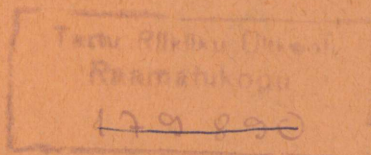


**VERALLGEMEINERTE THEORIE  
DER ABSOLUTEN SUMMABILITÄT  
DER DIVERGENTEN POTENZREIHEN**

VON

**GUNNAR KANGRO**



TARTU 1942

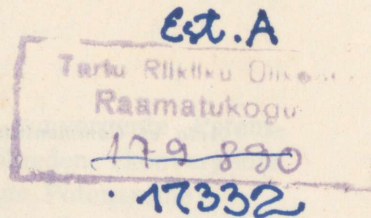
Est. A-11561



# VERALLGEMEINERTE THEORIE DER ABSOLUTEN SUMMABILITÄT DER DIVERGENTEN POTENZREIHEN

VON

GUNNAR KANGRO



VERALLGEMEINERTE THEORIE  
DER ABSOLUTEN SUMMABILITÄT  
DER DIVERGENTEN POTENZREIHEN

A. 33

*Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis (Dorpatensis)*  
A XXXVII. 7

1788

UNIVERSITÄT TARTU

TARTU

## Einleitung.

Bei einer Potenzreihe

$$u_0 + u_1z + u_2z^2 + \dots + u_nz^n + \dots$$

können drei fundamental verschiedene Fälle auftreten, je nachdem ob der Konvergenzradius

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|u_n|}}$$

der Potenzreihe unendlich ist (beständig konvergente Potenzreihe); oder endlich und von Null verschieden (konvergente Potenzreihe); oder gleich Null ist (divergente Potenzreihe).

Wenn der Konvergenzradius der Potenzreihe unendlich ist, so bestimmt die Reihe durch ihre Summe eine analytische Funktion  $U(z)$ , die in der ganzen komplexen Ebene holomorph ist und somit eine ganze Funktion darstellt. Mit der näheren Untersuchung solcher beständig konvergenter Potenzreihen beschäftigt sich die Theorie der ganzen Funktionen.

Ist der Konvergenzradius der Potenzreihe endlich und von Null verschieden, so definiert die Summe der Reihe eine im Konvergenzkreise  $|z| < R$  holomorphe analytische Funktion  $u(z)$ , deren Existenzbereich sich jedoch in vielen Fällen über den Konvergenzkreis hinaus erweitern kann. Die ausführliche Erforschung der konvergenten Potenzreihen gehört in den Bereich der Theorie der analytischen Fortsetzung.

Wenn der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich Null ist, dann besitzt die Reihe in gewöhnlichem Sinne keine Summe (mit Ausnahme des Punktes  $z=0$ ) und bestimmt daher in dieser Weise keine Funktion.

In diesem Falle müssen wir vor allem den Begriff der Summe einer Reihe verallgemeinern, so dass auch einer divergenten Potenzreihe eine gewisse Funktion  $\varphi(z)$  als Summe zugeordnet wird, die mit der divergenten Potenzreihe in analogischer Be-

ziehung wie die analytische Funktion  $u(z)$  mit der konvergenten Potenzreihe steht. Jenes Problem ist der Anstoss der Entwicklung der Theorie der divergenten Potenzreihen geworden.

Damit die verallgemeinerte Definition der Summe praktisch verwendbar sei, muss diese Definition möglicherweise die drei folgenden Bedingungen erfüllen:

1<sup>o</sup> Jede konvergente Potenzreihe soll im Konvergenzkreise durch das verallgemeinerte Verfahren summierbar sein, wobei die verallgemeinerte Summe mit der gewöhnlichen Summe der Reihe übereinstimmen muss;

2<sup>o</sup> Alle Rechenoperationen, sowohl arithmetische wie auch infinitesimale, die auf die konvergenten Potenzreihen anwendbar sind, sollen im allgemeinen auch bei den divergenten Potenzreihen gültig bleiben, die im verallgemeinerten Sinne summierbar sind;

3<sup>o</sup> Ist eine konvergente Potenzreihe in einem Punkte ihres Holomorphiesternes mittels des verallgemeinerten Verfahrens summierbar, so soll die verallgemeinerte Summe mit dem entsprechenden Funktionswert, den man durch analytische Fortsetzung der Potenzreihe im Holomorphiestern erhält, übereinstimmen.

Ein derartiges Summierungsverfahren, das allen dreien obengenannten Bedingungen genügt, hat É. Borel<sup>1)</sup> in seiner Theorie der absoluten Summabilität gegeben, indem er die verallgemeinerte Summe der Reihe

$$u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

durch das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} F(zx) dx,$$

<sup>1)</sup> Émile Borel, Mémoire sur les séries divergentes. Annales de l'École Normale supérieure, III sér., t. 16, 1899, S. 79—131. — E. Borel, Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1901, 1928.

mit

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n!},$$

definiert.

In der vorliegenden Arbeit werden wir zeigen, dass die Theorie Borels sich vollständig verallgemeinern lässt, wenn man als verallgemeinerte Summe der Potenzreihe das Integral von Le Roy

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(zx^a) dx,$$

mit

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n! a^n}, \quad a > 0, \quad (1)$$

betrachtet, das sich für  $a=1$  auf das Integral von Borel reduziert.

In derselben Richtung haben schon Éd. Le Roy<sup>1)</sup> und Edm. Maillet<sup>2)</sup> die Theorie Borels verallgemeinert, doch ihre Verallgemeinerungen sind in dem Sinne nicht vollständig, als sie gewisse beschränkende Voraussetzungen über die Natur der Funktion  $U(t)$  gemacht haben, die im Sonderfalle  $a=1$  in der Theorie der absoluten Summabilität Borels fehlen.

Andererseits sind die Beweise von Le Roy und Maillet nicht mit genügender Strenge durchgeführt worden, weil beide das Weglassen von Gliedern in einer divergenten Reihe ohne jede nähere Begründung als selbstverständliche Tatsache angesehen haben.

Daher habe ich es nicht für überflüssig gehalten, die verallgemeinernde Theorie von Borel mit aller Strenge so zu entwickeln, dass man keine neuen beschränkenden Voraussetzungen ausser denen, die sich schon im Sonderfalle  $a=1$  bei Borel finden, hinzuzufügen brauchte.

1) Édouard Le Roy, Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, II sér., t. 2, 1900, S. 405—430.

2) Edmond Maillet, Sur les séries divergentes et les équations différentielles. Annales de l'École Normale supérieure, III sér., t. 20, 1903, S. 487—518.

Zum Schluss der gegenwärtigen Arbeit werde ich zeigen, dass die sowohl von Le Roy wie auch von Maillet betrachteten Potenzreihen als besondere Reihenklassen der Gesamtheit der in dieser Arbeit behandelten Reihen angehören, die ich nach Borel absolut  $B_\alpha$ -summierbare Reihen nenne.

## KAPITEL I.

### Das $B_\alpha$ -Verfahren. — Der Permanenzsatz.

1. Betrachten wir eine beliebige divergente Reihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

und bilden mittels ihrer Glieder  $u_n$  die Potenzreihe

$$(2) \quad U(t) = u_0 + \frac{u_1}{|\underline{\alpha}|} t + \frac{u_2}{|\underline{2\alpha}|} t^2 + \dots + \frac{u_n}{|\underline{n\alpha}|} t^n + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{|\underline{n\alpha}|} t^n,$$

wo  $\alpha$  eine positive Konstante bedeutet und

$$|\underline{n\alpha}| = \Gamma(n\alpha + 1) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{n\alpha} dy.$$

Setzen wir im folgenden voraus, dass die Potenzreihe (2) beständig konvergiert und somit eine ganze Funktion  $U(t)$  darstellt, welche wir nach Le Roy<sup>1)</sup> die assoziierte ganze Funktion  $\alpha$ -ter Ordnung der Reihe (1) nennen werden.

Betrachten wir noch das Integral von Le Roy

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx, \quad \alpha \geq 0,$$

wo wir  $x^\alpha$  reell und nichtnegativ annehmen werden.

Wenn das uneigentliche Integral (3) konvergiert, d. h. wenn der Grenzwert

<sup>1)</sup> Le Roy, op. cit., S. 405—430.

$$u = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l e^{-x} U(x^\alpha) dx$$

vorhanden ist, so nennen wir diesen Grenzwert  $u$  die Summe der divergenten Reihe (1) und sagen, die divergente Reihe (1) sei durch das  $B_\alpha$ -Verfahren summierbar zur Summe  $u$  oder kürzer, die Reihe (1) sei  $B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u$ .

Wir werden zunächst zeigen, dass dieser verallgemeinerte Summenbegriff den gewöhnlichen, von Abel und Cauchy gegebenen Summenbegriff enthält. Dazu werden wir den folgenden Satz, den man unter dem Namen Permanenz- oder Konsistenzsatz kennt, beweisen.

Jener Permanenzsatz ist zu allererst von O. Perron<sup>1)</sup> bewiesen worden, der das  $B_\alpha$ -Verfahren als Sonderfall des Summierungsverfahrens mittels Konvergenzfaktoren betrachtet hat. Wir werden aber hier den Beweis des Permanenzsatzes ausführen, indem wir das  $B_\alpha$ -Verfahren als Summierungsverfahren durch Mittelbildungen betrachten werden.

## 2. Der Permanenzsatz. Konvergiert die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

zur Summe  $s$ , so ist diese Reihe  $B_\alpha$ -summierbar zu derselben Summe  $s$ .

a. Zeigen wir zuerst, dass hier die Potenzreihe

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n^\alpha} t^n$$

beständig konvergiert und damit die assoziierte ganze Funktion  $\alpha$ -ter Ordnung  $U(t)$  darstellt.

In der Tat, da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^n}{n^\alpha} = 0,$$

dann ist sicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n^\alpha} t^n = 0$$

<sup>1)</sup> Oskar Perron, Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. Mathematische Zeitschrift, Bd. 6, 1920, S. 291.

und damit, von einem bestimmten  $n$  beginnend, insbesondere

$$\left| \frac{u_n}{n\alpha} t^n \right| < 1,$$

woraus folgt, dass

$$\sqrt[n]{\left| \frac{u_n}{n\alpha} \right|} < \frac{1}{|t|}$$

ist.

Da die letzte Ungleichung für jeden beliebig grossen Wert von  $|t|$  gilt, wenn man nur  $n$  genügend gross wählt, so ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{u_n}{n\alpha} \right|} = 0,$$

was die beständige Konvergenz der Potenzreihe  $\sum \frac{u_n}{n\alpha} t^n$  beweist.

b. Die Anwendung der Abel-Transformation auf  $U(t)$  liefert

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n) \left[ \frac{t^n}{n\alpha} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)\alpha} \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left[ \frac{t^n}{n\alpha} - \frac{t^{n+1}}{(n+1)\alpha} \right], \end{aligned}$$

mit

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Da die gewonnene Reihe in jedem endlichen Intervall  $0 \leq t \leq A$  gleichmässig konvergiert, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l e^{-x} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} s_n \left[ \frac{x^{n\alpha}}{n\alpha} - \frac{x^{(n+1)\alpha}}{(n+1)\alpha} \right] \right\} dx = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} s_n \int_0^l e^{-x} \left[ \frac{x^{n\alpha}}{n\alpha} - \frac{x^{(n+1)\alpha}}{(n+1)\alpha} \right] dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl} s_n, \end{aligned}$$

wo

$$a_{nl} = \int_0^l e^{-x} \left[ \frac{x^{n\alpha}}{n\alpha} - \frac{x^{(n+1)\alpha}}{(n+1)\alpha} \right] dx.$$

Folglich haben wir die Gültigkeit der Gleichheit

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl} s_n = s$$

zu beweisen.

c. Es ist nicht schwer zu sehen, dass

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_{nl} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ist und

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{nl} = \int_0^l e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{x^{n\alpha}}{n\alpha} - \frac{x^{(n+1)\alpha}}{(n+1)\alpha} \right] dx = \int_0^l e^{-x} dx = 1 - e^{-l}.$$

Zeigen wir noch, dass die Grössen  $a_{nl}$  stets positiv sind, d. h.

$$\frac{1}{n\alpha} \int_0^l e^{-x} x^{n\alpha} dx > \frac{1}{(n+1)\alpha} \int_0^l e^{-x} x^{(n+1)\alpha} dx.$$

Zum Beweise betrachten wir das Produkt

$$\begin{aligned} \frac{1}{n\alpha} \int_0^l e^{-x} x^{n\alpha} dx &= \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy \cdot \int_0^l e^{-x} x^{n\alpha} dx = \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-y} y^{\alpha-1} \int_0^l e^{-x} x^{n\alpha} dx) dy > \int_0^l (e^{-y} y^{\alpha-1} \int_0^{l-y} e^{-x} x^{n\alpha} dx) dy = \\ &= \int \int e^{-(x+y)} x^{n\alpha} y^{\alpha-1} dx dy, \end{aligned}$$

(Δ)

wo das Doppelintegral über das Dreieck

$$0 \leq x \leq l - y, \quad 0 \leq y \leq l$$

der  $xy$ -Ebene zu erstrecken ist (Fig. 1.).

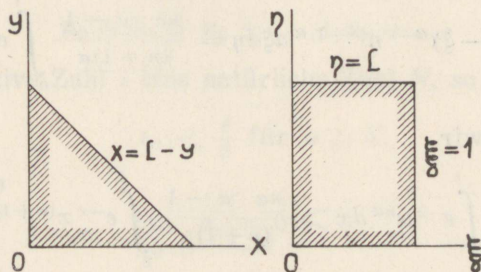


Fig. 1.

Machen wir im Doppelintegral die Transformation

$$x = \xi\eta \quad \left\{ \text{oder} \quad x = \xi\eta \right. \\ x + y = \eta \quad \left. y = \eta(1 - \xi) \right\},$$

wobei die Jacobi-Determinante

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta & \xi \\ -\eta & 1 - \xi \end{vmatrix} = \eta,$$

so erhalten wir

$$\int_{(\Delta)} \int e^{-(x+y)} x^{n\alpha} y^{\alpha-1} dx dy = \int_{(\square)} \int e^{-\eta} \xi^{n\alpha} (1 - \xi)^{\alpha-1} \eta^{(n+1)\alpha} d\xi d\eta.$$

Dabei ist der neue Integrationsbereich das Rechteck

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq l$$

der  $\xi\eta$ -Ebene (Fig. 1.), weswegen das Doppelintegral sich mit Hilfe des iterierten Integrals

$$\int_0^l \left[ e^{-\eta} \eta^{(n+1)\alpha} \int_0^1 \xi^{n\alpha} (1 - \xi)^{\alpha-1} d\xi \right] d\eta$$

ausdrücken lässt.

Nun ist aber nach einer bekannten Formel aus der Theorie der Integrale von Euler

$$\int_0^1 \xi^{n\alpha} (1 - \xi)^{\alpha-1} d\xi = B(n\alpha + 1, \alpha) = \frac{\Gamma(n\alpha + 1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma[(n+1)\alpha + 1]} = \frac{|n\alpha| |\alpha - 1|}{|(n+1)\alpha|}$$

und damit

$$\int_{(\square)} \int e^{-\eta} \xi^{n\alpha} (1 - \xi)^{\alpha-1} \eta^{(n+1)\alpha} d\xi d\eta = \frac{|n\alpha| |\alpha - 1|}{|(n+1)\alpha|} \int_0^l e^{-\eta} \eta^{(n+1)\alpha} d\eta.$$

So haben wir

$$|\alpha - 1| \int_0^l e^{-x} x^{n\alpha} dx > \frac{|n\alpha| |\alpha - 1|}{|(n+1)\alpha|} \int_0^l e^{-x} x^{(n+1)\alpha} dx,$$

woraus

$$\frac{1}{n\alpha} \int_0^l e^{-x} x^{n\alpha} dx > \frac{1}{(n+1)\alpha} \int_0^l e^{-x} x^{(n+1)\alpha} dx,$$

d. h.

$$a_{nl} > 0.$$

d. Nun können wir uns leicht überzeugen, dass

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl} s_n = s.$$

Setzt man nämlich

$$s_n = s + \varepsilon_n,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl} s_n &= s \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl} + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_{nl} = \\ &= s(1 - e^{-l}) + \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_{nl}, \end{aligned}$$

woraus

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{nl} s_n = s,$$

denn es ist

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_{nl} = 0,$$

wie wir gleich zeigen werden.

In der Tat gibt es wegen der Konvergenz der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

für jede positive Zahl  $\varepsilon$  eine natürliche Zahl  $N$ , so dass

$$|\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } n > N.$$

Da anderseits

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_{nl} = 0,$$

so erhalten wir

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_{nl} \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N \varepsilon_n a_{nl} \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n a_{nl} \right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_{nl} < \varepsilon,$$

wenn man nur  $l$  genügend gross wählt.

Damit ist der Permanenzsatz bewiesen, und wir können uns von jetzt ab mit der Frage beschäftigen, ob und in welchem Masse man die arithmetischen Rechenoperationen, die bei den konvergenten Reihen gelten, auf die divergenten Reihen, die mit Hilfe des  $B_\alpha$ -Verfahrens summierbar sind, anwenden kann.

## KAPITEL II.

### Addition der divergenten Reihen und ihre Multiplikation mit einer Konstante. — Hinzufügen und Weglassen der Glieder. — Totale und absolute Summabilität.

1. Addition und Multiplikation mit einer Konstante.

a. **Satz 1.** Sind die beiden Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

und

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar beziehungsweise zu den Summen  $u$  und  $v$ , so ist die Reihe

$$(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u + v$ .

Da die Potenzreihen

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n\alpha} t^n$$

und

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n\alpha} t^n$$

beständig konvergieren und ausserdem

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx = u,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} V(x^\alpha) dx = v$$

ist, so konvergiert auch die Potenzreihe

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n + v_n}{n\alpha} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n\alpha} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n}{n\alpha} t^n = U(t) + V(t)$$

beständig, und es gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W(x^\alpha) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx + \int_0^{\infty} e^{-x} V(x^\alpha) dx = u + v.$$

**Satz 2.** Ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u$ , so ist die Reihe

$$cu_0 + cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $cu$ .

Da die Potenzreihe

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n\alpha} t^n$$

beständig konvergiert und ausserdem

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx = u$$

ist, so konvergiert auch die Potenzreihe

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{cu_n}{n\alpha} t^n = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n\alpha} t^n = c U(t)$$

beständig, und es gilt

$$\int_0^{\infty} e^{-x} T(x^\alpha) dx = c \int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx = cu.$$

b. Ziehen wir aus dem Satze 1. einige Folgerungen, die bei den konvergenten Reihen selbstverständlich sind, aber einer näheren Erläuterung bedürfen, wenn man es mit divergenten Reihen zu tun hat.

**Folgerung 1.** Ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u$ , dann ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + c) + u_{n+1} + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u + c$ .

Wegen des Satzes 1. dürfen wir die Reihen

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots$$

und

$$0 + 0 + \dots + 0 + c + 0 + \dots$$

gliedweise addieren, da die untere Reihe als konvergente Reihe  $B_\alpha$ -summierbar ist, und die so erhaltene Reihe

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + (u_n + c) + u_{n+1} + \dots$$

ist  $B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u + c$ .

**Folgerung 2.** Ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u$ , dann ist die nach dem Vertauschen zweier Glieder  $u_n$  und  $u_m$  entstandene Reihe

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_m + u_{n+1} + \dots + u_{m-1} + u_n + u_{m+1} + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zu derselben Summe  $u$ .

Addieren wir zum Glied  $u_n$  der gegebenen Reihe

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots + u_{m-1} + u_m + u_{m+1} + \dots$$

die Grösse  $c_1 = u_m - u_n$ , dann bekommen wir die Reihe

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_m + u_{n+1} + \dots + u_{m-1} + u_m + u_{m+1} + \dots,$$

die wegen der Folgerung 1.  $B_\alpha$ -summierbar ist und die Summe  $u + c_1$  besitzt.

Addieren wir nun zu dem auf der  $(m+1)$ -ten Stelle der letzten Reihe sich befindenden Glied  $u_m$  die Grösse  $c_2 = u_n - u_m$ , so erhalten wir die Reihe

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + u_m + u_{n+1} + \dots + u_{m-1} + u_n + u_{m+1} + \dots,$$

die sich von der gegebenen Reihe durch die Reihenfolge der Glieder  $u_n$  und  $u_m$  unterscheidet und nach der Folgerung 1.  $B_\alpha$ -summierbar ist und  $u + c_1 + c_2 = u$  als Summe hat.

**Folgerung 3.** Ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u$ , dann ist jede Reihe, die man aus derselben durch die Veränderung der Reihenfolge endlich vieler Glieder erhält,  $B_\alpha$ -summierbar zu derselben Summe  $u$ .

In der Tat kann man jede Reihe, die sich von der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

durch die Reihenfolge endlich vieler Glieder unterscheidet, dadurch erhalten, dass man in der gegebenen Reihe endlich viele Gliederpaare vertauscht; aber jedes solche Vertauschen der Gliederpaare verändert wegen Folgerung 2. weder die Summierbarkeit, noch die Summe der Reihe.

Betrachten wir jetzt, ob und wie das Hinzufügen oder Weglassen endlich vieler Glieder die Summierbarkeit und die Summe einer divergenten Reihe beeinflussen wird.

2. Hinzufügen und Weglassen der Glieder. — Beweisen wir zunächst einen Hilfssatz, den wir im folgenden mehrmals benutzen werden.

Da wir zur Formulierung dieses Hilfssatzes den verallgemeinerten Begriff der Integration, der von B. Riemann <sup>1)</sup> herührt, nötig haben, so rufen wir uns jenen Begriff kurz ins Gedächtnis.

Riemann nennt das Integral  $\beta$ -ter Ordnung der Funktion  $F(x)$  den Ausdruck

$$I^\beta F(x) = \frac{x^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-y)^{\beta-1} F(xy) dy,$$

wo  $\beta$  eine beliebige positive Zahl bedeutet.

<sup>1)</sup> Bernhard Riemann, Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation. Gesammelte mathematische Werke, 1892, S. 353—366.

Insbesondere wenn  $F(x) = x^n$ , mit  $n > -1$ , dann erhalten wir leicht

$$I^\beta x^n = \frac{x^{n+\beta}}{n+\beta}.$$

Folglich hat man für das verallgemeinerte Integral  $\beta$ -ter Ordnung der Funktion

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

den Ausdruck

$$I^\beta F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+\beta}}{n+\beta}.$$

a. **Hilfssatz.** Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} F(x) dx,$$

wo  $F(x)$  eine in jedem endlichen Intervall  $0 \leq x \leq A$  integrierbare Funktion bedeutet, zum Werte  $S$ , dann konvergiert auch das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} I^\beta F(x) dx$$

zu demselben Werte  $S$ .

Bezeichnen wir

$$S_l = \int_0^l e^{-x} I^\beta F(x) dx,$$

so haben wir zu beweisen, dass der Grenzwert

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l$$

existiert, wobei

$$\lim_{l \rightarrow \infty} S_l = S.$$

Nun ist aber

$$S_l = \frac{1}{\beta-1} \int_0^l \left[ e^{-x} x^\beta \int_0^1 (1-y)^{\beta-1} F(xy) dy \right] dx =$$

$$= \frac{1}{\beta-1} \int_{(\square)} e^{-x} x^\beta (1-y)^{\beta-1} F(xy) dx dy,$$

wo das letzte Doppelintegral über das Rechteck

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq 1$$

der  $xy$ -Ebene zu erstrecken ist (Fig. 2.).

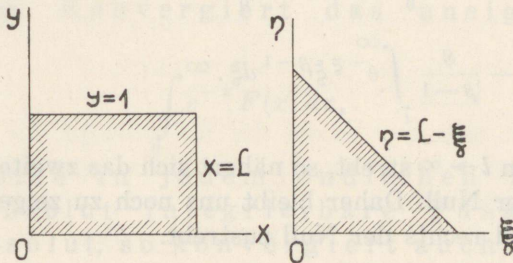


Fig. 2.

Machen wir im Doppelintegral die Substitution

$$\left. \begin{array}{l} x = \xi + \eta \\ xy = \eta \end{array} \right\} \quad \text{oder} \quad \left. \begin{array}{l} x = \xi + \eta \\ y = \frac{\eta}{\xi + \eta} \end{array} \right\},$$

wobei die Jacobi-Determinante

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{\eta}{(\xi+\eta)^2} & \frac{\xi}{(\xi+\eta)^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\xi + \eta},$$

so erhalten wir

$$S_l = \frac{1}{\beta-1} \int_{(\triangle)} e^{-(\xi+\eta)} \xi^\beta \eta^{\beta-1} F(\eta) d\xi d\eta.$$

Dabei ist der neue Integrationsbereich das Dreieck

$$0 \leq \xi \leq l, \quad 0 \leq \eta \leq l - \xi$$

der  $\xi\eta$ -Ebene (Fig. 2.).

Integrieren wir zuerst nach  $\eta$  und dann nach  $\xi$ , so finden wir

$$S_l = \frac{1}{|\beta-1|} \int_0^l \left[ e^{-\xi} \xi^{\beta-1} \int_0^{l-\xi} e^{-\eta} F(\eta) d\eta \right] d\xi$$

und damit

$$\begin{aligned} S_l - S &= \frac{1}{|\beta-1|} \int_0^l \left[ e^{-\xi} \xi^{\beta-1} \left( \int_0^{l-\xi} e^{-\eta} F(\eta) d\eta - S \right) \right] d\xi - \\ &- \frac{S}{|\beta-1|} \int_l^\infty e^{-\xi} \xi^{\beta-1} d\xi. \end{aligned}$$

Wenn nun  $l \rightarrow \infty$  strebt, so nähert sich das zweite Glied rechts unbegrenzt der Null. Daher bleibt uns noch zu zeigen, dass auch das erste Glied rechts der Null zustrebt.

Da

$$\int_0^\infty e^{-\eta} F(\eta) d\eta = S,$$

so gibt es eine positive Konstante  $M$ , so dass

$$\left| \int_0^{l-\xi} e^{-\eta} F(\eta) d\eta - S \right| < M.$$

Sei anderseits  $\varepsilon$  eine beliebig kleine positive Grösse und

$$\xi \leq \frac{l}{2},$$

dann können wir  $l$  stets so gross wählen, dass

$$\left| \int_0^{l-\xi} e^{-\eta} F(\eta) d\eta - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich haben wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|\beta-1|} \left| \int_0^l \left[ e^{-\xi} \xi^{\beta-1} \left( \int_0^{l-\xi} e^{-\eta} F(\eta) d\eta - S \right) \right] d\xi \right| \leq \frac{1}{|\beta-1|} \left| \int_0^{\frac{l}{2}} \right| + \\ & + \frac{1}{|\beta-1|} \left| \int_{\frac{l}{2}}^l \right| < \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{|\beta-1|} \int_0^{\frac{l}{2}} e^{-\xi} \xi^{\beta-1} d\xi + \\ & + M \frac{1}{|\beta-1|} \int_{\frac{l}{2}}^l e^{-\xi} \xi^{\beta-1} d\xi < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

wenn man nur  $l$  genügend gross voraussetzt, und damit ist der Hilfssatz bewiesen.

**Folgerung.** Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} F(x) dx,$$

wo  $F(x)$  eine in jedem endlichen Intervall  $0 \leq x \leq A$  absolut integrierbare Funktion bedeutet, absolut, so konvergiert auch das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} I^{\beta} F(x) dx$$

absolut.

In der Tat ist nach dem vorher bewiesenen Satz das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} I^{\beta} |F(x)| dx$$

konvergent, und somit konvergiert auch das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |I^{\beta} F(x)| dx,$$

weil

$$\begin{aligned} \left| I^{\beta} F(x) \right| &= \left| \frac{x^{\beta}}{\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\beta-1} F(xy) dy \right| \leq \\ &\leq \frac{x^{\beta}}{\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\beta-1} |F(xy)| dy = I^{\beta} |F(x)|. \end{aligned}$$

b. **Hinzufügen der Glieder.** — **Satz.** Ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u$ , so ist die beim Hinzufügen eines neuen Gliedes  $c$  entstandene Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + c + u_{n+1} + \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u + c$ .

Zum Beweise können wir, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, voraussetzen, dass das hinzugefügte Glied sich in der Reihe auf erster Stelle vor  $u_0$  befindet, denn die Reihen

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n + c + u_{n+1} + \dots$$

und

$$c + u_0 + \dots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \dots$$

unterscheiden sich nur durch die Reihenfolge der ersten  $n + 2$  Glieder, wodurch weder die Summierbarkeit noch die Summe der Reihe beeinflusst wird.

Zweitens können wir voraussetzen, dass das hinzugefügte Glied gleich Null ist, denn wenn wir bewiesen haben, dass die Reihe

$$0 + u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

die Summe  $u$  besitzt, dann ist der Reihe

$$c + u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

die Summe  $u + c$  beizulegen.

Nach der Voraussetzung des Satzes ist die Reihe

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha}$$

beständig konvergent und

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx = u.$$

Bilden wir für die Reihe

$$0 + u_0 + u_1 + \dots + u_n + \dots$$

die assoziierte Potenzreihe  $\alpha$ -ter Ordnung

$$V(t) = 0 + u_0 \frac{t}{\alpha} + u_1 \frac{t^2}{2\alpha} + \dots + u_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)\alpha} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)\alpha},$$

so erhalten wir

$$V(x^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^{(n+1)\alpha}}{(n+1)\alpha} = I^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^{n\alpha}}{n\alpha} = I^\alpha U(x^\alpha),$$

wo das Symbol  $I^\alpha$  die verallgemeinerte Integration  $\alpha$ -ter Ordnung andeutet. Folglich konvergiert die Reihe  $V(x^\alpha)$  für jeden endlichen Wert der Veränderlichen  $x$ , und damit stellt  $V(t)$  eine ganze Funktion dar. Ausserdem ist auf Grund des Hilfssatzes

$$\int_0^{\infty} e^{-x} V(x^\alpha) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} I^\alpha U(x^\alpha) dx = u.$$

c. Weglassen der Glieder. — Es sei die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

durch das  $B_\alpha$ -Verfahren summierbar zur Summe  $u$ , d. h. es sei

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx = u.$$

Betrachten wir die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots,$$

die aus der oberen Reihe durch das Weglassen des Gliedes  $u_0$  entstanden ist. Wie G. H. Hardy<sup>1)</sup> und O. Perron<sup>2)</sup> im Falle  $\alpha = 1$  an einem Beispiel gezeigt haben, braucht diese Reihe nicht mehr  $B_\alpha$ -summierbar zu sein. Wenn aber die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

1) G. H. Hardy, *Researches in the Theory of Divergent Series and Divergent Integrals*. *Quarterly Journal of Mathematics*, Vol. 35, 1904, S. 30.

2) O. Perron, *op. cit.* S. 303.



durch das  $B_\alpha$ -Verfahren summierbar ist, dann sind es auch alle oberhalb dieser liegenden Reihen, und ihre Summen stehen zu einander in derselben Beziehung, als ob die entsprechenden Reihen konvergent seien.

Sind ausser der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  auch alle Reihen

$$\sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n, \quad \lambda = 1, 2, \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar, so sagen wir, die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

sei mit Hilfe des  $B_\alpha$ -Verfahrens total summierbar oder kürzer total  $B_\alpha$ -summierbar.

Folglich müssen bei einer total  $B_\alpha$ -summierbaren Reihe alle Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U_\lambda(x^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

konvergieren, wobei

$$U_\lambda(t) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)^\alpha}; \quad U_0(t) = U(t).$$

Auf Grund des Permanenzsatzes ist es einleuchtend, dass insbesondere jede konvergente Reihe total  $B_\alpha$ -summierbar ist.

**Folgerung.** Ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

total  $B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $u$ , so ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} + c + u_{n+m} + u_{n+m+1} + \dots,$$

w o

$$c = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+m-1},$$

total  $B_\alpha$ -summierbar zu derselben Summe  $u$ , d. h. man kann in einer total  $B_\alpha$ -summierbaren Reihe endlich viele Glieder durch ihre Summe ersetzen, ohne die Summierbarkeit, noch die Summe der Reihe zu verändern.

So kann man also in einer total  $B_\alpha$ -summierbaren Reihe die Reihenfolge endlich vieler Glieder umtauschen, ein Glied durch die Summe endlich vieler Glieder und umgekehrt, endlich viele Glieder durch ihre Summe ersetzen, ohne die Summierbarkeit, noch die Summe der Reihe zu verändern. Ausserdem kann man total  $B_\alpha$ -summierbare Reihen gliedweise addieren und mit einer Konstante multiplizieren wie konvergente Reihen.

G. Sannia<sup>1)</sup> hat im Falle  $\alpha = 1$  bewiesen, dass man total summierbare Reihen auch untereinander multiplizieren darf wie absolut konvergente Reihen, aber wie schon G. Doetsch<sup>2)</sup> in seiner Dissertation hervorgehoben hat, steckt im Beweise Sannias ein Fehler, und der entsprechende Satz ist nicht immer gültig.

Deshalb werde ich den Weg verfolgen, den É. Borel<sup>3)</sup> im Falle  $\alpha = 1$  eingeschlagen hat und den verallgemeinerten Begriff der absoluten Summabilität einführen.

#### 4. Absolute Summabilität.

a. In den vorhergenannten Beispielen Hardy's und Peron's ist das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx$$

<sup>1)</sup> Gustavo Sannia, Nuovo metodo di sommazione delle serie. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 42, 1917, S. 317—321.

<sup>2)</sup> Gustav Doetsch, Eine neue Verallgemeinerung der Borel'schen Summabilitätstheorie der divergenten Reihen. Inauguraldissertation, Göttingen, 1920.

<sup>3)</sup> E. Borel, Leçons sur les séries divergentes.

bedingt konvergent, so dass das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |U(x^\alpha)| dx$$

divergiert.

Zeigen wir, indem wir das Beispiel H a r d y s ein wenig modifizieren, dass sogar die Voraussetzung der absoluten Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx$$

nicht ausreicht, um behaupten zu dürfen, dass ausser der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$\sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n, \quad \lambda = 1, 2, \dots$$

$B_\alpha$ -summierbar seien.

Es sei nämlich

$$u_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1)^n}{|2m+1|},$$

so erhalten wir für  $\alpha=1$

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{x^n}{|n|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (m+1)^n x^n}{|2m+1| |n|} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{|2m+1|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+1)^n x^n}{|n|} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{|2m+1|} e^{(m+1)x} = \\ &= e^{\frac{x}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{|2m+1|} \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{2m+1} = e^{\frac{x}{2}} \sin \left(e^{\frac{x}{2}}\right), \end{aligned}$$

da die Vertauschung der Reihenfolge des Summierens wegen der absoluten Konvergenz der betreffenden Doppelreihe erlaubt ist.

Folglich ist die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$B_1$ -summierbar, wobei das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(e^{\frac{x}{2}}\right) dx$$

absolut konvergiert, weil

$$|\sin\left(e^{\frac{x}{2}}\right)| \leq 1.$$

Nun ist aber

$$U_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{x^{n-1}}{n-1} = U'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(e^{\frac{x}{2}}\right) + \frac{1}{2} e^x \cos\left(e^{\frac{x}{2}}\right),$$

$$U_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty} u_n \frac{x^{n-2}}{n-2} = U''(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(e^{\frac{x}{2}}\right) + \\ + \frac{3}{4} e^x \cos\left(e^{\frac{x}{2}}\right) - \frac{1}{4} e^{\frac{3}{2}x} \sin\left(e^{\frac{x}{2}}\right),$$

woraus wir vermöge der Substitution

$$e^{\frac{x}{2}} = y \quad \text{oder} \quad x = 2 \log y$$

finden

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U_1(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(e^{\frac{x}{2}}\right) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \cos\left(e^{\frac{x}{2}}\right) dx = \\ = \int_1^{\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy + \int_1^{\infty} \frac{\cos y}{y} dy,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U_2(x) dx = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(e^{\frac{x}{2}}\right) dx + \frac{3}{4} \int_0^{\infty} \cos\left(e^{\frac{x}{2}}\right) dx -$$

$$- \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(e^{\frac{x}{2}}\right) dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin y}{y^2} dy + \frac{3}{2} \int_1^{\infty} \frac{\cos y}{y} dy - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \sin y dy.$$

Damit ist also die Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

$B_1$ -summierbar, wobei das entsprechende Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U_1(x) dx$$

doch nur bedingt konvergiert, während die Reihe

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

wegen der Divergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U_2(x) dx$$

nicht mehr  $B_1$ -summierbar ist.

Daher werden wir im folgenden nach dem Vorbilde von B o r e l die absolute Konvergenz aller Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U_{\lambda}(x^{\alpha}) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

voraussetzen, obwohl wir mit etwas engeren Voraussetzungen auskommen könnten, wie G. S a n n i a <sup>1)</sup> in einer seiner späteren Arbeiten im Falle  $\alpha = 1$  behauptet hat.

<sup>1)</sup> G. S a n n i a, Nuovo metodo di sommazione delle serie che ammette l'algoritmo delle serie assolutamente convergenti. Atti della Reale Accademia dei Lincei, vol. 29:1, 1920, S, 141—146.

b. Wir sagen, die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

sei mit Hilfe des  $B_\alpha$ -Verfahrens absolut summierbar oder kürzer absolut  $B_\alpha$ -summierbar, wenn alle Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} U_\lambda(x^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

absolut konvergieren, wobei

$$U_\lambda(t) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha}; \quad U_0(t) = U(t).$$

Es ist nicht schwer sich zu überzeugen, dass insbesondere jede absolut konvergente Reihe absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, denn vermöge der absoluten Konvergenz der Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

konvergiert auch die Reihe

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

und ist damit total  $B_\alpha$ -summierbar. Folglich sind die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} V_\lambda(x^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots,$$

mit

$$V_\lambda(t) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} |u_n| \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha},$$

konvergent, und dann konvergieren desto mehr die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} |U_\lambda(x^\alpha)| dx,$$

weil für  $t \geq 0$

$$|U_\lambda(t)| \leq V_\lambda(t).$$

Da einerseits der absolute Betrag einer Summe nicht grösser sein kann als die Summe der absoluten Beträge der Summanden und andererseits nach der Folgerung des am Anfang des gegenwärtigen Kapitels bewiesenen Hilfssatzes die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} F(x) dx$$

dieselbe des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} I^{\beta} F(x) dx$$

nach sich zieht, so ist es einleuchtend, dass die Sätze, die wir für total  $B_{\alpha}$ -summierbare Reihen aufgestellt haben, auch für absolut  $B_{\alpha}$ -summierbare Reihen gültig bleiben.

Es bleibt daher noch die Frage der Multiplikation der divergenten Reihen untereinander zu erörtern, mit der wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen werden.

### KAPITEL III.

#### Multiplikation absolut summierbarer Reihen.

1. Satz. Sind die Reihen

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

und

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

absolut  $B_{\alpha}$ -summierbar beziehungsweise zu den Summen  $u$  und  $v$ , so ist die Cauchy-Produktreihe

$$w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots,$$

mit

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0 = \sum_{m=0}^n u_m v_{n-m},$$

absolut  $B_{\alpha}$ -summierbar zur Summe  $uv$ .

Es sei

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n!},$$

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{t^n}{n!},$$

dann ist

$$u = \int_0^{\infty} e^{-x} U(x^\alpha) dx = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l e^{-x} U(x^\alpha) dx,$$

$$v = \int_0^{\infty} e^{-y} V(y^\alpha) dy = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l e^{-y} V(y^\alpha) dy,$$

wobei die beiden uneigentlichen Integrale absolut konvergieren.

Betrachten wir das Produkt

$$\begin{aligned} uv &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left[ \int_0^l e^{-x} U(x^\alpha) dx \cdot \int_0^l e^{-y} V(y^\alpha) dy \right] = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l \int_0^l e^{-(x+y)} U(x^\alpha) V(y^\alpha) dx dy, \end{aligned}$$

wo man im Doppelintegral über das Quadrat

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq l$$

zu integrieren hat, so finden wir

$$uv = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x+y)} U(x^\alpha) V(y^\alpha) dx dy,$$

wenn man unter dem Symbol  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty}$  das uneigentliche Doppelinte-

gral über die Vierelebene  $0xy$  versteht. Wegen der absoluten Konvergenz des uneigentlichen Doppelintegrals können wir auch schreiben

$$uv = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{(\triangle)} \int e^{-(x+y)} U(x^\alpha) V(y^\alpha) dx dy,$$

wo jetzt das Doppelintegral über das Dreieck

$$0 \leq x \leq l - y, \quad 0 \leq y \leq l$$

der  $xy$ -Ebene erstreckt ist (Fig. 1.).

Machen wir im letzten Doppelintegral die Transformation

$$\left. \begin{array}{l} x = \xi\eta \\ x + y = \eta \end{array} \right\} \text{ oder } \left. \begin{array}{l} x = \xi\eta \\ y = \eta(1 - \xi) \end{array} \right\},$$

wobei die Jacobi-Determinante

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \eta & \xi \\ -\eta & 1 - \xi \end{vmatrix} = \eta,$$

so bekommen wir

$$uv = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{(\square)} \int e^{-\eta} \eta U(\xi^\alpha \eta^\alpha) V[\eta^\alpha (1 - \xi)^\alpha] d\xi d\eta.$$

Dabei ist der neue Integrationsbereich das Rechteck

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq l$$

der  $\xi\eta$ -Ebene (Fig. 1.). Drückt man das neue Doppelintegral mit Hilfe eines iterierten Integrals aus, so erhält man

$$\begin{aligned} uv &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^l \left\{ e^{-\eta} \eta \int_0^1 U(\xi^\alpha \eta^\alpha) V[\eta^\alpha (1 - \xi)^\alpha] d\xi \right\} d\eta = \\ &= \int_0^\infty \left\{ e^{-\eta} \eta \int_0^1 U(\xi^\alpha \eta^\alpha) V[\eta^\alpha (1 - \xi)^\alpha] d\xi \right\} d\eta. \end{aligned}$$

Da die Reihen

$$U(\xi^\alpha \eta^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{\xi^{n\alpha} \eta^{n\alpha}}{|n\alpha|}$$

und

$$V[\eta^\alpha (1 - \xi)^\alpha] = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \frac{\eta^{n\alpha} (1 - \xi)^{n\alpha}}{|n\alpha|}$$

absolut konvergieren, so liefert die Multiplikation

$$U(\xi^\alpha \eta^\alpha) V[\eta^\alpha (1 - \xi)^\alpha] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n u_m v_{n-m} \frac{\xi^{m\alpha} \eta^{n\alpha} (1 - \xi)^{(n-m)\alpha}}{|m\alpha| |(n-m)\alpha|}.$$

Die erhaltene Reihe konvergiert im Intervall  $0 \leq \xi \leq 1$  gleichmässig, denn der absolute Betrag ihres allgemeinen Gliedes ist für  $0 \leq \xi \leq 1$  kleiner als

$$\sum_{m=0}^n |u_m| |v_{n-m}| \frac{\eta^{n\alpha}}{|m\alpha| |(n-m)\alpha|},$$

wobei die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n |u_m| |v_{n-m}| \frac{\eta^{n\alpha}}{|m\alpha| |(n-m)\alpha|},$$

als das Produkt der Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| \frac{\eta^{n\alpha}}{|n\alpha|} \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| \frac{\eta^{n\alpha}}{|n\alpha|},$$

konvergent ist. Daher ist die gliedweise Integration gestattet, und wir bekommen

$$\begin{aligned} & \int_0^1 U(\xi^\alpha \eta^\alpha) V[\eta^\alpha (1 - \xi)^\alpha] d\xi = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{u_m v_{n-m}}{|m\alpha| |(n-m)\alpha|} \eta^{n\alpha} \int_0^1 \xi^{m\alpha} (1 - \xi)^{(n-m)\alpha} d\xi. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\int_0^1 \xi^{m\alpha} (1-\xi)^{(n-m)\alpha} d\xi = B[m\alpha + 1, (n-m)\alpha + 1] = \\ = \frac{\Gamma(m\alpha + 1) \Gamma[(n-m)\alpha + 1]}{\Gamma(n\alpha + 2)} = \frac{m\alpha (n-m)\alpha}{n\alpha + 1}$$

und folglich

$$\int_0^1 U(\xi^\alpha \eta^\alpha) V[\eta^\alpha (1-\xi)^\alpha] d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^{n\alpha}}{n\alpha + 1} \sum_{m=0}^n u_m v_{n-m} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{\eta^{n\alpha}}{n\alpha + 1}.$$

Somit haben wir zuletzt die Formel

$$uv = \int_0^{\infty} e^{-\eta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{\eta^{n\alpha + 1}}{n\alpha + 1} \right) d\eta$$

oder

$$(1) \quad uv = \int_0^{\infty} e^{-\eta} I^1 W(\eta^\alpha) d\eta,$$

wo wir

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{t^n}{n\alpha}$$

gesetzt haben. Ausserdem ist das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\eta} I^1 W(\eta^\alpha) d\eta$$

absolut konvergent.

2. Zum Beweise des Satzes haben wir zu zeigen, dass die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W_\lambda(x^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots,$$

wo

$$W_\lambda(t) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} w_n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)^\alpha},$$

absolut konvergieren und dass die Gleichheit

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W(x^\alpha) dx = uv$$

besteht.

Da nach der Formel (1)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} I^1 W(x^\alpha) dx = uv,$$

so ist wegen des Hilfssatzes (II, 2, a) auch

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W(x^\alpha) dx = uv,$$

solange das letzte Integral konvergiert. Daher ist es hinreichend, nur die absolute Konvergenz der Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W_\lambda(x^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

zu beweisen.

Unterscheiden wir jetzt zwei Fälle, je nachdem ob  $a \geq 1$  oder  $a < 1$  ist.

a. Im Falle  $a \geq 1$  folgt aus der Formel (1) die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} I^a W(x^\alpha) dx,$$

wo die Reihe

$$I^a W(x^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^{(n+1)\alpha}}{(n+1)^\alpha}$$

die assoziierte Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung der Reihe

$$0 + w_0 + w_1 + \dots + w_n + \dots$$

darstellt.

Multipliziert man nach der Cauchy-Regel die absolut  $B_\alpha$ -summierbaren Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$

so gelangt man zu der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_{n+1} v_0) = \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n+1} - u_0 v_{n+1}).$$

Sei  $W^1(t)$  die assoziierte ganze Funktion  $\alpha$ -ter Ordnung der Reihe

$$0 + \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n+1} - u_0 v_{n+1}),$$

dann konvergiert das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W^1(x^\alpha) dx.$$

auf Grund des Vorhergehenden absolut.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} W^1(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n+1} - u_0 v_{n+1}) \frac{t^{n+1}}{(n+1)\alpha} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w_{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)\alpha} - u_0 \sum_{n=0}^{\infty} v_{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)\alpha} = W(t) - u_0 V(t), \end{aligned}$$

also

$$W(t) = W^1(t) + u_0 V(t),$$

woraus unmittelbar die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W(x^\alpha) dx$$

folgt.

Multipliziert man nach der Cauchy-Regel die absolut  $B_\alpha$ -summierbaren Reihen

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$

so könnte man wie vorher zeigen, dass das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W_1(x^\alpha) dx$$

absolut konvergiert, und multipliziert man allgemein die absolut  $B_\alpha$ -summierbaren Reihen

$$\sum_{n=\lambda+1}^{\infty} u_n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n,$$

so könnte man daraus die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} W_\lambda(x^\alpha) dx$$

schliessen.

b. Wenn  $\alpha < 1$ , so sei  $k$  die kleinste natürliche Zahl, die der Ungleichung

$$k\alpha \geq 1$$

genügt. Dann folgt aus der Formel (1) die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} I^{k\alpha} W(x^\alpha) dx,$$

wo die Reihe

$$I^{k\alpha} W(x^\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{x^{(n+k)\alpha}}{(n+k)\alpha}$$

die assoziierte Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung der Reihe

$$\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_k \text{ Nullen} + w_0 + w_1 + \dots + w_n + \dots$$

darstellt.



rekt durch die Summen der Reihen (2) ersetzt.

Im folgenden werden wir untersuchen, wie die verallgemeinerte Theorie der absoluten Summabilität sich auf divergente Potenzreihen anwenden lässt.

## KAPITEL IV.

### Absolute Summabilität der divergenten Potenzreihen.

1. Betrachten wir eine Potenzreihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

und bilden die entsprechende assoziierte Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung

$$\begin{aligned} F(z, t) &= u_0 + u_1 z \frac{t}{\alpha} + u_2 z^2 \frac{t^2}{2\alpha} + \dots + u_n z^n \frac{t^n}{n\alpha} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{z^n t^n}{n\alpha} = U(zt). \end{aligned}$$

Die Reihe (1) ist im Punkte  $z = z_0$   $B_\alpha$ -summierbar, wenn die Reihe

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha}$$

eine ganze Funktion  $U(t)$  darstellt und das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(z_0 x^\alpha) dx$$

existiert, wobei die Summabilität absolut ist, wenn alle Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} F_\lambda(z_0, x^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots,$$

wo

$$F_\lambda(z, t) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n z^n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha} = z^\lambda \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n \frac{z^{n-\lambda} t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha} = z^\lambda U_\lambda(zt),$$

absolut konvergieren.

Um ein praktisch leicht anwendbares Kriterium zu bekommen, das über die absolute Summabilität einer Potenzreihe zu entscheiden ermöglicht, beweisen wir den folgenden Satz, den wir später oft benutzen werden.

a. **Satz.** Sind die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^\alpha) dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda\alpha} U^{(\lambda)}(zx^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

im Punkte  $z_0$  absolut konvergent, so ist die Potenzreihe (1) im Punkte  $z_0$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar.

Beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x} F_1(z, x^\alpha) dx$$

und erörtern zwei Fälle, je nachdem ob  $\alpha$  eine ganze Zahl ist oder nicht.

1<sup>o</sup> Ist  $\alpha$  eine ganze Zahl, so haben wir

$$F_1(z, x^\alpha) = \sum_{n=1}^\infty u_n z^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{|(n-1)\alpha|} = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \sum_{n=0}^\infty u_n z^n \frac{x^{n\alpha}}{|n\alpha|} = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} U(zx^\alpha).$$

Differenziert man die Funktion  $U(zx^\alpha)$   $\alpha$ -mal nach  $x$ , so findet man leicht

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} U(zx^\alpha) &= \frac{1}{x^\alpha} \left[ P_{\alpha_1} z x^\alpha U'(zx^\alpha) + P_{\alpha_2} z^2 x^{2\alpha} U''(zx^\alpha) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + P_{\alpha\alpha} z^\alpha x^{\alpha^2} U^{(\alpha)}(zx^\alpha) \right] = \\ &= \frac{1}{x^\alpha} \left[ P_{\alpha_1} z \frac{d}{dz} U(zx^\alpha) + P_{\alpha_2} z^2 \frac{d^2}{dz^2} U(zx^\alpha) + \dots + P_{\alpha\alpha} z^\alpha \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} (Uzx^\alpha) \right], \end{aligned}$$

wo  $P_{\alpha_1}, P_{\alpha_2}, \dots, P_{\alpha\alpha}$  bestimmte Konstanten sind.

Damit bekommen wir für  $x \geq 1$

$$F_1(z, x^\alpha) \equiv \left| P_{\alpha_1} z \left| \frac{d}{dz} U(zx^\alpha) \right| + \left| P_{\alpha_2} z^2 \left| \frac{d^2}{dz^2} U(zx^\alpha) \right| + \dots + \right. \\ \left. + \left| P_{\alpha\alpha} z^\alpha \left| \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} U(zx^\alpha) \right| \right|,$$

und da die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} \left| \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(z_0 x^\alpha) \right| dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

existieren, so existiert auch das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} |F_1(z_0, x^\alpha)| dx.$$

$2^0$  Ist  $\alpha$  keine ganze Zahl, so sei  $k$  die kleinste ganze Zahl, die  $\alpha$  überschreitet, d. h. es sei

$$k - 1 < \alpha < k.$$

Bezeichnet man

$$k - \alpha = \beta,$$

wo

$$0 < \beta < 1,$$

so kann man schreiben

$$F_1(z, x^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n \frac{x^{(n-1)\alpha}}{(n-1)\alpha} = I^{k-\alpha} \frac{d^k}{dx^k} \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \frac{x^{n\alpha}}{n\alpha} = \\ = I^\beta \frac{d^k}{dx^k} U(zx^\alpha).$$

Da nun

$$\frac{d^k}{dx^k} U(zx^\alpha) = \frac{1}{x^k} \left[ P_{k1} z \frac{d}{dz} U(zx^\alpha) + P_{k2} z^2 \frac{d^2}{dz^2} U(zx^\alpha) + \dots + \right. \\ \left. + P_{kk} z^k \frac{d^k}{dz^k} U(zx^\alpha) \right],$$

so existiert das Integral <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Hier wird die Ableitung  $k$ -ter Ordnung  $\frac{d^k}{dx^k} U(z_0 x^\alpha)$  im Punkt  $x = 0$  unendlich, denn in der entsprechenden Reihe ist der kleinste Exponent der Veränderlichen  $x$  negativ, nämlich gleich  $\alpha - k = -\beta$ . Da aber  $\beta < 1$ , so existiert das Integral.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| \frac{d^k}{dx^k} U(z_0 x^\alpha) \right| dx$$

und wegen der Folgerung des Hilfssatzes (II, 2, a) auch das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |F_1(z_0, x^\alpha)| dx = \int_0^{\infty} e^{-x} |I^\beta \frac{d^k}{dx^k} U(z_0 x^\alpha)| dx.$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |F_2(z_0, x^\alpha)| dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-x} |F_3(z_0, x^\alpha)| dx, \dots$$

ebenfalls existieren. In der Tat ist

$$F_2(z, x^\alpha) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} F_1(z, x^\alpha)$$

oder

$$F_2(z, x^\alpha) = I^\beta \frac{d^k}{dx^k} F_1(z, x^\alpha),$$

je nachdem ob  $\alpha$  eine ganze Zahl ist oder nicht, und da ausserdem die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} F_1(z, x^\alpha) \right| dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

im Punkte  $z_0$  existieren, so existiert infolge des Vorhergehenden auch das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |F_2(z_0, x^\alpha)| dx,$$

und weil im allgemeinen

$$F_\lambda(z, x^\alpha) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} F_{\lambda-1}(z, x^\alpha)$$

oder

$$F_\lambda(z, x^\alpha) = I^\beta \frac{d^k}{dx^k} F_{\lambda-1}(z, x^\alpha),$$

je nachdem ob  $\alpha$  eine ganze Zahl ist oder nicht, so könnte man nach und nach das Vorhandensein aller Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |F_{\lambda}(z_0, x^{\alpha})| dx$$

feststellen.

b. Betrachten wir als Beispiel die divergente Potenzreihe

$$1 - 1 \cdot 3 z^2 + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 z^4 - \dots + (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-1) z^{2n} + \dots$$

Nimmt man hier  $\alpha = 2$ , so erhält man

$$\begin{aligned} U(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-1) t^{2n}}{4n} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 4n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} = \cos \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Da nun für jeden reellen Wert von  $z$

$$\left| \frac{d^{\lambda}}{dz^{\lambda}} U(zx^2) \right| = \left| \frac{d^{\lambda}}{dz^{\lambda}} \cos \frac{zx^2}{2} \right| \leq \frac{x^{2\lambda}}{2^{\lambda}},$$

so sind die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| \frac{d^{\lambda}}{dz^{\lambda}} U(zx^2) \right| dx$$

vorhanden, und folglich ist die gegebene Potenzreihe absolut  $B_2$ -summierbar, wenn  $z$  reelle Werte besitzt, wobei ihre Summe durch das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cos \frac{zx^2}{2} dx$$

bestimmt wird.

2. Bereich der absoluten Summabilität. Um eine bestimmte Vorstellung aus dem Bereich, wo die Potenzreihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, zu gewinnen, werden wir den folgenden Satz beweisen, der eine Verallgemeinerung des aus der Theorie der konvergenten Potenzreihen bekannten Satzes Abels ist.

**a. Satz.** Ist die Potenzreihe (1) im Punkte  $z_0$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar, so ist sie in jedem Punkte der Strecke  $0z_0$ , die den Punkt  $z_0$  mit dem Nullpunkte verbindet, ebenfalls absolut  $B_\alpha$ -summierbar.

Es sei  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ , so sind die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} U_\lambda(r_0 e^{i\varphi_0} x^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

nach der Voraussetzung absolut konvergent. Setzt man hier

$$r_0 x^\alpha = y^\alpha,$$

woraus

$$dx = r_0^{-\frac{1}{\alpha}} dy,$$

so bekommt man die absolut konvergenten Integrale

$$r_0^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-r_0^{-\frac{1}{\alpha}} y} U_\lambda(e^{i\varphi_0} y^\alpha) dy.$$

Wenn nun  $z = r e^{i\varphi_0}$  irgendeinen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt auf der Strecke  $0z_0$  bedeutet, so ist  $0 < r < r_0$  und damit

$$e^{-r^{-\frac{1}{\alpha}} y} < e^{-r_0^{-\frac{1}{\alpha}} y},$$

woraus die absolute Konvergenz der Integrale

$$r^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-r^{-\frac{1}{\alpha}} y} U_\lambda(e^{i\varphi_0} y^\alpha) dy$$

folgt. Macht man hier die Substitution

$$y^\alpha = r x^\alpha,$$

dann findet man

$$r^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-r^{-\frac{1}{\alpha}} y} U_\lambda(e^{i\varphi_0} y^\alpha) dy = \int_0^\infty e^{-x} U_\lambda(r e^{i\varphi_0} x^\alpha) dx,$$

und die gewonnenen Integrale sind absolut konvergent, d. h. die Reihe (1) ist im Punkte  $z = re^{i\varphi_0}$  der Strecke  $0z_0$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar.

b. Betrachten wir irgendeine vom Nullpunkt der  $z$ -Ebene ausgehende Halbgerade  $l$ . Auf dieser Halbgeraden liegt zum mindesten ein Punkt, wo die Reihe (1) absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, nämlich der Punkt  $z = 0$ . Andererseits kann es vorkommen, dass die Reihe (1) auf der ganzen Halbgeraden  $l$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist.

Schliessen wir die beiden Extremfälle, wo die Reihe (1) nur im Nullpunkt oder auf der ganzen Halbgeraden absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, aus und teilen alle Punkte der Halbgeraden  $l$  in zwei Klassen, indem wir jene Punkte, wo die absolute Summabilität herrscht, zur ersten Klasse und alle übrigen Punkte der Halbgeraden zur zweiten Klasse gehörig zählen. Da jeder Punkt der ersten Klasse nach dem vorhergehenden Satz dem Nullpunkt näher liegt als irgendein Punkt der zweiten Klasse, so gibt es einen Schnittpunkt  $z_l$  beider Klassen von der Beschaffenheit, dass die Reihe (1) in den Punkten der Strecke  $0z_l$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, aber nicht in den übrigen Punkten der Halbgeraden  $l$ . Was den Punkt  $z_l$  an sich anbelangt, so kann die Reihe (1) da absolut  $B_\alpha$ -summierbar sein oder nicht.

Somit bilden die Punkte der Halbgeraden  $l$ , wo die absolute Summabilität herrscht, eine Strecke  $0z_l$ , die endlich sein kann oder nicht oder zum Nullpunkt zusammenschrumpfen mag.

Lässt man die Halbgerade  $l$  eine volle Drehung um den Nullpunkt ausführen, so erzeugt die Strecke  $0z_l$  einen Bereich, den wir nach G. Sannia<sup>1)</sup>, der den Sonderfall  $\alpha = 1$  behandelt hat, den Stern der absoluten Summabilität nennen und durch das Symbol  $\tau_\alpha$  bezeichnen werden.

Der Stern  $\tau_\alpha$  ist dadurch charakterisiert, dass die Reihe (1) in allen inneren Punkten des Sternes absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, aber nicht mehr in den äusseren Punkten desselben. In den Randpunkten oder Ecken  $z_l$  des Sternes  $\tau_\alpha$  kann die Reihe (1) absolut  $B_\alpha$ -summierbar sein oder nicht.

<sup>1)</sup> Gustavo Sannia, Le serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, vol. 53, 1918, S. 148—162.

Aus der Zusammenfassung des vorhergehenden Kapitels kann man folgern, dass bei der Potenzreihe (1) im Stern  $\tau_\alpha$  alle arithmetischen Rechenoperationen, die bei den konvergenten Potenzreihen im Konvergenzkreise gelten, anwendbar sind.

Wie wir in Kapitel VI sehen werden, lässt sich der Stern  $\tau_\alpha$  bei einer konvergenten Potenzreihe leicht durch die singulären Punkte der entsprechenden Funktion bestimmen. Ebenfalls werden wir in Kapitel IX eine Klasse von divergenten Potenzreihen betrachten, die E. Mailliet<sup>1)</sup> untersucht hat und wo der Stern  $\tau_\alpha$  auch ohne Schwierigkeiten bestimmbar ist.

### 3. Die Potenzreihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

definiert im Stern  $\tau_\alpha$  der absoluten Summabilität durch ihre Summe eine Funktion

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx.$$

Betrachten wir eine vom Nullpunkt der  $z$ -Ebene ausgehende Halbgerade  $l$ . Diese Halbgerade scheidet aus dem Stern  $\tau_\alpha$  die Strecke  $0z_l$  aus, die man den Radius des Sternes nennt.

Untersuchen wir das Verhalten der Funktion  $\varphi(z)$  im Stern  $\tau_\alpha$ , indem wir zeigen, dass die Funktion  $\varphi(z)$  längs den Radien des Sternes stetig, integrierbar und unbegrenzt differenzierbar ist, wobei man unter dem Integralzeichen integrieren und differenzieren darf.

#### a. Satz 1. Die Funktion

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx$$

ist längs jedem Radius  $0z_l$  des Sternes  $\tau_\alpha$  stetig.

<sup>1)</sup> E. Mailliet, op. cit., S. 498—518.

Zum Beweise genügt es zu zeigen, dass das Integral

$$(2) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} U(zx^\alpha) dx$$

auf jedem Radius  $0z_l$  gleichmässig konvergiert.

Es sei  $z = re^{i\varphi_0}$  irgendein Punkt auf dem Radius  $0z_l$ , dann können wir stets auf diesem Radius einen andren Punkt  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$  finden, so dass  $r_0 > r$ . Wegen der absoluten Summabilität der Reihe (1) im Punkte  $z_0$  existiert das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |U(r_0 e^{i\varphi_0} x^\alpha)| dx = r_0^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-r_0^{-\frac{1}{\alpha}} y} |U(e^{i\varphi_0} y^\alpha)| dy,$$

wo man die neue Integrationsvariable  $y$  durch die Substitution

$$r_0 x^\alpha = y^\alpha$$

eingeführt hat. Hieraus folgt auf Grund der Ungleichung

$$e^{-r^{-\frac{1}{\alpha}} y} < e^{-r_0^{-\frac{1}{\alpha}} y}$$

die gleichmässige Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(re^{i\varphi_0} x^\alpha) dy = r^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-r^{-\frac{1}{\alpha}} y} U(e^{i\varphi_0} y^\alpha) dy$$

im Intervall  $0 < r \leq r_0$ , wobei der Punkt  $r = 0$  wegen des Faktors  $r^{-\frac{1}{\alpha}}$  weggelassen ist.

Somit konvergiert das Integral (2) auf der Strecke  $0z_l$  gleichmässig, vielleicht mit Ausnahme des Punktes  $z = 0$ . Folglich verhält sich die Funktion  $\varphi(z)$  auf dem Radius  $0z_l$  stetig, wobei die Endpunkte  $z = 0$  und  $z = z_l$  vielleicht auszuschliessen sind.

Doch hat E. Landau<sup>1)</sup> bewiesen, dass das Integral (2) auch in der Umgebung des Nullpunktes gleichmässig konvergiert, womit die Stetigkeit der Funktion  $\varphi(z)$  im Punkte  $z = 0$  be-

<sup>1)</sup> Edmund Landau, Auszug aus einem Briefe des Herrn Landau an den Herausgeber. Acta mathematica 42, 1920, S. 95—98.

stätigt wird. Wir werden aber im folgenden einen andren Weg benutzen, um die Stetigkeit der Funktion  $\varphi(z)$  im Nullpunkt zu beweisen.

Es sei nämlich  $k$  eine der Ungleichung

$$k \geq \frac{1}{\alpha}$$

genügende natürliche Zahl.

Da die Reihe (1) absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, so ist es auch die Reihe

$$u_k z^k + u_{k+1} z^{k+1} + u_{k+2} z^{k+2} + \dots,$$

und ihre Summen stehen miteinander in der Beziehung, als ob die beiden Reihen konvergent seien, d. h.

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_{k-1} z^{k-1} + \int_0^\infty e^{-x} F_k(z, x^\alpha) dx.$$

Wie vorher, können wir uns überzeugen, dass hier das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} F_k(z, x^\alpha) dx = z^k \int_0^\infty e^{-x} U_k(z x^\alpha) dx$$

auf der Strecke  $0z_0$  gleichmässig konvergiert, wobei nun der Nullpunkt mitzuberechnen ist, woraus die Stetigkeit der Funktion  $\varphi(z)$  auch im Punkte  $z=0$  folgt.

b. **Satz 2.** Die Funktion

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-x} U(z x^\alpha) dx$$

ist längs jedem Radius  $0z_1$  des Sternes  $\tau_\alpha$  integrierbar, wobei man unter dem Integralzeichen integrieren darf, d. h.

$$\int_0^z \varphi(z) dz = \int_0^\infty e^{-x} \left[ \int_0^z U(z x^\alpha) dz \right] dx.$$

Da die Funktion  $\varphi(z)$  sich auf dem Radius  $0z_1$  stetig verändert, so ist sie längs diesem Radius auch integrierbar, und es bleibt nur übrig, den zweiten Teil des Satzes zu beweisen.

Genügt die natürliche Zahl  $k$  der Ungleichung

$$k \geq \frac{1}{\alpha},$$

so haben wir nach dem Abschnitt (a)

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_{k-1} z^{k-1} + \int_0^\infty e^{-x} F_k(z, x^\alpha) dx,$$

wobei das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} F_k(z, x^\alpha) dx$$

auf der Strecke  $0z_0$ , der Punkt  $z=0$  miteinbegriffen, gleichmäßig konvergiert. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^z \varphi(z) dz &= u_0 z + u_1 \frac{z^2}{2} + u_2 \frac{z^3}{3} + \dots + u_{k-1} \frac{z^k}{k} + \\ &+ \int_0^\infty e^{-x} \left[ \int_0^z F_k(z, x^\alpha) dz \right] dx. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \left[ \int_0^z F_k(z, x^\alpha) dz \right] dx &= \int_0^\infty e^{-x} \left[ \int_0^z \left( \sum_{n=k}^\infty u_n z^n \frac{x^{(n-k)\alpha}}{(n-k)\alpha} \right) dz \right] dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \left( \sum_{n=k}^\infty u_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \frac{x^{(n-k)\alpha}}{(n-k)\alpha} \right) dx = \int_0^\infty e^{-x} I^{k\alpha} \left( \sum_{n=k}^\infty u_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \frac{x^{(n-k)\alpha}}{(n-k)\alpha} \right) dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \left( \sum_{n=k}^\infty u_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \frac{x^{n\alpha}}{n\alpha} \right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \left( \sum_{n=0}^\infty u_n \frac{z^{n+1}}{n+1} \frac{x^{n\alpha}}{n\alpha} \right) dx - \\ &- \left( u_0 z + u_1 \frac{z^2}{2} + u_2 \frac{z^3}{3} + \dots + u_{k-1} \frac{z^k}{k} \right) \end{aligned}$$

und folglich

$$\int_0^z \varphi(z) dz = \int_0^\infty e^{-x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{z^{n+1} x^{n\alpha}}{n+1 |n\alpha|} \right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \left[ \int_0^z U(zx^\alpha) dz \right] dx.$$

### c. Satz 3. Die Funktion

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx$$

ist längs jedem Radius  $0z_1$  des Sternes  $\tau_\alpha$  unbegrenzt differenzierbar, wobei man unter dem Integralzeichen differenzieren darf, d. h.

$$\varphi^{(\lambda)}(z) = \int_0^\infty e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^\alpha) dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda\alpha} U^{(\lambda)}(zx^\alpha) dx.$$

Zum Beweis ist es hinreichend, die gleichmässige Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^\alpha) dx$$

längs dem Radius  $0z_1$  zu beweisen.

Da

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zt) = \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \frac{t^n}{|n\alpha|} \right) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\lambda+1) u_n z^{n-\lambda} \frac{t^n}{|n\alpha|},$$

so stellt die Funktion

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zt)$$

die assoziierte Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung der Reihe

$$\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{\lambda \text{ Nullen}} + \sum_{n=\lambda}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\lambda+1) u_n z^{n-\lambda}$$

dar.

Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, ist die Reihe

$$\sum_{n=\lambda}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\lambda+1) u_n z^{n-\lambda},$$

die aus der Reihe (1) durch  $\lambda$ -malige gliedweise Differentiation entstanden ist, im Stern  $\tau_\alpha$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar. Dann ist aber auch die Reihe

$$\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_{\lambda \text{ Nullen}} + \sum_{n=\lambda}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\lambda+1)u_n z^{n-\lambda}$$

im Stern  $\tau_\alpha$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar und mithin nach dem Abschnitt (a) das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^\alpha) dx$$

längs jedem Radius  $0z_l$  gleichmässig konvergent, vielleicht mit Ausnahme der Endpunkte  $z=0$  und  $z=z_l$ .

Somit gilt die Formel

$$\varphi^{(\lambda)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^\alpha) dx$$

in jedem Punkt des Radius  $0z_l$ , die Endpunkte desselben vielleicht ausgenommen.

Verwendet man die im Abschnitt (b) entwickelte Gedankenfolge, so könnte man ohne Schwierigkeiten zeigen, dass die obere Formel auch für  $z=0$  gültig bleibt.

Daher können wir schreiben

$$\varphi^{(\lambda)}(0) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\lambda\alpha} U^{(\lambda)}(0) dx = \frac{|\lambda| u_\lambda}{|\lambda\alpha|} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\lambda\alpha} dx = |\lambda| u_\lambda,$$

woraus sich ergibt

$$u_\lambda = \frac{\varphi^{(\lambda)}(0)}{|\lambda|},$$

und damit haben wir die Formel

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} z + \frac{\varphi''(0)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} z^n + \dots,$$

die die Erweiterung der Reihenentwicklung von Mac-Laurin darstellt. Dabei sind die Ableitungen der Funktion  $\varphi(z)$  längs den Radien des Sternes  $\tau_\alpha$  zu nehmen.

So bestimmt die Potenzreihe (1) im Stern der absoluten Summabilität eine längs den Radien des Sternes stetige, integrierbare und unbegrenzt differenzierbare Funktion, wobei man die Integration und Differentiation unter dem Integralzeichen ausführen kann.

Es bleibt noch zu beweisen, dass wir jede abgeleitete Funktion sowie die Integralfunktion direkt aus der divergenten Potenzreihe (1) erhalten können, indem wir die letztere gliedweise differenzieren, beziehungsweise integrieren.

## KAPITEL V.

### Differentiation und Integration der divergenten Potenzreihen.

1. Differentiation. — Es sei die Potenzreihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

im Stern  $\tau_\alpha$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar zur Summe

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx,$$

wo

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha}.$$

Differenziert man die Reihe (1) gliedweise nach  $z$ , so bekommt man die Reihe

$$(2) \quad u_1 + 2u_2 z + \dots + nu_n z^{n-1} + \dots$$

**Satz.** Die Reihe (2) ist im Stern  $\tau_\alpha$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $\varphi'(z)$ , d. h. bezeichnet man

$$\psi(z) = \int_0^\infty e^{-x} V(zx^\alpha) dx,$$

mit

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)\alpha},$$

so besteht die Gleichheit  $\psi(z) = \varphi'(z)$ .

a. Zum Beweise der absoluten Summabilität der Reihe (2) haben wir die absolute Konvergenz der Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} V_{\lambda}(zx^{\alpha}) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

festzustellen, wobei

$$V_{\lambda}(t) = \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} n u_n \frac{t^{n-\lambda-1}}{(n-\lambda-1)\alpha}.$$

Die Funktion

$$F_{\lambda+1}(z, t) = \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} u_n z^n \frac{t^{n-\lambda-1}}{(n-\lambda-1)\alpha} = z^{\lambda+1} U_{\lambda+1}(zt)$$

betrachtend sehen wir, dass

$$\begin{aligned} V_{\lambda}(zt) &= z^{-\lambda} \frac{d}{dz} F_{\lambda+1}(z, t) = z^{-\lambda} \frac{d}{dz} \left[ z^{\lambda+1} U_{\lambda+1}(zt) \right] = \\ &= (\lambda+1) U_{\lambda+1}(zt) + z \frac{d}{dz} U_{\lambda+1}(zt), \end{aligned}$$

woraus

$$V_{\lambda}(zx^{\alpha}) = (\lambda+1) U_{\lambda+1}(zx^{\alpha}) + z \frac{d}{dz} U_{\lambda+1}(zx^{\alpha}).$$

Nun ist aber

$$\frac{d}{dz} U_{\lambda+1}(zx^{\alpha}) = x^{\alpha} U'_{\lambda+1}(zx^{\alpha})$$

und

$$\frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^{\alpha}) = z\alpha x^{\alpha-1} U'_{\lambda+1}(zx^{\alpha}).$$

Aus der letzten Gleichheit ergibt sich

$$U'_{\lambda+1}(zx^{\alpha}) = \frac{1}{z\alpha x^{\alpha-1}} \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^{\alpha}),$$

so dass

$$\frac{d}{dz} U_{\lambda+1}(zx^\alpha) = \frac{x}{z\alpha} \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^\alpha).$$

Damit haben wir die Formel

$$V_\lambda(zx^\alpha) = (\lambda + 1) U_{\lambda+1}(zx^\alpha) + \frac{x}{\alpha} \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^\alpha),$$

woraus

$$\left| V_\lambda(zx^\alpha) \right| \leq (\lambda + 1) \left| U_{\lambda+1}(zx^\alpha) \right| + \frac{x}{\alpha} \left| \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^\alpha) \right|,$$

und folglich können wir schreiben

$$\begin{aligned} \int_0^l e^{-x} \left| V_\lambda(zx^\alpha) \right| dx &\leq (\lambda + 1) \int_0^l e^{-x} \left| U_{\lambda+1}(zx^\alpha) \right| dx + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \int_0^l e^{-x} x \left| \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^\alpha) \right| dx. \end{aligned}$$

Da das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \left| U_{\lambda+1}(zx^\alpha) \right| dx$$

für jedes  $z$  im Stern  $\tau_\alpha$  existiert, so haben wir nur das Vorhandensein des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x} x \left| \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^\alpha) \right| dx$$

zu zeigen. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst einen Hilfssatz.

**b. Hilfssatz.** Konvergiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} F(zx^\alpha) dx$$

im Punkte  $z_0$  absolut, so konvergiert das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} x F(zx^\alpha) dx$$

in jedem Punkte der Strecke  $0z_0$  absolut, der Punkt  $z_0$  vielleicht ausgenommen.

Es sei  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ , so ist das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} F(r_0 e^{i\varphi_0} x^\alpha) dx$$

nach der Voraussetzung absolut konvergent.

Setzen wir

$$r_0 x^\alpha = y^\alpha,$$

so finden wir

$$\int_0^{\infty} e^{-x} F(r_0 e^{i\varphi_0} x^\alpha) dx = r_0^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-r_0^{-\frac{1}{\alpha}} y} F(e^{i\varphi_0} y^\alpha) dy.$$

Nun folgt aus  $0 < r < r_0$  für alle hinreichend grossen  $y$

$$y e^{-r^{-\frac{1}{\alpha}} y} < e^{-r_0^{-\frac{1}{\alpha}} y},$$

und damit konvergiert das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x F(r e^{i\varphi_0} x^\alpha) dx = r^{-\frac{2}{\alpha}} \int_0^{\infty} y e^{-r^{-\frac{1}{\alpha}} y} F(e^{i\varphi_0} y^\alpha) dy$$

absolut.

c. Jetzt sind wir imstande die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^\alpha) dx,$$

wo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^\alpha) &= \frac{d}{dx} \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} u_n z^{n-\lambda-1} \frac{x^{(n-\lambda-1)\alpha}}{|(n-\lambda-1)\alpha|} = \\ &= \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} u_n z^{n-\lambda-1} \frac{x^{(n-\lambda-1)\alpha-1}}{(n-\lambda-1)\alpha-1}, \end{aligned}$$

im Stern  $\tau_\alpha$  zu beweisen.

Es sei  $k$  eine der Ungleichung

$$k \geq \frac{1}{\alpha}$$

genügende natürliche Zahl. Bezeichnen wir

$$k\alpha - 1 = \beta$$

und betrachten das im Stern  $\tau_\alpha$  absolut konvergierende Integral

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-x} U_{\lambda+k+1}(zx^\alpha) dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \left[ \sum_{n=\lambda+k+1}^\infty u_n z^{n-\lambda-k-1} \frac{x^{(n-\lambda-k-1)\alpha}}{(n-\lambda-k-1)\alpha} \right] dx, \end{aligned}$$

das wir durch das gleiche und ebenfalls absolut konvergierende Integral

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-x} I^\beta U_{\lambda+k+1}(zx^\alpha) dx = \\ &= \int_0^\infty e^{-x} \left[ \sum_{n=\lambda+k+1}^\infty u_n z^{n-\lambda-k-1} \frac{x^{(n-\lambda-1)\alpha-1}}{(n-\lambda-1)\alpha-1} \right] dx = \\ &= z^{\frac{1}{\alpha}-k} \int_0^\infty e^{-x} \left[ \sum_{n=\lambda+k+1}^\infty u_n \frac{(zx^\alpha)^{n-\lambda-1-\frac{1}{\alpha}}}{(n-\lambda-1)\alpha-1} \right] dx \end{aligned}$$

ersetzen können.

Wegen des im Abschnitt (b) bewiesenen Hilfssatzes konvergiert auch das Integral

$$\begin{aligned} & z^{\frac{1}{\alpha}-k} \int_0^\infty e^{-x} x \left[ \sum_{n=\lambda+k+1}^\infty u_n \frac{(zx^\alpha)^{n-\lambda-1-\frac{1}{\alpha}}}{(n-\lambda-1)\alpha-1} \right] dx = \\ &= z^{-k} \int_0^\infty e^{-x} x \left[ \sum_{n=\lambda+k+1}^\infty u_n z^{n-\lambda-1} \frac{x^{(n-\lambda-1)\alpha-1}}{(n-\lambda-1)\alpha-1} \right] dx \end{aligned}$$

im Stern  $\tau_\alpha$  absolut, woraus die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x \frac{d}{dx} U_{\lambda+1}(zx^\alpha) dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} x \left[ \sum_{n=\lambda+1}^{\infty} u_n z^{n-\lambda-1} \frac{x^{(n-\lambda-1)\alpha-1}}{|(n-\lambda-1)\alpha-1|} \right] dx$$

unmittelbar folgt.

d. Was die Summe  $\psi(z)$  der Reihe (2) betrifft, so ist sie durch das Integral

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} V(zx^\alpha) dx$$

gegeben.

Nach dem Abschnitt (a) haben wir aber

$$V_\lambda(zt) = z^{-\lambda} \frac{d}{dz} F_{\lambda+1}(z, t)$$

und dann insbesondere für  $\lambda = 0$

$$V(z) = \frac{d}{dz} F_1(z, t),$$

woraus

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d}{dz} F_1(z, x^\alpha) dx.$$

Da  $F_1(z, t)$  die assoziierte ganze Funktion  $a$ -ter Ordnung der absolut  $B_\alpha$ -summierbaren Reihe

$$u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

ist, so dürfen wir nach (IV, 3, c) die Reihenfolge des Differenzierens und Integrierens vertauschen und erhalten demgemäss

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} e^{-x} F_1(z, x^\alpha) dx = \frac{d}{dz} [\varphi(z) - u_0] = \varphi'(z).$$

2. Setzen wir

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots,$$

so können wir schreiben

$$\varphi'(z) = u_1 + 2u_2 z + 3u_3 z^2 + \dots + n u_n z^{n-1} + \dots$$

Da die letzte Reihe im Stern  $\tau_\alpha$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, so bekommen wir weiter

$$\varphi''(z) = 2 \cdot 1 u_2 + 3 \cdot 2 u_3 z + 4 \cdot 3 u_4 z^2 + \dots + n(n-1) u_n z^{n-2} + \dots$$

und im allgemeinen

$$\varphi^{(\lambda)}(z) = \lambda(\lambda-1)\dots 1 u_\lambda + (\lambda+1)\lambda\dots 2 u_{\lambda+1} z + \\ + (\lambda+2)(\lambda+1)\dots 3 u_{\lambda+2} z^2 + \dots + n(n-1)\dots(n-\lambda+1) u_n z^{n-\lambda} + \dots,$$

wobei alle durch die gliedweise Differentiation erhaltenen Reihen im Stern  $\tau_\alpha$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar sind.

Weil die Funktionen

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zt), \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

die assoziierten ganzen Funktionen der Reihen

$$\underbrace{0 + 0 + \dots + 0}_\lambda \text{ Nullen} + \sum_{n=\lambda}^{\infty} n(n-1)\dots(n-\lambda+1) u_n z^{n-\lambda}$$

darstellen, so konvergieren die Integrale

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

im Stern  $\tau_\alpha$  absolut.

Umgekehrt, wenn die Integrale (3) in einem Punkt absolut konvergieren, so ist die Reihe (1) nach (IV, 1, a) in diesem Punkt absolut  $B_\alpha$ -summierbar.

Somit ist für die absolute Summabilität der Potenzreihe (1) in einem Stern notwendig und hinreichend, dass die Integrale (3) in diesem Stern absolut konvergent sind. Was die Randpunkte des Sternes anbelangt, so kann die Reihe (1) da absolut  $B_\alpha$ -summierbar sein, ohne dass die Integrale (3) da absolut zu konvergieren brauchen.

3. I n t e g r a t i o n. — Integriert man die Potenzreihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

gliedweise nach  $z$ , so bekommt man die Reihe

$$(4) \quad u_0 z + u_1 \frac{z^2}{2} + u_2 \frac{z^3}{3} + \dots + u_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots$$

**Satz.** Die Reihe (4) ist im Stern  $\tau_\alpha$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar zur Summe  $\int_0^z \varphi(z) dz$ , d. h. bezeichnet man

$$\chi(z) = \int_0^\infty e^{-x} W(zx^\alpha) dx,$$

mit

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n+1} \frac{t^{n+1}}{|(n+1)\alpha|},$$

so besteht die Gleichheit

$$\chi(z) = \int_0^z \varphi(z) dz.$$

a. Zum Beweise der absoluten Summabilität der Reihe (4) genügt es, wenn wir die absolute Konvergenz der Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} W(zx^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

im Stern  $\tau_\alpha$  zeigen.

Es sei  $F^1(z, t)$  die assoziierte ganze Funktion  $\alpha$ -ter Ordnung der Reihe

$$0 + u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots,$$

d. h. es sei

$$F^1(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \frac{t^{n+1}}{|(n+1)\alpha|},$$

so haben wir

$$W(zt) = \int_0^z F^1(z, t) dz,$$

woraus

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} W(zt) = \frac{d^{\lambda-1}}{dz^{\lambda-1}} F^1(z, t).$$

Folglich konvergieren die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^{\lambda}}{dz^{\lambda}} W(zx^{\alpha}) dx$$

im Stern  $\tau_{\alpha}$  absolut.

b. Für die Summe  $\chi(z)$  der Reihe (4) ergibt sich

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \int_0^{\infty} e^{-x} W(zx^{\alpha}) dx = \int_0^{\infty} e^{-x} \left[ \int_0^z F^1(z, x^{\alpha}) dz \right] dx = \\ &= \int_0^z \left[ \int_0^{\infty} e^{-x} F^1(z, x^{\alpha}) dx \right] dz = \int_0^z \varphi(z) dz, \end{aligned}$$

denn nach (IV, 3, b) ist die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen zulässig.

Somit folgt aus

$$\varphi(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

die Gleichheit

$$\int_0^z \varphi(z) dz = u_0 z + u_1 \frac{z^2}{2} + u_2 \frac{z^3}{3} + \dots + u_n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots$$

4. Für die Reihen, die man aus der Reihe (1) durch gliedweises Differenzieren oder Integrieren erhält, dient  $\tau_{\alpha}$  als der Stern der absoluten Summabilität in dem Sinne, dass alle erwähnten Reihen nur im Innern des Sternes  $\tau_{\alpha}$  absolut  $B_{\alpha}$ -summierbar sind, während in den äusseren Punkten desselben keine dieser Reihen absolut  $B_{\alpha}$ -summierbar ist, denn widrigenfalls könnten wir beziehungsweise durch Integrieren oder Differenzieren zeigen, dass für die Reihe (1) in bestimmten äusseren Punkten des Sternes  $\tau_{\alpha}$  absolute Summabilität herrschen müsste, was aber unmöglich ist.

Also spielt der Stern  $\tau_{\alpha}$  in bezug auf die absolut  $B_{\alpha}$ -summierbaren divergenten Potenzreihen dieselbe Rolle, wie der Konvergenzkreis betreffs der konvergenten Potenzreihen.

Somit haben wir die Theorie der konvergenten Potenzreihen auf die absolut  $B_{\alpha}$ -summierbaren divergenten Potenzreihen erweitert, oder mit anderen Worten, wir haben, von dem  $B_{\alpha}$ -Verfah-

ren ausgehend, eine bestimmte Theorie der divergenten Potenzreihen begründet, die für  $\alpha=1$  die bekannte Theorie von Borel<sup>1)</sup> enthält.

Da wir nirgend wesentlich die Divergenz der Potenzreihe (1) vorausgesetzt haben, so ist die verallgemeinernde Theorie Borels auch auf die konvergenten Potenzreihen anwendbar, welche Frage wir im nächsten Kapitel behandeln werden.

## KAPITEL VI.

### Absolute Summabilität der konvergenten Potenzreihen.

1. Besitzt die Potenzreihe

$$(1) \quad u(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

einen endlichen, von Null verschiedenen Konvergenzradius

$$R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|u_n|}},$$

so ist die entsprechende assoziierte Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha}$$

beständig konvergent, denn die Anwendung der bekannten Formel von Stirling ergibt

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{|u_n|}{n\alpha}}} &= R \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n\alpha} = \\ &= R \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n\alpha)^{n\alpha} e^{-n\alpha} \sqrt{2\pi n\alpha}} = R \limsup_{n \rightarrow \infty} (n\alpha)^\alpha e^{-\alpha} = \infty. \end{aligned}$$

Weil die Reihe (1) im Konvergenzkreis  $|z| < R$  absolut konvergiert, so ist sie dort sicher absolut  $B_\alpha$ -summierbar, wobei ihre Summe

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx$$

<sup>1)</sup> É. Borel, Leçons sur les séries divergentes.

mit dem durch die Reihe (1) dargestellten Funktionszweig  $u(z)$  übereinstimmt, d. h. es ist

$$\varphi(z) = u(z), \quad \text{für } |z| < R.$$

Sei  $A$  der Holomorphiestern des Funktionszweiges  $u(z)$ , d. h. die Menge aller Punkte  $z$ , die man durch reguläre analytische Fortsetzung der Reihe (1) längs den vom Nullpunkt ausgehenden Halbgeraden  $l$  erreichen kann, und es bedeute  $z_0$  einen Punkt in diesem Holomorphiestern, der ausserhalb des Konvergenzkreises  $|z| < R$  liegt, so besitzt  $u(z)$  im Punkte  $z_0$  einen bestimmten Wert  $u(z_0)$ , obgleich die Reihe (1) in jenem Punkte divergiert.

**Satz.** Ist die Reihe (1) im Punkte  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$  des Sternes  $A$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar, dann fällt ihre Summe

$$(2) \quad \varphi(z_0) = \int_0^\infty e^{-x} U(r_0 e^{i\varphi_0} x^\alpha) dx$$

mit dem entsprechenden Funktionswert  $u(z_0)$  zusammen.

Setzt man im Integral (2)

$$r_0 x^\alpha = y^\alpha,$$

so ergibt sich

$$\int_0^\infty e^{-x} U(r_0 e^{i\varphi_0} x^\alpha) dx = r_0^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-r_0^{-\frac{1}{\alpha}} y} U(e^{i\varphi_0} y^\alpha) dy.$$

Betrachten wir nun das Integral

$$(3) \quad \Phi(z) = \left( \frac{e^{i\varphi_0}}{z} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^\infty e^{-\left( \frac{e^{i\varphi_0}}{z} \right)^{\frac{1}{\alpha}} y} U(e^{i\varphi_0} y^\alpha) dy,$$

mit  $z = r e^{i\varphi}$ .

Da der Punkt  $z = 0$  im allgemeinen ein Verzweigungspunkt der Funktion

$$e^{-\left( \frac{e^{i\varphi_0}}{z} \right)^{\frac{1}{\alpha}} y}$$

ist, so nehmen wir in der  $z$ -Ebene einen Schnitt  $(0, \infty)$  längs der Verlängerung der Strecke  $Oz_0$  vor, indem wir uns auf die Punkte  $z = r e^{i\varphi}$  beschränken, für welche  $|\varphi - \varphi_0| < \pi$  ist.

Das Integral (3) konvergiert für alle in Betracht kommenden  $z$  gleichmässig, wenn

$$\left| e^{-\left(\frac{e^{i\varphi_0}}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}} y} \right| \leq e^{-r_0^{-\frac{1}{\alpha}} y},$$

woraus

$$R \left[ \left(\frac{e^{i\varphi_0}}{z}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right] \geq \left(\frac{1}{r_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

oder

$$\frac{\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}}{r^{\frac{1}{\alpha}}} \geq \left(\frac{1}{r_0}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

und damit

$$\frac{1}{r^{\alpha}} \leq r_0^{\alpha} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}.$$

Lässt man das Argument  $\varphi$  im Falle  $\alpha \leq 2$  die Werte

$$|\varphi - \varphi_0| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$$

und im Falle  $\alpha > 2$  die Werte

$$|\varphi - \varphi_0| \leq \pi$$

durchlaufen, so stellt die Gleichung

$$\frac{1}{r^{\alpha}} = r_0^{\alpha} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}$$

eine geschlossene Kurve  $C_{z_0}$  dar, die stets den Punkt  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$  und für  $\alpha \leq 2$  auch den Nullpunkt durchgeht, während sie für  $\alpha > 2$  den Nullpunkt umschliesst (Fig. 3.).

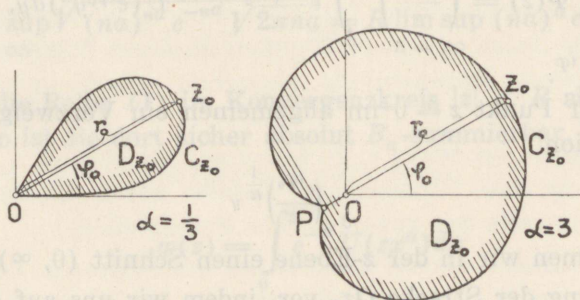


Fig. 3.

Die Kurve  $C_{z_0}$  begrenzt einen Bereich  $D_{z_0}$ , in dessen Punkten das Integral (3) gleichmässig konvergiert, abgesehen von dem im Falle  $\alpha > 2$  vorhandenen Schnitt  $OP$  längs der Verlängerung der Strecke  $Oz_0$  (Fig. 3.).

Somit stellt das Integral (3) eine Funktion  $\Phi(z)$  dar, die im Bereich  $D_{z_0}$  holomorph ist, mit Ausnahme des Schnittes  $OP$  im Falle  $\alpha > 2$ .

Wegen der Gleichheit

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} U(re^{i\varphi} x^\alpha) dx = r^{-\frac{1}{\alpha}} \int_0^{\infty} e^{-r^{-\frac{1}{\alpha}} y} U(e^{i\varphi} y^\alpha) dy$$

haben wir für  $\varphi = \varphi_0$ ,  $0 < r \leq r_0$ , d. h. auf der Strecke  $Oz_0$

$$\Phi(z) = \varphi(z).$$

Nun ist aber im Konvergenzkreise  $|z| < R$  der Reihe (1)

$$\varphi(z) = u(z),$$

und damit gilt auf dem Teil der Strecke  $Oz_0$ , der sich im Konvergenzkreise  $|z| < R$  befindet, die Gleichheit

$$\Phi(z) = u(z).$$

Da die Funktionen  $\Phi(z)$  und  $u(z)$  beide analytisch sind und  $\Phi(z)$  ausserdem im Bereich  $D_{z_0}$ , ausgenommen der Schnitt  $OP$  im Falle  $\alpha > 2$ , holomorph ist, so verhält sich auch die Funktion  $u(z)$  nach dem bekannten Satz von Meray-Weierstrass im Bereich  $D_{z_0}$  holomorph, wobei wir im Falle  $\alpha > 2$  den Schnitt  $OP$  nicht mehr einzuführen brauchen, denn der Nullpunkt ist für die Funktion  $u(z)$  ein regulärer Punkt.

Also gilt die Gleichheit

$$\Phi(z) = u(z)$$

und folglich auch die Gleichheit

$$\varphi(z) = u(z)$$

auf der ganzen Strecke  $Oz_0$ , den Punkt  $z_0$  mitgezählt, denn die Funktionen  $\varphi(z)$  und  $u(z)$  sind im Punkte  $z_0$  stetig. Somit haben wir

$$\varphi(z_0) = u(z_0),$$

und es besteht demnach ein voller Einklang zwischen den Theorien der absoluten Summabilität und der analytischen Fortsetzung.

## 2. Wenn also die Potenzreihe

$$(1) \quad u(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

im Punkte  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, dann verhält sich die Funktion  $u(z)$  im Bereich  $D_{z_0}$ , der von der Kurve  $C_{z_0}$

$$r^\alpha = r_0^\alpha \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}, \quad \begin{cases} |\varphi - \varphi_0| \leq \alpha \frac{\pi}{2} & \text{für } \alpha \leq 2 \\ |\varphi - \varphi_0| \leq \pi & \text{für } \alpha > 2 \end{cases}$$

begrenzt wird, holomorph. Damit ist für die absolute Summabilität der Potenzreihe (1) im Punkte  $z_0$  notwendig, dass die Funktion  $u(z)$  im Bereich  $D_{z_0}$  holomorph sei.

Wir behaupten, dass für die absolute Summabilität der Potenzreihe (1) im Punkte  $z_0$  hinreichend ist, wenn die Funktion  $u(z)$  sich im Bereich  $D_{z_0}$  und auf der Randkurve  $C_{z_0}$  holomorph verhält.

a. Nehmen wir an, dass die Funktion  $u(z)$  im Bereich  $D_{z_0}$  und auf der Randkurve  $C_{z_0}$  desselben holomorph sei und zeigen zunächst, dass dann das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} U(z_0 x^\alpha) dx$$

absolut konvergiert.

In der Tat können wir infolge der gemachten Voraussetzung eine die Randkurve  $C_{z_0}$  umschliessende rektifizierbare Kurve  $C$  finden, so dass die Funktion  $u(z)$  auf  $C$  noch holomorph bleibt.

Weil die Kurve  $C$  den Nullpunkt umkreist, so haben wir nach der Integralformel von Cauchy

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Daher lässt sich die assoziierte ganze Funktion  $\alpha$ -ter Ordnung der Reihe (1) auf die Form

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\alpha} \int_{(C)} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{u(\zeta)}{\zeta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\zeta^{n+1} n\alpha} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{u(\zeta)}{\zeta} E_\alpha \left( \frac{t}{\zeta} \right) d\zeta \end{aligned}$$

bringen, wo

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n\alpha}$$

die bekannte ganze Funktion von Mittag-Leffler<sup>1)</sup> bedeutet, die nach den Untersuchungen Mittag-Lefflers der Ungleichung

$$|E_\alpha(z)| < K_1 |e^{z^\alpha}| + K_2$$

oder

$$|E_\alpha(re^{i\varphi})| < K_1 e^{r^\alpha \cos \frac{\varphi}{\alpha}} + K_2$$

genügt, wenn  $|\varphi| \leq \pi$  ist und  $K_1, K_2$  bestimmte Konstanten sind.

Bezeichnen wir nun die Länge der Kurve  $C$  mit  $L$  und das Maximum des Moduls der Funktion  $\frac{u(\zeta)}{\zeta}$  auf  $C$  mit  $M$ , so finden wir

$$\left| U(z_0 x^\alpha) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_C \frac{u(\zeta)}{\zeta} E_\alpha \left( \frac{z_0 x^\alpha}{\zeta} \right) d\zeta \right| \leq \frac{LM}{2\pi} \left| E_\alpha \left( \frac{z_0 x^\alpha}{\zeta} \right) \right|_{\text{Max}(C)},$$

woraus, indem man  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ , mit  $|\theta - \varphi_0| \leq \pi$ , setzt, folgt

$$\begin{aligned} e^{-x} \left| U(z_0 x^\alpha) \right| &\leq \frac{LM}{2\pi} e^{-x} \left| E_\alpha \left[ \frac{r_0 x^\alpha}{\rho} e^{i(\varphi_0 - \theta)} \right] \right|_{\text{Max}(C)} < \\ (4) \quad &< \frac{LM}{2\pi} \left\{ K_1 e^{-x} \left[ 1 - \left( \frac{r_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\theta - \varphi_0}{\alpha} \right] + K_2 e^{-x} \right\}_{\text{Max}(C)}. \end{aligned}$$

Unterscheiden wir im folgenden zwei Fälle, je nachdem ob  $\alpha \geq 1$  oder  $\alpha < 1$  ist.

<sup>1)</sup> Gustaf Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène, Note V. Acta mathematica 29, 1905, S. 101—182. — Derselbe, Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe. Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, vol. I, 1909, S. 67—85.

1<sup>o</sup> Weil im Falle  $\alpha \geq 1$  die Ungleichung

$$r^{\frac{1}{\alpha}} \leq r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}$$

nur für die Punkte  $z = re^{i\varphi}$  des Bereiches  $D_{z_0}$  und der Randkurve  $C_{z_0}$  gilt, so besteht für die Punkte  $\zeta = \varrho e^{i\theta}$  der Kurve  $C$  die Ungleichung

$$\varrho^{\frac{1}{\alpha}} > r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\theta - \varphi_0}{\alpha},$$

woraus folgt

$$1 - \left(\frac{r_0}{\varrho}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\theta - \varphi_0}{\alpha} > 0,$$

und damit ist auch

$$m = \left[ 1 - \left(\frac{r_0}{\varrho}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\theta - \varphi_0}{\alpha} \right]_{\text{Min } (C)} > 0.$$

Daher haben wir nach (4)

$$e^{-x} |U(z_0 x^\alpha)| < \frac{LM}{2\pi} (K_1 e^{-mx} + K_2 e^{-x}),$$

was unmittelbar das Vorhandensein des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x} |U(z_0 x^\alpha)| dx$$

nach sich zieht.

2<sup>o</sup> Im Falle  $\alpha < 1$  teilen wir die Kurve  $C$  in zwei Teile  $C_1$  und  $C_2$ , indem wir die Punkte der Kurve  $C$ , für die  $|\theta - \varphi_0| \leq \alpha \frac{\pi}{2}$  ist, zur Teilkurve  $C_1$  und die Punkte der Kurve  $C$ , für die  $\alpha \frac{\pi}{2} \leq |\theta - \varphi_0| \leq \pi$  ist, zur Teilkurve  $C_2$  berechnen (Fig. 4.).

Da die Kurve

$$r^{\frac{1}{\alpha}} = r_0^{\frac{1}{\alpha}} \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}, \quad |\varphi - \varphi_0| \leq \pi$$

für  $\alpha < 1$  auch im Sektor

$$\alpha \frac{\pi}{2} \leq |\varphi - \varphi_0| \leq \pi$$

Zweige besitzt (Fig. 4.), so gilt die Ungleichung

$$\rho^\alpha > r^\alpha \cos \frac{\theta - \varphi_0}{\alpha}$$

wohl auf der Teilkurve  $C_1$ , aber nicht mehr auf der Teilkurve  $C_2$ .

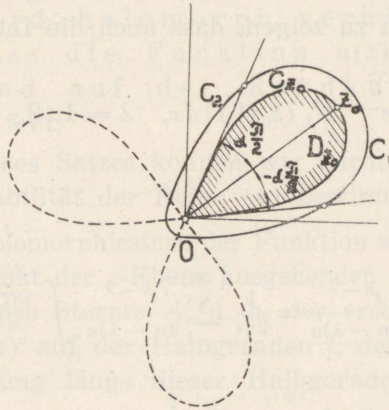


Fig. 4.

Nun hat aber G. Mittag-Leffler in den vorhergenannten Arbeiten gezeigt, dass im Sektor  $\alpha \frac{\pi}{2} \leq |\varphi| \leq \pi$  insbesondere die Ungleichung

$$|E_\alpha(z)| < K$$

besteht, wo  $K$  eine bestimmte Konstante ist.

Somit ergibt sich nach (4)

$$\begin{aligned} e^{-x} \left| U(z_0 x^\alpha) \right| &\leq \frac{LM}{2\pi} e^{-x} \left[ \left| E_\alpha \left( \frac{z_0 x^\alpha}{\zeta} \right) \right|_{\text{Max}(C_1)} + \left| E_\alpha \left( \frac{z_0 x^\alpha}{\zeta} \right) \right|_{\text{Max}(C_2)} \right] < \\ &< \frac{LM}{2\pi} e^{-x} \left[ \left| E_\alpha \left( \frac{z_0 x^\alpha}{\zeta} \right) \right|_{\text{Max}(C_1)} + K \right], \end{aligned}$$

und folglich ist das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} \left| U(z_0 x^\alpha) \right| dx$$

vorhanden, denn das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| E_{\alpha} \left( \frac{z_0 x^{\alpha}}{\zeta} \right) \right|_{\text{Max}(C_1)} dx$$

hat infolge des Vorhergehenden einen Sinn.

b. Es ist noch zu zeigen, dass auch die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} |U_{\lambda}(z_0 x^{\alpha})| dx, \quad \lambda = 1, 2, \dots$$

existieren.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} U_{\lambda}(t) &= \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=\lambda}^{\infty} \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha} \int_{(C)} \frac{u(\zeta) d\zeta}{\zeta^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{u(\zeta)}{\zeta^{\lambda+1}} \left( \sum_{n=\lambda}^{\infty} \frac{t^{n-\lambda}}{\zeta^{n-\lambda} (n-\lambda)\alpha} \right) d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{u(\zeta)}{\zeta^{\lambda+1}} E_{\alpha} \left( \frac{t}{\zeta} \right) d\zeta. \end{aligned}$$

Es bezeichne  $L$  wieder die Länge der Kurve  $C$  und  $M$  das Maximum des Moduls der Funktion  $\frac{u(\zeta)}{\zeta^{\lambda+1}}$  auf  $C$ , so haben wir

$$e^{-x} \left| U_{\lambda}(z_0 x^{\alpha}) \right| \leq \frac{LM}{2\pi} e^{-x} \left| E_{\alpha} \left( \frac{z_0 x^{\alpha}}{\zeta} \right) \right|_{\text{Max}(C)},$$

woraus wie in Abschnitt (a) die Existenz des Integrals

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left| U_{\lambda}(z_0 x^{\alpha}) \right| dx$$

folgt.

3. Somit sind wir zum folgenden Resultat gelangt:

**Satz.** Damit die konvergente Potenzreihe

$$1) \quad u(z) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

im Punkte  $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$  absolut  $B_{\alpha}$ -summierbar ist, ist es notwendig, dass die durch diese

Reihe dargestellte Funktion  $u(z)$  sich im Bereich  $D_{z_0}$ , der von der Kurve  $C_{z_0}$

$$r^\alpha = r_0^\alpha \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{\alpha}, \quad \begin{array}{l} |\varphi - \varphi_0| \leq a \frac{\pi}{2} \quad \text{für } a \leq 2 \\ |\varphi - \varphi_0| \leq \pi \quad \text{für } a > 2 \end{array}$$

begrenzt wird, holomorph verhielt, und hinreichend, dass die Funktion  $u(z)$  sich im Bereich  $D_{z_0}$  und auf der Randkurve  $C_{z_0}$  holomorph verhält.

Vermöge dieses Satzes können wir leicht den Stern  $\tau_\alpha$  der absoluten Summabilität der Reihe (1) bestimmen.

Sei  $A$  der Holomorphiestern der Funktion  $u(z)$  und  $\xi_l$  die auf einer vom Nullpunkt der  $z$ -Ebene ausgehenden Halbgeraden  $l$  sich befindende Ecke des Sternes  $A$ , d. h. der erste singuläre Punkt der Funktion  $u(z)$  auf der Halbgeraden  $l$ , den man durch analytische Fortsetzung längs dieser Halbgeraden nicht erreichen kann.

Betrachten wir auf der Halbgeraden  $l$  einen Punkt  $z$ . Liegt  $z$  dem Nullpunkt genügend nahe, dann gehört die entsprechende Fläche  $D_z$  ganz, die Randkurve  $C_z$  mitgezählt, dem Holomorphiestern  $A$  an. Liegt aber  $z$  vom Nullpunkt hinreichend weit, zum Beispiel  $|z| \geq |\xi_l|$ , so gehört die Fläche  $D_z$  nicht mehr ganz dem Stern  $A$  an.

Teilen wir nun alle Punkte der Halbgeraden  $l$  in zwei Klassen, indem wir jene Punkte  $z$ , für die die Fläche  $D_z$  ganz dem Stern  $A$  angehört, zur ersten Klasse und alle übrigen Punkte der Halbgeraden  $l$  zur zweiten Klasse zählen. Da jeder Punkt der ersten Klasse dem Nullpunkt näher liegt als irgendein Punkt der zweiten Klasse, so gibt es einen Schnittpunkt  $z_l$  beider Klassen derart, dass die jedem Punkt  $z$  der Strecke  $Oz_l$  entsprechende Fläche  $D_z$  ganz dem Stern  $A$  angehört, während die jedem ausserhalb der Strecke  $Oz$  liegenden Punkt  $z$  entsprechende Fläche  $D_z$  nicht mehr ganz dem Stern  $A$  angehört, sondern äussere Punkte des Sternes  $A$  enthält. Dabei muss die dem Schnittpunkt  $z_l$  entsprechende Fläche  $D_{z_l}$  auf ihrer Randkurve  $C_{z_l}$  mindestens eine Ecke  $\zeta$  des Sternes  $A$  enthalten, denn  $D_{z_l}$  kann nicht ganz dem Stern  $A$  angehören, noch äussere Punkte des Sternes  $A$  enthalten.

Nach dem vorherigen Satz ist die Reihe (1) auf der Strecke  $Oz_l$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar, aber nicht mehr in den übrigen Punkten der Halbgeraden  $l$ . Was den Punkt  $z_l$  an sich betrifft, so kann die Reihe (1) dort absolut  $B_\alpha$ -summierbar sein oder nicht.

Lässt man die Halbgerade  $l$  eine volle Drehung um den Nullpunkt ausführen, so erzeugt die Strecke  $Oz_l$  einen Bereich  $\tau_\alpha$ , in dessen inneren Punkten die Reihe (1) absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, während in den äusseren Punkten desselben keine absolute Summabilität herrscht. Somit ist der Bereich  $\tau_\alpha$  der Stern der absoluten Summabilität der Reihe (1).

Es bleibt noch die Randkurve des Sternes  $\tau_\alpha$ , d. h. den geometrischen Ort seiner Randpunkte  $z_l = r_l e^{i\varphi_l}$  zu bestimmen.

Wie wir gesehen haben, muss die dem Randpunkt  $z_l$  entsprechende Kurve  $C_{z_l}$

$$\frac{1}{r_l^\alpha} = r_l^\alpha \cos \frac{\varphi - \varphi_l}{\alpha}, \quad \begin{array}{l} |\varphi - \varphi_l| \leq \alpha \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \alpha \leq 2 \\ |\varphi - \varphi_l| \leq \pi \quad \text{für } \alpha > 2 \end{array}$$

mindestens eine Ecke  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  des Holomorphiesternes  $A$  enthalten. Damit muss die Gleichheit

$$\frac{1}{\rho^\alpha} = r_l^\alpha \cos \frac{\theta - \varphi_l}{\alpha}$$

bestehen, woraus

$$r_l^\alpha = \frac{\frac{1}{\rho^\alpha}}{\cos \frac{\varphi_l - \theta}{\alpha}}, \quad \begin{array}{l} |\varphi_l - \theta| \leq \alpha \frac{\pi}{2} \quad \text{für } \alpha \leq 2, \\ |\varphi_l - \theta| \leq \pi \quad \text{für } \alpha > 2. \end{array}$$

Die letzte Gleichung stellt eine im Falle  $\alpha \leq 2$  offene und im Falle  $\alpha > 2$  geschlossene Kurve  $\Gamma_\zeta$  dar, die stets den Punkt  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  durchgeht (Fig. 5.).

Besitzt der Holomorphiestern  $A$  der Funktion  $u(z)$  eine einzige Ecke  $\zeta$ , so besteht der Stern  $\tau_\alpha$  aus denjenigen Punkten der  $z$ -Ebene, die sich in bezug auf die Kurve  $\Gamma_\zeta$  auf derselben Seite befinden, wo der Nullpunkt liegt, und damit bildet hier die Kurve  $\Gamma_\zeta$  selbst die Randkurve des Sternes  $\tau_\alpha$ .

Besitzt der Stern  $A$  eine endliche Zahl von Ecken

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n,$$

so entsprechen diesen  $n$  Kurven

$$\Gamma_{\xi_1}, \Gamma_{\xi_2}, \dots, \Gamma_{\xi_n},$$

wobei der Stern  $\tau_\alpha$  aus denjenigen Punkten der  $z$ -Ebene besteht, die sich in bezug auf jede Kurve  $\Gamma_{\xi_i}$  auf derselben Seite wie der Nullpunkt befinden, und somit bildet sich die Randkurve des Sternes  $\tau_\alpha$  im allgemeinen aus Kurvenstücken der  $\Gamma_{\xi_i}$ .

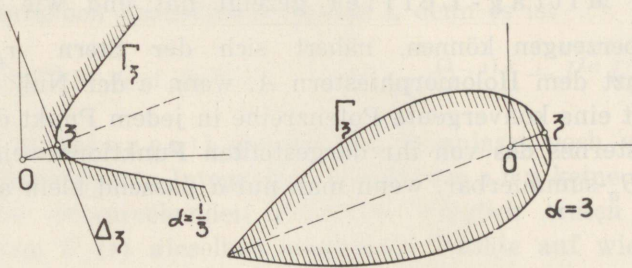


Fig. 5.

Besitzt der Stern  $A$  unendlich viele Ecken, die eine abzählbare oder nicht abzählbare Menge  $\{\xi\}$  bilden, so entspricht dieser Punktmenge die Kurvenmenge  $\{\Gamma_\xi\}$ , wobei der Stern  $\tau_\alpha$  aus denjenigen Punkten der  $z$ -Ebene besteht, die sich bezüglich jeder Kurve  $\Gamma_\xi$  auf derselben Seite befinden, wo der Nullpunkt liegt. Damit kann hier die Randkurve des Sternes  $\tau_\alpha$  zum Teil aus Kurvenstücken der  $\Gamma_\xi$ , zum Teil aus der Einhüllenden der Kurvenmenge  $\{\Gamma_\xi\}$  bestehen.

Im Sonderfall  $\alpha = 1$  ergibt sich für  $\Gamma_\xi$  die Gleichung

$$r_1 = \frac{\rho}{\cos(\varphi_1 - \theta)},$$

die eine Gerade  $\Delta_\xi$  darstellt, die im Punkt  $\xi$  senkrecht zur Strecke  $O\xi$  steht (Fig. 5.). Der betreffende Stern  $\tau_1 = \tau$ , dessen Randkurve aus lauter geradlinigen Stücken der  $\Delta_\xi$ , oder nur aus der Einhüllenden der Geradenmenge  $\{\Delta_\xi\}$ , oder zum Teil aus geradlinigen Stücken der  $\Delta_\xi$  und zum Teil aus der Einhüllenden der Geradenmenge  $\{\Delta_\xi\}$  besteht, ist das bekannte Summabilitätspolygon von Borel<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> É. Borel, Leçons sur les séries divergentes.

Aus der vorhergehenden Konstruktion des Sternes  $\tau_\alpha$  können wir folgern, dass der Stern  $\tau_\alpha$  der absoluten Summabilität bei den konvergenten Potenzreihen mit dem von G. Mittag-Leffler<sup>1)</sup> gefundenen Stern  $B^{(\alpha)}$  der einfachen Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx$$

übereinstimmt.

Wie Mittag-Leffler gezeigt hat und wie wir uns leicht überzeugen können, nähert sich der Stern  $\tau_\alpha \equiv B^{(\alpha)}$  unbegrenzt dem Holomorphiestern  $A$ , wenn  $\alpha$  der Null zustrebt. Damit ist eine konvergente Potenzreihe in jedem Punkt des Holomorphiesternes des von ihr dargestellten Funktionszweiges  $u(z)$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar, wenn man nur  $\alpha$  passend klein annimmt.

## KAPITEL VII.

### Erweiterung des Begriffs der absoluten Summabilität.

1. Bei der Definition der absoluten Summabilität der Reihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

haben wir vorausgesetzt, dass die entsprechende assoziierte Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung

$$(2) \quad U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha}$$

beständig konvergent sei und somit eine ganze Funktion  $U(t)$  darstelle.

Wie wir im folgenden sehen werden, ist die beständige Konvergenz der Reihe (2) zum Aufbau der Theorie der absoluten Summabilität nicht wesentlich, sondern wir haben diese beschränkende Voraussetzung nur der Einfachheit halber gemacht.

a. Nehmen wir an, dass die Reihe (2) einen endlichen, von Null verschiedenen Konvergenzradius  $R$  besitzt, und dass der

<sup>1)</sup> G. Mittag-Leffler, op. cit.

Holomorphiestern  $A$  des betreffenden Funktionszweiges  $U(t)$  zum mindesten einen unendlichen Radius  $l$  hat, d. h. dass  $U(t)$  mindestens längs einer vom Nullpunkt der  $t$ -Ebene ausgehenden Halbgeraden  $l$  analytisch beliebig weit fortsetzbar ist. Dann besitzen auch die Reihen

$$U_\lambda(t) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha}, \quad \lambda = 1, 2, \dots$$

denselben Konvergenzradius  $R$  und die Holomorphiesterne der  $U_\lambda(t)$  denselben unendlichen Radius  $l$ , denn es ist

$$U(x^\alpha) = u_0 + u_1 x^\alpha + \dots + u_{\lambda-1} x^{(\lambda-1)\alpha} + I^{\lambda\alpha} U_\lambda(x^\alpha),$$

und wie P. Dienes<sup>1)</sup> gezeigt hat, veranlasst noch vernichtet die verallgemeinerte Integration von Riemann keine singuläre Stelle der entsprechenden Funktion. Folglich treten bei den Funktionen  $U_\lambda(t)$  dieselben singulären Punkte auf wie bei der Funktion  $U(t)$ , und somit haben die Funktionen

$$U_\lambda(t), \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

den gemeinsamen Konvergenzkreis und den gemeinsamen Holomorphiestern  $A$ .

Den Begriff der absoluten Summabilität erweiternd, sagen wir, dass die Reihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

im Punkte  $z_0$  der Halbgeraden  $l$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar sei, wenn die Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} U_\lambda(z_0 x^\alpha) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

absolut konvergieren.

Wir können uns leicht überzeugen, dass die vorherbegründete Theorie der divergenten Potenzreihen auch für solche absolut  $B_\alpha$ -summierbaren Potenzreihen gültig bleibt, wo die assoziierte

<sup>1)</sup> Paul Dienes, Leçons sur les singularités des fonctions analytiques. Paris, 1913.

Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung einen endlichen, von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt, denn die Reihen

$$U_\lambda(t) = \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)^\alpha}, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

sind in jedem Punkt der Halbgeraden  $l$  absolut  $B_\alpha$ -summierbar, wenn man nur  $\alpha$  genügend klein wählt, und dürfen somit auf dieser Halbgeraden wie konvergente Potenzreihen im Konvergenzkreis behandelt werden oder, mit anderen Worten, wir dürfen jene Reihen auf der Halbgeraden  $l$  so behandeln, als ob sie beständig konvergent seien.

b. Als Beispiel betrachten wir die divergente Potenzreihe

$$1 + \underline{a}z + \underline{2a}z^2 + \dots + \underline{na}z^n + \dots,$$

wo  $a$  eine reelle positive Grösse bedeutet.

Nimmt man hier  $a = a$ , so lautet die assoziierte Reihe

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t},$$

wobei alle Radien des Holomorphiesternes  $A$  der Funktion  $U(t)$  unendlich sind, ausser der positiven reellen Achse, auf der sich der einzige vorhandene singuläre Punkt  $t = 1$  befindet.

Bilden wir das Integral

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} U(zx^\alpha) dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1-zx^\alpha} dx$$

und zeigen wir, dass es in der ganzen  $z$ -Ebene, die positive reelle Achse ausgenommen, absolut konvergiert.

Es sei  $\varepsilon < \pi$  eine beliebig kleine positive Grösse und  $T_\varepsilon$  der Sektor der  $z$ -Ebene, der von den vom Nullpunkt ausgehenden Halbgeraden  $|\varphi| = \varepsilon$  begrenzt wird und die negative reelle Achse enthält (Fig. 6.).

Liegt  $z$  im Sektor  $T_\varepsilon$ , so liegt der Punkt  $zx^\alpha$  ebenfalls in diesem Sektor, und damit haben wir

$$|1 - zx^\alpha| \geq \sin \varepsilon,$$

denn  $|1 - zx^a|$  stellt den Abstand des Punktes  $zx^a$  vom Punkt 1 dar. Also ergibt sich

$$\left| \frac{1}{1 - zx^a} \right| \leq \frac{1}{\sin \varepsilon},$$

und folglich konvergiert das Integral

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 - zx^a} dx$$

im Sektor  $T_\varepsilon$  absolut und gleichmässig und stellt daher in jenem Sektor eine holomorphe Funktion  $\varphi(z)$  dar.

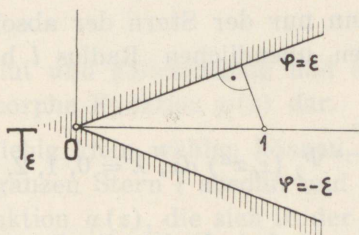


Fig. 6.

Da wir  $\varepsilon$  beliebig klein voraussetzen können, so konvergiert das letzte Integral in der ganzen  $z$ -Ebene, mit Ausnahme der positiven reellen Achse, absolut und gleichmässig gegen die holomorphe Funktion  $\varphi(z)$ .

Weil nun

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^a) = \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} \left( \frac{1}{1 - zx^a} \right) = \frac{x^{\lambda a}}{(1 - zx^a)^{\lambda+1}},$$

so sind auch die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^a) dx, \quad \lambda = 1, 2, \dots$$

im obengenannten Bereich absolut konvergent, wodurch die absolute Summabilität der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|na|}{z^n}$$

bestätigt wird. Dabei besteht der Stern  $\tau$  der absoluten Summabilität aus der ganzen  $z$ -Ebene, mit Ausnahme der positiven reellen Achse.

2. In derselben Weise können wir die Theorie der divergenten Potenzreihen auf die Reihen

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

erweitern, für die der Konvergenzradius der entsprechenden assoziierten Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung

$$(2) \quad \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha}$$

gleich Null ist, wenn nur der Stern der absoluten Summabilität der Reihe (2) einen unendlichen Radius  $l$  besitzt und falls die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \Phi_{\lambda}(z_0 x^{\alpha}) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

absolut konvergieren, wobei  $\Phi_{\lambda}(t)$  die Summe der divergenten Reihe

$$\sum_{n=\lambda}^{\infty} u_n \frac{t^{n-\lambda}}{(n-\lambda)\alpha}$$

und  $z_0$  einen Punkt auf dem Radius  $l$  bedeutet.

a. Ist zum Beispiel die divergente Potenzreihe

$$1 + |a| |b| z + |2a| |2b| z^2 + \dots + |na| |nb| z^n + \dots,$$

mit  $a > 0$  und  $b > 0$  gegeben, so erhalten wir für  $a = b$  die assoziierte Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} |na| t^n,$$

die nach dem Vorhergehenden divergiert, doch im Stern  $\tau$  zur Summe

$$\Phi(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1 - tx^a} dx$$

absolut  $B_{\alpha}$ -summierbar ist.

Da für jedes  $t$  im Sektor  $T_\varepsilon$

$$\left| \frac{1}{1 - tx^\alpha} \right| \leq \frac{1}{\sin \varepsilon}$$

ist, so ergibt sich

$$|\Phi(t)| \leq \frac{1}{\sin \varepsilon} \int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{\sin \varepsilon},$$

und folglich konvergiert das Integral

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-y} \Phi(zy^b) dy$$

im Sektor  $T_\varepsilon$  absolut und gleichmässig und stellt daher eine in jenem Sektor holomorphe Funktion  $\varphi(z)$  dar.

Weil wir  $\varepsilon$  beliebig klein wählen können, so konvergiert das letzte Integral im ganzen Stern  $\tau$  absolut und gleichmässig gegen die holomorphe Funktion  $\varphi(z)$ , die sich in der Form

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-y} \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1 - zx^a y^b} dx \right] dy = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(x+y)}}{1 - zx^a y^b} dx dy$$

darstellen lässt, denn das betreffende Doppelintegral ist absolut konvergent.

b. Im allgemeinen können wir uns nach und nach überzeugen, dass jede Potenzreihe von der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{na_1}_{|na_1|} \underbrace{na_2}_{|na_2|} \dots \underbrace{na_m}_{|na_m|} z^n,$$

wo  $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_m > 0$ , im Stern  $\tau$  im erweiterten Sinne absolut summierbar ist und daselbst eine holomorphe Funktion  $\varphi(z)$  darstellt, die durch das absolut konvergente  $m$ -fache Integral

$$\varphi(z) = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \frac{e^{-(x_1 + x_2 + \dots + x_m)}}{1 - zx_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_m^{a_m}} dx_1 dx_2 \dots dx_m$$

gegeben ist.

3. In Kapitel VI haben wir gesehen, dass eine konvergente Potenzreihe nicht nur für ein bestimmtes  $a$  absolut summierbar ist, sondern für jedes  $a > 0$ , wobei sich nur der Stern  $\tau_a$  der absoluten Summabilität verändern wird.

a. Was eine divergente Potenzreihe anbelangt, so kann sie ebenfalls für mehrere Werte von  $a$  absolut summierbar sein, wie aus der Betrachtung der Reihe

$$(3) \quad 1 - z + 1 \cdot 3 z^2 - 1 \cdot 3 \cdot 5 z^3 + \dots + (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \dots \\ \dots \cdot (2n - 1) z^n + \dots$$

erscheinen wird.

1<sup>o</sup> Für  $\alpha = 1$  ergibt sich

$$U^1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \dots (2n-1)}{\underline{n}} t^n = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 2n-1}{\underline{n}} (2t)^n = (1+2t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2t}},$$

und somit haben wir

$$\varphi_1(z) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+2zx}} dx,$$

wobei das erhaltene Integral in der ganzen  $z$ -Ebene, mit Ausnahme der negativen reellen Achse, absolut und gleichmässig konvergiert.

Da ausserdem

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U^1(zx) = \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} \frac{1}{\sqrt{1+2zx}} = (-1)^\lambda \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \dots (2\lambda-1)}{\sqrt{(1+2zx)^{2\lambda+1}}},$$

so ist es ersichtlich, dass die Reihe (3) absolut  $B_1$ -summierbar ist, wobei der Stern  $\tau_1$  aus der ganzen  $z$ -Ebene, ausser der negativen reellen Achse, besteht.

2<sup>o</sup> Für  $\alpha = 2$  bekommt man

$$U^2(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots \dots (2n-1)}{\underline{2n}} t^n = \\ = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots \dots 2n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\underline{n}} \left(\frac{t}{2}\right)^n = e^{-\frac{t}{2}},$$

und damit ist

$$\varphi_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-x - \frac{zx^2}{2}} dx,$$

wobei das erhaltene Integral nur dann absolut und gleichmässig konvergiert, wenn der reelle Teil von  $z$  nicht negativ ist.

Da ausserdem

$$\frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U^2(zx^2) = \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} e^{-\frac{zx^2}{2}} = (-1)^\lambda \frac{x^{2\lambda}}{2^\lambda} e^{-\frac{zx^2}{2}},$$

so ist die Reihe (3) offenbar absolut  $B_2$ -summierbar und der Stern  $\tau_2$  besteht aus der  $z$ -Halbebene, die von der imaginären Achse begrenzt wird und die positive reelle Achse enthält.

b. Ist die divergente Reihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

für zwei verschiedene Werte  $a_1$  und  $a_2$  absolut summierbar bezüglich der Summen  $\varphi_1(z)$  und  $\varphi_2(z)$ , wobei die entsprechenden Sterne  $\tau_1$  und  $\tau_2$  einen gemeinsamen Teil  $\tau$  besitzen, so sind wir nicht ohne weiteres berechtigt zu behaupten, dass die Funktionen  $\varphi_1(z)$  und  $\varphi_2(z)$  im Bereich  $\tau$  übereinstimmen müssen.

In der Tat, wenn die Reihe (1) durch das  $B_{\alpha_1}$ - und das  $B_{\alpha_2}$ -Verfahren absolut summierbar ist, so haben wir

$$\varphi_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} U^1(zx^{\alpha_1}) dx,$$

mit

$$U^1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha_1}$$

und

$$\varphi_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} U^2(zy^{\alpha_2}) dy,$$

mit

$$U^2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n\alpha_2}.$$

Setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass die Konvergenzradien der beiden assoziierten Reihen  $U^1(t)$  und  $U^2(t)$  von Null verschieden sind, so sind diese Reihen für jedes  $a$  absolut summierbar, und wir können, indem wir der Reihe  $U^1(t)$  das  $B_{\alpha_2}$ -Verfahren und der Reihe  $U^2(t)$  das  $B_{\alpha_1}$ -Verfahren anwenden, schreiben

$$U^1(t) = \int_0^{\infty} e^{-y} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{|n\alpha_1|} \frac{y^{n\alpha_2}}{|n\alpha_2|} \right) dy,$$

$$U^2(t) = \int_0^{\infty} e^{-x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{|n\alpha_2|} \frac{x^{n\alpha_1}}{|n\alpha_1|} \right) dx.$$

Hieraus ergibt sich

$$\varphi_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} \left[ \int_0^{\infty} e^{-y} F(zx^{\alpha_1}y^{\alpha_2}) dy \right] dx,$$

$$\varphi_2(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} \left[ \int_0^{\infty} e^{-x} F(zx^{\alpha_1}y^{\alpha_2}) dx \right] dy,$$

wo wir

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{|n\alpha_1| |n\alpha_2|}$$

gesetzt haben.

Somit besteht die Gleichheit

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$$

dann und nur dann, falls im iterierten Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left[ \int_0^{\infty} e^{-y} F(zx^{\alpha_1}y^{\alpha_2}) dy \right] dx$$

die Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen erlaubt ist.

Für die Reihe

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) z^n,$$

die wir im Abschnitt (a) betrachtet haben, erhält man

$$F(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{\underline{n} \underline{2n}} t^n = 1 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{\underline{n} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^n (\underline{n})^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{2t})^{2n}}{2^{2n} (\underline{n})^2} = Y_0(\sqrt{2t}),$$

wo  $Y_0(x)$  die bekannte Funktion

$$(4) \quad Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(xy)}{\sqrt{1-y^2}} dy$$

von Bessel bedeutet.

Somit haben wir das iterierte Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left[ \int_0^{\infty} e^{-y} Y_0(y\sqrt{2zx}) dy \right] dx$$

zu erörtern.

Da nach (4) für jedes reelle  $x$  die Ungleichung

$$|Y_0(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 1$$

gilt, so hat das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \left[ \int_0^{\infty} e^{-y} \left| Y_0(y\sqrt{2zx}) \right| dy \right] dx$$

für jedes reelle nichtnegative  $z$  bestimmt einen Sinn, woraus die Zulässigkeit der Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen folgt.

Folglich haben wir

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$$

oder

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+2zx}} dx = \int_0^{\infty} e^{-x - \frac{zx^2}{2}} dx,$$

und diese Gleichheit besteht für jedes  $z$ , dessen reeller Teil nicht negativ ist, denn die Funktionen  $\varphi_1(z)$  und  $\varphi_2(z)$  sind analytisch.

Die Gültigkeit der Gleichheit

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+2zx}} dx = \int_0^{\infty} e^{-x - \frac{zx^2}{2}} dx$$

können wir übrigens auch direkt erweisen, indem wir zum Beispiel im zweiten Integral die Substitution

$$x + \frac{zx^2}{2} = y$$

ausführen.

## KAPITEL VIII.

### Integration von Differentialgleichungen durch divergente Potenzreihen.

Nachdem wir den Begriff der absoluten Summabilität erweitert haben, wollen wir im vorliegenden Kapitel bei der Anwendung der absolut  $B_\alpha$ -summierbaren Potenzreihen in der Theorie der Differentialgleichungen verweilen.

1. Betrachten wir eine algebraische Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$(1) \quad F\left(z, u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \dots, \frac{d^nu}{dz^n}\right) = 0,$$

wo  $F$  ein Polynom von  $u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \dots, \frac{d^nu}{dz^n}$  bedeutet, dessen Koeffizienten für  $z=0$  holomorphe Funktionen von  $z$  sind, und suchen wir eine Lösung  $u = \varphi(z)$  dieser Differentialgleichung, die den Anfangsbedingungen

$$(2) \quad \begin{aligned} \varphi(0) &= u_0 \\ \varphi'(0) &= u'_0 \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi^{(n-1)}(0) &= u_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

genügt.

Denkt man in der Differentialgleichung (1) die Glieder nach den fallenden Potenzen der höheren Ableitung  $\frac{d^nu}{dz^n}$  geordnet, so besitzt die Differentialgleichung (1) die Gestalt

$$A_0 \left( z, u, \frac{du}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} \right) \left( \frac{d^n u}{dz^n} \right)^m + A_1 \left( z, u, \frac{du}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} \right) \left( \frac{d^n u}{dz^n} \right)^{m-1} + \dots + A_{m-1} \left( z, u, \frac{du}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} \right) \frac{d^n u}{dz^n} + A_m \left( z, u, \frac{du}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} \right) = 0.$$

Ersetzen wir hier die Grössen

$$z, u, \frac{du}{dz}, \dots, \frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}$$

beziehungsweise durch die Werte

$$0, u_0, u'_0, \dots, u_0^{(n-1)},$$

so bekommen wir für die Ableitung  $\frac{d^n u}{dz^n}$  eine algebraische Gleichung  $m$ -ten Grades

$$(3) \quad a_0 \left( \frac{d^n u}{dz^n} \right)^m + a_1 \left( \frac{d^n u}{dz^n} \right)^{m-1} + \dots + a_{m-1} \frac{d^n u}{dz^n} + a_m = 0.$$

Hat die Gleichung (3) eine einfache Wurzel  $u_0^{(n)}$ , dann gibt es nach dem Existenzsatz von Cauchy ein holomorphes Integral  $u = \varphi(z)$  der Differentialgleichung (1), das den Anfangsbedingungen (2) genügt und für das ausserdem

$$\varphi^{(n)}(0) = u_0^{(n)}$$

gilt.

Die Reihenentwicklung von **M a c - L a u r i n** dieses Integrals  $u = \varphi(z)$  lautet

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} z + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} z^n + \dots + \frac{\varphi^{(n+1)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+1)} z^{n+1} + \dots,$$

wobei die Grössen

$$\varphi(0), \varphi'(0), \dots, \varphi^{(n)}(0)$$

bekannt und die übrigen Grössen

$$\varphi^{(n+1)}(0), \varphi^{(n+2)}(0), \dots$$

unbekannt sind.

Ersetzen wir zur Berechnung der letzteren in der Differentialgleichung (1) die Grössen

$$u, \frac{du}{dz}, \dots, \frac{d^n u}{dz^n}$$

beziehungsweise durch

$$\varphi(z), \varphi'(z), \dots, \varphi^{(n)}(z)$$

und differenzieren die erhaltene Identität

$$F(z, \varphi(z), \varphi'(z), \dots, \varphi^{(n)}(z)) = 0$$

wiederholt nach  $z$ , so finden wir die Gleichungen

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial u} \varphi'(z) + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \varphi^{(n+1)}(z) = 0, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial u} \varphi'(z) + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \varphi^{(n+2)}(z) = 0, \\ \frac{\partial^3 F}{\partial z^3} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial z^2 \partial u} \varphi'(z) + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \varphi^{(n+3)}(z) = 0, \\ \dots \end{array} \right.$$

Hieraus können wir, indem wir  $z = 0$  setzen, der Reihe nach die Grössen

$$\varphi^{(n+1)}(0), \varphi^{(n+2)}(0), \dots$$

berechnen, denn es ist

$$\frac{\partial F}{\partial u^{(n)}} \neq 0,$$

weil  $u_0^{(n)}$  nach der Voraussetzung eine einfache Wurzel der Gleichung (3) bedeutet.

Besitzt somit die Gleichung (3) eine einfache Wurzel, so existiert ein holomorphes Integral der Differentialgleichung (1), das die Anfangsbedingungen (2) befriedigt und durch die konvergente Potenzreihe

$$\varphi(z) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} z + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} z^n + \dots$$

oder, wenn man  $\frac{\varphi^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = u_n$  setzt,

$$(5) \quad \varphi(z) = u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots$$

bestimmt wird. Die Koeffizienten  $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$  der Reihe (5) können wir der Reihe nach aus den Gleichungen (4) oder auch direkt aus der Differentialgleichung (1) mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten erhalten.

2. Wenn die Gleichung (3) keine einfache Wurzel besitzt, oder wenn diese Gleichung sich auf eine Identität reduziert, d. h. falls die Koeffizienten  $a_n$  der Gleichung (3) alle Nullen sind, so ist im allgemeinen kein holomorphes Integral der Differentialgleichung (1) vorhanden, jedoch können die Gleichungen (4) die formale Berechnung der unbekanntenen Ableitungen von  $\varphi(z)$  im Punkt  $z=0$  ermöglichen. Im letztgenannten Fall bekommen wir eine Reihe

$$\varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1} z + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} z^n + \dots$$

oder

$$(5) \quad u_0 + u_1 z + \dots + u_n z^n + \dots,$$

die im allgemeinen divergieren wird und somit die Differentialgleichung (1) nur formal befriedigt.

**Satz.** Wenn die divergente Potenzreihe

$$(5) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots,$$

die eine algebraische Differentialgleichung

$$(1) \quad F\left(z, u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \dots, \frac{d^nu}{dz^n}\right) = 0$$

formal befriedigt, absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, so stellt ihre Summe

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx$$

eine Lösung der Differentialgleichung (1) dar.

In der Tat ist es so, dass falls die Potenzreihe (5) absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist, es auch die Reihen sind

$$(6) \quad \begin{cases} u_1 + 2u_2 z + \dots \\ 1 \cdot 2 u_2 + 2 \cdot 3 u_3 z + \dots \\ \dots \\ 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n u_n + 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1) u_{n+1} z + \dots \end{cases}$$

die man aus der Reihe (5) durch  $n$ -malige gliedweise Differentiation erhält.

Da nun  $F$  ein Polynom bezüglich der Grössen

$$u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \dots, \frac{d^nu}{dz^n}$$

bedeutet, wobei die Koeffizienten des Polynoms in der Umgebung des Punktes  $z=0$  holomorph, d. h. in konvergente Potenzreihen entwickelbar sind, so kann man nach (III, 3) im  $F$  die Grössen

$$u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2u}{dz^2}, \dots, \frac{d^nu}{dz^n}$$

durch die entsprechenden Reihen (5) und (6) ersetzen und formal wie mit konvergenten Potenzreihen rechnen. Als endgültiges Resultat dieses Rechnens bekommt man eine absolut  $B_\alpha$ -summierbare Reihe

$$(7) \quad U_0 + U_1 z + U_2 z^2 + \dots + U_n z^n + \dots,$$

wobei

$$U_0 = U_1 = U_2 = \dots = U_n = \dots = 0$$

sein muss, denn die Reihe (5) befriedigt nach der Voraussetzung formal die Differentialgleichung (1).

Setzt man anderseits im Polynom  $F$

$$u = \int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx$$

$$\frac{du}{dz} = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha U'(zx^\alpha) dx$$

$$\frac{d^nu}{dz^n} = \int_0^\infty e^{-x} x^{n\alpha} U^{(n)}(zx^\alpha) dx,$$

so erhält man eine Funktion  $\Phi(z)$ , die der Summe der Reihe (7) gleich sein muss. Weil aber die Koeffizienten der Reihe (7) alle Nullen sind, so gilt dasselbe auch für ihre Summe, d. h. es ist identisch

$$\Phi(z) = 0,$$

und die Funktion  $u = \varphi(z)$  stellt damit eine wirkliche Lösung der Differentialgleichung (1) dar.

Wenn somit die Gleichungen (4) die Berechnung der Koeffizienten der Reihe (5) ermöglichen, dann stellt die erhaltene Reihe (5) eine Lösung der Differentialgleichung (1) dar, die den Anfangsbedingungen (2) genügt, wenn nur die Reihe (5) absolut  $B_\alpha$ -summierbar ist.

3. Betrachten wir zum Beispiel die Differentialgleichung erster Ordnung

$$z^3 \frac{du}{dz} + u - z^2 = 0,$$

wo

$$F\left(z, u, \frac{du}{dz}\right) = z^3 \frac{du}{dz} + u - z^2$$

ist, und suchen wir eine Lösung  $u = \varphi(z)$  dieser Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung

$$\varphi(0) = 0$$

erfüllt.

a. Differenzieren wir die Gleichheit

$$z^3 \varphi'(z) + \varphi(z) - z^2 = 0$$

wiederholt nach  $z$ , so bekommen wir

$$\begin{aligned} z^3 \varphi''(z) + 3z^2 \varphi'(z) + \varphi'(z) - 2z &= 0 \\ z^3 \varphi'''(z) + 3 \cdot 2z^2 \varphi''(z) + 3 \cdot 2 z \varphi'(z) + \varphi''(z) - 2 &= 0 \\ z^3 \varphi^{(4)}(z) + 3 \cdot 3z^2 \varphi'''(z) + 3 \cdot 2 \cdot 3z \varphi''(z) + 2 \cdot 3 \varphi'(z) + \varphi'''(z) &= 0 \\ z^3 \varphi^{(5)}(z) + 3 \cdot 4z^2 \varphi^{(4)}(z) + 3 \cdot 3 \cdot 4z \varphi'''(z) + 2 \cdot 3 \cdot 4 \varphi''(z) + \varphi^{(4)}(z) &= 0 \\ z^3 \varphi^{(6)}(z) + 3 \cdot 5z^2 \varphi^{(5)}(z) + 3 \cdot 4 \cdot 5z \varphi^{(4)}(z) + 3 \cdot 4 \cdot 5 \varphi'''(z) + \varphi^{(5)}(z) &= 0 \\ z^3 \varphi^{(7)}(z) + 3 \cdot 6z^2 \varphi^{(6)}(z) + 3 \cdot 5 \cdot 6z \varphi^{(5)}(z) + 4 \cdot 5 \cdot 6 \varphi^{(4)}(z) + \varphi^{(6)}(z) &= 0 \\ \dots & \end{aligned}$$

Setzen wir hier  $z = 0$ , dann finden wir der Reihe nach

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= 0 \\ \varphi''(0) &= 2 \\ \varphi'''(0) &= -2 \cdot 3 \varphi'(0) = 0 \\ \varphi^{(4)}(0) &= -2 \cdot 3 \cdot 4 \varphi''(0) = -2^2 \cdot 3 \cdot 4 \\ \varphi^{(5)}(0) &= -3 \cdot 4 \cdot 5 \varphi'''(0) = 0 \\ \varphi^{(6)}(0) &= -4 \cdot 5 \cdot 6 \varphi^{(4)}(0) = 2^2 \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 6 \end{aligned}$$

und im allgemeinen

$$\varphi^{(2n-1)}(0) = 0,$$

$$\varphi^{(2n)}(0) = (-1)^{n-1} 2^2 \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 (2n-1) 2n,$$

woraus

$$u_{2n-1} = 0,$$

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{(-1)^{n-1} 2^2 \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 5 \cdot 6^2 \cdot \dots \cdot (2n-2)^2 (2n-1) 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) (2n-1) 2n} \\ &= (-1)^{n-1} 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n-2) = (-1)^{n-1} 2^{n-1} \underline{n-1}, \end{aligned}$$

und somit ist die gewonnene Potenzreihe

$$(8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} z^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{n-1} \underline{n-1} z^{2n}$$

divergent.

b. Zeigen wir, dass die Reihe (8) in der ganzen  $z$ -Ebene, mit Ausnahme der imaginären Achse, für  $\alpha = \frac{1}{2}$  absolut summierbar ist und folglich daselbst eine Lösung der Differentialgleichung

$$z^3 \frac{du}{dz} + u - z^2 = 0$$

darstellt.

In der Wirklichkeit ergibt sich für  $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} \frac{t^{2n}}{\underline{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{n-1}}{n} t^{2n} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2t^2)^n}{n} = \frac{1}{2} \log(1 + 2t^2) \end{aligned}$$

und damit

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-xz} \log(1 + 2z^2x) dx.$$

Hier besteht der Holomorphiestern  $A$  der Funktion

$$U(t) = \frac{1}{2} \log(1 + 2t^2)$$

aus der ganzen  $t$ -Ebene, ausser den Teilen der imaginären Achse, die von den Punkten  $t = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$  ins Unendliche gehen.

Sei  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$  eine beliebig kleine positive Grösse und  $T_\varepsilon$  der Doppelsektor, der von den vom Nullpunkt ausgehenden Halbgeraden  $|\varphi| = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$  begrenzt wird und die reelle Achse enthält (Fig. 7.).

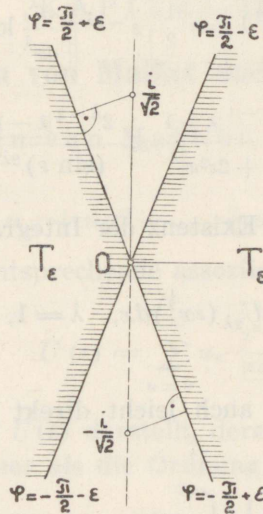


Fig. 7.

Zum Beweise der absoluten Summabilität der Reihe (8) im vorhergenannten Bereich ist es hinreichend, wenn wir die absolute Konvergenz der Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} U_{2\lambda}(zx^{\frac{1}{2}}) dx, \quad \lambda = 1, 2, \dots,$$

mit

$$U_{2\lambda}(t) = \sum_{n=\lambda}^\infty u_{2n} \frac{t^{2(n-\lambda)}}{|n-\lambda|},$$

im Doppelsektor  $T_\varepsilon$  erweisen.

Nun ist aber im  $T_\varepsilon$

$$\left| 1 + 2z^2x \right| = 2 \left| \frac{1}{2} + z^2x \right| = 2 \left| \frac{i}{\sqrt{2}} - zx^{\frac{1}{2}} \right| \left| \frac{i}{\sqrt{2}} + zx^{\frac{1}{2}} \right| \geq 2 (\sin \varepsilon)^2$$

und daher

$$\begin{aligned} \left| U_{2\lambda}(zx^{\frac{1}{2}}) \right| &= \left| \sum_{n=\lambda}^{\infty} u_{2n} z^{2(n-\lambda)} \frac{x^{n-\lambda}}{n-\lambda} \right| = \left| z^{-2\lambda} \left| \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n} z^{2n} \frac{x^n}{n} \right| \right| \\ &= \left| z^{-2\lambda} \left| \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} U(zx^{\frac{1}{2}}) \right| \right| = \frac{1}{2} \left| z^{-2\lambda} \left| \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} \log(1 + 2z^2x) \right| \right| \\ &= \frac{2^{\lambda-1} |\lambda-1|}{|1 + 2z^2x|^\lambda} \leq \frac{2^{\lambda-2} |\lambda-1|}{(\sin \varepsilon)^{2\lambda}}, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar die Existenz der Integrale

$$\int_0^\infty e^{-x} U_{2\lambda}(zx^{\frac{1}{2}}) dx, \quad \lambda = 1, 2, \dots$$

folgt.

c. Man kann sich auch leicht direkt überzeugen, dass die Funktion

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x} \log(1 + 2z^2x) dx$$

der Differentialgleichung

$$z^3 \frac{du}{dz} + u - z^2 = 0$$

genügt.

In der Wirklichkeit, da

$$\varphi'(z) = 2z \int_0^\infty e^{-x} \frac{x dx}{1 + 2z^2x}$$

und

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \log(1 + 2z^2x) d(-e^{-x}) = z^2 \int_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{1 + 2z^2x},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} z^3 \varphi'(z) + \varphi(z) - z^2 &= 2z^4 \int_0^\infty e^{-x} \frac{x dx}{1+2z^2 x} + z^2 \int_0^\infty e^{-x} \frac{dx}{1+2z^2 x} - z^2 = \\ &= z^4 \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+2z^2 x} (2z^2 x + 1) dx - z^2 = z^2 \int_0^\infty e^{-x} dx - z^2 = 0. \end{aligned}$$

## KAPITEL IX.

### Die Reihen von Maillet und von Le Roy.

1. Die Reihen von Maillet. — E. Maillet<sup>1)</sup> hat die Potenzreihen

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

betrachtet, wo die entsprechende assoziierte Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n^\alpha}$$

eine ganze Funktion  $U(t)$  darstellt, deren Grenzexponent  $\rho_1$  der Nullstellenfolge kleiner als die Ordnung  $\rho$  der ganzen Funktion ist.

Nach einem bekannten Satz von Weierstrass lässt jede derartige ganze Funktion  $U(t)$  sich durch das Produkt

$$e^{Q(t)} P(t)$$

ausdrücken, wo  $Q(t)$  ein Polynom  $\rho$ -ten Grades

$$Q(t) = a_0 t^\rho + a_1 t^{\rho-1} + \dots + a_{\rho-1} t + a_\rho$$

und  $P(t)$  das kanonische Produkt von Weierstrass

$$P(t) = t^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{c_n}\right) e^{\frac{t}{c_n} + \frac{t^2}{2c_n^2} + \dots + \frac{t^p}{pc_n^p}}$$

1) Maillet, op. cit., S. 498—518.

bedeutet. Dabei sind

$$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$$

die Nullstellen von  $U(t)$ .

In seiner erstgenannten Arbeit hat Maillet gezeigt, dass jede Potenzreihe, für deren assoziierte Reihe  $\alpha$ -ter Ordnung die Ungleichung  $\varrho_1 < \varrho$  gilt, und die er kurz als eine Reihe  $(\alpha, \varrho, \alpha_0)$  bezeichnet, im Sinne von Borel<sup>1)</sup> summierbar ist, d. h. befriedigt eine Reihe  $(\alpha, \varrho, \alpha_0)$  formal eine bestimmte algebraische Differentialgleichung, so stellt die Summe dieser Reihe eine effektive Lösung der Differentialgleichung dar. Doch sind die in Maillets Arbeit vorkommenden Beweise nicht mit genügender Strenge durchgeführt, weil Maillet das Weglassen von Gliedern einer divergenten Reihe ohne weiteres für erlaubt hält<sup>2)</sup>.

Im folgenden werden wir zeigen, dass die Reihen  $(\alpha, \varrho, \alpha_0)$  von Maillet absolut  $B_\alpha$  summierbar sind, wodurch die Tatsache, dass jene Reihen im Sinne Borels summierbar sind, von neuem bewiesen wird.

a. Betrachten wir zunächst das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} U(zx^\alpha) dx$$

oder das Integral

$$(2) \quad \int_0^\infty e^{-x^\alpha} U(zx) dx^\alpha,$$

das sich aus dem ersteren ergibt, indem man  $x^\alpha$  durch  $x$  ersetzt, und stellen wir uns die Aufgabe, den Bereich der absoluten Konvergenz dieses Integrals zu bestimmen.

Zu diesem Zweck haben wir zwei folgende bekannte Sätze Borels<sup>3)</sup> aus der Theorie der ganzen Funktionen nötig.

**Satz 1.** Die Ordnung des kanonischen Produktes  $P(t)$  ist dem Grenzexponent  $\varrho_1$  seiner Nullstellenfolge gleich.

<sup>1)</sup> Borel, Mémoire sur les séries divergentes, S. 79—131.

<sup>2)</sup> Maillet, op. cit., S. 516.

<sup>3)</sup> Borel, Leçons sur les fonctions entières.

Hieraus bekommt man für genügend grosse Werte von  $|t|$  die Ungleichung

$$|P(t)| < e^{|t|^{q_1 + \varepsilon}}$$

**Satz 2.** Zieht man um jede Nullstelle  $c_n$  des kanonischen Produktes  $P(t)$  einen Kreis  $C_n$  mit dem Radius

$$r_n = \frac{1}{|c_n|^h}, \quad h > q_1,$$

so besteht für genügend grosse Werte von  $|t|$ , mit Ausnahme der Kreise  $C_n$ , die Ungleichung

$$|P(t)| > e^{-|t|^{q_1 + \varepsilon}}.$$

Es sei  $z = re^{i\varphi}$ , mit  $r \neq 0$ , dann haben wir für ein hinreichend grosses  $x$  nach dem ersten Satz Borels

$$|P(zx)| < e^{(rx)^{q_1 + \varepsilon}}$$

und nach dem zweiten Satz Borels

$$|P(zx)| > e^{-(rx)^{q_1 + \varepsilon}},$$

ausgenommen eine Folge von Intervallen, deren Summe wegen der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{r_n}{r} = \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|c_n|^h}$$

stets endlich ist. Ausserdem können wir in beiden Fällen  $\varepsilon$  so klein wählen, dass

$$q_1 + \varepsilon < q$$

wird.

Bezeichnet man

$$a_0 = r_0 e^{i\varphi_0}, \quad a_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, \quad \dots, \quad a_\varrho = r_\varrho e^{i\varphi_\varrho},$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} |e^{Q(zx)}| &= e^R [Q(zx)] = e^R [a_0 (zx)^q + a_1 (zx)^{q-1} + \dots + a_\varrho] = \\ &= e^{r_0 (rx)^q \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi)} + r_1 (rx)^{q-1} \cos(\varphi_1 + (\varrho-1)\varphi) + \dots + r_\varrho \cos \varphi_\varrho. \end{aligned}$$

Unterscheiden wir nun drei Fälle, je nachdem ob

$$\varrho \begin{cases} \geq \\ < \end{cases} \frac{1}{\alpha}$$

ist.

1<sup>o</sup> Zeigen wir, dass im Fall  $\varrho > \frac{1}{\alpha}$  das Integral

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} |U(zx)| dx^{\frac{1}{\alpha}}$$

konvergiert, wenn  $\cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) < 0$  und divergiert, wenn  $\cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) > 0$  ist.

Tatsächlich verhält es sich so, dass, wenn  $\cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) < 0$  und  $r \neq 0$ , für ein genügend grosses  $x$  die Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} |U(zx)| &< e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} + r_0(rx)^{\varrho} \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) + r_1(rx)^{\varrho-1} \cos[\varphi_1 + (\varrho-1)\varphi] + \\ &+ \dots + r_{\varrho} \cos \varphi_{\varrho} + (rx)^{\varrho_1} + \varepsilon \\ &< e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}}, \end{aligned}$$

und damit das Integral (3) einen Sinn hat.

Ist aber  $\cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) > 0$  und  $r \neq 0$ , dann besteht für ein genügend grosses  $x$ , mit Ausnahme einer Folge von Intervallen, deren Summe endlich ist, die Ungleichung

$$\begin{aligned} e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} |U(zx)| &> e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} + r_0(rx)^{\varrho} \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) + r_1(rx)^{\varrho-1} \cos[\varphi_1 + (\varrho-1)\varphi] \\ &+ \dots + r_{\varrho} \cos \varphi_{\varrho} - (rx)^{\varrho_1} + \varepsilon \\ &> 1, \end{aligned}$$

woraus die Divergenz des Integrals (3) folgt.

Somit besteht der Bereich  $\tau_{\alpha}$  der absoluten Konvergenz des Integrals (2) im Falle  $\varrho > \frac{1}{\alpha}$  aus denjenigen Punkten  $z = re^{i\varphi}$ , für die

$$\cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) < 0$$

ist. Jene Punkte bilden  $\varrho$  kongruente Sektoren mit den Zentralwinkeln  $\frac{\pi}{\varrho}$ , die von den Geraden

$$\cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) = 0$$

begrenzt werden (Fig. 8.).

Dabei konvergiert das Integral (2) in jeder endlichen Fläche des Bereiches  $\tau_\alpha$  gleichmässig und stellt daher eine Funktion  $\varphi(z)$  dar, die sich in jedem Sektor von  $\tau_\alpha$  holomorph verhält.

2<sup>o</sup> Wir behaupten, dass für  $\varrho = \frac{1}{\alpha}$  das Integral (3) konvergiert, wenn  $r_0 r^\varrho \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) < 1$  und divergiert, wenn  $r_0 r^\varrho \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) > 1$  ist.

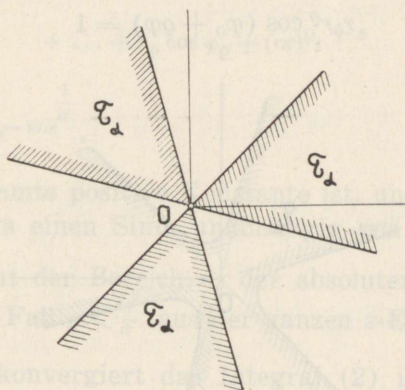


Fig. 8.

Es verhält sich so, dass wenn  $r_0 r^\varrho \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) < 1$  ist, wir für hinreichend grosses  $x$  haben

$$e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} |U(zx)| < e^{-x^\varrho} [1 - r_0 r^\varrho \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi)] + r_1 (rx)^\varrho^{-1} \cos[\varphi_1 + (\varrho-1)\varphi] \\ + \dots + r_\varrho \cos \varphi_\varrho + (rx)^{\varrho_1 + \varepsilon} \\ < e^{-mx},$$

wo  $m$  eine gewisse, von  $x$  unabhängige, positive Grösse bedeutet, und damit ist das Integral (3) vorhanden.

Ist dagegen  $r_0 r^\varrho \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) > 1$ , so haben wir für hinreichend grosses  $x$ , ausser einer Folge von Intervallen mit endlicher Summe,

$$e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} |U(zx)| > e^{-x^\varrho} [1 - r_0 r^\varrho \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi)] + r_1 (rx)^\varrho^{-1} \cos[\varphi_1 + (\varrho-1)\varphi] \\ + \dots + r_\varrho \cos \varphi_\varrho - (rx)^{\varrho_1 + \varepsilon} \\ > 1,$$

wodurch die Divergenz des Integrals (3) bestätigt wird.

Folglich besteht der Bereich  $\tau_\alpha$  der absoluten Konvergenz des Integrals (2) im Falle  $\varrho = \frac{1}{\alpha}$  aus denjenigen Punkten  $z = re^{i\varphi}$ , für die

$$r_0 r^\varrho \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) < 1$$

ist, d. h. aus jenen Punkten, die betreffs der Kurve

$$r_0 r^\varrho \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) = 1$$

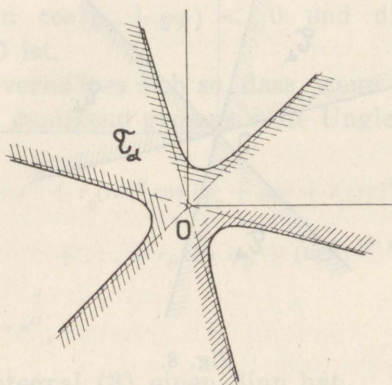


Fig. 9.

auf derselben Seite wie der Nullpunkt liegen. Diese Kurve ist aus  $\varrho$  hyperbelartigen Zweigen zusammengesetzt, die die Geraden

$$\cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) = 0$$

als Asymptoten besitzen (Fig. 9.).

Übrigens konvergiert das Integral (2) in jeder endlichen Fläche des Bereiches  $\tau_\alpha$  gleichmässig und stellt daher in  $\tau_\alpha$  eine holomorphe Funktion  $\varphi(z)$  dar.

Da hier der Punkt  $z=0$  ein innerer Punkt des Bereiches  $\tau_\alpha$  ist, so verhält sich  $\varphi(z)$  auch im Punkt  $z=0$  holomorph, und folglich ist die Potenzreihe (1) im Fall  $\varrho = \frac{1}{\alpha}$  konvergent, wobei ihr Konvergenzradius gleich  $r_0^{-\frac{1}{\varrho}}$  ist <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Es ist ersichtlich, dass hier der Bereich  $\tau_\alpha$  als Sonderfall von den in Kapitel VI betrachteten Sternen dient.

3<sup>o</sup> Zeigen wir zuletzt, dass im Fall  $\varrho < \frac{1}{\alpha}$  das Integral (3) für jedes  $z = re^{i\varphi}$  konvergiert.

Tatsächlich gilt hier für genügend grosses  $x$  die Ungleichung

$$e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} |U(zx)| < e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} + r_0 (rx)^{\varrho} \cos(\varphi_0 + \varrho\varphi) + r_1 (rx)^{\varrho-1} \cos[\varphi_1 + (\varrho-1)\varphi] + \dots + r_{\varrho} \cos \varphi_{\varrho} + (rx)^{\varrho_1} + \varepsilon \\ < e^{-mx^{\frac{1}{\alpha}}},$$

wo  $m$  eine bestimmte positive Konstante ist, und folglich hat das Integral (3) stets einen Sinn, unabhängig von  $z$ .

Somit besteht der Bereich  $\tau_{\alpha}$  der absoluten Konvergenz des Integrals (2) im Fall  $\varrho < \frac{1}{\alpha}$  aus der ganzen  $z$ -Ebene.

Ausserdem konvergiert das Integral (2) in jeder endlichen Fläche der  $z$ -Ebene gleichmässig und stellt daher eine ganze Funktion  $\varphi(z)$  dar, woraus folgt, dass die Potenzreihe (1) für  $\varrho < \frac{1}{\alpha}$  beständig konvergiert<sup>1)</sup>.

b. Aus der Theorie der absoluten Summabilität der konvergenten Potenzreihen folgt, dass der Bereich  $\tau_{\alpha}$  der absoluten Konvergenz des Integrals

$$(2) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^{\frac{1}{\alpha}}} U(zx) dx^{\frac{1}{\alpha}}$$

für  $\varrho \leq \frac{1}{\alpha}$  mit dem Stern der absoluten Summabilität der Reihe

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

übereinstimmt. Es bleibt uns daher übrig noch zu beweisen, dass der Bereich  $\tau_{\alpha}$  auch im Fall  $\varrho > \frac{1}{\alpha}$ , wo die Potenzreihe (1) diver-

<sup>1)</sup> M a i l l e t hat die Potenzreihe (1) für  $\varrho \geq \frac{1}{\alpha}$  als divergent und für  $\varrho < \frac{1}{\alpha}$  als konvergent angesehen (M a i l l e t, op. cit., S. 501—505).

giert, den Stern der absoluten Summabilität der Reihe (1) darstellt. Dazu genügt es, die absolute Konvergenz der Integrale

$$(4) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{\alpha}} \frac{d^{\lambda}}{dz^{\lambda}} U(zx) dx^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \lambda = 1, 2, \dots$$

im Bereich  $\tau_{\alpha}$  zu erweisen.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} U(zx) &= \frac{d}{dz} [e^{Q(zx)} P(zx)] = xe^{Q(zx)} [P(zx) Q'(zx) + \\ &+ P'(zx)] = xe^{Q(zx)} P_1(zx), \end{aligned}$$

wo die ganze Funktion  $P_1(t)$  die Ordnung  $\varrho_1$  besitzt, denn die Ordnung einer ganzen Funktion bleibt beim Differenzieren unverändert.

In derselben Weise finden wir

$$\frac{d^2}{dz^2} U(zx) = x^2 e^{Q(zx)} P_2(zx)$$

und im allgemeinen

$$\frac{d^{\lambda}}{dz^{\lambda}} U(zx) = x^{\lambda} e^{Q(zx)} P_{\lambda}(zx),$$

wo  $P_{\lambda}(t)$  eine ganze Funktion der Ordnung  $\varrho_{\lambda}$  bedeutet.

Hieraus folgt ohne Schwierigkeiten nach dem Abschnitt (a) die absolute Konvergenz der Integrale (4) im Bereich  $\tau_{\alpha}$ .

c. Betrachten wir zum Beispiel die Potenzreihe

$$(5) \quad 1 + \frac{|a|}{1} z + \frac{|2a|}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + \frac{|na|}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} z^n + \dots,$$

mit  $a > 0$ .

Offenbar ist diese Reihe für  $a > 1$  divergent, für  $a = 1$  konvergent mit dem Konvergenzradius  $R = 1$  und für  $a < 1$  beständig konvergent.

Nehmen wir  $a = a$  und bilden die entsprechende assoziierte Reihe, so erhalten wir die ganze Funktion

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = e^t,$$

die von der Ordnung  $\rho = 1$  ist und den Grenzexponent  $\rho_1 = 0$  besitzt. Somit ist  $\rho_1 < \rho$ , und die Reihe (5) stellt eine Reihe  $(a, 1, 1)$  von Maillet dar, die die Summe

$$g(z) = \int_0^{\infty} e^{-x+zx^a} dx$$

hat, und für die der Bereich  $\tau_a$  aus der Halbebene, die von der imaginären Achse begrenzt wird und die die negative reelle Achse enthält; oder aus der Halbebene, die von der Geraden  $R(z) = 1$  begrenzt wird und die den Nullpunkt enthält; oder aus der ganzen Ebene besteht, je nachdem ob  $a > 1$ , oder  $a = 1$ , oder  $a < 1$  ist.

2. Die Reihen von Le Roy. Le Roy<sup>1)</sup>, der sich als erster mit dem Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} U(zx^a) dx$$

beschäftigte, hat drei Jahre vor Maillet divergente Potenzreihen

$$(1) \quad u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots + u_n z^n + \dots$$

betrachtet, für die die assoziierte Reihe  $a$ -ter Ordnung

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n^a}$$

einen endlichen, von Null verschiedenen Konvergenzradius besitzt, und wo die Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^\lambda}{dz^\lambda} U(zx^a) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

<sup>1)</sup> Le Roy, op. cit., S. 405—430.

in einem gewissen, durch zwei vom Nullpunkt ausgehende Halbgerade begrenzten Sektor absolut und gleichmässig konvergieren.

Le Roy hat behauptet, dass diese eben definierten Reihen, die er regulär summierbar nennt, im Sinne Borels summierbar sind, d. h. wenn eine derartige Reihe eine bestimmte algebraische Differentialgleichung formal befriedigt, so stellt ihre Summe eine wirkliche Lösung der Differentialgleichung dar.

Es gibt jedoch in der Arbeit Le R o y s keine Beweise für die genannte Behauptung, ausser dem Satz der Differentiation der divergenten Potenzreihen, dessen Beweis aber nicht mit genügender Strenge entwickelt worden ist, weil Le R o y ebenso wie Maillet das Weglassen von Gliedern einer divergenten Reihe ohne jede Begründung für zulässig hält <sup>1)</sup>.

Da die absolute Konvergenz der Integrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{d^{\lambda}}{dz^{\lambda}} U(zx^{\alpha}) dx, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

die absolute Summabilität der Reihe (1) nach sich zieht, so gehören auch die Reihen von Le R o y als eine Sonderklasse zu den absolut summierbaren Reihen, wodurch die Behauptung Le R o y s vollständig erwiesen wird.

*Da der Verfasser während des Druckes von den Bolschewisten verschleppt worden ist, so hat Prof. Dr. Hermann Jaakson gütigst die Korrektur übernommen.*

*Die Redaktion.*

<sup>1)</sup> Le R o y, op. cit., S. 419—420.

# Verallgemeinerte Theorie der absoluten Summabilität der divergenten Potenzreihen.

## Inhaltsverzeichnis.

|         |   | Seite |
|---------|---|-------|
|         | Einleitung . . . . .  | 3     |
| Kapitel | I. — Das $B_\alpha$ -Verfahren. — Der Permanenzsatz . . . . .   | 6     |
| „       | II. — Addition der divergenten Reihen und ihre Multiplikation mit einer Konstante. — Hinzufügen und Weglassen der Glieder. — Totale und absolute Summabilität . . . . . | 12    |
| „       | III. — Multiplikation absolut summierbarer Reihen . . . . .   | 29    |
| „       | IV. — Absolute Summabilität der divergenten Potenzreihen . . . . .  | 38    |
| „       | V. — Differentiation und Integration der divergenten Potenzreihen . . . . .   | 51    |
| „       | VI. — Absolute Summabilität der konvergenten Potenzreihen . . . . .   | 60    |
| „       | VII. — Erweiterung des Begriffs der absoluten Summabilität . . . . .  | 72    |
| „       | VIII. — Integration von Differentialgleichungen durch divergente Potenzreihen . . . . .   | 82    |
| „       | IX. — Die Reihen von Maillet und von Le Roy . . . . .   | 91    |

Est.

A-11561

17332