TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Galina Bogdanova

Tõkestamata intervallis ühtlaselt pidevad funktsioonid

Bakalaureusetöö

Juhendaja: professor Toivo Leiger

Autor: .... "....." .... juuni 2013

Juhendaja: .... "....." .... juuni 2013

Lubada kaitsmisele
Matemaatika instituudi juhataja:.. "....." .... juuni 2013

Tartu 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Funktsioonide ühtlase pidevuse mõiste defineeritakse matemaatilise analüüsi põhikursuses, kuid sellega seotud omaduste uurimisel piirdutakse Cantori teoreemiga. See teoreem väidab, et igas lõigus pidev funktsioon on selles lõigus ühtlaselt pidev. Seda olulist fakti kasutatakse integraalarvutuse ühe kõige tähtsama väite – iga lõigus pidev funktsioon on selles lõigus integreeruv – tõestamisel.

Mis puutub tõkestamata intervallis määratud funktsioonide ühtlast pidevust, siis kursuse «Matemaatiline analüüs III» loengukonspektis on täiendava (mittekohustusliku) õppematerjali hulgas esitatud mõned sellekohased väited, sealhulgas väide, et intervallis $[a, \infty)$ pidev funktsioon f on selles intervallis ühtlaselt pidev, kui eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on anda ülevaade funktsioonide $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ ühtlase pidevuse tarvilikest ja/või piisavatest tingimustest. Töö on referatiivne, selle kirjutamisel olid aluseks artiklid [1], [4] ja loengukonspekt [3]. Lisaks kasutasime ka raamatuid [2] ja [5]. Töö koosneb kolmest peatükist.

Esimene peatükk on sissejuhatav. Selle esimeses alapunktis esitame ühtlase pidevuse definitsiooni ja näiteid pidevate funktsioonide kohta, mis ei ole ühtlaselt pidevad. Teises alapunktis selgitame, kuidas jadade abil kirjeldatakse funktsioonide ühtlast pidevust. Vaatleme, missugused tingimused on tarvilikud ja piisavad pideva funktsiooni ühtlaseks pidevuseks. Tähelepanuväärne on ühtlase pidevuse seos Cauchy jadadega: iga intervallis ühtlaselt pidev funktsioon teisendab Cauchy jada uuesti Cauchy jadaks. Seejuures tõkestatud intervallide korral kehtib ka vastupidine väide. Selle peatüki lõpus toome ka näite ühtlase pidevuse ja Cauchy jadade vahelisest seosest.

Teine peatükk on pühendatud ühtlaselt pidevate funktsioonide uurimisele tõkestamata intervallis. Selle esimeses alapunktis tõestame, et lõpliku piirväärtuse $\lim_{x\to\infty} f(x)$ olemasolu garanteerib pideva funktsiooni $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ ühtlase pidevuse. Toome näite selle kohta, et lõpliku piirväärtuse $\lim_{x\to\infty} f(x)$ eksisteerimine ei ole tarvilik tingimus selle funktsiooni ühtlaseks pidevuseks. Alapunkti viimane teoreem väidab, et tingimus $\limsup_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{x} < \infty$, mis on tarvilik funktsiooni f ühtlaseks pidevuseks intervallis $[a, \infty)$, ei ole selleks piisav. Teine alapunkt on pühendatud kontranäitele, mille abil veendume, et ka eelmisest tugevam tingimus $\lim_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{x} = 0$ ei garanteeri pideva funktsiooni f ühtlast pidevust. Kolmanda alapunkti põhitulemus kinnitab, et kui funktsiooni $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ graafikul on kas kald- või rõhtasümptoot, siis ta on intervallis $[a,\infty)$ ühtlaselt pidev.

Kolmandas peatükis uurime ühtlase pidevuse ja päratute integraalide vahelist seost. Selle esimeses alapunktis meenutame päratu integraali definitsiooni ja tema koonduvusega seotud tingimusi. Teises alapunktis uurime niisuguste funktsioonide $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ühtlast pidevust, mille korral päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub. Peatüki põhitulemus väidab, et kui pideva funktsiooni $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub, siis lõpliku piirväärtuse $\lim_{x\to\infty} f(x)$ olemasolu, mis üldjuhul on piisav tingimus funktsiooni f ühtlaseks pidevuseks intervallis $[a,\infty)$, on ka tarvilik. Toome näiteid, kus funktsiooni ühtlane pidevus ei garanteeri integraali koonduvust, ja vastupidi.

Peatükk 1

Funktsioonide ühtlane pidevus: definitsioon ja üldised omadused

Selles peatükis esitame kõigepealt funktsiooni ühtlase pidevuse definitsiooni ja toome mõned näited funktsioonidest, mis ei ole ühtlaselt pidevad. Teises alapunktis tõestame mõned väited funktsiooni f ühtlase pidevuse kohta intervallis D. Seejuures näitame, kuidas ühtlast pidevust saab kirjeldada jadade abil. Peatüki lõpus tõestame tuntud teoreemi funktsiooni ühtlasest pidevusest antud tõkestatud vahemikus. Peatükis toodud väidete tõestamiseks on lähtutud loengukonspektist [3] ja raamatust [2].

1.1 Ühtlase pidevuse definitsioon ja näiteid

Olgu funktsiooni f määramispiirkonnaks intervall D, mis võib olla kas tõkestatud või tõkestamata. Teatavasti nimetatakse funktsiooni f pidevaks intervalli D sisepunktis x, kui $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$, st

$$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0\colon [t \in D, |t-x| < \delta] \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Kui $a \in D$ on intervalli D vasakpoolne otspunkt ja $\lim_{t\to a+} f(t) = f(a)$, siis öeldakse, et funktsioon f on kohal a paremalt pidev, analoogiliselt defineeritakse vasakpoolne pidevus parempoolses otspunktis $b \in D$. Öeldakse, et funktsioon f on pidev intervallis D, kui ta on pidev hulga D igas sisepunktis ja ühepoolselt pidev igas hulka D kuuluvas otspunktis. Niisiis on funktsioon f pidev intervallis D parajasti siis, kui

$$\forall x \in D\ \ \forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0\colon [t \in D, |t-x| < \delta] \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on *hulgas* $X \subset D$ *ühtlaselt pidev*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral saab leida sellise $\delta > 0$, et suvaliste $x, x' \in X$ korral, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$, kehtib võrratus $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Tingimuse (1.1) ja definitsiooni 1.1 võrdlemisel on ilmne, et funktsiooni f ühtlasest pidevusest intervallis D järeldub tema pidevus selles intervallis.

Teoreem 1.2 (***Cantori teoreem ühtlasest pidevusest*). *Lõigus pidev funktsioon on selles lõigus ühtlaselt pidev.*

Cantori teoreem ei kehti üldjuhul lõigust erineva intervalli (s.o. vahemiku või poollõigu) puhul.

Näide 1.3. Näitame, et pidev funktsioon

$$f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2,$$

ei ole intervallis $[a,\infty)$ ühtlaselt pidev. Olgu $\varepsilon := 2$. Veendume, et iga $\delta > 0$ korral saab leida $x_1, x_2 \in [a,\infty)$ omadustega $|x_1 - x_2| < \delta$ ja $|f(x_1) - f(x_2)| > 2$. Tõepoolest, kui $x_1 = n + \dfrac{1}{n}$ ja $x_2 = n$, kus $\dfrac{1}{n} < \delta$, siis $|x_1 - x_2| = \dfrac{1}{n} < \delta$, kuid

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |n^2 + 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 - n^2| > 2.$$

Näide 1.4. Veendume, et pidev funktsioon

$$f\colon (0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin\frac{1}{x},$$

pole ühtlaselt pidev intervallis $(0,1]$. Olgu $\varepsilon := 1$. Punktid

$$x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)} \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

kuuluvad intervalli $(0,1]$. Iga $\delta > 0$ jaoks leidub selline k, et

$$|x_{k+1} - x_k| = \frac{2}{\pi}\left|\frac{1}{2k+3} - \frac{1}{2k+1}\right| = \frac{4}{\pi(2k+3)(2k+1)} < \delta,$$

kuid

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\sin\frac{\pi(2k+3)}{2} - \sin\frac{\pi(2k+1)}{2}\right| = |(-1)^{k+1} - (-1)^k| = 2 > \varepsilon$$

suvalise $k = 0, 1, 2, \ldots$ korral. Seega ei ole funktsioon f ühtlaselt pidev.

1.2 Ühtlase pidevuse kirjeldamine jadade abil

Lause 1.5. *Pidev funktsioon* $f\colon D \to \mathbb{R}$ *on intervallis* D *ühtlaselt pidev parajasti siis, kui on täidetud järgmine tingimus:*

$$\textit{kui}\ \ x_k, x_k' \in D\ \ \textit{ja}\ \ x_k - x_k' \to 0, \textit{siis}\ \ f(x_k) - f(x_k') \to 0\ \ (k \to \infty). \tag{1.2}$$

Tõestus. *Tarvilikkus.* Eeldame, et funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ on ühtlaselt pidev ja näitame, et kehtib (1.2). Olgu ε suvaline positiivne arv ja (x_k) ning (x_k') sellised jadad hulgas D, et $x_k - x_k' \to 0\ \ (k \to \infty)$. Näitame, et

$$\exists N \in \mathbb{N} : k \geq N \Rightarrow |f(x_k) - f(x_k')| < \varepsilon.$$

Ühtlase pidevuse eelduse kohaselt

$$\exists \delta > 0 : [x, x' \in D, |x - x'| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Kuna $x_k - x_k' \to 0$, siis

$$\exists N\colon k \geq N \Rightarrow |x_k - x_k'| < \delta,$$

mistõttu

$$|f(x_k) - f(x_k')| < \varepsilon\ \ \forall k \geq N.$$

Seega $f(x_k) - f(x_k') \to 0$, kui $x \to \infty$.

Piisavus. Eeldame, et hulgas D pidev funktsioon f rahuldab tingimust (1.2). Oletame vastuväiteliselt, et ta ei ole ühtlaselt pidev. Sel juhul

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \ \forall \delta > 0\ \ \exists x_n, x_n' \in D\colon |x_n - x_n'| < \delta,\ \ |f(x_n) - f(x_n')|\ \ \geq \varepsilon_0. \tag{1.3}$$

Võtame $\delta := \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ ja vastavalt eeldusele (1.3) leiame punktid $x_n, x_n' \in D$ omadusega

$$|x_n - x_n'|\ \ < \frac{1}{n},\ \ |f(x_n) - f(x_n')|\ \ \geq \varepsilon_0.$$

Siis $x_n - x_n' \to 0$, eelduse (1.2) tõttu $f(x_n) - f(x_n') \to 0$. Seega leidub $N \in \mathbb{N}$, et

$$|f(x_n) - f(x_n')|\ \ < \varepsilon_0\ \ \text{iga}\ \ n \geq N\ \ \text{korral.}$$

See on vastuolus punktide $x_n, x_n' \in D$ valikuga, järelikult on vastuväiteline oletus (1.3) väär. ■

Lause 1.6. *Intervallis* D *ühtlaselt pidev funktsioon* f *rahuldab järgmist tingimust :*

$$\textit{kui}\ \ (x_k)\ \ \textit{on Cauchy jada hulgas}\ \ D\textit{, siis}\ (f(x_k))\ \textit{on Cauchy jada.} \tag{1.4}$$

Tõestus. Eeldame, et $f\colon D \to \mathbb{R}$ on ühtlaselt pidev, olgu $\varepsilon > 0$. Vastavalt ühtlase pidevuse definitsioonile leidub selline $\delta > 0$, et

$$[x, x' \in D, |x - x'| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{1.5}$$

Olgu (x_n) Cauchy jada hulgas D, näitame, et $(f(x_n))$ on Cauchy jada. Cauchy jada definitsiooni kohaselt leidub $N \in \mathbb{N}$ omadusega

$$n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \delta.$$

Tingimusest (1.5) saame, et

$$n, m \geq N \Rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

See tähendabki, et $(f(x_n))$ on Cauchy jada. ■

Lause 1.7. *Kui D on tõkestatud intervall, siis tingimus* (1.4) *on tarvilik ja piisav pideva funktsiooni f ühtlaseks pidevuseks hulgas D.*

Tõestus. *Tarvilikkus* on tõestatud lausega 1.6.

Piisavus. Tõestuseks näitame, et kui funktsioon $f\colon D \to \mathbb{R}$ ei ole tõkestatud intervallis D ühtlaselt pidev, siis ta ei rahulda tingimust (1.4), st leidub selline Cauchy jada (z_k) hulgas D, et $(f(z_k))$ ei ole Cauchy jada. Kuna f ei ole ühtlaselt pidev, siis saame valida sellise $\varepsilon_0 > 0$ ja iga $n \in \mathbb{N}$ korral punktid $x_n, x'_n \in D$ omadusega

$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Kuna hulk D on tõkestatud, siis on mõlemad jadad (x_n) ja (x'_n) tõkestatud ning Bolzano–Weierstrassi teoreemi põhjal sisaldab jada (x_n) koonduva osajada (x_{n_k}), tähistame $a := \lim_k x_{n_k}$. Paneme tähele, et

$$x_n - x'_n \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Seosest $x'_{n_k} = x_{n_k} + (x'_{n_k} - x_{n_k})$ tuleneb, et $\lim_k x'_{n_k} = a$. Seetõttu jada

$$(z_i) := (x_{n_1}, x'_{n_1}, x_{n_2}, x'_{n_2}, x_{n_3}, x'_{n_3}, \ldots)$$

koondub hulgas $\mathbb{R}$ samuti piirväärtuseks a.

Tõepoolest, suvalise $\delta > 0$ korral leiduvad $N_1 \in \mathbb{N}$ ja $N_2 \in \mathbb{N}$, et

$$k \geq N_1 \Rightarrow |x_{n_k} - a| < \delta \quad \text{ning} \quad k \geq N_2 \Rightarrow |x'_{n_k} - a| < \delta.$$

Seetõttu, kui $i \geq 2\max\{N_1, N_2\}$, siis

$$|z_i - a| = \begin{cases} |x_{n_k} - a| < \delta, \text{kui } i = 2k-1, \\ |x'_{n_k} - a| < \delta, \text{kui } i = 2k \end{cases}$$

järelikult $\lim_i z_i = a$.

Arvude x_n ja x'_n valiku kohaselt kehtib iga $k \in \mathbb{N}$ korral võrratus

$$|f(z_{2k-1}) - f(z_{2k})| = |f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0,$$

mistõttu $(f(z_k))$ ei ole Cauchy jada. ■

Järgmine näide kinnitab, et tingimus (1.4) ei ole piisav pideva funktsiooni ühtlaseks pidevuseks tõkestamata intervallis.

Näide 1.8. Vaatleme veelkord funktsiooni

$$f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2.$$

Me veendusime näites 1.3, et f ei ole intervallis $[a, \infty)$ ühtlaselt pidev. Olgu (x_n) suvaline Cauchy jada intervallis $[a, \infty)$. Kuna iga Cauchy jada on tõkestatud, siis leidub selline $M > 0$, et

$$|x_n| \leq M \;\; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Olgu $\varepsilon > 0$, Cauchy jada definitsiooni kohaselt

$$\exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Siis suvaliste $n, m \geq N$ korral

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x_m)| &= |x_n^2 - x_m^2| = |x_n + x_m||x_n - x_m| \\ &\leq (|x_n| + |x_m|)\,|x_n - x_m| \\ &< 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

st $(f(x_n))$ on Cauchy jada.

Lauset 1.6 rakendades tõestame järgmise lause (vt [2], Theorem 3.4.6), mis kirjeldab tõkestatud vahemikus ühtlaselt pidevaid funktsioone.

Lause 1.9. *Funktsioon $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ on ühtlaselt pidev vahemikus (a, b) parajasti siis, kui leidub selline pidev funktsioon $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, et*

$$f(x) = h(x) \;\; \forall x \in (a, b).$$

Tõestus. *Piisavus.* Eeldame, et intervallis $[a, b]$ leidub pidev funktsioon h nii, et

$$h(x) = f(x) \;\text{ iga }\; x \in (a, b) \;\text{ korral.} \tag{1.6}$$

Cantori teoreemi kohaselt funktsioon h on lõigus $[a, b]$ ühtlaselt pidev, siis on ta ka vahemikus (a, b) ühtlaselt pidev. Tingimuse (1.6) kohaselt on funktsioon f ühtlaselt pidev vahemikus (a, b).

Tarvilikkus. Olgu f vahemikus (a, b) ühtlaselt pidev funktsioon. Kõigepealt näitame, et eksisteerivad piirväärtused $L := \lim_{x \to a+} f(x)$ ja $M := \lim_{x \to b-} f(x)$. Tõestame, et piirväärtus L eksisteerib, piirväärtuse M korral on tõestus analoogiline. Olgu (x_n) vahemiku (a, b) punktide suvaline jada, mis koondub arvuks a. Sel juhul on ta Cauchy jada ning kuna f on vahemikus (a, b) ühtlaselt pidev funktsioon, siis lause 1.6 järgi on $(f(x_n))$ samuti Cauchy jada. Tähistame selle jada piirväärtust $L_1 := \lim f(x_n)$. Nüüd vaatleme teist jada (x'_n) vahemikus (a, b), mis samuti koondub arvuks a. Analoogiliselt saame, et $L_2 := \lim f(x'_n)$. Piirväärtus $L = \lim_{x \to a} f(x)$ leidub, kui $L_1 = L_2$.

Võtame $\varepsilon > 0$. Kuna funktsioon f on vahemikus (a, b) ühtlaselt pidev, siis leidub $\delta > 0$, et

$$[x, x' \in (a, b), |x - x'| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.7}$$

Kuna $x_n \to a$, $x'_n \to a$, $f(x_n) \to L_1$ ja $f(x'_n) \to L_2$, siis leidub selline $M \in \mathbb{N}$, et kui $n \geq M$, siis

$$|x_n - a| < \frac{\delta}{2}, \; |x'_n - a| < \frac{\delta}{2}$$

ja

$$|f(x_n) - L_1| < \frac{\varepsilon}{3}, \; |f(x'_n) - L_2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Seega iga $n \geq M$ puhul saame, et

$$|x_n - x'_n| = |x_n - a + a - x'_n| \leq |x_n - a| + |a - x'_n| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

ja tingimuse (1.7) põhjal

$$\begin{aligned} |L_1 - L_2| &= |L_1 - f(x_n) + f(x_n) - f(x'_n) + f(x'_n) - L_2| \\ &\leq |L_1 - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x'_n)| + |f(x'_n) - L_2| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Kuna $\varepsilon > 0$ on suvaliselt valitud, $L_1 = L_2$. Seega leidub piirväärtus L. Analoogiliselt saab tõestada, et leidub piirväärtus M.

Defineerime funktsiooni $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ seosega

$$h(x) := \begin{cases} L, & \text{kui } x = a, \\ f(x), & \text{kui } x \in (a, b), \\ M, & \text{kui } x = b. \end{cases}$$

Selge, et funktsioon h on pidev vahemikus (a, b), ja kuna

$$\lim_{x \to a+} h(x) = \lim_{x \to a+} f(x) = L = h(a)$$

ning

$$\lim_{x \to b-} h(x) = \lim_{x \to b-} f(x) = M = h(b),$$

siis h on pidev lõigus $[a, b]$. ■

Peatükk 2

Ühtlaselt pidevad funktsioonid tõkestamata intervallis

Selle peatüki esimeses alapunktis tõestame piisava tingimuse (vt lause 2.1) ja tarviliku tingimuse (vt lause 2.3) funktsiooni $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ühtlaseks pidevuseks. Peatüki teises alapunktis esitame kontranäite, mis kinnitab, et lausega 2.3 antud tarvilik tingimus funktsiooni f ühtlaseks pidevuseks ei ole selleks piisav. Kolmandas alapunktis veendume, et funktsiooni $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ graafikul on kas kald- või rõhtasümptoot, siis f on ühtlaselt pidev.

2.1 Üldised teoreemid

Me alustame lausega (vt [1], lemma 4.2 ja [3], lause 3.16), mis esitab lihtsa, kuid väga olulise piisava tingimuse tõkestamata intervallis $[a,\infty)$ määratud pideva funktsiooni ühtlaseks pidevuseks.

Lause 2.1. *Kui funktsioon $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ on pidev ja eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{x\to\infty} f(x) =: A$, siis f on hulgas $[a,\infty)$ ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Eeldame, et f on intervallis $[a,\infty]$ pidev funktsioon. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline.

Kuna $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$, siis saab valida sellise $M > a$, et

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kõikide } x \geq M \text{ korral.} \tag{2.1}$$

Võtame suvalise $N > M$. Kuna funktsioon f on pidev lõigus $[a,N]$, siis Cantori teoreemi põhjal on f lõigus $[a,N]$ ühtlaselt pidev, seega saame leida $\delta_1 > 0$ omadusega

$$[x, x' \in [a,N], |x - x'| < \delta_1] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Võtame $\delta := \min\{N - M, \delta_1\}$ ja vaatleme arve $x, x' \in [a, \infty)$, mis rahuldavad tingimust $|x - x'| < \delta$. On kolm võimalust :
1) $x, x' > M$, siis tingimuse (2.1) kohaselt

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - A| + |A - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

2) $x, x' \in [a, M]$, siis tingimusest (2.2) saame, et $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$,
3) $a \leq x \leq M$ ja $x' > M$, siis tänu võrratusele $|x - x'| < \delta \leq N - M$ saame, et $x, x' \in [a, N]$, seega tingimuse (2.2) kohaselt $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Kokkuvõttes, kui $x, x' \in [a, \infty)$ ja $|x - x'| < \delta$, siis $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, st f on intervallis $[a, \infty)$ ühtlaselt pidev. ■

Järgmise näite põhjal ei ole lõpliku piirväärtuse $\lim_{x\to\infty} f(x)$ olemasolu tarvilik tingimus funktsiooni f ühtlaseks pidevuseks.

Näide 2.2. Funktsioon

$$f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x},$$

on ühtlaselt pidev, kuigi $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Veendume selles. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline, võtame $\delta := 2\varepsilon$. Kui $x, x' \in [1, \infty)$ ja $|x - x'| < \delta$, siis

$$|f(x) - f(x')| = |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| = \frac{|x - x'|}{|\sqrt{x} + \sqrt{x'}|} \leq \frac{1}{2}|x - x'| < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Seega on f tõepoolest ühtlaselt pidev intervallis $[1, \infty)$.

Ühte tarvilikku tingimust funktsiooni $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ ühtlaseks pidevuseks kirjeldab järgmine lause (vt [4], Theorem 3.1). Me rakendame funktsiooni $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ puhul tähistust

$$\limsup_{x\to\infty} f(x) := \lim_{l\to\infty} \sup_{x \geq l} f(x).$$

Tingimus $\limsup_{x\to\infty} f(x) < \infty$ kehtib parajasti siis, kui leiduvad arvud C_1 ja C_2, et

$$f(x) \leq C_1 \text{ kõikide } x \geq C_2 \text{ korral.}$$

Lause 2.3. *Kui funktsioon $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ on ühtlaselt pidev intervallis $[a, \infty)$, siis*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{x} < \infty, \tag{2.3}$$

st leiduvad arvud C_1 ja C_2, et

$$|f(x)| < C_1 x \;\; \textit{kõikide} \;\; x \geq C_2 \;\; \textit{korral.}$$

Tõestus. Eeldame, et funktsioon f on ühtlaselt pidev intervallis $[a,\infty)$, siis funktsiooni ühtlase pidevuse definitsiooni kohaselt leidub $\delta > 0$, et

$$[x,x' \in [a,\infty), |x-x'| < \delta] \Rightarrow |f(x)-f(x')| < 1. \tag{2.4}$$

Fikseerime $x > a+\frac{\delta}{2}$. Valime lõigu $[a,x]$ sellise alajaotuse $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$, et

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{\delta}{2}, \text{ kus } k = 2,3,\ldots,n,$$

ja

$$0 < x_1 - a \leq \frac{\delta}{2}.$$

Saame, et

$$x - a = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k > \sum_{k=2}^{n} \Delta x_k = (n-1)\frac{\delta}{2},$$

seega

$$n < \frac{2}{\delta}(x-a) + 1. \tag{2.5}$$

Võrdusest

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

ja kolmnurga võrratust ning seoseid (2.4) ja (2.5) kasutades, saame, et

$$\begin{aligned}|f(x)| \leq |f(x)-f(a)| + |f(a)| &= \left|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| + |f(a)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(a)| < n + |f(a)|.\end{aligned}$$

Kuna $\Delta x_k = |x_k - x_{k-1}| \leq \frac{\delta}{2} < \delta$, siis eelduse (2.4) kohaselt

$$|f(x_k) - f(x_{k-1})| < 1 < \frac{2}{\delta}(x-a) + 1 + |f(a)| = \frac{2}{\delta}x + A,$$

kus $A := 1 + |f(a)| - \frac{2}{\delta}a$.

Saime, et

$$|f(x)| < \frac{2}{\delta}x + A \ \ \forall x > a + \frac{\delta}{2}.$$

Tähistame $C_1 := \frac{2}{\delta} + 1$ ja $C_2 := \max\{a + \frac{\delta}{2}, A\}$ ning paneme tähele, et kui $x \geq C_2$, siis $x \geq A$, järelikult

$$|f(x)| < \frac{2}{\delta}x + x = \left(\frac{2}{\delta} + 1\right) x = C_1 x.$$

Teoreem on tõestatud. ■

Järeldus 2.4. *Kui funktsioon* $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *rahuldab tingimust*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{x} = \infty, \tag{2.6}$$

siis f *ei ole ühtlaselt pidev üheski intervallis* $[b, \infty)$*, kus* $b \geq a$*.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et f on ühtlaselt pidev intervallis $[b, \infty)$ mingi $b \geq a$ korral. Lause 2.3 kohaselt leiduvad sellised $C_1 > 0$ ja $C_2 > 0$, et

$$\frac{|f(x)|}{x} < C_1 \;\; \forall x \in [C_2, \infty),$$

mis on vastuolus eeldusega (2.6). ■

2.2 Kontranäide

Lause 2.3 tingimus (2.3), mis on tarvilik funktsiooni f ühtlaseks pidevuseks intervallis $[a, \infty)$, ei ole selleks piisav. Veelgi enam, ka sellest oluliselt tugevam tingimus $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{x} = 0$ ei osutu piisavaks. Sellest annab tunnistust järgmine näide (vt [1], Proposition 5.2). Järgnevas näites $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ (vt näide 2.5) näeme, et tingimus $\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{x} = 0$ ei garanteeri ühtlast pidevust ka juhul, kui f on tõkestatud funktsioon, millel piirväärtust $\lim_{x\to\infty} |f(x)|$ ei eksisteeri.

Näide 2.5. Vaatleme funktsiooni

$$f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}, \;\; f(x) := \sqrt{x} e^{\sin x},$$

mingi $a \geq 0$ puhul. Paneme tähele, et

$$\frac{1}{e} \leq e^{\sin x} \leq e \;\; \forall x \in [a, \infty)$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty,$$

seetõttu

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}} = 0.$$

Veendume, et f ei ole ühtlaselt pidev hulgas $[a,\infty)$, selleks leiame intervallis $[a,\infty)$ jadad (x_n) ja (y_n) nii, et

$$x_n - y_n \to 0, \text{ kuid } f(x_n) - f(y_n) \nrightarrow 0.$$

Me rakendame Taylori valemit. Kui funktsioon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on punktis 0 kaks korda diferentseeruv, siis

$$g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 + R_3(0,x),$$

kus jääkliige $R_3(0,x)$ rahuldab tingimust

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_3(0,x)}{x^2} = 0.$$

Siinusfunktsiooni $y = \sin x$ jaoks kehtib valem

$$\sin x = x + w_1(x)x^2, \tag{2.7}$$

kus

$$\lim_{x\to 0} w_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{R_3(0,x)}{x^2} = 0.$$

Analoogiliselt esitame eksponentfunktsiooni $z := e^y$ valemiga

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + w_2(y)y^2, \tag{2.8}$$

kus w_2 on selline pidev funktsioon, et

$$\lim_{y\to 0} w_2(y) = 0. \tag{2.9}$$

Võttes seoses (2.8) $y = \sin x$, saame valemi

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2 x + w_2^*(x)\sin^2 x, \tag{2.10}$$

kui tähistada $w_2^*(x) := w_2(\sin x)$. Seejuures

$$\lim_{x\to 0} w_2^*(x) = \lim_{x\to 0} w_2(\sin x) = \lim_{y\to 0} w_2(y) = 0$$

tingimuse (2.9) tõttu.

Asendame valemisse (2.10) $\sin x$ seosest (2.7) :

$$\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+w_2^*(x)\sin^2 x \\
&= 1+x+w_1(x)x^2+\frac{1}{2}(x+w_1(x)x^2)^2+w_2^*(x)\sin^2 x \\
&= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\varphi(x)x^2,
\end{aligned}$$

kus

$$\varphi(x)=w_1(x)+xw_1(x)+\frac{1}{2}w_1(x)^2x^2+\frac{w_2^*(x)\sin^2 x}{x^2}.$$

Seejuures

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=\lim_{x\to 0}w_1(x)\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{1}{2}x^2\right)+\lim_{x\to 0}w_2^*(x)\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=0.$$

Niisiis, suvalise $x\in[a,\infty)$ korral

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\varphi(x)x^2, \tag{2.11}$$

kus

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0.$$

Moodustame nüüd jadad (x_n) ja (y_n) niimoodi, et

$$x_n=2n^4\pi \quad \text{ja} \quad y_n=x_n+\frac{1}{n},$$

siis

$$\lim_{n\to\infty}(y_n-x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Me näitame, et

$$\lim_{n\to\infty}(f(y_n)-f(x_n))=\infty,$$

siis lause 1.5 põhjal funktsioon f ei ole ühtlaselt pidev.

Paneme tähele, kuna

$$\sin x_n=\sin 2n^4\pi=0 \ \text{ ja } \ \sin y_n=\sin\left(2n^4\pi+\frac{1}{n}\right)=\sin\frac{1}{n}$$

iga $n\in\mathbb{N}$ korral, siis

$$\begin{aligned}
f(y_n)-f(x_n) &= \sqrt{y_n}e^{\sin y_n}-\sqrt{x_n}e^{\sin x_n}=\sqrt{x_n}\left(\sqrt{\frac{y_n}{x_n}}e^{\sin(x_n+\frac{1}{n})}-e^{\sin x_n}\right) \\
&= \sqrt{x_n}\left(\sqrt{\frac{y_n}{x_n}}e^{\sin\frac{1}{n}}-1\right).
\end{aligned}$$

Tähistades $\delta_n := \sqrt{\dfrac{y_n}{x_n}}$ ning asendades $e^{\sin\frac{1}{n}}$ valemist (2.11), saame, et

$$
\begin{aligned}
f(y_n) - f(x_n) &= n^2\sqrt{2\pi}\left(\delta_n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) + \delta_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2} - 1\right) \\
&= n^2\sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + (\delta_n - 1)\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) + \delta_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2} - 1\right) \\
&= n^2\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + n^2(1-\delta_n)\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{n^2} + \delta_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \sqrt{2\pi}\left(n + \frac{1}{2} + n^2(1-\delta_n)\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) + \delta_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \sqrt{2\pi}\left(n + \frac{1}{2} + \alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Siin

$$\alpha\left(\frac{1}{n}\right) := n^2(1-\delta_n)\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) + \delta_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right),$$

mistõttu

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\alpha\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\delta_n^2)}{1+\delta_n}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right) + \lim_{n\to\infty}\delta_n\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(1-\delta_n^2)}{1+\delta_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(-\frac{1}{n}\right)}{2n^4\pi(1+\delta_n)} \\
&= -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n^3\pi(1+\delta_n)} = 0.
\end{aligned}
$$

Kokkuvõttes

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(f(y_n) - f(x_n)) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2\pi}\left(n + \frac{1}{2} + \alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\sqrt{2\pi}\lim_{n\to\infty}\left(n + \frac{1}{2} + \alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \infty.
\end{aligned}
$$

2.3 Funktsiooni ühtlane pidevus ja tema graafiku asümptoodid

Olgu $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ pidev funktsioon. Sirget $y = mx+b$ nimetatakse funktsiooni f graafiku asümptoodiks protsessis $x \to \infty$, kui $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$. Seejuures, kui $m = 0$, siis kõneldakse rõhtasümptoodist, juhul $m \neq 0$ aga kaldasümptoodist. Konstandid m ja b arvutatakse valemitest

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ja } b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Järgnevas tugineme R. L. Puoso artiklile (vt [4], Theorem 2.1, Corollary 2.1).

Teoreem 2.6. *Olgu f, $g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ pidevad funktsioonid. Kui*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

ja g on intervallis $[a,\infty)$ ühtlaselt pidev, siis on ka f ühtlaselt pidev intervallis $[a,\infty)$.

Tõestus. Eeldame, et funktsioon g on ühtlaselt pidev intervallis $[a,\infty)$ ja näitame, et siis f on samuti ühtlaselt pidev. Fikseerime $\varepsilon > 0$. Kuna $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x)) = 0$, siis leidub selline $b > a$, et

$$|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{6} \;\; \forall z \in [b,\infty). \tag{2.12}$$

Funktsiooni $g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ühtlase pidevuse kohaselt leidub $\delta_1 > 0$ nii, et

$$[x, x' \in [a,\infty), |x - x'| < \delta_1] \Rightarrow |g(x) - g(x')| < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{2.13}$$

Kuna $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ on pidev funktsioon, siis Cantori teoreemi põhjal on ta lõigus $[a,b]$ ühtlaselt pidev. Seega leidub selline $\delta_2 > 0$, et

$$[x, x' \in [a,b], |x - x'| < \delta_2] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.14}$$

Olgu $\delta_0 := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Veendume,et

$$[x, x' \in [a,\infty), |x - x'| < \delta_0] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Selleks vaatleme eraldi kahte juhtu. Esiteks, kui $x, x' \in [b,\infty)$, siis absoluutväärtuse kolmnurgaomadust ja seoseid (2.12), (2.13) kasutades, saame et

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(x')| + |g(x') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teiseks, kui $a \leq x < b < x'$, siis seosest (2.14) järeldub, et

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Seega on funktsioon f intervallis $[a,\infty)$ ühtlaselt pidev. ∎

Järeldus 2.7. *Kui funktsiooni $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ graafikul on kas rõht- või kaldasümptoot protsessis $x \to \infty$, siis f on intervallis $[a,\infty)$ ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Olgu funktsiooni f asümptoot määratud võrrandiga

$$y = mx + b \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kuna funktsioon $g(x) = mx + b$ on ühtlaselt pidev hulgas $\mathbb{R}$ suvaliste $m, b \in \mathbb{R}$ korral ja $\lim_{x\to\infty}(f(x) - mx - b) = 0$, siis teoreemi 2.6 põhjal f on ühtlaselt pidev. ■

Vaatleme näiteid, kus kasutame teoreemi 2.6 (vt [4], examples of Theorem 2.1, p. 553).

Näide 2.8. Olgu

$$f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) := \frac{\sin x^3}{x} + \sqrt{x}.$$

Kuna funktsioon

$$g\colon [1,\infty) \to \mathbb{R},\ \ g(x) := \sqrt{x},$$

on intervallis $[1,\infty)$ ühtlaselt pidev näite 2.2 kohaselt ja

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0,$$

siis teoreemi 2.6 kohaselt f on ühtlaselt pidev selles intervallis. Seejuures

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x^3}{x} + \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty.$$

Näide 2.9. Vaatleme funktsiooni

$$f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R},\ \ f(x) := \frac{\sin x^3}{x} + x^2.$$

Kuna funktsioon

$$g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R},\ \ g(x) := x^2,$$

ei ole intervallis $[1,\infty)$ ühtlaselt pidev ja

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3}{x} = 0,$$

siis teoreemi 2.6 kohaselt f ei ole ühtlaselt pidev selles intervallis. Seejuures

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin x^3}{x} + \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$

Peatükk 3

Ühtlane pidevus ja päratu integraali koonduvus

Käesolevas peatükis on kõigepealt meeldetuletuseks ära toodud mõned tähtsamad faktid päratute integraalide kohta, mis on vajalikud järgnevatest töös esitatud tõestustest arusaamiseks. Teises alapunktis uurime seost funktsiooni f ühtlase pidevuse ja tema päratu integraali koonduvuse vahel. Selle peatüki kirjutamisel on lähtutud S. Djebali artiklist [1].

3.1 Lõpmatute rajadega päratud integraalid

Meenutame, et funktsiooni $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ päratuks integraaliks nimetatakse piirväärtust

$$\lim_{l\to\infty} \int_a^l f(x)dx =: \int_a^\infty f(x)dx$$

eeldusel, et integraal $\int_a^l f(x)dx$ eksisteerib iga $l \geq a$ korral. Kui piirväärtus $\lim_{l\to\infty} \int_a^l f(x)dx$ on lõplik, siis öeldakse, et päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ on koonduv.

Järgmine lause on päratute integraalide Cauchy kriteerium.

Lause 3.1. *Päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ on koonduv parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $l_0 = l_0(\varepsilon) \geq a$, et*

$$\left| \int_l^{l'} f(x)dx \right| < \varepsilon \ \textit{ kõikide } \ l, l' \geq l_0 \ \textit{ korral.}$$

Seda tingimust kirjutatakse ka kujul

$$\lim_{l,l'\to\infty} \int_l^{l'} f(x)dx = 0.$$

Päratute integraalide paljudest koonduvustunnustest kasutame allpool järgmist Dirichlet' tunnust.

Lause 3.2. *Kui*

1) *funktsioon f on integreeruv igas lõigus $[a, l]$, kus $l \geq a$, ja leidub selline $M > 0$, et*

$$\left| \int_a^l f(x)dx \right| \leq M \quad (l \geq a),$$

2) *funktsioon $g\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ rahuldab tingimust $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$,*

siis päratu integraal $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ on koonduv.

Me vajame veel järgmist integraalarvutuse keskväärtusteoreemi.

Lause 3.3. *Kui funktsioon $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ on pidev, siis leidub selline $c \in (a, b)$, et*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Märgime, et lause 3.3 on järeldus järgmisest diferentsiaalarvutuse Lagrange'i keskväärtusteoreemist.

Lause 3.4. *Olgu $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ selline pidev funktsioon, mis vahemikus (a, b) on diferentseeruv. Siis leidub selline $c \in (a, b)$, et*

$$F(a) - F(b) = F'(c)(b-a).$$

3.2 Koonduva päratu integraaliga funktsioonide ühtlane pidevus

Selles alapunktis uurime niisuguste funktsioonide $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ ühtlast pidevust, mille korral päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub. Kui f on pidev ja eksisteerib lõplik piirväärtus $\lim_{x\to\infty} f(x)$, siis lause 2.1 kohaselt on f ühtlaselt pidev intervallis $[a, \infty)$, kuid nagu me teame näitest 2.2, vastupidine väide üldjuhul ei kehti. Selle alapunkti põhitulemus (vt teoreem 3.7) ütleb, et kui päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub, siis on lõpliku piirväärtuse $\lim_{x\to\infty} f(x)$ olemasolu ka tarvilik tingimus funktsiooni f ühtlaseks pidevuseks intervallis $[a, \infty)$.

Lause 3.5. *Olgu $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ selline funktsioon, et*

1) *päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub,*

2) *eksisteerib pidev teine tuletis* $f'' \colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$,

3) *päratu integraal* $\int_a^\infty f''(x)dx$ *koondub.*

Siis funktsioonid f *ja* f' *on intervallis* $[a, \infty)$ *ühtlaselt pidevad.*

Tõestus. Näitame kõigepealt, et f' on ühtlaselt pidev. Kuna f'' on pidev, siis Newtoni-Leibnizi valemi kohaselt $f'(x) = f'(a) + \int_a^x f''(t)dt$. Kuna päratu integraal $\int_a^\infty f''(x)dx$ koondub, siis eksisteerib lõplik piirväärtus

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = f'(a) + \int_a^\infty f''(t)dt =: A. \tag{3.1}$$

Lause 2.1 kohaselt funktsioon f' on ühtlaselt pidev intervallis $[a, \infty)$.

Teiseks näitame, et funktsioon f' on tõkestatud hulgas $[a, \infty)$. Valemi (3.1) kohaselt

$$\exists l_0 \geq a \colon x \geq l_0 \Rightarrow |f'(x) - A| < 1.$$

Seega

$$|f'(x)| \leq |f'(x) - A| + |A| < 1 + |A| \;\; \forall x \geq l_0.$$

Kuna f' on diferentseeruv intervallis $[a, \infty)$, siis on ta pidev lõigus $[a, l_0]$. Weierstrassi teoreemi kohaselt on f' lõigus $[a, l_0]$ tõkestatud:

$$\exists B > 0 \colon |f'(x)| \leq B \;\; \forall x \in [a, l_0].$$

Kokkuvõttes

$$|f'(x)| \leq \max\{1 + |A|, B\} =: M \;\; \forall x \in [a, \infty).$$

Lõpuks näitame, et funktsioon f on ühtlaselt pidev intervallis $[a, \infty)$. Fikseerime $x, x' \in [a, \infty)$, olgu $x < x'$. Kuna f on diferentseeruv intervallis $[a, \infty)$, siis Langrange'i keskväärtusteoreemi (vt lause 3.4) kohaselt leidub $c \in (x, x')$ nii, et

$$f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x). \tag{3.2}$$

Olgu $\varepsilon > 0$, võtame $\delta := \dfrac{\varepsilon}{M}$. Kui $x, x' \in [a, \infty)$ on sellised, et $|x - x'| < \delta$, siis seose (3.2) põhjal

$$|f(x) - f(x')| = |f'(c)||x - x'| \leq M|x - x'| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

st f on ühtlaselt pidev intervallis $[a, \infty)$. ■

Lause 3.6. *Kui* $f \colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *on selline pidev kahanev funktsioon, et päratu integraal* $\int_a^\infty f(x)dx$ *koondub, siis* f *on ühtlaselt pidev intervallis* $[a, \infty)$ *ja*

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0.$$

Tõestus. Eeldame, et f on pidev kahanev funktsioon. Fikseerime $x \in [a, \infty)$ ja rakendame integraali keskväärtusteoreemi lõikudes $[x, 2x]$ ja $\left[\frac{x}{2}, x\right]$. Leiame $c_1 \in [x, 2x]$ ja $c_2 \in [\frac{x}{2}, x]$ nii, et

$$xf(c_1) = f(c_1)(2x - x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

ja

$$\frac{x}{2}f(c_2) = f(c_2)\left(x - \frac{x}{2}\right) = \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt.$$

Kuna

$$\frac{x}{2} \leq c_2 \leq x \leq c_1 \leq 2x,$$

siis

$$f(2x) \leq f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2) \leq f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Seega

$$xf(2x) \leq xf(c_1) = \int_x^{2x} f(t)dt \leq xf(x) \leq xf(c_2) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt. \tag{3.3}$$

Kuna päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub, siis Cauchy kriteeriumi kohaselt (vt lause 3.1)

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} f(t)dt = \lim_{x\to\infty} \int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt = 0.$$

Seosest (3.3) saame, et $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$.

Seosest $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ järeldub lause 2.1 põhjal, et f on ühtlaselt pidev intervallis $[a, \infty)$. ■

Nüüd tõestame käesoleva alapunkti põhitulemuse.

Teoreem 3.7. *Olgu* $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *selline pidev funktsioon, et tema päratu integraal* $\int_a^\infty f(x)dx$ *koondub. Siis funktsiooni* f *ühtlaseks pidevuseks intervallis* $[a, \infty)$ *on tarvilik ja piisav, et eksisteeriks lõplik piirväärtus* $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

Tõestus. *Piisavus* järeldub vahetult lausest 2.1.

Tarvilikkus. Eeldame, et funktsioon $f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$ on ühtlaselt pidev ja päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub. Peame näitama, et $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Ühtlase pidevuse definitsiooni kohaselt leidub $\delta > 0$, et

$$[x, x' \in [a, \infty), |x - x'| < \delta] \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.4}$$

Kuna $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub, siis Cauchy kriteeriumi (vt lause 3.1) kohaselt leidub $l_0 \geq a$, et

$$l, l' \geq l_0 \Rightarrow \left|\int_{l'}^{l} f(x)dx\right| < \delta\frac{\varepsilon}{2},$$

seega

$$\left|\int_{x}^{x+\delta} f(t)dt\right| < \delta\frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall x \geq l_0. \tag{3.5}$$

Rakendame integraali keskväärtusteoreemi. Selle kohaselt (vt lause 3.3) saame iga $x \geq l_0$ korral leida sellise punkti $c(x) \in (x, x+\delta)$, et

$$f(c(x)) = \frac{1}{x+\delta-x}\int_{x}^{x+\delta} f(t)dt.$$

Tingimuse (3.5) põhjal

$$|f(c(x))| = \frac{1}{\delta}\left|\int_{x}^{x+\delta} f(x)dx\right| < \frac{1}{\delta}\delta\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall x \geq l_0.$$

Kuna $|c(x)-x| \leq |x+\delta-x| = \delta$, siis tingimuse (3.4) kohaselt

$$|f(x) - f(c(x))| < \frac{\varepsilon}{2} \ \ \forall x \geq l_0.$$

Kokkuvõttes, kui $x \geq l_0$, siis

$$|f(x)| \leq |f(c(x))| + |f(x) - f(c(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

st $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. ■

Märgime, et funktsiooni $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ühtlane pidevus ei garanteeri integraali $\int_a^\infty f(x)dx$ koonduvust ka juhul, kui $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. See selgub järgmisest näitest.

Näide 3.8. Vaatleme funktsiooni

$$f\colon [e,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Rakendades l'Hospitali reeglit, saame, et

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0.$$

Seega lause 2.1 kohaselt funktsioon f on ühtlaselt pidev. Kuna päratu integraal $\int_e^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$ hajub ja

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{x}} \ \ \forall x \in [e,\infty),$$

siis päratute integraalide võrdluslause kohaselt ka $\int_e^\infty f(x)dx$ hajub.

Näide 3.9. Olgu

$$f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \sin x^2.$$

Muutujate vahetuse $z = x^2$ abil veendume, et päratu integraal

$$\int_1^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\sin z}{\sqrt{z}} dz$$

koondub. Selleks tähistame $\varphi(z) := \sin z$ ja $\psi(z) := \dfrac{1}{\sqrt{z}}$, siis

$$\left|\int_1^l \varphi(z)dz\right| = \left|\int_1^l \psi(z)dz\right| = \left|\int_1^l \sin z dz\right| = |\cos l - \cos 1| \leq 2 \ \ \forall l \geq 1$$

ja

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \lim_{z\to\infty} \psi(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{\sqrt{z}} = 0.$$

Niisiis rahuldab päratu integraal $\int_1^l \dfrac{\sin z}{\sqrt{z}} dz$ Dirichlet' koonduvustunnuse tingimusi (vt lause 3.2). Samas, kuna piirväärtust

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \sin x^2$$

ei eksisteeri, siis teoreemi 3.7 kohaselt ei ole funktsioon f ühtlaselt pidev.

Lause 3.10. *Kui $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ on selline pidev funktsioon, et tema päratu integraal $\int_a^\infty f(x)dx$ koondub, aga $\int_a^\infty f(x)^2 dx$ hajub, siis f ei ole ühtlaselt pidev.*

Tõestus. Oletame vastuväiteliselt, et f on ühtlaselt pidev, siis teoreemi 3.7 kohaselt $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Paneme tähele, et kui $\varphi := \psi := f$, siis φ ja ψ rahuldavad Dirichlet' koonduvustunnuse (vt lause 3.2) eeldusi:

$$\left|\int_a^l \psi(x)dx\right| = \left|\int_a^l \varphi(x)dx\right| = \left|\int_a^l f(x)dx\right| \leq \sup_{l\geq a}\left|\int_a^l f(x)dx\right| =: M \ \ \forall l \geq a$$

ja

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0,$$

seega peab päratu integraal $\int_a^\infty f(x)^2 dx$ olema koonduv. Saime vastuolu, järelikult ei ole funktsioon f ühtlaselt pidev. ■

Uniformly continuous functions on unbounded intervals

Bachelor's thesis

Galina Bogdanova

Summary

Uniform continuity of real functions on unbounded intervals is not a compulsory topic in the basic analysis courses. In the course «Calculus III», the study of the uniform continuity is limited to Cantor's theorem. The theorem states that if $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is a continuous function, then it is uniformly continuous. This result is essential for proving one of the central results of the integral calculus, which states that if a function $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ is continuous, then it is integrable on $[a,b]$. We also know that if $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ is continuous and $\lim_{x\to\infty} f(x)$ exists (as a real number), then f is uniformly continuous on the interval $[a,\infty)$.

The aim of this bachelor thesis is to characterize functions $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ that are uniformly continuous on $[a,\infty)$. This thesis consists of three chapters and is based on the articles by R. L. Pouso [4] and S. Djebali [1].

In the first chapter of this bachelor thesis, we discuss the definition of a uniform continuity and bring some examples of continuous functions that are not uniformly continuous. In this introductory chapter we use sequences to investigate uniform continuity. We provide an important proposition on the relation between uniformly continuous function and Cauchy sequences, which we will use for further proofs.

The second chapter is devoted to examining uniformly continuous functions on unbounded intervals. We present conditions for a function $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ to be uniformly continuious on an interval $[a,\infty)$. Then we give an example that shows that the condition $\lim_{x\to\infty} \dfrac{|f(x)|}{x} = 0$ does not guarantee uniform continuity of the function f. At the end of the chapter, we show that if the graph of a function f has a horizontal or oblique asymptote then the function is uniformly continuous.

In the third chapter, the relation between uniform continuity and convergence of improper integrals is studied. We examine unifom continuity of a function $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$, for which improper integral $\int_a^\infty f(x)dx$ convergences. We also provide example of cases when uniform continuity of a function does not guarantee integral convergence.

Kirjandus

[1] S. Djebali, *Uniform continuity and growth of real continuous.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **32** (2001), 667–689.

[2] J. Lebl, *Basic Analysis. Inroduction to Real Analysis.* 2012. `http://www.jirka.org/ra/realanal.pdf`

[3] T. Leiger, *Matemaatiline analüüs III.* Loengukonspekt. Tartu Ülikool, Tartu, 2012.

[4] R. L. Puoso, *Uniform continuity on unbouded intervals.* Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. **39** (2008), 551-557.

[5] B. S. Thomson, J. B. Bruckner, A. M. Bruckner, *Elementary real analysis.* Prentice Hall (Pearson), 2001.

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks.

Mina, (sünnikuupäev: 23.04.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   Tõkestamata intervallis ühtlaselt pidevad funktsioonid,

   mille juhendaja on Toivo Leiger,

   (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, 03.06.2013