ISSN 0494-7304 0132-053×

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

764

RINGID JA MONOIDID
КОЛЬЦА И МОНОИДЫ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU 1987

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 764 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

RINGID JA MONOIDID
КОЛЬЦА И МОНОИДЫ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

ТАРТУ 1987

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 764.
КОЛЬЦА И МОНОИДЫ.
Труды по математике и механике.
На русском и английском языках.
Резюме на разных языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор К. Каарли.
Корректоры Г. Лийв, В. Фляйшер.
Подписано к печати 05.02.1987.
МВ 01545.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 8,35. Печатных листов 9,25.
Тираж 400.
Заказ № 49.
Цена 1 руб. 30 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.
2 - 2

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 3-11.

Уч. зап. Тартуск. ун-та
1987, 764, 3-II.

УНИТАРНОСТЬ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ГРУППЫ ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ

А.Бовди
Ужгородский государственный университет

Пусть KG - групповое кольцо группы G над коммутативным кольцом K с единицей и $U(KG)$ - мультипликативная группа кольца KG. Если f - гомоморфизм группы G в мультипликативную группу кольца K и $x = \sum_{g\in G} \alpha_g g$ - элемент кольца KG, то x сопоставим элемент $x^f = \sum_{g\in G} \alpha_g f(g) g^{-1}$.

Тогда отображение $x \mapsto x^f$ является антиавтоморфизмом 2-го порядка кольца KG и называется <u>инволюцией, порожденной гомоморфизмом</u> f.

Элемент u группы $U(KG)$ называется f-унитарным, если обратный элемент u^{-1} совпадает с εu^f, где $\varepsilon \in U(K)$. Легко видеть, что все f-унитарные элементы группы $U(KG)$ образуют подгруппу, которую в дальнейшем будем называть <u>f-унитарной подгруппой группы</u> $U(KG)$ и обозначать $U_f(KG)$. В случае, когда $U(KG) = U_f(KG)$, группа $U(KG)$ называется <u>f-унитарной</u>.

Интерес к группе $U_f(KG)$ возник в алгебраической топологии и в унитарной К-теории в случае, когда K - кольцо целых чисел [I]. В настоящей работе исследуется вопрос об f-унитарности группы $U(KG)$ для произвольных групповых алгебр KG. В частном случае, когда K - конечное простое поле, задача рассматривалась в работе автора [2], где даются необходимые условия f-унитарности группы $U(KG)$. Однако автором допущен пробел в описании группы G.

Если f - тривиальный гомоморфизм, то элемент x^f будем обозначать через x^*. Пусть

$$V(KG) = \{ \sum_{g\in G} \alpha_g g \in U(KG) \mid \sum_{g\in G} \alpha_g = 1 \}.$$

Легко видеть, если f - тривиальный гомоморфизм и элемент $x \in V(KG)$ f-унитарен, то $x^* = x^{-1}$.

Сначала изложим некоторые вспомогательные факты.

<u>Лемма I</u>. Пусть в группе G элементы конечного порядка образуют абелеву подгруппу $\pi(G)$, факторгруппа $G/\pi(G)$

правоупорядочена и характеристика поля K не делит порядки элементов группы $\pi(G)$. Если все идемпотенты алгебры $K\pi(G)$ центральны в KG и $x \in U(KG)$, то существуют такие попарно ортогональные идемпотенты $e_1, e_2, \dots, e_n$ и элементы $\alpha_i \in U(K\pi(G))$, $g_i \in G$, что $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$ и

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i g_i \quad , \quad x^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-1} e_i g_i^{-1} .$$

Доказательство. Легко видеть, что групповая алгебра KG изоморфна скрещенному произведению S группы $G/\pi(G)$ и групповой алгебры $K\pi(G)$, [3]. Если $x \in U(KG)$, то x и x^{-1} как элементы скрещенного произведения S можно представить в виде (см. [3])

$$x = \sum_{i=1}^{s} t_{h_i} \alpha_i \quad , \quad x^{-1} = \sum_{j=1}^{m} t_{\bar{g}_j} \beta_j \quad (\alpha_i, \beta_j \in K\pi(G)).$$

Подгруппа носителя элементов α_i, β_j $(i = 1, 2, \dots, s;\ j = 1, 2, \dots, m)$ является конечной абелевой нормальной подгруппой H группы G, так как идемпотент $1/|H| \sum_{h \in H} h$ централен в KG. Алгебра KH полупростая и в KH существуют такие попарно ортогональные примитивные идемпотенты $e_1, e_2, \dots, e_n$, что $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$. Элементы xe_k и $x^{-1}e_k$ имеют коэффициенты $\alpha_i e_k$ и $\beta_j e_k$ из поля KHe_k. Поскольку поле KHe_k выдерживает трансформацию при помощи элементов t_g $(g \in G/\pi(G))$, то повторением рассуждений, изложенных в доказательстве теоремы 46 из [3] получаем, что из равенства $xe_k \cdot x^{-1}e_k = e_k$ следует $xe_k = t_{h_q} \alpha_q e_k$. Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы.

Лемма 2 [2]. Пусть f - гомоморфизм группы G в поле K из двух элементов. Тогда: I) если G - циклическая группа порядка 4, то $U(KG) = U_f(KG)$; 2) если G - циклическая группа порядка 8, то группа $U(KG)$ не f-унитарна; 3) если G - группа кватернионов или диэдра 8-го порядка, то группа $U(KG)$ не является f-унитарной.

Лемма 3. Пусть f - тривиальный гомоморфизм группы G в поле K характеристики p, $\langle a \rangle$ - циклическая подгруппа конечного порядка s группы G, $g \in G$ и группа $U(KG)$ f-унитарна. Тогда:

I) если $s = 2$, $p = 2$ и $g^2 \neq 1$, то либо $[a, g] = 1$, либо $aga = g^{-1}$;

2) если $s = 4$, $p = 2$, $g^2 \notin \langle a \rangle$ и $a^2 g a^2 = g^{-1}$, то это невозможно;

3) если $s = 3$, $p = 2$, то подгруппа $\langle a \rangle$ нормальна в G;

4) если $s = 2$ и $p = 3$, то $[a, g] = 1$.

Доказательство. Пусть $u=(1+a+a^2+\dots+a^{s-1})g(1-a)$. Тогда $u^2=0$, $1+u\in U(KG)$ и из f-унитарности этого элемента получаем, что $u+u^f=0$. Поэтому

$$(1+a+a^2+\dots+a^{s-1})g(1-a)+(1-a^{-1})g^{-1}(1+a+\dots+a^{s-1})=0. \quad (I)$$

Рассмотрим указанные выше случаи.

I. Если $[a,g]\neq 1$, то $a\notin\langle g\rangle$ и в силу (I) $aga=g^{-1}$.

2. Так как $a^2ga^2=g^{-1}$, то $g^2\notin\langle a\rangle$. Если умножить (I) на $1+a$, то получим $(1+a+a^2+a^3)g(1+a^2)=0$, откуда $g=g^{-1}a^i$, а это невозможно.

3. Пусть $g\notin N_G(\langle a\rangle)$. Тогда $u\neq 0$ и если умножить равенство (I) на $1+a$, то получим $(1+a+a^2)g(1+a^2)=0$, а это невозможно.

4. Если $[a,g]\neq 1$, то равенство (I) противоречиво. Лемма доказана.

Теорема I. Пусть f - тривиальный гомоморфизм группы G в поле K и группа $U(KG)$ f-унитарна. Тогда выполняется одно из условий:

I) G - группа показателя 2 и K - поле характеристики 2;

2) G - циклическая группа порядка 4 и K - поле из двух элементов;

3) A - подгруппа прямого произведения абелевой группы без кручения и элементарной абелевой 3-группы, G - такое полупрямое произведение группы A и группы $\langle b\rangle$ 2-го порядка, что $bab=a^{-1}$ для всех $a\in A$ и K - поле характеристики 2, а в случае, когда группа G обладает элементом порядка 3, то K - поле из двух элементов;

4) K - поле из двух элементов и в группе G элементы конечного порядка образуют подгруппу $\pi(G)$, каждая подгруппа группы $\pi(G)$ нормальна в G и $\pi(G)$ - элементарная абелева 3-группа;

5) K - поле из трех элементов и в группе G элементы конечного порядка принадлежат центру и образуют элементарную абелеву 2-подгруппу $\pi(G)$;

6) G - группа без кручения.

Если группа G и поле K удовлетворяют одному из указанных выше условий и кроме того, в пунктах 4-6 фактор-группа G по подгруппе элементов конечного порядка правоупорядочена, то группа $U(KG)$ f-унитарна, где f - тривиальный гомоморфизм группы G в K.

Доказательство. Пусть f – тривиальный гомоморфизм и группа $U(KG)$ f-унитарна. Если a – элемент простого порядка q группы G и в поле K существует такой ненулевой элемент α, порядок которого не равен q, то элемент $x=(a-\alpha)(1-\alpha)^{-1}$ обратим в KG и

$$x^{-1}=(1-\alpha)(1-\alpha^q)^{-1}(\alpha^{q-1}+\alpha^{q-2}a+\dots+\alpha a^{q-2}+a^{q-2}).$$

Тогда

$$xx^*=(1+\alpha^2-\alpha a-\alpha a^{-1})(1-\alpha)^{-2}.$$

Пусть характеристика поля K отлична от 2. Если $q>2$, то элемент $2^{-1}(a+1)$ не f-унитарен. Если же $q=2$ и поле K обладает элементом α, порядок которого не делит 4, то снова элемент $(a-\alpha)(1-\alpha)^{-1}$ не f-унитарен. Следовательно, если группа G имеет элемент конечного порядка, то из f-унитарности группы $U(KG)$ следует, что либо поле K характеристики 2, либо K – поле из трех элементов и в G все элементы конечного порядка являются 2-элементами. Рассмотрим каждый случай отдельно.

I. Пусть K – поле характеристики 2, P – силовская 2-подгруппа группы G. Тогда $U(KP)$ f-унитарна и по лемме 2 показатель группы P делит 4, а по теореме И.Н.Санова группа P локально конечна. Группа G не обладает такой подгруппой, которая представима в виде прямого произведения группы $\langle a\rangle$ 2-го порядка и группы $\langle b\rangle$, порядок которой отличен от 2, так как элемент $1+b(a+1)$ 2-го порядка не f-унитарен.

Докажем на основании этого факта, что если $P\neq 1$, то группа P либо показателя 2, либо циклическая 4-го порядка. Действительно, если P имеет конечную неабелеву подгруппу H, то элементы 2-го порядка из центра группы H содержатся в каждой циклической подгруппе 4-го порядка группы H. Если элемент c 2-го порядка не принадлежит центру группы H, то в силу леммы 3 элемент c с некоторым элементом 4-го порядка порождает группу диэдра 8-го порядка, а это противоречит лемме 2. Поэтому в группе H имеется единственный элемент 2-го порядка, а как известно, такая группа является группой кватернионов 8-го порядка. Однако это невозможно по лемме 2 и поэтому группа P абелева. Если P имеет элемент 4-го порядка, то P обладает единственным элементом 2-го порядка и является циклической. Отметим, что если $P=\langle a \mid a^4=1\rangle$ и поле K содержит более двух элементов, то можно построить не f-унитарный элемент вида $(a-\alpha)(1-\alpha)^{-1}$.

Пусть q - нечетное простое число и L - силовская q-подгруппа группы G. Если a - элемент порядка q^m из L и $q^m>3$, то элемент $x=1+a+a^2+\dots+a^{q^m-3}$ обратим в KL и не f-унитарен. Действительно, если $q^m\equiv 1 \pmod 4$, то $x^{-1}=a^2+a^4+a^6+\dots+a^{q^m+1}$, а в случае $q^m\equiv 3 \pmod 4$ — $x^{-1}=a^3+a^5+a^7+\dots+a^q$. Поэтому $q^m=3$ и по лемме 3 L - элементарная абелева 3-группа и каждая ее подгруппа нормальна в G. Если $H=\langle a \mid a^3=1\rangle$, то из f-унитарности группы $U(KH)$ следует, что K - поле из двух элементов.

Пусть $P\neq 1$ и группа G имеет элемент порядка 3 или бесконечного порядка. Если g - такой элемент, то, как отмечено выше, элемент a 2-го порядка не перестановочен с g и по лемме 3 $aga=g^{-1}$, а группа G не содержит элементов порядка 4. Элемент из централизатора C элемента g имеет порядок 3 или бесконечного порядка. Поэтому $aca=c^{-1}$ для всех $c\in C$ и группа C абелева. Пусть $h\in G\setminus C$ и порядок h не равен 2. Если $c\in C$ и $(ch)^2=1$, то получаем противоречивое равенство $(ch)c^{-1}(ch)=c$. Поэтому $a(hc)a=(hc)^{-1}$ для каждого $c\in C$ и $aha=h^{-1}$. Отсюда вытекает $h\in C$, что невозможно. Следовательно, элементы из $G\setminus C$ имеют порядок 2 и индекс подгруппы C равен 2.

Рассмотрим второй случай, когда K - поле из трех элементов и группа G имеет только 2-элементы конечного порядка. Если a - элемент порядка 4 группы G, то $x= =1+2a+a^3\in V(KG)$ и $xx^*=a^2$, а это невозможно. Следовательно, элементы конечного порядка из G имеют порядок 2 и по лемме 3 принадлежат центру группы G. Необходимость условий теоремы доказана.

Легко видеть, что если выполняется условие I) или 2), то группа $U(KG)$ f-унитарна. Если имеет место 3) и $x\in U(KG)$, то $x=x_1+x_2b$ $(x_i\in KA)$ и $y=xx^*=x_1x_1^*+ +x_2x_2^*\in U(KA)$. Так как A - прямое произведение группы B без кручения и группы C, показатель которой делит 3, то по лемме I существуют такие попарно ортогональные идемпотенты $e_1,e_2,\dots,e_s$ в KC, что $y=\alpha_1e_1g_1+\dots+\alpha_se_sg_s$ $(g_i\in B,\ \alpha_i\in U(KC))$. Если $C\neq 1$, то K - поле из двух элементов. Поэтому, если $e_i=\sum_{h\in C}\alpha_h h$, то в силу сокращенной формулы бинома Ньютона

$$e_i^*=\sum_{h\in C}\alpha_h h^2=e_i^2=e_i.$$

Легко видеть, что $y^*=\alpha_1^*e_1g_1^{-1}+\dots+\alpha_s^*e_sg_s^{-1}$ и из равенства

$y=y^*$ вытекает $s=1$ и $g_1=1$. Тогда $y^2=y^*=y$ и $y=1$. Поэтому группа $U(KG)$, а также ее подгруппа $U(KC)$ f-унитарны.

Если выполняется одно из условий 4)-6), то группа $U(K\pi(G))$ f-унитарна и все идемпотенты из $K\pi(G)$ центральны в KG. Так как факторгруппа $G/\pi(G)$ правоупорядочена, то из леммы I следует, что группа $U(KG)$ f-унитарна. Теорема доказана.

<u>Теорема 2</u>. Пусть K - поле характеристики $p\geqslant 0$ и f - нетривиальный гомоморфизм группы G в $U(K)$ с ядром A. Если группа $U(KG)$ f-унитарна, то выполняется одно из следующих условий:

I) $G=\langle b\rangle$ - группа порядка 2, $f(b)=-1$ и $p\neq 2$;

2) G - такое полупрямое произведение абелевой группы A без кручения и группы $\langle b\rangle$ 2-го порядка, что $bab=a^{-1}$ для всех $a\in A$, $f(b)=-1$ и $p\neq 2$;

3) G - группа без кручения и поле K содержит более двух элементов.

Если группа G и поле K удовлетворяют одному из указанных условий и кроме того, в пункте 3) группа G правоупорядочена, то группа $U(KG)$ f-унитарна.

<u>Доказательство</u>. Пусть f - нетривиальный гомоморфизм группы G в $U(K)$ с ядром A и группа $U(KG)$ f-унитарна. Тогда подгруппа $U(KA)$ унитарна относительно инволюции, порожденной тривиальным гомоморфизмом. Поэтому группа A и поле K удовлетворяют одному из условий теоремы I и поле K содержит более двух элементов.

Пусть q - простое число и b - элемент порядка q^t из множества $G\setminus A$ и K - поле характеристики $p\geqslant 0$. Докажем, что b - элемент порядка 2.

При нечетном q построим такие обратимые элементы: I) если $p\neq 2$, то $1+b\in U(KG)$; 2) если $p=2$ и $q^t>3$, то $1+b+b^2+\dots+b^{q^t-3}\in U(KG)$; 3) если $p=2$ и $q^t=3$, а элементы α и β поля K не принадлежат простому подполю и $\alpha+\beta+\alpha\beta=0$, то $1+\alpha(b+b^2)\in U(KG)$. Легко видеть, что эти элементы не f-унитарны. Следовательно, $q=2$ и $p\neq 2$. Кроме того, если $C=\langle b\rangle\cap$ $\cap \operatorname{Ker} f\neq 1$, то группа C второго порядка и K - поле из трех элементов.

Пусть $t>1$ и поле K содержит более пяти элементов. Тогда группа $\langle b\rangle$ имеет элемент c 4-го порядка, поле K

обладает элементом α, порядок которого не делит 4 и обратимый элемент $c-\alpha$ не является f-унитарным, а это невозможно.

Пусть $t>1$, c - элемент 4-го порядка из $\langle b\rangle$ и K - поле из трех или пяти элементов. Если $p=3$, то $x=1+2c+c^3\in V(KG)$, $f(c)=2$ и $x^{-1}=2c+c^2+c^3$, а такой элемент не f-унитарен. Если же $p=5$, то элемент $2+3c+3c^2+3c^3$ имеет порядок 2, $f(c)\in\{2,3\}$ и снова построен не f-унитарный элемент. Таким образом, элементы конечного порядка из множества $G\setminus A$ имеют порядок 2 и принадлежат одному смежному классу группы G по подгруппе A.

Предположим, что подгруппа $\langle c\rangle$ 2-го порядка группы G не принадлежит центру группы G. Тогда $u=(1+c)g(1-c)$ - ненулевой нильпотентный элемент для каждого $g\in G$ не перестановочного с c. Так как элемент $1+u$ f-унитарен, то $u+u^f=0$, а отсюда следует

$$g+cg-gc-cgc+f(g)[g^{-1}+f(c)(g^{-1}c-cg^{-1})-cg^{-1}c]=0. \quad (2)$$

Пусть множество $G\setminus A$ обладает элементом c 2-го порядка. Тогда $p\neq 2$, $f(c)=-1$ и централизатор $C_G(c)$ элемента c имеет порядок 2. Действительно, элемент $x=\frac{1}{2}(1-c)a+\frac{1}{2}(1+c)$ обратим для каждого $a\in C_G(c)$. Легко видеть, что элемент x f-унитарен тогда и только тогда, когда $a\in\langle c\rangle$. Предположим, что $C_G(c)\neq G$. Тогда элемент g бесконечного порядка из $G\setminus A$ не удовлетворяет равенству (2) и на основании этого равенства получаем, что $cgc=g^{-1}$ для всех $g\in A$. Следовательно, $G=\langle A,c\rangle$, $cac=a^{-1}$ для всех $a\in A$ и в силу равенства $C_G(c)=\langle c\rangle$ из теоремы I следует, что A - группа без кручения.

Пусть множество $G\setminus A$ обладает только элементами бесконечного порядка. Докажем, что группа A без кручения. Действительно, в противном случае ввиду теоремы I группа обладает элементом A 2-го порядка. Если g - элемент бесконечного порядка группы G и $[c,g]=1$, то соответственно при характеристике $p=2$ и $p\neq 2$ построим такие обратимые элементы $1+g(1+c)$ и $\frac{1}{2}(1+c)+\frac{1}{2}(1-c)g$. Однако эти элементы не являются f-унитарными. Поэтому $[c,g]\neq 1$ и из (2) следует $g^{-1}=cgc$. Тогда равенство (2) противоречиво. Следовательно, группа G без кручения.

Докажем, что полученные условия являются достаточными для f-унитарности группы $U(KG)$, если в условии 3) дополнительно предположить, что группа G правоупорядочена.

Пусть выполняется условие 2). Если $u \in U(KG)$, то $u = x_1 + x_2 b$ $(x_i \in KA)$, $u^f = x_1^* - x_2 b$ и $uu^f = x_1 x_1^* - x_2 x_2^* \in U(KA)$. Так как $(uu^f)^* = uu^f$ и $V(KA) = A$, то $\varepsilon = uu^f \in U(K)$ и группа $U(KG)$ f-унитарна.

Если же группа G правоупорядочена, то по лемме I $V(KG) = G$ и поэтому группа $U(KG)$ f-унитарна. Теорема доказана.

Литература

I. Новиков С. П. Алгебраическое построение и свойства эрмитовых аналогов К-теории над кольцами с инволюцией с точки зрения гамильтонова формализма. Некоторые применения к дифференциальной топологии и теории характеристических классов. II. Изв. АН СССР, сер. матем. 1970, 34, № 3, 475-500.

2. Бовди А. А. Унитарность мультипликативной группы группового кольца над конечным простым полем. В кн.: Абелевы группы и модули. Томск, 1985, II-I9.

3. Бовди А. А. Групповые кольца. Ужгород, 1974.

Поступило
7 У 1986

RÜHMAALGEBRA MULTIPLIKATIIVSE RÜHMA UNITAARSUS

A.Bovdi

Resümee

Olgu G rühm ja K kommutatiivne ühikuga ring. Käesolevas töös vaadeldakse rühmaringi KG 2-järku antiautomorfismi $\sum_{g\in G} \alpha_g g \longmapsto \sum_{g\in G} \alpha_g f(g) g^{-1}$, mille indutseerib rühma G homomorfism f ringi K multiplikatiivsesse rühma $\mathcal{U}(K)$. Rühmaringi KG ühikute rühma $\mathcal{U}(KG)$ elemendid u, mille korral $u^{-1} = \varepsilon u^f$, $\varepsilon \in \mathcal{U}(K)$, moodustavad n.n. f-unitaarse alamrühma $\mathcal{U}_f(KG) \leq \mathcal{U}(KG)$. Huvi selle alamrühma vastu on kerkinud algebralises topoloogias ja K-teoorias (juhul $K = \mathbb{Z}$). Käesolevas töös vaadeldakse küsimust nende rühmade G ja korpuste K kirjeldamisest, mille korral $\mathcal{U}(KG) = \mathcal{U}_f(KG)$. Autor täpsustab siin töös [2] saadud tulemusi.

UNITARITY OF UNIT GROUP OF GROUP ALGEBRA

A.Bovdi

S u m m a r y

Let G be a group and K a commutative ring with identity. In the present paper an antiautomorphism $\sum_{g\in G} x_g g \mapsto \sum_{g\in G} x_g f(g) g^{-1}$ induced by a homomorphism of G into the multiplicative group $\mathcal{U}(K)$ of K is considered. These elements u in the group of units $\mathcal{U}(KG)$ for which $u^{-1} = \varepsilon u^f$, $\varepsilon \in \mathcal{U}(K)$, generate the f-unitary subgroup $\mathcal{U}_f(KG) \leqslant \mathcal{U}(KG)$. Interest in these subgroups has arisen in algebraic topology and in K-theory (in the case $K = \mathbb{Z}$). In the present paper the problem of characterizing groups G and fields K for which $\mathcal{U}(KG) = \mathcal{U}_f(KG)$ is investigated. The author makes here more precise the results obtained by him in [2].

TRÜ Toimetised
764 (1987), 12-22.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 12-22.

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ КОЛЕЦ НОРМИРОВАНИЯ

Е.Гутман
Кружок СНО при кафедре алгебры
и геометрии

1. Постановка задачи. Пусть L - решётка, R - коммутативное кольцо с единицей. Рассмотрим свободный R-модуль с базисом L, который обозначим через $F(L,R)$. Пусть $\mathcal{J}$ - подмодуль $F(L,R)$, порожденный элементами вида

$$x*y = x\vee y + x\wedge y - x - y. \qquad (1)$$

Фактормодуль $V(L,R) = F(L,R)/\mathcal{J}$ называется модулем нормирования.

Пусть теперь M - произвольный R-модуль. Функция

$$\nu : L \to M, \qquad (2)$$

удовлетворяющая соотношению

$$\nu(x\vee y) + \nu(x\wedge y) = \nu(x) + \nu(y),$$

называется нормированием на решётке L со значениями в модуле M. В статье [3] доказана "теорема универсальности" модулей нормирования: если $\hat{\nu}$ - естественное отображение L в $V(L,R)$, то для каждого нормирования (2) существует в точности один гомоморфизм модулей $\tilde{\nu}: V(L,R) \to M$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\hat{\nu}"] \arrow[dr, "\nu"'] & V(L,R) \arrow[d, "\tilde{\nu}"] \\ & M \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Обозначим для каждого $x \in L$ символом $\hat{x}$ образ элемента x при отображении $F(L,R) \to V(L,R)$. В [2] доказано, что из $\hat{x} = \hat{y}$ вытекает $x = y$ тогда и только тогда, когда решётка L дистрибутивна. Поэтому, в случае дистрибутивной решётки мы можем отождествить $\hat{x}$ с x и полагать, что выполнено соотношение $x*y = 0$ для всех $x, y \in L$.

Далее, отображение $e: L \to R$, которое каждому элементу из L ставит в соответствие, является нормированием. Согласно теореме универсальности существует единственный гомоморфизм модулей ε, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "e"'] & V(L,R) \arrow[d, "\varepsilon"] \\ & R \end{tikzcd}$$

коммутативна; ε называется гомоморфизмом пополнения.

Ясно, что любая решётка относительно каждой из операций $\vee$ и $\wedge$ является полугруппой. Это позволяет наделить модуль $F(L,R)$ операцией умножения, превратив его тем самым двумя способами в полугрупповое кольцо. В [3] показано, что если L - дистрибутивная решётка, то J - идеал. Таким образом возникают два кольца $V(L,R,\wedge)$ и $V(L,R,\vee)$ Первое из них называется кольцом нормирования, второе - двойственным кольцом нормирования. Условимся при записи умножения элементов кольца нормирования знак операции $\wedge$ опускать, т.е. вместо $f\wedge g$ писать fg.

Пусть

$$f=\sum_{j=1}^{n} a_j x_j,\ a_j\in R,\ x_j\in L,\ (j=1,\dots,n) \tag{3}$$

элемент кольца $V(L,R)$. Тогда $\varepsilon(f)=\sum_{j=1}^{n} a_j$. Легко проверяется, что

$$f\vee g+fg=\varepsilon(g)f+\varepsilon(f)g. \tag{4}$$

Пусть L_1 и L_2 - дистрибутивные решётки с наибольшими элементами u_1 и u_2 и наименьшими z_1 и z_2 соответственно, R - коммутативная область целостности с единицей. В данной работе исследуется вопрос, при каких условиях кольца нормирования $V(L_1,R)$ и $V(L_2,R)$ будут изоморфны.

Заметим, что из изоморфизма колец нормирования не вытекает изоморфизм самих решёток. Действительно, в [3] вводится оператор $\tau\colon V(L,R)\to V(L,R)$, действующий по правилу $\tau(f)=\varepsilon(f)(u+z)-f$, где u и z соответственно наибольший и наименьший элементы решётки. В этой же работе показано, что отображение τ есть изоморфизм кольца нормирования на двойственное кольцо нормирования. Следовательно, достаточно рассмотреть решётку, которая не изоморфна своей двойственной решётке:

Пусть B_L - наименьшая булева алгебра, содержащая дистрибутивную решётку L, т.е. булева алгебра, порожденная элементами L и их дополнениями.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема. Пусть L_1 и L_2 - дистрибутивные решётки, обладающие наибольшим и наименьшим элементами, а R - коммутативная область целостности с единицей. Кольца нормирования $V(L_1, R)$ и $V(L_2, R)$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны булевы алгебры B_{L_1} и B_{L_2}.

Основные моменты доказательства приведены в [I]. Ниже излагается полное доказательство сформулированной теоремы.

2. Канонический вид элементов модуля нормирования. Будем говорить, что элемент (3), принадлежащий одному из модулей $F(L, R)$ или $V(L, R)$, имеет канонический вид, если $x_1 < \ldots < x_n$. Пусть элемент (3) принадлежит модулю $F(L, R)$. Элементарным преобразованием этого элемента назовём последовательность следующих четырёх операций.

I) выбор элемента $s = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$ (S может быть и нулём);

2) запись элемента (3) в виде

$$f = f + s - s = \sum_{j=1}^{n+2m} c_j z_j , \tag{5}$$

где

$$c_j = \begin{cases} a_j, \text{ при } j \le n, \\ b_j, \text{ при } n < j \le n+m, \\ -b_j, \text{ при } n+m < j \le n+2m, \end{cases} \qquad z_j = \begin{cases} x_j, \text{ при } j \le n, \\ y_{j-n}, \text{ при } n < j \le n+m, \\ y_{j-n-m}, \text{ при } n+m < j \le n+2m; \end{cases}$$

3) выбор p и q, для которых $1 \le p \le n+2m$, $1 \le q \le n+2m$ и придание равенству (5) вида

$$f = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne p,q}}^{n+2m} c_j z_j + c_p z_p + c_q z_q , \tag{6}$$

где преобразуем последний двучлен по правилу

$$c_p z_p + c_q z_q = (c_p - c_q) z_p + c_q (z_p + z_q); \tag{7}$$

4) если z_p и z_q сравнимы (полагаем, что $z_p < z_q$) и найдутся такие $v_1, v_2 \in L$, что $z_p = v_1 \wedge v_2$, $z_q = v_1 \vee v_2$, то сумма $z_p + z_q$ заменяется на $v_1 + v_2$. Если же z_p и z_q несравнимы, то $z_p + z_q$ заменяется на $z_p \vee z_q + z_p \wedge z_q$. Если ни один из этих вариантов не реализуется, то необходимо выбрать другие p и q. В том случае, когда подходящих p и q вообще не существует, следует выбрать другой элемент S. Видоизмененный таким образом двучлен (7) подставляем в (6) и приводим подобные слагаемые. Если нельзя найти элемент

S , при котором можно провести указанные преобразования, то элемент (3) вообще непреобразуем.

Лемма I. $f \equiv g \pmod{J}$ тогда и только тогда, когда от f можно перейти к g при помощи конечной последовательности элементарных преобразований.

Доказательство. Пусть $f \equiv g \pmod{J}$. Тогда $f = g + \sum_{j=1}^{k} a_j x_j' * x_j''$ при некоторых $x_j', x_j'' \in L$, $(j=1,\dots,k)$. Теперь достаточно заметить, что элементы вида (I) одним элементарным преобразованием приводятся к нулю. Для доказательства обратного утверждения заметим, что ни один из шагов I) - 4) элементарного преобразования не выводит из данного смежного класса по J.

Теорема 2. Любой элемент из модуля $F(L,R)$ подходящей последовательностью элементарных преобразований приводится к каноническому виду.

Доказательство. Удобно ввести локальную терминологию, которая вне данного доказательства использоваться не будет. А именно, элемент x множества $X \subseteq L$ назовём инородным, если $X \setminus \{x\}$ - цепь, а само X цепью не является, или же X - цепь, а x - наименьший элемент в ней. Если x - инородный элемент множества X, то индексом инородности пары (X,x) назовём мощность множества $\{y \mid y \in X, x \nleq y\}$. Ясно, что индекс инородности пары (X,x) равен нулю тогда и только тогда, когда X - цепь.

Отметим, что если элемент (3) непреобразуем, то он уже записан в каноническом виде. Действительно, если найдется хотя бы одна пара x_i и x_j несравнимых элементов, то, преобразуя двучлен $a_i x_i + a_j x_j$ по правилу (7), заменим $x_i + x_j$ на $x_i \vee x_j + x_i \wedge x_j$, т.е. к f можно применить элементарное преобразование.

Исходя из этого замечания, достаточно рассмотреть случай, когда элемент (3) преобразуем.

Доказательство теоремы проведём индукцией по n (n определено записью (3)). При $n=1$ доказывать нечего. При $n=2$ имеем $f = a_1 x_1 + a_2 x_2$. Записывая f согласно правилу (7) и преобразуя согласно шагу 3) элементарного преобразования, мы получим требуемый канонический вид; в данном случае $S=0$.

Пусть теорема уже доказана для $n-1$. Тогда имеем запись

$$f = \sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j + a_n x_n \equiv \sum_{j=1}^{m} b_j y_j + a_n x_n \pmod{J},$$

где $y_1 < \dots < y_m$. Если множество $X = \{y_1, \dots, y_m, x_m\}$ —

цепь, то всё доказано. В противном случае x_n - инородный элемент. Не ограничивая общности, можно предположить, что $x_n \leq y_p$ хотя бы для одного p. Действительно, если не так, то, заменяя двучлен $b_m y_m + a_n x$ на трёхчлен $a_n x_n \wedge y_m + (b_m - a_n) y_m + a_n x_n \vee y_m$, мы получим линейную комбинацию множества $X' = \{y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m, y_m \vee x_n, y_m \wedge x_n\}$, где $y_m \wedge x_n$ - инородный элемент множества X' и $y_m \wedge x_n \leq y_m$. Пусть p - минимальный номер, для которого $x_n \leq y_p$. Тогда индекс инородности пары (X, x_n) равен $p-1$. Переходя от двучлена $b_{p-1} y_{p-1} + a_n x_n$ к трёхчлену $a_n y_{p-1} \wedge x_n + (b_{p-1} - a_n) y_{p-1} + a_n y_{p-1} \vee x_n$, получим линейную комбинацию от нового множества

$$X'' = \{y_1, \ldots, y_{p-2}, y_{p-1}, y_p \vee x_n, y_p, \ldots, y_n, y_{p-1} \wedge x_n\}.$$

Если X'' - цепь, то всё доказано, если нет, то $X'' \setminus \{y_{p-1} \wedge x_n\}$ цепь и, значит $y_{p-1} \wedge x_n$ - инородный элемент, причём индекс инородности пары $(X'', y_{p-1} \wedge x_n)$ не превышает $p-2$. Двигаясь таким образом дальше мы будем уменьшать индекс инородности и, в конце концов, он станет равным нулю, т.е. f будет приведен к каноническому виду. Теорема доказана.

Из теоремы 2 немедленно вытекает

Следствие. Любой элемент модуля нормирования может быть записан в каноническом виде.

3. Факторкольцо $V(L,R)/(z)$. Пусть (z) - идеал в $V(L,R)$, порожденный наименьшим элементом z решётки L. Для любого $f \in V(L,R)$ имеем $fz = \mathcal{E}(f) z \in (z)$, откуда $(z) \subseteq Rz$. Обратное включение очевидно. Следовательно, $(z) = Rz$.

Пусть S - некоторое множество, для которого существует мономорфизм $\tilde{\varphi}$ решётки L в решётку 2^S такой, что $\tilde{\varphi}(z) = \varnothing$. Рассмотрим кольцо всевозможных функций $\alpha : S \to R$ с "поточечными" сложением и умножением:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)(s) = \alpha_1(s) + \alpha_2(s),$$

$$(\alpha_1 \alpha_2)(s) = \alpha_1(s) \alpha_2(s).$$

Носителем функции α называется множество $\mathrm{Supp}\, \alpha = \{s \mid s \in S, \alpha(s) \neq 0\}$.

Сопоставление каждому элементу x решётки L функции α_x по правилу

$$\alpha_x(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in \tilde{\varphi}(x) \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

приводит к подкольцу L_R, порожденному множеством $\{\alpha_x \mid x \in L\}$.

Теорема 3. Если R - целостное кольцо с единицей, то кольца L_R и $V(L,R)/(z)$ изоморфны.

Доказательство. Пусть φ - отображение из L в L_R, для которого $\varphi(x)=\alpha_x$. Легко проверить, что φ - нормирование. По теореме универсальности существует единственный гомоморфизм δ аддитивной группы кольца $V(L,R)$ в аддитивную группу кольца L_R, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\nu"'] \arrow[dr, "\varphi"'] & V(L,R) \arrow[d, "\delta"] \\
 & L_R
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Из $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$ следует, что δ сохраняет и операцию умножения, т.е. является гомоморфизмом колец. Далее, из определении L_R и φ вытекает, что δ сюрьективно. Ясно также, что отображение φ переводит z в нулевую функцию. Поэтому $(z)\subseteq \operatorname{Ker}\delta$. Покажем обратное включение. Пусть элемент (3), записанный в каноническом виде, принадлежит $\operatorname{Ker}\delta$. Тогда $\delta(f)=\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_{x_j}=0$. Так как $x_1<\ldots<x_n$, то $\operatorname{Supp}\alpha_{x_1}=\tilde{\varphi}(x_1)\subset\ldots\subset \operatorname{Supp}\alpha_{x_n}=\tilde{\varphi}(x_n)$. Если $x_1\neq z$, то $\alpha_{x_1}\neq 0$, следовательно, $\alpha_{x_1},\ldots,\alpha_{x_n}$ - линейно независимы, откуда $a_1=\ldots=a_n=0$, т.е. $f=0$. Если $x_1=z$, то $\delta(f)=\sum_{j=2}^{n} a_j\alpha_{x_j}$ и, по аналогичным соображениям $a_2=\ldots=a_n=0$, т.е. $f=a_1 z$. В обоих случаях $f\in Rz=(z)$. Теорема доказана.

Из этой теоремы немедленно вытекает

Следствие. Если для некоторого f одновременно $\varepsilon(f)=0$ и $\delta(f)=0$, то $f=0$.

4. Критерий изоморфизма. Начнём с доказательства следующих трёх лемм.

Лемма 4. Пусть

$$\xi: V(L,R)\to R$$

ненулевая функция и пусть существует такой неравный нулю $g\in V(L,R)$, что при любом $f\in V(L,R)$ справедливо соотношение

$$gf=\xi(f)g. \tag{8}$$

Тогда $\xi(f)=\varepsilon(f)$.

Доказательство. Имеем

$$\varepsilon(g)z=gz=\xi(z)g \tag{9}$$

откуда $\varepsilon(\varepsilon(g)z)=\varepsilon(\xi(z)g)$ или $\varepsilon(g)=\xi(z)\varepsilon(g)$.

Следовательно, $\xi(z)=1$. Подставляя это в (9), получим $g=\varepsilon(g)z$. Таким образом, имеем

$$gf=\varepsilon(g)zf=\varepsilon(g)\varepsilon(f)z. \tag{10}$$

Учитывая (8), получаем

$$gf=\xi(f)g=\xi(f)\varepsilon(g)z. \tag{11}$$

Сравнивая правые части (10) и (11), придем к требуемому результату.

Лемма 5. Пусть L_1 и L_2 - дистрибутивные решётки, $\sigma: V(L_1,R)\to V(L_2,R)$ - изоморфизм колец нормирования, ε_1 и ε_2 - гомоморфизмы пополнения колец $V(L_1,R)$ и $V(L_2,R)$ соответственно. Тогда $\varepsilon_1(f)=\varepsilon_2(\sigma(f))$ для любого $f\in V(L_1,R)$.

Доказательство. Пусть f' - образ элемента f при отображении σ. Покажем, что $\varepsilon_1(f)=\varepsilon_2(f')$. Пусть $\xi: V(L_2,R)\to R$ - функция, определенная правилом $\xi(f')=\varepsilon_1(f)$. Тогда

$$f'\sigma(z)=\sigma(fz)=\sigma(\varepsilon_1(f)z)=\varepsilon_1(f)\sigma(z)=$$
$$=\xi(f')\sigma(z).$$

По лемме 4 $\xi(f')=\varepsilon_2(f')$, что и требовалось доказать.

Пусть f - идемпотент в $V(L,R)$. Тогда либо $\varepsilon(f)=1$, либо $\varepsilon(f)=0$. Идемпотент f кольца нормирования назовём унитарным, если $\varepsilon(f)=1$.

Лемма 6. Относительно операций $\vee$ и $\wedge$ множество унитарных идемпотентов кольца нормирования образует решётку.

Доказательство. Коммутативность и ассоциативность операций $\vee$ и $\wedge$ на множестве унитарных идемпотентов вытекает из коммутативности и ассоциативности этих операций на всём кольце нормирования. Идемпотентность операции $\wedge$ вытекает из условия леммы. Идемпотентность $\vee$ вытекает из соотношения (4) и определения унитарного идемпотента. Остается проверить законы поглощения:

$$f\vee(g\wedge f)=-f\wedge g\wedge f+\varepsilon(g\wedge f)f+\varepsilon(f)g\wedge f=f.$$

Аналогично проверяется, что $f\wedge(g\vee f)=f$.

Лемма доказана.

Таким образом можно говорить о решётке унитарных идемпотентов.

Теорема 7. (Критерий изоморфизма). Пусть R - коммутативное целостное кольцо с единицей, L_1 и L_2 - дистрибутивные решётки с наименьшими элементами, z_2 - наименьший элемент решётки L_2. Тогда кольца нормирования $V(L_1,R)$ и $V(L_2,R)$ изоморфны в том и только том случае, когда изоморфны их решётки унитарных идемпотентов.

Доказательство. Необходимость. В силу леммы 5 образом унитарного идемпотента является унитарный идемпотент. Поэтому, изоморфизм колец $V(L_1, R)$ и $V(L_2, R)$ индуцирует биекцию решёток унитарных идемпотентов, при которой операции $\wedge$ и $\vee$ сохраняются: первая – по определению изоморфизма, вторая – в силу равенства (4). В самом деле, если изоморфизм колец обозначить через σ, то

$$\sigma(f\vee g)=\sigma(-f\wedge g+\varepsilon_1(g)f+\varepsilon_1(f)g)=$$
$$=-\sigma(f)\wedge\sigma(g)+\varepsilon_2(\sigma(g))\sigma(f)+\varepsilon_2(\sigma(f))\sigma(g)=$$
$$=\sigma(f)\vee\sigma(g).$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть решётки унитарных идемпотентов колец $V(L_1, R)$ и $V(L_2, R)$ изоморфны. Так как элементы L_1 и L_2 также являются унитарными идемпотентами, то этот изоморфизм продолжается до гомоморфизма ψ колец нормирования $V(L_1, R)$ и $V(L_2, R)$. Покажем, что $\operatorname{Ker}\psi=0$. Действительно, пусть элемент (3), записанный в каноническом виде отображается в ноль. Тогда

$$\psi(f)=\sum_{j=1}^{n}a_j\psi(x_j)=0. \tag{12}$$

При этом $\psi(x_j)$ – унитарные идемпотенты. Применим к (12) отображение δ:

$$\delta(\psi(f))=\sum_{j=1}^{n}a_j\delta(\psi(x_j))=0. \tag{13}$$

Легко проверить, что $\delta(\psi(x_j))\neq\delta(\psi(x_i))$ при $j\neq i$. Действительно, если предположить обратное, то $\delta(\psi(x_j))-\delta(\psi(x_i))=0$ и $\varepsilon_2(\psi(x_j)-\psi(x_i))=0$. По следствию из теоремы 3, $\psi(x_j)=\psi(x_i)$, а это противоречит тому, что ψ – изоморфизм решёток унитарных идемпотентов. Так как $x_i x_j=x_i$ при $i<j$, то $\delta(\psi(x_i))\delta(\psi(x_j))=\delta(\psi(x_i))$ при $i<j$. Это, в свою очередь, означает, что

$$\operatorname{Supp}\delta(\psi(x_i))\subset\operatorname{Supp}\delta(\psi(x_j)).$$

Если $\psi(x_1)\neq z_2$, то $\delta(\psi(x_1))\neq 0$ и, значит, $\delta(\psi(x_1)), \ldots, \delta(\psi(x_n))$ линейно независимы, следовательно, $a_1=\ldots=a_n=0$. Если же $\psi(x_1)=z_2$, то $\delta(\psi(x_1))=0$ и, так как $\delta(\psi(x_2)),\ldots,\delta(\psi(x_n))$ – линейно независимы, то $a_2=\ldots=a_n=0$, откуда следует, что $f=a_1 z$. В силу равенства (12) a_1 также равно нулю, т.е. $f=0$

Теорема доказана.

5. Строение решёток унитарных идемпотентов.

Теорема 8. Пусть B - булева алгебра, R - коммутативная область целостности с единицей. Тогда множество унитарных идемпотентов кольца нормирования $V(B,R)$ совпадает с B.

Доказательство. Пусть (3) - унитарный идемпотент, записанный в каноническом виде. Тогда

$$f=f^2=\sum_{j=1}^{n-1}(a_j^2+2a_j\sum_{k=j+1}^{n}a_k)x_j+a_n^2x_n. \qquad (14)$$

Сравнивая правые части (3) и (14), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_n^2=a_n \\ a_j^2+2a_j\sum_{k=j+1}^{n}a_k=a_j, \quad j=1,\dots,n-1. \end{cases}$$

Покажем, что $a_j=(-1)^{n-j}$. Действительно, при $j=n$ $a_n^2=a_n$, откуда $a_n=1=(-1)^{n-n}$. Пусть $a_s=(-1)^{n-s}$ при $s>j$. Тогда

$$a_j^2+2a_j\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{n-k}=a_j.$$

Если $n-j$ - чётно, то $\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{n-k}=0$ и, значит, $a_j^2=a_j$, откуда $a_j=1$. Если же $n-j$ - нечётно, то $\sum_{k=j+1}^{n}(-1)^{n-k}=1$, т.е. $a_j^2=-a_j$, откуда $a_j=-1$. Таким образом,

$$f=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}x_j.$$

Рассмотрим последовательность (f_k), $k=1,\dots,n$, где

$$f_k=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}x_j.$$

Имеем

$$\delta(f_n)=\delta(x_n),$$
$$\delta(f_{n-1})=\delta(x_n\wedge x_{n-1}'),$$
$$\delta(f_{n-2})=\delta(x_n\wedge x_{n-1}'\vee x_{n-2})$$
$$\delta(f_{n-3})=\delta(x_n\wedge x_{n-1}'\vee x_{n-2}\wedge x_{n-3}')$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

и т.д. В конечном итоге, мы находим такой элемент $x\in B$, что $\delta(x)=\delta(f_1)=\delta(f)$, или $\delta(f-x)=0$. Так как x - унитарный идемпотент, то $\varepsilon(f-x)=0$. По следствию из теоремы 3, $f=x$.

Теорема доказана.

Из доказанного результата и теоремы 7 немедленно вытекает

Теорема 9. Пусть B_1 и B_2 - булевы алгебры, R - коммутативная область целостности с единицей. Тогда кольца нормирования $V(B_1, R)$ и $V(B_2, R)$ изоморфны в том и только том случае, когда изоморфны булевы алгебры B_1 и B_2.

Перейдем к случаю произвольной дистрибутивной решётки.

Теорема 10. Если R - коммутативная область целостности с единицей, то решётка унитарных идемпотентов кольца нормирования $V(L, R)$ дистрибутивной решетки L с наибольшим и наименьшим элементами изоморфна булевой алгебре B_L.

Доказательство. Ясно, что $\tau(L)$ - подмножество в решётке унитарных идемпотентов. В[3] показано, что множество, порожденное подмножеством $L \cup \tau(L)$ при помощи операций $\vee$ и $\wedge$ есть булева алгебра. Там же показано, что $\tau(x)$ является дополнением к x. Поэтому эта булева алгебра изоморфна B_L.

Остается предположить, что существует унитарный идемпотент, лежащий вне этой булевой алгебры и привести это предположение к противоречию, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 8.

Таким образом, из теорем 7 и 10 вытекает основной результат, который был сформулирован в начале статьи.

Литература

1. Гутман Е., Об изоморфизме колец нормирования. Тезисы конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики" I, Тарту, 1985, 51-53.
2. Geissinger, L., Valuations on distributive lattices I. Archiv Math., 1973, 24, 230-239.
3. Ellerman, D. P., Rota, G.-C., A Measure Theoretic Approach to Logical Quantification. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 1978, 59, 229-246.

Поступило

12 IV 1986

NORMEERIMISRINGIDE ISOMORFISMIST

J.Gutman

Resümee

Käesolevas artiklis uuritakse normeerimisringide isomorfismi. Kommutatiivse nulliteguriteta ringi R jaoks tõestatakse, et normeerimisringid $V(L_1,R)$ ja $V(L_2,R)$ on isomorfsed siis ja ainult siis, kui on isomorfsed vähimad Boole'i algebrad, mis sisaldavad vastavalt võresid L_1 ja L_2.

ON ISOMORPHISM OF VALUATION RINGS

J.Gutman

S u m m a r y

In this paper the isomorphism problem of valuation rings is investigated. It is proved for the case of integral domain R that the valuation rings $V(L_1,R)$ and $V(L_2,R)$ are isomorphic iff the least Boolean algebras containing L_1 and L_2 respectively are isomorphic.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 23-29.

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1987, 764, 23-29.

PRIME RADICAL OF NEAR-RINGS

K.Kaarli and T.Kriis
Chair of algebra and geometry

An example showing that the prime radical of near-rings is not Kurosh-Amitsur is constructed.

1. Remarks concerning the definition of prime radical. We accept the terminology and notation of Pilz [2]. The only difference is that our near-rings satisfy the left distributive law $x(y+z)=xy+xz$ not the right one as in [2]. Futhermore, our near-rings are 0-symmetric, i.e. they satisfy the identity $0x=0$, too.

The prime radical (or the lower nil radical) of near-rings has been an object of study of a considerable number of mathematicians since 1964 (see [3,5,6,8]). To define it one certainly has to multiply ideals. However, different authors multiply ideals in different ways so it is not clear a priori if they get the same result. We wish to clear up this confusion proving so that Van der Walt [5], Ramakotaiah [3] and Polin [8] really consider the same radical.

Let I and J be ideals of a near-ring N. Then in [2,3,7] the product of I and J is defined simply as a set

$$IJ=\{xy \mid x\in I,\ y\in J\}.$$

However, for Polin [8] this product is $I\circ J$ - right N-subgroup generated by IJ and for Van der Walt [5] it is $I*J$ - the ideal generated by IJ ($I*J$ is our notation, Van der Walt writes instead of it simply IJ). It shold be pointed out that the last two multiplications are nonassociative, in general, and so it is rather difficult to handle them.

There are two main possibilities for defining the prime radical: one via prime ideals and another via nilpotent ideals. We show that both of them do not depend on the choice of multiplication of ideals.

Definition 1.1. A near-ring N is called prime if the product of any two non-zero ideals of N is non-zero. An ideal I of N is called prime if so is N/I.

Since obviously

$$IJ = 0 \iff [I \circ J] = 0 \iff I * J = 0,$$

the notion of prime ideal does not depend on the type of multiplication of ideals.

Definition 1.2. An ideal I of a near-ring is called nilpotent if there is a natural number n such that the n-th power of I is zero.

Clearly different multiplications of ideals yield different notions of the n-th power of ideal:

$$I^n = \{x_1 \dots x_n \mid x_i \in I\},$$
$$I^{o(1)} = I, \quad I^{o(n)} = I \circ I^{o(n-1)},$$
$$I^{*(1)} = I, \quad I^{*(n)} = I * I^{*(n-1)}.$$

Nevertheless, the notion of nilpotent ideal is the same for all three multiplications.

Proposition 1.1. For any ideal I of a near-ring N,

$$I^n = 0 \iff I^{o(n)} = 0 \iff I^{*(n)} = 0.$$

Proof. The only non-trivial implication is

$$I^n = 0 \implies I^{*(n)} = 0. \tag{1}$$

Obviously (1) is true for $n = 2$ so we proceed by induction. Suppose that (1) is true if $n = k-1$ (for any ideal of any near-ring) and let $I^k = 0$. Furthermore, let $f: N \to N/J$ be the natural homomorphism where $J = (0 : I)_N$. Then $I^{k-1} \subseteq J$ implying $(f(I))^{k-1} = 0$. Hence by induction hypothesis $(f(I))^{*(k-1)} = 0$. Since obviously $f(I^{*(k-1)}) \subseteq (f(I))^{*(k-1)}$, we have $I^{*(k-1)} \subseteq J$ meaning that $I I^{*(k-1)} = 0$. But then $I^{*(k)} = 0$, too.

Definition 1.3. The intersection of all prime ideals of a near-ring N is called the prime radical of N and denoted by $\mathcal{P}(N)$.

Definition 1.4. A near-ring N is said to be semiprime if it satisfies one of the two following equivalent conditions ([2], 2.104):

1) N does not contain non-zero nilpotent ideals;
2) N does not contain non-zero ideals I with $I^2 = 0$.

An ideal I of a near-ring N is called semiprime if so is N/I.

The following result is due to Van der Walt ([5], Theorems 8 and 9) but for distributively generated near-rings it was obtained independently by Gojan [6].

Theorem 1.1. The prime radical of a near-ring N is a semiprime ideal of N which is contained in any semiprime ideal of N.

An easy consequence of this theorem is that $\mathcal{P}(N)$ can be built up by the following transfinite process:
$\mathcal{P}_0 = 0$, if α is not a limit ordinal then $\mathcal{P}_\alpha / \mathcal{P}_{\alpha-1}$ is the sum of all nilpotent ideals of $N/\mathcal{P}_{\alpha-1}$ and if α is a limit ordinal then $\mathcal{P}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}_\beta$.

Obviously the ascending chain $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}_\alpha \subseteq \cdots$ must terminate and its largest member is just $\mathcal{P}(N)$ (see [8], Theorem 6.5).

2. The prime radical of near-rings from the point of view of general radical theory. It is well known [2] that the prime radical of near-rings is a Hoehnke radical (sometimes also called a radical map). This means that it satisfies the following two conditions

R1. $f(\mathcal{P}(N)) \subseteq \mathcal{P}(f(N))$ for any homomorphism f of near-rings;

R2. $\mathcal{P}(N/\mathcal{P}(N)) = 0$ for any near-ring N .

Also we know that the prime radical of associative rings is a Kurosh-Amitsur radical. Hence it is natural to ask if the same holds for near-rings. To solve this problem affirmatively one should prove that $\mathcal{P}$ satisfies two more conditions [1,7]:

R3. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(N)) = \mathcal{P}(N)$ for any near-ring N ;

R4. $I \lhd N$, $\mathcal{P}(I) = I \Rightarrow I \subseteq \mathcal{P}(N)$.

Here we show that R3 is really satified, in fact we even prove a stronger condition

R3'. $I \lhd N \Rightarrow \mathcal{P}(I) \supseteq I \cap \mathcal{P}(N)$.

However, as we shall see in the next section, the condition R4 does not hold in general (it holds for distributively generated N [7]) so the prime radical of near-rings is not Kurosh-Amitsur. Again, in fact our result is a little stronger. We show that the class $\{N \mid \mathcal{P}(N) = N\}$ is not closed under extensions and therefore it is not a radical class in the sense of Kurosh-Amitsur. In particular it follows from our results that Theorem 5 and Corollary 6 from [4] do not hold.

In the case of associative rings the prime radical is the Kurosh-Amitsur radical generated by all nilpotent rings, i.e. it is the least Kurosh-Amitsur radical for which all nilpotent rings are radical. In view of our results this fact does not carry over to near-rings. Therefore we raise a

<u>Problem</u>. Describe the Kurosh-Amitsur radical class of near-rings generated by all nilpotent near-rings (or equivalently, by all near-rings with zero multiplication).

<u>Proposition 2.1</u>. If N is a near-ring and $I \lhd N$ then

$$I \cap \mathcal{P}(N) \subseteq \mathcal{P}(I).$$

<u>Proof</u>. Obviously $I \cap \mathcal{P}_0(N) \subseteq \mathcal{P}_0(I)$. Suppose that $I \cap \mathcal{P}_\lambda(N) \subseteq \mathcal{P}_\lambda(I)$ for any ordinal λ less than μ and prove that $I \cap \mathcal{P}_\mu(N) \subseteq \mathcal{P}_\mu(I)$. If μ is a limit ordinal then

$$I \cap \mathcal{P}_\mu(N) = I \cap (\bigcup_{\lambda<\mu} \mathcal{P}_\lambda(N)) = \bigcup_{\lambda<\mu} (I \cap \mathcal{P}_\lambda(N)) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcup_{\lambda<\mu} \mathcal{P}_\lambda(I) = \mathcal{P}_\mu(I).$$

Let now μ be a non-limit ordinal and take an arbitrary $x \in I \cap \mathcal{P}_\mu(N)$. Since $x \in \mathcal{P}_\mu(N)$, there exists an ideal $J \lhd N$ such that $x \in J$ and J is nilpotent modulo $\mathcal{P}_{\mu-1}(N)$. Taking now $K = I \cap J$ we have, for suitable n, $K^n \subseteq I \cap \mathcal{P}_{\mu-1}(N) \subseteq \mathcal{P}_{\mu-1}(I)$. Hence $K \subseteq \mathcal{P}_\mu(I)$ and in view of $x \in K$ we are done.

3. <u>The prime radical of near-rings is not Kurosh-Amitsur</u>. In this section we construct a prime near-ring N containing a non-zero ideal I such that $\mathcal{P}(I) = I$. Hence N does not satisfy R4. Moreover, N/I is nilpotent implying that the class of $\mathcal{P}$-radical near-rings is not closed under extensions.

Let B be a direct sum of the countable number of copies of $\mathbb{Z}_2$ and let $S_0(B)$ be the near-ring of all zero preserving transformations on B. Obviously B can be considered as a vector space over $\mathbb{Z}_2$ with basis e_i, $i \in \omega = \{1, 2, \cdots\}$. For any $i \in \omega$ denote

$$a_i = e_{3i-2}, \quad b_i = e_{3i-1}, \quad c_i = e_{3i}.$$

Also denote by A the subgroup of B generated by all a_i, b_i, $i \in \omega$ and let B_i, $i \in \omega$ stand for the subgroup of B generated by a_j, b_j, c_j, $1 \le j \le i$. It is obvious that $B = \bigcup_{i\in\omega} B_i$.

Now we start the construction of the near-ring N. For any $i \geq 2$ and $y \in B_{i-1}$ we define the transformation $\tilde{y}^i$ of B as follows:

$$x\tilde{y}^i = \begin{cases} y & \text{if } x - c_i \in B_{i-1} \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \tag{2}$$

Let I be the subnear-ring of $S_0(B)$ generated by all $\tilde{y}^i$, $i \geq 2$, $y \in B_{i-1}$. In fact any element of I can be represented as a sum

$$\tilde{y}_1^{2} + \tilde{y}_2^{3} + \dots + \tilde{y}_{s-1}^{s} \tag{3}$$

for suitable $s \in \omega$ and $y_i \in B_i$. Indeed, obviously the set of all elements of form (3) is an additive subgroup of $S_0(B)$ and one can easily verify the following multiplication rule:

$$(\tilde{y}_1^{2} + \tilde{y}_2^{3} + \dots + \tilde{y}_{s-1}^{s})\tilde{y}^j = \sum_k \tilde{y}^k$$

where $y_{k-1} - c_j \in B_{j-1}$ and $1 \leq k \leq s-1$.

Furthermore, for any $i \in \omega$ we define the transformation m^i as follows:

$$x m^i = \begin{cases} a_i & \text{if } x = b_i \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Denote by M the subnear-ring of $S_0(B)$ generated by all m^i, $i \in \omega$. Obviously any element of M can be written as

$$\varepsilon_1 m^1 + \dots + \varepsilon_s m^s$$

for suitable $s \in \omega$ and $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.

We take for the near-ring N the subnear-ring in $S_0(B)$ generated by I and M and this completes our construction. Let us make several observations in order to see that N is a counter-example we are looking for.

(i) The near-ring N is a direct sum of the ideal I and the right ideal M. Obviously $I \cap M = 0$. Since the subsets $\{x \in B \mid xI \neq 0\}$ and $\{x \in B \mid xM \neq 0\}$ are disjoint, $IM \subseteq I$ and $AI = 0$, we get

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1)x_2 &= x_1x_2 + y_1x_2 = x_1x_2 \in I, \\ (x_1 + y_1)y_2 &= x_1y_2 + y_1y_2 \in I + M \end{aligned} \tag{4}$$

for any $x_1, x_2 \in I$, $y_1, y_2 \in M$. Hence $I + M$ is closed under multiplication which implies $I + M = N$. Moreover, from (4) we conclude that both I and M are right ideals of N. Since $MI = 0$, I is an ideal of N.

(ii) I is a sum of its nilpotent ideals, so it is a $\mathcal{P}$-radical ideal of N. From (2) it follows that $B_i \triangleleft_I B$, $i \in \omega$. Then $I_i = (B_i : B)_I$ are ideals of I Since $B_i I^{i-1} = 0$, the ideals I_i are nilpotent. At last, $I = \bigcup_{i \in \omega} I_i$ because $\tilde{y}^{i+1} \in I_i$ for all $y \in B_i$.

(iii) $M^2 = 0$ and therefore $N^2 \subseteq I$. This is obvious.

(iv) Any non-zero ideal $J \lhd N$ has a non-zero intersection with I. Since $BI = B$, $B(IJ) = BJ \neq 0$. Thus $I \cap J$ contains the non-zero subset IJ.

(v) Any non-zero ideal $J \lhd N$ contains all elements $\tilde{a}_{i-1}^{\,i}$ for sufficiently large i. By (iv) J contains an element $0 \neq x \in I$. Let $x = \tilde{y}_1^{\,2} + \dots + \tilde{y}_{s-1}^{\,s}$, $y_{s-1} \neq 0$. Now for any $i > s$ we have $\tilde{c}_s^{\,i} x = \tilde{c}_s^{\,i} \tilde{y}_{s-1}^{\,s} = \tilde{y}_{s-1}^{\,i} \in J$ because $J \lhd N$ and by the same reason

$$z = \tilde{b}_{i-1}^{\,i} m^{i-1} - (\tilde{y}_{s-1}^{\,i} + \tilde{b}_{i-1}^{\,i}) m^{i-1} \in J.$$

Obviously $bz \neq 0$ can occur only for $b - c_i \in B_{i-1}$. Hence to prove $z = \tilde{a}_{i-1}^{\,i}$ we have only to show that $c_i z = a_{i-1}$. Since $c_i(\tilde{b}_{i-1}^{\,i} m^{i-1}) = b_{i-1} m^{i-1} = a_{i-1}$, we have to prove that $(\tilde{y}_{s-1}^{\,i} + \tilde{b}_{i-1}^{\,i}) m^{i-1} = 0$ which is equivalent to $c_i(\tilde{y}_{s-1}^{\,i} + \tilde{b}_{i-1}^{\,i}) \neq b_{i-1}$. But $c_i(\tilde{y}_{s-1}^{\,i} + \tilde{b}_{i-1}^{\,i}) = y_{s-1} + b_{i-1} \neq b_{i-1}$ because $y_{s-1} \neq 0$.

(vi) Any non-zero ideal $J \lhd N$ contains all elements $\tilde{c}_{i-2}^{\,i}$ for sufficiently large i. By computations similar to those in (v) one can show that

$$\tilde{c}_{i-2}^{\,i} = \tilde{c}_{i-1}^{\,i} \tilde{c}_{i-2}^{\,i-1} - (\tilde{a}_{i-1}^{\,i} + c_{i-1}^{\,i}) \tilde{c}_{i-2}^{\,i-1} \in J$$

provided $\tilde{a}_{i-1}^{\,i} \in J$.

(vii) N is a prime near-ring. Take two non-zero ideals J and K in N. By (vi) we have, for sufficiently large i, $\tilde{c}_{i-2}^{\,i} \in J$ and $\tilde{c}_{i-4}^{\,i-2} \in K$. Then

$$0 \neq \tilde{c}_{i-4}^{\,i} = \tilde{c}_{i-2}^{\,i} c_{i-4}^{\,i-2} \in JK$$

and therefore $JK \neq 0$.

References

1. M l i t z, R., Radicals and semisimple classes of Ω-groups. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1980, 23, 37-41.
2. P i l z, G., Near-rings. North-Holland Publishing Company, 1983.
3. R a m a k o t a i a h, D., Radicals for near-rings. Math. Z., 1967, 96, 45-56.
4. S a x e n a, P. K., and B h a n d h a r i M. C., General radical theory for near-rings, Tamkang J. Math., 1981, 12, 91-97.
5. V a n d e r W a l t, A. P. J., Prime ideals and nil radicals of near-rings. Arch. Math., 1964, 15, 408-414.

6. Г о я н И. М., Радикал Бэра для почти-колец. Изв. Акад. наук Молдавской ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук, 1966, № 4, 32-38.
7. К а а р л и К., Специальные радикалы почти-колец. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 610, 53-68.
8. П о л и н С. В., Радикалы в $m\Omega$-почти-кольцах I. Изв. вузов. Матем., 1972, № 1, 64-75.

Received
15. I 1986

RINGOIDIDE ALGRADIKAAL

K.Kaarli ja T.Kriis

R e s ü m e

Tõestatakse, et ringoididide algradikaal (ehk alumine nilradikaal) ei ole radikaal Kuroš-Amitsuri mõttes. Selleks konstrueeritakse algringoid, mis sisaldab oma algradikaaliga ühtivat nullist erinevat ideaali.

ПЕРВИЧНЫЙ РАДИКАЛ ПОЧТИ-КОЛЕЦ

К.Каарли и Т.Крийс

Р е з ю м е

Доказывается, что первичный радикал (т.е. нижний нильрадикал) почти-колец не является радикалом в смысле Куроша-Амицура. Для этого строится первичное почти-кольцо, содержащее ненулевой идеал, совпадающий со своим первичным радикалом.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 30-38.

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1987, 764, 30-38.

SOME REMARKS ON SHEVRIN'S PROBLEM

U.Kaljulaid
Chair of algebra and geometry

1. Preliminary remarks

Let us begin with recalling some notions.

A semigroup S with zero is said to be nilpotent if there exists $n \in \mathbb{N}$ such that all products with n and more factors in S are zero. The least among such n is called the class of nilpotent semigroup S. A semigroup S is said to be nil if for any element x in S there exists such a number $n(x) \in \mathbb{N}$ that $x^{n(x)} = 0$; the least among such numbers $n(x)$ is called nilpotence index of x.

Clearly, all subsemigroups of a nilpotent semigroup are also nilpotent. But the same is not obvious for subsemigroups of a nil semigroup. A nonnilpotent semigroup with all its proper subsemigroups nilpotent will be called critical. In [2] it is shown that among non-nil semigroups there are only few critical ones. But even now the question about the existence of critical nil semigroups remains open. This question was posed by L.Shevrin [2] and he answered it negatively for commutative nil semigroups.

It is quite essential to look for noncommutative generalizations of these results of Shevrin. From the known facts about nil ideals in [4] we obtain quite easily

Theorem A. Critical nilsemigroups cannot be finitely generated.

To give further results we need some more definitions.

A semigroup S is said to be left duo if for all u, $v \in S$ there exists $v' \in S$ such that $uv = v'u$. If, in addition, there exists $u' \in S$ with $uv = vu'$ then S is called duo semigroup. A semigroup is said to be left subduo (subnilpotent) if all its proper subsemigroups are left duo (nilpotent). Examples of such semigroups can be found in [3].

R.Miljan in her diploma work (Tartu, 1973) answered the Shevrin's question for locally duo semigroups. The announcement [1] shows a permanent interest in the line of reasoning mentioned above. So we present here a negative answer to Shevrin's question for left subduo nil semigroups. As noticed already, for the nilpotency of a semigroup S it is clearly necessary for S to be subnilpotent. Our result is that the subnilpotency of a left subduo nil semigroup S is also sufficient for S to be nilpotent.

Theorem B. Every subnilpotent left subduo nil semigroup is nilpotent.

From this theorem the non-existence of commutative critical nil semigroups follows immediately. However, the proof of our Theorem B is nothing more than a noncommutative version of Shevrin's original argument in [2]. The interaction of Theorem A with results in [1] and [3] shows, of course, a close interconnection of our result with those of Miljan and Katzman. Unfortunately, there exist no published versions of these cited results, and so we prefer to give an independent presentation of this theme.

2. About the number of generators of critical nil semigroups

Let us suppose there exists a critical nil semigroup S.

It appears that to solve Shevrin's problem it is convenient to consider separately the following two a priori possible cases:

(a) S is not finitely generated,

and

(b) S has a finite system of generators.

Our aim in this section is to show that (b) is not actually possible, i.e. to prove Theorem A.

Proof of Theorem A. Assume on the contrary that there exists a critical nil semigroup S generated by $a_1, \dots, a_n$. Then, Lemma VIII 4.1 in [4] says that there exist $b_j \in S$, $j = 1, 2, \dots, r$, all having some fixed $a_m \in \{a_1, \dots, a_n\}$ as their common right factor and such that the subsemigroup $T = \langle b_1, \dots, b_r \rangle$ is not nilpotent. Since S is critical, it follows that $T = S$.

For any subset $H \subseteq S$ let $Ann H = \{z \in S \mid \forall x \in H, xz = 0\}$. It is clear that $Ann S \subseteq Ann T$. For S critical it appears that $Ann\, S \neq Ann\, T$.

Denote by h the nilpotence index of a_m and let $h > 2$. Then $a_m^{h-1} \neq 0$ and so $a_m^{n-2} \notin Ann\, S$. Also, every element of T is a finite product of $b_j = b_j' a_m$, $j \in \{1, \dots, r\}$, and so $a_m^{h-1} \in Ann\, T$. Let us suppose now that $a_m^{h-1} \in Ann\, S$. Then it follows $b_j a_m^{h-2} = b_j' a_m^{h-1} = 0$ for all $j \in \{1, \dots, r\}$. Consequently, $a_m^{h-2} \in Ann\, T$. But this is contradiction because $T = S$ and $a_m^{h-2} \notin Ann\, S$. In the case $h = 2$ from $b_j a_m = b_j' a_m^2 = b_j' 0 = 0$ it follows $a_m \in Ann\, T$. Supposing $a_m \in Ann\, S$ we obtain that all $b_j = b_j' a_m = 0$, i.e. $T = \{0\}$ and this contradicts the fact that T is nonnilpotent.

Therefore $Ann\, S \subsetneq Ann\, T$, but it is impossible because $T = S$.

Theorem A is proved.

3. <u>Some lemmas about nil semigroups</u>

The result in the previous section allows us to assume in what follows that our critical nil semigroup S is not finitely generated.

For convenience of references state the following easy

<u>Lemma 1</u>. Let u be a nonzero element with nilpotence index h in a nil semigroup S. Then $\langle u \rangle = \{0, u, u^2, \dots, u^{h-1}\}$.

The following two lemmas are contained in [2].

<u>Lemma 2</u>. A nonzero element of a nil semigroup cannot be a proper factor of itself.

<u>Lemma 3</u>. If S is a critical semigroup then $S = S^2$.

<u>Lemma 4</u>. A finitely generated left duo nil semigroup is nilpotent.

<u>Proof</u>. Let $T = \langle t_1, \dots, t_m \rangle$ be a left duo nil semigroup. Then there exist $n_i \in \mathbb{N}$ such that $t_i^{n_i} = 0$. Let us denote $n = \sum_i n_i$ and show that $T^n = 0$.

Indeed, it is clear that every product $s = s_1 s_2 \cdot \ldots \cdot s_n$, $s_i \in T$, contains one of the generators $t_i = t_i(s)$, $i \in m$, at least n_i times, say - k times. Because of T being left duo we have

$$s = (\dots)_1 t_i (\dots)_2 \dots t_i \dots = (\dots)_1 (\dots)_2' \dots t_i^k = u t_i^k$$

for some $u \in T$ and from $k \geq n_i$ it follows that $t_i^k = 0$. So we have $s = 0$. The lemma is proved.

<u>Lemma 5</u>. For any elements u and v in a left duo semigroup S and for any $k \in \mathbb{N}$ there exists $w_k \in S$ such

that $(uv)^k = w_k \cdot u^k$.

Proof. By repeated application of left duo property of S it follows that there exist elements $w_0, w_1, \dots$ in S such that

$$(uv)^k = \underbrace{uv\,uv \dots \quad uv}_{\text{k times}} = w_0 u^2 v \dots uv = w_0 w_1 u^3 \dots uv =$$

$$= \dots = w_0 w_1 \dots w_{k-1} u^k = w_k u^k.$$

This proves the lemma.

For the free semigroup F_m with free generators $f_1, \dots$ $\dots, f_m$ denote by $F(m,n)$ the Rees factorsemigroup F_m/F_m^n. The semigroup $F(m,n)$ is called free m-generated nilpotent semigroup. An easy combinatorial consideration shows that

Lemma 6. The semigroup $F(m,n)$ is finite.

Denote by $f(m,n)$ the number of elements in $F(m,n)$.

4. Left subduo version of Shevrin's lemma

Let S be a critical semigroup. Then Lemma 3 tells that $S = S^2$ and so for any $x \in S$ there exist elements $a_1, a_2, \dots$ and $b_1, b_2, \dots$ in S such that

$$x = a_1 b_1, \ b_1 = a_2 b_2, \ \dots, \ b_{k-1} = a_k b_k, \ \dots .$$

Consequently,

$$x = a_1 b_1 = a_1 a_2 b_2 = \dots = a_1 a_2 \dots a_k b_k = \dots ,$$

and so to each $x \in S$ we have associated an infinite sequence $\{a_k\}$ of its factors; in [2] such sequence $\{a_k\}$ is called x-sequence. Our aim in this section is to prove

Lemma 7. Let S be a left subduo nil semigroup which is not finitely generated and such that $S = S^2$. Then for each nonzero element $x \in S$ there exists an x-sequence $\{a_k\}$ such that $a_1 \notin \langle a_2, a_3, \dots, a_m \rangle$ for all $m = 2, 3, \dots$

Proof runs by induction on m.

1. Begin with the case $m = 2$.

Let $x = a_1 b_1$ Show that there exists a factorization $b_1 = a_2 b_2$ such that $a_1 \notin \langle a_2 \rangle$. Suppose $b_1 = u_1 v_1$ and let h be the nilpotence index of u_1. There are two possibilities. Firstly, if $a_1 \notin \langle u_1 \rangle$ then take $a_2 = u_1$. Secondly, if $a_1 \in \langle u_1 \rangle$ then $a_1 = u_1^{k_1}$ and for a factorization $v_1 = u_2 v_2$ consider the element $u_1 u_2$. Again, two possibilities can occur: $a_1 \notin \langle u_1 \cdot u_2 \rangle$ or $a_1 \in \langle u_1 \cdot u_2 \rangle$. In the first case take $a_2 = u_1 u_2$. In the second case we have $a_1 = (u_1 u_2)^{k_2}$ and for a factorization $v_2 = u_3 v_3$ consider the element $u_1u_2u_3$.

Now it can be shown that continuing this way there exists $r \in \mathbb{N}$ such that $a_1 \notin \langle u_1u_2 \cdot \ldots \cdot u_r \rangle$. Suppose on the contrary that $a_1 \in \langle u_1 \rangle, a_1 \in \langle u_1 \cdot u_2 \rangle, \ldots$, i.e.

$$a_1 = u_1^{k_1} = (u_1u_2)^{k_2} = \cdots = (u_1u_2 \ldots u_r)^{k_r} = \ldots$$

All the subsemigroups $\langle u_1, u_2 \rangle$, $\langle u_1, u_2u_3 \rangle, \ldots$, $\langle u_1, u_2u_3 \ldots u_r \rangle, \ldots$ are proper because S is not finitely generated and so these subsemigroups are all left duo. From Lemma 5 it follows that there exist elements $w_2, \ldots, w_r \in S$ such that

$$(u_1u_2)^{k_2} = w_2 u_1^{k_2}, \quad (u_1 \cdot u_2u_3)^{k_3} = w_3 u_1^{k_3}, \ldots,$$
$$(u_1 \cdot u_2 \ldots u_r)^{k_r} = w_r u_1^{k_r}.$$

Note that here all $k_i < h$. Indeed, having $k_i \geq h$ for some i implies $a_1 = (u_1 \ldots u_i)^{k_i} = w_i u_1^{k_i} = 0$, but this contradicts $0 \neq x = a_1b_1$.

Lemma 1 shows that among the non-zero elements $u_1^{k_1}$, $u_1^{k_2}, \ldots, u_1^{k_h}$ there are at least two of them equal to each other. Let $u_1^{k_i} = u_1^{k_j}$. Because of $1 \leq k_i, k_j < h$ it gives $k_i = k_j$; without loss of generality assume $i < j$. Having denoted $c = u_1u_2 \ldots u_i$ and $d = u_{i+1} \ldots u_j$ obtain

$$a_1 = c^{k_i} = (c \cdot d)^{k_i}.$$

Now, observe that on the one hand, these previous calculations we have done in the subsemigroup $P = \langle u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots u_j \rangle$ which is proper in S for S is not finitely generated. So it follows this subsemigroup is left duo. Two cases are possible: either $cd = c$ or there exists $\tilde{d} \in P$ such that $cd = \tilde{d}c$. In this last case there exists (by Lemma 5) an element $\tilde{w} \in P$ such that $c^{k_i} = (cd)^{k_i} = \tilde{w}c^{k_i}$. On the other hand, according to Lemma 2 the nonzero element c (or c^{k_i}) cannot be a its own proper factor and so we come to a contradiction in both cases.

From these considerations above it follows that for some $r < h$ there is $a_1 \notin \langle u_1u_2 \ldots u_r \rangle$. We take $a_2 = u_1u_2 \ldots u_r$ and $b_2 = v_r$. The deduction in the case 1 is now complete.

2. Suppose now there are elements $a_2, \ldots, a_m$ in S such that $x = a_1a_2 \ldots a_m b_m$ and $a_1 \notin \langle a_2, \ldots, a_m \rangle$. Then we prove that there exists a factorization $b_m = a_{m+1} b_{m+1}$ with $a_1 \notin \langle a_2, \ldots, a_m, a_{m+1} \rangle$.

Let $b_m = y_1 z_1$. If $a_1 \notin \langle y_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ take $a_{m+1} = y_1$.

If $a_1 \in \langle y_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, then a_1 may be written in the form

$$a_1 = y_1^{k_1^{(1)}} a_2^{k_2^{(1)}} \dots a_m^{k_m^{(1)}},$$

where clearly $k_1^{(1)} > 0$ and other $k_i^{(1)} \geq 0$. We get such a representation for a_1 in the following way. Starting with $a_1 \in \langle y_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, i.e. $a_1 = s_0(y_1, a_2, \dots, a_m)$, we utilize the left duo property for the subsemigroup $\langle y_1, a_2, \dots, a_{m-i} \rangle$ of S to extract the whole power $a_{m-i}^{k_{m-i}^{(1)}}$ from the right

$$s_i(y_1, a_2, \dots, a_{m-i}) = s_{i+1}(y_1, a_2, \dots, a_{m-i-1}) a_{m-i}^{k_{m-i}^{(1)}}$$

recursively for $i = 0, 1, \dots, m-3$. Observe also, that

$$s_{m-2}(y_1, a_2) = s_{m-1}(y_1) a_2^{k_2^{(1)}} = y_1^{k_1^{(1)}} a_2^{k_2^{(1)}}.$$

This process extracting all powers of fixed generator a_{m-i} from the right is finite because of $a_1 \neq 0$ in the nil semigroup S. Further, take some factorization $z_1 = y_2 z_2$ and consider the element $y_1 y_2$. If $a_1 \notin \langle y_1 y_2, a_2, \dots, a_m \rangle$, take $a_{m+1} = y_1 y_2$. In the case $a_1 \in \langle y_1 y_2, a_2, \dots, a_m \rangle$ repeat the procedure described above, starting with $a_1 = s_0'(y_1 y_2, a_2, \dots, a_m) \in \langle y_1 y_2, a_2, \dots, a_m \rangle$ and obtain

$a_1 = (y_1 y_2)^{k_1^{(2)}} a_2^{k_2^{(2)}} \cdot \ldots \cdot a_m^{k_m^{(2)}}$ with $k_1^{(2)} > 0$ and other $k_i^{(2)} \geq 0$.

It appears that continuing this way, after a finite number of such procedures, we obtain an element $y_1 y_2 \dots y_r$ such that $a_1 \notin \langle y_1 y_2 \cdots y_r, a_2, \dots, a_m \rangle$. To prove this assertion observe that the subsemigroup $F = \langle y_1, a_2, \dots, a_m \rangle$ is nilpotent (by Lemma 4). So F is an epimorphic image of $F(m,n)$ with n being the nilpotence class of F and from Lemma 6 it follows that $|F| \leq f(m,n)$. Denote $s = f(m,n)$ and suppose that a_1 is contained in all subsemigroups $\langle y_1, a_2, \dots, a_m \rangle, \langle y_1 y_2, a_2, \dots, a_m \rangle, \dots, \langle y_1 y_2 \cdots y_s, a_2, \dots, a_m \rangle$. Then we have

$$\begin{aligned} a_1 &= y_1^{k_1^{(1)}} a_2^{k_2^{(1)}} \dots a_m^{k_m^{(1)}} = \\ &= (y_1 y_2)^{k_1^{(2)}} a_2^{k_2^{(2)}} \dots a_m^{k_m^{(2)}} = \dots = \\ &= (y_1 y_2 \dots y_s)^{k_1^{(s)}} a_2^{k_2^{(s)}} \dots a_m^{k_m^{(s)}}, \end{aligned}$$

with $k_1^{(j)} > 0$ for all $j = 1, \dots, s$. The subsemigroup $Y \doteq \langle y_1, y_2, \dots, y_s \rangle$ is left duo. Therefore, by lemma 5 Y contains elements $w_{k_1^{(2)}}, \dots, w_{k_1^{(s)}}$ such that

$$a_1 = y_1^{k_1^{(1)}} a_2^{k_2^{(1)}} \dots a_m^{k_m^{(1)}} = w_{k_1^{(2)}} y_1^{k_1^{(2)}} a_2^{k_2^{(2)}} \dots a_m^{k_m^{(2)}} = \dots =$$
$$= w_{k_1^{(s)}} y_1^{k_1^{(s)}} a_2^{k_2^{(s)}} \dots a_m^{k_m^{(s)}} .$$

Since the semigroup F is an epimorphic image of $F(m,n)$, it follows that among the non-zero elements $y_1^{k_1^{(t)}} a_2^{k_2^{(t)}} \dots a_m^{k_m^{(t)}}$, $t = 1, 2, \dots, s$ in F there are at least two of them equal as words in the alphabet $\{y_1, a_2, \dots, a_m\}$. From this it follows that $\vec{k}^{(i)} = \vec{k}^{(j)}$ for some $i < j$ and so we obtain

$$a_1 = \dots = (y_1 y_2 \dots y_i)^{k_1^{(i)}} a_2^{k_2^{(i)}} \dots a_m^{k_m^{(i)}} = \dots =$$
$$= (y_1 y_2 \dots y_i \dots y_j)^{k_1^{(i)}} a_2^{k_2^{(i)}} \dots a_m^{k_m^{(i)}} .$$

According to Lemma 2, $y_1 y_2 \dots y_i = y_1 y_2 \dots y_i \dots y_j$ is impossible. Therefore it follows from Lemma 5 that for some $\widetilde{w}_{k_1^{(i)}} \in Y$,

$$(y_1 y_2 \dots y_i y_{i+1} \dots y_j)^{k_1^{(i)}} = \widetilde{w}_{k_1^{(i)}} (y_1 y_2 \dots y_i)^{k_1^{(i)}} .$$

From ($*$) we get now

$$(y_1 y_2 \dots y_i)^{k_1^{(i)}} a_2^{k_2^{(i)}} \dots a_m^{k_m^{(i)}} = \widetilde{w}_{k_1^{(i)}} (y_1 y_2 \dots y_i)^{k_1^{(i)}} a_2^{k_2^{(i)}} \dots a_m^{k_m^{(i)}} .$$

But this equality contradicts Lemma 2 again.

We deduce that for some $r \leq s = f(m,n)$ there must be $a_1 \notin \langle y_1 \dots y_r, a_2, \dots, a_m \rangle$. Taking $a_{m+1} = y_1 \dots y_r$ and $b_{m+1} = z_r$, we get the desired result.

The induction argument is completed and so Lemma 7 is proved.

5. Proof of Theorem B

Suppose on the contrary that there exists a critical left subduo nil semigroup S. Then by Theorem A the semigroup S is not finitely generated. From Lemma 3 it follows that $S = S^2$.

We shall prove that S must have a non-nilpotent proper subsemigroup. Take any nonzero element $x \in S$ and let $\{a_k\}$ be some x-sequence considered in Lemma 7. Denote

$S_m = \langle a_2, \dots, a_m \rangle$, $m = 2, 3, \dots$ and let $S_* = \bigcup_{m \geq 2} S_m$. Then clearly S_* is a left subduo subsemigroup in S. Observe that from $X \neq 0$ it follows $a_2 \dots a_m \neq 0$ for all $m \geq 2$. So S_* is not nilpotent. In view of Lemma 7 we have $a_1 \notin S_m$ for all $m \geq 2$. Therefore the subsemigroup S_* is proper. Consequently, we have found a proper non-nilpotent subsemigroup S_* in S which contradicts the fact that S is critical.

Theorem B is proved.

References

I. Кацман С. И., О полугруппах, все собственные подполугруппы которых нильпотентны. XVIII Всесоюзная алгебраическая конференция, тезисы сообщений, часть I. Кишинев, 1985.

2. Шеврин Л. Н., О полугруппах, все подполугруппы которых нильпотентны. Сибирск. матем. ж. 1961, 2, №6, 936-942.

3. Cherubini A., Varisco A., Semigroups whose proper subsemigroups are duo. Czechoslovak Math. J. 1984, 34 (109), 630-644.

4. Jacobson N., Structure of Rings. AMS Colloquium publ., vol. 37, 1956.

Received

20 VI 1986

MÕNED MÄRKUSED ŠEVRINI PROBLEEMI KOHTA

U.Kaljulaid

Resümee

Nulliga poolrühma S nimetatakse nilpotentseks, kui leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et poolrühma S elementide kõik korrutised, milles on $\geqslant n$ tegurit, on võrdsed nulliga. Laiema nulliga poolrühmade klassi moodustavad nilpoolrühmad, milles iga elemendi mingi aste võrdub nulliga. Poolrühma nimetatakse subnilpotentseks, kui on nilpotentsed kõik tema pärisalampoolrühmad.

Töö [2] resultaadid näitavad, et leidub vähe subnilpotentseid poolrühmi, mis pole nilpoolrühmad. Siiani pole aga vastust Ševrini poolt töös [2] esitatud küsimusele, kas

nilpoolrühmade klassis leidub subnilpotentseid mittenilpotentseid poolrühmi. Käesolevas töös tõestatakse, et pole mittenilpotentseid nilpoolrühmi, mille kõik pärisalampoolrühmad on nilpotentsed ja vasakult duopoolrühmad.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПРОБЛЕМЕ ШЕВРИНА

У.Кальюлайд

Р е з ю м е

Полугруппу назовем субнильпотентной, если нильпотентны все ее собственные подполугруппы. Результаты [2] показывают, что совсем мало имеется субнильпотентных полугрупп, которые не являются нильполугруппами. Но до сих пор нет ответа на вопрос Л.Н.Шеврина [2] о существовании в классе нильполугрупп субнильпотентных, но ненильпотентных полугрупп. В данной работе доказано, что не существует ненильпотентных нильполугрупп, все собственные подполугруппы которых нильпотентны и которые являются слева дуополугруппами. При этом, полугруппа S является слева дуополугруппой, если для любых $u, v \in S$ существует $v' \in S$ такой, что $uv = v'u$.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 39-48.

Уч. зап. Тартуск. ун-та.
1987, 764, 39-48.

CHARACTERIZATION OF MONOIDS BY PROPERTIES OF FAITHFUL AND STRONGLY FAITHFUL ACTS

Mati Kilp and Ulrich Knauer
Chair of algebra and geometry
Fachbereich Mathematik/Informatik Universität Oldenburg
FR Germany

There exist quite a few papers describing monoids by properties of their categories of left acts. This approach is often called homological classification of monoids. In most cases the properties torsion free, flat, strongly flat, projective free, and injective have been used for homological classifications. In [17] Hach introduced the concept of regular acts. He characterized monoids over which all acts are regular. In [9] the authors investigate relationships between regular acts and acts of various types used by different authors for the homological classification of monoids. It was shown in [17] that all strongly faithful acts are regular. In this paper we present some results concerning relationships between faithful and strongly faithful acts and acts of other types.

1. Basic definitions and results

In the following, S will always stand for a monoid. A left S-act is a set M on which S acts unitarily from the left in the usual way, that is to say

$$(st)m = s(tm), \quad 1m = m \quad \text{for } m \in M, \ s,t \in S$$

where 1 denotes the identity of S.

By S-Act we denote the category of all left S-acts.

1.1. Definition. A left S-act M is called strongly faithful if from $sm = tm$, $s,t \in S$ for some $m \in M$ it follows that $s = t$.

1.2. Definition. A left S-act M is called faithful if from $sm = tm$, $s,t \in S$ for all $m \in M$ it follows that $s = t$.

It is obvious that strongly faithful acts are faithful.

1.3.- Proposition ([17]). Strongly faithful acts are regular.

The definitions of free acts, projective acts, projective generators, strongly flat acts, torsion free acts, injective cogenerators, injective acts are well-known and can be found, for example, in [11], [12], [14], [15], and [16]. Note that the coproduct $\coprod$ in the category S-Act is the disjoint union. We recall the following facts:

1.4. Lemma. A left S-act M is free if and only if $M \cong \coprod S$, S being considered as a left S-act.

1.5. Lemma ([10]). A cyclic S-act M is a projective generator in the category of left S-acts if and only if there exist $e, l, l' \in S$ such that

(1) $e^2 = e$ and $M \cong Se$

(2) $el = l$ and $l'l = 1$.

1.6. Lemma ([10]). A left S-act M is projective if and only if $M \cong \coprod Se_i$ for $e_i^2 = e_i \in S$.

1.7. Lemma ([16]). A left S-act M is strongly flat if and only if $sm = tn$ with $m, n \in M$ and $s, t \in S$ implies the existence of elements $p \in M$ and $s', t' \in S$ such that $ss' = tt'$, $m = s'p$ and $n = t'p$. Moreover, if $m = n$, there exists $s' \in S$ such that $s'p = m$ and $ss' = ts'$.

Note that such acts are called weakly flat in [16] and flat in [3], [11], and [12]. For the definition of the tensor product $\otimes$ of acts see [5] or [16]. Note that for a fixed left S-act M tensoring by M is a functor from the category of right S-acts into the category of sets.

1.8. Definition ([5]). A left S-act M is called flat if the functor $\otimes M$ preserves all monomorphisms.

1.9. Definition ([9]). A left S-act M is called weakly flat if the functor $\otimes M$ preserves all embeddings of right ideals into S.

1.10. Definition ([9]). A left S-act M is called principally weakly flat if the functor $\otimes M$ preserves all embeddings of principal right ideals into S.

1.11. Definition ([12]). A left S-act M is called torsion free if $sm = sn$ with $m, n \in M$, $s \in S$ left cancellable, implies $n = m$.

Let X be a set. Define on the set X^S of all mappings from S to X left multiplication by elements of S in the following way:

$$(sf)(x) = f(sx) \text{ for all } s, x \in S \text{ and } f \in X^S.$$

Then X^S becomes a left S-act.

1.12. Definition ([13]). A left S-act M is called cofree if $M \cong X^S$ for some set X.

1.13. Definition. A left S-act M is called weakly injective if for any inclusion $i: I \longrightarrow S$ where I is a left ideal of S and for any homomorphism $f: I \rightarrow M$ there exists a homomorphism $g: S \longrightarrow M$ such that $f = gi$.

1.14. Definition. A left S-act M is called principally weakly injective if for any inclusion $i: Ss \longrightarrow S$ where $s \in S$ and for any homomorphism $f: Ss \longrightarrow M$ there exists a homomorphism $g: S \longrightarrow M$ such that $f = gi$.

1.15. Definition ([2]). A left S-act M is called divisible if $dM = M$ for every right cancellable element d of S.

1.16. Definition [17]. A left S-act M is called regular if for any $m \in M$ there exists a homomorphism $f: Sm \rightarrow S$ such that $f(m)m = m$.

1.17. Definition. A left S-act is called simple if it has no proper subacts. A left S-act is called completely reducible if it is a coproduct of simple acts.

1.18. Proposition ([8]). For any left S-act, we have the following implications:

free $\Rightarrow$ projective generator $\Rightarrow$ projective $\Rightarrow$ strongly flat $\Rightarrow$ weakly flat $\Rightarrow$ principally weakly flat $\Rightarrow$ torsion free;

cofree $\Rightarrow$ injective $\Rightarrow$ weakly injective $\Rightarrow$
injective cogenerator $\nearrow$
principally weakly injective $\Rightarrow$ divisible.

The following lemmas will be useful for us.

1.19. Lemma ([6]). Let S be a monoid and $c \in S$. The principal left ideal Sc is projective if and only if there exists an element $u \in S$ such that $uc = c$ and from $ac = bc$, $a, b \in S$, it always follows that $au = bu$.

1.20. Lemma ([1], § 11.3). A cyclic left S-act S/ρ is faithful if and only if ρ does not contain (right) congruences except the identity congruence.

1.21. Lemma ([9]). Let $u \in S$ and let ρ be the left congruence on S defined by $s \rho t$ if and only if $su^k = tu^l$ for some $k, l \in \mathbb{N}_c$. Then S/ρ is flat.

2. Characterization results

We begin with results describing monoids over which all left acts with some property introduced in Section 1 are faithful.

The following lemma follows immediately from Definition 1.2.

2.1. Lemma. If N is a left S-act, M is a subact of N and M is faithful, then N is faithful.

2.2. Proposition. All projective generators in S-Act are faithful.

Proof. From the definition of a projective generator and from lemmas 1.6 and 2.1 it follows that it is sufficient to show that all cyclic projective generators in S-Act are faithful. Let now M be a cyclic projective generator in S-Act. By Lemma 1.5 $M \cong Se$ where $e^2 = e \in S$ and there exist $l, l' \in S$ such that $el = l$ and $l'l = 1$. Let $s, t \in S$. Suppose that for every $x \in S$ we have $sxe = txe$. Particularly we have $sl'e = tl'e$. Now

$$s = s(l'el) = (sl'e)l = (tl'e)l = t(l'el) = t.$$

This means that Se is faithful.

If S is a monoid then by $E(S)$ we denote the set of all idempotents of S. If $X \subseteq S$ is a subset then by $C(X)$ we denote the set of all central elements of S belonging X.

2.3. Lemma. If all projective left S-acts are faithful then $|C(E(S))| = 1$.

Proof. Let e be a central idempotent of S such that $e \neq 1$. Then for every $x \in S$, $xe = (xe)e = e(xe)$. Hence $1(xe) = e(xe)$ for every $x \in S$ which implies that a projective S-act Se is not faithful.

In the case of the class of PP monoids this result can be sharpened. We recall the definition.

2.4. Definition ([4]). A monoid S is called PP monoid if all principal left ideals of S are projective.

PP monoids were investigated in [4] and [6].

2.5. Proposition. Let S be a PP monoid. If all projective left S-acts are faithful then all central elements of S are cancellable.

Proof. Let a be a central element of S such that $a \neq 1$. By Lemma 1.19 there exists an idempotent $e \in S$ such that from $xa = ya$, $x, y \in S$, it always follows that $xe =$

$= ye$. For any $s \in S$ denote by λ_s the left congruence defined by

$$x(\lambda_s)y \Leftrightarrow xs = ys$$

for all $x, y \in S$. Obviously we have now $\lambda_a = \lambda_e$. Since a is central, λ_a is a congruence. Since $Se \simeq S/\lambda_e$ is projective by Lemma 1, Se is faithful. By Lemma 1.20 we get now that λ_a has to be the identity congruence. In other words, a is a right cancellable element.

2.6. Proposition. If all flat left S-acts are faithful then $|S| = 1$ or there exist $x, y \in S$ such that $xS \cap yS = \emptyset$ and all central elements of S are cancellable.

Proof. If for all $x, y \in S$ we have $xS \cap yS \neq \emptyset$ then by Proposition 7 of [7] the one-element left S-act O is flat. By assumption O is faithful which implies $|S| = 1$. Let now $u \in C(S)$. Let ρ be the left congruence on S defined by $s \rho t$ if and only if $su^k = tu^l$ for some $k, l \in \mathbb{N}_0$. By Lemma 1.21 S/ρ is flat. By assumption S/ρ must be faithful. Since u is central, ρ is a congruence. It follows from Lemma 1.20 that ρ has to be the identity congruence. Particularly from $xu = yu$, $x, y \in S$, it always follows that $x = y$. This means that u is a right cancellable element.

If all principally weakly flat, torsion free, cofree, injective, weakly injective, principally weakly injective, divisible, or completely reducible left S-acts are faithful then S is one-element (because the one-element left S-act has mentioned properties).

Now we turn to results describing monoids over which all left acts with some property are strongly faithful.

2.7. Lemma. If M is a strongly faithful S-act and N is a subact of M then N is a strongly faithful act. If M_i, $i \in I$, are strongly faithful S-acts, then $\coprod_{i \in I} M_i$ is a strongly faithful S-act.

Proof follows immediately from Definition 1.1.

2.8. Proposition. The following conditions on S are equivalent.

(i) All free left S-acts are strongly faithful.

(ii) All projective generators in S-Act are strongly faithful.

(iii) All projective left S-acts are strongly faithful.

(iv) All strongly flat left S-acts are strongly faithful.

(v) S is right cancellative.

<u>Proof</u>. The implications (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (iv) follow from Proposition 1.18. (iv) $\Rightarrow$ (v). S is a strongly flat S-act by Proposition 1.18. Hence S is strongly faithful. Now for any $a \in S$ from $xa = ya$, $x, y \in S$ it follows that $x = y$. This means that a is right cancellable. (v) $\Rightarrow$ (i) By lemmas 1.4 and 2.7 it sufficies to show that S is strongly faithful. But for a right cancellative S this is obvious.

2.9. <u>Proposition</u>. All flat left S-acts are strongly faithful if and only if $|S| = 1$.

<u>Proof</u>. Sufficiency is obvious.

<u>Necessity</u>. Let $1 \neq u \in S$. Let ρ be the left congruence on S defined by $s \rho t$ if and only if $su^k = tu^l$ for some $k, l \in N_0$. By Lemma 1.21 S/ρ is flat. By assumption S/ρ is strongly faithful. But now from $u \rho 1$ or $u\bar{1} = 1\cdot\bar{1}$ it follows $u = 1$.

For the sake of completeness we note

2.10. <u>Proposition</u> (Theorem 3.12 in [9]). All regular left S-acts are strongly faithful if and only if S is right cancellative.

Now we proceed to results on monoids over which all strongly faithful left acts have one of the properties introduced in Section 1. Naturally, we are interested in the situation there exist strongly faithful acts. Suppose M is a strongly faithful left S-act, $m \in M$. From Definition 1 it follows that there exists an isomorphism $f: Sm \rightarrow S$ such that $f(m) = 1$. Now Sm is strongly faithful by Lemma 2.7. Hence S is strongly faithful. By the proof of Proposition 2.8 this implies that S is right cancellative.

2.11. <u>Proposition</u>. Let S be a right cancellative monoid. The following conditions on S are equivalent.

(i) All strongly faithful left S-acts are free.

(ii) All strongly faithful left S-acts are projective generators in S-Act.

(iii) All strongly faithful left S-acts are projective.

(iv) All strongly faithful left S-acts are strongly flat.

(v) All strongly faithful left S-acts are flat.

(vi) All strongly faithful left S-acts are weakly flat.

(vii) All strongly faithful left S-acts are principally weakly flat.

(ix) All strongly faithful left S-acts are weakly injective.

(x) All strongly faithful left S-acts are principally weakly injective.

(xi) All strongly faithful left S-acts are divisible.

(xii) All strongly faithful left S-acts are completely reducible.

(xiii) S is a group.

Proof. The implications (i) $\Rightarrow$ (ii), (ii) $\Rightarrow$ (iii), (iii) $\Rightarrow$ (iv), (iv) $\Rightarrow$ (v), (v) $\Rightarrow$ (vi), (vi) $\Rightarrow$ (vii), (ix) $\Rightarrow$ (x), and (x) $\Rightarrow$ (xi) follow directly from Lemma 1. So it sufficies to prove the implications (vii) $\Rightarrow$ (xiii), (xi) $\Rightarrow$ (xiii), (xii) $\Rightarrow$ (xiii), (xiii) $\Rightarrow$ (i), (xiii) $\Rightarrow$ (ix), (xiii) $\Rightarrow$ (xii), (vii) $\Rightarrow$ (xiii). By Proposition 2.10 it follows that all regular left S-acts are principally weakly flat. As S contains only one idempotent 1, it follows from Theorem 3.4 of [9] that every element $s \in S$ is regular. Since S is right cancellative this implies that S is a group.

(xi) $\Rightarrow$ (xiii). Again, by Proposition 2.10 we have that all regular left S-acts are divisible. As S contains only one idempotent 1, it follows from Theorem 3.8 of [9] that S is divisible. Since S is right cancellative this implies that S is a group.

(xii) $\Rightarrow$ (xiii). Again, by Proposition 2.10 we have that all regular left S-acts are completely reducible. As S contains the only idempotent 1 it follows from Theorem 3.6 of [9] that S is a minimal left ideal. This implies that S is a group.

(xiii) $\Rightarrow$ (i), (xiii) $\Rightarrow$ (ix), and (xiii) $\Rightarrow$ (xii). These implications follow easily from the fact that all strongly faithful left acts over a group are coproducts of copies of the group.

Finally, we prove that in many cases when we have to prove that all left acts have some property it is enough to prove that all faithful left acts have the property.

Let $\mathcal{E}$ be one of the properties of being free, projective, strongly flat, flat, weakly flat, principally weakly flat, torsion free, injective cogenerators, injective, weakly injective, principally weakly injective, divisible, regular, completely reducible.

2.12. Proposition. All left S-acts have a property $\mathcal{E}$ if and only if all faithful left S-acts have the property $\mathcal{E}$.

Proof. Necessity is obvious.

Sufficiency. Note that all counted properties are such that if the coproduct $A \sqcup B$ of left S-acts A and B has a property $\mathcal{E}$ then A and B have the property $\mathcal{E}$. Let now C be a left S-act which has not the property $\mathcal{E}$. Consider the coproduct $S \sqcup C$. Since S is faithful, $S \sqcup C$ is faithful by Lemma 2.1. By assumption $S \sqcup C$ has the property $\mathcal{E}$. Hence C has the property $\mathcal{E}$, a contradiction.

References

1. C l i f f o r d, A. H., P r e s t o n, G. B., The algebraic theory of semigroups, 1 and 2, Providence 1961 and 1967.
2. F e l l e r, E. H., G a n t o s, R, L., Indecomposable and injective S-systems with zero. Math. Nachr. 1969, 4, 37-48.
3. F o u n t a i n, J., Perfect semigroups. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 1976, 20, 87-93.
4. F o u n t a i n, J., Right PP monoids with central idempotents. Semigroup Forum 1977, 13, 229-237.
5. K i l p, M., On homological classification of monoids. Sib. Math. J., 1972, 13, 396-401.
6. K i l p, M., Commutative monoids all of whose principal ideals are projective. Semigroup Forum 1973, 6, 334-339.
7. K i l p, M., Characterization of monoids by properties of their left Rees factors. Uch. Zap. Tartu Un-ta, 1983, 640, 29-37.
8. K i l p, M., Knauer, U., On free, projective, and strongly flat acts, Arch. Math., 1986, 47, 17-23.
9. K i l p, M., K n a u e r, U., Characterization of monoids by properties of regular acts. Preprint, Oldenburg, 1985.

10. K n a u e r, U., Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids. Semigroup Forum, 1972, 3, 359-370.
11. K n a u e r, U., Characterization of monoids by properties of finitely generated right acts and their right ideals. Lecture Notes in Mathematics 1983, 998, 310-332.
12. K n a u e r, U., P e t r i c h, M., Characterization of monoids by torsion-free, flat, projective, and free acts. Arch. Math., 1981, 36, 289-294.
13. M a n e s, E. G., Algebraic theories. New York, 1976.
14. N o r m a k, P., Analogies of QF-rings for monoids, II, Uch. Zap. Tartu Un-ta, 1983, 640, 38-47.
15. S k o r n j a k o v, L. A., On the homological classification of monoids. Sib. Math. J., 1969, 10, 1139-1142.
16. S t e n s t r ö m, B., Flatness and localization over monoids. Math. Nachr., 1970, 48, 315-334.
17. T r a n L a m H a c h, Characterization of monoids by regular acts. Preprint, Budapest, 1983, 12 pp.

Received
8 X 1986

MONOIDIDE KLASSIFIKATSIOON TÄPSETE JA TUGEVALT TÄPSETE POLÜGOONIDE JÄRGI

M.Kilp ja U.Knauer

R e s ü m e e

Artiklis uuritakse polügoonide täpsuse ja tugeva täpsuse vahekorda teiste monoidide homoloogilises klassifikatsioonis kasutatavate polügoonide omadustega.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МОНОИДОВ ПО СВОЙСТВАМ ТОЧНЫХ И СИЛЬНО ТОЧНЫХ ПОЛИГОНОВ

М.Кильп и У.Кнауэр

Р е з ю м е

В настоящей работе моноиды классифицируются по свойствам точных и сильно точных полигонов над ними.

Пусть S - моноид и M - левый S -полигон. M называется точным, если из $sm = tm$, $s, t \in S$, для всех $m \in M$ следует $s = t$. M называется сильно точным, если из $sm = tm$, $s, t \in S$, для некоторого $m \in M$ следует $s = t$.

Предложение 2.8. Все свободные левые S -полигоны (проективные образующие, проективные левые S полигоны, сильно плоские левые S -полигоны) являются сильно точными тогда и только тогда, когда S - моноид с правым сокращением.

Предложение 2.II. Все сильно точные левые S -полигоны являются свободными (проективными образующими, проективными, сильно плоскими, плоскими, делимыми) тогда и только тогда, когда S - группа.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 49-52.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 49-52.

WREATH PRODUCTS OF ACTS OVER MONOIDS. III PRINCIPALLY WEAKLY INJECTIVE ACTS

M.Kilp and A.Kubjas
Chair of algebra and geometry

In [1] Normak presented necessary and sufficient conditions for a wreath product of acts to be projective or strongly flat. Analogous conditions concerning regularity and inversity, and torsion freeness and divisibility were found in [3] and [2], respectively. In this note we present some results on wreath products of acts concerning principally weakly regular acts.

We recall some definitions which will be necessary in the sequel. Let R be a monoid (i.e. a semigroup with identity 1). A nonempty set A is called a <u>left</u> R<u>-act</u> if $\nu a \in A$, $(\rho\nu)a = \rho(\nu a)$, and $1a = a$ for all $\rho, \nu \in R$, $a \in A$. We sometimes write ${}_RA$. We denote the category of left R-acts by R-Act and analogously by Act-R the category of right R-acts. Homomorphisms are defined in the obvious way. $\mathrm{End}_R A$ denotes the monoid of endomorphisms of $A \in R$-Act.

Let $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ be sets. By $F(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ we denote the set of all mappings $f: \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$. By c_y, $y \in \mathcal{Y}$ we denote the mapping in $F(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ with $c_y(x) = y$ for all $x \in \mathcal{X}$. Let $T = T(R,S,A) = R \times F(A,S)$ be the <u>wreath product of the monoid</u> R <u>with the semigroup</u> S by the left R-act A. We recall that multiplication in T is defined by $(\nu,f)(\rho,g) = (\nu\rho, {}_\rho fg)$ with $({}_\rho fg)(a) = f(\rho a)g(a)$ for all $a \in A$, $\nu, \rho \in R$, $f, g \in F(A,S)$. T is a monoid if and only if S is a monoid. If $A \in R$-Act and $B \in S$-Act, then $C = A \times B$ is a left T-act, i.e. $C \in T$-Act, where

$$(\nu, f)(a, b) = (\nu a, f(a)b)$$

for all $\nu \in R$, $a \in A$, $b \in B$, $f \in F(A,S)$.

We call ${}_TC$ the wreath product of the acts A and B and denote by $A \,\mathrm{wr}\, B$.

Let R be a monoid. A left R-act A is called principally weakly injective (p.w.i.) if every R-homomorphism from any principal left ideal of R into A can be extended to a homomorphism from R to A. For any $s \in S$ denote by c_s the mapping from A into S such that $c_s(a) = s$ for every $a \in A$.

Proposition 1. If the wreath product $A \operatorname{wr} B$ is p.w.i. then ${}_SB$ is p.w.i.

Proof. Let s be an arbitrary element of S and φ an arbitrary homomorphism from Ss into ${}_SB$. Let $a \in A$ be a fixed element. Define a mapping $\bar{\varphi} : T(1, c_s) \to A \operatorname{wr} B$ by

$$\bar{\varphi}((p, g)(1, c_s)) = (p, g)(a, \varphi(s))$$

for all $(p, g) \in T$. Let $(p, g)(q, h) \in T$ be such that

$$(p, g)(1, c_s) = (q, h)(1, c_s).$$

Then $p = q$ and $g(x)s = h(x)s$ for any $x \in A$. Hence $pa = qa$ and $g(a)s = h(a)s$. Since φ is homomorphism, $g(a)\varphi(s) = h(a)\varphi(s)$. This implies

$$(p, g)(a, \varphi(s)) = (q, h)(a, \varphi(s))$$

or

$$\bar{\varphi}((p, g)(1, c_s)) = \bar{\varphi}((q, h)(1, c_s)).$$

Hence the definition of $\bar{\varphi}$ is correct. It is obvious that $\bar{\varphi}$ is a T-homomorphism. By assymption $A \operatorname{wr} B$ is p.w.i. Hence there exists an extension $\bar{\psi} : T \to A \operatorname{wr} B$ of $\bar{\varphi}$. Let $(a', b') = \bar{\psi}(1, c_1)$. Now

$$\begin{aligned}(a, \varphi(s)) &= \bar{\varphi}(1, c_s) = \bar{\psi}(1, c_s) = \bar{\psi}((1, c_s)(1, c_1)) = \\ &= (1, c_s)\bar{\psi}(1, c_1) = (1, c_s)(a', b') = \\ &= (a', c_s(a')b') = (a', sb').\end{aligned}$$

Hence $\varphi(s) = sb'$. Define now $\psi : S \to {}_SB$ by $\psi(x) = xb'$ for any $x \in S$. Since $\psi(s) = sb' = \varphi(s)$, the S-homomorphism ψ is an extension of φ. Hence ${}_SB$ is p.w.i.

Recall that a zero in a left S-act B is an element $b \in B$ such that $sb = b$ for any $s \in S$.

Proposition 2. Let ${}_SB$ contain a zero 0. If the wreath product $A \operatorname{wr} B$ is p.w.i. then ${}_RA$ is p.w.i.

Proof. Let $r \in R$ be an arbitrary element and let φ be an arbitrary homomorphism from Rr into A. Define a mapping $\bar{\varphi} : T(r, c_1) \to A \operatorname{wr} B$ by

$$\bar{\varphi}((p, g)(r, c_1)) = (p, g)(\varphi(r), 0)$$

for all $(p, g) \in T$. Let $(p, g), (q, h) \in T$ be such that

$$(p, g)(r, c_1) = (q, h)(r, c_1).$$

Then $pr = qr$ and $g(rx) = h(rx)$ for any $x \in A$. Since φ is a homomorphism, $p\varphi(r) = q(\varphi(r))$. Since 0 is a zero of B, $g(\varphi(r))0 = h(\varphi(r))0$. This implies

$$(p,g)(\varphi(r),0) = (q,h)(\varphi(r),0)$$

or

$$\bar{\varphi}((p,g)(r,c_1)) = \bar{\varphi}((q,h)(r,c_1)).$$

Hence the definition of $\bar{\varphi}$ is correct. It is obvious that $\bar{\varphi}$ is a T-homomorphism. By assumption $A\,wr\,B$ is p.w.i. Hence there exists an extension: $\bar{\Psi}: T \to A\,wr\,B$ of $\bar{\varphi}$. Let $(a', b') = \bar{\varphi}(1, c_1)$. Now

$$(\varphi(r), 0) = \bar{\varphi}(r, c_1) = \bar{\Psi}(r, c_1) = \bar{\Psi}((r, c_1)(1, c_1)) =$$
$$= (r,c_1)\bar{\Psi}(1,c_1) = (r, c_1)(a', b') = (ra', b').$$

Hence $\varphi(r) = ra'$. Define now $\psi: R \to A$ by $\psi(x) = xa'$ for any $x \in R$. Since $\psi(r) = ra' = \varphi(r)$, the R-homomorphism ψ is an extension of φ. Hence ${}_RA$ is p.w.i.

Recall that a monoid S acts surjectively on a left S-act B if for any $s \in S$ we have $sB = B$ (cf. [2]).

Proposition 3. If ${}_RA$ is p.w.i. and S acts surjectively on B then $A\,wr\,B$ is p.w.i.

Proof. Let $(r,f) \in T$ be an arbitrary element and $\varphi: T(r,f) \to A\,wr\,B$ an arbitrary T-homomorphism. Let $\varphi(r,f) = (a,b)$ where $(a,b) \in A\,wr\,B$. It is sufficient to prove that there exists $(a', b') \in A\,wr\,B$ such that $(r,f)(a',b') = (a,b)$. Indeed, then $\psi: T \to A\,wr\,B$ defined by $\psi(p,g) = (p,g)(a',b')$ for any $(p,g) \in T$ is an extension of φ.

Define a mapping $\bar{\varphi}: Rr \to {}_RA$ by $\bar{\varphi}(xr) = xa$ for any $x \in R$. Let $x, y \in R$ be such that $xr = yr$. Then

$$(x, c_1)(r,f) = (y, c_1)(r,f).$$

Since φ is a T-homomorphism, then

$$(x, c_1)\varphi(r,f) = (y, c_1)\varphi(r,f)$$

or

$$(x, c_1)(a,b) = (y, c_1)(a,b).$$

This implies $xa = ya$ or $\bar{\varphi}(xr) = \bar{\varphi}(yr)$. Hence the definition of $\bar{\varphi}$ is correct. It is obvious that $\bar{\varphi}$ is an R-homomorphism. By assumption ${}_RA$ is p.w.i. Hence there exists an extension $\bar{\Psi}: R \to {}_RA$ of $\bar{\varphi}$. Let $\bar{\Psi}(1) = a'$. Now

$$a = \bar{\varphi}(r) = \bar{\Psi}(r) = r\bar{\Psi}(1) = ra'.$$

Since S acts surjectively on ${}_SB$, there exists $b' \in B$ such that $f(a')b' = b$. Now

$$(r,f)(a',b') = (ra', f(a')b') = (a,b),$$

Q.E.D.

References

I. Н о р м а к П., Сильная плоскостность и проективность сплетений полигонов. Абелевы группы и модули. Томск, I982, I58–I65.

2. K i l p, M., K n a u e r, U., M i k h a l e v, A., Wreath products of acts over monoids, II Torsion free and divisible acts. Preprint, Oldenburg 1986.

3. K n a u e r, U., M i k h a l e v, A., Wreath products of acts over monoids, I Regular and inverse acts. Preprint, Oldenburg 1986.

Received
29 УI I986

POLÜGOONIDE PÕIMIKKORRUTISED.
III SPETSIAALSELT NÕRGALT INJEKTIIVSED POLÜGOONID

M.Kilp ja A.Kubjas

R e s ü m e e

Näidatakse, et kui polügoonide põimik $A \operatorname{wr} B$ on spetsiaalselt nõrgalt injektiivne, siis on seda alati ka B ning nulli olemasolul polügoonis B ka A. Kui A on spetsiaalselt nõrgalt injektiivne ja toime polügoonil B on sürjektiivne, siis on põimik $A \operatorname{wr} B$ spetsiaalselt nõrgalt injektiivne.

СПЛЕТЕНИЯ ПОЛИГОНОВ НАД МОНОИДАМИ.
III СПЕЦИАЛЬНО СЛАБО ИНЪЕКТИВНЫЕ ПОЛИГОНЫ

М.Кильп и А.Кубъяс

Р е з ю м е

Левый полигон A над моноидом R называется специально слабо инъективным (с.с.и.), если любой гомоморфизм из произвольного главного левого идеала R в A продолжается до гомоморфизма из R в A. Доказано, что если ${}_RA \operatorname{wr}_S B$ с.с.и., то ${}_SB$ с.с.и., а если ${}_SB$ содержит нуль, то и ${}_RA$ с.с.и. Если ${}_RA$ с.с.и. и S действует на B сюръективно, то ${}_RA \operatorname{wr}_S B$ с.с.и.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 53-56.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 53-56.

TO RESIDUAL SMALLNESS

P.Normak
Tallinn Pedagogical Institute

In this short paper we consider residually small varieties which have congruence extension property.

Let V be a variety of algebras. An algebra A in V is said to be a cogenerator, if for any two distinct homomorfisms $\alpha, \beta: X \to Y$ there exists a homomorphism $\gamma: Y \to A$ such that $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. In algebra A is subdirectly irreducible if the intersection of all non-trivial congruences on A is non-trivial. An extension B of A is called essential if every homomorphism $h: B \to C$ whose restriction on A is a monomorphism is itself a monomorphism. A variety has the congruence extension property (CEP) if for every extension B of A and every congruence ρ on A there exists a congruence τ on B such that restriction of τ to A equals ρ. A variety is called residually small if all its subdirectly irreducible algebras form a set. A variety V is said to have embedding property if every two non-trivial algebras in V are isomorphic to subalgebras of some single algebra in V. We say that V has the strong amalgamation property (SAP) if every diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\beta"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

where α and β are monomorphisms can be completed to a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\beta"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B \arrow[d, tail, "\alpha'"] \\ C \arrow[r, tail, "\beta'"] & D \end{tikzcd}$$

where α' and β' are monomorphisms so that $\mathrm{Im}\,\alpha' \cap \mathrm{Im}\,\beta' = \mathrm{Im}\,\alpha'\beta$.

<u>Lemma 1</u>. An algebra A is a cogenerator in a variety V if and only if A contains a copy of every subdirectly irreducible algebra of the variety V.

Proof. Necessity. Let $\mathcal{B}$ be a subdirectly irreducible algebra. Then there exist elements $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$ such that $b_1 \varrho b_2$ for every nontrivial congruence ϱ on $\mathcal{B}$. Let $F=\langle f \rangle$ be the free algebra in V generated by a single element f. Define homomorphisms $\alpha, \beta : F \to \mathcal{B}$ as extensions of the mappings $f \to b_1$ and $f \to b_2$ respectively. Clearly $\alpha \neq \beta$. Then there exists a homomorphism $\gamma : \mathcal{B} \to A$ such that $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$. If γ is not a monomorphism, we get $\gamma\alpha(f) = \gamma(b_1) = \gamma(b_2) = \gamma\beta(f)$, a contradiction.

Sufficiency. Let $\alpha, \beta : X \to Y$ be different homomorphisms. Then there exists an element $x \in X$ such that $\alpha(x) \neq \beta(x)$. Let ϱ be a maximal congruence on Y for which $\alpha(x) \not\varrho\, \beta(x)$ and let $\pi : Y \to Y/\varrho$ be canonical epimorphism. Since Y/ϱ is subdirectly irreducible, there is an injection $i : Y/\varrho \to A$. Then for $\gamma = i\pi$ we have $\gamma\alpha(x) = i\pi\alpha(x) \neq i\pi\beta(x) = \gamma\beta(x)$ and hence $\gamma\alpha \neq \gamma\beta$.

By Remark 5 in [1] we have the following

Corollary 1. If a variety V has embedding property then it is residually small if and only if all its subdirectly irreducible algebras can be embedded into a single algebra in V.

Let $F = \langle f_1; f_2 \rangle$ be a free algebra with two generators f_1 and f_2 and let $F_i = F/\varrho_i$, where ϱ_i, $i \in I$ are maximal congruences on F such that $f_1 \not\varrho_i f_2$.

Lemma 2. If a variety V has CEP, then every subdirectly irreducible algebra in V is an essential extension of (isomorphic copy of) some F_i.

Proof. Let $A \in V$ be a subdirectly irreducible algebra and let $a_1, a_2 \in A$ be elements such that $a_1 \varrho a_2$ for every non-trivial congruence ϱ on A. Let $\varphi : F \to A$ be a homomorphism for which $\varphi(f_1) = a_1$ and $\varphi(f_2) = a_2$. Then by CEP Ker φ is a maximal congruence relation on F not collapsing identifying f_1 and f_2. Hence $\varphi(F) \simeq F_i$ for some $i \in I$. It is clear that A is an essential extension of F_i.

Proposition 1. Let a variety V have CEP. Then V is residually small if and only if F_i has only a set of essential extensions for every $i \in I$.

Proof. Necessity is proved in [2, theorem 1.2].

Sufficiency. Because of Lemma 2 every subdirectly irreducible algebra in V is an essential extension of F_i, $i \in I$, there is only a set of subdirectly irreducible algebras.

Lemma 3 ([3], proposition 1.4). An algebra has a proper essential extension iff it is not an absolute retract.

Proposition 2. If a variety V has SAP, then maximal essential extensions of arbitrary algebra (if they exist) are isomorphic.

Proof. Let M_1 and M_2 be two maximal essential extensions of algebra A. By SAP there exists an algebra B containing isomorphic copies of M_1 and M_2 say M_1' and M_2', so that their intersection $M_1' \cap M_2'$ is isomorphic to $M_1 \cap M_2$. By lemma 3 there exists a retraction $\tau : B \longrightarrow M_1'$. Because of $A \subset M_1 \cap M_2$ the restriction of τ to M_2', must be a monomorphism. Hence M_1 contains an isomorphic copy of M_2. Since M_2 does not have essential extensions, it must be isomorphic to M_1.

Problem. Can the SAP condition in proposition 2 be replaced with a weaker one?

Corollary 2. Let a residually small variety V have CEP and SAP. Then an algebra A is cogenerator in V if and only if it contains an isomorphic copy of maximal essential extension of F_i for all $i \in I$.

Proof. By proposition 1 algebras F_i, $i \in I$ have maximal essential extensions. By proposition 2 they are unique (up to isomorphism). Then apply lemmas 1 and 2.

References

1. H i g g s, D., Remarks on Residually Small Varieties. Algebra Universalis, 1972, 1, 383-385.
2. T a y l o r, W., Residually small varieties. Algebra Universalis, 1972, 2, 33-52.
3. K i s s, E. W., M á r k i, L., P r ö h l e, P. and T h o l e n, W., Categorical algebraic properties. A compendium on amalgamation, congruence extension, epimorphisms, residual smallness and injectivity. Studia Sci. Math. Hungarica, 1983, 18, 79-141.

Received
15 V 1986

RESIDUAALSELT VÄIKSUSEST

P.Normak

R e s ü m e e

Kirjeldatakse komoodustajad mistahes muutkondades.Edasi vaadeldakse muutkondi, milledes mistahes algebra alamalgebratel defineeritud kongruentsid on jätkatavad kogu algebrale. Olgu ϱ_i, $i \in I$, kahe moodustajaga vaba algebra F moodustajaid eraldavate maksimaalsete kongruentside hulk. Tähistame $F_i = F/\varrho_i$. Näidatakse, et muutkond on residuaalselt väike parajasti siis, kui algebrate F_i, $i \in I$, olulised laiendid moodustavad hulga.

К РЕЗИДУАЛЬНОЙ МАЛОСТИ

П.Нормак

Р е з ю м е

Алгебра B называется естественным расширением алгебры A, если ограничение любой недиагональной конгруэнции алгебры B на алгебру A является недиагональным. Говорят, что многообразие V имеет свойство CEP, если для любого вложения алгебр $A \subset B$ в V и для любой конгруэнции на алгебре A существует ее продолжение на алгебру B. Говорят, что многообразие V имеет свойство SAP если любую диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\beta"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

можно дополнить до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, tail, "\beta"] \arrow[d, tail, "\alpha"'] & B \arrow[d, tail, "\alpha'"] \\ C \arrow[r, tail, "\beta'"] & D \end{tikzcd}$$

так, что $\mathrm{Im}\,\alpha' \cap \mathrm{Im}\,\beta = \mathrm{Im}\,\alpha'\beta$. Пусть F_i, $i \in I$ – факторалгебры свободной алгебры с двумя образующими по максимальным конгруэнциям, разделяющим образующие.

Лемма I. Алгебра A является кообразующим тогда и только тогда, когда она содержит копию любой подпрямо неразложимой алгебры.

Лемма 2. Если многообразие V имеет свойство CEP, то любая подпрямо неразложимая алгебра является существенным расширением некоторой алгебры F_i, $i \in I$.

Предложение I. Если многообразие V имеет свойство CEP, то V является резидуально малым тогда и только тогда, когда существенные расширения алгебр F_i, $i \in I$, образуют множество.

Предложение 2. Если многообразие V имеет свойство SAP, то максимальные существенные расширения любой алгебры (если они существуют) изоморфны.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 57-66.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 57-66.

МОНОИДЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ БУЛЕВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРАФОВ

У.Нуммерт
Лаборатория прикладной математики

В данной статье исследуются булевы произведения конечных графов (этому термину здесь придается несколько более узкий смысл в сравнении с [3]). На случай моноида строгих эндоморфизмов обобщается результат М.Андерсона и М.Липмана ([2]) об описании минимального графа, допускающего в качестве подгруппы своей группы автоморфизмов сплетение групп автоморфизмов двух данных графов. Для некоторого специального класса булевых произведений даются необходимые и достаточные условия для S-несжимаемости (т.е. отсутствия строгих эндоморфизмов, не являющихся автоморфизмами).

Рассматриваемые графы предполагаются неориентированными, без петель и кратных ребер. Множества вершин и ребер графа X обозначим соответственно через VX и EX. Запись x_0x_1 обозначает ребро между вершинами x_0 и x_1. Цепью в X называется последовательность $\{x_0, \dots, x_n\}$ вершин, где $x_ix_{i-1} \in EX$ при $i = 1, \dots, n$. Граф называется связным, если любые две его вершины соединены некоторой цепью. Через K_n обозначим полный граф на n вершинах (т.е. $|VK_n| = n$, и $x_0x_1 \in EK_n$ для любых $x_0, x_1 \in VK_n$); через $K_{m,n}$ - полный двудольный граф на (m,n) вершинах (т.е. $VK_{m,n} = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, и $EK_{m,n} = \{x_1x_2 : x_1 \in V_1, x_2 \in V_2\}$. На классе всех графов введем естественный частичный порядок: положим $X \leq Y$, если $VX = VY$ и $EX \subseteq EY$.

Отображение $\varphi : VX \to VX$ называется эндоморфизмом графа X, если $x_0x_1 \in EX$ влечет $\varphi x_0 \varphi x_1 \in EX$. Если же, кроме того, $x_0x_1 \in EX$ влечет и $x_0'x_1' \in EX$ для всех x_0', x_1' с $\varphi x_0' = x_0$, $\varphi x_1' = x_1$, то эндоморфизм φ называется строгим. Автоморфизмы графа суть его биективные строгие эндоморфизмы. Обозначим моноиды всех эндоморфизмов, всех строгих эндоморфизмов и группу автоморфизмов графа X соответственно через $\mathrm{End}\,X$, $\mathrm{SEnd}\,X$, $\mathrm{Aut}\,X$. Моноид всех преобразований множества A обозначим через $\mathcal{T}(A)$.

Сплетение $N \,\mathrm{wr}\, M$ моноидов $N \leq \mathcal{T}(A)$, $M \leq \mathcal{T}(B)$, как множество, есть $N \times F(A,M)$, где $F(A,M)$ множество всех отображений из A в M. Умножение в $N \,\mathrm{wr}\, M$ задается следующим образом:

$$(\varphi, f)(\psi, g) = (\varphi\psi, f_\psi g),$$

где $f_\psi g(a) = f(\psi a)\, g(a)$ для $a \in A$. Сплетение $N \,\mathrm{wr}\, M$ можно отождествить с подмоноидом в $\mathcal{T}(A \times B)$, если положить $(\varphi, f)(a, b) = (\varphi a, f(a) b)$ для $\varphi \in N$, $f \in F(A, M)$, $a \in A$, $b \in B$.

Композиция $X[Y]$ графов X, Y - это граф с $V(X[Y]) = VX \times VY$, $E(X[Y]) = \{(x_0, y_0)(x_1, y_1)$: либо $x_0 x_1 \in EX$, либо $x_0 = x_1$ и $y_0 y_1 \in EY$. Декартово произведение $X \times Y$ имеет то же множество вершин и множество ребер $E(X \times Y) = \{(x_0, y_0)(x_1, y_1)$: либо $x_0 x_1 \in EX$ и $y_0 = y_1$, либо $x_0 = x_1$ и $y_0 y_1 \in EY\}$. Очевидно, что $X \times Y \leq X[Y]$. Через $\mathcal{B}(X, Y)$ обозначим множество всех графов Z, лежащих между $X \times Y$ и $X[Y]$ (т.е. $X \times Y \leq Z \leq X[Y]$). Любой граф $Z \in \mathcal{B}(X, Y)$ назовем булевым произведением графов X и Y.

Окрестностью вершины x_0 в графе X назовем множество $\mathcal{U}(x_0) = \{x \in VX : x x_0 \in EX\}$. Заметим, что всегда $x_0 \notin \mathcal{U}(x_0)$. Очевидно, что $\rho_X = \{(x_0, x_1) : \mathcal{U}(x_0) = \mathcal{U}(x_1)\}$ является отношением эквивалентности на VX. Как обычно, $x_0 \rho_X x_1$ (или просто $x_0 \rho x_1$, если путаница исключена) означает, что $(x_0, x_1) \in \rho_X$. Далее, ρ-класс вершины x_0 обозначим через $[x_0]_\rho$. Через Δ обозначим отношение равенства, т.е. диагональ множества $VX \times VX$.

§ I. Минимальные булевы произведения графов относительно сплетения выделенных моноидов эндоморфизмов

Хорошо известно (см. например [5]), что $\mathrm{Aut}\,X \,\mathrm{wr}\, \mathrm{Aut}\,Y \leq \mathrm{Aut}\,X[Y]$ для любых (не обязательно конечных) графов X, Y. В [I] отмечено, что $\mathrm{SEnd}\,X \,\mathrm{wr}\, \mathrm{SEnd}\,Y \leq \mathrm{SEnd}\,X[Y]$ для графов X, Y

тогда и только тогда, когда либо $\varrho_X = \Delta$, либо $EY = \emptyset$.

В связи с этим представляет интерес вопрос о нахождении наименьшего булева произведения $X \circ Y$, для которого $M(X) \,\mathrm{wr}\, M(Y) \le M(X \circ Y)$, где $X \mapsto M(X)$ - отображение, сопоставляющее графу X некоторый подмоноид $M(X) \le End\, X$ (например, моноид строгих эндоморфизмов или группу автоморфизмов). Ответ для случая групп автоморфизмов получен в [2]. Ниже будет дано решение этой задачи для моноидов строгих эндоморфизмов, а также приводятся некоторые более общие утверждения.

Вначале отметим некоторые общие свойства булевых произведений. Графы X, Y далее на протяжении всей статьи предполагаются конечными.

I.I. Лемма. Пусть $N \le \mathcal{T}(VX)$, $M \le \mathcal{T}(VY)$ - любые подмоноиды, $Z \in \mathcal{B}(X, Y)$. Тогда:

а) если $N \,\mathrm{wr}\, M \le End\, Z$, то $N \le End\, X$, $M \le End\, Y$;

б) если $N \,\mathrm{wr}\, M \le SEnd\, Z$, то $N \le SEnd\, X$, $M \le SEnd\, Y$;

в) если $N \,\mathrm{wr}\, M \le Aut\, Z$, то $N \le Aut\, X$, $M \le Aut\, Y$.

Доказательство. а) Для любых $\varphi \in N$, $\psi \in M$ рассмотрим $\alpha = (\varphi, \varepsilon)$, $\beta = (1_X, f) \in N \,\mathrm{wr}\, M$, где $\varepsilon(x) = 1_Y$, $f(x) = \psi$ для всех $x \in VX$. Пусть $x_0 x_1 \in EX$, тогда $(x_0, y)(x_1, y) \in EZ$ и $\alpha(x_0, y)\alpha(x_1, y) = (\varphi x_0, y)(\varphi x_1, y) \in EZ$ для любого $y \in VY$. Но это возможно только при $\varphi x_0\, \varphi x_1 \in EX$. Аналогично, из $y_0 y_1 \in EY$ следует, что $(x, y_0)(x, y_1) \in EZ$, $\beta(x, y_0)\beta(x, y_1) = (x, \psi y_0)(x, \psi y_1) \in EZ$ и $\psi y_0\, \psi y_1 \in EY$.

б) Рассмотрим α и β такие же, как и выше. Если $x_0 = \varphi x_0'$, $x_1 = \varphi x_1'$, то $(x_0, y) = \alpha(x_0', y)$, $(x_1, y) = \alpha(x_1', y)$. Поэтому $x_0 x_1 \in EX$ влечет $(x_0, y)(x_1, y) \in EZ$, $(x_0', y)(x_1', y) \in EZ$, поскольку α - строгий эндоморфизм; и $x_0' x_1' \in EX$. Для графа Y проводим аналогичное рассуждение с использованием строгого эндоморфизма β.

в) Биективность отображения $\gamma = (\varphi, f)$, очевидно, влечет сюръективность отображения φ и инъективность отображения $f(x)$ для всех $x \in VX$. В силу конечности рассматриваемых графов это эквивалентно их биективности.

I.2. Определение. Пусть M - моноид, A - левый M-полигон. Действие M на A назовем симметрическим, если для всех $a, b \in A$ из $b \in Ma$ следует, что $a \in Mb$.

В частности, подмоноид M моноида $\mathcal{T}(A)$ всех преобразований множества A назовем симметрическим, если для любых $\varphi \in M$, $a \in A$ найдется $\psi \in M$ такой, что $\psi\varphi(a) = a$.

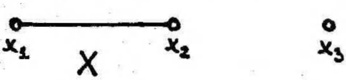
I.3. Предложение. Моноиды $\mathrm{Aut}\,X$ и $\mathrm{SEnd}\,X$ симметричны для любого графа X.

Доказательство. Симметричность группы $\mathrm{Aut}\,X$ очевидна (достаточно в определении I.2 взять $\psi = \varphi^{-1}$). Доказательство для моноида строгих эндоморфизмов опирается на следующую характеризацию $\mathrm{SEnd}\,X$:

$\mathrm{SEnd}\,X = \{ \varphi \in \mathcal{T}(VX)$: φ отображает каждый ϱ-класс в некоторый ϱ-класс, и индуцированное отображение на ϱ-классах есть автоморфизм фактор-графа $X/\varrho \}$.

Здесь X/ϱ имеет множество вершин $V(X/\varrho) = VX/\varrho$ и множество ребер $E(X/\varrho) = \{ [x_0]_\varrho [x_1]_\varrho : x_0 x_1 \in EX \}$. Другими словами, все строгие эндоморфизмы X получаются из автоморфизмов X/ϱ путем произвольной "конкретизации" их на отдельных элементах в пределах данного ϱ-класса. Теперь симметричность моноида $\mathrm{SEnd}\,X$ очевидным образом вытекает из симметричности группы $\mathrm{Aut}\,X/\varrho$.

I.4. Замечание. Моноид $\mathrm{End}\,X$ не обязан быть симметрическим. Действительно: рассмотрим, например, $X = K_2 \cup K_1$. Изолированная вершина x_3 переводится эндоморфизмом в любую вершину, но нет эндоморфизма, переводящего x_1 в x_3.



Введем теперь особый класс булевых произведений, соответствующих симметрическим моноидам преобразований на VY.

I.5. Определение. Для графов X, Y и симметрического подмоноида $M \leq \mathcal{T}(VY)$ рассмотрим булево произведение $X \circ_M Y$:

$E(X \circ_M Y) = \{ (x_0, y_0)(x_1, y_1)$: либо $x_0 = x_1$ и $y_0 y_1 \in EY$, либо $x_0 x_1 \in EX$ и $y_1 \in M y_0 \}$.

I.6. Лемма. ([2] , Теорема I.2.). Сплетение $\mathrm{Aut}\,X \,\mathrm{wr}\, \mathrm{Aut}\,Y$ является подгруппой в $\mathrm{Aut}\,(X \circ_{\mathrm{Aut}\,Y} Y)$.

Мы докажем аналогичное утверждение для моноидов строгих эндоморфизмов (это же доказательство проходит и для групп).

I.7. Лемма. а) Если $\mathrm{SEnd}\,X \,\mathrm{wr}\, \mathrm{SEnd}\,Y \leq \mathrm{SEnd}\,Z$ для некоторого булева произведения $Z \in \mathcal{B}(X, Y)$, то

(I) либо $\varrho_X = \Delta$, либо $EY = \emptyset$.

б) Если выполняется (I), то $\mathrm{SEnd}\,X \,\mathrm{wr}\, \mathrm{SEnd}\,Y$ - подмоноид в $\mathrm{SEnd}\,(X \circ_{\mathrm{SEnd}\,Y} Y)$.

Доказательство. а) Пусть $y_0 y_1 \in EY$ и $x_0 \,\varrho_X\, x_1$, $x_0 \neq x_1$. Легко проверить, что "склеивание" вершин x_0 и x_1 (т.е. отображение $\varphi : VX \to VX$: $\varphi x_0 = x_1$, $\varphi x = x$ при $x \neq x_0$) принадлежит $\mathrm{SEnd}\,X$. Следовательно, $\alpha = (\varphi, \varepsilon)$ принадлежит $SEnd\,X \operatorname{wr} SEnd\,Y$, где $\varepsilon(x) = 1_Y$ для всех $x \in VX$. Но α не является строгим эндоморфизмом Z. В самом деле, $(x_0, y_0)(x_1, y_1) \notin EZ$, т.к. $x_0x_1 \notin EX$, но с другой стороны, $\alpha(x_0, y_0)\alpha(x_1, y_1) = (x_1, y_0)(x_1, y_1) \in EZ$.

б) Пусть выполняется (I). Докажем, что любой элемент $\gamma = (\varphi, f) \in SEnd\,X \operatorname{wr} SEnd\,Y$ является строгим эндоморфизмом $Z = X \circ_{SEnd\,Y} Y$. Пусть $(x_0, y_0)(x_1, y_1) \in EZ$. Возможны два случая. Если $x_0 = x_1$ и $y_0y_1 \in EY$, то $\varphi x_0 = \varphi x_1$. Так как $f(x_0) = f(x_1) \in SEnd\,Y$, то вершины $y_0' = f(x_0)y_0$ и $y_1' = f(x_1)y_1$ смежны в Y. Если же $x_0x_1 \in EX$ и $y_0 = \psi y_1$ для некоторого $\psi \in SEnd\,Y$, то $\varphi x_0 \varphi x_1 \in EX$ и $y_0' = f(x_0)y_0 = (f(x_0)\psi\mu)y_1'$, где μ – строгий эндоморфизм графа Y, переводящий y_1' в y_1.

Далее, пусть $\gamma(t_0, \omega_0) = (x_0, y_0)$, $\gamma(t_1, \omega_1) = (x_1, y_1)$ и $(x_0, y_0)(x_1, y_1) \in EZ$. Тогда $x_0 = \varphi t_0$, $x_1 = \varphi t_1$, $y_0 = f(t_0)\omega_0$, $y_1 = f(t_1)\omega_1$. Если $x_0 = x_1$, $y_0y_1 \in EY$, то в силу (I), $t_0 = t_1$. Так как $f(t_0) = f(t_1)$ – строгий эндоморфизм Y, то $\omega_0\omega_1 \in EY$. Если $x_0x_1 \in EX$ и $y_0 = \psi y_1$ для $\psi \in SEnd\,Y$, то $t_0t_1 \in EX$ и $\omega_0 = \nu\psi f(t_1)\omega_1$, где $\nu \in SEnd\,Y$ переводит y_0 в ω_0.

Следующая теорема является основной в этом параграфе:

<u>I.8. Теорема</u>. Пусть X, Y – графы, M – симметрический подмоноид в $\mathcal{T}(VY)$, Z – некоторое булево произведение графов X и Y (т.е. $Z \in \mathcal{B}(X, Y)$). Если $1 \operatorname{wr} M \leq End\,Z$ (где $1 = \{1_X\}$), то:

а) $M \leq End\,Y$;

б) $X \circ_M Y \leq Z$.

<u>Доказательство.</u> Утверждение а) непосредственно следует из Леммы I.I.

б) Берем любое ребро $e = (x_0, y_0)(x_1, y_1) \in E(X \circ_M Y)$ и покажем, что $e \in EZ$. Если $x_0 = x_1$ и $y_0y_1 \in EY$, то $e \in E(X \times Y) \leq EZ$. Если $x_0x_1 \in EX$ и $y_0 = \psi y_1$ для некоторого $\psi \in M$, то рассмотрим $\alpha = (1_X, f) \in 1 \operatorname{wr} M \leq End\,Z$, где $f(x_0) = \psi$, $f(x) = 1_Y$ при $x \neq x_0$. Так как $(x_0, y_1)(x_1, y_1) \in E(X \times Y) \leq EZ$, то $e = \alpha(x_0, y_1)\alpha(x_1, y_1) \in EZ$.

<u>I.9. Следствие</u>. Пусть $M \leq End\,Y$ – симметрический подмоноид, $N \leq End\,X$ – любой подмоноид. Рассмотрим класс $\mathcal{W}(N, M)$ всех графов Z на множестве вершин $VZ = VX \times VY$, содержащих $X \times Y$ и удовлетворяющих условию $N \operatorname{wr} M \leq End\,Z$, с естественным упорядочением. Если $N \operatorname{wr} M \leq End\,(X \circ_M Y)$, то $X \circ_M Y$ – наименьший элемент в $\mathcal{W}(N, M)$.

1.10. Следствие. а) $X \circ_{\mathrm{Aut}\,Y} Y$ - наименьший граф в классе $\mho(\mathrm{Aut}\,X, \mathrm{Aut}\,Y)$.

б) Либо графы X, Y удовлетворяют условию (1), и тогда $X \circ_{\mathrm{SEnd}\,Y} Y$ - наименьший граф в $\mho(\mathrm{SEnd}\,X, \mathrm{SEnd}\,Y)$, либо множество $\mho(\mathrm{SEnd}\,X, \mathrm{SEnd}\,Y)$ пусто.

Доказательство вытекает из предыдущего следствия и Лемм 1.6., 1.7.

Отметим, что утверждение а) Следствия 1.10 было впервые доказано М.Андерсоном и М.Липманом ([2], Теорема 1.2).

§ 2. S-несжимаемость булевых произведений графов

Граф X называется несжимаемым, если $\mathrm{End}\,X = \mathrm{Aut}\,X$, и S-несжимаемым, если $\mathrm{SEnd}\,X = \mathrm{Aut}\,X$. В [4], а также как следствие из [1], получен следующий критерий S-несжимаемости композиций графов:

2.1. Теорема. Эквивалентны следующие условия:

(2) а) граф $X[Y]$ S-несжимаем;

(3) б) граф Y S-несжимаем; в том случае, если Y содержит изолированную вершину, граф X также S-несжимаем.

Ниже этот результат будет распространен на весьма широкий класс булевых произведений.

Для симметрического моноида $M \le \mathcal{T}(VX)$ и вершин $x_0, x_1 \in VX$ пусть $x_0 \sim_M x_1$ означает, что $x_1 \in Mx_0$ (или, что эквивалентно, $x_0 \in Mx_1$). Очевидно, что $\sim_M$ является отношением эквивалентности на VX.

2.2. Лемма. Пусть M - симметрический подмоноид моноида $\mathcal{T}(VY)$, причем отношение $\sim_M$ содержит ς_Y (т.е. $y_0 \varsigma_Y y_1$ влечет $y_0 \sim_M y_1$ для любых $y_0, y_1 \in VY$). Тогда для $(x_0, y_0)\ \varsigma_{X \circ_M Y}\ (x_1, y_1)$ необходимо и достаточно выполнение одного из следующих (взаимно исключающих) условий:

(4) а) $x_0 = x_1$, $y_0 \varsigma_Y y_1$;

(5) б) $x_0 \ne x_1$, $x_0 \varsigma_X x_1$, y_0 и y_1 изолированы;

(6) в) $\mathcal{U}(x_0) = \{x_1\}$, $\mathcal{U}(x_1) = \{x_0\}$, $\mathcal{U}(y_0) = My_1$, $\mathcal{U}(y_1) = My_0$.

Доказательство. Необходимость условий. Пусть $(x_0, y_0)\ \varsigma_{X \circ_M Y}\ (x_1, y_1)$. Покажем, что либо $x_0 \varsigma_X x_1$, либо $x_0 x_1 \in EX$ (ясно, что эти возможности взаимно исключающие). В самом деле, допустим, что в X существует вершина x такая, что $xx_0 \in EX$, но $xx_1 \notin EX$ (т.е. $x_0 \varsigma_X x_1$

не выполняется). Тогда $(x, y_0)(x_0, y_0) \in E(X \circ_M Y) = E$, и по условию должно быть $(x, y_0)(x_1, y_1) \in E$. Но это возможно лишь при $x = x_1$, т.е. $x_0 x_1 \in EX$.

Рассмотрим отмеченные выше два случая отдельно. Пусть $x_0 x_1 \in EX$. Покажем сначала, что вершины x_0 и x_1 образуют в X связную компоненту K_2. Предположим противное: пусть найдется вершина x, отличная от x_1, с $x x_0 \in EX$. Повторяя рассуждение, изложенное выше, получим, что $(x, y_0)(x_1, y_1) \in E$. Следовательно, $y_0 = \psi y_1$ для некоторого $\psi \in M$. Но тогда также $(x_0, y_0)(x_1, y_1) \in E$, что противоречит предположению $(x_0, y_0)\ \varrho_{X \circ_M Y}\ (x_1, y_1)$.

Если теперь $y y_0 \in EY$ для некоторой вершины $y \in VY$, то $(x_0, y)(x_0, y_0) \in E$, и по предположению также $(x_0, y)(x_1, y_1) \in E$. Отсюда вытекает, что $y = \psi y_1$ для некоторого $\psi \in M$, т.е. $M(y_0) \subseteq M y_1$. Обратно, если $y = \psi y_1$ для $\psi \in M$, то $(x_0, y)(x_1, y_1) \in E$, что влечет $(x_0, y)(x_0, y_0) \in E$ и $y y_0 \in EY$. Итак, $M(y_0) = M y_1$. Равенство $M(y_1) = M y_0$ проверяется аналогично.

Пусть теперь $x_0\ \varrho_X\ x_1$. Если $y y_0 \in EY$ для некоторой вершины $y \in VY$, то $(x_0, y_0)(x_0, y) \in E$ и $(x_1, y_1)(x_0, y) \in E$. Это возможно только при $x_0 = x_1$ и $y y_1 \in EY$. Итак, при $x_0 \neq x_1$ вершины y_0 и y_1 изолированы, а при $x_0 = x_1$ имеем $y_0\ \varrho_Y\ y_1$.

Достаточность условий. Пусть $(x, y)(x_0, y_0) \in E$, тогда либо $x = x_0$, $y y_0 \in EY$, либо $x x_0 \in EX$, $y = \psi y_0$ для некоторого $\psi \in M$. Рассмотрим эти возможности отдельно в каждом из случаев (4) - (6).

Случай 1: выполнено условие (4), т.е. $x_0 = x_1$, $y_0\ \varrho_Y\ y_1$. Если $x = x_0$, $y y_0 \in EY$, то $x = x_1$, $y y_1 \in EY$. Если $x x_0 \in EX$, $y = \psi y_0$, то $x x_1 \in EX$ и $y = \psi \varphi y_1$, где $\varphi \in M$ пересылает y_1 в y_0 (такой элемент в M найдется, поскольку $y_0\ \varrho_Y\ y_1$ влечет $y_0 \sim_M y_1$).

Случай 2: выполнено условие (5), т.е. $x_0 \neq x_1$, $x_0\ \varrho_X\ x_1$, y_0 и y_1 изолированы. Здесь единственной возможностью является $x x_0 \in EX$, $y = \psi y_0$. Поэтому, как и выше, $x x_1 \in EX$, $y = \psi \varphi y_1$ (отметим, что все изолированные вершины графа образуют один ϱ -класс).

Случай 3: выполнено условие (6). Если $x = x_0$, $y y_0 \in EY$, то $x x_1 \in EX$, $y \in M y_1$. Обратно, из $x x_0 \in EX$, $y \in M y_0$ следует, что $x = x_1$, $y y_1 \in EY$.

Итак, в любом случае мы получили, что $(x, y)(x_1, y_1) \in E$. Лемма доказана.

2.3. Замечание. Моноид M удовлетворяет условию Леммы 2.2, если, например, $M \geq \mathrm{Aut}\, Y$.

Если графы X, Y и моноид M таковы, что ни для каких вершин условие (6) не выполняется, то (3) дает необходимое и достаточное условие также для S-несжимаемости графа $X \circ_M Y$. Точнее, верна следующая

2.4. Теорема. Пусть X, Y графы, M симметрический подмоноид в $\mathcal{T}(VY)$. Если отношение $\sim_M$ содержит ϱ_Y, то выполнение условия (3) и невыполнение ни для каких вершин $x_0, x_1 \in VX$, $y_0, y_1 \in VY$ условия (6) необходимо и достаточно для S-несжимаемости графа $X \circ_M Y$.

При любом M эти условия остаются достаточными.

Доказательство. а) Пусть выполняется условие (3) и ни для каких вершин графов X, Y не выполняется условие (6). В частности, из S-несжимаемости графа Y следует, что $\varrho_Y = \Delta$ (иначе "склеивание" вершин одного ϱ_Y-класса дало бы неинъективный строгий эндоморфизм графа Y). Поэтому любой симметрический подмоноид $M \leq \mathcal{T}(VY)$ удовлетворяет приведенному условию. Теперь S-несжимаемость графа $X \circ_M Y$ легко вытекает из Леммы 2.2. В самом деле, если $(x_0, y_0)\ \varrho_{X \circ_M Y}\ (x_1, y_1)$, то должно выполняться либо (4), либо (5), но оба эти возможности исключены в силу (3).

б) Пусть теперь моноид M таков, что ϱ_Y содержится в $\sim_M$, и граф $X \circ_M Y$ S-несжимаем. Ясно, что условие (3) эквивалентно тому, что ни для каких вершин не выполнены условия (4) и (5). Для завершения доказательства остается применить Лемму 2.2.

2.5. Следствие. Для следующих булевых произведений $Z \in \mathcal{B}(X, Y)$ условие (3) эквивалентно S-несжимаемости графа Z:

а) $Z = X[Y]$ (Теорема 2.I., здесь можно взять $M = \mathcal{T}(VY)$ и условие (6) в силу $y \notin \mathcal{U}(y)$ не выполняется);

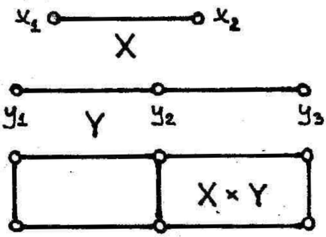
б) $Z = X \circ_{\mathrm{Aut}\, Y} Y$, если граф X не содержит компоненту связности K_2 (например, X связен и $|VX| \geq 3$.

в) $Z = X \circ_{\mathrm{SEnd}\, Y} Y$ при тех же условиях на X, что и в б).

2.6. Замечание. Условие $Z = X[Y]$, очевидно, равносильно тому, что $Z = X \circ_M Y$, где M транзитивно действует на Y.

Приведем теперь пример, показывающий, что ограничения на M в Теореме 2.4 существенны.

2.7. Пример. Пусть $X = K_2$, $Y = K_{1,2}$, $M = \{1_Y\}$. Легко проверить, что граф $X \circ_M Y = X \times Y$ S-несжимаем, хотя граф Y таковым не является (например, φ будет строгим эндоморфизмом Y, если положить $\varphi y_1 = \varphi y_3 = y_3$, $\varphi y_2 = y_2$). Это объясняется тем, что $\sim_M$ не содержит ϱ_Y.



2.8. Замечание. Все результаты § I, кроме Леммы I.I в) и части Предложения I.3, касающейся моноида $SEnd\ X$, а также Лемма 2.2 без изменений переносятся на случай бесконечных графов X, Y.

Литература

I. Нуммерт У., О моноиде строгих эндоморфизмов сплетения графов. XYIII Всесоюзная алгебраическая конференция. Тезисы сообщений. Часть II. Кишинев, 1985, 69.

2. Anderson M., Lipman M., Wreath products of graphs. Graphs and Applications. Proceedings of the First Colorado Symposium on Graph Theory. New York, 1985, 23-40.

3. Harary F., Wilcox G. Boolean operations on graphs. Math. Scand., 1967, 20, 1, 41-54.

4. Knauer U. Unretractive and S-unretractive joins and lexicographic products of graphs. J. Graph Theory, to appear.

5. Sabidussi G., The composition of graphs. Duke Math. J., 1959, 26, 4, 693-696.

Поступило
I7 IУ 1986

GRAAFIDE BOOLE'I KORRUTISTE ENDOMORFISMIDE MONOIDID

U.Nummert

R e s ü m e e

Artiklis leitakse lõplike graafide mõningate Boole'i korrutiste S-ahendamatuse kriteeriumid ja kirjeldatakse vähim graaf, mis sisaldab kahe antud graafi otsekorrutist ja mille rangete endomorfismide monoidis nende graafide ran-

gete endomorfismide monoidide põimik on alammonoidiks.

ENDOMORPHISM MONOIDS OF BOOLEAN PRODUCTS OF GRAPHS

U.Nummert

S u m m a r y

A Boolean product of two graphs X and Y is defined as any graph on the vertex set $VX \times VY$ lying between the Cartesian product $X \times Y$ and the composition $X[Y]$ under natural inclusion.

The paper describes in terms of Boolean products the minimal graph containing the Cartesian product $X \times Y$ and admitting the wreth product of the monoids of strong endomorphisms of X and Y as a submonoid of its monoid of strong endomorphisms. We prove also a theorem giving criteria for some Boolean products of two finite graphs being S-unretractive, i.e. having no strong endomorphisms except automorphisms.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 67-73.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 67-73.

О ВЫРАЗИМОСТИ В ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЯХ С ЛОГИКОЙ РЕАЛИЗУЕМОСТИ В МИНИМАЛЬНОЙ СИГНАТУРЕ

Р.Пранк
Кафедра программирования

I. Введение. Объектами исследования настоящей статьи являются введенные в [5] элементарные теории с логикой реализуемости по Клини. Изучается следующее явление: в некоторых (но не во всех) теориях с логикой реализуемости можно нетривиальные предикаты выразить через равенство. Приведем сначала основные определения и обозначения (для рекурсивных функций и рекурсивно перечислимых множеств терминогия и обозначения взяты из монографии Х.Роджерса [4], а для нумерованных моделей - из книг Ю.Л.Ершова [I] и [2]).

Пусть (S, σ_0, ν) - нумерованная модель, где S - основное множество, σ_0 - сигнатура и $\nu: N \to S$ - нумерующая функция (не обязательно всюду определенная). Пусть σ_1 - сигнатура, полученная из σ_0 добавлением константных символов ν_k $(k \in Arg\ \nu)$ для обозначения $\nu(k) \in S$ а $\mathfrak{M}_\nu$ - модель, полученная из $\mathfrak{M} = (S, \sigma_0)$ обогащением сигнатуры до σ_1. Определим отношение $e \circledR \mathfrak{A}$ (натуральное число e реализует замкнутую формулу $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ_1):

I. Если P - n-местная предикатная буква из σ_1, а $T_1, \ldots, T_n$ - постоянные термы σ_1, то

$$e \circledR P(T_1, \ldots, T_n) \rightleftharpoons e = 0 \ \& \ \mathfrak{M}_\nu \models P(T_1, \ldots, T_n).$$

2. Для пропозициональных связок повторяется определение Клини ([3]).

3. Если $\mathfrak{A}(x)$ - формула σ_1 с одной свободной переменной x, то

1) $e \circledR \exists x \mathfrak{A}(x) \rightleftharpoons e = 2^c \cdot 3^d \ \& \ c \circledR \mathfrak{A}(\nu_d)$,

2) $e \circledR \forall x \mathfrak{A}(x) \rightleftharpoons (\forall x \in Arg\ \nu)[\varphi_e(x) \circledR \mathfrak{A}(\nu_x)]$.

Элементарной теорией с логикой реализуемости нумерованной модели (S, σ_0, ν) называется множество всех реализуемых замкнутых формул сигнатуры σ_0, обозначаемое через

$Th_o^n(S, \sigma_o, \nu)$. Предикат $\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n)$, определенный на S, называется выразимым в теории $Th_o^n(S, \sigma_o, \nu)$, если существует такая формула $\mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ_o, что для любых замкнутых термов $T_1, \ldots, T_n$ сигнатуры σ_1 верно

$$\textcircled{n}\, \mathfrak{A}(T_1, \ldots, T_n) \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\nu \models \mathcal{P}(T_1, \ldots, T_n).$$

Если нумерованная модель (S, σ_o, ν) является сильно конструктивной, то реализуемость совпадает с истинностью в классическом смысле и выразимость в $Th_o^n(S, \sigma_o, \nu)$ совпадает с выразимостью в классической элементарной теории модели (S, σ_o). В общем случае выразимость в $Th_o^n(S, \sigma_o, \nu)$ может существенно отличаться от выразимости в классической теории. Известно описание выразимости для двух структур.

Пусть $\mathcal{E}$ – семейство всех рекурсивно перечислимых и $\mathcal{R}$ – семейство всех рекурсивных подмножеств N, σ_o – сигнатура $\langle \phi, N; \cap, \cup, '; => \rangle$ или $\langle =, \subseteq \rangle$, π – постовская нумерация $\mathcal{E}$ и χ – нумерация $\mathcal{R}$ характеристическими индексами (т.е. $\chi(n) = \{x \mid \varphi_n(x) = 1\}$ и $Arg\, \chi = \{n \mid \varphi_n$ – характеристическая функция$\}$). Тогда:

I. В $Th_o^n(\mathcal{E}, \sigma_o, \pi)$ выразимы все рекурсивно инвариантные арифметические на индексах Поста предикаты ([7], теор. 4.I).

2. В $Th_o^n(\mathcal{R}, \sigma_o, \chi)$ выразимы предикаты $\mathcal{P}(x_1, \ldots, x_n)$, которые являются булевыми комбинациями унарных предикатов $\mathcal{P}_i(|T_1(x_1, \ldots, x_n)|)$, где T_i – термы, $|A|$ обозначает мощность множества A и $\mathcal{P}_i$ имеет конечную или коконечную область истинности в $\{0, 1, \ldots, \omega\}$ ([6], теор.3.6). Последнее означает, что в конструктивной теории $\mathcal{R}$ выразимы предикаты, которые выразимы в классической теории $\mathcal{R}$ при сигнатуре, расширенной предикатом " A конечно".

Исследуем теории семейств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{R}$ в минимальной сигнатуре $\langle = \rangle$, состоящей только из символа для предиката равенства. Для любого S всякое взаимно-однозначное отображение S на S является автоморфизмом структуры $(S, \langle = \rangle)$. Это значит, что в классической теории $(S, \langle = \rangle)$ выразимы только предикаты $P(x_1, \ldots, x_n)$, которые являются булевыми комбинациями из предикатов " $x_i = x_j$ " ($i, j = 1, \ldots, n$). В конструктивной элементарной теории минимальной сигнатуры может выражаться существенно больше предикатов. Примеры $\mathcal{E}$ и $\mathcal{R}$ покажут возможные границы этого явления.

2. Теория рекурсивно перечислимых множеств.

Теорема I. Предикат " $A \subseteq B$ " выразим в $Th_0^n(\mathcal{E}, <=>, \pi)$.

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{A}(A, B) \rightleftharpoons \neg(A = B) \ \& \ \forall x y [\neg\neg(x = A \vee x = B) \ \&$$

$$\& \ \neg\neg(y = A \vee y = B) \ \& \ \neg\neg(x = A \vee y = A) \supset (x = A \vee y = A)].$$

Докажем, что $(\mathrm{n})\ \mathfrak{A}(\pi_a, \pi_b) \Leftrightarrow \pi_a \nsubseteq \pi_b$.

Из неинформативности реализаций атомарных и негативных формул вытекает, что реализуемость второго члена конъюнкции равносильна существованию ЧРФ $f(x, y)$ со следующим свойством: если

I) каждый из аргументов x и y является номером какого-либо из множеств π_a и π_b и

2) хотя бы один из них - номер π_a, то

3) $!f(x,y)$ и $f(x,y) \in \{0,1\}$ и

4) $(f(x,y)=0 \Rightarrow \pi_x = \pi_a) \ \& \ (f(x,y)=1 \Rightarrow \pi_y = \pi_a)$.

Пусть $\pi_a \nsubseteq \pi_b$. Тогда $\pi_a \neq \pi_b$ и первый член конъюнкции реализуем. Для доказательства реализуемости второго члена фиксируем число $z_0 \in \pi_a \setminus \pi_b$ и опишем алгоритм вычисления $f(x,y)$ для любых x, y. Алгоритм перечисляет симультанно π_x и π_y. Если на некотором шаге перечисления выдается число z_0, то полагаем

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если получено " } z_0 \in \pi_x \text{ "} \\ \text{I}, & \text{если получено " } z_0 \in \pi_y \text{ ".} \end{cases}$$

Если x и y удовлетворяют 2), то гарантировано получение z_0 и выполняется 3). Если верно и I), то z_0 может быть получено только как элемент множества, равного π_a т.е. выполняется также 4). Из реализуемости обоих членов конъюнкции получим $(\mathrm{r})\ \mathfrak{A}(\pi_a, \pi_b)$.

Докажем обратную импликацию. Пусть $\pi_a \subseteq \pi_b$. Покажем, что тогда $(\not{\mathrm{r}})\ \mathfrak{A}(\pi_a, \pi_b)$. Если $\pi_a = \pi_b$, то $\mathfrak{A}(\pi_a, \pi_b)$ нереализуема из-за нереализуемости первого члена. Рассмотрим случай $\pi_a \subset \pi_b$ Можно построить ОРФ g и h такие, что

$$\neg !\varphi_i(i) \Rightarrow \pi_{g(i)} = \pi_{h(i)} = \pi_a,$$

$$!\varphi_i(i) \ \& \ \varphi_i(i) = 0 \Rightarrow \pi_{g(i)} = \pi_a \ \& \ \pi_{h(i)} = \pi_b,$$

$$!\varphi_i(i) \ \& \ \varphi_i(i) > 0 \Rightarrow \pi_{g(i)} = \pi_b \ \& \ \pi_{h(i)} = \pi_a.$$

При любом i пара $(g(i), h(i))$ удовлетворяет условиям I) и 2). Если реализуем второй член формулы $\mathfrak{A}(\pi_a, \pi_b)$, то множество $\{i \mid f(g(i), h(i)) = 0\}$ оказывается рекурсивным множеством, отделяющим $\{i \mid \varphi_i(i) = 0\}$ и $\{i \mid \varphi_i(i) = 1\}$, что невозможно. Следовательно, второй член, а также вся формула $\mathfrak{A}(\pi_a, \pi_b)$ нереализуемы.

Доказанное нами утверждение о реализуемости $\mathfrak{A}(\pi_a, \pi_b)$ означает, что формула $\mathfrak{A}(A, B)$ выражает предикат "$A \nsubseteq B$". Отсюда получим, что формула $\neg\mathfrak{A}(A, B)$ выражает "$A \subseteq B$". Теорема доказана.

Из теоремы I и описания выразимых предикатов для теории $Th_o^r(\mathcal{E}, \langle =, \subseteq \rangle, \pi)$ получим

<u>Следствие</u>. В $Th_o^r(\mathcal{E}, \langle = \rangle, \pi)$ выразимы все рекурсивно инвариантные арифметические на индексах Поста предикаты.

Таким образом, уже в минимальной сигнатуре выразимы фактически все предикаты содержательной теории рекурсивно перечислимых множеств. Аналогичный результат о максимальной выразимости можно доказать для теории частично рекурсивных функций с нумерацией Клини $\{\varphi_i\}$.

В третьей части статьи покажем, что выразимость других предикатов через равенство не является универсальным свойством теорий с логикой реализуемости.

3. <u>Теория рекурсивных множеств</u>. В теории рекурсивных множеств при сигнатуре $\langle =, \subseteq \rangle$ переход от классической семантики к конструктивной привел за собой некоторое расширение класса выразимых предикатов. Оказывается, что при минимальной сигнатуре класс выразимых предикатов вообще не расширяется.

<u>Теорема 2</u>. Если определенный на $\mathcal{R}$ предикат $\mathcal{P}$ выразим в $Th_o^r(\mathcal{R}, \langle = \rangle, \chi)$, то $\mathcal{P}$ выразим в классической элементарной теории $Th_o(\mathcal{R}, \langle = \rangle)$.

<u>Доказательство</u> теоремы начинаем со следующей леммы.

<u>Лемма I</u>. Существует ОРФ $f(m, a, b, x)$ такая, что если $m \geqslant 1$, $a = \langle a_1, \dots, a_m \rangle$, $b = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$, где $\varphi_{a_1}, \dots, \varphi_{a_m}, \varphi_{b_1}, \dots, \varphi_{b_m}$ и φ_x являются характеристическими функциями, причем для $1 \leqslant i, j \leqslant m$ верно

$$R_{a_i} = R_{a_j} \iff R_{b_i} = R_{b_j},$$

то $\varphi_{f(m,a,b,x)}$ – характеристическая функция, причем для $1 \leqslant i \leqslant m$ верно

$$R_{f(m,a,b,x)} = R_{b_i} \iff R_x = R_{a_i}. \qquad \text{(I)}$$

<u>Доказательство</u>. Покажем, как вычисляется значение $\varphi_{f(m,a,b,x)}(z)$.

Алгоритм пользуется значениями $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m, x$ и z и данными о вычислении $\varphi_{f(m,a,b,x)}(0), \dots$

$\ldots, \varphi_{f(m,a,b,x)}(z-1)$. В процессе вычисления находятся

$$\varphi_{a_1}(v), \ldots, \varphi_{a_m}(v), \varphi_x(v) \tag{2}$$

для $v = 0,1,2,\ldots$ и, если при некотором v получено $\varphi_{a_i}(v) \neq \varphi_x(v)$, то алгоритм заключает, что $R_{a_i} \neq R_x$.

Опишем получение $\varphi_{f(m,a,b,x)}(z)$, если предыдущие значения уже вычислены.

Этап I. Вычисляется (2) до значения $v = z$. Если в результате этого получено, что для всех $i = 1,\ldots,m$ верно $R_x \neq R_{a_i}$, то полагают

$$\varphi_{f(m,a,b,x)}(z) = \begin{cases} 1-\varphi_{b_i}(z), \text{ где } i = \min\{j \mid \varphi_{f(m,a,b,x)}|_{z-1} = \varphi_{b_j}|_{z-1}\}, \\ 0, \text{ если такого } j \text{ не существует.} \end{cases}$$

В противном случае выполняется

Этап 2. Пусть $B_k = \{i \mid \varphi_{b_i}(z) = k\}$ $(k = 0, 1)$. Если для некоторого k верно $B_k = \emptyset$ то полагают

$$\varphi_{f(m,a,b,x)}(z) = 1-k.$$

Если оба B_k непустые, то вычисление (2) продолжается для новых v, пока для $k = 0$ или $k = 1$ и для всех $i \in B_k$ не получено $R_x \neq R_{a_i}$. Полагают

$$\varphi_{f(m,a,b,x)}(z) = 1-k.$$

Покажем, что в предположениях леммы этап 2 не может работать бесконечно. Для произвольных $i \in B_0$ и $j \in B_1$ имеет место $R_{b_i} \neq R_{b_j}$ и, соответственно, $R_{a_i} \neq R_{a_j}$. Следовательно, множество R_x не может совпадать одновременно с R_{a_i} и R_{a_j}, где $i \in B_0$ и $j \in B_1$; хотя бы для одного значения k верно $(\forall i \in B_k)[R_x \neq R_{a_i}]$. В процессе вычисления (2) для $v = 0,1,2,\ldots$ все эти неравенства когда-нибудь будут получены и выдается результат.

Убедимся, что выполняется (I). Если при некотором i верно $R_x = R_{a_i}$, то для всех z значение $\varphi_{f(m,a,b,x)}(z)$ выбирается на этапе 2 и будет равным $\varphi_{b_i}(z)$. Если $R_x \neq R_{a_i}$ для всех i, то при некотором значении v это достигается на этапе I и выбор $\varphi_{f(m,a,b,x)}(z)$ для следующих z дает $R_{f(m,a,b,x)} \neq R_{b_i}$ для всех i.

По описанию вычисления $\varphi_{f(m,a,b,x)}(z)$ можно построить ОРФ f. Лемма доказана.

В классической теории минимальной сигнатуры $Th_c(R,<=>)$ из выразимых предикатов $\mathcal{P}(x_1,\ldots,x_n)$ наименьшую область истинности имеют совершенные элементарные конъюнкции, составленные из атомов вида $x_i = x_j$ $(1 \leq i, j \leq n)$. Следующая лемма показывает, что в конструктивной теории $Th_c^{\tau}(R,<=>,\lambda)$

области реализуемости формул являются также объединениями областей истинности таких конъюнкций.

Лемма 2. Пусть $\mathfrak{A}(\mathcal{X}_1,\dots,\mathcal{X}_n)$ - формула минимальной сигнатуры и для множеств $R_{a_1},\dots,R_{a_n}, R_{b_1},\dots,R_{b_n}$ выполняется

$$R_{a_i} = R_{a_j} \iff R_{b_i} = R_{b_j} \quad (i,j=1,\dots,n).$$

Тогда в $Th_c^n(\mathcal{R}, <=>, \mathcal{X})$

$$\textcircled{r}\,\mathfrak{A}(R_{a_1},\dots,R_{a_n}) \iff \textcircled{r}\,\mathfrak{A}(R_{b_1},\dots,R_{b_n}).$$

Доказательство леммы состоит в построении реализации одной формулы по реализации другой. Это можно делать стандартной индукцией по построению формулы $\mathfrak{A}$, причем алгоритмы вычисления реализаций подформул переносятся применением функции f из леммы I к аргументам и значениям.

Для завершения доказательства теоремы 2 остается отметить, что для каждого n существует лишь конечное число элементарных конъюнкций и всевозможные их дизъюнкции выразимы как в конструктивной, так и в классической теории.

Литература

I. Ершов Ю. Л., Теория нумераций, 3. Новосибирск, 1974.

2. Ершов Ю. Л., Проблемы разрешимости и конструктивные модели. Москва, 1980.

3. Клини С. К., Введение в метаматематику. Москва, 1957.

4. Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и рекурсивная вычислимость. Москва, 1972.

5. Пранк Р., Элементарные теории с логикой реализуемости для нумерованных моделей. Тезисы конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики". Тарту, 1980, 5I-52.

6. Пранк Р., Выразимость в элементарной теории рекурсивных множеств с логикой реализуемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 500, II9-I29.

7. Пранк Р. К., Выразимость в элементарной теории рекурсивно перечислимых множеств с логикой реализуемости. Алгебра и логика. 198I, 20, № 4, 427-439.

Поступило
I5 У 1986

VÄLJENDATAVUSEST REALISEERITAVUSLOOGIKAGA MINIMAALSE SIGNATUURIGA ELEMENTAARTEOORIATES

R.Prank

R e s ü m e e

Tähistagu $\mathcal{E}$ ja $\mathcal{R}$ naturaalarvude hulga rekursiivselt loetletavate ja rekursiivsete alamhulkade peret, olgu π ja χ nende perede numeratsioonid vastavalt Posti ja karakteristlike indeksitega ning $\langle = \rangle$ signatuur, mis koosneb ainult ühest predikaatsümbolist võrduse tähistamiseks.

Nummerdatud mudeli $(\mathcal{E}, \langle = \rangle, \pi)$ realiseeritavusloogikaga elementaarteoorias on väljendatav predikaat „$A \subseteq B$", mistõttu siin saab võrduse kaudu väljendada kõiki aritmeetilisi rekursiivselt invariantseid predikaate. Seevastu mudeli $(\mathcal{R}, \langle = \rangle, \chi)$ korral ühtib väljendatavus realiseeritavusloogikaga teoorias väljendatavusega klassikalises teooriaе.

ON THE EXPRESSIBILITY IN ELEMENTARY THEORIES WITH REALIZABILITY LOGIC IN MINIMAL SIGNATURE

R.Prank

S u m m a r y

Let $\mathcal{E}$ be the lattice of recursively enumerable subsets and $\mathcal{R}$ the Boolean algebra of recursive subsets of N, π - enumeration of $\mathcal{E}$ by Post indices, χ - enumeration of $\mathcal{R}$ by characteristic indices and $\langle = \rangle$ the minimal signature containing only the predicate letter for equality.

Theorem 1. The predicate "$A \subseteq B$" is expressible in the theory of $(\mathcal{E}, \langle = \rangle, \pi)$ with realizability logic.

By results of [7] it implies that any arithmetical recursively invariant predicate is expressible.

Theorem 2. If the predicate $\mathcal{P}$ defined on $\mathcal{R}$ is expressible in the theory of $(\mathcal{R}, \langle = \rangle, \chi)$ with realizability logic then $\mathcal{P}$ is expressible in the classical elementary theory of $(\mathcal{R}, \langle = \rangle)$.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 74-80.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 74-80.

О САМОИНЪЕКТИВНЫХ СПРАВА ПОЛУГРУППАХ

Х.Пяэва
Кафедра алгебры и геометрии

В настоящей статье дается ответ на вопрос, когда слабо самоинъективная справа полугруппа является самоинъективной справа (теорема 5). Пользуясь этим результатом и теоремами 2.6 и 3.II из [5], мы получим описание самоинъективных справа правоинверсных полугрупп. Как следствие получается теорема 8 из [4] об описании самоинъективных справа полугрупп идемпотентов, являющихся цепями своих $\mathcal{R}$-классов. Статья завершается теоремой о том, что подполугруппа идемпотентов правоинверсной самоинъективной справа полугруппы самоинъективна справа.

В данной работе мы пользуемся определениями и обозначениями из [5]. Все понятия, которые не определены, можно найти в [I] или [3].

Полугруппа S называется самоинъективной справа, если для любого правого S-полигона B, для любого $A \subseteq B_S$ и для любого $\varphi \in Hom_S(A,S)$ существует $\psi \in Hom_S(B,S)$, который продолжает φ. Полугруппа S называется слабо самоинъективной справа, если для любого $I \subseteq S_S$ и для любого $\varphi \in Hom_S(I,S)$ существует элемент $z \in S$ такой, что $\varphi(a) = za$ для всех $a \in I$.

<u>Предложение I</u>. Полугруппа S является слабо самоинъективной справа тогда и только тогда, когда S содержит левый единичный элемент и для любых $I \subseteq S_S$ и $\varphi \in Hom_S(I,S)$ существует $\psi \in Hom_S(S,S)$, который продолжает φ.

Доказательство. Учитывая лемму 3.3 из [8], достаточно показать, что слабо самоинъективная справа полугруппа содержит левую единицу. Действительно, так как $S \hookrightarrow S_S$, для тождественного S-гомоморфизма $\varphi \in Hom_S(S,S)$ существует элемент $z \in S$ такой, что $s = \varphi(s) = zs$ для всех $s \in S$, т.е. z - левая единица полугруппы S. Предложение доказано.

Отметим, что в случае, когда S - моноид, предложение I является частным случаем леммы 3.3 из [8].

Поскольку, по лемме I.3 из [9], самоинъективная справа полугруппа содержит левую единицу, мы имеем следующее

Следствие 2. Каждая самоинъективная справа полугруппа является слабо самоинъективной справа.

Обратное не всегда имеет место, как показывает пример из [7]: неполная цепь с единицей является слабо самоинъективной, но не является самоинъективной. Как известно, по критерию Бера (см. [2], теорема 5.7.I), понятия самоинъективности справа и слабой самоинъективности справа для колец совпадают.

Теперь дадим ответ на вопрос, когда слабо самоинъективная справа полугруппа является самоинъективной справа.

Пусть S - полугруппа, $I \hookrightarrow S_S$, $s,t,q \in S$ и

$$Q_s = Q_s(I) \doteq \{u \in S^1 \mid su \in I\}.$$

Определим бинарное отношение $\rho = \rho(I,q)$ на полугруппе S следующим образом:

$$s\rho t \overset{def}{\Longleftrightarrow} Q_s(I) = Q_t(I) \text{ и } qsu = qtu \text{ для всех } u \in Q_s.$$

Лемма 3. Отношение ρ является правой конгруэнцией на полугруппе S.

Доказательство. См. доказательство леммы 3(а) из [4].

Лемма 4. Пусть S - полугруппа, $I \hookrightarrow S_S$ и $q, z \in S$. Тогда из того, что $qa = za$ для всех $a \in I$, следует равенство $\rho(I,q) = \rho(I,z)$.

Доказательство. Пусть $(s,t) \in \rho(I,q)$. Если $u \in Q_s(I) = Q_t(I)$, то $su, tu \in I$ и $qsu = qtu$, следовательно

$$zsu = qsu = qtu = ztu,$$

т.е. $(s,t) \in \rho(I,z)$. Следовательно, $\rho(I,q) \leq \rho(I,z)$. Аналогично доказывается обратное неравенство. Лемма доказана.

Теорема 5. Полугруппа S является самоинъективной справа тогда и только тогда, когда

I) S содержит левый нулевой элемент и

2) для любого $I \hookrightarrow S_S$ и для любого $\varphi \in Hom_S(I,S)$ существует элемент $q \in S$ такой, что

(а) $\varphi(a)=qa$ для всех $a\in I$ и

(б) из того, что $(s,t)\in\rho(I,q)$, следует равенство $qs=qt$ для $s,t\in S$.

<u>Доказательство. Необходимость</u>. Пусть S - самоинъективная справа полугруппа. По лемме I.3 из [9] в полугруппе S существует левый нуль. Пусть $I\subseteq S_S$ и $\varphi\in Hom_S(I,S)$. По следствию 2 S слабо самоинъективна справа. Следовательно, существует элемент $z\in S$ такой, что $\varphi(a)=za$ для всех $a\in I$. Пусть $\rho=\rho(I,z)$ и

$$\pi:\begin{cases} S\longrightarrow S/\rho\\ s\longmapsto \bar{s}\end{cases}$$

- естественная проекция S-полигона S на S/ρ. Тогда $\pi(I)\subseteq (S/\rho)_S$. Определим отображение

$$\xi:\begin{cases}\pi(I)\longrightarrow S\\ \bar{a}\longmapsto za.\end{cases}$$

Пусть $\bar{a}_1=\bar{a}_2\in\pi(I)$. По определению ρ имеем $za_1u=za_2u$ для каждого $u\in Q_{a_1}(I)=Q_{a_2}(I)=S^1$. Выбирая $u=1\in S^1$, мы получим $za_1=za_2$, т.е. определение ξ корректно. Очевидно, $\xi\in Hom_S(\pi(I),S)$. Из самоинъективности справа полугруппы S следует существование элемента $\xi'\in Hom_S(S/\rho,S)$, который является продолжением S-гомоморфизма ξ. Пусть $q\doteq\xi'(\bar{h})$, где $h\in S$ - левая единица, существующая по лемме I.3 из [9]. Тогда имеют место равенства

$$qa=\xi'(\bar{h})a=\xi'(\bar{h}a)=\xi'(\overline{ha})=\xi'(\bar{a})=\xi(\bar{a})=za,$$

следовательно $\varphi(a)=qa$ для всех $a\in I$. Пусть $(s,t)\in\rho(I,q)$ для $s,t\in S$. Поскольку, по лемме 4, $\rho(I,z)=\rho(I,q)$, мы получаем равенства

$$qs=\xi'(\bar{h})s=\xi'(\bar{h}s)=\xi'(\overline{hs})=\xi'(\bar{s})=\xi'(\bar{t})=$$
$$=\xi'(\overline{ht})=\xi'(\bar{h}t)=\xi'(\bar{h})t=qt.$$

<u>Достаточность</u>. Так как полугруппа S содержит левый нуль, мы можем для доказательства самоинъективности справа полугруппы S пользоваться теоремой I из [6], по которой полугруппа, содержащая левый нуль и являющаяся инъективной справа относительно вложений в циклические правые S-полигоны, самоинъективна справа. Пусть pS - произвольный циклический правый S-полигон и $A\subseteq(pS)_S$. Пусть $I\doteq\{s\in S\mid ps\in A\}$. Легко убедиться, что $I\subseteq S_S$. Пусть $x\in A$. Тогда существует $s\in S$ такой, что $x=ps$. По определению I мы имеем $s\in I$, следовательно, $A\subseteq pI$. Обратное включение следует из определения I. Мы получаем, что $A=pI$. Пусть $\varphi\in Hom_S(pI,S)$. Определим отображение:

$$\lambda : \begin{cases} I \to S \\ a \mapsto \varphi(pa). \end{cases}$$

Если $a_1 = a_2 \in I$, то $pa_1 = pa_2$ и, следовательно $\varphi(pa_1) = \varphi(pa_2)$, т.е. определение λ корректно. Очевидно $\lambda \in Hom_S(I, S)$. По предположению существует элемент $q \in S$ такой, что

$$\varphi(pa) = \lambda(a) = qa$$

для любого $a \in I$. Определим отображение

$$\psi : \begin{cases} pS \to S \\ ps \mapsto qs. \end{cases}$$

Пусть $ps = pt$ для $s, t \in S$. Если $u \in Q_s = Q_s(I)$, то $ptu = psu \in A$ и, по определению правого идеала I, мы имеем $tu \in I$, т.е. $u \in Q_t = Q_t(I)$. Значит, $Q_s \subseteq Q_t$. Аналогично доказывается, что $Q_t \subseteq Q_s$, следовательно $Q_s = Q_t$. Если теперь $u \in Q_s = Q_t$, то $su, tu \in I$ и

$$qsu = \varphi(psu) = \varphi(ptu) = qtu.$$

Мы получим, что $(s,t) \in \rho(I, q)$. По предположению 2(б) имеет место равенство $qs = qt$. Пользуясь этим, мы имеем равенство $\psi(ps) = \psi(pt)$, т.е. определение ψ корректно. Очевидно, $\psi \in Hom_S(pS, S)$ и ψ является продолжением S-гомоморфизма φ. По теореме I из [6] S самоинъективна справа. Теорема доказана.

<u>Следствие 6</u>. Слабо самоинъективная справа полугруппа S является самоинъективной справа тогда и только тогда, когда S содержит левый нуль и среди элементов $z \in S$, существующих по определению слабой самоинъективности справа полугруппы S для $I \trianglelefteq S_S$ и $\varphi \in Hom_S(I, S)$, найдется $q \in S$ такой, что из $(s,t) \in \rho(I, q)$ следует равенство $qs = qt$.

Теорема 5 и теоремы 2.6 и 3.II из [5] дают нам описания самоинъективных справа правоинверсных полугрупп.

<u>Следствие 7</u> ([4] , теорема 8). Пусть E - полугруппа идемпотентов, являющаяся цепью своих $\mathcal{R}$-классов. Полугруппа E самоинъективна справа тогда и только тогда, когда

(а) E содержит левый нуль,

(б) E является слабо самоинъективной справа и

(в) для каждого $I \trianglelefteq E_E$ существует $r \in E$ такой, что $r = rs$ для любого $s \in E \setminus I$ и $a = ra$ для любого $a \in I$.

<u>Доказательство.</u> Допустим, что полугруппа E удовлетворяет условиям (б) и (в). Пусть $I \trianglelefteq E_E$ и $\varphi \in Hom_E(I, E)$. По условию (б) существует элемент $z \in E$ такой, что $\varphi(a) = za$ для всех $a \in I$. По условию (в) существует элемент $r \in E$

так, что $r = rs$ для любого $s \in E \setminus I$ и $a = ra$ для любого $a \in I$. Пусть $q \doteq zr$. Тогда

$$\varphi(a) = za = z(ra) = (zr)a = qa.$$

Пусть $(s,t) \in \rho(I,q)$. По определению $\rho(I,q)$ либо $s,t \in I$, либо $s,t \notin I$. В первом случае $1 \in Q_s(I) = Q_t(I)$, следовательно

$$qs = qs1 = qt1 = qt.$$

Во втором случае

$$qs = (zr)s = z(rs) = zr = z(rt) = (zr)t = qt.$$

Таким образом, мы показали, что выполняется условие 2) теоремы 5.

Обратно, пусть выполняется условие 2) теоремы 5, $I \hookrightarrow E_E$ и $\varphi \in Hom_E(I, E)$ – вложение, т.е. $\varphi(a) = a$ для каждого $a \in I$. Тогда существует элемент $q \in E$ такой, что $a = \varphi(a) = qa$ для каждого $a \in I$ и из того, что $(s,t) \in \rho(I,q)$, следует равенство $qs = qt$. Пусть $s,t \in E \setminus I$. Поскольку E – цепь своих $\mathcal{R}$-классов, $Q_s(I) = Q_t(I) = I$ и $su = tu = u$ для каждого $u \in I$. Таким образом, $(s,t) \in \rho(I,q)$, следовательно $qs = qt$ для всех $s,t \in E \setminus I$. Пусть $r \doteq qt$, где $t \in E \setminus I$ – произвольный элемент. Используя снова предположение, что E – цепь своих $\mathcal{R}$-классов, мы имеем

$ra = (qt)a = q(ta) = qa = a$ для каждого $a \in I$ и

$rs = (qt)s = (qs)s = qs^2 = qs = qt = r$ для каждого $s \in E \setminus I$.

Остается отметить, что условие (б) следует из условия 2(а) теоремы 5. Следствие доказано.

<u>Теорема 8.</u> Если S – правоинверсная самоинъективная справа полугруппа, то подполугруппа идемпотентов $E = E(S)$ самоинъективна справа.

<u>Доказательство.</u> Пусть S – правоинверсная самоинъективная справа полугруппа. Очевидно, левый нуль полугруппы S, существующий по условию I теоремы 5, является идемпотентом и левым нулем подполугруппы E. Пользуясь теоремой 5, мы должны показать, что для любого $I \hookrightarrow E_E$ и $\varphi \in Hom_E(I,E)$ существует элемент $z \in E$ такой, что $\varphi(a) = za$ для любого $a \in I$ и из того, что $(s,t) \in \rho(I,z)$, следует равенство $zs = zt$ для $s,t \in E$.

Пусть $I^* \doteq \{x \in S \mid xx' \in I$ для любого $x' \in V(x)\}$ и

$$\varphi^* : \begin{cases} I^* \longrightarrow S \\ x \longmapsto \varphi(xx')x, \end{cases}$$

где $x' \in V(x)$. Из доказательства леммы 3.2 [5] следует, что $I^* \hookrightarrow S_S$ и $\varphi^* \in Hom_S(I^*, S)$. По теореме 5 существует элемент $q \in S$ такой, что $\varphi^*(x) = qx$ для любого

$x \in I^*$ и из того, что $(s,t)\in \rho(I^*, q)$, следует равенство $qs=qt$ для $s,t\in S$. Пусть $a\in I$. Поскольку $I\subseteq I^*$, $qa=\varphi^*(a)=\varphi(a)\in E$ и $(q'qa,qa)\in \mathcal{L}\cap(E\times E)$ $(q'\in V(q))$, то из правоинверсности полугруппы S мы имеем равенство $q'qa=qa$. Пусть $z = q'q$. Тогда $\varphi(a)=za$. Пусть $s,t\in E$ и $(s,t)\in\rho(I,z)$, т.е. $Q_s(I)=Q_t(I)$ и $zsu=ztu$ для всех $u\in Q_s(I)$. Если $v\in Q_s(I^*)$, то $sv\in I^*$, следовательно $svv'\in I^*$ и, по определению I^* мы имеем $svv'\in I$ для любого $v'\in V(v)$. Так как $Q_s(I)=Q_t(I)$, то $tvv'\in I\subseteq I^*$, следовательно $tv\in I^*$ и $v\in Q_t(I^*)$, т.е. $Q_s(I^*)\subseteq Q_t(I^*)$. Рассуждая таким же образом, мы получаем $Q_t(I^*)\subseteq Q_s(I^*)$, следовательно $Q_s(I^*)=Q_t(I^*)$. Теперь

$$qsu=(qq'q)su=q(q'q)su=q(zsu)=q(ztu)=$$
$$=q(q'q)tu=(qq'q)tu=qtu$$

для $q'\in V(q)$ и $u\in Q_s(I^*)=Q_t(I^*)$. Значит, $(s,t)\in\rho(I^*,q)$ и по теореме 5, мы имеем $qs=qt$. Следовательно,

$$zs=(q'q)s=q'(qs)=q'(qt)=(q'q)t=zt.$$

По теореме 5, E самоинъективна справа. Теорема доказана.

Обратное в общем случае не имеет место, как показывает пример на стр. 56 [4].

Литература

1. Биркгоф Г., Теория решеток. Москва, 1984.
2. Каш Ф., Модули и кольца. Москва, 1981.
3. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп. Москва, 1972.
4. Пяэва Х., Самоинъективность правоинверсных полугрупп, подполугруппа идемпотентов которой является конечной цепью R-классов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1985, 700, 50-59.
5. Пяэва Х., Правоинверсные слабо самоинъективные справа полугруппы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 764, 81-97.
6. Скорняков Л. А., О гомологической классификации моноидов. Сибирский матем. журнал, 1969, 10, 1139-1143.
7. Berthiaume P., The injective envelope of S-sets. Canad. Math. Bull., 1967, 10, 261-273.
8. McMorris F. R., Vital injective S-systems. Math. Nachr., 1970, 47, 121-125.

9. S h o j i K., On right self-injective regular semigroups. Semigroup Forum, 1982, 25, 51-71.

Поступило
10 V 1986

PAREMALT ISEINJEKTIIVSETEST POOLRÜHMADEST

H.Päeva

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis leitakse vastus küsimusele, millistel tingimustel paremalt nõrgalt iseinjektiivne poolrühm osutub paremalt iseinjektiivseks. Tõestatud tulemus koos teoreemidega 2.6 ja 3.11 artiklist [5] annab tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et pareminversne poolrühm oleks paremalt iseinjektiivne. Esitatakse ka teoreem, mille kohaselt paremalt iseinjektiivse pareminversse poolrühma idempotentide alampoolrühm osutub paremalt iseinjektiivseks.

ON RIGHT SELF-INJECTIVE SEMIGROUPS

H.Päeva

S u m m a r y

In this paper we find conditions under which weakly right self-injective semigroups are right self-injective. Together with theorems 2.6 and 3.11 of [5] this result gives a characterization of right self-injective right inverse semigroups. We also prove that right self-injectivity of right inverse semigroups implies right self-injectivity of their subsemigroups of idempotents.

TRÜ Toimetised,
764 (1987), 81-97.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 81-97.

ПРАВОИНВЕРСНЫЕ СЛАБО САМОИНЪЕКТИВНЫЕ СПРАВА ПОЛУГРУППЫ

Х. Пяэва

Кафедра алгебры и геометрии

В данной статье даются необходимые и достаточные условия для слабой самоинъективности справа полугруппы идемпотентов и для слабой самоинъективности справа правоинверсной полугруппы. Описываются также некоторые другие регулярные слабо самоинъективные справа полугруппы.

§ 1. Введение и определения

Пусть S - полугруппа. Напомним, что множество $A = A_S$ называется правым S-полигоном, если для любых $s \in S$ и $p \in A$ определено произведение $ps \in A$, причем $(ps)t = p(st)$ для всех $s, t \in S, p \in A$ и $p1 = p$, если $S = S^1$. Очевидно, $S = S_S$ является правым S-полигоном. Записью $A \leqslant B_S$ обозначается, что A является правым S-подполигоном правого S-полигона B. В частности, $I \leqslant S_S$ обозначает, что I - правый идеал полугруппы S. Пусть A и B - правые S-полигоны. Отображение $\varphi : A \to B$ называется S-гомоморфизмом, если оно удовлетворяет условию $\varphi(ps) = \varphi(p)s$ для всех $p \in A$ и $s \in S$. В дальнейшем $Hom_S(A, B)$ означает множество всех S-гомоморфизмов из A в B. Полугруппа S называется слабо самоинъективной справа, если для любого $I \leqslant S_S$ и для любого $\varphi \in Hom_S(I, S)$ существует элемент $z \in S$ такой, что $\varphi(a) = za$ для всех $a \in I$. Через $V(s)$ обозначается множество инверсных элементов к элементу $s \in S$. По [4] полугруппа идемпотентов E называется почти коммутативной, если $e \mathcal{J} f$ или $ef = fe$ для любых $e, f \in E$, где $\mathcal{J}$ - отношение Грина.

В работе [5] даются необходимые и достаточные условия для слабой самоинъективности полурешеток. Теорема 2.8

11

обобщает этот результат для полугруппы идемпотентов. В § 2 данной работы описываются также слабо самоинъективные справа почти коммутативные полугруппы идемпотентов.

Если $T \subseteq S$ - произвольное подмножество, то через $E(T)$ обозначается множество идемпотентов, принадлежащих подмножеству T. Полугруппа называется правоинверсной, если каждый ее $\mathcal{L}$-класс содержит единственный идемпотент. По теореме I [II] полугруппа S является правоинверсной тогда и только тогда, когда S регулярна и $fef=ef$ для всех $e,f \in E(S)$. Мы пользуемся этим результатом неоднократно без ссылок на него. Из теоремы I.I7 [2] следует, что каждая инверсная полугруппа является правоинверсной, а по теореме 7 [3] правоинверсная полугруппа является ортодоксальной, т.е. ее подмножество идемпотентов является подполугруппой.

В работе [9] даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы инверсная полугруппа являлась слабо самоинъективной справа. § 3 данной статьи посвящен описанию правоинверсных слабо самоинъективных справа полугрупп.

Из статьи [7] и теоремы 9 [3] вытекает, что подполугруппа идемпотентов правоинверсной полугруппы является полурешеткой своих $\mathcal{R}$-классов. Мы пользуемся этим в дальнейших обсуждениях.

Отметим, что запись вида "$A \doteq \ldots$ " в статье означает "через A обозначается ...". Все понятия, которые в статье не определяются, можно найти в монографиях [I] и [2].

§ 2. Слабо самоинъективные справа полугруппы идемпотентов

Пусть E - правоинверсная полугруппа идемпотентов, т.е. E - полурешетка Γ своих $\mathcal{R}$-классов A_α, $\alpha \in \Gamma$. Пусть $\alpha, \beta \in \Gamma$ и $A_\alpha A_\beta \doteq \{ab \mid a \in A_\alpha$ и $b \in A_\beta\}$. Если $\beta \leq \alpha$, то $A_\alpha A_\beta \subseteq A_{\alpha \wedge \beta} = A_\beta$. Следовательно, $ab \mathcal{R} b$ для любых $a \in A_\alpha$, $b \in A_\beta$ и $ab = b$. В дальнейшем мы пользуемся этим равенством неоднократно.

Лемма 2.I. Если E - слабо самоинъективна справа, то она удовлетворяет условию

(Q) Для любой пары элементов $\alpha, \beta \in \Gamma$ и для любого $b \in A_\beta$ существует элемент $q_b \in E$ такой, что для каждого $a \in A_\alpha$ имеет место равенство $q_b a = ba$ и для любых элементов $a \in A_\alpha$, $m \in E$

из $bma=ma$ следует равенство $q_b m=m$.

Доказательство. Пусть $\alpha,\beta\in\Gamma$, $K_\alpha \doteq \bigcup_{\gamma\leq\alpha} A_\gamma$, $A \doteq \bigcup_{\gamma\wedge\alpha\leq\beta} A_\gamma$ и $I \doteq A\cup K_\alpha$. Так как $A_\beta\subseteq A$, всегда $A\neq\emptyset$. Очевидно $K_\alpha \lessdot E_E$. Если $m\in A$ и $x\in E$, то существуют элементы $\gamma,\delta\in\Gamma$ такие, что $m\in A_\gamma$, $x\in A_\delta$ и $\gamma\wedge\alpha\leq\beta$. Но тогда $(\gamma\wedge\delta)\wedge\alpha=(\gamma\wedge\alpha)\wedge\delta\leq\beta\wedge\delta\leq\beta$, следовательно $mx\in$ $\in A_{\gamma\wedge\delta}\subseteq A$. Это доказывает, что $A\lessdot E_E$ и мы имеем $I\lessdot E_E$. Пусть $b\in A_\beta$. Определим отображение

$$\varphi:\begin{cases} I \longrightarrow E \\ m \longmapsto \begin{cases} m, & \text{если } m\in A; \\ bm, & \text{если } m\in K_\alpha. \end{cases}\end{cases}$$

Пусть $m\in A\cap K_\alpha$ и $\gamma\in\Gamma$ такой, что $m\in A_\gamma$. Так как из $m\in K_\alpha$ следует, что $\gamma\leq\alpha$ и из $m\in A$ следует, что $\gamma\wedge\alpha\leq\beta$, мы имеем неравенство $\gamma=\gamma\wedge\alpha\leq\beta$, т.е. $bm=m$. Следовательно, определение отображения φ корректно. Так как $A, K_\alpha\lessdot E_E$, легко проверить, что $\varphi\in Hom_E(I,E)$. Из слабой самоинъективности справа полугруппы E следует существование элемента $q_b\in E$ такого, что $\varphi(m)=q_b m$ для всех $m\in I$. Если $a\in A_\alpha\subseteq K_\alpha$, то по определению φ мы имеем $q_b a=\varphi(a)=ba$. Пусть теперь $bma=ma$ для $a\in A_\alpha$ и $m\in A_\gamma$, где $\gamma\in\Gamma$ - некоторый элемент. Тогда $A_{\gamma\wedge\alpha}=A_{\beta\wedge\gamma\wedge\alpha}$, следовательно $\gamma\wedge\alpha=\beta\wedge\gamma\wedge\alpha$ и мы имеем неравенство $\gamma\wedge\alpha\leq\beta$ т.е. $m\in A$. По определению φ получим, что $q_b m=\varphi(m)=m$. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Пусть $a,b,q,m\in E$. Тогда из $qa=ba$ и $qm=m$ следует равенство $bma=ma$.

Доказательство. Используя правоинверсность полугруппы E, мы можем писать

$$bma=b(ama)=(ba)ma=(qa)ma=q(ama)=$$
$$=q(ma)=(qm)a=ma.$$

Лемма доказана.

Полурешетка Γ называется брауэровой (см.[I], стр.67), если для любой пары элементов $\alpha,\beta\in\Gamma$ существует элемент $\beta:\alpha\in\Gamma$ такой, что $\gamma\wedge\alpha\leq\beta$ тогда и только тогда, когда $\gamma\leq\beta:\alpha$.

Лемма 2.3. Для полугруппы E условие (Q) равносильно следующим условиям:

(B) Γ - брауэрова полурешетка и

(V) Для любой пары $\alpha,\beta\in\Gamma$ и для любого элемента $c\in A_{\alpha\wedge\beta}$ существует элемент $b_c\in A_\beta$ такой, что $ca=b_c a$ для каждого $a\in A_\alpha$.

Доказательство. Необходимость. Докажем, что из условия (Q) следует условие (B). Пусть $\alpha,\beta\in\Gamma$, $b\in A_\beta$, $q_b\in E$ - элемент, существующий по условию (Q) и $\varepsilon\in\Gamma$ - элемент, для которого $q_b\in A_\varepsilon$. Пусть $\gamma\wedge\alpha\leq\beta$. Тогда $\beta\wedge\gamma\wedge\alpha=\gamma\wedge\alpha$, т.е. $A_{\beta\wedge\gamma\wedge\alpha}=A_{\gamma\wedge\alpha}$. Следовательно, $bma\,\mathcal{R}\,ma$ для любых $a\in A_\alpha$, $m\in A_\gamma$, поскольку $A_\beta A_\gamma A_\alpha\subseteq A_{\beta\wedge\gamma\wedge\alpha}=A_{\gamma\wedge\alpha}\supseteq A_\gamma A_\alpha$ и мы имеем

$$bma=b(ma)^2=(bma)ma=ma.$$

По условию (Q) $q_b m=m$, но это равносильно тому, что $A_{\varepsilon\wedge\gamma}=A_\gamma$, т.е. $\varepsilon\wedge\gamma=\gamma$. Следовательно, $\gamma\leq\varepsilon$. Пусть теперь $\gamma\leq\varepsilon$ и $m\in A_\gamma$. Тогда $q_b m=m$. Используя условие (Q) и лемму 2.2, мы имеем $bma=ma$ для любого $a\in A_\alpha$, следовательно $A_{\beta\wedge\gamma\wedge\alpha}=A_{\gamma\wedge\alpha}$, т.е. $\gamma\wedge\alpha\leq\beta$. Таким образом, мы можем взять $\beta:\alpha=\varepsilon$. Этим доказано, что Γ - брауэрова полурешетка.

Для доказательства импликации $(Q)\Rightarrow(V)$ берем элементы $\alpha,\beta\in\Gamma$ и $c\in A_{\alpha\wedge\beta}$. По условию (Q) существует элемент $q_c\in E$ такой, что $q_c a=ca$ для каждого $a\in A_\alpha$ и из $cma=ma$ следует $q_c m=m$ при произвольном $m\in E$. Пусть $b_c\doteq bq_c$, где $b\in A_\beta$ - произвольный элемент. Так как $cba=$ $=ba$, по условию (Q) имеем $q_c b=b$. Из правоинверсности полугруппы E мы получим равенства

$$b_c b=(bq_c)b=bq_c b=q_c b=b,$$
$$bb_c=b(bq_c)=bq_c=b_c,$$

из которых следует, что $b_c\,\mathcal{R}\,b$, т.е. $b_c\in A_\beta$. Применяя равенство $q_c a=ca$, мы получим

$$b_c a=(bq_c)a=b(q_c a)=b(ca)=(bc)a=ca$$

для любого $a\in A_\alpha$. Следовательно, выполняется условие (V).

Достаточность. Пусть $\alpha,\beta\in\Gamma$. По условию (B) существует $\beta:\alpha\in\Gamma$. Учитывая неравенство $\beta\leq\beta:\alpha$, имеем

$$\alpha\wedge\beta\leq\alpha\wedge(\beta:\alpha)=\alpha\wedge(\alpha\wedge(\beta:\alpha))\leq\alpha\wedge\beta,$$

следовательно $\alpha\wedge\beta=\alpha\wedge(\beta:\alpha)$. Пусть $b\in A_\beta$. Берем для некоторого $x\in A_\alpha$ элемент $bx\in A_{\alpha\wedge\beta}=A_{\alpha\wedge(\beta:\alpha)}$. По условию (V) существует $q_{bx}\in A_{\beta:\alpha}$, так что $q_{bx}a=(bx)a=b(xa)=$ $=ba$ для всех $a\in A_\alpha$. Пусть $ma=bma$ для $a\in A_\alpha$ и $m\in A_\gamma$. Тогда $A_{\gamma\wedge\alpha}=A_{\beta\wedge\gamma\wedge\alpha}$, следовательно $\gamma\wedge\alpha=\beta\wedge\gamma\wedge\alpha$, т.е. $\gamma\wedge\alpha\leq\beta$. Из определения брауэровы полурешетки получим, что $\gamma\leq\beta:\alpha$, т.е. $\gamma\wedge(\beta:\alpha)=\gamma$. Из этого следует, что $A_{\gamma\wedge(\beta:\alpha)}=$ $=A_\gamma$, т.е. $q_{bx}m\,\mathcal{R}\,m$ и

$$q_{bx}m=q_{bx}m^2=(q_{bx}m)m=m.$$

Остается сделать переобозначение $q_b=q_{bx}$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть $I \trianglelefteq E_E$ и $\varphi \in Hom_E(I, E)$. Тогда $a\varphi(a) = \varphi(a)$ для любого $a \in I$, следовательно $\varphi^2 = \varphi$.

Доказательство. Используя правоинверсность полугруппы E, мы имеем

$$a\varphi(a) = \varphi(a)a\varphi(a) = \varphi(a^2)\varphi(a) = \varphi(a)\varphi(a) = \varphi(a),$$

следовательно,

$$\varphi^2(a) = \varphi(\varphi(a)) = \varphi(a\varphi(a)) = \varphi(a)\varphi(a) = \varphi(a)$$

для любого $a \in I$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. Пусть E удовлетворяет условию (Q), $I \trianglelefteq E_E$ и $\varphi \in Hom_E(I, E)$. Тогда для любого $a \in I$ существует элемент $q_{\varphi(a)} \in E$ такой, что $q_{\varphi(a)}a = \varphi(a)$ и $q_{\varphi(a)}\varphi(b) = \varphi(b)$ для любого $b \in I$.

Доказательство. Пусть $a \in I$ и $\alpha, \beta \in \Gamma$ – элементы, для которых $a \in A_\alpha$, $\varphi(a) \in A_\beta$. По условию (Q) существует элемент $q_{\varphi(a)} \in E$ такой, что $q_{\varphi(a)}a = \varphi(a)$ и из $\varphi(a)ma = ma$ следует $q_{\varphi(a)}m = m$ для всех $a \in I$, $m \in E$. Пусть $b \in I$. Используя правоинверсность полугруппы E и лемму 2.4, мы имеем

$$\varphi(a)\varphi(b)a = \varphi(a\varphi(b)a) = \varphi(\varphi(b)a) = \varphi(\varphi(b))a = \varphi(b)a.$$

Следовательно, по условию (Q), $q_{\varphi(a)}\varphi(b) = \varphi(b)$. Лемма доказана.

Обозначим через $[\alpha, \beta]$ интервал элементов $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Теорема 2.6. Правоинверсная полугруппа идемпотентов E, являющаяся полурешеткой Γ своих $\mathcal{R}$-классов A_α, $\alpha \in \Gamma$, слабо самоинъективна справа тогда и только тогда, когда выполняется условие (Q) и для любого множества пар $\{(a_{\alpha_\ell}, a_{\beta_\ell}) \mid a_{\alpha_\ell} \in A_{\alpha_\ell}, a_{\beta_\ell} \in A_{\beta_\ell}, \alpha_\ell, \beta_\ell \in \Gamma, \ell \in L$, L – некоторое множество индексов и $\beta_\ell \leq \alpha_\ell\}$ из того, что $\bigcap_{i=1}^{n}[\beta_i, \alpha_i] \neq \emptyset$ и $a_{\beta_k}A_{\alpha_k}A_{\alpha_\ell} = a_{\beta_\ell}A_{\alpha_k}A_{\alpha_\ell}$ для любого конечного подмножества $\{k, \ell, 1, \dots, n\} \subseteq L$, следует существование такого элемента $z \in E$, что $za_{\alpha_\ell} = a_{\beta_\ell}a_{\alpha_\ell}$ для любого $\ell \in L$.

Доказательство. Необходимость. Выполнение условия (Q) следует из леммы 2.I. Пусть $\{(a_{\alpha_\ell}, a_{\beta_\ell}) \mid \ell \in L\}$ – множество пар, удовлетворяющее предположению второго условия. Пусть $I \doteq \bigcup_{\ell \in L} a_{\alpha_\ell}E$. Определим отображение

$$\varphi : \begin{cases} I \longrightarrow E \\ a_{\alpha_\ell}x \mapsto a_{\beta_\ell}a_{\alpha_\ell}x. \end{cases}$$

Пусть $a \in a_{\alpha_1}E \cap a_{\alpha_2}E$, где $1, 2 \in L$. По предположению $a_{\beta_1}A_{\alpha_1}A_{\alpha_2} = a_{\beta_2}A_{\alpha_1}A_{\alpha_2}$, т.е. $a_{\beta_1}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2} = a_{\beta_2}a'_{\alpha_1}a'_{\alpha_2}$ для некоторых $a'_{\alpha_1} \in A_{\alpha_1}$, $a'_{\alpha_2} \in A_{\alpha_2}$. Используя правоинверсность полугруппы, мы имеем

$$a_{\beta_1}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}=a_{\beta_1}(a_{\alpha_1}a_{\alpha_2})^2=(a_{\beta_1}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2})a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}=$$
$$=a_{\beta_2}a'_{\alpha_1}a'_{\alpha_2}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}=a_{\beta_2}a'_{\alpha_1}a'_{\alpha_2}(a_{\alpha_1}a_{\alpha_2})=$$
$$=a_{\beta_2}a'_{\alpha_1}a'_{\alpha_2}a_{\alpha_2}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}=a_{\beta_2}a'_{\alpha_1}a_{\alpha_2}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}=$$
$$=a_{\beta_2}a'_{\alpha_1}(a_{\alpha_2}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2})=a_{\beta_2}a'_{\alpha_1}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}=$$
$$=a_{\beta_2}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2},$$

следовательно,

$$a_{\beta_1}a=a_{\beta_1}(a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}a)=(a_{\beta_1}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2})a=(a_{\beta_2}a_{\alpha_1}a_{\alpha_2})a=$$
$$=a_{\beta_2}(a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}a)=a_{\beta_2}a,$$

т.е. определение φ корректно. Очевидно $\varphi\in Hom_E(I,E)$. Из слабой самоинъективности справа полугруппы E следует существование элемента $z\in E$, для которого $\varphi(m)=zm$ для всех $m\in I$. По определению φ имеем $za_{\alpha_\ell}=\varphi(a_{\alpha_\ell})=a_{\beta_\ell}a_{\alpha_\ell}$ для любого $\ell\in L$.

Достаточность. Пусть $I\lessdot E_E$ и $\varphi\in Hom_E(I,E)$. Рассмотрим множество пар $\{(a,\varphi(a))\mid a\in I\}$. Пусть $\alpha_a,\beta_a\in\Gamma$ - элементы, для которых $a\in A_{\alpha_a}$ и $\varphi(a)\in A_{\beta_a}$, $a\in I$. По лемме 2.4 $\beta_a\leq\alpha_a$ для всех $a\in I$. Пусть $\{a_1,\dots,a_n\}\subseteq I$ и $\alpha_i\doteq\alpha_{a_i}$ для $i\in\{1,\dots,n\}$. Используя лемму 2.5, можно для любого $i\in\{1,\dots,n\}$ найти элемент $q_i\in E$ такой, что $q_ia_i=\varphi(a_i)=$ $=\varphi(a_i)a_i$ и $q_i\varphi(a_j)=\varphi(a_j)$ для каждого $j\in\{1,\dots,n\}$. Пусть $q\doteq q_1q_2\cdots q_n$ и $i\in\{1,\dots,n\}$. Используя правоинверсность полугруппы E, мы получим

$$q_iq=q_i(q_1\cdots q_{i-1})q_i\cdots q_n=(q_1\cdots q_{i-1})q_i\cdots q_n=q.$$

По лемме 2.2 имеет место равенство $\varphi(a_i)qa_i=qa_i$. С другой стороны, $q\varphi(a_i)=\varphi(a_i)$. Следовательно, если $\delta\in\Gamma$ - элемент, для которого $q\in A_\delta$, то $\delta\in\bigcap_{i=1}^{n}[\beta_i,\beta_i:\alpha_i]$.

Пусть $a,b\in I$. Из правоинверсности полугруппы E следует

$$\varphi(a)ab=\varphi(a^2b)=\varphi(ab)=\varphi(bab)=\varphi(b)ab.$$

По предположению существует элемент $z\in E$ такой, что $\varphi(a)=$ $=\varphi(a)a=za$ для любого $a\in I$, т.е. E - слабо самоинъективна справа. Теорема доказана.

Предложение 2.7. Слабо самоинъективная справа полугруппа идемпотентов является правоинверсной.

Доказательство. Пусть E - слабо самоинъективная справа полугруппа идемпотентов и $e,f\in E$ - элементы, для которых $e\mathcal{L}f$. Определим отображение

$$\varphi:\begin{cases} eE\cup fE\longrightarrow E\\ x\longmapsto\begin{cases} fx, & \text{если } x\in eE;\\ ex, & \text{если } x\in fE.\end{cases}\end{cases}$$

Пусть $a\in eE\cap fE$. Тогда $fa=a=ea$, следовательно определение φ корректно. Очевидно $\varphi\in Hom_E(eE\cup fE,E)$. Так как E – слабо самоинъективна справа, существует элемент $z\in E$ такой, что $\varphi(x)=zx$ для любого $x\in eE\cup fE$. Тогда, используя соотношение $e\mathcal{L}f$, мы имеем $ze=\varphi(e)=fe=f$ и $zf=\varphi(f)=ef=e$, следовательно

$$e=zf=z(ze)=z^2e=ze=f.$$

Предложение доказано.

В силу предыдущего предложения имеет место следующая

Теорема 2.8. Полугруппа идемпотентов является слабо самоинъективной справа тогда и только тогда, когда она правоинверсная слабо самоинъективная справа полугруппа идемпотентов.

Таким образом, теорема 2.6 и теорема 2.8 дают описание слабо самоинъективных справа полугрупп идемпотентов.

Дадим теперь описание почти коммутативных слабо самоинъективных справа полугрупп идемпотентов.

Лемма 2.9. ([10] , лемма 3.1). Правоинверсная полугруппа идемпотентов E является почти коммутативной тогда и только тогда, когда для любых $e,f\in E$ имеет место $e\mathcal{R}f$ или $ef=fe$.

Теорема 2.10. Почти коммутативная полугруппа идемпотентов является слабо самоинъективной справа тогда и только тогда, когда она является слабо самоинъективной полурешеткой Γ своих $\mathcal{R}$-классов $A_\alpha, \alpha\in\Gamma$ и удовлетворяет условию (V).

Доказательство. Необходимость. Пусть E – слабо самоинъективная справа почти коммутативная полугруппа идемпотентов. По предложению 2.7 она правоинверсна, т.е. является полурешеткой Γ своих $\mathcal{R}$-классов A_α, $\alpha\in\Gamma$. По лемме 2.1, E удовлетворяет условию (Q), которое по лемме 2.3 эквивалентно условиям (V) и (B). Из леммы 2.9 следует, что для любой пары элементов $e,f\in E$ существует $\gamma\in\Gamma$ такой, что $e,f\in A_\gamma$ или $ef=fe$.

Пусть $\{[\beta_\ell,\beta_\ell:\alpha_\ell]\,|\,\ell\in L$, L – некоторое множество индексов и $\alpha_\ell,\beta_\ell\in\Gamma$ для всех $\ell\in L\}$ – множество интервалов, для которого $\bigcap_{\ell\in L'}[\beta_\ell,\beta_\ell:\alpha_\ell]\neq\varnothing$ при всех конечных подмножеств $L'\subseteq L$. Благодаря равенству $\beta_\ell:(\beta_\ell:(\beta_\ell:\alpha_\ell))=\beta_\ell:\alpha_\ell$ и неравенству $\beta_\ell\leqslant\beta_\ell:(\beta_\ell:\alpha_\ell)$ мы можем предположить, что $\beta_\ell\leqslant\alpha_\ell$ для любого $\ell\in L$. Фиксируем для каждого $\ell\in L$ элементы $a_{\alpha_\ell}\in A_{\alpha_\ell}$ и $a_{\beta_\ell}\in A_{\beta_\ell}$. Пусть $I\doteq\bigcup_{\ell\in L}a_{\alpha_\ell}E$. Определим отображение

$$\varphi:\begin{cases} I \longrightarrow E \\ a_{\alpha_\ell}x \mapsto a_{\beta_\ell}a_{\alpha_\ell}x. \end{cases}$$

Пусть $a\in a_{\alpha_1}E\cap a_{\alpha_2}E$, где $1,2\in L$. Если $a_{\beta_1}\mathcal{R}a_{\beta_2}$, то по выбору элементов $a_{\beta_1}=a_{\beta_2}$, следовательно $a_{\beta_1}a=a_{\beta_2}a$. Остается возможность $a_{\beta_1}a_{\beta_2}=a_{\beta_2}a_{\beta_1}$. По предположению $[\beta_1,\beta_1:\alpha_1]\cap[\beta_2,\beta_2:\alpha_2]\neq\emptyset$. Следовательно, существует элемент $\varepsilon\in\Gamma$, для которого справедливы равенства $\varepsilon\wedge\beta_1=\beta_1$, $\varepsilon\wedge\beta_2=\beta_2$, $\beta_1\wedge\varepsilon\wedge\alpha_1=\varepsilon\wedge\alpha_1$ и $\beta_2\wedge\varepsilon\wedge\alpha_2=\varepsilon\wedge\alpha_2$. Используя эти равенства, получим

$$\begin{aligned}\beta_1\wedge\alpha_1\wedge\alpha_2&=(\varepsilon\wedge\beta_1)\wedge\alpha_1\wedge\alpha_2=(\varepsilon\wedge\beta_1\wedge\alpha_1)\wedge\alpha_2=\\&=\varepsilon\wedge\alpha_1\wedge\alpha_2=\alpha_1\wedge(\varepsilon\wedge\alpha_2)=\alpha_1\wedge\beta_2\wedge\varepsilon\wedge\alpha_2=\\&=(\varepsilon\wedge\beta_2)\wedge\alpha_1\wedge\alpha_2=\beta_2\wedge\alpha_1\wedge\alpha_2,\end{aligned}$$

следовательно $a_{\beta_1}c\,\mathcal{R}\,a_{\beta_2}c$, где $c\doteq a_{\alpha_1}a_{\alpha_2}$. Поскольку имеют место равенства $a_{\beta_1}a_{\beta_2}=a_{\beta_2}a_{\beta_1}$ и $a=ca$, из правоинверсности полугруппы E получаем

$$\begin{aligned}a_{\beta_1}a&=a_{\beta_1}(ca)=(a_{\beta_1}c)a=(a_{\beta_2}c)(a_{\beta_1}c)a=a_{\beta_2}(ca_{\beta_1}c)a=\\&=a_{\beta_2}(a_{\beta_1}c)a=(a_{\beta_2}a_{\beta_1})ca=(a_{\beta_1}a_{\beta_2})ca=\\&=a_{\beta_1}(a_{\beta_2}c)a=a_{\beta_1}(ca_{\beta_2}c)a=(a_{\beta_1}c)(a_{\beta_2}c)a=\\&=(a_{\beta_2}c)a=a_{\beta_2}(ca)=a_{\beta_2}a.\end{aligned}$$

Следовательно, определение φ корректно. Очевидно $\varphi\in Hom_E(I,E)$. Из слабой самоинъективности справа следует существование элемента $z\in E$ такого, что $\varphi(m)=zm$ для всех $m\in I$. По определению φ имеем $za_{\alpha_\ell}=\varphi(a_{\alpha_\ell})=a_{\beta_\ell}a_{\alpha_\ell}$ для каждого $\ell\in L$. Тогда из неравенства $\beta_\ell\leq\alpha_\ell$ следуют равенства

$$\begin{aligned}za_{\beta_\ell}&=z(a_{\alpha_\ell}a_{\beta_\ell})=(za_{\alpha_\ell})a_{\beta_\ell}=a_{\beta_\ell}a_{\alpha_\ell}a_{\beta_\ell}=\\&=a_{\beta_\ell}(a_{\alpha_\ell}a_{\beta_\ell})=a^2_{\beta_\ell}=a_{\beta_\ell},\end{aligned}$$

$$a_{\beta_\ell}za_{\alpha_\ell}=a_{\beta_\ell}(za_{\alpha_\ell})=a^2_{\beta_\ell}a_{\alpha_\ell}=a_{\beta_\ell}a_{\alpha_\ell}=za_{\alpha_\ell}$$

для любого $\ell\in L$. Таким образом, если $\delta\in\Gamma$ – элемент, для которого $z\in A_\delta$, то $\delta\in\bigcap_{\ell\in L}[\beta_\ell,\beta_\ell:\alpha_\ell]$. По лемме 2.5 [5] Γ слабо самоинъективна.

Достаточность. Допустим, что E является полурешеткой Γ своих $\mathcal{R}$-классов A_α, $\alpha\in\Gamma$, удовлетворяет условию (V) и Γ слабо самоинъективна. Из теоремы 2.7 [5] следует выполнение условия (B), по лемме 2.3 E удовлетворяет условию (Q). Пусть $I\hookrightarrow E_E$, $\varphi\in Hom_E(I,E)$ и $\alpha_a,\beta_a\in\Gamma$ $(a\in I)$ – элементы, для которых $a\in A_{\alpha_a}$ и $\varphi(a)\in A_{\beta_a}$. Рассмотрим множество интервалов $\{[\beta_a,\beta_a:\alpha_a]\mid a\in I\}$ и любое конечное подмножество $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}\subseteq I$. Рассуждая также, как в доказательстве достаточности теоремы 2.6, можно найти элемент $\delta\in\bigcap_{i=1}^{n}[\beta_{a_i},\beta_{a_i}:\alpha_{a_i}]$. По лемме 2.5 [5] существует элемент $\varepsilon\in\bigcap_{a\in I}[\beta_a,\beta_a:\alpha_a]$. Пусть $z\in A_\varepsilon$ – произвольный элемент. Тогда $z\varphi(a)=\varphi(a)$ и $\varphi(a)za=za$ для любого $a\in I$. Пусть $M\doteq\{b\in I \mid \varphi(b)\mathcal{R}z\}$ и $N\doteq\{b\in M \mid R_{\varphi(b)}\lneqq R_b\}$, где $R_{\varphi(b)}$ и R_b – $\mathcal{R}$-классы, содержащие элементы $\varphi(b)$ и b соответственно. Если $M=\varnothing$, то по лемме 2.9 $z\varphi(a)=\varphi(a)z$ и

$$\varphi(a)=z\varphi(a)=z\varphi(a^2)=z\varphi(a)a=(z\varphi(a))a=\varphi(a)za=za \qquad (1)$$

для каждого $a\in I$.

Пусть $M\neq\varnothing$, $N=\varnothing$ и $a\in I$. Тогда $z\mathcal{R}\varphi(b)\mathcal{R}b$ для любого $b\in M\subseteq I$, следовательно $z\in I$ и $\varphi(z)=z$. Если $a\mathcal{R}z$, то $\varphi(a)=\varphi(za)=\varphi(z)a=za$. Допустим $R_a\neq R_z$. Тогда $R_z\neq R_{\varphi(a)}$, так как в противном случае $R_z=R_{\varphi(a)}\lneqq R_a$, получим противоречие с условием $N=\varnothing$. Но тогда по лемме 2.9 $z\varphi(a)=\varphi(a)z$ и из (1) получим $\varphi(a)=za$.

Пусть, наконец, $r\in N\neq\varnothing$ и $a\in I$. Если $r\mathcal{R}a$, то $\varphi(a)=\varphi(ra)=\varphi(r)a$. Пусть $R_r\neq R_a$. Тогда $R_{\varphi(a)}\leqslant R_z=R_{\varphi(r)}\lneqq R_r$ и по лемме 2.9 $r\varphi(a)=\varphi(a)r=\varphi(a)$. Пользуясь этим равенством и правоинверсностью полугруппы, мы имеем

$$\varphi(a)=\varphi(a^2)=\varphi(a)a=(\varphi(a)r)a=\varphi(ar)a=\varphi(ara)=\varphi(ra)=\varphi(r)a.$$

Следовательно, E является слабо самоинъективной справа. Теорема доказана.

<u>Следствие 2.11</u>. Почти коммутативная полугруппа идемпотентов, являющаяся конечной полурешеткой своих $\mathcal{R}$-классов, слабо самоинъективна справа тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию (Q).

<u>Следствие 2.12</u>. Почти коммутативная полугруппа идемпотентов, являющаяся цепью Γ своих $\mathcal{R}$-классов, слабо самоинъективна справа тогда и только тогда, когда Γ слабо самоинъективна.

Завершим параграф примером правоинверсной полугруппы идемпотентов, которая удовлетворяет условию (Q), но не является слабо самоинъективной справа.

<u>Пример</u>. Пусть полугруппа E задана следующей таблицей умножения:

	1	a_1	a_2	b_2	b_2'	z	c	b_1	b_1'
1	1	a_1	a_2	b_2	b_2'	z	c	b_1	b_1'
a_1	a_1	a_1	c	b_1'	b_1'	b_1	c	b_1	b_1'
a_2	a_2	c	a_2	b_2	b_2'	z	c	b_1	b_1'
b_2	b_2	b_1'	b_2	b_2	b_2'	z	b_1'	b_1	b_1'
b_2'	b_2'	b_1'	b_2'	b_2	b_2'	z	b_1'	b_1	b_1'
z	z	b_1	b_2'	b_2	b_2'	z	b_1'	b_1	b_1'
c	c	c	c	b_1'	b_1'	b_1	c	b_1	b_1'
b_1	b_1	b_1	b_1'	b_1'	b_1'	b_1	b_1'	b_1	b_1'
b_1'	b_1'	b_1'	b_1'	b_1'	b_1'	b_1	b_1'	b_1	b_1'

.

Пусть $A_\varepsilon \doteq \{1\}$, $A_{\alpha_1} \doteq \{a_1\}$, $A_{\alpha_2} \doteq \{a_2\}$, $A_\lambda \doteq \{c\}$, $A_{\beta_1} \doteq \{b_1, b_1'\}$, $A_{\beta_2} \doteq \{b_2, b_2', z\}$ и $\Gamma \doteq \{\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \lambda, \beta_1, \beta_2\}$. Произведением $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ элементов $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ называем элемент, для которого $x_1 x_2 \in A_{\gamma_1 \wedge \gamma_2}$ для любых $x_1 \in A_{\gamma_1}$, $x_2 \in A_{\gamma_2}$. Легко убедиться, что E является полурешеткой Γ своих $\mathcal{R}$-классов A_γ, $\gamma \in \Gamma$. Легко проверить, что Γ – брауэрова полурешетка. Рассмотрим элементы $\alpha_1, \lambda, \beta_2 \in \Gamma$, для которых $\alpha_1 \wedge \beta_2 = \lambda \wedge \beta_2 = \beta_1$. Для $b_1 \in A_{\beta_1}$ существует $z \in A_{\beta_2}$, для которого $b_1 c = zc = b_1'$ и $b_1 a_1 = z a_1 = b_1$. Для $b_1' \in A_{\beta_1}$ существует $b_2 \in A_{\beta_2}$, для которого $b_1' c = b_2 c = b_1' a_1 = b_2 a_1 = b_1'$. Выполнение условия (V) в остальных случаях следует непосредственно из таблицы умножения. Пусть $I \doteq a_1 E \cup a_2 E$. Определим отображение

$$\varphi : \begin{cases} I \longrightarrow E \\ x \mapsto \begin{cases} b_1 x, & \text{если } x \in a_1 E; \\ b_2 x, & \text{если } x \in a_2 E. \end{cases} \end{cases}$$

Если $x \in a_1 E \cap a_2 E$, то $b_1 x = b_1 (cx) = (b_1 c) x = b_1' x = (b_2 c) x = b_2 (cx) = b_2 x$. Следовательно, определение φ корректно и $\varphi \in Hom_E(I, E)$. Допустим, что существует элемент $q \in E$ такой, что $\varphi(x) = qx$ для всех $x \in I$. По определению φ мы имеем тогда $q a_1 = b_1$ и $q a_2 = b_2$. Используя второе равенство, мы получим из таблицы умножения, что $q = b_2$, но $b_2 a_1 = b_1' \neq b_1$. Полученное противоречие доказывает, что E не является слабо самоинъективной справа.

§ 3. Правоинверсные слабо самоинъективные справа полугруппы

Как было уже отмечено во введении, по теореме 7 [3] правоинверсная полугруппа является ортодоксальной, т.е. ее подмножество идемпотентов является подполугруппой. Для дальнейшего нам полезна следующая

Лемма 3.I. ([8], лемма I.3). Для регулярной полугруппы S следующие условия эквивалентны:

I) S ортодоксальна.

2) Включение $b'a' \in V(ab)$ имеет место для любых $a, b \in S$, $a' \in V(a)$, $b' \in V(b)$.

3) Если $x \in V(e)$ и $e \in E(S)$, то $x \in E(S)$.

Лемма 3.2. Подполугруппа идемпотентов $E = E(S)$ правоинверсной слабо самоинъективной справа полугруппы S слабо самоинъективна справа.

Доказательство. Пусть $I \triangleleft S_S$, $\varphi \in Hom_E(I, E)$ и $I^* \doteq \{x \in S \mid xx' \in I$ для любого $x' \in V(x)\}$. Если $x \in I^*$ и $s \in S$, то $(xs)(xs)' = (xx'x)s(xs)' = xx'(xs)(xs)' \in I$, поскольку $(xs)(xs)' \in E$ и S ортодоксальна. Следовательно, $I^* \triangleleft S_S$. Очевидно, $I \subseteq I^*$. Определим отображение

$$\varphi^*: \begin{cases} I^* \longrightarrow S \\ x \longmapsto \varphi(xx')x \end{cases}$$

для любого $x' \in V(x)$. Пусть $x', x'' \in V(x)$. Тогда, поскольку $xx' \mathcal{R} xx''$, имеем

$$\varphi(xx')x = \varphi(xx''xx')x = \varphi(xx'')xx'x = \varphi(xx'')x.$$

Следовательно, определение φ^* корректно. Пусть $x \in I^*$, $x' \in V(x)$ и $s \in S$. Тогда

$$\begin{aligned} \varphi^*(xs) &= \varphi(xs(xs)')xs = \varphi((xx'x)s(xs)')xs = \\ &= \varphi(xx'(xs)(xs)')xs = \varphi(xx')xs(xs)'xs = \\ &= \varphi(xx')xs = \varphi^*(x)s, \end{aligned}$$

т.е. $\varphi^* \in Hom_S(I^*, S)$. По предположению S слабо самоинъективна справа, следовательно существует элемент $z \in S$ такой, что $\varphi^*(x) = zx$ для каждого $x \in I^*$. Пусть $e \in I \subseteq I^*$. Поскольку $\varphi^*(e) = \varphi(e^2)e = \varphi(e)e = \varphi(e^2) = \varphi(e)$ и $\varphi(e) \in E$, мы имеем

$$\varphi(e) = \varphi^*(e) = ze \in E.$$

По лемме 3.I $ez' \in V(ze)$ для любого $z' \in V(z)$. Используя правоинверсность полугруппы, мы получим

$$ze = ze(ze) = ez'ze = z'ze$$

для любого $e \in I$ и $z' \in V(z)$. Пусть $z^* \doteq z'z \in E$. Тогда $\varphi(e) = z^*e$ для всех $e \in I$, следовательно E слабо самоинъективна справа. Лемма доказана.

Пусть S - регулярная полугруппа.

Определение. Подмножество $M \subseteq S$ называется совместным справа [слева], если $xy' \in E(S)$ [$y'x \in E(S)$] для любых $x, y \in M$ и $y' \in V(y)$. Подмножество $M \subseteq S$ называется совместным, если оно совместно как справа, так и слева.

Лемма 3.3. Пусть S - правоинверсная полугруппа. Подмножество $M\subseteq S$ является совместным справа тогда и только тогда, когда для любых $x,y\in M$ существует $y'\in V(y)$ такой, что $xy'\in E(S)$.

Доказательство. Необходимость очевидно.

Достаточность. Пусть $M\subseteq S$ - подмножество, для любой пары элементов $x,y\in M$ которого существует элемент $y'\in V(y)$ такой, что $xy'\in E(S)$. Пусть $y''\in V(y)$ - произвольный элемент. По определению правоинверсности $y'y=y''y$. Используя ортодоксальность правоинверсной полугруппы, мы получим

$$xy''=x(y''yy'')=x(y''y)y''=x(y'y)y''=(xy')(yy'')\in E(S).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.4. Для правоинверсной полугруппы S из того, что $M\subseteq S$ - совместное справа подмножество, следует совместность справа подмножества $Ms\subseteq S$ для любого $s\in S$.

Доказательство. Пусть $m,n\in M$ и $s\in S$. По лемме 3.I $s'n'\in V(ns)$. Очевидно $nss'n'\in E(S)$. Используя правоинверсность и ортодоксальность полугруппы, мы получим

$$mss'n'=mss'(n'nn')=m(ss'n'n)n'=$$
$$=m(n'nss'n'n)n'=mn'(nss'n')\in E(S).$$

По лемме 3.3 Ms - совместное справа подмножество. Лемма доказана.

Лемма 3.5. Если S - правоинверсная полугруппа и M - совместное справа подмножество в S, то для $m,n\in M$ имеем $m\mathcal{L}n$ тогда и только тогда, когда $m=n$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $m,n\in M$ - элементы, для которых имеет место отношение $m\mathcal{L}n$ и $n'\in V(n)$. Поскольку $\mathcal{L}$ стабильно справа, то $mn'\mathcal{L}nn'$. Так как M совместно справа, $mn'\in E(S)$ и из правоинверсности полугруппы S получим $mn'=nn'$, т.е. $mn'n=n$. С другой стороны, по $m\mathcal{L}n\mathcal{L}n'n$ имеет место равенство $mn'n=m$, следовательно $m=n$.

Обратное очевидно. Лемма доказана.

Лемма 3.6. Если S - правоинверсная слабо самоинъективная справа полугруппа, то для любого совместного справа подмножества $M\subseteq S$ существует элемент $w\in S$ такой, что $m=wm'm$ для любых $m\in M$, $m'\in V(m)$.

Доказательство. Пусть $M'\doteq\bigcup\limits_{m\in M}V(m)$ и $I\doteq\bigcup\limits_{m'\in M'}m'S$.

Определим отображение

$$\varphi:\begin{cases} I\longrightarrow S\\ m's\longmapsto mm's.\end{cases}$$

Пусть для $m,n\in M$ имеет место равенство $m's=n't=x$ для $m'\in V(m)$ и $n'\in V(n)$. Тогда $m'mx=n'nx$, следовательно

$$mx = (mm'm)x = m(m'mx) = m(n'nx) = mn'(nx).$$

Аналогично доказывается равенство $nx = nm'(mx)$ и мы получим соотношение $nx\mathcal{L}mx$. По лемме 3.4 Mx – совместное справа подмножество и из леммы 3.5 следует, что $nx = mx$. Таким образом, определение φ корректно. Очевидно $\varphi \in Hom_S(I,S)$. Из слабой самоинъективности справа полугруппы S следует существование элемента $w \in S$ такой, что $\varphi(x) = wx$ для всех $x \in I$. По определению φ мы имеем

$$m = mm'm = \varphi(m'm) = wm'm$$

для любых $m \in M$ и $m' \in V(m)$. Лемма доказана.

Регулярная полугруппа S называется E- рефлексивной (см. [9], стр. 531), если для любых $x,y \in S$ из $xy \in E(S)$ следует $yx \in E(S)$.

Предложение 3.7. Если S – ортодоксальная полугруппа, для каждого двухэлементного совместного справа подмножества $M \subseteq S$ которой существует элемент $w \in S$ такой, что $m = wm'm$ для каждого $m \in M$, $m' \in V(m)$, то S является E-рефлексивной.

Доказательство. Пусть $x,y \in S$, $xy \in E(S)$, $x' \in V(x)$, $y' \in V(y)$ и $M \doteq \{x, y'\}$. По лемме 3.1 $y'x' \in V(xy) \subseteq E(S)$, следовательно, по лемме 3.3 M – совместное справа подмножество. По предположению существует элемент $w \in S$ такой, что $x = wx'x$ и $y' = wyy'$. Из равенств

$$ywyw = yw(yy'y)w = y(wyy')yw = yy'yw = yw$$

следует, что $yw \in E(S)$. Используя это, мы получим

$$yx = y(wx'x) = (yw)(x'x) \in E(S).$$

Предложение доказано.

Следствие 3.8. Правоинверсная слабо самоинъективная справа полугруппа является E-рефлексивной.

Следствие 3.9. Каждое совместное справа или слева подмножество правоинверсной слабо самоинъективной справа полугруппы совместно.

Лемма 3.10. Если S – правоинверсная полугруппа, $I \hookrightarrow S_S$ и $\varphi \in Hom_S(I,S)$, то $\varphi(E(I))$ является совместным справа подмножеством полугруппы S.

Доказательство. Пусть $M \doteq \varphi(E(I))$, $s,t \in M$ и e,f – элементы в $E(I)$, для которых $\varphi(e) = s$ и $\varphi(f) = t$. Тогда

$$s's = s'\varphi(e) = s'\varphi(e^2) = s'\varphi(e)e = s'se$$

для любого $s' \in V(s)$. Используя правоинверсность полугруппы, мы имеем

$$s's = s'se = es'se = e(s'se) = es's \in E(I),$$

следовательно

$$\varphi(s's)=\varphi(es's)=\varphi(e)s's=ss's=s.$$

Таким же образом получим $\varphi(t't)=t$ для $t'\in V(t)$. Используя эти равенства, правоинверсность полугруппы и лемму 3.I, мы имеем

$$st'=\varphi(s's)t'=\varphi(s's)t'tt'=\varphi(s'st't)t'=$$
$$=\varphi(t'ts'st't)t'=\varphi(t't)s'st'=ts'st'\in E(S),$$

т.е. M - совместное справа подмножество полугруппы S. Лемма доказана.

Теорема 3.II. Следующие условия для правоинверсной полугруппы S эквивалентны:

I) S слабо самоинъективна справа.

2) $E=E(S)$ слабо самоинъективна справа, S является E-рефлексивной и для любого совместного подмножества $M\subseteq S$ существует элемент $w\in S$ такой, что $m=wm'm$ для любых $m\in M$, $m'\in V(m)$.

3) $E=E(S)$ слабо самоинъективна справа и для любого совместного справа подмножества $M\subseteq S$ существует элемент $w\in S$ такой, что $m=wm'm$ для любых $m\in M$, $m'\in V(m)$.

Доказательство. I) $\Rightarrow$ 2) следует из следствия 3.8, из леммы 3.2 и из леммы 3.6, поскольку каждое совместное подмножество является совместным справа. Так как каждое совместное справа подмножество E-рефлексивной полугруппы совместно, имеет место импликация 2) $\Rightarrow$ 3).

3) $\Rightarrow$ I). Пусть $I \lessdot S_S$ и $\varphi\in Hom_S(I,S)$. Из ортодоксальности полугруппы S следует, что $E(I)\lessdot E_E$. Определим отображение

$$\varphi^*:\begin{cases} E(I)\to E_E, \\ e\mapsto(\varphi(e))'\varphi(e), \end{cases}$$

где $(\varphi(e))'\in V(\varphi(e))$. Поскольку S правоинверсна, определение φ^* не зависит от выбора элементов $(\varphi(e))'$. Пусть $e\in E(I)$ и $a\in E(S)$. Используя правоинверсность полугруппы, мы получим

$$\varphi^*(ea)=(\varphi(ea))'\varphi(ea)=(\varphi(e)a)'\varphi(e)a=$$
$$=(a(\varphi(e))')\varphi(e)a=a(\varphi(e))'\varphi(e)a=$$
$$=(\varphi(e))'\varphi(e)a=\varphi^*(e)a.$$

Следовательно, $\varphi^*\in Hom_E(E(I),E)$. По предположению существует элемент $z\in E$ такой, что $(\varphi(e))'\varphi(e)=\varphi^*(e)=ze$ для всех $e\in E(I)$. По лемме 3.I0 $\varphi(E(I))\subseteq S$ является совместным справа подмножеством. По предположению существует элемент $w\in S$ такой, что $\varphi(e)=w(\varphi(e))'\varphi(e)$ для всех $e\in E(I)$. Так как из $x\in I$ следует $xx'\in E(I)$, мы получим

$$\varphi(x)=\varphi(xx'x)=\varphi(xx')x=(w(\varphi(xx'))'\varphi(xx'))x=$$
$$=w((\varphi(xx'))'\varphi(xx'))x=wzxx'x=wzx$$

для всех $x\in I$, т.е. S слабо самоинъективна справа. Теорема доказана.

Следствие 3.I2. ([9] , теорема 3.4). Инверсная полугруппа S является слабо самоинъективной справа тогда и только тогда, когда $E(S)$ слабо самоинъективна, S является E-рефлексивной и каждое совместное подмножество $M\subseteq S$ обладает верхней гранью.

Для доказательства отметим только, что элемент $w\in S$, существующий для совместного подмножества $M\subseteq S$ по теореме 3.II, является и верхней гранью подмножества M.

Как было отмечено во введении, из правоинверсности подполугруппы идемпотентов ортодоксальной полугруппы следует правоинверсность самой полугруппы. По предложению 2.7 имеет место следующее

Предложение 3.I3. Если подполугруппа идемпотентов $E(S)$ ортодоксальной полугруппы S слабо самоинъективна справа, то S правоинверсна.

Определение ([6]). Регулярная полугруппа S называется точной, если из $a\in S$ и $ae, e\in E(S)$ следует $a\in E(S)$.

Лемма 3.I4. Подполугруппа идемпотентов точной ортодоксальной слабо самоинъективной справа полугруппы слабо самоинъективна справа.

Доказательство. Пусть S - точная ортодоксальная слабо самоинъективная справа полугруппа, $E=E(S)$, $I\hookrightarrow E_E$ и $\varphi\in Hom_E(I,E)$. Рассуждая также, как в доказательстве леммы 3.2, мы получим, что существует элемент $z\in S$ такой, что $\varphi(e)=ze\in E$ для любого $e\in I$. Из точности полугруппы S следует, что $z\in E$. Следовательно, $E(S)$ слабо самоинъективна справа. Лемма доказана.

Полученная лемма, предложение 3.I3 и теорема 3.II доказывают следующий результат.

Теорема 3.I5. Для точной ортодоксальной полугруппы S следующие условия эквивалентны:

I) S слабо самоинъективна справа.

2) $E(S)$ слабо самоинъективна справа, S является E-рефлексивной и для любого совместного подмножества $M\subseteq S$ существует элемент $w\in S$ такой, что $m=wm'm$ для любых $m\in M$, $m'\in V(m)$.

3) $E(S)$ слабо самоинъективна справа и для любого совместного справа подмножества $M \subseteq S$ существует элемент $w \in S$ такой, что $m = wm'm$ для любых $m \in M$, $m' \in V(m)$.

Следующий пример покажет, что из слабой самоинъективности справа ортодоксальной полугруппы не обязательно следует слабая самоинъективность справа подполугруппы идемпотентов.

Пример. Пусть $S \doteq \{1, z, e, f\}$ – полугруппа с таблицей умножения

	1	e	f	z
1	1	e	f	z
e	e	e	e	e
f	f	f	f	f
z	z	f	e	1

.

Легко проверить, что $E = E(S) = \{1, e, f\}$ является подполугруппой, т.е. S ортодоксальна. Пусть $I \doteq eS \cup fS = \{e, f\}$. Можно проверить, что I – единственный правый идеал полугруппы, не являющийся главным. Так как $Hom_S(I,S) = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, где $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(e) = f$, $\varphi_2(f) = e$ и $\varphi_2(x) = zx$ для любых $x \in I$, полугруппа S является слабо самоинъективной справа. Но, поскольку $I \subseteq E_E$, $\varphi_2 \in Hom_E(I, E)$ и $E(S)$ не содержит элемент z, для которого $\varphi_2(x) = zx$ при всех $x \in I$, то $E(S)$ не является слабо самоинъективной справа.

Литература

1. Биркгоф Г., Теория решеток. Москва, 1984.
2. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп. Москва, 1972.
3. Bailes, G. L., Jr., Right inverse semigroups. J. Algebra, 1973, 26, 492-507.
4. Hall, T. E., Almost commutative bands. Glasgow Math. J., 1972, 13, 176-178.
5. Johnson, C. S. Jr., McMorris, F. R., Weakly self-injective semilattices. Semigroup Forum, 1973, 6, 3-11.
6. Masat, F.E., Proper regular semigroups. Proc. Amer. Math. Soc., 1978, 71, 189-192.
7. McLean, D., Idempotent semigroups. Amer. Math. Monthly, 1954, 61, 110-113.

8. R e i l l y, N. R., S c h e i b l i c h, H. E., Congruences on regular semigroups. Pacific J. Math., 1967, 23, 349-360.

9. S c h e i n, B. M., Injective monars over inverse semigroups. Colloq. Math. Soc. János Bolyai 20, Algebraic theory of semigroups, Szeged, 1976, 519-544.

10. S h o j i, K., On right self-injective regular semigroups, II. J. Australian Math. Soc., Series A, 1983, 34, 182-198.

11. V e n k a t e s a n, P. S., Right (left) inverse semigroups. J. Algebra, 1974, 31, 209-217.

Поступило
10 III 1986

PAREMALT NÕRGALT ISEINJEKTIIVSED
PAREMINVERSSED POOLRÜHMAD

H.Päeva

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis kirjeldatakse paremalt nõrgalt iseinjektiivsed idempotentide poolrühmad, paremalt nõrgalt iseinjektiivsed pareminverssed poolrühmad ja veel mõningad paremalt nõrgalt iseinjektiivsed regulaarsed poolrühmad. Kirjelduste esitamisel kasutatakse artiklitest [3] ja [7] tulenevat järeldust, et pareminversse poolrühma idempotentide alampoolrühma $\mathcal{R}$-klassid moodustavad poolvõre.

RIGHT WEAKLY SELF-INJECTIVE RIGHT INVERSE SEMIGROUPS

H.Päeva

S u m m a r y

In this paper we characterize right weakly self-injective bands, right weakly self-injective right inverse semigroups and some other right weakly self-injective regular semigroups using the corollary from [3] and [7] that the $\mathcal{R}$-classes of the subsemigroup of idempotents of right inverse semigroup form a semilattice.

TRÜ Toimetised
764 (1987), 98-108.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 98-108.

ОДНА ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИКАТЕГОРИЙ КВАЗИГРУППОВЫХ ФУНКЦИЙ

Э.Реди
Таллинский педагогический институт

Понятие поликатегории было введено автором в статье [2] В настоящей работе понятие поликатегории излагается в новом виде - в виде частичной алгебры. В работах [2,3] изучались поликатегории (полных) функций, частичных функций и отношений. В настоящей статье рассматриваются поликатегории квазигрупповых функций. Изучать такие поликатегории целесообразно, поскольку операции, определенные в поликатегориях, естественны для квазигрупповых функций. Доказываются некоторые факты о строении поликатегорий квазигрупповых функций и дается одна характеризация таких поликатегорий.

I. Определение поликатегории

Начнем с обозначений и определений, которые не общеизвестны. Через x_k^m обозначается последовательность $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m$ при $k \leq m$ и пустая последовательность при $k > m$. Запись $\overline{k,m}$ обозначает множество $\{k, k+1, \ldots, m\}$ при $k \leq m$ и пустое множество при $k > m$. Через Π в работе обозначается сигнатура $\{\overset{0}{\times}, \overset{1}{\times}, \ldots, \overset{u}{\times}, \ldots\}$ бинарных операций, индексированных элементами множества $N_0 = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$, т.е. множества натуральных чисел вместе с нулем. Символ N_{-1} обозначает множество натуральных чисел вместе с числами 0 и -I.

Определение I. Поликатегорией называется набор

$$\mathbb{K} = (K; I; \Pi, \rho, \nu, \lambda_{N_0}),$$

где K, I - непустые множества,
ρ - отображение K в N_{-1},
ν - отображение K в I,

λ_u – частичные отображения K в I $(u \in N_0)$, если выполняются следующие условия:

$$\forall x\in K\ [x\lambda_u \text{ определено } \Longleftrightarrow u \in \overline{0, x\rho}];$$

$$\forall x,y\in K\quad x\overset{u}{\times}y \text{ определено } \Longleftrightarrow x\nu = y\lambda_u\ (u\in \overline{0,y\rho}]; \qquad (1)$$

$$\forall x,y \in K\ [(x\overset{u}{\times}y)\rho = x\rho + y\rho]; \qquad (2)$$

$$\forall x,y\in K\ [(x\overset{u}{\times}y)\nu = y\nu]; \qquad (3)$$

$$\forall x,y\in K\ \left[(x\overset{u}{\times}y)\lambda_v = \begin{cases} y\lambda_v, & \text{если } 0\leq v<u,\\ x\lambda_{v-u}, & \text{если } u\leq v\leq u+x\rho,\\ y\lambda_{v-x\rho}, & \text{если } u+x\rho< v\leq x\rho+u\rho \end{cases}\right]; \qquad (4)$$

$$\forall x,y,z\in K\ \left[(x\overset{u}{\times}y)\overset{v}{\times}z = x\overset{u+v}{\times}(y\overset{v}{\times}z)\right]; \qquad (5)$$

$$\forall x,y,z\in K\ \left[x\overset{u}{\times}(y\overset{v}{\times}z) = y\overset{v+x\rho}{\times}(x\overset{v}{\times}z)\right]\ (u<v). \qquad (6)$$

Здесь соотношения (5) и (6) понимаются как тождества в частичной алгебре, т.е. если определена одна часть равенства, то определена и другая и равенство выполняется.

Применяется также следующая терминология:

число $x\rho$ называется рангом,
элемент $x\nu\ (\in I)$ – конечным носителем,
элемент $x\lambda_u (\in I)$ – u-тым компонентом начального носителя,
набор $(x\lambda_0,\dots,x\lambda_{x\rho})$ – начальным носителем,
набор $(x\lambda_0,\dots,x\lambda_{x\rho}; x\nu)$ – носителем,
число $|x| = x\rho+1$ – арностью элемента x.

Введем обозначения[1])

$$K^j_{i^m_0} = \{x\in K \mid x\lambda_u = i_u (u\in \overline{0,x\rho}),\ x\nu = j\}\ (x\rho = m \geq 0);$$

$$K^j = \{x\in K \mid x\rho = -1,\ x\nu = j\};$$

$$J_K = \{(i^m_0; j)\in I^N \mid K^j_{i^m_0} \neq \emptyset\}.$$

Напомним, что пара (I, J_K) называется носителем или основным полиграфом [2] поликатегории $\mathbb{K}$.

Используя эти обозначения, можно рассматривать поликатегорию как систему множеств, идексированную элементами множества J_K, снабженную частичными бинарными операциями сигнатуры Π, определенными согласно условиям (1) – (4) и обладающими свойствами (5) и (6). Таким образом определена поликатегория в работе [2].

---

1) Символ I^N обозначает объединение всех декартовых степеней множества I.

Подполикатегория определяется, как строгая подалгебра частичной универсальной алгебры и гомоморфизм поликатегорий определяется, как строгий гомоморфизм частичных универсальных алгебр.

2. Основа, след и фундамент поликатегории

Введем еще следующие обозначения и понятия:

$$K_{-1}=\{x\in K \mid x\rho=-1\} \quad (=\bigcup K^{j}(j\in I))\,;$$
$$K_{0}=\{x\in K \mid x\rho=0\} \quad (=\bigcup K^{j}_{i}(i,j\in I))\,;$$
$$\overline{K}=K\setminus K_{-1}.$$

Множество K_{-1}, состоящее из всех элементов ранга -I поликатегории $\mathbb{K}$, называется основой поликатегории $\mathbb{K}$ (по аналогии с позиционными алгебрами [6]). Отметим, что на множестве K_{-1} не определено ни одно из отображений $\lambda_u (u\in N_0)$ и элементы этого множества не могут являться правыми сомножителями в бинарных операциях из Π.

Множество $\overline{K}$ состоит из всех элементов неотрицательного ранга. Отображение λ_0 определено на всем множестве $\overline{K}$. В дальнейшем (как принято в работах по квазигруппам [I,c.I]) элементы множества K_{-1} обозначаются малыми латинскими буквами $a, b, \ldots$, а элементы из множества $\overline{K}$ - заглавными латинскими буквами $A, B, \ldots$. Операция $\overset{0}{\times}$ обозначается через $\cdot$.

Рассмотрим подробнее подмножество K_0. Следуя книге Пёшеля и Л.А.Калужнина [8,с.40], назовем K_0 следом поликатегории $\mathbb{K}$. На подмножестве K_0 отображения λ_0 и ν, сопоставляющие каждому элементу его (одноэлементный) начальный носитель и конечный носитель, соответственно, определены всюду. Поэтому (ввиду условия (I)) произведение $x\cdot y$ определено для элементов x и y из K_0 тогда и только тогда, когда $x\nu=y\lambda_0$, т.е. если конечный носитель первого сомножителя совпадает с начальным носителем второго. В силу условий (I) - (5), на K_0 выполняются равенства

$$(x\cdot y)\rho=0,\quad (x\cdot y)\lambda_0=x\lambda_0,\quad (x\cdot y)\nu=y\nu,\quad (x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$$

как частичные тождества. Значит, $\mathbb{K}_0=(K_0;\lambda_0,\nu,\cdot)$ является полукатегорией.

В поликатегориях определяются естественным образом единицы, (унарные) обратимые элементы и их обратные элементы (см. [4]). Для подмножества всех обратимых элементов поликатегории $\mathbb{K}$ введем обозначение $G(K)$. Тогда набор

$$\mathbb{G}(\mathbb{K}) = (G(K); \lambda_0, \nu, \cdot)$$

является (см. лемму I работы [4]) группоидом (в смысле Эресмана [7, с. 8I]), т.е. категорией, в которой все элементы обратимы. Следуя книге [8, с. 40] , назовем $\mathbb{G}(\mathbb{K})$ <u>фундаментом поликатегории</u> $\mathbb{K}$.

Обратим внимание и на то, что строго унитарными поликатегориями (т.е. поликатегориями с полным комплектом ι-единиц ($\iota \in I$)), в частности, оказываются следующие алгебраические системы: позиционная алгебра (при $|I| = 1$), категория (при $K = K_0$), моноид (при $|I| = 1$ и $K = K_0$), а также система множеств без операций (при $K = K_{-1}$).

3. Свойства поликатегорий квазигрупповых функций

В этом разделе вводятся основные понятия, связанные с поликатегориями квазигрупповых функций, и доказываются некоторые свойства поликатегорий квазигрупповых функций над системой множеств.

Будем пользоваться обозначениями работ [2-5] . Пусть дана система $\mathcal{M} = (M_\iota; \iota \in I)$ непустых множеств M_ι , индексированных элементами непустого множества I . Положим

$$M_{\iota_k^m} = M_{\iota_k} \times M_{\iota_{k+1}} \times \ldots \times M_{\iota_m} \ (k \le m), \quad M_{\iota_k^m} = \emptyset \ (k > m).$$

Символ $S^j_{\iota_0^m}(\mathcal{M})$ обозначает множество всех $(m+1)$-местных функций, аргументы которых пробегают соответственно множества $M_{\iota_0}, \ldots, M_{\iota_m}$, а значения принадлежат множеству M_j. Значение функции $f \in S^j_{\iota_0^m}(\mathcal{M})$ на аргументах $x_0 \in M_{\iota_0}, \ldots, x_m \in M_{\iota_m}$ обозначается через $x_0^m f$.

Множество всех многоместных функций над системой $\mathcal{M}$, т.е. множество

$$S(\mathcal{M}) = \bigcup S^j_{\iota_0^m}(\mathcal{M}) \quad (\iota_0, \ldots, \iota_m, j \in I, \ m \in N_{-1})$$

превращается в поликатегорию, если положить

$$f\rho = m, \quad f\lambda_u = \iota_u \ (u \in \overline{0,m}), \quad f\nu = j$$

для всех $f \in S^j_{\iota_0^m}(\mathcal{M})$, а операции из Π определить формулой

$$x_0^{m+n}(f \overset{u}{\times} g) = x_0^{u-1}(x_u^{m+u} f)\, x_{m+u+1}^{m+n} g \tag{7}$$

для всех элементов $x_0^{u-1} \in M_{j_0^{u-1}}$, $x_u^{m+u} \in M_{\iota_0^m}$, $x_{m+u+1}^{m+n} \in M_{j_{u+1}^n}$; числа $u \in \overline{0,n}$, носителей $f\lambda_u = \iota_u (u \in \overline{0,m})$, $f\nu = j_u$, $g\lambda_v = j_v (v \in \overline{0,n})$;

рангов $f\rho = m$, $g\rho = n$ и функций $f, g \in S(M)$. Этот факт доказан в работе [2], впрочем в другой терминологии. Поликатегория $S(M)$ называется симметрической поликатегорией над системой M.

В работе [5] введено, следуя книге В.Д.Белоусова [I, с. 6], следующее понятие

<u>Определение 2</u>. Функция $f \in S^{j}_{i_0^m}(M)$ называется квазигрупповой типа $(i_0^m; j)$ над системой M, если в равенстве

$$x_0^m f = y$$

любые $m+1$ из элементов $x_0 \in M_{i_0}, \ldots, x_m \in M_{i_m}, y \in M_j$ однозначно определяют отсутствующий.

Множество всех квазигрупповых функций (всевозможных типов) над M обозначается через $Q(M)$, а подмножество всех квазигрупповых функций типа $(i_0^m; j)$ - через $Q^{j}_{i_0^m}(M)$, т.е.

$$Q^{j}_{i_0^m}(M) = Q(M) \cap S^{j}_{i_0^m}(M), \quad Q(M) = \bigcup Q^{j}_{i_0^m}(M) \; (i_0, \ldots, i_m, j \in I).$$

Простой непосредственной проверкой доказывается, что набор

$$\mathbb{Q}(M) = (Q(M); I, \Pi, \rho, \nu, \lambda_{N_0})$$

является подполикатегорией симметрической поликатегории $S(M)$. В дальнейшем $\mathbb{Q}(M)$ называется <u>поликатегорией всех квазигрупповых функций над</u> M.

Ниже мы уточним и докажем некоторые результаты, анонсированные в работе [5].

Из предложения 2 работы [5] известно, что $Q^{j}_{i_0^m}(M) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда множества $M_{i_0}, \ldots, M_{i_m}$ и M_j попарно равномощны. Проведем доказательство предложения 5 из [5] в уточненном виде.

<u>Предложение I</u>. В поликатегории $\mathbb{Q}(M)$ всех квазигрупповых функций над системой M фундамент и след совпадают.

<u>Доказательство.</u> Возьмем произвольный элемент следа этой поликатегории, т.е. пусть $f \in Q_0(M)$. Пусть f имеет носители $i = f\lambda_0$ и $j = f\nu$. Ввиду определения 2, квазигрупповая функция f определяет взаимно-однозначное соответствие между множествами M_i и M_j. Поэтому существует обратная функция $f^{-1} \in S^{i}_{j}(M)$, которая также определяет взаимно-однозначное соответствие (а теперь) между множествами M_j и M_i. Значит, функция f^{-1} является квазигрупповой и $f^{-1} \in Q^{i}_{j}(M) \subset Q(M)$. Поэтому f^{-1} принадлежит фундаменту $G(\mathbb{Q}(M))$. Этим доказано включение $Q_0(M) \subset G(\mathbb{Q}(M))$. Обратное включение выполняется для любой поликатегории. Значит, в поликатегории $\mathbb{Q}(M)$ след и фундамент совпадают, что и требовалось доказать.

Отметим, что уже для подполикатегории в поликатегории $\mathbb{Q}(M)$ аналогичное утверждение может и не выполняться, поскольку нет требования замкнутости относительно обратных функций.

Определение 3. Поликатегория $\mathbb{K}$ называется собственной (или поликатегорией без элементов, которые равнодействуют на ее основе), если выполняется следующее условие [2)]

$$\forall A,B\in \overline{K}\,[\forall a_0,\dots,a_m\in K_{-1}\,(a_0\overset{0}{\times}\dots a_m\overset{m}{\times}A=a_0\overset{0}{\times}\dots a_m\overset{m}{\times}B)\Longleftrightarrow A=B]\ . \quad (8)$$

Предложение 2. Поликатегория $\mathbb{Q}(M)$ всех квазигрупповых функций над системой M является собственной.

Доказательство. Целесообразно обозначить нульместную функцию, отмечающую элемент $a\in M_j$, той же буквой a. При этом выполняется равенство $Q^j(M)=M_j$, для всех $j\in I$. Теперь равенство элементов поликатегории

$$a_0\overset{0}{\times}\dots a_m\overset{m}{\times}f = a_0\overset{0}{\times}\dots a_m\overset{m}{\times}g$$

при $m=f\varrho\,(=g\varrho)$ равносильно равенству значений функций $a_0^m f=a_0^m g$. Значит, условие (8) означает, что две квазигрупповые функции равны тогда и только тогда, когда их значения при всех комбинациях значений аргументов равны. А именно таким образом определяется равенство функций. Следовательно, $\mathbb{Q}(M)$ является собственной поликатегорией, что и требовалось доказать.

Отметим, что симметрическая поликатегория $\mathbb{S}(M)$ также является собственной.

Следующим определением выделяется важный класс подполикатегорий.

Определение 4. Будем говорить, что подполикатегория $\mathbb{K}'$ поликатегории $\mathbb{K}$ является подполикатегорией с полной основой, если ее основа совпадает с основой всей поликатегории, т.е. выполняется равенство $K'_{-1}=K_{-1}$.

Следствие 1. В собственной поликатегории все подполикатегории с полной основой являются собственными.

Доказательство. Это утверждение вытекает непосредственно из определений.

Следствие 2. В поликатегории $\mathbb{Q}(M)$ все подполикатегории с полной основой являются собственными.

Доказательство. Этот факт следует из предложения 2 и предыдущего следствия.

---

2) В выражении $a_0\overset{0}{\times}\dots a_m\overset{m}{\times}A$ считается, что операции совершаются справа налево.

Возьмем теперь разбиение множества I на подмножества I_μ так, чтобы каждая подсистема $M_\mu = (M_i;\ i \in I_\mu)$ состояла из всех подмножеств системы M, имеющих мощность μ. Образуем подмножество $Q(M_\mu)$ в $Q(M)$, состоящее из всех квазигрупповых функций (всех типов) над подсистемой M_μ. Тогда, в силу сказанного перед предложением I, имеем равенство

$$\dot{Q}(M) = \bigcup Q(M_\mu) \quad (\mu \in N),$$

причем это объединение дизъюнктно и операции из Π не применимы парам элементов из разных подмножеств. Эти подмножества оказываются подполикатегориями. В каждой $Q(M_\mu)$ все подмножества $Q^j_{i_0 \ldots i_m}(M_\mu)$, где $i_0, \ldots, i_m, j \in I_\mu$, непусты. Значит, основной полиграф имеет вид $(I_\mu,\ I_\mu^N)$. Напомним, что в работе [2] такие полиграфы называются полными. Поэтому и по аналогии с теорией позиционных алгебр [I, с.I28] естественным является следующее понятие.

<u>Определение 5</u>. Поликатегория над полным полиграфом, т.е. поликатегория $\mathbb{K} = (K; I, \Pi, \rho, \nu, \lambda_{N_0})$, для которой $J_{\mathbb{K}} = I^N$, называется <u>полной поликатегорией</u>.

Следующее понятие имеет свои аналоги в теории группоидов, а также в теории категорий и в теории графов.

<u>Определение 6</u>. Если поликатегория $\mathbb{K} = (K; I, \Pi, \rho, \nu, \lambda_{N_0})$ представлена в виде

$$K = \bigcup K_\mu, \quad I = \bigcup I_\mu, \quad J_{\mathbb{K}} = \bigcup J_{\mathbb{K}_\mu} \quad (J_{\mathbb{K}_\mu} \subset I_\mu^N),$$

причем все объединения являются дизъюнктными, все $\mathbb{K}_\mu$ являются подполикатегориями и операции из Π не применимы к парам элементов из разных K_μ, то будем говорить, что $\mathbb{K}$ является <u>суммой подполикатегорий</u> $\mathbb{K}_\mu$ (и будем писать $\mathbb{K} = \sum \mathbb{K}_\mu$).

Пользуясь этими понятиями и обозначениями, переформулируем предложение 4 работы [5] в следующем виде.

<u>Предложение 3</u>. Поликатегория $\mathbb{Q}(M)$ всех квазигрупповых функций над системой M единственным образом представляется в виде суммы полных подполикатегорий.

<u>Доказательство.</u> Выше было показано, что

$$\dot{Q}(M) = \bigcup Q(M_\mu),$$

где подсистемы M_μ состоят из всех множеств системы M, имеющих мощность μ. Также было доказано, что подмножества $\mathbb{Q}(M_\mu)$ являются подполикатегориями в $\mathbb{Q}(M)$, что они попарно дизъюнктны и операции из Π не применимы к квазигрупповым функциям из разных подполикатегорий. Значит, $\mathbb{Q}(M)$ является суммой:

$$Q(M) = \sum Q(M_k).$$

По построению, все подполикатегории $Q(M_k)$ являются полными, что и требовалось доказать.

Если поликатегория $\mathbb{K}$ представлена в виде суммы, т.е. $\mathbb{K} = \sum \mathbb{K}_k$, то ее фундамент также представлен в виде суммы $G(K) = \sum G(K_k)$, как группоид. Из работы [4] известно, что $G(K_k)$ являются группоидами Брандта [7, с. 83] и они называются максимальными B-подгруппоидами поликатегории $\mathbb{K}$. На основе этих фактов сформулируем следующее предложение.

<u>Предложение 4</u>. След полной поликатегории всех квазигрупповых функций $Q(M_k)$ является группоидом Брандта.

4. <u>Одна характеризация полных поликатегорий квазигрупповых функций</u>

В этом разделе доказывается основная теорема настоящей работы. Частным случаем этой теоремы является теорема II Ф.Н.Сохацкого из работы [6] для позиционных алгебр.

<u>Теорема</u>. Полная поликатегория, в которой фундамент и след совпадают, тогда и только тогда изоморфна некоторой полной поликатегории с полной основой квазигрупповых функций, когда она является собственной поликатегорией.

<u>Доказательство. Необходимость</u>. Пусть Q является полной подполикатегорией с полной основой в полной поликатегории $Q(M)$ всех квазигрупповых функций над системой $M = (M_\iota;\ \iota \in I)$. В силу полноты поликатегории $Q(M)$, все множества системы M равномощны. По предложению I в поликатегории $Q(M)$ фундамент и след совпадают, а по предложению 2 поликатегория $Q(M)$ является собственной. Ввиду следствия 2, поликатегория Q также собственна.

<u>Достаточность</u>. Пусть поликатегория $\mathbb{K}$ является полной собственной поликатегорией, в котором фундамент и след совпадают, т.е. $G(K) = K_0$. Хотим показать, что $\mathbb{K}$ изоморфна некоторой поликатегории квазигрупповых функций над подходящей системой.

Положим $M_\iota = K^\iota$ для всех $\iota \in I$ и введем обозначение $M_K = (M_\iota;\ \iota \in I)$. Образуем симметрическую поликатегорию $S(M_K)$. Определим отображение $\varphi: K \to S(M_K)$ формулами

$$\forall a \in K_{-1}\ [\varphi(a) = a], \tag{9}$$

$$\forall A \in \bar{K}\ \forall a_0^m \in M_{\iota_0^m}\ [a_0^m \varphi(a) = a_0 \overset{0}{\times} \ldots a_m \overset{m}{\times} A], \tag{IO}$$

где $m = A\rho$, $i_u = A\lambda_u$ $(u \in \overline{0,m})$.

Покажем сперва, что функция $\varphi(A)$ является квазигрупповой над $M_{\mathbb{K}}$. Заметим, что для любых элементов $a_o^{u-1} \in M_{i_o^{u-1}}$, $a_{u+1}^m \in M_{i_{u+1}^m}$, $b \in M_j$, $A \in K^j_{i_o^m}$ и числа $u \in \overline{0,m}$ произведение

$$a_o \overset{o}{\times} \dots a_{u-1} \overset{u-1}{\times} a_{u+1} \overset{u+1}{\times} \dots a_m \overset{m}{\times} A = h \qquad (11)$$

является элементом следа $(h \in K^j_{i_u} \subset K_o)$. Поскольку фундамент совпадает со следом, т.е. $G(K) = K_o$, то существует обратный элемент $h^{-1} \in K_j^{i_u}$. Положим $a_u = b \cdot h^{-1}$. Это произведение определено, так как $b\nu = j = h^{-1}\lambda_o$. Убедимся в том, что этот элемент a_u удовлетворяет равенству

$$a_o^m \varphi(A) = b. \qquad (12)$$

Действительно, пользуясь формулами, вытекающими из (5) и (6) и доказанными в работе [2], получим следующие равенства

$$a_o^m \varphi(A) \underset{(10)}{=} a_o \overset{o}{\times} \dots a_m \overset{m}{\times} A =$$
$$= a_o \overset{o}{\times} \dots a_{u-1} \overset{u-1}{\times} (b \cdot h^{-1}) \overset{u}{\times} a_{u+1} \overset{u+1}{\times} \dots a_m \overset{m}{\times} A =$$
$$= (b \cdot h^{-1}) \cdot [a_o \overset{o}{\times} \dots a_{u-1} \overset{u-1}{\times} a_{u+1} \overset{u+1}{\times} \dots a_m \overset{m}{\times} A =$$
$$= (b \cdot h^{-1}) \cdot h \underset{(5)}{=} b \cdot (h^{-1} \cdot h) = b$$

для произвольного $b \in M_j$.

Пусть теперь элемент $a_u \in M_{i_u}$ удовлетворяет равенству (12). Тогда, ввиду формулы (10),

$$a_o \overset{o}{\times} \dots a_u \overset{u}{\times} \dots a_m \overset{m}{\times} A = b.$$

Умножая последнее равенство справа на h^{-1} и проведя преобразования в левой части, получим равенство

$$[a_u \cdot (a_o \overset{o}{\times} \dots a_{u-1} \overset{u-1}{\times} a_{u+1} \overset{u+1}{\times} \dots a_m \overset{m}{\times} A)] \cdot h^{-1} = b \cdot h^{-1}.$$

В силу формул (5), (6) и (11), последнее равносильно равенству $a_u \cdot (h \cdot h^{-1}) = b \cdot h^{-1}$. Значит, элемент $a_u = b \cdot h^{-1}$ является единственным элементом, удовлетворяющим равенству (12) при фиксированных остальных элементах.

Следовательно, функция $\varphi(A)$ является квазигрупповой над $M_{\mathbb{K}}$ и $\varphi : K \longrightarrow Q(M_K)$.

Докажем теперь согласованность отображения φ с операциями из Π. Пусть $A, B \in K$, $A\rho = m$, $B\rho = n$, $A\lambda_\nu = i_\nu (\nu \in \overline{0,m})$, $A\nu = j$, $b\lambda_\nu = j_\nu (\nu \in \overline{0,n})$, $a_o^{m+n} \in M_{j_o^{u-1} i_o^m j_{u+1}^n}$. Тогда имеют место следующие равенства

$$a_o^{m+n} \varphi(A \overset{u}{\times} B) \underset{(10)}{=} a_o \overset{o}{\times} \dots a_{m+n} \overset{m+n}{\times} (A \overset{u}{\times} B) = \dots \underset{(5),(6)}{=}$$
$$= a_o \overset{o}{\times} \dots a_{u-1} \overset{u-1}{\times} (a_u \overset{u}{\times} \dots a_{m+u} \overset{m}{\times} A) \overset{u}{\times} a_{m+u+1} \overset{u+1}{\times} \dots a_{m+n} \overset{n}{\times} B \underset{(10)}{=}$$
$$= a_o \overset{o}{\times} \dots a_{u-1} \overset{u-1}{\times} [a_u^{m+u} \varphi(A)] \overset{u}{\times} a_{m+u+1} \overset{u+1}{\times} \dots a_{m+n} \overset{n}{\times} B \underset{(10)}{=}$$

$$= a_0^{u-1}[a_u^{m+u}\varphi(A)]a_{m+u+1}^{m+n}\varphi(B) \underset{(7)}{=} b_0^{m+n}[\varphi(A)\overset{u}{\times}\varphi(B)].$$

Значит, имеем равенство функций $\varphi(A\overset{u}{\times}B) = \varphi(A)\overset{u}{\times}\varphi(B)$ для всех $A, B \in \overline{K}$. А это частичное тождество означает, что φ является гомоморфизмом поликатегорий.

Покажем еще инъективность отображения φ. Пусть $\varphi(A) = \varphi(B)$. По определению равенства функций, имеем условие

$$\forall a_0^m \in M_{i_0^m}[a_0^m\varphi(A) = a_0^m\varphi(B)].$$

Ввиду формулы (10), это означает, что

$$\forall a_0,\ldots,a_m \in K_{-1}[a_0\overset{0}{\times}\ldots a_m\overset{m}{\times}A = a_0\overset{0}{\times}\ldots a_m\overset{m}{\times}B].$$

Применяя собственность поликатегории $\mathbb{K}$, получим равенство $A = B$.

Отметим еще, что аналогично, а даже проще, просматривается случай $a\overset{u}{\times}B$, где $a \in K_{-1}$, $B \in \overline{K}$, $u \in \overline{0, B\varphi}$.

Этим полностью доказано, что φ является изоморфизмом между поликатегорией $\mathbb{K}$ и ее образом $\varphi(\mathbb{K})$. Образ $\varphi(\mathbb{K})$ является полной подполикатегорией в $\mathbb{Q}(M_{\mathbb{K}})$ и имеет полную основу ввиду формулы (9). Легко проверяется и равенство $\varphi(h^{-1}) = [\varphi(h)]^{-1}$ для всех $h \in K_0$. Значит, для образа $\varphi(\mathbb{K})$, как поликатегории, фундамент и след совпадают.

Теорема доказана.

Литература

1. Белоусов В. Д., n-квазигруппы. Кишинев, Штиинца, 1972.
2. Реди Э. Р., Односторонние идеалы симметрических поликатегорий. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 31-61.
3. Реди Э. Р., О поликатегории многоместных функций и поликольцоиде частичных многоместных функций. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 3-25.
4. Реди Э. Р., Изотопия в поликатегориях. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 640, 60-67.
5. Реди Э. Р., Поликатегории квазигрупп как поликатегории, в которых фундамент и след совпадают. Тезисы конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики" I, Тарту, 1985, 150-152.
6. Сохацкий Ф. Н., О позиционных алгебрах. В кн.: Квазигруппы и латинские квадраты. Математические исследования. Кишинев, 1983, 71, 104-117.
7. Hasse, M., Michler, L., Theorie der Kategorien. Berlin, DVW, 1966.

8. P ö s c h e l, R., K a l u ž n i n, L. A., Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin, DVW, 1978.

Поступило
13 III 1986

TUNNUS POLÜKATEGOORIA ESITUSEKS KVAASIRÜHMA FUNKTSIOONIDENA

E.Redi

R e s ü m e e

Esitatakse polükategooria kui osalise algebra definitsioon. Leitakse hulkade süsteemil antud kvaasirühmafunktsioonidest koosneva polükategooria mõned omadused. Antakse tarvilik ja piisav tunnus selleks, et polükategooria oleks esitatav kvaasirühmafunktsioonidest koosneva polükategooriana.

A CHARACTERIZATION OF POLYCATEGORIES OF QUASIGROUP FUNCTIONS

E.Redi

S u m m a r y

Polycategory is defined as a special kind of partial algebra. Some properties of polycategories of quasigroup functions on a system of sets are proved. A necessary and sufficient condition is found for a polycategory to be representable as a polycategory of quasigroup functions.

TRÜ Toimetised, 764 (1987), 109-122.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 764, 109-122.

О ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ ТОЖДЕСТВ В СВОБОДНЫХ НЕАССОЦИАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ

Р.Роомельди
Лаборатория прикладной математики

В структурной теории неассоциативных колец существенную роль играют тождества, выводимые из исходных тождеств, определяющих данное многообразие $\mathfrak{M}$ колец. С помощью тождеств, например, можно найти элементы центров, аннуляторы идеалов и тривиальные идеалы, что приводит к описанию простых, первичных и полупервичных колец соответствующего многообразия [1]. Поскольку доказательство подобных тождеств требует обычно большого количества выкладок и усилий алгебраиста, то в последнее время появились алгоритмы и программы, позволяющие с помощью ЭВМ определить, является ли данное выражение тождеством в $\mathfrak{M}$. В работе [2] эта задача решается методом неявного построения базиса, а в работах [4,5] применяется метод представлений симметрических групп. К сожалению эти методы только определяют, является ли данное выражение тождеством в $\mathfrak{M}$, а тяжкий труд поиска вывода этого тождества из исходных тождеств остается алгебраисту.

В настоящей работе предложен алгоритм доказательства тождеств, который находит базис всех неассоциативных слов одинаковой длины и состава в свободном кольце из $\mathfrak{M}$. Тем самым достигается бо́льшая экономия машинного времени в отличие от алгоритма [2], в котором вычисляется полный базис до длины доказываемого тождества. Точнее, проверяемый однородный многочлен g от $y_1,\dots,y_s$, среди которых могут встречаться равные, выражается в виде

$$g=\sum_{i=1}^{k} n_i v_i+\sum_{j=1}^{l} m_j T_j, \qquad (1)$$

где $n_i, m_j \in \mathbb{Z}$ - базисные неассоциативные слова от $y_1,\dots,y_s$ и T_j - слагаемые, содержащие исходные тождества. Если первая сумма равна нулю, то g является тождеством в $\mathfrak{M}$ и вторая сумма после небольшой ручной корректировки пригодна в качестве доказательства тождества для статьи. Если же первая сумма ненулевая, то g не является тождеством в $\mathfrak{M}$ и появляется возможность сравнить различные выражения g_i в $\mathfrak{M}$. Например, может оказаться, что тождествами являются $g_1 \pm g_2$ или $\sum_{i=1}^{k} \kappa_i g_i$, где $\kappa_i \in \mathbb{Z}$.

Программа написана на языке АССЕМБЛЕРА ОС ЕС. С помощью нее можно доказывать тождества длины $s \leq 6$, что превышает возможности программы [2] и примерно эквивалентно программе [4,5]. Кроме того, программа способна проверять тождества с неопределенными коэффициентами и некоторые квазитождества.

Программа проверена в ВЦ Тартуского ГУ и в ВЦ Института математики СОАН СССР на практических задачах алгебраистов.

§ I. <u>Исходные тождества, определяющие многообразие</u>

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ и $\Phi[X]$ - свободное неассоциативное кольцо от X, т.е. множество всевозможных неассоциативных многочленов от X над ассоциативно-коммутативным кольцом Φ с единицей. Пусть $f_1, \ldots, f_m$ - полилинейные многочлены из $\Phi[X]$. <u>Многообразие $\mathfrak{M}$, определенное исходными тождествами $f_1, \ldots, f_m$</u> - это класс всех неассоциативных Φ-колец, в которых все f_i, $i = 1, \ldots, m$ являются тождествами [I, стр. I2]. Точнее, $A \in \mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда для любого $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_{k_i})$ и для любых $a_1, \ldots, a_{k_i} \in A$ $f_i(a_1, \ldots, a_{k_i}) = 0$.

Отметим, что в общем случае рассматриваются многообразия, определенные произвольными, не обязательно полилинейными многочленами f_i. Но при довольно слабых ограничениях на Φ или на f_i можно вместо f_i взять полные линеаризации их однородных компонентов [I]. В данной работе требуется дополнительно, чтобы коэффициенты многочленов f_i были целыми числами, что выполняется в большинстве случаев изучаемых многообразий (в работе [2] коэффициенты рациональные числа).

Далее, многочлен $g(x_1, \ldots, x_k) \in \Phi[X]$ называется <u>тождеством в $\mathfrak{M}$</u>, если для любого $A \in \mathfrak{M}$ и для любых $a_1, \ldots, a_k \in A$ $g(a_1, \ldots, a_k) = 0$. Как обычно, обозначим через $T(\mathfrak{M})$ совокупность всех тождеств в $\mathfrak{M}$. Тогда $T(\mathfrak{M})$ - идеал в $\Phi[X]$. Пусть $I(\Phi[X])$ - идеал в

$\Phi[X]$, порожденный всевозможными многочленами

$$f_i(h_{i1},\dots,h_{ik_i})\ ;\ h_{ij}\in\Phi[X],\ i=1,\dots,m. \tag{2}$$

Тогда [I, стр. I5]

$$T(\mathfrak{M})=I(\Phi[X]), \tag{3}$$

т.е. любое тождество в $\mathfrak{M}$ - линейная комбинация исходных тождеств, умноженных на некоторые элементы из $\Phi[X]$.

С другой стороны, любой многочлен (выражение) g достаточно проверить в свободном кольце $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ многообразия $\mathfrak{M}$. Если известен базис $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$, то g будет тождеством в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, если после выражения всех входящих в g одночленов (неассоциативных слов) через базисные в результате получим нуль.

В силу (3) для нахождения базиса $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ следует составлять всевозможные элементы из $I(\Phi[X])$ и, принимая неассоциативные слова за неизвестные, решить полученную систему линейных уравнений с целочисленными коэффициентами. Как и в случае исходных тождеств, достаточна проверка на тождество однородных компонентов g . За один сеанс выполнения программа проверяет однородные выражения от $y_1,\dots,y_s$, где

$$\langle y_1,\dots,y_s\rangle \overset{\text{опр.}}{=} \langle \underbrace{x_1,\dots,x_1}_{s_1},\underbrace{x_2,\dots,x_2}_{s_2},\dots,\underbrace{x_h,\dots,x_h}_{s_h}\rangle. \tag{4}$$

и $\sum_{i=1}^{h} s_i = s$. Поэтому достаточно найти подбазу $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ от $y_1,\dots,y_s$, для чего решается конечная подсистема системы уравнений $I(\Phi[X])$ от $y_1,\dots,y_s$.

Чтобы получить и доказательство выводимого тождества g , достаточно запомнить при образовании каждого уравнения также соответствующий элемент из $I(\Phi[X])$, содержащий исходное тождество.

Опишем ниже три основные части программы: подпрограммы инициализации, генерации уравнений и решения системы уравнений.

§ 2. Инициализация программы

До запуска генератора уравнений образуют:

I) массив $ACC_1,\dots,ACC_N$ всевозможных ассоциативных слов от $y_1,\dots,y_s$ (см. (4)), тогда

$$N=\frac{s!}{s_1!\dots s_h!}\ ; \tag{5}$$

2) массивы $CK_{i,1},\dots,CK_{i,M_i}$ всевозможных скобочных выражений длины $i=1,\dots,s$, тогда [3] :

$$M_i = \sum_{j=1}^{i-1} M_j M_{i-j} = C_{2i-1}^{i-1} / (2i-1). \qquad (6)$$

Например, $CK_{1,1} = \sqcup$; $CK_{2,1} = \sqcup\sqcup$; $CK_{3,1} = (\sqcup\sqcup)\sqcup$, $CK_{3,2} = \sqcup(\sqcup\sqcup)$;
$CK_{4,1} = ((\sqcup\sqcup)\sqcup)\sqcup$, $CK_{4,2} = (\sqcup(\sqcup\sqcup))\sqcup$, $CK_{4,3} = (\sqcup\sqcup)(\sqcup\sqcup)$,
$CK_{4,4} = \sqcup((\sqcup\sqcup)\sqcup)$, $CK_{4,5} = \sqcup(\sqcup(\sqcup\sqcup))$; ...

3) массив $v_1 = HEACC_1, \dots, v_K = HEACC_K$ всевозможных неассоциативных слов от $y_1, \dots, y_s$ $(K = N \cdot M_s)$. Если $i-1 = Nk+j$, где $k \geq 0$ и $0 \leq j < N$, то v_i составлено из ACC_{j+1} и $CK_{s,k+1}$. Отметим, что на самом деле этот массив не создается и в уравнениях используют лишь индексы i от v_i. Если $y_i = x_i$ $(i = 1, \dots, s)$, то $N = s!$ и получаем следующую таблицу:

Таблица I.

s	2	3	4	5	6	7
N	2	6	24	I20	720	5040
M_s	I	2	5	I4	42	I32
K	2	I2	I20	I680	30240	665280

4) хэш-таблицы ХАСС и XCK для скорейшего определения индексов соответственно ассоциативных слов и скобочных выражений длины s в массивах ACC_i и $CK_{s,i}$;

5) хэш-таблицы $XPEШ1$ и $XPEШ2$ решения уравнений (см. подробнее § 7).

Пример. Рассмотрим здесь и в дальнейшем простой пример многообразия $\mathcal{K}$ коммутативных неассоциативных колец, порожденного тождеством $f_1(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1 x_2 - x_2 x_1$. Проверяем на тождество выражения $g_1 = x_1(x_1 x_2) - (x_2 x_1) x_1$, $g_2 = 2 x_2 x_1^2$ и $g_3 = 3 x_1^2 x_2$. Ясно, что g_1 - тождество в $\mathcal{K}$, а g_2 и g_3 не тождества, причем $3g_2 - 2g_3$ - тождество. В данном случае $y_1 = y_2 = x_1$, $y_3 = x_2$, $s_1 = 2$, $s_2 = 1$ и $s = 3$. Далее,

$ACC_1 = x_1^2 x_2$, $ACC_2 = x_1 x_2 x_1$, $ACC_3 = x_2 x_1^2$,
$v_1 = x_1^2 x_2$, $v_2 = (x_1 x_2) x_1$, $v_3 = (x_2 x_1) x_1$,
$v_4 = x_1(x_1 x_2)$, $v_5 = x_1(x_2 x_1)$, $v_6 = x_2 x_1^2$.

§ 3. Генерация уравнений

Рассмотрим образование уравнений для первого исходного тождества $f_1 = f_1(x_1, \ldots, x_{k_1})$. Поскольку f_1 полилинейно, то $f_1 = \sum_{i=1}^{t_1} \ell_i u_i$, где $\ell_i \in Z$ и u_i - неассоциативные слова длины k_1 от $x_1, \ldots, x_{k_1}$ $(k_1 \le s)$.

Замечание. Для компактности задания тождеств можно их ввести в виде однородного тождества f_1'. Программа производит полную линеаризацию его и получает в результате полилинейное тождество f_1. Более того, однородные тождества можно задавать в более коротком виде с помощью специальных функций

а) коммутатор $[x,y] = xy - yx$;

б) ассоциатор $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$;

в) циклическая сумма ассоциаторов

$S(x,y,z) = (x,y,z) + (y,z,x) + (z,x,y)$;

г) якобиан $J(x,y,z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$.

Например, тождество правой альтернативности преобразуется программой следующим образом:

$(x,y,y) \to (xy)y - x(yy) \to (xz)y + (xy)z - x(zy) - x(yz)$.

Опишем образование очередного уравнения как составление массивов скобочных выражений CK_i^* длины s, ассоциативных слов ACC_i^* от $y_1, \ldots, y_s$ и коэффициентов $KO_i^* = \ell_i$ $(i = 1, \ldots, t_1)$.

6) Исходное тождество f_1 преобразуем в массивы ассоциативных слов ACC_i', скобочных выражений CK_i' длины k_1 и коэффициентов $KO_i' = \ell_i$ $(i = 1, \ldots, t_1)$.

Пример. (см. § 2). Из $f_1 = [x_1, x_2]$ образуем

$ACC_1' = x_1x_2$, $ACC_2' = x_2x_1$, $CK_1' = CK_2' = \sqcup\sqcup$, $KO_1' = 1$, $KO_2' = -1$

7) Затем создаем массив $F_1, \ldots, F_{k_1}$, где значение F_i показывает длину вставляемого неассоциативного подслова от некоторых y_j вместо x_i в f_1 $(F_i \ge 1, \sum_{i=1}^{k_1} F_i \le s)$. В качестве исходных значений присвоим всем F_i значение I.

8) Образуем массив $FCK_1, \ldots, FCK_{k_1}$, где FCK_i - номер скобочного выражения длины F_i, вставляемого в f_1 вместо x_i (исходные значения $FCK_i = 1$, $i = 1, \ldots, k_1$).

9) Создаем с помощью CK_i', ACC_i' и FCK_j массив $CK_1'', \ldots, CK_{t_1}''$ скобочных выражений длины $F = \sum_{j=1}^{k_1} F_j$. Точнее, CK_i'' получается из CK_i' заменой ℓ-го пробела на FCK_j-ое скобочное выражение длины F_j, если в ACC_i'

на ℓ-ом месте стоит x_j $(\ell=1,\dots,\kappa_1)$.

I0) Найдем в массиве $CK_{s,\ell}$ скобочных выражений длины s очередной элемент CK_1^*, содержащий в качестве подвыражения CK_1''. Остальные $CK_i^*\ (i=2,\dots,t_1)$ получаем заменой подвыражения CK_1'' в CK_1^*, соответственно, на CK_i''. Через p_1 и p_2 обозначим количество пробелов в CK_i^*, соответственно, до и после $CK_i''\ (p_i \geqslant 0)$.

Если же массив $CK_{s,\ell}$ исчерпан, то переходим к I4) для выбора очередных FCK_j.

II) Возьмем очередное ассоциативное слово ACC_ℓ в качестве ACC_1^* и найдем остальные ассоциативные слова $ACC_i^*\ (i=2,\dots,t_1)$ составляемого уравнения следующим образом: первые p_1 и последние p_2 символов ACC_1^* не изменяем, а в середине переставляем подвыражения ACC_1^*, соответствующие различным x_j в ACC_1' в соответствии с перестановкой их в ACC_i'.

Если же массив ACC_ℓ исчерпан, перейдем к I0).

I2) При желании получить также решения доказываемых тождеств, добавляем к уравнению со знаком минус слагаемое T_k, содержащее информацию о применяемом исходном тождестве (см. (I)).

I3) Очередное уравнение, составленное массивами CK_i^*, ACC_i^*, KO_i^* и элементом T_k, передаем для решения подпрограмме решения системы уравнений. Для образования очередного уравнения перейдем к II).

I4) Если $FCK_1 < M_{F_1}$, то увеличим FCK_1 на I и перейдем к 9). Если же $FCK_1 = M_{F_1}$, то присвоим FCK_1 единицу и проверяем FCK_2 аналогично на M_{F_2}. Если все FCK_i оказались равными M_{F_i}, то перейдем к I5).

I5) Увеличим F_1 на I и если $F=\sum_{i=1}^{\kappa_1} F_i \leq s$, перейдем к 8). Если же $F > s$, присвоим F_1 значение I и обрабатываем дальше аналогично F_2. Если подходящих F_i нет, то все уравнения для f_1 созданы и генератор уравнений закончит свою работу с исходным тождеством φ_1.

<u>Пример</u>. В нашем примере сначала $F_1=F_2=1$ и $FCK_1 = FCK_2 = 1$. В силу 9) $CK_1''=CK_2''=\sqcup\sqcup$, по I0) $CK_1^* = (\sqcup\sqcup)\sqcup$, $CK_2^*=(\sqcup\sqcup)\sqcup$, ввиду II) $ACC_1^* = ACC_2^* = x_1x_1x_2$. Далее, $KO_1^*=1$, $KO_2^*=-1$ и первое уравнение имеет вид

$$(x_1x_1)x_2-(x_1x_1)x_2-f_1(x_1,x_1)x_2=0. \qquad (7)$$

Получим нулевое уравнение, которое отбрасываем. Далее, по II), $ACC_1^*=x_1x_2x_1$, $ACC_2^*=x_2x_1^2$ и получаем второе уравнение $(x_1x_2)x_1-(x_2x_1)x_1-f_1(x_1,x_2)x_1=0$ или

$$v_2-v_3-f_1(x_1,x_2)x_1=0. \tag{8}$$

Аналогично получаем

$$v_3-v_2-f_1(x_2,x_1)x_1=0, \tag{9}$$

что эквивалентно (8).

Теперь массив ACC_ℓ исчерпан и по 10) найдем новые $CK_1^*=CK_{3,2}=u(uu)=CK_2^*$ и получаем уравнения

$$v_4-v_5-x_1f_1(x_1,x_2)=0, \tag{10}$$

$$v_5-v_4-x_1f_1(x_2,x_1)=0, \tag{11}$$

$$v_6-v_6-x_2f_1(x_1,x_1)=0. \tag{12}$$

Массив $CK_{3,\ell}$ исчерпан и по 14) FCK_i исчерпаны, т.к. $M_{F_i}=1$. Поэтому по 15) получаем новое значение $F_1=2$ и по 8) $FCK_1=1$. Затем по 9) $CK_1''=(uu)u$ и $CK_2''=u(uu)$, по 10) $CK_1^*=(uu)u$ и $CK_2^*=u(uu)$. Получаем уравнения

$$v_1-v_6-f_1(x_1^2,x_2)=0, \tag{13}$$

$$v_2-v_4-f_1(x_1x_2,x_1)=0, \tag{14}$$

$$v_3-v_5-f_1(x_2x_1,x_1)=0. \tag{15}$$

Наконец, при $F_1=1$ и $F_2=2$ получаем уравнения, эквивалентные (13) - (15). Итак, можно ограничиться только пятью уравнениями (8), (10), (13), (14) и (15).

Отметим, что генератор уравнений не составляет уравнения, отличающегося от некоторого предыдущего лишь порядком слагаемых и, возможно, знаком. Для этого введем понятие слагаемого исходного тождества, <u>симметрического первому слагаемому</u>. Таковым назовем i-ое слагаемое исходного тождества f_j, если $CK_i'=CK_1'$ и после применения ко всем слагаемым перестановки элементов x_i, переводящей ACC_i' в ACC_1', получаем либо f_j, либо $-f_j$. После образования очередного уравнения запоминают симметрические слагаемые и не составляют новых уравнений, где на первом месте стоят эти неассоциативные слова.

Симметрические слагаемые возникают, например, после линеаризации исходного тождества или в присутствии коммутаторов в исходном тождестве. В исходных данных следует указать номера симметрических слагаемых (см. § 6), тогда время работы программы сокращается в несколько раз.

§ 4. Решение системы уравнений

Уравнения, составленные генератором уравнений, решаются сразу же после поступления очередного уравнения методом исключения неизвестных. При этом неассоциативные слова v_i с большими индексами выражаются через v_j с меньшими индексами. После решения всех уравнений для исходных тождеств $f_1, \dots, f_i$, получаем базис свободной алгебры $\Phi_{\mathfrak{M}_i}[X]$ многообразия $\mathfrak{M}_i$, порожденного $f_1, \dots, f_i$. Тем самым множество V всех неассоциативных слов от $y_1, \dots, y_s$ разбивается в $\mathfrak{M}$ на <u>базисные</u> и <u>небазисные</u> слова. Во время решения уравнений слова из V, не являющиеся небазисными, назовем <u>предбазисными</u>. Например, перед решением первого уравнения для f_1, множество V состоит только из предбазисных слов. Количество предбазисных слов при добавлении исходных тождеств уменьшается.

<u>Пример</u>. В нашем примере сначала все слова из $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$ - предбазисные. После решения уравнения (8) слово v_3 превращается в небазисное:

$$v_3 = v_2 - f_1(x_1, x_2)x_1. \tag{I6}$$

После решения (I0), (I3) и (I4) соответственно v_5, v_6 и v_4 - небазисные:

$$v_5 = v_4 - x_1 f_1(x_1, x_2), \tag{I7}$$

$$v_6 = v_1 - f_1(x_1^2, x_2), \tag{I8}$$

$$v_4 = v_2 - f_1(x_1 x_2, x_1). \tag{I9}$$

Уравнение (I5) - следствие из (8), (I0) и (I4). Наконец, выражаем v_5 через базисные:

$$v_5 = v_2 - f_1(x_1 x_2, x_1) - x_1 f_1(x_1, x_2). \tag{20}$$

Следовательно, базис слов $\Phi_{\mathcal{K}}[X]$ от x_1, x_1, x_2 образуют v_1 и v_2, а небазисными являются v_3, v_4, v_5 и v_6.

Для экономии времени выполнения программа не производит остаточного исключения неизвестных, т.е. слово v_i, которое после решения очередного уравнения выводится из предбазиса в небазисное, не исключается из линейных комбинаций других небазисных слов. Исключение производится полностью лишь для небазисных слов v_j, встречающихся в составленном уравнении (слов первого уровня), для небазисных слов, встречающихся в линейных комбинациях v_j (слов второго уровня) и т.д. Ситуацию перед решением уравнения можно изобразить в виде дерева, в котором предбазисные и небазисные слова обозначены для краткости через $ПБ$ и $НБ$. Отдельно выделены нулевые небазисные слова ($Н$). Опускаем для простоты в деревьях коэффициенты и слагаемые типа T_k. Например, в дереве уравнения

$$
\begin{tikzcd}
 & \Pi Б_1 \arrow[r] & НБ_2 \arrow[r] \arrow[dll] & \Pi Б_3 \arrow[r] & НБ_4 \arrow[r] \arrow[dl] & НБ_5 \arrow[d, shift left] \\
НБ_6 \arrow[r] \arrow[d] & НБ_7 \arrow[r] \arrow[dr, shift left] & Н_8 \arrow[u] & \Pi Б_9 \arrow[r] & \Pi Б_{10} \arrow[u] & Н_{11} \arrow[u, shift left] \\
\Pi Б_{11} \arrow[r] & \Pi Б_{12} \arrow[ul] & \Pi Б_{13} \arrow[ul, shift left] & & &
\end{tikzcd}
$$

второе слагаемое $НБ_2$ доводим до

$$
\begin{tikzcd}
 & НБ_2 \arrow[dl] & \\
\Pi Б_{11} \arrow[r] & \Pi Б_{12} \arrow[r] & \Pi Б_{13} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

и $НБ_5$ до $Н_{11}$. В результате получим уравнение только в предбазисных словах и предбазисное слово, имеющее в V наибольший индекс, преобразуется в небазисное слово.

Для ускорения работы программы введен еще один подтип $НБР$ типа $НБ$ для равных или пропорциональных слов ($n_i v_i = n_j v_j$).

Отметим, что программа сохраняет в линейных комбинациях целые числа, поэтому до исключения неизвестных найдутся требуемые НОК и НОД, а решение делят на НОД всех коэффициентов. Программа вычисляет НОК всех таких НОД, что позволяет получить ограничения на характеристику колец, в которых верны доказанные тождества. Чаще всего это НОК равно некоторому 2^n, что дает ограничение характеристики не 2 (в аддитивной группе кольца должны отсутствовать элементы порядка 2).

§ 5. Вычисление значений выражений

Выражения, т.е. проверяемые тождества, могут быть заданы в виде $\sum\limits_{k=1}^{t} n_k v_k$, где $n_k \in \mathbb{Z}$ и v_k - неассоциативные слова от $y_1, \ldots, y_s$. Как и в случае исходных тождеств, можно использовать для сокращения записи выражений функции $[x,y]$, (x,y,z), $S(x,y,z)$ и $J(x,y,z)$.

Пример. В нашем примере в силу (I6) и (I8)
$$g_1 = x_1(x_1x_2) - (x_2x_1)x_1 = v_4 - v_3 = v_2 - f_1(x_1x_2, x_1) - v_2 + f_1(x_1,x_2)x_1 = -[x_1x_2, x_1] + [x_1, x_2]x_1 .$$
что дает решение тождества g_1. Далее, $g_2 = 2x_2x_1^2 = 2v_6 = 2v_1 - 2f_1(x_1^2, x_2)$ и $g_3 = 3x_1^2x_2 = 3v_1$. Отсюда видно, что $3g_2 - 2g_3 = -6[x_1^2, x_2]$ - тождество в $\mathcal{K}$.

Отметим, что вычисляемых выражений целесообразно указать как можно больше, т.к. основная работа связана с выделением базиса. Программа не предусматривает записи базиса и небазисных элементов во внешнюю память, т.к. обычно не требуется вычислить выражения от одних и тех же $y_1, \dots, y_s$ данного многообразия.

§ 6. Режимы выполнения программы

Для управления выполнением программы и вывода на печать дополнительной информации предназначены следующие режимы:

У – печатаются все составленные уравнения;

Е – печатаются результаты решения уравнений и исключения неизвестных;

И – печатается общая информация решения системы уравнений (общее количество образованных и нулевых уравнений, общее количество базисных слов от $y_1, \dots, y_s$ в $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$, НОК делителей уравнений и размер использованной памяти);

Л – печатается базис слов от $y_1, \dots, y_s$, небазисные слова в виде линейной комбинации базисных и общая информация решения системы уравнений (режим И);

Д – каждому уравнению добавляется элемент типа T_k, что позволяет получить доказательства тождеств.

Режимы задаются в исходных данных после каждого исходного тождества за признаком режимов "*". Допустимо пустое множество режимов. Признаком вычисляемых выражений является символ "@".

Пример. Исходные данные нашего примера:

#XXY ($y_1 = y_2 = x_1 = x$, $y_3 = x_2 = y$)

[X, Y] 2 (в исходном тождестве второе слагаемое симметрично первому)

*ДЛ (режимы Д и Л)

@X(XY)-(YX)X (g_1)

@2 Y(XX) (g_2)

@3(XX)Y (g_3)

Если многообразие определяется несколькими исходными тождествами, то они задаются аналогично примеру в следующих строках исходных данных.

§ 7. Использование памяти и хэш-таблиц

Для ускорения работы программа не использует рабочих файлов во внешней памяти. Оперативная память, используемая программой, делится на статическую и динамическую части.

В статической части во время инициализации помещаются различные массивы скобочных выражений, ассоциативных слов и коэффициентов, массивы F_i и FCK_i, хэш-таблицы, параметры и т.д.

Основную область динамической части заполняют линейные комбинации небазисных слов. Там же расположены некоторые таблицы изменяющейся длины (например, таблица элементов типа T_k в режиме Д). Новые записи добавляют подобно разделам библиотек ОС ЕС в начало свободной динамической памяти. При переполнении этой памяти включается подпрограмма сжатия.

Хэш-таблицы XCK скобочных выражений и $XACC$ ассоциативных слов работают следующим образом: для получения, например, индекса ассоциативного слова в массиве ACC_i, равного данному ассоциативному слову, выполняют частями этого слова как целыми числами несложные арифметические операции, в результате которых получается номер элемента таблицы $XACC$, в котором находится искомый индекс. Эти хэш-таблицы создают на этапе инициализации, выбирая хэш-функции так, чтобы не было коллизий, т.е. совпадения значений функций для различных аргументов.

Хэш-таблицы решения уравнений и исключения неизвестных составлены отдельно для коэффициентов неассоциативных слов (ХРЕШ1) и коэффициентов элементов типа T_k (ХРЕШ2). Сначала таблицы зануляют и при поступлении, например, слагаемого $n_i \sigma_i$ добавляют n_i к i-ому элементу таблицы ХРЕШ1. В конце решения производится собирательный процесс ненулевых коэффициентов обоих таблиц. Отметим, что таблица ХРЕШ1 имеет фиксированную длину $K = N \cdot M_\lambda$ и, поэтому, расположена в статической части. А таблица ХРЕШ2 после решения очередного ненулевого уравнения возрастает на единицу и, поэтому, расположена в динамической части памяти.

§ 8. Возможности программы

Из таблицы I следует, что с увеличением длины λ доказываемых тождеств резко возрастает количество неассоциативных слов K, т.е. неизвестных решаемой системы, а тем более количество составленных уравнений. Это приводит к быстрому увеличению процессорного времени ПВ выполнения и потребности оперативной памяти ОП программы. В таблице 2 приведены соответствующие данные при выполнении программы без режима Р на ЕС-1060 со скоростью примерно I млн. опер./ сек. для многообразия т.н. локально (-I, I)-колец (заданных двумя исходными тождествами (y,x,x) и $S(xy,x,y)$):

Таблица 2.

	K	ТВ	ОП
XXXYZ	280	6сек	256КБ
XXYYZ	420	I4сек	5I2КБ
XXXXYZ	I260	Iмин	IМБ
XXXYYZ	2520	8мин	2МБ

Отметим, что программа в [5] также доказывает не все тождества длины 6 (более точное сравнение невозможно, т.к. в [5] не указана скорость ЭВМ).

Некоторым несущественным ограничением данной программы является требование того, чтобы абсолютные величины коэффициентов в вычислениях не превышали 32767.

Программа способна также вместо исходных тождеств использовать некоторые квазитождества или условия, реализуемые в программе переупорядочиванием неизвестных или занулением некоторых из них. Она применима даже в случае ассоциативных колец, если первым исходным тождеством задать ассоциатор.

Литература

1. Ж е в л а к о в К. А., С л и н ь к о А. М., Ш е с т а к о в И. П., Ш и р ш о в А. И., Кольца, близкие к ассоциативным. Москва, 1978.

2. Ж е в л а к о в а В. А., Об одном алгоритме доказательства тождеств с помощью ЭВМ. Методы дискретного анализа в теории графов и логических функций, Сб. трудов ИМ СОАН СССР, 1976, 28, 25-39.

3. Ш и р ш о в А. И., Об одной комбинаторной задаче. Квант, 1979, 9, 19-20.

4. H e n t z e l I. R., Processing identities by group representation. Computers in nonassociative rings and algebras, Academic Press, New York, 1977, 13-40.

5. H o g b e n L., Identities of nonassociative algebras studied by computer. Contemp. math., 1982, 13, 321 - 324.

Поступило
23 I 1986

SAMASUSTE TÕESTAMISEST VABADES MITTEASSOTSIATIIVSETES RINGIDES ARVUTI ABIL

R.Roomeldi

R e s ü m e e

Olgu $\mathfrak{M}$ mitteassotsiatiivsete Φ-ringide muutkond ja $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ vaba ring sellest muutkonnast vabade moodustajate hulgaga $X=\{x_1,\dots,x_n,\dots\}$. Antud töös on kirjeldatud algoritm, mis leiab $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ alambaasi muutujate $y_1,\dots,y_s$ ($s \le 6$) suhtes, kus $y_t \in X$ ja nende hulgas võib leiduda võrdseid. See võimaldab esitada suvalise homogeense avaldise g muutujatest $y_1,\dots,y_s$ kujul

$$g=\sum_{i=1}^{k} n_i v_i + \sum_{j=1}^{\ell} m_j T_j \quad (n_i, m_j \in \mathbb{Z}) \tag{1}$$

kus v_i on mitteassotsiatiivsed sõnad $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ baasist ja T_j on saadud lähtesamasustest. Siis g on samasus muutkonnas $\mathfrak{M}$ parajasti siis, kui (1) esimene summa on null. Teine summa annab siis g tõestuse lähtesamasuste kaudu.

PROCESSING IDENTITIES IN FREE NONASSOCIATIVE RINGS BY COMPUTER

R.Roomeldi

S u m m a r y

Let $\mathfrak{M}$ be a variety of nonassociative Φ-rings and $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ be the free ring of $\mathfrak{M}$ with the set of free generators $X = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$.

In this paper we describe an algorithm which finds the subbasis of $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ by $y_1, \dots, y_s$ ($s \leq 6$) where y_t are not necessarily different generators from X. It enables us to present the homogeneous expression g of $y_1, \dots, y_s$ in the form

$$g = \sum_{i=1}^{k} n_i v_i + \sum_{j=1}^{l} m_j T_j \quad (n_i, m_j \in \mathbb{Z}) \qquad (1)$$

where v_i are the nonassociative words of the basis of $\Phi_{\mathfrak{M}}[X]$ and T_j are the initial identities multiplied by elements $y_1, \dots, y_s$. Then g is an identity of $\mathfrak{M}$ iff the first sum in (1) is equal to zero and the second sum gives the proof of g by initial identities.

TRÜ Toimetised
764 (1987), 123-135.

Уч. зап. Тартуск. ун-та,
1987, 764, 123-135.

ОБ АФФИННОЙ ПОЛНОТЕ РАЗЛОЖИМЫХ МОДУЛЕЙ

А.Сакс

Кафедра алгебры и геометрии

В настоящей работе продолжается исследование аффинной полноты модулей (см. [3]). Рассматриваются только левые унитарные модули над ассоциативным кольцом с единицей. В основной теореме 2.1 описаны кольца, над которыми только подпрямо неразложимые модули не являются аффинно полными. Также получены некоторые результаты, характеризующие кольца, над которыми конечная прямая степень любого модуля является аффинно полной. Самым главным среди них является теорема 3.1 где доказано, что факторкольцо такого кольца по радикалу Джекобсона является артиновым.

§ 1. Обозначения, вспомогательные результаты

Если не оговорено противное, пользуемся теми же обозначениями, что и в [3].

Подмодуль N модуля M обозначим через $N \leqslant M$.

Обозначим множество всех n-арных функций $f: M^n \to M$ через $F_n(M)$, а подмножество всех n-арных полиномиальных (совместных) функций, сохраняющие ноль, через $P_n(M)$ $(C_n(M))$. Для любого R-модуля M и непустого множества I с мощностью c введем обозначение

$$M^c = \prod_{i\in I} M_i \ , \quad M_i = M.$$

Если R-модуль M – подпрямое произведение семейства R-модулей $\{M_i\}_{i\in I}$, то обозначим это через $M \leq \prod_{i\in I} M_i$. Произвольный элемент R-модуля $\prod M_i$ обозначим через $m = \prod m_i$, где $m_i \in M_i$. Если $I = \{1, \ldots, n\}$, то вместо $\prod m_i$ пишем $m_1 \dotplus \ldots \dotplus m_n$.

Пусть $M \le \prod_i M_i$ и $f \in F_k(M)$. Будем говорить, что f <u>расщепляется</u>, если существуют $f_i \in F_k(M_i)$, так что для любых $m_{ji} \in M_i$, $j = 1, \dots, k$, $i \in I$

$$f(\prod_i m_{1i}, \dots, \prod_i m_{ki}) = \prod_i f_i(m_{1i}, \dots, m_{ki}).$$

Обозначим это через $f = \prod_i f_i$ или $f = f_1 + \dots + f_n$, если I конечно. Если $f_i = g$ при всех $i \in I$, то пишем $f = \tilde{g}$.

Поскольку расщепляемость функции f, очевидно, равносильна тому, что f совместна с ядрами всех проекций то имеет место

<u>Предложение I.I</u>. Пусть $M \le \prod_i M_i$. Тогда любая функция $f \in C_k(M)$ расщепляется: $f = \prod_i f_i$, причем $f_i \in C_k(M_i)$, $i \in I$.

Пусть $M \le \prod_i M_i$. Будем говорить, что M <u>2-транзитивно</u>, если при любых фиксированных $i, j \in I$ и любых $a \in M_i$ и $b \in M_j$ существует $m \in M$, так что $m_i = a$, $m_j = b$.

Назовем функцию $f \in F_k(M)$ <u>аддитивной</u>, если

$$f(a_1 + b_1, \dots, a_k + b_k) = f(a_1, \dots, a_k) + f(b_1, \dots, b_k)$$

при всех $a_i, b_i \in M$, $i = 1, \dots, k$.

Для фиксированного R-модуля M обозначим $R' = End_R M$, $R'' = End_{R'} M$. Канонический гомоморфизм $R \to R''$ обозначим через φ.

<u>Предложение I.2</u>. Пусть M — 2-транзитивное подпрямое произведение в A^c, $c \ge 2$. Тогда

(а) любая $f \in C_k(M)$ имеет вид $\tilde{g}$, где $g \in C_k(A)$;

(б) любая $f \in C_k(M)$ аддитивна;

(в) при $k = 1$ имеем $g \in R'' = End_{R'} A$.

<u>Доказательство.</u> (а) В силу предложения I.I любая $f \in C_k(M)$ расщепляется: $f = \prod_{i \in I} f_i$, $f_i \in C_k(A)$, где I множество мощности c. Фиксируем $i, j \in I$ и $a_1, \dots, a_k \in A$. В силу 2-транзитивности M существуют $m_t = \prod_{s \in I} m_{ts} \in M$, $t = 1, \dots, k$, так что $m_{ti} = m_{tj} = a_t$ при любом t. Теперь, с одной стороны, $f(m_1, \dots, m_k) = \prod_s f_s(m_{1s}, \dots, m_{ks})$. Но с другой стороны, в силу $f \in C_k(M)$, найдутся $r_1, \dots, r_k \in M$, так что

$$f(m_1, \dots, m_k) = r_1 m_1 + \dots + r_k m_k = \prod_s (r_1 m_{1s} + \dots + r_k m_{ks}).$$

Следовательно, $f_i(a_1, \dots, a_k) = r_1 a_1 + \dots + r_k a_k = f_j(a_1, \dots, a_k)$. Поскольку $i, j \in I$ были произвольными, то все f_i, $i \in I$ равны. Обозначим $f_i = g$.

(б) Покажем, что полученная функция g является аддитивной. Из этого легко следует аддитивность функции f. Фиксируем $i, j \in I$, $i \ne j$ и $a_t, b_t \in A$, $t = 1, \dots, k$. В силу 2-транзитивности M, существуют $m_t = \prod_{s \in I} m_{ts}$, $n_t = \prod_{s \in I} n_{ts} \in M$,

так что $m_{ti} = a_t + b_t$, $m_{tj} = a_t$, $n_{ti} = b_t$, $n_{tj} = 0$, $t = 1, \ldots, k$.
Теперь, с одной стороны,

$$f(m_1, \ldots, m_k) - f(n_1, \ldots, n_k) = \prod_{s\in I} [g(m_{1s}, \ldots, m_{ks}) - g(n_{1s}, \ldots, n_{ks})].$$

Но с другой стороны, в силу $f \in C_k(M)$, найдутся $r_1, \ldots, r_k \in R$, так что

$$f(m_1, \ldots, m_k) - f(n_1, \ldots, n_k) =$$
$$= r_1(m_1 - n_1) + \ldots + r_k(m_k - n_k) =$$
$$= \prod_{s\in I} [r_1(m_{1s} - n_{1s}) + \ldots + r_k(m_{ks} - n_{ks})].$$

Следовательно,

$$g(a_1 + b_1, \ldots, a_k + b_k) - g(b_1, \ldots, b_k) =$$
$$= r_1 a_1 + \ldots + r_k a_k =$$
$$= g(a_1, \ldots, a_k).$$

(в) Аддитивность функции g доказана в пункте (б). Остается показать, что $g(r'a) = r'(g(a))$ при любых $a \in A$ и $r' \in R'$. Фиксируем $i, j \in I$, $r' \in R'$ и $a \in A$. В силу 2-транзитивности M, существует $m = \prod_{s\in I} m_s \in M$, так что $m_i = a$, $m_j = r'a$. Поскольку $f \in C_1(M)$, то $f(m) = rm$ для некоторого $r \in R$. Следовательно, $g(m_i) = g(a) = ra$ и $g(m_j) = g(r'a) = r(r'a)$, что и дает требуемое равенство. Предложение I.2 доказано.

Из [3] известно (предложение I.I), что R-модуль M может быть аффинно неполным, полуполным или полным. Покажем, что 2-транзитивное подпрямое произведение $M \leq A^c$, $c \geq 2$, не может быть аффинно полуполным. Докажем сперва

<u>Предложение I.3.</u> Пусть R-модуль M аффинно 1-полон. Модуль M является аффинно полным тогда и только тогда, когда каждая $f \in C_2(M)$ аддитивна.

<u>Доказательство.</u> Необходимость очевидна.

Достаточность. Пусть $f \in C_2(M)$ – аддитивна. Тогда

$$f(m, n) = f(m, 0) + f(0, n).$$

Очевидно, функции $g(m) = f(m, 0)$ и $h(n) = f(0, n)$ принадлежат $C_1(M)$. Так как M аффинно I-полон, то $g, h \in P_1(M)$, т.е. существуют $r, s \in R$, так что $g(m) = rm$, $h(m) = sm$ при всех $m \in M$. Следовательно, $f(m, n) = rm + sn$ при всех $m, n \in M$, т.е. $f \in P_2(M)$. Предложение I.3 доказано.

Из предложений I.2 (б) и I.3 получим

<u>Следствие I.4.</u> Пусть M – 2-транзитивное подпрямое

произведение в A^c, $c \geq 2$. Если M аффинно I-полон, то M аффинно полон.

Далее нам понадобится следующая лемма, которая доказывается аналогично доказательству предложения I.2 (а).

Лемма I.5. Пусть M - подмодуль R-модуля A^c, т.е. $M \leq \prod A_i$ для некоторых $A_i \subseteq A$, и пусть

$$f = g \dot{+} \prod h_i \in C_k(A \dot{+} M),$$

где $g \in C_k(A)$, $h_i \in C_k(A_i)$.

Тогда $h_i = g|_{A_i}$ для каждого $i \in I$.

Предложение I.6. Пусть $M \subseteq A^c$. Если A аффинно (I-) полон, то $A \dot{+} M$ является аффинно (I-) полным модулем при любом кардинальном числе $c \geq 1$.

Доказательство. Проведем доказательство в случае аффинной I-полноты модуля A. В случае аффинной полноты доказательство аналогично.

Учитывая, что $M \leq \prod A_i$ для некоторых $A_i \subseteq A$, из предложения I.I получим, что любой $f \in C_1(A \dot{+} M)$ расщепляется:

$$f = g \dot{+} \prod h_i, \text{ где } g \in C_1(A),\ h_i \in C_1(A_i).$$

В силу аффинной I-полноты модуля A, имеем $g \in P_1(M)$, т.е. $g(a) = na$ при каждом $a \in A$. Из леммы I.5 теперь легко следует, что $f(x) = nx$ при каждом $x \in A \dot{+} M$. Таким образом, $A \dot{+} M$ аффинно I-полон. Предложение I.6 доказано.

Предложение I.7. Для каждого R-модуля M существует кардинальное число c, так что M^c аффинно полон.

Доказательство. Пусть $f \in C_1(M^c)$. В силу предложения I.2 (а), $f = \tilde{g}$, где $g \in C_1(M)$. Возьмем множество I с $|I| = |M| = c$ и пусть $M = \{m_i \mid i \in I\}$. В силу совместности f, существует $n \in R$, так что $f(\prod m_i) = n \prod m_i$. Теперь получим, что $g(m) = nm$ для всех $m \in M$, т.е. $g \in P_1(M)$. Таким образом, $f \in P_1(M^c)$ и в силу следствия I.4 R-модуль M^c аффинно полон. Предложение I.7 доказано.

Обозначим наименьшее кардинальное число c, для которого R-модуль M^c аффинно полон, через $\tau(M)$. Тогда, в силу предложения I.7, $\tau(M)$ определен для каждого R-модуля M, а, в силу предложения I.6, M^c аффинно полон при всех $c \geq \tau(M)$.

Будем называть подмодуль прямой суммы $\sum_{i \in I}^{\cdot} A_i$ косым, если его нельзя представить в виде $\sum_{i \in I} B_i$, где $B_i \subseteq A_i$, $i \in I$.

Лемма I.8. Пусть R-модуль $A = \sum_{i \in I}^{\cdot} A_i$ не имеет косых подмодулей. Если $f \in F_k(A)$ расщепляется в виде $f = \prod f_i$, $f_i \in C_k(A_i)$, то $f \in C_k(A)$.

Доказательство. По определению функция f совместна со всеми подмодулями $\sum_{j \in J} B_j \subseteq A$, где $B_j \subseteq A_j$ и $J \subset I$. Поскольку в A других подмодулей нет, то $f \in C_k(A)$. Лемма I.8 доказана.

В дальнейшем нам понадобятся еще следующие понятия. Кольцо R назовем левым дуокольцом, если каждый его левый идеал является двусторонним идеалом и FGC-кольцом, если каждый конечно порожденный R-модуль является прямой суммой циклических R-модулей. R-модуль M назовем сбалансированным, если канонический гомоморфизм $\varphi : R \to R''$ является сюръективным и однорядным, если все его подмодули образуют цепь. Пусть $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ - убывающая цепь идеалов кольца R. Будем говорить, что на кольце R определена K-топология, если в качестве базиса окрестностей нуля взяты идеалы K_i. Отметим, что полученная топология является хаусдорфовой, в точности при условии $\bigcap K_i = 0$.

Обозначим пополнение кольца R в K-топологии через $\hat{R}$. Элементами кольца $\hat{R}$ будут последовательности (s_i), $i \in \mathbb{N}$, где $s_i - s_{i+1} \in K_i$, $s_i \in R$.

§ 2. Доказательство основной теоремы

Из [3] известно (теорема 4.I), что подпрямо неразложимый R-модуль не может быть аффинно полным. Поэтому представляет интерес описать кольца, над которыми только подпрямо неразложимые модули не являются аффинно полными, а все остальные аффинно полны. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2.I. Для кольца R следующие условия равносильны: (а) только подпрямо неразложимые R-модули не являются аффинно полными;

(б) прямая сумма любых двух ненулевых R-модулей аффинно полна;

(в) R изоморфно кольцу всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства над телом.

Проведем доказательство этой основной теоремы в несколько шагов.

Лемма 2.2. Пусть M - подпрямо неразложимый R-модуль, A - его простой подмодуль, $A \neq M$. Тогда при всех $a \in A$

и $m \in M \setminus A$ имеем $\mathrm{Ann}\, a \not\subset \mathrm{Ann}\, m$.

Доказательство. Предположим от противного, что существуют $a \in A$ и $m \in M \setminus A$, так что $\mathrm{Ann}\, a \subset \mathrm{Ann}\, m$. Так как $A = Ra$ - простой модуль, то $\mathrm{Ann}\, a$ - максимальный левый идеал в кольце R. Таким образом, имеем две возможности:

I) $\mathrm{Ann}\, m = R$, т.е. $Rm = 0$, что противоречит выбору m;
2) $\mathrm{Ann}\, m = \mathrm{Ann}\, a$. Тогда $Rm \simeq R/\mathrm{Ann}\, m = R/\mathrm{Ann}\, a \simeq Ra = A$, что снова противоречит выбору m. Таким образом всегда $\mathrm{Ann}\, a \not\subset \mathrm{Ann}\, m$. Лемма 2.2. доказана.

Предложение 2.3. Пусть A - простой подмодуль подпрямо неразложимого R-модуля M, $A \neq M$. R-модуль $M \dot{+} A$ не является аффинно полным ни при одном кольце R.

Доказательство. Зафиксируем $b \in A$ и определим функцию $f \in F_1(M \dot{+} A)$ по формуле

$$f(m \dot{+} a) = \begin{cases} b \dot{+} 0, & \text{если } m \in M \setminus A; \\ 0, & \text{если } m \in A. \end{cases}$$

Покажем, что $f \in C_1(M \dot{+} A)$. Для этого рассмотрим разность $V = f(m_1 \dot{+} a_1) - f(m_2 \dot{+} a_2)$. Если $m_1, m_2 \in M \setminus A$ или $m_1, m_2 \in A$, то $V = 0$ и $V \in R[(m_1 - m_2) \dot{+} (a_1 - a_2)]$. Пусть $m_1 \in M \setminus A$ и $m_2 \in A$, тогда $V = b \dot{+} 0$. Надо показать, что $b \dot{+} 0 \in R(m \dot{+} a)$ при произвольных $m \in M \setminus A$ и $a \in A$. В силу леммы 2.2 существует $r \in R$, так что $ra = 0$, $rm \neq 0$. Так как $A \subseteq Rm$ при любых $0 \neq m \in M$ и $b \in A$, то $b \in Rrm$. Следовательно $b \dot{+} 0 \in R(m \dot{+} a)$ и $f \in C_1(M \dot{+} A)$. Однако, легко убедиться, что $f \notin P_1(M \dot{+} A)$ как только $2b \neq 0$ или $|M/A| > 2$. В случае, если $2b = 0$ при всех $b \in A$ и $|M/A| = 2$, определим функцию $f \in F_2(M \dot{+} A)$ по формуле

$$f(m_1 \dot{+} a_1, m_2 \dot{+} a_2) = \begin{cases} b \dot{+} 0, & \text{если } m_1, m_2 \in M \setminus A; \\ 0, & \text{если } m_1 \in A \text{ или } m_2 \in A. \end{cases}$$

Легко показать, что $f \in C_2(M \dot{+} A)$, но $f \notin P_2(M \dot{+} A)$. Предложение 2.3 доказано.

Предложение 2.4. Прямая сумма любого множества попарно неизоморфных простых R-модулей A_i не является аффинно полной ни при одном кольце R.

Доказательство. Пусть $f_i \in C_2(A_i)$, $i \in I$ и $A = \sum_i A_i$. Определим $f = \prod_i f_i$. Поскольку A не содержит косых подмодулей, из леммы I.8 получим $f \in C_2(A)$. Если предположить, что A аффинно полна, то $f \in P_2(A)$ и, следовательно, все $f_i \in P_2(A_i)$, т.е. $C_2(A_i) = P_2(A_i)$. Ввиду теоремы 4.I из [3], получим противоречие. Предложение 2.4 доказано.

Пусть k - кардинальное число. Определим для R-модуля M множество

$$T(k)=\{t\in R''\mid \forall A\subset M,\ |A|=k,\ \exists n\in R\ \forall a\in A\ ta=na\}.$$

Очевидно, $T(k)$ - подкольцо в R'' и имеют место включения

$$\varphi(R)\subset\ldots\subset T(3)\subset T(2)\subset R''.$$

Предложение 2.5. Пусть M - R-модуль и $k\geq 2$ - целое число. Тогда $\tau(M)\leq k \iff \varphi(R)=T(k)$.

Доказательство. Необходимость. Если $\tau(M)=\ell\leq k$, то в силу предложения I.6 R-модуль M^k является аффинно полным. Покажем, что $T=T(k)\subset\varphi(R)$. Пусть $t\in T$, покажем, что $\tilde t\in C_1(M^k)$, т.е. $\tilde t(\prod_i a_i)-\tilde t(\prod_i b_i)\in R\prod_i(a_i-b_i)$ при любых $\prod_i a_i,\ \prod_i b_i\in M^k$. Действительно, в силу $t\in T$ существует $\lambda\in R$, так что $t(a_i-b_i)=\lambda(a_i-b_i)$ при всех $i=1,\ldots,k$. Теперь получим

$$\tilde t(\prod_i a_i)-\tilde t(\prod_i b_i)=\prod_i t(a_i)-\prod_i t(b_i)=$$
$$=\prod_i t(a_i-b_i)=\prod_i\lambda(a_i-b_i)=\lambda\prod_i(a_i-b_i),$$

что и дает требуемое включение. Следовательно $\tilde t\in C_1(M^k)$. Поскольку M^k аффинно полон, то $\tilde t\in P_1(M^k)$. Очевидно, тогда также $t\in P_1(M)$, т.е. существует $n\in R$, так что $ta=na$ при любом $a\in M$. Последнее и означает, что $t\in\varphi(R)$. Так как всегда $\varphi(R)\subset T$, то $\varphi(R)=T$.

Достаточность. Предположим, что $\varphi(R)=T$, пусть $f\in C_1(M^k)$. В силу предложения I.2 $f=\tilde g$, где $g\in R''$. Пусть $\prod_i a_i\in M^k$. В силу совместности f, существует $n\in R$, так что $f(\prod_i a_i)=n\prod_i a_i$. Значит $g(a_i)=na_i$, $i=1,\ldots,k$. Поскольку семейство $a_1,\ldots,a_k$ было выбрано произвольно, то $g\in T$. По предположению теперь $g\in\varphi(R)$, т.е. $g\in P_1(M)$. Тогда и $f\in P_1(M^k)$, т.е. M^k является аффинно I-полным. В силу следствия I.4 M^k аффинно полон. Предложение 2.5 доказано.

Следующие результаты являются простыми следствиями из предложения 2.5.

Теорема 2.6. Если M - сбалансированный R-модуль, то $\tau(M)\leq 2$.

Доказательство. Поскольку в данном случае

$$\varphi(R)\subset T(2)\subset R''=\varphi(R),$$

то $\varphi(R)=T(2)$ и по предложению 2.5 имеем $\tau(M)\leq 2$. Теорема 2.6 доказана.

Теорема 2.7. Если M - полупростой R-модуль, то следующие условия равносильны:

(а) $\tau(M) < \infty$;
(б) $\tau(M) \leq 2$;
(в) $\varphi(R) = R''$.

Доказательство. Импликация (в) $\Rightarrow$ (б) имеет место в силу теоремы 2.6, а импликация (б) $\Rightarrow$ (а) очевидна. Наконец, импликация (а) $\Rightarrow$ (в) непосредственно следует из предложения 2.5 и теоремы плотности (см. [2] стр. 206). Теорема 2.7 доказана.

Доказательство теоремы 2.I.
(а) $\Rightarrow$ (б) очевидно.
(б) $\Rightarrow$ (в). Из предложения 2.3 следует, что все подпрямо неразложимые R-модули являются простыми. Из предложения 2.4 получим, что существует только один простой R-модуль A. Тогда $\mathrm{Ann}\, A$ равен $J(R)$ – радикалу Джекобсона кольца R. Известно, что каждый R-модуль является подпрямым произведением подпрямо неразложимых модулей. Поскольку A – единственный подпрямо неразложимый R-модуль, то R – подпрямая степень модуля A, откуда $J(R) = 0$. Учитывая равенство $\mathrm{Ann}\, A = J(R)$ получим теперь, что R примитивное кольцо. По теореме 2.7 модуль $A \dotplus A$ аффинно полон тогда и только тогда, когда $\varphi(R) = R'' = \mathrm{End}_{R'} A$. Таким образом, в силу $\mathrm{Ker}\, \varphi = \mathrm{Ann}\, A = 0$ получим, что R изоморфно кольцу линейных преобразований векторного пространства A над телом $R' = \mathrm{End}_R A$. Остается доказать, что $\dim_{R'} A < \infty$.

Предположим противное, т.е. что $\dim_{R'} A = \infty$. Следовательно, R'', а также R, не является простым кольцом. Тогда существует ненулевой собственный идеал $S \subsetneq R$. По лемме Цорна в R найдется максимальный левый идеал B, содержащий S. Тогда R/B простой неточный R-модуль и $S \subseteq \mathrm{Ann}\, R/B$. Следовательно, A и R/B неизоморфны. Это противоречие показывает, что $\dim_{R'} A < \infty$.

(в) $\Rightarrow$ (а). Каждый непростой модуль над кольцом линейных преобразований конечномерного векторного пространства является аффинно полным по теореме 4.3 из [3]. Теорема 2.I доказана.

§3. О кольцах, над которыми конечная прямая степень любого модуля аффинно полна

В предыдущем параграфе мы описали кольца, над которыми прямая сумма любых двух ненулевых модулей аффинно полна. Ослабим это требование. Будем изучать кольца, над которыми конечная прямая степень любого модуля аффинно полна. Другими словами, будем исследовать кольца R, над которыми все R-модули M имеют $\tau(M)<\infty$. В этом направлении мы пока имеем следующий результат.

<u>Теорема 3.I</u>. Пусть $\tau(M)<\infty$ при любом R-модуле M. Тогда $R/J(R)$ является артиновым.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\{A_i\}, i\in I$ максимальное семейство попарно неизоморфных простых R-модулей. Рассмотрим R-модуль $A=\sum_i{}^{\cdot} A_i$ и обозначим

$$R_i' = End_R A_i \ , \quad R_i'' = End_{R_i'} A_i \ ,$$
$$R' = End_R A \ , \quad R'' = End_{R'} A .$$

По структурной теореме о кольцах эндоморфизмов полупростых модулей (см. [I], стр. 37I) имеем

$$R'' = \prod_i R_i'' . \tag{I}$$

Сначала докажем, что множество I конечно. Для этого применим теорему 2.7 в случае $M=A$. Учитывая еще равенство (1), получим, что R канонически отображается на $\prod_i R_i''$. Рассмотрим идеал $\sum_i{}^{\cdot} R_i'' \subset \prod_i R_i''$. Последнее включение обращается в равенство лишь тогда, когда I конечно. Предположим противное, т.е. пусть I бесконечно. Тогда возьмем в R идеал S, являющийся полным прообразом $\sum_i{}^{\cdot} R_i''$ при каноническом гомоморфизме и максимальный левый идеал $B \subset R$ так, что $S \subset B$. R-модуль R/B является простым, причем $S \subset Ann\, R/B$. С другой стороны, найдется $j\in I$, так что $R/B \simeq A_j$, следовательно $SA_j=0$, откуда $(\sum_i{}^{\cdot} R_i'')A_j=0$, т.е. $R_j''A_j=0$. Это противоречие дает, что I конечно, пусть $I=\{1,\dots,n\}$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, теперь достаточно доказать, что каждый A_i является конечномерным над R_i'.

Как и ранее, рассмотрим канонический гомоморфизм $R\to \sum_{i=1}^{n}{}^{\cdot} R_i''$. Предположим, что существует $1\le i\le n$ так, что A_i – бесконечномерное векторное пространство над R_i'. Без ограничения общности предположим, что $i=1$. Тогда R_1'' не является простым кольцом, а, следовательно, $\sum_i{}^{\cdot} R_i''$ обладает нетривиальным собетвенным идеалом вида $S''+R_2''+\dots+R_n''$. Пусть S – полный прообраз этого идеала в R при каноническом гомоморфизме и пусть B – максимальный левый идеал такой, что $S\subset B\subset R$. Получим простой R-модуль R/B, причем $S\subset Ann\, R/B$, что приводит к противоречию. Действительно, R/B не может быть изоморфным ни одному из модулей $A_1, \ldots, A_n$. Следовательно, A_i – конечномерное векторное пространство над R_i' при всех $i = 1, \ldots, n$. Теорема 3.I доказана.

Еще одно необходимое условие для изучаемых колец дает

Предложение 3.2. Если для любого R -модуля M $\tau(M)<\infty$, то $R = \hat{R}$ в любой хаусдорфовой K -топологии.

Доказательство. Зафиксируем убывающую цепь идеалов $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, где $K_i \subset R$, так что $\bigcap\limits_i K_i = 0$. Рассмотрим модуль $M = R/K_1 \dotplus R/K_2 \dotplus \ldots$, тогда $Ann\, M = \bigcap\limits_i K_i = 0$. Из предложения 2.5 получим, что $\varphi(R) = T(k)$ для некоторого натурального числа $k \geq 2$, а из-за точности модуля M $\varphi(R) \cdot R$. Поскольку всегда $R \subset \hat{R}$, то остается доказать, что $\hat{R} \subset T(k)$. Пусть $\hat{r} = (r_1, r_2, \ldots) \in \hat{R}$, тогда $r_i - r_{i+1} \in K_i$. Для любого $m = (m_1, m_2, \ldots) \in M$ определим $\hat{r} m = (r_1 m_1, r_2 m_2, \ldots)$. Покажем, что для любых $m_1, \ldots, m_k \in M$ существует $r \in R$, так что $\hat{r} m_j = r m_j$, $j = 1, \ldots, k$, т.е. $\hat{r} \in T(k)$. Пусть s такое натуральное число, что $m_{ji} = 0$ при всех $i \geq s$, $j = 1, \ldots, k$. Теперь можем определить $r = r_s$, поскольку $r_i = r_s + k_i$ для некоторых $k_i \in K_i$ при любом $i \leq s$, а $K_i = Ann\, R/K_i$. Предложение 3.2 доказано.

Также получены некоторые достаточные условия для того, чтобы $\tau(M) < \infty$ при любом R-модуле M. Из теоремы 8 в [4] получим в качестве следствия

Предложение 3.3. Если в R - модуле M найдется n-элементное подмножество A такое, что $Ann\, M = Ann\, A$, то $\tau(M) \leq n+1$.

Теорема 3.4. Если M – произвольный модуль над артиновым слева кольцом R, то $\tau(M) \leq n+1$, где n – длина композиционного ряда для R.

Доказательство. Покажем, что в модуле M содержится подмножество A состоящееся из не более, чем n элементов, так что $Ann\, A = Ann\, M$. Тогда наше утверждение вытекает из предложения 3.3.

Пусть $a_1 \in M$. Если $Ann\, a_1 = Ann\, M$, то все доказано. В противном случае выбираем $a_2 \in M$, так что $Ann\, a_1 \not\subset \not\subset Ann\, a_2$. Если $Ann\{a_1, a_2\} = Ann\, M$, то определим $A = \{a_1, a_2\}$. В противном случае выбираем $a_3 \in M$, так что $Ann\{a_1, a_2\} \not\subset \not\subset Ann\, a_3$. Продолжая аналогичным образом, в итоге получим убывающую цепь левых идеалов

$$Ann\, a_1 \supset Ann\{a_1, a_2\} \supset Ann\{a_1, a_2, a_3\} \supset \ldots \quad . \qquad (2)$$

Ясно, что цепь (2) не может быть длинее композиционного ряда. Теорема 3.4 доказана.

Лемма 3.5. Пусть R – левое дуокольцо. Если $M = Rm$ – циклический R-модуль, то $\mathrm{Ann}\, m = \mathrm{Ann}\, Rm$.

Доказательство. Поскольку R – левое дуокольцо, то $(\mathrm{Ann}\, m)\cdot R = \mathrm{Ann}\, m$. Теперь

$$(\mathrm{Ann}\, m)\cdot(Rm) = (\mathrm{Ann}\, m \cdot R)\, m = \mathrm{Ann}\, m \cdot m = 0.$$

Следовательно $\mathrm{Ann}\, m = \mathrm{Ann}\, Rm$. Лемма 3.5 доказана.

Предложение 3.6. Пусть $M \leq \prod_i Rm_i$ – подпрямое произведение циклических R-модулей над левым дуокольцом R. Если $m = \prod_i m_i \in M$, то $\tau(M) \leq 2$.

Доказательство. Из леммы 3.5 известно, что $\mathrm{Ann}\, m = \mathrm{Ann}\, Rm$. Таким образом, учитывая, что $\prod_i m_i \in M$, получим

$$\mathrm{Ann}\, M \supset \bigcap_i \mathrm{Ann}\, Rm_i = \bigcap_i \mathrm{Ann}\, m_i = \mathrm{Ann}(\prod_i m_i) \supset \mathrm{Ann}\, M.$$

Следовательно $\mathrm{Ann}\, M = \mathrm{Ann}(\prod_i m_i)$. В силу предложения 3.3 $\tau(M) \leq 2$. Предложение 3.6 доказано.

Как следствие из предложения 3.6 получим

Теорема 3.7. Каждый конечно порожденный модуль M над левым дуо- FGC -кольцом R имеет $\tau(M) \leq 2$.

Покажем, что в некотором частном случае необходимое условие, полученное в предложении 3.2, является и достаточным.

Предложение 3.8. Пусть R – левое дуокольцо, однорядный как R-модуль $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ – бесконечная убывающая цепь всех собственных идеалов кольца R, причем $\bigcap_{i\in N} K_i = 0$. Если $R = \hat{R}$, то $\tau(M) \leq 2$ для любого R-модуля M.

Доказательство. Обозначим через $A_0 = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}\, m = R\}$, $A_n = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}\, m = K_n\}$ и $M_n = \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Тогда $M_0 \subset M_1 \subset \ldots$ и $M = \bigcup_{i\in N} M_i$, причем, в силу предложения 3.3, $\tau(M_n) \leq 2$ при всех n. Если существует n, так что $M = M_n$, то все доказано. Пусть $f \in C_1(M \dotplus M)$, тогда $f|_{M_n \dotplus M_n} = f_n \in C_1(M_n \dotplus M_n)$ и по предложению I.2 $f = \tilde{g}$, $g \in C_1(M)$ и $g|_{M_n} = g_n \in C_1(M_n)$. Для любого $m \in M$ найдется наименьшее число n, так что $m \in M_n \subset M_{n+1}$. Поскольку $\tau(M_n) \leq 2$, то $g_n \in P_1(M_n)$ и существует $r_n \in R$, так что $g(m) = g_n(m) = r_n m$ при любом $m \in M_n$. Аналогично существует $r_{n+1} \in R$, так что $g(m) = r_n m = r_{n+1} m$. Следовательно $r_n - r_{n+1} \in \mathrm{Ann}\, M_n = K_n$ и $(r_1, r_2, \ldots) \in \hat{R}$. Поскольку $R = \hat{R}$, то существует $r \in R$, так что $g(m) = rm$ для всех $m \in M$, т.е. $g \in P_1(M)$. Следовательно, $f \in P_1(M \dotplus M)$ и из следствия I.4 $\tau(M) \leq 2$. Предложение 3.8. доказано.

С помощью последнего предложения получим пример, что в теореме 3.I не обязательно $J(R)=0$

Пример. Для любого модуля M над кольцом p-адических целых чисел R $\tau(M)\leq 2$, но $J(R)\neq 0$.

Литература

I. В а р д е н Б. Л. ван дер, Алгебра. Москва, I979.

2. К а ш Ф. Модули и кольца. Москва, I98I.

3. С а к с А., Об аффинной полноте модулей. Уч. зап. Тартуского ун-та. I985, 700, 7I-79.

4. W i e s e n b a u e r J. Interpolation on modules. Contributions to general algebra. Proceedings of the Klagenfurt Conference. May 25-28, 1978, 399-404.

Поступило
13 III 1986

LAHUTUVATE MOODULITE AFIINSEST TÄIELIKKUSEST

A.Saks

R e s ü m e e

Käesolevas töös on toodud selliste ringide kirjeldus üle mille ainult alamotse taandumatud moodulid ei ole afiinselt täielikud. Sellisteks ringideks on parajasti lõplikumõõtmeliste vektorruumide lineaarteisenduste ringid.

Samuti uuritakse ringe, üle mille suvalise mooduli lõplik otseaste on afiinselt täielik. Näitame, et sellise ringi faktorring Jacobsoni radikaali järgi on Artini ring. Osutub, et iga mooduli otseruut üle balanseeritud ringi on afiinselt täielik. Kuid leidub ka mittebalanseeritud ringe, millel on nimetatud omadus: näiteks p-aadiliste täisarvude ring.

ON AFFINE COMPLETENESS OF DECOMPOSABLE MODULES

A.Saks

S u m m a r y

In this paper a description of all rings over which only subdirectly indecomposable modules are not affine complete is given. These are just the rings of linear transformations of finite dimensional vector spaces.

We also investigate rings over which a finite direct power of every module is affine complete. We show that the factor ring of such a ring by Jacobson radical is artinian.

Another necessary condition is the completeness in arbitrary Hausdorff K-topology. By a K-topology we mean a topology with a sequence of ideals $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \cdots$ as a basis of neighbourhoods of zero. In particular, such a ring must be complete in radical topology provided the intersection of powers of radical is zero.

On the other hand, if R is artinian then a suitable finite direct power of any R-module is affine complete. Moreover, a direct square of any R-module over a balanced ring is affine complete. However, there exist non-balanced and even non-artinian rings with this property, for example rings of p-adic integers.

TRÜ Toimetised, 764 (1987), 136–145.

Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 764, 136–145.

ИЗОМОРФИЗМ И МОРИТА-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СПЛЕТЕНИЙ МОНОИДОВ

В.Фляйшер

Кафедра математического анализа

В настоящей работе рассматривается конструкция сплетения малой категории с моноидом. Показана определяемость малых категорий такими сплетениями при условии, что множество объектов категории является собственным полигоном над соответствующим моноидом. Это условие собственности полигона оказывается существенным. В качестве следствий, для сплетений получены обобщение результатов об изоморфизме сплетений моноидов [4] и необходимые и достаточные условия Морита-эквивалентности сплетений моноидов. Из последнего вытекает результат о Морита-эквивалентности полугрупп эндоморфизмов свободных полигонов, аналогичный результату У.Кнауэра [5] для моноидов с нулем.

Конструкция сплетения малой категории с моноидом введена автором в [I]. Пусть $\mathcal{K}$ – произвольная малая категория с множеством объектов $\mathfrak{X} = Ob\,\mathcal{K}$ и множеством морфизмов $\mathcal{M} = Mor\,\mathcal{K}$. Для произвольных $x, y \in \mathfrak{X}$ через $\mathcal{M}(x,y)$ будем обозначать множество морфизмов из объекта x в объект y, а через $\mathcal{M}(x)$ – множество всех морфизмов из объекта x, т.е. $\mathcal{M}(x) = \bigcup_{y\in\mathfrak{X}} \mathcal{M}(x,y)$. Через $F(\mathfrak{X},\mathcal{M})$ мы будем обозначать совокупность всех таких отображений $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{M}$, что $f(x)\in\mathcal{M}(x)$ для любого $x\in\mathfrak{X}$. Пусть S – произвольный моноид и $\mathfrak{X} = Ob\,\mathcal{K}$ есть левый S-полигон. В множестве $S\times F(\mathfrak{X},\mathcal{M})$ рассмотрим подмножество $\mathcal{A}$ состоящее из всех таких пар (s,f), что $f(x)\in\mathcal{M}(x,sx)$ для любого $x\in\mathfrak{X}$, т.е.

$$\mathcal{A} = \{(s,f) \mid s\in S,\ f\in F(\mathfrak{X},\mathcal{M}),\ \forall x\in\mathfrak{X}\ f(x)\in\mathcal{M}(x,sx)\}$$

На множестве $\mathcal{A}$ определим умножение следующим образом: для любых $(s,f),(t,g)\in\mathcal{A}$

$$(s,f)(t,g) = (st,\ f_t g)\,, \tag{I}$$

где $(f_t g)(x) = f(tx)\cdot g(x)$ для любого $x\in\mathfrak{X}$. Легко проверить, что множество $\mathcal{A}$ относительно операции умножения, определенной формулой (I), является моноидом. Этот моноид $\mathcal{A}$ называется сплетением малой категории $\mathcal{K}$ с моноидом S и обозначается $(S \operatorname{wr} \mathcal{K})$.

Как показано в [I], сплетение малой категории с моноидом обобщает понятие сплетения моноидов. Действительно, сплетение $(S \operatorname{wr} \mathcal{U} \mid \mathfrak{X})$ произвольных моноидов S и $\mathcal{U}$ при помощи левого S-полигона $\mathfrak{X}$ можно рассматривать, как сплетение $(S \operatorname{wr} \mathcal{K})$ моноида S с категорией $\mathcal{K}$, объекты которой суть свободные циклические правые $\mathcal{U}$-полигоны $x\mathcal{U}$ $(x \in \mathfrak{X})$, а морфизмы - всевозможные $\mathcal{U}$-гомоморфизмы этих полигонов.

В свою очередь частным случаем сплетений моноидов являются полугруппы эндоморфизмов свободных полигонов (см. [3]). Полугруппы эндоморфизмов проективных полигонов, вообще говоря, не могут быть представлены в виде сплетения моноидов, однако и они являются частным случаем сплетений малой категории с моноидом. Если $P = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} e_i \mathcal{U}$ - произвольный правый проективный $\mathcal{U}$-полигон, то полугруппу $\operatorname{End} P$ можно рассматривать, как сплетение $(\mathcal{T}_{\mathfrak{I}} \operatorname{wr} \mathcal{K})$, где $\mathcal{T}_{\mathfrak{I}}$ - полугруппа всех преобразований множества $\mathfrak{I}$, а $\mathcal{K}$ - категория, объекты которой суть $\mathcal{U}$-полигоны $e_i \mathcal{U}$ $(i \in \mathfrak{I})$, а морфизмы - всевозможные $\mathcal{U}$-гомоморфизмы этих полигонов.

Левый S-полигон $\mathfrak{X}$ назовем собственным для моноида S , если выполнены следующие три условия:

I) $|\mathfrak{X}| \geqslant 2$;

2) для каждого $x \in \mathfrak{X}$ существует единственный элемент $s \in S$ такой, что $sy = x$ для любого $y \in \mathfrak{X}$ (такой элемент обозначим через ν_x);

3) для любых $x, y, a, b \in \mathfrak{X}$ $(x \neq y)$ найдется $r \in S$ такой, что $rx = a$, $ry = b$.

Если к этим трем условиям в определении собственного S-полигона добавить условие

4) из $sx = x$ для любого $x \in \mathfrak{X}$ следует $s = 1$, то мы получим определение допустимого S-полигона в смысле Л.А.Скорнякова [4].

Малую категорию $\mathcal{K}$ назовем собственной (допустимой) для моноида S , если $\mathcal{K}$ сильно связанная категория, т.е. $\mathcal{M}(x,y) \neq \phi$ для любых $x, y \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X} = \operatorname{Ob} \mathcal{K}$ есть собственный (допустимый) левый S-полигон. В работе автора ([I], теорема 2) доказано, что если $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ - произвольные малые категории, допустимые для моноидов, соответственно, S и S' , и моноиды $\mathcal{A} = (S \operatorname{wr} \mathcal{K})$ и $\mathcal{A}' = (S' \operatorname{wr} \mathcal{K}')$ изоморфны, то изоморфны категории $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$. Следуя в общих чертах доказательству упомянутой теоремы, с небольшими модификациями можно доказать следующее более общее утверждение.

Теорема I. Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ - произвольные малые категории, собственные для моноидов, соответственно, S и S'. Если моноиды $\mathcal{A} = (S \operatorname{wr} \mathcal{K})$ и $\mathcal{A}' = (S' \operatorname{wr} \mathcal{K}')$ изоморфны, то изоморфны категории $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$. При этом всякий изоморфизм $\Theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ индуцирует изоморфизм $\Phi : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$ такой, что для любого $(s, f) \in \mathcal{A}$ из $\Theta(s, f) = (s', f')$ следует

$$f' = \Phi f \Phi^{-1}, \qquad \text{т.е.} \quad f'(x') = \Phi(f(\Phi^{-1}(x'))), \tag{2}$$

$$s' \Phi(x) = \Phi(sx) \tag{3}$$

для любых $x' \in \mathfrak{X}'$, $x \in \mathfrak{X}$.

Произвольную категорию $\mathcal{K}$ назовем приводимой, если существует функтор $G : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ такой, что $G(x) = x$ для любого $x \in \mathcal{O}b\,\mathcal{K}$ и для произвольных $x, y \in \mathcal{O}b\,\mathcal{K}$ из $\alpha, \beta \in \mathcal{M}(x, y)$ следует $G(\alpha) = G(\beta)$.

Произвольные левые S-полигон $\mathfrak{X}$ и S'-полигон $\mathfrak{X}'$ называются полулинейно изоморфными, если существуют биекция $\pi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ и изоморфизм $\varphi : S \to S'$ такие, что $\pi(sx) = \varphi(s)\pi(x)$ для любых $s \in S$, $x \in \mathfrak{X}$.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ - произвольные малые категории, собственные для моноидов, соответственно S и S' и пусть хотя бы одна из этих категорий приводима. Моноиды $\mathcal{A} = (S \operatorname{wr} \mathcal{K})$ и $\mathcal{A}' = (S' \operatorname{wr} \mathcal{K}')$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны категории $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ и S-полигон $\mathfrak{X} = \mathcal{O}b\,\mathcal{K}$ полулинейно изоморфен S'-полигону $\mathfrak{X}' = \mathcal{O}b\,\mathcal{K}'$.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть $\Theta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ - некоторый изоморфизм. Тогда по теореме I существует изоморфизм $\Phi : \mathcal{K} \to \mathcal{K}'$, удовлетворяющий условиям (2) и (3). Пусть, для определенности, категория $\mathcal{K}$ является приводимой и $G : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ - соответствующий функтор. Тогда свойства функтора $\Phi G \Phi^{-1} : \mathcal{K}' \to \mathcal{K}'$ гарантируют приводимость категории $\mathcal{K}'$.

Рассмотрим совокупность $\mathcal{B}$ всех элементов $(s, f) \in \mathcal{A}$ таких, что $f(x) \in \mathcal{M}or\, G(\mathcal{K})$ для любого $x \in \mathfrak{X}$. Если $(s, f) \in \mathcal{B}$ и $\Theta(s, f) = (s', f')$, то по условию (I) мы имеем $f'(x') = \Phi f \Phi^{-1}(x')$ и значит $f'(x') \in \mathcal{M}or\, \Phi G(\mathcal{K}) = \mathcal{M}or\, \Phi G \Phi^{-1}(\mathcal{K}')$. Отсюда вытекает, что $\Theta(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$, где $\mathcal{B}'$ - совокупность элементов $(s', f') \in \mathcal{A}'$ таких, что $f'(x') \in \mathcal{M}or\, \Phi G \Phi(\mathcal{K}')$. Теперь остается заметить, что отображение $\gamma : S \to \mathcal{B}$, определенное $\gamma(s) = (s, f) \in \mathcal{B}$ для любого $s \in S$, является изоморфизмом, поскольку вторая компонента f однозначно восстанавливается по первой s. Аналогично $\gamma' : S' \to \mathcal{B}'$ также есть изоморфизм. Таким образом, $\beta = \gamma'^{-1}\Theta\gamma : S \to S'$ есть изоморфизм. Пусть s - произвольный элемент из S, $(s,f) \in \mathcal{B}$ и $\Phi(s,f) = (s',f') \in \mathcal{B}'$. Тогда $s' = \beta(s)$ и, ввиду условия (3), $\Phi(sx) = \beta(s)\Phi(x)$ для любого $x \in \mathfrak{X}$. Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ - собственные левые полигоны над моноидами, соответственно, S и T и пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ - произвольные моноиды. Сплетения $(S \,\mathrm{wr}\, \mathcal{U} \mid \mathfrak{X})$ и $(T \,\mathrm{wr}\, \mathcal{V} \mid \mathcal{Y})$ изоморфны тогда и только тогда, если $\mathcal{U} \cong \mathcal{V}$ и S-полигон $\mathfrak{X}$ полулинейно изоморфен T-полигону $\mathcal{Y}$.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из теоремы 2, если исходные сплетения моноидов рассматривать, как сплетения малых категорий с моноидами. При этом надо заметить, что категория $\mathcal{K}$ объекты которой суть свободные циклические $\mathcal{U}$-полигоны $x\mathcal{U}$ $(x \in \mathfrak{X})$, а морфизмы - всевозможные $\mathcal{U}$-гомоморфизмы этих полигонов, является приводимой. Соответствующий функтор $G : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ сопоставляет каждому морфизму $\alpha \in \mathcal{M}(x\mathcal{U}, y\mathcal{U})$ морфизм $G(\alpha) \in \mathcal{M}(x\mathcal{U}, y\mathcal{U})$ такой, что

$$G(\alpha)(xu) = yu \quad (\forall u \in \mathcal{U}).$$

Покажем теперь, что требование собственности категорий (полигонов) в теореме I (теореме 3) является существенным.

Лемма I. Для произвольных моноидов S, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и любых S-полигона $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{U}$-полигона $\mathcal{Y}$ выполняется

$$(S \,\mathrm{wr}\, (\mathcal{U} \,\mathrm{wr}\, \mathcal{V} \mid \mathcal{Y}) \mid \mathfrak{X}) \cong ((S \,\mathrm{wr}\, \mathcal{U} \mid \mathfrak{X}) \,\mathrm{wr}\, \mathcal{V} \mid \mathfrak{X} \times \mathcal{Y}),$$

где $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ есть левый $(S \,\mathrm{wr}\, \mathcal{U} \mid \mathfrak{X})$-полигон, в котором

$$(s,f)(x,y) = (sx, f(x)y)$$

для любых $(s,f) \in (S \,\mathrm{wr}\, \mathcal{U} \mid \mathfrak{X})$, $(x,y) \in \mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$.

Доказательство. Пусть (s,q) - произвольный элемент из $\mathcal{A} = (S \,\mathrm{wr}\, (\mathcal{U} \,\mathrm{wr}\, \mathcal{V} \mid \mathcal{Y}) \mid \mathfrak{X})$, т.е. $s \in S$, $q \in F(\mathfrak{X}, \mathcal{U} \,\mathrm{wr}\, \mathcal{V} \mid \mathcal{Y})$. Пусть $q(x) = (u_x, \varphi_x)$, где $u_x \in \mathcal{U}$, $\varphi_x \in F(\mathcal{Y}, \mathcal{V})$ для каждого $x \in \mathfrak{X}$. Определим отображения $f : \mathfrak{X} \to \mathcal{U}$, $\psi : \mathfrak{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{V}$ следующим образом:

$$f(x) = u_x \quad , \ \psi(x,y) = \varphi_x(y)$$

для любых $x \in \mathfrak{X}, y \in \mathcal{Y}$. Положим

$$\Theta(s,q) = ((s,f), \psi).$$

Тем самым определено отображение,

которое, нетрудно проверить, является изоморфизмом.

Если в лемме I полигоны $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ являются собственными, то легко видеть, что $(S \operatorname{wr} \mathcal{U} \mid \mathfrak{X})$ -полигон $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ удовлетворяет условиям I) и 2), но не удовлетворяет условию 3) в определении собственного полигона. Это показывает существенность условия 3).

Если в лемме I полигон $\mathfrak{X}$ является собственным и $|\mathcal{Y}| = I$, то нетрудно заметить, что $(S \operatorname{wr} \mathcal{U} \mid \mathfrak{X})$ -полигон $\mathfrak{X} \times \mathcal{Y}$ удовлетворяет всем условиям собственного полигона, за исключением требования единственности в условии 2). Таким образом, это требование также существенно.

Существенность условия I) показана для эндоморфизмов свободных полигонов (см. [2]), что, как отмечалось, есть частный случай сплетения моноидов.

Перейдем теперь к вопросу о Морита-эквивалентности сплетений моноидов. Напомним, что моноиды A и B называются Морита-эквивалентными (обозначение: $A \sim B$), если категория всех правых A -полигонов эквивалентна категории всех правых B -полигонов.

<u>Теорема 4</u>. (У.Кнауэр [6]). Моноиды A и B Морита-эквивалентны тогда и только тогда, если $B \cong aAa$, где a - идемпотент из A, для которого существуют элементы $\ell, \ell' \in A$ такие, что $\ell a = \ell$, $\ell \ell' = 1$.

Заметим, что условие, полученное в теореме 4 может быть заменено следующим равносильным ему условием:

$$B \cong aAa \quad , \qquad \text{где } a^2 = a \in A \quad \text{и } AaA = A .$$

Действительно, из $\ell a = \ell$ и $\ell \ell' = 1$ следует $\ell a \ell' = \ell \ell' = 1$ и значит $AaA = A$. Обратно, если $AaA = A$, то найдутся $u, v \in A$ такие, что $uav = 1$. Положим $\ell = ua$ и $\ell' = v$. Тогда $\ell a = uaa = ua = \ell$ и $\ell \ell' = uav = 1$.

Таким образом, моноиды A и B Морита-эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$B \cong aAa \quad , \qquad \text{где } a^2 = a \in A \quad \text{и } AaA = A .$$

Отсюда, кстати говоря, следует, что если эквивалентны категории всех правых полигонов над моноидами A и B, то эквивалентны категории всех левых полигонов над этими моноидами.

<u>Теорема 5</u>. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ собственные левые полигоны над моноидами, соответственно S и T и пусть $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ - про-

извольные моноиды. Тогда $(S \operatorname{wr} \mathcal{U}|\mathcal{X}) \sim (T \operatorname{wr} \mathcal{V}|\mathcal{Y})$ в том и только том случае, если $S \sim T$, $\mathcal{U} \sim T$ и T-полигон $\mathcal{Y}$ полулинейно изоморфен eSe-полигону $e\mathcal{X}$, где $e^2 = e \in S$, $T \cong eSe$, $SeS = S$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$, т.е. $\mathcal{V} \cong u\mathcal{U}u$, где $u^2 = u \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}u\mathcal{U} = \mathcal{U}$; $S \sim T$, т.е. $T \cong eSe$, где $e^2 = e \in S$, $SeS = S$ и T-полигон $\mathcal{Y}$ полулинейно изоморфен eSe-полигону $e\mathcal{X}$. Через $g : \mathcal{X} \to \mathcal{U}$ обозначим такое отображение, что $g(x) = u$ для каждого $x \in \mathcal{X}$. Нетрудно проверить, что

$$(e,g)(S \operatorname{wr} \mathcal{U}|\mathcal{X})(e,g) \cong (eSe \operatorname{wr} u\mathcal{U}u|e\mathcal{X})$$

и значит

$$(T \operatorname{wr} \mathcal{V}|\mathcal{Y}) \cong (e,g)(S \operatorname{wr} \mathcal{U}|\mathcal{X})(e,g).$$

Теперь достаточность вытекает из того, что $(e,g)(e,g)=(e,g)$ и $(S \operatorname{wr} \mathcal{U}|\mathcal{X})(e,g)(S \operatorname{wr} \mathcal{U}|\mathcal{X}) = (S \operatorname{wr} \mathcal{U}|\mathcal{X})$.

Необходимость. Пусть

$$\mathcal{A} = (S \operatorname{wr} \mathcal{U}|\mathcal{X}) \sim \mathcal{B} = (T \operatorname{wr} \mathcal{V}|\mathcal{Y})$$

Тогда $\mathcal{B} \cong a\mathcal{A}a$, где $a^2 = a \in \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}a\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Пусть $a = (e,f) \in (S \operatorname{wr} \mathcal{U}|\mathcal{X})$, тогда $e^2 = e \in S$ и $f(ex)f(x) = f(x)$ для любого $x \in \mathcal{X}$. Через $\mathcal{K}$ обозначим категорию, объекты которой $Ob\,\mathcal{K}$ суть правые циклические $\mathcal{U}$-полигоны $f(x)\mathcal{U}$ $(x \in e\mathcal{X} = \{ez \mid z \in \mathcal{X}\})$, а морфизмы - всевозможные $\mathcal{U}$-гомоморфизмы этих полигонов. Построим отображение $\Phi : a\mathcal{A}a \to (eSe \operatorname{wr} \mathcal{K})$ следующим образом. Пусть (s,g) - произвольный элемент из $a\mathcal{A}a$ и положим

$$\Phi(s,g) = (s,g^*),$$

где отображение $g^* : Ob\,\mathcal{K} \to Mor\,\mathcal{K}$ такое, что для произвольного объекта $f(x)\mathcal{U}$ категории $\mathcal{K}$ морфизм $g^*(f(x)\mathcal{U})$ является $\mathcal{U}$-гомоморфизмом α $\mathcal{U}$-полигона $f(x)\mathcal{U}$ в $\mathcal{U}$-полигон $f(sx)\mathcal{U}$ для которого

$$\alpha(f(x)u) = f(sx)g(x)f(x)u \tag{4}$$

при любом $u \in \mathcal{U}$. Заметим, что Φ действительно является отображением из $a\mathcal{A}a$ в $(eSe \operatorname{wr} \mathcal{K})$, поскольку из $(s,g) \in a\mathcal{A}a$ следует $(e,f)(s,g)(e,f) = (s,g)$ и значит $ese = s \in eSe$.

Покажем, что Φ является биекцией. Пусть $\Phi(s_1,g_1) = \Phi(s_2,g_2) = (s,g^*)$. Тогда ясно, что $s_1 = s_2 = s$. Кроме того, из (4) следует

19

$$f(sx)g_1(x)f(x) = f(sx)g_2(x)f(x) \tag{5}$$

для любого $x \in e\mathfrak{X}$. Поскольку $(s,g_1),(s,g_2) \in a\mathcal{A}a$, то $a(s,g_i)a = (s,g_i)$ для $i = 1, 2$. Отсюда следует, что $f(sex)g_i(ex)f(x) = g_i(x)$ при $i = 1, 2$ для любого $x \in \mathfrak{X}$. Ввиду $f(ex)f(x) = f(x)$, имеем

$$f(sex)g_1(ex)f(ex)f(x) = g_1(x),$$

$$f(sex)g_2(ex)f(ex)f(x) = g_2(x)$$

для каждого $x \in \mathfrak{X}$. Отсюда, ввиду (5), получаем

$$g_1(x) = g_2(x),$$

т.е. $g_1 = g_2$.

Проверим теперь сюръективность Φ. Пусть (s,g^*) – произвольный элемент из $(eSe \operatorname{wr} \mathcal{K})$. Это значит, что для любого объекта $f(x)\mathcal{U}$ $(x \in e\mathfrak{X})$ морфизм $g^*(f(x)\mathcal{U})$ есть $\mathcal{U}$-гомоморфизм $\alpha : f(x)\mathcal{U} \to f(sx)\mathcal{U}$. Пусть $\alpha(f(x)) = f(sx)u_x$ для каждого $x \in e\mathfrak{X}$. Отсюда следует $f(sx)u_x f(x) = \alpha(f(x))f(x) = \alpha(f(x)) = f(sx)u_x$. Пусть теперь $g : \mathfrak{X} \to \mathcal{U}$ такое отображение, что $g(x) = f(sex)u_{ex}f(x)$ для каждого $x \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим элемент $(s,g) \in (S \operatorname{wr} \mathcal{U} \mid \mathfrak{X})$ и покажем, что $(s,g) \in a\mathcal{A}a$ и $\Phi(s,g) = (s,g^*)$. Действительно,

$$(e,f)(s,g)(e,f) = (ese, f_{se}\, g_e\, f) = (s,g),$$

поскольку $f(sex)g(ex)f(x) = f(sex)f(seex)u_{eex}f(ex)f(x) = g(x)$, т.е. $(s,g) \in a\mathcal{A}a$. Пусть теперь $\Phi(s,g) = (s,g')$. Тогда по определению $g'(f(x)\mathcal{U}) = \beta : f(x)\mathcal{U} \to f(sx)\mathcal{U}$ так, что для любого $x \in e\mathfrak{X}$ $\beta(f(x)) = f(sx)g(x)f(x) = f(sx)f(sex)u_{ex}f(x)f(x) = f(sx)u_x f(x) = \alpha(f(x))$, т.е. $\beta = \alpha$. Отсюда вытекает $g' = g^*$, т.е. $\Phi(s,g) = (s,g^*)$.

Таким образом, Φ является биекцией и нетрудно проверить, что Φ есть изоморфизм.

Заметим теперь, что $Ob\,\mathcal{K}$ является собственным eSe - полигоном. Для этого, очевидно, достаточно показать, что $e\mathfrak{X}$ является собственным eSe -полигоном.

1) $|e\mathfrak{X}| \geqslant 2$. В противном случае $e = \nu_x$ для некоторого $x \in \mathfrak{X}$, но тогда невозможно $\mathcal{A}e\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

2) Для любого $x \in e\mathfrak{X}$ имеем $(e\nu_x e)y = x$ при каждом $y \in e\mathfrak{X}$. Если для некоторого $s \in eSe$ при любом $y \in e\mathfrak{X}$ выполняется $sy = x \in e\mathfrak{X}$, то для любого $z \in \mathfrak{X}$ имеем $sz = (se)z = s(ez) = x$, т.е. $s = \nu_x$.

3) Пусть $x, y, u, v \in e\mathfrak{X}$ и $x \neq y$. Тогда найдется $s \in S$ такой, что $sx = u$, $sy = v$. Следовательно, $(ese)x =$

$= es x = eu = u$ и аналогично $(ese)y = v$.

Применяя теперь к изоморфизму

$$(T \operatorname{wr} \mathcal{V} \mid \mathcal{Y}) \cong (eSe \operatorname{wr} \mathcal{K})$$

теорему 2, получим, что $T \simeq eSe$ и $\mathcal{K} \cong \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ – категория, объекты которой суть правые свободные $\mathcal{V}$-полигоны $y\mathcal{V}$ $(y \in \mathcal{Y})$, а морфизмы – их $\mathcal{V}$-гомоморфизмы, причем T-полигон $\mathcal{Y}$ полулинейно изоморфен eSe-полигону $e\mathfrak{X}$.

Ввиду $\mathfrak{A} a \mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ найдутся $(s_1, g_1), (s_2, g_2) \in \mathfrak{A}$ такие, что $(s_1, g_1)(e, f)(s_2, g_2) = (1, 1)$, т.е. $g_1(es_2 x) f(s_2 x) g_2(x) = 1$ для любого $x \in \mathfrak{X}$. Так как $f(es_2 x) f(s_2 x) = f(s_2 x)$, то

$$g_1(es_2 x) f(es_2 x) f(s_2 x) g_2(x) = 1,$$

т.е. $\mathcal{U} f(es_2 x) \mathcal{U} = \mathcal{U}$ для любого $x \in \mathfrak{X}$. Пусть $z \in es_2\mathfrak{X} = \{es_2 y \mid y \in \mathfrak{X}\}$, т.е. $\mathcal{U} f(z) \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Из изоморфизма категорий $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$ вытекает, что для $f(z)\mathcal{U} \in Ob\,\mathcal{K}$ найдется $y\mathcal{V} \in Ob\,\mathcal{L}$ такой, что

$$f(z)\,\mathcal{U}\,f(z) \cong \mathcal{M}(f(z)\mathcal{U}, f(z)\mathcal{U}) \cong \mathcal{M}(y\mathcal{V}, y\mathcal{V}) \cong \mathcal{V},$$

причем $f(z) f(z) = f(z)$ и $\mathcal{U} f(z) \mathcal{U} = \mathcal{U}$, т.е. $\mathcal{V} \sim \mathcal{U}$. Теорема доказана.

Через $End_S F(\mathfrak{X})$ обозначим полугруппу эндоморфизмов правого свободного S-полигона F с множеством $\mathfrak{X}$ свободных образующих.

Следствие I. Для произвольных моноидов S и T и произвольных множеств $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{Y}$ $(|\mathfrak{X}|, |\mathcal{Y}| > 1)$

$$End_S F(\mathfrak{X}) \sim End_T F(\mathcal{Y}) \Leftrightarrow |\mathfrak{X}| = |\mathcal{Y}|,\ S \sim T.$$

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 5. При этом надо заметить, что $End_S F(\mathfrak{X}) \cong (\mathcal{T}_{\mathfrak{X}} \operatorname{wr} S \mid \mathfrak{X})$, где $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ – полугруппа всех преобразований множества $\mathfrak{X}$.

Литература

I. Ф л я й ш е р В. Г., О сплетениях моноидов с категориями. Изв. АН ЭССР, 1986, 35, № 3, 237-243.

2. Ф л я й ш е р В. Г., Определяемость свободного полигона его полугруппой эндоморфизмов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 366, 27-4I.

3. S k o r n j a k o v L. A., Regularity of the wreath product of monoids. Semigroup Forum, 1979, I8, 83-86.

4. S k o r n j a k o v L. A., On the wreath product of monoids. Universal algebra and applications. Banach Center Publ., 1982, 9, 181-185.
5. K n a u e r U., Column monomic matrix monoids. Math. Nachr., 1976, 74, 135-141.
6. K n a u e r U., Projectivity of acts and Morita equivalence of monoids. Semigroup Forum, 1972, 3, 359-370.

Поступило
3 III 1986

MONOIDIDE PÕIMIKUTE ISOMORFISM JA MORITA-EKVIVALENTSUS

V.Fljaišer

R e s ü m e

Töös vaadeldakse monoidide põimikuid. On saadud tarvilikud ja piisavad tingimused selliste põimikute isomorfismiks ja Morita-ekvivalentsuseks. Järeldusena on saadud tulemus vabade polügoonide endomorfismipoolrühmade Morita-ekvivalentsusest, mis on analoogiline U.Knaueri [5] tulemusele nulliga monoidide jaoks.

ISOMORPHISM AND MORITA EQUIVALENCE OF WREATH PRODUCTS OF MONOIDS

V.Fleischer

S u m m a r y

Let S be a monoid. A left S-act $\mathfrak{X}$ is said to be a proper S-act if the following conditions are valid:

1) $|\mathfrak{X}| \geq 2$;

2) for each $x \in \mathfrak{X}$ there exists a unique $s \in S$ such that $sz = x$ for every $z \in \mathfrak{X}$;

3) if $x, y, u, v \in \mathfrak{X}$ and $x \neq y$ then there exists an $s \in S$ such that $sx = u$, $sy = v$.

In the paper wreath products of monoids by proper acts are considered.

Theorem 1. Let $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ be proper left acts over the monoids S and T , respectively, A and B be arbitrary monoids. Then

$$(S \operatorname{wr} A \mid \mathfrak{X}) \cong (T \operatorname{wr} B \mid \mathfrak{Y})$$

if and only if the monoids A and B are isomorphic and S-act $\mathfrak{X}$ and T-act $\mathfrak{Y}$ are semilinearly isomorphic.

It is shown that in Theorem 1 the assumption that $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$ are proper acts is essential.

Monoids A and B are said to be (right) Morita equivalent, $A \sim B$, if the categories of (right) A-acts and of (right) B-acts are equivalent.

Theorem 2. Let $\mathfrak{X}$ and $\mathcal{Y}$ be proper left acts over the monoids S and T, respectively, A and B be arbitrary monoids. Then

$$(S \operatorname{wr} A \mid \mathfrak{X}) \sim (T \operatorname{wr} B \mid \mathcal{Y})$$

if and only if $S \sim T$, $A \sim B$ and the T-act $\mathcal{Y}$ is semilineary isomorphic to the eSe-act $e\mathfrak{X}$, where e is an idempotent in S such that $T \cong eSe$, $SeS = S$.

Corollary 1. For arbitrary monoids S, T and sets $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}$ $(|\mathfrak{X}|, |\mathcal{Y}| > 1)$

$$\operatorname{End}_S F(\mathfrak{X}) \sim \operatorname{End}_T F(\mathcal{Y})$$

if and only if $S \sim T$ and $|\mathfrak{X}| = |\mathcal{Y}|$.

The analogue of Corollary 1 for monoids with zero was obtained by U.Knauer in [5].

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD