

Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Jaagup Kirme
**Bishop–Phelpsi ja Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi
teoreemid operaatorite jaoks**

Matemaatika eriala
Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller, professor, *PhD*
Märt Põldvere, kaasprofessor, *PhD*

Tartu 2022

Bishop–Phelps ja Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreemid operaatorite jaoks

Magistritöö
Jaagup Kirme

Lühikokkuvõte. Magistritöös vaadeldakse Bishop–Phelps ja Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreeme operaatorite jaoks. Toetudes M. Acosta 2019. a ülevaateartiklile, esitatakse olulisemad tulemused selles vallas. Üksikasjalikult kirjutatakse lahti J. Bourgaini 1977. a artikli põhitulemuse tõestus Bishop–Phelps omaduse kohta. Tõestatakse täpsem versioon R. M. Aroni, B. Cascalese ja O. Kozhushkina Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreemist Asplundi operaatorite kohta nende 2011. a artiklist.

CERCS teaduseriala. P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad. Banachi ruum, Bishop–Phelps–Bollobáse omadus operaatorite jaoks, Radon–Nikodymi omadus, Asplundi operaator.

Bishop–Phelps and Bishop–Phelps–Bollobás type theorems for operators

Master's Thesis
Jaagup Kirme

Abstract. In this master's thesis, Bishop–Phelps and Bishop–Phelps–Bollobás type theorems for operators are considered. Based on M. Acosta's 2019 paper, main results in this field are presented. A detailed proof of the main theorem of J. Bourgain's 1977 paper on the Bishop–Phelps property is given. A sharper version of a Bishop–Phelps–Bollobás type theorem for Asplund operators by R. M. Aron, B. Cascales, and O. Kozhushkina from their 2011 paper is proved.

CERCS research specialisation. P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Keywords. Banach space, Bishop–Phelps–Bollobás property for operators, Radon–Nikodym property, Asplund operator.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Tarvilikke eelteadmisi	7
1.1 Baire'i teoreem	7
1.2 Eidelheiti eraldamisteoreem	7
1.3 Ruumid $C_0(L)$ ja $C(K)$. Urõsoni lemma lokaalselt kompaktne versioon	8
1.4 Radon–Nikodymi omadus	9
1.5 Asplundi ruumid	9
1.6 Asplundi operaatorid	10
2 Valik Bishop–Phelps ja Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreeme	12
2.1 Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem	12
2.2 Varasemad tulemused operaatorite kohta	13
2.3 Lähteruum on ühtlaselt kumer	15
2.4 Lähteruum on L_1 -ruum	15
2.5 Lähteruum on $C(K)$	17
2.6 $C_0(L)$ -väärtuselised Asplundi operaatorid	18
2.7 Lahtiseid küsimusi	19
3 Bourgaini teoreem Radon–Nikodymi omadusega ruumi Bishop–Phelps omadusest	20
4 Aroni, Cascalese ja Kozhushkina Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreem $C_0(L)$-väärtuselistele Asplundi operaatorite kohta	31
Kirjandus	36

Sissejuhatus

Aastal 1961 ilmunud artiklis [BP] tõestasid E. A. Bishop ja R. R. Phelps, et mistahes Banachi ruumi kaasruumis on oma normi saavutavate funktsionaalide hulk kõikjal tihe.

Teoreem 1 (Bishop–Phelps subrefleksiivsusteoreem; vt [M, lk 278, teoreem 2.11.14] või [BP]). *Olgu X Banachi ruum. Siis oma normi saavutavate funktsionaalide hulk on kaasruumis X^* kõikjal tihe, st mistahes $x^* \in X^*$ ja $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $u^* \in X^*$ ja $u \in X$ nii, et $\|u\| \leq 1$ ning*

$$|u^*(u)| = \|u^*\| \quad \text{ja} \quad \|u^* - x^*\| \leq \varepsilon.$$

Aastal 1970 ilmunud artiklis [Bol] pani B. Bollobás tähele, et Bishop–Phelps subrefleksiivsusteoreemi tõestuses artiklis [BP] on implitsiitselt tõestatud tugevam väide: lisaks sellele, et me saame funktsionaali x^* lähendada funktsionaaliga u^* , mis saavutab oma normi, me saame samaaegselt punkti, milles x^* on lähedane oma normile, lähendada punktiga, milles u^* saavutab oma normi. Sellele väitele viidatakse kui *Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemile*.

Teoreem 2 (Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem; vt [CKMMR, 2014, järeldus 2.4], vrd [Bol, teoreem 1]). *Olgu X Banachi ruum ning olgu $x^* \in X^*$ ja $x \in X$ sellised, et $\|x^*\| \leq 1$, $\|x\| \leq 1$ ja $|x^*(x) - 1| \leq \frac{\varepsilon^2}{2}$, kus $0 < \varepsilon < 2$. Siis leiduvad $u^* \in X^*$ ja $u \in X$ nii, et*

$$u^*(u) = \|u^*\| = \|u\| = 1, \quad \|u - x\| \leq \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|u^* - x^*\| \leq \varepsilon.$$

Märkus. Bollobás tõestas artiklis [Bol] eelneva teoreemi vaid juhu jaoks, kus $\|x^*\| = \|x\| = 1$, ja $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, kusjuures tingimuse $\|u - x\| \leq \varepsilon$ asemel sai ta nõrgema tingimuse $\|u - x\| < \varepsilon + \varepsilon^2$. Siintoodud versioon Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemist pärineb M. Chica, V. Kadetsi, M. Martíni, S. Moreno-Pulido ja F. Rambla-Barreno aastal 2014 ilmunud artiklist [CKMMR].

Eesti keeles on Bishop–Phelps ja Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemide 1 ja 2 üksikasjalised tõestused (reaalsel juhul) esitatud D. Püvi aastal 2016 kaitsstud bakalaureusetöös [Pü].

Artiklis [BP] püstitasid Bishop ja Phelps järgmise küsimuse: milliste Banachi ruumide paaride X ja Y korral on oma normi saavutavate operaatorite hulk (öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ saavutab oma normi, kui leidub $x_0 \in X$ nii, et $\|x_0\| \leq 1$ ja $\|Tx_0\| = \|T\|$) kõigi pidevate lineaarsete operaatorite ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ kõikjal tihe? Seda küsimust uuris J. Lindenstrauss 1963. aastal ilmunud artiklis [L]. Lindenstrauss märkis, et Bishopi ja Phelps küsimus on liiga üldine, et sellele ammendavalt vastata ning keskendus järgmise kahe omaduse uurimisele.

Definitsioon 1 (vt [L]). Öeldakse, et Banachi ruumil X on

- *omadus A*, kui mistahes Banachi ruumi Y korral on oma normi saavutavate operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ kõikjal tihe,
- *omadus B*, kui mistahes Banachi ruumi Y korral on oma normi saavutavate operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(Y, X)$ kõikjal tihe.

Kirjanduses viidatakse omadustele A ja B tavaliselt kui *Lindenstraussi omadustele A ja B*.

Artiklis [L] andis Lindenstrauss mitmeid tarvilikke geomeetrilisi tingimusi ning samuti ka piisavaid geomeetrilisi tingimusi selleks, et Banachi ruumil oleks omadus A (või omadus B). Muuhulgas tõestas Lindenstrauss, et

- *igal refleksiivsel Banachi ruumil on omadus A*, vt [L, teoreem 1];
- *leidub Banachi ruume X , mille korral oma normi saavutavate operaatorite hulk ei ole kõikjal tihe ruumis $\mathcal{L}(X, X)$* , vt [L, lause 5].

Aastal 1977 ilmunud artiklis [Bou] parendas J. Bourgain Lindenstraussi ülaltoodud tulemust refleksiivsete Banachi ruumide kohta.

Teoreem 3 (vt [Bou, järelalus 6]). *Radon–Nikodymi omadusega Banachi ruumil on Lindenstraussi omadus A.*

Hea ülevaade olulisematest Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreemidest operaatorite kohta kuni aastani 2006 on antud ülevaateartiklis [A₀₆].

Aastal 2008 töid M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García ja M. Maestre artiklis [AAGM] sisse järgmise terminoloogia.

Definitsioon 2 (vt [AAGM, definitsioon 1.1] ja [A₁₉, definitsioon 1.1]). Olgu X ja Y mõlemad kas reaalsed või kompleksed Banachi ruumid. Öeldakse, et paaril (X, Y) on

- *Bishop–Phelps–Bollobáse omadus operaatorite jaoks* (lühidalt, *BPBP*), kui iga reaalarvu $\varepsilon \in (0, 1)$ korral leidub reaalarv $\eta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ nii, et

(#) mistahes $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $x_0 \in X$ korral, mis rahuldavad tingimusi $\|T\| = \|x_0\| = 1$ ja

$$\|Tx_0\| > 1 - \eta(\varepsilon),$$

leiduvad $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $u_0 \in X$ nii, et

$$\|Su_0\| = \|S\| = \|u_0\| = 1, \quad \|u_0 - x_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|S - T\| < \varepsilon,$$

- *Bishop–Phelps omadus*, kui normi saavutavate operaatorite hulk on ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ kõikjal tihe.

Alates artikli [AAGM] ilmumisest on Bishop–Phelps–Bollobáse omadust operaatorite jaoks väga laialdaselt uuritud. Hea ülevaade olulisematest arengutest selles vallas kuni aastani 2019 on antud ülevaateartiklis [A₁₉].

Käesoleval magistritööl on kolm eesmärki:

- toetudes ülevaateartiklile [A₁₉], anda ülevaade olulisematest seniilmunud Bishop–Phelps ja Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreemidest operaatorite kohta ning tuua välja lahendamata probleeme selles vallas,
- kirjutada üksikasjaliselt lahti ülaltoodud Bourgaini teoreemi 3 tõestus (koos vajaminevate abitulemuste tõestustega),
- uue tulemusena tõestada järgneva R. M. Aroni, B. Cascalese ja O. Kozhushkina Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreemi 4 parendus, kus tingimuse $\|T - S\| \leq 3\varepsilon$ asemel saadakse tugevam tingimus $\|T - S\| \leq \varepsilon$.

Teoreem 4 (vt [ACK, teoreem 2.4]). *Olgu X reaalne Banachi ruum ning olgu L lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum. Olgu $T: X \rightarrow C_0(L)$ Asplundi operaator, kusjuures $\|T\| = 1$, olgu $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ning olgu $x_0 \in S_X$ selline, et $\|x_0\| = 1$ ja*

$$\|Tx_0\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Siis leiduvad Asplundi operaator $S \in C_0(L)$ ja element $u_0 \in X$ ja nii, et $\|S\| = \|u_0\| = 1$ ning

$$\|Su_0\| = 1, \quad \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|T - S\| \leq 3\varepsilon.$$

Eelmainitud eesmärkidele on pühendatud vastavalt töö peatükid 2–4. Peatükis 1 on tutvustatud töös vajaminevat Banachi ruumide teooriat, mis jääb väljapoole Tartu Ülikooli matemaatika magistriõppekava kohustuslikku osa. Selles peatükis käsitletavat teemat on Baire'i teoreem, Eidelheiti eraldamisteoreem, Radon–Nikodymi omadus, Asplundi ruumid ja Asplundi operaatorid.

Töös on kasutatud järgmisi tähistusi. Olgu X normeeritud ruum. Ruumi X alamhulga A kumerat katet tähistame sümboliga $\text{conv}A$. Lahtist kera ruumis X keskpunktiga a ja raadiusega r , ruumi X kinnist ühikkera ja ruumi X ühiksfääri tähistame vastavalt sümbolitega $B(a, r)$, B_X ja S_X ; ruumi X kaasruumi tähistame sümboliga X^* . Kui Y on normeeritud ruum üle sama korpuse, mis X , siis sümboliga $\mathcal{L}(X, Y)$ tähistame kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $X \rightarrow Y$ ruumi. Kui $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$, siis operaator $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(X, Y)$ on defineeritud võrdusega

$$(x^* \otimes y)x = x^*(x)y.$$

Normeeritud ruumi kaasruumi $*$ -nõrka topoloogiat tähistame sümboliga w^* .

1 Tarvilikke eelteadmisi

1.1 Baire'i teoreem

Teoreem 1.1 (Baire'i teoreem, vt nt [M, lk 37, teoreem 1.5.4]). *Olgu X täielik meetriline ruum. Kui hulgad $A_n \subset X$, $n = 1, 2, \dots$, on ruumis X lahtised ja kõikjal tihedad, siis nende ühisosa*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subset X$$

on ruumis X kõikjal tihe.

1.2 Eidelheiti eraldamisteoreem

Teoreem 1.2 (Eidelheiti eraldamisteoreem; vt nt [M, lk 179, teoreem 2.2.26]). *Olgu X topoloogiline vektorruum ning olgu C_1 ja C_2 sellised mittetühjad kumerad ruumi X alamhulgad, et hulga C_2 sisemus C_2° on mittetühi. Kui $C_1 \cap C_2^\circ = \emptyset$, siis leiduvad $x^* \in X^*$ ja $s \in \mathbb{R}$ nii, et*

$$\operatorname{Re} x^*(x) \geq s \quad \text{iga } x \in C_1 \text{ korral,}$$

$$\operatorname{Re} x^*(x) \leq s \quad \text{iga } x \in C_2 \text{ korral,}$$

$$\operatorname{Re} x^*(x) < s \quad \text{iga } x \in C_2^\circ \text{ korral.}$$

Lemma 3.11 tõestamisel allpool on mugav toetuda järgnevale järeldusele Eidelheiti eraldamisteoreemist 1.2.

Järeldus 1.3. *Olgu X reaalne normeeritud ruum ning olgu $z \in X$, $r > 0$ ja mittetühi absoluutselt kumer hulk $C \subset X$ sellised, et $d(z, C) \geq r$. Siis leidub $f \in X^*$ nii, et $\|f\| = 1$ ning*

$$f(z) \geq \sup |f(C)| + r.$$

Järelduse 1.3 tõestamisel on mugav toetuda järgmisele lemmale.

Lemma 1.4. *Olgu X reaalne normeeritud ruum ning olgu $h \in X^*$, $a \in X$ ja $r > 0$. Siis*

$$\inf_{x \in B(a, r)} h(x) = h(a) - r \|h\| \quad \text{ja} \quad \sup_{x \in B(a, r)} h(x) = h(a) + r \|h\|.$$

TÕESTUS:

$$\begin{aligned} \inf_{x \in B(a, r)} h(x) &= \inf_{x \in B(0, r)} h(a + x) = \inf_{x \in B(0, 1)} (h(a) + rh(x)) = h(a) - r \|h\|, \\ \sup_{x \in B(a, r)} h(x) &= \sup_{x \in B(0, r)} h(a + x) = \sup_{x \in B(0, 1)} (h(a) + rh(x)) = h(a) + r \|h\|. \end{aligned}$$

□

JÄRELDUSE 1.3 TÕESTUS. Hulgad $C_1 := C$ ja $C_2 := B(z, r)$ rahuldavad Eidel-
heiti eraldamisteoreemi 1.2 eeldusi, seega leiduvad $g \in X^*$ ning $s \in \mathbb{R}$ nii, et

$$g(x) \geq s > g(y) \quad \text{kõikide } x \in C_1 \text{ ja } y \in C_2 \text{ korral,}$$

ehk, defineerides $f := -\frac{g}{\|g\|}$,

$$f(x) \leq -\frac{s}{\|g\|} < f(y) \quad \text{kõikide } x \in C_1 \text{ ja } y \in C_2 \text{ korral.}$$

Lemma 1.4 põhjal

$$\sup_{x \in C} |f(x)| = \sup_{x \in C_1} \pm f(x) = \sup_{x \in C_1} f(x) \leq \inf_{x \in C_2} f(x) = f(z) - r \|f\| = f(z) - r.$$

□

1.3 Ruumid $C_0(L)$ ja $C(K)$. Urõsoni lemma lokaalselt kompaktne versioon

Olgu L lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $\mathbb{K}$ üks korpustest $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{C}$.

Meenutame, et $C_0(L)$ on „lõpmatutes hääbuvate“ pidevate funktsioonide $f: L \rightarrow \mathbb{K}$ Banachi ruum (st niisuguste pidevate funktsioonide $f: L \rightarrow \mathbb{K}$ Banachi ruum, mille puhul iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral hulk $\{x \in L: |f(x)| \geq \varepsilon\}$ on kompaktne) normiga

$$\|f\| = \sup_{x \in L} |f(x)|$$

(lihtne on näha, et supreemum eelnevas normi $\|f\|$ definitsioonis on tegelikult maksimum). Seejuures, kui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, siis kõneldakse reaalsest ruumist $C_0(L)$; kui aga $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, kõneldakse komplekssest ruumist $C_0(L)$.

Kui K on kompaktne Hausdorffi ruum, siis iga pidev funktsioon $f: K \rightarrow \mathbb{K}$ on „lõpmatutes hääbuv“, seega $C_0(K) = C(K)$, kus $C(K)$ tähistab kõigi pidevate funktsioonide $f: K \rightarrow \mathbb{K}$ Banachi ruumi normiga $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$.

Järgnev *Urõsoni lemma lokaalselt kompaktne versioon* on üks olulisemaid tööriistu ruumide $C_0(L)$ uurimisel. Meenutame, et kui X on topoloogiline ruum ja $f: X \rightarrow \mathbb{K}$, siis funktsiooni f *kandjaks* nimetatakse hulka $\text{supp } f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}$.

Lemma 1.5 (Urõsoni lemma lokaalselt kompaktne versioon; vt nt [F, lemma 4.32]). *Kui L on lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum ning $K \subset W \subset L$, kus hulk K on kompaktne ning hulk W on lahtine, siis leidub kompaktse kandjaga pidev funktsioon $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et*

$$f(L) \subset [0, 1], \quad f|_K \equiv 1 \quad \text{ja} \quad \text{supp } f \subset W.$$

1.4 Radon–Nikodymi omadus

Definitsioon 1.1 (vt nt [DU, lk 133, definitsioon 3]). Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et alamhulk $A \subset X$ on *hambuv*, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ puhul leidub element $x \in A$ nii, et $x \notin \overline{\text{conv}}(A \setminus B(x, \varepsilon))$. Öeldakse, et hulk A on *mittehambuv*, kui ta ei ole hambuv.

Definitsioon 1.2 (vt nt [DU, lk 136, teoreem 7]). Öeldakse, et Banachi ruumil X on *Radon–Nikodymi omadus*, kui iga tema mittetühi tõkestatud alamhulk on hambuv.

Radon–Nikodymi omadus on näiteks kõigil refleksiivsetel (sealhulgas kõigil lõplikumõõtmelistel) Banachi ruumidel (niisiis näiteks kõigil ruumidel L_p – sealhulgas ruumidel ℓ_p – kus $1 < p < \infty$) ning separaablitel kaasruumidel (nt mitterefleksiivsel ruumil ℓ_1). Ruumidel c_0 , $C[0, 1]$, $L_1[0, 1]$ ja $L_\infty[0, 1]$ ei ole Radon–Nikodymi omadust. (Vt nt [DU, lk 218–219].)

1.5 Asplundi ruumid

Definitsioon 1.3. Olgu X ja Y normeeritud ruumid ning olgu $U \subset X$ lahtine hulk. Öeldakse, et funktsioon $f: U \rightarrow Y$ on punktis $x \in U$ *Fréchet’ mõttes diferentseeruv*, kui leidub pidev lineaarne operaator $A: X \rightarrow Y$ nii, et

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Definitsioon 1.4. Öeldakse, et Banachi ruum X on *Asplundi ruum*, kui mistahes lahtise kumera alamhulga $U \subset X$ ja pideva kumera funktsiooni $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ korral on punktide hulk, kus f on Fréchet’ mõttes diferentseeruv, kõikjal tihe G_δ hulgas U .

Näiteid Asplundi ruumidest toome käesoleva jaotise lõpus, mil meie käsutuses on selliseid ruume kirjeldav teoreem 1.7.

Definitsioon 1.5 (vt nt [N, jaotis 1]). Olgu (X, τ) topoloogiline ruum, olgu ρ meetrika ruumis X (me ei eelda siinkohal, et ρ ja τ oleksid omavahel mingil viisil seotud) ning olgu $C \subset X$ mittetühi alamhulk.

Öeldakse, et hulk C on topoloogias τ meetrika ρ poolt *killustatud* (või ρ -killustatud), kui mistahes reaalarvu $\varepsilon > 0$ ja mittetühja alamhulga $A \subset C$ korral leidub τ -lahtine hulk $U \subset X$ nii, et $U \cap A \neq \emptyset$ ning $\text{diam}_\rho(U \cap A) \leq \varepsilon$.

Kui eelnevas $C = X$ ja topoloogia τ roll on kontekstist selge, siis öeldakse ka, et ruum X on meetrika ρ poolt killustatud.

Kui eelnevas meetrika ρ on indutseeritud mingi normi poolt, siis öeldakse, et hulk C on topoloogias τ selle normi poolt killustatud.

Lemma 1.6 (vt [N, lemma 2.1]). Olgu X ja Y kompaktsed Hausdorffi ruumid ning olgu ρ_X ja ρ_Y meetrikad vastavalt ruumides X ja Y . Olgu $f: X \rightarrow Y$ pidev süürjektiivne kujutus, mis on ka ρ_X - ρ_Y -pidev. Kui ruum X on meetrika ρ_X poolt killustatud, siis ruum Y on meetrika ρ_Y poolt killustatud.

Teoreem 1.7 (vt nt [ACK, teoreem 2.1]). Olgu X Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:

- (i) X on Asplundi ruum,
- (ii) kaasruumi X^* iga w^* -kompaktne alamhulk on w^* -topoloogias normi poolt killustatud,
- (iii) ruumi X iga separaabli alamruumi kaasruum on separaabel,
- (iv) kaasruumil X^* on Radon–Nikodymi omadus.

Asplundi ruumid on niisiis parajasti need Banachi ruumid, mille kaasruumil on Radon–Nikodymi omadus, sealhulgas näiteks kõigil refleksiivsetel ruumidel ja (mitterefleksiivsel) ruumil c_0 . Ruumid ℓ_1 , ℓ_∞ , $C[0, 1]$, $L_1[0, 1]$ ja $L_\infty[0, 1]$ ei ole Asplundi ruumid. (Vt nt [CGKS, lk 865].)

1.6 Asplundi operaatorid

Definitsioon 1.6. Olgu X ja Y Banachi ruumid. Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ on *Asplundi operaator*, kui leiduvad Asplundi ruum Z ning operaatorid $T_1 \in \mathcal{L}(X, Z)$ ja $T_2 \in \mathcal{L}(Z, Y)$ nii, et $T = T_2 \circ T_1$.

Iga nõrgalt kompaktne operaator (sealhulgas iga lõplikumõõtmeline operaator ning, veidi üldisemalt, iga kompaktne operaator) Banachi ruumide vahel on Asplundi operaator, sest iga nõrgalt kompaktne operaator faktoriseerub läbi refleksiivse ruumi (vt [DFJP, järeldus 1]).

Definitsioon 1.7 (vt nt [Pi, definitsioon 1.1.1 ja teoreem 1.2.2] või [Lil, definitsioonid 3.1 ja 3.2]). Olgu $\mathcal{A}$ mingi Banachi ruumide vahel tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite klass. Klassi $\mathcal{A}$ komponendiks $\mathcal{A}(X, Y)$ ruumist X ruumi Y nimetatakse hulka kõikidest klassi $\mathcal{A}$ operaatoritest, mis tegutsevad ruumist X ruumi Y .

Pidevate lineaarsete operaatorite klassi $\mathcal{A}$ nimetatakse *operaatorideaaliks*, kui

- (1) mistahes Banachi ruumide X ja Y korral on komponent $\mathcal{A}(X, Y)$ ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ lineaarne alamruum,
- (2) $\mathcal{A}$ sisaldab kõiki lõplikumõõtmelisi pidevaid lineaarseid operaatoreid,
- (3) kui X, Y, Z ja W on Banachi ruumid ning $R \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{A}(Y, Z)$ ja $T \in \mathcal{L}(Z, W)$, siis $TSR \in \mathcal{A}(X, W)$.

Teoreem 1.8 (vt [Ste, teoreemid 2.11 ja 2.12]). *Kõigi Asplundi operaatorite klass moodustab operaatorideaali.*

Järgnevat lemmat me kasutame teoreemi 4.1 tõestuses.

Lemma 1.9. *Olgu X Banachi ruum, olgu L lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, olgu $T \in \mathcal{L}(X, C_0(L))$ Asplundi operaator ning olgu $f \in C_0(L)$. Siis operaator $f * T: X \rightarrow C_0(L)$, kus*

$$((f * T)x)(s) = f(s) \cdot (Tx)(s),$$

on Asplundi operaator.

TÕESTUS. Kuna mistahes $g, h \in C_0(L)$ korral ka $g \cdot h \in C_0(L)$, kus $(g \cdot h)(s) = g(s) \cdot h(s)$, kehtib iga $x \in X$ korral sisalduvus $(f * T)x \in C_0(L)$. Vahetu kontroll näitab, et operaator $f * T$ on lineaarne; ta on ka tõkestatud, sest mistahes $x \in X$ korral

$$\begin{aligned} \|(f * T)x\| &= \sup_{s \in L} |((f * T)x)(s)| = \sup_{s \in L} |f(s)| \cdot |(Tx)(s)| \leq \|f\| \cdot \|Tx\| \\ &\leq \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|; \end{aligned}$$

niisiis $f * T \in \mathcal{L}(X, C_0(L))$.

Kuna T on Asplundi operaator, leiduvad Asplundi ruum Z ning operaatorid $T_1 \in \mathcal{L}(X, Z)$ ja $T_2 \in \mathcal{L}(Z, C_0(L))$ nii, et $T = T_2 \circ T_1$. Eelnevalt tõestatu põhjal ka operaator $f * T_2: Z \rightarrow C_0(L)$, kus $((f * T_2)z)(s) = f(s) \cdot (T_2z)(s)$, on pidev ja lineaarne; kuna Z on Asplundi ruum, on ta Asplundi operaator. Teoreemi 1.8 põhjal on ka operaator $(f * T_2) \circ T_1$ Asplundi operaator. Lemma tõestuseks jääb nüüd veenduda, et $f * T = (f * T_2) \circ T_1$: mistahes $x \in X$ ja $s \in L$ korral

$$\begin{aligned} ((f * T)x)(s) &= f(s) \cdot (Tx)(s) = f(s) \cdot (T_2(T_1x))(s) \\ &= ((f * T_2)(T_1x))(s) = (((f * T_2) \circ T_1)x)(s), \end{aligned}$$

seega $(f * T)x = ((f * T_2) \circ T_1)x$ ning järelikult $f * T = (f * T_2) \circ T_1$, nagu soovitud. $\square$

2 Valik Bishop–Phelps ja Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreeme

2.1 Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem

Sõnastame uuesti sissejuhatuses toodud Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemi 2.

Teoreem 2.1 (Bishop–Phelps–Bollobás, vt [Bol, 1970, teoreem 1] ja [CKMMR, 2014, järelalus 2.4]). *Olgu X reaalne või kompleksne Banachi ruum ja olgu $0 < \varepsilon < 2$. Kui $x^* \in B_{X^*}$ ja $x_0 \in B_X$ on sellised, et*

$$|1 - x^*(x_0)| < \frac{\varepsilon^2}{2},$$

siis leiduvad $u^ \in S_{X^*}$ ja $u_0 \in S_X$ nii, et*

$$u^*(u_0) = 1, \quad \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|x^* - u^*\| < \varepsilon.$$

Magistritöö neljandas peatükis lemma 4.2 tõestamisel vajame me järgnevat järelalus teoreemist 2.1.

Järelalus 2.2 (vrd [ACK, märkus 2.2]). *Olgu X reaalne Banachi ruum, olgu $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ ning olgu $x^* \in B_{X^*}$ ja $x_0 \in B_X$ sellised, et*

$$|x^*(x_0)| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Siis leiduvad $u^ \in S_{X^*}$ ja $u_0 \in S_X$ nii, et*

$$|u^*(u_0)| = 1, \quad \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|x^* - u^*\| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

TÕESTUS. Oletame esmalt, et $x^*(x_0) > 0$. Siis, arvestades, et $|x^*(x_0)| \leq 1$,

$$|1 - x^*(x_0)| = 1 - |x^*(x_0)| < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Teoreemi 2.1 põhjal leiduvad $u^* \in S_{X^*}$ ja $u_0 \in S_X$, mis rahuldavad tingimust 2.1.

Oletame nüüd, et $x^*(x_0) < 0$. Siis $(-x^*)(x_0) > 0$, seega eelnevalt tõestatu põhjal leiduvad $v^* \in S_{X^*}$ ja $u_0 \in S_X$ nii, et

$$|v^*(u_0)| = 1, \quad \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|(-x^*) - v^*\| < \varepsilon.$$

Defineerides $u^* := -v^*$, kehtib (2.1). □

2.2 Varasemad tulemused operaatorite kohta

Artiklis [BP] püstitasid Bishop ja Phelps järgmise küsimuse: milliste Banachi ruumide paaride X ja Y korral on oma normi saavutavate operaatorite hulk kõigi pidevate lineaarsete operaatorite ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ kõikjal tihe? (Öeldakse, et operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ saavutab oma normi, kui leidub $x_0 \in X$ nii, et $\|x_0\| \leq 1$ ja $\|Tx_0\| = \|T\|$.) Seda küsimust uuris J. Lindenstrauss aastal 1963 ilmunud artiklis [L]. Lindenstrauss märkis, et Bishopi ja Phelpsi küsimus on liiga üldine, et sellele ammendavalt vastata ning keskendus järgmise kahe omaduse uurimisele.

Definitsioon 2.1 (vt [L]). Öeldakse, et Banachi ruumil X on

- *omadus A*, kui mistahes Banachi ruumi Y korral on oma normi saavutavate operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ kõikjal tihe,
- *omadus B*, kui mistahes Banachi ruumi Y korral on oma normi saavutavate operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(Y, X)$ kõikjal tihe.

Sõnastame mõned Lindenstraussi artiklis [L] tõestatud väited:

- (a) *mistahes Banachi ruumide X ja Y korral on selliste operaatorite $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ hulk, mille teine kaasoperaator $T^{**} \in \mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})$ saavutab oma normi, kõikjal tihe ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$* , vt [L, teoreem 1];
- (b) *igal refleksiivsel Banachi ruumil on omadus A*, vt [L, teoreem 1];
- (c) *ruumil $L_1(\mu)$ on omadus A parajasti siis, kui mõõdul μ on järgmine omadus: mistahes hulk E , mille puhul $\mu(E) > 0$, sisaldab aatomit* (inglisekeelne termin niisuguse omadusega mõõtude kohta on „purely atomic“), vt [L, lause 2, (a)];
- (d) *ruumil $C(K)$, kus K on kompaktne meetriline ruum, on omadus A parajasti siis, kui hulk K on lõplik*, vt [L, lause 2, (b)];
- (e) *kui ruum X on rangelt kumer, kusjuures leidub mittekompaktne pidev lineaarne operaator $c_0 \rightarrow X$, siis ruumil X ei ole omadust B*, vt [L, lause 4];
- (f) *leidub Banachi ruum X , mille korral oma normi saavutavate operaatorite hulk ei ole kõikjal tihe ruumis $\mathcal{L}(X, X)$* , vt [L, lause 5].

Märgime, et siin tulemus (b) on lihtne järeldus tulemusest (a). Tulemuses (f) mainitud Banachi ruumi X puhul ei ole paaril (X, X) Bishop–Phelps omadust ning seega pole sellel paaril ka Bishop–Phelps–Bollobáse omadust operaatorite jaoks.

Aastal 1977 ilmunud artiklis [Bou] parendas J. Bourgain Lindenstraussi ülaltoodud tulemust (b) refleksiivsete Banachi ruumide kohta.

Teoreem 2.3 (vt [Bou, järeldus 6]). *Radon–Nikodymi omadusega Banachi ruumil on omadus A.*

Magistritöö kolmandas peatükis esitatakse teoreemile 2.3 üksikasjaline tõestus koos vajaminevate abitulemuste tõestustega; vt järeldust 3.3. Täpsemalt, kolmandas peatükis tõestatakse üksikasjalikult teoreemist 2.3 üldisem teoreem 3.2.

Hea ülevaade olulisematest Bishop–Phelps tüüpi teoreemidest operaatorite kohta kuni aastani 2006 on antud ülevaateartiklis [A₀₆].

Aastal 2008 töid M. D. Acosta, R. M. Aron, D. García ja M. Maestre artiklis [AAGM] sisse järgmise terminoloogia.

Definitsioon 2.2 (vt [AAGM, definitsioon 1.1] ja [A₁₉, definitsioon 1.1]). Olgu X ja Y mõlemad kas reaalsed või kompleksed Banachi ruumid. Öeldakse, et paaril (X, Y) on

- *Bishop–Phelps–Bollobáse omadus operaatorite jaoks* (lühidalt, *BPBP*), kui iga reaalarvu $\varepsilon \in (0, 1)$ korral leidub reaalarv $\eta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$ nii, et

($\sharp$) mistahes $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $x_0 \in X$ korral, mis rahuldavad tingimusi $\|T\| = \|x_0\| = 1$ ja

$$\|Tx_0\| > 1 - \eta(\varepsilon),$$

leiduvad $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $u_0 \in X$ nii, et

$$\|Su_0\| = \|S\| = \|u_0\| = 1, \quad \|u_0 - x_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|S - T\| < \varepsilon;$$

- *Bishop–Phelps omadus*, kui normi saavutavate operaatorite hulk on ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ kõikjal tihe.

Alates artikli [AAGM] ilmunisest on Bishop–Phelps–Bollobáse omadust operaatorite jaoks väga laialdaselt uuritud. Hea ülevaade olulisematest arengutest selles vallas kuni aastani 2019 on antud ülevaateartiklis [A₁₉].

Jaotise lõpetuseks esitame veel kaks tulemust artiklist [AAGM].

Teoreem 2.4 (vt [AAGM, lause 2.4]). *Kui X ja Y on lõplikumõõtmelised normeeritud ruumid, siis paaril (X, Y) on BPBP.*

Definitsioon 2.3 (vt nt [AAGM, definitsioon 2.1] või [A₁₉, definitsioon 2.2]; vt ka [L, lause 3]). Öeldakse, et Banachi ruumil Y on (*Lindenstraussi*) *omadus* β , kui leiduvad hulgad $\{y_\alpha : \alpha \in \Lambda\} \subset S_Y$ ja $\{y_\alpha^* : \alpha \in \Lambda\} \subset S_{Y^*}$ ning arv $\rho \in [0, 1)$ nii, et

$$(1) \quad y_\alpha^*(y_\alpha) = 1 \text{ iga } \alpha \in \Lambda \text{ korral,}$$

$$(2) \quad |y_\alpha^*(y_\beta)| \leq \rho < 1, \text{ kui } \alpha \neq \beta,$$

(3) $\|y\| = \sup_{\alpha} |y_{\alpha}^*(y)|$ iga $y \in Y$ korral.

Teoreem 2.5 (vt [AAGM, teoreem 2.2]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning olgu ruumil Y omadus β . Siis paaril (X, Y) on BPBp. Seejuures kui $T \in S_{\mathcal{L}(X, Y)}$, $x_0 \in S_X$ ning $\varepsilon > 0$ rahuldavad tingimust $\|Tx_0\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$, siis iga sellise reaalarvu η korral, mille puhul $\eta > \frac{\rho}{1-\rho} \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4} \right)$, leiduvad $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ning $u_0 \in S_X$ nii, et*

$$\|Su_0\| = \|S\|, \quad \|x_0 - u_0\| < \varepsilon, \quad \|S - T\| < \eta + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

2.3 Lähteruum on ühtlaselt kumer

Definitsioon 2.4 (vt nt [A19, jaotis 2]). Öeldakse, et Banachi ruum X on *ühtlaselt kumer*, kui iga arvu $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta \in (0, 1)$ nii, et

$$\text{mistahes } u, v \in B_X \text{ korral, kus } \frac{\|u + v\|}{2} > 1 - \delta, \text{ kehtib } \|u - v\| < \varepsilon.$$

Sellisel juhul *ruumi X kumerusmoodul* on funktsioon

$$\delta_X(\varepsilon) := \inf \left\{ 1 - \frac{\|u + v\|}{2} : u, v \in B_X, \|u - v\| \geq \varepsilon \right\}, \quad \varepsilon \in (0, 2).$$

Teoreem 2.6 (vt [KL14, teoreem 3.1]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning olgu ruum X ühtlaselt kumer. Olgu $\varepsilon > 0$ ning $\eta := \frac{\varepsilon}{25} \delta_X(\varepsilon/2)$. Siis mistahes $T \in S_{\mathcal{L}(X, Y)}$ ja $x_0 \in S_X$ korral, kus $\|Tx_0\| > 1 - \eta$, leiduvad $S \in S_{\mathcal{L}(X, Y)}$ ja $u_0 \in S_X$ nii, et*

$$\|Su_0\| = 1, \quad \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

Seega paaril (X, Y) on BPBp.

Artiklis [ABGM, teoreem 2.2] on eelnevast teoreemist tõestatud mõnevõrra erinev versioon.

2.4 Lähteruum on L_1 -ruum

Kui Y on Banachi ruum, siis iga operaator $T \in \mathcal{L}(\ell_1, Y)$ on üheselt määratud jadaga $(Te_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kus $e_n \in \ell_1$ on jada, mille n -s liige on 1 ning ülejäänud liikmed 0. Seejuures mistahes $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in \ell_1$ korral

$$\|Tx\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n Te_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|Te_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\| \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\| \|x\|,$$

seega $\|T\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Te_n\|$ ning, kuna $e_n \in S_{\ell_1}$, kehtib järelikult

$$\|T\| = \sup \{ \|Te_n\| : n \in \mathbb{N} \}.$$

On selge, et kui mõne elemendi Te_n norm on suurem või võrdne kõikide teiste jada liikmete normidest, siis T saavutab oma normi selles punktis. Veendume, et kehtib ka teistpidine implikatsioon.

Kui operaator T saavutab oma normi punktis $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \in S_{\ell_1}$, siis, oletades vastuväiteliselt, et $\|Te_n\| < \|T\|$ iga e_n korral, kehtib ka

$$\|T\| = \|Tx\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|Te_n\| < \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|T\| = \|T\| \|x\| = \|T\|,$$

mis on vastuolu.

Näitame selle kriteeriumi abil, et ruumis $\mathcal{L}(\ell_1, Y)$ on normi saavutavate operaatorite hulk kõikjal tihedad. Olgu fikseeritud $S \in S_{\mathcal{L}(\ell_1, Y)}$ ning $\varepsilon > 0$. Siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sup \{ \|Se_n\| : n \in \{1, \dots, N\} \} > 1 - \varepsilon.$$

Operaator $T \in \mathcal{L}(\ell_1, Y)$,

$$Te_n := \begin{cases} Se_n, & \text{kui } n \leq N, \\ (1 - \varepsilon)Se_n, & \text{kui } n > N, \end{cases}$$

saavutab oma normi jada $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ esimese N liikme peal ning

$$\|S - T\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|(S - T)e_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}, n > N} \|\varepsilon Se_n\| \leq \varepsilon \|S\| = \varepsilon.$$

Sellega oleme tõestanud järgmise lause.

Lause 2.7 (vt nt [A₁₉, jaotis 3]). *Paaril (ℓ_1, Y) on Bishop–Phelps’i omadus iga Banachi ruumi Y korral.*

Märgime, et lause 2.7 on vahetu järgeldus Bourgaini teoreemist 2.3, sest ruumil ℓ_1 on Radon–Nikodymi omadus.

Üldjuhul ei tarvitse paaril (ℓ_1, Y) olla Bishop–Phelps–Bollobáse omadust operaatorite jaoks: artiklis [AAGM] toodi sisse järgmine mõiste, et saada kriteerium paari (ℓ_1, Y) BPBp jaoks (vt teoreemi 2.8).

Definitsioon 2.5 (vt [AAGM, definitsioon 3.1] või [A₁₉, definitsioon 3.2]). Öeldakse, et Banachi ruumil X on *ligilähedase hüpertasandi ridade omadus* (lühidalt, *AHSp*), kui iga reaalarvu $\varepsilon \in (0, 1)$ korral leidub $\eta \in (0, \varepsilon)$ nii, et iga ühiksfääri S_X elementide jada $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ja iga arvrea $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n$, $\alpha_n \geq 0$, $\sum_n \alpha_n = 1$, korral, kus

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| > 1 - \eta,$$

leidub hulk $A \subset \mathbb{N}$ ning hulk $\{z_k : k \in A\} \subset S_X$, mille puhul

- (1) $\sum_{k \in A} \alpha_k > 1 - \varepsilon$,
- (2) $\|z_k - x_k\| < \varepsilon$ iga $k \in A$ korral,
- (3) leidub $x^* \in S_{X^*}$ nii, et $x^*(z_k) = 1$ iga $k \in A$ korral.

Näide 2.1 (vt [CKLM₁₅, jaotis 2]). Järgmistel ruumidel on ligilähdase hüper-tasandi ridade omadus:

- ühtlaselt kumerad ruumid,
- lõplikumõõtmelised ruumid,
- ruumid, millel on Lindenstraussi omadus β ,
- ruumid $C(K)$, kus K on kompaktne Hausdorffi topoloogiline ruum,
- ruumid $L_1(\mu)$.

Järgmine teoreem motiveeris AHSp mõiste defineerimise.

Teoreem 2.8 (vt [AAGM, teoreem 4.1]). *Olgu Y Banachi ruum. Paaril (ℓ_1, Y) on BPBp parajasti siis, kui ruumil Y on AHSp.*

Teoreemist 2.8 järeldeb, et näiteks paaridel $(\ell_1, C(K))$ ja $(\ell_1, L_1(\mu))$ on BPBp. Järgmises kahes jaotises vaatleme ruumidega $C(K)$ seonduvaid BPBp omadusi täpsemalt. Ruumidega $L_1(\mu)$ seoses said Y. S. Choi, S. K. Kim, H. J. Lee ja M. Martín artiklis [CKLM₁₄] järgmise tulemuse, kusjuures väite (b) tõestasid nad σ -lõplike mõõtude klassist pisut üldisema klassi jaoks.

Teoreem 2.9 (vt [CKLM₁₄, teoreemid 3.1 ja 4.1], vt ka [Se, järeldus 3.2.1]). *Olgu μ ja ν mõõdud. Siis*

- (a) *paaril $(L_1(\mu), L_1(\nu))$ on BPBp,*
- (b) *kui ν on σ -lõplik mõõt, siis paaril $(L_1(\mu), L_\infty(\nu))$ on BPBp.*

2.5 Lähteruum on $C(K)$

Pole teada, kas komplekssel juhul on paaril $(C(K), C(S))$ Bishop–Phelps omadus. Reaalsete funktsiooniruumide juhul on teada veel tugevam väide.

Teoreem 2.10 (vt [A et al., teoreem 2.5]). *Olgu K ja S kompaktsed Hausdorffi ruumid. Siis paaril $(C(K), C(S))$, kus $C(K)$ ja $C(S)$ on reaalsed ruumid, on BPBp. Veelgi enam, arv $\eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{12 \cdot 6^2}$ rahuldab definitsiooni 2.2 tingimust ($\sharp$) suvaliste K ja S korral.*

Ühtlaselt kumerate ruumide kohta (vt definitsioon 2.4) on lisaks teoreemile 2.6 teada ka järgmised kaks tulemust.

Teoreem 2.11 (vt [K, järelalus 2.6]). *Paaril (c_0, Y) on BPBp iga (reaalse või kompleksse) ühtlaselt kumera Banachi ruumi Y korral.*

Teoreem 2.12 (vt [KL₁₅, teoreem 2.2]). *Olgu K kompaktne Hausdorffi ruum. Siis paaril $(C(K), Y)$, kus $C(K)$ on reaalne ruum, on BPBp iga reaalse ühtlaselt kumera Banachi ruumi Y korral.*

2.6 $C_0(L)$ -väärtuselised Asplundi operaatorid

Aastal 2011 ilmunud artiklis [ACK] tõestasid Aron, Cascales ja Kozhushkina järgmise Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreemi Asplundi operaatorite kohta.

Teoreem 2.13 (vt [ACK, teoreem 2.4]). *Olgu X reaalne Banachi ruum ning olgu L lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum. Olgu $T: X \rightarrow C_0(L)$ Asplundi operaator, kusjuures $\|T\| = 1$, olgu $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ning olgu $x_0 \in S_X$ selline, et*

$$\|Tx_0\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Siis leiduvad element $u_0 \in S_X$ ja Asplundi operaator $S \in S_{\mathcal{L}(X, C_0(L))}$ nii, et

$$\|Su_0\| = 1, \quad \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|T - S\| \leq 3\varepsilon.$$

Magistritöö neljandas peatükis tõestame eelneva teoreemi parenduse, kus tingimuse $\|T - S\| \leq 3\varepsilon$ asemel saadakse tugevam tingimus $\|T - S\| \leq \varepsilon$.

Järgnev tulemus on ilmne järelalus teoreemist 2.13.

Järelalus 2.14 (vt [ACK, järelalus 2.6]). *Paaril $(X, C_0(L))$, kus X on reaalne Asplundi ruum ja L lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum, on BPBp.*

Aastal 2013 ilmunud artiklis [CGK] tõestasid Cascales, A. J. Guirao ja Kadets järgneva teoreemi, mis kompaktse Hausdorffi ruumi juhul laiendab teoreemi 2.13 komplekssele juhule ning ühtlasi parendab seda: võrreldes teoreemiga 2.13 on teoreem 2.15 tõestatud nõrgematel eeldustel $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ ja $\|Tx_0\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$; samas on teoreemis 2.15 saadud teoreemi 2.13 vastava tingimusega võrreldes tugevam tingimus $\|S - T\| < 2\varepsilon$.

Definitsioon 2.6 (vt nt [CGK]). *Olgu K kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $C(K)$ kompleksne ruum. Öeldakse, et (normi topoloogias) kinnine alamalgebra $\mathcal{A} \subset C(K)$ (mis on varustatud supreemumnormiga) on *ühtlane algebra*, kui ta eraldab ruumi K punktid (st mistahes kahe erineva punkti $x, y \in K$ korral leidub $f \in \mathcal{A}$ nii, et $f(x) \neq f(y)$). Seejuures, kui $\mathcal{A}$ sisaldab kõiki konstantseid funktsioone, siis öeldakse, et $\mathcal{A}$ on *ühikuga ühtlane algebra*.*

Teoreem 2.15 (vt [CGK, teoreem 3.6]). *Olgu X kompleksne Banachi ruum, olgu K kompaktne Hausdorffi ruum ning olgu $\mathcal{A} \subset C(K)$ ühtlane algebra. Olgu $T \in S_{\mathcal{L}(X, \mathcal{A})}$ Asplundi operaator, olgu $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ ning olgu $x_0 \in S_X$ selline, et*

$$\|Tx_0\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Siis leiduvad Asplundi operaator $S \in S_{\mathcal{L}(X, \mathcal{A})}$ ja element $u_0 \in S_X$ nii, et

$$\|Su_0\| = 1, \quad \|x_0 - u_0\| \leq \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|S - T\| < 2\varepsilon.$$

2.7 Lahtiseid küsimusi

Loetleme mõned artiklis [A₁₉] välja toodud lahtised küsimused.

- Kas reaalsel juhul on paaril (c_0, ℓ_1) on BPBp?
- Millised on need Banachi ruumid Y , mille korral paaril $(L_1[0, 1], Y)$ on BPBp?
- Kas komplekssel juhul on paaril $(C(K), C(S))$ on BPBp?

3 Bourgaini teoreem Radon–Nikodymi omadusega ruumi Bishop–Phelps omadusest

Kõikjal selles peatükis on X reaalne Banachi ruum. Kirjutame üksikasjaliselt lahti artikli [Bou] põhitulemuse – allpooltoodud teoreemi 3.2 – tõestuse. Selle teoreemi sõnastamiseks vajame me järgnevaid tähistusi ja mõisteid.

Banachi ruumi Y , operaatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja tõkestatud alamhulga $B \subset X$ korral tähistame

$$N(T, B) := \sup_{x \in B} \|Tx\|.$$

Märgime, et kui $B = B_X$, siis

$$N(T, B) = N(T, B_X) = \sup_{x \in B} \|Tx\| = \|T\|.$$

Definitsioon 3.1 (vt [Bou]). Olgu $B \subset X$ mittetühi tõkestatud kinnine alamhulk. Öeldakse, et hulgal B on *Bishop–Phelps omadus*, kui mistahes Banachi ruumi Y , operaatori $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et

- (1) leidub element $x \in B$ nii, et $\|Tx\| = N(T, B)$,
- (2) $\|S - T\| < \varepsilon$.

Öeldakse, et ruumil X on *Bishop–Phelps omadus*, kui tema igal mittetühjal tõkestatud kinnisel absoluutselt kumeral alamhulgal on Bishop–Phelps omadus.

Edasises viitame eelneva definitsiooni 3.1 tingimust (1) rahuldavatele operaatoritele $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ kui *operaatoritele, mis saavutavad hulgas B väärtuse $N(T, B)$* .

Järgnev lause on vahetu järeldus tähelepanekust, et *kinnisel ühikkeral B_X on Bishop–Phelps omadus parajasti siis, kui paaril (X, Y) on Bishop–Phelps omadus iga Banachi ruumi Y korral*.

Lause 3.1. *Kui ruumil X on Bishop–Phelps omadus, siis paaril (X, Y) on Bishop–Phelps omadus mistahes Banachi ruumi Y korral.*

Nüüd saame me sõnastada artikli [Bou] põhitulemuse.

Teoreem 3.2 (vt [Bou, teoreem 7]). *Kui ruumil X on Radon–Nikodymi omadus, siis tal on Bishop–Phelps omadus.*

Järgnev tulemus on vahetu järeldus teoreemist 3.2 ja lausest 3.1.

Järeldus 3.3. *Kui ruumil X on Radon–Nikodymi omadus, siis paaril (X, Y) on Bishop–Phelps omadus mistahes Banachi ruumi Y korral.*

Teoreem 3.2 on vahetu järelalus järgnevast teoreemist.

Teoreem 3.4 (vt [Bou, järelalus 6]). *Olgu B ruumi X mittetühi tõkestatud kinnine absoluutselt kumer alamhulk, mille iga mittetühi alamhulk on hambuv. Siis mistahes Banachi ruumi Y korral on operaatorite $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ hulk, mis saavutavad hulgas B väärtuse $N(T, B)$, ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ kõikjal tihe. Niisiis, hulgal B on Bishop–Phelps'i omadus.*

Teoreem 3.4 omakorda on vahetu järelalus teoreemist 3.10 allpool, mille sõnastamiseks me peame sisse tooma absoluutselt tugevalt eksponeeriva operaatori mõiste.

Definitsioon 3.2. Olgu B ruumi X mittetühi tõkestatud kinnine absoluutselt kumer alamhulk, olgu Y Banachi ruum ning olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Öeldakse, et T on hulga B jaoks *absoluutselt tugevalt eksponeeriv operaator*, kui leidub element $x \in B$ selliselt, et mistahes hulga B elementide jadal $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mille puhul $\lim_n \|Tx_n\| = N(T, B)$, leidub osajada, mis koondub punktiks x või punktiks $-x$.

Märkus. On selge, et hulga B jaoks absoluutselt tugevalt eksponeeriv operaator T saavutab väärtuse $N(T, B)$ definitsiooni 3.2 punktis $x \in B$.

Enne eelnevalt mainitud teoreemi 3.10 sõnastamist tõestame järgnevad kaks lauset ja järelaluse. Neist laused 3.7 ja 3.8 ning järelalus 3.9 uurivad absoluutselt tugevalt eksponeerivaid operaatoreid; järgnevas lauses 3.5 tuuakse sisse selleks vajalik aparatuur ning uuritakse seda teoreemi 3.10 tõestuse vajadusi silmas pidades.

Lause 3.5. *Olgu B ruumi X mittetühi tõkestatud kinnine absoluutselt kumer alamhulk, olgu Y Banachi ruum ning olgu $\varepsilon > 0$. Tähistame*

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \{T \in \mathcal{L}(X, Y) : S(T, \eta) \subset B(p, \varepsilon) \cup B(-p, \varepsilon) \text{ mingite } \eta > 0 \text{ ja } p \in X \text{ korral}\}, \quad (3.1)$$

kus $S(T, \eta) := \{x \in B : \|Tx\| \geq N(T, B) - \eta\}$. Niimoodi defineeritud hulk $\mathcal{A}_\varepsilon$ on lahtine ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$.

TÕESTUS. Olgu $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Siis mingite $\eta > 0$ ja $p \in X$ korral $S(T, \eta) \subset B(p, \varepsilon) \cup B(-p, \varepsilon)$. Tähistame $M := \sup_{x \in B} \|x\| \geq 0$. Hulga $\mathcal{A}_\varepsilon$ lahtisuseks piisab näidata, et $B(T, \frac{\eta}{3M+3}) \subset \mathcal{A}_\varepsilon$. Olgu $U \in B(T, \frac{\eta}{3M+3})$. Siis mistahes $x \in B$ korral

$$\|(T - U)x\| \leq \|T - U\| \|x\| \leq \frac{\eta}{3M+3} M \leq \frac{\eta}{3},$$

seega

$$\|Tx\| \leq \|Ux\| + \|(T - U)x\| \leq \|Ux\| + \frac{\eta}{3}$$

ning järelikult $N(T, B) \leq N(U, B) + \frac{\eta}{3}$. Siit jäeldub, et mistahes $x \in S(U, \frac{\eta}{3})$ korral

$$\|Tx\| + \frac{\eta}{3} \geq \|Tx\| + \|(U - T)x\| \geq \|Ux\| \geq N(U, B) - \frac{\eta}{3} > N(T, B) - \frac{\eta}{3} - \frac{\eta}{3}$$

ning seega $\|Tx\| \geq N(T, B) - \eta$. Niisiis

$$S(U, \frac{\eta}{3}) \subset \{x \in B : \|Tx\| \geq N(T, B) - \eta\} = S(T, \eta)$$

ning järelikult $U \in \mathcal{A}_\varepsilon$. □

Lause 3.6. *Olgu B ruumi X mittetühi tõkestatud kinnine absoluutselt kumer alamhulk, olgu Y Banachi ruum, olgu $\varepsilon > 0$ ning olgu $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$, kus hulk $\mathcal{A}_\varepsilon$ on defineeritud valemiga (3.1). Siis ka $cT \in \mathcal{A}_\varepsilon$.*

TÕESTUS. Kuna $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$, kehtib mingite $\eta > 0$ ja $p \in X$ korral sisalduvus $S(T, \eta) \subset B(p, \varepsilon) \cup B(-p, \varepsilon)$. Arvestades, et

$$\begin{aligned} S(cT, |c|\eta) &= \{x \in B : \|cTx\| \geq N(cT, B) - |c|\eta\} \\ &= \{x \in B : \|Tx\| \geq N(T, B) - \eta\} = S(T, \eta), \end{aligned}$$

saame $S(cT, |c|\eta) \subset B(p, \varepsilon) \cup B(-p, \varepsilon)$, millest jäeldub, et $cT \in \mathcal{A}_\varepsilon$. □

Lause 3.7. *Olgu B ruumi X mittetühi tõkestatud kinnine absoluutselt kumer alamhulk, olgu Y Banachi ruum, olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ hulga B jaoks absoluutselt tugevalt eksponeeriv operaator ning olgu $c \in \mathbb{R}$. Siis T on hulga cB jaoks absoluutselt tugevalt eksponeeriv operaator.*

TÕESTUS. Juhul $c = 0$ on väite kehtivus ilmne. Olgu $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ning olgu $x \in B$ punkt definitsioonist 3.2. Olgu hulga cB elementide jada $(x_n)_n$ selline, et $\|Tx_n\| \rightarrow N(T, cB) = N(T, |c|B)$. Kuna kehtib

$$|c| \|T(\frac{1}{c}x_n)\| = \|Tx_n\| \rightarrow N(T, |c|B) = |c|N(T, B)$$

ehk $\|T(\frac{1}{c}x_n)\| \rightarrow N(T, B)$, kus $(\frac{1}{c}x_n)_n$ on hulga B elementide jada, leidub sellel jadal osajada $(\frac{1}{c}x_{n_k})_k$, mis koondub kas punktiks x või punktiks $-x$. Seega osajada (x_{n_k}) koondub punktiks $cx \in cB$ või punktiks $-cx \in cB$. □

Lause 3.8. *Olgu B ruumi X mittetühi tõkestatud kinnine absoluutselt kumer alamhulk, olgu Y Banachi ruum ning olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Siis T on hulga B jaoks absoluutselt tugevalt eksponeeriv operaator parajasti siis, kui iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$, kus hulk $\mathcal{A}_\varepsilon$ on defineeritud valemiga (3.1).*

TÕESTUS. Võime lause tõestada lisaeldusel, et $B \subset B_X$: kui arv $M > 0$ on selline, et $\|x\| \leq M$ iga $x \in B$ korral, siis lause 3.7 tõttu on hulkadel B ja $\frac{1}{M}B \subset B_X$ parajasti samad absoluutselt tugevalt eksponeerivad operaatorid.

Tarvilikkus. Olgu T hulga B jaoks absoluutselt tugevalt eksponeeriv operaator ning olgu $\varepsilon > 0$. Veendumaks, et $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$, piisab näidata, et mingi $\eta > 0$ korral

$$\{z \in B : \|Tz\| \geq N(T, B) - \eta\} = S(T, \eta) \subset B(x, \varepsilon) \cup B(-x, \varepsilon),$$

kus x on punkt (absoluutselt tugevalt eksponeeriva operaatori) definitsioonist 3.2. Oletame vastuväiteliselt, et sellist reaalarvu $\eta > 0$ ei leidu. Sellisel juhul leidub iga $n \in \mathbb{N}$ korral element $x_n \in B$ nii, et

$$\|Tx_n\| \geq N(T, B) - \frac{1}{n} \quad \text{ja} \quad x_n \notin B(x, \varepsilon) \cup B(-x, \varepsilon). \quad (3.2)$$

Siis operaatori T absoluutselt tugevalt eksponeerivuse tõttu leidub jadal $(x_n)_n$ osajada, mis koondub punktiks x või punktiks $-x$. See on vastuolus tingimusest (3.2) parempoolsega (mis kehtib iga $n \in \mathbb{N}$ korral).

Piisavus. Olgu operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ selline, et $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$ iga $\varepsilon > 0$ korral. Valime induktiivselt positiivsed reaalarvud $\eta_1, \eta_2, \dots$, ruumi X punktid $p_1, p_2, \dots$ ja hulga B punktid $u_2, u_3, \dots$ nii, et $\eta_1 > \eta_2 > \dots$ ning et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$z \in B, \quad \|Tz\| \geq N(T, B) - \eta_n \implies z \in B(p_n, \frac{1}{2^n}) \cup B(-p_n, \frac{1}{2^n}) \quad (3.3)$$

ja $u_{n+1} \in B(p_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(p_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}})$. Selleks valime kõigepealt reaalarvu $\eta_1 > 0$ ja punkti $p_1 \in X$ nii, et kehtib implikatsioon (3.3), kus $n = 1$, ning, edasi, kui mingi $n \in \mathbb{N}$ korral on leitud soovitud omadustega arvud $\eta_1, \dots, \eta_n$ ja punktid $p_1, \dots, p_n$, siis valime positiivse reaalarvu $\eta_{n+1} < \eta_n$ ja punkti $q_{n+1} \in X$ nii, et

$$z \in B, \quad \|Tz\| \geq N(T, B) - \eta_{n+1} \implies z \in B(q_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \cup B(-q_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}),$$

ning seejärel valime punkti $z_{n+1} \in B$ nii, et

$$\|Tz_{n+1}\| \geq N(T, B) - \eta_n > N(T, B) - \eta_{n+1};$$

siis

$$z_{n+1} \in \left(B(p_n, \frac{1}{2^n}) \cup B(-p_n, \frac{1}{2^n}) \right) \cap \left(B(q_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \cup B(-q_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}) \right).$$

Niisiis, defineerides

$$\begin{array}{llll} p_{n+1} = q_{n+1} & \text{ja} & u_{n+1} = z_{n+1}, & \text{kui} \quad z_{n+1} \in B(p_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(q_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}); \\ p_{n+1} = -q_{n+1} & \text{ja} & u_{n+1} = z_{n+1}, & \text{kui} \quad z_{n+1} \in B(p_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(-q_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}); \\ p_{n+1} = -q_{n+1} & \text{ja} & u_{n+1} = -z_{n+1}, & \text{kui} \quad z_{n+1} \in B(-p_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(q_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}); \\ p_{n+1} = q_{n+1} & \text{ja} & u_{n+1} = -z_{n+1}, & \text{kui} \quad z_{n+1} \in B(-p_n, \frac{1}{2^n}) \cap B(-q_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}), \end{array}$$

rahuldavad punktid p_{n+1} ja u_{n+1} soovitud tingimusi.

Paneme tähele, et jada $(p_n)_n$ on Cauchy jada. Tõepoolest, mistahes $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|p_n - p_{n+1}\| \leq \|p_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - p_{n+1}\| < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2^{n+1}}$$

ning seega, kui $m > n$, siis

$$\|p_n - p_m\| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|p_k - p_{k+1}\| < \sum_{k=n}^{m-1} \frac{3}{2^{k+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ruumi X täielikkuse tõttu koondub Cauchy jada $(p_n)_n$ mingiks elemendiks $x \in X$.

Olgu $(x_n)_n$ selline hulga B elementide jada, et $\lim_n \|Tx_n\| = N(T, B)$. Valime jada $(x_n)_n$ osajada $(x_{n_k})_k$ selliselt, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $\|Tx_{n_k}\| \geq N(T, B) - \eta_k$; siis

$$x_{n_k} \in B(p_k, \frac{1}{2^k}) \cup B(-p_k, \frac{1}{2^k}) \quad \text{iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Vähemalt üks hulkadest

$$\left\{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \in B(p_k, \frac{1}{2^k})\right\} \quad \text{ja} \quad \left\{k \in \mathbb{N} : x_{n_k} \in B(-p_k, \frac{1}{2^k})\right\} \quad (3.4)$$

on lõpmatu. Kui hulkadest (3.4) esimene on lõpmatu, saame me valida osajada $(x_{n_k})_k$ osajada $(x_{n_{k_l}})_l$ nii, et

$$x_{n_{k_l}} \in B(p_{k_l}, \frac{1}{2^{k_l}}) \quad \text{iga } l \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Nüüd $\lim_l x_{n_{k_l}} = x$, sest

$$\|x_{n_{k_l}} - x\| \leq \|x_{n_{k_l}} - p_{k_l}\| + \|p_{k_l} - x\| < \frac{1}{2^{k_l}} + \|p_{k_l} - x\| \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0.$$

Kui hulkadest (3.4) teine on lõpmatu, siis eelnevalt vaadeldud juhuga sarnaselt arutledes saame valida osajada $(x_{n_k})_k$ osajada, mis koondub punktiks $-x$. $\square$

Järeldus 3.9. Olgu B ruumi X mittetühi tõkestatud kinnine absoluutselt kumer alamhulk ning olgu Y Banachi ruum. Tähistame hulga B jaoks absoluutselt tugevalt eksponeerivate operaatorite $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ hulga sümboliga $\mathcal{A}$. Siis

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\frac{1}{n}},$$

kus hulga $\mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$ on defineeritud valemiga (3.1), võttes seal $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

TÕESTUS. Lause 3.8 põhjal

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{\varepsilon} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\frac{1}{n}}.$$

Teiselt poolt, on ilmne, et kui $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$, siis $\mathcal{A}_{\varepsilon_1} \subset \mathcal{A}_{\varepsilon_2}$. Seega, valides iga $\varepsilon > 0$ korral $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ nii, et $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$ (siis $\mathcal{A}_{\frac{1}{n_\varepsilon}} \subset \mathcal{A}_\varepsilon$), saame

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\frac{1}{n}} \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_{\frac{1}{n_\varepsilon}} \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{A}_\varepsilon = \mathcal{A}.$$

□

Eelpool sõnastatud teoreem 3.4 on vahetu järgnevast teoreemist.

Teoreem 3.10 (vt [Bou, teoreem 5]). *Olgu B ruumi X mittetühi tõkestatud kinnine absoluutselt kumer alamhulk, mille iga mittetühi alamhulk on hambuv. Siis mistahes Banachi ruumi Y puhul on hulga B jaoks absoluutselt tugevalt eksponenteerivate operaatorite $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ hulk $\mathcal{A}$ kõikjal tihe G_δ ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$. Seejuures mistahes operaatori $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja reaalarvu $\delta > 0$ korral leidub operaator $T \in \mathcal{A}$ nii, et $\|S - T\| \leq \delta$ ja $S - T$ on kompaktne operaator.*

Teoreemi 3.10 tõestus toetub lausele 3.5, järeldusele 3.9 ja järgnevale lemmale.

Lemma 3.11 (vt [Bou, lemma 4]). *Olgu B ruumi X kinnise ühikera B_X mittetühi kinnine absoluutselt kumer alamhulk, mille iga mittetühi alamhulk on hambuv, olgu Y Banachi ruum ning olgu $\varepsilon > 0$. Siis valemiga (3.1) defineeritud hulk $\mathcal{A}_\varepsilon$ on kõikjal tihe ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$. Veelgi enam, mistahes operaatori $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja reaalarvu $\delta > 0$ korral leidub operaator $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$ nii, et $\|S - T\| < \delta$ ja operaator $S - T$ on lõplikumõõtmeline.*

TEOREEMI 3.10 TÕESTUS. Hulga B tõkestatuse tõttu võime üldisust kitsendada eeldada, et $B \subset B_X$. See järeldub asjaolust, et kui arv $M > 0$ on selline, et $\|x\| \leq M$ iga $\|x\| \in B$ korral, siis on hulkadel B ja $\frac{1}{M}B \subset B_X$ samad absoluutselt tugevalt eksponenteerivad operaatorid (vt lauset 3.7). Niisiis, kõikjal järgnevas eeldame, et $B \subset B_X$.

Järelduse 3.9 põhjal $\mathcal{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$. Kuna lause 3.5 põhjal on iga $n \in \mathbb{N}$ korral hulk $\mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$ lahtine ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$, on nende hulkade loenduv ühisosa $\mathcal{A}$ G_δ ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$. Kuna lemma 3.11 põhjal on iga $n \in \mathbb{N}$ korral hulk $\mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$ kõikjal tihe ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$, on Baire'i teoreemi 1.1 põhjal ka nende hulkade ühisosa $\mathcal{A}$ kõikjal tihe ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$.

Olgu nüüd $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $\delta > 0$. Tähistame sümbooliga $\mathcal{D}$ selliste kompaktsete operaatorite $K \in \mathcal{L}(X, Y)$ hulga, mille puhul $\|K\| \leq \delta$. Kuna kahe Banachi ruumi vahel tegutsevate kompaktsete operaatorite hulk on kinnine vastavas kõigi pidevate lineaarsete operaatorite ruumis, on ka hulk $\mathcal{D}$ kinnine ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$ ning järelikult ka selle hulga nihe $S + \mathcal{D}$ on kinnine hulk ruumis $\mathcal{L}(X, Y)$.

Näitame, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral on ühisosa $(S + \mathcal{D}) \cap \mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$ kõikjal tihe hulgas $S + \mathcal{D}$. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $K \in \mathcal{D}$ ja $0 < \varepsilon < \delta$. Lemma 3.11 põhjal leidub

operaator $T \in \mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$ nii, et

$$\left\| \left(S + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta} \right) K \right) - T \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ning operaator $(S + (1 - \frac{\varepsilon}{2\delta})K) - T$ on lõplikumõõtmeline ja seega kompaktne. Sellisel juhul on ka operaator $T - S = (1 - \frac{\varepsilon}{2\delta})K - ((S + (1 - \frac{\varepsilon}{2\delta})K) - T)$ kompaktne ja

$$\|T - S\| \leq \|T - (S + (1 - \frac{\varepsilon}{2\delta})K)\| + \|(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta})K\| < \frac{\varepsilon}{2} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right)\delta = \delta,$$

seega

$$T = S + (T - S) \in (S + \mathcal{D}) \cap \mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$$

ning seejuures

$$\|T - (S + K)\| \leq \|T - (S + (1 - \frac{\varepsilon}{2\delta})K)\| + \|\frac{\varepsilon}{2\delta}K\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\delta}\delta = \varepsilon.$$

Kuna $S + \mathcal{D}$ on Banachi ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ kinnine alamhulk, saame, varustades ta alamhulga suhtelise topoloogiaga, täieliku meetrilise ruumi $S + \mathcal{D}$, mille alamhulga $(S + \mathcal{D}) \cap \mathcal{A}_{\frac{1}{n}}$ on suhtelise topoloogia suhtes lahtised ning kõikjal tihedad. Baire'i teoreemi 1.1ⁿ põhjal on ühisosa

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (S + \mathcal{D}) \cap \mathcal{A}_{\frac{1}{n}} = (S + \mathcal{D}) \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{\frac{1}{n}} = (S + \mathcal{D}) \cap \mathcal{A}$$

selles ruumis kõikjal tihe, seega see ühisosa on mittetühi. Niisiis leidub operaator $T \in (S + \mathcal{D}) \cap \mathcal{A}$. Aga nüüd $T \in \mathcal{A}$, kusjuures $T - S \in \mathcal{D}$, seega $T - S$ on kompaktne, kusjuures $\|T - S\| \leq \delta$. $\square$

Lemma 3.11 tõestus toetub järgnevale tehnilisele lemmale.

Lemma 3.12 (vt [Bou, lemma 3]). *Olgu $V_1, V_2, \dots$ ruumi X mittetühjad alamhulgad, kusjuures leidugu reaalarvud $\varepsilon > 0$ ja $\kappa > 0$ nii, et mistahes $n \in \mathbb{N}$, $z \in \text{conv}(V_n)$ ja $x \in X$ korral*

$$d(z, \text{conv}(V_{n+1} \setminus B(x, \varepsilon))) < \kappa 2^{-n}. \quad (3.5)$$

Siis hulk $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{j \geq n} \text{conv}(V_j)}$ on mittetühi ja mittehambu.

TÕESTUS. Näitame esmalt, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\text{conv}(V_n) \subset A + B(0, \kappa 2^{-n+1}). \quad (3.6)$$

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $z \in \text{conv}(V_n)$. Siis leidub jada $(z_j)_{j \geq n}$ selliselt, et $z_n = z$ ning iga $j \in \mathbb{N}$ korral $z_j \in \text{conv}(V_j)$ ja $\|z_j - z_{j+1}\| < \kappa 2^{-j}$. Tõepoolest, tähistame $z_n := z \in \text{conv}(V_n)$. Kui mingi $j \in \mathbb{N}$ korral $z_j \in \text{conv}(V_j)$, siis lemma

eelduse põhjal $d(z_j, \text{conv}(V_{j+1}) \setminus B(z_j, \varepsilon)) < \kappa 2^{-j}$, seega leidub element $z_{j+1} \in \text{conv}(V_{j+1}) \setminus B(z_j, \varepsilon) \subset \text{conv}(V_{j+1})$ nii, et $\|z_j - z_{j+1}\| < \kappa 2^{-j}$.

Jada $(z_j)_{j \geq n}$ on ilmselt Cauchy jada, seega koondub ta mingiks punktiks $a \in X$. Iga $m \geq n$ korral $a \in \overline{\bigcup_{j \geq m} \text{conv}(V_j)}$; järelikult

$$a \in \bigcap_{m \geq n} \overline{\bigcup_{j \geq m} \text{conv}(V_j)} = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{j \geq m} \text{conv}(V_j)} = A.$$

Sisalduvuse (3.6) tõestuseks piisab nüüd veenduda, et $\|z - a\| < \kappa 2^{-n+1}$. Selleks tähistame $\tilde{\varepsilon} := \kappa 2^{-n} - \|z_n - z_{n+1}\| > 0$ ning valime $m > n$ nii, et $\|z_m - a\| < \tilde{\varepsilon}$. Siis

$$\begin{aligned} \|z - a\| &= \|z_n - a\| \leq \|z_n - z_{n+1}\| + \dots + \|z_{m-1} - z_m\| + \|z_m - a\| \\ &= (\|z_n - z_{n+1}\| + \|z_m - a\|) + \|z_{n+1} - z_{n+2}\| + \dots + \|z_{m-1} - z_m\| \\ &< (\|z_n - z_{n+1}\| + \kappa 2^{-n} - \|z_n - z_{n+1}\|) \\ &\quad + \|z_{n+1} - z_{n+2}\| + \dots + \|z_{m-1} - z_m\| \\ &< \kappa 2^{-n} + \kappa 2^{-(n+1)} + \dots + \kappa 2^{-m-1} < \kappa 2^{-n+1}. \end{aligned}$$

Veendumaks, et hulk A on mittehambuv, piisab näidata, et iga $x \in A$ korral $x \in \overline{\text{conv}}(A \setminus B(x, \varepsilon/2))$. Olgu $x \in A$ ja olgu $0 < \tau < \varepsilon$. Sisalduvuseks $x \in \overline{\text{conv}}(A \setminus B(x, \varepsilon/2))$ piisab näidata, et

$$d(x, \text{conv}(A \setminus B(x, \varepsilon/2))) < \tau. \quad (3.7)$$

Selleks valime $n \in \mathbb{N}$ nii, et $\kappa 2^{-n} < \tau/4$. Vastavalt hulga A definitsioonile leiduvad $j \geq n$ ja $z \in \text{conv}(V_j)$ selliselt, et $\|x - z\| < \tau/2$. Võrratuse (3.7) kehtivuseks piisab nüüd näidata, et

$$d(z, \text{conv}(A \setminus B(x, \varepsilon/2))) < \frac{\tau}{2},$$

milleks omakorda piisab näidata, et

$$V_{j+1} \setminus B(x, \varepsilon) + B(0, \tau/4) \subset (A \setminus B(x, \varepsilon/2)) + B(0, \tau/2)$$

(sest tingimuse (3.5) põhjal kuulub z eelnevas valemis vasakpoolsesse summasse), milleks omakorda piisab näidata, et

$$V_{j+1} \setminus B(x, \varepsilon) \subset (A \setminus B(x, \varepsilon/2)) + B(0, \tau/4),$$

milleks tingimuse (3.6) põhjal piisab omakorda näidata, et

$$(A + B(0, \tau/4)) \setminus B(x, \varepsilon) \subset (A \setminus B(x, \varepsilon/2)) + B(0, \tau/4).$$

Veendume selles. Olgu $y = a + b$, kus $a \in A$, $b \in B(0, \tau/4)$ ja $\|y - x\| \geq \varepsilon$. Soovitud sisalduvuse tõestuseks piisab näidata, et $\|a - x\| \geq \varepsilon/2$:

$$\|x - a\| \geq \|x - y\| - \|y - a\| \geq \varepsilon - \frac{\tau}{4} > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4} > \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

LEMMA 3.11 TÕESTUS. Olgu $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ning olgu $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Me võime üldisust kitsendamata eeldada, et $B \neq \{0\}$, sest vastasel juhul mistahes $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ja $\eta > 0$ korral $S(T, \eta) = \{0\} \subset B(0, \varepsilon)$ ning seega $A_\varepsilon = \mathcal{L}(X, Y)$.

Edasi, me võime üldisust kitsendamata eeldada, et $N(S, B) > 0$. Tõepoolest, oletame, et lemma väide on tõestatud selliste operaatorite $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ jaoks, mille puhul $N(S, B) > 0$, ning et meie operaatori S puhul $N(S, B) = 0$. Fikseerime suvalise $x_0 \in B \setminus \{0\}$ ning defineerime operaatori $P := x_0^* \otimes x_0$, kus funktsionaal $x_0^* \in X^*$ on selline, et $x_0^*(x_0) = 1$; siis $P \in \mathcal{L}(X, X)$ on projektor, kusjuures $\text{ran } P = \text{span}\{x_0\}$. Iga $x \in X$ korral

$$x = (I - P)x + Px,$$

seega $Sx = S(I - P)x + 0$. Defineerime operaatori $S': X \rightarrow Y$ võrdusega

$$S'x = S(I - P)x + \frac{\delta}{2\|P\|} Px;$$

siis mistahes $x \in X$ korral

$$\|S'x - Sx\| = \left\| \frac{\delta}{2\|P\|} Px \right\| \leq \frac{\delta}{2} \|x\|,$$

seega $\|S - S'\| \leq \frac{\delta}{2}$. Kuna $S'x_0 = \frac{\delta}{2\|P\|} x_0 \neq 0$, kehtib $N(S', B) > 0$, seega tehtud eelduse põhjal leidub operaator $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$ nii, et $\|S' - T\| < \frac{\delta}{2}$, kusjuures operaator $S' - T$ on lõplikumõõtmeline. Ilmselt $\|S - T\| < \delta$; seejuures, kuna operaator $S - S'$ on ühemõõtmeline, on lõplikumõõtmeline ka operaator

$$S - T = S - S' + S' - T.$$

Sellega oleme näidanud, et võime üldisust kitsendamata eeldada, et $N(S, B) > 0$.

Edasi, me võime üldisust kitsendamata eeldada, et $N(S, B) = 1$. Tõepoolest, oletame, et lemma väide on tõestatud selliste operaatorite S jaoks, mille puhul $N(S, B) = 1$. Tähistame $S' := cS$, kus $c := \frac{1}{N(S, B)}$; siis

$$N(S', B) = N(cS, B) = c N(S, B) = 1,$$

seega tehtud eelduse põhjal leidub $T' \in \mathcal{A}_\varepsilon$ nii, et $\|S' - T'\| < c\delta$ ning operaator $S' - T'$ on lõplikumõõtmeline. Tähistame $T := \frac{1}{c}T'$; siis lause 3.6 põhjal $T \in \mathcal{A}_\varepsilon$; seejuures $c\delta > \|S' - T'\| = c\|S - T\|$, seega $\|S - T\| < \delta$ ning $S - T = \frac{1}{c}(S' - T')$ on samuti lõplikumõõtmeline. Niisiis, me võime eeldada, et $N(S, B) = 1$.

Oletame nüüd lemma väite vastaselt, et iga operaatori $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ puhul, kus $\|S - T\| < \delta$ ja $S - T$ on lõplikumõõtmeline, kehtib $T \notin \mathcal{A}_\varepsilon$. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral hulga V_n kui nende punktide $x \in B$ hulga, mille puhul leidub $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $S - T$ on lõplikumõõtmeline,

$$\|Tx\| \geq N(T, B) - 4^{-n}\delta^2 \quad \text{ja} \quad \|S - T\| \leq \delta(1 - 2^{-n}).$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ puhul leidub element $x_n \in B$ nii, et $\|Sx_n\| \geq N(S, B) - 4^{-n}\delta^2$; kuna $x_n \in V_n$, on hulk V_n mittetühi. Lemma tõestuseks piisab nüüd näidata, et mistahes $n \in \mathbb{N}$, $z \in V_n$ ja $p \in X$ korral

$$d(z, \text{conv}(V_{n+1} \setminus B(p, \varepsilon))) < \kappa 2^{-n}, \quad \text{kus } \kappa = 2^6 \delta, \quad (3.8)$$

sest siisugusel juhul rahuldavad hulgad $V_1, V_2, \dots$ lemma 3.12 eeldusi ning seega hulk

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{j \geq n} \text{conv}(V_j)}$$

on mittetühi ning mittehambu. Kuna $A \subset B$, oleme saanud vastuolu lemma eeldustega.

Olgu $n \in \mathbb{N}$ ning olgu $z \in V_n$ ja $p \in X$. Lemma tõestuseks jääb tõestada võrratus (3.8). Oletame vastuväiteliselt, et

$$d(z, \text{conv}(V_{n+1} \setminus B(p, \varepsilon))) \geq \kappa 2^{-n}.$$

Tähistame $D := V_{n+1} \setminus (B(p, \varepsilon) \cup B(-p, \varepsilon))$ ja $C := \text{conv} D$; siis Eidelheiti eraldamisteoreemi järelduse 1.3 põhjal leidub $f \in X^*$ nii, et $\|f\| = 1$ ja

$$f(z) \geq \sup |f(\text{conv} D)| + \kappa 2^{-n} \geq \sup |f(D)| + \kappa 2^{-n}.$$

Kuna $z \in V_n$, leidub operaator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ nii, et $\|Tz\| \geq N(T, B) - 4^{-n}\delta^2$, $\|S - T\| \leq \delta(1 - 2^{-n})$ ja operaator $S - T$ on lõplikumõõtmeline. Kuna $\delta < \frac{1}{2}$, kehtib

$$\|S - T\| \leq \frac{1}{2}(1 - 2^{-n}) \leq \frac{1}{2}.$$

Kuna $B \subset B_X$ ja $N(S, B) = 1$, kehtivad võrratused $\frac{1}{2} \leq N(T, B) \leq 2$. Tõepoolest,

$$N(T, B) = \sup_{x \in B} \|Tx\| \leq \sup_{x \in B} \|Sx\| + \sup_{x \in B} \|(T - S)x\| \leq N(S, B) + \|T - S\| \leq 1 + \frac{1}{2}$$

ja

$$N(T, B) = \sup_{x \in B} \|Tx\| \geq \sup_{x \in B} \|Sx\| - \sup_{x \in B} \|(T - S)x\| \geq N(S, B) - \|T - S\| \geq 1 - \frac{1}{2}.$$

Seega

$$\|Tz\| \geq N(T, B) - 4^{-n}\delta^2 \geq \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \quad (3.9)$$

Defineerime operaatori $T' \in \mathcal{L}(X, Y)$ võrdusega

$$T'x = Tx + 2^{-n-2}\delta f(x)Tz;$$

siis (arvestades, et $z \in B$ ning $N(T, B) \leq 2$ ja $\|f\| = 1$)

$$\|T - T'\| = \sup_{x \in B_X} \|2^{-n-2}\delta f(x)Tz\| \leq 2^{-n-1}\delta$$

ning järelikult

$$\|S - T'\| \leq \|S - T\| + \|T - T'\| \leq \delta(1 - 2^{-n}) + 2^{-n-1}\delta = \delta(1 - 2^{-n-1}).$$

On ilmne, et operaator $S - T'$ on lõplikumõõtmeline, seega tehtud eelduse kohaselt $T' \notin \mathcal{A}_\varepsilon$. Seetõttu leidub element $x \in B$ nii, et $x \notin B(p, \varepsilon) \cup B(-p, \varepsilon)$ ning

$$\|T'x\| \geq N(T', B) - 4^{-n-1}\delta^2.$$

Hulga V_{n+1} definitsiooni põhjal $x \in V_{n+1}$, seega ka $x \in D$ ning järelikult

$$|f(x)| \leq \sup_{u \in D} |f(u)| \leq f(z) - \kappa 2^{-n} = f(z) - 2^{-n+6}\delta.$$

Lemma tõestuseks piisab nüüd näidata, et

$$|f(x)| \geq f(z) - 2^{-n+5}\delta, \quad (3.10)$$

sest võrratus (3.10) on ilmselt vastuolus talle eelneva võrratusteahelaga.

Võrratuse (3.10) tõestuseks paneme kõigepealt tähele, et

$$\begin{aligned} \|Tx\| + 2^{-n-2}\delta|f(x)| \|Tz\| &\geq \|T'x\| \geq N(T', B) - 4^{-n-1}\delta^2 \\ &\geq \|T'z\| - 4^{-n-1}\delta^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Kuna

$$\|Tz\| \geq N(T, B) - 4^{-n}\delta^2 \geq \|Tx\| - 4^{-n}\delta^2,$$

kehtib

$$\|Tz\| + 4^{-n}\delta^2 \geq \|Tx\|,$$

seega, arvestades, et

$$\|T'z\| = |1 + 2^{-n-2}\delta f(z)| \|Tz\| = (1 + 2^{-n-2}\delta f(z)) \|Tz\|,$$

saame võrratustest (3.11)

$$(\|Tz\| + 4^{-n}\delta^2) + 2^{-n-2}\delta|f(x)| \|Tz\| \geq (1 + 2^{-n-2}\delta f(z)) \|Tz\| - 4^{-n-1}\delta^2,$$

järelikult

$$2^{-n-2}\delta|f(x)| \|Tz\| \geq 2^{-n-2}\delta f(z) \|Tz\| - 2 \cdot 4^{-n}\delta^2,$$

millest tingimuse (3.9) põhjal

$$|f(x)| \geq f(z) - 2^3 \cdot \frac{1}{\|Tz\|} 2^{-n}\delta \geq f(z) - 2^{-n+5}\delta.$$

Niisiis võrratus (3.10) kehtib. □

4 Aroni, Cascalese ja Kozhushkina

Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreem

$C_0(L)$ -väärtuseliste Asplundi operaatorite kohta

Kõikjal selles peatükis on X ja Y reaalsed Banachi ruumid ning L on lokaalselt kompaktne Hausdorffi ruum.

Selles peatükis me tõestame artikli [ACK] põhitulemuse (vt [ACK, teoreem 2.4] või teoreem 2.13) järgneva parenduse.

Teoreem 4.1 (vrd [ACK, teoreem 2.4] või teoreem 2.13). *Olgu $T: X \rightarrow C_0(L)$ Asplundi operaator, kusjuures $\|T\| = 1$, olgu $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ ning olgu $x_0 \in S_X$ selline, et*

$$\|Tx_0\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Siis leiduvad element $u_0 \in S_X$ ja Asplundi operaator $S \in S_{\mathcal{L}(X, C_0(L))}$ nii, et

$$\|Su_0\| = 1, \quad \|x_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|T - S\| \leq \varepsilon.$$

Võrreldes teoreemiga 2.13 on teoreemis 4.1 tingimuse $\|T - S\| \leq 3\varepsilon$ asemel saadud tugevam tingimus $\|T - S\| \leq \varepsilon$. See parendus on saavutatud tänu täpsematele lähendustele järgnevas lemmas 4.2 võrreldes selle lemma prototüübiga [ACK, lemma 2.3] (vt märkust 4).

Definitsioon 4.1. Öeldakse, et hulk $B \subset B_Y^*$ on 1-normeeriv, kui mistahes $y \in Y$ korral

$$\|y\| = \sup_{b^* \in B} |b^*(y)|.$$

Lemma 4.2 (vt [ACK, lemma 2.3]). *Olgu $T: X \rightarrow Y$ Asplundi operaator, kusjuures $\|T\| = 1$, olgu $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ ning olgu $x_0 \in S_X$ selline, et*

$$\|Tx_0\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Siis mistahes 1-normeeriva hulga $B \subset B_{Y^}$ korral leiduvad*

- (1) w^* -lahtine hulk $U \subset X^*$ nii, et $U \cap T^*(B) \neq \emptyset$,
- (2) punktid $u^* \in S_{X^*}$ ja $u_0 \in S_X$ nii, et $|u^*(u_0)| = 1$ ning

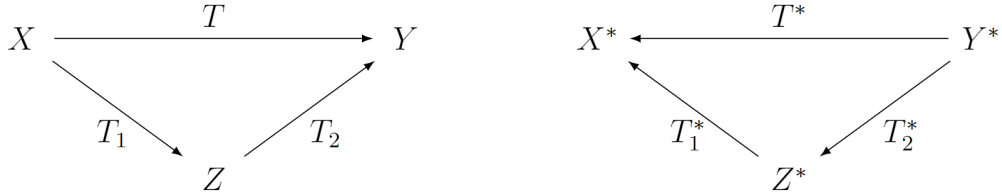
$$\|x_0 - u_0\| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \text{iga } z^* \in U \cap T^*(B) \text{ korral } \|z^* - u^*\| < \varepsilon.$$

Märkus. Võrreldes lemma 4.2 prototüübiga [ACK, lemma 2.3] on lemmas 4.2 hinnangute $\|z^* - u^*\| < 3\varepsilon$ asemel saadud paremad hinnangud $\|z^* - u^*\| < \varepsilon$. Sellest parendusest „üks ε “ on saadud tänu Bollobáse originaaltulemuse [Bol,

teoreem 1] asemel teoreemi 2.1 kasutamisele järelduse 2.2 tõestuses. Sellest parendusest „teine ε “ on saadud tänu elemendi b_0^* , hulga U_2 ning elementide u^* ja u_0 täpsemale valikule lemma 4.2 tõestuses, jättes seejuures selle lemma tõestusskeemi täpselt samaks nagu tema prototüübil [ACK, lemma 2.3].

LEMMA 4.2 TÕESTUS. Näitame esmalt, et kaasoperaator T^* kujutab ruumi Y^* kinnise ühikera B_{Y^*} kaasruumi X^* w^* -kompaktseks alamhulgaks, mis on w^* -topoloogias normi poolt killustatud.

Kuna T on Asplundi operaator, leiduvad Asplundi ruum Z ning operaatorid $T_1 \in \mathcal{L}(X, Z)$ ja $T_2 \in \mathcal{L}(Z, Y)$ nii, et $T = T_2 \circ T_1$; siis $T^* = T_1^* \circ T_2^*$; vt järgnevat joonist.



Joonis.

Suvalise Banachi ruumide vahel tegutseva pideva lineaarse operaatori kaasoperaator on w^* - w^* -pidev (vt nt [M, teoreem 3.1.11]). Seetõttu T_2^* on w^* - w^* -pidev, mistõttu $T_2^*(B_{Y^*})$ on w^* -kompaktne hulk ruumis Z^* (sest Banach–Alaoglu teoreemi põhjal (vt nt [M, lk 229, teoreem 2.6.18]) on kinnine ühikera B_{Y^*} w^* -kompaktne hulk ning pidev operaator topoloogiliste ruumide vahel kujutab kompaktse hulga kompaktseks hulgaks). Teoreemi 1.7 põhjal on hulk $T_2^*(B_{Y^*})$ kaasruumi Z^* w^* -topoloogias normi poolt killustatud. Kuna operaator T_1^* on w^* - w^* -pidev ning ka $\|\cdot\| - \|\cdot\|$ -pidev, on kujutishulk $T^*(B_{Y^*}) = T_1^*(T_2^*(B_{Y^*}))$ w^* -kompaktne ning lemma 1.6 põhjal kaasruumi X^* normi poolt killustatud (võtame lemmas ruumide X ja Y rolli vastavalt hulgad $T_2^*(B_{Y^*})$ ja $T_1^*(T_2^*(B_{Y^*}))$ varustatuna suhtelise w^* -topoloogiaga, meetrikate ρ_X ja ρ_Y rolli vastavalt kaasruumide Z^* ja X^* normide poolt indutseeritud meetrikate ahendid neile hulkadele ning kujutuse f rolli kaasoperaatori T_1^* tõlgendatuna kujutusena $T_2^*(B_{Y^*}) \rightarrow T_1^*(T_2^*(B_{Y^*}))$).

Tõestame nüüd lemma väited. Olgu $B \subset B_{Y^*}$ 1-normeeriv alamhulk. Valime positiivse reaalarvu $\gamma < \varepsilon$ nii, et $\|Tx_0\| > 1 - \frac{\gamma^2}{2}$. Hulga B 1-normeerivuse tõttu leidub element $b_0^* \in B$ nii, et

$$|(T^*b_0^*)(x_0)| = |b_0^*(Tx_0)| > 1 - \frac{\gamma^2}{2}.$$

Siis hulk

$$U_1 := \left\{ x^* \in X^* : |x^*(x_0)| > 1 - \frac{\gamma^2}{2} \right\},$$

on w^* -lahtine, sest ta on ruumi $\mathbb{R}$ lahtise alamhulga $(1 - \gamma^2/2, \infty)$ originaal w^* -pideva funktsiooni $X^* \ni x^* \mapsto |x^*(x_0)| \in \mathbb{R}$ suhtes. Nüüd

$$T^*b_0^* \in U_1 \cap T^*(B) \subset T^*(B_{Y^*}) \subset B_{X^*}.$$

Kuna hulk $T^*(B_{Y^*})$ on kaasruumi X^* w^* -topoloogias normi poolt killustatud ja hulk $U_1 \cap T^*(B)$ on mittetühi, leidub w^* -lahtine hulk $U_2 \subset X^*$ nii, et $(U_1 \cap T^*(B)) \cap U_2 \neq \emptyset$ ning

$$\text{diam}_{\|\cdot\|}((U_1 \cap T^*(B)) \cap U_2) \leq \varepsilon - \gamma. \quad (4.1)$$

Nüüd $U := U_1 \cap U_2$ on kaasruumi X^* w^* -lahtine alamhulk. Fikseerime suvalise elemendi $x_0^* \in U \cap T^*(B)$; siis $x_0^* \in T^*(B) \subset T^*(B_{Y^*}) \subset B_{X^*}$ ning, arvestades, et $x_0^* \in U_1$,

$$|x_0^*(x_0)| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Bishop–Phelps–Bollobáse teoreemi põhjal (vt järeldust 2.2) leiduvad $u^* \in S_{X^*}$ ja $u_0 \in S_X$ nii, et $|u^*(u_0)| = 1$ ning

$$\|x_0 - u_0\| < \gamma < \varepsilon \quad \text{ja} \quad \|x_0^* - u^*\| < \gamma.$$

Olgu $z^* \in U \cap T^*(B)$ suvaline. Siis tingimuse (4.1) põhjal $\|z^* - x_0^*\| \leq \varepsilon - \gamma$, seega

$$\|z^* - u^*\| \leq \|z^* - x_0^*\| + \|x_0^* - u^*\| < \varepsilon.$$

□

TEOREEMI 4.1 TÕESTUS. Kõigepealt veendume, et loomulik sisestus

$$\xi: L \ni a \mapsto \delta_s \in C_0(L)^*, \quad \text{kus } \delta_s(f) = f(s),$$

on kaasruumi $C_0(L)^*$ w^* -topoloogia suhtes pidev. Tõepoolest, vahetu kontroll näitab, et δ_s on lineaarne; ta on ka tõkestatud, sest mistahes $f \in C_0(L)$ korral $|\delta_s(f)| = |f(s)| \leq \|f\|$; niisiis $\delta_s \in C_0(L)^*$. Kujutuse ξ pidevuseks (kaasruumi $C_0(L)^*$ w^* -topoloogia suhtes) jääb märkida, et kui pere $(s_\alpha)_\alpha$ koondub punktiks s ruumis L , siis mistahes $f \in C_0(L)$ korral

$$(\xi(s_\alpha))(f) = f(s_\alpha) \rightarrow f(s) = (\xi(s))(f)$$

ning seega $\xi(s_\alpha) \rightarrow \xi(s)$ kaasruumi $C_0(L)^*$ w^* -topoloogias. Niisiis, loomulik sisestus $\xi: L \rightarrow C_0(L)^*$ on kaasruumi $C_0(L)^*$ w^* -topoloogia suhtes pidev, järelikult kujutus

$$\phi := T^* \circ \xi: L \rightarrow X^*$$

on kaasruumi X^* w^* -topoloogia suhtes pidev (sest kaasoperaator $T^*: C_0(L)^* \rightarrow X^*$ on w^* - w^* -pidev).

Hulk $B := \{ \delta_s : s \in L \} \subset B_{C_0(L)^*}$ on 1-normeeriv, sest iga $f \in C_0(L)$ korral $\|f\|_{C_0(L)} = \sup_{s \in L} |f(s)| = \sup_{s \in L} |\delta_s(f)|$. Lemma 4.2 põhjal, võttes seal $Y := C_0(L)$, leiduvad w^* -lahtine hulk $U \subset X^*$ ning punktid $u^* \in S_{X^*}$ ja $u_0 \in S_X$ nii, et $U \cap T^*(B) \neq \emptyset$ ning $|u^*(u_0)| = 1$, $\|x_0 - u_0\| < \varepsilon$ ja

$$\text{iga } z^* \in U \cap T^*(B) \text{ korral } \|z^* - u^*\| < \varepsilon. \quad (4.2)$$

Paneme tähele, et $T^*(B) = \phi(L)$. Kuna $U \cap T^*(B) \neq \emptyset$, leidub $s_0 \in L$ nii, et $\phi(s_0) \in U$. Kuna ϕ on kaasruumi X^* w^* -topoloogia suhtes pidev, on hulk

$$W := \{ s \in L : \phi(s) \in U \} = \phi^{-1}(U)$$

punkti s_0 lahtine ümbrus. Urõsoni lemma põhjal (vt lemma 1.5) leidub kompaktse kandjaga pidev funktsioon $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ nii, et

$$f(L) \subset [0, 1], \quad f(s_0) = 1 \quad \text{ja} \quad \text{supp } f \subset W.$$

Defineerime operaatori $S: X \rightarrow C_0(L)$ võrdusega

$$(Sx)(s) = f(s) \cdot u^*(x) + (1 - f(s)) \cdot (Tx)(s).$$

Veendume, et S on Asplundi operaator. Selleks paneme tähele, et mistahes $x \in X$ ja $s \in L$ korral

$$\begin{aligned} (Sx)(s) &= ((u^* \otimes f)x)(s) + (Tx)(s) - f(s) \cdot (Tx)(s) \\ &= ((u^* \otimes f + T - (f * T))x)(s), \end{aligned}$$

kus operaator $f * T: X \rightarrow C_0(L)$ on defineeritud võrdusega $((f * T)x)(s) = f(s) \cdot (Tx)(s)$; niisiis $S = u^* \otimes f + T - (f * T)$. Kuna $u^* \otimes f$, T ja $f * T$ on Asplundi operaatorid ($u^* \otimes f$ on Asplundi operaator teoreemi 1.8 põhjal, sest ta on ühemõõtmeline, ja $f * T$ on Asplundi operaator lemma 1.9 põhjal), on S teoreemi 1.8 põhjal Asplundi operaator.

Mistahes $x \in S_X$ ja $s \in L$ korral, arvestades, et $f(s) \in [0, 1]$, $\|u^*\| = 1$ ning $\|T\| = 1$ (ja seega $\|Tx\| \leq 1$, mistõttu $|(Tx)(s)| \leq 1$),

$$\begin{aligned} |(Sx)(s)| &= |f(s) \cdot u^*(x) + (1 - f(s)) \cdot (Tx)(s)| \\ &\leq f(s) \cdot |u^*(x)| + (1 - f(s)) \cdot |(Tx)(s)| \\ &\leq f(s) + (1 - f(s)) = 1; \end{aligned}$$

seega $\|Sx\| = \sup_{s \in L} |(Sx)(s)| \leq 1$ ning järelikult $\|S\| \leq 1$. Teiselt poolt, kuna $f(s_0) = 1$, kehtib

$$\|S\| \geq (Su_0)(s_0) = f(s_0) \cdot u^*(u_0) + (1 - f(s_0)) \cdot (Tu_0)(s) = u^*(u_0) = 1,$$

seega $\|S\| = 1$; seejuures $\|S\| = \|Su_0\|$ ehk, teisisõnu, operaator S saavutab oma normi punktis u_0 .

Märgime, et mistahes $x \in X$ ja $s \in L$ korral

$$(\phi(s))(x) = ((T^* \circ \xi)(s))(x) = (T^*(\xi(s)))(x) = (\xi(s))(Tx) = \delta_s(Tx) = (Tx)(s). \quad (4.3)$$

Nüüd

$$\begin{aligned} \|T - S\| &= \sup_{x \in B_X} \|Tx - Sx\| = \sup_{x \in B_X} \sup_{s \in L} f(s) |(Tx)(s) - u^*(x)| \\ &\stackrel{(1)}{=} \sup_{x \in B_X} \sup_{s \in W} f(s) |(\phi(s))(x) - u^*(x)| \\ &\leq \sup_{s \in W} \sup_{x \in B_X} |(\phi(s))(x) - u^*(x)| = \sup_{s \in W} \|\phi(s) - u^*\| \stackrel{(2)}{\leq} \varepsilon. \end{aligned}$$

Siin

- (1) kehtib sisalduvuse $\text{supp } f \subset W$ ja võrduse (4.3) tõttu ning
- (2) kehtib tingimuse (4.2) põhjal, sest iga $s \in W$ korral $\phi(s) \in U \cap T^*(B)$.

□

Kirjandus

- [A₁₉] M. D. ACOSTA, *On the Bishop–Phelps–Bollobás property*. Banach Cent. Publ. **119** (2019), 13–32.
- [A₀₆] M. D. ACOSTA, *Denseness of norm attaining mappings*. RACSAM, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat. **100** (2006), no. 1-2, 9–30.
- [AAGM] M. D. ACOSTA, R. M. ARON, D. GARCÍA, M. MAESTRE, *The Bishop–Phelps–Bollobás theorem for operators*. J. Funct. Anal. **254** (2008), no. 11, 2780–2799.
- [A et al.] M. D. ACOSTA, J. BECERRA-GUERRERO, Y. S. CHOI, D. GARCÍA, S. K. KIM, H. J. LEE, M. L. LOURENÇO, M. MARTÍN, *The Bishop–Phelps–Bollobás property for operators between spaces of continuous functions*. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **95** (2014), 323–332.
- [ABGM] M. D. ACOSTA, J. BECERRA-GUERRERO, D. GARCÍA, M. MAESTRE, *The Bishop–Phelps–Bollobás theorem for bilinear forms*. Trans. Am. Math. Soc. **365** (2013), no. 11, 5911–5932.
- [ACK] R. M. ARON, B. CASCALES, O. KOZHUSHKINA, *The Bishop–Phelps–Bollobás theorem and Asplund operators*. Proc. Am. Math. Soc. **139** (2011), no. 10, 3553–3560.
- [Bol] B. BOLLOBÁS, *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*. Bull. Lond. Math. Soc. **2** (1970), 181–182.
- [Bou] J. BOURGAIN, *On dentability and the Bishop–Phelps property*. Isr. J. Math. **28** (1977), no. 4, 265–271.
- [BP] E. BISHOP, R. R. PHELPS, *A proof that every Banach Space is subreflexive*. Bull. Am. Math. Soc. **67** (1961), 97–98.
- [CGK] B. CASCALES, A. J. GUIRAO, V. KADETS, *A Bishop–Phelps–Bollobás type theorem for uniform algebras*. Adv. Math. **240** (2013), 370–382.
- [CGKS] B. CASCALES, A. J. GUIRAO, V. KADETS, M. SOLOVIOVA, *Γ -flatness and Bishop–Phelps–Bollobás type theorems for operators*. J. Funct. Anal. **274** (2018), no. 3, 863–888.
- [CKLM₁₅] Y. S. CHOI, S. K. KIM, H. J. LEE, M. MARTÍN, *On Banach spaces with the approximate hyperplane series property*. Banach J. Math. Anal. **9** (2015), no. 4, 243–258.

- [CKLM₁₄] Y. S. CHOI, S. K. KIM, H. J. LEE, M. MARTÍN, *The Bishop–Phelps–Bollobás theorem for operators on $L_1(\mu)$* . J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 1, 214–242.
- [CKMMR] M. CHICA, V. KADETS, M. MARTÍN, S. MORENO-PULIDO, F. RAMBLA-BARRENO, *Bishop–Phelps–Bollobás moduli of a Banach space*. J. Math. Anal. Appl. **412** (2014), no. 2, 697–719.
- [DFJP] W. J. DAVIS, T. FIGIEL, W. B. JOHNSON, A. PELCZYŃSKI, *Factoring weakly compact operators*. J. Funct. Anal. **17** (1974), 311–327.
- [DU] K. DIESTEL, J. J. UHL, JR., *Vector measures*. Mathematical Surveys and Monographs, no. 15. Am. Math. Soc., Providence, 1977.
- [F] G. B. FOLLAND, *Real analysis: modern techniques and their applications 2nd edition*. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [K] S. K. KIM, *The Bishop–Phelps–Bollobás theorem for operators from c_0 to uniformly convex spaces*. Isr. J. Math. **197** (2013), 425–435.
- [KL₁₄] S. W. KIM, H. J. LEE, *Uniform convexity and the Bishop–Phelps–Bollobás property*. Canad. J. Math. **66** (2014), no. 2, 373–386.
- [KL₁₅] S. W. KIM, H. J. LEE, *The Bishop–Phelps–Bollobás property for operators from $C(K)$ to uniformly convex spaces*. J. Math. Anal. Appl. **421** (2015), no. 1, 51–58.
- [L] J. LINDENSTRAUSS, *On operators which attain their norm*. Isr. J. Math. **1** (1963), 139–148.
- [Lil] R. LILLEMETS, *Operaatorideaalid ning genereerivate hulkade ja genereerivate jadade süsteemid, magistritöö*. Tartu Ülikool, Tartu, 2013.
- [M] R. E. MEGGINSON, *An introduction to Banach space theory*. Graduate Texts in Mathematics, 183. Springer, New York, 1998.
- [N] I. NAMIOKA, *Radon–Nikodym compact spaces and fragmentability*. Mathematika **34** (1987), no. 2, 258–281.
- [Pi] A. PIETSCH, *Operator ideals*. North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [Pü] D. PÜVI, *Bishop–Phelps–Bollobáse teoreem, bakalaureusetöö*. Tartu Ülikool, Tartu, 2016.

- [Se] I. E. SEGAL, *Equivalences of measure spaces*. Am. J. Math. **73** (1951), no. 2, 275–313.
- [Ste] C. STEGALL, *The Radon–Nikodym property in conjugate Banach spaces. II*. Trans. Am. Math. Soc. **264** (1981), no. 2, 507–519.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Jaagup Kirme,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Bishop–Phelpsi ja Bishop–Phelps–Bollobáse tüüpi teoreemid operaatorite jaoks“, mille juhendajad on Rainis Haller ja Märt Põldvere, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Jaagup Kirme
17.05.2022