ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

к а ф е д р а

теоретической механики

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Lubatud kaitsmisele
Ü. Lepik
Teoreetilise mehhaanika
kat. juhat.
5. VI 1974.

Руководитель: Ю. Кирс

Исполнитель: студент У курса
В. Корсунский

Тарту
1974

ВВЕДЕНИЕ

В наше время математика играет огромную роль. Нет такой области науки или техники, где бы она не применялась. Существует и обратная связь: научные открытия и появление новых отраслей промышленности в свою очередь развивают математику - так возникло линейное программирование.

Задача нахождения оптимального решения является очень древней. Человеку всегда приходилось экономить запасы, время, энергию. Это вынуждало искать упрощений, думать о том, как получить максимум выигрыша при минимуме затрат. Очень многие процессы в природе с большой точностью отображаются дифференциальными уравнениями. Например, распространение колебаний, теплопроводность, а также просто механическое движение. Этот факт является причиной, почему задача нахождения минимума функционала при наличии дифференциальных связей была поставлена еще в 18 веке.

Та же задача, но уже с ограничениями на управление, долгое время не была решена.

Только в 1961 году был опубликован замечательный метод, названный принципом максимума Понтрягина, который дал необходимые условия для задач оптимального управления с ограничениями.

Благодаря развитию вычислительной техники большое распространение приобрели и приближенные методы.

Методы последовательного приближения, локальных вариаций, градиентные методы позволяют с большой точностью находить управляющие параметры. Настоящая работа посвящена применению метода моментов к теории оптимального управления.

Работа делится на семь параграфов. В первом параграфе излагаются некоторые положения метода моментов, которые будут использованы в последующих параграфах. Во втором параграфе ставится задача быстродействия для системы линейных дифференциальных уравнений. Эта задача сводится к некоторой задаче теории моментов.

Материал второго параграфа в основном излагается по [2].

В третьем и четвертом параграфах ставится задача быстродействия для линейного дифференциального уравнения второго порядка. На основе общей теории эта задача сводится к некоторой l- проблеме моментов, решая которую получаем уравнения для определения минимального времени.

В пятом параграфе поставленная ранее задача решается для одного конкретного случая. Находится минимальное время и управление. Для нахождения времени используется программа, написанная на алгоритмической языке "МАЛГОЛ".

В шестом параграфе метод моментов применяется для оптимального управления системами с распределенными параметрами: задача быстродействия для тонкой пластинки сводится к бесконечномерной проблеме моментов.

В последнем, седьмом параграфе решается задача быстродействия для тонкого стержня, края которого свободно опёрты.

§ I. ТЕОРИЯ l - ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ.

Назовем l - проблемой в линейном нормированном пространстве E следующую задачу:
Даны числа $\{\alpha_i\}_1^n$ и $l>0$. Найти при каких условиях существуют линейные функционалы $F(g)$, удовлетворяющие соотношениям

$$F(g_k)=\alpha_k, \quad k=1,2,\dots,n \qquad (I.I)$$
$$\|F\|\le l,$$

где g_k - заданные элементы из E.
Аналогично можно поставить и бесконечномерную проблему моментов.

Пусть в пространстве E заданы n линейно независимых элементов $g_1, g_2, \dots, g_n$.
Тогда для всякой системы чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $\left(\sum_k \alpha_k^2>0\right)$ могут быть поставлены две задачи:

I. Найти минимум норм линейных ограниченных функционалов $F(g)$, удовлетворяющих соотношениям

$$F(g_k)=\alpha_k, \quad k=1,2,\dots,n.$$

Этот минимум будем обозначать через λ_n.

II. Найти

$$\frac{1}{M}=\min_{\xi}\|\xi_1 g_1+\dots+\xi_n g_n\|$$

при условии

$$\alpha_1\xi_1+\dots+\alpha_n\xi_n=1.$$

Имеет место теорема.

Теорема I.I. Минимум в задаче I совпадает с величиной, обратной минимуму в задаче II, то есть $\lambda_n = M$.

Следствием этой теоремы является утверждение: линейный функционал $F(g)$, удовлетворяющий соотношениям (I.I), существует тогда и только тогда, когда

$$l \geq \lambda_n .$$

Можно записать

$$\lambda_n = \lambda_n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n),$$

то есть λ_n является функцией аргументов $\{\alpha_i\}_1^n$.

Пусть элементы пространства E зависят от некоторого параметра T. Тогда норма в этом пространстве также зависит от параметра T. Эту зависимость нормы элементов $g \in E_T$ от параметра T будем обозначать через $\|g\|_T$.

При этом функция $\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ будет зависеть и от T. Обозначим этот факт так:

$$\lambda_n(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, T) = \min_{\xi} \|\xi_1 g_1 + \ldots \xi_n g_n\|_T$$

при условии

$$\alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n = 1 .$$

Имеет место теорема.

Теорема I.2. Если норма $\|g\|_T$ и числа $\alpha_1(T)$, $\alpha_2(T), \ldots, \alpha_n(T)$ являются непрерывными функциями параметра T, то и $\lambda_n(\alpha_1(T), \ldots, \alpha_n(T), T)$ также является непрерывной функцией параметра T.

Рассмотрим теперь приложение общих результатов l- проблемы моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве к некоторым конкретным функциональным пространствам, встречающимся на практике.

Говорят, что функция $u(t)$ принадлежит классу L^p, если $u(t)$ измерима и интегрируема по модулю с p-ой степенью. Норма в L^p определяется

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |u(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

где Ω некоторое множество.

Говорят, что функция $u(t)$ принадлежит классу М на некотором множестве Ω, если она почти везде ограничена на этом множестве. Норма в М определяется

$$\|u\| = \max |u(t)|.$$

В качестве Ω возьмем отрезок $[0,T]$.

Поставим задачу: найти такую функцию $u(t)$, принадлежащую пространству $L^p (1 \le p < \infty)$ или пространству М, ограниченную по норме числом $l \; (l > 0)$

$$\|u\| \le l,$$

чтобы выполнялась система равенств

$$\alpha_k = \int_0^T g_k(t)\, u(t)\, dt, \quad k = 1, 2, \ldots$$

где α_k - заданные числа и g_k - заданные линейно независимые функции, принадлежащие пространству $L^{p'}$ (где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) или же пространству L (если $u(t)$ принадлежит М), причем Т должно быть минимально.

Теорема I.3. При решении только что поставленной задачи возможна следующая альтернатива: I) задача не имеет решения ни при каком $T \geq 0$,

2) существует единственное решение этой задачи, которое дается формулой

$$u(t) = \ell^{p'} \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k(t) \right|^{p'-1} \operatorname{sign} \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k(t), \qquad (I.2)$$

$$0 \leq t \leq t_1, \quad 1 \leq p' < \infty$$

где постоянные числа являются решениями задачи: найти

$$\min_{\xi} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^{n} \xi_k g_k(t) \right|^{p'} dt = \frac{1}{\lambda_n^{p'}}$$

при условии

$$\alpha_1(T)\xi_1 + \ldots + \alpha_n(T)\xi_n = 1 .$$

где T - наименьший корень уравнения

$$\lambda_n(\alpha_1(T), \ldots, \alpha_n(T)) = \ell .$$

Материал данного параграфа взят из книг [2], [3]. Там же можно найти доказательства приведенных теорем.

§ 2. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ.

Пусть дифференциальные уравнения движения объекта записываются в векторном виде

$$\dot{g} = Cg + Du, \qquad (2.1)$$

где $\dot{g} = \frac{dg}{dt}$, а g - вектор координат объекта размерности n, u - вектор управления, C и D есть некоторые матрицы, элементы которых, в общем случае, зависят от t.

Кроме того, задано начальное положение объекта

$$g_0 = g(t_0). \qquad (2.2)$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении такого управления $u(t)$, чтобы объект достигал $g^*(t_1)$ за минимальное время $T = t_1 - t_0$, причем должно выполняться ограничение

$$\|u\| \le l, \qquad (2.3)$$

где l - заданное положительное число.
Норму можно понимать в смысле L^p или М.

Как известно, общее решение уравнения (2.1) при заданном $u = u(t)$ можно представить в виде

$$g(t) = \Phi(t)\, g_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Psi(\tau) D(\tau) u(\tau)\, d\tau, \qquad (2.4)$$

где $\Phi(t)$ матрица фундаментальных решений однородной системы

$$\dot{g} = Cg, \qquad (2.5)$$

соответствующей системе (2.I), а $\Psi(t)$ -матрица, обратная к матрице $\Phi(t)$, то есть

$$\Psi(t) = \Phi^{-1}(t) . \qquad (2.6)$$

Кроме того, $\Psi(t)$ можно определить как матрицу фундаментальных решений системы, сопряженной к (2.5)

$$\dot{g} = -C' g . \qquad (2.7)$$

Заметим, что из теории систем линейных дифференциальных уравнений следует

$$\Psi(t) = \Phi(-t) . \qquad (2.8)$$

Пусть в некоторый момент времени осуществилось равенство

$$g(t_1) = g^*(t) . \qquad (2.9)$$

Умножая обе части уравнения (2.4) на $\Psi(t_1)$ и учитывая (2.6), получаем

$$\alpha(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\, u(\tau)\, d\tau , \qquad (2.10)$$

где

$$\alpha(t) = \Psi(t)\, g^*(t) - g_0 ,$$

$$G(t) = \Psi(t)\, D(t) . \qquad (2.11)$$

Как обычно в теории оптимального управления предполагаем, что объект надо перевести в начало координат, тогда

$$g^*(t_1) = 0 ,$$

$$-g_0 = \int_{t_0}^{t_1} G(\tau)\, u(\tau)\, d\tau . \qquad (2.12)$$

Тем самым мы свели задачу к ℓ -проблеме моментов: найти вектор-функцию $u(t)$, чтобы выполнялось (2.3), удовлетворялось (2.12) и время Т= $t_1 - t_0$ было минимально.

§ 3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Рассмотрим дифференциальное уравнение движения точки

$$\ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \beta y = u \tag{3.1}$$

Заданы начальные условия

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= g_{10} \\ \dot{y}(0) &= g_{20} \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Требуется перевести точку в начало координат

$$\left.\begin{aligned} y(T) &= 0 \\ \dot{y}(T) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

за минимальное время так, чтобы управление $u(t)$ было бы меньше заданного числа l

$$\max|u(t)| \le l \tag{3.3}$$

Введем обозначения

$$y = x_1 ,$$

$$\dot{y} = x_2 .$$

Тогда уравнение (3.I), начальные и конечные условия примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 , \\ &\dot{x}_2 = -\beta x_1 - 2\alpha x_2 + u , \\ &x_1(0) = g_{10} , \qquad x_1(T) = 0 , \\ &x_2(0) = g_{20} , \qquad x_2(T) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

Теперь можно применить результаты второго параграфа. По (3.4)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -2\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (3.5)$$

Рассмотрим три случая:

I. Пусть собственные значения матрицы C вещественны и различны. Обозначим их через λ_1 и λ_2. Матрица фундаментальных решений имеет вид

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{\lambda_2 t}) \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу $\Psi(t)$ легко можно найти, используя (2.8)

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(\lambda_2 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}) & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \\ \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) & \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) \end{pmatrix}.$$

По (2.II)

$$G(t) = \left(-\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}), \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}) \right). \qquad (3.6)$$

II. Пусть собственные значения, равны обозначим их через λ. Тогда

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} (1-\lambda t)e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} \\ -\lambda^2 t e^{\lambda t} & (1+\lambda t)e^{\lambda t} \end{pmatrix}, \qquad (3.7)$$

$$G(t) = \left(-t e^{\lambda t}, (1-\lambda t)e^{\lambda t} \right).$$

Ш. Пусть собственные значения комплексные.

Обозначим через σ вещественную часть,

через λ – мнимую. Тогда

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{\sigma t}}{\lambda}(\lambda\cos\lambda t - \sigma\sin\lambda t) & \frac{e^{\sigma t}}{\lambda}\sin\lambda t \\ -\frac{\sigma^2+\lambda^2}{\lambda^2} e^{\sigma t}\sin\lambda t & \frac{e^{\sigma t}}{\lambda}(\sigma\sin\lambda t + \lambda\cos\lambda t) \end{pmatrix}$$

$$G(t) = \left(-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\sin\lambda t\ ,\ \frac{e^{-\sigma t}}{\lambda}(-\sigma\sin\lambda t + \lambda\cos\lambda t)\right).$$

Обозначим

$$G(t) = (-A(t)\,,\, B(t)). \tag{3.8}$$

Тогда (2.I2) примет вид

$$g_{10} = \int_0^T A(\tau)\,u(\tau)\,d\tau \tag{3.9}$$

$$-g_{20} = \int_0^T B(\tau)\,u(\tau)\,d\tau \tag{3.9}$$

По теореме I.3. наша задача разрешима, если разрешима задача

$$\min_{\xi_1,\xi_2} \int_0^T |A(\tau)\xi_1 + B(\tau)\xi_2|\,d\tau = \frac{1}{\ell} \tag{3.10}$$

$$\xi_1 g_{10} - \xi_2 g_{20} = 1 \tag{3.11}$$

и решение нашей задачи выражается

$$u(t) = \ell\,\mathrm{sign}(\xi_1 A + \xi_2 B). \tag{3.12}$$

Рассмотрим случай действительных собственных значений. Предположим g_{20} не равняется нулю. Тогда без ограничения общности можно считать

$$g_{20} = 1.$$

Из (3.II)

$$\xi_2 = \xi_1 g_{10} - 1 .$$

Обозначим

$$J(\xi_1, \xi_2) = \int_0^T |A \xi_1 + B \xi_2| d\tau .$$

Тогда

$$J(\xi_1, \xi_2) = \int_0^T |(A + q_{10} B)\xi_1 - B| d\tau .$$

Полагая $\xi = -\xi_1$, получим

$$J(\xi) = \int_0^T |(A + q_{10} B)\xi + B| d\tau . \qquad (3.I3)$$

Нетрудно убедиться по (3.6), (3.7), что

$$A'(t) = B(t), \qquad (3.I4)$$

$$A(t) > 0 \text{, если } t > 0 , \qquad (3.I5)$$

$$A(0) = 0 \quad , B(0) = 1 . \qquad (3.I6)$$

Пусть $g_{10} > 0$. Обозначим

$$Q(t, \xi) = (A + q_{10} B)\xi + B .$$

Возможно четыре случая:

I. Кривая $Q(t, \xi)$ неотрицательна, то есть

$$Q(t, \xi) \geqslant 0 \quad , t \in [0, T] . \qquad (3.I7)$$

Покажем, что тогда функция $A + q_{10} B$ на отрезке $[0, T]$ строго положительна. В самом деле,

$$A(0) + q_{10} B(0) = g_{10} > 0 . \qquad (3.I8)$$

Пусть существует $t_0 \; (0 \leq t_0 \leq T)$, что

$$A(t_0) + q_{10} B(t_0) = 0 .$$

Тогда

$$B(t_0) = -\frac{A(t_0)}{q_{10}} < 0 ,$$

что противоречит (3.I7).

В силу непрерывности функций $A(t)$, $B(t)$ и по (3.I8)

$$A(t) + q_{10} B(t) > 0 , \quad t \in [0, T] .$$

Теперь из (3.I7) следует

$$\xi \geq -\frac{B}{A + q_{10} B} , \quad 0 \leq t \leq T . \quad (3.I9)$$

Обозначим

$$\Psi(t) = \frac{B(t)}{A(t) + q_{10} B(t)} \quad (3.20)$$

$$c_1 = \max_{t \in [0,T]} [-\Psi(t)]$$

Исследуем свойства функции $\Psi(t)$

$$\Psi'(t) = \frac{A'' A - A'^2}{(A + q_{10} A')^2} \quad (3.2I)$$

Но A и A' являются независимыми решениями сопряженной системы (2.7), следовательно, их определитель Вронского знакопостоянен и отличен от нуля

Так как

$$W(t) = \begin{vmatrix} A & A' \\ A' & A'' \end{vmatrix} = A'' A - A'^2$$

и

$$W(0) = -1 ,$$

то

$$\Psi'(t) < 0 ,$$

и $\Psi(t)$ убывающая функция. Тогда

$$c_1 = -\frac{B(T)}{A(T)+q_{10}B(T)}. \qquad (3.22)$$

Из (3.I9)

$$\xi \geq c_1 \qquad (3.23)$$

Из (3.I4), (3.I5)

$$c = \int_0^T [A(\tau) + q_{10} B(\tau)]\, d\tau > 0 \qquad (3.24)$$

Теперь по (3.I7)

$$J = c\xi + \int_0^T B(\tau)\, d\tau .$$

По (3.23), (3.24) $J(\xi)$ достигает минимума при

$$\xi_+ = c_1 \qquad (3.25)$$

Таким образом, если множество

$$U_\xi = \{ \xi \mid Q(t,\xi) \geq 0, \ t \in [0,T] \}$$

не пусто, то минимум интеграла J доставляет ξ_+ из (3.25).

2. Пусть теперь

$$(A + q_{10} B)\xi + B \leq 0, \ t \in [0,T] \qquad (3.26)$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{ll} \xi \leq -\dfrac{B}{A+q_{10}B}, & A(t)+q_{10}B(t)>0 \\ \xi \geq -\dfrac{B}{A+q_{10}B}, & A(t)+q_{10}B(t)<0 \end{array}\right\} \qquad (3.27)$$

Обозначим

$$c_1 = \min_{A+q_{10}B>0} [-\Psi(t)] \qquad (3.28)$$

$$c_2 = \max_{A+q_{10}B<0} [-\Psi(t)]$$

Тогда (3.27) примет вид

$$c_2 \leq \xi \leq c_1$$

Так как $[-\psi(t)]$ возрастающая функция и $A + q_{10} B$ в точке ноль положительна, то

$$c_1 = -\frac{B(0)}{A(0) + q_{10} B(0)} = -\frac{1}{q_{10}}.$$

В этом случае по (3.26)

$$J = -c\xi - \int_0^T B(\tau) d\tau.$$

Минимум J достигается при

$$\xi_- = c_1$$

Очевидно, что если существуют положительные кривые $Q(t,\xi)$, то минимизирующей для них будет кривая, имеющая нулем точку T. Аналогично, среди отрицательных кривых минимизирующей будет кривая, проходящая через начало координат.

Пусть теперь $Q(t,\xi)$ знакопеременна на отрезке $[0,T]$. Покажем, что $Q(t,\xi)$ имеет не более двух интервалов знакопостоянства, то есть уравнение

$$Q(t_0, \xi) = 0, \tag{3.29}$$

имеет не более одного корня. В самом деле (3.29) равносильно уравнению

$$\psi(t_0) = -\xi. \tag{3.30}$$

Наше утверждение автоматически вытекает из монотонности функции $\psi(t)$.

3. Пусть $Q(t,\xi)$ меняет знак с плюса на минус.

Тогда

$$J = \int_0^{t_0} ((A + q_{10} B)\xi + B)\, d\tau - \int_{t_0}^{T} ((A + q_{10} B)\xi + B)\, d\tau \qquad (3.31)$$

где t_0 корень уравнения (3.29). По (3.30) между t_0 и ξ устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому считаем, что

$$J = J(t_0) .$$

Минимум функции J достигается при t_0, удовлетворяющем

$$\frac{dJ}{dt_0} = 0 \qquad (3.32)$$

Но

$$\frac{dJ}{dt_0} = \frac{dJ}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dt_0} \qquad (3.33)$$

Из (3.30)

$$\frac{d\xi}{dt_0} = -\frac{d\psi}{dt} > 0 \qquad (3.34)$$

Из (3.32)

$$\frac{dJ}{d\xi} = 0 .$$

Дифференцируя (3.31) и учитывая (3.29), получим

$$\int_0^{t_0} (A + q_{10} B)\, dt - \int_{t_0}^{T} (A + q_{10} B)\, dt = 0 \qquad (3.35)$$

Обозначим

$$\varkappa(t) = \frac{dJ(t)}{d\xi} .$$

Очевидно,

$$\left.\begin{aligned} \varkappa(0) &= -\int_0^T (A + q_{10} B)\, dt < 0 \\ \varkappa(T) &= \int_0^T (A + q_{10} B)\, dt > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (3.36)$$

Следовательно, уравнение (3.35) имеет решение на отрезке $[0,T]$. Из (3.33), (3.34), (3.36) следует, что производная от J меняет знак с минуса на плюс, то есть функция J достигает минимума в точке t_0 из (3.35).

При $t_0=0$ или $t_0=T$ кривые этого случая совпадут с минимизирующими кривыми двух предыдущих случаев.

Тем самым, мы показали, что минимум J достигается в третьем случае.

4. Остался случай, когда $Q(t,\xi)$ меняет знак с минуса на плюс. Тогда уравнения третьего случая изменяют знак, точка экстремума будет точкой максимума, и минимум J будет достигаться при $t_0=0$ или $t_0=T$, то есть среди положительных или отрицательных кривых. Следовательно, этот случай ничего не меняет.

Тем самым, мы показали, что минимум интеграла достигается при

$$\begin{aligned} &Q(t,\xi_0)>0, \quad 0\le t<t_0, \\ &Q(t_0,\xi_0)=0, \\ &Q(t,\xi_0)<0, \quad t_0<t\le T \end{aligned} \tag{3.37}$$

где t_0 удовлетворяет (3.35). Из (3.29)

$$\xi_0 = -\frac{B(t_0)}{A(t_0)+g_{10}B(t_0)} \tag{3.38}$$

Учитывая (3.35), нетрудно убедиться, что минимальное значение интеграла J равно

$$J_{min} = \int_0^{t_0} B\,dt - \int_{t_0}^{T} B\,dt \quad . \qquad (3.39)$$

Так же нетрудно проверить, что формулы (3.35), (3.38), (3.39) будут справедливы и для $g_{i0} = 0$.

§ 4. НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

В этом параграфе мы выведем уравнения, из которых просто найти минимальное время T. Из предыдущего параграфа получаем систему уравнений. Из (3.10),(3.35), (3.39)

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{t_0} B(\tau)d\tau - \int_{t_0}^{T} B(\tau)d\tau = \frac{1}{l} \\ &\int_0^{t_0} (A+g_{10}B)d\tau - \int_{t_0}^{T}(A+g_{10}B)d\tau = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

Упростим эту систему. Введем обозначение

$$\bar{A}(t) = \int A(t)dt$$

Учитывая (3.14), (3.16), произведем интегрирование в каждом из уравнений системы (4.1). Получим

$$\left.\begin{aligned} &\bar{A}(t_0) + g_{10}A(t_0) = \frac{1}{2}\left(\bar{A}(T) + g_{10}A(T) + \bar{A}(0)\right) \\ &A(t_0) \qquad\qquad\quad = \frac{1}{2}\left(A(T) + \frac{1}{l}\right) \end{aligned}\right\}$$

Отсюда получаем

$$\left.\begin{aligned} &\bar{A}(t_0) = \frac{1}{2}\left(\bar{A}(T) + \bar{A}(0) - \frac{g_{10}}{l}\right) \\ &A(t_0) = \frac{1}{2}\left(A(T) + \frac{1}{l}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda = \frac{1}{2}\left(\bar{A}(T) + \bar{A}(0) - \frac{g_{10}}{l}\right) \\ &\Delta = \frac{1}{2}\left(A(T) + \frac{1}{l}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

Система (4.2) примет вид

$$\left.\begin{aligned} &\bar{A}(t_0) = \Lambda \\ &A(t_0) = \Delta \end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

Рассмотрим случаи:

I. Корни действительные, разные и отличные от нуля.

Тогда по (3.6)

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) \\ B &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 t} - \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\right) \\ \bar{A} &= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_2} e^{-\lambda_2 t} - \frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

Подставляем эти значения вместо левой части системы (4.4) и решаем ее относительно $e^{-\lambda_1 t_0}$ и $e^{-\lambda_2 t_0}$

Получаем

$$\begin{aligned} e^{-\lambda_1 t_0} &= -\lambda_1(\Delta + \lambda_2 \Lambda) \\ e^{-\lambda_2 t_0} &= -\lambda_2(\Delta + \lambda_1 \Lambda) \end{aligned} \qquad (4.5')$$

Исключая t_0, получаем уравнения для нахождения T:

$$\left[-\lambda_1(\Delta + \lambda_2 \Lambda)\right]^{\lambda_2} = \left[-\lambda_2(\Delta + \lambda_1 \Lambda)\right]^{\lambda_1} \qquad (4.6)$$

Учитывая (4.4), это уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & 2^{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_1 T} + \frac{\lambda_1(\lambda_2 g_{10}-1)}{c} + 1\right)^{\lambda_2} = \\ & = \left(e^{-\lambda_2 T} + \frac{\lambda_2(\lambda_1 g_{10}-1)}{c} + 1\right)^{\lambda_1} \end{aligned} \qquad (4.7)$$

II. Корни действительны, различны и один из них, например, λ_2 равен нулю. Тогда

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1} \\ B &= e^{-\lambda_1 t} \\ \bar{A} &= \frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{1}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + t\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Подставляем эти равенства в (4.4) и решаем систему относительно t_0 и $e^{-\lambda_1 t_0}$

Получаем

$$\lambda_1 t_0 = \lambda_1(\Delta + \lambda_1 \Lambda) - 1$$

$$e^{-\lambda_1 t_0} = 1 - \lambda_1 \Delta$$

Исключаем t_0

$$e^{1-\lambda_1(\Delta+\lambda_1\Lambda)} = 1 - \lambda_1 \Delta$$

Это уравнение нетрудно преобразовать в следующее

$$\exp\left(-\lambda_1 T + \frac{\lambda_1}{2e}(\lambda_1 g_{10} - 1)\right) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-\lambda_1 T} - \frac{\lambda_1}{e}\right)$$

Решаем это уравнение относительно T:

$$T = \ln\left(\frac{1 - \frac{\lambda_1}{e}}{c - 1}\right), \tag{4.9}$$

где

$$C = 2e^{\frac{\lambda_1}{2e}(\lambda_1 g_{10} - 1)}.$$

Ш. Пусть корни равны и отличны от нуля. Тогда

$$\begin{aligned} A &= t e^{-\lambda t} \\ B &= (1 - \lambda t) e^{-\lambda t} \\ \bar{A} &= -\frac{1}{\lambda}\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{4.10}$$

Система (4.4) примет вид
$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda}\left(t_0 + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t_0} &= \Lambda \\ t_0 e^{-\lambda t_0} &= \Delta \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\lambda\Delta - \ln\left[-\lambda(\Delta + \lambda\Lambda)\right]\cdot(\Delta + \lambda\Lambda) = 0 \tag{4.11}$$

где Λ и Δ определяются (4.3), а A, B, $\bar{A}$ определяются (4.I0).

IУ. Пусть оба корня будут равны нулю. Тогда

$$\begin{aligned} A &= t \\ B &= 1 \\ \bar{A} &= \frac{t^2}{2} \end{aligned} \qquad (4.I2)$$

Подставляем в систему (4.4), получаем

$$\left.\begin{aligned} \frac{t_0^2}{2} &= \Lambda \\ t_0 &= \Delta \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$\Delta^2 = 2\Lambda \qquad (4.I3)$$

Но

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(T + \frac{1}{e}\right)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{T^2}{2} - \frac{q_{10}}{e}\right)$$

Учитывая (4.I3), получаем уравнение для нахождения Т

$$T^2 - \frac{2T}{e} - \left(\frac{4q_{10}}{e} + \frac{1}{c^2}\right) = 0$$

Отсюда

$$T = \frac{1 + \sqrt{4q_{10}l + 2}}{l} \qquad (4.I4)$$

Мы получили уравнения для нахождения оптимального времени. Но решение этих уравнений существует не всегда. В этом случае l - проблема моментов, а, следовательно, и задача оптимального управления не имеют решения.

Например, рассмотрим случай I.
Из уравнения (4.7) видно, что если оба корня отрицательны, то уравнение имеет решение. Если хотя бы один из корней положителен, тогда

$$e^{-\lambda T} \leq 1 , \quad \lambda > 0$$

и существуют такие g_{10} , что величина в круглых скобках будет отрицательной. Следовательно, решения нет. Эти результаты хорошо согласуются с результатами синтеза оптимальных траекторий в [1] .

§ 5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

В § 3 задачу быстродействия для уравнения (3.I) мы свели к l - проблеме моментов. В § 4 были выведены уравнения для нахождения оптимального времени, а именно: уравнения (4.7), (4.9), (4.II), (4.I4). Второе и четвертое из них уже решены относительно Т, остальные нужно решить. Это можно сделать различными способами. Наиболее удобны методы приближённых вычислений: метод Ньютона, секущих и тому подобные.

Была составлена программа OPTIMUM на алгоритмическом языке " МАЛГОЛ" (ж) для решения уравнения (4.7). (смотри приложение). В программе использовалась стандартная процедура вычисления первого слева корня уравнения $f(x)=0$ в заданном интервале $[A, B]$. В качестве $f(x)$ выбиралась разность

$$f(x) = C\left(e^{-\lambda_1 x} + \omega_1\right)^{\lambda_2} - \left(e^{-\lambda_2 x} + \omega_2\right)^{\lambda_1} \tag{5.I}$$

(ж) Смотри [4].

где

$$C = 2^{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$w_1 = \frac{\lambda_1(\lambda_2 g_{10} - 1)}{l} + 1 \qquad (5.2)$$

$$w_2 = \frac{\lambda_2(\lambda_1 g_{10} - 1)}{l} + 1$$

Для примера решим задачу.

Пусть точка движется согласно уравнению

$$\ddot{x} - x = u \qquad (5.3)$$

Требуется перевести точку из положения

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 1 \\ \dot{x}(0) &= 2 \end{aligned}\right\} \qquad (5.4)$$

в начало координат за минимальное время так, чтобы управление $u(t)$ было ограничено

$$|u(t)| \leq 4 \qquad (5.5)$$

Положим

$$y(t) = \frac{1}{2}x(t), \quad v(t) = \frac{1}{2}u(t) \qquad (5.6)$$

Тогда (5.3), (5.4) и (5.5) принимают вид

$$\ddot{y} - y = v \qquad (5.7)$$

$$\left.\begin{aligned} y(0) &= 0,5 \\ \dot{y}(0) &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (5.8)$$

$$|v(t)| \leq 2 \qquad (5.9)$$

Корни характеристического уравнения действительные и различные, причём

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1 \tag{5.10}$$

Теперь решаем уравнение (4.7). Для этого использовалась программа OPTIMUM.
Программа реализовалась на ЭВМ "Минск-22". В результате получили

$$T = 2{,}5326 \tag{5.11}$$

Из (3.12)

$$v(t) = l \operatorname{sign}\left[\xi_1 A(t) + \xi_2 B(t)\right],$$

где ξ_2 определяется (3.11),

$$\xi_1 = -\xi_0, \tag{5.12}$$

а ξ_0 находится из (3.38), $A(t)$, $B(t)$ функции из (4.5).

Сделав несложные преобразования, находим

$$v(t) = 2 \operatorname{sign}(0{,}746 e^{t} - 0{,}239 e^{-t}) \tag{5.13}$$

По (5.6)

$$u(t) = 4 \operatorname{sign}(0{,}746 e^{t} - 0{,}239 e^{-t}) \tag{5.14}.$$

§ 6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ В ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Материал данного параграфа будем рассматривать на конкретном примере.

Пусть тонкая пластинка совершает упругие колебания. Тогда уравнение колебаний имеет вид

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \mathcal{D} \Delta^2 w = g(x,t) \qquad (6.1)$$

где Δ - оператор Лапласа, μ - поверхностная плотность материала, $\mathcal{D}$ - цилиндрическая жёсткость пластины, $g(x,t)$ - интенсивность нагрузки. Кроме того, решение уравнения (6.I) должно удовлетворять граничным условиям - - условиям опирания.

Поставим задачу о быстрейшем переводе пластины из одного состояния в другое. Интенсивность нагрузки $g(x,t)$ считаем управлением.

При каждом $t>0$ разложим решение $w(x,t)$ по собственным функциям $R_k(x)$ оператора Δ^2

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) R_k(x), \qquad (6.2)$$

где (6.3)

$$\Delta^2 R_k = \lambda_k^4 R_k$$

и $R_k(x)$ удовлетворяет граничным условиям.

Аналогично

$$g(x,t) = \sum_{k=1} C_k(t) R_k(x) \tag{6.4}$$

$$c_k(t) = \int_\Omega g(y,t) R_k(y) dy \tag{6.5}$$

Подставляя (6.2), (6.4) в (6.1) и учитывая (6.3), не трудно убедиться, что T_k должно удовлетворять уравнению

$$\mu \ddot{T}_k + D\lambda_k^4 T_k = c_k(t) \tag{6.6}$$

Пусть в начальный момент времени пластина была в положении

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \varphi_0(x) \\ \dot{w}(x,0) &= \varphi_1(x) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Раскладывая эти функции в ряд Фурье по $R_k(x)$, получаем начальные условия для уравнения (6.6)

$$\begin{aligned} T_k(0) &= \varphi_{0k} \\ \dot{T}_k(0) &= \varphi_{1k} \end{aligned} \tag{6.8}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{0k} &= \int_\Omega \varphi_0(y) R_k(y) dy \\ \varphi_{1k} &= \int_\Omega \varphi_1(y) R_k(y) dy \end{aligned} \tag{6.9}$$

Общее решение (6.6) с начальными условиями (6.8) имеет вид

$$T_k(t) = \frac{1}{\alpha_k} \int_0^t \sin \alpha_k (t-\tau) \frac{c_k(\tau)}{\mu} d\tau +$$

$$+ \varphi_{0k} \cos \alpha_k t + \varphi_{1k} \frac{\sin \alpha_k t}{\alpha_k},$$

где

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\mathcal{D}}{\mu}} \lambda_k^2 . \tag{6.10}$$

Теперь можно выписать общее решение уравнения (6.1)

$$w(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k (t-\tau)}{\alpha_k \mu} c_k(\tau) R_k(x) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\varphi_{0k} \cos \alpha_k t + \varphi_{1k} \frac{\sin \alpha_k t}{\alpha_k} \Big) R_k(x)$$

Учитывая (6.5), получаем

$$w(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \Big[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k (t-\tau)}{\alpha_k \mu} R_k(x) R_k(y) \Big] g(y,t) dy d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\varphi_{0k} \cos \alpha_k t + \varphi_{1k} \frac{\sin \alpha_k t}{\alpha_k} \Big) R_k(x) \tag{6.11}$$

Выражение в квадратных скобках есть ничто иное, как функция Грина задачи (6.1).

Предположим

$$g(x,t) = u(t) \cdot v(x) . \tag{6.12}$$

Тогда

$$w(x,t) = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k (t-\tau)}{\alpha_k} \psi_k R_k(x) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\varphi_{0k} \cos \alpha_k t + \varphi_{1k} \frac{\sin \alpha_k t}{\alpha_k} \Big) R_k(x), \tag{6.13}$$

где $$\Psi_k = \frac{1}{\mu} \int\limits_{\Omega} v(x) R_k(x) dx \tag{6.14}$$

Пусть пластина из состояния (6.7) попадает в положение равновесия

$$\left.\begin{aligned} w(x,T) = 0 \\ \dot w(x,T) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

Ввиду линейной независимости функций $R_k(x)$, получаем

$$-\left(\varphi_{0k} \cos\alpha_k T + \frac{\varphi_{0k}}{\alpha_k} \sin\alpha_k T\right) = \\ = \int\limits_0^T \frac{\Psi_k}{\alpha_k} \sin\alpha_k (T-\tau) u(\tau) d\tau . \tag{6.16}$$

Дифференцируя (6.13), по (6.15) получаем

$$\varphi_{0k} \sin\alpha_k T - \varphi_{1k} \cos\alpha_k T = \\ = \int\limits_0^T \Psi_k \cos\alpha_k (T-\tau) u(\tau) d\tau . \tag{6.17}$$

Введем обозначения

$$x = \int\limits_0^T \sin\alpha_k \tau \; u(\tau) d\tau , \\ y = \int\limits_0^T \cos\alpha_k \tau \; u(\tau) d\tau , \tag{6.18}$$

$$A = \varphi_{0k} , \quad B = \varphi_{1k} , \\ \alpha = \sin\alpha_k T , \quad \beta = \cos\alpha_k T . \tag{6.18}$$

Применяя известные соотношения из тригонометрии, из (6.I6), (6.I7) получаем систему

$$\left.\begin{aligned} -A\beta - B\alpha &= \frac{\varphi_k}{\alpha_k}(\alpha y - \beta x) \\ \alpha_k A\alpha - B\beta &= \varphi_k(\beta y + \alpha x) \end{aligned}\right\}.$$

Пусть φ_k отлично от нуля для всех k. Определитель этой системы равен

$$\Delta = \frac{\varphi_k^2}{\alpha_k}$$

Теперь не трудно получить

$$y = -\frac{B}{\varphi_k},$$

$$x = \frac{\alpha_k}{\varphi_k}A.$$

Учитывая обозначения (6.I8), мы получили систему

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\alpha_k \varphi_{0k}}{\varphi_k} &= \int_0^T \sin\alpha_k\tau\, u(\tau)\,d\tau, \\ & \qquad k = 1, 2, \ldots \\ \frac{\varphi_{0k}}{\varphi_k} &= \int_0^T \cos\alpha_k\tau\, u(\tau)\,d\tau \end{aligned}\right\}. \qquad (6.I9)$$

Пусть на $u(t)$ наложено ограничение

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \le l^2 \qquad (6.20)$$

Тогда равенства (6.I9) с ограничением (6.20) определяют бесконечную l - проблему моментов.

Тем самым, задачу оптимального управления о быстрейшем переводе пластины (6.I) из начального состояния (6.7) в положение равновесия, при ограничениях (6.20), мы свели к бесконечномерной l-проблеме моментов.

§ 7. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ТОНКОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Уравнение колебаний тонкого упругого стержня имеет вид (Смотри [5]).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = g(x,t), \tag{7.1}$$

где

$$b^2 = \frac{EJ}{\rho S}, \tag{7.2}$$

E - модуль упругости материала стержня,

J - момент инерции относительно горизонтальной оси,

ρ - плотность, S - площадь поперечного сечения.

Пусть стержень будет свободно опёрт по краям, тогда краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} &w(0,t)=0, \quad w''_{xx}(0,t)=0, \\ &w(a,t)=0, \quad w''_{xx}(a,t)=0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

где a - длина стержня.

Поставим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} &\frac{d^4 R}{dx^4} - \lambda^4 R = 0, \\ &R(0)=0, \qquad R''(0)=0, \\ &R(a)=0, \qquad R''(a)=0. \end{aligned} \tag{7.5}$$

где штрихом обозначено дифференцирование по x.

Нетрудно убедиться, что собственными функциями будут функции

$$R_к(x) = \frac{2}{a} \sin \frac{к\pi}{a} x, \qquad (7.6)$$

а характеристическими числами

$$\lambda_к = \frac{к\pi}{a}. \qquad (7.7)$$

Пусть

$$g(x,t) = u(t) \quad \frac{x\pi}{a} \qquad (7.8)$$

и

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \le \ell^2. \qquad (7.9)$$

Поставим задачу о быстрейшем переводе стержня из состояния

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \varphi_0(x), \\ \dot{w}(x,0) &= \varphi_1(x) \end{aligned} \qquad (7.10)$$

в положение равновесия при ограничениях (7.9).

Тогда поставленная задача является одномерным случаем задачи, рассмотренной в § 6.

Из (6.10)

$$\alpha_к = b\lambda_к^2. \qquad (7.11)$$

По (7.8)

$$v(x) = \frac{x\pi}{a}$$

и, учитывая (6.14)

$$\psi_к = \int_0^a \frac{2}{a} \sin \lambda_к x \cdot \frac{x\pi}{a} dx$$

Отсюда
$$\psi_k = (-1)^{k+1}\frac{2}{k} \qquad (7.12)$$

Очевидно, что ψ_k отличны от нуля.

Тогда, используя формулы (6.19), получаем
$$\left.\begin{aligned} c_k &= \int_0^T \sin\alpha_k\tau\cdot u(\tau)\,d\tau \\ d_k &= \int_0^T \cos\alpha_k\tau\, u(\tau)\,d\tau \end{aligned}\right\} k=1,2,\ldots \qquad (7.13)$$
,

где
$$c_k = (-1)^k\frac{\ell\pi^{-2}k^3}{2a^2}\varphi_{0k}, \qquad (7.14)$$
$$d_k = (-1)^{k+1}\frac{k}{2}\varphi_{1k}\ .$$

Теорема I.3. справедлива и для бесконечномерной проблемы моментов. Поэтому будем решать задачу.

Найти функцию
$$\psi_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\xi_k^0\sin\alpha_k t + \eta_k^0\cos\alpha_k t\right) \qquad (7.15)$$

такую, что
$$\|\psi_0\|^2_{L^2} = \frac{1}{\ell^2} = \min_{\xi,\eta}\int_0^T\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\xi_k\sin\alpha_k t + \eta_k\cos\alpha_k t\right)\right|^2 dt \qquad (7.16)$$

при условии
$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k + d_k\eta_k = 1 \qquad (7.17)$$

причем T должно быть минимальным.

Согласно (I.2) решение задачи (7.13) выражается через решение поставленной задачи
$$u(t) = \ell^2\,|\psi_0(t)|\,\mathrm{sign}\,\psi_0(t) \qquad (7.18)$$

Рассмотрим функцию

$$\rho(T) = \min_{\xi, \eta} \int_0^T \Big| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sin \alpha_k t + \eta_k \cos \alpha_k t \Big|^2 dt \qquad (7.19)$$

Нам нужно найти первый положительный корень уравнения

$$\rho(T) = \frac{1}{\ell^2} \qquad (7.20)$$

Точное алгебраическое решение найти трудно, но дать некоторую оценку корню возможно.

Обозначим

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \alpha_k t + d_k \cos \alpha_k t \qquad (7.21)$$

Согласно (7.II) и (7.7)

$$\alpha_k = \frac{b\pi^2}{a^2} k^2 .$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{b\pi^2}{a^2} \qquad (7.22)$$

Функции $\sin \alpha_k t$ и $\cos \alpha_k t$ имеют период $\frac{2\pi}{\gamma}$, следовательно, и функция $F(t)$ имеет этот же период, то есть

$$F(t) = F\left(t + \frac{2\pi}{\gamma}\right) .$$

Из свойств тригонометрических функций следует, что функции $\sin \alpha_k t$ и $\cos \alpha_k t$ на отрезке $\left[0, \frac{2\pi}{\gamma}\right]$ ортогональны.

Не трудно убедиться, учитывая (7.15), (7.17), что

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \psi_0 \, dt = 0 ,$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} F \psi_0 \, dt = \frac{2\pi}{\gamma} . \tag{7.23}$$

Теперь задача нахождения $\rho\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right)$ равносильна задаче нахождения минимума функционала

$$J = \int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \psi_0^2 \, dt \tag{7.24}$$

при ограничениях (7.23). Последняя легко решается введением множителей Лагранжа.

Составим функционал

$$\Phi = \psi_0^2 + \mu_1 F \psi_0 + \mu_2 \psi_0 .$$

Необходимое условие минимума функционала (7.24) при ограничениях (7.23) выражается требованием

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \psi_0} = 0 . \tag{7.25}$$

Откуда

$$\psi_0 = -\frac{1}{2}\left(\mu_1 F + \mu_2\right) .$$

Константы μ_1 и μ_2 легко находятся из (7.23).

Учитывая

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} F\,dt = 0,$$

получаем

$$\mu_1 = -\frac{2\pi}{\gamma}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} F^2 dt\right]^{-1},$$

$$\mu_2 = 0,$$

$$\Psi_0(t) = \frac{\pi}{\gamma}\left[\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} F^2 dt\right]^{-1} F(t)$$

и

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} \Psi_0^2 dt = \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^2 \left[\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} F^2 dt\right]^{-1}.$$

Таким образом, мы получили

$$\rho\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right) = \left(\frac{\pi}{\gamma}\right)^2 \left[\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} F^2 dt\right]^{-1}.$$

Так как функции $\sin \alpha_k t$ и $\cos \alpha_k t$ ортогональны на $\left[0, \frac{2\pi}{\gamma}\right]$, то

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\gamma}} F^2 dt = \frac{\pi}{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 + d_k^2).$$

Отсюда

$$\rho_0 = \rho\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right) = \frac{\pi}{\gamma}\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 + d_k^2\right)^{-1}. \qquad (7.26)$$

Так как $F(t)$ периодическая функция, то

$$\rho\left(k\frac{2\pi}{\gamma}\right) = k\rho\left(\frac{2\pi}{\gamma}\right) = k\rho_0. \qquad (7.27)$$

Функция $\rho(T)$ является возрастающей.

Поэтому, если T удовлетворяет (7.20), то

$$\frac{2\pi}{\gamma} m \le T \le \frac{2\pi}{\gamma}(m+1)$$

где

$$m = \left[\frac{1}{\rho_0 l^2} \right] \qquad (7.28)$$

Уточнить полученное приближение можно приближёнными методами, например, рассматривая не бесконечную задачу (7.13), а некоторую ограниченную, усечённую задачу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
MAGNETIC TAPE 00 PROGRAM 01

COMMENT'OPTIMUM;
A:READ1'(AL,BET,G1,G,L,A,B,H);
ARRAY'T.(1:5).;
G1:=G1/G;L:=L/G;
D:=SQRT'(AL×AL-BET);
L1:=-AL+D;
L2:=-AL-D;
T.(1).:=2××(L1-L2);
T.(2).:=L1×(L2×G1-1)/L+1;
T.(3).:=L2×(L1×G1-1)/L+1;
T.(4).:=L1;T.(5).:=L2;
EQUATION'(A,B,H,F(),KSI,BUL,T.);
IF'-.BUL THEN'GOTO'A1;
ADDRESS'(FIX'10);
TEXTR10'(3,4,'KSI=',KSI);
OUTPUT'(5);
A1:STOP';
PROCEDURE'F(X,B.);
BEGIN'
S:=B.(1).×(EXP'(-B.(4).×X)+B.(2).)××B.(5).;
S:=S-(EXP'(-B.(5).×X)+B.(3).)××B.(4).;
END';
START'A;
FINISH';
```

```
COMMENT'OPTIMUM;
MEMORY PLAN
      VARIABLES
   1723   AL
   1724   BET
   1725   G1
   1726   G
   1727   L
   1730   A
   1731   B
   1732   H
   1733   D
   1734   L1
   1735   L2
   1736   KSI
   1737   BUL
   1741   S
      TABLE OF ARRAYS
   1757   T
      LABELS
   1772   A
   2115   A1

      PROCEDURES
0510  0633   READ1
0634  0747   ARRAY
1130  1244   EQUATI
1245  1250   ADDRES
1263  1625   TEXTR1
1626  1652   OUTPUT
2116  2175   F
      FUNCTIONS
0750 - 1000 SQRT
1653 - 1713 EXP
1251 - 1262 FIX
1001 - 1127 ××
   OPERATING VARIABLES
1742 - 1744
   CONSTANTS
1745 - 1756
   PROGRAM
1761 - 2176
   START 0105
```

ЛИТЕРАТУРА

I Болтянский В.Г., Математические методы оптимального управления, М., "Наука", 1971.

2 Бутковский А.Г., Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами, М, "Наука", 1965.

3 Крейн М.Г., Нудельман А.А., Проблема Маркова и экстремальные задачи, М., "Наука", 1973.

4 Система стандартных программ алгоритмического языка "МАЛГОЛ", Таллин, 1972.

5 Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, М., "Наука", 1972.

Заключение

В настоящей работе рассматриваются две задачи быстродействия. Для решения применяется метод моментов.

В первой выводятся уравнения, позволяющие найти минимальное время для задачи быстродействия процесса, описываемого дифференциальным уравнением второго порядка. Для конкретного примера находится минимальное время с помощью программы OPTIMUM на языке " М А Л Г О Л ".

Ещё одна задача - задача о быстрейшем переводе тонкой пластины в положение равновесия, сводится к l - проблеме теории моментов.

Поставленная задача решается для одномерного случая - тонкого упругого стержня. Выводится оценка минимального времени.

Resümee

Käesolev töö on pühendatud momentide teooria kasutamisele optimaalse juhtimise teoorias.

Töö koosneb seitsmest paragrahvist. Esimeses tuuakse ära momentide teooria põhiolemus ja seosed, mis on vajalikud edaspidiseks. Teises paragrahvis püstitatakse kiireima aja ülesanne lineaarsete diferentsiaalvõrrandite süsteemi jaoks. Selline ülesanne taandub momentide teooria ülesandeks.

Kolmandas jå neljandas uuritakse kiireima aja ülesannet teist järku lineaarsete diferentsiaalvõrrandite puhul. On leitud seosed minimaalse aja leidmiseks.

Viiendas paragrahvis püstitatud ülesanne lahendatakse konkreetsel erijuhul. On leitud optimaalne juhtimine ja minimaalne aeg. Arvutusteks on koostatud programm algoritmilises keeles "Malgol".

Kuuendas kasutatakse momentide teooria jaotatud parameetriga ülesannete puhul. Kiireima aja ülesanne õhukese plaadi korral taandub lõpmatumõõtmelisele probleemile momentide teoorias.

Viimases, seitsmendas paragrahvis lahendatakse kiireima aja ülesanne peenikese varda juhul, mille otsad on vabalt toetatud.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Läbi vaadanud

J. Kiss.

(teaduslik juhendaja).

Вкоф

5 / VI - 1974