

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Kärt Gerli Reinmets
**FHBV meetod Caputo murrulise tuletisega
lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks**

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: PhD Mikk Vikerpuur

TARTU 2026

**FHBV MEETOD CAPUTO MURRULISE TULETISEGA
LINEAARSE DIFERENTSIAALVÕRRANDI
LAHENDAMISEKS**

Bakalaureusetöö

Kärt Gerli Reinmets

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös esitatakse FHBV-tüüpi numbriline meetod Caputo murrulise tuletisega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks juhul, kui tuletise järk jääb vahemikku $(0, 1)$. Töö alguses tuuakse sisse mõningad murruliste tuletistega seotud omadused. Seejärel tuletatakse vaadeldav meetod lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks ja esitatakse meetodi veahinnang. Töö lõpus rakendatakse meetodit kahele näitele.

CERCS teaduseriala: P130 Funktsioonid, diferentsiaalvõrrandid.

Märksõnad: Caputo murruline tuletis, algväärtusega ülesanne, diferentsiaalvõrrandi numbriline lahendamine.

FHBV METHOD FOR SOLVING LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CAPUTO TYPE FRACTIONAL DERIVATIVE

Bachelor thesis

Kärt Gerli Reinmets

Abstract

In this bachelor's thesis, we construct and study the FHBV method for the solution of linear fractional differential equations involving one Caputo derivative of order α , where $\alpha \in (0, 1)$. We start by discussing the general properties of fractional derivatives. Then the problem setting is introduced, after which the numerical scheme under study is derived and its error estimate is given. Finally, the method is applied to two example problems.

CERCS research specialisation: P130 Functions, differential equations.

Key Words: Caputo fractional derivative, initial value problem, numerical solution of fractional equations.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Vajalikud mõisted	5
1.1 Gammafunktsioon	5
1.2 Absoluutselt pidevate funktsioonide hulk	7
1.3 Ühe parameetriga Mittag-Leffleri funktsioon	7
1.4 Riemann-Liouville'i integraaloperaator	8
1.5 Riemann-Liouville'i murruline tuletis	9
1.6 Caputo murruline tuletis	10
2 Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi ligikaudne lahendamine	11
3 Meetodi võrgu valimine	17
4 Koonduvus ja parameetrite valik	23
4.1 Meetodi koonduvus	23
4.2 Parameetrite valimine	24
5 Numbrilised näited	25
5.1 Ülesanne 1	25
5.2 Ülesanne 2	29
6 Kirjandus	34
Kasutatud allikad	35

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö käsitleb algtingimusega Caputo murrulise tuletise diferentsiaalvõrrandi numbrilist lahendamist, kus tuletise järk on vahemikus $(0, 1)$. Murrulist tuletist sisaldavad diferentsiaalvõrrandid võimaldavad kirjeldada protsesse, mille areng sõltub lisaks hetkeolukorrale ka süsteemi varasemast käitumisest. Selliseid mudeleid kasutatakse näiteks materjaliteaduses, mehaanikas, füüsikas, keemias, biomeditsiinis, epidemioloogias, finantsmatemaatikas ja majanduses. Käesoleva töö eesmärk on kirjeldada selliste võrrandite lahendamiseks kasutatavat FHBV (Fractional Hamiltonian Boundary Value) meetodit ning esitada tulemus meetodi lähendi veahinnangust.

Bakalaureusetöö esimeses peatükis tutvustame tööks vajalikke mõisteid ja tulemusi. Teises peatükis defineerime Riemann-Liouville'i integraali ja Riemann-Liouville'i tuletise ning Caputo murrulise tuletise ja toome esile mõned vastavate tuletistega seotud omadused. Kolmandas peatükis esitame uuritava ülesande ning tuletame selle lahendamiseks numbrilise meetodi. Neljandas ja viiendas peatükis käsitleme FHBV meetodit põhjalikumalt — tutvustame meetodis kasutatavat võrku, esitame meetodi lahendamiseks vajamineva võrrandisüsteemi ning anname veahinnangu meetodiga saadud lähislahendile. Viimases peatükis rakendame kirjeldatud meetodit kahele konkreetsele näitele ning kuvame saadud tulemused.

1 Vajalikud mõisted

Käesolevas peatükis anname ülevaate olulistest definitsioonidest ja teoreemidest, mida kasutame töö järgnevates osades. Tugineme allikatele [3], [4], [6].

1.1 Gammafunktsioon

Definitsioon 1. Parameetrist $\alpha \in (0, \infty)$ sõltuvat päratut integraali

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (1)$$

nimetatakse *gammafunktsiooniks*.

Lause 1. Päratu integraal

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (2)$$

koondub, kui $\alpha > 0$.

Tõestus. Näeme, et

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt = \int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Uurime esmalt integraali $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ koondumist. Kui $\alpha \geq 1$, on funktsioon $f(t) = e^{-t} t^{\alpha-1}$, $t \in [0, 1]$ pidev lõigus $[0, 1]$, mistõttu vaadeldav integraal koondub. Teisest küljest, kui $\alpha \in (0, 1)$, siis $e^{-t} \rightarrow_{t \rightarrow 0+} 1$ tõttu integraali $\int_0^1 e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ koondumiseks piisab näha, et integraal $\int_0^1 t^{\alpha-1} dt = \frac{t^\alpha}{\alpha} \Big|_0^1 = \frac{1}{\alpha}$ koondub.

Vaatame nüüd summa teist liiget $\int_1^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$. Iga reaalarvu $\alpha > 0$ korral kehtib $e^{-t} t^{\alpha-1} \rightarrow_{t \rightarrow \infty} 0$. Seega leidub (parameetrist α sõltuv reaalarv) $A \geq$

1 nii, et iga $t \geq 1$ korral $e^{-t}t^{\alpha+1} \leq A$ ehk $e^{-t}t^{\alpha-1} \leq At^{-2}$. Seega, kuna $A \int_1^\infty t^{-2}dt = A$, siis integraal $\int_1^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt$ koondub iga $\alpha > 0$ korral. Seega Lause 1 kehtib.

Lause 2. (Gammafunktsiooni taandamisvalem). Mistahes reaalarvu $\alpha > 0$ korral

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Tõestus. Kasutades ositi integreerimise valemit, saame kirjutada

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha + 1) &= \int_0^\infty e^{-t}t^{(\alpha+1)-1}dt = \int_0^\infty t^\alpha d(-e^{-t}) \\ &= (-e^{-t}t^\alpha)|_0^\infty + \alpha \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt = 0 + \alpha \int_0^\infty e^{-t}t^{\alpha-1}dt \\ &= \alpha\Gamma(\alpha).\end{aligned}$$

Olgu $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ja $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Mistahes $n \in \mathbb{N}$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral, kus $\alpha > n - 1$, saame *gammafunktsiooni taandamisvalemit* n -korda rakendades

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)\Gamma((\alpha - n) + 1).$$

Arvestades, et $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}t^0dt = 1$ ning võttes gammafunktsiooni taandamisvalemis $\alpha = n$, saame tuletada järgneva seose faktoriaali ja gammafunktsiooni vahel:

$$\Gamma(n + 1) = n \cdot (n - 1) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Definitsioon 2. Parameetritest $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ sõltuvat päratut integraali

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

nimetatakse *beetafunktsiooniks*.

Gammafunktsiooni ja beetafunktsiooni vahel kehtib seos

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

mille tõestus on esitatud G. Kangro õpikus [4].

1.2 Absoluutselt pidevate funktsioonide hulk

Definitsioon 3. Lõigul $[0, T]$ määratud funktsiooni $y = y(t)$ nimetatakse absoluutselt pidevaks, kui iga $\epsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et mistahes omavahel mittelõikuvate vahemike süsteemi $(a_i, b_i) \subset [0, T]$, $i = 1, \dots, n$; $n \in \mathbb{N}$ puhul

$$\sum_{i=1}^n (T_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i=1}^n |y(T_i) - y(a_i)| < \epsilon.$$

Absoluutselt pidevate funktsioonide hulka lõigus $[0, T]$ tähistatakse $AC[0, T]$.

1.3 Ühe parameetriga Mittag-Leffleri funktsioon

Definitsioon 4. Olgu $\alpha > 0$. Funktsiooni $E_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mis on defineeritud seosega

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{R},$$

nimetatakse ühe parameetriga Mittag-Leffleri funktsiooniks.

Märgime, et iga $\alpha > 0$ ja $z \in \mathbb{R}$ korral $E_\alpha(z)$ koondub. Vastav tulemus on esitatud K. Diethelmi monograafias [3].

1.4 Riemann-Liouville'i integraaloperaator

Tähistame $C[0, T]$ abil lõigus $[0, T]$ pidevate funktsioonide hulka.

Definitsioon 5. Olgu $\alpha \in [0, \infty)$. Teisendust $J^\alpha y$, mis seab igale lõigus $[0, T]$ pidevale funktsioonile y vastavusse funktsiooni $J^\alpha y = (J^\alpha y)(t)$ $t \in [0, T]$ ja mis on määratud valemiga

$$(J^\alpha y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad \alpha > 0,$$

kus $\Gamma(\alpha)$ on gammafunktsioon, nimetatakse Riemann-Liouville'i α -järku integraaloperaatoriks. Kui $\alpha = 0$ defineerime $(J^0 y)(t) = y(t)$ iga $t \in [0, T]$ korral.

Lause 3. Olgu $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ ja $y \in C[0, T]$, siis

$$(J^\alpha J^\beta y)(t) = (J^{\alpha+\beta} y)(t), \quad t \in [0, T].$$

Tõestus. Olgu $t \in [0, T]$. Näeme, et

$$\begin{aligned}
(J^\alpha J^\beta y)(t) &= J^\alpha(J^\beta y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (J^\beta y)(s) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \left(\int_0^s (s-x)^{\beta-1} y(x) dx \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \int_x^t (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} y(x) ds dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t y(x) \left(\int_x^t (t-s)^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1} ds \right) dx.
\end{aligned}$$

Tehes muutujavahetuse $s = x + u(t-x)$ ning kasutades gamma- ja beeta-funktsiooni vahelist seost, saame

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t y(x) \left(\int_0^1 [(t-x)(1-u)]^{\alpha-1} [u(t-x)]^{\beta-1} (t-x) du \right) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t y(x) (t-x)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \right) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t y(x) (t-x)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-x)^{\alpha+\beta-1} y(x) dx \\
&= (J^{\alpha+\beta} y)(t).
\end{aligned}$$

1.5 Riemann-Liouville'i murruline tuletis

Definitsioon 6. Olgu $\alpha \in (0, 1)$. Funktsiooni $y \in AC[0, T]$ Riemann-Liouville'i α -järku murruline tuletis $D_{RL}^\alpha y = (D_{RL}^\alpha y)(t)$ kohal $t \in (0, T]$ defineeritakse valemiga

$$\begin{aligned}
(D_{RL}^\alpha y)(t) &= \frac{d}{dt} (J^{1-\alpha} y)(t) \\
&= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds, \quad t \in (0, T].
\end{aligned}$$

Teoreem 1. Olgu $y \in C[0, T]$ pidev ja olgu $\alpha \in (0, 1)$. Sellisel juhul

$$(D_{RL}^\alpha J^\alpha y)(t) = y(t), \quad t \in (0, T]. \quad (3)$$

Tõestus. Riemann-Liouville'i murrulise tuletise definitsiooni ja lause 3 põhjal

$$(D_{RL}^\alpha J^\alpha y)(t) = \frac{d}{dt}(J^{1-\alpha} J^\alpha y)(t) = \frac{d}{dt}(J^1 y)(t) = y(t), \quad t \in (0, T].$$

1.6 Caputo murruline tuletis

Definitsioon 6. Olgu $\alpha \in (0, 1)$ ja olgu $y \in AC[0, T]$. Funktsiooni y Caputo α -järku murruliseks tuletiseks $D_{Cap}^\alpha y = (D_{Cap}^\alpha y)(t)$ kohal $t \in (0, T]$ nimetatakse funktsiooni

$$(D_{Cap}^\alpha y)(t) = (D_{RL}^\alpha (y - y_0))(t), \quad t \in (0, T],$$

kus $y_0 = y(0)$.

Näeme, et

$$(D_{Cap}^\alpha y)(t) = \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (y(s) - y(0)) ds, \quad t \in (0, T]. \quad (4)$$

Teoreem 2. Olgu $y \in C[0, T]$ ning $\alpha \in (0, 1)$. Siis

$$(D_{Cap}^\alpha J^\alpha y)(t) = y(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

Tõestus. Olgu $f(t) = (J^\alpha y)(t)$, $t \in [0, T]$. Näitame, et $(D_{Cap}^\alpha f)(t) = y(t)$, $t \in [0, T]$. Kuna $f(0) = 0$, siis Caputo tuletise definitsiooni ja teoreemi 1

põhjal saame, et

$$(D_{Cap}^\alpha J^\alpha y)(t) = (D_{Cap}^\alpha f)(t) = (D_{RL}^\alpha (f - 0))(t) = (D_{RL}^\alpha J^\alpha y)(t) = y(t).$$

Teoreem 3. Olgu $y \in AC[0, T]$ ja $\alpha \in (0, 1)$. Siis

$$(J^\alpha D_{Cap}^\alpha y)(t) = y(t) - y(0). \quad (6)$$

Teoreemi tõestus on esitatud K. Diethelmi monograafias [3].

Edaspidi kasutame tähistuse lihtsustamiseks sümboli $D_{Cap}^\alpha y$ asemel sümbolit $y^{(\alpha)}$.

2 Caputo murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandi ligikaudne lahendamine

Antud peatükis toome sisse töös uuritava Caputo murrulist tuletist sisaldava algtingimusega ülesande ja esitame samaväärse integraalvõrrandi. Seejärel anname ülevaate, kuidas vaadeldavat ülesannet saab ligikaudselt lahendada nii-nimetatud FHBV (Fractional Hamiltonian Boundary Value) meetodi abil. Järgnevates peatükkides täpsustame meetodi kirjeldust, kirjeldame meetodile sobiva võrgu valikut ja toome esile meetodi koonduvustulemuse. FHBV meetod ja selle kirjeldus põhinevad artiklil [1].

Võrrandit, mis seob otsitava funktsiooni $y = y(t)$ tema (Caputo) murrulist järku tuletistega, nimetatakse (Caputo) murrulise tuletisega diferentsiaalvõrrandiks. Olgu $\alpha \in (0, 1)$, $y \in AC[0, T]$. Vaatame Caputo murrulise tuletisega

lineaarset diferentsiaalvõrrandit kujul

$$y^{(\alpha)}(t) = a(t)y(t) + f(t), \quad t \in [0, T], \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

kus a ja f on etteantud pidevad funktsioonid piirkonnas $[0, T]$, y_0 on etteantud arv, ning y on otsitav funktsioon. Ülesande kirjelduse põhjal näeme, et $y^{(\alpha)} \in C[0, T]$. Märgime, et teoreemi 3 põhjal on ülesanne (7) samaväärne järgneva integraalvõrrandiga:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + (J^\alpha(ay + f))(t) \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} [a(x)y(x) + f(x)] dx, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (8)$$

FHBV meetodi kirjeldamiseks vaatame kõigepealt ülesannet (7) lõigus $[0, h] \subset [0, T]$. Muutujavahetuse $t = ch$, $c \in [0, 1]$ abil saame kirjutada

$$y^{(\alpha)}(ch) = a(ch)y(ch) + f(ch), \quad c \in [0, 1], \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Eeldame, et saame ülesandes (9) oleva Caputo tuletise esitada kujul

$$y^{(\alpha)}(ch) = \sum_{i \geq 0} P_i(c) \gamma_i(y), \quad c \in [0, 1], \quad (10)$$

kus

$$\gamma_i(y) = \int_0^1 \omega(\tau) P_i(\tau) [a(\tau h)y(\tau h) + f(\tau h)] d\tau \quad (11)$$

ja kus $\{P_i\}_{i \geq 0}$ on ortonormeeritud Jacobi polünoomide süsteem. Teisisõnu P_i , $i = 0, 1, \dots$ on i -ndat järku polünoom ja iga P_i, P_j , $i, j = 0, 1, \dots$ korral on vaadeldavad polünoomid ortonormeeritud kaalu $\omega(c) = \alpha(1-c)^{\alpha-1}$, $c \in [0, 1]$,

suhtes, st

$$\int_0^1 \omega(c) P_i(c) P_j(c) dc = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots,$$

kus

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{kui } i \neq j \\ 1, & \text{kui } i = j, \end{cases} \quad i, j = 0, 1, \dots$$

Avaldiste (8)-(10) põhjal näeme, et

$$\begin{aligned} y(ch) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{ch} (ch - x)^{\alpha-1} [a(x)y(x) + f(x)] dx \\ &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^c h^{\alpha-1} (c - s)^{\alpha-1} [a(sh)y(sh) + f(sh)] h ds \\ &= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^c (c - s)^{\alpha-1} [a(sh)y(sh) + f(sh)] ds \\ &= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \sum_{i \geq 0} \gamma_i(y) \int_0^c (c - s)^{\alpha-1} P_i(s) ds \\ &= y_0 + h^\alpha \sum_{i \geq 0} (J^\alpha P_i)(c) \gamma_i(y), \quad c \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{12}$$

Arvestades, et $P_0(c) \equiv 1$ ning $(J^\alpha P_i)(1) = \frac{\delta_{i0}}{\Gamma(\alpha+1)}$, siis võttes avaldise (12)

$c = 1$, saame tuletada lahendi väärtuse kohal h :

$$\begin{aligned}
y(h) &= y_0 + h^\alpha \sum_{i \geq 0} (J^\alpha P_i)(1) \gamma_i(y) \\
&= y_0 + h^\alpha \sum_{i \geq 0} \frac{\delta_{i0}}{\Gamma(\alpha + 1)} \gamma_i(y) \\
&= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \gamma_0(y) \\
&= y_0 + \frac{h^\alpha}{\alpha \Gamma(\alpha)} \gamma_0(y) \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h (h - x)^{\alpha-1} [a(x)y(x) + f(x)] dx \\
&\equiv y_0 + (J^\alpha(ay + f))(h).
\end{aligned} \tag{13}$$

Näeme, nagu oodatud, et (13) ühtib integraalvõrrandiga (8) punktis $t = h$. Võttes diferentsiaalvõrrandis (10) lõpmatu rea asemel $s - 1$ liikmega osasumma, saame uue ülesande lahendi y lähendi $\sigma = \sigma(ch)$ suhtes:

$$\sigma^{(\alpha)}(ch) = \sum_{i=0}^{s-1} P_i(c) \gamma_i(\sigma), \quad c \in [0, 1], \quad \sigma(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

kus kordajad $\gamma_i(\sigma)$ on nüüd defineeritud kui

$$\gamma_j(\sigma) = \int_0^1 \omega(c) P_j(c) [a(ch)\sigma(ch) + f(ch)] dc, \quad j = 0, \dots, s-1. \tag{15}$$

Rakendades sama mõttekäiku, nagu avaldise (12) leidmisel, saame

$$\sigma(ch) = y_0 + h^\alpha \sum_{j=0}^{s-1} (J^\alpha P_j)(c) \gamma_j(\sigma), \quad c \in [0, 1]. \tag{16}$$

Seejuures (vt(13)),

$$\begin{aligned}
\sigma(h) &= y_0 + h^\alpha \sum_{j=0}^{s-1} (J^\alpha P_j)(c) \gamma_j(\sigma) \\
&= y_0 + h^\alpha \sum_{j=0}^{s-1} \frac{\delta_{i0}}{\Gamma(\alpha+1)} \gamma_j(\sigma) \\
&= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \gamma_0(\sigma) \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^h (h-x)^{\alpha-1} [a(x)\sigma(x) + f(x)] dx.
\end{aligned} \tag{17}$$

Saadud numbrilise meetodi rakendamiseks on vaja leida kordajad $\gamma_j(\sigma)$. Selle jaoks diskretiseerime $\gamma_j(\sigma)$ avaldist, kasutades s -sõlmega Gauss-Jacobi kvadratuurmeetodit:

$$\gamma_j(\sigma) \approx \sum_{\nu=1}^s b_\nu P_j(c_\nu) [a(c_\nu h) \sigma(c_\nu h) + f(c_\nu h)], \quad j = 1, \dots, s.$$

Siin kvadratuuri sõlmpunktid c_i , $i = 1, \dots, s$ on polünoomi $P_s(c)$ nullpunktid:

$$P_s(c_i) = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

ja Gauss-Jacobi kvadratuuri kordajad on tähistatud sümboliga b_ν :

$$b_\nu = \alpha \int_0^1 (1-c)^{\alpha-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \nu}}^s \frac{c - c_j}{c_\nu - c_j} dc, \quad \nu = 1, \dots, s.$$

Seega, tähistades

$$Y_i := \sigma(c_i h), \quad i = 1, \dots, s, \tag{18}$$

saame kirjutada

$$\gamma_j(\sigma) \approx \sum_{\nu=1}^s b_\nu P_j(c_\nu) [a(c_\nu h) Y_\nu + f(c_\nu h)] =: \hat{\gamma}_j, \quad j = 1, \dots, s-1. \quad (19)$$

Seoseid (16) ja (19) kasutades saame s -võrrandiga võrrandisüsteemi otsitava suuruste Y_i , $i = 1, \dots, s$ jaoks:

$$\begin{aligned} Y_i &= y_0 + h^\alpha \sum_{j=0}^{s-1} (J^\alpha P_j)(c_i) \sum_{\nu=1}^s b_\nu P_j(c_\nu) [a(c_\nu h) Y_\nu + f(c_\nu h)] \\ &= y_0 + h^\alpha \sum_{j=1}^s b_j \left[\sum_{\nu=0}^{s-1} (J^\alpha P_\nu)(c_i) P_\nu(c_j) \right] [a(c_j h) Y_j + f(c_j h)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Olles lahendanud võrrandisüsteemi (20), saame lahendit y lähendada järgnevalt:

$$\begin{aligned} y_1 := \sigma(h) &= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^{s-1} (J^\alpha P_i)(c) \gamma_i(\sigma) \\ &\approx y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=0}^{s-1} (J^\alpha P_i)(c) \sum_{\nu=1}^s b_\nu P_i(c_\nu) [a(c_\nu h) Y_\nu + f(c_\nu h)] \\ &= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=1}^s b_i \left[\sum_{\nu=0}^{s-1} (J^\alpha P_\nu)(c) P_\nu(c_i) \right] [a(c_i h) Y_i + f(c_i h)] \\ &= y_0 + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=1}^s b_i [a(c_i h) Y_i + f(c_i h)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Seoste (14), (19) ja (20) abil määratud meetodit nimetame FHBV meetodiks lõigul $[0, h]$.

3 Meetodi võrgu valimine

Käesolevas peatükis vaatame, kuidas eelmises peatükis tuletatud ligikaudset meetodit lõigul $[0, h]$ rakendada tervel lõigul $[0, T]$. Selleks jagame vaadeldava lõigu osalõikudeks, kus igal osalõigul kasutame tuletatud meetodit täpse lahendi lähendi leidmiseks. Meetodi vea vähendamiseks vaatleme kombineeritud võrku $\Delta_N = \Delta_{N,n,\nu}$, $N, n, \nu \in \mathbb{N}$, mis sisaldab nii ühtlase kui ka mitteühtlase vahega punkte:

$$\hat{t}_0 = 0, \quad \hat{t}_i = \hat{t}_{i-1} + h_i, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad t_j = jh, \quad j = n, \dots, N. \quad (22)$$

Võrgu osalõikude pikkused valime järgnevalt:

- võrgu ühtlases osas $h = \frac{T}{N}$, kus N on etteantud arv,
- võrgu mitteühtlases (nn gradueeritud) osas $h_i = r^{i-1}h_1$, $i = 1, \dots, \nu$, kus r, ν ja h_1 on teada suurused (vt alapeatükk 4.2).

Märgime, et võrgu gradueeritud osa $[0, \hat{t}_\nu]$ pikkus on etteantud suuruse $n \in \{1, \dots, N\}$ korral

$$\sum_{i=1}^{\nu} h_i \equiv h_1 \sum_{i=1}^{\nu} r^{i-1} = h_1 \frac{r^{\nu} - 1}{r - 1} = nh. \quad (23)$$

Antud võrk koosneb ainult gradueeritud võrgust, kui $\nu > n = N$; teisalt võrk on ühtlane, kui $\nu = n = 1$. Järgnevalt vaatleme ülesande (7) täpse lahendi y käitumist igal osalõigul meetodit lõikudes $[\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$, $i = 1, \dots, \nu$ ja $[t_{j-1}, t_j]$, $j = n, \dots, N$ eraldi.

Tuletuskäigu paremaks jälgimiseks defineerime funktsioonid

$$\begin{aligned}
\hat{y} : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & \hat{y}_i(c) &\equiv y(\hat{t}_{i-1} + ch_i), & i &= 1, \dots, \nu, \\
y_j : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & y_j(c) &\equiv y(t_{j-1} + ch), & j &= n+1, \dots, N, \\
\hat{a}_i : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & \hat{a}_i(c) &\equiv a(\hat{t}_{i-1} + ch_i), & i &= 1, \dots, \nu, \\
a_j : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & a_j(c) &\equiv a(t_{j-1} + ch), & j &= n+1, \dots, N, \\
\hat{f}_i : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & \hat{f}_i(c) &\equiv f(\hat{t}_{i-1} + ch_i), & i &= 1, \dots, \nu, \\
f_j : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & f_j(c) &\equiv f(t_{j-1} + ch), & j &= n+1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{24}$$

ja toome välja, et

$$\begin{aligned}
\hat{t}_{i-1} &= h_1 \sum_{j=1}^{i-1} r^{j-1} = h_1 \sum_{j=0}^{i-2} r^j = h_1 \frac{1 - r^{i-1}}{1 - r}, \\
h_i &= \hat{t}_i - \hat{t}_{i-1} = h_1 r^i, \\
\hat{t}_{i-1} - \hat{t}_{\mu-1} &= h_1 \frac{r^{\mu-1} - r^{i-1}}{r - 1} = h_1 \frac{r^{i-1} - r^{\mu-1}}{1 - r} = h_1 \frac{r^\mu (r^{i-\mu} - 1)}{r - 1}.
\end{aligned}$$

Lisaks märgime, et järgnevalt rakendame muutujavahetust $\tau = \frac{x - \hat{t}_{i-1}}{\hat{t}_i}$, $dx = h_i d\tau$.

Näeme, et seose (8) põhjal saame igal osalõigul $[\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$, $i = 1, \dots, \nu$ täpse

lahendi y ahendi $\hat{y}_i$ punktis $c \in [0, 1]$ kirjutada kujul

$$\begin{aligned}
\hat{y}_i(c) &= y_0 + (J^\alpha(ay + f))(\hat{t}_{i-1} + ch_i) \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{\mu=1}^{i-1} \int_{\hat{t}_{\mu-1}}^{\hat{t}_{\mu}} (\hat{t}_{i-1} + ch_i - x)^{\alpha-1} [a_i(x)y_i(x) + f_i(x)] dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{\hat{t}_{i-1}}^{\hat{t}_{i-1}+ch_i} (\hat{t}_{i-1} + ch_i - x)^{\alpha-1} [a_i(x)y_i(x) + f_i(x)] dx \right] \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{\mu=1}^{i-1} \int_0^1 (\hat{t}_{i-1} + ch_i - \hat{t}_{\mu-1} - \tau h_\mu)^{\alpha-1} h_\mu [\hat{a}_\mu(\tau)\hat{y}_\mu(\tau) + \hat{f}_\mu(\tau)] d\tau \right. \\
&\quad \left. + \int_0^c (\hat{t}_{i-1} + ch_i - \hat{t}_{i-1} - \tau h_i)^{\alpha-1} h_i [\hat{a}_i(\tau)\hat{y}_i(\tau) + \hat{f}_i(\tau)] d\tau \right] \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{\mu=1}^{i-1} h_\mu^\alpha \int_0^1 \left(\frac{h_1^{\frac{r^{\mu-1}(r^{i-\mu}-1)}{r-1}}}{h_\mu} + c \frac{h_1 r^i}{h_\mu} - \tau \right)^{\alpha-1} \times \right. \\
&\quad \left. \times [\hat{a}_\mu(\tau)\hat{y}_\mu(\tau) + \hat{f}_\mu(\tau)] d\tau + \int_0^c h_i^{\alpha-1} (c - \tau)^{\alpha-1} h_i [\hat{a}_i(\tau)\hat{y}_i(\tau) + \hat{f}_i(\tau)] d\tau \right] \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{\mu=1}^{i-1} h_\mu^\alpha \int_0^1 \left(\frac{h_1 r^{\mu-1}}{h_\mu} \left(\frac{r^{i-\mu}-1}{r-1} + cr^i \right) - \tau \right)^{\alpha-1} \times \right. \\
&\quad \left. \times [\hat{a}_\mu(\tau)\hat{y}_\mu(\tau) + \hat{f}_\mu(\tau)] d\tau + h_i^\alpha \int_0^c h_i^{\alpha-1} (c - \tau)^{\alpha-1} [\hat{a}_i(\tau)\hat{y}_i(\tau) + \hat{f}_i(\tau)] d\tau \right] \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{\mu=1}^{i-1} h_\mu^\alpha \int_0^1 \left(\frac{r^{i-\mu}-1}{r-1} + cr^{i-\mu} - \tau \right)^{\alpha-1} \times \right. \\
&\quad \left. \times [\hat{a}_\mu(\tau)\hat{y}_\mu(\tau) + \hat{f}_\mu(\tau)] d\tau + h_i^\alpha \int_0^c (c - \tau)^{\alpha-1} [\hat{a}_i(\tau)\hat{y}_i(\tau) + \hat{f}_i(\tau)] d\tau \right].
\end{aligned} \tag{25}$$

Analoogiliselt, ühtlase pikkusega lõikude $[t_{j-1}, t_j]$, $j = n+1, \dots, N$ korral on

täpse lahendi y ahend y_j punktis $c \in [0, 1]$ avaldatav kujul

$$\begin{aligned}
y_j(c) &= y_0 + (J^\alpha(ay + f))(t_{j-1} + ch_j) \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{i=1}^{\nu} \int_{t_{i-1}}^{\hat{t}_i} (t_{j-1} + ch - x)^{\alpha-1} [a_j(x)y_j(x) + f_j(x)] dx \right. \\
&\quad + \sum_{\mu=n+1}^{j-1} \int_{t_{\mu-1}}^{t_\mu} (t_{j-1} + ch - x)^{\alpha-1} [a_j(x)y_j(x) + f_j(x)] dx \\
&\quad \left. + \int_{t_{j-1}}^{t_{j-1}+ch} (t_{j-1} + ch - x)^{\alpha-1} [a_j(x)y_j(x) + f_j(x)] dx \right] \\
&= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{i=1}^{\nu} h_i^\alpha \int_0^1 \left(\frac{(j-1+c)(r^\nu-1) - n(r^{i-1}-1)}{nr^{i-1}(r-1)} - \tau \right)^{\alpha-1} \times \right. \\
&\quad \times [\hat{a}_i(\tau)\hat{y}_i(\tau) + \hat{f}_i(\tau)] d\tau + h^\alpha \sum_{\mu=n+1}^{j-1} \int_0^1 w(j-\mu+c-\tau)^{\alpha-1} [a_\mu(\tau)y_\mu(\tau) + f_\mu(\tau)] d\tau \\
&\quad \left. + h^\alpha \int_0^c (c-\tau)^{\alpha-1} [a_j(\tau)y_j(\tau) + f_j(\tau)] d\tau \right]. \tag{26}
\end{aligned}$$

Järgnevalt rakendame eelnevas peatükis välja toodud FHBV meetodit igal osalõigul eraldi. Selleks esitame ülesande (7) abifunktsioonide (24) abil:

$$\begin{aligned}
\hat{y}_i^{(\alpha)}(c) &= \hat{a}_i(c)\hat{y}_i(c) + \hat{f}_i(c), \quad i = 1, \dots, \nu, & \hat{y}_1(0) &= y_0, \\
y_j^{(\alpha)}(c) &= a_j(c)y_j(c) + f_j(c), \quad j = n+1, \dots, N, & c \in [0, 1]. & \tag{27}
\end{aligned}$$

Analoogiliselt valemiga (10) saame, et

$$\begin{aligned}
\hat{y}_i^{(\alpha)}(c) &= \sum_{l \geq 0} P_l(c) \gamma_l^i(\hat{y}_i), \quad c \in [0, 1], \\
y_j^{(\alpha)}(c) &= \sum_{l \geq 0} P_l(c) \gamma_l(y_j), \quad c \in [0, 1].
\end{aligned} \tag{28}$$

Funktsioonide $\hat{y}_i$, $i = 1, \dots, \nu$ ja y_j , $j = n+1, \dots, N$ lähendid $\hat{\sigma}_i$ ja σ_j leiame

tingimuste

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i^{(\alpha)}(c) &= \sum_{l=0}^{s-1} P_l(c) \gamma_l^i(\hat{\sigma}_i), \quad i = 1, \dots, \nu, \quad \hat{\sigma}_1(0) = y_0, \\ \sigma_j^{(\alpha)}(c) &= \sum_{l=0}^{s-1} P_l(c) \gamma_l(\sigma_j), \quad j = n+1, \dots, N, \quad c \in [0, 1]\end{aligned}$$

abil (võrdle avaldisega (14)). Siis kordajad $\gamma_l^i(z)$ ja $\gamma_l(z)$ on antud valemitega (15).

$$\begin{aligned}\gamma_l^i(z) &= \int_0^1 \omega(c) P_l(c) [\hat{a}_i(c) z(ch_i) + \hat{f}_i(c)] dc, \\ \gamma_l(z) &= \int_0^1 \omega(c) P_l(c) [a_j(c) z(ch) + f_j(c)] dc, \\ l &= 0, 1, \dots, s-1,\end{aligned} \tag{29}$$

kus z tähistab funktsiooni $\hat{\sigma}_i$ või σ_j , vastavalt vajadusele. Rakendades võrrandite (25) ja (26) tuletuskäike $\hat{\sigma}_i^{(\alpha)}$ ja $\sigma_j^{(\alpha)}$ suhtes, saame

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_i(c) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{\mu=1}^{i-1} h_\mu^\alpha \int_0^1 \left(\left(\frac{r^{i-\mu} - 1}{r - 1} + cr^{i-\mu} - \tau \right)^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{s-1} P_l(\tau) \gamma_l^\mu(\hat{\sigma}_\mu) \right) d\tau \right. \\ &\quad \left. + h_i^\alpha \int_0^c \left((c - \tau)^{\alpha-1} \sum_{l=0}^{s-1} P_l(\tau) \gamma_l^i(\hat{\sigma}_i) \right) d\tau \right] \\ &\equiv \hat{\phi}_i(c) + h_i^\alpha \sum_{l=0}^{s-1} (J^\alpha P_l)(c) \gamma_l^i(\hat{\sigma}_i), \quad c \in [0, 1]\end{aligned}$$

ja

$$\sigma_j(c) = \phi_j(c) + h^\alpha \sum_{l=0}^{s-1} (I^\alpha P_l)(c) \gamma_l(\sigma_j), \quad c \in [0, 1].$$

Siin

$$I_l^\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x - \tau)^{\alpha-1} P_l(\tau) d\tau, \quad x \in [0, \infty)$$

ja

$$\hat{\phi}_i(c) = y_0 + \sum_{\mu=1}^{i-1} h_\mu^\alpha \sum_{l=0}^{s-1} I_l^\alpha \left(\frac{r^{i-\mu} - 1}{r - 1} + cr^{i-\mu} \right) \gamma_l^\mu(\hat{\sigma}_\mu), \quad c \in [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \phi_j(c) = y_0 + \sum_{i=1}^{\nu} h_i^\alpha \sum_{l=0}^{s-1} I_l^\alpha \left(\frac{(j-1+c)(r^\nu - 1) - n(r^{i-1} - 1)}{nr^{i-1}(r-1)} \right) \gamma_l^i(\hat{\sigma}_i) \\ + h^\alpha \sum_{\mu=n+1}^{j-1} \sum_{l=0}^{s-1} I_l^\alpha(j - \mu + c) \gamma_l(\sigma_\mu), \quad c \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Lähendite $\hat{\sigma}_i$, $i = 0, 1, \dots, \nu$ ja σ_j , $j = n+1, \dots, N$ määramiseks on vaja igal osalõigul leida kordajad $\gamma_l^i(\hat{\sigma}_i)$ ja $\gamma_l(\sigma_j)$, kus $l = 0, \dots, s-1$. Avaldise (29) põhjal saame, et

$$\begin{aligned} \gamma_l^i(\hat{\sigma}_i) = \int_0^1 \omega(c) P_l(c) \left(\hat{a}(c) \hat{\sigma}_i \left(\hat{\phi}_i(c) + h_i^\alpha \sum_{\mu=0}^{s-1} (J^\alpha P_\mu)(c) \gamma_\mu^i(\hat{\sigma}_i) \right) + \hat{f}(c) \right) dc, \\ l = 0, \dots, s-1, \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \gamma_l(\sigma_j) = \int_0^1 \omega(c) P_l(c) \left(a_j(c) \sigma_j \left(\phi_j(c) + h^\alpha \sum_{\mu=0}^{s-1} (J^\alpha P_\mu)(c) \gamma_\mu(\sigma_j) \right) + f_j(c) \right) dc, \\ l = 0, \dots, s-1. \end{aligned}$$

Jälgides peatükis 2 välja toodud Gauss-Jacobi kvadratuurmeetodi ideed (vt

(18)-(21)), saame leida lahendi y lähendite $\hat{\sigma}_i, \sigma_j, i = 1, \dots, \nu, j = n + 1, \dots, N$, väärtused igas osalõigu lõpp-punktis, lahendades igas osalõigus vastava võrrandisüsteemi. Osutub, et iga $l = 0, \dots, s - 1$ ja $\rho = 1, \dots, s$ korral piisab selleks hinnata suursi

$$(J^\alpha P_l)(c_\rho),$$

$$I_l^\alpha(j + c_\rho), \quad j = 1, \dots, N - n - 1,$$

$$I_l^\alpha\left(\frac{r^i - 1}{r - 1} + c_\rho r^i\right), \quad i = 1, \dots, \nu - 1,$$

$$I_l^\alpha\left(\frac{(j + c_\rho)(r^\nu - 1) - n(r^i - 1)}{nr^i(r - 1)}\right), \quad i = 0, \dots, \nu - 1, \quad j = n, \dots, N - 1.$$

4 Koonduvus ja parameetrite valik

4.1 Meetodi koonduvus

Tähistame sümboliga $C^{(n)}(\Omega)$ ($n \in \mathbb{N}, \Omega \in \mathbb{R}$) kõikide piirkonnas Ω n -korda pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka. Meetodi koonduvust iseloomustab järgmine tulemus.

Teoreem 4. [1] Olgu $y \in AC[0, T]$ ja $a, f \in C[0, T] \cap C^{(2s)}(0, T]$, $\alpha \in (0, 1)$.

Siis

$$\max \left\{ \max_i |\hat{e}_i|, \max_j |e_j| \right\} \leq M(h_1^{2\alpha} + h_\nu^{s+\alpha} + h^{s+\alpha-1}), \quad (30)$$

kus $M > 0$ on mingi positiivne konstant, mis ei sõltu suurusest N ja

$$\begin{aligned} \hat{e}_i &:= \hat{\sigma}_i(1) - y(\hat{t}_i), & i &= 1, \dots, \nu, \\ e_j &:= \sigma_j(1) - y(t_j), & j &= n + 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (31)$$

Siin y on ülesande (7) täpne lahend ja $\hat{t}_i, t_j$ on võrgu (22) punktid.

Meenutame, et h_1 on esimeses osalõigu pikkus, h_ν on viimase gradueeritud osalõigu pikkus ja h on ühtlase võrgu osalõikkude pikkus.

4.2 Parameetrite valimine

Meetodi kõigi sõlmpunktide arv on $\nu + 1 - (N - n)$, kus $N - n$ on ühtlase võrgu osalõikkude arv ning ν näitab gradueeritud võrgus olevate osalõikkude arvu. Ühtlase võrgu pikkust h arvutatakse valemi

$$h = \frac{T}{N} \quad (32)$$

abil, kus T on lõigu pikkus. Gradueeritud võrgu i -nda osalõigu pikkuse h_i määramiseks kasutame parameetreid r, n ja ν . Parameetri r valime vastavalt eeskirjale

$$r_n = \begin{cases} 2, & \text{kui } n = 1, \\ \frac{n}{n-1}, & \text{kui } n > 1. \end{cases} \quad (33)$$

Suuruse n valime eeskirja

$$n = \left\lceil \frac{\delta}{h} \right\rceil, \quad (34)$$

järgi, kus δ on lõigu pikkus, milles rakendame võrgu gradueerimist. Suuruse ν valimisel arvestame esimese osalõigu pikkust h_1 . Eeldusel, et $h_1 \leq \varepsilon$, kus $\varepsilon > 0$ on etteantud suurus, valime ν järgnevalt:

$$\nu = \left\lceil \frac{\log(1 + (r - 1)\frac{nh}{\varepsilon})}{\log r} \right\rceil. \quad (35)$$

Teisisõnu, h_1 on leitav valemiga

$$h_1 := \frac{(r-1)nh}{r^\nu - 1} \leq \varepsilon. \quad (36)$$

Olles leidnud suuruse h_1 , saame gradueeritud osalõikkude pikkused leida

$$h_i = r^{i-1}h_1 \quad (37)$$

abil.

5 Numbrilised näited

5.1 Ülesanne 1

Vaatame algtingimusega ülesannet

$$y^{(0.5)} = -y(t) + 1, \quad t \in [0, 10^3], \quad y(0) = 10. \quad (38)$$

Ülesande täpne lahend on artikli [2] põhjal

$$y(t) = E_{0.5}(-t^{0.5})(10 - 1) + 1, \quad t \in [0, 10^3], \quad (39)$$

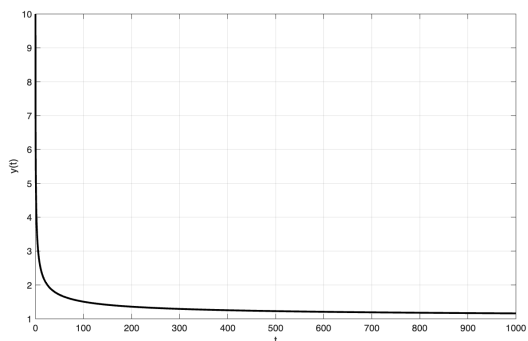
kus E_α on ühe parameetriga Mittag-Leffleri funktsioon. Tähendab, ülesande täpne lahend on esitatav arvreana

$$y(t) = 1 + 9 \sum_{j \geq 0} \frac{(-1)^j t^{0.5j}}{\Gamma(0.5j + 1)}, \quad t \in [0, 10^3].$$

Komplekt K	N	h	n	ν
A	20	50	1	49
B	40	25	1	48
C	80	12.5	1	47
D	160	6.25	1	46
E	320	3.125	1	45
F	640	1.56	1	44

Tabel 1: Ülesande 1 parameetrid

Vaatame lahendit lõigul $[0, 10^3]$. Vastavalt peatükis 4.2 toodud valemitale valime meetodi sõlmpunktideks $N = 20, 40, 80, 160, 320, 640$ ning arvutame ühtlaste osalõikude pikkuse h . Võtame $\delta = h$ ning määrame parameetrid n, r ja ν . Parameetri ν arvutamisel kasutame $\varepsilon = 10^{-13}$. Valitud parameetrid on esitatud Tabelis 1.



Joonis 1: Ülesande 1 täpne lahend

Vea hindamiseks kasutame suurust

$$e_N \equiv e_{N,\nu} = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq \nu} |\hat{e}_i|, \max_{n+1 \leq j \leq N} |e_j| \right\},$$

kus $\hat{e}_i, e_j$ on defineeritud (31) abil. Vea suhted arvutame valemi

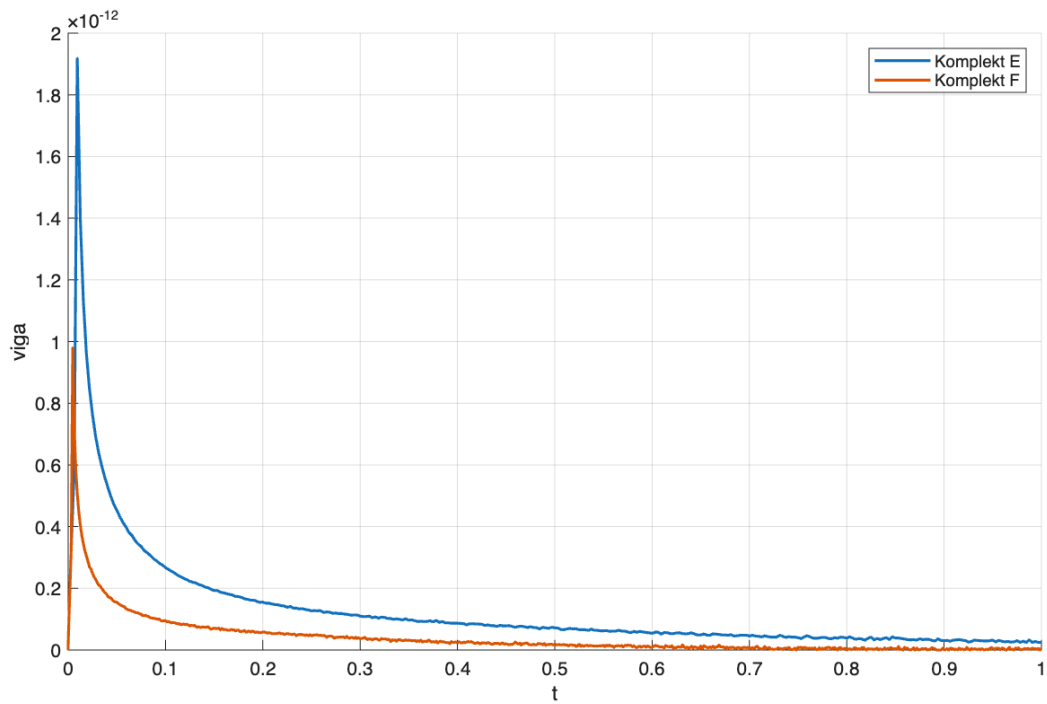
$$S_N = \frac{e_N}{e_{2N}}$$

järgi.

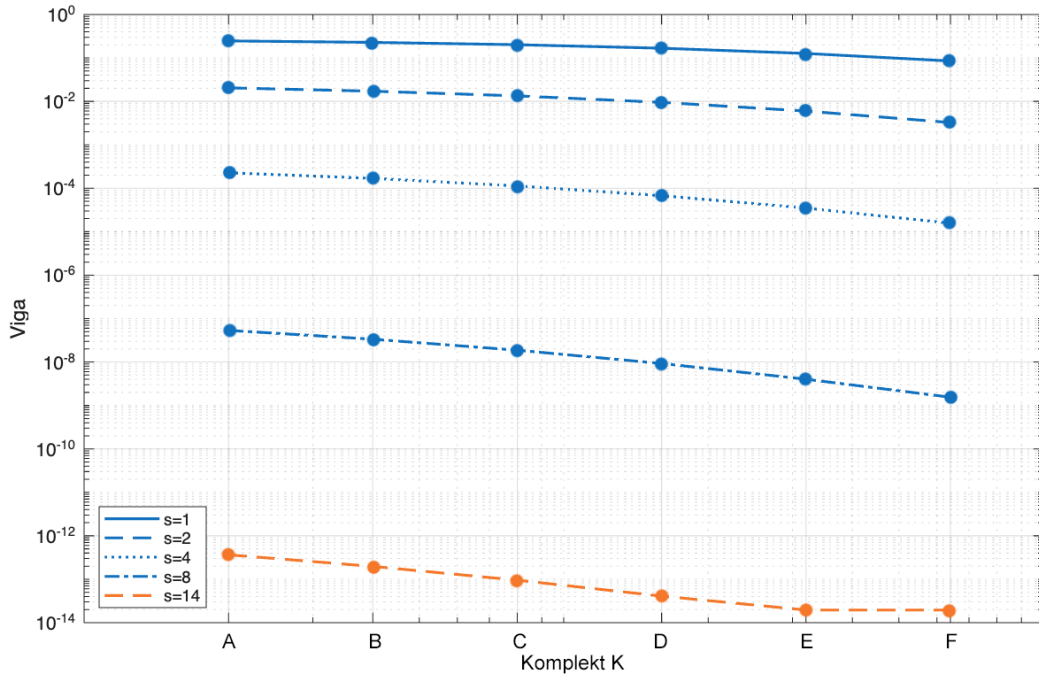
Kuna vea hinnang on esitatav kujul (30), siis eeldusel, et viga on suurim

	$s = 2$		$s = 4$		$s = 8$		$s = 14$
K	$s = 2$	S_n	$s = 4$	S_n	$s = 8$	S_n	$s = 14$
A	2.05×10^{-3}	1.19	2.28×10^{-4}	1.35	5.35×10^{-8}	1.60	3.65×10^{-13}
B	$1.72 \cdot 10^{-3}$	1.28	$1.69 \cdot 10^{-4}$	1.49	$3.35 \cdot 10^{-8}$	1.79	$1.97 \cdot 10^{-13}$
C	$1.34 \cdot 10^{-3}$	1.41	$1.13 \cdot 10^{-4}$	1.68	$1.87 \cdot 10^{-8}$	2.03	$9.50 \cdot 10^{-14}$
D	$9.51 \cdot 10^{-3}$	1.59	$6.75 \cdot 10^{-5}$	1.93	$9.25 \cdot 10^{-9}$	2.3	$4.09 \cdot 10^{-14}$
E	$5.99 \cdot 10^{-4}$	1.84	$3.51 \cdot 10^{-5}$	2.24	$4.01 \cdot 10^{-9}$	2.59	$1.95 \cdot 10^{-14}$
F	$3.26 \cdot 10^{-4}$	-	$1.57 \cdot 10^{-5}$	-	$1.55 \cdot 10^{-9}$	-	$1.95 \cdot 10^{-14}$

Tabel 2: Ülesande 1 veahinnangud



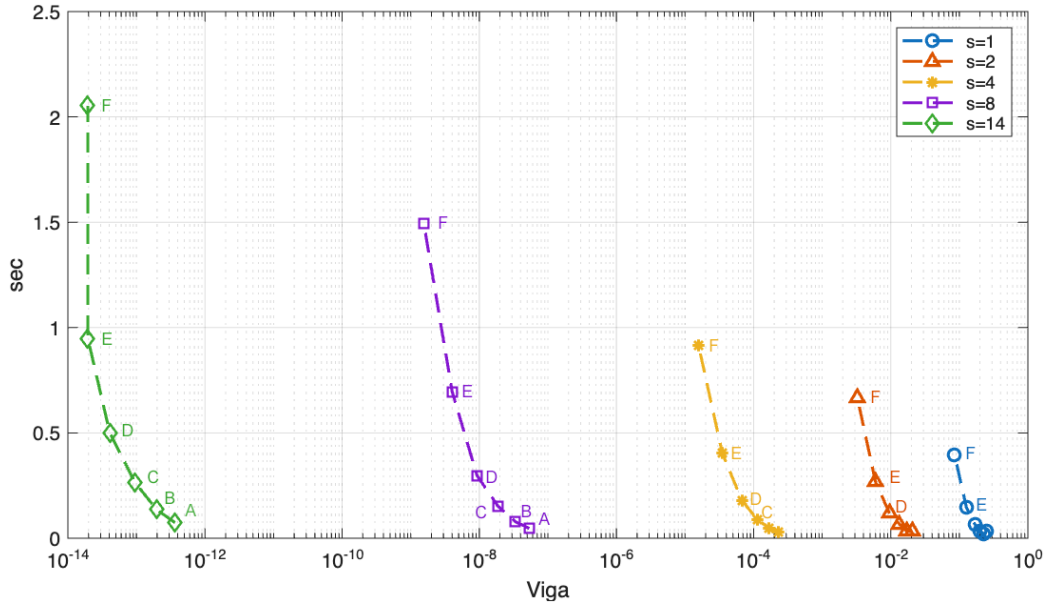
Joonis 2: Ülesande 1 veagraafik, $s = 8$, lõigul $[0, 1]$.



Joonis 3: Ülesande 1 lähendi maksimaalse vea e_n suurus erinevate s -i väärtuste ja komplektide K korral.

esimeses osalõigus, peaks suuruse N kahekordistamisel vigade suhe tulema $2^{2\alpha} = 2$. Tabelist 2 on näha, et suuremate s ja N väärtuste korral meetod isegi ületab antud ülesande korral teoreetilist veasuhet. Meetodi viga suuruse $s = 8$ korral illustreerib veagraafik Joonis 2.

Joonistelt 3 ja 4 näeme, et suuruse s muutmine mõjutab meetodi koonduvust märgatavalt rohkem kui sõlmpunktide arvu N muutmine. Vaadates, kuidas meetodi ajakulu ja viga muutuvad suuruse s varieerimisel on märgata, et meetodi ajakulu, arvestades absoluutse vea vähenemise suurust, eriliselt ei kasva. Võttes arvesse lõigu pikkust, $T = 10^3$, näeme, et meetod saavutab rahuldava täpsuse väga lühikese ajakuluga.



Joonis 4: Ülesande 1 meetodi rakendamise kiirus ja lähendi viga e_N erinevate s -i väärtuste arvu ja komplektide K korral.

5.2 Ülesanne 2

Vaatame algtingimusega ülesannet

$$y^{(0.4)} + t^{0.6}y(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad (40)$$

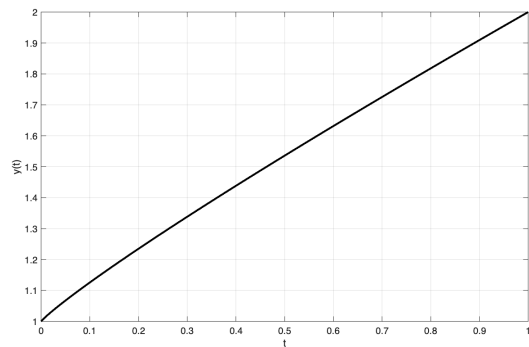
kus

$$f(x) = \frac{\Gamma(1.9)}{\Gamma(1.5)}t^{0.5} + t^{0.6} + t^{1.5},$$

$$t \in [0, 1].$$

Täpne lahend antud ülesandele artikli [5] põhjal on

$$y(t) = t^{0.9} + 1, \quad t \in [0, 1]. \quad (41)$$



Joonis 5: Ülesande 2 täpne lahend

Komplekt K	N	h	n	ν
A	2	0.5	1	43
B	4	0.25	1	42
C	8	0.125	1	41
D	16	0.0625	1	40
E	32	0.03125	1	39
F	64	0.015625	1	37
G	128	0.0078125	1	37

Tabel 3: Ülesande 2 parameetrid

Analoogselt eelmisele ülesandele valime parameetrid vastavalt alapeatükis 4.2 esitatud valemitele. Sõlmpunktideks võtame $N = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$ ning arvutame ühtlaste osalõikude pikkuse h . Valime $\delta = h$ ning leiame parameetrid n ja ν , kus ν arvutamisel kasutame $\varepsilon = 10^{-13}$. Parameetrite komplektid on välja toodud Tabelis 3.

Vea hindamiseks kasutame suurust

$$e_N \equiv e_{\nu, N} = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq \nu} |\hat{e}_i|, \max_{n+1 \leq j \leq N} |e_j| \right\},$$

kus $\hat{e}_i, e_j$ on defineeritud valemi (31) abil ja vea suhted leiame valemiga

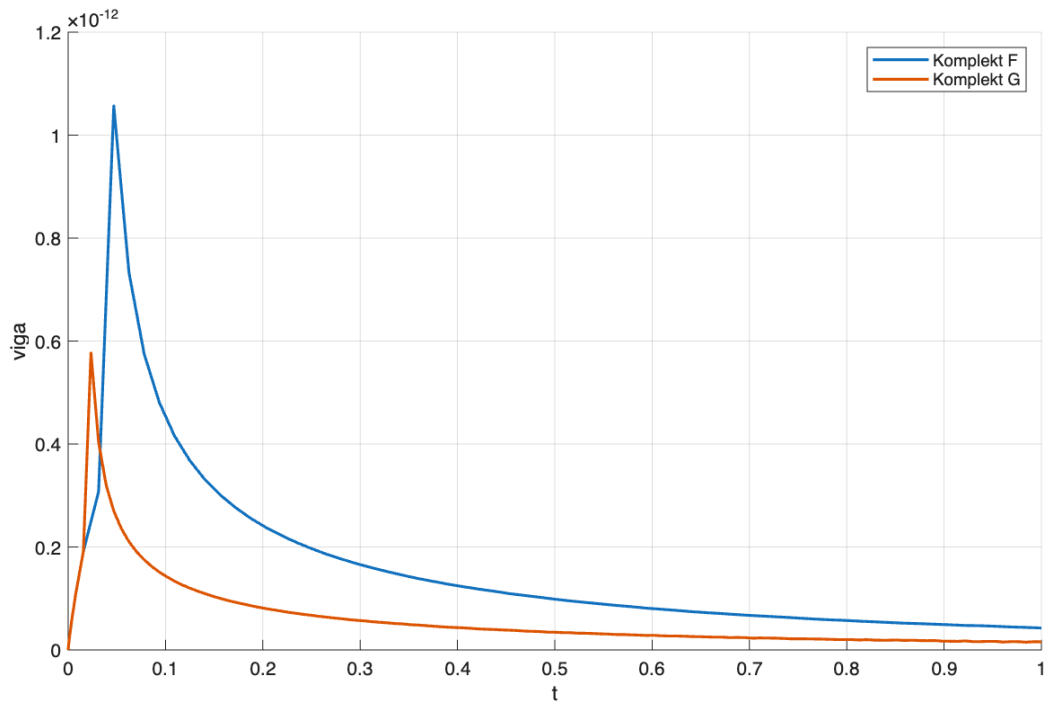
$$S_N = \frac{e_N}{e_{2N}}.$$

Antud ülesandes, kuna vea hinnang on esitatav kujul (30) ja eeldusel, et viga on suurim esimeses osalõiguses, peaks siin suuruse N kahekordistamisel vigade suhe tulema $2^{0.8} \approx 1.74$. Näeme, et meetod koondub oodatava kiirusega.

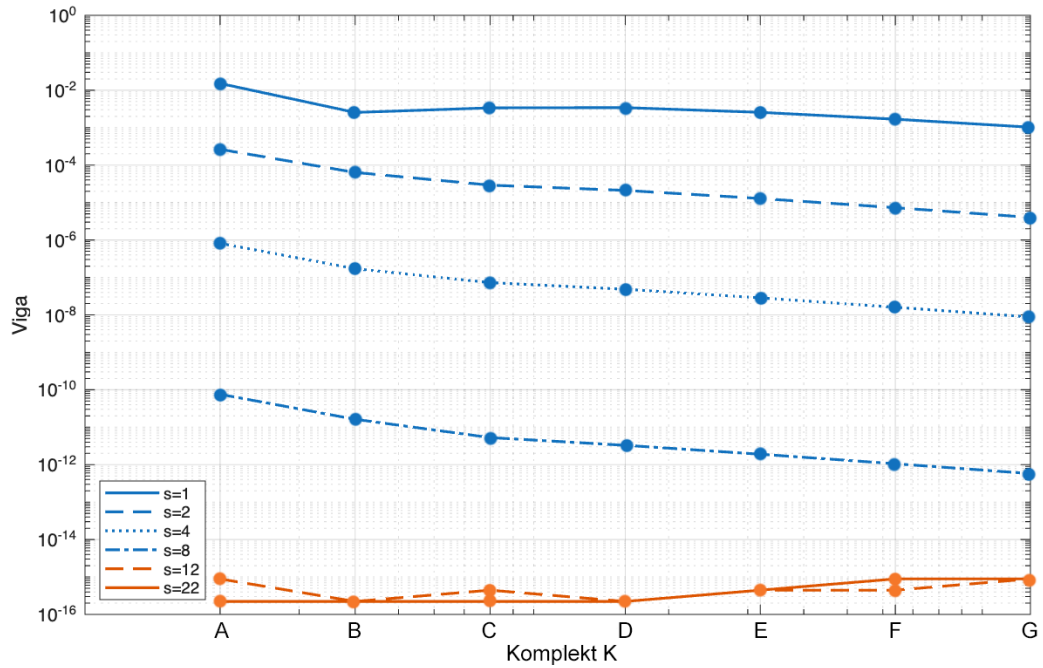
Ka antud ülesandes näeme, vaadates Joonist 7, et vaadeldud komplektide K korral mõjutab suuruse s valik meetodi koonduvust märgatavalt rohkem, kui võrgu tihendamine. Jooniselt 8 on näha, et $s = 12$ korral vea täpsuse $\approx 10^{-15}$

	$s = 2$		$s = 4$		$s = 8$		$s = 12$
K	$s = 2$	S_n	$s = 4$	S_n	$s = 8$	S_n	$s = 12$
A	$2.64 \cdot 10^{-4}$	4.14	$8.16 \cdot 10^{-7}$	4.77	$7.58 \cdot 10^{-11}$	4.66	$1.60 \cdot 10^{-14}$
B	$6.37 \cdot 10^{-5}$	2.19	$1.71 \cdot 10^{-7}$	2.35	$1.63 \cdot 10^{-11}$	3.08	$3.55 \cdot 10^{-15}$
C	$2.92 \cdot 10^{-5}$	1.38	$7.28 \cdot 10^{-8}$	1.51	$5.28 \cdot 10^{-12}$	1.61	$1.33 \cdot 10^{-15}$
D	$2.11 \cdot 10^{-5}$	1.64	$4.83 \cdot 10^{-8}$	1.70	$3.28 \cdot 10^{-12}$	1.73	$6.66 \cdot 10^{-16}$
E	$1.28 \cdot 10^{-5}$	1.76	$2.85 \cdot 10^{-8}$	1.78	$1.90 \cdot 10^{-12}$	1.80	$8.88 \cdot 10^{-16}$
F	$7.28 \cdot 10^{-6}$	1.82	$1.60 \cdot 10^{-8}$	1.82	$1.06 \cdot 10^{-12}$	1.83	$8.88 \cdot 10^{-16}$
G	$4.01 \cdot 10^{-6}$	-	$8.77 \cdot 10^{-9}$	-	$5.77 \cdot 10^{-13}$	-	$1.33 \cdot 10^{-15}$

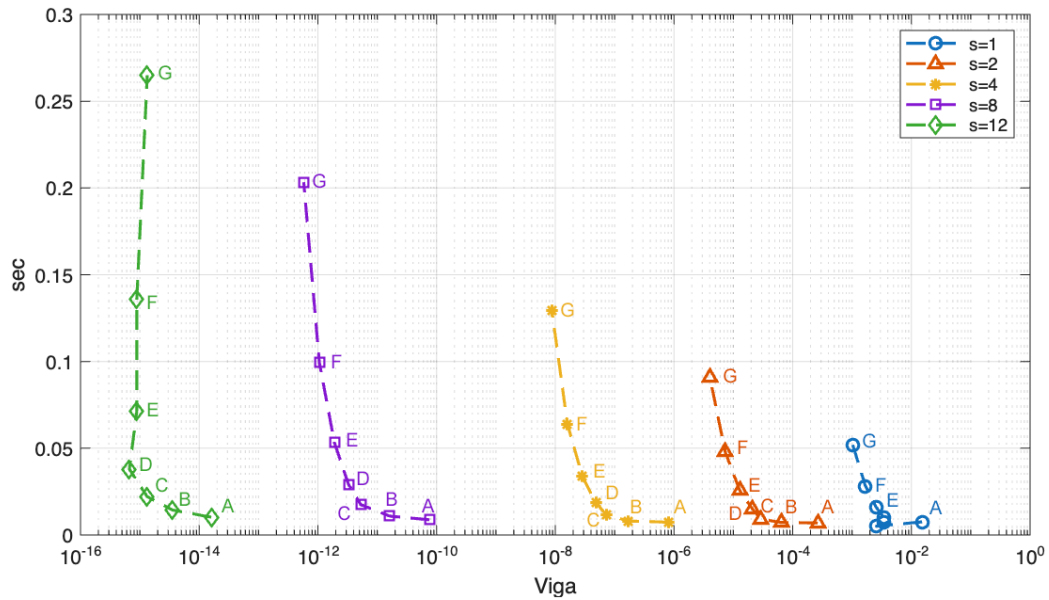
Tabel 4: Ülesande 2 veahinnangud



Joonis 6: Ülesande 2 veagraafik, $s = 8$



Joonis 7: Ülesande 2 lähendi maksimaalse vea e_N suurus erinevate s -i väärtuste ja komplektide K korral.



Joonis 8: Ülesande 2 meetodi rakendamise kiirus ja lähendi viga e_N erinevate s -i väärtuste arvu ja komplektide K korral.

jõudmiseks kulub meetodil ligikaudu 0.04 sekundit.

6 Kirjandus

- [1] Brugnano, L., Gurioli, G., Laverno, F. & Vikerpuur, M. (2025). Analysis and implementation of collocation methods for fractional differential equations. *Journal of Scientific Computing*. **104**, 92.
- [2] Brugnano, L., Gurioli, G., Laverno, F. & Vikerpuur, M. (2025). FDE-Testset: Comparing Matlab Codes for Solving Fractional Differential Equations of Caputo Type. *Fractal and fractional*. **9**, 312.
- [3] Diethelm, K. (2010). *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*. Springer, London.
- [4] Kangro, G. (1968). *Matemaatiline Analüüs II osa*. Valgus, Tallinn.
- [5] Lillemäe, M., Pedas, A. & Vikerpuur, M. (2022). Central part interpolation schemes for a class of fractional initial value problems. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*. **26**, 161-178.
- [6] Pedas, A. & Vikerpuur, M. (2019). Murrulised tuletised ja murruliste tuletistega diferentsiaalvõrrandid. *Eesti Matemaatika selts. Aastaraamat 2019*. (Toim. Andi Kivinukk, Kaido Lätt) Tartu, 2022, 81-117.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, **Kärt Gerli Reinmets**,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose **FHBV meetod Caputo murrulise tuletisega lineaarse diferentsiaalvõrrandi lahendamiseks**, mille juhendaja on **Mikk Vikerpuur**, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kärt Gerli Reinmets

27.05.2026