B. TULINOV
JA
J. TŠEKMARJOV

ARITMEETIKA

PEDAGOOGILISTELE KOOLIDELE

RK
„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

ARH

2/15188

B. TULINOV ja J. TŠEKMARJOV

Kohustuslik kontrolleksemplar

ARITMEETIKA

PEDAGOOGILISTELE KOOLIDELE

RK
„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS"
TALLINN 1949

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt õppevahendiks pedagoogilistele koolidele.

Bibliotheca
Universitatis
Tartuensis
1949: 01265
15188
A-18110

ARHIIVKOGU

I jagu.

Täisarvud.

I peatükk.

Loomuliku arvu (positiivse täisarvu) mõiste.

§ 1. Aritmeetika ainestik.

Aritmeetika on teadus arvudest, nende omadustest ja nendega teostatavatest tehetest. Vastavalt sellele on tema põhiülesanneteks arvu mõiste kindlaksmääramine, selle mõiste arendamine ja arvudevaheliste seoste ning aritmeetiliste tehete omaduste tundmaõppimine.

Õpetus arvust on tänapäeva matemaatika üheks tähtsaimaks ja samuti ka raskeimaks peatükiks. Käesolevas raamatus on esitatud aritmeetika alused ainult pedagoogiliste õppeasutiste õppeprogrammi ulatuses, mistõttu piirdume ainult positiivsete täisarvude ja murdarvude vaatlemisega. Ent nende küsimuste täielik ja range käsitlus ulatub kaugelt üle käesoleva raamatu piiride. Erilist huvi pakub nende arvudevaheliste seoste ja nende tehete omaduste tundmaõppimine, mis ei ole rakendatavad ainult mingil eriviisil valitud konkreetsetele arvudele, vaid mis kehtivad ka mistahes arvude puhul. Nende üldiste seoste tundmaõppimiseks kasutatakse aritmeetikas tähti ja nimelt **tähtede abil tähistatakse mistahes arve.** Näiteks on võrdus $a+b=16$ kehtiv ainult tähtede a ja b teatava väärtuse puhul, näiteks, kui $a=14$ ja $b=2$; võrdus $a+b=b+a$ on aga kehtiv mistahes a ja b väärtuse korral, muuhulgas ka siis, kui $a=14$ ja $b=2$. Järelikult ei

väljenda esimene võrdus mingit arvude ühist omadust, kuna teine aga väljendab **kõikide arvude ühist omadust** ja nimelt näitab, et summa ei muutu liidetavate järjekorra muutumisel.

Edaspidi kasutame arvude ühiste aritmeetiliste omaduste tundmaõppimisel tähti.

§ 2. Loomulikkude arvude rida ja selle omadused.

Positiivset täisarvu nimetatakse aritmeetikas loomulikuks arvuks ehk naturaalarvuks. Loomuliku arvu mõiste tuleneb tema eelkäivast „hulga" mõistest, s. o. meid ümbritseva maailma üksikute esemete kogumikust.

Igat loomulikku arvu võib vaadelda teda moodustavate **ühtede** hulgana (kogumikuna). Tõepoolest selleks, et moodustada mistahes hulka, võib algul võtta ainult ühe elemendi. Selle hulga elementide loendamise tulemusena saadakse loomulik arv **üks.** Lisades saadud hulgale veel ühe elemendi, saame hulga, mille elementide arv väljendub loomuliku arvuga **üks ja üks** ehk, mis on seesama, arvuga **kaks.** Lisades saadud hulgale uuesti ühe elemendi, saame hulga, mille elementide arv väljendub arvuga **üks ja üks ja üks** ehk arvuga **kolm** jne.

Niiviisi võime koostada arvude rea (hulga): 1, 2, 3, 4, ..., lisades iga kord arvu üks eelnevale arvule. Säärast rida nimetatakse loomulikkude arvude ehk naturaalarvude reaks. See rida on lõpmatu, mis tähendab, et olles jõudnud rea mistahes arvuni ja lisades sellele **ühe,** moodustub uus arv, mis otseselt järgneb antud arvule.

Loomulikkude arvude rea elementide hulga iseärasuseks on elementide (arvude) asetsemine ranges järjestuses, mistõttu on võimalik kindlaks määrata, milline element järgneb teatavale elemendile, milline eelneb sellele ning milline on algelement. Seda ja selliseid hulki nimetatakse **korraldatuiks (järjestatuiks).** Näiteks on niisugusteks hulkadeks tähestiku

tähtede hulk, tähestikulisse järjekorda asetatud antud klassi õpilaste hulk jms.

Esitatust järeldub, et **loomulikkude arvude rea igal arvul on selles reas kindel koht.**

Seega saame loendamise protsessi tulemusena **hulga võimsust iseloomustavate põhiarvude kõrval järgarvu (ordinaalarvu), mis iseloomustab kohta (number), mida antud element omab teatavas korraldatud (järjestatud) hulgas.** Järgarvu vaatekohast: a) kaks võrdset arvu on loomulikkude arvude rea üks ja sama arv ja b) arv on kas väiksem või suurem teisest arvust, olenedes sellest, kas ta eelneb või järgneb sellele arvule.

Hulka nimetatakse lõplikuks, kui on võimalik kindlaks teha selle elementide arvu, seevastu pole aga võimalik kindlaks määrata lõpmatu hulga elementide arvu.

Järgmised aksioomid väljendavad loomulikkude arvude rea omadusi:

1) **üks on arv;**
2) **igale arvule järgneb otseselt üksainus teine arv;**
3) **kaks arvu, milledele järgneb üks ja sama arv, on võrdsed;**
4) **ühele ei eelne ükski arv;**
5) **kui mingi omadus on kehtiv arvule üks ja kui see omadus, olles kehtiv mingi teise arvu kohta, jääb kehtima ka sellele arvule otseselt järgnevale arvule, siis on see omadus kehtiv loomulikkude arvude rea kõikide arvude kohta.**

Viimane aksioom väljendab täieliku matemaatilise induktsiooni printsiipi. Ta omab erilist tähtsust aritmeetika ülesehitamisel järgarvu teooriale, sest loobudes sellest ei ole võimalik tõestada ühe või teise omaduse kehtivust lõpmatu loomulikkude arvude rea kõikide arvude kohta.

Viiendast aksioomist loobudes me võime alati veenduda selles, et antud arvul (näiteks 2 või 3) on mingi omadus, mida saab vahetult kontrollida; kuid me ei saa tõestada, et see omadus on kehtiv kõikidele

loomulikkudele arvudele, sest loomulikkude arvude rida on piiramatu ja ei ole võimalik katsetada iga arvuga. Viiendale aksioomile põhjenevaid tõestusi nimetatakse täieliku induktsiooni meetodi tõestusteks. Arutlusi täieliku induktsiooni meetodi abil tunnevad hästi kõik, kes on tuttavad elementaaralgebraga. Selleks, et tõestada mõne lause õigsust, tehakse kindlaks, et see on õige arvu üks puhul; edasi näidatakse, et see on õige järgneva arvu $(n+1)$ kohta, eeldades selle õigsust eelneva arvu (n) puhul. Pärast seda arutletakse nii: väide on õige arvu 1 puhul, järelikult on ta kehtiv ka arvule 2, samuti arvule 3 jne., s. o. ta on õige lõpmatu loomulikkude arvude rea kõikide arvude kohta.

§ 3. Loendamise protsess.

Loomulikkude arvude reaga on seotud koha mõiste: paigutada mõttes esemed teatavasse järjekorda tähendab seada üks neist vastavusse arvuga 1 ja nimetada seda e s i m e s e k s; siis seada teine ese vastavusse arvuga 2 ja nimetada seda t e i s e k s; edasi asetada uus ese vastavusse arvuga 3 ja nimetada seda k o l m a n d a k s jne. Nii toimitaksegi loendamisel, seades järjest esemeid vastavusse arvudega 1, 2, 3, 4 jne. Jõudes hulga viimase elemendini ongi arv, millega seatakse see vastavusse, hulga elementide arv. On ilmne, et **loendamise tulemus ei olene loendamise järjekorrast.** See on loendamise aksioom.

Tõepoolest, millises järjekorras loendamisel me ka hulga elemente ei võtaks nende vastavusse seadmiseks loomulikkude arvude rea arvudega, siis loendades hulga kõik elemendid, me saame ikka antud hulgaga samase hulga.

Säärane loendamise operatsioon kujunes välja alles inimkonna kultuuriarengu kõrgemal astmel.

Kaks hulka on võrdvõimsad, kui nende hulkade elementide vahel saab kindlaks teha üksühest vastavust, s. o. niisugust vastavust, mille puhul ühe hulga igale elemendile saab vastavusse seada teise hulga üheainsa elemendi ja ümberpöördult, igale teise hulga elemendile saab vastavusse seada esimese

hulga üheainsa elemendi. Kahe hulga võrdvõimsuse hindamiseks ei ole tingimata vajalik teostada loendamise operatsiooni: piisab uuritavate hulkade elementide seadmisest üksühesesse vastavusse ja teha sellest vastav järeldus. Me tegime ka kindlaks, et kõik kahe hulga võimsuse võrdlemisel saadud järeldused jäävad kehtima ka sel juhul, kui asendame ühe hulkadest mingi teise, temaga võrdvõimsa hulgaga.

See asjaolu võimaldab meil aritmeetiliste operatsioonide teostamisel kasutada teatavaid konkreetseid, varem tuntud hulki: käe sõrmi, kivikesi, täkkeid, arvelaua nuppusid jne., mis antud juhul on teatavate võrdvõimsate hulkade klassi esindajaiks ja selles mõttes konkreetseiks arvu asendajaiks. Kuna võrdvõimsate hulkade kogu klassi iseloomustab tegelikult mingi sellesse klassi kuuluv hulk, siis on võimalik võrrelda uuritavat konkreetset hulka teatava **standardhulgaga** [1] (käe sõrmede hulk, kivikeste hulk, täkete hulk, nuppude hulk arvelaual jne.), tehes kindlaks uuritava hulga ja võrdluseks valitud standardhulga vahelise üksühese vastavuse. Võrdvõimsate hulkade klasside konkreetsete esindajatena kasutatavate standardhulkade valikul juhindutakse sageli puht praktilistest kaalutlustest: kättesaadavusest, kogemustest, muutumatusest, äraõpitavusest jne.

Näitena võiks olla standardhulk, mille elementideks on käe sõrmed: pöial, nimetissõrm, keskmine, nimetu ja väikesõrm.

On ilmne, et kui hulka iseloomustab sõna „väikesõrm", siis see hulk kuulub võrdvõimsate hulkade klassi, mida meie kujutluses iseloomustab arv 5. Järelikult tähendatakse antud juhul sõnaga „väikesõrm" arvu 5. Sellised arvude nimetused, mis ühtusid nende esemete nimetustega, mille abil toimus loendamine, ilmusid juba varajasel arenemisastmel.

---

[1] Termin *standardhulk* on võetud raamatust I. V. Arnold „Teoreetiline aritmeetika".

Ajajooksul kaotasid need nimetused järk-järgult oma esialgse tähenduse ja neid hakati loendamisel kasutama ainult loomulikkude arvude nimetustena.

Kultuuri arenedes oli inimestel üha sagedamini vajadus tundma õppida niisuguseid hulki, millede võimsus oli suurem tarvitatavatest standardhulkade võimsusest. Praktiline vajadus suure võimsusega hulkade tundmaõppimiseks selle elementide üksühesesse vastavusse seadmisega hästituntud standardhulga elementidega viis uue standardhulga moodustamisele — lõpmatule loomulikkude arvude reale, mis kujutab enesest arvsümbolite süsteemi, milles sümbolid järgnevad üksteisele ranges järjestuses ja mida kasutatakse hulkade võimsuste iseloomustamiseks ja võrdlemiseks.

Loendamise protsess viis üksühese vastavuse kindlaksmääramisele uuritava konkreetse hulga elementide ja loomulikkude arvude rea arvude vahel, mis antud juhul on standardhulgaks, mille elementideks on loomulikud arvud.

Arenemise algastmeil seisis loendamise protsess uuritava konkreetse hulga ja standardhulga üksühese vastavuse kindlaksmääramises.

Selle protsessi uurimine ürgrahvaste juures näitab, et standardhulkadeks võeti mingi hästi tuntud kindla kogumiku osad, mida tarbekorral suurema võimsusega hulkade tundmaõppimise vajaduse tekkimisel järk-järgult laiendati.

Kõige sagedamini olid niisuguse standardkogumiku elementideks ühe või mõlema käe sõrmed, jalad, labajalg, küünarnukk.

Standardhulga elementide järjestuse muutumatus võimaldab loendamisel uuritavat hulka iseloomustada tarvitatava standardhulga viimase elemendi nimetusega.

Selgitame seda järgneva näitega: olgu tarvis loendada ühe klassi õpilased. Rivistame nad ja alates arvust üks nimetagu igaüks oma järjekorra numbrit nii, et igaüks nimetab arvu, mis otseselt järgneb tema naabrit märkivale numbrile.

Niiviisi saab iga õpilane omale numbri. Oletame, et 30 osutus loendamisel nimetatud arvudest viimaseks. Siis seatakse igaüks 30-st õpilasest üksühesesse vastavusse ühega 30-st nimetatud arvust. Seega on õpilaste hulk ja nende arvude hulk võrdvõimsad. Kui me nüüd loendaksime mingeid teisi hulki, näiteks mütse, õpilaste sulepäid, ja seejuures saaksime loendamise tulemuseks jälle 30, siis on need hulgad võrdvõimsad arvude hulgaga 1—30. Kuid eespool esitatu põhjal peavad kõik need hulgad olema võrdvõimsad ka omavahel. Niiviisi iseloomustab viimane nimetatud arv 30 võrdvõimsate hulkade kindlat klassi.

Nii on kahe hulga arvulise võrdsuse (võrdvõimsuse) kindlaksmääramise esialgse meetodi ja hilisema täielikuma meetodi (esemete loendamise) aluseks üks ja sama printsiip — hulkade viimine üksühesesse vastavusse.

§ 4. Null.

Nagu öeldud võimaldavad loomulikud arvud vastata küsimusele: mitu elementi sisaldab antud hulk?

Me tegime kindlaks, et väikseima võimsusega hulk sisaldab ühe elemendi.

Võtame tarvitusele ka **tühja hulga** mõiste, s. o. niisuguse hulga, mis ei sisalda ühtki elementi. Kui oletada, et klassis ei ole ühtki õpilast või rahakotis ei ole raha ja ta on täiesti tühi, siis on meil tegemist tühjade hulkadega. Neil juhtudel on loomulikuks vastuseks küsimusele **kui palju?** — sõna **null.**

Järelikult, 0 on arv, mis annab tühjade hulkade klassi mõiste. Harilikult 0 ei kuulu loomulikkude arvude hulka ja teda ei asetata loomulikkude arvude ritta. Kuid, kui me teoreetilistel kaalutlustel oleks soovinud asetada 0 loomulikkude arvude ritta, mis sageli on kasulik, siis tuleks 0 paigutada arvu 1 ette ja kirjutada: 0, 1, 2, 3, 4, 5...

See asjaolu, et antud juhul loomulikkude arvude rea esimene element on null, mitte aga 1, ei oma teoreetiliselt põhimõttelist tähendust. [1]

§ 5. Loomulikkude arvude omadused.

Kõikidel loomulikkude arvude rea arvudel on järgmised omadused, mida tunnustame tõestuseta, kui ilmseid tõdesid.

1) **Refleksiivsus.**

Iga loomulik arv võrdub iseenesega $(a = a)$.

2) **Sümmeetrilisus.**

Kui loomulik arv a võrdub loomuliku arvuga b, siis ka ümberpöördult, b võrdub a-ga.

3) **Transitiivsus.**

Kui loomulik arv a võrdub loomuliku arvuga b ja loomulik arv b võrdub loomuliku arvuga c, siis ka $a = c$.

II peatükk.

Arvusüsteemid.

§ 6. Arvusüsteemi mõiste.

Iga arvusüsteemi aluseks on järgmine printsiip: **mingi kindel arv ühikuid moodustab ühe uue, sellele järgneva kõrgema järgu ühiku. Seda arvu nimetatakse arvusüsteemi aluseks.** Sellest sõltuvalt saab arvusüsteem oma erinimetuse, ja nimelt: kui arvusüsteemi aluseks on võetud arv 12, siis nimetatakse arvusüsteemi vastavalt kaheteistkümnend-süsteemiks,

[1] Itaalia matemaatik Peano asetab 0 loomulikkude arvude ritta ja sõnastades 1., 4. ja 5. aksioomi asendab sõna „üks" sõnaga „null".

kui 2, siis binaarsüsteemiks (kahendsüsteemiks) jne. Arvu, mis on kirjutatud mingis arvusüsteemis, nimetatakse **süsteemiliseks arvuks.**

Juba kõige varajasemal kultuuriastmel tekkis peaaegu kõikidel rahvastel praktiliste eluvajaduste mõjutusel tarvidus enam-vähem täieliku arvusüsteemi väljatöötamiseks.

Arvude kirjutamine eriliste märkide abil arenes välja palju hiljem ja oli algul kaunis puudulik isegi niisuguste kõrge kultuuriga rahvaste juures nagu vanad kreeklased ja roomlased. Ülesande, kujutada kirjalikult antud arvusüsteemi mistahes arvu väheste leppemärkide abil, lahendasid alles meie ajaarvamise algul hindud, kes kasutasid sel eesmärgil geniaalset ideed, arvusümbolite **positsiooniprintsiipi (kohaväärtuse printsiipi).** Selle idee olemuseks on, **et üks ja sama arvusümbol saab eriväärtuse, sõltuvalt asukohast, mida ta omab antud arvu kirjutises.**

Võttes arvusüsteemi aluseks mingi arvu k, siis on loendamiseks meie käsutuses järgmised arvude read:

I $1, 2, 3, 4, \ldots (k-1)$.
II $k, 2k, 3k, 4k, \ldots (k-1) \cdot k$.
III $k^2, 2k^2, 3k^2, 4k^2, \ldots (k-1) \cdot k^2$.

. . . . . .

. . . . . .

$(n+1)$ $k^n, 2k^n, 3k^n, 4k^n, \ldots (k-1) \cdot k^n$.

Iga arvu N arvusüsteemis, mille aluseks on arv k, võib kujutada järgmise summana:

$N = a_n \cdot k^n + a_{n-1} \cdot k^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot k^3 + a_2 \cdot k^2 + a_1 \cdot k^1 + a_0$,

kus $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ on sümbolid arvude kujutamiseks 0-st kuni $(k-1)$, viimane kaasaarvatud.

Arvu kirjutamiseks ühes või teises süsteemis ei ole tarvis erimärki süsteemi aluse tähistamiseks.

Mistahes positsioonilises (numbrite kohaväärtuse alusel ülesehitatud) arvusüsteemis väljendab süsteemi alust üks nul-

liga, sest süsteemi alusega võrduv üheliste arv annab ühe kõrgema järgu (teise järgu) ühiku.

Üldtarvitatava süsteemi 0-ga ja sümbolitega 1 kuni 9-ni arvude märkimiseks võtsid tarvitusele hindud, kelledelt see siirdus tõenäoselt VIII sajandil araablastele, kes IX sajandil tõid selle Euroopasse.

Seda süsteemi nimetatakse **kümnendsüsteemiks**, sest aluseks on võetud arv 10.

§ 7. Peastarvutuse alused arvudega kümnendsüsteemis.

Kümme esimest arvu said oma nimetused üksteisest sõltumatult. Need nimetused on: üks, kaks, kolm, neli, viis, kuus, seitse, kaheksa, üheksa, kümme. Arv 10 on süsteemi aluseks ja tema abil moodustatakse uusi loendamisühikuid, millede tarvituselevõtmine tunduvalt lihtsustab suurte arvude väljendamist niihästi kirjalikult, kui ka peast.

Kümnendsüsteemi numeratsiooni peamised alused.

1) Mistahes järgu kümme ühikut moodustavad järgneva kõrgema järgu ühiku.

2) Esimesed üheksa arvu, mis saadakse loendamisel, kuuluvad 1. järku ja neid nimetatakse lihtühikuteks.

Kümme lihtühikut moodustavad kümne ehk 2. järgu ühiku.

3. järgu ühikut nimetatakse sada
4. „ „ „ tuhat
5. „ „ „ kümme tuhat
6. „ „ „ sada tuhat
7. „ „ „ miljon
8. „ „ „ kümme miljonit
9. „ „ „ sada miljonit
10. „ „ „ biljon (miljard)
11. „ „ „ kümme biljonit
12. „ „ „ sada biljonit
13. „ „ „ triljon jne.

Järkude ühikuid nimetatakse ka ühelisteks, kümnelisteks, sajalisteks jne.

3) Iga kolm üksteisele järgnevat järku, alates esimesest, moodustavad klassi.

1. klass koosneb 1., 2. ja 3. järgust ja nimetatakse ühtede klassiks;
2. klass — tuhandete klass koosneb 4., 5. ja 6. järgust;
3. klass — miljonite klass koosneb 7., 8. ja 9. järgust;
4. klass — biljonite klass koosneb 10., 11. ja 12. järgust;
5. klass — triljonite klass koosneb 13., 14. ja 15. järgust;
6. klass — kvadriljonide klass koosneb 16., 17. ja 18. järgust;
7. klass — kvintiljonide klass koosneb 19., 20. ja 21. järgust;
8. klass — sekstiljonide klass koosneb 22., 23. ja 24. järgust jne.

Klassi moodustavat kolme järku nimetatakse selle klassi ühelisteks, kümnelisteks ja sajalisteks. Nagu nägime saab kümnendsüsteemis arvu väljendada tema järkude summana, näiteks $2345 = 2\text{ t.} + 3\text{ s.} + 4\text{ k.} + 5\text{ ü.}$; ehk $N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0$, kus $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ näitavad vastavate järkude ühikute arvu.

§ 8. Kirjaliku arvutuse alused kümnendsüsteemis.

Üheksa esimest arvu kirjutatakse eriliste märkidega, mida nimetatakse numbriteks: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, — väärtusega numbrid ja 0 väärtuseta number, mida kasutatakse mingi järgu puudumise tähistamiseks. Nende numbrite abil väljendatakse kõiki arve.

Arvude üleskirjutamine põhjeneb numbrite positsioonide printsiibil (kohaväärtuse printsiibil).

Niiviisi on igal numbril peale omaväärtuse veel sõltuvalt kirjutamiskohast nn. kohaväärtus. Näiteks võib number 3 omada mitmesuguseid väärtusi: kolm ühte (kui ta arvu kirjutises asetseb paremalt arvates 1. kohal), 3 kümmet (30 — kui ta arvu kirjutises asetseb paremalt arvates teisel kohal), kolm sadat (300 — kui ta arvu kirjutises asetseb paremalt arvates kolmandal kohal) jne.

Kahest kõrvuti asetsevast numbrist tähistab vasakpoolne 10 korda suuremaid ühikuid kui parempoolne, näiteks 44.

Vasakpoolne number tähendab ühtesid ja parempoolne kümneid.

§ 9. Arvude lugemise ja kirjutamise reeglid.

a) Arvude lugemiseks on kaks reeglit:

1) Kolmekohalist arvu lugedes peab nimetama järjest tema järke, alates kõrgemast järgust, s. o. sadadest, väljaarvatud need, mis tähistatud nulliga. Näiteks 125 — sada kakskümmend viis.

2) Lugedes arvu, mis koosneb rohkem kui kolmest numbrist, on tarvis jaotada see paremalt arvates klassidesse, lugeda eelmise reegli alusel iga klass, alates kõrgemast, ja lugemise lõpul nimetada vastava klassi nimetus. Näiteks 125 346 408 — sada kakskümmend viis miljonit kolmsada nelikümmend kuus tuhat nelisada kaheksa ühte.

b) Arvude kirjutamisel kasutatakse järgmist reeglit:

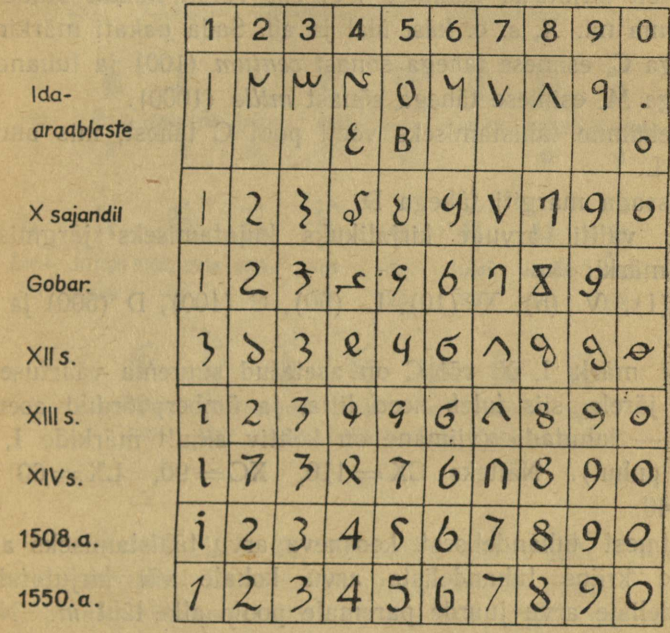
Kuna igat arvu loetakse klasside kaupa, alates kõrgeimast, kusjuures iga klass kujutab enesest nagu mingit kolmest järgust koosnevat rühma, siis kirjutatakse need rühmad (klassid) arvu kirjutamisel vasakult poolt paremale, alates kõrgema järgu ühikutest ja lõpetades klassiga, mis sisaldab lihtühikuid. Kui rühmas puuduvad mõned järgud, siis kirjutatakse nende vastavatele kohtadele nullid; kogu rühma (klassi) puudumisel kirjutatakse kolm nulli.

Näiteks kirjutatakse kakssada kaheksa miljonit sada viiskümmend tuhat sada nelikümmend kaheksa nii: 208 150 148; nelisada kolmteist miljonit sada kakskümmend viis ühte — 413 000 125.

Et teada saada kui palju on arvus mingi järgu ühikuid, tuleb ära jätta kõik madalama järgu numbrid ja lugeda ülejäänud numbritest moodustunud arv. Näiteks on arvus 17 842 üks kümnetuhandeline, 17 tuhandelist, 178 sajalist, 1784 kümnelist.

§ 10. Rooma ja vana-slaavi numeratsioon.

Hindude arvusüsteem siirdus VIII sajandil araablastele ja viimaste kaudu Euroopasse. Koos positsiooniprintsiibil üles-ehitatud arvusüsteemiga tõid araablased Euroopasse ka numbrid, mida sellest ajast saadik nimetatakse araabia numbriteks.



Joon. 1.

Algul sarnlesid need numbrid vähe meieaegsetega ja võtsid alles aegamööda praegusaegse kuju.

Peale araabia numbrite kasutatakse arvude kirjutamiseks ka teisi numbreid, näiteks tarvitatakse kella numbrilaual, raamatu peatükkide märkimiseks jms. rooma numbreid.

Oma kultuuri algastmeil arvutasid roomlased sõrmede abil ja soovides näidata, et esemeid on 1, 2, 3, 4, näitasid 1, 2, 3, 4 sõrme. Kui esemeid oli 5, näidati kogu kätt, kui aga oli 10, siis näidati kaht kätt. Soovides kujutada mingit arvu tahvlil või pergamendil, kujutati seal niipalju käsi ja sõrmi, kuipalju oli vajalik, I, II, III. Käe kujutamiseks joonestati kaks joont, mis esitasid väljasirutatud pöialt ja nimetissõrme — V, kaks kätt kujutasid kümmet VV, ent varsti hakati kümmet kirjutama nii: X, s. o. käsi ülal ja all. Sada hakati märkima märgiga C, esimese tähega sõnast *centum* (100) ja tuhandet märgiga M, esimese tähega sõnast *mille* (1000).

Viiekümne tähistamiseks võeti pool C tähest, mis andis märgi L.

Viissada märgiti tähega D.

Nii valiti arvude kirjalikuks kujutamiseks järgmised seitse märki:

I (1), V (5), X (10), L (50), C (100), D (500) ja M (1000).

Kui märk I, X või C on asetatud suurema väärtusega märgi järele, siis tuleb need liita, ja ümberpöördud asendi puhul — lahutada (viimane on kehtiv ainult märkide I, X ja C puhul). Näiteks CX = 110, XC = 90, LX = 60 ja XL = 40.

Mitmest tuhandelisest koosneva arvu tähistamiseks asetatakse kriips tuhandeliste arvu kohale või kirjutatakse tuhandeliste arvu juurde paremale poole alla täht *m*. Näiteks kirjutatakse 15 000: $\overline{XV}$ või XV_m. Nii näeme, et erinevalt kümnendsüsteemi numbri tähendusest sõltub rooma numbri tähendus ainult märgi kujust, mitte aga selle asendist. Näiteks tähendab number I alati ühte ükskõik, kas ta asetseb teisest numbrist paremal või vasakul. Number X tähendab alati kümmet. Rooma numbrite hulgas puudub number 0.

Kirjutame arve rooma numbritega:

I = 1; II = 2; III = 3; IV = 4; V = 5; VI = 6; VII = 7; VIII = 8; IX = 9; X = 10; XI = 11; XIX = 19; XX = 20; XXIX = 29; XLV = 45; XCIV = 94; CD = 400; MCMXLV = = 1945; XII$_m$DCXXIII = 12 623.

Rooma numeratsiooni aluseks on järgmine printsiip: kui mitu rooma numbrit asetseb kõrvuti, siis võrdub sellega tähistatud arv üksikutele numbritele vastavate arvude summaga. Erandi moodustavad järgmised kuus arvu:



Joon. 2.

IV = 4; IX = 9; XL = 40; XC = 90; CD = 400; CM = 900. Nendes arvudes lahutatakse vasakpoolse numbri väärtus parempoolse väärtusest: IV = 5 — 1 = 4; CD = 500 — 100 = = 400 jne.

Venelased kasutasid arvude tähistamiseks XVII sajandi lõpuni slaavi tähestiku tähti. Ainult üksikutes raamatutes esinesid araabia numbrid.

Araabia numbrid võeti kasutusele slaavi-vene trükitud teostes 1611. aastal Veneetsias kirjastatud raamatutes lehekülgede tähistamiseks.

Selle ajani tähistati vana-slaavi raamatute numbreid slaavi tähestiku tähtedega (joon. 2).

Kui täht tähendas arvu, mitte aga häälikut, siis asetati selle kohale vastav märk (titlo).

Vana-slaavi numeratsioon oli rajatud samale printsiibile kui kreeka ja rooma: kõrvuti titlo alla kirjutatud tähed märkisid arvu, mis võrdus tähtedega tähistatud arvude summaga. Siinjuures asetati arvud, mis olid väiksemad kui tuhat, kuid suuremad kui 20, sellesse järjekorda nagu neid loeti, s. o. vasakult paremale.

10-st suuremate ja 20-st väiksemate arvude märkimisel eelnes ühtesid märkiv täht kümneid tähistavale tähele.

Nagu näeme asetatakse tähed siin samasse järjekorda nagu lugedeski: kaheksateistkümmend, viisteistkümmend.

Mitmest tuhandest koosnevate arvude tähistamiseks kasutati samade tähtede ette asetatavat erimärki.

§ 11. Teised arvusüsteemid.

Me nägime juba, et arvusüsteemi aluseks võib võtta mistahes arvu.

On esinenud arvusüsteeme, millede aluseks olid arvud: 2, 3, 5, 7, 8, 11, 12, 20 ja 60 ja mida vastavalt nimetati: kahend-, kolmend-, viiend-, seitsmend-, kaheksand-, üheteistkümnend-, kaheteistkümnend-, kahekümnend- ja kuuekümnend-süsteemiks. Nimetatud süsteemidest esinesid kõige sagedamini viiend- ja kahekümnendsüsteemid (Põhja-Ameerika indiaanlastel, Kesk- ja Lõuna-Ameerika pärismaalastel, Põhja-Siberi ja Aafrika rahvastel).

Kõige levinenumaks muutus kümnendsüsteem. Üheltpoolt on see seletatav kultuuri algastmel mõlema käe sõrmedega arvutamisega, teiselt poolt — selle süsteemi lihtsuse ja mugavusega.

Väga sobiv oleks olnud samuti kaheteistkümnendsüsteem, sest selle süsteemi alus jagub 2-ga, 3-ga, 4-ga ja 6-ga, kuna kümme jagub ainult 2-ga ja 5-ga. Järelikult ei teki kaheteistkümnendsüsteemi arvude jagamisel nii sageli jääke ja murdosi kui kümnendsüsteemi arvude jagamisel. Kaheteistkümnendsüsteem oli levinud vanade roomlaste juures. Meil on seni säilinud loendamine tosinate (12 ühte) kaupa, 12 tosinat nimetati „grossiks" ja 12 grossi — massiks.

Kuuekümnendsüsteem oli tarvitusel babüloonlastel, mis ajast on säilinud ka 1-he tunni jaotamine 60-ks minutiks ja 1-he minuti jaotamine 60-ks sekundiks ning samuti ringjoone jaotamine 360-ks kraadiks.

§ 12. Üleminek ühelt arvusüsteemilt teisele.

Kümnendsüsteemi kümne numbri abil on võimalik väljendada mistahes arvu uues süsteemis, kui selle alus on 10-st väiksem.

Kirjutame näiteks arvu 786 viiendsüsteemis. Leiame algul, mitu 2. järgu ühikut saab moodustada 786-st lihtühikust süsteemis alusega viis; selleks jagame arvu 786 süsteemi alusega 5.

786 | 5

157 (2. järgu ühikut),

1-ne jääk: 1 (1-se järgu ühik).

Nii saime 157 teise järgu ühikut ja ühe 1. järgu ühiku. Määrame nüüd 157-s 2. järgu ühikus sisalduvate 3. järgu ühikute arvu; selleks on tarvis 2. järgu ühikute arvu jagada jällegi süsteemi alusega, s. o. 5-ga.

157 teise järgu ühikut | 5

31 (3. järgu ühikut),

2. jääk: 2 teise järgu ühikut.

Jagades 3. järgu ühikute arvu (31) 5-ga, saame jagatises 4. järgu ühikute arvu ja jäägis 3. järgu ühikute arvu.

31 kolmanda järgu ühikut | 5
6 (4. järgu ühikut),

3. jääk: 1 kolmanda järgu ühik.

Jagades 4. järgu ühikute arvu (6) 5-ga, saame:

6 neljanda järgu ühikut | 5
1 (5. järgu ühik),

4. jääk: 1 neljanda järgu ühik.

Niisiis sisaldab kümnendsüsteemi arv 786 viiendsüsteemis: 5. järgu ühikuid — 1, 4. järgu ühikuid — 1, 3. järgu ühikuid — 1, 2. järgu ühikuid — 2 ja 1. järgu ühikuid 1, s. o. 11 121.

Siit reegel:

selleks, et kümnendsüsteemi arvu muuta mõne teise süsteemi arvuks, tuleb antud arv jagada uue süsteemi alusega, saadud jagatis uuesti jagada uue süsteemi alusega, uus jagatis jällegi jagada uue süsteemi alusega jne., kuni saame jagatise, mis on väiksem uue süsteemi alusest. Üksteisele järgnevad jäägid ja viimane jagatis ongi siis otsitava arvu numbriteks.

Et tähistada, millises arvusüsteemis on arv kirjutatud, märgitakse arvust paremale poole alla süsteemi alus, näiteks: $11\,125_5$ ehk $11\,121_v$. Vaadeldud juhul võib kirjutada: $786_{10} = 11\,121_5$.

Ümberpöördud juhtum. Väljendada kaheksandsüsteemi arv kümnendsüsteemis:

$$32\,075_8 = x_{10}.$$

Kuna üks 5. järgu ühik kaheksandsüsteemis võrdub 8 neljanda järgu ühikuga, siis 3 viienda järgu ühikut võrdub

$8 \cdot 3 = 24$ neljanda järgu ühikuga; 24 4. järgu ühikuga liidame veel 2 antud arvu 4. järgu ühikut, saame $24 + 2 = 26$ neljanda järgu ühikut. Korrutades süsteemi aluse 8 arvuga 26 (4. järgu ühikute arv), saame $8 \cdot 26 = 208$ kolmanda järgu ühikut. Antud arvus 3. järgu ühikute arv on null, järelikult 208-ga ei ole tarvis midagi liita ja võime seda otsekohe peenestada 2. järgu ühikuteks (mida saame $8 \cdot 208 = 1664$). Liites 1664-ga antud arvu 7 teise järgu ühikut, saame: $1664 + 7 = 1671$ teise järgu ühikut. Korrutades süsteemi aluse 8 arvuga 1671, saame 1. järgu ühikute arvu, s. o. $8 \cdot 1671 = 13\,368$. Liites antud arvuga 5 esimese järgu ühikut, saame 13 373 esimese järgu ühikut. Järelikult, $32\,075_8 = 13\,373_{10}$.

Kirjaliku tehte paigutame järgmiselt:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}3\\8\end{array} \\ \hline +\begin{array}{r}24\\2\end{array} \\ \hline \times\begin{array}{r}26\\8\end{array} \\ \hline \times\begin{array}{r}208\\8\end{array} \\ \hline 1664 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\begin{array}{r}1664\\7\end{array} \\ \hline \times\begin{array}{r}1671\\8\end{array} \\ \hline +\begin{array}{r}13\,368\\5\end{array} \\ \hline 13\,373 \end{array}$$

Siit reegel:

selleks, et arvu *n* arvusüsteemis väljendada kümnendsüsteemis, tuleb kõrgeima järgu ühikute arv korrutada *n*-ga (süsteemi alusega), saadud korrutisega liita järgmine arv, saadud summa uuesti korrutada *n*-ga, saadud korrutisega liita järgmine arv, ja uuesti saadud summa korrutada *n*-ga jne., kuni liidame 1. järgu ühikute arvu. Saadud resultaat kujutabki otsitavat arvu kümnendsüsteemis.

Selleks, et arvu *n* arvusüsteemis väljendada *m* arvusüsteemis, tuleb algul antud arvu väljendada kümnendsüsteemis ja siis saadud arv väljendada *m* arvusüsteemis.

Lahendame ülesande: $301\,201_4 = x_6$.

Algul väljendame $301\,201_4$ kümnendsüsteemis:

$\times \frac{3}{4}$

$\times \frac{12}{4}$

$+ \frac{48}{1}$

$\times \frac{49}{4}$

$+ \frac{196}{2}$

$\times \frac{198}{4}$

$\times \frac{792}{4}$

$+ \frac{3168}{1}$

3169

3169 (1. järgu ühikut) | 6

1 (1. järgu ühik) 528 (2. j. ü.) | 6

0 (2. j. ü.) 88 (3. j. ü.)

88 (3. järgu üh.) | 6

4 (3. järgu üh.) 14 (4. järgu üh.) | 6

2 (4. järgu üh.) 2 (5. järgu üh.)

Järelikult, $301\,201_4 = 22\,401_6$.

Me nägime (§ 7), et igat arvu n arvusüsteemis võib väljendada nii:

$$a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0,$$

kus

$$a_r,\ a_{r-1} \ldots a_2,\ a_1,\ a_0$$

kujutavad vastavate järkude ühikute arvu.

Näiteks:

$$396_{10} = 3 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 6.$$

Arv 396 neljandsüsteemis võrdub $1 \cdot 4^4 + 2 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4$. Selle põhjal saab arvu seitsmendsüsteemis väljendada kümnendsüsteemis järgmiselt:

$$32\,065_7 = x_{10}$$

$x_{10} = 3 \cdot 7^4 + 2 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7 + 5 = 7203 + 686 + 42 + 5 = 7936_{10}$.

Märkus. Ülaltoodud reeglid on rakendatavad arvusüsteemi teisendamisel sel juhul, kui arvusüsteemi alus ei ületa arvu 10.

III peatükk.

Liitmine.

§ 13. Sissejuhatus.

Aritmeetika vaatleb tehteid arvudega ja õpib tundma tehete seadusi.

Nagu juba nägime tekkisid aritmeetika põhimõisted — loomulik arv, üheline ja loomulikkude arvude rida, inimese praktilise tegevuse tarvidustest.

Samuti ka välismaailma esemed, nende kogumikud (hulgad) ja nende vahelised suhted on allikateks, milledest ammutame oma esialgseid teadmisi väikeste arvudega teostatavate tehete kohta.

Loomulikkude arvudega teostatavate tehete tulemusena saadakse uus arv.

Esitatavas süstemaatilises aritmeetika kursuses vaatleme nelja aritmeetilist tehet: liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist.

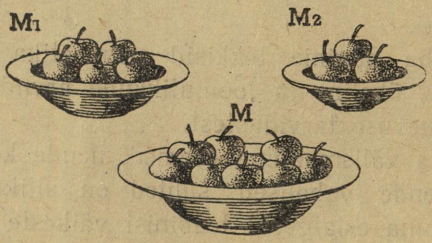
Teksti lühendamise otstarbel jätame arvust rääkides edasises käsitluses, kuni murdarvude vaatlemiseni, ära sõna loomulik, mõistes kõikidel juhtudel arvu all ainult loomulikku arvu.

§ 14. Loomulikkude arvude summa.

Lihtsaimaks loomulikkude arvudega teostatavaks tehteks on liitmine, mis tekkis operatsioonidest hulkadega.

Kahe erineva hulga M_1 ja M_2 (joon. 3) kõikide elementide ühendamise tulemusena üheks hulgaks (üheks kogumikuks), saame uue hulga M, mis koosneb kõikidest hulkade M_1 ja M_2 elementidest ja ainult neist. Hulka M nimetame antud hulkade M_1 ja M_2 summaks. Niisiis, **ühiseid elemente mitteomavate antud hulkade M_1 ja M_2 summaks nimetatakse niisugust uut hulka, mis on koostatud kõikidest antud hulkade elementidest ja ainult neist.**

Joonisel 3 on kujutatud kahe hulga M_1 ja M_2 elemendid. Üks neist (M_1) koosneb 5 elemendist, teine (M_2) 3 elemendist. Nende summa (hulk M) koosneb kaheksast elemendist.



Joon. 3.

Loomulikku arvu 8 nimetatakse loomulikkude arvude 5 ja 3 summaks ja arvudest 5 ja 3 nende summa koostamist nimetatakse nende arvude liitmiseks.

Üldiselt, **kui hulgad M_1, M_2 ja nende summa M sisaldavad vastavalt a, b ja c elemente, siis nimetatakse arvudest a ja b arvu c koostamist arvude a ja b liitmiseks ja arvu c — nende summaks. Arve a ja b nimetatakse liidetavaiks.**

Võib ütelda, et loomulikkude arvude a ja b summaks nimetatakse niisugust uut arvu c, mis näitab ühiseid elemente mitteomavate hulkade M_1 ja M_2 summa M võimsust, kusjuures M_1 ja M_2 võimsus väljendub vastavalt arvudega a ja b.

Liitmistehte üleskirjutises kasutatakse märki +, mida nimetatakse **plussiks.**

Me nägime, et ühiseid elemente mitteomava kahe hulga summa koostises peavad olema tingimata kõik nende hulkade elemendid. Kuna iga loomuliku arvu ja selle hulga ühtede kogu, mille loendamise tulemusena on saadud see arv, on võrdvõimsad (võrdarvulised), siis peab ka kahe loomuliku arvu (*a* ja *b*) summa (*c*) koosnema antud liidetavate kõikidest ühtedest ja ainult neist.

Järelikult võib ütelda, et **liita kaks arvu, tähendab koostada uus arv, mis sisaldaks niipalju ühtesid, kuipalju on neid antud arvudes.**

Märgime, et kahe arvu liitmise idee sisaldub juba loomuliku arvu mõistes eneses, sest loomuliku arvude rea iga arv, peale arvu üks, järgneb otseselt mingile arvule ja moodustub arvu „üks" lisamisel eelkäivale arvule. Siit järgneb, et loendamine on liitmise alguseks. Kujutledes liitmist loendamise abil, me võime neid eraldada järgmiselt: kujutleme, et me tõeliselt või mõttes oleme ühendanud kaks hulka (M_1 ja M_2), milledel ei ole ühiseid elemente, üheks uueks hulgaks M ja tahame teada, mitu elementi ta sisaldab. Selleks me võime loendada saadud hulga kõik elemendid: üks, kaks, kolm jne. **See on loendus.**

Kuid me võime toimida ka vähe teisiti: loendame algul mitu elementi sisaldab kumbki antud hulk (M_1 ja M_2) eraldi; saame kaks arvu: näiteks viis ja kolm: siis me enam e i l o e n d a antud hulkade liitmisest saadud hulga (M) elemente, vaid l o e n d a m e j u u r d e ühele hulgale (M_1) teise hulga (M_2) elemendid: viis ja üks — kuus, kuus ja üks — seitse, seitse ja üks — kaheksa. Kui meil ei ole otseselt silmade all hulki, millede summat me leiame juurdeloendamise teel, siis peame loendama ka lisatavaid ühikuid, sest juurdeloendamine ühikute kaupa peab toimuma niipalju kordi, kuipalju liidetavaid on teises liidetavas. Selleta me ei

tea, millal peame lõpetama juurdeloendamise. Niiviisi kujutab liitmine enesest kahe loenduse ühendamist: ühe, mis algab esimesest liidetavast (meie näites $5 + 1 = 6$; $6 + 1 = 7$; $7 + 1 = 8$); teise, mis algab ühelisest (loendasime juurde ühe ühiku, loendasime juurde kaks ühikut; loendasime juurde kolm ühikut).

Nii loendatakse kõik ühe ja sama arvu ühed (kahe hulga summa kõik elemendid), alustades loendamist ühest ühelisest; teostades aga liitmist järestikuse juurdeloendamise abil, me loendame mitu ühte on kahes arvus, alustades loendust mitte ühest, vaid nii mitmest ühelisest, kuipalju neid on ühes neist arvudest; siin kerkib juba selgesti esile kahe arvu ühendamise (liitmise) mõte uueks arvuks. Esitatust järgneb, et **kahe loomuliku arvu *a* ja *b* liitmine on alati teostatav,** sest loendamise teel võime alati saada kahe antud arvu summat, loendades arvule *a* juurde kõik arvu *b* ühed.

Märgime, et **lisada loomulikule arvule *a* nulli ehk nullile loomuliku arvu *a*, tähendab võtta sama arv *a*.**

Järelikult tuleb sümbolite all $a + 0$ ja $0 + a$ mõista arvu a, s. o. $a + 0 = a$ ja $0 + a = a$. Erijuhtumil, kui $a = 0$, siis $0 + 0 = 0$.

§ 15. Liitmise kasutamine ülesannete lahendamisel.

Ülesanne 1.

Ühel taldrikul on 5 õuna, teisel 3 õuna. Kõik need õunad asetati tühjale vaagnale. Mitu õuna on vaagnal?

Antud ülesandes on tarvis leida kahe õunte hulga summa elementide arv, kusjuures üks sisaldab 5 õuna ja teine 3 õuna (joon. 3).

Vastuseks ülesande küsimusele on tarvis leida arv, milles on 5 esimese arvu ühte ja 3 teise arvu ühte.

Järelikult on tarvis leida kahe antud arvu 5 ja 3 summa.

Lahendus: $5+3=8$ (õuna).

Ülesanne 2.

Ühel taldrikul on 5 õuna, teisel aga 3 õuna rohkem. Mitu õuna on teisel taldrikul?

Ülesande tingimustest järgneb, et õunte hulka teisel taldrikul võib jaotada 2 ossa, kus üks neist on võrdvõimne õunte hulgaga esimesel taldrikul ja koosneb 5-st õunast, teine aga 3-st õunast. Et teada saada, kui palju õunu on üldse teisel taldrikul, on tarvis leida arv, mille koostises oleks esimese antud arvu 5 ühte ja teise 3 ühte. Selleks võib esimesele arvule juurde loendada järjest kõik teise liidetava ühed, s. o. teostada kahe arvu 5 ja 3 liitmist.

Lahendus: $5+3=8$ (õuna).

Vaadeldud ülesannetest selgub, et lihtsate ülesannete lahendamisel kasutatakse liitmist kahel juhul:

1. Kui mingi terviku antud osade (liidetavate) järgi on tarvis leida tervik (summa).

Märkus: Nii sisaldab hulkade kui ka arvude liitmise mõiste eneses terviku (summa) ja selle osade (liidetavate) mõistet.

2. Kui antud arvu on tarvis suurendada mõne ühe võrra või lisada antud arvule teatav arv ühtesid.

§ 16. Mitme arvu summa.

Senini me tutvusime kahe hulga summaga ja vastavalt kahe arvu summaga. Kuid summa ja liitmise mõistet võib ilmselt laiendada kuitahes mitmele hulgale ja järelikult ka loomulikkudele arvudele.

Kui tahaksime ühendada teatav arv hulki üheks uueks hulgaks ja teada saada kui palju ta sisaldab elemente, siis võiks sellele küsimusele vastata, leides igas hulgas sisalduvaid elemente näitavate arvude summa.

Selleks, et leida mitme hulga summat, me võiksime liita teise hulga esimesega ja siis saadud hulgaga kolmanda hulga, edasi neljanda jne. Samuti võib toimida ka antud hulki iseloomustavate loomulikkude arvude liitmisel.

Siit järgneb, et kolme arvu summa $(a + b + c)$ all mõistetakse kahe esimese arvu $(a + b)$ ja kolmanda arvu c summat, s. o. $(a + b) + c$; nelja arvu summa $(a + b + c + d)$ all — esimese kolme arvu $(a + b + c)$ ja neljanda arvu d summat, s. o. $(a + b + c) + d$ jne.

Näide 1. $10 + 5 + 3 = (10 + 5) + 3$.

Näide 2. $10 + 5 + 3 + 6 = (10 + 5 + 3) + 6$.

§ 17. Liitmise seadused (põhiomadused).

Liitmise seadustena tuntakse summa järgmisi omadusi: **vahetuvus** (kommutatiivsus), **ühenduvus** (assotsiatiivsus) ja **monotoonsus.**

1. Kommutatiivsus.

Summa ei sõltu liidetavate järjekorrast. Me nägime, et kahe arvu liitmine toimub tegelikult ühele arvule kõikide teise arvu ühtede juurde loendamisega, kuid loendamise tulemus ei sõltu loendamise järjekorrast. Tähendab on üksköik, kas me kahe arvu 5 ja 3 liitmisel loendame arvule 5 juurde kõik arvu 3 ühed või ümberpöördult, arvule 3 kõik arvu 5 ühed. Nii ühel kui ka teisel juhul on tulemus sama. Tähtis on ainult, et iga liidetava kõik ühed esineksid summas. Tõepoolest, $5 + 3 = 8$ ja $3 + 5 = 8$. Järelikult: $5 + 3 = 3 + 5$; ja millised ka ei oleks arvud a ja b, ikka

$$a + b = b + a.$$

Esitatust järgneb liitmise tehte ühesus, s. o. kaks kindlat arvu annavad ikka ühe ja sama summa. Kasutades aksioomi,

et loendamise tulemus ei sõltu loendamise järjekorrast ja jälgides, et summa sisaldaks igakord kõikide liidetavate kõiki ühtesid, võime kommutatiivsuse seadust laiendada ka mitme arvu summale. Vastavalt eeskirjale on näiteks summa $5+7+6+4+3$ arvutamiseks tarvis esimesele arvule lisandada (juurde loendada) kõik teise arvu ühed, saadud summale kõik kolmanda arvu ühed, uuele summale — kõik neljanda arvu ühed jne.

Kuid me võime ka algul teise arvuga liita (juurde loendada) viienda, siis nende summaga — kolmanda, uue saadud summaga — neljanda ja lõpuks esimese arvu kõik ühed.

On ilmne, et millises järjekorras meie ka mitme antud arvu liitmist ei teostaks, tekib ikka sama summa, sest kõikidel juhtudel kuulub tema koosseisu sama arv ühtesid.

Liidetavate ümberpaigutamist kasutatakse peastarvutuse lihtsustamiseks ja lühendatud kirjalikul arvutamisel.

2. Assotsiatiivsus.

Antud arvude summa ei muutu, kui liidetavaid rühmitada, teostada liitmist rühmades ja siis saadud tulemused liita.

Kui on antud arvud 2, 4 ja 3, siis võime vastavalt mitme arvu summa definitsioonile nende summa saamiseks toimida järgmiselt: $2+4+3=(2+4)+3=6+3=9$. Kuid sama resultaadi saaksime ka teistsugusel arvude rühmitamisel ja nimelt: $2+4+3=2+(4+3)=2+7=9$.

Millised arvud a, b ja c ka oleks, ikka

$$a+b+c=(a+b)+c \text{ ja } a+b+c=a+(b+c).$$

Toetudes mitme arvu summa definitsioonile ja liitmise kommutatiivsuse seadusele, võib assotsiatiivsuse seadust laiendada mistahes liidetavate arvuga summale, kasutades seda peast- ja kirjalikkude arvutuste lihtsustamiseks.

Näiteks on kerge leida $73 + 48 + 27 + 17 + 52$ summat järgmiselt:

$$73 + 48 + 27 + 17 + 52 = 73 + 27 + 48 + 52 + 17 =$$
(kommutatiivsuse seadus)
$$= (73 + 27) + (48 + 52) + 17 = \text{(assotsiatiivsuse seadus)}$$
$$= 100 + 100 + 17 = \text{(assotsiatiivsuse seadus)}$$
$$= 200 + 17 = 217.$$

3. Summa monotoonsus.

1. Kui kaks antud arvu (a ja a_1) on võrdsed, siis sama arvu (b) liitmisel kummagi arvuga saadakse võrdsed summad.

Kui $a = a_1$, siis $a + b = a_1 + b$, sest ilmselt sisaldab kumbki summa sama arvu ühtesid.

2. Kui üks antud arvudest (a) on suurem või väiksem teisest antud arvust (a_1), siis sama arvu (b) liitmisel kummagi arvuga on esimene summa vastavalt suurem või väiksem teisest summast.

Olgu arv $a > a_1$. See tähendab, et arv a sisaldab eneses arvu a_1 ja veel mingit nullist erinevat arvu n, s. o. $a = a_1 + n$ (§ 2).

Siis $a + b = (a_1 + n) + b = a_1 + n + b =$ (assotsiatiivsus) $= (a_1 + b) + n$ (kommutatiivsus ja assotsiatiivsus).

Siit $a + b > a_1 + b$; sest summa $a + b$, nagu see järeldub eelnevast võrdusest, sisaldab summat $a_1 + b$ ja peale selle veel mingit nullist erinevat arvu n.

§ 18. Järeldusi liitmise põhiseadustest.

Eespool vaadeldud liitmise seadustest järelduvad reeglid:

1) antud arvu liitmisest mitme arvu summaga;
2) mitme arvu summa liitmisest antud arvuga ja
3) mitme arvu summade liitmisest.

1. Selle asemel, et antud arvuga liita mitme arvu summat, võib liita selle arvuga järjest iga liidetavat.

See reegel on otsene järeldus mitme arvu assotsiatiivsuse seadusest. Tõepoolest, et arvuga 27 liita summa $(43 + 39)$, kasutame assotsiatiivsuse seadust ja saame:

$$27 + (43 + 39) = 27 + 43 + 39 = (27 + 43) + 39 = \\ = 79 + 39 = 109.$$

Millised ka poleks liidetavad a, b, c ja d, ikka

$$a + (b + c + d) = a + b + c + d.$$

2. Selle asemel, et mitme arvu summaga liita mingi arv, võib liita selle arvu ühe mingi liidetavaga.

Näide: $(18 + 29 + 37) + 12 = (18 + 12) + 29 + 37 = \\ = 18 + (29 + 12) + 37 = 18 + 29 + (37 + 12) = 96.$

Millised ka poleks liidetavad a, b, c ja d, ikka

$$(a + b + c) + d = (a + d) + b + c.$$

Tõepoolest:

$(a + b + c) + d = d + (a + b + c) =$ (kommutatiivsus)
$= d + a + b + c =$ (summa liitmine antud arvuga)
$= (d + a) + b + c =$ (assotsiatiivsus)
$= (a + d) + b + c$ (kommutatiivsus).

3. Selle asemel, et mitme arvu summaga liita mingi teine summa, võib järjest liita kõik nende summade liidetavad.

Näide: $(24 + 37 + 15) + (16 + 45 + 13) = 24 + 37 + \\ + 15 + 16 + 45 + 13 = 150.$

Vaadeldava reegli õigsus on ilmne, sest kasutades seda me loendame järjest esimese summa esimesele liidetavale juurde kõik ülejäänud liidetavate ühed. Seega koosneb summa kõikidest antud liidetavate ühtedest ja ainult neist.

See reegel tugineb liitmise assotsiatiivsuse seadusele. Millised ka poleks antud liidetavad, ikka

$$(a + b + c) + (d + e + f) = a + b + c + d + e + f.$$

§ 19. Liitmise reeglid.

1. Ühekohaliste arvude liitmine.

Selleks, et liita kaks ühekohalist arvu, on tarvis ühele neist juurde loendada kõik teises arvus sisalduvad ühed. Näiteks, et liita 7 ja 5, tuleb 7-le juurde loendada üks, saame 8; 8-le lisame 1, saame 9; 9 ja 1 moodustavad 10; 10 ja 1 moodustavad 11; 11 ja 1, saame 12. Tähendab 7-ga liites 5, saame 12. Seda kirjutatakse nii: $7 + 5 = 12$.

Ühekohaliste arvude liitmise reegleid pole olemas. Nende arvude liitmise tulemused peetakse lihtsalt meeles.

2. Mitmekohaliste arvude liitmine.

On antud: 5478 ja 321, mis tuleb liita. Kujutame kumbagi neist arvudest summana:

$$5478 = 5\,\text{t.} + 4\,\text{s.} + 7\,\text{k.} + 8\,\text{ü.}$$
$$321 = 3\,\text{s.} + 2\,\text{k.} + 1\,\text{ü.}$$

Järelikult, $5478 + 321 = (5\,\text{t.} + 4\,\text{s.} + 7\,\text{k.} + 8\,\text{ü.}) + (3\,\text{s.} + 2\,\text{k.} + 1\,\text{ü.})$.

Nii kujuneb tehe kahe summa liitmiseks. Toetudes summade liitmise reeglile, võime kirjutada:

$$5478 + 321 = 5\,\text{t.} + 4\,\text{s.} + 7\,\text{k.} + 8\,\text{ü.} + 3\,\text{s.} + 2\,\text{k.} + 1\,\text{ü.}$$

Nüüd kasutame kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadusi: algul paigutame liidetavad nii, et üksteisele järgneksid ühesugused liidetavate ühikud, s. o. ühed ühtede järgi, kümned kümnete järgi jne., siis rühmitame ühed ühtedega, kümned kümnetega jne.

Saame: $5478 + 321 = 5\,\text{t.} + (4\,\text{s.} + 3\,\text{s.}) + (7\,\text{k.} + 2\,\text{k.}) + (8 + 1) = 5799$.

Võib juhtuda, et mõnede sama järgu ühikute liitmisel saadakse summaks 10-st suurem arv; siis moodustavad 10 selle

järgu ühikut järgneva kõrgema järgu ühe ühiku, mis liidetakse vastavate ühikutega. Kahe mitmekohalise arvu kirjalikul liitmisel võime üldtarvitatava kirjutusviisi puhul korrata samu arutlusi.

Niisiis põhjeneb mitmekohaliste arvude liitmine summade liitmise reeglile ja liitmise kommutatiivsuse ning assotsiatiivsuse seadustele.

3. Mitme arvu liitmine.

Kui liidetavate arv on suurem kui kaks, siis toimitakse analoogiliselt ja nimelt kirjutatakse antud arvud üksteise alla nii, et ühe ja sama järgu ühikud asetseksid ühes vertikaalses tulbas.

Nüüd leitakse paremalt esimese tulba arvude summa — ühtede summa. Kui see summa on 9-st väiksem, siis kirjutatakse see otsitava summa ühtede numbriks. Kui see on aga suurem kui 9, siis kirjutatakse selle summa ühed ühtede alla, kümned aga liidetakse teise tulba arvudega. Toimides selliselt iga järgneva tulbaga, jõuame lõpuks viimase tulbani. Selle tulba arvude summa, millega liidetud eelmise tulba arvude liitmisel saadud sama järgu ühikud, kirjutatakse samal kujul nagu ta saadud.

Vaadeldav mitme arvu liitmise meetod põhjeneb samadele seadustele ja reeglitele kui kahe mitmekohalise arvu liitminegi, seepärast ei vaja see erilist selgitust. Mitmekohaliste arvude liitmisel on vajalik osata kiiresti ja õigesti liita mitut ühekohalist arvu. See liitmine toimub järjestikku ja teostatakse peast.

Näiteks:

$$\begin{array}{r} 483 \\ +\ 232 \\ 571 \\ \hline 1286 \end{array}$$

IV peatükk.

Lahutamine.

§ 20. Tehte definitsioon.

Arvude summa mõistet me selgitasime hulkade summa ja hulkade liitmise otsese vaatlemisega. Lahutamise ja teiste aritmeetiliste tehete mõistet saab määritleda hulkade vastavate operatsioonideta, tuginedes vaid kahe arvu summa mõistele.

Kui on antud kaks mittevõrdset arvu, siis on üks neist kindlasti teisest suurem, s. t. teda võib moodustada mingit kolmandat arvu teise arvuga liites.

Kui arv a on suurem b-st, siis ta sisaldab eneses arvu b ja veel mingi arvu c, järelikult võib teda kujutada arvude b ja c summana, s. t. $a = b + c$.

Kui arvust a lahutada (ära võtta) b ühte, siis peab sellest arvust järgi jääma c ühte. Kui liita arvud b ja c uuesti, siis saadakse jälle arv a, mis on arvude b ja c summa.

Esitatust järgneb, et **suuremast arvust a lahutada väiksem arv b tähendab leida niisugune arv c, mida liites väiksema arvuga b, saadakse suurem arv a.**

Järelikult: **lahutamiseks nimetatakse niisugust aritmeetilist tehet, mille abil antud summa (a) ja ühe liidetava (b) järgi leitakse teine liidetav (c).**

Matemaatiliselt väljendatakse lahutamist nii:

$$a - b = c,$$

kus a on summa (vähendatav), b on antud liidetav (lahutatav) ja c — otsitav teine liidetav (vahe).

Me nägime, et kahe mittevõrdse arvu vahe väljendub mingi loomuliku arvuga. Vaatleme erijuhtu, kus vähendatav (summa) ja lahutatav (antud liidetav) on võrdsed. Ilmselt lahutatakse (võetakse ära) sel juhul vähendatavast niipalju

ühikuid, kuipalju ta neid sisaldab. Järelikult võrdub vahe nulliga.

Tõepoolest: $a - a = 0$, sest $a + 0 = a$.

Lahutada antud arvust 0, tähendab jätta see arv muutmata:

$a - 0 = a$, sest $0 + a = a + 0 = a$.

Liitmist ja lahutamist nimetatakse teineteise suhtes pöördtehteiks, sest liitmisel on antud liidetavad ja otsitakse summat, lahutamisel aga, ümberpöördult, on antud summa ja üks liidetav ning otsitakse teist liidetavat.

§ 21. Järeldusi lahutamise definitsioonist.

1. Loomulikkude arvude lahutamine on võimalik ja annab ühese tulemuse ainult sel juhul, kui vähendatav on lahutatavast suurem või sellega võrdne.

Kui näiteks on tarvis arvust a lahutada arv b, siis saame selle vahe, lahutades arvust a järjest niipalju ühtesid, kuipalju on neid arvus b. Lahutades ühe ühelise, siis väljendub vahe üheainsa arvuga $a - 1$, mis loomulikkude arvude reas otseselt eelneb arvule a; lahutades teise ühe, saame jälle ainsa arvu $a - 1 - 1$, mis otseselt eelneb arvule $a - 1$ jne. Kui $a > b$, siis lahutades b ühte, saame loomulikkude arvude rea mingi üheainsa arvu, mis ongi arvude a ja b vahe; kui $b = a$, siis peale lahutamist ei jää järgi ühtki ühte, teiste sõnadega, ka sel juhul võrdub vahe üheainsa arvuga — null; kui $a < b$, siis ei ole lahutamine võimalik. Niiviisi on pöördtehe — **lahutamine,** samuti nagu **otsene tehe — liitmine,** ühene, ent vastandina liitmisele ei ole aga alati teostatav.

2. Antud arv ei muutu, kui sellest lahutada mingi arv ja siis saadud vahega liita sama arv.

Võtame loomuliku arvu $a \geqslant b$ ja näitame, et

$$a - b + b = a.$$

Tõepoolest, $a - b + b = (a - b) + b = a$. See järgneb lahutamise definitsioonist, sest $a - b = c$, kuid $c + b = b + c = a$. Niisiis:

$$a - b + b = (a - b) + b = a, \text{ kus } a \geqslant b.$$

3. Antud arv ei muutu, kui sellega liita mingi arv ja siis saadud summast lahutada sama arv.

Näitame, et

$$a + b - b = (a + b) - b = a.$$

Oletame, et $(a + b) - b = N$. Siis $(a + b) - b + b = N + b$ (summa monotoonsuse seadus) või $a + b = N + b$ (2. järeldus lahutamise definitsioonist). Siit $a = N$ (lahutamise ühesus).

Järelikult:

$$a + b - b = (a + b) - b = a.$$

§ 22. Lahutamise kasutamine ülesannete lahendamisel.

Ülesanne 1. Kahelt taldrikult asetati vaagnale 8 õuna, kusjuures ühelt taldrikult võeti 5 õuna. Kui palju õunu võeti teiselt taldrikult?

Kui otsitava arvuga liita 5, siis saadakse 8. See arv (8) on kahe liidetava summa, milledest üks on 5 ja teine — otsitav arv. Nii on ülesande lahendamiseks tarvis kahe liidetava summa ja ühe liidetava järgi leida teine liidetav, s. o. kasutada lahutamist.

Lahendus: $8 - 5 = 3$ (õuna).

Ülesanne 2. Vaagnal on 8 õuna, taldrikul aga 5 õuna vähem. Mitu õuna on taldrikul?

Kui õunte arvu taldrikul suurendada 5 võrra, s. o. kui liita taldrikul asuvate õunte arvuga arv 5, siis saadakse õunte arv vaagnal, s. o. 8. Niiviisi on arv (8) kahe liidetava summa, arv 5 aga ja otsitav arv on selle summa liidetavad.

Tähendab, ülesande lahendamiseks tuleb antud summa ja ühe liidetava järgi leida teine liidetav, s. o. teostada lahutamine.

Lahendus: $8 - 5 = 3$ (õuna).

Ülesanne 3. Vaagnal on 8 õuna ja taldrikul 5 õuna. Mitu õuna on vaagnal rohkem kui taldrikul?

Ülesande tingimusest järgneb, et kui otsitav arv liita taldrikul olevate õunte arvuga, s. o. arvuga 5, siis saadakse õunte arv vaagnal, s. o. 8. Järelikult, 8 on summa, arv 5 ja otsitav arv — selle summa liidetavad. Tähendab, antud ülesande lahendamiseks tuleb antud summa ja ühe liidetava järgi leida teine liidetav, s. o. kasutada lahutamist.

Lahendus: $8 - 5 = 3$ (õuna).

Vaadeldavatest ülesannetest nähtub, et lahutamist kasutatakse ülesannete lahendamisel kolmel juhul:

1) kui kahe liidetava summa ja ühe liidetava järgi leitakse teine liidetav (terviku ja osa järgi — teine osa);

2) kui antud arvu on tarvis vähendada teatava arvu ühtede võrra;

3) kui on tarvis teada, mitme ühe võrra on üks arv suurem või väiksem teisest.

§ 23. Liitmise ja lahutamise liikmetevahelised seosed.

1. Lahutamise definitsiooni järgi **vähendatav võrdub lahutatava ja vahe summaga.**

Sellest järgneb, et **kui kahe liidetava summast lahutada üks neist, siis saadakse teine liidetav.**

Näide: $25 + 15 = 40$ ja $25 = 40 - 15$.

Millised ka poleks arvud a ja b, siis kui $a + b = c$, $a = c - b$ ja $b = c - a$.

2. **Vähendatav võrdub lahutatava ja vahe summaga.**

Näide: $35 - 12 = 23$ ja $35 = 12 + 23$.

Üldse sel juhul, kui arv a on suurem arvust b või sellega võrdne ja kui $a - b = c$, siis $a = b + c$.

3. Kuna vähendatav võrdub lahutatava ja vahe summaga, **siis lahutatav võrdub vähendatavaga miinus vahe** (liidetav võrdub summaga, mis vähendatud teise liidetava võrra).

N ä i d e: $35 - 12 = 23$ ja $12 = 35 - 23$. Üldse, kui $a - b = c$, siis $b = a - c$.

Liitmisel ja lahutamisel võimaldab antud arvude ja resultaatide vaheline sõltuvus lahendada ülesandeid tehte tundmatu elemendi määramiseks. Kirjutise lihtsustamise otstarbel tähistatakse tundmatut arvu harilikult ladinakeelse tähega x (iks).

N ä i t e d: 1) $x + 18 = 40$. Selles näites tuleb leida arv, millega liites 18, saaksime 40. Siin leiame summa ja ühe liidetava järgi teise liidetava: $x = 40 - 18 = 22$.

2) $x - 37 = 13$. Selles näites tuleb leida arv, millest lahutades 37, saaksime 13. Teades, et vähendatav võrdub lahutatava ja vahe summaga, leiame: $x = 37 + 13 = 50$.

3) $100 - x = 65$. Antud juhul on vaja leida arv, mida lahutades 100-st, saaksime 65.

Kuna lahutatav võrdub vähendatavaga miinus vahe, siis $x = 100 - 65 = 35$.

§ 24. Arvu lahutamine mitme arvu summast.

1. Me nägime (§ 21), et $(a + b) - b = a$. Võtame mitme arvu summa $(a + b + c + d)$ ja lahutame sellest arvu b:

$(a + b + c + d) - b = (a + c + d) + b - b =$ (kommutatiivsus ja assotsiatiivsus) $= a + c + d$ (järeldus lahutamise definitsioonist).

Siit järgneb: **selle asemel, et kahe või mitme arvu summast lahutada mingi arv, mis võrdub ühe liidetavaga, võib selle liidetava ära jätta.**

2. Oletame, et meil on tarvis lahutada arv mitme teise arvu summast ja et üks selle summa liidetavaist on suurem sellest arvust, mida vaja lahutada.

Näiteks me tahame summast $1 + 6 + 7 + 3$ lahutada 4; summa osa — liidetav 6 on suurem kui 4; selle liidetava võime asendada arvude 4 ja 2 summaga. Pärast sellist asendust võib esitatud summat kirjutada järgmiselt:

$$1 + 4 + 2 + 7 + 3.$$

Selleks, et lahutada sellest summast arv 4, võib ära jätta lahutatavaga võrduva liidetava, s. o. 4. Siis saame: $1 + 2 + 7 + 3$. See ongi arvu 4 lahutamise tulemus summast $1 + 6 + 7 + 3$. Nagu näeme, tulemus on antud summa, milles arv 6 on asendatud arvude 6 ja 4 vahega, s. o. arvuga 2.

Üldiselt, kui meil on $(a + b + c + d) - e$, kus $c \geqslant e$, siis

$$(a + b + c + d) - e = a + b + (c - e) + d.$$

Järelikult, **selle asemel, et lahutada mingi arv mitme arvu summast, võib seda arvu lahutada ühest summa liidetavast, mis on suurem või võrdne selle arvuga.**

§ 25. Liitmiste ja lahutamiste rea omadused.

Lepime kokku nimetada liitmiste ja lahutamiste reaks üksteisele järgnevate tehete (liitmiste ja lahutamiste) rida, mis tähistatud märkidega pluss ja miinus.

Näiteks: $17 + 30 - 25 + 8 - 7$ on liitmiste ja lahutamiste rida. Antud näites tulemuse leidmiseks leiame summa $17 + 30$, sellest lahutame 25, saadud vahega liidame 8 ja saadud summast lahutame 7; saame 23. See arv on lõplik resultaat. Kui tehteid on tarvis teostada teises järjekorras,

siis märgitakse seda sulgudega. Näiteks, kui algul tuleb teostada lahutamised: 30 — 25 ja 8 — 7 ja siis liita saadud vahed 17-ga, siis märgitakse seda nii:

$$17 + (30 - 25) + (8 - 7) = 17 + 5 + 1 = 23.$$

Avaldis $a + b - c + d - e$ on liitmiste ja lahutamiste rida üldkujul. See rida tähendab: a-ga liidetakse b, saadud summast lahutatakse c, resultaadiga liidetakse d ja viimasest summast lahutatakse e.

Siinjuures eeldatakse esiteks, et tehted liitmiste ja lahutamiste reas teostatakse näidatud järjekorras (vasakult paremale) ja teiseks, et säärases tehete reas ei teki takistusi mingi lahutamise võimatuse puhul.

Liitmiste ja lahutamiste reas on kehtiv kommutatiivsus ja assotsiatiivsus.

Tõestame nende seaduste kehtivust lihtsaimal juhul, kui liitmiste ja lahutamiste rida koosneb ainult kolmest arvust:

1. Kommutatiivsus.

Liitmiste ja lahutamiste rea tulemus ei sõltu rea liikmete järjekorrast.

1. kuju: $a + b - c = a - c + b$, kus $a \geqslant c$.

Vaadeldav võrdus on õige, sest ta väljendab lauset, mis tõestatud eespool (§ 24). Selle võrduse vasak pool kujutab resultaati, mis saadakse arvu c lahutamisel summast $a + b$; parem pool aga on vahe $a - c$ ja arvu b summa. Kuid me nägime (§ 24), et summast $a + b$ arvu c lahutamise asemel võib lahutada arv c selle summa liidetavast a, sest $a \geqslant c$; see lahutamine on märgitudki võrduse parempoolses osas.

Näide: $20 + 7 - 13 = 20 - 13 + 7 = 14$ $(20 > 13)$.

2. kuju: $a - b - c = a - c - b$, kus $a \geqslant b + c$.

Vaadeldav võrdus on õige, sest selle parem ja vasak pool kujutavad tulemust, mis saadakse ühe ja sama summa lahutamisel arvust a.

Võrduse vasak pool $a - b - c$ näitab, et arvust a tuleb algul lahutada b ühte ja siis saadud vahest c ühte: ehk võrduse vasakpoolsest arvust a lahutatakse summa $b + c$ ühte; võrduse parempoolsest arvust a lahutatakse algul c ühte ja siis vahest $a - c$ veel b ühte; järelikult lahutatakse võrduse parempoolsest arvust a summa $c + b$ ühte, ent $c + b = b + c$ (summa kommutatiivsus). Nii on meid huvitava võrrandi parem ja vasak pool arvu a ning ühe ja sama summa $b + c$ vahed. Lahutamise ühesuse tõttu võrduvad need vahed ühe ja sama arvuga. Järelikult: $a - b - c = a - c - b$, kus $a \geqslant b + c$.

Näide: $35 - 15 - 12 = 35 - 12 - 15 = 8$
$(35 > 15 + 12)$.

Mõlemal juhul lahutatakse antud näites arvust 35 üks ja sama summa: $15 + 12 = 12 + 15 = 27$. Seetõttu on nii ühel kui ka teisel juhul vahe üks ja sama arv 8.

Märkus. Analoogiliselt võib tõestada, et kommutatiivsus on kehtiv liitmiste ja lahutamiste reas, mille liikmete arv on ükskõik milline.

2. Assotsiatiivsus.

1. kuju: **Selle asemel, et antud arvuga liita kahe teise arvu vahe, võib selle arvuga liita vähendatav ja tulemusest lahutada lahutatav.**

$$a + (b - c) = a + b - c, \text{ kus } b \geqslant c.$$

Võrduse vasakpoolne arv c lahutatakse summa $a + b$ teisest liidetavast, mis ülaltoodu (§ 24) põhjal esineb neil juhtudel, kui on tarvis lahutada arv c kahe teise arvu summast, antud juhul arvust $a + b$. Järelikult, $a + (b - c) = a + b - c$, kus $b \geqslant c$.

Näide: $78 + (22 - 10) = 78 + 22 - 10$.

2. kuju: **Selle asemel, et antud arvust lahutada kahe teise arvu summa, võib sellest arvust lahutada ühe liidetava ja tulemusest lahutada teise liidetava.**

$$a - (b + c) = a - b - c, \text{ kus } a \geqslant b + c.$$

Vaadeldava võrduse vasakpoolsest arvust a tuleb lahutada summa, mille suurus on $b + c$ ühte. Tulemus on sama, olenemata sellest, kas me lahutame arvust a kogu summa $b + c$ ühte või lahutame algul b ühte (esimene liidetav) ja siis saadud vahest c ühte (teine liidetav), sest nii ühel kui teisel juhul arv a väheneb sama arvu ühtede võrra ja nimelt $b + c$ võrra. Järelikult, $a - (b + c) = a - b - c$, kus $a \geqslant b + c$.

Märgime, et kui $a \geqslant b + c$, nagu peame eeldama selleks, et võrduse vasakul poolel lahutamine oleks teostatav, siis $a \geqslant b$ ja $a - b \geqslant c$ ja ümberpöördult, kui $a \geqslant b$ ja $a - b \geqslant c$, siis $a \geqslant b + c$.

Näide: Kui $41 - (18 + 13) = 41 - 31 = 10$, siis

$41 - (18 + 13) = 41 - 18 - 13 = 10.$

Siit: $41 - (18 + 13) = 41 - 18 - 13.$

3. kuju: **Selle asemel, et antud arvust lahutada kahe teise arvu vahe, võib antud arvuga liita lahutatav ja saadud tulemusest lahutada vähendatav.**

$a - (b - c) = a + c - b$, kus $a \geqslant b - c$ ja $b > c$.

Oletame, et $b - c = d$, siis $b = c + d$ (lahutamise definitsiooni järgi).

Siit: $a - (b - c) = a - d$.

On tarvis tõestada, et $a - d = a + c - b$.

Et summast $a + c$ lahutada arv b, mis võrdne summaga $c + d$, võib algul lahutada arv c, mis lahutamise definitsiooni (§ 21) 3-da järelduse kohaselt annab arvu a, ja siis lahutada arv d, mis annab vahe $a - d$. Niisiis $a + c - b = a - d$. Järelikult: $a - (b - c) = a + c - b$, kus $a \geqslant b - c$ ja $b \geqslant c$.

Näide: $25 - (37 - 28) = 25 - 9 = 16$, ehk
$25 - (37 - 28) = 25 + 28 - 37 = 53 - 37 = 16$.

§ 26. Summa lahutamine.

1. Selle asemel, et antud arvust lahutada mitme arvu summa, võib lahutada sellest arvust järjest iga liidetava.

$$a - (b + c + d + e) = a - b - c - d - e.$$

Eespool me juba veendusime selle omaduse õigsuses erijuhul, kui lahutatav summa koosneb ainult kahest liidetavast. Kuna liitmise assotsiatiivsuse alusel võib mitme arvu summat alati kujutada kahe liidetava summana, siis peab vaadeldav reegel kehtima ka siis, kui lahutatava summa koosneb ükskõik mitmest liidetavast.

Tõepoolest:

$a - (b + c + d + e) = a - [(b + c) + (d + e)] =$ (summa assotsiatiivsus)

$= a - (b + c) - (d + e) =$ (kahe liidetava summa lahutamine)

$= a - b - c - d - e =$ (kahe liidetava summa lahutamine).

Ülesanne. 50 sulest tuleb ühele õpilasele anda 8 sulge, teisele 10 sulge ja kolmandale 12 sulge. Mitu sulge jääb järele?

Lahendus: $50 - (8 + 10 + 12) = [(50 - 8) - 10] - 12 = 20$ (sulge).

2. Selle asemel, et mitme arvu summast lahutada teine summa, võib esimese summa liidetavaist lahutada teise summa liidetavad, mis väiksemad või võrdsed esimese summa liidetavatega, ja saadud lahutamiste tulemused liita.

Vaatleme ülesande lahendust.

Ülesanne. Kaupluses oli 21 kg riisi, 34 kg hirssi, 40 kg tatraid. Päevas müüdi 25 kg tatraid, 20 kg hirssi ja 14 kg riisi. Kui palju tangainet jäi kauplusesse?

Selleks, et vastata ülesande küsimusele, võib summast 95 lahutada summa 59; saame 36.

$(21 + 34 + 40) - (14 + 20 + 25) = 95 - 59 = 36$ (kg).

Kuid selleks, et teada saada kui palju mingit tangainet jäi järele, teostame arvutuse teisiti, ja nimelt:

$(21 - 14) + (34 - 20) + (40 - 25) = 7 + 14 + 15 = 36$ (kg).

Arutleme seda summast lahutamise omadust üldkujul:

$$(a + b + c + d) - (e + f + k + l) =$$
$$= (a - e) + (b - f) + (c - k) + (d - l),$$

kus $a \geqslant e$, $b \geqslant f$, $c \geqslant k$, $d \geqslant l$.

$$(a + b + c + d) - (e + f + k + l) =$$
$$= a + b + c + d - (e + f + k + l) =$$

(summa assotsiatiivsus)

$$= a + b + c + d - e - f - k - l =$$

(summade lahutamine)

$$= a - e + b - f + c - k + d - l =$$

(liitmiste ja lahutamiste rea kommutatiivsus)

$$= (a - e) + (b - f) + (c - k) + (d - l)$$

(liitmiste ja lahutamiste rea assotsiatiivsus, 1. juhtum).

§ 27. Lahutamise reegel.

1. Ühekohaliste arvude lahutamine.

Selleks, et antud ühekohalist arvu lahutada teisest ühekohalisest arvust, võib vähendatavast järjest lahutada kõik lahutatava ühed, näiteks $8 - 3 = 8 - 1 - 1 - 1 = 5$.

Vahet võib leida ka teisiti. Esitades küsimuse: „Kui palju on tarvis liita 3-ga, et saada 8?" — proovime, kas selleks

arvuks sobib 2, 3, 4, 5. Kuid $3+2=5$, $3+3=6$, $3+4=7$, lõpuks $3+5=8$. Niisiis, et saada 8, on tarvis 3-ga liita 5. Lahutamine ühekaupa nagu 1. juhul, või proovimine, kas lahutatavaga liidetav arv on õigesti võetud (nagu 2-l juhul) on küllalt aegaviitev ja väsitav. Seepärast peetakse ühekohaliste arvude lahutamise tulemused lihtsalt meeles. Pole olemas mingeid reegleid nende arvude lahutamisel.

2. Mitmekohaliste arvude lahutamine.

Ühekohaliste arvude lahutamisele taandatud mitmekohalisest arvust mitmekohalise arvu lahutamine põhjeneb:

a) reeglile summa lahutamise kohta summast, mille kohaselt summade vahe võrdub mõlemate summade vastavate liidetavate vahede summaga juhul, kui ühe summa iga liidetav on suurem (või võrdne) vastavatest teise summa liidetavatest;

b) teoreemile kahe arvu vahe omadusest, mille kohaselt kahe arvu vahe ei muutu, kui antud arve suurendada sama arvu võrra.

On antud: 9786 ja 3453. Leida nende vahe.

1) $9786 = 9\text{ t.} + 7\text{ s.} + 8\text{ k.} + 6\text{ ü.}$
$3453 = 3\text{ t.} + 4\text{ s.} + 5\text{ k.} + 3\text{ ü.}$

2) $9786 - 3453 = (9\text{ t.} + 7\text{ s.} + 8\text{ k.} + 6\text{ ü.}) -$
$- (3\text{ t.} + 4\text{ s.} + 5\text{ k.} + 3\text{ ü.}) =$
$= 9\text{ t.} + 7\text{ s.} + 8\text{ k.} + 6\text{ ü.} - 3\text{ t.} - 4\text{ s.} - 5\text{ k.} - 3\text{ ü.} =$
(summa lahutamise reegli järgi)
$= 9\text{ t.} - 3\text{ t.} + 7\text{ s.} - 4\text{ s.} + 8\text{ k.} - 5\text{ k.} + 6\text{ ü.} - 3\text{ ü.} =$
(liitmiste ja lahutamiste rea kommutatiivsus)

$=(9\text{ t.} - 3\text{ t.}) + (7\text{ s.} - 4\text{ s.}) + (8\text{ k.} - 5\text{ k.}) + (6\text{ ü.} - 3\text{ ü.}) =$
(liitmiste ja lahutamiste rea assotsiatiivsus)
$= 6\text{ t.} + 3\text{ s.} + 3\text{ k.} + 3\text{ ü.} = 6333.$

Hakkame lahutama: 1) 6-st ühest lahutame 3 ühte; 8-st kümnest lahutame 5 kümmet, siis 7-st sajast 4 sada, 9-st tuhandest lahutame 3 tuhat; 2) tuhandete vahe võrdub 6-e tuhandega, sadade vahe võrdub 3-e sajaga, kümnete vahe võrdub 3-e kümnega ja ühtede vahe võrdub 3-e ühega. Vahede summa võrdub 6333-ga.

Järelikult on otsitav vahe: $9786 - 3453 = 6333$.

Nii saadakse vahe iga järk lahutades vähendatava järkudest lahutatava vastavad järgud. Kui aga vähendatava mõned järgud on väiksemad lahutatava vastavaist järkudest, siis liidetakse vähendatavas selle järgu ühikutega kümme vastavat ühikut, lahutatavas aga liidetakse üks ühik arvuga, mis väljendab järgmist kõrgemat järku.

N ä i d e: $5347 - 2853$.

$$\begin{array}{r} 5347 \\ -\ 2853 \\ \hline 2494 \end{array}$$

ehk
5 t. — (2 t. + 1 t.) = 2 t.
13 s. — (8 s. + 1 s.) = 4 s.
14 k. — 5 k. = 9 k.
7 ü. — 3 ü. = 4 ü.

§ 28. Liitmise ja lahutamise kontrollimine.

1. Liitmise kontrollimine.

a) Kontrollimine liitmisega. Et liitmist kontrollida liitmisega, teostatakse kommutatiivsuse seaduse alusel liitmist teises järjekorras, liites alt ülespoole, kui algul liideti ülalt alla. Kui tulemus on sama, siis võib esialgset resultaati pidada õigeks.

Näide:		Kontroll:	
	735		845
	434		23
	+ 23		+ 434
	845		735
	2037		2037

b) Kontrollimine lahutamisega. Liitmise tulemuse kontrollimiseks lahutamisega piisab saadud summast ühe liidetava lahutamisest. Kui saadakse teine liidetav, siis võib olla kindel, et tehe on teostatud õigesti.

Näide:		Kontroll:	
	6 963		96 202
	+ 89 239		— 6 963
	96 202		89 239

2. Lahutamise kontrollimine.

a) Kontrollimine liitmisega. Lahutamise kontrollimiseks liitmisega piisab lahutatava ja vahe liitmisest. Kui saadakse vähendatav, siis on tõenäoline, et tehe on õige.

Näide:		Kontroll:	
	115 174		112 029
	— 3 145		+ 3 145
	112 029		115 174

b) Kontrollimine lahutamisega. Et kontrollida lahutamist lahutamisega tuleb vähendatavast lahutada vahe. Kui tulemuseks saadakse lahutatav, siis on tõenäoline, et tehe on õige.

Näide:		Kontroll:	
	721		721
	— 159		— 562
	562		159

§ 29. Sulgude kasutamine liitmisel ja lahutamisel.

1. On antud näited:

a) 43-me ja 35-e summast lahutada 28; b) 43-st lahutada 35-e ja 28 vahe.

Avaldame näited märkidega:

a) $(43 + 35) - 28 = 50$; nagu näitavad sulud tuleb siin algul teostada liitmine ja siis lahutamine.

b) $43 + (35 - 28) = 50$; siin liidetakse 43-ga juba varem leitud arvude 35 ja 28 vahe.

Neis näiteis on tulemused võrdsed ega poleks ka sulgude puudumisel muutunud.

Kui vaatleme avaldisi $36 - 21 + 10$ ja $36 - (21 + 10)$, siis selgub, et teises avaldises sulgudega määratud tehete järjekord muudab tehete tulemust. Esimene avaldis võrdub 25-ga. Siin lahutatakse 21, liidetakse aga 10, teises avaldises lahutatakse aga 36-st järjest mõlemad liidetavad ja tulemus võrdub 5-ga. Kui võrrelda avaldisi $36 - 21 - 10$ ja $36 - (21 - 10)$, siis on ka nende resultaadid erinevad: 5 ja 25. Esimeses avaldises lahutatakse niihästi 21, kui ka 10, teises avaldises 10 liidetakse. Järelikult on nendes näidetes tehete järjekorra määramiseks sulud tingimata vajalikud.

2. Suurema hulga arvude puhul kasutatakse tehete järjekorra määramiseks mitut paari sulgusid. Sulud võivad olla peale lihtsate ehk ümmarguste ( ) veel nurgelised [ ] ja loogelised { }.

Näide: $240 - \{150 - [20 + (11 + 12)]\}$.

Nagu näitavad sulud tuleb selles avaldises liita $11 + 12$, saadud summa liita 20-ga, uuesti saadud summa lahutada 150-st ja vahe lahutada 240-st, mille järel saadakse 133.

3. Sulgusid harilikult ei kasutata, kui liitmised ja lahutamised peavad toimuma kirjutamise järjekorras.

Näide: $40 - 8 + 11 - 7$. Sulud $[(40 - 8) + 11] - 7$ näitaksid tehete sama järjekorda: 40-st lahutada 8, 32-ga liita 11, 43-st lahutada 7, saadakse 36.

V peatükk.

Korrutamine.

§ 30. Tehte definitsioon.

Liitmisega lahenduvais ülesandeis on sageli tarvis leida kahe või enama võrdse liidetava summat.

Vaatleme järgmisi ülesandeid:

Ülesanne 1. Lennuk lendab 240 km tunnis. Mitu km lendab ta 4 tunniga?

Seda ülesannet saab lahendada nelja võrdse arvu liitmise teel: $240 + 240 + 240 + 240 = 960$ (km).

Ülesanne 2. Rongi kiirus on 40 km tunnis, lennuki kiirus on aga 6 korda suurem. Leida lennuki kiirus.

Ülesande tingimusest järgneb, et lennuki kiiruse saame, liites 6 võrdset liidetavat, milledest igaüks on 40: $40 + 40 + 40 + 40 + 40 + 40 = 240$ (km).

Kahe või enama võrdse arvu summa leidmine viib meid uuele tehtele — korrutamisele.

Korrutada loomulik arv *a* loomuliku arvuga *b*, tähendab leida summa, milles on *b* liidetavat, milledest igaüks võrdub *a*-ga.

$$\overbrace{a \cdot b = a + a + a + \ldots + a}^{b \text{ liidetavat}} = c.$$

Matemaatiliselt märgitakse korrutamist nii: 1) $a \times b = c$ ehk 2) $a \cdot b = c$. Harilikult jäetakse tähtmärkide puhul punkt ära ja kirjutatakse $a \cdot b$ asemel ab.

Korduvat liidetavat nimetatakse **korrutatavaks**, liidetavate arv kannab **korrutaja** nime ja saadud summat nimetatakse **korrutiseks**. Korrutatavat ja korrutajat nimetatakse korrutise **teguriteks**.

Niisiis **korrutamine on liitmise erijuhtum.** Võib anda järgmise korrutamistehte definitsiooni:

Täisarvuga korrutamiseks nimetatakse kahe või mitme võrdse arvu liitmist.

Täisarvuga korrutamiseks nimetatakse tehet, kus üks antud arv esineb liidetavana niimitu korda, kuimitu ühte on teises arvus.

Et korrutamine on liitmise erijuhtum, siis on see alati võimalik ja annab antud tegurite puhul ühese resultaadi.

Korrutamise definitsioonist järgneb:

1. Kui korrutatav võrdub ühega, siis korrutis võrdub korrutajaga: $1 \cdot 3 = 1 + 1 + 1 = 3$, üldse: $1 \cdot a = a$.

2. Kui korrutatav on 0, siis võrdub ka korrutis nulliga. Näiteks: $0 \cdot 3 = 0 + 0 + 0 = 0$, üldse: $0 \cdot a = 0$.

Eespool esitatud korrutamise definitsiooni alusel võib korrutatav olla mistahes arv, kuid korrutaja ei saa olla üks ega null. Kuid sageli räägitakse korrutamisest ka siis, kui korrutaja võrdub ühe või nulliga. Siis antakse korrutamise kohta alljärgnevad täiendavad definitsioonid:

1. Kui korrutaja võrdub ühega, siis korrutis võrdub korrutatavaga ehk korrutada antud arv ühega, tähendab jätta see arv muutmata:

$$a \cdot 1 = a.$$

2. Kui korrutaja võrdub nulliga, siis võrdub ka korrutis nulliga:

$$a \cdot 0 = 0.$$

Niisiis, kui üks teguritest on null, siis on ka korrutis null. Et nullist erineva kahe teguri korrutis ei võrdu nulliga, siis selleks, et korrutis võrduks nulliga, on vajalik ja piisav, et vähemalt üks teguritest võrduks nulliga.

§ 31. Korrutamise kasutamine ülesannete lahendamisel.

Eespool (§ 30) vaatlesime kahte ülesannet, millede lahendamine toimus mitme võrdse arvu summa leidmise teel. Järelikult lahenduvad need ülesanded korrutamise abil.

1. ülesande lahendus: $240 \cdot 4 = 960$ (km).

2. ülesande lahendus: $40 \cdot 6 = 240$ (km).

Korrutamist kasutatakse ülesannete lahendamisel järgmistel juhtudel:

1. Kui ülesande mõtte järgi on antud arvu vaja võtta liidetavana mitu korda, s. o. leida mitme võrdse arvu summa. Niisugune oli esimene käsiteldud ülesanne. Selles ülesandes tuleb terviku ühe võrdse osa ja osade arvu järgi leida tervik.

2. Kui antud arvu on vaja suurendada teatav arv korda. Näitena võib olla teine käsiteldud ülesanne.

§ 32. Mitme teguri korrutis.

Definitsioon. **Mitme arvu (teguri) korrutiseks nimetatakse tulemust, mis saadakse esimese arvu korrutamisel teisega, saadud tulemuse korrutamisel kolmandaga, uue korrutise korrutamisel neljandaga jne.**

Näiteks: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = \{[(2 \cdot 3) \cdot 4] \cdot 5\} \cdot 6 = 720$ ehk üldkujul: $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e = \{[(a \cdot b) \cdot c] \cdot d\} \cdot e$.

§ 33. Korrutamise seadused (põhiomadused).

Korrutamise põhiomadused on järgmised: **assotsiatiivsus** (ühenduvus), **kommutatiivsus** (vahetuvus), **distributiivsus** (jaotuvus) ja **monotoonsus.** Neid omadusi tuntakse korrutamise seaduste nime all.

1. Korrutamise assotsiatiivsus (ühenduvus).

Korrutis ei muutu, kui üksikud tegurid ühendada rühmadeks, teostada korrutamine rühmiti ja siis korrutada saadud korrutised.

Arvutame kolme teguri korrutise, näiteks:

$$7 \cdot 2 \cdot 5.$$

Siin tuleb 7 võtta liidetavana kaks korda ja saadud arvu võtta liidetavana 5 korda. Otsitav korrutis võrdub:

$$(7+7)+(7+7)+(7+7)+(7+7)+(7+7) = \\ = (7 \cdot 2) \cdot 5 = 70.$$

Summa $(7+7)+(7+7)+(7+7)+(7+7)+(7+7)$ ei muutu, kui assotsiatiivsuse seaduse alusel avada sulud.

Siis saame: $\overbrace{7+7+7+\ldots+7}^{10 \text{ liidetavat}} = 7 \cdot 10 = 7 \cdot (2 \cdot 5) = 70.$

Viimasel juhtumil saadakse lõplik resultaat 7-e korrutamisel kõikide liidetavate arvuga, s. o. $10 = 2 \cdot 5$.

Järelikult: $(7 \cdot 2) \cdot 5 = 7 \cdot (2 \cdot 5)$.

Samuti võib arutleda tegurite mistahes arvu puhul. Näiteks korrutist: $7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 25 = 7000$ võib leida järgmiselt: $7 \cdot (5 \cdot 2) \cdot (4 \cdot 25) = 7 \cdot 10 \cdot 100 = 7000$. Tegureid võib ühendada rühmadeks ka teisiti.

Veendume vaadeldava seaduse kehtivuses mistahes kolme arvu a, b ja c puhul.

Selleks veendume, et korrutis $a \cdot b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = \\ = a \cdot (b \cdot c)$.

Korrutist abc võib vaadelda arvuga a võrdsete arvude summana, mis paigutatud b veergu ja c ritta.

b veergu

$$\left.\begin{array}{l} ab = \overbrace{a + a + a + \ldots + a} \\ ab = a + a + a + \ldots + a \\ ab = a + a + a + \ldots + a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ ab = a + a + a + \ldots + a \end{array}\right\} c \text{ rida}$$

Seda summat (s. o. otsitavat korrutist) saab arvutada kahel viisil:

1. Ühe rea liidetavad annavad summa $a \cdot b$, kuid tabelis on c rida, siis on kogu summa, s. o. otsitav korrutis $(a \cdot b) \cdot c$.

2. Tabelis arv a on võetud liidetavana bc korda (b korda horisontaalselt ja c korda vertikaalselt), tähendab otsitav korrutis, s. o. summa, mis koosneb bc liidetavast, milledest igaüks võrdub a-ga, võrdub $a(bc)$.

Niisiis: $(ab)c = a(bc)$.

Järeldus: **mitme arvu korrutamisel võib ühendada üksikuid tegureid rühmadesse, teostada korrutamine rühmiti ja siis korrutada saadud korrutised.**

Näiteks:

$abcd = (ab)cd =$ (mitme teguri korrutamise definitsioon)
$= (ab)(cd)$ (kolme arvu korrutamise assotsiatiivsus).

Järelikult: $abcd = (ab)(cd)$.

Ümberpöördult: **mitme arvu korrutis ei muutu, kui asendada üksikud tegurid mitme teguriga, millede korrutis võrdub asendatava teguriga.**

Näiteks: korrutises $2 \cdot 3 \cdot 20$ võib tegurit 20 asendada temaga võrdse kahest või kolmest tegurist koosneva korrutisega. Arvutame antud korrutise: $2 \cdot 3 \cdot 20 = 120$.

Korrutamise tulemus ei muutu, kui 20 asendada korrutisega $4 \cdot 5$; tõepoolest:

$$2 \cdot 3 \cdot (4 \cdot 5) = 6 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

2. Korrutamise kommutatiivsus (vahetatavus).

On antud loomulikud arvud a ja b.

Tõestada: $ab = ba$.

Arvu a saab väljendada ühtede summana:

$$a = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \quad (a \text{ liidetavat}).$$

Korrutise $a \cdot b$ leidmiseks tuleb seda ühtede hulka võtta liidetavana b korda.

Saame järgneva ühtede jaotuse:

$$\begin{array}{l} \overbrace{a = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1}^{a \text{ veergu}} \\ a = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \\ a = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 \end{array} \Big\} b \text{ rida}$$

$$\overbrace{ab = b + b + b + \ldots + b}^{} = ba.$$

Saadud ühtede hulka loendame algul ridade kaupa: igas reas on a ühte; neid a ühtesid võtame b korda, sest kogu ridade arv võrdub b-ga. Tulemuseks saame ab ühte. Kui aga loendada algul veergude kaupa, siis igas veerus on b ühte, veergude arv on a ning ühtede koguarv on $b \cdot a$. Et loendamise resultaat ei olene loendamise järjekorrast, siis $ab = ba$.

Näide: $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$

$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

$$\begin{array}{l} \overbrace{5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1}^{5 \text{ veergu}} \\ 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array} \Big\} 3 \text{ rida}$$

$$5 \cdot 3 = \overbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3}^{} = 3 \cdot 5$$

Siit $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5$.

Mitme arvu korrutises võib muuta kahe esimese või kahe viimase teguri järjekorda.

Antud: korrutis $abc \ldots fk$.

Tõestada: 1) $abc \ldots fk = bac \ldots fk$,

2) $abc \ldots fk = abc \ldots kf$.

1) $\boldsymbol{abc \ldots fk} = (ab)c \ldots fk =$ (mitme teguri korrutamise assotsiatiivsus)

$= (ba)c \ldots fk =$ (kahe teguri korrutamise kommutatiivsus)

$= \boldsymbol{bac \ldots fk}$ (assotsiatiivsus).

2) $\boldsymbol{abc \ldots fk} = abc \ldots (fk) =$ (mitme teguri korrutamise assotsiatiivsus)

$= abc \ldots (kf) =$ (kahe teguri korrutamise kommutatiivsus)

$= \boldsymbol{abc \ldots kf}$ (assotsiatiivsus).

Mitme arvu korrutises võib muuta mistahes kahe kõrvutioleva teguri järjekorda.

Antud: korrutis $abcde \ldots kl$.

Tõestada: $abcde \ldots kl = abdce \ldots kl$.

$abcde \ldots kl = (abcd)e \ldots kl =$ (mitme teguri korrutamise assotsiatiivsus või definitsioon)

$= (abdc)e \ldots kl =$ (korrutises $abcd$ on muudetud kahe viimase teguri järjekord)

$= abdce \ldots kl$ (mitme teguri korrutamise assotsiatiivsus või definitsioon).

Mitme arvu korrutises võib muuta mistahes kahe teguri järjekorda.

Ümber paigutades mistahes kaks kõrvuti olevat tegurit, võime alati saavutada seda, et kahe mittekõrvuti oleva teguri kohad on vahetatud.

Näiteks, kui korrutises *abcde* on tarvis ümber paigutada tegurid *b* ja *e*, siis võib seda teha järgmiselt:

$$abcde = acbde = acdbe = acdeb = acedb = aecdb.$$

Nendes ümberpaigutustes muutsid kohta ainult kõrvutiolevad tegurid, kusjuures algul teine tegur *b* paigutati viimasele kohale ja siis tegur *e* teisele kohale.

Märgime, et korrutise viimase omaduse tõestamisel me teostasime kahe mistahes teguri (*b* ja *e*) ümberpaigutamist. Samuti oleks võinud paigutada ümber mistahes teised tegurite paarid, näiteks *a* ja *e*, *b* ja *d* või *a* ja *c* jne. Järelikult, **kahe vabalt valitud teguri ümberpaigutusega võib saavutada mistahes tegurite järjestust korrutise suurust muutmata. Seega mitme arvu korrutise suurus ei olene tegurite järjekorrast.**

Kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse omadusi ning samuti ka üksikute tegurite vahetamist korrutises kasutatakse sageli praktikas peast ja kirjalikul arvude korrutamisel. Näiteks arvutades korrutist: $5 \cdot 25 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 3$ on otstarbekohane teostada korrutamist järgmises järjestuses:

$$(5 \cdot 2) \cdot (25 \cdot 4) \cdot (7 \cdot 3) = 10 \cdot 100 \cdot 21 = 21\,000.$$

3. Korrutamise distributiivsus (jaotuvus).

1. kuju: **kahe arvu summa korrutis kolmanda arvuga võrdub nende arvude ja kolmanda arvu korrutiste summaga.**

Tõestame selle omaduse kehtivust mistahes loomulikkude arvude *a*, *b* ja *c* puhul.

On antud summa $a + b$ ja arv c.

Tõestada: $(a + b)c = ac + bc$.

$$(a + b)c = \overbrace{(a + b) + (a + b) + \ldots + (a + b)}^{c \text{ liidetavat}} =$$ (korrutamise definitsiooni järgi)

c liidetavat $\quad$ c liidetavat

$= \overbrace{(a + a + \ldots + a)}^{} + \overbrace{(b + b + \ldots + b)}^{} =$ (liitmise assotsiatiivsus ja kommutatiivsus)

$= ac + bc$ (korrutamise definitsiooni järgi).

Ülesanne. Basseini täidetakse kahest torust: esimesest voolab 78 pange tunnis, teisest 72 pange. Kui palju vett voolab basseini 12 tunniga?

Ülesande lahendamiseks tuleb leida, kui palju vett voolab mõlemast torust ühes tunnis, s. o. leida summa $78 + 72 = 150$, siis võtta 150 liidetavana 12 korda, $150 \cdot 12 = 1800$ (pange).

Kuid lahendus võib olla ka teistsugune: leiame, mitu pange vett voolab 12 tunniga kummastki torust ja liidame saadud arvud: $78 \cdot 12 + 72 \cdot 12 = 936 + 864 = 1800$ (pange).

Niisiis: $(78 + 72) \cdot 12 = 78 \cdot 12 + 72 \cdot 12$.

2. kuju: **antud arvu ja kahe teise arvu summa korrutis võrdub antud arvu ja mõlema liidetava korrutiste summaga.**

On antud loomulik arv a ja summa $b + c$.

Tõestada: $a(b + c) = ab + ac$.

$a(b + c) = (b + c)a =$ (korrutamise kommutatiivsus)

$= ba + ca =$ (korrutamise distributiivsuse 1. kuju)

$= ab + ac$ (korrutamise kommutatiivsus).

Ülesanne. Kahele brigaadile on antud mingi töö. Ühes brigaadis on 12 inimest ja teises 15. Mõlemad brigaadid kulutasid töö tegemiseks 24 tundi. Mitu töötundi (normitundi) on kulutatud töö tegemiseks?

Ülesande lahendamiseks võib algul leida, mitu töölist oli kokku kahes brigaadis, s. o. leida summa $(12 + 15)$, ja siis, mitu tundi oli kulunud kogu töö tegemiseks, milleks korrutame 24 antud summaga: $24 \cdot (12 + 15) = 648$ (töötundi).

Kuid ülesande lahendus võib olla ka teistsugune: leiame algul, kui palju töötunde kulutas kumbki brigaad eraldi ja siis liidame saadud tulemused.

$24 \cdot 12 + 24 \cdot 15 = 288 + 360 = 648$ (töötundi).

Niisiis: $24 \cdot (12 + 15) = 24 \cdot 12 + 24 \cdot 15$.

Eespool me tõestasime distributiivsuse seaduse kehtivust kahe liidetava summa puhul. Tõestame nüüd selle seaduse kehtivust antud arvu ja mitme arvu summa korrutamise puhul ja ümberpöördult.

1. kuju: **mitme arvu summa ja antud arvu korrutis võrdub iga liidetava ja antud arvu korrutiste summaga.**

On antud summa $a+b+c+\ldots+k$ ja arv n.

Tõestada: $(a+b+c+\ldots+k)n=an+bn+cn+\\+\ldots+kn.$

$(\boldsymbol{a+b+c+\ldots+k})\boldsymbol{n}=[a+(b+c+\ldots+k)]n=$ (assotsiatiivsus)

$=an+(b+c+\ldots+k)n=$ (distributiivsus kahe arvu summa korrutamisel)

$=an+[b+(c+\ldots+k)]n=$ (assotsiatiivsus)

$=an+bn+(c+\ldots+k)n=$ (distributiivsus kahe arvu summa korrutamisel)

$=\boldsymbol{an+bn+cn+\ldots+kn}$ (edaspidised teisendused toimuvad samadel alustel).

Järeldus (mitme arvu summa ja antud arvu korrutamise reegel):

selle asemel, et korrutada mitme arvu summat antud arvuga, võib igat liidetavat eraldi korrutada selle arvuga ja saadud korrutised liita.

Näide: $(12+6+5+7)\cdot 3=12\cdot 3+6\cdot 3+5\cdot 3+\\+7\cdot 3=36+18+15+21=90.$

2. kuju: **antud arvu ja mitme arvu summa korrutis võrdub antud arvu ja iga liidetava korrutiste summaga.**

On antud loomulik arv n ja summa $a+b+c+\\+\ldots+k.$

Tõestada: $n(a+b+c+\ldots+k)=na+nb+nc+\\+\ldots+nk.$

$n(a+b+c+\ldots+k)=(a+b+c+\ldots+k)n=$ (korrutamise kommutatiivsus)

$=an+bn+cn+\ldots+kn=$ (summa korrutamine antud arvuga)

$=na+nb+nc+\ldots+nk$ (kommutatiivsus).

Järeldus (antud arvu ja mitme arvu summa korrutamise reegel):

selle asemel, et korrutada antud arvu mitme arvu summaga, võib seda arvu korrutada iga liidetavaga eraldi ja saadud korrutised liita.

Näide: $5\cdot(8+3+24)=5\cdot 8+5\cdot 3+5\cdot 24=40+$ $+15+120=175$.

Ka mõned arvude peastkorrutamise võtted põhjenevad korrutamise distributiivsuse seadusele. Näiteks toimub 27 korrutamine 12-ga nii:

$27\cdot 12=27(10+2)=27\cdot 10+27\cdot 2=270+54=324$.

4. Korrutamise monotoonsus.

1. Kui kaks antud arvu (a ja a_1) on võrdsed, siis kumbagi neist korrutades sama arvuga (b), saadakse võrdsed korrutised.

Kui $a=a_1$, siis $a\cdot b=a_1\cdot b$, sest kumbagi korrutist võib vaadelda kui summat, mis koosneb samast arvust (b) ja omavahel võrdsest liidetavast ($a=a_1$).

2. Kui üks kahest antud arvust (a) on suurem või väiksem teisest antud arvust (a_1), siis nende korrutamisel sama arvuga (b), esimene saadud korrutistest on vastavalt suurem või väiksem teisest.

Kui $a>a_1$, siis $a=a_1+m$ ja

$ab=(a_1+m)b$ ehk

$ab=a_1b+mb$ (korrutamise distributiivsus).

Järelikult: $ab > a_1b$, sest nagu nähtub eelnevast võrdusest, sisaldab korrutis $a \cdot b$ korrutist a_1b ja peale selle veel mingit korrutist mb.

§ 34. Järeldusi korrutamise põhiomadustest.

1. Mitme arvu korrutise korrutamine antud arvuga.

Selle asemel, et mitme arvu korrutist korrutada antud arvuga, võib üht korrutise tegurit korrutada selle arvuga.

$(abcd)e = (ae)bcd$ ehk $(abcd)e = a(be)cd$ jne.

$(abcd)e = abcde =$ (mitme teguri korrutise teoreem)

$= aebcd =$ (kommutatiivsus)

$= (ae)bcd$ (assotsiatiivsus).

Samuti võib tõestada, et $(abcd)e = a(bc)ed = ab(ce)d$ jne.

Näide: Korrutis $2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5$ korrutada 3-ga, s. o.

$$(2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 =$$
$$= (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 = 10\,080.$$

Sellele põhjeneb tuntud reegel nullidega lõppeva arvu ja teise arvu korrutamisest. Näiteks:

$$5500 \cdot 3 = (55 \cdot 100) \cdot 3 = 165 \cdot 100 = 16\,500.$$

Siit järgneb reegel: **selleks, et mitme arvu korrutist suurendada teatav arv korda, võib sama arv korda suurendada korrutise üht tegurit.**

2. Arvu korrutamine mitme arvu korrutisega.

Selle asemel, et antud arvu korrutada mitme arvu korrutisega võib seda arvu korrutada esimese teguriga, saadud korrutist — teise teguriga, uut korrutist — kolmandaga jne. — korrutise kõikide teguritega.

$$N(abcd) = Nabcd.$$

$N(abcd) = (abcd)N =$ (kommutatiivsus)
$= abcdN =$ (mitme teguri korrutise definitsiooni järgi)
$= Nabcd$ (kommutatiivsus).

Näide: Et 24 korrutada 35-ga, asendame 35 korrutisega $5 \cdot 7$:

$$24 \cdot 35 = 24 \cdot (5 \cdot 7) = 24 \cdot 5 \cdot 7 = 840.$$

Seda reeglit kasutatakse sageli peastarvutamisel.

3. Korrutise korrutamine korrutisega.

Selle asemel, et mitme arvu korrutist korrutada teise korrutisega, võib järjestikku korrutada kumbagi korrutise kõik tegurid.

$$(ab)(cde) = abcde.$$

Olgu $ab = N$;
siis $(ab)(cde) = N(cde) =$ (sest $ab = N$)
$= Ncde =$ (arvu ja korrutise korrutamise reegel)
$= (ab)cde =$ (sest $N = ab$)
$= abcde$ (assotsiatiivsus või mitme teguri korrutise definitsioon).

Näide: $(2 \cdot 3 \cdot 7)$ ja $(4 \cdot 5 \cdot 6)$.

Vaatleme esimest korrutist ühe arvuna ja korrutame järjest 4-ga, 5-ga ja 6-ga: $(2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (4 \cdot 5 \cdot 6) = (2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 5040$.

Korrutise korrutamise reeglile põhjeneb ka nullidega lõppevate arvude korrutamine.

Näiteks, kui on tarvis 630 korrutada 300-ga, siis toimitakse järgmiselt:

$$630 \cdot 300 = (63 \cdot 10) \cdot (3 \cdot 100) = 63 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 100 =$$
$$= (63 \cdot 3) \cdot (10 \cdot 100) = 189 \cdot 1000 = 189\,000.$$

4. Summa korrutamine summaga.

Selle asemel, et korrutada mitme arvu summat teise summaga, võib korrutada esimese summa igat liidetavat teise summa iga liidetavaga ja saadud korrutised liita.

$$(a+b+\ldots+e)(f+k+\ldots+m)=af+bf+\ldots ef+$$
$$+ak+bk+\ldots+ek\ldots+am+bm+\ldots+em.$$

Olgu summa $a+b+\ldots+e=N$.

Siis saame:

$(a+b+\ldots+e)(f+k+\ldots+m)=N(f+k+\ldots+$
$+m)=Nf+Nk+\ldots+Nm=$ (arvu korrutamine summaga)
$=(a+b+\ldots+e)f+(a+b+\ldots+e)k+\ldots+$
$+(a+b+\ldots+e)m=$ (sest $N=a+b+\ldots+e$)
$=af+bf+\ldots+ef+ak+bk+\ldots+ek+\ldots+am+$
$+bm+\ldots+em$ (summa korrutamine arvuga).

Näide: $(3+4+5)\cdot(6+7)$.

Esimest summat vaatleme kui ühte arvu ja korrutame teda teise summa iga liidetavaga:

$(3+4+5)\cdot(6+7)=(3+4+5)\cdot6+(3+4+5)\cdot7=$
$=3\cdot6+4\cdot6+5\cdot6+3\cdot7+4\cdot7+5\cdot7=18+24+30+$
$+21+28+35=156.$

Nagu allpool näeme, põhjeneb summade korrutamise reeglile mitmekohalise arvu korrutamine mitmekohalisega.

5. Vahe korrutamine arvuga.

Kahe arvu vahe korrutis kolmanda arvuga võrdub nende arvude ja kolmanda arvu korrutiste vahega.

$$(a-b)c=ac-bc.$$

Olgu $a-b=d$, kus $a=b+d$.

Järelikult:

$ac=(b+d)c$ (monotoonsus)
$ac=bc+dc$ (distributiivsuse 1. kuju)
$dc=ac-bc$ (lahutamise definitsioon)
Siit: $(a-b)c=ac-bc$ (sest $d=a-b$).

6. Arvu korrutamine vahega.

Antud arvu ja kahe teise arvu vahe korrutis võrdub antud arvu ja mõlema teise arvu korrutiste vahega.

$$a(b - c) = ab - ac.$$

Olgu $b - c = d$, kus $b = c + d$.

Järelikult:

$ab = a(c + d)$ (monotoonsus)

$ab = ac + ad$ (distributiivsuse 2. kuju)

$ad = ab - ac$ (lahutamise definitsiooni järgi).

Siit: $a(b - c) = ab - ac$ (sest $d = b - c$).

Vaadeldavaid korrutamise reegleid, vahe korrutamisest arvuga ja arvu korrutamisest vahega, kasutatakse sageli peastarvutamisel.

Näiteks, kui on tarvis 18 korrutada 17-ga, siis toimitakse järgmiselt: $18 = 20 - 2$.

Siit $18 \cdot 17 = (20 - 2) \cdot 17 = 20 \cdot 17 - 2 \cdot 17 = 340 - 34 = 306$.

Kui on tarvis 27 korrutada 8-ga, siis on otstarbekohane teha seda järgmiselt: $8 = 10 - 2$, järelikult $27 \cdot 8 = 27 \cdot (10 - 2) = 27 \cdot 10 - 27 \cdot 2 = 270 - 54 = 216$.

§ 35. Korrutamise reegel.

1. Ühekohaliste arvude korrutamine.

Korrutamise definitsioonist järgneb, et kahe arvu korrutamine on samaväärne korrutatavaga võrduvate võrdsete liidetavate summa leidmisega, mistõttu kahe arvu korrutamist võib asendada liitmisega. Kuid sel viisil korrutise leidmine on aeganõudev isegi ühekohaliste arvude puhul. Seepärast peetakse kahe ühekohalise arvu korrutamise tulemused lihtsalt meeles korrutamistabeli järgi. Ühekohaliste

arvude korrutamiseks pole mingeid reegleid. Korrutamise hõlbustamiseks on koostatud ühekohaliste arvude korrutamistabel.

2. Mitmekohalise arvu korrutamine ühekohalisega.

Mitmekohalise arvu korrutamine ühekohalisega põhjeneb mitme liidetava summa ja antud arvu korrutamise reeglile.

On tarvis 2323 korrutada 3-ga.

$2323 = 2\text{ t.} + 3\text{ s.} + 2\text{ k.} + 3\text{ ü.}$

$2323 \cdot 3 = (2\text{ t.} + 3\text{ s.} + 2\text{ k.} + 3\text{ ü.}) \cdot 3 = 2\text{ t.} \times 3 + 3\text{ s.} \times 3 + 2\text{ k.} \times 3 + 3\text{ ü.} \times 3 = 6\text{ t.} + 9\text{ s.} + 6\text{ k.} + 9\text{ ü.} = 6969.$

Mitmekohalise arvu korrutamisel ühekohalisega kasutatakse mitme liidetava summa ja antud arvu korrutamise teoreemi.

Tegelikult kasutatakse üldtarvitatava võtte abil korrutades $2323 \cdot 3 = 6969$ samu seadusi: mitmekohaline arv lahutatakse peast liidetavaiks ja iga liidetav korrutatakse ühekohalise arvuga.

3. Nullidega lõppevate arvude korrutamine.

a) Arvu üks nullidega korrutamine.

Olgu tarvis korrutada 845 arvuga 10.

$$845 \cdot 10 = \overbrace{845 + 845 + \ldots + 845}^{10\text{ liidetavat}} = \text{(korrutamise definitsiooni järgi)}$$

$= 845$ kümmet = (sest 1 ühik, võetud liidetavana 10 korda, annab ühe kümne, 845 ühikut annab siis 845 kümmet)

$= 8450$ (845 kümmet võrdub kümnendsüsteemis 8450 ühega).

Järelikult, **selle asemel, et mingit arvu korrutada arvuga üks nullidega, võib sellele arvule paremale poole juurde kirjutada niimitu nulli, kuimitu neid oli korrutajas.**

b) Nullidega lõppeva mistahes arvu korrutamine.

On antud: $54 \cdot 30 = 54 \cdot (3 \cdot 10)$ = (kümnendsüsteemi arvu omadus)

$= 54 \cdot 3 \cdot 10 =$ (korrutamise assotsiatiivsus)

$= (54 \cdot 3) \cdot 10 =$ (korrutamise assotsiatiivsus)

$= 162 \cdot 10 =$ (ühekohalise arvu korrutamine)

$= 1620$ (arvu üks nullidega korrutamine).

Järelikult: **selle asemel, et korrutada mingit arvu nullidega lõppeva arvuga, võib korrutatavat korrutada korrutaja nullide ees olevatest numbritest moodustatud arvuga ja saadud korrutisele kirjutada paremale juurde niimitu nulli, kuimitu neid oli korrutajas.**

c) Nullidega lõppevate arvude korrutamine.

On antud: $500 \cdot 30 = (5 \cdot 100) \cdot (3 \cdot 10) =$ (kümnendsüsteemi arvu omadus)

$= 5 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 10 =$ (korrutamise assotsiatiivsus)

$= 5 \cdot 3 \cdot 100 \cdot 10 =$ (kommutatiivsus)

$= (5 \cdot 3) \cdot (100 \cdot 10) =$ (assotsiatiivsus)

$= 15 \cdot 1000 =$ (assotsiatiivsus)

$= 15\,000$ (arvu üks nullidega korrutamine).

Järelikult, **kui korrutatav ja korrutaja lõpevad nullidega, siis korrutatakse nullisid arvestamata ja korrutisele kirjutatakse paremale niimitu nulli, kuimitu neid oli korrutatavas ja korrutajas kokku.**

4. Korrutamine mitmekohalisé arvuga.

Mitmekohaliste arvude korrutamine põhjeneb järgmistele reeglitele: summa korrutamine summaga, nullidega lõppevate arvude korrutamine, kommutatiivsus, assotsiatiivsus ja mitmekohaliste arvude liitmine.

Tõepoolest: $323 \cdot 232 = (3\text{ s.} + 2\text{ k.} + 3\text{ ü.}) \cdot (2\text{ s.} + 3\text{ k.} + 2\text{ ü.}) = 3\text{ s.} \cdot 2\text{ s.} + 2\text{ k.} \cdot 2\text{ s.} + 3\text{ ü.} \cdot 2\text{ s.} + 3\text{ s.} \cdot 3\text{ k.} + 2\text{ k.} \cdot 3\text{ k.} + 3\text{ ü.} \cdot 3\text{ k.} + 3\text{ s.} \cdot 2\text{ ü.} + 2\text{ k.} \cdot 2\text{ ü.} + 3\text{ ü.} \cdot 2\text{ ü.} = 300 \cdot 200 + 20 \cdot 200 + 3 \cdot 200 + 300 \cdot 30 + 20 \cdot 30 + 3 \cdot 30 + 300 \cdot 2 + 20 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 60\,000 + 4000 + 600 + 9000 + 600 + 90 + 600 + 40 + 6 = 74\,936.$

Praktiliselt vormistatakse korrutamine nii:

$$\begin{array}{r} 323 \\ \times\ 232 \\ \hline 646 \\ +969 \\ 646 \\ \hline 74936 \end{array}$$

Siit on kerge näha, et niisugusel vormistamisel me kujutleme mõttes korrutatavat ja korrutajat mitme liidetava summana ja teostame korrutamise „summa korrutamine summaga" reegli järgi.

Märkus. Et iga summa kohta on kehtiv kommutatiivsus, siis ei ole korrutamisel alati vaja silmas pidada traditsioonilist korrutamise järjekorda, alates madalama järgu ühikutest kuni kõrgema järgu ühikuteni. Korrutamist võib alata mistahes korrutatava numbrist, seejuures on vaja ainult õigesti kirjutada üksteise alla üksikud osakorrutised.

Näide 1.

$$\begin{array}{r} 2321 \\ \times\ 124 \\ \hline 2321 \\ +\ 4642 \\ 9284 \\ \hline 287804 \end{array}$$

Näide 2.

$$\begin{array}{r} 2321 \\ \times\ 124 \\ \hline 4642 \\ +2321 \\ 9284 \\ \hline 287804 \end{array}$$

jms.

5. Numbrite arv korrutises.

Teoreem. **Kahe teguri korrutise numbrite arv võrdub kas korrutatava ja korrutaja numbrite arvude summaga või on ühe võrra väiksem sellest summast.**

On antud: arv K, numbrite arvuga m ja arv P, numbrite arvuga n. Tarvis on tõestada, et korrutises KP on kas $(m+n)$ numbrit või $(m+n-1)$ numbrit.

1) $10^{n-1} < P < 10^n$ (sest n numbriga mitmekohaline arv on väiksem kui 10^n ja suurem kui 10^{n-1});

2) $K\,10^{n-1} < KP < K\,10^n$ (korrutise monotoonsus);

3) $K\,10^n$ omab $(m+n)$ numbrit;

4) $K\,10^{n-1}$ omab $(m+n-1)$ numbrit.

Siit järeldub, et korrutis KP sisaldab maksimaalselt $(m+n)$ numbrit või minimaalselt $(m+n-1)$ numbrit.

Näide: 4358 ja 376 korrutis on kas kuue- või seitsmekohaline arv.

Tõepoolest:

$$100 < 376 < 1000.$$

Korrutades võrratuse kõiki arve 4358-ga, saame:

$$4358 \cdot 100 < 4358 \cdot 376 < 4358 \cdot 1000$$

ehk

$$435\,800 < 4358 \cdot 376 < 4\,358\,000.$$

Tähendab otsitav korrutis võib olla kuue- või seitsmekohaline.

VI peatükk.

Jagamine.

§ 36. Tehte definitsioon.

Ühe arvu korrutamisel teisega me ühendame teatava hulga võrdseid arve üheks arvuks, s. o. leiame võrdsete lii-

detavate summa, kusjuures seda summat nimetame korrutiseks. Näitena vaatleme järgmist ülesannet.

Ülesanne. Teri veetakse 128-l veokil, kusjuures igal veokil on keskmiselt 300 kg. Mitu kg on teri kokku?

Selles ülesandes on tarvis leida 128 liidetava summa, kus iga liidetav on 300. Ülesannet võib lahendada korrutades 300 128-ga, seega on otsitav arv: $300 \cdot 128 = 38\,400$ (kg).

Sageli on tarvis lahendada vastupidiselt ülesannet, s. o. lahutada antud arv (korrutis) teatavaks hulgaks võrdseiks liidetavaiks.

Ülesanne 1. 128-l veokil veeti 38 400 kg teri. Mitu kg teri oli keskmiselt igal veokil?

Ülesande andmetest on näha, et arv 38 400 on 128 arvu summa, kus iga arv võrdub otsitava arvuga. Ehk teisiti väljendades, kui otsitavat arvu korrutada 128-ga, siis saadud korrutis on 38 400. Nii on ülesandes antud kahe arvu korrutis ja üks teguritest (korrutaja), tarvis on aga leida teine tegur (korrutatav). Selleks tuleb arv 38 400 jaotada 128-ks omavahel võrdseks arvuks. Igaüks neist arvudest võrdubki otsitava arvuga.

Ülesanne 2. Veokitel veeti 38 400 kg teri, kusjuures igal veokil oli keskmiselt 300 kg. Leida veokite arv.

Ülesande andmetest selgub, et arvu 38 400 võib vaadelda kui võrdsete liidetavate summat, kus iga liidetav on 300. On selge, et selle summa liidetavate arv võrdub veokite arvuga. Võrdsete liidetavate summat leitakse korrutamise teel. Antud juhul on 300 ja otsitava arvu korrutis 38 400. Järelikult on ka selles ülesandes antud kahe arvu korrutis ja üks teguritest (korrutatav), tarvis on aga leida teine tegur (korrutaja).

Selleks, et vastata ülesande küsimusele, tuleb leida liidetavate arv, milledeks saab lahutada (jaotada) arvu 38 400 juhul, kui iga liidetav on 300.

Antud arvu lahutamine võrdseteks osadeks viib meid uue tehte — jagamise juurde.

Jagada arv a arvuga b, tähendab, leida niisugune arv, millega korrutades arvu b, saame arvu a.

Siit järgneb tehte definitsioon: **jagamiseks nimetatakse niisugust aritmeetilist tehet, kus kahe antud teguri korrutise ja ühe teguri järgi leitakse teine tegur.**

Jagamisel nimetatakse antud korrutist **jagatavaks**, antud tegurit **jagajaks** ja otsitavat tegurit **jagatiseks**. Esitatud definitsioonist nähtub, et **jagamine on korrutamise pöördtehe.**

Matemaatiliselt tähistatakse jagamist kahe punktiga, mis eraldavad jagatavat ja jagajat (jagatav vasakul, jagaja paremal) või horisontaalse joonega, mis samuti eraldab jagatavat jagajast (jagatav joone peal, jagaja joone all). Nii võime arvu a jagamist arvuga b üles kirjutada kahel viisil: 1) $a : b = q$ ehk 2) $\frac{a}{b} = q$, kusjuures mõlemad võrdused tähendavad, et arvu a jagamisel arvuga b saadaks jagatises loomulik arv q.

Jagamise definitsiooni alusel võib võrdust $a : b = q$ kirjutada: $a = bq$, s. t. jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega. Tähendame, et kõikide arutluste puhul me eeldame, et jagatis q on täisarv.

§ 37. Jagamise erijuhud.

1) Kui jagatav võrdub nulliga, siis võrdub ka jagatis nulliga. Tõepoolest, kui $a = 0$, siis $a : b = 0$, sest $b \cdot 0 = 0$.

2) Kui jagaja võrdub ühega, siis jagatis võrdub jagatavaga. Kui $b = 1$, siis $a : 1 = a$, sest $a \cdot 1 = a$. Tähendab, **arvu jagamisel ühega, jääb arv muutumatuks.**

3) Jagaja ei saa võrduda nulliga, sest jagamine nulliga on võimatu või annab määramatu tulemuse.

Kui jagatav a ei võrdu nulliga, jagaja b aga võrdub nulliga, siis ei saa jagatist leida, sest pole olemas niisugust arvu, mida korrutades nulliga, saame jagatava a, sest kui üks tegureist võrdub nulliga, siis võrdub ka korrutis nulliga.

Kui aga jagatav $a = 0$ ja jagaja $b = 0$, siis on jagamine võimalik, kuid jagatiseks võib olla mistahes arv, sest iga arvu korrutamisel jagajaga, saadakse resultaadiks null, s. t. jagatav. Tähendab antud juhul on jagamine võimalik, kuid annab määramatu tulemuse ja seepärast ei ole mõtet rääkida jagatisest.

Avaldisel $\frac{0}{0}$ ei ole leppekohaselt mingit numbrilist väärtust.

§ 38. Jagamine jäägiga.

Vastavalt eespool esitatud tingimusele, et jagatis oleks täisarv, ei ole arvu a jagamine arvuga b alati võimalik. Nii ei saa 63 jagada 30-ga, sest pole olemas niisugust täisarvu, millega 30 korrutades saaksime korrutiseks 63.

Kui oleksime soovinud 63 pliiatsit jaotada võrdselt 30-le õpilasele, siis poleks see olnud võimalik. Oleksime võinud jaotada igale õpilasele 2 pliiatsit, mis moodustab 60 pliiatsit, kusjuures oleks 3 pliiatsit jäänud järele, sest igale õpilasele tuli anda ühepalju pliiatseid ja nimelt 2. Ent ka sel juhul räägitakse arvu 63 jagamisest 30-ga, kusjuures arvu 63 nimetatakse jagatavaks, arvu 30 — jagajaks, arvu 2 — **mittetäielikuks jagatiseks** ja arvu 3 — jagamise **jäägiks.**

Jagamist ennast nimetatakse sel juhul **jäägiga jagamiseks.** Kui jagamisel saadakse jagatiseks täisarv ja jääki ei teki, siis nimetatakse jagamist **jäägita jagamiseks,** jagatist aga — **täisjagatiseks** ehk lihtsalt **jagatiseks.**

Kui arvu a jagamisel arvuga b saadakse mittetäielik jagatis q ja jääk r, siis kirjutatakse seda nii:

$a : b = q$ (jääk r) ehk $\frac{a}{b} = q$ (jääk r).

63 jagamisel 30-ga tuleb kirjutada:

$63 : 30 = 2$ (jääk 3) ehk $\frac{63}{30} = 2$ (jääk 3).

Niisiis, **jäägiga jagamisel nimetatakse mittetäielikuks jagatiseks suurimat arvu, mille korrutamisel jagajaga saadakse jagatavast väiksem korrutis. Jagatava ja selle korrutise vahet nimetatakse jäägiks.**

Siit järgneb, et **jagamise jääk peab olema jagajast väiksem,** sest kui jääk oleks suurem või võrdne jagajaga, siis jagatis ei oleks suurim võimalikest arvudest. Kui jagatavast lahutada jääk, siis saadud vahet $(a - r)$ saab jagada jagaja b-ga jäägita, kusjuures saadakse jagatiseks endiselt arv q.

Seega vahe $a - r = bq$ (vastavalt jagamise reeglile).

Siit $a = bq + r$ (vastavalt lahutamise reeglile).

Viimasest võrdusest nähtub, et jäägiga jagamisel **jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutise ning jäägi summaga.**

Märkus. Edaspidi asendatakse väljendus „üks arv jagub teisega jäägita (tervenisti)" väljendusega „üks arv jagub teisega", mõistes selle all alati jäägita jagamist.

Kui loomulik arv a jagub loomuliku arvuga b jäägita, siis märgitakse seda järgmiselt: $a : b$ ja loetakse: **arv a jagub arvuga b.** Arvu a nimetatakse antud juhul **arvu b kordseks.**

§ 39. Loomulikkude arvude jagamise ülddefinitsioon.

Loomulikkude arvude jäägita ja jäägiga jagamise kohta võib anda järgmise ülddefinitsiooni: **jagada arv a arvuga b,**

tähendab leida kaks niisugust arvu q (jagatis) ja r (jääk), mis rahuldaksid seoseid:

$$a = bq + r \text{ ja } r < b.$$

Võrdusest $a = bq + r$ järeldub, et

$$a = \overbrace{b + b + b + \ldots + b}^{q \text{ liidetavat}} + r.$$

Kuna $r < b$, siis näitab jagatis q suurimat arvu, mille kordselt jagatis sisaldub jagatavas. **Kui jagaja b ei võrdu nulliga, siis on jagamine alati võimalik ja annab ühese tulemuse.**

Tõepoolest:

1) kui $a < b$, siis $q = 0$ ja $r = a$; antud juhul rahuldab ainult see arvude paar definitsiooni;

2) kui $a = b$, siis $q = 1$ ja $r = 0$ ja ükski teine arvude paar ei rahulda definitsiooni;

3) kui $a > b$, siis näitab jagatis q suurimat arvu, mille kordselt jagaja b sisaldub jagatavas a; seepärast, kui b ei võrdu nulliga, siis on olemas ainult üks jagatis.

Sel juhul võib ka jääk $r = a - bq$, kusjuures lahutamise ühesuse tõttu võib see samuti olla ainult ühene.

Peab tähendama, et b-ga jagamisel jääk võib olla mistahes arv reast 0, 1, 2, 3, ... $b - 1$.

Seega võrdub arvuga b jagamisel tekkiv kõikide võimalikkude jääkide arv arvuga b.

§ 40. Järeldusi jagamise definitsioonist.

Kui üks arv (a) jagub teise arvuga (b) jäägita, siis järeldub jagamise definitsioonist:

1) Kui antud loomulik arv a jagada algul mingi arvuga b ja saadud jagatis korrutada sama arvuga, siis antud arv ei muutu.

Võtame loomuliku arvu $a : b$ ja näitame, et $(a : b)b = a$. See järeldub jagamise definitsioonist: jagada arv a arvuga b tähendab leida niisugune uus arv (q), mida korrutades b-ga, saame a. Järelikult väljendab vaadeldav võrdus valemi kujul jagamise mõtet ja samuti seda, et jagamine on korrutamise pöördtehe.

Niisiis: $(a : b)b = a$.

N ä i d e: $(120 : 5) \cdot 5 = 120$.

2) Kui antud loomulik arv korrutada algul mingi arvuga ja saadud korrutis jagada sama arvuga, siis antud arv ei muutu.

Tõestame, et $(ab) : b = a$.

Olgu $(ab) : b = n$, siis jagamise mõtte järgi $ab = bn$, kus $a = n$ (monotoonsuse seaduse järgi, sest $b = b$), järelikult, $(ab) : b = a$, mida oligi tarvis tõestada.

N ä i d e: $(91 \cdot 7) : 7 = 91$.

Tähendame, et vaadeldavais järeldustes ei ole sulgude tarvitamine vajalik. Me kasutasime neid ainult selleks, et kirjutises paremini esile tõsta iga järelduse põhisisu.

Üldiselt aga on: $(120 : 5) \cdot 5 = 120 : 5 \cdot 5 = 120$.

$(91 \cdot 7) : 7 = 91 \cdot 7 : 7 = 91$.

§ 41. Jagamise kasutamine ülesannete lahendamisel.

Me vaatlesime (§ 36) kahte ülesannet, milledes oli antud kahe arvu korrutis ja üks neist arvudest ning oli tarvis leida teine arv. Järelikult võib mõlemaid neid ülesandeid lahendada jagamisega.

1. ülesande lahendus: $38\,400 : 128 = 300$ (kg).

2. ülesande lahendus: $38\,400 : 300 = 128$ (korda).

Nii antakse jagamise abil lahenduvate ülesannete tingimustes alati kahe arvu korrutis ja üks teguritest ning on tarvis leida teine tegur. Et korrutamise kommutatiivsuse sea-

duse järgi korrutis ei olene tegurite järjekorrast, siis on jagamise tulemustele matemaatilisest vaatekohast ükskõik, kumb kahest tegurist — korrutatav või korrutaja — on antud ja kumb on otsitav.

Kuid mõlemad vaadeldud ülesanded on oma konkreetse sisu ja esitatud küsimuste mõtte poolest täiesti erinevad. Esimeses ülesandes on antud arvu (38 400) võrdsete osade (128) hulk ja nõutakse iga osa suurust; teiste sõnadega, küsitakse, missugune arv tuleb võtta liidetavana, teatav arv korda (128), et saada antud arvu (38 400). On selge, et selles ülesandes otsitakse korrutatavat.

Teises ülesandes on antud, missugusteks omavahel võrdseteks arvudeks (300) tuleb lahutada antud arv (38 400), s. t. antakse iga osa suurus ja küsitakse, kui palju on niisuguseid arve (osi); teiste sõnadega, küsitakse, mitu korda on tarvis võtta liidetavana antud arvu (300), et saada teist antud arvu (38 400). Selles ülesandes otsitakse korrutajat.

Järelikult võib ütelda, et ühe ja sama tehtega — jagamisega — lahendatakse kaks erisisulist ülesannet:

a) ühel juhul (jaotamine osadeks) jaotatakse antud arv teatavaks hulgaks võrdseteks osadeks ja on tarvis leida võrdsete osade suurus (otsitakse korrutatavat);

b) teisel juhul (jagamine mahutavuse ehk sisalduvuse järgi) leitakse mitu korda üks antud arv sisaldub teises antud arvus (otsitakse korrutajat).

Viimases ülesandes, leides mitu korda üks antud arv sisaldub teises antud arvus, võrdleme arve teineteisega, kindlaks tehes mitu korda üks arv on suurem teisest. Sel juhul nimetatakse jagatist antud arvude suhteks.

Need kaks erineva sisuga küsimust lahenduvad ühe ja sama tehte abil seepärast, et korrutamisel on kehtiv kommutatiivsuse seadus. Selle seaduse alusel me saame igat jagamist taandada kas korrutatava või korrutaja määramisele.

Arvu jaotamisel võrdseteks osadeks me vähendame seda arvu teatav arv korda, leides mitme võrdse osa hulgast ainult ühe osa suuruse. Järelikult ülesannete lahendamisel, kus on tarvis antud arvu vähendada teatav arv korda, me tegelikult jaotame selle arvu osadeks.

Nii kasutatakse ülesannete lahendamisel jagamist järgmistel juhtudel:

1) kui antud arvu on tarvis jaotada võrdseteks osadeks või vähendada teda mingi arv korda;

2) kui on tarvis teada mitu korda sisaldub üks arv teises arvus või määrata, mitu korda on üks arv teisest suurem (leida arvude suhe).

Jagamist kasutatakse üldse, kui antud korrutise ja ühe teguri järgi on tarvis leida teist tegurit.

Sarnased on näiteks ka järgmised ülesanded:

Ülesanne 1. Tootmisülesande täitmiseks on tarvis 72 ühe inimese töötundi (normitundi). Mitme tunniga täidab selle ülesande 12-st inimesest koosnev brigaad?

Ülesanne lahendub jagamisega: $72 : 12 = 6$ (tundi).

Ülesanne 2. Ristküliku pindala on 80 m² ja selle külg 8 m. Leida alus.

Ülesanne lahendub samuti jagamisega: $80 : 8 = 10$ (m).

§ 42. Andmete ja tulemuse vahelised seosed korrutamisel ja jagamisel.

1. Nagu nägime leitakse jagamisel antud kahe teguri korrutise (jagatav) ja ühe teguri (jagaja) järgi teine tegur (jagatis).

Kui: $a : b = q$ $(a : b)$, siis $a = bq$; kus $b = a : q$.

Järelikult, **kahe arvu korrutise iga tegur võrdub korrutise ja teise teguri jagatisega.**

2. Võrdustest $a = bq$ ja $b = a : q$ järeldub samuti, et jagamisel jäägita:

a) **jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega ja**

b) **jagaja võrdub jagatava ja jagatise jagatisega.**

3. Jagamisel jäägiga, nagu juba nägime (§ 38), võrdub jagatav jagaja ja jagatise korrutise ning jäägi summaga:

$$a = bq + r.$$

§ 43. Korrutamiste ja jagamiste rea põhiomadused.

Definitsioon: **Korrutamiste ja jagamiste reaks nimetatakse üksteisele järgnevaid tehteid (korrutamisi ja jagamisi), mis tähistatud korrutamis- ja jagamismärkidega.**

Näiteks: $15 : 5 \cdot 2 : 3$ on korrutamiste ja jagamiste rida. Selleks on tarvis 15 jagada 5-ga, jagatis korrutada 2-ga ja saadud korrutis jagada 3-ga. Kui tehteid tuleb teostada teises järjekorras, siis määratakse see järjekord sulgudega.

Korrutamiste ja jagamiste rea puhul on kehtivad kommutatiivsuse seadus (kahel kujul) ja assotsiatiivsuse seadus (kolmel kujul).

1. Kommutatiivsus.

Korrutamiste ja jagamiste rea lõpptulemus ei sõltu tehete järjekorrast.

Näide:

1. kuju: $20 \cdot 12 : 4 = 20 : 4 \cdot 12$. Tõepoolest,
$20 \cdot 12 : 4 = (20 \cdot 12) : 4 = 240 : 4 = 60$ ja
$20 : 4 \cdot 12 = (20 : 4) \cdot 12 = 5 \cdot 12 = 60$.

2. kuju: $30 : 2 : 3 = 30 : 3 : 2$. Tõepoolest,
$30 : 2 : 3 = (30 : 2) : 3 = 15 : 3 = 5$ ja
$30 : 3 : 2 = (30 : 3) : 2 = 10 : 2 = 5$.

Märgime, et **korrutamiste ja jagamiste reas teostatakse tehted selles järjekorras, nagu nad märgitud enne või pärast antud rea liikmete ümberpaigutamist.**

Loomulikkude arvude korrutamiste ja jagamiste reas on lubatud liikmete ümberpaigutus ainult neil juhtudel, kui pärast ümberpaigutust on võimalik jagamine jäägita.

Mistahes arvude a, b ja c ($a : c$) puhul on:

1. $a \cdot b : c = a : c \cdot b$.
2. $a : b : c = a : c : b$.

Tõestame nende võrduste kehtivust.

1) $a \cdot b : c = (a \cdot b) : c =$ (korrutamiste ja jagamiste rea definitsioon)
$= \{[(a : c) \cdot c] \cdot b\} : c =$ (järeldus jagamise definitsioonist)
$= [(a : c) \cdot c \cdot b] : c =$ (korrutise assotsiatiivsus)
$= [(a : c) \cdot b \cdot c] : c =$ (korrutise kommutatiivsus)
$= (a : c) \cdot b \cdot c : a =$ (korrutamiste ja jagamiste rea definitsioon)
$= (a : c) \cdot b =$ (järeldus jagamise definitsioonist)
$= a : c \cdot b.$ (korrutamiste ja jagamiste rea definitsioon).

2) $a : b : c = (a : b) : c =$ (korrutamiste ja jagamiste rea definitsioon)
$= \{[(a : c) \cdot c] : b\} : c =$ (järeldus jagamise definitsioonist)
$= [(a : c) \cdot c : b] : c =$ (korrutamiste ja jagamiste rea definitsioon)
$= [(a : c) : b \cdot c] : c =$ (korrutamiste ja jagamiste rea liikmete ümberpaigutuse 1. kuju)
$= (a : c) : b \cdot c : c =$ (korrutamiste ja jagamiste rea definitsioon)
$= (a : c) : b =$ (järeldus jagamise definitsioonist)
$= a : c : b.$ (korrutamiste ja jagamiste rea definitsioon).

2. Assotsiatiivsus.

1. kuju: **selle asemel, et antud arvu korrutada jagatisega, võib seda arvu korrutada jagatavaga ja saadud korrutist jagada jagajaga.**

Näide: $20 \cdot (12 : 4) = 20 \cdot 12 : 4$. Tõepoolest:
$20 \cdot (12 : 4) = 20 \cdot 3 = 60$ ja
$20 \cdot 12 : 4 = (20 \cdot 12) : 4 = 240 : 4 = 60$.

2. kuju: **selle asemel, et antud arvu jagada kahe arvu korrutisega, võib seda arvu jagada esimese teguriga ja saadud jagatist jagada teise teguriga.**

Näide: $36 : (2 \cdot 6) = 36 : 2 : 6$. Tõepoolest:
$36 : (2 \cdot 6) = 36 : 12 = 3$ ja
$36 : 2 : 6 = (36 : 2) : 6 = 18 : 6 = 3$.

Järeldus (antud arvu jagamine mitme arvu korrutisega): **selle asemel, et antud arvu jagada mitme arvu korrutisega, võib seda arvu jagada esimese teguriga, saadud jagatist jagada teise teguriga, uut jagatist — kolmandaga jne.**

Näiteks, kui on tarvis arv 720 jagada korrutisega $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$, siis on assotsiatiivsuse seaduse alusel seda korrutist alati võimalik väljendada kahe teguri korrutisena ja jagada antud arv 720 selle korrutisega.

Tõepoolest:

$$720 : (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5) = 720 : [(4 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 5)] =$$
$$= 720 : (4 \cdot 3) : (2 \cdot 5) = 720 : 4 : 3 : 2 : 5.$$

Niiviisi me jõudsime üksteisele järgnevate jagamiste reani, milles tehted teostatakse kirjutamise järjekorras:

$720 : 4 : 3 : 2 : 5 = 180 : 3 : 2 : 5 = 60 : 2 : 5 = 30 : 5 = 6$.

3. kuju: **selle asemel, et antud arvu jagada jagatisega, võib seda jagada jagatavaga ja saadud jagatist korrutada jagajaga.**

Näide: $36 : (18 : 3) = 36 : 18 \cdot 3$. Tõepoolest:
$36 : (18 : 3) = 36 : 6 = 6$.
$36 : 18 \cdot 3 = (36 : 18) \cdot 3 = 2 \cdot 3 = 6$.

Mistahes arvude a, b ja c puhul on:

1. kuju: $a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$,
2. kuju: $a : (b \cdot c) = a : b : c$,
3. kuju: $a : (b : c) = a : b \cdot c$.

Tõestame nende võrduste kehtivust.

1) $a \cdot (b : c) = a \cdot b : c$.

$a \cdot (b : c) = a \cdot (b : c) \cdot c : c =$ (järeldus jagamise definitsioonist)

$= a[(b : c) \cdot c] : c =$ (korrutamise assotsiatiivsus)

$= a \cdot b : c$ (järeldus jagamise definitsioonist).

2) $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$, kus $a \vdots b$.

$a : (b \cdot c) = [(a : b) \cdot b] : (b \cdot c) =$ (järeldus jagamise definitsioonist)

$= \{[(a : b) : c] \cdot c \cdot b\} : (b \cdot c) =$ (järeldus jagamise definitsioonist)

$= \{[(a : b) : c] \cdot (b \cdot c)\} : (b \cdot c) =$ (korrutamise assotsiatiivsus ja kommutatiivsus)

$= a : b : c$ (järeldus jagamise definitsioonist ja korrutamiste ning jagamiste rea definitsioonist).

Järeldus:

$N : (a \cdot b \cdot c \cdot d) = N : [(a \cdot b)(c \cdot d)] =$ (korrutamise assotsiatiivsus)

$= N : (a \cdot b) : (c \cdot d) =$ (arvu jagamine kahe arvu korrutisega)

$= N : a : b : c : d$ (arvu jagamine kahe arvu korrutisega).

3) $a : (b : c) = a : b \cdot c$, kus $a \vdots b$.

$a : (b : c) = [(a : b) \cdot b] : (b : c) =$ (järeldus jagamise definitsioonist)

$= \{[(a : b) \cdot c] : c \cdot b\} : (b : c) =$ (järeldus jagamise definitsioonist)

$= \{[(a : b) \cdot c] \cdot (b : c)\} : (b : c) =$ (korrutamiste ja jagamiste rea kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse 1. kuju)

$= a : b \cdot c$ (järeldus jagamise definitsioonist ja korrutamiste ning jagamiste rea definitsioonist).

Märkus. Jagamist korrutisega ei tohi ära segada hariliku korrutamiste ja jagamiste reaga.

Avaldis $a : (b \cdot c)$ on arvu a jagamine korrutisega $b \cdot c$: selleks, et leida jagatist, võib algul b korrutada c-ga ja siis jagada antud arv a saadud korrutisega või asendada avaldis $a : (b \cdot c)$ temaga võrdse jaga-

miste reaga $a : b : c$ ja rangelt teostada jagamist kirjutatud järjekorras, jagades algul arv a arvuga b ja siis saadud jagatis arvuga c.

Avaldis $a : b \cdot c$ on korrutamiste ja jagamiste rida. Nagu varem nägime on selles kehtiv kommutatiivsus ja seega on ümberkujundatav teiseks reaks $a \cdot c : b$. Nagu esimeses nii ka teises reas tulevad tehted tingimata alati teostada vastavalt kirjutatud järjekorrale. Algebras vaadeldakse antud arvu jagamist üksliikmega kui jagamist korrutisega.

§ 44. Jagamise distributiivsus (summa ja vahe jagamine antud arvuga).

Kui summa iga liidetav jagub jäägita antud arvuga, siis omab selle jagatava suhtes jagamine jaotuvuse omadust (distributiivsust).

Selle asemel, et kahe või enama arvu summat jagada antud arvuga, võib jagada selle arvuga igat liidetavat ja tulemused liita.

1. Tõestame algul selle kehtivust kahe arvu jagamise puhul.

On antud summa $a + b$; $a : c$ ja $b : c$.

Tõestada: $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Oletame, et parem pool ei võrdu vasaku poolega. Olgu siis $(a + b) : c = N$ ja $a : c + b : c = N_1$. Tõestame, et $N = N_1$.

Tõepoolest:

1) $a + b = Nc$.

$[(a + b) : c]\, c = Nc$ (monotoonsuse seadus)

$(a + b) = Nc$ (1. järeldus jagamise definitsioonist)

2) $a : c + b : c = N_1$.

$(a : c + b : c) \cdot c = N_1 c$ (monotoonsus)

$a : cc + b : cc = N_1 c$ (korrutise distributiivsus)

$a + b = N_1 c$ (1. järeldus jagamise definitsioonist).

Järelikult, $Nc = N_1 c$ (summa $a + b$ ühesus) ehk $N = N_1$ (monotoonsus), kus $(a + b) : c = a : c + b : c$.

Ülesanne. Tehase kahest tsehhist, milledes töötab 90 ja 80 töölist, tuleb viiendik lubada puhkusele. Mitu töölist läheb puhkusele?

Ülesanne lahendatakse jagamisega. Puhkusele minejate üldarv leitakse, kui liita 90 ja 80 ning saadud summa jagada

5-ga. Kuid lahendus võib olla ka teistsugune: leiame algul, kui palju läheb töölisi puhkusele kummastki tsehhist, milleks jagame 5-ga kummagi liidetava, ja siis liidame tulemused:

$$(90 + 80) : 5 = 90 : 5 + 80 : 5 = 18 + 16 = 34.$$

Tõestame nüüd selle teoreemi kehtivust mistahes liidetavate arvuga summa puhul.

On antud summa $(a + b + c + \ldots + k)$ ja arv n.
$(a : n;\ b : n;\ c : n;\ \ldots k : n)$.

Tõestada: $(a + b + c + \ldots + k) : n = a : n + b : n + c : n + \ldots + k : n.$

$(a + b + c + \ldots + k) : n = [a + (b + c + \ldots + k)] : n =$ (summa assotsiatiivsus)

$= a : n + (b + c + \ldots + k) : n =$ (kahe liidetavaga summa distributiivsus)

$= a : n + [b + (c + \ldots + k)] : n =$ (summa assotsiatiivsus)

$= a : n + b : n + (c + \ldots + k) : n =$ (jagamise distributiivsus)

$= a : n + b : n + [c + (\ldots + k)] : n =$ (summa assotsiatiivsus)

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots =$ (edasised teisendused toimuvad samadel alustel)

$= a : n + b : n + c : n + \ldots + k : n$ (kahe liidetavaga summa jagamise distributiivsus).

Näide: $(140 + 210 + 70 + 630) : 7 =$
$= 140 : 7 + 210 : 7 + 70 : 7 + 630 : 7 =$
$= 20 + 30 + 10 + 90 = 150.$

Kui me jagatava iga liidetava jagame 7-ga, siis leiame seitsmendiku vastavatest liidetavatest. Kõikide nende osade summa moodustab seitsmendiku kogu jagatavast, sest suurendades 7 korda saadud summa igat liidetavat, me saamegi eraldi iga esialgse liidetava ja nende summa ongi antud jagatav. Kui aga mingi seitsmekordselt võetud arv moodustab jagatava, siis ta ongi seitsmendik jagatavast.

Selle asemel, et jagada kahe loomuliku arvu vahe kolmanda arvuga, võib selle arvuga jagada vähendatavat ja lahutatavat ning esimesest jagatisest lahutada teine.

Tõestatakse samuti kui kahe liidetava summa distributiivsustki.

Märkus. Distributiivsusele on rajatud reegel mitmekohalise arvu jagamisest ühekohalise ja mitmekohalisega. Jagamise distributiivsust kasutatakse ka peastarvutustel.

Näide 1. $828 : 9 = (810 + 18) : 9 = 810 : 9 + 18 : 9 = 90 + 2 = 92.$

Näide 2. $1773 : 9 = (1800 - 27) : 9 = 1800 : 9 - 27 : 9 = 200 - 3 = 197.$

§ 45. Mitme arvu korrutise jagamine antud arvuga ja mitme arvu korrutisega.

1. Korrutise jagamine antud arvuga.

Selle asemel, et jagada mitme arvu korrutist antud arvuga, võib jagada korrutise ühe teguri selle arvuga.

On antud: arvude a, b ja c korrutis; loomulik arv n; $a : n = q$.

Tõestada: $(abc) : n = qbc$.

$(abc) : n = (nq)bc : n =$	(sest eelduse kohaselt $a = nq$)
$= (nqbc) : n =$	(assotsiatiivsus)
$= (qbcn) : n =$	(kommutatiivsus)
$= [(qbc)n] : n =$	(assotsiatiivsus)
$= qbc$	(järeldus jagamise definitsioonist).

Näide: $(15 \cdot 8 \cdot 6) : 5 = 3 \cdot 8 \cdot 6 = 144.$

Tõepoolest, $(15 \cdot 8 \cdot 6) : 5 = 720 : 5 = 144.$

2. Mitme arvu korrutise jagamine teise korrutisega.

Selle asemel, et jagada mitme arvu korrutist teise korrutisega, mille kõik tegurid leiduvad esimeses korrutises, võib

esimese korrutise iga teguri jagada teise korrutise vastava teguriga ja siis saadud jagatised ja ülejäänud tegurid korrutada.

On antud korrutised: $abcdmnf$ ja amn.

Tõestada: $(abcdmnf) : (amn) = bcdf$.

Teisendame jagatava:

$abcdmnf = amnbcdf$ (kommutatiivsus)

niiviisi:

$[(amn)(bcdf)] : (amn) =$ (assotsiatiivsus)

$(amn)(bcdf) : (amn) = bcdf$ (jagamise definitsiooni järgi).

Siit saame:

$$(abcdmnf) : (amn) = bcdf.$$

Näide: $(5 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 18) : (7 \cdot 3 \cdot 6) =$

$= 5 \cdot (14 : 7) \cdot (15 : 3) \cdot (18 : 6) =$

$= 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 150.$

Esitatud korrutise jagamise reegleid kasutatakse sageli peastarvutusel ja lühendatud kirjalikel arvutustel.

Näide 1. $312 : 26 = (26 \cdot 12) : 26 = 12.$

Näide 2. $550 : 22 = (11 \cdot 5 \cdot 10) : (11 \cdot 2) =$

$= (11 : 11) \cdot 5 \cdot (10 : 2) = 5 \cdot 5 = 25.$

§ 46. Arvude jagamise reeglid.

1. Jagamine teiste tehete abil.

Jagamist võib teostada liitmise, lahutamise ja korrutamise abil. Olgu tarvis 48 jagada 8-ga. Otsitavat jagatist võime leida:

a) Liitmise abil.

Võttes arvu 8 järjest mitu korda liidetavana, märkame, et $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$ annab summa 48. Järelikult 8 sisaldub 48-s 6 korda.

Seega on otsitav jagatis 6.

b) Lahutamise abil.

Lahutades 48-st arvu 8 niimitu korda, kui võimalik, leiame, et 8 sisaldub 48-s 6 korda: $48-8-8-8-8-8-8=0$, sest 48-st sai 8 lahutada 6 korda.

Tähendab otsitav jagatis on 6.

c) Korrutamise abil.

Võtame arvud 48 ja 8. Korrutades järjest arvu 8 arvudega 1, 2, 3 jne., saame korrutised 8, 16, 32, 40 ja 48. 48-s sisalduv suurim korrutis on 48 ehk $8 \cdot 6$. Järelikult on jagatis 6.

Võimalus leida jagatist mistahes aritmeetilise tehte abil, seletub loendamise ja nelja aritmeetilise tehte vahel valitseva geneetilise seosega, nad kõik tekivad nende tehete erinevusele vaatamata üksteisest ja on ülesehitatud üksteisele. Nii baseeruvad lahutamise ja korrutamise tehete definitsioonid ja teooria liitmise teoorial, jagamise teooria aga korrutamisel. Nii on jagamine seotud korrutamise kaudu liitmisega. Liitmine aga, nagu nägime, järeldub vahetult loendamise operatsioonist.

Nii saab jagatist leida liitmise, lahutamise ja korrutamise abil. Kuid jagatise leidmine nende võtete abil on tülikas, eriti siis, kui jagatis on suur arv.

Aritmeetika annab lihtsama võtte jagatise leidmiseks. See on väljendatud nn. täisarvude jagamise reeglis. Vaatleme seda reeglit.

2. Jagamine ühekohalise arvuga.

a) Ühekohaliste ja kahekohaliste arvude jagamine. Olgu tarvis 72 jagada 8-ga.

Sel juhul leiame korrutamistabelist jagatise, mis võrdub 9-ga; et $8 \cdot 9 = 72$, siis järelikult $72 : 8 = 9$. Jagamistabel tuleb meeles pidada.

b) Mitmekohalise arvu jagamine ühekohalisega.

Olgu tarvis 8462 jagada 2-ga.

8462 = 8 t. + 4 s. + 6 k. + 2 ü., järelikult 8462 : 2 = (8 t. + + 4 s. + 6 k. + 2 ü.) : 2 = 4 t. + 2 s. + 3 k. + 1 ü. (distributiivsus), kuid 4 t. + 2 s. + 3 k. + 1 ü. = 4231 (kümnendsüsteemi arvu omaduse põhjal).

Tähendab, 8462 : 2 = 4231.

Siit näeme, et mitmekohalise arvu jagamisel ühekohalisega lahutame algul arvu järgu ühikute summaks, siis jagame distributiivsuse seaduse alusel iga järgu antud ühekohalise arvuga ja lõpuks kirjutame kümnendsüsteemi arvu omaduse põhjal saadud resultaadi. Esitatud näites jagus iga järgu ühikute arv jäägita jagajaga. Vaatleme veel juhtu, kus iga järgu ühikute arvud jaguvad jagajaga jäägiga. Jagame 9672 4-ga.

Lahutades jagaja järkudeks, saame 9 t. + 6 s. + 7 k. + 2 ü. Jagame 9 t. 4-ga, saame jagatiseks 2 t. ja jäägi 1 t. Ülejäänud tuhande peenestame sadadeks ja liidame veel 6 sada, saame kokku 16 s., jagades 16 s. 4-ga, saame jagatiseks 4 s.; jagades 7 k. 4-ga, saame jagatiseks 1 k. ja jäägi 3 k. Lõppeks peenestame 3 k. ühtedeks ja liidame nendega 2 ü. saame 32 ü.; jagame 32 ü. 4-ga, saame jagatiseks 8 ü. Saadud üksikud osad liidame:

$$2\text{ t.} + 4\text{ s.} + 1\text{ k.} + 8\text{ ü.} = 2418.$$

Kirjalik jagamine paigutatakse nii:

9672 : 4 = 9 t. + 6 s. + 7 k. + 2 ü. | 4
1 t. — 2 t. + 4 s. + 1 k. + 8 ü. = 2418
16 s.
7 k.
3 k.
32 ü.
0

3. Mitmekohalise arvu jagamine mitmekohalisega.

Mitmekohalise arvu jagamisel mitmekohalisega kasutame teoreemi summa jagamisest antud arvuga.

Näiteks olgu tarvis 72 841 jagada 23-ga. Kirjutame jagamise järgmisel kujul:

72841	| 23
72 t.	3 t. + 1 s. + 6 k. + 7 ü. = 3167
— 69 t.	
3 t.	
38 s.	
— 23 s.	
15 s.	
154 k.	
— 138 k.	
16 k.	
161 ü.	
— 161 ü.	
0	

Niiviisi kujutasime jagatava summana:

72 841 = 69 t. + 23 s. + 138 k. + 161 ü.

ja kasutades teoreemi summa jagamisest antud arvuga, jagasime saadud summa 23-ga:

(69 t. + 23 s. + 138 k. + 161 ü.) : 23 = 3 t. + 1 s. + 6 k. + 7 ü.

Siis kirjutasime kümnendsüsteemi arvu omaduse põhjal:

3 t. + 1 s. + 6 k. + 7 ü. = 3167.

Praktiliselt toimub üldtarvitatava võttega mitmekohaliste arvude jagamisel jagatava liidetavateks lahutamine järgmiselt:

a) jagatavas võetakse kõrgeima järgu ühikute arv ja proovitakse, kas seda on võimalik jagada antud arvuga;

b) kui jagamine ei ole võimalik, siis proovitakse jagada järgmist madalama järgu ühikute koguarvu;

c) jätkates sel viisil proovimist, jõuame lõpuks niisuguse järgu ühikuteni, millede koguarv on jagatavast suurem (tingimata aga 10-kordsest jagatavast väiksem);

d) sellest arvust eraldatakse suurim arv, mis jagub jäägita jagajaga, ja jagades seda jagajaga, saame otsitava jagatise esimese liidetava;

e) jäägist saadakse analoogiliselt jagatise teine liidetav jne.

4. Jagatise numbrite arv.

Teoreem: **Jagatise numbrite arv võrdub jagatava numbrite arvu ja jagaja numbrite arvu vahega või on sellest ühe võrra suurem.**

On antud: a — jagatav, b — jagaja, q — jagatis, kusjuures a numbrite arv on m ja b numbrite arv on n.

Tõestada: jagatise q numbrite arv on $(m-n)$ või $(m-n+1)$.

1) $a = bq$ (jagamise definitsioon)

2) oletame, et q numbrite arv on x, siis

3) bq numbrite arv on $(n+x)$ või $(n+x-1)$ (korrutise numbrite arvu teoreemi alusel), s. t.

4) $m = n+x$ või $m = n+x-1$ numbrit, kus

5) kui $m = n+x$, siis $x = m-n$ või

6) kui $m = n+x-1$, siis $x = m-n+1$, s. t.

7) jagatise numbrite arv võrdub jagatava numbrite arvu ja jagaja numbrite arvu vahega või on sellest ühe võrra suurem.

§ 47. Korrutamise ja jagamise kontrollimine.

1. Korrutamise kontrollimine.

a) **Kontrollimine liitmisega.** Korrutamise definitsioonist järgneb, et korrutamise tulemust saab kontrollida liitmisega. Kuid see kontrollimisvõte on suurte arvude puhul palju

aega nõudev ja seepärast praktiliselt korrutamist liitmisega ei kontrollita.

b) **Kontrollimine korrutamisega.** Korrutamise kontrollimine korrutamisega põhjeneb korrutamise kommutatiivsuse (vahetuvuse) seadusele: muutes tegurite järjekorda ja korrutades uuesti, peame saama sama tulemuse.

Näide:

		Kontroll:	
	328		1045
×	1045	×	328
	1640		8360
	1312		2090
	328		3135
	342760		342760

c) **Kontrollimine jagamisega.** Korrutamise kontrollimine jagamisega toimub jagamise definitsiooni ja jagatava, jagaja ning jagatise vahelise seose alusel, nimelt saadud korrutise jagamisega korrutatavaga või korrutajaga. Esimesel juhul peame jagatiseks saama korrutaja, teisel — korrutatava.

342760	328
147	1045
1476	
1640	
0	

2. Jagamise kontrollimine.

a) **Kontrollimine liitmise ja lahutamisega.** Me nägime, et jagatist saab leida liitmise ja lahutamisega, seepärast võib ka jagamise kontrollimisel leida jagatist nende tehete abil. Kuid säärane kontroll ei ole otstarbekohane eriti suurte arvude puhul, sest nõuab palju aega. Praktiliselt ei kontrollita jagamist liitmise ja lahutamisega.

b) **Kontrollimine korrutamisega.** Jagamise kontrollimiseks korrutamisega jagaja korrutatakse jagatisega ja resultaadiks saadakse jagatav (jagamise definitsiooni alusel).

Näide: $2\,316\,992 : 328 = 7064$

Kontroll:

$$\begin{array}{r} 7064 \\ \times\ 328 \\ \hline 56512 \\ 14128 \\ 21192 \\ \hline 2316992 \end{array}$$

c) **Kontrollimine jagamisega.** Jagamise kontrollimiseks jagamisega jagatav jagatakse jagatisega ja resultaadiks saadakse jagaja (jagamise definitsiooni alusel).

Näide: $2\,316\,992 : 328 = 7064$

Kontroll:

$$\begin{array}{r|l} 2316992 & 7064 \\ \hline 19779 & 328 \\ \hline 56512 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

§ 48. Sulgude kasutamine.

Liitmist ja lahutamist nimetatakse esimese järgu teheteks, korrutamist ja jagamist — teise järgu teheteks.

Aritmeetiliste harjutuste arvutamisel, kui avaldises puuduvad sulud ja esinevad ainult esimese järgu tehted, teostatakse tehted selles järjekorras, nagu nad on kirjutatud.

Näide: $175 - 25 + 31 - 44 - 11 + 15 =$
$= 150 + 31 - 44 - 11 + 15 =$
$= 181 - 44 - 11 + 15 = 137 - 11 + 15 =$
$= 126 + 15 = 141.$

Iga tehet võib kirjutada eraldi.

Näide: $144 : 16 \cdot 12 : 3 : 2 = 9 \cdot 12 : 3 : 2 =$
$= 108 : 3 : 2 = 36 : 2 = 18.$

Esimene näide kujutab enesest liitmiste ja lahutamiste rida, teine — korrutamiste ja jagamiste rida. Me nägime (§§ 25 ja 43), et nendes ridades kehtib kommutatiivsus. Seetõttu võib esitatud näidetes tehteid teostada ka teises järjekorras tingimusel, et nad oleks teostatavad naturaalarvude piires.

Lahendame vaadeldud näiteid teisiti.

Näide 1. $175 + 31 + 15 = 221$; $221 - 11 = 210$;
$210 - 25 = 185$; $185 - 44 = 141$.

Näide 2. $144 \cdot 12 = 1728$; $1728 : 16 = 108$;
$108 : 3 = 36$; $36 : 2 = 18$.

Kui sulgudeta harjutuses esineb eri järkude tehteid, siis teostatakse esmalt korrutamised ja jagamised ja seejärel — liitmised ja lahutamised.

Näide: $8 \cdot 12 + 96 : 16 - 144 : 24 + 36 : 4 - 13 \cdot 8.$

Teostame algul korrutamised ja jagamised:

$8 \cdot 12 = 96$; $96 : 16 = 6$; $144 : 24 = 6$;
$36 : 4 = 9$; $13 \cdot 8 = 104$;

seejärel liitmised ja lahutamised: $96 - 6 + 6 + 9 - 104 = 1$.

Kui aritmeetilises harjutuses esinevad sulud, siis teostatakse algul tehted sulgudes.

Kui avaldises esinevad ümmargused ja nurgelised sulud, siis teostatakse algul tehted ümmargustes sulgudes ja seejärel nurgelistes sulgudes.

Näide: $920 + 25\,[92 - 3\,(54 - 37)]$.

Sulud näitavad, et algul on vaja teostada lahutamine $54 - 37 = 17$.

Kirjutame harjutuse ümber, asendades ümmargused sulud lahutamise tulemusega:

$$920 + 25 \cdot [92 - 3 \cdot 17].$$

Teostades tehteid nurgelistes sulgudes, algul korrutame ja siis lahutame: $3 \cdot 17 = 51$; $92 - 51 = 41$. Kirjutame uuesti harjutuse ümber, kusjuures nurgeliste sulgude asemele paigutame saadud tulemuse: $920 + 25 \cdot 41$. Edasi korrutame $25 \cdot 41 = 1025$, seejärel liidame $920 + 1025 = 1945$.

Vaatleme sulgude kasutamist ülesannete lahendamisel.

Ülesanne. Reisijate veo eest aurikul saadi 1857 rubla, kusjuures 23 I klassi reisijat maksid igaüks 20 rubla ja 78 II klassi reisijat — igaüks 9 rubla, ülejäänud olid III klassi reisijad. Tagasisõidul I ja II klassi reisijate arv jäi endiseks, kuna III klassi reisijate arv vähenes 32 inimese võrra ja kogu reisijate veo eest saadi 1697 rubla. Kui palju oli algul III klassi reisijaid?

Selleks, et leida esialgset III klassi reisijate arvu, peab teadma: 1) kui palju maksid esimesel sõidul kõik III klassi reisijad ja 2) kui palju maksis üks III klassi pilet.

Et vastata esimesele küsimusele, peab teadma: 3) kui palju saadi kõigi kolme klassi piletite eest kokku ja 4) kui palju saadi I ja II klassi piletite eest kokku. Kogu piletite eest saadud summa on antud. I ja II klassi piletite eest saadud summa määramiseks peab teadma: 5) kui palju maksid kõik I klassi reisijad ja 6) kui palju maksid kõik II klassi reisijad. Et leida aga I klassi piletite eest saadud summat, peab teadma: 7) I klassi pileti hinda ja I klassi reisijate arvu. Mõlemad suurused on ülesandes antud. Selleks, et leida II klassi piletite eest saadud summat, peab teadma: 8) II klassi pileti hinda ja II klassi reisijate arvu. Ka need suurused on antud.

Ülesande lahendamise plaan.

1) Mitu rubla saadi teisel sõidul III klassi piletite eest vähem kui esimesel sõidul?

2) Mitu rubla maksis III klassi pilet?

3) Kui palju maksid esimesel sõidul kõik I klassi piletid?

4) Kui palju maksid esimesel sõidul kõik II klassi piletid?

5) Kui palju maksid I ja II klassi piletid kokku?

6) Kui palju maksid esimesel sõidul kõik III klassi piletid?

7) Kui palju oli III klassi reisijaid esimesel sõidul?

Lahendus seletusega:

1) 1857 rbl. — 1697 rbl. = 160 rbl. Siin on tarvis teada, mitme rubla võrra on esimene summa teisest suurem. See küsimus lahendub lahutamisega.

2) 160 rbl. : 32 = 5 rbl. Kui 32 III klassi piletit maksid 160 rubla, siis üks pilet maksis 32 korda vähem. Arvu vähendamine teatav arv korda toimub jagamisega.

3) 20 rbl. × 23 = 460 rbl. Kui ühe I klassi pileti eest maksti 20 rbl., siis 23 pileti eest maksti 23 korda 20 rubla. Korrutame 20 rbl. 23-ga.

4) 9 rbl. × 78 = 702 rbl. Kui üks I klassi pilet maksis 9 rubla, siis 78 piletit maksid 78 korda rohkem; on tarvis 9 rbl. võtta 78 korda ehk 9 rbl. korrutada 78-ga.

5) 460 rbl. + 702 rbl. = 1162 rbl. Kui I klassi piletid maksid 460 rbl., II klassi piletid — 702 rbl., siis saadi I ja II klassi piletite eest kokku niipalju, kuipalju saadakse nende arvude liitmisel. Terviku leidmiseks terviku kahe osa järgi liidame need osad.

6) 1857 rbl. — 1162 rbl. = 695 rbl. Kui kõikide piletite eest saadi esimesel sõidul 1857 rbl., I ja II klassi piletite eest aga 1162 rbl., siis maksid III klassi piletid niipalju, kuipalju saadakse 1857-st rublast lahutades 1162 rbl. Siin leitakse terviku ja ühe osa järgi teine osa, seepärast lahutame.

7) 695 rbl. : 5 rbl. = 139. Kui kõik III klassi piletid esimesel sõidul maksid 695 rbl. ja kui üks pilet maksis 5 rbl., siis oli III klassi pileteid müüdud niimitu, kuimitu korda 5 rbl. sisaldub 695-s rublas. See küsimus lahendatakse jagamisega.

Kirjutame ülesande lahenduse numbrilise valemina:

$$[1857 - (20 \cdot 23 + 9 \cdot 78)] : [(1857 - 1697) : 32] = 139.$$

VII peatükk.

Tehete resultaatide muutumine komponentide muutumisel.

§ 49. Summa muutumine.

1. Kui üht liidetavat suurendada või vähendada mingi arvu võrra, siis summa vastavalt suureneb või väheneb sama arvu võrra.

Et summa sisaldab niipalju ühtesid, kuipalju neid on kõigis liidetavais kokku, siis järgneb siit, et kui mingit liidetavat

suurendada mõne arvu võrra, siis lähevad need ühed ka summasse ja seepärast on uus summa endisest niimitme ühe võrra suurem, kuimitu oli neid lisatud liidetavale.

Ümberpöördult, kui mingit liidetavat vähendada mõne ühe võrra, siis need ühed ei lähe uude summasse. Seepärast on see summa endisest niimitme ühe võrra väiksem, kuimitu neid vähendati liidetavast.

Mistahes arvude a ja b puhul, millede summa võrdub c-ga, on

$$(a \pm d) + b = c \pm d.$$

Tõepoolest:

$(a \pm d) + b = a \pm d + b =$ (assotsiatiivsus)

$= (a + b) \pm d =$ (kommutatiivsus ja assotsiatiivsus)

$= c \pm d$ (sest $a + b = c$).

Näide: $50 + 17 = 67$.

$(50 \pm 10) + 17 = 67 \pm 10$.

Järeldus. **Kui üht liidetavat suurendada mingi arvu võrra ja teist vähendada sama arvu võrra, siis summa ei muutu.**

Näide: $71 + 29 + 35 = 135$.

Suurendades üht liidetavat 20-e võrra, teist aga vähendades 20 võrra, saame:

$(71 + 20) + (29 - 20) + 35 = 91 + 9 + 35 = 135$.

2. Kui antud summa kõiki liidetavaid suurendada või vähendada üks ja sama arv korda, siis summa vastavalt suureneb või väheneb sama arv korda.

Kui $a + b = c$, siis 1) $an + bn = cn$ ja

2) $a : n + b : n = c : n$.

Tõepoolest:

1) $an + bn = (a + b)n =$ (korrutamise distributiivsuse seadus)

$$c \cdot n$$

2) $a : n + b : n = (a + b) : n =$ (sest $a + b = c$)

(jagamise distributiivsuse seadus)

$= c : n$ (sest $a + b = c$).

Näide: $28 + 12 = 40$.

$28 \cdot 2 + 12 \cdot 2 = 40 \cdot 2 = 80$.

$28 : 2 + 12 : 2 = 40 : 2 = 20$.

§ 50. Vahe muutumine.

1. Kui vähendatavat suurendada või vähendada mingi arvu võrra, siis vahe vastavalt suureneb või väheneb sama arvu võrra.

Lahutamise definitsioonist järgneb, et vähendatav on lahutatava ja vahe summa. Nagu nägime (§ 49, 1. juhtum), summa suurenemiseks või vähenemiseks mingi arvu võrra piisab, kui üks liidetavaist vastavalt suureneb või väheneb sama arvu võrra. Kui lahutatav (üks kahest liidetavast) ei muutu, siis vähendatava (summa) suurenemine või vähenemine on võimalik eeldusel, et vastavalt suureneb või väheneb vahe (teine liidetav).

Järelikult ka ümberpöördult: vähendatava suurenemisel või vähenemisel mingi arvu võrra vastavalt vahe suureneb või väheneb sama arvu võrra (eeldusel, et lahutatav ei muutu).

Kui vahe $a - b = c$, siis:

1) $(a + n) - b = c + n$ ja 2) $(a - n) - b = c - n$ (eeldusel, et $a - n > b$).

Tõepoolest:

$(a \pm n) - b = a \pm n - b =$ (assotsiatiivsus)

$= (a - b) \pm n =$ (liitmiste ja lahutamiste rea kommutatiivsus ja assotsiatiivsus)

$= (c \pm n)$

Ülesanne. Tööline säästis iga kuu oma töötasust 200 rubla. Kui suur on igakuine säästsumma, kui töötasu suureneb kuus 150 rubla võrra, kulud aga jäävad endisteks?

Säästsumma — see on töötasu (vähendatav) ja kulude (lahutatav) vahe. Töötasu suurenemisel 150 rubla võrra, suureneb ka sääst 150 rubla võrra, sest kulud jäid endisteks. Järelikult võrdub sääst: $200 + 150 = 350$ (rbl.). Kui töötasu kuus oleks vähenenud 50 rubla võrra, siis oleks ka sääst endiste kulude puhul vähenenud 50 rubla võrra ning võrdunud $200 - 50 = 150$ (rbl.).

2. Kui lahutatavat suurendada või vähendada mingi arvu võrra, siis vahe ümberpöördult väheneb või suureneb sama arvu võrra.

Vähendatav on lahutatava ja vahe summa. Kui summa (vähendatav) ei muutu, aga üks liidetavaist (lahutatav) suureneb või väheneb mingi arvu võrra, siis peab teine liidetav (vahe) ümberpöördult vähenema või suurenema sama arvu võrra.

Mistahes loomulikkude arvude puhul, kui $a - b = c$, siis:

1) $a - (b + n) = c - n$ ja 2) $a - (b - n) = c + n$.

Tõepoolest:

$$a - (b \pm n) = a - b \mp n =$$ (liitmiste ja lahutamise rea assotsiatiivsus)

$$= (a - b) \mp n =$$ (liitmiste ja lahutamise rea definitsioon).

$$= (c \mp n)$$

Ülesanne. Tööline säästis oma töötasust kuus 200 rbl., kuid ühel kuul olid tema kulud sama töötasu puhul 150 rubla võrra suuremad kui tavaliselt. Kui suur oli töölise sääst sel kuul?

Töötasu — vähendatav, kulud — lahutatav, sääst — vahe. Kulude suurenemisel 150 rubla võrra, sääst väheneb ilmselt 150 rubla võrra ja võrdub $200 - 150 = 50$ (rbl.).

Kui järgmisel kuul töölise kulud vähenevad 125 rubla võrra, siis vastavalt sääst suureneb sel kuul sama summa võrra, s. o. 125 rbl. ja võrdub $50 + 125 = 175$ (rbl.).

Näide:

$$300 - 175 = 125.$$

1) $300 - (175 + 50) = 300 - 225 = 75;$

2) $300 - (175 - 50) = 300 - 125 = 175.$

3. Kui vähendatavat ja lahutatavat suurendada või vähendada ühe ja sama arvu võrra, siis vahe ei muutu.

See omadus on kahe eelmise omaduse järeldus.

Kui vähendatavat suurendada või vähendada arvu n võrra, siis vastavalt suureneb või väheneb ka vahe n võrra, aga lahutatava suurendamisel või vähendamisel n võrra, vahe vastavalt väheneb või suureneb sama arvu võrra. Järelikult vahe ei muutu, kui vähendatavat ja lahutatavat suurendada või vähendada ühe ja sama arvu n võrra.

Seega, kui $a - b = c$, siis:

1) $(a + n) - (b + n) = c$ ja

2) $(a - n) - (b - n) = c.$

Näide:

$$50 - 15 = 35.$$

$(50 + 10) - (15 + 10) = 60 - 25 = 35;$

$(50 - 10) - (15 - 10) = 40 - 5 = 35.$

4. Kui vähendatavat ja lahutatavat suurendada või vähendada mingi arv korda, siis vahe vastavalt suureneb või väheneb sama arv korda.

Mistahes loomulikkude arvude a ja b puhul, kui $a - b = c$, siis:

1) $an - bn = cn$ ja

2) $a : n - b : n = c : n,$

kus $a \vdots n$ ja $b \vdots n$.

See omadus on järeldus vahe jagamise ja korrutamise distributiivsuse seadustest.

Tõepoolest oli eespool (§§ 33 ja 43) tõestatud, et:

$an - bn = (a - b)n$ ja $a : n - b : n = (a - b) : n$,

et aga $a - b = c$, siis:

$an - bn = cn$ ja $a : n - b : n = c : n$.

Ülesanne. Oma 700-rublasest kuu töötasust kulutab tööline iga kuu 500 rubla. Kui palju säästab ta 3 kuuga?

Lahendus. $(700 - 500) \cdot 3 = 200 \cdot 3 = 600$ (rbl.). Antud juhul me korrutame ühe kuu säästu 3-ga.

Kuid on ka teine lahendus:

$700 \cdot 3 - 500 \cdot 3 = 2100 - 1500 = 600$ (rbl.).

Sel juhul me lahutame kolme kuu töötasust kolme kuu kulud. Vastus on sama.

Leiame poole kuu säästu.

Ülesande lahendus on järgmine:

$(700 - 500) : 2 = 200 : 2 = 100$ (rbl.) ehk

$700 : 2 - 500 : 2 = 350 - 250 = 100$ (rbl.).

Järeldusi. Vaadeldavaist juhtudest vahe muutumise kohta vähendatava ja lahutatava suurenemisel või vähenemisel mingi arvu võrra, järelduvad alljärgnevad vahega antud arvu liitmise ja vahest antud arvu lahutamise võtted:

a) **Selle asemel, et kahe arvu vahega liita antud arv, võib selle arvu liita vähendatavaga või lahutada see lahutatavast.**

1) $(a - b) + c = (a + c) - b$ ja

2) $(a - b) + c = a - (b - c)$, kus $b > c$.

Näide: $45 - 20 = 25$. Selle asemel, et antud vahega liita 5, võib selle arvu liita vähendatavaga või lahutada see lahutatavast.

Tõepoolest: $(45 + 5) - 20 = 30$ ehk

$45 - (20 - 5) = 30$.

b) **Selle asemel, et kahe arvu vahest lahutada antud arv, võib selle arvu lahutada vähendatavast või liita selle lahutatavaga.**

1) $(a - b) - c = (a - c) - b$,

2) $(a - b) - c = a - (b + c)$; $a - b > c$.

Näide: $45 - 20 = 25$. Selle asemel, et antud vahest lahutada 5, võib lahutada selle arvu vähendatavast või liita selle lahutatavaga.

Tõepoolest: $(45 - 5) - 20 = 20$,

$45 - (20 + 5) = 20$.

§ 51. Korrutise muutumine.

1. Kui üht tegurit suurendada või vähendada mingi arv korda, siis korrutis vastavalt suureneb või väheneb sama arv korda.

Mistahes loomulikkude arvude a, b ja c puhul, kui $abc = P$, siis:

$(an)bc = a(bn)c = ab(cn) = Pn$,

$(a : n)bc = a(b : n)c = ab(c : n) = P : n$.

Korrutamise assotsiatiivsuse ja kommutatiivsuse seaduste alusel saame:

$(an)bc = (abc)n = Pn$;

$a(bn)c = (abc)n = Pn$;

$ab(cn) = (abc)n = Pn$.

Nendest võrdustest järeldub, et ühe teguri korrutamisel n-ga, me saame ühe esialgse korrutise P asemel n niisugust korrutist.

Samuti saame korrutamiste ja jagamiste rea assotsiatiivsuse ja kommutatiivsuse alusel:

$(a : n)bc = (abc) : n = P : n$,

$a(b : n)c = (abc) : n = P : n$,

$ab(c : n) = (abc) : n = P : n$.

Siit järeldub, et ühe teguri jagamisel n-ga, saame iga kord esialgse korrutise P asemel ainult selle korrutise ühe n-diku.

Näide: $40 \cdot 2 \cdot 6 = 480$.

1) $(40 \cdot 4) \cdot 2 \cdot 6 = 40 \cdot (2 \cdot 4) \cdot 6 = 40 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 4) =$
$= 1920$, kuid $1920 = 480 \cdot 4$;

2) $(40 : 2) \cdot 2 \cdot 6 = 40 \cdot (2 : 2) \cdot 6 = 40 \cdot 2 \cdot (6 : 2) = 240$,
kuid $240 = 480 : 2$.

2. Kui korrutise üht tegurit korrutada mingi arvuga, teist aga jagada sama arvuga, siis korrutis ei muutu.

Mistahes loomulikkude arvude a ja b puhul, kui $ab = P$, siis:

$$(an)\,(b : n) = P.$$

Tõepoolest, eelmise omaduse alusel

$$(an)\,b = Pn \text{ ja}$$

$(an)\,(b : n) = (Pn) : n$, kuid $(Pn) : n = P$ (järeldus jagamise definitsioonist).

Näide: $25 \cdot 12 = 300$.

$$(25 \cdot 2)\,(12 : 2) = 50 \cdot 6 = 300.$$

Märkus. Sellele omadusele põhjeneb arvuga 5 peastkorrutamise võte, mis seisab selles, et antud arv jagatakse 2-ga ja saadud jagatis korrutatakse 10-ga.

Näiteks: $42 \cdot 5 = (42 : 2) \cdot 10 = 210$.

3. Kui antud korrutise kaks või enam tegurit korrutada või jagada mingite arvudega, siis antud korrutis vastavalt suureneb või väheneb nende arvude korrutise võrra.

Kui korrutis $abc = P$, siis:

1) $(am)\,(bn)c = (abc)\,(mn) = P(mn)$ ja
2) $(a : m)\,(b : n)c = P : (mn)$.

Korrutamise ja korrutamiste ning jagamiste rea assotsiatiivsuse ja kommutatiivsuse põhjal saame:

1) $(am)\,(bn)c = (abc)\,(mn) = P(mn)$ ja
2) $(a : m)\,(b : n)c = abc : m : n =$
$= (abc) : (m \cdot n) = P : (mn)$.

Näide: $20 \cdot 4 = 80$.

1) $(20 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 2) = 60 \cdot 8 = 480$, kuid $480 = 80 \cdot (3 \cdot 2)$;

2) $(20 : 5) \cdot (4 : 2) = 4 \cdot 2 = 8$, kuid $8 = 80 : (5 \cdot 2)$.

§ 52. Jagatise muutumine.

1. Kui jagatavat suurendada või vähendada mingi arv korda, siis ka jagatis vastavalt suureneb või väheneb sama arv korda.

On teada, et jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega. Kuid korrutis suureneb või väheneb ainult siis teatav arv korda, kui üks teguritest suureneb või väheneb sama arv korda. Seepärast, kui jagaja (üks kahest tegurist) ei muutu, siis võib jagatav suureneda või väheneda teatav arv korda ainult jagatise (teine kahest tegurist) suurenemisel või vähenemisel sama arv korda.

Siit järeldub, et jagatava suurenemine või vähenemine teatav arv korda põhjustab vastavalt jagatise suurenemise või vähendamise sama arv korda, juhul, kui jagaja ei muutu.

Kui $a : b = q$, siis

1) $(an) : b = qn$ ja 2) $(a : n) : b = q : n$, kus $a : n$.

Tõepoolest, et $a : b = q$, siis $a = bq$. Korrutades arvu a ja korrutist bq ühe ja sama arvuga n, saame korrutamise monotoonsuse seaduse järgi: $an = (bq) \cdot n$, ja korrutamise assotsiatiivsuse seaduse alusel: $an = bqn$.

Jagamise definitsiooni alusel saame: $(an) : b = qn$.

Analoogiliselt võib näidata, et $(a : n) : b = q : n$.

Näide: $96 : 8 = 12$.

1) $(96 \cdot 2) : 8 = 192 : 8 = 24$ — jagatis suurenes 2 korda;

2) $(96 : 3) : 8 = 32 : 8 = 4$ — jagatis vähenes 3 korda.

2. Kui jagajat suurendada või vähendada mingi arv korda, siis jagatis väheneb või suureneb sama arv korda.

Tõepoolest, kui jagatav, s. t. jagaja ja jagatise korrutis ei muutu, jagaja (üks tegureist) aga suureneb või väheneb mingi arv korda, siis jagatis (teine tegur), vastupidi, väheneb või suureneb sama arv korda.

Kui $a : b = q$, siis $a : (bn) = q : n$ ja $a : (b : n) = qn$.

Korrutamiste ja jagamiste rea assotsiatiivsuse omaduse alusel saame: $a : (bn) = a : b : n = (a : b) : n$.

Siit: $a : (bn) = q : n$, sest $a : b = q$.

Võrduse $a : (b : n) = qn$ kehtivust võib põhjendada samadel alustel.

Näide: $96 : 8 = 12$.

1) $96 : (8 \cdot 4) = 96 : 32 = 3$ — jagatis väheneb 4 korda;
2) $96 : (8 : 4) = 96 : 2 = 48$ — jagatis suureneb 4 korda.

3. Kui jagatavat ja jagajat suurendada või vähendada üks ja sama arv korda, siis jagatis ei muutu ja jääk, kui see olemas, suureneb või väheneb vastavalt sama arv korda.

a) Jäägita jagamine.

Jäägita jagamise eelmine omadus on kahe eespool vaadeldud jagatise omaduse järeldus.

Suurendades või vähendades jagatavat n korda, suureneb või väheneb jagatis samuti n korda. Kuid jagaja suurenemisel või vähenemisel n korda, jagatis muutub vastupidiselt samuti n korda. Järelikult jagamise definitsiooni järelduse (§ 40) alusel, jagatavat ja jagajat suurendades või vähendades n korda, jagatis ei muutu.

Niisiis, kui $a : b = q$, siis

1) $(an) : (bn) = q$ ja 2) $(a : n) : (b : n) = q$.

Näide: $96 : 8 = 12$.

1) $(96 \cdot 3) : (8 \cdot 3) = 288 : 24 = 12$;
2) $(96 : 2) : (8 : 2) = 48 : 4 = 12$.

b) Jäägiga jagamine.

Jäägiga jagamisel **jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutise ning jäägi summaga (§ 38).**

Seepärast, kui $a : b = q$ (jääk r), siis $a = bq + r$.

Vastavalt korrutamise monotoonsuse seadusele peavad arvu a ja temaga võrdse summa $bq + r$ korrutamisel ühe ja sama arvuga n tekkima võrdsed korrutised:

$$an = (bq + r) \cdot n.$$

Korrutamise assotsiatiivsuse, kommutatiivsuse ja distributiivsuse seaduste alusel saame:

$$a \cdot n = (bq + r) \cdot n = (b \cdot q) \cdot n + r \cdot n = (b \cdot n) \cdot q + rn.$$

Võrdusest $an = (bn) \cdot q + rn$ järgneb:

$$(an) : (bn) = q \text{ (jääk } rn).$$

Analoogiliste arutluste abil võib veenduda selles, et

$$(a : n) : (b : n) = q \text{ (jääk } r : n).$$

Näide: $48 : 9 = 5$ (jääk 3).

1) $(48 \cdot 2) : (9 \cdot 2) = 96 : 18 = 5$ (jääk 6);

2) $(48 : 3) : (9 : 3) = 16 : 3 = 5$ (jääk 1).

Märkus. Vaadeldud omadust kasutatakse nulliga lõppevate arvude jagamisel: kui arvutuse lihtsustamiseks kustutatakse jagatavas ja jagajas üks ja sama arv nullisid, siis tuleb jäägile juurde kirjutada samapalju nullisid: Näiteks $45øø : 13øø = 3$ (jääk 600).

VIII peatükk.

Nimega arvud.

§ 53. Suuruse mõiste.

Suuruse mõistet, nagu hulgagi (kogumiku) mõistet loeme algmõisteks, mida defineerida ei saa, mistõttu piirdume ainult selle mõiste selgitamisega näidete abil.

Matemaatikas vaadeldakse kaht liiki suurusi: diskreetseid (katkevaid) ja pidevaid (katkematuid).

Diskreetsete suuruste näideteks võivad olla hulgad (kogumikud), nagu: kari, mets, klass (õpilased), loomulikkude arvude rida jne.

Seevastu on pikkus (laius, paksus, kõrgus, nagu vahel nimetatakse pikkust), pindala, ruumala, kaal, aeg, hind, nurk, temperatuur, soojusmahtuvus, kontsentratsioon (lahustes), erikaal, töö, energia, kiirus, võimsus, voolu tugevus, pinge jne. pidevad suurused.

Edaspidi mõistame sõna suuruse all alati pidevat suurust, kusjuures lühiduse mõttes jätame ära sõna „pidev".

§ 54. Suuruste mõõtmine.

Juba inimkultuuri algastmel põhjustasid niisugused praktilised vajadused nagu tarvidus mõõta mitmesuguseid kaugusi, maatükkide pindalasid, määrata külviks vajalik seemnete hulk, sõidu kestvus liiklemisel ühest kohast teise jne. mitmesuguste kogumikkude (diskreetsete suuruste) esemete loendamise kõrval lihtsaimate mõõtmismeetodite tekkimist pidevate suuruste mõõtmiseks. Mõõta mingit suurust tähendab võrrelda selle suuruse väärtust tema teise väärtusega, mis on valitud mõõduühikuks.

Meile tuntud suurust, mida kasutatakse teiste samaliiki suuruste mõõtmiseks, nimetatakse mõõduühikuks ehk sedaliiki suuruste mõõduks.

Oletame, et tahame mõõta koolipingi pikkust. Võtame joonlaua, mille pikkusest meil on selge kujutlus ja hakkame seda paigutama koolipingi pikkusele. Kui joonlaud mahtus sinna täpselt 6 korda, siis on koolipingi pikkus 6 korda suurem võetud joonlaua pikkusest ehk koolipingi pikkus võrdub kuue säärase joonlaua pikkusega. Kui mõõduühikuks

valida kaks korda lühem joonlaud, siis saab niisugust joonlauda paigutada koolipingi pikkusele 12 korda ja järelikult võrdub koolipingi pikkus 12 joonlaua pikkusega.

Nii on ühe ja sama suuruse mõõtmise tulemus sõltuv mõõduühikuks valitud suurusest.

Mõõduühikuid võib valida missuguseid tahes. Ainult me peame selgelt kujutlema valitud mõõduühiku suurust, muidu ei saa me ka selget kujutlust mõõdetavast suurusest.

Vabalt valitud mõõduühikutega mõõtmisel tekkivate arusaamatuste vältimiseks praktilises elus on määratud kindlad püsivad mõõduühikud (mõõdud). Mõõduühikud määrab kindlaks kas riigivalitsus (kaalu-, pikkus-, ruumala- jt. ühikud) või teadlased (soojus-, töö-, elektri- jt. ühikud) või muutuvad mõnikord neiks traditsiooniliselt.

Seejuures on igal suurusel oma erilised mõõduühikud. Näiteks mõõdetakse pikkust kilomeetrites, meetrites. Raskust mõõdetakse tonnides, kilogrammides jne.

Tavaliselt määratakse iga suuruse jaoks kindlaks mitu mõõduühikut: ühed suuremad, teised väiksemad.

Et saada selgemat kujutlust mõõdetavast suurusest, valitakse harilikult suurema suuruse mõõtmiseks ka suurem mõõduühik ja väiksema suuruse mõõtmiseks võetakse väiksem mõõduühik.

Nii on linnadevahelist kaugust otstarbekam mõõta kilomeetrites, toa pikkust — meetriga ja vihiku pikkust — sentimeetriga.

Mõõtmise tulemusena saadakse arv, mis näitab, mitu korda mõõduühik sisaldub antud pikkuses. Seda arvu nimetatakse suuruse numbriliseks väärtuseks.

Suuruse numbriline väärtus sõltub mõõduühiku valikust ja muutub selle muutudes.

Mõõtmine on keerukam protsess kui loendamine; loendamine moodustab ainult ühe osa mõõtmise protsessist. Iga

suurusliigi jaoks on vastavad mõõtmismeetodid, kusjuures kõikidele meetoditele on ühine 1) protsess, mille eesmärgiks on jaotada mõõdetavat pidevat suurust üksikuteks osadeks ja 2) nende osade loendamine.

Ruumilistel suurustel (sirglõigud, nurgad jne.) seisab esimene protsess ühe suuruse asetamises teisele; teiste suuruste puhul on tal teine iseloom, mis nõuab sageli eriliste aparaatide kasutamist, näiteks kaalu esemete kaalumiseks, pendlit aja mõõtmiseks jms.

Kui mõõtmisel antud suurust võrreldakse vahetult mõõduühikuga, siis nimetatakse niisugust mõõtmist **otseseks.**

Enamikul juhtudel ei ole mõõtmine teostatav otseselt, eriti füüsikaliste suuruste mõõtmine. Näiteks kolmnurga pindala mõõtmiseks mõõdetakse selle alus ja sellele alusele tõmmatud kõrgus, mille järgi pindala saadakse arvutuse teel, korrutades kahte saadud arvu ja võttes siis pool korrutisest. Nii ei mõõdeta antud juhul pindala pindalaühikuga, vaid mõõdetakse kaht sirglõiku — kolmnurga alust ja kõrgust pikkusühikutega, mille järgi kolmnurga pindala leitakse arvutamisel kindla valemi järgi, mis seob pindala vahetult mõõdetud suurustega. Niisugust mõõtmist nimetatakse **kaudseks.**

Kaudsete mõõtmiste ala on laialdasem ja mitmekesisem kui otsestel mõõtmistel. Nii on sageli isegi pikkust võimalik mõõta ainult kaudselt, näiteks planeetidevahelist kaugust või maakera kahe ligipääsmatu punkti vahelist kaugust jne. Füüsikalised suurused on rõhuvas enamuses mõõdetavad ainult kaudselt. Nii mõõdetakse suurte kiiruste puhul aega kaudselt, näiteks fotoplaadil asetseva kahe jälje vahemaa mõõtmise abil jms.

Aritmeetika ülesannete hulka ei kuulu valemite tuletamine, millede järgi kaudselt mõõdetakse (arvutatakse) suurused. Need on selle teaduse aineks, kuhu kuulub mõõdetav suurus (geomeetria, füüsika, mehaanika, tehnilised teadused jt.).

Aritmeetikas õpitakse otseselt tundma vastavate aparaatidega mõõdetavaid nn. **põhisuurusi**: pikkust, pindala, ruumala, massi (kaalu), aega, koguhinda. Seejuures õpitakse tundma mõõtmisvõtteid, teisendusi ja tehteid mõõtmise tulemusena saadud arvudega. Mis puutub teistesse suurustesse, eriti füüsikalistesse, siis aritmeetikas vaadeldakse ülesannete lahendamise protsessis ainult nende numbriliste väärtuste teisendusi ja tehteid nendega.

§ 55. Suuruste omadusi.

Suhteliselt samalaadsete suuruste kohta saab püstitada võrdsuse, võrratuse, summa ja vahe definitsioonid.

Kui kaks samalaadset suurust on mõõdetud ühe ja sama mõõduühikuga, siis:

1) väljenduvad võrdsete suuruste numbrilised väärtused võrdsete arvudega;

2) suurema suuruse numbriline väärtus väljendub suurema arvuga;

3) väiksema suuruse numbriline väärtus väljendub väiksema arvuga;

4) antud suuruste summa numbriline väärtus võrdub liidetavate numbriliste väärtuste summaga;

5) kahe antud suuruse vahe numbriline väärtus võrdub nende numbriliste väärtuste vahega.

Nende definitsioonide abil võib igat suurust mõõta ja väljendada arvudega. Sel juhul muutuvad igasugused suurustevahelised seosed nende numbriliste väärtuste vahelisteks seosteks, kusjuures suurused satuvad aritmeetika valdkonda, mis, nagu teada, õpib tundma arvude omadusi ja nendega teostatavaid tehteid.

Suuruse numbrilise väärtuse osatähtsus on teaduses küllaltki suur. Suuruste, kui niisugustega saame teostada ainult

kaht tehet: liitmist ja lahutamist. Mingeid teisi tehteid suurustega otseselt teostada ei saa. Näiteks ei saa omavahel korrutada kaht lõiku või raskust, samuti ei saa lõiku astendada jms.

Kuid suuruste numbriliste väärtuste kui arvudega võib teostada mitmesuguseid tehteid. Ainult seetõttu on võimalik väljendada matemaatilistes valemites neid mitmekesiseid seoseid, mis võivad esineda suuruste vahel ja mida väljendada meil sellisel kujul poleks võimalik, kui me poleks siduunud iga suurusega ühtainust arvu, tema numbrilist väärtust. Näiteks saab teoreemi kolmnurga teravnurga vastaskülje ruudu kohta väljendada võrduse kujul:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ba_b,$$

kus tähed a, b, c ja a_b ei väljenda mitte suurusi endid (lõike) ega ka mitte kolmnurga külgi ja projektsiooni, vaid nende numbrilisi väärtusi, mis saadud nende mõõtmise tulemusena ühe ja sama mõõduühikuga.

Nii võimaldab suuruse numbrilise väärtuse mõiste asendada valemis suurused nende numbriliste väärtustega.

Teadagi kehtivad võrduste, võrratuste, summa ja vahe definitsioonid ainult samaliiki suuruste kohta, kuna eri liigi suuruste võrdlemine on üldse võimatu, näiteks ei saa võrrelda pikkust ja kaalu või ruumala ja aega jms.

Edaspidi vaatleme ainult samaliiki suuruste omadusi, kuigi sõna „samaliiki" jäetakse lühiduse otstarbel tekstist ära.

Selleks, et üks või teine suurus muutuks aritmeetika uurimisobjektiks, on tarvis, et kahest samaliiki suurusest a ja b esimene kas võrduks teisega ($a = b$) või oleks sellest suurem ($a > b$) või väiksem ($a < b$), kusjuures üks omadus kõrvaldab teiste esinemisvõimaluse (võrdluse disjunktiivsus).

§ 56. Mõõdud.

Samaliiki suuruste mõõtmiseks kasutatavaid mõõtusid nimetatakse samaliigilisteks. Nii on gramm ja kilogramm samaliigilised mõõdud, sest neid kasutatakse raskuse mõõtmiseks.

Eespool (§ 54) mainiti, et iga suuruse jaoks on mitu mõõduühikut (mõõtu): ühed suuremad, teised väiksemad.

Üks mõõt on põhi- või peamõõt, teised — tuletatud. Iga tuletatud mõõt korrutatuna või jagatuna mingi arvuga, võrdub põhimõõduga. Siit järgneb, et põhimõõdust suuremad mõõdud on selle kordsed, põhimõõdust väiksemad aga moodustavad selle osa. Näiteks pikkuse põhimõõduks on meeter. Kilomeeter ja detsimeeter on tuletatud mõõdud, millest esimene on saadud põhimõõdu korrutamisel tuhandega, teine aga selle jagamisel kümnega.

Samaliiki mõõdud võivad kuuluda kõrgemasse või madalamasse järku: nii kuulub meeter detsimeetri ja sentimeetri suhtes kõrgemasse järku, kilomeetri suhtes aga madalamasse.

Arvu, mis näitab, mitu korda väiksem mõõt sisaldub temale otseselt järgnevas suuremas mõõdus, nimetatakse nende mõõtude ühikute suhteks. Näiteks on meetersüsteemis kõikide pikkusmõõtude ühikute suhe arv 10.

§ 57. Meetermõõdustik.

Ajaloolisi märkmeid.

Kultuuri algastmeil võttis inimene mõõduühikuid teda ümbritsevast loodusest, näiteks olid pikkusühikuteks harilikult inimese keha osad: küünarnukk, täiskasvanud inimese jalalaba pikkus (jalg), sõrme lüli pikkus (toll), miil (tuhat sammu — *mille passuum*) jms.

Nende loomulikkude mõõtude sobimatus on ilmne: küünarnukk, jalg, sõrmed, samm võivad olla inimestel eri pikkusega. Nii kõikus küünarnuki pikkus mitmekesistel rahvastel 40 cm-st 55 cm-ni.

Niisuguses olukorras ei saadud kindlustada mõõtmiste rahuldavat täpsust.

Kõige levinumaks mõõduks oli nael. Kuid naelad ei erinenud faktiliselt mitte ainult suuruselt, vaid omasid ka täiendavaid nimetusi. Nii tunti Venemaal revolutsioonieelsel ajajärgul järgmisi naelu: riiklik kaubanduslik — 409 g, tallinna — 427 g, riia — 418 g, kuramaa — 416 g, poola — 405 g ja grodno — 367 g. Naelad jaotati mitmel viisil väiksemateks raskusmõõtudeks. Näiteks jagunes vene riiklik kaubanduslik nael 32 loodiks, lood sisaldas 3 solotnikku, solotnik — 96 dooli. 40 naela moodustas ühe puuda.

Sama mitmekesised olid ka teised mõõdud, eriti maapindala mõõtmiseks. Näiteks tunti Venemaal kroonu, majanduslikke, bahčevaja jt. dessatiine (tiine).

Mõõtude mitmekesisus tekitas mõõtmistel suurt segadust, tekkisid alatised arusaamatused, vead ja pettused, mis takistasid kaubavahetust. Iga suurusliigi põhiühikud valiti juhuslikult, samaliiki suuremate ja väiksemate mõõduühikute suhe oli väga mitmekesine, mis raskendas äärmiselt ühelt mõõdult teisele üleminekut ja tegi arvutused keerukaiks. Lõpuks raskendasid ka riikides tarvituselolevad erisugused mõõdud äärmiselt rahvusvahelist kaubanduslikku arveldust.

Praegusajal seisab inimkond akuutse probleemi ees, luua kogu maailmale ühtne mõõdusüsteem. Seda probleemi on oluliselt juba lahendatud. Niisuguseks ülemaailmseks mõõdusüsteemiks saab kahtlemata oma lihtsuse ja korrapärasuse tõttu meetersüsteem.

Meetermõõdustik võeti tarvitusele Prantsusmaal Suure Prantsuse revolutsiooni ajajärgul.

See mõõdustik moodustab seepärast süsteemi, et selles on eri liiki suuruste põhiühikud omavahel seotud ja nende alajaotused on seoses kümnendsüsteemiga.

Uue mõõdusüsteemi loomisel olid kaastöölisteks tolle aja kuulsamad teadusmehed: Berthollet, Borda, Lagrange, Laplace, D'Alembert, Mechen, Prony jt.

Seadusega 7. aprillist 1795 võeti üks kümnemiljondik maakera veerandmeridiaani kaare pikkusest uue pikkuse põhiühikuks, nimega meeter. Plaatina ja iriidiumi sulamist valmistati vastav meetri algkuju (etalon) ja anti hoiule Rahvuslikku arhiivi.

Pindala mõõtmise põhiühikuks võeti ruutmeeter, s. o. ruudu pindala, mille iga külg oli 1 m.

Põllupinna mõõtmiseks võeti põhiühikuks aar, s. o. 10 m pikkuse küljega ruudu pindala.

Ruumala mõõtmise põhiühikuks võeti steer, s. o. kuup, mille serv on 1 m (sõna steer on tuletatud kreekakeelsest sõnast stereon — ruumala).

Anumate ruumala (õõnesmõõdud) mõõtmise põhiühikuks võeti liiter. Liitri ruumala võrdub ligikaudu kuubi ruumalaga, mille külg on 0,1 m (kuni 0,000001 täpsusega).

Raskuse mõõtmise põhiühikuks võeti gramm — 0,01-m-se servaga kuupi täitva puhta destilleeritud vee kaal 4° Celsiuse juures õhuta ruumis.

Põhiühikust suuremate mõõduühikute nimetamiseks liideti tavaliselt põhiühiku nimetusele vastav vanakreekakeelne lisand ja põhiühikust väiksemate ühikute nimetamiseks tarvitati vastavat ladinakeelset lisandit.

Prantsusmaal asendati vanad mõõdud meetermõõdustikuga faktiliselt 1840. aastal.

NSV Liidus kehtestati meetersüsteem Rahvakomissaride Nõukogu dekreediga 14. septembrist 1918.

Pikkusmõõdud.

Põhiühik — meeter (m).

Tuletatud ühikud.

Nimetus	Lühend	Suurus meetrites	Nimetus	Lühend	Suurus meetrites
Megameeter	—	1 000 000	Detsimeeter	dm	0,1
Müriameeter	Mm	10 000	Sentimeeter	cm	0,01
Kilomeeter	km	1 000	Millimeeter	mm	0,001
Hektomeeter	hm	100	Mikron	μ	0,000001
Dekameeter	Dm	10	Millimikron	mμ	0,000000001

Märkus. Mikroni ja millimikroni tarvitatakse ainult mikroskoobilistel uurimustel. Mikroni tähistatakse kreekakeelse tähega mü (μ), millimikroni ($\frac{1}{1000}$ mikroni) märkimiseks asetatakse tähe μ ette täht m.

Pinnamõõdud.

Pindalasid mõõdetakse ruutmõõtudega, s. o. ruutudega, mille külg võrdub mingi pikkuse ühikuga.

Põhiühik — ruutmeeter (m^2).

Tuletatud ühikud.

Nimetus	Lühend	Suurus ruut-meetrites	Nimetus	Lühend	Suurus ruut-meetrites
Ruutkilomeeter	km^2	1 000 000	Ruutdetsimeeter	dm^2	0,01
Ruuthektomeeter (hektaar)	ha	10 000	Ruutsentimeeter	cm^2	0,0001
Ruutdekameeter (aar)	a	100	Ruutmillimeeter	mm^2	0,000001

Aari (a) ja hektaari (ha) kasutatakse põllumajanduses põllu pindala mõõtmisel.

Kõrgema järgu ja madalama järgu ruutmõõtude suhe võrdub alati vastavate pikkusmõõtude suhte ruuduga. Näiteks võrdub ruutkilomeetri ja ruutdekameetri (aari) suhe arvuga $100^2 = 10\,000$, sest kilomeetri ja dekameetri suhe on 100.

Ruutmõõtude ühiku suhe võrdub 100-ga ehk 10^2-ga. Et leida ruutdetsimeetri ja ruutsentimeetri suhet, selleks jaotame ruutdetsimeetri 10-ks võrdseks ribaks, mille pikkus 1 dm ja laius 1 cm. Iga riba jaotame 10-ks ruuduks, mille külg 1 cm.

Ühes ribas on 10 cm^2.

Nii jaotub ruutdetsimeeter 10-ks võrdseks ribaks, iga riba aga 10-ks ruutsentimeetriks.

Tähendab ruutdetsimeeter on:

$$10\ cm^2 \cdot 10 = 100\ cm^2.$$

Järelikult võrdub ruutdetsimeetri ja ruutsentimeetri pindalade suhe arvuga 100 ehk $10 \cdot 10 = 10^2$, s. o. vastavate pikkusühikute suhte **arvu ruuduga.**

Selleks, et leida kahe ruutühiku suhet, tuleb võtta vastavate pikkusühikute suhe ruutu.

Pindalade suurused leitakse kaudsel mõõtmisel.

Pinnamõõdu algkujusid pole olemas; pindalade numbriline väärtus saadakse mõõdetud pikkuste arvutamisega geomeetria reeglite ja valemite alusel.

Märkus. Näitliku kujutluse ruutsentimeetrilisest pindalast annab õpilasvihiku 4-st ruudukesest koosnev ruut, sest tavaliselt võrdub ruudulistes vihikutes ruudukeste külg 5 mm-ga.

Ruumalamõõdud.

Igal kehal on kindel ruumala. Ruumalaks nimetatakse ruumi osa, mida täidab antud keha. Ruumalasid mõõdetakse

kuupmeetritega, s. o. kuupidega, millede servade pikkused võrduvad mingi pikkusühikuga.

Põhiühik — kuupmeeter ehk steer (m^3).

Tuletatud ühikud.

Nimetus	Lühend	Suurus kuupmeetrites	Nimetus	Lühend	Suurus kuupmeetrites
Kuupkilomeeter	km^3	1 000 000 000 = $= 10^9$	Kuupdetsimeeter (joon. 4)	dm^3	0, 00
Kuupkilomeetrist suuremaid kuupühikuid et tarvitata	—		Kuupsentimeeter	cm^3	0,000001
			Kuupmillimeeter	nm^3	0,000000001

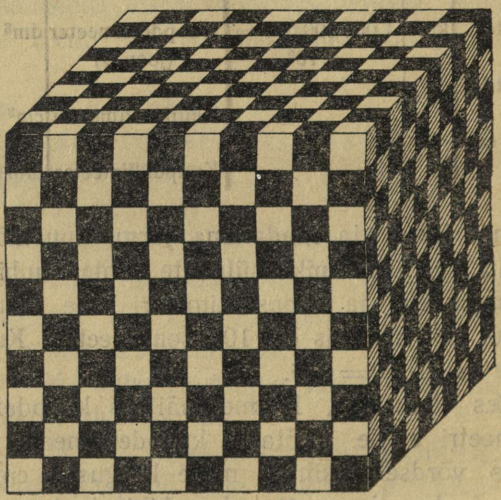
Kõrgema järgu ja madalama järgu kuupmõõtude suhe võrdub alati vastavate pikkusühikute suhte kuubiga. Näiteks võrdub kuupmeetri ja kuupsentimeetri suhe arvuga $100^3 = 1\,000\,000$, sest meetris on 100 sentimeetrit. Kuupmõõtude ühiku suhe on $1000 = 10^3$.

Et selles veenduda, leiame näiteks kuupdetsimeetri ja kuupsentimeetri suhte. Võtame kuupdetsimeetri ja jaotame selle 10-ks võrdseks kihiks, mille kõrgus 1 cm ja pikkus ning laius 1 dm (joon. 4). Iga kihi jaotame omakorda 10-ks osaks — neljakandiliseks pulgaks, mille pikkus 1 dm, laius 1 cm ja kõrgus 1 cm. Lõpuks jaotame need pulgad pikuti 10-ks kuupsentimeetriks. Nii leiame, et igas pulgakeses on 10 kuupsentimeetrit, igas kihis ehk 10 pulgas on aga 10 korda rohkem, s. o. $10 \cdot 10 = 100$ kuupsentimeetrit, kogu kuupdetsimeetris ehk 10 kihis on neid aga 10 korda rohkem kui ühes kihis, s. o. 100 $cm^3 \cdot 10 = 1000$ cm^3. Teisiti väljendades, kuupdetsimeetri ja kuupsentimeetri suhe võrdub arvuga 1000 ehk $10 \cdot 10 \cdot 10$ ehk 10^3, s. o. vastavate pikkus-

ühikute suhet näitava arvu kuubiga, antud juhul detsimeetri ja sentimeetri.

Selleks, et leida kahe kuupühiku suhet, tuleb leida vastavate pikkusühikute suhe ja võtta see kuubis.

Ruumalad, samuti kui pindaladki määratakse kaudsel mõõtmisel. Tõelisi kuupühikuid pole olemas. Ruumala numbriline väärtus leitakse geomeetria valemite ja reeglite järgi arvutamisel.



Joon. 4.

Pikkuste, pindalade ja ruumalade suuruste võrdlemisel peab kindlalt meelespidama järgmist. Kuupmeeter ei sisalda ühtki ruutmeetrit ega pikkuse meetrit, ruutmeetris pole ühtki pikkuse meetrit, sest kuupmeeter, ruutmeeter ja meeter on eriliiki mõõdud.

Sirglõigu pikkust mõõdetakse joonühikutega ja nimetatakse **ühemõõteliseks** suuruseks, sest see määratakse ainult ühe andmega: lõigu pikkusega.

Kujundi, näiteks ristküliku pindala, millel on alati kindel pikkus ja laius, mõõdetakse ruutühikutega ja nimetatakse **kahemõõteliseks** suuru-

seks, sest ristküliku pindala üle võime otsustada ainult kahe andme järgi: pikkuse ja laiuse.

Keha, näiteks risttahuka ruumala, omab alati kindlat pikkust, laiust ja kõrgust, teda mõõdetakse kuupühikutega ja nimetatakse **kolmemõõteliseks** suuruseks, sest risttahuka ruumala üle võime otsustada ainult kolme andme järgi: pikkuse, laiuse ja kõrguse.

Nii **omavad ühemõõtelised suurused ainult pikkust; kahemõõtelised suurused ainult pikkust ja laiust; kolmemõõtelised suurused aga pikkust, laiust ja kõrgust.**

Vedelikumõõdud

(õõnesmõõdud ehk kuiv- ja vedelainete mõõdud).

Põhiühik — liiter (l).

Liiter on ühe kilogrammi puhta destilleeritud vee ruumala 4° Celsiuse ja 760 mm normaalse rõhu juures. Niisuguse definitsiooni puhul on selle ruumala kuupdetsimeetrist 0,000028 kuupdetsimeetri võrra suurem. Praktilistel mõõtmistel 1 liiter $\approx$ 1 dm^3.

Tuletatud ühikud.

Nimetus	Lühend	Suurus liitrites	Nimetus	Lühend	Suurus liitrites
Kiloliiter	kl	1000	Detsiliiter	dl	0,1
Hektoliiter	hl	100	Sentiliiter	cl	0,01
Dekaliiter	Dl	10	Milliliiter	ml	0,001
			Mikroliiter	μl	0,000001

Praktilistel mõõtmistel kasutatakse peale põhiühiku — liitri kõige sagedamini dekaliitrit ja hektoliitrit. Kuna 1 liiter $\approx$ 1 dm^3, siis võime kõiki ülalnimetatud õõnesmõõdu ühikuid asendada vastavate ruumala ühikutega. Nii 1 milliliiter $\approx$ 1 kuupsentimeeter. Järelikult saab liitrite arvu ja

teiste õõnesmõõtude järgi määrata kuupdetsimeetrite ja teiste ruumalaühikute arvu ja ümberpöördult.

Raskusmõõdud.

Põhiühik — gramm (g).

Tuletatud ühikud.

Nimetus	Lühend	Suurus grammides	Nimetus	Lühend	Suurus garmmides
Tonn	t	1000 kg	Detsigramm	dg	0,1
Tsentner (kvintal)	ts	100 kg	Sentigramm	cg	0,01
Kilogramm	kg	1000 g	Milligramm	mg	0,001
Hektogramm	hg	100 g	Mikrogramm	μg	0,000001
Dekagramm	Dg	10 g	Karaat (meetrine)	k	0,2

Raskusühikutest kasutatakse praktilises elus kõige enam tonni, tsentnerit, kilogrammi ja grammi. Grammist väikesemaid raskusühikuid tarvitatakse peamiselt keemilisel analüüsil, füüsikalistel katsetel ja apteekides.

Karaati tarvitatakse vääriskivide kaalu määramisel. Peale meetrise karaadi tarvitatakse inglise karaati, mis ligikaudu võrdub 0,23 g-ga.

§ 58. Mõõdud, mis ei kuulu meetersüsteemi.

Paberimõõdud.

Põhiühik — poogen.

Tuletatud ühikud.

1. 1 raamat sisaldab 50 poognat.
2. 1 riis sisaldab 20 raamatut.

Sageli aga määratakse paberi hulka kaalu järgi (tonnides ja kilogrammides).

Väärtusühikud (raha).

Esemete ja materjalide väärtust väljendatakse harilikult rahaga, metallmüntide ja paberrahaga.

Münt on rahamärk, mis valmistatud kullast, hõbedast, vasest või teistest metallidest.

NSV Liidu mündi põhiühik — kuld tšervonets.

Kuld tšervonets sisaldab 7,74234 g puhast kulda ja võrdub 10 rublaga. Peale tšervonetsi on NSV Liidus maksvusel järgmised hõberahad:

1. Rubla koosneb 9 osast (18 g) puhtast hõbedast ja 1 osast vasest ning võrdub 100 kopikaga.

2. Poltinnik koosneb 9 osast (9 g) puhtast hõbedast ja 1 osast vasest ning võrdub 50 kopikaga.

3. 20-, 15- ja 10-kopikaline hõbedane vahetusraha koosneb 5 osast hõbedast ja 5 osast vasest ning sisaldab puhast hõbedat: 20 kop. — 1,8 g, 15 kop. — 1,35 g, 10 kop. — 0,9 g., 5-, 3-, 2- ja 1-kopikaline vaskraha valmistatakse puhtast vasest. Eesmärgiga kindlustada raha käivet vahetusmüntidega on välja lastud 20-, 15- ja 10-kopikalised nikkelrahad ja 5-, 3-, 2- ja 1-kopikalised pronksrahad.

Peale müntide on NSV Liidus veel käibel:

1. NSV Liidu Riigipanga piletid 10, 5, 3 ja 1 tšervonetsi väärtuses.

2. Riigikassa piletid 5, 3 ja 1 rubla väärtuses.

Kultuuri algastmeil olid väärtusmõõtudeks: loomanahad, kariloomad, kala, teokarbid, kakao-oad, tubak, maisiterad jne. Hiljem muutuvad väärtusmõõtudeks mitmesugused kivist tööriistad, odade ja noolte teravikud jms. Vähehaaval veendusid inimesed, et niisugused väärtusmõõdud on äärmiselt sobimatud ja hakkasid neid asendama mõõtudega, mis tarvitaksid vähe ruumi, oleksid mugavad transportida ega rikneks. Järkjärgult muutusid väärtusmõõtudeks metallid, eriti väärismetallid kangide ja rõngaste kujul.

Kui ese maksis vähem kui oli kangi või rõnga väärtus, siis raiuti need tükkideks. Hiljem valmistati metallitükid plaadi- või ringikujulised ning varustati templiga, mis kindlustas antud tükile määratud raskuse. Nii tekkis esialgne raha.

Vanal Venemaal olid väärtusmõõduks hõbekangid. Kui ese oli odavam kangist, siis raiuti see tükkideks ja raiutud kangitükki — rubla (tuleb venekeelsest sõnast рубить — raiuma) — tarvitati maksuvahendina kauba eest.

Hiljem tuli tarvitusele **„grivna"** (409-grammine hõbetükk). Tatarlaste valitsemisajaga Venemaal on seotud mündid — „denga" ($\frac{1}{20}$ grivnat) ja „altõn" (3 dengat). Ivan IV ajal ilmub kopik (hõberaha, võrdne dengaga).

Peeter I ajal hakati valmistama hõberaha — **grivennik**, mille väärtus oli 10 kopikat.

Ajamõõdud.

Põhiühikud.

a) Päikese ööpäev.

Lühend — *d* (rahvusvaheline), vene — *сут.*

b) Aasta (troopiline) = 365,2422 ööpäeva.

Lühend — *T* (rahvusvaheline), vene — *г.*

Päikese ööpäev võrdub (ligikaudu) ajavahemikuga, mille vältel Maa teeb täispöörde ümber oma telje.

Ööpäevast väiksemad tarvitatavad ajamõõdud:

	Lühend		
	eestikeelne	venekeelne	rahvusvaheline
1 tund $= \frac{1}{24}$ ööpäeva	t.	ч.	h
1 minut $= \frac{1}{60}$ tundi	min.	мин.	min
1 sekund $= \frac{1}{60}$ minutit	sek.	сек.	sec

Ööpäeva alguseks on kesköö. Tunde ööpäeva vältel loetakse 1-st kuni 24-ni või 1-st kuni 12-ni (pärast kesköösd) ja siis uuesti 1-st kuni 12-ni (pärast keskpäeva).

Et vältida sõnade **pärast kesköösd** (hommikul) ja **pärast keskpäeva** (päeval või õhtul) tarvitamist, siis loetakse praegusajal liiklus- ja sideasutistes, telegraafis ning raadio-ringhäälingus tunde 0-st kuni 24-ni. Säärasel korral üteldakse **kell 11 hommikul** asemel lihtsalt **kell 11** ja **kell 11 õhtul** asemel **kell 23**, mis on muidugi lihtsam ja mugavam.

Aasta on (ligikaudu) ajavahemik, mille vältel Maa teeb täistiiru ümber päikese.

Tõeliseks päikese-aastaks ehk troopiliseks aastaks nimetatakse ajavahemikku kevadisest pööripäevast (22. märtsist) kuni järgmise kevadise pööripäevani. Tõeline aasta on 365 ööpäeva 5 tundi 48 min. 46 sek.

Kui võtta täielikud ööpäevad ja lugeda aasta võrdseks 365 päevaga, siis sel juhul jääb kodanlik aasta tõelisest aastast umbes veerand ööpäeva lühemaks. Nelja aastaga tekib peaaegu ööpäevane vahe (44 min. 56 sek. vähem).

Selle vea kõrvaldamiseks arvatakse kolmel üksteisele järgneval kodanlik-aastal 365 päeva ja neile järgneval neljandal aastal 366 päeva. 366-päevast aastat nimetatakse liigaastaks ja 365-päevast — lihtaastaks.

Liigaastaiks loetakse aastaid, millede number jagub jäägita 4-ga.

Kasutatakse veel järgmisi aastast suuremaid ja väiksemaid mõõte: sajand $= 100$ aastat ja kuu $= \frac{1}{12}$ aastat (tõeliselt jagatakse aasta 12-ks mittevõrdseks osaks, nn. kuuks).

Nädal = 7 ööpäeva. Kuude nimetused on järjekorras järgmised: **1) jaanuar (31 päeva), 2) veebruar (28 või 29 päeva), 3) märts (31 päeva), 4) aprill (30 päeva), 5) mai (31 päeva), 6) juuni (30 päeva), 7) juuli (31 päeva), 8) august (31 päeva), 9) september (30 päeva), 10) oktoober (31 päeva), 11) november (30 päeva), 12) detsember (31 päeva).**

Ülalkirjeldatud ajaarvestus, kus 3-mel aastal loetakse 365 päeva ja neljandal — 366, oli kehtima pandud Rooma diktaatori Julius Caesari poolt 46 a. e. m. a., mistõttu seda nimetatakse **juuliuse** ehk **vanaks kalendriks.** See oli tarvitusel enne Suurt Oktoobrirevolutsiooni ka Venemaal. Lenini poolt allakirjutatud RKN dekreediga kehtestati 26. jaanuaril 1918 **rahvusvaheline gregooriuse kalender ehk nn. uus kalender.**

Seda kalendrit nimetati **gregooriuse** kalendriks paavst Gregorius XIII nime järgi, kes selle aastal 1582 tarvitusele võttis.

Juuliuse kalendri järgi on aasta 11 min. 14 sek. pikem troopilisest aastast, mis 400 aasta jooksul moodustab 3 päeva. Paavst Gregorius XIII poolt juuliuse kalendri parandamise momendil, s. o. 1582. a. erines ta tõelisest (päikese) ajaarvamisest 10 ööpäeva, nii loeti näiteks 5. detsember, kuna päikese aja järgi oleks pidanud olema 15. detsember. Paavst Gregorius tegi ettepaneku 5. oktoobri 1852. a. asemel lugeda 15. oktoober.

Selleks, et edaspidi säärane viga ei korduks, lepiti kokku iga 400 aastat kodanlikus ajaarvestuses lühendada 3 päeva võrra. Paavst tegi ettepaneku, et kahe nulliga lõppevatel aastatel, näit. 1600, 1700, 1800, 1900, 2000 jne., lugeda liigaastateks ainult need, mille sadade arv jagub 4-ga. Sel alusel loeti 1600 mõlema ajaarvamise järgi liigaastaks; aastad 1700, 1800, 1900 loeti juuliuse kalendri järgi liigaastateks, gregooriuse järgi aga lihtaastateks.

1582. aastast alates jäi vana kalender uuest kalendrist veel 3 päeva võrra maha (aastad 1700, 1800 ja 1900), ja käesoleval ajal on vahe 13 päeva. Näiteks toimus Suur Sotsialistlik Oktoobrirevolutsioon vana kalendri järgi 25. oktoobril, uue järgi aga 7. novembril.

Ajaarvestuse algust loetakse üksikute rahvaste juures mingist tähtsast ajaloolisest sündmusest, näiteks kristlastel müüdilisest Kristuse sündimisest; muhameedlastel — hedžra ehk Muhameedi põgenemisest Mekkast Mediinasse a. 622; juutidel müüdilisest maailma loomisest a. 5508 e. m. a.

525. a. tehti ettepanek kristliku ajaarvestuse alguse tarvitusele võtuks ja X sajandil võetigi see Lääne-Euroopa kristlikkude rahvaste juures üldiselt kasutusele.

§ 59. Kombineeritud mõõduühikud.

Sageli kasutatakse mõnede suuruste mõõtmiseks tehnikas ja tegelikus elus kombineeritud ühikuid.

Kombineeritud mõõduühikud esinevad sageli mitmesugustel majanduslikkudel arvutustel, eriti töö mõõtmistel, kui vaadeldakse teda tungi ja tee vahelise seosena või võimsuse ja aja vahelise seosena.

Nii mõõdetakse masina poolt tehtud tööd **kilogramm-meetrites,** arvesse võttes tõstetud kg-de arvu ja tõstmise kõrgust.

Kui pump tõstis 4800 kg vett 5 m kõrgusele, siis tehtud töö on $4800 \cdot 5 = 24\,000$ (kilogramm-meetrit).

Hobuveoki või veoauto poolt tehtud töö määramiseks võetakse arvesse veotee pikkus ja koormuse kaal ning tehtud tööd mõõdetakse **kilomeeter-tonnides** (veotee kilomeetrid korrutatud koormuse kilogrammidega). Näiteks, kui veoauto viis 3 t petrooleumi 120 km kaugusele, siis võrdub see töö 360 kilomeeter-tonniga.

Põllumajanduses ja ehitustööl kasutatakse kombineeritud ühikut **normipäev** ehk **tööpäev.**

Kui 8 inimest kaevab kraavi 5 päeva, siis tehtud töö on 40 tööpäeva (inimeste arv korrutatud päevade arvuga).

Kolhoosis toimub töö tasumine normipäevade alusel. Normipäev — töö mõõduühik, võrdub ühe inimese poolt ühes päevas tehtud tööhulgaga.

Kui kolhoosnik on teinud aastas 340 normipäeva, siis on ta teinud töö, mille teeks 340 inimest 1 päevaga või 1 inimene 340 päevaga.

Analüüsime mõningaid ülesandeid.

Ülesanne 1. Üks 7-st inimesest koosnev brigaad töötas 5 päeva. Teine 5-liikmeline brigaad töötas 7 päeva. Kumb brigaad tegi rohkem tööd, kui töö produktiivsus oli mõlemal brigaadil ühesugune?

Väljendame kummagi brigaadi poolt tehtud töö tööpäevades, s. o. korrutame inimeste arvu päevade arvuga. Selgub, et esimene brigaad tegi 35 tööpäeva ($7 \cdot 5 = 35$) ja teine — samuti 35 tööpäeva ($5 \cdot 7 = 35$). Mõlema brigaadi poolt tehtud töö on võrdne.

Ülesanne 2. 160 õmblustöökoja töötajat töötas šeflusalusele lasteaiale 30 minutit. Mitu inimest teeksid selle töö 8 tunniga?

Ülesande lahendamiseks väljendame 160 töötaja poolt tehtud töö töötundides $160 \cdot 30 = 4800$ tööminutit ehk 80 töötundi ($4800 : 60$). Et sama tööd teha 8 tunniga, peab töötama $80 : 8 = 10$ inimest.

Ülesanne 3. Töötades üheaegselt 15. ühe konstruktsiooniga ja 12. teise konstruktsiooniga tööpingil on võimalik tellimust täita 6 päevaga. On teada, et 3 esimese konstruktsiooniga tööpinki annavad sama produktsiooni kui 4 teise konstruktsiooniga tööpinki sama aja jooksul. Mitme päevaga täidetakse tellimus 21 esimese konstruktsiooniga tööpingi ja 20 teise tööpingi üheaegsel töötamisel?

Tingimuste lühike ülestähendus.

I konstr. 15 tp. ja II konstr. 12 tp. teevad töö 6 päevaga.

I konstr. 3 tp. töö = II konstr. 4 tp. töö.

Mitme päevaga täidetakse tellimus 21. I konstruktsiooniga ja 20. II konstruktsiooniga tööpingil?

Arutlus. Asendades II konstruktsiooniga tööpingid I konstruktsiooniga tööpinkidega saame teada, mitu I konstruktsiooniga tööpinki täidaksid tellimuse 6 päevaga.

Leiame, mitu pingipäeva on kulutatud tellimusele.

Siis teame, mitu I konstruktsiooniga tööpinki saab asendada 21 I konstruktsiooniga ja 20 II konstruktsiooniga tööpinki.

Teades tellimuse täitmiseks vajalikku pingipäevade arvu ja töötavate pinkide arvu, võib määrata päevade arvu tellimuse täitmiseks.

Lahenduse plaan.

1. Mitu korda sisaldub II konstruktsiooniga 4 tööpinki sama konstruktsiooniga 12-s pingis?
2. Mitme I konstruktsiooniga tööpingiga saab asendada 12 II konstruktsiooniga tööpinki?
3. Mitu I konstruktsiooniga tööpinki täidaksid tellimuse 6 päevaga?
4. Mitu pingipäeva on vaja tellimuse täitmiseks?

5. Mitu korda sisaldub II konstruktsiooniga 4 tööpinki 20-s tööpingis?

6. Mitme I konstruktsiooniga tööpingiga saab asendada 20 II konstruktsiooniga tööpinki?

7. Mitme I konstruktsiooniga tööpingiga saab asendada 21 I konstruktsiooni ja 20 II konstruktsiooniga tööpinki?

8. Mitme päevaga täidavad tellimuse 21 I konstruktsiooniga ja 20 teise konstruktsiooniga tööpinki?

Lahendus.

1) 12 tp. : 4 tp. = 3 (korda) (jagamine sisalduvuse järgi)
12 tp. on 3 korda rohkem kui 4 tp.
2) 3 tp. × 3 = 9 tp. (I konstr. asendab 12 tp. II konstr.)
3) 15 tp. + 9 tp. = 24 tp. (I konstr. täidavad tellimuse 6 päevaga)
4) 24 · 6 = 144 (pingipäeva on vaja tellimuse täitmiseks)
5) 20 : 4 = 5
6) 3 · 5 = 15 tp. (I konstr. võivad asendada 20 tp. II konstr.)
7) 21 + 15 = 36 tp. (I konstr. peavad täitma tellimuse)
8) 144 : 36 = 4 päeva (töötavad tellimuse täitmisel 21 I konstr. tööpinki ja 20 II konstr. tööpinki).

§ 60. Nimega arvud.

Suuruse numbrilist väärtust koos mõõduühiku nimetusega nimetatakse nimega arvuks. Nii on 3 m ja 6 kg nimega arvud. Nimega arv näitab mõõdusuurust, mida omab erijuhtumil antud liigi suurus, seega peab nimega arvu alati vaatlema teatavat liiki suurusena. Näiteks on 3 meetrit mingi pikkus ja 400 g mingi raskus.

Ses mõttes antakse sõnadele **nimega arv** mõnikord üldisem tähendus. Olgu mingi pikkuse mõõtmisel saadud tulemuseks 2 meetrit ja veel 26 sentimeetrit. Siis nimetatakse seda pikkust 2 m 26 cm samuti nimega arvuks, kuigi siin tegelikult on kaks arvu ja kaks erinevat mõõtu.

Nimega arv annab meile alati kindla ja selge kujutluse ühe või teise suuruse mõõdusuurusest.

Kaks nimega arvu on võrdsed, kui nad väljendavad üht ja sama suuruse väärtust.

Näiteks 3 kg 28 g võrdub 3028 g-ga, sest mõlemad arvud näitavad sama kaalu.

Nimega arvu nimetatakse ühenimeliseks, kui ta koosneb ühenimelistest ühikutest, näiteks 2 m.

Nimega arvu nimetatakse mitmenimeliseks, kui ta koosneb mitmenimelistest ühikutest, näiteks 2 m 26 cm. Mitmenimelised arvud saadakse mõõtmise tulemuseks siis, kui valitud mõõduühik ei mahu täisarv kordi mõõdetavasse suurusesse, mistõttu saadud jääki tuleb mõõta väiksema mõõduga.

§ 61. Nimega arvude teisendamine.

Me nägime (§ 57), et meetersüsteemi mõõduühikutevahelise seose aluseks on sama printsiip, mis kümnendsüsteemi numeratsioonilgi, nimelt sama liigi mõõtude ühikulise suhte jäävus, kusjuures pikkus-, raskus-, ja õõnesmõõtude ühikuline suhe on 10, pinnamõõtudel — 100 ehk 10^2 ja ruumalamõõtudel 1000 ehk 10^3.

See lihtsustab tunduvalt meetermõõdustiku nimega arvude teisendamist.

Praktiliselt teostatakse nimega arvude teisendustena a) peenestamist ja b) ülestamist.

Nimega arvu teisendamist madalama järgu ühikuteks nimetatakse peenestamiseks ja vastupidist teisendamist — ülestamiseks.

a) Nimega arvude peenestamine.

Näide 1. Peenestada 2 km detsimeetriteks.

Et kilomeetri ja detsimeetri suhe on 10 000, siis 2 km = 20 000 dm.

Näide 2. Peenestada 2 km 48 m 8 dm detsimeetriteks.

2 km 48 m 8 dm = 20 000 dm + 480 dm + 8 dm = 20 488 dm.

Näide 3. Peenestada 10 aastat päevadeks.

10 a. = 365 p. × 10 = 3650 p.

Näide 4. Peenestada 23 a. 5 k. 4 p. päevadeks.

Algul leiame, mitu kuud on 23-s aastas. Siis liidame saadud arvule 5 kuud; seejärel leiame kuudes sisalduva päevade arvu.

Tehe toimub praktiliselt järgmiselt:

23 a. 5 k. 4 p.	
× 12	
46	
23	
276	kuud on 23-s aastas,
+ 5	
281	kuud on 23 a. 5 k.,
× 30	
8430	päeva on 23 a. 5 k.,
+ 4	
8434	päeva on 23 a. 5 k. 4 p.

Arutleme nii: ühes aastas on 12 kuud, 23-s aastas on kuid 23 korda rohkem kui ühes. Tähendab kuusid on 12 k. × 23 jne.

Selleks, et peenestada ühenimelist arvu, korrutatakse ta vastava suhtega.

Mitmenimelise arvu peenestamisel tuleb algul peenestada antud arvu kõrgema järgu ühikud madalama järgu ühikuteks, korrutades selleks kõrgema järgu ühikud vastava suhtega; saadud korrutisele liidetakse vastava nimetusega antud mõõduühik. Tulemus muuta samal viisil järgnevateks madalama järgu ühikuteks jne., kuni saame soovitud järgu.

Mitmenimeliste arvude peenestamist võib kergesti teostada peast, kui on antud meetermõõdustiku mõõdud.

Näiteks 3 m^3 8 cm^3 = 3 000 008 cm^3, sest kuupmeetri ja kuupsentimeetri suhe võrdub ühe miljoniga, järelikult tekib seitsmekohaline arv.

b) Nimega arvude ülestamine.

Näide 1. Ülestada 4525 m kilomeetriteks.

Teades, et kilomeetri ja meetri suhe on 1000, jagame 4525 arvuga 1000, milleks viime koma kolme koha võrra vasakule:

4525 m = 4,525 km.

Näide 2. Ülestada 4356 dm^3 kuupmeetriteks.

Kuupmeetri ja kuupdetsimeetri suhe on 1000. Järelikult sisaldab 4356 dm^3 niipalju kuupmeetreid, kuipalju on arvus 4356 tuhandeid.

4356 dm^3 = 4,356 m^3.

Näide 3. Ülestada 3729 mm^2 ruutsentimeetriteks.

Ruutsentimeetri ja ruutmillimeetri suhe on 100. Järelikult moodustab 3729 mm^2 niipalju ruutsentimeetreid, kuipalju arvus 3729 on sadasid.

3729 mm^2 = 37,29 cm^2.

Näide 4. Ülestada 6348 min. kõrgema järgu ühikuteks.

Algul muudame 6348 min. järgmiseks kõrgema järgu ühikuteks — tundideks. Selleks jagame 6348 arvuga 60, sest ühes tunnis on 60 min. Saadud jagatis väljendab tundide arvu ja jääk — minuteid. Kui jagatis tekib suurem kui 24 tundi, siis võib seda ülestada järgmiseks kõrgema järgu ühikuteks — ööpäevadeks. Selleks jagame saadud jagatise 24-ga, sest ööpäevas on 24 tundi. Viimane jagatis koos jääkitega moodustabki otsitava mitmenimelise arvu.

Praktiliselt võib arvutust teostada järgmiselt:

6348	60		
60	105	24	
348	96	4 (ööp)	Järelikult:
300	9	(tundi)	6348 min. = 4 ööpäeva 9 tundi 48 min.
48	(min.)		

Seega tuleb ülestamisel antud ühenimeline arv jagada ühikulise suhtega. Jagatis näitab, kui palju järgmise kõrgema järgu ühikuid saadakse antud nimetusega ühikuis, jääk aga — mitu antud nimetusega ühikut ei moodusta ühtki kõrgemat järku. Saadud jagatisega toimime samuti ja jätkame ülestamist niikaua, kuni jagatis on väiksem arvust, mis näitab nende ühikute arvu järgnevas kõrgema järgu ühikus. Viimane jagatis koos kõikide jääkidega väljendab otsitavat mitmenimelist arvu.

Teisendamiste kontrollimine. Peenestamise kontrollimiseks tuleb saadud ühenimelist arvu ülestada. Peenestamine on tehtud õigesti, kui ülestamise resultaadiks saame antud mitmenimelise arvu. Selleks, et kontrollida ülestamist on tarvis peenestada saadud mitmenimeline arv; kui me seejuures saame antud ühenimelise arvu, siis on ülestamine õige. Nii kontrollitakse peenestamist ülestamisega ja ülestamist peenestamisega.

§ 62. Tehted nimega arvudega.

1. Nimega arvude liitmine.

Olgu tarvis liita järgmised arvud: 5 rbl. 48 kop., 23 rbl. 69 kop. ja 7 rbl. 84 kop. Mitmenimelised arvud kirjutatakse üksteise alla nii, et sama nimega ühikud oleksid ühes veerus.

5 rbl. 48 kop.
+ 23 rbl. 69 kop.
7 rbl. 84 kop.
---
37 rbl. 1 kop.

Liitmist alustame madalama järgu ühikutest, siirdudes kõrgema järgu ühikutele. Seejuures võib saada niipalju madalama järgu mõõduühikuid, et nad moodustavad ühe või

mitu järgmise kõrgema järgu mõõduühikut. Sel korral eraldame saadud arvust (ülestamisega) kõrgema järgu mõõduühikud ja kirjutame järelejäänud madalama järgu ühikud sama nimetusega arvude alla.

Olgu tarvis liita arvud: 3 tundi 48 min. 15 sek. ja 8 tundi 24 min. 50 sek. Seda võime kirjutada kolmel kujul:

1) 3 tundi 48 min. 15 sek.
8 tundi 24 min. 50 sek.

11 tundi 72 min. 65 sek.

12 tundi 13 min. 5 sek.

2) 3 tundi 48 min. 15 sek.
8 tundi 24 min. 50 sek.

1 1
11 tundi 72 min. 65 sek.
— 60 min. 60 sek.

12 tundi 13 min. 5 sek.

3) 3 tundi 48 min. 15 sek.
8 tundi 24 min. 50 sek.

12 tundi 13 min. 5 sek.

Esimest ja teist viisi tarvitatakse enamasti mitmenimeliste arvude liitmisega esialgsel tutvumisel. Viimasel juhul on ühtaegu teostatud liitmine ja resultaadile antud teisendamisega õige kuju. Teisendamisel eraldatud ühikud kirjutatakse ülesse vastavate veergude kohale.

Kui õpilastel on mitmenimeliste arvude liitmine selge, siis ühikuid enam üles ei kirjutata.

Algame liitmist madalaimast järgust, saame 65 sek. Muudame 65 sek. minutiteks: et minutis on 60 sek., siis 65 sek. moodustavad 1 min. ja 5 sek.; 5 sek. kirjutame sekundite alla, 1 min. liidame minutitega; 48 min. + 24 min. + 1 min = = 73 min.; minutid muudame tundideks: et 1 tunnis on 60 min., siis 73 min. moodustavad 1 tunni ja 13 min.; 13 min. kirjutame minutite alla, 1 tunni liidame tundidega: 3 tundi +

+ 8 tundi + 1 tund = 12 tundi. Vastus: 12 tundi 13 min. 5 sek.

Selleks, et liita mitmenimelisi arve, tuleb algul liidetavad kirjutada üksteise alla nii, et sama nimetusega arvud asetseksid samas veerus. Siis liidetakse eraldi sama nimetusega ühikud, alates väiksematest; kui summas saadud ühikute arvu saab muuta suurematèks ühikuteks, siis liidetakse need vastavate ühikutega ja jääk kirjutatakse väiksemate ühikute alla.

Mitmenimeliste arvude liitmist võib asendada ühenimeliste arvude liitmisega, milleks peenestatakse antud liidetavad. Selle mooduse kasutamine on otstarbekohane meetermõõdustiku mõõtude ja väärtusmõõtude liitmisel, sest tehe taandub nimeta arvude liitmisele.

Näide: Liita 5 m^3 869 dm^3 ja 3 m^3 2 dm^3.

$$\begin{array}{r} 5869 \\ +\ 3002 \\ \hline 8871\ (dm^3) \end{array}$$

Liita võib ainult sama nimetusega arve; summas saadakse sama nimetusega arv, mis liidetavadki. Niisiis, 5 m^3 869 dm^3 + + 3 m^3 2 dm^3 = 8 m^3 871 dm^3.

2. Nimega arvude lahutamine.

Olgu 9 ts 35 kg-st tarvis lahutada 2 ts 59 kg.

$$\begin{array}{r} 9\ ts\ 35\ kg \\ -\ 2\ ts\ 59\ kg \\ \hline 6\ ts\ 76\ kg \end{array}$$

Selleks, et teostada nimega arvude lahutamist, tuleb lahutatav kirjutada vähendatava alla nii, et sama nimetusega arvud asuksid ühes veerus. Siis lahutatakse järkjärgult vähendatava ühikutest vastavad lahutatava ühikud, alates

väiksematest ühikutest. Kui vähendatavas osutub mingi ühikute arv väiksemaks vastavast lahutatava ühikute arvust, siis on tarvis võtta vähendatavas üks suurem ühik ja peenestada see väiksemateks ühikuteks ning liita need vähendatava vastavate ühikutega ja alles siis teostada lahutamine.

Mitmenimeliste arvude lahutamist, nagu liitmistki, võib asendada ühenimeliste arvude lahutamisega.

Näide: Arvust 17 cm^2 32 mm^2 lahutada 8 cm^2 59 mm^2.
1732 mm^2 — 859 mm^2 = 873 mm^2 = 8 cm^2 73 mm^2.

3. Ajaarvutamise ülesanded.

Ajaarvutamise ülesannete lahendamisel on tingimata tarvilik eristada mitmenimelise arvuga väljendatud aega kalendrilisest tähtajast (daatumist) ehk kalendrilisest arvust. Kui küsimusele: „Millal anti NSV Liidu RKN määrus Moskva metroo ehitamiseks?" vastatakse: „25. mail 1932. a.", siis antakse selle vastusega kalendriline tähtaeg (daatum) ehk kalendriline arv.

Kui küsimusele: „Kui palju aega (aastaid, kuid ja päevi) on möödunud meie ajaarvamise algusest kuni 25. maini 1932. a.?" vastatakse: „1931 a. 4 kuud 24 päeva", siis on see vastus väljendatud mitmenimelise arvuga. Tuleb tähelepanu juhtida sageli esinevale kalendrilise tähtaja kirjutusviisile: päevad kirjutatakse araabia, kuud aga rooma numbritega. Näiteks: Tškalov sündis 2. II 1904. a.

Ajaarvutamise ülesannete tüüpe. Ajaarvutamise ülesanded jaotatakse kolme rühma. Esimese rühma ülesannetes on tarvis määrata järgneva (lõpp-)sündmuse aeg, kui teada on eelneva (alg-)sündmuse aeg ja sündmustevaheline ajavahemik. Need ülesanded lahendatakse liitmisega. Teise rühma ülesannetes tuleb leida algsündmuse aeg, kui on teada lõppsündmuse aeg ja sündmustevaheline ajavahemik. Kolmanda

rühma ülesannetes on tarvis leida sündmustevahelist ajavahemikku, kui on antud mõlema sündmuse aeg. Teise ja kolmanda rühma ülesanded lahendatakse lahutamisega. Vaatleme nende ülesannete lahendamist.

Sündmuse lõpp-tähtaja määramine.

Ülesanne. Õpilane astus kooli 29. augustil 1925. a. ja lõpetas kooli 9 aasta 9 kuu 15 päeva pärast. Millal lõpetas õpilane kooli?

Antud ülesandes on tarvis määrata sündmuse lõpptähtaeg, algtähtaja ja tähtaegadevahelise ajavahemiku järgi.

Algul leiame, kui palju aega on möödunud meie ajaarvamise algusest õpilase kooli minekuni. Saame aritmeetilise arvu: 1924 a. 7 k. 28 p. Siis leiame, kui palju aega on möödunud meie ajaarvamise algusest õpilase kooli lõpetamiseni.

Liidame:

$$\begin{array}{r} 1924 \text{ a. } 7 \text{ k. } 28 \text{ p.} \\ + \quad 9 \text{ a. } 9 \text{ k. } 15 \text{ p.} \\ \hline 1934 \text{ a. } 4 \text{ k. } 43 \text{ p.} \\ \hline 1934 \text{ a. } 5 \text{ k. } 12 \text{ p.} \end{array}$$

43-st päevast eraldame viienda kuu. See on — mai, järelikult 43-st päevast lahutame 31 päeva. Jääb 12 päeva. Summaks saame aritmeetilise arvu: 1934 a. 5 k. 12 p. Muudame selle arvu kalendriliseks daatumiks ja leiame, millal õpilane lõpetas kooli. Arutleme nii: meie ajaarvamise algusest on möödunud 1934 a. 5 k. 12 p., järelikult algas 1935-s aasta 6-s kuu — juuni, 13-s kuupäev, s. o. õpilane lõpetas kooli 13. juunil 1935. a. Küsimusele „millal?" vastatakse kalendrilise arvuga.

Sündmuse algtähtaja määramine.

Ülesanne. Sergei Kirov suri 1. detsembril 1934. a., ta elas 48 aastat 8 kuud 4 päeva. Millal ta sündis?

Antud ülesandes on tarvis leida lõpptähtaja ja nende vahelise ajavahemiku järgi algtähtaeg. Algul leiame, kui palju aega on möödunud meie ajaarvamise algusest Kirovi surmani, s. o. muudame kalendrilise arvu aritmeetiliseks arvuks. Saame aritmeetilise arvu 1933 a. 11 k. Seejärel leiame, kui palju aega on möödunud meie ajaarvamise algusest Kirovi sündimiseni:

1933 a. 11 k.
— 48 a. 8 k. 4 p.
1885 a. 2 k. 26 p.

(Selleks, et lahutada 4 päeva, laename viimase kuu; 11-nes kuu on november, milles on 30 p.). Saadud aritmeetilise arvu muudame kalendriliseks. Meie ajaarvamise algusest möödus Kirovi sündimiseni 1885 a. 2 k. 26 p., järelikult saabus 1886-nda aasta, 27. märts, s. o. Kirov sündis 27. märtsil 1886. a.

Sündmuse algtähtaja ja lõpptähtaja vahelise ajavahemiku määramine.

Ülesanne. Aleksander Suvorov sündis 13. detsembril 1730. a. ja suri 6. mail 1800. a. Mitu aastat ta elas?

Antud ülesandes tuleb leida algsündmuse ja lõppsündmuse vaheline ajavahemik. Leiame algul, kui palju aega on möödunud meie ajaarvamise algusest Suvorovi surmani. Saame aritmeetilise arvu: 1799 a. 4 k. 5 p. Seejärel leiame, kui palju aega on möödunud meie ajaarvamise algusest Suvorovi sündimiseni. Saame aritmeetilise arvu 1729 a. 11 k. 12 p. Lõpuks leiame, kui palju aega elas Suvorov.

Lahutame:

1799 a. 4 k. 5 p.
— 1729 a. 12 k. 12 p.

Selleks, et saaksime lahutada 12 päeva, laename 4-nda kuu — aprilli, milles on 30 päeva; 30 p. + 5 p. = 35 p.; 35 p. — 12 p. = 23 päeva. 3-st kuust ei saa lahutada 11 kuud, laename ühe aasta ja peenestame selle kuudeks, 12 k. + 3 k. = = 15 k.; 15 k. — 11 k. = 4 k.; 1798 a. — 1729 a. = 69 a. Seega elas A. Suvorov 69 a. 4 k. 23 p.

Ajaarvamise ülesannete lahendamisel peab kuude muutmisel päevadeks või päevade muutmisel kuudeks olema väga tähelepanelik, sest kõigis kuudes pole ühepalju päevi. Kui ülesande lahendamisel ei arvestata kuu ja aasta pikkust täpselt päevades, siis on ülesande lahendus ainult ligikaudne, näiteks:

Ülesanne. Papaaninlased veetsid jääpangal 274 päeva. Mitu kuud ja päeva triivisid papaaninlased jääpangal? Kuna pole antud triivimise alg- ja lõpptähtpäeva, siis loeme kuu võrdseks 30-e päevaga, saame 9 kuud 4 päeva, tegelikult möödus 21. maist 1937. a. (triivimise algus) 19. veebruarini 1938. a. (triivimise lõpp) 8 kuud 29 päeva.

4. Nimega arvude korrutamine.

Olgu tarvis 3 a. 9 k. korrutada 7-ga. Kirjutame selle tehte tulbakujuliselt:

$$\begin{array}{r} 3\text{ a. }9\text{ k.} \\ \times\ 7 \\ \hline 26\text{ a. }3\text{ k.} \end{array}$$

Teisendamine toimub peast. Algul korrutame 9 kuud 7-ga, saame 63 kuud, mis moodustab 5 a. 3 k. Kirjutame 3 kuud korrutisesse korrutatava kuude alla. Korrutame 3 aastat 7-ga, saame 21 a.; liidame 21 aastaga veel 5 aastat, saame 26 a. Järelikult on korrutis 26 a. 3 k.

Mitmenimeliste arvude korrutamisel mitmekohalise arvuga võib kasutada järgmist skeemi:

18 tundi 9 min. 46 sek. × 53 =

54
90
954 (tundi)
+ 8
962 (tundi)
962 : 24 = 40 (p.)
2 (tundi)

40 : 30 = 1 (kuu)
10 (ööp.)

477 (min.)
+ 40
517 (min.)
517 : 60 = 8 (tundi)
37 (min.)

138
+ 230
2438 (sek.)
2438 : 60 = 40 (min.)
38 (sek.)

1 kuu 10 p. 2 tundi 37 min. 38 sek.

Selleks, et korrutada nimega arvu nimeta arvuga, korrutatakse selle arvuga eraldi iga järgu ühikud, alates madalamatest järkudest. Kui korrutises saadakse arv, millest saab eraldada kõrgema järgu ühikuid, siis lisatakse pärast muutmist saadud kõrgema järgu ühikud korrutise vastavatele ühikutele ja korrutisesse kirjutatakse järelejäänud madalama järgu ühikud.

Rublade ja kopikate või meetermõõdustiku mitmenimeliste arvude korrutamisel tuleb korrutatav muuta enne ühenimeliseks arvuks ja korrutada siis nimeta arvude korrutamisreegli alusel.

8 dm² 48 cm² × 15 = 1 m² 27 dm² 20 cm².

848
× 15
4240
+ 848
12720 (cm²)

5. Nimega arvude jagamine.

Nimega arvude jagamisel esineb kaks juhtu: nimega arvu jagamine nimeta arvuga ja nimega arvu jagamine samaliiki nimega arvuga.

Nimega arvu jagamine nimeta arvuga on sama, mis jaotamine osadeks; sel juhul saadakse jagatiseks nimega arv, mis kujutab enesest jagatava mingit osa.

Olgu tarvis 10 a. 8 k. 24 p. jagada 6-ks võrdseks osaks. Mitmenimelise arvu jagamist alustatakse kõrgema järgu ühikutest, siirdudes järkjärgult madalama järgu ühikutele. Arvutus toimub järgnevalt:

10 a.	8 k.	24 p. | 6
4 a.	+ 48 k.	1 a. 9 k. 14 p.
	56 k.	(Peenestame 4 a. kuudeks
	2 k. =	ja lisame 8 k.)
	= 60 p.	(Peenestame 2 k. päeva-
	+ 24 p.	deks ja lisame 24 päeva).
	84 p.	
	0	

Vahepealset peenestamist (aastad kuudeks ning kuud päevadeks) ja kuude ning päevade arvu liitmist teostatakse peast.

Seega toimub mitmenimelise arvu jagamine nimeta arvuga järgmiselt: algul jagame kõrgema järgu ühikud; kui tekib jääk, peenestame selle järgnevaks madalamaks ühikuks ja liidame jagatava vastavate mõõtudega ning saadud arvu jagame jagajaga jne. niikaua, kuni saadakse täielik jagatis.

Jagamist võib teostada ka teisiti ja nimelt: teisendada jagatav ühenimeliseks arvuks peenestades teda madalama järgu ühikuteks ja teostada jagamine siis nimeta arvude

jagamisreegli alusel. Nimetatud võte on eriti sobiv meetermõõdustikus või rublades ja kopikates väljendatud jagatava puhul.

Näiteks: 12 t 4 ts 50 kg : 25 = 4 ts 98 kg.

12450	25
245	498
200	
0	

Nimega arvu jagamisel nimega arvuga saadakse jagatiseks nimeta arv, mis näitab antud samaliiki mõõtude suhet. Järelikult toimub antud juhul jagamine mahutavuse järgi.

Nimega arvu jagamisel nimega arvuga peenestatakse jagatav ja jagaja samaliiki madalama järgu ühikuteks ja saadud arvud jagatakse nimeta arvude jagamisreegli alusel.

Näide: Olgu tarvis leida mitu korda 18 dm^3 800 cm^3 sisaldub 112 dm^3 800 cm^3-s. Peenestame 112 dm^3 800 cm^3 kuupsentimeetriteks: 112 dm^3 800 cm^3 = 112 800 cm^3. Peenestame 18 dm^3 800 cm^3 kuupsentimeetriteks: 18 dm^3 800 cm^3 = = 18 800 cm^3. Leiame mitu korda 18 800 cm^3 sisaldub 112 800 cm^3-s.

$$112\,800 : 18\,800 = 6.$$

Järelikult, 18 dm^3 800 cm^3 sisaldub 112 800 cm^3-s täpselt 6 korda. Jagatiseks saadakse nimeta arv.

Alljärgnevalt esitame näiteid nimega arvude kõikidest tehetest.

Ülesanne 1. Kahes aidas hoitakse 4 t 875 kg puuvilla ühesuguse kaaluga pallides. Esimeses aidas on 58 ts 75 kg puuvilla rohkem kui teises aidas. Mitu palli puuvilla on kummaski aidas, kui esimeses on 47 palli rohkem kui teises?

Tingimuste ülestähendus.

Kahes aidas on 45 t 875 kg.
Ühes „ „ 58 ts 75 kg rohkem.
„ „ „ 47 palli rohkem.
Mitu palli puuvilla on kummaski aidas?

Analüüs: Selleks, et leida kummaski aidas olevat puuvilla pallide arvu, on tarvis teada: 1) mitu palli puuvilla on mõlemas aidas kokku ja 2) mitu palli on esimeses aidas rohkem kui teises.

Viimane on antud ülesandes. Et vastata esimesele küsimusele, on tarvis teada: 3) puuvilla üldkaalu (ülesandes antud) ja 4) ühe palli kaalu. Viimase leiame, teades 5) mitu kg ja 6) mitu palli on esimeses aidas rohkem kui teises (mõlemad on antud).

Lahenduse kava.

1) Ühe puuvilla palli kaal, 2) puuvilla pallide koguarv, 3) puuvilla pallide arv sel juhul, kui esimeses aidas oleks samapalju kui teises, 4) puuvilla pallide arv teises aidas, 5) puuvilla pallide arv esimeses aidas.

Lahendus ja seletus.

1) 58 ts 75 kg : 47 = 125 kg — ühe puuvilla palli kaal.

47 pallis on 58 ts 75 kg puuvilla, ühes on siis 47 korda vähem. Arvu vähendamine teatav arv korda toimub jagamisega.

2) 45 t 875 kg : 125 kg = 367 palli on kahes aidas.

Selleks, et teada saada pallide arvu, leiame, mitu korda 125 kg sisaldub 45 t 875 kg-s.

3) 367 palli — 47 palli = 320 palli. Kui esimeses aidas oleks puuvilla samapalju kui teises, s. o. 47 palli vähem kui tõeliselt, siis oleks ka pallide üldarv 47 võrra väiksem. Vähendades esimest liidetavat 47 võrra, vähendame ka summat 47 võrra. Arvu vähendamine mingi arvu võrra toimub lahutamisega.

4) 320 palli : 2 = 160 palli on teises aidas. Kui kummaski aidas oleks samapalju puuvilla, siis oleks kummaski pool koguhulgast.

5) 160 palli + 47 palli = 207 palli on esimeses aidas. 160 palli arvu suurendamine 47 palli võrra toimub arvude 160 ja 47 liitmisega.

Teine lahenduse variant.

Analüüs. Selleks, et vastata ülesande küsimusele, peab teadma: 1) pallide arvu ühes aidas ja 2) mitu palli on teises aidas rohkem või vähem. Teine arv on ülesandes antud. Et leida pallide arvu esimeses aidas, peab teadma: 3) puuvilla kaalu (kg-des) selles aidas ja 4) ühe palli kaalu. Puuvilla kaalu leidmiseks esimeses aidas, on tarvis teada: 5) puuvilla kaalu kahes aidas kokku (on ülesandes antud) ja 6) kahes aidas oleva puuvilla kaalude vahe (on antud). 7) Teades, et 47 palli kaalub 58 ts 75 kg, saame leida ühe palli kaalu.

Lahendus.

1) 58 ts 75 kg : 47 = 125 kg — ühe puuvilla palli kaal.

2) 45 t 750 kg + 58 ts 75 kg = 51 t 750 kg puuvilla oleks kahes aidas, kui teises oleks samapalju kui esimeses.

3) 51 t 750 kg : 2 = 25 t 875 kg puuvilla on esimeses aidas.

4) 25 t 875 kg : 125 kg = 207 (korda); 207 palli on esimeses aidas.

5) 207 palli — 47 palli = 160 palli on teises aidas.

Ülesanne 2. Kolhoosi karjas on 520 looma, nendest on lehmi 200, ülejäänud aga on lambad ja vasikad. Lehm sööb päevas 10 kg toitu, lammas 4 kg ja vasikas 6 kg. Nelja päevaga sõi kari ära 142 ts 40 kg toitu. Kui palju oli karjas lambaid ja kui palju vasikaid?

Tingimuste üleskirjutus.

520 looma, neist 200 lehma.
Lehm — 10 kg.
Lammas — 4 kg.
Vasikas — 6 kg.
4 päevaga 142 ts 40 kg.
Kui palju oli karjas lambaid? Kui palju vasikaid?

Arutlus. Kerge on määrata karjas olevate lammaste ja vasikate koguarvu ja nende poolt ühes päevas ärasöödavat toidu hulka. Ülesande andmete abil saab määrata aga lammaste ja vasikate arvu eraldi. Kui oletada, et lammas sööb samapalju toitu kui vasikas, siis oleks päevas ärasöödav toidu hulk suurem kui tegelikult, sest vasikas sööb päevas rohkem kui lammas. Selles lisandis sisaldub vasika ja lamba päevaste toiduhulkade vahe niipalju kordi, kuipalju on lambaid. Seejärgi on kerge määrata vasikate arvu, teades lammaste arvu ja vasikate ning lammaste koguarvu.

Lahenduskava.

1) Kui palju oli karjas vasikaid ja lambaid kokku?
2) Kui palju toitu sõid kõik loomad ühes päevas?
3) Kui palju toitu sõid lehmad?
4) Kui palju toitu sõid lambad ja vasikad?
5) Kui palju toitu sööks päevas vasikad ja lambad kokku, kui lammas sööks samapalju kui vasikas?
6) Kui palju toitu kuluks sel juhul päevas rohkem?
7) Mitu kg toitu sööb vasikas päevas rohkem kui lammas?
8) Kui palju oli karjas lambaid?
9) Kui palju oli vasikaid?

Lahendus.

1) 520 looma — 200 looma = 320 looma (vasikaid ja lambaid kokku).

2) 142 ts 40 kg : 4 = 35 ts 60 kg sõid kõik loomad ühes päevas.

3) 10 kg · 200 = 20 ts sõid lehmad ühes päevas.

4) 35 ts 60 kg — 20 ts = 15 ts 60 kg sõid ühes päevas vasikad ja lambad kokku.

5) 6 kg · 320 = 19 ts 20 kg oleks söönud 320 vasikat.

6) 19 ts 20 kg — 15 ts 60 kg = 3 ts 60 kg kuluks ühes päevas toitu rohkem, kui lambad sööks samapalju kui vasikad.

7) 6 kg — 4 kg = 2 kg — sööb vasikas ühes päevas rohkem kui lammas.

8) 3 ts 60 kg : 2 kg = 180 (korda), karjas on 180 lammast.

9) 320 looma — 180 looma = 140 looma; karjas on 140 vasikat.

Vastus: Karjas on 180 lammast ja 140 vasikat.

II jagu.

Arvude jaguvus.

IX peatükk.

Arvude jaguvuse põhiteoreemid.

§ 63. Definitsioon.

§ 39 määrasime kindlaks, et kui suurema loomuliku arvu a jagamisel väiksema loomuliku arvuga b jääk võrdub nulliga, siis arv a jagub arvuga b.

Samuti määrasime kindlaks, et kui loomulik arv a on suurem loomulikust arvust b, siis võib loomulikkude arvude reas neile alati leida kaks vastavat arvu q ja r nii, et kehtib võrdus: $a = bq + r$, kus arv q ja r kujutavad vastavalt jagatist ja jääki, mis tekib suurema arvu (a) jagamisel väiksema arvuga (b). Ilmselt on jagamine jäägita ainult erijuhtum loomulikkude arvude rea arvude üldomadusest, ja nimelt siis, kui arv $r = 0$, s. o. kui kehtib võrdus $a = bq$.

Sel juhul nimetatakse arvu a (jagatav) arvu b kordseks ja arvu b arvu a jagajaks.

Arvu b nimetatakse ka arvu a teguriks.

Väljendused: arv a jagub arvuga b, arv a on arvu b kordne, arv b on arvu a jagaja — on kõik sisult samaväärsed.

Võrdusest $a = bq$ järgneb, et mingi loomuliku arvu (b) kordne (a) võrdub selle arvu (b) ja mingi teise loomuliku arvu (q) korrutisega. Kui $a = bq$, siis $a : q = b$; tähendab

arv a on arvu q kordne. Siit järgneb, et korrutis (a) on iga oma teguri (b ja q) kordne. Kasutades korrutamise assotsiatiivsuse ja kommutatiivsuse seadusi, saab kergesti näidata selle lause kehtivust mistahes tegurite arvu puhul.

Kui $N = abc \ldots f$, siis assotsiatiivsuse põhjal $N = a(bc \ldots f)$ ja jagamise definitsiooni järgi $N : a = bc \ldots f$.

Järelikult N on teguri a kordne. Teisiti, kui $N = abc \ldots f$, siis kommutatiivsuse alusel $N = bac \ldots f$ ja assotsiatiivsuse alusel $N = b(ac \ldots f)$ ning jagamise definitsiooni järgi $N : b = ac \ldots f$.

Järelikult N on teguri b kordne.

Analoogiliselt saab näidata, et N on iga ülejäänud teguri kordne.

Tuletame meelde, et jaguvuse tähistamiseks kasutatakse erimärki — kolm vertikaalselt asetatud punkti.

Siis tuleb kirjutist $a \vdots b$ lugeda: arv a jagub arvuga b ehk arv a on arvu b kordne. Jagumatust tähistame lisandiga „ei".

Nii tuleb kirjutist a ei $\vdots\, b$ lugeda „a ei jagu b-ga".

§ 64. Teoreem summa jaguvusest antud arvuga.

Kui antud summa iga liidetav jagub ühe ja sama arvuga, siis jagub ka kogu summa selle arvuga.

On antud:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S,$$

kusjuures

$$a_1 \vdots b;\ a_2 \vdots b;\ a_3 \vdots b; \ldots a_n \vdots b.$$

Tõestada: $S \vdots b$.

Teoreemi eelduse ja jagamise definitsiooni järgi on:

$$\begin{aligned}
a_1 : b &= q_1, \quad \text{kus} \quad a_1 = bq_1;\\
a_2 : b &= q_2, \quad \text{„} \quad a_2 = bq_2;\\
a_3 : b &= q_3, \quad \text{„} \quad a_3 = bq_3;\\
&\ldots\ldots \quad \text{„} \quad \ldots\ldots\\
&\ldots\ldots \quad \text{„} \quad \ldots\ldots\\
a_n : b &= q_n, \quad \text{„} \quad a_n = bq_n.
\end{aligned}$$

Liites teise tulba võrduste vastavad pooled, saame:

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = bq_1 + bq_2 + bq_3 + \ldots + bq_n$ ehk $S = bq_1 + bq_2 + bq_3 + \ldots + bq_n =$ (teoreemi eelduse järgi) $= b(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n)$ (korrutamise distributiivsus).

Siit: $S : b = q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_n$.

Järelikult: $S \vdots b$.

N ä i d e: Arvud 24, 20 ja 36 jaguvad 4-ga.

Siit: $24 = 4 \cdot 6$; $20 = 4 \cdot 5$; $36 = 4 \cdot 9$.

Liidame arvud: $24 + 20 + 36 = 80$ ehk $4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 9 = 4 \cdot (6 + 5 + 9) = 4 \cdot 20 = 80$, kus $80 : 4 = 20$.

Järelikult, 80 (summa) $\vdots$ 4.

Teoreemi tõestusest nähtub, et summa jagatis võrdub liidetavate jagatiste summaga. Kuid see, antud teoreemile vastupidine väide pole alati õige: kui summa jagub mingi arvuga, siis ei tähenda see sugugi seda, et iga liidetav jagub selle arvuga.

Vaatleme näidet: $47 + 23 + 10 = 80$.

Summa 80 jagub 4-ga. Kui vaadelda liidetavaid, siis ükski neist ei jagu 4-ga. Võib esineda ka niisugune juhtum, kus summa jagub mingi arvuga ja mõned liidetavad samuti jaguvad selle arvuga, aga ülejäänud liidetavad ei jagu selle arvuga.

Järeldus. **Antud arvu kordne on ka selle arvu iga teguri kordne.**

Antud: $N \vdots a$; $a \vdots b$.

Tõestada: $N \vdots b$.

Tingimusest järgneb, et $N : a = q$, kus $N = aq$

ehk korrutamise mõtte põhjal $N = \overbrace{a + a + a + \cdots + a}^{q \text{ liidetavat}}$,

kuna eelduse järgi $a \vdots b$, siis ka summa $N \vdots b$.

Näide: Kui 80 jagub 16-ga ja 16 jagub 4-ga, siis 80 jagub 4-ga. Järelikult, kui esimene arv jagub teisega ja teine jagub kolmandaga, siis jagub ka esimene arv kolmandaga.

§ 65. Teoreem vahe jaguvusest antud arvuga.

Kui vähendatav ja lahutatav jaguvad mingi arvuga, siis jagub ka nende vahe selle arvuga.

Antud: $a - b = c$; $a \vdots d$; $b \vdots d$;

Tõestada: $c \vdots d$.

Teoreemi eeldusest ja jagamise definitsioonist järgneb:

$$a : d = q_1, \text{ kus } a = dq_1;$$
$$b : d = q_2, \text{ kus } b = dq_2.$$

Siis $a - b = dq_1 - dq_2 = d(q_1 - q_2)$.

Eelduse järgi $a - b = c$. Järelikult:

$$c = d(q_1 - q_2).$$

Siit saame jagamise mõtte põhjal: $c : d = q_1 - q_2$.

Järelikult: $c \vdots d$.

Näide: On antud arv 6, millega jaguvad arvud 48 ja 30.

Võime kirjutada: $48 = 6 \cdot 8$ ja $30 = 6 \cdot 5$.

Siit järgneb: $18 = 48 - 30 = 6 \cdot 8 - 6 \cdot 5 = 6 \cdot (8 - 5) = 6 \cdot 3$, s. o. vahe $48 - 30$ tõepoolest jagub 6-ga.

Märkus. Lahutamise definitsioonist on teada, et vähendatav on kahe liidetava — lahutatava ja vahe summa. Järelikult võib vaadeldud teoreemi sõnastada ka teisiti:

kui kahe liidetava summa ja üks liidetavaist jagub mingi arvuga, siis jagub ka teine liidetav selle arvuga.

Toodud sõnastus tuleb omandada, sest sel kujul kasutame seda edaspidi arvude jaguvuse üldkuju tuletamisel. Kergesti võib märgata, et see teoreem on selles sõnastuses vastupidine arvude jaguvuse esimese teoreemiga, erijuhtumil kahe liidetavaga.

Järeldus 1. **Kui kahe arvu vahe ja üks neist arvudest jagub mingi arvuga, siis jagub ka teine arv selle arvuga.**

Antud: $a - b = c$; $c : d$; $a : d$.

Tõestada: $b : d$.

Kuna eelduse järgi $a - b = c$, siis lahutamise mõiste alusel $a = b + c$, kus a on summa, b ja c — liidetavad.

Tingimuse kohaselt jagub summa a ja üks liidetavaist c d-ga. Järelikult eespool tõestatud teoreemi järgi (vt. märkus) ka teine liidetav b jagub d-ga.

Näide. Võtame $100 - 36 = 64$. 100 ja 64 jaguvad 4-ga. Järelikult ka 36 jagub 4-ga jäägita; sest summa (100) ja üks liidetavaist (64) jaguvad 4-ga, seega jagub ka teine liidetav (36) 4-ga.

Järeldus 2. **Kui üks kahest antud arvust jagub mingi arvuga, teine aga ei jagu selle arvuga, siis ei jagu ka nende vahe selle arvuga.**

Antud: $a - b = c$; $a : d$; b ei $: d$.

Tõestada: c ei $: d$.

Oletame, et $c : d$. Siis esimese järelduse alusel ka $b : d$, mis aga on vastukäiv teoreemi eeldusele. Järelikult c ei $: d$.

§ 66. Vajalik ja piisav tingimus kahe liidetava summa jaguvuseks antud arvuga.

Selgitame algul näidetega, milline tingimus on vajalik ja milline piisav.

Vajalik tingimus. Selleks, et arv jaguks 8-ga on tarvis, et ta oleks paarisarv või lõpeks nulliga. Nimetatud tingimus on vajalik, sest paaritu arv ei jagu 8-ga. Kuid see tingimus ei ole piisav selleks, et antud arv tingimata jaguks 8-ga, sest kõik paarisarvud ja nulliga lõppevad arvud ei jagu 8-ga. Näiteks 22 on paarisarv, kuid ei jagu 8-ga, samuti on 30 nulliga lõppev arv, ent ei jagu 8-ga.

Piisav tingimus. Kui arv lõpeb kahe nulliga, siis ta jagub 4-ga.

Kui arv lõpeb kahe nulliga, siis ta koosneb täissadadest. Sada jagub 4-ga. Tähendab, sadadest koosnev arv jagub alati 4-ga. Järelikult tingimus, et kahe nulliga lõppev arv jagub 4-ga, ei ole mitte tingimata vajalik, sest neljaga jaguvad ka need arvud, mis ei koosne täissadadest. 4-ga jaguvad arvud võivad sisaldada peale sajaliste ka kümnelisi ja ühelisi, näiteks 328.

Kõrvuti tingimustega, mis mingi otsuse tegemiseks on ainult vajalikud või ainult piisavad, esinevad ka tingimused, mis on ühtaegu **vajalikud ja piisavad.**

Kui üks kahest liidetavast jagub mingi arvuga, siis selleks, et kogu summa jaguks selle arvuga on vajalik ja piisav, et ka teine liidetav jaguks selle arvuga.

Antud: $a + b = c$; $a : d$.

Tõestada: summa c jagumiseks arvuga d on vajalik ja piisav, et $b : d$.

Selle teoreemi tõestamisel me peame kindlaks tegema, et arvu b jaguvus d-ga on esiteks vajalik ja teiseks piisavaks tingimuseks summa c jagumiseks d-ga.

Vaatleme algul, kas see tingimus on vajalik.

Oletame, et see tingimus ei ole täidetud, s. t. b ei $\vdots$ d.

Sel juhul, tähistades a ja d jagatise q-ga, b ja d jagatise q_1-ga ja jäägi r-ga, saame:

$$a = dq,\ b = dq_1 + r.$$

Liites vastavad võrduste pooled, saame:

$a + b = dq + dq_1 + r$ (monotoonsuse seaduse järgi) ehk $c = d(q + q_1) + r$.

Saadud võrdusest järgneb, et summa c ei jagu d-ga, sest c jagamisel d-ga tekib sama jääk r, mis b jagamisel d-ga. Järelikult, et summa c jaguks d-ga on vajalik, et teine liidetav jaguks d-ga.

Vaatleme nüüd, kas see tingimus on piisav selleks, et summa c jaguks d-ga. Sellele küsimusele võime vastata jaatavalt, sest esimesest summa jaguvuse teoreemist on teada, et kui iga liidetav jagub ühe ja sama arvuga, siis jagub ka summa selle arvuga.

Märkus. § 65 teoreemi järeldusest tuleneb järgmine vajalik ja piisav tigimus kahe arvu vahe jaguvuseks mingi arvuga: **kui vähendatav (või lahutatav) jagub mingi arvuga, on vajalik ja piisav, et ka lahutatav (vähendatav) jaguks selle arvuga.**

§ 67. Korrutise jaguvus antud arvuga.

Eespool määrasime kaks põhiomadust korrutise jaguvuse kohta antud arvuga.

1. Korrutis on iga oma teguri kordne (§ 63).

2. Iga antud arvu kordne on ka iga selle arvu teguri kordne (§ 64).

3. Peale selle tõestati §-s 45, et **selle asemel, et mitme teguri korrutist jagada antud arvuga, võib jagada üht tegurit selle arvuga.**

Nendest kolmest omadusest tuleneb, et mitme teguri korrutise jaguvuseks antud arvuga on piisav, et antud korrutise üks teguritest jaguks selle arvuga.

Peab tähendama, et see mitme teguri korrutise jaguvuse tingimus on piisav, kuid mitte vajalik. Tõepoolest, korrutis $20 \cdot 27$, mis võrdub 540-ga, jagub 15-ga, kuigi 27 ja 20 ei jagu 15-ga.

§ 68. Teoreem jagatava, jagaja ja jäägi jaguvusest antud arvuga.

1. Kui jäägiga jagamisel jagatav ja jagaja jaguvad mingi arvuga, siis jagub ka jääk selle arvuga.

Antud: $a : b = q$ (jääk r), $a \vdots d$, $b \vdots d$.

a jagamisel b-ga saadakse jääk r.

Tõestada: $r \vdots d$.

Eelduse järgi $a : b = q$ (jääk r). Tähendab, a on kahe liidetava bq ja r summa, milledest üks liidetav bq jagub d-ga. Kui aga kahe liidetava summa (a) ja üks liidetavaist bq jaguvad d-ga, siis jagub ka teine liidetav d-ga.

Järelikult, arvu a jagamisel arvuga b tekkinud jääk jagub d-ga.

Näide: 60 jagub 5-ga ja 25 jagub 5-ga. 60-e jagamisel 25-ga saadakse jääk 10; $60 = 25 \cdot 2 + 10$. Jääk 10 jagub 5-ga.

2. Kui jagamisel jääk ja jagaja jaguvad mingi arvuga, siis jagub ka jagatav selle arvuga.

Antud: $a : b = q$ (jääk r), $b \vdots n$, $r \vdots n$.

Tõestada: $a \vdots n$.

Eelduse järgi $a : b = q$ (jääk r), järelikult $a = bq + r$. Et mõlemad liidetavad bq ja r jaguvad n-ga, siis § 64 tõestuse järgi ka summa $a \vdots n$.

X peatükk.

Arvude jaguvuse tunnused.

§ 69. Arvude jaguvuse tunnused 2-ga, 5-ga, 4-ga, 25-ga, 8-ga, 125-ga, 3-ga ja 9-ga.

Arvu a jaguvuse tunnuseks arvu b-ga nimetatakse vajalikku ja piisavat tingimust, mille täitmisel arv a jagub arvuga b.

1. 2-ga ja 5-ga jaguvuse tunnus.

Jagatav $A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10) + a_0$.

Esimene liidetav (koosneb täiskümnetest) jagub 2-ga ja 5-ga, sest ta kujutab enesest summat, mille iga liidetav on 2 ja 5 kordne.

Tähendab selleks, et kogu summa A jaguks 2-ga (või 5-ga) on vajalik ja piisav, et 2-ga (vastavalt 5-ga) jaguks teine liidetav a_0, s. t. jagatava arvu A viimane number.

Järelikult, **2-ga (või 5-ga) jaguvad ainult need arvud, millede üheliste arv jagub 2-ga (või vastavalt 5-ga) või mis lõpevad nulliga.**

Toome numbrilise näite. Antud on arv 7036. Kirjutades seda summana $7036 = 7030 + 6$, me lahutame ta kaheks liidetavaks, milledest esimene on 10-e kordne, järelikult ka 2 ja 5 kordne; seepärast piisab ainult teise liidetava vaatlemisest, s. t. arvu kuue. Arv 6 jagub 2-ga, seega jagub kogu antud arv 7036 2-ga. Teiselt poolt, teine liidetav 6 ei jagu 5-ga; seega ka kogu arv — 7036 ei jagu 5-ga. Tõepoolest, kui 7036 oleks jagunud 5-ga, siis ka 6 oleks pidanud jaguma 5-ga, sest 7030 jagub 5-ga. Kui on antud arv $9765 = 9760 + 5$, siis võib kergesti näha, et ta jagub 5-ga ja ei jagu 2-ga. Lõpuks, arvud 7030 ja 9760 jaguvad 10-ga, järelikult ka 2-ga ja 5-ga.

2. 4-ga ja 25-ga jaguvuse tunnused.

Jagatav $A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2) + (a_1 \cdot 10 + a_0)$.

Esimene liidetav kujutab summat, mille iga liidetav on 4 ja 25 kordne, sest sajad, tuhanded jne. jaguvad 4-ga ja 25-ga. Tähendab esimene liidetav jagub 4-ga ja 25-ga.

Selleks, et kogu summa jaguks 4-ga (või vastavalt 25-ga) on vajalik ja piisav, et ka teine liidetav $(a_1 \cdot 10 + a_0)$, s. t. arv, mille moodustavad jagatav A kaks viimast numbrit, jaguks 4-ga (või vastavalt 25-ga).

Võtame numbrilise näite: 53 728 koosneb kahest liidetavast: 537-st sajast ja 28-st ühest; $100 = 4 \cdot 25$, seega 100 jagub 4-ga ja 25-ga; järelikult esimene liidetav — 537 sajalist — jagub 4-ga ja 25-ga.

Vaatleme teist liidetavat, s. o. 28; see arv jagub 4-ga ja seega jagub ka antud arv 53 728 4-ga. Teiselt poolt, 28 ei jagu 25-ga. Tõepoolest, kui 53 728 oleks jagunud 25-ga, siis ka 28 oleks pidanud jaguma 25-ga, sest 53 700 jagub 25-ga. Kui on antud arv $93\,725 = 93\,700 + 25$, siis võib kergesti näha, et see jagub 25-ga, kuid ei jagu 4-ga. Lõpuks, arvud 53 700 ja 93 700 jaguvad 100-ga ja järelikult ka — 4-ga ja 25-ga.

Seega, **4-ga (või 25-ga) jaguvad ainult need arvud, mis lõpevad kahe nulliga või mille kaks viimast numbrit moodustavad 4-ga (või vastavalt 25-ga) jaguva arvu.**

3. 8-ga ja 125-ga jaguvuse tunnus.

Jagatav $A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = (a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3) + (a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0)$.

Esimene liidetav kujutab summat, mille iga liidetav on 8 ja 125 kordne, sest tuhandelised, kümnetuhandelised jne. jaguvad 8-ga ja 125-ga. Tähendab, esimene liidetav jagub 8-ga ja 125-ga.

Selleks, et kogu summa A jaguks 8-ga (või 125-ga) on vajalik ja piisav, et 8-ga (või vastavalt 125-ga) jaguks teine

liidetav $(a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0)$, s. o. arv, mille moodustavad kolm viimast numbrit.

Võtame numbrilise näite: 93 648 koosneb kahest liidetavast: 93 tuhandest ja 648 ühest; $1000 = 8 \cdot 125$, mistõttu 1000 jagub 8-ga ja 125-ga, järelikult jagub ka 93 tuhandelist 8-ga ja 125-ga.

Vaatleme teist liidetavat, s. o. 648; arv 648 jagub 8-ga, seega ka antud arv 93 648 jagub 8-ga. Teiselt poolt, 648 ei jagu 125-ga, seega ka kogu arv 93 648 ei jagu 125-ga. Tõepoolest, kui 93 648 jaguks 125-ga, siis peaks ka 648 jaguma 125-ga, sest 93 000 jagub 125-ga. Kui on antud arv $34\,375 = 34\,000 + 375$, siis võib kergesti näha, et ta jagub 125-ga, kuid ei jagu 8-ga. Lõpuks, arvud 84 000 ja 93 000 jaguvad 100-ga, järelikult ka 8-ga ja 125-ga.

Seega, 8-ga (või 125-ga) jaguvad ainult need arvud, mis lõpevad kolme nulliga või mille kolm viimast numbrit moodustavad 8-ga (või vastavalt 125-ga) jaguva arvu.

4. 3-ga ja 9-ga jaguvuse tunnus.

Tähendame eelnevalt, et iga täisarv, mis väljendatud arvuga 1 nullidega ning vähendatud ühe võrra, annab 9 kordse.

Tõepoolest:

$$10^1 = 9 \cdot 1 + 1$$
$$10^2 = 9 \cdot 11 + 1$$
$$10^3 = 9 \cdot 111 + 1$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$10^{n-1} = 9 \cdot \overbrace{111\ldots1}^{(n-1)\text{ numbrit}} + 1 = 9 \cdot M + 1 \quad (\text{kus } M = \overbrace{111\ldots1}^{(n-1)\text{ numbrit}})$$

$$10^n = 9 \cdot \overbrace{111\ldots1}^{n\text{ numbrit}} + 1 = 9 \cdot N + 1 \quad (\text{kus } N = \overbrace{111\ldots1}^{n\text{ numbrit}}).$$

Siis jagatav $A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_3 \cdot 10^3 +$
$+ a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 = a_n(9N + 1) + a_{n-1} \cdot (9M + 1) +$
$+ \ldots + a_3 (9 \cdot 111 + 1) + a_2 (9 \cdot 11 + 1) + a_1 (9 \cdot 1 + 1) +$
$+ a_0 = 9Na_n + a_n + 9M \cdot a_{n-1} + a_{n-1} + \ldots + 9 \cdot 111a_3 +$

$+ a_3 + 9 \cdot 11a_2 + a_2 + 9 \cdot 1 \cdot a_1 + a_1 + a_0 = (9Na_n +$
$+ 9Ma_{n-1} + \ldots + 9 \cdot 111a_3 + 9 \cdot 11a_2 + 9 \cdot 1 \cdot a_1) +$
$+ (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 + a_0)$.

Esimene liidetav kujutab summat, mille iga liidetav on 3 ja 9 kordne (§ 64 järgi). Tähendab, esimene liidetav jagub 3-ga ja 9-ga. Selleks, et kogu summa jaguks 3-ga (või vastavalt 9-ga) on vajalik ja piisav, et 3-ga (või vastavalt 9-ga) jaguks teine liidetav $(a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + + a_2 + a_1 + a_0)$, mis kujutab antud arvu numbrite summat (ristsummat).

Vaatleme numbrilist näidet:

1) $8645 = 8000 + 600 + 40 + 5 = 8 \cdot 9 \cdot 111 + 8 + 6 \cdot 9 \cdot 11 + 6 + + 4 \cdot 9 \cdot 1 + 4 + 5$.

2) $8645 = (8 \cdot 9 \cdot 111 + 6 \cdot 9 \cdot 11 + 4 \cdot 9 \cdot 1) + (8 + 6 + 4 + 5)$ assotsiatiivsuse seaduse alusel.

3) Arvu 8645 jaotasime kaheks liidetavaks, esimene liidetav jagub 9-ga, järelikult oleneb arvu 8645 jaguvus teisest liidetavast, mis võrdub antud arvu numbrite summaga. Kui mõlemad liidetavad jaguvad 9-ga, siis ka nende summa 8645 jagub 9-ga.

Järelikult, **3-ga (või 9-ga) jaguvad ainult need arvud, millede numbrite summa (ristsumma) jagub 3-ga (või vastavalt 9-ga).**

§ 70. 7-ga, 11-ga ja 13-ga jaguvuse tunnused.

Kui arvu kolmest viimasest numbrist moodustuva arvu lahutamisel ülejäänud numbritest moodustuvast arvust (või ümberpöördult) tekkiv vahe on 0 või jagub 7-ga, 11-ga või 13-ga, siis jagub kogu antud arv vastavalt 7-ga, 11-ga või 13-ga.

Olgu antud arv A. Tähistades arvu A kolmest viimasest numbrist moodustuvat arvu N-ga ja ülejäänud numbritest moodustuvat arvu M-ga, võime kirjutada: $A = M \cdot 1000 + N$. Arv $1000 + 1$ jagub 7-ga, 11-ga ja 13-ga.

Arvestades viimast, teisendame eelmise saadud summa: $A = M \cdot (1000 + 1) - M + N$ (järeldus lahutamise definitsioonist).

Kui $M > N$, siis saame liitmiste ja lahutamiste rea assotsiatiivsuse seaduse alusel:

$$A = M \cdot 1001 - (M - N). \quad (1)$$

Kui aga $M < N$, siis, kasutades järjestiku liitmiste ja lahutamiste rea kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadusi, saame:

$$A = M \cdot 1001 - M + N = M \cdot 1001 + N - M = \text{(kommutatiivsus)}$$
$$= M \cdot 1001 + (N - M) \text{ (assotsiatiivsus)} \quad (2)$$

Et $M \cdot 1001$ jagub alati 7-ga, 11-ga ja 13-ga, siis selleks, et arv A jaguks 7-ga, 11-ga või 13-ga, on vajalik ja piisav, et vahed $(M - N)$ või $(N - M)$ jaguks vastavalt 7-ga, 11-ga või 13-ga.

Vaatleme seda jaguvuse tunnust numbrilise näite varal. On antud arv 725 582. Lahutame selle järgmisteks liidetavateks: $725\,582 = 725 \cdot 1000 + 582 = 725 \cdot 1001 - 725 + 582 = 725 \cdot 1001 - (725 - 582)$. Kahe arvu vahe jagub mingi arvuga, kui vähendatav ja lahutatav jaguvad selle arvuga. Et 1001 jagub alati 7-ga, 11-ga ja 13-ga, siis oleneb antud arvu jaguvus 7-ga, 11-ga ja 13-ga sellest, kas nende arvudega jagub antud arvu kolmest viimasest numbrist ja ülejäänud numbritest moodustunud arvude vahe: $725 - 582 = 143$; 143 jagub 11-ga ja 13-ga, järelikult jagub kogu arv 725 582 nende arvudega.

Näide 1. Leida, kas arv 368 312 jagub 7-ga, 11-ga ja 13-ga.

$$M = 368; \quad N = 312.$$

Järelikult, $M - N = 368 - 312 = 56$; 56 jagub 7-ga, tähendab ka 368 312 jagub 7-ga. 11-ga ja 13-ga see arv ei jagu, sest 56 ei jagu 11-ga ja 13-ga.

Näide 2. Kas arv 378 456 jagub 7-ga; 11-ga ja 13-ga?

$$M = 378; \quad N = 456.$$

Et $M < N$, siis $N - M = 456 - 378 = 78$; 78 jagub 13-ga, tähendab ka arv 378 456 jagub 13-ga. Antud arv ei jagu aga 7-ga ja 11-ga, sest 78 ei jagu 7-ga ja 11-ga.

§ 71. Teoreem arvude jaguvuse üldtunnusest.

Selleks, et arv A jaguks arvuga B on vajalik ja piisav, et selle arvuga jaguks jagatava numbrite ja nende jääkide korrutiste summa, mis saadud võetud numbritele vastavate 10 astmete jagamisel B-ga.

On antud: loomulikud arvud A ja B; $A > B$; $A = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^n$. $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ — jäägid, mis tekivad 10, 10^2, $10^3, \ldots,$ 10^n jagamisel B-ga.

Tõestada: Selleks, et $A \vdots B$ on vajalik ja piisav, et summa $(a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 + \ldots + a_n \cdot r_n) \vdots B$.

Kasutades eritähti jagatiste ja jääkide tähistamiseks, mis saadakse arvu 10 järjestikuste astmete jagamisel B-ga, väljendame loomulikkude arvude rea üldise omaduse alusel jagatava, jagaja ja jagatise vahelise seose.

Tähistused				Jagatava, jagaja ja jagatise vaheline seos
jagatav	jagaja	jagatis	jääk	
$1 = 10^0$	B	q_0	$r_0 = 1$	$1 = Bq_0 + r_0$
10^1	B	q_1	r_1	$10^1 = Bq_1 + r_1$
10^2	B	q_2	r_2	$10^2 = Bq_2 + r_2$
10^3	B	q_3	r_3	$10^3 = Bq_3 + r_3$
. . . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . . .
10^n	B	q_n	r_n	$10^n = Bq_n + r_n$

Arvu lihtühikuid väljendavale numbrile vastab $10^0 = 1$. Ühe jagamisel aga mistahes täisarvuga $B > 1$ saadakse jagatiseks 0 ja jääkiks 1. Siit järgneb, et korrutis $a_0 r_0 = a_0 \cdot 1 - a_0$.

Asendades avaldises:
$A = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + a_3 \cdot 10^3 + \ldots + a_n \cdot 10^n$ arvu 10 astmed nende väärtustega, saame:

$$A = a_0 + a_1 (Bq_1 + r_1) + a_2 (Bq_2 + r_2) + a_3 (Bq_3 + r_3) + \ldots +$$
$$+ a_n (Bq_n + r_n) = a_0 + a_1 Bq_1 + a_1 r_1 + a_2 Bq_2 + a_2 r_2 + a_3 Bq_3 +$$
$$+ a_3 r_3 + \ldots + a_n Bq_n + a_n r_n = \text{(korrutamise distributiivsus)}$$
$$= a_1 Bq_1 + a_2 Bq_2 + a_3 Bq_3 + \ldots + a_n Bq_n + a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 +$$
$$+ \ldots + a_n r_n = \text{(summa kommutatiivsus)}$$
$$= (a_1 Bq_1 + a_2 Bq_2 + a_3 Bq_3 + \ldots + a_n Bq_n) + (a_0 + a_1 r_1 + a_2 r_2 +$$
$$+ a_3 r_3 + \ldots + a_n r_n).$$

Nii oleme väljendanud jagatava A kahe liidetava summana. Esimene liidetav jagub tingimata B-ga, sest ta väljendab summat, mille iga liidetav jagub arvuga B.

Eespool (§ 66) tõestasime, et kui üks kahest liidetavast jagub mingi arvuga, siis selleks, et summa jaguks selle arvuga on vajalik ja piisav, et ka teine liidetav jaguks selle arvuga.

Vaadeldavas teoreemis summa A esimene liidetav jagub B-ga, järelikult selleks, et kogu summa A jaguks B-ga on vajalik ja piisav, et teine liidetav $(a_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + \ldots + a_nr_n)$ jaguks samuti Bga, mida oligi tarvis tõestada.

Näide: Kas 5221 jagub 23-ga?

Koostame tabeli jääkidest, mis tekivad arvu 10 astmete jagamisel 23-ga.

$$10^0 = 23 \cdot 0 + 1$$
$$10^1 = 23 \cdot 0 + 10$$
$$10^2 = 23 \cdot 4 + 8$$
$$10^3 = 23 \cdot 43 + 11$$
$$10^4 = 23 \cdot 434 + 18 \text{ jne.}$$

Seejärel arvutame numbrite ja vastavate jääkide korrutiste summa. $5 \cdot 11 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 1 = 92$; $92 : 23 = 4$. Saadud summa jagub 23-ga. Järelikult, arv 5221 jagub 23-ga jäägita. Tõepoolest, $5221 : 23 = 227$.

Vaatleme tõestatud teoreemi alusel arvu jaguvust 2-ga.

On ilmne, et arvu 10 astmete jagamisel kahega me saame jäägid:

$$r_1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_n = 0.$$

Tähendab:

$$a_0 + a_1r_1 + a_2r_2 + a_3r_3 + \ldots + a_nr_n =$$
$$= a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 = a_0.$$

Järelikult oleneb antud arvu jaguvus 2-ga eranditult sellest, kas jagub 2-ga arvu üheliste number (a_0).

Soovitame õppijail vaadelda jaguvust ka 4-ga, 8-ga, 5-ga, 9-ga ja 11-ga.

XI peatükk.

Antud arvude suurim ühisjagaja (ühistegur).

Antud arvude suurimaks ühisjagajaks (ühisteguriks) nimetatakse suurimat arvu, millega jaguvad kõik antud arvud.

Arvude a, b, c, ..., e suurimat ühisjagajat (N) tähistatakse sümboliga $(a; b; c; \ldots; e) = N$.

Väljendi „suurim ühisjagaja" ehk „suurim ühistegur" lühendina kasutatakse sageli ainult nende sõnade esimesi tähti S. Ü.

Näide: Arvud 72 ja 96 jaguvad arvudega 2, 3, 4, 6, 8, 12 ja 24.

Kõik need arvud on arvude 72 ja 96 ühisjagajad ja 24 on suurim ühisjagaja. Seda võib kirjutada järgmiselt: $(72; 96) = 24$.

Arvud 35 ja 25 jaguvad mõlemad 5-ga, $(35; 25) = 5$.

Märkus. Kooli praktikas tähistatakse suurimat ühisjagajat harilikult järgmiselt: S. Ü. $(35; 25) = 5$.

§ 72. Ühistegurita arvud (suhtelised algarvud).

Ühistegurita arvudeks nimetatakse arve, mille suurim ühisjagaja (ühistegur) on üks. Kui $(a; b; c; \ldots) = 1$, siis arvud a, b, c, ... on ühistegurita arvud.

Kui igaüks arvudest a, b, c, ... on ühistegurita iga teisega neist arvudest, siis nimetatakse arve a, b, c, ... **paarikaupa ühistegurita arvudeks.** On ilmne, et kahe arvu puhul mõisted „ühistegurita arvud" ja „paarikaupa ühistegurita arvud" ühtivad.

Näide 1. Arvud 29, 53, 100, 105 on ühistegurita arvud, sest neil pole ühest erinevat ühisjagajat $(29; 53; 100; 105) = 1$.

Näide 2. Arvud 24, 17, 11 pole mitte ainult ühistegurita, vaid ka paarikaupa ühistegurita arvud, sest $(24; 17) = (24; 11) = (17; 11) = 1$.

§ 73. Teoreemid, millede alusel leitakse suurim ühisjagaja.

1. Kui üks arv jagub teisega.

Teoreem. **Kui kahest antud arvust üks jagub teisega, siis on väiksem neist nende arvude suurim ühisjagaja.**

Antud: loomulikud arvud a ja b; $a : b$.

Tõestada: $(a; b) = b$.

Antud kahe arvu suurim ühistegur ei saa olla suurem väiksemast antud arvust, sest suurima ühisteguriga peavad antud arvud jaguma jäägita. Teoreemi eelduse kohaselt $a : b$, kuid väiksem arv b jagub iseenesega: $b : b$. Seega on arv b antud arvude a ja b suurimaks ühisjagajaks.

Näide: Leida 30 ja 6 S. Ü.

Et $30 : 6$, siis $(30; 6) = 6$, sest S. Ü. ei saa olla 6-st suurem.

2. Kui üks arv ei jagu teisega.

Teoreem. **Kui kahest antud arvust suurem arv ei jagu väiksemaga, siis on nende suurimaks ühisjagajaks väiksema arvu ja jäägi (mis tekib suurema arvu jagamisel väiksema arvuga) suurim ühisjagaja.**

Antud: loomulikud arvud a ja b, kusjuures $a > b$, a ei $: b$, a ja b jagatis on q ja jääk r;

$$(b; r) = c.$$

Tõestada: $(a; b) = c$.

1. Teoreemi eelduse ja loomulikkude arvude jagamise definitsiooni alusel saame:

$$a = bq + r.$$

2. Eelduse järgi $b : c$, tähendab ka korrutis $(bq) : c$, sest korrutise üks tegureist jagub c-ga.

3. Võrduse $a = bq + r$ liidetavad bq ja r jaguvad c-ga: esimene — tõestuse, teine — eelduse põhjal. Järelikult ka

summa $a : c$ (§ 64 alusel). Tähendab, arv c on arvude a ja b ühisjagaja.

4. Kuid arv c pole ainult arvude a ja b ühisjagaja, vaid ka suurim ühisjagaja, sest oletus, et arvudel a ja b on veel c-st suurem ühisjagaja, ei ole õige, sest siis see suurem ühisjagaja peaks olema ka arvu r jagaja, sest summa (a) ja ühe liidetava (bq) jagumisel selle arvuga, peab ka teine liidetav jaguma selle arvuga. Nii oleks arvudel b ja r c-st suurem suurim ühisjagaja, mis on aga vastuolus teoreemi eeldusega. Järelikult, $(b; r) = (a; b) = c$.

Vaatleme teoreemi numbrilisel näitel.

On antud arvud: 8084 ja 1504; $8084 = 1504 \cdot 5 + 564$; 1504 ja 564 S. Ü. on 188:

1504	| 564	564	| 376	376	| 188
− 1128	2	− 376	1		2
376		188			

Kui mõlemad liidetavad jaguvad 188-ga, siis jagub ka summa 8084 selle arvuga, mis on arvude 8084 ja 1504 suurim ühisjagaja. Kui nendel arvudel oleks 188-st suurem suurim ühisjagaja, siis see oleks ka 564 jagajaks, kuid 564 ja 1504 jagaja 188 on suurim: $8084 : 188 = 43$; $1504 : 188 = 8$.

§ 74. Eukleidese algoritm.

Keskajal nimetati algoritmiks reeglit, mille järgi teostati nelja aritmeetilise tehte mingit tehet kümnendsüsteemis. IX sajandil andis selliseid reegleid araabia matemaatik Al-Khwārizmī. Tema nime järgi nimetati selliste reeglite kogu algul Euroopas „algorizm'iks". Hiljem segunes see sõna kreekakeelse sõnaga *arithmos* — arv, ja algorizm muutus algorithmiks.

Praegusaegses matemaatikas nimetatakse algoritmiks igat aritmeetilist või algebralist protsessi, mis teostub rangelt kindlate reeglite alusel. Antud tüüpi ülesanne loetakse

lahendatuks, kui selle lahendamiseks on antud kindel algoritm. Eukleidese algoritm õpetab leidma kahe arvu suurimat ühisjagajat järjestikuse jagamise teel.

Olgu a ja b — loomulikud arvud, kusjuures $a > b$ ja a ei $\vdots$ b.

Oletame, et:

1) $a : b = q_1$ (jääk r_1), kus $a = bq_1 + r_1$
2) $b : r_1 = q_2$ („ r_2), „ $b = r_1q_2 + r_2$
3) $r_1 : r_2 = q_3$ („ r_3), „ $r_1 = r_2q_3 + r_3$
4) $r_2 : r_3 = q_4$ („ r_4), „ $r_2 = r_3q_4 + r_4$

. . . . . .

. . . . . .

n) $r_{n-2} : r_{n-1} = q_n$ (jääk r_n), kus $r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n$

$n + 1$) $r_{n-1} : r_n = q_{n+1}$ (jääk $r_{n+1} = 0$), kus $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$.

Kirjutatud võrduste rida: $a = bq_1 + r_1$; $b = r_1q_2 + r_2$; $r_1 = r_2q_3 + r_3$; $r_2 = r_3q_4 + r_4$; . . .; $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$ ja $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$ väljendab jagatava, jagaja, jagatise ja jäägi vahelist seost, mida saame järjestikusel jagamisel — suurema antud arvu jagamisel väiksemaga, väiksema jagamisel esimese jäägiga, esimese jäägi jagamisel teise jäägiga jne., ja mis on tuntud Eukleidese algoritmi nime all, sest iga võrdus selles reas on koostatud ühe ja sama reegli alusel.

Vaadeldav võrduste rida on lõplik. Tõepoolest, jagamise definitsiooni alusel jääkide rida (järelikult ka jagajate rida) $r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n, r_{n+1}$ on kahanevate täisarvude rida, mis tingimata peab lõppema jäägiga $r_{n+1} = 0$, sest võimalikkude jääkide arv on lõplik, sest see ei saa olla suurem arvust b (vt. § 39). Seega, millised ka ei oleks arvud a ja b, ikka saame järjestikuste jagamiste — suurema arvu jagamisel väiksemaga, väiksema jagamisel esimese jäägiga, esimese jäägi jagamisel teise jäägiga jne., resultaadiks mingi jääk r_n, millega eelmine jääk r_{n-1} jagub jäägita ja järelikult arv r_n **on viimaseks nullist erinevaks**

jäägiks, tähendab ka viimaseks jagajaks. Nii langeb ära edasise jagamise võimalus.

Võtame arvud 852 ja 192.

1) $852 : 192 = 4$ (jääk 84), kus $852 = 192 \cdot 4 + 84$
2) $192 : 84 = 2$ („ 24), „ $192 = 84 \cdot 2 + 24$
3) $84 : 24 = 3$ („ 12), „ $84 = 24 \cdot 3 + 12$
4) $24 : 12 = 2$ („ 0), „ $24 = 12 \cdot 2$

Võrduste rida: $852 = 192 \cdot 4 + 84$; $192 = 84 \cdot 2 + 24$; $84 = 24 \cdot 3 + 12$ ja $24 = 12 \cdot 2$ — moodustab Eukleidese algoritmi. See rida on lõplik, sest selles on võimalikkude nullist erinevate jääkide arv piiratud: see peab olema väiksem kui 192. Antud juhul on viimane nullist erinev jääk 12, mis ongi viimaseks jagajaks. Edasine järjestikune jagamine pole võimalik, sest järgmine jääk võrdub nulliga ja jagamine nulliga pole võimalik.

Eukleides ei kasutanud oma algoritmi mitte ainult aritmeetikas, vaid ka geomeetrias kahe lõigu ühismõõdu leidmisel järjestikuse pealepaigutamise teel.

§ 75. Kahe arvu S. Ü. leidmine järjestikuse jagamise teel.

Eukleidese algoritmi järgi S. Ü. kohta tõestatud kahe teoreemi (§ 73) ja S. Ü. definitsiooni alusel võib kirjutada:

$(a ; b) = (b ; r_1) = (r_1 ; r_2) = \ldots = (r_{n-2} ; r_{n-1}) =$
$= (r_{n-1} ; r_n) = r_n.$

Tähendab, $(a ; b) = r_n$.

Siit püstitame järgmise reegli kahe arvu S. Ü. leidmiseks järjestikuse jagamise teel.

Selleks, et leida kahe arvu S. Ü. järjestikuse jagamise teel, tuleb suurem antud arv jagada väiksemaga, siis väiksem — esimese jäägiga, esimene jääk — teisega, teine

jääk kolmandaga jne. niikaua, kuni saadakse jäägiks 0. Siis viimane jagaja (s. t. viimane nullist erinev jääk) on antud arvude suurim ühisjagaja.

Näide: Leida arvude 1515 ja 60 S. Ü.

Jagades 1515 arvuga 600 saame jagatiseks 2 ja jäägiks 315. Sellest järeldame, et otsitav S. Ü. pole 600, vaid võrdub 600 ja 315 S. Ü-ga. Jagame 600 arvuga 315, saame jagatiseks 1 ja jäägiks 285; seepärast otsitav S. Ü. pole 315, vaid võrdub 315 ja 285 S. Ü-ga. Siis jagame 315 arvuga 285, saame jagatiseks 1 ja jäägis 30, millest järeldame, et S. Ü. pole 285, vaid võrdub 285 ja 30 S. Ü-ga. Jagame 285 arvuga 30, saame jagatiseks 9 ja jäägiks 15 ning järeldame, et S. Ü. võrdub 30 ja 15 S. Ü-ga. Lõpuks 30 jagamisel 15-ga saame jagatiseks 2 ja jäägiks 0, otsitav S. Ü. on 15. Varem tõestatud teoreemide alusel saame: kui S. Ü. (15 ja 30) = 15, S. Ü. (30 ja 285) = 15, S. Ü. (285 ja 315) = 15, S. Ü. (315 ja 600) = 15, siis ka S. Ü. (600 ja 1515) = 15.

S. Ü. arvutamine järjestikuse jagamise teel võib toimuda kolmel viisil.

I viis.

			1515	600
			1200	2
		600	315	
		315	1	
	315	285		
	285	1		
285	30			
270	9			
30	15			
30	2			
0				

(1515 ; 600) = 15.

II viis.

Jagatised	—	2	1	1	9	2
Järjestikused jagatavad ja jagajad	1515	600	315	285	30	15
Järjestikused jäägid	315	285	30	15	0	—

$$(1515\,;\,600) = 15.$$

Teise viisi puhul paigutame järjestikused jagamised ühte ritta, kusjuures kõik jagatised kirjutatakse vastavate jagajate peale ja iga jagatava alla kirjutatakse vastavad jäägid. Teine viis tarvitab vähem ruumi ja on ülevaatlikum.

III viis.

Jagatis	2	1	1	9	2	
	1515	600	315	285	30	15
	1200	315	285	270	30	
jäägid	315	285	30	15	0	

$$(1515\,;\,600) = 15.$$

§ 76. S. Ü. põhiomadused.

Teoreem 1. **Iga arvuga, millega jagub jäägita kaks antud arvu, jagub ka nende arvude suurim ühisjagaja.**

Antud: $(a\,;b) = c$; $a : d$; $b : d$.

Tõestada: $c : d$.

1. Kasutades antud arvude S. Ü. leidmiseks Eukleidese algoritmi, saame:

$$a = bq_1 + r_1$$
$$b = r_1q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$
$$r_{n-1} = r_nq_{n+1} \qquad (r_{n+1} = 0)$$

Algoritmist järgneb $(a\,;\,b) = r_n$.

Tähendab, $c = r_n$.

Algoritmi esimeses võrduses $a = bq_1 + r_1$ teoreemi eelduse alusel $a : d$; korrutis $bq_1 : d$, sest $b : d$ (§ 67).

Kui aga kahe arvu summa ja üks liidetav jaguvad mingi arvuga, siis jagub ka teine liidetav selle arvuga (§ 66), järelikult $r_1 : d$.

Teises võrduses summa b ja üks liidetavaist r_1q_2 jaguvad d-ga, tähendab ka $r_2 : d$. Arutledes analoogiliselt, võime kindlaks teha, et igas järgnevas algoritmi võrduses peavad teised liidetavad jaguma d-ga, ja nimelt:

$r_3 : d$; $r_4 : d$; ...; $r_{n-1} : d$ ja lõpuks, $r_n : d$. Kuid $r_n = c$. Järelikult: $c : d$.

N ä i d e: $(3540; 450) = 30$. Peale selle on antud arvudel 3540 ja 450 ühisjagajad 2, 3, 5, 6, 10, 15.

On ilmne, et iga ühisjagajaga jagub jäägita ka arvude 3540 ja 450 S. Ü.

T e o r e e m 2. **Iga arv, millega jagub kahe antud arvu suurim ühisjagaja, on ka antud arvude ühisjagaja.**

A n t u d: $(a\,;\,b) = c$; $(c : d)$.

T õ e s t a d a: $a : d$ ja $b : d$.

1) Olgu $a : c = q$; $b : c = q_1$ ja $c : d = k$.

2) Siis $a = cq$; $b = cq_1$ ja $c = dk$.

3) Asendades võrdustes $a = cq$ ja $b = cq_1$ arvu c temaga võrdse korrutisega dk, saame:

$$a = dkq \quad \text{ja} \quad b = dkq_1.$$

4) Seega, arvud a ja b on korrutised ja seetõttu iga oma teguri kordsed (§ 63).

Järelikult: $a : d$ ja $b : d$.

Näide: $(3450; 450) = 30$. On ilmne, et suurima ühisjagaja iga jagaja on ka antud arvude jagaja.

Teoreem 3. **Kui mõlemaid antud arve a ja b korrutada mingi loomuliku arvuga m, siis suureneb ka antud arvude suurim ühisjagaja m korda.**

Antud: $(a; b) = c$; $am; bm$.

Tõestada: $(am; bm) = cm$.

1. Leiame Eukleidese algoritmi abil arvude a ja b S. Ü.:

$$a = bq_1 + r_1 \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$b = r_1q_2 + r_2 \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$r_1 = r_2q_3 + r_3 \qquad r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$$
$$r_2 = r_3q_4 + r_4 \qquad r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$$
$$\ldots\ldots \qquad r_{n-1} = r_nq_{n+1} \quad (r_{n+1} = 0)$$
$$\ldots\ldots$$

2. Korrutades algoritmi võrduste kõiki liikmeid ühe ja sama arvuga m, me ei riku võrduste kehtivust (korrutamise monotoonsuse seaduse alusel). Saadud võrdustes tekivad loomulikkude arvude

$a, b, r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-3}, r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$ asemele vastavad uued arvud:

$am, bm, r_1m, r_2m, r_3m, \ldots r_{n-3}m, r_{n-2}m, r_{n-1}m, r_nm$.

3. Järelikult: $(am; bm) = r_nm$ ehk $(am; bm) = cm$.

Näide: $(558; 440) = 18$. Korrutades igat antud arvu 2-ga, saame: $(558 \cdot 2; 440 \cdot 2) = 36$.

Teoreem 4. **Kui mõlemaid antud arve a ja b jagada nende arvude mingi ühisjagajaga, siis väheneb nende arvude suurim ühisjagaja sama arvu võrra.**

Antud:

$$(a; b) = c; \; a \vdots m; \; b \vdots m.$$

Tõestada:

$$\left(\frac{a}{m}; \frac{b}{m}\right) = \frac{c}{m}.$$

Teoreemi saab tõestada analoogiliselt eelmisega — algoritmi võrduste jagamisega m-ga. Seejuures tähendame, et kui $a : m$ ja $b : m$, siis on $\frac{a}{m}$ ja $\frac{b}{m}$ täisarvud. S. Ü. omaduste esimese teoreemi alusel on ka S. Ü. $\frac{c}{m}$ täisarv.

Näide: $(864 ; 192) = 96$. Jagades kumbagi antud arvu 864 ja 192 nende mingi ühisjagajaga, näiteks 32-ga, saame:

$$\left(\frac{864}{32} ; \frac{192}{32}\right) = (27 ; 6) = 3.$$

Järelikult väheneb antud arvude S. Ü. 32 korda.

Järeldus. Viimase teoreemi alusel on võimalik lihtsustada S. Ü. leidmist, kui antud arvude ühisjagajad on otsekohe nähtavad. Sel juhul tuleb antud arvud jagada nende ühisjagajaga ja leida saadud jagatiste S. Ü. ning korrutada see ühisjagajaga, millega jagasime antud arve. Saadud korrutis ongi antud arvude S. Ü. Olgu näiteks tarvis leida arvude 7200 ja 8400 S. Ü. Algul jagame arvud 100-ga, mistõttu ka arvude 7200 ja 8400 S. Ü. väheneb 100 korda. Seejärel leiame jagatiste 72 ja 84 S. Ü., mis on 12. Lõpuks korrutades 12 arvuga 100, saame 1200. Seega on arvude 7200 ja 8400 S. Ü. 1200.

§ 77. Teoreem jagatistest, mis saadakse antud arvude jagamisel nende S. Ü-ga.

Kui antud arvud jagada nende S. Ü-ga, siis on saadud jagatised ühistegurita arvud.

Antud: $(a; b; c; \ldots; l) = m$.

Tõestada:

$$\left(\frac{a}{m} ; \frac{b}{m} ; \frac{c}{m} ; \ldots \frac{l}{m}\right) = 1.$$

Eespool (§ 76, 4. teoreem) tõestati, et kui kumbagi kahest antud arvust jagada nende ühisjagajaga, siis väheneb nende arvude S. Ü. sama arv korda.

Sel alusel saame:

$$\left(\frac{a}{m}; \frac{b}{m}; \frac{c}{m}; \ldots \frac{l}{m}\right) = \frac{m}{m} = 1.$$

Järelikult, $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}, \ldots \frac{l}{m}$ on ühistegurita arvud, sest nende S. Ü. on üks.

Näide: $(108; 60) = 12$. $108 : 12 = 9$; $60 : 12 = 5$; $(9; 5) = 1$. Järelikult on 9 ja 5 ühistegurita arvud.

§ 78. Teoreem kahe arvu korrutise jaguvusest arvuga, mis on ühe teguri suhtes ühistegurita.

Kui kahe teguri korrutis jagub jäägita mingi arvuga, mis on ühe teguri suhtes ühistegurita, siis jagub teine tegur selle arvuga.

Antud: $ab = p$; $p \vdots c$; $(a; c) = 1$.

Tõestada: $b \vdots c$.

Teoreemi eelduse kohaselt $(a; c) = 1$. Eespool (§ 76, 3. teoreem) tõestati, et kui kumbagi antud arvu korrutada mingi loomuliku arvuga, siis suureneb ka antud arvude S. Ü. sama arv korda.

Sel alusel saame:

$(ab; cb) = 1 \cdot b = b$, siit $(p; cb) = b$, sest eelduse järgi $ab = p$.

Antud eelduses korrutis $p \vdots c$; korrutis cb jagub samuti c-ga, sest üks selle korrutise tegureist jagub c-ga. Järelikult peab vaadeldavate korrutiste p ja cb S. Ü. jaguma c-ga (§ 76, 1. teoreem), kuid $(p; cb) = b$.

Tähendab, $b \vdots c$.

Näide: $7 \cdot 90 = 630$. Kahe teguri korrutis jagub 15-ga; üks tegur 7 on 15 suhtes ühistegurita $(7; 15) = 1$. Järelikult peab tõestatud teoreemi alusel teine tegur jaguma 15-ga.

Tõepoolest, $90 \vdots 15$.

§ 79. Teoreem antud arvu jaguvusest kahe ühistegurita arvu korrutisega.

Kui antud arv jagub kummagagi kahest ühistegurita arvust, siis ta jagub ka nende korrutisega.

Antud: $(b\,;c) = 1$; $a : b$; $a : c$; $bc = p$.

Tõestada: $a : p$.

Oletades, et $a : b = q$, siis $a = bq$.

Kuna eelduse järgi $a : c$, siis ka korrutis $bq : c$.

Kuid b ja c on ühistegurita arvud, tähendab, $q : c$ (§ 78).

Oletades, et $q : c = q_1$, siis $q = cq_1$.

Asendades võrduses $a = bq$ arvu q temaga võrdse korrutisega cq_1, saame:

$$a = b(cq_1) = (bc)q_1 = pq_1.$$

Võrdusest $a = pq_1$ järgneb, et $a : p$, sest korrutis (a) on iga oma teguri kordne.

Eelmise teoreemi alusel saab väljendada jaguvuse tunnust arvuga, mida saab kujutada kahe ühistegurita arvu korrutisena.

1. Selleks, et antud arv jaguks 6-ga, on vajalik ja piisav, et ta jaguks 2-ga ja 3-ga.

2. Selleks, et antud arv jaguks 15-ga, on vajalik ja piisav, et ta jaguks 3-ga ja 5-ga.

Analoogiliselt võiksime väljendada jaguvuse tunnused jagajate 18, 22, 24 jne. puhul.

Märkus. Peab meeles pidama, et see teoreem on kehtiv ainult siis, kui jagajad on ühistegurita arvud. Kui aga jagajad ei ole ühistegurita arvud, siis antud arv ei jagu nende korrutisega, kuigi ta võib jaguda iga jagajaga eraldi.

Näiteks jagub arv 840 120-ga ja 140-ga, kuid korrutisega $120 \cdot 140$ arv 840 ei jagu.

§ 80. Kolme ja enama arvu S. Ü.

Reegel. **Selleks, et leida mitme arvu S. Ü., tuleb algul leida kahe arvu S. Ü., siis saadud arvu ja kolmanda arvu S. Ü. jne., kuni viimase arvuni. Viimane S. Ü. ongi kõikide antud arvude S. Ü.**

Näide 1. Võtme kolm arvu 840, 720 ja 640 ja leiame nende S. Ü.

$(840 ; 720) = 120$. Arvu 120 iga jagaja peab olema ka arvude 840 ja 720 ühisjagaja (§ 76, 2. teoreem). Tähendab ka arvude 120 ja 640 S. Ü. peab olema arvude 840 ja 720 ühisjagajaks.

Tõepoolest, $(120 ; 640) = 40$, kuid $840 : 40$ ja $720 : 40$.

Nii on arv 40 kõigi kolme antud arvu ühisjagaja ja ühtlasi ka suurim ühisjagaja, kuigi arvudel 840 ja 720 on 40-st suurem ühisjagaja, ent arvudel 120 ja 640 sellist ühisjagajat aga pole.

Järelikult: $(840 ; 720 ; 640) = 40$.

Näide 2. Leida arvude 840, 720, 640 ja 260 S. Ü.

1) $(840 ; 720) = 120$,
2) $(120 ; 640) = 40$,
3) $(40 ; 260) = 20$.

Järelikult: $(840 ; 720 ; 640 ; 260) = 20$.

§ 81. S. Ü. ja kahe tundmatuga esimese astme määramatu võrrandi lahendamine.

1. Definitsioon. **Kahe tundmatuga esimese astme määramatuks võrrandiks nimetatakse võrrandit**

$$ax + by = c,$$

kus a, b ja c on mingid kordajad, s. o. avaldised, mis ei sisalda tundmatuid.

Avaldades sellest võrrandist ühe tundmatu, näiteks y, saame valemi:

$$y = \frac{c - ax}{b},$$

milles tundmatu x võib omada mistahes väärtust, kusjuures mingile x väärtusele vastab üks kindel y väärtus.

Kui näiteks $x = k$ ja $y = n$, siis arvud k ja n on antud määramatu võrrandi **üheks võimalikuks lahendiks.**

On ilmne, et määramatul võrrandil on lugematul hulgal lahendeid. Sageli küsimus, mille lahendamine viib meid määramatu võrrandi juurde, nõuab, et x ja y oleksid **positiivsed täisarvud.** Järelikult peab oskama määramatu võrrandi lugematu hulga lahendite seast eraldada positiivseid täisarvulisi lahendeid. Me teame, millised ka ei oleks võrrandi ratsionaalsed kordajad, alati on võimalik antud võrrandit asendada samaväärse võrrandiga, mille kordajad a, b ja c on täisarvud. Seepärast loeme edasises esituses arve a, b ja c täisarvudeks.

Algul vaatleme, kuidas on võimalik leida täisarvulisi lahendeid.

2. Vajalik tingimus selleks, et määramatu võrrand omaks täisarvulisi lahendeid.

Võtame määramatu võrrandi $ax + by = c$, kus a, b ja c on täisarvud. Eeldame, et $(a\,;b\,;c) = 1$, sest vastasel korral võiksime neid arve jagada nende S. Ü-ga.

Selleks, et määramatul võrrandil oleks vähemalt üks täisarvuline lahendite paar, on vajalik, et arvud a ja b oleks ühistegurita arvud, s. o. $(a\,;b) = 1$.

Kui oletada, et arvudel a ja b on mõni ühisjagaja $d > 1$ ja c ei $\vdots$ d, siis täisarvuliste x ja y puhul kujutaks võrduse vasak pool arvu, mis jagub d-ga ja parem pool — arvu, mis eelduse kohaselt b-ga ei jagu. Tähendab, täisarvuliste x ja y puhul ei ole võimalik võrrand niisuguste kordajatega a ja b, millel on ühisjagaja $d > 1$.

Näiteks ei rahulda võrrandit $10x + 15y = 29$ mingisugused täisarvud, sest x ja y täisarvuliste väärtuste puhul summa $10x + 15y$ jagub 5-ga, 29 aga ei $\vdots$ 5. Järelikult, **selleks, et antud määramatu võrrand omaks täisarvulisi lahendeid, on vajalik, et kordajad a ja b oleksid ühistegurita arvud, s. o. $(a\,;b) = 1$.**

3. Erijuhtum, kui a või b võrdub ühega.

Olgu näiteks $b = 1$. Siis võrrand omab kuju: $ax + y = c$, kus $y = c - ax$.

Viimasest võrdusest nähtub, et asetades x asemele mistahes täisarvu, saame ka y-le vastava täisarvulise väärtuse. Nende lahendite

hulk on ilmselt lõpmatu ja nad kõik sisalduvad võrduses $y = c - ax$, mida seepärast võib vaadelda kui esitatava erikujulise võrrandi lahendit.

Näide: Lahendada võrrand: $x - 6y = 11$.

Lahendus: $x = 6y + 11$.

Asetades y asemele mistahes täisarvud 0, 1, 2, 3 jne., -1, -2, -3 jne., saame vastavad x väärtused.

y	0	1	2	3	...	-1	-2	-3
x	11	17	23	29	...	5	-1	-7

4. Erijuhtum, kui $c = 0$. Selleks, et lahendada võrrandit: $ax + by = 0$, kus a ja b on ühistegurita arvud, määrame ühe tundmatu teise kaudu:

$$x = -\frac{by}{a}.$$

Sellest võrdusest nähtub: selleks, et tundmatu x oleks täisarv, on vajalik ja piisav, et korrutis $by : a$, kuid arvud a ja b on ühistegurita arvud, seepärast by jaguvuseks a-ga on vajalik, et jagatis $\frac{y}{a}$ oleks täisarv. Olgu $y : a = f$ ehk $y = af$. Siis $x = -\frac{baf}{a}$ ehk $x = -bf$.

Kui $y : a = -f$, siis $y = -af$ ja $x = bf$.

Seega omab võrrand $ax + by = 0$ järgmised lahendid:

1) $x = -bf$, $y = af$ ehk 2) $x = bf$, $y = -af$.

Võrrandi $ax + by = 0$ kumbki tundmatu võrdub mingi ühe ja sama täisarvuga, mis korrutatud teise tundmatu kordajaga, kusjuures üks kordajaist peab olema võetud vastasmärgiga.

Näide: $12x + 5y = 0$; $x = 5f$; $y = -12f$ või $x = -5f$ ja $y = 12f$, kus f on mistahes arv.

5. Üldjuhtum. Kui kordajad a ja b ei võrdu ühega ja c ei võrdu nulliga, siis muudetakse antud määramatu võrrand vastavate teisenduste abil teiseks väiksemate kordajatega võrrandiks, edasi saadud võrrand muudetakse kolmandaks veel väiksemate kordajatega võrrandiks jne., kuni saadakse võrrand, milles ühe tundmatu kordaja on 1. Nagu nägime, lahendub saadud võrrand otseselt.

Järjestikku saadud võrrandites võrdub üks kordaja eelmise võrrandi väiksema kordajaga ja teine — eelmise võrrandi suurema kordaja ja väiksema kordaja jagatise jäägiga.

Vaatleme näiteid selliste võrrandite lahendamise kohta. Algul vaatleme erijuhtu, kus $c = 1$.

Näide 1. Lahendada võrrand $12x - 7y = 1$. ($a = 12$; $b = -7$; $c = 1$).

1) Määrame antud võrrandi väiksema kordajaga tundmatu:

$$12x - 7y = 1;$$
$$7y = 12x - 1;$$
$$y = \frac{12x - 1}{7}.$$

2) Eraldame saadud liigmurrust täisarvu:

$$y = x + \frac{5x - 1}{7}.$$

Et x on täisarv, siis selleks, et y võrduks täisarvuga, on vajalik ja piisav, et murd $\frac{5x - 1}{7}$ võrduks mingi täisarvuga.

Oletades, et $\frac{5x - 1}{7} = t_1$,

siis:

3) $5x - 1 = 7t_1$,

$x = \frac{7t_1 + 1}{5}$ ehk $x = t_1 + \frac{2t_1 + 1}{5}$, kus $\frac{2t_1 + 1}{5} = t_2$ — täisarv.

Siit:

4) $2t_1 + 1 = 5t_2$;

$t_1 = \frac{5t_2 - 1}{2}$ ehk $t_1 = 2t_2 + \frac{t_2 - 1}{2}$, kus $\frac{t_2 - 1}{2} = t_3$ — täisarv.

5) $t_2 - 1 = 2t_3$, millest $t_2 - 2t_3 = 1$.

6) Kui $t_3 = 0$, siis $t_2 = 0 + 1 = 1$.

7) Asetades leitud väärtused valemisse $t_1 = \frac{5t_2 - 1}{2}$, saame:

$$t_1 = \frac{5 - 1}{2} = 2.$$

8) Asendades t_1 võrrandis $x = \frac{7t_1 + 1}{5}$ temaga võrdse arvuga 2,

leiame:

$$x = \frac{14+1}{5}\,; \quad x = 3.$$

9) Asendades x arvuga 3 võrrandis $y = x + \frac{5x-1}{7}$, saame:

$$y = \frac{36-1}{7}\,; \quad y = 5.$$

Nii saime antud võrrandi ühe täisarvuliste lahendite paari.

Kergesti võib märgata, et kõik järjestikused teisendused toimusid Eukleidese algoritmi alusel. Teisenduste protsessis teostasime tegelikult järgmised järjestikused jagamised:

1) $12 : 7 = 1$ (1. jääk 5); kus $12 = 7 \cdot 1 + 5$; (I)
2) $7 : 5 = 1$ (2. jääk 2); „ $7 = 5 \cdot 1 + 2$; (II)
3) $5 : 2 = 2$ (3. jääk 1); „ $5 = 2 \cdot 2 + 1$; (III)
4) $2 : 1 = 2$; „ $2 = 1 \cdot 2$. (IV)

Viimases võrrandis $t_2 - 2t_3 = 1$ on üks kordajaist 2, s. t. võrdne teise jäägiga, teine kordaja on 1, s. t. võrdne kolmanda jäägiga. Meie järjestikuste teisenduste eesmärgiks oli võrrandi saamine, mille kordaja oleks 1. Sellise kordaja me saamegi tingimata järjestikuste jagamiste resultaadina, sest antud võrrandi kordajad on ühistegurita arvud ja järelikult nende S. Ü. on 1. Tähendab, kasutades Eukleidese algoritmi, me saame tingimata jäägi 1.

Esitatust järgneb, et saades Eukleidese algoritmi moodustavad võrrandid, me võime leida mõned x ja y eriväärtused.

Tõepoolest:

$1 = 5 - 2 \cdot 2$ (III võrdusest);
$1 = 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2$ (sest II võrdusest järgneb, et $2 = 7 - 5 \cdot 1$);
$1 = 5 - 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2$ (vahe $7 - 5$ korrutamine 2-ga);
$1 = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2$ (korrutamise mõiste alusel);
$1 = (12 - 7 \cdot 1) \cdot 3 - 7 \cdot 2$ (sest I võrdusest järgneb, et $5 = 12 - 7 \cdot 1$);
$1 = 12 \cdot 3 - 7 \cdot 3 - 7 \cdot 2$ (vahe $12 - 7$ korrutamine 3-ga);
$1 = 12 \cdot 3 - 7 \cdot 5$.

Seega $12 \cdot 3 - 7 \cdot 5 = 1$. Järelikult $x = 3$ ja $y = 5$.
Selviisil saime määramatu võrrandi ühe võimalikest lahendeist.

Siit tuleneb, et **määramatu võrrandi $ax + by = 1$ ühe võimalikest lahendeist võib leida Eukleidese algoritmi abil.**

Näide 2. Lahendada võrrand $5x - 7y = 6$.

1) Lahendame Eukleidese algoritmi abil abivõrrandi $5x_1 - 7y_1 = 1$ kujul, kus

1) $7 : 5 = 1$ (1. jääk 2); kus $7 = 5 \cdot 1 + 2$; (I)
2) $5 : 2 = 2$ (2. jääk 1); „ $5 = 2 \cdot 2 + 1$; (II)
3) $2 : 1 = 2$, „ $2 = 1 \cdot 2$. (III)

Saadud võrdustest leiame:

$1 = 5 - 2 \cdot 2$ (II võrdusest);
$1 = 5 - (7 - 5 \cdot 1) \cdot 2$ (I võrdusest järgneb, et $2 = 7 - 5 \cdot 1$);
$1 = 5 - 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2$ (vahe korrutamine 2-ga);
$1 = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2$;
$5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$.

Tähendab: $x_1 = 3$ ja $y_1 = 2$.

Korrutades võrduse $5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1$ mõlemad pooled 6-ga, saame arvulise samasuse: $5 \cdot (3 \cdot 6) - 7 \cdot (2 \cdot 6) = 6$ ehk $5 \cdot 18 - 7 \cdot 12 = 6$, milleks muutub antud võrrand $5x - 7y = 6$, kui $x = 18$ ja $y = 12$.

Järelikult on arvud 18 ja 12 antud võrrandi üheks võimalikuks lahendiks.

6. Valemid määramatu võrrandi ülejäänud lahendite saamiseks.

Me nägime, et Eukleidese algoritmi abil saab leida üldkujulise määramatu võrrandi $ax + by = c$ üht lahendit.

Oletame, et lahendades mingi võrrandi, saame $x = n_1$ ja $y = n_2$. Asendades võrrandis $ax + by = c$ tundmatud leitud väärtustega, saame samasuse $an_1 + bn_2 = c$.

Lahutades selle samasuse mõlemad pooled võrrandi $ax + by = c$ vastavatest pooltest, saame:

$$\begin{array}{r} ax + by = c \\ - \quad an_1 + bn_2 = c \\ \hline a(x - n_1) + b(y - n_2) = 0. \end{array}$$

Loeme saadud võrrandis tundmatuiks $x - n_1$ ja $y - n_2$. Et saadud võrrandi vaba liige on 0, siis võime lahendamiseks kasutada valemeid, mis selleks erijuhuks eespool esitatud:

$$\left.\begin{array}{l} x - n_1 = -bt, \text{ kus } x = n_1 - bt \\ y - n_2 = \quad at, \text{ „ } y = n_2 + at \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - n_1 = \quad bt, \text{ „ } x = n_1 + bt \\ y - n_2 = -at, \text{ „ } y = n_2 - at \end{array}\right\}$$

Algebras tõestatakse, et **võrrandi $ax + by = c$ iga tundmatu võrdub oma vastava eriväärtuse ja mistahes arvu ning teise tundmatu kordaja korrutise summaga, kusjuures üks kordajaist tuleb võtta vastasmärgiga.**

Kasutades neid valemeid ja teades, et võrrandi $5x - 7y = 6$ ühes lahendis $x = 18$ ja $y = 12$, väljendame ülejäänud lahendid:

$$x = 18 + 7t, \quad y = 12 + 5t$$

või

$$x = 18 - 7t, \quad y = 12 - 5t,$$

kus t on mistahes täisarv.

§ 82. S. Ü. kasutamine mõningate aritmeetiliste ülesannete lahendamisel.

S. Ü. kasutatakse real juhtumeil mõnede aritmeetiliste ülesannete lahendamisel.

Näitena vaatleme järgmist ülesannet.

Ülesanne. On olemas 320 pähklit, 240 kompvekki ja 200 küpsist. Kui palju kõige rohkem võib sellest tagavarast teha lastele ühesuguseid kingituspakke ja kui palju pähklaid, kompvekke ja küpsiseid tuleb paigutada igasse pakki?

Selleks, et koostada ühesuguseid kingituspakke, tuleb 320 pähklit, 240 kompvekki ja 200 küpsist jagada ühe ja sama arvuga. Et pakkide arv peab olema suurim, siis tuleb kolme arvu 320, 240 ja 200 jagada suurima ühisteguriga, mis on 40 (kingituspakkide arv).

Seega võib 320 pähklist, 240 kompvekist ja 200 küpsisest koostada ülimalt 40 pakki, kusjuures igas pakis on $320 : 40 = 8$ (pähklit), $240 : 40 = 6$ (kompvekki) ja $200 : 40 = 5$ (küpsist).

XII peatükk.

Väikseim ühiskordne.

Antud arvude väikseimaks ühiskordseks nimetatakse väikseimat arvu, mis jagub jäägita iga antud arvuga.

Näide: Arvude 20 ja 15 ühiskordseiks on arvud 60; 120, 180, 240, 300 jne. Arvude 20 ja 15 väikseimaks ühiskordseks on aga 60.

Arvude $(a; b; c; \ldots; l)$ väikseimat ühiskordset tähistatakse sümboliga: $m(a; b; c; \ldots; l)$.

Väljendi „väikseim ühiskordne" lühendina kasutatakse tavaliselt nende sõnade algtähti V. Ü.

§ 83. Teoreem kahe loomuliku arvu V. Ü. omadusest.

Kahe antud loomuliku arvu väikseim ühiskordne võrdub antud arvude korrutisega, mis jagatud nende arvude S. Ü-ga.

A n t u d: loomulikud arvud a ja b;

$$(a; b) = c.$$

T õ e s t a d a: $m(a; b) = \frac{ab}{c}$.

Tähistame loomulikkude arvude a ja b mingi ühiskordse tähega M, siis järeldub sellest, et $M : a$ ja $M : b$. Oletades, et $M : a = q$, saame jagamise definitsiooni alusel: $M = aq$, kus q on täisarv.

Eespool me nägime, et $M : b$.

Olgu $M : b = q_1$, kus q_1 on täisarv.

On ilmne, et $\frac{aq}{b} = q_1$, sest $M = aq$.

Tähendab jagatis $\frac{aq}{b}$ on täisarv.

Vastavalt teoreemi eeldusele $(a; b) = c$ ja tähistades a ja b jagatised nende suurima ühisjagajaga c vastavalt k ja k_1, saame:

$a : c = k$, kus jagamise definitsiooni alusel $a = ck$;
$b : c = k_1$, kus jagamise definitsiooni järgi $b = ck_1$.

Asetades võrrandisse $\frac{aq}{b} = q_1$ arvude a ja b asemele leitud väärtused, saame $\frac{ckq}{ck_1} = q_1$ ehk $\frac{kq}{k_1} = q_1$.

Eespool me tegime juba kindlaks, et q_1 on täisarv. Tähendab korrutis kq jagub k_1-ga.

Kuid arvud k ja k_1, kui arvude a ja b jagatised nende S. Ü-ga, on ühistegurita arvud (§ 77). Järelikult, $q : k_1$ (§ 78).

Tähistades q ja k_1 jagatise f-ga, saame: $q : k_1 = f$, kus f on täisarv.

Et jagamise definitsiooni alusel $q = k_1 f$,

siis $M = aq = ak_1 f$.

Ehk $M = a(b : c)f =$ (sest $k_1 = b : c$)

$= [a(b : c)]f =$ (korrutise assotsiatiivsus)

$= (ab : c)f =$ (korrutamiste ja jagamiste rea assotsiatiivsuse 1. kuju)

$= [(ab) : c]f =$ (korrutamiste ja jagamiste rea definitsiooni alusel)

$= \frac{ab}{c} f$ (jagamise teine tähistus).

Seega $M = \frac{ab}{c} f$.

Nii saime üldvalemi kahe antud arvu a ja b mistahes ühiskordse väljendamiseks, sest on ilmne, et iga sellekujuline M on nii a kui ka b kordne.

Selles valemis ab on antud arvude korrutis, c — nende suurim ühisjagaja, jagaja f — mingi täisarv ($f = q : k_1$).

Arv c on jääv suurus antud arvudele a ja b. Järelikult väikseima ühiskordse saame $f = 1$ puhul. Siit: $m(a ; b) = \frac{ab}{c}$, mida oligi tarvis tõestada.

N ä i d e: Leida arvude 105 ja 42 väikseim ühiskordne.

$$(105 ; 42) = \frac{105 \cdot 42}{(105 ; 42)} = \frac{105 \cdot 42}{21} = 105 \cdot 2 = 210.$$

J ä r e l d u s 1. **Kahe ühistegurita arvu väikseim ühiskordne võrdub nende arvude korrutisega.**

Kui a ja b on ühistegurita arvud, siis $(a ; b) = 1$.

Järelikult:

$$m(a ; b) = \frac{ab}{1} = ab.$$

Järeldus 2. **Kahe antud arvu iga ühiskordne on ka nende arvude väikseima ühiskordse kordne.**

Kui

$$m(a;b)=\frac{ab}{c},$$

siis

$$M=\frac{ab}{c}f=mf.$$

Võrdusest $M=mf$ järgneb jagamise definitsiooni alusel:

$$M:m=f,$$

s. t. antud arvude a ja b kõik ühiskordsed on ka nende V. Ü. kordsed.

§ 84. Teoreem nende jagatiste kohta, mis tekivad antud arvude väikseima ühiskordse jagamisel antud arvudega.

Jagatised, mis saadakse antud arvude väikseima ühiskordse jagamisel nendesamade antud arvudega, on ühistegurita arvud.

On antud: loomulikud arvud a ja b.
V. Ü $(a;b)=m$; $(a;b)=c$; $m:a=q$; $m:b=q_1$.
Tõestada: $(q:q_1)=1$.

$m(a;b)=\frac{ab}{c}$, kus c on arvude a ja b S. Ü. (§ 83).

Millest: $m:a=\frac{ab}{c}:a$ (monotoonsus),

$m:a=\frac{ba}{c}:a$ (korrutamise kommutatiivsus),

$m:a=b:c$ (järeldus jagamise definitsioonist),

$m:b=\frac{ab}{c}:b$ (monotoonsus),

$m:b=a:c$ (järeldus jagamise definitsioonist).

Vastavalt teoreemi eeldusele:

$$m:a=q \text{ ja } m:b=q_1.$$

Järelikult:

$$b : c = q \quad \text{(transitiivsus)}$$
$$a : c = q_1 \ (\quad ,, \quad)$$

Et $(a ; b) = c$, siis q ja q_1 on ühistegurita arvud, s. t. $(q ; q_1) = 1$ (§ 77).

Näide: V. Ü. $(45 ; 30) = 90$;

$90 : 45 = 2$; $90 : 30 = 3$; $(2 ; 3) = 1$.

§ 85. Mitme antud arvu V. Ü. leidmine.

Reegel. **Mitme antud arvu V. Ü. leidmiseks tuleb algul leida kahe arvu V. Ü., siis leitud arvu ja kolmanda arvu V. Ü., seejärel viimase leitud arvu ja neljanda arvu V. Ü. jne., kuni viimase antud arvuni. Viimane leitud V. Ü. ongi antud arvude V. Ü.**

Määrame algul kolme loomuliku arvu a, b ja c V. Ü. leidmisviisi.

Olgu V. Ü. $(a ; b) = m_1$.

Ülal tõestati (§ 83, 2. järeldus), et arvude a ja b kõik ühiskordsed on arvu m_1 kordsed.

Et antud arvude a, b ja c otsitav V. Ü. on arvude a ja b üheks ühiskordseks, siis on ka see V. Ü. arvu m_1 kordseks.

Oletame, et V. Ü. $(m_1 ; c) = m_2$.

Eespool (§ 64 järeldus) tõestasime, et antud arvu iga kordne on ka antud arvu iga jagaja kordne. Tähendab, arv m_2 on arvude a ja b kordne, sest need arvud on arvu m_1 jagajad. Seega on arv m_2 kolme antud arvu a, b ja c ja arvu m_1 ühiskordne. Kuid m_2 on m_1 ja c V. Ü.; on ilmne, et m_2 on samuti antud arvude a, b ja c V. Ü.

Järelikult: V. Ü. $(a ; b$ ja $c) =$ V. Ü. $(m_1 ; c) = m_2$.

Selleks, et leida kolme antud arvu V. Ü., tuleb algul leida kahe arvu V. Ü. ja seejärel leitud V. Ü. ja kolmanda arvu V. Ü.

On ilmne, et kui on antud rohkem kui kolm arvu, siis võib seda arutlust laiendada ka järgnevatele arvudele. See järgneb eespool esitatud mitme arvu V. Ü. leidmisviisist ja § 83 2. järeldusest.

Näide: Leida arvude 300, 160, 720 ja 540 V. Ü.

$$\text{V. Ü. } (300\,;\,160) = \frac{300 \cdot 160}{(300\,;\,160)} = \frac{300 \cdot 160}{20} = 2400;$$

$$\text{V. Ü. } (2400\,;\,720) = \frac{2400 \cdot 720}{(2400\,;\,720)} = \frac{2400 \cdot 720}{240} = 7200;$$

$$\text{V. Ü. } (7200\,;\,540) = \frac{7200 \cdot 540}{(7200\,;\,540)} = \frac{7200 \cdot 540}{180} = 21\,600.$$

Järelikult, V. Ü. $(300\,;\,160;\ 720\,;\,540) = 21\,600$.

Mitme antud arvu ühiskordsed on ka nende V. Ü. kordsed.

§ 86. V. Ü. rakendamine ülesannete lahendamisel.

Lisaks arvude S. Ü. ja V. Ü. kasutamisele murdude puhul omavad nad veel teaduslikku ja praktilist tähtsust, võimaldades lahendada rida ülesandeid. Vaatleme mõnd sellist ülesannet.

Ülesanne 1. Teataval ajamomendil omavad planeedid Veenus ja Merkuur kinnistähtede suhtes mingi kindla asendi. Mitme ööpäeva pärast on mõlemad planeedid kinnistähtede suhtes samas asendis, kui Merkuur teeb ühe täistiiru ümber päikese 88 päevaga ja Veenus 225 päevaga.

Selle ülesande lahendamiseks on tarvis leida arvude 88 ja 225 V. Ü., mis on 19 800 (ööpäeva).

Ülesanne 2. Kolm autobussi väljuvad lähtekohast üheaegselt kolmes suunas ja saabuvad tagasi — esimene 2 t. 10 min. pärast, väljudes uuesti 20 min. hiljem, teine saabub 1 t. 52 min. pärast ja väljub uuesti 8 min. hiljem, kolmas saabub 1 t. 36 min. pärast ja väljub uuesti 4 min. hiljem. Kõik kolm autobussi väljusid hommikul kell 7. Millal kõige varem väljuvad nad uuesti üheaegselt lähtekohast?

Algul tuleb määrata aeg, mis kulub igal autobusel ühe sõidu ja peatuse tegemiseks: esimesel autobusel — 150 min., teisel — 120 min. ja kolmandal — 100 min.

Seejärel leiame aja kuni järgmise samaaegse busside väljumiseni. Selle ülesande lahendamiseks tuleb leida arvude 150 min., 120 min. ja 100 min. V. Ü., mis on 600 (min.) ehk 10 (tundi). Lõpuks määrame

kalendrilise aja. Kui autobused väljuvad kell 7 hommikul ja teistkordselt sõidavad üheaegselt välja 10 tunni pärast, siis toimub see kell 5 õhtul.

Teaduses kasutatakse antud arvude V. Ü. leidmist, kui on tegemist perioodiliselt muutuvate nähtustega. Näiteks astronoomias kuu- ja päikesevarjutuse momendi määramisel.

XIII peatükk.

Algarvude teooria.

§ 87. Algarvu definitsioon ja omadused.

1. Algarvuks nimetatakse niisugust loomulikku arvu, mille jagajateks on ainult arv ise ja arv üks.

2. Loomulikke arve, milledel on peale enese ja arvu üks veel teisi jagajaid, nimetatakse kordarvudeks.

3. Arv üks ei kuulu alg- ega kordarvude hulka. See on ainus loomulik arv, millel on ainult üks jagaja.

Seega tuleb eraldada loomulikkude arvude kolm kategooriat: 1. kategooriasse kuulub ainult arv üks; 2. kategooriasse kuuluvad kõik argarvud; 3. kategooriasse kuuluvad kõik kordarvud.

Näited: 1) 2, 3, 5, 7, 23 jne. — algarvud;
2) 9, 18, 64, 125 jne. — kordarvud.

Teoreem. **Iga algarv on ühistegurita kõikide temaga mittekordsete arvudega.**

Tõepoolest, algarvul, millel pole jagajaid peale enese ja arvu üks, on teise temaga mittejaguva arvuga ainult üks ühine jagaja — üks.

§ 88. Teoreem iga loomuliku arvu omadusest.

Igal loomulikul arvul peale arvu üks on vähemalt üks algarvuline jagaja.

1. juhtum. Kui a on algarv, siis vastavalt definitsioonile on selle jagajaks arv a ise ja üks. Järelikult omab arv a algarvulise jagaja, mis võrdub a-ga.

2. juhtum. On antud kordarv b. Tõestada, et arv b jagub mingi algarvuga.

1) Eelduse järgi b ei ole algarv ja seega peab omama jagaja, mis on suurem kui 1 ja väiksem kui b. Tekkigu b jagamisel jagajaga c jagatiseks arv q_1. Jagamise definitsiooni alusel võime kirjutada:

$$b = q_1 c.$$

Kui c on algarv, siis on teoreem tõestatud.

2) Kui aga c on kordarv, siis peab ta omama mingi jagaja d, mis on suurem kui 1 ja väiksem kui c. Tekkigu c jagamisel d-ga jagatiseks q_2, siis

$$c = q_2 d; \quad b = q_1 q_2 d.$$

Kui d on algarv, siis on teoreem tõestatud.

3) Oletame, et d on kordarv; siis peab d omama mingi jagaja e, mis on suurem kui 1 ja väiksem kui d. Tekkigu d jagamisel e-ga jagatiseks q_3.

Siis $d = q_3 e$ ehk $b = q_1 q_2 q_3 e$. Kui e on algarv, siis on teoreem tõestatud; kui aga mitte, siis on tarvis jätkata uurimist, kuni saame algarvulise jagaja. On selge, et selline jagaja saadakse, sest arvude rida $c, d, e, \ldots$ koosneb arvu b jagajaist, mis järjest vähenevad, kuid seejuures jäävad suuremaks arvust 1; seega peab nende arv olema piiratud. Et rida aga enne ei lõpe, kuni saadakse algarv, siis peab seega arv b omama mingi algarvulise jagaja.

§ 89. Teoreem kahe ühisteguriga arvu omadusest.

Kaks ühisteguriga arvu omavad vähemalt ühe algarvulise ühisjagaja.

Antud: loomulikud arvud a ja b.

$$(a\,;b) = c, \text{ kus } c > 1.$$

Tõestada, et arvud a ja b omavad vähemalt ühe algarvulise ühisjagaja.

1) Vastavalt ülal tõestatud teoreemile peab iga loomulik arv peale arvu 1 omama vähemalt ühe algarvulise jagaja (§ 88), ka arv c peab omama vähemalt ühe ühest erineva algarvulise jagaja;

2) a ja b on arvu c kordsed, järelikult a ja b on ka algarvulise jagaja d kordsed, sest $c : d$ (§ 63);

3) seega arvud a ja b omavad vähemalt ühe algarvulise jagaja.

§ 90. Eukleidese teoreem algarvude rea lõpmatusest.

Algarvude rida on lõpmatu.

On antud: algarvud 2, 3, 5, 7, 11, ..., K.

Tõestada: algarvust K suurema algarvu olemasolu.

1) Moodustades kõikide algarvude, arvust 2 kuni K, korrutise, saame: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \ldots \times K = P$.

2) Liites korrutisega P arvu 1, saame $P + 1$.

3) Kui saadud arv $P + 1$ on algarv, siis on teoreem tõestatud, sest $P + 1 > K$. Kui aga $P + 1$ on kordarv, siis peab ta omama veel mingi algarvulise jagaja.

4) Kuid selleks jagajaks ei saa olla ükski arv teoreemi eelduse järgi antud algarvudest 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., K, sest summa $P + 1$ koosneb kahest liidetavast, milledest esimene $P = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13, \ldots \times K$ jagub iga algarvuga reast 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., K ja teine liidetav — 1 ei jagu ühegagi neist, seega ka summa $P + 1$ ei jagu ühegagi antust algarvudest.

5) Seega peab arv $P+1$ omama mingi algarvulise jagaja K_1, mis on suurem kui K. Analoogiliselt arutledes võiksime tõestada, et K_1 pole viimaseks algarvuks. Järelikult on algarvude rida lõpmatu.

Vaadeldava teoreemi tõestas esmakordselt kuulus kreeka matemaatik Eukleides (20. teoreem tema 9-st raamatust „Alged").

Märkus. Eespool esitatud meetodil koostatud arv $P+1$ võib olla niihästi kordarv kui ka algarv:
Tõepoolest:

$$2+1=3 \text{ — algarv}$$
$$2\cdot 3+1=7 \text{ — algarv}$$
$$2\cdot 3\cdot 5+1=31 \text{ — algarv}$$
$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7+1=211 \text{ — algarv}$$
$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11+1=2311 \text{ — algarv}$$
$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13+1=30\,031=59\cdot 509 \text{ — kordarv}$$
$$2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17+1=510\,511=19\cdot 97\cdot 277 \text{ — kordarv.}$$

Nagu näeme on esimesed viis arvu $P+1$, mis koostatud näidatud viisil, algarvud, kuues ja seitsmes aga kordarvud.

§ 91. Algarvude tabel.

Juba vanast ajast alates on algarvud köitnud matemaatikute tähelepanu.

Eukleides tõestas ainult, et algarve on lõpmata palju, kuid ei andnud valemit algarvude koostamiseks. 20 sajandit hiljem mõtles prantsuse matemaatik Fermat, et on leiutanud valemi

$$2^{2^n}+1,$$

mille järgi mistahes n väärtusel võib saada algarvu. Fermat leidis, et valem $2^{2^n}+1$ annab algarvud n väärtustel 0, 1, 2, 3.

$$2^0=1;\ 2^1=2;\ 2^2=4;\ 2^3=8.$$

Nendel astendaja 2^n väärtustel saadakse tõepoolest järgmised algarvud: 3; 5; 17; 257. Toetudes sellele vaatlusele

(ja mõningatele teadmistele algarvude omadustest), Fermat väitis, et valem $2^{2^n}+1$ peab andma algarvu mistahes n väärtusel.

Kuid juba XVIII sajandil tõestas kuulus matemaatik Euler, Peterburi Teaduste Akadeemia liige, et $n=5$ puhul saadakse kordarv 4 291 967 297, mis jagub 641-ga. Hiljem leiti, et Fermat väide, et $2^{2^n}+1$ on algarv mistahes positiivse n puhul, on vale ka n väärtustel 6; 7; 8; 9; 11; 12; 18; 23; 36; 38 ja 73.

Kõik teised tuntud teaduslikud katsed valemi leidmiseks, mis annaks alati algarvu, osutusid tagajärjetuks. Et kõikide algarvude määramiseks pole üldist valemit, siis on seni algarvude tabelid asendamatud neil juhtudel, kui on tarvis määrata, kas antud arv on algarv või kordarv.

Eratosthenese tabel (sõel). Üheks lihtsamaks ja vanimaks algarvude tabeli koostamise meetodiks on Archimedese sõbra, Aleksandria matemaatiku, astronoomi ja geograafi Eratosthenese (sünd. 276. a., surn. 196. a. e. m. a. a.) meetod. Tema poolt esitatud meetod seisab järgmises: kirjutatakse välja loomulikkude arvude rida, alates arvust 2: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ..., 1000 ja kriipsutatakse läbi kõik kordarvud. Selle rea esimene arv on 2, mis vastavalt definitsioonile on algarv ja jääb läbi kriipsutamata. Algul kriipsutatakse läbi kõik arvud, mis jaguvad kahega, s. t. kõik paarisarvud peale arvu 2. Esimene läbikriipsutamata arv peale 2 on 3. See on algarv, sest ta ei jagu 2-ga (muidu oleks pidanud ta läbi kriipsutatama), järelikult 3 jagub ainult enesega ja ühega. Edasi kriipsutatakse läbi kõik 3-e kordsed arvud peale arvu 3. Järelikult kriipsutatakse läbi iga kolmas loomulikkude arvude rea arv, kui lugemist alata arvust, mis asetseb otseselt kolme järel. Esimeseks läbikriipsutamata arvuks on nüüd 5. See on algarv, sest ta ei jagu 2-ga ega 3-ga, muidu oleks tulnud ta läbi kriipsu-

tada, järelikult 5 jagub ainult ühega ja enesega. Siis kriipsutatakse läbi kõik 5-e kordsed arvud, s. t. iga viies arv (10, 15, 20, ...), alates 6-st. Esimene peale 5 läbikriipsutamata arv 7 on algarv. Jättes 7 vahele, kriipsutatakse läbi kõik 7-e kordsed arvud. Samuti kriipsutatakse läbi 11, 13 jne. kordsed arvud, kuni rea lõpuni. **Järelejäänud läbikriipsutamata arvud on algarvud.**

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121
122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133
134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145

Joon. 5.

See algarvude tabeli koostamismeetod on tuntud Eratosthenese sõela (joon. 5) nime all. See nimi on tekkinud sellest, et Eratosthenes kirjutas arvud vahaga kaetud tahvlile ja torkas augud läbi kohtadel, kus olid kordarvud. Seega oli tahvel otsekui sõelaks, millega sõeluti välja kõik kordarvud ja järele jäid ainult algarvud. Eratosthenes andis algarvude tabeli 1000 piiris.

Pärast Eratosthenest ilmus alles 1656. a. uus algarvude tabel arvudele kuni 10 000. Seejärel koostati tabeleid ikka suuremale algarvude hulgale ja lõpuks ameeriklane Lehmer koostas tabeli algarvudele kuni 10 006 721 (väljaantud 1914. a. Washingtonis).

Algarvude paigutus loomulikkude arvude reas.

Vaadeldes algarvude tabelit, näeme, et nad esinevad sagedamini ühe ja saja vahel; 100 ja 1000 vahel esinevad nad harvemini ja mida edasi, seda väiksemaks muutub nende esinemisesagedus.

Nii on 1 ja 100 vahel 25 algarvu; 1 ja 1000 vahel — 168; 1 ja 1 000 000 vahel — 78 439; 1 ja 2 000 000 vahel — 148 932. Algarvude hulka teatavas arvude vahemikus nimetatakse **algarvude absoluutseks tiheduseks.**

Jagades absoluutse tiheduse vahemikus olevate arvude hulgaga, saame algarvude suhtelise ehk relatiivse tiheduse, mis väljendub järgmistes protsentides: 1 kuni 100 — 25%, 1 kuni 1000 — 16,8%, 1 kuni 1 000 000 — 7,84% jne. Algarvude paigutus loomulikkude arvude reas ei ole seadusepärane.

Väliselt paistab paigutus juhuslikuna, kuid ilmselt on näha tiheduse muutumist vähenemise suunas.

Algarvude vahelduvuse ja jaotuvuse seadusepärasuse küsimus osutus niivõrd raskeks, et kuni käesoleva ajani pole suudetud sellele anda täielikku vastust, kuigi uurimiseks on kasutatud analüüsi peeneid ja keerulisi meetodeid.

Goldbachi probleem. Peterburi Teaduste Akadeemia liige Goldbach esitas oma kirjas kuulsale matemaatikule Eulerile oletuse, et **iga paarisarvu, mis on suurem kui 4, võib väljendada kahe algarvu summana või algarvu ja arvu üks summana.** Oma vastuses Euler kirjutab: „Teoreemi, et iga paarisarv on kahe algarvu summa, pean ma õigeks, sellest hoolimata, et ma seda tõestada ei suuda". Kahesaja aasta vältel on Goldbachi probleem jäänud lahendamatuks.

1937. aastal tõestas nõukogude matemaatik akadeemik Ivan Vinogradov, et **iga paaritu arv, mis on suurem teatavast jäävast suurusest, on kolme algarvu summa.** Mis puutub paarisarvudesse, siis võrduvad need alates mingist arvust nelja algarvu summaga.

Akadeemik Vinogradovi tööl on matemaatika arenemises ülemaailmne tähtsus, olles ühtlasi meie matemaatika silmapaistvaks edusammuks, sest ta andis uue võimsa meetodi algarvude teooria küsimuste uurimiseks. Kuid Goldbachi probleem pole seni täielikult siiski lahendatud.

§ 92. Algarvu tunnus.

Teoreem. **Kui antud arv A ei jagu ühegi algarvuga, mis on väiksem kui $\sqrt{A}$, siis A on algarv.**

Olgu 2; 3; 5; 7; ...; a algarvude rida, mis väiksemad kui $\sqrt{A}$.

Eelduse kohaselt ei jagu arv A ühegagi neist. On ilmne, et sel juhul A ei jagu ühegi teise loomuliku arvuga, mis väiksem kui $\sqrt{A}$, peale arvu 1, sest niisugune arv peaks omama vähemalt ühe algarvulise jagaja reast 2; 3; 5; 7; ...; a, millega peaks jaguma ka arv A, sest mingi arvu kordarv on ka selle arvu jagaja kordarv.

Veendume, et arv A ei saa antud juhul jaguda ühegi arvuga, mis suurem kui $\sqrt{A}$. Tõepoolest, kui $A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$, siis $A : \sqrt{A} = \sqrt{A}$. Järelikult saadakse arvu A jagamisel mingi arvuga, mis suurem kui $\sqrt{A}$, jagatiseks väiksem arv kui $\sqrt{A}$, sest jagaja suurenemisel jagatis väheneb.

Kuid jagatav on alati jagatise kordne, seega arv A peaks jaguma saadud jagatisega, mis pole aga võimalik, sest nagu nägime arv A ei jagu ühegi arvuga, mis väiksem kui $\sqrt{A}$. Järelikult, antud juhul jagub arv A ainult enesega ja ühega. Tähendab A on algarv.

Kasutades esitatud teoreemi, saab teada, kas antud arv on algarv või kordarv.

Selgitame seda näitel. Võtame arvu 919 ja selgitame, kas see on algarv või kordarv. Kirjutame üles kõik algarvud, mis väiksemad kui $\sqrt{919}$: 2; 3; 5; 7; ...; 29, ja hakkame jagama arvu 919 nendega. 919 ei jagu ühegagi neist. Tähendab 919 on algarv.

Kanooniline arvude algtegureiks lahutamine.

§ 93. Põhiteoreemid ja nende järeldused.

Teoreem 1. **Kui mitme arvu korrutis jagub antud algarvuga, siis vähemalt üks tegureist jagub selle arvuga.**

Vaatleme algul kahe teguri korrutist ja seejärel mistahes tegurite arvuga korrutist.

A) Antud: korrutis ab ja algarv p; $(ab) \vdots p$.

Tõestada: vähemalt üks tegureist (a või b) jagub p-ga.

Kui arv a jagub p-ga, siis on teoreem tõestatud.

Kui aga a ei jagu p-ga, siis a ja p on ühistegurita arvud, sest iga algarv on ühistegurita arvu suhtes, mis temaga ei jagu.

Kui aga algarv p on arvude a ja b korrutise jagaja, olles seejuures ühistegurita ühega neist (antud juhul a-ga), siis jagub temaga kindlasti teine arv (§ 78).

Järelikult: $b \vdots p$.

B) Antud: arvude $a \cdot b \cdot c \ldots k \cdot l$ korrutis, mis jagub algarvuga p.

Tõestada: arv p on ühe teguri jagaja.

Korrutise assotsiatiivsuse seaduse alusel võib antud korrutist vaadelda kui kahe teguri korrutist: $a \cdot b \cdot c \ldots k \cdot l = a(b \cdot c \ldots k \cdot l)$.

Kui korrutise $a(b \cdot c \ldots k \cdot l)$ tegur a jagub p-ga, siis on teoreem tõestatud.

Kui aga a ei jagu p-ga, siis peab p-ga jaguma teine tegur $(b \cdot c \ldots k \cdot l)$. Esitame ka selle korrutise kahe teguri korrutisena: $b \cdot c \ldots k \cdot l = b(c \ldots k \cdot l)$.

Kui üks selle korrutise tegureist b jagub p-ga, siis on teoreem tõestatud.

Kui aga b ei jagu p-ga, siis b ja p on ühistegurita arvud ja p-ga peab jaguma teine tegur $(c \ldots k \cdot l)$.

Jätkates samu arutlusi korrutise $(c \ldots k \cdot l)$ suhtes, me teeme kindlaks, et tegur c jagub p-ga või lõppude-lõpuks jõuame järelduseni, et l jagub p-ga. Järelikult, kui korrutis $(a \cdot b \cdot c \ldots k \cdot l) : p$, siis vähemalt üks tegureist jagub samuti p-ga.

Järeldus 1. **Kui mitme algarvu korrutis jagub antud algarvuga, siis võrdub see arv ühe teguriga.** Tõepoolest, kui korrutis jagub antud algarvuga, siis peab sellega jaguma vähemalt üks tegureist. Kuid eelduse järgi on kõik tegurid algarvud, mistõttu nad jaguvad ainult enesega ja ühega. Järelikult peab üks tegureist tingimata võrduma jagajaga. Näiteks: 70 jagub 2-ga; $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$, kus 2, 5 ja 7 on algarvud. Seega korrutise üks tegureist tõepoolest võrdub jagajaga 2.

Järeldus 2. **Kui mingi arvu aste jagub mingi algarvuga, siis ka arv ise jagub selle algarvuga.**

Kui a^3 jagub algarvuga p, siis ka a peab jaguma p-ga, sest aste on võrdsete tegurite korrutis.

Järeldus 3. **Kui kaks arvu on ühistegurita, siis ka nende astmed on ühistegurita.**

Kui a ja b on ühistegurita arvud, siis a^3 ja b^3 peavad samuti olema ühistegurita arvud. Tõepoolest, kui a^3 ja b^3 ei oleks ühistegurita arvud, siis peaksid nad omama mingi algarvulise jagaja p. Kui aga a^3 ja b^3 jaguvad arvuga p, siis peaks p-ga jaguma ka a ja b. Sel juhul aga a ja b ei oleks ühistegurita arvud, mis on vasturääkiv eeldusele.

Teoreem 2. **Kui antud arv on ühistegurita korrutise iga teguriga, siis on ta ühistegurita ka korrutisega.**

Antud: arv p, mis on ühistegurita korrutise $a \cdot b \cdot c \ldots k \cdot l$ iga teguriga.

Tõestada: arv p on ühistegurita korrutisega $a \cdot b \cdot c \ldots k \cdot l$.

Oletame, et arv p ja korrutis $a \cdot b \cdot c \ldots k \cdot l$ pole ühistegurita arvud ja omavad mingi ühise algarvulise jagaja d, mis on suurem kui 1.

Siis peaks d-ga jaguma korrutise mingi tegur, näiteks p (§ 93), kuid see on vasturääkiv teoreemi eeldusele.

Järelikult arv p ja korrutis $a \cdot b \cdot c \ldots k \cdot l$ on ühistegurita arvud.

Näiteks, kui arvud 15 ja 21 on ühistegurita arvuga 16, siis ka korrutis $15 \cdot 16$ on ühistegurita arvuga 16.

Teoreem 3. **Iga kordarv võrdub algarvude korrutisega.**

Antud: kordarv N.

Tõestada: N võrdub algarvude korrutisega.

Et iga kordarv omab vähemalt ühe algarvulise jagaja, siis $N = p_1 k_1$, kus p_1 on algarv; kui k_1 on algarv, siis teoreem on tõestatud. Kui k_1 on kordarv, siis peab ta omama mingi algarvulise jagaja p_2. Järelikult: $k_1 = p_2 k_2$.

Siis $N = p_1 p_2 k_2$.

Kui k_2 on algarv, siis teoreem on tõestatud; kui ta on aga kordarv, siis peab ta omama algarvulise jagaja p_3, s. t. $k_2 = p_3 k_3$.

Siis $N = p_1 p_2 p_3 k_3$.

Jätkates arutlust samal viisil, saame järjestikku:

$$N = p_1 p_2 p_3 p_4 k_4,$$
$$N = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 k_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$N = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \ldots p_n k_n.$$

Saadud võrrandite paremal pool on kõik tegurid peale viimase algarvud. Arvud $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_n$ vähenevad jär-

jest, kuid peavad jääma ühest suuremaks. Järelikult peab see rida lõppema mingi algarvuga k_n.

Seega kujutab võrduse $N = p_1 p_2 p_3 \dots p_n k_n$ parem pool algarvude korrutist. Nii saab iga kordarvu väljendada võrdsete või mittevõrdsete algarvude korrutisena. Kui kordarv on kujutatud algarvuliste tegurite korrutisena, siis öeldakse, et arv on lahutatud algtegureiks.

Arvu lahutamine algtegureiks seisab algarvude leidmises, millede korrutisega võrdub antud arv.

Võrdseid tegureid on viisiks kirjutada astme kujul, astendajaga, mis näitab antud teguri kordumiste arvu.

Arvu N algtegureiks lahutades tähistame tähtedega $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ erinevaid algtegureid ja tähtedega $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ vastavalt nende kordumiste arvu, saame **arvu N kanoonilise tegureiks lahutuse:**

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}.$$

Näide: Arvu 105 840 kanooniline lahutus on

$$105\,840 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

§ 94. Teoreem arvu kanoonilise lahutuse ühesusest.

Iga ühest suurem loomulik arv lahutub ainult üheks algtegurite reaks.

Antud: loomulik arv $N > 1$.

Tõestada: arvu N saab lahutada ainult üheks algtegurite reaks.

Oletame, et arvu N lahutamisel saime kaks rida:

$$N = abc \dots k,$$
$$N = a_1 b_1 c_1 \dots k_1 mn,$$

kus tegurid $a, b, c, \dots, k$ ja $a_1, b_1, c_1, \dots k_1, m, n$ on algarvud.

Kirjutatud võrdustest järgneb:

$abc \dots k = a_1 b_1 c_1 \dots k_1 mn$ (transitiivsus).

Korrutis $abc \ldots k$ jagub a-ga, sest selle korrutise üks tegureist on a ja seega peab jaguma a-ga (§ 67).

Kuid korrutis $abc \ldots k$ võrdub korrutisega $a_1b_1c_1 \ldots k_1mn$, siis peab ka viimane korrutis jaguma a-ga.

Kui aga korrutis $a_1b_1c_1 \ldots k_1mn$ jagub a-ga, siis vähemalt üks selle korrutise tegureist jagub a-ga. Oletame, et $a_1 \vdots a$.

Kuid a_1 ja a on algarvud ja seega võrdsed, sest nad jaguvad teine teisega. Tähendab, $a = a_1$.

Monotoonsuse seaduse alusel saame:

$$bc \ldots k = b_1c_1 \ldots k_1mn.$$

Toimides viimase võrdusega samuti kui eelmisega, tõestame, et $b = b_1$ ja jõuame võrduseni $c \ldots k = c_1 \ldots k_1mn$.

Samuti tõestame, et esimese korrutise iga tegur võrdub vastavalt teise korrutise ühe teguriga ja nimelt:

$$a = a_1;\ b = b_1;\ c = c_1;\ \ldots;\ k = k_1.$$

Korrutis $abc \ldots k = (abc \ldots k) \cdot 1$.

Korrutis $a_1b_1c_1 \ldots k_1mn = (a_1b_1c_1 \ldots k_1)mn =$
$= (abc \ldots k)mn$ (sest vastavalt tõestusele võrduvad ühe korrutise tegurid vastavalt teise korrutise teguritega).

Kumbki vaadeldav korrutis võrdub antud arvuga N, seepärast $(abc \ldots k) \cdot 1 = (a \cdot b \cdot c \ldots k)mn$.

Siit järgneb, et $mn = 1$.

Kuid kahe täisarvu korrutis võrdub ainult siis ühega, kui mõlemad tegurid võrduvad ühega.

Tähendab: $m = 1$ ja $n = 1$.

Järelikult saab iga kordarvu N lahutada **ainult üheks algtegurite reaks**, mille tegurite korrutis võrdub antud kordarvuga, erinevus kanoonilise lahutuse ridades võib olla ainult tegurite järjekorras.

Märkus. Kui mingi algtegur esineb esimeses reas mitu korda, siis mõlemate ridade võrdsuse tõttu peab sama tegur ka

teises reas esinema samapalju kordi. Oletame näiteks, et teises reas on tegureid a neli ja esimeses seitse. Jättes järjest neli korda kummaski võrduses ära teguri a (monotoonsuse seaduse alusel), saame uued võrdsed korrutised. Kuid see pole võimalik, sest esimeses korrutises on veel tegureid a kolm, teises korrutises neid aga enam ei esine. Järelikult on vale oletus, et tegur a esineb ühes korrutises rohkem arv kordi kui teises.

Tähendab, mõlemas reas peavad võrdsed algtegurid esinema sama arv korda. Järelikult peavad mõlemad read olema samased.

§ 95. Kanoonilise lahutuse tehnika.

Selleks, et lahutada antud arvu algtegureiks, toimitakse järgmiselt: kasutades jaguvuse tunnuseid, leitakse väikseim algarv, millega jagub antud arv ja jagatakse antud arv selle leitud algarvuga; siis leitakse saadud jagatise väikseim algtegur ja teostatakse sellega jagamine, seejärel leitakse saadud jagatise väikseim algtegur jne., seni, kui jagatises tekib algarv, mis on antud arvu viimaseks otsitavaks algteguriks; kõik eelmised jagajad on ülejäänud algtegurid.

Võtame näiteks arvu 4 116 420 ja leiame selle kanoonilise lahutuse.

Aritmeetika elementaarkursusest on teada, et algtegureiks lahutust kirjutatakse harilikult nii:

4 116 420	2
2 058 210	2
1 029 105	3
343 035	3
114 345	3
38 115	3
12 705	3
4 235	5
847	7
121	11
11	11

Ühe ja sama jagajaga tuleb katsetada mitu korda järjest (antud näites 2, 3 ja 11) niikaua, kuni ei teki enam täisarvulisi jagatisi.

Siis tuleb ta ära jätta, sest iga eelnev jagatis on iga järgneva kordne ja seega, kui mingi eelnev jagatis ei jagu mõne algarvuga, siis ka järgnev jagatis ei jagu selle arvuga.

Resultaat kirjutatakse järgmiselt:

$$4\,116\,420 = 2^2 \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11^2.$$

Kui lahutamisele tulev arv on tuntud arvude korrutis, siis võib lahutuse lihtsustamiseks neid lahutada eraldi tegureiks ja saadud algteguritest koostada uus korrutis. Olgu näiteks tarvis lahutada algtegureiks 504 000. Arv 504 000 võrdub arvude 504 ja 1000 korrutisega. Lahutades kumbagi arvu eraldi algtegureiks, saame:

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7;$$
$$1000 = 2^3 \cdot 5^3.$$

Siis antud arv $504\,000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 5^3$

ehk $504\,000 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7.$

XV peatükk.

Arvude algtegureiks lahutamise teooria rakendamine antud arvude S. Ü. ja V. Ü. leidmisel.

§ 96. Vajalik ja piisav tingimus ühe arvu jagumiseks teisega.

Selleks, et antud arv jaguks teisega on vajalik ja piisav, et jagaja iga algtegur sisalduks jagatavas mitte väiksema astendajaga kui jagajas.

1. **See tingimus on vajalik.** Tõepoolest oletades, et $a : b = q$; siis $a = bq$. Et arv a ja korrutis bq on võrdsed,

siis peavad nende kanoonilised algtegureiks lahutused olema samased (§ 94). Järelikult peavad jagaja b kõik algtegurid samal või väiksemal määral esinema jagatavas a, teiste sõnadega, nad peavad omama astendaja, mis pole väiksem nende astendajast jagajas.

2. See tingimus on piisav. Tõepoolest, kui jagatav a sisaldab kõiki jagaja b tegureid, seejuures sama või väiksema astendajaga, siis võib korrutamise assotsiatiivsuse seaduse alusel jagada jagatava tegurid kahte rühma nii, et ühe koostises oleksid kõik arvu b tegurid samal määral kui arvus b; siis on ilmne, et $a : b$ (§ 67) ja et jagatis võrdub nende tegurite korrutisega, mis ei esine jagajas.

Näide: $a = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 19$;

$b = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$.

$$a : b = (2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 19) : (2^2 \cdot 5 \cdot 7) =$$
$$= [(2^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 19)] : (2^2 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 19.$$

§ 97. Kahe või enama algtegureiks lahutatud arvu S. Ü. leidmine.

Võtame arvud: $A = a^5b^4c^4d$; $B = a^3b^2c^5$; $C = a^7b^6c^{12}f^2$ ja leiame nende S. Ü.

Eelmisest teoreemist (§ 96) järgneb, et S. Ü., olles iga antud arvu jagaja, peab sisaldama oma kanoonilises lahutuses arvude A, B ja C ainult ühiseid algtegureid ja et S. Ü. lahutuse algtegurite astendajad ei või ületada antud arvude vastavate tegurite väikseimat astendajat.

Järelikult võrdub arvude A, B ja C S. Ü. algarvude a, b ja c korrutisega, mis võetud väikseima astendajaga, millega nad esinevad antud arvudes ja nimelt arvu a astendajaga 3, arvu b astendajaga 2 ja arvu c astendajaga 4.

Seega

$$(A;\ B;\ C) = a^3b^2c^4.$$

Kahe või enama algtegureiks lahutatud arvu suurim ühisjagaja võrdub antud arvude ühiste algtegurite korrutisega, mis võetud väikseima astendajaga, millega nad esinevad antud arvudes.

Näide: Antud on arvud $192 = 2^6 \cdot 3$; $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$; $288 = 2^5 \cdot 3^2$; $336 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$. Leida nende S. Ü.

Nelja arvu lahutustes on ühisteks algteguriteks ainult 2 ja 3. Väikseim astendaja, millega 2 esineb nendes arvudes on 4, 3-mel aga on vastav astendaja 1.

Järelikult: $(192; 240; 288; 336) = 2^4 \cdot 3 = 48$.

§ 98. Praktiline võte mitme arvu S. Ü. kiireks leidmiseks nende arvude algtegureiks lahutamise teel.

Antud on arvud: 300, 480, 720, 540 ja 840; leida nende S. Ü.

300	480	720	540	840	2
150	240	360	270	420	2
75	120	180	135	210	3
25	40	60	45	70	5
5	8	12	9	14	

Kirjutame andmed horisontaalsesse ritta ja tõmbame viimase arvu järgi vertikaalse kriipsu. Seejärel jagame kõik rea arvud 2-ga ja kirjutame jagatised vastavate arvude alla. Edasi jagame saadud esimesed jagatised uuesti 2-ga (kui igaüks neist jagub sellega) ja kirjutame saadud teised jagatised 75, 120, 180, 135 ja 210 esimeste jagatiste alla. Peale selle jagame saadud teised jagatised 3-ga (sest mõned jagatistest ei jagu 2-ga) ja kirjutame saadud kolmandad jagatised 25, 40, 60, 45 ja 70 teiste alla. Jätkame niiviisi jagamist järjest kõikide algarvudega niikaua, kuni on ühiseid jagajaid. Kõikide saadud jagajate korrutis $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ ongi arvude 300, 480, 720, 540 ja 840 S. Ü.

§ 99. Antud arvu kõikide jagajate leidmine.

Igal algarvul on ainult kaks jagajat: üks ja arv ise.

Igal kordarvul on rohkem kui kaks jagajat. Näiteks on arvul 12 6 jagajat: 1, 2, 3, 4, 6 ja 12. Vaatleme, kuidas leida mingi kordarvu jagajaid. On ilmne, et **mistahes arvu üheks jagajaks on üks.**

Vastavalt ühe arvu jaguvuse tingimusele teise arvuga (§ 97) peab iga antud arvu jagaja peale 1, koosnema algtegureist, mis esinevad selle arvu kanoonilises lahutuses sama või väiksema astendajaga.

Seepärast, et leida kõiki teisi kordarvu jagajaid, lahutatakse see kordarv algtegureiks; iga saadud algtegur on antud arvu algarvuliseks jagajaks; algtegurite korrutamisel kahe, kolme, nelja jne. kaupa saadakse kõik selle arvu ülejäänud jagajad.

Oletame, et antud arv $N = a^3b^2c$. Üheks selle arvu jagajaks on üks. Kõik teised jagajad peavad koosnema algtegureist: a, b ja c, mis esinevad arvu N kanoonilises lahutuses samade või väiksemate astendajatega. Koostame need, juhindudes esitatud reeglist. Et mitte vahele jätta ühtki jagajat, võib toimida järgmiselt:

1) kirjutada arvu N algtegurite kõik astmed eraldi ridadesse, kusjuures esimest rida alustada ühega;

2) kirjutada välja kogu esimese rea arvud;

3) kirjutada välja iga esimese rea arvu korrutis iga teise rea arvuga;

4) kirjutada iga saadud korrutise korrutis iga kolmanda rea arvuga;

5) edasi korrutada igat saadud arvu iga neljanda rea arvuga jne.

Kirjutist on otstarbekohane paigutada järgmiselt:

		$N = a^3b^2c$
$1;\ a;\ a^2;\ a^3$	(I)	$1;\ a;\ a^2;\ a^3;$
$b;\ b^2$	(II)	$b;\ ab;\ a^2b;\ a^3b;\ b^2;\ ab^2;$ $a^2b^2;\ a^3b^2;$
c	(III)	$c;\ ac;\ a^2c;\ a^3c;\ bc;\ abc;$ $a^2bc;\ a^3bc;\ b^2c;\ ab^2c;$ $a^2b^2c;\ a^3b^2c.$

On kerge näha, et antud arv N jagub iga saadud rea arvuga; sest iga jagaja koosneb antud arvu algtegureist sama või väiksema astendajaga, millega need tegurid esinevad arvu N lahutuses. Mingisuguseid teisi jagajaid peale eespool leitute pole arvul N olemas.

Tõepoolest, olgu d mingi antud arvu N jagaja, q aga N ja d jagatis.

Siis: $N = dq$.

Oletame, et arvud N, d ja q on lahutatud algtegureiks. Et $N = dq$, siis on N ja korrutise dq kanoonilised lahutused samased (§ 94). Tähendab, need algarvud, milleks lahutub jagaja d, moodustavad osa arvu N algarvudest. See otsus kehtib eespool leitud jagajate rea iga jagaja kohta. Tähendab, ülaltoodud reegli alusel saab leida kõiki kordarvu jagajaid.

Kordarvu kõikide jagajate arv võrdub selle kordarvu kanoonilise algteguriteks lahutuse kõikide ühe võrra suurendatud algtegurite astendajate korrutisega.

Tõepoolest, koostades arvu N kõikide jagajate rida, me toimisime järgmiselt: algul kirjutasime välja 4 esimese rea jagajat, siis korrutasime igat nelja jagajat algul teise rea esimese arvuga, siis teise arvuga ja leidsime nii $4 \cdot 2$, s. o. 8 uut jagajat, endistega kokku aga $4 + 8$ ehk 12 jagajat; pärast seda korrutasime igat leitud 12 jagajat kolmanda rea arvuga ja nii leidsime veel arvu N 12 jagajat, kokku saime seega $12 + 12 = 24$ jagajat.

On ilmne, et suurendades arvu N iga algteguri astendajat ühe võrra ja korrutades saadud arvud, me leiamegi antud arvu jagajate üldarvu.

Tõepoolest, kuna $N = a^3b^2c$, siis arvu N kõikide jagajate arv on $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Näide 1. Leida arvu 360 kõik jagajad. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Järelikult peab sellel arvul olema $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ jagajat. Leiame kõik need jagajad.

1; 2; 4; 8	(I)	1; 2; 4; 8;
3; 9	(II)	3; 6; 12; 24; 9; 18; 36; 72;
5	(III)	5; 10; 20; 40; 15; 30; 60; 120; 45; 90; 180; 360.

Näide 2. Leida arvu 6600 kõik jagajad.

6600	2
3300	2
1650	2
825	3
275	5
55	5
11	11

$6600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$

Arv 6600 peab omama $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ jagajat.

Koostame kõikide nende jagajate rea:

1; 2; 4; 8;	(I)	1; 2; 4; 8;
3;	(II)	3; 6; 12; 24;
5; 25;	(III)	5; 10; 20; 40; 15; 30; 60; 120; 25; 50; 100; 200; 75; 150; 300; 600;
11;	(IV)	11; 22; 44; 88; 33; 66; 132; 264; 55; 110; 220; 440; 165; 330; 660; 1320; 275; 550; 1100; 2200; 825; 1650; 3300; 6600.

§ 100. Kahe või mitme algtegureiks lahutatud arvu V. Ü. leidmine.

Võtame arvud: $A = a^5b^4c^4d$; $B = a^3b^2c^5$ ja $C = a^7b^6c^{12}f^2$ ja leiame nende V. Ü.

Ühe arvu teise arvuga jaguvuse tingimuse kohaselt (§ 94) peab arvude A, B ja C iga ühiskordne, olles jagatavaks, oma kanoonilises lahutuses sisaldama antud arvude algtegureid astendajatega, mis on võrdsed või suuremad arvude A, B ja C algtegurite astendajaist.

Järelikult võrdub V. Ü. $(A; B; C)$ algarvude a, b, c, d ja f korrutisega, kui need algarvud on võetud suurimate astendajatega, millega nad esinevad antud arvudes, s. o. a^7, b^6, c^{12}, d ja f^2.

Nende arvude korrutis annab meile tõepoolest V. Ü., sest kui eraldada sellest korrutisest kas või ükski tegur, siis ta ei jagu vähemalt ühe antud arvuga ja ei ole seega ühiskordseks.

Seega V. Ü. $(A; B; C) = a^7b^6c^{12}df^2$.

Niisiis, **kahe või mitme algtegureiks lahutatud arvu väikseim ühiskordne võrdub antud arvude kõikide algtegurite korrutisega, kui need algtegurid on võetud suurimate astendajatega, millega nad esinevad antud arvude lahutustes.**

Näide: Antud arvud: $192 = 2^6 \cdot 3$; $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$; $288 = 2^5 \cdot 3^2$ ja $366 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$.

V. Ü. $(192; 240; 288; 336) = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 20\,160$.

§ 101. Arvude V. Ü. kiire leidmise praktiline võte nende algtegureiks lahutamise teel.

Antud on arvud: 300, 160, 720, 540 ja 840. Leida nende V. Ü.

300	160	720	540	840	2
150	80	360	270	420	2
75	40	180	135	210	2
75	20	90	135	105	2
75	10	45	135	105	2
75	5	45	135	105	3
25	5	15	45	35	3
25	5	5	15	35	3
25	5	5	5	35	5
5	1	1	1	7	5
1	1	1	1	7	7
1	1	1	1	1	

Kirjutame antud arvud horisontaalsesse ritta; viimase arvu 840 järgi tõmbame vertikaalse joone, jagame rea kõik arvud 2-ga ja kirjutame jagatised antud arvude alla.

Saadud jagatised jagame uuesti 2-ga ja saadud jagatised 75, 40, 180, 135 ja 210 kirjutame esimeste jagatiste alla. Edasi teised jagatised 40, 180 ja 210 jagame uuesti 2-ga ja kolmandad jagatised 20, 90 ja 105 kirjutame teiste alla; teised jagatised 75 ja 135, mis ei jagunud 2-ga, kirjutame neljandasse ritta. Jätkates niisugust jagamist, saame lõpuks 12-ndal real jagatised, mis kõik võrduvad ühega. Kõikide jagajate korrutis $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 151\,200$ ongi antud arvude V. Ü.

Murdarvud.

XVI peatükk.

Harilikud murrud.

§ 102. Murdude tekkimine ja definitsioon.

Looduses esineb suurusi, mida füüsiliselt on võimalik jaotada kuitahes paljudeks võrdseteks osadeks (näiteks pikkus, raskus, aeg jms.).

Nende suuruste mõõtmist ei saa kaugeltki mitte alati teostada ainult loomulikkude arvude abil.

Ilmselt võib mingi suuruse A mõõtmise resultaati, mõõtmisel mõõduühikuga B, väljendada ainult siis loomuliku arvuga, kui ühik B sisaldub suuruses A täisarv kordi. Vastasel korral ei saa mõõtmise tulemust väljendada mingi loomuliku arvuga. Selleks, et teostada niisugusel juhul mõõtmist, jaotatakse mõõduühik B n võrdseks osaks, arvestusega, et üks säärane osa sisalduks suuruses A mingi arv korda, näiteks m korda. On selge, et loomulik arv m ei näita mitte, mitu korda sisaldub suuruses A mõõduühik B, vaid selle n-ndik, mis on suuruste A ja B ühiseks mõõduks ja seega uueks mõõduühikuks.

Suuruse A mõõtmise resultaadi väljendamiseks mõõduühiku B abil on vajalik tarvitusele võtta uus arv, mida märgitakse sümboliga $\frac{m}{n}$ ja mida nimetatakse **murdarvuks** ehk **murruks.**

See arv näitab, et suurus A sisaldab m n-dikku tervikust B, s. t. suurus A võrdub mõõduühiku B m n-ndikuga.

Arvu m nimetatakse **lugejaks** ja arvu n **nimetajaks.** Murru nimetaja näitab, mitmeks võrdseks osaks on jaotatud mõõduühik B, s. t. miesugune selle mõõduühiku osa on võetud uueks mõõduühikuks. Murru lugeja aga näitab, mitu korda see uus ühik sisaldub mõõdetavas suuruses A.

Kui me mõõdame mingit suurust, näiteks klassitahvli pikkust, siis peame seda võrdlema mingi samaliiki suurusega, mis võetud mõõduühikuks, näiteks meetriga. Oletame, et meeter mahtus tahvli pikkusesse üks kord, kusjuures tekkis meetrist väiksem jääk. Sel juhul jaotame meetri mitmeks võrdseks osaks ja mõõdame tahvli pikkuse jäägi selle osaga. Jaotades meetri 10-ks võrdseks osaks, s. t. kümnendikkudeks, mõõdame jäägi meetri kümnendikkudega ja leiame, et jäägis sisaldub 7 kümnendikku meetrit. Järelikult on tahvli pikkus üks meeter ja 7 kümnendikku meetrit. Antud juhul saime mõõtmise tulemusena murdarvu. Kui mõõtmise tulemusena saadud murdarvu nimetusele lisada mõõduühiku nimetus, siis saame nimega murdarvu.

Terviku võrdsetest osadest üht osa nimetatakse arvsõnaga, mille lõpuks on „-ndik". Jaotades mõõduühiku kümneks võrdseks osaks, nimetame üht neist — mõõduühiku kümnendikuks.

Edaspidi mõistame alati arvsõna all, mille lõpuks on „-ndik", **terviku võrdseteks osadeks jaotamise puhul saadud ühte osa ja sõna osa all kõike, mis ei ole tervik.** Näiteks $\frac{7}{10}$ on osa, mis **koosneb terviku 7-st kümnendikust.** Kui $\frac{7}{10}$ puhul räägitakse, et tervik on jaotatud 10-ks osaks, siis väljenduses: **„tervik on jaotatud 10-ks osaks"** tuleb sõnale **osaks** tingimata ette kirjutada sõna **võrdseks.** Kui aga räägitakse, et tervik on jaotatud 7-ndikkudeks, siis on mainitud sõna lisandamine tarbetu.

Esitatust järgneb, **et murdarvuks ehk murruks nimetatakse terviku üht osa või kogumikku terviku mitmest võrdsest osast.**

Näiteks 1 kümnendik, 2 kümnendikku ja 7 kaheksandikku on murdarvud.

Sel teel tekib murdarv **mõõtmise tulemusena.**

Kuid ta võib tekkida ka **jagamise tulemusena.**

Vaadeldes loomulikkude arvude jagamist, me tegime kindlaks (§ 38), et paljudel juhtudel ei ole võimalik ainult täisarve kasutades leida arvude a ja b jagatist, kuigi selle järgi on sageli tarvidus.

Selgitame seda näitel. Oletame, et on tarvis 2 võrdse kaaluga saia jaotada võrdselt 3-le lapsele. On ilmne, et täisarvude hulgast pole võimalik leida jagatist, mis näitab, kui palju saia saab iga laps. Et vastata sellele küsimusele, jaotame esimese saia kolmeks võrdseks osaks ja anname igale lapsele ühe võrdse osa. Siis jaotame teise saia kolmeks võrdseks osaks ja anname samuti igale lapsele teisest saiast ühe võrdse osa. Niiviisi saab iga laps kummastki saiast ühe kolmandiku ehk kolmandiku kahest saiast. Kuid selle asemel, et jagada kumbki sai kolmeks võrdseks osaks ja anda igale lapsele üks osa esimesest saiast ja üks osa teisest saiast, võib anda esimesele lapsele kaks kolmandikku esimesest saiast, teisele kaks kolmandikku teisest saiast ja kolmandale ülejäänud kaks kolmandikku. Nii leidsime, et iga laps saab $\frac{2}{3}$ saia. Esitatust järgneb, et murdarv $\frac{2}{3}$ võib tekkida kahel viisil: **kas jaotades tervikut kolmeks võrdseks osaks ja võtta neid osi kaks või jaotades kaks tervikut kolmeks võrdseks osaks.**

Vaatleme teist näidet: arvu 5 on tarvis vähendada 7 korda, s. t. arvu 5 asemel on tarvis võtta 1 seitsmendik sellest arvust. Me teame juba (§ 41), et selliseid ülesandeid lahendatakse jagamisega; kuid kasutades ainult loomulikke

arve, ei ole võimalik jagada arvu 5 arvuga 7. Selleks, et leida 1 seitsmendikku arvust 5, jaotame selle arvu iga ühelise seitsmeks võrdseks osaks; võttes igalt üheliselt 1 seitsmendiku, leiame, et seitsmendik 5-st ühelisest võrdub $\frac{5}{7}$-ga. Tähendab seitsmendik arvust viis on $\frac{5}{7}$.

Kuid seitsmendikku arvust 5 on võimalik leida ka järgmiselt: seitsmendik ühest ühelisest on $\frac{1}{7}$; seitsmendik teisest ühelisest on samuti $\frac{1}{7}$; kui niiviisi võtta seitsmendik igalt 5-lt üheliselt, siis saame $\frac{5}{7}$.

Vaadeldud näites jaotasime arvu 5 seitsmeks võrdseks osaks ja leidsime ühe seitsmendiku arvust 5.

Seega, $5 : 7 = \frac{5}{7}$. Niisiis **selleks, et jaotada täisarvu mitmeks võrdseks osaks, tuleb võtta see täisarv murru lugejaks, nimetajaks aga kirjutada teine arv, mis näitab mitmeks võrdseks osaks on jaotatud täisarv.**

Järelikult, **murdarvu võib vaadelda kahe loomuliku arvu** (lugeja ja nimetaja) **jagatisena juhul, kui jagatiseks ei ole võimalik saada täisarvu.**

Sellest vaatekohast võib igat murdu vaadelda kui ühte osa terviku võrdsetest osadest või kogumikku mitmest võrdsest osast, samuti ka kui **mitme terviku üht võrdset osa.** Näiteks murd $\frac{2}{3}$ ei ole mitte ainult **kaks ühe terviku kolmandikku,** vaid on ka **kahe terviku kolmandik.**

Murru lugeja ja nimetaja võivad olla mistahes loomulikud arvud.

Tähendame, et murru lugeja võib olla ka null. Murru nimetaja aga ei saa võrduda nulliga.

Niisiis, et oleks võimalik suuruste mõõtmine ja arvude jaotamine ka sel juhul, kui nendeks operatsioonideks ei piisa

ainult loomulikkudest arvudest, on **tarvilik laiendada arvude valdkonda murdarvudega** (murdudega).

Edasises käsitluses nimetame loomulikke arve täisarvudeks, et eraldada neid murdarvudest.

§ 103. Murdude võrdsus ja põhiomadused.

Võtame kolm mingit võrdset suurust, näiteks kolm pikkust A_1, A_2 ja A_3 ning mõõdame neid ühe ja sama pikkusühikuga — meetriga.

Oletame, et need pikkused on meetrist väiksemad. Siis peame nende mõõtmiseks valima meetri mingi osa, mis sisaldub mõõdetavas suuruses täisarv kordi. Oletame, et pikkuse A_1 mõõtmiseks oleme võtnud ühe neljandiku meetrist ja A_1 pikkuseks on $\frac{3}{4}$ meetrit. Jaotame nüüd iga veerand meetri viieks võrdseks osaks. Saame meetri peenestatud osad, mida on $\frac{1}{4}$ meetris 5, tähendab tervikus on neid $5 \cdot 4 = 20$; järelikult on need meetri kahekümnendikud; $\frac{3}{4}$ meetris on kahekümnendikke $5 \cdot 3 = 15$.

Pikkus $A_2 = A_1$, tähendab pikkus A_2 võrdub samuti $\frac{3}{4}$ meetriga, ent kui me oleks hakanud seda pikkust mõõtma veerand meetrite asemel kahekümnendikega, siis me oleks saanud A_2 pikkuseks $\frac{15}{20}$ meetrit. Et võrdsed pikkused A_1 ja A_2 on mõõdetud sama pikkusühikuga (meetriga), siis võime teha järelduse, et $\frac{3}{4}$ meetrit võrdub $\frac{15}{20}$ meetriga ehk murd $\frac{3}{4}$ võrdub murruga $\frac{15}{20}$.

Jaotades iga veerand meetri 25-ks võrdseks osaks, peenestame meetri veel väiksemateks osadeks. Niisuguseid osi

on $\frac{1}{4}$ meetris 25, seega 1 meetris, s. t. tervikus on neid $25 \cdot 4 = 100$; järelikult on need meetri sajandikud; $\frac{3}{4}$ meetris on sajandikke $25 \cdot 3 = 75$.

Pikkus $A_3 = A_1 = \frac{3}{4}$ meetrit. Kui me oleks hakanud mõõtma pikkust A_3 veerand meetrite asemel meetri sajandikkudega, siis me oleks saanud A_3 pikkuseks $\frac{75}{100}$ meetrit.

Siit järeldame, et $\frac{3}{4}$ meetrit võrdub $\frac{75}{100}$ meetriga ehk murd $\frac{3}{4}$ võrdub murruga $\frac{75}{100}$.

Samuti võib veenduda murdude $\frac{15}{20}$ ja $\frac{75}{100}$ võrdsuses.

Niisiis, **kaks murdarvu on võrdsed, kui nendega väljendatud suurused ühe ja sama mõõduühiku puhul, on omavahel võrdsed.**

Vaadeldes võrdsete murdude paare $\frac{3}{4}$ ja $\frac{15}{20}$; $\frac{3}{4}$ ja $\frac{75}{200}$; $\frac{15}{20}$ ja $\frac{75}{100}$, märkame, et igal võrdsete murdude paaril on üks ja sama omadus, ja nimelt **esimese murru lugeja ja teise murru nimetaja korrutis võrdub teise murru lugeja ja esimese murru nimetaja korrutisega.**

Tõepoolest: $3 \cdot 20 = 15 \cdot 4$; $3 \cdot 100 = 75 \cdot 4$; $15 \cdot 100 = 75 \cdot 20$. See omadus on kõigil omavahel võrdsetel murdudel ja seepärast kasutatakse seda murdude võrdsuse tunnusena, nimelt **kaks murdu on võrdsed, kui esimese murru lugeja ja teise murru nimetaja korrutis võrdub teise murru lugeja ja esimese murru nimetaja korrutisega.**

Nii on murd $\frac{a}{b}$ võrdne murruga $\frac{a_1}{b_1}$, kui $ab_1 = a_1b$.

Järeldus 1. Murdarvude võrdused nagu täisarvudegi võrdused (§ 5), evivad järgmisi põhiomadusi:

a) **reflektiivsus,**

b) **sümmeetrilisus,**

c) **transitiivsus.**

a) Reflektiivsus: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, sest $ab = ab$.

b) Sümmeetrilisus: kui $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, siis $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$, sest kui $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, siis $ab_1 = a_1b$, kus $a_1b = ab_1$.

c) Transitiivsus: kui $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ ja $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, siis $\frac{a}{b} = \frac{a_2}{b_2}$. Tõepoolest, murdude $\frac{a}{b}$ ja $\frac{a_1}{b_1}$ võrdsusest järeldub, et $ab_1 = a_1b$ ja murdude $\frac{a_1}{b_1}$ ja $\frac{a_2}{b_2}$ võrdsusest järeldub, et $a_1b_2 = a_2b_1$.

Korrutades monotoonsuse seaduse alusel esimese võrduse mõlemaid pooli b_2-ga, teise võrduse mõlemaid pooli aga b-ga, saame:

1) $ab_1b_2 = a_1bb_2$

2) $a_1b_2b = a_2b_1b$ ehk

$a_1bb_2 = a_2b_1b$ (korrutise kommutatiivsus).

Täisarvude võrdsuse transitiivsuse põhjal saame:

$$ab_1b_2 = a_2b_1b.$$

Rakendades järjestikku korrutamise kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadusi, saame:

$$(ab_2)b_1 = (a_2b)b_1.$$

Sellest võrdusest saame loomulikkude arvude korrutamise monotoonsuse seaduse alusel:

$$ab_2 = a_2b.$$

Järelikult, murdude võrdsuse tunnuse alusel: $\frac{a}{b} = \frac{a_2}{b_2}$.

Järeldus 2. **Murru suurus ei muutu, kui murru lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama, nullist erineva arvuga.**

Võtame murru $\frac{a}{b}$ ja tõestame, et

$$1)\ \frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad \text{ja} \quad 2)\ \frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}.$$

1) Selleks, et veenduda võrduse $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ õigsuses, tuleb tõestada, et esimese murru lugeja ja teise murru nimetaja korrutis võrdub teise murru lugeja ja esimese murru nimetaja korrutisega, s. t.

$$a(bm) = b(am).$$

Korrutis $b(am) = bam =$ (assotsiatiivsus)
$= abm =$ (kommutatiivsus)
$= a(bm)$ (assotsiatiivsus).

Millest: $a(bm) = b(am)$.

Järelikult, murdude võrdsuse tunnuse alusel:

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

2) Võrduse $\frac{a}{b} = \frac{a:m}{b:m}$ tõestamiseks piisab murru $\frac{a:m}{b:m}$ lugeja ja nimetaja korrutamisest arvuga m, kusjuures saame murru $\frac{a}{b}$.

Näide 1. $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 5}$ ehk $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$.

Kontrollime murdude võrdsust võrdsuse tunnuse alusel: $3 \cdot 40 = 8 \cdot 15$; $120 = 120$. Murrud on võrdsed.

Näide 2.

$$\frac{20}{30} = \frac{20:10}{30:10} \text{ ehk } \frac{20}{30} = \frac{2}{3}.$$

Kontrollime murdude võrdsust võrdsuse tunnuse alusel: $20 \cdot 3 = 30 \cdot 2$; $60 = 60$. Murrud on võrdsed.

Seega murru suurus ei muutu kui selle lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama arvuga.

Vaadeldud murru omadusel on suur tähtsus murdude teisendamisel, mistõttu seda nimetatakse **murru põhiomaduseks** ehk **peaomaduseks.**

Sellele omadusele põhjeneb: 1) murdude taandamine ja 2) murdude teisendamine ühenimelisteks.

§ 104. Murdude taandamine: murdude kaks taandamise ja ühenimelisteks teisendamise viisi.

Definitsioon 1. **Murru taandamiseks nimetatakse murru nimetaja ja lugeja jagamist nende ühisteguriga, s. t. murru $\frac{am}{bm}$ asendamist murruga $\frac{a}{b}$.**

Niisugune asendamine on võimalik, sest murru suurus ei muutu kui selle lugejat ja nimetajat jagada ühe ja sama arvuga.

Igal murrul on ilmselt olemas mingi lihtsaim kuju, mida nimetatakse **taandamatuks kujuks.** Selleks, et saada taandamatut murdu, tuleb jagada murru lugejat ja nimetajat nende suurima ühisjagajaga. Taandamatu murru lugeja ja nimetaja on ühistegurita arvud.

Murdude kaks taandamisviisi.

1. Järkjärguline taandamine. Kasutades jaguvuse tunnuseid, jagatakse murru lugeja ja nimetaja järjestikku nende ühisteguriga.

Näide:

$$\frac{1620}{2160} = \frac{162}{216} = \frac{81}{108} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

2. Täielik taandamine. Leitakse murru lugeja ja nimetaja S. Ü. ning jagatakse sellega murru liikmeid.

Teist viisi kasutatakse siis, kui jaguvuse tunnuste abil on raske leida murru liikmete ühisjagajat.

Näide: $\frac{1555}{2177}$.

Leiame järjestikuse jagamisega murru liikmete 1555 ja 2177 S. Ü.:

1	2	2		
2177	1555	622	311	S. Ü. = 311
1555	1244	622		
622	−311	0		(2177; 1555) = 311.

$$\frac{\overset{311}{\overbrace{1555}}}{2177} = \frac{5}{7}.$$

Meelespidamiseks kirjutasime murru kohale arvu, millega taandasime, kuid harilikult seda ei kirjutata.

Definitsioon 2. **Antud murdude ühenimeliseks teisendamiseks nimetatakse nende murdude niisugust muutmist, kus murdude suurused jäävad endiseks, kuid nende nimetajad muutuvad võrdseks.**

Selleks piisab antud murdude ühisnimetaja, **kõikide nimetajate ühiskordse leidmisest** ja iga murru lugeja ning nimetaja korrutamisest teguriga, mis laiendab antud murru nimetajat kuni valitud ühiskordseni.

Näiteks võib murdusid $\frac{a}{a_1}, \frac{b}{b_1}, \frac{c}{c_1}$ kirjutada järgmiselt:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{ab_1c_1}{k}, \frac{b}{b_1} = \frac{ba_1c_1}{k}, \frac{c}{c_1} = \frac{ca_1b_1}{k}, \text{ kus } k = a_1b_1c_1.$$

Nende murdude teisendamises on oluline murru lugeja ja nimetaja korrutamine ühe ja sama arvuga, mille tagajärjel murru suurus ei muutu (murru põhiomaduse alusel).

Arvutuste ratsionaliseerimiseks ja lihtsustamiseks valitakse tehetes murdudega antud murdude ühisnimetajaks nende nimetajate V. Ü.

Selleks, et teisendada antud murde väikseima ühisnimetajaga murdudeks, taandatakse nad, kui võimalik, seejärel leitakse kõikide nimetajate V. Ü. ja määratakse igale nimeta-

jale vastav laiendaja ning korrutatakse sellega murru mõlemaid liikmeid.

Murdude väikseima ühisnimetajaga murdudeks teisendamise erijuhud.

1. juhtum. Ükski nimetajate paar ei sisalda ühistegureid.

On ilmne, et sel juhul on kõik nimetajad ühistegurita arvud, millede V. Ü. võrdub nende korrutisega. Järelikult tuleb niisuguste murdude väikseima ühisnimetajaga murdudeks teisendamiseks murru mõlemaid liikmeid korrutada ülejäänud murdude nimetajate korrutisega.

Näide: $\frac{3}{8}; \frac{6}{25}; \frac{2}{3}$. Nimetajate V. Ü. võrdub $8 \cdot 25 \cdot 3 = 600$.

Esimese murru laiendaja on 75,
teise „ „ „ 24,
kolmanda „ „ „ 200.

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 75}{600} = \frac{215}{600}, \quad \frac{6}{25} = \frac{6 \cdot 24}{600} = \frac{144}{600}, \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 200}{600} = \frac{400}{600}.$$

2. juhtum. Taandamatute murdude suurim nimetaja jagub iga ülejäänud murru nimetajaga.

Sel juhul on suurim nimetaja kõikide nimetajate V. Ü., järelikult on ta antud murdude väikseim ühisnimetaja.

Näide: $\frac{8}{15}; \frac{33}{40}; \frac{17}{120}$;

$$m(15; 40; 120) = 120.$$

Esimese murru laiendaja on 8,
teise „ „ „ 3.

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 8}{120} = \frac{64}{120}; \quad \frac{33}{40} = \frac{33 \cdot 3}{120} = \frac{99}{120} \text{ ja } \frac{17}{120}.$$

Ühenimeliseks teisendatud murde kontrollitakse murdude taandamisega; murdude taandamist kontrollitakse saadud murru teisendamisega ühenimeliseks esialgse murruga.

§ 105. Murdude ebavõrdsus.

Definitsioon 1. **Murd $\frac{a}{b}$ on suurem murrust $\frac{a_1}{b_1}$, kui esimese murru lugeja ja teise murru nimetaja korrutis on suurem teise murru lugeja ja esimese murru nimetaja korrutisest (s. t. kui $ab_1 > a_1b$).**

Definitsioon 2. **Murd $\frac{a}{b}$ on väiksem murrust $\frac{a_1}{b_1}$, kui esimese murru lugeja ja teise murru nimetaja korrutis on väiksem teise murru lugeja ja esimese murru nimetaja korrutisest (s. t. kui $ab_1 < a_1b$).**

Näide: Võrrelda murde $\frac{4}{33}$ ja $\frac{5}{41}$.

$4 \cdot 41 = 164$; $33 \cdot 5 = 165$; $4 \cdot 41 < 33 \cdot 5$, järelikult:

$$\frac{4}{33} < \frac{5}{41}.$$

Järeldus 1. **Kahest ühenimelisest murrust on suurem see, mille lugeja on suurem.**

Kui $a > a_1$, siis $\frac{a}{b} > \frac{a_1}{b}$. Seega, kui $a > a_1$, siis $ab > a_1b$ (korrutamise monotoonsuse seaduse alusel). Järelikult, esimese definitsiooni järgi on murd $\frac{a}{b}$ suurem murrust $\frac{a_1}{b}$.

Näide: $\frac{11}{18} > \frac{5}{18}$.

Järeldus 2. **Kahest võrdse lugejaga murrust on suurem see, mille nimetaja on väiksem.**

Kui $b < b_1$, siis $\frac{a}{b} > \frac{a}{b_1}$. Seega, kui $b < b_1$, siis $ab_1 > ab$ (korrutamise monotoonsuse seaduse alusel). Järelikult, esimese definitsiooni järgi on murd $\frac{a}{b}$ suurem murrust $\frac{a}{b_1}$.

Näide: $\frac{3}{8} > \frac{3}{17}$.

Vaadeldud järeldustest tuleneb, et lugeja suurenemisel murd suureneb ja nimetaja suurenemisel murd väheneb ning ümberpöördult, lugeja vähenemisel murd väheneb ning nimetaja vähenemisel murd suureneb.

Näide 1. Suurendada murd $\frac{15}{24}$ kaks korda.

1) Suurendame lugejat, saame: $\frac{30}{24}$.

2) Vähendame nimetajat, saame: $\frac{15}{12}$.

Näide 2. Vähendada murd $\frac{14}{15}$ kaks korda.

1) Vähendame lugejat, saame: $\frac{7}{15}$.

2) Suurendame nimetajat, saame: $\frac{14}{30}$.

§ 106. Murrud, millede nimetaja on üks.

Definitsioon. **Murd, mille nimetaja on üks, võrdub täisarvuga, milleks on murru lugeja.** Seega $\frac{a}{1} = a$.

Selle definitsiooni tulemusena sisaldab murdude kogumik eneses kõiki täisarve, sest iga täisarvu võib vaadelda murruna, mille nimetajaks on üks.

Näide: $6 = \frac{6}{1}$.

Järeldus 1. **Iga arv võib olla murd, mille nimetajaks on mistahes nullist erinev arv.**

Olgu tarvis näiteks täisarv a väljendada murruna, mille nimetaja on n.

Et täisarvu võib vaadelda murruna, mille nimetajaks on üks, siis

$a = \frac{a}{1}$, kuid $\frac{a}{1} = \frac{an}{1 \cdot n}$ (murru põhiomaduse alusel)

ehk $\frac{an}{1 \cdot n} = \frac{a}{1}$ (sümmeetrilisus).

Transitiivsuse alusel saame siit:

$$a = \frac{an}{1 \cdot n} \text{ ehk } a = \frac{an}{n}.$$

Selleks, et täisarvu muuta murruks, mille nimetaja on antud, tuleb täisarv korrutada antud nimetajaga ja saadud korrutis võtta murru lugejaks, nimetajaks aga kirjutada antud nimetaja.

Näide: Väljendada 11 kaheksandikkudes.

$$11 = \frac{11 \cdot 8}{8} = \frac{88}{8}.$$

Järeldus 2. **Murd, mille lugeja ja nimetaja on võrdsed, võrdub ühega.**

Murru põhiomaduse alusel $\frac{1}{1} = \frac{1 \cdot n}{1 \cdot n}$ ehk $\frac{1}{1} = \frac{n}{n}$, kuid $\frac{1}{1} = 1$, järelikult $\frac{n}{n} = 1$ (transitiivsus).

See tähendab, et arv üks sisaldab n n-ndikku.

Siit järeldub, et murd $\frac{1}{n}$ moodustab ühe n-ndiku tervikust.

Näiteks: $1 = \frac{8}{8} = \frac{11}{11} = \frac{15}{15} = \ldots$ jne.

§ 107. Murdude liigitus terviku suhtes.

Definitsioon 1. **Murdu, mille lugeja on väiksem nimetajast, nimetatakse lihtmurruks.**

Ilmselt on niisugune murd väiksem arvust 1, sest § 106 definitsiooni 2. järelduse alusel võrdub ühega murd, mille lugeja ja nimetaja on võrdsed.

Definitsioon 2. **Murdu, mille lugeja on suurem nimetajast või temaga võrdne, nimetatakse liigmurruks.**. Liigmurd on ühest suurem või temaga võrdne. Tõepoolest, kui

$a > b$, siis murd $\frac{a}{b} > \frac{b}{b}$ (§ 105 definitsiooni 1. järeldus), kuid $\frac{b}{b} = 1$ (§ 106 definitsiooni 2. järeldus).

Järelikult, $\frac{a}{b} > 1$. Kui aga liigmurru lugeja võrdub nimetajaga, siis võrdub niisugune murd ühega.

Nii on $\frac{8}{11}$ lihtmurd ja $\frac{11}{8}$ — liigmurd.

§ 108. Murru lugeja ja nimetaja vähendamine või suurendamine ühe ja sama arvu võrra.

Teoreem 1. **Kui murru lugejat ja nimetajat suurendada ühe ja sama arvu võrra, siis ühest väiksem murd suureneb ja ühest suurem murd väheneb.**

1. juhtum.

Antud: murd $\frac{a}{b} < 1$ ja loomulik arv c.

Tõestada: $\frac{a}{a} < \frac{a+c}{b+c}$.

Võrdleme antud murdu $\frac{a}{b}$ saadud murruga $\frac{a+c}{b+c}$; selleks korrutame esimese murru liikmeid $(b+c)$-ga ja teise murru liikmeid b-ga (murru põhiomaduse alusel):

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+c)}{b(b+c)}, \quad \frac{a+c}{b+c} = \frac{(a+c)b}{(b+c)b}.$$

Et saadud murdude nimetajad on võrdsed, siis võrdleme lugejaid:

$a(b+c) = ab + ac$ (korrutamise distributiivsus),
$(a+c)b = ab + cb$ („ „).

Saadud summade esimesed liidetavad on võrdsed korrutised. Võrdleme teisi liidetavaid: teoreemi eelduse kohaselt $a < b$, järelikult korrutamise monotoonsuse seaduse alusel

$ac < bc$ ehk $ac < cb$ (kommutatiivsus). Summa monotoonsuse seaduse alusel saame siit:

$$ab + ac < ab + cb.$$

Järelikult: $\frac{a(b+c)}{b(b+c)} < \frac{(a+c)b}{(b+c)b}$ (§ 105, 1. järeldus),

ehk $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

2. juhtum.

Antud: murd $\frac{a}{b} > 1$ ja loomulik arv c.

Tõestada: $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

Võrreldes, nagu esimesel juhul, antud murdu $\frac{a}{b}$ saadud murruga $\frac{a+c}{b+c}$, saame:

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b+c)}{b(b+c)}; \quad \frac{a+c}{b+c} = \frac{(a+c)b}{(b+c)b};$$

$$a(b+c) = ab + ac;$$
$$(a+c)b = ab + cb.$$

Teoreemi eelduse kohaselt $a > b$. Järelikult korrutamise monotoonsuse seaduse alusel: $ac > bc$ ehk $ac > cb$ (kommutatiivsus).

Liitmise monotoonsuse seaduse alusel saame siit:

$$ab + ac > ab + cb \text{ ehk } a(b+c) > (a+c)b.$$

Järelikult: $\frac{a(b+c)}{b(b+c)} > \frac{(a+c)b}{(b+c)b}$ ehk $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$.

Näide 1. $\frac{3}{5} < \frac{3+2}{5+2}$.

Selgitame seda näitel:

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot (5+2)}{5 \cdot (5+2)};$$
$$\frac{3+2}{5+2} = \frac{(3+2) \cdot 5}{(5+2) \cdot 5}.$$

Esimesel ja teisel juhul on teiste murdude nimetajad võrdsed $[5 \cdot (5+2) = (5+2) \cdot 5]$; võrdleme lugejaid:

$$3 \cdot (5+2) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2;$$
$$(3+2) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5.$$

Et $3 < 5$, siis $3 \cdot 2 < 5 \cdot 2$ ehk $3 \cdot 2 < 2 \cdot 5$.
Seega $3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 < 3 \cdot 5 + 2 \cdot 5$.

Järelikult: $\frac{3(5+2)}{5(5+2)} < \frac{(3+2) \cdot 5}{(5+2) \cdot 5}$ ehk $\frac{3}{5} < \frac{3+2}{5+2}$.

Näide 2. $\frac{7}{5} > \frac{7+2}{5+2}$.

Tõepoolest: $\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{49}{35}$, $\frac{7+2}{5+2} = \frac{9}{7} = \frac{9 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{45}{35}$, $\frac{49}{35} > \frac{45}{35}$.

Järelikult: $\frac{7}{5} > \frac{7+2}{5+2}$.

Teoreem 2. **Kui murru lugejat ja nimetajat vähendada ühe ja sama arvu võrra, siis ühest väiksem murd väheneb ja ühest suurem murd suureneb.**

1. juhtum.

Antud: $\frac{a}{b} < 1$ ja loomulik arv c, kusjuures $a > c$ ja $b > c$.

Tõestada: $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b-c}$.

Võrdleme murdu $\frac{a}{b}$ saadud murruga $\frac{a-c}{b-c}$, milleks korrutame esimese murru liikmeid $(b-c)$-ga ja teise murru liikmeid b-ga (murru põhiomaduse alusel):

$$\frac{a}{b} = \frac{a(b-c)}{b(b-c)}, \quad \frac{a-c}{b-c} = \frac{(a-c)b}{(b-c)b}.$$

Et saadud murdude nimetajad on võrdsed, siis võrdleme nende murdude lugejaid:

$a(b-c) = ab - ac$ (korrutamise distributiivsus),
$(a-c)b = ab - cb$ („ „).

Saadud vahede vähendatavad on võrdsed korrutised.

Võrdleme lahutatavaid. Teoreemi eelduse kohaselt: $a < b$, seega korrutamise monotoonsuse seaduse alusel:

$ac < bc$ ehk $ac < cb$ (kommutatiivsus).

Siit saame:

$ab - ac > ab - bc$ ehk $a(b-c) > (a-c)b$.

Järelikult: $\frac{a(b-c)}{b(b-c)} > \frac{(a-c)b}{(b-c)b}$ (§ 105, 1. järeldus) ehk $\frac{a}{b} > \frac{a-c}{b-c}$.

2. juhtum.

Antud: $\frac{a}{b} > 1$ ja loomulik arv c, kusjuures $a > c$ ja $b > c$.

Tõestada: $\frac{a}{b} < \frac{a-c}{b-c}$.

Tõestus on samasugune kui 1. juhtumil.

Näide 1. $\frac{5}{7} > \frac{5-2}{7-2}$.

Tõepoolest: $\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{25}{35}$, $\frac{5-2}{7-2} = \frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}$, $\frac{25}{35} > \frac{21}{35}$.

Järelikult: $\frac{5}{7} < \frac{5-2}{7-2}$.

Näide 2. $\frac{7}{5} < \frac{7-2}{5-2}$.

Tõepoolest: $\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{21}{15}$; $\frac{7-2}{5-2} = \frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{25}{15}$, $\frac{21}{15} < \frac{25}{15}$.

Järelikult: $\frac{7}{5} < \frac{7-2}{5-2}$.

XVII peatükk.

Tehted harilikkude murdudega.

§ 109. Murdude liitmine.

Definitsioon 1. **Kahe murru summaks nimetatakse niisugust uut murdu, mis saadakse antud murdusid ühenime-**

listeks teisendades, seejärel nende lugejaid liites, kusjuures saadud summa võetakse uue murru lugejaks, nimetajaks võetakse aga ühine nimetaja.

See definitsioon sisaldab tehte algoritmi, s. t. kindlat reeglit, mille alusel saab leida antud murdude summat.

Lähtudes antud definitsioonist, me leiame, et:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Näide: $\frac{3}{16}+\frac{5}{12}=\frac{9+20}{48}=\frac{29}{48}$.

Definitsioon 2. **Täisarvu ja murru summat nimetatakse segaarvuks.**

Eespool (§ 106, 1. järeldus) me nägime, et iga täisarvu saab muuta murruks, mille nimetajaks võib olla mistahes arv. On ilmne, et saadud murd on liigmurd.

Segaarvu saab samuti muuta liigmurruks. Selleks tuleb täisarv korrutada murru nimetajaga, saadud korrutisega liita lugeja ja võtta see summa otsitava murru lugejaks, nimetaja aga jätta endiseks. Näiteks olgu tarvis segaarv $(a+\frac{b}{n}$ muuta liigmurruks. See tähendab, tuleb leida, mitu n-dikku sisaldub a ühikus koos sama ühiku b n-dikuga. Me nägime (§ 106, 1. järeldus), et iga täisarvu saab muuta mistahes nimetajaga murruks, milleks tuleb täisarv korrutada murru nimetajaga, saadud korrutis võtta lugejaks, nimetajaks kirjutada aga antud nimetaja.

Järelikult täisarv $a=\frac{an}{n}$. See tähendab, et täisarv a sisaldab an n-dikku. Täisarv a aga koos b n-dikuga sisaldab $(an+b)$ n-dikku. Seega

$$a+\frac{b}{n}=\frac{an+b}{n}.$$

Järelikult **selleks, et segaarvu muuta liigmurruks, tuleb täisarv korrutada murru nimetajaga, saadud summa võtta otsitava murru lugejaks, nimetaja aga jätta endiseks.**

Näide: $12\frac{6}{7} = \frac{12 \cdot 7 + 6}{7} = \frac{90}{7}$.

Segaarvu definitsioonist järeldub, et igat liigmurdu saab muuta segaarvuks, s. t. leida, kui palju selles liigmurrus on tervikuid ja kui palju võrdseid osi, mis ei moodusta tervikut. Tõepoolest, et liigmurru $\frac{a}{n}$ iga tervik sisaldab n n-dikku, siis a n-dikus on niipalju tervikuid, kuipalju kordi n sisaldub a-s. Oletame, et n sisaldub a-s b korda, kusjuures r n-dikku jääb järele.

Tähendab $a = nb + r$.

Sellest $\frac{a}{n} = b + \frac{r}{n}$.

Järelikult **selleks, et liigmurdu muuta segaarvuks või täisarvuks, tuleb lugeja jagada nimetajaga, saadud jagatis näitab tervikute arvu, jääk aga on segaarvu murdosa lugeja.**

Näide: $\frac{125}{12} = 10\frac{5}{12}$.

Segaarve liidetakse summade liitmise reegli alusel: täisarvud liidetakse eraldi ja murdarvud eraldi.

Näide: $12\frac{3}{8} + 6\frac{5}{12} + 3\frac{7}{10} = 21\frac{3 \cdot 15 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 12}{120} =$

$= 21\frac{45 + 50 + 84}{120} = \frac{179}{120} = 22\frac{59}{120}$.

§ 110. Loomulikkude arvude liitmisseaduste laiendamine murdarvude liitmisele.

1. **Kommutatiivsus. Summa ei muutu liidetavate järjekorra muutumisel:**

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{a}{b}.$$

Teisendame antud murrud murdudeks väkseima ühisnimetajaga k:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{k};\ \frac{c}{d} = \frac{c_1}{k};\ \frac{e}{f} = \frac{e_1}{k}.$$

Siis

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a_1+c_1+e_1}{k}$ (murdude liitmise definitsiooni alusel).

a_1, c_1 ja e_1 on loomulikud arvud, järelikult: $a_1+c_1+e_1=c_1+e_1+a_1$ (loomulikkude arvude summa kommutatiivsus).

Siit: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a_1+c_1+e_1}{k}=\frac{c_1+e_1+a_1}{k}=$

= (ühisnimetajaga murdude liitmisreegli alusel)

$=\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\frac{c}{b}$ (sest $\frac{c_1}{k}=\frac{c}{d}$; $\frac{e_1}{k}=\frac{e}{f}$; $\frac{a_1}{k}=\frac{a}{b}$).

Näide: $7\frac{3}{14}+12\frac{1}{8}+3\frac{1}{14}+6\frac{1}{4}+5\frac{5}{7}=7\frac{3}{14}+3\frac{1}{14}+$

$+5\frac{5}{7}+6\frac{1}{4}+12\frac{1}{8}=34\frac{3}{8}$.

Antud liidetavate summat saab leida peast.

2. **Assotsiatiivsus.**

Summa ei muutu, kui mõned liidetavad ühendada rühmadesse ja teostada liitmine rühmades ning saadud resultaadid liita:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}.$$

Teisendame antud murrud ühenimelisteks väikseima ühisnimetajaga k:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{k};\quad \frac{c}{d}=\frac{c_1}{k};\quad \frac{e}{f}=\frac{e_1}{k}.$$

Siis

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a_1}{k}+\frac{c_1}{k}+\frac{e_1}{k}=\frac{a_1+c_1+e_1}{k}=$$

= (murdude liitmise definitsiooni alusel)

$=\frac{a_1+(c_1+e_1)}{k}=$ (assotsiatiivsus loomulikkude arvude a_1, c_1 ja e_1 liitmisel)

$=\frac{a_1}{k}+\frac{c_1+e_1}{k}=$ (ühenimeliste murdude liitmisreegli alusel)

$=\frac{a_1}{k}+\left(\frac{c_1}{k}+\frac{e_1}{k}\right)=$ (ühenimeliste murdude liitmisreegli alusel)

$=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$ $\left(\text{sest } \frac{a_1}{k}=\frac{a}{b};\ \frac{c_1}{k}=\frac{c}{d};\ \frac{e_1}{k}=\frac{e}{f}\right)$.

Seega oleme tõestanud, et

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right).$$

Samuti saab tõestada assotsiatiivsuse teise kuju kehtivust:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{c}{f}.$$

Liitmise assotsiatiivsuse seaduse alusel võib ülaltoodud summa definitsiooni ja sellest järelduvat kahe murru liitmisreeglit laiendada juhtumile, kus liidetavate arv on suurem kui kaks.

Näide: $7\frac{5}{28}+4\frac{7}{16}+3\frac{9}{28}+6\frac{1}{2}+3\frac{1}{16}=\left(7\frac{5}{28}+3\frac{9}{28}\right)+$

$+\left(4\frac{7}{16}+3\frac{1}{16}\right)+6\frac{1}{2}=10\frac{1}{2}+7\frac{1}{2}+6\frac{1}{2}=24\frac{1}{2}.$

3. **Monotoonsus.**

Kui $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, siis $\frac{a}{b}+\frac{m}{n}>\frac{c}{d}+\frac{m}{n}$.

Teisendame murrud $\frac{a}{b}$, $\frac{m}{n}$ ja $\frac{c}{d}$ ühenimelisteks:

$$\frac{a}{b}=\frac{adn}{bdn};\ \frac{m}{n}=\frac{mbd}{nbd};\ \frac{c}{d}=\frac{cbn}{dbn}.$$

Siis

$$\frac{a}{b}+\frac{m}{n}=\frac{adn+mbd}{nbd} \text{ ja } \frac{c}{d}+\frac{m}{n}=\frac{cbn+mbd}{nbd}.$$

Et $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$, siis $ad>cb$ (§ 105 murdude mittevõrdsuse 1. definitsioon); arvude korrutamise monotoonsuse seaduse alusel saame:

$$adn>cbn.$$

Tähendab: $adn+mbd>cbn+mbd$ (loomulikkude arvude liitmise monotoonsuse seaduse alusel).

Siit saame: $\frac{adn+mbd}{nbd}>\frac{cbn+mbd}{nbd}$.

Järelikult: $\frac{a}{b}+\frac{m}{n}>\frac{c}{d}+\frac{m}{n}$.

Seega veendusime, et kõik loomulikkude arvude liitmisseadused on kehtivad ka murdarvude liitmisel.

Samuti on ka kõik nendest seadustest tuletatud järeldused loomulikkude arvude kohta täielikult laiendatavad ka murdarvudele.

§ 111. Murdude lahutamine.

Lahutada murrust $\frac{a}{b}$ murd $\frac{c}{b}$ tähendab leida uus murd $\frac{x}{y}$, mis rahuldab võrdust:

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{d} + \frac{x}{y}.$$

Seega nimetatakse murdude lahutamiseks niisugust aritmeetilist tehet, mille abil antud summa ja ühe liidetava järgi leitakse teine liidetav.

Esitatust on selge, et murdarvude lahutamine ei erine loomulikkude arvude lahutamisest.

Murdude lahutamise reegel: **selleks, et antud murrust lahutada teine murd, tuleb teisendada antud murrud ühenimelisteks, lahutada vähendatava lugejast lahutatava lugeja, võtta saadud vahe uue murru lugejaks, nimetajaks aga ühine nimetaja.**

Olgu antud kaks murdu $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$, kusjuures $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

Tõestame, et $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - cb}{bd}$.

Vastavalt murdude lahutamise definitsioonile võrdub lahutatava $\frac{c}{d}$ ja vahe $\frac{ad - cb}{bd}$ summa vähendatavaga $\frac{a}{b}$. Sel alusel kontrollime antud murdude lahutamise resultaati:

$\frac{c}{d} + \frac{ad - cb}{bd} = \frac{cb + ad - cb}{bd} =$ (murdude liitmise definitsiooni alusel)

$= \frac{ad}{bd} =$ (loomulikkude arvude lahutamise definitsiooni järelduse alusel)

$= \frac{a}{b}$ (murru põhiomadus).

Selgitame seda näitel.

Antud: $\frac{3}{5} - \frac{2}{7}$.

Tõestame, et $\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7 - 2 \cdot 5}{5 \cdot 7}$; vähendatav võrdub lahutatava ja vahe summaga: $\frac{3}{5} = \frac{2}{7} + \frac{3 \cdot 7 - 2 \cdot 5}{5 \cdot 7}$.

Teostame liitmise võrduse paremal poolel:

$$\frac{2}{7}+\frac{3\cdot 7-2\cdot 5}{5\cdot 7}=\frac{2\cdot 5+3\cdot 7-2\cdot 5}{5\cdot 7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}=\frac{3}{5}.$$

Saime vähendatava, tähendab liitmine on teostatud õieti.

Segaarvude lahutamisel täisarvud lahutatakse eraldi, murdosad aga murdude lahutamisreegli alusel. Kui vähendatava murdosa on väiksem lahutatava murdosast, siis võtame ühe terviku vähendatavas ja peenestame selle vastavateks murdosadeks ning liidame need vähendatava murdosadega, seejärel teostame lahutamise.

Näide: $47\frac{5}{28}-15\frac{7}{12}=32\frac{15-49}{84}=31\frac{99-49}{84}=31\frac{50}{84}=$

$=31\frac{25}{42}$.

§ 112. Murdude liitmiste ja lahutamiste rea omadused.

Murdude liitmiste ja lahutamiste reas, nagu täisarvudegi puhul, kehtib kommutatiivsus ja assotsiatiivsus.

1. Kolme murru **kommutatiivsus** väljendub kahel kujul.

1. kuju: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}=\frac{a}{b}-\frac{e}{f}+\frac{c}{d}$.

Näiteks: $13\frac{7}{11}+9\frac{13}{18}-3\frac{7}{11}=13\frac{7}{11}-3\frac{7}{11}+9\frac{13}{18}=10+9\frac{13}{18}=$

$=19\frac{13}{18}$.

2. kuju: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}=\frac{a}{b}-\frac{e}{f}-\frac{c}{d}$,

s. t. liitmiste ja lahutamiste rea resultaat ei muutu rea liikmete järjekorra muutumisel.

Näiteks: $17\frac{7}{15}-8\frac{1}{3}-1\frac{2}{15}=17\frac{7}{15}-1\frac{2}{15}-8\frac{1}{3}=16\frac{1}{3}-8\frac{1}{3}=8.$

a) Tõestame esimese kuju õigsust. Selleks teisendame murrud $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ja $\frac{e}{f}$ ühenimelisteks, väikseima ühisnimetajaga D.

Siis $\frac{a}{b}=\frac{a_1}{D}$; $\frac{c}{d}=\frac{c_1}{D}$; $\frac{e}{f}=\frac{e_1}{D}$.

Järelikult:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}=\frac{a_1}{D}+\frac{c_1}{D}-\frac{e_1}{D}=$$ (murdude asendamine nendega võrdsete ühenimeliste murdudega)

$$=\frac{a_1+c_1}{D}-\frac{e_1}{D}=$$ (murdude liitmine)

$$=\frac{(a_1+c_1)-e_1}{D}=$$ (murdude lahutamine)

$$=\frac{a_1+c_1-e_1}{D}=$$ (loomulikkude arvude liitmiste ja lahutamiste rea assotsiatiivsus)

$$=\frac{a_1-e_1+c_1}{D}=$$ (loomulikkude arvude liitmiste ja lahutamiste rea kommutatiivsus)

$$=\frac{(a_1-e_1)+c_1}{D}=$$ (loomulikkude arvude liitmiste ja lahutamiste rea assotsiatiivsus)

$$=\frac{a_1-e_1}{D}+\frac{c_1}{D}=$$ (murdude liitmine)

$$=\frac{a_1}{D}-\frac{e_1}{D}+\frac{c_1}{D}=$$ (murdude lahutamine)

$$=\frac{a}{b}-\frac{e}{f}+\frac{c}{d}$$ $\left(\text{sest } \frac{a_1}{D}=\frac{a}{b};\ \frac{e_1}{D}=\frac{e}{f};\ \frac{c_1}{D}=\frac{c}{d}\right)$.

Kommutatiivsuse 2. kuju tõestatakse analoogiliselt, seepärast jätame selle tõestuse õppijate hooleks.

2. **Assotsiatiivsusel** on kolm kuju:

1. kuju: **selle asemel, et antud arvuga liita kahe teise arvu vahe, võib antud arvuga liita vähendatava ja tulemusest lahutada lahutatava.**

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}.$$

Näiteks: $47\frac{3}{8}+\left(16\frac{5}{17}-10\frac{3}{8}\right)=47\frac{3}{8}+16\frac{5}{17}-10\frac{3}{8}=$

$$=47\frac{3}{8}-10\frac{3}{8}+16\frac{5}{17}=37+16\frac{5}{17}=53\frac{5}{17}.$$

2. kuju: **selle asemel, et antud arvust lahutada summa, võib sellest arvust lahutada iga liidetava.**

$$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}.$$

Näiteks: $65\frac{8}{13}-\left(32\frac{7}{15}+8\frac{8}{13}\right)=65\frac{8}{13}-32\frac{7}{15}-8\frac{8}{13}=65\frac{8}{13}-$

$-8\frac{8}{13}-32\frac{7}{15}=57-32\frac{7}{15}=24\frac{8}{15}$.

3. kuju: **selle asemel, et antud arvust lahutada kahe teise arvu vahe, võib sellest arvust lahutada vähendatava ja liita tulemusega lahutatava.**

$$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{e}{f}.$$

Näiteks: $16\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)-$

$-\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)-\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)=16\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-$

$-\ldots+\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$.

Nagu näeme on tehete seadused ja omadused laialdaselt kasutatavad peastarvutamisel murdarvudega.

Tõestame 1. kuju, milleks teisendame murrud $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ja $\frac{e}{f}$ ühenimelisteks, väikseima ühisnimetajaga D.

Saame:

$$\frac{a}{b}=\frac{a_1}{D};\ \frac{c}{d}=\frac{c_1}{D};\ \frac{e}{f}=\frac{e_1}{D}.$$

Siit:

$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a_1}{D}+\frac{c_1}{D}-\frac{e_1}{D}=$ (antud murdude asendamine nendega võrdsete ühenimeliste murdudega)

$=\frac{a_1}{D}+\frac{c_1-e_1}{D}=$ (murdude lahutamine)

$=\frac{a_1+c_1-e_1}{D}=$ (murdude liitmine)

$=\frac{(a_1+c_1)-e_1}{D}=$ (loomulikkude arvude liitmiste ja lahutamiste rea assotsiatiivsus)

$=\frac{a_1+c_1}{D}-\frac{e_1}{D}=$ (murdude lahutamine)

$= \frac{a_1}{D} + \frac{c_1}{D} - \frac{e_1}{D} =$ (murdude liitmine)

$= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} - \frac{e}{f}$ $\left(\text{sest } \frac{a_1}{D} = \frac{a}{b};\ \frac{c_1}{D} = \frac{c}{d};\ \frac{e_1}{D} = \frac{e}{f}\right)$.

Liitmiste ja lahutamiste rea assotsiatiivsuse teised kaks kuju tõestatakse analoogiliselt. Jätame õppijate hooleks vastavate tõestuste teostamise.

Seega tegime kindlaks, et murdarvude lahutamist iseloomustavad samad omadused kui loomulikkude arvude lahutamistki. Samuti on ka järeldused nendest omadustest täielikult laiendatavad murdarvudele.

§ 113. Murdude korrutamine.

Definitsioon. **Kahe murru korrutiseks nimetatakse niisugust murdu, mille lugeja võrdub korrutatavate murdude lugejate korrutisega, nimetaja aga nende murdude nimetajate korrutisega.**

Nagu liitmiselgi nii sisaldab ka murdude korrutamise definitsioon tehte algoritmi. Lähtudes antud definitsioonist, leiame, et

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ehk

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}.$$

Järeldus 1. **Selleks, et korrutada murdu täisarvuga, tuleb korrutada selle arvuga murru lugejat, nimetaja aga jätta endiseks.**

$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$, sest vaadeldes täisarvu kui murdu, mille nimetaja on üks, saame:

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{1} = \frac{a \cdot c}{b \cdot 1} = \frac{ac}{b}$$

ehk

$$\frac{8}{9} \cdot 5 = \frac{8}{9} \cdot \frac{5}{1} = \frac{8 \cdot 5}{9 \cdot 1} = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9}.$$

Järeldus 2. **Selleks, et korrutada täisarvu murruga, tuleb täisarv korrutada murru lugejaga, saadud korrutis võtta otsitava korrutise lugejaks, nimetajaks aga kirjutada antud murru nimetaja.**

Tõepoolest $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{b}$, sest vaadeldes täisarvu k murruna, mille nimetaja on üks, saame:

$$k \cdot \frac{a}{b} = \frac{k}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{k \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{ka}{b}$$

ehk

$$11 \cdot \frac{3}{5} = \frac{11 \cdot 3}{5} = \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5}.$$

Järeldus 3. **Selleks, et korrutada segaarvusid, tuleb teisendada nad liigmurdudeks ja saadud murrud korrutada üldreegli järgi.**

Tõepoolest, definitsiooni (§ 109) järgi saab iga segaarvu asendada liigmurruga, seepärast ka segaarvude korrutamine on samaväärne vastavate liigmurdude korrutamisega.

Näide: $5\frac{1}{3} \cdot 4\frac{1}{2} = \frac{16}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{\overset{8}{\cancel{16}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \frac{24}{1} = 24.$

Muuseas peab tähendama, et segaarvude korrutamisel pole nende liigmurdudeks teisendamine tingimata vajalik. Niisuguseid arve saab korrutada „summa korrutamine summaga" reegli alusel, sest segaarv on täisarvu ja murru summa (§ 109).

Segaarvu korrutades täisarvuga pole tarvis segaarvu muuta liigmurruks. Segaarv korrutatakse täisarvuga nagu summa.

Näide:

$$125\frac{7}{65} \cdot 5 = \left(125 + \frac{7}{65}\right) \cdot 5 = 125 \cdot 5 + \frac{7}{65} \cdot 5 = 625 + \frac{7 \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{13}{\cancel{65}}} = 625\frac{7}{13}.$$

Järelikult: **selleks, et korrutada segaarvu täisarvuga, tuleb selle täisarvuga korrutada eraldi segaarvu täisarvu ja murdosa ning saadud tulemused liita.**

§ 114. Loomulikkude arvude korrutamisseaduste laiendamine murdarvudele.

1. Distributiivsus (jaotuvus).

Kahe arvu summa (vahe) korrutis kolmanda arvuga võrdub nende arvude ja kolmanda arvu korrutiste summaga (vahega):

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)\frac{e}{f} = \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f} \pm \frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}.$$

Teisendame kaks esimest murdu ühenimelisteks, väikseima nimetajaga k:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{k};\ \frac{c}{d} = \frac{c_1}{k}.$$

Siis:

$$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)\frac{e}{f} = \left(\frac{a_1}{k} \pm \frac{c_1}{k}\right)\frac{e}{f} =$$

$$= \frac{a_1 \pm c_1}{k}\cdot\frac{e}{f} = \quad \text{(murdude liitmise definitsiooni järgi)}$$

$$= \frac{(a_1 \pm c_1)e}{kf} = \quad \text{(murdude korrutamine)}$$

$$= \frac{a_1 e \pm c_1 e}{kf} = \quad \text{(loomulikkude arvude distributiivsus)}$$

$$= \frac{a_1 e}{kf} \pm \frac{c_1 e}{kf} = \quad \text{(murdude liitmine)}$$

$$= \frac{a_1}{k}\cdot\frac{e}{f} \pm \frac{c_1}{k}\cdot\frac{e}{f} = \quad \text{(murdude korrutamine)}$$

$$= \frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f} \pm \frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f} \qquad \left(\text{sest } \frac{a_1}{k} = \frac{a}{b};\ \frac{c_1}{k} = \frac{c}{d}\right).$$

Näide:

$$\left(\frac{25}{42} + \frac{45}{56}\right)\cdot\frac{7}{5} = \frac{25}{42}\cdot\frac{7}{5} + \frac{45}{56}\cdot\frac{7}{5} = \frac{5}{6} + 1\frac{1}{8} =$$

$$= 1\frac{20+3}{24} = 1\frac{23}{24}.$$

2. Assotsiatiivsus (ühenduvus).

Korrutis ei muutu, kui tegurid ühendada rühmadesse, seejärel teostada korrutamine rühmades ja saadud tulemused korrutada.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right).$$

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=$ (kahe murru korrutamine)

$=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}$ (kahe murru korrutamine).

Tõestame nüüd, et $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$.

$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=$ (kahe murru korrutamine)

$=\frac{(ac)e}{(bd)f}=$ (kahe murru korrutamine)

$=\frac{a(ce)}{b(df)}=$ (loomulikude arvude assotsiatiivsus)

$=\frac{a}{b}\cdot\frac{ce}{df}=$ (kahe murru korrutamine)

$=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$ (kahe murru korrutamine).

Näide:

$$\frac{14}{15}\cdot 2\frac{1}{7}\cdot 6\frac{2}{3}=\left(\frac{14}{15}\cdot\frac{15}{7}\right)\cdot 6\frac{2}{3}=2\cdot 6\frac{2}{3}=12\frac{4}{3}=13\frac{1}{3}.$$

Meie poolt antud kahe murru korrutamise definitsiooni (§ 113) saab assotsiatiivsuse seaduse alusel laiendada ka mitme teguriga korrutamiseks.

3. **Kommutatiivsus** (vahetuvus).

Korrutis ei olene tegurite järjekorrast.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}.$$

Teostame korrutamise

$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}=$ (kahe murru korrutamine)

$=\frac{ca}{db}=$ (loomulikkude arvude korrutise kommutatiivsus)

$=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$ (murdude korrutamine).

4. **Monotoonsus.**

Kui $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, siis $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} > \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$.

Eelduse järgi $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Järelikult, $ad > cb$ (§ 105). Korrutades korrutised ad ja cb korrutisega mn, saame: $(ad)(mn) > (cb)(mn)$ (loomulikkude arvude korrutamise monotoonsus).

Siit $admn > cbmn$ (loomulikkude arvude korrutamise assotsiatiivsus). $(am)(dn) > (cm)(bn)$ (loomulikkude arvude korrutamise assotsiatiivsus).

Järelikult: $\frac{am}{bn} > \frac{cm}{dn}$ (§ 105 definitsiooni järgi)

ehk $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} > \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$ (murdude korrutamine).

Seega veendusime, et kõiki loomulikkude arvude korrutamise põhiseadusi võib laiendada ka murdarvude korrutamisele.

On ilmne, et ka nende seaduste järeldused, mis kehtivad loomulikkude arvude puhul, on kehtivad ka murdarvudele.

§ 115. Murdude jagamine.

Definitsioon. **Jagada murd $\frac{a}{b}$ murruga $\frac{c}{d}$ — tähendab leida niisugune murd $\frac{x}{y}$, millega on vaja korrutada arv $\frac{c}{d}$, et saada $\frac{a}{b}$.**

Siit järeldub, et murdarvude jagamiseks nimetatakse niisugust aritmeetilist tehet, mille abil kahe antud teguri korrutise ja ühe teguri järgi leitakse teine tegur.

Murdude jagamine erineb loomulikkude arvude jagamisest ainult selle poolest, et siin pole komponentideks mitte loomulikud arvud, vaid murdarvud.

Murdude jagamise reegel. **Selleks, et jagada murdu murruga, tuleb korrutada esimese murru lugejat teise murru nimetajaga ja esimese murru nimetajat teise murru lugejaga; esimene korrutis on jagatise lugejaks, teine aga selle nimetajaks.**

Olgu antud kaks murdu $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$. Tõestame, et $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Oletame, et $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = k$. Jagamise definitsiooni alusel saame:

$$\frac{c}{d} \cdot k = \frac{a}{b}.$$

Saadud võrduse mõlemaid pooli korrutame korrutamise monotoonsuse seaduse alusel murruga $\frac{d}{c}$, saame:

$$\left(\frac{c}{d} \cdot k\right)\frac{d}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$

kuid $\left(\frac{c}{d} \cdot k\right)\frac{d}{c} = \left(k \cdot \frac{c}{d}\right)\frac{d}{c} =$ (korrutamise kommutatiivsus)

$= k\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{d}{c}\right) =$ (korrutamise assotsiatiivsus)

$= k$ (murdude taandamine).

Seega $k = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Järelikult $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ ehk $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Näide: $\frac{5}{6} : \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 3} = \frac{35}{18} = 1\frac{17}{18}$.

Järeldus 1. **Selleks, et jagada murdu täisarvuga, tuleb murru nimetajat korrutada selle täisarvuga.**

Tõepoolest: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$, sest vaadeldes täisarvu murruna, mille nimetaja on üks (§ 106), saame:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a \cdot 1}{bc} = \frac{a}{bc}.$$

Näide: $\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7} : \frac{3}{1} = \frac{5 \cdot 1}{7 \cdot 3} = \frac{5}{21}$.

Järeldus 2. **Selleks, et jagada täisarvu murruga, tuleb täisarv korrutada murru nimetajaga ja saadud korrutis jagada murru lugejaga.**

Näide: $8 : \frac{5}{6} = \frac{8 \cdot 6}{5} = \frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$.

Järeldus 3. Murru definitsioonist järeldub, et kahe täisarvu a ja b jagatis on murd $\frac{a}{b}$. Tõepoolest võib täisarve a ja b kujutada murdudena $\frac{a}{1}$ ja $\frac{b}{1}$. Jagades neid murde, saame murru $\frac{a}{b}$.

Järeldus 4. Selleks, et jagada segaarve, tuleb nad muuta liigmurdudeks ja teostada nende jagamine üldreegli järgi.

Näide: $9\frac{7}{18} : 1\frac{1}{12} = \frac{169}{18} : \frac{13}{12} = \frac{\overset{13}{\cancel{169}} \cdot \overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{18}} \cdot \underset{1}{\cancel{13}}} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$.

Kasutatakse ka veel järgmist kirjutamisviisi:

$$\frac{\overset{13}{\cancel{169}}}{\underset{3}{\cancel{18}}} : \frac{\overset{1}{\cancel{13}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} = \frac{13 \cdot 2}{3 \cdot 1} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Segaarvu jagades täisarvuga pole tarvis segaarvu muuta liigmurruks, kui segaarvu täisosa jagub täisarvuga jäägita. Sel juhul segaarv jagatakse kui summa.

Näide 1. $147\frac{14}{15} : 7 = (147 + \frac{14}{15}) : 7 = 147 : 7 + \frac{14}{15} : 7 = 21 + \frac{2}{15} = 21\frac{2}{15}$.

Näide 2. $72\frac{5}{8} : 6 = 12\frac{5}{48}$.

§ 116. Jagamine — korrutamine pöördmurruga.

Definitsioon. **Kaht arvu, millede korrutis võrdub ühega, nimetatakse teineteise pöördarvudeks.**

On ilmne, et antud arvu pöördarv saadakse arvu üks jagamisel antud arvuga. Näiteks arvu a pöördarv on $\frac{1}{a}$, sest $a \cdot \frac{1}{a} = 1$; 6 ja $\frac{1}{6}$ on teineteise pöördarvud.

Kaht murdu nimetatakse teineteise pöördmurdudeks, kui ühe murru lugeja võrdub teise murru nimetajaga ja ümberpöördult.

$\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ on teineteise pöördmurrud, sest $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$; $\frac{5}{12}$ ja $\frac{12}{5}$ on teineteise pöördmurrud.

Toodud definitsioonide alusel saab väljendada järgmist murdude jagamise reeglit: **selle asemel, et jagada mingit arvu murruga, võib seda arvu korrutada selle murru pöördmurruga.**

Tõepoolest

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc},$$

kuid $\frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ (kahe murru korrutamise definitsiooni alusel).

Järelikult: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ ehk $\frac{7}{15} : \frac{3}{8} = \frac{7}{15} \cdot \frac{8}{3} = \frac{56}{45} = 1\frac{11}{45}$.

Seega võib jagamist vaadelda kui arvu korrutamist jagaja pöördmurruga.

§ 117. Murru korrutamise või jagamise konkreetne mõte tema korrutamisel või jagamisel täisarvuga või murruga.

1. Korrutamine täisarvuga.

Korrutada murd $\frac{a}{b}$ täisarvuga c tähendab leida võrdsete liidetavate murdude $\frac{a}{b}$ summa juhul, kui nende arv on c.

Tõepoolest $\frac{a}{b} \cdot c = \overbrace{\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \ldots + \frac{a}{b}}^{c \text{ liidetavat}} =$

$= \frac{\overbrace{a + a + \ldots + a}^{c \text{ liidetavat}}}{b} =$ (murdude liitmise reegel)

$= \frac{ac}{b}$ (loomulikkude arvude korrutamise definitsioon).

Täisarvuga korrutamisel on korrutis korrutatavast suurem.

2. Korrutamine murruga.

Korrutada antud arv murruga tähendab korrutada see arv murru lugejaga ja jagada murru nimetajaga.

Selgitame algul arvu $\frac{a}{b}$ korrutamist $\frac{1}{n}$-ga.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{n} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot n} =$ (murdude korrutamise definitsiooni järgi)

$= \frac{a}{bn}$ (sest $a \cdot 1 = a$ loomulikkude arvude korrutamise definitsiooni järgi).

Kuna $\frac{a}{bn} \cdot n = \frac{an}{bn} =$ (murru korrutamine loomuliku arvuga)

$= \frac{a}{b}$ (murru põhiomaduse järgi), siis

väljendab murd $\frac{a}{bn}$ korrutatava $\frac{a}{b}$ üht n-ndikku.

Seega on antud arvu korrutamine murruga $\frac{1}{n}$ samaväärne ühe n-ndiku leidmisega korrutatavast.

Vaatleme nüüd arvu $\frac{a}{b}$ korrutamist murruga $\frac{m}{n}$.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn} =$ (kahe murru korrutamise definitsiooni järgi)

$= \frac{\overbrace{a + a + \ldots + a}^{m \text{ liidetavat}}}{bn} =$ (loomulikkude arvude korrutamise definitsiooni alusel)

$= \frac{a}{bn} + \frac{a}{bn} + \ldots + \frac{a}{bn}$ (murdude summa definitsiooni järgi).

Nagu nägime kujutab murd $\frac{a}{bn}$ korrutatava $\frac{a}{b}$ üht n-ndikku, murd $\frac{am}{bn}$, kui m sellise osa summa, kujutab m n-ndikku osa korrutatavast $\frac{a}{b}$. Tähendab, arvu korrutamine murruga $\frac{m}{n}$ on samaväärne m n-ndiku leidmisega korrutatavast.

Lihtmurruga korrutamisel on saadud korrutis korrutatavast väiksem, sest korrutamine lihtmurruga on samaväärne osa leidmisega arvust, näiteks $15\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}$. Tähendab $15\frac{3}{8}$ -st tuleb leida $\frac{2}{3}$, osa aga on väiksem tervikust.

$$15\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = 10\frac{1}{4}.$$

Korrutamisel murruga, mis võrdub ühega, arv (korrutatav) ei muutu. Liigmurruga korrutamisel korrutatav suureneb, sest liigmurd on suurem kui 1.

Näide: $12 \cdot \frac{7}{3}$ peab olema suurem kui 12, sest $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$. Seega, korrutades 12 arvuga $\frac{7}{3}$, võtame 12 liidetavana 2 korda ja lisame veel kolmandiku 12-st.

$$12 \cdot \frac{7}{3} = 12 \cdot 2\frac{1}{3} = 12 \cdot \left(2 + \frac{1}{3}\right) = 12 \cdot 2 + 12 \cdot \frac{1}{3} = 28.$$

Kui mingi tegur võrdub nulliga, siis võrdub ka korrutis nulliga, nagu täisarvudegi puhul. Näiteks $\frac{3}{5} \cdot 0 = 0$ ja $0 \cdot \frac{3}{5} = 0$.

Jagamise definitsiooni järgi leiame ühe teguri, kui on antud korrutis ja teine tegur. Eespool selgitasime, et osa arvust leitakse murruga korrutamisel.

Ülesanne terve arvu leidmiseks (ühe teguri) arvu teatava kindla osa (murru) suuruse järgi (korrutise ja ühe teguri järgi) lahendatakse murruga jagamisel.

Näide: Mis arvust $\frac{3}{4}$ on 12?

Antud on suurus 12, mis moodustab kindla osa $\left(\frac{3}{4}\right)$ ühest tundmatust arvust. Ülesanne lahendatakse jagades 12 $\frac{3}{4}$-ga. Et tervik on suurem oma osast, siis jagatis peab olema suurem 12-st:

$$12 : \frac{3}{4} = \frac{12 \cdot 4}{3} = 16.$$

Seega saadakse arvu jagamisel lihtmurruga jagatisena jagatavast suurem arv. Jagamisel murruga, mis võrdub ühega, jagatis võrdub jagatavaga.

Näide: $\frac{3}{5} : \frac{7}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{3}{5}$.

Liigmurruga jagamisel (jagaja on suurem kui 1) on saadud jagatis jagatavast väiksem, s. t. jagaja suurenemisel jagatis väheneb.

Murru jagamine nulliga pole võimalik, nagu täisarvugi jagamine nulliga. Nulli jagamisel murruga on jagatis null.

§ 118. Murru suuruse muutumine selle murru lugeja või nimetaja suurendamisel või vähendamisel mingi arv korda.

1. Kui murru lugejat suurendada või vähendada mingi arv korda, siis murd vastavalt suureneb või väheneb sama arv korda.

Murru $\frac{a}{b}$ lugeja suurendamine k korda on eelneva põhjal samaväärne selle murru korrutamisega täisarvuga k, mille resultaadina, nagu nägime, murd $\frac{a}{b}$ suurenes k korda. Ümberpöördult, murru lugeja vähendamine k korda on samaväärne murru jagamisega täisarvuga k, mille resultaadina murd $\frac{a}{b}$ väheneb k korda.

2. Kui murru nimetajat suurendada või vähendada mingi arv korda, siis murd vastavalt väheneb või suureneb sama arv korda.

Murru $\frac{a}{b}$ nimetaja vähendamine k korda on eelneva põhjal samaväärne murru korrutamisega täisarvuga k, mille resultaadina murd $\frac{a}{b}$ suureneb k korda.

§ 119. Loomulikkude arvude jagamisseaduste laiendamine jagamisele murdudega.

1. **Distributiivsus** (jaotuvus) jagatava suhtes.

Selle asemel, et jagada kahe arvu summat (vahet) mingi arvuga, võib jagada selle arvuga liidetavaid (vähendatavat ja lahutatavat) eraldi ja leida saadud tulemuste summa (vahe).

Tõestada: $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) : \frac{e}{f} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} \pm \frac{c}{d} : \frac{e}{f}$.

$\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) : \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{f}{e} =$ (§ 116 reegli alusel)

$= \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{e} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{e} =$ (distributiivsus murdude korrutamisel)

$= \frac{a}{b} : \frac{e}{f} \pm \frac{c}{d} : \frac{e}{f}$ (§ 116 reegli alusel).

Näide: $\left(\frac{5}{48} + \frac{35}{72}\right) : 1\frac{1}{24} = \frac{5}{48} : \frac{25}{24} + \frac{35}{72} : \frac{25}{24} = \frac{1}{10} + \frac{7}{15} = \frac{3+14}{30} = \frac{17}{30}$.

2. Korrutamiste ja jagamiste rea **kommutatiivsus** (kolme arvu puhul).

Korrutamiste ja jagamiste järjekorra muutumisel resultaat ei muutu.

1. kuju: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} : \frac{e}{f} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} \cdot \frac{c}{d}$.

2. kuju: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} : \frac{e}{f} = \frac{a}{b} : \frac{e}{f} : \frac{c}{d}$.

Tõestame kommutatiivsuse 1. kuju.

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} : \frac{e}{f} = \frac{ac}{bd} : \frac{e}{f} =$ (kahe murru korrutamine)

$= \frac{ac}{bd} \cdot \frac{f}{e} =$ (§ 116 reegli alusel)

$= \frac{acf}{bde} =$ (kahe murru korrutamine)

$$= \frac{afc}{bed} =$$ (korrutamise kommutatiivsus)

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{e} \cdot \frac{c}{d} =$$ (murdude korrutamine)

$$= \frac{a}{b} : \frac{e}{f} : \frac{c}{d}$$ (§ 116 reegli alusel).

Kommutatiivsuse 2. kuju tõestatakse analoogiliselt. Tõestus jäägu õppijate hooleks.

3. Korrutamiste ja jagamiste rea **assotsiatiivsus** (kolme arvu puhul).

1. kuju: **selle asemel, et arvu korrutada jagatisega, võib seda arvu korrutada jagatavaga ja saadud korrutis jagada jagajaga.**

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} : \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) : \frac{e}{f}.$$

2. kuju: **selle asemel, et arvu jagada kahe teguri korrutisega, võib seda arvu jagada esimese teguriga ja saadud jagatist teise teguriga.**

$$\frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} : \frac{e}{f}.$$

3. kuju: **selle asemel, et arvu jagada jagatisega, võib seda arvu jagada jagatavaga ja saadud jagatist korrutada jagajaga.**

$$\frac{a}{b} : \left(\frac{c}{d} : \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}.$$

Tõestame assotsiatiivsuse 1. kuju.

$$\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} : \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{cf}{de} =$$ (murdude jagamise reegel)

$$= \frac{acf}{bde} =$$ (murdude korrutamine)

$$= \frac{ac}{bd} \cdot \frac{f}{e} =$$ (murdude korrutamine)

$$= \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{f}{e} =$$ (assotsiatiivsus korrutamisel ja kahe murru korrutamine)

$$= \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) : \frac{e}{f}$$ (§ 116 reegli alusel).

§ 120. Ülesanded antud arvu osa leidmiseks ja arvu leidmiseks selle osa järgi.

a) Antud arvu osa leidmine.

Ülesanne. Rong sõitis $337\frac{1}{2}$ km, $\frac{7}{9}$ teest oli horisontaalne, $\frac{2}{5}$ ülejäänud teest oli tõusev, järelejäänud osa aga langev. Mitu km sõitis rong langevat teed mööda?

Ülesande tingimused:

Üldse sõideti läbi $337\frac{1}{2}$ km; horisontaalset teed oli $\frac{7}{9}$ kogu teest, tõusvat teed oli $\frac{2}{5}$ ülejäänud teest. Mitu km oli langust?

Süntees. Andmed on paigutatud sellesse järjekorda, milles tuleb nendega teostada tehteid. $\frac{7}{9}$ kogu teest, s. o. $337\frac{1}{2}$-st kilomeetrist, oli horisontaalne. Nendel andmetel, korrutamisel murruga, leiame horisontaalse teeosa pikkuse. $\frac{2}{5}$ ülejäänud teest oli tõusev. Järelikult leiame teise tehtega ülejäänud teeosa, seejärel $\frac{2}{5}$ ülejäänud teest ning lõpuks viimase, langeva teeosa pikkuse.

Ülesande lahendamise plaan.

1) Rongi poolt läbitud horisontaalse teeosa pikkus.
2) Ülejäänud teeosa pikkus.
3) Tõusva teeosa pikkus.
4) Langeva teeosa pikkus.

Lahendus.

$$1)\ 337\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{9}=\frac{\overset{75}{\cancel{675}}\cdot 7}{2\cdot\cancel{9}_{1}}=\frac{525}{2}=262\frac{1}{2}\ \text{(km)}.$$

$$2)\ 337\frac{1}{2}-262\frac{1}{2}=75\ \text{(km)}.$$

$$3)\ 75\cdot\frac{3}{8}=\frac{225}{8}=28\frac{1}{8}\ \text{(km)}.$$

$$4)\ 75-28\frac{1}{8}=46\frac{7}{8}\ \text{(km)}.$$

b) Arvu leidmine selle osa järgi.

Ülesanne. Tööline kulutas $\frac{1}{3}$ oma kuu töötasust mööbli ostmiseks, $\frac{2}{5}$ kogu töötasust toiduks, ülejäänud raha eest ostis ta saapad.

Mööbel oli jalanõudest 78 rubla võrra kallim. Leida töölise kogu töötasu ja mööbli hind.

Ülesande tingimused:

Mööbel — $\frac{1}{3}$ töötasust.

Toit — $\frac{2}{5}$ töötasust. Kui suur on kogu töötasu?

Saapad — ülejäänud töötasu.

Mööbel kallim saabastest 78 rbl.

Arutlus. Kogu töötasu moodustab kolme liidetava summa: mööbli ostuks kulutatud osa ja toidu ning saabaste ostuks kulutatud osad. Esimesed kaks liidetavat on teada, kuna kolmas on tundmatu. Kuid selle moodustab kogu töötasu ja kahe liidetava summa vahe.

Teades mööbli ja saabaste ostuks kulutatud töötasu osad, leiame nende vahe töötasu osana, mis peab ühtlasi olema 78 rubla. Saadud murdosa suuruse järgi leiame kogu töötasu, s. t. saame vastuse ülesande esimesele küsimusele. Teades kogu töötasu, leiame mööbli ostuks kulutatud summa, s. t. saame vastuse ülseande teisele küsimusele.

Lahendamise plaan ja lahendus.

1) Kui suur osa töötasust kulutati mööbli ostuks ja toiduks?

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=\frac{5}{15}+\frac{6}{15}=\frac{11}{15}.$$

2) Kui suur osa töötasust kulutati saabaste ostuks?

$$1-\frac{11}{15}=\frac{4}{15}.$$

3) Kui suure töötasu osa võrra kulutati mööblile rohkem kui saabastele?

$$\frac{1}{3}-\frac{4}{15}=\frac{5}{15}-\frac{4}{15}=\frac{1}{15}.$$

4) Kui suur on kogu töötasu?

$$78:\frac{1}{15}=78\cdot 15=1170 \text{ rubla.}$$

5) Kui palju maksis mööbel?

$$1170\cdot\frac{1}{3}=390 \text{ rubla.}$$

Kümnendmurrud.

§ 121. Kümnendmurdude definitsioon, lugemine ja kirjutamine.

Murdu, mille lugejaks on süsteemiline täisarv ja nimetajaks arvusüsteemi aluse aste, nimetatakse süsteemiliseks.

Niisuguse murru üldkuju on:

$$\frac{a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_2 k^2 + a_1 k + a_0}{k^m} = \frac{N}{k^m},$$

kus k on arvusüsteemi alus.

Erijuhul on kümnendsüsteemi puhul süsteemilise arvu nimetajaks arvu 10-ne aste.

Me nägime, et arvu kirjutamine kümnendsüsteemis põhjeneb numbrite kohaväärtuse (positsiooni) printsiibile: liikudes ühe järgu võrra vasakule, suureneb numbri väärtus kümnekordseks ja ümberpöördult: liikudes ühe koha võrra paremale, väheneb numbri väärtus 10 korda. Seda printsiipi kasutatakse süsteemiliste murdude kirjutamisel. Vastavalt kohaväärtuse printsiibile number, mis on arvus kirjutatud ühtesid tähistavast numbrist a_0 otseselt paremale, on kümme korda väiksem, kui ta asetseks a_0 kohal. Seega ei tähista see number ühtesid, vaid ühe kümnendikke.

Number, mis asetseb kümnendikke tähistavast numbrist otseselt paremal, väljendab sajandikke.

Ilmselt asetseb see number ühtede numbrist a_0 kahe koha võrra paremal. Kolmandal kohal asetseb tuhandikke väljendav number jne.

Järelikult, murde $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{10^n}$ võib vaadelda, kui uusi loendamisühikuid, millede vahel valitseb sama seos,

kui täisarvude loendamisühikutegi vahel ja nimelt: 1-ne loendamisühik — kümnendikud, 10 korda suuremad teisest ühikust — sajandikkudest, 100 korda suuremad kolmandast ühikust — tuhandikkudest jne.

Seega moodustavad uued loendamisühikud koos varem kindlaksmääratud loendamisühikutega, mida kasutati loendamisel täisarvudega, arvude piiramatu rea:

$$\ldots, 10^n, \ldots, 1000, 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots,$$

milles iga arv, lugedes vasakult paremale, on 10 korda väiksem eelnevast arvust.

Nimetatud uute loendamisühikute kasutamine võimaldab kirjutada igat murdu, mille nimetaja on arvu 10 mingi aste, ilma nimetajata, tähistades ainult murru lugeja.

Selleks on tarvis arvu kirjutades eraldada mingi leppemärgiga ühtede number otseselt järgnevast kümnendike numbrist.

Selleks leppemärgiks on koma, mis asetatakse otseselt ühtede numbri järele, kui neid esineb antud arvus, s. t. kui on antud segaarv (liigmurd). Kui aga süsteemiline murd ei sisalda ühtesid, siis tähistatakse ühtede koht nulliga, koma aga asetatakse nulli taha. Samuti tähistatakse nullidega puuduvate murdude lugejad, millede nimetajateks on 10^1, 10^2, ... jne. Kõigis ülejäänud osades on süsteemiliste murdude kirjalik numeratsioon samane loomulikkude arvude numeratsiooniga.

Murdu, mille nimetajaks on arvu 10 aste (ja mis on kirjutatud kümnendsüsteemi numbrite kirjaliku kujutusviisi reeglite alusel) **nimetatakse kümnendmurruks.**

Eelmises peatükis vaadeldud murde $\frac{a}{b}$ mistahes nimetajaga nimetatakse erinevalt kümnendmurdudest **harilikku-**

deks murdudeks. Iga kümnendmurdu võib väljendada summana:

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{b_n}{10^n}.$$

Viimane valem on kümnendmurru üldväljendus.

Näiteks: $23\frac{56\,807}{100\,000} = 2 \cdot 10 + 3 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{7}{100\,000}$.

Kui $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ võrdub nulliga, siis on meil tegemist lihtkümnendmurruga, vastupidisel juhul — segaarvuga. Kui aga $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ võrdub nulliga, siis on ilmselt tegemist täisarvuga, sest

$$\frac{0}{10^1} = \frac{0}{10^2} = \ldots = \frac{0}{10^n} = 0.$$

Esitatu alusel saab vaadeldavat kümnendmurdu väljendada järgmiselt:

$$a = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0,\ b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} b_n = A,\ b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} b_n.$$

$$23\frac{56\,807}{10\,000} = 23{,}56807.$$

Selleks, et kirjutada kümnendmurdu, mille nimetajaks on arv üks ühe või mitme nulliga, tuleb kirjutada selle lugeja ja eraldada komaga paremalt niimitu kümnendkohta, kuimitu nulli on nimetajas.

Näide:

$$\frac{135}{1000} = 0{,}135.$$

Kui nullide arv nimetajas ületab numbrite arvu murru lugejas, siis kirjutatakse lugejale vasakule poole juurde niimitu nulli, et oleks võimalik eelmist reeglit rakendada.

Näide:

$$\frac{135}{1\,000\,000} = 0{,}000135.$$

Komast paremal pool asetsevaid numbreid nimetatakse **kümnendmärkideks ehk kümnendkohtadeks.**

Kui täisosa võrdub nulliga, siis, nagu eespool tähendatud, on meil tegemist lihtmurruga, millel on järgmine kuju:

$$a = 0,\ b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} b_n.$$

Märgime, et koma ees asetseva nulli, näiteks 0,7846, oleks võinud ära jätta ja alata murru kirjutamist otse komaga, kuid selline kirjutusviis võib üksikjuhtudel osutuda ebaselgeks, seepärast ei ole kombeks koma ees olevat nulli ära jätta.

Kui aga mõned lugeja numbrid võrduvad nulliga, siis nagu täisarvugi kirjutamisel omavad need nullid olulist tähtsust ja seepärast ei või neid ära jätta, sest see muudaks numbrite kohti ja ühtlasi ka nende väärtust.

Vastupidi, pärast kümnendmurru viimast numbrit (s. o. b_n järgi) võib juurde kirjutada kuipalju tahes nulle, murru suurus sellega ei muutu, sest:

$$\frac{0}{10^{n+1}} = \frac{0}{10^{n+2}} = \ldots = 0.$$

Selgitame seda numbrilisel näitel.

Näide. 5 kümnendikku võrdub 50 sajandikuga, sest üks kümnendik sisaldab 10 sajandikku; 50 sajandikku võrdub 500 tuhandikuga, sest üks sajandik sisaldab 10 tuhandikku jne., seega $0,5 = 0,50 = 0,500 = 0,5000 \ldots$ Kirjutades juurde nullisid, muutub antud kümnendmurd, mille nimetaja on 10, teiseks murruks, mis on antud murruga võrdne, kuid nimetajaks on kümne kõrgem aste.

Mitme kümnendmurru ühisnimetajaks on ilmselt arvu 10 kõrgeim aste, mis esineb antud murdude nimetajana, seega on kümnendmurdude ühenimeliseks teisendamine äärmiselt kerge, lihtsalt vastava arvu nullide juurdekirjutamine.

Selleks, et lugeda suure kümnendkohtade arvuga kümnendmurdu, jaotatakse ta alates komast paremale kolmenumbrilisteks rühmadeks, samuti nagu jaotati täisarvgi lugemisel rühmadeks (ainult paremalt vasakule). Viimane

rühm ei tarvitse olla täielik (võib sisaldada 2 või 1 numbrit). Kindlalt peab teadma aga iga rühma viimase numbri järku. Esimeses rühmas on viimaseks järguks tuhandikud, teises rühmas — miljondikud, kolmandas rühmas — biljondikud (miljardikud) jne. Algul loetakse täisosa, siis järjestikku iga rühma arv ja rühma viimase järgu ühiku nimetused. Kui rühm pole täielik, siis nimetatakse viimase kümnendkoha ühikute nimetus. Rühmi eraldav väike vahe kergendab kümnendmurru lugemist. Näiteks, 72,532 603 25 loetakse 72 tervet, 532 tuhandikku 603 miljondikku 25 sajamiljondikku. Niisugusel lugemisel tekib teadvuses selge arusaamine ühtede ja nende osade nimetuste erinevusest. Harilikult loetakse aga arvu kümnendkohti täisarvude lugemise reegli alusel, nimetades viimase kümnendkoha järku. Näiteks: 12,0680536. Murdosa sisaldab kaht täisrühma ja veel üht järku. Teise rühma viimaseks järguks on miljondikud, järgmiseks kohaks — kümnemiljondikud. Loeme: kaksteist tervet, kuussada kaheksakümmend tuhat viissada kolmkümmend kuus kümnemiljondikku. Või 3502,083026 loetakse: kolmtuhat viissada kaks tervet kaheksakümmend kolm tuhat kakskümmendkuus miljondikku.

Sageli, kui kümnendmurrul on vähe kohti, loetakse teda nagu täisarvu, s. t. jäetakse ära koma ja ainult lõpuks nimetatakse viimase kümnendkoha järk. Näiteks 71,05 loetakse: seitse tuhat sada viis sajandikku. Tõepoolest 71 ühelist sisaldab 7100 sajandikku + 5 sajandikku, kokku 7105 sajandikku.

§ 122. Kümnendmurru teisendamine harilikuks murruks.

Me nägime, et igat kümnendmurdu

$$a = A, b_1 b_2 b_3 \ldots b_{n-1} b_n,$$

lähtudes kümnendmurru kujutamise põhimõttest, võib kirjutada:

$$A,\ b_1b_2b_3\ldots b_{n-1}b_n = A + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_3}{10^3} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{b_n}{10^n}.$$

Teisendades murrud ühenimelisteks ja liites neid, saame:

$$\frac{A \cdot 10^n + b_1 \cdot 10^{n-1} + b_2 \cdot 10^{n-2} + b_3 \cdot 10^{n-3} + \ldots + b_{n-1} \cdot 10 + b_n}{10^n}.$$

Näide: $8{,}06324 = 8 + \frac{6}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{2}{10000} + \frac{4}{100000} = \frac{806324}{100000}$.

Saadud hariliku murru lugeja kujutab enesest täisarvu $Ab_1b_2b_3\ldots b_{n-1}b_n$, nimetaja aga näitab ühelise osi, mis esinevad antud kümnendmurru viimasel kohal.

Selleks, et antud kümnendmurdu väljendada hariliku murruna, tuleb ära jätta koma ja saadud arv võtta hariliku murru lugejaks, kuna nimetajaks võtta arvu 10 aste, mis väljendab antud murru viimase kümnendkoha osi.

Näide: $0{,}0235 = \frac{235}{10^4} = \frac{235}{10000}$.

§ 123. Kümnendmurdude võrdsus ja ebavõrdsus.

Olgu tarvis võrrelda kaht murdu: 0,24 ja 0,23876.

Selleks, et võrrelda harilikke murde, teisendatakse nad ühenimelisteks ja otsustatakse lugeja suuruste järgi nende võrdsust või ebavõrdsust. Eespool nägime, et kümnendmurde on kerge teisendada ühenimelisteks vastava arvu nullide juurdekirjutamisega. Väiksema kümnendkohtade arvuga murrule kirjutatakse juurde (kas või mõttes) niipalju nulle, et kümnendkohtade arv oleks mõlemal murrul ühesugune, s. t. teisendatakse nad ühenimelisteks; antud näites väljendame sajandikud sajatuhandikkudes: 0,24000 ja 0,23878. Võrdsete nimetajate puhul on see murd suurem, mille lugeja on suurem. $24000 > 23878$, järelikult $0{,}24 > 0{,}23878$; sama-

sugusel viisil on kerge leida, et $4{,}2 > 3{,}1978$; $42{,}085 < 42{,}1$ jne.

Murdude suuruste võrdlemisel ilma ühenimelisteks teisendamata (ka mitte mõttes), võrreldakse nende sama järgu numbreid, alates kõrgemast järgust. Näiteks on viimases näites kõrgeimaks järguks kümned. Nende arv on võrdne (neli), kümnetele järgnevad ühed; ka nende arv on võrdne (kaks). Edasi võrdleme kümnendikke. Esimeses murrus on 0 kümnendikku, teises aga üks kümnendik. Kuna (kümnendikkudele) järgnevate numbrite summa, ükskõik kuipalju neid ka ei oleks, on väiksem eelneva järgu ühikust, s. t. väiksem 0,1-st, siis arv, millel on 0 kümnendikku, on väiksem arvust, mille kümnendike arv on 1: $0{,}8574 > 0{,}857387$, sest võrdsete kümnendike, sajandike ja tuhandike arvu puhul on esimese murru 4 kümnetuhandikku suurem teise murru 3 kümnetuhandikust.

Eespool vaadeldud kümnendmurdude kujutamise põhimõttest tuletuvad järgmised kümnendmurdude võrdsuse ja võrratuse tunnused.

1. Kümnendmurrud on võrdsed, kui nende murdude numbrid on ühesugused ja asetuvad koma suhtes samadel kohtadel, arvestamata pärast viimast tähendusega numbrit asetsevaid nullisid.

2. Mitmest antud kümnendmurrust on suurem see, mille täisosa on suurem; kui aga täisosad on võrdsed, siis on suurem see murd, mille kümnendikkude arv on suurem; kui aga ka need on võrdsed, siis on suurem see murd, mille sajandikkude arv on suurem jne.

§ 124. Murru suuruse muutumine koma nihutamisel.

Me nägime, et kümnendmurru kujutamine põhjenes numbrite kohaväärtuse printsiibil koma suhtes, mis eraldas täis-

osa kümnendkohtadest. Seega koma viimine vasakule või paremale muudab murru suurust. Vaatleme iga säärast juhtu eraldi.

1. Koma nihutamine paremale.

Koma nihutamisel n koha võrra paremale kümnendmurd suureneb 10^n korda.

Tõepoolest, koma viimisel ühe koha võrra paremale iga kümnendkoht läheneb ühe koha võrra komale ja kujutab seega 10 korda suuremaid ühikuid kui enne. Koht aga mis asetses enne otseselt komast paremal, kujutab nüüd ühtesid. Seega suureneb ka nende väärtus kümme korda. Me nägime (§ 122), et igat kümnendmurdu võib vaadelda kui ühelise kümnendosade summat. Kuna koma nihutamisel ühe koha võrra paremale, suurenes selle summa iga liidetav 10 korda, siis suureneb ka kogu summa 10 korda.

Analoogiliselt arutledes võib kergesti kindlaks teha, et koma nihutamisel n koha võrra paremale kümnendmurd suureneb 10^n korda.

2. Koma nihutamine vasakule.

Koma nihutamisel n koha võrra vasakule kümnendmurd väheneb 10^n korda.

Arutledes samuti kui eelmisel juhul jõuame kergesti veendumusele, et koma nihutamine vasakule mõjub murru suurusele vastupidiselt, kui koma viimine paremale.

Näide. Antud on arv 743,5. Koma nihutamisel kahe koha võrra vasakule arv väheneb 10^2, s. t. 100 korda. Saame 7,435. 7 sajalise asemel on nüüd 7 ühelist, kümnendike asemel on nüüd sada korda väiksemad osad — tuhandikud.

Kui koma ei ole võimalik nihutada, sest arvu täis- või murdosa ei sisalda piisavalt numbreid, siis kõrvaldatakse see raskus nullide juurdekirjutamisega, murdosale — paremale ja täisosale — vasakule. Näiteks olgu tarvis 0,15 vähendada 100 korda; 0,15 asemel kirjutame 000,15: nihutame koma 2-he koha võrra vasakule, saame 0,0015. Olgu tarvis

1,5 suurendada 1000 korda. 1,5 asemele kirjutame 1,500; siis nihutame koma 3-e koha võrra paremale ja saame 1500, mis ongi otsitav korrutis.

Olgu tarvis 23,125 vähendada 1 000 000 korda. Kirjutame arvu sääraselt: 0000023,125; siis nihutame koma kuue koha võrra vasakule, saame 0,000023125. Selleks, et suurendada sama arvu 1 000 000 korda, kirjutame ta sääraselt: 23,125000; siis nihutame koma 6 järgu võrra paremale, saame 23125000.

Kui täisarvu vaadelda kümnendmurruna, millel on paremal pool koma ükskõik kuipalju nullisid, siis täisarvu suurendamist või vähendamist 10, 100, 1000, ... korda teostame koma nihutamisega paremale või vasakule 1, 2, 3, ... koha võrra. Näiteks 25,00 vähendades 100 korda, saame 0,25; 43,00 suurendades 10 korda, saame 430,0 = 430.

3. Koma ärajätmine.

Kui antud arvul on *n* kümnendkohta, siis koma ärajätmine on ilmselt samaväärne koma nihutamisega *n* koha võrra paremale. Järelikult suureneb koma ärajätmisel kümnendmurd 10^n korda, kui kümnendkohtade arv murrus oli *n*.

Näide: 456 on sada korda suurem kui 4,56.

Märkus. Arvu suurendamist või vähendamist 10, 100 jne. korda koma nihutamisega paremale või vasakule kasutatakse meetermõõdustiku ühikutes väljendatud nimega arvude teisendamisel, sest meetermõõdustiku mõõtude ühikulised suhted võrduvad arvu 10 vastavate astmetega.

Näide 1. Väljendada murd 0,037865 t väiksemates ühikutes. Tonnis on 10 tsentnerit. Sellleks, et 0,037865 t väljendada tsentnereis, on tarvis 0,037865 korrutada 10-ga. Kümnendmurru korrutamiseks 10-ga viiakse koma ühe koha võrra paremale. 0,037865 t = 0,37865 ts. Tsentner on 100 kg. Järelikult 0,37865 ts = 37,865 kg = 37865 g. Kilogrammi ja grammi ühikuline suhe on 1000, korrutamisel 1000-ga viiakse koma kolme koha võrra paremale.

Näide 2. Väljendada 285637,8 cm^2 suuremates ühikutes. Iga ruutühik sisaldab 100 järgmist väiksemat ühikut, seega teisendame 100-ga jagades ruutsentimeetrid ruutdet-

simeetriteks, edasi teisendame 100-ga jagades ruutdetsimeetrid ruutmeetriteks jne.

Jagamine sajaga toimub koma nihutamisega 2-he koha võrra vasakule.

285637,8 cm^2 = 2856,378 dm^2 = 28,56378 m^2 = = 0,285637 Dm^2 jne.

Näide 3. Väljendada meetrites mitmenimeline arv 2 km 7 hm 6 Dm 8 m 5 dm 2 cm. Teades, et kilomeeter on tuhat meetrit, hektomeeter — sada meetrit, dekameeter — kümme meetrit, detsimeeter on kümnendik ja sentimeeter sajandik meetrist, kirjutame antud mitmenimelise arvu meetrites: 2768,52 m. Viies koma vasakule, on kerge väljendada antud arvu suuremates ühikutes; viies koma paremale, peenestame antud arvu mistahes väiksemateks ühikuteks.

Näide 4. Muuta ühenimeline arv 65 876 sentiliitrit mitmenimeliseks arvuks. 1 liiter = 100 sentiliitrit, järelikult 65876 cl = 658,76 l = 6 hl 5 Dl 8 l 7 dl 6 cl.

Kõik tehted meetermõõdustiku nimega arvudega toimuvad samuti kui kümnendmurdudega.

§ 125. Tehted kümnendmurdudega.

Me nägime juba, et kümnendmurdude kirjalik numeratsioon on samane täisarvude numeratsiooniga. See lihtsustab tunduvalt tehteid kümnendmurdudega, võimaldades teostada neid teatavatel tingimustel täisarvude tehete reeglite alusel.

1. Liitmine.

Kümnendmurdude liitmine toimub samuti nagu täisarvude liitminegi.

Vaadeldes harilikke murde, me nägime, et mistahes murdusid saab liita, teisendades neid ühenimelisteks ja liites lugejad.

On ilmne, et võrdsustades nullide juurdekirjutamisega antud kümnendmurdude kümnendkohtade arvu, me teisendame nad ühenimelisteks. Sel puhul tuleb summa leidmiseks jätta koma tähele panemata ja liita murrud nagu täisarvud ning seejärel eraldada saadud summas komaga paremalt poolt niipalju kümnendkohti, kuipalju neid oli liidetavais pärast ühenimeliseks teisendamist.

Praktiliseks otstarbeks võib kümnendmurdude liitmise reeglit sõnastada järgmiselt: mitme antud kümnendmurru liitmiseks tuleb nad paigutada nii, et komad ja sama järgu numbrid asetseksid ühes vertikaalses veerus üksteise all, pärast seda liita nad täisarvude liitmise reegli alusel ja saadud resultaadis paigutada koma liidetavate komade alla.

Näide: $3{,}743 + 12{,}56 = 16{,}303$

$$\begin{array}{r} 3{,}743 \\ +\ 12{,}56 \\ \hline 16{,}303 \end{array}$$

2. Lahutamine.

Kümnendmurdude lahutamine toimub samuti nagu täisarvude lahutaminegi.

See järeldub murdude lahutamise tehte olemusest.

Näide 1. $48{,}7 - 5{,}654$.

Kirjutame lahutatava vähendatava alla nii, et vastava järgu ühikud seisaksid teineteise all:

$$\begin{array}{r} 48{,}7 \\ -\ 5{,}654 \\ \hline 43{,}046 \end{array}$$

Selleks, et lahutada 4 tuhandikku, võtame ühe kümnendiku ja peenestame selle sajandikkudeks, 10-st sajandikust võtame ühe sajandiku, peenestame selle tuhandikkudeks. 7 kümnendiku asemele jääb 6 kümnendikku, 10 sajandiku asemele jääb

9 sajandikku ja 10 tuhandikku. Lahutamist teostame järkude järgi: 10-st lahutame 4; 9-st 5; 6-st 6 ja 8-st 5.

Näide 2.

$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ 3{,}584 \\ \hline 5{,}416 \end{array}$$

9-st ühelisest võtame ühe ja peenestame selle kümnendikkudeks, 10-st kümnendikust võtame ühe kümnendiku ja peenestame selle tuhandikkudeks. Viimase numbri lahutame 10-st, kõik ülejäänud, millede kohal pole vähendatava numbreid, lahutatakse 9-st. Resultaat: 5,416.

3. Korrutamine.

Selleks, et korrutada kümnendmurde tuleb ära jätta nende komad ja korrutada saadud täisarvud ning korrutises eraldada komaga paremalt poolt niimitu kümnendkohta, kuimitu neid oli korrutatavas ja korrutajas kokku.

Olgu tarvis korrutada kümnendmurd $\alpha = \frac{A}{10^m}$ kümnendmurruga $\beta = \frac{B}{10^n}$.

Murdarvude korrutamise definitsiooni alusel on antud kümnendmurdude korrutis:

$$\alpha\beta = \frac{AB}{10^m \cdot 10^n} \text{ ehk } \alpha\beta = \frac{AB}{10^{m+n}}.$$

Siit järgneb, et antud kümnendmurdude korrutise leiame, kui komad ära jätame ja saadud täisarvusid korrutame ning seejärel saadud korrutises paremalt poolt komaga eraldame $(m+n)$ kümnendkohta.

Näide: Antud: $0{,}056 \cdot 0{,}13$. Kirjutame tegurid harilikkude murdudena:

$$\frac{56}{1000} \cdot \frac{13}{100}.$$

Korrutame harilikkude murdude korrutamise reegli alusel:

$$\frac{728}{1000 \cdot 100}.$$

Saadud korrutise kirjutame nimetajata, milleks kirjutame lugeja ja eraldame paremalt poolt komaga niimitu kohta, kuimitu nulli on nimetajas. Nimetajas on 3 + 2 nulli, s. t. korrutises tuleb paremalt poolt eraldada niipalju kümnendkohti, kuipalju neid on korrutatavas ja korrutajas kokku. Kui korrutise lugejas ei jätku numbreid, siis kirjutatakse vasakule poole nullisid juurde: $0{,}056 \cdot 0{,}13 = 0{,}00728$.

Tehe paigutatakse nii:

$$\begin{array}{r} 0{,}123 \\ \times\ 0{,}58 \\ \hline 984 \\ +\ 615 \\ \hline 0{,}07134 \end{array}$$

Kümnendmurdude korrutamist saab asendada kümnendmurru ja täisarvu korrutamisega. Selleks jäetakse korrutajas ära koma ja korrutatavas nihutatakse koma niimitu kohta vasakule, kuimitu kümnendkohta oli korrutajas, s. t. korrutajat suurendatakse ja korrutatavat vähendatakse samapalju kordi, — korrutis ei muutu.

$$3{,}51 \cdot 0{,}42 = 0{,}0351 \cdot 42 = 1{,}4742.$$

$$\begin{array}{r} 0{,}0351 \\ \times\ 42 \\ \hline 702 \\ +\ 1404 \\ \hline 1{,}4742 \end{array}$$

Korrutatakse täisarvude korrutamisreegli alusel, komale tähelepanu pööramata ja eraldatakse siis korrutises paremalt poolt niimitu kohta, kuimitu neid on korrutatavas.

See reegel on rakendatav ka siis, kui üks tegureist on täisarv; sel juhul eraldatakse korrutises niimitu kümnendkohta, kuimitu neid oli teises teguris.

Erijuhul, kui ühel tegureist on n kümnendkohta, teine tegureist võrdub aga 10^m-ga, võib korrutise saamiseks nihutada koma m koha võrra paremale, sest antud murru korrutamine 10^m-ga on samaväärne selle murru suurendamisega 10^m korda, mis teostub kergesti koma nihutamisega m koha võrra paremale (§ 124). Kui seejuures $n < m$, siis tuleb korrutises viimase tähendusega numbri järgi kirjutada $(m - n)$ nulli.

4. Jagamine.

Kahe kümnendmurru jagamine taandub kahe täisarvu jagamisele.

Olgu tarvis jagada kümnendmurd $\alpha = \frac{A}{10^m}$ kümnendmurruga $\beta = \frac{B}{10^n}$.

Kahe murru jagamisreegli alusel saame:

$\alpha : \beta = \frac{A}{10^m} : \frac{B}{10^n} = \frac{A \cdot 10^n}{10^m \cdot B}$ ehk $\alpha : \beta = \frac{A \cdot 10^n}{B \cdot 10^m}$, kus $A \cdot 10^n$ ja $B \cdot 10^m$ on täisarvud.

Pärast saadud murru $\frac{A \cdot 10^n}{B \cdot 10^m}$ taandamist lugeja ja nimetaja S. Ü-ga, väljendub ta kujus $\frac{x}{y}$, kus x ja y on ühistegurita arvud.

Seega kümnendmurru jagamine kümnendmurruga taandus kahe täisarvu jagamisele. Kui täisarv $A \cdot 10^n$ jagub jäägita täisarvuga $B \cdot 10^m$, siis on jagatis $\alpha : \beta = \frac{x}{y}$ samuti täisarv.

Vastasel korral vaadeldav jagatis on harilik murd.

Näide: 1) $0{,}56 : 0{,}007 = \frac{56}{100} : \frac{7}{1000} = \frac{56 \cdot 1000}{7 \cdot 100} = 80.$

2) $0{,}36 : 4{,}8 = \frac{36}{100} : \frac{48}{10} = \frac{36 \cdot 10}{48 \cdot 100} = \frac{3}{40}.$

Tekib küsimus saadud hariliku murru väljendamise võimalusest kümnendmurruna.

Nagu näeme edaspidi pole hariliku murru väljendamine kümnendmurruna täpselt alati võimalik. Järelikult, kümnendmurru jagamisel kümnendmurruga saadav täpne jagatis ei ole alati väljendatav kümnendmurruna täpselt.

Vaatleme, kuidas praktiliselt teostatakse kümnendmurdude jagamist, kui soovitakse vastust saada kümnendmurruna.

1. Kümnendmurru jagamine täisarvuga.

Näide 1. Antud: 61,48 : 8.

Jagame nagu täisarvude puhul ja nimelt: võtame kõrgema järgu ühikud: 61 ühte lahutame liidetavaiks 56 + 5; jagamisel 8-ga saame jagatiseks 7 ühte ja jäägiks 5 ühte. 5 ühte peenestame kümnendikkudeks ja jagatise 7 ühte eraldame komaga järgnevatest kümnendkohtadest. Jätkame jagamist. 5 ühte = 50 kümnendikku, liidame jagatava 4 kümnendikku. 54 kümnendikku lahutame liidetavaiks: 48 kümnendikku + 6 kümnendikku. Jagatiseks saame 6 kümnendikku. Jäägi 6 kümnendikku peenestame sajandikeks, saadud 60 sajandikuga liidame jagatava 8 sajandikku. 68 sajandikku jagame 8-ga. Jagatiseks saame 8 sajandikku ja jäägiks 4 sajandikku. Jäägi peenestame tuhandikkudeks: 40 tuhandikku jagub 8-ga jäägita. Nii saadakse 61,48 jagamisel 8-ga täpne jagatis: 7,685.

$$
\begin{array}{r|l}
61{,}48 & 8 \\
\cline{2-2}
54 & 7{,}685 \\
\cline{1-1}
68 & \\
\cline{1-1}
40 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Näide 2. Antud: 172,9 : 11.

Võtame kõrgema järgu ühikud, 17 kümmet ja jagame 11-ga, saame jagatiseks ühe kümne ja jäägiks 6 kümmet. 6 kümmet peenestame ühtedeks, saadud 60 ühega liidame jagatava ühed ja saadud 62 ühte jagame 11-ga. Jagatiseks saame 5 ühte ja jäägiks 7 ühte.

$$\begin{array}{l} \underline{172{,}9} : 11 = 15{,}71 \\ \underline{62} \\ \quad 79 \\ \quad \underline{20} \\ \quad\ \ 9 \end{array}$$

Ülejäänud 7 ühte peenestame kümnendikeks, kümnendike jagamisel saame jagatiseks samuti kümnendikud, seepärast eraldame jagatises ühed komaga. 79 kümnendiku jagamisel 11-ga saame 7 kümnendikku ja jäägiks 2 kümnendikku. 2 kümnendikku peenestame sajandikkudeks: 20 sajandikku jagame 11-ga. Saame ühe sajandiku ja jäägiks 9 sajandikku. Jäägi võime peenestada edasi tuhandikeks ja jätkata jagamist seni, kuni jagamine lõpeb jäägita või oleme saanud jagatiseks soovitud järgu. Oletame, et soovime jagatise saada kuni sajandikkudeni.

$$172{,}9 : 11 \approx 15{,}71.$$

Laineline võrdusmärk tähendab ligikaudselt võrdne; 15,71 on ligikaudne jagatis. Täpne jagatis on $15{,}71 + \frac{9}{11}$ sajandikku. Ära jättes $\frac{9}{11}$ sajandikku, teeme vea, mis on väiksem ühest sajandikust; seepärast nimetatakse jagatist 15,71 ligikaudseks jagatiseks täpsusega kuni 0,01 ehk veaga alla üks sajandik. Viimane number jagatises väljendab samuti sajandikke. Kui aga selle asemel, et ära jätta murdu $\frac{9}{11}$ sajandikku, täiendame seda $\frac{2}{11}$ sajandikuga, s. t. kuni täissajandikuni, siis saame jagatise $15{,}71 + \left(\frac{9}{11} + \frac{2}{11}\right)$ sajandikku $= 15{,}71 + 0{,}01 = 15{,}72$. Teine jagatis on suurem täpsest jagatisest $\frac{2}{11}$ sajandiku võrra. See on samuti ligikaudne jagatis veaga alla ühe sajandiku. Järelikult meil on kaks ligi-

kaudset jagatist veaga alla 0,01: 15,71 ja 15,72. Nende vahe on 0,01 ja erinevus täpsest jagatisest väiksem kui 0,01:

$$15{,}71 < \frac{172{,}9}{11} < 15{,}72.$$

Esimest jagatist nimetatakse ligikaudseks jagatiseks puudusega ja teist — liiaga.

Ligikaudse jagatise määramisel võetakse jagatis puudusega, kui jagamise jääk on väiksem kui $\frac{1}{2}$ jagajat ja liiaga, kui jääk on suurem või võrdne $\frac{1}{2}$ jagajaga.

Näide: 53,9388 : 17 = 3,17287

```
 29
 123
 119
  48
 148
 136
  120
  119
```

Jagatis 53,9388 : 17

täpsusega kuni	0,1	on 3,2	(võtame jagatise liiaga, sest jääk on 12)
„ „	0,01	„ 3,17	(võtame puudusega, jääk 4)
„ „	0,001	„ 3,173	(võtame liiaga, jääk 14)
„ „	0,0001	„ 3,1729	(võtame liiaga, jääk 12)
„ „	0,00001	„ 3,17287	(võtame puudusega, jääk 1).

Tulemus. **Kümnendmurru jagamine täisarvuga toimub samadel alustel nagu täisarvude jagaminegi, s. t. jagaja lahutatakse niisugusteks liidetavateks, milledest igaüks jagub antud jagajaga, kusjuures jäägid peenestatakse järjest väiksemateks kümnendosadeks ja tehet jätkatakse niikaua, kuni saadakse täpne jagatis või ligikaudne jagatis teatava täpsusega.**

Erijuhul, kui jagaja võrdub 10^m-ga, võib jagatise saamiseks koma nihutada m koha võrra vasakule, sest antud küm-

nendmurru jagamine 10^m-ga on samaväärne selle vähendamisega 10^m korda, mida teostatakse koma nihutamisega m koha võrra vasakule. Kui seejuures kohtade arv vasakul pool komat on väiksem kui m, siis paigutatakse puuduvate kohtade asemele nullid.

2. Jagamine kümnendmurruga.

Mingi arvu jagamisel kümnendmurruga tuleb jagajas ära jätta koma ja suurendades jagatavat niimitu korda, kuimitu korda suurenes jagaja koma ärajätmisega, teostada jagamine täisarvuga jagamise reegli alusel.

Olgu tarvis kümnendmurd $\alpha = \frac{A}{10^m}$ jagada kümnendmurruga $\beta = \frac{B}{10^n}$.

Saame:

$$\alpha : \beta = \frac{A}{10^m} : \frac{B}{10^n} = \left(\frac{A}{10^m} \cdot 10^n\right) : \left(\frac{B}{10^n} \cdot 10^n\right) =$$ (jagatis ei muutu jagatava ja jagaja korrutamisel ühe ja sama arvuga)

$$= \left(\frac{A}{10^m} \cdot 10^n\right) : B$$ (järeldus jagamise definitsioonist).

Seega taandub jagamine kümnendmurruga tõepoolest jagamisele täisarvuga.

See jagamise reegel oli toodud eespool.

Näide: Jagada 0,0087563 : 0,014 täpsusega kuni 0,001.

0,0087563 : 0,014 = 8,7563 : 14 = 0,625

84

35

76

6

Jääk on väiksem kui pool jagajat, järelikult võtame jagatise puudusega.

Kümnendmurrud ja harilikud murrud.

§ 126. Harilikkude murdude teisendamine kümnendmurdudeks.

Definitsioon. Muuta harilik murd kümnendmurruks tähendab leida niisugune kümnendmurd, mis võrdub antud hariliku murruga.

Teoreem. **Kui antud taandamatu hariliku murru nimetaja ei sisalda teisi algarvulisi tegureid peale 2 ja 5, siis väljendub see murd täpselt kümnendmurruna.**

Antud: taandamatu harilik murd $\frac{a}{b}$, kusjuures $b = 2^m \cdot 5^n$.

Tõestada: murd $\frac{a}{b}$ väljendub täpselt kümnendmurruna.

Teoreemi eelduse kohaselt $b = 2^m \cdot 5^n$. Järelikult murd $\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n}$. Vaatleme, kas saab murdu $\frac{a}{2^m \cdot 5^n}$ muuta kümnendmurruks. Seejuures võib esineda kolm juhtu:

a) $m = n$, b) $m > n$ ja c) $m < n$. Vaatleme neid juhtumeid eraldi.

a) Kui $m = n$, siis murru $\frac{a}{2^m \cdot 5^n}$ nimetaja on arvu 10 aste ja nimelt $2^m \cdot 5^n = 10^n$.

Tähendab $\frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a}{10^n}$. Seega $\frac{a}{b} = \frac{a}{10^n}$.

Järelikult, antud taandamatu murd $\frac{a}{b}$ on väljendatav täpselt kümnendmurruna.

Näide: $\frac{137}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{137}{10^3} = 0{,}137$.

b) Kui $m > n$, siis on alati võimalik murru $\frac{a}{2^m \cdot 5^n}$ lugejat ja nimetajat korrutada arvuga 5^{m-n}.

Siis saame:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^n \cdot 5^{m-n}} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{2^m \cdot 5^m} = \frac{a \cdot 5^{m-n}}{10^m}.$$

Järelikult on vaadeldaval juhul antud murd $\frac{a}{b}$ täpselt väljendatav kümnendmurruna.

Näide: $\frac{23}{40} = \frac{23}{2^3 \cdot 5} = \frac{23 \cdot 5^2}{2^3 \cdot 5 \cdot 5^2} = \frac{23 \cdot 25}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{575}{10^3} = 0{,}575.$

c) Kui $m < n$, siis on alati võimalik murru $\frac{a}{2^m \cdot 5^n}$ lugejat ja nimetajat korrutada arvuga 2^{n-m}.

Siis saame:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^m \cdot 5^n \cdot 2^{n-m}} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{2^n \cdot 5^n} = \frac{a \cdot 2^{n-m}}{10^n}.$$

Järelikult väljendub sel juhul antud murd täpsalt kümnendmurruna.

Näide:

$$\frac{17}{250} = \frac{17}{2 \cdot 5^3} = \frac{17 \cdot 2^2}{2 \cdot 5^3 \cdot 2^2} = \frac{17 \cdot 4}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{68}{10^3} = 0{,}068.$$

Kaks hariliku murru kümnendmurruks teisendamisviisi.

Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks on teostatav kahel viisil:

1) **antud murru nimetaja algtegureiks lahutamise** ja sellele järgneva lugeja ja nimetaja korrutamise teel 2 ja 5 niisuguse astmega, et nimetajas tekiks arvu 10 mingi aste.

2) **lugeja jagamise teel nimetajaga.**

Esimest viisi kasutasime teoreemi tõestamisel.

Teine viis on enam kasutatav kui esimene, sest see on rakendatav ka nendele murdudele, mis teisenduvad ainult ligikaudseteks kümnendmurdudeks.

Kuna meie vaatleme iga harilikku murdu kui selle lugeja ja nimetaja jagatist, siis hariliku murru muutmiseks kümnendmurruks tuleb selle murru lugeja jagada nimetajaga sama reegli alusel kui kümnendmurru jagamine täisarvuga.

Näide 1. On antud harilik murd $\frac{17}{80}$. Muudame selle kümnendmurruks esimesel viisil:

$$\frac{17}{80} = \frac{17}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{17 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2125}{10000} = 0{,}2125.$$

Näide 2. On antud harilik murd $\frac{17}{80}$. Muudame selle kümnendmurruks teisel viisil, jagades lugeja nimetajaga.

Nii saame:

$$\begin{array}{r|l} 17 & 80 \\ \hline 170 & 0{,}2125 \\ 160 & \\ \hline 100 & \\ 80 & \\ \hline 200 & \\ 160 & \\ \hline 400 & \\ 400 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Järeldus. Kui taandamatu harilik murd muutub täpselt kümnendmurruks, siis saadud kümnendmurru kümnendkohtade arv võrdub murru nimetajas olevate tegurite 2 ja 5 suurema astendajaga.

Vaadeldud esimeses näites oli nimetaja $80 = 2^4 \cdot 5^1$. Saadud kümnendmurd võrdub 0,2125, s. t. omab neli kümnendkohta.

§ 127. Hariliku murru väljendamine kümnendmurruna ligikaudselt.

Me tegime kindlaks (§ 126), et harilik murd väljendub ainult siis täpselt kümnendmurruna, kui selle nimetaja ei sisalda mingeid teisi tegureid peale 2 ja 5.

Iga harilik murd ei rahulda neid tingimusi ja seetõttu ei ole ka iga harilik murd täpselt väljendatav kümnendmurruna. Kui hariliku murru nimetajas on peale 2 ja 5 veel teisi tegureid, siis väljendub ta kümnendmurruna ligikaudselt puudusega või liiaga.

Olgu $\frac{a}{b}$ taandamatu harilik murd, milles a ja b on loomulikud arvud, kusjuures nimetaja b ei koosne eranditult tegureist 2 ja 5. Vaatleme, kuidas leida murru $\frac{a}{b}$ ligikaudseid väärtusi täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$ puudusega või liiaga. Vastavalt kümnendmurru ligikaudsete väärtuste definitsioonile peame leidma kaks kümnendmurdu, mis rahuldaksid järgmist tingimust:

$$\frac{k}{10^n} < \frac{a}{b} < \frac{k+1}{10^n}.$$

Korrutades monotoonsuse seaduse alusel antud arvud 10^n-ga, saame:

$$k < \frac{a}{b} \cdot 10^n < k+1.$$

Sellest kirjutisest nähtub, et k on murru $\frac{a \cdot 10^n}{b}$ täisosa ehk arvude $a \cdot 10^n$ ja b jagatise täisosa. Järelikult $\frac{k}{10^n}$ on murru $\frac{a}{b}$ ligikaudne väärtus täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$, kuid puudusega ja $\frac{k+1}{10^n}$ — samasuguse täpsusega ligikaudne väärtus,

kuid liiaga. Tähendame, et vastavalt kümnendmurru definitsioonile mõlemad saadud kümnendmurrud $\frac{k}{10^n}$ ja $\frac{k+1}{10^n}$ sisaldavad n kümnendkohta.

Esitatust järgneb, et antud murru $\frac{a}{b}$ ligikaudse väärtuse leidmiseks täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$ tuleb see murd korrutada 10^n-ga, leida saadud korrutise täisosa ja eraldada selles komaga n kohta paremalt.

Näide: Väljendada harilik murd $\frac{32}{7}$ kümnendmurruna täpsusega kuni $\frac{1}{1000}$.

Jagades korrutise $(32 \cdot 1000)$ arvuga 7, saame jagatise 4571 ja jäägi 3. Eraldades leitud jagatises paremalt poolt 3 kümnendkohta, leiame antud murru $\frac{32}{7}$ ligikaudse väärtuse puudusega täpsusega kuni $\frac{1}{1000}$.

Seega $\frac{32}{7} \approx 4{,}571$ (puudusega) ehk $\frac{32}{7} \approx 4{,}572$ (liiaga).

Praktiliselt toimub hariliku murru muutmine antud täpsusega ligikaudseks kümnendmurruks järgmiselt: jagatakse lugeja nimetajaga, peenestatakse saadud jäägid väiksemateks osadeks seni, kuni saadakse jagatises soovitud osad. Jagatis võetakse puudusega, kui viimane jääk on väiksem kui pool jagajat, ja liiaga, kui jääk on suurem või võrdne poole jagajaga.

Selleks, et sama murdu $\frac{32}{7}$ muuta kümnendmurruks täpsusega kuni 0,001, jagame lugeja nimetajaga, kuni saame jagatises tuhandikud.

$$
\begin{array}{l}
\underline{}32 : 7 = 4{,}571 \\
\underline{28} \\
40 \\
\underline{35} \\
50 \\
\underline{49} \\
10 \\
\underline{7} \\
3
\end{array}
$$

Jääk 3 on väiksem kui pool jagajat, seega võtame jagatise puudusega.

$$\frac{32}{7} \approx 4{,}571.$$

Sama murd täpsusega kuni 0,1 võrdub 4,6-ga. (Jagatis võetakse liiaga, sest jääk 4 on suurem kui pool jagajat.)

§ 128. Perioodilised murrud.

Sel juhul, kui antud taandamatu murru $\frac{a}{b}$ nimetaja ei sisalda üldse algtegureid 2 ja 5 või sisaldab peale nende veel mingeid teisi algtegureid, siis korrutise $a \cdot 10^n$ jagamine b-ga ei lõpe, sest kui jagamine lõpeks, siis saaks murdu $\frac{a}{b}$ väljendada kümnendmurruna täpselt, mis aga vaadeldud juhul § 126 teoreemi alusel esineda ei saa. Järelikult saame jagamisel alati jäägi, mis on väiksem jagajast b. Nendeks jääkideks võivad olla ainult loomulikkude arvude rea arvud $1, 2, 3, 4, \ldots, (b-1)$. Siit järgneb, et vähemalt b-nda jäägina (kui mitte varem) peab korduma mingi arv näidatud loomulikkude arvude reast. Kui aga mingi jääk juba kordub, siis peab ka korduma vastav jagatise number. Ilmselt hakkavad pärast seda jääki korduma ka jagatise numbrid endises järjekorras.

Lõpmatut kümnendmurdu, mille üks number või mitme numbri kogum kordub muutumatus järjekorras, nimetatakse perioodiliseks murruks.

Samas järjekorras korduvate numbrite kogumikku nimetatakse selle murru perioodiks.

Perioodilised murrud jagunevad **puhtperioodilisteks** ja **segaperioodilisteks.**

Puhtperioodiliseks murruks nimetatakse niisugust perioodilist murdu, millel periood algab kohe esimesest numbrist pärast koma.

Segaperioodiliseks murruks nimetatakse niisugust perioodilist murdu, mille periood ei alga mitte esimesest kohast pärast koma, vaid koma ja perioodi vahel on üks või mitu mittekorduvat numbrit.

Näiteks: $3{,}267267267\ldots$ on puhtperioodiline murd; $5{,}73267267267\ldots$ on segaperioodiline murd. Perioodilise murru kirjutamisel asetatakse harilikult periood sulgudesse ja kirjutatakse ainult üks kord.

Näiteks: $3{,}267267267\ldots = 3{,}(267)$ $5{,}73267267267\ldots = 5{,}73(267)$.

Üldkujul kirjutatakse puhtperioodilist murdu, milles on A tervet ja perioodis n numbrit nii:

$A,b_1b_2b_3\ldots b_nb_1b_2b_3\ldots b_n$ ehk lühemalt: $A,(b_1b_2b_3\ldots b_n)$.

Segaperioodilist murdu, millel on k numbrit enne perioodi ja n numbrit perioodis, kirjutame järgmiselt:

$$A,b_1b_2b_3\ldots b_kb_{k+1}b_{k+2}b_{k+3}\ldots b_{k+n}b_{k+1}\,b_{k+2}b_{k+3}\ldots b_{k+n}\ldots$$

ehk lühemalt:

$$A,b_1b_2b_3\ldots b_k(b_{k+1}b_{k+2}b_{k+3}\ldots b_{k+n}).$$

§ 129. Hariliku murru muutmine lõplikuks või perioodiliseks kümnendmurruks.

Ülalesitatust tuleneb järgmine reegel:

Hariliku murru muutmisel kümnendmurruks tekib lõplik kümnendmurd või perioodiline murd.

Tõepoolest, kui antud taandamatu hariliku murru nimetaja ei sisalda teisi algtegureid peale 2 ja 5, siis väljendub see murd teoreemi § 126 kohaselt ainult lõpliku kümnendmurruna.

Kui aga antud taandamatu hariliku murru nimetaja üldse ei sisalda algtegureid 2 ja 5 või sisaldab peale nende veel teisi algtegureid, siis nagu § 128 selgitati, jagamine ei lõpe, kusjuures jagatises saadakse tingimata perioodiline murd.

Teoreem 1. **Kui kahe arvu jagamisel kolmandaga tekivad võrdsed jäägid, siis nende kahe arvu vahe jagub jäägita antud kolmanda arvuga.**

Antud: arvu a jagamisel d-ga tekib jääk r,
arvu b jagamisel d-ga „ „ r.

Tõestada: $(a-b) : d$.

Oletame, et $a : d = q$ (jääk r),
$b : d = q_1$ (jääk r).

Siis $a = dq + r$ ja $b = dq_1 + r$

$$a - b = dq + r - (dq_1 + r) = dq - dq_1 = d(q - q_1),$$

millest järgneb, et $(a-b) : d$.

Pöördteoreem.

Kui kahe arvu vahe jagub kolmanda avruga, siis tekivad nende kahe arvu jagamisel kolmanda arvuga võrdsed jäägid.

Antud: $(a-b) : d$.

Tõestada: a jagamisel d-ga ja b jagamisel d-ga saadakse võrdsed jäägid.

Oletame, et $a : d = q$ (jääk r),
$b : d = q_1$ (jääk r_1).

Siis

$$a = dq + r \text{ ja } b = dq_1 + r_1.$$

Lahutades esimesest võrdusest teise, saame:

$$a - b = dq + r - (dq_1 + r_1) = dq + r - dq_1 - r_1 = \\ = d(q - q_1) + (r - r_1).$$

Vaatleme $(a - b)$ jagatavana, d — jagajana, $(q - q_1)$ — jagatisena ja $(r - r_1)$ jäägina. Kuid pöördteoreemi eeldusest teame, et $(a - b)$ jagub d-ga jäägita, millest järgneb, et jääk $(r - r_1)$ võrdub nulliga. Kui aga $r - r_1 = 0$, siis $r = r_1$.

Teoreem 2. **Kui taandamatu hariliku murru nimetajal ei ole arvuga 10 ühistegureid, siis niisuguse murru muutmisel kümnendmurruks tekib puhtperioodiline murd, kusjuures perioodis on niipalju numbreid, kuipalju üheksaid on järgmise rea 9, 99, 999, 9999, ... väikseimas arvus, mis jagub antud murru nimetajaga.**

Antud: taandamatu murd $\frac{a}{b}$, kusjuures $(b ; 10) = 1$ ehk $(b ; 10^m) = 1$.

Tõestada: murd $\frac{a}{b}$ teisendub puhtperioodiliseks murruks. Kuna eelduse kohaselt nimetaja b ei sisalda tegureid 2 ja 5, siis teisendub murd $\frac{a}{b}$ lõpmatuks perioodiliseks murruks; kuid millisest kümnendkohast periood algab, ei ole teada. Oletame, et perioodi esimene number asetseb m-dal kohal pärast koma ja see number kordub n-dal kohal. Teisendame antud hariliku murru $\frac{a}{b}$ kümnendmurruks jagades lugeja nimetajaga. Selleks, et saada jagatise m-es kümnendkoht, peame a korrutama 10^m-ga ja jagama b-ga; sel-

leks, et saada jagatises n-es kümnendkoht, peame a korrutama 10^n-ga ja jagama b-ga.

Tekkigu nendel jagamistel vastavad jagatised q ja q_1 ning jäägid r ja r_1 ja nimelt: $a \cdot 10^m : b = q$ (jääk r) ja $(a \cdot 10^n : b) = q_1$ (jääk r_1). Kuna vastavalt meie oletusele jagatise m-dal ja n-dal kohal saadakse ühesugused numbrid, siis jäägid r ja r_1 on omavahel võrdsed.

Järelikult saadakse kahe arvu $a \cdot 10^m$ ja $a \cdot 10^n$ jagamisel ühe ja sama arvuga b võrdsed jäägid. Käesoleva paragrahvi 1. teoreemi kohaselt vahe

$$(a \cdot 10^n - a \cdot 10^m) \vdots b, \text{ s. t. } \frac{a \cdot 10^n - a \cdot 10^m}{b} = p,$$

kus p on täisarv.

Kujutame lugejat kahe teguri korrutisena:

$$\frac{10^m (a \cdot 10^{n-m} - a)}{b} = p.$$

Eelduse kohaselt on arvud 10^m ja b ühistegurita, järelikult esimene tegur 10^m ei jagu b-ga; siis peab teine tegur $(a \cdot 10^{n-m} - a)$ jäägita jaguma b-ga (§ 67):

$$(a \cdot 10^{n-m} - a) \vdots b, \text{ s. t. } \frac{a \cdot 10^{n-m} - a}{b} = p_1,$$

kus p_1 on täisarv.

Rakendades viimase murru lugeja $(a \cdot 10^{n-m} - a)$ kohta käesoleva § pöördteoreemi, saame: $a \cdot 10^{n-m} : b = k_1$ (jääk R_1) ja $a : b = k$ (jääk R), kusjuures $R_1 = R$.

Kuid murru $\frac{a}{b}$ muutmisel kümnendmurruks, jääk R on esimeseks jäägiks, millest alates algab jagatise kümnendkohtade leidmine ja kuna $R = R_1$, siis on ilmne, et jagatises on korduvaks perioodi numbriks ehk esimeseks perioodi numbriks esimene kümnendkoht pärast koma; tähendab jagatiseks saadud kümnendmurd on puhtperioodiline.

Jääb veel tõestada teine osa teoreemist — selle murru perioodi numbrite arv.

Võrduses $\frac{a \cdot 10^{n-m} - a}{b} = p_1$ toome lugejas sulgude ette teguri a, saame $\frac{a(10^{n-m} - 1)}{b} = p_1$. Et a ei jagu b-ga (murd $\frac{a}{b}$ on taandamatu), siis teine tegur $(10^{n-m} - 1)$ peab jaguma b-ga. Iga arvu 10 aste kujutab enesest vähendatuna ühe võrra arvu, mis eranditult koosneb üheksatest. Antud juhul see arv koosneb $(n - m)$ üheksast. Tõestame, et arv, mis koosneb väiksemast arvust üheksatest ei saa jaguda b-ga.

Oletame ümberpöördult, et arv $(10^k - 1) : b$, kusjuures $k < n - m$. Kuid siis ka $a(10^k - 1) : b$ ja $(a \cdot 10^k - a) : b$ ning järelikult jäägid jagamistest $\frac{a \cdot 10^k}{b}$ ja $\frac{a}{b}$ on võrdsed, see tähendab, et korduv jagatise number pole mitte n-dal kohal pärast koma, vaid k-ndal kohal, mis on vasturääkiv eeldusele.

Selgitame seda numbrilisel näitel.

Hariliku murru, näiteks $\frac{5}{7}$ muutmisel kümnendmurruks saame puhtperioodilise murru. Selleks, et määrata numbrite arvu perioodis, tuleb koostada murd $\frac{10^k - 1}{7}$, leida niisugune k väärtus, mille puhul see murd võrduks täisarvuga, siis võrdub ka numbrite arv perioodis k-ga. Antud juhul $k = 6$, sest $10^6 - 1$ jagub 7-ga jäägita. Järelikult on perioodis 6 numbrit. Arvu $(10^k - 1)$ saab kujutada nii: $\overbrace{999\ldots9}^{k \text{ numbrit}}$.

Vastavalt sellele kirjutisele võib ütelda, et kui hariliku taandamatu murru nimetaja on arvuga 10 ühistegurita, siis on perioodis niimitu numbrit, kuimitu neid on väikseimas, antud murru nimetajaga jaguvas arvus reast 9, 99, 999, 9999 ...

Näited. Määrata perioodi numbrite arv puhtperioodilistel murdudel, mis saadakse harilikkude murdude $\frac{29}{37}$ ja $\frac{3}{11}$ muutmisel kümnendmurdudeks.

Jagame antud murdude nimetajatega arvud reas: 9, 99, 999 ... . Selgub, et üheksaist koosnev väikseim arv, mis jagub 37-ga, on 999 ja 11-ga jaguv — 99. Järelikult teisendub murd $\frac{29}{37}$ kolmenumbrilise perioodiga puhtperioodiliseks murruks ja $\frac{3}{11}$ — kahenumbrilise perioodiga murruks. Jagades lugeja nimetajaga, veendume, et

$$\frac{29}{37} = 0,(783) \text{ ja } \frac{3}{11} = 0,(27).$$

Teoreem 3. **Kui taandamatu hariliku murru nimetaja teiste algtegurite hulgas on algtegurid 2 ja 5, siis see taandamatu murd teisendub segaperioodiliseks murruks, kusjuures murru mitteperioodiline osa koosneb niimitmest numbrist, kuimitu ühikut on nimetajas esinevate tegurite 2 ja 5 suuremas astendajas, perioodis aga on niimitu numbrit, kuimitu üheksat on rea 9, 99, 999 ... väikseimas arvus, mis jagub murru nimetaja nende algtegurite korrutisega, mis ei võrdu 2-ga ega 5-ga.**

Antud: taandamatu murd $\frac{a}{b}$, mille nimetajas esineb peale 2 ja 5 veel teisi algtegureid. Viimaste korrutise tähistame P-ga, tegur 2 esineb nimetajas c korda ja tegur 5 — k korda, kusjuures $c > k$. Väikseim arv reas: 9, 99, 999 ..., mis jagub P-ga, on $\underbrace{99\ldots99}_{n \text{ numbrit}}$, milles 9 kordub n korda.

Tõestada: $\frac{a}{b}$ teisendub segaperioodiliseks murruks, mille numbrite arv perioodi ees on c ja numbrite arv perioodis on n.

Harilik murd $\frac{a}{b}$, mille nimetajas on peale 2 ja 5 veel teisi algtegureid, peab teisenduma lõpmatuks perioodiliseks murruks (§ 128). Kuna nimetaja b sisaldab peale 2 ja 5 teisi algtegureid, siis saadud jääkide reas

$$r_1, r_2, r_3, \ldots r_c, r_{c+1}, r_{c+2}, \ldots r_{c+n}$$

esineb tingimata võrdseid. Kuid esimene korduv jääk r_2 ei saa võrduda esimese jäägiga r_1, sest siis oleks tekkinud puhtperioodiline murd, mis aga pole võimalik, kuna antud murru nimetaja sisaldab tegureid 2 ja 5.

Seega ei saa murdu $\frac{a}{b}$ väljendada lõpliku ega ka puhtperioodilise kümnendmurruna. Tõestame, et murd $\frac{a}{b}$ teisendub segaperioodiliseks murruks.

Tõestuseks võrdsustame antud murru nimetajas kahtede ja viite arvud; selleks korrutame murru lugejat ja nimetajat arvuga 5^{c-k}. Saame:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^c \cdot 5^k \cdot P} = \frac{a \cdot 5^{c-k}}{2^c \cdot 5^k \cdot 5^{c-k} \cdot P} = \frac{a \cdot 5^{c-k}}{10^c \cdot P}.$$

Saadud murdu $\frac{a \cdot 5^{c-k}}{10^c \cdot P}$ võib kirjutada

$$\frac{a \cdot 5^{c-k}}{P} \cdot \frac{1}{10^c},$$

millest saame:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 5^{c-k}}{P} \cdot \frac{1}{10^c}.$$

Murru $\frac{a \cdot 5^{c-k}}{P}$ nimetaja P ja arv 10 on eelduse kohaselt ühistegurita, mistõttu ta väljendub puhtperioodilise murruna, kusjuures numbrite arv selle murru perioodis on n. Korrutades saadud puhtperioodilist murdu $\frac{1}{10^c}$-ga, peame nihutama

koma c koha võrra vasakule, järelikult algab murru $\frac{a}{b}$ periood pärast koma c koha järgi ja niiviisi tekib segaperioodiline murd.

Siit nähtub, et murru $\frac{a}{b}$ perioodi ees olev numbrite arv võrdub nimetajas esineva tegurite 2 ja 5 suurima astmega ja perioodis on niipalju numbreid, kuipalju üheksaid on rea 9, 99, 999 ... väikseimas arvus, mis jagub antud murru nimetaja nende algtegurite korrutisega, mis ei võrdu 2-ga ja 5-ga.

Võtame murrud: $\frac{7}{22}$, $\frac{11}{60}$ ja $\frac{163}{16650}$.

Saame

$$\frac{7}{22} = \frac{7}{11 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 5}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3{,}1818\ldots}{10} = 0{,}31818\ldots$$

$$\frac{11}{60} = \frac{11}{3 \cdot 2^2 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 5}{3} \cdot \frac{1}{100} = \frac{18{,}333\ldots}{100} = 0{,}18333\ldots$$

Murru $\frac{163}{16650}$ teisendamisel tekib:

1) segaperioodiline murd, sest nimetaja $16650 = 9 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 5^2$ sisaldab peale teiste algtegurite ka 2 ja 5^2;

2) mitteperioodilises osas peab olema kaks numbrit, sest teguril 5 on suurim astendaja 2;

3) perioodis esineb 3 numbrit, sest 999 on väikseim üheksaist koosnev arv, mis jagub korrutisega $(9 \cdot 37)$.

$$\frac{163}{16650} = \frac{163}{9 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 5^2} = \frac{163 \cdot 2}{333} \cdot \frac{1}{10^2};$$

$$\frac{326}{333} \cdot \frac{1}{10^2} = \frac{0{,}978}{10^2} = 0{,}00978978\ldots = 0{,}00(978).$$

§ 130. Perioodiliste kümnendmurdude piirväärtused.

Arvutustes on mõnikord tarvis muuta perioodilist murdu harilikuks murruks. Perioodiliste murdude harilikuks murruks muutmise teooria põhjeneb **lõpmatu arvjärjendi (jada) piirväärtuse mõistel.**

Lõpmatuks arvjärjendiks (jadaks) nimetatakse kindla seaduse järgi kirjutatud arvude lõpmatut rida.

Lõpmatu arvjärjendi näitena võiks olla loomulikkude arvude rida: 1, 2, 3, 4, ...

Perioodilist murdu võib samuti vaadelda kui kümnendmurdude lõpmatut arvjärjendit.

Tõepoolest võib perioodilist murdu 0,6(7) vaadelda järgmiste kümnendmurdude lõpmatu arvjärjendina (jadana): 0,6; 0,67; 0,677; 0,6777; ...

Perioodiline murd $N, (b_1 b_2 \dots b_n)$ kujutab kümnendmurdude lõpmatut arvjärjendit:

$$N,b_1b_2\dots b_n;\ N,b_1b_2\dots b_nb_1b_2\dots b_n;$$
$$N,b_1b_2\dots b_nb_1b_2\dots b_nb_1b_2\dots b_n;\ \dots$$

Kui lõpmatust kümnendmurrust võtame ainult mõned esimesed kümnendkohad, ülejäänud aga jätame ära, siis saame lõpliku kümnendmurru, mida nimetame **antud lõpmatu kümnendmurru lõiguks.** Nii on ülalesitatud lõplikud kümnendmurrud: 0,6; 0,67; 0,677; 0,6777 jne. lõpmatu kümnendmurru 0,6(7) lõikudeks.

Lõpmatu arvjärjendi

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n \dots$$

piirväärtuseks nimetatakse mingit arvu A, millele piiramatult lähenevad antud arvjärjendi liikmed n piiramatul kasvamisel. See tähendab, et antud arvjärjendile vastab mingi arv A nii, et kuitahes väikest positiivset arvu q me ka ei võtaks, ikka leidub antud arvjärjendis säärane liige, millest alates iga arvjärjendi liikme ja arvu A vahe absoluutväärtus muutub väik-

semaks kui q ehk teiste sõnadega, vahe $a_n - A$ absoluutväärtus muutub kuitahes väikeseks küllalt suurte n väärtuste puhul.

Näide 1. Kümnendmurdude järjendi 0,9; 0,99; 0,999; ... piirväärtus võrdub ühega. Tõepoolest lähenevad selle järjendi liikmed rea küllaldasel pikendamisel piiramatult ühele.

Nii erineb esimene liige ühest $\frac{1}{10}$ võrra, teine — $\frac{1}{100}$ võrra, kolmas — $\frac{1}{1000}$ võrra jne. On ilmne, et selle rea pikendamisel saab alati leida liiget, mis erineb ühest kuitahes väikese osa võrra. Järelikult on selle arvjärjendi piirväärtuseks 1.

Näide 2. Lõpmatu arvjärjendi

$$(a+1);\ \left(a+\tfrac{1}{2}\right);\ \left(a+\tfrac{1}{3}\right);\ \left(a+\tfrac{1}{4}\right);\ \ldots\left(a+\tfrac{1}{n}\right);\ldots$$

piirväärtuseks on arv a, sest vahe: $\left(a+\frac{1}{n}\right)-a=\frac{1}{n}$ muutub kuitahes väikeseks küllalt suure n puhul.

On olemas ka arvjärjendeid, milledel puudub piirväärtus. Sellise arvjärjendi näiteks võib olla loomulikkude arvude rida: 1, 2, 3, 4 ..., mille liikmed piiramatult kasvavad ega lähene mingile arvule.

Weierstrass tõestas, et lõpmatu arvjärjend a_1, a_2, a_3, ..., a_n ... omab kindla piirväärtuse sel juhul, kui järjendi iga liige on suurem eelmisest ja seejuures järjendi mistahes liige on väiksem mingist kindlast arvust N. See teoreem on tuntud Weierstrassi teoreemi nime all. Me kasutame seda tõestuseta.

Teoreem 1. **Iga lõpmatu arvjärjend võib omada ainult ühe piirväärtuse.**

Tõepoolest, kui oletada, et lõpmatu arvjärjend a_1, a_2, ..., a_n, ... omab kaks piirväärtust A ja B, siis vahed $a_n - A$ ja $a_n - B$ peavad vastavalt piirväärtuse definitsioonile n väärtuse kasvamisel piiramatult kahanema. Kuid siis peab samuti

vahe $(a_n - A) - (a_n - B)$ absoluutväärtus kas piiramatult kahanema või võrduma nulliga. Viimane vahe võrdub aga vahega $B - A$. Järelikult ta võrdub mingi kindla nullist erineva arvuga, mis ei olene numbrist n ega muutu n väärtuse kasvamisel. Seega ei saa oletada, et lõpmatu arvjärjend omaks kaks piirväärtust.

Märgime, et lõpmatu arvjärjendi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

n-dat liiget a_n võib nimetada **muutuvaks suuruseks**, mille arvväärtus oleneb selle numbrist n. Seda terminit kasutatakse kõne lihtsustamiseks, selle asemel, et rääkida lõpmatu arvjärjendi piirväärtusest, räägitakse muutuva suuruse piirväärtusest. Sel juhul kujuneks meie poolt väljendatud teoreem järgmiseks: **iga muutuv suurus läheneb ainult ühele piirväärtusele.**

Teoreem 2. **Lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks teisenduv harilik murd on selle lõpmatu kümnendmurru lõikude järjendi piirväärtuseks.**

Antud: lõpmatuks perioodiliseks kümnendmurruks $A,b_1b_2(b_3 \ldots b_n)$ teisenduv harilik murd $\frac{a}{b}$.

Tõestada: $\lim A,b_1b_2(b_3 \ldots b_n) = \frac{a}{b}$, kui kümnendmärkide arv piiramatult kasvab [1].

$$\frac{a}{b} - A,b_1 < \frac{1}{10}$$

$$\frac{a}{b} - A,b_1b_2 < \frac{1}{100}$$

$$\frac{a}{b} - A,b_1b_2b_3 < \frac{1}{1000}$$

. . . . . .

. . . . . .

(Kui kümnendmurru paremalt poolt jätame ära mingist numbrist kõik kümnendkohad, siis on tekkinud viga välksem viimase järelejäänud kümnendkoha ühikust).

[1] Limite (limes) tähendab piir.

$\frac{a}{b} - A,\ b_1b_2b_3 \ldots b_n < \frac{1}{10^n}$,

kuid murrud $\frac{1}{10} > \frac{1}{100} > \frac{1}{1000} > \ldots > \frac{1}{10^n} \ldots$ jne.

Tähendab, hariliku murru $\frac{a}{b}$ ja perioodilise kümnendmurru $A,\ b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots$ lõikude vahe muutub ja jääb küllalt suure kümnendmärkide arvu puhul ja nende edasisel kasvamisel väiksemaks mistahes antud väikese arvu absoluutväärtusest.

Piirväärtuse definitsiooni alusel saame:

$$\lim A,\ b_1b_2(b_3 \ldots b_n) = \frac{a}{b},$$
$$\text{kui } n \to \infty$$

Teoreem 3. **Puhtperioodiline murd selle perioodide arvu piiramatul suurenemisel omab piirväärtuseks hariliku murru, mille lugejaks on periood, nimetajaks aga arv, mis koosneb niimitmest 9-st, kuimitu numbrit on perioodis.**

On antud puhtperioodiline murd 0,(34). Tarvis on leida harilik murd, millest on saadud murd 0,(34).

Tähistame tähega x murru, milleks muutub perioodiline murd 0,(34), siis kui võtta n perioodi ja teised ära jätta, saame:

$$\overbrace{0{,}343434 \ldots 34}^{n \text{ perioodi}} = x.$$

Viime koma ühe perioodi võrra paremale, s. t. suurendame murdu 100 korda, saame:

$$\overbrace{34{,}3434 \ldots 34}^{n-1 \text{ perioodi}} = 100x.$$

Lahutame teisest võrdusest esimese, saame:

$$34 - \overbrace{0{,}000 \ldots 034}^{2n \text{ kümnendkohta}} = 99x,$$

$$\text{kust } x = \frac{34 - \overbrace{0{,}000\ldots034}^{2n \text{ kümn. k.}}}{99} = \frac{34}{99} - \frac{\overbrace{0{,}000\ldots034}^{2n \text{ kümn. k.}}}{99}$$

$$\text{ehk } x = \frac{34}{99} - \frac{34}{99} \cdot \frac{1}{10^{2n}}.$$

Arvu n piiramatul suurenemisel, s. t. antud perioodilise murru kümnendkohtade arvu suurenemisel, x muutub ja läheneb harilikule murrule $\frac{34}{99}$, sest $\frac{34}{99} \cdot \frac{1}{10^{2n}}$ muutub üha väiksemaks ja võib saada kuitahes väikeseks; aga sel juhul, nagu teada algebrast (muutuva suuruse piirväärtuse mõiste), on muutuva suuruse x piirväärtuseks $= \frac{34}{99}$, s. t. $\lim x = \frac{34}{99}$.

Järelikult, $\lim 0{,}(34) = \frac{34}{99}$.

Teoreem 4. **Segaperioodiline murd selle perioodide arvu piiramatul suurenemisel omab piirväärtuseks hariliku murru, mille lugejaks on teise perioodi ees seisva arvu ja esimese perioodi ees seisva arvu vahe, nimetajaks aga niimitu 9-t, kuimitu numbrit on perioodis ja niimitme nulliga lõpus, kuimitu numbrit on koma ja perioodi vahel.**

On antud segaperioodiline murd 0,57(34). Tarvis on leida harilik murd, millest saadud murd 0,57(34).

Tähistame tähega x murru, milleks muutub segaperioodiline murd 0,57(34), kui võtta n perioodi ja teised ära jätta, s. t.

$$\overbrace{0{,}57343434\ldots34}^{n \text{ perioodi}} = x. \qquad (1)$$

Viime koma esimese perioodini, saame:

$$\overbrace{57{,}343434\ldots34}^{n \text{ perioodi}} = 100x. \qquad (2)$$

Nihutades saadud murrus koma ühe perioodi võrra, saame:

$$\overbrace{5734{,}3434\ldots34}^{n-1\text{ perioodi}} = 10\,000x. \qquad (3)$$

Lahutades kolmandast võrdusest teise, saame:

$$5734 - 57 - \overbrace{0{,}000\ldots034}^{2n\text{ kümnend. k.}} = 9900x,$$

kust

$$x = \frac{5734 - 57 - \overbrace{0{,}000\ldots034}^{2n\text{ kümn. k.}}}{9900}$$

ehk

$$x = \frac{5734 - 57}{9900} - \frac{\overbrace{0{,}000\ldots034}^{2n\text{ kümn. k.}}}{9900} = \frac{5734 - 57}{9900} - \frac{34}{9900} \cdot \frac{1}{10^{2n}}.$$

Arvu n piiramatul suurenemisel, s. t. antud segaperioodilise murru kümnendkohtade arvu piiramatul kasvamisel, x muutub ja läheneb harilikule murrule

$$\frac{5734 - 57}{9900}, \text{ sest } \frac{34}{9900} \cdot \frac{1}{10^{2n}}$$

muutub üha väiksemaks ja võib saada kuitahes väikeseks. Aga sel juhtumil, nagu teada algebrast (piirväärtuse mõiste), on muutuva suuruse piirväärtuseks jääv arv

$$\frac{5734 - 57}{9900}, \text{ s. t. } \lim x = \frac{5734 - 57}{9900}.$$

Järelikult, $\lim 0{,}57(34) = \frac{5734 - 57}{9900}$.

§ 131. Murdude arenemise ajalooline lühiülevaade.

1. Harilikud murrud.

Juba madalaimal arenemisastmel opereeris inimkond mõõtmistel ja osadeks jaotamisel ühiku osadega. Näiteks, kui valitud mõõduühik ei mahtunud mõõdetavasse pikkusesse täisarv kordi, siis oli tarvis seda

tükeldada (murda) ja võtta ühiku üks võrdne osa edasiseks mõõtmiseks (L. F. Magnitski nimetab murde **murtud arvudeks**).

Üsna varakult juba tarvitab inimene arvutusteks poolt, poolt poolest $\frac{1}{4}$, poolt poole poolest $\frac{1}{8}$ jne.

Igivanades maamõõdu käsikirjades esinevad murrud $\frac{1}{256}$, $\frac{1}{512}$, $\frac{1}{1024}$.

Teiste arvude jagamine, peale ühelise, oli seotud suurte raskustega.

Kuna praktilises elus ja teaduses ei saa läbi murdudeta, siis leiame kõikide rahvaste ka kõige vanemates käsikirjades märkmeid osadest. Mitmesugustel rahvastel olid erinevad murdude süsteemid.

Egiptlased teostasid tehteid ainult t ü v i m u r d u d e g a, s. t. murdudega, mille lugejaks on 1.

Olid koostatud tabelid mittetüvimurdude väljendamiseks tüvimurdude summana.

Toome näiteid Ahmese tabelist (1700. a. e. m. a.)

1) $\frac{2}{13} = \frac{1}{8}\ \frac{1}{52}\ \frac{1}{104}$; (liitmismärki ei olnud olemas);

2) $\frac{2}{21} = \frac{1}{14}\ \frac{1}{42}$;

3) $\frac{2}{27} = \frac{1}{18}\ \frac{1}{54}$;

4) $\frac{2}{43} = \frac{1}{42}\ \frac{1}{86}\ \frac{1}{129}\ \frac{1}{301}$.

Kreeklased omandasid egiptlastelt nende murdude arvutusmeetodi.

Babüloonias oli loodud kuuekümnend-arvusüsteem, mistõttu nad kasutasid murde nimetajatega 60, 60^2, 60^3 jne.

Kuna numbrite kohaväärtuse mõiste laienes ka paremal pool ühtesid asetsevatele numbritele, siis kirjutati kuuekümnendmurde meie kümnendmurdude sarnaselt. Murdudega arvutamiseks koostasid babüloonlased tabelid, kus tüvimurrud olid väljendatud kuuekümnendmurdudes, näiteks:

$$\frac{1}{54} = \frac{1}{60} + \frac{6}{60^2} + \frac{40}{60^3} \text{ jms.}$$

Tehteid murdudega oli kergem teostada babüloonia süsteemis, mistõttu babüloonia süsteemi kasutati algul Aleksandrias (200 a. e. m. a.) ja hiljem kreeka astronoomide poolt. Araablased omandasid kreeklastelt kuuekümnendmurrud ja nende eeskujul kasutasid keskaegsed õpetlased teaduses peamiselt kuuekümnendmurde.

XV sajandil loovutasid kuuekümnendmurrud oma koha kümnendmurdudele. XVIII sajandil pärast meetermõõdustiku tarvituselevõttu

tõrjuti kuuekümnendmurrud lõplikult kümnendmurdude poolt välja. Teatava konkurentsi kuuekümnendmurdudele moodustasid harilikud murrud, nn. lihtrahva murrud.

Praegusaegne murdude kirjutusviis on saanud oma alguse hindudelt. India andis meie süsteemile üsna lähedase murdude-süsteemi. Hindu matemaatikul Bramaguptal (VII s. p. m. a.) esines murru kirjutusviis kahe numbriga, kusjuures puudus horisontaalne joon lugeja ja nimetaja vahel, näiteks $\frac{2}{7}$. Täisosa paigutati lugeja kohale, näiteks $3\frac{2}{7}$ tähistati $\overset{3}{\underset{7}{2}}$

Araablased olid tsivilisatsiooni vahendajaiks Lääne tutvustamisel vanade rahvaste kultuuriga. Araabia õpikuis leiame kreeka-egiptuse tüvimurde, kreeka-babüloonia kuuekümnendmurde ja hindude võtteid murdarvudega arvutamisel.

XIII sajandil esineb Leonardol Piisast murrujoon, kuid täisosa kirjutatakse murru paremale poole, s. o. $18\frac{1}{2}$ kirjutati $\frac{1}{2}18$.

Venelased omandasid murdude-süsteemi Lääne-Euroopa rahvastelt. Huvitavad on vana-vene väljendid: poltretja (pool kolmandast) — $2\frac{1}{2}$, polpjäta (pool viiendast) — $4\frac{1}{2}$. Meie ajani on säilinud väljend poltora — $1\frac{1}{2}$, mis tekkis sõnast „pol-vtora" — pool teisest.

2. Kümnendmurrud.

Esimesi vihjeid kümnendmurdudest leiame hindudelt: kui juurt polnud võimalik leida täpselt, siis kirjutati juuritavale juurde niimitu nullide paari, kuimitu kohta sooviti leida juures. Soovides suurendada resultaadi täpsust jagamisel, kirjutasid hindud nulle juurde ka jagatavale. Kuid saadud kümnendmurrud kirjutati harilikkude murdude kujul nimetajaga.

Esimese kümnendmurru kirjutas prantsuse matemaatik Vieta (1540—1603). Kuid esimesena selgitas järjekindlalt ja täpselt kümnendmurdude süsteemi belgia õpetlane Stevin (1563—1625). Täisarvud eraldas ta nullikesega sulgudes ja kümnendosadele kirjutas ta juurde vastavad märgid. Näiteks 13,56 kirjutati nii:

$13^{(0)}5^{(1)}6^{(2)}$ ehk 0,048 kirjutati $4^{(2)}8^{(3)}$.

Koma kasutamise ettepaneku tegi astronoom Kepler (1571—1630).

XVIII sajandil hakati meetermõõdustiku kasutuselevõtuga ka kümnendmurde üldiselt tarvitama.

Perioodilised murrud esinevad teaduslikkudes töödes alles XVII sajandil. Itaallane Cavalieri käsitleb harilikkude murdude muutmist kümnendmurdudeks ja ümberpöördult, piirdudes aga ainult lõpmatute kümnendmurdude ligikaudsete väärtustega. Perioodilisi murde käsitles esimesena inglane Wallis (1616—1703). Wallis väidab, et hariliku murru muutmisel kümnendmurruks saadakse lõplik kümnendmurd, kui nimetaja koosneb vaid tegureist 2 ja 5 ning periood algab esimesest kümnendkohast alates ainult siis, kui nimetajas ei esine tegureid 2 ja 5. Ta tundis samuti lihtsamaid teoreeme perioodi numbrite arvust, samuti teadis ta, et juured väljenduvad lõpmatute, kuid mitteperioodiliste murdudena.

Perioodiliste murdude teooria oli välja töötatud alles XVIII sajandi lõpuks Johann Bernoulli ja Leonard Euleri (professor Peterburis) töödes. XIX sajandi algul esitas Gauss perioodiliste murdude teooria seoses oma silmapaistvate uurimustega arvuteooria alal, enne neid ei jäänud aga matemaatikuil muud üle, kui lõpmatul jagamisel loobuda jäägist.

XX peatükk.

Ligikaudsed arvutused.

§ 132. Täpsed ja ligikaudsed arvud loendamisel, mõõtmisel ja arvutamisel.

Esemete loendamisel, suuruste mõõtmisel ja arvutamisel saame kas täpsed või ligikaudsed arvud. Vaatleme kõiki kolme ligikaudsete arvude saamise juhte.

I. Loendades inimeste arvu perekonnas või korteris võime täpselt ütelda, et perekond koosneb 5-st inimesest ja korteris elab 20 inimest. Kuid kui me tahaksime loendada teataval kindlal momendil inimeste arvu suures kaheksakorruselises hoones, siis on võimalik, et me täpset tulemust ei saagi. Suures elumajas toimub alati muutusi inimeste arvus sissesõidu, ära-

sõidu, sünni ja surma tagajärjel. Samuti saame suure linna, maakonna või mingi maa rahvaloendamisel ainult ligikaudse elanike arvu, sest sissesõit, ärasõit, sündimine ja suremine muudavad kogu aeg elanike arvu.

Seega võime esemete loendamisel saada kas täpse arvu — inimeste arv perekonnas, või ligikaudse arvu — inimeste arv maakonnas või pealinnas.

II. Igasugust suurust on võimalik mõõta ainult ligikaudselt teatava täpsusega, mis oleneb mõõtmisel kasutatavate mõõduriistade täpsusest ja mõõtja isiklikest omadusist: kogemustest, korralikkusest, nägemisest jne. Oletame, et kahe puu vahelise kauguse mõõtmise tulemusena saime 7 m 2 dm 6 cm. Teistkordne sama vahemaa mõõtmine võib anda teise tulemuse, näiteks 7 m 2 dm 4 cm. Meie ei saa kindlaks teha kumb tulemus on täpsem. Kui meid rahuldab mõõdetud pikkuse väärtus meetrites, siis võtame kahe puu vaheliseks kauguseks 7 meetrit; kui tahame saada täpsemat tulemust, võtame 7 m 2 dm, kuid mõlemad tulemused on ligikaudsed arvud. Praktikas pole sageli tarvis suurt mõõtmistäpsust; saadud mõõtmisresultaatide täpsust piiratakse teadlikult. Nii ei teosta keegi kahe puu vahelise kauguse mõõtmisel mõõtmist millimeetri täpsusega; samuti ei kaalu keegi kütteks kivisütt grammise täpsusega. Praktikas valitud täpsus oleneb mõõtmisresultaadi suurusest ja eesmärgist, milleks teostatakse mõõtmist.

III. Arvutamisel saame kas täpseid või ligikaudseid arve, olenedes arvudest, milledega teostatakse arvutusi. Näiteks:

1. Osteti 5 arbuusi hinnaga 4 rubla üks arbuus. Kui palju maksavad kõik arbuusid kokku? Korrutades täpse arvu täpsega, saame täpse arvu.

2. Ruudukujulise maatüki külg on 25 m 2 dm 3 cm. Leida maatüki ümbermõõt. Kui väljendame maatüki külje pikkuse ligikaudse arvuga 25 m, siis on maatüki ümbermõõt

25 m · 4 = 100 m, s. t. ligikaudse arvu korrutis täpsega on samuti ligikaudne arv.

3. Määrata ristkülikukujulise maatüki pindala, kui selle pikkus on 20 m 3 dm 2 cm ja laius 15 m 2 dm 3 cm. Arvutades ristküliku pindala ruutmeetrites, me korrutame ligikaudse arvu ligikaudse arvuga ja saame korrutises samuti ligikaudse arvu.

4. Täpsete arvude jagamisel me võime saada kas täpse või ligikaudse arvu, näiteks 113 : 7 = 16¼; jagatis on täpne arv — täisarv + murdarv. Kuid jagatist saab väljendada ka ligikaudse arvuna. 113 : 7 ≈ 16. Märk ≈ tähendab „ligikaudu võrdne".

Seega saame arvutustel kas täpseid või ligikaudseid arve.

§ 133. Arvude ümardamine.

Selleks, et kergemini meeles pidada või kujutleda suuri arve või võrrelda neid omavahel, selleks, et lihtsamini teostada arvutusi suure kohtade arvuga arvudega, nad ümardatakse.

Näiteks on raske meeles pidada maakera diameetrit (poolusest pooluseni), mis on 12 713,818 km, seevastu on aga kerge meeles pidada ümardatud arvu 12 000 km või 13 000 km. Ehitades päevase kivisõetoodangu 6836 t ja 6269 t diagrammi, on kerge mõõtkava järgi kujutada arve 6,8 ja 6,3. Teostades korrutamist 2,972 · 5,13, me peame oskama leida loodetavat resultaati, ümardades tegurid 3 · 5 = 15.

Eriti sageli tuleb arve ümardada mitmekohaliste arvude jagamisel. Mitme järgu ühikutest koosneva täisarvu 4584 ümardamisel võetakse selle asemel teine arv, millel on väiksem arv tähendusega numbreid ja asendatakse paremalt alates üks, kaks, kolm numbrit nullidega. Seejuures saadakse

antud arvust väiksemad arvud ehk ligikaudsed arvud puudusega: 4580 või 4500 või 4000. Esimene neist arvudest on antud arvust väiksem 4 ühiku võrra ($4584 - 4580 = 4$), teine — 84 ühiku ($4584 - 4500 = 84$) ja kolmas — 584 ühiku võrra ($4584 - 4000 = 584$). Kuid ümardamisel oleks võinud ka antud arvu viimast numbrit ühe ühiku võrra suurendada, võttes vastavalt ligikaudsed arvud 4590, 4600 ja 5000. Seejuures saadakse antud arvust suuremad ligikaudsed arvud ehk ligikaudsed arvud liiaga. Esimene nendest arvudest on 6 võrra ($4590 - 4584 = 6$) suurem antud arvust, teine 16 ($4600 - 4584 = 16$) ja kolmas 414 ($5000 - 4584 = 414$) võrra suurem antud arvust.

Puudusega		liiaga
4580	< 4584 <	4590
4500	< 4584 <	4600
4000	< 4584 <	5000

Võttes ligikaudse arvu puudusega, me asendame kõik ärajäetavad numbrid nullidega; võttes ligikaudse arvu liiaga, me suurendame ühe ühiku võrra viimast allesjäetud numbrit. Loomulikult tekib küsimus: millal võtta lähendus puudusega, millal liiaga. Asendades antud arvu ligikaudsega, tuleb kahest ligikaudsest väärtusest valida see, mis annab väiksema vea. Näiteks, asendades arvu 4584 arvuga 4600, teeme vea 16 ühikut; asendades aga arvuga 4500, teeme vea 84 ühikut. Ligikaudse arvu valikut (puudusega või liiaga) võib teostada järgmise reegli alusel: kui viimasele allesjäetud järgule järgneb paremalt 5-st väiksem number, siis tuleb see number koos sellele järgnevate numbritega asendada nullidega. (Näiteks võtame 6413 asemel 6400.) Kui aga järgneb 5 või 5-est suurem number, siis suurendatakse viimast allesjäetud järku ühe ühiku võrra ja asendatakse nullidega kõik ärajäetavad numbrid. Näiteks $6387 \approx 6400$; $685 \approx 690$.

Täisarve ümardatakse mistahes järguni, nimetades viimast säiluvat järku: ümardada arv kuni kümnelisteni ehk 2. jär-

guni, kuni sajalisteni ehk 3. järguni, kuni tuhandelisteni ehk 4. järguni. Näiteks ümardada arv 102 548 5. järguni — tähendab säilitada ligikaudses arvus 5. järk, s. t. kümnetuhandelised ja ülejäävad parempoolsed numbrid tuleb asendada nullidega. Ligikaudne arv puudusega on 100 000. Sama arvu ümardamisel tuhandelisteni, saame 103 000.

Täpses arvus näitab number 0 vastava järgu ühikute puudumist, näiteks täpne arv 1 m = 100 cm. Nullid tähendavad, et 1 m sisaldab ainult ühe saja sentimeetreid ja mitte ühtki sentimeetrit rohkem ega vähem. Ligikaudses arvus asetatakse aga nullid tundmatute või ärajäetud vastavate järkude asemele.

Näiteks, koosolekul oli ligikaudu 100 inimest. Sel juhul tähendavad kaks nulli, et koosolekul võis olla 107 inimest või ka 98 inimest jne. Nullid asetatakse meile tundmatute ühikute asemele. Niisugustel kordadel on viisiks kirjutada nullid pooles suuruses (väikeste nullikestega — loo).

§ 134. Kümnendmurdude ligikaudse väärtuse mõiste.

Kui kümnendmurru kirjutises on ära jäetud viimased kümnendmärgid, siis nimetatakse saadud murdu kümnendmurru ligikaudseks väärtuseks. Sageli ei oma ühiku väiksemad osad — tuhandikud, kümnetuhandikud jne. mingisugust praktilist tähtsust, näiteks 1,2583 kopikat või 0,1375 sek. Sel juhul võetakse kümnendmurru ligikaudne väärtus ühe või kahe kümnendmärgiga, jättes ära kõik ülejäänud.

Kümnendmurru 0,4375 ligikaudne väärtus on 0,4 — puudusega ja täpsusega 0,1; 0,43 — täpsusega kuni 0,01 jne.

§ 135. Ligikaudse arvu vea suurus.

Kui kümnend-täisarvus asendame nullidega kõik mingist numbrist paremal pool asetsevad numbrid, siis on tekkiv viga

väiksem kui järelejäänud viimase koha ühik. Selgitame seda numbrilisel näitel.

On antud arv 159 648. Leida selle ligikaudne väärtus täpsusega 4. järgu ühikuni, s. t. säilitada ligikaudses arvus tuhandelised.

Ligikaudseks arvuks puudusega on 159 000. Viga on väiksem kui 1000 ja nimelt 159 648 — 159 000 = 648. Ligikaudseks arvuks liiaga on 160 000. Viga on samuti väiksem kui 1000, s. o. 160 000 — 159 648 = 352. Me juba mainisime, et kahest ligikaudsest väärtusest tuleb võtta see, mille viga on väiksem. See väiksem viga on alati väiksem viimase säilunud järgu poolest ühikust. Järelikult, kui võtame ligikaudse arvu täpsusega ühe tuhandikuni, siis peame võtma niisuguse ligikaudse arvu, et viga poleks mitte ainult väiksem tuhandest, vaid ka väiksem kui pool tuhat, s. t. väiksem kui 500. Niisuguseks ligikaudseks arvuks on 160 000.

Ümardades arvu 8243 kahe tähendusega numbrini, s. t. täpsusega kuni üks sajaline, on tarvis valida see ligikaudne arv, mille erinevus antud arvust on väiksem kui pool viimasest säilunud järgust, s. t. väiksem kui 50. Niisuguseks ligikaudseks arvuks on 8200.

Kõik öeldu laiendub ka kümnendmurdudele. Kui kümnendmurrus mingist numbrist alates paremalt poolt ära jätta kõik kümnendmärgid, siis tekkinud viga on väiksem säilunud viimase koha ühikust.

Näiteks, kui kümnendmurru 9,234565 asemel võtame ligikaudse arvu puudusega, täpsusega kuni üks sajandik, me teeme vea 9,234565 — 9,23 = 0,004565, mis on väiksem säilunud viimase koha ühikust, s. t. väiksem kui 0,01.

Kui aga 9,234565 asemel võtame ligikaudse arvu liiaga, s. t. 9,24, me teeme vea 9,24 — 9,234565 = 0,005435; tekkinud vea suurus on samuti väiksem säilunud viimase koha ühikust, s. t. väiksem kui 0,01.

Kahest ligikaudsest arvust valime selle, mille viga on väiksem, s. t. me ei võta ligikaudset arvu mitte ainult täpsusega kuni üks sajandik, vaid täpsusega kuni pool sajandikku, s .t. kuni 0,005. See arv on 9,23.

Murru ligikaudse väärtuse täpsuse aste oleneb säilunud viimase järgu ühikust. Lepime kokku nimetada antud kümnendmurru ligikaudseks väärtuseks täpsusega kuni $\frac{1}{10_n}$ kahte kümnendmurdu nimetajaga 10^n, mis erinevad teineteisest $\frac{1}{10^n}$ võrra ja millede vahel asetseb antud täpne kümnendmurd. Kumbki ligikaudseist väärtusist erineb kümnendmurru täpsest väärtusest vähem kui $\frac{1}{10^n}$ võrra, kusjuures üks neist erineb vähem kui pool $\frac{1}{10^n}$ ja teine rohkem kui pool $\frac{1}{10^n}$.

Seega tuleb murru ligikaudse väärtuse leidmiseks puudusega, täpsusega kuni $\frac{1}{10^n}$, murru kirjutises ära jätta kõik numbrid peale nimetatud täpsusjärgu. Suurendades viimast säilunud numbrit ühiku võrra, saame kümnendmurru ligikaudse väärtuse sama täpsuse järguga, kuid liiaga.

N ä i d e. On antud murd 0,078254; selle ligikaudsed väärtused täpsusega kuni $\frac{1}{1000}$ on 0,078 (puudusega) ja 0,079 (liiaga). Mõlemad ligikaudsed väärtused erinevad teineteisest 0,001 võrra. Murru täpne väärtus peitub nende kahe ligikaudse väärtuse vahel

$$0{,}078 < 0{,}078254 < 0{,}079.$$

Seejuures on ühe ligikaudse väärtuse erinevus antud murrust väiksem kui $\frac{1}{2}$ tuhandikku, s. t. väiksem kui 0,0005 ja teise — suurem kui $\frac{1}{2}$ tuhandikku; 0,078 erineb antud murrust 0,000254 võrra ja 0,079 erineb 0,000746 võrra.

Murru ligikaudse väärtuse leidmiseks täpsusega kuni mingi järgu poole ühikuni, tuleb ära jätta kõik nimetatud täpsusjärgule järgnevad numbrid; kuid kui seejuures esimene

ärajäetav number on 5 või suurem 5-st, siis suurendatakse viimast säiluvat numbrit ühe ühiku võrra.

Märkus. Murru ligikaudse väärtuse lõpul asetsevaid nulle ei jäeta ära, näiteks on 0,80 murru 0,80123 ligikaudne väärtus täpsusega kuni 0,01.

§ 136. Ligikaudse arvu absoluutne ja relatiivne viga.

Oletame, et mingi ehitise eelarve koostamisel oleme saanud 15783,956 m³ ehitusmaterjali. Ostes 15784 m³, me võtame liigselt 0,044 m³ (täpse ja ligikaudse väärtuse vahe).

Arvu täpse väärtuse ja selle ligikaudse väärtuse vahet nimetatakse ligikaudse arvu absoluutseks veaks.

Tähistades arvu täpse väärtuse x-ga, puudusega ligikaudse väärtuse N_1-ga ja liiaga ligikaudse väärtuse N_2-ga ning absoluutsed vead vastavalt y_1 ja y_2, saame:

$$1)\ y_1 = x - N_1 \quad \text{ja} \quad 2)\ y_2 = N_2 - x.$$

Oletame näiteks, et päevane kassa sissetulek on 32 528 rbl. 32 kop. Ümardades arvu täisrubladeni, saame ligikaudse arvu 32 528 rbl. Absoluutne viga võrdub 32 528,32 rbl. — — 32 528 rbl. = 0,32 rbl.

Kuid paljudel juhtudel pole võimalik määrata absoluutset viga, sest praktiliselt pole alati teada arvu täpne väärtus. Näiteks me võime kindlasti teada, et viga kaalumisel ei ületa 0,5 g, olenevalt kaalu täpsusest, kuid eseme täpset kaalu me ei saa anda. Samuti ei saa me kauguse mõõtmisel täpset arvu, kuid võime kindlasti teada, et absoluutne viga ei ületa näiteks 0,5 cm või 0,5 dm, olenevalt mõõtmise täpsusest. Sellistel juhtudel näidatud vigu (0,5 g, 0,5 cm, 0,5 dm) nimetatakse absoluutse vea ülemmääraks. Edaspidi jätame lühendamise mõttes ära sõna „ülemmäär" ja räägime lihtsalt „absoluutne" viga.

Mõõtmistel absoluutne viga väljendub nimega arvuna samades ühikutes, milledes teostati mõõtmine.

Teades mitmesugustel mõõtmistel tekkinud absoluutseid vigu, me ei saa veel järeldada sellest, milline mõõtmine on toimunud täpsemalt.

Näiteks on kahel kaalumisel saadud absoluutsed vead 0,5 g ja 50 g. Selleks, et otsustada kaalumise täpsuse üle, on tarvis teada kaalutud eseme raskust.

Olgu 30 g kaalumisel tekkinud absoluutne viga 0,5 g ja 5500 g kaalumisel — 50 g. Esimese kaalumise viga on $\frac{5}{300}=\frac{1}{60}$ keha kogukaalust, teise kaalumise viga aga $\frac{50}{5500}=$ $=\frac{1}{110}$ keha kaalust.

Sellest hoolimata, et esimene absoluutne viga on 100 korda väiksem, on teine kaalumine peaaegu kaks korda täpsem.

Viga, mis väljendatud absoluutse vea ja mõõtmise tulemuse suhtena, iseloomustab mõõtmise kvaliteeti.

Absoluutse vea ja suuruse täpse väärtuse suhet nimetatakse suhteliseks ehk relatiivseks veaks.

Tähistagu suhtelist viga K, täpset väärtust x ja ligikaudset väärtust puudusega N_1 ning liiaga — N_2, saame:

$$1)\ K=\frac{x-N_1}{x}\ \text{ja}\ 2)\ K=\frac{N_2-x}{x}.$$

Relatiivne viga on alati nimeta arv. Praktiliselt väljendatakse suhtelist viga protsentides, harvemini hariliku või kümnendmurruna, s. t.

$$1)\ K_1=\frac{(x-N_1)\cdot 100}{x}\ \text{ja}\ 2)\ K_2=\frac{(N_2-x)\cdot 100}{x}.$$

Ligikaudsetes arvudes me eristame õigeid (täpseid) numbreid, mitte täiesti täpseid (kahtlasi) ja täiesti vale numbreid.

N ä i d e. Mitu loendajat loendavad massväljasõidust osavõtjaid. Üks loendas 3275 inimest, teine — 3264 inimest,

kolmas — 3272 inimest, neljas — 3281 inimest, viies — 3277 inimest. Mitu inimest tõenäoselt võttis osa massväljasõidust? Iga loendaja loendas 3 tuhat. Seepärast tuhandeliste number — 3 on kindlasti õige. Täpne on samuti sajaliste number 2, mille said kõik 5 loendajat. Kümneliste number aga oli erinev: kolmel loendajal 7, ühel 6 ja ühel 8. Seepärast kümneliste number on kahtlane — mitte täiesti õige ja üheliste number on kindlasti vale, sest igal loendajal on see isesugune.

Kui võtame massväljasõidust osavõtjate arvuks 3270 inimest, siis saab vastutada ainult kahe esimese koha eest — tuhandeliste ja sajaliste eest.

§ 137. Tehted ligikaudsete arvudega.

Tehnilistes arvutustes tuleb enamasti tegeleda ligikaudsete suurustega. Tehniliseks otstarbeks piisab 3—4 õige numbriga mõõtmise täpsusest, millele vastab relatiivne viga 0,1%, praktilistel arvutustel saadakse aga küllaldane täpsus 2—3 õige kohaga lähteandmetel. Arvutusresultaadi vea teadmine vabastab meid liigseist arvutusist.

Näiteks on tarvis määrata antud raudkonstruktsioonis oleva 7512 needi kaal. Neetide arv on teada täpselt. Iga needi kaal on 0,085 kg (absoluutse veaga kuni 0,001 kg), ühe needi kaalu veast tingitult saame 7512 needi kohta vea $0{,}001 \text{ kg} \cdot 7512 = 7{,}512$ kg. Kui aga 7512 needi kaalu asemel võtta 7510 needi kaal, s. t. ümardame neetide arvu, siis teeme vea $0{,}085 \text{ kg} \cdot 2 = 0{,}17$ kg, mis on peaaegu 45 korda väiksem kui viga, mis tekkis ebatäpsest kaalumisest. On ilmne, et neetide kaalu määramisel, pole mõtet võtta nende täpset arvu.

On teada kolossaalseid aja kokkuhoiu juhte ligikaudsete arvutuste kasutamise tagajärjel.

Akadeemik A. N. Krõlov tähendab, et endisel ajal tehaste poolt koostatud projektides, mis esitati merenduse tehnilisele

komiteele oli $\frac{9}{10}$ ja vahest isegi kuni $\frac{34}{35}$ arvutustööst kulutatud asjatult liigsete numbrite arvutamiseks ja väljakirjutamiseks.

Ligikaudsete suurustega arvutusi teostades tekib kaks küsimust:

1. Määrata kindla täpsusega antud ligikaudsete arvudega teostatud tehete tulemuse viga.

2. Määrata, millise täpsusega tulevad võtta ligikaudsed arvud, et saada nõuetava täpsusega resultaati.

1. Liitmine.

Teoreem. **Puuduse või liiaga võetud mitme liidetava summa absoluutne viga võrdub nende liidetavate absoluutsete vigade summaga.**

Antud: A, B, C — liidetavad, millede ligikaudsed väärtused (puudusega või liiaga) on vastavalt a, b, c ja vead e, k, p; on vaja tõestada, et summa $a+b+c$ viga võrdub üksikute vigade summaga: $e+k+p$.

1. juhtum. Kõik ligikaudsed väärtused a, b, c on antud puudusega:

$A = a + e$
$B = b + k$
$C = c + k$

Teostame liitmise vastavalt monotoonsuse seadusele ja kasutame kommutatiivsuse ja assotsiatiivsuse seadusi.

$A + B + C = (a + b + c) + (e + k + p)$,
$e + k + p = (A + B + C) - (a + b + c)$ (lahutamise definitsiooni alusel).

Järelikult summa täpse väärtuse ja ligikaudse väärtuse $a+b+c$ vahe võrdub üksikute liidetavate vigade summaga.

2. juhtum. Kõik ligikaudsed väärtused a, b, c on antud liiaga.

$A = a - e$
$B = b - k$
$C = c - p$

Teostame liitmise monotoonsuse seaduse alusel, kasutame liitmiste ja lahutamiste rea omadust ning lahutamise liikmetevahelist sõltuvust.

$A + B + C = (a + b + c) - (e + k + p)$,
$e + k + p = (a + b + c) - (A + B + C)$.

Järelikult, summa $a + b + c$ absoluutne viga võrdub üksikute liidetavate absoluutsete vigade summaga $(e + k + p)$.

Järeldus. Kui mõned liidetavad on võetud puudusega, teised aga liiaga, siis on summa viga väiksem liidetavate vigade summast ja võrdub puudusega võetud liidetavate ning liiaga võetud liidetavate absoluutsete vigade vahega.

Ligikaudsete arvude liitmiseks on järgmised reeglid:

Selleks, et leida mitme täisarvu või kümnendmurru summat täpsusega kuni mingi järgu täis- või kümnendühikuni, tuleb võtta igal liidetaval, kui liidetavaid pole üle 10, üks kümnendkoht enam kui soovitud ligikaudsel tulemusel, liidame nad ja jätame ära viimase numbri ning suurendame eelviimast numbrit ühe ühiku võrra; niiviisi leitud arv ongi soovitud täpsusega otsitav summa. Kui liidetavaid on üle 10-ne, kuid mitte üle 100, siis tuleb igal liidetaval võtta kaks kohta enam kui soovitud ligikaudsel tulemusel, liita nad ja summal ära jätta kaks viimast numbrit ning lisada ühik viimasele järelejäänud kohale. Saadud arv on soovitud täpsusega otsitav summa.

Näide 1. On antud arvud: 246,8239052; 32,30567248; 41,701346234; 50,2395277; 23,07452625. On tarvis leida antud arvude summa täpsusega kuni 0,01.

Võttes iga liidetava kolme kümnendkohaga (soovitud täpsusest ühe koha võrra enam), liidame nad.

246,823(1) [1]
32,305(1)
41,701($\frac{1}{2}$)
50,239(1)
23,074(1)

394,142($4\frac{1}{2}$)

Jättes ära saadud summal viimase numbri (milline ta ka ei oleks) ja suurendades eelviimast numbrit ühe võrra, saame arvu 394,15, mis kujutab otsitavat summat täpsusega kuni 0,01.

Tõepoolest, jättes ära igal liidetaval kümnetuhandikud ja väiksemad, me vähendame igat neist vähem kui 0,001 võrra; võtame kõik lähendused puudusega, mistõttu summa viga (tõestatud teoreemi alusel) on väiksem kui $0{,}001 \cdot 10$, s. t. vähem kui 0,01, sest liidetavate arv on väiksem kui 10.

Näide 2. Leida summa $a = 33{,}764 + 8{,}8 + 17{,}39$. Kõige väiksema täpsusega liidetava viimaseks järguks on kümnendikud. Ülejäänud liidetavail pole mõtet võtta kümnendikele järgnevaid kohti. Eraldame ärajäetavad kohad punktiirjoonega:

33,7	64
8,8	
17,3	9

$59{,}8 \approx 60$. Summa on leitud täpsusega kuni üks terve.

2. Lahutamine.

Teoreem 1. **Kahe ligikaudse arvu vahe absoluutne viga võrdub nende absoluutsete vigade vahega, kui mõlemad arvud on võetud puudusega või mõlemad liiaga.**

Antud: A — vähendatav, B — lahutatav ja nende lähendused (puudusega või liiaga) vastavalt a ja b ning nende vead e ja k. Tõestada, et vahe $a - b$ viga võrdub vahega $e - k$ (puudusega) ja $k - e$ (liiaga).

[1] Sulgudes on antud absoluutne viga tuhandikkudes.

1. juhtum. Lähendused a ja b on antud puudusega.

$A = a + e$

$B = b + k$

$A - B = (a + e) - (b + k)$. Kasutades liitmiste ja lahutamiste rea omadust ja tehte liikmetevahelist sõltuvust.

$(a + e) - (b + k) = a + e - b - k =$

$= a - b + e - k = (a - b) + (e - k)$,

$A - B = (a - b) + (e - k)$,

$e - k = (A - B) - (a - b)$.

2. juhtum. Lähendused a ja b on antud liiaga.

$A = a - e$

$B = b - k$

$A - B = (a - e) - (b - k)$. Kasutame liitmiste ja lahutamiste rea omadust ja tehte liikmetevahelist sõltuvust.

$(a - e) - (b - k) = a - e - b + k =$

$= a - b + k - e = (a - b) + (k - e)$,

$A - B = (a - b) + (k - e)$,

$(k - e) = (A - B) - (a - b)$.

Teoreem 2. **Kahe ligikaudse arvu vahe absoluutne viga võrdub vähendatava ja lahutatava absoluutsete vigade summaga, kui üks arvudest on võetud puudusega ja teine liiaga.**

Antud: A — vähendatav, B — lahutatav ja nende lähendused vastavalt a ja b ning nende vead e ja k.

Tõestada: Vahe $a - b$ viga võrdub vähendatava ja lahutatava vigade summaga $e + k$.

$A = a + e$

$B = b - k$

$A - B = (a + e) - (b - k)$.

$(a + e) - (b - k) = a + e - b + k =$

$= a - b + e + k = (a - b) + (e + k)$,

$A - B = (a - b) + (e + k)$,

$e + k = (A - B) - (a - b)$.

Vastavalt ligikaudsete täis- ja kümnendarvude lahutamise kohta vaadeldud omadustele võime aluseks võtta järgmise reegli:

Selleks, et leida kahe ligikaudse arvu vahet täis- või kümnendühikuni, tuleb vähendatavas ja lahutatavas ära jätta kõik numbrid, mis asetsevad soovitud täpsusjärgust paremal ja leida siis saadud arvude vahe.

Selgitame seda numbrilistel näidetel.

Näide 1. On antud arvud 12,642578 ja 8,361057. Tarvis on leida nende arvude vahe täpsusega kuni 0,01.

Võtame vähendatava ja lahutatava täpsusega nagu soovime saada tulemust ja teostame lahutamise:

$$\begin{array}{r} 12{,}64 \\ -\ 8{,}36 \\ \hline 4{,}28 \end{array}$$

Vahe 4,28 on otsitav vahe täpsusega kuni 0,01.

Jättes ära vähendatavas 0,002578, me vähendame vahet sama arvu võrra ja jättes lahutatavas ära 0,001057, me suurendame vahet. Võttes vähendatava ja lahutatava ligikaudsed väärtused, me vähendasime vahet 0,002578 võrra ja suurendasime 0,001057 võrra.

Et kumbki muutus on väiksem kui 0,01 ja nende vahe seda enam väiksem 0,01-st, seepärast on tõelise ja leitud tulemuste vahe lahutamisel samuti väiksem kui 0,01, s. t. 4,28 on antud arvude vahe täpsusega kuni 0,01.

Näide 2. 5,628 ja 3,524 on antud täpsusega kuni 0,001. Millise täpsusega tekib nende arvude vahe?

$$\begin{array}{rl} 5{,}628 & (0{,}001) \\ 3{,}524 & (0{,}001) \\ \hline 2{,}104 & \text{täpsusega kuni } 0{,}002. \end{array}$$

Kuna harilikult ligikaudsete arvude absoluutne viga on väiksem kui $\frac{1}{2}$ viimase järgu ühikut, siis vahe absoluutne viga võrdub viimase koha ühikuga.

3. Korrutamine.

Ligikaudse arvu korrutamisel täpsega võrdub korrutise absoluutne viga korrutatava absoluutse vea ja täpse korrutaja korrutisega. See omadus on selge tõestuseta.

Teoreem. **Kahe ligikaudse arvu korrutise absoluutne viga võrdub summaga, mille liidetavaiks on mõlema arvu korrutised teise arvu absoluutse veaga ja antud arvude absoluutsete vigade korrutis.**

Antud: tegurid A ja B, mille lähendused (puudusega või liiaga) on vastavalt a ja b ning nende absoluutsed vead e ja k.

Tõestada: korrutise ab absoluutne viga võrdub korrutiste summaga $ak + be + ek$. Arvud a ja b on võetud puudusega.

$$A = a + e$$
$$B = b + k$$
$$AB = ab + (ak + be + ek)$$
$$ak + be + ek = AB - ab.$$

Seega on korrutise ab absoluutne viga $ak + be + ek$.

Absoluutsete vigade korrutis (ek) on suuruselt tähtsusetu ja seda võib jätta arvestamata, võrreldes teiste korrutistega (ak ja be), mis esinevad korrutise absoluutse vea avaldises. Siis võrdub kahe ligikaudse arvu korrutise absoluutne viga summaga, mille liidetavaiks on mõlema teguri korrutis teise teguri absoluutse veaga:

$$AB - ab = ak + be.$$

Jagades korrutise absoluutse vea ligikaudsete arvude korrutisega, saame korrutise relatiivse vea:

$$\frac{ak + be}{ab} = \frac{k}{b} + \frac{e}{a},$$

s. t. korrutise relatiivne viga võrdub tegurite relatiivsete vigade summaga.

N ä i d e 1. On antud arv 8,342 täpsusega kuni 0,001. Korrutada see arv 10-ga. Korrutis on 83,42 täpsusega kuni 0,01. Korrutatava absoluutne viga on väiksem kui 0,001 ja korrutise absoluutne viga on väiksem kui $0{,}001 \cdot 10$, s. o. väiksem 0,01-st.

N ä i d e 2. On antud arv 8,342 täpsusega kuni 0,001. Korrutada see arv 53-ga.

$$\begin{array}{r} \times\ 8{,}342 \\ 53 \\ \hline +\ 25026 \\ 41710 \\ \hline 442{,}126 \end{array}$$

Selle korrutise absoluutne viga on väiksem kui $0{,}001 \cdot 53 = 0{,}053$, s. t. väiksem 0,1-st, kuid suurem 0,01-st. Seega võib korrutises ära jätta sajandikud ja tuhandikud, sest nad võivad osutuda ebaõigeteks; siis on korrutis 442,1 ja absoluutne viga on väiksem kui 0,1.

N ä i d e 3. On antud arvud 37,75 ja 26,34, mõlemad täpsusega kuni 0,01.

Korrutise $37{,}75 \cdot 26{,}34$ absoluutne viga on $0{,}01 \cdot 37{,}75 + 0{,}01 \cdot 26{,}34 \approx 0{,}01 \cdot 38 + 0{,}01 \cdot 27 \approx 0{,}65$.

Kummagi teguri absoluutne viga on väiksem kui 0,01. Korrutise absoluutne viga on väiksem kui 0,65, s. t. ka väiksem kui 1, seega on saadud korrutis täpsusega kuni 1.

Pole mõtet arvutada otsitava korrutise sajandikke, kui me ei saa vastutada kümnendike täpsuse eest. Korrutamisel kirjutame välja ainult kümnendikud ja kõrgemad järgud. Korrutatava murdosa korrutamisel korrutaja nelja sajandikuga

on väiksem kui 0,1. Seepärast korrutame 0,04-ga ainult korrutatava täisosa, saame:

$$\begin{array}{r} \times\ 37{,}75 \\ 26{,}34 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} +\ 1{,}5 \\ 11{,}3 \\ 226{,}5 \\ 755{,}0 \\ \hline 994{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (37 \cdot 0{,}04 \approx 1{,}5) \\ (37{,}7 \cdot 0{,}3 \approx 11{,}3) \\ (37{,}75 \cdot 6 = 226{,}5) \\ (37{,}75 \cdot 20 = 755\ ) \end{array}$$

Harilikul korrutamisel saame:

$$\begin{array}{r} \times\ 37{,}75 \\ 26{,}34 \\ \hline 1\,5400 \\ 11\,325 \\ +\ 226\,50 \\ 755\,0 \\ \hline 994{,}3650 \approx 994. \end{array}$$

4. Jagamine.

Ligikaudse arvu jagamisel täpse arvuga tekkinud jagatise absoluutne viga võrdub jagatava absoluutse vea ja jagaja jagatisega.

Näide. Antud: 235,7 — ligikaudne arv täpsusega kuni 0,1 ja jagaja 100 — täpne arv. Jagatis võrdub 2,357 täpsusega kuni 0,001. Absoluutne viga vähenes 100 korda.

Teoreem. **Jagatise relatiivse vea ülemmäär võrdub jagatava ja jagaja relatiivse vea ülemmäärade summaga.**

Kahe ligikaudse arvu a ja b jagatist saab kujutada a ja $\frac{1}{b}$ korrutisena:

$$a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Kasutades korrutise relatiivse vea teoreemi, saame: jagatise $\frac{a}{b}$ relatiivne viga on tegurita a ja $\frac{1}{b}$ või ligikaudsete arvude a ja b relatiivsete vigade summa, sest b ja $\frac{1}{b}$ relatiivne viga on ühesugune. (Tõestuse esitame allpool.) Järelikult võrdub jagatise relatiivne viga jagatava ja jagaja relatiivsete vigade summaga.

Tõestus. Antud on ligikaudne arv b ja selle pöördväärtus $\frac{1}{b}$. Ligikaudse arvu absoluutne viga on k; täpne väärtus $b+k$ ja selle pöördväärtus $\frac{1}{b+k}$.

Leiame ligikaudse arvu $\frac{1}{b}$ absoluutse vea, s. t. selle ligikaudse ja täpse väärtuse vahe. Selleks teisendame murru $\frac{1}{b+k}$; liidame ja lahutame lugejast $\frac{k}{b}$ ja $\frac{k^2}{b^2}$:

$$\frac{1}{b+k}=\frac{1+\frac{k}{b}-\frac{k}{b}-\frac{k^2}{b^2}+\frac{k^2}{b_2}}{b+k}.$$

Rühmitame liidetavad ja toome sulgude ette lugejas $\frac{k}{b}$ ja nimetajas b:

$$\frac{1}{b+k}=\frac{\left(1+\frac{k}{b}\right)-\frac{k}{b}\left(1+\frac{k}{b}\right)+\frac{k_2}{b^2}}{b\left(1+\frac{k}{b}\right)}.$$

Lahutame eraldi murdudeks ja taandame:

$$\frac{1}{b+k}=\frac{1+\frac{k}{b}}{b\left(1+\frac{k}{b}\right)}-\frac{\frac{k}{b}\left(1+\frac{k}{b}\right)}{b\left(1+\frac{k}{b}\right)}+\frac{\frac{k^2}{b^2}}{b\left(1+\frac{k}{b}\right)}.$$

$$\frac{1}{b+k}=\frac{1}{b}-\frac{k}{b^2}+\frac{k^2}{b^3\left(1+\frac{k}{b}\right)}.$$

Kolmanda liikme võib jätta arvestamata, sest tavaliselt on k väärtus väga väike ja seda väiksem veel selle ruut:

$$\frac{1}{b+k}=\frac{1}{b}-\frac{k}{b^2};\quad \text{kust}\quad \frac{k}{b^2}=\frac{1}{b}-\frac{1}{b+k}.$$

$\frac{k}{b^2}$ on arvu $\frac{1}{b}$ absoluutne viga. Leiame selle relatiivse vea:

$$\frac{k}{b^2}:\frac{1}{b}=\frac{k\cdot b}{1\cdot b^2}=\frac{k}{b}.$$

Ligikaudse arvu b relatiivne viga on samuti $\frac{k}{b}$.

Järelikult on b ja $\frac{1}{b}$ relatiivsed vead võrdsed.

Vaatleme näiteid soovitud täpsusega jagatise leidmiseks.

Näide 1. Leida jagatis 758,243 : 24,1564 täpsusega kuni 1.

Antud täpsuse puhul (kuni 1) peab jagatis sisaldama ainult täisühelisi. Koostades jagatise ja jagaja osakorrutisi, me oleme õigustatud saama neid ka täisühelistes. Seepärast me võiksime ümardada jagajat kuni täisühelisteni. Kuid jagatise korrutamisel jagaja kümnendikega võib saada täisühelisi (antud näites jagatise kümnete korrutamisel jagaja kümnendikega). Seepärast säilitame jagajas ühe kümnendkoha. Jagame 24,1-ga (sajandikud, tuhandikud jne. ei anna korrutamisel jagatise kõrgeima järguga täisühelisi).

Tõestame jagamise:

$$\begin{array}{r|l} 7582{,}43 & 241 \\ \underline{-\,723} & \overline{31} \\ 352 & \\ \underline{241} & \\ 111 & \end{array}$$

Saime jäägi $111{,}43 = 7582{,}43 - 241 \cdot 31$.

Kui me oleks jaganud kogu jagajaga, s. t. 24,1564-ga, siis oleks saanud veel väiksema jäägi. Järelikult on saadud jagatise erinevus täpsest väiksem kui 1. Arv 31 on jagamise $\frac{758{,}243}{24{,}1564}$ jagatis täpsusega kuni 1.

Seega määrame jagatise leidmisel täpsusega kuni 1 algul jagatise numbrite arvu; siis võtame jagajas ühe numbri enam kui jagatises, vastavalt nihutame ka koma jagatavas ja jagame täisarvulise jagajaga.

Näide 2. Arvutada jagatis $\frac{643{,}957}{3{,}14159}$ täpsusega kuni 1. Jagatises on kolm numbrit, järelikult võtame jagajas 4 numbrit 3141, viime koma jagatavas kolm kohta paremale ja teostame jagamise:

$$\begin{array}{r|l} 643\,957 & 3141 \\ \underline{-\,628\,2} & \overline{205} \\ 157\,57 & \\ \underline{157\,05} & \\ 52 & \end{array}$$

Jagatise leidmine täpsusega kuni 0,1; 0,01; 0,001 jne. taandub eelmisele.

Suurendame jagatavat vastavalt 10, 100, 1000 jne. korda, leiame jagatise täpsusega kuni 1 ja vähendame jagatist 10, 100, 1000 jne. korda.

Näide 3. Leida jagatis $\frac{752{,}864}{3{,}14152}$ täpsusega kuni 0,01. Korrutame jagatava 100-ga ja leiame jagatise $\frac{75286{,}4}{3{,}14152}$ täpsusega kuni 1. Jagatise numbrite arv on 5. Järelikult võtame jagajas 6 numbrit. Jagatavas viime koma 5 kohta paremale ja teostame jagamise.

$$\begin{array}{r|l} 7528640000 & 314152 \\ \underline{628304} & \overline{23964} \\ 1245600 & \\ \underline{-\,942456} & \\ 3031440 & \\ \underline{-\,2827368} & \\ 2040720 & \\ \underline{-\,1884912} & \\ 1558080 & \\ \underline{-\,1256608} & \\ 301472 & \end{array}$$

ehk 23 965 (sest jääk on suurem kui pool jagajat).

Jagame saadud jagatise 100-ga. Otsitav jagatis on 239,64 või 239,65.

Kasutades alljärgnevat mõttekäiku on arvutusi võimalik lühendada. Jagatise esimene number 2 saadakse jagamisel $\frac{752864}{314152}$. Edasi tuleb leida veel jagatise neli numbrit. Kuid me teame, et ligikaudsel jagamisel on jagaja numbrite arv ainult ühe võrra suurem jagatise numbrite arvust, seepärast jagatise järgmise numbri saamiseks võime jagajasse jätta ainult viis numbrit 31 415, vähendades ühe numbri võrra ka esimese

jäägi numbrite arvu, mis on jagatavaks jagatise teise numbri määramisel, s. t. teine jagamine on järgmine:

$$\begin{array}{r|l} 124560 & 31415 \\ \underline{94245} & \overline{3} \\ 30315 & \end{array}$$

Leidsime jagatise teise numbri. Jääb veel leida jagatise kolm numbrit. Kordame arutlust: selleks, et leida jagatise kolm numbrit, võtame jagajas neli numbrit, vastavalt ära jättes ka jagatavas ühe järgu. Kolmas jagamine:

$$\begin{array}{r|l} 30315 & 3141 \\ \underline{28269} & \overline{9} \\ 2046 & \end{array}$$

Selleks, et leida jagatise neljandat numbrit, võtame jagajas kolm numbrit. Neljas jagamine on järgmine:

$$\begin{array}{r|l} 2046 & 314 \\ \underline{1884} & \overline{6} \\ 162 & \end{array}$$

Jääb leida jagatise viimane number. Jagajas võtame kaks numbrit ja jagame:

$$\begin{array}{r|l} 162 & 31 \\ \underline{155} & \overline{5} \\ 7 & \end{array}$$

Seega on kogu jagatis 23 965.

Praktiliselt kasutatakse järgmist kirjutusviisi:

$$\begin{array}{r|l} 752864 & 00 \;\; 314152 \\ \underline{628304} & \overline{23965} \\ 124560 & \\ \underline{94245} & \\ 30315 & \\ \underline{28269} & \\ 2046 & \\ \underline{1884} & \\ 162 & \\ \underline{155} & \\ 7 & \end{array}$$

Jääki mingeid jagatava numbreid ei kanna. Jagatise teise numbri leidmisel kriipsutame läbi jagaja viimase numbri 2. Teine osakorrutis on $31\,415 \cdot 3 = 94\,245$. Kolmanda jagatise numbri leidmisel kriipsutame läbi jagaja eelviimase numbri 5. Jagame $30\,315 : 3141 = 9$. Kriipsutame veel läbi jagaja numbri 1. Jagame $8046 : 314 = 6$. Edasi kriipsutame läbi jagaja numbri 4 ja jagame $162 : 31 = 5$. See ongi jagatise viimane number.

Tõeline jagatis on 100 korda väiksem, sest jagatavat oli 100 korda suurendatud.

$$\frac{752{,}864}{3{,}14152} = 239{,}65 \text{ täpsusega kuni } 0{,}01.$$

XXI peatükk.

Suhe ja võrre (proportsioon).

§ 138. Suhe.

1. Suuruste suhe.

Kahe samaliiki suuruse suhteks nimetatakse arvu, mis näitab mitu korda on üks suurus teisest suurem või missuguse osa moodustab see suurus teisest suurusest. Näiteks: 4 km ja 2 km suhe on 2 ning 20 cm ja 1 m suhe on 0,2.

Esimesel juhul näitab suhe, et üks kahest samaliiki suurusest (4 km) on kaks korda suurem teisest suurusest (2 km); teisel juhul näitab suhe 0,2, millise osa teisest suurusest (1 km) moodustab esimene suurus (20 cm).

Sellest definitsioonist järgneb, et samaliiki suuruste suhe on nimeta (abstraktne) arv.

Aritmeetikas asendatakse suurused harilikult nende numbriliste väärtustega. Siit järgneb, et suuruste suhet võib asendada nende arvude suhtega, mis väljendavad antud suuruse väärtust.

2. Arvude suhe.

Vaadeldes arvude jagamist (§ 41), me määrasime kindlaks, et **kahe arvu suhe on ühe arvu jagatis teisega.**

Murdarvude kasutuselevõtuga muutus jagamine võimalikuks kõigil juhtumitel (väljaarvatud muidugi jagamine nulliga). Järelikult võib ütelda, et **määrata kahe arvu suhe, tähendab leida mitu korda on esimene arv teisest suurem või millise osa esimene arv moodustab teisest.**

Kui kahe arvu suhe (jagatis) võrdub ühega, siis näitab see, et antud arvud on võrdsed; kui suhe on suurem kui üks, siis näitab see, mitu korda on esimene arv suurem teisest;

kui suhe on väiksem kui üks, siis näitab see, missuguse osa moodustab esimene arv teisest.

Ülalantud definitsioonist järgneb, et kahe antud arvu a ja b suhe on niisugune arv q, millega on tarvis korrutada teist arvu b, et saada esimest arvu a.

Suhe kirjutatakse harilikult nii: $a : b = q$; arvu a nimetatakse suhte **eelliikmeks** ja arvu b suhte **järelliikmeks** ning arvu q — **suhteks.**

Märgime, et arvude tähistamisel tähtedega vaadeldakse mõnikord kirjutist $a : b$ kui jagamise tulemust ennast, mitte ainult kui nõuet jagamise teostamiseks. Vastavalt sellele võib vaadelda kirjutist $a : b$ kui arvu a ja b suhte tähist.

Märkus. Ülal defineeritud kahe arvu suhet nimetatakse vahel **kordseks** ehk **geomeetriliseks** suhteks, vastandina kahe arvu **vahelisele** ehk **aritmeetilisele** suhtele, mis võrdub nende arvude vahega. Kuna praegusajal matemaatikas aritmeetilist suhet ei kasutata, siis edasises esituses rääkides suhtest, me mõtleme selle all alati kordset suhet.

3. Suhte liikmete omadused.

Kuna suhte eelliige on jagatav ja järelliige — jagaja ning suhe — jagatis, siis omavad geomeetrilise suhte $a : b = q$ liikmed samu omadusi, kui jagamise liikmedki ja nimelt:

1) Eelliige võrdub järelliikme ja suhte korrutisega $a = bq$.

2) Järelliige võrdub eelliikme ja suhte jagatisega $b = a : q$.

3) Kui eelliiget suurendada või järelliiget vähendada mingi arv korda, siis suhe suureneb sama arv korda:

$$(ae) : b = (qe); \quad a : (b : e) = (qe);$$

mõlemal juhul suhe suurenes e korda.

4) Kui eelliiget vähendada või järelliiget suurendada mingi arv korda; siis suhe väheneb sama arv korda:

$$(a : b) : b = (q : e) \text{ või } a : (be) = (q : e);$$

mõlemal juhul suhe väheneb e korda.

5) Kui eel- ja järelliiget suurendada või vähendada sama arv korda, siis suhe ei muutu $(ae) : (be) = q$ või $(a : e) : (b : e) = q$; mõlemal juhul jäi suhe endiseks. Suhte liikmete omaduste alusel saab: 1) määrata suhte tundmatut liiget, 2) murdarvude suhet asendada täisarvude suhtega, 3) taandada suhte liikmeid.

6) Eelliikmeks võib olla mistahes arv, järelliige võib samuti olla mistahes arv peale nulli, sest jagamine nulliga on võimatu.

4. Pöördsuhted.

Ühte suhet nimetatakse teise suhtes pöördsuhteks, kui ühe eelliige on teise järelliikmeks ja ümberpöördult. Suhted $16 : 8 = 2$ *ja* $8 : 16 = \frac{1}{2}$ on üksteise suhtes pöördsuhted. Esimene suhe on 2, teine $-\frac{1}{2}$; suhte korrutis pöördsuhtega on 1. Selleks, et saada antud suhte pöördsuhet, tuleb üks jagada antud suhtega. Murdarvude suhte asendamine täisarvude suhtega lihtsustub neil juhtudel, kui murrud, millede suhe on antud, omavad: 1) võrdsed nimetajad, 2) võrdsed lugejad.

Esimesel juhul, nagu see toimub murdude suhte asendamisel täisarvude suhtega, võrdub murdude suhe nende lugejate suhtega; teisel juhul võrdub murdude suhe nende nimetajate pöördsuhtega. Vaatleme murdude suhet $\frac{3}{5} : \frac{3}{7}$, see suhe võrdub:

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 3} = (3 \cdot 7) : (3 \cdot 5) = 7 : 5.$$

§ 139. Võrded (proportsioonid).

Definitsioon. **Võrdeks nimetatakse kahe suhte võrdust.**

Näiteks, kui $a:b=q$ ja $c:d=q$, siis võrdust $a:b=c:d$ nimetatakse võrdeks.

Nelja arvu, mis moodustavad geomeetrilise võrde, nimetatakse võrdelisteks arvudeks; nendest esimest ja neljandat (a ja d) nimetatakse välisliikmeteks, teist ja kolmandat (b ja c) — siseliikmeteks.

1. Võrde põhiomadus.

Teoreem. **Võrde välisliikmete korrutis võrdub siseliikmete korrutisega.**

Antud: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Tõestada: $ad=bc$.

Vastavalt korrutamise monotoonsuse seadusele korrutame võrde $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ mõlemad pooled bd-ga:

$$\frac{a}{b}\cdot bd=\frac{c}{d}\cdot bd \text{ ehk}$$

$ad=cb$ (järeldus jagamise definitsioonist)
$ad=bc$ (kommutatiivsus).

1. järeldus. a) **Võrde iga välisliige võrdub siseliikmete korrutisega, mis on jagatud teise välisliikmega.** Võtame võrde: $a:b=c:d$; tõestatud teoreemi alusel on $ad=bc$. Siit saame: $a=\frac{bc}{d}$ või $d=\frac{bc}{a}$.

b) **Võrde iga siseliige võrdub välisliikmete korrutisega, mis jagatud teise siseliikmega.** Võtame võrde $a:b=c:d$. Vastavalt tõestatud teoreemile, saame: $ad=bc$; kust $b=\frac{ad}{c}$ või $c=\frac{ad}{b}$.

Tõestatu alusel saab võrde antud kolme liikme järgi leida mistahes tundmatut neljandat liiget.

2. järeldus. Võrde põhiomaduse teoreemi kohaselt saab igas proportsioonis, ilma seda rikkumata, teostada võrde liikmete ümberpaigutusi nii, et välisliikmete korrutis jääks võrdseks siseliikmete korrutisega: 1) välisliikmete või siseliikmete ümberpaigutus, 2) paigutada siseliikmed välisliikmete asemele ja ümberpöördult (vahetada suhete kohad).

Kui on antud võrre $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, siis võib selle alusel kirjutada järgmised võrded: 1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; 2) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; 3) $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; 4) $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$; 5) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$; 6) $\frac{b}{d}=\frac{a}{c}$; 7) $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$ ja 8) $\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$.

Siit näeme, et iga võrre võib omada 8 erikuju (antud võrre kaasaarvatud).

2. Neljast arvust võrde koostamise vajalik ja piisav tingimus.

Teoreem. **Selleks, et neli arvu a, b, c ja d moodustaksid võrde $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ on vajalik ja piisav, et välisliikmete korrutis võrduks siseliikmete korrutisega.**

Antud: a, b, c ja d ja $ad=bc$.

Tõestada: antud arvudest saab koostada võrde $a:b=c:d$.

Eelduse kohaselt $ad=bc$ ja jagades võrduse mõlemad pooled bd-ga, saame $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$.

Taandades võrduse parema poole d-ga ja vasaku poole b-ga, saame: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Seega näeme, et see tingimus on piisav ja vajalik, sest võrre $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ annab $ad=bc$.

Esitatud omadust kasutatakse võrde kontrollimisel. Kui välisliikmete korrutis on võrdne siseliikmete korrutisega, siis on võrre õige.

Järeldus. **Võrde üht välisliiget ja üht siseliiget võib korrutada või jagada ühe ja sama arvuga.**

Jagades või korrutades sise- ja välisliiget ühe ja sama arvuga, me korrutame või jagame ühe ja sama arvuga nii siseliikmete korrutist, kui ka välisliikmete korrutist, mis aga võrdust ei riku.

Sellele põhjeneb võrde liikmete taandamine nende S. Ü-ga ja võrde murdarvuliste liikmete asendamine täisarvulistega.

Näide 1. $450 : 8 = 600 : 10\frac{2}{3}$.

Taandame suhete eelliikmed 150-ga. Saame: $3 : 8 = 4 : 10\frac{2}{3}$.

Kontroll: $3 \cdot 10\frac{2}{3} = 4 \cdot 8$; $32 = 32$.

Näide 2. $52 : 4\frac{1}{3} = 30 : 2\frac{1}{2}$.

Teisendame ühe sise- ja välisliikme ühenimelisteks:

$$52 : \frac{13 \cdot 2}{6} = 30 : \frac{5 \cdot 3}{6}.$$

Jätame nimetaja ära: $52 : 26 = 30 : 15$.

Seega saame vastavalt võrde põhiomadusele:

1) võrde kolme antud liikme järgi määrata mistahes tundmatut neljandat liiget;

2) võrde esitada 8 erikujul võrde liikmete ümberpaigutamisega;

3) taandada võrde sise- ja välisliiget;

4) asendada võrdes murdarvud täisarvudega, ära jättes ühise nimetaja kõikidel võrde liikmetel või väli- ja siseliikmel;

5) kontrollida võrret.

Märkus. Võrret saab kontrollida ka võrde definitsiooni alusel: arvutame suhte väärtused. Kui suhted on võrdsed, siis võrre on õige, sest võrre koostatakse ainult võrdsetest suhetest. Näiteks $52 : 26 = 30 : 15$. Suhted on võrdsed: $2 = 2$.

3. Pidev võrre.

Võrret, mille sise- või välisliikmed on võrdsed, nimetatakse pidevaks võrdeks.

Näiteks on pidevad võrded $a : b = b : c$ ja $c : k = l : c$ või $15 : 6 = 6 : 2{,}5$ ja $9 : 15 = 15 : 25$.

4. Geomeetriline keskmine.

Pideva võrde korduvat liiget nimetatakse kahe teise arvu geomeetriliseks keskmiseks ehk keskmiseks võrdeliseks. Näiteks pidevas võrdes $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ on b arvude a ja c geomeetriline keskmine ehk keskmine võrdeline. Võrde põhiomaduse alusel saame $b^2 = ac$, kust $b = \sqrt{ac}$. **Kahe antud arvu geomeetriline keskmine** (keskmine võrdeline) **võrdub ruutjuurega nende arvude korrutisest.**

Näide. Võrdes $15 : x = x : 2{,}4$; $x = \sqrt{15 \cdot 2{,}4} = \sqrt{36} = 6$, s. o. 15 ja 2,4 geomeetriline keskmine (keskmine võrdeline) võrdub 6-ga.

§ 140. Tuletatud võrded.

Definitsioon. Tuletatud võrdeiks nimetatakse võrdeid, mis saadakse antud võrdest, teostades selle liikmetega mõningaid tehteid.

Teoreem 1. **Võrde esimese suhte liikmete summa või vahe suhtub selle järelliikmega, nagu teise suhte liikmete summa või vahe suhtub selle järelliikmega.**

Antud $a : b = c : d$, $(a > b$ ja $c > d)$.

Tõestada: $\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.

$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1$, sest liites või lahutades võrduse mõlemast poolest sama arvu, võrdus jääb kehtima.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{b}{b} = \frac{c}{d} \pm \frac{d}{d}, \text{ kust } \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

(ühenimeliste murdude liitmine ja lahutamine).

Näide. On antud võrre: $\frac{45}{25} = \frac{18}{10}$.

a) $\frac{45+25}{25} = \frac{18+10}{10}$; $\frac{70}{25} = \frac{28}{10}$.

Kontroll: $70 \cdot 10 = 25 \cdot 28$; $700 = 700$.

b) $\frac{45-25}{25} = \frac{18-10}{10}$; $\frac{20}{25} = \frac{8}{10}$; $20 \cdot 10 = 25 \cdot 8$; $200 = 200$.

Teoreem 2. **Võrde esimese suhte liikmete summa või vahe suhtub selle eelliikmega, nagu teise suhte liikmete summa või vahe suhtub selle eelliikmega.**

Antud: $a : b = c : d$, $(a > b$ ja $c > d)$.

Tõestada: $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$.

Paigutades antud võrdes välisliikmed siseliikmete kohale ja siseliikmed välisliikmete asemele, saame: $b : a = d : c$. Liites ühega või lahutades ühest võrde suhted, saame:

$1 \pm \frac{b}{a} = 1 \pm \frac{d}{c}$, kust $\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$.

Näide. On antud võrre: $\frac{45}{25} = \frac{18}{10}$.

a) $\frac{45+25}{45} = \frac{18+10}{18}$; $\frac{70}{45} = \frac{28}{18}$; kontroll: $70 \cdot 18 = 45 \cdot 28$
$1260 = 1260$.

b) $\frac{45-25}{45} = \frac{18-10}{18}$; $\frac{20}{45} = \frac{8}{18}$; kontroll: $20 \cdot 18 = 45 \cdot 8$
$360 = 360$.

Teoreem 3. **Võrde esimese suhte liikmete summa või vahe suhtub teise suhte liikmete summa või vahega, nagu esimese suhte eelliige suhtub teise suhte eelliikmega või nagu esimese suhte järelliige suhtub teise suhte järelliikmega.**

Antud: $a:b=c:d$, $(a>b$ ja $c>d)$.

Tõestada: $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}$ või $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$.

Ümberpaigutades esimeses tuletatud võrdes siseliikmed, saame $\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}$ ja ümberpaigutades antud võrdes siseliikmed, saame $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$. Kahe saadud võrde teised suhted on võrdsed, järelikult on võrdsed ka esimesed suhted, seega:

$$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c} \text{ või } \frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{b}{d}.$$

Näide. On antud võrre: $\frac{45}{25}=\frac{18}{10}$.

Kontroll (suhete võrdsuse järgi):

a) $\frac{45+25}{18+10}=\frac{45}{18}$; $\frac{70}{28}=\frac{45}{18}$; $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$.

b) $\frac{45-25}{18-10}=\frac{25}{10}$; $\frac{20}{8}=\frac{25}{10}$. $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$.

Teoreem 4. **Võrde esimese suhte liikmete summa suhtub nende vahega, nagu teise suhte liikmete summa suhtub nende vahega.**

Antud: $a:b=c:d$, $(a>b$ ja $c>d)$.

Tõestada: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Eelmise teoreemi alusel kirjutame:

$\frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}$, kust $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{c}$ ja $\frac{a-b}{c-d}=\frac{a}{c}$.

Järelikult: $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$.

Ümberpaigutades siseliikmed, saame: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

Näide. On antud võrre: $\frac{45}{25}=\frac{18}{10}$.

$\frac{45+25}{45-25}=\frac{18+10}{18-10}$; $\frac{70}{20}=\frac{28}{8}$; $\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$.

Teoreem 5. **Võrde eelliikmete summa või vahe suhtub esimese suhte eelliikmega nagu järelliikmete summa või vahe suhtub esimese suhte järelliikmega.**

Antud: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Tõestada: $\frac{a\pm c}{a}=\frac{b\pm d}{b}$.

Ümberpaigutades antud võrdes siseliikmed, saame: $a:c=b:d$; vastavalt teisele teoreemile:

$$\frac{a\pm c}{a}=\frac{b\pm d}{b}.$$

Näide. On antud võrre: $\frac{45}{25}=\frac{18}{10}$.

Kontroll (suhete võrdsuse järgi):

a) $\frac{45+18}{45}=\frac{25+10}{25}$; $\frac{63}{45}=\frac{35}{25}$; $\frac{7}{5}=\frac{7}{5}$.

b) $\frac{45+18}{45}=\frac{25-10}{25}$; $\frac{27}{45}=\frac{15}{25}$; $\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$.

Teoreem 6. **Võrde eelliikmete summa või vahe suhtub teise suhte eelliikmega, nagu järelliikmete summa või vahe suhtub teise suhte järelliikmega.**

Antud: $a:b=c:d$. Tõestada: $\frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d}$.

Ümberpaigutades võrde siseliikmed ja kasutades esimest teoreemi, saame:

$$\frac{a\pm c}{c}=\frac{b\pm d}{d}.$$

Näide. On antud võrre: $\frac{45}{25}=\frac{18}{10}$.

Kontroll (suhete võrdsusega):

a) $\frac{45+18}{18}=\frac{25+10}{10}$; $\frac{63}{18}=\frac{35}{10}$; $\frac{7}{2}=\frac{7}{2}$.

b) $\frac{45-18}{18}=\frac{25-10}{10}$; $\frac{27}{18}=\frac{15}{10}$; $\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$.

Teoreem 7. **Võrde eelliikmete summa või vahe suhtub järelliikmete summa või vahega nagu mingi eelliige suhtub oma järelliikmega.**

Antud: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Tõestada: $\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}$ ja $\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{c}{d}$.

Ümberpaigutades antud võrdes siseliikmed, saame $a : c = b : d$; saadud võrde ja tuletatud võrrete esimese teoreemi alusel: $\frac{a \pm c}{c}=\frac{b \pm d}{d}$; ümberpaigutades viimases võrdes siseliikmed, saame: $\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{c}{d}$.

Kuid eelduse põhjal $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, siis $\frac{a \pm c}{b \pm d}=\frac{a}{b}$.

Näide. On antud võrre: $\frac{45}{25}=\frac{18}{10}$.

Kontroll (suhete võrdsuse põhjal):

a) $\frac{45+18}{25+10}=\frac{18}{10}$; $\frac{63}{35}=\frac{18}{10}$; $\frac{9}{5}=\frac{9}{5}$.

b) $\frac{45-18}{25-10}=\frac{45}{25}$; $\frac{27}{15}=\frac{45}{25}$.

Teoreem 8. **Võrde eelliikmete summa suhtub nende vahega, nagu järelliikmete summa suhtub nende vahega.**

Antud: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; Tõestada: $\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}$.

Ümberpaigutades antud võrdes siseliikmed, saame: $a : c = b : d$.

Saadud võrdest tuletatud võrrete neljanda teoreemi alusel:

$$\frac{a+c}{a-c}=\frac{b+d}{b-d}.$$

Näide. On antud võrre: $\frac{45}{25}=\frac{18}{10}$.

Kontroll (suhete võrdsuse järgi):

$\frac{45+18}{45-18}=\frac{25+10}{25-10}$; $\frac{63}{27}=\frac{35}{15}$. $\frac{7}{3}=\frac{7}{3}$.

§ 141. Liitvõrded.

Definitsioon. **Liitvõrdeks nimetatakse niisugust võrret, mis saadakse kahe või mitme võrde vastavate liikmete vaheliste aritmeetiliste tehete resultaadina.**

1. Võrrete liitmine ja lahutamine.

Teoreem. **Võrdsete suhetega kahe või mitme võrde vastavate liikmete liitmisel või lahutamisel saadakse liitvõrre, mille liikmete suhe on sama väärtusega.**

Antud: võrre $a : b = c : d$ ja $m : e = p : k$, kusjuures $a : b = q$ ja $m : e = q$.

Tõestada: $\frac{a \pm m}{b \pm e} = \frac{c \pm p}{d \pm k} = q$.

1. $a = bq$; $c = dq$; $m = eq$; $p = kq$ (geomeetrilise suhte omaduse alusel).
2. $a \pm m = bq \pm eq$ ja $c \pm p = dq \pm kq$ (vastavalt liitmise monotoonsuse seadusele).
3. $a \pm m = (b \pm e)q$ ja $c \pm p = (d \pm k)q$ (distributiivsuse seaduse alusel).
4. $(a \pm m) : (b \pm e) = q$ ja $(c \pm p) : (d \pm k) = q$ (jagamise definitsiooni järgi).

Siit: $(a \pm m) : (b \pm e) = (c \pm p) : (d \pm k)$ ehk $\frac{a \pm m}{b \pm e} = \frac{c \pm p}{d \pm k} = q$, mida oligi tarvis tõestada.

Näide. On antud võrded: $4 : 10 = 24 : 6$, suhe $= 4$;
$12 : 3 = 8 : 2$, suhe $= 4$;
liitvõrded $(4 \pm 12) : (10 \pm 3) = (24 \pm 8) : (6 \pm 2)$:
1) $52 : 13 = 32 : 8$, suhe $= 4$;
2) $28 : 7 = 16 : 4$, suhe $= 4$.

2. Võrrete korrutamine.

Teoreem. **Kahe või mitme võrde vastavate liikmete korrutamisel saadakse võrre, mille suhe võrdub antud võrrete suhete korrutisega.**

Antud: $a : b = c : d$, kusjuures $a : b = q_1$;
$m : e = p : k$, kusjuures $m : e = q_2$.

Tõestada: $\frac{am}{be} = \frac{cp}{dk} = q_1 q_2$.

Teoreemi eelduse järgi: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q_1$ ja $\frac{m}{e} = \frac{p}{k} = q_2$.

Korrutades need võrdused liikmete kaupa, saame monotoonsuse seaduse alusel:

$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{e} = \frac{c}{d} \cdot \frac{p}{k} = q_1 q_2$ ehk $\frac{am}{be} = \frac{cp}{dk} = q_1 q_2$, mida oligi tarvis tõestada.

Vaatleme nüüd juhtu, kus on antud mitu võrret.

Antud: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1} = q_1$, $\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2} = q_2$, $\frac{a_3}{b_3} = \frac{c_3}{d_3} = q_3$, $\frac{a_4}{b_4} = \frac{c_4}{d_4} = q_4$.

Tõestada: $\frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{b_1 b_2 b_3 b_4} = \frac{c_1 c_2 c_3 c_4}{d_1 d_2 d_3 d_4} = q_1 q_2 q_3 q_4$.

Korrutades omavahel antud võrduste vasakud ja paremad pooled, saame võrdsed korrutised:

$$\frac{a_1 a_2 a_3 a_4}{b_1 b_2 b_3 b_4} = \frac{c_1 c_2 c_3 c_4}{d_1 d_2 d_3 d_4} = q_1 q_2 q_3 q_4,$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide. Antud on võrded: $80 : 10 = 16 : 2$, suhe $= 8$;
$40 : 8 = 10 : 2$, suhe $= 5$;
$8 : 4 = 6 : 3$, suhe $= 2$.

Liitvõrre: $(80 \cdot 40 \cdot 8) : (10 \cdot 8 \cdot 4) = (16 \cdot 10 \cdot 6) : (2 \cdot 2 \cdot 3) =$
$= 25\,600 : 320 = 960 : 12$, suhe $= 8 \cdot 5 \cdot 2 = 80$.

Järeldus. Astendades antud võrde kõik liikmed samale astmele, saame liitvõrde, mille suhe võrdub antud võrde suhte sama astmega.

Olgu antud geomeetriline võrre $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=q$, mille kõik liikmed astendame n-dale astmele. Antud võrde astendamine n-dale astmele on samaväärne võrrete korrutamisega, mis on antud võrdega võrdsed.

Niisuguse korrutamise tulemusena saame:

$$\frac{\overbrace{aaa\cdots a}^{n\text{ tegurit}}}{\underbrace{bbb\cdots b}_{n\text{ tegurit}}}=\frac{\overbrace{ccc\cdots c}^{c\text{ tegurit}}}{\underbrace{ddd\cdots d}_{c\text{ tegurit}}}=\overbrace{\underbrace{qqq\ldots q}_{n\text{ tegurit}}}$$

Siit: $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}=q^n$.

Näide. $4:2=6:3$, suhe $=2$.

Liitvõrre: $4^3:2^3=6^3:3^3$ ehk $64:8=216:27$; suhe $=2^3=8$.

3. Võrrete jagamine.

Teoreem. **Ühe võrde liikmete jagamisel teise võrde vastavate liikmetega saadakse liitvõrre, mille suhe võrdub antud võrrete suhete jagatisega.**

Antud: $a:b=c:d$, kusjuures $a:b=q$;
$m:e=p:k$, kusjuures $m:e=f$.

Tõestada: $\frac{a}{m}:\frac{b}{e}=\frac{c}{p}:\frac{d}{k}=\frac{q}{f}$.

Jagades antud võrdused liikmete kaupa, saame:

1) $\frac{a}{b}:\frac{m}{e}=\frac{c}{d}:\frac{p}{k}=\frac{q}{f}$, millest jagamise reegli alusel leiame:

2) $\frac{ae}{bm}=\frac{ck}{dp}=\frac{q}{f}$; tegureid ümberpaigutades saame:

3) $\frac{ae}{mb}=\frac{ck}{pd}=\frac{q}{f}$ ehk 4) $\frac{a}{m}\cdot\frac{e}{b}=\frac{c}{p}\cdot\frac{k}{d}=\frac{q}{f}$.

Arendades korrutamise pöördmurru jagamisega, saame:

$$\frac{a}{m}:\frac{b}{e}=\frac{c}{p}:\frac{d}{k}=\frac{q}{f},$$

mida oligi tarvis tõestada.

Näide. $80:8=30:3$, suhe $=10$;
$40:8=25:5$, „ $=5$.

Liitvõrre: $(80:40):(8:8)=(30:25):(3:5)$,

$$2:1=\frac{6}{5}:\frac{3}{5},\ \text{suhe}=\frac{10}{5}=2.$$

§ 142. Võrdsete suhete rea liikmete omadus.

Teoreem. **Võrdsete suhete eelliikmete summa suhtub järelliikmete summaga, nagu iga eelliige suhtub oma järelliikmega.**

Antud: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{p}{k}=\cdots=\frac{e}{m}=q.$

Tõestus: $\frac{a+c+p+\cdots+e}{b+d+k+\cdots+m}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{p}{k}=\cdots=\frac{e}{m}.$

Meil on: $\frac{a}{b}=q;\ \frac{c}{d}=q;\ \frac{p}{k}=q;\ \cdots;\ \frac{e}{m}=q.$

Järelikult $a=bq;\ c=dq;\ p=kq;\ \ldots;\ e=mq.$

Liidame saadud võrdused liikmete kaupa:

$a+c+p+\ldots+e=bq+dq+kq+\ldots+mq=$
$=(b+d+k+\ldots+m)q$ (distributiivsuse seaduse alusel).

Siit saame jagamise definitsiooni alusel:

$$\frac{a+c+p+\cdots+e}{b+d+k+\cdots+m}=q.$$

Arvude transitiivsuse kohaselt saame:

$$\frac{a+c+p+\cdots+e}{b+d+k+\cdots+m}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{p}{k}=\cdots=\frac{e}{m}.$$

Näide. $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}=\frac{16}{8}=\frac{26}{13}$, suhe $=2$.

$$\frac{8+10+16+26}{4+5+8+13}=\frac{60}{30}=\frac{8}{4}=\frac{10}{5}\ \text{jne.}$$

Võrrete teooria rakendamine.

§ 143. Võrdelised ja pöördvõrdelised suurused.

On olemas terve rida suurusi, mis sõltuvad teineteisest nii, et ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse kindel väärtus.

Näide 1. Petrooleumi ruumala sõltub temperatuurist:

Temperatuur	Ruumala	
0^0	1	liiter
10^0	1,01	„
20^0	1,02	„
30^0	1,03	„
50^0	1,05	„
60^0	1,06	„
80^0	1,08	„

Igale temperatuuri väärtusele vastab täiesti kindel petrooleumi ruumala. Temperatuuri suurenemisel suureneb ka petrooleumi ruumala.

Näide 2. Vaatleme mõõtude teisendamise tabelit:

arsin	meeter
1	0,7112
2	1,4224
3	2,1336
4	2,8448

Igale arsinates väljendatud pikkuse väärtusele vastab kindel meetrites väljendatud pikkuse väärtus.

Näide 3. Vaatleme termomeetrite temperatuure Réaumuri ja Celsiuse skaala järgi:

R	C
1^0	$\left(\frac{5}{4}\right)^0$
4^0	5^0
6^0	$7{,}5^0$
8^0	10^0
12^0	15^0
40^0	50^0

Igale temperatuuri väärtusele Réaumuri skaala järgi vastab temperatuuri väärtus Celsiuse skaala järgi.

Igas näites on antud kaks suurust. Ühe suuruse väärtused sõltuvad teise suuruse väärtustest, kuid teises ja kolmandas näites võrdub ühe suuruse mistahes kahe väärtuse suhe teise suuruse vastavate väärtuste suhtega, seejuures aga esimeses näites pole sellist sõltuvust. Näiteks, kui Réaumuri skaala näit muutub kümme korda (40 : 4), siis suureneb vastavalt ka Celsiuse skaala näit samapalju kordi: $50 : 5 = 10$ ehk $40 : 8 = 50 : 10$. Seejuures esimeses näites temperatuuri suurenemisel 2 korda ($60 : 30 = 2$), petrooleumi ruumala ei suurene 2 korda; $1{,}06 : 1{,}03 \neq 2$, ehk $80 : 20 \neq 1{,}08 : 1{,}02$.

1. Võrdelised suurused.

Definitsioon. **Kui kaks suurust *A* ja *B* sõltuvad teineteisest nii, et ühe suuruse kahe mistahes väärtuse suhe võrdub teise suuruse vastavate väärtuste suhtega, siis nimetatakse niisuguseid suurusi võrdelisteks.**

Näiteks tähistades suuruse *A* väärtused tähtedega a_1, a_2, a_3, ... ja teise suuruse *B* vastavad väärtused tähtedega b_1, b_2, b_3, ..., siis suurused *A* ja *B* on võrdelised, kui $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; $\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3}$ ...

Võrdeliste suuruste näited: kauba koguhind jääva hinna puhul on võrdeline selle kaaluga; ringjoone pikkus on võrdeline selle raadiusega või diameetriga; ühtlaselt liikuva keha läbitud tee pikkus on võrdeline vastava liikumise kestusega.

Võtame näite:

A — töötasu, *B* — tehtud töötundide arv.

Olgu töötasu 2 t. eest 6 rubla
5 t. „ 15 „
6 t. „ 18 „
8 t. „ 24 „
10 t. „ 30 „
jne.

Ühe suuruse (aeg) igale väärtusele vastab teise suuruse kindel väärtus (töötasu), kusjuures ühe suuruse mistahes kahe väärtuse suhe, näiteks 8 t. ja 5 t., võrdub teise suuruse vastavate väärtuste suhtega: 24 rbl. ja 15 rbl. $8 : 5 = 24 : 15$.

Võib võtta ühe suuruse mistahes väärtuste suhe ja teise suuruse vastavate väärtuste suhe, näit. 6 t. : 8 t. ja 18 rbl. : 24 rbl.

Suhted on võrdsed, s. o. $6 : 8 = 18 : 24$, järelikult on töötasu jääva tunnitasu puhul võrdeline tehtud töötundide arvuga.

Võrdelisuse tunnus. Kui ühe suuruse mingisuguste väärtuste suurenemisel või vähenemisel mingi arv korda ka teise suuruse vastavad väärtused suurenevad või vähenevad sama arv korda, siis on need kaks suurust võrdelised, s. t. ühe suuruse mingi kahe väärtuse suhe võrdub teise suuruse vastavate väärtuste suhtega.

Olgu antud kaks suurust A ja B. Tähistame suuruse A mingit kaht väärtust tähtedega a_1 ja a_2 ning teise suuruse B vastavaid väärtusi tähtedega b_1 ja b_2.

Olgu $a_2 = a_1 \cdot \frac{m}{n}$, kus m ja n on täisarvud. Algul on a_1 vähendatud n korda ja siis saadud jagatist $\frac{a_1}{n}$ suurendatud m korda.

Vastavalt eeldusele peab ka a_1-le vastav arv b_1 vähenema n korda ja saadud jagatis $\frac{b_1}{n}$ peab suurenema m korda. Saame: $b_2 = b_1 \cdot \frac{m}{n}$.

Võrdusest $a_2 = a_1 \cdot \frac{m}{n}$ ja $b_2 = b_1 \cdot \frac{m}{n}$ järgneb: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{m}{n}$ ja $\frac{b_2}{b_1} = \frac{m}{n}$,

kust transitiivsuse alusel saame:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Järelikult on suurused A ja B võrdelised.

T e o r e e m. **Kui antud suurused A ja B on võrdelised, siis nende vastavate väärtuste suhe on jääv.**

A n t u d: Võrdelised suurused A ja B; suuruse A väärtused $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, suuruse B väärtused $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$.

T õ e s t a d a: $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots = a_n : b_n$.

Võrdeliste suuruste definitsiooni alusel saame:

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2$$
$$a_2 : a_3 = b_2 : b_3$$
$$a_3 : a_4 = b_3 : b_4$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} : a_n = b_{n-1} : b_n$$

Ümberpaigutades võrretes siseliikmed, saame:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2$$
$$a_2 : b_2 = a_3 : b_3$$
$$a_3 : b_3 = a_4 : b_4$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1} : b_{n-1} = a_n : b_n$$

Siit saame rea võrdseid suhteid:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots = a_n : b_n.$$

Vaadeldud teoreemist järgneb, et muutes võrdeliste suuruste puhul ühe suuruse väärtust, saame sellele vastavad teise suuruse väärtused sõltuvalt sellest, millised väärtused me võtsime esimesele suurusele.

Seda suurust kahest vastastikku sõltuvast suurusest, millele anname mistahes numbrilisi väärtusi, nimetatakse **sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks.**

Muutuvat suurust, mille numbrilised väärtused muutuvad sõltuvalt teise muutuva suuruse (argumendi) numbrilistest väärtustest, nimetatakse teise muutuva suuruse **sõltuvaks muutujaks** ehk **funktsiooniks.**

Näide 1. Jääva hinna puhul on kauba maksumus (väärtus) kauba hulga funktsioon.

Näide 2. Antud ajavahemikus ühtlaselt liikuva keha poolt läbitud tee pikkus on kiiruse funktsioon.

Olgu A ja B mingisugused kaks võrdelist suurust, näiteks kauba maksumus ja hulk. Oletame, et siis kui suuruse B väärtus (kauba hulk) võrdub ühega, suuruse A vastav väärtus (kauba hind) võrdub selle suuruse k ühikuga; kui aga suuruse B väärtus on x ühikut, siis suuruse A vastav väärtus muutub võrdseks y ühikuga.

Kauba hulk	Koguhind	Kauba hulk	Koguhind
B	A		
1 m	k rbl.	1 m	3 rbl.
x m	y rbl.	x m	y rbl.

Tõestatu põhjal saame:

$$y : k = x : 1,$$

kust $y = kx$,

$$y : 3 = x : 1,$$

$$y = 3x.$$

Järelikult, kui kaks suurust on võrdelised, siis väljendub nende vaheline sõltuvus valemiga

$$y = kx,$$

milles x ja y on suuruste vastavad väärtused ja k jääv arv, mis võrdub y (funktsiooni) selle eriväärtusega, millele vastav x-i (argumendi) väärtus võrdub ühega. Seda jäävat arvu nimetatakse antud suuruste **võrdeteguriks.**

Selle valemi järgi saab arvutada igale x väärtusele vastavat y väärtust, kui on teada võrdetegur.

Võrdeliste suuruste vastavate väärtuste jääv suhe võrdub võrdeteguriga.

Tõepoolest, kui kaks suurust A ja B on võrdelised, siis võrdeliste suuruste vastavate väärtuste suhte teoreemi alusel saame:

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots = a_n : b_n.$$

Tähistades suuruse A mingi väärtuse tähega y ja suuruse B väärtuse x-ga, võime kirjutada võrdeteguri definitsiooni alusel: $y : k = x : 1$. Ümberpaigutades võrde siseliikmed, saame: $y : x = k : 1$.

Järelikult: $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots = a_n : b_n = y : x = k : 1 = k$.

Näide. Osteti B m (hulk) A rubla (koguhind) eest:

$b_0 = 1$ m	$a_0 = 3$ rbl. $= k$
$b_1 = 4$ m	$a_1 = 12$ rbl.
$b_2 = 5$ m	$a_2 = 15$ rbl.
$b_3 = 7$ m	$a_3 = 21$ rbl.
. . . .	. . . . .
. . . .	. . . . .
x	y

Kauba hulk — sõltumatu muutuja ehk argument, omab mistahes väärtusi. Kauba koguhind on sõltuv muutuja ehk funktsioon. Selle väärtused sõltuvad argumendi väärtustest, s. t. kauba koguhind sõltub jääva hinna puhul kauba hulgast.

$12 : 4 = 15 : 5 = 21 : 7 = y : x = 3 : 1 = 3 =$ võrdetegur.

2. Pöördvõrdelised suurused.

Vaatleme järgmist näidet. Spordiring määras mingi summa suuskade ostuks. Ostetav suuskade arv oleneb suusa-

paari hinnast. Oletame, et 12-rublalise suusapaari hinna puhul on võimalik osta 60 paari suuski. Siis

hinna puhul	24	rubla	saaks	osta	30	paari
„ „	36	„	„	„	20	„
„ „	48	„	„	„	15	„
„ „	6	„	„	„	120	„
„ „	3	„	„	„	240	„
„ „	1	„	„	„	720	„

x — argument, y — funktsioon.

Siin vastab samuti igale argumendi väärtusele (suusapaari hind) kindel funktsiooni väärtus (ostetud suuskade arv), kuid argumendi mistahes kahe väärtuse suhe võrdub funktsiooni vastavate väärtuste pöördsuhtega.

Nii on $48 : 12 = 4$ kahe argumendi väärtuse suhe ja funktsiooni vastavate väärtuste suhe on $15 : 60 = \frac{1}{4}$.

Järelikult: $48 : 12 = 60 : 15$.

Definitsioon. **Kui kaks suurust A ja B sõltuvad teineteisest nii, et esimese mingi kahe väärtuse suhe võrdub teise suuruse vastavate väärtuste pöördsuhtega, siis nimetatakse niisuguseid suurusi pöördvõrdelisteks.**

Kui suuruse A väärtused tähistame tähtedega a_1, a_2, a_3, ... ja suuruse B vastavad väärtused tähtedega b_1, b_2, b_3, ..., siis suurused A ja B on pöördvõrdelised, kui $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$; $\frac{a_1}{a_3} = \frac{b_3}{b_1}$; ...

Pöördvõrdeliste suuruste näiteid: ühtlase liikumise kiirus on pöördvõrdeline liikumise ajaga ühe ja sama tee pikkuse puhul; gaasi ruumala jääval temperatuuril on pöördvõrdeline rõhumisega; jääva pindaladega ristkülikukujuliste maatükkide alus ja kõrgus on pöördvõrdelised suurused.

Pöördvõrdelisuse tunnus.

Kui ühe suuruse väärtuste mingi arv korda suurenemisel või vähenemisel teise suuruse vastavad väärtused esimesel juhul vähenevad ja teisel juhul suurenevad samapalju kordi, siis niisugused suurused on pöördvõrdelised.

Võtame kaks teineteisest olenevat suurust A ja B; suuruse A mingid kaks väärtust olgu a_1 ja a_2 ja suuruse B vastavad väärtused b_1 ja b_2. Olgu $a_2 = a_1 \cdot \frac{p}{q}$. Eelduse kohaselt, kui väärtust a_1 jagatakse q-ga, siis väärtus b_1 vastupidi korrutub q-ga, järelikult vastab suuruse A väärtusele $\frac{a_1}{q}$ suuruse B väärtus $b_1 q$. Väärtuse $\frac{a_1}{q}$ korrutamisel p-ga väärtus $b_1 q$ jagatakse p-ga. Järelikult vastab suuruse A väärtusele $\frac{a_1 p}{q}$ suuruse B väärtus $\frac{b_1 q}{p}$.

Seega $a_2 = a_1 \cdot \frac{p}{q}$ ja $b_2 = b_1 \cdot \frac{q}{p}$.

Nendest võrdustest saame: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{p}{q}$ (I), $\frac{b_2}{b_1} = \frac{q}{p}$ (II).

Teisest võrdest, asendades suhted pöördsuhetega, saame:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{p}{q}.$$

Järelikult võrdub a_2 ja a_1 suhe b_1 ja b_2 suhtega, s. t. suurused A ja B on pöördvõrdelised.

Teoreem. **Kui suurused A ja B on pöördvõrdelised, siis nende suuruste vastavate väärtuste korrutis on jääv arv.**

Antud: A ja B on pöördvõrdelised suurused; suuruse A väärtused on $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ja suuruse B vastavad väärtused on $b_1, b_2, b_3, \ldots$;

$a_1 : a_2 = b_2 : b_1$; $a_2 : a_3 = b_3 : b_2$; $\ldots$; $a_{n-1} : a_n = b_n : b_{n-1}$.

Tõestada: $a_1 b_1 = a_2 b_2 = a_3 b_3 = \ldots = a_{n-1} b_{n-1} = a_n b_n$.

Võttes antud võrrete sise- ja välisliikmete korrutised, saame:

$$a_1b_1 = a_2b_2,$$
$$a_2b_2 = a_3b_3,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$a_{n-1}b_{n-1} = a_nb_n,$$

s. o. rida omavahel võrdseid korrutisi; kust

$$a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = \ldots = a_{n-1}b_{n-1} = a_nb_n.$$

Võtame kaks mingisugust pöördvõrdelist suurust A ja B (näiteks tööliste arv ja tööpäevade arv, mille vältel nad täidavad ühe ja sama kindla tööülesande). Oletame, et ühe suuruse, näiteks B väärtus (päevade arv) võrdub ühega, siis vastav teise suuruse A väärtus (tööliste arv) võrdub selle suuruse k ühikuga; kui aga suurus B võrdub x ühikuga, siis suuruse A vastav väärtus olgu y ühikut. Pöördvõrdeliste suuruste definitsiooni alusel saame:

$$y : k = 1 : x, \text{ kust } yx = k \text{ ehk } y = \frac{k}{x}.$$

Järelikult, kui kaks suurust on pöördvõrdelised, siis ühe suuruse väärtus võrdub mingi konstantse arvuga k, mis jagatud teise suuruse vastava väärtusega.

Valemist $yx = k$, kus y ja x on pöördvõrdeliste suuruste A ja B vastavad väärtused, järgneb, et jääv arv, mis väljendab nende suuruste kahe vastava väärtuse korrutist, võrdub k-ga, s. t. funktsiooni (y) selle väärtusega, mida ta omab sel erijuhul, kui argumendi (x) väärtus võrdub ühega. Näiteks, kui kindlat tööd on tarvis ära teha B päevaga, siis tuleb tööle määrata A inimest.

Päevade arv (argument) võib omada mistahes väärtusi. Tööliste arv (funktsioon), mis vajalik teatava kindla töö tegemiseks, oleneb päevade arvust.

B päeva	A inimest
$b_1 =$ 18 päeva	$a_1 =$ 12 inimest
$b_2 =$ 9 „	$a_2 =$ 24 „
$b_3 =$ 6 „	$a_3 =$ 36 „
$b_4 =$ 3 „	$a_4 =$ 72 „
$b_0 =$ 1 päev	$a_0 = 216$ „ $= k$
$b_5 =$ 24 päeva	$a_5 =$ 9 „

$6 : 18 = 12 : 36$; $y : k = 1 : x$; $yx = k$; $y = \frac{k}{x}$.

Jääv arv $k = a_1 b_1 = a_2 b_2 = \ldots = 12 \cdot 18 = 24 \cdot 9 = \ldots = 216 \cdot 1 = 216$. Antud näites tähistab k tehtud tööd tööpäevades (normipäevades).

§ 144. Kolmlause.

A. Lihtkolmlause.

Lihtkolmlause ülesannete hulka kuuluvad ülesanded, milledes on antud kaks võrdelist või pöördvõrdelist suurust A ja B, kusjuures on teada suuruse A kaks mingit väärtust a_1 ja a_2 ja ühele neist vastav suuruse B väärtus b_1; on tarvis leida suuruse B teine vastav väärtus.

Lihtkolmlause on saanud oma nimetuse sellest, et igas selle reegli järgi lahendatavas ülesandes on tarvis kolme antud arvu abil leida neljas nendega võrdeline arv.

Lihtkolmlause ülesannete lahendamisviisid.

Lihtkolmlause ülesanded lahendatakse tavaliselt võrde meetodi või ühiku abil.

I. Võrde meetod.

Ülesanne 1. a_1 kg leiba maksab b_1 rubla. Kui palju leiba saab osta b_2 rubla eest?

Otsitavat leiva hulka tähistame y-ga. Arvud a_1 kg ja b_1 rubla kuuluvad ülesande eeldusesse, arvud y kg ja b_2 rubla — ülesande küsimuse juurde. Lihtsustamise mõttes kirjutame ülesandes antud andmed ühte ritta ja küsimuse andmed teise ritta, nii et arvud, mis väljendavad samaliiki suurusi oleks kirjutatud teineteise alla. Saame järgmise kirjutise:

b_1 rubla eest ostetakse a_1 kg leiba,
b_2 „ „ „ y kg „ .

Selleks, et teada saada, kas y on suurem või väiksem kui a_1, on vajalik kõigepealt kindlaks teha, millises olenevuses on leiva koguhind ja kaal. Kuna leiva kaalu suurenemisel (või vähenemisel) mõni arv korda suureneb (või väheneb) ka leiva koguhind sama arv korda, siis järeldame siit, et antud suuruste vahel valitseb võrdeline olenevus.

Järelikult y on niipalju kordi suurem (või väiksem) a_1-st, kuipalju kordi b_2 on suurem (või väiksem) b_1-st.

Siit $y : a_1 = b_2 : b_1$.

Lahendades selle võrde, saame:

$y = \frac{a_1 b_2}{b_1}$ ehk $y = kb_2$, kus $k = \frac{a_1}{b_1}$ (võrdetegur).

Ülesanne 2. Ratas, mille ümbermõõt on b_1 m, teeb teataval teepikkusel a_1 pööret. Mitu pööret teeb samal teel ratas, mille ümbermõõt on b_2 m?

Selles ülesandes valitseb antud suuruste vahel pöördvõrdeline olenevus, sest suurendades ratta ümbermõõtu teatav arv korda väheneb selle tiirude arv samal teel samapalju kordi.

Tähistades ratta otsitava tiirude arvu y-ga, kirjutame ülesande andmed, nagu eelmiselgi juhul, kahte ritta:

ratas ümbermõõduga b_1 m teeb a_1 pööret,
„ „ b_2 m „ y „ .

Kuna antud tee pikkuse puhul ratta pöörete arv ja selle ümbermõõt on pöördvõrdelised suurused, siis y on niipalju

kordi suurem (või väiksem) a_1-st, kuipalju kordi b_1 on suurem (või väiksem) b_2-st.

Siit: $y : a_1 = b_1 : b_2$.

Lahendades selle võrde, leiame:

$y = \frac{a_1 b_1}{b_2}$ või $y = \frac{k}{b_2}$, kus $k = a_1 b_1$ (võrdetegur).

Võrde koostamist on hõlpsam alata tundmatust.

II. Ülesande lahendamine ühiku kaudu.

Lahendame samad ülesanded ühiku kaudu.

Ülesanne 1. a_1 kg leiba maksab b_1 rubla. Kui palju leiba saab osta b_2 rubla eest?

Kui b_1 rubla eest saab osta a_1 kg leiba, siis 1 rubla eest saab osta b_1 korda vähem leiba, s. o. $\frac{a_1}{b_1}$ kg.

Kui aga 1 rbl. eest saab osta $\frac{a_1}{b_1}$ kg leiba, siis b_2 rubla eest saab osta b_2 korda rohkem kui ühe rubla eest, s. o. $\frac{a_1}{b_1} \cdot b_2$ ehk $\frac{a_1 b_2}{b_1}$ kg.

Lahenduse kirjutis:

b_1 rubla eest saab osta a_1 kg leiba,

1 „ „ „ „ $\frac{a_1}{b_1}$ kg „ .

b_2 „ „ „ „ $\frac{a_1 b_2}{b_1}$ kg „ ,

Tähistades otsitava leiva hulga y-iga, saame:

$$y = \frac{a_1 b_2}{b_1} \text{ ehk } y = k b_2,$$

kus $k = \frac{a_1}{b_1}$ (võrdetegur).

Ülesanne 2. Ratas, mille ümbermõõt on b_1 m, teeb teataval teepikkusel a_1 pööret; ratas, mille ümbermõõt on 1 m teeb samal teel pöördeid b_1 korda rohkem, s. o. $a_1 b_1$ pööret. Samal teel teeb ratas, mille ümbermõõt on b_2 m

pöördeid b_2 korda vähem kui ratas, mille ümbermõõt on 1 m, s. o. $\frac{a_1 b_1}{b_2}$ pööret.

Lahenduse kirjutis:

ratas ümbermõõduga b_1 m teeb a_1 pööret,

„ „ 1 m „ $a_1 b_1$ „ ,

„ „ b_2 m „ $\frac{a_1 b_1}{b_2}$ „ .

Tähistades otsitava pöörete arvu y-ga, saame:

$$y = \frac{a_1 b_1}{b_2} \text{ ehk } y = \frac{k}{b_2},$$

kus $k = a_1 b_1$ (võrdetegur).

Nagu näeme vaadeldavatest näidetest, taandub lihtkolmlause ülesannete lahendamine ühiku kaudu olulises osas võrdeteguri leidmisele (s. t. funktsiooni väärtus argumendi väärtusel 1), mida leides me saame kergesti vastava valemi otsitava funktsiooni määramiseks.

B. Liitkolmlause.

Liitkolmlause ülesannete hulka kuuluvad ülesanded, milledes on antud n võrdelist või pöördvõrdelist suurust A, B, C, ... M, P, kusjuures on igast ühest $(n-1)$ suurusest teada 2 väärtust, näiteks suuruste A, B, C, D ... M väärtused a_1, b_1, c_1, d_1, ..., m_1 ja veel n-da suuruse P üks väärtus p_1; määrata tuleb aga suuruse P teine vastav väärtus.

Liitkolmlause ülesanded nagu lihtkolmlause ülesandedki lahenduvad võrde meetodi ja ühiku kaudu.

I. Võrde meetod.

Ülesanne. Töötades c_1 tundi päevas kaevasid a_1 töölist b_1 päevaga kraavi, mille pikkus d_1 m, laius l_1 m ja sügavus f_1 m. Mitme päevaga kaevaksid a_2 töölist, töötades

c_2 tundi päevas, kraavi, mille pikkus d_2 m, laius l_2 m ja sügavus f_2 m?

Tähistades otsitava arvu y-ga, kirjutame ülesande sisu lühidalt:

Tingimus: a_1 tööl., c_1 tundi, d_1 m pikkus, l_1 m laius, f_1 m süg., b_1 päevaga.

Küsimus: a_2 tööl., c_2 tundi, d_2 m p., l_2 m l., f_2 m s. y päevaga.

Selleks, et lahendada seda ülesannet, esitame selle lihtkolmlause ülesannete reana ja lahendame iga saadud ülesande võrde meetodil.

Oletame, et kõik esimese rea suuruste väärtused, peale esimese (a_1 — tööliste arv) ja viimase (b_1 — päevade arv), jäävad samaks ka teises reas, siis sõltuks otsitav päevade arv ainult tööliste arvust. Sel juhul oleks meil järgmine lihtkolmlause ülesanne: a_1 töölist teostavad töö b_1 päevaga. Mitme päevaga teostavad selle töö a_2 töölist?

Tähistades selles ülesandes otsitava y_1-ga, kirjutame ülesande lühendatult:

a_1 töölist teostavad töö b_1 päevaga,
a_2 „ „ „ y_1 „ .

Lahendame selle võrde meetodil, arutledes järgmiselt: et päevade arv, mille jooksul töö lõpetatakse, on pöördvõrdeline tööliste arvuga, siis otsitav arv y_1 on niimitu korda suurem (või väiksem) b_1-st, kuimitu korda tööliste arv a_1 on suurem (või väiksem) a_2-st. Siit saame võrde: $y_1 : b_1 = a_1 : a_2$, millest saab leida y_1. Jättes y_1 väärtuse arvutamata, muudame põhiülesande tingimustes töötundide arvu c_2-ks, kõik ülejäänud andmed (kraavi pikkus, laius ja sügavus) jäägu seni muutmata. On ilmne, et sel juhul oleneb otsitav päevade arv ainult tundide arvust. Järelikult me saame teise lihtkolmlause ülesande, mida lühidalt võib kirjutada nii:

töötades c_1 tundi päevas, töölised teevad töö y_1 päevaga,
„ c_2 „ „ „ „ „ „ y_2 „ .

Arvestades, et päevade arv, mille vältel võib teha mingi töö, on pöördvõrdeline päevas tehtud töötundide arvuga, saame teise võrde: $y_2 : y_1 = c_1 : c_2$, mille lahendamisel leiame y_2.

Edasi muutes järjest põhiülesande tingimustes arve, mis väljendavad kraavi pikkust, laiust ja sügavust d_2-ks, c_2-ks ja f_2-ks, saame vastavalt kolmanda, neljanda ja viienda lihtkolmlause ülesande. Kolm viimast ülesannet saab lühendatult kirjutada nii:

1) Ülesanne III (kraavi pikkus ja tööaeg on võrdelised suurused):

kraav, mille pikkus d_1 m kaevatakse y_2 päevaga,
„ „ „ d_2 „ „ y_3 „ .

Sellest ülesandest saame võrde: $y_3 : y_2 = d_2 : d_1$ (III).

2) Ülesanne IV (kraavi laius ja tööaeg on võrdelised suurused):

kraav, mille laius l_1 m kaevatakse y_3 päevaga.
„ „ „ l_2 „ „ y_4 „ .

Sellest ülesandest saame võrde: $y_4 : y_3 = l_2 : l_1$ (IV).

3) Ülesanne V (võrdelisus):

kraav, mille sügavus f_1 m kaevatakse y_4 päevaga,
„ „ „ f_2 „ „ y „ .

Seega ongi viienda ülesande otsitav arv põhiülesande otsitavaks arvuks ja me tähistame selle y-ga.

Sellest ülesandest saame võrde: $y : y_4 = f_2 : f_1$ (V).

Sel teel saime 5 järgmist võrret:

$$y_1 : b_1 = a_1 : a_2;$$
$$y_2 : y_1 = c_1 : c_2;$$
$$y_3 : y_2 = d_2 : d_1;$$
$$y_4 : y_3 = l_2 : l_1;$$
$$y : y_4 = f_2 : f_1.$$

Vastavalt liitvõrrete teoreemile korrutame saadud võrrete vastavad liikmed:

$(y_1y_2y_3y_4) : (b_1y_1y_2y_3y_4) = (a_1c_1d_2l_2f_2) : (a_2c_2d_1l_1f_1)$.

Taandades võrde esimese suhte $(y_1y_2y_3y_4)$-ga, saame:

$y : b_1 = (a_1c_1d_2l_2f_2) : (a_2c_2d_1l_1f_1)$.

Lahendades võrde, leiame:

$$y = \frac{b_1a_1c_1d_2l_2f_2}{a_2c_2d_1l_1f_1}.$$

II. Lahendamine ühiku kaudu.

Näitame, kuidas lahendub see ülesanne ühiku kaudu.

Ülesanne kirjutatuna lühidalt:

Tingimus: a_1 töölist, c_1 t., pik. d_1 m, laius l_1 m, sügavus f_1 m, b_1 päeva.

Küsimus: a_2 töölist, c_2 t., pik. d_2 m, laius l_1 m, süg. f_2 m, y päeva.

Ülesande lahendamisel ühiku kaudu arutleme nii: a_1 töölist, töötades igapäev c_1 tundi, kaevasid kraavi, mille pikkus d_1 m, laius l_1 m ja sügavus f_1 m b_1 päevaga; üks tööline töötades päevas samapalju tunde kui kõik töölised, kulutab sama kraavi kaevamiseks a_1 korda rohkem aega (suurustevaheline olenevus on võrdeline), s. o. b_1a_1 päeva; a_2 töölist teevad selle töö a_2 korda kiiremini, s. o. $\frac{b_1a_1}{a_2}$ päevaga; a_2 töölist oleks lõpetanud töö tehes c_1 tundi päevas: kui nad oleks töötanud iga päev ainult üks tund, siis oleks aega kulunud c_1 korda rohkem (olenevus on pöördvõrdeline), s. o. $\frac{b_1a_1c_1}{a_2}$ päeva. Töötades aga c_2 tundi päevas, nad lõpetavad töö c_2 korda kiiremini, s. o. $\frac{b_1a_1c_1}{a_2c_2}$ päevaga.

Nii palju aega kulutavad töölised, kui kraavi pikkus on d_1 m, kui aga kraavi pikkus oleks olnud ainult 1 m, siis töö

oleks lõpetatud d_1 korda kiiremini (võrdeline olenevus), s. o. $\frac{b_1a_1c_1}{a_2c_2d_1}$ päevaga.

Kui kraavi pikkus võrdub d_2 m-ga, siis kulub nii pika kraavi kaevamiseks d_2 korda rohkem aega, s. o. $\frac{b_1a_1c_1d_2}{a_2c_2d_1}$ päeva.

Nii palju aega kulub selleks, et kaevata kraavi, mille laius l_1 m. Kui kraavi laius oleks ainult 1 m, siis kuluks aega l_1 korda vähem (võrdeline olenevus), s. o. $\frac{b_1a_1c_1d_2}{a_2c_2d_1l_1}$ päeva.

Kui aga kraavi laius on l_2 m, siis kulub aega selleks tööks l_2 korda rohkem, s. o. $\frac{b_1a_1c_1d_2l_2}{a_2c_2d_1l_1}$ päeva.

Nii palju aega oleks kulunud kraavi kaevamiseks, mille sügavus f_1 m. Kui aga kraavi sügavus oleks olnud ainult 1 m, siis oleks töö teostatud f_1 korda kiiremini (võrdeline olenevus), s. o. $\frac{b_1a_1c_1d_2l_2}{a_2c_2d_1l_1f_1}$ päevaga.

Kui kraavi laius on f_2 m, siis kulub aega tööks f_2 korda rohkem, s. o. $\frac{b_1a_1c_1d_2l_2f_2}{a_2c_2d_1l_1f_1}$ päeva.

Me saime sama valemi, nagu selle ülesande lahendamisel võrde meetodil.

Lahendamine ühiku kaudu on tunduvalt lihtsam. Peab ainult tähelepanelik olema suurustevahelise sõltuvuse iseloomu määramisel (võrdeline või pöördvõrdeline sõltuvus).

§ 145. Protsendid.

Definitsioon. **Protsendiks nimetatakse mingi arvu sajandikku.**

Sõna „protsent" tuleneb ladinakeelsest väljendist pro centum, mis tähendab „saja pealt" ehk „sajast" ja tähistatakse märgiga %.

Protsendi definitsioonist järgneb, et see on ainult eriline viis nende murdude väljendamiseks, mille nimetajaks on 100. Protsendi mõistega on seoses kaks teisenduste liiki:

1. Väljendada murruga antud protsentide arv.

Küsimus lahendub protsentide arvule nimetaja 100 juurdekirjutamisega, kusjuures protsentide arv on lugejaks.

Näiteks: $68\% = \frac{68}{100} = 0{,}68$; $7\frac{1}{3}\% = \frac{7\frac{1}{3}}{100} = \frac{22}{300} = \frac{11}{150}$.

2. Väljendada harilik murd protsentides.

Selleks, et harilikku murdu väljendada protsentides, on tarvis muuta see kümnendmurruks täpsusega kuni $\frac{1}{100}$; sajandike arv näitab protsentide arvu.

Näiteks: $\frac{2}{3} \approx 0{,}67 = 67\%$.

Jääv nimetaja kergendab tunduvalt mitmesuguste muutuvate suuruste muutumise resultaatide võrdlemist ja samuti ka ühede või teiste arvude suhtelise suuruse võrdlemist.

Seepärast kasutatakse protsentarvutusi väga laialdaselt praktilises elus. Tootluses kontrollitakse protsentidega plaani täitmist, väljendatakse töö tootlikkust, mitmesuguste sulamite või lahuste koostise arvutamisel antakse sulamit või lahust moodustavate ainete protsendiline suhe, meteoroloogias väljendatakse protsentides õhu niiskust, vihmapäevade arvu aastas; kooli elus määratakse klassi õpilaste protsent kogu kooli õpilaste arvust jne. Maapõuevarade tootmisel väljendatakse protsentides puhta metalli sisaldavus maagis; leivaküpsetamisel väljendatakse protsentides juurdeküpsetist, mis tekib küpsetamisel jne.

Eriti sageli kasutatakse protsente rahanduslikkudel arvutustel hoiukassades, pankades, kaubanduses.

Igat liiki finantsoperatsioonidel kasutatavatele suurustele on antud eri nimetused. Nii nimetatakse panka või

hoiukassase pandud summat algkapitaliks; arvu, mis näitab mitme protsendi võrra suureneb (või väheneb) algkapital ühe aastaga, nimetatakse protsenditaksiks; summat, mille võrra suurenes algkapital teataval ajavahemikul, nimetatakse protsentrahaks ehk intressiks. Algkapitali koos intressiga nimetatakse kasvanud kapitaliks ehk lõppkapitaliks.

Finantsarvutustel võetakse aasta võrdseks 360 päevaga ja kuu võrdseks 30 päevaga.

Protsente nimetatakse **lihtprotsentideks**, kui nad arvutatakse algkapitalile juurde ainult üks kord ja **liitprotsentideks**, kui nad arvutatakse iga aasta (korduvalt) lõppkapitalile juurde.

Liitprotsente kasutatakse sageli finantsarvutustes, elanike juurdekasvu arvutamisel, teatavate loomade või taimede liigi paljunemisel jms.

Arvutustel kasutatakse mõnikord protsentide asemel nn. „promille". „Promilliks" nimetatakse mingi arvu tuhandikku.

Sõna „promill" tuleneb ladinakeelsest väljendist pro mille, mis tähendab tuhande asemel, tuhande pealt ehk tuhandest ja tähistatakse märgiga $^0/_{00}$. Näiteks $5^0/_{00}$ arvust 3000 tähendab 5 promilli ehk 5 tuhandikku arvust 3000, mis on 15.

Protsentülesannete tüüpe ja nende lahendamismeetodid.

Praktilises elus esineb enamasti kolm protsentülesannete tüüpi: 1) protsentide leidmine arvust, 2) arvu leidmine protsentide järgi ja 3) kahe arvu suhte väljendamine protsentides. Erilise koha omavad protsentülesanded, mis seotud finantsoperatsioonidega.

Vaatleme nende ülesannete tüüpide lahendamismeetodeid.

Protsendi definitsioonist järgneb, et esimese ja teise tüübi ülesanded (protsendi leidmine arvust ja arvu leidmine protsendi järgi) lahenduvad kergesti, sest nad vastavad

ülesannetele osa leidmine antud arvust ja arvu leidmine antud osa järgi.

Arvesse võttes, et nendes ülesannetes esinevad võrdelised suurused, neid võib vaadelda kui lihtkolmlause ülesandeid ja lahendada võrde abil või ühiku kaudu. Niisuguste ülesannete lahendamist selgitati üksikasjalikult eespool.

I tüüp. Leida $p\%$ arvust a.

Lahendus 1: $p\% = \frac{p}{100}$.

Ülesanne taandub $\frac{p}{100}$ -ndiku leidmisele arvust a ja lahendub a korrutamisel murruga:

$$x = \frac{a \cdot p}{100}.$$

Lahendus 2 (võrde abil):

$$a \ldots 100\%, \qquad x : a = p : 100,$$

$$x \ldots p\%, \qquad x = \frac{ap}{100}.$$

II tüüp. Leida arv, mille $p\%$ on P.

Lahendus 1: Ülesanne taandub arvu leidmisele selle osa $\frac{p}{100}$ suuruse P järgi.

Ülesanne lahendub jagamisel murruga: $x = \frac{P \cdot 100}{p}$.

Lahendus 2 (võrde abil):

$$P \ldots p\%, \qquad x : P = 100 : p,$$

$$x \ldots 100\%, \qquad x = \frac{P \cdot 100}{p}.$$

III tüüp. Kahe arvu suhte väljendamine protsentides (protsentsuhte leidmine).

Kahe arvu protsentsuhteks nimetatakse arvude suhet, mis väljendatud sajandikkudes (protsentides).

Siit järgneb: kahe arvu protsentsuhte leidmiseks tuleb nende jagatis väljendada kümnendmurruna. Näiteks, kui on tarvis leida arvude 45 ja 225 protsentsuhe, siis see tähendab,

et suhe $\frac{45}{225}$ tuleb väljendada sajandikkudes (protsentides). Väljendame esialgu nende kahe arvu jagatise kümnendmurruna: $\frac{45}{225} = 0{,}2$, kuid $0{,}2 = \frac{20}{100}$, järelikult on antud arvude protsentsuhe 20%. On ilmne, et niisugust tüüpi ülesandeid, nagu eelmisigi, võib vaadelda kui ülesandeid võrdelistele suurustele ja seepärast lahenduvad nad lihtkolmlause lahendusviisidega.

Lahendades eelmist ülesannet, saame võrde $y : 100 = 44 : 225$.

Lahendame ülesande üldkujul. Mitu protsenti moodustab arv m arvust a? Siin on tarvis väljendada arvude m ja a suhe protsentides.

Lahendus 1. $x = \frac{m \cdot 100}{a}$.

Lahendus 2.

$a \ldots 100\%$, $\quad x : 100 = m : a$,

$m \ldots x$, $\quad x = \frac{m \cdot 100}{a}$.

IV tüüp. Protsentülesanded seoses finantsoperatsioonidega. Sellist tüüpi ülesannetes võivad esineda järgmised suurused:

1) algkapital (a)
2) protsenditaks ($p\%$)
3) aeg (t)
4) intress (P)
5) lõppkapital (A).

Lõppkapital $A = a + p$, seepärast eristatakse seoses finantsoperatsioonidega ainult järgmisi nelja tüüpi protsentülesandeid:

1) ülesanded intressi (P) leidmiseks;
2) ülesanded protsenditaksi (p) leidmiseks;
3) ülesanded aja (t) leidmiseks;
4) ülesanded algkapitali (a) leidmiseks.

Neis ülesannetes leitakse kolme antud võrdelise suuruse järgi neile vastav neljas suurus. Järelikult kuuluvad vaadeldavad ülesanded liitkolmlause ülesannete hulka ja seepärast lahenduvad kas võrrete meetodil või ühiku kaudu. Neid lahendusviise selgitati üksikasjalikult eespool, seepärast ei peatu me enam neil. Tähendame, et lõppkapital A muutub (suureneb või väheneb) algkapitali (a), protsenditaksi (p), aja (t) ja intressi (P) muutumisel, kuid on võrdeline ainult algkapitaliga ja pole võrdeline intressi ega ajaga.

Näitame seda järgmiste näidetega.

a	$p\%$	t	P	A
100 rbl.	3%	1a.	3 rbl.	103 rbl.
300 rbl.	—	—	9 rbl.	309 rbl.

$$300 : 100 = 309 : 103$$

Algkapital suurenes kolm korda, samuti suurenes ka lõppkapital samapalju kordi. a ja A vaheline sõltuvus on võrdeline.

100	3%	1 a.	3 rbl.	103 rbl.
—	12%	1 a.	12 rbl.	112 rbl.

Protsenditaks ja intress suurenesid 4 korda. Lõppkapital suurenes 9 rubla võrra. P ja A vahel ei ole võrdelist sõltuvust.

100	3%	1 a.	3 rbl.	103 rbl.
—	—	5 a.	15 rbl.	115 rbl.

Aeg suurenes 5 korda, intress suurenes samuti 5 korda, lõppkapital aga 12 rubla võrra ehk $\frac{115}{103}$ korda. Võrdelist sõltuvust pole ja nendest suurustest võrret koostada ei saa.

Lõppkapitali A määramiseks ja sellega seotud arvutustes kasutatakse tavaliselt valemit $A = a + P$.

Näide. Kui pikaks ajaks laenas pank raha, kui ta sai 4880 rubla asemel 5703,5 rubla, arvestades 4,5% aastas?

	a	P	t	A
Eeldus:	100 rubla	4,5 rubla	1 a.	104,5 rubla
Küsimus:	4880 „		x	5703,5 „

Lahutamisega leiame intressi 4880 rublalt:

$$5703{,}5 \text{ rubla} - 4880 \text{ rubla} = 823{,}5 \text{ rubla}.$$

Saame ülesande:

	a	P	t
Eeldus:	100 rbl.	4,5 rbl.	1 a.
Küsimus:	4880 rbl.	823,5 rbl.	x

Lahendame võrde abil:

$$x_1 : 1 = 100 : 4880,$$
$$x : x_1 = 823{,}5 : 4{,}5.$$

Aeg on pöördvõrdeline algkapitaliga ja võrdeline intressiga.

x tähistab aega, mille möödumisel saadakse 4880 rublalt 4,5 rubla intressi.

$$x \cdot x_1 : x_1 \cdot 1 = 823{,}5 \cdot 100 : 4880 \cdot 4{,}5.$$

$$x = \frac{823{,}5 \cdot 100}{4880 \cdot 4{,}5} = \frac{15}{4}, \quad x = 3\frac{3}{4} \text{ aastat.}$$

Finantsarvutuste protsentülesannete lahendamise üldvalem lihtprotsentide puhul.

Tähistame, nagu varemgi, algkapital — a (rbl.), protsenditaks — $p\%$, aeg — t (aastat) ja intress P (rbl.). Definitsiooni alusel protsenditaks näitab, et ühes aastas saadakse intressi $\frac{p}{100}$ algkapitalist. Järelikult annab algkapital a rubla 1 aastas $a \cdot \frac{p}{100} = \frac{ap}{100}$ (rubla) intressi. t aastaga kasvab intress samalt kapitalilt sama protsenditaksi puhul t korda.

Järelikult: $P = \frac{apt}{100}$. (I)

Kasutades seda lihtprotsentide üldvalemit, saab sellest alati leida üht suurust, teades ülejäänud kolme suurust.

Tähendame, et selles valemis peab aeg (t) olema väljendatud aastates. Kui aga ülesandes on aeg väljendatud kuudes ja päevades, siis tuleb see muuta enne aastateks.

Paigutades P asemele valemisse $A = a + P$ P väärtuse $\frac{apt}{100}$, saame $A = a + \frac{apt}{100}$ ehk $A = a(1 + \frac{pt}{100})$. (II)

Kasutades valemeid I ja II on võimalik kiiresti lahendada igat lihtprotsentide ülesannet.

Ülaltoodud ülesande lahendame valemi järgi:

$A = 5703{,}5$ rubla; $a = 4880$ rubla; $p = 4{,}5$ rubla.

$$5703{,}5 = 4880\left(1 + \frac{4{,}5 \cdot t}{100}\right); \quad \frac{5703{,}5}{4880} = 1 + \frac{4{,}5 \cdot t}{100};$$

$$\frac{5703{,}5}{4880} - 1 = \frac{4{,}5 \cdot t}{100}; \quad \frac{93{,}5}{80} - 1 = \frac{45t}{1000}; \quad \frac{13{,}5}{80} = \frac{9 \cdot t}{200};$$

$$t = \frac{13{,}5 \cdot 20}{8 \cdot 9} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} \text{ (aastat).}$$

Ülesanded promillidele on sama tüüpi kui protsentülesanded ja lahendatakse samade võtetega.

§ 146. Võrdeline (proportsionaalne) jaotamine.

Võrdelise jaotamise ülesannete hulka kuuluvad ülesanded, milledes on tarvis üht arvu jaotada osadeks, mis on võrdelised teiste antud arvudega.

Näide. Jaotada arv N osadeks X_1, X_2, X_3, X_4, mis on võrdelised arvudega a, b, c, d — tähendab jaotada arv N neljaks niisuguseks osaks, et $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = N$ ja osade X_1 ja X_2 suhe võrduks arvude a ja b suhtega, osade X_2 ja X_3 suhe — arvude b ja c suhtega ja lõpuks osade X_3 ja X_4 suhe — arvude c ja d suhtega.

Öeldu alusel saame järgmised võrded:

$$X_1 : X_2 = a : b; \quad X_2 : X_3 = b : c; \quad X_3 : X_4 = c : d.$$

Paigutades saadud võrretes ümber siseliikmed, saame järgmised võrded:

$$X_1 : a = X_2 : b; \quad X_2 : b = X_3 : c; \quad X_3 : c = X_4 : d.$$

Viimastest võrretest saame kirjutada rea suhteid:

$$\frac{X_1}{a} = \frac{X_2}{b} = \frac{X_3}{c} = \frac{X_4}{d}.$$

Peale selle võime saada võrretest: $X_1 : X_2 = a : b$; $X_2 : X_3 = b : c$; $X_3 : X_4 = c : d$ suhete rea:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = a : b : c : d.$$

1. Võrdelise jaotamise ülesannete tüüpe.

Esinevad järgmised võrdelise jaotamise ülesannete tüübid:

a) arvu jaotamine osadeks, mis on võrdelised täisarvude või murdarvude reaga;

b) arvu jaotamine osadeks, kusjuures iga otsitavate arvude paari kohta on antud eraldi suhted;

c) arvu jaotamine osadeks, mis on pöördvõrdelised antud täis- või murdarvudega;

d) kahe või mitme arvu leidmine nende antud suhete ja mingi kahe arvu summa või vahe järgi;

e) arvu jaotamine osadeks võrdeliselt kahe, kolme jne. arvude reaga.

2. Võrdelise jaotamise ülesannete lahendamisviisid.

I tüüp. Arvu jaotamine osadeks võrdeliselt antud täis- või murdarvudele.

Ülesanne. Jaotada arv N kolme ossa võrdeliselt arvudega a, b, c.

a) Võrdsete suhete rea omadusele põhjenev lahendus. Tähistame otsitavad osad tähtedega X_1, X_2, X_3.

Ülesande eelduse alusel võime kirjutada:

$$X_1 : X_2 = a : b; \quad X_1 : X_3 = a : c; \quad X_2 : X_3 = b : c.$$

Ümberpaigutades saadud võrretes siseliikmed, saame:

$$X_1 : a = X_2 : b; \quad X_1 : a = X_3 : c; \quad X_2 : b = X_3 : c.$$

Vastavalt transitiivsuse omadusele kirjutame:

$$\frac{X_1}{a} = \frac{X_2}{b} = \frac{X_3}{c}.$$

Võrdsete suhete rea omaduse alusel saame:

$$\frac{X_1+X_2+X_3}{a+b+c}=\frac{X_1}{a}=\frac{X_2}{b}=\frac{X_3}{c}.$$

Kuid $X_1+X_2+X_3=N$, seepärast $\frac{N}{a+b+c}=\frac{x_1}{a}=\frac{x_2}{b}=\frac{x_3}{c}$.

Siit saame kolm võrret:

$$\frac{X_1}{a}=\frac{N}{a+b+c};\quad \frac{X_2}{b}=\frac{N}{a+b+c};\quad \frac{X_3}{c}=\frac{N}{a+b+c}.$$

Lahendades iga võrde, saame:

$$X_1=\frac{Na}{a+b+c};\quad X_2=\frac{Nb}{a+b+c};\quad X_3=\frac{Nc}{a+b+c}.$$

b) Võrrete meetod.

Oletame, et esimene otsitavaist sisaldab eneses a mingisugust võrdset osa; siis vastavalt ülesande tingimusele sisaldab teine otsitav eneses b niisugust osa ja kolmas otsitav — c niisugust osa.

Järelikult sisaldab antud arv $a+b+c$ võrdset osa. Kui $a+b+c$ võrdses osas sisalduvad kõik N ühelist, siis peab esimene otsitav, mis sisaldab eneses ainult a niisugust osa, olema väiksem arvust N niimitu korda, kuimitu korda on a väiksem kui $a+b+c$. Seepärast tähistades otsitavat arvu X_1-ga, saame võrde: $X_1 : N = a : (a+b+c)$.

Kasutades sama arutlust teise otsitava arvu X_2 ja kolmanda X_3 kohta, saame veel kaks võrret:

$X_2 : N = b : (a+b+c)$ ja $X_3 : N = c : (a+b+c)$.

Lahendades võrded, leiame otsitavad murrud:

$$X_1=\frac{Na}{a+b+c};\quad X_2=\frac{Nb}{a+b+c};\quad X_3=\frac{Nc}{a+b+c}.$$

c) Lahendamine ühiku kaudu.

Ülesande eelduse kohaselt peavad otsitavad osad omavahel suhtuma nagu $a : b : c$, seepärast, kui esimene otsitav sisaldab a osa, siis peab teine otsitav sisaldama b niisugust osa ja kolmas — c niisugust osa.

Järelikult antud arvus N on $a+b+c$ võrdset osa.

Ühes niisuguses osas sisalduv üheliste arv on $(a+b+c)$ korda väiksem kui N, s. t. võrdub $\frac{N}{a+b+c}$, kuid esimene otsitav arv sisaldab a osa, teine — b ja kolmas — c osa, seepärast peab esimene otsitav arv olema a korda suurem, teine b korda ja kolmas c korda suurem kui $\frac{N}{a+b+c}$.

Tähistame otsitavad arvud vastavalt X_1, X_2 ja X_3, siis saame:

$$X_1 = \frac{Na}{a+b+c}; \quad X_2 = \frac{Nb}{a+b+c}; \quad X_3 = \frac{Nc}{a+b+c}.$$

d) Kontrolliva oletusega lahendusviis.

Oletame, et esimene otsitav osa võrdub arvuga a, siis teine peab võrduma arvuga b ja kolmas — arvuga c. Kõigi kolme osa summa võrdub siis $(a+b+c)$. Kuid kõigi kolme osa summa peab olema N. Kui meie poolt tehtud oletus oleks õige, siis võrduks summa $a+b+c$ arvuga N. Erijuhul on niisugune võrdus võimalik. Kui aga N ei võrdu $a+b+c$-ga, siis on tarvis leida N ja summa $a+b+c$ suhe, milleks tuleb arv N jagada summaga $a+b+c$. Suhe $\frac{N}{a+b+c}$ näitab, mitu korda N on suurem summast $a+b+c$, kui $N > (a+b+c)$ või missuguse osa summast $a+b+c$ moodustab arv N, kui $N < (a+b+c)$.

Korrutades arvud a, b, c saadud suhtega, leiame otsitavad arvud X_1, X_2 ja X_3:

$$X_1 = \frac{aN}{a+b+c}; \quad X_2 = \frac{bN}{a+b+c}; \quad X_3 = \frac{cN}{a+b+c}.$$

e) Lahendusviis vabalt valitud ühikuga.

Võtame arvu N esimese otsitava osa üheks. Siis tingimuses antud otsitavate suhte säilitamiseks sisaldab teine osa $b:a = \frac{b}{a}$ niisugust ühikut ja kolmas osa — $c:a = \frac{c}{a}$ niisugust ühikut.

Järelikult võrdub kõikide osade summa

$$1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{a+b+c}{a}.$$

Kuna see summa võrdub N-ga, siis on esimene otsitav arv, mis võetud ühikuks, $\frac{a+b+c}{a}$ korda väiksem kui N ehk $X_1=N:\frac{a+b+c}{a}=\frac{Na}{a+b+c}$.

Teine otsitav arv $X_2=\frac{N\cdot a}{a+b+c}\cdot\frac{b}{a}=\frac{Nb}{a+b+c}$.

Kolmas otsitav arv $X_3=\frac{Na}{a+b+c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{Nc}{a+b+c}$.

f) Võrdelise muutumise viis.

Eelduse kohaselt tuleb arv N jaotada kolme ossa, mis suhtuvad nagu $a:b:c$. Antud arv N sisaldab $a+b+c$ osa. Esimene otsitav arv võrdub $\frac{a}{a+b+c}$ osaga arvust N, teine otsitav arv on $\frac{b}{a+b+c}$ osa arvust N ja kolmas otsitav arv on $\frac{c}{a+b+c}$ osa arvust N. Siit:

$$X_1=N\cdot\frac{a}{a+b+c}=\frac{Na}{a+b+c};$$

$$X_2=N\cdot\frac{b}{a+b+c}=\frac{Nb}{a+b+c};$$

$$X_3=N\cdot\frac{c}{a+b+c}=\frac{Nc}{a+b+c}.$$

Antud ülesande kõikidest lahendusviisidest tuleneb järgmine reegel arvu jaotamiseks võrdeliselt antud arvudega:

selleks, et jaotada antud arv osadeks, mis võrdelised antud arvudega (neid arve nimetatakse võrdelisteks), tuleb ta jagada nende arvude summaga ja saadud jagatis korrutada järjest igaühega neist. See reegel jääb õigeks ka sel juhul, kui võrdelisi arve väljendavad murrud. Siis on kohane murdarvude suhe asendada täisarvude suhtega, milleks tuleb murrud teisendada ühenimelisteks ja võtta lugejate suhe.

II tüüp. Võrdeline jaotamine juhul, kui on antud üksikute osade suhted.

Ülesanne. Jaotada arv N neljaks osaks nii, et esimene osa suhtuks teisega nagu arv a suhtub arvuga b, teine osa suhtuks kolmandaga nagu arv c arvuga d ja kolmas — neljandaga nagu arv e arvuga f.

Eelduse kohaselt kirjutame:

$$X_1 : X_2 = a : b; \quad X_2 : X_3 = c : d \quad \text{ja} \quad X_3 : X_4 = e : f.$$

Esimeses kahes võrdes esineb X_2. Esimeses võrdes X_2 sisaldab b osa, teises võrdes aga c osa. Kahes viimases võrdes esineb X_3, mis sisaldab teises võrdes c osa ja kolmandas võrdes e osa.

Ülesande lahendamiseks tuleb ülesandes antud otsitavate arvude üksikud suhted asendada kõigi nelja otsitava arvu üldise suhtega, s. t. arv X_2 tuleb väljendada esimeses ja teises võrdes sama osade arvuga ja arv X_3 kolmandas ja neljandas võrdes samuti ühe ja sama osade arvuga. Selleks on tarvis leida arvude b ja c väikseim ühiskordne ja korrutada vastavate täiendusteguritega esimeses ja teises võrdes teise suhte mõlemaid liikmeid, seejärel leida nende arvude V.Ü., mis väljendab X_3 osade arvu teises ja kolmandas võrdes ja korrutada vastavate täiendusteguritega teises ja kolmandas võrdes teise suhte mõlemaid liikmeid. Selleks, et mitte rikkuda sellega X_2 osade võrdsust esimeses ja teises võrdes, tuleb esimese võrde teise suhte liikmeid korrutada sama täiendusteguriga, millega korrutati teise võrde teist suhet. Lihtsuse mõttes oletame, et mõlemal juhul on arvud, millede väikseimat ühiskordset otsime, ühistegurita arvud.

Siis:

$X_1 : X_2 = a : b$	c $X_1 : X_2 = ac : bc$	e $X_1 : X_2 = ace : bce$
$X_2 : X_3 = c : d$	b $X_2 : X_3 = bc : bd$	e $X_2 : X_3 = bce : bde$
$X_3 : X_4 = e : f$	$X_3 : X_4 = e : f$	bd $X_3 : X_4 = bde : bdf$

V.Ü. (b ja c) $= bc$; V.Ü. (b, d ja e) $= bde$.

Kolm viimast võrret võimaldavad üksikute osade suhteid asendada otsitavate arvude üldise suhtega (pideva suhete reaga):

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = ace : bce : bde : bdf.$$

Seega saime antud ülesande teisendada eelmist tüüpi ülesandeks.

Vaadeldavat ülesannet saab teisendada esimest tüüpi ülesandeks ka teisel teel. Võtame ülesande tingimusest tulenevad võrded:

$$X_1 : X_2 = a : b,$$
$$X_2 : X_3 = c : d,$$
$$X_3 : X_4 = e : f.$$

Ümberpaigutades nendes võrretes siseliikmed, saame:

$$X_1 : a = X_2 : b, \quad \text{(I)}$$
$$X_2 : c = X_3 : d, \quad \text{(II)}$$
$$X_3 : d = X_4 : f. \quad \text{(III)}$$

Oletame, et esimene otsitav arv X_1 sisaldab a osa, nagu see järgneb esimesest võrdest, teises arvus (X_2) on b niisugust osa.

Teisest võrdest järgneb:

$$X_2 = \frac{c \cdot X_3}{d}.$$

Siis

$$X_2 : b = \frac{cX_3}{d} : b$$

ehk

$$\frac{X_3}{b} = \frac{cX_3}{db},$$

kust

$$\frac{X_2}{b} = \frac{\frac{X_3}{db}}{c}$$ (teise suhte eel- ja järelliikme jagasime c-ga).

Edasi leiame kolmandast võrdest:

$$X_3 = \frac{eX_4}{f},$$

kust

$$X_3 : \frac{db}{c} = \frac{eX_4}{f} : \frac{db}{c}$$

ehk

$$\frac{X_3}{\frac{db}{c}} = \frac{eX_4 \cdot c}{fdb}.$$

Siit

$\frac{X_3}{\frac{db}{c}} = \frac{X_4}{\frac{dbf}{ec}}$ (teise suhte eel- ja järelliikme jagasime c-ga).

Seega:

$$\frac{X_1}{a} = \frac{X_2}{b}, \quad \frac{X_3}{\frac{db}{c}} = \frac{X_4}{\frac{bdf}{ec}}.$$

Siit saame: $X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = a : b : \frac{db}{c} : \frac{bdf}{ec}$.

Vabastades murdudest, saame:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = ace : bce : dbe : bdf.$$

III tüüp. Arvu jaotamine osadeks pöördvõrdeliselt antud täis- ja murdarvudega.

Ülesanne. Jaotada arv N pöördvõrdeliselt arvudega a, b, c.

See tähendab, arv N tuleb jaotada osadeks võrdeliselt arvude a, b, c pöördväärtustega, s. t. võrdeliselt arvudega $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ ja $\frac{1}{c}$.

Tähistades otsitavad arvud tähtedega X_1, X_2 ja X_3, võime kirjutada järgmised võrded:

$$X_1 : X_2 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}, \quad X_2 : X_3 = \frac{1}{b} : \frac{1}{c},$$

siit saame:

$$X_1 : X_2 : X_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Seega saame esimese tüübi ülesande.

IV tüüp. Arvude võrdeline jaotamine osadeks nende suhete ja kahe arvu summa või vahe järgi.

Ülesanne 1. Kolm arvu suhtuvad omavahel nagu $a : b : c$. Esimese ja teise arvu summa võrdub arvuga M. Leida need arvud.

Tähistame tundmatud arvud tähtedega X_1, X_2, X_3. Saame võrded: $X_1 : X_2 = a : b$, $X_2 : X_3 = b : c$.

Tuletatud võrrete teoreemide alusel võime kirjutada:

1) $\frac{X_1 + X_2}{X_1} = \frac{a+b}{a}$, 2) $\frac{X_1 + X_2}{X_2} = \frac{a+b}{b}$,

kus eelduse kohaselt $X_1 + X_2 = M$.

Järelikult:

$$\frac{M}{X_1} = \frac{a+b}{a}, \text{ millest } X_1 = \frac{Ma}{a+b};$$

$$\frac{M}{X_2} = \frac{a+b}{b}, \text{ millest } X_2 = \frac{Mb}{a+b}.$$

Võrdest $X_2 : X_3 = b : c$ leiame: $X_3 = \frac{X_2 c}{b}$, kuid $X_2 = \frac{Mb}{a+b}$; järelikult:

$$X_3 = \frac{Mbc}{(a+b)b}, \text{ siit } X_3 = \frac{Mc}{a+b}.$$

Ülesanne 2. Neli arvu suhtuvad omavahel nagu $a : b : c : d$. Kolmanda ja esimese arvu vahe on M. Leida need neli arvu.

Tähistame otsitavad arvud tähtedega X_1, X_2, X_3, X_4. Ülesande eelduse kohaselt võime kirjutada:

$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = a : b : c : d$, millest $X_1 : X_2 = a : b$, $X_2 : X_3 = b : c$, $X_3 : X_4 = c : d$, kus $X_3 - X_1 = M$.

Ümberpaigutades võrde siseliikmed, saame:

$\frac{X_1}{a} = \frac{X_2}{b}$; $\frac{X_2}{b} = \frac{X_3}{c}$; $\frac{X_3}{c} = \frac{X_4}{d}$, millest: $\frac{X_1}{a} = \frac{X_2}{b} = \frac{X_3}{c} = \frac{X_4}{d}$.

Võtame võrdsete suhete reast kolmanda ja esimese suhte ning koostame võrde: $\frac{X_3}{c} = \frac{X_1}{a}$.

Ümberpaigutades viimases võrdes siseliikmed, saame:

$$\frac{X_3}{X_1} = \frac{c}{a}.$$

Tuletatud võrde omaduse alusel kirjutame:

$$\frac{X_3 - X_1}{X_3} = \frac{c - a}{c} \text{ ja } \frac{X_3 - X_1}{X_1} = \frac{c - a}{a}.$$

Kuna $X_3 - X_1 = M$, siis $X_3 = \frac{Mc}{c - a}$ ja $X_1 = \frac{Ma}{c - a}$.

Võrdest $X_1 : X_2 = a : b$ leiame, et $X_2 = \frac{X_1 b}{a}$; asetades X_1 asemele selle väärtuse $\frac{Ma}{c - a}$, saame:

$$X_2 = \frac{Mab}{(c - a)a} \text{ ehk } X_2 = \frac{Mb}{c - a}.$$

Võrdest $X_3 : X_4 = c : d$ leiame: $X_4 = \frac{x_3 d}{c}$, kuid $X_3 = \frac{Mc}{c - a}$, järelikult: $X_4 = \frac{Mcd}{c(c - a)}$ ehk $X_4 = \frac{Md}{c - a}$.

Vaatleme näitena mõnede ülesannete lahendusi.

1. Ülesande lahendamine kontrolliva oletuse või sarnasuse abil.

Ülesanne 1. 180 cm pikkune nöör lõigata kolmeks osaks, mille suhted 1 : 3 : 6. Leida iga osa pikkus.

Lahendus. Väiksemale osale anname vabalt valitud pikkuse. Oletame, et ta on 2 cm pikk, siis peab teine osa olema 6 cm (2 cm · 3 = 6 cm) ja kolmas 12 cm (2 cm · 6 = 12 cm). Kogu nööri pikkus peab olema 2 cm + 6 cm + 12 cm = 20 cm. Kuna tegelikult on nöör 9 korda pikem (180 : 20 = 9), siis tuleb iga osa suurendada 9 korda. Seega on esimese osa pikkus 2 cm · 9 = 18 cm, teise osa pikkus 6 cm · 9 = 54 cm ja kolmanda — 12 cm · 9 = 108 cm.

Ülesanne 2. Jaotada 274 nelja ossa nii, et esimene osa suhtuks teisega nagu 9 : 10; teine neljandaga nagu 5 : 8 ja kolmas oleks 66,(6)% neljandast.

Lihtsustame viimase tingimuse:

$$66,(6)\% = 66\frac{2}{3}\% = \frac{66\frac{2}{3}}{100} = \frac{2}{3},$$

s. t. kolmas osa on $\frac{2}{3}$ neljandast ehk kolmas suhtub neljandaga nagu $\frac{2}{3} : 1 = 2 : 3$ (murdarvude suhe asendati täisarvude suhtega).

Tähistades otsitavad osad tähtedega X_1, X_2, X_3 ja X_4, kirjutame eelduse põhjal:

$$X_1 : X_2 = 9 : 10,$$
$$X_2 : X_4 = 5 : 8,$$
$$X_3 : X_4 = 2 : 3.$$

Selleks, et otsitavate üksikuid suhteid asendada kõigi nelja otsitava pideva suhete reana, on tarvis:

1) otsitav X_2 väljendada esimeses ja teises võrdes sama osade arvuga ja

2) otsitav X_4 väljendada teises ja kolmandas võrdes samuti sama osade arvuga.

Selleks:

1) leiame 10 ja 5 väikseima ühiskordse;

2) korrutame vastavate täiendusteguritega esimese ja teise võrde teiste suhete liikmeid;

3) leiame X_4 osade arvu teises ja kolmandas võrdes väljenduvate arvude väikseima ühiskordse;

4) korrutame vastava täiendusteguriga teise võrde teise suhte liikmeid ja esimese võrde teise suhte liikmeid, et osade võrdsus jääks endiseks.

	täiend. t.		täiend. t.	
$X_1 : X_2 = 9 : 10$	1	9 : 10	3	27 : 30
$X_2 : X_4 = 5 : 8$	2	10 : 16	3	30 : 48
$X_3 : X_4 = 2 : 3$		2 : 3	16	32 : 48

Asendame üksikute osade suhte otsitavate arvude pideva suhete reaga:

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 = 27 : 30 : 32 : 48.$$

Seega oleme saanud esimese tüübi ülesande: arvu jaotamine võrdeliselt arvude reaga.

Lahendame edasi ühiku kaudu

X_1 sisaldab 27 osa
X_2 „ 30 „
X_3 „ 32 „
X_4 „ 48 „, s. t. kogu arv võrdub 274 ühikuga ja sisaldab 137 osa. $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 137$ osa.

Üks osa sisaldab 274 : 137 osa.
Järelikult:

$$X_1 = 2 \cdot 27 = 54,$$
$$X_2 = 2 \cdot 30 = 60,$$
$$X_3 = 2 \cdot 32 = 64,$$
$$X_4 = 2 \cdot 48 = 96.$$

Ülesanne 3. Joonlõik on jaotatud kolmeks osaks nii, et esimene osa suhtub teisega nagu $3\frac{1}{3} : 4$ ja teine kolmandaga nagu $1 : 0{,}5$. Leida joonlõigu pikkus, kusjuures esimene osa on 27 cm pikem kolmandast.

Tähistades otsitavad lõigud tähtedega X_1, X_2 ja X_3, kirjutame ülesande eelduse:

$$X_1 : X_2 = 3\tfrac{1}{3} : 4,$$
$$X_2 : X_3 = 1 : 0{,}5,$$
$$X_1 - X_3 = 27 \text{ cm}.$$

Lahendus. Asendame murdarvude suhte täisarvude suhtega ja koostame suhete rea:

$$X_1 : X_2 = 3\tfrac{1}{3} : 4 = 7 : 8; \quad 7 : 8$$
$$X_2 : X_3 = 1 : 0{,}5 = 2 : 1; \quad 8 : 4$$
$$X_1 : X_2 : X_3 = 7 : 8 : 4.$$

Ülesande eelduses on antud esimese ja kolmanda lõigu vahe, seepärast võtame suhte $X_1 : X_3 = 7 : 4$ (I), koostame tuletatud võrde. Esimese suhte liikmete vahe suhtub oma järelliikmega nagu teise suhte liikmete vahe suhtub oma järelliikmega.

$(X_1 - X_3) : X_3 = (7 - 4) : 4$; $X_1 - X_3 = 27$ cm ülesande eelduse kohaselt, järelikult $27 : X_3 = 3 : 4$, millest $X_3 = \frac{27 \cdot 4}{3} = 36$ (cm).

Asetame väärtuse $X_3 = 36$ võrdesse (I), leiame X_1; $X_1 : 36 = 7 : 4$; $X_1 = \frac{36 \cdot 7}{4} = 63$ (cm).

Teise lõigu määramiseks võib võtta esimese ja teise lõigu suhte $X_1 : X_2 = 7 : 8$.

Asetades väärtuse $X_1 = 63$, saame: $63 : X_2 = 7 : 8$, millest $X_2 = \frac{63 \cdot 8}{7} = 72$ (cm).

1. lõik — 63 cm,
2. „ — 72 cm,
3. „ — 36 cm. Kogu joonlõik: $63 + 72 + 36 = 171$ (cm).

Ülesanne 4. Sovhoos jaotas 4900 ha maad kolmeks maatükiks. Kui esimesest võeti ära $\frac{1}{3}$, teisest $\frac{1}{4}$ ja kolmandast 0,2, siis olid kõik järelejäänud maatükid võrdsed. Kui suurteks maatükkideks jaotati maa?

Analüüs. Selleks, et leida kolme maatüki suurus, peab teadma kogu maa suurust (ülesandes antud) ja millise suhte moodustavad 3 maatüki suurused. Teisele küsimusele saab vastata, teades, et pärast vähendamist jäid järele võrdsed maatükid. Järelejäänud maatükkide suurust saab leida, teades, milline osa lõigati ära igast maatükist.

Plaan. I — esimese maatüki suurus ha-des,
II — teise „ „ „ ,
III — kolmanda „ „ „ .

1) Missugune osa esimesest maatükist, mille suuruse võtame ühikuks, jäi järele pärast vähendamist?
2) Missugune osa teisest maatükist jäi järele pärast vähendamist?
3) Missugune osa kolmandast maatükist jäi järele pärast vähendamist?
4) Missuguse suhte moodustasid esimese ja teise maatüki suurused?
5) Missuguse suhte moodustasid teise ja kolmanda maatüki suurused?
6) Kui palju võrdseid osi oli kolmes maatükis?
7) Kui suur on üks osa?
8) Kui suur on esimene maatükk?
9) Kui suur on teine maatükk?
10) Kui suur on kolmas maatükk?

Lahendus: 1) $1-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$; 2) $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$; 3) $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$ $(0{,}2=\frac{1}{5})$;

4) $\frac{2}{3}\,\mathrm{I}=\frac{3}{4}\,\mathrm{II}$; $\mathrm{I}:\mathrm{II}=\frac{3}{4}:\frac{2}{3}=\frac{3\cdot 3}{4\cdot 2}=9:8$;

5) $\frac{3}{4}\,\mathrm{II}=\frac{4}{5}\,\mathrm{III}$; $\mathrm{II}:\mathrm{III}=\frac{4}{5}:\frac{3}{4}=\frac{4\cdot 4}{5\cdot 3}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=16:15$;

6) $\mathrm{I}:\mathrm{II}=9:8$, $\mathrm{II}:\mathrm{III}=16:15$ | 2 | $\mathrm{I}:\mathrm{II}:\mathrm{III}=18:16:15$; $\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}=18+16+15=49$;

7) 4900 ha : 49 = 100 ha;
8) I = 100 ha · 18 = 1800 ha;
9) II = 100 ha · 16 = 1600 ha;
10) III = 100 ha · 15 = 1500 ha.

Seletus. Leiame järelejäänud maatüki osad ülesandes antud murdude lahutamisel ühest ühikust.

Siit leiame esimese ja teise maatüki suhte. Tingimuse kohaselt võrdub $\frac{2}{3}$ esimesest maatükist $\frac{3}{4}$-ga teisest maatükist.

See tähendab: $\mathrm{I} \cdot \frac{2}{3} = \mathrm{II} \cdot \frac{3}{4}$.

Kuna korrutised on võrdsed, siis tegurite I ja II suhe võrdub $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{4}$ pöördsuhtega, s. t. nende suhe on

$$\frac{4}{3} : \frac{2}{3} \text{ ehk } \frac{3}{2} : \frac{4}{3}; \quad \mathrm{I} : \mathrm{II} = \frac{3}{2} : \frac{4}{3} = 9 : 8.$$

Leiame II ja III suhte.

$$\frac{3}{4}\,\mathrm{II} = \frac{4}{5}\,\mathrm{III}; \quad \mathrm{II} : \mathrm{III} = \frac{4}{3} : \frac{5}{4} = 16 : 15.$$

Võrdsustades II arvu osade arvu võrretes $\mathrm{I} : \mathrm{II} = 9 : 8$, $\mathrm{II} : \mathrm{III} = 16 : 15$, saame: $\mathrm{I} : \mathrm{II} = 18 : 16$; $\mathrm{II} : \mathrm{III} = 16 : 15$ ja $\mathrm{I} : \mathrm{II} : \mathrm{III} = 18 : 16 : 15$.

Liites $18 + 16 + 15$, leiame võrdsete osade arvu kolmes maatükis ja seejärel ühe osa suuruse.

Ühes osas on $4900 \text{ ha} : 49 = 100 \text{ ha}$. Edasi leiame kergesti iga maatüki suuruse eraldi.

Kontroll:

1) $1800 \text{ ha} + 1600 \text{ ha} + 1500 \text{ ha} = 4900 \text{ ha}$,
2) $1800 \text{ ha} \cdot \frac{1}{3} = 600 \text{ ha}$, 3) $1800 \text{ ha} - 600 \text{ ha} = 1200 \text{ ha}$,
4) $1600 \text{ ha} \cdot \frac{1}{4} = 400 \text{ ha}$, 5) $1600 \text{ ha} - 400 \text{ ha} = 1200 \text{ ha}$,
6) $1500 \text{ ha} \cdot \frac{1}{5} = 300 \text{ ha}$, 7) $1500 \text{ ha} - 300 \text{ ha} = 1200 \text{ ha}$.

Saadud resultaadid vastavad ülesande eeldusele.

Ülesanne 5. Kolm kolhoosi ehitasid silla, mille koguhind 5700 rubla. Esimene kolhoos oli $1\frac{1}{2}$ km kaugusel sillast ja selles oli 40 kolhoosniku majapidamist, teine — 3 km kaugusel 20 kolhoosniku majapidamisega ja kolmas — 1 km kaugusel 30 kolhoosniku majapidamisega. Kui palju tuleb maksta igal kolhoosil, kui tasutavad summad on võrdelised majapidamiste arvuga ja pöördvõrdelised kaugustega sillast?

Tingimuse kirjutis:

I $1\frac{1}{2}$ km 40 talu
II 3 km 20 talu } 5700 rubla
III 1 km 30 talu

Analüüs. Selleks, et teada saada kui palju peab maksma iga kolhoos, tuleb leida, mitu osa peab maksma iga kolhoos, olenevalt tema

majapidamiste arvust ja kaugusest sillast ja mitu rubla tuleb ühe osa kohta. Silla ehituskulu jaotub võrdeliselt majapidamiste arvuga (s. o. võrdeliselt arvudega: 40, 20 ja 30) ja pöördvõrdeliselt kolhooside kaugustega sillast (s. o. pöördvõrdeliselt arvudega: $1\frac{1}{2}$, 3 ja 1). Viimase rea arvud asendame pöördarvudega (s. o. $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ ja 1). Mõlema rea arvud tulevad korrutada. See annab igale kolhoosile maksmiseks tuleva osade arvu. Teades osade üldarvu ja kogu kulu, määrame, mitu rubla tuleb iga osa kohta ja iga kolhoosi osade arvu kohta.

Lahendusplaan.

1) Kolhooside majapidamiste arvu väljendav suhe.
2) Kolhooside kauguste pöördsuhted sillast.
3) Kolhooside silla ehitamise tasude suhe.
4) Kõikide osade arv.
5) Tasu rublades ühe osa kohta.
6) Esimese kolhoosi silla ehitamise tasu.
7) Teise „ „ „ „
8) Kolmanda „ „ „ „

Lahendus:

1) $I : II : III = 40 : 20 : 30 = 4 : 2 : 3$.
2) $I : II : III = \frac{2}{3} : \frac{1}{3} : 1 = 2 : 1 : 3$.
3) $I : II : III = (2 \cdot 4) : (2 \cdot 1) : (3 \cdot 3) = 8 : 2 : 9$.
4) $8 + 2 + 9 = 19$.
5) 5700 rubla : 19 = 300 rubla.
6) 300 rubla · 8 = 2400 rubla.
7) 300 rubla · 2 = 600 rubla.
8) 300 rubla · 9 = 2700 rubla.

Seletus. Kolhooside poolt silla ehitamiseks maksetavad summad on võrdelised majapidamiste arvuga ja pöördvõrdelised nende kaugustega sillast. Järelikult tuleb 5700 rubla jaotada võrdeliselt kolhooside majapidamiste arvuga 40, 20 ja 30 ja pöördvõrdeliselt kaugustega sillast $1\frac{1}{2}$ km, 3 km, 1 km. Asendame pöördvõrdelise jaotamise pöördarvudega võrdeliselt jaotamisega, s. o. võrdeliselt arvudega $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, 1.

Seejärel tuleb mõlemate ridade arvud korrutada ja jaotada 5700 rubla võrdeliselt korrutistega $(40 \cdot \frac{2}{3})$, $(20 \cdot \frac{1}{3})$ ja $(30 \cdot 1)$.

Leiame nende arvude suhte ja lihtsustame selle: $(4 \cdot \frac{2}{3}) : (2 \cdot \frac{1}{3}) : (3 \cdot 1) = 8 : 2 : 9$, misjärel teostame jaotamise.

Edasi lahendub ülesanne nagu tavaline võrdelise jaotamise ülesanne.

Selle selgituseks, miks 5700 rubla tuleb jaotada võrdeliselt korrutistega: $40 \cdot \frac{2}{3}$, $20 \cdot \frac{1}{3}$ ja $30 \cdot 1$ peab tähendama, et kui kolhooside kaugused asendada võrdsete kaugustega (1 km), siis iga kolhoosi majapidamiste

arv — selleks, et sissemaksud ehituseks ei muutuks — peab vastavalt vähenema: 40 poolteist korda, 20 kolm korda. Nii suhtuksid kolhoosi sissemaksud, kui

$$\frac{40}{1\frac{1}{2}};\ \frac{20}{3}\ \text{ja}\ \frac{23}{1},\ \text{s. o.}\ (40\cdot\tfrac{2}{3}) : (20\cdot\tfrac{1}{3}) : (30\cdot 1).$$

§ 147. Ülesanded segudest.

1. Üht liiki segude ülesanded.

Selliste ülesannete hulka kuuluvad ülesanded, milledes mitmesuguste eriliiki kauba hulkade ja nende hindade järgi tuleb määrata segu hind.

Ülesanne. Segati kolme sorti kompvekke: A kg hinnaga a rubla, B kg hinnaga b rubla ja C kg hinnaga c rubla 1 kg. Leida nende kompvekkide segu 1 kg hind.

Selleks, et lahendada seda ülesannet, leiame algul esimese sordi kompvekkide koguhinna $a\cdot A$ rubla, siis teise sordi kompvekkide koguhinna $b\cdot B$ rubla ja kolmanda sordi — $c\cdot C$ rubla.

Edasi leiame segu koguhinna $(aA + bB + cC)$ rubla ja kolme sordi kompvekkide hulga $(A + B + C)$ (kg). Lõpuks leiame segu 1 kg hinna.

Vaadeldava ülesande lahendamine toimub aritmeetilise keskmise leidmisega:

$$\frac{aA + bB + cC}{A + B + C}.$$

Lahendame konkreetse ülesande. On segatud 4,5 kg I sordi pähkleid, 9 kg II sordi pähkleid ja $2\frac{1}{4}$ kg III sordi pähkleid. Segu maksis 151,2 rubla. I sordi 1 kg oli 3,4 rubla kallim II sordi 1 kg-st ja 4,6 rubla kallim III sordi 1 kg-st. Leida iga sordi ühe kg hind ja segu ühe kg hind.

Ülesande eelduse kirjutis:

	I	II	III	Segu
Kogus (kg)	4,5	9	$2\frac{1}{4}$	?
Hind (rbl.)	x	$x - 3{,}4$	$x - 4{,}6$	

Koguhind 151,2 rubla.

Arutlus: Et ülesande eelduses on antud II ja I sordi ning III ja I sordi hindade vahe, siis on otstarbekohane määrata I sordi hind. Selleks, et määrata I sordi pähklite hind, peab teadma: 1) kogu segu kogus kg-des ja 2) segu koguhind juhul, kui ta oleks koosnenud ainult I sordi pähklitest.

Andmed kogu segu hulga määramiseks esinevad ülesandes. Teisele küsimusele vastamiseks peab teadma:

mitme rubla võrra suureneb segu hind, kui II ja III sordi hind tõuseks I sordi hinnani (andmed selleks esinevad ülesande eelduses).

Selleks, et vastata ülesande teisele küsimusele, s. t. määrata segu 1 kg hind, peab algul teadma segu koguhinda (ülesandes antud) ja segu kogust (määratud ülesande lahendamise algul).

Ülesande lahendamiskäik ja -plaan:

1) Kui palju oli kogu segu?
   $4{,}5 \text{ kg} + 9 \text{ kg} + 2{,}25 \text{ kg} = 15{,}75 \text{ kg}$.
2) Mitme rubla võrra oleks tõusnud segu koguhind, kui II sordi 1 kg hind oleks tõusnud 3,4 rubla?
   $3{,}4 \text{ rbl.} \cdot 9 = 30{,}6 \text{ rbl.}$
3) Mitme rubla võrra oleks tõusnud segu koguhind, kui III sordi 1 kg hind oleks tõusnud 4,6 rubla?
   $4{,}6 \text{ rbl.} \cdot 2\frac{1}{4} = 10{,}35 \text{ rbl.}$
4) Kui palju oleks maksnud kogu segu I sordi hinna alusel?
   $151{,}2 \text{ rbl.} + 30{,}6 \text{ rbl.} + 10{,}35 \text{ rbl.} = 192{,}15 \text{ rbl.}$
5) Kui suur on I sordi 1 kg hind?
   $192{,}15 \text{ rbl.} : 15{,}75 = 12{,}2 \text{ rbl.}$
6) Kui suur on II sordi 1 kg hind?
   $12{,}2 \text{ rbl.} - 3{,}4 \text{ rbl.} = 8{,}8 \text{ rbl.}$
7) Kui suur on III sordi 1 kg hind?
   $12{,}2 \text{ rbl.} - 4{,}6 \text{ rbl.} = 7{,}6 \text{ rbl.}$
8) Kui palju maksab 1 kg segu?
   $151{,}2 \text{ rbl.} : 15{,}75 = 9{,}6 \text{ rbl.}$

2. Teist liiki ülesanded segudest.

Siia kuuluvad niisugused ülesanded, kus segatud kaupade hindade, nende üldise koguse ja hinna järgi määratakse segus oleva iga sordi kogus.

Ülesanne. Kuivatatud ploomidest, hinnaga A rbl. 1 kg ja õuntest, hinnaga B rbl. 1 kg koostada M kg segu, mille hind C rbl. 1 kg. Mitu kg õunu ja mitu kg ploome läheb segusse? Märkus ülesandele: $A > C > B$.

Selleks, et lahendada seda ülesannet, tuleb leida algul saadud segu koguhind — CM rbl.

Kui oleks võetud ainult ploome, siis oleks M kg ploome maksnud AM rbl., s. o. $(AM - CM)$ rbl. rohkem. See vahe tekkis ainult seepärast, et tõeliselt võeti segamisel osa ploomide asemel õunu. Iga 1 kg ploome on 1 kg-st õuntest kallim $(A - B)$ rbl. Järelikult selleks, et teada õunte kg-de arvu segus, tuleb leida mitu korda $(A - B)$ rbl. sisaldub $(AM - CM)$ rublas, $\frac{AM - CM}{A - B}$ (kg).

Seega tuleb õunu võtta segusse $\frac{(A - C)M}{A - B}$ kg. Selleks, et leida ploomide hulka, tuleb kogu segu kaalust (M kg) lahutada õunte kaal $\frac{(A - C)M}{A - B}$ kg.

Saame: $M - \frac{(A - C)M}{A - B}$ ehk $\frac{AM - BM - AM + CM}{A - B} =$

$= \frac{CM - BM}{A - B}$ kg.

Niisiis tuleb seguks võtta $\frac{(A - C)M}{A - B}$ kg õunu ja $\frac{(C - B)M}{A - B}$ kg ploome. Seda lahendusviisi nimetatakse vaba oletusega lahendusviisiks. Lahendame samaliiki ülesande teisiti. Kui avaldame segatavate ainete hinna tähtedega M ja N ning segu hinna tähega P (oletades $M > P > N$), segu koguse

tähega A, siis on I sordi hind kallim segu hinnast $(M - P)$ ühikut ja II sordi hind odavam segu hinnast $(P - N)$ ühikut. Kui otsitava I sordi koguse tähistame X-ga ja II sordi koguse Y-ga, siis on I sordi kogu aine kallim samast hulgast segust $(M - P)X$ ja II sordi aine odavam samast hulgast segust $(P - N)Y$. Järelikult selleks, et segu ei oleks kallim ega ka odavam õige koguhinnaga võrreldes, peab $(M - P)X = (P - N)Y$, millest saame $X : Y = (P - N) : (M - P)$, s. t. selleks, et leida segusse võetava iga sordi hulka, tuleb segu kogus jaotada pöördvõrdeliselt arvudega, mis näitavad segu hinna ja segus olevate ainete hindade vahet.

Lahendame konkreetse ülesande.

Ülesanne. Kuivatatud ploomidest, mille hind 8 rbl. 40 kop. 1 kg ja õuntest, mille hind 6 rbl. 60 kop. 1 kg koostati 12 kg segu, hinnaga 7 rbl. 5 kop. 1 kg. Mitu kg ploome ja mitu kg õunu võeti seguks?

Ülesande lahendamiseks tuleb leida algul kogu segu väärtus 7 rbl. 5 kop. $\times$ 12 = 84 rbl. 60 kop.

Kui oleks võetud ainult ploome, siis oleks 12 kg ploome maksnud 8 rbl. 40 kop. $\times$ 12 = 100 rbl. 80 kop., s. o. (100 rbl. 80 kop. — 84 rbl. 60 kop.) = 16 rbl. 20 kop. rohkem. See vahe tekkis ainult seepärast, et tegelikult võeti osa ploomide asemel õunad. 1 kg ploome on kallim 1 kg õuntest: 8 rbl. 40 kop. — 6 rbl. 60 kop. = 1 rbl. 80 kop. Selleks, et leida seguks võetud õunte kg-de arvu, tuleb leida mitu korda 1 rbl. 80 kop. sisaldub arvus 16 rbl. 20 kop. 1620 : 180 = 9 (korda). Tähendab, õunu võeti segusse 9 kg. Nüüd on kerge leida, kui palju võeti seguks ploome: kogu segu kaalust tuleb lahutada õunte kaal: 12 kg — 9 kg = 3 kg.

Lahendame selle ülesande teisel viisil. Kui segusse võtta ploomid, siis iga kg ploome on 1 kg segust kallim 8 rbl. 40 kop. — 7 rbl. 5 kop = = 1 rbl. 35 kop. Kui segusse võtta õunad, siis iga kg õunu on 1 kg-st segust odavam 7 rbl. 5 kop. — 6 rbl. 60 kop. = 45 kop. Kui otsitavad ploomide ja õunte hulgad tähistame vastavalt tähtedega X ja Y, siis ploomid on segust kallimad 1 rbl. 35 kop. $\cdot X$ ja õunad odavamad — 45 kop. $\cdot Y$. Järelikult selleks, et 12 kg segu hind oleks 7 rbl. 5 kop. 1 kg, on tarvilik, et 1 rbl. 35 kop. $\cdot X = 45$ kop. $\cdot Y$, millest $X : Y = = 45 : 135$.

Tähendab selleks, et leida segu ja segus olevate õunte hulka eraldi, tuleb segu hulk kg-des jaotada pöördvõrdeliselt arvudega, mis näitavad 1 kg ploomide ja 1 kg segu hindade vahet ning 1 kg segu ja 1 kg õunte hindade vahet.

Järelikult tuleb kogu segu hulk 12 kg jaotada pöördvõrdeliselt arvudega 135 ja 45 ehk võrdeliselt arvudega 45 ja 135.

Taandades suhte 45 : 135 arvuga 45, saame 1 : 3.

Arvude 1 ja 3 summa on 4; järelikult üks osa on 12 kg : 4 = 3 kg (ploome oli segus) ja õunu 3 kg · 3 = 9 kg.

3. Ülesanded vedeliku segudest.

Happed ja piiritus puhtal kujul peaaegu ei esine, harilikult tarvitatakse neid lahustena, s. t. nad sisaldavad vett. On ilmne, et lahuse hind oleneb lahuses olevast puhta piirituse või happe hulgast.

Arvu, mis näitab mitu protsenti moodustab puhta piirituse või happe kaal lahuse või segu kogukaalust, nimetatakse piirituse või happe kanguseks. Piirituse või happe kangust määratakse harilikult kraadides, s. o. sajandikkudes ehk protsentides. Kui räägitakse, et viin on 40 kraadine, siis tähendab see, et selle viina 100-s kaaluosas on 40 piirituse kaaluosa. Kui väävelhappe kangus on 60%, siis tähendab see, 60 sajandikku kogu kaalust on hape ja ülejäänud vesi.

Ülesanded vedelikkude segudest võivad olla, sarnaselt ülesandeile sõmerainete segudest, esimest ja teist liiki ja lahenduda samuti analoogiliselt.

4. Ülesanded sulamitest.

Puhtast kullast ja hõbedast ei valmistata peaaegu kunagi esemeid, sest need metallid on pehmed ja kergesti alluvad deformatsioonile ning kuluvad tarvitamisel kiiresti ja vähenevad kaalult, seega kaotavad osa oma väärtusest.

Selleks, et anda neile vajalikku vastupidavust, nad sulatatakse koos teiste metallidega seguks, enamasti vasega. Kullale ja hõbedale juurdesegatud vase lisandit nimetatakse

ligatuuriks. Et vase hind võrreldes kulla ja hõbeda hinnaga on väga madal, siis oleneb sulami hind temas sisalduva kulla ja hõbeda hulgast.

Ühes kg-s sulamis leiduvat puhta kulla ja hõbeda hulka grammides nimetatakse prooviks. Näiteks kui räägitakse, et ese on tehtud kullast prooviga 875, siis see tähendab, et ühes kg-s kulla sulamis on 875 grammi puhast kulda ja 125 grammi ligatuuri.

Ülesanded sulamitest, nagu ülesanded segudestki, võivad olla kahte liiki:

1) kui on tarvis leida saadud sulami proovi ja 2) kui on tarvis leida, mitu kg-i tuleb võtta kahte erineva prooviga sulamit, et saada antud prooviga sulamit. Ülesanded sulamitest lahendatakse samal viisil kui ülesanded segudest.

Ülesanne. Sulatati 180 g kulda prooviga 920 100 g kullaga, mille proov on 752. Leida sulami proov.

Ülesande eelduse kirjutis:

180 g prooviga 920,
100 g „ 752.

Leida sulami proov.

Arutlus. Selleks, et vastata ülesande küsimusele, peab teadma sulamis leiduva puhta kulla hulka ja sulami kaalu. Sulami kaalu saame määrata ülesande andmete järgi. Selleks, et leida sulamis oleva puhta kulla hulka, peab teadma kulla hulka kummaski ühte sulatatavas kullatükis (andmed esinevad samuti ülesandes).

Kullatüki kaalu ja proovi järgi saab leida selles sisalduvat puhta kulla hulka.

Lahendusplaan.

1) Kogu sulami kaal.
2) Puhta kulla hulk esimeses kullatükis.
3) „ „ „ teises „ .
4) „ „ „ kogu sulamis.
5) Sulami proov.

Lahendus.

1) 180 g + 100 g = 280 g.

2) Kullatükis prooviga 920 on kulda 920 tuhandikku kullatüki kaalust.

180 g · 0,920 = 165,600 g = 165,6 g.

3) Kullatükis prooviga 752 on kulda 752 tuhandikku kullatüki kaalust.

100 g · 0,752 = 75,200 g = 75,2 g.

4) 165,6 g + 75,2 g = 240,8 g.

5) 240,8 g : 280 = 0,86 g.

0,86 g · 1000 = 860 g, s. o. prooviga 860.

Vastus: Sulami proov on 860.

XXIII peatükk.

Reaalarv

(arvu mõiste laiendamine).

§ 148. Hulgad ja loomulikud arvud (positiivsed täisarvud).

Positiivset täisarvu nimetatakse loomulikuks arvuks. Loomuliku arvu mõiste on põhiliseks mõisteks kaasaegses matemaatikas. Selle mõiste tekkimine ulatub kaugesse minevikku. Ta on võetud reaalsest maailmast ja ei ole mitte inimmõistuse vaba loomingu tulemuseks.

Loomuliku arvu mõiste tuleneb tema eelnevast „hulga" mõistest, s. t. meid ümbritsevas maailmas leiduvate üksikesemete kogumikust (ühendusest).

Meil pole võimalik anda „hulga" definitsiooni, sest pole enam lihtsamaid mõisteid, mille abil võiks anda vastavat definitsiooni. Järelikult **kuulub „hulga" mõiste nn. algmõistete hulka, mis ei ole defineeritavad.**

Tähendame, et sõna „hulka" ei kasutata matemaatikas sõna „palju" asemel. Nagu juba varem nimetatud tähendab ta „kogumikku", „ühendust" jms.

Piirdume selle mõiste selgitamisega näidete abil. Inimesel on võime ühendada oma teadvuses üksikesemeid üheks tervikuks („kogumikuks", „hulgaks"). Sellega koos oskab ta antud kogumiku („hulga") esemeid tajuda eraldi ja eristada neid üksteisest ning esemetest, mis ei kuulu sellesse kogumikku.

Lehma kari, kast kuulikestega, terade hunnik, inimeste salk, klass õpilasi, kott kartulitega, tähestiku tähtede, täisarvud — need kõik on mitmesugused hulgad.

Iga selline mõiste tekib meie teadvuses üksikesemete (lehmade, kuulide, terade, inimeste jne.) ühendamisel üheks tervikuks.

Kõige olulisem on hulga mõistes mitmesuguste esemete üheks tervikuks ühendamise akt. Hulkade teooria looja Georg Cantor kriipsutas alla just nimelt seda mõtet järgmiselt väljendatud lausega: **„Hulk on palju, mida mõtleme ühena".**

Hulgad võivad koosneda kõige mitmekesisematest objektidest, nn. hulga **elementidest.** Nii koosneb „inimeste hulk" elavatest objektidest, „kuulide hulk" — elututest. Täisarvude hulk ei koosne enam füüsilistest esemetest, vaid abstraktsetest mõistetest. Pole vajalik, et hulgad koosneksid ainult samaliiki esemetest. Näiteks võib moodustada hulka, mille elementideks on: õpilane, raamat, vihik ja sulepea või koduloomade hulk: lehmad, lambad, vasikad.

Hulga elementideks võivad omakorda olla ka hulgad. Näiteks, kui võtta tehase töölisbrigaadide hulk või sõjaväe polkude hulk, siis nende hulkade elementideks on samuti hulgad.

Järelikult võivad hulga elementideks olla kõik, millest suudame mõtelda.

Hulk võib koosneda ka ühest elemendist. Näiteks koosneb kõigi Maa kaaslaste (kuude) hulk ainult ühest kaaslasest — Kuust.

Lõpuks saab mõtelda ka sellest juhtumist, kui hulgas pole ühtki elementi. Niisuguseid hulki nimetatakse **tühjadeks** hulkadeks.

Hulka võib pidada täiesti kindlaksmääratuks, kui iga elemendi kohta on selgitatud, kas ta kuulub sellesse hulka või ei kuulu. Elemendi a kuuluvust hulka M tähistatakse sisalduvusmärgiga $a \subset M$.

Samased hulgad.

Kaht hulka M ja M_1 nimetatakse samasteks ainult siis, kui nad sisaldavad samu elemente.

Näiteks 10-ga jaguvate loomulikkude arvude hulk on samane nulliga lõppevate loomulike arvude hulgaga. Kõik tühjad hulgad on samased.

Hulga osa (osahulk). Kui hulga M_1 kõik elemendid on ka hulga M elementideks, siis M_1 nimetatakse **hulga M osaks** ehk hulga M **osahulgaks.** Näiteks, kui hulk M_1 koosneb neljast esimesest tähest a, b, c, d, siis on see hulga M kogu tähestiku osahulk.

On ilmne, et antud juhul sisalduvad hulga M_1 kõik elemendid hulgas M, seepärast võib kirjutada: $M_1 \subset M$.



Joon. 6.

Võrdvõimsad hulgad. Oletame, et meil on kaks hulka (M ja M_1), mis koosnevad mingisugustest elementidest ja oletame, et nende kahe hulga elementide vahel saab korraldada vastavus, **millepuhul esimese hulga igale elemendile vastab üks ja ainult üks teise hulga element ja ümberpöördult**

teise hulga igale elemendile vastab üks ja ainult üks esimese hulga element. Niisugust vastavust nimetatakse üksüheseks vastavuseks.

Näide 1. Kui meil on pottides mitu taime (joon. 6), kusjuures igasse potti on istutatud ainult üks taim ja seejuures ei jäänud üle ühtki taime ega vaba potti, siis võib öelda, et antud juhul valitseb taimede hulga ja pottide hulga elementide vahel üksühene vastavus, sest igale taimele vastab üks ja ainult üks lillepott, millesse see taim on istutatud ja ümberpöördult, igale lillepotile vastab üks ja ainult üks taim.

§ 149. Loomulikud arvud ja null.

Loomulik arv esineb mingi lõpliku hulga elementide loendamise tulemusena ja annab vastavate võrdvõimsate hulkade klassi mõiste (vt. § 3).

Selleks, et iseloomustada tühja hulka, s. t. hulka, mis ei sisalda ühtki elementi, võetakse tarvitusele arv null. Nulli tarvituselevõtuga laieneb loomulikkude arvude rida. Seejuures loetakse null arvuks, mis eelneb ühele.

Edasine loomulikkude arvude süsteemi laiendamine toimub negatiivsete arvude sissetoomisega, seejuures arv (-1) loetakse eelnevaks nullile ja arv (-2) eelnevaks (-1)-le jne.

See kahepoolne loomulik rida kujutab täisarvude hulka.

§ 150. Ringi mõiste.

Vaatleme arvude hulka tema liikmetega tehete teostamise vaatekohalt. Olgu antud hulk M oma elementidega: $a, b, c, \ldots$ ja olgu nendele hulga elementidele rakendatavad liitmise ja korrutamise tehted nende seaduste ja omadustega:

1) liitmise kommutatiivsus $a + b = b + a$,
2) korrutamise kommutatiivsus $ab = ba$,
3) liitmise assotsiatiivsus $(a + b) + c = a + (b + c)$,
4) korrutamise assotsiatiivsus $(ab)c = a(bc)$,
5) korrutamise distributiivsuse seadus liitmise suhtes $a(b + c) = ab + ac$.

Kui mingi hulga elementide liitmise ja korrutamise tulemusena saame sama hulga elemendid, siis öeldakse, et hulgas M on teostatav liitmise ja korrutamise tehe. Mida võib aga ütelda pöördtehete kohta? Olgu meil antud loomulikkude arvude hulk 1, 2, 3 jne. Antud hulgas ei ole pöördtehted alati teostatavad. Arvu x leidmine tingimustest $a + x = b$ $ax = b$ on liitmise ja korrutamise pöördtehteiks, s. t. lahutamine ja jagamine. Arvu x leidmisel võime saada arvu, mis pole antud arvude hulga elemendiks. Näiteks: $3 + x = 1$; $x = -2$, kuid (-2) pole antud hulga 1, 2, 3 jne. elemendiks.

Kui täiendada loomulikkude arvude rida nulli ja negatiivsete arvudega, s. t. võtta kõikide täisarvude hulk, siis on lahutamine teostatav alati. Jagamine pole aga endiselt alati teostatav, sest jagamise resultaadina võib tekkida murdarv, kuid murdarvud ei esine antud hulgas.

Arvude hulka, mille elementidega on teostatav liitmise, korrutamise (nende seaduste ja omadustega) ja lahutamise tehe, nimetatakse arvude ringiks ehk lihtsalt ringiks.

Ringi näited: 1. lihtsaimaks arvude ringi näiteks on täisarvude hulk. Täisarvude summa ja korrutis on samuti täisarvud; liitmisel ja korrutamisel on kehtivad assotsiatiivsuse, kommutatiivsuse ja distributiivsuse seadused; lahutamine on alati teostatav, s. t. mistahes täisarvude a ja b puhul võrrandi $a + x = b$ lahend on täisarv, näiteks $5 - 7 = -2$.

2. Kõikide paarisarvude hulk..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6,... on samuti ringi näiteks sest paarisarvude summa

ja korrutis on samuti paarisarv. Summa ja korrutis alluvad assotsiatiivsuse, kommutatiivsuse ja distributiivsuse seadustele. Lahutamine on alati teostatav.

3. Kõik arvu 3 kordsed moodustavad samuti ringi. Olgu $3k$ ja $3k_1$ — arvu 3 kordsed, siis saame:

1) $3k + 3k_1 = 3(k + k_1)$,

2) $3k \cdot 3k_1 = 9k \cdot k_1$,

3) $3k - 3k_1 = 3(k - k_1)$.

Summa, korrutis ja vahe on 3-e kordsed, s. t. liitmine, korrutamine ja lahutamine on teostatavad antud hulgas. Tehete seadused on kehtivad.

4. Paarituarvude hulk ei moodusta ringi, sest kahe paarituarvu summa on paarisarv, mis ei esine antud hulgas.

Ringi omadused. Igas ringis esineb 0. Tõepoolest, kui ringis sisaldub mingi arv a, siis sisaldub temas ka vahe $a - a = 0$.

Ring võib sisaldada eneses teist ringi, näiteks: kõikide täisarvude hulk ... $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ moodustab ringi. Kuid see hulk sisaldab eneses kõiki paarisarve ... $-4, -2, 0, 2, 4, \ldots$ ja paarisarvude hulk omakorda moodustab ringi. Tähendame, et arv 0 moodustab omaette ringi, sest $0 + 0 = 0$; $0 - 0 = 0$ ja $0 \cdot 0 = 0$. Kõik kolm tehet on teostatavad.

Ülesanne. Selgitada, kas moodustab ringi: 1) arvude hulk kujus $a + b\sqrt{5}$, kus a ja b on täisarvud, 2) lihtmurdude hulk.

(Vastus 1. Ring. Vastus 2. Ringi ei moodusta, sest kahe lihtmurru summa pole alati lihtmurd.)

§ 151. Korpuse (ratsionaalsuskonna) mõiste.

Vaatleme teist pöördtehet — jagamist. Täisarvude hulgas pole jagamine alati teostatav. Kui me aga laiendame arvu

mõistet murdarvude juurdetoomisega, siis on jagamine alati teostatav, väljaarvatud jagamine nulliga.

Jagamine $\frac{a}{0}$ on võimatu, sest pole olemas niisugust arvu, mis pöördtehtel — korrutamisel nulliga annaks korrutise a.

Jagamisel $\frac{0}{0}$ on rikutud tehte ühesus, sest $\frac{0}{0}$ võib anda mistahes resultaadi $\frac{0}{0} = k$, $0 = k \cdot 0$. Jagatava (null) saame mistahes arvu k korrutamisel jagajaga (0).

Täiendades loomulikkude arvude rida niihästi positiivsete, kui ka negatiivsete murdudega, saame kõikvõimalikud **ratsionaalsed arvud.**

Neli aritmeetilist tehet (väljaarvatud jagamine 0-ga) on alati teostatavad ratsionaalarvude hulgas, sest ratsionaalarvude liitmise, lahutamise, korrutamise ja jagamise (väljaarvatud jagamine 0-ga) tehete tulemusena saame samuti ratsionaalarvud, s. t. antud hulga elemendid. Lisaks alluvad ratsionaalarvude liitmise ja korrutamise tehted kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja distributiivsuse seadustele. Järelikult on ratsionaalarvude hulk ring, milles on teostatav ka jagamise tehe.

Arvude hulka, milles on teostatavad liitmine, lahutamine, korrutamine ja jagamine (väljaarvatud jagamine nulliga) nimetatakse arvude korpuseks (ratsionaalsuskonnaks).

Korpust võib defineerida ka teisiti. Korpuseks nimetame ringi, milles võrrand $ax = b$, kui $a \neq 0$, on alati lahenduv (jagamise teostatavus).

Ratsionaalarvude hulk.

Ratsionaalarvude hulk on korpus, sest selles on teostatavad neli aritmeetilist tehet, väljaarvatud jagamine nulliga.

Iga korpus, olles ring, sisaldab nulli. Olgu a mingi nullist erinev arv. Jagamise teostatavuse tõttu sisaldab korpus jagatist $\frac{a}{a}$, s. o. 1. Liitmise teostatavuse tõttu peab korpus sisaldama kõik loomulikud arvud $2 = 1 + 1$; $3 = 2 + 1$ jne. Lahutamise teostatavuse tõttu peab korpus sisaldama samuti kõik negatiivsed täisarvud: $-1 = 0 - 1$, $-2 = -1 - 1$ jne. Lõpuks peab korpus jagamise teostatavuse tõttu sisaldama ka kõik murdarvud. Nii sisaldab iga arvude korpus kõik ratsionaalarvud.

Ülesanne. Uurida, kas järgmised hulgad moodustavad korpuse:

1. Arvude hulk kujus $a + b\sqrt{5}$, kus a ja b on ratsionaalarvud. (Vastus. Jah.)

2. Murdude hulk $\frac{a}{b}$ (a ja b on täisarvud), millede nimetajad on arvu 7 kordsed. (Vastus. Ei, sest jagamine ei anna alati murdu, mille nimetaja on 7-e kordne, näiteks $\frac{7}{21} : \frac{3}{63} = \frac{21}{8}$.)

3. Täisarvude hulk. (Vastus. Ei, ainult ringi, sest jagatis pole alati täisarv, s. t. jagamine pole alati teostatav.)

Irratsionaalarvud.

„Geomeetria tegeleb pidevate suurustega, millede puhul mõõdetavus on erandiks" (Cajori). Elementaargeomeetriast on teada, et kahel lõigul pole alati ühismõõtu; nii puudub ruudu diagonaalil ja küljel ühismõõt. Lõikude mõõtmise ülesande lahendamiseks tuleb arvu mõistet laiendada irratsionaalarvude juurdevõtmisega.

Matemaatikas nimetatakse irratsionaalarvuks igat mitteperioodilist lõpmatut kümnendmurdu. Irratsionaalarv on suurem selle mistahes ligikaudsest väärtusest puudusega,

mida saame vastava kümnendmurru moodustamisel ja väiksem selle mistahes ligikaudsest väärtusest liiaga. Näiteks:

$\sqrt{2} = 1{,}4142136\ldots$ saame $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$;

$\pi = 3{,}1415936\ldots$ $3{,}141 < \pi < 3{,}142$.

Ratsionaalarvu saab samuti väljendada lõpmatu kümnendmurruna, kuid see murd on perioodiline, näiteks:

$\frac{3}{37} = 0{,}081081081\ldots$ või $\frac{1}{2} = 0{,}5 = 0{,}50000\ldots = 0{,}49999\ldots$

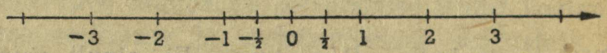
Ratsionaalarvud ja irratsionaalarvud moodustavad koos arvude hulga, mida nimetatakse reaalarvude hulgaks.

Algebrast on teada, et reaalarvudega on teostatavad neli aritmeetilist tehet (väljaarvatud jagamine nulliga).

Tehted reaalarvudega alluvad tehete põhiseadustele, seepärast on reaalarvude hulk arvude korpuseks.

Reaalarvude kujutamine arvsirgel.

Kujutleme, et oleme sirgel märkinud kõik punktid, mis ei vasta mitte ainult täisarvudele, vaid ka ratsionaalsetele murd-



Joon. 7.

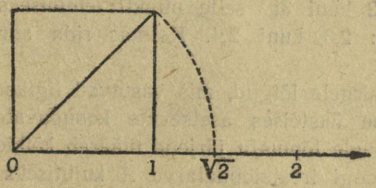
arvudele. **Me saame ratsionaalse arvsirge** (joon. 7). Ükskõik kui väikses intervallis on piiramatu hulk ratsionaalarve. Tõepoolest saab kahe ratsionaalarvu a ja b vahele asetada kolmanda ratsionaalarvu $\frac{a+b}{2}$. Sellist ehitist saab piiramatult jätkata. Seda omadust väljendatakse rääkides, et **ratsionaalarvude hulk on igalpool tihe.**

Kas täidavad ratsionaalsed punktid pidevalt geomeetrilise sirge? Selgub, et ratsionaalsete punktide vahel on vahed, mida täidavad irratsionaalarvud.

Ruudu, mille külg on 1, diagonaal võrdub $\sqrt{2}$, s. o. väljendatud irratsionaalarvuga, mis ei võrdu täisarvu ega

lõpliku murruga. Kui me asetame selle lõigu arvsirgele, siis annab sirglõigu lõpp sirgel punkti, mis vastab arvule $\sqrt{2}$ ja mis ei lange ühte ühegi punktiga, mis saadud ratsionaalarvude kujutamisel (joon. 8).

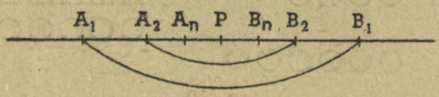
Seega, hoolimata rasionaalarvude rea tihedusest, on ratsionaalarvude vahel vahe, mis täitus irratsionaalarvuga, mis vastas mõõduühikuga ühismõõdutu sirglõigu lõpule.



Joon. 8.

Igale punktile P arvsirgel vastab täiesti kindel reaalarv, mille saame, mõõtes sirglõigu OP ja võttes vastava arvu märgiga + või —, olenevalt OP suunast. Ümberpöördult, igat reaalarvu võib arvsirgel kujutada punktina.

Irratsionaalarvude kujutamine põhjeneb järgmisele geomeetrilisele aksioomile, mis väljendab sirgjoone pidevust.



Joon. 9.

Pidevuse aksioom. Kui antud sirgel on lõikude järjend (jada) A_1B_1, A_2B_2, ... A_nB_n, kusjuures iga järgmine lõik sisaldub eelmises lõigus ja küllalt suure numbriga lõik A_nB_n võib muutuda kuitahes väikeseks, siis on sirgel üks punkt P, mis kuulub antud järjendi kõikidele lõikudele (joon. 9).

Seda aksioomi nimetatakse ka koonduvate (kokkutõmbuvate) lõikude printsiibiks. Väljendades piltlikult, antud lõi-

kude järjend ei saa koonduda tühjale kohale, vaid koondub kindlasti sirge mingisugusele punktile.

Näitame, kuidas kujutada arvsirgel irratsionaalarvu $A = 2{,}3521\ldots$

$$2 < A < 3$$
$$2{,}3 < A < 2{,}4$$
$$2{,}35 < A < 2{,}36$$
$$2{,}352 < A < 2{,}353 \text{ jne.}$$

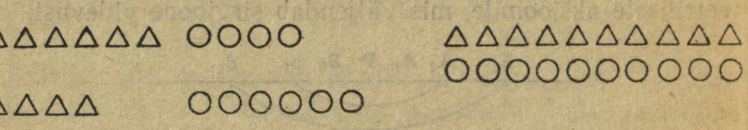
Esimene rida näitab, et punkt, mis vastab irratsionaalarvule A, asetseb intervallis 2 kuni 3; selle punkti leidmiseks annab teine rida väiksema intervalli: 2,3 kuni 2,4. Kolmas rida annab veel väiksema vahemiku.

Paigutades arvsirgele lõigud, mis vastavad ligikaudsetele ratsionaalarvudele, me saame üksteises asetsevate koonduvate lõikude järjendi. Koonduvate lõikude lõpmatu järjend määrab kõikidele lõikudele ühise punkti. See punkt ongi irratsionaalarvu A kujutiseks arvsirgel.

§ 152. Nummerduva hulga mõiste.

Olgu antud lõplik hulk kolmnurki ja lõplik hulk ringe.

Igale kolmnurgale paigutame juurde ringi ehk nagu räägitakse, viime vastavusse kahe hulga elemendid. Oletame, et



Joon. 10.

ringide arv on ühesugune kolmnurkade arvuga. See tähendab, et igale kolmnurgale vastab ainult üks ring ja ümberpöördult, igale ringile vastab ainult üks kolmnurk.

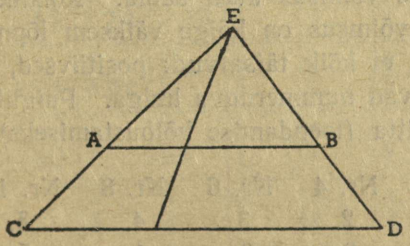
Kahe lõpliku hulga elementide vahel on kindlaks tehtud üksühene vastavus. Hulgad on ekvivalentsed.

Kui on tarvis leida lõpliku hulga elementide arvu, siis loendatakse need. Loendamise protsess seisab loendavate esemete viimises üksühesesse vastavusse loomulikkude arvude

rea arvudega: eranditult igale esemele kinnistatakse arvud 1, 2, 3 jne. Loendades ülaltoodud kolmnurkade hulka, me leiame, et viimasele kolmnurgale on kinnistatud arv 10. Hulga võimsust iseloomustatakse arvuga 10.

Lõpliku hulga omadused. Lõpliku hulga osa ei saa viia üksühesesse vastavusse terve hulgaga, s. t. lõpliku hulga osa ei ole ekvivalentne terve hulgaga.

Teise resultaadi saame lõpmatute hulkade kasutamisel. Lõpmatu hulk võib olla võrdvõimne oma osaga. Võtame näiteks loomulikkude arvude hulga ja selle osa — paarisarvude hulga; mõlemad hulgad on lõpmatud. Igale esimese hulga



Joon. 11.

elemendile saab vastavusse seada teise hulga kindel element ja ümberpöördult, teise hulga igale elemendile vastab esimese hulga kindel element.

Seda üksühest vastavust saab kindlaks teha järgmise skeemi abil.

1, 2, 3, 4, 5, 6 ...
2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

Kui kahe hulga elemendid on seatud üksühesesse vastavusse, siis nimetatakse neid hulki võrdvõimsateks (ehk ekvivalentseteks). Lõpmatu hulk saab olla võrdvõimne oma osaga; selles seisabki lõpmatute hulkade iseloomulik omadus, mis eraldab neid lõplikkudest hulkadest.

Vaatleme teist näidet. Näitame, et kahe mistahes lõigu punktide hulgad on ekvivalentsed. Esimesel pilgul paistab see ebatõenäolisena, sest pikemal lõigul peaks olema suurem punktide hulk. Vaatleme joonist 11.

Ühendades sirglõigu CD mistahes punkti punktiga E, me lõikame sirglõiku AB igakord ühes punktis. Seejuures lõigu CD igale punktile vastab lõigu AB punkt ja ümberpöördult. Kahe erineva lõigu punktide hulgad on võrdvõimsad.

Lõpmatut hulka nimetatakse nummerduvaks, kui ta on võrdvõimne kõikide loomulikkude arvude hulgaga (selle elemente saab nummerdada). Nagu me näeme edasi ei ole lõpmatute hulkade võimsus alati sama. Kõikide loomulikkude arvude hulga võimsus on kõige väiksem lõpmatutest hulkadest. Näitame, et kõik täisarvud: positiivsed, negatiivsed ja null moodustavad nummerduva hulga. Paigutame kõik täisarvud kahte ritta (loendamise hõlbustamiseks):

Nr. 1	Nr. 2	Nr. 4	Nr. 6	Nr. 8	Nr. 10	Nr. 12 . . .
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,
	— 1,	— 2,	— 3,	— 4,	— 5,	— 6,
	Nr. 3	Nr. 5	Nr. 7	Nr. 9	Nr. 11	Nr. 13 . . .

Nummerdame täisarve järgmises järjekorras. Arvule 0 paigutame vastavaks nr. 1, arvule 1 — nr. 2, arvule (— 1) — nr. 3, arvule 2 — nr. 4, arvule (—2) nr. 5 jne. Kõik positiivsed arvud saavad paarisnumbrid ja negatiivsed — paaritud numbrid. Niisuguse loendamise süsteemi puhul ei jää ükski täisarv ilma numbrita, sest täisarvude hulga kõik elemendid viiakse üksühesse vastavusse loomulikkude arvude rea arvudega ja see tähendab, et kõikide täisarvude hulk on nummerduv.

Näitame, et kõikide ratsionaalarvude hulk on samuti nummerduv. Paigutame kõik positiivsed ratsionaalarvud järgmisse tabelisse (joon. 12).

Lugeja

Nimetaja	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1/1 1	2/1 3	3/1 6	4/1 10	5/1 15	6/1 21	7/1 28	8/1 36	jne.
2	1/2 2	2/2 5	3/2 9	4/2 14	5/2 20	6/2 27	7/2 35	8/2	
3	1/3 4	2/3 8	3/3 13	4/3 19	5/3 26	6/3 34	7/3	8/3	
4	1/4 7	2/4 12	3/4 18	4/4 25	5/4 33	6/4	7/4	8/4	
5	1/5 11	2/5 17	3/5 24	4/5 32	5/5	6/5	7/5	8/5	
6	1/6 16	2/6 23	3/6 31	4/6	5/6	6/6	7/6	8/6	
7	1/7 22	2/7 30	3/7	4/7	5/7	6/7	7/7	8/7	
8	1/8 29	2/8	3/8	4/8	5/8	6/8	7/8	8/8	
	jne.								

Joon. 12.

Horisontaalrea arvud kirjutame lugejatena ja vertikaalrea arvud — nimetajatena. Esimesesse ritta on kirjutatud täisarvud, teise ritta — kõik murdarvud nimetajaga kaks, kolmandasse ritta — murdarvud nimetajaga kolm, neljandasse — nimetajaga neli jne.

Sellesse tabelisse on paigutatud kõik positiivsed ratsionaalarvud — täis- ja murdarvud (mitmekordselt). Nummerdame kõik tabeli ruudud, alates esimese rea vasakpoolsest ruudust diagonaalse skeemi järgi. Niisuguse nummerdamise puhul ei jää ükski ruut vahele ja iga ratsionaalarv saab oma

numbri. Järelikult moodustavad ratsionaalarvud nummerduva hulga. Märgime, et selles tabelis on suuruselt võrdseid arve, näiteks $\frac{1}{1}=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}$ jne. või $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$ jne. Tabelist võib kustutada kõik taandatavad murrud ja nummerdamisel jätta vahele tühjad ruudud, kuid see ei oma põhimõttelist tähendust.

Lõpmatud hulgad ei ole kõik nummerduvad. Näitame, et reaalarvude (ratsionaalsete ja irratsionaalsete) hulga elemente pole võimalik nummerdada. Proovime nummerdada reaalarve vahemikus 0 kuni 1. Olgu kõik reaalarvud kujutatud lõplike või lõpmatute kümnendmurdudena. Lõplikku kümnendmurdu saab alati vaadelda kui lõpmatut perioodis oleva nulliga: $0{,}12=0{,}12(0)$. Oletame, et kõik reaalarvud selles vahemikus on nummerdatud ja paigutatud järjekorda.

Esimene arv Nr. 1 kujutab kümnendmurdu:

$0{,}a_1a_2a_3a_4\ldots$, kus a_1 — kümnendike arv, a_2 — sajandike arv jne.

arv Nr. 2 $0{,}b_1b_2b_3b_4\ldots$

arv Nr. 3 $0{,}c_1c_2c_3c_4\ldots$

arv Nr. 4 $0{,}d_1d_2d_3d_4\ldots$

. . . . . .

Oletame, et kõik reaalarvud vahemikus 0 kuni 1 esinevad selles numeratsioonis.

Koostame järgmiselt uue murru, mis samuti esineb vahemikus 0 kuni 1, s. t. kuulub siia hulka: esimeseks numbriks pärast koma võtame mistahes numbri numbritest 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ja 8, mis ei võrdu a_1-ga, $k_1\neq a_1$ (üheksaid ei tarvitata, et vältida kahesust arvude kujutamisel lõpmatu kümnendmurruna), näiteks:

$\frac{1}{2}=0{,}500\ldots=0{,}4999\ldots$

Teiseks numbriks võtame samadest numbritest mistahes numbri, kuid säärase, mis ei võrdu b_2-ga; $k_2\neq b_2$.

Kolmandaks numbriks $k_3\neq c_3$ jne.

Saame arvu $0,k_1k_2k_3\ldots$ See uuesti koostatud arv ei esine numeratsioonis, sest ta erineb esimesest esimese kümnendmärgiga, teisest — teise kümnendmärgiga, kolmandast — kolmanda kümnendmärgiga jne.

Järelikult ei saa ta ei esimest, teist, kolmandat ega mingit teist numbrit. Arv, mis kuulub hulka, osutus nummerdamatuks. Järelikult pole kõikide reaalarvude hulk vahemikus 0 kuni 1 nummerduv. On arusaadav, et samuti ka kõikide reaalarvude hulk pole nummerduv.

Seega ei ole kõikide reaalarvude hulk nummerduv.[1]

Kõikide reaalarvude hulga võimsus on suurem nummerduvate hulkade võimsusest ja tähistatakse tähega C. Seda võimsust nimetatakse kontiinumi võimsuseks.

Sõna continuum tähendab pidev, kontiinumi võimsus — see on pidevuse võimsus.

N ä i t e d: 1. Lõpmatul sirgel asetsev punktide hulk on C, sest reaalarvud ja sirge punktid on paigutatavad üksühesesse vastavusse.

2. Saab tõestada, et iga joonlõigu kõikide punktide hulga võimsus on C.

3. Saab tõestada, et ruudu pinna kõikide punktide hulga võimsus on C.

4. Saab tõestada, et kuupi täitvate punktide hulga võimsus samuti võrdub kontiinumi võimsusega.

---

[1] Selle seaduse alusel tõestas Cantor transtsendentsete arvude olemasolu, s. t. arvude, mis ei esine ühegi ratsionaalsete kordajatega algebralise võrrandi lahendis.

Tabel 1.

Algarvude tabel 6000 piiris.

2	193	449	733	1031	1321	1637	1997	2333	2677
3	197	457	739	1033	1327	1657	1999	2339	2683
5	199	461	743	1039	1361	1663	2003	2341	2687
7	211	463	751	1049	1367	1667	2011	2347	2689
11	223	467	757	1051	1373	1669	2017	2351	2693
13	227	479	761	1061	1381	1693	2027	2357	2699
17	229	487	769	1063	1399	1697	2029	2371	2707
19	233	491	773	1069	1409	1699	2039	2377	2711
23	239	499	787	1087	1423	1709	2053	2381	2713
29	241	503	797	1091	1427	1721	2063	2383	2719
31	251	509	809	1093	1429	1723	2069	2389	2729
37	257	521	811	1097	1433	1733	2081	2393	2731
41	263	523	821	1103	1439	1741	2083	2399	2741
43	269	541	823	1109	1447	1747	2087	2411	2749
47	271	547	827	1117	1451	1753	2089	2417	2753
53	277	557	829	1123	1453	1759	2099	2423	2767
59	281	563	839	1129	1459	1777	2111	2437	2777
61	283	569	853	1151	1471	1783	2113	2441	2789
67	293	571	857	1153	1481	1787	2129	2447	2791
71	307	577	859	1163	1483	1789	2131	2459	2797
73	311	587	863	1171	1487	1801	2137	2467	2801
79	313	593	877	1181	1489	1811	2141	2473	2803
83	317	599	881	1187	1493	1823	2143	2477	2819
89	331	601	883	1193	1499	1831	2153	2503	2833
97	337	607	887	1201	1511	1847	2161	2521	2837
101	347	613	907	1213	1523	1861	2179	2531	2843
103	349	617	911	1217	1531	1867	2203	2539	2851
107	353	619	919	1223	1543	1871	2207	2543	2857
109	359	631	929	1229	1549	1873	2213	2549	2861
113	367	641	937	1231	1553	1877	2221	2551	2879
127	373	643	941	1237	1559	1879	2237	2557	2887
131	379	647	947	1249	1567	1889	2239	2579	2897
137	383	653	953	1259	1571	1901	2243	2591	2903
139	389	659	967	1277	1579	1907	2251	2593	2909
149	397	661	971	1279	1583	1913	2267	2609	2917
151	401	673	977	1283	1597	1931	2269	2617	2927
157	409	677	983	1289	1601	1933	2273	2621	2939
163	419	683	991	1291	1607	1949	2281	2633	2953
167	421	691	997	1297	1609	1951	2287	2647	2957
173	431	701	1009	1301	1613	1973	2293	2657	2963
179	433	709	1013	1303	1619	1979	2297	2659	2969
181	439	719	1019	1307	1621	1987	2309	2663	2971
191	443	727	1021	1319	1627	1993	2311	2671	2999

3001	3361	3701	4057	4441	4799	5171	5531	5881
3011	3371	3709	4073	4447	4801	5179	5557	5897
3019	3373	3719	4079	4451	4813	5189	5563	5903
3023	3389	3727	4091	4457	4817	5197	5569	5923
3037	3391	3733	4093	4463	4831	5209	5573	5927
3041	3407	3739	4099	4481	4861	5227	5581	5939
3049	3413	3761	4111	4483	4871	5231	5591	5953
3061	3433	3767	4127	4493	4877	5233	5623	5981
3067	3449	3769	4129	4507	4889	5237	5639	5987
3079	3457	3779	4133	4513	4903	5261	5641	
3083	3461	3793	4139	4517	4909	5273	5647	
3089	3463	3797	4153	4519	4919	5279	5651	
3109	3467	3803	4157	4523	4931	5281	5653	
3119	3469	3821	4159	4547	4933	5297	5657	
3121	3491	3823	4177	4549	4937	5303	5659	
3137	3499	3833	4201	4561	4943	5309	5669	
3163	3511	3847	4211	4567	4951	5323	5683	
3167	3517	2851	4217	4583	4957	5333	5689	
3169	3527	3853	4219	4591	4967	5347	5693	
3181	3529	3863	4229	4597	4969	5351	5701	
3187	3533	3877	4231	4603	4973	5381	5711	
3191	3539	3881	4241	4621	4987	5387	5717	
3203	3541	3889	4243	4637	4993	5393	5737	
3209	3547	3907	4253	4639	4999	5399	5741	
3217	3557	3911	4259	4643	5003	5407	5743	
3221	3559	3917	4261	4649	5009	5413	5749	
3229	3571	3919	4271	4651	5011	5417	5779	
3251	3581	3923	4273	4657	5021	5419	5783	
3253	3583	3929	4283	4663	5023	5431	5791	
3257	3593	3931	4289	4673	5039	5437	5801	
3259	3607	3943	4297	4679	5051	5441	5807	
3271	3613	3947	4327	4691	5059	5443	5813	
3299	3617	3967	4337	4703	5077	5449	5821	
3301	3623	3989	4339	4721	5081	5471	5827	
3307	3631	4001	4349	4723	5087	5477	5839	
3313	3637	4003	4357	4729	5099	5479	5843	
3319	3643	4007	4363	4733	5101	5483	5849	
3323	3659	4013	4373	4751	5107	5501	5851	
3329	3671	4019	4391	4759	5113	5503	5857	
3331	3673	4021	4397	4783	5119	5507	5861	
3343	3677	4027	4409	4787	5147	5519	5867	
3347	3691	4049	4421	4789	5153	5521	5869	
3359	3697	4051	4423	4793	5167	5527	5879	

Tabel 2.

Arvude 1 kuni 100 ruutude tabel.

N	N^2	N	N^2	N	N^2	N	N^2
1	1	26	676	51	2601	76	5776
2	4	27	729	52	2704	77	5929
3	9	28	784	53	2809	78	6084
4	16	29	841	54	2916	79	6241
5	25	30	900	55	3025	80	6400
6	36	31	961	56	3136	81	6561
7	49	32	1024	57	3249	82	6724
8	64	33	1089	58	3364	83	6889
9	81	34	1156	59	3481	84	7056
10	100	35	1225	60	3600	85	7225
11	121	36	1296	61	3721	86	7396
12	144	37	1369	62	3844	87	7569
13	169	38	1444	63	3969	88	7744
14	196	39	1521	64	4096	89	7921
15	225	40	1600	65	4225	90	8100
16	256	41	1681	66	4356	91	8281
17	289	42	1764	67	4489	92	8464
18	324	43	1849	68	4624	93	8649
19	361	44	1936	69	4761	94	8836
20	400	45	2025	70	4900	95	9025
21	441	46	2116	71	5041	96	9216
22	484	47	2209	72	5184	97	9409
23	529	48	2304	73	5329	98	9604
24	576	49	2401	74	5476	99	9801
25	625	50	2500	75	5625	100	10000

Tabel 3.

Arvude 1 kuni 100 kuupide tabel.

N	N^3	N	N^3	N	N^3
1	1	34	39 304	67	300 763
2	8	**35**	**42 875**	68	314 432
3	27	36	46 656	69	328 509
4	64	37	50 653	**70**	**343 000**
5	**125**	38	54 872	71	357 911
6	216	39	59 319	72	373 248
7	343	**40**	**64 000**	73	389 017
8	512	41	68 921	74	405 224
9	729	42	74 088	**75**	**421 875**
10	**1 000**	43	79 507	76	438 976
11	1 331	44	85 184	77	456 533
12	1 728	**45**	**91 125**	78	474 552
13	2 197	46	97 336	79	493 039
14	2 744	47	103 823	**80**	**512 000**
15	**3 375**	48	110 592	81	531 441
16	4 096	49	117 649	82	551 368
17	4 913	**50**	**125 000**	83	571 787
18	5 832	51	132 651	84	592 704
19	6 859	52	140 608	**85**	**614 125**
20	**8 000**	53	148 877	86	636 056
21	9 261	54	157 464	87	658 503
22	10 648	**55**	**166 375**	88	681 472
23	12 167	56	175 616	89	704 969
24	13 824	57	185 193	**90**	**729 000**
25	**15 625**	58	195 112	91	753 571
26	17 576	59	205 379	92	778 688
27	19 683	**60**	**216 000**	93	804 357
28	21 952	61	226 981	94	830 584
29	24 389	62	238 328	**95**	**857 375**
30	**27 000**	63	250 047	96	884 736
31	29 791	64	262 144	97	912 673
32	32 768	**65**	**274 625**	98	941 192
33	35 937	66	287 496	99	970 299

Sisukord.

I JAGU.

Täisarvud.

I peatükk. **Loomuliku arvu (positiivse täisarvu) mõiste.**

Lk.

§ 1. Aritmeetika ainestik 3
§ 2. Loomulikkude arvude rida ja selle omadused 4
§ 3. Loendamise protsess 6
§ 4. Null 9
§ 5. Loomulikkude arvude omadused 10

II peatükk. **Arvusüsteemid.**

§ 6. Arvusüsteemi mõiste 10
§ 7. Peastarvutuse alused arvudega kümnendsüsteemis . . . 12
§ 8. Kirjaliku arvutuse alused kümnendsüsteemis 13
§ 9. Arvude lugemise ja kirjutamise reeglid 14
§ 10. Rooma ja vana-slaavi numeratsioon 15
§ 11. Teised arvusüsteemid 18
§ 12. Üleminek ühelt arvusüsteemilt teisele 19

III peatükk. **Liitmine.**

§ 13. Sissejuhatus 23
§ 14. Loomulikkude arvude summa 23
§ 15. Liitmise kasutamine ülesannete lahendamisel 26
§ 16. Mitme arvu summa 27
§ 17. Liitmise seadused (põhiomadused) 28
§ 18. Järeldusi liitmise põhiseadustest 30
§ 19. Liitmise reeglid 32

IV peatükk. **Lahutamine.**

Lk.

§ 20. Tehte definitsioon 34
§ 21. Järeldusi lahutamise definitsioonist 35
§ 22. Lahutamise kasutamine ülesannete lahendamisel 36
§ 23. Liitmise ja lahutamise liikmetevahelised seosed 37
§ 24. Arvu lahutamine mitme arvu summast 38
§ 25. Liitmiste ja lahutamiste rea omadused 39
§ 26. Summa lahutamine 43
§ 27. Lahutamise reegel 44
§ 28. Liitmise ja lahutamise kontrollimine 46
§ 29. Sulgude kasutamine liitmisel ja lahutamisel 47

V peatükk. **Korrutamine.**

§ 30. Tehte definitsioon 49
§ 31. Korrutamise kasutamine ülesannete lahendamisel . . . 51
§ 32. Mitme teguri korrutis 51
§ 33. Korrutamise seadused (põhiomadused) 51
§ 34. Järeldusi korrutamise põhiomadustest 60
§ 35. Korrutamise reegel 63

VI peatükk. **Jagamine.**

§ 36. Tehte definitsioon 67
§ 37. Jagamise erijuhud 69
§ 38. Jagamine jäägiga 70
§ 39. Loomulikkude arvude jagamise üldefinitsioon 71
§ 40. Järeldusi jagamise definitsioonist 72
§ 41. Jagamise kasutamine ülesannete lahendamisel 73
§ 42. Andmete ja tulemuse vahelised seosed korrutamisel ja jagamisel 75
§ 43. Korrutamiste ja jagamiste rea põhiomadused 76
§ 44. Jagamise distributiivsus (summa ja vahe jagamine) antud arvuga 80
§ 45. Mitme arvu korrutise jagamine antud arvuga ja mitme arvu korrutisega 82
§ 46. Arvude jagamise reegleid 83
§ 47. Korrutamise ja jagamise kontrollimine 87
§ 48. Sulgude kasutamine 89

VII peatükk. **Tehete resultaatide muutumine komponentide muutumisel.**

Lk.

§ 49. Summa muutumine 92
§ 50. Vahe muutumine 94
§ 51. Korrutise muutumine 98
§ 52. Jagatise muutumine 100

VIII peatükk. **Nimega arvud.**

§ 53. Suuruse mõiste 102
§ 54. Suuruste mõõtmine 103
§ 55. Suuruste omadusi 106
§ 56. Mõõdud 108
§ 57. Meetermõõdustik 108
§ 58. Mõõdud, mis ei kuulu meetersüsteemi 116
§ 59. Kombineeritud mõõduühikud 121
§ 60. Nimega arvud 123
§ 61. Nimega arvude teisendamine 124
§ 62. Tehted nimega arvudega 127

II JAGU.

Arvude jaguvus.

IX peatükk. **Arvude jaguvuse põhiteoreemid.**

§ 63. Definitsioon 140
§ 64. Teoreem summa jaguvusest antud arvuga 143
§ 65. Teoreem vahe jaguvusest antud arvuga 143
§ 66. Vajalik ja piisav tingimus kahe liidetava summa jaguvuseks antud arvuga 145
§ 67. Korrutise jaguvus antud arvuga 146
§ 68. Teoreem jagatava, jagaja ja jäägi jaguvusest antud arvuga 147

X peatükk. **Arvude jaguvuse tunnused.**

§ 69. Arvude jaguvuse tunnused 2-ga, 5-ga, 4-ga, 25-ga, 8-ga, 125-ga, 3-ga ja 9-ga 148
§ 70. 7-ga, 11-ga ja 13-ga jaguvuse tunnused 151
§ 71. Teoreem arvude jaguvuse üldtunnusest 153

XI peatükk. **Antud arvude suurim ühisjagaja (ühistegur).**

Lk.

§ 72. Ühistegurita arvud (suhtelised algarvud) 155
§ 73. Teoreemid, millede alusel leitakse suurim ühisjagaja . . 156
§ 74. Eukleidese algoritm 157
§ 75. Kahe arvu S. Ü. leidmine järjestikuse jagamise teel . . 159
§ 76. S. Ü. põhiomadused 161
§ 77. Teoreem jagatistest, mis saadakse antud arvude jagamisel nende S. Ü-ga 164
§ 78. Teoreem kahe arvu korrutise jaguvusest arvuga, mis on ühe teguri suhtes ühistegurita 165
§ 79. Teoreem antud arvu jaguvusest kahe ühistegurita arvu korrutisega 166
§ 80. Kolme ja enama arvu S. Ü. 167
§ 81. S. Ü. ja kahe tundmatuga esimese astme määramatu võrrandi lahendamine 167
§ 82. S. Ü. kasutamine mõningate aritmeetiliste ülesannete lahendamisel 173

XII peatükk. **Väikseim ühiskordne.**

§ 83. Teoreem kahe loomuliku arvu V. Ü. omadusest 174
§ 84. Teoreem nende jagatiste kohta, mis tekivad antud arvude väikseima ühiskordse jagamisel antud arvudega . . . 176
§ 85. Mitme antud arvu V. Ü. leidmine 177
§ 86. V. Ü. rakendamine ülesannete lahendamisel 178

XIII peatükk. **Algarvude teooria.**

§ 87. Algarvu definitsioon ja omadused 179
§ 88. Teoreem iga loomuliku arvu omadusest 180
§ 89. Teoreem kahe ühisteguriga arvu omadusest 181
§ 90. Eukleidese teoreem algarvude rea lõpmatusest 181
§ 91. Algarvude tabel 182
§ 92. Algarvude tunnus 186

XIV peatükk. **Kanooniline arvude algtegureiks lahutamine.**

§ 93. Põhiteoreemid ja nende järeldused 187
§ 94. Teoreem arvu kanoonilise lahutuse ühesusest 190
§ 95. Kanoonilise lahutuse tehnika 192

XV peatükk. **Arvude algtegureiks lahutamise teooria rakendamine antud arvude S. Ü. ja V. Ü. leidmiseks.**

Lk.

§ 96. Vajalik ja piisav tingimus ühe arvu jagumiseks teisega 193
§ 97. Kahe või enama algtegureiks lahutatud arvu S. Ü. leidmine 194
§ 98. Praktiline võte mitme arvu S. Ü. kiireks leidmiseks nende arvude algtegureiks lahutamise teel 195
§ 99. Antud arvude kõikide jagajate leidmine 196
§ 100. Kahe või mitme algtegureiks lahutatud arvu V. Ü. leidmine 198
§ 101. Arvude V. Ü. kiire leidmise praktiline võte nende algtegureiks lahutamise teel 199

III JAGU.

Murdarvud.

XVI peatükk. **Harilikud murrud.**

§ 102. Murdude tekkimine ja definitsioon 200
§ 103. Murdude võrdsus ja põhiomadused 204
§ 104. Murdude taandamine: murdude kaks taandamise ja ühenimelisteks teisendamise viisi 208
§ 105. Murdude ebavõrdsus 211
§ 106. Murrud, millede nimetaja on üks 212
§ 107. Murdude liigitus terviku suhtes 213
§ 108. Murru lugeja ja nimetaja vähendamine või suurendamine ühe ja sama arvu võrra 214

XVII peatükk. **Tehted harilikkude murdudega.**

§ 109. Murdude liitmine 217
§ 110. Loomulikkude arvude liitmisseaduste laiendamine murdarvude liitmisele 219
§ 111. Murdude lahutamine 222
§ 112. Murdude liitmiste ja lahutamiste rea omadused . . . 223
§ 113. Murdude korrutamine 226
§ 114. Loomulikkude arvude korrutamisseaduste laiendamine murdarvudele 228
§ 115. Murdude jagamine 230
§ 116. Jagamine — korrutamine pöördmurruga 232
§ 117. Murru korrutamise või jagamise konkreetne mõte tema korrutamisel või jagamisel täisarvuga või murruga 233

Rbl. 8.—

A
A-18110

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU
1 0300 00017557 2

49:003

Rbl. 8.—

A
A-18110

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU
1 0300 00017557 2

49:003

ARITMEETIKA PEDAGOOGILISTELE KOOLIDELE

B. TULINOV
JA
J. TŠEKMARJOV

ARITMEETIKA

PEDAGOOGILISTELE KOOLIDELE

RK
„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“