Willem Nano.

Tasapinnalise ja sfäärilise

Trigonomeetria

ôperaamat keskkoolidele.

Tallinnas.
Kirjastus-Aktsiaselts „Varrak“
1921.

Willem Nano.

Trigonomeetria

ôperaamat keskkoolidele.

Tallinnas.
Kirjastus-Aktsiaselts „Varrak“
1920.

K. Mattiesen'i trükk, Tartus.

Esimene osa.

A. Tasapinnaline trigonomeetria.

I peatükk.

Põhimõisted. Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioon.

I. Sissejuhatus.

Geomeetrias tõendati, et kolmnurk on oma kuju ja suuruse poolest üheselt määratud, kui on antud:

1) kaks külge ja nende vaheline nurk, ehk
2) üks külg ja kaks lähisnurka, ehk
3) kolm külge, ehk
4) kaks külge ja suurema külje vastas olev nurk.

Igal juhusel on antud ainult kolm elementi; kui tahame teada, kui suured on mitte-antud elemendid, siis ehitame antud elementide järele kolmnurga ja mõõdame malli või liinealiga teiste elementide suuruse. Niisugust metoodi nimetakse **geomeetriliseks** ehk **graafiliseks metoodiks.**

Ülesanded. Leida puuduvad elemendid kolmnurkades, kui on antud:

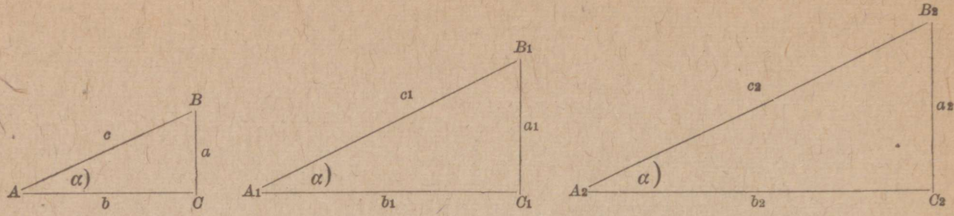
1) $a = 7$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 35^0$
2) $b = 5$ cm, $\alpha = 50^0$, $\beta = 75^0$
3) $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 6$ cm
4) $b = 6$ cm, $a = 7$ cm, $\alpha = 45^0$

Graafilise metoodi abil ei saa meie küllalt täpipealseid resultaate, sest mõõtmise ja joonistamise täpipealsus on väga piiratud.

Trigonomeetria õpetab küllaldase arvu elementide järele kolmnurga teisi elemente mistahes täpipealsusega välja arvama.

2. Täisnurksete kolmnurkade sarnasus.

Kui täisnurksetes kolmnurkades ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ on võrdsed



Joon. 1.

teravnurgad α, siis on kolmnurgad sarnased, tähendab, vastavate külgede suhted on võrdsed, näit.

$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} \text{ ehk } \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \text{ jne.}$$

Teiste sõnadega: täisnurkses kolmnurgas määrab teravnurk külgede suhete suuruse.

Ümberpöördult, kui täisnurksetes kolmnurkades ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ on antud, et

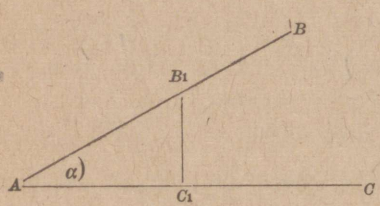
$$\frac{a}{c} = \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} \text{ ehk } \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \text{ jne.,}$$

ka siis on kolmnurgad sarnased, tähendab, vastavad nurgad on võrdsed:

$$\angle BAC = \angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2 = \alpha.$$

Teiste sõnadega: täisnurkses kolmnurgas määrab külgede suhe nurga suuruse. Tähendab, nurka võib mõõta mitte ainult kraadide, minutite ja sekunditega, vaid ka täisnurkse kolmnurga külgede suhetega.

Antud on $\measuredangle BAC = \alpha$; täisnurkse kolmnurga saamiseks laseme mõnest punktist nurga ühel küljel, näit., punktist B_1, perpendikulaari B_1C_1 teisele küljele; külgede suhted, mis määravad nurga α suuruse, ei olene sellest, kust lasta perpendikulaar AC-le.



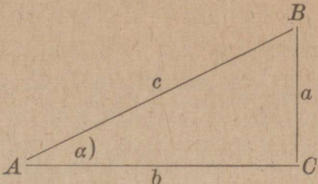
Joon. 2.

Tõepoolest: oletame, et on lastud palju perpendikulaare küljele AC, kõik saadud kolmnurgad on sarnased, täh. nende vastavate külgede suhted on võrdsed.

3. Trigonomeetriliste funktsioonide definitsioon.

Täisnurkses kolmnurgas ABC võib nurga α määramiseks tarvitada ühte suhet järgmisest kuuest:

$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}$ ja nende ümberpöördeid: $\frac{c}{a}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}$.



Joon. 3.

$\frac{a}{c}$ nimetakse nurga α *sinus*'eks, $\frac{b}{c}$ — *cosinus*'eks, $\frac{a}{b}$ — *tangens*'iks, $\frac{b}{a}$ — *cotangens*'iks, $\frac{c}{a}$ — *cosekans*'iks, $\frac{c}{b}$ — *sekans*'iks; kahte viimast suhet harilikult ei tarvitata.

Sõnastused: täisnurkses kolmnurgas tähendab ühe teravnurga
sinus vastaskaateti suhet hüpotenuusisse,
cosinus lähiskaateti suhet hüpotenuusisse,
tangens vastaskaateti suhet lähiskaatetisse,
cotangens lähiskaateti suhet vastaskaatetisse,

võime lühendatult ümber kirjutada:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{vastaskaatet}}{\text{hüpotenuus}}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{lähiskaatet}}{\text{hüpotenuus}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{vastaskaatet}}{\text{lähiskaatet}}, \quad cotg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{lähiskaatet}}{\text{vastaskaatet}}.$$

Kui nurk α muutub, siis muutuvad ka külgede suhted, täh. $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$, $cotg\,\alpha$; sellepärast nimetakse neid nelja suurust nurga α trigonomeetrilisteks ehk goniomeetrilisteks funktsioonideks; α on funktsioonide argument.

Trigonomeetrilised funktsioonid, kui külgede suhted, on nimeta arvud.

Küsimus: Kuidaviisi muutub teravnurga *sinus* ja *tangens* nurga suurenedes, kuidaviisi *cosinus* ja *cotangens?*

Ülesanded.

Ülesanne 1. Täisnurkses kolmnurgas $\sphericalangle\,\alpha = 30^0$; joonistada kolmnurk, mõõta külgede pikkused ja määrata nende suhted.

Ülesanne 2. Leida graafiliselt $\sin 60^0$, $\cos 60^0$ ja $tg\,60^0$. Kas on seda võimalik päris täpipealselt teha?

Ülesanne 3. Täisnurkses kolmnurgas ABC on antud $AB = 10$ cm; $AC = 8$ cm; $BC = 6$ cm. Määrata $tg\,\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\beta$, $cotg\,\alpha$, $\cos\alpha$.

Ülesanne 4. Joonistada täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid $a = 2,7$ cm ja $b = 4,8$ cm, ja välja arvata nurkade α ja β trigonomeetrilised funktsioonid.

Ülesanne 5. Joonistada täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus $c = 8$ cm, kaatet $b = 5$ cm, ja välja arvata nurkade α ja β trigonomeetrilised funktsioonid.

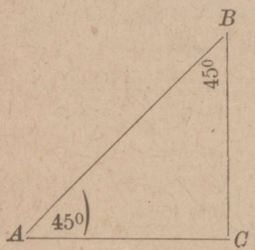
Ülesanne 6. Joonistada a) nurk, mille *sinus* on $^2/_3$; b) nurk, mille *cosinus* on $^1/_3$; c) nurk, mille *tangens* on $2^1/_2$; d) nurk, mille *cotangens* on $^1/_2$, ja saadud nurkade suurused malliga ära mõõta.

4. Nurkade trigonomeetrilised funktsioonid.

I. Mõnede üksikute nurkade trigonomeetrilisi funktsioone on geomeetria abil kerge välja arvata.

1. Leida nurga $\alpha = 45^0$ trigonomeetrilised funktsioonid.

Kui nurk $\alpha = 45^0$, siis ka $\sphericalangle \beta = 45^0$, ABC on sarikkolmnurk.



Joon. 4.

$$BC = AC = a,\ AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2};$$

$$\underline{\underline{\sin 45^0}} = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}}};$$

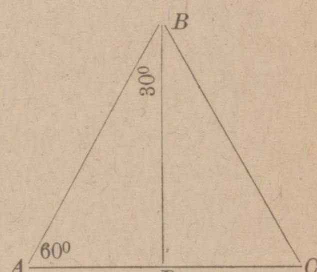
$$\underline{\underline{\cos 45^0}} = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{2}}};$$

$$\underline{\underline{tg\ 45^0}} = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{a} = \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{cotg\ 45^0}}.$$

2. Leida trigonomeetrilised funktsioonid nurgale $\alpha = 60^0$.

Külgühtlases kolmnurgas ABC on kõik nurgad 60^0. Laseme tipust B perpendikulaari BD alusele AC, kui $AB = a$;

siis $AD = \frac{a}{2}$ ja $BD = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.



Joon. 5.

$$\underline{\underline{\sin 60^0}} = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{a} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{3}}};$$

$$\underline{\underline{tg\ 60^0}} = \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \underline{\underline{\sqrt{3}}};$$

$$\underline{\underline{\cos 60^0}} = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}};\quad \underline{\underline{cotg\ 60^0}} = \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{3}}}.$$

Samuti

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2};\quad \cos 30^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3};\quad tg\ 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3};\quad cotg\ 30^0 = \sqrt{3}.$$

II. Üleüldiselt arvatakse nurkade trigonomeetrilised funktsioonid **kõrgema matemaatika** abil välja ja korraldakse **tabelitesse**.

Graafiliselt on aga neid kerge saada joonistusest millimeetrilisel paberil.

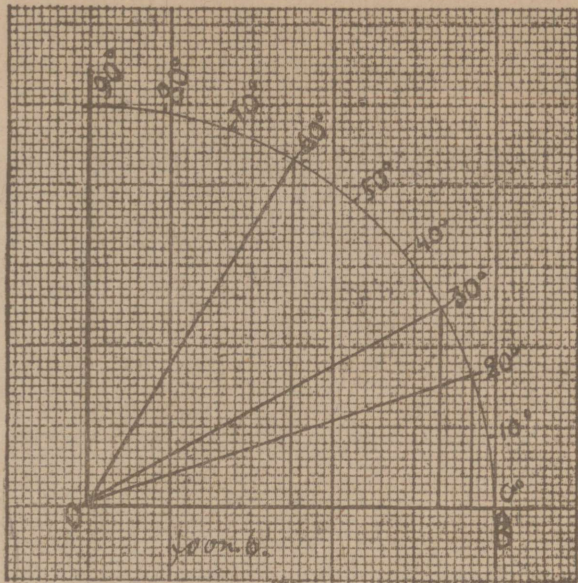
Tõmbame sõõri raadiusel 1; $\sphericalangle AOB$ funktsioonide saamiseks laseme raadiuse otsast A perpendikulaari nurga teisele küljele.

$$sin \sphericalangle AOB = \frac{Aa}{OA} = \frac{Aa}{1} = Aa,$$

samuti $cos \sphericalangle AOB = Oa$.

Pikkused Aa, Oa võib millimeetrilisel paberil kergesti ära lugeda.

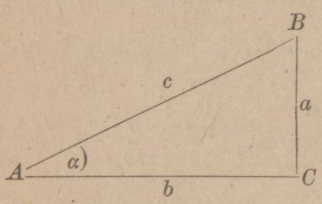
Ülesanded. Määrata $sin\ 20^0$, $sin\ 35^0$, $sin\ 50^0$, $sin\ 70^0$, $sin\ 80^0$, $cos\ 10^0$, $cos\ 40^0$, $cos\ 60^0$, $cos\ 85^0$.



Joon. 6.

5. Põhivalemid.

I. **Ühe ja sellesama nurga** *sinuse* *ruudu* **ja** *cosinuse* *ruudu* **summa võrdub ühele.**



Joon. 7.

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$$

Tõendus.

$$sin\,\alpha = \frac{a}{c};\quad cos\,\alpha = \frac{b}{c}.$$

järjelikult

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Märkus. Selle valemi abil võime nurga *cosinus*e välja arvata tema *sinus*est ja ümberpöördult

$$sin\,\alpha = \sqrt{1-cos^2\alpha};\quad cos\,\alpha = \sqrt{1-sin^2\alpha}.$$

II. **Nurga** *tangens* **võrdub** *sinuse* **ja** *cosinuse* **jagatisele,** *cotangens* **võrdub** *cosinuse* **ja** *sinuse* **jagatisele.**

$$tg\ \alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha},\quad cotg\ \alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha}.$$

Tõendus.

$$\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = tg\,\alpha; \quad \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} = cotg\,\alpha.$$

III. **Ühe ja sellesama nurga** *tangensi* **ja** *cotangensi* **kasvatis võrdub ühele.**

$$tg\,\alpha\,.\,cotg\,\alpha = 1.$$

Tõendus.

$$tg\,\alpha\,.\,cotg\,\alpha = \frac{a}{b}\,.\,\frac{b}{a} = 1.$$

Tähendab, *tangens* võrdub ümberpöördud *cotangens*ile ja vastupidi:

$$tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha}; \quad cotg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}.$$

Valemid, mis seovad ühe ja sellesama nurga trigonomeetrilised funktsiconid, annavad võimaluse välja arvata kõik funktsioonid, kui on teada üks nendest.

Näitus 1. Antud on $sin\,\alpha$, leida $tg\,\alpha$.

Lahendus:

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{sin\,\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}.$$

Näitus 2. Antud on $tg\,\alpha$, leida $sin\,\alpha$ ja $cos\,\alpha$.

Eelmisest näitusest saame:

$$tg^2\alpha = \frac{sin^2\alpha}{1 - sin^2\alpha}, \text{ millest } sin\,\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}};$$

samuti:

$$tg^2\alpha = \frac{1 - cos^2\alpha}{cos^2\alpha}, \text{ millest } cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}.$$

Võime kokku seada tabeli, kus iga trigonomeetriline funktsioon on avaldud kõigi teiste kaudu.

	$sin\,\alpha$	$cos\,\alpha$	$tg\,\alpha$	$cotg\,\alpha$
$sin\,\alpha$	—	$\sqrt{1 - sin^2\alpha}$	$\frac{sin\,\alpha}{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - sin^2\alpha}}{sin\,\alpha}$
$cos\,\alpha$	$\sqrt{1 - cos^2\alpha}$	—	$\frac{\sqrt{1 - cos^2\alpha}}{cos\,\alpha}$	$\frac{cos\,\alpha}{\sqrt{1 - cos^2\alpha}}$
$tg\,\alpha$	$\frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$	—	$\frac{1}{tg\,\alpha}$
$cotg\,\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2\alpha}}$	$\frac{cotg\,\alpha}{\sqrt{1 + cotg^2\alpha}}$	$\frac{1}{cotg\,\alpha}$	—

Ülesanded.

1. Välja arvata $cos\,\alpha$, $tg\,\alpha$, $cotg\,\alpha$, kui 1) $sin\,\alpha = \frac{12}{13}$, 2) $sin\,\alpha = 0{,}21$, 3) $sin\,\alpha = \sqrt{0{,}2}$.

2. Välja arvata $sin\,\alpha$, $tg\,\alpha$, $cotg\,\alpha$, kui 1) $cos\,\alpha = \frac{3}{4}$, 2) $cos\,\alpha = \frac{20}{29}$, 3) $cos\,\alpha = \sqrt{0{,}5}$.

3. Välja arvata $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $cotg\,\alpha$, kui 1) $tg\,\alpha = \frac{4}{3}$, 2) $tg\,\alpha = \frac{8}{15}$, 3) $tg\,\alpha = \frac{63}{16}$

4. Välja arvata $sin\,\alpha$, $cos\,\alpha$, $tg\,\alpha$, kui 1) $cotg\,\alpha = \frac{12}{35}$, 2) $cotg\,\alpha = \frac{9}{40}$, 3) $cotg\,\alpha = \frac{55}{48}$.

5. Määrata $cos\,\alpha$ ekvatsioonist $5\,sin\,\alpha = 3\,tg\,\alpha$.

6. Määrata $sin\,\alpha$ ekvatsioonist $tg\,\alpha + 5\,cotg\,\alpha = 6$.

7. Näidata, et õige on valem

$$2\,(sin^6\alpha + cos^6\alpha) - 3\,(sin^4\alpha + cos^4\alpha) + 1 = 0.$$

8. Avaldada $cos\,\alpha$ kaudu: $cotg^2\alpha + tg^2\alpha - sin^2\alpha - cos^2\alpha$.

6. Side nurga funktsioonide ja täiendusnurga funktsioonide vahel.

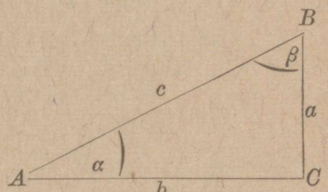
Täisnurkses kolmnurgas ABC on

$$sin\,\alpha = \frac{a}{c} = cos\,\beta = cos\,(90^0 - \alpha),$$

$$cos\,\alpha = \frac{b}{c} = sin\,\beta = sin\,(90^0 - \alpha),$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = cotg\,\beta = cotg\,(90^0 - \alpha),$$

$$cotg\,\alpha = \frac{b}{a} = tg\,\beta = tg\,(90^0 - \alpha).$$



Joon. 8.

Tähendab, *nurga sinus (cosinus)* võrdub *täiendusnurga cosinusele (sinusele)*, *nurga tangens (cotangens)* — *täiendus nurga cotangensile (tangensile)*.

$$\underline{sin\,\alpha = cos\,(90^0 - \alpha),}$$

$$\underline{cos\,\alpha = sin\,(90^0 - \alpha),}$$

$$\underline{tg\,\alpha = cotg\,(90^0 - \alpha),}$$

$$\underline{cotg\,\alpha = tg\,(90^0 - \alpha).}$$

Järeldus. Trigonomeetriliste tabelite kokkuseadmisel on tarvis välja arvata funktsioonid ainult nurkadele 0^0—45^0.

Ülesanded.

1. $\sin 25^0 = 0{,}42$; $\sin 50^0 = 0{,}77$; $\sin 70^0 = 0{,}94$; kui suur on 1) $\cos 65^0$? $\cos 20^0$? $\cos 40^0$?

2. $\cos 22^0 = 0{,}93$; $\cos 44^0 = 0{,}72$; $\cos 78^0 = 0{,}21$; kui suur on $\sin 46^0$? $\sin 68^0$? $\sin 12^0$?

7. Trigonomeetrilised tabelid.

Trigonomeetrilisis väljaarvamisis ei ole harilikult tarvis nurkade funktsioone, vaid nende funktsioonide logaritme; sellepärast on tabelites antud need viimased. Tabelite korraldus võib olla mitmesugune, sellepärast seletatakse tabelites enestes, kuidas neid tarvitada.

Harjutused.

I. Leida logaritmide tabelist:

a) $\log\sin 20^0$; $\log\cos 25^0$; $\log tg\ 40^0$; $\log cotg\ 44^0$.

b) $\log\sin 48^0$; $\log\cos 65^0$; $\log tg\ 72^0$; $\log cotg\ 52^0$.

c) $\log\sin 20^0 45'$; $\log\cos 14^0 17'$; $\log tg\ 52^0 15'$; $\log cotg\ 73^0 42'$.

d) $\log\sin 35^0 20' 20''$; $\log\cos 60^0 17' 10''$; $\log tg\ 75^0 15' 40''$; $\log cotg\ 40^0 37' 50''$.

e) $\log\sin 54^0 16' 27''$; $\log\cos 27^0 32' 47''$; $\log tg\ 43^0 15' 32''$; $\log cotg\ 72^0 41' 29''$.

II. Leida logaritmide tabelite abil nurk α, kui:

a) $\log\sin\alpha = 9.14356 - 10$; $\log tg\,\alpha = 9.95164 - 10$; $\log\cos\alpha = 9.85864 - 10$; $\log cotg\,\alpha = 0{,}15827$.

b) $\log\sin\alpha\ 9.87953 - 10$; $\log tg\,\alpha = 0{,}19254$; $\log\cos\alpha = 9.71705 - 10$; $\log cotg\,\alpha = 9{,}85980 - 10$.

c) $\log\sin\alpha = 9.67072 - 10$; $\log tg\,\alpha = 9.76199 - 10$; $\log\cos\alpha = 9.45781 - 10$; $\log cotg\,\alpha = 0{,}84154$.

III. Välja arvata x järgmisist avaldusist:

a) $x = 70{,}24 \cdot \cos 46^0 17'$; $x = 0{,}07\ tg\ 5^0 26' 17''$.

b) $x = \dfrac{47{,}5162}{\sin 73^0 15' 46''}$; $x = \dfrac{6{,}17254}{cotg\ 45^0 3' 7''}$.

c) $x = \dfrac{30{,}9 \sin 20^0 30' 40'' \cos 62^0 8'}{tg\ 75^0 24'}$.

d) $x = \dfrac{0{,}52^3 \cdot tg^2\ 34^0 15' \sqrt{\cos 12^0 19'}}{cotg\ 47^0 34'}$.

IV. Välja arvata nurk α järgmisist avaldusist:

a) $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$; $\cos\alpha = \dfrac{7}{10}$; $tg\,\alpha = \dfrac{1}{6}$; $cotg\,\alpha = \dfrac{15}{7}$.

b) $\sin 2\alpha = \frac{27}{31}$; $\cos 5\alpha = 0{,}9$; $tg \frac{\alpha}{3} = 0{,}75$; $cotg\, \alpha = \frac{25}{17}$.

c) $\sin \alpha = \frac{4 \cdot 67 \sin 72^0 15'}{5{,}17}$; $5{,}72 \sin \alpha = 3 \cos 25^0 42'$.

d) $\sin \alpha = \sqrt{\frac{0{,}052 \cdot 0{,}15}{0{,}75 \cdot 0{,}039}}$; $tg\, \alpha = \sqrt{\frac{15{,}9 \cdot 27.8}{42{,}5 \cdot 15.1}}$.

Väljaarvamised on tarvis sooritada kindla kava järele; näit., määrata x avaldusest

$$x = \frac{0{,}047^2 \sqrt{\sin^3 10^0 15' \, tg\, 4^0 17'}}{0{,}01376^3 \cdot tg^3 68^0 45'}.$$

Logaritmides saame:

$$\log x = 2 \log 0{,}047 + \frac{1}{2} [3 \log \sin 10^0 15' + \log tg\, 4^0 17'] -$$
$$- [3 \log 0{,}01376 + 3 \log tg\, 68^0 45'].$$

$$\begin{aligned}
3 \log \sin 10^0 15' &= 3 \cdot 9{,}25028 = 7{,}75084 \\
\log tg\, 4^0 17' &= \text{———} = 8{,}87447 \\
\hline
3 \log \sin 10^0 15' + \log tg\, 4^0 17' &= 16{,}62531 \\
\frac{1}{2} [3 \log \sin 10^0 15' + \log tg\, 4^0 17'] &= 8{,}31265 \\
2 \log 0{,}047 &= 2 \cdot 8{,}67210 = 7{,}34420 \\
\hline
\text{lugeja logaritm} &= 5{,}65685
\end{aligned}$$

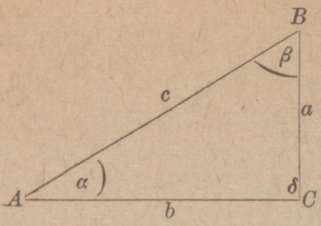
$$\begin{aligned}
3 \log 0{,}01376 &= 3 \cdot 8{,}13862 = 4{,}41586 \\
3 \log tg\, 68^0 15' &= 3 \cdot 0{,}41019 = 1{,}23057 \\
\hline
\text{nimetaja logaritm} &= 5{,}64643 \\
\log x &= 0{,}01042; \quad x = 1{,}0243.
\end{aligned}$$

II peatükk.

Täiskolmnurga ja sarikkolmnurga väljaarvamine.

Kolmnurka välja arvata tähendab kolmnurga antud elementide põhjal üles leida kõik teised. See on ainult siis võimalik, kui antud elemendid määravad üheselt kolmnurga; selleks peab olema üleüldiselt kolm elementi, milledest vähemalt üks on joonsuurus.

Täisnurkses kolmnurgas on üks element alati teada nimelt, täisnurk, tähendab, täiskolmnurga väljaarvamiseks on tarvis ainult kaks elementi.



Joon. 9.

Võivad antud olla:

1) a, b — mõlemad kaatetid;

2) a, c ehk b, c — kaatet ja hüpotenuus;

3) a, α; a, β; b, α; b, β — kaatet ja teravnurk;

4) c, α; c, β — hüpotenuus ja teravnurk.

Ülesanne 1. Välja arvata kolmnurk, kui on antud mõlemad kaatetid a ja b.

Lahendamine:

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b};\quad \beta = 90^0 - \alpha;\quad c = \frac{a}{sin\,\alpha}\ \text{(ehk } c = \sqrt{a^2 + b^2}\text{)}.$$

Näitus: $a = 3782$ m, $b = 5635$ m

$$tg\,\alpha = lg\,\alpha + \text{täiend. } lg\,b \qquad\qquad lg\,c = lg\,a + \text{täiend. } lg\,sin\,\alpha$$

$$\begin{array}{rl} lg\,a = & 3{,}57772 \\ \text{täiend. } lg\,b = & 6{,}24911 \\ \hline lg\,tg\,\alpha = & 9{,}82683 \\ \alpha = & 33^0\,52'\,4'' \\ \beta = & 56^0\,7'\,56''. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} lg\,a = & 3{,}57772 \\ \text{täiend. } lg\,sin\,\alpha = & 0{,}25393 \\ \hline lg\,c = & 3{,}83165 \\ c = & 6786{,}6 \text{ m.} \end{array}$$

Ülesanne 2. Välja arvata kolmnurk, kui on antud hüpotenuus c ja kaatet a.

Lahendamine:

$$sin\,\alpha = \frac{a}{c};\ \beta = 90^0 - \alpha;\ b = c\,cos\,\alpha\ \text{(ehk } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

(Ülesanne, kus on antud b ja c, on täiesti sarnane eelmisele;

$$sin\,\beta = \frac{b}{c};\quad \alpha = 90^0 - \beta;\quad a = c\,cos\,\beta.)$$

Näitus. $a = 3$ m, $c = 5$ m

$$lg\,sin\,\alpha = lg\,a + \text{t. } lg\,c$$

$$\begin{array}{rl} lg\,a = & 0{,}47712 \\ \text{t. } lg\,c = & 9{,}30103 \\ \hline lg\,sin\,\alpha = & 9{,}77815 \\ \alpha = & 36^0\,52'\,11'' \\ \beta = & 53^0\,7'\,49'' \end{array} \qquad b = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

Ülesanne 3. Välja arvata täisnurkne kolmnurk, kui on antud kaatet a ja nurk α.

Lahendamine: $\beta = 90^0 - \alpha$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$; $b = a \operatorname{cotg} \alpha$.

(Samuti sooritakse ülesanne, kui on teada a ja β; b ja α; b ja β.)

Näitus. $a = 12$; $\alpha = 67^0\,22'\,48''$

$\beta = 22^0\,37'\,12''$;

$$\begin{aligned} lg\, c &= lg\, a - lg \sin\alpha \\ lg\, a &= 1{,}07918 \\ \text{t. } lg \sin\alpha &= 0{,}03476 \\ \hline lg\, c &= 1{,}11394 \\ c &= 13.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lg\, b &= lg\, a + lg \operatorname{cotg}\alpha \\ lg\, a &= 1{,}07918 \\ lg \operatorname{cotg}\alpha &= 9{,}61979 \\ \hline lg\, b &= 0{,}69897 \\ b &= 5.000 \end{aligned}$$

Ülesanne 4. Välja arvata täisnurkne kolmnurk, kui on antud hüpotenuus c ja nurk α.

Lahendamine: $\beta = 90^0 - \alpha$; $a = c \sin\alpha$; $b = c \cos\alpha$ (samuti kujuneb lahendamine, kui on antud c ja β).

Näitus. $c = 298$; $\alpha = 37^0\,25'$

$\beta = 90 - \alpha = 52^0\,35'$;

$$\begin{aligned} lg\, a &= lg\, c + lg \sin\alpha \\ lg\, c &= 2{,}47422 \\ lg \sin\alpha &= 9{,}78362 \\ \hline lg\, a &= 2{,}25784 \\ a &= 181{,}07 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} lg\, b &= lg\, c + lg \cos\alpha \\ lg\, c &= 2{,}47422 \\ lg \cos\alpha &= 9{,}89995 \\ \hline lg\, b &= 2{,}37417 \\ b &= 236{,}68. \end{aligned}$$

Ülesanded.

A. Välja arvata kolmnurk, kui on antud:

1) kaatetid:

1) $a = 13$; $b = 7$. 2) $a = 0{,}28$; $b = 0{,}982876$.
3) $a = 1{,}2$; $b = 4{,}00073$. 4) $a = 0{,}0084$; $b = 0{,}028247$.

2) hüpotenuus ja kaatet:

1) $c = 50{,}6$; $b = 47{,}8126$. 2) $c = 0{,}0014$; $a = 0{,}000847$.
3) $c = 1$; $b = 0{,}0142768$. 4) $c = 1{,}248$; $a = 0{,}56488$.

3) kaatet ja teravnurk:

1) $a = 75$; $\alpha = 24^0\,24'\,30''$. 2) $a = 396$; $\beta = 49^0\,42''$.
3) $b = 42{,}6878$; $\alpha = 19^0\,9''$. 4) $b = 0{,}57182$; $\beta = 80^0\,35'\,52''$.

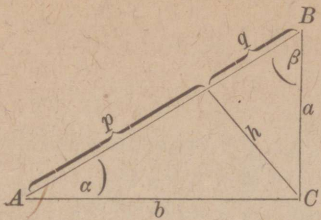
4) hüpotenuus ja teravnurk:

1) $c = 15$; $\alpha = 43^0\,23'\,50''$. 2) $c = 480$; $\beta = 30^0\,48'$.
3) $c = 0{,}00564$; $\beta = 60^0\,51'\,28''$. 4) $c = 2^5/_6$; $\alpha = 35^0\,16'\,27''$.

5) pind S ja kaatet:

1) $S = 754{,}6$; $a = 48$; $S = 0{,}2685$; $b = 0{,}75$.

B. Välja arvata t ä i s n u r k n e kolmnurk, kui on antud:



Joon. 10.

1) kaatet $a = 40$, kõrgus $h = 35$;

2) kaatet $b = 15$, hüpotenuuse lähisosa $p = 12$;

3) kõrgus $h = 24{,}5$, hüpotenuusi osa $p = 15$;

4) hüpotenuus $c = 100$, hüpotenuusi osa $p = 80$;

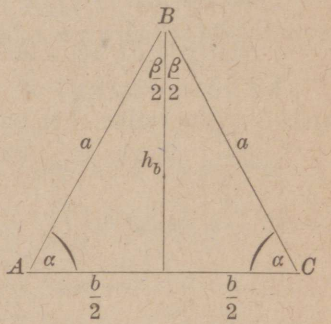
5) hüpotenuus $c = 50$, kõrgus $h = 17$;

6) hüpotenuus $c = 25$, pind $S = 84$.

Sarikkolmnurk.

Sarikkolmnurga alus olgu b, külg a.

Sarikkolmnurga võime välja arvata täisnurkse kolmnurga valemite abil, sest perpendikulaar tipust B alusele AC jagab sarikkolmnurga kaheks ühtivaks täiskolmnurgaks.



Joon. 11.

Ülesanne 1. V ä l j a a r v a t a s a r i k k o l m n u r k, k u i o n a n t u d a l u s b j a k ü l g a.

L a h e n d a m i n e: $sin \frac{\beta}{2} = \frac{\frac{1}{2} b}{a}$; $\alpha = 90^0 - \frac{\beta}{2}$.

Ülesanne 2. V ä l j a a r v a t a s a r i k k o l m n u r k, k u i o n a n t u d a l u s b j a a l u s n u r k α.

L a h e n d a m i n e: $\beta = 180^0 - 2\alpha$; $a = \frac{\frac{1}{2} c}{cos\, \alpha}$

Ülesanne 3. V ä l j a a r v a t a s a r i k k o l m n u r k, k u i o n a n t u d k ü l g a j a a l u s n u r k α.

L a h e n d a m i n e: $\beta = 180^0 - 2\alpha$; $b = 2\, a\, cos\, \alpha$.

Ü l e s a n d e d.

A. Välja arvata s a r i k k o l m n u r k, kui on antud:

1) $b = 37$; $a = 105$. 2) $b = 0{,}07$; $a = 0{,}25$.

3) $b = 43{,}848$; $\beta = 41^0 45' 28''$. 4) $b = 0{,}47$; $\alpha = 29^0 59' 28''$.

5) $a = 14{,}268$; $\alpha = 67^0 28' 24''$. 6) $a = 1{,}5689$; $\gamma = 38^0 39' 41''$.

B. Välja arvata sarikkolmnurk, kui on antud:

1) $b = 75$; $h_b = 45$. 2) $b = 0{,}71$; $h_b = 12$.
3) $h_b = 17$; $\alpha = 27^0\,15'\,46''$. 4) $h_b = 0{,}02$; $\alpha = 4^0\,15'\,20''$.
5) $h_b = 15$; $h_a = 7$. 6) $h_b = 10$; $h_c = 9$.
7) $h_a = 12$; $\alpha = 53^0\,7'\,48''$. 8) $h_b = 5$; $\beta = 73^0\,46'\,15''$.

C. Välja arvata kolmnurk, milles on antud:

1) $b = 27$; $c = 10$; $h_a = 5$.
2) $h_b = 75$; $\alpha = 60^0\,17'$; $\beta = 48^0\,37'\,45''$.
3) $h_c = 20$; $\alpha - \beta = 4^0\,12'\,46''$; $\gamma = 75^0\,49'\,15''$.
4) $h_c = 14{,}5$; $c = 90$; $\alpha = 34^0\,5'\,12''$.
5) $c = 25$; $h_a = 24$; $h_b = 20$.
6) $h_a = 42$; $h_b = 28{,}724$; $\gamma = 50^0\,55'\,36''$.
7) $a + b = 41$; $h_c = 12$; $\alpha = 45^0\,14'\,23''$.
8) $a - b = 94$; $h_c = 99$; $\alpha = 78^0\,34'\,44''$.
9) $b - c = 75{,}1$; $h_c = 120$; $\alpha = 67^0\,22'\,49''$.
10) $a + c = 89{,}2$; $h_c = 12$; $S = 390{,}60$.
11) $h_c = 12$; $S = 240$; $\alpha = 18^0\,55'\,29''$.
12) $a = 32{,}7$; $h_c = 18$; $S = 514{,}80$.
13) $a = 30{,}5$; $S = 431{,}34$; $\gamma = 59^0\,52'\,47''$.
14) $a : b = 90 : 17$; $S = 18900$; $\gamma = 81^0\,12'\,9''$.

D. 1) Rombi ümbermõõt $= 842{,}7$ cm; üks diagonaal 92,355; välja arvata nurgad.

2) Rombi diagonaalide summa $= 26{,}4$, üks nurk $63^0\,15'$; välja arvata külg.

3) Välja arvata täisnurkse nelinurga pind, kui diagonaal $= 21{,}633$ ja diagonaalide vaheline nurk $= 33^0\,41'\,24''$.

4) Sariktrapeetsi pind $= 3{,}477$, tema paralleelsed küljed on 3 ja 5; Välja arvata nurgad.

5) Ringjoonesse, mille raadius $= 17{,}4$, on joonistud korrapärane 14-nurk; välja arvata külje pikkus.

6) Välja arvata korrapärase 7-nurga külg, kui tema pind $= 43{,}253$.

7) Missugune tsentraalnurk toetub sidejoonele $= 8{,}74$ cm ringis, mille raadius $= 5{,}47$ cm.

8) Püstkoonuse kõrgus $= 24$, nurk kujutavjoonte vahel, mis on tõmmatud aluse diameetri otsadesse $= 16^0\,6'\,7''$; välja arvata koonuse pind.

9) Püstkoonuse kõrgus $= 7$, aluse raadius $= 5$. Kui suur on kujutavjoone nurk alusega?

10) Punktist, mis on ringi keskkohast 157 cm eemal, paistab see ringjoon nurga all $\alpha = 8^0\,15'$. Kui suur on ringi raadius?

11) Punktist, mille kaugus ringjoone keskkohast $= 20$ cm, on tõmmatud puutuja ringjoonele; välja arvata nurk puutujate vahel, kui raadius $= 1{,}5$.

E. 1) Kui suur on Tartust läbimineva paralleelringi raadius? Tartu laius $\varphi = 58^0\,22'\,47''$, maakera raadius R = 6370 klm.

2) Missugusel geograafilisel laiusel on paralleelringi kraad 1 klm?

3) Päikese nähtav läbimõõt $d = 32'$; välja arvata päikese suurus, kui tema kaugus maakeralt = 23417 maa raadiust.

4) Kuu keskkohast on maakera näha nurga all $57'\,18''$; kui kaugel on kuu?

5) Kuu nähtav raadius $16'$, kaugus maakeralt $\doteq$ 30 maa raadiust. Kui suur on kuu?

6) Päikese kõrgus vaatepiirilt $= 36^0\,40'$; kui pikk on püstteiba vari, kui ta kõrgus = 20 jalga?

III peatükk.

Kaldnurksed kolmnurgad.

1. Tömpnurkade trigonomeetrilised funktsioonid.

Esimeses peatükis antud trigonomeetriliste funktsioonide definitsioone võib laiendada ka tömpnurkadele. Tuleb ainult silmas pidada, et perpendikulaar, mis lastud punktist B (joon. 12) nurga teise külje sihile, langeb selle teise külje pikendusele, aga mitte küljele enesele. Kui siht OA loetakse positiivseks, siis tuleb OC lugeda negatiivseks.

Joon. 12.

Kui $OB = 1$, siis kujutab perpendikulaar BC nurga α *sinust*, projektsioon OB — *cosinust*; tömpnurga *sinus* on positiivne, *cosinus* aga negatiivne (seega on negatiivsed ka *tangens* ja *cotangens*).

Joonistame nurga $AOB_1 = 180^0 - \alpha$ ja mõõdame $OB_1 = 1$, siis kujutab perpendikulaar B_1C_1 nurga $(180^0 - \alpha)$ *sinust*, C_1 nurga $(180^0 - \alpha)$ *cosinust*. Kolmnurkade OBC ja OB_1C_1 ühevõrdusest leiame:

$$BC = B_1C_1 \quad \text{ehk} \quad \underline{\underline{\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)}};$$

$$OC = -\,OC_1 \quad \text{ehk} \quad \underline{\underline{\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)}}.$$

Jagades leiame:

$$\underline{\underline{tg\,\alpha = -\,tg\,(180^0 - \alpha)}}$$

$$\underline{\underline{cotg\,\alpha = -\,cotg\,(180^0 - \alpha)}}$$

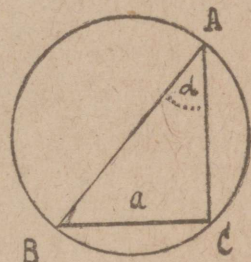
Ülesanded.

Leida $sin\ 150^0$, $tg\ 135^0$, $cos\ 120^0$,
$tg\ 150^0$, $cos\ 135^0$, $sin\ 120^0$.

2. Kolmnurga elementide põhivalemid.

Teoreem 1. Iga sidejoon sõõris võrdub sidejoonele toetuva piirdenurga *sinuse* ja sõõri läbimõõtja kasvatisele.

$$\underline{\underline{a = 2\,R\,sin\,\alpha}}$$



Joon. 13.

Tõendus. Tõmbame sidejoone BC ($= a$) otsast B läbimõõtja BA ($= 2\,R$) ja ühendame punktid A ja C $\sphericalangle ACB$ = täisnurk, tähendab $sin\,\alpha = \frac{a}{2R}$, ehk $a = 2\,R\,sin\,\alpha$. Iga kolmnurga külgi võime vaadelda kui sidejooni kolmnurga ümber joonistatud sõõris, küljele a toetub piirdenurk α, tähend. $\underline{a = 2\,R\,sin\,\alpha}$

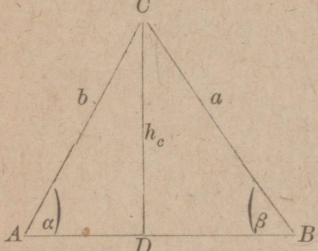
„ b „ „ β „ $\underline{b = 2\,R\,sin\,\beta}$

„ c „ „ γ „ $\underline{c = 2\,R\,sin\,\gamma}$

$$\text{Ehk}\quad \underline{\underline{\frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{sin\,\gamma} = 2\,R.}}$$

Saame nõndanimetatud sinuslause ehk

Teoreem 2. Igas kolmnurgas on küljed proportsionaalsed vastasnurkade *sinustele.*



Joon. 14.

Selle teoreemi võime ka teisiti tõendada. Tõmbame kolmnurgas ABC kõrguse CD ($= h_c$), siis saame täisnurksest kolmnurgast ADC:

$$1)\quad sin\,\alpha = \frac{h_c}{b}.$$

Täisnurksest kolmnurgast BDC:

$$2)\quad sin\,\beta = \frac{h_c}{a}.$$

Jagades ühevõrdused 1) ja 2), leiame:

$$3)\quad \frac{sin\,\alpha}{sin\,\beta} = \frac{h_c\,.\,a}{b\,.\,h_c} = \frac{a}{b}.$$

Samuti leiame, tõmmates kõrguse tipust A:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}.$$

Kokkuvõttes:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

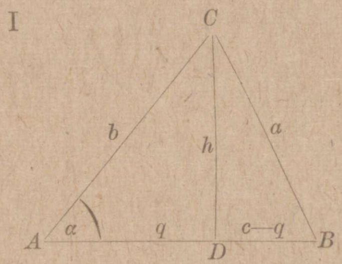
Kerge on näha, et tõendus jääb maksvaks ka siis, kui nurk α on tömp; ka siis on

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha) = \frac{h_c}{b}.$$

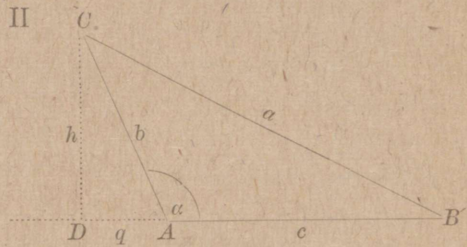
Teoreem 3 (cosinuslause). Kolmnurga ühe külje ruut võrdub teiste külgede ruutude summale vähendatud nendesamade külgede kahekordse kasvatisega nendevahelise nurga *cosinus*ele.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha.$$

Tõendame teoreemi kahe juhuse tarvis: 1) nurk α on terav, 2) nurk α on tömp.



Joon. 15.



Joon. 16.

Kolmnurkadest CBD ja ACD leiame Pythagorase teoreemi põhjal:

I.

$a^2 = h^2 + (c - q)^2;\ \ h^2 = b^2 - q^2$

$a^2 = b^2 - q^2 + (c - q)^2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,cq$

$\cos\alpha = \frac{q}{b}$ ehk $q = b\cos\alpha$

asemele pannes leiame:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha.$

II.

$a^2 = h^2 + (c + q)^2;\ \ h^2 = b^2 - q^2$

$a^2 = b^2 - q^2 + (c + q)^2$

$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,cq$

$\cos(180 - \alpha) = \frac{q}{b}$

ehk $q = b\cos(180 - \alpha) = -\,b\cos\alpha$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$

Tähendab, valem on üks ja seesama mõlema juhuse tarvis.

Analoogiliselt võime tõendada ka valemid

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma.$$

Need valemid võimaldavad nurkade väljaarvamise kolmnurgas, kui on teada selle küljed:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc};$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac};$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,ab}.$$

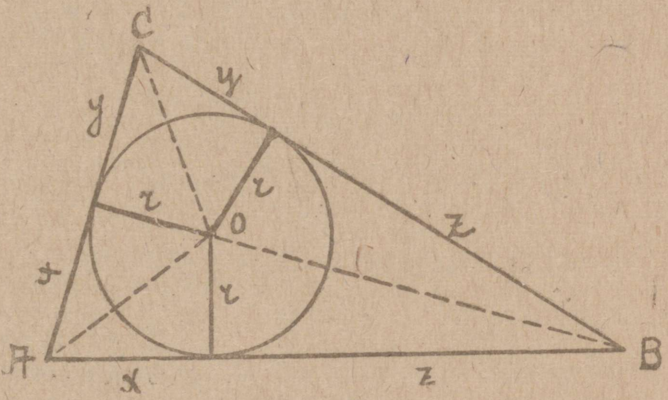
Need valemid ei ole otstarbekohased seal, kus külgi mõõdavad paljukohalised arvud, sest lugejat ei saa logaritmida, iga aste tuleb eraldi välja arvata. Neil juhuseil tarvitakse järgmist nn. poolnurga lauset:

Teoreem 5. Kolmnurga poolnurkade kohta on maksvad järgmised ühevõrdused:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}};\quad tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},\quad \text{kus}\quad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Tõendus: Joonistame kolmnurga ABC sisse sõõri; selle keskpunktiks on nurkade poolitajate lõikepunkt. Kolmnurga küljed on puutujaiks sõõrile; ühest punktist sõõrile tõmmatud puutujad on võrdsed; nimetades puutuja lõiked tähtedega x, y, z, saame



Joon. 17.

$2x+2y+2z = 2p$, ehk

$$x+y+z = p.$$

Siit saame:

$$\begin{aligned} x &= p-(y+z) = p-a \\ y &= p-(x+z) = p-b \qquad (1) \\ z &= p-(x+y) = p-c. \end{aligned}$$

Teiseks, nimetades sissejoonistud sõõri raadiuse tähega r, võime kirjutada:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a};\quad tg\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b};\quad tg\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}. \qquad (2)$$

Kolmandaks, $\triangle\, ABC$ pind:

$$S = S_{AOB} + S_{AOC} + S_{COB};$$

$$S = \frac{1}{2}\, cr + \frac{1}{2}\, br + \frac{1}{2}\, ar;$$

$$S = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right);$$

$$S = rp; \quad r = \frac{S}{p}.$$

Heeroni pinnavalemi järele on pind

$$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Tähendab,

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{p}.$$

Pannes selle avalduse r asemele *tangensi* valemisse, saame

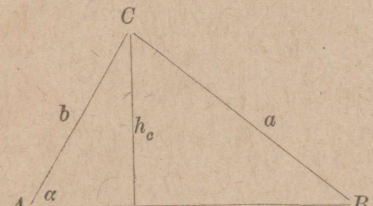
$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}{p\,(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}.$$

Samuti saame ka $tg\,\frac{\beta}{2}$ ja $tg\,\frac{\gamma}{2}$.

3. Pinnavalemid.

Teoreem 1. Kolmnurga pind võrdub kahe külje ja nendevahelise nurga *sinuse* poolele kasvatisele.

$$S = \frac{1}{2}\, bc \sin \alpha.$$



Joon. 18.

Tõendus. Pind $S = \frac{1}{2}\, ch_c$;

$$h_c = b \sin \alpha$$

asemele pannes saamegi $S = \frac{1}{2}\, bc \sin \alpha$.

Kerge on näha, et valem jääb maksvaks ka siis, kui nurk α on tömp:

$$h_c = b \sin (180 - \alpha) = b \sin \alpha.$$

Samuti võime tõendada:

$$S = \frac{1}{2}\, ac \sin \beta = \frac{1}{2}\, ab \sin \gamma.$$

Kui kolmnurgas on antud üks külg (näit. c) ja nurgad, siis võime eelmisse valemisse $S = \frac{1}{2}\, bc \sin \alpha$ külje b asemele kirjutada tema avalduse sinuslausest

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \quad \text{ehk} \quad b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Siis saame:

$$S = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}.$$

Samuti võime tõendada:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin\alpha \sin\gamma}{\sin\beta}.$$

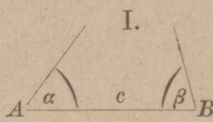
4. Kaldnurksete kolmnurkade väljaarvamine.

1. ülesanne. Välja arvata kolmnurk, kui on antud külg c ja lähisnurgad α ja β.

Lahendus. $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$.

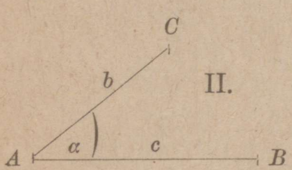
Sinuslausest $a = \dfrac{c \sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{c \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$;

$$b = \frac{c \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$



Joon. 19.

2. ülesanne. Välja arvata kolmnurk, kui on antud küljed b, c ja nendevaheline nurk α.



Joon. 20.

Lahendus. Cosinuslausest saame külje a:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,bc \cos\alpha}.$$

Nurgad β ja γ saame sinuslausest:

$$\sin\beta = \frac{b \,.\, \sin\alpha}{a}; \quad \sin\gamma = \frac{c \,.\, \sin\alpha}{a}.$$

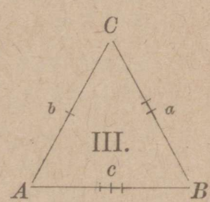
3. ülesanne. Välja arvata kolmnurk, kui on antud kõik küljed.

I lahendusviis. Cosinuslausest:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc};$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac};$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}.$$



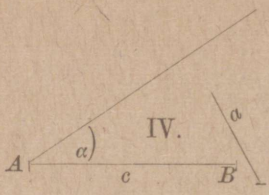
Joon. 21.

II lahendusviis.

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}; \quad tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}};$$

$$tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

4. ülesanne. Välja arvata kolmnurk, kui on antud kaks külge a ja c ja ühe külje vastasnurk α.



Joon. 22.

I juhus. $a > c$, nurk γ võib ainult teravnurk olla, sest kui $a > c$, siis $\alpha > \gamma$; on võimalik ainult üks lahendus. (Punktist B raadiusel a tõmmatud kaar lõikab vastaskülje ainult ühes punktis).

Lahendus. $\sin\gamma = \dfrac{c \,.\, \sin\alpha}{a}$;

$$\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma); \quad b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}.$$

2. juhus. $a < c$, tähendab, $\gamma > \alpha$, γ võib olla terav ehk tömp; on olemas kaks lahendust. (Punktist B raadiusel a tõmmatud kaar lõikab vastaskülje kahes punktis C ja C_1, joon. 23.)

Lahendus. $\sin\gamma = \dfrac{c \,.\, \sin\alpha}{a}$, saame kaks nurka — ühe terava, teise tömbi — mille *sinus*ed rahuldavad ühevõrdust; kui ühe nimetame tähega γ, siis on teine $180^0 - \gamma$.

I lahendus:

$$\gamma$$
$$\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$$
$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\alpha}.$$

II lahendus:

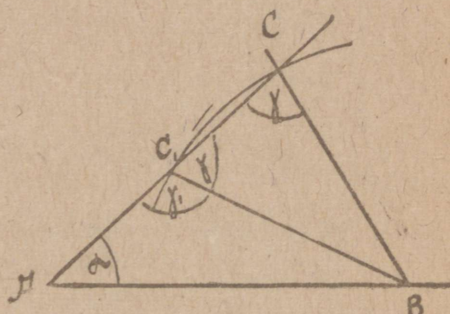
$$\gamma' = 180^0 - \gamma$$
$$\beta' = 180 - (\alpha + 180^0 - \gamma) = \gamma - \alpha$$
$$b' = \frac{a \sin\beta'}{\sin\alpha} = \frac{a \sin(\gamma - \alpha)}{\sin\alpha}.$$

Mõlemad lahendused on geomeetriliselt arusaadavad. Olgu $\triangle\, ABC$ üks otsitav kolmnurk. Esimene lahendus annab $\measuredangle\, BCA = \gamma$, $\measuredangle\, ABC = \beta$. Teine lahendus aga annab $\triangle$-ga ABC_1 milles

$$\measuredangle\, BC_1A = \gamma' = 180^0 - \gamma,$$

sest $\triangle\, BC_1C$ on sarikkolmnurk, täh. $\measuredangle\, CC_1B = \gamma$. Edasi on $\measuredangle\, CC_1B = \gamma$ välisnurk $\triangle$-gas ABC_1, täh.

$$\measuredangle\, ABC_1 = \beta' = \gamma - \alpha.$$



Joon. 23.

Ülesanded.

1. Välja arvata kolmnurk järgmisil antuil:

1) $a = 854{,}67$; $\beta = 28^0\,5'\,44''$; $\gamma = 73^0\,44'\,16''$.
2) $a = 87{,}811$; $\beta = 40^0\,56'$; $\gamma = 54^0\,16'\,9''$.
3) $c = 244$; $\alpha = 41^0\,6'\,44''$; $\beta = 14^0\,15'$.

2. Välja arvata kolmnurk järgmisil antuil:

1) $b = 23{,}56$; $c = 47{,}59$; $\alpha = 103^0\,18'$.
2) $a = 338$; $c = 399$; $\beta = 45^0\,14'\,23''$.
3) $a = 125$; $b = 117$; $\gamma = 65^0\,14'\,46''$.

3. Välja arvata kolmnurk järgmisil antuil:

1) $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$.
2) $a = 0,96$; $b = 2^1/_2$; $c = 1,8535$.
3) $a = 356,5$; $b = 275,8$; $c = 111,6$.

4. Välja arvata kolmnurk järgmisil antuil:

1) $a = 4,4$; $b = 5,8$; $\alpha = 33^0\,48'$.
2) $a = 386,7$; $b = 584,3$; $\beta = 128^0\,17'$.
3) $a = 35^1/_2$; $c = 48,3$; $\gamma = 86^0\,47'\,2''$.
4) $a = 205$; $c = 185$; $\gamma = 49^0\,16'\,20''$.
5) $b = 37$; $c = 29$; $\gamma = 45^0\,17'\,8''$.
6) $b = 0,75$; $c = 0,67$; $\beta = 43^0\,15'$.

5. Välja arvata kolmnurk järgmisil antuil:

1) $a = 14$; $b = 20$; $S = 125$.
2) $S = 100$; $c = 15$; $\alpha = 50^0$.
3) $a = 10$; $b = 15$; $R = 10$.
4) $a = 17$; $\beta = 42^0\,15'\,27''$; $R = 20$.
5) $a + b + c = 36$; $a = 10$; $r = 7$.
6) $a + b + c = 40$; $a = 22$; $S = 250$.
7) $a : b = 3 : 4$; $\beta = 65^0\,18'$; $c = 10$.
8) $\alpha = 39^0\,8'\,44''$; $\beta = 65^0\,32'\,26''$; $r = 10$.
9) $\alpha = 54^0\,16'\,12''$; $\beta = 76^0\,10'\,48''$; $R = 20$.
10) $a : b = 5 : 4$; $a + b = 153$; $\gamma = 50^0\,28'\,16''$.
11) $\alpha - \beta = 15^0\,24$; $\gamma = 40^0\,15'$; $a = 10$.

6. Kolmnurga kõrgus $h = 12$, alusnurgad $\alpha = 37^0\,15'$; $\beta = 45^0\,26'\,19''$. Määrata $\varDelta$-ga pind.

7. Kolmnurga külg $a = 2,47$, $b = 3,05$; ühendades kolmnurga külgede keskkohad, saame rombi; määrata nurgad.

8. Määrata tsentraalnurk, mis toetub sidejoonele $a = 238,35$, sõõris, mille raadius $r = 196,27$.

9. Sõõride raadiused on r_1 ja r_2, tsentride vahe on d. Määrata ühiste välispuutujate vaheline nurk, kui $r_1 = 6,13$; $r_2 = 2,014$, $d = 8,49$.

10. Teravnurga poolitaja jagab kaheks täisnurkse sarikkolmnurga pinna; milline on pinnaosade suhe?

11. Kolm sõõri puutuvad väliselt, nende raadiused suhtuvad nagu $2 : 3 : 4$. Kui suured on nurgad $\varDelta$-as, mille külgedeks on tsentraaljooned?

12. Sarikkolmnurga alus $c = 12$, külg $a = 8$, alus on jagatud kolmeks võrdosaks, osade otspunktid on ühendatud tipuga. Missugusteks osadeks jaguneb tippnurk?

13. Lahutada tung $p = 10$ klm. kaheks vastastikku perpendikulaarseks komponendiks, nii et ühe komponendi ja tungi p vaheline nurk $\alpha = 35^0$.

14. Punktisse A mõjuvad kaks tungi $p_1 = 100$; $p_2 = 120$; tungide vaheline nurk $\alpha = 60^0$. Leida resulteeriva tungi suurus.

15. Kangi õlad on a ja b, esimesse mõjub tung p_1 nurga α all, teisse tung p_2 nurga β all. Määrata nurk β, kui kang on tasakaalus ja $a = 2$ m, $b = 5$ m, $\alpha = 40^0$, $p_1 = 83$ klg, $p_2 = 50$ klg.

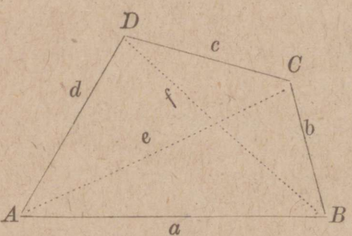
16. Kaldpinnal oleva keha tasakaalus hoidmiseks kulub kaldpinnale paralleelne tung p_1; keha surve pinnale on p_2. Määrata keha raskus p ja pinna kaldenurk α. $p_1 = 96{,}51$ klg, $p_2 = 90$ klg.

17. Horisontaalne laud suudab välja kanda kõige rohkem 1000 kilogrammilise rõhumise. Millise nurga all on laud tarvis üles seada, et ta kannaks 1200-puudalise rõhumise?

18. Kahe kindla punkti külge on kinnitatud horisontaalne köis, selle keskkohas ripub raskus $p = 50$ klg. Milline tung pingutab mõlemat köieosa, kui nende vaheline nurk on 170^0?

5. Nelinurkade väljaarvamine.

Nelinurkade väljaarvamiseks ei tarvitata iseäralisi valemeid. Nelinurk jagatakse diagonaalidega kolmnurkadeks, arvatakse kõige pealt see kolmnurk, milles on teada küllaldane arv elemente; pärast seda on võimalik asuda mõne teise kolmnurga väljaarvamisele jne., kuni leitakse nelinurga nõutavad elemendid.

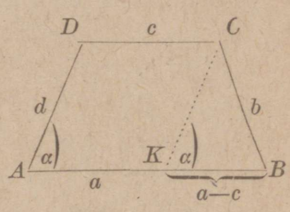


Märkide seletus. Nelinurgas $ABCD$ olgu alus $AB - a$; küljed $BC - b$, $CD - c$, $DA - d$; diagonaalid: $AC - e$, $DB - f$; nurgad $A, B, C, D - \alpha, \beta, \gamma, \delta$. $\sphericalangle (e, a)$ tähendagu nurka CAB jne.

Märkus. Kui ei ole osakolmnurki, mida saaksime välja arvata, siis tuleb geomeetrilisel teel sarnane kolmnurk ehitada.

Näitus. Välja arvata trapeets $ABCD$, kui on antud a, b, c, α.

Tõmmates $CK \parallel AD$, saame kolmnurga KBC, milles on teada kaks külge $KB = a - c$, $BC = b$ ja nurk $CKB = \alpha$. Võime välja arvata külje d ja nurga β. Mitu lahendust on ülesandel?



Joon. 24.

Ülesanded.

1. Tõendada, et parallelogrammi pind võrdub kahe lähiskülje ja nende vahelise nurga *sinuse* kasvatisele. ($S = ab \sin \beta$).

2. Tõendada, et trapeetsi pind $S = \frac{1}{2}(a + c)\, d \sin \alpha$.

3. Tõendada, et parallelogrammi pind võrdub diagonaalide ja nende vahelise nurga *sinuse* kasvatisele [$S = e \cdot f \cdot \sin \sphericalangle (e, f)$].

3a. Tõendada, et iga nelinurga pind võrdub diagonaalide ja diagonaalide vahelise nurga *sinuse* kasvatisele [$S = e \,.\, f \,.\, sin \sphericalangle (e, f)$].

4. Tõendada, et sissejoonistud nelinurga pind

$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$, kus $2p = a + b + c + d$.

Juhatus. $S = \frac{1}{2} ab \sin \beta + \frac{1}{2} cd \sin (180^0 - \beta) = \frac{1}{2}(ab + cd) \sin \beta$.

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos \beta = c^2 + d^2 + 2\,cd \cos \beta\,;$$

siit saame $\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$, meile on aga tarvis $\sin \beta$,

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \ldots.$$

5. Ühtlases (korrapärases) n-nurgas tähendagu a_n külge, r — sissejoonistud ja R — ümberjoonistud sõõri raadiusi S_n — n-nurga pinda. Tõendada, et

$$a_n = 2\,r\,tg\,\frac{180}{n}, \quad R = \frac{n}{\cos \frac{180}{n}}, \quad S_n = n\,r^2\,tg\,\frac{180}{n}.$$

6. Välja arvata parallelogramm (küljed, nurgad, diagonaalid, pind), kui on antud:
1) a, b, β; 2) c, d, γ; 3) a, b, f; 4) $a, \sphericalangle(e, a), \sphericalangle(f, a)$; 5) $e, f, \sphericalangle(e, f)$; 6) S, a, b; 7) a, h_a, b; 8) $h_a, \sphericalangle(e, a), \sphericalangle(f, a)$.

7) Rombi teravnurk on α, lühem diagonaal f. Leida pikem diagonaal e, kui $\alpha = 10^0$, $f = 52, 293$.

8. On antud rombi pind $S = 2015$ ja p ümbermõõt $p = 260$. Välja arvata teravnurk.

9. Täisnurgelise pikem külg $a = 4{,}8063$; ühendades külgede keskkohad saame rombi, mille teravnurk $\alpha = 32^0$. Leida täisnurgelise lühem külg.

10. Välja arvata trapeets, kui on antud:
1) a, b, c, β; 2) a, b, c, α; 3) a, b, c, d; 4) a, b, c, h_a; 5) a, c, h_a, β; 6) a, c, α, β.

11. Välja arvata trapeets, kui on antud:
1) $a = 75$; $b = 52$; $c = 30$; $e = 45$; 2) $a = 17{,}5$; $c = 9{,}4$; $\alpha = 54^0\,16'\,14''$; $\sphericalangle(d, f) = 30^0\,28'\,36''$; 3) $a = 3$; $c = 1{,}8$; $b = d$; $\alpha = 40^0\,59'\,26''$; 4) $a = 10$; $c = 7$; $\alpha = 37^0\,15'$; $S = 71$.

12) Välja arvata sissejoonistud nelinurk, kui on antud:
1) $a = 9$; $b = 10$; $c = 17$; $d = 14$; 2) $a = 93$; $b = 75$; $e = 104$; $\sphericalangle(f, b) = 47^0\,18'\,32''$; 3) $\alpha = 36^0$; $\beta = 72^0$; $S = 144$; $R = 10$; 4) $a = 10$; $d = 6$; $\alpha = 80^0$; $\beta = 65^0$.

13. Välja arvata nelinurk, kui on antud:
1) $a = 7$; $b = 6$; $d = 5$; $f = 6$; $\beta = 50^0\,17'$. 2) $b = 10$; $c = 8$; $d = 6$; $\beta = 44^0\,58'$; $\sphericalangle(e, b) = 33^0\,19'\,27''$. 3) $b = 25$; $b = 18$; $c = 15$; $d = 14$; $\sphericalangle(e, b) = 30^0\,25'\,47''$. 4) $a, b, \alpha, \beta, \gamma$. 5) a, b, c, d, α. 6) $a, f, e, \sphericalangle(f, a), \delta$.

14. Nelinurga diagonaalid $e = 17$ ja $f = 22$, $\sphericalangle(e, f) = 75^0\,42'\,58''$. Määrata pind S?

15. Määrata sõõrisse joonistud ühtlase 16-nurga ümbermõõt ja pind, kui sõõri raadius $R = 10$.

16. Ühtlase 25-nurga külg $a_{25} = 0{,}4$. Määrata sisse- ja ümberjoonistud sõõride raadiused.

17. Ühtlase 20-nurga pind $S = 2{,}46$. Määrata hulknurga külg a_{20} ja R.

18. Ühtlase 10-nurga ja 12-nurga ümbermõõdud on võrdsed. Määrata nende pindade suhe.

19. Määrata ühtlase 200-nurgelise ümbermõõdu suhe sõõri diameetrisse ($P_n : 2\,R$) ja võrrelda saadud suhe π-ga.

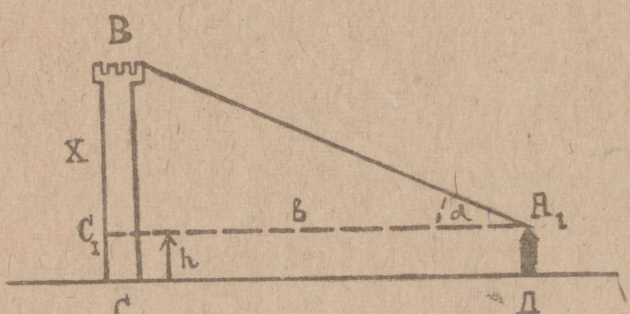
20. Määrata segmendi pind, kui vastav tsentraal-nurk $\alpha = 20^0\,15'$ ja sõõri raadius $R = 5$.

V peatükk.

Trigonomeetria tarvitamine topograafiliste ülesannete lahendamisel.

1. Topograafilisteks nimetakse neid maapinnal tehtud mõõtmisi, millede abil tahetakse määrata mõnede kohtade kaugused ehk kõrgused. Trigonomeetria võimaldab selle määramise isegi siis, kui koht on ligipääsmatu. Selleks võetakse tasasel maapinnal mõni sirgjoon — nõndanimetatud *baas* — ja mõõdetakse selle pikkus kõige võimaliku täpipealsusega, sest viga baasi mõõtmises mõjub kõigisse järgnevaisse väljaarvamisisse. Baas mõõdetakse keti ehk nööriga, nurgad aga teodoliidiga.

1. ülesanne. Määrata horisontaalsel tasapinnal asuva vertikaalse keha kõrgus, kui on võimalik keha alusele ligi pääseda.



Joon. 25.

Valime maapinnal punkti A ja mõõdame selle kauguse tornist; olgu $AC = b$. Siin seame teodoliidi punkti A kohale, mõõdame torni tipu nurkkõrguse α ja teodoliidi kõrguse $AA_1 = h$. Kolmnurgast A_1BC_1 saame:

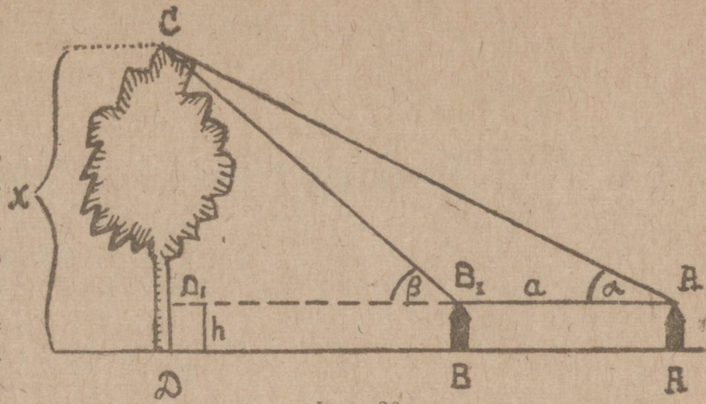
$$x - h = b\, tg\, \alpha$$

siit:

$$\underline{x = b\, tg\, \alpha + h.}$$

2. ülesanne. Määrata horisontaalsel tasapinnal asuva vertikaalse keha kõrgus, kui keha alus on ligipääsmatu.

Võtame keha CD sihis horisontaalse baasi AB; mõõdame selle pikkuse $AB = a$ ja keha nurk-kõrgused punktides A ja B, olgu need α ja β. Lõpuks peame teadma teodoliidi kõrguse $A_1A = B_1B = h$. Kolmnurgas A_1CB_1 on $\sphericalangle A_1CB_1 = \beta - \alpha$, tähendab, $CB_1 : a = \sin\alpha : \sin(\beta - \alpha)$.



Joon. 26.

Ehk $CB_1 = \dfrac{a \sin\alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$.

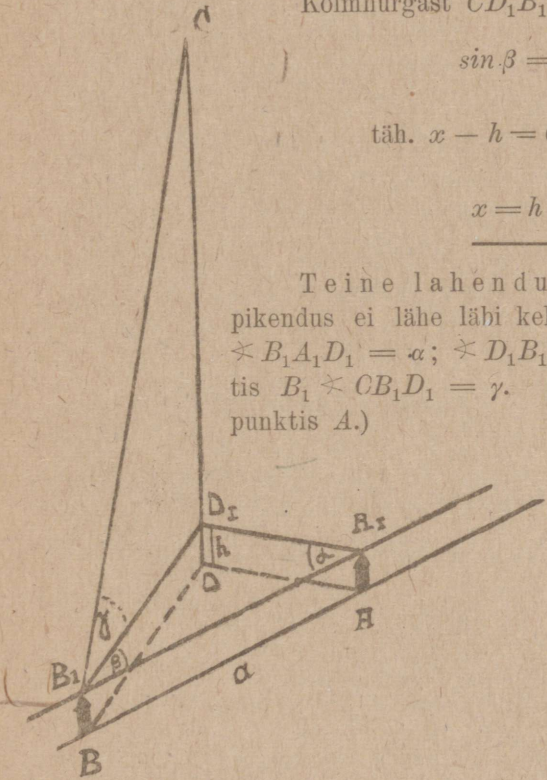
Kolmnurgast CD_1B_1 saame

$$\sin\beta = \frac{CD_1}{CB_1} = \frac{x - h}{CB_1};$$

$$\text{täh. } x - h = CB_1 \sin\beta = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)};$$

$$\underline{x = h + \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}}.$$

Teine lahendusviis. Võtame baasi AB, mille pikendus ei lähe läbi keha aluse. Olgu $AB = A_1B_1 = a$, $\sphericalangle B_1A_1D_1 = \alpha$; $\sphericalangle D_1B_1A_1 = \beta$ ja keha nurk-kõrgus punktis B_1 $\sphericalangle CB_1D_1 = \gamma$. (Võiksime mõõta ka nurk-kõrguse punktis A.)



Joon. 27.

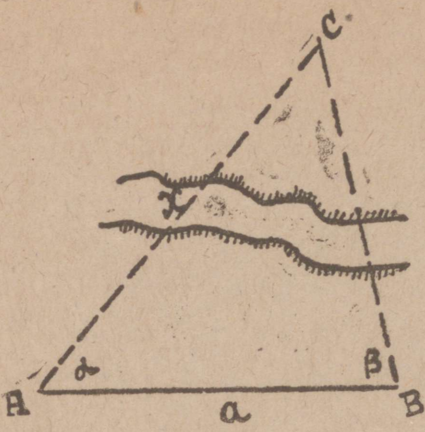
$\triangle$-st $A_1B_1D_1$ leiame:

$$B_1D_1 = \frac{a \,.\, \sin\alpha}{(\sin\alpha + \beta)};$$

$$CD_1 = x - h = B_1D_1 \, tg\,\gamma, \text{ täh.}$$

$$\underline{x = h + \frac{a \sin\alpha \, tg\,\gamma}{\sin(\alpha + \beta)}}.$$

3. ülesanne. Määrata kahe punkti kaugus üksteisest, kui võimalik on ainult ühele ligi pääseda.



Joon. 28.

Tahetakse mõõta kättesaamatu punkti C kaugus A-st. Võtame baasi AB ja mõõdame tema pikkuse a, mõõdame nurgad $CAB = \alpha$ ja $CBA = \beta$.

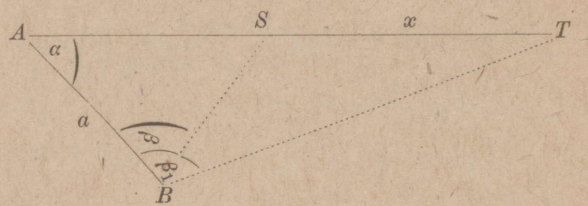
Kolmnurgast ABC leiame

$$x = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

4. ülesanne. Määrata kahe ligipääsmatu punkti kaugus üksteisest.

1. lahendusviis: Punkte ühendav sirgjoon läheb läbi baasi lõpppunkti.

Mõõdame baasi $AB = a$ ja nurgad $BAS = \alpha$, $ABS = \beta$, $ABT = \beta_1$.



Joon. 29.

Kolmnurgast ABS:

1) $BS = \dfrac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$.

Kolmnurgas BTS:

$\sphericalangle SBT = \beta_1 - \beta$;

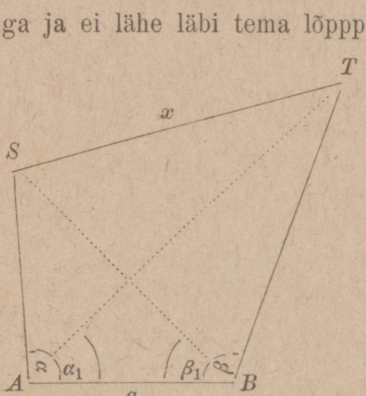
$\sphericalangle BTS = 180^0 - (\alpha + \beta_1)$;

$$\text{täh.} \quad x = \frac{BS \, . \sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\alpha + \beta_1)};$$

asemele pannes

$$x = \frac{a \, . \sin \alpha \sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta_1)}.$$

2. lahendusviis: Punkte ühendav sirgjoon on ühel tasapinnal baasiga ja ei lähe läbi tema lõpppunkti.



Joon. 30.

Tarvis on mõõta baas $AB = a$ ja nurgad α, α_1, β, β_1. Pikkuse $ST = x$ võime välja arvata kas kolmnurgast AST ehk BST, sest kolmnurgas AST on teada:

1) $\sphericalangle SAT = \alpha - \alpha_1$;

2) $AS = \dfrac{a \sin \beta_1}{\sin(\alpha + \beta_1)}$ ja

3) $AT = \dfrac{a \sin \beta}{\sin(\alpha_1 + \beta)}$.

Samuti on ka kolmnurgas BST teada küllaldane arv elemente.

Ülesanded.

1. a m kauguselt on torn näha nurga α all. Määrata torni kõrgus x, kui teodoliidi kõrgus on h. $a = 75{,}3$; $\alpha = 63^0\,20'\,36''$; $h = 1{,}5$.

2. Kahe meetri kõrgune vertikaalne kepp heidab ühe meetri pikkuse varju. Kui kõrgel on päike?

3. Torn, mille kõrgus H, on näha nurga α all. Kui kaugel on vaatlemiskoht torni aluselt, kui teodoliidi kõrgus on h m. $H = 78{,}8$; $\alpha = 17^0\,44'\,46''$; $h = 2{,}6$.

4. Punktist A, mis on ühel horisontaalsel tasapinnal torni alusega, paistab torni tipp nurga α all. Ligineades punktist A tornile b meetri võrra, näeme torni tippu nurga β all. Leida torni kõrgus. $\alpha = 35^0\,9'\,29''$; $b = 76$; $\beta = 56^0\,35'$.

5. Mäe peal asub torn, mille kõrgus on h m. All orus olev keha on torni tipult näha nurga α all (madalamal torni tipu horisondist) ja torni jalalt nurga β all. Kui kõrge on mägi? $h = 45$, $\alpha = 35^0 30'$, $\beta = 30^0 45'$.

6. Torni aluselt on tõmmatud horisontaalne sirgjoon, mille pikkus on b m. Torni tipult on sirgjoone otspunkt näha nurga α all. Kui kõrge on torn? $b = 100$ m, $\alpha = 15^0$.

7. Torni kõrgus on h m, tema kaugus jõelt $= a$ m. Kui lai on jõgi, kui tema näib torni tipult nurga β all? $h = 30$; $a = 60$; $\beta = 15^0$.

8. Torni tipult, mille kõrgus $h = 67$ m, on näha teise samal horisontaalsel tasapinnal asuva torni tipp nurga all $\alpha = 36^0 31'$ ja tema jalg nurga all $\beta = 57^0 49'$. Kui kõrge on teine torn?

9. Määrata ligipääsmatu punkti C kaugus punktist A. Baas $AB = a = 322{,}55$ m, $\sphericalangle\, BAC = 60^0 34'$ ja $\sphericalangle\, ABC = 56^0 10'$.

10. Määrata ligipääsmatute punktide S ja T kaugus üksteisest. Baas $AB = 100$ m, $\sphericalangle\, SAB = 96^0 40'$, $\sphericalangle\, TAB = 52^0 40'$, $\sphericalangle\, SBA = 57^0 1'$ $\sphericalangle\, TBA = 87^0 15'$.

11. Lahendada ülesanne 10, kui $AB = 148{,}96$ m, $\sphericalangle\, SAB = 107^0 16'$, $\sphericalangle\, TAB = 97^0 30'$, $\sphericalangle\, SBA = 45^0 11' 20''$ ja $\sphericalangle\, TBA = 59^0 28' 35'$.

12. Jõe kaldale on tõmmatud sirgjoon AB, mille pikkus $a = 41{,}2$ m, jõe teisel kaldal on kivi C. Määrata jõe laius, kui $\sphericalangle\, CAB = 68^0$ ja $\sphericalangle\, CBA = 71^0$.

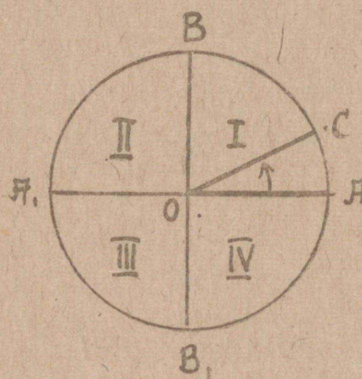
Teine osa.

VI peatükk.

1. Nurga mõiste üldistamine.

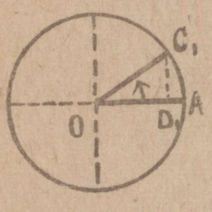
Senini käsitlesime nurki, mis olid väiksemad kui 180^0. Paljudes uurimistes on aga soovitav vaadelda unrki, mis suuremad kui 180^0; sellepärast on tarvis üldistada esimeses osas antud mõisteid ja definitsioone. Kujundame sõõrjoone raadiusel r. Tõmbame raadiused OA ja OC; oletame, et raadius OA on *liikumata*, aga OC pöördub punkti O ümber. Pöördumine loetakse *positiivseks*, kui ta on sihitud vastu päeva, ja *negatiivseks*, kui ta on sihitud peri päeva. Kui raadius OC pöördub algusseisust OA positiivses sihis, siis saame *positiivse nurga*, pöördub ta aga negatiivses sihis, siis saame *negatiivse nurga*.

Nurga seisu lähemaks äramääramiseks tõmbame diameetri AA_1, mis läheb läbi alguspunkti A ja diameetri BB_1, mis on perpendikulaarne AA_1-le. Need diameetrid jagavad sõõri neljaks veerandiks ehk kvadrandiks: esimene — AOB, teine — BOA_1, kolmas — A_1OB_1, neljas — B_1OA.

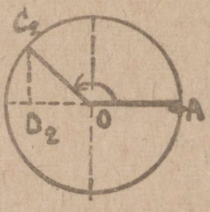


Joon. 31.

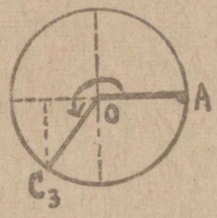
Joon. 31 ja 32 on nurk AOC I-ses veerandis, see nurk on $< 90^0$; raadiuse OC pöördudes positiivses sihis üle 90^0, saame nurga II-ses veerandis (joon. 33). Pöördub aga OC positiivses sihis kaugemale kui OA_1, siis saame nurga III-as



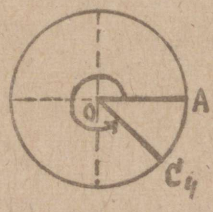
Joon. 32.



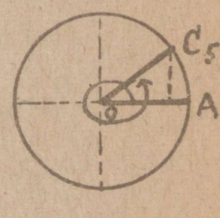
Joon. 33.



Joon. 34.



Joon. 35.



Joon. 36.

veerandis, mis on suurem kui 180^0 (joon. 33); IV-da veerandi nurk on suurem kui 270^0 (joon. 34). Pöördub aga OC rohkem kui 360^0 ja tuleme uuesti tagasi I-sse veerandisse (joon. 35), siis öeldakse: nurk AOC *lõpeb* I-ses veerandis, ehk nurk AOC on V-ndas veerandis j. n. e.

Ülesanded. 1. Mitu kraadi pöördub kella minutinäitaja 45 minuti jooksul? 1 tunni 15 min.? 2 tunni 35 min. jooksul?

2. Masina ratas pöördub sekundis 15^0, kui palju pöördub ta 1 minutis?

3. Millises veerandis lõpeb nurk 395^0? 7854^0? 6710^0? 1459^0?

2. Trigonomeetriliste funktsioonide ülddefinitsioon.

Kui liikuva raadiuse otsast (joon. 31—35) lasta perpendikulaar liikumatule, siis saame täisnurkse kolmnurga, mille külgedeks on liikuv *raadius*, *perpendikulaar* ja liikuva raadiuse *projektsioon* liikumatule.

Kui nurk α on I-ses veerandis, näit. $\alpha = \measuredangle AOC_1$ (joon. 31), siis nimetasime tema sinuseks perpendikulaari C_1D_1 suhte radiusse OC_1, tema cosinuseks projektsiooni OD_1 suhte raadiusse OC_1 j. n. e.

Samati määrasime ka II-ses veerandis oleva nurga trigonomeetrilised funktsioonid.

Kokkukõlas sellega määrame kõikide nurkade goniomeetrilised ehk trigonomeetrilised funktsioonid järgmiselt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{perpendikulaar}}{\text{raadius}}; \qquad \cos\alpha = \frac{\text{projektsioon}}{\text{raadius}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{perpendikulaar}}{\text{projektsioon}}; \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{projektsioon}}{\text{perpendikulaar}}.$$

Märgid. Liikuv raadius R loetakse absoluutseks suuruseks, sest et tema pikkus ei muutu.

Perpendikulaarid loetakse:

I ja II veerandis positiivseks (ülalpool horisontaaljoont).

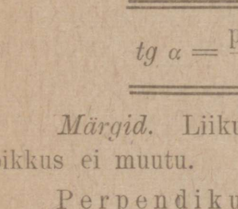
III ja IV veerandis negatiivseks (allpool horisontaaljoont).

Projektsioonid loetakse:

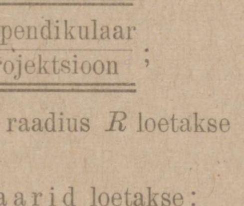
I ja IV veerandis positiivseks (paremalpool punkti O).

II ja III veerandis negatiivseks (pahemalpool punkti O).

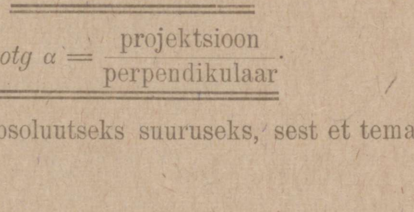
Nende määruste põhjal saame goniomeetrilistele funktsioonidele neljas veerandis järgmised märgid:



Joon. 37.



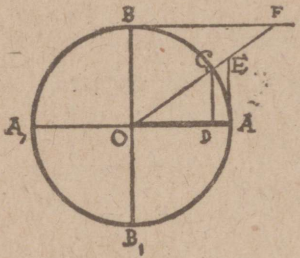
Joon. 38.



Joon. 39.

3. Funktsioonide kujutamine joonlôikude abil.

Võtame sõõris (joon. 40), mille raadius $OA = 1$, nurga $COA = \alpha$ (I-ses veerandis), tõmbame OA-le punktist C perpendikulaari CD, tõmbame puutuja sõõrile punktis A_1 — nõndanimetatud alguspuutuja — kuni lõikumiseni külje OC pikendusega ja punktist B tõmbame $BF \perp BO$ kuni lõikumiseni külje OC pikendusega.



Joon. 40.

Siis saame:

$$1)\ sin\,\alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{CD}{1} = CD,$$

CD — perpendikulaar liikuva raadiuse otsast liikumatule — nimetakse sinusjooneks.

$$2)\ cos\,\alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{1} = OD,$$

OD — liikuva raadiuse projektsioon liikumatule — nimetakse cosinusjooneks.

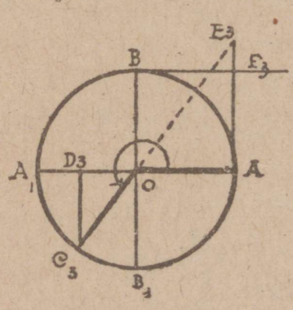
$$3)\ tg\,\alpha = \frac{CD}{DO} = \frac{EA}{AO} = \frac{EA}{1} = EA,$$

joonlõik EA, mille liikuv raadius OC lõikab alguspuutujal, nimetakse tangensjooneks.

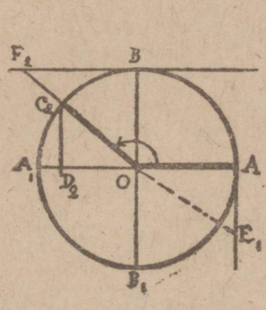
$$4)\ cotg\,\alpha = \frac{OD}{CD} = \frac{BF}{BO} = \frac{BF}{1} = BF,$$

joonlõik BF, mille liikuv raadius OC lõikab puutujal punktis B, nimetakse cotangensjooneks.

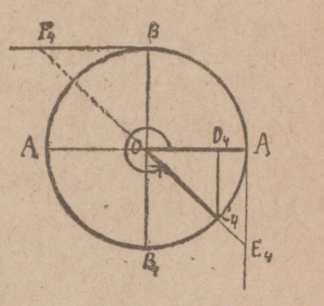
Täiesti analoogilise konstruktsiooni võime sooritada nurkadele II-ses, III-ndas ja IV-ndas veerandis (joon. 41—43).



Joon. 41.



Joon. 42.

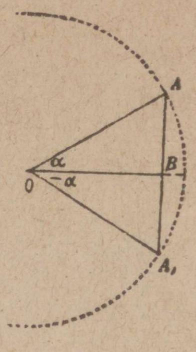


Joon. 43.

Ülesanne. 1. Määrata trigonomeetriliste funktsioonide märgid kõigis veerandites joonistuste 40—43 põhjal.

2. Tõendada, et põhivalemid: $sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$, $tg\,\alpha = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}$, $tg\,\alpha \,.\, cotg\,\alpha = 1$ on maksvad ka üldistatud funktsioonide juures.

4. Negatiivsete nurkade funktsioonid.



Joon. 44.

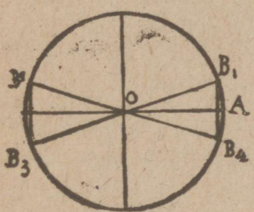
Positiivse nurga saame liikuva raadiuse OB pöördudes positiivses sihis (s. t. vastu päeva ehk pahemale poole). Pöördub aga liikuv raadius negatiivses sihis (s. t. peri päeva ehk paremale poole), siis saame negatiivse nurga. Joonistusest 44 selgub, et

$$\underline{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}, \quad \underline{\cos(-\alpha) = -\cos\alpha},$$

$$\underline{tg(-\alpha) = -tg\,\alpha}, \quad \underline{cotg(-\alpha) = -cotg\,\alpha}.$$

Ülesanne. Näidata, et ülaltoodud valemid jäävad õigeks ka siis, kui nurk α on II, III ehk IV veerandis.

5. Redutseerimise valemid.



Joon. 45.

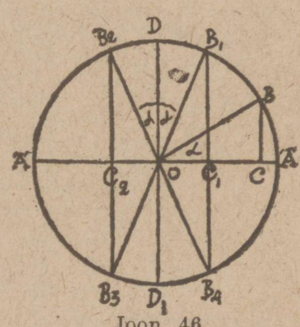
Tõmbame sõõris (joon. 45), mille raadius $OA = 1$, kaks diameetrit, mis sümmeetrilised teljele OA. Kui $\measuredangle AOB_1 = \alpha$, siis

$$\measuredangle AOB_2 = 180^0 - \alpha \qquad \text{(II v.)},$$
$$\measuredangle AOB_3 = 180^0 + \alpha \qquad \text{(III v.)},$$
$$\measuredangle AOB_4 = 360^0 - \alpha \qquad \text{(IV v.)}.$$

Nende nurkade *sinus-* ja *cosinus*jooni võrreldes, leiame:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha \qquad \sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
täh. ka $$tg(180^0 - \alpha) = -tg\,\alpha \qquad tg(180^0 + \alpha) = tg\,\alpha$$
$$cotg(180^0 - \alpha) = -cotg\,\alpha \qquad cotg(180^0 + \alpha) = cotg\,\alpha$$

$$\sin(360^0 - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360^0 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$tg(360^0 - \alpha) = -tg\,\alpha$$
$$cotg(360^0 - \alpha) = -cotg\,\alpha$$



Joon. 46.

Tõmbame nüüd kaks diameetrit, B_1B_3 ja B_2B_4, mis sünnitavad nurga α teljega DD_1. (Joon. 46.)

$$\measuredangle AOB_1 = 90^0 - \alpha \qquad \text{(I v.)}$$
$$\measuredangle AOB_2 = 90^0 + \alpha \qquad \text{(II v.)}$$
$$\measuredangle AOB_3 = 270^0 - \alpha \qquad \text{(III v.)}$$
$$\measuredangle AOB_4 = 270^0 + \alpha \qquad \text{(IV v.)}.$$

Võrdsetest kolmnurkadest saame:

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg(90^0 - \alpha) = cotg\,\alpha \qquad tg(90^0 + \alpha) = -cotg\,\alpha$$
$$cotg(90^0 - \alpha) = tg\,\alpha \qquad cotg(90^0 + \alpha) = -tg\,\alpha$$

$$\sin(270^0 - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \sin(270^0 + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\cos(270^0 - \alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(270^0 + \alpha) = \sin\alpha$$
$$tg(270^0 - \alpha) = cotg\,\alpha \qquad tg(270^0 + \alpha) = -cotg\,\alpha$$
$$cotg(270^0 - \alpha) = tg\,\alpha \qquad cotg(270^0 + \alpha) = -tg\,\alpha.$$

Edasi, nurk $360^0 + \alpha$ algab ja lõpeb sealsamas kus nurk α (joon. 36); tähendab, nende nurkade ühenimelised goniomeetrilised funktsioonid peavad olema võrdsed

$$\sin(360^0 + \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(360^0 + \alpha) = \cos\alpha.$$

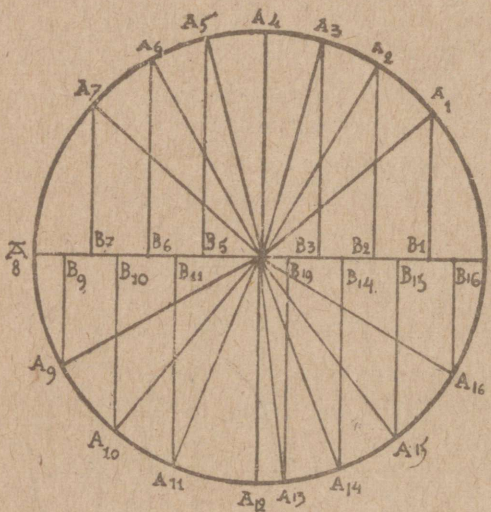
Sinus ja *cosinus* ei muutu argumendi kasvades 360^0 võrra. Sellest järgneb ka, et

$$\underline{\sin(360^0 . k + \alpha) = \sin\alpha;}$$
$$\underline{\cos(360^0 . k + \alpha) = \cos\alpha;}$$

kus k on mistahes täisarv.

Tangensi ja *cotangensi* kohta tõendasime valemid

$$tg(180^0 + \alpha) = tg\,\alpha; \quad cotg(180^0 + \alpha) = cotg\,\alpha.$$



Joon. 47.

Täh., *tangens* ja *cotangens* ei muutu argumendi kasvades 180^0 võrra, järjelikult ei muutu nad ka argumendi kasvades $180^0 . k$ võrra, kus k on mistahes täisarv.

$$\underline{tg(180^0 . k + \alpha) = tg\,\alpha;}$$
$$\underline{cotg(180^0 . k + \alpha) = cotg\,\alpha.}$$

Definitsioon. Funktsioonid, mis ei muutu — ei suuruselt ega märgilt — kui argument teatud arvu võrra kasvab, nimetakse *perioodseiks funktsiooneks.* Trigonomeetrilised funktsioonid on perioodsed; *sinuse* ja *cosinuse* periood on 360^0, *tangensi* ja *cotangensi* periood aga 180^0.

6. Funktsioonide muutumine.

Trigonomeetrilisi funktsioone kujutavad joonlõigud näitavad selgesti funktsioonide muutumist nurga muutudes. Kujundame sööri raadiusel 1. Sinusjoonteks on A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 . . $A_{15}B_{15}$, $A_{16}B_{16}$, cosinusjoonteks on B_1O, B_2O, B_3O . . . $B_{15}O$, $B_{16}O$; neid vaadeldes leiame:

Nurga suurenedes	*Sinus* on	*Cosinus* on
0^0 — 90^0 (I v.)	positiivne, suureneb 0 kuni 1.	positiivne, väheneb 1 kuni 0.
90^0 — 180^0 (II v.)	positiivne, väheneb 1 kuni 0.	negatiivne väheneb 0 kuni 1.
180^0 — 270^0 (III v.)	negatiivne, väheneb 0 kuni —1.	negatiivne suureneb —1 kuni 0.
270^0 — 360^0 (IV v.)	negatiivne, suureneb —1 kuni 0.	positiivne suureneb 0 kuni 1.
360^0 — 450^0 (V v.)	nagu I-ses v.	nagu I-ses v.

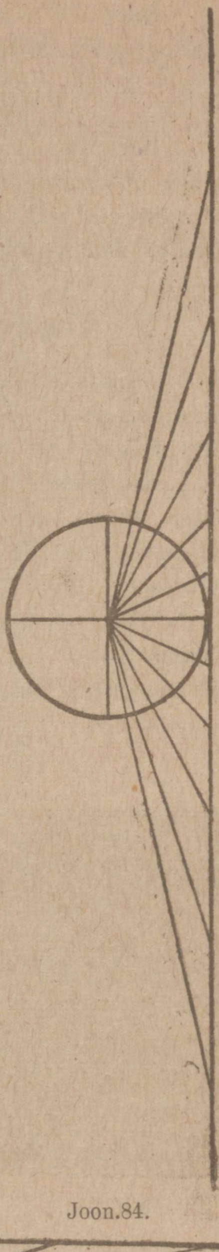
j. n. e.

Vaadeldes *tangensi* ja *cotangensi* kujutavaid joonlõike (joon. 48 ja 49) leiame:

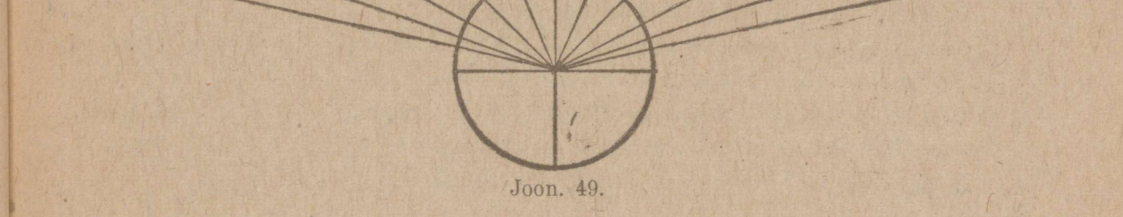
Nurga suurenedes	*Tangens* on	*Cotangens* on
0^0 - 90^0 (I v.)	positiivne, suureneb 0 kuni ∞.	positiivne, väheneb ∞ kuni 0.
90^0 — 180^0 (II v.)	negatiivne, suureneb $-\infty$ kuni 0.	negatiivne, väheneb 0 kuni $-\infty$.
180^0 — 270^0 (III v.)	positiivne, suureneb 0 kuni ∞.	positiivne, väheneb ∞ kuni 0.
270^0 — 360^0 (IV v.)	negatiivne, suureneb $-\infty$ kuni 0.	negatiivne, väheneb 0 kuni $-\infty$.

Märkus. Kui ε on väga väike nurk, siis $tg\,(90^0 - \varepsilon) = M =$ väga suur positiivne arv, ε vähenedes suureneb M alatasa ja võib saada suuremaks igast arvust nii suur kui tahes. Teisiti öeldakse seda nii: Nurga $(90^0 - \varepsilon)$ *tangensi* piiriks, ε lõputa vähenedes on positiivne lõpmatus, ehk

$$lim\, tg\,(90^0 - \varepsilon)_{\varepsilon = 0} = +\infty.$$



Joon. 84.



Joon. 49.

Nurk $90^0 + \varepsilon$ on II-ses veerandis, tema *tangens* on negatiivne ja seda suurem, mida väiksem on ε:

$$lim\, tg\, (90^0 + \varepsilon)_{\varepsilon\, =\, 0} = -\infty.$$

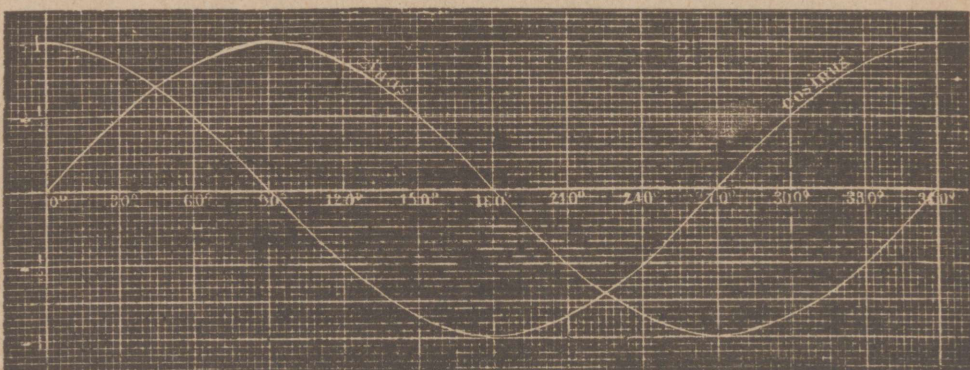
Kokkuvõte. *Sinuse* ja *cosinuse* suurus kõigub -1 ja $+1$ vahel, nende absoluutne väärtus ei või olla suurem kui 1; üldjuhusel on ta lihtmurd. *Tangensi* ja *cotangensi* suurus kõigub $-\infty$ ja $+\infty$ vahel, missugune ka oleks reaalne arv N, alati võime leida nurga, mille *tangens* on N.

7. Trigonomeetriliste funktsioonide graafiline kujutamine.

Funktsioonide graafiliseks kujutamiseks võetakse kaks vastastikku perpendikulaarset sirgjoont, *nn.* koordinaatide teljed — OX ja OY. Sirgjoonele OX — ehk abstsisside teljele — mõõdetakse joonlõigud, mis proportsionaalsed argumentidele s. t. nurkadele; joonlõikude otsadest tõmmatakse perpendikulaarid OX-le, ja neile mõõdetakse joonlõigud, mis proportsionaalsed vastavate nurkade funktsioonidele. Saadud punkte ühendav kõverjoon ongi funktsiooni graafiliseks kujutuseks.

Esimese veerandi nurkade funktsioonväärtused leiame küllaldase täpisusega joonist 6. Redutseerimise valemite abil leiame ka kõigi teiste nurkade funktsioonväärtused. Neid väärtusi graafiliselt kujutades, saame järgmised kõverjooned.

a) *Sinuse* ja *cosinuse* kõver.



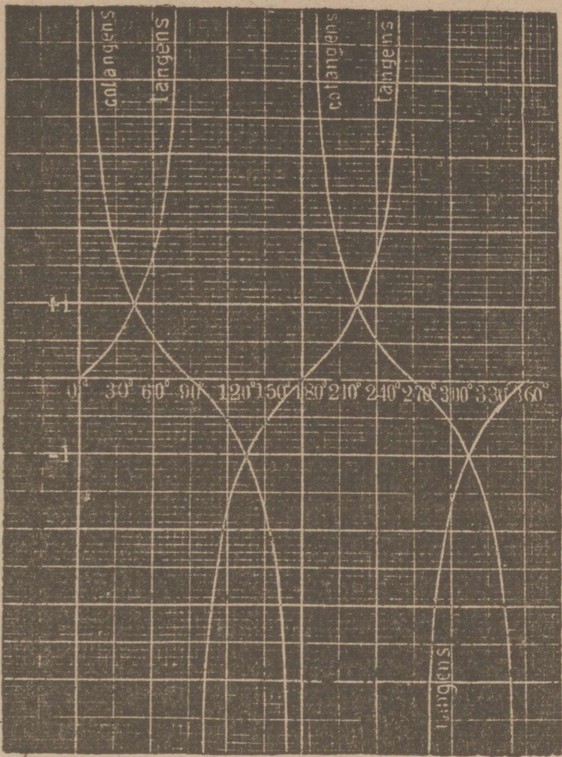
Joon. 50.

Funktsioonide graafikad näitavad:

1. *Sinuse* ja *cosinuse* kõverad on katketud jooned; *sinus* ja *cosinus* on järjelikult katketud funktsioonid.

2. *Tangensi* ja *cotangensi* kõverad on katkelised, näit. kui nurk läheb suurenedes üle 90^0, siis tema *tangens* teeb hüppe $+\infty$ kuni $-\infty$; *tangens* ja *cotangens* on katkelised funktsioonid.

b) *Tangensi* ja *cotangensi* kõver.



Joon. 51.

3. Trigonomeetrilised funktsioonid on perioodsed; *sinuse* ja *cosinuse* periood on 360^0, *tangensi* ja *cotangensi* periood 180^0.

VII peatükk.

Trigonomeetriliste avalduste teisendamine.

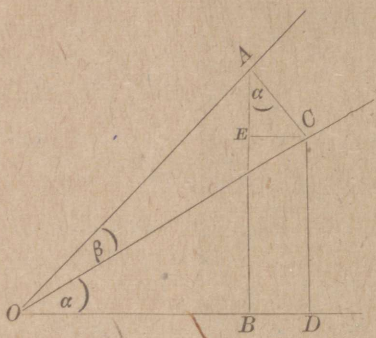
1. Nurkade summa *sinus* ja *cosinus*.

$\sin(\alpha+\beta)$ ja $\cos(\alpha+\beta)$.

1. Juhus. $\alpha+\beta<90^0$. Kujundame nurkade α ja β summa $\alpha+\beta$ (Joon. 52). Võtame äärküljel mistahes punkti A ja tõmbame $AB\perp OB$, $AC \perp OC$, $CE\perp AB$. $\measuredangle CAE = \measuredangle COB = \alpha$, sest nende küljed on vastastikku perpendikulaarsed. Joonistusest võime kirjutada:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AB}{OA} = \frac{CD+AE}{OA} = \frac{OC\sin\alpha + AC\cos\alpha}{OA};$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{OC}{OA}\sin\alpha + \frac{AC}{OA}\cos\alpha, \text{ aga } \frac{OC}{OA} = \cos\beta, \frac{AC}{CA} = \sin\beta, \text{ täh.}$$



Joon. 52.

I. $\underline{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.}$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OB}{OA} = \frac{OD-CE}{OA} = $$
$$= \frac{OC\cos\alpha - AC\sin\alpha}{OA}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OC}{OA}\cos\alpha - \frac{AC}{OA}\sin\alpha.$$

II. $\underline{\cos\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.}$

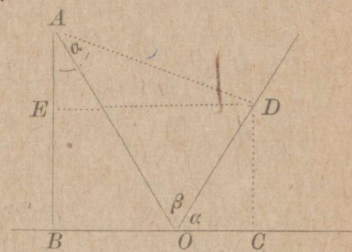
2. J u h u s. $\alpha < 90^0$; $\beta < 90^0$; $\alpha+\beta > 90^0$ — tömpnurk.

Korrates 1 juhuse konstruktsiooni (joon. 53), võime kirjutada:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{AB}{OA} = \frac{DC+AE}{OA} = \frac{OD\sin\alpha}{OA} + \frac{AD\cos\alpha}{OA} = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Samuti

$$\cos(\alpha+\beta) = -\frac{OB}{OA} = \frac{OC-BC}{OA} = \frac{OD\cos\alpha}{OA} - \frac{AD\sin\alpha}{OA} =$$
$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$



Joon. 53.

Saime tõesti samad valemid, kui 1 juhusel, täh. valemid on õiged kõigi t e r a v n u r k a d e juures. Et valemeid laiendada kõigi nurkade tarvis, selleks tõendame

Abilause: K u i v a l e m i d

$\underline{\sin(\mu+\nu) = \sin\mu\cos\nu + \cos\mu\sin\nu}$

$\underline{\cos(\mu+\nu) = \cos\mu\cos\nu - \sin\mu\sin\nu}$

o n õ i g e d m i n g i s u g u s t e a n t u d n u r k a d e μ j a ν j u u r e s, s i i s j ä ä v a d n a d õ i g e k s k a s e l j u h u s e l k u i ü h e l e n e i s t n u r k a d e s t j u u r d e l i s a m e 90^0.

T õ e n d u s. Lisame, näit. nurgale μ juurde 90^0 saame $\mu_1 = \mu + 90^0$ ja näitame, et valemid jäävad õigeks nurga $(\mu_1 + \nu)$ tarvis. Tõepoolest:

$$\sin(\mu_1+\nu) = \sin(90^0+\mu+\nu) = \sin[90^0+(\mu+\nu)] = \cos(\mu+\nu).$$

Tingimuse põhjal on aga $\cos(\mu+\nu) = \cos\mu\cos\nu - \sin\mu\sin\nu$.

Tähendab,

$$\sin(\mu_1+\nu) = \cos\mu\cos\nu - \sin\mu\sin\nu,$$

ehk, pannes paremale poole μ asemele $\mu = \mu_1 - 90^0$:

$$(A)\qquad \begin{aligned} \underline{\sin(\mu_1 + \nu)} &= \cos(\mu_1 - 90^0)\cos\nu - \sin(\mu_1 - 90^0)\sin\nu \\ &= \cos(90^0 - \mu_1)\cos\nu + \sin(90^0 - \mu_1)\sin\nu \\ &\underline{= \sin\mu_1 \cos\nu + \cos\mu_1 \sin\nu.} \end{aligned}$$

Samuti *cosinuse* tarvis:

$$(B)\qquad \begin{aligned} \underline{\cos(\mu_1 + \nu)} &= \cos(90^0 + \mu + \nu) = \cos[90^0 + (\mu + \nu)] = \\ &= -\sin(\mu + \nu) = -\sin\mu\cos\nu - \cos\mu\sin\nu = \\ &= -\sin(\mu_1 - 90^0)\cos\nu - \cos(\mu_1 - 90^0)\sin\nu = \\ &= \sin(90^0 - \mu_1)\cos\nu - \cos(90^0 - \mu_1)\sin\nu = \\ &\underline{= \cos\mu_1\cos\nu - \sin\mu_1\sin\nu.} \end{aligned}$$

Mis oligi tarvis tõendada.

Üldistus. Valemid A ja B on antud tingimustel õiged. Tõendatud abilause põhjal jäävad nad õigeks ka siis, kui ühele nurgale, näit. ν-le juurde lisada 90^0. Kui $\nu_1 = \nu + 90^0$, siis on õiged valemid

$$(A_1)\qquad \sin(\mu_1 + \nu_1) = \sin\mu_1\cos\nu_1 + \cos\mu_1\sin\nu_1.$$

$$(B_1)\qquad \cos(\mu_1 + \nu_1) = \cos\mu_1\cos\nu_1 + \sin\mu_1\sin\nu_1.$$

Tõendatud abilause põhjal jäävad valemid A_1 ja B_1 õigeks siis, kui μ_1 asemele kirjutada $\mu_2 = \mu_1 + 90^0$ jne., jne., võime korrata seda tõendust, kuni tuleme kui tahes suurte nurkade juure. Tähendab, valemid I ja II, mis meie tõendasime esialgu ainult teravnurkade tarvis, on õiged kõigi positiiviste nurkade juures.

2. Nurkade vahe *sinus* ja *cosinus*.

Sin $(\alpha - \beta)$ ja *cos* $(\alpha - \beta)$ leidmiseks laiendame summa valemid I ja II *negatiiviste* nurkade tarvis. Olgu, näit., ν negatiivne; sellele nurgale lisame juurde k korda 360^0, nii et saame positiivse nurga. Kui ν-le juurde lisada $360^0 . k$, siis suureneb ka summa $(\mu + \nu)$ $360^0 . k$ võrra, $\sin(\mu + \nu)$ ja $\cos(\mu + \nu)$ aga ei muutu argumendi kasvades $360^0 . k$ võrra. Võime kirjutada

$$\sin(\mu + \nu) = \sin[\mu + (360^0 k + \nu)]$$
$$\cos(\mu + \nu) = \cos[\mu + (360^0 k + \nu)].$$

Nurgad μ ja $(360^0 . k + \nu)$ on mõlemad positiivsed, täh. võime tarvitada valemeid I ja II, sellepärast

$$\sin(\mu + \nu) = \sin[\mu + (360^0 . k + \nu)] = \sin\mu\cos(360^0 . k + \nu) + \\ + \cos\mu\sin(360^0 . k + \nu);$$

$$\cos(\mu + \nu) = \cos[\mu + (360^0 . k + \nu)] = \cos\mu\cos(360^0 . k + \nu) - \\ - \sin\mu\sin(360^0 . k + \nu);$$

aga $\qquad \sin(360^0 . k + \nu) = \sin\nu;\quad \cos(360^0 . k + \nu) = \cos\nu$

täh. $\qquad \sin(\mu + \nu) = \sin\mu\cos\nu + \cos\mu\sin\nu$

$$\cos(\mu + \nu) = \cos\mu\cos\nu - \sin\mu\sin\nu.$$

Valemid I ja II on maksvad siis, kui üks nurk on negatiivne. Analoogiliselt võib tõendada, et nad on õiged ka siis, kui mõlemad nurgad on negatiivsed.

Olgu $\mu = \alpha$; $\nu = -\beta$, siis võime eelmised valemid ümber kirjutada:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta);$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin(-\beta).$$

III. $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\, \mathit{eos}\,\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

IV. $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

3. Nurkade summa ja vahe *tangens* ja *cotangens*.

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}.$$

Jagame murru lugija ja nimetaja iga liikme $\cos\alpha \,.\, \cos\beta$-le, siis saame:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha \cos\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - \dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}},$$ koondades

V. saame $$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\, tg\,\beta}.$$

$$cotg(\alpha + \beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}.$$

Jagades murru iga liikme $\sin\alpha \sin\beta$-le saame:

$$cotg(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\cos\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} - \dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha \cos\beta}{\sin\alpha \sin\beta} + \dfrac{\cos\alpha \sin\lambda}{\sin\alpha \sin\beta}}$$ koondades

VI. $$cotg(\alpha + \beta) = \frac{cotg\,\alpha \,.\, cotg\,\beta - 1}{cotg\,\alpha + cotg\,\beta}.$$

Valemid V ja VI on valemitest I ja II algebraliselt tuletatud, nad on nii sama üleüldised, täh. nad on õiged ka negatiiviste argumentide juures.

VII. $$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg(-\beta)}{1 - tg\,\alpha \,.\, tg(-\beta)} = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\, tg\,\beta};$$

$$cotg(\alpha - \beta) = \frac{votg\,\alpha \,.\, cotg(-\beta) - 1}{cotg\,\alpha + cotg(-\beta)} = \frac{cotg\,\alpha\, cotg\,\beta - 1}{cotg\,\alpha - cotg\,\beta}.$$

VIII. $$cotg(\alpha - \beta) = \frac{cotg\,\alpha \,.\, cotg\,\beta + 1}{cotg\,\beta - cotg\,\alpha}.$$

4. Kahekordse nurga ja poolnurga funktsioonid.

Kui valemites I ja II, võtta $\beta = \alpha$, siis saame:

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha;$$
$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha.$$

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$ 2. $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

Kui panna $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, ehk $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, siis saame:

3. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ ja 4. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

Sellest järgneb:

5. $2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha,$ 6. $2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha.$

Kui nendesse valemitesse 2α asemel kirjutada α, täh. α asemel $\frac{\alpha}{2}$, siis:

1 a) $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$ 2 a) $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}.$

5 a) $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$ 6 a) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}.$

Jagades 5 a) : 6 a)-le leiame

7. $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}.$

Ülesanded.

1. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$. Välja arvata $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $tg(\alpha + \beta)$ ja $cotg(\alpha + \beta)$.

2. $\cos\alpha = \frac{2}{5}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Välja arvata $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $tg(\alpha - \beta)$ ja $cotg(\alpha - \beta)$.

3. Teades $\sin 30^0$ ja $\cos 30^0$, $\sin 45^0$ ja $\cos 45^0$, $\sin 60^0$ ja $\cos 60^0$, välja arvata $\sin$ ja $\cos$: 75^0, 90^0, 105^0, 15^0.

4. Teades tg ja $cotg$: 30^0, 45^0, 60^0, välja arvata tg ja $cotg$: 75^0, 90^0, 105^0.

5. Arendada: 1) $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$, 2) $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$, 3) $tg(\alpha + \beta + \gamma)$, 4) $cotg(\alpha + \beta + \gamma)$.

Näidata, et järgmised valemid on õiged:

6. $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin\alpha\cos\beta} = tg\,\alpha.$

7. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta.$

8. $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)} = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{tg\,\alpha - tg\,\beta}.$

9. $\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$.
10. $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$.
11. $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$.
12. $tg\,(45^0 + \alpha) - tg\,(45^0 - \alpha) = 2\,tg\,2\alpha$.
13. $tg\,\alpha + tg\,(60 + \alpha) - tg\,(60 - \alpha) = 3\,tg\,3\alpha$.
14. $\sqrt{\dfrac{1 + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}} = tg\,(45 + \alpha)$.

5. Funktsioonide summa ja vahe teisendamine.

Väga tähtsad on valemid, millede abil võib funktsioonide summat ehk vahet moondada kasvatiseks ehk jagatiseks, sest sarnased moondamised lihtsendavad märksa logaritmilist väljaarvamist.

Arendame $\sin(x+y)$ ja $\sin(x-y)$, arvame nad liikme kaupa kokku ja siis arvame teise esimesest maha:

(a) . . . . . $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.
(b) . . . . . $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.

$(a+b)$ . . . . $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$.
$(a-b)$ . . . . $\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$.

Seda sama teeme *cosinusega*:

(k) . . . . . $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.
(l) . . . . . $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$.

$(k+l)$ . . . . $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$.
$(k-l)$ . . . . $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$.

Saadud valemeid on hõlpsam tarvitada, kui $(x+y)$ asemel kirjutada α, samuti $(x-y)$ asemel β. Võrrandusist:

$$x + y = \alpha,$$
$$x - y = \beta,$$

leiame:
$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Meie võime, järjelikult, eelmised valemid nõnda ümber kirjutada:

$(a+b)$ . . . . $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$(a-b)$ . . . . $\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$(k+l)$ . . . . $\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$(k-l)$ . . . . $\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

Kerge on moondada ka *tangens*ite ja *cotangens*ite summat ja vahet.

$$tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha} \pm \frac{sin\,\beta}{cos\,\beta} = \frac{sin\,\alpha\, cos\,\beta \pm sin\,\beta\, cos\,\alpha}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}.$$

5. $tg\,\alpha \pm tg\,\beta = \dfrac{sin\,(\alpha \pm \beta)}{cos\,\alpha\, cos\,\beta}.$

Samuti tuletame valemi

6. $cotg\,\alpha \pm cotg\,\beta = \dfrac{sin\,(\beta \pm \alpha)}{sin\,\alpha\, sin\,\beta}.$

Lõppeks, anname logaritmilise kuju kolmnurga nurkade *sinuste* ja *cosinuste* summale.

$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, täh. $sin\,\gamma = sin\,[180^0 - (\alpha + \beta) = sin\,(\alpha + \beta)]$.

1) $$sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,\gamma = sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,(\alpha + \beta) = 2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2} +$$
$$+ 2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\left(cos\,\frac{\alpha-\beta}{2} + cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$
$$= 4\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2},$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^0 - \gamma}{2} = 90^0 - \gamma; \quad sin\,\frac{\alpha+\beta}{2} = cos\,\frac{\gamma}{2},$$

tähendab, lõpulikult

$$sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,\gamma = 4\,cos\,\frac{\alpha}{2}\,cos\,\frac{\beta}{2}\,cos\,\frac{\gamma}{2}.$$

2) $tg\,\gamma = [180^0 - (\alpha + \beta)] = -tg\,(\alpha + \beta) = -\dfrac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}$, ehk

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta\,.\,tg\,\gamma.$$

Ülesanded.

Anda logaritmiline kuju avaldusile:

1) $sin\ 47^0 + sin\ 33^0$, 2) $sin\ 68^0 + sin\ 80^0$, 3) $cos\ 49^0 - cos\ 21^0$,
4) $tg\ 14^0 + tg\ 46^0$, 5) $sin^2\,\alpha - sin^2\,\beta$, 6) $cos^2\,\alpha - cos^2\,\beta$,
7) $sin\,\alpha + cos\,\beta$, 8) $\dfrac{sin\,\alpha + sin\,\beta}{sin\,\alpha - sin\,\beta}$, 9) $\dfrac{1 + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha}$,
10) $\dfrac{1 - cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$, 11) $\dfrac{1 + cos\,\alpha}{sin\,\alpha}$.

Näidada, et on õiged järgmised valemid:

1) $sin\,(30^0 + \alpha) + sin\,(30^0 - \alpha) = cos\,\alpha.$

2) $sin\,\alpha + sin\,\beta + sin\,(\alpha + \beta) = 4\,cos\,\dfrac{\alpha}{2}\,cos\,\dfrac{\beta}{2}\,sin\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$

3) $sin\,\alpha + sin\,\beta - sin\,(\alpha + \beta) = 4\,sin\,\dfrac{\alpha}{2}\,sin\,\dfrac{\beta}{2}\,sin\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}.$

4) $\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

5) $tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma + \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \cos\gamma}$.

6. Abinurga tarvitamine.

5. Arendatud valemid võimaldavad avaldusele logaritmilise kuju andmise ainult mõnedel erijuhustel. Siin anname üldmetoodi nn. abinurga määramise teel.

Ülesanne. Kahe avalduse algebralisele summale $A+B$ anda logaritmiline kuju.

Lahendus. $A+B = A\left(1+\frac{B}{A}\right)$. Olgu A ja B missugused tahes, alati on võimalik määrata niisugune nurk φ, mille *tangens* oleks võrdne murrule $\frac{B}{A}$, siis saame:

$$A+B = A(1+tg\,\varphi) = A(tg\,45^0 + tg\,\varphi) = \frac{A\sin(45^0+\varphi)}{\cos 45^0 \,.\, \cos\varphi}.$$

Samuti

$$A-B = \frac{A\sin(45^0-\varphi)}{\cos 45^0 \cos\varphi}, \text{ kus } tg\,\varphi = \frac{B}{A}.$$

Selle metoodi abil võib igale binoomile anda logaritmiline kuju ja, tarvitades seda metoodi mitu korda, igale hulkliikmele.

Erijuhustel võib lihtsamini toimetada:

Esimene erijuhus. — Summa. — A ja B märgid on ühesugused; $\frac{B}{A}$ on siis positiivne, võime võtta $\frac{B}{A} = tg^2\varphi$, siis

$$A+B = A\left(1+\frac{B}{A}\right) = A(1+tg^2\varphi) = \frac{A}{\cos^2\varphi}.$$

Teine erijuhus. — Vahe. — A ja B märgid on isesugused. Olgu $A > B$, võime võtta $\frac{B}{A} = \sin^2\varphi$, sest $\frac{B}{A} < 1$, siis saame

$$A-B = A\left(1-\frac{B}{A}\right) = A(1-\sin^2\varphi) = A\cos^2\varphi.$$

Kui avalduses $A-B$ on $B > A$, siis kirjutame

$$A-B = -B\left(1-\frac{A}{B}\right),$$

analoogiliselt endisele saame:

$$A-B = -B\cos^2\varphi, \quad \text{kus } \sin^2\varphi = \frac{A}{B}.$$

Ülesanne. Anda logaritmiline kuju teise astme ekvatsiooni

$$x^2+px+q=0$$

reaaljuurtele.

Ekvatsiooni juured

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}\left(1-\frac{4q}{p^2}\right)}=-\frac{p}{2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4q}{p^2}}\right).$$

1 Juhus. $q>0$, kui juured on reaalsed, siis $\frac{p^2}{4}-q>0$, täh. $p^2>4q$, $\frac{4q}{p^2}<1$.

Võtame
$$\frac{4q}{p^2}=\sin^2\varphi \text{ ehk } \sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p},$$

täh.
$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\left(1\mp\sqrt{1-\sin^2\varphi}\right)=-\frac{p}{2}(1\mp\cos\varphi);$$

p asemele võime panna tema suuruse võrrandusest $\sin\varphi=\frac{2\sqrt{q}}{p}$, $p=\frac{2\sqrt{q}}{\sin\varphi}$, saame:

$$\underline{\underline{x_1}}=-\sqrt{q}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}=\underline{\underline{-\sqrt{q}\,tg\frac{\varphi}{2}}};$$

$$\underline{\underline{x_2}}=-\sqrt{q}\cdot\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}=\underline{\underline{-\sqrt{q}\,cotg\frac{\varphi}{2}}}.$$

2 Juhus. $q<0$ ja $\frac{p^2}{4}-q>0$.

Võtame: $-\frac{4q}{p^2}=tg^2\varphi$, ehk $tg\varphi=\frac{2\sqrt{-q}}{p}$.

Leiame:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\left(1\mp\sqrt{1+tg^2\varphi}\right)=-\frac{p}{2}\left(1\mp\frac{1}{\cos\varphi}\right)=-\frac{p}{2}\left(\frac{\cos\varphi\mp1}{\cos\varphi}\right).$$

Võrrandusest: $tg\varphi=\frac{2\sqrt{-q}}{p}$ leiame $p=\frac{2\sqrt{-q}}{tg\varphi}=\frac{2\sqrt{-q}\cdot\cos\varphi}{\sin\varphi}$

täh.

$$\underline{\underline{x_1}}=-\sqrt{-q}\cdot\frac{\cos\varphi-1}{\sin\varphi}=\sqrt{-q}\cdot\frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi};$$

$$\underline{\underline{x_1=\sqrt{-q}\cdot tg\frac{\varphi}{2}}};$$

$$\underline{\underline{x_2}}=-\sqrt{-q}\cdot\frac{\cos\varphi+1}{\sin\varphi}=\underline{\underline{-\sqrt{-q}\cdot cotg\frac{\varphi}{2}}}.$$

See moondamine kergendab teise astme ekvatsiooni juurte leidmist siis kui tema koeffitsientideks on paljukohalised arvud.

Ülesanded.

Välja arvata abinurga kaudu:

1. $X = 0{,}917\, sin^4\, 51^0\, 17'\, 16'' + 1{,}7568\, cos^5\, 40^0\, 29'$.

2. $X = \sqrt{5}\, sin^2\, 25^0\, 25'\, 25'' - \sqrt{2{,}5}\, cos^2\, 18^0\, 10'\, 15''$.

3. Anda logaritmiline kuju avaldusele $a\, sin\, \alpha + b\, cos\, \alpha = c$, määrates abinurga võrrandusest $\frac{b}{a} = tg\, \varphi$. $\left(\text{Vastus: } c = \frac{a\, .\, sin\, (\alpha + \varphi)}{cos\, \varphi}\right)$.

4. Tarvitada eelmist moondamist võrranduses $4{,}751\, sin\, x + 1{,}174\, cos\, x = 0{,}716$.

Väljaarvata logaritmide abil:

5. $x^2 + 2{,}75172\, x + 0{,}51430 = 0$.

6. $47{,}213\, x^2 + 19{,}174\, x - 54{,}2184 = 0$.

7. Trigonomeetrilised võrrandused.

Trigonomeetriliseks nimetakse võrrandused, milledes esinevad otsitavate trigonomeetrilised funktsioonid.

Nende võrranduste lahendamisel tulevad 1) otsitava mitmenimelised funktsioonid avaldada tema ühe funktsiooni kaudu, 2) n-kordse argumendi funktsioonid avaldada ühekordse (lihtsa) argumendi kaudu.

Näitus 1. $cos^2\, \varphi + 3\, sin\, \varphi - 3 = 0$.

Siin on otstarbekohasem avaldada kõik funktsioonid *sinuse* kaudu: $cos^2\, \varphi = 1 - sin^2\, \varphi$, täh.

$$1 - sin^2\, \varphi + 3\, sin\, \varphi - 3 = 0,$$

$$sin^2\, \varphi - 3\, sin\, \varphi + 2 = 0.$$

(Võrrandus on analoogiline võrrandusele: $x^2 - 3\, x + 2 = 0$),

$$sin\, \varphi = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$sin\, \varphi_1 = 1, \text{ täh. } \varphi_1 = 90^0$$

$$sin\, \varphi_2 = 2 \text{ see ei ole võimalik.}$$

Tuleb silmas pidada, et $\varphi_1 = 90^0$ ei ole ainukene nurk mis rahuldab tingimust $sin\, \varphi_1 = 1$, ka $sin\, (90^0 + k\, .\, 360^0) = 1$; täh. antud võrranduse lahendus $\varphi = 90^0 + k\, .\, 360^0$, kus k on mistahes täisarv.

Näitus 2. $sin^2\, \varphi - 2\, cos^2\, \varphi + \frac{1}{2}\, sin\, 2\, \varphi = 0$.

Avaldades kahekordse argumendi lihtargumendi kaudu saame

$$sin^2\, \varphi - 2\, cos^2\, \varphi + sin\, \varphi\, cos\, \varphi = 0.$$

Jagades kõik liikmed $cos^2\, \varphi$-le:

$$tg^2\, \varphi - 2 + tg\, \varphi = 0.$$

Siit leiame:

$$tg\,\varphi_1 = 1; \qquad \varphi_1 = 45^0 + 180^0 . k;$$
$$tg\,\varphi_2 = -2; \qquad \varphi_2 = 116^0\,33'54'' + 180^0 . k.$$

Ülesanded.

1. $2\sin\varphi - 1 = 0.$ 2. $3\sin\varphi = 2\cos^2\varphi.$
3. $tg^2\varphi - tg\,\varphi = 0.$ 4. $\sin\varphi + \cos\varphi = 1{,}1.$
5. $\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 2 - 5\cos\varphi.$ 6. $2\sin^2\varphi = 3\cos\varphi.$
7. $3\sin\varphi - 2\sin 2\varphi + 3\cos\varphi = 0.$ 8. $2\cos 2\varphi - \sin\varphi = 1.$
9. $\sin^2 2\varphi + 2\sin^2\varphi = 2.$ 10. $\sin 2\varphi = 3(\sin\varphi - \cos\varphi).$
11. $tg\,2\varphi = 2\sin\varphi.$ 12. $tg\,\varphi = \cos\varphi.$
13. $a\sin\varphi \pm b\cos\varphi = c$ lahendada abinurga kaudu võttes $\frac{b}{a} = tg\,x.$
14. $2\sin\varphi + 3\cos\varphi = 2.$ 15. $tg\,2\varphi + tg\,3\varphi = 3\,tg\,\varphi.$
16. $15\sin\varphi - 27\cos\varphi = 15.$ 17. $\sin^4\varphi + \cos^4\varphi = 2\sin 2\varphi.$
18. $a\sin\varphi - b\cos\varphi = (2a + b)\sin^2\frac{\varphi}{2} - b\cos^2\frac{\varphi}{2}.$

VIII peatükk.

Trigonomeetriliste funktsioonide väljaarvamine.

1. Nurga môôtudest.

Nagu pikkust mõõta võib väga mitmesuguste üksustega; meetritega, jalgadega, küünardega jne., nii võib ka nurkade mõõtmiseks tarvitada mitmesuguseid üksusi. Seniseks üksuseks oli kraad ehk $\frac{1}{90}$ osa täisnurgast; kraadis on 60 minutit, minutis 60 sekundit. Need mõõdud on Baabülonist pärit, seal olid nad enam-vähem kokkukõlas numeratsiooniga, sest ka selle aluseks oli 60-ne kava. Meie numeratsiooni juures aga ei ole need mõõdud küllalt praktilised. Mõnel pool on nurga üksuseks võetud $\frac{1}{100}$ osa täisnurgast ja alamad üksused tuletatud ainult 10, 100, 1000-le jne. jagades. Nimetame $\frac{1}{100}$ osa täisnurgast sentikraadiks. Ühelt süsteemilt on muidugi kerge üle minna teisele, teades, et $90^0 = 100$ sentikraadi.

Ülesanne. 1. Avaldada kraadides nurk $\alpha = 27{,}146$ sentikr.
2. Avaldada sentikraadides nurk $\alpha = 30^0\,15'\,6''$.

Täheteaduses on tarvitusel kolmas üksus, nimelt $\frac{1}{6}$ osa täisnurgast, mis nimetakse **tunniks**, tund jagatakse 60 minutiks, minut — 60 sekundiks. Täh. $15^0 = 1$ tund $= 1^t$, $15' = 1^m$, $15'' = 1^s$.

Ülesanne. 1. Avaldada kraadides nurk $\alpha = 7^t\,30^m\,5^s$.
2. Avaldada tundmõõdus nurk $\alpha = 123^0\,40'\,52''$.
3. Avaldada sentikraadides nurk $\alpha = 15^t\,24^m\,26^s$.

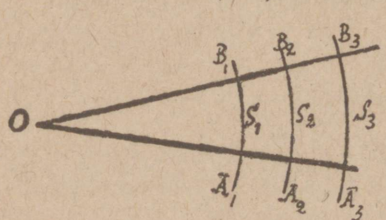
2. Nurga radiaal-mõõt.

Puht-matemaatilisis küsimusis ei ole § 1 käsitatud üksused otstarbekohased. Seda ei tarvitse imestada, sest need üksused: $\frac{1}{90}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{6}$ osa täisnurgast on enam-vähem juhuslikult valitud, ilma olulise põhjuseta, nad ei järgne otsekohe nurga mõistest.

Sellepärast katsume saada üksust, mis oleks nurga mõistega lähemalt seotud. Kui nurga külgi lõigata (joon. 54) kaartega, millede keskpunktid on nurga tipus O, siis leiame

$$\frac{\smile A_1B_1}{OB_1} = \frac{\smile A_2B_2}{OB_2} = \frac{\smile A_3B_3}{OB_3} = \frac{\text{kaar}}{\text{raadius}} = \frac{s}{r} = \text{const};$$

kaare suhe raadiusse ei olene kaare ega raadiuse suurusest. See suhe $(s:r)$ määrab täiesti nurga; täh. kui kaks nurka on võrdsed, siis on neil ka võrdsed suhted $s:r$ ja ümberpöördult. Sellepärast võime suhtega $s:r$ mõõta nurga suurust. **Suhe $s:r$ nimetakse nurga radiaal- ehk absoluutseks mõõduks.**



Joon. 54.

Nurga radiaal-mõõdu üksust nimetakse **radiaaniks**. Milline on see üksus, milline nurk on 1 radiaan suur? Teiste sõnadega, kui suur on nurk kraadides, kui $s:r = 1$?

Kui $s:r = 1$, siis peab olema $s = r$ (**radiaan on nurk, milles kaar võrdub raadiusele**). Kui kaar võrdub sõõrjoone pikkusele: $s = 2\pi r$, siis on vastav nurk 360^0, tähend. kaarele $s = r$ vastab nurk $x = \frac{360^0 \cdot r}{2\pi r}$, $x = \frac{360^0}{2\pi} = 57^0\,17'\,45''$.

$$\underline{1 \text{ radiaan} = 57^0\,17'\,45''.}$$

Ülesanne. Avaldada järgmised radiaanides antud nurgad kraadides: $2, \frac{1}{2}, 0{,}1, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1{,}57, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi.$

Kerge on ka ümberpöördud ülesanne: kraadides antud nurk avaldada radiaanides. 360^0-le vastab kaar $s = 2\pi r$, tähendab, selle nurga mõõt radiaanides $\frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$.

$$360^0 = 2\pi \text{. radiaani}$$
$$\alpha^0 = x \quad \text{„}$$
$$x = \frac{2\pi \cdot \alpha^0}{360^0} = \frac{\pi \cdot \alpha^0}{180^0} \text{ radiaani.}$$

Järgmises tabelis on mõned tähtsamad nurgad antud radiaanides:

$$270^0 = \frac{3\pi}{2} \text{ (radiaani)} \qquad 60^0 = \frac{\pi}{3}$$
$$180^0 = \pi \qquad 45^0 = \frac{\pi}{4}$$
$$90^0 = \frac{\pi}{2} \qquad 30^0 = \frac{\pi}{6}$$

Ülesanne. Avaldada radiaanides järgmised nurgad: 18^0, 20^0, 80^0, $35^0\,20'$, $39^0\,17'$, $47^0\,23'\,45''$, $193^0\,29'\,46''$.

3. Väikeste nurkade funktsioonid.

Tahame teada, missugune on vahe $x - \sin x$. Joon. 55 järeldame:

$$BB_1 < \smile AB < AK$$

(sest $BB_1 < BA < \smile BA$ ja $\smile ABC < AK + CK$ ehk $2 \smile AB < 2\,AK$) täh.

$$\underline{\underline{\sin x < x < tg\, x.}}$$

ka

$$\sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}$$

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} > 1 - \frac{x^2}{2};$$

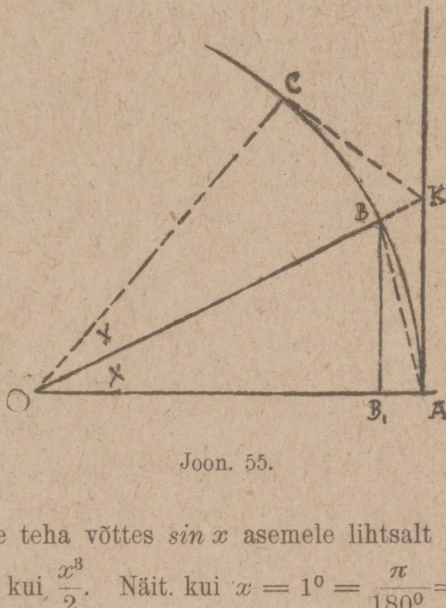
kasvatades võrratuse $tg\, x > x \quad \cos x$-le,

leiame $\quad \underline{\sin x > x \cos x}$

aga $\quad \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$,

täh. $\quad \sin x > x - \frac{x^3}{2}$

ehk $\quad x - \sin x < \frac{x^3}{2}$.



Joon. 55.

Siit selgub, millise vea meie võime teha võttes $\sin x$ asemele lihtsalt x (absoluutses mõõdus). Viga on väiksem kui $\frac{x^3}{2}$. Näit. kui $x = 1^0 = \frac{\pi}{180^0} =$

$= 0,017453\ldots$, siis on $x - \sin x < \frac{1}{2}\,(0,017453)^3 = 0,00000265\ldots$ Täh. võttes $\sin x = 0,01745$, võime julged olla, et kõik 5 kümnendmärki on õiged. Teades $\sin 1^0$, võime välja arvata $\cos 1^0$, $tg\,1^0$ jne. Suuremate nurkade funktsioonid saame valemite järele:

$$\sin(a^0 + 1^0) = \sin a \cos 1^0 + \cos a \sin 1^0;$$

näit.

$$\sin 2^0 = 2 \sin 1^0 \cos 1^0;$$

$$\sin 3^0 = \sin 2^0 \cos 1^0 + \cos 2^0 \sin 1^0 \text{ jne.}$$

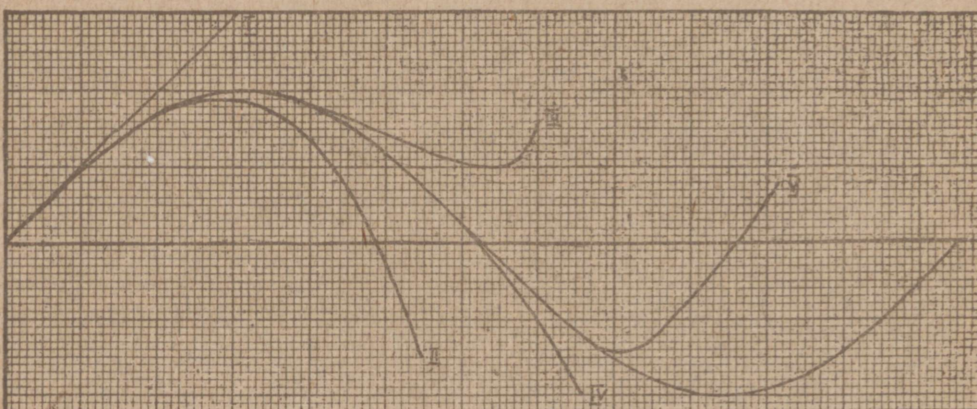
4. *Sinuse* ja *cosinuse* read.

Matemaatiline analüüs arendab järgmised tähelepanemisväärilised read:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots6.7} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots$$

Sinuse rida kinnitab § 3 resultaate: kui x on nii väike, et juba tema kolmas aste on ilma praktilise tähenduseta, siis võib $\sin x$ asemele võtta lihtsalt x.



Joon. 56.

X-i kasvades jõuame kohani, kus teine liige $-\frac{x^3}{6}$ ei ole enam praktiliselt tähtsuseta, näit. tahtes välja arvata $\sin x$ täpilt kuni 0,00001, ei saa meie teist liiget tähele panemata jätta, kui $\frac{x^3}{6}$ on umbes 0,00001 ehk x on umbes 0,03, aga kolmas liige $-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}$ on ka nüüd ilma praktilise tähenduseta, sest ta on kaugelt väiksem kui 0,00001. Suureneb aga x veelgi, saab ta näit. juba suuremaks kui 0,1, siis ei jää kolmaski liige enam mõjuta jne.

Et selgemat pilti saada neist vahekordadest, joonistame ühele graafikule

1. $y = sin\, x.$
2. $y = x.$
3. $y = x - \frac{x^3}{1.2.3}.$
4. $y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}.$
5. $y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2..5} - \frac{x^7}{1.2...7}.$

Näeme: *sinuse* kõver läheb kõverjoonest $y = x$ võrdlemis pea lahku, kõverjoonega $x = x - \frac{x^3}{1.2.3}$ läheb ta kauem ühes, veel kauem kõveraga: $y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}$ jne.

Mida rohkem liikmeid võtame funktsiooni analüütilises reas, seda täpima kujutuse saame meie temale.

Ülesanne. Joonistada funktsioonile $y = cos\, x$ järgmised nõndanimetatud liginemiskõverad:

1. $y = 1.$ 2. $y = 1 - \frac{x^2}{1.2}.$ 3. $y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4}.$

4. $y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2...6}.$

IX peatükk.

Kolmnurkade väljaarvamine.

Ülesanne 1. Välja arvata kolmnurk, kui on antud kahe külje summa $a + b$, nende külgede vahe $a - b$ ja nende külgede vaheline nurk γ.

Lahendus. Sinuslause põhjal:

$$\frac{a}{b} = \frac{sin\, \alpha}{sin\, \beta}, \text{ täh. } \frac{a+b}{a-b} = \frac{sin\, \alpha + sin\, \beta}{sin\, \alpha - sin\, \beta};$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{2\, sin\, \frac{\alpha+\beta}{2}\, cos\, \frac{\alpha-\beta}{2}}{2\, cos\, \frac{\alpha+\beta}{2}\, sin\, \frac{\alpha-\beta}{2}} = tg\, \frac{\alpha+\beta}{2} \,.\, cotg\, \frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$ See lause nimetakse **tangenslauseks**.

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=90^0-\frac{\gamma}{2};\quad \text{täh. } tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=cotg\,\frac{\gamma}{2};$$

järjelikult:
$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\,cotg\,\frac{\gamma}{2}.$$

Eelmisest valemist leiame nurga $\frac{\alpha-\beta}{2}$; nurk $\frac{\alpha+\beta}{2}$ on aga juba teada; tähendab, nurgad α ja β leiame avaldusist: $\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}$; $\beta=$ $=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Külje c saame sinuslausest.

Märkus. Tangenslauset tarvitakse kaldnurksete kolmnurkade väljaarvamisel, kui on antud kaks külge ja nende vaheline nurk: a, b, γ.

Küsimus: Millelt on tangenslause parem kui cosinuslause?

Ülesanne 2. Välja arvata kolmnurk, kui on antud kahe külje summa $a+b$, nende vaheline nurk γ ja kolmas külg c.

Lahendus. Sinuslauseist
$$\frac{a}{c}=\frac{sin\,\alpha}{sin\,\gamma},\quad \frac{b}{c}=\frac{sin\,\beta}{sin\,\gamma};$$
tuletame proportsiooni
$$\frac{a+b}{c}=\frac{sin\,\alpha+sin\,\beta}{sin\,\gamma}=\frac{2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\,(\alpha+\beta)}=\frac{2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,sin\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha+\beta}{2}}=$$
$$=\frac{cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\,\frac{\gamma}{2}}.$$

Proportsioon
$$\frac{a+b}{c}=\frac{cos\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{sin\,\frac{\gamma}{2}}$$
sisaldab **Mollweidi esimese lause.** Tema abil võib antud andmeil: $a+b$, c, γ välja arvata $\frac{\alpha-\beta}{2}$. α ja β leiame nagu tangenslauseski.

Ülesanne 3. Välja arvata kolmnurk, kui on antud kahe külje vahe $a-b$, nende külgede vaheline nurk γ ja külg c.

Analoogiliselt ülesandele 1 leiame

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

Proportsioon
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

sisaldab **Mollweidi teise lause.**

Ülesanne 4. Välja arvata kolmnurk, kui on antud ümbermõõt $a+b+c=2p$ ja kaks nurka.

Lahendus. Sinuslausest

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}\quad\text{tuletame}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{2p}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.\quad\text{(Vaata lhk. 43.)}$$

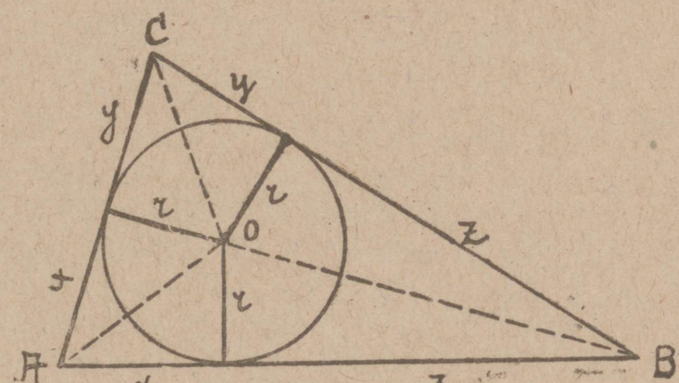
$$a=\frac{p\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{p.\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}}\quad\text{jne.}$$

Ülesanne 5. Välja arvata kolmnurk, kui on antud sissejoonistatud sõõri raadius r ja kaks nurka.

Lahendus (joonist. 57).

$$x=r\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}$$

$$y=r\,\mathrm{cotg}\,\frac{\beta}{2}$$



Joon. 57.

$$c = x + y = r\left(cotg\frac{\alpha}{2} + cotg\frac{\beta}{2}\right) = r\left(\frac{cos\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{cos\frac{\beta}{2}}{sin\frac{\beta}{2}}\right) =$$

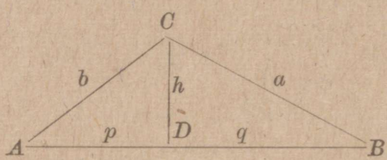
$$= r\left(\frac{cos\frac{\alpha}{2} sin\frac{\beta}{2} + cos\frac{\beta}{2} sin\frac{\alpha}{2}}{sin\frac{\alpha}{2} cos\frac{\beta}{2}}\right) = r\frac{sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{sin\frac{\alpha}{2} sin\frac{\beta}{2}} = \frac{r\, cos\frac{\gamma}{2}}{sin\frac{\alpha}{2} sin\frac{\beta}{2}}.$$

Samuti arvame küljed a ja b.

Ülesanne 6. Välja arvata kolmnurk, kui on antud ümberjoonistatud sõõri raadius R ja kaks nurka.

Lahendus. $\frac{a}{sin\,\alpha} = \frac{b}{sin\,\beta} = \frac{c}{sin\,\gamma} = 2R.$

Ülesanne 7. Välja arvata kolmnurk, kui on antud nurk γ ja joonlõigud $AD = p$ ja $DB = q$, milleks jagab kõrgus $\triangle$-ga aluse.



Joon. 58.

Lahendus. $cotg\,\alpha = \frac{p}{h}$, $cotg\,\beta = \frac{q}{h}$,

täh. $\frac{p}{q} = \frac{cotg\,\alpha}{cotg\,\beta}$; $\frac{p+q}{p-q} = \frac{cotg\,\alpha + cotg\,\beta}{cotg\,\alpha - cotg\,\beta} = \frac{sin\,(\alpha+\beta)}{sin\,(\beta-\alpha)}$.

Ülesanne 8. Välja arvata kolmnurk, milles on antud $b-c$, a, β.

Lahendus. $\frac{b-c}{a} = \frac{sin\,\beta - sin\,\gamma}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,\beta - sin\,(\alpha+\beta)}{sin\,\alpha}$,

Arendades edasi leiame:

$$tg\frac{1}{2}\alpha = \frac{b - c + a\,cos\,\beta}{a\,sin\,\beta},$$

mis määrab külje a.

Ülesanded.

Välja arvata kolmnurk, kui on antud:

1. $a = 289$; $b = 601$; $\gamma = 100^0\,19'\,6''$.
2. $a = 177{,}2$; $c = 59{,}3$; $\beta = 51^0\,38'\,31''$.
3. $a + b = 24{,}929$; $a - b = 2{,}501$; $\gamma = 15^0\,22'\,36''$.
4. $b + c = 10{,}25$; $b - c = 0{,}75$; $\alpha = 20^0\,54'$.
5. $a = 3659$; $b = 2385$; $\alpha - \beta = 24^0\,19'\,30''$.
6. $b = 180{,}8$; $c = 125$; $\beta - \gamma = 64^0\,3'\,42''$.
7. $a - b = 17$; $\alpha = 52^0\,48'\,46''$; $\beta = 45^0\,0'\,16''$.
8. $a - c = 0{,}07$; $\alpha = 82^0\,7'\,29''$; $\beta = 42^0\,45'\,2''$.

9. $a:b = 4:3$; $\gamma = 58^0\,16$; $c = 20$.
10. $a:b = 7:6$; $\alpha - \beta = 2^0\,50'\,16''$; $c = 34{,}5$.
11. $a = 64{,}48$; $b + c = 105{,}4$; $\alpha = 56^0\,48'$.
12. $a = 32{,}24$; $b - c = 21{,}05$; $\alpha = 56^0\,48'$.
13. $a + b = 334$; $c = 58$; $\alpha - \beta = 70^0\,56'\,44''$.
14. $a + b = 18{,}45$; $c = 10{,}95$; $\alpha - \beta = 9^0\,42'\,59''$.

15. Tõendada, et kolmnurga ümberjoonistatud sõõri raadius $R = \frac{abc}{4S}$.
(Tarvitada valemeid: $S = \frac{1}{2}\,bc\,sin\,\alpha$; $a = 2\,R\,sin\,\alpha$.)

16. Kolmnurga küljed $a = 3$, $b = 5$, $c = 6$. Leida $R:r$.

17. Tõendada, et kolmnuga pind $S = 2\,R^2\,sin\,\alpha\,sin\,\beta\,sin\,\gamma$.

18. Tõendada, et kolmnurga poolperimeeter $p = 4\,R\,cos\frac{\alpha}{2}\,cos\frac{\beta}{2}\,cos\frac{\gamma}{2}$.

19. Sõõri puutuja ja lõikaja vaheline nurk on α, lõikaja välimine osa on b, sisemine a. Leida sõõri raadius.

20. Kolmnurgas on antud kaks nurka ja sissejoonistatud sõõri pind S. Välja arvata kolmnurga küljed.

21. Täisnurkse kolmnurga külgede summa $= 132$, nende külgede ruutude summa $= 6050$. Välja arvata kolmnurk.

Välja arvata kolmnurk, kui on antud (h_a, m_a tähendagu kõrgust ja mediaani küljele a, p_a — nurga α poolitajat)

22. a, S, α; 23. a, h_a, α; 24. c, R, S; 25. a, h_b, h_c.
26. α, h_b, h_c; 27. a, h_a, m_a; 28. a, h_b, m_b; 29. α, h_b, m_c;
30. α, h_a, p_a; 31. a, b, p_c; 32. α, β, p_c; 33. α, h_a, m_a;
34. b, c, m_a; 35. a, m_a, m_b; 36. m_a, m_b, m_c; 37. h_a, h_b, h_c;
38. $2p, h_c, \alpha$; 39. m_a, h_a, p_a; 40. $a + b, c, \alpha$; 41. $a - b, c, \beta$;
42. $a + b, h_a, h_b$; 43. $a + c, h_a, h_c$; 44. $h_a - h_c, a, c$;
45. $h_a - h_c, \alpha, \gamma$; 46. $a + b, \alpha, h_a$; 47. $a - b, c, h_c$;
48. $a + b, h_c, \gamma$; 49. $a - b, \alpha - \beta, c$; 50. $a + c, h_a + h_c, \alpha$;
51. $a:b, c, \alpha - \beta$; 52. $a + c, h_c - h_a, \beta$; 53. $a + c - a, h_c, \alpha$;
54. $a + b, R, \gamma$; 55. $a + b, S, \gamma$; 56. $a^2 + b^2, S, \gamma$;
57. $a^2 + b^2, S, \gamma$; 58. $a^2 + b^2, h_c, \gamma$; 59. $a - b + c, h_c, S$;
60. $a \,.\, b, r, \gamma$; 61. ab, c, γ.

2. Stereomeetrilised ülesanded.

1. Püstprisma kõrgus on h, tema aluseks on ühtlane n-nurk, mille külg võrdub a-le. Määrata maht V.

2. Ühtlase 6-tahuse püramiidi kõrgus $h = 15$ m sünnitab servaga nurga $\alpha = 30^0$. Määrata pind S ja maht V.

3. Määrata tetraeedri kahetahulise nurga suurus.

4. Määrata nurk, mille sünnitab tetraeedri serv tetraeedri alusega.

5. Kui suur on nurk kuubi kahe lõikuva diagonaali vahel?

6. Ühtlase neljanurkse püramiidi külgserv a sünnitab püramiidi alusega nurga α. Määrata täis pind ja maht.

7. Koonuse kõrgus $h = 10$, tema telje ja kujutavjoone vahel nurk $\alpha = 12^0\, 5'\, 47''$. Määrata S ja V.

8. Koonuse kujutavjoone ja aluse vahel nurk on α; aluse raadius $= R$. Määrata koonuse S ja V.

9. Koonuse lõikeks tasapinnaga, mis läheb läbi tema telje, on külgühtlane kolmnurk, mille külje pikkus on a. Määrata koonuse S ja V.

10. Koonuse kujutavjoone ja aluse vaheline nurk on α; tema maht võrdub kera mahule, mille raadius R. Määrata koonuse külgpind.

11. Koonuse tipust on tõmmatud tasapind nurga α all koonuse alusele. See tasapind lõikab alussõõri piki sidejoont a, mis seob kaare β. Määrata koonuse maht V. $\alpha = 40^0\, 25'\, 42''$, $\beta = 24^0\, 20'\, 30''$, $a = 8{,}149$.

12. Tömpkoonuse kujutavjoone ja põhialuse vaheline nurk on α; aluste raadiused on R ja r. Määrata maht.

13. Tömpkoonuses on teada: põhialuse raadius $R = 100$, kõrguse h ja kujutavjoone l summa $h + l = 200$ ja nurk kõrguse ja kujutavjoone vahel $\alpha = 35^0\, 42'\, 57''$. Määrata külgpind ja maht.

14. Tömpkoonusse on kujutatud kera. Kera maht on V. Koonuse kujutavjoone ja aluse vaheline nurk on α. Määrata tömpkoonuse pind ja maht.

15. Kera sektorisse, mille sfääriline pind on S ja mille pealõike kaar on α, on kujutatud kera. Määrata kera pind.

16. Määrata kera vöö pind, kui tema aluste diameetrid seovad kaared α ja β ja kui trapeetsi pind, mille alusteks on need diameetrid, on S.

17. Määrata kera segmendi pind ja maht, kui kera raadius on r ja segmendi pealõike kaar α.

18. Ühtlases n-nurkses püramiidis olgu α serva ja aluspinna vaheline nurk, β alusel olev tahk-nurk, γ külgtahu alusel olev tasane nurk, δ külgtahkude vaheline nurk. Leida nende nurkade vahekorrad. (Vastused: $\sin\alpha = \sin\beta \,.\, \sin\gamma$; $\cos\beta = \cotg\gamma \cotg\frac{180^0}{n}$, $\cos\gamma = \cos\alpha \,.\, \sin\frac{180^0}{n}$; $\sin\frac{\delta}{2} = \cos\frac{180^0}{n} : \sin\gamma$.)

3. Pöörkehad.

1. Parallelogrammis $ABCD$ on antud küljed $AB = a$, $AD = d$, $\measuredangle\, BAD = \alpha$. Määrata keha maht, mis saabub parallelogrammi pöördudes ümber külje AB.

2. Külgühtlane kolmnurk, mille külg on a, pöördub kolmnurga tipust läbi mineva ja kolmnurga tasapinnal asuva telje ümber; telg sünnitab kolmnurga küljega nurga α. Määrata pöörkeha maht ja pind.

$$a = 15\,; \quad \alpha = 39^0\, 40'\, 48''.$$

3. Antud on kolmnurga küljed a, b, c. Kolmnurk pöördub tipust B läbi mineva ja küljele a perpendikulaarse telje ümber. Määrata pöörkeha pind ja maht.

$$a = 10, \quad b = 16^1/_2, \quad c = 20.$$

4. Trapeetsi paralleelsed küljed on a ja c; suurema paralleelse külje lähisnurgad on α ja β. Määrata keha maht, mis saabub trapeetsi pöördudes ümber AB.

5. Romb, mille külg $a = 25$, teravnurk $\alpha = 40^0\,17'$, pöördub tipust läbi mineva ja küljele perpendikulaarse telje ümber. Määrata pöörkeha pind ja maht.

6. Sarikkolmnurk, mille tippnurk $\alpha = 32^0\,15'\,49''$ ja sissejoonistatud sõõri raadius $r = 10$, pöördub telje ümber, mis läheb läbi alusel oleva tipu paralleelselt küljele. Määrata pöörkeha maht.

7. Tömpnurkne kolmnurk pöödrub telje ümber, mis läheb läbi tömpnurga tipu A perpendikulaarselt nurga α bissektorile. Välja arvata pöörkeha maht, kui $\alpha = 113^0\,15'\,40''$ ja juuresküljed $b = 15$, $c = 17$.

8. Täisnurkne nelinurk, mille pind on S ja diagonaal d, pöördub telje ümber, mis läheb läbi tipu perpendikulaarselt diagonaalile. Määrata pöörkeha maht.

9. Romb, mille väiksem diagonaal $d = 2$ m, teravnurk $\alpha = 25^0\,52'\,44''$, pöördub külje ümber. Määrata pöörkeha pind ja maht.

10. Sariktrapeets, mille diagonaalid on perpendikulaarsed, pöördub suurema aluse ümber. Määrata pöörkeha maht, kui alused on a ja b.

11. Sõõrsegment, mille kaar $\alpha = 20^0\,45'\,27''$, pöördub diameetri $2\,r = 10$ ümber, mis on paralleelne segmendi sidejoonele. Määrata pöörkeha maht ja pind.

12. Sõõrsektor, mille kaar $\alpha = 36^0\,7'\,43''$, pöördub sidejoonele $a = 5$ paralleelse diameetri ümber. Määrata pöörkeha maht ja pind.

13. Sõõrsektor, mille kaar $\alpha = 86^0\,37'\,4''$ ja selle sidejoon $a = 10$, pöördub sidejoonele perpendikulaarse diameetri ümber. Määrata keha maht ja pind.

14. Poolsõõri diameetrile $2\,R$ on joonistatud sarik-kolmnurk, mille alusnurk on α. Poolsiirust ja kolmnurga võrdseist külgedest piiratud keha pöördub diameetri ümber. Määrata pöörkeha maht ja pind. 1) $R = 10$, $\alpha = 45^0$, 2) $R = 10$, $\alpha = 30^0$, 3) $R = 10$, $\alpha = 60^0$.

15. Ühtlane 6-nurk pöördub oma külje ümber. Tõendada, et pöörkeha pind $S = P\,.\,r$, kus P = hulknurga perimeeter, r = sissejoonistud sõõri raadius. Kas on see valem maksev iga ühtlase hulknurga kohta? Siiru kohta?

16. Ühtlane 5-nurk pöördub telje ümber, mis on paralleelne tema küljele ja mille kaugus hulknurga keskpunktist on d. Tõendada, et pöörkeha pind $S = P\,.\,d$, kus P on hulknurga ümbermõõt.

17. Tõendada, et ülesannete 15 ja 16 tingimustel pöörkeha maht $V = S\,.\,d$, kus S on hulknurga pind (mitte pöörkeha pind), d on hulknurga keskpunkti kaugus teljest.

Kolmas osa.

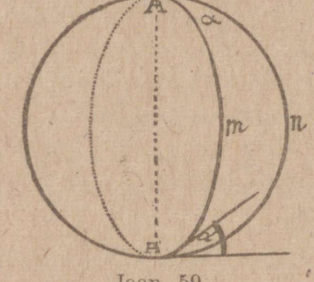
B. Sfääriline trigonomeetria.

X peatükk.

Põhimõisted. Valemid.

1. Sfääriline kaksnurk.

Kera pinnal lõikavad kaks peasiiru üksteise pooleks; neid lõikepunkte ühendav sirgjoon AA_1 (joon. 59) on kera diameetriks; punkt A_1 nimetakse punkt A vastaspunktiks; kera pinna osa, mis piiratud kahest poolpeasiirust, näit. AmA_1 ja AnA_1, nimetakse sfääriliseks kaksnurgaks (joon. 59).



Joon. 59.

Sfäärilise kaksnurga külgedeks on poolsiirud, tema nurkadeks poolsiirude vahelised nurgad.

Nende nurkade all mõistetakse nurki puutujate vahel siirudele nende lõikepunktis. Puutujad on perpendikulaarsed diameetrile AA_1, ehk kahetahuse nurga mAA_1n servale; täh. nende puutujate vaheline nurk võrdub ka kahetahulisele nurgale mAA_1n, ehk lõikuvate kaarte vaheline nurk võrdub kaarte tasapindade vahelisele tahknurgale.

Tõendada: 1) Mõlemad nurgad sfäärilises kaksnurgas on võrdsed.

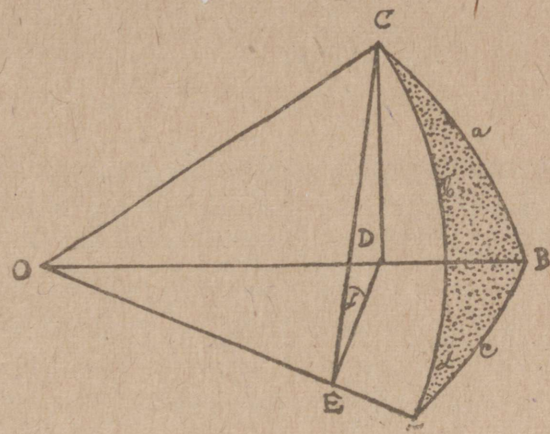
2) Kaks sama kera sfäärilist kaksnurka on võrdsed, kui nende nurgad on võrdsed.

3) Kaksnurga pind $S = \frac{4\pi R^2 \alpha}{360} = \frac{\pi R^2 \alpha}{90}$, kus R on kera raadius, α — kaksnurga nurk.

2. Sfääriline kolmnurk.

Sfääriline kolmnurk on osa kera pinda, mida piiravad kolm peasiiru kaart (joon. 60).

Kui sfäärilise kolmnurga tippudest tõmmata raadiused kera keskpunkti, siis kujutavad raadiustest läbi minevad tasapinnad kolmetahuse nurga $OABC$. Sfäärilise kolmnurga nurgad võrduvad kolmetahuse nurga tahknurkadele: $\alpha = \sphericalangle COAB$, $\beta = \sphericalangle ABOC$, $\gamma = \sphericalangle BCOA$. Sfäärilise kolmnurga külgedeks on kaared, mida mõõdetakse vastavate tsentraalnurkadega (kraadides) $a = \sphericalangle COB$, $b = \sphericalangle COA$, $c = \sphericalangle BOA$. Tähendab, kui kolmetahuse nurga tasaseid nurki ja tahknurki seovad mõnesugused valemid, siis on olemas samasugused sidemed vastava sfäärilise kolmnurga külgede ja nurkade vahel — ning ümberpöördult.



Joon. 60.

Geomeetrias tõendati:

1) igas kolmetahuses nurgas on kahe tasase nurga summa suurem kolmandast;

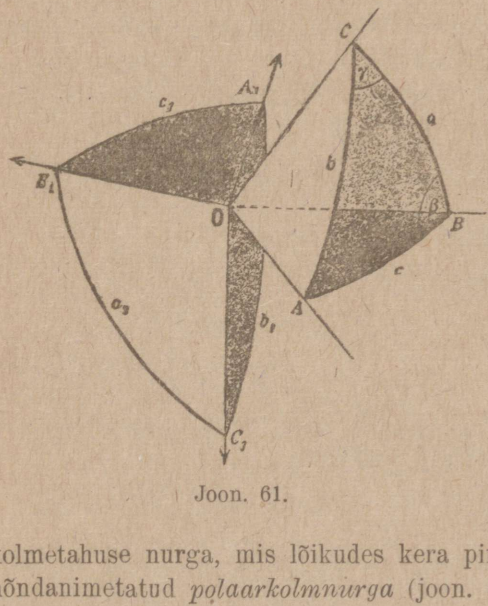
2) tasaste nurkade summa on väiksem kui $4\,d$.

Tähendab, sfäärilises kolmnurgas on 1) kahe külje summa suurem kolmandast. $a + b > c$.

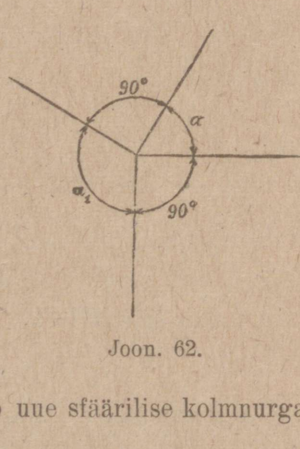
2) külgede summa $a + b + c < 4\,d$.

3. Polaarkolmnurk.

Kui tõmmata kolmetahuse nurga tipust igale tahule perpendikulaar, mille siht on tahkudest väljapoole, siis määravad need kolm perpendikulaari uue



Joon. 61.



Joon. 62.

kolmetahuse nurga, mis lõikudes kera pinnaga annab uue sfäärilise kolmnurga, nõndanimetatud *polaarkolmnurga* (joon. 61).

Teoreem 1. Sfäärilise kolmnurga iga *nurk* täiendab tema polaarkolmnurga vastavat *külge* kuni 180^0.

Täh.
$$\alpha + a_1 = 180^0.$$
$$\beta + b_1 = 180^0.$$
$$\gamma + c_1 = 180^0.$$

Tõendus. Olgu (joon. 61) $OA_1 \perp COB$, $OB_1 \perp COA$, $OC_1 \perp AOB$. Edasi, olgu $\sphericalangle B_1OC_1 = a_1$, $\sphericalangle A_1OB_1 = b_1$, $\sphericalangle A_1OB_1 = c_1$. Siis on $OA \perp B_1OC_1$ (sest $B_1O \perp OA$ ja $C_1O \perp OA$). Kui joonistada püstprojektsioon tasapinnale B_1OC_1 (joon. 62), siis ilmub $\sphericalangle B_1OC_1 = a_1$ loomulikus suuruses, OA projekteerub punkti O (kui $\perp B_1OC_1$-le), tasapinnad COA ja BOA, millede vahel on nurk α, projekteeruvad sirgjoontena.

Joonistusest 62 selgub otsekohe, et
$$\alpha + a_1 = 360^0 - 180^0 = 180^0.$$
Samuti võib tõendada ka teised laused.

Teoreem 2. Sfäärilise kolmnurga iga *külg* täiendab tema polaarkolmnurga vastavat *nurka* kuni 180^0.

Täh.
$$a + \alpha_1 = 180^0.$$
$$b + \beta_1 = 180^0.$$
$$c + \gamma_1 = 180^0.$$

Tõendus. Meie võime (joon. 60) põhi-kolmnurgaks võtta $A_1B_1C_1$, tema polaarkolmnurgaks oleks siis, nagu kerge näha, kolmnurk ABC. Põhi-kolmnurga nurk α_1 täiendab polaarkolmnurga külge a kuni 180^0: $a + \alpha_1 = 180^0$.

Teoreem 3. Sfäärilise kolmnurga nurkade summa on suurem kui $2d$ ja väiksem kui $6d$.

Tõendus. Antud sfäärilise kolmnurga ABC asemel vaatleme tema polaarkolmnurka $A_1B_1C_1$. Polaarkolmnurga küljed on $a_1 = 2d - \alpha$, $b_1 = 2d - \beta$; $c_1 = 2d - \gamma$. Meie teame juba, et sfäärilise kolmnurga külgede summa on väiksem kui $4d$; täh. $a_1 + b_1 + c_1 < 4d$

ehk
$$2d - \alpha + 2d - \beta + 2d - \gamma < 4d$$
järjelikult,
$$\underline{\underline{\alpha + \beta + \gamma > 2d.}}$$

Et aga $a_1 + b_1 + c_1$ peab olema nullist suurem, täh. ka
$$2d - \alpha + 2d - \beta + 2d - \gamma > 0;$$
$$\alpha + \beta + \gamma < 6d.$$

Märkus 1. Sfäärilise kolmnurga nurkade summal (ehk kolmetahuse nurga tahknurkade summal) ei ole kindlat suurust. Vahe $\alpha + \beta + \gamma - 2d$ nimetakse **sfääriliseks ekstsessiks** ja märgitakse harilikult tähega ε.
$$\underline{\underline{\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 2d.}}$$

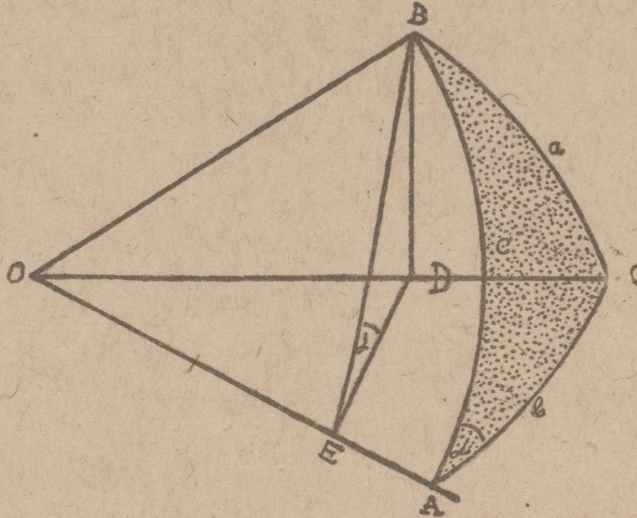
Märkus 2. Teoreemist 3 selgub üldmetood, kuidas sfäärilise kolmnurga külgede kohta tõendatud teoreemi laiendada nurkade kohta ja ümberpöördult: on ainult tarvis põhikolmnurga asemel vaadelda tema polaarkolmnurka.

4. Täisnurkne sfääriline kolmnurk.

Sfäärilise kolmnurga nurkade summa on suurem kui $2d$, täh. ühes kolmnurgas võib olla rohkem kui üks täis- ehk tömpnurk. Täisnurkse sfäärilise kolmnurga all mõeldakse aga harilikult kolmnurka, milles on ainult **üks** täisnurk. Külgi, millede vahel on täisnurk, nimetakse k a a t e t i t e k s, vastuseisev külg — h ü p o t e n u u s i k s.

Antud on täisnurkne kolmnurk ABC (joon. 61), $\measuredangle \gamma - 90^0$. Tõmbame kolmnurga tippudest raadiused kera keskpunkti 0.

Tõmbame $BD \perp OC$ ja $BE \perp OA$; ühendame punktid D ja E, siis on ka $DE \perp OA$, sest DE on kaldjoone BE projektsiooniks; tähendab $\measuredangle BED$ on tahkude BOA ja COA vaheline nurk, $\measuredangle BED = \alpha$.



Joon. 63.

Teoreem 1. **Hüpotenuusi** *cosinus* **vôrdub kaatetite** *cosinuste* **kasvatisele.**

$$\text{I.} \quad \cos c = \cos a \, . \cos b.$$

T õ e n d u s (joon. 63). $\cos a = \frac{OD}{OB}, \; \cos b - \frac{OE}{OD}, \; \cos c = \frac{OE}{OB},$

$$\text{täh.} \quad \cos a \, . \cos b = \frac{OD}{OB} \cdot \frac{OE}{OD} = \frac{OE}{OB} = \cos c.$$

Teoreem 2. **Teravnurga** *sinus* **vôrdub vastaskaateti** *sinuse* **ja hüpotenuusi** *sinuse* **jagatisele.**

$$\text{II.} \quad \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}; \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}.$$

T õ e n d u s (joon. 63). $\sin \alpha = \frac{BD}{BE} = \frac{BD : OB}{BE : OB} = \frac{\sin a}{\sin c}.$

Teoreem 3. **Teravnurga** *cosinus* **vôrdub lähiskaateti** *tangensi* **ja hüpotenuusi** *tangensi* **jagatisele.**

$$\text{III.} \quad \cos \alpha = \frac{tg\, b}{tg\, c}, \quad \cos \beta = \frac{tg\, a}{tg\, c}.$$

Tõendus (joon. 63): $\cos\alpha = \frac{DE}{BE} = \frac{DE:OE}{BE:OE} = \frac{tg\, b}{tg\, c}$.

Eelmisist valemeist võib algebraliselt tuletada järgmised:

IV. $\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta.$

V. $tg\,\alpha = \frac{tg\, a}{\sin b}, \quad tg\,\beta = \frac{tg\, b}{\sin a}.$

VI. $\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}, \quad \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$

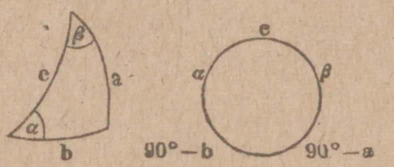
Tõendada valemite I—III põhjal, et valemid IV—VI on õiged!

Neperi juht aitab ülevaltoodud valemeid kergemini meeles pidada.

Kui täisnurkse kolmnurga 5 elementi a, β, c, α, b korraldada sõõrjoonele selles järjekorras, milles nad kolmnurgas esinevad, ja kui kaatetite asemele võtta nende täiendused kuni 90^0-ni (joon. 64), siis **iga elemendi** *cosinus*

1) **võrdub lähiselementide** *cotangensite* **kasvatisele,**

2) **võrdub vastaselementide** *sinuste* **kasvatisele.**



Joon. 64.

Näitus. $\cos\alpha = \operatorname{cotg} c \operatorname{cotg}(90^0 - b) = \frac{tg\, b}{tg\, c},$

ehk $\cos\alpha = \sin\beta \,.\, \sin(90^0 - a) = \sin\beta \,.\, \cos a.$

5. Täisnurksete sfääriliste kolmnurkade väljaarvamine.

Ülesanne 1. Antud on hüpotenuus c ja nurk α.

Lahendus. Neperi juhi järele saame a

$$\cos(90^0 - a) = \sin c \,.\, \sin\alpha$$
$$\sin a = \sin c \,.\, \sin\alpha.$$

Teise külje b leiame võrrandusest

$$\cos\alpha = \operatorname{cotg}(90^0 - b) \,.\, \operatorname{cotg} c$$
$$tg\, b = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{cotg} c} = \cos\alpha \,.\, tg\, c.$$

Lõppeks, nurga β saame võrrandusest

$$\cos c = \operatorname{cotg}\beta \,.\, \operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}\beta = \cos c \,.\, tg\,\alpha.$$

Kui piirata ülesannet ainult kumerate nurkadega, siis ei või ükski element olla suurem kui 180^0, nad võivad olla kas esimeses või teises veerandis.

Kui element välja arvata *cosinuse*, *tangensi* ehk *cotangensi* kaudu, siis näitab märk, missuguses veerandis on nurk. Kui element välja arvata *sinuse* kaudu, siis saame kaks vastust, sest $\sin \alpha = \sin (180^0 - \alpha)$. Praeguses ülesandes saame α, β ja b üheselt, a-le aga saame kaks väärtust a ja $(180^0 - a)$.

Et aga

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b,$$

siis näeme otsekohe, kas a on terav või tömp. Tähendab, meie saame ülesandele ühe lahenduse.

Ülesanne 2. Antud on kaatetid a ja b.

Lahendus. $\cos c = \cos a \,.\, \cos b\,;\quad tg\,\alpha = \dfrac{tg\, a}{\sin \beta};\quad tg\,\beta = \dfrac{tg\, b}{\sin a}.$

Ülesanne 3. Antud on kaatet a ja lähisnurk β.

Lahendus.
$$\cos \alpha = \cos a \,.\, \sin \beta,$$
$$tg c = \frac{tg\, a}{\cos \beta};\; tg\, b = \sin a\, tg\, \beta.$$

Ülesanne 4. Antud on kaatet a ja vastasnurk α.

Lahendus.
$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$$

(kaks väärtust c-le: c_1 ja $c_2 = 180^0 - c_1$)

$$tg\, b_1 = tg\, c_1 \cos \alpha\,;\; cotg\, \beta_1 = \cos c_1 \,.\, tg\, \alpha\,;$$
$$tg\, b_2 = tg\, c_2 \cos \alpha\,;\; cotg\, \beta_2 = \cos c_2 \,.\, tg\, \alpha.$$

Ülesanne 5. Antud on hüpotenuus c ja kaatet a.

Lahendus. $\cos b = \dfrac{\cos c}{\cos a},\quad \cos \alpha = \dfrac{tg\, b}{tg\, c},\quad \cos \beta = \dfrac{tg\, a}{tg\, c}.$

Ülesanne 6. Antud on mõlemad nurgad α ja β.

Lahendus.
$$\cos c = cotg\, \alpha\; cotg\, \beta.$$
$$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta};\quad \cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

Märkused. 1. Täisnurkse sfäärilise kolmnurga polaarkolmnurk on täiskülgne kolmnurk, s. t. niisugune, milles üks külg on 90^0.

Täiskülgne kolmnurk arvatakse välja tema polaarkolmnurga (täisnurkse kolmnurga) kaudu.

2. Sfäärilise sarik-kolmnurga väljaarvamiseks lastakse tipust alusele sfääriline kõrgus; see jagab sarik-kolmnurga kaheks võrdseks täisnurkseks kolmnurgaks.

Ülesanded.

1. Välja arvata täisnurkne sfääriline kolmnurk, kui on antud:

1. $c = 50^0\, 32'\, 4''$; $\alpha = 48^0\, 25'\, 46''$.
2. $a = 45^0\, 8'\, 29''$; $b = 87^0\, 15'\, 36''$.

3. $a = 100^0\,17'\,6''$; $\beta = 49^0\,14'\,38''$.
4. $a = 112^0\,34'\,8''$; $\alpha = 97^0\,20'\,17''$.
5. $c = 35^0\,14'\,6'$; $a = 14^0\,56'\,29''$.
6. $\alpha = 52^0\,30'$; $\beta = 43^0\,25'$.
7. $a = 50^0\,47'\,2''$; $b = 32^0\,20'\,37''$.
8. $c = 25^0\,40'\,35$; $\alpha = 50^0\,41'\,56''$.
9. $\alpha = 75^0\,23'\,17''$; $\beta = 50^0\,1'\,29$.
10. $b = 3^0\,42'\,6''$; $c = 5^0\,31'\,49''$.
11. $c = 23^0\,16'\,40''$; $\beta = 67^0\,8'\,19$.
12. $a = 33^0\,33'\,33''$; $\beta = 44^0\,44'\,44''$.

2. Välja arvata täiskülgne sfääriline kolmnurk ($c = 90^0$), kui on antud:

1. $\alpha = 75^0\,40'$; $b = 30^0\,45'$.
2. $a = 32^0\,25'$; $b = 53^0\,11'$.
3. $\alpha = 56^0\,24'$; $\beta = 72^0\,36'$.
4. $b = 17^0\,29'$; $\beta = 103^0\,47'$.
5. $a = 21^0\,11'$; $\alpha = 85^0\,47'$.
6. $\beta = 65^0\,40'$; $\gamma = 87^0\,32'$.
7. $a = 42^0\,35'$; $b = 63^0\,46'$.

3. Välja arvata sfääriline sarik-kolmnurk (a — külg, b — alus), kui on antud:

1. $a = 23^0\,47'$; $\beta = 43^0\,50'$.
2. $a = 31^0\,24'$; $b = 30^0\,42'$.
3. $a = 43^0\,49'$; $\alpha = 52^0\,47'$.
4. $b = 30^0\,42'$; $\alpha = 61^0\,45'$.
5. $\alpha = 72^0\,13'$; $\beta = 62^0\,36'$.

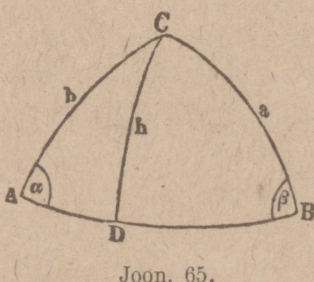
4. Välja arvata sfääriline külgühtlane kolmnurk, kui on antud:

1. $a = 60^0$; 2. $a = 52^0\,47'$; 3. $\alpha = 75^0\,30'$.

5. Kaldnurkne sfääriline kolmnurk.

Teoreem 1. **Igas sfäärilises kolmnurgas on külgede** *sinused* **proportsionaalsed vastasnurkade** *sinustele* (*sinuslause*).

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$



Joon. 65.

Tõendus. Kui sfäärilises kolmnurgas lasta sfääriline kõrgus h küljele AB, siis saame kaks täisnurkset kolmnurka (joon. 65), milledest leiame

$$\sin h = \sin b \sin \alpha = \sin a \sin \beta$$

jagades saame $\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta}$ jne.

Tõendus jääb samaks kui nurk α ehk β oleks tömp.

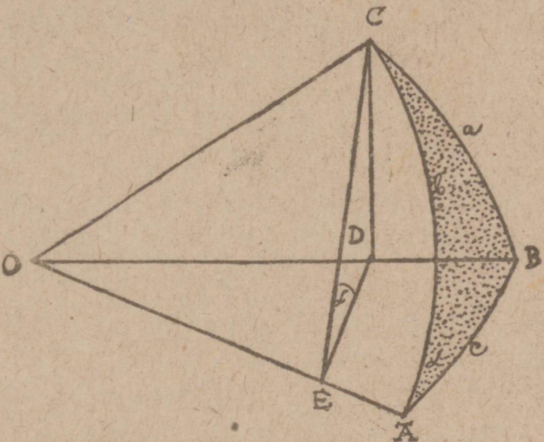
Teoreem 2. **Sfäärilises kolmnurgas võrdub iga külje** *cosinus* **kahe teise külje** *cosinuse* **kasvatisele + nende külgede** *sinuste* **kasvatis nende vahelise nurga** *cosinusele.*

$$1)\quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

$$2)\quad \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta,$$

$$3)\quad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Tõendus. Tõmbame raadiused sfäärilise kolmnurga tippudest kera keskpunkti (joon. 66). Tõmbame $CE \perp OA$, $ED \perp OA$, ühendame punktid C ja D; $\measuredangle CED$ mõõdab tahknurka $CMAB$, täh. $\measuredangle CED = \alpha$. Kolmnurkadest ECD ja OCD võime kirjutada



Joon. 66.

1) $CD^2 = CE^2 + DE^2 - 2\, CE \,.\, DE \cos \alpha,$

2) $CD^2 = OC^2 + OD^2 - 2\, OC \,.\, OD \cos a,$

3) $CE^2 + DE^2 - 2\, CE \times DE \cos \alpha = OC^2 + OD^2 - 2\, OC \,.\, OD \cos a,$

4) $2\, OC \,.\, OD \cos a = \underbrace{OC^2 - CE^2} + \underbrace{OD^2 - DE^2} + 2\, CE \,.\, DE \cos \alpha,$

5) $2\, OC \,.\, OD \cos a = OE^2 + OE^2 + 2\, CE \,.\, DE \cos \alpha,$

6) $OC \,.\, OD \cos a = OE^2 + CE \,.\, DE \cos \alpha,$

7) $\cos a = \frac{OE}{OC} \cdot \frac{OE}{OD} + \frac{CE}{OC} \cdot \frac{DE}{OD} \,.\, \cos \alpha,$

8) $\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$

Valemitest 1, 2 ja 3 järgneb

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

$$\cos \beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}.$$

$$\cos \gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.$$

Teoreem 2-le võib anda tahknurkade kohase väljenduse: kolmetahuses nurgas võrdub iga tasase nurga *cosinus* teiste tasaste nurkade *cosinuste* kasvatisele + nende nurkade *sinuste* kasvatis nende vahel olevale tahknurga *cosinusele.*

Ülesanne 1. Välja arvata tetraeedri tahknurk.

Ülesanne 2. Antud on korrapärane püramiid, mille aluseks on ruut, mille külg $a = 10$; püramiidi kõrgus $h = 15$. Välja arvata tahknurgad.

Teoreem 3. **Sfäärilises kolmnurgas vôrdub iga nurga** *cosinus* **teiste nurkade** *cosinuste* **negatiivsele kasvatisele + nende nurkade** *sinuste* **kasvatis juuresolevale küljele.**

$$4.\quad \cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

$$5.\quad \cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b,$$

$$6.\quad \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$$

Tõendus (polaarkolmnurga abil). Olgu a^1, b^1, c^1, α^1, β^1, γ^1 antud kolmnurga ABC-le vastava polaarkolmnurga $A^1B^1C^1$ elemendid. Polaarkolmnurga külgede kohta on maksev cosinus-lause:

$$\cos a^1 = \cos b^1 \cos c^1 + \sin b^1 \sin c^1 \cos \alpha^1.$$

Polaarkolmnurga küljed (nurgad) täiendavad aga põhikolmnurga nurki (külgi) kuni 180^0-ni. Järjelikult:

$$a^1 = 180^0 - \alpha,\quad b^1 = 180^0 - \beta,\quad c^1 = 180^0 - \gamma,\quad \alpha^1 = 180^0 - a.$$

Need väärtused eelmisse valemisse pannes, saame:

$$\cos(180^0 - \alpha) = \cos(180^0 - \beta)\cos(180^0 - \gamma) + $$
$$+ \sin(180^0 - \beta)\sin(180^0 - \gamma)\cos(180^0 - a)$$

ehk $$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos a,$$

s. t. $$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

Valemitest 4, 5 ja 6 järgneb:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\ osc\gamma}{\sin\beta\sin\gamma};$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma};$$

$$\cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Märkus. Täisnurkse sfäärilise kolmnurga valemid võib tuletada ka *cosinus*- ja *sinus*-lauseist, võttes $\gamma = 90^0$, täh. $\cos\gamma = 0$, $\sin\gamma = 1$.

Näit. valemist 3: $\cos c = \cos a \,.\, \cos b$;

„ 4: $\cos\alpha = \sin\beta \,.\, \cos a$ jne.

6. Kaldnurksete sfääriliste kolmnurkade väljaarvamine.

Sinus- ja *cosinus*-laused võimaldavad kolmnurkade väljaarvamise; pahe seisab ainult selles, et *cosinus*-lause ei ole logaritmitav.

Ülesanded.

On antud.	Valemid puuduvate elementide tarvis.
1) Kolm külge: $\underline{a, b, c.}$	$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \sin c}$, $\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$, $\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$.
2) Kolm nurka: $\underline{\alpha, \beta, \gamma.}$	$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$, $\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$, $\cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.
3) Kaks külge ja nende vaheline nurk: $\underline{a, b, \gamma.}$	$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma.$ Kui c on käes, siis talitakse nagu ülesandes 1. (*Sinus*-lause tarvitamine ei ole soovitav: saame kaks vastust ja tuleb veel vaadata, missugune neist kõlbab.)
4) Üks külg ja kaks lähisnurka: $\underline{c, \alpha, \beta.}$	$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c.$ Siis edasi nagu ülesandes 2.
5) Kaks külge ja ühe vastasnurk: $\underline{a, b, \alpha.}$	$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha$ Saame kaks vastust β_1 ja $\beta_2 = 180^0 - \beta_1$ Külje c saame *cosinus*-lausest $\cos a \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha.$
6) Kaks nurka ja ühe vastaskülg: $\underline{\alpha, \beta, a.}$	$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$ Saame kaks vastust b_1 ja $b_2 = 180_0 - b_1$. Nurga γ saame *cosinus*-lausest: $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\alpha.$

Märkus. 1. Ülesannetes 5 ja 6 ei kõlba iga kord mõlemad vastused. Olgu ülesandes 5 $a > b$, siis peab ka $\alpha > \beta$; mõlemad vastused võivad ainult siis kõlvata, kui $\alpha > \beta_1$ ja $\alpha > \beta_2$. Olgu ülesandes 6 $\alpha > \beta$; kaks vastust võime siis saada, kui $a > b_1$ ja $a > b_2$.

Märkus 2. Ülesannetes 5 ja 6 leiame otsitava külje (nurga) kergemini abinurga kaudu.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + tg\, b \cos \alpha \sin c$$

Võttes $tg\, b \cos \alpha = tg\, \varphi$, saame

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \cos c + tg\, \varphi \sin c \text{ ehk}$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos c \cos \varphi + \sin c \sin \varphi}{\cos \varphi}, \text{ s. t.}$$

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a}{\cos b} \cos \varphi.$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = -\cos \gamma + tg\, \beta \cos a \sin \gamma$$

Võttes $tg\, \beta \cos a = tg\, \varphi$, saame

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = -\cos \gamma + tg\, \varphi \sin \gamma \text{ ehk}$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{-(\cos \gamma \cos \varphi - \sin \gamma \sin \varphi)}{\cos \varphi}, \text{s.t.}$$

$$\cos (\gamma + \varphi) = -\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cos \varphi.$$

Ülesanded.

Välja arvata sfääriline kolmnurk, kui on antud:

1. $a = 48^0 15' 36''$; $b = 36^0 47' 18''$; $c = 72^0 24' 37''$.
2. $\alpha = 96^0 28'$; $\beta = 84^0 32'$; $\gamma = 70^0 56'$.
3. $a = 78^0 54'$; $b = 65^0 13'$; $\gamma = 120^0 35'$.
4. $a = 12^0 46'$; $\beta = 85^0 26'$; $\gamma = 54^0 37'$.
5. $b = 46^0 42'$; $c = 69^0 48'$; $\gamma = 32^0 54'$.
6. $b = 133^0 18'$; $c = 69^0 48'$; $\gamma = 32^0 54'$.
7. $b = 70^0 21'$; $c = 51^0 42'$; $\gamma = 52^0 30'$.
8. $b = 70^0 21'$; $c = 128^0 18'$; $\gamma = 127^0 30'$.
9. $a = 56^0 17'$; $b = 46^0 29'$; $c = 95^0 34'$.
10. $a = 100^0$; $b = 120^0$; $\gamma = 30^0 14'$.
11. $b = 85^0 16'$; $c = 15^0 37'$; $\gamma = 70^0 13'$.
12. $\beta = 37^0 20'$; $\gamma = 49^0 13'$; $c = 50^0 42'$.

Küsimused: Mitu vastust on ülesannetes 5—8, 11, 12? kas kõlbavad kõik? kas on sfäärilises trigonomeetrias maksev teoreem: kaks külge ja suurema külje vastasnurk määravad kolmnurga üheselt?

7. Poolnurga funktsioonid.

Cosinus-laused ei ole kohased väljaarvamisiks, sest nad sisaldavad summi ja vahesid, millele ainult abinurka tarvitades võib anda logaritmilise kuju. Sellepärast arendame teised valemid, mis sisaldavad ainult kasvatisi ja jagatisi.

Cosinus-lanse põhjal

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \, . \sin c},$$

täh. $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{2\sin b\,.\sin c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{2\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{2\sin b\sin c}};$$

kui võtta $a+b+c=2p$, siis $\frac{b+c-a}{2}=p-a$,

täh. $$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\,.\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};$$

samuti:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{2\sin b\sin c}}=$$

$$=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{2\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}}{2\sin b\sin c}};$$

täh. $$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}.$$ ja siit

1. $$tg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}},$$

analoogiliselt

2. $$tg\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-b)}},$$

3. $$tg\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}.$$

Tarvitades neid valemeid polaarkolmnurga nurkade kohta:

$$tg\frac{\alpha^1}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p^1-b^1)\sin(p^1-c^1)}{\sin p^1\sin(p^1-a^1)}},$$

kus:

$$\frac{\alpha^1}{2}=90^0-\frac{\alpha}{2},\quad a^1=180^0-\alpha,\quad b^1=180^0-\beta,$$

$$c^1=180^0-\gamma,\quad p^1=\frac{a^1+b^1+c^1}{2}=270^0-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2},$$

nimetades $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sigma$, võime kirjutada $p^1=270^0-\sigma$,

$p^1-a^1=90^0-(\sigma-\alpha)$, $p^1-b^1=90^0-(\sigma-\beta)$, $p^1-c^1=90^0-(\sigma-\gamma)$,
asemele pannes leiame:

4. $\cot g \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}}$,

5. $\cot g \frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}}$,

6. $\cot g \frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}}$,

kus $2\sigma = \alpha+\beta+\gamma$.

8. Gauss-Delambre'i valemid.

Paneme valemisse

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

poolnurga funktsioonide $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\beta}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ ja $\sin\frac{\beta}{2}$ asemele § 7-ndas tuletatud avaldused, siis saame:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)}{\sin a\sin c}} + \\ + \sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}} \cdot \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a\sin c}};$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin p}{\sin a\sin b}} + \frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\,.\sin(p-c)}{\sin a\sin b}} = \\ = \frac{\sin(p-b)+\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-c)\sin p}{\sin a\sin b}} = \\ = \frac{2\sin\left(p-\frac{a+b}{2}\right)\cos\frac{a-b}{2}}{\sin c} \,.\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{2\sin\frac{c}{2}\,.\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}} \,.\cos\frac{\gamma}{2} = \\ = \frac{\cos\frac{a-b}{2}\,.\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.$$

Samuti võime välja arvata $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ ja $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, saame nõndanimetatud Gauss-Delambre'i valemid:

1. $$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

2. $$\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}};$$

3. $$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}};$$

4. $$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.$$

Märkus. 3-ndast valemist saame tingimuse, mis täiendab märkust 1 § 6. Kui vaadelda ainult kolmnurki, mille küljed on $< 180^0$, siis on $\cos\frac{c}{2}$ positiivne, positiivne on ka $\sin\frac{\gamma}{2}$, täh. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ja $\cos\frac{a+b}{2}$ märgid peavad olema samad. Kui $a+b \gtreqless 2d$, siis peab ka $\alpha+\beta \gtreqless 2d$.

9. Neperi analoogiad.

Kui jagada üksteisele iga kaks Delambre'i valemit, siis saame nn. **Neperi analoogiad** ehk *tangens*-laused:

1. $$\frac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{cotg\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}};$$

2. $$\frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{cotg\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}};$$

3. $$\frac{tg\frac{a+b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}};$$

4. $$\frac{tg\frac{a-b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

10. Valemid kolmnurkade väljaarvamiseks.

Antud	Valemid puuduvate elementide tarvis	
	Sfäärilised kolmnurgad	Tasased kolmnurgad
1. $a, b, c.$	$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}}$ $tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin p \sin(p-b)}}$ $tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p \sin(p-c)}}$	$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ $tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$ $tg\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

Antud	Valemid puuduvate elementide tarvis Sfäärilised kolmnurgad	 Tasased kolmnurgad
2. α, β, γ	$cotg\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}}$ $cotg\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}}$ $cotg\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}}$	Ei ole võimalik.
3. a, b, γ	$tg\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\gamma}{2}$ $tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}cotg\frac{\gamma}{2}$ $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha;$ $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\beta$ Edasi nagu 2-ses ülesandes.	$\frac{\alpha+\beta}{2}=90-\frac{\gamma}{2}$ $tg\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot cotg\frac{\gamma}{2}$ $\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}=\alpha;$ $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}=\beta$ c *sinus*-lausest.
4. α, β, c	$tg\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot tg\frac{c}{2}$ $tg\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot tg\frac{c}{2}$ $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a;$ $\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b$ Edasi nagu 1-ses ülesandes.	Võiks Mollweidi valemeid tarv.: $a+b=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot c$ $a-b=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot c$ Muidugi lihtsamalt: $\gamma=180-(\alpha+\beta)$ a ja b *sinus*-lausest.

<table>
<tr><th rowspan="2">Antud</th><th colspan="2">Valemid puuduvate elementide tarvis</th></tr>
<tr><th>Sfäärilised kolmnurgad</th><th>Tasased kolmnurgad</th></tr>
<tr><td>5. a, b, α</td><td>$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a} . \sin\alpha$

$tg\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} . tg\frac{a-b}{2}$

$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} cotg\frac{\alpha-\beta}{2}$</td><td>$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$
$\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma$
ehk Mollwerdi lausest:
$c = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}(a-b)$

$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{a-b}{a+b} cotg\frac{\alpha-\beta}{2}$</td></tr>
<tr><td>6. α, β, a</td><td>$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\sin a$

$tg\frac{c}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} tg\frac{a-b}{2}$

$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} cotg\frac{\alpha-\beta}{2}$</td><td>$b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} . a$
c *sinus*-lausest.
Ehk
$c = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}(a-b)$

$tg\frac{\gamma}{2} = \frac{a-b}{a+b} cotg\frac{\alpha-\beta}{2}$</td></tr>
</table>

Märkus. Sfäärilise ja tasapinnalise trigonomeetria valemite kõrvupaigutamine teeb ülevaatlikuks nende sügava analoogia. Näeme, et tasapinnalise kolmnurga valemid on samad kui sfäärilisel, mille küljed a, b, c on nii väiksed, et meie nende *cosinuste* asemele võime võtta 1, nende *sinuste* ja *tangensite* asemele külje enese. Küljed (kaared) a, b, c on harilikult antud kraadides, meie võiksime nad anda ka radiaalmõõdus. Nimetame kaarte a, b, c lineaarpikkused vastavalt a^1, b^1, c^1, siis

$$a = \frac{a^1}{R}, \quad b = \frac{b^1}{R}, \quad c = \frac{c^1}{R},$$

kus R on kera raadius.

Küljed (kaared) a, b, c võivad muutuda lõpmata väikseks kas sellepärast, et kaarte lineaarpikkused lõpmata vähenevad, ehk sellepärast, et kera raadius R lõpmata kasvab. Tasapinnaliste kolmnurkade küljed ei ole lõpmata väiksed; jääb teine võimalus: tasapinnaline trigonomeetria on trigonomeetria sfääril, mille raadius on lõpmata suur.

Ülesanded.

Välja arvata sfääriline kolmnurk, kui on antud:

1. $a = 50^0\,30'$; $b = 75^0\,25'$; $c = 24^0\,05'$.
2. $\alpha = 78^0\,34'$; $\beta = 95^0\,17'$; $\gamma = 105^0\,19'$.
3. $a = 16^0\,54'$; $b = 25^0\,46'$; $\gamma = 109^0\,45'$.
4. $\alpha = 84^0\,52'$; $\beta = 75^0\,43'$; $c = 65^0\,28'$.
5. $a = 18^0\,29'$; $b = 45^0\,16'$; $\alpha = 124^0\,37'$.
6. $\alpha = 105^0\,47'$; $\beta = 82^0\,41'$; $a = 13^0\,7'$.
7. $a + \alpha = 120^0\,13'\,26''$; $\alpha + \beta = 160^0\,45'\,16''$; $c = 28^0\,18'\,38''$.
8. $\alpha - \beta = 42^0\,45'\,44''$; $\gamma = 95^0\,42'\,10''$; $c = 16^0\,39'\,44''$.
9. $b + c = 160^0\,29'\,30''$; $\beta - \gamma = 32^0\,15'\,46''$; $a = 92^0\,17'\,38''$.
10. $\beta + \gamma = 183^0\,14'\,36''$; $\alpha = 83^0\,14'\,36''$; $a - b = 3^0\,14'\,36''$.
11. $a = 75^0\,36'$; $h_a = 34^0\,40'$; $\alpha = 72^0\,20'$.
12. $h_a = 42^0\,36'$; $h_b = 30^0\,56'$; $\beta = 62^0\,48'$.
13. Täisnurkses sfäärilises kolmnurgas on kaatetite summa $S = 100^0$, hüpotenuus $c = 80^0$. Kui suured on kaatetid?
14. Välja arvata tahknurgad tetraeedris, oktoeedris, dodekaeedris ja ikosaeedris.
15. Neli kolmnurka, millede küljed on $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$, on nii viisi kokku seatud, et nad sünnitavad püramiidi. Määrata püramiidi tahknurgad.
16. Kolmetahuses püramiidis, mille alus on ABC ja tipp D, on serv $AB = 12$, $BC = 11$, $AC = 10$, $AD = 9$, $BD = 8$ ja $CD = 7$. Määrata tipu A juures olevad nurgad ja tahknurgad.
17. Tõendada, et sfäärilisse kolmnurka on võimalik kujundada sõõr, ja näidata, et selle raadius r rahuldab ekvatsiooni:

$$tg\, r = sin\,(p - a)\, tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{sin\,(p - a)\, sin\,(p - b)\, sin\,(p - c)}{sin\, p}}.$$

18. Tõendada, et ümber sfäärilise kolmnurga on võimalik kujundada sõõr, ja näidata, et selle raadius R rahuldab ekvatsiooni:

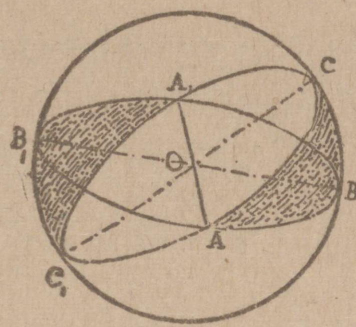
$$cotg\, R = cos\,(\sigma - \alpha)\, cotg\,\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{cos\,(\sigma - \alpha)\, cos\,(\sigma - \beta)\, cos\,(\sigma - \gamma)}{cos\,\sigma}}.$$

11. Sfäärilise kolmnurga pind.

Kolm tasapinda, mis lõikuvad ühes punktis O, sünnitavad 8 kolmetahust nurka ja annavad keral, mille keskpunkt on O-s, 8 sfäärilist kolmnurka. Võtame ühe nendest, näit. ABC; tema igasse külge liituvad kolmnurgad, mis ühes temaga sünnitavad sfäärilise kaksnurga; neid kolmnurki ACB_1, ABC_1

ja BCA_1 nimetakse kõrvukolmnurkadeks, kolmel teisel kolmnurgal AB_1C_1, BA_1C_1 ja CA_1B_1 on igal üks ühine tipp kolmnurgaga ABC — need on nn. tippkolmnurgad; kolmnurka $A_1B_1C_1$ nimetakse vastaskolmnurgaks, sest tema tipud on kolmnurga ABC tippude vastaspunktides.

Joonistusel 67 on näha, et kõrvukolmnurkadel on põhikolmnurgaga üks ühine külg, tippkolmnurgal üks ühine tipp, teised nurgad ja tipud aga täiendavad põhikolmnurga vastavaid nurki ja tippe kuni 180^0-ni.



Joon. 67.

Vastaskolmnurgal aga on kõik vastavad küljed ja täh. ka kõik vastavad nurgad võrdsed ($AB = A_1B_1$ sest $\sphericalangle BOA = \sphericalangle AOB$, kui vertikaalnurgad, jne.

Kaks sfäärilist vastaskolmnurka ABC ja $A_1B_1C_1$ on **sümmeetrilised.** Tõepoolest, kui lükata kolmnurka $A_1B_1C_1$ piki peasõõri B_1AB, kuni punkt B_1 langeb punktisse B, siis langeb A_1 punktisse A, aga C_1 ei lange C-sse.

Ainult sarik-vastaskolmnurgad on kongruentsed. Tõepoolest, kui $A_1B_1 = A_1C_1 = AB = AC$, siis võib lükata kolmnurga $A_1B_1C_1$ kolmnurga ABC peale, nii et nad ühte langevad.

Teoreem. **Sfäärilised vastaskolmnurgad on vôrdpinnalised.**

Tõendus. Sfäärilistel vastaskolmnurkadel on vastavad küljed ja nurgad võrdsed, tähendab, neil peavad olema ka võrdsed ümberjoonistud sõõri raadiused (vaata ülesanne 17 ja 18). Kui ühendada sõõri keskpunkt kolmnurga tippudega, siis saame kolm paari sarik-vastaskolmnurki, need on kongruentsed.

Nüüd asume sfäärilise kolmnurga ABC pinna määramisele. Nimetame selle pinna tähega S, siis on ka pind $A_1B_1C_1 = S$; nimetame lähemalt ka kõrvu-kolmnurkade pinnad: pind $A_1BC = S_a$, samuti pind $AB_1C_1 = S_a$ (kolmnurgad A_1BC ja AB_1C_1 on vastaskolmnurgad); pind $B_1AC = S_b = BA_1C_1$, pind $C_1AB = S_c = CA_1B_1$.

Kõigi sfääriliste kolmnurkade pindade summa on kera pind $4\pi R^2$.

$$2S + 2S_a + 2S_b + 2S_c = 4\pi R^2,$$

täh.
$$S + S_a + S_b + S_c = 2\pi R^2$$

S ja S_a annavad koos sfäärilise kaksnurga, mille nurk on α,

täh.
$$S + S_a = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360^0};$$

samuti
$$S + S_b = 4\pi R^2 \cdot \frac{\beta}{360^0}$$

$$S + S_c = 4\pi R^2 \cdot \frac{\gamma}{360^0}$$

$$3S + S_a + S_b + S_c = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360^0}$$

Kirjutades $S + S_a + S_b + S_c$ asemele $2\pi R^2$, saame

$$2S + 2\pi R^2 = \frac{4\pi R^2}{360^0}(\alpha + \beta + \gamma)$$

$$S = \frac{\pi R^2}{180^0}(\alpha + \beta + \gamma - 180^0)$$

$$S = \frac{\pi R^2}{180^0}.E. \text{ Siit selgub}$$

Teoreem. **Sfäärilise kolmnurga pind vôrdub tema sfäärilise ekstsessi ja $\frac{\pi R^2}{180^0}$ kasvatisele.**

Märkus. Kui kera raadius R ei ole teada, siis võime välja arvata ainult, mitmenda osa kera pinnast katab sfääriline kolmnurk.

Kera pind $S_k = 4\pi R^2$; $R^2 = \frac{S_k}{4\pi}$ asemele pannes, leiame:

$$S = \frac{E}{8d} S_k.$$

Märkus 2. L'Huilier tuletab sfäärilise ekstsessi avaldamiseks kolmnurga küljede funktsioonina järgmise valemi:

$$tg\frac{E}{4} = \sqrt{tg\frac{p}{2}\, tg\frac{(p-a)}{2}\, tg\frac{(p-b)}{2}\, tg\frac{(p-c)}{2}},$$

kus $2p = a + b + c$.

Ülesanded.

Välja arvata sfäärilise kolmnurga pind, kui on antud:

1. $\alpha = 95^0 45' 32''$; $\beta = 100^0 43' 51''$; $\gamma = 67^0 42' 15''$; $R = 6370$.
2. $\alpha = 78^0 45' 39''$; $\beta = 102^0 4' 23''$; $\gamma = 93^0 16' 25''$; $R = 1000$.
3. $a = 50^0 32'$; $b = 32^0 40'$; $c = 40^0 24'$; $R = 1000$.
4. Millise osa kera pinnast katab kolmnurk, kui

a) $\alpha = 112^0 40'$; $\beta = 100^0 32'$; $\gamma = 98^0 4'$.
b) $\alpha = 75^0 30'$; $\beta = 60^0 42'$; $\gamma = 65^0 10'$.
c) $\alpha = 112^0 34' 10''$; $\beta = 76^0 12' 50''$; $\gamma = 72^0 50' 20''$.
d) $a = 81^0 31' 10''$; $b = 95^0 10' 20''$; $c = 75^0 16' 30''$.

5. Maa raadius on 6370 klm, maapinnal asuva ühtlasküljgse kolmnurga pind $S = 250.000$ r. klm. Kui pikk on külg?

6. Kera pinnal, mille raadius $R = 20$ cm, on 3 punkti, millede sirgjooneline kaugus üksteisest on 15 cm. Kui suur on sfäärilise kolmnurga pind, mille määravad need kolm punkti.

7. Välja arvata kera raadius, kui tema pinnal asuvas kolmnurgas on antud:

a) $\alpha = 78^0 16' 59''$; $\beta = 82^0 24' 17''$; $\gamma = 85^0 47' 21''$; $S = 2943{,}51$.

b) $\alpha = 25^0 32' 47''$; $\beta = 82^0 47' 2''$; $\gamma = 93^0 21' 42''$; $S = 456$.

c) $a = 30^0$; $b = 45^0$; $c = 60^0$; $S = 1000$.

8. Kera, mille raadius $R = 10$ cm, lõikab tasapind, mille kaugus kera keskpunktist $d = 3$ cm. Lõikesõõri on kujundatud ühtlane n-nurk ($n = 5$) ja selle tipud on kordamööda üksteisega peasõõri kaartega ühendatud. Määrata sfäärilise n-nurga pind.

9. Ühtlase sfäärilise n-nurga pind võrdub kera peasõõri pinnale. Kui pikk on tema külg, kui $n = 7$?

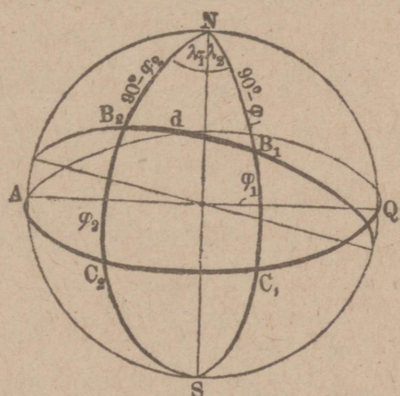
12. Kauguste väljaarvamine maapinnal.

Ülesanne. On antud kahe maapinnal asuva koha B_1 ja B_2 geograafilised koordinaadid (geogr. pikkus λ ja laius φ). Missugune on kõige lühem kaugus nende vahel?

Lahendus. Kõige lühemaks kauguseks B_1 ja B_2 vahel on väiksem peasõõri kaar d, mis läheb läbi B_1 ja B_2. Selle võime välja arvata kolmnurgast B_1NB_2, kus N tähendab poolust; $B_1N = 90^0 - \varphi_1$, $B_2N = 90^0 - \varphi_2$, $\sphericalangle B_1NB_2 = \lambda_2 - \lambda_1$,

$$\cos d = \cos(90^0 - \varphi_1)\cos(90^0 - \varphi_2) + \sin(90^0 - \varphi_1)\sin(90^0 - \varphi_2)\cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\underline{\underline{\cos d = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1).}}$$



Joon. 68.

Ülesanne 2. Millises sihis peab sõitma laev punktist B_1, et jõuda B_2-sse kõige lähemat teed?

Lahendus. Tarvis leida $\sphericalangle NB_1B_2 = \alpha$.

Ülesanded.

(Idapoolne pikkus ja põhjapoolne laius märgitakse $+$, läänepoolne pikkus ja lõunapoolne laius $-$).

1. Välja arvata kaugused:

a) Hamburgist ($\lambda_1 = +9^0 58' 9''$, $\varphi_1 = +53^0 33' 7''$)
New-Yorki ($\lambda_2 = +73^0 59' 59''$, $\varphi_2 = +40^0 43' 48''$).

b) Moskvast ($\lambda_1 = +37^0 34' 6''$, $\varphi_1 = +55^0 45' 20''$)
Pariisi ($\lambda_2 = +2^0 20' 15''$, $\varphi_2 = +48^0 50' 13''$).

c) Tartust ($\lambda_1 = +26^0 43' 18''$, $\varphi_1 = +58^0 22' 47''$)
Tallinna ($\lambda_2 = +24^0 47' 47''$, $\lambda_2 = +59^0 26' 15''$).

2. Laev sõidab Lissabonist ($\varphi_1 = + 38^0 44'$, $\lambda_1 = - 9^0 12'$) kõige lühemat teed Rio de Janeiro'sse ($\varphi_2 = - 22^0 54'$, $\lambda_2 = - 43^0 9'$) keskmise kiirusega 300 km päevas. Kui kaua kestab reis ja millises sihis algab laev sõitu?

3. Õhulaev sõidab kõige lühemat teed Berliinist ($\varphi_1 = + 52^0 31'$, $\lambda_1 = + 13^0 24'$) Pariisi ($\varphi_2 = + 48^0 50'$, $\lambda_2 = + 2^0 20'$). Kiirus on 100 km. tunnis. Kui kaua kestab reis, millises sihis algab õhulaev sõitu, millises lõpetab?

4. Kui kaugel on Lissabon ($\varphi = + 38^0 44'$, $\lambda = - 9^0 12'$) Amazoni jõe suust, mille $\varphi = 0$, $\lambda = - 50^0$.

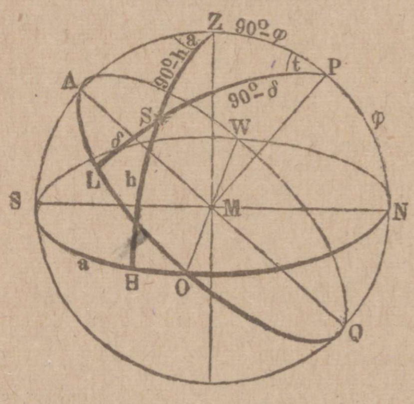
13. Mõned astronoomilised ülesanded.

Kosmograafia kursuses õpetati välja arvama taevakeha kulmimisaeg, kui on teada tema otsetõus α.

Ülesanne 1. Millal kulmib Aldebaran ($\alpha = 4^t 31^m$) Tartus 5. mail kohalise aja järele.

Ülesanne 2. Jupiteri otsetõus on 9. dets. 1921 ($\alpha = 12^t 55^m 31^s$). Millal ta kulmib?

Sfäärilise trigonomeetria abil võime välja arvata, millal ja millises vaatepiiri punktis taevakeha tõuseb ja loojeneb.



Joon. 69.

A. Kujutagu joon. 69 peasõõr $SAZPNQ$ — taevameridiaani, $NOSW$ — vaatepiiri, $AWQO$ — ekvaatori, Z — zeniiti, P — poolust, S — taevakeha. Tõmbame läbi S meridiaani PSL ja kõrguse sõõri ZSH. Saame sfäärilise kolmnurga ZPS — tipud: zeniit, poolus, täht —; see on nn. parallaktiline kolmnurk. Külg ZS — tähe kaugus zeniidist $= 90^0 - h$, kus h on tähe kõrgus vaatepiirilt, külg $ZP = 90^0 - \varphi$ (sest $ZN = 90^0$), PN — pooluse kõrgus vaatepiirilt $= \varphi =$ vaatlemiskoha geograafiline laius; külg $PS = 90^0 - \delta$ (sest $PL = 90^0$, $SL = \delta =$ tähe deklinatsioon). Nurka ZPS — tähe meridiaani ja vaatlemiskoha meridiaani vahel — nimetakse tundnurgaks ja märgitakse tähega t. Meridiaanist ida poole loetakse see nurk negatiivseks, meridiaanist lääne poole — positiivseks.

Sfäärilise trigonomeetria abil leiame sideme nimetatud suuruste vahel:

$$\cos(90^0 - h) = \cos(90^0 - \varphi)\cos(90^0 - \delta) + \sin(90^0 - \varphi)\sin(90 - \delta)\cos t.$$

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t.$$

Taevakeha tõusmise ja loojenemise ajal on tema kõrgus vaatepiirilt $h = 0$

(kui mitte arvesse võtta refraktsiooni), $\sin h = 0$, täh.

$$0 = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

ehk

$$\cos t = -\frac{\sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta} = \underline{\underline{\cos t = -\,tg\,\varphi\, tg\,\delta.}}$$

Taevakeha tõusmise ja loojenemise ajal võrdub tema tundnurga *cosinus* vaatlemiskoha geograafilise laiuse *tangensi* ja taevakeha deklinatsiooni *tangensi* negatiivsele kasvatisele.

Seda ekvatsiooni rahuldavad kaks nurka $-t_1$ ja $+t_1$; tõusmisele vastab $-$, loojenemisele $+$. Kui tähe deklinatsioon δ vahepeal ei muutu, siis saame tõusu ja loojenemise nurgad korraga; vastasel korral peame nad eraldi välja arvama.

B. Ekvatsiooni $\cos t = -\,tg\,\varphi\, tg\,\delta$ analüüs. 1) Põhja-poolkeral on $0^0 < \varphi < 90^0$, täh. $tg\,\varphi > 0$. Põhjapoolse tähe deklinatsioon $\delta > 0$, ka $tg\,\delta > 0$, järjel. on $\cos t < 0$. Nurk t on teises veerandis, tema absoluutne väärtus peab olema suurem kui 90^0, täht tõuseb vaatepiiri kohale ida- ja põhjapunkti vahel (ON) ja loojeneb lääne- ja põhjapunkti vahel (WN), tema päevane kaar vaatepiiri kohal on suurem kui 180^0.

2) Kui tähe deklinatsioon $\delta < 0$ (lõuna-poolkera täht), siis $tg\,\delta < 0$; täh. põhja-poolkeral ($\varphi > 0$) on $\cos t > 0$, nurk t on esimeses veerandis, tema absoluutne väärtus on vähem kui 90^0; täht tõuseb lõuna- ja idapunkti vahel (SO), loojeneb lõuna- ja läänepunkti vahel (SW), tema päevane kaar vaatepiiri kohal on väiksem kui 180^0.

3) Kui kasvatise $tg\,\varphi\, tg\,\delta$ absoluutne väärtus on suurem kui 1, siis ei või täht ei tõusta ega veereda, sest $\cos t > 1$ on võimata. Tähend. võrratus $|tg\,\varphi\, tg\,\delta| > 1$, ehk

$$|tg\,\delta| > \frac{1}{tg\,\varphi} = cotg\,\varphi = tg\,(90^0 - \varphi)$$

ehk $|\delta| > 90^0 - \varphi$ määrab, missuguste deklinatsioonidega tähed antud geograafilisel laiusel iialgi ei loojene, missugused iialgi ei tõuse.

C. Millises vaatepiiri punktis täht tõuseb ja millises loojeneb?

Parallaktiline kolmnurk ZPS annab ka tähe aasimudi $\sphericalangle SZH = \smile SH = a$ iga silmapilgu tarvis:

$$\cos(90^0 - \delta) = \cos(90^0 - h)\cos(90^0 - \varphi) + \\ + \sin(90^0 - h)\sin(90^0 - \varphi)\cos(180 - a)$$

ehk

$$\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos a.$$

$$\cos a = \frac{\sin h \sin\varphi - \sin\delta}{\cos h \cos\varphi}.$$

Tähe tõusu ja loojenemise ajal $h = 0$; $\sin h = 0$; $\cos h = 1$, tähendab

$$\cos a = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

Taevakeha tõusmise ja loojenemise ajal võrdub tema aasimudi *cosinus* deklinatsiooni *sinuse* ja vaatlemiskoha geograafilise laiuse *cosinuse* negatiivsele jagatisele.

Sellest ekvatsioonist saame kaks väärtust $-a_1$ = tõusu aasimut, $+a_1$ = = loojenemise aasimut.

Ülesanded. 1. Millal tõuseb ja loojeneb Aldebaran ($\alpha = 4^t 31^m$, $\delta = +16^0 21'$) Tartus ($\varphi = 58^0 23'$) 1-sel septembril?

Lahendus. Kõige pealt arvame välja tähe kulmimisaja 1-sel septemb.

	Täheaeg 1-se septembri keskpäeval =	10 tundi	38 min.
	Aldebarani otsetõus . . . . =	4 „	31 „
täh.	Aldebaran kulmib enne keskpäeva =	6 tundi	7 min.,

Aldebaran kulmib 1-sel septembril kell 5, 53 min. hommikul.

Nüüd arvame välja, mitu tundi enne kulmimist Aldebaran tõuseb.

$$\cos t = -\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

$$\begin{aligned} lg\, tg\, \varphi &= 0{,}21070 \\ lg\, tg\, \delta &= 9{,}46741 \\ \hline lg \cos t &= 9{,}67811_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} t &= 180^0 - 61^0 32' 23'' \\ t &= 118^0 27' 37''. \end{aligned}$$

Avaldades nurga t ajamõõdus ($1^0 = 4$ ajamin., $1' = 4$ ajasek., $1'' = \frac{1}{15}$ ajasek.) leiame, et Aldebaran tõuseb enne kulmimist

7 tundi 43 min. 50 sek.

ja loojeneb muidugi sama palju aega pärast kulmimist, tähendab, kell 13, 36 min. 50 sek. Tähe kulmimisajast 1. septemb. kell 5, 53 min. hom. tagasi arvates 7 t. 43 m. 50 sek. tuleme aga juba 31-sse aug. ja leiame

$$\begin{array}{rl} & {}^{+24} \\ & 5 \text{ tundi } 53 \text{ min. — sek.} \\ - & 7 \quad „ \quad 43 \quad „ \quad 50 \quad „ \\ \hline & 22 \text{ tundi } 9 \text{ min. } 10 \text{ sek.} \end{array}$$

31-sel augustil tõusis Aldebaran kell 22, 9 min. 10 sek.; 1-sel septembril tõuseb ta umbes 4 minutit varem.

2. Millises vaatepiiri punktis tõuseb Aldebaran?

$$\cos a = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}.$$

$$\begin{aligned} lg \sin \delta &= 9{,}44948 \\ t.\, lg \cos \varphi &= 0{,}28048 \\ \hline \cos a &= 9{,}72996_n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} a &= 180^0 - 57^0 31' 18'' \\ a &= 122^0 28' 42''. \end{aligned}$$

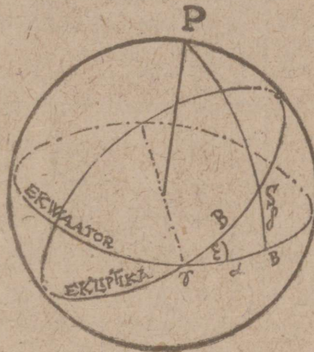
14. Päikese aastane teekond.

Päike liigub taevavõlvil mööda ekliptikat $EFKH$ (joon. 70), tema kulminatsiooni, tõusmise ja loojaminemise aegade määramiseks on aga tarvis teada tema otsetõusu α ja deklinatsiooni δ. Siit järgmine

Ülesanne. Päikese kaugus kevadpunktist F — nn. astronoomiline pikkus — on λ. Määrata tema otsetõus α ja deklinatsioon δ.

Joon. 70 olgu päike punktis S; tõmbame läbi päikese meridiaani PSL, saame täisnurkse sfäärilise kolmnurga FSL. Sfäärilise trigonomeetria abil leiame:

$$tg\,\alpha = cos\,\varepsilon \,.\, tg\,\lambda,$$
$$sin\,\delta = sin\,\varepsilon \,.\, sin\,\lambda,$$



Joon. 70.

kus ε on ekliptika ja ekvaatori tasapindade vaheline nurk $\varepsilon = 23^0\,27'$. Kui päike ekliptikat mööda ühtlaselt liiguks, siis oleks tema ekvatoriaalsete koordinaatide väljaarvamine lihtne.

Näitus. Välja arvata, millised oleksid päikese ekvatoriaalsed koordinaadid 15. mail keskpäeval, kui päike ekliptikat mööda ühtlaselt liiguks.

Aasta, s. t. 365,25 päeva jooksul teeb päike ekliptikal terve sõõri ehk 360^0. Kevadisel pööripäeval, 21. märtsil, on ta kevadpunktis F; $\lambda = 0^0$. (Võrdle lhk. 82, märkus 2.) 15. mail, s. t. 55 päeva pärast: $\lambda = \dfrac{360^0 \,.\, 55}{366{,}25}$. Teades λ, võime välja arvata α ja δ.

Päike liigub aga ekliptikat mööda mitte ühtlaselt, talvel kiiremini kui suvel, tähendab, sel teel arvatud koordinaadid ei ole täpipealsed.

Palju parema resultaadi saame, kui välja arvame päikese otsetõusu, oletades esialgu, et päike liigub ühtlaselt ekvaatorit mööda (nn. keskmine päike), ja saadud väärtusele juure lisame nn. aja võrranduse (lähem seletus kosmograafia kursuses).

Kuigi aja võrrandus aast-aastalt muutub, on see muutumine ometi nii väike, et teda ligikaudsete väljaarvamiste juures ei tarvitse tähele panna.

Kui päikese otsetõus α on määratud, leiame tema deklinatsiooni valemist:

$$\underline{\underline{tg\,\delta = tg\,\varepsilon \,.\, sin\,\alpha.}}$$

Ekvatsioon näitab, et üldiselt $|\delta| < \varepsilon$; ainult kui $sin\,\alpha = 1$ ehk $\alpha = 90^0$ (suvine pööripäev), siis $tg\,\delta = tg\,\varepsilon$, ehk $\underline{\underline{\delta = \varepsilon}}$. Samuti, kui $sin\,\alpha = -1$, ehk $\alpha = 270^0$ (talvine pööripäev), siis $tg\,\delta = -tg\,\varepsilon$ ehk $\underline{\underline{\delta = -\varepsilon.}}$

Et mitmesuguste ülesannete lahendamisel tarvis on teada aja võrrandust, sellepärast olgu siinkohal antud

Aja vôrranduse tabel.

Keskmine aeg miinus tõeline aeg (1921. aasta tarvis).

	Jaanuar	Veebruar	Märts	Aprill	Mai	Juuni
1	$+3^m\,34^s$	$+13^m\,42^s$	$+12^m\,33^s$	$+4^m\;\;2^s$	$-2^m\,57^s$	$-2^m\,27^s$
5	$+5\;\;25$	$+14\;\;9$	$+11\;\;43$	$+2\;\;51$	$-3\;\;23$	$-1\;\;49$
10	$+7\;\;34$	$+14\;\;29$	$+10\;\;30$	$+1\;\;26$	$-3\;\;42$	$-0\;\;52$
15	$+9\;\;29$	$+14\;\;19$	$+9\;\;9$	$+0\;\;8$	$-3\;\;48$	$+0\;\;9$
20	$+11\;\;6$	$+13\;\;56$	$+7\;\;42$	$-1\;\;2$	$-3\;\;40$	$+1\;\;13$
25	$+12\;\;25$	$+13\;\;16$	$+6\;\;11$	$-2\;\;1$	$-3\;\;19$	$+2\;\;17$
30	$+13\;\;24$	—	$+4\;\;39$	$-2\;\;49$	$-2\;\;44$	$+3\;\;19$

	Juuli	August	September	Oktoober	November	Detsember
1	$+3^m\,31^s$	$+6^m\,10^s$	$+0^m\;\;3^s$	$-10^m\,12^s$	$-16^m\,19^s$	$-10^m\,59^s$
5	$+4\;\;16$	$+5\;\;52$	$-1\;\;14$	$-11\;\;26$	$-16\;\;19$	$-9\;\;24$
10	$+5\;\;5$	$+5\;\;16$	$-2\;\;55$	$-12\;\;51$	$-16\;\;1$	$-7\;\;14$
15	$+5\;\;42$	$+4\;\;25$	$-4\;\;41$	$-14\;\;5$	$-15\;\;21$	$-4\;\;54$
20	$+6\;\;7$	$+3\;\;21$	$-6\;\;27$	$-15\;\;5$	$-14\;\;21$	$-2\;\;27$
25	$+6\;\;18$	$+2\;\;5$	$-8\;\;12$	$-15\;\;48$	$-13\;\;1$	$+0\;\;2$
30	$+6\;\;15$	$+0\;\;39$	$-9\;\;52$	$-16\;\;14$	$-11\;\;21$	$+2\;\;30$

Märkus 1. Tõelise päikese otsetõusu saame, kui keskmise päikese otsetõusule juure lisame aja võrranduse. Kui aja võrrandus on, näit., positiivne, täh., kui tõeline aeg on taga keskmisest, siis on tõeline päike keskmisest päikesest ida pool, tema otsetõus on suurem kui keskmise päikese oma.

Märkus 2. Kevadisel pööripäeval, 21. märtsil, mil tõeline päike tuleb kevadpunkti, on aja võrrandus umbes $+7$ minutit, täh. keskmine päike on 7 min. ehk $15'.\,7 = 105' = 1^0\,45'$ lääne pool kevadpunkti, millesse ta jõuab enamasti 23. märtsil. Keskmise päikese otsetõus on null ($\alpha = 0$) enamasti 23. märtsil.

Ülesanne 1. Määrata, millised on päikese ekvatoriaalsed koordinaadid 2. novembril.

Lahendus. 23. märtsil on keskmise päikese otsetõus 0. 23. märtsist kuni 2. novembrini on 224 päeva. Keskmise päikese otsetõus 2. nov.

$$\alpha = \frac{360^0.\,224}{365{,}25} = 220^0\,48'.$$

Tõelise päikese otsetõusu leidmiseks on sellele tarvis juure lisada aja võrrandus 2. nov. $= -16^m\,19^s = -4^0\,5'$, saame

$$\alpha = 216^0\,43'.$$

Deklinatsiooni δ määrab valem

$$\underline{tg\,\delta = tg\,\varepsilon\,.\,sin\,\alpha} \qquad (\varepsilon = 23^0\,27')$$

$$\begin{aligned} log\,tg\,\varepsilon &= 9{,}63726 \\ log\,sin\,\alpha &= 9{,}77660_n \\ \hline log\,tg\,\delta &= 9{,}41386_n\,; \qquad \delta = -14^0\,32'. \end{aligned}$$

Ülesanne 2. Määrata, mis kella ajal tõuseb ja mis kella ajal loojeneb päike Tartus 2. novembril.

Lahendus. Ülesandes 1 määrasime päikese deklinatsiooni 2. novembri tarvis: $\delta = -14^0\,32'$, Tartu laius $\varphi = 58^0\,23'$.

Taevakeha tõusmise ajal on tema tundnurga *cosinus*

$$cos\,t = -tg\,\varphi\,tg\,\delta$$

$$\begin{aligned} lg\,tg\,\varphi &= 0{,}21070 \\ lg\,tg\,\delta &= 9{,}41370_n \\ \hline lg\,cos\,t &= 9{,}62440 \qquad t = 65^0\,6' = 4^t\,20^m. \end{aligned}$$

Aja võrrandus on 2. nov. umbes —16 min., tähendab, päikese kulmimisajal on kell 11, 44 min. Päikese tõus on 4 tundi 20 min. sellest ajast varem, tema loojaminemine aga 4 tundi 20 min. hiljem. Järjelikult, 2. novembril tõuseb päike Tartus kell 7, 24 min., loojeneb kell 4, 4 min.

Ülesanded.

1. Millal tõuseb ja loojeneb päike 21. juunil ($\delta = +23^0\,27'$) ja kui pikk on päev:

a) Melbournis ($\varphi = -37^0\,50'$).
b) Püha Helena saarel ($\varphi = -15^0\,55'$).
c) Bogotas ($\varphi = +4^0\,36'$).
d) Tokios ($\varphi = +35^0\,39'$).
e) Roomas ($\varphi = +41^0\,54'$).
f) Tallinnas ($\varphi = +59^0\,26'$).
g) Nordkapis ($\varphi = +71^0\,12'$).

2. Millises vaatepiiri punktis tõuseb päike ülesande 1 kohtades?

3. Millal tõuseb ja loojeneb päike põhja-poolkera kõige lühemal päeval ($\delta = -23^0\,27'$) ülesande 1 kohtades ja kui pikk on see päev?

4. Määrata päikese ekvatoriaalsed koordinaadid järgmiste päevade tarvis: 1) 4. aprill, 2) 13. mai, 3) 29. juuli, 4) 15. august, 5) 7. sept., 6) 21. dets., 7) 27. veebr.

5. Millal tõuseb päike Tartus 1. mail? 4. juunil? 5. augustil?

6. Millal loojeneb päike Tallinnas 1. aprillil? 13. juulil? 7. detsembril?

7. Millisel laiuskraadil kestab kõige pikem päev 16 tundi?

Juhatus. Tõusust kuni kulminatsioonini tarvitab päike $16^t : 2 = 8^t$. Päikese tundnurk $t = 8^t = 120^0$; $cos\,120^0 = -tg\,\varphi\,tg\,\delta$; määrata φ.

8. Millisel laiuskraadil kestab kõige pikem päev 12 tundi, 17 tundi, 24 tundi?

9. Mis kella ajal on Tartus 1. mail päikese kõrgus $h = 12^0\,34'$ $(\delta = +14^0\,58')$?

J u h a t u s. Parallaktilise kolmnurga elemente seob valem: $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$; antud on h, φ, δ, leida t.

10. Mis kella ajal on Tallinnas 13. okt. päikese kõrgus $h = 15^0\,27'$ $(\delta = -7^0\,40')$?

11. 16 aprillil kell 10, 47 min. hom. oli päikese kõrgus Valgas $26^0\,16'$. Määrata Valga laiuskraad, kui on teada, et päikese deklinatsioon $\delta = +10^0\,2'$.

12. Päikese tõusu ajal oli tema aasimut $-97^0\,42'$. Määrata vaatlemiskoha geograafiline laius, kui päikese deklinatsioon oli vaatlemisajal $\delta = 19^0\,15'$.

13. Mis kella ajal on Rakveres $(\varphi = 59^0\,21')$ 12. augustil päike just idas ja milline on siis tema kõrgus h?

J u h a t u s. Võrranduses $\sin\delta = \sin h \sin\varphi - \cos h \cos\varphi \cos a$ tuleb võtta aasimut $a = -90^0$, tähendab, $\sin h = \sin\delta : \sin\varphi$, t leiame võrrandusest $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$.

14. Mis kella ajal on Moskvas $(\varphi = 55^0\,45')$ kõige pikemal päeval päike just idas?

15. Tartus vaadeldi päikest just idas, siis kui tema kõrgus oli 7^0. Milline oli päikese deklinatsioon vaatlemisajal?

16. Tallinnas oli 25. mail päikese kõrgus esimeses vertikaalis (tähendab, sel ajal kui päike oli just idas) $24^0\,29'$. Määrata Tallinna geograafiline laius, kui päikese deklinatsioon oli $20^0\,54'$.

17. 10. novembril vaadeldi päikest $(\delta = 17^0\,4'\,38'')$ esimeses vertikaalis kell 23, 14 min. 37 sek. Määrata vaatlemiskoha geograafiline laius.

18. Mis kella ajal on Helsingis $(\varphi = +60^0\,9'\,43'')$ 1. augustil päike esimeses vertikaalis ja milline on siis tema kõrgus $(\delta = +18^0\,6'\,4'')$?

19. Millal tõuseb ja loojeneb Tartus $(\varphi = 58^0\,22'\,47'')$
1 oktoobril: S i i r i u s $(\alpha = 6^t\,41^m\,37^s,\ \delta = -16^0\,36'\,21'')$?
15. detsembril: A l d e b a r a n $(\alpha = 4^t\,31^m\,20^s,\ \delta = +16^0\,20'\,58'')$?
2. jaanuaril: W e e g a $(\alpha = 18^t\,34^m\,14^s,\ \delta = +38^0\,42'\,30'')$?
4. märtsil: A r k t u u r $(\alpha = 14^t\,12^m\,1^s,\ \delta = +19^0\,35'\,54'')$?

20. Millal tõuseb ja loojeneb Tallinnas $(\varphi = 59^0\,26'\,15'')$
29. mail: α A n d r o m e e d a s $(\alpha = 0^t\,4^m\,15^s,\ \delta = +28^0\,38'\,56'')$?
17. juunil: K a p e l l a $(\alpha = 5^t\,10^m\,47^s,\ \delta = +45^0\,55'\,5'')$?
25. augustil: P r o k ü o n $(\alpha = 7^t\,35^m\,7^s,\ \delta = +5^0\,25'\,52'')$?
13. septembril: α K o t k a s $(\alpha = 19^t\,46^m\,53^s,\ \delta = +8^0\,39'\,22'')$?

Ülesanded H. Fenkneri trigonomeetria õperaamatust.

1. Kui palju oli kell Altonas ($\varphi = 53^0\,33'$), ja milline päikese deklinatsioon sel ajal kui ta oli esimeses vertikaalis (just idas) ja tema kõrgus $h = 12^0$?

2. Kui kõrgel on Karlsruhes ($\varphi = 49^0\,0'\,20''$) päike 15. augustil ($\delta = 14^0\,8'$) kell 6? Milline on sel ajal päikese aasimut?

3. Magdeburis ($\varphi = 52^0\,7'\,35''$) oli ühel päeval kell 6 päikese kõrgus $h = 15^0$. Milline oli päikese deklinatsioon sel päeval?

4. Kõige pikemal päeval kell 18 oli päikese kõrgus $h = 18^0\,18'\,\cancel{51}''$. Milline on vaatlemiskoha geograafiline laius ja kui suur on päikese aasimut ($\delta = 23^0\,21'\,20''$)?

5. Tähe kõrgus $h = 41^0\,30'\,30''$, tema aasimut $a = 57^0\,13'\,36''$; vaatlemiskoha geograafiline laius $\varphi = 49^0\,0'\,30''$. Kui suur on tähe tundnurk ja deklinatsioon?

6. Kui kõrgel on päike 1. mail ($\delta = 15^0\,10'\,25''$) Kölnis ($\varphi = 40^0\,56'\,33''$) kaks tundi enne kulmimist ja kui suur on siis tema aasimut?

7. Tähe kõrgus h on teatud ajal $22^0 45'12''$ ja tema aasimut $a = 50^0 14'20''$ (mõõdetud lõuna punktist). Määrata tähe tundnurk ja vaatlemiskoha geograafiline laius, kui tähe deklinatsioon $\delta = 70^0\,54'$.

8. Mis kella ajal algab Neapolis ($\varphi = 40^0\,52'$) koit, kui päikese deklination $\delta = 8^0\,12'$? (Astronoomilise koidu algusel on päike 18^0 vaatepiiri all.)

9. Kui kaua kestab linnas, mille geograafiline laius $\varphi = 42^0$ (kodanline), koit ehk eha sel ajal, kui päikese deklinatsioon on $\delta = +12$? (Koit algab ja eha lõpeb siis, kui päike on $6^0\,30'$ vaatepiiri all.)

10. Millal algas ja kui kaua kestis Breslaus ($\varphi = 51^0\,6'\,56''$) astronoomiline koit 14. detsembril 1902, kui päikese deklinatsioon $\delta = 22^0\,10'\,42''$?

15. Tähtsamad valemid.

Tasapinnaline trigonomeetria.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad cotg\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad tg\,\alpha\,.\,cotg\,\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}; \qquad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2\alpha}} = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta} \qquad tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\,\alpha - tg\,\beta}{1 + tg\,\alpha\,.\,tg\,\beta}$$

$$cotg(\alpha + \beta) = \frac{cotg\,\alpha\,.\,cotg\,\beta - 1}{cotg\,\beta + cotg\,\alpha} \qquad cotg(\alpha - \beta) = \frac{cotg\,\alpha\,.\,cotg\,\beta + 1}{cotg\,\beta - cotg\,\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{b\,c}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{b\,c}} \qquad tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$S = \frac{1}{2}\,a\,b\sin\gamma$$

$$S = \frac{1}{2}\,a^2\,\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,R \qquad \text{(Sinuslause)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \qquad \text{(Cosinuslause)}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}} \qquad \text{(Tangenslause)}$$

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \text{(Mollweidi laused)}$$

Sfääriline trigonomeetria.

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} \qquad \text{(Sinuslause)}$$

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha \qquad \text{(Cosinuslause)}$$

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a \qquad (\quad „ \quad)$$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}} \qquad 2\,p = a+b+c$$

$$cotg\,\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}} \qquad 2\,\sigma = \alpha+\beta+\gamma$$

$$\frac{tg\,\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{cotg\,\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}} \qquad \frac{tg\,\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{cotg\,\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}$$

$$\frac{tg\,\dfrac{a+b}{2}}{tg\,\dfrac{c}{2}} = \frac{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}} \qquad \frac{tg\,\dfrac{a-b}{2}}{tg\,\dfrac{c}{2}} = \frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$S = \frac{\pi R^2\,\varepsilon}{180^0} \qquad (\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-180^0)$$

$$tg\,\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{tg\,\frac{p}{2}\;tg\,\frac{p-a}{2}\;tg\,\frac{p-b}{2}\;tg\,\frac{p-c}{2}}$$

Sisu.