho(\alpha)$ — идемпотент в $\mathcal{B}(\mathcal{D})$.

Лемма 3. Всякий орт полугруппы $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ есть $\rho(\alpha)$ при некотором $\alpha \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\rho \in \mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{D}))$. Так как $\rho = \rho^2 \neq \theta$ (по определению 3), то $\mathcal{I}_\rho \neq \emptyset$ в силу леммы 1.8. Допустим, что $x_\alpha \in \mathcal{I}_\rho$ при некотором $\alpha \in \Omega$. Из (1.11) имеем $x_\alpha \rho = x_\alpha$. Отсюда для всех $\lambda \in \Omega \setminus \alpha$ получим $x_\alpha \rho \rho(\lambda) = x_\alpha \rho(\lambda) = 0 \neq x_\alpha = x_\alpha \rho$, т.е. $\rho \rho(\lambda) \neq \rho$. Из условия (8) следует $\rho(\lambda) \rho = \theta$ и, значит, $x_\lambda \rho = x_\lambda \rho(\lambda) \rho = x_\lambda \theta = 0$ для всех $\lambda \in \Omega \setminus \alpha$. Следовательно, $\rho = \rho(\alpha)$ в силу (9).

Лемма доказана.

Лемма 4. Справедливы следующие предложения:

1) пусть $a \notin \langle x_\alpha \rangle$. Тогда $a \rho(\alpha) = 0$;

2) для всяких $\alpha, \mu \in \Omega$ выполнено $\delta(\mathfrak{X})\rho(\alpha) = \delta(\mathfrak{X})\rho(\mu, \alpha)$;

3) тогда и только тогда $\psi \in \delta(\mathfrak{X})\rho(\alpha)$, когда $x_\lambda \psi \in \langle x_\alpha \rangle$ при каждом $\lambda \in \Omega$.

Доказательство. 1) Так как $\alpha \neq x_\alpha$ ни при одном $m = 1, \dots, k$, то $\alpha = u \cdot v$ для подходящих $u, v \in \mathfrak{X} \cup \emptyset$ и $\lambda \neq \alpha$. Отсюда

$$\alpha \rho(\alpha) = (u x_\lambda v) \rho(\alpha) = u \rho(\alpha) x_\lambda \rho(\alpha) v \rho(\alpha) = 0$$

ввиду (9). Итак, 1) доказано.

2) Так как $\delta(\mathfrak{X})\rho(\mu, \alpha) = \delta(\mathfrak{X})\rho(\mu, x) \rho(\alpha) \subseteq \delta(\mathfrak{X})\rho(\alpha)$ и, в свою очередь, $\delta(\mathfrak{X})\rho(\alpha) = \delta(\mathfrak{X})\rho(\alpha, \mu) \rho(\mu, \alpha) \subseteq \delta(\mathfrak{X})\rho(\mu, \alpha)$, то 2) доказано.

3) Сначала пусть $\psi \in \delta(\mathfrak{X})\rho(\alpha)$. Тогда $\psi = \psi \rho(\alpha)$ при некотором $\psi \in \delta(\mathfrak{X})$. Отсюда $\psi \rho(\alpha) = \psi \rho^2(\alpha) = \psi \rho(\alpha) = \psi$. Так как $J_{\rho(\alpha)} = x_\alpha$ в силу (9) и (1.10), то

$$x_\lambda \psi = x_\lambda \psi \rho(\alpha) \in \mathfrak{X} \rho(\alpha) = \langle \mathfrak{X} \cap \mathfrak{X} \cup \rho(\alpha) \rangle = \langle x_\alpha \rangle$$

при каждом $\lambda \in \Omega$. Напротив, пусть $x_\lambda \psi \in \langle x_\alpha \rangle$ для любого $\lambda \in \Omega$. Тогда $x_\lambda \psi = x_\alpha^{m_\lambda}$ для подходящего $m_\lambda = 1, \dots, k$, и

$$x_\alpha^{m_\lambda} \rho(\alpha) = [x_\alpha \rho(\alpha)]^{m_\lambda} = x_\alpha^{m_\lambda},$$

т.е. $x_\lambda \psi = (x_\lambda \psi) \rho(\alpha)$ для всякого $\lambda \in \Omega$. Отсюда $\psi = \psi \rho(\alpha) \in \delta(\mathfrak{X})\rho(\alpha)$. Утверждение 3) и лемма доказаны.

Лемма 5. При всяком $\alpha \in \Omega$ эндоморфизм $\rho(\alpha)$ является ортом полугруппы $\delta(\mathfrak{X})$

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $\rho(\alpha) \notin \mathcal{P}(\delta(\mathfrak{X}))$ для некоторого $\alpha \in \Omega$. Тогда найдется такое $\theta \neq \psi = \psi^2 \in \delta(\mathfrak{X})$, что $\rho(\alpha)\psi \neq \rho(\alpha)$ и $\psi \rho(\alpha) \neq \theta$. Пусть $x_\lambda \psi \rho(\alpha) \neq 0$ для подходящего $\lambda \in \Omega$. Ясно, что $x_\lambda \psi \neq 0$. Более того, из 1) леммы 4 следует, что $x_\lambda \psi \in \langle x_\alpha \rangle$, т.е. $x(x_\lambda \psi) = x_\alpha$. Отсюда, из $x_\lambda \psi \in \mathfrak{X} \psi = \langle J_\psi \rangle$ и из леммы 1.5 получим $x_\lambda \in J_\psi$, т.е. $x_\lambda \psi = x_\alpha$. При этом из $x_\lambda \rho(\alpha) = x_\alpha = x_\alpha \rho(\alpha) \psi$ и $x_\omega \rho(\alpha) = 0 = x_\omega \psi(\alpha) \psi$ для $\omega \in \Omega \setminus \alpha$ вытекает $\rho(\alpha) = \rho(\alpha) \psi$, вопреки

предположению.

Полученное противоречие завершает доказательство.

Лемма 6. В полугруппе $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ выполнены следующие условия:

- 1) множества $\mathcal{P}(\mathcal{E}(\mathcal{A}))$ и $\{\varphi(\alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ - совпадают.
- 2) эндоморфизмы, равнодействующие на множестве всех ортов полугруппы $\mathcal{E}(\mathcal{A})$, - совпадают.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно ввиду лемм 3 и 5. Пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(\mathcal{A})$ и $\varphi(\alpha)\psi = \varphi(\alpha)\psi$ для всех $\alpha \in \Omega$. Тогда $x_\alpha \psi = x_\alpha \varphi(\alpha)\psi = x_\alpha \psi$. Отсюда $\psi = \varphi$, ибо эти эндоморфизмы действуют одинаково на множестве образующих полугруппы \mathcal{E} .

Лемма доказана.

Лемма 7. Пусть $V = \{\varepsilon(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Omega\} \cup \theta$ - подполугруппа полугруппы $\mathcal{E}(\mathcal{A})$, в которой

- 1) для каждого $\alpha \in \Omega$ отображение $\varepsilon(\alpha, \alpha)$ есть орт $\varphi(\alpha)$ полугруппы $\mathcal{E}(\mathcal{A})$;
- 2) умножение элементов подчиняется правилу

$$\varepsilon(\alpha, \beta) \varepsilon(\gamma, \delta) = \begin{cases} \varepsilon(\alpha, \delta), & \text{если } \beta = \gamma, \\ \theta, & \text{если } \beta \neq \gamma. \end{cases} \quad (10)$$

Тогда $\varepsilon(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ для любых $\alpha, \beta \in \Omega$. (Другими словами, полугруппа $\mathcal{E}(\mathcal{A})$ содержит в точности одну подполугруппу матричных единиц, множество идемпотентов которой совпадает с совокупностью всех ортов полугруппы $\mathcal{E}(\mathcal{A})$).

Доказательство. Мы хотим показать, что для всех $\alpha, \beta \in \Omega$

$$\varepsilon(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta \\ x_\beta & 0 \end{pmatrix} = \varphi(\alpha, \beta) \quad (\lambda \in \Omega \setminus \alpha). \quad (11)$$

Так как $\varepsilon(\alpha, \beta) = \varepsilon(\alpha, \beta)\varphi(\beta) \in \mathcal{E}(\mathcal{E})\varphi(\beta)$, то из 2), 3) леммы 4 имеем $x_\alpha \varepsilon(\alpha, \beta) \in \langle x_\beta \rangle$, т.е.

$x_\alpha \varepsilon(\alpha, \beta) = x_\beta^m$ при некотором $m = 1, \dots, k$.

Аналогично $x_\beta \varepsilon(\beta, \alpha) = x_\alpha^n$ для подходящего

$n = 1, \dots, k$. Следовательно,

$$x_\alpha = x_\alpha \varphi(\alpha) = x_\alpha \varepsilon(\alpha, \beta) \varepsilon(\beta, \alpha) = x_\beta^m \varepsilon(\beta, \alpha) = x_\alpha^{nm}$$

Отсюда, из $x_\alpha \neq 0$ и леммы 1.2 вытекает $n = 1 = m$.

Учитывая (9), (10), получим

$$x_\lambda \varepsilon(\lambda, \beta) = x_\lambda \varphi(\lambda) \varepsilon(\lambda, \beta) = \begin{cases} x_\lambda \varepsilon(\lambda, \beta), & \lambda = \alpha = \beta, \\ \theta, & \lambda \neq \alpha, \end{cases} \quad (12)$$

Таким образом, равенство (11) и лемма доказаны.

5. Введем обозначения. Полагаем

$$\rho(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\lambda \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Omega \setminus \alpha, \quad (13)$$

$$U_\alpha = \{ \rho(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathcal{D} \}. \quad (14)$$

Лемма 8. 1) Для всяких $\varphi, \psi \in U_\alpha$ справедливо условие

$$\varphi = \psi \iff x_\alpha \varphi = x_\alpha \psi. \quad (15)$$

2) Для всех $\alpha \in \mathcal{D}$, $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ выполнено

$$\rho(\alpha, \alpha) \psi = \rho(\alpha, \alpha \psi). \quad (16)$$

3) Удовлетворяется соотношение

$$U_\alpha = \rho(\alpha) \mathcal{L}(\mathcal{D}). \quad (17)$$

Доказательство. 1) Пусть $\varphi, \psi \in U_\alpha$. Очевидно, $x_\alpha \varphi = x_\alpha \psi$, если $\varphi = \psi$. Напротив, пусть $x_\alpha \varphi = x_\alpha \psi$, $\alpha \in \Omega$. Тогда ввиду $x_\lambda \varphi \stackrel{(13)}{=} 0 = x_\lambda \psi$ при $\lambda \notin \Omega \setminus \alpha$ имеем $x\varphi = x\psi$ для всех $x \in \mathcal{D}_0$. Отсюда $\varphi = \psi$, и (15) доказано.

2) Действительно, по определению (13) имеем

$$\rho(\alpha, \alpha) \psi = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\lambda \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \psi = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\lambda \\ \alpha \psi & 0 \end{pmatrix} = \rho(\alpha, \alpha \psi),$$

что и требовалось показать.

3) Так как $\rho(\alpha) = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\lambda \\ x_\alpha & 0 \end{pmatrix} = \rho(\alpha, x_\alpha)$, то при всяком $\psi \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ имеем $\rho(\alpha) \psi = \rho(\alpha, x_\alpha \psi) \in U_\alpha$, т.е. $\rho(\alpha) \mathcal{L}(\mathcal{D}) \subseteq U_\alpha$. Напротив, пусть $\varphi \in U_\alpha$. Тогда $\varphi = \rho(\alpha, \alpha)$ при некотором $\alpha \in \mathcal{D}$. Отсюда поскольку

$$\varphi = \rho(\alpha, \alpha) = \rho(\alpha, x_\alpha \varphi) = \rho(\alpha, x_\alpha) \varphi = \rho(\alpha) \varphi, \quad (18)$$

то $U_\alpha \subseteq \rho(\alpha) \mathcal{L}(\mathcal{D})$. Этим условие (17) и лемма доказаны.

6. Обозначим для дальнейшего подмножество

$\rho(\alpha) \mathcal{L}(\mathcal{D}) \rho(\alpha)$ через G_α . Очевидно, G_α — подполугруппа.

Лемма 9. При всяком $\alpha \in \Omega$ подполугруппа G_α состоит из k различных эндоморфизмов, имеющих вид

$$\varphi_m = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\lambda \\ x_\alpha^m & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Omega \setminus \alpha, \quad m = 1, \dots, k. \quad (19)$$

Доказательство. Фиксируем некоторое $\alpha \in \Omega$. В силу леммы 1.2 элементы $x_\alpha^m, x_\alpha^{\tilde{m}}$ при $m < n < k$ различны (ибо один из них делитель другого). Тогда различ-

ными же в силу $\varphi_m, \varphi_n \in U_\alpha$ и (15) будут эндоморфизмы $\varphi(\alpha, x_\alpha^m) = \varphi_m$ и $\varphi(\alpha, x_\alpha^n) = \varphi_n$ при тех же m и n . Далее заметим, что $G_\alpha = \varphi(\alpha) \mathcal{E}(\mathcal{B}) \cap \bigcap \varphi(\alpha)$. Отсюда, из условия (17) и леммы 4 следует, что G_α исчерпывается эндоморфизмами вида $\varphi(\alpha, \alpha)$, где $\alpha \in \langle x_\alpha \rangle$. То-есть, $\{\varphi_m \mid m = 1, \dots, k\} \supseteq G_\alpha$. С другой стороны, поскольку \mathcal{B} свободна в себе, то для всякого $m = 1, 2, \dots, k$ отображение $\varphi = \varphi(\alpha, x_\alpha^m) \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$. При этом из (14) и утверждения 3) леммы 4 получим $\varphi = U_\alpha \cap \mathcal{E}(\mathcal{B}) \varphi(\alpha) = G_\alpha$. Следовательно,

$$G_\alpha = \{\varphi_m \mid m = 1, \dots, k\}. \quad (20)$$

Лемма доказана.

Определение 4. Идемпотент $f \in S$ называется проектором, если для всякого орта $\rho \in \mathcal{P}$ выполнено

$$\rho f = \rho \vee \rho f = 0. \quad (21)$$

Например, правая единица (единица) полугруппы S (если такая имеется) является проектором.

Через $\mathcal{F} = \mathcal{F}(S)$ обозначим множество всех проекторов из S .

Лемма 10. Для всякой полугруппы S удовлетворяется условие

$$\mathcal{P}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{F}(S). \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $\rho, q \in \mathcal{P}(S)$ и $\rho q \neq \rho$. Тогда $q\rho = 0$ ввиду (8). Отсюда, из $q \neq 0$ и снова ввиду условия (8) получим $\rho q = 0$. Таким образом, для всех $\rho \in \mathcal{P}(S)$ либо $\rho q = \rho$, либо $\rho q = 0$, т.е. q - проектор по определению 4. Этим лемма доказана.

7. Пусть $\mathcal{P}(S) = \{\rho(\alpha) \mid \alpha \in \Omega\} \neq \emptyset$ (Ω - некоторое непустое индексное множество, причем $\rho(\alpha) \neq \rho(\beta)$, если $\alpha \neq \beta$).

Для всякого $f \in \mathcal{F}(S)$ обозначим

$$\Lambda_f = \{\lambda \mid \lambda \in \Omega, \rho(\lambda)f = \rho(\lambda)\}. \quad (23)$$

В дальнейшем для ортов полугруппы $\mathcal{E}(\mathcal{B})$ используется индексирование, связанное с индексацией образующих полугруппы \mathcal{B} .

8. Напомним, что в согласии с обозначениями, принятыми в п.2, имеет место следующая формула

$$\rho_{\mathcal{E}\Sigma} = \varphi(\Sigma) = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\lambda \\ x_\alpha & c \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \Sigma, \lambda \in \Omega \setminus \Sigma. \quad (24)$$

Лемма 11. Для всякого $\Sigma \in \Omega$ элемент $\rho(\Sigma)$ является проектором и, наоборот, всякий проектор $\pi \in \mathfrak{b}(\mathfrak{L})$ имеет вид $\rho(\Sigma)$ при $\Sigma = \Lambda_\pi \in \Omega$.

Доказательство. Пусть $\Sigma \in \Omega$ и $\alpha \in \Sigma$. Тогда из (3) и (24) имеем $\rho(\alpha)\rho(\Sigma) = \rho(\alpha \cap \Sigma) = \rho(\alpha)$. Если же $\alpha \notin \Sigma$, то $\rho(\alpha)\rho(\Sigma) = \rho(\alpha \cap \Sigma) = \theta$. Следовательно, $\rho(\Sigma) \in \mathcal{F}(\mathfrak{b}(\mathfrak{L}))$ в силу (24). Напротив, пусть π - некоторый проектор. Тогда из $\rho(\alpha)\pi = \rho(\alpha)$ следует $\alpha \in \Lambda_\pi$ и в этом случае по доказанному $\rho(\alpha)\rho(\Lambda_\pi) = \rho(\alpha)$. Если же $\rho(\alpha)\pi \neq \rho(\alpha)$, то $\rho(\alpha)\pi = \theta$ в силу (21). При этом $\alpha \notin \Lambda_\pi$ и $\rho(\alpha)\rho(\Lambda_\pi) = \theta$. Таким образом, π и $\rho(\Lambda_\pi)$ совпадают на множестве $\mathcal{P}(\mathfrak{b}(\mathfrak{L}))$ и, следовательно, совпадают по лемме 6.

Лемма доказана.

Следствие 2. Множества $\mathcal{F}(\mathfrak{b}(\mathfrak{L}))$ и $\{\rho(\Sigma) \mid \Sigma \in \Omega\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_\rho$ совпадают.

Определение 5. Идемпотент a_3 называется минимальной правой единицей элемента $a \in S$, если $aa_3 = a$ и для всякого $y = y^2 \in S$ удовлетворяется условие

$$ay = a \implies a_3y = a_3.$$

9. Пусть $\psi \in \mathfrak{b}(\mathfrak{L})$. Обозначим

$$\rho_\psi = \begin{pmatrix} x_\alpha & x_\lambda \\ x_\alpha & c \end{pmatrix}, \quad x_\alpha \in \mathcal{J}_\psi, \quad x_\lambda \in \mathfrak{L} \setminus \mathcal{J}_\psi. \quad (25)$$

Из леммы 11 следует, что ρ_ψ - проектор в полугруппе $\mathfrak{b}(\mathfrak{L})$.

Теорема 1. Проектор ρ_ψ есть единственный в множестве $\mathcal{F}(\mathfrak{b}(\mathfrak{L}))$ элемент, являющийся минимальной правой единицей элемента $\psi \in \mathfrak{b}(\mathfrak{L})$. Для проектора минимальная правая единица, являющаяся проектором, совпадает с ним самим.

Доказательство. Второе предложение - очевидно. Действительно, пусть π - проектор и π' - его минимальная правая единица (являющаяся проектором). Тогда ясно, что $\pi\pi' = \pi$. Далее, поскольку $\pi^2 = \pi$, то $\pi'\pi = \pi'$ ввиду определения 5. Наконец, ввиду абелевости \mathcal{F}_π (см. формулу (3)) получим $\pi = \pi'$. Докажем теперь первое утверждение.

Если $\psi = \theta$, то $a_\psi = \theta$ ввиду (24), и других минимальных правых единиц θ не имеет. С другой стороны,

из (25) и (22) имеем $\rho_\theta = \rho(\varphi) = \theta$. Следовательно, для $\varphi = \theta$ утверждение теоремы справедливо.

Пусть $\varphi \neq \theta$. Покажем, что проектор ρ_φ является 1) правой, 2) минимальной, 3) единственной с условиями 1), 2) единицей элемента φ .

Обозначим Λ_{ρ_φ} через Σ . Из (24) и (25) следует, очевидно, что $\rho(\Sigma) = \rho_\varphi$. Свойство 1)-3) докажем по порядку.

1) Из (25) и (1.8) следует $J_{\rho(\Sigma)} = J_\varphi$. Следовательно, буквы произвольной записи элемента $x_\alpha \varphi \neq \theta$ в алфавите \mathfrak{B} , являются неподвижными точками преобразования $\rho(\Sigma)$. Отсюда $x_\alpha \varphi = (x_\alpha \varphi) \rho(\Sigma)$, $\alpha \in \Omega$, и, значит $\varphi = \varphi \rho(\Sigma)$. Таким образом, $\rho(\Sigma)$ - правая единица φ .

Пусть $\eta = \eta^2$ - некоторая правая единица для φ . Так как $x_\alpha \varphi = x_\alpha (\varphi \eta) \in \mathfrak{B}\eta = \langle J_\eta \rangle$, то $X(x_\alpha \varphi) \subseteq J_\eta$ в силу леммы 1.5. Следовательно, $J_{\rho(\Sigma)} = J_\varphi = \bigcup_{\alpha} X(x_\alpha \varphi) \subseteq J_\eta$. Отсюда $x_\lambda \rho(\Sigma) \eta = \begin{cases} x_\lambda, & \lambda \in \Sigma \\ 0, & \lambda \notin \Sigma \end{cases} = \begin{cases} x_\lambda, & \lambda \in \Sigma \\ 0, & \lambda \notin \Sigma \end{cases} = x_\lambda \rho(\Sigma)$,

т.е. $\rho(\Sigma) \eta = \rho(\Sigma)$ и, значит, $\rho(\Sigma)$ - минимальная правая единица элемента φ ввиду определения 5.

3) Пусть $\rho(\Sigma^*)$ - проектор, являющийся, как и $\rho(\Sigma)$, минимальной правой единицей элемента φ . Тогда из определения 5 имеем

$$\rho(\Sigma^*) = \rho(\Sigma^*) \rho(\Sigma) = \rho(\Sigma^* \cap \Sigma) = \rho(\Sigma) \rho(\Sigma^*) = \rho(\Sigma).$$

Лемма доказана.

Определение 6. Говорят, что полугруппа S удовлетворяет условию I, если

1) полугруппа S обладает непустым множеством ортов $P(S) = \{\rho(\alpha) \mid \alpha \in \Omega\}$ (Ω - некоторое индексное множество).

2) каждый элемент $s \in S$ имеет в точности одну минимальную правую единицу, являющуюся проектором (который условимся обозначать символом f_s).

Из леммы 3 и теоремы 1 следует, что, например, полугруппа $\mathfrak{S}(\mathfrak{B})$ удовлетворяет условию I.

Пусть полугруппа S удовлетворяет условию I. Для всякого $s \in S$ обозначим -137-

$$\Lambda_S = \Lambda_{\mathcal{F}_S}. \quad (26)$$

В силу свойства 2), которым S обладает, множество Λ_S элементом \mathcal{J} однозначно определено. Важность этого множества объясняется тем, что при изоморфизме $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^*$ полугруппы S на какую-то полугруппу S^* , множество Λ_S отображается взаимно однозначно на множество Λ_{S^*} (см. ниже лемму 4.5).

Лемма 12. Для всякого $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{R})$ выполнено

$$\Lambda_\varphi = \{ \lambda \mid \lambda \in \Omega, x_\lambda \in \mathcal{J}_\varphi \}. \quad (27)$$

Доказательство. Пусть $x_\lambda \in \mathcal{J}_\varphi$. Тогда из (9) и (25) получим

$$\rho(\lambda) \rho_\varphi = \rho(\lambda, x_\lambda) \rho_\varphi = \rho(\lambda, x_\lambda \rho_\varphi) = \rho(\lambda, x_\lambda) = \rho(\lambda).$$

Отсюда и из (25) следует $\lambda \in \Lambda_{\rho_\varphi} = \Lambda_\varphi$. Если же $x_\lambda \notin \mathcal{J}_\varphi$, то $x_\lambda \rho_\varphi = 0$ ввиду (25), и в этом случае $\rho(\lambda) \rho_\varphi = \theta$, т.е. $\lambda \notin \Lambda_{\rho_\varphi} = \Lambda_\varphi$.

Следовательно, (27) и лемма доказаны.

Лемма 13. Пусть $\theta \neq \varphi = \rho(\alpha, a) \in \mathcal{U}_\alpha$. Тогда

$$\Lambda_{\rho(\alpha, a)} = \{ \lambda \mid x_\lambda \in \mathcal{X}(\alpha) \} \quad (28)$$

$$\mathcal{X}(\alpha) = \{ x_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_{\rho(\alpha, a)} \}. \quad (29)$$

Доказательство. Так как $x_\lambda \varphi = x_\lambda \rho(\alpha, a) = 0$ для $\lambda \neq \alpha$ и $\mathcal{X}(0) = \emptyset$, то из условия (I.8) получим

$$\mathcal{J}_\varphi = \mathcal{J}_{\rho(\alpha, a)} = \mathcal{X}(x_\alpha \rho(\alpha, a)) = \mathcal{X}(\alpha).$$

Отсюда ввиду (27) имеем $\Lambda_\varphi = \{ \lambda \mid x_\lambda \in \mathcal{X}(\alpha) \}$, чем равенство (28) доказано. В свою очередь, из (28), очевидно, вытекает (29).

Лемма доказана.

§ 3. Нормирование полугруппы $\mathcal{E}(\mathcal{R})$ при помощи упорядоченной полугруппы K .

Определение 7 ([27], стр. 209). Полугруппа S называется линейно-упорядоченной (л.у.), если удовлетворяются условия:

1. на S задано рефлексивное, транзитивное и антисимметричное отношение \leq ,

2. для всяких $a, b \in S$ либо $a \leq b$, либо $b \leq a$,

3. в S выполнено условие монотонности: из $a \leq b$

следует $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$ для всех $c \in S$.

В этом случае будем говорить, что отношение \leq является линейным порядком в S .

1. Пусть $K = \{1, 2, \dots, k\}$ — отрезок множества натуральных чисел. Определим для всяких $m, n \in K$ их произведение формулой

$$m \circ n = \begin{cases} mn, & \text{если } mn \leq k \\ k, & \text{если } mn > k. \end{cases} \quad (1)$$

Ассоциативность и коммутативность умножения в (1) — очевидны.

Условимся, что линейный порядок на K совпадает с обычным порядком чисел $1, 2, \dots, k$. Указанное упорядочение является монотонным. Действительно, пусть $m, n, p \in K$ и $m < n$. Тогда из (1) следует, что $p \circ m = m \circ p < n \circ p = p \circ n$, если $np \leq k$, и $p \circ m = m \circ p \leq n \circ p = p \circ n$, если $np > k$. Следовательно, K — есть л.у. полугруппа.

Определение 8. Говорят,³ (см. [26]), что полугруппа $S (\geq 0)$ нормирована при помощи упорядоченной полугруппы K , если всякому элементу $s \in S$ поставлен в соответствие элемент $N(s) \in K$, причем удовлетворяются условия:

$A_1.$ $N(s) \leq N(0)$ для всех $s \in S$.

$A_2.$ $N(st) \leq N(s)N(t)$ для любых $s, t \in S$.

$A_3.$ Для всякого $n \in K$ существует $s \in S$ такое, что $N(s) = n$. Если условия определения 8 выполнены, то говорят, что на полугруппе S задана норма N .

2. Зададим на полугруппе $\mathfrak{B}(\mathfrak{B})$ функцию N_α , положив для всякого $\varphi \in \mathfrak{B}(\mathfrak{B})$

$$N_\alpha(\varphi) = \begin{cases} m, & \text{если } x_\alpha \varphi = x_\alpha^m, m = 1, \dots, k \\ k, & \text{если } x_\alpha \varphi \notin \langle x_\alpha \rangle. \end{cases} \quad (2)$$

Лемма 1. Функция $N_\alpha, \alpha \in \Omega$, заданная на полугруппе $\mathfrak{B}(\mathfrak{B})$ условием (2), является нормой.

Доказательство. Аксиома A_1 справедлива, поскольку k — наибольший элемент полугруппы K и $N_\alpha(\theta) = k$ ввиду $x_\alpha \theta = 0 = x_\alpha^k$. Аксиома A_3 также выполнена ввиду того, что \mathfrak{B} — свободная полугруппа подходящего многообразия, и, следовательно, при каждом $m \geq 1$ отобра-

³ На возможность использовать норму в работе указал Я.Хион.

жение $x_\alpha \rightarrow x_\alpha^m$, $x_\alpha \in \mathfrak{D}_0$, можно продолжить до эндоморфизма φ_m полугруппы \mathfrak{D} . Тогда $N_\alpha(\varphi_m) = m$. Покажем, что аксиома A_2 выполнена. Пусть $\varphi, \psi \in \mathfrak{E}(\mathfrak{D})$ и пусть сначала $x_\alpha \varphi, x_\alpha \psi$ являются степенями x_α , т.е. $x_\alpha \varphi = x_\alpha^m$, $x_\alpha \psi = x_\alpha^n$ при некоторых $m, n \leq k$. Тогда $x_\alpha \varphi \psi = x_\alpha^{m \cdot n} \varphi = (x_\alpha \varphi)^m = x_\alpha^{nm}$. Следовательно,

$$N_\alpha(\varphi \psi) = \begin{cases} mn, & \text{если } mn \leq k \\ k, & \text{если } mn \geq k \end{cases} \stackrel{(1)}{=} m \circ n = N_\alpha(\varphi) \circ N_\alpha(\psi) \quad (3)$$

Пусть теперь $x_\alpha \varphi$ или $x_\alpha \psi$ (или оба они) не являются степенями x_α . Тогда, по крайней мере, одно из $N_\alpha(\varphi)$ или $N_\alpha(\psi)$ равно k ввиду (2). При этом $N_\alpha(\varphi) \circ N_\alpha(\psi) \geq N_\alpha(\varphi \psi)$, поскольку $N_\alpha(\varphi) \circ N_\alpha(\psi) = k$. Таким образом, $N_\alpha(\varphi \psi) \leq N_\alpha(\varphi) \circ N_\alpha(\psi)$, и лемма доказана.

В дальнейшем для нормирования полугрупп эндоморфизмов свободных в себе нильполугрупп будут использоваться упорядоченные полугруппы вида $K = (1, 2, \dots, k; \circ)$ и только такого вида.

Определение 9. Норма N_α , $\alpha \in \Omega$, определенная равенством (2) на полугруппе $\mathfrak{E}(\mathfrak{D})$ при помощи упорядоченной полугруппы K , называется α -канонической.

Определение 10. Нормирование N полугруппы S при помощи некоторой полугруппы K называется ρ -правильным, где $\rho \in \mathcal{P}(S)$, если N - изоморфизм $\rho S \rho$ на K .

Лемма 2. Пусть, как и прежде, N_α , $\alpha \in \Omega$, есть α -каноническая норма на полугруппе $\mathfrak{E}(\mathfrak{D})$. Тогда N_α является $\rho(\alpha)$ -правильной нормой.

Доказательство. Отметим, прежде всего, что N_α отображает $G_\alpha (= \rho(\alpha) \mathfrak{E}(\mathfrak{D}) \rho(\alpha))$ на K . Действительно, для всякого $n \in K$ из $\varphi = \varphi_n \in G_\alpha$ (см. (2.18)) и (1) следует $N_\alpha(\varphi) = n$. Пусть, далее, $m, n \in K$. Тогда ввиду (1), как при $mn \leq k$, так и при

$$mn \geq k, \text{ имеем } x_\alpha^{mn} = x_\alpha^{m \circ n}.$$

Отсюда $x_\alpha \varphi_m \varphi_n = x_\alpha^m \varphi_n = x_\alpha^{n \cdot m} = x_\alpha^{m \circ n}$, и, $N_\alpha(\varphi_m \varphi_n) = m \circ n = N_\alpha(\varphi_m) \circ N_\alpha(\varphi_n)$. Следовательно, N_α - гомоморфное отображение. Пусть $\varphi_m \neq \varphi_n$. Очевидно, что тогда $m \neq n$. При этом $N_\alpha(\varphi_m) = m \neq n = N_\alpha(\varphi_n)$, значит, N_α есть изоморфизм подполу-

группы G_α на K .

Лемма доказана.

Определение 11. Норма N на полугруппе S называется ρ -согласованной, $\rho \in \rho(S)$, если для всех $s \in S$ выполнено

$$N(s) = N(\rho s) = N(s\rho). \quad (4)$$

Лемма 3. При всяком $\alpha \in \rho$ норма N_α является $\rho(\alpha)$ -согласованной.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Omega$. Из (29) имеем $x_\alpha \varphi = x_\alpha \rho(\alpha) \varphi$. Отсюда $N_\alpha(\varphi) = N_\alpha(\rho(\alpha) \varphi)$ ввиду (2). Покажем, что $N_\alpha(\varphi) = N_\alpha(\varphi \rho(\alpha))$. Если $x_\alpha \varphi \in \langle x_\alpha \rangle$, то, очевидно, $(x_\alpha \varphi) \rho(\alpha) = x_\alpha \varphi$, и в этом случае $N_\alpha(\varphi) = N_\alpha(\varphi \rho(\alpha))$. Допустим, что $x_\alpha \varphi \notin \langle x_\alpha \rangle$. Тогда $x_\alpha \varphi \neq 0$ и $(x_\alpha \varphi) \rho(\alpha) = 0$ по лемме 2.4. Отсюда $N(\varphi \rho(\alpha)) = k$. Но также $N_\alpha(\varphi) = k$ ввиду $x_\alpha \varphi \neq x_\alpha^m$ ни при одном $m = 1, 2, \dots, k$. Следовательно, лемма доказана.

Лемма 4. Пусть норма N на полугруппе $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ является $\rho(\alpha)$ -правильной и $\rho(\alpha)$ -согласованной. Тогда

$$N[\rho(\alpha)] = 1. \quad (5)$$

Доказательство. Так как $\rho(\alpha) \in G_\alpha$ и N действует гомоморфно на G_α (ибо N — изоморфизм G_α на K), то $N[\rho(\alpha)] = N[\rho^2(\alpha)] = N^2[\rho(\alpha)]$. Следовательно, $N[\rho(\alpha)]$ — идемпотент полугруппы K . Отсюда либо $N[\rho(\alpha)] = 1$, либо $N[\rho(\alpha)] = k$. Допустим, что $N[\rho(\alpha)] = k$. Тогда для всех $\varphi \in G_\alpha$ из $\varphi = \rho(\alpha)\varphi$, условий (4) и (1) имеем $N(\varphi) = N[\rho(\alpha)\varphi] = N[\rho(\alpha)]N(\varphi) = k \circ N(\varphi) = k$, т.е. G_α — одноэлементная полугруппа. Но тогда из $\rho(\alpha)$, $\rho \in G_\alpha$ имеем $\rho(\alpha) = \rho$, что невозможно, поскольку $x_\alpha \rho(\alpha) = x_\alpha \neq 0$. Остается признать, что $N[\rho(\alpha)] = 1$.

Лемма доказана.

Определение 12. Полугруппа S называется ϵ -полугруппой, если выполнены условия:

1. S удовлетворяет условию I,

2. S содержит единственную подполугруппу

$\{e_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \Omega} \cup 0$ матричных единиц (Ω — некоторое непустое индексное множество), совокупность всех идемпотентов кото-

рой совпадает с множеством всех ортов полугруппы S .

Из лемм 2.7 и 2.11 следует, что $\mathfrak{b}(\mathfrak{B})$ является e -полугруппой.

Пусть S есть e -полугруппа. Для всякого $\alpha \in \Omega$ обозначим

$$e_{\alpha\alpha} = p(\alpha).$$

Определение 13. Норма N на e -полугруппе S называется $p(\alpha)$ -монотонной, если для всяких $\beta, \mu \in \Omega$, $s, t \in S$ из условий

$$e_{\alpha\beta} s t e_{\mu\alpha} \neq 0, |\Lambda_{p(\beta)s}| \geq 2, \delta \in \Lambda_{p(\beta)s} \quad (7)$$

следует

$$N(e_{\alpha\beta} s t e_{\mu\alpha}) > N(e_{\alpha\delta} t e_{\mu\alpha}). \quad (8)$$

Лемма 5. Норма N_α , $\alpha \in \Omega$, является $p(\alpha)$ -монотонной.

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi \in \mathfrak{b}(\mathfrak{B})$, $\alpha, \beta, \mu \in \Omega$ и для $s = \varphi$, $t = \psi$, $e_{\alpha\beta} = p(\alpha, \beta)$, $e_{\mu\alpha} = p(\mu, \alpha)$, $p(\beta) = p(\beta)$ условие (7) выполнено, т.е.

$$p(\alpha, \beta) \varphi \psi p(\mu, \alpha) \neq 0, |\Lambda_{p(\beta)\varphi}| \geq 2, \delta \in \Lambda_{p(\beta)\varphi}. \quad (9)$$

Покажем, что для $N = N_\alpha$ и указанных $s, t, e_{\alpha\beta}, e_{\mu\alpha}, p(\beta)$, $e_{\alpha\delta} = p(\alpha, \delta)$ удовлетворяется условие (8).

Так как $x_\lambda p(\alpha, \beta) = 0$ для всех $\lambda \in \Omega \setminus \alpha$, то из (9) следует $x_\alpha p(\alpha, \beta) \varphi \psi p(\mu, \alpha) \neq 0$. Отсюда $x_\alpha p(\alpha, \beta) \varphi = x_{\beta} \varphi \neq 0$. Пусть $x_{\beta} \varphi = x_{\lambda_1}^{l_1} \dots x_{\lambda_n}^{l_n}$ для некоторых $l_i, \dots, l_n \geq 1$. Тогда

$$\mathcal{X}(x_{\beta} \varphi) = \{x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}\}, \quad (10)$$

причем среди λ_i могут быть равные. Так как $p(\beta)\varphi \in p(\beta)\mathfrak{b}(\mathfrak{B}) = \mathcal{U}_\beta$, то из (2.29) и (10) следует

$$\Lambda_{p(\beta)\varphi} = \{\lambda \mid x_\lambda \in \mathcal{X}(x_{\beta} \varphi)\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}. \quad (11)$$

Отсюда ввиду (9) имеем $\delta = \lambda_j$ для некоторого $j = 1, 2, \dots, n$, причем $n \geq 2$ ввиду $|\Lambda_{p(\beta)\varphi}| \geq 2$.

Переходим к непосредственной проверке условия (8). Из $\psi p(\mu, \alpha) \in \mathfrak{b}(\mathfrak{B})p(\mu, \alpha)$ и утверждений 2), 3) леммы 2.4 имеем

$$x_\alpha p(\alpha, \lambda_i) \psi p(\mu, \alpha) = x_{\lambda_i} \psi p(\mu, \alpha) = x_\alpha^{p_i}$$

для некоторых $p_i = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$. В частности, $x_\alpha p(\alpha, \delta) \psi p(\mu, \alpha) = x_\alpha^{p_j}$. Кроме того,

$$\begin{aligned}
 x_\alpha \varphi(\alpha, \beta) \psi \psi \varphi(\gamma, \alpha) &= x_\beta \psi \psi \varphi(\gamma, \alpha) = \\
 &= (x_{\lambda_1}^{l_1} \dots x_{\lambda_n}^{l_n}) \psi \varphi(\gamma, \alpha) = \\
 &= [x_{\lambda_1} \psi \varphi(\gamma, \alpha)]^{l_1} \dots [x_{\lambda_n} \psi \varphi(\gamma, \alpha)]^{l_n} = \\
 &= x_\alpha^{p_1 l_1} \dots x_\alpha^{p_n l_n} = x_\alpha^{p_1 l_1 + \dots + p_n l_n}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Теперь, учитывая определение нормы N_α (см. формулу (2)) и условие (12), получим $N_\alpha[\varphi(\alpha, \beta) \psi \psi \varphi(\gamma, \alpha)] = p_1 l_1 + \dots + p_n l_n$. Соответственно

$N_\alpha[\varphi(\alpha, \delta) \psi \psi \varphi(\gamma, \alpha)] = p_s$. Так как $p_i, l_i \geq 1$, $i = 1, \dots, n$ и $n \geq 2$, то $p_1 l_1 + \dots + p_n l_n > p_s$. т.е.

$$N_\alpha[\varphi(\alpha, \beta) \psi \psi \varphi(\gamma, \alpha)] > N_\alpha[\varphi(\alpha, \delta) \psi \psi \varphi(\gamma, \alpha)].$$

Таким образом, условие монотонности для нормы N_α выполнено. Лемма доказана.

Определение 14. Норма N на e -полугруппе S при помощи упорядоченной полугруппы K^* называется α -естественной, если она $\rho(\alpha)$ -правильна, $\rho(\alpha)$ -согласована, $\rho(\alpha)$ -монотонна.

Из лемм 2, 3 и 5 следует, что норма N_α на полугруппе $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ является α -естественной.

Теорема 1. Пусть \mathcal{D} - свободная в себе немоногенная нильполугруппа. Пусть, как и прежде, N_α есть α -каноническая норма на полугруппе $\mathcal{E}(\mathcal{D})$. Пусть, кроме того, на полугруппе $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ задана α -естественная норма

N^* . Тогда соответствующие нормирующие полугруппы и нормы совпадают (т.е. $K = K^*$ и $N_\alpha = N^*$).

Доказательство. Так как N^* является $\rho(\alpha)$ -правильной нормой, то $G_\alpha \cong K^*$ ввиду определения 10. Отсюда и из леммы 2, примененной для α -канонической нормы N_α , получим $K \cong K^*$. Так как $K = \{1, \dots, k\}$ и $K^* = \{1, \dots, k^*\}$, то $k = |K| = |K^*| = k^*$ и, следовательно, $K = K^*$.

Обозначим (для краткости) N^* через N . Покажем, что $N = N_\alpha$. Предположим противное и пусть $N(\varphi) \neq N_\alpha(\varphi)$ для некоторого $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$. Так как

$\rho(\alpha) \psi \varphi(\alpha) \in G_\alpha$ и, следовательно, $\rho(\alpha) \psi \varphi(\alpha) = \varphi_m$

при некотором $n = 1, \dots, k$, то ввиду $\rho(\alpha)$ -согласованности норм N и N_α получим

$$N(\varphi_n) = N(\varphi) \neq N_\alpha(\varphi) = N_\alpha(\varphi_n). \quad (13)$$

Пусть l - наименьшее из тех n , для которых условие (13) выполнено. Так как $N(\theta) = k = N_\alpha(\theta)$ по аксиоме A_1 и $N[\rho(\alpha)] = 1 = N_\alpha[\rho(\alpha)]$ по лемме 4, то

$l \neq 1, k$. Пусть также $N[\varphi_l] = \rho$. Так как $N_\alpha(\varphi_l) = l$ и $N(\varphi_l) \neq N_\alpha(\varphi_l)$, то $\rho \neq l$. Отсюда $\varphi_\rho \neq \varphi_l$ ввиду леммы 2.9. Покажем, что $\rho > l$. Предположим противное, т.е. что $\rho < l$. Тогда ввиду выбора l имеем $N(\varphi_\rho) = N_\alpha(\varphi_\rho) = \rho = N(\varphi_l)$. Отсюда и из взаимной однозначности отображения N следует $\varphi_\rho = \varphi_l$, что невозможно. Следовательно, $\rho > l$.

Норма N отображает G_α на K , причем $N(\varphi_l) \neq l$. Следовательно, существует $\varphi_n \in G_\alpha$, такое что $N(\varphi_n) = l$. При этом $n < k$, ибо из $n = k$ следовало бы, что $k = N(\varphi_k) = N(\theta) = N(\varphi_n) = l$, вопреки $l \neq k$. Также, как и для ρ , устанавливается, что $n > l$.

Покажем теперь, что существование указанных эндоморфизмов φ_n и φ_l противоречит $\rho(\alpha)$ -монотонности нормы N . Пусть

$$a = x_\rho x_\sigma, \quad \eta = \begin{pmatrix} x_\rho & x_\sigma & x_\lambda \\ x_\rho^{-l} & x_\sigma^l & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \Omega \setminus \{\rho, \sigma\}. \quad (14)$$

Из (2.16), (14), (2.18) имеем

$$\rho(\alpha, a)\eta = \rho(\alpha, a\eta) = \rho(\alpha, (x_\rho \eta)(x_\sigma \eta)) = \rho(\alpha, x_\lambda^{\tilde{n}}) = \varphi_n \quad (15)$$

Так как $\varphi_n \in \rho(\alpha) \circ \{\emptyset\} \rho(\alpha)$ и $n < k$, то

$$\rho(\alpha)\rho(\alpha, a)\eta\rho(\alpha) = \rho(\alpha)\varphi_n\rho(\alpha) = \varphi_n \neq \theta. \quad (16)$$

Таким образом, одно из условий в (7) при $s = \rho(\alpha, a)$, $t = \eta$, $\gamma = \beta = \alpha$ выполнено.

Покажем, что и другие соотношения в (7) для указанных s, t, β, γ справедливы. Так как $\rho(\alpha, a) \in U_\alpha$, $a = x_\rho x_\sigma$, то из (2.28) следует

$$\Lambda_{\rho(\alpha, a)} = \{\lambda \mid x_\lambda \in X(a)\} = \{\lambda \mid x_\lambda \in X(x_\rho x_\sigma)\} = \{\rho, \sigma\}. \quad (17)$$

Отсюда и из $\rho(\alpha)\rho(\alpha, a) = \rho(\alpha, a)$ и (17) имеем

$$|\Lambda_{\rho(\alpha)}\rho(\alpha, a)| \geq 2. \quad (18)$$

Наконец, из $\sigma \in \Lambda_{\rho(\alpha, a)}$ и соотношений (16) и (18)

следует справедливость остальных условий (7). Так как норма N является $\rho(\alpha)$ -монотонной, то в K удовлетворяется условие (8) для $s = \rho(\alpha, \alpha)$, $t = \eta$, $r = \beta = \alpha$, причем $e_{\alpha\alpha} = \rho(\alpha)$, $e_{\alpha\delta} = \rho(\alpha, \delta)$ поскольку $\xi(\mathcal{D})$ является e -полугруппой. Значит,

$$N[\rho(\alpha)\rho(\alpha, \alpha)\eta\rho(\alpha)] > N[\rho(\alpha, \delta)\eta\rho(\alpha)]. \quad (19)$$

Чтобы получить противоречие, заметим, что согласно (14) и (16),

$$N[\rho(\alpha, \delta)\eta\rho(\alpha)] = N[\rho(\alpha, x_\delta)\eta\rho(\alpha)] = N[\rho(\alpha, x_\alpha^e)\rho(\alpha)] = N(\psi_e) = \rho,$$

$$N[\rho(\alpha)\rho(\alpha, \alpha)\eta\rho(\alpha)] = N(\psi_n) = \ell.$$

Отсюда и из условия (19) имеем $\ell > \rho$, вопреки $\ell < \rho$. Следовательно, условие (13) приводит к противоречию и, значит, для всех $\psi \in \xi(\mathcal{D})$ выполнено $N(\psi) = N_\alpha(\psi)$.

Теорема доказана.

§4. Свободные в себе нильполугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов.

I. В этом параграфе мы хотим показать, что свободные в себе нильполугруппы определяются своими полугруппами эндоморфизмов с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма в классе всех свободных в себе нильполугрупп. Доказательство последнего утверждения основывается на единственности α -естественной нормы на полугруппе $\xi(\mathcal{D})$ и леммах 1, 2 (см. ниже).

Лемма 1. Пусть на идеале U_α , $\alpha \in \Omega$, операции (\circ) и (\circ_1) задаются формулами

$$\rho(\alpha, a) \circ \rho(\alpha, b) = \rho(\alpha, ab), \quad (1)$$

$$\rho(\alpha, a) \circ_1 \rho(\alpha, b) = \rho(\alpha, ba). \quad (2)$$

Тогда группоид $Y = (U_\alpha, \circ)$ ($Y_1 = (U_\alpha, \circ_1)$) является полугруппой, изоморфной (антиизоморфной) полугруппе \mathcal{D} , причем операции \circ и \circ_1 удовлетворяют условиям дистрибутивности

$$\begin{aligned} [\rho(\alpha, a) \circ \rho(\alpha, b)] \psi &= \rho(\alpha, a) \psi \circ \rho(\alpha, b) \psi, \\ [\rho(\alpha, a) \circ_1 \rho(\alpha, b)] \psi &= \rho(\alpha, a) \psi \circ_1 \rho(\alpha, b) \psi. \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем сначала, что группоид Y изоморфен \mathcal{D} . Так как умножение в \mathcal{D} однозначно и всюду определено, то такова же операция \circ , заданная формулой (I) на идеале U_α . Далее, из леммы 2.8 следует, что отображение $b \rightarrow \varphi(\alpha, b)$, $b \in \mathcal{D}$, является взаимно однозначным. Это же отображение и гомоморфно ввиду (I). Следовательно, Y и \mathcal{D} изоморфны, и Y — полугруппа.

Аналогично устанавливается, что Y_1 — полугруппа, причем антиизоморфная полугруппе \mathcal{D} .

Чтобы показать дистрибутивность умножения относительно операции \circ в Y , заметим, что для любых $a, b \in \mathcal{D}$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ выполнено

$$\begin{aligned} [\varphi(\alpha, a) \circ \varphi(\alpha, b)] \varphi &= \varphi(\alpha, ab) \varphi = \varphi(\alpha, (ab) \varphi) = \\ &= \varphi(\alpha, (a\varphi)(b\varphi)) = \varphi(\alpha, a\varphi) \circ \varphi(\alpha, b\varphi) = \varphi(\alpha, a) \varphi \circ \varphi(\alpha, b) \varphi. \end{aligned}$$

Аналогично показывается дистрибутивность умножения в $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ относительно операции \circ_1 в Y_1 .

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть \mathcal{D} — немоногенная свободная в себе ниль-полугруппа и (\circ) — бинарная операция на U_α , удовлетворяющая для всех $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ и некоторых $\gamma, \delta \in \Omega$ условиям:

$$[\varphi(\alpha, \mu) \circ \varphi(\alpha, \delta)] \varphi = \varphi(\alpha, \mu) \varphi \circ \varphi(\alpha, \delta) \varphi, \quad (3)$$

$$\varphi(\alpha, \mu) \circ \varphi(\alpha, \delta) = \varphi(\alpha, x_\gamma x_\delta) \quad (4)$$

или условию (3) и условию

$$\varphi(\alpha, \mu) \circ \varphi(\alpha, \delta) = \varphi(\alpha, x_\delta x_\mu). \quad (5)$$

Тогда группоид $\dot{Y} = (U_\alpha, \circ)$ изоморфен (или антиизоморфен) полугруппе \mathcal{D} .

Доказательство. Сначала пусть имеет место условие (4). Возьмем некоторые $a, b \in \mathcal{D}$. Пусть

$$\varphi = \begin{pmatrix} x_\mu & x_\delta & x_\lambda \\ a & b & \circ \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \Omega \setminus \{\mu, \delta\}, \quad (6)$$

— эндоморфизм полугруппы \mathcal{D} . Тогда из (6), (3), (4), (I) и равенства $\varphi(\alpha, \lambda) = \varphi(\alpha, x_\lambda)$ для всех $\lambda \in \Omega$ следует

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, a) \circ \varphi(\alpha, b) &= \varphi(\alpha, x_\mu \varphi) \circ \varphi(\alpha, x_\delta \varphi) = \varphi(\alpha, \mu) \varphi \circ \varphi(\alpha, \delta) \varphi = \\ &= [\varphi(\alpha, \mu) \circ \varphi(\alpha, \delta)] \varphi = \varphi(\alpha, x_\mu x_\delta) \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда, воспользовавшись формулой (I) и дистрибутивностью умножения относительно операции \circ в Y , по-

лучим

$$\begin{aligned}
 \rho(\alpha, x_\mu x_\delta) \varphi &= [\rho(\alpha, x_\mu) \circ \rho(\alpha, x_\delta)] \varphi = \\
 &= \rho(\alpha, x_\mu) \varphi \circ \rho(\alpha, x_\delta) \varphi = \\
 &= \rho(\alpha, x_\mu \varphi) \circ \rho(\alpha, x_\delta \varphi) = \\
 &= \rho(\alpha, a) \circ \rho(\alpha, b).
 \end{aligned}$$

Следовательно, операции (\circ) и $(\dot{\circ})$ на идеале \mathcal{U}_α -совпадают, и ввиду леммы 1 полугруппа \dot{Y} изоморфна \mathcal{D} .

Пусть далее $\rho(\alpha, \mu) \dot{\circ} \rho(\alpha, \delta) = \rho(\alpha, x_\delta x_\mu)$.

Тогда аналогично показывается, что

$$\rho(\alpha, a) \dot{\circ} \rho(\alpha, b) = \rho(\alpha, x_\delta x_\mu) \varphi = \rho(\alpha, b a) = \rho(\alpha, a) \circ \rho(\alpha, b)$$

На этот раз \dot{Y} изоморфна полугруппе Y_1 , т.е. антиизоморфна полугруппе \mathcal{D} .

Лемма доказана.

2. Пусть здесь и в дальнейшем (до конца статьи) \mathcal{D} и \mathcal{C} - свободные в себе нильполугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов. Мы хотим показать, что либо \mathcal{D} изоморфна \mathcal{C} , либо антиизоморфна ей. Прежде чем изложить основную идею доказательства, докажем несколько вспомогательных лемм. Условимся ниже символом $*$ обозначать некоторый изоморфизм полугруппы $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ (или полугруппы S) на полугруппу $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ (соответственно S^*), а символом \vee - обратный изоморфизм.

Лемма 3. При изоморфизмах "на" ортам соответствуют орты, проекторам - проекторы.

Доказательство. 1) Пусть $\rho \in \mathcal{P}(S)$. Покажем, что $\rho^* \in \mathcal{P}(S^*)$. Пусть $f = f^2 \in S^*$, $\rho^* f \neq \rho^*$. Тогда $\rho f^{\vee} \neq \rho$ в S и, следовательно, $f \rho = 0$ ввиду (1.1). Отсюда $f \rho^* = 0$ уже в полугруппе S^* , и, значит, ρ^* - орт полугруппы S^* .

2) Пусть f - проектор в S . Тогда для всякого $\rho \in \mathcal{P}$ или $\rho f = \rho$, или $\rho f = 0$. Отсюда или $\rho^* f^* = \rho^*$ или $\rho^* f^* = 0$. Так как ρ - произвольный орт в S , то ρ^* - произвольный орт (ввиду 1) в S^* . Из определения 4 теперь следует, что f^* - проектор полугруппы S^* .

Лемма доказана.

Предложение 1. Пусть, как и прежде, $\mathfrak{D}, \mathfrak{C}$ - свободные в себе нильполугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов. Тогда множества \mathfrak{D}_0 и \mathfrak{C}_0 равномощны.

Доказательство. По (2.9) и леммам 2.3 и 2.5 ортам полугруппы $\mathfrak{E}(\mathfrak{D})$ ($\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$) взаимно однозначно соответствуют элементы множества \mathfrak{D}_0 (соответственно \mathfrak{C}_0). Обозначим через x_{α^*} образующий полугруппы \mathfrak{C} , который соответствует орту $\varphi^*(\alpha)$. Тогда $\varphi^*(\alpha) = \varphi(\alpha^*)$ в силу обозначений п. 2.4. Пусть Ω^* - некоторое индексное множество, равномощное \mathfrak{C}_0 , так что $\mathfrak{C}_0 = \{x_{\lambda^*} \mid \lambda^* \in \Omega^*\}$. Напомним, что $\mathfrak{D}_0 = \{x_{\alpha} \mid \alpha \in \Omega\}$. Тогда в последовательности

$$\alpha \rightarrow x_{\alpha} \rightarrow \varphi(\alpha) \rightarrow \varphi^*(\alpha) \rightarrow x_{\alpha^*} \rightarrow \alpha^*$$

все переходы взаимно однозначны.

Отсюда $|\Omega| = |\mathfrak{D}_0| = |\mathcal{P}(\mathfrak{E}(\mathfrak{D}))| = |\mathcal{P}(\mathfrak{E}(\mathfrak{C}))| = |\mathfrak{C}_0| = |\Omega^*|$, причем определено "сквозное" отображение $\alpha \rightarrow \alpha^*$ (обратное к нему обозначим через ν , т.е. полагаем $(\alpha^*)^{\nu} = \alpha$).

Предложение доказано.

Следствие. Пусть \mathfrak{D} и \mathfrak{C} - свободные нильполугруппы, из которых одна является моногенной, причем полугруппы $\mathfrak{E}(\mathfrak{D})$ и $\mathfrak{E}(\mathfrak{C})$ изоморфны. Тогда \mathfrak{D} и \mathfrak{C} изоморфны.

Действительно, в силу предложения 1 обе полугруппы являются моногенными. Так как порядок моногенной нильполугруппы совпадает с порядком ее полугруппы эндоморфизмов, то \mathfrak{D} и \mathfrak{C} имеют одинаковый порядок и, следовательно, изоморфны.

Лемма 4. Для всяких $\alpha, \beta \in \Omega$ удовлетворяется условие

$$\varphi^*(\alpha, \beta) = \varphi(\alpha^*, \beta^*) \quad (7)$$

(напомним (см. п. 2.3), что

$$\varphi(\alpha^*, \beta^*) = \begin{pmatrix} x_{\alpha^*} & x_{\beta^*} \\ x_{\beta^*} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^* \in \Omega^* \setminus \alpha^*.$$

Доказательство. По лемме 3 множество $\mathcal{P}(\mathfrak{E}(\mathfrak{D}))$ при изоморфизме ν отобразится на множество $\mathcal{P}(\mathfrak{E}(\mathfrak{C}))$.

Последнее в силу леммы 2.6 совпадает с множеством

$\{\varphi(\alpha^*) \mid \alpha^* \in \Omega^*\}$, содержащемся в полугруппе $\{ \varphi^*(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Omega \} \cup \Theta$ матричных единиц. Отсюда

и из леммы 2.7 вытекает справедливость соотношения

$$\{\varphi^*(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \Omega\} \cup \theta = \{\varphi(\mu^*, \delta^*) \mid \mu^*, \delta^* \in \Omega^*\} \cup \theta. \quad (8)$$

Переходим к непосредственному доказательству равенства (7). Пусть $\alpha, \beta \in \Omega$ и $\varphi^*(\alpha; \beta) = \varphi(\mu^*, \delta^*)$ для некоторых $\mu^*, \delta^* \in \Omega$. Так как $\varphi^*(\alpha, \beta) = [\varphi(\alpha) \varphi(\alpha, \beta) \varphi(\beta)]^* = \varphi(\alpha^*) \varphi(\mu^*, \delta^*) \varphi(\beta^*)$, то $\alpha^* = \mu^*$, $\beta^* = \delta^*$ (в противном случае из формулы (2.4) следовало бы, что $\varphi^*(\alpha, \beta) = \theta$, вопреки $\varphi(\alpha, \beta) \neq \theta$). Так как α, β — произвольны, то равенство (7) и лемма доказаны.

Предложение 2. Пусть \mathcal{D} — полугруппа с нулевым умножением, \mathcal{C} — свободная в себе нильполугруппа и полугруппы $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ и $\mathcal{E}(\mathcal{C})$ изоморфны. Тогда \mathcal{D} и \mathcal{C} изоморфны.

Доказательство. Ввиду условия полугруппа \mathcal{D} состоит из некоторого непустого множества \mathcal{D}_0 неразложимых элементов и нуля, т.е. $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup 0$. Всякое отображение $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, сохраняющее нуль, является (ввиду $\varphi 1 = 0$) эндоморфизмом полугруппы \mathcal{D} . Следовательно, \mathcal{D} — свободная в себе нильполугруппа над \mathcal{D}_0 . Пусть $\varphi(\alpha) \in \mathcal{P}(\mathcal{E}(\mathcal{D}))$ и $\psi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$. Тогда, либо $x_\alpha \psi = 0$, и в этом случае $\varphi(\alpha) \psi = \varphi(\alpha, x_\alpha \psi) = \theta$, либо $x_\alpha \psi = x_\beta \neq 0$ при некотором $\beta \in \Omega$, и в этом случае $\varphi(\alpha) \psi = \varphi(\alpha, x_\alpha \psi) = \varphi(\alpha, \beta)$.

Покажем, что в \mathcal{C} выполнено тождество $\varphi 1 = 0$. Предположим противное и пусть $x_{\mu^*} x_{\delta^*} \neq 0$ при некоторых (одинаковых или различных) $\mu^*, \delta^* \in \Omega^*$. Тогда $\varphi = \varphi(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\delta^*}) \neq \theta$. При этом, очевидно, $\varphi(\alpha^*) \varphi = \varphi$. Так как $\varphi^v(\alpha^*) \varphi^v = \varphi(\alpha) \varphi^v = \varphi(\alpha, \beta)$ при некотором $\beta \in \Omega$, то $\varphi = \varphi(\alpha^*, \beta^*)$. Отсюда $x_{\mu^*} x_{\delta^*} = x_{\alpha^*} \varphi = x_{\alpha^*} \varphi(\alpha^*, \beta^*) = x_{\beta^*}$, вопреки неразложимости x_{β^*} .

Полученным противоречием доказано, что \mathcal{C} — полугруппа с нулевым умножением. А так как $|\mathcal{D}_0| = |\mathcal{C}_0|$ — по предложению 1 и обе полугруппы с нулевым умножением, то они же и изоморфны.

Предложение доказано.

3. Далее предполагается, что \mathcal{D} (а, значит, и \mathcal{C}) не является ни полугруппой с нулевым умножением, ни моногенной нильполугруппой.

Идея наших последующих рассуждений заключается в следующем. Пусть $(\dot{\circ})$ — операция, индуцированная на идеале \mathcal{U}_α^* операцией (\circ) и отображением " * ", так что

$$\varphi^*(\alpha, a) \dot{\circ} \varphi^*(\alpha, b) = \varphi^*(\alpha, ab). \quad (9)$$

Поскольку отображение $\varphi(\alpha, a) \longrightarrow \varphi^*(\alpha, a)$ является и взаимно однозначным и гомоморфным ввиду (9), то полугруппы $Y = (\mathcal{U}_\alpha, *)$ и $Y^* = (\mathcal{U}_\alpha^*, \dot{\circ})$ — изоморфны. Можно показать, что умножение в $\mathcal{E}(c)$ праводистрибутивно с операцией $\dot{\circ}$ в \mathcal{U}_α^* . Если при этом выполнено условие

$$\varphi^*(\alpha, \mu) \dot{\circ} \varphi^*(\alpha, \delta) = \varphi(\alpha^*, x_{\mu*} x_{\delta*}), \quad (10)$$

или

$$\varphi^*(\alpha, \mu) \dot{\circ} \varphi^*(\alpha, \delta) = \varphi(\alpha^*, x_{\mu*} x_{\delta*}), \quad (11)$$

то из леммы 2 будет следовать, что полугруппа Y^* изоморфна или антиизоморфна полугруппе \mathcal{C} . С другой стороны, по построению полугруппа Y^* изоморфна Y . Последняя, в свою очередь, изоморфна \mathcal{D} . Таким образом, доказательство предложения п. 2 свелось к проверке того, выполняется ли какое-нибудь из условий (10) или (11)? Проверка справедливости одного из них, составляет содержание оставшихся лемм 5 — 13, к которым мы и переходим.

Обозначим

$$\mathcal{L}_\varphi^* = \{ \lambda^* \mid \lambda^* \in \Omega^*, \lambda \in \mathcal{L}_\varphi \}. \quad (12)$$

Лемма 5. Для всяких $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ выполнено

$$\mathcal{L}_{\varphi^*} = \mathcal{L}_\varphi^*. \quad (13)$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$ и f_φ его минимальная правая единица. Покажем, что $f_\varphi^* = f_{\varphi^*}$. Очевидно, что f_φ^* — правая единица φ^* . Из леммы 3 следует также, что $f_\varphi^* \in \mathcal{F}(\mathcal{E}(\mathcal{D}))$. Покажем минимальность. Так как $f_{\varphi^*} f_\varphi^* = f_{\varphi^*}$ ввиду определения 5, то $f_\varphi^* f_\varphi^* = f_\varphi^*$. Отсюда из минимальности f_φ и абелевости $\mathcal{F}(\mathcal{E}(\mathcal{D}))$ получим $f_\varphi f_\varphi^* = f_\varphi$, т.е. $f_\varphi = f_\varphi^*$. Но тогда ясно, что $f_\varphi^* = f_{\varphi^*}$. Теперь ввиду леммы 3 имеем $\varphi(\alpha) f_\varphi = \varphi(\alpha)$ в том и только в том случае, когда $\varphi(\alpha^*) f_{\varphi^*} = \varphi(\alpha^*)$. Отсюда и из (2.13) следует $\mathcal{L}_{\varphi^*} = \mathcal{L}_\varphi^*$.

Лемма доказана.

Лемма 6. Для всяких $\alpha \in \Omega$ выполнено, см. п.

$$\nu^*(\alpha) = \nu(\alpha^*) = \begin{pmatrix} x_{\lambda^*} \\ x_{\alpha^*} \end{pmatrix}, \quad \lambda^* \in \Omega^*. \quad (14)$$

Доказательство. Очевидно, что $\rho(\mu, \delta) \nu(\alpha) = \rho(\mu, \alpha)$ ввиду (2.7) для всех $\alpha, \mu, \delta \in \Omega$. Следовательно, $\rho(\mu^*, \delta^*) \nu^*(\alpha) = \rho(\mu^*, \alpha^*)$ для любых $\alpha^*, \mu^*, \delta^* \in \Omega$. Отсюда $x_{\lambda^*} \nu^*(\alpha) = x_{\lambda^*} \rho(\lambda^*) \nu^*(\alpha) = x_{\lambda^*} \rho(\lambda^*, \alpha^*) = x_{\alpha^*}$. Следовательно, $\nu^*(\alpha) = \nu(\alpha^*)$, что и требовалось показать.

4. Из (1) имеем $\rho(\alpha, \mu) \circ \rho(\alpha, \delta) = \rho(\alpha, x_{\mu} x_{\delta})$.

. Обозначим

$$\psi = \rho(\alpha, x_{\mu} x_{\delta}). \quad (15)$$

Из леммы 2.15 следует, что

$$\Lambda_{\psi} = \{\lambda \mid x_{\lambda} \in \mathcal{X}(x_{\mu} x_{\delta})\} = \{\lambda \mid x_{\lambda} \in \mathcal{X}(x_{\mu} x_{\delta})\} = \{\mu, \delta\}. \quad (16)$$

Мы хотим показать, что

$$\psi^* = \rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\delta^*}) \quad \text{или} \quad \psi^* = \rho(\alpha^*, x_{\delta^*} x_{\mu^*}) \quad (17)$$

Для этого воспользуемся тем, что порядок носителя слова $x_{\mu} x_{\delta}$ и длина его выражаются одинаковым числом - 2. Отсюда, взяв эндоморфизм $\rho(\alpha, x_{\alpha}^2) = \psi \nu(\alpha)$ и, воспользовавшись единственностью α^* - естественной нормы N_{α^*} на полугруппе $\mathcal{G}(\mathcal{C})$, выведем, что $\psi^* \nu(\alpha^*) = \rho(\alpha^*, x_{\alpha^*}^2)$. Затем установим справедливость одного из условий в (17).

Сначала докажем, что α - каноническая норма N_{α} полугруппы $\mathcal{G}(\mathcal{B})$ при изоморфизме $*$ переходит в α^* -естественную норму полугруппы $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.

Лемма 7. Пусть на полугруппе $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ задана функция N_{α^*} , определенная при каждом $\varphi \in \mathcal{G}(\mathcal{C})$ формулой.

$$N_{\alpha^*}(\varphi) = N_{\alpha}(\varphi^{\vee}). \quad (18)$$

Тогда N_{α^*} является α^* -естественной нормой полугруппы $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.

Доказательство. То, что аксиомы $A_1 - A_3$ для N_{α^*} выполнены - почти очевидно. Действительно, пусть $\varphi, \psi \in \mathcal{G}(\mathcal{C})$. Тогда $N_{\alpha^*}(\varphi) = N_{\alpha}(\varphi^{\vee}) \leq N_{\alpha}(\theta) = N_{\alpha^*}(\theta)$. Далее $N_{\alpha^*}(\varphi\psi) = N_{\alpha}[(\varphi\psi)^{\vee}] = N_{\alpha}(\varphi^{\vee}\psi^{\vee}) \leq N_{\alpha}(\varphi^{\vee})N_{\alpha}(\psi^{\vee}) = N_{\alpha^*}(\varphi)N_{\alpha^*}(\psi)$. Наконец, N_{α^*} отображает $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ на K , ибо $N_{\alpha}(\mathcal{G}(\mathcal{B})) = K$. Итак, N_{α^*} - во всех отношениях каноническая норма на $\mathcal{G}(\mathcal{C})$.

при помощи упорядоченной полугруппы K .

Из условий (3.4), (18) и леммы 3.3 вытекает, что

$$N_{\alpha}^*(\varphi) = N_{\alpha}(\varphi^{\vee}) = N_{\alpha}(\rho(\alpha)\varphi^{\vee}) = N_{\alpha}^*(\rho(\alpha^*)\varphi)$$

и аналогично $N_{\alpha}^*(\varphi) = N_{\alpha}^*(\varphi\rho(\alpha))$.

Следовательно, N_{α}^* является $\rho(\alpha)$ -согласованным нормированием полугруппы $\mathcal{E}(C)$ при помощи полугруппы K .

Покажем $\rho(\alpha^*)$ -правильность, т.е. что N_{α}^* является изоморфизмом подполугруппы G_{α}^* на K . Обозначим $\rho(\alpha^*)\mathcal{E}(C)\rho(\alpha^*) = G_{\alpha}^*$ через G_{α}^* . Пусть $\varphi, \psi \in G_{\alpha}^*$. Тогда $N_{\alpha}^*(\varphi\psi) = N_{\alpha}(\varphi^{\vee}\psi^{\vee})$.

Так как $\varphi^{\vee}, \psi^{\vee} \in G_{\alpha}$, и N_{α} — изоморфизм G_{α} на K , то $N_{\alpha}^*(\varphi\psi) = N_{\alpha}(\varphi^{\vee})N_{\alpha}(\psi^{\vee}) = N_{\alpha}^*(\varphi)N_{\alpha}^*(\psi)$.

При этом $N_{\alpha}^*(\varphi) = N_{\alpha}(\varphi^{\vee}) \neq N_{\alpha}(\psi^{\vee}) = N_{\alpha}^*(\psi)$, если $\varphi \neq \psi$. Значит, N_{α}^* — изоморфизм подполугруппы G_{α}^* на K , т.е. является $\rho(\alpha)$ -правильной нормой.

Покажем $\rho(\alpha)$ -монотонность.

Пусть

$$\varphi^*, \psi^* \in \mathcal{E}(C), \quad \rho(\alpha^*, \beta^*)\varphi^*\psi^*\rho(\beta^*, \alpha^*) \neq \theta,$$

$$|\mathcal{L}_{\rho(\beta^*)}\varphi^*| \geq 2, \quad \delta^* \in \mathcal{L}_{\rho(\beta^*)}\varphi^*. \quad (19)$$

Покажем, что аналогичные (без звездочек) условия, см. (3.9), справедливы в $\mathcal{E}(\mathcal{E})$ и Ω . Действительно, применим отображение \vee (являющееся изоморфизмом на $\mathcal{E}(C)$) к соотношениям (19). Тогда $\rho(\alpha, \beta)\varphi\psi\rho(\beta, \alpha) \neq \theta$ и $\delta \in \mathcal{L}_{\rho(\beta)}\varphi$. Далее из (13) и (12) имеем

$$\mathcal{L}_{\rho(\beta)}\varphi = \mathcal{L}_{\rho(\beta^*)}^{\vee}\varphi^* = \{\lambda \mid \lambda^* \in \mathcal{L}_{\rho(\beta^*)}\varphi^*\}.$$

Следовательно, $|\mathcal{L}_{\rho(\beta)}\varphi| \geq 2$. Теперь ввиду $\rho(\alpha)$ -монотонности нормы N_{α} получим

$$N_{\alpha}[\rho(\alpha, \beta)\varphi\psi\rho(\beta, \alpha)] > N_{\alpha}[\rho(\alpha, \delta)\varphi\rho(\delta, \alpha)]. \quad (20)$$

В свою очередь, из (18) и (7) аналогичное (со звездочками) соотношение вида (20) справедливо в $\mathcal{E}(C)$.

Таким образом, N_{α}^* является $\rho(\alpha^*)$ -монотонной и, следовательно, α^* -естественной нормой.

Лемма доказана.

Лемма 8. Удовлетворяется условие:

$$\psi^* \vee (\alpha^*) = \rho(\alpha^*, \alpha^*) \psi^*. \quad (21)$$

Доказательство. Пусть N_{α^*} есть α^* -каноническое нормирование полугруппы $\mathcal{E}(C)$ при помощи упорядоченной полугруппы K^* . Пусть, как и выше, N_{α^*} есть норма на полугруппе $\mathcal{E}(C)$, определенная формулой (18). По лемме 7 она α^* - естественна. Тогда из теоремы 2.1 следует $K = K^*$ (т.е. $k = k^*$) и $N_{\alpha^*} = N_{\alpha^*}$. Следовательно, для всякого $\varphi \in \mathcal{E}(C)$ имеем, см. (3.1),

$$N_{\alpha^*}(\varphi) = \begin{cases} m, & \text{если } x_{\alpha^*} \varphi = x_{\alpha^*}^m, m = 1, \dots, k, \\ k, & \text{если } x_{\alpha^*} \varphi \notin \langle x_{\alpha^*} \rangle. \end{cases} \quad (22)$$

Отсюда из (18), (14), (15) и (22) получим

$$\begin{aligned} N_{\alpha^*}[\psi^* V(\alpha^*)] &= N_{\alpha^*}[\psi V(\alpha)] = N_{\alpha^*}[\rho(\alpha, x_{\alpha^*}^2)] = \\ &= 2 = N_{\alpha^*}[\rho(\alpha^*, x_{\alpha^*}^2)]. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь, чтобы вывести (21), покажем справедливость включения $\psi^* V(\alpha^*)$, $\rho(\alpha^*, x_{\alpha^*}^2) \in G_{\alpha^*}$.

Так как $\psi \in U_{\alpha} = \rho(\alpha) \mathcal{E}(\mathcal{E})$, то $\psi = \rho(\alpha) \varphi$.

Кроме того, из формулы (25) имеем $V(\alpha) = \nu(\alpha) \rho(\alpha)$.

Значит, $\psi^* V(\alpha^*) \in [\psi V(\alpha)]^* \in \rho(\alpha^*) \mathcal{E}(C) \rho(\alpha^*) = G_{\alpha^*}$. Тогда

$\psi^* V(\alpha^*) = [\psi V(\alpha)]^* \in \rho(\alpha^*) \mathcal{E}(C) \rho(\alpha^*) = G_{\alpha^*}$. Наконец, из леммы 2.13 следует $\rho(\alpha^*, x_{\alpha^*}^2) \in G_{\alpha^*}$. Так как

$N_{\alpha^*} = N_{\alpha^*}$ действует взаимно однозначно на G_{α^*} , то условие (21) выполнено.

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть $x_{\alpha^*} \psi \stackrel{\text{def}}{=} w$, $d(w) \geq 3$. Тогда в C выполнено тождество

$$\xi^2 = 0 \quad (24)$$

Доказательство. Пусть $v = x_{\alpha^*}^{l_1} \dots x_{\alpha^*}^{l_n} (\in C)$ -

некоторое слово длины $h = l_1 + \dots + l_n$. Тогда из (14)

имеем $v V(\alpha^*) = [x_{\alpha^*}^{l_1} V(\alpha^*)]^{l_1} \dots [x_{\alpha^*}^{l_n} V(\alpha^*)]^{l_n} =$

$= x_{\alpha^*}^h - x_{\alpha^*}^{d(v)}$. Отсюда ввиду произвольности v получим

$$x_{\alpha^*}^2 = x_{\alpha^*} \rho(\alpha^*, x_{\alpha^*}^2) = x_{\alpha^*} (\psi^* V(\alpha^*)) = w V(\alpha^*) = x_{\alpha^*}^{d(w)}$$

Так как $d(w) \geq 3$, то из леммы 1.2 следует $x_{\alpha^*}^2 =$

$= 0$. Отсюда, поскольку C свободна в себе, то в ней справедливо тождество $\xi^2 = 0$.

Лемма 10. Пусть $x_{\alpha^*} \psi^* \stackrel{\text{def}}{=} w$ и $d(w) \geq 3$.

Тогда

$$w^* = x_{\alpha^*} x_{\alpha^*} x_{\alpha^*} \quad \text{или} \quad w = x_{\alpha^*} x_{\alpha^*} x_{\alpha^*}. \quad (25)$$

Доказательство. Из (16), (13) и (12) имеем $\mathcal{L}_{\psi^*} = \mathcal{L}_{\psi} = \{\gamma^*, \delta^*\}$. Отсюда ввиду $\psi^* \in \mathcal{U}_{\alpha^*}$ и (2.29) получим

$$\chi(x_{\alpha^*} \psi^*) = \{x_{\mu^*}, x_{\delta^*}\}. \quad (26)$$

Из леммы 9 и условия этой леммы вытекает справедливость в \mathcal{C} тождества $\xi^2 = 0$. Наконец, из $\psi^* \in \mathcal{U}_{\alpha^*}$, $\psi^* \neq 0$ и леммы 2.8 следует $x_{\alpha^*} \psi^* \neq x_{\alpha^*} \theta = 0$. Отсюда, учитывая лемму 1.1, выводим (25).

Лемма доказана.

Лемма 11. Пусть $x_{\mu^*} x_{\delta^*} \neq x_{\alpha^*} \psi^* \neq x_{\delta^*} x_{\mu^*}$.

Тогда

$$\rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\delta^*}) \neq \rho^*(\alpha, x_{\delta^*} x_{\mu^*}) \neq \rho(\alpha^*, x_{\delta^*} x_{\mu^*}). \quad (27)$$

Доказательство. Предположим противное, т.е.

$$\rho^*(\alpha, x_{\delta^*} x_{\mu^*}) = \rho(\alpha^*, x_{\delta^*} x_{\mu^*})$$

(случай $\rho^*(\alpha, x_{\delta^*} x_{\mu^*}) = \rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\delta^*})$ — рассматривается аналогично). Пусть

$$\chi = \begin{pmatrix} x_{\mu^*} & x_{\delta^*} & x_{\lambda^*} \\ x_{\delta^*} & x_{\mu^*} & 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

(здесь и далее до конца доказательства леммы $\lambda \in \Omega \setminus \{\gamma, \delta\}$). Ясно, что $\rho(\gamma^*) \chi = \rho(\gamma^*, \delta^*)$, $\rho(\delta^*) \chi = \rho(\delta^*, \gamma^*)$, $\rho(\lambda^*) \chi = \theta$ и также $\rho(\gamma^{**}) \chi^* = \rho(\gamma^{**}, \delta^{**})$, $\rho(\delta^{**}) \chi^* = \rho(\delta^{**}, \gamma^{**})$, $\rho(\lambda^{**}) \chi^* = \theta$. Отсюда $x_{\mu^*} \chi^* = x_{\mu^*} \rho(\gamma^{**}) \chi^* = x_{\mu^*} \rho(\gamma^{**}, \delta^{**}) = x_{\delta^*}$ и аналогично получим $x_{\delta^*} \chi^* = x_{\mu^*}$, $x_{\lambda^*} \chi^* = 0$. Следовательно,

$$\chi^* = \begin{pmatrix} x_{\delta^*} & x_{\mu^*} & x_{\lambda^*} \\ x_{\mu^*} & x_{\delta^*} & 0 \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Отсюда $\rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\delta^*}) = \rho(\alpha^*, (x_{\delta^*} \chi^*)(x_{\mu^*} \chi^*)) = \rho(\alpha^*, x_{\delta^*} x_{\mu^*}) \chi^* = \rho^*(\alpha, x_{\delta^*} x_{\mu^*}) \chi^* = [\rho(\alpha, x_{\delta^*} x_{\mu^*}) \chi]^* = \rho^*(\alpha, x_{\mu^*} x_{\delta^*}) = \psi^*$ и

$x_{\mu^*} x_{\delta^*} = x_{\alpha^*} \psi^*$, вопреки условию.

Полученным противоречием лемма доказана.

Лемма 12. Пусть $\mu \in \{\rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\delta^*}), \rho(\alpha^*, x_{\delta^*} x_{\mu^*})\}$.

Тогда

$$\chi(x_{\alpha^*} \mu^*) = \{x_{\mu^*}, x_{\delta^*}\}. \quad (30)$$

Доказательство. Отметим, прежде всего, что $\mu \neq \theta$. Действительно, если $\mu = \theta$, то $x_{\mu^*} x_{\sigma^*} = 0$ или $x_{\sigma^*} x_{\mu^*} = 0$. Отсюда поскольку x_{μ^*} и x_{σ^*} — свободные образующие полугруппы C , то C — полугруппа с нулевым умножением, вопреки соглашению, принятому в п. 3.

Из $\mu = \rho(\alpha^*)\mu \in \rho(\alpha^*)\mathcal{E}(C) = \mathcal{U}_{\alpha^*}$, $x_{\alpha^*}\mu \in \{x_{\mu^*} x_{\sigma^*}, x_{\sigma^*} x_{\mu^*}\}$ и леммы 2.13 имеем $\mathcal{L}_{\mu} = \{\lambda^* | x_{\lambda^*} \in \mathcal{X}(x_{\alpha^*}\mu)\} = \{\mu^*, \sigma^*\}$. Отсюда, из (12) и (13) получим $\mathcal{L}_{\mu^*} = \mathcal{L}_{\mu} = \{\mu^*, \sigma^*\}$. Из последнего равенства и из условия (2.29) выводим (30).

Лемма доказана.

Лемма 13. Выполнено условие

$$\Psi^* = \rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\sigma^*}) \vee \Psi^* = \rho(\alpha^*, x_{\sigma^*} x_{\mu^*}). \quad (31)$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. ни одно из равенств в (31) не выполняется. Так как $|\mathcal{X}(x_{\alpha^*}\Psi^*)| \geq 2$ в силу (26), то $d(x_{\alpha^*}\Psi^*) \geq 3$ и справедливо условие (25). Пусть для определенности $w = x_{\alpha^*}\Psi^* = x_{\mu^*} x_{\sigma^*} x_{\mu^*}$ (случай $w = x_{\sigma^*} x_{\mu^*} x_{\sigma^*}$ рассматривается аналогично). Тогда $w \neq x_{\mu^*} x_{\sigma^*}$, $x_{\sigma^*} x_{\mu^*}$ и из лемм 11, 12 вытекает справедливость в полугруппах \mathcal{D} и C тождества $\mu^2 = 0$, а в $\mathcal{E}(C)$ — условия (27). Пусть, далее,

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_{\sigma^*} & x_{\lambda^*} \\ x_{\sigma^*} x_{\mu^*} & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^* \in \Omega^* \setminus \sigma^*. \quad (32)$$

Тогда $\theta \neq \Psi^* = \rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\sigma^*} x_{\mu^*}) = \rho(\alpha^*, (x_{\mu^*} \mathcal{X})(x_{\sigma^*} \mathcal{X})) = \rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\sigma^*}) \mathcal{X}$. Обозначим $\rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\sigma^*})$ через μ и $x_{\alpha^*}\mu^*$ через v . Ясно, что $\mu, \mu^* \neq \theta$, $v \neq 0$. Из леммы 12 следует $\mathcal{X}(v) = \{x_{\sigma^*}, x_{\mu^*}\}$, и $d(v) \geq 2$.

Допустим сначала, что $d(v) = 2$. Если $v = x_{\sigma^*} x_{\mu^*}$, то из $v^* \in \mathcal{U}_{\alpha^*}$ и леммы 2.7 имеем $\rho^*(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\sigma^*}) = \mu^* = \rho(\alpha^*, x_{\sigma^*} x_{\mu^*})$, вопреки (27). Если же $v = x_{\mu^*} x_{\sigma^*}$, то из (2.7) следует $\mu^* = \psi$ и $\psi^* = \mu$. Применим к этому равенству эндоморфизм χ^* , см. (28), (29). Тогда

$$\begin{aligned} \rho^*(\alpha^*, x_{\sigma^*} x_{\mu^*}) &= \rho^*(\alpha^*, (x_{\mu^*} \chi)(x_{\sigma^*} \chi)) = \rho^*(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\sigma^*}) \chi^* = \\ &= \psi^* \chi^* = \rho(\alpha^*, x_{\mu^*} x_{\sigma^*}) \chi^* = \\ &= \rho(\alpha^*, (x_{\mu^*} \lambda^*)(x_{\sigma^*} \lambda^*)) = \rho(\alpha^*, x_{\sigma^*} x_{\mu^*}), \end{aligned}$$

вопреки лемме 11. Следовательно, $d(v) \geq 3$. При этом из $v \neq 0$ и следствия 1.2 вытекает $d(v) = 3$.

Пусть для определенности $v = x_p x_f x_\mu$ (в случае $v = x_f x_p x_\delta$ - рассуждения аналогичны).

Тогда ввиду $\psi^* = \mu x$ и, следовательно, $\psi = \mu^v x^v$ имеем $0 \neq x_p x_f x_\delta = x_\alpha \psi = x_\alpha (\mu^v x^v) = v x^v =$

$$= (x_p x_f x_\mu) x^v = (x_p x^v)(x_f x^v)(x_\mu x^v) \stackrel{d_1}{=} w. \quad (33)$$

Из леммы 4 имеем $\chi(x_f x^v) = \chi(x_\alpha \varphi(\alpha, \delta) x^v) = \chi(x_\alpha \varphi(\alpha^*, \delta^*) x^v) = \chi(x_\alpha [\varphi(\alpha^*, \delta^*)]^v)$. Так как $\varphi(\alpha^*, \delta^*) x = \varphi(\alpha^*, x_{f^*} x_{\mu^*}) = \mu$ в силу (32), то из леммы 12 вытекает $\chi(x_f x^v) = \chi(x_\alpha \mu) = c\{x_f, x_\mu\}$.

Следовательно, $d(x_f x^v) \geq 2$ и $d(w) \geq 4$. Отсюда и из следствия 1.2 получим $w^* = 0$, хотя $w^* \neq 0$ в силу (33).

Полученным противоречием лемма доказана.

Теорема (основной результат). Свободные в себе нильполугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов, либо изоморфны, либо антиизоморфны.

Доказательство. Пусть \mathcal{D}, \mathcal{C} - свободные в себе нильполугруппы, причем $\mathcal{E}(\mathcal{D}) \cong \mathcal{E}(\mathcal{C})$. Покажем, что

\mathcal{D} или изоморфна \mathcal{C} или антиизоморфна ей. Если \mathcal{D} - моногенная или с нулевым умножением полугруппа, то \mathcal{D} изоморфна \mathcal{C} ввиду предложения 1 и следствия 1. Пусть, далее, \mathcal{D} не является ни одной из этих двух полугрупп, т.е. \mathcal{D} содержит, по крайней мере, 2 различных образующих x_p, x_f , причем $x_p x_f \neq 0$.

Пусть (\circ) - операция на идеале U_α , определенная условием (I), а $(\dot{\circ})$ - операция на идеале U_α^* , индуцированная операцией (\circ) и некоторым изоморфизмом

" * " полугрупп $\mathcal{E}(\mathcal{D})$ и $\mathcal{E}(\mathcal{C})$, так что выполнено условие (9). Тогда из леммы 4 следует $\varphi^*(\alpha, \mu) =$

$$= \varphi(\alpha^*, \mu^*) \text{ для всех } \alpha, \mu \in \Omega. \text{ Пусть}$$

$\varphi \in \mathcal{E}(\mathcal{D})$. Ввиду леммы 1 имеем

$$\varphi(\alpha, \mu) \varphi \circ \varphi(\alpha, \delta) \varphi = [\varphi(\alpha, \mu) \circ \varphi(\alpha, \delta)] \varphi. \quad (34)$$

Отсюда и из условия (7) следует

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha^*, \gamma^*) \varphi^* \circ \varphi(\alpha^*, \delta^*) \varphi^* &= \varphi^*(\alpha, \gamma) \varphi^* \circ \varphi^*(\alpha, \delta) \varphi^* \stackrel{(3a)}{=} \\ &= [\varphi(\alpha, \gamma) \circ \varphi(\alpha, \delta)] \varphi^* = [\varphi^*(\alpha, \gamma) \circ \varphi^*(\alpha, \delta)] \varphi^* = \\ &= [\varphi(\alpha^*, \gamma^*) \circ \varphi(\alpha^*, \delta^*)] \varphi^*. \end{aligned}$$

Следовательно, умножение дистрибутивно относительно операции \circ в $\xi(c)$. Далее, из $x_\gamma x_\delta \neq 0$ и $\psi = \varphi(\alpha, x_\gamma, x_\delta) \neq \theta$ следует $\psi^* \neq \theta$. Отсюда в силу леммы 13 получим $\psi^* = \varphi(\alpha^*, x_{\gamma^*}, x_{\delta^*})$ или $\psi^* = \varphi(\alpha^*, x_{\delta^*}, x_{\gamma^*})$. Наконец, из $\psi = \varphi(\alpha, x_\gamma, x_\delta) = \varphi(\alpha, \gamma) \circ \varphi(\alpha, \delta)$ и, следовательно, из $\psi^* = \varphi(\alpha^*, \gamma^*) \circ \varphi(\alpha^*, \delta^*)$ вытекает, что операция (\circ) на идеале \mathcal{U}_α^* удовлетворяет либо условиям (3) и (4), либо условиям (3) и (5), взятых со "звездочками". Но тогда по лемме 2 полугруппа $(\mathcal{U}_\alpha^*, \circ)$ изоморфна или антиизоморфна полугруппе \mathcal{C} . Теперь, поскольку полугруппы $(\mathcal{U}_\alpha, \circ)$ и $(\mathcal{U}_\alpha^*, \circ)$ изоморфны и $(\mathcal{U}_\alpha, \circ)$ изоморфна \mathcal{D} (по лемме 1), то теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность Я.В.Хиону за руководство работой.

Литература

1. А й з е н ш т а д т А.Я., Ш в а р ц Т.Б., Об определяемости структур структурными эндоморфизмами. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 3, 3-11.
2. В а г н е р В.В., Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб. "Теория полугрупп и ее приложения", 1, Саратов, 1965, 3-197.
3. В а л у ц э И.И., Левые идеалы полугруппы эндоморфизмов свободной универсальной алгебры. Матем. сб., 1963, 62, № 3, 371-384.
4. В а л у ц э И.И., О конгруэнциях и эндоморфизмах универсальных алгебр. Кандидатская диссертация, Москва, 1963.
5. В а л у ц э И.И., Об идеалах некоторых полугрупп преобразований. В сб. "Исследование по общей алгебре", Кишинев, 1965, 67-80.
6. Г а б о в и ч Е.Я., Т р е п е т и н М.С., О многообразиях нильпотентных полугрупп. Уч. зап. Тартуск. ун-та, матем. 1970, 277, 16-19.

7. Г л у с к и н Л.М., Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств. Изв. АН, сер. матем., 1961, 23, № 6, 841-870.
8. Г л у с к и н Л.М., Об эндоморфизмах модулей. В сб. "Алгебра и математическая логика", Киев, Киевский ун-т, 1966, 3-20.
9. Д ж е к о б с о н Н., Строение колец. Москва, 1961.
10. З а р е ц к и й К.А., Абстрактная характеристика полугруппы всех бинарных отношений. Уч. зап. Ленинградск. пед. ин-та, 1958, 183, 251-264.
11. К у р о ш А.Г., Теория групп. Москва, 1967.
12. К у р о ш А.Г., Лекции по общей алгебре. Москва, 1962.
13. К о н П., Универсальная алгебра. Москва, 1968.
14. Л я п и н Е.С., Полугруппы. Москва, 1970.
15. Л я п и н Е.С., Абстрактная характеристика класса полугрупп эндоморфизмов систем общего вида. Матем. сб. 1966, 70, № 2, 172-179.
16. Л я п и н Е.С., Ассоциативные системы всех частичных преобразований. Докл. АН СССР, 1953, 88, 13-15.
17. Л я п и н Е.С., Полугруппы эндоморфизмов. Межвуз. научн.симпоз. по общей алг., Тарту, 1966, 169-192.
18. М а л ь ц е в А.И., Алгебраические системы. Москва, 1970.
19. П о п о в а Л.П., Полугруппы частичных эндоморфизмов множества с отношением. Сиб. матем., ж., 1963, 4, № 2, 309-317.
20. С к о р н я к о в Л.А. Холловские многообразия полугрупп. Матем. заметки, 1972, 11, № 4, 463-470.
21. Свердловская тетрадь, Нерешенные задачи теории полугрупп. Свердловск, 1969.
22. Т р е п е т и н М.С., Полугруппы эндоморфизмов коммутативных нильпотентных полугрупп. IX Всесоюзный алгебр. коллоквиум., Рез. научн. сообщ., Гомель, 1968, 186-188.
23. Т р е п е т и н М.С., Об одной задаче С. Улама. X Всесоюзный алгебр. коллоквиум., Рез. научн. сообщений, 2, Новосибирск, 1969, 95-96.
24. Т р е п е т и н М.С., Описание многообразий нильпотентных полугрупп. Укр. матем. ж., 1970, 22, № 5, 277-278.

25. У л а м С., Нерешенные математические задачи. Москва, 1963.
26. Х и о н Я.В., Кольца, нормированные при помощи полугрупп. Изв. АН СССР, сер. матем., 1957, 21, 311-328.
27. Х и о н Я.В., Упорядоченные полугруппы. Изв. АН СССР, сер. матем. 1957, 21, 209-222.
28. Ш а й н Б.М., Идемпотентные полугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов. Труды молодых ученых (вып. матем.), изд. СГУ, Саратов, 1969, 147-149.
29. Ш е в р и н Л.Н., К общей теории полугрупп. Матем. сб., 1961, 55, № 3, 367-386.
30. Ш н е п е р м а н Л.Б., Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств. Уч. зап. Ленинградск. пед. ин-та, 1962, 238, 21-37.
31. Б ч а н а Т., Some remarks on a paper by R.H. Bruck. Proc. Amer. Soc., 1956, 7, № 2, 211-220.

Поступило
22 III 1973

ISOMORFSETE ENDOMORFISMIPOOLRÜHMADEGA

ISEENDAS VABAD NILPOOLRÜHMAD

M. Trepetin

R e s ü m e e

Artikli põhitulemus: pealkirjas kirjeldatud omadusega poolrühmad on kas isomorfsed või antiisomorfsed.

FREE-IN-THEMSELF NILSEMIGROUPS

WITH ISOMORPHIC SEMIGROUPS OF ENDOMORPHISMS

M.S. Trepetin

S u m m a r y

The main result of the article is: free-in-themself nilsemigroups with isomorphic semigroups of endomorphisms are either isomorphic or anti-isomorphic.

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ МОНОГЕННЫХ НИЛЬПОЛУГРУПП ИХ ПОЛУГРУППАМИ ЭНДОМОРФИЗМОВ

М.С. Трепетин

Кафедра алгебры и геометрии

Предлагаемая заметка посвящена проблеме изоморфизма двух нильполугрупп¹ с изоморфными полугруппами эндоморфизмов.

В других ситуациях вопросы изоморфизма полугрупп (групп, алгебр, моделей) с изоморфными полугруппами (полукольцами, кольцами) эндоморфизмов ставились и исследовались в алгебраической литературе (см. [3], стр. 41; [4,6]; [8], стр. 47). Тем не менее, в теории полугрупп интересующие нас проблемы, исключая работы [1,9], не рассматривались.

Прежде, чем перечислить основные результаты, дадим одно определение.

Говорят, что полугруппа S определяется в классе \mathfrak{S} полугрупп своей полугруппой эндоморфизмов $\mathfrak{E}(S)$, если из того, что $A \in \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{E}(S)$ изоморфна $\mathfrak{E}(A)$, следует, что S изоморфна A .

Основные результаты статьи (в порядке их расположения),

1. Найден ряд достаточных условий (теорема 1.1, предложения 2.1, 2.2), когда нильполугруппа оказывается нильпотентной.

2. Доказано (§ 2), что моногенная нильполугруппа определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех нильполугрупп, содержащих неразложимые элементы.

Показано также, что моногенная нильполугруппа определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех n -абелевых полугрупп (т.е. удовлетворяющих тождеству $(\xi\eta)^n = \xi^n\eta^n$ при каком-нибудь натуральном $n \geq 2$).

¹Неопределяемые здесь и далее основные понятия теории полугрупп используются в обычном смысле, см. [3].

§ 1. Вспомогательные результаты

Напомним некоторые известные в теории полугрупп понятия см., например, [3, 10].

1.1. Пусть (здесь и в дальнейшем до конца статьи) S — полугруппа с нулем 0 . Она называется нильполугруппой, если подходящая степень каждого её элемента равна нулю и h -нильпотентной, если $S^h = 0 \neq S^{h-1}$ (т.е. если произведение всяких h элементов из S равно нулю, а среди произведений, содержащих $h-1$ множитель, имеются ненулевые). Показателем нильпотентности элемента $s \in S$ называется такое натуральное число $\rho = \rho(s)$, что $s^\rho = 0 \neq s^{\rho-1}$. Мы будем говорить также, что элемент s является ν -нильпотентным, если $\rho(s) = \nu$.

Произвольное (фиксированное) подмножество A полугруппы S назовем алфавитом. Ниже (до 1.3) в качестве алфавита A возьмем множество всех элементов полугруппы S . Произвольная запись элемента $w \in S$ в алфавите A называется словом полугруппы S . Графическое совпадение слов w_1, w_2 обозначаем так: $w_1 \equiv w_2$.

Для всякого вещественного числа α положим

$$] \alpha [= \min \{ m \mid m = 1, 2, \dots, m \geq \alpha \}. \quad (1.1)$$

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 1.1. Если S есть h -нильпотентная полугруппа, то она содержит, по крайней мере, $]h/2[$ различных 2-нильпотентных элементов.

Доказательство. Пусть S есть h -нильпотентная полугруппа. Покажем, что: 1) каждый из её слоев $\mathcal{L}_j = S^j \setminus S^{j+1}$ при $1 \leq j < h$ не пуст, 2) слои $\mathcal{L}_j, 1 \leq j \leq h$, попарно не пересекаются, 3) элементы каждого слоя \mathcal{L}_j при $j \geq]h/2[$ являются 2-нильпотентными.

Отсюда, взяв в каждом из $\mathcal{L}_j, j \geq]h/2[$, по одному элементу, получим требуемый результат.

1) Предположим противное, т.е., что $S^j \setminus S^{j+1} = \emptyset$ при каком-то $j < h$. Тогда $S^j \subseteq S^{j+1}$, а поскольку $S^{j+1} = S^{j-1} \cdot S^2 \subseteq S^{j-1} \cdot S = S^j$, то $S^j = S^{j+1}$. Отсюда $S^{h-1} = S^j \cdot S^{h-1-j} = S^{j+1} \cdot S^{h-1-j} = S^h = 0$, вопреки тому, что $S^{h-1} \neq 0$. Следовательно, $\mathcal{L}_j \neq \emptyset$ при всех $j < h$.

2) Так как при $i < j \leq h$ выполнено $S^i \setminus S^{j+1} \subseteq S^j = S^{j-i} S^i \subseteq S \cdot S^i = S^{i+1}$ и $S^{i+1} \cap (S^i \setminus S^{i+1}) = \emptyset$, то $\mathcal{L}_j \cap \mathcal{L}_i = \emptyset$.

3) Пусть $\delta \in \mathcal{L}_j$ при $j \geq \lceil h/2 \rceil$. Тогда $\delta \in S^j$ и δ разлагается в произведение j множителей, а δ^2 - в произведение $j+j = 2j \geq 2 \lceil h/2 \rceil \geq h$ множителей. Значит, $\delta^2 = 0$.

Лемма доказана.

Следствие. Если h -нильпотентная поделгруппа имеет m 2-нильпотентных элементов, то $h \leq 2m+1$.

О к а з ы в а е т с я, что утверждение следствия можно усилить. Мы покажем, что нильподелгруппа, имеющая конечное число m дванильпотентных элементов, нильпотентна (и тогда непременно класса $h \leq 2m+1$). Доказательство последнего утверждения основано на исследовании нильподелгрупп, не являющихся нильпотентными.

Если нильподелгруппа S с ровно m дванильпотентными элементами не нильпотентна, то существует ненулевое произведение w (слово от ненулевых элементов из S) любой заданной длины. Мы построим из начальных отрезков слова w такое ненулевое произведение $w^{[n]}$, которое содержит в качестве подслова $2(m+1)$ -ю степень еще одного начального отрезка y . Тогда $y^{2(m+1)} \neq 0$ и среди степеней y найдется $m+1$ различных 2-нильпотентных элементов, что дает противоречие.

1.2. Длиной $d(w)$ слова $w \in S$ называется общее число всех его букв. Символом $u \langle i \rangle$ (соответственно $\langle i \rangle u$) для любого слова $u \in S$ и числа $i \geq 0$ обозначим слово, полученное отбрасыванием i последних (первых) букв в слове u . Так, например, если $u \equiv u_1 u_2 \dots u_n$, то

$$u \langle i \rangle = u_1 u_2 \dots u_{n-i}, \quad \langle i \rangle u = u_{i+1} u_{i+2} \dots u_n. \quad (1.2)$$

При этом считаем, что $u \langle i \rangle = \emptyset$ ($\langle i \rangle u = \emptyset$), если $i \geq d(u)$. Легко проверить, что

$$u \langle i \rangle \langle j \rangle = u \langle i+j \rangle, \quad \langle i \rangle \langle j \rangle u = \langle i+j \rangle u. \quad (1.3)$$

Условимся (ради краткости) обозначать $2(m+1)$ через n .

Лемма 1.2. ([10], стр. 378). В нильподелгруппе S ни один отличный от нуля элемент не может быть своим делителем, т.е. равенства $x = u x v$, $x = u x$, $x = x v$ невозможны ни при каких $u, v \in S$, $0 \neq x \in S$.

Лемма 1.3. Если нильполугруппа S имеет ровно m дванильпотентных элементов и слово

$$0 \neq w \equiv w_1 w_2 \dots w_n, \quad (1.4)$$

составленное из элементов полугруппы S , имеет длину $d > (m+2)n$, то существуют последовательности - натуральных чисел $\{i_1, \dots, i_n\}$, непустых слов

$\{u^{(0)}, \dots, u^{(n)}\}$ и $\{y_0, \dots, y_n\}$ и слов $\{y_0^*, \dots, y_n^*\}$ - так, что для любого $k = 1, 2, \dots, n$ выполнено:

$$1^0 \quad 1 \leq i_k \leq m+1;$$

$$2^0 \quad y_0 = w;$$

$$3^0 \quad y_{k-1} \langle i_k \rangle = y_k;$$

$$4^0 \quad d(y_k) > (m+2)(n-k);$$

$$5^0 \quad u^{(0)} = w;$$

$$6^0 \quad u^{(k)} = (u^{(k-1)} \langle i_k \rangle)^2 \neq 0;$$

$$7^0 \quad u^{(k)} = y_{k,1} y_{k,2} \dots y_{k,z} \quad \text{для подходящих натуральных } l_{k,i};$$

$$8^0 \quad l_{k,z} = k;$$

$$9^0 \quad y_k = y_n y_k^*.$$

Примечание. Входящие в условия леммы элементы

y_0, \dots, y_n - суть подходящие начальные отрезки слова w , причем свойство 9^0 означает, что все они делятся слева на

y_n .

Доказательство проведем индукцией по числу k . Положим $u^{(0)} = w$, $y_0 = w$, $y_0^* = \emptyset$. Тогда условия 2^0 , 5^0 выполнены, а условие 4^0 справедливо ввиду выбора w и того, что $d(w) > (m+2)n$.

Допустим, что последовательности $\{u^{(0)}, \dots, u^{(k-1)}\}$, $\{y_0, \dots, y_{k-1}\}$ слов и $\{i_0, \dots, i_{k-1}\}$ чисел уже построены и обладают свойствами $1^0 - 8^0$. Построим u_k , y_k , i_k и покажем, что условия $1^0 - 8^0$ выполнены на k -том шаге.

Ввиду индуктивного предположения, $d(y_{k-1}) > (m+2)(n-k+1)$ и, следовательно, ни одно из слов $y_{k-1} \langle i \rangle$, $i = 1, 2, \dots, m+1$, имеющих длину $d_i > (m+2)(n-k+1) - i > (m+2)(n-k)$, непусто. Отсюда, ввиду 7^0 , непустыми будут слова

$$u^{(k-1)} \langle i \rangle = y_{l_{k-1,1}} y_{l_{k-1,2}} \dots y_{l_{k-1,2^{k-1}}} y_{k-1} \langle i \rangle, \quad i=1,2,\dots,m+1. \quad (1.5)$$

Более того, для любых $i < j$ ($\leq m+1$) слово $u^{(k-1)} \langle j \rangle$, являясь собственным началом слова $u^{(k-1)} \langle i \rangle$, отлично от него по лемме 1.2.

Следовательно, множество $\{u^{(k-1)} \langle i \rangle \mid i=1, \dots, m+1\}$ состоит из попарно различных слов полугруппы S и, ввиду $|\overline{S}| \leq m$, найдется $i = i_k \leq m+1$ такое, что $(u^{(k-1)} \langle i_k \rangle)^2 \neq 0$. Для определенности возьмем наименьшее такое i_k . Положим

$$u^{(k)} = (u^{(k-1)} \langle i_k \rangle)^2, \quad y_k = y_{k-1} \langle i_k \rangle. \quad (1.6)$$

Так как $d(y_k) \stackrel{(1.6)}{=} d(y_{k-1}) - i_k > (m+2)(n-k+1) - i_k > (m+2)(n-k)$, то условие 4^o выполнено. Далее, в силу (1.5), имеем

$$\begin{aligned} u^{(k)} &\stackrel{(1.6)}{=} (u^{(k-1)} \langle i_k \rangle)^2 \stackrel{(1.5)}{=} (y_{l_{k-1,1}} \dots y_{l_{k-1,2^{k-1}}} y_{k-1} \langle i_k \rangle)^2 \stackrel{(1.6)}{=} \\ &= (y_{l_{k-1,1}} \dots y_{l_{k-1,2^{k-1}}} y_k)^2 = y_{l_{k-1,1}} \dots y_{l_{k-1,2^{k-1}}} y_k. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Таким образом, условия 1^o - 8^o на k -том шаге выполнены, а ввиду произвольности $k \leq n$ требуемые последовательности $\{i_1, \dots, i_n\}$ чисел и $\{u^{(1)}, \dots, u^{(n)}\}$, $\{y_0, \dots, y_n\}$ слов построены.

Для завершения доказательства леммы заметим, что в силу (1.4), (1.6) выполнено:

$$y_k = w_1 w_2 \dots w_{d-i_1-\dots-i_n} w_{d-i_1-\dots-i_{n-1}} \dots w_{d-i_1-\dots-i_k} \quad (1.8) \quad (k < n),$$

$$y_n = w_1 w_2 \dots w_{d-i_1-\dots-i_n}. \quad (1.9)$$

Поэтому можно выбрать

$$y_k^* = w_{d-i_1-\dots-i_{n-1}} \dots w_{d-i_1-\dots-i_k}, \quad k=1, \dots, n-1, \quad y_n^* = \emptyset. \quad (1.10)$$

Таким образом, условия 1^o - 9^o выполнены и лемма доказана.

Лемма 1.4. Для каждого натурального числа m выполнено

$$2^{2m+2} - 1 > 2(m+1)(m+2). \quad (1.11)$$

Доказательство. Если $m=1$, то неравенство (1.11) справедливо ввиду $2^4 - 1 = 15 > 12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$. Пусть $\ell (> 1)$ - наименьшее из тех чисел, для которых (1.11) не выполняется, т.е. $2^{2\ell+2} - 1 \leq 2(\ell+1)(\ell+2)$. Так как $2^{2\ell} - 1 =$

$$= 2^{2(\ell-1)+2} - 1 > 2((\ell-1)+1)((\ell-1)+2) = 2\ell(\ell+1), \quad \text{то,}$$

вытя из первого неравенства второе, получим $3 \cdot 2^{2\ell} < 4(\ell+1)$ и $3 \cdot 4^{\ell-1} < \ell+1$. Однако, последнее невозможно, ибо, взяв сумму очевидных (при $\ell \geq 2$) неравенств $2 \cdot 4^{\ell-1} > \ell-1$ и $4^{\ell-1} > 2$, получим $3 \cdot 4^{\ell-1} > \ell+1$.

Тем самым лемма доказана.

1.3°. Обозначим (см. (1.7) при $k = n$)

$$v = y_{\ell n, 1} y_{\ell n, 2} \dots y_{\ell n, 2^n - 1}. \quad (1.12)$$

Тогда $u_{(n)}^{(i, j)} = v y_n$. Условимся длину произвольного подслова u слова v в алфавите $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ обозначать через $d_y(u)$.

Заметим, что поскольку $y_k = y_n y_k^*$, $k = 1, 2, \dots, n$, (см. лемму 1.3), то для произвольного слова u (относительно системы образующих Y) найдется слово u^* (относительно системы образующих $\{y_1^*, y_2^*, \dots, y_{n-1}^*\} \cup Y$), так что

$$u = y_n u^*. \quad (1.13)$$

Действительно, если $u = y_{i_1} \dots y_{i_n}$, то можно взять

$$u^* = y_{i_1}^* y_{i_2}^* \dots y_{i_n}^*.$$

Лемма 1.5. Существуют последовательность $\{v^{[0]}, \dots, v^{[n]}\}$ непустых слов в алфавите Y и последовательность натуральных чисел $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$, такие что:

- 1) $v^{[0]} = v$;
- 2) $1 \leq j_k \leq m+1$ для каждого $k = 1, \dots, n$;
- 3) $v^{[k]} \neq 0$;
- 4) $d_y(v^{[k]}) > (m+2)(n-k)$;
- 5) $v^{[k]} = (\langle j_k \dots + j_1 \rangle v) y_n^k$;
- 6) $(\langle j_k \rangle v^{[k-1]})^2 = v^{[k]} (\langle j_k \rangle v^{[k-1]})^* \neq 0$.

Доказательство проведем индукцией по числу k .

Полагаем $v^{[0]} = v$. Тогда условия 1), 3) выполнены ввиду $u^{(n)} \neq 0$. Условие 4) также справедливо, ибо $d(v^{[0]}) = 2^n - 1 > 2^{2m+2} - 1 > \sum_{i=1}^{(1,1)} (m+1)(m+2) = n(m+2)$.

Допустим, что $\{v^{[0]}, \dots, v^{[k-1]}\}, \{j_1, \dots, j_{k-1}\}$

уже построены и обладают свойствами 1) - 6). Построим $v^{[k]}, j_k$ и установим справедливость условий 1) - 6) на k -том шаге.

По индуктивному предположению $d_j(v^{[k-1]}) > (m+2)(n-k+1)$. Следовательно, слово $\langle j \rangle v^{[k-1]}$ непусто при каждом $1 \leq j \leq m+1$. Так как для каждой пары $i < j \leq m+1$ слово $\langle j \rangle v^{[k-1]}$ отлично от слова $\langle i \rangle v^{[k-1]}$, ибо является его собственным концом, то элементы совокупности $\{\langle i \rangle v^{[k-1]} \mid i = 1, 2, \dots, m+1\}$ попарно различны. При этом, ввиду $|\Pi| < m+1$, найдется $j = j_k < m+1$, такое, что $(\langle j_k \rangle v^{[k-1]})^2 \neq 0$. Полагаем

$$v^{[k]} = (\langle j_k \rangle v^{[k-1]}) y_n. \quad (I.14)$$

Покажем, что условия 3) - 6) выполнены. Так как $0 \neq (\langle j_k \rangle v^{[k-1]})^2 \stackrel{(13)}{=} (\langle j_k \rangle v^{[k-1]}) y_n (\langle j_k \rangle v^{[k-1]})^* = v^{[k]} (\langle j_k \rangle v^{[k-1]})^*$, то условие 6) выполнено, причем $v^{[k]} \neq 0$, и, значит, условие 3) тоже выполнено. Наконец, поскольку

$d_j(v^{[k]}) \stackrel{(14)}{=} d_j(v^{[k-1]}) - (j_k + 1) \geq (m+2)(n-k+1) - ((m+1)+1) > (m+2)(n-k)$,
 причем $v^{[k]} = (\langle j_k \rangle v^{[k-1]}) y_n = \langle j_k \rangle (\langle j_{k-1} + \dots + j_1 \rangle v^{[k-1]}) y_n =$
 $= (\langle j_k + j_{k-1} + \dots + j_1 \rangle v) y_n^k$, то условия 4), 5) выполнены.

Ввиду произвольности $k \leq n$ лемма доказана.

Теорема I.1. Если нильполугруппа содержит ровно m дванильпотентных элементов, то она нильпотентна класса $h \leq 2m+1$.

Доказательство¹. Пусть S - нильполугруппа и $\Pi = \{s \mid 0 \neq s \in S, s^2 = 0\}$, причем $|\Pi| = m$. Предположим, что вопреки утверждению полугруппа S или 1) не является h -нильпотентной ни при одном $h = 2, 3, \dots$, или 2) является h -нильпотентной класса $h > 2m+1$.

Случай 2) сразу приводит к противоречию, так как при нем полугруппа S , ввиду леммы I, содержит не менее $\lfloor h/2 \rfloor \geq m+1$ дванильпотентных элементов, вопреки

¹ Теорему I.1 можно доказать также, воспользовавшись сильной теоремой 3 работы [1] и леммой I настоящей статьи. Приводимое здесь доказательство строится на основе лемм I.3, I.5, представляющих самостоятельный интерес и дающих иной подход к рассматриваемой проблеме.

$$|\Pi| = m.$$

В случае 1) полугруппа S содержит слова сколь угодно большой длины. Выберем слово $w \neq 0$ длины $d(w) > 2(m+1)(m+2)$ и построим, воспользовавшись леммами 1.3, 1.5, последовательности $\{u^{(i)}\}, \{v^{(i)}\}, i = 1, 2, \dots, n$, ненулевых непустых слов, удовлетворяющих указанным там условиям. Тогда $w^{[n]} = (\langle n \rangle v) y_n^n$ при $n = 2m+2$ и подходящем $n < d_y(w)$, и поскольку $y_n^n \neq 0$, то моногенная полугруппа $\langle y_n \rangle$ имеет порядок, не меньший $n+1$. Отсюда ввиду леммы 1.1 полугруппа S содержит хотя бы $\lfloor (n+1)/2 \rfloor = \lfloor (2m+3)/2 \rfloor \geq m+1$ элементов, нильпотентных класса 2, что невозможно.

Полученные в случаях 1), 2) противоречия доказывают теорему.

§ 2. Определяемость моногенных нильполугрупп

их полугруппами эндоморфизмов

В этом параграфе доказываются основные результаты статьи — определяемость моногенных нильполугрупп их полугруппами эндоморфизмов в классе \mathfrak{N} — всех нильполугрупп, содержащих неразложимые элементы (теорема 2.1) и в классе \mathfrak{N}_n — всех n -абелевых, $n \geq 2$, полугрупп, содержащих неразложимые элементы (теорема 2.2).

Напомним, что $S^2 = \{uv \mid u, v \in S\}$. Обозначим $S \setminus S^2$ через S_0 . Очевидно, что S_0 составляет совокупность всех неразложимых элементов полугруппы S . Пусть, как и прежде, Π есть множество всех 2-нильпотентных элементов полугруппы S .

Лемма 2.1. Пусть полугруппа S имеет n неразложимых элементов и подполугруппу P порядка m с нулевым умножением. Тогда S имеет, по крайней мере, m^n эндоморфизмов.

Доказательство. Пусть φ — отображение вида $S_0 \rightarrow P$ и $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ на всю S , где остальные элементы из S отображаются в 0 , т.е.

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} x & \xi \\ x\varphi & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in S_0, \quad \xi \in S^2. \quad (2.1)$$

Покажем, что $\tilde{\varphi}$ — эндоморфизм полугруппы S . В проверке нуждается лишь то, что $\tilde{\varphi}$ — гомоморфно. Пусть

$a, b \in S$. Так как $ab \notin S_0$ ($ab \in S^2$), то $(ab)\varphi^{\sim} \equiv 0$.

Также и $(a\varphi^{\sim}(b\varphi^{\sim})) = 0$, ибо если $a, b \in S_0$, то $a\varphi^{\sim}, b\varphi^{\sim} \in \mathcal{P}$ а поскольку \mathcal{P} - подполугруппа с нулевым умножением, то $(a\varphi^{\sim}(b\varphi^{\sim})) = 0$. Если же $\{a, b\} \not\subset S_0$, то или $a\varphi^{\sim}$ или $b\varphi^{\sim}$ (или оба они) равны нулю ввиду (2.1). Следовательно, $(ab)\varphi^{\sim} = (a\varphi^{\sim}(b\varphi^{\sim})) = 0$ для всех $a, b \in S$ и $\varphi \in \mathcal{E}(S)$.

Для завершения доказательства заметим, что существует m^{ν} различных отображений φ вида $S_0 \rightarrow \mathcal{P}$, причем $\varphi^{\sim} = \psi^{\sim}$ в силу (2.1) лишь тогда, когда $\varphi = \psi$.

Лемма доказана.

Следствие 2.1. Если нильполугруппа S имеет ν неразложимых элементов и m дванильпотентных элементов, то она имеет, по крайней мере, $m(2^{\nu}-1)+1$ эндоморфизмов.

Доказательство. Пусть $d \in \Pi$, т.е. $d^2 = 0$. Тогда $\{d, 0\}$ - подполугруппа с нулевым умножением. По лемме 2.1 полугруппа $\mathcal{E}(S)$ содержит множество \mathcal{M}_d эндоморфизмов, порождаемых различными отображениями вида $S_0 \rightarrow \{d, 0\}$, причем $|\mathcal{M}_d| = 2^{\nu}$, $|S_0| = \nu$. Так как $\mathcal{M}_d \cap \mathcal{M}_c = \emptyset$ для $d, c \in \Pi$, $d \neq c$, причем $|\Pi| = m$, то $\mathcal{E}(S)$ содержит m различных комплексов вида \mathcal{M}_d . Но каждый из них содержит \emptyset . Следовательно, $|\mathcal{E}(S)| \geq m(2^{\nu}-1)+1$, и лемма доказана.

Предложение 2.1. Нильполугруппа с неразложимыми элементами и с конечным числом эндоморфизмов - конечна.

Доказательство. Пусть S - нильполугруппа и $S_c = S \setminus S^2 \neq \emptyset$, $|\mathcal{E}(S)| < \infty$, $|S_c| = \nu$, $|\Pi| = m$.

Так как $|\mathcal{E}(S)| \geq m(2^{\nu}-1)+1$, то m и ν - конечны. Отсюда по теореме 1.1 полугруппа S является h -нильпотентной при $h \leq 2m+1$. Так как S_c является системой образующих полугруппы S (см. [7], лемма 2.1), то $(\nu+1)^h$ служит, очевидно, верхней границей для порядка S .

Предложение доказано.

Лемма 2.2. Пусть A_d - моногенная нильполугруппа порядка $1 \geq 2$, т.е.

$$A_d = A = \{x, x^2, \dots, x^{1-1}, x^1 = 0\}; \quad (2.2)$$

тогда

1) Множество $\mathfrak{L}(A)$ есть полугруппа с внешне присоединенной единицей ε .

2) Подполугруппа $\mathfrak{L}^*(A) \stackrel{\text{дт}}{=} \mathfrak{L}(A) \setminus \varepsilon$ является нильпотентной точно класса ρ , где ρ - показатель нильпотентности эндоморфизма δ_2 , отображающего каждый элемент $a \in A$ в его квадрат.

3) Эндоморфизм δ_2 обладает наибольшим показателем нильпотентности среди всех элементов полугруппы $\mathfrak{L}^*(A)$.

4) Выполняется условие

$$|\mathfrak{L}(A)| \leq 2^{\rho(\delta_2)}. \quad (2.3)$$

5) Полугруппа $\mathfrak{L}(A)$ - абелева.

6) Полугруппа $\mathfrak{L}(A)$ имеет ровно два идемпотента - ε и θ .

Доказательство. Так как эндоморфизм полугруппы A определяется образом её образующего, то полугруппа $\mathfrak{L}(A)$ состоит, очевидно, из 1 отображений, имеющих вид:

$$\delta_n = \begin{pmatrix} a \\ a^n \end{pmatrix}, \quad a \in A, \quad n = 1, \dots, s, \quad (2.4)$$

причем умножаются элементы δ_n так

$$\delta_n \delta_m = \begin{cases} \delta_{nm} & , \text{ если } nm < s \\ \theta & , \text{ если } nm \geq s. \end{cases} \quad (2.5)$$

Утверждения 1) - 6) докажем по порядку.

1) Так как $x \neq x^n$ ни при одном $n \geq 2$ (иначе $x = x^n = x^{n^2} = \dots = x^{n^k} = 0$, вопреки $s \geq 2$), то $\varepsilon \neq \delta_n$ для тех же n (в противном случае $x = x\varepsilon = x\delta_n = x^n$ при $n \geq 2$, что невозможно). Отсюда и ввиду (2.4) и (2.5) следует, что равенство $\varepsilon = \delta_n \delta_m$, где или δ_n , или δ_m (или оба они) принадлежат $\mathfrak{L}^*(A)$ ($= \mathfrak{L}(A) \setminus \varepsilon$), невозможно. Следовательно, ε - внешне присоединена к $\mathfrak{L}^*(A)$, и $\mathfrak{L}^*(A)$ - подполугруппа.

2) Обозначим $\rho(\delta_2)$ через ρ . Так как $\delta_2^k = \delta_{2^k}$, то $2^{\rho-1} < s \leq 2^\rho$ ввиду (2.5) и $\rho = \lceil \log_2 s \rceil$. Далее, поскольку для всяких $\delta_{n_1}, \dots, \delta_{n_p} \in \mathfrak{L}^*(A)$ выполнено $n_i \geq 2$, $i = 1, \dots, p$, причем $n_1 n_2 \dots n_p \geq 2^p > s$, то $\delta_{n_1} \dots \delta_{n_p} \stackrel{(2.5)}{=} \delta_{n_1 n_2 \dots n_p} = 0$, значит, $\mathfrak{L}^*(A)$, по крайней мере, ρ -нильпотентна. Но она же нильпотентна точно класса ρ ввиду $\delta_2^{\rho-1} \neq \theta$.

3) Так как показатель нильпотентности всякого

$\delta_n \in \mathcal{E}^*(A)$ не превосходит числа p - показателя нильпотентности самой полугруппы $\mathcal{E}^*(A)$, то $\rho(\delta_n) \leq p = \rho(\delta_2)$, и, таким образом,

$$p = \rho(\delta_2) = \max \{ \rho(\delta) \mid \delta \in \mathcal{E}^*(A) \}. \quad (2.7)$$

4) Так как $|\mathcal{E}(A)| \stackrel{(2.4)}{=} s = 2^{\log_2 s} \leq 2^{2 \log_2 s} = 2^{\rho(\delta_2)}$,

то условие (2.3) доказано.

5) Очевидно в силу (2.5).

6) Ввиду 1) и 2) в полугруппе $\mathcal{E}(A)$ все элементы, кроме ε , - нильпотентны, причем $\theta = \theta^2$.

Лемма доказана.

Лемма 2.3. Если нильполугруппа S имеет неразложимые элементы и $\mathcal{E}(S)$ является абелевой нильполугруппой со внешне присоединенной единицей, то для каждого $\psi \in \mathcal{E}(S)$ и $\psi \neq \varepsilon$ выполняется

$$S\psi \subseteq S^2. \quad (2.8)$$

Доказательство. Для $\psi = \theta$ утверждение леммы верно, ибо $S\theta = 0 \in S^2$. Предположим, что, вопреки (2.8), для некоторого $\psi \neq \varepsilon \in \mathcal{E}(S) \setminus \theta$ выполнено $S\psi \cap S_0 \neq \emptyset$. Так как $S\psi = (S_0 \cup S^2)\psi = S_0\psi \cup S^2\psi$, причем $S^2\psi = (S\psi)^2 \subseteq S^2$, то $S_0\psi \cap S_0 \neq \emptyset$. Пусть $x \in S_0$ и $0 \neq d \in S$ таковы, что $x\psi \in S_0$, $d^2 = 0$. Как установлено в ходе доказательства леммы 1.1, отображение

$\varphi_d = \begin{pmatrix} x & \psi \\ d & 0 \end{pmatrix}$, $y \in S_0$, $\psi \in S^2$, является эндоморфизмом полугруппы S (ибо $\{d, 0\}$ - подполугруппа с нулевым умножением). Отсюда ввиду абелевости $\mathcal{E}(S)$ имеем

$$d = (x\psi)\varphi_d = x(\psi\varphi_d) = x(\varphi_d\psi) = d\psi, \quad (2.9)$$

т.е. d - неподвижная точка нильпотентного эндоморфизма ψ (отметим, что ψ - нильпотентен ввиду леммы 2.2 и того, что $\psi \neq \varepsilon$). Пусть $p = \rho(\psi)$. Тогда

$$0 = d\theta = d\psi^p = d(\psi\psi^{p-1}) = (d\psi)\psi^{p-1} = d\psi^{p-1} = \dots$$

$$\dots = d\psi^{p-k} = d(\psi\psi^{p-k-1}) = (d\psi)\psi^{p-k-1} = \dots = d\psi = d,$$

вопреки выбору $d \neq 0$.

Полученное противоречие означает, что $S\psi \cap S_0 = \emptyset$, и следовательно, $S\psi \subseteq S^2$.

Лемма доказана.

Лемма 2.4. Если для h -нильпотентной подгруппы S выполнено $|\mathfrak{b}(S)| = 2$, то S - моногенная нильпотентная подгруппа порядка 2.

Доказательство. Во-первых, $S \neq 0$, ибо при $S = 0$ получим $|\mathfrak{b}(S)| = 1$, вопреки условию. Отсюда $S \setminus S^2 \neq \emptyset$ и, следовательно, $r = |S \setminus S^2| \geq 1$.

Обозначим аннулятор подгруппы S через $\mathfrak{a}(S)$. Напомним [10], что

$$\mathfrak{a}(S) = \{x \mid x \in S, xz = zx = 0, z \in S\}. \quad (2.10)$$

Заметим, что $\mathfrak{a}(S) \neq 0$. Действительно, поскольку для всяких $x \in S$, $y \in S^{h-1}$ выполнено $xy, yx \in S^h = 0$, то $S^{h-1} \subseteq \mathfrak{a}(S)$. Теперь, если $\mathfrak{a}(S) = 0$, то $S^{h-1} = 0$, вопреки нильпотентности S в точности класса h . Следовательно, $|\mathfrak{a}(S)| = m \geq 2$. При этом, поскольку $\mathfrak{a}(S)$ есть подгруппа с нулевым умножением, то $\mathfrak{b}(S)$ содержит, по крайней мере, m^2 эндоморфизмов (по лемме 2.1) и, следовательно, $m^2 \leq 2$. Отсюда, в силу $m \geq 2$, имеем $r = 1$ и $m = 2$.

Итак, S - моногенная (ввиду $r = 1$) нильподгруппа, причем $|S| = |\mathfrak{b}(S)| = 2$.

Лемма доказана.

Лемма 2.5. Если для h -нильпотентной подгруппы $S \neq 0$ ее подгруппа $\mathfrak{b}(S)$ удовлетворяет условию (2.8) и соотношению

$$|\mathfrak{b}(S)| \leq 2^{\max\{\rho(\varphi) \mid \varphi \in \mathfrak{b}(S)\}}, \quad (2.11)$$

то

$$|\mathfrak{b}(S)| \leq 2^{\lceil \log_2 h \rceil}. \quad (2.12)$$

Доказательство. Так как $S \neq 0$, то $|\mathfrak{b}(S)| \geq 2$. Если $|\mathfrak{b}(S)| = 2$, то $h = 2$ по лемме 2.4, и в этом случае неравенство (2.12) справедливо. Далее, пусть

$$|\mathfrak{b}(S)| \geq 3.$$

Покажем, что $\rho \leq \lceil \log_2 h \rceil$. Пусть $\varphi \in \mathfrak{b}(S)$ и $\rho(\varphi) = \rho$. Поскольку $|\mathfrak{b}(S)| \geq 3$, то $\rho \geq 2$ ввиду (2.11). Следовательно, $\rho - 1 \neq 0$, причем $\varphi^{\rho-1} \neq \theta$.

Известно ([7], лемма 2.1), что множество

$S_0 (= S \setminus S^2)$ является в S системой образующих. Следовательно, ψ^{p-1} действует на S_0 ненулевым образом. Пусть $z \psi^{p-1} \neq 0$ для подходящего $z \in S_0$. Так как $z \psi \in S^2$, в силу условия (2.8), которому S удовлетворяет, то $z \psi = uv$ для некоторых $u, v \in S$. Отсюда $z \psi^2 = (z \psi) \psi = (uv) \psi = u \psi \cdot v \psi \in S^2 \cdot S^2 = S^2$. Следовательно, $0 \neq z \psi^{p-1} = z(\psi \cdot \psi^{p-2}) = (z \psi) \psi^{p-2} \in S^2 \psi^{p-2} = S^2(\psi \psi^{p-3}) = (S^2 \psi) \psi^{p-3} \subseteq S^2 \psi^{p-3} \subseteq \dots \subseteq S^{2^{p-1}}$ и, значит, $S^{2^{p-1}} \neq 0$. Но тогда, ввиду $S^{\infty} = 0$ при $n \geq h$, получим, что $h > 2^{p-1}$. При этом, если $2^p < h$, то $\rho \leq \lceil \log_2 h \rceil$, см. (1.1). Если же $2^p > h$, то $\rho > \log_2 h > \rho - 1$ и снова, в силу (1.1), имеем $\rho = \lceil \log_2 h \rceil$, т.е. в обоих случаях $\rho \leq \lceil \log_2 h \rceil$. Лемма доказана.

Мы хотим показать далее, что моногенная нильполугруппа A определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе нильполугрупп, имеющих неразложимые элементы. Мы покажем также, что полугруппа A определяется своей полугруппой эндоморфизмов в классе всех полугрупп, которые содержат неразложимые элементы и являются n -абелевыми (т.е. удовлетворяют тождеству $(\xi \eta)^n = \xi^n \eta^n$) при каком-нибудь $n \geq 2$. (Ясно, что A принадлежит обоим классам).

Предложение 2.2. Если для нильполугруппы S с неразложимыми элементами выполнено условие $\mathcal{E}(S) \cong \mathcal{E}(A_\Delta)$, где A_Δ — моногенная нильполугруппа порядка Δ , то S является h -нильпотентной полугруппой при некотором $h \geq 2$ и при этом либо $S \cong A_\Delta$, либо S имеет более одного неразложимого элемента, т.е.

$$|S \setminus S^2| \geq 2. \quad (2.13)$$

Доказательство. Так как $|\mathcal{E}(S)| = |\mathcal{E}(A_\Delta)| = \Delta < \infty$, то S является h -нильпотентной полугруппой при некотором $h \geq 2$, ввиду предложения 2.1.

Пусть, как и прежде, $|S \setminus S^2| = n$. Если $n = 1$ то S — моногенная нильполугруппа, очевидно, порядка Δ . А поскольку порядок моногенной нильполугруппы полностью её определяет, то при $n = 1$ выполнено $S \cong A_\Delta$. В противном случае, т.е. когда $n \neq 1$, приходим к (2.13).

Предложение 2.2 доказано.

Предложение 2.3. Пусть S есть h -нильпотентная полугруппа, причем

$$\delta(S) \cong \delta(A_h), \quad A_h = \{x, \dots, x^{h-1}, x^h = 0\}. \quad (2.14)$$

Тогда S - моногенная нильполугруппа.

Доказательство. Предположим претивное и пусть $r = |S_0| \neq 1$, т.е. $r \geq 2$. Далее, до конца доказательства этого предложения, фиксируем h , для которого $S^h = 0 \neq S^{h-1}$. Мы хотим показать, что условие $r \geq 2$ и лемма 2.6 (см. ниже) противоречат неравенству (2.12), справедливому для $\delta(S)$ ввиду лемм 2.3 и 2.4.

Предварительно заметим, что если $h = 2$, то S - полугруппа с нулевым умножением и $|\delta(S)| \geq |S|^r$ по лемме 2.1. Отсюда, поскольку $r \geq 2$, то $|S| \geq 3$ и, следовательно, $|\delta(S)| \geq 9$. С другой стороны, $|\delta(S)| < 2^{\lceil \log_2 h \rceil} = 2$. Следовательно, получено противоречие, показывающее, что $h \neq 2$.

Далее, пусть $h \geq 3$. Соответствующие этапы рассмотрения этого случая заключены в леммах 2.6 - 2.8, к которым мы и переходим.

Лемма 2.6. Если h -нильпотентная ($h \geq 3$) полугруппа S имеет, по крайней мере, 2 неразложимых элемента, то

$$|\delta(S)| \geq \lceil h/2 + 1/2 \rceil^2 + 1. \quad (2.15)$$

Доказательство. В каждом из непустых (как установлено в ходе доказательства леммы 1.1) классов $S^i \setminus S^{i+1}$ при $j \geq \lceil h/2 \rceil$ фиксируем элемент u_j . Обозначим $U = \bigcup u_j \cup 0$. Так как для всяких $i, j \geq \lceil h/2 \rceil$ выполнено $i+j \geq 2 \lceil h/2 \rceil \geq h$, то для тех же i, j имеем $u_i u_j \in S^i S^j = S^{i+j} \subseteq S^h = 0$, т.е. U - подполугруппа с нулевым умножением. Покажем, что $|U| = \lceil h/2 + 1/2 \rceil$. Пусть h - четно, т.е. $h = 2m$. Тогда $U = \{u_m, u_{m+1}, \dots, u_{h-1}, 0\}$ и в этом случае $|U| = h - (m-1) = 2m - m + 1 = m + 1 \stackrel{(1)}{=} \lceil h/2 + 1/2 \rceil$. Пусть h - нечетно, т.е. $h = 2m + 1$. Тогда $U = \{u_{m+1}, u_{m+2}, \dots, u_{h-1}, 0\}$ и $|U| = h - m = 2m + 1 - m = m + 1 \stackrel{(1)}{=} \lceil h/2 + 1/2 \rceil$.

Пусть Φ - совокупность всех отображений вида $S_0 \rightarrow U$ и $\tilde{\Phi}$ - всех эндоморфизмов, продолжающих различные $\varphi \in \Phi$. Так как $|\tilde{\Phi}| = |\Phi| =$

$=]h/2 + 1/2 [^v \geq]h/2 + 1/2 [^2$, то $|\mathfrak{b}(S)| \geq]h/2 + 1/2 [^2$. При этом, поскольку $h \geq 3$, то $S_0 \cap U = \emptyset$ и поэтому эндоморфизм, тождественно действующий на S_0 , не входит в Φ^{\sim} .

Значит, (2.15) и лемма доказаны.

Лемма 2.7. Для всяких чисел $d \geq 2$ выполнено

$$1 +]d [< 2d. \quad (2.16)$$

Доказательство. Так как $]d [< 1 + d$ ввиду (1.1), то при $d \geq 2$ имеем $1 +]d [< 1 + 1 + d \leq 2d$.

Лемма доказана.

Лемма 2.8. Полугруппа S является моногенной.

Доказательство. Подставляя $h = 3, 4, 5$ в неравенства (2.12) и (2.15), получим соответственно $4 \geq |\mathfrak{b}(S)| \geq 5$ (при $h = 3$), $4 \geq |\mathfrak{b}(S)| \geq 10$ (при $h = 4$), $8 \geq |\mathfrak{b}(S)| \geq 10$ (при $h = 5$), что невозможно.

Поэтому пусть далее $h \geq 6$. Логарифмируя неравенства (2.12) и (2.15) по основанию 2, получим

$$] \log_2 h [\geq \log_2 |\mathfrak{b}(S)| \geq \log_2 (]h/2 + 1/2 [^2 + 1) \quad (2.17)$$

и

$$1 +] \log_2]h/2 + 1/2 [[\geq 1 +] \log_2 h/2 [\stackrel{(2.1)}{=}] \log_2 h [\geq \stackrel{(2.17)}{\geq} \log_2 (]h/2 + 1/2 [^2 + 1) > 2 \log_2]h/2 + 1/2 [.$$

Однако,

$1 +] \log_2]h/2 + 1/2 [[< 2 \log_2]h/2 + 1/2 [$
 ввиду $\log_2]h/2 + 1/2 [\geq 2$ (при $h \geq 6$) и леммы 2.7. Получается противоречие. Чтобы завершить доказательство, заметим, что вывод неравенства (2.15) основан на предположении $\nu = |S_0| \geq 2$ и h -нильпотентности S . Так как нильпотентность S не зависит от ν , причем неравенство (2.12) тоже не зависит от ν , то полученное в (2.17) противоречие приводит к недопустимости условия $\nu \geq 2$, т.е. S - моногенная нильполугруппа.

Лемма доказана.

Теорема 2.1. Моногенные нильполугруппы определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе \mathfrak{N}_1 .

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{b}(S) \cong \cong \mathfrak{b}(A_1)$, см. (2.2). Тогда, по предложению 2.1, полугруппа S является h -нильпотентной, а ввиду предложения 2.2, моногенной и, следовательно, изоморфной A_1 ,

в силу того же предложения 2.1.

Теорема доказана.

Далее мы хотим установить определенность моногенных нильполугрупп в классе \mathfrak{N} . Предварительно докажем одно предложение.

Лемма 2.9. Пусть полугруппа S является n -абелевой при $n \geq 2$ и имеет неразложимые элементы, а $\mathfrak{E}(S)$ - нильполугруппа со внешне присоединенной единицей. Тогда S является нильполугруппой.

Доказательство. Пусть условия леммы выполнены. Фиксируем некоторое $n \geq 2$, для которого в S справедливо тождество $(\xi \eta)^n = \xi^n \eta^n$. Отображение $\delta: \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{E}^n$, $b \in \mathfrak{E}$, является эндоморфизмом полугруппы S , ибо

$$(\forall a, b \in S) (ab)\delta = (ab)^n = a^n b^n = a\delta \cdot b\delta. \quad (2.18)$$

Должно быть $\delta \neq \varepsilon$ (ε - единичный эндоморфизм), ибо иначе $b = b^n \in S^2$ для всех $b \in S$, вопреки $S \setminus S^2 \neq \emptyset$. Но тогда δ - нильпотентный эндоморфизм

$$\text{Пусть } p = p(\delta). \text{ Тогда } \delta^p = \delta^{p+1} = \varepsilon$$

и поэтому

$$b^{n^p} = b\delta^p = b\delta^{p+1} = b^{n^{p+1}}$$

при каждом $b \in S$, т.е. S - периодическая полугруппа. Так как моногенная полугруппа $\langle b \rangle$ конечна, то она содержит идемпотент f . Легко видеть, что для любого идемпотента $f \in S$ отображение $\varphi_f: S \rightarrow f$ является идемпотентным эндоморфизмом полугруппы S . Тогда φ_f является или нулем или единицей в $\mathfrak{E}(S)$.

Если $\varphi_f = \varepsilon$, то $c = c\varepsilon = c\varphi_f = f$ при любом $c \in S$, т.е. S - одноэлементна. Но это противоречит наличию неразложимых элементов в S . Значит,

$\varphi_f = \theta$ и S имеет только один идемпотент. Так как каждая моногенная подполугруппа $\langle b \rangle$ содержит идемпотент, то f лежит в пересечении всех моногенных подполугрупп. Поэтому f перестановочен с каждым $b \in S$, т.е. лежит в центре S .

Покажем, что f есть нуль полугруппы S и, значит, $S \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим отображение $\varphi: S \rightarrow S$, определенное для любого $b \in S$ формулой $b\varphi = bf$

. Покажем, что φ есть идемпотентный эндомор-

физм. Пусть $a, b \in S$. Тогда $(ab)\varphi = (ab)f = (ab)f^2 =$
 $= af \cdot bf = a\varphi \cdot b\varphi$, значит, $\varphi \in \mathcal{C}(S)$. При этом
 $b\varphi^2 = (b\varphi)\varphi = (bf)\varphi = (bf)f = bf^2 = b\varphi = b\varphi$ при
любом $b \in S$, т.е. $\varphi = \varphi^2$. Но тогда или $\varphi = \varepsilon$
или $\varphi = \theta$. Если $\varphi = \varepsilon$, то $b = b\varepsilon =$
 $= b\varphi = bf$ для всех $b \in S$, вопреки тому, что
 S содержит неразложимые элементы. Следовательно, $\varphi =$
 $= \theta = \varphi f$, а отсюда следует $b\varphi = b\varphi = b\varphi f = f$
при любом $b \in S$ и в силу центральности f также
 $f b = f$.

Лемма доказана.

Теорема 2.2. Моногенные нильполугруппы определяются своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех n -абелевых, $n \geq 2$, полугрупп, содержащих неразложимые элементы.

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{N}$, $\mathcal{C}(S) \cong \mathcal{C}(A_S)$ см. (2.2). Тогда S и $\mathcal{C}(S)$ удовлетворяют условиям леммы 2.9 и, следовательно, $S \in \mathfrak{N}$. Применяя теорему 2.1, получим $A_S \cong S$, что и требовалось.

В заключение выражаю благодарность Я.В.Хиону за руководство работой.

Литература

1. А й з е н ш т а т А.Я., Ш в а р ц Т.Б., Об определенности структур структурными эндоморфизмами. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 3, 3-11.
2. Г л у с к и н Л.М., Полугруппы. В сб. "Алгебра 1964" (Итоги науки, ВИНТИ АН СССР), 1966, 161-202.
3. Л я п и н Е.С., Полугруппы. Москва, 1960.
4. Л я п и н Е.С., Полугруппы эндоморфизмов. Межвуз. науч. симпоз. по общ. алг., Тарту, 1966, 169-192.
5. М и х а л е в А.В., С к о р н я к о в Л.А., Модули. В сб. "Алгебра, топология 1968" (Итоги науки, ВИНТИ АН СССР), 1970, 57-100.
6. Свердловская тетрадь, Нерешенные задачи теории полугрупп. Свердловск, 1969.
7. Т р е п е т и н М.С., Полукольца эндоморфизмов коммутативных нильпотентных полугрупп. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-га, 1971, 277, 20-36.

8. У л а м С., Нерешенные математические задачи. Москва, 1960.
9. Ш а й н Б.М., Идемпотентные полугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов. Труды молодых ученых (вып. матем.), изд. СГУ, Саратов, 1969, 147-149.
10. Ш е в р и н Л.Н., К общей теории полугрупп. Матем. сб., 1961, 53, № 3, 367-386.
11. Ш е в р и н Л.Н., О полугруппах, все подполугруппы которых нильпотентны. Сиб. матем. ж., 1961, 2, № 6, 936-942.

Поступило
22 III 1973

MONOGENSETE NILPOOLRÜHMÄDE DEFINIERTAVUS

NENDE ENDOMORFISMIPOOLRÜHMÄDE ABIL

M. Trepetin

R e s ü m e e

Olgu A , S ja T lahutamatu elementide sisaldavate nilpoolrühmad, kusjuures A ja S on nilpoolrühmad (A - monogeenne poolrühm), T aga rahuldab samasust $(\xi\eta)^n = \xi^n\eta^n$, $n \geq 2$. Olgu poolrühmade A , S ja T endomorfismide poolrühmad omavahel isomorfsed. Sel juhul on ka need poolrühmad ise omavahel isomorfsed.

DETERMINABILITY OF MONOGENIC NILSEMIGROUPS

BY THEIR SEMIGROUPS OF ENDOMORPHISMS

M.S. Trepetin

S u m m a r y

The main result of the article is: let A , S and T be certain semigroups containing indecomposable elements, where A and S are nil-semigroups, A is monogenic, and T is a semigroup satisfying the identity $(\xi\eta)^n = \xi^n\eta^n$, $n \geq 2$. If the semigroups of endomorphisms of semigroups A , S and T are isomorphic, then the semigroups A , S and T are isomorphic as well.

О ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ МОНОИДОВ ПО СВОЙСТВАМ ИХ ЛЕВЫХ ИДЕАЛОВ

М. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

Известно довольно много результатов, позволяющих судить о свойствах кольца по свойствам модулей над ними. В последнее время появился ряд работ, посвященных изучению аналогичных вопросов в случае моноидов ([2],[3],[5]-[9]). Настоящая статья является продолжением исследований, начатых в статьях [2],[3],[9] автора. Здесь дается описание моноидов, все (соответственно, все конечнопорожденные, все главные) левые идеалы которых сильно плоские (проективные). Некоторые из результатов, касающиеся проективности, были известны раньше (см. [6]).

Не определяемые в работе понятия из теории полугрупп и теории категорий можно найти в книгах [4] и [10] соответственно.

Пусть S - моноид, т.е. полугруппа с единицей. Множество M называется левым полигоном моноида S или левым S -полигоном, если для любых элементов $s \in S$ и $m \in M$ определено произведение $sm \in M$, причем $(s_1 s_2) m = s_1 (s_2 m)$ и $1m = m$ для всех $s_1, s_2 \in S$ и $m \in M$. Аналогично определяются правые S -полигоны.

Пусть A - правый и M - левый полигоны моноида S . В прямом произведении $A \times M$ множеств A и M следующим образом задаем отношение $\theta : (a_1, m_1) \theta (a_2, m_2)$, где $a_1, a_2 \in A, m_1, m_2 \in M$, тогда и только тогда, когда найдется такая конечная цепочка пар из $A \times M$, что первая пара цепочки совпадает с (a_1, m_1) , последняя - с (a_2, m_2) , а переход от каждой пары цепочки к последующей осуществляется при помощи переброски элемента из S , т.е., от пары (as, m) ,

где $a \in A$, $s \in S$, $m \in M$, переходят к паре (a, sm) или наоборот. Отношение θ оказывается отношением эквивалентности. Фактормножество $(A \times M) / \theta$ называется тензорным произведением $A \otimes_S M$ полигонов A и M .

Если левый S -полигон M зафиксировать, то $\otimes_S M$ оказывается функтором из категории всех правых S -полигонов в категорию множеств (см. [11], § 3). Мы будем говорить, что левый S -полигон M является плоским, если функтор $\otimes_S M$ сохраняет мономорфизмы.

Пусть теперь K — некоторая категория, A , B и C — объекты этой категории, а $\alpha: A \rightarrow B$ и $\beta, \gamma: B \rightarrow C$ — морфизмы этой категории. Говорят, что морфизм α является уравнивателем морфизмов β и γ , если $\beta\alpha = \gamma\alpha$ и из того, что для некоторого морфизма $\alpha': A' \rightarrow B$ имеет место равенство $\beta\alpha' = \gamma\alpha'$, следует существование единственного морфизма $\varphi: A' \rightarrow A$ такого, что $\alpha' = \alpha\varphi$. Уравниватель, если он существует, называется мономорфизмом (см. [10]).

Пусть заданы морфизмы $\alpha: A \rightarrow C$ и $\beta: B \rightarrow C$. Коммутативный квадрат

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{x_2} & B \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

называется коуниверсальным для морфизмов α и β , если из коммутативности квадрата

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{x_2} & B \\ x_1 \downarrow & & \downarrow \beta \\ A & \xrightarrow{\alpha} & C \end{array}$$

следует существование единственного морфизма $\mu: X \rightarrow P$ такого, что $x_1 = \pi_1 \mu$ и $x_2 = \pi_2 \mu$. В случае категории полигонов или категории множеств можно получить коуниверсальный квадрат для морфизмов α и β следующим образом: $P = \{(a, b) \mid (a, b) \in A \times B, \alpha(a) = \beta(b)\}$, а π_1 и π_2 совпадают с ограничениями на P соответственно первой и второй проекций прямого произведения $A \times B$ (см. [10]).

Будем говорить, что левый S -полигон M является сильно плоским, если функтор $\otimes_S M$ сохраняет уравниватели и коуниверсальные квадраты.

Всякий сильно плоский полигон является плоским. Сильная плоскость, в свою очередь, следует из проективности (см. [3], п. 2).

Для доказательства следующих теорем нам понадобятся два результата из [11] (первый из них мы цитируем частично).

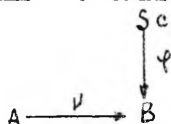
Теорема А. Следующие свойства левого S -полигона M эквивалентны:

- а) M сильно плоский.
 б) Если $sx = ty$, где $x, y \in M$ и $s, t \in S$, то тогда существует $z \in M$ и $s', t' \in S$ такие, что $x = s'z$, $y = t'z$ и $ss' = tt'$; кроме того, если $x = y$, то можно выбрать $s' = t'$.

Теорема В. Каждый левый конечнопорожденный сильно плоский полигон является непересекающимся объединением циклических полигонов.¹

Предложение 1. Пусть S — моноид и $e \in S$. Главный левый идеал S_e является проективным тогда и только тогда, когда существует такой элемент $u \in S$, что $uc = c$ и из равенства $ac = bc$, $a, b \in S$, всегда следует равенство $au = bu$.

Доказательство. Достаточность. Пусть для элемента c существует элемент $u \in S$ с указанными свойствами. Рассмотрим диаграмму левых S -полигонов



где ν — эпиморфизм. Дополним диаграмму эпиморфизмом $\pi: S \rightarrow S_c$, где $\pi(1) = c$. Пусть, далее, ψ — такой гомоморфизм из S в A , что $\nu(\psi(1)) = \varphi(c)$.

Определим теперь отображение $\chi: S_c \rightarrow S$, полагая $\chi(s_c) = su$ для всех $s \in S$. Если $s_1 c = s_2 c$, то $\chi(s_1 c) = \chi(s_2 c)$, так как $s_1 u = s_2 u$ по условию. Значит, χ — действительно отображение. Ясно, что χ — S -гомоморфизм. Пусть теперь sc — произвольный элемент из S_c . Тогда $\nu\psi\chi(sc) = \nu\psi(su) = \varphi(su \cdot c) = \varphi(sc)$. Значит, главный левый идеал

¹ Определение циклического полигона см. в [5].

S_c действительно проективен.

Необходимость. Пусть S_c проективен. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} & & S_c \\ & & \downarrow 1_{S_c} \\ S & \xrightarrow{\pi} & S_c \end{array}$$

где $\pi(1) = c$. Из проективности левого идеала S_c следует существование такого гомоморфизма $\varphi: S_c \rightarrow S$, что $\pi\varphi = 1_{S_c}$. Пусть $u = \varphi(c)$. Тогда $uc = \pi(u) = \pi\varphi(c) = 1_{S_c}(c) = c$.

Пусть, далее, для элементов $a, b \in S$ имеет место равенство $ac = bc$. Тогда

$$au = a\varphi(c) = \varphi(ac) = \varphi(bc) = b\varphi(c) = bu.$$

Предложение доказано.

Следствие 1. Главный левый идеал S_c моноида S проективен тогда и только тогда, когда он как левый S -полигон изоморфен левому главному идеалу с идемпотентным образующим.

Доказательство. Пусть левый идеал S_c моноида S проективен и u — элемент, обладающий свойствами, указанными в формулировке предложения 1. Тогда из равенства $uc = c$ следует, что $uc = cu$, т.е., что u — идемпотент. Кроме того, левый идеал S_c изоморфен левому идеалу Su . Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что гомоморфизм χ в доказательстве предложения является мономорфизмом. Но если $\chi(s_1c) = \chi(s_2c)$, $s_1, s_2 \in S$, то $s_1u = s_2u$, откуда $(s_1u)c = (s_2u)c$ или $s_1c = s_2c$. Значит, χ — действительно мономорфизм. Если же, наоборот, главный левый идеал изоморфен левому идеалу с идемпотентным образующим, то он, конечно, проективен (как ретракт моноида S , рассматриваемого как левый S -полигон (см. [11], § 4)).

Следствие 2. Все главные левые идеалы моноида S являются проективными тогда и только тогда, когда для произвольного элемента $c \in S$ найдется такой элемент $u \in S$, что $uc = c$ и из равенства $ac = bc$, где $a, b \in S$, всегда следует равенство $au = bu$. При этом $u^2 = u$.

Заметим, что утверждение предложения 1 доказано, по

существо, также и в работе [6]. Исходя из предложения 1, автором в статье [9] доказана.

Теорема С. Если S - (не обязательно коммутативный) моноид, который разлагается в коммутативную связку подгрупп с сокращением, то все главные левые идеалы моноида S являются проективными тогда и только тогда, когда S разлагается в коммутативную связку моноидов с сокращением.

Следствие. Пусть S - коммутативный моноид. Все главные идеалы моноида S являются проективными тогда и только тогда, когда моноид S разлагается в связку моноидов с сокращением.

Как показывает следующий пример, в общем случае из проективности всех главных левых идеалов моноида S не следует, что моноид S разлагается в коммутативную связку подгрупп с сокращением. Более того, это не следует даже из проективности всех (и левых, и правых) идеалов.

Пример. Пусть $S = 1 \cup S'$, где S' - подгруппа с левой обратимостью, содержащая по крайней мере два идемпотента. Тогда S имеет лишь один собственный левый идеал S' , который порождается любым своим идемпотентом. По следствию 1 к предложению 1 S' проективен. Подгруппа S' представляет из себя объединение своих непересекающихся минимальных правых идеалов, которые являются группами (см. [4], стр. 315). Ясно, что тогда все собственные и правые идеалы моноида S тоже представляют из себя объединения некоторого количества минимальных правых идеалов подгруппы S . Так как все они являются группами, то они имеют идемпотентные образующие и являются, следовательно, проективными. Тогда, конечно, проективными являются и все их непересекающиеся объединения (см. [10]), т.е. все правые идеалы моноида S . С другой стороны, моноид S не разлагается в коммутативную связку подгрупп с сокращением, так как каждая компонента такой связки может содержать лишь один идемпотент, а в подгруппе S' идемпотенты образуют подподгруппу с левым умножением, откуда легко получается, что все идемпотенты подгруппы S' должны лежать в одной компоненте.

Предложение 2. Все левые главные идеалы моноида S являются сильно плоскими тогда и только тогда, когда из равенства $ac = bc$, где $a, b, c \in S$, всегда

следует существование такого элемента $u \in S$, что $uc = c$ и $au = bu$.

Доказательство. Необходимость. Пусть имеет место равенство $ac = bc$, где $a, b, c \in S$: Так как, по условию, идеал Sc сильно плоский, то из теоремы А следует существование таких элементов $t \in S$ и $z \in Sc$, что $c = tz$ и $at = bt$. Так как $z \in Sc$, то найдется такой элемент $v \in S$, что $z = vc$. Пусть $u = tv$. Тогда $c = tz = tvc = uc$ и $au = a(tv) = (at)v = (bt)v = b(tv) = bu$.

Достаточность. Пусть $c \in S$ и $z_1, z_2 \in Sc$, причем $xz_1 = yz_2$, где $x, y \in S$. Пусть, кроме того, $z_1 = s_1c$ и $z_2 = s_2c$ для каких-то $s_1, s_2 \in S$. Тогда $(xs_1)c = (ys_2)c$ и, по условию, найдется такой элемент $u \in S$, что $c = uc$ и $(xs_1)u = (ys_2)u$. Из этого вытекает, что $x(s_1u) = y(s_2u)$, $z_1 = (s_1u)c$ и $z_2 = (s_2u)c$. Теперь из той же теоремы А вытекает, что левый идеал Sc сильно плоский. Предложение доказано.

Заметим, что условие, фигурирующее в формулировке последнего предложения, мало отличается от условия в формулировке следствия 2 к предложению I. Следующий пример показывает, что существуют моноиды, все левые главные идеалы которых сильно плоские, но не проективные.

Пример. Пусть $S_1 = \{1, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ - бесконечная полугруппа, где умножение задано следующим правилом: $e_k e_l = e_{\min(k, l)}$ а $S_2 = \{x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ - бесконечная моногенная полугруппа. Пусть $S = S_1 \cup S_2$. Умножение элементов из S_1 на элементы из S_2 определим следующим образом: $s_1 x^n = x^n s_1 = x^n$ для всяких $s_1 \in S_1$ и $n \in N$ (N - множество натуральных чисел). В результате S оказывается коммутативным моноидом. Покажем, что все главные идеалы моноида S являются сильно плоскими. Если $c \in S_1$, то идеал Sc даже проективен (см. следствие I к предложению I). Рассмотрим идеал Sx^n , где $n \in N$. Тогда равенство $ax^n = bx^n$ где $a, b \in S$, возможно лишь в случае, когда

$a = e_k, b = e_l$ для каких-то натуральных k и l .
 В этом случае $ax^n = bx^n = x^n$. Тогда для e_m , где
 $m > k, m > l$, имеет место равенства $ae_m =$
 $= be_m = e_m$ и $e_m x^n = x^n$. Теперь из предложения
 2 следует, что все главные идеалы моноида S сильно плоские.
 Допустим, что моноид S является коммутативной связкой
 моноидов $S_\alpha, \alpha \in I$. Пусть $x \in S_{\alpha_0}$ для какого-то
 $\alpha_0 \in I$. Тогда $x^n \in S_{\alpha_0}$, а значит $S_2 \subseteq S_{\alpha_0}$.
 Единицей подгруппы S_{α_0} , очевидно, должен служить
 один из элементов подгруппы S_1 . Пусть этой единицей
 будет элемент $e_r, r \in N$. Рассмотрим элемент $e_s,$
 $s \in N, s > r$. Так как $e_s = e_s e_r$ и $e_s x = x, a e_r$ и
 x принадлежат одной и той же компоненте, то и элементы
 e_s и x должны принадлежать к одной и той же компоненте.
 Значит, элемент $e_s \in S_{\alpha_0}$. Отсюда следует, что компонен-
 та S_{α_0} не является моноидом с сокращением. К такому же
 заключению мы приходим и в предположении, что I является
 единицей компоненты S_{α_0} . Из следствия к теореме C
 вытекает теперь, что не все главные идеалы моноида S про-
 ективны.

Следующее предложение показывает, что все же во мно-
 гих случаях из сильной плоскости всех левых главных идеа-
 лов моноида следует их проективность.

Предложение 3. Пусть моноид S разлагается в комму-
 тативную связку подгрупп с сокращением, $S = US_\alpha, \alpha \in I,$
 причем в подструктуре I все цепи конечны. Все главные ле-
 вые идеалы моноида S являются сильно плоскими тогда и
 только тогда, когда они являются проективными.

Доказательство. Достаточность вытекает из того, что
 каждый проективный полигон является сильно плоским ([3],
 лемма 3).

Необходимость. В работе [1] показано, что среди всех
 разложений моноида S в коммутативную связку подгрупп с
 сокращением имеется максимальное разложение, которое ха-
 рактеризуется тем, что два элемента e и d из S попа-
 дут в одну и ту же компоненту связки тогда и только тогда,
 когда для любых $a, b \in S$ из $ae = be$ всегда следует
 $ad = bd$ и наоборот. Ввиду максимальности этого раз-
 ложения ясно, что и в подструктуре, соответствующей этому
 разложению, все цепи будут конечными. Поэтому мы будем счи-

тять, что мы имеем дело именно с этим разложением. Если α_0 - наибольший элемент полуструктур I , то, так как S - моноид, компонента S_{α_0} нашей связки содержит единицу. Пусть теперь β такой элемент, что все компоненты $S_{\alpha}, \alpha \in I, \alpha > \beta$, содержат единицы. Покажем, что тогда и компонента S_{β} содержит единицу. Рассмотрим вначале случай, когда β непосредственно предшествует лишь одному элементу α . Пусть $d \in S_{\beta}$. Тогда найдутся такие элементы $a, b \in S$, что $ad = bd$, но $a e_{\alpha} \neq b e_{\alpha}$ где e_{α} - единица компонента S_{α} . По предложению 2 найдется такой элемент $u \in S$, что $ud = d$ и $au = bu$. Пусть $u \in S_{\gamma}, \gamma \in I$. Из равенства $ud = d$ следует, что $\gamma \geq \beta$. Если $\gamma \geq \alpha$, то из равенства $au = bu$ вытекает равенство $a e_{\alpha} = b e_{\alpha}$. Значит, $\gamma = \beta$. Следовательно, u - единица компонента S_{β} . В случае, если $\beta = \alpha_1 \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in I$, где компоненты S_{α_1} и S_{α_2} содержат единицы e_{α_1} и e_{α_2} соответственно, элемент $e_{\alpha_1} \cdot e_{\alpha_2}$ представляет из себя единицу компонента S_{β} . Значит, моноид S является коммутативной связкой моноидов с сокращением и, согласно теореме С, все его главные левые идеалы проективны. Предложение доказано.

Предложение 4. Следующие свойства моноида S эквивалентны:

- (1) все левые идеалы моноида S сильно плоские;
- (2) все конечнопорожденные левые идеалы моноида S сильно плоские;
- (3) а) из равенства $ac = bc$, где $a, b, c \in S$ всегда следует существование такого элемента $u \in S$, что $uc = c$ и $au = bu$,
 б) все конечнопорожденные левые идеалы моноида S являются объединениями непересекающихся главных левых идеалов моноида S .

Доказательство. Импликация (1) \implies (2) очевидна. Для доказательства импликации (2) \implies (3) отметим, что условие а) является следствием предложения 2, а условие б) - теоремы В. Докажем импликацию (3) \implies (2). Из условия а) ввиду предложения 2 вытекает, что все главные левые идеалы моноида S сильно плоские. Так как по предложению 5.2 работы [11] каждое объединение непересекающихся сильно плоских полиго-

нов является сильно плоским, то сильно плоскими являются и все конечнопорожденные левые идеалы моноида S . Докажем, наконец, импликацию (2) \implies (1). Пусть I — произвольный левый идеал моноида S , $x, y \in I$ и имеет место равенство $sx = ty$, где $s, t \in S$. Обозначим через J левый идеал, порожденный элементами x и y . По условию, левый идеал J сильно плоский. Из теоремы А вытекает тогда существование таких элементов $s't' \in S$ и $z \in J$, что $x = s'z$, $y = t'z$ и $ss' = tt'$. Так как $J \subseteq I$, то $z \in I$. Теперь из той же теоремы А вытекает, что левый идеал I является сильно плоским. Предложение доказано.

Предложение 5. Пусть S — моноид. Все конечнопорожденные левые идеалы моноида S являются проективными тогда и только тогда, когда (1) для произвольного элемента $c \in S$ найдется такой элемент $u \in S$, что $uc = c$ и из равенства $ac = bc$, где $a, b \in S$, всегда следует $au = bu$ и (2) все конечнопорожденные левые идеалы моноида S являются объединениями его непересекающихся главных левых идеалов.

Доказательство. Достаточность следует из следствия 2 к предложению 1, так как, очевидно, объединение непересекающихся проективных полигонов всегда проективно. Докажем необходимость. Выполнение условия (1) является следствием предложения 1. Если все конечнопорожденные левые идеалы моноида S проективны, то они сильно плоские. Тогда, согласно теореме В, все они являются объединениями непересекающихся главных левых идеалов. Предложение доказано.

Заметим, что, исходя из других соображений утверждение, близкое к утверждению предложения 5, доказано в [6].

Литература

1. Бурмистрович И.Е., Коммутативные связки полугрупп с сокращением, Сиб. матем. ж., 1965, 6, № 2, 284-299.
2. Кильи М., О плоских полигонах. Уч. зап. Тартуск. ун-та., 1970, 253, 66-72.
3. Кильи М., К гомологической классификации моноидов. Сиб. матем. ж., 1972, 13, № 3, 578-586.

4. Д я п и н Е.С., Подгруппы. Москва, 1960.
5. С к о р н я к о в Л.А., О гомологической классификации моноидов. Сб. матем. ж., 1969, 10, № 5, 1139-1143.
6. Д о р о ф е е в а М.Р., Hereditary and semihereditary monoids. Semigroup Forum, 1972, 4, 301-311.
7. F e l l e r E.H. and Gantos R.L., Indecomposable and injective S-systems with zero. Math. Nachr., 1969, 41, 37-48.
8. F e l l e r E.H. and G a n t o s R.L., Completely injective semigroups. Pacif. J. Math., 1969, 31, 359-366.
9. K i l p M., Commutative monoids all of whose principal ideals are projective. Semigroup Forum, 1973, 334-339.
10. M i t c h e l l B., Theory of categories. New-York-London, 1965.
11. S t e n s t r ö m B., Flatness and localization over monoids. Math. Nachr., 1972, 315-334.

П о с т у п и л о
22 III 1973

MONOIDIDE HOMOLOGILISEST KLASSIFIKATSIOONIST

NENDE VASAKPOOLSETE IDEAALIDE OMADUSTE JÄRGI

M. Kilp

R e s ü m e e

Artiklis antakse selliste monoidide kirjeldus, mille kõik (kõik lõplikult moodustatud, kõik ühe moodustajaga) vasakpoolsed ideaalid on tugevalt lamedad (projektiivsed).

ON HOMOLOGICAL CLASSIFICATION OF MONOIDS BY

PROPERTIES OF THEIR LEFT IDEALS

M. Kilp

S u m m a r y

Let S be a monoid. A set M is said to be a left S -polygon if for elements of M is defined a left multiplication by elements of S such that $(s_1 s_2)m = s_1(s_2 m)$ and $1m = m$ for all $s_1, s_2 \in S$ and $m \in M$. Right S -polygons are defined analogously.

Let \mathcal{B} be a right S -polygon and M a left S -polygon. On Cartesian product $\mathcal{B} \times M$ we consider the smallest equivalence relation generated by $(bs, m) \equiv (b, sm)$ for

all $s \in S$ and $t \in M$. The set of classes of this equivalence we define to be a tensor product $B \otimes_S M$ of polygons B and M .

A left S -polygon M is strongly flat if the functor $\otimes_S M$ preserves equalizers and pullbacks. Every projective S -polygon is strongly flat.

Proposition 2. All principal left ideals of a monoid S are strongly flat iff from $ac = bc$, $a, b, c \in S$ it follows that there exists $u \in S$ such that $uc = c$ and $au = bu$.

Proposition 4. The following properties of monoid S are equivalent:

- (1) all left ideals of S are strongly flat,
- (2) all finitely generated left ideals of S are strongly flat;
- (3) a) from $ac = bc$, $a, b, c \in S$, it follows that there exists $u \in S$ such that $uc = c$ and $au = bu$,
 b) all finitely generated left ideals of S are disjoint unions of principal left ideals of S .

Proposition 5: All finitely generated left ideals of monoid S are projective iff (1) for arbitrary $c \in S$ there exists $u \in S$ such that $uc = c$ and from $ac = bc$, $a, b \in S$, it follows $au = bu$, and (2) all finitely generated left ideals of S are disjoint unions of principal left ideals of S .

ОБ ЭНДОМОРФИЗМАХ СВОБОДНЫХ ПОЛИГОНОВ

В. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

Пусть S -моноид, т.е. полугруппа с единицей 1_S . Множество A называется правым S -полигоном, если для каждого $\alpha \in A$ и каждого элемента s из S определено произведение αs , принадлежащее множеству A , причем $\alpha 1_S = \alpha$ и $(\alpha s_1) s_2 = \alpha (s_1 s_2)$ для любого $\alpha \in A$ и любых s_1 и s_2 из S . Понятие полигона, таким образом, является естественным аналогом в теории полугруппы понятия унитарного модуля над кольцом с единицей.

В теории колец большую роль играют кольца эндоморфизмов свободных модулей. Известно, что полное кольцо эндоморфизмов свободного R -модуля с n образующими изоморфно полному кольцу матриц R_n порядка n над данным кольцом

R . Изучению матричных колец, а также их мультипликативных полугрупп посвящен ряд работ. Так, например, в работе [1] дана абстрактная характеристика мультипликативной полугруппы матричного кольца над телом. В книге ([6], стр. 24) показано, что матричное кольцо R_n регулярно в том и только в том случае, когда регулярно кольцо R .

В данной заметке изучается полугруппа эндоморфизмов свободного S -полигона. Вопрос об изучении этой полугруппы был поставлен профессором Л.А.Скорняковым в его докладе на X Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме в г. Новосибирске. Автору об этом сообщил М.А. Кильп, который тогда располагал прямым доказательством следствия из теоремы 4. Полугруппа эндоморфизмов свободного S -полигона с ξ образующими, где ξ - произвольная мощность, изоморфна (теорема 1) определенной матричной полугруппе S_ξ . Оказывается (теорема 4), что полугруппа S_ξ будет регулярной в том и только том случае, если полугруппа S регулярная и каждый правый идеал полугруппы S , порожденный η образующими, где

$1 \in \eta \leq \xi$, является главным. Теорема 3 и лемма 5 дают абстрактную характеристику полугруппы S_ξ . Заметим, что в случае, когда $S = 1_S$ полугруппа S_ξ изоморфна полугруппе всех преобразований множества мощности ξ .

Пусть S — моноид и пусть A и B являются правыми S -полигонами. В дальнейшем будем говорить просто о S -полигонах, имея в виду правые S -полигоны. Отображение φ множества A в множество B называется S -гомоморфизмом S -полигона A в S -полигон B , если для произвольных $\alpha \in A$, $s \in S$ выполняется $\varphi(\alpha s) = \varphi(\alpha) s$. Отсюда ясны определения S -эндоморфизмов, S -изоморфизмов и S -автоморфизмов. Скажем, что S -полигон A порождается своим подмножеством K , если каждый элемент $\alpha \in A$ представим в виде $\alpha = \alpha' s$, где $\alpha' \in K$ и $s \in S$. Подмножество K назовем, в этом случае, системой образующих S -полигона A . Назовем S -полигон A с системой образующих $\Delta = \{\delta_i\}_{i \in I}$ свободным над Δ , если всякое отображение множества Δ в произвольный S -полигон B однозначно продолжается до S -гомоморфизма S -полигона A в S -полигон B .

Лемма 1. Произвольный S -полигон A с системой образующих $\Delta = \{\delta_i\}_{i \in I}$ является свободным над Δ тогда и только тогда, когда для произвольных $\delta_k, \delta_j \in \Delta$ и $s, t \in S$ из равенства $\delta_k s = \delta_j t$ следует $k = j$ и $s = t$.

Доказательство. Необходимость. Пусть A — свободный S -полигон с системой образующих $\Delta = \{\delta_i\}_{i \in I}$. Предположим, что для некоторых элементов $\delta_k, \delta_j \in \Delta$ и $s, t \in S$ выполняется равенство $\delta_k s = \delta_j t$. Рассмотрим множество $\Delta' = \{\delta'_i\}_{i \in I}$, мощность которого равна мощности множества Δ . Пусть $\pi: \delta_i \rightarrow \delta'_i$ является взаимно-однозначным отображением множества Δ на Δ' . Образуем множество A' , состоящее из всевозможных выражений вида $\delta'_i s$, где $\delta'_i \in \Delta'$ и $s \in S$, причем элементы вида $\delta'_i s$ отождествим с элементами δ'_i и считаем $\delta'_k s = \delta'_j t$, если $k = j$, $s = t$. Определяя для каждого $\delta'_i \in \Delta'$ и произвольных $s, t \in S$ произведение $(\delta'_i s)t$ следующим образом:

$$(\delta'_i s)t = \delta'_i(st),$$

превращаем множество \mathcal{A}' в S -полигон. Так как \mathcal{A} S -свободный S -полигон, то существует S -гомоморфизм π' из \mathcal{A} в \mathcal{A}' , являющийся продолжением отображения π . Тогда

$$\begin{aligned}\pi'(\delta_k s) &= \pi'(\delta_k) s = \pi(\delta_k) s = \delta'_k s; \\ \pi'(\delta_j t) &= \pi'(\delta_j) t = \pi(\delta_j) t = \delta'_j t.\end{aligned}$$

Но $\delta_k s = \delta_j t$, следовательно, $\delta'_k s = \delta'_j t$. Последнее может выполняться, в силу наших построений, лишь тогда, когда $k = j$ и $s = t$.

Достаточность. Пусть φ — некоторое отображение множества $\Delta = \{\delta_i\}_{i \in I}$ в элементы произвольного S -полигона \mathcal{B} . Определим отображение φ' из S -полигона \mathcal{A} в S -полигон \mathcal{B} следующим образом:

$$\varphi'(\delta_i s) = \varphi(\delta_i) s$$

для произвольных $\delta_i \in \Delta$, $s \in S$. Так как Δ является системой образующих S -полигона \mathcal{A} , то отображение φ' определено на всем S -полигоне \mathcal{A} . Ввиду однозначности представления элементов из \mathcal{A} в виде $\delta_i s$ ($i \in I$, $s \in S$) отображение φ' является однозначным. Из равенств

$$\begin{aligned}\varphi'[(\delta_i s) t] &= \varphi'[\delta_i (st)] = \varphi(\delta_i)(st) = [\varphi(\delta_i) s] t = \varphi'(\delta_i s) t, \\ \varphi'(\delta_i) &= \varphi'(\delta_i 1_S) = \varphi(\delta_i) 1_S = \varphi(\delta_i)\end{aligned}$$

следует, что φ' является S -гомоморфизмом и продолжением отображения φ .

Пусть ψ — некоторый S -гомоморфизм S -полигона \mathcal{A} в S -полигон \mathcal{B} , являющийся продолжением отображения φ . Тогда

$$\varphi(\delta_i s) = \psi(\delta_i) s = \varphi(\delta_i) s = \varphi'(\delta_i s)$$

следовательно, $\psi = \varphi'$. Лемма доказана.

Введем одну полугруппу, играющую в дальнейшем значительную роль. Пусть $I \neq \emptyset$ произвольное множество и ξ его мощность. Будем предполагать аксиому выбора справедливой для всех множеств. Тогда по теореме Цермело каждое множество можно вполне упорядочить. Зафиксируем некоторую

вполне упорядоченность множества I . Теперь множество I можно рассматривать, как множество индексов столбцов или строк некоторых квадратных матриц порядка ξ . Обозначим через S_ξ совокупность всевозможных квадратных матриц порядка ξ , в которых в каждом столбце находится ровно по одному элементу из S , а на остальных местах стоит символ 0. В качестве умножения элементов из S_ξ возьмем обычное умножение матриц, полагая

$$s0 = 0s = 0, \quad s + 0 = 0 + s = s$$

для каждого $s \in S$.

Лемма 2. Совокупность матриц S_ξ является моноидом.

Доказательство. Ассоциативность умножения матриц из S_ξ следует из ассоциативности обычного умножения матриц. Единицей полугруппы S_ξ является матрица E , у которой все элементы главной диагонали равны 1_S .

Полугруппу S_ξ назовем матричной полугруппой порядка ξ над моноидом S .

Теорема 1. Полугруппа всех S -эндоморфизмов свободного S -полигона A с множеством образующих $\Delta = \{\delta_i\}_{i \in I}$, мощность которого равна ξ , изоморфна матричной полугруппе S_ξ .

Доказательство. Пусть φ является S -эндоморфизмом свободного S -полигона A . Из определения свободного S -полигона следует, что каждый S -эндоморфизм φ может быть задан образами элементов из Δ . Пусть для некоторого $i \in I$ $\varphi(\delta_i) = \delta_j s$, тогда обозначим элемент $j \in I$ через φ_i , а элемент $s \in S$ через $s_{\varphi_i, i}$. Таким образом, можно записать, что для каждого

$$\varphi(\delta_i) = \delta_{\varphi_i} s_{\varphi_i, i}$$

Эндоморфизму φ поставим в соответствие матрицу F порядка ξ , в которой элементы $s_{\varphi_i, i}$ стоят на местах (φ_i, i) , т.е. на пересечении строки с индексом φ_i и столбца с индексом i , а на остальных местах этой матрицы стоит символ 0. В каждом столбце матрицы F стоит ровно один элемент из S , так как у каждого образующего $\delta_i \in \Delta$ ровно один образ при S -эндоморфизме φ . Следовательно, $F \in S_\xi$ и мы показали, что каждому S -эндоморфизму S -модуля A соответствует однозначно определен-

ная матрица из S_ξ .

Обратно, пусть матрица $F \in S_\xi$. Тогда для каждого $i \in I$ существует ровно один $j \in I$, такой, что на месте (j, i) в матрице F стоит элемент из S , который мы обозначим δ_{ji} . Положим $\varphi'(\delta_i) = \delta_j \delta_{ji}$. Тем самым получено отображение φ' множества Δ в A , которое однозначно может быть продолжено до S -эндоморфизма S -полигона A . Таким образом, каждой матрице $F \in S_\xi$ соответствует единственный S -эндоморфизм φ рассматриваемого

S -полигона A и, следовательно, это соответствие взаимно-однозначное. Остается показать, что это соответствие сохраняет операцию.

Пусть S -эндоморфизму φ соответствует матрица $F = (f_{ji})$, а S -эндоморфизму ψ — матрица $P = (p_{ji})$. Обозначим через $T = (t_{ji})$ матрицу PF , т.е. для каждого $i \in I$ имеет место

$$t_{ji} = \begin{cases} p_{\varphi\varphi i} \cdot f_{\varphi i} \cdot \delta_{\varphi i, i} & , \text{ если } j = \varphi\varphi i \\ 0 & , \text{ если } j \neq \varphi\varphi i \end{cases}$$

Тогда для произвольного $i \in I$ выполняется

$$\begin{aligned} \psi\varphi(\delta_i) &= \psi(\delta_{\varphi i} \delta_{\varphi i, i}) = \psi(\delta_{\varphi i}) \delta_{\varphi i, i} = \\ &= \delta_{\varphi\varphi i} (p_{\varphi\varphi i} \cdot f_{\varphi i} \cdot \delta_{\varphi i, i}) = \delta_{\varphi\varphi i} t_{\varphi\varphi i, i} \end{aligned}$$

и, следовательно, S -эндоморфизму $\psi\varphi$ соответствует матрица $PF \in S_\xi$. Теорема доказана.

Введем еще одну поделушку, которая нам понадобится в дальнейшем. Пусть, как и прежде, $I \neq \emptyset$ — некоторое множество мощности ξ с зафиксированной вполне упорядоченностью. Обозначим через V_ξ совокупность всевозможных

$(\xi+1)$ -мерных векторов вида $(\sigma, \dots, \delta_i, \dots)_{i \in I}$,

на первом месте которых стоит некоторое отображение σ множества I в себя, а на остальных местах стоят элементы

из S . Для произвольных элементов $(\sigma, \dots, \delta_i, \dots)_{i \in I}$,

$(\tau, \dots, \delta_i, \dots)_{i \in I}$ из V_ξ определим умножение:

$$(\sigma, \dots, \delta_i, \dots)_{i \in I} (\tau, \dots, \delta_i, \dots)_{i \in I} = (\sigma\tau, \dots, \delta_{\sigma(i)} \delta_i, \dots)_{i \in I} (1)$$

Лемма 3. Множество V_ξ относительно операции (1) является поделушкой, изоморфной матричной поделушке S_ξ .

Доказательство. Докажем, что V_ξ и S_ξ изоморфны, а из этого уже будет следовать то, что V_ξ — поделушка.

Пусть $F = (s_{ji})$ - произвольная матрица из $S_{\mathbb{F}}$. Тогда для каждого $i \in I$ найдется единственный $j \in I$ такой, что на месте (j, i) в F стоит элемент из S . Положим $j = \sigma(i)$ и тем самым у нас определено отображение σ множества I в себя. Поставим в соответствие матрице F элемент $\chi(F) = (\sigma, \dots, s_i, \dots)_{i \in I} \in V_{\mathbb{F}}$, в котором на первом месте стоит отображение σ , а на остальных местах стоят элементы из S матрицы F , упорядоченные соответственно упорядоченности номеров столбцов, в которых они находятся в матрице F , т.е. $s_i = s_{\sigma(i), i}$ для каждого $i \in I$. Обратно, пусть $(\sigma, \dots, s_i, \dots)_{i \in I} \in V_{\mathbb{F}}$ - произвольный элемент. Определим соответствие χ , сопоставив этому элементу матрицу $F = (s_{ji}) \in S_{\mathbb{F}}$, в которой

$$s_{ji} = \begin{cases} s_i & , \text{ если } j = \sigma(i) \\ 0 & , \text{ если } j \neq \sigma(i) . \end{cases}$$

Из способа построения соответствий χ и χ' следует, что

$$\chi' \chi(F) = F \quad , \quad \chi \chi'(\sigma, \dots, s_i, \dots)_{i \in I} = (\sigma, \dots, s_i, \dots)_{i \in I}$$

для произвольных $F \in S_{\mathbb{F}}$, $(\sigma, \dots, s_i, \dots)_{i \in I} \in V_{\mathbb{F}}$.

Таким образом, χ - взаимно-однозначное соответствие между

$S_{\mathbb{F}}$ и $V_{\mathbb{F}}$.

Пусть $F = (s_{ji})$, $P = (p_{ji})$ - произвольные элементы из $S_{\mathbb{F}}$ и пусть $\chi(F) = (\sigma, \dots, s_i, \dots)_{i \in I}$,

$\chi(P) = (\pi, \dots, p_i, \dots)$. Через $T = (t_{ji})$ обозначим матрицу FP и пусть $\chi(T) = (\tau, \dots, t_i, \dots)_{i \in I}$. Тогда для каждого $i \in I$ по определению χ будет

$$t_{ji} = \begin{cases} s_{\sigma(i), \pi(i)} p_{\pi(i), i} = s_{\pi(i)} p_i & , \text{ если } j = \tau(i) \\ 0 & , \text{ если } j \neq \tau(i) , \end{cases}$$

следовательно, $\tau(i) = \sigma\pi(i)$ и $t_i = s_{\pi(i)} p_i$, т.е.

$$\chi(T) = (s_{\pi}, \dots, s_{\pi(i)} t_i, \dots)_{i \in I} = \chi(F)\chi(P).$$

Лемма доказана.

В дальнейшем будем отождествлять элементы полугруппы $S_{\mathbb{F}}$ и $V_{\mathbb{F}}$ и, когда нам это будет удобно, матрицу F будем записывать в виде элемента $\chi(F) \in V_{\mathbb{F}}$, где χ - соответствие, определенное в доказательстве леммы 3.

Пусть $S = 1_S$, т.е. S - одноэлементный моноид. Тогда для произвольных элементов $(\sigma, \dots, 1_S, \dots)_{i \in I}$,

$(\tau, \dots, 1_S, \dots)_{i \in I}$ из $V_{\mathbb{F}}$, согласно (I), имеем

$$(\sigma, \dots, \tau, \dots)_{i \in I} (\tau, \dots, \tau, \dots)_{i \in I} = (\sigma\tau, \dots, \tau, \dots)_{i \in I}.$$

Отсюда видно, что в этом случае V_ξ , а значит и S_ξ , изоморфна полугруппе ϵ_I всех отображений множества I в себя.

Рассмотрим абстрактную характеристику полугруппы S_ξ . Обозначим через S_ξ^η , где $1 \leq \eta \leq \xi$, совокупность всех матриц из S_ξ , в которых элементы из S находятся не более, чем в η строках. Через $S_\xi(I_0)$, где $\emptyset \neq I_0 \subset I$, обозначим совокупность всех матриц из S_ξ , в которых элементы из S находятся только в строках с индексами, принадлежащими I_0 .

Лемма 4. Множество матриц S_ξ^η является двусторонним идеалом полугруппы S_ξ . Множество матриц $S_\xi(I_0)$ является правым идеалом полугруппы S_ξ .

Доказательство. Матрицам из S_ξ^η соответствует всевозможные векторы из V_ξ , первые координаты которых суть преобразования множества I в себя, не превосходящие рангом мощность η . Из теории преобразований множеств известно ([2], § 2.2), что совокупность таких преобразований образует двусторонний идеал полугруппы ϵ_I . Отсюда, принимая во внимание правило (1), следует, что S_ξ^η — двусторонний идеал полугруппы S_ξ . Второе утверждение леммы аналогично следует из того факта, что совокупность преобразований множества I , при которых образ I содержится в I_0 , является правым идеалом полугруппы ϵ_I ([2], § 2.2). Лемма доказана.

Преобразование множества I , отображающее все множество I в некоторый элемент $i \in I$ обозначим через V_i . Через S'_ξ обозначим совокупность всех матриц из S_ξ , в которых все элементы из S находятся в одной строке и равны между собой.

Лемма 5. Совокупность матриц S'_ξ является левым идеалом полугруппы S_ξ , изоморфным прямому произведению полугруппы S и полугруппы с левым умножением мощности ξ .

Доказательство. Матрицам из S'_ξ соответствует множество векторов вида $(V_k, \dots, s, \dots)_{i \in I}$, где k, s — произвольные элементы, соответственно, из множеств I и S . Пусть $X = (V_k, \dots, x, \dots)_{i \in I}$,

$A = (\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I}$ - произвольные элементы, соответственно, из S_ξ и S'_ξ . Тогда, согласно (I),

$$\begin{aligned} AX &= (\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I} (\nu_k, \dots, x, \dots)_{i \in I} = \\ &= (\sigma \nu_k, \dots, a_i \nu_k(x), \dots)_{i \in I} = (\sigma \nu_k, \dots, a_k x, \dots)_{i \in I} \end{aligned}$$

Для каждого $i \in I$ выполняется $\sigma \nu_k(i) = \sigma(k) = \nu_{\sigma(k)}(i)$ т.е. $\sigma \nu_k = \nu_{\sigma(k)}$. Следовательно, $AX = (\nu_{\sigma(k)}, \dots, a_k x, \dots)_{i \in I}$ и $AX \in S'_\xi$.

Произвольный элемент $X = (\nu_k, \dots, x, \dots)_{i \in I} \in S'_\xi$ формально можно записать в виде двумерного вектора (ν_k, x) . Правило умножения элементов из S'_ξ в новых обозначениях, запишется в следующем виде:

$$(\nu_k, x)(\nu_j, y) = (\nu_k \nu_j, xy).$$

Отсюда видно, что полугруппа S'_ξ изоморфна прямому произведению полугруппы S и полугруппы всех преобразований ранга I множества I . Последняя полугруппа является полугруппой с левым умножением, так как для произвольных ее элементов ν_k и ν_j имеет место равенство

$$\nu_k \nu_j(i) = \nu_k(j) = k = \nu_k(i)$$

для произвольного $i \in I$. Мощность этой полугруппы равна мощности множества I , т.е. ξ . Лемма доказана.

Элементы из S'_ξ будем, в дальнейшем, записывать в виде двумерных векторов. Для произвольных

$A = (\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I}$ из S_ξ и $X = (\nu_k, x)$ из S'_ξ их произведение запишется в следующем виде:

$$(\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I} (\nu_k, x) = (\nu_{\sigma(k)}, a_k x) \quad (2)$$

Идеал (односторонний) J полугруппы S называется плотно вложенным в S , если он удовлетворяет следующим условиям:

а) всякий нетривиальный гомоморфизм (т.е. не являющийся изоморфизмом) полугруппы S индуцирует нетривиальный гомоморфизм полугруппы J ;

б) если какая-нибудь полугруппа T содержит S в качестве собственной подполугруппы и J является идеалом (соответственно односторонним) в T , то для T существует нетривиальный гомоморфизм, индуцирующий изоморфизм полугрупп J .

Лемма 6. Пусть \mathfrak{D} - подполугруппа полугруппы S_ξ , содержащая S'_ξ . Пусть, далее, некоторая полугруппа \mathfrak{C} содержит \mathfrak{D} и S'_ξ является левым идеалом в \mathfrak{C} . Тогда существует гомоморфизм полугруппы \mathfrak{C} в S_ξ , индуцирующий тождественный автоморфизм полугруппы \mathfrak{D} .

Доказательство. Пусть c - произвольный элемент из \mathfrak{C} . Построим соответствие φ , сопоставив элементу c некоторый элемент $C = (\tau, \dots, c_i, \dots)_{i \in I}$ из S_ξ , так, чтобы это соответствие было гомоморфизмом полугруппы \mathfrak{C} в S_ξ , индуцирующим тождественный автоморфизм полугруппы \mathfrak{D} .

Для произвольного $i \in I$ элемент $E_i = (v_i, 1_s)$ принадлежит S'_ξ , следовательно, $cE_i \in S'_\xi$. Это означает, что существуют элементы $j \in I$ и $c_i \in S$, такие, что $cE_i = (v_j, c_i)$. Положим $\tau(i) = j$ и элемент c_i поставим на $(i+1)$ -ое место искомого вектора C . Проведя эту процедуру для каждого $i \in I$, получим элемент $C = (\tau, \dots, c_i, \dots)_{i \in I}$ из S_ξ , который поставим в соответствие φ элементу c . Из способа построения φ ясно, что это соответствие однозначно определено.

Покажем, что для произвольного элемента $A = (\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I}$ из полугруппы \mathfrak{D} справедливо $\varphi(A) = A$. Пусть $\varphi(A) = (\sigma', \dots, a'_i, \dots)_{i \in I}$. Для произвольного $i \in I$, согласно (2),

$$AE_i = (\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I} (v_i, 1_s) = (v_{\sigma'(i)}, a_i).$$

Тогда, по построению элемента $\varphi(A)$, будет $\sigma'(i) = \sigma(i)$ и $a'_i = a_i$. Это означает, что $\varphi(A) = A$.

Покажем, что φ есть гомоморфизм полугруппы \mathfrak{C} в полугруппу S_ξ . Пусть t, p - произвольные элементы из \mathfrak{C} и $\varphi(t) = (\tau, \dots, t_i, \dots)_{i \in I}$, $\varphi(p) = (\pi, \dots, p_i, \dots)_{i \in I}$. Обозначим элемент $\varphi(tp)$ через $(\sigma, \dots, x_i, \dots)_{i \in I}$. Для произвольного $i \in I$ выполняется

$$\begin{aligned} (tp)E_i &= t(pE_i) = t(v_{\pi(i)}, p_i) = t[E_{\pi(i)} \cdot (v_{\pi(i)}, p_i)] = \\ &= (tE_{\pi(i)}) \cdot (v_{\pi(i)}, p_i) = (v_{t\pi(i)}, t_{\pi(i)}) (v_{\pi(i)}, p_i) = \\ &= (v_{\sigma(i)}, t_{\pi(i)} p_i) \end{aligned}$$

следовательно, $\sigma(i) = \tau\pi(i)$ и $x_i = t_{\pi(i)} p_i$ для

каждого $i \in I$, т.е.

$$\varphi(t\rho) = (\tau\pi, \dots, t_{\pi(i)}\rho_i, \dots)_{i \in I} = \varphi(t)\varphi(\rho).$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Левый идеал S'_ξ является плотно вложенным в полугруппу S_ξ .

Доказательство. а) Пусть φ — нетривиальный гомоморфизм полугруппы S_ξ . Тогда найдется пара элементов $A = (\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I}$, $B = (\tau, \dots, b_i, \dots)_{i \in I}$ из S_ξ такая, что

$$A \neq B, \quad \varphi(A) = \varphi(B)$$

и, значит, можно выбрать, по крайней мере, один элемент $j \in I$, такой, что либо $\sigma(j) \neq \tau(j)$, либо $a_j \neq b_j$. Отсюда следует, что

$$A E_j = (\nu_{\sigma(j)}, a_j) \neq (\nu_{\tau(j)}, b_j) = B E_j.$$

Элементы $A E_j$, $B E_j$ принадлежат S'_ξ и

$$\varphi(A E_j) = \varphi(A)\varphi(E_j) = \varphi(B)\varphi(E_j) = \varphi(B E_j)$$

следовательно, φ индуцирует нетривиальный гомоморфизм полугруппы S'_ξ .

б) Пусть полугруппа \mathfrak{C} содержит S'_ξ в качестве собственной подполугруппы и S'_ξ является левым идеалом полугруппы \mathfrak{C} . Из леммы 6 вытекает существование гомоморфизма φ полугруппы \mathfrak{C} в S'_ξ , при котором $\varphi(A) = A$ для любого элемента $A \in S'_\xi$. Если c — какой-либо элемент из \mathfrak{C} , не содержащийся в S'_ξ и $\varphi(c) \in \mathfrak{C} \in S'_\xi \mathfrak{C}$, то $\varphi(c) = \varphi(c)$ и φ — нетривиальный гомоморфизм, индуцирующий изоморфизм на S'_ξ , в частности и на S'_ξ . Теорема доказана.

Следствие. Идеал S'_ξ^ν ($1 \leq \nu \leq \xi$) является плотно вложенным в S'_ξ .

Доказательство. а) Всякий нетривиальный гомоморфизм полугруппы S'_ξ , как это следует из теоремы 2, индуцирует нетривиальный гомоморфизм полугруппы S'_ξ , а, следовательно, ввиду $S'_\xi \subseteq S'_\xi^\nu$, и полугруппы S'_ξ^ν .

б) Пусть \mathfrak{C} — полугруппа, содержащая S'_ξ в качестве собственной подполугруппы, и S'_ξ^ν является идеалом полугруппы \mathfrak{C} . Пусть c — произвольный элемент из \mathfrak{C} , а $\chi = (\nu_k, \chi)$ — произвольный элемент из S'_ξ . Ввиду

того, что

$$E_k \mathcal{X} = (v_k, \tau_S)(v_k, x) = (v_k, x) = \mathcal{X}$$

справедливо

$${}^c \mathcal{X} = {}^c (E_k \mathcal{X}) = ({}^c E_k) \mathcal{X}$$

Элемент E_k принадлежит S_ξ^{η} , следовательно, и ${}^c E_k$ принадлежит S_ξ^{η} , тогда ${}^c \mathcal{X} = ({}^c E_k) \mathcal{X}$ принадлежит S_ξ^{η} . Отсюда следует, что S_ξ^{η} является левым идеалом полугруппы \mathcal{G} . Из леммы 6 следует, что существует нетривиальный гомоморфизм полугруппы \mathcal{G} , индуцирующий тождественный автоморфизм полугруппы S_ξ^{η} , в частности, полугруппы S_ξ^{η} . Следствие доказано.

Теорема 3. Полугруппа \mathcal{G} изоморфна полугруппе S_ξ тогда и только тогда, когда она содержит плотно вложенный левый идеал, изоморфный S_ξ^{η} .

Доказательство. Необходимость. Пусть ψ - изоморфизм полугруппы \mathcal{G} на S_ξ . Пользуясь определением плотно вложенного идеала, легко проверить, что $\psi(S_\xi^{\eta})$ является плотно вложенным левым идеалом полугруппы \mathcal{G} .

Достаточность. Пусть левый идеал \mathcal{C} полугруппы \mathcal{G} является плотно вложенным в \mathcal{G} и φ - изоморфизм полугруппы \mathcal{C} на S_ξ^{η} . Тогда изоморфизм φ можно продолжить до изоморфизма ψ всей полугруппы \mathcal{G} на некоторую полугруппу \mathcal{C}' ($\psi^{-1}(a) = \mathcal{C}'$), содержащую $S_\xi^{\eta} = \psi^{-1}(x) = \varphi^{-1}(x)$ в качестве плотно вложенного левого идеала. Из леммы 6 следует, что существует гомоморфизм φ полугруппы \mathcal{C}' в S_ξ , индуцирующий тождественный автоморфизм на S_ξ^{η} . Из условия а) определения плотно вложенного идеала вытекает, что φ является изоморфизмом.

Следовательно, \mathcal{C}' изоморфна некоторой подполугруппе $\varphi(\mathcal{C}') = \mathcal{C}''$ полугруппы S_ξ . Допустим, что \mathcal{C}'' - собственная подполугруппа S_ξ . Так как $\varphi(S_\xi^{\eta}) = S_\xi^{\eta}$ является плотно вложенным левым идеалом полугруппы $\varphi(\mathcal{C}') = \mathcal{C}''$ и в то же время левым идеалом полугруппы S_ξ , содержащей \mathcal{C}'' , то по условию б) определения плотно вложенного идеала, должен существовать нетривиальный гомоморфизм полугруппы S_ξ , индуцирующий изоморфизм на S_ξ^{η} . Но это невозможно, так как S_ξ^{η} , по теореме 2, плотно вложен в S_ξ . Таким образом, $\mathcal{C}'' = S_\xi$ и отображе-

ние $\varphi \varphi'$ является изоморфизмом полугруппы ϵ на S_ξ . Теорема доказана.

Теорема 3 вместе с леммой 5 дает абстрактную характеристику полугруппы S_ξ .

Как уже отмечалось, в случае, когда $S = I_S$, полугруппа S_ξ изоморфна полугруппе ϵ_I . В этом случае полугруппа S'_ξ совпадает с полугруппой всех преобразований ранга 1 множества I и теорема 3 дает абстрактную характеристику полугруппы ϵ_I , полученную Е.С. Дялиным в работе [4].

Рассмотрим условие регулярности матричной полугруппы S_ξ . Напомним, что полугруппа S называется регулярной ([3], стр. 104), если для каждого элемента $s \in S$ найдется элемент $x \in S$, такой, что $sxs = s$.

Теорема 4. Для того, чтобы полугруппа S_ξ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа S была регулярной и каждый правый идеал R полугруппы S , порожденный η элементами, где $1 \leq \eta \leq \xi$, был главными.

Доказательство. Необходимость. Пусть S_ξ - регулярная полугруппа. Рассмотрим элемент $X = (\epsilon, \dots, x_i, \dots)_{i \in I}$ полугруппы S_ξ , где ϵ - тождественное преобразование множества I , а x_i - произвольные элементы из S . Существует элемент $Y = (\tau, \dots, y_i, \dots)_{i \in I}$ из S_ξ такой, что $(\epsilon, \dots, x_i, \dots)_{i \in I} (\tau, \dots, y_i, \dots)_{i \in I} (\epsilon, \dots, x_i, \dots)_{i \in I} = (\epsilon, \dots, x_i, \dots)_{i \in I}$.

Преобразуя левую часть равенства согласно (1), получим

$$\begin{aligned} X Y X &= (\epsilon \tau \epsilon, \dots, x_{\tau(i)} y_i x_i, \dots)_{i \in I} = \\ &= (\tau, \dots, x_{\tau(i)} y_i x_i, \dots)_{i \in I}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\tau = \epsilon$ и $x_{\tau(i)} y_i x_i = x_i y_i x_i = x_i$.

Ввиду произвольности элемента x_i , полугруппа S регулярная.

Пусть R - правый идеал полугруппы S , порожденный η элементами, где $1 \leq \eta \leq \xi$. Зафиксируем некоторое подмножество I_0 множества I , мощность которого равна η , и с его помощью пронумеруем образующие правого идеала R . Пусть $\{g_j\}_{j \in I_0}$ - множество образующих правого идеала R . Зафиксируем некоторый элемент $k \in I_0$ и пусть $A = (\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I}$ элемент из S_ξ , такой что

$$\sigma(i) = \begin{cases} k, & \text{если } i \in I_0 \\ i, & \text{если } i \notin I_0 \end{cases}, \quad a_i = \begin{cases} g_i, & \text{если } i \in I_0 \\ 1_S, & \text{если } i \notin I_0 \end{cases}$$

Существует элемент $Y = (\tau, \dots, y_i, \dots)_{i \in I}$ из S_ξ , такой, что $AY A = A$, т.е.

$$(\sigma\tau\sigma, \dots, a_{\tau\sigma(i)} y_{\sigma(i)} a_i, \dots)_{i \in I} = (\sigma, \dots, a_i, \dots)_{i \in I}$$

Из этого равенства следует, что $\sigma\tau\sigma = \sigma$ и для каждого $j \in I_0$ выполняется

$$g_j = a_j = a_{\tau\sigma(j)} y_{\sigma(j)} a_j = a_{\tau(k)} y_k a_j$$

Поскольку $j \in I_0$, то $\sigma(j) = k$, а поэтому $\sigma\tau\sigma(j) = k$. Таким образом σ отображает элемент $\tau\sigma(j) = \tau(k)$ в элемент k . Из определения отображения σ следует, что $\tau(k)$ принадлежит I_0 . Поэтому

$a_{\tau(k)} = g_{\tau(k)}$ и имеем $g_j = g_{\tau(k)} y_k g_j$. Отсюда следует, что все g_j лежат в правом идеале, порожденном элементом $g_{\tau(k)}$, т.е. этот элемент порождает весь R .

Достаточность. Пусть полугруппа S удовлетворяет условиям теоремы 4. Пусть $X = (\sigma, \dots, x_i, \dots)_{i \in I}$ - произвольный элемент из S_ξ . Построим элемент $Y = (\tau, \dots, y_i, \dots)_{i \in I}$, такой, что $XYX = X$.

Пусть j - произвольный элемент из I . Через I_j обозначим полный прообраз элемента j при преобразовании

σ . Пусть теперь j - некоторый фиксированный элемент из I . Рассмотрим сначала случай $I_j \neq \emptyset$. Ввиду того, что мощность множества I_j не превышает ξ , правый идеал полугруппы S , порожденный элементами $\{x_k\}_{k \in I_j}$ является главным. Тогда существует $x \in S$, такой, что

$xS = \bigcup_{k \in I_j} x_k S$. Так как S содержит 1_S , то $x \in xS$ следовательно, найдется $k \in I_j$, такой, что $x \in x_k S$. В силу $k \in I_j$, будет $\sigma(k) = j$. Положим $\tau(j) = k$. Заметим, что в силу $x \in x_k S$ найдется $s \in S$, что $x_k s = x$. Так как все $x_k \in xS$ при $k \in I_j$, то найдутся $s'_k \in S$, что $x s'_k = x_k$. Положим $s'_k = s s'_k$. Тогда $x_k = x_k s'_k$ для каждого $k \in I_j$.

Ввиду регулярности полугруппы S , существует $y_j \in S$, такой, что $x_k y_j x_k = x_k$. Элемент y_j поставим на $(j+1)$ -ое место искомого вектора Y . Такую процедуру проведем для каждого $j \in I$, где $I \neq \emptyset$.

Пусть теперь для некоторого $j \in I$ выполняется $I_j = \emptyset$

Тогда положим $\tau(j) = j$, $y_j = 1_S$.

Покажем, что $X Y X = X$. Согласно (1),

$$X Y X = (\sigma \tau \sigma, \dots, x_{\tau \sigma(i)} y_{\sigma(i)} x_i, \dots)_{i \in I}.$$

Для произвольного $i \in I$ обозначим $\sigma(i) = j$, $\tau \sigma(i) = \tau(j) = k$. По построению имеем $j = \sigma(k) = \sigma \tau \sigma(i)$, т.е.

$\sigma \tau \sigma(i) = \sigma(i)$, следовательно, $\sigma \tau \sigma = \sigma$. Элемент y_j был выбран так, что $x_k y_j x_k = x_k$. Умножив это равенство справа на x_i , получим

$$(x_k y_j x_k) x_i = x_k y_j (x_k x_i) = x_k y_j x_i = x_i$$

Таким образом, для каждого $i \in I$ выполняется $x_k y_j x_i = x_i$ где $j = \sigma(i)$, $k = \tau \sigma(i)$ т.е.

$x_{\tau \sigma(i)} y_{\sigma(i)} x_i = x_i$. Следовательно, $X Y X = X$. Теорема доказана.

Полугруппа S называется цепной справа, если все ее правые идеалы составляют цепь по включению.

Лемма 7. Моноид S является цепным справа тогда и только тогда, когда главные правые идеалы S составляют цепь по включению.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть R и R' правые идеалы моноида S и ни один из них не содержится в другом. Тогда существуют $x, y \in S$, такие, что $x \in R$, $x \notin R'$, $y \in R'$, $y \notin R$. По предположению, либо $xS \subseteq yS$, либо $yS \subseteq xS$. Тогда либо $x \in xS \subseteq yS \subseteq R'$, либо $y \in yS \subseteq xS \subseteq R$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Следствие из теоремы 4. Полугруппа S_n , где n — произвольное натуральное число и $n \geq 2$, является регулярной тогда и только тогда, когда S — регулярный цепной справа моноид.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что требование, чтобы каждый правый идеал R полугруппы порожденный m образующими, где $m \leq n$, был главным, равносильно требованию быть цепной справа полугруппой.

Предположим первое и пусть x, y — произвольные элементы из S . В силу $n \geq 2$, каждый 2 -порожденный правый идеал должен быть главным, следовательно, существует $z \in S$ такой, что $zS = xS \cup yS$. Так как S — моноид, то $z \in zS$, следовательно, либо $z \in xS$, либо

$x \in yS$. Тогда, соответственно, либо $yS \subseteq xS$, либо $xS \subseteq yS$. Таким образом главные правые идеалы полугруппы S образуют по включению цепь. Отсюда, ввиду леммы 7, следует, что S - цепной справа моноид.

Обратно, пусть S - цепная справа полугруппа и R - правый идеал полугруппы S , порожденный элементами x_1, \dots, x_m ($m \leq n$). Докажем индукцией по числу m , что R - главный правый идеал. При $m=1$ утверждение очевидно. Пусть правый идеал R' , порожденный элементами x_1, \dots, x_{m-1} , является главным. Это означает, что существует i , $1 \leq i \leq m-1$, такой, что $R' = x_i S$. Так как S - цепная справа полугруппа, то либо $x_i S \subseteq x_m S$, либо $x_m S \subseteq x_i S$. В первом случае $R = x_m S$, а во втором - $R = x_i S$, т.е. R - главный правый идеал.

Приведем пример регулярной цепной справа полугруппы, не удовлетворяющий условиям теоремы 4. Рассмотрим полугруппу ξ , состоящую из всевозможных элементов вида e_n , где n - произвольное натуральное число, со следующим правилом умножения

$$e_n e_m = e_m e_n = e_{\min\{n, m\}}.$$

Каждый элемент полугруппы ξ является идемпотентом, следовательно, ξ - регулярная полугруппа. Для произвольных элементов $e_n, e_m \in \xi$ выполняется:

$$e_n = e_m e_n \in e_m \xi, \quad \text{если } n \leq m,$$

$$e_m = e_n e_m \in e_n \xi, \quad \text{если } m < n.$$

Отсюда следует, что ξ - цепная справа полугруппа. Присоединим к полугруппе ξ внешним образом единицу 1. Полугруппа $\xi' = \xi \cup 1$ является регулярным моноидом, так как все элементы моноида ξ' - идемпотенты. Моноид ξ' является цепным справа, так как любой правый идеал моноида ξ' либо содержится в ξ , либо совпадает с ξ' . Правый идеал ξ моноида ξ' порождается счетным числом образующих e_1, \dots, e_n, \dots , но не является главным, так как любое e_i порождает только правый идеал $\{e_1, \dots, e_i\} \neq \xi$. Следовательно, моноид ξ' является цепным справа, но не все его счетно-порожденные правые идеалы являются главными. Поэтому при счетном ξ моноид ξ' не регулярен.

В заключение автор искренне благодарит доцента Я.В.Хиона за руководство этой работой.

Литература

1. Г л у с к и н Л.М., О матричных полугруппах. Изв. АН СССР, сер.матем., 1958, 22, 439-448.
2. К л и ф ф о р д А., П р е с т о н Г., Алгебраическая теория полугрупп. т. I. Москва, 1972.
3. Л я п и н Е.С., Полугруппы. Москва, 1960.
4. Л я п и н Е.С., Абстрактная характеристика некоторых полугрупп преобразований. Уч. зап. Ленинградск. пед. ин-та, 1955, 103, 5-29.
5. С к о р н я к о в Л.А., О гомологической классификации моноидов. Сиб. матем. ж., 1969, 9, 1139-1143.
6. С к о р н я к о в Л.А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. Москва, 1961.

Поступило
22 III 1973

VABADE POLÜGOONIDE ENDOMORFISMIDEST

V. Fljaišer

R e s ü m e e

Olgu S monoid. Vaadeldakse ξ -moodustajaga vaba S -polügooni endomorfismide poolrühma S_{ξ} . Tõestatakse, et poolrühm \mathcal{L} on isomorfne poolrühmaga S_{ξ} siis ja ainult siis, kui \mathcal{L} sisaldab tihedalt sisestatud vasakpoolse ideaali, mis on isomorfne poolrühma S ja vasakpoolse korrutamise poolrühma (mille võimsus on ξ) otsekorrutisega. Poolrühm S_{ξ} on regulaarne parajasti siis, kui poolrühm S on regulaarne ja iga poolrühma η moodustajaga ($1 \leq \eta \leq \xi$) parempoolne ideaal on peaideaal.

ON ENDOMORPHISMS OF FREE POLYGONS

V. Fleischer

S u m m a r y

Semigroup S_{ξ} of endomorphisms of a free polygon with ξ generators over a monoid S (ξ an arbitrary cardinal number) is investigated. An abstract characteristic for S_{ξ} is given: a semigroup T is isomorphic to S_{ξ} iff T contains a densely imbedded left ideal isomorphic to direct product of S and a left singular semigroup of cardinality ξ . We prove that S_{ξ} is regular iff S is regular and every right ideal with η generators ($1 \leq \eta \leq \xi$) is principal.

КОЛЬЦА, В КОТОРЫХ ВСЕ ПОДГРУППЫ АДДИТИВНОЙ ГРУППЫ ЯВЛЯЮТСЯ ПОДКОЛЬЦАМИ II

К. Каарли

Кафедра алгебры и геометрии

Настоящая статья является продолжением работы [2], где было определено понятие λ -кольца, изучались λ -кольца, аддитивная группа которых является прямой суммой циклических групп и было дано описание λ -колец, ранг которых не меньше 2. Неописанными остались, следовательно, λ -кольца ранга 1 и периодические λ -кольца. Этим классам и посвящается настоящая статья.

Напомним, что рассматриваются не обязательно ассоциативные кольца. Кольцо назовем периодическим, кольцом ранга n (см. [3], стр. II7) и т.д., если такова его аддитивная группа.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями.

L^+ - аддитивная группа кольца L ;

Z_n - кольцо классов вычетов по $\text{mod } n$;

$Z = Z_\infty$ - кольцо целых чисел;

$(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ - ассоциатор элементов x, y, z ;

$\rho(x)$ - порядок элемента x группы;

$a \vee b$ - наибольший общий делитель рациональных чисел a и b .

Приведем необходимые определения и результаты из [2].

Определение. Кольцо L называется λ -кольцом, если каждая подгруппа группы L^+ является подкольцом.

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. Кольцо L является λ -кольцом тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in L$ найдутся $m, n \in Z$, так что $xy = mx + ny$.

Лемма 2. Подкольцо λ -кольца является λ -кольцом.

Пусть H - абелева группа (все группы у нас записаны аддитивно) с экспонентой n , α и β - два гомоморфизма из H в \mathbb{Z}_n . Определим на H умножение формулой

$$xy = \alpha(y)x + \beta(x)y. \quad (1)$$

Это умножение дистрибутивно относительно сложения, а полученное кольцо является λ -кольцом, которое обозначим через (H, α, β) .

Определение. Кольцо, допускающее представление в виде (H, α, β) назовем нормальным λ -кольцом.

Определение. Локально нормальным называется λ -кольцо, у которого все конечнопорожденные подкольца нормальны.

Дадим теперь некоторые достаточные условия нормальности для примарных λ -колец.

Предложение 1. Пусть L есть p -примарное λ -кольцо, аддитивная группа которого есть прямая сумма циклических подгрупп с ограниченными в совокупности порядками. Кольцо L нормально, если выполнено одно из следующих условий:

- 1) $p \neq 2$;
- 2) количество прямых слагаемых максимального порядка не равно двум.

Примечание. На самом деле в [2] доказаны утверждения, намного более общие.

Лемма 3. Непериодическое λ -кольцо локально нормально.

Из этого легко следует

Предложение 2. Периодическая часть непериодического λ -кольца есть кольцо с нулевым умножением.

Пусть H - абелева группа и n - натуральное число, которое делится на экспоненту группы H . Через $R(H, n)$ обозначим нормальное λ -кольцо (H', α, β) , где $H' = \{e\} + \{f\} + H$, $\sigma(e) = \sigma(f) = n$, а α и β определяются формулами

$$\begin{aligned} \alpha(ke + if + h) &= [k] & ([k] &= k + \{n\} \in \mathbb{Z}_n), \\ \beta(ke + if + h) &= [l]. \end{aligned}$$

Нам понадобится еще следующая теоретико-числовая лемма (см. [4], стр. 155).

Лемма 4. Если $i_1, \dots, i_n, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, $a_i \equiv \equiv a_j \pmod{s_i \cdot s_j}$ при всех i, j , то найдется $a \in \mathbb{Z}$.

так что $a \equiv a_i \pmod{s_i}$ при каждом i .

§ 1.0 λ -кольцах ранга 1.

1. Общие замечания. При изучении λ -колец ранга меньше двух возникают трудности ввиду того, что они, вообще говоря, не являются нормальными. Тем не менее верна

Лемма 1.1. Если L непериодическое λ -кольцо, то существует гомоморфизм $\gamma: L^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ такой, что $x^2 = \gamma(x)x$ при каждом $x \in L$.

Примечание. Если L нормально, $L = (L^+, \alpha, \beta)$, то можно взять $\gamma = \alpha + \beta$. Действительно, по формуле (I) имеем

$$x^2 = \alpha(x)x + \beta(x)x = (\alpha(x) + \beta(x))x = (\alpha + \beta)(x)x.$$

Доказательство. Пусть K - периодическая часть кольца L . Для $x \in L \setminus K$ определим $\gamma(x)$ из условия $x^2 = \gamma(x)x$, а для остальных x положим $\gamma(x) = 0$. Существование $\gamma(x)$ следует из того, что $\{x\}$ является подкольцом. Этим γ однозначно определен, остается проверить условие гомоморфизма.

Рассмотрим подкольцо $H = \{x, y, z\}$ кольца L , где x, y произвольные, а z - элемент бесконечного порядка. Согласно лемме 3 подкольцо H нормально, т.е. $H = (H^+, \alpha, \beta)$ для подходящих $\alpha, \beta: H^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$. Покажем, что ограничение отображения γ на H совпадает с гомоморфизмом $\alpha + \beta$.

Если $u \in H \cap K$, то $\gamma(u) = 0 = (\alpha + \beta)(u)$, так как u имеет конечный порядок и $\alpha + \beta$ есть гомоморфизм в группу без кручения. Если $u \in H \cap (L \setminus K)$, то $\gamma(u)u = u^2 = (\alpha + \beta)(u)u$, откуда $\gamma(u) = (\alpha + \beta)u$, поскольку u - элемент бесконечного порядка.

В силу $x, y, x+y \in H$ теперь получаем $\gamma(x+y) = (\alpha + \beta)(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y) + \beta(x) + \beta(y) = \gamma(x) + \gamma(y)$. Поскольку x и y были произвольные элементы L , то γ является гомоморфизмом.

В дальнейшем нам необходимо понятие ρ -адического числа (ρ - простое число).

Определение. Последовательность

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \quad (2)$$

называется p -адическим числом, если ¹

$$\xi_i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \xi_i < p^i, \quad (3)$$

$$\xi_i \equiv \xi_{i+1} \pmod{p^i}. \quad (4)$$

Примечание. Эти числа называются обычно p -адическими целыми числами.

Определение. Суммой двух p -адических чисел ξ и η называется p -адическое число ζ такое, что $\xi_i + \eta_i \equiv \zeta_i \pmod{p^i}$. Аналогично определяется произведение p -адических чисел.

Относительно этих операций p -адические числа образуют коммутативное ассоциативное кольцо, которое обозначим через \mathfrak{A} .

Неотрицательное целое число n называется нормой ненулевого p -адического числа ξ и обозначается через $w(\xi)$, если $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$, а $\xi_{n+1} \neq 0$. Легко видеть, что имеет место свойство $w(\xi\eta) = w(\xi) + w(\eta)$. Через \mathfrak{A}^k обозначим идеал кольца \mathfrak{A} состоящий из тех p -адических чисел, нормы которых не меньше k . В силу определения $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^\infty = 0$. Полагая $\mathfrak{A}^k = \mathfrak{A} / \mathfrak{A}^k$, легко видеть, что

$$\mathfrak{A}^k \simeq \begin{cases} 0, & \text{если } k = 0 \\ \mathbb{Z}_p^k, & \text{если } 0 < k < \infty \\ \mathfrak{A}, & \text{если } k = \infty. \end{cases}$$

Элементы кольца \mathfrak{A}^k суть смежные классы кольца \mathfrak{A} по идеалу \mathfrak{A}^k . К одному смежному классу относятся те p -адические числа, у которых k первых коэффициентов равны.

Всякое неотрицательное целое число однозначно представимо в виде

$$c = c_1 + c_2 p + \dots + c_{k(c)} p^{k(c)-1},$$

где $0 \leq c_i < p$, $i = 1, \dots, k(c)$. Сопоставим числу c p -адическое число $\xi_{(c)}$ с компонентами

$$\xi_{(c)i} = \begin{cases} c_1 + c_2 p + \dots + c_i p^{i-1}, & \text{если } i < k(c) \\ c, & \text{если } i \geq k(c). \end{cases}$$

¹ Если область изменения индексов i, j, k не указана, то они принимают все натуральные значения.

Если $c < 0$, то определяем $\xi_{(c)} = \xi_{(-c)}$.

В факторкольце \mathfrak{A}^k сопоставим числу c смежный класс $[\xi_{(c)}] = \xi_{(c)} + \mathfrak{A}^k$.

Пусть G — p -примарная абелева группа. Превратим G в левый \mathfrak{A} -модуль, определяя для любых $x \in G$ и $\xi \in \mathfrak{A}$

$$\xi x = \xi_{\kappa} x, \text{ где } p^{\kappa} \geq \sigma(x).$$

Определение корректно, так как из $p^{\kappa}, p^{\ell} \geq \sigma(x)$ вытекает $\xi_{\kappa} \equiv \xi_{\ell} \pmod{\sigma(x)}$. Легко проверить, что все аксиомы \mathfrak{A} -модуля выполняются. Нетрудно видеть, что

$$\xi_{(c)} x = c x, \quad x \in G. \quad (5)$$

Лемма 1.2. Пусть G — p -примарная абелева группа. Ядром \mathfrak{A} -модуля G является идеал \mathfrak{A}^{κ} , где p^{κ} — экспонента группы G .

Доказательство. Если p^{κ} — экспонента группы G , то $p^{\kappa} x = 0$ при любом $x \in G$. Значит, $\xi x = 0$ при любых $\xi \in \mathfrak{A}^{\kappa}$ и $x \in G$. Следовательно \mathfrak{A}^{κ} содержится в ядре модуля G .

С другой стороны, пусть ξ принадлежит ядру \mathfrak{A} -модуля G . Если экспонента p^{κ} группы G конечна, то в G найдется элемент x порядка p^{κ} . Из равенства $\xi x = 0$ получаем $\xi \in \mathfrak{A}^{\kappa}$. Если же экспонента группы G бесконечна, то для любого натурального κ найдется элемент x порядка p^{κ} ($p^{\ell} \geq p^{\kappa}$). Тогда в G имеются и элементы порядка p^{κ} (например $p^{\ell - \kappa} x$) и мы можем выбрать последовательность x_i такую, что $\sigma(x_i) = p^{\ell}$. Равенства $\xi x_i = 0$ теперь дадут, что $\xi \in \bigcap \mathfrak{A}^i = \mathfrak{A}^{\infty} = 0$. Лемма доказана.

Если p^{κ} есть экспонента группы G , то в силу доказанной леммы мы можем рассматривать G как точный \mathfrak{A}^{κ} -модуль. Кроме того, из (5) следует, что $c x = [\xi_{(c)}] x$ при любом $x \in G$.

Пусть все простые числа упорядочены по возрастанию: $p_1 < p_2 < \dots$. При этом кольцо p_i -адических чисел обозначим через \mathfrak{A}_i , соответствующие идеалы — через \mathfrak{A}_i^{κ} , факторкольца $\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^{\kappa}$ — через \mathfrak{A}_i^{κ} .

По известной теореме из теории абелевых групп любая периодическая абелева группа H разлагается в прямую сумму

$$H = \sum H_i$$

где H_i — p_i -примарная подгруппа в H .

Введем обозначения:

$p_i^{n_i}$ — экспонента группы H_i ;

$\mathfrak{B}_H = \prod \mathfrak{A}_i^{n_i}$ (полная прямая сумма).

Примечание. Если $H_i = 0$ при некотором i , то $n_i = 0$, а следовательно и $\mathfrak{A}_i^{n_i} = 0$.

Каждому неотрицательному целому числу c сопоставим однозначно определенный элемент $c^* \in \mathfrak{B}_H$, $c^* = ([\xi_i^c])$, где $[\xi_i^c]$ есть элемент, отвечающий числу c в кольце $\mathfrak{A}_i^{n_i}$.

Так как все прямые слагаемые H_i являются $\mathfrak{A}_i^{n_i}$ -модулями, мы можем естественным образом определить действие кольца \mathfrak{B}_H на группе H . Именно, если $x = x_1 + \dots + x_{m(x)}$ ($x_i \in H_i$) есть элемент группы H , а $\xi^* = ([\xi_i^c])$ принадлежит \mathfrak{B}_H , то положим

$$\xi^* x = [\xi^1] x_1 + \dots + [\xi^{m(x)}] x_{m(x)}.$$

Используя факт, что каждое H_i есть $\mathfrak{A}_i^{n_i}$ -модуль, нетрудно показать, что H является \mathfrak{B}_H -модулем.

Лемма 1.3. H является точным \mathfrak{B}_H -модулем.

Доказательство. Пусть элемент ξ^* принадлежит ядру модуля H . Это значит, что $\xi^* h = 0$ при каждом $h \in H$. В частности, при каждом $h \in H_i$ имеем $[\xi_i^c] h = \xi^* h = 0$. Следовательно $[\xi_i^c]$ принадлежит ядру $\mathfrak{A}_i^{n_i}$ -модуля H_i . Так как ядром $\mathfrak{A}_i^{n_i}$ -модуля H_i по лемме 1.2. является $\mathfrak{A}_i^{n_i}$, то $\mathfrak{A}_i^{n_i}$ -модуль H_i точен. Из точности последнего модуля теперь следует $[\xi_i^c] = 0$. Так как индекс i был произволен, отсюда следует $\xi^* = 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим гомоморфизм φ группы H на группу F . Тогда F тоже периодическая. Точнее, экспонента каждой примарной компоненты F_i не больше $p_i^{n_i}$, так как при любом $x \in H$ имеем $c(x) \geq \sigma(\varphi(x))$. Из $m_i \leq n_i$ вытекает $\mathfrak{A}_i^{m_i} > \mathfrak{A}_i^{n_i}$. Из этого мы заключаем, что \mathfrak{B}_F является факторкольцом кольца \mathfrak{B}_H . Действительно, согласно второй теореме о гомоморфизмах имеем $\mathfrak{B}_F = \prod \mathfrak{A}_i^{m_i} = \prod (\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^{m_i}) \simeq \prod ((\mathfrak{A}_i / \mathfrak{A}_i^{n_i}) / (\mathfrak{A}_i^{m_i} / \mathfrak{A}_i^{n_i}))$.

² В дальнейшем обозначим $\xi^i + \mathfrak{A}_i^{n_i} = [\xi^i] \in \mathfrak{A}_i^{n_i}$, $([\xi^1], [\xi^2], \dots) = ([\xi^c]) \in \mathfrak{B}_H$. -211-

Но последнее кольцо изоморфно кольцу $\mathfrak{B}_H / \prod (\mathfrak{R}_i^{m_i} / \mathfrak{R}_i^{n_i})$, так как ядро естественного гомоморфизма \mathfrak{B}_H на $\prod (\mathfrak{R}_i / \mathfrak{R}_i^{n_i}) / (\mathfrak{R}_i^{m_i} / \mathfrak{R}_i^{n_i})$ есть $\prod (\mathfrak{R}_i^{m_i} / \mathfrak{R}_i^{n_i})$.

Следовательно мы можем рассматривать F как \mathfrak{B}_H -модуль (см. [1], стр.14). Разумеется, последний модуль уже не обязательно точен.

Лемма 1.4. Любой эпиморфизм $\varphi: H \rightarrow F$ является гомоморфизмом \mathfrak{B}_H -модулей.

Доказательство. Возьмем $x = x_1 + \dots + x_m$, где $x_i \in H_i$, $\sigma(x_i) = r_i^{s_i}$. Тогда $\varphi([\xi^x]x) = \varphi([\xi^1]x_1 + \dots + [\xi^m]x_m) = \varphi([\xi^{s_1}]x_1 + \dots + [\xi^{s_m}]x_m) = \xi^{s_1} \varphi(x_1) + \dots + \xi^{s_m} \varphi(x_m)$. (Последнее равенство верно потому, что ξ^{s_i} - целые числа). Далее, поскольку $\varphi(x_i) \in F_i$ при каждом i и $\sigma(x_i) \geq \sigma(\varphi(x_i))$, то $\xi^{s_i} \varphi(x_i) = [\xi^{s_i}] \varphi(x_i)$. Следовательно $\xi^{s_1} \varphi(x_1) + \dots + \xi^{s_m} \varphi(x_m) = [\xi^{s_1}] \varphi(x_1) + \dots + [\xi^{s_m}] \varphi(x_m) = \xi^{*} \varphi(x)$, так как $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_m)$. Лемма доказана.

2.0 λ -кольцах ранга 1, содержащие элементы с ненулевым квадратом. Пусть H - периодическая абелева группа, $c \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$, $\xi^* \in \mathfrak{B}_H$. Определим на группе $\{e\} + H$, где $\sigma(e) = \infty$, умножение формулой:

$$(\kappa_1 e + h_1)(\kappa_2 e + h_2) = (\kappa_1 \kappa_2 c) e + \kappa_2 \xi^* h_1 + \kappa_1 \eta^* h_2, \quad (6)$$

где $\eta^* = c^* - \xi^*$, $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{Z}$, $h_1, h_2 \in H$.

Поскольку H является \mathfrak{B}_H -модулем, то это умножение дистрибутивно относительно сложения. Обозначим полученное кольцо через $R(H, c, \xi^*)$.

Лемма 1.5. Кольцо $R(H, c, \xi^*)$ является λ -кольцом.

Доказательство. Покажем, что выполнено условие леммы

1. Возьмем произвольные $x, y \in \{e\} + H$, $x = \kappa e + h$, $y = \nu e + g$, где $\kappa, \nu \in \mathbb{Z}$, $h, g \in H$. Пусть

$$h = h_1 + \dots + h_m, \quad g = g_1 + \dots + g_m,$$

где $h_i, g_i \in H_i$, $m = \max(m(h), m(g))$.

Покажем сначала, что существуют целые числа a_i, b_i такие, что

$$h_i e = a_i h_i, \quad g_i e = b_i g_i, \quad a_i + b_i = c. \quad (7)$$

Из правила умножения (6) получаем

$$h_i e = \xi^* h_i = [\xi^i] h_i, \quad e g_i = \eta^* g_i = [\eta^i] g_i, \quad [\xi^i] + [\eta^i] = [\xi \eta^i].$$

Если обозначить

$$p_i^{k_i} = \max(\sigma(h_i), \sigma(g_i)),$$

то

$$h_i e = [\xi^i] h_i = \xi_{k_i}^i h_i$$

и аналогично $e g_i = \eta_{k_i}^i g_i$. Кроме того, равенство $[\xi^i] + [\eta^i] = [\xi \eta^i]$ влечет

$$\xi_{k_i}^i + \eta_{k_i}^i \equiv c \pmod{p_i^{k_i}}.$$

Следовательно, условиям (7) будут удовлетворять числа $a_i = \xi_{k_i}^i$ и $b_i = \eta_{k_i}^i + d p_i^{k_i}$, где d — подходящее целое число.

Докажем теперь, что все числа a_i в (7) можно заменить одним числом a , а числа b_i — одним числом b . Применим лемму 4 к системе чисел $\{a_i \mid 1 \leq i \leq m\}$. Поскольку $p_i^{k_i} \vee p_j^{k_j} = 1$ при $i \neq j$ и $a_i \equiv a_j \pmod{1}$, то найдется $a \in \mathbb{Z}$ такое, что $a \equiv a_i \pmod{p_i^{k_i}}$ при любом i . Аналогично устанавливается существование такого $b \in \mathbb{Z}$, что $b \equiv b_i \pmod{p_i^{k_i}}$ при любом i . В силу (7) имеем

$$a + b \equiv a_i + b_i = c \pmod{p_i^{k_i}}$$

при всех i . Значит, $a + b \equiv c \pmod{p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}}$. Мы можем предполагать, что $a + b = c$. Если это не так, то заменим b подходящим b' , сравним с b по $\text{mod } p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$. Так как $a \equiv a_i \pmod{p_i^{k_i}}$ и $p_i^{k_i}$ делится на $\sigma(h_i)$, то $a_i h_i = a h_i$ при любом i . Аналогично $b_i h_i = b h_i$ при любом i . Теперь получаем, пользуясь равенством $e^2 = c e$ и предложением 2,

$$\begin{aligned} xy &= (k e + h)(l e + g) = (k l c) e + l(h e) + k(e g) = \\ &= (k l c) e + l \sum_{i=1}^m h_i e + k \sum_{i=1}^m e g_i = (k l c) e + l \sum_{i=1}^m a_i h_i + \\ &+ k \sum_{i=1}^m b_i g_i = (k l c) e + l \sum_{i=1}^m a h_i + k \sum_{i=1}^m b g_i = \\ &= k l (a + b) e + (l a) h + (k b) g = (a l) x + (b k) y. \end{aligned}$$

По лемме 1 заключаем, что $R(M, c, \xi^*)$ является λ -кольцом.

Лемма 1.6. Пусть $L = R(H, c, \xi^*)$, $L' = R(H', c', \xi'^*)$. Кольца L и L' изоморфны тогда и только тогда, когда

1) $H \cong H'$ (изоморфизм групп),

2) $c = c'$,

3) $\xi^* = \xi'^*$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Из изоморфизма колец L и L' следует изоморфизм их аддитивных групп, а также их периодических частей (легко видеть, что они суть соответственно H и H'). По правилу умножения в $R(H, c, \xi^*)$ мы получаем, что для $ke + h \in L$ ($k \in \mathbb{Z}$, $h \in H$) будет

$$(ke + h)^2 = kc(ke + h). \quad (8)$$

Отсюда вытекает, что $c = 0$ тогда и только тогда, когда квадраты всех элементов из L суть нули. Значит, $c = 0$ в том и только том случае, когда $c' = 0$. Если $c \neq 0$, то

$$c = \min \{k \mid k > 0, (\exists x) x \in L \ \& \ x^2 = kx\}.$$

Следовательно, c инвариантно относительно изоморфизмов, а это дает $c = c'$.

Пусть φ — изоморфизм L на L' . Поскольку $e^2 = ce$, то $(\varphi(e))^2 = c\varphi(e)$. Если $\varphi(e) = k'e + h'$ ($k' \in \mathbb{Z}$, $h' \in H'$), то это равенство и (8) дают $k' = 1$. Теперь, используя лемму 1.3, получаем для любого $x \in H$

$$\varphi(xe) = \varphi(\xi^* x) = \xi'^* \varphi(x).$$

С другой стороны, из $x \in H$ следует $\varphi(x) \in H'$, откуда получаем

$$\varphi(xe) = \varphi(x)\varphi(e) = \varphi(x)(e + h') = \varphi(x)e = \xi'^* \varphi(x).$$

Мы показали, что при любом $x \in H$ будет $(\xi^* - \xi'^*)\varphi(x) = 0$. Если x пробегает всю H , то $\varphi(x)$ пробегает всю H' . Отсюда мы заключаем при помощи леммы 1.2, что $\xi^* = \xi'^*$.

Лемма 1.7. Пусть L — непериодическое λ -кольцо с периодической частью H . Тогда существуют гомоморфизмы групп $\sigma, \varepsilon: L^+ \rightarrow \mathfrak{B}_H$, такие что при всех $h \in H, z \in L$ будет $hz = \sigma(z)h$, $zh = \varepsilon(z)h$. Кроме того, при любом $z \in L \setminus H$ будет $\sigma(z) + \varepsilon(z) = c^{-1}$, где

$$z^i = cz.$$

Доказательство. Фиксируем $z \in L \setminus H$. Покажем, что для каждого простого числа p_i существуют такие элементы $[\xi^i], [\eta^i] \in \mathfrak{A}_i^{n_i}$, что

$$[\xi^i]h = hz, [\eta^i]h = z h \quad (9)$$

при любом $h \in H$ и

$$[\xi^i] + [\eta^i] = [\xi_{(c)}^i]. \quad (10)$$

Если они найдены, то определим $\delta(z) = \xi^* = ([\xi^i])$, $\varepsilon(z) = \eta^* = ([\eta^i])$.

Приступим к построению p_i -адических чисел $\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots)$ и $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i, \dots)$, из которых получаются нужные $[\xi^i], [\eta^i]$. Поскольку $p_i^{n_i}$ есть экспонента группы H_i , то как в лемме 1.2, можно утверждать, что для каждого $k < n_i + 1$ в H_i найдется элемент h_k порядка p_i^k . Мы получаем последовательность $0 = h_0, h_1, \dots, h_{n_i}, \dots$, где $h_n = h_{n_i}$ для $n \geq n_i$, если n_i конечно.

Рассмотрим подкольца $G_k = \{z, h_{k-1}, h_k\}$, где $1 \leq k < \infty$. По лемме 3 все эти подкольца являются нормальными. Пусть $G_k = (G_k^+, \alpha_k, \beta_k)$. Поскольку $\sigma(z) = \infty$, то $\alpha_k, \beta_k: G_k^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ при любом k . Определим теперь последовательности $\xi^i = (\xi_1^i, \xi_2^i, \dots)$ и $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i, \dots)$ следующим образом

$$\begin{aligned} \xi_k^i &\equiv \alpha_k(z) \pmod{p_i^k}, \quad 0 \leq \xi_k^i < p_i^k, \\ \eta_k^i &\equiv \beta_k(z) \pmod{p_i^k}, \quad 0 \leq \eta_k^i < p_i^k. \end{aligned} \quad (11)$$

Покажем, что последовательность ξ есть p_i -адическое число и смежный класс $[\xi^i]$ удовлетворяет условиям (9). Так как h_{k-1} есть элемент конечного порядка, а \mathbb{Z}^+ - группа без кручения, то $\beta_k(h_{k-1}) = \beta_{k-1}(h_{k-1}) = 0$ при каждом k . В силу $h_{k-1}, z \in G_{k-1}$ имеем

$$h_{k-1}z = \alpha_{k-1}(z)h_{k-1} + \beta_{k-1}(h_{k-1})z = \alpha_{k-1}(z)h_{k-1} = \xi_{k-1}^i h_{k-1}.$$

С другой стороны, так как сравнения (11) выполняются и по $\text{mod } p_i^{k-1}$, из $z, h_{k-1} \in G_k$ получаем

$$h_{k-1}z = \alpha_k(z)h_{k-1} + \beta_k(h_{k-1})z = \alpha_k(z)h_{k-1} = \xi_k^i h_{k-1}.$$

Из этих двух равенств мы заключаем

$$\xi_k^i \equiv \xi_{k-1}^i \pmod{p_i^{k-1}}.$$

Последнее сравнение вместе с (11) дает, что ξ^i является p_i -адическим числом. Действительно, выполнены условия (3) и (4).

Теперь покажем, что $[\xi^i]$ удовлетворяет условиям (9). Возьмем произвольный $h \in H_i$ и пусть $\sigma(h) = p_i^m$. Рассмотрим подкольцо $G = \{z, h_m, h\}$, которое по лемме 3 является нормальным, пусть $G = (G^+, \alpha, \beta)$. Так как $\sigma(z) = \infty$, то опять получаем $\beta(h_m) = \beta(h) = 0$, откуда следует $h_m z = \alpha(z) h_m + \beta(h_m) z = \alpha(z) h_m$. Поскольку мы, кроме того, имеем $h_m z = \xi_m^i h_m$, то $\xi_m^i \equiv \alpha(z) \pmod{p_i^m}$. Теперь получаем $h z = \alpha(z) h + \beta(h) z = \alpha(z) h = \xi_m^i h$. Поскольку h имеет конечный порядок p_i^m , то $h z = \xi_m^i h = \xi^i h$. Так как $p_i^{n_i}$ есть экспонента группы H_i , это влечет $h z = [\xi^i] h$, что и требовалось доказать.

Совершенно аналогично доказывается, что η есть p_i -адическое число и $z h = [\eta^i] h$ при любом $h \in H_i$. Остается доказать равенство $[\xi^i] + [\eta^i] = [\xi_{(c)}^i]$. Пользуясь формулой (1) для кольца G_c , мы получим $z^2 = (\alpha_c(z) + \beta_c(z)) z$, которое вместе с $z^2 = c z$ дает $\alpha_c(z) + \beta_c(z) = c$. Поскольку $\alpha_c(z) \equiv \xi_c^i \pmod{p_i^k}$ и $\beta_c(z) \equiv \eta_c^i \pmod{p_i^k}$, откуда вытекает $\xi_c^i + \eta_c^i \equiv c \pmod{p_i^k}$. Так как это имеет место для любого k , то согласно определению p_i -адических чисел теперь получаем $\xi^i + \eta^i = \xi_{(c)}^i$ и $[\xi^i] + [\eta^i] = [\xi_{(c)}^i]$.

Этим $\delta(z)$ и $\varepsilon(z)$ определены для $z \in L \setminus H$. Полагаем $\delta(h) = \varepsilon(h) = 0$ для $h \in H$ и покажем, что отображения δ и ε являются гомоморфизмами групп. Пусть $x, y \in L$ и $h \in H$. Тогда

$$\delta(x+y)h = h(x+y) = hx + hy = \delta(x)h + \delta(y)h = [\delta(x) + \delta(y)]h.$$

Здесь мы пользовались тем, что H является \mathfrak{A}_H -модулем. Так как этот модуль точен (лемма 1.2) и h произвольный элемент из H , мы получаем $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y)$.

Аналогично доказывается гомоморфность отображения ε , что и завершает доказательство.

Теорема 1.1. Пусть L — Λ -кольцо ранга 1 с периодической частью H , содержащее элемент, квадрат которого отличен от нуля. Тогда найдутся положительное целое число c и $\xi^* \in \mathfrak{A}_H$ такие, что $L \cong R(H, c, \xi^*)$. При этом

c и ξ^* однозначно определены.

Доказательство. По лемме 1.1 существует гомоморфизм $\mu: L^+ \rightarrow \bar{Z}^+$ такой, что $x^2 = \mu(x)x$ при любом $x \in L$. По условию теоремы $\mu(L^+) \neq 0$, пусть $\mu(L^+) = c\bar{Z}$. Берем некоторый элемент e из $\mu^{-1}(c)$ и обозначим $\xi^* = \delta(e)$, где δ - гомоморфизм, определенный в лемме 1.7. Докажем, что $L \cong R(H, c, \xi^*)$.

Так как $\mu(L^+) \neq 0$, из теоремы о гомоморфизмах следует что факторгруппа $L^+/\ker \mu$ - бесконечная циклическая группа. Тогда по известной теореме $\ker \mu$ является прямым слагаемым группы L^+ , причем в качестве дополнения можно взять $\{e\}$ (см. [3], стр. 120), значит $L^+ = \{e\} \dot{+} \ker \mu$.

Покажем, что $\ker \mu = H$. Поскольку H - периодическая группа, а \bar{Z}^+ - без кручения, то $H \subset \ker \mu$. Если допустить, что $\ker \mu$ содержит еще элемент f бесконечного порядка, то в силу $\{e\} \cap \{f\} = 0$ это противоречит тому, что L имеет ранг 1. Следовательно

$$\ker \mu = H.$$

Возьмем теперь произвольные $y, z \in L$, $y = ke + h$, $z = le + g$ ($k, l \in \bar{Z}$, $g, h \in H$) и исследуем, как они умножаются. По лемме 1.7 получаем

$$\begin{aligned} yz &= (ke+h)(le+g) = (kl)z^2 + k(eg) + l(hg) + hg = \\ &= (klc)e + k\varepsilon(e)g + l\delta(e)h. \end{aligned}$$

Поскольку в силу леммы 1.6 $\delta(e) + \varepsilon(e) = c^*$, это умножение совпадает со введенным по формуле (6) умножением, а это дает изоморфизм $L \cong R(H, c, \xi^*)$. Утверждение об единственности следует из леммы 1.5. Теорема доказана.

Следующая теорема дает описание всех ассоциативных λ -колец, которые содержат элементы с отличным от нуля квадратом.

Теорема 1.2. Кольцо $L = R(H, c, \xi^*)$ ассоциативно тогда и только тогда, когда $\xi^* \eta^* = 0$ ($\eta^* = c^* - \xi^*$).

Доказательство. Необходимость. Если L ассоциативно, то при любом $h \in H$ имеем $(h, e, e) = 0$. Это означает, что

$$\begin{aligned} 0 &= (h, e, e) = (he)e - h(ee) = (\xi^*h)e - h(ce) = \\ &= \xi^*(he) - c(he) = (\xi^* - c^*)he = -\eta^*(\xi^*h) = -(\eta^*\xi^*)h. \end{aligned}$$

Поскольку $h \in H$ был произвольным, то из леммы 1.2 следует $\xi^* \eta^* = 0$.

Достаточность. Исходя из равенства $\xi^* \eta^* = 0$, докажем ассоциативность кольца L . Учитывая линейность ассоциатора, достаточно проверить выполнение условия $(x, y, z) = 0$ лишь для случаев, где элементы x, y, z либо принадлежат H , либо равны e . Кроме того, так как периодическая часть является идеалом с нулевым умножением кольца L , будет $(x, y, z) = 0$, если только два из элементов x, y, z принадлежат H . Остается проверить ещё три случая.

I $(h, e, e) = -(\xi^* \eta^*)h = 0$ по доказательству необходимости.

$$\text{II } (e, h, e) = (eh)e - e(he) = \eta^*(he) - \xi^*(eh) = \\ = (\eta^* \xi^*)h - (\xi^* \eta^*)h = 0.$$

$$\text{III } (e, e, h) = (ee)h - e(eh) = e(ch) - \eta^*(eh) = \\ = (e^* - \eta^*)eh = (\xi^* \eta^*)h = 0.$$

Теорема доказана.

Анализируем, когда выполнено условие $\xi^* \eta^* = 0$. Введем множества $J_1 = \{i \mid n_i = 0\}$, $J_2 = \{i \mid 0 < n_i < \infty\}$, $J_3 = \{i \mid n_i = \infty\}$, $J_4 = \{i \mid \exists p_i = 1\}$, $J_5 = \{i \mid [\xi^i_{(e)}] = 0\}$.

Поскольку при $i \in J_2$ всем $n_i \approx \sum p_i$ в качестве представителей в смежных классах \mathbb{Z}/p_i можно выбрать целые неотрицательные числа $\xi^i, \eta^i < p_i$. Пусть $\omega_i - p_i$ -адическая норма.

Предложение 1.1. Пусть периодическая группа H и натуральное число c фиксированы (этим заданы также множества $J_1 - J_5$). Для того, чтобы кольцо $R(H, c, \xi^*)$ оказалось ассоциативным, верно $\xi^* = ([\xi^i]) \in \mathbb{Z}_H$ выбрать так, чтобы

- 1) при $i \in J_3 \cup (J_2 \cap J_4)$ $[\xi^i] = 0$, или $[\xi^i] = [\xi^i_{(c)}]$;
- 2) при $i \in J_2 \cap J_5$ $\xi^i = 0$, или $[(n_i + 1)/2] \leq \omega_i(\xi^i)$;
- 3) при $i \in J_2 \setminus (J_4 \cup J_5)$ одно из чисел ξ^i, η^i (пусть для определенности ξ^i) удовлетворяет неравенству $\min([(n_i + 1)/2], t_i) \leq \omega_i(\xi^i) \leq t_i$, (12)

где³ $t_i = w_i(c)$, причем, если $w_i(\xi^i) = t_i$; то $\xi^i \equiv c \pmod{p_i^{n_i}}$.

Доказательство, Необходимость. Пусть $\xi^* \eta^* = 0$. По определению произведения в \mathbb{Z}_n тогда

$$[\xi^i][\eta^i] = 0 \quad (13)$$

при каждом i . Если $i \in J_3$, то в силу отсутствия делителей нуля в \mathbb{Z}_i (см. [3], стр. 192) отсюда следует либо

$$[\xi^i] = 0, \text{ либо } [\xi^i] = [\xi_{(c)}^i].$$

Пусть теперь $i \in J_2 \cap J_5$. Если ξ^i не равно нулю, то из

$$\xi^i + \eta^i \equiv c \pmod{p_i^{n_i}} \quad (14)$$

в силу $[\xi_{(c)}^i]$ и $0 \leq \xi^i \eta^i < p_i^{n_i}$ следует $\xi^i + \eta^i = p_i^{n_i}$. Известно, что $w_i(\xi^i + \eta^i) \geq \min(w_i(\xi^i), w_i(\eta^i))$, причем

строгое неравенство выполняется лишь в случае $w_i(\xi^i) = w_i(\eta^i)$. У нас $w_i(\xi^i + \eta^i) = w_i(p_i^{n_i}) = n_i$, а $w_i(\xi^i), w_i(\eta^i) < n_i$. Следовательно,

$$w_i(\xi^i) = w_i(\eta^i). \text{ Согласно (13) имеем } n_i \leq w_i(\xi^i \eta^i) = w_i(\xi^i) + w_i(\eta^i) = 2w_i(\xi^i), \text{ значит } [(n_i+1)/2] \leq w_i(\xi^i).$$

Наконец рассмотрим случай $i \in J_2 \setminus J_5$. Сравнение (14) означает, что при подходящем k будет $\xi^i + \eta^i = c + k p_i^{n_i}$. Поскольку $i \in J_5$, имеем $[\xi_{(c)}^i] \neq 0$, значит $w_i(c) < n_i$. Так как $w_i(k p_i^{n_i}) \geq n_i$, то мы получаем $w_i(c) = w_i(c + k p_i^{n_i})$. Следовательно,

$$w_i(\xi^i + \eta^i) = w_i(c) \geq \min(w_i(\xi^i), w_i(\eta^i)), \quad (14a)$$

причем строгое неравенство выполняется лишь в случае $w_i(\xi^i) = w_i(\eta^i)$. Рассмотрим два подслучая: а) $w_i(\xi^i) = w_i(\eta^i)$, б) $w_i(\xi^i) \neq w_i(\eta^i)$.

а) Как и раньше, из (13) получаем $[(n_i+1)/2] \leq w_i(\xi^i)$. С другой стороны, (14a) дает $w_i(c) \leq w_i(c) = t_i$, следовательно (12) выполняется

б) В этом случае (14a) обращается в равенство, пусть $w_i(\xi^i) = \min(w_i(\xi^i), w_i(\eta^i)) = t_i$. Очевидно, тогда (12) имеет место.

Если $w_i(\xi^i) = t_i$, то из (13) получаем

³ Обозначим $w_i(\xi_{(c)}^i) = w_i(c)$.

$n_i \leq \omega_i(\xi^i \eta^i) = \omega_i(\xi^i) + \omega_i(\eta^i) = t_i + \omega_i(\eta^i)$ значит
 $\omega_i(\eta^i) \geq n_i - t_i$. что равносильно сравнению $\eta^i \equiv$
 $\equiv 0 \pmod{p_i^{n_i - t_i}}$. Учитывая (14), из этого следует
 $\xi^i \equiv c \pmod{p_i^{n_i - t_i}}$.

В частности, если $i \in J_4$, получаем $\xi^i \equiv$
 $\equiv c \pmod{p_i^{n_i}}$, так как в этом случае $\omega_i(c) = 0$. Сле-
 довательно $[\xi^i] = [\xi^i(c)]$.

Достаточность. Покажем, что из условий 1) - 3) следует
 равенство (13) при каждом i . Тогда, в силу определения
 произведения в \mathfrak{A}_H , будет $\xi^* \eta^* = 0$.

Если $i \in J_1$, то (13) выполняется тривиально.

Если $i \in J_3 \cup (J_2 \cap J_4)$, то (13) выполняется, так как
 один из сомножителей равен нулю.

Если $i \in J_2 \cap J_5$ и $\xi^i \neq 0$, то, как при доказа-
 тельстве необходимости, получаем $\omega_i(\xi^i) = \omega_i(\eta^i)$. Из
 неравенства $[(n_i+1)/2] \leq \omega_i(\xi^i)$ теперь следует $\omega_i(\xi^i \eta^i) =$
 $= \omega_i(\xi^i) + \omega_i(\eta^i) = 2\omega_i(\xi^i) \geq 2[(n_i+1)/2] \geq n_i$.
 Значит $\xi^i \eta^i \equiv 0 \pmod{p_i^{n_i}}$ и $[\xi^i][\eta^i] = 0$.

Наконец, рассмотрим случай $i \in J_2 \setminus (J_4 \cup J_5)$. Ис-
 следуем отдельно два подслучая.

а) Если $\omega_i(\xi^i) = t_i$, то в силу $\xi^i \equiv$
 $\equiv c \pmod{p_i^{n_i - t_i}}$ получаем $\xi^i(c - \xi^i) \equiv$
 $\equiv 0 \pmod{p_i^{n_i}}$ т.е. $[\xi^i][\eta^i] = 0$.

б) Если $\omega_i(\xi^i) < t_i$, то (12) дает $\omega_i(\xi^i) \geq$
 $\geq [(n_i+1)/2]$. Как и раньше, из (14) заключаем $\omega_i(\xi^i) =$
 $= \omega_i(\eta^i)$. Следовательно $\omega_i(\xi^i \eta^i) = \omega_i(\xi^i) + \omega_i(\eta^i) =$
 $= 2\omega_i(\xi^i) \geq n_i$ и $[\xi^i][\eta^i] = 0$. Предложение доказано

3. Антиккоммутативные λ -кольца ранга 1.

Определение. Кольцо, в котором имеет место тождество
 $x^2 = 0$, называется антикоммутативным.

Не трудно видеть, что в непериодическом антикоммутатив-
 ном λ -кольце определенные выше гомоморфизмы δ и ε свя-
 заны соотношением $\delta + \varepsilon = 0$. Оказывается, что на абе-
 левой группе ранга 1 можно при помощи любого гомоморфизма
 $\delta: G/H \rightarrow \mathfrak{A}_H$ (H - периодическая часть группы G)
 естественным образом определить структуру антикоммутативно-
 го λ -кольца.

Известно, что всякая абелева группа без кручения ранга
 1 изоморфна подгруппе аддитивной группы рациональных чисел

Q. (см. [3], стр. 176). Пусть $\Lambda = \{\lambda, \mu, \nu, \dots\} \subset Q$ соответствующая подгруппа для группы G/H и фиксированный гомоморфизм $\varphi: G \rightarrow \Lambda$ с ядром H . Выберем теперь в каждом смежном классе фактор-группы G/H по представителю $z_\lambda \in \varphi^{-1}(\lambda)$. Если $\lambda, \mu \in \Lambda$, то имеет место равенство $\mu = \kappa_{\lambda, \mu}(\lambda \nu \mu)$, где $\kappa_{\lambda, \mu} = \mu / \lambda \nu \mu \in Z$. Следовательно в группе G/H мы имеем равенство $[z_\mu] = \kappa_{\lambda, \mu} [z_{\lambda \nu \mu}]$. Из этого следует существование элементов $h_{\lambda, \mu} \in H$ таких, что

$$z_\mu = \kappa_{\lambda, \mu} z_{\lambda \nu \mu} + h_{\lambda, \mu}. \quad (15)$$

Теорема 1.3. Пусть G - абелева группа ранга 1 с периодической частью H . Пусть φ гомоморфизм группы G в аддитивную группу рациональных чисел с ядром H . Выберем для каждого $\lambda \in \Lambda = \varphi(G)$ какой-нибудь прообраз $z_\lambda \in G$. Положим $h_{\lambda, \mu} = z_\mu - \kappa_{\lambda, \mu} z_{\lambda \nu \mu}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

I Если L антикоммутативное λ -кольцо с аддитивной группой G , то существует такой гомоморфизм $\delta: \Lambda \rightarrow \mathfrak{A}_H^+$, что при любых $\lambda, \mu \in \Lambda, g, h \in H$

$$(z_\lambda + g)(z_\mu + h) = m_{\lambda, \mu} + \delta(\lambda)h - \delta(\mu)g, \quad (16)$$

где $m_{\lambda, \mu} = \delta(\lambda)h_{\lambda, \mu} - \delta(\mu)h_{\mu, \lambda}$.

II Любой гомоморфизм $\delta: \Lambda \rightarrow \mathfrak{A}_H^+$ определяет на G по формуле (16) структуру антикоммутативного λ -кольца.

III Гомоморфизмы δ и δ' определяют на G изоморфные кольца тогда и только тогда, когда существует такой автоморфизм χ группы G , что $\delta'\varphi = \delta\varphi\chi$.

Доказательство. I Из леммы 1.6 и антикоммутативности кольца L следует существование такого гомоморфизма $\delta: \Lambda \rightarrow \mathfrak{A}_H^+$, что при любых $\lambda \in \Lambda$ и $g, h \in H$ будет

$$\begin{aligned} (z_\lambda + g)h &= \delta(\lambda)h, \\ h(z_\lambda + g) &= -\delta(\lambda)h. \end{aligned} \quad (17)$$

Преобразуем произведение $(z_\lambda + g)(z_\mu + h)$, используя (17). Учтем также, что $z_{\lambda \nu \mu}^2 = 0$ и H - кольцо с нулевым умножением.

$$(z_\lambda + g)(z_\mu + h) = (\kappa_{\lambda, \mu} z_{\lambda \nu \mu} + h_{\mu, \lambda} + g)(\kappa_{\lambda, \mu} z_{\lambda \nu \mu} +$$

$$\begin{aligned}
 +h_{\lambda, \mu} + h) &= \kappa_{\mu, \lambda} z_{\lambda \nu \mu} (h_{\lambda, \mu} + h) + (h_{\mu, \lambda} + g) \kappa_{\lambda, \mu} z_{\lambda \nu \mu} \\
 &= (z_{\lambda} - h_{\mu, \lambda})(h_{\lambda, \mu} + h) + (h_{\mu, \lambda} + g)(z_{\mu} - h_{\lambda, \mu}) = \\
 &= \delta(\lambda)(h_{\lambda, \mu} + h) - \delta(\mu)(h_{\mu, \lambda} + g) = \tau_{\lambda, \mu} + \delta(\lambda)h - \delta(\mu)g.
 \end{aligned}$$

II Пусть теперь задан произвольный гомоморфизм $\delta: \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_H^r$. Выведем сперва, что определенное формулой (16) умножение антикоммутирует:

$$\begin{aligned}
 (z_{\lambda} + g)(z_{\mu} + h) &= \delta(\lambda)(h_{\lambda, \mu} + h) - \delta(\mu)(h_{\mu, \lambda} + g) = \\
 &= -[\delta(\mu)(h_{\mu, \lambda} + g) - \delta(\lambda)(h_{\lambda, \mu} + h)] = -(z_{\mu} + h)(z_{\lambda} + g).
 \end{aligned}$$

Для доказательства дистрибутивности исследуем сначала произведения xh , hx , где $x \in G$, $h \in H$.

Пусть $x = z_{\lambda} + g$ и $g \in H$. Так как $h_{\lambda, 0} = z_0$, мы получаем

$$\begin{aligned}
 xh &= (z_{\lambda} + g)(z_0 - z_0 + h) = \delta(\lambda)(h_{\lambda, 0} - z_0 + h) - \\
 &\quad - \delta(0)(h_{0, \lambda} + g) = \delta(\lambda)h = (\delta\varphi(x))h.
 \end{aligned}$$

Следовательно, при всех $x \in G$, $h \in H$, будет

$$xh = (\delta\varphi(x))h. \quad (18)$$

Аналогично показывается

$$hx = -(\delta\varphi(x))h. \quad (19)$$

Покажем теперь, что если x, y представляются в виде

$$x = \kappa z + g, \quad y = \nu z + h$$

$$(\kappa \in G \setminus H, \quad g, h \in H, \quad \nu, \lambda \in \mathbb{Z}), \quad (20)$$

то их произведение выражается формулой

$$xy = xh + gy. \quad (21)$$

Пусть

$$x = z_{\lambda} + g', \quad y = z_{\mu} + h', \quad (22)$$

где $g', h' \in H$. Тогда

$$\begin{aligned}
 x &= \kappa_{\mu, \lambda} z_{\lambda \nu \mu} + h_{\mu, \lambda} + g', \\
 y &= \kappa_{\lambda, \mu} z_{\lambda \nu \mu} + h_{\lambda, \mu} + h'.
 \end{aligned} \quad (23)$$

Из (20) вытекает, что смежные классы $z + H = z_{\lambda} + H$ и $y + H = z_{\mu} + H$ содержатся в $\{z + H\}$. Поскольку

ку наибольший общий делитель $\lambda \vee \mu$ представляется в виде целочисленной линейной комбинации $\lambda \vee \mu = r\lambda + s\mu$, то $z_{\lambda \vee \mu} \in r z_{\lambda} + s z_{\mu} + H \in \{z + H\}$. Следовательно, при подходящих $m \in \mathbb{Z}$, $f \in H$ имеем

$$z_{\lambda \vee \mu} = m z + f. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23), получаем

$$\begin{aligned} x &= \kappa_{\mu, \lambda} m z + \kappa_{\mu, \lambda} f + h_{\mu, \lambda} + g', \\ y &= \kappa_{\lambda, \mu} m z + \kappa_{\lambda, \mu} f + h_{\lambda, \mu} + h'. \end{aligned} \quad (25)$$

Сравнивая (20) и (25), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} g &= \kappa_{\mu, \lambda} f + h_{\mu, \lambda} + g', \\ h &= \kappa_{\lambda, \mu} f + h_{\lambda, \mu} + h'. \end{aligned} \quad (26)$$

Используя (18), (19), (22) и (25), получаем

$$\begin{aligned} xh + gy &= (\delta\varphi(x))h - (\delta\varphi(y))g = \delta(\lambda)h - \delta(\mu)g = \\ &= \delta(\lambda)(\kappa_{\lambda, \mu} f + h_{\lambda, \mu} + h') - \delta(\mu)(\kappa_{\mu, \lambda} f + h_{\mu, \lambda} + g') = \\ &= (\kappa_{\lambda, \mu} \delta(\lambda) - \kappa_{\mu, \lambda} \delta(\mu))f + (\delta(\lambda)h_{\lambda, \mu} - \delta(\mu)h_{\mu, \lambda}) + \\ &\quad + \delta(\lambda)h' - \delta(\mu)g'. \end{aligned} \quad (27)$$

С другой стороны, в силу (16) и (22) имеем

$$xy = m\kappa_{\lambda, \mu} + \delta(\lambda)h' - \delta(\mu)g'. \quad (28)$$

Так как первое слагаемое в правой части (27) равно $\delta(\kappa_{\mu, \lambda} \lambda - \kappa_{\lambda, \mu} \mu)f = \delta(0)f = 0$, а второе равно $m\kappa_{\lambda, \mu}$, из (27) и (28) следует (21).

В силу антикоммутируемости мы должны проверить лишь одностороннюю дистрибутивность. Пусть x, y, z — произвольные элементы из группы G . Так как группа G/H изомира подгруппе из Q , она локально циклическа и следовательно существует $w \in G \setminus H$ такой, что при некоторых $\kappa, l, m \in \mathbb{Z}$, $g, h, f \in H$ будет $x = \kappa w + g$, $y = l w + h$, $z = m w + f$.

По формуле (21) получаем $xy = \lambda h + gy$, $xz = \lambda f + gz$ и $x(y+z) = \lambda(f+h) + g(y+z)$, так как $y+z = (l+m)w + (h+f)$. Учитывая (18) и (19), теперь получаем

$$\begin{aligned} x(y+z) &= \lambda(h+f) + g(y+z) = (\delta\varphi(x))(h+f) - (\delta\varphi(y+z))g = \\ &= (\delta\varphi(x))h - (\delta\varphi(y))g + (\delta\varphi(x))f - (\delta\varphi(z))g = \end{aligned}$$

$$= (xh + gy) + (xf + gz) = xy + xz.$$

Покажем, что полученное кольцо является λ -кольцом. Пусть $x, y \in G$, $\varphi(x) = \lambda$, $\varphi(y) = \mu$. Тогда по формулам (23) $x, y \in K = \{z_{\lambda\nu\mu}\} + H$. Разложение является прямым, так как $z_{\lambda\nu\mu}$ — элемент бесконечного порядка и поэтому $\{z_{\lambda\nu\mu}\}$ пересекается с H по нулю. Из формулы (16) видно, что $G \cdot G \subset H$. Следовательно K является подкольцом. Кроме того, при любых $k, l \in \mathbb{Z}$, $g, h \in H$ будет

$$\begin{aligned} (kz_{\lambda\nu\mu} + g)(lz_{\lambda\nu\mu} + h) &= kz_{\lambda\nu\mu}h + lgz_{\lambda\nu\mu} = \\ &= k\sigma(\lambda\nu\mu)h - l\sigma(\lambda\nu\mu)g. \end{aligned}$$

Значит, $K \cong R(H, 0, \mathfrak{F}^*)$, где $\mathfrak{F}^* = \sigma(\lambda\nu\mu)$. Поскольку $R(H, 0, \mathfrak{F}^*)$ является по лемме 1.5 λ -кольцом, то $x, y \in \{x, y\}$. Таким образом, аддитивная группа G с умножением, заданном формулой (16), является λ -кольцом.

III Пусть гомоморфизмы δ и δ' определяют на G изоморфные кольца. Тогда существует такой автоморфизм χ группы G , который переводит первое произведение во второе, которое обозначим через " \circ ". В частности, при всех $x \in G$, $h \in H$ будет иметь место формула $\chi(xh) = \chi(x) \circ \chi(h)$. Используя (18), мы получаем из этого

$$\chi[\delta\varphi(x)h] = [\delta'\varphi(\chi(x))]\chi(h), \quad (29)$$

Так как $\delta\varphi(x) \in \mathfrak{F}_H$, то из леммы 1.4 следует $\chi[\delta\varphi(x)h] = (\delta\varphi(x))\chi(h)$. Следовательно, мы можем (29) переписать в виде

$$[\delta\varphi(x) - \delta'\varphi\chi(x)]\chi(h) = 0. \quad (30)$$

Если h пробегает всю группу H , то и $\chi(h)$ пробегает всю группу H . Поэтому из (30) и леммы 1.3 вытекает

$$\delta\varphi(x) = \delta'\varphi\chi(x). \quad (31)$$

В силу произвольности $x \in G$ из (31) следует $\delta\varphi = \delta'\varphi\chi$.

Наоборот, если найдется такой автоморфизм χ группы G , что $\delta\varphi = \delta'\varphi\chi$, то отсюда последовательно выводим (31), (30) и (29), а это дает

$$\chi(xh) = \chi(x) \circ \chi(h) \quad (32)$$

при всех $x \in G$, $h \in H$. В силу антикоммутативности

верно также

$$\chi(hx) = \chi(h) \circ \chi(x). \quad (33)$$

Если y и z произвольные элементы из G , то представим их, как и раньше, в виде $y = \kappa v + f$, $z = \ell v + g$, где $\kappa, \ell \in \mathbb{Z}$, $f, g \in H$. Тогда в силу (21) $yz = yg + fz$ и мы получаем

$$\chi(yz) = \chi(yg + fz) = \chi(yg) + \chi(fz). \quad (34)$$

С другой стороны, поскольку $\chi(y) = \kappa \chi(v) + \chi(f)$ и $\chi(z) = \ell \chi(v) + \chi(g)$, опять в силу (21) получаем

$$\chi(y) \circ \chi(z) = \chi(y) \circ \chi(g) + \chi(f) \circ \chi(z). \quad (35)$$

Равенства (32) и (34) дают, что правые стороны (34) и (35) равны, следовательно равны и левые стороны и χ переводит первое произведение во второе. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос о том, когда существует ненулевой гомоморфизм $\sigma: \Lambda \rightarrow \mathfrak{A}_H$

Определение. Характеристикой называется последовательность $\tau = (\tau_i)$, где каждое τ_i либо целое неотрицательное число, либо ∞ .

Определение. Две характеристики τ и σ называют эквивалентными, если $\tau_i \neq \sigma_i$ лишь при конечном числе таких i , что $\tau_i \neq \infty$, $\sigma_i \neq \infty$. Классы эквивалентности характеристик называют типами.

Будем писать $\tau \leq \sigma$, если $\tau_i \leq \sigma_i$ при всех i . Легко видеть, что отношение " \leq " является частичной упорядоченностью.

Пусть G - абелева группа. Определим характеристику $\tau(z) = (\tau_i(z))$ элемента $z \in G$ следующим образом:

1) если уравнение $\rho_i^{\sim} x = z$ разрешимо в G при всех натуральных ρ_i , то $\tau_i(z) = \infty$;

2) если уравнение $\rho_i^{\sim} x = z$ разрешимо в G , а уравнение $\rho_i^{\sim+1} x = z$ уже не разрешимо, то $\tau_i(z) = \rho_i$.

Известно, что характеристики элементов абелевой группы без кручения ранга 1 составляют в точности один тип. Наоборот, каждому типу соответствует некоторая такая группа (см. [3], стр.177).

Если ψ - гомоморфизм абелевых групп, $\psi: A \rightarrow B$, то легко видеть, что при каждом $z \in \Lambda$ будет $\tau(z) \leq \tau(\psi(z))$.

Пусть $\delta: \Lambda \rightarrow \mathfrak{Z}_H^+$ есть гомоморфизм и $\delta(\lambda) = \xi^* = ([\xi^i])$. Обозначим для любого i $[\xi^i] = \delta^i(\lambda)$. Тогда легко видеть, что все δ^i суть гомоморфизмы из Λ соответственно в $\mathfrak{A}_i^{m_i}$.

Предложение 1.2. Нулевой гомоморфизм $\delta: \Lambda \rightarrow \mathfrak{Z}_H^+$ существует тогда и только тогда, когда $J \cap (J_2 \cup J_3) \neq \emptyset$, где $J = \{i / \tau_i(\lambda) \neq \infty, \lambda \in \Lambda\}$.

Доказательство. Необходимость. Если $i \in J_1$, то $\mathfrak{A}_i^{m_i} = 0$, а следовательно $\delta^i = 0$. Значит, δ^i может быть ненулевым только в случае $i \in J_2 \cup J_3$.

Известно (см. [4], стр. 146), что уравнение $m\lambda = a + p_i^{\nu} y$ ($m, a \in \mathbb{Z}$, $m \nmid p_i = 1$) имеет единственное такое решение в целых числах, что $0 \leq x < p_i^{\nu}$. Из этого следует, что каждый элемент группы $\mathbb{Z}_{p_i^{\nu}}$ делится на любое целое число, которое взаимно просто с p_i .

Покажем, что последнее свойство имеет место и для \mathfrak{A}_i (кольца целых p_i -адических чисел). Понятно, что множество $m\mathfrak{A}_i = \{m\xi / \xi \in \mathfrak{A}_i\}$ является идеалом в \mathfrak{A}_i . Известно (см. [3], стр. 192), что последовательностью $\mathfrak{A}_i \supset \mathfrak{A}_i^2 \supset \mathfrak{A}_i^3 \supset \dots$ исчерпываются все ненулевые идеалы кольца \mathfrak{A}_i . Возьмем элемент $\xi = (1, 1, \dots) \in \mathfrak{A}_i$. Тогда $m\xi \notin \mathfrak{A}_i^2$, так как $m = m \cdot 1 \neq 0 \pmod{p_i}$. Следовательно $m\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}_i$, а это означает, что любой элемент кольца \mathfrak{A}_i допускает представление в виде $m\xi$. Это представление единственно, так как из $m\xi = 0$ следует $m\xi_j = 0 \pmod{p_i^d}$, а в силу $m \nmid p_i = 1$ и $\xi_j < p_i^d$ это дает $\xi_j = 0$.

Возьмем элемент $\xi^* = ([\xi^i]) \in \mathfrak{Z}_H$ с характеристикой $\tau(\xi^*) = (\tau_i(\xi^*))$. Так как $\kappa \eta^* = (\kappa[\eta^i])$ для любого $\eta^* \in \mathfrak{Z}_H$, то ξ^* делится на κ тогда и только тогда, если каждое $[\xi^i]$ делится на κ . Из сказанного выше теперь легко вытекает, что $\tau_i(\xi^*) = \tau_i([\xi^i])$.

Пусть $\lambda \in \Lambda$ такое, что $\tau_i(\lambda) = \infty$. Поскольку $\tau(\lambda) \leq \tau(\delta(\lambda))$, то $\tau_i(\delta(\lambda)) = \tau_i(\delta^i(\lambda)) = \infty$. Таким образом p_i -адическим числом или смежным классом по $\text{mod } p_i$, который делится на любую степень числа p_i , является только 0, значит $[\xi^i] = 0$. Поскольку характеристики всех элементов из Λ эквивалентны, то из $\tau_i(\lambda) = \infty$ следует $\tau_i(\mu) = \infty$ при любом $\mu \in \Lambda$.

Но тогда $\delta^i = 0$. Следовательно, если $\delta^i \neq 0$, то $i \in J$. Учитывая наше первое замечание, получаем $i \in J \cap (J_2 \cup J_3)$.

Достаточность. Возьмем любое $i \in J \cap (J_2 \cup J_3)$ и покажем, что существует ненулевой гомоморфизм $\delta^i: \Lambda \rightarrow \mathfrak{A}_i^{n_i}$. Сначала установим, что любое число $\mu \in \Lambda$ записывается единственным образом в виде $\mu = (m/n)\lambda_0$, где $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \nmid p_i = 1$, дробь m/n несократима и λ_0 — фиксированный элемент из Λ , для которого $\tau_i(\lambda_0) = 0$.

Существование λ_0 получается так: в силу $i \in J$ имеем $\tau_i(\lambda) = k < \infty$ для произвольного $\lambda \in \Lambda$. Но тогда $\tau_i(\lambda_0) = 0$, где λ_0 определяется из уравнения $p_i^k \lambda_0 = \lambda$ (в противном случае было бы $\tau_i(\lambda) > k$).

Возьмем произвольное рациональное число $\mu \in \Lambda$ и запишем дробь μ/λ_0 в виде m/n , где $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \nmid n = 1$ (это означает $\mu = (m/n)\lambda_0$). Покажем, что тогда $n \nmid p_i = 1$.

Рассуждая от противного, допустим $n = p_i^{n'}$. Тогда $m\lambda_0 = p_i^{n'}(m/n)$. Поскольку $m/n \in \Lambda$, получим $\tau_i(m\lambda_0) > 0$. С другой стороны, из несократимости дроби m/n следует $p_i \nmid m = 1$, а это дает (см. [3] стр. 177) $\tau_i(m\lambda_0) = \tau_i(\lambda_0) = 0$, противоречие. Если еще $\mu = (r/s)\lambda_0$, где дробь r/s несократима, то отсутствие делителей нуля в \mathcal{A} влечет $m/n = r/s$, а несократимость обеих дробей дает $m = r$, $n = s$.

Для задания гомоморфизма $\delta^i: \Lambda \rightarrow \mathfrak{A}_i^{n_i}$ запишем любое $\mu \in \Lambda$ в виде $\mu = (m/n)\lambda_0$. При доказательстве необходимости мы видели, что для любого $[\xi] \in \mathfrak{A}_i^{n_i}$ и целого числа n , где $n \nmid p_i$, существует единственный $[\eta] \in \mathfrak{A}_i^{n_i}$, так что $n[\eta] = [\xi]$. Поэтому можно определить $m/n [\xi] = m[\eta]$ и положить $\delta^i(\lambda_0 m/n) = m/n [\xi]$.

Если $[\xi] \neq 0$, то δ^i оказывается ненулевым, так как $\delta^i(\lambda_0) = \delta^i(1 \cdot \lambda_0) = 1 \cdot [\xi] = [\xi]$. Покажем, что δ^i является гомоморфизмом групп.

$$\begin{aligned} \delta^i(\lambda_0 m/n + \lambda_0 r/s) &= \delta^i(\lambda_0 (m/n + r/s)) = (m/n + r/s) [\xi] \\ &= m/n [\xi] + r/s [\xi] = \delta^i(\lambda_0 m/n) + \delta^i(\lambda_0 r/s). \end{aligned}$$

Ненулевым гомоморфизмом из Λ в \mathfrak{A}_n^+ является теперь отображение $\delta(\lambda) = (0, \dots, 0, \delta^i(\lambda), 0, \dots)$. Предложение до-

казано.

Следующая теорема выясняет строение антикоммутативных ассоциативных λ -колец ранга 1.

Теорема 1.4. Гомоморфизм $\delta: \Lambda \rightarrow \mathfrak{A}_H^+$ определяет на G ассоциативное кольцо тогда и только тогда, когда $\delta(\lambda)^2 = 0$ при каждом $\lambda \in \Lambda$. Это условие выполнено в том и только том случае, когда $\delta^i = 0$ при $i \in J \cap J_3$ и для каждого $i \in J \cap J_2$ найдется $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что $\tau_i(\lambda_0) = 0$ и $w_i(\delta^i(\lambda_0)) \geq [(n_i + 1)/2]$.

Доказательство. Необходимость. Допустим, что L ассоциативно, $L^+ = G$ и умножение определяется в L формулой (16). Тогда

$$0 = z_\lambda(z_\lambda h) - (z_\lambda z_\lambda)h = \delta(\lambda)[\delta(\lambda)h] - 0h = \delta(\lambda)^2 h,$$

где $h \in H$. В силу произвольности элемента $h \in H$ отсюда и из леммы 1.3 следует $\delta(\lambda)^2 = 0$.

Полученное условие равносильно тому, что $\delta^i(\lambda)^2 = 0$ при всех i и $\lambda \in \Lambda$. Если $i \in J_3$, то отсюда получаем $\delta^i = 0$, так как в \mathfrak{A}_i отсутствуют делители нуля (см. [3], стр. 192). Пусть $i \in J \cap J_2$. Поскольку $i \in J$, то как и в доказательстве предложения 1.2 найдется $\lambda_0 \in \Lambda$, так что $\tau_i(\lambda_0) = 0$. Так как $\delta^i(\lambda)^2 = 0$ при каждом λ , то, в частности, имеет место $\delta^i(\lambda_0)^2 = 0$, т.е. $\delta^i(\lambda_0) \equiv 0 \pmod{p_i^{n_i}}$, а это влечёт $w_i(\delta^i(\lambda_0)) \geq [(n_i + 1)/2]$.

Достаточность. Покажем сначала, что кольцо L ассоциативно, если только $\delta(\lambda)^2 = 0$ при каждом $\lambda \in \Lambda$. Поскольку группа $\Lambda \cong G/H$ локально циклическа, то также как в теореме 1.3, получаем, что для любых $x, y, z \in G$ найдется $w \in G \setminus H$ такой, что $x, y, z \in K \langle w \rangle + H$. Легко видеть, что $K \cong R(H, 0, -\delta\psi(w))$. Ассоциативность кольца K следует из теоремы 1.2, так как

$$-\delta\psi(w)(0 + \delta\psi(w)) = -\delta(\psi(w))^2 = 0.$$

Пусть $\delta^i = 0$ при $i \in J \cap J_3$ и для каждого $i \in J \cap J_2$ найдется $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что $\tau_i(\lambda_0) = 0$ и $w_i(\delta^i(\lambda_0)) \geq [(n_i + 1)/2]$. Покажем, что тогда $\delta^i(\lambda)^2 = 0$ при всех i и $\lambda \in \Lambda$. Если $i \notin J \cap (J_2 \cup J_3)$, то это имеет место согласно предложению 1.2. Если $i \in J \cap J_3$, то $\delta^i(\lambda)^2 = 0$ в силу предположения. Если

$i \in \mathbb{Z}$, то из $w_i(\delta^i(\lambda_0)) \geq [(n_i + 1)/2]$ следует
 $\delta^i(\lambda_0)^2 \equiv 0 \pmod{p_i^{n_i}}$. Как показано в доказательстве
 предложения 1.2, всякий элемент из Λ записывается в виде
 $\lambda_0 \cdot m/n$, где $m, n \in \mathbb{Z}$ и $p_i \nmid n = 1$. Тогда
 $\delta^i(\lambda)^2 = \delta^i(\lambda_0 \cdot m/n)^2 = \delta^i(\lambda_0)^2 (m/n)^2$. Поскольку
 $n^2 \nmid p_i = 1$, то $\delta^i(\lambda)^2 = 0$ в $\mathbb{Z}_i^{n_i}$. Теорема дока-
 зана.

§ 2. 0 периодических λ -кольцах

В этом параграфе мы до некоторой степени выясним
 строение периодических λ -колец.

Лемма 2.1. Периодическое кольцо является λ -кольцом
 тогда и только тогда, когда все его примарные компоненты
 суть λ -кольца.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 2. Дока-
 жем достаточность. Пусть $L = \sum_i L_i$ (прямая сумма колец), где L_i - примарная компонента кольца L . Любые
 $x, y \in L$ представимы в виде $x = x_1 + \dots + x_m$, $y = y_1 + \dots + y_m$, где $x_i, y_i \in L_i$. Поскольку все L_i являются
 λ -кольцами, то при некоторых $\kappa_i, \nu_i \in \mathbb{Z}$ имеем $x_i y_i =$
 $= \kappa_i x_i + \nu_i y_i$. Поскольку $\sigma(x_i) \vee \sigma(y_i) = 1$ при $i \neq j$,
 то системы чисел $\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_m)$ и $\kappa_1, \dots, \kappa_m$
 удовлетворяют условиям леммы 4. Следовательно найдется $\kappa \in \mathbb{Z}$
 такое, что $\kappa \equiv \kappa_i \pmod{\sigma(x_i)}$ при всех i . Аналогично
 следует существование такого $\nu \in \mathbb{Z}$, что
 $\nu \equiv \nu_i \pmod{\sigma(y_i)}$ при всех i . Тогда

$$xy = \sum_{i=1}^m x_i y_i = \sum_{i=1}^m \kappa_i x_i + \nu_i y_i = \sum_{i=1}^m \kappa x_i + \nu y_i = \kappa x + \nu y.$$

В силу леммы 1 L является λ -кольцом.

Этим изучение периодических λ -колец сводится к изу-
 чению примарных λ -колец.

Лемма 2.2. Аддитивные порядки элементов примарного λ -
 кольца с ненулевым умножением ограничены в совокупности.

Доказательство. Пусть L - p -примарное λ -кольцо.
 Допустим, что порядки элементов группы L^+ не ограничены
 и покажем, что тогда L - кольцо с нулевым умножением.

Возьмем произвольные $x, y \in L$ и пусть $p^s =$
 $= \max(\sigma(x), \sigma(y))$. По предположению найдется $z \in L$ поряд-
 ка p^t , где $t \geq 2s$. Покажем, что в разложении группы
 $H = \{x, y, z\}$ в прямую сумму циклических подгрупп толь-

ко одно прямое слагаемое имеет максимальный порядок, который равен p^t . Так как каждый элемент из H имеет вид $kx + ly + mz$, то p^t является экспонентой группы H . Кроме того, каждый элемент u порядка p^t имеет вид $u = mz + h$, где $mv\rho = 1$ и $h \in \{x, y\}$. Пусть $v = m'z + h'$ — другой элемент порядка p^t . В силу $mv\rho = 1$ найдется $l \in \mathbb{Z}$ такое, что $l'(mz) = m'z$. Следовательно $p^s l'(mz + h) = p^s l'mz = p^s (m'z + h')$. Поскольку $p^s m'z \neq 0$, то $\{u\} \cap \{v\} \neq \emptyset$ и подгруппы $\{u\}$ и $\{v\}$ не могут одновременно участвовать в прямом разложении группы H .

Теперь получаем в силу предложения 1, что H нормально. Пусть $H = (H^+, \alpha, \beta)$. Исходя из того, что α и β — гомоморфизмы из H^+ в \mathbb{Z}_{p^t} и $p^s \alpha = p^s \beta = 0$, легко доказать, что $\alpha(y), \beta(x) \in p^s \mathbb{Z}_{p^t}$. Следовательно, $\alpha y = \alpha(y)\alpha + \beta(x)y = 0$. Лемма доказана.

Следствие 2.1. Аддитивная группа примарного λ -кольца с ненулевым умножением разлагается в прямую сумму циклических подгрупп с ограниченными в совокупности порядками,

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из леммы 2.2 и из следующей теоремы. Всякая примарная абелева группа с ограниченными в совокупности порядками элементов разлагается в прямую сумму циклических подгрупп (см. [3] стр. 146).

Предложение 2.1. Если $p \neq 2$, то p -примарное λ -кольцо нормально.

Доказательство. Ясно, что кольцо с нулевым умножением есть нормальное λ -кольцо. Если L есть p -примарное ($p \neq 2$) λ -кольцо с ненулевым умножением, то в силу следствия 2.1 и предложения 1 кольцо L нормально.

Для любого простого числа p , натурального числа n и кардинального числа φ обозначим $R(p, n, \varphi) = R(H, p^n)$ (см. стр. 207), где H — прямая сумма φ циклических групп порядка p^n . Мы имеем целью показать, что любое p -примарное ($p \neq 2$) λ -кольцо с ненулевым умножением изоморфно вкладывается в некоторое кольцо $R(p, n, p)$, но на самом деле имеет место более общий факт.

Теорема 2.1. Нормальное λ -кольцо $L = (H, \alpha, \beta)$ вкладывается изоморфно в кольцо $R(H, n)$, где n — экспонента группы H .

Доказательство. Определим нормальное надкольцо

$L' = (H', \alpha', \beta')$ следующим образом. $H' = \{e\} + \{f\} + H$, где $\sigma(e) = \sigma(f) = n$, $\alpha'(ke + lf + h) = [k] + \alpha(h)$, $\beta'(ke + lf + h) = [l] + \beta(h)$ ($h \in H$, $[k] = k + \{n\}$), являются гомоморфизмами из H' в Z_n^+ , как суммы гомоморфизмов.

Докажем, что H' можно представить в виде прямой суммы абелевых групп $H' = \{e, f\} + G$, где G кольцо с нулевым умножением. Положим $G = \ker \alpha' \cap \ker \beta'$ и проверим, что $G \cap \{e, f\} = 0$ и $G + \{e, f\} = H'$. Если $x \in G \cap \{e, f\}$, т.е. $x = ke + lf$, $\alpha'(x) = \beta'(x) = 0$, то получаем $[k] = [l] = 0$. Отсюда $x = 0$. Для любого $x \in H'$ имеем $x = \alpha'(x)e + \beta'(x)f + [x - \alpha'(x)e - \beta'(x)f]$. Здесь явно $\alpha'(x)e + \beta'(x)f \in \{e, f\}$ и легко проверить, что $\alpha'(x - \alpha'(x)e - \beta'(x)f) = \beta'(x - \alpha'(x)e - \beta'(x)f) = 0$. Поэтому $H' = \{e, f\} + G$. Если $g_1 g_2 \in G$, то правило умножения имеет вид

$$\begin{aligned} (k_1 e + l_1 f + g_1)(k_2 e + l_2 f + g_2) &= \alpha'(k_2 e + l_2 f + g_2)(k_1 e + \\ &+ l_1 f + g_1) + \beta'(k_1 e + l_1 f + g_1)(k_2 e + l_2 f + g_2) = \\ &= k_2(k_1 e + l_1 f + g_1) + l_1(k_2 e + l_2 f + g_2). \end{aligned}$$

Следовательно, $L' \cong R(G, n)$. Так как имеет место изоморфизм групп, $G \cong H' / \{e, f\} \cong H$ и умножение в $R(G, n)$ определяется только аддитивной группой, то $L' \cong R(H, n)$.

Теорема 2.2. Для любого p -примарного ($p \neq 2$) λ -кольца L с ненулевым умножением найдется натуральное число n и кардинальное число ρ , так что L изоморфно вкладывается в $R(p, n, \rho)$.

Доказательство. В силу следствия 2.1 имеем $L^+ = \sum_{i \in J} \{f_i\}$ а в силу предложения 2.1 L нормально. По следствию 2.1 существует $p^n = \max\{\sigma(f_i) \mid i \in J\}$, которое является экспонентой группы L^+ , так как L^+ порождается элементами f_i . Теорема 2.1 дает теперь, что L вкладывается изоморфно в кольцо $R(L^+, p^n)$. Теорема будет доказана, если мы вложим $R(L^+, p^n)$ в $R(p, n, \rho)$ где $\rho = |J|$.

Обозначим

$$\begin{aligned} R(p, n, \rho) &= \{e\} + \{f\} + \sum_{i \in J} \{e_i\}, \\ R(L^+, p^n) &= \{e\} + \{f\} + \sum_{i \in J} \{f_i\}. \end{aligned}$$

Так как порядки соответственно элементов e и e' , f и f' , f_i и $(\rho^n/\sigma(f_i))e_i$ совпадают, то существуют изоморфизмы соответствующих групп, такие что $\varphi_1(e) = e'$, $\varphi_0(f) = f'$, $\varphi_i(f_i) = e_i$. Тогда отображение φ , заданное формулой

$$\varphi(\kappa e + \ell f + \sum_{i \in J} m_i f_i) = \varphi_1(\kappa e) + \varphi_0(\ell f) + \sum_{i \in J} \varphi_i(m_i f_i) =$$

$$= \kappa e' + \ell f' + \sum_{i \in J} (m_i \rho^n / \sigma(f_i)) e_i$$

есть гомоморфизм группы $R(L^+, \rho^n)^+$ в группу $R(\rho, n, \rho)^+$. Легко видеть, что ядро гомоморфизма φ есть 0 , т.е. φ — мономорфизм.

Чтобы проверить, сохраняет ли φ умножение, вычислим по определению φ и произведения в $R(\rho, n, \rho)$

$$\begin{aligned} & \varphi(\kappa e + \ell f + \sum m_i f_i) \varphi(\kappa' e + \ell' f + \sum m'_i f_i) = \\ & = (\kappa e' + \ell f' + \sum (m_i \rho^n / \sigma(f_i)) e_i) (\kappa' e' + \ell' f' + \sum (m'_i \rho^n / \sigma(f_i)) e_i) = \\ & = \kappa' (\kappa e' + \ell f' + \sum (m_i \rho^n / \sigma(f_i)) e_i) + \ell' (\kappa' e' + \ell' f' + \sum (m'_i \rho^n / \sigma(f_i)) e_i) = \\ & = (\kappa' \kappa + \ell' \ell) e' + (\kappa' \ell + \ell' \ell') f' + \sum ((\kappa' m_i + \ell m'_i) \rho^n / \sigma(f_i)) e_i. \end{aligned}$$

С другой стороны, по определениям произведения в $R(L^+, \rho^n)$ и отображения φ имеем

$$\begin{aligned} & \varphi((\kappa e + \ell f + \sum m_i f_i)(\kappa' e + \ell' f + \sum m'_i f_i)) = \\ & = \varphi(\kappa' (\kappa e + \ell f + \sum m_i f_i) + \ell' (\kappa e + \ell' f + \sum m'_i f_i)) = \\ & = \varphi((\kappa' \kappa + \ell' \ell) e + (\kappa' \ell + \ell' \ell') f + \sum ((\kappa' m_i + \ell m'_i) \rho^n / \sigma(f_i)) e_i), \end{aligned}$$

так что φ сохраняет умножение. Теорема доказана.

Автор благодарен Я.В.Хиону за постановку проблемы и помощь при оформлении статьи.

Литература

1. Джекбсон Н., Строение колец. Москва, 1961.
2. Карли К., Кольца, в которых все подгруппы аддитивной группы являются подкольцами. Сборник студенческих научных трудов по алгебре и геометрии, Тарту, 1972.
3. Курош А.Г., Теория групп. Москва, 1967.
4. Окунев Л.Я., Краткий курс теории чисел. Москва, 1956.

Поступило
22 III 1973

RINGID, MILLE ADITIIVSE RÜHMA KÕIK

ALAMRÜHMAD ON ALAMRINGID II

K. Kaarli

R e s ü m e e

Jätkatakse λ -ringide uurimist, mida alustati töös [2]. Ringi (üldiselt mitteassotsiatiivset) nimetame λ -ringiks, kui ta rahuldab pealkirjas toodud tingimust. Artiklis [2] kirjeldati λ -ringid, mille aditiivse rühma astak on vähemalt 2. Käesolevas töös kirjeldatakse täielikult λ -ringid, mille astak on 1. Sel juhul õnnestub saada ka assotsiatiivsete λ -ringide täielik kirjeldus. Viimases paragrahvis uuritakse perioodilisi λ -ringe.

RINGS IN WHICH ALL SUBGROUPS OF THE

ADDITIVE GROUP ARE SUBRINGS II

K. Kaarli

S u m m a r y

The study of λ -rings begun in [2] is continued. A ring (not necessary associative) is said to be a λ -ring, if it satisfies the property mentioned in the title. The λ -rings whose additive group has rank exceeding 1 were described in [2]. In the present paper we give a description of the λ -rings with rank 1. In this case the description of the associative λ -rings is given too. In the last section the torsion λ -rings are investigated.

ЗАМЕТКА О ПОЧТИ КОЛЬЦАХ С ЕДИНИЦЕЙ

К. Каарли

Кафедра алгебры и геометрии

В работе [6] показано, что конечная простая неабелева группа не может служить аддитивной группой почти кольца с единицей. Такое же утверждение доказано относительно конечной симметрической группы S_n , $n \geq 3$. Последний результат обобщался в работе [8]. А именно, там доказано, что если аддитивная группа конечного почти кольца R с единицей имеет единственную нетривиальную инвариантную подгруппу, то $R \cong Z_{p^2}$. (p - простое число). В настоящей работе доказывается следующая теорема, из которой эти результаты следуют как частные случаи.

Если нормальные делители аддитивной группы конечного почти кольца с правой единицей образуют цепь, то $R \cong Z_{p^2}$.

В последней части заметки рассмотрим проблему построения почти колец с единицей на прямой степени простой конечной группы.

1. Почти кольцом называется тройка $(R, +, \cdot)$; где $(R, +)$ - группа (не обязательно коммутативная), (R, \cdot) - полугруппа и выполняется закон дистрибутивности $v(s+t) = vs + vt$ для любых $v, s, t \in R$.

Группа G называется R -модулем, если для любых $g \in G$, $v \in R$ определено $gv \in G$, так что $g(vs) = g(gv)s$ и $g(v+s) = gv + gs$ при всех $g \in G$, $v, s \in R$.

Почти кольца, а также модули над ними являются R -группами, значит, имеет смысл говорить о соответствующих ядрах гомоморфизмов. Ядра почти кольцевых (R -модульных) гомоморфизмов называют идеалами почти кольца (R -модуля).

R -модуль, возникающий при регулярном представлении почти кольца R , обозначим через R_R . R -подмодули модуля R_R называются правыми квазиидеалами почти кольца R .

Идеалы модуля R_R называются **правыми идеалами почти кольца** R .

Пусть S — подмножество в R . Обозначим $A(S) = \{r \mid r \in R, Sr = 0\}$.

Известна следующая лемма [7].

Лемма 1. $A(S)$ является правым идеалом при любом множестве S . Если S правый квазиидеал, то $A(S)$ является идеалом в R .

Введем еще следующие обозначения:

$Z(Z_n)$ — кольцо целых чисел (классов вычетов по модулю n);

$\sigma(g)$ — порядок элемента группы;

$[r]$ — правый идеал, порожденный элементом $r \in R$.

2. Нам понадобится следующая лемма, которая частично доказана в [6].

Лемма 2. Если аддитивная группа конечного почти кольца $(R, +, *)$ с правой единицей циклическа, то $R \cong Z_n$.

Доказательство. Покажем, что правая единица e является образующим циклической группы $(R, +)$. Для этого достаточно показать, что e имеет максимальный аддитивный порядок. Если $\sigma(e) = n$, то при любом $r \in R$ будет $nr = n(r * e) = r * ne = r * 0 = 0$. Следовательно, e является образующим. Каждый элемент $r \in R$ записывается единственным образом $r = k_r e$, где $k_r \in Z_n$. Ясно, что отображение $\varphi: R \rightarrow Z_n, \varphi(r) = k_r$ есть изоморфизм аддитивных групп. Покажем, что оно сохраняет и умножение

$$\begin{aligned} \varphi(r * s) &= \varphi((k_r e) * (k_s e)) = \varphi(k_s ((k_r e) * e)) = \\ &= \varphi(k_s (k_r e)) = \varphi((k_s k_r) e) = k_s k_r = \varphi(r) \varphi(s). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Обозначим $O(R) = \{\sigma(r) \mid r \in R, \sigma(r) < \infty\}$. Ясно, что $O(R)$ содержит вместе с числом n все его делители. Следовательно $O(R)$ является полуструктурой относительно взятия наибольшего общего делителя. Приступим к доказательству основной леммы.

Лемма 3. Структура $J(R)$ правых идеалов почти кольца R с правой единицей содержит подполуструктуру относительно взятия суммы, изоморфную полуструктуре $O(R)$.

Доказательство. Пусть e — правая единица почти кольца R . Покажем, что отображение $\varphi: O(R) \rightarrow J(R)$,

заданное формулой $\varphi(n) = [ne]$, есть искомое вложение.

Докажем сперва, что φ переводит наибольший общий делитель (m, n) в правый идеал $[me] + [ne]$. Если m делит n , то есть $n = km$, $k \in \mathbb{Z}$, то $[ne] = [kme] \subseteq [me]$, значит φ монотонно. Так как (m, n) делит m и n , то

$$[me] + [ne] \subseteq [(m, n)e]. \quad (1)$$

С другой стороны, по известной теореме ([1], теорема 137) найдутся $x, y \in \mathbb{Z}$, так что $xm + yn = (m, n)$. Следовательно

$$(m, n)e = (xm + yn)e = x(me) + y(ne) \in [me] + [ne],$$

что дает обратное включение для (1).

Остается показать, что φ взаимно однозначно. Пусть $m, n \in \mathcal{O}(R)$ и $\varphi(m) = \varphi(n)$, то есть $[me] = [ne]$. Возьмем такой $v \in R$, что $\sigma(v) = n$. Тогда $0 = nv = n(ve) = v(ne)$. Следовательно, $ne \in A(v)$, а в силу леммы 1 $A(v) \in J(R)$. Так как $[ne]$ наименьший правый идеал, содержащий ne , то $[ne] \subseteq A(v)$. Но тогда $me \in [me] \subseteq A(v)$, что влечет $0 = v(me) = m(ve) = mv$. Поскольку $\sigma(v) = n$, этим доказано, что m делит n . Вполне аналогично доказывается, что n делит m , а это дает равенство $m = n$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть почти кольцо R с правой единицей e содержит правый идеал S такой, что

- 1) $e \notin S$;
 - 2) для любого правого идеала T из $T \not\subseteq S$ следует $S \subset T$;
 - 3) правые идеалы, содержащие S , линейно упорядочены.
- Тогда для всякого $v \in R$ из $\sigma(v) < \infty$ следует, что $\sigma(v)$ равен степени фиксированного простого числа p .

Доказательство. Согласно условиям 1) и 2) имеем $S \subset [e]$. Допустим, что существует $v \in R$, так что $\sigma(v)$ делится на различные простые числа p и q . Тогда подходящие кратные элемента v будут соответственно элементами порядков p и q . В силу леммы 3 правые идеалы $[pe]$ и $[qe]$ не могут быть сравними относительно включения. Невозможно, чтобы $[pe]$ и $[qe]$ оба содержали S — это про-

тиворечит условию 3). Если бы один из правых идеалов $[pe]$ и $[qe]$ содержался в S , а другой содержал S , то они оказались бы сравнимыми. Поэтому $[pe], [qe] \subseteq S$. Но тогда $[e] = [(p, q)e] = [pe] + [qe] \subseteq S$, противоречие. Теорема доказана.

Следствие 1. Если все правые идеалы почти кольца R образуют цепь, то конечные порядки элементов из R являются степенями фиксированного простого числа p .

Доказательство. В качестве S в теореме 1 следует взять 0 , являющийся правым идеалом, как ядро тождественного автоморфизма.

Следствие 2. Если почти кольцо R обладает двусторонним нулем и двусторонней единицей и R содержит наибольший собственный правый идеал, то конечные порядки элементов из R являются степенями фиксированного простого числа p .

Доказательство. Проверим, что выполнены условия 1) - 3) теоремы 1. В качестве S возьмем наибольший собственный правый идеал. Тогда условия 2) и 3) выполнены. Остается показать, что $e \notin S$. Так как R имеет двусторонний нуль, то S является правым квазиидеалом (см. например, [3], стр. 160). Но собственный правый квазиидеал не может содержать левой единицы.

Теорема 2. Если нормальные делители аддитивной группы конечного почти кольца R с правой единицей образуют цепь, то $R \cong Z_{p^n}$.

Доказательство. Поскольку подмножество цепи есть всегда цепь, то в силу следствия 1 группа $(R, +)$ является конечной p -группой. Так как нормальные делители группы $(R, +)$ образуют цепь, то $(R, +)$ имеет единственный максимальный нормальный делитель H . Возмем некоторый элемент $\alpha \in R \setminus H$. Известно, что всякая собственная подгруппа конечной p -группы содержится в собственном нормальном делителе (см. [5], теорема 4.3.2). Следовательно, циклическая подгруппа, порожденная элементом α , совпадает с R . Наше утверждение теперь следует из леммы 2.

3. Как уже было отмечено, не существует конечного почти кольца с единицей и с простой неабелевой аддитивной группой. (Это следует также из теоремы 2). Наша последняя теорема усилит этот результат в другом направлении. Сначала даем необходимые сведения о примитивных почти кольцах.

Условимся, что в течение этого пункта G является двусторонним нулем почти кольца R .

Модуль G_R называется циклическим, если при некотором $g \in G$ будет $gR = G$. Модуль G называется неприводимым, если он не содержит нетривиальных подмодулей. Модуль G называется точным, если $\{\nu \mid G\nu = 0\} = 0$.

Почти кольцо R называется примитивным, если оно обладает точным неприводимым модулем.

Пусть группа Γ действует слева на аддитивной группе G . Пусть ρ такая эквивалентность на G , что из ggg' следует $(\rho g)\rho(\rho g')$ для каждого $g \in \Gamma$. Рассмотрим множество всех отображений $\nu: g \rightarrow g\nu$ на G , удовлетворяющих условиям: 1) из ggg' следует $g\nu = g'\nu$; 2) $(\rho g)\nu = \rho(g\nu)$; 3) $0\nu = 0$.

Следуя [4], обозначим указанное множество отображений через $\text{Hom}_{\Gamma, 0}(G/\rho, G)$. Введем в нем сложение и умножение естественным образом, т.е. формулами: $g(\nu + \tau) = g\nu + g\tau$, $g(\nu\tau) = (g\nu)\tau$. Множество $\text{Hom}_{\Gamma, 0}(G/\rho, G)$ является почти кольцом, а G точным $\text{Hom}_{\Gamma, 0}(G/\rho, G)$ -модулем относительно композиции $(g, \nu) \rightarrow g\nu$ [4].

Лемма 4. Пусть Γ, G и ρ взяты, как указано выше и $R = \text{Hom}_{\Gamma, 0}(G/\rho, G)$. Если G является циклическим R -модулем, то R' имеет правую единицу тогда и только тогда, когда $\rho = \Delta_G$ (отношение равенства на G).

Доказательство. Если $\rho = \Delta_G$, то $\text{Hom}_{\Gamma, 0}(G/\rho, G)$ содержит тождественное преобразование группы G , которое очевидно является единицей для R .

Пусть теперь R имеет правую единицу e . Так как R -модуль G циклический, то можно выбрать элемент $g \in G$, такой что $gR = G$. Имеем $(g\nu)e = g(\nu e) = g\nu$ при всех $g \in G, \nu \in R$. Поскольку $gR = G$, это означает, что e - тождественное преобразование на G . Если теперь $g, g' \in G, ggg'$, то $g = ge = g'e = g'$, значит $\rho = \Delta_G$. Лемма доказана.

Следующая теорема, дающая описание примитивных почти колец с условием минимальности для правых идеалов, является весьма частным случаем результатов Полина (см. [4], теорема 4).

Теорема 3. Пусть R - примитивное почти кольцо с условием минимальности для правых идеалов, не являющееся кольцом, G - его точный неприводимый модуль, Γ - группа R -автоморфиз-

мов модуля G, φ - R -эквивалентность на G , т.е. $g\varphi g'$ тогда и только тогда, когда $g'v = g'v$ при всех $v \in R$. Имеет место следующие утверждения.

1) Фактормножество G/φ есть объединение конечного числа Γ -орбит.

$$2) R \cong \text{Hom}_{\Gamma, 0}(G/\varphi, G).$$

3) Модуль R_{Γ} разлагается в прямую сумму конечного числа своих подмодулей, изоморфных модулю G .

Следующая теорема дает описание примитивных почти колец с правой единицей и с условием минимальности для правых идеалов. Напоминаем, что автоморфизм называется регулярным, если он не имеет ненулевых неподвижных точек. Будем говорить, что Γ есть группа регулярных автоморфизмов, если все неединичные автоморфизмы из Γ регулярны.

Теорема 4. Примитивное почти кольцо R с правой единицей и с условием минимальности для правых идеалов, которое не является кольцом, изоморфно почти кольцу $\text{Hom}_{\Gamma, 0}(G, G)$, где Γ - регулярная группа автоморфизмов группы G .

Доказательство. В силу теоремы 3 $R \cong \text{Hom}_{\Gamma, 0}(G/\varphi, G)$, где Γ - группа R -автоморфизмов точного неприводимого R -модуля G и φ - R -эквивалентность на G . Согласно лемме 3 из [4] Γ является регулярной группой автоморфизмов, а лемма 4 дает, что $\varphi = \Delta_G$. Теорема доказана.

Обозначим через $S_0(G)$ множество всех преобразований группы $(G, +)$, сохраняющих 0 . Имеет место равенство $S_0(G) = \text{Hom}_{\varepsilon, 0}(G, G)$, где ε - единичная группа автоморфизмов группы G , так как при $\Gamma = \varepsilon$ и $\varphi = \Delta_G$ каждое сохраняющее 0 преобразование удовлетворяет условиям 1) и 2).

Теперь мы готовы к доказательству следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть R - почти кольцо с правой единицей, $(R, +) \cong G^n$, где G простая конечная неабелева группа¹. Если $n \leq |G|-1$, то $n = |G|-1$ и $R \cong S_0(G)$.

Доказательство. Легко проверить, что $(S_0(G), +) \cong G^{|G|-1}$. Действительно, подходящими прямыми слагаемыми будут правые идеалы $S_g = \{v | v \in S_0(G), g'v = 0 \text{ при } g' \neq g\}$, где $0 \neq g \in G$. Пусть теперь n - наименьшее такое натуральное число, что существует почти кольцо R с правой единицей e и с аддитивной группой G^n . Так как $S_0(G)$

¹Через G^n обозначена n -ая прямая степень группы G .

имеет единицу, то ν существует и $\nu \leq |G| - 1$.

Покажем, что R не имеет нетривиальных идеалов. Пусть J - собственный идеал в R . По известной теореме ([3], стр. 48) $(R, +)$ является вполне приводимой группой, т.е. для каждого его нормального делителя A существует дополнение B , так что $A + B = R$. Следовательно существует нормальный делитель J так что $J + J = R$. Нормальный делитель J вполне приводимой группы тоже вполне приводим ([3], стр. 47). Поскольку $(R, +)$ - однородная вполне приводимая группа, то $(R/J, +) \cong J$ является тоже прямой суммой изоморфных копий группы G . Но идеал J не содержит правой единицы и поэтому R/J есть почти кольцо с правой единицей. Из минимальности ν теперь следует $R/J \cong R$, значит $J = 0$.

Возьмем минимальный правый квазиидеал $S \subset R$. В силу леммы 1 имеем две возможности: $A(S) = 0$ или $A(S) = R$. Поскольку $SR \supset Se = S \neq 0$, то $A(S) = 0$. Всякий правый квазиидеал из R является R -модулем, а S будет неприводимым и в силу $A(S) = 0$ точным R -модулем. Поскольку $(R, +)$ - неабелева группа, то R оказывается конечным примитивным почти кольцом, не являющимся кольцом. Согласно теореме 4 R изоморфно некоторому почти кольцу $R' = \text{Hom}_{\Gamma, 0}(G', G')$, где Γ действует на G' регулярными автоморфизмами.

Допустим, что Γ неединичная группа. Тогда G' нильпотентна [9]. Далее, $(R', +)$ тоже нильпотентна, так как в силу теоремы 3 $(R', +)$ есть прямая сумма изоморфных копий группы G' (см. [2], стр. 387). С другой стороны, $(R, +)$ не нильпотентна, так как она без центра. Действительно, центр прямой суммы равен прямой сумме центров прямых слагаемых ([2], стр. 103). Но $(R, +) \cong (R', +)$ и мы пришли к противоречию с предположением, что Γ неединична.

Из $\Gamma = \mathcal{E}$ следует $R \cong S_0(G')$. Как и раньше, можно убедиться, что $(S_0(G'), +) \cong G'^{|G'| - 1}$. Так как G' изоморфно нормальному делителю вполне приводимой группы $(R, +)$ то $G' \cong \hat{G}^{\kappa}$, где κ некоторое натуральное число. Тогда $(R', +) \cong \hat{G}^{\kappa(|G'| - 1)}$. Из единственности разложения вполне приводимой группы ([3], стр. 51) получаем $\nu = \kappa(|G'| - 1) = \kappa(|G|^{\kappa} - 1)$. Поскольку у нас было $\nu \leq |G| - 1$, то из последнего равенства следует $\kappa = 1$ и $\nu = |G| - 1$. Следо-

вательно $G' \cong G$ и $R \cong S_0(G)$. Теорема доказана.

Примечание при корректуре

После передачи рукописи в редакцию автору стало известно о статье Криммеля [10], где аналогичным путём доказывается утверждение, близкое к теореме 2.

Литература

1. Б у х ш т а б А.А., Теория чисел. Москва, 1966.
2. К у р о ш А.Г., Теория групп. Москва, 1967.
3. П л о т к и н Б.И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, 1966.
4. П о л и н С.В., Прimitивные $m\Omega$ -почти-кольца над мультиоператорными группами. Матем. сб., 1971, 84, № 2, 254-272.
5. Х о л л М., Теория групп. Москва, 1962.
6. C l a y, J.R., M a l o n e, J.Jr., The near-rings with identities on certain finite groups. Math.Scand., 1966, 19, 146-150.
7. F a i n, C.G., Some structure theorems for near-rings. Doct. diss. Univ. of Oklahoma, 1968.
8. L i g h, S., Near-rings with identities on certain groups. Monatsh. Math., 1971, 75, № 1, 38-43.
9. T h o m p s o n, J.G., Finite groups with fixed point-free automorphisms of prime order. Proc. Nat. Amer. Sci. U.S.A., 1959, 45, 578-581.
10. К р и м м е л, J.E., A condition on near-rings with identity. Monatsh. Math., 1973, 77, № 1, 52-54.

Поступило
2 II 1973

ÜHIKUGA RINGOIDIDEST

K. Kaarli

R e s ü m e e

On hästi teada, et lõplik lihtne mittekommutatiivne rühm ei või olla ühikuga ringoidi aditiivseks rühmaks [6]. Käesolevas artiklis tõestatakse selle tulemuse kaks üldistust.

Teoreem 2. Kui parempoolse ühikuga lõpliku ringoidi R aditiivse rühma normaaljagajad on lineaarselt järjestatud, siis $R \cong \mathbb{Z}_p^n$ (p - algarv).

Teoreem 5. Olgu G lõplik lihtne mittekommutatiivne rühm. Minimaalseks selliseks naturaalarvuks n , et eksisteerib parempoolse ühikuga ringoid R aditiivsel rühmal G^n (G n -is otseaste), on $|G| - 1$. Seejuures R on isomorfne rühma G kõigi nulli säilitavate teisenduste ringoidiga.

A NOTE ON NEAR-RINGS WITH IDENTITY

K. Kaarli

S u m m a r y

It is well known that a finite simple non-abelian group cannot be the additive group of a near-ring with identity [6]. In this note we give two generalizations of this result.

Theorem 2. If the lattice of the invariant subgroups of the additive group of a finite near-ring R with right identity is a chain then $R \cong \mathbb{Z}_p^n$ where p is a prime.

Theorem 5. Let G be a finite simple non-abelian group. The least integer n such that there exists a near-ring R with right identity on the additive group G^n (the n -th power of G) is $|G| - 1$. This near-ring is isomorphic to the near-ring of all mappings of G into itself preserving the zero.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD

А. Т а у т с. Формальный вывод тавтологических высказываний в псевдо-булевых алгебрах.	3
A. T a u t s. Pseudo-Boole'i algebrate tautoloogiliste valemite formaalne tuletus. Resümee.	30
A. T a u t s. Die formale Deduktion der tautologischen Formeln in pseudo-Booleschen Algebren. Zusammenfassung.	30
Э. Р е д и. Односторонние идеалы симметрических поликатегорий.	31
E. R e d i. Sümmeetriliste polükategooriate ühepoolsed ideaalid. Resümee	60
E. R e d i. Einseitige Idealen der Symmetrischen Polykategorien. Zusammenfassung	60
Э. Р е д и. О симметрических поликольцоидах.	62
E. R e d i. Sümmeetrilistest polüringoididest.	97
E. R e d i. Über symmetrische polyringoide. Zusammenfassung	98
П. П у у с е м п. Полугруппы эндоморфизмов двух классов метациклических групп.	100
P. P u u s e m p. Kahe metatsükliiliste rühmade klassi endomorfismipoolrühmad. Resümee.	120
P. P u u s e m p. Die Endomorphismenhalbgruppen der metazyklischen Gruppen von zwei Arten. Zusammenfassung.	120
М. Т р е п е т и н. Свободные в себе нильполугруппы с изоморфными полугруппами эндоморфизмов.	121
M. T r e p e t i n. Isomorfsete endomorfismipoolrühmadega iseendas vabad nilpoolrühmad. Resümee.	159
M. T r e p e t i n. Free-in-themself nilsemigroups with isomorphic semigroups of endomorphisms. Summary.	159
М. Т р е п е т и н. Определяемость моногенных нильполугрупп их полугруппами эндоморфизмов.	160

M. T r e p e t i n. Monogeensete nilpoolrühmade defini- neeritavus nende endomorfismipoolrühmade abil. Resümees.	177
M. T r e p e t i n. Determinability of monogenic nil- semigroups by their semigroups of endomorphisms Summary.	177
M. К и л ь п. О гомологической классификации моно- идов по свойствам их левых идеалов.	178
M. К и л п. Monoidide homoloogilisest klassifikat- sioonist nende vasakpoolsete ideaalide oma- duste järgi. Resümees.	187
M. К и л п. On homological classification of monoids by properties of their left ideals. Summary. . .	187
B. Ф л я й ш е р. Об эндоморфизмах свободных поли- гонов.	189
V. F l j a i s e r. Vabade polügoonide endomorfis- midest. Resümees.	204
V. F l e i s c h e r. On endomorphisms of free po- lygons. Summary.	205
К. К а а р л и. Кольца, в которых все подгруппы ад- дитивной группы являются подкольцами.	206
К. К а а р л и. Ringid, mille aditiivse rühma kõik alamrühmad on alamringid II. Resümees.	233
К. К а а р л и. Rings in which all subgroups of the additive group are subrings II. Summary. . . .	233
К. К а а р л и. Заметка о почти кольцах с единицей. .	234
К. К а а р л и. Ühikuga ringoididest. Resümees. . . .	241
К. К а а р л и. A note on near-rings with identity. Summary.	242

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XIII

На русском языке

Режиме на разных языках

Тартуский государственный университет

ЭССР, г. Тарту, ул. Пилкооли, 18

Ответственный редактор Э.Реймерс

Корректоры Я.Кюи, В.Лавинаск,

О.Мутт, К.Уусталу

Сдано в печать 31. 05. 1974. Бумага печатная №2,

30x45. 1/4. Печ. листов 15,25 (условных 14,18).

Учетно-издат. листов 12,5. Тираж 400. Зак. №773.

МВ 04059

Ротапринт ТТУ. ЭССР, г. Тарту, ул.Пялсоли, 14. ✓

Цена I руб. 25 коп.

Rbl. 1.25

Per

A-1169

B.336

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00289179 6