ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖВУЗОВСКИЙ НАУЧНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ОБЩЕЙ АЛГЕБРЕ

ДОКЛАДЫ
СООБЩЕНИЯ
РЕЗЮМЕ

ТАРТУ 1966

201773

-4218 II

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕЖВУЗОВСКИЙ НАУЧНЫЙ СИМПОЗИУМ ПО ОБЩЕЙ АЛГЕБРЕ

ДОКЛАДЫ СООБЩЕНИЯ РЕЗЮМЕ

ТАРТУ 1966

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли,18

МЕЖВУЗОВСКИЙ НАУЧНЫЙ СИМПОЗИУМ
ПО ОБЩЕЙ АЛГЕБРЕ

На русском языке

Ответственный редактор Е.Габович

Ротапринт ТГУ 1966. Печ.листов 14,5 (условных 13,1)
Учетн.-издат.листов 10,3. Тираж 500 экз.
Бумага 30х42. 1/4. Сдано в печать 19/УП 1966 г.
МВ-05496. Заказ № 340.
Цена 70 коп.

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
201773

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПОЛУГРУППЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ГОМОМОРФИЗМОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

Барабаш В.В. (Ленинград)

Пусть A - топологическое пространство, B - коммутативная хаусдорфова топологическая полугруппа. Рассмотрим полугруппу Φ непрерывных отображений A в B с алгебраической операцией $\varphi_1\varphi_2=\varphi_3 \Leftrightarrow \varphi_1(a)\varphi_2(a)=\varphi_3(a)$, где $a\in A, \varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in\Phi$ (см. [I], стр. 413). Определим в Φ топологию простой сходимости и топологию компактной сходимости на A (см. [2], стр. 160). Тогда Φ превратится в хаусдорфову топологическую полугруппу. Если A - топологическая полугруппа, то через $Hom(A,B)$ обозначим полугруппу непрерывных гомоморфизмов A в B; $Hom(A,B)\subset\Phi$.

Пусть J - множество индексов, равномощное A. Обозначим через B^A полное прямое произведение множества J полугрупп, каждая из которых изоморфна B, и через Π - топологическую полугруппу, которая получается при наделении B^A топологией тихоновского произведения. Доказывается, что полугруппа Φ, наделенная слабой топологией, топологически изоморфно вкладывается в Π. Если топология полугруппы B вполне регулярна, то и топология полугруппы Φ вполне регулярна; отсюда выводятся следствия о топологии полугруппы $Hom(A,B)$. Полугруппа $Hom(A,B)$ замкнута в Φ в рассматриваемых топологиях.

Пусть топологическое пространство полугруппы A равномерно (см. [3], стр. 158) и T - базис A в смысле [4];

тогда топология простой сходимости на T, топология простой сходимости на A и топология равномерной сходимости на предкомпактных множествах из A совпадают на каждом равностепенно непрерывном множестве $H \subset \mathrm{Hom}(A,B)$. Это свойство представляет собой перенесение на рассматриваемый случай результатов, известных из теории топологических векторных пространств (см. [2]).

На полугруппу $\mathrm{Hom}(A,B)$ переносится также в ослабленной форме теорема Банаха-Штейнгауза.

Литература

1. Е.С.Ляпин, Полугруппы, Физматгиз, М., 1960.
2. Н.Бурбаки, Топологические векторные пространства, Изд.ин. лит., М., 1959.
3. Н.Бурбаки, Общая топология, Физматгиз, М., 1958.
4. Л.М.Глускин, Полугруппа гомеоморфных отображений отрезка, Матем.сб., 1959, 49(91), № 1.

РАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ ИЗОМОРФИЗМА ДЛЯ КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП С ДВУМЯ ОБРАЗУЮЩИМИ

Бирюков А.П. (Новосибирск)

Через $K(N,M)$ обозначим коммутативную полугруппу со множеством образующих $N = \{a_1,\dots,a_n\}$ и множеством определяющих соотношений $M = \{A_j(a_i) = B_j(a_i),\ j=1,\dots,s\}$. Проблема изоморфизма для $K(N,M)$ решена в некоторых частных случаях. Так В.А.Емеличев [1] решил ее в случае $s = 1$. Е.А. Халезов (работа находится в печати) нашел решение проблемы в случае, когда $K(N,M)$ является полугруппой с сокращением. Здесь рассматривается случай $n = 2$.

Для построения искомого алгоритма строим минимальные множества слов $E(a_1)$, $E(a_2)$ со следующим свойством: все слова из $E(a_i)$ ($i = 1, 2$) есть единицы для a_i, причем если A – единица для a_i, то A графически совпадает с произведением некоторых слов из $E(a_i)$.

С точностью до нумерации образующих возможны следующие 6 случаев (через $|E(a_i)|$ обозначается мощность множества $E(a_i)$):

(1) $|E(a_1)| \geqslant 2$ и $|E(a_2)| \geqslant 2$;

(2) $|E(a_1)| = |E(a_2)| = 0$;

(3) $|E(a_1)| \geqslant 2$ и $|E(a_2)| = 1$;

(4) $|E(a_1)| \geqslant 2$ и $|E(a_2)| = 0$;

(5) $|E(a_1)| = |E(a_2)| = 1$;

(6) $|E(a_1)|=1$ и $|E(a_2)|=0$

В каждом из перечисленных случаев показывается, что искомый алгоритм существует. Например, в случаях (I),(2),(3) это следует из того, что в случае (I) полугруппа $K(N, M)$ является группой, в случае (2) множество N является единственной неприводимой системой образующих, а в случае (3) полугруппа $K(N, M)$ или конечна, или является группой. В остальных случаях требуются некоторые дополнительные вычисления.

Литература

I. В.А.Емеличев, Уч.зап. Шуйского гос. пед. ин-та, 1958, VI, 227-241.

ОБОБЩЕННЫЕ ГРУДОИДЫ И ГРУДОИДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Вагнер В.В. (Саратов)

Обобщенным группоидом называется частичный бинарный оператив, нулевое расширение которого является обобщенной группой. Если частичная бинарная операция обобщенного группоида не определена ни для одной пары различных идемпотентных элементов, то он называется группоидом. Это определение эквивалентно обычному определению группоида.

Если множество Γ взаимно однозначных частичных преобразований некоторого множества A, рассматриваемое вместе с частичной бинарной операцией, индуцируемой в нем операцией умножения бинарных отношений, является обобщенным группоидом, то оно называется обобщенным группоидом взаимно однозначных частичных преобразований множества A.

Легко видеть, что, если обобщенный группоид Γ взаимно однозначных частичных преобразований множества A является частичным разбиением декартова квадрата $A \times A$, то множество проекций принадлежащих ему частичных преобразований будет частичным разбиением множества A, откуда следует, что Γ будет группоидом. Если такой группоид удовлетворяет дополнительному условию эффективности (множество частичных преобразований некоторого множества A называется эффективным, если множество первых и вторых проекций принадлежащих ему частичных преобразований является покрытием A), то он называется грудоидальным группоидом взаимно однозначных частичных преобразований.

Будучи частичным разбиением декартова квадрата $A\times A$, грудоидальный группоид Γ взаимно однозначных частичных преобразований множества A может быть определен заданием соответствующего частичного отношения эквивалентности $E_\Gamma \subset (A\times A)\times(A\times A)$.

Частичный тернарный оператив (A,o), где частичная тернарная операция o определяется формулой

$$o\langle a_1,a_2,a_3\rangle = \left(E_\Gamma\langle\langle a_2,a_3\rangle\rangle\right)\langle a_1\rangle, \qquad (1)$$

называется грудоидом, ассоциированным с грудоидальным группоидом Γ взаимно однозначных частичных преобразований множества A. Нетрудно убедиться, что отношение определенности δ грудоида (A,o) может быть выражено формулой

$$\delta = \underset{(a_1,a_2,a_3)}{C}(a_1,a_2)\in\Pi_\Gamma \wedge (a_2,a_3)\in\tau_\Gamma \qquad (2)$$

где Π_Γ и τ_Γ коммутирующие между собой отношения эквивалентности, первое из которых, Π_Γ, определяется разбиением множества A, являющимся множеством всех проекций частичных преобразований из Γ, а второе, τ_Γ, является отношением транзитивности Γ, т.е. $\tau_\Gamma = U\Gamma$.

Далее, из (I) непосредственно следует, что грудоидальный группоид Γ взаимно однозначных частичных преобразований совпадает с множеством всех непустых правых сдвигов в ассоциированном с ним грудоиде (A,o).

Понятие грудоида может быть также введено в рамках общей теории частичных тернарных оперативов. В этом случае грудоид определяется как частичный тернарный оператив (A,o), частичная тернарная операция которого удовлетворяет следую-

щим трем условиям:

I) косоассоциативности

$$[\{a_1\}\{a_2\}\{a_3\}]\{a_4\}\{a_5\}=[\{a_1\}[\{a_4\}\{a_3\}\{a_2\}]\{a_5\}]= \\ =[\{a_1\}\{a_2\}[\{a_3\}\{a_4\}\{a_5\}]]; \tag{3}$$

2) биунитарности

$$[\{a_1\}\{a_1\}\{a_2\}]\subset\{a_2\},\quad [\{a_1\}\{a_2\}\{a_2\}]\subset\{a_1\}; \tag{4}$$

3) рефлексивности отношения определенности

$$[\{a\}\{a\}\{a\}]\neq\varnothing. \tag{5}$$

Аналогично тому, как понятие группоида может быть введено на основе понятия обобщенной группы, так понятие грудоида может быть введено на основе понятия обобщенной груды. Назовем обобщенным грудоидом частичный тернарный оператив, нулевое расширение которого является обобщенной грудой.

Каноническое отношение порядка в обобщенной груде, являющейся нулевым расширением данного обобщенного грудоида, индуцирует в этом последнем отношение порядка, которое мы будем также называть каноническим. То обстоятельство, что обобщенный грудоид является грудоидом, эквивалентно, оказывается, тому, что его каноническое отношение порядка совпадает с тождественным бинарным отношением.

Как известно, отображение φ частичного n-оператива (A_1, O_1) в частичный n-оператив (A_2, O_2) называется сильным гомоморфизмом, если отображение $\overline{\varphi} = \varphi \cup \{(c_1, c_2)\}$ нулевых расширений этих частичных n-операторов, где c_1 и c_2 – нулевые элементы нулевых расширений, будет гомоморфизмом.

Произвольный частичный тернарный оператив (A, O) называется диаграммируемым, если существует его сильный гомоморфизм в некоторый декартов грудоид, т.е. в грудоид, базисным множеством которого является декартово произведение $B \times C$ некоторых множеств, а частичная тернарная операция определена только для троек вида $((b_1, c_1), (b_3, c_1), (b_3, c_3))$, где b_1, b_3, c_1 и c_3 - произвольные элементы, и дает в результате элемент (b_1, c_3) декартова произведения. В частности, можно показать, что всякий грудоид является диаграммируемым частичным тернарным оперативом. Отсюда следует, что частичные тернарные гомоморфизмы, для которых существует сильный гомоморфизм в грудоид, совпадают с диаграммируемыми частичными тернарными операторами.

Особый интерес представляют диаграммируемые обобщенные грудоиды. Оказывается, что диаграммируемость обобщенного грудоида (A, O) с каноническим отношением порядка ω эквивалентна тому, что отношение канонической мажорируемости $\vec{\omega} \circ \omega$ включается в отношение канонической минорируемости $\omega \circ \vec{\omega}$, т.е. $\vec{\omega} \circ \omega \subset \omega \circ \vec{\omega}$. Отсюда следует, что отношение канонической мажорируемости $\omega \circ \vec{\omega}$ будет наименьшим сильным отношением конгруэнтности, т.е. таким отношением конгруэнтности, для которого естественный гомоморфизм будет сильным, удовлетворяющим тому условию, что частичный фактор-оператив является грудоидом. Фактор-грудоид диаграммируемого обобщенного грудоида (A, O), соответствующий отношению канонической минорируемости $\omega \circ \vec{\omega}$, называется его наибольшим фактор-грудоидом.

Пусть K – обобщенная груда взаимно однозначных частичных отображений множества B в множество C. Рассмотрим частичное отношение принадлежности

$$E_K = \underset{((b,c),\varkappa)}{C}(b,c)\in\varkappa \wedge \varkappa\in K. \qquad (6)$$

Оно будет подмножеством частичного грудоида $(B\times C)\times K$, представляющего собой прямое произведение декартова грудоида $B\times C$ и обобщенной груды K, и будет определять его стабильный обобщенный подгрудоид, обладающий тем свойством, что проектирование E_K в $B\times C$ будет его сильным гомоморфизмом в декартов грудоид $B\times C$.

Отсюда следует, что E_K определяет диаграммируемый обобщенный подгрудоид обобщенного грудоида. Наибольший фактор-грудоид этого диаграммируемого обобщенного грудоида мы будем называть локализатором обобщенной груды K взаимно однозначных частичных отображений. Координатный атлас координированного пространства в дифференциальной геометрии обычно является обобщенной грудой взаимно однозначных частичных отображений его точечного множества в арифметическое пространство соответствующей размерности. Теория локальных координатных объектов в этом координированном пространстве сводится к рассмотрению функций, заданных на локализаторе координатного атласа. Очевидно, что локализатор координатного атласа будет изоморфен грудоиду локальных струй координатных систем в смысле Эресмана, для которых естественным образом можно определить частичную операцию тройного умножения.

Литература

I. В.В.Вагнер, Теория отношений и алгебра частичных отображений, Теория полугрупп и ее приложения, сб. статей, изд-во Саратовского гос. ун-та, 1965, 3-178.

2. В.В.Вагнер, К теории грудоидов, Изв.вузов, Матем., 1965, № 5 (48), 31-43.

3. В.В.Вагнер, Сдвиги в грудоиде, Изв.вузов, Матем., 1965, № 6 (49), 37-47.

УПОРЯДОЧЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Габович Е.Я. (Тарту)

Развитие теории (линейно) упорядоченных полугрупп протекало до последнего времени в основном в двух направлениях. Первое из них концентрировало свое внимание на упорядоченных полугруппах, близких по строению к подполугруппам упорядоченной аддитивной группы действительных чисел, в основном на архимедово упорядоченных полугруппах, второе же рассматривало так называемые естественно упорядоченные полугруппы, т.е. полугруппы, в которых отношением порядка служит отношение делимости. Основные результаты, относящиеся сюда, приведены в монографии Л.Фукса [I].

Первое из указанных направлений было в определенной мере инспирировано известной теоремой Гёльдера об архимедовски упорядоченных группах и исследованиями по архимедовски упорядоченным кольцам и в основном уже исчерпало себя. Из относящихся к этому направлению результатов последнего времени отметим полученное Олдхихом Ковальски [2] обобщение теоремы Я.В.Хиона (см. [I], стр. 243), в которой утверждалось, что для положительно упорядоченной и архимедовой полугруппы с сокращением существует нетривиальный о-гомоморфизм в аддитивную полугруппу всех неотрицательных действительных чисел, при котором образы двух различных элементов a и b совпадают в том и только том случае, когда a и b образуют аномальную пару. О.Ковальски [2] показал, что в формулировке

этой теоремы требование о сократимости можно заменить требованием отсутствия в полугруппе максимального элемента.

Второе из названных направлений, а также целый ряд появившихся в последнее время работ носят уже специфически полугрупповой характер.

Для того, чтобы подчеркнуть существенную разницу в проблематике и различную степень трудности при решении аналогичных по формулировке проблем в теориях упорядоченных полугрупп и упорядоченных групп, приведем следующие два примера.

Известно, что в теории упорядоченных групп долгое время оставалась нерешенной проблема о существовании частичных порядков на линейно упорядочиваемой группе, не продолжаемых до линейного порядка. В теории полугрупп, как мы сейчас покажем, аналогичная проблема легко разрешима.

Именно, рассмотрим полугруппу P, состоящую из элементов a, b, c, d и 0 и такую, что $a^2 = ab = ba = c$, $b^2 = d$, а все остальные произведения равны элементу 0. Полугруппа P линейно упорядочиваема следующими неравенствами

$$a < b < c < d < 0,$$

однако частичный порядок

$$c < 0 < d$$

не продолжаем до линейного. Действительно, если бы линейный порядок, продолжающий этот частичный порядок, существовал, то он расположил бы элементы a, b и 0 следующим образом

$$a < 0 < b,$$

однако отсюда

$$a^2 = c \leqslant 0 \leqslant ab = c \quad \text{или} \quad c = 0,$$

что противоречит предположению о том, что a, b, c, d и 0 - различные элементы полугруппы P.

Пример бесконечной полугруппы с тем же свойством строится аналогично. Именно, в этом случае полугруппа коммутативна и порождена элементами a и b, где $a^3 = a^4 = 0$, а моногенная полугруппа $\{b\}$ бесконечна, причем $ab = a^2$, а все остальные произведения $a^k b^p$, где k и p больше единицы, равны элементу 0. В этой полугруппе порядок

$$a < b < a^2 < b^2 < b^3 < \ldots < b^4 < \ldots < 0$$

линеен, однако частичный порядок

$$a^2 < 0 < b^2$$

нельзя продолжить до линейного.

Примером обратного свойства может служить проблема описания всех конечных или всех периодических упорядоченных полугрупп. Хотя степень сложности этой проблемы трудно в точности оценить, она явно не тривиальна, в то время как для групп аналогичная проблема бессодержательна, так как неединичных периодических упорядоченных групп не существует.

Из появившихся в последние годы работ, посвященных упорядоченным полугруппам, наибольшее внимание привлекает цикл статей Т.Сэто [3] - [6], обозрению которого и посвящен настоящий доклад. В статьях названного цикла описано строение произвольных упорядоченных полугрупп идемпотентов, упорядоченных вполне простых и вполне регулярных полугрупп, а также некоторых классов упорядоченных инверсных полугрупп. Рассмотрим подробнее полученные в этих статьях результаты.

В работе [3] Т.Сэто исходит из того, что любая идемпотентная полугруппа является коммутативной связкой полугрупп, каждая из которых есть матричная связка единичных групп, и выясняет строение этой связки при предположении об упорядоченности полугруппы. При этом сразу выясняется, что все компоненты $\mathcal{D}(\alpha)$ являются полугруппами с правым или левым умножением. В дальнейшем будем обозначать через $\mathcal{D}1(\alpha)$ компоненту, являющуюся полугруппой с правым умножением, и через $\mathcal{D}0(\alpha)$ - полугруппой с левым умножением.

Оказывается, что полуструктура, ассоциированная с коммутативной идемпотентной полугруппой, которую образуют все компоненты $\mathcal{D}(\alpha)$, является деревом (по терминологии Т.Сэто), т.е. в ней из несравнимости элементов a и b следует несравнимость любых таких элементов c и e, что $a \leqslant c$ и $b \leqslant e$. Кроме того, умножение элементов из различных компонент полностью определяется упорядоченностью элементов полугруппы. Именно, для $a \leqslant b$ из $ab \in \mathcal{D}0(\alpha)$ следует, что

$$\begin{aligned} ab &= \min\{y \mid y \in \mathcal{D}0(\alpha),\ y \geqslant a\}, \\ ba &= \max\{y \mid y \in \mathcal{D}0(\alpha),\ y \leqslant b\}, \end{aligned} \tag{1}$$

а из $ab \in \mathcal{D}1(\alpha)$ следует, что

$$\begin{aligned} ab &= \max\{y \mid y \in \mathcal{D}1(\alpha),\ y \leqslant b\}, \\ ba &= \max\{y \mid y \in \mathcal{D}1(\alpha),\ y \geqslant a\} \end{aligned} \tag{2}$$

Как показывает далее Т.Сэто, следующая конструкция приводит всегда к упорядоченным идемпотентным полугруппам.

Пусть дано дерево T, функция $f : T \longrightarrow \{0,1\}$ и для каждого элемента $\alpha \in T$ задан упорядоченный набор $G_\alpha =$

$=\{G_\mu(\alpha) \mid \mu \in J(\alpha)\}$ не пересекающихся упорядоченных множеств, причем

I) множество $G_\beta(\alpha)$ непусто за исключением, быть может, тех случаев, когда оно есть наименьший или наибольший элемент упорядоченного множества G_α;

2) задано взаимно однозначное соответствие

$$(L_\beta(\alpha), M_\beta(\alpha)) \longleftrightarrow V(\beta)$$

между парами следующих друг за другом элементов $L_\beta(\alpha)$ и $M_\beta(\alpha)$ упорядоченного множества G_α и называемыми ветвями элемента β подмножествами $V(\beta)$ дерева T, состоящими из всех элементов, больших какого-либо из непосредственно следующих за α элементов дерева (β - элемент ветви, $L_\beta(\alpha) < M_\beta(\alpha)$ в G_α);

3) если $G_\mu(\alpha)$ непусто и в G_α найдется непосредственно следующий за ним (предшествующий ему) элемент, то в $G_\mu(\alpha)$ существует максимальный (минимальный) элемент.

Пусть, далее, множество $S = \bigcup_{\alpha,\mu} G_\mu(\alpha)$ упорядочено следующим образом: для $\alpha \in T$, $\beta \in T$, $a \in G_\mu(\alpha)$ и $b \in G_\nu(\beta)$ будем считать, что $a \leqslant b$, если

I°. $\alpha = \beta$, $G_\mu(\alpha) = G_\nu(\beta)$ и $a \leqslant b$ в $G_\beta(\alpha)$;

2. $\alpha = \beta$ и $G_\mu(\alpha) < G_\nu(\beta)$;

3°. $\alpha < \beta$ и $G_\mu(\alpha) \leqslant L_\beta(\alpha)$;

4°. $\alpha < \beta$ и $M_\beta(\alpha) \leqslant G_\nu(\beta)$;

5°. $\alpha < \beta$ и $M_{\alpha\cap\beta}(\alpha) \leqslant L_{\alpha\cap\beta}(\beta)$.

S превратится в упорядоченную полугруппу идемпотентов, если операцию умножения определить на S следующим образом: для $a \leqslant b$ из S ($a \in G_\mu(\alpha)$, $b \in G_\nu(\beta)$) произведения

ав и ва находятся по формулам (I), если $f(\alpha \cap \beta) = 0$, и по формулам (2), если $f(\alpha \cap \beta) = I$.

Более того, как показывает Т.Сэто, любая упорядоченная идемпотентная полугруппа может быть получена таким образом.

Из этого основного с точки зрения теории упорядоченных идемпотентных полугрупп результата Т.Сэто следует, в частности, сразу, что строго монотонно упорядоченные полугруппы идемпотентов состоят из одного единственного элемента, а в коммутативном случае каждое из множеств $\bigcup_{\mu} G_{\mu}(\alpha)$ состоит из одного элемента, так что в дереве Т ни из одного элемента α не выходит более двух ветвей.

Отметим, что в любой упорядоченной полугруппе множество всех ее идемпотентов образует подполугруппу.

Получение исчерпывающего описания упорядоченных полугрупп идемпотентов дало возможность приступить к выяснению строения других, более широких классов полугрупп. Первые и, пожалуй, пока единственные успехи в этом направлении были достигнуты опять-таки самим Т.Сэто в работах [4] - [6].

Так в работе [5] им было показано, что любая упорядоченная вполне простая полугруппа без нуля о-изоморфна лексикографически упорядоченному прямому произведению упорядоченной группы и состоящей из всех идемпотентов полугруппы упорядоченной полугруппы с левым или правым умножением. Наоборот, упорядоченная полугруппа, изоморфная лексикографически упорядоченному прямому произведению упорядоченной группы и упорядоченной полугруппы с левым или правым умножением, является упорядоченной вполне простой полугруппой без нуля.

В этой же работе Т.Сэто рассматривались упорядоченные вполне регулярные полугруппы. Как известно, любая вполне регулярная полугруппа S является коммутативной связкой вполне простых полугрупп без нуля. Оказывается, что в случае, когда S упорядочена, полуструктура $T=\{\alpha\}$, ассоциированная с S, является деревом и совпадает с полуструктурой, ассоциированной с подполугруппой E, состоящей из всех идемпотентов полугруппы S.

Воспользуемся тем, что строение каждой компоненты упомянутой связки в упорядоченном случае только что описано, и для компоненты $S(\alpha)$, соответствующей элементу α дерева T, обозначим через $G(\alpha)$ ее групповую, а через $E(\alpha)$ - идемпотентную часть. Для любой пары $\alpha \geqslant \beta$ элементов дерева T отображение $\varphi_\beta^\alpha: G(\alpha) \to G(\beta)$, определенное следующим образом: для $a \in G(\alpha)$ $a\varphi_\beta^\alpha = ae_\beta$, где e_β - единица группы $G(\beta)$, удовлетворяет условиям:

I) каждое φ_α^α является тождественным отображением на $G(\alpha)$;

2) если $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, то $\varphi_\beta^\alpha \varphi_\gamma^\beta = \varphi_\gamma^\alpha$;

3) каждое φ_β^α является о-гомоморфизмом упорядоченной группы $G(\alpha)$ в $G(\beta)$.

Если обозначать элементы из $S(\alpha)$ в виде пар (g,f), где $g \in G(\alpha)$, а $f \in E(\alpha)$, то умножение и порядок в S можно задать следующим образом:

если $(g,f) \in S(\alpha)$, $(h,e) \in S(\beta)$, то

$$(g,f)(h,e) = ((g\varphi_{\alpha\wedge\beta}^{\alpha})(h\varphi_{\alpha\wedge\beta}^{\beta}), fe); \quad (3)$$

тогда и только тогда имеет место

$(g,f) < (h,e)$, когда или $g\varphi^{\alpha}_{\alpha\wedge\beta} < h\varphi^{\beta}_{\alpha\wedge\beta}$, или же $g\varphi^{\alpha}_{\alpha\wedge\beta} = h\varphi^{\beta}_{\alpha\wedge\beta}$, но $f < e$. (4)

Пусть, наоборот, дана произвольная упорядоченная полугруппа идемпотентов E и пусть каждому α из ассоциированного с E дерева T сопоставлена группа $G(\alpha)$. Компоненту полугруппы E, соответствующую α, обозначим через $E(\alpha)$. Если каждой паре $\alpha \geqslant \beta$ элементов дерева T сопоставлено отображение $\varphi^{\alpha}_{\beta}: G(\alpha) \to G(\beta)$, удовлетворяющее условиям I)-3), то множество $S = \bigcup_{\alpha \in T} S(\alpha)$, где $S(\alpha)$ является множеством всех таких пар (g,f), что $g \in G(\alpha)$, а $f \in E(\alpha)$, превратится в упорядоченную вполне регулярную полугруппу, как только умножение и упорядоченность будут введены в соответствии с правилами (3) и (4).

В работе [6] Т.Сэто описал строение одного класса упорядоченных инверсных полугрупп, названного им классом правильных инверсных полугрупп.

Как известно, во всякой инверсной полугруппе S фактор-полугруппа $\Gamma = S/\sigma$ по следующей конгруэнции σ:

$x \equiv y\ (\sigma)$, если найдется такой идемпотент $e \in E$ (E - коммутативная подполугруппа всех идемпотентов из S), что $ex = ey$,

является группой. Если S упорядочена, то все σ-классы будут выпуклыми и Γ превратится в упорядоченную группу.

Единица J группы Γ содержит множество E, но, в общем случае, не совпадает с ним. Например, если S содержит нулевой элемент, то $J = S$. Если же $J = E$, то S называется правильной инверсной полугруппой.

Назовем **E-компонентой** элемента $a \in S$ идемпотент $aa^{-1} = e(a)$. Каждому $e \in E$ поставим в соответствие подмножество $\Gamma(e)$ группы Г, определенное таким образом: $\alpha \in \Gamma(e)$ в том и только том случае, когда в S существует такой элемент g, принадлежащий множеству α, что $gg^{-1} = e$. Назовем Г-компонентой элемента $a \in S$ элемент $\bar{a}$ группы Г, содержащий a. Всегда $\bar{a} \in \Gamma(e(a))$. Отображение $\varphi: a \longrightarrow (\bar{a}, e(a))$ является взаимно однозначным соответствием между S и множеством таких пар (α, e), что $e \in E$ и $\alpha \in \Gamma(e)$. Поэтому можно отождествить a с парой $(\bar{a}, e(a))$, при этом, в частности, для любого $e \in E$ $e = (1, e)$.

Если определить $e^{\alpha} = (\alpha, e)^{-1}(\alpha, e)$ (очевидно, что $e^{\alpha} \in E$), то в произвольной упорядоченной правильной инверсной полугруппе будут выполнены условия

1. $\bigcup_{e \in E} \Gamma(e) = \Gamma$;
2. $1 \in \Gamma(e)$ и $e^{1} = e$;
3. если $f \leq e$ в полуструктуре E, то $\alpha \in F(f)$ и $f^{\alpha} \leq e^{\alpha}$;
4. если $\alpha \in \Gamma(e)$ и $\beta \in \Gamma(e^{\alpha})$, то $\alpha\beta \in \Gamma(e)$ и $e^{\alpha\beta} = (e^{\alpha})^{\beta}$;
5. если $\alpha \in \Gamma(e)$, то $\alpha^{-1} \in \Gamma(e^{\alpha})$;
6. если $\alpha \in \Gamma(e) \cap \Gamma(f)$ и $e \leq f$, то $e^{\alpha} \leq f^{\alpha}$,

а операция умножения и упорядоченность определены следующим образом:

$$(\alpha, e)(\beta, f) = (\alpha\beta, (e^{\alpha} f)^{\alpha^{-1}}); \tag{5}$$

$(\alpha, e) \leq (\beta, f)$ **тогда и только тогда, когда** $\alpha < \beta$ **или** $\alpha = \beta$, $e \leq f$. (6)

Наоборот, если дана упорядоченная коммутативная полугруппа идемпотентов E и упорядоченная группа Γ, причем каждому $e \in E$ таким образом поставлено в соответствие подмножество $\Gamma(e)$ группы Γ и для каждой пары (e, α), где $e \in E$, а $\alpha \in \Gamma(e)$, определен такой элемент $e^{\alpha} \in E$, что $\Gamma(e)$ и e^{α} удовлетворяют условиям I-6, то множество всех пар (α, e) превратится в упорядоченную правильную инверсную полугруппу, если определить в этом множестве умножение и порядок по формулам (5) и (6).

Более детально строение полугрупп рассматриваемого класса изучено далее в частном случае, когда S $\mathcal{D}$-проста, а группа Γ коммутативна. Доказано также, что если инверсная полугруппа упорядочена архимедово, то она правильна, а Γ коммутативна.

В работе [4] Т.Сэто описывает все порожденные парами взаимно регулярных элементов подполугруппы упорядоченной полугруппы S, которые автор справедливо называет аналогом циклических подгрупп в теории групп.

Приведем сперва все типы подполугрупп упорядоченной полугруппы, порожденных двумя взаимно регулярными элементами. Хотя число различных полугрупп такого рода довольно велико, многие из них сводятся к другим типам при помощи несложных преобразований. Затем будет дана классификация этих полугрупп при помощи системы инвариантов.

K1. Эта группа состоит из элементов

$$s < q < e < t < v < f < p < u,$$

умножаемых следующим образом

	s	q	e	t	v	f	p	u
s	s	s	s	s	s	s	s	s
q	s	s	s	s	s	q	e	t
e	s	q	e	t	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t	t	t	t
v	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	v	v	v	v	f	p	u
p	v	f	p	u	u	u	u	u
u	u	u	u	u	u	u	u	u

K2. Получается из K1 после идентификации элементов t и v.

M1. Мультипликативно дуальна K1, т.е. ее таблица умножения получается из таблицы умножения K1 при отражении последней относительно главной диагонали.

M2. Мультипликативно дуальна полугруппе K2.

C. Аддитивная группа целых чисел относительно обычного порядка.

K3. Лексикографически упорядоченное прямое произведение полугруппы C и полугруппы $\{a, b\}$ с левым умножением и порядком $a < b$.

K4. Состоит из элементов $e_2 < e_1 < t < v < f_1 < f_2$ умножаемых следующим образом:

	e_2	e_I	t	v	f_1	f_2
e_2	e_2	e_2	e_2	e_2	e_2	e_2
e_I	e_2	e_I	t	t	t	t
t	t	t	t	t	t	t
v	v	v	v	v	v	v
f_1	v	v	v	v	f_1	f_2
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2	f_2	f_2

К5. Подполугруппа лексикографически упорядоченного произведения полугрупп C и К4 с умножением

$$(i,g)(j,h) = \begin{cases} (i+j,\ gf_2), & \text{если } i \leqslant -2 \\ (i+j,\ g\psi(h)), & \text{если } i = -I \\ (i+j,\ gh), & \text{если } i = 0 \\ (i+j,\ g\varphi(h)), & \text{если } i = I \\ (i+j,\ ge_2), & \text{если } i \geqslant 2, \end{cases}$$

где $i,j \in C$; $g,h \in$ К4;

$\varphi(g) = e_2$, если $g \leqslant v$; $\varphi(f_1) = e_1$; $\varphi(f_2) = t$;

$\psi(e_2) = v$; $\psi(e_1) = f_1$; $\psi(g) = f_2$, если $g \geqslant t$,

состоящая из всех пар (i,g), для которых $i \leqslant -2$, $g \neq e_1, f_1$, или $i = -I$, $g \neq e$, или $i = 0$, g – произвольное, или $i = I$, $g \neq f_1$, или $i \geqslant 2$, $g = e_i, f_1$.

К6. Получается из К4, если считать, что $(i,t) = (i,v)$ для всех $i \in C$.

К7. Получается из К5 аналогичным образом.

М3–М7. Эти полугруппы мультипликативно дуальны, соответственно, полугруппам К3–К7.

01-04. Каждая из этих полугрупп состоит из всех пар (m, n) неотрицательных целых чисел, умножаемых по правилу

$$(k,l)(m,n) = \begin{cases} (k+m-e, n), & \text{если } l \leqslant m \\ (k, n+l-m), & \text{если } m \leqslant l \end{cases}$$

При этом полугруппы упорядочиваются, соответственно, следующим образом.

01. $(k,l) < (m,n)$, если $k+n < m+l$ или $k+n = m+l, k < m$.

02. $(k,l) < (m,n)$, если $k+n > m+l$ или $k+n = m+l, k < m$.

03. $(k,l) < (m,n)$, если $k+n < m+l$ или $k+n = m+l, k > m$

04. $(k,l) < (m,n)$, если $k+n > m+l$ или $k+n = m+l, k > m$

К8. Подполугруппа лексикографически упорядоченного произведения полугруппы C на полугруппу X, состоящую из элементов $e_2 < e_1 < t < v < f_1 < f_2 < f_3 < \ldots$, умножаемых в соответствии со следующей таблицей

	e_2	e_1	t	v	f_1	f_2	f_3	...
e_2	e_2	e_2	t	t	t	f_2	f_3	...
e_1	e_2	e_1	t	t	t	f_2	f_3	...
t	t	t	t	t	t	f_2	f_3	...
v	v	v	v	v	v	f_2	f_3	...
f_1	v	v	v	v	f_1	f_2	f_3	...
f_2	f_2	f_2	f_2	f_2	f_2	f_2	f_3	...
f_3	f_3	f_3	f_3	f_3	f_3	f_3	f_3	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

с умножением, заданным правилами

$$(i,g)(j,h)=\begin{cases}(i+j,\ g\varphi^{-i}(h)), & \text{если } i<0\\ (i+j,\ gh), & \text{если } i=0\\ (i+j;\ g\psi^{i}(h)), & \text{если } i>0,\end{cases} \qquad (7)$$

где $i,j\in c$; $g,h\in X$; а φ и ψ определены для первых шести элементов также, как и в случае полугруппы К4, а для $f_3, f_4, \ldots$

$$\varphi(f_k)=f_{k-1} \text{ и } \psi(f_k)=f_{k+1} \quad (k=3,4,\ldots),$$

состоящая из всех пар (i,g), указанных в таблице I.

Таблица I

	К8	К9	К10	К11
$i\leq -2$	$g\neq e_1,f_1$	$g\geqslant f_i$	$g\neq e_1,f_1$	$g\leq e_i$
$i=-1$	$g\neq f_1$	$g\geqslant t$	$g\neq e_1$	$g\leq v$
$i=0$	g - произвольно			
$i=1$	$g\geqslant t$	$g\neq f_1$	$g\leq v$	$g\neq e_1$
$i\geqslant 2$	$g\geqslant f_i$	$g\neq e_1,f_1$	$g\leq e_i$	$g\neq e_1,f_1$

К9. Строится аналогично из пар, указанных в таблице I, для которых умножение нужно определить по формуле (7), поменяв в ней местами буквы φ и ψ.

К10. Строится аналогично полугруппе К8. Состоит из элементов $\ldots e_3<e_2<e_1<t<v<f_1<f_2$, а ее таблица умножения получается из старой таблицы заменой e_2, $e_1, t, v, f_1, f_2, f_3, \ldots$, соответственно, на $f_2, f_1, v, t, e_1, e_2, e_3, \ldots$. Определяются функции χ и ω:

$\chi(g)=f_2$, если $g \geq t$, $\chi(e_1)=f_1$, $\chi(e_2)=v$, $\chi(e_k)=e_{k-1}$ $(k=3,4,\ldots)$

$\omega(f_2)=t$, $\omega(f_1)=e_1$, $\omega(v)=\omega(t)=\omega(e_1)=e_2$, $\omega(e_k)=e_{k+1}$ $(k=2,3,\ldots)$

В К10 входят все указанные в таблице I пары (i,g), причем умножение определено по правилам (7), в которых буква φ заменена буквой χ, а буква ψ - буквой ω.

К11. Получается из К10. Для этого нужно взять все указанные в таблице I пары, а в правиле умножения (7) заменить ψ на χ и φ на ω.

К12 - К15. Эти полугруппы получаются соответственно из полугрупп К8 - К11, если в последних считать, что

К12. $(-I,e_2)=(-I,e_1)$, $(0,e_2)=(0,e_1)$, $(0,v)=(0,f_1)$, $(I,v)=(I,f_1)$,

К13. $(-I,v)=(-I,f_1)$, $(0,e_2)=(0,e_1)$, $(0,v)=(0,f_1)$, $(I,e_2)=(I,e_1)$,

К14. $(-I,f_1)=(-I,f_2)$, $(0,e_1)=(0,t)$, $(0,f_1)=(0,f_2)$, $(I,e_1)=(I,t)$,

К15. $(-I,e_1)=(-I,t)$, $(0,e_1)=(0,t)$, $(0,f_1)=(0,f_2)$, $(I,f_1)=(I,f_2)$.

Р1 - Р4. Эти полугруппы получаются, соответственно, из полугрупп К 8 - К 11, если считать, что

Р1 $(i,t)=(i,v)$ для всех $i \leq I$.

Р2. $(i,t)=(i,v)$ для всех $i \geqslant -I$.

Р3. $(i,t)=(i,v)$ для всех $i \leqslant I$.

Р4. $(i,t)=(i,v)$ для всех $i \geqslant -I$.

М8 - М15. Эти полугруппы мультипликативно дуальны,

соответственно, полугруппам К8–КI5.

Далее будет все время предполагаться, что (p, q) – регулярная пара, причем $q \leq p$. Т.Сэто показал, что порядок такой пары (т.е. порядок элементов p и q; эти числа равны между собой) может быть или бесконечным или равняться одному из чисел I и 2.

Если порядок пары (p, q) равен двум, то подполугруппа B упорядоченной полугруппы, порожденная парой (p, q), изоморфна одной из полугрупп KI, K2, MI, M2. Если же порядок пары (p, q) бесконечен, то B изоморфна одной из полугрупп C, К2–КI5, М2–МI5, OI–O4, PI–P4.

Рассмотрим следующие высказывания

AI:	$qp \leq pq$	A5:	$t = v$
A2:	$qp^2q = pq^2p$	A6:	$f_1 \leq f_2 e_1$
A3:	$e_1 = e_2$	A7:	$f_1 \leq e_1 f_2$
A4:	$f_1 = f_2$	A8:	$e_2 \equiv e_1 f(\mathcal{D})$,

где $e_n = \min\{q^n p^n, p^n q^n\}$; $f_n = \max\{q^n p^n, p^n q^n\}$; $(n = 1,2)$;
$t = \min\{e_1 f_1, f_1 e_1\}$; $v = \max\{e_1 f_1, f_1 e_1\}$,

а $\mathcal{D}$ есть произведение эквивалентностей R и L, определяемых следующим образом:

$q \equiv h(R)$, если $qh = h$ и $hq = q$,
$q \equiv h(L)$, если $qh = q$ и $hq = h$.

Будем также писать A = 0, если $\mathcal{D}$-класс, содержащий $(pq)(qp)$ состоит из одного L-класса и A = I, если он состоит из одного R-класса.

Какой именно полугруппе изоморфна B в каждом конкретном случае – это зависит от значения A и высказываний

A1–A8. Соответствующие данные приведены в таблице 2 для случая, когда порядок пары (p, q) равен двум, а в таблицах 3 и

Таблица 2

A	A1	A2	B
0	I	0	K1
0	I	I	K2
I	0	I	M1
I	0	0	M2

Порядок (p, q) равен 2.

Таблица 3

A	A1	A3	A5	B
		I	I	C
0		I	0	K3
0	I	0	0	K4
0	0	0	0	K5
0	I	0	I	K6
0	0	0	I	K7
I		I	0	M3
I	I	0	0	M4
I	0	0	0	M5
I	I	0	I	M6
I	0	0	I	M7

Порядок (p, q) бесконечен; A8 = I.

Таблица 4

A	AI	A3	A4	A5	A6	A7	B
	I	I		I			OI
	0	I		I			O2
	0		I	I			O3
	I		I	I			O4
0	I	0		0	I		K8
0	0	0		0	I		K9
0	0		0	0	0		KI0
0	I		0	0	0		KII
0	I	I		0	I		KI2
0	0	I		0	I		KI3
0	0		I	0	0		KI4
0	I		I	0	0		KI5
	I	0		I	I		PI
	0	0		I		I	P2
	0		0	I	0		P3
	I		0	I		0	P4
I	0	0		0		I	M8
I	I	0		0		I	M9
I	I		0	0		0	MI0
I	0		0	0		0	MII
I	0	I		0		I	MI2
I	I	I		0		I	MI3
I	I		I	0		0	MI4
I	0		I	0		0	MI5

Порядок пары (p, q) бесконечен, A8 = 0.

4 для случая пары бесконечного порядка, причем в таблице 3 рассмотрены случаи, когда A8 = I, а в таблице 4 все остальные случаи.

Пусть теперь (p, q) - неидемпотентная регулярная пара. В рассматриваемой работе доказано также, что тогда в коммутативном случае $B \cong C$, а в случае, когда рассматриваемая упорядоченная полугруппа является инверсной, B изоморфна или C, или одной из полугрупп OI-04.

Литература

I. Л.Фукс, Упорядоченные алгебраические системы, М., 1965.

2. O. Kovalski. On archimedean positively fully ordered semigroups, Ann. Univ. scient. budapest. Ser. math., 1965,8, 97-99.

3. T. Saito. Ordered idempotent semigroups, J.Math. Soc. Japan, 1962, 4, 150-169.

4. T. Saito. Regular elements in an ordered semigruup, Pacific J. Math., 1963, 13,263-295.

5. T. Saito. Ordered completely regular semigroups, Pacific J. Math., 1964,14,295-308.

6. T. Saito. Proper ordered inverse semigruops, Pacific J.Math, 1965, 15,649-666.

АЛГЕБРЫ МНОГОМЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Глускин Л.М. (Харьков)

Множество S с одной $(n+1)$-арной операцией

$$s_0 s_1 s_2 \dots s_n = s \qquad (s_i, s \in S)$$

называется оперативом. Оператив S называется оперативом Менгера, если в нем выполняется тождество

$$(s_0 s_1 \dots s_n)\, s_{n+1} \dots s_{2n} =$$

$$= s_0 (s_1 s_{n+1} \dots s_{2n})(s_2 s_{n+1} \dots s_{2n}) \dots (s_n s_{n+1} \dots s_{2n}).$$

Известно (см.,например, [1], [3]), что оперативом Менгера является множество $S_n(\Omega)$ всех n-местных функций, всюду определенных на каком-либо множестве Ω, со значениями в этом множестве. Существует и ряд других весьма естественных оперативов Менгера, которые до сих пор в литературе не рассматривались.

Пусть Ω - произвольное множество; k-местным отношением между элементами множества Ω называется любое подмножество a декартовой степени Ω^k. Элементы из Ω^n будем обозначать через

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n), \quad \text{где } \xi_i \in \Omega$$

Обозначим через $P = P_n(\Omega)$ множество всех $(n+1)$-местных отношений между элементами множества Ω. Вместо

$$(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) \in a$$

будем писать иногда $(\xi_0, \bar{\xi}) \in a$, считая a бинарным отношением между элементами множеств Ω и Ω^n.

Обозначим через $pr_S a$ ($pr_V a$) множество всех элементов $\xi_0 \in \Omega$ (соответственно $\bar{\xi} \in \Omega^n$), для которых существует такой элемент $\bar{\xi} \in \Omega^n$ ($\xi_0 \in \Omega$), что $(\xi_0, \bar{\xi}) \in a$.

Для любых $a_i \in P_n(\Omega)$ будем писать $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, считая, что при всяких $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Omega^n$, $\bar{\eta} \in \Omega^n$

$$(\bar{\xi}, \bar{\eta}) \in \bar{a} \leftrightarrow \forall_i (\bar{\xi}_i, \bar{\eta}) \in a_i$$

При этом предполагается, что $P_n(\Omega)$ содержит отношение 0 такое, что $pr_S 0 = \phi$, $pr_V 0 = \phi$.

Обозначим через $W_n(\Omega)$ подмножество множества $P_n(\Omega)$, состоящее из всех отношений a, удовлетворяющих условию

$$\forall_{\eta, \zeta \in \Omega, \bar{\xi} \in \Omega^n} \{(\eta, \bar{\xi}) \in a \wedge (\zeta, \bar{\xi}) \in a \rightarrow \eta = \zeta\}$$

Введем в $W = W_n(\Omega)$ $(n+1)$-арную операцию: для любых $\xi \in \Omega$, $\bar{\eta} \in \Omega^n$, $a \in P$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in P^n$.

$$(\xi, \bar{\eta}) \in a\bar{b} \leftrightarrow \exists_{\bar{\zeta} \in P^n} (\xi, \bar{\zeta}) \in \bar{a} \wedge (\bar{\zeta}, \bar{\eta}) \in \bar{b}$$

Нетрудно проверить, что относительно этой операции $W_n(\Omega)$ является менгеровским оперативом: если обозначить

$$\bar{b}\bar{c} = (b_1\bar{c}, b_2\bar{c}, \ldots, b_n\bar{c}),$$

то для любых $a, b_i, c_j \in W_n(\Omega)$ $\quad (a\bar{b})\bar{c} = a(\bar{b}\bar{c})$.

Каждому отличному от 0 отношению $a \in W_n(\Omega)$ взаимно однозначно соответствует некоторая n-местная функция f_a с областью определения $pr_V a \subseteq \Omega^n$ и областью значений $pr_S a \subseteq \Omega$: при любых $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Omega^n$, $\eta \in \Omega$

$$f_a(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \eta \longleftrightarrow (\eta, \bar{\xi}) \in a$$

Через $S_n(\Omega)$ обозначим совокупность таких $a \in W_n(\Omega)$, для которых $pr_V a = \Omega$. При $n = 1$ $P_n(\Omega)$ является множеством всех бинарных отношений между элементами множества Ω, $W_n(\Omega)$ – полугруппой всех его частичных преобразований, $S_n(\Omega)$ – полугруппой всех его полных преобразований.

Подоператив A оператива $W_n(\Omega)$, по аналогии с [4], назовем слабо транзитивным, если

$$\bigcup_{a \in A} pr_V a = \Omega^n, \quad \bigcup_{a \in A} pr_S a = \Omega.$$

Если A_i – подмножества оператива S, то через $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ обозначим множество всех произведений $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$, где $a_i \in A_i$. Если при этом некоторые из подмножеств A_i совпадают, то будем пользоваться показателем степени.

Непустое множество A оператива S называется его S-идеалом, если $AS^n \subseteq A$; L-идеалом, если $S^k A S^{n-k} \subseteq A$ при любом $k \geq 1$, и, наконец, V-идеалом, если $SA^n \subseteq A$.

Введем в классе $\mathfrak{S}_n$ всех операторов Менгера арности $n+1$ следующие бинарные отношения ρ_L, ρ_V и ρ_{SV}:

$(A, S) \in \rho_L$ тогда и только тогда, когда A является L-идеалом оператива S либо $A = A_1 \setminus A_2$, где A_1 и A_2 – L-идеалы оператива S;

$(A, S) \in \rho_V$, если A – V-идеал оператива S;

$(A, S) \in \varrho_{sv}$, если A является и V-идеалом, и S-идеалом оператива S.

Если $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\bar{\xi} \in pr_v a_i$, где $a_i \in W_n(\Omega)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, то будем писать $\bar{\xi} \in pr_v a$, а вместо $(\bar{\eta}, \bar{\xi}) \in \bar{a}$ будем писать $\bar{\eta} = \bar{a}\bar{\xi}$

Лемма. Пусть ϱ – любое из отношений ϱ_L, ϱ_V или ϱ_{sv}, A – слабо транзитивный подоператив оператива S, B – объединение всех таких подоперативов A' оператива $W_n(\Omega)$, что $(A, A') \in \varrho$.

Если B является подоперативом оператива $W_n(\Omega)$ и для любого элемента s произвольного оператива $S \in \mathfrak{S}_n$ такого, что $(A, S) \in \varrho$, выполняются при любых $\bar{a}, \bar{b} \in A^n$ условия

$$s\bar{a} \in A \longrightarrow pr_v(s\bar{a}) \subseteq pr_v \bar{a}$$

$$s\bar{a} \in A \longrightarrow \left\{\forall_{\xi_i \in \Omega^n} \bar{a}\bar{\xi}_1 = \bar{b}\bar{\xi}_2 \longrightarrow s\bar{b} \in A \wedge (s\bar{a})\bar{\xi}_1 = (s\bar{b})\bar{\xi}_2\right\},$$

то A является $\overset{v}{\varrho}$-плотным подоперативом оператива B (см. [5]).

Лемма справедлива и для ряда других отношений ϱ.

Обозначим через $S_n^*(\Omega)$ подмножество $S_n(\Omega)$, состоящее из всех функций $a_\alpha \in S_n(\Omega)$ таких, что $a_\alpha \bar{\eta} = \alpha$ для любого $\bar{\eta} \in \Omega^n$.

Из только что рассмотренной леммы вытекают следующие две теоремы.

Теорема I. $S_n^*(\Omega)$ является ϱ_V-плотным и ϱ_{sv}-плотным подоперативом оператива $S_n(\Omega)$.

Теорема 2. $S_n^*(\Omega)$ является $\mathcal{S}_L$-плотным подоперативом оператива $W_n(\Omega)$.

Эти теоремы, вследствие работы [5], дают абстрактные характеристики оперативов $S_n(\Omega)$ и $W_n(\Omega)$, поскольку абстрактная характеристика оператива $S_n^*(\Omega)$ очень проста: он изоморфен оперативу A той же мощности, что и Ω, с действием, определяемым следующим образом:

$$x_0 x_1 x_2 \ldots x_n = x_0 .$$

Отсюда, в силу [5], следует возможность однозначного продолжения произвольного автоморфизма оператива $S_n(\Omega)$ до автоморфизма оператива $W_n(\Omega)$.

Автоморфизмы оператива $S_n(\Omega)$ известны (см. [3]).

Всякий автоморфизм оператива $S_n(\Omega)$ является внутренним в следующем смысле: для всякого автоморфизма φ оператива $S_n(\Omega)$ существует (единственное) такое взаимно однозначное отображение f множества Ω на себя, что для любых $a \in S_n(\Omega)$, $\alpha_i \in \Omega$

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \varphi a \longleftrightarrow \exists_{\beta_i \in \Omega} \alpha_i = f(\beta_i) \wedge (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in a .$$

Отсюда следует.

Теорема 3. Всякий автоморфизм оператива $W_n(\Omega)$ является внутренним.

Отметим, что при $n = 1$ этот результат известен (см. [4]).

Литература

I. K.Menger, General algebra of analysis. Reports Math.coll., Notre Dame, 1946, 7, 46-60.

2. K. Menger, The algebra of functions. Past, present, future, Rend.Seminar Mat.Univ. Roma, 1961, 20, 409-430.

3. H.I.Whitlock. A composition algebra for multiplace functions. Math. Ann., 1964, 157, 167-178.

4. Л.М.Глускин, Идеалы полугрупп преобразований, Матем. сб., 1959, 47, 111-130.

5. Л.М.Глускин, О плотных вложениях, Матем.сб., 1963, 61, 175-206.

6. M.Crestey, Applications multiformes partielles. Collect.math, 1964, 16, 111-126.

НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИЙ КЛАССОВ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Гуревич Ю.Ш. (Свердловск)

Рассматриваются вопросы, близкие интересам автора и не вошедшие в обзор Ю.Л.Ершова, И.А.Лаврова, А.Д.Тайманова и М.А.Тайцлина (см. [I]).

§ I. Проблема разрешения для УИП.

Пусть Π - некоторая совокупность слов алфавита $\{\forall, \exists\}$, а σ - некоторая совокупность символов предикатов (сигнатура). Через $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ обозначим класс всех предваренных (пренексных) формул УИП с символом равенства, без свободных переменных, с приставками из Π и нелогическими константами из σ. Через $\Phi(\Pi,\sigma)$ обозначим соответствующий класс формул чистого УИП (т.е. УИП без символа равенства).

Класс формул Φ будем (в этом параграфе) называть разрешимым, если существуют алгоритмы распознавания выполнимости и конечной выполнимости формул из Φ. Класс формул будем называть классом сведения, если существует алгоритм, который произвольной формуле УИП с равенством α ставит в соответствие такую формулу β из нашего класса, что α и β одновременно выполнимы или невыполнимы и одновременно выполнимы или невыполнимы на конечных моделях.

Из известной теоремы Б.А.Трахтенброта о рекурсивной неотделимости тождественно-истинных и конечно-опровержимых формул УИП следует, что если Φ есть класс сведения, то

всякая совокупность формул, содержащая все конечно-выполнимые формулы из Φ и содержащаяся сама в совокупности всех выполнимых формул из Φ, будет нерекурсивной.

Теорема I. Класс $\Phi(\Pi,\sigma)$ либо разрешим, либо является классом сведения. То же относится и к классу $\Phi^*(\Pi,\sigma)$.

Теорема 2. Класс $\Phi(\Pi,\sigma)$ разрешим в тех и только тех случаях, когда класс $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ разрешим.

Теорема 3. Пусть

$$\Pi_1 = \{\exists^m \forall^n \mid m,n = 0,1,\ldots\},$$
$$\Pi_2 = \{\exists^m \forall^i \exists^n \mid i = 0,1,2;\ m,n = 0,1,\ldots\}$$

Класс $\Phi(\Pi,\sigma)$ разрешим в тех и только тех случаях, когда имеет место хотя бы одна из следующих трех возможностей:

I) сигнатура σ содержит лишь символы одноместных предикатов;

2) $\Pi \leqslant \Pi_1 \cup \Pi_2$;

3) множества σ и $\Pi \setminus (\Pi_1 \cup \Pi_2)$ конечны.

Замечание. В теореме 3 предполагается, что в σ нет нульместных предикатов (высказываний). Добавим теперь к σ сколько-нибудь нульместных предикатов. Если $\Phi(\Pi,\sigma)$ был классом сведения, то он им и останется; если класс $\Phi^*(\Pi,\sigma)$ был разрешим, то класс, который из него получится, тоже разрешим.

Далее рассматриваются нерешенные задачи.

§ 2. К теории групп

В этом параграфе слово "формула" обозначает формулу чистого узкого исчисления предикатов. Сигнатура групп состо-

ит из одного 3-местного предиката $U(x,y,z)$, который читается так: z есть произведение x и y. Высказывание $\exists_z (U(z,z,z) \,\&\, U(z,x,y))$ записывается сокращенно через $x = y$. P означает в дальнейшем 2-местный предикат.

Под теорией S подразумевается пара вида $\langle \sigma : A \rangle$, где σ – набор символов операций и предикатов (сигнатура), а A – набор σ-формул. $И(S)$ есть совокупность σ-формул, выводимых из A. Теории S и T называются равными, если $И(S) = И(T)$.

Пусть K – класс алгебраических систем сигнатуры σ. Через $И(K)$ (соответственно, $И_f(K)$) обозначим совокупность σ-формул, истинных на каждой (соответственно, на каждой конечной) системе из K. Теория класса K есть

$$Th(K) = \langle \sigma ;\ И(K) \rangle .$$

Пусть Π – набор слов алфавита $\{\forall, \exists\}$. Будем для краткости говорить, что K и $Th(K)$ удовлетворяют свойству (Π), если для всякого множества формул C из

$$(И(K) \cap \Phi(\Pi,\sigma)) \subseteq C \subseteq (И_f(K) \cap \Phi(\Pi,\sigma))$$

следует нерекурсивность C. Будем считать, что $\forall^m \exists^\infty$ есть сокращение для $\{\forall^m \exists^n \mid n = 0, 1, \ldots\}$.

Теорема 1. Теория 2-местного предиката $\langle P; \varnothing \rangle$ удовлетворяет свойству $(\forall^3 \exists^\infty)$.

Теорема 2. Теория рефлексивного симметричного предиката $\langle P; P_{xx}, P_{xy} > P_{yx} \rangle$ удовлетворяет свойству $(\forall^6 \exists^\infty)$.

Теорема 3. Пусть T_p – класс метабелевых p-групп (p – простое число) с тождеством $x^{p^2} = 1$ в случае $p \neq 2$ и $x^8 = 1$ в случае $p = 2$. Класс T_p удовлетворяет свой-

ству $(\forall^{12}\exists^{\infty})$.

Далее рассматриваются следствия из теоремы 3 и некоторые известные результаты, дается историческая справка и обзор нерешенных вопросов.

§ 3. Проблема равенства слов

Рассматриваются универсальная теория и проблема равенства слов.

Приводятся некоторые классы полугрупп и колец, для которых проблема равенства слов является неразрешимой.

Литература

I. Ю.Л.Ершов, И.А.Лавров, А.Д.Тайманов, М.А.Тайманов, Элементарные теории, УМН, 1965, т. 20, вып. 4, 37-108.

О ПОЛУГРУППЕ ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНЫХ ЧАСТИЧНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ ГРАФА

Калманович А.М. (Коммунарск)

Дается абстрактная характеристика полугруппы взаимно однозначных частичных эндоморфизмов графа.

Пусть полугруппа A обладает следующими свойствами:

I) A имеет нуль O_A;

2) множество $R(A)$ правых ненулевых минимальных идеалов полугруппы A непусто;

3) для всякого элемента $a \in A$ существует не более двух различных идеалов $R_1, R_2 \in R(A)$, удовлетворяющих условиям

$$aR_1 \neq O_A,\ aR_2 \neq O_A\ (R_1 = R_2 \leftrightarrow aR_1 = aR_2);$$

4) если $aR_1 = bR_1 \neq O_A,\ aR_2 = bR_2 \neq O_A$, то $a = b$ $(a, b \in A)$;

5) для всякого $a \in A$ существует левая единица и правая единица;

6) для каждых $R_1, R_2 \in R(A)$ найдется элемент $e \in A$ такой, что $eR_1 = R_1$, $eR_2 = R_2$, причем e -левая единица для некоторого $a \in A$ и правая единица для некоторого $b \in A$;

7) $R_1, R_2 \neq O_A$ для любых $R_1, R_2 \in R(A)$.

Пусть теперь V - полугруппа взаимно однозначных частичных эндоморфизмов некоторого графа без петель, ранг которых меньше трех.

Теорема. Для того, чтобы полугруппа A была изоморфна полугруппе V необходимо и достаточно, чтобы A удовлетворяла условиям I)-7).

Далее рассматривается некоторая конструкция, позволяющая восстанавливать граф по его полугруппе взаимно - однозначных частичных эндоморфизмов.

Результаты, аналогичные названным выше, получены для произвольных графов без изолированных точек.

О СВОЙСТВАХ, СОХРАНЯЮЩИХСЯ ПРИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЯХ

Когаловский С.Р. (Иваново)

В докладе делается обзор результатов, касающихся элементарных и близких к элементарным свойств моделей, сохраняющихся при тех или иных алгебраических конструкциях, а также результатов относительно свойств классов моделей, сохраняющихся при тех или иных операциях замыкания.

I. Остановимся на некоторых новых результатах.

Класс моделей K называется компактным, если для всякой системы Σ элементарных аксиом из выполнимости в K каждой конечной подсистемы системы Σ следует, что Σ выполнима в K. Хорошо известно значение теоремы Геделя-Мальцева, устанавливающей компактность всякого элементарно аксиоматизируемого класса моделей. Оно объясняется, в частности, тем, что нередко, исходя из одной лишь компактности класса моделей, можно установить существование в этом классе моделей, обладающих требуемыми свойствами. Понятен интерес к вопросу о том, для каких алгебраических конструкций оказывается, что замыкания классов моделей относительно этих конструкций компактны или сохраняют компактность.

Известно (см. [I]), что замыкание всякого класса моделей относительно ультрапроизведений компактно. Мультипликативное замыкание таким свойством не обладает. В этом можно убедиться на примере класса всех конечных линейно упорядоченных множеств, мультипликативное замыкание которого не

компактно. Является ли мультипликативное замыкание операцией, сохраняющей, по крайней мере, компактность? Точнее говоря, верно ли для всякого класса моделей K, что класс $P(K)$, являющийся мультипликативным замыканием класса K, компактен, если компактен K? Пусть, например, K состоит из одной двухэлементной булевой алгебры (и, значит, компактен). Будет ли компактным класс $P(K)$, состоящий из алгебр, изоморфных булевым алгебрам всех подмножеств всевозможных множеств?

Автором предлагается достаточно простое доказательство следующей теоремы: замыкания компактного класса моделей относительно всевозможных регулярных в смысле А.И.Мальцева (см. [2]) произведений фиксированного типа и всевозможных регулярных степеней произвольного фиксированного типа компактны.

Так как прямые произведения являются регулярными произведениями фиксированного типа, то мультипликативное замыкание сохраняет компактность. Таким образом, приведенная теорема усиливает основной результат недавно опубликованной работы Маккаи [3].

Пользуясь теоремой Левенгейма-Сколема и установленными в [2] свойствами правильных произведений, можно показать, например, что для всякого кардинального числа α, большего мощности сигнатуры класса K, класс, состоящий из правильных произведений (произвольного фиксированного типа) не более чем α сомножителей из K, компактен, если компактен класс K. Аналогичное справедливо для правильных степеней. Более того, из компактности K следует компактность класса, состо-

ящего из правильных степеней в точности счетных семейств моделей из К.

2^0. В этом пункте мы проиллюстрируем на простых примерах применение результатов об элементарных свойствах, сохраняющихся при определенных алгебраических конструкциях, к решению вопросов о разрешимости некоторых алгебраических теорий.

Множество В назовем рекурсивным в множестве А, если В есть пересечение А и некоторого рекурсивного множества.

Элементарной теорией класса моделей К будем называть, следуя А.Тарскому (см. [5]), множество Т(К) всех элементарных предложений, истинных в К, а его универсальной теорией - множество $\mathcal{U}(K)$ всех универсальных предложений из Т(К). Квазипримитивной теорией класса К будем называть множество $Q(K)$ всех условных тождеств из Т(К).

Термин "разрешимость" будет пониматься как синоним термина "рекурсивность".

Так как $Q(K)$ рекурсивно в $\mathcal{U}(K)$ для всякого класса К, то из разрешимости $\mathcal{U}(K)$ следует разрешимость $Q(K)$. (Если же класс К содержит одноэлементную алгебру и таков, что для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ из К будет $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \in K$, то справедливо и обратное: из разрешимости $Q(K)$ следует разрешимость $\mathcal{U}(K)$).

Если К - класс алгебр, определимый конечным множеством условных тождеств, то разрешимость в конечно определенных К -алгебрах проблемы тождества слов равносильна разрешимости квазипримитивной теории этого класса.

Через S (К) будем обозначать класс всех подмоделей моделей из К, а через S_ω(К) - класс всех конечных моделей из S (К).

Из того, что универсальные свойства сохраняются при переходе к подмоделям, следует, что универсальные теории классов К и S_ω(К) совпадают. Поэтому для всякого класса моделей L универсальные теории K и L совпадают, если (и только если) S_ω (К) = S_ω (L). В частности, если $L \subset K$ и всякая модель из К вложима в подходящую модель из L, то U(К) = U(L).

Отсюда и из разрешимости теории алгебраически замкнутых полей следует разрешимость универсальной теории полей, а значит, и совпадающей с ней универсальной теории конечных полей.

Так как U (К) рекурсивно в Т(К) для всякого класса К, то из неразрешимости U (К) вытекает неразрешимость Т(К).

Неразрешимость проблемы тождества в группах означает неразрешимость универсальной теории класса групп G. Отсюда следует неразрешимость теории всякого такого класса групп К, что S_ω(К) = S_ω (G), а значит и теории всякого класса групп L, включающего K.

Из того, что всякая группа вложима в симметрическую, следует неразрешимость теории симметрических групп (см.[4]).

Всякая симметрическая группа есть группа без центра. Следовательно, неразрешима и теория групп без центра (см. [5]).

Как известно, всякая группа вложима в простую. Следова-

тельно, теория простых групп неразрешима (см. [4]).

Всякая группа вложима в полную. Следовательно, теория полных групп неразрешима.

Из вложимости всякой группы в простую группу и полную группу следует вложимость ее в простую полную группу. Следовательно, теория простых полных групп неразрешима.

Так как всякая простая группа подпрямо неразложима, то теория подпрямо неразложимых групп неразрешима.

Всякая модель из $S_\omega(G)$ вложима в конечно определенную группу. Следовательно, теория конечно определенных групп неразрешима. Отсюда следует неразрешимость теории групп с двумя образующими (отсюда же следует неразрешимость теории полугрупп, вложимых в группы).

Список подобных примеров нетрудно продолжить. Очевидно следующее полезное

Замечание. Если конечно определенная группа с неразрешимой проблемой тождества изоморфно вложима в какую-нибудь группу из класса групп K, то универсальная теория класса K неразрешима.

Нетрудно видеть, как это замечание обобщается на произвольные классы алгебр.

В частности, из существования конечно определенной группы без кручения с неразрешимой проблемой тождества следует неразрешимость универсальной теории групп без кручения. Из существования разрешимой конечно определенной группы с неразрешимой проблемой тождества следовала бы неразрешимость универсальной теории разрешимых групп и т.п.

Пользуясь неразрешимостью проблемы тождества в полугруппах и повторяя рассуждения, приведенные выше, устанавливаем, в частности, неразрешимость теории всякого такого класса полугрупп K, что $S_\omega(K) = S_\omega(\mathfrak{D})$, где $\mathfrak{D}$ - класс всех полугрупп.

Например, неразрешимы теория симметрических полугрупп, теория простых полугрупп, теория конечно определенных полугрупп и теория полугрупп с двумя образующими.

Так как всякая полугруппа вложима в мультипликативную полугруппу некоторого ассоциативного кольца, то универсальная теория ассоциативных колец неразрешима.

Заметим вместе с тем, что так как всякая конечная частичная алгебра вложима в полную частичную алгебру, то из известной теоремы Маккинси (см. [6]) и из совпадения $\mathcal{U}(K)$ с $\mathcal{U}(S_\omega(K))$ для всякого класса K следует, что универсальная теория класса всех алгебр любой данной сингатуры разрешима. В частности, разрешима универсальная теория группоидов. Заметим, что отсюда и из неразрешимости универсальной теории полугрупп непосредственно следует, что конечно порожденная свободная полугруппа не является конечно определенным группоидом. Однако, она является рекурсивно определенным группоидом. Следовательно, известный результат Хигмана (см. [7]), дающий характеристику подгрупп конечно определенных групп, не обобщается на класс всех группоидов: существуют конечно порожденные рекурсивно определенные группоиды, не вложимые в конечно определенные.

Через $U(K)$ будем обозначать класс, состоящий из моде-

лей, имеющих локальные системы подмоделей, принадлежащих К, а через $\mathcal{U}$ Е(К) - множество всех предложений сколемского вида, истинных в К.

Как известно, для всякого класса К множества $\mathcal{U}$ Е(К) и $\mathcal{U}$ Е($\mathcal{U}$(К)) совпадают. Отсюда и из того, что всякое частично упорядоченное множество принадлежит $U(P_\omega)$, где P_ω - класс конечных частично упорядоченных множеств, следует совпадение $\mathcal{U}E(P_\omega)$ и $\mathcal{U}E$(Р), где Р - класс всех частично упорядоченных множеств. Отсюда и из упомянутой теоремы Маккинси следует разрешимость $\mathcal{U}$ Е(Р). Аналогично доказывается разрешимость $\mathcal{U}E(F)$ и $\mathcal{U}E(S)$, где F - класс фильтрующихся (направленных) множеств, а S - класс полуструктур (тем самым усиливаются соответствующие замечания из [(8)])

Отмеченные предложения обобщаются следующим образом: если К - конечно аксиоматизируемый локально конечный класс моделей, то $\mathcal{U}$ Е(К) разрешима.

Литература

I. С.Р.Когаловский, О квазипроективных классах моделей, ДАН СССР, I963, I48, № 3, 505-507.

2. А.И.Мальцев, Регулярные произведения моделей, Изв. АН СССР, сер.матем., I959, 23, № 4,489-502.

3. M.Makkai, A compactness result concerning direct products of models. Fund. Math,, 1965,LVII,N3,313-326.

4. Ю.Л.Ершов, Неразрешимость теории симметрических и простых конечных групп. ДАН СССР, I964, I58, 777-779.

5. A.Tarski, A.Mostowski, R.Robinson, Undecidable Theories. Amsterdam, 1953.
6. McKinsey J.C.C. The decision problem for some classes of sentences without quantifiers. J.Symb.Logic, 1943, 8,3, 61-76.
7. Higman F.R.S., Subgroups of finitely presented groups. Proc.Royal Soc., Ser. A, 1961, 1311,262.
8. Ю.Ш.Гуревич, Экзистенциальная интерпретация. Алгебра и Логика, 1965, 4, 4, 71-86.

TRÜ Raamatukogu

ОБ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ ПОЛУГРУПП И ОТДЕЛИМОСТИ ПОДПОЛУГРУПП

Лесохин М.М. (Ленинград)

Пусть Π некоторый класс полугрупп. Полугруппа A называется аппроксимируемой в классе Π, если для всяких двух различных элементов $a_1, a_2 \in A$ существует такой гомоморфизм φ полугруппы A в некоторую полугруппу из Π, что $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$. В случае, когда A аппроксимируема в классе всех конечных полугрупп, A называют финитно-аппроксимируемой ([I], I°). Множество Φ гомоморфизмов полугруппы A в полугруппы из некоторого класса Π называется полной системой представлений A полугруппами из Π, если для всяких $a_1, a_2 \in A$ $(a_1 \neq a_2)$ найдется такое $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$ (см. [2], стр. 352).

Очевидно, что полугруппа A аппроксимируема в классе Π тогда и только тогда, когда совокупность всех гомоморфизмов A в полугруппы из Π образует полную систему представлений A в классе Π.

§ I. Финитно-аппроксимируемые полугруппы

А.И.Мальцев показал, что конечно-порожденная коммутативная полугруппа финитно-аппроксимируема. Установлено, что вполне регулярная инверсная полугруппа финитно-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы финитно-аппроксимируемы. В частности, коммутативная регулярная полугруппа финитно-аппроксимируема тогда и только

тогда, когда она не имеет полных элементов, отличных от идемпотентов. Отделимая коммутативная полугруппа A финитно-аппроксимируема тогда и только тогда, когда не существует таких $a_1, a_2 \in A\ (a_1 \neq a_2)$, для которых уравнение $a_1 x^n = a_2 y^n$ разрешимо при всяком натуральном n. Установлено необходимое и достаточное условие финитной аппроксимируемости коммутативной полугруппы, у которой все архимедовы компоненты совпадают со своими квадратами. Приводятся необходимые (но не достаточные), достаточные (но не необходимые) условия финитной аппроксимируемости коммутативных полугрупп, полученные совместно с Э.А.Голубовым.

Из результатов Л.М.Глускина и Б.М.Шайна следует финитная аппроксимируемость вполне простых идемпотентных полугрупп и рестриктивных полугрупп.

Э.А.Голубовым приведен пример нильпотентной коммутативной полугруппы класса 3, не являющейся финитно-аппроксимируемой полугруппой. Им же показано, что связка финитно-аппроксимируемых полугрупп может не быть финитно-аппроксимируемой и что идеальное расширение финитно-аппроксимируемой полугруппы с помощью финитно-аппроксимируемой полугруппы может не быть финитно-аппроксимируемой полугруппой.

Пусть Π – класс всех конечных полугрупп, A – коммутативная полугруппа, Φ – совокупность всех идеальных гомоморфизмов полугруппы A в полугруппы из Π. Для того, чтобы Φ была полной системой представлений полугруппы A в классе Π, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент из A, кроме, может быть, нуля, имел конечное число делителей.

§ 2. Аппроксимация дискретных полугрупп

Для того, чтобы коммутативная полугруппа A была аппроксимируема в классе групп, необходимо и достаточно, чтобы была полугруппой с сокращением. Для аппроксимации A в классе регулярных полугрупп необходимо и достаточно, чтобы A была отделимой полугруппой. Г.Тьерреном и Б.М.Шайном доказано, что полугруппа A аппроксимируема в классе всех нильпотентных полугрупп тогда и только тогда, когда $\bigcap_{n=1}^{\infty} A^n$ содержит не более одного элемента.

Пусть коммутативная полугруппа A является связкой архимедовых подполугрупп A_ξ $(\xi \in \Gamma)$. Обозначим через J следующий идеал:

$$J = \bigcup_{\xi \in \Gamma} \left(\bigcap_{a \in A} (a A_\xi \cup a) \right).$$

Для того, чтобы коммутативная полугруппа A была аппроксимируема в классе всех нильполугрупп, необходимо и достаточно, чтобы J содержал не более одного элемента. Для аппроксимации A в классе, состоящем из всех абелевых групп и коммутативных нильполугрупп, необходимо и достаточно, чтобы J являлся полугруппой с сокращением относительно всей полугруппы A.

Полугруппа A аппроксимируема в классе, состоящем из всех коммутативных нильполугрупп и абелевых групп с внешне присоединенным нулем, тогда и только тогда, когда J является отделимой полугруппой. Приводится необходимое и достаточное условие аппроксимируемости коммутативной полугруппы в классе всех ограниченных коммутативных периодических полу-

групп.

Пусть Π_1 - класс всех коммутативных полугрупп с сокращением, Π_2 - класс отделимых коммутативных полугрупп, Π_3 - класс всех архимедовых коммутативных полугрупп. Пусть A коммутативная полугруппа, а Φ_i совокупность всех гомоморфизмов A на полугруппы класса Π_i ($i = 1,2,3$). Тогда для того, чтобы Φ_i была аппроксимируема в Π_i ($i = 1,2,3$) необходимо и достаточно, чтобы Φ_i была полной системой представлений полугруппы A в классе Π_i.

Для данных регулярных коммутативных полугрупп A и B (B - полугруппа с нулем) найдено необходимое и достаточное условие, при котором A аппроксимируема в полугруппе B. В частности, если A периодическая неединичная полугруппа, а B периодическая полугруппа без полных элементов, отличных от идемпотентов, то полугруппа A аппроксимируема в B тогда и только тогда, когда B содержит отличный от нуля идемпотент и для каждого элемента из A примарного по простому числу p и имеющему в A конечную высоту k, в полугруппе B найдется элемент порядка p^{k+1}.

Пусть A и B полные регулярные неединичные полугруппы, причем B с нулем. Тогда для того, чтобы A была аппроксимируема в B, необходимо и достаточно, чтобы B содержала отличный от нуля идемпотент; для каждого простого p, для которого в A имеются примарные по p элементы, в B существует подгруппа типа p^∞ и если A не имеет элементов конечного порядка, отличных от идемпотентов, то в B существует неидемпотентный элемент.

§ 3. Минимальные классы аппроксимации

Пусть Π_1 и Π_2 два класса полугрупп. Если каждая полугруппа $A_1 \in \Pi_1$ изоморфна некоторой подполугруппе какой-либо полугруппы $A_2 \in \Pi_2$, то будем писать $\Pi_1 < \Pi_2$.

Класс полугрупп Π называется классом аппроксимации для класса Π', если каждая полугруппа из Π' аппроксимируема в классе Π. Класс полугрупп Π_0 называется минимальным классом аппроксимации для класса полугрупп Π, если: I) Π_0 - класс аппроксимации для класса Π. 2) Если Π' - класс аппроксимации для Π, то $\Pi_0 < \Pi'$. Класс Π_0 называется универсально-минимальным классом аппроксимации для класса Π, если Π_0 - минимальный класс аппроксимации и Π_0 содержится во всяком минимальном классе аппроксимации Π.

Для классов всех полугрупп, всех регулярных полугрупп, всех периодических полугрупп, всех инверсных полугрупп, всех групп, всех коммутативных полугрупп, всех вполне простых идемпотентных полугрупп и других найдены минимальные классы аппроксимации. Для классов отделимых коммутативных полугрупп, коммутативных полугрупп с сокращением и некоторых других найдены универсально-минимальные классы аппроксимации.

Пусть A отделимая коммутативная полугруппа. Тогда найдется такая периодическая группа с внешне присоединенным нулем B, что A аппроксимируема в классе, состоящем из одной полугруппы B, но не аппроксимируема ни в какой собственной подполугруппе B. Если A не является отделимой полугруппой, то A не аппроксимируема ни в какой периодичес-

кой коммутативной группе с внешне присоединенным нулем.

§ 4. Аппроксимация топологических полугрупп

Все рассматриваемые в настоящем параграфе топологические полугруппы предполагаются коммутативными компактными хаусдорфовыми.

Пусть Π некоторый класс топологических полугрупп, а A - топологическая полугруппа. Говорят, что топологическая полугруппа A аппроксимируема в классе Π, если для всяких двух различных элементов $a_1, a_2 \in A\ (a_1 \neq a_2)$ найдется такой непрерывный гомоморфизм φ полугруппы A в некоторую полугруппу из Π, что $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$, т.е. совокупность Φ всех непрерывных гомоморфизмов A в полугруппы из Π образует полную систему представлений A в классе Π.

Идемпотент e_0 топологической полугруппы A называется производящим, если множество $J = \{P_e \mid e e_0 \neq e_0\}$ является замкнутым множеством (P_e - максимальная одноидемпотентная подполугруппа, содержащая идемпотент e).

Если топологическая полугруппа A аппроксимируема в классе, состоящем из всех топологических групп, то A является группой. Для того, чтобы топологическая полугруппа A была аппроксимируема в классе всех топологических групп с внешне присоединенным изолированным нулем, необходимо и достаточно, чтобы I) A была представима в виде объединения групп A_e ; 2) для всяких $a_1, a_2 \in Ae\ (a_1 \neq a_2)$ существовал такой производящий идемпотент e_0, что $a_1 e_0 \neq a_2 e_0$; 3) для всяких идемпотентов $e_1, e_2\ (e_1 \neq e_2)$ существовал

производящий идемпотент e, такой, что или $e_1 e \neq e$, или $e_2 e \neq e$.

Аналогично формулируется и условие, необходимое и достаточное для того, чтобы комплексные характеры топологической полугруппы разделяли элементы этой полугруппы. Для того, чтобы топологическая полугруппа A была аппроксимируема в классе нильпотентных топологических полугрупп, необходимо и достаточно, чтобы A содержала единственный идемпотент z, являющийся нулем, и $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A^n} = z$. Идеал J топологической полугруппы A называют нильидеалом, если для всякого $a \in A$ найдется такое натуральное n, что $a^n \in J$. Обозначим через J_0 пересечение всех замкнутых нильидеалов топологической полугруппы A. Полугруппа A аппроксимируема в классе, состоящем из всех топологических нильполугрупп тогда и только тогда, когда J_0 содержит не более одного элемента. Для аппроксимации A в классе, состоящем из всех топологических групп и топологических нильполугрупп, необходимо и достаточно, чтобы полугруппа A содержала единственный идемпотент e и идеал J_0 совпадал с максимальной подгруппой, содержащей идемпотент e. Топологическая полугруппа A аппроксимируема в классе, состоящем из всех топологических групп с внешне присоединенным изолированным нулем и всех топологических нильполугрупп, тогда и только тогда когда выполняются следующие три условия:

I) Идеал J_0 совпадает с максимальной регулярной подполугруппой $A_0 \subset A$;

2) для всяких $a_1 \neq a_2$ из максимальной подгруппы $H(e)$

найдется такой производящий идемпотент e_0, что $a_1 e_0 \neq a_2 e_0$;

3) для всяких $e_1, e_2 \in A$ ($e_1 \neq e_2$; $e_1^2 = e_1$; $e_2^2 = e_2$) существует такой производящий идемпотент e, что или $e_1 e \neq e$ или $e_2 e \neq e$.

§ 5. Отделимость подполугрупп в коммутативных полугруппах

Все рассматриваемые в настоящем параграфе полугруппы предполагаются коммутативными.

Пусть A - полугруппа, Π - некоторый класс полугрупп, Φ - некоторое множество гомоморфизмов полугруппы A в полугруппы из Π, M - некоторое множество подполугрупп полугруппы A. Говорят, что Φ отделяет относительно класса Π подполугруппы из M от не входящих в них элементов или просто отделяет подполугруппы из M относительно Π, если для всяких таких A' из M и a из A, что $a \bar{\in} A'$, найдется гомоморфизм φ из Φ, для которого $\varphi(a) \bar{\in} \varphi(A')$. В случае, когда Π - класс всех конечных полугрупп, Φ - множество всех гомоморфизмов из A в Π, а M - совокупность всех подполугрупп полугруппы A, получаем определение полугруппы с финитно-отделимыми подполугруппами (см. [I]).

Пусть A - регулярная полугруппа, M_1 - множество всех ее подгрупп, M_2 - множество всех ее идеалов, а M_3 - множество всех ее подполугрупп. Обозначим через Π класс всех конечных полугрупп, а через Φ - множество всех гомоморфизмов полугруппы A в полугруппы из Π.

Для того, чтобы Φ отделяло подполугруппы из M_1 относительно Π, необходимо и достаточно, чтобы все максималь-

ные подгруппы полугруппы A были расширениями с помощью ограниченных групп без кручения периодических групп, примарные компоненты которых суть группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.

Множество Φ отделяет подполугруппы из M_2 относительно Π.

Множество Φ отделяет подполугруппы из M_3 относительно Π тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

I) каждая максимальная подгруппа A является периодической группой, все примарные компоненты которой суть группы с ограниченными в совокупности порядками элементов;

2) максимальная идемпотентная подполугруппа $A_0 \subset A$ является полугруппой с финитно-отделимыми подполугруппами.

В частности, если каждый идемпотент полугруппы A имеет конечное число идемпотентных делителей, то Φ отделяет подполугруппы из M_3 тогда и только тогда, когда все максимальные подгруппы A суть периодические группы, имеющие примарные компоненты, порядки элементов которых ограничены в совокупности.

Пусть A произвольная полугруппа, Π класс всех конечных полугрупп, а M - множество всех подполугрупп полугруппы A. Обозначим через Φ множество всех идеальных гомоморфизмов из A в полугруппы класса Π. Множество Φ отделяет подполугруппы из M относительно Π тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

I) каждый элемент, кроме, может быть, нуля полугруппы

A, имеет конечное число делителей;

2) каждая подполугруппа полугруппы A, не содержащая нуля, конечна.

Пусть K мультипликативная полугруппа всех корней любой степени из I с нулем, а M - множество всех подполугрупп полугруппы A. Обозначим через Φ' множество всех гомоморфизмов из A в полугруппу K, т.е. множество всех комплексных характеров полугруппы A. Множество Φ' отделяет подполугруппы из M тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

I) A является связкой ρ архимедовых подполугрупп с сокращением $A_\xi\ (\xi \in A/\rho)$;

2) если A_ξ содержит идемпотент, то A_ξ является периодической группой;

3) для всякой подполугруппы $A' \subset A/\rho$ и всякого элемента $\xi_0 \in A'$ $(\xi_0 \in A/\rho)$ имеет место одна из двух возможностей: или $\xi_0 \in A' \cdot A/\rho$, или существует такая подполугруппа $A'' \subset A/\rho$, что для всякого $\eta \in A''$ выполняется условие $\eta\xi_0 \neq \eta$ и для всякого $\xi \in A'$ существует $\eta_0 \in A''$, для которого $\xi\eta_0 = \eta_0$.

Пусть в полугруппе K введена топология, индуцируемая обычной топологией комплексной плоскости, A - топологическая компактная хаусдорфова коммутативная полугруппа, M - - множество всех подполугрупп A, а Φ - множество всех непрерывных гомоморфизмов из A в полугруппу K, т.е. множество всех комплексных характеров. Тогда для того, чтобы Φ отделяло подполугруппы из M, необходимо и достаточно, чтобы

I) A была регулярной периодической полугруппой;

2) для всякого элемента $a \in A$ и всякой подполугруппы $A' \subset A$ такой, что $a \bar{\in} A'$, существует производящий идемпотент e_0, для которого $a e_0 \bar{\in} A' e_0$.

Литература

I. А.И.Мальцев, О гомоморфизмах на конечные группы, Уч.зап. Ивановского пед. ин-та, 1958, т. 18.

2. Е.С.Ляпин, Полугруппы, М., 1960.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Ф.ХОЛЛА

Левич Е.М. (Рига)

В работе Ф.Холла [I] доказана следующая теорема:

Каждое неприводимое представление нильпотентной группы с конечным числом образующих над абсолютно алгебраическим полем простой характеристики p конечномерно.

Здесь мы приведем другое доказательство этой теоремы. Введем следующие обозначения: Γ – нильпотентная группа с конечным числом образующих, P – абсолютно алгебраическое поле простой характеристики p, $[\Gamma]$ – групповая алгебра группы Γ над полем P, J – некоторый правый идеал в $[\Gamma]$, $G^*=[\Gamma]/J$, (G,Γ) – некоторое представление G группы Γ над полем P.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы:

Лемма I. Если центр группы Γ является конечной группой, то и Γ – конечная группа.

Лемма очевидна.

Лемма 2. Пусть (G^*,Γ) есть некоторое неприводимое представление группы Γ. Если $g\in\Gamma$ лежит в центре группы Γ, то в G^* имеется собственное максимальное g – инвариантное подпространство.

Доказательство. Векторное пространство G^* над полем P тогда и только тогда не обладает собственным максимальным g – инвариантным подпространством, когда G^* является g – делимым пространством, т.е. для любого $\bar f_0\in G^*$ и $\lambda\in P$ уравнение вида $\bar f(g-\lambda e)=\bar f_0$ разрешимо в G^*[2]. Пока-

жем, что G^* не является g- делимым пространством. Из леммы 6 работы [I] следует, что для любого $\bar{f} \in G^*$ найдется такой полином $R(g)$ от g с коэффициентами из поля P, для которого $\bar{f}R(g) = 0$. Возьмем в G^* элемент $\bar{e} = e + J$ и обозначим через $R_0(g)$ такой полином от g с коэффициентами из поля P, что $\bar{e}R_0(g) = 0$. Легко видеть, что $\bar{e}\bar{f} = (e+J)(f+J) = \bar{f}$. Отсюда для любого элемента $\bar{f} \in G^*$ следует, что $\bar{f}R_0(g) = 0$. Следовательно, G^* не является g - делимым пространством и лемма доказана.

Приведем теперь доказательство теоремы. Пусть дано неприводимое представление (G, Γ). Тогда в групповой алгебре $[\Gamma]$ найдется такой правый идеал J, что представления (G, Γ) и (G^*, Γ) эквивалентны. Пусть Γ_0 - ядро представления (G^*, Γ), т.е. представление $(G^*, \Gamma/\Gamma_0)$ является точным. Пусть $v \in G^*$, а g - элемент из центра группы Γ/Γ_0. Так как $\{g\} \triangle \Gamma/\Gamma_0$, то $\{g\} h_\alpha = h_\alpha \{g\}$ и $G^* = \sum_{\alpha \in J} v h_\alpha [g]$, $h_\alpha \in \Gamma/\Gamma_0$ ($[g]$ - групповая алгебра группы $\{g\}$ над P). Согласно лемме 2 в G^* существует максимальное собственное g - инвариантное подпространство H. Мы можем считать, что $v\bar{e} \in H$. Подпространство G^*/H одномерно и поэтому найдется такое n, что g^n лежит в ядре представления $(G^*/H, \{g\})$. G^* есть подпрямая сумма подпространств $G^*/H h_\alpha$ ($\alpha \in J$) и поэтому в ядре представления $(G^*, \{g\})$ лежит группа $\{g^n\} = \bigcap_{\alpha \in J} h_\alpha^{-1} \{g^n\} h_\alpha$. Это означает, что каждый элемент из центра группы Γ/Γ_0 имеет конечный порядок. Но тогда Γ/Γ_0 - конечная группа (лемма I) и G^*, а, следовательно, и G являются конечномерными пространствами.

Теорема доказана.

Литература

1. P. Hall, On the finiteness of certain soluble groups, Proc. London Math. Soc. 1959, 9, 595-622.
2. Е.М.Левич, Модули над кольцом полиномов от одного эндоморфизма. Латвийский матем. ежегодник, 1966, т. 2.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛА

Ливчак Я.Б. (Рига)

Наша цель - построить теорию предела так, чтобы любая последовательность имела предел.

Пусть S - векторное пространство, составленное из всех вещественных счетных последовательностей. Вещественное число α отождествим с соответствующей ему стационарной последовательностью. Множество F всех сходящихся к нулю последовательностей является подпространством в S. Число α является пределом последовательности $x=\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда смежные классы $F+\alpha$ и $F+x$ совпадают. Это обстоятельство позволяет нам считать смежный класс $F+x$ пределом последовательности $x=\{x_n\}\in S$: $F+x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Отождествим вещественное число α со смежным классом $F+\alpha$. Если последовательность x сходится и $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $\alpha=F+\alpha=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, т.е. введенное определение предела не противоречит классическому. Смежный класс $F+x$ существует при любом $x\in S$, т.е. любая последовательность имеет предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

На основе этих предварительных соображений мы будем строить теорию предела. Из разобранного примера видно, что предел последовательности вещественных чисел может быть не вещественным числом, а элементом некоторого множества, содержащего числовую прямую.

Пусть J - фильтрующееся вправо частично упорядоченное множество, и каждому индексу $i\in J$ соответствует (адди-

тивная) группа $\mathcal{G}_i$; полную прямую сумму этих групп обозначим через $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$. Если все $\mathcal{G}_i$ совпадают, то обозначим $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}$, $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle = \mathcal{G}^I$. Назовем I -нумерованной последовательностью элемент $\langle a_i : i \in I \rangle$ из $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$. Рассмотрим в группе $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$ нормальный делитель H . Факторгруппу $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle / H$ обозначим через $P_H \langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$. Если все $\mathcal{G}_i$ равны между собой и равны $\mathcal{G}$, то факторгруппу $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle / H = \mathcal{G}^I / H$ обозначим через $\mathcal{G}^I_H$. Пределом $H \operatorname{Lim}_{i \in I} a_i$ I -нумерованной последовательности $a = \langle a_i : i \in I \rangle$ из $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$ по модулю H назовем смежный класс $H + a$. Таким образом, $H \operatorname{Lim}_{i \in I} a_i \in P_H \langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$. Каждая I -нумерованная последовательность имеет предел. Предел суммы равен сумме пределов. Если все $\mathcal{G}_i$ – векторные пространства над полем K и H – подпространство в пространстве $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$, то $H \operatorname{Lim}_{i \in I} \alpha x_i = \alpha H \operatorname{Lim}_{i \in I} x_i$. Если все $\mathcal{G}_i$ – кольца и H – идеал в кольце $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$, то $H \operatorname{Lim}_{i \in I} (x_i y_i) = (H \operatorname{Lim}_{i \in I} x_i)(H \operatorname{Lim}_{i \in I} y_i)$.

Будем говорить, что нормальный делитель H из $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$ разделяет подмножество M из $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$, если каждый смежный класс по H содержит не более одного элемента из M. Если H разделяет M и класс $H + a$ содержит элемент $m \in M$, то мы отождествляем смежный класс $H + a$ с m . В частности, если M есть числовая прямая, $m \in M$, $m \in H \operatorname{Lim}_{i \in I} a_i = H + a$, то предел $H \operatorname{Lim}_{i \in I} a_i$ мы будем считать вещественным числом.

I -нумерованную последовательность $\langle x_i : i \in I \rangle$ из $P\langle \mathcal{G}_i : i \in I \rangle$ назовем почти нулевой, если существует индекс $i_0 \in I$ такой, что $x_i = 0$, как только $i \geqslant i_0$. Множество Q всех почти нулевых последовательностей является нормальным

делителем в группе $P\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$. Предел $Q\lim\limits_{i\in J} x_i$ назовем тонким пределом. Группа $P_Q\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$ является приведенным прямым произведением групп $\mathcal{G}_i$. Последовательность $\langle a_i : i\in J\rangle$ назовем стационарной, если существует такое a из $\bigcap\limits_{i\in J}\mathcal{G}_i = \mathcal{G}$, что $a_i = a$ при любом $i\in J$; так как Q разделяет $\mathcal{G}$, то мы можем отождествить a с $\langle a_i : i\in J\rangle$. Если все $\mathcal{G}_i$ – кольца, то $P\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$ – тоже кольцо и Q – двусторонний идеал в кольце $P\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$; поэтому $Q\lim\limits_{i\in J}(x_i y_i) = (Q\lim\limits_{i\in J} x_i)(Q\lim\limits_{i\in J} y_i)$.

Пусть все $\mathcal{G}_i$ – векторные структуры. Положим

$$\langle x_i : i\in J\rangle \vee \langle y_i : i\in J\rangle = \langle x_i \vee y_i : i\in J\rangle,$$
$$\langle x_i : i\in J\rangle \wedge \langle y_i : i\in J\rangle = \langle x_i \wedge y_i : i\in J\rangle.$$

Тогда $P\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$ – векторная структура. Если при этом H есть ℓ-идеал векторной структуры $P\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$, то $P_H\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$ – также векторная структура, $H\lim\limits_{i\in J}(x_i\vee y_i) = (H\lim\limits_{i\in J} x_i)\vee(H\lim\limits_{i\in J} y_i)$, $H\lim\limits_{i\in J}(x_i\wedge y_i) = (H\lim\limits_{i\in J} x_i)\wedge(H\lim\limits_{i\in J} y_i)$, $H\lim\limits_{i\in J}(x_i) = (H\lim\limits_{i\in J} x_i)$ и из $x\geq y$ следует неравенство $H\lim\limits_{i\in J} x_i \geq H\lim\limits_{i\in J} y_i$.

Векторную структуру E назовем грубой, если E содержит числовую прямую R в качестве векторной подструктуры и для любого $e\neq 0$ из E существует число ε из R такое, что $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon \not> |e|$. Пусть все $\mathcal{G}_i$ – грубые векторные структуры. Последовательность $\langle x_i : i\in J\rangle$ из $P\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$ назовем бесконечно малой, если при любом положительном $\varepsilon\in R$ существует такой индекс i_ε из J, что $|x_i| < \varepsilon$, как только $i \geqslant i_\varepsilon$. Множество F всех бесконечно малых последовательностей есть ℓ-идеал в векторной структуре $P\langle \mathcal{G}_i : i\in J\rangle$. Предел $F\lim\limits_{i\in J} x_i$ назовем грубым пределом. F разделяет $\mathcal{G} = \bigcap\limits_{i\in J}\mathcal{G}_i$, поэтому F разделяет $R\subseteq\mathcal{G}$ и мы будем счи-

тать грубый предел $F\lim_{i\in J} x_i$ числом, если смежный класс $F+x$ содержит соответствующую стационарную последовательность. Факторгруппа $P_F<\mathcal{Y}_i : i\in J>$ есть грубая векторная структура.

Пусть $(\mathcal{X},S,\mu)$ - пространство с мерой, M - множество всех измеримых вещественных функций на $(\mathcal{X},S,\mu)$, M_0 - множество ограниченных функций из M, J - множество всех измеримых подмножеств конечной меры из $\mathcal{X}$. Упорядочим множество J, считая $A\succcurlyeq B$, если $A\in J$, $B\in J$ и $A\supseteq B$. Каждой функции f из M_0 соответствует J-нумерованная последовательность $<i_A(f): A\in J>$ из R^J, где $i_A(f)=\int_A f\,d\mu$. Грубый предел этой последовательности назовем J-интегралом функции f и обозначим $(J)\int f\,d\mu$. Из определения J-интеграла следует, что $(J)\int f\,d\mu\in R_F^J$. Функцию $f\in M$ назовем интегрируемой, если интеграл $\int f\,d\mu$ существует и конечен. L - пространство интегрируемых функций. Пространство с мерой $(\mathcal{X},S,\mu)$ назовем правильным, если по любому измеримому подмножеству бесконечной меры A из $\mathcal{X}$ и любому n найдется измеримое подмножество B из A такое, что $\mu(B)\geqslant n$. Если $f\in M_0\cap L$, то $\int f\,d\mu=(J)\int f\,d\mu$. Если $(\mathcal{X},S,\mu)$ - правильное пространство с мерой, $f\in M_0$ и интеграл $(J)\int f\,d\mu$ является числом, то $f\in L$ и $\int f\,d\mu=(J)\int f\,d\mu$. Если $f\in M_0$, $g\in M_0$ и $\alpha\in R$, то $(J)\int(f+g)\,d\mu=(J)\int f\,d\mu+(J)\int g\,d\mu$, $(J)\int\alpha f\,d\mu=\alpha(J)\int f\,d\mu$ и из $f\geqslant g$ следует, что $(J)\int f\,d\mu\geqslant(J)\int g\,d\mu$.

Множество $\mathcal{O}$ всех конечных открытых интервалов на числовой прямой превращается в фильтрующееся множество, если

считать, что $A \gtrsim B$, когда $A \in \mathfrak{S}$, $B \in \mathfrak{S}$ и $A \supseteq B$. Пусть $f \in M$, $\Sigma \in \mathfrak{S}$, а $f_\Sigma(x)$ – срезка функции $f(x)$ на интервале Σ. Функция $f_\Sigma(x)$ ограничена. Обозначим $S_\Sigma(f) = (J)\int f_\Sigma d\mu$. Назовем $(J,\mathfrak{S})$-интегралом функции f грубый предел последовательности $\langle S_\Sigma(f) : \Sigma \in \mathfrak{S} \rangle$. Из определения $(J,\mathfrak{S})$-интеграла следует, что $(J,\mathfrak{S})\int f d\mu \in (R_F^J)_F^{\mathfrak{S}}$. Если $f \in M_0$, то $(J)\int f d\mu = (J,\mathfrak{S})\int f d\mu$. Если $f \in L$, то $\int f d\mu = (J,\mathfrak{S})\int f d\mu$. Если (X, S, μ) – правильное пространство с мерой и интеграл $(J,\mathfrak{S})\int f d\mu$ есть число, то $f \in L$ и $\int f d\mu = (J,\mathfrak{S})\int f d\mu$. Если $f \gtrsim g$, то $(J,\mathfrak{S})\int f d\mu \gtrsim (J,\mathfrak{S})\int g d\mu$. При любых $f \in M$, $g \in M$ выполняется неравенство $(J,\mathfrak{S})\int (f+g) d\mu \leqslant (J,\mathfrak{S})\int |f| d\mu + (J,\mathfrak{S})\int |g| d\mu$. Следующий пример показывает, что может быть $(J,\mathfrak{S})\int (f+g) d\mu \neq (J,\mathfrak{S})\int f d\mu + (J,\mathfrak{S})\int g d\mu$. Пусть (X, S, μ) – числовая прямая с мерой Лебега, $f(x) = g(x) = |x|$. Тогда $(J,\mathfrak{S})\int 2|x| d\mu < 2(J,\mathfrak{S})\int |x| d\mu$. Итак, отображение $\psi : f \to (J,\mathfrak{S})\int f d\mu$ не линейно. Из приведенных выше результатов следует, однако, что ψ линейно отображает L и M_0 в $(R_F^J)_F^{\mathfrak{S}}$. Оказывается, что и на сумме $K = L + M_0$ это отображение линейно: если $f \in K$, $g \in K$, $\alpha \in R$, то $(J,\mathfrak{S})\int (f+g) d\mu = (J,\mathfrak{S})\int f d\mu + (J,\mathfrak{S})\int g d\mu$ и $(J,\mathfrak{S})\int \alpha f d\mu = \alpha (J,\mathfrak{S})\int f d\mu$.

Пусть a – точка на числовой прямой R, V – связная окрестность точки a. Множество $V' = V \setminus a$ назовем выколотой окрестностью точки a. Будем считать, что $V' \gtrsim W'$, если $V' \subseteq W'$. Система R_a всех выколотых окрестностей точки a образует фильтрующееся множество. Каждой выколотой окрестности $V' \in R_a$ соответствует пространство $\Phi_{V'}$ всех веще-

ственных функций на V'. Число $b \in R$ отождествим с тождественно равной b функцией $f_b(x)$ на V'. Все пространства $\Phi_{V'}$ – грубые векторные структуры. Каждой вещественной функции f на R соответствует $\mathcal{R}_a$ – нумерованная последовательность функций $\langle f_{V'} : V' \in \mathcal{R}_a \rangle$, где $f_{V'}$ – сужение функции f на выколотой окрестности V'. Грубым пределом $F\lim\limits_{x \to a} f(x)$ функции f в точке a назовем грубый предел $F\lim\limits_{V' \in \mathcal{R}_a} f_{V'}$ последовательности $\langle f_{V'} : V' \in \mathcal{R}_a \rangle$. Если предел $F\lim\limits_{x \to a} f(x)$ является числом, то предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = F\lim\limits_{x \to a} f(x)$. Если предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ существует, то предел $F\lim\limits_{x \to a} f(x)$ является числом и $F\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. $F\lim\limits_{x \to a} (bf(x) + cg(x)) = bF\lim\limits_{x \to a} f(x) + cF\lim\limits_{x \to a} g(x)$. Следующий предел $F\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ назовем грубой производной функции f в точке x. Аналогично определяются тонкий предел и тонкая производная:

$$Q\lim_{x \to a} f(x) = Q\lim_{V' \in \mathcal{R}_a} f_{V'} \quad \text{и} \quad Qf'(x) = Q\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{Q\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) - f(x)}{Q\lim\limits_{x \to 0} x}.$$

Тонкий предел $Q\lim\limits_{x \to a} f(x)$ равен числу b тогда и только тогда, когда существует выколотая окрестность V' точки a такая, что $f(x) = b$ при любом $x \in V'$. Отсюда следует, в частности, что $Q\lim\limits_{x \to 0} x \neq 0$. $Q\lim\limits_{x \to a} (f(x)g(x)) = (Q\lim\limits_{x \to a} f(x))(Q\lim\limits_{x \to a} g(x))$. Предел $Q\lim\limits_{x \to a} f(x)$ содержится в кольце $P_Q \langle \Phi_{V'}^{x \to a} : V' \in \mathcal{R}_a \rangle$. Этот предел обратим в указанном кольце тогда и только тогда, когда существует такая выколотая окрестность V' точки a, что $f(x) \neq 0$ при

любом $x \in V'$.

Если определить δ -функцию как тонкую производную от единичного скачка, то можно выполнять нелинейные операции над δ -функциями.

Пусть $\mathcal{G}$ - топологическая группа, $\mathcal{A}$ - локальная система (в алгебраическом смысле) в $\mathcal{G}$ и каждая подгруппа A из $\mathcal{A}$ локально бикомпактна. Подгруппы из $\mathcal{A}$ могут быть не замкнутыми в $\mathcal{G}$. Упорядочим $\mathcal{A}$, считая, что $A \geq B$, если $A \supseteq B$. В каждой подгруппе A из $\mathcal{A}$ выберем меру Хаара μ_A. Пусть f -вещественная функция на $\mathcal{G}$ и ее сужение f_A интегрируемо при любом A из $\mathcal{A}$. Назовем $\mathcal{A}$ -интегралом $(\mathcal{A})\int f d\mu$ тонкий предел $\mathcal{A}$ -нумерованной последовательности $\langle i_A(f) : A \in \mathcal{A} \rangle$, где $i_A(f) = \int_A f_A d\mu_A$. Интеграл $(\mathcal{A})\int f d\mu$ инвариантен, т.е. $(\mathcal{A})\int f(x - x_0) d\mu(x) = (\mathcal{A})\int f(x) d\mu(x)$ при любом x_0 из $\mathcal{G}$. Аналогично определяется и свертка.

Рассмотрим векторное пространство P над полем T. Выберем в P некоторую локальную систему $\mathcal{P}$, составленную из конечномерных подпространств из P. Пару $(P, \mathcal{P})$ назовем покрытым векторным пространством. Эндоморфизм φ пространства P назовем эндоморфизмом покрытого векторного пространства $(P, \mathcal{P})$, если существует подпространство A_φ из $\mathcal{P}$ такое, что $\varphi(B) \subseteq B$, как только $B \supseteq A$, $B \in \mathcal{P}$. В каждом подпространстве A из $\mathcal{P}$ выберем базис U_A. Обозначим через T_A кольцо всех квадратных матриц над T, порядок которых равен размерности пространства A. Если $\varphi(A) \subseteq A$, то сужению эндоморфизма φ на подпространство A соответствует в базисе матрица F_A из T_A. Если же $\varphi(A) \not\subseteq A$, то мы

будем считать, что F_A – нулевая матрица из T_A. Вычислим определитель $|F_A|$ матрицы F_A при любом $A \in \mathcal{P}$. Эндоморфизму φ покрытого векторного пространства $(P, \mathcal{P})$ соответствует две $\mathcal{P}$-нумерованные последовательности: $\langle F_A : A \in \mathcal{P} \rangle$ и $\langle |F_A| : A \in \mathcal{P} \rangle$. Тонкие пределы $M(\varphi) = Q\lim_{A \in \mathcal{P}} F_A$ и $\mathcal{D}(\varphi) = Q\lim_{A \in \mathcal{P}} |F_A|$ назовем, соответственно, предельной матрицей и предельным определителем эндоморфизма φ. $M(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha M(\varphi) + \beta M(\psi)$ при любых $\alpha \in T$, $\beta \in T$. Кроме того, $M(\varphi\psi) = M(\varphi) M(\psi)$ и $\mathcal{D}(\varphi\psi) = \mathcal{D}(\varphi)\mathcal{D}(\psi)$.

Эндоморфизм φ покрытого векторного пространства $(P, \mathcal{P})$ обратим тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}(\varphi) \neq 0$.

Следующий пример показывает, что понятие эндоморфизма покрытого векторного пространства естественно возникает при изучении **групповой алгебры локально конечной группы.**

В локально конечной группе $\mathcal{G}$ можно выбрать некоторую локальную систему $\mathcal{A}$, составленную из конечных подгрупп. Возьмем поле T. Каждой подгруппе $A \in \mathcal{A}$ соответствует множество A_T всех таких функций φ на $\mathcal{G}$ со значениями в T, что $\varphi(g) = 0$, если $g \bar{\in} A$. Пусть $\varphi \in A_T$, $\psi \in A_T$, $\alpha \in T$, $a \in \mathcal{G}$. Положим $(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$, $(\alpha\varphi)(a) = \alpha\varphi(a)$, $\varphi\psi(a) = \sum_{h \in \mathcal{G}} \varphi(ah^{-1})\psi(h)$.

Сумма $\varphi\psi(a) = \sum_{h \in \mathcal{G}} \varphi(ah^{-1})\psi(h)$ состоит только из конечного числа слагаемых, т.к. $\psi(h) = 0$ при $h \bar{\in} A$ и $\varphi\psi(a) = \sum_{h \in A} \varphi(ah^{-1})\psi(h)$. Кроме того, $\varphi\psi(a) = 0$ при $a \bar{\in} A$, т.к. в этом случае $\varphi(ah^{-1}) = 0$ при любом $h \in A$. A_T есть алгебра над T, изоморфная групповой алгебре группы A. Если

$A \subseteq B$, то $A_\tau \subseteq B_\tau$. Объединение $\mathcal{G}_\tau = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A_\tau$ есть алгебра над τ. В этой алгебре имеется локальная система $\mathcal{A}_\tau = \langle A_\tau : A \in \mathcal{A} \rangle$. Пара $(\mathcal{G}_\tau, \mathcal{A}_\tau)$ является покрытым векторным пространством, а регулярное представление алгебры $\mathcal{G}_\tau$ осуществляется эндоморфизмами покрытого векторного пространства $(\mathcal{G}_\tau, \mathcal{A}_\tau)$.

Используя тонкий предел, можно осуществить усреднение по локально конечной группе.

Автор благодарен В.К.Иванову за ценные советы.

ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ

Ляпин Е.С. (Ленинград)

I°. Пусть между элементами множества Ω заданы некоторые отношения (пока мы не уточняем смысла этого понятия, потом это будет сделано). Естественно сопоставить такой системе совокупность таких преобразований (полных или частичных) множества Ω, которые сохраняют все отношения между элементами Ω. Это значит, что если семейство элементов из Ω связано одним из рассматриваемых отношений, то и образы этих элементов должны оказаться связанными тем же отношением. Такие преобразования называются эндоморфизмами системы. В результате умножения (т.е. суперпозиции) двух эндоморфизмов системы мы получаем преобразование, которое очевидно опять окажется ее эндоморфизмом. Благодаря этому совокупность всех эндоморфизмов системы оказывается полугруппой. Представляет интерес рассмотрение не только полугруппы всех эндоморфизмов, но и тех или иных ее подполугрупп.

Сопоставление системам, т.е. множествам с некоторой совокупностью отношений, полугрупп их эндоморфизмов (всех или только некоторых) может представить значительный интерес. Сама связь свойств исходной системы и полугрупповых свойств полугруппы эндоморфизмов - интересна. Кроме того в ряде случаев такое сопоставление может быть использовано для того, чтобы при помощи рассмотрения полугруппы эндоморфизмов изучать исходную систему.

Такое направление можно рассматривать, как широкое обобщение теории Галуа.

2^0. Повидимому, наиболее естественно определить понятие отношения между элементами множества следующим образом. Пусть Γ есть некоторое множество индексов. Отношением в Ω с множеством индексов Γ будем называть совокупность некоторых отображений Γ в Ω.

Если, например, Γ состоит из пары чисел I и 2, то отображение χ множества индексов Γ в Ω есть сопоставление числу I некоторого элемента $\alpha_1 \in \Omega$ и числу 2 некоторого элемента α_2. Задание такого отображения равносильно заданию пары элементов из Ω. Отношением в Ω при $\Gamma = \{1, 2\}$ будет бинарное отношение в Ω.

При $\Gamma = \{1, 2, 3\}$ мы получим тернарное отношение. Если при этом отношение Φ таково, что для всяких отображений $\chi, \gamma \in \Phi$ из $\chi(1)=\gamma(1), \chi(2)=\gamma(2)$ всегда следует $\chi(3) = \gamma(3)$, то такое тернарное отношение определит алгебраическое однозначное действие в Ω (частичное). Действительно, действие можно определить, полагая $\alpha * \beta = \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in \Omega$), если при некотором $\chi \in \Phi$ имеет место

$$\chi(1) = \Phi, \quad \chi(2) = \beta, \quad \chi(3) = \gamma$$

Очевидно, всякое алгебраическое действие может быть определено указанным образом, т.е. по существу является тернарным отношением указанного типа.

Имеет смысл рассматривать отношения не только с конечными множествами индексов, но и с бесконечными.

Пусть в множестве Ω определена операция предельного

перехода: некоторым последовательностям элементов из Ω сопоставлен элемент, названный пределом данной последовательности (конечно, при этом естественно установить ряд ограничений, которые нас в данный момент не интересуют). Задание такой операции можно осуществить при помощи отношения с множеством индексов $\Gamma = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Именно, отображение X множества Γ в Ω отнесем к конструируемому отношению тогда и только тогда, когда последовательность $X_{(1)}$, $X_{(2)}, \ldots$ сходится в Ω и имеет своим пределом $X_{(0)}$.

3°. В дальнейшем мы постоянно будем говорить об умножении отображений, имея в виду их суперпозицию. Если X есть отображение множества Ω_1 на множество Ω_2, а Y есть отображение множества Ω_3 на множество Ω_4, то под YX мы будем понимать отображение в Ω_4 множества всех таких элементов $\alpha \in \Omega_1$, что $X_\alpha \in \Omega_2$. Для каждого из таких $\alpha \in \Omega_1$ полагаем

$$(YX)\alpha = Y(X\alpha)$$

Конечно, произведение может оказаться и пустым отображением, т.е. отображением с пустым множеством отображаемых элементов.

Частным случаем отображения является преобразование X множества Ω (под этим термином мы будем понимать то, что иногда называют частичным преобразованием), т.е. отображение некоторого подмножества $\Pi_1 X \subset \Omega$ в Ω. Преобразование X называется полным, если $\Pi_1 X = \Omega$.

4°. Преобразование X множества Ω назовем эндоморфизмом относительно некоторого заданного в Ω отношения Φ

с множеством индексов Γ, если для всякого такого $S \in \Phi$, что $S(\Gamma) \subset \Pi, X$, имеет место $XS \subset \Phi$.

Очевидно, что для бинарного отношения Φ, заданного во множестве Ω, эндоморфизмом будет такое преобразование S множества Ω, что если $(\alpha, \beta) \in \Phi$ (т.е. $X \in \Phi$, где $X_{(1)} = \alpha$, $X_{(2)} = \beta$) и $\alpha, \beta \in \Pi, S$, то должно иметь место $(S\alpha, S\beta) \in \Phi$ (это и означает, что $SX \in \Phi$).

В случае действия, которое будем обозначать при помощи знака $*$, эндоморфизмом будет такое преобразование S, что из $\alpha * \beta = \gamma$ при $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi S$, всегда должно следовать

$$S\alpha * S\beta = S\gamma$$

В случае множества с операцией предельного перехода, мы получаем условие непрерывности в качестве признака того, что преобразование является эндоморфизмом: из $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha_0$ должно вытекать

$$\lim_{n \to \infty} S\alpha_n = S\alpha_0$$

5°. Пусть в множестве Ω задана некоторая совокупность отношений Σ. Эндоморфизмом системы (Ω, Σ) называется преобразование Ω, являющееся эндоморфизмом относительно каждого отношения из Σ. Совокупность всех эндоморфизмов системы (Ω, Σ) будем обозначать через $\mathfrak{B}(\Omega, \Sigma)$.

Легко видеть, что произведение эндоморфизмов из $\mathfrak{B}(\Omega, \Sigma)$ опять является эндоморфизмом из $\mathfrak{B}(\Omega, \Sigma)$.

Таким образом $\mathfrak{B}(\Omega, \Sigma)$ является полугруппой (полугруппа всех эндоморфизмов системы (Ω, Σ).

6°. Помимо самой полугруппы $\mathfrak{B}(\Omega, \Sigma)$ естественно рассматривать и ее важные подполугруппы. Укажем некоторые из

них. Например, совокупность всех полных эндоморфизмов, т.е. эндоморфизмов, являющихся полными преобразованиями, очевидно составляет полугруппу. Эту полугруппу будем в дальнейшем обозначать через $\mathcal{L}_0(\Omega, \Sigma)$.

Пусть m есть некоторое кардинальное число. Совокупность всех таких эндоморфизмов S, что мощность $S(\Omega)$ меньше m, также образует полугруппу.

7°. Пусть в некотором классе Λ систем (Ω, Σ) с одной и той же системой отношений Σ, для каждой системы (Ω, Σ) фиксирована некоторая полугруппа эндоморфизмов $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ (здесь $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ может быть как полугруппой $\mathcal{L}(\Omega, \Sigma)$, так и какой-нибудь ее подполугруппой, например, одной из числа упомянутых в 6°). Естественно формулируются следующие проблемы и направления исследований.

I) Для произвольной полугруппы $\mathcal{A}$ дать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы в классе Λ нашлась такая система (Ω, Σ), что $\mathcal{A}$ была бы изоморфна с $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ (проблема абстрактной характеристики класса полугрупп эндоморфизмов $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$).

2) Выяснить для каких пар систем (Ω_1, Σ) и (Ω_2, Σ) полугруппы их эндоморфизмов $\mathcal{M}(\Omega_1, \Sigma)$ и $\mathcal{M}(\Omega_2, \Sigma)$ изоморфны. В частности, важен случай, когда из изоморфизма полугрупп $\mathcal{M}(\Omega_1, \Sigma)$ и $\mathcal{M}(\Omega_2, \Sigma)$ следует, что системы (Ω_1, Σ) и (Ω_2, Σ) отличаются не существенным образом, т.е. одинаковы с точностью до обозначений и внутренней природы элементов, которая при абстрактном подходе несущественна.

3) Для тех или иных основных свойств систем (Ω, Σ) найти полугрупповые свойства полугруппы $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$, выполнение которых в $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ необходимо и достаточно для того, чтобы сама система (Ω, Σ) обладала упомянутым свойством.

4) Для тех или иных основных свойств полугрупп найти свойства систем (Ω, Σ), выполнение которых необходимо и достаточно для того, чтобы полугруппа $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ обладала указанным свойством.

5) Общее изучение полугрупповых свойств полугрупп $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$.

При рассмотрении этих проблем всегда возможны два подхода. При первом из них полугруппа $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ рассматривается как конкретная полугруппа, т.е. как полугруппа преобразований. При втором же полугруппа $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ рассматривается с "абстрактной" точки зрения, т.е. считается заданной с точностью до изоморфизма.

8°. За последние годы в указанных направлениях был осуществлен целый ряд исследований, о некоторых из которых и будет сказано ниже. При этом автор не будет стремиться ни к полноте обозрения, ни к соблюдению хронологической последовательности появления результатов.

9°. Абстрактная характеристика класса полугрупп эндоморфизмов всех систем указанного вида была дана Е.С.Ляпиным [1].

Для произвольной полугруппы $\mathcal{A}$, обладающей нулем o, временно обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}$ совокупность всех таких элемен-

тов $\mathcal{X}$, которые обладают свойствами:

I) $\mathcal{X}^2 = \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \neq \mathcal{O}$

2) для всяких таких $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{A}$, что $\mathcal{U}^2 = \mathcal{U}$, $\mathcal{V}^2 = \mathcal{V}$, $\mathcal{U}\mathcal{V} = \mathcal{V}\mathcal{U} = \mathcal{O}$, обязательно имеет место $\mathcal{X}\mathcal{U} = \mathcal{O}$ или $\mathcal{X}\mathcal{V} = \mathcal{O}$.

Оказывается, что во всякой полугруппе $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\Omega, \Sigma)$, которая, очевидно, всегда является полугруппой нулем, ее подмножество $\tilde{\mathcal{L}}'$ обладает следующими свойствами:

I) если $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tilde{\mathcal{L}}'$ и $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, то $\mathcal{U}\mathcal{V} = \mathcal{O}$;

2) для всяких $\mathcal{X} \neq \mathcal{Y}$ $(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{L}')$ найдутся такие $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tilde{\mathcal{L}}'$, что из двух элементов $\mathcal{U}\mathcal{X}\mathcal{V}$ и $\mathcal{U}\mathcal{Y}\mathcal{V}$ один равен $\mathcal{O}$, а другой отличен от $\mathcal{O}$;

3) если $\mathcal{X}\mathcal{U} \neq \mathcal{O}$ и $\mathcal{U}\mathcal{Y} \neq \mathcal{O}$ $(\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{L}'; \mathcal{U} \in \tilde{\mathcal{L}}')$, то $\mathcal{X}\mathcal{U}\mathcal{Y} \neq \mathcal{O}$;

4) если $\mathcal{U}\mathcal{X}\mathcal{V} \neq \mathcal{O}$ $(\mathcal{X} \in \mathcal{L}'; \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tilde{\mathcal{L}}')$, то $\mathcal{U}\mathcal{X}\mathcal{V} = \mathcal{X}\mathcal{V}$;

5) если $\tilde{\mathcal{L}}' = \mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$, $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2 = \emptyset$, то в $\mathcal{L}'$ найдется такой элемент $\mathcal{X}$, что $\mathcal{X}^2 = \mathcal{X}$ и для всяких $N_1 \in \mathcal{N}_1$ и $N_2 \in \mathcal{N}_2$ выполняется

$$\mathcal{X}N_1 = N_1\mathcal{X} = N_1, \quad \mathcal{X}N_2 = N_2\mathcal{X} = \mathcal{O}$$

По самому характеру этих свойств видно, что во всякой полугруппе $\mathcal{A}$, изоморфной с некоторой $\mathcal{L}(\Omega, \Sigma)$, ее подмножество $\tilde{\mathcal{A}}$ будет обладать указанными свойствами.

Доказано, что имеет место и обратное. Если в некоторой полугруппе с нулем $\mathcal{A}$ ее подмножество $\tilde{\mathcal{A}}$ обладает свойством I)-5), то $\mathcal{A}$ изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы $\mathcal{L}(\Omega, \Sigma)$.

I0°. При рассмотрении полугруппы эндоморфизмов $\mathcal{L}(\Omega, \Sigma)$

с конкретной точки зрения соответствующее условие, естественно, оказывается проще.

Пусть $\mathcal{A}$ есть полугруппа преобразований некоторого множества Ω. Для того, чтобы в Ω существовала такая совокупность отношений Σ, при которой $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\Omega, \Sigma)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\Omega' \subset \Omega$ полугруппе $\mathcal{A}$ принадлежало такое преобразование $T_{\Omega'}$, что $\Pi_1 T_{\Omega'} = \Omega'$ и $T_{\Omega'} \xi = \xi$ для всякого $\xi \in \Omega'$

II^0. Из различных систем (Ω, Σ) больше всего до сих пор рассматривались такие, у которых Σ состоит из одного бинарного отношения (графы).

Полугруппы полных эндоморфизмов у таких систем могут быть весьма разнообразны. Например и в случае тождественного отношения ($\alpha \sim \beta$ лишь при $\alpha = \beta$), и в случае универсального отношения ($\alpha \sim \beta$ для любых элементов множества) полугруппа всех полных эндоморфизмов состоит, очевидно, из всех преобразований множества Ω.

На противоположном крае находятся такие бинарные отношения, относительно которых лишь тождественное преобразование является эндоморфизмом. Что такие бинарные отношения существуют во всяком множестве было доказано в работе P. Vopěnka, A. Pultr, Z. Hedrlín [2]

I2^0. В совместных работах Z. Hedrlín'a и A. Pultr'a [3] и [4] задачи, рассмотренные в I0^0 для полугрупп полных эндоморфизмов, были решены для систем, обладающих одним бинарным отношением.

Пусть $\mathcal{A}$ полугруппа преобразований множества Ω, со-

держащая тождественное преобразование. Во множестве Ω всегда найдется такое бинарное отношение Φ, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}_0(\Omega, \Phi)$.

Так как всякая полугруппа с единицей может быть изоморфно представлена преобразованиями, так чтобы образ единицы был тождественным преобразованием, то из указанного результата вытекает следующее.

Для полугруппы $\mathcal{A}$ тогда и только тогда найдется такое множество Ω с бинарным отношением Φ, что $\mathcal{A}$ изоморфна полугруппе $\mathcal{B}_0(\Omega, \Phi)$, когда $\mathcal{A}$ обладает единицей.

Надо отметить, что во избежание некоторых теоретико-множественных трудностей, авторы ограничивают указанные результаты в отношении мощностей рассматриваемых множеств.

13°. Если ограничиваться бинарными отношениями, обладающими теми или иными дополнительными свойствами, то класс полугрупп, изоморфных их полугруппам эндоморфизмов, естественно, сузится, появятся некие дополнительные условия, которым должны удовлетворять полугруппы.

Для случая, когда бинарное отношение должно быть рефлексивно и транзитивно, такие условия были получены Л.Б.Шнеперманом [5]. Особо выделены им случаи упорядоченности, структуры и др. Условия, полученные Л.Б.Шнеперманом по своему типу близки к условиям плотной вложенности и налагаются на минимальный двусторонний идеал полугруппы.

14°. Системы, заданные одним бинарным отношением, при очень широких ограничениях могут быть охарактеризованы через те или иные полугруппы эндоморфизмов.

Пусть Φ_1 бинарное отношение во множестве Ω_1, а Φ_2

– во множестве Ω_2. Будем говорить, что системы (Ω_1, Φ_1) и (Ω_2, Φ_2) отличаются несущественно, если существует такое взаимно однозначное соответствие $\leftrightarrow$ между элементами Ω_1 и элементами Ω_2, что имеет место одно из двух:

1) из $(\alpha_1, \beta_1) \in \Phi_1$ для $\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_1$ и $\beta_2 \leftrightarrow \beta_1$ следует $(\alpha_2, \beta_2) \in \Phi_2$, и наоборот;

2) из $(\alpha_1, \beta_1) \in \Phi_1$ для $\alpha_2 \leftrightarrow \alpha_1$ и $\beta_2 \leftrightarrow \beta_1$ следует $(\beta_2, \alpha_2) \in \Phi_2$, и наоборот.

Л.М.Глускиным [6] было доказано, что если бинарное отношение Φ_1 в системе (Ω_1, Φ_1) рефлексивно и транзитивно, то из изоморфизма полугрупп $\mathcal{D}_0(\Omega_1, \Phi_1)$ и $\mathcal{D}_0(\Omega_2, \Phi_2)$ следует, что системы (Ω_1, Φ_1) и (Ω_2, Φ_2) отличаются несущественно. Исключение составляет лишь один тривиальный случай, указанный в 10^0.

15^0. Что касается полугрупп всех эндоморфизмов, то они характеризуют еще более широкий класс систем с одним бинарным отношением.

Пусть бинарное отношение Φ_1 в множестве Ω_1 рефлексивно. Л.М.Попова [7] показала, что, за исключением уже упомянутого выше тривиального случая, из изоморфизма полугрупп $\mathcal{D}(\Omega_1, \Phi_1)$ и $\mathcal{D}(\Omega_2, \Phi_2)$ следует, что системы (Ω_1, Φ_1) и (Ω_2, Φ_2) отличаются несущественно.

Интересно отметить, что, как показывают примеры, при отказе от требования транзитивности бинарного отношения аналогичный результат для полугрупп полных эндоморфизмов перестает быть справедливым.

16^0. Как самостоятельный объект исследований полугруппы

$\mathcal{L}(\Omega,\Phi)$ и $\mathcal{L}_0(\Omega,\Phi)$ наиболее естественны и заслуживают главного внимания среди различных полугрупп эндоморфизмов. Однако, если рассматривать полугруппы эндоморфизмов как орудие изучения системы (Ω,Φ), как некую характеристику ее, то $\mathcal{L}(\Omega,\Phi)$ и $\mathcal{L}_0(\Omega,\Phi)$ окажутся далеко не самыми подходящими с этой точки зрения. Оказывается возможным обнаружить меньшие по составу и более просто устроенные полугруппы эндоморфизмов, которые в известных случаях могут характеризовать систему (Ω,Φ) не хуже, чем полугруппы $\mathcal{L}(\Omega,\Phi)$ или $\mathcal{L}_0(\Omega,\Phi)$.

Это обстоятельство было отмечено уже в самых первых работах по эндоморфизмам. Так в своей упомянутой уже работе [6] Л.М.Глускин показал, что результат, сформулированный в I4°, будет справедлив, если вместо полугруппы всех полных эндоморфизмов $\mathcal{L}_0(\Omega,\Phi)$, взять ее подполугруппу $\mathcal{L}_0^{(m)}(\Omega,\Phi)$, состоящую лишь из тех полных эндоморфизмов χ, у которых $\chi\Omega$ по мощности меньше m (здесь m - любое кардинальное число, большее двух). Аналогично обстоит дело и с результатами Л.М.Поповой [7], указанными в I5°.

I7°. Оказалось, что в ряде случаев можно пойти еще дальше на пути ограничения типов эндоморфизмов, имея в виду указанную цель.

Пусть Ω такое упорядоченное множество (т.е. множество с рефлективным, транзитивным и антисимметричным бинарным отношением Φ), в котором имеется универсально максимальный элемент, т.е. такой элемент ε, что $\xi \leq \varepsilon$ имеет место для всех $\xi \in \Omega$. Е.С.Ляпин [8] рассмотрел совокупность

$\mathcal{L}_1(\Omega, \Phi)$ таких его полных эндоморфизмов $S_{\alpha\beta}$ (где $\alpha \geq \beta$; $\alpha, \beta \in \Omega$), что $S_{\alpha\beta}\xi = \alpha$, если $\xi \leq \beta$ и $S_{\alpha\beta}\xi = \xi$ для прочих $\xi \in \Omega$.

Оказалось, что полугруппа $\mathcal{L}_1(\Omega, \Phi)$ очень просто устроена. Нетрудно получить абстрактную характеристику класса полугрупп $\mathcal{L}_1(\Omega, \Phi)$. В полугруппе $\mathcal{L}_1(\Omega, \Phi)$ существует единственное неприводимое порождающее множество. Для этого порождающего множества в работе Е.С.Ляпина [8] построена определяющая совокупность отношений.

При этом имеет место следующее обстоятельство. Два упорядоченных множества Ω и Ω', обладающие каждое универсально максимальным элементом, изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полугруппы $\mathcal{L}_1(\Omega, \Phi)$ и $\mathcal{L}_1(\Omega', \Phi')$.

I8°. Указанный в I7° результат позволял обнаружить новый подход к изучению упорядоченных множеств. Дело в том, что, как показал А.Е.Евсеев [9], для довольно широкого класса упорядоченных множеств Ω полугруппа эндоморфизмов $\mathcal{L}_1(\Omega)$ оказывается определяемой структурой своих подполугрупп.

Для произвольного упорядоченного множества Ω строится упорядоченное множество $\widetilde{\Omega}$, получаемое добавлением к нему новых элементов λ_1, λ_2, λ_3 и соотношений $\lambda_1 \leq \xi$, $\lambda_2 \geq \xi$ для всех $\xi \in \widetilde{\Omega}$ и $\lambda_3 \geq \xi$ для всех $\xi \in \widetilde{\Omega}$, кроме $\xi = \lambda_2$. Упорядоченному множеству Ω сопоставим полугруппу эндоморфизмов $\mathcal{L}_1(\widetilde{\Omega}, \Phi)$, а последней - упорядоченное множество $\mathcal{L}_1^*(\Omega)$ всех ее подполугрупп (в том числе и пустой). $\mathcal{L}_1^*(\Omega)$ является структурой. Оказывается, что структуры $\mathcal{L}_1^*(\Omega)$ и $\mathcal{L}_1^*(\Omega')$, построенные для двух

упорядоченных множеств, изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны (или антиизоморфны) упорядоченные множества Ω и Ω'.

19°. Можно провести построения, сходные с указанными в 17°, для общих упорядоченных множеств, не требуя существования универсально максимальных элементов. Для произвольного упорядоченного множества Ω Л.Д.Зыбина [10] рассматривает полные эндоморфизмы $S_{\alpha\beta\gamma}$ (где $\alpha \geq \beta \geq \gamma$), для которых $S_{\alpha\beta\gamma}\xi = \beta$, если $\xi \leq \gamma$, и $S_{\alpha\beta\gamma}\xi = \alpha$ для прочих $\xi \in \Omega$. Оказалось, что, как и в 17°, полугруппа таких эндоморфизмов $S_{\alpha\beta\gamma}$ характеризует упорядоченное множество с точностью до изоморфизма.

20°. По линии сопоставления свойств систем со свойствами полугрупп их эндоморфизмов исследования для полугруппы полных эндоморфизмов были проведены А.Я.Айзенштат [11]. Оказалось, что из всех упорядоченных множеств только для конечных линейно упорядоченных множеств полугруппа полных эндоморфизмов $\mathcal{L}_0$ не имеет других гомоморфизмов, кроме идеальных и изоморфизмов.

Ряд связей между свойствами бинарных отношений и свойствами полугрупп всех эндоморфизмов $\mathcal{L}$ или некоторых их более просто устроенных подполугрупп установила Л.М.Попова в работах [7] и [12]. А.М.Калманович [13] рассматривал эндоморфизмы, осуществляющие взаимно однозначные преобразования и многозначные эндоморфизмы.

Литература.

I. Е.С.Ляпин, Абстрактная характеристика класса полугрупп эндоморфизмов систем общего вида, Матем.сб.,1966, 70, № 2, 172-179.

2. Vopěnka P.,Pultz A., Herdlin Z., A rigid relation exist on any set, Comment. math. Univ.carolinae, 1965,6, N 2, 149-155.

3. Herdlin Z., Pultz A. Relations (Graphs) with giken finitely generated semigroups, Mon.f.Mathem., 1964, 68, N 3, 213-217.

4. Pultz A., Herdlin Z. Relations (Graphs) with giken infinite semigroups. Mon.f.Mathem.,1964,68,N 5,421-425.

5. Л.Б.Шнеперман, Полугруппы эндоморфизмов квази-упорядоченных множеств, Уч.зап. Ленинградского пед.ин-та им А.И.Герцена, 1962, 238, 21-37.

6. Л.М.Глускин, Полугруппы изотонных преобразований, УМН, 1961, XУI, 5(101), 157-162.

7. Л.М.Попова, Полугруппы частичных эндоморфизмов множества с отношением, Сиб. Матем. ж., 1963, IУ, № 2, 309-317.

8. Е.С.Ляпин, Некоторые эндоморфизмы упорядоченного множества, Изв.вузов (математика), 1962, № 2 (27), 87-94.

9. А.Е.Евсеев, Структурные свойства одной полугруппы эндоморфизмов упорядоченного множества, Матем.сб., 1964, 65(107), № 2, 153-171.

10. Л.Д.Зыбина, О соотношениях, определяющих упорядоченность некоторых эндоморфизмов упорядоченных множеств, Уч.зап. Ленинградского пед. ин-та им. А.И.Герцена, 1965, 274, 106-121.

II. А.Я.Айзенштат, О гомоморфизмах полугрупп эндоморфизмов упорядоченных множеств, Вопросы современного анализа и алгебры, Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та им. А.И.Герцена, 1962, 238, 38-48.

I2. Л.М.Попова, Об одной полугруппе частичных эндоморфизмов множества с отношением, Вопросы современного анализа и алгебры, Уч. зап. Ленинградского пед. ин-та им. А.И.Герцена, 1962, 238, 49-77.

I3. А.М.Калманович, Півгрупи часткових ендоморфізмів графа, Доповіді Ак.Н. УРСР, 1965, 147-150.

ОБ ИДЕАЛЬНЫХ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЯХ ПОЛУГРУД

Мустафаев Л.Г. (Баку)

Настоящее сообщение посвящено изучению идеальных эквивалентностей Грина (см. [4]) в полугрудах.

§ I. Полугрудой (см. [I], [2]) называется множество Ω, в котором определена тернарная алгебраическая операция, ставящая в соответствие каждой тройке элементов s_1, s_2, s_3, $\in S$ элемент $[s_1 s_2 s_3] \in S$ и удовлетворяющая следующему условию для любых $s_i \in S$ ($i = 1,\dots,5$)

$$[[s_1 s_2 s_3] s_4 s_5] = [s_1 [s_4 s_3 s_2] s_5] = [s_1 s_2 [s_3 s_4 s_5]] \qquad (1)$$

Непустое подмножество A полугруды S называется ее левым (соответственно, правым, латеральным) идеалом, если $[SSA] \subseteq A$ (соответственно, $[ASS] \subseteq A$, $[SAS] \subseteq A$). Если подмножество A полугруды S является одновременно и левым и правым идеалом, то оно называется двусторонним идеалом полугруды S. Двусторонний идеал, являющийся и латеральным идеалом, называется просто идеалом. Два идеала T_1 и T_2 полугруды S ($T_1 \neq T_2$) назовем соседними, если $T_2 \subset T_1$, причем в S не существует такого идеала T, что $T_2 \subset T \subset T_1$, $T_2 \neq T \neq T_1$

Бинарным отношением во множестве S называется произвольное подмножество декартова произведения $S \times S$ (см. [3], [5]). Симметричное, рефлексивное и транзитивное бинарное отношение называется эквивалентностью.

Пусть a , b - произвольные элементы полугруды S .

Введем в полугруппе S следующие идеальные эквивалентности:*

$$
\begin{aligned}
&(a,b)\in l \longleftrightarrow \{a\}\cup[Sa]=\{b\}\cup[Sb],\\
&(a,b)\in \sigma \longleftrightarrow \{a\}\cup[aS]\cup[SaS]=b\cup[bS]\cup[SbS],\\
&(a,b)\in r \longleftrightarrow \{a\}\cup[aS] =\{b\}\cup[bS],\\
&(a,b)\in \varrho \longleftrightarrow \{a\}\cup[aS]\cup[Sa]\cup[SaS]=\\
&\qquad =\{b\}\cup[bS]\cup[Sb]\cup[SbS],\\
&(a,b)\in f \longleftrightarrow \{a\}\cup[aS]\cup[Sa]\cup[SaS]\cup[SaS]=\\
&\qquad =\{b\}\cup[bS]\cup[Sb]\cup[SbS]\cup[SbS].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Иначе говоря, $(a,b)\in l$ (соответственно σ, r, ϱ, f) тогда и только тогда, когда элементы a и b порождают один и тот же главный левый (соответственно главный латеральный, главный правый, главный двусторонний, главный) идеал полугруппы S. Если $(a,b)\in l$ (соответственно σ, r, ϱ, f), то элементы a и b будем называть лево-идеально (соответственно латерально-идеально, право-идеально, двусторонне-идеально, идеально) эквивалентными. В дальнейшем через L, Σ, R и F будем обозначать классы, на которые полугруппа S разбивается эквивалентностями l, σ, r и f соответственно.

Произведением $\sigma_1\circ\sigma_2$ бинарных отношений $\sigma_1,\sigma_2\in A\times A$ называется следующее бинарное отношение $\sigma\in A\times A$: $(x,y)\in\sigma$ тогда и только тогда, когда найдется такой элемент $z\in A$, что $(x,z)\in\sigma_1$ и $(z,y)\in\sigma_2$. Обозначим через α произведение $l\circ\sigma\circ r$. Следуя Л.М.Глускину (2), полугруппу без

---

* Символ "$\longleftrightarrow$" читается как "тогда и только тогда, когда".

собственных идеалов назовем i-простой.

§ 2. Теорема I. В произвольной полугруде S бинарное отношение $\alpha = l \circ r$ есть отношение эквивалентности. Доказательству этой теоремы предпошлем следующие три леммы.

Лемма I. Если $a_1 \in L_1 \cap R_1$ и $a_2 \in L_2 \cap R_2$, где $a_1, a_2 \in S$, то

$$L_1 \cap R_2 \neq \phi \longleftrightarrow L_2 \cap R_1 \neq \phi.$$

Действительно, пусть $z \in L_1 \cap R_2$. Если $z \neq a_1$ и $z \neq a_2$, то, согласно (2), в полугруде S должны найтись такие $x_i, y_i (i = \overline{1,4})$, что

$$z = [x_1 y_1 a_1] \wedge [a_2 x_4 y_4],\ a_1 = [x_2 y_2 z],\ a_2 = [z x_3 y_3]$$

Обозначим $x = [a_1 x_3 y_3]$. Так как

$$x = [[x_2 y_2 z] x_3 y_3] = [x_2 y_2 [z x_3 y_3]] = [x_2 y_2 a_2],$$

$$a_1 = [x_2 y_2 z] = [x_2 y_2 [a_2 x_4 y_4]] = [[x_2 y_2 a_2] x_4 y_4] = [x x_4 y_4]$$

то элементы a_1 и x содержатся в одном и том же r-классе, т.е. $x \in R_1$. Аналогично из

$$a_2 = [z x_3 y_3] = [x_1 y_1 [a_1 x_3 y_3]] = [x_1 y_1 x] \quad \text{и из } [x_2 y_2 a_2] = x$$

следует, что $x \in L_2$. Таким образом в рассматриваемом случае $x \in R_1 \cap L_2$. В случае, когда $z = a_1$, мы имеем $a_1 \in R_2$, т.е. $R_1 = R_2$ и поэтому $L_2 \cap R_1 = L_2 \cap R_2 \ni a_2$. Аналогично при $z = a_2$ $L_2 \cap R_1 = L_1 \cap R_1 \ni a_1$. Обратная импликация доказывается аналогично.

Доказанная лемма означает перестановочность эквивалентностей l и r.

Лемма 2. Если $a_1 \in L_1 \cap \Sigma_1$ и $a_2 \in L_2 \cap \Sigma_2$, где $a_1, a_2 \in S$, то

$$L_1 \cap \Sigma_2 \neq \phi \longleftrightarrow L_2 \cap \Sigma_1 \neq \phi$$

Пусть $z \in L_1 \cap \Sigma_2$. Согласно (2), здесь возможны следующие четыре случая.

а) В полугруде S найдутся такие элементы $x_i (i=1,\dots,8)$, что

$$z = [x_1 x_2 a_1] \wedge [x_3 a_2 x_4],\quad a_1 = [x_5 x_6 z],\quad a_2 = [x_7 z x_8].$$

из последних равенств находим:

$$a_1 = [x_5 x_6 z] = [x_5 x_6 [x_3 a_2 x_4]] = [[x_5 x_6 x_3] a_2 x_4],$$
$$a_2 = [x_7 z x_8] = [x_7 [x_1 x_2 a_1] x_8] = [x_7 a_1 [x_2 x_1 x_8]].$$

А это означает, что $(a_1, a_2) \in \delta$, т.е. $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

б) В S найдутся такие элементы y_i $(i=1,\dots,12)$, что

$$z = [y_1 y_2 a_1] \wedge [y_3 y_4 a_2 y_5 y_6],\quad a_1 = [y_7 y_8 z],\quad a_2 = [y_9 y_{10} z y_{11} y_{12}].$$

Из этих равенств следует, что

$$a_1 = [y_7 y_8 z] = [y_7 y_8 y_3 y_4 a_2 y_5 y_6],$$
$$a_2 = [y_9 y_{10} z y_{11} y_{12}] = [y_9 y_{10} y_1 y_2 a_1 y_{11} y_{12}].$$

Отсюда $(a_1, a_2) \in \delta$, т.е. $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

в) В полугруде S найдутся такие элементы $t_i (i=1,\dots 10)$ что $z = [t_1 t_2 a_1] \wedge [t_3 a_2 t_4]$, $a_1 = [t_5 t_6 z]$, $a_2 = [t_7 t_8 z t_9 t_{10}]$

Тогда как в пунктах а) и б) легко получить, что $(a_1, a_2) \in \delta$ т.е. $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

г) В полугруде S найдутся такие элементы $g_i (i=1,\dots 10)$ что $z = [g_1 g_2 a_1] \wedge [g_3 g_4 a_2 g_5 g_6]$, $a_1 = [g_7 g_8 z]$, $a_2 = [g_9 z g_{10}]$.

В этом случае, как и выше, заключаем, что $\Sigma_1 = \Sigma_2$. Итак, $L_1 \cap \Sigma_2 \neq \phi \longleftrightarrow L_2 \cap \Sigma_1 \neq \phi$. Обратная импликация доказывается аналогично.

Этой леммой доказана переостановочность эквивалентнос-

тей l и σ.

Лемма 3. Если $a_1 \in R_1 \cap \Sigma_1$ и $a_2 \in R_2 \cap \Sigma_2$, где $a_1, a_2 \in S$, то

$$R_1 \cap \Sigma_2 \neq \phi \longleftarrow R_2 \cap \Sigma_1 \neq \phi.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 2.

Из лемм I, 2 и 3 следует, что в произведении $\alpha = l \circ \sigma \circ r$ эквивалентности l, σ и r попарно перестановочны, а это означает, что бинарное отношение α является отношением эквивалентности.

Теорема 2. В любой полугруппе S эквивалентность α и латерально-идеальная эквивалентность σ совпадают.

Доказательство. Согласно определению эквивалентности $\alpha, \sigma \subseteq \alpha$. Пусть теперь $(a,b) \in \alpha$ $(a,b \in S)$. Тогда в полугруппе S найдутся такие x и y, что $(a,x) \in l$, $(x,y) \in \sigma$ и $(y,b) \in r$. Отсюда, в силу (2), при некоторых $u_i, v_i \in S$

$$a = [x u_1 v_1],\ x = [y_2 y v_2] \vee [u_3 u_4 y v_3 v_4],\ y = [u_5 v_5 b].$$

Пусть $x = [u_1 y v_2]$. Тогда

$$a = [x u_1 v_1] = [u_2 y v_2 u_1 v_1] = [u_2 b v_5 u_5 v_2 u_1 v_1] = [u_2 b t],$$

где $t = [v_5 u_5 v_2 u_1 v_1]$. Если же $x = [u_3 u_4 y v_3 v_4]$, то

$$a = [x u_1 v_1] = [u_3 u_4 y v_3 v_4 u_1 v_1] = [u_3 u_4 u_5 v_5 b v_3 v_4 u_1 v_1].$$

Аналогично можно показать, что при некоторых $t_i, q_i \in S$

$$b = [t_1 a q_1] \vee [t_2 t_3 a q_2 q_3]$$

А это означает, что $(a,b) \in \sigma$, т.е. $\alpha \subseteq \sigma$

§ 3. Перейдем теперь к изучению строения произвольного регулярного $\mathcal{L}$-класса полугруппы S. Элемент a полугруппы

S назовем регулярным (см. [6]), если в S найдется такой элемент x, что $a=[axa]$. ρ-класс F, все элементы которого регулярны, назовем регулярным ρ-классом.

Теорема 3. Произвольная i-простая полугруда S без нуля содержит не более двух ρ-классов.

Доказательство. Пусть A_1 есть некоторый ρ-класс полугруды S (см. §I) и $a_1 \in A_1$. Обозначим через $\rho[a_1]$ главный двусторонний идеал полугруды S, порожденный элементом a_1, т.е.

$$\rho[a_1] = \{a_1\} \cup [a_1 SS] \cup [SSa_1] \cup [SSa_1 SS]$$

Пусть $B_1 = \rho[a_1] \setminus A_1$. Если $B_1 \neq \varnothing$, то B_1 будет двусторонним идеалом полугруды S. Действительно, пусть $[SSB_1] \not\subseteq B_1$. Тогда в $[SSB_1]$ найдется элемент $z \in S$ такой, что $z \notin B_1$. При некоторых $u, v \in S$ и $t \in B_1$ $z=[uvt]$. Так как $z=[uvt] \in [SS\rho[a_1]] \subseteq \rho[a_1]$ и $z \notin \rho[a_1] \setminus A_1$, то $z \in A_1$. Согласно (2), $\rho[a_1] = \rho[z]$. Но тогда, с одной стороны,

$$\begin{aligned}\rho[a_1] &= a_1 \cup [a_1 SS] \cup [SSa_1] \cup [SSa_1 SS] = \\ &= z \cup [zSS] \cup [SSz] \cup [SSzSS] \subseteq \\ &\subseteq t \cup [SSt] \cup [tSS] \cup [SStSS] = \rho[t]\end{aligned}$$

и, с другой стороны,

$$\begin{aligned}\rho[t] &= t \cup [SSt] \cup [tSS] \cup [SStSS] \subseteq \\ &\subseteq B_1 \cup [SSB_1] \cup [B_1 SS] \cup [SSB_1 SS] \subseteq \\ &\subseteq \rho[a_1] \cup [SS\rho[a_1]] \cup [\rho[a_1]SS] \cup [SS\rho[a_1]SS] \subseteq \rho[a]\end{aligned}$$

Однако равенство $\rho[a_1] = \rho[t]$ невозможно, так как $a_1 \in A_1$, $t \notin A_1$

Мы показали, что $[S S B_1] \subseteq B_1$, а это означает, что B_1 есть левый идеал полугруппы S. Аналогично можно показать, что B_1 есть правый идеал полугруппы S. Так как полугруппа S не содержит собственных идеалов, то

$$S = B_1 \cup [SB_1, S] \cup \rho[a_1] \cup [S \rho[a_1] S].$$

Элемент a_1 полугруппы S не принадлежит B_1, поэтому $a_1 \in [SB_1, S]$ и, следовательно, $[S\rho[a_1]S] \subseteq B_1$. Тогда $\rho[a_1] \setminus A_1 = S \setminus A_1$. Отсюда следует, что $S = \rho[a_1]$. Если же $B_1 = \phi$, то $\rho[a_1] = A_1$.

Пусть теперь $a_i \in A_i$ ($i = 1,2,3$), где A_i суть некоторые ρ-классы полугруппы S, а $B_i = \rho[a_i] \setminus A_i$. Тогда

$$B_i \neq \phi \longrightarrow S = \rho[a_i]$$
$$B_i = \phi \longrightarrow A_i = \rho[a_i]$$

Отсюда следует, что полугруппа S содержит не более двух ρ-классов.

Теорема 4. Произвольная i-простая полугруппа S с нулем содержит не более двух ненулевых ρ-классов.

Доказательство. Пусть A_1 есть некоторый ненулевой ρ-класс полугруппы S и $a_1 \in A_1$. Тогда множество $B_1 = \rho[a_1] \setminus A_1$ не может быть пустым, т.к. иначе A_1 оказалось бы нулевым ρ-классом, что противоречило бы предположению относительно A_1. Рассмотрим два случая: 1) $B_1 = \{0\}$ и 2) B_1 содержит элементы, отличные от нуля.

Пусть $B_1 = \{0\}$. Тогда $A_1^* = A_1 \cup \{0\}$ будет двусторонним идеалом полугруппы S. Если теперь A_2 – другой ненулевой

ρ-класс полугруды S и $B_2=\rho[a_2]\setminus A_2=\{0\}$, где $a_2\in A_2$, то $A_2^*=A_2\cup\{0\}$ будет опять двусторонним идеалом полугруды S. Тогда в силу того, что S не содержит собственных идеалов, находим:

$$S=A_1^*\cup[SA_1^*S]\wedge A_2^*\cup[SA_2^*S].$$

Очевидно, $A_1^*\cup A_2^*\subseteq S$. Но с другой стороны

$$S=A_1^*\cup[SA_1^*S]\subseteq[SSA_2^*SS]\cup A_1^*\subseteq A_1^*\cup A_2^*.$$

Поэтому $S=A_1^*\cup A_2^*=A_1\cup A_2\cup\{0\}$.

Пусть теперь $B_1\neq\{0\}$. Тогда, как и в теореме 3, легко показать, что $S=\rho[a_1]$.

Определение. Пусть F есть некоторый ρ-класс полугруды S. Идеальным фактором, соответствующим F, назовем следующую полугруду F^*:

а) $F^*=F$, если F есть подполугруда полугруды S,

б) если F не является подполугрудой полугруды S, то F^* состоит из всех элементов F и символа 0^*. Если при этом в S для $a,b,c,d\in F$ имеет место $[abc]=d$, то и в F^* полагаем $(abc)=d$. Во всех остальных случаях полагаем $(xyz)=0^*$ $(x,y,z\in F)$. Легко проверить, что условие (I) в F^* выполняется.

Теорема 5. Пусть F^* есть идеальный фактор полугруды S, соответствующий регулярному ρ-классу. Если $F^*=F$, то F^* есть полугруда, не имеющая собственных идеалов. Если $F^*=F\cup\{0^*\}$, то F^* есть полугруда, не имеющая иных собственных идеалов, кроме нулевого идеала 0^*.

Доказательство. I) Пусть $F^*=F$. Можно показать, что

$F = T_1 \setminus T_2$, где или T_1 и T_2 – соседние идеалы полугруппы S, или T_2 пустое множество, а T_1 – минимальный идеал полугруппы S. Предположим, что $\mathfrak{M}$ – идеал полугруппы F. Рассмотрим следующее множество

$$\mathfrak{F} = \{z \in [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2 \mid [SzS] \subseteq [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2\}$$

Очевидно, что $\mathfrak{F}$ есть подполугруппа полугруппы S. Более того, $\mathfrak{F}$ – идеал полугруппы S. Действительно, пусть $f \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$[S[SSf]S] \subseteq [Sf S] \subseteq [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2,$$
$$[S[fSS]S] \subseteq [SfS] \subseteq [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2,$$
$$[SSfSS] \subseteq [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2$$

Далее, справедливы включения $T_2 \subset \mathfrak{F} \subset [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2 \subseteq T_1$. Кроме того, $\mathfrak{F} \neq T_2$, так как в $\mathfrak{F}$ входят элементы из $[T_1 \mathfrak{M} T_1]$, не входящие в T_2. Поэтому $\mathfrak{F} = T_1 = F \cup T_2 = [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2 = [[T_2 \cup F] \mathfrak{M} [T_2 \cup F]] \cup T_2 \subseteq \mathfrak{M} \cup T_2$. Отсюда $\mathfrak{F} = T_1 = F \cup T_2 \subseteq \mathfrak{M} \cup T_2$, т.е. $F \subseteq \mathfrak{M}$.

2) Пусть $F^* = F \cup \{0^*\}$. Как и в первой части можно положить $F = T_1 \setminus T_2$. Пусть, далее, $\mathfrak{M}^*$ – идеал полугруппы F^*, обладающий ненулевыми элементами. Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество всех элементов из S, входящих в $\mathfrak{M}^*$. $\mathfrak{M}$ не пусто в силу предположения. Пусть $a \in \mathfrak{M}$ и $\bar{a}$ регулярно сопряжен с a. Тогда $a = [a\bar{a}a]$, $\bar{a} = [\bar{a}a\bar{a}]$ и, следовательно, $a, \bar{a} \in F$. Поэтому $a = (a\bar{a}a)$, $\bar{a} = (\bar{a}a\bar{a})$. Отсюда $\bar{a} \in \mathfrak{M}$. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{F} = \{z \in [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2 \mid [SzS] \subseteq [T_1 \mathfrak{M} T_1] \cup T_2\}$$

Как и в пункте I) можно показать, что $\mathfrak{F}$ есть идеал полу-

группы S. Далее, справедливы включения $T_2 \subset \mathcal{F} \subset [T_1 \mathfrak{m} T_1] \cup T_2 \subseteq T_1$. Очевидно $\mathcal{F} \neq T_2$, т.к. $a \in \mathcal{F}$, $a \in [T_1 \mathfrak{m} T_1]$ и $a \notin T_2$. Поэтому

$$\mathcal{F} = T_1 = T_2 \cup F = [T_1 \mathfrak{m} T_1] \cup T_2 = [\{T_2 \cup F\} \mathfrak{m} \{T_2 \cup F\}] \cup T_2 \subseteq$$
$$\subseteq [F \mathfrak{m} F] \cup T_2 \subseteq (F^* \mathfrak{m}^* F^*) \setminus \{0^*\} \cup T_2 \subseteq \mathfrak{m} \cup T_2$$

Отсюда следует, что $F \subseteq \mathfrak{m}$ и, следовательно, $F^* \subseteq \mathfrak{m}^*$.

Отметим, что доказательство пункта I) остается верным, когда F есть и нерегулярный $\mathcal{f}$-класс полугруппы S, являющийся подполугруппой.

Теорема 6. Регулярный $\mathcal{f}$-класс произвольной полугруппы S содержит не более двух ρ-классов.

Доказательство. Пусть $\mathcal{f}$-класс F не является подполугруппой. Согласно теореме 5 $F^* = F \cup \{0^*\}$ есть i-простая полугруппа с нулем. Теорема 4 утверждает, что такая полугруппа содержит не более двух ненулевых ρ-классов. Обозначим их через A_1 и A_2. Пусть $a, b \in A_1$. Тогда $(F^* F^* a\, F^* F^*) = (F^* F^* b F^* F^*)$. Отсюда при некоторых $x, y, u, v, x_1, y_1, u_1, v_1 \in F$ имеем

$$\begin{aligned} a &= (xyb uv) = [xyb uv], \\ b &= (x_1 y_1 a u_1 v_1) = [x_1 y_1 a u_1 v_1]. \end{aligned} \qquad (3)$$

Согласно (3), A_1 принадлежит некоторому ρ-классу B_1 полугруппы S. Аналогично, A_2 принадлежит некоторому ρ-классу B_2 полугруппы S. Поэтому $\mathcal{f}$-класс F содержит не более двух ρ-классов.

Теорема 7. В регулярных полугрудах каждый d-класс содержит не более двух ϱ-классов.

Доказательство этой теоремы очевидно, т.к. в регулярных полугрудах эквивалентности d и f совпадают. Остается лишь воспользоваться теоремой 6.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность проф. Л.М.Глускину за постановку задачи и за ценные советы.

Литература

I. В.В.Вагнер, Матем.сб., 1953, 32(74), № 3, 545.

2. Л.М.Глускин, ДАН СССР, 1963, 151, № 3.

3. Е.С.Ляпин, Полугруппы, М., 1960.

4. Green I. On the structure of semi-groups. Ann.Math.(2), 1951, 54.

5. Г.Биркгоф, Теория структур, ИЛ. М., 1952.

6. Л.Г.Мустафаев, Известия АН Азерб. ССР, 1965, 3.

О СТРОЕНИИ ПОЛУГРУППОВЫХ КОЛЕЦ

Потемкин Л.В. (Харьков)

I. До сих пор,(например, в [2] и [3]) изучались полугрупповые кольца над полем. В данной статье полугрупповые кольца над произвольным коммутативным кольцом с единицей рассматриваются для полугрупп, разложимых в коммутативные связки своих подполугрупп. В пунктах 2-6 для полугрупп,разложимых в так называемые Т-связки своих подполугрупп,получено разложение полугрупповых колец в прямые суммы идеалов. На основании этих результатов в п.п. 7-9 изучается строение полугрупповых колец конечных коммутативных полугрупп. Все не определенные ниже термины можно найти, например, в [I] и [5].

2. Полугруппа S называется связкой своих подполугрупп S_λ, S_μ,..., если все эти подполугруппы попарно не пересекаются, их объединение равно S, и если для каждой пары S_λ, S_μ найдется такая подполугруппа S_σ, что $S_\lambda S_\mu \subseteq S_\sigma$. Связка называется коммутативной, если из $S_\lambda S_\mu \subseteq S_\sigma$ всегда вытекает $S_\mu S_\lambda \subseteq S_\sigma$. Если полугруппа S разлагается в коммутативную связку своих подполугрупп S_λ, S_μ,..., то определим умножение индексов, полагая $\lambda\mu = \sigma$ тогда и только тогда, когда $S_\lambda S_\mu \subseteq S_\sigma$. Относительно этого действия множество L всех индексов λ, μ,... образует коммутативную полугруппу идемпотентов (полуструктуру). Отношение „$\leq$" ($\mu \leq \lambda$ тогда и только тогда, когда $\lambda\mu = \mu$) является, как известно, частичной упорядо-

ченностью на полуструктуре L.

Предположим, что при любых λ, μ $(\mu \leq \lambda)$ существует гомоморфизм φ_μ^λ полугруппы S_λ в полугруппу S_μ, причем: 1) φ_ν^λ есть тождественное преобразование полугруппы S_λ, 2) система всех таких гомоморфизмов транзитивна, т.е. если $\nu \leq \mu \leq \lambda$, то

$$\varphi_\nu^\mu \varphi_\mu^\lambda x_\lambda = \varphi_\nu^\lambda x_\lambda \quad (x_\lambda \in S_\lambda,\ \lambda \in L). \tag{I}$$

Полугруппа S называется Т-связкой своих подполугрупп S_λ $(\lambda \in L)$, если можно построить такую транзитивную систему гомоморфизмов, что действие в полугруппе S выражается формулой:

$$x_\lambda y_\mu = \varphi_{\lambda\mu}^\lambda x_\lambda \cdot \varphi_{\lambda\mu}^\mu y_\mu \quad (x_\lambda \in S_\lambda,\ y_\mu \in S_\mu). \tag{2}$$

Примерами Т-связок являются коммутативные связки групп, изучавшиеся Клиффордом [4], [5], и коммутативные связки полугрупп, каждая из которых содержит единицу и не содержит других идемпотентов [6]. Всякую полугруппу S, разложимую в Т-связку своих подполугрупп, будем называть Т-полугруппой.

3. Всюду в дальнейшем R означает коммутативное кольцо с единицей. Пусть S – некоторая Т-полугруппа. Рассмотрим полугрупповое кольцо RS полугруппы S над кольцом R. Элементами кольца RS являются конечные суммы вида $\sum ax$ $(a \in R, x \in S)$; при этом элементы кольца R считаются перестановочными с элементами полугруппы S, а умножение в кольце RS производится по формуле $\sum ax \cdot \sum by = \sum ab \cdot xy$, где каждое произведение xy заменяется соот-

ветствующим элементом полугруппы S. Все элементы вида $0 \cdot x$ ($x \in S$) отождествляются с одним элементом 0 (нулем кольца RS). Если полугруппа S имеет нуль, то его обычно отождествляют с нулем кольца RS. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, будем писать в таких случаях $R_0 S$ вместо RS. Так как полугруппа S распадается в связку своих подполугрупп S_λ, то кольцо RS распадается в прямую сумму подколец $RS = \sum_{\lambda \in L} \oplus R S_\lambda$, причем $RS_\lambda \cdot RS_\mu \subseteq RS_\sigma$, если $\lambda\mu = \sigma$. Ниже (п.п. 5–6) будет построено другое разложение $RS = \sum \oplus RS'_\lambda$, в котором каждая полугруппа S'_λ изоморфна полугруппе S_λ, и при любых λ, μ ($\lambda \neq \mu$) имеет место равенство $RS'_\lambda \cdot RS'_\mu = 0$.

4. В дальнейшем будем предполагать, что полуструктура L конечна. Тогда в ней существует наименьший элемент ξ. Каждый элемент λ, отличный от ξ, покрывает хотя бы один элемент α (т.е. $\alpha < \lambda$, и не существует элемента μ такого, что $\alpha < \mu < \lambda$). Множество всех элементов $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, покрываемых элементом λ, и всевозможных их произведений образует вместе с λ некоторую структуру L_λ с наибольшим элементом λ, а сами элементы $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ образуют базис по пересечениям (или $\cap$-базис) M_λ этой структуры. Будем говорить, что структура L_λ принадлежит элементу λ. Структура L_ξ, принадлежащая наименьшему элементу ξ, не имеет $\cap$-базиса и состоит из единственного элемента ξ.

Для каждого $x_\lambda \in S_\lambda$ ($\lambda \in L$) обозначим $x_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha x_\lambda = \varphi^\lambda_\lambda x_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha x_\lambda = (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha) x_\lambda$ и будем рассматривать формальные выражения $\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha$, где λ покрывает α. Каждое такое

выражение действует как частичное преобразование в кольце RS с областью определения S_λ. Определим умножение таких выражений, формально раскрывая скобки и полагая

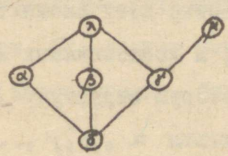
$$\varphi_\alpha^\lambda \varphi_\beta^\mu = \varphi_{\alpha\mu}^\lambda \varphi_{\alpha\beta}^\mu, \quad (\lambda \neq \mu)$$
$$\varphi_\alpha^\lambda \varphi_\beta^\lambda = \varphi_{\alpha\beta}^\lambda. \tag{3}$$

Условимся, что выражение $\varphi_\alpha^\lambda \varphi_\beta^\mu$, примененное к произведению $x_\lambda y_\mu$ ($x_\lambda \in S_\lambda$, $y_\mu \in S_\mu$), означает, что $\varphi_\alpha^\lambda \varphi_\beta^\mu (x_\lambda y_\mu) = \varphi_\alpha^\lambda x_\lambda \cdot \varphi_\beta^\mu y_\mu$. При этом формулы (3) и (4) согласуются с формулами (I) и (2), так как

$$\varphi_\alpha^\lambda \varphi_\beta^\mu (x_\lambda y_\mu) = \varphi_\alpha^\lambda x_\lambda \cdot \varphi_\beta^\mu y_\mu = \varphi_{\alpha\mu}^\alpha \varphi_{\alpha\mu}^\lambda x_\lambda \cdot \varphi_{\beta\mu}^\beta \varphi_{\beta\mu}^\mu y_\mu = \varphi_{\alpha\mu}^\lambda x_\lambda \cdot \varphi_{\alpha\mu}^\mu y_\mu,$$

$$\varphi_\alpha^\lambda \varphi_\beta^\lambda (x_\lambda y_\lambda) = \varphi_\alpha^\lambda x_\lambda \cdot \varphi_\beta^\lambda y_\lambda = \varphi_{\alpha\beta}^\lambda x_\lambda \cdot \varphi_{\alpha\beta}^\lambda y_\lambda = \varphi_{\alpha\beta}^\lambda (x_\lambda y_\lambda).$$

Пример. Для полуструктуры с диаграммой



имеем

$$(\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda)(\varphi_\mu^\mu - \varphi_\gamma^\mu) = \varphi_{\lambda\mu}^\lambda \varphi_{\lambda\mu}^\mu - \varphi_{\alpha\mu}^\lambda \varphi_{\alpha\mu}^\mu - \varphi_{\lambda\gamma}^\lambda \varphi_{\lambda\gamma}^\mu + \varphi_{\alpha\gamma}^\lambda \varphi_{\alpha\gamma}^\mu =$$
$$= \varphi_\gamma^\lambda \varphi_\delta^\mu - \varphi_\delta^\lambda \varphi_\delta^\mu - \varphi_\gamma^\lambda \varphi_\delta^\mu + \varphi_\delta^\lambda \varphi_\delta^\mu = 0,$$

так как $\lambda\mu = \lambda\gamma = \gamma$, $\alpha\mu = \alpha\gamma = \delta$. То, что это произведение оказалось равным нулю, означает равенство нулю произведения элементов $(\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda) x_\lambda$ и $(\varphi_\kappa^\kappa - \varphi_\delta^\kappa) y_\kappa$ кольца RS.

Для этой же полуструктуры

$$(\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda)(\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\beta^\lambda)(\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\gamma^\lambda) =$$
$$= \varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda - \varphi_\beta^\lambda - \varphi_\delta^\lambda + \varphi_{\alpha\beta}^\lambda + \varphi_{\alpha\gamma}^\lambda + \varphi_{\beta\gamma}^\lambda - \varphi_{\alpha\beta\gamma}^\lambda =$$
$$= \varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda - \varphi_\beta^\lambda - \varphi_\gamma^\lambda + \varphi_\delta^\lambda + \varphi_\delta^\lambda + \varphi_\delta^\lambda - \varphi_\delta^\lambda =$$
$$= \varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda - \varphi_\beta^\lambda - \varphi_\gamma^\lambda + 2\varphi_\delta^\lambda.$$

Очевидно, что относительно такого действия каждое выражение $\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda$ является идемпотентом, и любые два выражения $\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda$ и $\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\beta^\lambda$ коммутируют.

5. Введем обозначение $\psi_\lambda = \prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda)$. ψ_λ можно также рассматривать как частичное преобразование в кольце RS с областью определения S_λ. Каждому элементу x_λ полугруппы S_λ $(\lambda \in L)$ поставим в соответствие элемент x'_λ кольца RS, определяемый по формуле

$$x'_\lambda = \psi_\lambda x_\lambda = \prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda) x_\lambda. \qquad (5)$$

Поскольку при $\lambda = \xi$ выражения $\varphi_\lambda^\lambda - \varphi_\alpha^\lambda$ теряют смысл, положим

$$x'_\xi = x_\xi \quad (x_\xi \in S_\xi). \qquad (6)$$

В примере п.4

$$x'_\lambda = x_\lambda - \varphi_\alpha^\lambda x_\lambda - \varphi_\beta^\lambda x_\lambda - \varphi_\gamma^\lambda x_\lambda + 2\varphi_\delta^\lambda x_\lambda.$$

Пусть A – произвольное подмножество полугруппы S. Обозначим через A' множество всех элементов x'_λ, построенных с помощью формул (5), (6) для всех элементов $x_\lambda \in A$.

Лемма I. Множество S' образует базу кольца RS, рассматриваемого в качестве R-модуля.

Доказательство. Любой элемент x_λ линейно выражается (ввиду справедливости формул (5) и (6)) через x'_λ и элементы некоторых полугрупп S_σ, где $\sigma < \lambda$. Элементы этих полугрупп, в свою очередь, линейно выражаются через x'_σ и элементы некоторых полугрупп S_τ, где $\tau < \sigma$, и т.д. Продолжая этот процесс, мы дойдем до элементов $x_\xi = x'_\xi$, где ξ - наименьший элемент в L. Следовательно, любой элемент кольца RS линейно выражается через элементы x'_λ.

Лемма 2. Для любого $\lambda \in L$ множество S'_λ является полугруппой, изоморфной S_λ.

Доказательство. Соответствие между элементами полугруппы S_λ и элементами множества S'_λ является взаимно однозначным. Далее,

$$\psi_\lambda x_\lambda \cdot \psi_\lambda y_\lambda = \prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha) x_\lambda \cdot \prod_{\beta \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\beta) y_\lambda .$$

Запишем это произведение в виде

$$\psi_\lambda x_\lambda \cdot \psi_\lambda y_\lambda = \prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha) \prod_{\beta \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\beta) x_\lambda y_\lambda ,$$

имея в виду (см. п.4), что каждый член $\varphi^\lambda_\alpha \varphi^\lambda_\beta x_\lambda y_\lambda$ в разложении этого произведения следует понимать как $\varphi^\lambda_\alpha x_\lambda \cdot \varphi^\lambda_\beta y_\lambda$. В силу идемпотентности и перестановочности множителей в $\prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha) \prod_{\beta \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\beta)$ это выражение заменяется на $\prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha)$, откуда

$$\psi_\lambda x_\lambda \cdot \psi_\lambda y_\lambda = \prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha) x_\lambda y_\lambda = \psi_\lambda (x_\lambda y_\lambda).$$

В случае $\lambda = \xi$ доказательство очевидно.

Лемма 3. Если $\lambda \neq \mu$, то $x'_\lambda y'_\mu = 0$ $(x'_\lambda \in S'_\lambda, y'_\mu \in S'_\mu)$.

Доказательство. Запишем произведение $x'_\lambda y'_\mu$ в виде

$$x'_\lambda y'_\mu = \prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\alpha - \varphi^\lambda_\alpha) \prod_{\beta \in M_\mu} (\varphi^\mu_\mu - \varphi^\mu_\beta)\, x_\lambda y_\mu .$$

Если λ и μ несравнимы (т.е. не выполняется ни $\lambda \leq \mu$ ни $\mu \leq \lambda$), то существуют такие элементы α, β, покрываемые, соответственно, элементами λ, μ, что $\lambda\mu \leq \alpha$, $\lambda\mu \leq \beta$ и, следовательно, $\lambda\mu = \lambda\beta = \alpha\mu = \alpha\beta$. В этом случае

$$(\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha)(\varphi^\mu_\mu - \varphi^\mu_\beta) = \varphi^\lambda_{\lambda\mu}\varphi^\mu_{\lambda\mu} - \varphi^\lambda_{\lambda\beta}\varphi^\mu_{\lambda\beta} - \varphi^\lambda_{\alpha\mu}\varphi^\mu_{\alpha\mu} + \varphi^\lambda_{\alpha\beta}\varphi^\mu_{\alpha\beta} = 0$$

Если λ и μ сравнимы и, например, $\lambda < \mu$, то найдутся такие элементы α, β, покрываемые, соответственно, элементами λ, μ, что $\lambda \leq \beta$ (элемент α можно выбрать произвольно). В этом случае $\lambda\mu = \lambda\beta = \lambda$, $\alpha\mu = \alpha\beta = \alpha$, и

$$(\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha)(\varphi^\mu_\mu - \varphi^\mu_\beta) = \varphi^\lambda_\lambda \varphi^\mu_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha \varphi^\mu_\alpha - \varphi^\lambda_\lambda \varphi^\mu_\alpha + \varphi^\lambda_\alpha \varphi^\mu_\alpha = 0.$$

Таким образом, и произведение $\prod_{\alpha \in M_\lambda} (\varphi^\lambda_\lambda - \varphi^\lambda_\alpha) \prod_{\beta \in M_\mu} (\varphi^\mu_\mu - \varphi^\mu_\beta)$ равно нулю, если $\lambda \neq \mu$. Следовательно, $x'_\lambda y'_\mu = 0$.

6. При помощи лемм I-3 доказывается

Теорема I. Пусть S – некоторая Т-полугруппа, состоящая из конечного числа подполугрупп S_λ. Тогда полугрупповое кольцо RS распадается в прямую сумму идеалов RS'_λ, где каждая полугруппа S'_λ изоморфна полугруппе S_λ.

Другими словами, кольцо RS является прямой суммой попарно ортогональных полугрупповых колец RS'_λ $(RS'_\lambda \cdot RS'_\mu = 0$, если $\lambda \neq \mu)$.

Таким образом, строение кольца RS не зависит от строения полуструктуры L, а зависит только от отдельных подполугрупп S_λ полугруппы S.

Теорема 2. Полугрупповое кольцо RS полугруппы S, разложимой в коммутативную связку конечного числа групп G_λ, распадается в прямую сумму попарно ортогональных групповых колец RG'_λ, где каждая группа G'_λ изоморфна G_λ.

В частности, для коммутативной полугруппы идемпотентов S из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Полугрупповое кольцо RS конечной коммутативной полугруппы идемпотентов S распадается в прямую сумму попарно ортогональных колец, каждое из которых изоморфно R.

Отметим еще следующую теорему:

Теорема 4. Полугрупповые кольца RS и RS^* конечных коммутативных полугрупп идемпотентов S и S^* изоморфны тогда и только тогда, когда S и S^* имеют одинаковые порядки.

7. Пусть S - конечная коммутативная полугруппа. Как известно из [7], она разлагается в коммутативную связку одноидемпотентных полугрупп S_λ. Множество Q всех регулярных (см. [I]) элементов произвольной коммутативной полугруппы S образует подполугруппу в S. Множество всех регулярных элементов конечной коммутативной одноидемпотентной полугруппы S образует группу, являющуюся идеалом в S (ее "групповым ядром"). Фактор-полугруппа S/G конечной коммутативной одноидемпотентной полугруппы S по ее групповому ядру G нильпотентна.

Лемма 4. Полугрупповое кольцо RS конечной коммутативной одноидемпотентной полугруппы S распадается в прямую сумму двух идеалов: $RS = RG \oplus R_0T$, где RG является групповым кольцом группового ядра G полугруппы S, а R_0T (п.3) - полугрупповым кольцом нильпотентной полугруппы T, изоморфной фактор-полугруппе S/G.

Доказательство. Пусть e - идемпотент полугруппы S. Построим отображение φ полугруппы S в кольцо RS:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in G, \\ x - ex, & \text{если } x \in S \setminus G. \end{cases} \qquad (7)$$

Это отображение взаимно-однозначно, так как $ex \in G$ (если $x \in S \setminus G$), и из $x \neq y$ ($x, y \in S \setminus G$) вытекает $x - ex \neq y - ey$. Множество элементов $\varphi(x)$, построенных с помощью формулы (7) для всех элементов x полугруппы S, образует, очевидно, базу кольца RS (рассматриваемого как R-модуль). Кроме того, при $x, y \in S \setminus G$,

$$x(y - ey) = xy - xy = 0 \quad \text{, если } x \in G,\ y \in S \setminus G,$$

$$\varphi(x)\varphi(y) = (x - ex)(y - ey) = xy - exy = \begin{cases} \varphi(xy), & \text{если } xy \in S \setminus G \\ 0, & \text{если } xy \in G. \end{cases}$$

Множество всех элементов $x - ex$ ($x \in S \setminus G$) составляет вместе с нулем полугруппу T, причем $G \cdot T = 0$.

Если S - конечная моногенная полугруппа, то G - циклическая группа, а T - моногенная нильпотентная полугруппа. В этом случае получается следующий результат:

Теорема 5. Полугрупповые кольца RS и RS^* конечных моногенных полугрупп S и S^* изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны полугруппы S и S^*.

8. Рассмотрим теперь полугрупповое кольцо RS произвольной конечной коммутативной полугруппы S. Так как полугруппа S распадается в коммутативную связку однодемипотентных полугрупп, то кольцо RS распадается в прямую сумму подколец $RS = \sum_{\lambda \in L} \oplus RS_\lambda$, причем $RS_\lambda \cdot RS_\mu \subseteq RS_\sigma$, если $\lambda\mu = \sigma$ в полуструктуре L индексов (см. п.2). По лемме 4 каждое кольцо RS_λ ($\lambda \in L$) распадается в прямую сумму двух идеалов $RS_\lambda = RG_\lambda \oplus R_0 T_\lambda$, где G_λ – групповое ядро полугруппы S_λ, а T_λ – нильпотентная полугруппа. Следовательно, кольцо RS распадается в прямую сумму

$$RS = \left(\sum_{\lambda \in L} \oplus RG_\lambda\right) \oplus \left(\sum_{\lambda \in L} \oplus R_0 T_\lambda\right) = RQ \oplus R_0 T,$$

где $Q = \bigcup G_\lambda$ – подполугруппа всех регулярных элементов полугруппы S, а T – объединение всех нильпотентных полугрупп T_λ. Заметим, что T может не быть полугруппой. Однако $R_0 T$ является кольцом и даже идеалом в RS. Действительно, если $x_\lambda \in S_\lambda$, $y_\mu - e_\mu y_\mu \in T_\mu$, $(\lambda, \mu \in L)$, то

$$x_\lambda (y_\mu - e_\mu y_\mu) = x_\lambda y_\mu - e_\mu x_\lambda y_\mu =$$
$$= (x_\lambda y_\mu - e_\lambda e_\mu \cdot x_\lambda y_\mu) - (e_\mu x_\lambda y_\mu - e_\lambda e_\mu \cdot e_\mu x_\lambda y_\mu).$$

Обозначим $x_\lambda y_\mu = z_{\lambda\mu}$, $e_\mu x_\lambda y_\mu = t_{\lambda\mu}$. Тогда (ввиду того, что $e_\lambda e_\mu = e_{\lambda\mu}$)

$$x_\lambda (y_\mu - e_\mu y_\mu) = (z_{\lambda\mu} - e_{\lambda\mu} z_{\lambda\mu}) - (t_{\lambda\mu} - e_{\lambda\mu} t_{\lambda\mu}) \in R_0 T.$$

Более того, справедлива следующая теорема:

Теорема 6. Кольцо $R_0 T$ является полугрупповым кольцом некоторой коммутативной нильпотентной полугруппы V.

Доказательство. Запишем элемент $x_\lambda - e_\lambda x_\lambda$ полугруппы

T_λ в виде формального произведения $(I - e_\lambda)x_\lambda$. Формальные выражения $I - e_\lambda$, построенные для всех $\lambda \in L$, будем перемножать по формуле $(1-e_\lambda)(1-e_\mu) = 1-e_\lambda-e_\mu+e_\lambda e_\mu$. Множество M всех таких выражений и всевозможных их произведений образует относительно этого действия коммутативную полугруппу идемпотентов (полуструктуру). Более того, полуструктура M является дистрибутивной структурой относительно частичной упорядоченности $\leq$ (см. п.2). Обозначим для краткости элементы структуры M через $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \ldots$. Их можно считать операторами, отображающими полугруппу S в кольцо $R_0 T$. Докажем сначала, что из $\bar{\alpha}x \neq 0$, $\bar{\beta}x \neq 0$ вытекает $(\bar{\alpha}\bar{\beta})x \neq 0$, где x – произвольный нерегулярный элемент полугруппы S. Пусть

$$\bar{\alpha} = (1-e_\lambda)(1-e_\mu)\ldots(1-e_\nu), \quad \bar{\beta} = (1-e_\rho)(1-e_\sigma)\ldots(1-e_\tau) \quad \text{и}$$
$$\bar{\alpha}x = (1-e_\lambda)(1-e_\mu)\ldots(1-e_\nu)x \neq 0,$$
$$\bar{\beta}x = (1-e_\rho)(1-e_\sigma)\ldots(1-e_\tau)x \neq 0,$$

в то время как

$$(\bar{\alpha}\bar{\beta})x = (1-e_\lambda)(1-e_\mu)\ldots(1-e_\nu)(1-e_\rho)(1-e_\sigma)\ldots(1-e_\tau)x = 0.$$

Тогда в разложении

$$(\bar{\alpha}\bar{\beta})x = x - e_\lambda x - e_\mu x - \ldots + e_\lambda e_\mu x + \ldots \pm e_\lambda e_\mu \ldots e_\nu e_\rho e_\sigma \ldots e_\tau x$$

найдется член, например, $-e_\lambda e_\mu e_\rho \ldots e_\tau x$, равный $-x$, откуда

$$e_\lambda e_\mu e_\rho \ldots e_\tau x = x.$$

Но из последнего вытекает, например $e_\lambda x = e_\lambda^2 e_\mu e_\rho \ldots e_\tau x = x$, т.е. $(I - e_\lambda)x = 0$. В таком случае $\bar{\alpha}x = 0$ вопреки предположению. Из доказанного следует, что для каждого нерегулярного элемента x полугруппы S в структуре M существует наи-

меньший элемент $\bar{y}$ такой, что $x' = \bar{y}x \neq 0$. Множество элементов x', построенных этим способом для всех нерегулярных элементов x полугруппы S, образует вместе с нулем нильпотентную полугруппу V. Действительно, все элементы в V нильпотентны, и, аналогично пункту 4,

$$x'y' = \bar{y}x \cdot \bar{\delta}y = \bar{y}\bar{\delta}xy.$$

Если $\bar{y}\bar{\delta}xy = 0$, то $x'y' \in V$. Если $\bar{y}\bar{\delta}xy \neq 0$ и найдется такой элемент $\bar{\nu}$, что $\bar{\nu}xy \neq 0$ и не выполняется $\bar{y}\bar{\delta} \leq \bar{\nu}$, то $\bar{y}\bar{\delta}\bar{\nu}xy \neq 0$. Но отсюда следует, что $\bar{y}\bar{\nu}x \neq 0$ и не выполняется $\bar{y} \leq \bar{\nu}$. Это противоречит минимальности $\bar{y}$. Наконец, как и в пункте 5, можно показать, что любой элемент кольца R_0T линейно выражается через элементы x', чем и завершается доказательство теоремы.

9. Вернемся снова к разложению $RS = RQ \oplus R_0V$ (см. теорему 6; при этом $R_0V = R_0T$). По теореме 2 кольцо RQ распадается в прямую сумму попарно ортогональных групповых колец RG'_λ, где каждая группа G'_λ изоморфна подгруппе G_λ полугруппы Q. Каждое произведение $RG'_\lambda \cdot R_0V$ является идеалом в кольце R_0V и совпадает с произведением $e'_\lambda \cdot R_0V$, где e'_λ – единица кольца RG'_λ. Любые два различных идеала $e'_\lambda \cdot R_0V$ и $e'_\mu \cdot R_0V$ не имеют общих ненулевых элементов и $e'_\lambda R_0V \cdot e'_\mu R_0V = 0$ в силу ортогональности идемпотентов e'_λ и e'_μ. Каждый идеал $e'_\lambda \cdot R_0V$ является гомоморфным образом кольца R_0V и поэтому сам является полугрупповым кольцом некоторой нильпотентной полугруппы V'_λ. Наконец, можно показать, что множество элементов x' (см. п.8), не входящих ни в один из идеалов $e'_\lambda R_0V$, образует вместе с нулем нильпотентную полугруппу V', причем $R_0V = \sum_\lambda e'_\lambda \cdot R_0V + V'$.

потентную полугруппу V'. Из всего этого вытекает

Теорема 7. Полугрупповое кольцо RS конечной коммутативной полугруппы S распадается в прямую сумму идеалов, каждый из которых является либо кольцом некоторой группы G'_λ (когда $e'_\lambda R \cdot V = 0$), либо полугрупповым кольцом нильпотентной полугруппы V', либо полугрупповым кольцом полугруппы $G'_\lambda \cup T'_\lambda$, где $G'_\lambda \cdot T'_\lambda = T'_\lambda$.

Литература

I. Е.С.Ляпин, Полугруппы, М., 1960.

2. И.С.Понизовский, О матричных представлениях ассоциативных систем, Матем. сб., 1956, 38, № 2, 241-260.

3. W.D.Munn. On semi-group algebras, Proc.Cambridge Phil. Soc., 1955, 51,1.

4. A.H. Clifford. Semigroups admitting relative inverses, Annals of Math., 1941, 42, 1037-1049.

5. A.H. Clifford, G.B. Preston. The algebraical theory of semi-groups, Providence, 1961.

6. M. Yamada. Compositions of semi-groups, Codai Math. Sem. Rep., 1956, 8, 107-111.

7. Ш.Шварц, К теории периодических полугрупп, Чехосл.мат. ж., 1953, 3, 7-21.

ГОМОМОРФИЗМЫ СТРУКТУР, АССОЦИИРОВАННЫХ С УПОРЯДОЧЕННЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Розен В.В. (Саратов)

С каждым упорядоченным множеством $(A;\omega)$ можно ассоциировать

1) частичный бинарный оператив $(A;0)$, где 0 совпадает с частичной операцией взятия наибольшей миноранты пары элементов в упорядоченном множестве $(A;\omega)$;

2) частичный $\mathcal{R}$-оператив $(A;\varphi)$, где φ совпадает с частичной $\mathcal{R}$-операцией взятия нижней грани подмножеств в упорядоченном множестве $(A;\omega)$.

Обозначим через d_ω множество всех пар элементов, которые имеют наибольшую миноранту в $(A;\omega)$, а через D_ω – множество всех подмножеств, которые имеют нижнюю грань в $(A;\omega)$. Пусть $(A;0)$ и $(B;\bar{0})$ – частичные бинарные операторы и δ и $\bar{\delta}$ – отношения определенности частичных операций 0 и $\bar{0}$. Гомоморфизм f частичного бинарного оператива $(A;0)$ в частичный бинарный оператив $(B;\bar{0})$ называется сильным, если он удовлетворяет условию: $(f(a_1), f(a_2))\in\tilde{\delta} \to (a_1,a_2)\in\delta$. Если $(A;\varphi)$ и $(B;\psi)$ – частичные $\mathcal{R}$-операторы, то гомоморфизм f называется сильным, если $\tilde{f}(X)\in pr_1\psi \to X\in pr_1\varphi$.

Теорема I. Для того, чтобы образ частичного бинарного оператива, ассоциированного с упорядоченным множеством $(A;\omega)$, при сильном гомоморфизме f был частичным бинар-

ным оперативом, ассоциированным с некоторым упорядоченным множеством, необходимо и достаточно, чтобы

$$d_{f\circ\omega\circ f}^{-1} \subset f\circ d_{\omega}\circ f$$

Теорема 2. Для того, чтобы образ частичного $\mathcal{R}$ -оператива, ассоциированного с упорядоченным множеством $(A;\omega)$, при сильном гомоморфизме f был частичным $\mathcal{R}$ -оперативом, ассоциированным с некоторым упорядоченным множеством, необходимо и достаточно, чтобы

$$D_{f\circ\omega\circ f}^{-1} \subset \tilde{f}(D_{\omega})$$

Всякий гомоморфизм частичных бинарных оперативов, ассоциированных с упорядоченными множествами, является изотонным отображением этих упорядоченных множеств. Находятся необходимые и достаточные условия того, чтобы изотонное отображение двух упорядоченных множеств было гомоморфизмом частичных бинарных оперативов, ассоциированных с ними. Аналогичная задача решается для частичных $\mathcal{R}$ -оперативов, ассоциированных с упорядоченными множествами.

Всякий гомоморфизм частичных $\mathcal{R}$ -оперативов, ассоциированных с упорядоченными множествами, является гомоморфизмом частичных бинарных оперативов, ассоциированных с этими же упорядоченными множествами. Обратное утверждение не имеет места даже в случае, когда гомоморфизм является сильным. Доказывается

Теорема 3. Если сильный гомоморфизм f частичных бинарных оперативов, ассоциированных с упорядоченными множест-

вами, таков, что каждый класс ядра гомоморфизма имеет минимальный элемент, то f является гомоморфизмом частичных R-операторов, ассоциированных с этими же упорядоченными множествами.

Литература

I. Г.Биркгоф, Теория структур, ИЛ, М., 1952.

2. В.В.Вагнер, Теория отношений и алгебра частичных отображений. Теория полугрупп и ее приложения, Саратов, 1965.

ГОМОМОРФИЗМЫ В n-ЛУПАХ

Сандик М.Д. (Кишинев)

Исследуются гомоморфизмы операций любой конечной арности, удовлетворяющие условиям разрешимости. Наряду с обобщением теоремы о гомоморфизмах для квазигрупп, описываются группы трансляций двух гомоморфных n-луп.

n-оператив (см. [3]) $Q'[\,]$ называется гомоморфным n-оператива $Q(\,)$, если существует такое однозначное отображение φ множества Q на множество Q', что имеет место равенство:

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = [\varphi x_1, \varphi x_2, \cdots, \varphi x_n]$$

для любых элементов $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \in Q$

Рассматривается случай, когда $Q(\,)$ и $Q'[\,]$ - n-лупы (см. [1]). Как известно из [4], n-лупы могут обладать более чем одной единицей, если арность операции больше двух. Оказывается, что количество единиц в гомоморфном образе $Q'[\,]$ n-лупы $Q(\,)$ ограничено, в некотором смысле, снизу количеством единиц в $Q(\,)$. Совокупность H элементов из Q, отображающихся в единицу f n-лупы $Q'[\,]$ называется ядром. При гомоморфизме $\varphi : Q \to Q'$ в $Q(\,)$ будет столько ядер, сколько существует единиц в $Q'[\,]$.

Всякое ядро $H \subseteq Q$ является n-подквазигруппой (не обязательно n-подлупой) n-лупы $Q(\,)$. Обобщается ряд известных предложений из теории бинарных квазигрупп относительно ядер и смежных классов. Доказывается

Теорема I. Если H - некоторая нормальная n-подквазигруппа n-лупы $Q(\ )$, то она определяет естественный гомоморфизм $\psi : X \longrightarrow H(x)$ n-лупы $Q(\ )$ на фактор-n-лупу $Q/H(\ )$ с ядром H. Если H - ядро гомоморфизма φ n-лупы $Q(\ )$ на n-лупу $Q'[\ ]$, то φ индуцирует изоморфизм $\theta : H(x) \longrightarrow \varphi x$ фактор-n-лупы $Q/H(\ )$ на n-лупу $Q'[\ ]$. (Понятие нормальной n-подквазигруппы является обобщением на n-арный случай понятия нормальной квазигруппы (см. [2]).

Доказывается, что n-лупа, гомоморфная n-лупе Диккера, а также сама n-лупа Диккера (см. [2]) обладают одним единственным ядром. Имеет место

Теорема 2. n-подквазигруппа H n-лупы $Q(\ )$ тогда и только тогда является нормальной, если $\mathcal{L}H = H$, где $\mathcal{L}$ - группа внутренних подстановок определенного вида.

Фиксированную последовательность $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in Q$ обозначим через $\tilde{a}$. Отображение $L_i/\tilde{a}/ : Q \longrightarrow Q$ такое, что $L_i/\tilde{a}/X = (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_n)$, будет, очевидно, подстановкой множества Q; назовем ее i-той трансляцией множества Q. Через $G(Q)$ обозначим т.н. группу трансляций, порожденную всеми i-тыми трансляциями для всевозможных фиксированных последовательностей $\tilde{x} \in Q$.

Теорема 3. Гомоморфизм φ n-лупы $Q(\ )$ на n-лупу $Q'[\ ]$ индуцирует некоторый гомоморфизм θ группы $G(Q)$ на группу $G(Q')$, такой что:

1) $\theta L_i/\tilde{x}/ = L_i/\varphi\tilde{x}/$,

2) $\varphi\alpha = (\theta\alpha)\varphi$ для любого $\alpha \in G(Q)$.

Ядро гомоморфизма $\theta : G(Q) \longrightarrow G(Q')$ обозначим через H^*.

Теорема 4. Ядро H гомоморфизма $\varphi : Q(\,) \longrightarrow Q'[\,]$ инвариантно относительно любого $\alpha^* \in H^*$, т.е. $H^*H = H$

Теорема 5. Если H - ядро гомоморфизма $\varphi : Q(\,) \to Q'[\,]$, а H^* - ядро гомоморфизма $\theta : G(Q) \longrightarrow G(Q')$, то $G(Q/H) \cong G(Q)/H^*$.

Теорема 6. Любой нормальной подгруппе H^* группы трансляций $G(Q)$ n-лупы $Q(\,)$ соответствует некоторая нормальная n-подквазигруппа H n-лупы $Q(\,)$.

Литература

1. В.Д.Белоусов, М.Д.Сандик, n-квазигруппы и n-лупы, Сиб. матем. ж., 1966, № 1.
2. В.Д.Белоусов, Введение в теорию квазигрупп.
3. Л.М.Глускин, Позиционные оперативы, Матем.сб., 1965, 68(3), 444-472.
4. М.Д.Сандик, О единицах в n-лупах, Иссл. по алгебре и матем. анализу, 1965, 140-146.

ГАМИЛЬТОНОВЫ КОЛЬЦА

Фрейдман П.А., Андрианов В.И. (Свердловск)

Гамильтоновы кольца или, короче, Г-кольца – это кольца, все подкольца которых являются двусторонними идеалами.

Если аддитивная группа кольца является смешанной, периодической или группой без кручения, то кольцо будем называть, соответственно , смешанным, периодическим или кольцом без кручения. Под порядком элемента кольца понимается аддитивный порядок, который обозначается через (к). Кольцо будем называть р-кольцом, если порядок каждого элемента есть степень простого числа р.

Хотя гамильтоновым кольцам посвящены работы целого ряда авторов, нерассмотренным остался случай смешанных Г-колец с непериодическим фактор-кольцом по радикалу (Левицкого) и нильпотентных р-Г-колец.

Теорема I. Кольцо K тогда и только тогда будет смешанным Г-кольцом с фактор-кольцом $K/R(K)$ по радикалу $R(K)$ без кручения, когда $K=\{a,R\}$, где $O(a)=0$, $a^3=\nu a^2$, $O(a^2-\nu a)=\pi$; π – целое число, свободное от квадратов простых чисел и делящее число ν ; $R=R_{p_1}+\ldots+R_{p_n}$, $p_1,\ldots,$ p_n – различные простые числа; R_{p_i} принадлежит к одному из типов колец:

I) R_{p_i} – p_i -кольцо, $R_{p_i}^2=\nu R_{p_i}=aR_{p_i}=R_{p_i}a=0$;

2) $R_{p_i}=\{R'_{p_i},r_i\}$, R'_{p_i} – p_i-кольцо, $KR'_{p_i}=R'_{p_i}K=r_i^3=$ $=p_i r_i^2=0$, $O(r_i)=p_i^{n_i}$, причем

а) если $p_i \nmid \pi$, то $r_i a = a r_i = 0$;

б) если $p_i \mid \pi$, то $r_i^2 = x_i \pi^{\nu}/p_i\ (a^2 - \nu a)$, $r_i a = \delta_i \pi^{\nu}/p_i (a^2 - \nu a)$ $a r_i = \varepsilon_i \pi^{\nu}/p_i\ (a^2 - \nu a)$, $\nu r_i = \mu_i \pi^{\nu}/p_i\ (a^2 - \nu a)$, x_i, ε_i, δ_i, μ_i – числа с ограничениями:

$б_I$) $(x_i, p_i) = I$,

$б_2$) если $r_i^2 \neq \alpha r_i$ ни при каком целом числе α, то μ_i делится на p_i,

$б_3$) при $p_i > 2$ число $[\pi^{\nu}/p_i (\delta_i + \varepsilon_i - \mu_i)^2 - 4 x_i]\ \pi^{\nu}/p_i$ – невычет (квадратичный) по модулю числа p_i, а при $p_i = 2$ число $\delta_i + \varepsilon_i - \mu_i$ нечетно;

3) $R_{p_i} = \{R'_{p_i}, r_{i_1}, r_{i_2}\}$, $R'_{p_i} - p_i$ – кольцо $p_i \nmid \pi$, $R'_{p_i} K = K R'_{p_i} = a R_{p_i} = R_{p_i} a_i = p_i R_{p_i}^2 = R_{p_i}^3 = \nu R_{p_i} = 0$, $r_{i_1}^2 \neq 0$, $r_{i_j} r_{i_k} = \delta_{jk}^i r_{i_1}^2$, где δ_{jk}^i – целые числа, причем

а) $(\delta_{22}^i, p_i) = I$,

б) при $p_i > 2$ число $(\delta_{12}^i + \delta_{21}^i)^2 - 4\delta_{22}^i$ – невычет (квадратичный) по модулю числа p_i, а при $p_i = 2$ число $\delta_{12}^i + \delta_{21}^i$ нечетно.

Теорема 2. Число K тогда и только тогда будет смешанным Г-кольцом со смешанным фактор-кольцом $K/R(K)$ по радикалу $R(K)$, когда $K = K_1 + K_2$, где K_1 – кольцо, описанное в теореме I, $K_2 \simeq C/(m)$, число m свободно от квадратов простых чисел и m/ν.

Далее дается классификация р-Г-нильколец, которую, ввиду громоздкости, не приводим. Отметим лишь, что р-Г-нилькольцо K есть аннуляторное расширение кольца N с помощью кольца R, порожденного тремя элементами, то есть $K/N = \{k_1, k_2, k_3\}$, $NK = KN = 0$

РАДИКАЛЫ ПОЛУГРУПП

Хенно Я.А. (Таллин)

Назовем множество M S-системой полугруппы S, если определено отображение $M\times S \longrightarrow M$ такое, что

$$(\forall a,b\in S)(\forall x\in M)\,(x(ab)=(xa)b),$$

где через xa обозначен образ $(x,a)\in M\times S$ в M.

Каждая S-система M определяет на полугруппе конгруэнцию

$$Ker\,M=\{(a,b)\,|\,a,b\in S,\,(\forall x\in M)(xa=xb)\}$$

Если Σ_s - некоторый класс S-систем, то Σ-радикалом полугруппы S назовем конгруэнцию $Rad(\Sigma_s,S)$ на полугруппе S:

$$Rad(\Sigma_s,S)=\bigcap_{M\in\Sigma_s} Ker\,M$$

Если M - S-система, то эквивалентность ϱ на M назовем конгруэнтностью S-системы M, если

$$(\forall x,y\in M)(\forall a\in S)(x\varrho y\longrightarrow xa\varrho ya)$$

Подмножество $M'\subset M$ назовем S-подсистемой системы M, если

$$(\forall x\in M')(\forall a\in S)(xa\in M')$$

В настоящее время изучены радикалы для двух классов S-систем. Первый класс составляют все S-системы без нетривиальных S-подсистем, т.е. системы, которые имеют максимально одну одноэлементную S-подсистему. Второй класс состоит из всех S-систем, которые не имеют нетривиальных конгруэнтностей.

В докладе дается обзор результатов, полученных в теории радикалов полугрупп.

Ω-СИСТЕМЫ

Хион Я.В. (Тарту)

Пусть задана алгебра $M = \{x, y, \ldots\}$ с системой операций $\Omega = \{\omega, \varphi, \psi, \ldots\}$. В этом случае будем M называть также Ω-алгеброй. Совокупность n-арных операций из Ω обозначим через Ω_n. Результат применения операции $\omega \in \Omega$ ($n > 0$) к элементам $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ обозначим через

$$x_1 x_2 \ldots x_n \omega = \sum_i^{\omega} x_i$$

а элемент, отмечаемый операцией $\nu \in \Omega_0$, через O_ν.

Будем говорить, что в M задана i-местная функция a, если любым элементам $x_1, \ldots, x_i \in M$ сопоставлен элемент $x_1 \ldots x_i a \in M$. Равенство n-местных функций определяется обычным образом. Совокупность всех i-местных функций, заданных в M, обозначим через $S_i(M)$. Операции из Ω определяются в $S_i(M)$ естественным образом. Если $\omega \in \Omega_n$, $a_1, \ldots, a_n \in S_i(M)$, то для любых $x_1, \ldots, x_i \in M$ положим

$$x_1 \ldots x_i \left(\sum_j^n a_j\right) = \sum_j^n x_1 \ldots x_i a_j$$

Для $\nu \in \Omega_0$ положим

$$x_1 \ldots x_i O_{\nu i} = O_\nu$$

Легко видеть, что при этом $S_i(M)$ становится Ω-алгеброй. Если в M выполнялись какие-либо тождественные соотношения между операциями из Ω, то эти же соотношения будут выполняться и в $S_i(M)$.

Пусть теперь взяты элемент в $b \in S_j(M)$ элементы

$a_1,\dots,a_j \in S_i(M)$. Определим тогда их произведение $a_1\dots a_j b$ как элемент из $S_i(M)$, задаваемый формулой

$$x_1\dots x_i\,(a_1\dots a_j b) = (x_1\dots x_i a_1)\dots(x_1\dots x_i a_j)\,b$$

(для любых $x_1,\dots,x_i \in M$). Нетрудно видеть, что для произвольных $\omega\in\Omega_n$, $n>0$, $b_1,\dots,b_n\in M$, $\nu\in\Omega_0$ выполняются тождества

$$a_1\dots a_j\Big(\sum_k^{\omega} b_k\Big) = \sum_k^{\omega} a_1\dots a_j b_k \qquad (1)$$

$$a_1\dots a_j\, O_{\nu j} = O_{\nu i} \qquad (2)$$

$$a_1\dots a_j(b_1\dots b_k c) = (a_1\dots a_j b_1)\dots(a_1\dots a_j b_k)\,c, \qquad (3)$$

где $O_{\nu j}$, $O_{\nu i}$ означают, соответственно, j-местную и i-местную постоянную функцию всюду принимающую значение O_ν.

Этот пример приводит нас к следующему определению. Пусть J есть непустое подмножество множества N всех натуральных чисел. Система $A=\{A_i;\ i\in J\}$ Ω-алгебр называется Ω-системой Менгера, если для любых $i,j\in J$ всяким $a_1,\dots,a_j\in A_i$, $b\in A_j$ сопоставлен элемент $a_1\dots a_j b\in A_i$, причем выполняются тождества (I) – (3) (для любых $i,j,k\in J$, $\omega\in\Omega_n$, $n>0$, $\nu\in\Omega_0$, $a_1,\dots,a_j\in A_i$, $b_1,\dots,b_n\in A_j$, $c\in A_k$, где через $O_{\nu j}$, $O_{\nu i}$ обозначены элементы, отмечаемые операцией ν, соответственно, в A_j и A_i). При $\Omega=\emptyset$ сходное понятие системы Менгера рассматривалось Уитлоком [II]. Ω-системы Менгера являются многоосновными алгебрами, частным случаем алгебр со схемой операторов Хиггинса [9]. Частными случаями Ω-системы Менгера (при $\Omega=\emptyset$, $J=\{m\}$) являются m-арные системы Диккера [6]. При $J=\{m\}$ или $J=\{I\}$ получаем понятие $m+I$-арного

Ω-кольцоида (Ω-кольцоида) (см. [3], [4]).

При произвольном $J \subset M$ и произвольной Ω-алгебре M система $\mathcal{Y}_J(M) = \{\mathcal{Y}_i(M); i \in J\}$ является, как легко видеть, Ω-системой Менгера. Назовем ее симметрической Ω-системой типа J над M. Ω-систему $B = \{B_i; i \in \Omega\}$ назовем Ω-подсистемой в A, если всякое B_i есть Ω-подалгебра в A_i и при любых $i, j \in J$ из $b_1, \ldots, b_j \in B_i$, $b \in B_j$ следует $a_1 \ldots a_{j-1} b \in B_i$. Рассматривая Ω-подсистемы в $S_J(M)$, мы получаем разнообразные Ω-системы типа J. Оказывается, что таким способом можно получить любую Ω-систему.

Теорема I. Любая Ω-система $A = \{A_i; i \in J\}$ изоморфно вкладывается в симметрическую Ω-систему $S_J(M) = \{S_i(M); i \in J\}$ подходящей Ω-алгебры M. Если все A_i принадлежат примитивному классу Λ Ω-алгебры, то можно выбрать и $M \in \Lambda$.

В доказательстве теоремы используются прямые произведения Ω-систем.

Пусть M является Ω-алгеброй и $J \subset N$. Если $i \in J$, то обозначим через $C_i(M)$ совокупность всех пар (x, i), где $x \in M$. Обозначим такие $C_J(M) = \{C_i(M); i \in J\}$ и превратим $C_J(M)$ в Ω-систему при помощи следующих определений

$$(x, i) = (y, j), \text{ если } x = y,\ i = j;$$
$$\sum_{\kappa}^{n} (x_\kappa, i) = \left(\sum_{\kappa}^{\omega} x_\kappa, i\right) \quad (\omega \in \Omega_n,\ n > 0);$$
$$O_{Vi} = (O_V, i);$$
$$(x_1, i) \ldots (x_j, i)(y, j) = (y, i).$$

Ω-систему $C_J(M)$ назовем правой сингулярной Ω-системой типа J над алгеброй M.

Пусть $A=\{A_i; i\in J\}$ есть Ω-система. Назовем ее Ω-подсистему $B=\{B_i; i\in J\}$ (все $B_i\neq\phi$) левым идеалом в A, если при любых $i,j\in J$ из $b\in B_j$, $a_1,\dots,a_j\in A_i$ следует $a_1\dots a_j b\in B_i$. B называется правым идеалом в A, если при любых $i,j\in J$ из $b_1,\dots,b_j\in B_i$, $a\in A_j$ следует $b_1\dots b_j a\in B_i$. B называется двусторонним идеалом в A и обозначается через $B\lhd A$, если она есть и левый и правый идеал. Конгруэнцией в A называется набор $\gamma=\{\gamma_i; i\in J\}$, где γ_i есть конгруэнция в Ω-алгебре A_i и из $i,j\in J$ и $a_1\equiv a_1',\dots,a_j\equiv a_j'(\gamma_i)$, $b\equiv b'(\gamma_j)$ всегда следует

$$a_1\dots a_j b \equiv a_1'\dots a_j' b'(\gamma_i)$$

Нулевой называется такая конгруэнция в A, при которой каждая из алгебр A_i разбивается на одноэлементные классы. Будем говорить, что двусторонний идеал B плотно вложен в A, если

1. B существенен в A, т.е. любая ненулевая конгруэнция в A индуцирует ненулевую конгруэнцию в B,

2. A является максимальной Ω-системой, в которой B есть существенный идеал, т.е. если $A\subset D$, $A\neq D$, $B\lhd D$, то B не существенен в D.

Теорема 2. Ω-система $A=\{A_i; i\in J\}$ тогда и только тогда изоморфна симметрической системе $S_J(M)$ для подходящей Ω-алгебры M, когда она содержит плотно вложенный двусторонний идеал, изоморфный Ω-системе $C_J(M)$

с правым умножением.

Эта теорема обобщает теорему Ляпина [I], дающую абстрактную характеристику симметрических полугрупп. Для ее получения использованы надлежащие обобщения понятий, введенных Е.С.Ляпиным. Можно дать и другую абстрактную характеристику, обобщающую результат Мальцева [2].

Пусть $A=\{A_i; i\in J\}$ и $B=\{B_i; i\in J\}$ суть Ω-системы. Гомоморфизмом $\alpha: A\to B$ называется набор $\alpha=\{\alpha_i, i\in J\}$, где $\alpha_i: A_i\to B_i$ суть гомоморфизмы Ω-алгебр и где для любых $i,j\in J$ и всяких $a_1,\dots,a_j\in A_i$, $b\in A_j$ выполняется условие

$$(a_1\dots a_j b)\alpha_i = (a_1\alpha_i)\dots(a_j\alpha_i)(b\alpha_j).$$

α называется изоморфизмом, если все α_i суть изоморфизмы. α называется автоморфизмом, если $A=B$ и все α_i суть автоморфизмы. Произведением автоморфизмов α и $\beta=\{\beta_i; i\in J\}$ называется система $\{\alpha_i\beta_i; i\in J\}$. Легко видеть, что автоморфизмы любой Ω-системы составляют группу по умножению.

Теорема 3. Для Ω-алгебр M, P и подмножества $J\subset N$ выполняется $S_J(M)\simeq S_J(N)$ тогда и только тогда, если $M\simeq P$.

Теорема 4. Для любой Ω-алгебры M ее группа автоморфизмов изоморфна группе автоморфизмов системы $S_J(M)$ (при любом множестве $J\subset N$), т.е. $Aut\, M\simeq Aut\ S_J(M)$.

Для случая, когда M является коммутативным кольцом и $J=\{I\}$, теорема 3 имеется в [5] и [IO]. Теорема 4 для случая, когда $J=\{I\}$ и M коммутативное кольцо, получена в [5].

Назовем Ω-алгебру M абелевой (см. [7], [8]), если

$$\sum_i^{\omega}\left(\sum_j^{\nu} x_{ij}\right) = \sum_j^{\nu}\left(\sum_i^{\omega} x_{ij}\right)$$

$$\sum_i^{\omega} 0_\nu = 0_\nu, \quad 0_\nu = 0_\mu$$

для любых $\omega \in \Omega_m$, $\varphi \in \Omega_n$ $(m, n > 0)$, $\mu, \nu \in \Omega_0$ и произвольных $x_{ij} \in M$. Множество всех i-местных эндоморфизмов для M обозначим через $\mathcal{E}_i(M)$, $\mathcal{E}_J(M) = \{\mathcal{E}_i(M);\ i \in J\}$. Элемент $a \in S_i(M)$ назовем i-местным эндоморфизмом Ω-алгебры M, если

$$\left(\sum_\kappa^{\omega} x_{1\kappa}\right)\cdots\left(\sum_\kappa^{\omega} x_{i\kappa}\right)a = \sum_\kappa^{\omega} x_{1\kappa}\cdots x_{i\kappa}\,a$$

$$0_\nu \ldots 0_\nu a = 0_\nu$$

Теорема 5. Для любой Ω алгебры M и любого подмножества $J \subset N$ система $\mathcal{E}_J(M)$ является $\emptyset$-системой Менгера. Если M абелева, то $\mathcal{E}_J(M)$ есть Ω-система Менгера.

Теорема 6. Любой i-местный эндоморфизм a группы M, записанной аддитивно, задается формулой

$$x_1 \cdots x_i a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_i a_i$$

(a_κ и a_j суммируемы при $\kappa \neq j$)

Наоборот, всякая функция, задаваемая в M этой формулой, является i-местным гомоморфизмом.

Литература

I. Е.С.Ляпин, Полугруппы, М., 1960.

2. А.И.Мальцев, Симметрические группоиды, Матем.сб. 1952, 31, 136-151.

3. Б.И.Плоткин, Ω-полугруппы, Ω-кольца и представления,

4. Я.В.Хион, Ω-кольцоиды, Ω-кольца и их представления. Труды Московского матем. об-ва, 1965, 14,3-48.

5. I.Adler, Composition rings. Duke Math. J.,1962, 29:4, 607-623.

6. R.M.Dicker, The substitutive law. Proc. Lond. Math. Soc., 1963, 13:51, 493-510.

7. T. Evans, Abstract mean values. Duke Math. J.,1963, 30:2, 331-347.

8. T.Evans, Endomorphisms of abstract algebras, Proc. Roy. Soc. Edinb.,1962, 66, 53-64.

9. P.I.Higgins, Algebras with a scheme of operators. Math. Nachr.,1963, 27:1-2, 115-132.

10. W.Nöbauer, Funktionen auf kommutativen Ringen. Math. Ann., 1962, 147:2, 166-175.

11. H.J.Whitlock, A composition algebra formultiplace functions. Math. Ann.,1964, 157:2, 167-178.

А Л Г Е Б Р Ы О Т Н О Ш Е Н И Й

Шайн Б.М. (Саратов)

В в е д е н и е

В послевоенное время теория полугрупп превратилась в важную составную часть современной алгебры. Количество работ, посвященных полугруппам, которое растет все более быстрыми темпами, недавно превысило 2000; вышли в свет две монографии по теории полугрупп, а также книги, посвященные специальным вопросам этой теории. Интерес к теории полугрупп резко возрос.

Все алгебраические системы, изучение которых привело к созданию теорий, занимающих важное место в современной алгебре, являются естественными абстракциями понятий, играющих существенную роль в различных разделах математики. Теория групп, например, возникла как абстрактная теория групп подстановок. В самых различных областях часто встречаются множества преобразований, замкнутые относительно операции суперпозиции. Эти преобразования могут быть самого общего вида: необязательно взаимно однозначные, необязательно всюду определенные, необязательно даже однозначные (т.е. могут быть даже произвольными бинарными отношениями, которые мы рассматриваем как многозначные частичные преобразования). Множества преобразований, рассматриваемые относительно операции суперпозиции, являются полугруппами, и всякая абстрактная полугруппа может быть изоморфно представлена таким об-

разом. Ни понятие группы, ни понятие кольца не являются достаточными для изучения систем преобразований общего вида. Отсюда видно, что понятие полугруппы является естественным и что теория полугрупп не может быть сведена к теории групп или к теории колец, несмотря на тесную связь между ней и этими теориями.

Теория полугрупп формировалась в то время, когда родственные теории групп и колец были уже вполне сложившимися дисциплинами, оказывавшими существенное влияние на всю алгебру. Это является одной из причин появления довольно большого числа работ, посвященных перенесению в теорию полугрупп некоторых результатов из смежных теорий. При этом можно было использовать формы постановки задач, руководствоваться методами или, по крайней мере, аналогиями с методами теорий групп и колец. С другой стороны, при рассмотрении задач, связанных с полугруппами преобразований, лишь в малой степени можно использовать методы и аналогии, почерпнутые из других теорий. То, что задача относится не к теории групп или колец, но собственно к теории полугрупп, и означает, что вряд ли эту задачу можно решить методами теории групп, колец или аналогичным путем: здесь нужны свои самостоятельные полугрупповые методы и даже свои самостоятельные формы постановки задач, хотя мы ни в коей мере не недооцениваем аналогий с другими теориями. Все это свидетельствует о большой трудности задач, связанных с полугруппами преобразований, объясняет в какой-то мере малочисленность работ, посвященных этим вопросам (являющимся, по всеобщему мнению, центральными в теории

полугрупп). Однако это говорит о настоятельной научной необходимости разработки теории полугрупп преобразований.

Настоящий доклад посвящен описанию понятия алгебры отношений. Это понятие оказывается весьма полезным в теории полугрупп преобразований, ибо дает некоторый общий взгляд на многие проблемы, связанные с системами преобразований, позволяет ставить многие естественные задачи о такого рода системах и гарантирует существование решения у корректно поставленной задачи. Хотя здесь доказана в сущности лишь одна теорема, содержание доклада отнюдь не сводится к ней: вводимые определения представляют, по нашему мнению, не меньший интерес.

Точка зрения, приводящая к понятию алгебры отношений, состоит в следующем. Сила алгебраических методов в большой степени определяется их общностью, тем, что объекты рассматриваются "с точностью до изоморфизма". При рассмотрении полугрупп преобразований мы получаем много информации о строении полугруппы, которая теряется при переходе к абстрактной точке зрения: две изоморфные полугруппы преобразований могут существенно различаться, одна может содержать лишь полные преобразования, а другая - частичные, одна может быть транзитивной, а другая - нет и т.д. Желательно как-то учитывать все эти особенности, но в то же время оставаться на абстрактной точке зрения. С этой целью мы выделяем некоторые специальные объекты, несущие дополнительную информацию о полугруппе преобразований. Обычно такими объектами являются отношения между преобразованиями и операции над преобразовани-

ями (примеры приведены далее). Полугруппы преобразований с выделенными на них дополнительными объектами далее рассматриваются уже с точностью до изоморфизма. С абстрактной точки зрения они являются алгебраическими системами, у которых одна из операций будет бинарным ассоциативным умножением, а остальные операции и отношения соответствуют тем дополнительным объектам, которые мы условились рассматривать на полугруппах преобразований. Поэтому при переходе к абстрактной точке зрения мы сохраняем не только информацию об устройстве умножения, но и некоторую добавочную информацию о полугруппах преобразований, заключенную в новых операциях и отношениях, заданных на множестве элементов полугруппы. Пусть, например, Φ - полугруппа частичных преобразований. Φ можно естественным образом упорядочить отношением включения преобразований друг в друга. Можно условиться рассматривать это отношение порядка как дополнительный объект. Этот объект в действительности несет некоторую добавочную информацию о строении Φ: две изоморфные полугруппы преобразований могут быть упорядочены неизоморфным образом. С абстрактной точки зрения мы получаем специальным образом упорядоченные полугруппы.

Так мы приходим к рассмотрению полугрупп с заданными на них добавочными отношениями. При этом среди таких полугрупп нас интересуют именно те, которые являются абстрактными аналогами полугрупп преобразований с выделенными добавочными объектами. Очевидно, что дополнительные отношения на полугруппе должны для этого удовлетворять каким-то особым необ-

ходимым и достаточным условиям (т.е. аксиомам), отражающим специфические свойства полугрупп преобразований. В этих аксиомах отражена дополнительная информация о строении полугрупп преобразований, и потому отыскание таких аксиом представляет большой интерес.

Полугруппы преобразований с выделенными на них дополнительными отношениями являются частным случаем алгебр отношений. К рассмотрению таких систем приводит и другая точка зрения, связанная с изучением свойств бинарных отношений. Теория бинарных отношений возникла почти одновременно с математической логикой. Первое сколько-нибудь связное изложение алгебры бинарных отношений дал Шрёдер [48] (см. также [61]). В послевоенное время бинарными отношениями занимался Риге [27], [28]. Недавно появилась работа В.В.Вагнера [59], посвященная этому вопросу. В существующих работах большое внимание уделяется рассмотрению различных операций над бинарными отношениями. При этом обычно рассматриваются лишь операции, изучавшиеся еще Шрёдером: булевы операции, умножение и обращение бинарных отношений. Тарский [50] назвал алгебрами отношений множества бинарных отношений, замкнутые относительно этих операций.

Однако при всем значении указанных операций ими не исчерпываются все важные для приложений случаи. В последнее время выявилась целесообразность рассмотрения некоторых других операций (см. [59]) и особенно некоторых отношений между бинарными отношениями (до сих пор обычно рассматривалось лишь отношение включения отношений).

Все это приводит нас к общему понятию алгебры бинарных отношений. Пусть K - какой-либо класс алгебраических систем. Условимся, что все бинарные отношения будут браться между элементами какой-либо системы из K. Нас могут интересовать не произвольные бинарные отношения, а лишь отношения, удовлетворяющие некоторым специальным условиям M (например, только однозначные отношения, т.е. преобразования; или только автоморфизмы; или только транзитивные отношения и т.п.). Пусть Φ - некоторое множество бинарных отношений, удовлетворяющих условиям M. Допустим, что на Φ заданы некоторые операции и отношения. При этом нас интересуют операции не произвольные, а как-то связанные с природой элементов множества Φ (например, это могут быть операции умножения, обращения бинарных отношений, сложения эндоморфизмов, если такая операция допустима на системах класса K, и т.п.). Мы будем считать, что операции и отношения между элементами Φ заданы некоторыми формулами σ. В результате Φ превращается в алгебраическую систему. Эту систему мы называем конкретной алгеброй бинарных отношений вида σ над классом K. Класс всех таких конкретных алгебр обозначается через $\mathcal{R}(\sigma, K, M)$. Алгебраические системы, изоморфные конкретным алгебрам отношений, называются абстрактными алгебрами отношений вида σ над классом K. Например, если K - класс всех множеств, M состоит в требовании того, чтобы рассматриваемые отношения были преобразованиями, а σ определяет лишь одну операцию умножения преобразований, то соответствующими конкретными алгебрами отношений будут всевозможные по-

лугруппы преобразований. Абстрактными алгебрами отношений будут всевозможные абстрактные полугруппы.

Ясно, что алгебры отношений встречаются весьма часто и в самых разных областях. Поэтому представляет большой интерес задача выявления общих свойств, присущих алгебрам отношений класса $\mathcal{R}(\sigma, K, M)$, рассмотрение этих систем с точностью до изоморфизма, построения абстрактной теории такого класса. Практика показывает, что рассматривавшиеся до сих пор операции и отношения между бинарными отношениями могут быть все определены на языке узкого исчисления предикатов. Специфические свойства M рассматриваемых отношений также, как правило, могут быть записаны на этом языке. В дальнейшем мы будем считать, что формулы из M и σ записаны на языке узкого исчисления предикатов, а класс K ультразамкнут (или, что более сильно, аксиоматизируем). При этих предположениях доказывается, что класс $R(\sigma, K, M)$ абстрактных алгебр отношений аксиоматизируем (более того, доказано, что этот класс универсален). Поэтому существует принципиальная возможность построения элементарной формализированной теории для любого класса алгебр отношений.

В § I вводятся некоторые понятия, необходимые для дальнейшего. Мы используем преимущественно обозначения из работы [59]. Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями общей алгебры и теории моделей (см. например, [3], [15], [23], [29], [51]). Кроме того, нам понадобятся некоторые сведения об ультрапроизведениях (см., например, [4], [11], [12]).

В § 2 вводится понятие алгебры отношений и доказывается теорема об аксиоматизируемости классов алгебр отношений. Заметим, что в этом же параграфе определяются алгебры отношений более общего типа, нежели описанные во введении.

В § 3 приводятся различные примеры алгебр отношений. Мы старались приводить, преимущественно, примеры, представляющие интерес с точки зрения теории полугрупп.

Краткое содержание настоящего доклада опубликовано в [38]. Текст настоящего доклада представляет собой пересказ части второй главы докторской диссертации автора.

§ I. Основные понятия

n-отношением между элементами множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ называется любое подмножество множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. В случае $n=2$ получаем бинарные, а в случае $n=1$ - унарные отношения. Родом n-арного отношения называется последовательность натуральных чисел от I до m, где $m \leqslant n$, причем предполагается, что эта последовательность состоит из n членов. Будем считать, что в случае $i<j$ первое вхождение числа i в эту последовательность находится левее первого вхождения числа j. Говорят, что n-отношение ρ имеет род $\mathcal{H}=(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, если ρ есть отношение между элементами множеств $A_{i_1} \times A_{i_2} \times \ldots \times A_{i_n}$ (таким образом, род показывает, какие из базисных множеств совпадают между собой). Отношение рода $(1, \ldots, 1)$ называется однородным - это отношение между элементами одного и того же множества. В противном случае отношение называется неоднородным. Мы будем рассматривать

лишь однородные бинарные отношения.

Алгебраической системой мы называем непустое множество, на котором задана последовательность операций и последовательность отношений. Обе последовательности могут иметь любой порядковый тип, в частности, быть пустыми. Мы считаем известным понятие однотипности (или подобия) алгебраических систем. В дальнейшем будут рассматриваться только классы однотипных алгебраических систем. Мы считаем также известным понятие языка узкого исчисления предикатов, соответствующего данному классу подобия алгебраических систем. Говоря об аксиоматизируемых классах, мы имеем в виду элементарно аксиоматизируемые классы. Класс называется ультразамкнутым, если он содержит ультрапроизведение любого семейства принадлежащих ему алгебраических систем по любому ультрафильтру.

Для того, чтобы рассматривать системы бинарных отношений между элементами алгебраической системы из некоторого класса K, нам надо построить язык узкого исчисления предикатов, на котором можно будет записывать различные предложения, относящиеся к таким системам. Алфавит такого языка содержит бесконечную последовательность индивидуальных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, которые при интерпретации принимают значения во множестве элементов алгебраической системы $\mathcal{A}$ из класса K. Кроме того, язык содержит функциональные и предикатные постоянные, соответствующие основным операциям и отношениям алгебраических систем из K. Язык содержит также бесконечную последовательность двухместных предикатных переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ (при интерпретации эти

переменные принимают значения в некотором непустом множестве Φ бинарных отношений на множестве элементов $\mathcal{A}$). Наконец, язык содержит обычные логические константы (кванторы и пропозициональные связки) и технические символы (запятые, скобки и т.п.). Синтаксис такого языка строится обычным образом: определяются термы, атомные формулы, формулы. Заметим, что в нашем языке возможна квантификация только по индивидуальным переменным, так что предикатные переменные, входящие в какую-либо формулу, всегда являются свободными. Замкнутую (т.е. не содержащую свободных индивидуальных переменных) формулу называем аксиомой. Для нас будет удобно считать, что в алфавит языка входит символ равенства.

Что касается аксиом языка, то это обычные аксиомы узкого исчисления предикатов с равенством. Как уже отмечалось, иногда для нас целесообразно рассматривать не произвольные бинарные отношения на элементах систем из K, а отношения, удовлетворяющие каким-либо специфическим условиям M. Чтобы учесть это, будем считать, что к обычным аксиомам нашего языка добавлено еще некоторое множество аксиом M (конечное или бесконечное). Эти аксиомы могут выражать специфические свойства интересующих нас бинарных отношений или специфические свойства систем из K.

Построенный таким образом язык обозначим через L_M. Как уже говорилось, мы рассматриваем исключительно следующие интерпретации нашего языка. Пусть $(\mathcal{A}, \Phi)$ - пара, состоящая из какой-либо системы из класса K и непустого множества Φ бинарных отношений между элементами системы $\mathcal{A}$. Индивиду-

альные переменные принимают значение во множестве элементов $\mathcal{A}$, а предикатные переменные - во множестве Φ; функциональные и предикатные постоянные становятся операциями и отношениями системы $\mathcal{A}$, а логические константы и равенство интерпретируются обычным образом. При этом автоматически выполняются все логические аксиомы нашего языка. Кроме того, мы требуем, чтобы при интерпретации выполнялись аксиомы M (если какая-либо из этих аксиом содержит предикатную переменную, то мы считаем, что эта аксиома должна превращаться в истинное высказывание при замене этой переменной любым элементом из Φ). Это последнее требование налагает некоторые ограничения на выбор $\mathcal{A}$ и Φ. Во всяком случае, пара $(\mathcal{A},\Phi)$ полностью определяет интерпретацию языка L_M.

§ 2. Алгебры отношений

Пусть дан класс K алгебраических систем и язык L_M. Операционной формулой языка L_M будем называть любую формулу, содержащую в точности две свободные индивидуальные переменные: x_1 и x_2.

Видом в языке L_M называется любая двойная последовательность $\sigma=(O_1,O_2,\dots;R_1,R_2\dots)$, где O_i - операционные формулы, а R_i - аксиомы. Порядковые типы этих двух последовательностей произвольны (последовательности могут быть пустыми).

Пусть $\sigma=(O_1,O_2,\dots;R_1,R_2,\dots)$ - некоторый вид в языке L_M, а $(\mathcal{A},\Phi)$ - некоторая интерпретация этого языка. Рассмотрим какую-либо операционную формулу O_i, принадлежащую виду.

Для определенности здесь и всюду далее будем считать, что она содержит предикатные переменные $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n_i}$ (эта формула может, конечно, вообще не содержать предикатных переменных). Всем символам, входящим в формулу O_i придадим их значения при интерпретации $(\mathcal{A}, \Phi)$. Предикатные переменные $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n_i}$ заменим соответственно элементами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_i} \in \Phi$. Свободные переменные x_1 и x_2 будем заменять различными значениями из множества элементов $\mathcal{A}$. В зависимости от значений x_1 и x_2 O_i будет превращаться то в истинные, то в ложные высказывания. Определим бинарное отношение $o_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i})$ между элементами системы $\mathcal{A}$ формулой

$$(a_1, a_2) \in o_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}) \longleftrightarrow O_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}; a_1, a_2),$$

т.е. $(a_1, a_2) \in o_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i})$ тогда и только тогда, когда O_i истинно при замене x_1 и x_2 соответственно элементами a_1 и a_2 системы $\mathcal{A}$. Вид σ называется согласованным с интерпретацией $(\mathcal{A}, \Phi)$, если для любой операционной формулы O_i из этого вида и для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i} \in \Phi$ бинарное отношение $o_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i})$ принадлежит Φ.

Пусть σ – вид, согласованный с интерпретацией $(\mathcal{A}, \Phi)$. Тогда каждому кортежу $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i})$ отношений из Φ ставится в соответствие отношение $o_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n_i}) \in \Phi$. Другими словами, o_i можно рассматривать как n_i-арную операцию на множестве Φ, что мы и будем делать. В случае, когда $n_i = 0$ (т.е. формула O_i не содержит предикатных переменных), получаем 0-арную операцию o_i, которая представляет из себя просто какое-то отношение из Φ (т.е. $o_i \in \Phi$).

Рассмотрим теперь формулу R_i из вида. Здесь и всюду

далее будем для определенности считать, что эта формула содержит в точности предикатные переменные $P_1, P_2, \ldots, P_{m_i}$. Придадим всем символам, входящим в эту формулу, значения при интерпретации $(\mathcal{A}, \Phi)$. Переменным $P_1, \ldots, P_{m_i}$ придадим соответственно значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i} \in \Phi$. В результате наша формула превратится в высказывание - истинное или ложное. Определим m_i-арное отношение r_i на множестве Φ:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i}) \in r_i \leftrightarrow R_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i})$$

(т.е. $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i}) \in r_i$ тогда и только тогда, когда R_i, в которое вместо $P_1, \ldots, P_{m_i}$ подставлены $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_i}$, превращается в истинное высказывание). Если R_i не содержит предикатных переменных, то r_i будет 0-арным отношением, т.е. высказыванием. Мы исключим из рассмотрения этот случай, ибо обычно не рассматривают алгебраические системы, среди основных отношений которых встречаются 0-арные.

Итак, каждой операционной формуле вида O_i, согласованного с интерпретацией $(\mathcal{A}, \Phi)$, соответствует операция на множестве Φ, а каждой аксиоме из σ соответствует отношение на Φ. В результате мы получаем алгебраическую систему $(\Phi; O_1, O_2, \ldots; r_1, r_2, \ldots)$. Эта алгебраическая система называется конкретной алгеброй отношений вида σ над классом K. Класс всех конкретных алгебр отношений вида σ над K будем обозначать символом $\mathcal{R}(\sigma, K, M)$ или, если это не вызовет недоразумения, просто через $\mathcal{R}$.

Абстрактное замыкание класса $\mathcal{R}$ (т.е. класс всех алгебраических систем, изоморфных системам из $\mathcal{R}$) будем обозначать символом $R(\sigma, K, M)$ (или R). Элементы класса R будем

называть абстрактными алгебрами отношений вида σ над классом K. Нередко слово "абстрактный" будет опускаться.

Приведем некоторые примеры алгебр отношений. Заметим, что примерам специально посвящен § 3.

I. Полугруппы преобразований. В качестве K берем класс всех множеств, в качестве M – единственную аксиому

$$(\wedge x_1, x_2, x_3)\,[\varphi_1(x_1, x_2) \wedge \varphi_1(x_1, x_3) \to x_2 = x_3] \quad (1)$$

гарантирующую однозначность бинарного отношения. В качестве вида берем $\sigma_1 = (O_0)$, где O_0 – формула

$$(\vee x_3)\,[\varphi_1(x_1, x_3) \wedge \varphi_2(x_3, x_2)] \quad (2)$$

определяющая умножение (суперпозицию) бинарных отношений.

Интерпретацией языка, согласованной с нашим видом, будет пара $(\mathcal{A}, \Phi)$, где $\mathcal{A}$ – непустое множество, а Φ – множество бинарных отношений на $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условию M (т.е. преобразований множества $\mathcal{A}$), замкнутое относительно операции суперпозиции. Конкретными алгебрами отношений будут полугруппы преобразований $(\Phi\,;\, o)$.

2. Группы подстановок. K – класс всех множеств, M, кроме (I), содержит формулы

$$(\wedge x_1)(\vee x_2)[\varphi_1(x_1, x_2)], \quad (\wedge x_1, x_2, x_3)[\varphi_1(x_1, x_2) \wedge \varphi_1(x_3, x_2) \to x_1 = x_3], \quad (3)$$

вид σ_2 состоит из формулы (2) и формулы

$$\varphi_1(x_2, x_1) \quad (4)$$

Интерпретацией, согласованной с σ_2, будет множество Φ бинарных отношений, удовлетворяющее формулам (I) и (3) (т.е. полные взаимно однозначные преобразования), замкнутое относительно операции умножения, определяемой формулой (2) и от-

носительно операции обращения, определяемой формулой (4). Конкретными алгебрами отношений будут системы $(\Phi; o, ^{-1})$, где Φ множество подстановок некоторого множества (подстановка – это взаимно однозначное полное отображение множества на себя), а операции o и $^{-1}$ совпадают с умножением и обращением подстановок. Другими словами, получаем группы подстановок.

3. Кольца эндоморфизмов абелевых групп. Здесь K – класс всех абелевых групп, M состоит из формулы (I) и первой из формул (3), а также формулы

$$(\wedge x_1, x_2, x_3, x_4)[\varphi_1(x_1, x_2) \wedge \varphi_1(x_3, x_4) \to \varphi_1(O(x_1, x_3), O(x_2, x_4))]$$

где O есть функциональная константа, соответствующая операции сложения в абелевой группе. Ясно, что интерпретациями языка будут $(\mathcal{A}, \Phi)$, где $\mathcal{A}$ – абелева группа, а Φ – множество бинарных отношений на $\mathcal{A}$, удовлетворяющих условиям M (т.е. являющихся полными преобразованиями, согласованными со сложением). Поэтому Φ есть множество эндоморфизмов группы $\mathcal{A}$.

Вид состоит из формулы (2) и формул

$$(V x_3, x_4)[\varphi_1(x_4, x_3) \wedge \varphi_2(x_1, x_4) \wedge O(x_3, x_4) = x_2]$$

$$(V x_3, x_4)[\varphi_1(x_1, x_3) \wedge \varphi_2(x_1, x_4) O(x_2, x_4) = x_3]$$

Конкретными алгебрами отношений будут системы $(\Phi;\ o, +, -)$, где Φ – множество эндоморфизмов абелевой группы, замкнутое относительно операций o, $+$ и $-$, являющихся соответственно операциями умножения, сложения и вычитания эндоморфизмов. В результате имеем как раз кольца эндоморфизмов абелевых групп.

В случае I класс R совпадает с классом всех полугрупп,

в случае 2 имеем класс всех групп, в случае 3 – класс всех ассоциативных колец.

Теорема. Пусть K – **ультразамкнутый класс** алгебраических систем, M – произвольное множество аксиом, σ – произвольный вид в языке L_M. Тогда класс $R(\sigma, K, M)$ всех абстрактных алгебр отношений вида σ над классом K универсален.

Доказательство. Пусть F – **конкретная алгебра отношений вида** σ **над** K, соответствующая интерпретации $(\mathcal{A}, \Phi)$, и пусть $\mathcal{B}$ – алгебраическая подсистема F с множеством элементов Ψ. Тогда, как легко видеть, $\mathcal{B}$ будет алгеброй отношений, соответствующей интерпретации $(\mathcal{A}, \Psi)$ языка L_M (эта интерпретация согласуется с видом σ, ибо Ψ – стабильное подмножество множества Φ, а значит, замкнуто относительно всех операций, определяемых операционными формулами из σ). Отсюда сразу же следует, что класс R замкнут относительно взятия алгебраических подсистем. Из определения R следует также, что этот класс замкнут относительно взятия изоморфных образов. Докажем, что класс R ультразамкнут. Отсюда будет следовать [4], [II], что класс R универсален.

Пусть $(F_a)_{a \in A}$ – семейство алгебраических систем из R и Δ – ультрафильтр на A (см. определение в [2]). Надо показать, что $\prod_a (F_a)/\Delta \in R$. Поскольку ультрапроизведение изоморфных образов будет изоморфным образом ультрапроизведения (см. [4]), можно считать, что F_a суть конкретные алгебры отношений. Будем считать, что F_a соответствует интерпре-

тации $(\mathcal{O}_a, \Phi_a)$ языка L_M. Построим интерпретацию $(\mathcal{O}, \Phi)$ языка L_M, которой будет соответствовать алгебра отношений, изоморфная ультрапроизведению $\prod_a (F_a)/_\Delta$. Это будет означать, что $\prod_a (F_a)/_\Delta \in R$, что нам и требуется доказать.

В качестве $\mathcal{O}$ возьмем $\prod_a (\mathcal{O}_a)/_\Delta$ - ультрапроизведение семейства $(\mathcal{O}_a)_{a\in A}$. Поскольку, по условию, класс K ультразамкнут, $\mathcal{O}\in K$. Определим отображение η множества $\prod_a (\Phi_a)/_\Delta$, являющегося ультрапроизведением семейства множеств $(\Phi_a)_{a\in A}$ в множество бинарных отношений между элементами $\mathcal{O}$: $\eta(\prod_a (\alpha_a)/_\Delta) = \square_a (\alpha_a)/_\Delta$. Здесь $\square_a (\alpha_a)/_\Delta$ обозначает ультрапроизведение семейства бинарных отношений $(\alpha_a)_{a\in A}$. Покажем, что η будет взаимно однозначным полным отображением. Действительно, $\eta(\prod_a (\alpha_a)/_\Delta) = \eta(\prod_a (\beta_a)/_\Delta) \leftrightarrow \square_a (\alpha_a)/_\Delta = \square_a (\beta_a)/_\Delta \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \underset{a}{E} [\alpha_a = \beta_a] \in \Delta \leftrightarrow \prod_a (\alpha_a)/_\Delta = \prod_a (\beta_a)/_\Delta$. Здесь $\underset{a}{E}\, S(a)$ обозначает множество всех a, для которых верно высказывание $S(a)$. Образ множества $\prod_a (\Phi_a)/_\Delta$ при отображении η обозначим через Φ. Покажем, что $(\mathcal{O}, \Phi)$ будет искомой интерпретацией языка L_M. Прежде всего, надо показать, что выполняются условия M. Используя основное свойство ультрапроизведений [I2]: "элементарное свойство выполняется для ультрапроизведения тогда и только тогда, когда оно выполняется почти для всех (в смысле данного ультрафильтра) сомножителей", легко показываем, что $\square_a (\alpha_a)/_\Delta$ удовлетворяет аксиоме из M тогда и только тогда, когда почти все α_a удовлетворяют этой аксиоме. Поскольку все α_a взяты из Φ_a, они все удовлетворяют M. Поэтому $\square_a (\alpha_a)/_\Delta$ удовлетворяет условию M также. Здесь мы не стали приводить громоздких формул, а провели доказательство на словах. Заме-

тим, что от этого оно не стало менее строгим.

Вид σ определяет на множестве Φ частичные алгебраические операции (частичные, поскольку мы не знаем, будет ли $(\mathcal{A},\Phi)$ согласовано с видом σ) и отношения. Покажем, что η будет изоморфизмом ультрапроизведения $\prod_a (F_a)/_\Delta$ на алгебраическую структуру, индуцируемую на Φ видом σ. Отсюда сразу же будет следовать согласованность $(\mathcal{A},\Phi)$ с видом σ (ибо все операции на Φ будут полными в силу изоморфизма η). Наша теорема будет в этом случае доказана. Пользуясь основным свойством ультрапроизведений, получаем:

$$o_i(\eta(\prod_a(\alpha'_a)/_\Delta),\dots,\eta(\prod_a(\alpha_a^{n_i})/_\Delta)) = \eta(\prod_a(\alpha_a)/_\Delta) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow o_i(\prod_a(\alpha'_a)/_\Delta,\dots,\prod_a(\alpha_a^{R_i})/_\Delta) = \prod_a(\alpha_a)/_\Delta \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow E_a\left[o_i(\alpha^1_a,\dots,\alpha^{n_i}_a) = \alpha_a\right] \in \Delta \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \prod_a o_i/_\Delta(\prod_a(\alpha'_a)/_\Delta,\dots,\prod_a(\alpha_a^{n_i})/_\Delta) = \prod_a(\alpha_a)/_\Delta,$$

откуда следует, что η переводит операцию $\prod_a o_i/_\Delta$ системы $\prod_a(F_a)/_\Delta$ в операцию o_i системы Φ. Точно так же показываем, что η сохраняет отношения r_i. Следовательно, $\prod_a(F_a)/_\Delta$ изоморфно конкретной алгебре отношений, соответствующей интерпретации $(\mathcal{A},\Phi)$. Теорема доказана.

Теорема не дает никаких указаний о том, как искать те или иные конкретные системы аксиом, кроме указания, что эти аксиомы можно выбрать универсальными. При рассмотрении тех или иных специальных классов могут быть полезны различные специфические свойства рассматриваемых классов; используя теоретико-модельные результаты (см. [3], [13], [23]), можно часто усилить эту теорему в конкретных ситуациях.

Ранее уже отмечалось, что аксиомы, характеризующие тот

или иной класс алгебр отношений, представляют собой важную информацию о свойствах систем преобразований. Поэтому задача отыскания таких аксиоматик весьма важна и интересна. В отличие от довольно произвольных аксиоматик, давших начало многочисленным обобщениям понятия группы, которые появлялись в предвоенные годы, в нашем случае положение меняется. Мы не "придумываем" аксиомы, для того чтобы построить новый класс алгебраических систем и получить новое поле исследований. Объекты, описываемые нашими аксиомами, даны нам *a priori* - это системы преобразований, на которых заданы те или иные операции и отношения. Ясно, сколь важны для математики подобные образования. Теорема утверждает, что аксиомы, характеризующие классы алгебр отношений, существуют. Наша задача состоит в том, чтобы найти эти аксиомы.

Нередко в различных областях математики приходится рассматривать отображения из одного множества в другое, бинарные отношения между элементами двух различных множеств. Например, в дифференциальной геометрии оказалась важной специальная тернарная операция тройного умножения, применяемая к неоднородным бинарным отношениям (см. [53], [58]). Для рассмотрения операций и отношений между неоднородными бинарными отношениями вышеприведенная схема непригодна, однако она становится пригодной после небольших изменений. Мы будем сразу рассматривать алгебры n -арных отношений при фиксированном натуральном n (которое необязательно равно 2). Поскольку n -арные отношения бывают разных родов, мы будем считать, что фиксирован некоторый род $\mathcal{H}$ n -арных отноше-

ний. В дальнейшем все отношения будут предполагаться имеющими род $\mathcal{H}$. Итак, мы рассматриваем отношения между элементами множеств $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$, из которых некоторые могут совпадать (согласно роду). Как и в случае однородных бинарных отношений, предположим, что на множествах A_i могут быть заданы некоторые алгебраические структуры. Будем считать, что нам надо n классов алгебраических структур $K_1, K_2, \ldots, K_n$ и что множество A_{i_k} обязано быть множеством элементов какой-либо алгебраической системы из класса K_k. Некоторые из классов K_i могут совпадать. Будем считать, что нам задан некоторый род $\overline{\mathcal{H}} = (j_1, j_2, \ldots j_n)$ и классы K_i и K_k совпадают тогда и только тогда, когда $j_i = j_k$. Сейчас нам надо выяснить взаимосвязь родов $\mathcal{H}$ и $\overline{\mathcal{H}}$. Вообще говоря, никакой взаимосвязи между этими родами может не существовать: из того, что множества A_i и A_j всегда равны, не следует, что на них заданы одинаковые алгебраические структуры, или хотя бы что $K_i = K_j$. С другой стороны, если $K_i = K_j$, то множества A_i и A_j не обязаны совпадать.

Итак, нам даны два рода $\mathcal{H}$ и $\overline{\mathcal{H}}$ и классы $K_1, K_2, \ldots, K_n$ алгебраических структур. Нас интересуют системы n-арных отношений рода $\mathcal{H}$ между элементами множеств $A_1, \ldots, A_n$, где A_i есть множество элементов какой-либо системы из K_i. Для того чтобы построить алгебры n-арных отношений указанного рода нам придется предварительно построить язык узкого исчисления предикатов для записи высказываний относительно интересующих нас систем отношений. Этот язык в принципе сходен с рассматривавшимся ранее языком L_M. Алфавит нового языка

состоит из m сортов различных индивидуальных переменных (здесь m есть число различных членов последовательности $\mathcal{H}$). При интерпретации каждый сорт индивидуальных переменных принимает значения в своем множестве. Кроме того, язык содержит счетную последовательность n-местных предикатных переменных P_1, P_2, ... При интерпретации эти переменные принимают значения в некотором множестве Φ n-арных отношений интересующего нас рода. Наконец, язык содержит функциональные и предикатные постоянные, соответствующие основным операциям и отношениям классов K_i, логические постоянные и технические символы. Будем также считать, что алфавит содержит символ равенства. При определении термов нашего языка надо учитывать, что в функциональную постоянную, соответствующую операции класса K_j можно подставлять только индивидуальные переменные сорта i_j (где $\mathcal{H} = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$), а при определении атомных формул надо учитывать, что символ равенства может применяться только к индивидуальным переменным и термам одинакового сорта, в предикатную постоянную, соответствующую отношению класса K_j, могут подставляться только термы и индивидуальные переменные сорта i_j. В предикатную переменную подставляется n термов, причем их сорта должны быть последовательно $i_1, i_2, \ldots, i_n$. Аксиомы языка содержат обычные аксиомы многосортного узкого исчисления предикатов с равенством, а также некоторый набор аксиом M. Интерпретация языка задается следующим образом: берем кортеж $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n; \Phi)$, где $\mathcal{A}_i$ суть алгебраические системы, $\mathcal{A}_i \in K_i$; Φ есть непустое множество n-арных отношений

между элементами этих алгебраических систем. При этом считаем, что последовательность $(A_1,\ldots, A_n)$ множеств элементов систем $\mathcal{A}_i$ имеет род $\varkappa$. Индивидуальные переменные сорта i_j принимают значения в множестве A_j, предикатные переменные принимают значения в множестве Φ, функциональные и предикатные постоянные превращаются в операции и отношения алгебраических систем $\mathcal{A}_i$, остальные символы интерпретируются обычным образом. При этом требуется, чтобы выполнялись аксиомы M (остальные, чисто логические, аксиомы нашего языка будут выполняться всегда).

Операционной формулой назовем формулу, содержащую в точности n различных свободных индивидуальных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем x_j есть переменная сорта i_j. Видом называется двойная последовательность: последовательность операционных формул, за которой идет последовательность замкнутых формул (т.е. аксиом). Как и в случае однородных бинарных отношений, каждая операционная формула определяет на множестве Φ интерпретации некоторую частичную алгебраическую операцию. Мы считаем интерпретацию согласованной с видом, если все эти операции - полные. В случае, когда интерпретация согласована с видом, на множестве формулами вида определяются некоторые операции и отношения, в результате чего Φ превращается в алгебраическую систему. Эту систему мы будем называть конкретной алгеброй n-арных отношений рода $\varkappa$, вида δ, над классами $K_1,\ldots,K_n$. Класс всех таких конкретных алгебр отношений обозначим

$R(\sigma, K_1, \ldots, K_n, M, \varkappa)$, а класс всех алгебраических систем, изоморфных конкретным алгебрам отношений, обозначим через $R(\sigma, K_1, \ldots, K_n, M, \varkappa)$ и назовем классом абстрактных алгебр отношений.

Ранее данные определения алгебр отношений делаются частным случаем этого общего определения: они получаются, когда $n = 2$, $\varkappa = \bar{\varkappa} = (1,1)$.

Оказывается, что для так определенных общих алгебр отношений имеет место теорема, доказанная для частного случая ранее: если $K_1, \ldots, K_n$ - произвольные ультразамкнутые классы алгебраических систем, $\varkappa$ - произвольный род, σ - произвольный вид, то класс $R(\sigma, K_1, \ldots, K_n, M, \varkappa)$ всех абстрактных алгебр отношений рода $\varkappa$ и вида σ над классами $K_1, \ldots, K_n$ универсален.

Доказательство этой теоремы проводится точно так же, как данное нами ранее доказательство частного случая этой теоремы, однако оно гораздо более громоздко в силу использования более сложного языка узкого исчисления предикатов. Мы опустим это доказательство.

Заметим, что с многосортными исчислениями предикатов можно познакомиться по работам [47], [60], однако язык, построенный нами, отличается от языков, рассматриваемых в этих работах.

В качестве примеров рассмотрим алгебры унарных отношений. Если в качестве K взять класс всех множеств, а вид считать состоящим из одной формулы, определяющей отношение включения унарных отношений, то конкретными алгебрами отно-

шений будут множества подмножеств, упорядоченные отношением теоретико-множественного включения.

Абстрактными алгебрами отношений будут произвольные упорядоченные множества.

Если в качестве вида взять две формулы, определяющие пересечение и объединение подмножеств, то конкретными алгебрами отношений будут кольца множеств. Абстрактными алгебрами отношений в этом случае будут, как показал Биркгоф в [I], произвольные дистрибутивные решетки.

Наконец, если к только что рассматривавшемуся виду добавить операционную формулу, определяющую операцию теоретико-множественного дополнения, то конкретными алгебрами отношений будут тела множеств, а абстрактными алгебрами отношений будут, согласно известной теореме Стоуна, произвольные булевы алгебры.

Пусть K - класс групп, формулы M таковы, что рассматриваемые унарные отношения будут нормальными делителями этих групп, вид состоит из двух формул, определяющих умножение и пересечение нормальных делителей. Конкретными алгебрами отношений будут всевозможные решетки нормальных делителей групп. Абстрактными алгебрами отношений будут решетки, изоморфные решеткам нормальных делителей.

Насколько нам известно, система аксиом для таких решеток еще не найдена, хотя из нашей теоремы следует, что такая система аксиом существует.

Итак, классы полугрупп, групп, колец, упорядоченных

множеств, дистрибутивных решеток, булевых алгебр - все это классы алгебр отношений. Тот факт, что для этих алгебраических систем, играющих фундаментальную роль в современной алгебре, существуют простые системы аксиом, отнюдь не случаен: он является отражением общей закономерности, следующей из доказанной теоремы.

Допустим, что L_M - некоторый язык и $(\mathcal{A}, \Phi)$ - его интерпретация. Вообще говоря, если $\mathcal{A}$ задано, то множество Φ определяется неоднозначно (это отражает тот факт, что рассматриваемые нами интерпретации, вообще говоря, нестандартны).

Если для любой системы $\mathcal{A}$ из K существует наибольшее множество Φ такое, что интерпретация $(\mathcal{A}, \Phi)$ согласована с видом σ, то будем говорить, что класс $R(\sigma, K, M)$ допускает симметрические алгебры отношений.

Конкретной симметрической алгеброй отношений будем в этом случае называть алгебру отношений, соответствующую интерпретации $(\mathcal{A}, \Phi)$ с наибольшим Φ.

Абстрактными симметрическими алгебрами отношений назовем алгебраические системы, изоморфные конкретным симметрическим алгебрам отношений.

Примеры таких алгебр отношений будут приведены далее. Здесь отметим лишь некоторые из них.

Абстрактная характеристика симметрических полугрупп преобразований (т.е. полугрупп всех частичных преобразований некоторого множества) дана в [5],[20]. Абстрактная характеристика симметрических полугрупп полных преобразований

дана в [22],[18],[6].

Характеристика симметрических групп подстановок хорошо известна.

Симметрическими кольцами эндоморфизмов будут кольца всех эндоморфизмов абелевых групп.

Наконец, классы алгебр унарных отношений, рассматривавшиеся нами, также допускают симметрические алгебры: это будет: I) множества всех подмножеств множества, упорядоченные отношением включения; 2) кольцо всех подмножеств множества; 3) тело всех подмножеств множества; 4) решетка всех нормальных делителей группы.

Абстрактная характеристика симметрической полугруппы всех бинарных отношений на некотором множестве дана в [24],[63]. Абстрактная характеристика симметрической полугруппы полных взаимно однозначных преобразований дана в [5]. Общий метод отыскания абстрактных характеристик для широкого класса симметрических алгебр отношений (включающего большинство симметрических алгебр, рассматривавшихся до сих пор), дан в [42].

§ 3. Примеры классов алгебр отношений

I. Цилиндрические алгебры [7],[10]. Так называются алгебры однородных n -арных отношений на произвольных множествах вида $(\Phi, \cap, \cup, ', \emptyset, U, K_1, \ldots, K_n))$, где $\cap, \cup, ', \emptyset, U$ соответственно операции пересечения, объединения, дополнения, пустое и универсальное n -арные отношения, а K_i - операции цилиндрификации:

$$K_i(\alpha) = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{i-1 \text{ раз}} \times pr_i \alpha \times \underbrace{A \times \ldots \times A}_{n-i \text{ раз}}$$

Система аксиом для класса абстрактных цилиндрических алгебр, существующая в силу доказанной теоремы, нам неизвестна.

2. Рестриктивные полугруппы и биполугруппы [57], [36], [39], [45]. Рестриктивная полугруппа бинарных отношений - это множество бинарных отношений, вообще говоря, неоднородных, рассматриваемое относительно операции рестриктивного умножения $\triangleright$:

$$\rho_1 \triangleright \rho_2 = (\rho\tau_1 \rho_1 \times B) \cap \rho_2 \qquad (\rho_i \subset A \times B)$$

Абстрактная характеристика рестриктивных полугрупп бинарных отношений и рестриктивных полугрупп отображений (т.е. однозначных бинарных отношений) дана в [57]. Абстрактная характеристика рестриктивных полугрупп взаимно однозначных отображений дана в [39].

Рестриктивной биполугруппой бинарных отношений называется алгебра неоднородных бинарных отношений с двумя операциями: $\triangleright$ и $\triangleleft$, причем $\rho_1 \triangleleft \rho_2 = \rho_1 \cap (A \times \rho\tau_2 \rho_2)$. Абстрактная характеристика рестриктивных биполугрупп бинарных отношений, а также рестриктивных биполугрупп однозначных и взаимно однозначных бинарных отношений, существующая в силу доказанной теоремы, найдена в [39], [45].

3. Проекционные релятивы. Так мы называем множества бинарных отношений, между которыми задано одно или несколько из следующих отношений: отношение ζ теоретико-множественного включения; отношение χ_1 включения первых проекций; отношение χ_2 включения вторых проекций; отношение π_1 равенства первых проекций; отношение π_2 равенства вторых проекций (например, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \chi_2 \leftrightarrow \rho\tau_2\alpha_1 \subset \rho\tau_2\alpha_2$). Системы аксиом для

соответствующих классов абстрактных алгебр отношений найдены в [40].

4. Проекционные полугруппы бинарных отношений. Так мы называем полугруппы бинарных отношений, на которых задано одно или несколько отношений, определенных в 3. Системы аксиом для соответствующих классов абстрактных алгебр отношений найдены в [40]. Эта же задача представляет большой интерес и для случая преобразований или взаимно однозначных преобразований. В этом отношении многие задачи (из которых лишь часть опубликована) решены в докторской диссертации автора. Здесь мы отметим лишь некоторые задачи.

Фундаментально упорядоченные полугруппы бинарных отношений - это полугруппы бинарных отношений, упорядоченные отношением включения.

Система аксиом в этом случае найдена в [65], симметрические фундаментально упорядоченные полугруппы бинарных отношений охарактеризованы в [24]. Задача об изучении отношения включения на полугруппах преобразований стояла давно. В 1956 году В.В.Вагнер, который, насколько нам известно, первым ввел на полугруппах преобразований отношения ζ, χ_1, χ_2, π_1, π_2 [55] нашел систему аксиом для фундаментально упорядоченных полугрупп преобразований [54]. На важность этой задачи обращал внимание К.Менгер [25], некоторые исследования в этом направлении проведены в [49] (заметим, что алгебры функций в смысле [49] - это алгебры отношений специального вида). Однако аксиомы, найденные В.В.Вагнером, были неэлементарными. Из доказанной теоремы следует, что должна су-

ществовать система элементарных аксиом. Эта система найдена в [35]. Там же найдена система аксиом для фундаментально упорядоченных полугрупп взаимно однозначных преобразований. В этой же работе найдена характеристика полугрупп преобразований, на которых задано отношение χ или отношение χ_2 (случай, когда заданы и χ_1, и χ_2 полностью решен в диссертации автора, так же как и случай, когда заданы ζ и χ_1).

5. Трансформативные полугруппы. Это полугруппы преобразований, на которых заданы отношение χ и отношение ξ полусовместности, определяемой формулой

$$(\alpha_1,\alpha_2)\in\xi \leftrightarrow (\wedge a)[a\in\rho\tau,\alpha_1 \wedge \rho\tau,\alpha_2 \to \alpha_1(a)=\alpha_2(a)]$$

Трансформативные полугруппы ввел В.В.Вагнер [56], который нашел для них неэлементарную характеристику. По доказанной теореме, для класса абстрактных трансформативных полугрупп существует система элементарных аксиом, т.е. результат В.В.Вагнера может быть усилен. Эти аксиомы найдены впервые в работе [46]. Вскоре после автора аналогичные аксиомы нашел В.Н.Салий. В работе [46] найдены также аксиомы для полугрупп преобразований, на которых задано отношение ξ.

6. Полугруды бинарных отношений. Так называются множества (вообще говоря, неоднородных) бинарных отношений, рассматриваемые относительно операции тройного умножения $[\alpha_1\alpha_2\alpha_3]=\alpha_3\circ\alpha_2^{-1}\circ\alpha_1$. Задача об отыскании системы аксиом для этого класса стоит уже около 15 лет, но по-прежнему остается нерешенной, хотя за нее брались многие исследователи (это дает некоторое представление о степени трудности задач,

решение которых вкратце упоминается в этом параграфе). По доказанной теореме, класс абстрактных полугруд бинарных отношений универсален. Легко проверить, что этот класс замкнут относительно прямых произведений и содержит одноэлементную полугруду. Следовательно [13], этот класс квазипримитивен, т.е. для него существует система аксиом, являющихся условными тождествами [42].

7. Обобщенные груды обратимых отображений. Так называются полугруды взаимно однозначных бинарных отношений. Они были введены В.В.Вагнером [53], который нашел для них систему аксиом, состоящую из нескольких тождеств. Абстратная характеристика симметрических обобщенных груд дана в [30]. Представления обобщенных груд описаны в [32].

8. Обобщенные группы обратимых преобразований. Так называются множества взаимно однозначных частичных преобразований, рассматриваемые относительно операций умножения и обращения. Обобщенные группы были введены В.В.Вагнером [52], который впервые нашел для них систему аксиом. Позднее эта же задача была решена Престоном [26]. Оба эти автора рассматривали обобщенные группы как полугруппы специального вида. Аксиоматика обобщенных групп как алгебр с двумя операциями дана в [37], там даны также разнообразные аксиоматики класса обобщенных групп. Абстрактную характеристику симметрических обобщенных групп дали А.Е.Либер и Е.С.Ляпин [14],[17]. Другая характеристика может быть дана на основании результатов работы [42]. Представления обобщенных групп описаны в [34]. Заметим, что в иностранных статьях и в [19] обобщенные груп-

пы называют "инверсными полугруппами".

9. Инволютированные полугруппы бинарных отношений. Это алгебры отношений того же вида, что и обобщенные группы: они представляют собой множества однородных бинарных отношений, рассматриваемых относительно операций умножения и инволюции. Можно доказать, что соответствующий абстрактный класс алгебр отношений может быть охарактеризован системой условных тождеств. Однако аксиомы для этого класса до сих пор не найдены, хотя задача об их отыскании стоит уже около I5 лет. Добавляя к языку новые аксиомы, получаем класс инволютированных полугрупп полных бинарных отношений (т.е. отношений, у которых первая, а значит, и вторая, проекция совпадает со всем опорным множеством). Такие алгебры отношений можно рассматривать как обобщение понятия группы подстановок, получающееся в результате отказа от однозначности подстановок. Система аксиом для этого класса алгебр отношений найдена [43]. Рассматривались также инволютированные полугруппы квазиоднозначных бинарных отношений (бинарное отношение α называется квазиоднозначным, если $\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \alpha = \alpha$). Оказалось, что соответствующий класс абстрактных алгебр отношений совпадает с классом всех обобщенных групп [43], [4I]. Таким образом, для абстрактных обобщенных групп найдены представления совершенно нового типа. Если к языку добавить аксиому, требующую, чтобы любые два бинарные отношения коммутировали при умножении, получим коммутативные инволютированные полугруппы бинарных отношений. Их абстрактная характеристика также найдена [43]. Найдена также абстрактная характеристика инволютированных полугрупп

прямоугольных бинарных отношений [44] и некоторых других классов инволютированных полугрупп.

IO. Полугруппы обратимых преобразований. Это суть полугруппы взаимно однозначных однородных бинарных отношений. Легко показать, что с абстрактной точки зрения это те и только те полугруппы, которые могут быть изоморфно вложены в обобщенную группу. Система аксиом для этого класса полугрупп найдена [31],[33].

II. Полугруппы подстановок. Это есть полугруппы взаимно однозначных отображений множества на себя. Легко показать, что с абстрактной точки зрения это те и только те полугруппы, которые могут быть изоморфно вложены в группу. Система аксиом для этого класса полугрупп найдена [21].

I2. Полугруппы рефлективных, симметричных, транзитивных бинарных отношений. Это суть полугруппы бинарных отношений, каждое из которых рефлективно (соответственно, симметрично, транзитивно). Системы аксиом для этих классов найдены [41] . Заметим, что абстрактная характеристика фундаментально упорядоченных полугрупп рефлективных бинарных отношений и транзитивных бинарных отношений найдена ранее [65]. Абстрактная характеристика симметрической полугруппы всех рефлективных бинарных отношений также известна [64]. Найдены также системы аксиом для полугрупп бинарных отношений следующего типа: симметричных и рефлективных; симметричных и частично рефлективных; симметричных и транзитивных; рефлективных и транзитивных; частично рефлективных и транзитивных; рефлективных, симметричных и транзитивных [40],[43]. Найдена также система

аксиом для полугрупп прямоугольных бинарных отношений [44]. В работе [63] дана абстрактная характеристика симметрической полугруппы всех прямоугольных бинарных отношений. Такая характеристика также следует из результатов [42].

I3. Алгебры Менгера. Это множества n-местных полных функций (т.е. полных отображений декартовой n-степени A^n некоторого множества A в A), рассматриваемые относительно $(n+1)$-арной операции суперпозиции: $\varphi[\psi_1,\ldots\psi_n](a_1,\ldots,a_n) = \varphi(\psi_1(a_1,\ldots,a_n),\ldots,\psi_n(a_1,\ldots,a_n))$. Каждая n-местная полная функция может рассматриваться как специального вида $(n+1)$-арное отношение. Алгебры Менгера превращаются в алгебры однородных $(n+1)$-арных отношений. Система аксиом для абстрактных алгебр Менгера в частном случае найдена в [62]. В полной общности такая система аксиом найдена нами.

I4. Алгебры Йонссона. Так мы называем множества однородных бинарных отношений, рассматриваемые относительно операций умножения, обращения, теоретико-множественного пересечения, и 0-арной операции – тождественного бинарного отношения. Система аксиом для абстрактных алгебр Йонссона найдена в [8].

I5. Решетки коммутирующих отношений эквивалентности. Так называются множества отношений эквивалентности, рассматриваемые относительно операций умножения и пересечения. Поскольку множество этих отношений эквивалентности замкнуто относительно умножения, операция умножения коммутативна. Система аксиом найдена [8].

I6. Алгебры отношений Тарского. Так называются множе-

ства однородных бинарных отношений, рассматриваемые относительно операций пересечения, объединения, дополнения, умножения, обращения, содержащие тождественное, универсальное и пустое бинарные отношения [50]. Задача об отыскании системы аксиом для этого класса стояла давно [50],[9]. В 1950 году Линдон показал, что этот класс неаксиоматизируем. Однако результат этот оказался ошибочным: Тарский доказал аксиоматизируемость этого класса (результат Тарского является частным случаем доказанной здесь теоремы). В 1956 году Линдон нашел систему аксиом для этого класса [16].

Таковы некоторые примеры алгебр отношений. Эти примеры показывают, что понятие алгебры отношений обобщает естественный круг понятий, возникших на стыке логики и алгебры, включает в себя фундаментальные алгебраические образования. Нам думается, что нет необходимости еще раз подчеркивать важность характеризации классов алгебр отношений и большую естественность подобного рода задач. О степени сложности таких задач можно судить по вышеприведенным примерам. Эти же примеры показывают, что понятие алгебры отношений,не являясь теоретико-полугрупповым понятием, может сослужить большую службу в центральных вопросах теории полугрупп - теории полугрупп преобразований.

Литература

1. Г.Биркгоф, Теория структур, М., ИЛ, 1952.
2. Н.Бурбаки, Общая топология, глава I, М., ИЛ, 1958.
3. P.M.Cohn, Universal algebra, Harper and Row, New-York, 1965.

4. T.Frayne, A.C.Morel and D. Scott, Reduced direct products, Fund. Math.,1962, 51, 3, 195-228.

5. Л.М.Глускин, Идеалы полугрупп преобразований, Матем.сб., 1959, 47(89) , I, III-130.

6. Л.М.Глускин, Идеалы полугрупп, Матем.сб., 1961, 55(97), 4, 421-448.

7. L.Henkin and A.Tarski, Cylindric algebras, Proc. Sympos. Pure Math.,1961, 2, 83-113.

8. B.Jónsson, Representation of modular lattices and of relation algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 1959, 92, 3, 449-464.

9. B.Jónsson and A.Tarski, Representation problems for relation algebras, Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 92, 80-192.

10. B.Jónsson and A.Tarski, Boolean algebras with operators I, Amer. J. Math.,1951, 73, 4, 891-939; part II, ibid., 1952, 74, 1, 127-162.

11. H.J.Keisler, Ultraproducts and elementary classes, Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch., 1961, A 74, 5, 477-495.

12. S. Kochen, Ultraproducts in the theory of models, Ann. Math., 1961, 74, 2, 221-261.

13. С.Р.Когаловский, Структурные характеристики универсальных классов, Сиб.матем.ж.,1963, 4, I, 97-119.

14. А.Е.Либер, О симметрических обобщенных группах, Матем. сб., 1953, 33(75), 3, 531-545.

15. J.Łoś, The algebraic treatment of the methodology of elementary deductive systems, Studia Logica, 1955, 2, 151-212.

16. R.C.Lyndon, The representation of relational algebras, Ann. Math.,1950, 51, 3, 707-729; part II, ibid.,1956, 63, 2, 294-307.

I7. Е.С.Ляпин, Ассоциативные системы всех частичных преобразований, ДАН СССР, I953,88, I, I3-I5; поправка, там же, I953, 92, 4, 692.

I8. Е.С.Ляпин, Абстрактная характеристика некоторых полугрупп преобразований, Уч.зап.Ленингр.гос.пед. ин-та им. А.И.Герцена, I955, I03, 5-29.

I9. Е.С.Ляпин, Полугруппы, М., Физматгиз, I960.

20. Е.С.Ляпин, Абстрактная характеристика полугруппы всех частичных преобразований множества, связанная со свойствами ее минимальных идеалов, Уч.зап. Ленингр.гос.пед.ин-та им. А.И.Герцена, каф. матем., I96I,2I8, I3-2I.

2I. А.И.Мальцев, О включении ассоциативных систем в группы, Матем.сб., I939, 6(48), 2, 33I-336; вторая часть, там же, I940, 8(50), 2, 25I-264.

22. А.И.Мальцев, Симметрические группоиды, Матем.сб., I952, 3I(73), I, I36-I5I,

23. А.И.Мальцев, Некоторые вопросы теории классов моделей, Труды 4-го Всес.матем.съезда, т.I, Л., I963, I69-I98.

24. J.C.C.McKinsey, Postulates for the calculus of binary relations, J. Symb. Logic, 1940, 5, 3, 85-97.

25. K.Menger, The algebra of functions: past, present, future, Rend. Mat., 1961, (3-4), 20, 409-430.

26. G.B.Preston, Representation of inverse semigroups, J.London Math. Soc., 1954, 29, 4, 411-419.

27. J.Riguet, Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull. Soc. Math. France, 1948, 76, 1-4, 114-155.
русский перевод: Киберн.сб., I963, 7, I29-I85.

28. J.Riguet, Fondéments de la théorie des relations binaires, Thèse, Paris, 1951.

29. A.Robinson, Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra, Amsterdam, Nort-Holland Publ. Co., 1963.

30. Б.М.Шайн, Симметрические обобщенные груды, Научн. докл. высш.шк. (Физ.-матем.науки),1959, 2,I,88-93.

31. Б.М.Шайн. Система аксиом для полугрупп, вместимых в обобщенные группы, ДАН СССР, 1960, 134, 5, 1030-1033.

32. Б.М.Шайн, Представление обобщенных груд, Изв.вузов, Матем., 1961, 6(25), 142-154.

33. Б.М,Шайн, Вмещение полугрупп в обобщенные группы, Матем. сб., 1961, 35(97), 4, 379-400.

34. Б.М.Шайн, Представления обобщенных групп, Изв. вузов, Матем., 1962, 3(28), 164-176.

35. Б.М.Шайн, Представление упорядоченных полугрупп, Матем. сб., 1964, 65(107), 2, 188-197.

36. Б.М.Шайн, К теории рестриктивных полугрупп, Изв. вузов, Матем., 1963, 2(33), 152-154.

37. Б.М.Шайн, К теории обобщенных групп, ДАН СССР,1963, 158, 2, 296-299.

38. Б.М.Шайн, Relation algebras, Bull. acad. polon. sci.,Ser. sci. math., astr. et phys.,1965,13, 1, 1-5.

39. Б.М.Шайн, Рестриктивные биполугруппы, Изв. вузов, Матем., 1965, 1(44), 168-179.

40. Б.М.Шайн, О некоторых комитантах полугрупп бинарных отношений, Матем.зап.Уральского гос. ун-та, 1965, 5, 1, 73-91.

41. Б.М.Шайн, О некоторых классах полугрупп бинарных отношений, Сиб.матем.ж., 1965, 6, 3, 616-635.

42. Б.М.Шайн, Атомные полугруды и инволютированные полугруппы, Изв.вузов, Матем., 1965, 3(46), 172-184.

43. Б.М.Шайн, Инволютированные полугруппы полных бинарных отношений, ДАН СССР, 1964, 156, 6, 1300-1303.

44. Б.М.Шайн, Полугруппы прямоугольных бинарных отношений, ДАН СССР, 1965, 165, 5, 1011-1014.

45. Б.М.Шайн, Рестриктивные биполугруппы отображений, Изв. вузов, Матем., 1966, 5(54).

46. Б.М.Шайн, Трансформативные полугруппы преобразований, Матем. сб., в печати.

47. A.Schmidt, Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortigen Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik, Math. Ann., 1951, 123, 2, 187-200.

48. E.Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik III, Algebra und Logik der Relative I, Leipzig, Teubner, 1895.

49. B.Schweizer and A.Sklar, The algebra of functions, Math. Ann., 1960, 139, 5, 366-382; part 2, ibid., 1961, 143, 5, 440-447; part 3, ibid., 1965, 161, 3, 171-196.

50. A. Tarski, On the calculus of relations, J. Symb. Logic, 1941, 6, 3, 73-89.

51. A.Tarski, Contributions to the theory of models I, Proc. Koninkl. Akad. Wetensch., 1954, A 57, 5, 572-581; part 2, ibid., 582-588.

52. В.В.Вагнер, Обобщенные группы, ДАН СССР, 1952, 84, 6, 1119-1122.

53. В.В.Вагнер, Теория обобщенных груд и обобщенных групп, Матем.сб., 1953, 32(74), 3, 545-632.

54. В.В.Вагнер, Представление упорядоченных полугрупп, Матем.сб., 1956, 38(80), 2, 203-240.

55. В.В.Вагнер, Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности, Изв.вузов, Матем., I957, I, 8I-88.

56. В.В.Вагнер, Трансформативные полугруппы, Изв.высш.учебн. завед., Матем., I960, 4(I7), 36-48.

57. В.В.Вагнер, Рестриктивные полугруппы, Изв.вузов, Матем., I962, 6(3I), I9-27.

58. В.В.Вагнер, Основания дифференциальной геометрии и современная алгебра, Труды 4-го Всес.матем.съезда, т.I, Л., I963, I7-29.

59. В.В.Вагнер, Теория отношений и алгебра частичных отображений, в сб. "Теория полугрупп и ее приложения", вып.I, Саратов, I965, 3-I78.

60. Wang Hao, Logic of many-sorted theories, J. Symb. Logic, 1952, 17, 2, 105-116.

6I. A.N.Whitehead and B.Russell, Principia Mathematica I, Cambridge Univ. Press 1910.

62. H.I.Whitlock, A composition algebra for multiplace functions, Math. Ann., 1964, 157, 2, 167-178.

63. К.А.Зарецкий, Абстрактная характеристика полугруппы всех бинарных отношений, Уч.зап.Ленинград.гос.пед. ин-та им. А.И.Герцена, каф.матем., I958, I83, 25I-263.

64. К.А.Зарецкий, Абстрактная характеристика полугруппы всех рефлективных бинарных отношений, Уч.зап. Ленингр.гос.пед.ин-та им. А.И.Герцена, каф.матем., I958, I83, 265-269.

65. К.А.Зарецкий, Представление упорядоченных полугрупп бинарными отношениями, Изв.вузов, Матем., I959, 6(I3), 48-50.

ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП КАК ТЕОРИЯ СУПЕРПОЗИЦИЙ МНОГОМЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Шайн Б.М. (Саратов)

Декартову n-степень множества A, т.е. множество $A\times A\times\ldots\times A$ (n раз), будем сокращенно обозначать A^n.

n-местной функцией в множестве A называется любое частичное отображение из множества A^n в множество A. В случае полного отображения, т.е. всюду определенной функции, говорят об n-местной функции на множестве A. Можно также рассматривать многозначные n-местные функции, т.е. произвольные бинарные отношения между элементами множеств A^n и A.

Множество всех n-местных функций в множестве A обозначим через $F(A^n,A)$. Множество всех полных n-местных функций на множестве A обозначим через $F_1(A^n,A)$. Множество всех многозначных n-местных функций на множестве A обозначим через $\mathcal{P}(A^n\times A)$. Ясно, что

$$F_1(A^n,A)\subset F(A^n,A)\subset\mathcal{P}(A^n\times A)$$

В случае, когда $n=1$ получаем обычные (частичные, полные или многозначные) преобразования множества A.

Задача об изучении систем функций методами алгебры весьма важна с точки зрения различных разделов математики. Одной из важнейших операций над функциями является операция суперпозиции или подстановки одних функций в другие и образования таким образом сложных функций. Обычные преобразова-

ния, рассматриваемые относительно операции суперпозиции, образуют полугруппу. Как известно, каждая абстрактная полугруппа изоморфна полугруппе преобразований; таким образом теория полугрупп может рассматриваться (что и делается) как теория суперпозиций одноместных функций.

В то время как попытки изучения суперпозиции преобразований алгебраическими методами делались с прошлого века, различные операции, возникающие в результате суперпозиции многоместных функций, оставались вне алгебры. Насколько нам известно, первым кто обратил внимание на настоятельную необходимость изучения свойств общей суперпозиции методами алгебры, был Карл Менгер. В многочисленных публикациях (см., например, [I]) он убедительно показал важность общей теории суперпозиций для анализа и успешно начал построение такой теории, продолженное впоследствии учениками Менгера. С этой целью К.Менгер ввел некоторые специальные алгебраические системы, впоследствии получившие название менгеровских алгебр. Эти системы играют для теории суперпозиций многоместных функций ту же роль, которую полугруппы играют для теории суперпозиций одноместных функций.

Основная цель настоящей статьи - показать, что менгеровские алгебры естественным и наглядным способом могут быть сведены к некоторым специальным полугруппам, которые мы называем полугруппами Менгера, или селективным полугруппам. Теория полугрупп являет собой алгебраический аппарат, вполне достаточный для изучения свойств операции суперпозиции общего вида (во всяком случае, для изучения тех свойств суперпо-

зиций, которые могут быть выражены на языке менгеровских алгебр). Все это дает возможность сделать принципиальный вывод, отраженный в названии настоящей работы: теория полугрупп есть абстрактная теория суперпозиций функций произвольной природы (одно- и многозначных, одно- и многоместных).

Этот вывод лишний раз подтверждает важность развития общей теории полугрупп (и, в первую очередь, теории полугрупп функций) - факт, ныне признаваемый всеми трезво мыслящими математиками.

Пусть $\varphi \in \mathcal{P}(A^n \times A)$, $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$. Тогда $\varphi\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ обозначает множество образов $(a_1, \ldots, a_n)$ относительно функции φ, т.е. $\varphi\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \subset A$ и $a \in \varphi\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \leftrightarrow ((a_1, \ldots, a_n), a) \in \varphi$. Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ подмножества A, то $\breve{\varphi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ обозначает образ подмножества $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ относительно функции φ, т.е.

$$\breve{\varphi}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \bigcup_{(a_1, \ldots, a_n) \in \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n} (\varphi\langle a_1, \ldots, a_n\rangle)$$

Пусть $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathcal{P}(A^n \times A)$. Суперпозицией кортежа $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi)$ называется новая функция $\varphi[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] \in \mathcal{P}(A^n \times A)$, определяемая формулой

$$((a_1, \ldots, a_n), a) \in \varphi[\varphi_1, \ldots, \varphi_n] \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\forall a_1', \ldots, a_n')[((a_1, \ldots, a_n), a_1') \in \varphi_1 \wedge \ldots \wedge ((a_1, \ldots, a_n), a_n') \in \varphi_n' \wedge ((a_1', \ldots, a_n'), a) \in \varphi]$$

Поскольку всякая функция однозначно определяется, если для каждого кортежа $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ указано значение $\varphi\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ (действительно, как легко показать,

$$\varphi = \bigcup_{(a_1,\dots,a_n)\in A^n} \left(\{(a_1,\dots,a_n)\} \times \varphi\langle a_1,\dots,a_n\rangle \right),$$

то определение суперпозиции может быть дано также в следующей эквивалентной форме:

$$\varphi[\varphi_1,\dots,\varphi_n]\ \langle a_1,\dots,a_n\rangle = \breve{\varphi}(\varphi_1\langle a_1,\dots,a_n\rangle,\dots,\varphi_n\langle a_1,\dots,a_n\rangle).$$

Последняя формула показывает, что суперпозиция понимается в обычном смысле. В случае $n=1$ вместо $\varphi[\varphi_1]$ пишут, обычно, $\varphi\circ\varphi_1$.

Заметим, что мы несколько видоизменили оригинальные обозначения К.Менгера, который вместо $\varphi[\varphi_1,\dots,\varphi_n]$ пишет $\varphi(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. Круглые скобки кажутся нам менее предпочтительными, нежели квадратные (ибо они могут привести к двусмысленной записи). Наконец, при определении "значения" функции $\varphi[\varphi_1,\dots,\varphi_n]\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ на кортеж $(a_1,\dots,a_n)$ сначала "действуют" функции $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ и уже затем действует функция φ. Поэтому мы считаем $\varphi[\varphi_1,\dots,\varphi_n]$ результатом применения операции суперпозиции к кортежу $(\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi)$ (а не к кортежу $(\varphi,\varphi_1,\dots,\varphi_n)$, как это делает Менгер). Такой подход лучше согласуется с уже существующими обозначениями теории преобразований и бинарных отношений, применяемыми в теории полугрупп.

Относительно введенной $(n+1)$-арной операции суперпозиции множество $\mathcal{P}(A^n\times A)$ оказывается алгебраической системой. Нетрудно проверить, что множества $F(A^n,A)$ и $F_1(A^n,A)$ стабильны относительно суперпозиции (т.е. суперпозиция однозначных функций есть однозначная функция и суперпозиция полных функций есть полная функция).

Алгебраические подсистемы алгебраической системы $\mathcal{P}(A^n \times A)$ называются простыми алгебрами Менгера n-местных многозначных функций. Аналогично определяются простые алгебры Менгера n-местных и полных n-местных функций. Алгебраическая система, изоморфная простой алгебре Менгера n-местных (многозначных, однозначных или полных) функций называется простой алгеброй Менгера ранга n. Слова "многозначных", "однозначных" или "полных" в определении алгебры Менгера ранга n мы будем опускать, ибо дальше будет показано, что эти три вида алгебр Менгера ранга n образуют один и тот же класс алгебраических систем. Вместо "алгебра Менгера" мы будем также говорить "менгеровская алгебра". Слова "ранга n" нередко будут опускаться, ибо ранг менгеровской алгебры с n-арной операцией равен n-I.

Кроме уже введенной операции суперпозиции, рассматриваются также другие операции типа суперпозиции, применяемые к функциям с разным числом мест (например, $\varphi(\psi(x_1, x_2), \chi(x_1, x_2, x_3)))$, или получающиеся в результате различения переменных (например, $\varphi(\psi(x_1, x_2), \chi(x_2, x_3)))$, или получающиеся смешением двух указанных типов. Изучение таких операций привело к введению некоторых алгебраических систем, названных "алгебрами Менгера" (без эпитета "простые") - это алгебраические системы, имеющие несколько базисных множеств или несколько операций, или, в известном смысле, "градуированные алгебры". Поскольку общая теория алгебраических систем такого вида плохо разработана, целесообразно свести такие системы к системам обычного вида, что мы сейчас и сделаем.

Будем считать, что нам дан счетный алфавит индивидуальных переменных $x_1, x_2, \ldots$, перенумерованных натуральными числами (как известно, x_i можно считать наименованиями слов, построенных лишь из двух букв: x и $'$, имеющих вид x', x'', x''',...). Будем считать, что нам задано счетное множество бесконечноместных предикатных переменных $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Добавляя логические константы, обычный синтаксис и обычные аксиомы языка, получим язык узкого исчисления предикатов (допускающий атомные формулы бесконечной длины - о таких языках см., например, [2]). Интерпретациями такого языка будут непустые множества Φ бесконечноместных функций, определенных в некотором множестве A : индивидуальные переменные принимают значения из A, а предикатные переменные принимают значения из Φ. Для бесконечноместных функций (однозначных или многозначных) можно определить операцию суперпозиции формулой, записанной на языке нашего узкого исчисления предикатов - это делается так же, как для конечноместных функций (в нашем случае формула являлась бы композицией бесконечного числа атомных формул, имеющих бесконечную длину). Всякая алгебра Менгера в любом из смыслов, встречавшихся в литературе, будет частным случаем получающихся таким образом "простых" алгебр Менгера. Дело в том, что всякая n-местная функция, зависящая, скажем, от переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, может рассматриваться как бесконечноместная функция, которая, в действительности, зависит лишь от конечного числа переменных (аналогия тому, что всякая n-местная функция может рассматриваться как m-местная функция, если $n \leq m$). В этом слу-

чае приведенные ранее примеры $\varphi(\psi(x_1, x_2), \chi(x_1, x_2, x_3))$ и $\varphi(\psi(x_1, x_2), \chi(x_2, x_3))$ перепишутся так: $\varphi_1(\varphi_2(x_1, x_2, \dots), \varphi_3(x_1, x_2, x_3, \dots), x_3, \dots)$, $\varphi_1(\varphi_2(x_1, x_2, \dots), \varphi_3(x_1, x_2, \dots), x_3, \dots)$ т.е. операция суперпозиции общего вида окажется частным случаем операции суперпозиции бесконечноместных функций.

Отсюда видно, что имеет смысл ввести в рассмотрение простые алгебры Менгера бесконечноместных (однозначных и многозначных) функций и простые алгебры Менгера бесконечного ранга так же, как это делалось для алгебр Менгера конечного ранга. При желании можно требовать, чтобы все бесконечноместные функции, являющиеся элементами алгебры Менгера, на самом деле зависели лишь от конечного числа аргументов (т.е. не изменялись при изменении значений почти всех аргументов, за исключением конечного числа). Поскольку никакие "непростые" алгебры Менгера нами в дальнейшем рассматриваться не будут, эпитет "простые" будет опускаться.

Далее мы будем рассматривать лишь алгебры Менгера конечного ранга, хотя все сказанное в равной мере будет относиться и к алгебрам бесконечного ранга.

Важным примером n-местных функций являются так называемые проекторы (или селекторы). Это функции $pr_1, \dots, pr_n$, определяемые следующим образом: $pr_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$. Строго говоря, при определении простой алгебры Менгера сам Менгер и его ученики требовали, чтобы среди элементов этой алгебры содержался полный набор селекторов. Поскольку, однако, это требование вызвано не существом рассматриваемых проблем, а лишь ограниченностью метода доказательства, использованного

этими авторами (что ими и отмечается), мы считаем себя свободными от этого ограничения. Селекторы в алгебре Менгера играют примерно ту же роль, какую единица играет в полугруппе (на самом деле полугруппы - это, в точности, алгебры Менгера ранга I). Известно, что при многих алгебраических исследованиях из теории полугрупп удобно считать, что рассматриваемая полугруппа содержит единицу. В противном случае к полугруппе всегда можно присоединить единицу внешним образом. В случае алгебр Менгера ранга выше I положение меняется. Наличие селекторов по-прежнему является очень удобным с разных точек зрения. Однако к алгебре Менгера, не содержащей полного набора селекторов, нельзя присоединить селекторы так просто, как это делается в случае полугруппы. По-видимому, в результате присоединения селекторов к алгебре Менгера придется присоединить также некоторые другие элементы. Вообще этот вопрос пока не исследован.

Прежде всего возникает задача об абстрактной характеристике алгебр Менгера. Каким условиям должна удовлетворять алгебраическая система, чтобы быть алгеброй Менгера? Для алгебр Менгера ранга I эти условия известны - ассоциативность. Заметим, что алгебры Менгера функций любого рассматривавшегося вида являются конкретными алгебрами отношений в смысле [3]. Согласно основной теореме об алгебрах отношений, существует система универсальных элементарных аксиом, выделяющих среди всех алгебраических систем с $(n+1)$-арной операцией алгебры Менгера ранга n. Сейчас мы найдем эти аксиомы.

Теорема I. Всякая алгебра Менгера ранга n удовлетво-

ряет тождеству

$$x[x_1,\dots,x_n][y_1,\dots,y_n]=x[x_1[y_1,\dots,y_n],\dots,x_n[y_1,\dots,y_n]],$$

которое мы будем называть тождеством сверхассоциативности.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение сверхассоциативности для алгебр Менгера n-местных функций. Проверка производится непосредственным подсчетом значений образов кортежа $(a_1,\dots,a_n)$ относительно функций, стоящих справа и слева в тождестве сверхассоциативности.

Теорема I для полных однозначных функций была доказана К.Менгером. В общем случае многозначных функций эта теорема представляет собой простое обобщение результата Менгера.

Теорема 2. Каждая сверхассоциативная алгебраическая система с $(n+1)$-арной операцией изоморфна некоторой алгебре Менгера n-местных однозначных функций, т.е. является алгеброй Менгера ранга n.

Доказательство. Пусть на множестве A задана $(n+1)$-арная сверхассоциативная операция, которая каждому кортежу $(a_1,\dots,a_n,a)$ ставит в соответствие элемент $a[a_1,\dots,a_n]$. Пусть e - элемент, не принадлежащий множеству A. Обозначим через A^* множество $A\cup\{e\}$ и определим для каждого элемента $a\in A$ n-местную функцию в множестве A^*:

$$(\wedge a_1,\dots,a_n\in A)[\lambda_a(a_1,\dots,a_n)=a[a_1,\dots,a_n]],\ \lambda_a(e,\dots,e)=a.$$

Покажем, что отображение $\wedge(a)=\lambda_a$ является изоморфизмом нашей алгебраической системы на алгебру Менгера n-местных функций. Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся в том, что

$$\Lambda(a[a_1,\dots,a_n]) = \Lambda(a)[\Lambda(a_1),\dots,\Lambda(a_n)],$$

т.е. отображение Λ является гомоморфизмом. Из $\Lambda(a_1) = \Lambda(a_2)$ следует, что $\lambda_{a_1}(e,\dots,e) = \lambda_{a_2}(e,\dots,e)$, т.е. $a_1 = a_2$, т.е. Λ взаимно однозначно и потому будет изоморфизмом.

Заметим, что конструкция, использованная в теореме, является прямым аналогом конструкции представления полугруппы правыми сдвигами, действующими на этой полугруппе с присоединенной единицей. Однако, имеются и некоторые отличия: функции λ_a, определенные нами, не будут полными: значение $\lambda_a(a_1,\dots,a_n)$ не определено, если некоторые (но не все) значения аргументов совпадают с e.

Теорема 3. Каждая алгебра Менгера n-местных функций изоморфна некоторой алгебре Менгера полных n-местных функций.

Доказательство. Пусть Φ - алгебра Менгера n-местных функций в множестве A и пусть элемент e не содержится в A. Обозначим через A^* множество $A \cup \{e\}$ и каждой функции $\varphi \in \Phi$ поставим в соответствие полную функцию $\bar{\varphi}$ на множестве A^*, определенную следующим образом: $\bar{\varphi}(a_1,\dots,a_n) = \varphi(a_1,\dots,a_n)$, если $\varphi(a_1,\dots,a_n)$ определено; $\bar{\varphi}(a_1,\dots,a_n) = e$ в противном случае. В частности, если значение какого-либо аргумента равно e, то $\bar{\varphi}(a_1,\dots,a_n) = e$. Простыми вычислениями убеждаемся в том, что $\varphi \to \bar{\varphi}$ будет искомым изоморфизмом алгебры Φ на алгебру Менгера n-местных полных функций.

Идея отображения $\varphi \to \bar{\varphi}$ встречается в случае полу-

групп частичных и полных преобразований в работе В.В.Вагнера [4].

Из теорем I-3 следует следующая абстрактная характеристика алгебр Менгера функций:

Теорема 4. Для того чтобы алгебраическая система с одной алгебраической операцией была алгеброй Менгера, необходимо и достаточно, чтобы эта операция была сверхассоциативна.

Эта теорема была доказана Уитлоком [5] для алгебр Менгера, содержащих полный набор селекторов. Теорема 4 для конечного случая была доказана Диккером [6]. В общем случае Уитлок высказал гипотезу, что теорема 4 будет верна, однако эта гипотеза оставалась открытой.

Таким образом, мы получаем целую иерархию классов алгебраических систем, удовлетворяющих условиям типа ассоциативности, причем класс полугрупп образует первую ступень этой иерархии. Ясно, что точно так же, как полугруппы приспособлены для изучения свойств операции суперпозиции одноместных функций, алгебры Менгера ранга n приспособлены для изучения свойств операции суперпозиции n-местных функций. Теория полугрупп оказывается главой более общей теории суперпозиций произвольных функций.

Ниже мы покажем, что эта глава в известном смысле содержит в себе всё, что может быть сказано в остальных главах.

Предварительно введем одну общеалгебраическую конструкцию. Напомним, что n-арной операцией на множестве A называется любое полное отображение o множества A^n в множество A, n-оперативом называется упорядоченная пара (A, o).

Таким образом, операция есть специального вида бинарное отношение между элементами множеств A^n и A.

Пусть $(\varrho_i)_{i\in I}$ - семейство бинарных отношений, причем для любого $i\in I$ $\varrho_i \subset A\times A_i$. Полупрямым произведением второго рода этого семейства называется бинарное отношение $\underset{I}{\Delta}\varrho_i$ между элементами множеств A и $\underset{I}{\times} A_i$, определенное формулой $(a,(a_i)_{i\in I})\in \underset{I}{\Delta}\varrho_i \leftrightarrow (\wedge i)[(a,a_i)\in\varrho_i$. В случае, когда все отношения ϱ_i совпадают с некоторым отношением ϱ, говорят о полупрямой степени второго рода отношения ϱ и пишут $\overset{I}{\Delta}\varrho$. Если $I=\{0,1,\dots,n-1\}$, то вместо $\overset{I}{\Delta}\varrho$ пишут $\overset{n}{\Delta}\varrho$.

Со свойствами операций полупрямого произведения можно ознакомиться по работе В.В.Вагнера [7], который впервые ввел эти операции.

Пусть (A,O) - $(n+1)$-оператив. Его бинарным комитантом назовем упорядоченную пару $(A^n, \overset{n}{\Delta}O)$, которая, как легко видеть, будет бинарным оперативом.

Теорема 5. $(n+1)$-арный оператив тогда и только тогда будет алгеброй Менгера, когда его бинарный комитант - полугруппа.

Доказательство осуществляется простой проверкой того, что сверхассоциативность операции O эквивалентна ассоциативности операции $\overset{n}{\Delta}O$.

Отметим, что, как показал К.Менгер, бинарный комитант алгебры Менгера есть полугруппа.

Таким образом, каждой алгебре Менгера мы ставим в соответствие некоторую полугруппу - бинарный комитант алгебры

Менгера. Ясно, что по бинарному комитанту всегда можно однозначно восстановить исходную алгебру Менгера, т.е. изучение алгебр Менгера можно свести к изучению полугрупп специального вида. Однако у этой точки зрения есть один существенный недостаток: класс бинарных комитантов алгебр Менгера не замкнут относительно изоморфизмов и, кроме того, из изоморфизма двух бинарных комитантов, как полугрупп, не следует, вообще говоря, изоморфизм соответствующих алгебр Менгера. При алгебраическом исследовании полугрупп обычно не различаются изоморфные полугруппы. В нашем же случае играет весьма важную роль не только поведение полугрупп, изоморфных бинарному комитанту алгебры Менгера, но и конкретная природа элементов бинарного комитанта (эти элементы берутся из декартовой n-степени некоторого множества), а также конкретная природа операции бинарного комитанта (которая совпадает с полупрямой степенью некоторой $(n+1)$-арной операции). При переходе к абстрактной точке зрения вся эта конкретная информация о строении бинарного комитанта в значительной мере утрачивается. Поскольку, однако, переход к абстрактной точке зрения составляет самую суть алгебраического метода, мы, кроме бинарной операции, выделим на множестве A^n некоторые другие объекты, несущие всю необходимую нам информацию. После этого переход к абстрактной точке зрения станет возможным.

Пусть (A, o) - $(n+1)$-оператив и $(A^n, {}^n\Delta o)$ - его бинарный комитант. Вместо $o(a_1, \ldots, a_n, a)$ условимся писать $a[a_1, \ldots, a_n]$, а вместо ${}^n\Delta o((a_1, \ldots a_n), (b_1, \ldots, b_n))$

будем писать $(a_1,\dots,a_n)(b_1,\dots,b_\omega)$.

Введем между элементами множества A^n n отношений эквивалентности $\pi_1,\dots,\pi_n$, полагая

$$(a_1,\dots,a_n)\equiv(b_1,\dots,b_n)(\mathrm{mod}\,\pi_i)\leftrightarrow a_i=b_i$$

Ясно, что каноническое отображение $A^n\to A^n/\pi_1\times\dots\times A^n/\pi_n$ будет взаимно однозначным отображением на. Другими словами, выполняются следующие условия:

I. Для любых n элементов $a^1,\dots,a^n$ множества A^n найдется элемент a того же множества, такой, что

$$(\wedge i)[a^i\equiv a\,(\mathrm{mod}\,\pi_i)]$$

2. Если $a^1\equiv a^2(\mathrm{mod}\,\pi_i)$ при любом i, то $a^1=a^2$.

Заметим, что условия I и 2 эквивалентны условию I, в котором вместо слова "найдется" стоят слова "найдется единственный".

3. Отношения эквивалентности π_i регулярны слева, т.е. из $a^1\equiv a^2\,(\mathrm{mod}\,\pi_i)$ всегда следует $aa^1\equiv aa^2\ (\pi_i)$ для любого a из A^n и для любого i. Здесь (π_i) означает $(\mathrm{mod}\,\pi_i)$.

Диагональю множества A^n называется подмножество Δ^n_A этого множества, обладающее следующим характеристическим свойством:

$$(a_1,\dots,a_n)\in\Delta^n_A\leftrightarrow a_1=\dots=a_n.$$

4. Δ^n_A является левым идеалом бинарного комитанта, т.е.

$$a\in\Delta^n_A\wedge b\in A^n\to ba\in\Delta^n_A.$$

5. При любом i каждый π_i-класс содержит в точности один элемент из Δ^n_A.

Доказательство этих свойств осуществляется непосредственной проверкой.

Теорема 6. Пусть $(A, o, \pi_1, \ldots, \pi_n, B)$ - алгебраическая система, причем o - бинарная операция, $\pi_1, \ldots, \pi_n$ - бинарные отношения и B - унарное отношение (т.е. подмножество) на множестве A, причем выполняются условия

1) π_i - регулярные слева отношения эквивалентности и для любых $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ найдется единственный элемент a, такой что

$$(\Lambda i)\,[a_i \equiv a(\pi_i)]$$

2) B - левый идеал (A, o) и при любом i каждый π_i-класс содержит в точности один элемент из B.

Тогда найдется $(n+1)$-оператив $(C, \bar{o})$, для которого $(C^n, \Delta\bar{o}, \pi_1, \ldots, \pi_n, \Delta_c)$ изоморфно алгебраической системе $(A, o, \pi_1, \ldots, \pi_n, B)$. Любые два $(n+1)$-оператива, обладающие этим свойством, изоморфны.

Доказательство. На множестве B, которое, в силу условия 2, непусто, введем $(n+1)$-арную операцию $\bar{o}$, полагая $b[b_1, \ldots, b_n]$ равным элементу gb, где g - элемент множества A, соответствующий, в силу условия 1, элементам $b_1, \ldots, b_n$. Поскольку B - левый идеал, то $gb \in B$, так что действительно построена $(n+1)$-арная операция. Покажем, что построенный $(n+1)$-оператив обладает нужными свойствами. Образуем его бинарный комитант и построим отображение η этого бинарного комитанта на данную алгебраическую систему, определив $\eta(a_1, \ldots, a_n) = g \leftarrow (\Lambda i)[a_i \equiv g(\pi_i)]$. Совершенно очевидно, что η будет взаимно однозначным ото-

бражением на, и притом изоморфизмом. Не очевидно здесь, по нашему мнению, лишь то, что операция бинарного комитанта переходит при отображении η в операцию $\tilde{\circ}$. Покажем это. Вместо $\circ(q_1, q_2)$ условимся писать $q_1 q_2$. Пусть $(a_1,\dots, a_n)(b_1,\dots, b_n) = (c_1,\dots, c_n)$, т.е. $c_i = b_i[a_1,\dots, a_n]$, $i = 1,2,\dots, n$. Пусть, далее, $\eta(a_1,\dots, a_n) = q_1$, $\eta(b_1,\dots, b_n) = q_2$. Тогда $q_1 q_2 \equiv q_i b_i = c_i(\tilde{\pi}_i)$, ибо отношения $\tilde{\pi}_i$ регулярны слева. Отсюда следует, что $\eta(c_1,\dots, c_n) = q_1 q_2$. Теорема доказана, ибо ее последнее утверждение легко проверяется.

Заметим, что условия 1 и 2 этой теоремы могут быть записаны в виде элементарных аксиом; таким образом, класс алгебраических систем, о которых идет речь в теореме, аксиоматизируем. Это в точности те алгебраические системы ("в точности" означает "с точностью до изоморфизма"), которые получаются из $(n+1)$-оперативов. В силу предыдущей теоремы требование ассоциативности операции $\circ$ выделяет из этих систем те, которые соответствуют алгебрам Менгера.

Если $(A, \circ)$ - некоторый $(n+1)$-оператив, то алгебраическую систему $(A^n, \overset{n}{\Delta}\circ, \pi_1,\dots, \pi_n, \overset{n}{\Delta}_A)$ будем называть оснащенным бинарным комитантом этого оператива. Оснащенный бинарный комитант алгебры Менгера, злоупотребляя языком, будем называть полугруппой Менгера ранга n, ассоциированной с указанной алгеброй Менгера. Вообще же полугруппой Менгера ранга n будем называть алгебраическую систему типа, описанного в теореме 6, с ассоциативной операцией. Получаем, что с каждой алгеброй Менгера ранга n ассоциирована полу-

группа Менгера ранга n и с каждой полугруппой Менгера ранга n ассоциирована некоторая алгебра Менгера того же ранга (т.е. ассоциированная полугруппа Менгера этой алгебры изоморфна данной). Заметим, что в случае $n = 1$ $\pi_1 = \Delta_A$ и $\overset{1}{\Delta}_A = A$, так что полугруппа Менгера ранга I целиком сводится к обычной полугруппе (A, o).

Итак, теория алгебр Менгера может быть полностью сведена к теории полугрупп Менгера и наоборот. Мы не хотим, однако, утверждать необходимость такого сведения. Возможно, что в некоторых случаях целесообразнее рассматривать алгебры Менгера, а в других случаях - полугруппы Менгера. Хотя бинарные операции изучены намного лучше $(n+1)$-арных, что составляет преимущество рассмотрения полугрупп Менгера перед алгебрами Менгера, все же структура полугруппы Менгера содержит, кроме бинарной операции, еще $n+1$ добавочных отношений.

Элемент $(e_1, \ldots, e_n)$ бинарного комитанта $(n+1)$-оператива (A, o) называется полным набором селекторов этого оператива, если этот элемент является единицей бинарного комитанта, т.е. если

$$e_i[a_1, \ldots, a_n] = a_i, \qquad a[e_1, \ldots, e_n] = a.$$

Это определение эквивалентно определению полного набора селекторов, данному Менгером (в случае алгебр Менгера).

Правым сдвигом бинарного оператива (A, o) называется любое регулярное слева полное преобразование этого оператива, т.е. любое полное преобразование φ, удовлетворяющее условию $(a_1, a_2) \in \varphi \rightarrow (aa_1, aa_2) \in \varphi$ или эквивалент-

ному условию $a\varphi(b) = \varphi(ab)$.

Селективным группоидом ранга n называется алгебраическая система вида $(A, o, \rho_1, \ldots, \rho_n)$, где o есть бинарная, а $\rho_1, \ldots, \rho_n$ - унарные операции на множестве A, причем выполняются условия:

I) ρ_i суть правые сдвиги группоида (A, o) и $\rho_j \circ \rho_i = \rho_i$ для любых i и j,

2) для любых $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ найдется единственное $a \in A$ такое, что для всех i $\rho_i(a_i) = \rho_i(a)$.

Напомним, что унарной операцией называется любое полное преобразование множества.

Селективный группоид с ассоциативной бинарной операцией назовем селективной полугруппой.

Пусть (A, o) - $(n+1)$-оператив. На его бинарном комитанте определим унарные операции $\rho_1, \ldots, \rho_n$, полагая $\rho_i(a_1, \ldots, a_n) = (a_i, \ldots, a_i)$. Легко проверить, что $(A^n, \overset{n}{\Delta} o, \rho_1, \ldots, \rho_n)$ будет селективным группоидом, который мы назовем ассоциированным с данным оперативом. Верно и обратное:

Теорема 7. Для всякого селективного группоида ранга n существует единственный с точностью до изоморфизма $(n+1)$-оператив, с которым этот селективный группоид ассоциирован.

Доказательство. Пусть $(A, o, \rho_1, \ldots, \rho_n)$ - селективный группоид. Ясно, что $pr_2(\rho_j \circ \rho_i) \subset pr_2 \rho_j$. Из $\rho_j \circ \rho_i = \rho_i$ следует, что $pr_2 \rho_i \subset pr_2 \rho_j$. Поскольку это верно для всех i и j, $pr_2 \rho_i = pr_2 \rho_j$. Обозначим общее значение $pr_2 \rho_i$ через B. На множестве B введем

$(n+1)$-арную операцию, полагая $b[b_1,\ldots,b_n] = gb$, где g есть тот элемент A, который существует при данном выборе $b_1,\ldots,b_n$ в силу условия 2 селективности. Покажем, что наш селективный группоид изоморфен селективному группоиду, ассоциированному с получившимся $(n+1)$-оперативом.

Достаточно показать лишь, что при взаимно однозначном отображении η множества B^n на множество A, определенном формулой $\eta(b_1,\ldots,b_n) = g$, сохраняется операция бинарного умножения (ибо сохраняемость унарных операций очевидна). Действительно, пусть $\eta(a_1,\ldots,a_n) = g_1$, $\eta(b_1,\ldots,b_n) = g_2$. Тогда $p_i(g_1,g_2) = g$, $p_i(g_2) = g_1 b_i = b_i[a_1,\ldots,a_n]$, откуда $\eta((a_1,\ldots,a_n)(b_1,\ldots,b_n)) = g_1 g_2$, т.е. η действительно будет изоморфизмом. Отсюда же видно, что два $(n+1)$-оператива, селективные группоиды которых изоморфны, необходимо сами изоморфны. Теорема доказана.

Теорема показывает принципиальную возможность сведения теории $(n+1)$ - оперативов к теории селективных группоидов. При этом алгебрам Менгера соответствуют селективные полугруппы. Таким образом, теория алгебр Менгера полностью сводится к теории селективных полугрупп.

Нами получены три понятия, в равной мере приспособленных для изучения суперпозиций многоместных функций: алгебры Менгера, полугруппы Менгера, селективные полугруппы.

Рассмотрим ситуацию, когда алгебра Менгера содержит полный набор селекторов $(e_1,\ldots,e_n)$. В этом случае соответствующая селективная полугруппа содержит единицу, а потому всякий правый сдвиг этой полугруппы порождается умножением спра-

ва на некоторый ее элемент: правые сдвиги находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами. Будем считать, что $\rho_i(a_1,\dots,a_n)=(a_1,\dots,a_n)(b_1,\dots,b_n)$. Отсюда видно, что можно положить $(b_1,\dots,b_n)=(e_i,\dots e_i)$, т.е. сдвиг ρ_i порождается элементом $(e_i,\dots,e_i)$. Следовательно, при определении селективных полугрупп с единицей можно вместо ρ_i задавать элементы, порождающие ρ_i. В этом случае селективной полугруппой можно назвать алгебраическую систему $(A,o,e_1,\dots,e_n)$, где (A,o) есть полугруппа, а $e_1,\dots,e_n$ - ее элементы, причем для любых $(a_1,\dots,a_n)\in A^n$ найдется единственный элемент $a\in A$ такой, что $a_i e_i=ae_i$ n, $e_i e_j=e_i$. Таким образом, $\{e_1,\dots,e_n\}$ есть подполугруппа полугруппы (A,o), причем подполугруппа левых нулей. Она является правым редуктором полугруппы (A,o), ибо из $(\wedge i)\,[a_1e_i=a_2e_i]$ следует $a_1=a_2$. К таким простым полугруппам с выделенными элементами полностью сводится изучение алгебр Менгера с полным набором селекторов (т.е. алгебр Менгера, до сих пор встречавшихся в литературе).

Рассмотрим, как иллюстрируются введенные понятия на множествах многоместных функций, замкнутых относительно суперпозиции. Рассмотрим, например, множество $\mathcal{R}(A^n\times A)$ всех многозначных n-местных функций в множестве A. Пусть φ - многозначное частичное преобразование множества A^n. Тогда это преобразование можно разложить "покоординатно" в функции $\varphi_1=pr_1\circ\varphi,\dots,\varphi_n=pr_n\circ\varphi$. Таким образом, как правило, представляются в геометрии преобразования многомерных пространств, формулы преобразования координат и т.п.

Ясно, что по функциям φ_i однозначно восстанавливается преобразование φ, а именно $\varphi = \varphi_1 \Delta \dots \Delta \varphi_n$, где Δ – операция полупрямого умножения бинарных отношений второго рода. Множество всех преобразований A^n обозначим через $F(A^n)$. Это множество будет полугруппой относительно обычной суперпозиции преобразований. Если каждое преобразование φ заменить кортежем $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, то произведение таких кортежей определится, как легко видеть, следующим образом: $(\psi_1, \dots, \psi_n) \circ (\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (\varphi_1[\psi_1, \dots, \psi_n], \dots, \varphi_n[\psi_1, \dots, \psi_n])$. Другими словами, $(\psi \circ \varphi)_i = \varphi_i[\psi_1, \dots, \psi_n]$. Поэтому полугруппа $F(A^n)$ изоморфна полугруппе, ассоциированной с алгеброй Менгера $\mathfrak{R}(A^n \times A)$. При этом $\varphi \equiv \psi \pmod{\pi_i} \longleftrightarrow \varphi_i = \psi_i$, $p_i(\varphi) = (\varphi_i, \dots, \varphi_i)$, где $(\varphi_i, \dots, \varphi_i)$ означает отображение: $(\varphi_i, \dots, \varphi_i)\langle a_1, \dots, a_n \rangle = pr_i \varphi \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

Таковы некоторые алгебраические системы, в рамках которых можно проводить изучение общей суперпозиции. Заметим, что теория таких систем находится в зачаточном состоянии: имеется лишь несколько публикаций, посвященных алгебрам Менгера, а полугруппы Менгера и селективные полугруппы вводятся в этой работе впервые. Было бы целесообразно перенести на эти алгебраические системы некоторые основные результаты, полученные к настоящему времени в теории полугрупп преобразований.

Представляет интерес также сведение теории $(n+1)$-оперативов к теории селективных группоидов. Насколько нам известно, исследований, посвященных этому вопросу, также не существует.

Литература

I. K.Menger, The algebra of functions: past, present, future. Rendiconti di Matematica (3-4), 1961,20,409-430

2. C.R.Karp, Languages with expressions of infinite length. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1964.

3. Б.М.Шайн, Relation algebras. Bull. Acad. polon. Sci.,1965, 13, 1-5.

4. В.В.Вагнер, Представление упорядоченных полугрупп, Матем. сб., I956, 38, 203-240.

5. H.I.Whitlock, A composition algebra for multiplace functions, Math. Ann., 1964, 157, 167-178.

6. R.M.Dicker, The substitutive law. Proc. London Math. Soc., 1963, 13, 500.

7. В.В.Вагнер, Теория отношений и алгебра частичных отображений, в сборнике "Теория полугрупп и ее приложения", I965, вып. I, Саратов.

ПОЛУГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Шайн Б.М. (Саратов)

Настоящий доклад является сокращенным изложением курса лекций, прочитанного автором в апреле с.г. в Винницком государственном педагогическом институте. Ниже кратко излагаются основные вопросы, затронутые в докладе.

I. Теория полугрупп преобразований как центральная часть теории полугрупп. Необходимость существования алгебраической теории полугрупп, несводимость этой теории к другим разделам алгебры.

Краткий исторический очерк развития теории полугрупп преобразований.

2. Роль форм постановки задач, а также методов их решения в теории полугрупп преобразований. Необходимость создания существенно новых методов по сравнению с применяемыми в других алгебраических теориях; недостаточность классической общей алгебры для решения теоретико-полугрупповых проблем.

Алгебры отношений как одна из возможных точек зрения на теорию полугрупп преобразований и как одна из форм постановки корректных задач.

3. Конструкция всех представлений данной абстрактной полугруппы посредством однозначных преобразований. Методы В.В.Вагнера, Е.С.Ляпина и Б.М.Шайна. Достоинства и недостатки этих методов. Конструкция всех представлений полугруппы посредством всех взаимно однозначных (обратимых) преобразо-

ваний. Представления обобщенных групп (инверсных полугрупп). Конструкция всех представлений полугруппы посредством многозначных преобразований (бинарных отношений).

4. Некоторые из задач, решаемых при помощи вышеописанных конструкций: представление упорядоченных полугрупп как полугрупп однозначных (обратимых, многозначных) преобразований, упорядоченных отношением продолжаемости преобразований.

5. Родственные направления исследований: рестриктивные полугруппы и биполугруппы отображений, алгебра суперпозиций многоместных функций.

Некоторые из нерешенных проблем.

Возможные направления дальнейшего развития теории.

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И ИХ ГРАФЫ СРАВНИМОСТИ

Шеврин Л.Н., Филиппов Н.Д. (Свердловск)

Пусть на множестве P введено отношение частичного порядка $\leq$. Соответствующее частично упорядоченное (ч.у.) множество будем обозначать через $\langle P; \leq \rangle$. Через σ обозначим отношение сравнимости в $\langle P; \leq \rangle$, т.е. объединение отношений $\leq$ и $\geq$. Модель $\langle P; \sigma \rangle$ будем называть графом сравнимости ч.у. множества $\langle P; \leq \rangle$. σ-изоморфизмом ч.у. множества $\langle P; \leq \rangle$ на ч.у. множество $\langle Q; \leq \rangle$ назовем изоморфизм $\langle P; \sigma \rangle$ на $\langle Q; \sigma \rangle$. Изоморфизм и антиизоморфизм ч.у. множества являются, очевидно, частными случаями σ-изоморфизма.

В докладе рассматриваются следующие основные вопросы.

I. Каковы все ч.у. множества, σ-изоморфные данному ч.у. множеству?

2. Каковы все те ч.у. множества, любой σ-изоморфизм которых является изоморфизмом или антиизоморфизмом?

3. Каковы необходимые и достаточные условия, при которых для модели $\langle P; \rho \rangle$, где ρ - рефлексивное симметричное бинарное отношение, существует отношение частичного порядка $\leq$ на P, такое, что $\rho = \sigma$? Другими словами, какова абстрактная характеристика графов сравнимости ч.у. множеств.

Приводятся решения перечисленных вопросов (заметим, что вопрос 3 был ранее решен другими методами в работе [I]).

Указываются некоторые приложения полученных результатов.

Литература

I. P.C.Gilmore, A.I.Hoffman, A characterization of comparability graphs and of interval graphs, Canad. Y. Math., 1964, 16, 3, 539-548.

О ПОЛУИЗОМОРФИЗМАХ ПОЛУГРУПП

Шеврин Л.Н. (Свердловск)

Основной результат сообщения публикуется в журнале "Доклады Академии наук СССР".

К ТЕОРИИ ПОЛУГРУД И ОБОБЩЕННЫХ ГРУД

Шимельфениг О.В. (Саратов)

Скрещенной полугрудой называется подмножество декартова произведения двух множеств со специальной тернарной операцией между упорядоченными парами, удовлетворяющей условиям типа ассоциативности. Скрещенная обобщенная груда - это скрещенная полугруда с дополнительными свойствами.

Пусть $\mathcal{R}(A,B)$ - множество всех бинарных отношений между множествами A и B, $K \subset \mathcal{R}(A,B) \times \mathcal{R}(B,A)$ - скрещенная полугруда пар бинарных отношений, $\tau_K = \bigcup_{\varphi \in pr_{1,K}} \varphi \times \bigcup_{\delta \in pr_{2,K}} \delta$ и $\eta_K = pr_1 \tau_K \cap \overline{pr_2 \tau_K^{-1}} \times pr_2 \tau_K \cap \overline{pr_1 \tau_K^{-1}}$. Бинарные отношения τ_K, η_K играют такую же роль в теории скрещенных полугруд как отношения транзитивности и взаимной транзитивности в теории полугрупп частичных преобразований. Доказаны теоремы

Теорема I. Для произвольной скрещенной полугруды $K \subset \mathcal{R}(A,B) \times \mathcal{R}(B,A)$ преобразование $S = \Delta_{pr_1 \eta_K} \times \Delta_{pr_2 \eta_K}$ определяет гомоморфизм полугруды K в полугруду $\mathcal{R}(A,B) \times \mathcal{R}(B,A)$.

Образ $S(K)$ произвольной скрещенной полугруды $K \subset \mathcal{R}(A,B) \times \mathcal{R}(B,A)$ при преобразовании S называется симметрантом полугруды K.

Теорема 2. Для того, чтобы произвольная скрещенная обобщенная груда K пар частичных отображений множеств A и B состояла целиком из пар частичных взаимно однозначных

отображений, достаточно, чтобы $\tau_{\underline{K}_I} \subset \Delta_A$ и $\tau_{\overline{K}_I} \subset \Delta_B$, где $\tau_{\underline{K}} = \bigcup_{(\varphi,\psi)\in K} \psi \circ \varphi$, $\tau_{\overline{K}_I} = \bigcup_{(\varphi,\psi)\in K} \varphi \cdot \psi$

ма 3. Для того, чтобы симметрант $S(K)$ произвольной скрещенной обобщенной груды K пар частичных отображений множеств A и B являлся скрещенной обобщенной грудой пар частичных взаимно однозначных отображений, достаточно, чтобы

$\tau_{\underline{K}_I} \cap \tau_{\underline{K}}^{-1} \subset \Delta_A$ и $\tau_{\overline{K}_I} \cap \tau_{\overline{K}}^{-1} \subset \Delta_B$, где

$\tau_{\underline{K}} = \bigcup_{(\varphi,\psi)\in pr_1 K \times pr_2 K} \psi \circ \varphi$, $\tau_{\overline{K}} = \bigcup_{(\varphi,\psi)\in pr_1 K \times pr_2 K} \varphi \circ \psi$

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУПП

Шнеперман Л.Б. (Минск)

Представлением топологической полугруппы A в топологическую полугруппу A' назовем непрерывное гомоморфное отображение A в A'.

В этом докладе приведены некоторые результаты теории представлений. Часть из них уже опубликована, другая часть сообщается впервые. Доказательства лишь намечены.

§ I. Представления топологических полугрупп непрерывными преобразованиями

Пусть S - некоторая полугруппа непрерывных преобразований топологического пространства Ω. На полугруппу S различными способами может быть перенесена топология с Ω. Мы остановимся лишь на конструкции бикомпактно-открытой топологии. Пусть $K_1,\dots,K_n;\ \Gamma_1,\dots,\Gamma_n$ - подмножества из Ω, причем все K_i бикомпактны, а Γ_i открыты. Будем обозначать через $(K_1,\dots,K_n;\ \Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$ множество всех преобразований $f\in S$, для которых $fK_i\subset\Gamma_i$ $(i=1,2,\dots,n)$. Система всех множеств $(K_1,\dots,K_n;\ \Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$ замкнута относительно операции пересечения конечного числа этих множеств и поэтому ее можно принять за базис открытых множеств топологии на S. В дальнейшем, говоря о полугруппе S, мы будем считать, что она наделена бикомпактно-открытой топологией.

Заметим, что полугруппа S может и не быть топологи-

ческой, т.е. операция умножения не обязательно непрерывна относительно бикомпактно-открытой топологии. В связи с этим интересна

Теорема I. Если Ω - бикомпакт, то полугруппа S - топологическая.

Доказательство. Пусть $f_1, f_2 \in S$ и $(K_1,\dots, K_n; \Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$-окрестность точки $f_1 f_2$ в S. Нетрудно показать, что существует окрестность M_i бикомпактна $f_2 K_i$, обладающая следующим свойством: $\overline{f_1 M_i} \subset \Gamma_i$. Тогда, если $g_1 \in (\overline{M}_1,\dots, \overline{M}_n; \Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$ и $g_2 \in (K_1,\dots, K_n; M_1,\dots, M_n)$, то $g_1 \cdot g_2 \in (K_1,\dots, K_n; \Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$.

Пусть A - топологическая полугруппа. К топологическому пространству A присоединим еще одну изолированную точку ξ_0. Полученное таким образом новое топологическое пространство обозначим через $\Omega = \Omega(A)$. Каждому элементу $a \in A$ сопоставим преобразование f_a пространства $\Omega(A)$:

$$f_a x = ax \quad (x \in A), \quad f_a \xi_0 = a.$$

Множество $T(A) = \bigcup_{a \in A} f_a$ образует полугруппу непрерывных преобразований топологического пространства Ω. Хорошо известно, что отображение $\varphi a = f_a$ полугруппы A на полугруппу $T(A)$ - представление полугруппы левыми сдвигами - является изоморфизмом. Этот изоморфизм очевидным образом индуцирует на полугруппе непрерывных преобразований $T(A)$ топологию, которую мы обозначим через t. С другой стороны, на полугруппе $T(A)$ имеется бикомпактно-открытая топология. Оказывается, что справедлива

Лемма I. На полугруппе $T(A)$ топология t совпадает

с бикомпактно-открытой топологией.

Доказательство. Если U подмножество из T, открытое в топологии t, то из равенства $U=(\xi_\alpha;\varphi^{-1}U)$ следует, что U открыто в бикомпактно-открытой топологии. Если теперь $f_\alpha\in(K_1,\dots,K_n;\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$, то можно показать, что существует такая окрестность V элемента α, что $f_\beta K_i\subset\Gamma_i$ для любого $\beta\in V$. Таким образом, f_α входит в $(K_1,\dots,K_n;\Gamma_1,\dots,\Gamma_n)$ вместе с некоторой своей окрестностью φV.

Из леммы I непосредственно получаем

Следствие. Полугруппа T - топологическая.

Далее, изоморфным представлением полугруппы A назовем топологический изоморфизм этой полугруппы. Будем говорить, что топологическая полугруппа A представима в классе топологических полугрупп Σ, если существует представление A в какую-либо полугруппу из класса Σ.

Так как топологическая полугруппа A топологически изоморфна топологической полугруппе T, то справедлива

Теорема 2. Каждая топологическая полугруппа изоморфно представима в классе топологических полугрупп непрерывных преобразований топологических пространств.

Естественно возникает вопрос о представлении топологических полугрупп непрерывными преобразованиями "хороших" пространств, в первую очередь бикомпактов. Прежде всего отметим, что не каждая топологическая полугруппа представима в этом классе топологических полугрупп, на что указывает следующая

Теорема 3. Топологическая полугруппа непрерывных преобразований бикомпакта вполне регулярна (в топологическом смысле).

Доказательство. Покажем сначала, что каждое из замкнутых множеств $S \setminus (K;\Gamma)$ функционально отделимо от не принадлежащей ему точки пространства S. Если $f_0 \in (K;\Gamma)$, то существует непрерывное отображение φ бикомпакта Ω на отрезок $[0, 1]$ такое, что $\varphi(\Omega \setminus \Gamma) = 0$ и $\varphi(f_0 K) = 1$. Отображение $\tilde{\varphi}$ топологического пространства S на отрезок $[0, 1]$:

$$\tilde{\varphi}(f) = \min \varphi(fK)$$

непрерывно и $\tilde{\varphi}(f_0) = 1$, а $\tilde{\varphi}[S \setminus (K;\Gamma)] = 0$. Теперь уже легко завершить доказательство, учитывая, что множества $S\setminus(K;\Gamma)$ образуют псевдобазис замкнутых множеств бикомпактно-открытой топологии на S.

Неизвестно, является ли полная регулярность достаточным условием для изоморфного представления топологической полугруппы в топологическую полугруппу непрерывных преобразований бикомпакта. Одним из таких условий является сильная непрерывность слева.

Пусть U - открытое, Y - произвольное множество топологической полугруппы A и $a \in A$. Топологическую полугруппу A назовем сильно непрерывной слева, если всякий раз, когда $\overline{aY}$ и $A \setminus U$ функционально отделимы, существует такая окрестность V точки a, что для любого $b \in V$ замкнутые множества $\overline{bY}$ и $A \setminus U$ функционально отделимы.

Теорема 4. Вполне регулярная сильно непрерывная слева

топологическая полугруппа изоморфно представима в классе полугрупп непрерывных преобразований бикомпактов.

Доказательство. Основываясь на теореме 2, мы можем ограничиться рассмотрением полугруппы S непрерывных преобразований вполне регулярного топологического пространства Ω. Пусть Ω^* - максимальное бикомпактное расширение Ω. Можно показать, что каждое непрерывное преобразование f пространства Ω можно распространить до непрерывного преобразования f^* бикомпакта Ω^*. Множество преобразований $S^* = Uf^*$ образует полугруппу, изоморфную полугруппе S. Так как $\Omega^* \supset \Omega$, то бикомпактно-открытая топология на S^* сильнее, чем на S. И только сильная непрерывность слева позволяет доказать топологический изоморфизм полугрупп S и S^*.

§ 2. Представление бикомпактных полугрупп непрерывными преобразованиями

Ниже часто будет использоваться

Лемма 2. Если на множестве элементов полугруппы A' определена хаусдорфова топология и A' является образом бикомпактной топологической полугруппы A при непрерывном гомоморфизме γ, то A' - бикомпактная топологическая полугруппа.

Доказательство. Пусть $a', b' \in A'$, W' - открытая окрестность точки $a'b'$, $W = \gamma^{-1}W'$. Существуют такие открытые окрестности U и V бикомпактов $\gamma^{-1}a'$ и $\gamma^{-1}b'$, соответственно, что $UV \subset W$. Открытые множества $U =$

$=A' \setminus \gamma^{-1}(A \setminus U)$ и $V' = A' \setminus \gamma^{-1}(A \setminus V)$ содержат, соответственно, a' и b', причем $U'V' \subset W'$

Под бикомпактной полугруппой будем понимать полугруппу, пространством которой служит бикомпакт (бикомпактное хаусдорфово пространство).

Пусть A - бикомпактная полугруппа. Не ограничивая общности, будем считать, что A содержит единицу e. В противном случае эту единицу можно было бы присоединить к полугруппе A внешним образом, а к пространству полугруппы A как изолированную точку. Если $b, c \in A$ - две произвольные, но фиксированные точки, а φ - такое непрерывное отображение A в отрезок $[0, 1]$, что $\varphi(b) = 0$ и $\varphi(a) = 1$, то каждому элементу a полугруппы A можно сопоставить непрерывное отображение φ_a пространства A в отрезок $[0, 1]$: для любого $x \in A$

$$\varphi_a(x) = \varphi(xa),$$

Множество $J_\varphi = \{\varphi_a\}_{a \in A}$ является метрическим пространством относительно метрики τ:

$$\tau(\varphi_a, \varphi_{a'}) = \max_{x \in A} |\varphi_a(x) - \varphi_{a'}(x)|.$$

На компакте J_φ определим умножение: для любых $\varphi_a, \varphi_{a'} \in J_\varphi$

$$\varphi_a \cdot \varphi_{a'} = \varphi_{aa'}$$

Относительно этого умножения J_φ является полугруппой, а так как отображение $\gamma a = \varphi_a$ суть непрерывный гомоморфизм A на J_φ, то по лемме 2 полугруппа J_φ - топологическая. Отметим еще, что представление γ разделяет точки b и c.

Будем говорить, что топологическая полугруппа допускает достаточную систему представлений в классе топологических полугрупп Σ, если для любых не равных $x, y \in A$ существует представление γ полугруппы A в полугруппу из класса Σ, при котором $\gamma x \neq \gamma y$.

Приведенная конструкция полугруппы J_φ позволяет сформулировать следующее утверждение

Теорема 5. Всякая бикомпактная топологическая полугруппа допускает достаточную систему представлений в классе метрических компактных полугрупп.

Из результатов §I непосредственно следует, что компактная метрическая полугруппа изоморфно представима в классе полугрупп непрерывных преобразований компактов. В свою очередь, каждый компакт гомеоморфен некоторому подмножеству гильбертова параллелепипеда. Вместе с теоремой 5 это дает

Теорема 6. Всякая бикомпактная топологическая полугруппа допускает достаточную систему представлений в классе полугрупп непрерывных преобразований компактных подмножеств гильбертова параллелепипеда.

§ 3. Представление бикомпактных полугрупп линейными преобразованиями

Класс полугрупп непрерывных преобразований топологических пространств очень широк. Желательно сузить его, рассматривая лишь линейные топологические пространства и, соответственно, линейные преобразования этих пространств. Представление топологической полугруппы в полугруппу линейных

(непрерывных и аддитивных) преобразований называется линейным. Разумеется, требование непрерывности представления зависит от того, как определена сходимость линейных операторов. Мы будем рассматривать в этом параграфе сильно непрерывные представления, т.е. на множестве линейных операторов мы будем рассматривать сильную операторную топологию (определение будет приведено ниже).

Пусть A - бикомпактная топологическая полугруппа с единицей. Множество $C(A)$ всех непрерывных действительных функций на A является B-пространством относительно нормы

$$\|\varphi\| = \max_{x \in A} |\varphi(x)|.$$

Выберем какой-нибудь элемент φ из $C(A)$ и каждому a из A сопоставим элемент $\varphi_a \in C(A)$:

$$\varphi_a(x) = \varphi(xa)$$

Обозначим $C_\varphi = \{\varphi_a\}_{a \in A}$, и пусть $\mathcal{L}(C_\varphi)$ - линейная оболочка и $\overline{\mathcal{L}(C_\varphi)}$ - линейное замыкание множества C_φ в пространстве $C(A)$. Линейное замыкание $\overline{\mathcal{L}(C_\varphi)}$ также является B-пространством. Каждому элементу $z \in A$ сопоставим операцию h_z из $\mathcal{L}(C_\varphi)$ в $\mathcal{L}(C_\varphi)$

$$h_z\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_{za_i}$$

Операция h_z аддитивна, непрерывна и не зависит от способа представления элемента $\varphi \in \mathcal{L}(C_\varphi)$ в виде линейной комбинации элементов из C_φ. Линейная операция h_z допускает единственное линейное распространение на замыкание $\overline{\mathcal{L}(C_\varphi)}$

множества $\mathcal{L}(C_\varphi)$. Это линейное преобразование B-пространства $\overline{\mathcal{L}(C_\varphi)}$ мы также обозначим через h_z. Множество $H_\varphi = \{h_z\}_{z \in A}$ образует полугруппу линейных преобразований B-пространства $\overline{\mathcal{L}(C_\varphi)}$. На полугруппе H_φ введем сильную операторную топологию, определяемую следующим псевдобазисом окрестностей:

$$N(h_a, \psi, \varepsilon) = \{h_b \mid h_b \in H_\varphi, \|(h_a - h_b)\psi\| < \varepsilon\}$$

где ψ - произвольный элемент из $\overline{\mathcal{L}(C_\varphi)}$ и ε - произвольное положительное число.

Лемма 3. Полугруппа H_φ, наделенная сильной операторной топологией, бикомпактна и является топологической полугруппой.

Доказательство. Можно показать, что отображение f полугруппы A на полугруппу H_φ: $fa = h_a$ непрерывно и гомоморфно; затем следует воспользоваться леммой 2.

Отображение g: $g(h_a) = \varphi_a$ - топологического пространства H_φ на топологическое пространство C_φ непрерывно. Поэтому C_φ - компакт и B-пространство $\overline{\mathcal{L}(C_\varphi)}$ сепарабельно.

Заметим, наконец, что если $\varphi(b) \neq \varphi(a)$, то $h_b \neq h_a$.

Из всего сказанного следует

Теорема 7. Всякая бикомпактная топологическая полугруппа допускает достаточную систему сильно непрерывных представлений в классе полугрупп линейных преобразований сепарабельных B-пространств.

Согласно теореме Банаха-Мазура всякое сепарабельное

B -пространство линейно изометрично некоторому подпространству пространства C вещественных функций, непрерывных на отрезке $[0, I]$. Из этого и теоремы 7 следует

Теорема 8. Всякая бикомпактная топологическая полугруппа допускает достаточную систему сильно непрерывных представлений в классе полугрупп линейных преобразований подпространств пространства C.

§ 4. Универсальная бикомпактная полугруппа

Прямое произведение топологических полугрупп определяется аналогично тому, как это делается для топологических групп. Именно, пусть $\{\mathcal{D}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ - семейство топологических полугрупп и $\mathcal{D}$ - прямое произведение их топологических пространств. Элементы из $\mathcal{D}$ будем обозначать через $d=(d_\gamma)$, где d_γ - проекция d в $\mathcal{D}_\gamma$. На множестве элементов топологического пространства $\mathcal{D}$ определим умножение, приняв за произведение элементов $d'=(d'_\gamma)$ и $d''=(d''_\gamma)$ элемент $d'd''=(d'_\gamma d''_\gamma)$. Пространство $\mathcal{D}$ с так определенной на нем операцией умножения представляет собой топологическую полугруппу. Доказательство этого факта аналогично соответствующему доказательству для топологических групп.

Бикомпактную топологическую полугруппу Q назовем универсальной бикомпактной топологической полугруппой, если каждая бикомпактная полугруппа допускает достаточную систему представлений в Q.

Понятие прямого произведения топологических полугрупп и теоремы 6 и 8 позволяют сформулировать следующие утверждения об универсальной бикомпактной полугруппе.

Теорема 9. Прямое произведение всех компактных полугрупп непрерывных преобразований компактных подмножеств гильбертова параллелепипеда является универсальной бикомпактной топологической полугруппой.

Теорема 10. Прямое произведение всех компактных полугрупп линейных преобразований подпространств пространства C является универсальной бикомпактной топологической полугруппой.

Лемма 4. Пусть $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ - достаточная система представлений бикомпактной топологической полугруппы A в бикомпактные топологические полугруппы из класса Σ : $f_\gamma A = D_\gamma \in \Sigma$, и $\mathcal{D}$ - прямое произведение всех полугрупп $\mathcal{D}_\gamma$. Полугруппа A топологически изоморфна некоторой подполугруппе полугруппы $\mathcal{D}$.

Доказательство. Естественный изоморфизм f полугруппы A в $\mathcal{D}$: $fa = (f_\gamma a)$ - является гомеоморфизмом.

Теперь может быть сформулирована

Теорема 11. Всякая бикомпактная топологическая полугруппа мощности μ топологически изоморфна подполугруппе прямого произведения μ экземпляров полугрупп Q.

Доказательство для бесконечной мощности следует из леммы 4, а для конечных полугрупп утверждение тривиально.

§ 5. Конечномерные представления коммутативной полугруппы идемпотентов

Представление будем называть конечномерным, если конечномерно его линейное пространство.

Лемма 5. Если бикомпактная коммутативная полугруппа идемпотентов допускает достаточную систему конечномерных представлений, то она вполне несвязна.

Доказательство. Если два неравных элемента топологической полугруппы принадлежат одной компоненте, то разделяющее их n-мерное представление должно отобразить эту компоненту в бесконечное множество операторов. Множество коммутативных идемпотентных операторов можно упорядочить: $\mathcal{E}_\alpha \leq \mathcal{E}_\beta \longleftrightarrow$ $\longleftrightarrow \mathcal{E}_\alpha \mathcal{E}_\beta = \mathcal{E}_\alpha$. При этом, во-первых, каждая цепь оказывается конечной, а во-вторых, для каждого $\mathcal{E}$ существует не более n элементов, непосредственно следующих за ним. Значит, множество идемпотентных коммутативных операторов конечно.

Ввиду этой леммы очевидно

Следствие. Для того, чтобы бикомпактная инверсная полугруппа допускала достаточную систему конечномерных представлений, необходимо, чтобы она была вполне несвязной.

Сейчас нам придется рассматривать равномерно непрерывные представления, т.е. такие, когда на множестве линейных операторов вводится равномерная операторная топология:

$$\|h\| = \sup_{\|\psi\| \leq 1} \|h\psi\|$$

Лемма 6. Бикомпактная вполне несвязная коммутативная полугруппа идемпотентов допускает достаточную систему равномерно непрерывных представлений в классе полугрупп линейных операторов банаховых пространств.

Доказательство: Пусть $f, g \in E$ и $f > g$. Нетрудно

показать, что E можно разбить на два такие непересекающиеся открыто-замкнутые множества P и Q, что $f \in P$ и $g \in Q$. Сконструируем, аналогично тому, как это было сделано в §3, банахово пространство $\overline{\mathcal{L}(C_\varphi)}$ с той только разницей, что за множество $C(E)$ примем все непрерывные комплексные функции на E, а в качестве φ - определенную функцию:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, \text{ когда } x \in Q; \\ 1, \text{ когда } x \in P. \end{cases}$$

Можно показать, что полугруппа H_φ, наделенная равномерной операторной топологией - бикомпактная и топологическая. Для этого нужно установить непрерывность отображения γ полугруппы E на полугруппу H_φ: $\gamma(e) = h_e$ и воспользоваться леммой 2. Кроме того, легко показать, что $\gamma(f) \neq \gamma(g)$. Остается рассмотреть случай несравнимых f и g. Отображение α_f полугруппы E на полугруппу fE: $\alpha_f x = xf$ для любого $x \in E$ является представлением. Остается применить полученный уже результат к элементам f и fg полугруппы fE.

В дальнейшем будут использованы некоторые факты из теории нормированных колец. Напомним, что нормированное кольцо - это комплексное банахово пространство, для элементов которого определено ассоциативное умножение, перестановочное с умножением на комплексные числа, дистрибутивное относительно сложения и непрерывное по каждому множителю.

Максимальным идеалом нормированного кольца называется собственный идеал, не содержащийся ни в каком другом собственном идеале. Кольцо R/M вычетов коммутативного норми-

рованного кольца по максимальному идеалу M канонически изоморфно полю комплексных чисел. Пересечение всех главных идеалов - это радикал кольца.

Каждое нормированное кольцо можно перенормировать так, что его топология не изменится и будут выполняться неравенства

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \quad \text{и} \quad \|e\| = 1,$$

где x и y - произвольные элементы кольца, а e - его единица. При такой норме элемент x принадлежит радикалу кольца R тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$

Ненулевое представление χ коммутативной топологической полугруппы A в мультипликативную полугруппу комплексных чисел на круге $|z| \leq 1$ называется полухарактером A. Множество полухарактеров называется разделяющим точки, если оно образует достаточную систему представлений полугруппы A.

Лемма 7. Множество полухарактеров бикомпактной вполне несвязной коммутативной полугруппы идемпотентов разделяет ее точки.

Доказательство. Пусть f и g - два неравных элемента из E и γ - разделяющее их представление в полугруппу H_φ (см. лемма 6). Линейное замыкание R полугруппы H_φ в нормированном кольце линейных операторов B-пространства $\mathcal{L}(C_\varphi)$ является коммутативным нормированным кольцом. Если $h = h_f - h_g$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|h^n\|} = 1$; значит, h не принадлежит радикалу кольца R, и существу-

ет максимальный идеал M, не содержащий h. Этому идеалу соответствует непрерывный гомоморфизм кольца R на поле комплексных чисел, разделяющий f и g.

§ 6. Представления вполне регулярной (в алгебраическом смысле) инверсной полугруппы

Представление полугруппы A называется неприводимым, если полугруппа операторов не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

Теорема I2. Пусть A - бикомпактная вполне регулярная инверсная полугруппа, а E - подполугруппа ее идемпотентов. Для того, чтобы существовала достаточная система неприводимых конечномерных представлений полугруппы A, необходимо и достаточно, чтобы пространство E было вполне несвязным.

Доказательство. Необходимость следует из леммы 5.

Достаточность. Полугруппа A является коммутативной связкой групп. Если элементы $a, b \in A$ принадлежат различным подгруппам, то отобразим каждый элемент из A в единицу содержащей его подгруппы. Это представление полугруппы A на E разделяет точки a и b, так что остается сослаться на лемму 7. Более сложным является случай, когда a и b принадлежат одной подгруппе. В этом случае полугруппу A удается разбить на две открыто-замкнутые подполугруппы B и $A \setminus B$, и если f - наименьший элемент полугруппы B, содержащей a и b, то $fa \neq fb$. Отображение α_f полугруппы A на fA: $\alpha_f x = fx$ - является представлением, причем fB - группа, а $fA \setminus fB$ - идеал полугруппы fA. Пусть

ν – неприводимое конечномерное представление бикомпактной группы fB, разделяющее точки fa и fb. Доопределим еще ν на идеале $fA \setminus fB$, положив $\nu x = 0$ для любого x из этого идеала (0 – нулевой оператор пространства представления ν). Тогда $\nu\alpha_f$ – неприводимое конечномерное представление полугруппы A, разделяющее точки a и b.

Непосредственно из доказательства теоремы I2 получаем

Следствие. Пусть a и b – неравные элементы бикомпактной вполне регулярной инверсной полугруппы A, подполугруппа идемпотентов которой вполне несвязна. Тогда существует неприводимое конечномерное представление полугруппы A на группу с присоединенным нулем, разделяющее точки a и b.

Отсюда, из леммы 7 и из теории характеров бикомпактных коммутативных групп следует

Теорема I3. Пусть A – бикомпактная коммутативная инверсная полугруппа, E – подполугруппа идемпотентов полугруппы A, X – множество полухарактеров A. Для того, чтобы X разделяло точки, необходимо и достаточно, чтобы пространство E было вполне несвязным.

На множестве X полухарактеров коммутативной топологической полугруппы A построим бикомпактно-открытую топологию. Если множество X является полугруппой относительно умножения $[\chi_1, \chi_2](a) = \chi_1(a)\,\chi_2(a) \;/\chi \in X/$, то наделенное бикомпактно-открытой топологией, оно становится коммутативной топологической полугруппой. Множество полухарактеров этой полугруппы обозначим через A'.

Каждому элементу $a \in A$ сопоставим элемент $a' \in A'$:

$a'(\chi) = \chi(a)$, $\chi \in X$. Отображение ω, определяемое формулой $\omega(a) = a'$, является гомоморфизмом A в A'.

C.W.Austin доказал, что если полугруппа характеров бикомпактной коммутативной инверсной полугруппы с единицей разделяет точки, то для A справедлива теорема двойственности. Теорема I3 позволяет следующим образом усилить этот результат.

Теорема I4. Пусть A - бикомпактная коммутативная инверсная полугруппа с единицей, подполугруппа идемпотентов которой вполне несвязна. Тогда A и A' топологически изоморфны при отображении ω.

Отметим, наконец, еще один результат, который получается с помощью методов, близких к изложенным.

Теорема I5. Вполне несвязная бикомпактная полугруппа допускает достаточную систему представлений в классе конечных полугрупп.

Литература

I. П.С.Александров, УМН, I947, 2, I(I7).

2. R. Arens, Journ. Math., 1946, 68.

3. C.W.Austin, Trans. Amer. Math. Soc., 1963, 109, 2.

4. Н.Бурбаки, Общая топология (основные структуры), М.,ФМ, I958.

5. И.М.Гельфанд, Д.А.Райков и Г.Е.Шилов, Коммутативные нормированные кольца, М., ФМ, I960.

6. Н.Данфорд, Дж.Т.Шварц, Линейные операторы, М., ИЛ, I962.

7. Л.В.Канторович и Г.П.Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., ФМ,1959.

8. П.Д.Круминг, Изв. высш. уч. зав., Математика, 1964, 6.

9. Е.С.Ляпин, Полугруппы, М., ФМ, 1960.

10. A.B.Paalman - de Miranda, Topological semigroups, Amsterdam, 1964.

11. Л.С.Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954.

12. А.Д.Тайманов, Матем. сб., 1952, 31(73), 2.

13. С.Улам, Нерешенные математические задачи, М., "Наука", 1964.

14. Шт.Шварц, Чехосл. матем. ж., 1955, 5(80).

15. Л.Б.Шнеперман, УМН, 1965, XX, 6.

16. Л.Б.Шнеперман, ДАН СССР, 1966, 167, 4.

НЕПОДВИЖНАЯ ТОЧКА ПОЛУГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИНВАРИАНТНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Шнеперман Л.Б. (Минск)

I. Семейство $\mathcal{L}$ линейных операторов линейного топологического пространства X называется равностепенно непрерывным на подмножестве K пространства X, если для каждой окрестности V нуля пространства X найдется такая окрестность U нуля, что если $k_1, k_2 \in K$ и $k_1 - k_2 \in U$, то $\mathcal{L}(k_1 - k_2) \subset V$, т.е. $l(k_1 - k_2) \in V$ при $l \in \mathcal{L}$.

Теорема I. Пусть K - бикомпактное выпуклое подмножество локально выпуклого линейного топологического пространства X а $\mathcal{L}$ - такая равностепенно непрерывная на K полугруппа линейных преобразований, что $\mathcal{L}K \subset K$. Для существования в K такой точки x_0, что $\mathcal{L}x_0 = x_0$, необходимо и достаточно, чтобы $l_1\mathcal{L} \cap l_2\mathcal{L} \neq \phi$ при любых $l_1, l_2 \in \mathcal{L}$.

2. Пусть A - бикомпактная полугруппа; Φ - банахово пространство всех непрерывных вещественных функций на A; F - совокупность всех вещественных линейных функционалов на Φ. Если $\varphi_0(x) = 1$ для всех $x \in A$, то F_0 - множество положительных функционалов, отображающих φ_0 в 1.

Каждому элементу $a \in A$ сопоставим оператор h_a пространства Φ: $(h_a\varphi)(x) = \varphi(xa)$. Множество $H = \{h_a\}_{a \in A}$ образует полугруппу линейных операторов пространства Φ. Наделенная сильной операторной топологией, полугруппа H топологически изоморфна бикомпактной полу-

группе A.

Каждому оператору h_a сопоставим сопряженный оператор h_a^* пространства F: $h_a^* f = f h_a$. Совокупность операторов $H^* = \{h_a^*\}_{a \in A}$ образует полугруппу, антиизоморфную полугруппе H. Полугруппа H^* равностепенно непрерывна на F_0.

Теорема 2. Если в бикомпактной полугруппе A для любых $a, b \in A$ выполняется условие $Aa \cap Ab \neq \emptyset$, то существует такой функционал $f_0 \in F_0$, что $H^* f_0 = f_0$.

3. Теорема 3. Для того, чтобы на бикомпактной полугруппе A существовал правоинвариантный интеграл по регулярной борелевской мере, необходимо и достаточно, чтобы $Aa \cap Ab \neq \emptyset$ для любых $a, b \in A$.

Условие левоинвариантного интегрирования имеет вид: $aA \cap bA \neq \emptyset$ для любых $a, b \in A$, а условие (двусторонне) инвариантного интегрирования является объединением этих двух условий.

ПОГРУЖЕНИЯ ПОЛУГРУПП

Шутов Э.Г. (Таганрог)

Обзор и систематизация результатов по погружениям полугрупп, опубликованных до 1962 года, были сделаны Е.С.Ляпиным и Л.М.Глускиным [1-3]. Настоящий обзор сделан по материалам работ о погружениях полугрупп, опубликованных с 1962 года [4-36]. В обзоре используются и полученные автором результаты, которые еще не опубликованы в печати [6-8]. Более ранние работы по указанному вопросу упоминаются лишь в виде исключения для большей полноты изложения. В обзоре совсем не упоминаются работы о погружениях топологических полугрупп.

Работы, рассматриваемые в обзоре, позволяют назвать направления, в которых велись наиболее интенсивные исследования в рассматриваемый период: 1) потенциальные свойства полугрупп, 2) погружения полугрупп в полугруппы заданных классов, 3) погружения колец и их мультипликативных полугрупп, 4) разные погружения. В обзоре дается краткое изложение основных достижений в указанных направлениях. Под упорядоченностью понимаем частичную упорядоченность и под кольцом - ассоциативное кольцо. Если $x \in M$ или x - пустой символ, то будем писать $x \dot{\in} M$.

1. Потенциальные свойства полугрупп

Понятие и термин потенциального выполнения свойств в полугруппах введены Е.С.Ляпиным [1]. Потенциальным свойствам полугрупп посвящены работы Э.Г.Шутова [4-12], Вейнерта [13]

и Хови [I4].

I.I. Упорядоченная полугруппа (у.полугруппа) A называется у.надполугруппой у.полугруппы B, если B - подполугруппа A и упорядоченность B индуцируется упорядоченностью A. Если каждому $\alpha \in \Omega$ соответствует такое отображение $\alpha a = a\alpha = b$ полугруппы A в A, что $(\alpha a)b = a(\alpha b)$ при любых $a, b \in A$, то A назовем Ω-полугруппой. Очевидно, мультипликативная полугруппа кольца R - C-полугруппа, где C - множество всех целых чисел и $ca (c \in C, a \in R)$ - обычное кратное в R.

Если B - подполугруппа Ω-полугруппы A и $\alpha b \in B$ при любых $b \in B$, $\alpha \in \Omega$, то B - Ω-полугруппа, а Ω-полугруппу A будем называть Ω-надполугруппой Ω-полугруппы B. Бинарное отношение τ Ω-полугруппы (у.полугруппы) A называется отношением правой потенциальной делимости относительно класса Σ Ω-полугрупп (у.полугрупп), если для A в Σ существует такая Ω-надполугруппа (у. надполугруппа), в которой a делит справа b при любом $(a, b) \in \tau$.

Подмножество M Ω-полугруппы (у.полугруппы) A называется потенциально обратимым слева относительно класса Σ Ω-полугрупп (у.полугрупп), если для A существует в Σ такая Ω-надполугруппа (у.надполугруппа), в которой каждый $m \in M$ обратим слева. Аналогичное определение дается для двусторонней потенциальной делимости и обратимости. Пусть Σ_1 - класс всех у.полугрупп, Σ_2 - класс всех Ω-полугрупп при заданном Ω. В [6],[7] получены следующие результаты.

I) Для того чтобы бинарное отношение τ полугруппы A класса Σ_i (i=I,2) было отношением правой потенциальной делимости относительно Σ_i, необходимо и достаточно, чтобы при i = I и любых $(a,b)\in\tau$, $x,y\in A$ всегда $ax\geq ay\rightarrow bx\geq by$, а при i = 2 и любых $(a,b)\in\tau$, $x,y\in A\cup\Omega$ всегда $ax=ay\rightarrow bx=by$.

2) Для того чтобы подмножество M полугруппы A класса Σ_i (i = I,2) было потенциально обратимым слева относительно Σ_i, необходимо и достаточно, чтобы при i = I и любых $c,b\in M$, $x,y\in A$, $a\in A$ всегда $cbx\geq cby\rightarrow ax\geq ay$, а при i = 2 и любых $c,b\in M$, $x,y\in A\cup\Omega$, $a\in A$ всегда $cbx=cby\rightarrow ax=ay$. Отсюда вытекают все результаты работ [4], [5].

I.2. Результаты п. I.I применяются для исследования потенциальной делимости и обратимости в полугруппах ряда конкретных классов в работах [9]–[II]. Если в полугруппе A каждый потенциально обратимый слева (справа) элемент относительно Σ (см. п.I.I), обратим слева (справа) в A, то A назовем Σp_1—полугруппой (Σp_2—полугруппой). Если A — Σp_1—полугруппа и Σp_2—полугруппа, то назовем ее Σp_3—полугруппой. Пусть Π - класс всех полугрупп, Π_1 - класс всех полугрупп с левым сокращением. В [9] получены следующие результаты.

I) Для того, чтобы подмножество M полугруппы A класса Π_1 было потенциально обратимым слева относительно Π, необходимо и достаточно, чтобы A содержала двустороннюю единицу или чтобы $a\notin aA$ при любом $a\in M$.

2) Для того чтобы полугруппа A класса Π_1 была $\Pi\rho_1$-полугруппой, необходимо и достаточно, чтобы A была с левой обратимостью или чтобы в A было более одного идемпотента и $a \in aA$ при любом $a \in A$.

Получены и другие результаты о потенциальной обратимости элементов в полугруппах класса Π_1.

I.3. Пусть W_Ω - полугруппа всех частичных преобразований Ω. Подполугруппу A полугруппы W_Ω назовем ρ_1-полугруппой (ρ_2-полугруппой), если для каждого потенциально обратимого слева (справа) элемента $a \in A$ относительно Π (см. п. I.2) существует надполугруппа B полугруппы A, которая является подполугруппой W_Ω и в которой a обратим слева (справа). Если A - ρ_1-полугруппа и, одновременно, ρ_2-полугруппа, то назовем ее ρ_3-полугруппой.

В [IO] найдены достаточные условия для того, чтобы элемент подполугруппы A полугруппы W_Ω был потенциально обратим слева (справа, двусторонне) относительно Π. Найдены, далее, необходимое и достаточное условие и некоторые достаточные условия для того чтобы подполугруппа A полугруппы W_Ω была ρ_i-полугруппой ($\Pi\rho_i$-полугруппой) (см. п.I.2), (i=I,2,3).

Получены и другие результаты в этом направлении. Именно,

I) Каждая полугруппа A погружаема в такую $\Pi\rho_1$-полугруппу, в которой каждый $a \in A$, потенциально обратимый в A слева относительно Π, обратим слева.

2) Для того чтобы полугруппа, не являющаяся двухэлементной полугруппой левых нулей, была погружаема в такую простую

(относительно гомоморфизмов) полугруппу, в которой каждый элемент погружаемой полугруппы, потенциально обратимый в ней слева относительно Π, обратим слева, необходимо и достаточно, чтобы каждый элемент погружаемой полугруппы, потенциально обратимый в ней слева относительно Π, был сокращаем слева.

I.4. В [II] получен следующий результат о потенциальной делимости в коммутативных полугруппах:

для того, чтобы бинарное отношение коммутативной полугруппы A, состоящее из одной пары (a, b), было отношением потенциальной делимости относительно класса K всех коммутативных полугрупп (см. п. I.I), необходимо и достаточно, чтобы при любых $x, y \in A$ всегда $ax = ay \to bx = by$.

В этой же работе построен пример коммутативной полугруппы, в которой существуют бинарные отношения τ_1 и τ_2, содержащие по одной паре элементов и являющиеся отношениями потенциальной делимости относительно K, но в которой $\tau_1 \cup \tau_2$ не является отношением потенциальной делимости относительно K. Вопрос о необходимом и достаточном условии потенциальной делимости бинарного отношения, содержащего более одной пары элементов, в коммутативных полугруппах относительно K остается открытым.

I.5. В работе [I0], посвященной потенциальной двусторонней обратимости в полугруппах получено на основании статьи [II], необходимое и достаточное условие двусторонней потенциальной обратимости любого элемента полугруппы относительно Π (см. п. I.2), которое состоит из бесконечного

множества соотношений, а также найдены два достаточных условия двусторонней потенциальной обратимости элементов относительно Π.

Одно из найденных условий позволило привести пример полугруппы, не погружаемой в группу, в которой каждый элемент ее порождающего множества двусторонне потенциально обратим относительно Π. Пока не известно примера полугруппы, не погружаемой в группу, в которой каждый ее элемент двусторонне потенциально обратим относительно Π.

Благодаря другому найденному условию получено необходимое и достаточное условие существования для полугруппы относительно подполугруппы правой полугруппы отношений. Здесь же исследуются свойства этой полугруппы отношений. Правая полугруппа отношений изучается также в [13].

I.6. Подполугруппа $\mathcal{D}$ полугруппы A называется унитарной, если при любых $d \in \mathcal{D}$, $a \in A$ всегда $da \in \mathcal{D} \to a \in \mathcal{D}$, $ad \in \mathcal{D} \to a \in \mathcal{D}$. Как показано в [14] если $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ – изоморфные унитарные подполугруппы полугруппы A, то A погружаема в такую полугруппу B, в которой $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{D}_2$ сопряжены (в обычном смысле). Потенциальная сопряженность элементов в полугруппах рассматривалась в [12] и, в некотором другом смысле, в [22].

2. Погружения полугрупп в полугруппы заданных классов

Погружения полугрупп в полугруппы заданных классов рассматривались Э.Г.Шутовым [6], [9], [15]–[18], Л.А.Бокутем [21], [22], Б.М.Шайном [23], [24], М.С.Цаленко [28], Рейли [25], Холвитом

[26] и Пикертом [27].

2.I. В [6] получено следующее: Для того чтобы у.полугруппа A без идемпотентов была погружаема в у.полугруппу с левой обратимостью, необходимо и достаточно, чтобы декартово произведение $A \times A$ было отношением правой потенциальной делимости относительно Σ_1 (см. п. I.I). Здесь же описаны все у.полугруппы с идемпотентами, погружаемые в у. полугруппы с левой обратимостью.

Из этих результатов вытекают результаты статьи [20].

2.2. В [I5], [I7], [I8], [2I], [28] получены следующие результаты о погружениях полугрупп в простые (относительно гомоморфизмов) и полные (относительно извлечения корня) полугруппы.

I) Каждая полугруппа (группа, инверсная полугруппа) погружаема в простую полную полугруппу (группу, инверсную полугруппу) ([I7]; возможность погружения полугруппы в простую полугруппу доказана также в [2I], а возможность погружения группы в простую полную группу - в [28]).

2) Каждая полугруппа, погружаемая в полугруппу с левой обратимостью, погружаема в простую полугруппу с левой обратимостью (см. [I5]).

3) Для того, чтобы полугруппа A, содержащая идемпотенты, была погружаема в простую полугруппу с левой обратимостью, необходимо и достаточно, чтобы A была погружаема в группу (см. [I5]),

Кроме того, получен (см. [I8]) ряд результатов о погружениях у. полугрупп.

2.3. В [9], [16] показано, что полугруппа тогда и только тогда является полугруппой с левым сокращением, когда она является связкой некоторого типа таких подполугрупп с левым сокращением, каждая из которых либо содержит двустороннюю единицу, либо не содержит идемпотентов.

Описано строение и дана классификация всех связок указанного типа. Это описание позволяет получить следующие результаты о погружениях полугрупп с левым сокращением.

I) Пусть A -полугруппа с двусторонним сокращением. Если A не содержит единицы, то A погружаема в простую полугруппу с двусторонним сокращением. Если A содержит единицу, то A тогда и только тогда погружаема в простую полугруппу с двусторонним сокращением, когда A погружаема в группу (см. [16]). Отсюда вытекает, что полугруппа без единицы с двусторонним сокращением погружаема в простую относительно идеалов полугруппу с двусторонним сокращением (см. [21]).

2) Пусть A -полугруппа с левым сокращением. Если A не содержит идемпотентов, то A погружаема в простую полугруппу с левым сокращением и с левой обратимостью. Если A содержит идемпотенты, то A тогда и только тогда погружаема в простую полугруппу с левым сокращением, когда A погружаема в группу или является двухэлементной полугруппой правых нулей.

Здесь же описаны все полугруппы с левым сокращением, погружаемые в простые относительно идеалов (относительно нормальных подполугрупп) полугруппы с левым сокращением.

2.4. В [23], [24] найдены необходимое и достаточное условие и некоторые достаточные условия возможности погружения полугрупп в инверсные полугруппы, а в [25] показано, что каждая полугруппа (инверсная полугруппа) погружаема в бипростую (бипростую инверсную) полугруппу. Работы [26], [27] посвящены изучению достаточных условий возможности погружения полугрупп в группы.

3. Погружения колец и их мультипликативных полугрупп

Погружения колец и их мультипликативных полугрупп рассматривались Э.Г.Шутовым [7], [30] и Л.А.Бокутем [21], [29].

3.1. Если в Ω-полугруппе A отношение $A \times A$ является отношением правой потенциальной делимости (подмножество A потенциально обратимо слева) относительно Σ_2 (см. п. 1.1), то назовем A полугруппой с правой потенциальной делимостью (с левой потенциальной обратимостью). Кольцо R назовем кольцом с правой потенциальной делимостью (с левой потенциальной обратимостью, если существует такое надкольцо T кольца R, в котором каждый ненулевой элемент из R делит справа все элементы из R (обратим слева) (см. [7]).

А.И.Мальцевым на III Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре была поставлена следующая проблема. Если мультипликативная полугруппа кольца погружаема в группу, то будет ли всегда кольцо погружаемо в тело? Эта проблема до сих пор является открытой (см. [29]).

В связи с указанным направлением возникает следующий вопрос. Если мультипликативная полугруппа кольца - с правой

потенциальной делимостью (обратимостью), то будет ли кольцо кольцом с правой потенциальной делимостью (обратимостью). В [7] получены следующие результаты.

I) Если в C—полугруппе кольца R бинарное отношение, состоящее из всех пар ненулевых элементов, является отношением правой потенциальной делимости относительно класса всех C—полугрупп, то R - кольцо с правой потенциальной делимостью.

2) Следующие предложения равносильны:

а) кольцо R является кольцом с левой потенциальной обратимостью,

б) подмножество ненулевых элементов мультипликативной полугруппы P кольца R потенциально обратимо в P слева относительно класса всех таких надполугрупп полугруппы P, в которых нулем является нуль P,

в) кольцо R - без делителей нуля.

Далее приведены примеры колец с правой потенциальной делимостью, но без левой потенциальной обратимости. Известно, что для полугрупп это не имеет места. Показано, что существуют кольца R, мультипликативная полугруппа которых с правой потенциальной делимостью (обратимостью), хотя R является кольцом без правой потенциальной делимости (обратимости).

3.2. В [21], [30] получены следующие результаты.

I) Каждое кольцо без делителей нуля погружаемо в простое кольцо без делителей нуля.(см. [21]).

2) Кольцо тогда и только тогда погружаемо в простое

кольцо; когда оно имеет характеристику (см. [21], [30]).

3) Каждое кольцо с характеристикой погружаемо в простое полное кольцо (см. [30]).

4) Кольцо тогда и только тогда погружаемо в полупростое кольцо, когда оно является подпрямой суммой колец с характеристикой (см. [30]).

4. Разные погружения

В [34], [35] рассмотрены некоторые погружения полугрупп, связанные со сдвигами полугрупп, работы [31], [32] посвящены некоторой конструкции, обобщающей конструкцию свободного произведения групп с объединенной подгруппой на случай полугрупп, в [36] изучаются плотные погружения полугрупп, работа [33] посвящена некоторым погружениям полугрупп в полугруппы с сокращением.

Литература

1. Е.С.Ляпин, Полугруппы, М., Физматгиз, 1960.
2. Е.С.Ляпин, Погружения полугрупп. Обзорный доклад на Третьем Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре, 1960.
3. Л.М.Глускин, Полугруппы. Итоги науки, 1963.
4. Э.Г.Шутов, Потенциальная делимость элементов в полугруппах, Уч.зап. ЛГПИ им. Герцена, 1958, 166, 75-104.
5. Э.Г.Шутов, Потенциальная односторонняя обратимость элементов полугрупп, Уч.зап. Удмуртского гос.пед. ин-та, 1958, 12, 24-36.

6. Э.Г.Шутов, О некоторых погружениях упорядоченных полугрупп, ДАН СССР, (печатается).

7. Э.Г.Шутов, О некоторых погружениях полугрупп с операторами, (печатается).

8. Э.Г.Шутов, О потенциальной обратимости элементов полугрупп, Изв. высших учебных заведений, Математика, (печатается).

9. Э.Г.Шутов, О некоторых погружениях полугрупп с сокращением, Матем. сб., 1965, 67(109):2, 167-180.

10. Э.Г.Шутов, Потенциальная обратимость элементов в некоторых полугруппах преобразований, Матем. сб., 1965, 68(110):1, 3-16.

11. Э.Г.Шутов, Потенциальная делимость в коммутативных полугруппах и кольцах, Изв. высших уч.зав., Математика, 1964, 4(41), 162-168.

12. Э.Г.Шутов, Потенциальная сопряженность элементов в полугруппах. Уч.зап. ЛГПИ им.Герцена, 1958, 166, 105-119.

13. H.J.Weinert, Zur Erweiterung algebraischer Strukturen durch Rechtsquotientenbildung. Acta math. Acad. scient. hung, 1965, 16, 1-2, 213-214.

14. J.M.Howie, Embedding theorems for semigroups. Quart. J. Math., 1963, 14, 65, 254-258.

15. Э.Г.Шутов, Погружение полугрупп в простые полугруппы с односторонним делением, Изв.высш.уч.зав., Математика, 1964, 5(42), 143-148.

16. Э.Г.Шутов, О полугруппах с односторонним сокращением, Изв.высш.уч.зав., Математика, 1966, 2 (51), 138-147.

17. Э.Г.Шутов, Погружения полугрупп в простые и полные полугруппы, Матем.сб., 1963, 62(104), 496-511.

I8. Э.Г.Шутов, О некоторых погружениях упорядоченных полугрупп, Тезисы выступления на Пятом Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре.

I9. А.И.Мальцев, О включении ассоциативных систем в группы, Матем.сб., I939, 6(48):2, 33I-336.

20. P.Cohn, Embeddings in semigroup with one-sided division. J. London Math. Soc., 1956,31, 122, 169-181.

2I. Л.А.Бокуть, Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп,I, Сибирск,матем.ж., I963, 4, 3, 500-5I8.

22. Л.А.Бокуть, Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп, 2, Сибирск.матем.ж., I963, 4, 4, 729-743.

23. Б.М.Шайн, Вмещение полугрупп в обобщенные группы, Матем. сб., I96I, 55, 4, 379-400.

24. Б.М.Шайн, О некоторых классах полугрупп бинарных отношений. Сибирск.матем.ж., I965, 6, 3, 6I6-635.

25. N.R.Relly, Embedding inverse semi-groups in bisimple inverse semigroups. Quart. J. Math., 1965, 16, 62, 183-187.

26. R.Holvoet, Sur Y'immersion d'un semigroups dans un groupe Bull. Soc. math. Belg.,1959,11, 2, 134-146.

27. G.Pickert, Zur Einbettung von Halbgruppen in Gruppen, Math. Z., 1961, 77, 3, 241-248.

28. М.С.Цаленко, О некоторых погружениях групп, Сибирск.матем.ж., I963, 4, I.

29. Л.А.Бокуть, О некоторых классах колец без делителей нуля, Тезисы выступления на УП Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре.

30. Э.Г.Шутов, О некоторых погружениях колец, Тезисы выступления на У Всесоюзном коллоквиуме по общей алгебре,I963.

31. I.M.Howie, Embedding theorems with amalgamation for semigroups. Proc. London Math. Soc., 1962, 12, 47, 509–534.

32. J.M.Howie, An Embedding theorem with amalgamation for cancellative semigroups, Proc. Glasgow Math. Assoc., 1963, 6, 1, 19–26.

33. C.V.Heuer, An extension problem for cancellative semigroups. Doct. diss. Univ. Nebraska, 1963; Dussert. Abstrs., 1964, 24, 8, 3352-3353.

34. T.Tamura, N.Graham, Certain embedding problems of semigroups. Proc. Japan, Acad., 1964, 40, 1, 8–13.

35. Э.Г.Шутов, О сдвигах полугрупп, Успехи матем.наук, 1964, 19, 4, 215–218.

36. Л.М.Глускин, О плотных вложениях, Матем.сб., 1963, 61, 2, 175–206.

Оглавление

Стр.

I. Барабаш В.В. Топологические свойства полугрупп непрерывных гомоморфизмов топологических полугрупп 3

2. Бирюков А.П. Разрешимость проблемы изоморфизма для конечно определенных коммутативных полугрупп с двумя образующими 5

3. Вагнер В.В. Обобщенные грудоиды и грудоиды и их приложения 7

4. Габович Е.Я. Упорядоченные полугруппы I3

5. Глускин Л.М. Алгебры многоместных функций 32

6. Гуревич Ю.Ш. Некоторые алгоритмические вопросы теорий классов алгебраических систем 38

7. Калманович А.М. О полугруппе взаимно однозначных частичных эндоморфизмов графа 42

8. Когаловский С.Р. О свойствах, сохраняющихся при алгебраических конструкциях 44

9. Лесохин М.М. Об аппроксимируемости полугрупп и отделимости подполугрупп 52

I0. Левич Е.М. Об одной теореме Ф.Холла 63

II. Ливчак Я.Б. О некоторых вопросах теории предела .. 66

I2. Ляпин Е.С. Полугруппы эндоморфизмов 75

I3. Мустафаев Л.Г. Об идеальных эквивалентностях полугрупп 90

I4. Потемкин Л.В. О строении полугрупповых колец I0I

I5. Розен В.В. Гомоморфизмы структур, ассоциированных с упорядоченными множествами II4

I6. Сандик М.Д. Гомоморфизмы в Ω-лупах II7

17. Фрейдман П.А., Андриянов В.И. Гамильтоновы кольца.. 120
18. Хенно Я.А. Радикалы полугрупп 122
19. Хион Я.В. Ω-системы 123
20. Шайн Б.М. Алгебры отношений 130
21. Шайн Б.М. Теория полугрупп как теория суперпозиций многоместных функций 169
22. Шайн Б.М. Полугруппы преобразований 191
23. Шеврин Л.Н., Филиппов Д.Н. Частично упорядоченные множества и их графы сравнения 193
24. Шеврин Л.Н. О полуизоморфизмах полугрупп 194
25. Шимельфениг О.В. К теории полугруд и обобщенных груд 195
26. Шнеперман Л.Б. Представления топологических полугрупп 197
27. Шнеперман Л.Б. Неподвижная точка полугруппы преобразований и инвариантное интегрирование 215
28. Шутов Э.Г. Погружения полугрупп 217

TÜ RAAMATUKOGU
10300013119849

Цена 70 коп.

XII
1А-4218
201773