TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a. VIHIK 220 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

VIII

TARTU 1968

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
TRANSACTIONS OF THE TARTU STATE UNIVERSITY
ALUSTATUD 1893 a. VIHIK 220 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ в 1893 г

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKAALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

VIII

TARTU 1968

ЛОГИКА КАК КЛАССИФИКАЦИЯ ФОРМУЛ

А. Таутс

Кафедра математического анализа

В настоящей статье, основываясь на идеях, описанных в [1], определяются значения истинности фиксированными формулами, т. е. формулами, не содержащими переменных. При этом фиксированная формула рассматривается множеством, элементами которого являются все подформулы данной формулы. При этом каждая подформула, рассматриваемая как элемент, т. е. как неделимое целое, называется *высказыванием*, а рассматриваемая как множество своих подформул, т. е. как подмножество первоначального множества, называется *подформулой*. Отношение порядка в данном множестве определяется так, что каждое высказывание предшествует высказываниям, являющимся его подформулами.

После такого беглого обзора основных идей перейдем к строгому описанию математической аппаратуры.

Фиксированной формулой — или просто формулой — называется любое непустое множество, в котором определены каким-нибудь образом отношения, удовлетворяющие ниже описанным условиям. Элементы этого множества будем называть *высказываниями*, а отношения — *отношением порядка*, *отрицания*, *конъюнкции*, *простой дизъюнкции*, *строгой дизъюнкции*, *импликации и эквиваленции*. Отношение порядка имеет место для некоторых высказываний X и Y и имеет следующее выражение: «X предшествует Y», обозначается «$X < Y$». Отрицание имеет место для некоторых высказываний X и Y и выражается «X есть отрицание Y». Импликация имеет место для некоторых высказываний X, Y и Z и выражается «X есть импликация Y и Z». Отметим, что роли Y и Z различны. Конъюнкция, простая и строгая дизъюнкция и эквиваленция имеют место для некоторых высказываний X и некоторых подмножеств $\mathfrak{B}$ данной фиксированной формулы — $\mathfrak{B}$ может быть и пустое — и выражается «X есть конъюнкция (соответственно простая дизъюнкция, строгая дизъюнкция или эквиваленция) элементов множества $\mathfrak{B}$». Эти отношения, кроме отношения порядка, в дальнейшем будем называть и *операциями*, элемент, выше обозначенный через X, будем называть *результатом операции*, а Y, Z или элементы множества $\mathfrak{B}$ будем называть *аргументами* соответствующей операции.

Для названных отношений должны быть выполнены следующие условия:

1) Множество частично упорядочено данным отношением порядка.

2) Для каждого высказывания множество высказываний, предшествующих ему, вполне упорядочено.

3) Для каждого X и Y существует Z такое, что $Z \leqslant X$, $Z \leqslant Y$ и для каждого T, для которого имеют место $T \leqslant X$ и $T \leqslant Y$, имеет место и $T \leqslant Z$.

4) Для каждого высказывания имеет место только одна из следующих возможностей: оно является отрицанием некоторого определенного высказывания, импликацией некоторой определенной пары высказываний в определенном порядке, конъюнкцией, простой или строгой дизъюнкцией или эквиваленцией некоторого определенного подмножества высказываний.

5) Если X есть отрицание высказывания Y, то Y есть единственное высказывание, непосредственно следующее высказыванию X.

6) Если X есть импликация высказываний Y и Z, то эти высказывания — и только они — следуют высказыванию X непосредственно.

7) Если X есть конъюнкция, простая или строгая дизъюнкция или эквиваленция некоторого множества высказываний, то это множество совпадает с множеством высказываний, непосредственно следующих высказыванию X.

Рассмотрим некоторые основные свойства фиксированных формул. Определим функцию $\varphi(X)$ на фиксированной формуле $\mathfrak{A}$ следующим образом. Пусть X — произвольное высказывание в $\mathfrak{A}$. Если существуют высказывания, предшествующие X, то среди них найдется первое, так как они образуют вполне упорядоченное множество. Это первое высказывание и считаем значением $\varphi(X)$. Если не существует высказываний, предшествующих X, то считаем $\varphi(X) = X$. Итак, каждому высказыванию X поставлено в соответствие $\varphi(X) \leqslant X$ такое, что не существует Y, удовлетворяющее отношению $Y < \varphi(X)$.

Выбираем теперь произвольные X и Y в $\mathfrak{A}$. Для высказываний $\varphi(X)$ и $\varphi(Y)$ должно существовать высказывание Z такое, что $Z \leqslant \varphi(X)$ и $Z \leqslant \varphi(Y)$. Но так как ни $Z < \varphi(X)$, ни $Z < \varphi(Y)$ не может иметь места, то $Z = \varphi(X)$ и $Z = \varphi(Y)$, т. е. $\varphi(X) = \varphi(Y)$. Итак, существует высказывание A такое, что $\varphi(X) = A$ для любого $X \in \mathfrak{A}$. А так как $\varphi(X) \leqslant X$, то $A \leqslant X$ для любого $X \in \mathfrak{A}$.

Итак, доказана

Теорема. *В фиксированной формуле существует высказывание, которому следуют все остальные высказывания.*

Указанное высказывание называется *главным высказыванием* данной фиксированной формулы.

Выбираем теперь в некоторой фиксированной формуле произвольное высказывание X. Высказывание X вместе с высказываниями, следующими ему, тоже образуют фиксированную формулу, если в ней сохранить отношения, так как условия 1)—7) выполнены. Это подмножество называется *подформулой* данной фиксированной формулы, определенной высказыванием X. Высказывание X является в этой подформуле главным высказыванием.

Пусть X — некоторое высказывание в фиксированной формуле. Так как множество высказываний, предшествующих X, вполне упорядочено, то X не может непосредственно следовать больше, чем одному высказыванию. Значит, X может участвовать не больше, чем в одной операции, и результат этой операции однозначно определен.

Определим еще некоторые понятия, связанные с фиксированными формулами. *Мощностью* формулы называем мощность множества ее высказываний. *Рангом* высказывания в данной фиксированной формуле называем порядковый тип вполне упорядоченного множества высказываний, предшествующих данному высказыванию. *Высотой* фиксированной формулы называют первый порядковый тип, следующий рангам высказываний данной формулы.

Две фиксированные формулы называются *изоморфными*, если между ними можно определить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение порядка и операции.

Пусть у нас фиксированная формула $\mathfrak{A}$. Пусть выбрано ее подмножество $\{X_\alpha\}$ такое, что при $\alpha \neq \beta$ не имеет места ни $X_\alpha \leqslant X_\beta$, ни $X_\beta \leqslant X_\alpha$. Пусть, далее, имеется множество фиксированных формул $\{\mathfrak{B}_\alpha\}$, и пусть каждому высказыванию X_α поставлена в соответствие формула $\mathfrak{B}_\alpha$. Предположим, что формулы $\mathfrak{B}_\alpha$ не имеют общих высказываний как между собой, так и с формулой $\mathfrak{A}$.

Подстановкой называем создание такой фиксированной формулы

$$\int\limits_{\{X_\alpha\}}^{\{\mathfrak{B}_\alpha\}} \mathfrak{A}, \qquad (*)$$

которая получается от $\mathfrak{A}$ тем путем, что при всех α подформула, определенная высказыванием X_α, заменяется формулой $\mathfrak{B}_\alpha$. При этом порядок и операции в $\mathfrak{B}_\alpha$ сохраняется, а все элементы $\mathfrak{B}_\alpha$ считаются следующими за каждым Y, при которых в $\mathfrak{A}$ имело место $Y < X_\alpha$. Кроме того, если X_α был среди аргументов какой-нибудь операции, то теперь вместо него в этой операции будет участвовать главное высказывание формулы $\mathfrak{B}_\alpha$.

Логикой или *системой значений истинности* называется любая классификация всех фиксированных формул такая, что:

а) Изоморфные формулы входят в один и тот же класс.

б) Если формула (*) получена она $\mathfrak{A}$ подстановкой и при каждом α подформула, определенная высказыванием X_α, входит в тот же класс, куда входит и $\mathfrak{B}_\alpha$, то $\mathfrak{A}$ и формула (*) входят в один и тот же класс.

Классы такой классификации называем *значениями истинности.*

Логика считается *сильнее* другой логики, если ее каждое значение истинности в целом входит в некоторое значение истинности другой логики.

Более слабую логику можно получить из более сильной, если разбить множество значений истинности на группы и в каждой группе объединить значения истинности в одно значение истинности. Разбиение надо провести так, чтобы условие б) оставалось выполненным.

Самая слабая логика такая, где имеется лишь одно значение истинности, а самая сильная такая, в которой только изоморфные формулы имеют одно и то же значение истинности.

Прямым произведением некоторого множества логик называется слабейшая логика, которая сильнее или равна каждой из данных логик.

Операции между значениями истинности определяем так, что выбираем по одной фиксированной формуле из каждого значения истинности и составляем фиксированную формулу, содержащую все данные формулы и еще одно высказывание, которому непосредственно следуют все главные высказывания данных формул и которая является результатом данной операции, если аргументами будут главные высказывания данных формул. Значение истинности этой формулы, — а это будет зависеть только от значений истинности выбранных формул, а не от самих формул — и считаем результатом операции.

Можно, например, делить все фиксированные формулы на два класса: конечные и бесконечные. Также можно делить их по мощности. Эти логики рассматривают фиксированную формулу как множество, не обращая внимания на ее структуру.

Если учесть и отношение порядка высказываний, то можно классифицировать, например, по высоте. Но операции и здесь не играют никакой роли.

Больше интереса представляют логики, в которых учтены и операции. Например, логика, описанная в [1], в терминах данной статьи оказалась бы следующей.

Каждому порядковому числу α поставим в соответствие классы α-необходимых и α-невозможных формул, предполагая, что для порядковых чисел, меньших чем α, эти классы уже определены. Для α эти классы определяются следующим образом:

а) Пусть главное высказывание формулы $\mathfrak{A}$ является результатом конъюнкции. Если все подформулы, определенные конъюнктивными членами, имеют порядок необходимости, меньший, чем α, то $\mathfrak{A}$ есть α-необходимое. Если среди них имеется одна невозможная подформула порядка, меньшего, чем α, то $\mathfrak{A}$ есть α-невозможное.

б) Если главное высказывание формулы $\mathfrak{A}$ есть результат простой дизъюнкции, то $\mathfrak{A}$ считается α-необходимым, если среди подформул, определенных дизъюнктивными членами, имеется хоть одна подформула, необходимая, порядка меньшего, чем α. Если все эти подформулы имеют порядок невозможности, меньший, чем α, то $\mathfrak{A}$ есть α-невозможное.

в) При строгой дизъюнкции для α-необходимости $\mathfrak{A}$ должна одна из названных подформул быть необходимой и все остальные невозможными, конечно, порядка, меньшего, чем α. Для α-невозможности $\mathfrak{A}$ все названные подформулы должны быть невозможными или среди них должны быть по меньшей мере две необходимых, порядка, меньшего, чем α.

г) При отрицании α-необходимость формулы $\mathfrak{A}$ следует от невозможности и α-невозможность от необходимости подформулы аналогичным образом, т. е. порядок необходимости и невозможности подформулы должен быть меньше α.

д) При импликации для α-необходимости аналогичным образом требуется необходимость второй или невозможность первой подформулы, т. е. подформулы, определенной вторым, соответственно первым членом импликации, а для α-невозможности требуется, чтобы первая подформула была необходима, а вторая — невозможна.

е) При эквиваленции аналогично требуется для α-необходимости, чтобы все указанные подформулы были необходимыми или все были невозможными или чтобы множество этих подформул вообще не содержало более одного элемента. Для α-невозможности требуется, чтобы среди этих подформул имелась хоть одна необходимая и хоть одна невозможная.

Индукцией можно показать, что не существует порядковых чисел α и β таких, чтобы некоторая $\mathfrak{A}$ была и α-необходимая и β-невозможная.

Теперь делим фиксированные формулы на три класса: необходимые, случайные и невозможные. Необходимыми, соответственно невозможными, считаем те формулы, которые для некоторого α являются α-необходимыми, соответственно α-невозможными. Все остальные формулы считаем случайными. Легко видеть, что требования логики выполнены.

В описанной логике значение истинности подформулы, ранг главного высказывания которой бесконечен, не играет в определении значения истинности самой формулы никакой роли. Рассматриваем теперь другую логику, где и такие подформулы могут играть некоторую роль.

Называем *означением* фиксированной формулы присваивание некоторым ее высказываниям знаков «+» или «—». Высказывание, которому присвоено знак, называется *означенным*.

Означение называется *элементарным*, если выполнены следующие условия:

а) Высказывание, предшествующее некоторому означенному высказыванию, должно быть означено.

б) Если высказывание есть результат конъюнкции и оно имеет знак «+», то все конъюнктивные члены имеют знак «+». Если высказывание имеет знак «—», то точно один из конъюнктивных членов имеет знак «—», остальные не имеют знака.

в) Если высказывание есть результат простой дизъюнкции и оно имеет знак «+», то один из дизъюнктивных членов имеет знак «+», остальные не имеют знака. Если оно имеет знак «—», то все дизъюнктивные члены имеют знак «—».

г) Если высказывание есть результат строгой дизъюнкции и оно имеет знак «+», то один из его дизъюнктивных членов имеет знак «+», а остальные имеют знак «—». Если оно имеет знак «—», то или все дизъюнктивные члены имеют знак «—», или два из них имеют знак «+», а остальные не имеют знака.

д) Если высказывание есть результат отрицания, то оно имеет знак «+», если отрицаемое имеет знак «—» и наоборот.

е) Если высказывание есть результат эквиваленции и оно имеет знак «+», то или имеется вообще не больше одного аргумента этого эквиваленца, или все аргументы имеют знак и при этом один и тот же. Если оно имеет знак «—», то точно один из аргументов имеет знак «+» и точно один из них имеет знак «—».

з) Если высказывание есть результат импликации и оно имеет знак «+», то или первый компонент имеет знак «—», а второй не имеет знака, или второй имеет знак «+», а первый не имеет знака. Если оно имеет знак «—», то первый компонент имеет знак «+», а второй имеет знак «—».

ж) Если некоторое вполне упорядоченное подмножество состоит из означенных высказываний и не имеет последнего высказывания, то эти высказывания, начиная с некоторого из них, имеют один и тот же знак и имеется первое высказывание, следующее всем этим высказываниям, которое имеет тот же знак.

Правильным означением называем означение, если при любом означенном высказывании можно в подформуле, определенной этим высказыванием, путем удаления знаков получить элементарное означение для этой подформулы, при котором знак данного высказывания сохраняется.

Спрашиваем, найдутся ли для некоторой формулы элементарные означения, при которых главное высказывание имеет разные знаки? Фиксируем два таких означения. Называем нормальным вполне упорядоченное подмножество, состоящее из высказываний, имеющих разные знаки при данных означениях. Нормальные подмножества можно частично упорядочить по объему. При этом сумма возрастающей последовательности нормальных подмножеств тоже есть нормальная. Значит, по лемме Цорна найдется максимальное нормальное подмножество. Но если это имеет последнее высказывание, то среди высказываний, следующих за ним, должно быть высказывание, имеющее разные знаки при данных означениях. А если последнего нет, то первое высказывание, следующее за этим нормальным подмножеством, имеет разные знаки при данных означениях. В обоих случаях можно прибавить это высказывание и получить еще большее нормальное подмножество. Это приводит к противоречию. Значит, главное высказывание имеет при всех элементарных означениях тот же знак.

Из этого следует, что при правильных означениях никакое высказывание не может иметь разных знаков. Но это значит, что для каждой формулы имеется максимальное правильное означение, где каждое высказывание, имеющее знак хоть при одном означении, имеет знак и при этом.

Теперь определим значения истинности по следующему. Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ относим к одному и тому же классу, если $\mathfrak{B}$ изоморфно формуле

$$\int\limits_{\{X_\alpha\}}^{\{\mathfrak{C}_\alpha\}} \mathfrak{A}$$

при некоторых $\{X_\alpha\}$ и $\{\mathfrak{C}_\alpha\}$ и если каждое X_α имеет некоторый знак при максимальном правильном означении формулы $\mathfrak{A}$, а главное высказывание формулы $\mathfrak{C}_\alpha$ имеет тот же знак при максимальном правильном означении формулы $\mathfrak{C}_\alpha$.

Требования, поставленные логикам, при такой классификации выполнены.

Индукцией по β можно показать, что в описанной трехзначной логике каждая β-необходимая формула в своем максимальном правильном означении имеет «$+$» в качестве знака главного высказывания. Поэтому формулы, необходимые в трехзначной логике, входят в последней логике все в один и тот же класс. Так же в один и тот же класс входят формулы, невозможные в трехзначной логике, так как их главное высказывание имеет «—» при максимальном правильном означении.

Литература

1. Таутс А., Определение значений истинности формулами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, 206, 3—9.

Поступило
15 VI 1967

LOOGIKA KUI VALEMITE KLASSIFIKATSIOON

A. Tauts

Resümee

Käesolev artikkel esitab matemaatilise aparatuuri autori eelmises artiklis «Tõeväärtuste defineerimine valemitena» toodud idee jaoks. Kõigepealt defineeritakse fikseeritud valemi mõiste. Fikseeritud valemiks nimetatakse iga osaliselt järjestatud hulka, mille elementide jaoks on defineeritud loogika operatsioonid ning mille puhul on täidetud tingimused:

a) Igale elemendile eelnevate elementide hulk on täielikult järjestatud.

b) Iga kahe elemendi jaoks leidub viimane element, mis eelneb mõlemale.

c) Iga element on parajasti ühe loogilise operatsiooni resultaat, kusjuures nende elementide hulk, mis on selle operatsiooni argumentideks, langeb ühte nimetatud elemendile vahetult järgnevate elementide hulgaga.

Kahte fikseeritud valemit nimetatakse isomorfseteks, kui nende elementide vahel saab korraldada üksühese vastavuse, mis säilitab suhted.

Valemi elementi koos kõigi talle järgnevate elementidega nimetatakse osavalemiks.

Substitutsiooniks nimetatakse operatsiooni, mis annab ühest valemist teise sel teel, et mõned osavalemid asendatakse uute valemitega.

Loogikaks nimetatakse valemite sellist klassifikatsiooni, mille puhul isomorfsed valemid kuuluvad samasse klassi ja mille puhul substitutsioon, mis osavalemid asendab samast klassist valemitega, ei muuda valemi klassi.

Klasse nimetatakse sel juhul tõeväärtusteks.

Artiklis võrreldakse mitmeid selliseid loogikaid.

DIE LOGIK ALS KLASSIFIKATION DER AUSDRÜCKE

A. Tauts

Zusammenfassung

Der vorliegende Artikel gibt eine mathematische Apparatur für die im Artikel des Autors «Das Definieren der Wahrheitswerte als Ausdrücke» beschriebene Ideen.

Zuerst definiert man den Begriff eines fixierten Ausdrucks. Jede halbgeordnete Menge, für einige Elemente derer die logischen Operationen definiert sind, wird ein fixierte Ausdruck genannt, wenn die folgenden Bedingungen erfült sind.

a) Für jedes Element ist die Menge der ihm vorangehenden Elemente eine vollgeordnete Menge.

b) Für jede zwei Elemente gibt es das letzte Element, das ihnen beiden vorangeht.

c) Jedes Element ist das Resultat genau einer logischen Operation, wobei die Menge dieser Elemente, die die Argumente dieser Operation sind, die ist Menge dieser Elemente, die dem genannten Element unmittelbar folgen.

Zwei fixierte Ausdrücke nennt man isomorph, wenn zwischen ihren Elementen eine eineindeutige Entsprechung möglich ist, die die Beziehungen bewahrt.

Ein Element des Ausdrucks zusammen mit den ihm folgenden Elementen nennt man einen Teilausdruck.

Die Operation, die aus einem Ausdruck einen anderen in solcher Weise zieht, daß man einige Teilausdrücke des ersten Ausdrucks durch irgendwelche andere Ausdrücke ersetzt, nennt man eine Substitution.

Eine solche Klassifikation der Ausdrücke, bei der isomorphe Ausdrücke zu derselben Klasse gehören und bei der eine Substitution, die Teilausdrücke durch die Ausdrücke derselben Klasse ersetzt, die Klasse des gesamten Ausdrucks nicht ändert, nennt man eine Logik.

In dem Artikel vergleicht man einige solcher Logiken.

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ И ОРБИТЫ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ R_4

Ю. Лумисте и К. Рийвес

Кафедра алгебры и геометрии

1. Подгруппам Ли групп движений в вещественных евклидовых пространствах R_n или в псевдоевклидовых пространствах ^1R_n посвящен уже ряд исследований. Из наиболее ранних исследований следует отметить установление подгрупп Ли группы движений в R_3 Жорданом (1869) (затем также А. П. Котельниковым (1895)) и подгрупп Ли группы вращений в R_4 Медичи (1908). В последнее время Г. Врынчану [14] и С. Исхихара [12] еще раз рассматривали подгруппы Ли групп вращений в R_4. В. Г. Копп [2] перечислил подгруппы Ли групп движений в $^1R_3$. Подгруппы Ли группы вращений установили в $^1R_4$ Г. И. Кручкович [6] и В. Г. Копп [4], в R_5 К. Телеман [13] и В. Г. Копп [5], в $^1R_5$, R_6 и $^1R_6$ В. Г. Копп [5]. Рассматривались также подгруппы Ли группы движений в $^1R_4$ (В. Г. Копп [3]).

2. В настоящей работе дается систематическое перечисление подгрупп Ли группы движений $O(4)*T_4$ в вещественном евклидовом пространстве R_4. Метод исследования отличается от метода, примененного в [3] при изучении подгруппы Ли группы движений в $^1R_4$. Мы будем пользоваться методом подвижного орторепера Картана. Нетранзитивные подгруппы Ли движений в R_4 выделяются в ходе изучения их орбит — кривых, поверхностей и гиперповерхностей в R_4 с постоянными дифференциальными инвариантами. Это позволяет представить результаты в совершенно инвариантном и геометрически хорошо интерпретируемом виде. Выясняется полная картина действия подгруппы Ли движений в R_4.

Исследование опирается на следующий результат Э. Картана ([1], стр. 247): подмногообразие V однородного пространства G/H является орбитой в G/H относительно некоторой подгруппы Ли K в группе Ли G тогда и только тогда, когда все дифференциальные инварианты различных порядков подмногообразия V постоянны. Кроме того, используется то известное обстоятельство ([9], стр. 250—255), что дифференциальные инварианты подмногообразия V в R_4 являются коэффициентами в выражениях форм инфинитезимального перемещения канонического ортонормированного репера многообразия V, линейно зависящих от базисных форм на V.

§ 1. Метод исследования и результаты

1. Понятие приводимости и инвариантного флага. Важное значение при исследовании подгрупп в группе движений в евклидовом пространстве R_n имеет понятие флага в R_n. Обозначим m-мерную плоскость в R_n через R_m, а $V_m = V(R_m)$ пусть является векторным пространством, составленным из ее векторов.

Точечным флагом $\{m_0, m_1, \ldots, m_k\}$ в R_n называется последовательность плоскостей $R_{m_0} \subset R_{m_1} \subset \ldots \subset R_{m_k}$ при $0 \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_k < n$.

Векторным флагом $[m_1, \ldots, m_k]$ в R_n называется последовательность векторных подпространств $V_{m_1} \subset \ldots \subset V_{m_k}$ пространства $V_n = V(R_n)$ при $0 < m_1 < \ldots < m_k < n$.

Векторно-точечным флагом $[m_1, \ldots, m_l; m_{l+1}, \ldots, m_k\}$ в R_n называется последовательность векторных подпространств $V_{m_1} \subset \ldots \subset V_{m_l}$ с $0 < m_1 < \ldots < m_l$ и плоскостей $R_{m_{l+1}} \subset \ldots \subset R_{m_k}$ с $m_l < m_{l+1} < \ldots < m_k < n$ при $V_{m_l} \subset V_{m_{l+1}} = V(R_{m_{l+1}})$.

Все эти понятия объединяются под общим названием *флаг* Φ.

Если все векторные подпространства или плоскости некоторого флага Φ инвариантны при всех движениях подгруппы G, то подгруппа G в группе движений R_n называется *приводимой* с инвариантным флагом Φ; при этом она называется *подгруппой стационарности* флага Φ, если G содержит все движения в R_n, относительно которых флаг Φ инвариантен, и *винтовой подгруппой* с инвариантным флагом Φ в противном случае.

Два флага Φ и Φ' называются *эквивалентными*, если их подгруппы стационарности сопряжены в группе движений R_n.

Лемма 1. *Точечные флаги* $\{m_0, m_1, \ldots, m_k\}$ *и* $\{m'_0, m'_1, \ldots, m'_{k'}\}$ *эквиваленты тогда и только тогда, когда* $k' = k$ *и либо* $m'_i = m_i$ *при всех* i, $0 \leqslant i \leqslant k$, *либо* $m'_{j-1} = m_{j-1}$, $m'_j + m_j = m_{j-1} + m_{j+1}$, $m'_{j+1} = m_{j+1}$ *при некоторых* j, $0 < j \leqslant k$ $(m_{k+1} = n)$. *Два векторных (векторно-точечных) флага эквивалентны, если у них* $k' = k$ $(k' = k$ *и* $l' = l)$ *и либо* $m'_i = m_i$ *при всех* i, $1 \leqslant i \leqslant k$, *либо* $m'_{j-1} = m_{j-1}$, $m'_j + m_j = m_{j-1} + m_{j+1}$, $m'_{j+1} = m_{j+1}$ *при некоторых* j, , $1 \leqslant j \leqslant k$ $(m_0 = 0,\ m_{k+1} = n)$.

Доказательство. Достаточно отметить, что каждая приводимая подгруппа Ли с инвариантным векторным подпространством V_{m_j}, погруженным в инвариантное подпространство $V_{m_{j+1}}$ и содержащим инвариантное $V_{m_{j-1}}$, обладает также инвариантным подпространством $V_{m'_j}$, являющимся линейной оболочкой $V_{m_{j-1}}$ и ортогонального дополнения V_{m_j} в $V_{m_{j+1}}$; при этом $m'_j + m_j = m_{j-1} + m_{j+1}$. Следует учитывать также, что эквивалентность двух флагов равносильна тому, что существует движение в R_n, которое совмещает эти флаги или флаги, которые получаются из них заменой одного или нескольких V_{m_j} с $V_{m'_j}$.

2. Формулировка результатов. Теперь легко перечислить все подгруппы Ли стационарности флагов группы движений в R_4. Достаточно перечислить представители всех классов эквивалентности флагов в R_4. Они следующие:

(a) точечные флаги {0}, {0, 1}, {0, 2}, {0, 1, 2}, {1}, {1, 2}, {1, 2, 3}, {2}, {2, 3}, {3};

(b) векторные флаги [1], [1, 2], [1, 2, 3], [2];

(c) векторно-точечные флаги [1; 2}, [1; 3}, [1; 2, 3}, [1, 2; 3}.

Получается 18 типов подгрупп Ли стационарности флагов группы движений в R_4. В следующей таблице они перечислены в той последовательности, в которой они получаются в ходе нашего исследования всевозможных подгрупп Ли группы движений в R_4. Согласно применяемому методу они упорядочиваются по возрастанию максимальной размерности их орбит.

Подгруппы Ли стационарности флагов группы движений в R_4

Инвариантный флаг	Число параметров	Орбиты максимальной размерности	Их размерность
{1, 2, 3}	1	*прямые*	1
{0, 1, 2}	1	*окружности*	1
[1; 2, 3}	2	*плоскости*	2
{1, 2}	2	*цилиндры вращения (в R_3)*	2
{0, 2}	2	*поверхности Клиффорда*	2
{2, 3}	3	*плоскости*	2
{0, 1}	3	*сферы (в R_3)*	2
[1, 2; 3}	3	*гиперплоскости*	3
[1; 2}	3	*гиперцилиндры с плоскими образующими*	3
{2}	4	-„-	3
{1}	4	*гиперцилиндры с прямолинейными образующими*	3
[1; 3}	4	*гиперплоскости*	3
{3}	6	-„-	3
{0}	6	*гиперсферы*	3
[1, 2, 3]	4	*все R_4*	4
[1, 2]	5	-„-	4
[2]	6	-„-	4
[1]	7	-„-	4

Для сравнения отметим, что вся группа движений в R_4 зависит от 10 параметров.

Проводимое ниже исследование показывает, что кроме этих 18 типов подгрупп стационарности флагов существует еще 10 типов винтовых подгрупп Ли группы движений в R_4. Они характеризуются следующей таблицей.

Винтовые подгруппы Ли группы движений в R_4:

Инвариантный флаг	Число параметров	Орбиты максимальной размерности	Их размерность	
{1, 2}	1	*винтовые линии (в R_3)*	1	*
{0, 2}	1	*линии постоянных кривизн (в R_4)*	1	*
{2}	2	*цилиндры на винтовых линиях*	2	*
[1; 3}	3	*гиперплоскость*	3	*
{0}	3	*гиперсфера*	3	
{0}	4	-„-	3	
[1, 2]	4	*все R_4*	4	*
[2]	5	-„-	4	*
—	7	-„-	4	
—	8	-„-	4	

Полученные 28 типов собственных подгрупп Ли группы движений в R_4 делятся на две группы. Для большинства из этих типов имеется с точностью до внутреннего автоморфизма только одна подгруппа данного типа. Такими являются, например, все подгруппы стационарности флагов. Однако, среди винтовых подгрупп Ли имеется 6 типов таких, что существует целое однопараметрическое семейство попарно несопряженных подгрупп Ли заданного типа (параметром является «шаг» винтового движения). Они в таблице отмечены звездочкой в последнем столбце.

§ 2. Однопараметрические подгруппы

Орбитами однопараметрических подгрупп движений R_4 по указанному выше общему результату ([1], стр. 247) являются линии с постоянными кривизнами в R_4. Они исследованы О. Борувка [11], которому принадлежит следующий результат. Если такая линия не принадлежит гиперплоскости R_3 (т. е., если все ее кривизны отличны от нуля), то она описывается точкой при одновременных вращениях на пропорциональные углы вокруг двух вполне ортогональных двумерных плоскостей, пересекающихся в некоторой точке $O \in R_4$. Следовательно, соответствующая 1-параметрическая подгруппа является винтовой подгруппой в подгруппе стационарности флага {0, 2}.

Что касается линии с постоянными кривизнами в гиперплоскости R_3, то они хорошо известны. Ими являются винтовые линии, окружности и прямые. Подгруппы движений в R_4, для которых они являются орбитами максимальной размерности, следующие: в первом случае винтовая подгруппа с инвариантным флагом $\{1, 2\}$, во втором случае подгруппа стационарности флага $\{0, 1, 2\}$, в третьем случае подгруппа стационарности флага $\{1, 2, 3\}$.

Две винтовые 1-параметрические подгруппы с инвариантными флагами $\{0, 2\}$ и $\{1, 2\}$ могут оказаться несопряженными в группе движений в R_4 — они могут отличаться на «шаг» винтового движения. В случае флага $\{0, 2\}$ таким «шагом» является отношение постоянных скоростей вращения в двух вполне ортогональных плоскостях, в случае флага $\{1, 2\}$ он совпадает с обычным понятием шага винтового движения в R_3.

Для цельности изложения приводим здесь краткое доказательство результата О. Борувка о линии с постоянными кривизнами в R_4. Оно в наиболее простом случае иллюстрирует применяемый в дальнейшем метод исследования.

Ортонормированный репер $\{M, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$, присоединенный к точке M кривой, можно канонизировать так, чтобы вектор $\boldsymbol{e}_1$ был направлен вдоль касательной, а вектор $\boldsymbol{e}_\alpha$ $(\alpha = 2, 3, 4)$ — вдоль α-ой нормали. Тогда в формулах инфинитезимального перемещения репера

$$d\boldsymbol{M} = \omega^i \boldsymbol{e}_i, \quad (i, j, \ldots = 1, 2, 3, 4)$$

$$d\boldsymbol{e}_i = \omega^j{}_i \boldsymbol{e}_j, \quad \omega^j{}_i + \omega^i{}_j = 0 \tag{2.1}$$

справедливы соотношения

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega^4 = \omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = 0,$$

$$\omega^2{}_1 = k_1\omega^1, \quad \omega^3{}_2 = k_2\omega^1, \quad \omega^4{}_3 = k_3\omega^1,$$

где в случае кривой, не принадлежащей R_3, имеет место $k_1k_2k_3 \neq 0$. Легко проверить, что при постоянных k_1, k_2 и k_3 точка с радиусом-вектором $\boldsymbol{O} = \boldsymbol{M} + \frac{1}{k_1}\boldsymbol{e}_2 + \frac{k_2}{k_1k_3}\boldsymbol{e}_4$ неподвижна, потому что $d\boldsymbol{O} = 0$. Кроме того, неподвижна также двухмерная плоскость в R_4, натянутая на $\boldsymbol{O}$ и векторы $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1 + \mu\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{y} = (k_1 - \mu k_2)\boldsymbol{e}_2 + \mu k_3\boldsymbol{e}_4$, где μ является одним из двух вещественных решений μ_1 и μ_2 уравнения

$$k_1k_2\mu^2 - (k_1^2 - k_2^2 - k_3^2)\mu - k_1k_2 = 0.$$

Действительно, $d\boldsymbol{x} = \omega^1\boldsymbol{y}$, $d\boldsymbol{y} = (k_1k_2\mu - k_1^2)\omega^1\boldsymbol{x}$. Следовательно, 1-параметрическая подгруппа, орбитами которой являются рассмотренные кривые в R_4, является винтовой подгруппой с инвариантным флагом $\{0, 2\}$.

§ 3. Подгруппы Ли, максимальные орбиты которых двумерны

1. Канонизация репера. Ортонормированный репер $\{M, e_1, e_2, e_3, e_4\}$, присоединенный к точке M двумерной поверхности в R_4 можно канонизировать следующим образом: векторы e_1 и e_2 можно направить в касательной плоскости поверхности так, чтобы им соответствовали концы M_1 и M_2 бо́льшей оси индикатрисы нормальной кривизны (являющейся, как известно, эллипсом или некоторой ее вырожденной формой — отрезком или точкой [9]), а векторы e_3 и e_4 можно направить по главным направлениям индикатрисы так, чтобы $\overrightarrow{M_1M_2} = -2ae_3$, $a \geqslant 0$. Кроме того, можно добиться, чтобы при положительном повороте направления вектора $x = e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi$ в касательной плоскости направление вектора $\overrightarrow{OX} = e_3 a \cos 2\varphi + e_4 b \sin 2\varphi$ (где O — центр индикатрисы, а X — точка на индикатрисе, соответствующая направлению вектора x) также вращалось в положительном направлении. Тогда $a \geqslant b \geqslant 0$ и индикатриса определяется относительно репера $\{M, e_3, e_4\}$ уравнениями

$$\begin{aligned} x^3 &= \alpha + a\cos 2\varphi, \\ x^4 &= \beta + b\sin 2\varphi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Кроме того (см. [9], стр. 253),

$$\begin{aligned} \omega^3{}_1 &= (\alpha + a)\,\omega^1, & \omega^4{}_1 &= \beta\omega^1 + b\omega^2, \\ \omega^3{}_2 &= (\alpha - a)\,\omega^2, & \omega^4{}_2 &= b\omega^1 + \beta\omega^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Поверхность является орбитой некоторой подгруппы Ли движений в R_4 тогда и только тогда, когда ее инварианты α, β, a и b являются постоянными. Тогда дифференциальное продолжение системы (3.2) с помощью условий интегрируемости

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^j \wedge \omega^i{}_j, \\ d\omega^i{}_j &= \omega^k{}_j \wedge \omega^i{}_k \end{aligned} \tag{3.3}$$

уравнений (2.1) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} -\beta\omega^4{}_3 &= A_1\omega^1 + A_2\omega^2, \\ 2a\omega^2{}_1 - b\omega^4{}_3 &= A_2\omega^1 + A_1\omega^2, \\ -2b\omega^2{}_1 + (\alpha + a)\,\omega^4{}_3 &= A_3\omega^1, \\ 2b\omega^2{}_1 + (\alpha - a)\,\omega^4{}_3 &= A_4\omega^2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где A_1, A_2, A_3 и A_4 в случае орбиты подгруппы Ли движений в R_4 также являются постоянными.

Эту систему можно рассматривать как систему линейных уравнений для определения форм $\omega^2{}_1$ и $\omega^4{}_3$. Она должна быть совместна. Это налагает на α, β, a и b ряд условий. Кроме того, должны быть удовлетворены уравнения, вытекающие из (3.3):

$$d\omega^2{}_1 = -K\omega^1 \wedge \omega^2, \quad d\omega^4{}_3 = -2ab\omega^1 \wedge \omega^2, \tag{3.5}$$

где

$$K = \alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2 \tag{3.6}$$
— гауссова кривизна поверхности.

2. Орбиты, индикатрисы которых являются точками. При исследовании системы (3.4) целесообразно в первую очередь выделить случай, когда $a = 0$. Тогда, в силу $a \geqslant b \geqslant 0$, также $b = 0$, т. е. индикатриса вырождается в точку O. Прежняя канонизация репера теряет силу и векторы e_3, e_4 можно выбрать так, чтобы $\overline{OM} = -\alpha e_3$; тогда $\beta = 0$.

Система (3.4) принимает особенно простой вид:
$$\alpha\omega^4{}_3 = 0.$$
Отсюда либо $\alpha = 0$, либо $\alpha \neq 0$, $\omega^4{}_3 = 0$.

В первом случае $\omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^4{}_2 = 0$ и орбита представляет собой плоскость, натянутую на M, e_1 и e_2. Подгруппа Ли группы движений в R_4, для которой двумерные плоскости являются орбитами максимальной размерности, представляет собой трехпараметрическую подгруппу стационарности флага $\{2, 3\}$. Она, в свою очередь, имеет подгруппу Ли движений, транзитивную на этих плоскостях — ею является двухпараметрическая подгруппа стационарности флага $[1; 2, 3\}$.

Во втором случае $d(M + \frac{1}{\alpha} e_3) = 0$, $de_4 = 0$, т. е. получается подгруппа стационарности флага $\{0, 1\}$ и орбиты максимальной размерности представляют собой сферы в параллельных гиперплоскостях R_3.

3. Орбиты, индикатрисы которых являются отрезками. Если индикатриса нормальной кривизны вырождается в отрезок, то $b = 0$, $a > 0$. Система (3.4) сводится к
$$\begin{aligned} -\beta\omega^4{}_3 &= A_1\omega^1 + A_2\omega^2, \\ 2a\omega^2{}_1 &= A_2\omega^1 + A_1\omega^2, \\ (\alpha + a)\,\omega^4{}_3 &= A_3\omega^1, \\ (\alpha - a)\,\omega^4{}_3 &= A_4\omega^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

I. Пусть эта система однородна, т. е.
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0.$$
Тогда $\omega^2{}_1 = 0$, и из (3.5) и (3.6) следует, что $a^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Так как в рассматриваемом случае $a > 0$, то либо $\alpha + a \neq 0$, либо $\alpha - a \neq 0$. Тогда и $\omega^4{}_3 = 0$.

Соответствующая подгруппа Ли группы движений в R_4 выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой
$$\begin{aligned} &\omega^3 = \omega^4 = 0, \\ &\omega^3{}_1 = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})\,\omega^4, \quad \omega^4{}_1 = \beta\omega^1, \\ &\omega^3{}_2 = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})\,\omega^2, \quad \omega^4{}_2 = \beta\omega^2, \\ &\omega^2{}_1 = \omega^4{}_3 = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Если здесь $\beta = 0$, то при $\alpha > 0$ имеют место $\omega^3{}_1 = 2\alpha\omega^1$, $\omega^3{}_2 = \omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = 0$, при $\alpha < 0$ — $\omega^3{}_2 = 2\alpha\omega^2$, $\omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = 0$.

В первом случае $d(M+\frac{1}{2a}e_3)=\omega^2 e_2$, $de_2=0$, $de_4=0$, а второй случай отличается от него только заменой индекса 1 на 2. Следовательно, рассматриваемая 2-параметрическая подгруппа Ли является подгруппой стационарности флага {1, 2}, а ее орбиты максимальной размерности — цилиндрами вращения в гиперплоскостях R_3.

Если $\beta\neq 0$, то точка $O=M+\beta^{-1}e_4$ неподвижна, потому что $dO=0$. Кроме того, неподвижна также двумерная плоскость, натянутая на O и векторы $x=\beta e_3-(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})e_4$ и $y=e_2$, потому что, в силу (3.8), $dx=-2\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\omega^1 y$, $dy=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\beta}\omega^1 x$. Следовательно, в этом случае подгруппа Ли является 2-параметрической подгруппой стационарности флага {0, 2}, а ее орбиты максимальной размерности — двумерными поверхностями на гиперсфере пространства R_4, которые при отождествлении диаметрально противоположных точек переходят в поверхности Клиффорда трехмерного эллиптического пространства (ср. [9], стр. 245).

II. Пусть система (3.7) неоднородна. Так как имеют место $b=0$, $a>0$, (3.3) и (3.5), то

$$d\omega^4{}_3=0,\quad d\omega^1=\frac{A_2}{2a}\omega^1\wedge\omega^2,\quad d\omega^2=\frac{A_2}{2a}\omega^1\wedge\omega^2,$$

и из первого уравнения и последних двух уравнений системы (3.7) после внешнего дифференцирования получается, что

$$A_1A_2=A_3A_2=A_4A_1=0.$$

Из последних двух уравнений (3.7) следует, в силу $a>0$, что

$$\omega^4{}_3=\frac{A_3}{2a}\omega^1-\frac{A_4}{2a}\omega^2.$$

При подстановке результата в первое уравнение (3.7) получается, что

$$A_1=-\frac{\beta}{2a}A_3,\quad A_2=\frac{\beta}{2a}A_4.$$

Таким образом, $\beta A_3A_4=0$. Оказывается, что здесь $\beta\neq 0$ невозможно. Действительно, тогда либо $A_1=A_3=0$, либо $A_2=$ $=A_4=0$. В первом случае из (3.7) следует: $-\beta\omega^4{}_3=A_2\omega^2$, $(\alpha+a)\omega^4{}_3=0$, $(\alpha-a)\omega^4{}_3=A_4\omega^2$. Здесь в рассматриваемом случае неоднородной системы (3.7) равенство $\omega^4{}_3=0$ невозможно, потому что оно приводит к $A_2=A_4=0$. Следовательно, $a=-\alpha>0$. Теперь из второго уравнения (3.7) при внешнем дифференцировании получается равенство $-4\alpha^2\beta^2=A_2{}^2$, которое невозможно при вещественных $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ и A_2. Аналогичное противоречие получается во втором случае $A_2=A_4=0$.

Таким образом, $\beta=0$ и, следовательно, $A_1=A_2=0$. Из $\omega^2{}_1=0$, также как и выше, вытекает, что $a^2-\alpha^2=0$, т. е. либо $a-\alpha=0$, либо $a+\alpha=0$. В первом случае получается следующая вполне интегрируемая пфаффовая система, определяющая некоторую подгруппу Ли группы движений в R_4:

$$\omega^3=\omega^4=0,$$
$$\omega^3{}_1=2a\omega^1,\ \omega^4{}_1=\omega^3{}_2=\omega^4{}_2=0,$$
$$\omega^2{}_1=0,\ \omega^4{}_3=A\omega^1.$$

Система, получаемая во втором случае, отличается от нее только перестановкой индексов 1 и 2.

Движение ортонормированного репера под действием элементов этой подгруппы определяется следующими формулами:

$$d\boldsymbol{M}=ds\boldsymbol{e}_1+dt\boldsymbol{e}_2,$$
$$d\boldsymbol{e}_1=2ads\boldsymbol{e}_3,$$
$$d\boldsymbol{e}_2=0,$$
$$d\boldsymbol{e}_3=-2ads\boldsymbol{e}_1+Ads\boldsymbol{e}_4,$$
$$d\boldsymbol{e}_4=-Ads\boldsymbol{e}_3,$$

где $ds=\omega^1$, $dt=\omega^2$. Отсюда следует, что при $s=\text{const}$ точка M опишет прямую с направляющим вектором $\boldsymbol{e}_2=\text{const}$, а при $t=\text{const}$ — винтовую линию в некоторой гиперплоскости R_3, ортогональной к $\boldsymbol{e}_2$. Подгруппа является винтовой подгруппой с инвариантным флагом $\{2\}$, изоморфной прямому произведению однопараметрической подгруппы винтовых движений в R_3 и однопараметрической подгруппы переносов в направлении вектора $\boldsymbol{e}_2=\text{const}$, ортогонального к $R_3\subset R_4$. Орбитами максимальной размерности этой подгруппы являются двумерные прямые цилиндры, построенные на винтовых линиях в параллельных гиперплоскостях.

4. Несуществование орбит с индикатрисами общего вида. Если индикатриса орбиты подгруппы движений R_4 в произвольной ее точке невырождена, то $a\geqslant b>0$. Тогда приходится иметь дело с первоначальной системой (3.4).

I. Пусть система (3.4) однородна, т. е. пусть $A_1=A_2=A_3=A_4=0$. Тогда из первого уравнения (3.4) следует, что $\beta\omega^4{}_3=0$. Здесь $\omega^4{}_3=0$ невозможно, потому что оно, в силу (3.5), приводит к противоречию с $a\geqslant b>0$. Следовательно, $\beta=0$, и все определители второго порядка матрицы системы (3.4) равны нулю, т. е. $a^2-b^2+a\alpha=0$, $a^2-b^2-a\alpha=0$. Отсюда $\alpha=0$ и $a=b$. Вся система (3.4) сводится к $2\omega^2{}_1=\omega^4{}_3$; теперь внешнее дифференцирование с помощью (3.5) приводит к противоречию.

II. Пусть система (3.4) неоднородна. Из нее следует, что

$$\begin{aligned}-\beta\omega^4{}_3&=A_1\omega^1+A_2\omega^2,\\ 2\alpha\omega^4{}_3&=A_3\omega^1+A_4\omega^2.\end{aligned}\tag{3.9}$$

а) Пусть $A_1{}^2+A_2{}^2\neq0$; тогда $\beta\neq0$ и из системы (3.4) следует, что

$$A_3 = -\frac{2\alpha}{\beta} A_1, \quad A_4 = -\frac{2\alpha}{\beta} A_2,$$

$$2a\omega^2{}_1 = \left(-\frac{b}{\beta} A_1 + A_2\right) \omega^1 + \left(-\frac{b}{\beta} A_2 + A_1\right) \omega^2,$$

$$2b\omega^2{}_1 = \frac{\alpha - a}{\beta} A_1\omega^1 - \frac{\alpha + a}{\beta} A_2\omega^2.$$

Отсюда для A_1 и A_2 получается следующая однородная система

$$c'A_1 + b\beta A_2 = 0,$$
$$b\beta A_1 + c''A_2 = 0,$$

где $c' = a^2 - b^2 - a\alpha$, $c'' = a^2 - b^2 + a\alpha$. Так как $A_1^2 + A_2^2 \neq \neq 0$, то

$$b^2\beta^2 = c'c'', \tag{3.10}$$

и $A_2 = -\frac{c'}{b\beta} A_1 = -\frac{b\beta}{c''} A_1$, т. е. $A_1 \neq 0$. Подстановка в (3.5) дает теперь следующие результаты:

$$\left[\frac{(\alpha - a)^2}{4b^2\beta^2} + \frac{(\alpha + a)^2}{4c''^2}\right] A_1^2 = -K, \tag{3.11}$$

$$\left[-\frac{\alpha - a}{2b\beta^2} + \frac{b(\alpha + a)}{2c''^2}\right] A_1^2 = -2ab, \tag{3.12}$$

и отсюда

$$\begin{aligned} K[b^2\beta^2(\alpha + a) - c''^2(\alpha - a)] = \\ = a[b^2\beta^2(\alpha + a)^2 + c''^2(\alpha - a)^2]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из (3.10) и (3.13) можно α и β выразить через a и b. Именно, из (3.10)

$$\beta^2 = \frac{1}{b^2} [(a^2 - b^2)^2 - a^2\alpha^2], \tag{3.14}$$

и теперь (3.13) сводится, в силу (3.6), к биквадратному уравнению относительно α:

$$\alpha^4 - \frac{2a^2(a^2 - 3b^2)}{a^2 - b^2} \alpha^2 + a^2(a^2 - 4b^2) = 0,$$

из которого

$$\alpha^2 = \frac{a}{a^2 - b^2} (a^3 - 3ab^2 \pm 2b^3). \tag{3.15}$$

(Здесь $a^2 - b^2 \neq 0$, потому что при $a^2 = b^2$ из (3.14) следовало бы $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, что противоречит предположению $\beta \neq 0$.)

Оказывается, что в (3.15) следует выбрать верхний знак. Действительно, при подстановке α^2 и β^2 из (3.14) и (3.15) в (3.6) получается равенство $K = \mp 2ab$, которое, в силу $a > > b > 0$, согласуется с (3.11) только в случае верхнего знака.

Из (3.14) следует, что

$$\alpha^2 < \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2};$$

если учитывать также (3.15), выбирая в нем верхний знак, то получаются неравенства

$$0 < \frac{a}{a^2 - b^2}(a^3 - 3ab^2 + 2b^3) < \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2}. \qquad (3.16)$$

Обозначим $\lambda = \frac{a}{b}$; тогда $\lambda > 1$ в силу $a > b > 0$ и (3.16) сводится к

$$\frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2)}{\lambda + 1} < \frac{(\lambda^2 - 1)^2}{\lambda^2}.$$

Нетрудно проверить, что это неравенство равносильно с

$$-\frac{(\lambda - 1)(2\lambda + 1)}{\lambda + 1} > 0,$$

которое несовместимо с $\lambda > 1$.

b) Пусть $A_1^2 + A_2^2 = 0$, $A_3^2 + A_4^2 \neq 0$. Тогда, в силу (3.9) $A_1 = A_2 = \beta = 0$, $\alpha \neq 0$,

$$\omega^4{}_3 = \frac{1}{2\alpha}(A_3\omega^1 + A_4\omega^2),$$

и из второго уравнения (3.4) следует, что

$$\omega^2{}_1 = \frac{b}{4a\alpha}(A_3\omega^1 + A_4\omega^2).$$

Теперь подстановка в последние два уравнения (3.4) дает

$$c'A_3 = c''A_4 = 0.$$

Здесь $c' = c'' = 0$ невозможно, потому что это приводит к $\alpha = 0$. Следовательно, либо $c' = A_4 = 0$, либо $c'' = A_3 = 0$.

Теперь подстановка во второе уравнение (3.5) дает в первом случае $A_3^2 = -16a^2\alpha^2$, во втором случае $A_4^2 = -16a^2\alpha^2$. В обоих случаях получается противоречие.

§ 4. Подгруппы Ли, максимальные орбиты которых трехмерны

1. Перечисление подгрупп Ли стационарности флагов с трехмерными орбитами. Ортонормированный репер, присоединенный к точке M гиперповерхности в R_4 можно канонизировать так, чтобы $\boldsymbol{e}_4$ был направлен по нормали гиперповерхности, а $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ — по ее главным направлениям. Тогда

$$\omega^4 = 0, \quad \omega^4{}_1 = k_1\omega^1, \quad \omega^4{}_2 = k_2\omega^2, \quad \omega^4{}_3 = k_3\omega^3.$$

Если гиперповерхность является орбитой некоторой подгруппы Ли группы движений в R_4, то k_1, k_2 и k_3 постоянны и продолжение этой системы приводит к уравнениям

$$(k_2 - k_1)\omega^2{}_1 = A\omega^3,$$
$$(k_3 - k_1)\omega^3{}_1 = A\omega^2,$$
$$(k_3 - k_2)\omega^3{}_2 = A\omega^1,$$

где A также некоторая постоянная.

Оказывается, что здесь k_1, k_2 и k_3 не могут быть попарно различными (это доказывается в следующем пункте). Пусть $k_1 = k_2 = k$; тогда $A = 0$ и

$$(k_3 - k)\omega^3{}_1 = (k_3 - k)\omega^3{}_2 = 0.$$

a) Если $k_3 = k$, то получается подгруппа Ли группы движений в R_4, которая выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4 = \omega^4{}_1 - k\omega^1 = \omega^4{}_3 - k\omega^2 = \omega^4{}_3 - k\omega^3 = 0 \qquad (4.1)$$

и является, следовательно, 6-параметрической.

Если здесь $k = 0$, то $\omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = \omega^4{}_3 = 0$ и соответствующей орбитой является гиперплоскость R_3 в R_4, натянутая на точку M и векторы e_1, e_2, e_3. Подгруппа является подгруппой стационарности флага $\{3\}$. Она, в свою очередь, имеет подгруппы Ли движений, транзитивные на гиперплоскости — ими являются подгруппы стационарности флагов $[1; 3\}$ и $[1, 2; 3\}$.

Если $k \neq 0$, то $d(\boldsymbol{M} + \frac{1}{k}\boldsymbol{e}_4) = 0$, т. е. подгруппа совпадает с подгруппой стационарности флага $\{0\}$. Ее орбитами максимальной размерности являются гиперсферы в R_4. Здесь также имеются подгруппы, транзитивные на этих гиперсферах, но они уже не являются подгруппами стационарности некоторых флагов и поэтому рассматриваются в п. 3 настоящего параграфа.

b) Если $k_3 \neq k$, то $\omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = 0$. При внешнем дифференцировании отсюда получается $kk_3 = 0$. Следовательно, либо

$$k = k_1 = k_2 \neq 0, \quad k_3 = 0,$$

либо

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 \neq 0.$$

В первом случае $d(\boldsymbol{M} + \frac{1}{k}\boldsymbol{e}_4) = \omega^3\boldsymbol{e}_3$, $d\boldsymbol{e}_3 = 0$, т. е. подгруппа совпадает с подгруппой стационарности флага $\{1\}$; ее орбиты максимальной размерности — гиперцилиндры вращения с прямолинейными образующими.

Во втором случае $d(\boldsymbol{M} + \frac{1}{k_3}\boldsymbol{e}_4) = \omega^1\boldsymbol{e}_1 + \omega^2\boldsymbol{e}_2$, $d\boldsymbol{e}_1 = \omega^2{}_1\boldsymbol{e}_2$, $d\boldsymbol{e}_2 = -\omega^2{}_1\boldsymbol{e}_1$, т. е. подгруппа совпадает с подгруппой стационарности флага $\{2\}$; ее орбиты максимальной размерности — гиперцилиндры вращения с двумерными плоскими образующими. Она, в свою очередь, имеет подгруппу Ли движений, транзитивную на этих гиперцилиндрах — ею является 3-параметрическая подгруппа стационарности флага $[1; 2\}$.

2. Несуществование трехмерных орбит с попарно различными главными кривизнами. Пусть $k_1 \neq k_2 \neq k_3$, $k_1 \neq k_3$, тогда

$$\omega^2{}_1 = A_3\omega^3,$$
$$\omega^3{}_1 = A_2\omega^2,$$
$$\omega^3{}_2 = A_1\omega^1,$$

где $A_3 = \frac{A}{k_2 - k_1}$, $A_2 = \frac{A}{k_3 - k_1}$ и $A_1 = \frac{A}{k_3 - k_2}$. При внешнем дифференцировании этих форм получается, в силу (3.3),

$$-A_1A_2 - A_1A_3 + A_2A_3 = -k_1k_2,$$
$$A_1A_2 + A_1A_3 + A_2A_3 = -k_1k_3,$$
$$A_1A_2 - A_1A_3 - A_2A_3 = -k_2k_3.$$

Подстановка сюда выражений A_1, A_2, A_3 приводит к следующей системе относительно A^2:

$$-\frac{2}{(k_3 - k_1)(k_3 - k_2)} A^2 = -k_1k_2,$$
$$\frac{2}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)} A^2 = -k_1k_3,$$
$$-\frac{2}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)} A^2 = -k_2k_3,$$

Для совместности этой системы необходимо, чтобы

$$k_1k_2(k_3 - k_1) = -k_1k_3(k_2 - k_1),$$
$$k_1k_2(k_3 - k_2) = k_2k_3(k_2 - k_1).$$

Отсюда получаются равенства

$$k_1[-k_1k_2 + k_3(2k_2 - k_1)] = 0,$$
$$k_2[-k_1k_2 + k_3(2k_1 - k_2)] = 0.$$

a) Если $k_1 = 0$, то из второго равенства получается $k_2^2k_3 = 0$; отсюда либо

$$k_2 = 0,$$

либо

$$k_3 = 0.$$

Оба случая противоречат предположению, значит соответствующих орбит не существует. Аналогичное противоречие получается, если $k_2 = 0$.

b) Если $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, то

$$k_3(2k_2 - k_1) = k_1k_2,$$
$$k_3(2k_1 - k_2) = k_1k_2.$$

Но эта система совместна только тогда, когда $k_1 = k_2$, что противоречит сделанному предположению. Следовательно, трехмерных орбит с попарно различными главными кривизнами не существует.

3. В и н т о в ы е п о д г р у п п ы с т р е х м е р н ы м и о р б и т а м и. В предыдущих пунктах были найдены все существующие типы трехмерных орбит относительно подгрупп Ли группы движений в R_4 и перечислены все эти подгруппы, являющиеся подгруппами стационарности некоторых флагов. Оказывается, что существуют также винтовые подгруппы, транзитивные на этих трехмерных орбитах. Все они перечисляются ниже.

Так как для двухмерной плоскости и сферы в R_3 не существует (кроме группы параллельных переносов в плоскости) транзитивных подгрупп Ли группы движений в R_3, допускаемых ими и не являющихся подгруппами их стационарности, то желаемые винтовые подгруппы следует искать только в подгруппах стационарности флагов {3} и {0}.

В первой из них такая подгруппа существует. В применяемом нами репере она выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой:

$$\omega^4 = \omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = \omega^4{}_3 = 0,$$
$$\omega^1 = k\omega^3{}_2, \qquad \omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = 0$$

и является, как видно, 3-параметрической; кроме того, она содержится в подгруппе стационарности флага {1; 3}.

Такие подгруппы существуют также в подгруппе стационарности флага {0}. Для их нахождения рассмотрим линейную группу изотропии в точке гиперсферы, т. е. в (4.1) полагаем $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$. Эта группа изотропии является в интересующем нас случае собственной подгруппой вращений касательного пространства R_3, т. е. является либо однопараметрической подгруппой вращений вокруг прямой, либо тривиальной подгруппой, состоящей только из тождественного преобразования.

Если в первом случае e_3 направить по оси вращения, то $\omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = 0 \pmod{\omega^1, \omega^2, \omega^3}$ т. е.

$$\omega^3{}_2 = a_\alpha\omega^\alpha, \qquad \omega^3{}_1 = b_\alpha\omega^\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2,\ 3),$$

где a_α и b_α — постоянные. Отсюда при внешнем дифференцировании с помощью (3.3) получаются, в силу линейной независимости форм ω^1, ω^2, ω^3 и $\omega^2{}_1$, следующие равенства:

$$a_1 = -b_2, \quad a_2 = b_1, \quad a_3 = b_3 = 0, \quad a_1a_2 = 0, \quad a_2{}^2 - a_1{}^2 = -k^2.$$

Следовательно,

$$a_2 = a_3 = b_1 = b_3 = 0, \qquad a_1 = \pm k, \qquad b_2 = \mp k.$$

Здесь разница в знаках несущественна, так как она отражает свободу в выборе направления вектора e_3. Таким образом, существует 4-параметрическая винтовая подгруппа, транзитивная на гиперсфере, определяемая вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4 = \omega^4{}_1 - k\omega^1 = \omega^4{}_2 - k\omega^2 = \omega^4{}_3 - k\omega^3 =$$
$$= \omega^3{}_2 - k\omega^1 = \omega^3{}_1 + k\omega^2 = 0.$$

Во втором случае, когда линейная группа изотропии в точке гиперсферы состоит из одного лишь тождественного преобразования, имеют место сравнения $\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = \omega^3{}_2 = 0$ $\pmod{\omega^1, \omega^2, \omega^3}$, т. е.

$$\omega^3{}_2 = a_\alpha\omega^\alpha, \quad \omega^3{}_1 = b_\alpha\omega^\alpha, \quad \omega^2{}_1 = c_\alpha\omega^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3), \qquad (4.2)$$

где a_α, b_α, c_α — постоянные.

Здесь для упрощения выкладок целесообразно часть коэффициентов обратить в нуль путем надлежащего преобразования орторепера в точке гиперсферы. Возможность такого преобразования подтверждается следующим образом.

Среди кривых, являющихся орбитами относительно однопараметрических подгрупп исследуемой подгруппы, транзитивной на гиперсфере, для каждой точки последней существует проходящая через нее большая окружность гиперсферы. Это следует из того, что среди орбит каждой однопараметрической подгруппы вращений вокруг точки в R_4 по крайней мере одна большая окружность существует (см. § 2), а, в силу транзитивности рассматриваемой подгруппы на гиперсфере, орбита, являющаяся большой окружностью, должна проходить через каждую точку гиперсферы.

Если вектор e_1 выбрать на касательной такой орбиты, то должно быть $de_1 = \omega^4{}_1 e_4 \pmod{\omega^2, \omega^3}$, т. е. $\omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = 0 \pmod{\omega^2, \omega^3}$, и, следовательно, $b_1 = c_1 = 0$. Теперь можно повернуть орторепер вокруг направления вектора e_1 на такой угол, что после поворота имеет место $a_3 = 0$. Тогда из уравнений (4.2) после внешнего дифференцирования получается система

$$a_2c_2 = 0, \quad a_2(a_1 + c_3) = 0, \quad a_1(c_2 - b_3) + b_2(b_3 + c_2) = 0,$$
$$a_2(b_2 + c_3) = 0, \quad a_2(c_2 - b_3) = 0, \quad a_1(c_2 - b_3) + c_3(b_3 + c_2) = 0,$$
$$a_1b_2 - a_1c_3 - b_2c_3 + b_3c_2 + a_2^2 = -k^2,$$
$$a_1b_2 + a_1c_3 - b_2c_3 + b_3^2 = -k^2,$$
$$-a_1b_2 - a_1c_3 + b_2c_3 + c_2^2 = -k^2.$$

Нетрудно убедиться, что единственными вещественными решениями этой системы являются

$$a_2 = b_3 = c_2 = 0, \qquad a_1 = c_3 = \pm k, \qquad b_2 = \mp k.$$

Разница в знаках здесь несущественна и может быть устранена путем изменения направления одного из векторов. Таким образом, существует еще одна винтовая подгруппа Ли групп движений в R_4, транзитивная на гиперсферах, определяемая вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^4 = \omega^4{}_1 - k\omega^1 = \omega^4{}_2 - k\omega^2 = \omega^4{}_3 - k\omega^3 =$$
$$= \omega^3{}_2 - k\omega^1 = \omega^3{}_1 + k\omega^2 = \omega^2{}_1 - k\omega^3 = 0.$$

Она, как видно, 3-параметрическая.

§ 5. Транзитивные подгруппы Ли группы движений в R_4

1. Основная лемма. Примененный выше метод неприменим к исследованию транзитивных подгрупп Ли движений R_4 — в случае такой подгруппы орбита каждой точки $M \in R_4$ совпадает с R_4. Здесь целесообразно применить другие методы исследования, которые можно развивать в общем виде сразу для n-мерного случая.

Пусть в R_n дана фиксированная точка O. Тогда каждое движение в R_n можно единственным образом разложить на некоторое вращение ϱ вокруг O и некоторый параллельный перенос, определяемый вектором τ; это движение удобно обозначить через (τ, ϱ). Оказывается, что

$$(\tau, \varrho)(\tau', \varrho') = (\tau' + \tau \circ \varrho', \ \varrho\varrho'), \tag{5.1}$$

где $\tau \circ \varrho$ обозначает вектор, получаемый из τ вращением ϱ. Действительно, если точки $X \in R_n$ задать с помощью столбцов $(1, x) \equiv (1, x^1, \ldots, x^n)$, где x^i — координаты точки X относительно некоторого ортонормированного репера в R_n с началом в O, то новое положение X' точки X при заданном движении определяется формулой

$$(1, x') = (1, x) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & r \end{pmatrix}$$

(в правой части которой имеется в виду обычное матричное умножение); так как

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t' \\ 0 & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t' + tr' \\ 0 & rr' \end{pmatrix},$$

то (5. 1) справедливо.

Единицей группы движений в R_n является $(0, \varepsilon)$, где ε — единица группы вращений вокруг O. Поэтому

$$(\tau, \varrho)^{-1} = (-\tau \circ \varrho^{-1}, \varrho^{-1}). \tag{5. 2}$$

Движения $(0, \varrho)$ составляют подгруппу вращений R_n вокруг точки O, изоморфную с ортогональной группой $O(n)$, движения (τ, ε) — подгруппу параллельных переносов в R_n, изоморфную аддитивной группе T векторов n-мерного векторного пространства. При этом из (5. 1) следует, что вторая подгруппа является нормальным делителем. Следовательно, группа движений в R_n изоморфна полупрямому (или нормальному) произведению $O(n) * T$ (см. [10], стр. 106) и может быть с ним отождествлена.

Лемма 2. *Если $T \cap G = T' \neq \varnothing$ для некоторой подгруппы Ли G движений в R_n, то G обладает структурой полупрямого произведения $G' * T'$, где G' — приводимая подгруппа Ли движений в R_n, инвариантный точечный флаг которой имеет своей максимальной плоскостью некоторую R_m с размерностью $m = n - \dim T'$, вполне ортогональную к векторному подпространству T'; при этом G' изоморфна некоторой подгруппе Ли $\tilde{G}' \subset O(n)$, оставляющей инвариантной T'. Если G транзитивна в R_n, то G' транзитивна в R_m.*

Доказательство. Любая подгруппа Ли параллельных переносов в R_n совпадает со своей коммутативной подалгеброй Ли. Поэтому T' является векторным подпространством. С другой стороны, T' как пересечение нормального делителя T и подгруппы G является нормальным делителем в G (см. [7], стр. 67). Поэтому из $(\tau', \varepsilon) \in T'$ при $(\tau, \varrho) \in G$ вытекает $(\tau, \varrho)(\tau', \varepsilon)(\tau, \varrho)^{-1} \in T'$, т. е. $(\tau' \circ \varrho, \varepsilon) \in T'$. Отсюда следует, что векторное подпространство T' инвариантно при движениях подгруппы G.

Нормальный делитель $T' \subset G$ является в то же время ядром гомоморфизма φ: G в $O(n)$, определяемого формулой $\varphi(\tau, \varrho) = \varrho$. Следовательно, факторгруппа G/T', действующая на многообразии орбит относительно T' в R_n (т. е. параллельных $(\dim T')$-мерных плоскостей) изоморфна некоторой подгруппе Ли $\tilde{G}' \subset O(n)$. Это действие подобно действию (может быть неэффективному) некоторой подгруппы Ли G' движений в R_n, изоморфной с G/T', на некоторой плоскости с размеренностью $m = n - \dim T'$, вполне ортогональной к T'. При этом G' представляет собой секущую поверхность главного фактор-расслоения в G с базой G/T', следовательно G является полупрямым произведением $G' * T'$. Если G транзитивна в R_n, то G/T' транзитивна на многообразии орбит относительно T', и следовательно, G' транзитивна на R_m. Лемма доказана.

2. Перечисление транзитивных подгрупп. С помощью доказанной леммы нетрудно перечислить все транзитивные подгруппы Ли G движений в R_4. Так как размерности орбит подгруппы G в R_4 не превосходят $\dim G$, то для транзитивных G должно быть $\dim G \geqslant 4$.

Оказывается, что транзитивные G возможны только при $\dim T' \geqslant 3$. В самом деле, если $\dim T' = 0$, то G изоморфна некоторой подгруппе Ли размерности $\geqslant 4$ в $O(4)$, т. е. G изоморфна самой группе $O(4)$ и так как $O(4)$ является простой группой Ли, то ее аффинное представление в R_4 имеет неподвижную точку (см. [8]); следовательно, G не может быть транзитивной.

Если $\dim T' = 1$, то $\dim G' \geqslant 3$. Так как G', в силу леммы, оставляет инвариантной некоторую гиперплоскость R_3, то $G'/\{\varepsilon, \pi\}$ (где ε — единичное движение, а π — отражение относительно R_3 в R_4) изоморфна простой группе $O(3)$. Следовательно, аффинное представление G' в R_3 имеет неподвижную точку и G' не может быть транзитивной в R_3. В силу леммы тогда и G нетранзитивна в R_4.

Если $\dim T' = 2$, то $\dim G' \geqslant 2$ и G' является приводимой подгруппой с инвариантной 2-мерной плоскостью R_2. Так как G', с другой стороны, изоморфна подгруппе $\tilde{G}' \subset O(4)$, оставляющей инвариантной T' с $\dim T' \equiv 2$, то G' изоморфна прямому произведению подгрупп вращений в T' и в его ортогональном дополнении. Следовательно, G' не может быть транзитивной в R_2; поэтому G нетранзитивна в R_4.

В случае $\dim T' = 3$ существует транзитивная подгруппа Ли G движений R_4 — она является полупрямым произведением $G' * T'$, где G' — однопараметрическая группа винтовых движений вокруг прямой R_1, ортогональной к T'. Ортонормированный репер в R_4 можно выбрать так, что M и e_1 принадлежат прямой R_1, а e_2 и e_3 тому двумерному направлению, которое инвариантно в R_3 при этих винтовых движениях. Тогда рассматриваемая подгруппа Ли G выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^3{}_2 = k\omega^1 \ (k = \text{const}), \quad \omega^2{}_1 = \omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^4{}_2 = \omega^4{}_3 = 0.$$

Она является 4-параметрической винтовой подгруппой с инвариантным флагом [1, 2].

В случае $\dim T' = 4$, когда $T' = T$, положение весьма простое: для каждой подгруппы G' группы вращений в R_4 существует соответствующая ей подгруппа группы движений в R_4, транзитивная в R_4 и являющаяся полупрямым произведением $G' * T$.

Кроме подгрупп стационарности флагов [1], [1, 2], [1, 2, 3] и [2] существуют еще винтовые подгруппы, которые соответствуют винтовым подгруппам группы вращений в R_4. Их по проведенной выше классификации существует три: одна из них получена в § 2, две других — в § 4, п. 3. Первая из них 5-параметрическая, оставляет инвариантным флаг [2] и выделяется вполне интегрируемой пфаффовой системой

$$\omega^3{}_1 = \omega^4{}_1 = \omega^3{}_2 = \omega^4{}_2 = 0, \quad \omega^4{}_3 = k\omega^2{}_1 \quad (k = \mathrm{const}),$$

вторая — 8-параметрическая и выделяется системой

$$\omega^3{}_1 = -\omega^4{}_2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^4{}_1,$$

третья — 7-параметрическая и выделяется системой

$$\omega^3{}_1 = -\omega^4{}_2, \quad \omega^3{}_2 = \omega^4{}_1, \quad \omega^2{}_1 = \omega^4{}_3.$$

Литература

1. Картан Э., Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. Москва, 1963.
2. Копп В. Г., Линейные комплексы и их пучки в трехмерном псевдоевклидовом пространстве. Уч. зап. Елабужского гос. пед. ин-та, 1958, 3, 35—71.
3. Копп В. Г., Классификация бесконечно малых движений и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1963, **123**, № 1, 59—77.
4. Копп В. Г., Классификация бивекторов и их пучков в четырехмерном пространстве Лоренца. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1963, **123**, № 12, 112—118.
5. Копп В. Г., О подгруппах вращений пятимерных и шестимерных евклидовых и лоренцовых пространств. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1966, **126**, № 1, 13—22.
6. Кручкович Г. И., Однородные пространства общей теории относительности. Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу с их прилож. к геометрии, механ. и физ. Моск. ун-т, 1963, 12, 71—95.
7. Курош А. Г., Теория групп. Москва, 1953.
8. Рашевский П. К., О некоторых основных теоремах теории групп Ли. Успехи матем. наук, 1953, 8, № 1, 3—20.
9. Риманова геометрия в ортогональном репере (по лекциям Э. Картана). Москва, 1960.
10. Холл М., Теория групп. Москва, 1962.
11. Borůvka, O., Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. C. r. Acad. Sci., Paris, 1931, **193**, 633—634.
12. Ishihara, S., Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions. J. Math. Soc., Japan, 1955, 7, № 4, 345—370.

13. Teleman, C., Grupurile de mişcare transitive ale spatiilor riemanniene V_5. Studii şi cercetări mat. Acad. RSR, 1952, 4, 503—526.
14. Vranceanu, G., Asupra grupuriloe de mişcare ale unui spatiu Riemannian cu putue dimensiuni. Studii şi cercetări mat. Acad. RSR, 1954, 5, 173—223.

Поступило
3 VII 1967

EUKLEIDILISE RUUMI R_4 LIIKUMISTE RÜHMA LIE ALAMRÜHMAD JA NENDE ORBIIDID

Ü. Lumiste ja K. Riives

Resümee

Töös leitakse eukleidilise ruumi R_4 liikumiste rühma kõik paarikaupa mittekonjugeeritud Lie alamrühmad. Mittetransitiivsed alamrühmad eraldatakse välja nende orbiitide — konstantsete diferentsiaalinvariantidega kõverate, pindade ja hüperpindade uurimise käigus É. Cartani liikuva ortoreeperi meetodiga. Transitiivsete alamrühmade leidmisel kasutatakse kombineeritud meetodeid. Selgub, et R_4 liikumiste rühm sisaldab 23 eri tüüpi Lie alamrühmi. Tulemused on kokkuvõtlikult esitatud §-s 1 kahes tabelis.

ENUMERATION OF LIE SUBGROUPS IN THE GROUP OF MOTIONS IN EUCLIDEAN SPACE R_4 AND THEIR ORBITS

Ü. Lumiste and K. Riives

Summary

In the paper all Lie subgroups unconjugated in pairs are found in the group of motions in Euclidean space R_4. The nontransitive subgroups are separated in the course of studying their orbits — the curves, surfaces and hypersurfaces with the constant differential invariants — by the method of repère mobile by É. Cartan. In finding the transitive subgroups combined methods are used. It appears that the group of motions in R_4 contains 28 different types of Lie subgroups. The results are briefly presented in two charts in § 1.

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ СЕМЕЙСТВА ПЛОСКОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ НЕКОТОРОЙ СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Х. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

1. В статье рассматриваются квазилинейные системы дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными, не содержащих самих неизвестных и заданных на некотором комплексном многообразии. Как известно, такую систему можно привести к каноническому виду, в котором ее матрица имеет жорданову нормальную форму. Рассмотрение проведено по некоторым специальным видам канонической системы, охватывающим всевозможные. Рассматриваемая система преобразована в некоторую систему внешних уравнений. Изучено геометрическое строение интегральных элементов в произвольной точке многообразия.

2. Пусть задано комплексное многообразие M_m с локальными координатами x, y, u^3, u^4, $\ldots$, u^m и на нем система дифференциальных уравнений [1]

$$\frac{\partial u^s}{\partial x} = \sum_{t=1}^{m} h_{st}(x, y) \frac{\partial u^t}{\partial y} + f(x, y, u^p),$$

где $u = u(x, y)$ и $s, p = 3, 4, \ldots, m$.

Известно, что рассматриваемую нами систему можно при некоторых дополнительных предположениях, которые в дальнейшем считаются выполненными, привести к каноническому виду ([1], стр. 73):

---

[1] Здесь и всюду в дальнейшем полагаем s, $t = 3, 4, \ldots, m$; $i = 1, 2, \ldots, k$; $s_1 = 3, 4, \ldots, n_1 - 1$, $s_{i'} = 1, 2, \ldots, n_{i'} - 1$; $i' = 2, 3, \ldots, k$.

$$\frac{\partial u^3}{\partial x} = \lambda_1(x, y)\frac{\partial u^3}{\partial y} + f^*_3(x, y, u^p),$$
$$\frac{\partial u^4}{\partial x} = \alpha_3(x, y)\frac{\partial u^3}{\partial y} + \lambda_1(x, y)\frac{\partial u^4}{\partial y} + f^*_4(x, y, u^p).$$

. . . .

$$\frac{\partial u^{n_1}}{\partial x} = \alpha_{n_1-1}(x, y)\frac{\partial u^{n_1-1}}{\partial y} + \lambda_1(x, y)\frac{\partial u^{n_1}}{\partial y} + f^*_{n_1}(x, y, u^p),$$
$$\frac{\partial u^{n_1+1}}{\partial x} = \lambda_2(x, y)\frac{\partial u^{n_1+1}}{\partial y} + f^*_{n_1+1}(x, y, u^p).$$

. . . .

$$\frac{\partial u^{n_1+n_2}}{\partial x} = \beta_{n_2-1}(x, y)\frac{\partial u^{n_1+n_2-1}}{\partial y} + \lambda_2(x, y)\frac{\partial u^{n_1+n_2}}{\partial y} + f^*_{n_1+n_2}(x, y, u^p),$$

. . . . (A)

. . . .

$$\frac{\partial u^{m-n_k+1}}{\partial x} = \lambda_k(x, y)\frac{\partial u^{m-n_k+1}}{\partial y} + f^*_{m-n_k+1}(x, y, u^p),$$
$$\frac{\partial u^{m-n_k+2}}{\partial x} = \omega_1(x, y)\frac{\partial u^{m-n_k+1}}{\partial y} + \lambda_k(x, y)\frac{\partial u^{m-n_k+2}}{\partial y} + {} \\ + f^*_{m-n_k+2}(x, y, u^p),$$

. . . .

$$\frac{\partial u^{m}}{\partial x} = \omega_{n_k-1}(x, y)\frac{\partial u^{m}}{\partial y} + \lambda_k(x, y)\frac{\partial u^{m}}{\partial y} + f^*_{m}(x, y, u^p),$$

где $\lambda_1(x, y)$, $\lambda_2(x, y)$, ..., $\lambda_k(x, y)$ — корни уравнения $\det(\|h_{st}(x,y)\| - \lambda E) = 0$, а $\alpha_s(x,y)$, $\beta_s(x,y)$, ..., $\omega_s(x,y)$ — некоторые дифференцируемые функции.

Уравнения

$$du^s = \frac{\partial u^s}{\partial x}dx + \frac{\partial u^s}{\partial y}dy$$

при заданных $\frac{\partial u^s}{\partial x}, \frac{\partial u^s}{\partial y}$ определяют в каждой точке многообразия M_m в соответствующем касательном пространстве некоторую двумерную плоскость, причем ее дуальными грассмановыми координатами являются $\frac{\partial u^s}{\partial x}, \frac{\partial u^s}{\partial y}$, 1. Следовательно, система (A) в каждой точке многообразия M_m задает $(m-2)$ соотношений на $2(m-2)$ грассмановых координат такой плоскости, т. е. выделяет в касательных пространствах к многообразию M_m некоторые подсемейства двумерных плоскостей. В § 1 изучается строение такого подсемейства двумерных плоскостей в одной точке многообразия M_m, т. е. полагается, что на дуальные грассмановы координаты плоскости наложены линейные уравнения с постоянными коэффициентами вида (A). Как известно, с помощью некоторой замены переменных, в которой участвуют решения системы (A), можно систему (A) привести к такому виду, в которой $f^*_s = 0$. Полагаем, что такая замена переменных проделана. Если еще проделать замену

$$u'^{\sigma} = \alpha_\sigma \alpha_{\sigma+1} \dots \alpha_{n_1-1} u^\sigma, \quad \text{где} \quad 3 \leqslant \sigma \leqslant n_1 - 1,$$

$$u'^{\rho} = \beta_\rho \beta_{\rho+1} \dots \beta_{n_2-1} u^\rho, \quad \text{где} \quad n_1 + 1 \leqslant \varrho \leqslant n_1 + n_2 - 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u'^{\delta} = \omega_\delta \omega_{\delta+1} \dots \omega_{m-1} u^\delta, \quad \text{где} \quad m - n_k + 1 \leqslant \delta \leqslant m - 1,$$

$$u'^{n_i} = u^{n_i},$$

то система (A) приводится к виду, где все отличные от нуля $\alpha_{s_1}, \beta_{s_2}, \dots, \omega_{s_k}$ — равные единице. В зависимости от соотношений между $\lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_m$ и от того, сколько среди α_{s_1}, $\beta_{s_2}, \dots, \omega_{s_k}$ равных нулю, получаются различные виды канонической системы (A). В дальнейших исследованиях целесообразно различать следующие конкретные случаи канонической системы (A):

1° $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n \ (= \lambda_1)$, $\lambda_{n_1+1} = \lambda_{n_1+2} = \dots = \lambda_{n_1+n_2} (= \lambda_2)$,
$\dots, \ \lambda_{m-n_k+1} = \lambda_{m-n_k+2} = \dots = \lambda_m (= \lambda_k)$;

2° $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n_1} (= \lambda_1), \ \dots, \ \lambda_{m-n_k+1} = \dots = \lambda_m (= \lambda_k)$;
$\alpha_{l_1} = \alpha_{l_1+l_2} = \dots = \alpha_{n_1-l_k-p} = \alpha_{n_1-p} =$
$= \alpha_{n_1-p+1} = \dots = \alpha_{n_1-1} = 0,$
$\beta_{m_1} = \beta_{m_1+m_2} = \dots = \beta_{n_2-m_j} = \dots = 0, \ \dots,$
$\omega_{t_1} = \omega_{t_1+t_2} = \dots = 0;$

3° $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n_1} (= \lambda_1), \ \dots, \ \lambda_{m-n_k+1} = \dots = \lambda_m (= \lambda_k)$;
$\alpha_{s_1} = \beta_{s_2} = \dots = \omega_{s_k} = 0;$

4° $\lambda_s = \lambda_t$;

5° $\lambda_s = \lambda_t$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{j-1} = 0$, где $1 < j < m$;

6° $\lambda_s = \lambda_t$; $\alpha_{s_1} = 0$;

7° $\lambda_s \neq \lambda_t$ при $s \neq t$.

Здесь случай 1° является самым общим и охватывает все дальнейшие — имеется k различных корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, кратности которых соответственно $n_1 - 2, n_2, \dots, n_k$; на $\alpha_{s_1}, \beta_{s_2}, \dots, \omega_{s_k}$ нет никаких зависимостей. Случай 2° есть такой его подслучай, когда некоторые среди $\alpha_{s_1}, \beta_{s_2}, \dots, \omega_{s_k}$ равны нулю, а в случае 3° все $\alpha_{s_1}, \beta_{s_2}, \dots, \omega_{s_k}$ равны нулю.

В случае 4° имеется один корень λ кратности $m - 2$. Если кроме того, часть из $\alpha_{s_1}, \beta_{s_2}, \dots, \omega_{s_k}$ равны нулю, получим случай 5°, а если все $\alpha_{s_1}, \beta_{s_2}, \dots, \omega_{s_k}$ равны нулю — случай 6°.

Наконец, случай 7° получится из 1° тогда, когда различных корней $m - 2$, т. е. кратность любого корня равна единице.

3. Преобразуем систему (A) к некоторому более удобному для дальнейшего рассмотрения виду. Находим эти преобразованные виды уже для перечисленных конкретных случаев. Более подробно рассмотрим лишь случай 4°, в остальных случаях запишем лишь окончательный результат. Вид преобразованной системы (A) в случае 1° следующий

$$
\begin{aligned}
& du^3 \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0, \\
& du^4 \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^3 \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^{n_1} \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^{n_1-1} \wedge dx = 0, \\
& du^{n_1+1} \wedge d(\lambda_2 x + y) = 0. \\
& du^{n_1+2} \wedge d(\lambda_2 x + y) + du^{n_1+1} \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^{n_1+n_2} \wedge d(\lambda_2 x + y) + du^{n_1+n_2-1} \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^{m-n_k+1} \wedge d(\lambda_k x + y) = 0, \\
& du^{m-n_k+2} \wedge d(\lambda_k x + y) + du^{m-n_k+1} \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^m \wedge d(\lambda_k x + y) + du^{m-1} \wedge dx = 0;
\end{aligned}
\tag{1}
$$

в случае 2°

$$
\begin{aligned}
& du^3 \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0, \\
& du^4 \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^3 \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^{l_1} \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^{l_1-1} \wedge dx = 0, \\
& du^{l_1+1} \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0, \\
& du^{l_1+2} \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^{l_1+1} \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^{l_1+l_2} \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^{l_1+l_2-1} \wedge dx = 0, \\
& du^{l_1+l_2+1} \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0, \\
& du^{l_1+l_2+2} \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^{l_1+l_2+1} \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^{n_1-l_k-p+1} \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0, \\
& du^{n_1-l_k-p+2} \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^{n_1-l_k-p+1} \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^{n_1-p} \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^{n_1-p-1} \wedge dx = 0, \\
& du^{n_1-p+1} \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0, \\
& du^{n_1-p+2} \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^{n_1} \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0, \\
& du^{n_1+1} \wedge d(\lambda_2 x + y) = 0, \\
& du^{n_1+2} \wedge d(\lambda_2 x + y) + du^{n_1+1} \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

в случае 3°

$$
\begin{aligned}
&du^3 \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0,\\
&du^4 \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&du^{n_1} \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0,\\
&du^{n_1+1} \wedge d(\lambda_2 x + y) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&du^{n_1+n_2} \wedge d(\lambda_2 x + y) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&du^{m-n_k+1} \wedge d(\lambda_k x + y) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&du^m \wedge d(\lambda_k x + y) = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Рассмотрим теперь случай 4°. Запишем систему (A) в этом случае

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u^3}{\partial x} = \lambda \frac{\partial u^3}{\partial y},\\
&\frac{\partial u^4}{\partial x} = \frac{\partial u^3}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u^4}{\partial y},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial u^m}{\partial x} = \frac{\partial u^{m-1}}{\partial y} + \lambda \frac{\partial u^m}{\partial y}.
\end{aligned}
\tag{e$'$}
$$

Внеся в систему

$$du^s = \frac{\partial u^s}{\partial x} dx + \frac{\partial u^s}{\partial y} dy$$

соотношения (e′) на $\frac{\partial u^s}{\partial x}$ и $\frac{\partial u^s}{\partial y}$, получим

$$
\begin{aligned}
&du^3 = \frac{\partial u^3}{\partial y} d(\lambda x + y),\\
&du^4 = \frac{\partial u^4}{\partial y} d(\lambda x + y) + \frac{\partial u^3}{\partial y} dx,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&du^m = \frac{\partial u^m}{\partial y} d(\lambda x + y) + \frac{\partial u^{m-1}}{\partial y} dx.
\end{aligned}
\tag{e$''$}
$$

Если переумножать внешним образом первое уравнение полученной системы (e″) на $d(\lambda x + y)$, затем второе уравнение на dx, а третье на $d(\lambda x + y)$ и два последние результаты сложить и т. д. предпоследнее уравнение на dx и последнее на $d(\lambda x + y)$ и результаты сложить, то в результате этого система (e″) приводится к виду

$$du^3 \wedge d(\lambda x + y) = 0,$$
$$du^4 \wedge d(\lambda x + y) + du^3 \wedge dx = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$du^m \wedge d(\lambda x + y) + du^{m-1} \wedge dx = 0. \tag{4}$$

Обратно, система (4) равносильна системе

$$du^3 = a_3 d(\lambda x + y),$$
$$du^4 = a_4 d(\lambda x + y) + a_3 dx,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$du^m = a_m d(\lambda x + y) + a_{m-1} dx,$$

где $a_3, a_4, \dots, a_m$ — произвольные функции. Так как

$$\frac{\partial u^3}{\partial y}, \quad \frac{\partial u^4}{\partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial u^m}{\partial y}$$

также произвольные функции, то системы (e′) и (4) равносильны.

Далее в случае 5° получим систему

$$\begin{aligned} du^3 \wedge dy &= 0, \\ du^4 \wedge dy &= 0, \\ &\dots\dots \\ du^j \wedge dy &= 0, \\ du^{j+1} \wedge dy + du^j \wedge dx &= 0, \\ &\dots\dots \\ du^m \wedge dy + du^{m-1} \wedge dx &= 0; \end{aligned} \tag{5}$$

в случае 6° — систему

$$\begin{aligned} du^3 \wedge dy &= 0, \\ du^4 \wedge dy &= 0, \\ &\dots\dots \\ du^m \wedge dy &= 0; \end{aligned} \tag{6}$$

в случае 7° — систему

$$\begin{aligned} du^3 \wedge d(\lambda_3 x + y) &= 0, \\ du^4 \wedge d(\lambda_4 x + y) &= 0, \\ &\dots\dots \\ du^m \wedge d(\lambda_m x + y) &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

4. Рассмотрим, как в каждом из перечисленных случаев устроено семейство плоскостей, определяемое системой

$$du^s = \frac{\partial u^s}{\partial x} dx + \frac{\partial u^s}{\partial y} dy,$$

когда $\frac{\partial u^s}{\partial x}$ и $\frac{\partial u^s}{\partial y}$ связаны между собой уравнениями (A), т. е. определяемое соответственно системами (1), (2), (3), ..., (7). Как было уже отмечено, такая система задает семейство двумерных подпространств, которые мы в дальнейшем будем называть плоскостями; в иных случаях говорим — подпространство.

4.1. Начнем со случая 4°, как наиболее простого. Пусть $\lambda_s = \lambda_t = \lambda$. Первое уравнение системы (4) задает семейство S^1 из $(m-1)$-мерных подпространств $E^1{}_{m-1}$, осью семейства является подпространство $H^1{}_{m-2}$, определяемое уравнениями $du^3 = 0$, $d(\lambda x + y) = 0$. Плоскости, определяемые системой (4), должны принадлежать этим подпространствам $E^1{}_{m-1}$, т. е. координаты точек плоскостей должны удовлетворять соотношению $du^3 = \frac{\partial u^3}{\partial y} d(\lambda x + y)$. Внесем последнее соотношение в систему (4) и обозначим $\frac{\partial u^3}{\partial y}$ через a_3. Получим, что в каждом из подпространств $E^1{}_{m-1}$ семейства S^1 искомые плоскости выделяются системой

$$du^4 \wedge d(\lambda x + y) + a_3 d(\lambda x + y) \wedge dx = 0,$$
$$du^5 \wedge d(\lambda x + y) + du^4 \wedge dx = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$du^m \wedge d(\lambda x + y) + du^{m-1} \wedge dx = 0,$$

или, что то же самое, системой

$$d(u^4 - a_3 x) \wedge d(\lambda x + y) = 0,$$
$$du^5 \wedge d(\lambda x + y) + d(u^4 - a_3 x) \wedge dx = 0,$$
$$du^6 \wedge d(\lambda x + y) + du^5 \wedge dx = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$du^m \wedge d(\lambda x + y) + du^{m-1} \wedge dx = 0.$$

Обозначим $u^4 - a_3 x$ через $\tilde{u}^4$. Тогда в произвольном подпространстве $E^1{}_{m-1}$ из семейства S^1 в переменных dx, dy, $d\tilde{u}^4$, $du^5, \dots, du^m$ полученная система, которая выделяет искомые плоскости, имеет такое же строение, как система (4) во всем пространстве $E_m(dx, dy, du^3, du^4, \dots, du^m)$.

Следовательно, в каждом подпространстве $E^1{}_{m-1}$ семейства S^1 первое уравнение полученной системы $d\tilde{u}^4 \wedge d(\lambda x + y) = 0$ определит семейство S^2 из $(m-2)$-мерных подпространств $E^2{}_{m-2}$ с осью $H^2{}_{m-3}$, определяемой уравнениями $d\tilde{u}^4 = 0$, $d(\lambda x + y) = 0$. В любом из подпространств $E^2{}_{m-2}$ семейства S^2 искомые плоскости определяются системой

$$d\tilde{u}^5 \wedge d(\lambda x + y) = 0,$$
$$du^6 \wedge d(\lambda x + y) + d\tilde{u}^5 \wedge dx = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$du^m \wedge d(\lambda x + y) + du^{m-1} \wedge dx = 0,$$

где $\tilde{u}^5 = u^5 - a_4$, $a_4 = \frac{\partial u^4}{\partial y}$ и т. д., в любом из $(m-i+2)$-мерных подпространств E^{i-2}_{m-i+2}, где

$$E^{i-2}_{m-i+2}(du^3 = a_3 d(\lambda x + y),\quad d\tilde{u}^4 = a_4 d(\lambda x + y),\ \dots,$$
$$d\tilde{u}^{m-i} = a_{m-i} d(\lambda x + y)) \subset$$
$$\subset E^{i-3}_{m-i+2}(du^3 = a_3 d(\lambda x + y), d\tilde{u}^4 = a_4 d(\lambda x + y),\ \dots,$$
$$d\tilde{u}^{m-i-1} = a_{m-i-1} d(\lambda x + y)) \subset \dots \subset$$
$$\subset E^2_{m-2}(du^3 = a_3 d(\lambda x + y),\ d\tilde{u}^4 = a_4 d(\lambda x + y)) \subset$$
$$\subset E^1_{m-1}(du^3 = a_3 d(\lambda x + y)),$$
семейства S^{i-2} с осью H^{i-2}_{m-i+1}, где
$$H^{i-2}_{m-i+1}(du^3 = 0,\ d\tilde{u}^4 = 0,\ \dots,\ d\tilde{u}^{m-i} = 0,\ d(\lambda x + y) = 0) \supset$$
$$\supset H^{i-3}_{m-i+2}(du^3 = 0,\ d\tilde{u}^4 = 0,\ \dots,\ d\tilde{u}^{m-i-1} = 0,\ d(\lambda x + y) = 0) \supset$$
$$\supset \dots \supset$$
$$\supset H^2_{m-3}(du^3 = 0,\ d\tilde{u}^4 = 0,\ d(\lambda x + y) = 0) \supset$$
$$\supset H^1_{m-2}(du^3 = 0,\ d(\lambda x + y) = 0)$$
искомые плоскости выделяются системой
$$du^i \wedge d(\lambda x + y) = 0,$$
$$du^{i+1} \wedge d(\lambda x + y) + du^i \wedge dx = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$du^m \wedge d(\lambda x + y) + du^{m-1} \wedge dx = 0,$$
которая в подпространствах E^{i-2}_{m-i+2} в переменных $d\tilde{u}^i$, $du^{i+1}, \dots$, du^m, dx; dy имеет такое же строение как система (4) во всем пространстве E_m.

В результате получатся последовательности вложенных друг в друга подпространств
$$H_1^{m-2} \subset H_2^{m-3} \subset \dots \subset H_i^{m-i-1} \subset \dots \subset H^2_{m-3} \subset H^1_{m-2}, \qquad \text{(u)}$$
где H_i^{m-i-1} определяются уравнениями
$$du^3 = 0,\ du^\mu = a_{\mu-1} dx,\ \mu = 4, 5, \dots, m - i + 1,\ d(\lambda x + y) = 0,$$
и
$$E_3^{m-3} \subset E_4^{m-4} \subset \dots \subset E_{i-1}^{m-i-1} \subset \dots \subset E_{m-2} \subset E^1_{m-1}, \qquad \text{(v)}$$
где E_{i+1}^{m-i-1} определяются уравнениями
$$du^3 = a_3 d(\lambda x + y),\ d\tilde{u}^\mu = a_\mu d(\lambda x + y),\ \mu = 4, 5, \dots, m - i + 1.$$
Здесь H_i^{m-i-1} есть ось семейства S^{m-i-1} из $(i+1)$ мерных подпространств E_{i+1}^{m-i-1}.

Искомые плоскости проходят через подпространство H_1^{m-2}, пересекая при этом каждое из подпространств H_i^{m-i-1} цепочки

(u) и заполняют при этом подпространство E_3^{m-3}, принадлежа каждому из подпространств E_i^{m-i} цепочки (v).

Как видно, между пучками подпространств-осей H_1^{m-2} и подпространств E_3^{m-3}, возникает взаимно-однозначное соответствие по величинам $a_{m-1} = \frac{\partial u^{m-1}}{\partial y}$, $a_{m-2} = \frac{\partial u^{m-2}}{\partial y}$, ..., $a_4 = \frac{\partial u^4}{\partial y}$, $a_3 = \frac{\partial u^3}{\partial y}$, далее — между H_2^{m-3} и E_4^{m-4} по величинам a_{m-2}, a_{m-3}, ..., a_4, a_3 и т. д.

Интерпретируем нашу систему в случае $m = 4$ в проективном пространстве P_3. Определится некоторое семейство прямых P_1, которые проходят через точки $H_0(du^3 = 0,\ du^4 = a_3dx,\ d(\lambda x + y) = 0)$ прямой $H_1(du^3 = 0,\ d(\lambda x + y) = 0)$ и заполняют при этом плоскости $E_2(du^3 = a_3d(\lambda x + y)$. В таких отношениях находятся прямые, которые являются касательными к линейчатой поверхности.

4.2. Перейдем к рассмотрению системы (1). Используя связь случаев 1° и 4° и результаты, полученные при исследовании системы (4), можно сказать, что 1) искомые плоскости должны пересекать каждую из подпространств $H^i{}_{p_i}$, определяемых уравнениями $du^{n_{i-1}+1} = du^{n_{i-1}+2} = \ldots = du^{n_i} = d(\lambda_i x + y) = 0$, где $n_0 = 2$. Здесь $p_1 = m - n_1 - 3$, $p_{i'} = m - n_{i'} - 1$. Эти подпространства $H^i{}_{p_i}$ принадлежат $(m-1)$-мерным подпространствам $T^i{}_{m-1}$ пучка T, определяемого уравнениями $d(\lambda_i x + y)$. Пучок T обладает осью, определяемой уравнениями $dx = dy = 0$; 2) искомые плоскости, пересекающие подпространства $H^i{}_{p_i}$, заполняют при этом, как и в случае 4°, соответственно некоторые подпространства $E^i{}_{p_i+2}$, которые принадлежат некоторой цепочке подпространств. Эти цепочки подпространств обладают цепочкой подпространств-осей, которые содержат и $H^i{}_{p_i}$. Каждая цепочка подпространств имеет такое же строение, как соответствующая цепочка в случае 4°. Следует отметить, что подпространства-оси $H^i{}_{p_i}$ не пересекаются.

4.3. Рассмотрим случай 2°.

Здесь картина аналогичная 1°, но каждая из этих цепочек подпространств в пространствах $T^i{}_{m-1}$, определенных соответственно уравнениями $d(\lambda_i x + y) = 0$ имеет структуру, несколько нарушенную. Рассмотрим случай одного корня λ. Рассмотрим подпространство $E^*{}_p$, определяемое уравнениями $du^r = a_r d(\lambda_1 x + y)$, где $r = n_1 - p + 1,\ n_1 - p + 2,\ \ldots,\ n_1$. Тем самым часть уравнений системы удовлетворяется. Нужно выяснить, что определяется оставшейся частью системы в этом подпространстве $E^*{}_p$. Имеется семейство S^1 подпространств E_{m-p-1}, далее — семейство семейств S^2 подпространств E_{m-p-2}, причем для каждого подпространства E_{m-p-1} из их семейства S^1 будет ровно одно семейство S^2 подпространств E_{m-p-2} и т. д., в каждом из подпространств E_{m-p-l_1+1} определится свое семейство S^{l_1} подпространств E_{m-p-l_1}. Семейство S^{l_1} подпространств E_{m-p-l_1}, проходящих через подпространство-ось E_{m-p-l_1-1}, заполняет подпространство E_{m-p-l_1+1}. Дальше берется пересечение семейства S^{l_1} подпространств E_{m-p-l_1} с подпространствами, определенными уравнением $du^{l_1+1}=a_{l_1+1}d(\lambda_1x+y)$, что и нарушит структуру цепочек подпространств (u) и (v). В каждом пересечении получится семейство S^{l_1+2} подпространств E_{m-p-l_1-2}, причем семейство S^{l_1+2} подпространств E_{m-p-l_1-2}, проходящих через ось E_{m-p-l_1-3}, заполняет соответствующее подпространство E_{m-p-l_1-1} и т. д., семейство S^{n_1-p+1} подпространств E_{m-n_1-1} заполняет подпространство E_{m-n_1+1}. Такая картина возникает в подпространстве, определенном уравнением $d(\lambda_1x+y)$. Аналогичная будет она и во всех других подпространствах, определяемых соответственно уравнениями $d(\lambda_ix+y)=0$ в случае более чем одного корня λ.

4.4. Приступим к рассмотрению системы (3). Разобьем эту систему уравнений на k подсистем, начиная с уравнений соответственно с номерами $n_1, n_2, \dots, n_k$. Тогда i-ая система определяет семейство S^i из p_i-мерных подпространств E_{p_i}, где $p_1=m-n_1$, $p_{i'}=m-n_{i'}+2$, которые имеют (p_i-1)-мерные оси $H^i_{p_i-1}$, определяемые соответственно уравнениями

$$du^{n_{i-1}+1}=du^{n_{i-1}+2}=\dots=du^n=d(\lambda x+y)=0,$$

где $n_0=2$. Каждая ось есть подпространство одного из $(m-1)$-мерных подпространств T^i_{m-1} семейства T, определяемого уравнениями $d(\lambda_ix+y)=0$, которая, в свою очередь, имеет ось, определяемую уравнениями $dx=dy=0$. Оси H_{p_i-1} не пересекаются. Значит, у нас имеется одно семейство T из $(m-1)$-мерных подпространств T^i_{m-1}, в i-ом подпространстве этого семейства определено свое семейство S^i из p_i-мерных подпространств E_{p_i} с осью $H^i_{p_i-1}$. Система (3) задает семейство плоскостей, которые пересекают каждую из этих H_{p_i-1}.

4.5. Рассмотрим систему (5). Первые $(j-3)$ уравнений, вместе взятые, задают семейство S из $(m-j+3)$-мерных подпространств E_{m-j+3}, проходящих через подпространство H_{m-j+2}, определяемое уравнениями $du^3=du^4=\dots=du^{j-1}=dy=0$. Рассмотрим теперь остальные уравнения в этих подпространствах

E_{m-j+3}. Оставшиеся уравнения имеют вид системы (4). Значит искомые плоскости проходят через прямые H_1, которые принадлежат некоторой цепочке подпространств-осей; они при этом заполняют соответствующие подпространства E_3, которые принадлежат некоторой цепочке подпространств. Соответствие между H_1 и E_3 устанавливается по величинам

$$a_j = \frac{\partial u^j}{\partial y}, \quad a_{j+1} = \frac{\partial u^{j+1}}{\partial y}, \ \ldots, \ a_{m-1} = \frac{\partial u^{m-1}}{\partial y}.$$

4.6. Рассмотрим систему (6) в случае $\lambda_s = \lambda_n = \lambda = 0$. t-ое уравнение этой системы определяет семейство S^t из $(m-1)$-мерных подпространств $E^t{}_{m-1}$, определяемых уравнениями $du^t = a_t dy$ и проходящих через подпространство-ось $H^t{}_{m-2}$, определяемое уравнениями $du^t = dy = 0$. Оси $H^t{}_{m-2}$ пересекаются по прямой $H_1(du^3 = du^4 = \ldots du^m = dy = 0)$. Значит, система (6) задает семейство плоскостей, проходящих через эту прямую.

4.7. Наконец, рассмотрим систему (7). i-ое уравнение системы (7) задает семейство S^i из $(m-1)$-мерных подпространств E_{m-1}, которые имеют $(m-2)$-мерные оси, а именно, осью i-ого семейства является подпространство $H^i{}_{m-2}$, которое определяется уравнениями $du^i = 0$, $d(\lambda_i x + y) = 0$. Осью i-ого семейства S^i является подпространство i-ого подпространства семейства T, определяемого уравнением $d(\lambda_i x + y) = 0$. Значит система (7) задает семейство плоскостей, которые пересекают каждую из этих подпространств $H^i{}_{m-2}$, определяемых уравнениями $du^i = 0$, $d(\lambda_i x + y) = 0$.

Литература

1. Петровский И. Г., Лекции об уравнениях с частными производными Москва, 1953.

Поступило
17 V 1967

TEATUD DIFERENTSIAALVÕRRANDITE SÜSTEEMIGA ANTUD TASANDITE PERE GEOMEETRILINE EHITUS

H. Kilp

Resümee

Artiklis vaadeldakse kahe sõltumatu muutujaga esimest järku kvaasilineaarseid osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteeme, mis ei sisalda tundmatuid endid ja mis on antud mingil komplekssel muutkonnal. Nagu teada, võib sellist süsteemi viia kanoonilisele kujule, milles tema maatriksil on

Jordani normaalkuju, mille kõikvõimalikud erikujud on artiklis läbi vaadeldud. Vaadeldav süsteem on teisendatud teatud välisvõrrandite süsteemiks. Kirjeldatakse sellise süsteemi poolt muutkonna suvalises punktis väljaeraldatud tasandite pere ehitust.

THE GEOMETRIC STRUCTURE OF THE FAMILY OF PLANES GIVEN BY MEANS OF A CERTAIN SYSTEM OF DIFFERENTIAL

H. Kilp

Summary

In the paper certain systems of the first order quasi-linear partial differential equations with two independent variables are dealt with. It is supposed that the systems contain no unknown quantities, they are determined on a complex manifold M_m and consist of $(m$-$2)$ equations. As it is known, such a system can be represented canonically, in which case its matrix takes Jordan's normal form. All possible instances of the latter have been examined in the paper. The system considered has been transformed into a certain system of exterior equations. The structure of the family of planes locally determined on the manifold by such a system has been described.

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ СЕМЕЙСТВ ПЛОСКОСТЕЙ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ $\mathfrak{G}$-СТРУКТУРЫ

Х. Кильп

Кафедра алгебры и геометрии

В статье продолжается рассмотрение квазилинейных систем дифференциальных уравнений первого порядка с двумя независимыми переменными, не содержащих самих неизвестных и заданных на некотором комплексном многообразии M_m. В системе $(m-2)$ уравнения. Рассмотрение проведено по тем же специальным видам канонической системы, что и в предыдущей статье [1]. В случае системы с постоянными коэффициентами найдены максимальные группы инвариантности системы на всем многообразии (или, что то же самое, соответствующего геометрического образа). В заданной точке многообразия преобразования инвариантности образуют конечную линейную группу Ли. Найдены их матричные представления. Оказывается, что верны следующие утверждения: если число неравных характеристических корней матрицы системы больше единицы, то подсистемы данной системы, соответствующие неравным корням λ, при преобразованиях инвариантности всей системы преобразуются сами в себя; если число неравных корней больше двух и число уравнений системы достаточно велико, то преобразования инвариантности систем данного канонического вида существенно не отличаются друг от друга, а при малом количестве уравнений системы и при малом количестве характеристических корней появляются некоторые особенности. Все особые случаи разобраны отдельно.

Для исследования данной системы с коэффициентами, постоянными на всем многообразии использованы методы теории $\mathfrak{G}$-структур. Доказывается (см. § 2)

Теорема. *Если на многообразии задана система дифференциальных уравнений указанного выше типа, но с постоянными коэффициентами, то $\mathfrak{G}$-структура с группой инвариатности этой системы в качестве структурной групп $\mathfrak{G}$ является параллелизуемой, и наоборот, если $\mathfrak{G}$-структура с группой инва-*

риантности системы дифференциальных уравнений указанного выше типа в качестве структурной группы $\mathfrak{G}$, является параллелизуемой, то эта система имеет постоянные коэффициенты.

Используя эту теорему, найдены с локальной точки зрения максимальные группы инвариантности для данной системы на всем многообразии, точнее, найдены структурные уравнения этой группы.

§ 1. Линейные группы инвариантности системы (A) в точке

Пусть задано многообразие M_m с локальными координатами $u^1, u^2, u^3, \ldots, u^m$. В каждой его точке определено касательное пространство; при этом $du^1, du^2, du^3, \ldots, du^m$ можно рассматривать как координаты вектора в нем относительно натурального базиса. Рассмотрим в этом касательном пространстве переменный базис $\{\boldsymbol{e}_s\}$ и его бесконечно малое преобразование

$$d\boldsymbol{e}_s = \omega^t{}_s \boldsymbol{e}_t, \quad (s, t = 1, 2, \ldots, m). \tag{f}$$

Условие для того, чтобы вектор $\boldsymbol{p} = u^s \boldsymbol{e}_s$ не менялся, есть $d\boldsymbol{p} = 0$, или

$$du^s + u^t \omega^s{}_t = 0.$$

Условие для того, чтобы прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{p} = u^s \boldsymbol{e}_s$ не менялась, есть $d\boldsymbol{p} = \Theta \boldsymbol{p}$, где Θ — произвольная форма, или, что равносильно этому

$$du^s + u^t \omega^s{}_t = \Theta u^s. \tag{g}$$

Если задано одно уравнение

$$a_{st} du^s \wedge du^t = 0, \tag{h}$$

то условие сохранения его геометрического образа есть

$$d(a_{st} du^s \wedge du^t) = \varphi a_{st} du^s \wedge du^t,$$

где φ — произвольная форма. Отсюда получим, что коэффициенты и их дифференциалы должны удовлетворять соотношению

$$da_{st} - a_{lt} \omega^l{}_s - a_{sl} \omega^l{}_t = \psi a_{st}, \tag{i}$$

где ψ — произвольная линейная форма. Будем рассматривать (f) как преобразование пространства, тогда (g) и (i) определяют соответственно законы преобразования прямой и геометрического образа (h). Если нужно, чтобы при преобразовании (f) геометрический образ (h) преобразовался в себя, надо потребовать выполнения условия

$$(a_{st} + da_{st}) du^s \wedge du^t = 0,$$

или же

$$da_{st} du^s \wedge du^t = 0.$$

Значит, $da_{st} = \xi a_{st}$, где ξ — произвольная форма. Отсюда и из (4) получаем

$$a_{pt} \omega^p{}_s + a_{st} \omega^p{}_t = \mu a_{st}.$$

Если мы желаем, чтобы система

$$a^\alpha{}_{st} du^s \wedge du^t = 0 \tag{j}$$
преобразовалась в себя, должны выполняться условия
$$a^\alpha{}_{pt}\omega^p{}_s + a^\alpha{}_{sp}\omega^p{}_t = \xi^\alpha{}_\beta a^\beta{}_{st}. \tag{k}$$
Рассматриваемые нами системы являются частным случаем системы (j), где $u^1 = x$, $u^2 = y$ — независимые переменные, $u^\xi = u^\xi(x, y)$ и $a_{cd} = a_{\xi\eta} = 0$ $(c, d = 1, 2;\ \xi, \eta = 3, 4, \ldots, m)$. Условия (k) для таких систем преобретают вид
$$a^\alpha{}_{d\zeta}\omega^d{}_\eta + a^\alpha{}_{\eta d}\omega^d{}_\zeta = 0, \tag{a}$$
$$a^\alpha{}_{d\zeta}\omega^d{}_c + a^\alpha{}_{c\xi}\omega^\xi{}_\zeta = \xi^\alpha{}_\beta a^\beta{}_{c\zeta}, \tag{b}$$
$$a^\alpha{}_{\xi d}\omega^\xi{}_c + a^\alpha{}_{c\xi}\omega^\xi{}_d = 0. \tag{c}$$
Полученные таким образом зависимости на формы $\omega^s{}_t$ выделяют подгруппу в полной линейной группе касательного пространства, а именно подгруппу инвариантности семейства плоскостей, определенного системой (j) в касательном пространстве. Это будут конечные линейные группы. Наша цель — найти их матричные представления при различных видах канонической системы (A). Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Для того чтобы система уравнений* (a) *была равносильной системе уравнений* $\omega^c{}_\xi = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы в списке отличных от нуля коэффициентов системы* (j) *каждый из индексов* 1 *и* 2 *встречался по крайней мере дважды.*

Доказательство. Необходимость. Пусть уравнения (a) равносильны системе $\omega^c{}_\xi = 0$. Допустим, что один из индексов, скажем 1, встречается в списке отличных от нуля коэффициентов системы (j) только один раз, например при $\alpha = \alpha_0$ и $\zeta = \zeta_0$, т. е. $a^{\alpha_0}{}_{1\zeta} \neq 0$. Но выписанная для такого списка коэффициентов система (a) вообще не содержит формы $\omega^1{}_\zeta$. Мы пришли к противоречию.

Достаточность проверим сначала в случае системы (4). Чтобы соблюдались предположения леммы и сохранился вид системы, нужно потребовать, чтобы $m \geqslant 5$. Выпишем систему (a):
$$\lambda_1\omega^1{}_\zeta + \omega^2{}_\zeta = 0, \quad \zeta = 4, 5, \ldots, m, \tag{l$_1$}$$
$$\lambda_1\omega^1{}_\zeta + \omega^2{}_\zeta = 0, \quad \zeta = 3, 5, \ldots, m, \tag{l$_2$}$$
$$\lambda_2\omega^1{}_\zeta + \omega^2{}_\zeta = 0, \quad \zeta = 3, 4, 6, \ldots, m, \tag{l$_3$}$$
$$\lambda_2\omega^1{}_\zeta + \omega^2{}_\zeta = 0, \quad \zeta = 3, 4, 5, 7, \ldots, m, \tag{l$_4$}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
Из (l$_1$) и (l$_3$) следует, что $\omega^1{}_\zeta = \omega^2{}_\zeta = 0$ при $\zeta = 4, 6, 7, 8, \ldots, m$; из (l$_2$) и (l$_3$), что $\omega^1{}_3 = \omega^2{}_3 = 0$, а из (l$_2$) и (l$_4$), что $\omega^1{}_5 = \omega^2{}_5 = 0$. В результате $\omega^1{}_\zeta = \omega^2{}_\zeta = 0$, $\zeta = 3, 4, \ldots, m$.

Аналогично можно проверить справедливость утверждения и в остальных случаях, причем для соблюдения предположений леммы и сохранения вида системы нужно потребовать выполнения условия $m \geqslant c$, где c — некоторая постоянная, определяемая специально для каждой системы. Приступим к нахождению линейных инфинитезимальных групп инвариантности системы (A) или соответствующего семейства плоскостей в точке. По существу найдем матричные представления их алгебр Ли. Для этого выпишем системы (a), (b), (c), соответствующие данному каноническому виду, и упростим их.

1. Начнем опять с системы (4). Пусть $\lambda_1 \neq 0$ и $m \geqslant 5$. Тогда система (a) равносильна $\omega^c{}_\zeta = 0$. Найдем вид системы (b). После того, когда будут исключены все те из произвольных функций $\xi^\alpha{}_\beta$, которые можно исключить, получим

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1(\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) + \omega^2{}_1 - \lambda^2{}_1\omega^1{}_2 - \omega^3{}_4 = 0,\\
&\omega^3{}_3 + \omega^1{}_1 - \omega^2{}_2 - \omega^4{}_4 - 2\lambda^2{}_1\omega^1{}_2 = 0,\\
&\lambda_1(\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) + \omega^3{}_4 - \lambda^2{}_1\omega^1{}_2 - \omega^4{}_5 + \omega^2{}_1 = 0,\\
&\omega^4{}_3 - \omega^1{}_2 - \omega^5{}_4 = 0,\\
&\omega^4{}_4 + \omega^1{}_1 - 2\lambda_1\omega^1{}_2 - \omega^2{}_2 - \omega^5{}_5 = 0,\\
&\lambda_1(\omega^1{}_1 - \omega^3{}_3) + \omega^2{}_1 + \omega^4{}_5 - \lambda^2{}_1\omega^1{}_2 - \omega^5{}_6 = 0,\\
&\omega^5{}_4 - \omega^1{}_2 - \omega^6{}_5 = 0,\\
&\omega^1{}_1 + \omega^5{}_5 - 2\lambda_1\omega^1{}_2 - \omega^6{}_6 - \omega^2{}_2 = 0,\\
&\lambda_1(\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) + \omega^2{}_1 + \omega^5{}_6 - \lambda^2{}_1\omega^1{}_2 - \omega^6{}_7 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega^{m-2}_{m-3} - \omega^{m-1}_{m-2} - \omega^1{}_2 = 0,\\
&\omega^{m-2}_{m-2} + \omega^1{}_1 - 2\lambda_1\omega^1{}_2 - \omega^{m-1}_{m-1} - \omega^2{}_2 = 0,\\
&\lambda_1(\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) + \omega^{m-2}_{m-1} + \omega^2{}_1 - \lambda^2{}_1\omega^1{}_2 - \omega^{m-1}_{m} = 0,\\
&\omega^{m-1}_{m-2} - \omega^{m}_{m-1} - \omega^1{}_2 = 0,\\
&\omega^{m-1}_{m-1} + \omega^1{}_1 - 2\lambda_1\omega^1{}_2 - \omega^{m}_{m} - \omega^2{}_2 = 0,\\
&\lambda_1(\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) + \omega^{m-1}_{m} + \omega^2{}_1 - \lambda^2{}_1\omega^1{}_2 = 0,\\
&\omega^{\xi}_{\xi+2} = \omega^{\xi}_{\xi+3} = \ldots = \omega^\xi{}_m = 0; \ \omega^5{}_3 - \omega^6{}_4 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega^{m-2}_{3} = \omega^{m-1}_{4},\ \omega^{m-2}_{4} = \omega^{m-1}_{5},\ \ldots,\ \omega^{m-2}_{m-4} = \omega^{m-1}_{m-3},\\
&\omega^{m-1}_{3} = \omega^{m}_{4},\ \omega^{m-1}_{4} = \omega^{m}_{5},\ \ldots,\ \omega^{m-1}_{m-3} = \omega^{m}_{m-2}.
\end{aligned}
$$

Преобразуем полученную систему. Во-первых,

$\omega^{\xi}_{\xi+2} = \omega^{\xi}_{\xi+3} = \ldots = \omega^\xi{}_m$. Из равенств вида $\omega^\xi{}_\eta = \omega^{\xi-1}_{\eta-1}$ следует,

$$
\begin{aligned}
&\omega^{m}_{4} = \omega^{m-1}_{3},\\
&\omega^{m}_{5} = \omega^{m-1}_{4} = \omega^{m-2}_{3},\\
&\omega^{m}_{6} = \omega^{m-1}_{5} = \omega^{m-2}_{4} = \omega^{m-3}_{3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega^{m}_{m-2} = \omega^{m-1}_{m-3} = \ldots = \omega^4{}_3.
\end{aligned}
$$

Наконец, соотношения, содержащие формы $\omega^1{}_1$, $\omega^2{}_2$, $\omega^2{}_1$ и $\omega^1{}_2$, можно привести к следующему виду:

$$\lambda_1(\omega^1{}_1-\omega^2{}_2)+\omega^2{}_1-\lambda^2{}_1\omega^1{}_2=\omega^3{}_4=\omega^4{}_5-\omega^3{}_4=\omega^5{}_6-\omega^4{}_5=\ldots$$
$$=\overset{m-1}{\omega_m}-\overset{m-2}{\omega_{m-1}}=-\overset{m-1}{\omega_m},\qquad (\mathrm{m}_1)$$

$$\omega^1{}_1-\omega^2{}_2-2\lambda_1\omega^1{}_2=\omega^4{}_4-\omega^3{}_3=\omega^5{}_5-\omega^4{}_4=\ldots=$$
$$=\overset{m-1}{\omega_{m-1}}-\overset{m-2}{\omega_{m-2}}=\overset{m}{\omega_m}-\overset{m-1}{\omega_{m-1}},\qquad (\mathrm{m}_2)$$

$$\omega^1{}_2=\omega^4{}_3-\omega^5{}_4=\omega^5{}_4-\omega^6{}_5=\ldots=$$
$$=\overset{m-2}{\omega_{m-3}}-\overset{m-1}{\omega_{m-2}}=\overset{m-1}{\omega_{m-2}}-\overset{m}{\omega_{m-1}}.\qquad (\mathrm{m}_3)$$

После сложения всех равенств из (m_1) получим

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1(\omega^1{}_1-\omega^2{}_2)+\omega^2{}_1-\lambda^2{}_1\omega^1{}_2=0,\\&\omega^3{}_4=\omega^4{}_5=\ldots=\overset{m-1}{\omega_m}=0.\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{k})$$

Обозначим $\omega^1{}_1-\omega^2{}_2-2\lambda_1\omega^1{}_2$ через β. Тогда из (m_2) получим, что

$$\omega^4{}_4=\omega^3{}_3+\beta,\ \omega^5{}_5=\omega^3{}_3+2\beta,\ \ldots,\ \omega^m{}_m=\omega^3{}_3+(m-3)\beta.$$

Теперь из (m_3) следует, что

$$\omega^5{}_4=\omega^4{}_3-\omega^1{}_2,\ \omega^6{}_5=\omega^4{}_3-2\omega^1{}_2,\ \ldots,$$
$$\overset{m-1}{\omega_{m-2}}=\omega^4{}_3-(m-5)\omega^1{}_2,\ \overset{m}{\omega_{m-1}}=\omega^4{}_3-(m-4)\omega^1{}_2.$$

Система (с) принимает вид

$$\omega^3{}_1=\lambda_1\omega^3{}_2,\quad \omega^\zeta{}_1=\lambda_1\omega^\zeta{}_2+\omega_2{}^{\zeta-1},\quad \text{где } \zeta=4,5,\ \ldots,\ m.$$

Для конкретности запишем матрицу преобразования инвариантности в случае $m=7$:

$$\left\|\begin{matrix}\omega^1{}_1 & \omega^2{}_1 & \lambda_1\omega^3{}_2 & \lambda_1\omega^4{}_2+\omega^3{}_2 & \lambda_1\omega^5{}_2+\omega^4{}_2 & \lambda_1\omega^6{}_2+\omega^5{}_2 & \lambda_1\omega^7{}_2+\omega^6{}_2\\ \omega^1{}_2 & \omega^2{}_2 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 & \omega^5{}_2 & \omega^6{}_2 & \omega^7{}_2\\ 0 & 0 & \omega^3{}_3 & \omega^4{}_3 & \omega^5{}_3 & \omega^6{}_3 & \omega^7{}_3\\ 0 & 0 & 0 & \omega^3{}_3+\beta & \omega^4{}_3-\omega^1{}_2 & \omega^5{}_3 & \omega^6{}_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^3{}_3+2\beta & \omega^4{}_3-2\omega^1{}_2 & \omega^5{}_3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^3{}_3+3\beta & \omega^4{}_3-3\omega^1{}_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^3{}_3+4\beta\end{matrix}\right\|.$$

Здесь $\omega^2{}_1=\lambda^2{}_1\omega^1{}_2-\lambda_1(\omega^1{}_1-\omega^2{}_2)$. Отдельно нужно рассматривать систему (4) в случае $m=4$, т. е. когда она имеет вид

$$du^3\wedge d(\lambda_1+y)=0,$$
$$du^4\wedge d(\lambda_1x+y)+du^3\wedge dx=0.$$

В этом случае матрица инфинитезимального преобразования инвариантности имеет вид

$$\left\|\begin{matrix}\omega^1{}_1 & \lambda^2{}_1\omega^1{}_2-\lambda_1(\omega^1{}_1-\omega^2{}_2) & \lambda_1\omega^3{}_2 & \omega^3{}_2+\lambda\omega^4{}_2\\ \omega^1{}_2 & \omega^2{}_2 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2\\ \omega^1{}_3 & -\lambda_1\omega^1{}_3 & \omega^3{}_3 & \omega^4{}_3\\ 0 & \omega_4{}^2 & 0 & \omega^3{}_3-\omega^2{}_2+\omega^1{}_1-2\lambda\omega^1{}_2\end{matrix}\right\|.$$

2. Имеет место следующая

Лемма 2. *В случае системы (1) с несколькими различными λ_i матрица преобразования инвариантности имеет следующее строение:*

1) *начиная с третьей строки и третьего столбца отличными от нуля будут диагональные клетки порядка $(n_1-2), n_2, \ldots, n_k$, а все остальные члены матрицы в этих строках и столбцах равны нулю, т. е. подсистемы данной системы, соответствующие различным корням λ_i, при преобразованиях инвариантности всей системы преобразуются сами в себя;*

2) *строение у этих диагональных клеток одинаково.*

Доказательство. Утверждение 2) верно в силу того, что подсистемы, соответствующие различным корням λ, имеют одинаковое строение. Проверка утверждения 1) вполне аналогична рассуждению при нахождении матрицы преобразования инвариантности системы (4). Для нахождения конкретного вида диагональных клеток нужно найти группу инвариантности данной системы при одном корне λ, т. е. в случае системы (1) группу инвариантности системы (4), что было проделано. Если различных λ два, то на формы $\omega^1{}_1$, $\omega^2{}_2$, $\omega^2{}_1$, $\omega^1{}_2$ налагаются соотношения вида (k) при обоих значениях λ. Из них следует, что

$$\omega^2{}_2=\omega^1{}_1-(\lambda_1+\lambda_2)\,\omega^1{}_2,$$
$$\omega^2{}_1=-\lambda_1\lambda_2\omega^1{}_2,$$
$$\beta_1=(\lambda_2-\lambda_1)\,\omega^1{}_2,$$
$$\beta_2=(\lambda_1-\lambda_2)\,\omega^1{}_2,$$

где через β_2 обозначено $\omega^1{}_1-\omega^2{}_2-2\lambda_2\omega^1{}_2$. Если различных λ больше двух, то соотношения, связывающие те же формы, следующие:

$$\omega^1{}_1=\omega^2{}_2=\omega,\qquad \omega^2{}_1=0,\qquad \omega^1{}_2=0.$$

Но тогда и $\beta=0$, а вследствие этого

$$\omega^4{}_3=\omega^5{}_4=\omega^6{}_5=\ldots=\omega^{n_1}_{n_1-1},$$
$$\omega^{n_1+2}_{n_1+1}=\omega^{n_1+3}_{n_1+2}=\ldots=\omega^{n_1+n_2}_{n_1+n_2-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega^3{}_3=\omega^4{}_4=\omega^5{}_5=\ldots=\omega^{n_1}_{n_1},$$
$$\omega^{n_1+1}_{n_1+1}=\omega^{n_1+2}_{n_1+2}=\ldots=\omega^{n_1+n_2}_{n_1+n_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Для системы (1) при $m\geqslant 5$ имеем $\omega^c{}_\xi=0$. Система уравнений (с) следующая:

$$\omega^3{}_1=\lambda_1\omega^3{}_2,\quad \omega^4{}_1=\lambda_1\omega^4{}_2+\omega^3{}_2,\ \ldots,\quad \omega^{n_1}_1=\lambda_1\omega^{n_1}_2+\omega^{n_1-1}_2,$$
$$\omega^{n_1+1}_1=\lambda_2\omega^{n_1+1}_2,\quad \omega^{n_1+2}_1=\lambda_2\omega^{n_1+2}_2+\omega^{n_1+1}_2,\ \ldots.$$

Используя лемму 2 и учитывая соотношения между $\omega^1{}_1$, $\omega^2{}_2$, $\omega^2{}_1$, $\omega^1{}_2$ можно при желании выписать матрицу инфинитезимального преобразования инвариантности. Первые две строки и первые два столбца продолжаются по аналогии. Пусть $m=5$. Имеются три подслучая

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_3$, $\lambda_2 \neq \lambda_3$; который изучим при рассмотрений системы (7);

2) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_2$; этот случай рассматривался в случае системы (4);

3) $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 \neq \lambda_2$, $\lambda_3 \neq 0$; этот случай рассмотрим подробнее. Выпишем соответствующую систему уравнений:

$$du^3 \wedge d(\lambda_1 x + y) = 0$$
$$du^4 \wedge d(\lambda_1 x + y) + du^3 \wedge dx = 0$$
$$du^5 \wedge d(\lambda_3 x + y) = 0;$$

инфинитезимальные преобразования инвариантности имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \omega^2{}_2 + (\lambda_1+\lambda_3)\omega^1{}_2 & -\lambda_1\lambda_3\omega^1{}_2 & \lambda_1\omega^3{}_2 & \lambda_1\omega^4{}_2 + \omega^3{}_2 & \lambda_1\omega^5{}_2 \\ \omega^1{}_2 & \omega^2{}_2 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 & \omega^5{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^3{}_3 & \omega^4{}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3{}_3 + (\lambda_3-\lambda_1)\omega^1{}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^5{}_5 \end{Vmatrix}.$$

Пусть $m=4$ и $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$;

$$du^3 \wedge dy = 0;$$
$$du^4 \wedge dy + du^3 \wedge dx = 0.$$

Матрицей инфинитезимального преобразования инвариантности такой системы является

$$\begin{Vmatrix} \omega^1{}_1 & 0 & 0 & \omega^3{}_2 \\ \omega^1{}_2 & \omega^2{}_2 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 \\ \omega^1{}_3 & \omega^1{}_4 & \omega^3{}_3 & \omega^4{}_3 \\ \omega^1{}_4 & 0 & 0 & \omega^3{}_3 + \omega_1{}^1 - \omega^2{}_2 \end{Vmatrix}.$$

Как было уже отмечено, случай 1° является самым общим случаем, а все другие конкретные виды канонической системы, которые мы изучаем, можно рассматривать как его подслучаи при некоторых условиях. Поэтому можно использовать некоторые результаты, полученные при исследовании системы (1) и при исследовании других случаев. Мы используем лемму 2 и зависимости на формы $\omega^1{}_1$, $\omega^2{}_2$, $\omega^2{}_1$, $\omega^1{}_2$ при различных количествах различных корней λ.

3. Рассмотрим систему (2). Достаточно рассмотреть случай одного корня λ. Пусть $\lambda=0$ и $m>5$. Если индексы 1 и 2 встречаются в списке отличных от нуля коэффициентов хотя бы дважды, то система (a) равносильна системе $\omega^c{}_\xi = 0$.

Система (c) имеет вид

$\omega^t{}_1 = 0$, $t=3$, l_1+1, ..., $n_1-l-p+1$, n_1-p+1, n_1-p+2, ..., n_1; $\omega^t{}_1 = \omega_2{}^{t-1}$, где t принимает все остальные значения от 3 до n_1.

Что касается системы (b), то запишем ее в общем виде и исключим произвольные функции $\xi^s{}_t$. Из соотношений, содержащих $\omega^s{}_\xi$, получим, что

$$\omega^4{}_4 = \omega^3{}_3 - a, \quad \omega^5{}_5 = \omega^3{}_3 - 2a, \quad \ldots,$$

$$\omega^{l_1}_{l_1} = \omega^3{}_3 - (l_1 - 3)\,a,$$

$$\omega^{l_1+2}_{l_1+2} = \omega^{l_1+1}_{l_1+1} - a, \quad \omega^{l_1+3}_{l+3} = \omega^{l_1+1}_{l_1+1} - 2a, \quad \ldots,$$

$$\omega^{l_1+l_2}_{l_1+l_2} = \omega^{l_1+1}_{l_1+1} - (l_1 - 3)\,a,$$

. . . .

$$\omega^{n_1-l_k-p+2}_{n_1-l_k-p+2} = \omega^{n_1-l_k-p+1}_{n_1-l_k-p+1} - a, \quad \ldots,$$

$$\omega^{n_1-p}_{n_1-p} = \omega^{n_1-l_k-p+1}_{n_1-l_k-p+1} - (l_k - 3)\,a,$$

где $a = \omega^2{}_2 - \omega^1{}_1$. Из уравнений на $\omega^{n_1}{}_s$, вытекает, что $\omega^2{}_1 = 0$. Тогда из остальных уравнений следует, что

$$\omega^3{}_4 = \omega^4{}_5 = \ldots = \omega^{l_1-1}_{l_1} = 0,$$

$$\omega^{l_1+1}_{l_1+2} = \omega^{l_1+2}_{l_1+3} = \ldots = \omega^{l_1+l_2-1}_{l_1+l_2} = 0,$$

. . . .

$$\omega^{n_1-l_k-p+1}_{n_1-l_k-p+2} = \ldots = \omega^{n_1-p-1}_{n_1-p} = 0,$$

а затем получаем

$$\omega^5{}_4 = \omega^4{}_3 - \omega^1{}_2, \quad \omega^6{}_5 = \omega^4{}_3 - 2\,\omega^1{}_2, \quad \ldots, \quad \omega^{l_1}_{l_1-1} = \omega^4{}_3 - (l_1 - 4)\,\omega^1{}_2,$$

$$\omega^{l_1+3}_{l_1+2} = \omega^{l_1+2}_{l_1+1} - \omega^1_2 \quad \ldots, \quad \omega^{l_1+l_2}_{l_1+l_2-1} = \omega^{l_1+2}_{l_1+1} - (l_2 - 4)\,\omega^1{}_2,$$

и т. д.

$$\omega^{n_1-l_k-p+3}_{n_1-l_k-p+2} = \omega^{n_1-l_k-p+2}_{n_1-l_k-p+1} - \omega^1{}_2, \quad \ldots,$$

$$\omega^{n_1-p}_{n_1-p-1} = \omega^{n_1-l_k-p+2}_{n_1-l_k-p+1} - (l_k - 4)\,\omega^1{}_2.$$

Будут у нас еще соотношения

$$\omega^l{}_3 = \xi^l{}_3, \quad \omega^l{}_4 = \omega^l{}_5 = \ldots \omega^l{}_{n_1} = 0,$$

$$\omega^l{}_{n_1+1} = \xi^l{}_{n_1+1}, \quad \omega^l{}_{n_1+2} = \omega^l{}_{n_1+3}, \quad \ldots, \quad \omega^l{}_{n_1+n_2} = 0,$$

$$\omega^l{}_{n_1+n_2+1} = \xi^l{}_{n_1+n_2+1}, \quad \omega^l{}_{n_1+n_2+1} = \ldots = \omega^l{}_{n_1+n_2+n_3} = 0,$$

. . . .

$$\omega^l{}_{m-p+1} = \xi^l{}_{m-p+1}, \quad \ldots, \quad \omega^l{}_{l-1} = \xi^l{}_{l-1}, \quad \omega^l{}_l + \omega^2{}_2 = \xi^l{}_l,$$

$$\omega^l{}_{l+1} = \xi^l{}_{l+1}, \quad \ldots, \quad \omega^l{}_{n_1} = \xi^l{}_{n_1},$$

где $l = n_1 - p + 1, \ldots, n_1$. Из всех выписанных соотношений следует, что $\omega^j{}_h = 0$, $h = n_1 - p + 1, \ldots, n_1$; $j = 3, 4, \ldots, l_1 - 1$, $l_1 + 1, \ldots, l_1 + l_2 - 1$, $l_1 + l_2 + 1, \ldots, n_1 - p - 1$. Опишем матрицу инфинитезимального преобразования инвариантности системы (2) при одном корне λ, который полагаем равным нулю. Запишем ее в следующих обозначениях

$$\left\|\begin{matrix} D_{22} & D_{l_1-2,\,2} & D_{l_2,2} & \ldots & D_{l_k 2} & D_{p2} \\ 0 & D_{l_1-2,\,l_1-2} & D_{l_2,\,l_1-2} & \ldots & D_{l_k,\,l_1-2} & D_{p,\,l_1-2} \\ 0 & D_{l_1-2,\,l_2} & D_{l_2 l_2} & \ldots & D_{l_k l_2} & D_{p l_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & D_{l_1-2,\,l_k} & D_{l_2 l_k} & \ldots & D_{l_k l_k} & D_{p l_k} \\ 0 & D_{l_1-2,\,p} & D_{l_2 p} & \ldots & D_{l_k p} & D_{pp} \end{matrix}\right\|.$$

Здесь через D_{qr} обозначена клетка матрицы инфинитезимального преобразования инвариантности, состоящая из q столбцов и r строк. В матрице преобразования инвариантности клетка $D_{l_{i+1},\,l_{i+1}}$ лежит на пересечении строк с номерами l'_j+1, $l'_{j+2}, \ldots, l'_{j+1}$ и столбцов с номерами l'_i+1, $l'_i+2, \ldots, l'_{i+1}$, где через l'_i обозначено $l_1+l_2+\ldots+l_i$, для общности нужно полагать $l_0=l'_0=2$. Опишем строение всех этих клеток. Между элементами клеток $D_{l_{i+1},\,l_{i+1}}$ имеют место такие же зависимости как в матрице преобразования инвариантности системы (4), начиная с третьей строки и третьего столбца, а между элементами клеток $D_{l_i 2}$ такие, как в первых двух строках, начиная с третьего столбца при $\lambda=0$.

Выпишем общие виды клеток $D_{l_{i+1},l_{j+1}}$, $D_{l_{i+1},p}$, $D_{p,l_{j+1}}$, D_{pp}:

$$D_{l_{i+1},\,l_{j+1}}=\left\|\begin{matrix} \omega^{l'_i+1}_{l'_j+1} & \omega^{l'_i+2}_{l'_j+1} & \omega^{l'_i+3}_{l'_j+1} & \ldots & \omega^{l'_{i+1}}_{l'_j+1} \\ 0 & \omega^{l'_i+1}_{l'_j+1} & \omega^{l'_i+2}_{l'_j+1} & \ldots & \omega^{l'_{i+1}-1}_{l'_j+1} \\ 0 & 0 & \omega^{l'_i+1}_{l'_j+1} & \ldots & \omega^{l'_{i+1}-2}_{l'_j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega^{l'_i+1}_{l'_j+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\|$$

Здесь $l_{j+1}>l_{i+1}$. Теперь $D_{l_{i+1},l_{j+1}}$ в случае $l_{j+1}\leqslant l_{i+1}$ имеет вид

$$D_{l_{i+1},\,p}=\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & \omega^{l'_{i+1}}_{n_1-p+1} \\ 0 & 0 & \ldots & \omega^{l'_{i+1}}_{n_1-p+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \omega^{l'_{i+1}}_{n_1} \end{matrix}\right\|;$$

$$D_{p,\, l_{j+1}} = \left\| \begin{array}{cccc} \omega^{l'_i+1}_{n_1-p+1} & \omega^{l'_i+2}_{n_1-p+1} & \dots & \omega^{l'_{i+1}}_{n_1-p+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right\|;$$

$$D_{pp} = \left\| \begin{array}{cccc} \omega^{n_1-p+1}_{n_1-p+1} & \omega^{n_1-p+2}_{n_1-p+2} & \dots & \omega^{n_1}_{n_1-p+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega^{n_1-p+1}_{n_1} & \omega^{n_1-p+2}_{n_1} & \dots & \omega^{n_1}_{n_1} \end{array} \right\|; \quad D_{22} = \left\| \begin{array}{cc} \omega^1_1 & 0 \\ \omega^1_2 & \omega^2_2 \end{array} \right\|.$$

Система (2) при $m=5$ следующая:

$du^3 \wedge dy = 0,$

$du^4 \wedge dy + du^3 \wedge dx = 0,$

$du^5 \wedge dy = 0.$

Инфинитезимальные преобразования инвариантности этой системы имеют вид

$$\left\| \begin{array}{cccccc} \omega^1_1 & 0 & 0 & \omega^3_2 & 0 & 0 \\ \omega^1_2 & \omega^2_2 & \omega^3_2 & \omega^4_2 & \omega^5_2 & \omega^5_2 \\ \omega^1_3 & 0 & \omega^3_3 & \omega^4_3 & \omega^5_3 & \omega^5_3 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^3_3 - \omega^2_2 + \omega^1_1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \omega^5_5 \end{array} \right\|.$$

4. Перейдем к рассмотрению системы (3). Если различных λ больше двух, то при $m>5$ матрицу преобразования инвариантности можно выписать в следующем виде

$$\left\| \begin{array}{ccccc} D_{22} & D_{n_1-2,\, 2} & D_{n_2,\, 2} & \dots & D_{n_k,\, 2} \\ 0 & D_{n_1-2,\, n_1-2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & D_{n_2,\, n_2} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_{n_k,\, n_k} \end{array} \right\|,$$

где

$$D_{22} = \left\| \begin{array}{cc} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{array} \right\|, \quad D_{n_{i+1},\, 2} = \left\| \begin{array}{cccc} \lambda_{i+1}\omega_2^{n_i+1} & \lambda_{i+1}\omega_2^{n_i+1} & \dots & \lambda_{i+1}\omega_2^{n_{i+1}} \\ \omega_2^{n_i+1} & \omega_2^{n_i+2} & \dots & \omega_2^{n_{i+1}} \end{array} \right\|,$$

$$D_{n_{i+1},\, n_{i+1}} = \left\| \begin{array}{cccc} \omega^{n_i+1}_{n_i+1} & \omega^{n_i+2}_{n_i+1} & \dots & \omega^{n_{i+1}}_{n_i+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega^{n_i+1}_{n_{i+1}} & \omega^{n_i+2}_{n_{i+1}} & \dots & \omega^{n_{i+1}}_{n_{i+1}} \end{array} \right\|.$$

5. Рассмотрим систему (5). Имеем

$$
\begin{aligned}
& du^3 \wedge dy = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^j \wedge dy = 0, \\
& du^{j+1} \wedge dy + dy^j \wedge dx = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^m \wedge dy + du^{m-1} \wedge dx = 0.
\end{aligned}
$$

Матрица преобразования инвариантности ее

$$
\left\| \begin{array}{ccccccccccc}
\omega^1{}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \omega^j{}_2 & \dots & \omega^{m-2}{}_2 & \omega^{m-1}{}_2 \\
\omega^1{}_2 & \omega^2{}_2 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 & \dots & \omega^{j-1}{}_2 & \omega^j{}_2 & \omega^{j+1}{}_2 & \dots & \omega^{m-1}{}_2 & \omega^m{}_2 \\
0 & 0 & \omega^3{}_3 & \omega^4{}_3 & \dots & \omega^{j-1}{}_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega^m{}_3 \\
0 & 0 & \omega^3{}_4 & \omega^4{}_4 & \dots & \omega^{j-1}{}_4 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega^m{}_4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \omega^3{}_j & \omega^4{}_j & \dots & \omega^{j-1}{}_j & \omega^j & \omega^{j+1}{}_j & \dots & \omega^{m-1}{}_j & \omega^m{}_j \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \omega^j{}_j - a & \dots & \omega^{m-2}{}_j & \omega^{m-1}{}_j \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \Omega^j{}_j & \Omega^{j+1}_{j} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \Omega^{j+1}_{j+1}
\end{array} \right\|,
$$

где

$$
\begin{aligned}
& \Omega^j{}_j = \omega^j{}_j - (m - j + 1)a, \\
& \Omega^{j+1}_{j} = \omega^{j+1}_{j} - (m - j + 1)\omega^1{}_3, \\
& \Omega^{j+1}_{j+1} = \omega^{j+1}_{j+1} - (m - j)a.
\end{aligned}
$$

6. Система (6) имеет следующий вид

$$
\begin{aligned}
& du^3 \wedge dy = 0, \\
& du^4 \wedge dy = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots \\
& du^m \wedge dy = 0.
\end{aligned}
$$

Это частный случай системы (4) при одном λ, равном нулю. Матрица преобразований инвариантности ее такова

$$
\left\| \begin{array}{cccccc}
\omega^1{}_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\omega^1{}_2 & \omega^2{}_2 & \omega^2{}_3 & \omega^4{}_2 & \dots & \omega^m{}_2 \\
\omega^1{}_3 & 0 & \omega^3{}_3 & \omega^4{}_3 & \dots & \omega^m{}_3 \\
\omega^1{}_4 & 0 & \omega^3{}_4 & \omega^4{}_4 & \dots & \omega^m{}_4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\omega^1{}_m & 0 & \omega^3{}_m & \omega^4{}_m & \dots & \omega^m{}_m
\end{array} \right\|,
$$

7. Наконец рассмотрим систему (7)

$$
\begin{aligned}
& du^3 \wedge d(\lambda_3 x + y) = 0, \\
& du^4 \wedge d(\lambda_4 x + y) = 0, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& du^m \wedge d(\lambda_m x + y) = 0.
\end{aligned}
$$

Пусть $m \geqslant 5$. Тогда матрица преобразования инвариантности имеет вид

$$\begin{Vmatrix} \omega & 0 & \lambda_3\omega^3{}_2 & \lambda_4\omega^4{}_2 & \lambda_5\omega^5{}_2 & \dots & \lambda_m\omega^m{}_2 \\ 0 & \omega & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 & \omega^2{}_5 & \dots & \omega^m{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^3{}_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^4{}_4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^5{}_5 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \omega^m{}_m \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим некоторый частный вид системы (7) при $m=5$:

$$du^3 \wedge dx = 0,$$
$$du^4 \wedge dy = 0,$$
$$du^5 \wedge d(x+y) = 0.$$

Матрица его преобразований инвариантности есть

$$\begin{Vmatrix} \omega & 0 & \omega^1{}_3 & 0 & \omega^5{}_2 \\ 0 & \omega & 0 & \omega^4{}_2 & \omega^5{}_2 \\ 0 & 0 & \omega^3{}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^4{}_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega^5{}_5 \end{Vmatrix}.$$

Пусть $m=4$, т. е.

$$du^3 \wedge d(\lambda_3 x + y) = 0,$$
$$du^4 \wedge d(\lambda_4 x + y) = 0.$$

Тогда матрицей преобразования инвариантности является

$$\begin{Vmatrix} \omega^2{}_2 + (\lambda_4+\lambda_3)\,\omega^1{}_2 & -\lambda_3\lambda_4\omega^1{}_2 & \lambda_3\omega^3{}_2 & \lambda_4\omega^4{}_2 \\ \omega^1{}_2 & \omega^2{}_2 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 \\ \omega^1{}_3 & -\lambda_4\omega^1{}_3 & \omega^3{}_3 & 0 \\ \omega^1{}_4 & -\lambda_3\omega^1{}_4 & 0 & \omega^4{}_4 \end{Vmatrix}.$$

Пусть здесь $\lambda_3=0$, $\lambda_4=1$. Тогда преобразования инвариантности имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \omega^2{}_2 + \omega^1{}_2 & 0 & 0 & \omega^4{}_2 \\ \omega^1{}_2 & \omega^2{}_2 & \omega^3{}_2 & \omega^4{}_2 \\ \omega^1{}_3 & -\omega^1{}_3 & \omega^3{}_3 & 0 \\ \omega^1{}_4 & 0 & 0 & \omega^4{}_4 \end{Vmatrix}.$$

Пусть $m=3$. Тогда $\lambda_3(\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) + \omega^2{}_1 - \lambda^2{}_3\omega^1{}_2 = 0$, $\omega^3{}_1 = \lambda_3\omega^3{}_2$ и вид матрицы преобразований инвариантности следующий

$$\begin{Vmatrix} \omega^1{}_1 & \omega^2{}_1 & \omega^3{}_2 \\ \omega^1{}_2 & \omega^1{}_1 + \omega^2{}_1 - \omega^1{}_2 & \omega^3{}_2 \\ \omega^1{}_3 & \omega^2{}_3 & \omega^3{}_3 \end{Vmatrix}.$$

Здесь $\lambda_3=1$.

Вывод. Если число неравных корней λ больше двух и число уравнений системы достаточно велико, то инфинитезимальные преобразования инвариантности систем данного канонического вида существенно не отличаются, а именно при добавлении к данной системе дифференциальных уравнений еще одной группы уравнений с новым значением λ в матрице инфинитезимального преобразования инвариантности прибавляется диагональная клетка такого же строения как при предыдущих корнях, например, как клетка, начиная с третьей строки и третьего столбца и кончая n_1-ой строкой и n_1-ым столбцом, первые две строки продолжаются по аналогии, первые два столбца продолжаются нулями, остальные члены все нули.

Количество независимых форм $\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2$, $\omega^2{}_1$, $\omega^1{}_2$ зависит от того, сколько среди корней λ различных — один, два или больше двух. В последнем случае получим на эти формы соотношения, удовлетворенные лишь при $\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2 = 0$, $\omega^2{}_1 = 0$, $\omega^2{}_1 = 0$. Если при этом количество уравнений системы достаточно велико, т. е. система (а) эквивалентна $\omega^c{}_\xi = 0$, то в точке многообразия или для системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на всем многообразии имеем

$$d\omega^1 = \omega \wedge \omega^1,$$
$$d\omega^2 = \omega \wedge \omega^2.$$

При двух различных корнях λ на $\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2$, $\omega^2{}_1$, $\omega^1{}_2$ накладываются два соотношения и две из этих форм можно выразить через оставшегося. В качестве последнего мы обычно выбрали $\omega^1{}_2$. Тогда

$$\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)\,\omega^1{}_2,$$
$$\omega^2{}_1 = -\lambda_1\lambda_2\omega^1{}_2.$$

Тогда при предположении, что один из этих различных корней равен нулю, структурные уравнения для форм ω^1 и ω^2 в точке запишутся в виде

$$d\omega^1 = (\omega^2{}_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\,\omega^1{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2,$$
$$d\omega^2 = \omega^2{}_2 \wedge \omega^2.$$

Если корень λ единственный, то соотношений на формы $\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2$, $\omega^1{}_2$, $\omega^2{}_1$ будет лишь одно и одну форму можно выразить через две остальные, например,

$$\omega^2{}_1 = \lambda^2{}_1\omega^1{}_2 - \lambda_1(\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2).$$

Когда количество уравнений системы настолько мало, что в списке отличных от нуля коэффициентов индексы 1 и 2 оба встречаются меньше, чем дважды, в матрице преобразования инвариантности в первых двух столбцах, начиная с третьей строки, появляются ненулевые формы в то время, как при достаточно большом m там стоят нули.

Таким образом, для систем данного канонического вида преобразования инвариантности группируются по количеству различных λ и по количеству уравнений системы.

Какой бы вид система (А) не имела, для нее можно теперь выписать матрицу преобразования инвариантности, используя для этого лемму 2, последние рассуждения и тот факт, что данную систему можно разбить на подсистемы, каждая из которых имеет вид, рассмотренный нами.

Отметим, что структурные уравнения при системе (А) с постоянными коэффициентами имеют вид $d\omega^i = \omega^i{}_k \wedge \omega^k$.

§ 2. Максимальные линейные группы инвариантности системы (А) на всем многообразии

1. С любой точкой многообразия связано линейное касательное пространство, а, следовательно, и каждым касательным пространством в точке многообразия связана группа всех линейных невырожденных преобразований. Если во всех точках многообразия заданы подобные подгруппы этой линейной группы, то говорят, что на многообразии задана $\mathfrak{G}$-структура типа $\mathfrak{G}$. В силу подобия этих подгрупп ясно, что для каждой пары касательных пространств можно найти линейное невырожденное соответствие, переводящее подгруппу одного пространства в подгруппу другого. Известно, что если на многообразии задано поле геометрических образов, то группы инвариантности, соответствующие различным точкам, являются подобными и определяют $\mathfrak{G}$-структуру с группой инвариантности в качестве структурной группы. Можно устроить взаимно однозначное соответствие между множеством реперов касательного пространства и множеством всех линейных невырожденных преобразований этого пространства. Под заданием подгруппы понимают ее реализацию в качестве подсемейства реперов. При рассмотрении деривационных формул $de_s = \omega^t{}_s e_t$ подсемейство реперов выделяется при наложении соотношений на $\omega^t{}_s$, а именно соотношений вида $\omega^t{}_s = a^t{}_{\rho s}\omega^\rho$, где ω^ρ — линейно независимые комбинации форм $\omega^t{}_s$ на подгруппе и $a^t{}_{\rho s}$ — постоянные. При этом требуется, чтобы для выделяемых подсемейств реперов в различных точках $a^t{}_{\rho s}$ были одними и теми же постоянными.

На главном расслоении всех реперов многообразия можно ввести дифференциальные формы ω^t, которые истолковываются как координаты векторов касательного пространства относительно переменного базиса. На этом главном расслоении формы ω^t, $\omega^t{}_s$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^t = a^t{}_{\rho s}\omega^\rho \wedge \omega^s + \frac{1}{2} c^t{}_{ps}\omega^p \wedge \omega^s,$$

$$d\omega^\rho = b^\rho{}_{\varphi t}\Omega^\varphi \wedge \omega^t + \frac{1}{2} c^\rho{}_{\sigma\tau}\omega^\sigma \wedge \omega^\tau +$$

$$+ c^\rho{}_{\sigma t}\omega^\sigma \wedge \omega^t + \frac{1}{2} c^\rho{}_{st}\omega^s \wedge \omega^t,$$

где $dc^t{}_{sp} + (c^v{}_{qr}, \omega^\rho) = c^t{}_{spq}\omega^q$. Здесь $a^t{}_{\rho s}$, $b^\rho{}_{\varphi t}$, $c^\rho{}_{\sigma\tau}$ — постоянные, а $c^t{}_{ps}$, $c^\rho{}_{\sigma t}$, $c^\rho{}_{st}$ — некоторые функции.

Рассмотрим обычное аффинное пространство и соответствующие деривационные формулы $de_s = \omega^{*t}{}_s e_t$, $dM = \omega^{*t} e_t$. Множество аффинных реперов и аффинных преобразований, очевидно, находится во взаимно-однозначном соответствии. Формы $\omega^{*t}{}_s$, ω^{*t} левоинвариантные и удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^{*t}{}_s = \omega^{*\rho}{}_s \wedge \omega^{*t}{}_\rho,$$
$$d\omega^{*t} = \omega^{*s} \wedge \omega^{*t}{}_s.$$

Формы $\omega^{*t}{}_s$, ω^{*t} можно считать базисными в касательном пространстве многообразия реперов.

Пусть задана подгруппа центро-аффинной группы преобразований, которая может быть задана реализацией уравнений $\omega^{*t}{}_s = a^{*t}{}_{\rho s}\Theta^\rho$, где Θ_ϱ — какие-то линейные комбинации форм $\omega^{*t}{}_s$, линейно независимые на подгруппе, и $a^{*t}{}_{\rho s}$ — постоянные. Рассмотрим подгруппу всей аффинной группы, которая получается при дополнении заданной подгруппы центро-аффинной группы параллельными переносами, т. е. реализуются уравнения $\omega^{*t}{}_s = a^{*t}{}_{\rho s}\Theta^\rho$ на формы $\omega^{*t}{}_s$, а формы ω^{*t} оставляем при этом независимыми. Тем самым в аффинном пространстве определится $\mathfrak{G}$-структура с рассматриваемой структурной группой.

Говорят, что $\mathfrak{G}$-структура данного типа на некотором многообразии является *параллелизуемой*, если для любой точки многообразия можно найти окрестность и дифференцируемое отображение этой окрестности на некоторую область аффинного пространства, при котором заданная $\mathfrak{G}$-структура на многообразии переходит в некоторую $\mathfrak{G}$-структуру аффинного пространства. Эта $\mathfrak{G}$-структура аффинного пространства берется с такой аффинной группой, что соответствующая центроаффинная группа будет та же самая, что структурная группа на многообразии, при этом структурные уравнения будут

$$d\omega^{*i} = a^i{}_{\rho k}\omega^{*\rho} \wedge \omega^{*k},$$
$$d\omega^{*\rho} = \frac{1}{2} c^\rho{}_{\sigma\tau}\omega^{*\tau} \wedge \omega^{*\tau}.$$

Известно, что для того, чтобы $\mathfrak{G}$-структура была параллелизуемой, необходимо, чтобы компоненты всех структурных тензоров равнялись нулю, и достаточно, чтобы система структурных уравнений была в инволюции.

Докажем теперь первое утверждение теоремы, сформулированной во введении.

Если на многообразии задана система дифференциальных уравнений с частными производными вида (A) *с постоянными коэффициентами, то $\mathfrak{G}$-структура с группой инвариантности в качестве структурной группы является параллелизуемой.*

Доказательство. Имеющееся многообразие можно принять за аффинное пространство, в каждой точке которого задано семейство плоскостей и подгруппа центроаффинной группы есть группа инвариантности этого семейства; так как на всем многообразии в каждом касательном пространстве это семейство плоскостей определяется одной и той же системой дифференциальных уравнений, то все эти семейства получаются из одного при помощи параллельных переносов. Значит, определена аффинная структура с той же структурной группой.

Верно и обратное утверждение: *если система дифференциальных уравнений* (А) *задает параллелизуемую* $\mathfrak{S}$*-структуру, то эта система эквивалентна системе с постоянными коэффициентами*; иначе говоря, заменой зависимых и независимых переменных она приводится к системе с постоянными коэффициентами. Это так потому, что параллелизуемая $\mathfrak{S}$-структура определяется однозначно.

2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с коэффициентами, постоянными на всем многообразии. Изучим строение алгебры Ли максимальной группы инвариантности этой системы; найдем вид структурных уравнений этой группы. Для этого нужно иметь в виду 1) что соответствующая $\mathfrak{S}$-структура параллелизуемая, 2) необходимое и достаточное условие параллелизуемости $\mathfrak{S}$-структуры.

Выражения для $d\omega^i$ выпишутся на основе предыдущего в виде

$$d\omega^s = a^s{}_{pt}\omega^p \wedge \omega^t = \omega^s{}_t \wedge \omega^t. \qquad (e)$$

Выражения для $d\omega^i{}_l$ получаются при продолжении системы (e) с учетом вышеупомянутых положений

$$d\omega^s{}_t = \omega^s{}_p \wedge \omega^p{}_t + \Delta\omega^s{}_t,$$

где

$$\Delta\omega^s{}_t = \omega^s{}_{tp} \wedge \omega^p.$$

При этом появляются условия на некоторые из форм $\omega^s{}_{tp}$, а именно, часть из них должны равняться нулю. Оказывается, что при дальнейших продолжениях больше таких равенств вида $\omega^s{}_{i_1 i_2 \ldots i_p} = 0$ появиться не может, т. е. при $s = \mathrm{const}$ все формы $\Delta\omega^s{}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, где p-произвольный индекс, $p \geqslant 2$, выражаются через одни и те же главные формы ω^l. Покажем это. Рассмотрим некоторую форму $\omega^s{}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$. Зафиксируем s. Тогда по матрице преобразования инвариантности в фиксированной точке можно судить через какие главные формы будут выражаться $\Delta\omega^s{}_{i_1}$, $i = 3, 4, \ldots, m$, а именно, форма $\omega^s{}_{i_1}$ встречается впервые в s-ой строке и дальше во всех строках до n_{i+1}-ой, если $n_i + 1 \leqslant \leqslant s \leqslant n_{i+1}$. Значит все $d\omega^s{}_i$ имеют вид $\Delta\omega^s{}_{i_1} = \omega^s{}_{i_1 i_2} \wedge \omega^{i_2}$, где i_2 пробегает значения $3, 4, \ldots, s, n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_1 + s, n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + 2, \ldots, n_1 + n_2 + s$, и т. д. Далее, $\Delta\omega^s{}_{i_1 i_2}$ будут выражаться через те же ω^l, где l пробегает те же значения, что и i_2. Следовательно, никаких зависимостей на $\omega^s{}_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ при $p > 2$ не накладывается.

Может оказаться, что $s > n_i$ при некотором i, но от этого ничего не нарушится.

Положение такое имеет место при $s = 3, 4, \ldots, m$; $i_1, i_2, \ldots, \ldots, i_p = 1, 2, 3, 4, \ldots, m$. Утверждение верно и в остальных случаях.

Приступим к нахождению структурных уравнений групп инвариантности систем (А) с постоянными коэффициентами. По существу мы находим структурные уравнения соответствующих параллелизуемых $\mathfrak{G}$-структур. Как и в предыдущем рассмотрим различные канонические виды системы (А).

3. Сначала рассмотрим систему (4) (обозначения см [1]). Имеем

$$
\begin{aligned}
&d\omega^1 = \omega^1{}_1 \wedge \omega^1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^3,\\
&d\omega^2 = \lambda^2{}_1\omega^1{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^2{}_2 \wedge \omega^2 - \lambda_1(\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) \wedge \omega^1,\\
&d\omega^3 = \lambda_1\omega^3{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3,\\
&d\omega^4 = (\lambda_1\omega^4{}_2 + \omega^3{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^4{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^4{}_3 \wedge \omega^3 + (\omega^3{}_3 + \beta) \wedge \omega^4.\\
&d\omega^5 = (\lambda_1\omega^5{}_2 + \omega^4{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^5{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^5{}_3 \wedge \omega^3 +\\
&\qquad + (\omega^4{}_3 - \omega^1{}_2) \wedge \omega^4 + (\omega^3{}_3 + 2\beta) \wedge \omega^5,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^m = (\lambda_1\omega^m{}_2 + \omega_2{}^{m-1}) \wedge \omega^1 + \omega^m{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^m{}_3 \wedge \omega^3 +\\
&\qquad + \omega_3{}^{m-1} \wedge \omega^4 + \ldots + (\omega^4{}_3 - (m-4)\omega^1{}_2) \wedge \omega^{m-1} +\\
&\qquad + (\omega^3{}_3 + (m_1 - 3)\beta) \wedge \omega^m{}_1,
\end{aligned}
$$

где $\beta = \omega^1{}_1 - \omega^2{}_2 - 2\lambda_1\omega^1{}_2$.

Выражения для $\Delta\omega^s{}_t$ следующие:

$$
\begin{aligned}
&\Delta\omega^1{}_1 = \omega^1{}_{11} \wedge \omega^1 + \omega^1{}_{12} \wedge \omega^2,\\
&\Delta\omega^2{}_2 = \omega^2{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^2{}_{22} \wedge \omega^2,\\
&\Delta\omega^1{}_2 = \omega^1{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^1{}_{22} \wedge \omega^2,\\
&\Delta\omega^\xi{}_2 = \omega^\xi{}_{2s} \wedge \omega^s,\\
&\Delta\omega^\xi{}_3 = \omega^\xi{}_{3s} \wedge \omega^s,
\end{aligned}
$$

где $s = 1, 2, 3, \ldots, \xi$.

Добавочные условия:

$$
\begin{aligned}
&\omega^1{}_{1s} = 0, \quad \omega^2{}_{2s} = 0, \quad \omega^1{}_{2s} = 0, \quad s = 3, 4, \ldots, m;\\
&\omega^s{}_{2,\, s+1} = 0, \quad s = 3, 4, \ldots, m-1;\\
&\omega^s{}_{3,\, t} = 0, \quad s = 3, 4, \ldots, m-1; \quad t = s+1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

4. Рассмотрим систему (1) в случае двух различных корней λ. Имеем

$$
\begin{aligned}
&d\omega^1 = \omega^1{}_1 \wedge \omega^1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2,\\
&d\omega^2 = (-\lambda_1\lambda_2\omega^1{}_2) \wedge \omega^1 + (\omega^1{}_1 - (\lambda_1 + \lambda_2)\omega^1{}_2) \wedge \omega^2,\\
&d\omega^3 = \lambda_1\omega^3{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3,\\
&d\omega^4 = (\lambda_1\omega^4{}_2 + \omega^3{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^4{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^4{}_3\, \omega^3 +\\
&\qquad + (\omega^3{}_3 + (\lambda_2 - \lambda_1)\omega^1{}_2) \wedge \omega^4,\\
&d\omega^5 = (\lambda_1\omega^5{}_2 + \omega^4{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^5{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^5{}_3 \wedge \omega^3 +\\
&\qquad + (\omega^4{}_3 - \omega^1{}_2) \wedge \omega^4 + (\omega^3{}_3 + 2(\lambda_2 - \lambda_1)\omega^1{}_2) \wedge \omega^5,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^{n_1} = (\lambda_1\omega_2{}^{n_1} + \omega_2{}^{n_1-1}) \wedge \omega^1 + \omega_2{}^{n_1} \wedge \omega^2 + \omega_3{}^{n_1} \wedge \omega^3 +\\
&\qquad + \omega_3{}^{n_1-1} \wedge \omega^4 + \ldots + (\omega^4{}_3 - (n_1 - 4)\omega^1{}_2) \wedge \omega^{n_1-1} +\\
&\qquad + (\omega^3{}_3 + (n_1 - 3)(\lambda_2 - \lambda_1)\omega^1{}_2) \wedge \omega^{n_1},\\
&d\omega^{n_1+1} = \lambda_2\omega_2{}^{n_1+1} \wedge \omega^1 + \omega_2{}^{n_1+1} \wedge \omega^2 + \omega^{n_1+1}_{n_1+1} \Delta\, \omega^{n_1+1},\\
&d\omega^{n_1+2} = (\lambda_2\omega_2{}^{n_1+2} + \omega_2{}^{n_1+1}) \wedge \omega^1 + \omega_2{}^{n_1+2} \wedge \omega^2 +\\
&\qquad + \omega^{n_1+2}_{n_1+2} \wedge \omega^{n_1+1} \wedge (\omega^{n_1+1}_{n+1} + (\lambda_1 - \lambda_2)\omega^1{}_2) \wedge \omega^{n_1+2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Выражения для $\Delta\omega^s{}_t$ следующие:

$$\Delta\omega^1{}_i = \omega^1{}_{ik} \wedge \omega^k;\ i,\ k = 1,\ 2,$$
$$\Delta\omega^l{}_2 = \omega^l{}_2 \wedge \omega^\xi,$$
$$\Delta\omega^l{}_3 = \omega^l{}_{3\xi} \wedge \omega^\xi,$$

где $l = 3,\ 4,\ \ldots,\ n_1,\ \xi = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ l;$

$$\Delta\omega^l{}_2 = \omega^l{}_{2\xi} \wedge \omega^\xi,$$
$$\Delta\omega^l{}_3 = \omega^l{}_{3\xi} \wedge \omega^\xi,$$

где $l = n_1 + 1,\ n_1 + 2,\ \ldots,\ m;\ \xi = 1,\ 2,\ n_1 + 1,\ \ldots,\ l.$

На формы $\omega^s{}_{tr}$ накладываются условия

$$\omega^1{}_{2s} = 0,\ s = 3,\ 4,\ \ldots,\ m;$$
$$\omega^s{}_{2,s+1} = 0,\ s = 3,\ 4,\ \ldots,\ n_1 - 1,\ n_1 + 1,\ \ldots,\ m - 1;$$
$$\omega^s{}_{3,\,t} = 0,\ s = 3,\ 4,\ \ldots,\ n_1 - 1,\ t = s + 1,\ \ldots,\ n_1,$$
$$\omega^s{}_{n_1+1,t} = 0,\ s = n_1 + 1,\ \ldots,\ m - 1;\ t = s + 1,\ \ldots,\ m.$$

В случае более чем двух различных λ добавляются группы уравнений, аналогичные по строению тем группам уравнений, которые добавляются в случае двух различных λ при сравнении со случаем одного λ. Отдельно следует рассматривать выражения для $d\omega^1$, $d\omega^2$, $\Delta\omega^1{}_1$, $\Delta\omega^1{}_2$ и соотношения, накладываемые на формы $\omega^1{}_{2s}$. В силу того, что $\omega^1{}_1 = \omega^2{}_2 + \omega$ с одной стороны получим, что $\Delta\omega = \omega^1{}_{11} \wedge \omega^1 = \omega^2{}_{21} \wedge \omega^1$, но с другой стороны $\Delta\omega = \omega^2{}_{22} \wedge \omega^2 = \omega^1{}_{12} \wedge \omega^2$. Значит, $\Delta\omega = a\omega^1 \wedge \omega^2$, и для задания подгруппы нужно потребовать, чтобы $a = \mathrm{const}$. (Здесь a — компонента второго структурного тензора). Для параллелизуемости $\mathfrak{G}$-структуры нужно, чтобы $a = 0$.

Пусть $m = 5$. Тогда

$$d\omega^1 = (\omega^2{}_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\omega^1{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2,$$
$$d\omega^2 = -\lambda_1\lambda_3\omega^1{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^2{}_2 \wedge \omega^2,$$
$$d\omega^3 = \lambda_1\omega^3{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3,$$
$$d\omega^4 = (\lambda_1\omega^4{}_2 + \omega^3{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^4{}_2 \wedge \omega^2 +$$
$$+ \omega^4{}_3 \wedge \omega^3 + (\omega^3{}_3 + (\lambda_3 - \lambda_1)\omega^1{}_2) \wedge \omega^4,$$
$$d\omega^5 = (\lambda_3\omega^5{}_2 + \omega^4{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^5{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^5{}_5 \wedge \omega^5;$$
$$\Delta\omega^2{}_2 = \omega^2{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^2{}_{22} \wedge \omega^2,$$
$$\Delta\omega^1{}_2 = \omega^1{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^1{}_{22} \wedge \omega^2,$$
$$\Delta\omega^3{}_2 = \omega^3{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^3{}_{22} \wedge \omega^2 + \omega^3{}_{23} \wedge \omega^3,$$
$$\Delta\omega^4{}_2 = \omega^4{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^4{}_{22} \wedge \omega^2 + \omega^4{}_{23} \wedge \omega^3 + \omega^4{}_{24} \wedge \omega^4,$$
$$\Delta\omega^3{}_3 = \omega^3{}_{31} \wedge \omega^1 + \omega^3{}_{32} \wedge \omega^2 + \omega^3{}_{33} \wedge \omega^3 + \omega^4,$$
$$\Delta\omega^5{}_2 = \omega^5{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^5{}_{22} \wedge \omega^2 + \omega^5{}_{25} \wedge \omega^5,$$
$$\Delta\omega^5{}_5 = \omega^5{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^5{}_{52} \wedge \omega^2 + \omega^5{}_{55} \wedge \omega^5,$$
$$\Delta\omega^4{}_3 = \omega^4{}_{31} \wedge \omega^1 + \omega^4{}_{32} \wedge \omega^2 + \omega^4{}_{33} \wedge \omega^3 + \omega^4{}_{34} \wedge \omega^4.$$

Добавочные условия — следующие:

$$\omega^1{}_{23} = \omega^1{}_{24} = \omega^3{}_{24} = \omega^3{}_{34} = 0.$$

Пусть $m = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В этом случае имеем

$$d\omega^1 = \omega^1{}_1 \wedge \omega^1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^1{}_3 \wedge \omega^3 + \omega^1{}_4 \wedge \omega^4,$$
$$d\omega^2 = \omega^2{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^1{}_4 \wedge \omega^3,$$
$$d\omega^3 = \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3,$$
$$d\omega^4 = \omega^3{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^4{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^4{}_3 \wedge \omega^3 + (\omega^3{}_3 + (\omega^1{}_1 - \omega^2{}_2) \wedge \omega^4;$$

$\Delta\omega^1{}_1 = \omega^1{}_{1s} \wedge \omega^s,$
$\Delta\omega^2{}_2 = \omega^2{}_{22} \wedge \omega^2 + \omega^2{}_{23} \wedge \omega^3,$
$\Delta\omega^1{}_2 = \omega^1{}_{2s} \wedge \omega^s,$
$\Delta\omega^1{}_4 = \omega^1{}_{4s} \wedge \omega^s,$
$\Delta\omega^3{}_2 = \omega^3{}_{22} \wedge \omega^2 + \omega^3{}_{23} \wedge \omega^3,$
$\Delta\omega^3{}_3 = \omega^3{}_{32} \wedge \omega^2 + \omega^3{}_{33} \wedge \omega^3,$
$\Delta\omega^4{}_2 = \omega^4{}_{2s} \wedge \omega^s,$
$\Delta\omega^4{}_3 = \omega^4{}_{3s} \wedge \omega^s,$
где $s = 1, 2, 3, 4$. Добавочные условия будут
$\omega^2{}_{21} = \omega^2{}_{24} = \omega^3{}_{21} = \omega^3{}_{24} = \omega^3{}_{31} = \omega^3{}_{34} = 0.$

5. Рассмотрим систему (2) в случае одного корня λ, равного нулю. Введем следующие обозначения. Пусть в матрице преобразования инвариантности такой системы в точке на главной диагонали лежат клетки порядка $2, l_1 - 2, l_2, \ldots, l_k, p$. Тогда, очевидно, $l_1 + l_2 + \ldots + l_k + p = m$. Обозначим $l_1 + l_2 + \ldots l_i$ через l'_i и будем считать, что $l_0 = l'_0 = 2$. Для общности можно считать, что имеются $i = 0, 1, 2, \ldots, k$. Тогда при $s \neq 1, 2, m - p + 1, m - p + 2, \ldots, m$ и $l'_i + 1 < s < l'_{i+1}$ имеем
$d\omega^s = \omega^{s-1}{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^s{}_r \wedge \omega^r + (\omega^{l'_i+1}_{l'_i+1} - (\omega^2{}_2 - \omega^1{}_1)(s-4) \wedge \omega^s,$
где $r = 2, 3, \ldots, s - l'_i, l_1 + 1, l_1 + 2, \ldots, l_1 + s - l'_i, \ldots, \ldots, l'_j + 1, l'_j + 2, \ldots, l'_j + s - l'_i, \ldots, l'_i + 1, l'_i + 2, \ldots \ldots, s, \ldots, m - p$. Здесь и в дальнейшем, если $l_i > l_j$ может случиться, что $l'_j + s - l'_i > l'_{j+1}$. В таком случае r принимает каждое значение лишь один раз. Пусть $s = l'_i + 1$. Имеем
$d\omega^{l'_i+1} = \omega^{l'_i+1}{}_r \Delta \omega^r$, где $r = 2, 3, l'_1 + 1, l'_2 + 1, \ldots, l'_{i-1} + 1, l'_i + 1, l'_{i+1} + 1, \ldots, l'_{k-1} + 1$, т. е. $r = 2, l'_t + 1$, где $t = 0, 1, \ldots, k - 1$. При $s = l'_{i+1}$ будем иметь

$$d\omega^{l'_{i+1}} = \omega^{l'_{i+1}}_{1} \wedge \omega^1 + \omega^{l'_{i+1}}_{r} \wedge \omega^r +$$
$$+ [\omega^{l'_i+1}_{l'_i+1} - (\omega^2{}_2 - \omega^1{}_1)(l'_i - 3)] \wedge \omega^s,$$

где r принимает все значения, за исключением $l'_{j-1} + s - l'_i, l'_{j-1} + s - l'_i + 1, \ldots, l'_j$ при тех j, для которых $l_i < l_j$. Пусть $s = m - p + 1, m - p + 2, \ldots, m$. Тогда
$d\omega^s = \omega^s{}_r \wedge \omega^r$, где $r = 2, 3, l'_1 + 1, l'_2 + 1, \ldots, l'_i + 1, \ldots, m - p + 1, m - p + 2, \ldots, m,$
$d\omega^1 = \omega^1{}_1 \wedge \omega^1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2,$
$d\omega^2 = \omega^2{}_2 \wedge \omega^2.$

Найдем выражения для $\Delta\omega^s{}_t$, где $\Delta\omega^s{}_t = \omega^s{}_{tr} \wedge \omega^r$. Действительно, при $s \neq 1, 2, m - p + 1, m - p + 2, \ldots, m$ получим, что $t = 2, l'_0 + 1, l'_1 + 1, l'_2 + 1, \ldots, l'_{k-1} + 1$. Если при некотором i будет $s = l_i$, то t принимает еще значения $m - p + 1, m - p + 2, \ldots m$. При $l'_i + 1 < s < l'_{i+1}$ имеем $r + 1, 2, 3, \ldots \ldots, s - l'_i, l'_1 + 1, l'_1 + 2, \ldots, l'_1 + s - l'_i, \ldots, l'_i + 1, l'_i + 2, \ldots, s, \ldots, m - p$. При $s = l'_i + 1$ имеем $r = 2, 3, l'_1 + 1, l'_2 + 1, \ldots, l'_i + 1, \ldots, l'_{k-1} + 1$. При $s = l'_{i+1}$ имеем

$r=1, 2, 3, \ldots, s-l'_i, \quad l'_1+1, \quad l'_1+2, \quad \ldots, \quad l'_1+s-l'_i, \ldots$
$\ldots, l'_i+1, \quad l'_i+2, \ldots, \quad s, \ldots, m-p, \quad m-p+1, \ldots, m.$
При $s=m-p+1, \quad m-p+2, \ldots, m$ имеем $t=l'_0+1$, $l'_1+1, \, l'_2+1, \ldots, l'_{k-1}+1, \, m-p+1, \, m-p+2, \ldots, m$ и $r=2, \quad l'_0+1, \quad l'_1+1, \quad l'_2+1, \quad \ldots, \quad l'_{k-1}+1, \quad m-p+1,$ $m-p+2, \ldots, m.$

Следовательно,

$$\Delta\omega^1{}_1=\omega^1{}_{11}\wedge\omega^1+\omega^1{}_{12}\wedge\omega^2,$$
$$\Delta\omega^2{}_2=\omega^2{}_{22}\wedge\omega^2,$$
$$\Delta\omega^1{}_2=\omega^1{}_{21}\wedge\omega^1+\omega^1{}_{22}\wedge\omega^2.$$

Найдем добавочные зависимости на формы $\omega^s{}_{tr}$ вида $\omega^s{}_{tr}=0$. При $t=2$ предположим, что $s\neq 1, 2, \, m-p+1, \, m-p+2, \ldots, m$; $l'_i+1, < s < l'_{i+1}$; тогда $r=s-l'_i+1, \, l_1+s-l'_i+1, \ldots, l'_j+s-l'_i+1, \ldots, s+1, \ldots, l'_{k-1}+s-l'_i+1$. При $s=l'_i+1$ имеем $r=4, \, l'_1+2, \, l'_2+2, \ldots, l'_{i-1}+2, \, l'_i+2,$ $l'_{i+1}+2, \ldots, l'_{k-1}+2$. При $s=l'_{i+1}, \, m-p+1, \, m-p+2, \ldots, m$ зависимостей не будет. Пусть теперь $t\neq 2$ (значение 1 индекс t принимать не может). Тогда при $s\neq 1, \, 2, \, m-p+1,$ $m-p+2, \ldots, m$; $l'_i+1 < s < l'_{i+1}$ имеем $r=s-l'_i+1,$ $s-l'_i+2, \ldots, l_1, \, l_1+s-l'_i+1, \, l_1+s-l'_i+2, \ldots. l'_2, \ldots,$ $l'_j+s-l'_i+1, \ldots, l'_{j+1}, \ldots, s+1, \ldots,$ Если $s=l'_i+1$, то r принимает все значения, за исключением значений $r=2, \, 3,$ $l'_1+1, \, l'_2+1, \ldots, l'_i+1, \ldots, l'_{k-1}$ и $l'_j+s-l'_i, \, l'_{j-1}+s-$ $-l'_i+1, \ldots, l'_j$ при тех j, для которых $l_i < l_j$. При $s=l_{i+1}$, $m-p+1, \, m-p+2, \ldots, m$ зависимостей не будет. Следовательно, будем иметь $\omega^1{}_{1r}=0, \, \omega^1{}_{2r}=0, \, r=3, \, 4, \ldots, l_1, \, l_1+1,$ $l_1+2, \ldots, m-p,$
$\omega^2{}_{2r}=0, \, r=1, \, 3, \, 4, \ldots, l_1, \, l_1+1, \ldots, m-p.$

В случае $m=5$ имеем

$$d\omega^1=\omega^1{}_1\wedge\omega^1+\omega^1{}_2\wedge\omega^2+\omega^1{}_3\wedge\omega^3,$$
$$d\omega^2=\omega^2{}_2\wedge\omega^2,$$
$$d\omega^3=\omega^3{}_2\wedge\omega^2+\omega^3{}_3\wedge\omega^3,$$
$$d\omega^4=\omega^3{}_2\wedge\omega^1+\omega^4{}_2\wedge\omega^2+\omega^4{}_3\wedge\omega^3+(\omega^3{}_3+\omega^1{}_1-\omega^2{}_2)\wedge\omega^4,$$
$$d\omega^5=\omega^5{}_2\wedge\omega^2+\omega^5{}_3\wedge\omega^3+\omega^5{}_5\wedge\omega^5;$$
$$\Delta\omega^1{}_1=\omega^1{}_{11}\wedge\omega^1+\omega^1{}_{12}\wedge\omega^2+\omega^1{}_{13}\wedge\omega^3,$$
$$\Delta\omega^2{}_2=\omega^2{}_{22}\wedge\omega^2,$$
$$\Delta\omega^3{}_2=\omega^3{}_{22}\wedge\omega^2+\omega^3{}_{23}\wedge\omega^3,$$
$$\Delta\omega^3{}_3=\omega^3{}_{32}\wedge\omega^2+\omega^3{}_{33}\wedge\omega^3;$$
$$\omega^1{}_{14}=0, \quad \omega^2{}_{21}=\omega^2{}_{23}=\omega^2{}_{24}=0, \quad \omega^3{}_{22}=\omega^3{}_{24}=0,$$
$$\omega^3{}_{31}=\omega^3{}_{34}=0.$$

6. Приступим к рассмотрению системы (3). Рассмотрим случай одного корня λ. Имеем уравнения

$$d\omega^1=\omega^1{}_k\wedge\omega^k, \quad k=1, \, 2, \ldots, m.$$
$$d\omega^2=(\lambda^2{}_1\omega^1{}_2-\lambda_1(\omega^1{}_1-\omega^2{}_2)\wedge\omega^1+\omega^2{}_k\wedge\omega^k, \, k=2, 3, \ldots, m,$$
$$d\omega^3=\lambda_1\omega^3{}_2\wedge\omega^1+\omega^3{}_k\wedge\omega^k, \quad k=2, \, 3, \ldots, m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$d\omega^m=\lambda_1\omega^m{}_2\wedge\omega^1+\omega^m{}_2\wedge\omega^2+\omega^m{}_m\wedge\omega^m.$$

Как видно все $d\omega^s$, $s=1, 2, \dots, m$ выражаются через главные формы. Точно также и все $\Delta\omega^s{}_t$ будут выражаться через главные формы. Зависимостей вида $\omega^s{}_{tr}=0$ не будет. В случае двух корней λ имеем уравнения

$$
\begin{aligned}
&d\omega^1=(\omega^2{}_2+(\lambda_1+\lambda_2)\omega^1{}_2)\wedge\omega^1+\omega^1{}_2\wedge\omega^2,\\
&d\omega^2=\omega^2{}_1\wedge\omega^1+\omega^2{}_2\wedge\omega^2,\\
&d\omega^3=\lambda_1\omega^3{}_2\wedge\omega^1+\omega^3{}_k\wedge\omega^k,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^{n_1}=\lambda_1\omega^{n_1}{}_2\wedge\omega^1+\omega^{n_1}{}_k\wedge\omega^k,\\
&d\omega^{n_1+1}=\lambda_2\omega^{n_1+1}{}_2\wedge\omega^1+\omega^{n_1+1}{}_2\wedge\omega^2+\omega^{n_1+1}{}_l\wedge\omega^l,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^m=\lambda_2\omega^m{}_2\wedge\omega^1+\omega^m{}_2\wedge\omega^2+\omega^m{}_l\wedge\omega^l,
\end{aligned}
$$

где $k=2, 3, \dots, n_1$; $l=n_1+1, n_1+2, \dots, m$.

Что касается форм $\Delta\omega^2{}_2$, $\Delta\omega^1{}_2$, $\Delta^2{}_1$, то они выражаются через ω^1, ω^2; формы $\Delta\omega^s{}_t$ при $s=3, 4, \dots, n_1$ выражаются через $\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^{n_1}$, а формы $\omega^s{}_t$ при $s=n_1+1, n_1+2, \dots m$ — через $\omega^1, \omega^2, \omega^{n_1+1}, \omega^{n_1+2}, \dots, \omega^m$. Зависимостей вида $\omega^s{}_{tr}=0$ не будет. В этих двух случаях группа инвариантности в точке является группой инвариантности и на всем многообразии.

Изучим теперь случай более чем двух различных λ. Выпишем уравнения

$$
\begin{aligned}
&d\omega^1=\omega\wedge\omega^1,\\
&d\omega^2=\omega\wedge\omega^2,\\
&d\omega^3=\lambda_1\omega^3{}_2\wedge\omega^1+\omega^3{}_{l_1}\wedge\omega^{l_1},\\
&d\omega^4=\lambda_1\omega^4{}_2\wedge\omega^1+\omega^4{}_{l_1}\wedge\omega^{l_1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^{n_1}=\lambda_1\omega^{n_1}{}_2\wedge\omega^1+\omega^{n_1}{}_k\wedge\omega^k,\\
&d\omega^{n_1+1}=\lambda_2\omega^{n_1+1}{}_2\wedge\omega^1+\omega^{n_1+1}{}_2\wedge\omega^2+\omega^{n_1+1}_{l_2}\wedge\omega^{l_2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^{n_1+n_2}=\lambda_2\omega^{n_1+n_2}{}_2\wedge\omega^1+\omega^{n_1+n_2}{}_2\wedge\omega^2+\omega^{n_1+n_2}_{l_2}\wedge\omega^{l_2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^{m-n_k+1}=\lambda_k\omega^{m-n_k+1}_2\wedge\omega^1+\omega^{m-n_k+1}_2\wedge\omega^2+\omega^{m-n_k+1}_{l_k}\wedge\omega^{l_k},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^m=\lambda_k\omega^m{}_2\wedge\omega^1+\omega^m{}_2\wedge\omega^2+\omega^4{}_2\wedge\omega^2+\omega^4{}_3
\end{aligned}
$$

где $l_1=2, 3, \dots, n_1$; $l_2=n_1+1, n_1+2, \dots, n_2$, $l_k=m-n_k+1, m-n_k+2, \dots, m$.

Здесь добавляются условия $\Delta\omega=0$, $a=0$ (обозначения те же что и в случае системы (1) при более чем двух различных λ)

7. В случае системы (5) имеем уравнения

$$
\begin{aligned}
&d\omega^1=\omega^1{}_1\wedge\omega^1+\omega^1{}_2\wedge\omega^2,\\
&d\omega^2=\omega^2{}_2\wedge\omega^2,\\
&d\omega^3=\omega^3{}_l\wedge\omega^l,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&d\omega^j=\omega^j{}_l\wedge\omega^l,\ l=2, 3, \dots, j,
\end{aligned}
$$

$$d\omega^{j+1} = \omega^j{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^{j+1}{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^{j+1}{}_j \wedge \omega^j + $$
$$+ (\omega^j{}_j - (\omega^2{}_2 - \omega^1{}_1) \wedge \omega^{j+1},$$
$$d\omega^{j+2} = \omega^{j+1}{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^{j+2}{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^{j+2}{}_j \wedge \omega^j +$$
$$+ (\omega^{j+1}{}_j - \omega^1{}_2) \wedge \omega^{j+1} + (\omega^j{}_j - 2(\omega^2{}_2 - \omega^1{}_1) \wedge \omega^{j+2},$$

. . . .

$$d\omega^{m-1} = \omega^{m-1}{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^{m-1}{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^{m-1}{}_j \wedge \omega^j$$
$$+ (\omega^{j+1}{}_j - (m-j-2)\omega^1{}_2) \wedge \omega^{m-2} + \omega^j + \ldots +$$
$$+ (\omega^j{}_j - (m-j-1)(\omega^2{}_2 - \omega^1{}_1) \wedge \omega^{m-1},$$
$$d\omega^m = \omega^{m-1}{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^m{}_2 \wedge \omega^2 + \ldots +$$
$$+ \omega^m{}_j \wedge \omega j + \omega^{m-1}{}_j \wedge \omega^{j+1} + \omega^{m-2}{}_j \wedge \omega^{j+2} + \ldots +$$
$$+ (\omega^{j+1}{}_j - (m-j-1)\omega^1{}_2) \wedge \omega^{m-1} +$$
$$+ (\omega^j{}_j - (m-j)(\omega^2{}_2 - \omega^1{}_1)) \wedge \omega^m,$$

которым добавляются еще следующие

$$\Delta\omega^1{}_2 = \omega^1{}_{21} \wedge \omega^1 + \omega^1{}_{22} \wedge \omega^2,$$
$$\Delta\omega^1{}_1 = \omega^1{}_{11} \wedge \omega^1 + \omega^1{}_{12} \wedge \omega^2,$$
$$\Delta\omega^2{}_2 = \omega^2{}_{22} \wedge \omega^2,$$
$$\Delta\omega^t{}_j = \omega^t{}_{js} \wedge \omega^s$$
$$\Delta\omega^j{}_j = \omega^j{}_{j2} \wedge \omega^2 + \omega^j{}_{jj} \wedge \omega^j,$$
$$\Delta\omega^j{}_2 = \omega^j{}_{22} \wedge \omega^2 + \omega^j{}_{2j} \wedge \omega^j$$
$$\Delta\omega^t{}_2 = \omega^t{}_{2r} \wedge \omega^r,$$

где $t = j,\ j+1,\ \ldots,\ m-1,\ m;\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ t;\ r = 1,\ 2,\ j,\ j+1,\ \ldots,\ t.$

Здесь добавочными условиями являются

$\omega^1{}_{2t} = \omega^1{}_{1t} = \omega^2{}_{2t} = \omega^2{}_{21} = 0,\ \omega^s{}_{2,s+1} = 0,\ \omega^t{}_{jr} = 0,\ \omega^j{}_{21} = \omega^j{}_{2,j+1} = 0,$ где $t = j,\ j+1,\ \ldots,\ m;\ r = t+1,\ t+2,\ \ldots,\ m;\ s = j+1,\ \ldots,\ m-1.$

8. В случае системы (6) имеем уравнения

$$d\omega^1 = \omega^1{}_k \wedge \omega^k,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$
$$d\omega^2 = \omega^2{}_2 \wedge \omega^2,$$
$$d\omega^i = \omega^i{}_k \wedge \omega^k,\ i = 3,\ 4,\ \ldots,\ m;\ k = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ m.$$

Группа инвариантности определена на всем многообразии. Это имеет место и при $m = 5,\ 4,\ 3$.

9. В случае системы (7) структурные уравнения будут

$$d\omega^1 = \omega \wedge \omega^1,$$
$$d\omega^2 = \omega \wedge \omega^2,$$
$$d\omega^3 = \lambda_3\omega^3{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3,$$
$$d\omega^4 = \lambda_4\omega^4{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^4{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^4{}_4 \wedge \omega^4,$$

. . . .

$$d\omega^m = \lambda_m\omega^m{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^m{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^m{}_m \wedge \omega^m;$$
$$\Delta\omega = a\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Имеется добавочное условие $a = 0$. И, следовательно, $\Delta\omega = 0$. При $m = 4$. Имеем

$$d\omega^1 = (\omega^2{}_2 + (\lambda_4 + \lambda_3)\omega^1{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2 +$$
$$+ \omega^1{}_3 \wedge \omega^3 + \omega^1{}_4 \wedge \omega^4,$$
$$d\omega^2 = -\lambda_3\lambda_4\omega^1{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^2{}_2 \wedge \omega^2 - \lambda_4\omega^1{}_3 \wedge \omega^3 - \lambda_3\omega^1{}_4 \wedge \omega^4,$$
$$d\omega^3 = \lambda_3\omega^3{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3,$$
$$d\omega^4 = \lambda_4\omega^4{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^4{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^4{}_4 \wedge \omega^4.$$

Добавочных зависимостей не будет. Рассмотрим частный вид системы (7), при $m=4$.

$$\begin{aligned}
&d\omega^1 = (\omega^2{}_2 + \omega^1{}_2) \wedge \omega^1 + \omega^1{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^1{}_3 \wedge \omega^3 + \omega^1{}_4 \wedge \omega^4,\\
&d\omega^2 = \omega^2{}_2 \wedge \omega^2 - \omega^1{}_3 \wedge \omega^3,\\
&d\omega^3 = \omega^3{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^3{}_3 \wedge \omega^3,\\
&d\omega^4 = \omega^4{}_2 \wedge \omega^1 + \omega^4{}_2 \wedge \omega^2 + \omega^4{}_4 \wedge \omega^4,\\
&\Delta\omega^2{}_2 = \omega^2{}_{22} \wedge \omega^2 + \omega^2{}_{23} \wedge \omega^3,\\
&\Delta\omega^1{}_3 = \omega^1{}_{32} \wedge \omega^2 + \omega^1{}_{33} \wedge \omega^3;\\
&\omega^2{}_{21} = \omega^2{}_{24} = 0; \quad \omega^1{}_{31} = \omega^1{}_{34} = 0.
\end{aligned}$$

Во всех случаях полученные системы

$$d\omega^s = a^s{}_{rt}\omega^r \wedge \omega^t = \omega^s{}_r \wedge \omega^r,$$

$$d\omega^s{}_r = \omega^s{}_t \wedge \omega^t{}_r + \Delta\omega^s{}_r$$

находятся в инволюции.

Можно сформулировать следующие результаты: *В случаях, когда в системе* (A) *с постоянными коэффициентами все* a_i *равные нулю (системы* (3), (6), (7)) *и различных корней* λ *всего лишь один или два, с локальной точки зрения группа инвариантности системы на всем многообразии совпадает с группой инвариантности в точке. Геометрически такие системы при одном корне* λ *задают семейство плоскостей, проходящих через некоторое подпространство подпространства* $d(\lambda_1 x + y) = 0$, *при двух различных корнях* λ *задают семейство плоскостей, проходящих через два подпространства, причем последние лежат соответственно в подпространствах* $d(\lambda_1 x + y) = 0$ *и* $d(\lambda_2 x + y) = 0$.

В случаях, когда в системе (A) *все* a_i *равные нулю, но различных* λ *больше двух, для выделения группы инвариантности системы на всем многообразии нужно к группе инвариантности этой системы в точке присоединить одно добавочное соотношение. В наших обозначениях это соотношение имеет простой вид* $a=0$.

В остальных случаях число добавочных соотношений, которые выделяют группу инвариантности на всем многообразии, как мы видели, больше.

Литература

1. Кильп Х., Геометрическое строение семейства плоскостей, заданных некоторой системой дифференциальных уравнений первого порядка. Настоящий сборник, стр. 31—42.
2. Широков А. П., Об одном типе $\mathfrak{G}$-структур, определяемых алгебрами. Тр. Геометр. семинара. Ин-т научн. информ. АН СССР, 1966, 1, 425—456.

Поступило
24 V 1967

TASANDITE PERE INVARIANTSUSRÜHMAD JA VASTAVAD $\mathfrak{G}$-STRUKTUURID

H. Kilp

Resümee

Töös jätkatakse kahe sõltumatu muutujaga esimest järku kvaasilineaarsete osatuletistega diferentsiaalvõrrandite süsteemide uurimist. Konstantsete kordajatega süsteemi korral on leitud maksimaalsed invariantsusteisenduste rühmad kogu muutkonnal. Muutkonna antud punktis invariantsusteisendused moodustavad lõpliku lineaarse Lie rühma. On leitud nende lineaarsed esitused. Konstantsete kordajatega süsteemide uurimiseks kogu muutkonnal on kasutatud $\mathfrak{G}$-struktuuride teooria meetodeid. Tõestatakse teoreem: kui muutkonnal on määratud antud tüüpi diferentsiaalvõrrandite süsteem, siis $\mathfrak{G}$-struktuur, mille struktuurirühmaks $\mathfrak{G}$ on selle süsteemi invariantsusrühm, on paralleliseeritav ja vastupidi, kui $\mathfrak{G}$-struktuur, mille struktuurirühm $\mathfrak{G}$ on antud tüüpi diferentsiaalvõrrandite süsteemi invariantsusrühm, on paralleliseeritav, siis see süsteem on konstantsete kordajatega. On leitud lokaalselt vaatekohalt antud süsteemi maksimaalsed invariantsusteisenduste rühmad kogu muutkonnal.

THE GROUPS OF INVARIANCE AND CORRESPONDING $\mathfrak{G}$-STRUCTURES OF A FAMILY OF PLANES

H. Kilp

Summary

In the paper the study of the systems of the first order quasilinear partial differential equations with two independent variables has been carried out. In case of the system with constant coefficients the maximal transformation groups of invariance on the whole manifold have been found. The transformations of invariance at a given point of the manifold constitute a final linear group of Lie. The linear representations of these have been determined. In examining the systems with constant coefficients on the whole manifold the author has used the methods of the theory of $\mathfrak{G}$-structures. The following theorem has been proved: If a system of differential equations of the above considered type is given on the manifold, then the $\mathfrak{G}$-structure, the structural group $\mathfrak{G}$ of which is the transformation group of invariance of this system, can be parallelized, and vice versa, if the $\mathfrak{G}$-structure, the structural group of which is the group of invariance for a system of differential equations of the type considered, can be parallelized, then this system has constant coefficients. The maximal transformation groups of invariance for the locally determined system have been foud on the whole manifold.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Ю. Ламп

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

1. Пусть $\mathcal{Y}$ — направленное[1] множество. Отображение f направленного множества $\mathcal{Y}$ в некоторое множество B называется *обобщенной последовательностью* в B (см. [2], стр. 38) или также сетью в B (см. [15], стр. 143) или направленным семейством в B (см. [8], стр. 987). Обозначим через $\tau(\mathcal{Y}, B)$ (или $\sigma(\mathcal{Y}, B)$) некоторый класс обобщенных последовательностей $f = \{f_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$ в банаховом пространстве B.

Пусть $\tau(\mathcal{Y}, B)$ — линейное топологическое пространство, X — направленное множество, D — банахово пространство, а $U_x (x \in X)$ — непрерывные линейные операторы из $\tau(\mathcal{Y}, B)$ в D. Будем говорить, что преобразование

$$Uf = \{U_x f\}_{x \in X} \tag{1}$$

является *преобразованием типа* $\tau(\mathcal{Y}, B) \rightarrow \sigma(X, D)$, если каждая обобщенная последовательность $f \in \tau(\mathcal{Y}, B)$ преобразовывается при помощи (1) в обобщенную последовательность $Uf \in \sigma(X, D)$.

Нас интересуют следующие классы обобщенных последовательностей $f = \{f_y\}_{y \in \mathcal{Y}}$:

$c(\mathcal{Y}, B)$ — класс сходящихся обобщенных последовательностей[2] ($\lim_{\mathcal{Y}} f_y$ существует),

---

[1] Непустое множество $\mathcal{Y}$ называется *направленным* по отношению $>$, если пары его элементов y_1, y_2, для которых выполнено отношение $y_1 > y_2$ удовлетворяют условиям:

(a) если $y_1 > y_2$ и $y_2 > y_3$, то $y_1 > y_3$,

(b) для всяких двух элементов y_1, $y_2 \in \mathcal{Y}$ существует такой $y_3 \in \mathcal{Y}$, что $y_3 > y_1$ и $y_3 > y_2$.

[2] Символ $\lim_{\mathcal{Y}}$ означает $\lim_{y \in \mathcal{Y}}$. Для банахова пространства B обобщенная последовательность $f = \{f_y\}_{y \ni \mathcal{Y}}$ называется сходящейся к элементу $p = \lim_{\mathcal{Y}} f$ если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $y_\varepsilon \in \mathcal{Y}$, такое, что из $y > y_\varepsilon$ вытекает $\|f_y - p\| < \varepsilon$ (ср. [2], стр. 38; или [10], стр. 535). Это означает, что множество $\{y: \|f_y - p\| > \varepsilon\}$ может оказаться более, чем конечным.

$m(У, B)$ — класс ограниченных обобщенных последовательностей[3] $(\sup_У \|f_y\| < \infty)$,

$mc(У, B)$ — класс ограниченно сходящихся обобщенных последовательностей $(f \in c(У, B) \cap m(У, B))$,

$rc(У, B)$ — класс регулярно сходящихся обобщенных последовательностей ($f \in m(У, B)$ и для каждого бесконечного подмножества $У'$ из $У$, направленного по такому же правилу как и $У$, существует[4] $\lim_{У'} f_y$),

$l(У, B)$ — класс абсолютно сходящихся обобщенных последовательностей[5] $(\Sigma_У \|f_y\| < \infty)$,

$TMc(У, B)$ — класс вполне измеримых сходящихся обобщенных последовательностей (определение дается ниже в § 2 настоящей статьи),

$Mmc(У, B)$ — класс измеримых ограниченно сходящихся обобщенных последовательностей (см. § 2 настоящей статьи).

Если определить в классах $m(У, B)$, $mc(У, B)$, $rc(У, B)$, $TMc(У, B)$ и $Mmc(У, B)$ норму как $\|f\| = \sup_У \|f_y\|$, а в классе $l(У, B)$ как $\|f\| = \Sigma_У \|f_y\|$, то эти классы превращаются в банаховы пространства.

2. Во втором параграфе настоящей статьи выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование (1) являлось преобразованием типа $\tau(У, B) \to mc(X, D)$. Полученная теорема применяется для случая, когда $\tau(У, B)$ является одним из пространств $TMc(У, B)$, $rc(У, B)$, $Mmc(У, B)$, $mc(У, B)$, $l(У, B)$.

В третьем параграфе исследуются условия, при которых преобразование (1) является преобразованием типов $\tau(У, B) \to rc(X, D)$ и $\tau(У, B) \to c(X, D)$. Для преобразований последнего типа М. Дэй [10] доказал общую теорему для случая $B = D$ вместе с требованием регулярности $\lim_X U_x f = \lim_У f$, которая дается во втором пункте этого параграфа в несколько измененной форме.

В этом же параграфе отдельно исследуются преобразования типа $m(У, B) \to c(X, D)$, при изучении которых применяется теория пространств Сакса. С помощью этой теории В. Орлич

[3] Символ $\sup_У$ означает $\sup_{y \in У}$.

[4] Если $У$ — более чем счетное множество, то этот класс содержит класс $Cmc(У, B)$, состоящий из всех непрерывных ограниченно сходящихся обобщенных последовательностей.

[5] Здесь $\Sigma_У \|f_y\| = \sup_K \Sigma_{y \in K} \|f_y\| = \lim_K \Sigma_{y \in K} \|f_y\|$, где K-конечные подмножества из $У$, упорядоченные по включению (см. [8], гл. VII, § 8). Это значит, что при условии $\Sigma_У \|f_y\| < \infty$ множество $\{y : f_y \neq \theta\}$ является не более чем счетным.

доказал теорему для преобразований типа[6] $m(N,R) \to c(N,R)$ (см. [13]).

В четвертом параграфе исследуется, при каких условиях преобразование (1) является преобразованием типов $\tau(У,B) \to l(X,D)$ и $\tau(У,B) \to m(X,D)$.

3. Рассматриваемое в этой статье преобразование (1) является довольно общим. Так, например, если $У = X = N$, а преобразование (1) является матричным преобразованием

$$U_n f = \Sigma_k a_{nk} f_k \quad (n \in N), \tag{2}$$

где a_{nk} — непрерывные линейные операторы из B в D, то мы имеем дело с матричными преобразованиями последовательностей в банаховых пространствах (см. [13]).

Если $У$ — множество N^n, состоящее из n-мерных векторов $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где $y_k \in N (k = 1, \ldots, n)$, X — множество N^m, состоящее из m-мерных векторов, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, а преобразование (1) — матричное преобразование

$$U_x f = \Sigma_y a_{xy} f_y \quad (x \in X),$$

где a_{xy} — непрерывные линейные операторы из B в D, то мы имеем преобразования кратных последовательностей в банаховых пространствах (см. [4, 5, 6]).

Если $У = N$, $X = R_+$ и $B = D = R$, то преобразование (1) превращается в полунепрерывное преобразование, где

$$U_x f = \Sigma_k a_k(x) f_k,$$

где $a_k(x)$ — действительные функции, определенные для $x \in R_+$ (см. [7], § 10).

Преобразование (1) охватывает и интегральные преобразования (см. [7, 9])

$$U_x f = \int_0^\infty K(x, y) f(y) dy, \tag{3}$$

где $x \in R_+$ и $f(y)$ — функции с комплексными значениями, определенные на множестве R_+, для которых при всех $x, h \in R_+$ существует

$$\int_0^h K(x, y) f(y) dy.$$

При этом ядро $K(x, y)$ — функция с комплексными значениями — определено так, что при всех $x, h \in R_+$ существует

$$\int_0^h K(x, y) dy,$$

а интеграл понимается в смысле Лебега. Агнью [7] при изуче-

---

[6] Здесь $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, R — множество действительных чисел, а R_+ — множество положительных действительных чисел (содержащее точку O).

нии интегральных преобразований исходил из абстрактного интеграла, которого он определил при помощи некоторых аксиом. Интеграл Лебега является частным случаем этого интеграла.

§ 2. Преобразования типа $\tau(У, B) \to mc(X, D)$

1. Основная теорема. Пусть $\tau(У, B)$ — банахово пространство. Докажем следующее обобщение теоремы Банаха—Штейнхауза.

Теорема 1. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $\tau(У, B) \to mc(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *преобразование* (1) *является преобразованием типа* $\tau'(У, B) \to mc(X, D)$, *где* $\tau'(У, B)$ — *основное*[7] *множество пространства* $\tau(У, B)$,

2° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Доказательство. Необходимость условия 1° теоремы 1 очевидна. Необходимость условия 2° теоремы 1 вытекает из факта, что если $\{U_x f\}_{x \in X} \in mc(X, D)$ при $f \in \tau(У, B)$, то

$$\sup_X \|U_x f\| < \infty \quad \text{для каждого } f \in \tau(У, B),$$

а это условие равносильно условию 2° теоремы 1 (см. [2], стр. 79, следствие 21).

Достаточность условий теоремы 1 является прямым следствием принципа равномерной ограниченности (см. [2], стр. 67, теорема 18, стр. 72, лемма 3, и стр. 79, следствие 21).

2. Преобразования класса $TMc(У, B)$. Если $У$ — абстрактное множество, то Y называется *алгеброй* (или полем) *подмножеств* из $У$, если конечные суммы множеств из Y содержатся в Y, $У \subset Y$ и дополнения (относительно $У$) множеств из Y содержатся в Y (см. [10], стр. 594 или [2], стр. 110). Определим для множества $E \subset Y$ характеристическую функцию φ_E через

$$\varphi_E(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in E, \\ 0, & \text{если } y \overline{\in} E. \end{cases}$$

Функцию f на $У$ со значениями в B называют *простой*, если существует конечное число множеств $E_i \subset Y$ и точек $b_i \in B$ таких, что[8]

$$f = \sum_{i \leq k} \varphi_{E_i} b_i \quad (i \in N).$$

Функцию f из $У$ в B называют *вполне измеримой* (см. [10], стр. 594, или [11], §§ 2, 6), если существует последовательность

---

[7] Называют также тотальным (см. [1], стр. 45) или фундаментальным (см. [2], стр 63) множеством.

[8] Здесь $f(y) = \sum_{i \leq k} \varphi_{E_i}(y) b_i$.

$\{f^n\}_{n\in N}$ простых функций, сходящаяся равномерно к f. Класс TM вполне измеримых функций f является банаховым пространством с нормой $\|f\| = \sup_У \|f(y)\|$. Если $У$ — направленное множество, то через $TMc(У, B)$ обозначаем класс всех таких обобщенных последовательностей $f \in TM$, для которых существует $\lim_У f_y$. Это — пространство вполне измеримых сходящихся обобщенных последовательностей $f = \{f_y\}_{y\in У}$ с нормой $\|f\| = \sup_У \|f_y\|$.

Мы будем говорить, что алгебра Y подмножеств из $У$ удовлетворяет *условию* (Σ_1) если для каждого $E \subset Y$, или E или $У \setminus E$ не конфинально[9] в $У$.

В дальнейшем нам нужна следующая

Лемма 1. *Связанное с пространством $TMc(У, B)$ алгебра Y подмножеств из $У$ удовлетворяет условию (Σ_1).*

Доказательство дается в лемме 6.1 работы [10].

Для пространства $TMc(У, B)$ из теоремы 1 получается следующая

Теорема 2. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа $TMc(У, B) \to mc(X, D)$ тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого $b \in B$ существует* $\lim_X U_x \varphi_У b$,

2° *для каждого $b \in B$ и неконфинального в $У$ множества $E \subset Y$ существует* $\lim_X U_x \varphi_E b$,

3° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Доказательство. Пусть E — произвольное неконфинальное множество в $У$, где $E \subset Y$. По лемме 1 и по определению пространства $TMc(У, B)$ обобщенные последовательности $\varphi_E b$ и $\varphi_У b$, где $b \in B$, составляют основное множество в пространстве $TMc(У, B)$. Теперь остается только использовать теорему 1.

Если $B = D$, то будем говорить, что преобразование (1) является *регулярным*, если $\lim_X U_x f = \lim_У f_y$ для каждого $f \in \tau(У, B)$.

Теорема 3. *Преобразование* (1) *является регулярным преобразованием типа $TMc(У, B) \to mc(X, B)$ тогда и только тогда, когда*

1° $\lim_X U_x \varphi_У b = b$, *для каждого* $b \in B$,

2° $\lim_X U_x \varphi_E b = \Theta$ *для каждого $b \in B$ и неконфинального в $У$ множества $E \subset Y$*,

3° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Доказательство. Из требования регулярности следует

$$\lim_X U_x \varphi_У b = \lim_У \varphi_У(y) b = b$$

и

---

[9] Если $У$ — направленное множество, то подмножество $У'$ называется *конфинальным* в $У$, если для любого $y \in У$ существует $y \in У'$ такой, что $y' > y$ (см. [10], стр. 584).

$$\lim_X U_x\varphi_E b = \lim_У \varphi_E(y) b = \Theta,$$

если E не конфинально в $У$.

Пусть $У$ — множество N^n. Назовем *сечением* множества N^n всякое множество вида [10]

$$E = \{y \in N^n : y_{i_k} = n_k,\ k = 1, \ldots, p\},$$

определенное для каждых $0 \leqslant p \leqslant n$ и $i_k \leqslant n$. Тогда каждое сечение является направленным подмножеством [11] в N^n. Как доказал М. Дэй ([10], стр. 607) множество $У'$ является направленным подмножеством в N^n тогда и только тогда, когда существует сечение E, такое, что пересечение $E \cap У'$ конфинально и в E и в $У'$, а $У' \setminus E$ не конфинально в $У'$. Отсюда вытекает, что пространство $rc(N^n, B)$ является пространством $TMc(N^n, B)$, у которого за Y принята наименьшая алгебра подмножеств из N^n, содержащая все сечения множества N^n. Учитывая это, мы из теоремы 2 получаем следующий результат.

Теорема 4. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $rc(N^n, B) \to mc(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого* $b \in B$ *существует* $\lim_X U_x\varphi_{N^n} b$,

2° *для каждого* $b \in B$ *и неконфинального в* N^n *сечения* E *существует* $\lim_X U_x\varphi_E b$,

3° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

3. Преобразования классов $mc(У, B)$ и $Mmc(У, B)$. Пусть $У$ — абстрактное множество, а Y — σ-алгебра. [12] Функцию f из $У$ в B называют *измеримой*, если существует последовательность простых функций, всюду сходящаяся к f.

Функцию f из $У$ в B называют *полупростой*, если она ограничена (т. е. $\sup_У \|f(y)\| < \infty$) и если существует счетное множество подмножеств $E_i \subset Y$ и точек $b_i \in B$, таких что

$$f = \sum_i \varphi_{E_i} b_i \quad (i \in N).$$

М. Дэй получил следующий результат (см. [10], лемма 5.1).

Лемма 2. *Класс* Mm *ограниченных измеримых функций состоит из всех таких функций, которых можно равномерно апроксимировать полупростыми функциями. Множество* Mm *является банаховым пространством с нормой* $\|f\| = \sup_У \|f(y)\|$.

Для направленного множества $У$ будем через $Mmc(У, B)$ обозначать класс всех таких обобщенных последовательностей $f \in Mm(У, B)$, для которых существует $\lim_У f_y$.

---

[10] Например, если $n = 2$, то сечениями при фиксировании двух координат вектора y (т. е. $p = 2$) являются одиночные элементы из N^2, при фиксировании одной координаты ($p = 1$) — ряды или столбцы, если оставить все координаты изменяющимися ($p = 0$), получаем все N^2.

[11] При фиксаций n координат вектора y мы имеем тривиальное направленное множество, состоящее из одного элемента.

[12] Т. е. Y — алгебра, при котором сумма счетного множества подмножеств из Y содержится в Y (см. [10], стр. 579).

Если $\mathcal{Y}$ — счетное направленное множество[13], то пространство $mc(\mathcal{Y}, B)$ совпадает с пространством $Mmc(\mathcal{Y}, B)$, связанной с которой алгеброй Y является наименьшая алгебра, содержащая все конечные подмножества из $\mathcal{Y}$ (см. [2], гл. III).

Теорема 5. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $mc(\mathcal{Y}, B) \to mc(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого* $b \in B$ *существует* $\lim_X U_x \varphi_{\mathcal{Y}} b$,

2° *для каждого* $f \in mc(\mathcal{Y}, B)$ *и неконфинального в* $\mathcal{Y}$ *множества* E *существует*[14] $\lim_X U_x f \varphi_E$,

3° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Доказательство. Покажем, что обобщенные последовательности $\varphi_{\mathcal{Y}} b$, где $b \in B$, и $f\varphi_E$, где $f \in mc(\mathcal{Y}, B)$, а E не конфинально в $\mathcal{Y}$, составляют основное множество в пространстве $mc(\mathcal{Y}, B)$. Действительно, так как для каждого $f \in mc(\mathcal{Y}, B)$ существует $\lim_{\mathcal{Y}} f_y = b$, то соответственно $\varepsilon > 0$ найдется y_ε, такая что

$$\|f_y - b\| < \varepsilon$$

для каждого $y > y_\varepsilon$. Если мы определим обобщенную последовательность g_ε равенством

$$g_\varepsilon = \varphi_{E_\varepsilon} b + f\varphi_{\mathcal{Y}\setminus E_\varepsilon} = \varphi_{\mathcal{Y}} b + f'\varphi_{\mathcal{Y}/E_\varepsilon},$$

где[15] $E_\varepsilon = \{y \in \mathcal{Y};\ y > y_\varepsilon\}$, то

$$\|g_\varepsilon - f\| < \varepsilon.$$

Необходимость и достаточность условий теоремы 5 вытекает теперь из теоремы 1.

Аналогично теоремам 5 и 3 доказываются следующие теоремы.

Теорема 6. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $Mmc(\mathcal{Y}, B) \to mc(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого* $b \in B$ *существует* $\lim_X U_x \varphi_{\mathcal{Y}} b$,

2° *для каждого* $f \in Mmc(\mathcal{Y}, B)$ *и неконфинального в* $\mathcal{Y}$ *множества* $E \subset Y$ *существует* $\lim_X U_x f \varphi_E$,

3° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Теорема 7. *Преобразование* (1) *является регулярным преобразованием типа* $mc(\mathcal{Y}, B) \to mc(X, B)$ (*типа* $Mmc(\mathcal{Y}, B) \to mc(X, B)$) *тогда и только тогда, когда*

1° $\lim_X U_x \varphi_{\mathcal{Y}} b = B$ *для каждого* $b \in B$,

2° $\lim_X U_x f \varphi_E = \Theta$ *для каждого* $f \in mc(\mathcal{Y}, B)$ ($f \in Mmc(\mathcal{Y}, B)$ *и неконфинального в* $\mathcal{Y}$ *множества* E (*множества* $E \subset Y$),

3° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

---

[13] Мы считаем меру счетного множества равной нулю.

[14] Здесь $(f\varphi_E)_y = f_y \varphi_E(y)$.

[15] Ясно, что множества $\mathcal{Y} \setminus E_\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, не конфинальны в $\mathcal{Y}$.

Замечание. Ясно, что $Mmc(У, B) \supseteq TMc(У, B)$. Если же пространство B конечномерно, то пространства $Mmc(У, B)$ и $TMc(У, B)$ совпадают (см. [10], стр. 596). Последнее обстоятельство очень важно в приложениях.

4. Преобразования класса $l(У, B)$. Определим члены обобщенной последовательности $\varphi_y b$ ($y \in У$, $b \in B$) равенством $(\varphi_y b)_{y'} = \varphi_y(y') b (y' \in У)$, где

$$\varphi_y(y') = \begin{cases} 1, & \text{если } y = y', \\ 0, & \text{если } y \neq y'. \end{cases}$$

Лемма 3. *Основным множеством класса $l(У, B)$ является множество $\{\varphi_y b\}$ ($b \in B$, $y \in У$).*

Доказательство. Действительно, пусть

$$f = \{f_y\}_{y \in У} \in l(У, B)$$

и

$$f_K = \sum_{y \in K} \varphi_y f_y,$$

где K — конечные подмножества множества $У$, направленные по включению. В этом случае по критерию Коши (см. [8], гл. VII, определение 9.4 и следствие 9.6)

$$\|f - f_K\| = \sum_{y \overline{\in} K} \|f_y\| < \varepsilon,$$

если только $K > K_0$.

Теорема 8. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа $l(У, B) \to mc(X, D)$ тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого $b \in B$ и $y \in У$ существует* $\lim_X U_x \varphi_y b$,

2° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Доказательство следует непосредственно из леммы 3 и теоремы 1.

5. Примеры. Применяя теорему 2 для случая интегральных преобразований (3), где интеграл понимается в смысле Лебега, получаем

Следствие 1. *Преобразование* (3) *является преобразованием типа $Mmc(R_+, R) \to mc(R_+, R)$ тогда и только тогда, когда*

1° *существует* $\lim_X \int\limits_0^\infty K(x, y)\,dy$,

2° *для каждого измеримого множества E из R_+, которое не имеет $+\infty$ как предельную точку, существует* $\lim_X \int_E K(x, y)\,dy$,

3° $\sup_X \int\limits_0^\infty |K(x, y)|\,dy < \infty$.

Доказательство. Докажем непрерывность линейных функционалов U_x, где $x \in R_+$, в выражении (3). У нас

$$\int\limits_0^\infty K(x, y) f(y)\,dy = \lim_{h \in R_+} U^h{}_x f \quad (x \in R_+),$$

где

$$U^h{}_x f = \int_0^h K(x, y) f(y)\, dy.$$

Так как $\operatorname{sgn} K(x, y) \in Mmc(R_+, R)$, то, положив для каждого фиксированного $x \in R_+$

$$f(y) = \operatorname{sgn} K(x, y),$$

для существования преобразования (3) при любой $f \in Mmc(R^+, R)$ получим, что необходимо выполнение условия

$$\int_0^\infty |K(x, y)|\, dy < \infty \qquad (x \in R_+).$$

Из этого условия следует непрерывность линейных функционалов U_x, где $x \in R_+$, на пространстве $Mmc(R_+, R)$. Поэтому можем применить[16] теорему 2, из которой непосредственно вытекает следствие 1. Отметим еще, что условие 3° следствия 1 также обеспечивает существование преобразования (3).

Мы можем исследовать и более общие интегральные преобразования

$$U_x f = \int_У f d\Phi_x = \int_У f(y) \Phi_x(dУ), \tag{4}$$

где $x \in X$, а интеграл понимается в смысле Говурина (см. [11], § 6). Здесь Φ_x аддитивные функции множества на алгебре Y подмножеств из $У$, т. е. $\Phi_x(E_1 + E_2) = \Phi_x(E_1) + \Phi_x(E_2)$ $(x \in X, E_1, E_2 \subset Y)$, удовлетворяющие следующим условиям: 1) $\Phi_x(E)$, где $x \in X$, а $E \subset Y$, являются линейными операторами из B в D, 2) для каждого $x \in X$ функция Φ_x имеет конечную полувариацию, т. е.

$$W\Phi_x(У) = \sup \|\sum_{i \leqslant k} \Phi_x(E_i) b_i\| < \infty \qquad (i \in N),$$

где верхняя грань берется по $\|b_i\| \leqslant 1$ и по всем делениям множества $У$ на конечное число попарно непересекающихся множеств $E_i (i \leqslant k)$ из Y. Тогда интеграл (4) существует для каждой вполне измеримой функции (определяется как предел интегралов от простых функций),

$$U_x \Phi_E b = \Phi_x(E) b \qquad (x \in X,\ b \in B,\ E \subset Y)$$

и

$$\|U_x\| = W\Phi_x(У) \quad (x \in X).$$

Из теоремы 3 вытекает тогда следующее

Следствие 2. *Преобразование* (4) *является регулярным пре-*

---

[16] Так как $|U_x f| = |\int_0^\infty K(x, y) f(y) dy| \leqslant \|f\| \int_0^\infty |K(x, y)| dy$, то, с одной стороны $\|U_x\| \leqslant \int_0^\infty |K(x, y)| dy$ $(x \in R_+)$. С другой стороны, $\|U_x\| \geqslant \int_0^\infty K(x, y) \operatorname{sgn} K(x, y) dy = \int_0^\infty |K(x, y)| dy$ для каждого фиксированного $x \in R_+$. Следовательно, $\|U_x\| = \int_0^\infty |K(x, y)| dy$ $(x \in R_+)$.

образованием типа $TMc(Y, B) \to mc(X, B)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\lim_X \Phi_x(Y)b = b$ *для каждого* $b \in B$,

2° $\lim_X \Phi_x(E)b = \Theta$ *для каждого* $b \in B$ *и неконфинального в* Y *множества* $E \subset Y$,

3° $\sup_X W\Phi_x(Y) < \infty$.

§ 3. Преобразования типов $\tau(Y, B) \to rc(X, D)$ и $\tau(Y, B) \to c(X, D)$

1. Для преобразований типа $\tau(Y, B) \to rc(X, D)$ основой является

Теорема 9. *Пусть* $\tau(Y, B)$ *— банахово пространство. Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $\tau(Y, B) \to rc(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого бесконечного подмножества* $X' \subset X$ *и* $f \subset \tau'(Y, B)$, *где* $\tau'(Y, B)$ *— основное множество пространства* $\tau(Y, B)$, *существует* $\lim_{X'} U_x f$,

2° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° теоремы 9 очевидна, так как $rc(X, D) \subset mc(X, D)$.

Достаточность условий теоремы 9 вытекает из доказательства достаточности теоремы 1 и определения пространства $rc(X, D)$.

Из теоремы 9, учитывая сказанное перед теоремой 4, следует

Теорема 10. *Пусть* $\tau(Y, B)$ *— банахово пространство. Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $\tau(Y, B) \to rc(N^m, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого сечения* F *из* N^m *и* $f \in \tau'(Y, B)$, *где* $\tau'(Y, B)$ *— основное множество пространства* $\tau(Y, B)$, *существует* $\lim_F U_x f$,

2° $\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Из этих теорем аналогично теоремам 2—8 получаются теоремы для пространств $TMc(Y, B)$, $rc(N^n, B)$, $mc(Y, B)$, $Mmc(Y, B)$ и $l(Y, B)$.

2. Преобразования типа $\tau(Y, B) \to c(X, D)$. Из теоремы 6.1 работы [10] мы непосредственно получаем следующую теорему.

Теорема 11. *Пусть* $\tau(Y, B)$ *— банахово пространство. Если* $\tau(Y, B)$ *конечномерно, или* X *— счетное направленное множество, или*[17] $\lambda(X) > \mu(\tau)$, *то преобразование* (1) *является пре-*

---

[17] Для направленного множества X символ $\lambda(X)$ служит для обозначения порядкового числа μ, для которого подмножество из X с мощностью $\varkappa_\mu$ не имеет верхнюю грань в X. Например, $\lambda(N) = 0$.

Если $\tau(Y, B)$ не конечномерно, то $\mu(\tau)$ — наименьшее из порядковых чисел, для которых в $\tau(Y, B)$ существует основное множество с мощностью $\varkappa_\mu$.

образованием типа $\tau(У, B) \to c(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *преобразование* (1) *является преобразованием типа* $\tau'(У, B) \to c(X, D)$ *для некоторого основного множества* $\tau'(У, B)$ *из* $\tau(У, B)$,

2° $\lim\sup_X \|U_x\| < \infty$.

Аналогично теоремам 2—8 мы из этой теоремы получаем результаты для пространств $TMc(У, B)$, $rc(N^n, B)$, $mc(У, B)$, $Mmc(У, B)$ и $l(У, B)$.

3. Преобразования класса $m(У, B)$. Пусть $У$ — счетное множество. Исследуем теперь банахово пространство $m(У, B)$ с нормой $\|f\| = \sup_У \|f_y\|$. На множестве тех $f \in m(У, B)$, для которых $\|f\| \leqslant 1$ определяем вторую норму

$$\|f\|^* = \Sigma_У a_y \|f_y\|, \tag{5}$$

где $\Sigma_У a_y < \infty$, а $0 < a_y (y \in У)$ — действительные числа. Банахово пространство, определенное нормой (5) в сфере $\|f\| \leqslant 1$ обозначим $m_s(У, B)$. Это — пространство Сакса (см. [12]).

Аналогично как в работе [12], параграф 1.52, проверяется, что в пространстве $m_S(У, B)$ выполняется следующее условие

(Σ_2). *Для любого элемента* $f_0 \in m_S(У, B)$ *и* $\varrho > 0$ *существует такое* $\delta > 0$, *что каждый* $f \in m_S(У, B)$, *для которого* $\|f\|^* < \delta$, *можно представить в виде* $f = f_1 - f_2$, *где*[18] $f_1, f_2 \in K(f_0, \varrho)$.

В дальнейшем через $w(f)$ обозначается[19] колебание обобщенной последовательности $\{U_x f\}_{x \in X}$ в точке f, т. е.

$$w(f) = \lim_X \sup_{x', x'' \geqslant x} \|U_{x'} f - U_{x''} f\|.$$

Символом U^* будем обозначать поле суммируемости преобразования (1), т. е.

$$U^* = \{f \in m_s(У, B) : w(f) = 0\}.$$

Через σ_0 обозначается наибольшее число σ, для которого множество $\{f \in m_S(У, B) : w(f) \geqslant \sigma\}$ является резидуальным[20].

Символом μ_0 обозначается

$$\mu_0 = \lim_{\varrho \to 0} \sup_{X, \|f\|^* \leqslant \varrho} \|U_x f\|.$$

Лемма 4. *Имеет место неравенство* $\mu_0 \leqslant 2\sigma_0$.

Доказательство. Достаточно исследовать случай

---

[18] Через $K(f_0, \varrho)$ обозначаем открытую сферу, с центром f_0 и радиусом ϱ, в пространстве $m_S(У, B)$.

[19] В настоящем параграфе в основном сохранены обозначения В. Орлича из статей [12, 13].

Так как $U_x (x \in X)$ являются непрерывными линейными операторами из пространства $m(У, B)$ в D, то $U_x (x \in X)$ также непрерывные линейные операторы из пространства $m_S(У, B)$ в D.

[20] Множество называют *резидуальным* (или вычетным), если его дополнение является множеством первой категории.

$\sigma_0 < \infty$. Выберем $\varepsilon > 0$ произвольно. Предположим, что $\sigma_0 < \sigma < \sigma_0 + \varepsilon$ и пусть

$$S^{g_x}{}_\sigma = \{f : \sup_{x', x'' \geqslant x} \|U_{x'} f - U_{x''} f\| \leqslant \sigma - g_x;$$

$$\{g_x\} \in rc_0(X, R),\ g_x \geqslant 0,\ \lim_{X'} g_x = \lim_X g_x = 0\}.$$

Тогда эти множества являются замкнутыми, $S_\sigma = \{f : w(f) < \sigma\} = \Sigma_X S^{g_x}{}_\sigma$, а так как S_σ — множество второй категорий, то по теореме Бэра одно из множеств $S^{g_x}{}_\sigma (x \in X)$, скажем $S^{g_{x_1}}{}_\sigma$, содержит некоторую сферу $K(f_0, \varrho)$. Ввиду условия (Σ_2) существует $\delta > 0$ такое, что из неравенства $\|f\|^* < \delta$ следует представление $f = f_1 - f_2$, где $f_1, f_2 \in K(f_0, \varrho)$. Следовательно, для всех f с $\|f\|^* < \delta$ имеем

$$\sup_{x', x'' \geqslant x_1} \|U_{x'} f - U_{x''} f\| \leqslant \sup_{x', x'' \geqslant x_1} \|U_{x'} f_1 - U_{x''} f_1\| +$$

$$+ \sup_{x', x'' \geqslant x_1} \|U_{x'} f_2 - U_{x''} f_2\| \leqslant 2\sigma - 2g_{x_1} < 2\sigma_0 + 2\varepsilon,$$

а

$$\sup_{x' \geqslant x_1} \|U_{x'} f\| \leqslant \sup_{x' \geqslant x_1} \|U_{x'} f - U_{x_1} f\| + \|U_{x_1} f\| <$$

$$< 2\sigma_0 + 2\varepsilon + \|U_{x_1} f\|.$$

Таким образом, для достаточно малых $\|f\|^*$ получаем

$$\mu_0 - \varepsilon \leqslant \sup_{x' \geqslant x_1} \|U_{x'} f\| \leqslant 2\sigma_0 + 3\varepsilon.$$

Следовательно, $\mu_0 \leqslant 2\sigma_0$, ибо $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно.

Лемма 5. а) *Если* $\mu_0 = 0$, *то* U^* *замкнуто в* $m_S(\mathcal{Y}, B)$. б) *Если* $\mu_0 > 0$, *то* U^* — *множество первой категории.*

Доказательство. а) Так как

$$\sup_{x', x'' \geqslant x} \|U_{x'} f - U_{x''} f\| \leqslant 2 \sup_X \|U_x - f\|,$$

то из $\mu_0 = 0$ вытекает непрерывность колебания $w(f)$ в точке $f = \Theta$. Тогда

$$\lim_{\nu \to 0} w(\nu f) = \Theta \text{ для каждого } f \in m_S(\mathcal{Y}, B).$$

Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\nu_0 > 0$, что при $\nu > \nu_0$, ввиду линейности операторов $U_x (x \in X)$,

$$w(f) < \frac{\varepsilon}{|\nu|} < \infty \text{ для каждого } f \in m_S(\mathcal{Y}, B).$$

Теперь из неравенства

$$|w(f) - w(g)| \leqslant 2w\left(\frac{t-g}{2}\right), \quad f, g \in m_S(\mathcal{Y}, B),$$

справедливого для каждых конечных $w(f)$ и $w(g)$, вытекает непрерывность $w(f)$ для каждого $f \in m_S(\mathcal{Y}, B)$, откуда заключаем, что U^* замкнуто в $m_S(\mathcal{Y}, B)$.

б) Если $\mu_0 > 0$, то из леммы 4 следует неравенство $0 < \mu_0 \leqslant 2\sigma_0$, т. е. множество $\{f \in m_S(\mathcal{Y}, B) : w(f) \neq 0\}$ резидуально.

Теорема 12. *Пусть $У$ — счетное направленное множество. Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $m_S(У, B) \to c(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого* $b \in B$ (*где* $\|b\| \leqslant 1$) *и* $y \in У$ существует $\lim_X U_x \varphi_y b$,

2° $\mu_0 = 0$.

Доказательство. Необходимость условия 2° теоремы 12 вытекает из леммы 5б, так как $m_S(У, B)$, как банахово пространство, является множеством второй категории.

Достаточность. Покажем, что множество $\{\varphi_y b\} (y \in У, b \in B, \|b\| \leqslant 1)$ является основным множеством в пространстве $m_S(У, B)$. Действительно, пусть $f = \{f_y\}_{y \in У} \in m_S(У, B)$ и

$$f_K = \Sigma_K \varphi_y f_y,$$

где K — конечные подмножества в $У$, направленные по включению. Тогда по критерию Коши

$$\|f - f_K\|^* = \Sigma_{y \overline{\in} K} a_y \|f_y\| < \varepsilon,$$

если только K достаточно большое. Теперь следует применить лемму 5а.

Из теоремы 12, учитывая определение числа μ_0, вытекает

Теорема 13. *Пусть $У$ — счетное направленное множество. Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $m(У, B) \to c(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого* $b \in B$ *и* $y \in У$ *существует* $\lim_X U_x \varphi_y b$,

2° $\lim_{\rho \to 0} \sup_{X, \Sigma_y a_y \|f_y\| \leqslant \rho} \|U_x f\| = 0$, *где* $\Sigma y a_y < \infty$, $0 < a_y$ — *действительные числа.*

3. Пример. Применим теорему 12 для случая обобщенных матричных преобразований (2), где a_{nk} — непрерывные линейные функционалы на B. Из существования преобразования (2) вытекает непрерывность линейных функционалов $U_n (n \in N)$. В этом случае, как известно (см. [2])

$$\|U\| = \sup_{\|f\|^* \leqslant 1} \sup_N |U_n f| = \sup_N \sum_N \|a_{nk}\|,$$

откуда для данного $\varrho > 0$ вытекает справедливость неравенств

$$\sup_N \sum_{k=\nu}^{\infty} \|a_{nk}\| \leqslant \sup_{N, \|f\|^* \leqslant \rho} |U_n f|, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\nu} \sup_N \sum_N \|a_{nk}\| \leqslant \sup_{N, \|f\|^* \leqslant \rho} |U_n f|, \tag{7}$$

если только ν достаточно большое. С другой стороны, соответственно ν можно найти число $\varrho \geqslant 0$ настолько малым, что

$$\sup_{N, \|f\|^* \leqslant \rho} |U_n f| \leqslant \frac{1}{\nu} \sup_N \sum_N \|a_{nk}\| + \sup_N \sum_{k=\nu}^{\infty} \|a_{nk}\|. \tag{8}$$

Следовательно, если $\sup_N \Sigma_N \|a_{nk}\| < \infty$, то из (6) и (8) вытекает, что

$$\mu_0 = \lim_{\nu \in N} \sup_N \sum_{k=\nu}^{\infty} \|a_{nk}\|.$$

Так как из условий (7) и (8) вытекает, что условие $\mu_0 = 0$ эквивалентно условиям $\sup_N \Sigma_k \|a_{nk}\| < \infty$ и $\lim_{\nu \in N} \sup_N \Sigma_{k=\nu}^{\infty} \|a_{nk}\| = 0$, то справедливо следующее предложение.

Следствие 3. *Преобразование* (2) *является преобразованием типа* $m(N, B) \to c(N, B)$ *тогда и только тогда, когда*

1° *для каждого* $b \in B$ *и* $k \in N$ *существует* $\lim_N a_{nk} b$,

2° $\lim_{\nu \in N} \sup_N \sum_{k=\nu}^{\infty} \|a_{nk}\| = 0$.

3° $\sup_N \sum_N \|a_{nk}\| < \infty$.

§ 4. Преобразования типов $\tau(У, B) \to l(X, D)$ и $\tau(У, B) \to m(X, D)$

1. Для преобразований типа $\tau(У, B) \to l(X, D)$ основной является

Теорема 14. *Пусть* $\tau(У, B)$ — *банахово пространство. Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $\tau(У, B) \to l(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_X \|U_x f\| \leqslant M \|f\| \tag{9}$$

для каждого f *из некоторого всюду плотного множества в* $\tau(У, B)$.

Доказательство. Необходимость. Из теоремы 2 работы [14] вытекает, что оператор U, где

$$Uf = \{U_x f\}_{x \in X},$$

является непрерывным линейным оператором из $\tau(У, B)$ в $l(X, D)$. Это, учитывая определение нормы в $l(X, D)$, равносильно утверждению

$$\sum_X \|U_x f\| \leqslant M \|f\| \text{ для каждого } f \in \tau(У, B), \tag{10}$$

где постоянное $M > 0$ не зависит от f. Отсюда и вытекает необходимость условия (9).

Достаточность. Пусть для некоторого направленного множества Z

$$\lim_Z f_z = f,$$

где $f \in \tau(У, B)$, а $f_z \in \tau'(У, B)$, $\tau'(У, B)$ — всюду плотно в $\tau(У, B)$. Тогда

$$\sum_K \|U_x f\| = \sum_K \|U_x \lim_Z f_z\| = \lim_Z \sum_K \|U_x f_z\| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_Z M \|f_z\| = M \|f\|,$$

где K — конечные подмножества X, направленные по включению. В этом случае

$$\sum_Z \|U_x f\| = \sup_{K \in X} \sum_K \|U_x f\| \leqslant M \|f\| < \infty.$$

Теорема 15. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $TMc(У, B) \to l(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_X \|U_x(\sum_{i\leqslant k} \varphi_{E_i} b_i)\| \leqslant M \sup_{i\leqslant k} \|b_i\|$$

для каждого $b_i \in B$ *и* $E_i \in Y$, *где* $i \in N$.

Доказательство следует из определения пространства $TMc(У, B)$ и из теоремы 14.

Теорема 16. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $Mmc(У, B) \to l(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_X \|U_x \sum_{i\in N} \varphi_E\, b_i\| \leqslant M \sup_N \|b_i\| \quad (b_i \in B,\ E_i \subset Y).$$

Доказательство вытекает непосредственно из леммы 2 и теоремы 14.

Теорема 17. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $l(У, B) \to l(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\Sigma_X \|U_x \varphi_y b\| \leqslant M \|b\| \text{ для каждого } b \in B \text{ и } y \in У. \qquad (11)$$

Доказательство. Необходимость условия (11) следует из (10).

Достаточность условия (11) вытекает из теоремы 14, доказательства леммы 3 и из неравенства

$$\sum_X \|U_x \sum_K \varphi_y f_y\| \leqslant \sum_K \sum_X \|U_x \varphi_y f_y\| \leqslant$$
$$\leqslant M \sum_K \|f_y\| = M \|\sum_K \varphi_y f_y\|,$$

где K — конечные подмножества X, направленные по включению.

2. Для преобразований типа $\tau(У, B) \to m(X, D)$ основной является

Теорема 18. *Пусть* $\tau(У, B)$ — *банахово пространство. Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $\tau(У, B) \to m(X, D)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sup_X \|U_x\| < \infty. \qquad (12)$$

Доказательство. Из [2] (стр. 79, следствие 21) вытекает, что условие (12) эквивалентно условию

$$\sup_X \|U_x f\| < \infty \text{ для каждого } f \in \tau(У, B).$$

Это и доказывает теорему.

Из теоремы 18 непосредственно следует

Теорема 19. *Преобразование* (1) *является преобразованием типа* $m(У, B)$ (*или* $mc(У, B)$, *или* $Mmc(У, B)$, *или* $TMc(У, B)$, *или* $rc(У, B)$, *или* $l(У, B)) \to m(X, D)$ *тогда и только тогда, когда имеет место* (12).

3. Пример. Если преобразование (1) является матричным преобразованием последовательностей в банаховых пространствах в двойные последовательности в банаховых пространствах, т. е.

$$U_{mn}f = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mnk} f_k \qquad (m, n \in N), \tag{13}$$

где a_{mnk} — непрерывные линейные операторы из B в D, то теорема 15 принимает следующий вид

Следствие 4. *Преобразование* (13) *является преобразованием типа* $c(N, B) \to l(N^2, D)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\sum_{m,n} \|\sum_k a_{mnk} b\| \leqslant M \|b\|$ *для каждого* $b \in B$,

2° $\sum_{m,n} \|\sum_{k \leqslant l} a_{mnk} f_k\| \leqslant M \sup_{k \leqslant l} \|f_k\|$ *для каждого* $l \in N$ *и* $f \in c(N, B)$.

Доказательство. Из требования существования преобразования (13) (см. [5], стр. 197) следует выполнение условия

$$\|\sum_{k \leqslant l} a_{mnk} f_k\| \leqslant M^{*}_{mn} \|f\| = M_{mn} \sup_N \|f_k\|$$
$$(m, n, l \in N, \ f \in c(N, B)),$$

откуда, в свою очередь, вытекает непрерывность операторов $U_{mn} (m, n \in N)$ в выражении (13). Необходимость и достаточность условий следствия 4 вытекает теперь из теоремы 15 и из факта, что при $TMc(N, B) = c(N, B)$ являются простыми функциями функций

$$f^l = \sum_{k \leqslant l} \varphi_k (f_k - \lim_N f_k) + \varphi_N \lim_N f_k$$
$$(l \in N, \ f = \{f_k\}_N \in c(N, B)).$$

Условия 1° и 2° следствия 4 обеспечивают и существование преобразования (13).

Отметим, что следствие 4 является обобщением на банахово пространство известной теоремы Пейеримхоффа (см. [6]).

Литература

1. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
2. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, т. I. Москва, 1962.
3. Кангро Г., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1956, **5**, 108—128.
4. Кулль И., Умножение суммируемых двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 3—59.
5. Кулль И., Матричные преобразования классов двойных последовательностей в банаховых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 193—208.
6. Кулль И., Линейные преобразования некоторых классов двойных последовательностей. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, 1961. **10**, 13—21.
7. Agnew, R. P., Propeties of generalized definitions of limit. Bull. Amer. Math. Soc., 1939, **45**, 689—730.
8. Choquet, G., Cours d'analyse, v. II. Paris, 1964.

9. Day, M. M., Regularity of function-to-function transformations. Bull. Amer. Math. Soc., 1939, 45, 296—303.
10. Day, M. M., Operations in Banach spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 51, 583—608.
11. Gowurin, M., Über die Stieltjiesche Integration abstrakter Funktionen. Fundam. math., 1936, 27, 254—268.
12. Orlicz, W., Linear operations in Saks spaces (I). Studia math., 1950, 11, 237—272.
13. Orlicz, W., Linear operations in Saks spaces (II). Studia math., 1955. 15, 1—25.
14. Taylor, A. E., Extensions of a Theorem of Hellinger and Toeplitz. Math. Z., 1956, 66, 53—57.
15. Wilansky, A., Functional analysis. New York—Toronto—London, 1964.

Поступило
31 III 67

ÜLDISTATUD JADADE TEISENDUSED

J. Lamp

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse üldistatud jadade teisendusi kujul (1), kus U_x ($x \in X$ — suunatud hulk) on pidevad lineaarsed operaatorid mingist üldistatud jadade klassist $\tau(\mathcal{Y}, B)$ ($\mathcal{Y}$ — suunatud hulk, B — Banachi ruum) Banachi ruumi D. Teisendust (1) nimetatakse teisenduseks tüüpi $\tau(\mathcal{Y}, B) \to \sigma(X, D)$, kui iga üldistatud jada $f = \{f_y\}_Y \to \tau(\mathcal{Y}, B)$ teisendatakse (1) abil üldistatud jadaks $U(f) = \{U_x(f)\}_X \in \sigma(X, D)$. Leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused järgmiste teisenduste tüüpide jaoks: $\tau(\mathcal{Y}, B) \to mc(X, D)$, $\tau(\mathcal{Y}, B) \to rc(X, D)$, $\tau(\mathcal{Y}, B) \to c(X, D)$, $\tau(\mathcal{Y}, B) \to l(X, D)$, $\tau(\mathcal{Y}, B) \to m(X, D)$, kus $\tau(\mathcal{Y}, B)$ on üks klassidest $TMc(\mathcal{Y}, B)$, $rc(N^n, B)$, $mc(\mathcal{Y}, B)$, $Mmc(\mathcal{Y}, B)$, $l(\mathcal{Y}, B)$. Peale selle leitakse, millistel tingimustel on teisendus (1) tüüpi $m(\mathcal{Y}, B) \to c(X, D)$, kus $\mathcal{Y}$ on loenduv hulk.

Vaadeldav teisendus (1) on küllalt üldine, sisaldades erijuhtudena maatriksteisendusi Banachi ruumidel [3], kordsete ridade teisendusi [4, 5, 6], poolpidevaid teisendusi [7], integraalteisendusi [7, 9] jt.

TRANSFORMATIONEN VERALLGEMEINTER FOLGEN

J. Lamp

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden Transformationen verallgemeinter Folgen in der Form (1) betrachtet, wo U_x ($x \in X$ — gerichtete Menge) die linearen stetigen Operationen aus einer Klasse verallgemeinter Folgen $\tau(\mathcal{Y}, B)$ ($\mathcal{Y}$ — gerichtete Menge, B — Banachscher Raum) in den Banachschen Raum D darstellen. Die Transformation (1) wird eine Transformation vom Typ $\tau(\mathcal{Y}, B) \to \sigma(X, D)$ genannt, wenn jede verallgemeinerte Folge $f = \{f_y\}_Y \in \tau(\mathcal{Y}, B)$

mit Hilfe von (1) in eine verallgemeinerte Folge $U(f) = \{U_x(f)\}_X \in \sigma(X, D)$ transformiert wird. Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die folgenden Typen der Transformationen gefunden: $TMc(Y, B) \to mc(X, D)$, $Mmc(Y, B) \to mc(X, D)$, $mc(Y, B) \to mc(X, D)$, $l(Y, B) \to mc(X, D)$. $TMc(Y, B) \to rc(X, D)$, $mc(Y, B) \to rc(X, D)$, $l(Y, B) \to rc(X, D)$, $Mmc(Y B) \to rc(X, D)$, $TMc(Y, B) \to c(X, D)$, $Mmc(Y, B) \to m(X, D)$, $mc(Y, B) \to c(X, D)$, $l(Y, B) \to c(X, D)$, $m(Y, B) \to c(X, D)$, $TMc(Y, B) \to l(X, D)$, $Mmc(Y, B) \to l(X, D)$, $mc(Y, B) \to l(X, D)$, $l(Y, B) \to l(X, D)$, $TMc(Y, B) \to m(X, D)$, $rc(Y, B) \to m(X, D)$, $Mmc(Y, B) \to m(X, D)$, $mc(Y, B) \to m(X, D)$, $l(Y, B) \to m(X, D)$, $m(Y, B) \to m(X, D)$.

Die betrachtete Transformation (1) ist ganz allgemein: sie umfaßt als Sonderfälle verallgemeinerte Matrixtransformationen [3], Transformationen von Mehrfachfolgen [4, 5, 6], halbstetige Transformationen [7], Integraltransformationen [7, 9] u. a.

О σ-ПОЛЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Ю. Ламп

Кафедра математического анализа

§ 1. Вводные замечания и основные понятия

1. В настоящей статье исследуются преобразования обобщенных последовательностей[1] $f = \{f_y\}_У$ элементов банахового пространства B в обобщенные последовательности

$$Uf = \{U_x f\}_X \tag{1}$$

элементов банахового пространства D, где $U_x (x \in X)$ — непрерывные линейные операторы из некоторого класса $\tau(У, B)$ обобщенных последовательностей $f = \{f_y\}_У$ в D, являющейся линейным топологическим пространством.

Определение 1. *Пусть $\tau = \tau(У, B)$ и $\sigma = \sigma(X, D)$ — некоторые классы обобщенных последовательностей. Преобразование U называется преобразованием типа $\tau \to \sigma$, если каждая обобщенная последовательность $f \in \tau$ преобразовывается при помощи* (1) *в обобщенную последовательность $Uf \in \sigma$.*

В статье [6] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование U являлось преобразованием типа $\tau \to \sigma$, где классами τ и σ взяты многие важные классы обобщенных последовательностей.

Определение 2. *Множество*

$$U^{**} = U^{**}_x (У, B) = \{f = \{f_y\}_У : \exists\, U_x f\}$$

будем называть псевдополем оператора U_x. Множество

$$U^{**} = U^{**} (У, B) = \bigcap_{x \in X} U^{**}_x (У, B)$$

назывaем посевдополем преобразования U, определенного соотношением (1).

---

[1] Здесь в основном сохранена символика статьи [6]. Символ $\{f_y\}_У$ означает $\{f_y\}_{y \in У}$.

Из определения обобщенной последовательности (см. [2], стр. 38) ясно, что X и $У$ — направленные множества.

Во всей настоящей статье предполагается, что *в соотношении (1) каждый оператор U_x непрерывен на своем псевдополе.*

Определение 3. *Множество*[2]

$$\sigma U = \sigma(X, D)\, U[У, B] = \{f = \{f_y\}_У : f \in U^{**}(У, B),\ Uf \in \sigma(x, D)\}$$

будем называть σ-полем (точнее $\sigma(X, D)$-полем) преобразования U. Множество

$$U^* = cU = c(X, D)\, U[У, B]$$

называется полем суммируемости преобразования U.

В добавок к пространствам $c(У, B)$, $m(У, B)$, $mc(У, B)$, $rc(У, B)$, определенных в статье [6], будем рассматривать также следующие пространства:

$$rc_0(У, B) = \{f = \{f_y\}_У : f \in rc(У, B), \lim_У f_y = \Theta\},$$

$$rcb(У, B) = \{f = \{f_y\}_У : \exists\ rcb\text{-}\lim_У f_y\},$$ т. е. множество $\{y : \|f_y - rcb\text{-}\lim_У f_y\| > \varepsilon\}$ является конечным для каждого $\varepsilon > 0$,

$$rcb_0(У, B) = \{f = \{f_y\}_У : f \in rcb(У, B),\ rcb\text{-}\lim_У f_y = \Theta\}.$$

Все эти пространства, кроме $c(У, B)$, где[3] $У \neq N$, оказываются банаховыми пространствами с нормой $p(f) = \sup_У \|f_y\|$.

2. Решением вопросов, связанных с полем суммируемости $U^* = c(N, R)\, U[N, R]$ матричных преобразований

$$Uf = \{\textstyle\sum_{k \in N} a_{nk} f_k\}_N$$

занимались Мазур и Орлич [14, 15], Виланский [17], Целлер [19, 21], Шнайдер [16] и др. Юримяэ в работах [7, 8] исследовал поля суммируемости $U^* = c(N, B)\, U[N, D]$ матричных преобразований в банаховых пространствах

$$Uf = \{\textstyle\sum_{k \in N} A_{nk} f_k\}_N,$$

где A_{nk} — непрерывные линейные операторы из банахового пространства B в банахово пространство D, а в работе [13] изучал rc-поле матричных преобразований

$$Uf = \{\textstyle\sum_{(k,l) \in N^2} a_{mnkl} f_{kl}\}_{(m,n) \in N^2}$$

двойных последовательностей, т. е. поле $rc(N^2, R)\, U[N^2, R]$. В работах [9, 10] он рассматривал вопросы относящиеся к полям суммируемости матричных преобразований ряда в ряд. Влодарский [20] изучал $c([0, T), R)$ — поле непрерывных матричных преобразований, т. е. преобразований

$$Uf = \{\textstyle\sum_{k \in N} a_k(x) f_k\}_{[0,T)},$$

---

[2] Надо подчеркнуть, что краткие обозначения σU, U^{**} и особенно U^* употребляются только в случае, если не может возникнуть недоразумения. Аналогично поступаем с символами $\tau = \tau(У, B)$, $\sigma = \sigma(X, D)$, $m = m(У, B)$ и т. д.

[3] Здесь $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, N^n — множество всех векторов $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, где $y_k \in N$ $(k \leqslant n)$, а R — множество всех действительных чисел.

где $a_k(x)$ $(k \in N)$ — непрерывные функции на интервале $[0, T)$, где $T \leqslant \infty$.

В § 2 настоящей статьи выясняются свойства σ-поля преобразования (1), которое является не только обобщением всех вышеупомянутых преобразований, но и ряда других, например, матричных преобразований кратных последовательностей в банаховых пространствах, полунепрерывных преобразований (см. [6]). Оказывается, что σ-поле преобразования (1) является *ЛВТК*-пространством. Понятие *ЛВТК*-пространства является обобщением введенного Целлером [21] понятия *FK*-пространства.

Виланский [17] впервые разделил все матричные преобразования типа $c(N, R) \to c(N, R)$ на конулевые и корегулярные. Эти понятия на матричные преобразования типа $c(N, B) \to c(N, D)$ обобщил Юримяэ [7]. В § 3 настоящей статьи эти понятия распространяются для преобразований типа $\tau(Y, B) \to \sigma(X, D)$ обобщенных последовательностей и выясняется топологическое значение этих понятий в таком общем случае. Полученные результаты действительны при некоторых ограничениях на σ-поле преобразования (1), что обусловлено недостаточно широкой областью применения теоремы о замкнутом графике.

В § 4 дается общий вид непрерывного линейного функционала на σ-поле преобразований, данных соотношением (1), а в § 5 изучаются некоторые вопросы совместности преобразований обобщенных последовательностей.

§ 2. Структура σ-поля

1. Обобщая определенное Целлером понятие *FK*-пространства[4], даем следующее

Определение 4. *ЛВТК-пространством называем полное отделимое локально выпуклое топологическое пространство обобщенных последовательностей* $f = \{f_y\}_Y$, *в котором имеет место сходимость по координатам, т. е. пространство* E, *в котором выполнены следующие условия:*

1° E *— векторое пространство над* R,

2° E *снабжено локально выпуклой топологией*[5], *определенной семейством полунорм* $\{p_i\}_I$,

3° *из* $p_i(f) = 0$ $(i \in I)$ *вытекает* $f = \Theta$, *или, что же самое, для каждого* $f \neq \Theta$, *где* $f \in E$, *существует по крайней мере одна полунорма* p_i, *для которой*[6] $p_i(f) \neq 0$,

---

[4] Напомним, что *FK*-пространством называется полное отделимое метрическое локально выпуклое пространство последовательностей, в котором имеет место сходимость по координатам.

[6] См. [1], стр. 121.

[6] См [1], стр. 122, предложение 5.

4° *оно полное пространство, т. е. каждая обобщенная фундаментальная последовательность*[7] *имеет обобщенную предельную точку,*

5° *из сходимости* $f^z \to f$ *в* E *вытекает* $\|f^z_y - f_y\| \to 0$, *где* $f^z = \{f^z_y\}_У$, $z \in Z$, *причем* Z — *направленное множество.*

Метрическое ЛВТК-пространство, т. е. ЛВТК-пространство, топологию которого можно задать не более чем счетным числом полунорм[8], *называем обобщенным FK-пространством.*

Пример 1. Пространство $S = S(У, B)$ всех обобщенных последовательностей $f = \{f_y\}_У$ является *ЛВТК*-пространством с полунормами

$$\|f_y\| \ (y \in У). \tag{2}$$

Частным случаем обобщенного *FK*-пространства является всякое банахово пространство обобщенных последовательностей, в котором имеет место сходимость по координатом. Топология такого пространства задается тогда одной полунормой — нормой.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma(X, D)$ — *ЛВТК-пространство, топология которого определена семейством полунорм* $\{q_j\}_J$, *а для каждого* $x \in X$ *псевдополе* $U^{**}{}_x(У, B)$ *оператора* U_x — *ЛВТК-пространство с семейством полунорм* $\{p_{ix}\}_{i \in I}$. *Тогда псевдополе* $U^{**}(У, B)$ *преобразования* U, *заданного соотношением* (1), *является ЛВТК-пространством с полунормами*

$$p_{ix}(f) \ (i \in I, \ x \in X), \tag{3}$$

а σ-поле преобразования U — *ЛВТК-пространством с полунормами* (3) *и*

$$q_j(Uf) \ (j \in J). \tag{4}$$

Доказательство аналогично доказательству теорем 4.7 и 4.8 работы Целлера [21], с заменой непрерывных линейных функционалов на непрерывные линейные операторы, а последовательностей — на обобщенные последовательности.

Следствие 1. Пусть $\sigma(X, D)$ — *ЛВТК*-пространство с полунормами $\{q_j\}_J$. Тогда поле σU преобразования (1), для которого $U^{**}(У, B) = S(У, B)$, является *ЛВТК*-пространством с полунормами (2) и (4).

Доказательство вытекает непосредственно из теоремы 1 и примера 1.

3. В дальнейшем через $\mathfrak{F}(У)$ будем обозначать множество всех конечных подмножеств из $У$, направленное по включению.

Пример 2. Пусть

$$Uf = \{\textstyle\sum_{y \in У} A_{xy} f_y\}_X, \tag{5}$$

где A_{xy} — непрерывные линейные операторы из B в D. Суммы

[7] См. [2], стр. 39.

[8] См. [1], стр. 122, предложение 6.

$$U_x f = \sum_y A_{xy} f_y \tag{6}$$

означают, что для каждого $x \in X$

$$V_x f = \{U_{xK} f\}_{K \in \mathfrak{F}(У)} \in mc(\mathfrak{F}(У), D), \tag{7}$$

где

$$U_{xK} f = \sum_{y \in K} A_{xy} f_y .$$

Надо отметить, что условие (7) является ограничением на суммы (6), потому, что у Шокке (см. [11], гл. VII, определение 9.1),

$$V_x f \in c(\mathfrak{F}(У), D) \tag{8}$$

для каждого $x \in X$, а $c \supset mc$. Но если $D = R$, то условия (7) и (8) эквивалентны (см. [11], гл. VII, теоремы 8.2 и 8.13).

Так как U_{xK} являются непрерывными линейными операторами из S в D, то из следствия 1 вытекает, что для каждого $x \in X$ пространство $mc(\mathfrak{F}(У), D)\, V_x[У, B] = U^{**}{}_x(У, B)$ является *ЛВТК*-пространством с полунормами (2) и

$$\sup_{K \in \mathfrak{F}(У)} \| \sum_K A_{xy} f_y \|.$$

Так как

$$\|U_x f\| = \|\lim_{\mathfrak{F}(У)} \sum_K A_{xy} f_y\| \leqslant \sup_{\mathfrak{F}(У)} \|\sum_K A_{xy} f_y\|,$$

то каждый оператор $U_x (x \in X)$ в выражении (6) является непрерывным линейным оператором на своем псевдополе $U^{**}{}_x$. Теперь при помощи теоремы 1 и следствия 1 мы получаем следующее предложение.

Теорема 2. *Пусть $\sigma(X, D)$ — ЛВТК-пространство с полунормами $\{q_j\}_J$. Тогда σ-поле преобразования U, данного соотношением* (5), *является ЛВТК-пространством с полунормами*

$$\|f_y\| \quad (y \in У),$$

$$\sup_{\mathfrak{F}(У)} \|\sum_K A_{xy} f_y\| \qquad (x \in X), \tag{9}$$

$$q_j(\{\Sigma_{y \in У} A_{xy} f_y\}_X) \quad (j \in J). \tag{10}$$

Если для преобразования (5) *псевдополе $U^{**} = S$, то полунормы* (9) *можно опустить.*

Так как преобразование (5) содержит в себе преобразования кратных последовательностей на банаховых пространствах (случай $У = N^n$, $X = N^m$), а также полунепрерывные преобразования (случай $B = D = R$, $У = N$, $X = R^+$), то из теоремы 2 вытекают соответственные теоремы и для этих преобразований.

Примечание. Надо подчеркнуть, что определение суммы (8), если $У = N^n$, не равносильно определению суммы по Прингсехейму в этом случае, так как сумма кратного ряда определяется как предел

$$\sum_{N^n} f_y = \lim_{z \in N^n} \sum_{y \leqslant z} f_y, \tag{11}$$

где сходимость частичных сумм ряда понимается в смысле сходимости в пространстве $c(N^n, B)$. Аналогично как в работе [5] можно доказать, что последнее условие эквивалентно сходимости частичных сумм ряда в смысле сходимости в $mc(N^n, B)$.

Как видно из рассуждений перед теоремой 2, наше доказательство остается в силе и для (11), если только заменить условие $y \in K$ условием $y \leqslant z$.

§ 3. Конулевые и корегулярные преобразования

1. В настоящем параграфе мы ограничимся бочечными *ЛВТК*-пространствами. Напомним (ср. [1], стр. 143), что локально выпуклое топологическое векторное пространство E называется бочечным, если каждое замкнутое поглощающее уравновешенное выпуклое множество в E есть окрестность нуля.

Пример 3. Всякое F-пространство является бочечным (см. [1], стр. 144). Бочечным является также всякое локально выпуклое топологическое пространство второй категории (см. [12], стр. 428, теорема 6.2.2).

В дальнейшем большое значение имеет

Лемма 1. *Пусть E_1 — конечномерное ЛВТК-пространство при ЛВТК-пространстве E_2 или E_1 — бочечное ЛВТК-пространство при обобщенном FK-пространстве E_2. Если $E_1 \subset E_2$, то из сходимости обобщенной последовательности $\{f^z\}_Z$ к f в пространстве E_1 вытекает сходимость $\{f^z\}_Z$ к f и в пространстве E_2.*

Доказательство. Исследуем единичное отображение I пространства E_1 в E_2, т. е. $If = f$ для каждого $f \in E_1$. Из сходимости по координатам в пространствах E_1 и E_2 вытекает, что оператор I имеет замкнутый график. Из теоремы о замкнутом графике (см. [12], стр. 437, теорема 6.4.4, а также стр. 65, следствие 2) следует непрерывность оператора I, что влечет за собой утверждение леммы.

Для следующего определения нам нужна обобщенная последовательность $\{\varphi^\alpha b\}_Y$ обобщенных последовательностей $\varphi^\alpha b = \{\varphi^\alpha(y)\, b\}_{y \in Y}$, где $b \in B$ и

$$\varphi^\alpha(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y < \alpha, \\ 1, & \text{если} \quad y \nless \alpha. \end{cases}$$

Определение 5. *Преобразование U типа $\tau(Y, B) \to \sigma(X, D)$ будем называть конулевым, если обобщенная последовательность $\{\varphi^\alpha b\}_Y$ слабо сходится*[9] *к нулю в σU при всех $b \in B$, а во всех других случаях преобразование U будем называть корегулярным.*

---

[9] Тогда $\{F\varphi^\alpha b\}_Y \in c_0(Y, B)$ для каждого непрерывного линейного функционала F на σU.

Примечание. Как видно из определения 5, мы можем разделить на конулевые и корегулярные только такие преобразования типа $\tau \to \sigma$, при которых $\tau \ni \varphi^\alpha b\,(\alpha \in У)$. Так, например, преобразования типов $rcb \to \sigma$, $l \to \sigma$, $rc_0 \to \sigma$ нельзя разделить на конулевые и корегулярные.

Теорема 3. *Пусть V — корегулярное преобразование типа $\tau(У, B) \to \varrho(Z, A)$ и пусть U — конулевое преобразование типа $\tau(У, B) \to \sigma(X, D)$. Пусть, далее, поле σU — конечномерное ЛВТК-пространство в случае ЛВТК-пространства ϱV, но σU — бочечное ЛВТК-пространство в случае обобщенного FK-пространства ϱV. Тогда преобразование V не может быть сильнее*[10] *преобразования U.*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\sigma U \subset \varrho V$. Тогда из леммы 1 вытекает, что каждый непрерывный линейный функционал на ϱV является непрерывным линейным функционалом и на σU. Отсюда следует, что преобразование U должно быть корегулярным, что противоречит предположению.

2. Теперь рассмотрим вопрос о существовании неограниченных обобщенных последовательностей в σ-поле преобразований обобщенных последовательностей.

Теорема 4. *Пусть U — конулевое преобразование типа $\tau(У, B) \to \sigma(X, D)$ при $\tau \supset rc_0$, и его σ-поле — бочечное ЛВТК-пространство. Тогда в σU всегда найдется неограниченная обобщенная последовательность*[11].

Доказательство. Исследуем обобщенную последовательность[12] $\bar{\varphi}^\alpha b = \{\bar{\varphi}^\alpha(y) b\}_У = \varphi_У b - \varphi^\alpha b$. Тогда

$$\bar{\varphi}^\alpha(y) b = \begin{cases} b, & \text{если } \; y < \alpha \\ \Theta, & \text{если } \; y \nless \alpha \end{cases}$$

и, значит, $\bar{\varphi}^\alpha b \in rc_0$. Из определения конулевого преобразования U следует, что

$$\lim_{\alpha \in У} F(\varphi_У b - \varphi^\alpha b) = 0$$

для каждого непрерывного линейного функционала F на σU. Отсюда вытекает (см. [3], стр. 157, следствие), что обобщенная последовательность $\varphi_У b$ является в σU точкой прикосновения пространства rc_0. Так как это несправедливо в m, то утверждение теоремы 4 вытекает из леммы 1.

---

[10] Говорят, что преобразование V сильнее преобразования U, если $\sigma V \supset \varrho U$.

[11] Если речь идет о преобразованиях U типа $\tau \to \sigma$ при $\tau \not\subset m$, то для таких преобразований σU всегда содержит неограниченную обобщенную последовательность.

[12] У нас $\varphi_У b = \{\varphi_У(y) b\}_У$, где $\varphi_У(y) = 1$ для всех $y \in У$ (ср. [6], стр. 70).

Теорема 5. *Пусть U — корегулярное преобразование типа $\tau(У, B) \to \sigma(X, D)$ и его σ-поле — бочечное ЛВТК-пространство. Пусть τ замкнуто в m и пусть σU содержит некоторую ограниченную обобщенную последовательность, являющуюся точкой прикосновения пространства τ в топологии поля σU. Тогда в σU найдется и неограниченная обобщенная последовательность*

Доказательство проведем от противного. Предположим, что $\sigma U \subset m$, и пусть $f^0 \in \sigma U$, причем $f^0 \in \bar{\tau}$, но $f^0 \overline{\in} \tau$. Тогда существует обобщенная последовательность $\{f^z\}_Z$, где $f^z \in \tau (z \in Z)$, такая, что в σU имеем $f^z \to f^0$. Так как $\sigma U \subset m$, то из леммы 1 вытекает, что f^z сходится к f^0 и в топологии пространства m. Из замкнутости τ в m вытекает, что $f^0 \in \tau$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Примечание. Хотя в доказательстве теоремы 5 мы не пользовались предположением, что U — корегулярное преобразование, все же теорема 5 имеет смысл только для корегулярных преобразований, так как существование неограниченной обобщенной последовательности в σ-поле конулевых преобразований дается уже в теореме 4.

Надо еще заметить, что доказательство теоремы 5 не применимо для случая, когда τ замкнуто в σU.

3. Если мы имеем преобразования типа $\tau(У, B) \to \sigma(X, D)$ при $\tau \subset m$, то возникает вопрос: содержат ли такие преобразования в своем σ-поле и ограниченные расходящиеся обобщенные последовательности. Для матричных преобразований типа $c(N, R) \to c(N, R)$ этот вопрос решен Виланским и Целлером [19]. Оказывается, что при некоторых ограничениях на σ-поле преобразования U методику доказательства теоремы 1 из [19] можно обобщить и для решения вопроса, поставленного нами выше.

Приведем сначала одну лемму, которая вытекает из леммы 2.12 главы VII работы [11] (ср. также теорему 3.2 из [21]).

Лемма 2. *Пусть E — локально выпуклое векторное пространство, топология которого определена семейством полунорм $\{p_i\}_I$. Для непрерывности полунормы q в E необходимо и достаточно существование $K \in \mathfrak{F}(I)$ и постоянной $M \geqslant 0$ таких, что*

$$q(f) \leqslant M \sup_{i \in K} p_i(f) \text{ для каждого } f \in E.$$

Приведем теперь одно понятие, которое является обобщением понятия стремления к бесконечности.

Определение 6. *Пусть X и $У$ — направленные множества. Отображение $\mathfrak{u}$ из X в $У$ называется заканчивающим*[13], *если для каждого $y \in У$ существует $x' \in X$ такой, что из $x \geqslant x'$ вытекает $\mathfrak{u}(x) \geqslant y$.*

---

[13] См. [18], § 3.4.

Пример 4. Отображение $\mathfrak{u}$ из N в N^2, определенное как $\mathfrak{u}(n)=(n, n)$, является заканчивающим. Если Δ — множество всех порядковых чисел, то никакое отображение из N в Δ не является заканчивающим [13].

Будем в дальнейшем через $\mathfrak{u}S(У, B)$ обозначать множество всех обобщенных последовательностей $\varphi_{\mathfrak{u}} f=\{\varphi_{\mathfrak{u}}(y) f_y\}$, где $\mathfrak{u}$ — некоторое взаимно однозначное заканчивающее отображение из N в $У$, а

$$\varphi_{\mathfrak{u}}(y)=\begin{cases}1, & \text{если } \mathfrak{u}^{-1}(y)=n,\\ 0, & \text{если } \mathfrak{u}^{-1}(y)\neq n.\end{cases}$$

Символом $\mathfrak{u}c_0(У, B)$ обозначаем множество, состоящее из всех $\varphi_{\mathfrak{u}} f$, таких, что $\lim_{n\in N} f_{\mathfrak{u}(n)}=\Theta$. Множество $\mathfrak{u}c_0$ является банаховым пространством с нормой

$$p(\varphi_{\mathfrak{u}} f)=\sup_N \|f_{\mathfrak{u}(n)}\|, \tag{12}$$

причем каждый элемент $\varphi_{\mathfrak{u}} f\in \mathfrak{u}c_0$ имеет представление $\varphi_{\mathfrak{u}} f= =\Sigma_N \varphi_{\mathfrak{u}(n)} f_{\mathfrak{u}(n)}=\{\Sigma_N \varphi_{\mathfrak{u}(n)}(y) f_{\mathfrak{u}(n)}\}_{y\in У}$, где

$$\varphi_{\mathfrak{u}(n)}(y)=\begin{cases}1, & \text{если } y=\mathfrak{u}(n),\\ 0, & \text{если } y\neq \mathfrak{u}(n).\end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть $У$ — направленное множество такое, что существует взаимно однозначное заканчивающее отображение $\mathfrak{u}$ из N в $У$. Пусть U — преобразование типа $\tau(У, B)\to\sigma(X, D)$ при $\mathfrak{u}c_0\subset\tau\subset c$. Пусть далее, σU — обобщенное FK-пространство с полунормами $\{p_i\}_N$, такими, что $p_i(\varphi_{\mathfrak{u}(n)} b)\leqslant M_{in}\|b\|$, где $b\in B$, $0\leqslant M_{in}(i, n\in N)$ — постоянные, и $\mathfrak{u}c_0$ не замкнуто в $\sigma U\cap \mathfrak{u}S$. Тогда в σU найдется ограниченная расходящаяся обобщенная последовательность.*

Доказательство. Сопоставим каждому $\varphi_{\mathfrak{u}} f\in\sigma U\cap \mathfrak{u}S$ и $k\in N$ обобщенные последовательности $\varphi^k{}_{\mathfrak{u}} f=\Sigma_{n<k}\varphi_{\mathfrak{u}(n)} f_{\mathfrak{u}(n)}$ и $\bar{\varphi}^k{}_{\mathfrak{u}} f=\varphi_{\mathfrak{u}} f-\varphi^k{}_{\mathfrak{u}} f$. Из незамкнутости $\mathfrak{u}c_0$ в $\sigma U\cap \mathfrak{u}S$ следует существование $\varphi_{\mathfrak{u}} f^m (m\in N)\in \mathfrak{u}c_0$ и $\varphi_{\mathfrak{u}} f\in\sigma U\cap \mathfrak{u}S$ таких, что

$$\lim_N \varphi_{\mathfrak{u}} f^m=\varphi_{\mathfrak{u}} f$$

в σU, но

$$\lim_N p(\varphi_{\mathfrak{u}} f^m-\varphi_{\mathfrak{u}} f)\neq 0,$$

где p — норма (12) пространства $\mathfrak{u}c_0$. Из неравенства $p_i(\varphi_{\mathfrak{u}(n)} b)\leqslant M_{in}\|b\|$ $(i, n\in N)$ вытекает, что в σU

$$\lim_N \varphi^k{}_{\mathfrak{u}} f^m=\varphi^k{}_{\mathfrak{u}} f\ (k\in N),$$

следовательно, и

$$\lim_N \bar{\varphi}^k{}_{\mathfrak{u}} f^m=\bar{\varphi}^k{}_{\mathfrak{u}} f\ (k\in N). \tag{13}$$

Но так как покоординатная сходимость в σU влечет за собой

$$\lim_N p(\varphi^k{}_{\text{u}} f^m - \varphi^k{}_{\text{u}} f) = 0 \quad (k \in N),$$

то

$$\lim_N p(\bar{\varphi}^k{}_{\text{u}} f^m - \bar{\varphi}^k{}_{\text{u}} f) \neq 0. \tag{14}$$

Из (13) и (14) заключаем, что всякое подпространство пространства $\text{u}c_o$, состоящее из $\varphi_{\text{u}} f \in \text{u}c_c$, таких, что $f_{\text{u}(n)} = \Theta$ для всех $n \leqslant k$, где $k \in N$, также не замкнуто в $\sigma U \cap \text{u}S$. Теперь следует из леммы 2, что для каждых $r \in N$, $\varepsilon_r = 2^{-r-2}$ и $k_r \in N$, где $k_r > n_{r-1} + 1$ $(n_r \in N)$, существует обобщенная последовательность $\varphi_{\text{u}} f^r \in \text{u}c_o$ такая, что

$$f^r{}_{\text{u}(n)} = \Theta \text{ для каждого } n \leqslant k_r, \tag{15}$$

$$\sup_{n \in N} \|f^r{}_{\text{u}(n)}\| = 1, \tag{16}$$

$$p_i(\varphi_{\text{u}} f^r) < \varepsilon_r \text{ для каждого } i \leqslant r. \tag{17}$$

Так как $\lim_{n \in N} f^r{}_{\text{u}(n)} = \Theta$, то существует натуральное число $n_r > k_r$ такое, что

$$\|f^r{}_{\text{u}(n)}\| < \varepsilon_r \text{ для каждого } n > n_r. \tag{18}$$

Соотношения (15), (16) и (18) влекут за собой существование конечного множества $K^r = \{k_{r+1}, k_{r+2}, \ldots, n_r\}$ такого, что

$$\sup_{n \in N} \|f^r{}_{\text{u}(n)}\| = \sup_{K^2} \|f^r{}_{\text{u}(n)}\| = 1.$$

Дальше выбираем соответственно числам $r+1$, $k_{r+1} > n_2 + 1$ и $\varepsilon_{r+1} = 2^{-r-3}$ обобщенную последовательность $\varphi_{\text{u}} f^{r+1} \in \text{u}c_o$, удовлетворяющую условиям (15), (16), (17), заменяя в них r на $r+1$. Соответственно f^{r+1} выбираем n_{r+1} так, что выполнено условие (18) для $r+1$ и т. д.

Пусть $g = \{g_y\}_Y = \Sigma_N \varphi_{\text{u}} f^r$. Из неравенства (17) вытекает, что этот ряд сходится в топологий пространства σU. Так как каждое $n \in N$ может попасть только в одно множество $K^r (r \in N)$, то

$$\|g_y\| = \|\textstyle\sum_N f^r{}_y\| \leqslant 1 + \textstyle\sum_N 2^{-r-2} = \frac{5}{4},$$

т. е. $g \in m(Y, B)$. Но g — расходящаяся обобщенная последовательность. Действительно, если $y = \text{u}(n)$ при $n \in K^r$, то

$$\|g_y\| \geqslant 1 - \textstyle\sum_N 2^{-r-2} = \frac{3}{4}.$$

Если $y \neq \text{u}(n)$ при $n \in N$, то $\|g_y\| = 0$. Если $y = \text{u}(n)$ при $n \in K^r$, то

$$\|g_y\| \leqslant \textstyle\sum_N 2^{-r-2} = \frac{1}{4}.$$

Из этого следует, что $\liminf_Y g_y \neq \limsup_Y g_y$, что и доказывает теорему.

Если множество $У$ такое, что $c(У, B) \not\subset m(У, B)$, то справедлива следующая

Теорема 7. *Если в σ-поле преобразования U типа $\tau(У, B) \to \sigma(X, D)$ найдутся ограниченная расходящаяся и неограниченная обобщенные последовательности, то в σU найдется неограниченная расходящаяся обобщенная последовательность.*

Доказательство. Пусть $f \overline{\in} m$, а $f \in c$. Тогда обобщенная последовательность $f + g$, где $g \in m$, но $g \overline{\in} c$, является неограниченной и расходящейся.

4. Пример 5. Исследуем преобразования, заданные соотношением (5), типа $mc(N^2, B) \to mc(N^2, D)$. Как это следует из примера 2, поле mcU каждого такого преобразования является обобщенным FK-пространством с полунормами

$$\|f_{kl}\| \quad (k,\ l \in N),$$

$$\sup_{K \in \mathfrak{F}(N^2)} \Big\| \sum_{(k,l)\in K} A_{mnkl} f_{kl} \Big\| \ (m, n \in N),$$

$$\sup_{(m,n)\in N^2} \Big\| \sum_{(k,l)\in N^2} A_{mnkl} f_{kl} \Big\|.$$

Пусть для преобразования U существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\sup_{(m,n)\in N^2} \Big\| \sum_{(k,l)\in N^2} A_{mnkl} \varphi_{(k,l)} f_{kl} \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant M \sup_{(m,n)\in N^2} \Big\| \sum_{(k,l)\in N^2} A_{mnkl} f_{kl} \Big\| \tag{19}$$

$$\text{для всех } f = \{f_{kl}\}_{N^2} \in mcU,$$

где

$$\varphi_{(k,l)} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = l, \\ 0, & \text{если } k \neq l. \end{cases}$$

Если, кроме того, U — конулевое преобразование, то по доказательству теоремы 4 двойная последовательность $\varphi_{N^2}b$ является в mcU точкой прикосновения пространства rc_0. Но тогда, как это следует из представления полунорм в mcU, двойная последовательность $\{\varphi_{(k,l)}b\}_{(k,l)\in N^2}$ является в mcU точкой прикосновения пространства uc_0, где $u(n) = (n, n)$, т. е. uc_0 не замкнуто в $mcU \cap uS$.

Итак, учитывая теоремы 6, 4 и 7, а также пример 1 из работы [5], нами доказано следующее

Следствие 2. *В поле mcU конулевого преобразования* (5) *типа $mc(N^2, B) \to mc(N^2, D)$ удовлетворяющего условию* (19), *всегда найдутся ограниченная расходящаяся и неограниченная расходящаяся двойные последовательности.*

§ 4. Непрерывные линейные функционалы на σ-поле

1. Аналогично теореме 3.4 из [21] доказывается

Лемма 3. *Пусть E — локально выпуклое векторное пространство, топология которого определена семейством полунорм $\{p_i\}_I$. Тогда каждый непрерывный линейный функционал F на E можно представить в виде*

$$Ff = \Sigma_I F_i f,$$

где $f \in E$, а F_i $(i \in I)$ — линейные функционалы на E, причем

$$|F_i f| \leqslant M_i p_i(f) \quad (i \in I),$$

где $0 \leqslant M_i (i \in I)$ — постоянные, конечное число которых отлично от нуля.

Теперь сформулируем основную теорему настоящего параграфа.

Теорема 8. *Пусть $\sigma(X, D)$ и $U^{**}(У, B)$ — ЛВТК-пространства. Тогда каждый непрерывный линейный функционал F на σ-поле преобразования U, заданного соотношением* (1), *можно представить в виде*

$$Ff = Gf + H(Uf),$$

где G и H — линейные функционалы, непрерывные соответственно на U^{**} и σ.

Доказательство вытекает из леммы 3, теоремы 1 и теоремы Хана—Банаха о продолжении функционала.

2. В последующем из преобразований, заданных соотношением (1), мы выделяем такие, для которых непрерывные линейные функционалы на σU можно представить в более конкретном виде.

Определение 7. *Преобразование U, псевдополе $U^{**}(У, B)$ которого есть ЛВТК-пространство, будем называть сильным, если на U^{**} имеет место слабая сходимость по отрезкам, т. е. для каждого непрерывного линейного функционала G на*[14] *U^{**}*

$$Gf = \lim_{K \in \mathfrak{F}(У)} \sum_K G(\varphi_y f_y) = \sum_У G\varphi_y(f_y).$$

Пример 6. Всякое преобразование, для которого $U^{**} = S(У, B)$, является сильным, так как из определения топологии в S (см. пример 1) вытекает, что на S имеет место даже (сильная) сходимость по отрезкам, т. е. для каждого $z \in У$

$$\lim_{K \in \mathfrak{F}(У)} \|f_z - \sum_{y \in K} \varphi_y(z) f_y\| = 0.$$

Пример 7. Всякое преобразование, заданное соотношением (5), является сильным. Действительно, как это следует из примера 2, псевдополе $U^{**}(У, B)$ преобразования (5) явля-

---

[14] Мы имеем (см. [6], стр. 74) $\varphi_y b = \{\varphi_y(z) b\}_{z \in У}$, где $b \in B$ и

$$\varphi_y(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z = y, \\ 0, & \text{если } z \neq y. \end{cases}$$

ется ЛВТК-пространством с полунормами (2) и (9). Так как по критерию Коши для обобщенных сумм (см. [11], гл. VII, определение 9.4 и следствие 9.6)

$$\lim_{K'\in\mathfrak{F}(У)} \sup_{K\in\mathfrak{F}(У)} \| \sum_{z\in K} A_{xz} (f_z - \sum_{y\in K'} \varphi_y(z) f_y) \| = 0,$$

то на U^{**} имеет место сходимость по отрезкам.

Теорема 9. *Пусть $\sigma(X, D)$ — ЛВТК-пространство, а U — сильное преобразование типа $\tau(У, B) \rightarrow \sigma$. Тогда каждый непрерывный линейный функционал F на σU можно представить в виде*

$$Ff = H(Uf) + \sum_y G_y f_y,$$

где H — непрерывный линейный функционал на σ, а $G_y (y \in У)$ непрерывные линейные функционалы на B.

Если, кроме того, τ-банахово пространство, то

$$\sum_y \|G_y\| < \infty. \tag{20}$$

Доказательство первой части теоремы вытекает непосредственно из определения 7 и теоремы 7.

Пусть теперь τ — банахово пространство. Для существования суммы $\Sigma_У G_y f_y$ необходимо, чтобы преобразование

$$U_K f = \sum_K G_y f_y,$$

где $K \in \mathfrak{F}(У)$, являлось преобразованием типа $\tau \rightarrow mc(\mathfrak{F}(У), R)$ (см. [11], гл. VII, теоремы 8.2 и 8.13). Для этого необходимо (см. [6], теорема 1), чтобы

$$\sup_{\mathfrak{F}(У)} \|U_K\| < \infty,$$

или

$$\sup_{\mathfrak{F}(У)} \sup_{\|f_y\|=1} \left| \sum_K G_y f_y \right| < \infty.$$

По аналогии с [4] можно доказать, что это условие эквивалентно условию

$$\sup_{\mathfrak{F}(У)} \sum_K \|G_y\| < \infty$$

т. е. условию (20) (см. [11], гл. VII, теорема 8.2).

Из теоремы 9 непосредственно вытекает

Следствие 3. *Пусть $\tau(У, B)$ — банахово пространство, а $\sigma(X, D)$ является ЛВТК-пространством. Тогда сильное преобразование U типа $\tau \rightarrow \sigma$ будет конулевым тогда и только тогда, когда*

$$\lim_y H(U\varphi^\alpha b) = 0$$

для каждого $b \in B$ и непрерывного линейного функционала H на пространстве σ.

Для сильных преобразований можем показать, что регулярное[15] преобразование является корегулярным (ср. [7, 21]).

---

[15] Если $B = D$, то преобразование типа $\tau(У, B) \rightarrow \sigma(X, B)$ является регулярным, если $\lim_X U_x f = \lim_У f_y$ для каждого $f = \{f_y\}_У \in \tau$ (см. [6] стр. 71).

Теорема 10. *Пусть* $\tau(\mathcal{Y}, B)$ — *банахово пространство, а* $\sigma(X, B)$ *банахово пространство, в котором имеет место покоординатная сходимость, с нормой* $q(f) \geqslant \sup_X \|f_x\|$. *Тогда каждое сильное регулярное преобразование* U *типа* $\tau \to \sigma$ *является корегулярным.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{L}(Uf) = \lim_X U_x f$. Замечая, что

$$\|\mathfrak{L}(Uf)\| \leqslant \sup_X \|U_x f\| \leqslant q(Uf),$$

то $\mathfrak{L}$ — непрерывный линейный оператор из σ в B. Тогда произведение $h\mathfrak{L}$, где h — непрерывный линейный функционал на B, является непрерывным линейным функционалом на σ. Так как ввиду регулярности преобразования U

$$\mathfrak{L}(Uf) = \lim_X U_x f = \lim f_y$$

при всех $f \in \tau$, или для каждого непрерывного линейного функционала h на B

$$h\mathfrak{L}(Uf) = h(\lim_X U_x f) = h(\lim_y f_y),$$

то для каждого непрерывного линейного функционала $h\mathfrak{L}$ заключаем

$$h\mathfrak{L}(U\varphi^\alpha b) = h(\lim_{y \in \mathcal{Y}} \varphi^\alpha(y) b),$$

где $b \in B$, $\alpha \in \mathcal{Y}$. Но для всякого $b \neq \Theta$ существует на B непрерывный линейный функционал h' с $h'b \neq \|b\|$ (см. [2], стр. 77, следствие 14). Следовательно, на σ существует непрерывный линейный функционал $h'\mathfrak{L}$, при котором

$$\lim_{\alpha \in \mathcal{Y}} h'\mathfrak{L}(U\varphi^\alpha b) = 0.$$

Для получения утверждения теоремы остается применить следствие 3.

3. Исследуем теперь преобразования типа $\tau(\mathcal{Y}, B) \to rcb(X, D)$. Для таких преобразований можно найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование являлось конулевым.

Лемма 4. *Общий вид непрерывного линейного функционала* H *на* $rcb(\mathcal{Y}, B)$ *дается равенством*[16]

$$Hf = h(rcb\text{-}\lim_y f_y) + \sum_y h_y f_y, \tag{21}$$

где h *и* $h_y (y \in \mathcal{Y})$ — *непрерывные линейные функционалы на* B *причем*

$$\sum_y \|h_y\| < \infty. \tag{22}$$

Доказательство. Исследуем обобщенную последовательность

$$g^K = f - \varphi_y b - \sum^K \varphi_y (f_y - b),$$

где $b = rcb\text{-}\lim_y f_y$ а $K \in \mathfrak{F}(\mathcal{Y})$. Если $f = \{f_y\}_y \in rcb$, то $g^K \in rcb_0$ и

---

[16] Напомним, что предел $b = rcb\text{-}\lim_y f_y$ существует, если множество $\{y \in \mathcal{Y} : \|b - f_y\| > \varepsilon\}$ конечно для любого $\varepsilon > 0$.

$$\lim_{\mathfrak{F}(Y)} \|g^K\| = \lim_{K \in \mathfrak{F}(Y)} \sup_{y \in K} \|f_y - b\| = 0.$$

Следовательно, для каждого $f \in rcb$ имеем

$$f = \varphi_y b + \sum_y \varphi_y (f_y - b).$$

Если теперь H — непрерывный линейный функционал на rcb, то

$$Hf = H\varphi_y b + \sum_y H\varphi_y (f_y - b),$$

$$Hf = H\varphi_y b + \sum_y h_y (f_y - b), \tag{23}$$

где $h_y = H\varphi_y$. Из существования суммы справа аналогично как в теореме 9 следует выполнение условия (22). Пользуясь этим, преобразуем (23) следующим образом:

$$Hf = H\varphi_y b + \sum_y h_y f_y - \sum_y h_y b,$$

откуда, обозначая $H\varphi_y - \Sigma_y h_y b_y = hb$, вытекает соотношение (21).

Обратно, если линейный функционал H представлен в виде (21) с выполнением условия (22), то

$$|Hf| \leqslant \|h\| \limsup_y \|f_y\| + \sum_y \|h_y\| \, \|f_y\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_y \|f_y\| (\|h\| + \sum_y \|h_y\|) = M\|f\|,$$

т. е. H — непрерывный линейный функционал.

Теорема 11. *Пусть U — преобразование типа $\tau(У, B) \to rcb(X, D)$, псевдополе U^{**} которого — ЛВТК-пространство. Тогда каждый непрерывный линейный функционал F на поле $rcbU$ можно представить в виде*

$$Ff = Gf + h(rcb\text{-}\lim_X U_x f) + \Sigma_X h_x U_x f),$$

где G — непрерывный линейный функционал на U^{**}, h и $h_x (x \in X)$ — непрерывные линейные функционалы на D, причем выполнено условие (22).

Если, кроме того, U — сильное преобразование, то существует представление

$$Ff = \sum_y G_y f_y + h(rcb\text{-}\lim_X U_x f) + \sum_X h_x U_x f, \tag{24}$$

где $G_y (y \in У)$ — непрерывные линейные функционалы на B.

Если же U — сильное преобразование, а τ — банахово пространство, то в (24) *выполняется условие* (20).

Доказательство вытекает из теорем 8, 9 и из леммы 4.

Теорема 12. *Пусть $\tau(У, B)$ — банахово пространство. Тогда сильное преобразование U типа $\tau(У, B) \to rcb(X, D)$ является конулевым тогда и только тогда, когда*

1° $\lim_{\alpha \in У} h(U_x \varphi^\alpha b) = 0$ *для всех $x \in X$, $b \in B$ и каждого непрерывного линейного функционала h на D,* (25)

2° $\lim_{\alpha \in У} h(rcb\text{-}\lim_x U_x \varphi^\alpha b) = 0$ *для всех $b \in B$ и каждого непрерывного линейного функционала h на D.*

Доказательство. Необходимость условия (25) вытекает из следствия 3 и из факта, что отображение

$U\varphi^\alpha b \to hU_x\varphi^\alpha b$ является непрерывным линейным функционалом на $rcb(X, D)$. Необходимость условия 2° теоремы следует из следствия 3 и леммы 4.

Достаточность. Так как U является преобразованием типа $\tau \to \sigma$, то (см. [6], теорема 9)

$$\sup_X \|U_x\| < \infty.$$

Отсюда вытекает, что ряд $\Sigma_X h_x U_x \varphi^\alpha b$ равномерно сходится относительно α (см. [11], гл. VII, теорема 11, 6), потому что

$$\sum_X \sup_{\alpha \in У} |h_x U_x \varphi^\alpha b| \leqslant \sum_X \sup_У \|h_x\| \, \|U_x\| \varphi^\alpha b\| \leqslant$$
$$\leqslant \|b\| \sup_X \|U_x\| \sum_X \|h_x\| < \infty.$$

Достаточность условий 1° и 2° нашей теоремы вытекает теперь из теоремы 11.4 из главы VII работы [10] и леммы 4.

§ 5. Совместность преобразований обобщенных последовательностей

1. Дадим следующее

Определение 8. *Преобразования U и V называются совместными, если для каждой $f \in \sigma(X, D)\, U[У, B] \cap \varrho(Z, D)\, V[У, B]$ имеем* $\lim_X U_x f = \lim_Z V_z f$.

В теории матричных преобразований последовательностей доказан ряд теорем о совместности матричных преобразований, сохраняющих сходимость (см. [14, 21, 7, 10]). Здесь переносим некоторые из таких теорем на преобразования обобщенных последовательностей.

Теорема 13. *Пусть U — корегулярное преобразование типа $\tau(У, B) \to \sigma(X, D)$, для которого σU — обобщенное FK-пространство (или ЛВТК-пространство), а V — сильное конулевое преобразование типа $\tau(У, B) \to rcb(Z, A)$, причем $\sigma U \subset rcb V$. Тогда не найдется совместного с V сильного преобразования T типа $\tau(У, B) \to rcb(W, A)$ поле $rcbT$ которого является бочечным ЛВТК-пространством (соответственно конечномерным ЛВТК-пространством), для которого $rcbT = \sigma U$ и выполнено условие* (25).

Доказательство. Если, с одной стороны, $rcbT = \sigma U$, то по теореме 3 преобразование T является корегулярным.

С другой стороны, так как преобразование T должно быть совместным с V, то

$$\lim_Z V_z \varphi^\alpha b = \lim_W T_w \varphi^\alpha b$$

для каждого $a \in У$ и $b \in B$. Из теоремы 12 заключаем, что преобразование T должно быть конулевым. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Теорема 14. *Пусть $\tau(У, B)$ — обобщенное FK-пространство, причем $\tau \supset rcb$. Пусть $\sigma(X, R)$ — банахово пространство с нор-*

мой $p(f) \geqslant \sup_X \|f_x\|$, *а* $\varrho(Z, R)$ *— банахово пространство с нормой* $q(g) \geqslant \sup_Z \|g_z\|$. *Пусть, далее,* U *— преобразование типа* $\tau \to \sigma$, V *— преобразование типа* $\tau \to \varrho$, *псевдополя которых являются ЛВТК-пространствами, причем* $\sigma U \subset \varrho V$. *Пусть, наконец,* $f^0 \in \sigma U$, *где* f^0 *— точка прикосновения множества* rcb *в поле* σU, *и выполнены условия*

$$\begin{aligned} \lim_X U_x \varphi_{\mathrm{y}} b &= \lim_Z V_z \varphi_{\mathrm{y}} b, \\ \lim_X U_x \varphi_y b &= \lim_Z V_z \varphi_y b \quad (y \in Y) \end{aligned} \tag{26}$$

при всех $b \in B$. *Тогда* $\lim_X U_x f^0 = \lim_Z V_z f^0$.

Доказательство. Так как $U_x (x \in X)$ и $V_z (z \in Z)$ — непрерывные линейные функционалы на τ, то по лемме 1 $U_x (x \in X)$ и $V_z (z \in Z)$ также являются непрерывными линейными функционалами на rcb. Тогда линейные функционалы $\mathfrak{L}' f = \lim_X U_x f$ и $\mathfrak{L}'' f = \lim_Z V_z f$, являются непрерывными на rcb, ибо

$$|\mathfrak{L}' f| \leqslant \sup_X |U_x f| \leqslant \sup_X \|U_x\| \|f\| = M' \|f\|$$

и

$$|\mathfrak{L}'' f| \leqslant \sup_Z |V_z f| \leqslant \sup_Z \|V_z\| \|f\| = M'' \|f\|$$

для всех $f \in rcb$. Поэтому по лемме 4 мы имеем

$$\lim_X U_x f = h' (rcb\text{-}\lim_{\mathrm{y}} f_y) + \sum\nolimits_Y h'_y f_y,$$

$$\lim_Z V_z f = h'' (rcb\text{-}\lim_{\mathrm{y}} f_y) + \sum\nolimits_Y h''_y f_y,$$

где

$$h' b = \lim_X U_x \varphi_{\mathrm{y}} b + \sum\nolimits_Y \lim_X U_x \varphi_y b, \quad h'_y b = \lim_X U_x \varphi_y b,$$

$$h'' b = \lim_Z V_z \varphi_{\mathrm{y}} b + \sum\nolimits_Y \lim_Z V_z \varphi_y b, \quad h''_y b = \lim_Z V_z \varphi_y b,$$

откуда при помощи (26) вытекает, что

$$\lim_X U_x f = \lim_Z V_z f$$

для каждого $f \in rcb$. Из неравенств

$$\lim_X |U_x f| \leqslant \sup_X |U_x f| \leqslant p(Uf),$$

$$\lim_Z |V_z f| \leqslant \sup_Z |V_z f| \leqslant q(Vf)$$

следует, что $\mathfrak{L}'$ и $\mathfrak{L}''$ также являются непрерывными линейными функционалами на σU, откуда

$$\begin{aligned} \lim_X U_x f^0 &= \lim_X U_x (\lim_W f^w) = \lim_W \lim_X U_x f^w = \\ &= \lim_W \lim_Z V_z f^w = \lim_Z V_z f^0, \end{aligned}$$

где $f^0 = \lim_W f^w$ ($f^w \in rcb$, W — направленное множество) в пространстве σU.

2. Как видно из определения 8, понятие совместности преобразований U и V применимо только для таких преобразований, при которых $\sigma(X, D) \subset c(X, D)$ и $\varrho(Z, D) \subset c(Z, D)$. Следующее понятие применимо для иного класса преобразований.

Определение 9. *Пусть $\sigma(X, D)$ и $\varrho(Z, A)$ — нормированные пространства соответственно с нормами p и q. Преобразования U и V называем совместными по норме, если для каждой $f \in \sigma U[У, B] \cap \varrho V[У, B]$ имеем $p(Uf) = q(Uf)$.*

Теорема 14. *Пусть $\tau(У, B)$ — банахово пространство. Пусть, далее, $\varrho(Z, A)$ и $\delta(W, C)$ — банаховы пространства, в которых имеет место покоординатная сходимость. Пусть, наконец, U — корегулярное преобразование типа $\tau \to \sigma(X, D)$, для которого σU — обобщенное FK-пространство (ЛВТК-пространство), V — сильное конулевое преобразование типа $\tau \to \varrho$, причем $\sigma U \subset \varrho V$. Тогда не найдется совместного с V по норме сильного преобразования T типа $\tau \to \delta$, поле которого $\delta T = \sigma U$ и является бочечным ЛВТК-пространством (соответственно конечномерным ЛВТК-пространством).*

Доказательство аналогично теореме 13 и вытекает из теоремы 3 и следствия 3.

Литература

1. Бурбаки Н., Топологические векторные пространства. Москва, 1959.
2. Данфорд Н, Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962
3. Иосида К., Функциональный анализ. Москва, 1967.
4. Кангро Г., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН ЭССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1956, 5, 103—128.
5. Кулль И., Матричные преобразования классов двойных последовательностей в банаховых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун.-та, 1961. 102, 193—208.
6. Ламп Ю, Преобразования обобщенных последовательностей. Настоящий сборник, стр. 67—84.
7. Юримяэ Э., Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования. Изв. АН ЭССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1959, 8, 115—121.
8. Юримяэ Э., Об одном классе обобщенных матричных методов суммирования. Изв. АН ЭССР, сер. техн и физ.-матем. наук, 1959, 8, 166—171.
9. Юримяэ Э., Некоторые вопросы включения и совместности методов абсолютного суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, 150, 132—143.
10. Юримяэ Э., Заметки о конулевых методах суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун.-та, 1964, 150, 144—153.
11. Choquet, G., Cours d'analyse, v. II. Paris, 1964.
12. Edwards, R. E, Functional Analysis. New York—Chicago—San Francisco—Toronto—London, 1965.
13. Jürimäe, E., Funktsionaalanalüüsi meetodid kahekordsete ridade teoorias. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, 55, 3—8.
14. Mazur, S., Orlicz. W., Sur les methods linéaires de sommation. C. r. Acad. Sci, 1933, 196, 32—34.
15. Mazur, S., Orlicz, W., On linear methods of summability. Studia math., 1954, 14, 129—160.

16. S n y d e r, A. K., Conull and coregular FK-spaces. Math. Z., 1965, 90, 376—381.
17. W i l a n s k y, A., A application of Banach liner functionals to summability. Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 59—68.
18. W i l a n s k y, A., Functional Analysis. New York—Toronto—London, 1964.
19. W i l a n s k y, A., Zeller, K., Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, 501—509.
20. W l o d a r s k y, L., Sur les méthodes continues de limitation (I). Studia Math., 1954, 14, 161—187.
21. Z e l l e r, K., Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren. Math. Z., 1951, 53, 463—487.

Поступило
5 IV 1968

ÜLDISTATUD JADADE TEISENDUSTE σ-VÄLJADEST

J. Lamp

Resümee

Selles artiklis vaadeldakse üldistatud jadade $f=\{f_y\}_Y$ teisendusi üldistatud jadadeks (1), kus U_x ($x \in X$ — suunatud hulk) on pidevad lineaarsed operaatorid mingist üldistatud jadade klassist $\tau(Y, B)$ (Y — suunatud hulk, B — Banachi ruum) Banachi ruumi D. Samuti eeldatakse, et $U_x (x \in X)$ on pidevad lineaarsed operaatorid oma pseudoväljal (Definitsioon 2). Uuritakse seosega (1) antud teisenduste σ-väljaga (Definitsioon 3) seotud küsimusi.

ÜBER DIE σ-WIRKFELDER DER TRANSFORMATIONEN VERALLGEMEINTER FOLGEN

J. Lamp

Zusammenfassung

Im vorliegenden Artikel werden Transformationen der verallgemeinten Folgen $f=\{f_y\}_Y$ in verallgemeinte Folgen (1) betrachtet, wo $U_X (x \in X$ — gerichtete Menge) die linearen stetigen Operationen aus einer Klasse verallgemeinter Folgen $\tau(Y, B)$ (Y — gerichtete Menge, B — Banachscher Raum) in den Banachschen Raum D darstellen. Man untersucht die mit der σ-Wirkfelder (Definition 3) der Transformationen in der Form (1) gebundenen Fragen. Als Sonderfälle werden von dieser Arbeit die bekannten Theoremen von Mazur und Orlicz [14, 15], Wilansky [17], Zeller [19, 21], Jürimäe [7, 8, 13], Wlodarsky [20] u. a. gefolgert.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

Введение

Пусть (T, Σ_T, μ), (U, Σ_U, ν) и (W, Σ_W, λ) — пространства с положительной мерой. Через $\mathfrak{X}$ мы обозначаем одно из пространств $L_p(T, \Sigma_T, \mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ или $C(T)$, а через $\mathfrak{Y}$ — одно из пространств $L_p(U, \Sigma_U, \nu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ или $C(U)$, причем в случае пространства C мы предполагаем, что T (соответственно U) — нормальное топологическое пространство и мера μ (соответственно ν) — борелевская мера. Кроме того мы предполагаем, что W — неограниченное множество в m-мерном евклидовом пространство R_m, для которого $\lambda(W) = \infty$.

Пусть на множестве $W \times U \times T$ определена $\lambda \times \nu \times \mu$-измеримая функция $K(w, u, t)$ такая, чтобы преобразование

$$k(w, u)x = \int_T K(w, u, t)x(t)\mu(dt) \tag{1}$$

существовало для λ-почти всех $w \in W$, ν-почти всех $u \in U$ и для всех $x \in \mathfrak{X}$, причем $k(w, u)x$ как функция от $u \in U$ для λ-почти всех $w \in W$ принадлежало пространству $\mathfrak{Y}$.

Определение 1. *Мы говорим, что преобразование* (1) *принадлежит классу* $(\mathfrak{X}, L)$ *в слабой топологии пространства* $\mathfrak{Y}$, *если*

$$\int_W |fk(w, u)x|\,\lambda(dw) < \infty$$

для всех $x \in \mathfrak{X}$ *и* $f \in \mathfrak{Y}^*$.

Определение 2. *Мы говорим, что преобразование* (1) *принадлежит классу* $(\mathfrak{X}, L)$ *в сильной топологии пространства* $\mathfrak{Y}$, *если для всех* $x \in \mathfrak{X}$

$$\int_W \|k(w, u)x\|\,\lambda(dw) < \infty.$$

Определение 3. *Мы говорим, что преобразование* (1) *принадлежит классу* $(\mathfrak{X}, L)$ *в точке* $u_0 \in U$, *если для всех* $x \in \mathfrak{X}$

$$\int_W |k(w, u_0)x| \lambda(dw) < \infty.$$

Определение 4. *Если* $T = U$, *то преобразование* (1) *называется регулярным относительно пространства* $C(T)$, *если для всех* $u \in U$ *и* $x \in C(T)$

$$\int_W k(w, u) x \lambda(dw) = x(u)$$

в смысле регулярной сходимости в пространстве R_m.

В настоящей работе мы найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы преобразование (1) принадлежало классу $(\mathfrak{X}, L)$ в слабой топологии пространства $\mathfrak{Y}$, в сильной топологии пространства $\mathfrak{Y}$ или же в некоторой точке $u_0 \in U$. Кроме того, мы дадим некоторые применения доказанных теорем для изучения абсолютной и слабо безусловной суммируемости биортогональных рядов, кратных ортогональных рядов и преобразований Фурье.

§ 1. Вспомогательные результаты

Для изложения результатов, нам понадобится следующее модифицированное утверждение Мехди (ср. теоремой 4.1 из [3]).

Лемма. *Пусть* $f(w)$ *является* λ*-измеримой функцией, которая для каждого* λ*-конечного*[1] *множества* $Q \in \Sigma_W$ *принадлежит пространству* $L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda)$. *Для того, чтобы сходился интеграл*

$$\int_W |f(w)| \lambda(dw),$$

необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\int_Q f(w) \lambda(dw) = O(1)$$

равномерно относительно λ*-конечных множеств* $Q \in \Sigma_W$.

Воспользуясь вышеуказанной леммой мы докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть равномерно* λ*-измеримый функционал* $K(w)$ *для* λ*-почти всех* $w \in W$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{X}^*$, *причем для каждого* λ*-конечного множества* $Q \in \Sigma_W$ *имеем что* $K(w) \in L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, \mathfrak{X}^*)$. *Для того, чтобы сходился интеграл*

$$\int_W |K(w)x| \lambda(dw)$$

для всех $x \in \mathfrak{X}$, *необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

[1] Мы скажем, что множество S является φ-конечным, если $\varphi(S) < \infty$.

$$\|\int_Q K(w)\lambda(dw)\| = O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$.

Доказательство. Необходимость. Обозначая через

$$T_Q = \int_Q K(w)\lambda(dw),$$

получаем в силу леммы, что

$$\sup_Q |T_Q x| < \infty$$

для каждого $x \in \mathfrak{X}$. Воспользуясь принципом равномерной ограниченнсоти, из последнего условия и выводим условие теоремы 1.

Достаточность вытекает в силу леммы из неравенства

$$\int_W |K(w)x|\lambda(dw) \leqslant 2\sup_Q |\int_Q K(w)x\lambda(dw)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_Q \|\int_Q K(w)\lambda(dw)\| \, \|x\|.$$

В теореме 2 и всюду в § 3 через $\Gamma(\mathfrak{Y})$ обозначаем совокупность таких $f(w) \in \mathfrak{Y}^*$, для λ-почти всех $w \in W$ которых $\|f(w)\| = 1$, а через (W, Σ_W, λ) — такие пространства положительной меры, для которых Σ_W — совокупность всех подмножеств множества W.

Теорема 2. *Пусть для λ-почти всех $w \in W$ сепарабельнозначный оператор $K(w) \in B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, причем для каждого λ-конечного множества $Q \in \Sigma_W$ имеем, что $K(w) \in L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$. Для того, чтобы для каждого $x \in \mathfrak{X}$*

$$\int_W \|K(w)x\|\lambda(dw) < \infty,$$

необходимо и достаточно, что для всех $f \in \Gamma(\mathfrak{Y})$

$$\|\int_Q f(w)K(w)\lambda(dw)\| = O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$.

Доказательство. Необходимость вытекает в силу теоремы 1 из неравенства

$$\int_W \|K(w)x\|\lambda(dw) \geqslant \int_W |f(w)K(w)x|\lambda(dw),$$

ибо $f(w)K(w)$ является λ-измеримым (см. [1], стр. 165, теорема 10).

Достаточность. По теореме Хана—Банаха для всех $w \in W$, для которых $K(w)x \in \mathfrak{Y}$, найдутся $f(w) \in \Gamma(\mathfrak{Y})$ такие, что $f(w)K(w)x = \|K(w)x\|$. Следовательно, в силу теоремы 1

$$\int_W \|K(w)x\|\lambda(dw) = \int_W |f(w)K(w)x|\lambda(dw) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_Q \|\int_Q f(w)K(w)\lambda(dw)\| \, \|x\| < \infty.$$

Теорема 3. *Пусть равномерно λ-измеримые операторы $K(w)$ для λ-почти всех $w \in W$ принадлежат пространству $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, причем для каждого λ-конечного множества $Q \in \Sigma_W$ имеем, что $K(w) \in L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))$. Для того, чтобы*

$$\int_W |fK(w)x| \lambda(dw) < \infty \tag{2}$$

для всех $x \in \mathfrak{X}$ и $f \in \mathfrak{Y}^*$, необходимо и достаточно, что

$$\| \int_Q K(w) \lambda(dw) \| = O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$.

Доказательство. В силу леммы условие (2) равносильно следующему условию:

$$f \int_Q K(w) x \lambda(dw) = O(1)$$

для всех $x \in \mathfrak{X}$, $f \in \mathfrak{Y}^*$ и равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$. Так как слабая ограниченность на пространстве $\mathfrak{X}$ равносильна сильной ограниченности, то получаем, что

$$\| \int_Q K(w) x \lambda(dw) \| = O(1)$$

для всех $x \in \mathfrak{X}$ и равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$. Из последнего условия в силу принципа равномерной ограниченности мы и получаем условие теоремы 3.

§ 2. Преобразования класса $(\mathfrak{X}, L)$ в слабой топологии пространства $\mathfrak{Y}$

При помощи теоремы 3 мы можем доказать следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$*

$$\int_Q \operatorname{vraisup}_t \int_U |K(w, u, t)| \nu(du) \lambda(dw) < \infty. \tag{3}$$

Если[2] мера μ является σ-конечной, то для того, чтобы преобразование (1) принадлежало классу (L_1, L) в слабой топологии пространства $L_1(U, \Sigma_U, \nu)$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:

$$1^\circ \quad \operatorname{vraisup}_t \int_U \left| \int_Q K(w, u, t) \lambda(dw) \right| \nu(du) = O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$;

$$2^\circ \quad \operatorname{vraisup}_t \int_W \left| \int_R K(w, u, t) \nu(du) \right| \lambda(dw) = O(1)$$

равномерно относительно множеств $R \in \Sigma_U$.

[2] Мы пользуемся обозначениями и определениями из работы [1].

Доказательство. Из условия (3) следует, что для всех $x \in L_1(T, \Sigma_T, \mu)$ и λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$

$$\int_T \int_Q \int_U |K(w, u, t) x(t)| \nu(du) \lambda(dw) \mu(dt) < \infty, \tag{4}$$

откуда при помощи теоремы Тонелли заключаем, что преобразование (1) является непрерывным линейным оператором, отображающим для λ-почти всех $w \in W$ пространство $L_1(T, \Sigma_T, \mu)$ в пространство $L_1(U, \Sigma_U, \nu)$. Кроме того, из условия (3) следует, что оператор $K(w)$, определенный преобразованием (1), принадлежит пространству $L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, B(L_1, L_1))$ для каждого λ-конечного множества $Q \in \Sigma_W$. По теореме 3 получаем теперь, что нормы операторов, определенные преобразованием

$$\int_T \int_Q K(w, u, t) x(t) \lambda(dw) \mu(dt), \tag{5}$$

должны быть ограниченными равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$. Из условия (4) выводим, что норма оператора, определяемого преобразованием (5), равна левой стороне условия 1° теоремы 4 (см. [1] стр. 536). Из условия (4) следует также, что условия 1° и 2° теоремы 2 равносильны.

Теорема 5. *Пусть для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$*

$$\int_Q \left\{ \int_T \left[\int_U |K(w, u, t)| \nu(du) \right]^q \mu(dt) \right\}^{\frac{1}{q}} \lambda(dw) < \infty \tag{6}$$

и пусть мера μ является σ-конечной. Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу* (L_p, L) $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\ 1 \leqslant p \leqslant \infty\right)$ *в слабой топологии пространства $L_1(U, \Sigma_U, \nu)$, необходимо и достаточно выполнение слeдующего условия*

$$\int_T \left| \int_R \int_Q K(w, u, t) \lambda(dw) \nu(du) \right|^q \mu(dt) = O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$ и всех множеств $R \in \Sigma_U$.

Доказательство. Из условия (6) следует, что для λ-почти всех $w \in W$ и для всех $x \in L_p(T, \Sigma_T, \mu)$ имеем

$$\int_U \left| \int_T K(w, u, t) x(t) \mu(dt) \right| \nu(du) < \infty,$$

вследствие чего преобразование (1) для λ-почти всех $w \in W$ является непрерывным линейным оператором из пространства $L_p(T, \Sigma_T, \mu)$ в пространство $L_1(U, \Sigma_U, \nu)$. Из условия (6) следует также, что оператор $K(w)$, определенный преобразованием (1), принадлежит пространству $L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, B(L_p, L_1))$ для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$. Следовательно, оператор, определяемый преобразованием

$$\int\limits_Q K(w,u,t)\lambda(dw)x=\int\limits_T\int\limits_Q K(w,u,t)\lambda(dw)x(t)\mu(dt)$$

для всех λ-конечных множеств $Q\in\Sigma_W$ является непрерывным линейным оператором из пространства $B(L_p, L_1)$, норма которого равна левой стороне условий теоремы 5 (ср. [1], стр. 536). Теперь наше утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть мера μ является σ-конечной и пусть для всех λ-конечных множеств $Q\in\Sigma_W$*

$$\int\limits_Q \operatorname{vraisup}_t \{\int\limits_U |K(w,u,t)|^p\nu(du)\}^{\frac{1}{p}}\lambda(dw)<\infty. \qquad (7)$$

Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу* (L_1, L) *в слабой топологии пространства $L_p(U,\Sigma_U,\nu)$ $(1<p<\infty)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\operatorname{vraisup}_t \int\limits_U |\int\limits_Q K(w,u,t)\lambda(dw)|^p\nu(du)=O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q\in\Sigma_W$.

Доказательство. Из условия (7) вытекает, что

$$\int\limits_T\int\limits_Q\int\limits_U |K(w,u,t)g(u)x(t)|\,\nu(du)\lambda(dw)\mu(dt)<\infty \qquad (8)$$

для всех $x\in L_1(T,\Sigma_T,\mu)$ и $g\in L_q(U,\Sigma_U,\nu)$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$. Следовательно, преобразование (1) для λ-почти всех $w\in W$ является непрерывным линейным оператором из пространства $L_1(T,\Sigma_T,\mu)$ в пространство $L_p(U,\Sigma_U,\nu)$ $(1<p<\infty)$. Из условия (7) следует также, что оператор $K(w)$, определенный преобразованием (1), принадлежит для каждого λ-конечного множества $Q\in\Sigma_W$ пространству $L_1(Q,\Sigma_W\cap Q,\lambda,B(L_1,L_p))$. Так как норма оператора, определенного преобразованием

$$\int\limits_T\int\limits_Q K(w,u,t)\lambda(dw)x(t)\mu(dt).$$

в силу [1] (см. стр. 559) равна левой стороне условий теоремы 6, то из теоремы 3 и вытекает утверждение теоремы 6.

Теорема 7. *Пусть T — нормальное топологическое пространство, $\mu\in rba(T)$ и*

$$\int\limits_Q\int\limits_T\int\limits_U |K(w,u,t)|\,\nu(du)\mu(dt)\lambda(dw)<\infty \qquad (9)$$

для всех λ-конечных $Q\in\Sigma_W$. Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу* (C, L) *в слабой топологии пространства $L_1(U,\Sigma_U,\nu)$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

1° $\int\limits_W |\int\limits_R\int\limits_S K(w,u,t)\mu(dt)\nu(du)|\,\lambda(dw)=O(1)$

равномерно относительно множеств $R \in \Sigma_U$ *и борелевских множеств* $S \subset T$;

$$2^\circ \quad \int\limits_U \Big| \int\limits_Q \int\limits_S K(w, u, t)\mu(dt)\lambda(dw)\Big| \nu(du) = O(1)$$

равномерно относительно λ*-конечных множеств* $Q \in \Sigma_W$ *и борелевских множеств* $S \subset T$;

$$3^\circ \quad \int\limits_T \Big| \int\limits_Q \int\limits_R K(w, u, t)\nu(du)\lambda(dw)\Big| \mu(dt) = O(1)$$

равномерно относительно λ*-конечных множеств* $Q \in \Sigma_W$ *и множество* $R \in \Sigma_U$.

Доказательство. Из условия (9) следует, что преобразование (1) является для λ-почти всех $w \in W$ линейным непрерывным оператором, отображающим пространство $C(T)$ в пространство $L_1(U, \Sigma_U, \nu)$, причем оператор $K(w)$, определенный преобразованием (1), принадлежит пространству $L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, B(C, L_1))$ для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$. Так как норма оператора

$$\int\limits_Q K(w)\lambda(dw) \in B(C, L_1)$$

равна (см. [1], стр. 536) верхней грани по $R \in \Sigma_U$ левой части условия 3°, то из теоремы 3 получаем теорему 7, так как в силу условия (9) условия 1°—3° теоремы 7 равносильны.

Теорема 8. *Пусть мера* μ *является* σ*-конечной,* U — *бикомпактное хаусдорфово пространство,* $\nu \in rca(U)$, *для* λ*-почти всех* $w \in W$ *функционал*

$$\int\limits_T K(w, u, t)x(t)\mu(dt)$$

непрерывен по $u \in U$ *для всех* $x \in L_1(T, \Sigma_T, \mu)$ *и*

$$\int\limits_Q \sup_u \operatorname{vraisup}_t |K(w, u, t)| \lambda(dw) < \infty \tag{10}$$

для всех λ*-конечных множеств* $Q \in \Sigma_W$. *Для того, чтобы преобразование* (1) *принадлежало классу* (L_1, L) *в слабой топологии пространства* $C(U)$, *необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\sup_u \operatorname{vraisup}_t \int\limits_W |K(w, u, t)| \lambda(dw) < \infty.$$

Доказательство. Из условия (10) заключаем, что преобразование (1) является для λ-почти всех $w \in W$ непрерывным линейным оператором, отображающим пространство $L_1(T, \Sigma_T, \mu)$ в пространство $C(U)$, причем оператор $K(w)$, определенный преобразованием (1), принадлежит пространству $L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, B(L_1, C))$ для каждого λ-конечного множества $Q \in \Sigma_W$. Так как

$$\|\int_Q K(w)\lambda(dw)\| = \sup_u \operatorname{vraisup}_t \int_Q |K(w, u, t)| \lambda(dw)$$

(см. [1], стр. 528), то из теоремы 3 и получаем утверждение теоремы 8.

Точно также доказывается и следующее утверждение.

Теорема 9. *Пусть U и T — бикомпактные хаусдорфовы пространства, $\mu \in rca(T)$, $\nu \in rca(U)$, функционал*

$$\int_T K(w, u, t) x(t) \mu(dt)$$

непрерывен по $u \in U$ для λ-почти всех $w \in W$ и всех $x \in C(T)$ и

$$\int_Q \sup_u \int_T |K(w, u, t)| \mu(dt) \lambda(dw) < \infty$$

для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$. Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу (C, L) в слабой топологии пространства $C(U)$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

1° $\sup_u \int_T |\int_Q K(w, u, t) \lambda(dw)| \mu(dt) = O(1)$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$;

2° $\sup_u \int_W |\int_S K(w, u, t) \mu(dt)| \lambda(dw) = O(1)$

равномерно относительно борелевских множеств $S \subset T$.

§ 3. Преобразования класса $(\mathfrak{X}, L)$ в сильной топологии пространства $\mathfrak{Y}$

При помощи теоремы 2 мы докажем следующие утверждения.

Теорема 10. *Пусть для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$*

$$\int_Q \{\int_U \operatorname{vraisup}_t |K(w, u, t)|^p \nu(du)\}^r \lambda(dw) < \infty \quad (r > 1) \tag{11}$$

и пусть мера μ является σ-конечной.

Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу (L_1, L) в сильной топологии пространства $L_p(U, \Sigma_U, \nu)$ $(1 < p < \infty)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\operatorname{vraisup}_t \int_W \left[\int_U |K(w, u, t)|^p \nu(du)\right]^{\frac{1}{p}} \lambda(dw) < \infty.$$

Доказательство. Из условия (11) следует, что оператор $K(w)$, определенный преобразованием (1), для λ-почти всех $w \in W$ принадлежит пространству $B(L_1, L_p)$. Из условия (11) следует далее, что для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$ $K(w) \in L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, B(L_1, L_p))$. Следовательно, применима теорема 2. Найдем норму функционала $\int_Q f(w) K(w) \lambda(dw)$. Для этого заметим, что в силу условия (11)

$$\int_Q \int_T x(t) \int_U f(w, u) K(w, u, t) \nu(du) \mu(dt) \lambda(dw) =$$

$$= \int_T \int_U \int_Q f(w, u) K(w, u, t) \lambda(dw) \nu(du) x(t) \mu(dt)$$

для всех $f(w, u)$, определяющих $f \in \Gamma(L_p)$, и, следовательно,

$$\int_Q f(w) K(w) \lambda(dw) x =$$

$$= \int_T \int_U \int_Q f(w, u) K(w, u, t) \lambda(dw) \nu(du) x(t) \mu(dt).$$

Учитывая выражение нормы функционала, определенного на $L_1(T, \Sigma_T, \mu)$, получаем следующее условие

$$\operatorname{vraisup}_t \int_W \left| \int_U f(w, u) K(w, u, t) \nu(du) \right| \lambda(dw) < \infty.$$

Но по условию (11) заключаем, что для μ-почти каждого $t \in T$ и λ-почти каждого $w \in W$ функция $K(w, u, t) \in \in L_p(U, \Sigma_U, \nu)$, следовательно, имеем, что

$$\int_W \left[\int_U |K(w, u, t)|^p \nu(du)\right]^{\frac{1}{p}} \lambda(dw) = O(1)$$

μ-почти всюду на T, что и требовалось доказать.

Точно так же и доказывается следующее утверждение.

Теорема 11. *Пусть для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$*

$$\int_Q \{\operatorname{vraisup}_t \int_U |K(w, u, t)| \nu(du)\}^r \lambda(dw) < \infty \quad (r > 1).$$

Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу (L_1, L) в сильной топологии пространства $L_1(U, \Sigma_U, \nu)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\operatorname{vraisup}_t \int_W \int_U |K(w, u, t)| \nu(du) \lambda(dw) < \infty.$$

Теорема 12. *Пусть T — бикомпактное хаусдорфово пространство, $\mu \in rca(T)$ и пусть для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$ выполнено условие*

$$\int_Q \{\int_U \int_T |K(w, u, t)| \mu(dt) \nu(du)\}^r \lambda(dw) < \infty \quad (r > 1). \qquad (12)$$

Для того, чтобы преобразование (1) принадлежало классу (C, L) в сильной топологии пространства $L_1(U, \Sigma_U, \nu)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\int_W \int_U |\int_S K(w, u, t) \mu(dt)| \nu(du) \lambda(dw) = O(1)$$

равномерно относительно борелевских множеств $S \subset T$.

Доказательство. Из условия (12) вытекает, что оператор $K(w)$, определенный преобразованием (1), для λ-почти всех $w \in W$, принадлежит пространству $B(C, L_1)$, так как в силу теоремы 1 из [1] (стр. 536)

$$\|K(w)\| \leqslant \int_U \int_T |K(w, u, t)| \mu(dt) \nu(du)$$

для λ-почти всех $w \in W$. С другой стороны, из условия (12) вытекает, что функционал

$$\int_T \int_U f(w, u) K(w, u, t) \nu(du) x(t) \mu(dt)$$

принадлежит пространству $L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, C^*)$ для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$ и для всех функций $f(w, u)$, определяющих $f(w) \in \Gamma(L_1)$. По теореме 2 имеем, что

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} |\int_T \int_Q \int_U f(w, u) K(w, u, t) \nu(du) \lambda(dw) x(t) \mu(dt)| = O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$. Учитывая выражения нормы функционалов, определенных на $C(T)$, получаем, что

$$\int_T |\int_Q \int_U f(w, u) K(w, u, t) \nu(du) \lambda(dw)| \mu(dt) = O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$.

Так как последнее условие равносильно следующему условию

$$\int_W |\int_U f(w, u) \int_S K(w, u, t) \mu(dt) \nu(du)| \lambda(dw) = O(1) \qquad (13)$$

равномерно относительно борелевских множеств $S \subset T$, то, учитывая, что в силу условия (12)

$$\int_S K(w, u, t) \mu(dt) \in L_1(U, \Sigma_U, \nu),$$

для λ-почти всех $w \in W$ и всех борелевских множеств $S \subset T$, мы получаем, что условие (13) равносильно условию из теоремы 12.

Теорема 13. *Пусть мера μ является σ-конечной, U — бикомпактное хаусдорфово пространство, функционал*

$$\int_T K(w, u, t) x(t) \mu(dt)$$

для λ-почти всех $w \in W$ и всех $x \in L_1$ непрерывен по $u \in U$, для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$

$$\int_Q \operatorname{vraisup}_{t, u} |K(w, u, t)|^r \lambda(dw) < \infty \quad (r > 1). \tag{14}$$

Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу (L_1, L) в сильной топологии пространства $C(U)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\operatorname{vraisup}_t \int_W \sup_u |K(w, u, t)| \lambda(dw) < \infty.$$

Доказательство. Из условия (14) вытекает, что оператор $K(w)$, определенный преобразованием (1), для λ-почти всех $w \in W$, принадлежит пространству $B(L_1, C)$, причем $K(w) \in L_1(Q, \Sigma_W \cap Q, \lambda, B(L_1, C))$. Так как теперь применима теорема 2, то из последнего выводим необходимость и достаточность условия

$$\operatorname{vraisup}_t \int_W \left| \int_U K(w, u, t) \nu(w, du) \right| \lambda(dw) < \infty,$$

для всех $\nu(w) \in rca(U)$, определяющих $f(w) \in \Gamma(C)$. Но так как для μ-почти всех $t \in T$ и λ-почти всех $w \in W$ функция $K(w, u, t) \in C(U)$, то последнее условие равносильно условию из теоремы 13.

Теорема 14. *Пусть T и U — бикомпактные хаусдорфовы пространства, $\mu \in rca(T)$, функционал*

$$\int_T K(w, u, t) x(t) \mu(dt)$$

для λ-почти всех $w \in W$ и всех $x \in C(T)$ непрерывен по $u \in U$ и для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$

$$\int_Q \left\{ \int_T |K(w, u, t)| \mu(dt) \right\}^r \lambda(dw) < \infty \quad (r > 1).$$

Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу (C, L) в сильной топологии пространства $C(U)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\int_W \sup_u \left| \int_S K(w, u, t) \mu(dt) \right| \lambda(dw) = O(1)$$

равномерно относительно борелевских множеств $S \subset T$.

Доказательство. Из предположений теоремы 14 вытекает, что применима теорема 2, в силу которой получаем необходимость и достаточность условия

$$\int_W \left| \int_U \int_S K(w, u, t)\, \mu(dt)\, \nu(w, du) \right| \lambda(dw) = O(1) \tag{15}$$

для всех $\nu(w) \in rca(U)$, определяющих $f(w) \in \Gamma(C)$, причем равномерно относительно всех борелевских множеств $S \subset T$. Но так как

$$\int_S K(w, u, t)\, \mu(dt)$$

для λ-почти всех $w \in W$ непрерывен по u, то условие (15) равносильно условию из теоремы 14.

§ 4. Преобразования класса $(\mathfrak{X}, L)$ в некоторой точке

При помощи теоремы 1 мы можем доказать следующие утверждения.

Теорема 15. *Пусть T — бикомпактное хаусдорфово пространство, $\mu \in rca(T)$ и для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$*

$$\int_Q \int_T |K(w, u_0, t)|\, \mu(dt)\, \lambda(dw) < \infty. \tag{16}$$

Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу (C, L) или (L_∞, L) в точке $u_0 \in U$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий*

1° $\int_T \left| \int_Q K(w, u_0, t)\, \lambda(dw) \right| \mu(dt) = O(1)$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$;

2° $\int_W \left| \int_S K(w, u_0, t)\, \mu(dt) \right| \lambda(dw) = O(1)$

равномерно относительно борелевских множеств $S \subset T$.

Доказательство. Из условия (16) следует, что выполнены предположения теоремы 1, из которого непосредственно получаем условие 1° теоремы 15. Так как в силу условия (16) условия 1° и 2° теоремы 15 равносильны, то тем самым теорема 15 полностью доказана.

Теорема 16. *Пусть мера μ является σ-конечной и пусть для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$*

$$\int_Q \operatorname{vraisup}_t |K(w, u_0, t)|\, \lambda(dw) < \infty. \tag{17}$$

Для того, чтобы преобразование (1) *принадлежало классу (L_1, L) в точке $u_0 \in U$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\operatorname{vraisup}_t \int_W |K(w, u_0, t)|\, \lambda(dw) < \infty.$$

Доказательство. Из условия (17) получаем, что применима теорема 1, в силу которого получаем необходимость и достаточность условия

$$\underset{t}{\mathrm{vrai\,sup}}\ \sup_{Q} \left| \int_{Q} K(w, u_0, t)\lambda(dw) \right| < \infty,$$

которое в силу леммы равносильно условию из теоремы 16.

Теорема 17. *Пусть для всех λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$*

$$\int_{Q} \left\{ \int_{T} |K(w, u_0, t)|^q \mu(dt) \right\}^{\frac{1}{q}} \lambda(dw) < \infty \qquad (1 < q < \infty). \tag{18}$$

Для того, чтобы преобразование (1) принадлежало классу (L_p, L) в точке $u_0 \in U$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия

$$\int_{T} \left| \int_{Q} K(w, u_0, t)\lambda(dw) \right|^q \mu(dt) = O(1)$$

равномерно относительно λ-конечных множеств $Q \in \Sigma_W$.

Доказательство. Из условия (18) следует, что применима теорема 1, из которой и получаем условие теоремы 17.

Исследуем теперь регулярность преобразования (1) относительно пространства $C(T)$.

Для этого нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 18. *Пусть $T = U$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, $\mu \in rca(T)$, $\nu \in rca(U)$ и для ν-почти всех $u \in U$ и λ-почти всех $w \in W$ функция $S(w, u, t) \in L_1(T, \Sigma_T, \mu)$.*

Если существует в смысле регулярной сходимости в пространстве R_m предел

$$\lim_{w \to \infty} \int_{T} S(w, u, t) x(t) \mu(dt) = s(u) x \tag{19}$$

для всех $x \in L_\infty(T, \Sigma_T, \mu)$ и ν-почти всех $u \in U$, то найдется $x_0 \in C(T)$ и борелевское множество $\tau \subset T$ такое, что $\mu(\tau) = a > 0$ и для всех $u_0 \in \tau$

$$\lim_{w \to \infty} \int_{T} S(w, u_0, t) x_0(t) \mu(dt) \neq x_0(u_0)$$

в смысле регулярной сходимости в R_m.

Доказательство. Пусть $\{x_k(t)\}$ — ограниченная в совокупности ортонормированная система, состоящая из непрерывных функций. Для такой системы найдется борелевское множество $\tau \subset T$ так, чтобы $\mu(\tau) = a > 0$ и $\lim\limits_{k} x_k(t_0) \neq 0$ для всех $t_0 \in \tau$. Если предел (19) существует для всех $x \in L_\infty(T, \Sigma_T, \mu)$ и ν-почти всех $u \in U$ в смысле регулярной сходимости в пространстве R_m, то в силу слабой полноты $L_1(T, \Sigma_T, \mu)$ найдется функция $S(u, t)$, которая для ν-почти всех $u \in U$ принадлежит пространству $L_1(T, \Sigma_T, \mu)$, причем ν-почти всюду на U

$$\int_T S(u,t)x(t)\mu(dt) = s(u)x \tag{20}$$

для всех $x \in L_\infty(T, \Sigma_T, \mu)$. Если в равенстве (20) вместо $x(t)$ подставить $x_k(t)$ и предположить, что для всех $x \in C(T)$ имеем $s(u)x = x(u)$ ν-почти всюду на T, то из равенства

$$x_k(u_0) = \int_T S(u_0, t)x_k(t)\mu(dt)$$

получаем противоречие, так как левая сторона равенства не стремится к нулю на множестве $\tau \subset T$, а правая сторона стремится к нулю, ибо она — коэффициент Фурье от интегрируемой функций. Как следствие из теоремы 18 получаем такие утверждения.

Теорема 19. *Если $T = U$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, $\nu \in rca(T)$, $\mu \in rca(T)$, выполнено условие* (16) *для всех $u_0 \in U$ и преобразование* (1) *принадлежит классу* (C, L) *во всех точках $u_0 \in U$, то преобразование* (1) *является нерегулярным относительно пространства $C(T)$.*

Доказательство. Если преобразование (1) принадлежит классу (C, L) во всех точках $u_0 \in U$, то в силу теоремы 15 оно принадлежит и классу (L_∞, L) во всех точках $u_0 \in U$. В силу условия (16) имеем тогда, что для всех $x \in L_\infty(T, \Sigma_T, \mu)$ и всех $u_0 \in U$ существует предел (19), где

$$S(w, u, t) = \int_a^w K(w, u, t)\lambda(dw)$$

и $a \in R_m$, $w \in R_m$. Из теоремы 18 и получаем наше утверждение.

Аналогично доказываются и следующие утверждения

Теорема 20. *Если выполнены предположения теоремы 9, где $T = U$ и преобразование* (1) *принадлежит классу* (C, L) *в слабой топологии пространства $C(T)$, то оно нерегулярно относительно пространства $C(T)$.*

Теорема 21. *Если $T = U$ — бикомпактное хаусдорфово пространство, $\nu \in rca(T)$, $\mu \in rca(T)$, $K(w, u, t) = K(w, t, u)$, выполнено условие* (3) *и преобразование* (1) *принадлежит классу* (L, L) *в слабой топологии пространства $L_1(U, \Sigma_U, \nu)$, то оно нерегулярное преобразование относительно пространства $C(T)$.*

§ 5. Некоторые приложения

1. Пусть $T = U = [a, b] \subset R_1$, меры ν и μ — суть меры Лебега, $W = N = \{n\}$ (множество натуральных чисел), $\lambda(n) = 1$, $A = (\overline{a}_{nk})$ — треугольная матрица, $\{\varphi_k, \psi_k\}$ — биортонормальная система (см. пределение из [2]) и

$$K(w, u, t) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{nk}\varphi_k(u)\psi_k(t).$$

Если теперь преобразование (1) принадлежит классу (C, L) в точке $u_0 \in U$, то это означает, что биортонормальные разложения по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ непрерывных функций являются в точке $u_0 \in [a, b]$ абсолютно суммируемыми методом $A = (\overline{a}_{nk})$. В случае тригонометрической системы мы получаем из теорем 4, 9 и 15 следующее утверждение.

Теорема 22. *Следующие утверждения равносильны:*

1° *Треугольный метод $A = (\overline{a}_{nk})$ суммирует абсолютно все ряды Фурье от непрерывных 2π-периодических функций всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$;*

2° *Треугольный метод $A = (\overline{a}_{nk})$ суммирует слабо безусловно все ряды Фурье от непрерывных 2π-периодических функций в метрике пространства $C[-\pi, \pi]$;*

3° *Треугольный метод $A = (\overline{a}_{nk})$ суммирует безусловно все ряды Фурье от 2π-периодических L-интегрируемых функций в метрике пространства $L_1[-\pi, \pi]$.*

2. Пусть $T = U = [a, b; a, b]$ — квадрат в R_2, $W = \{(m, n) : m, n \in N\}$, ν и μ — меры Лебеча в R_2, $\lambda(m, n) = 1$ и

$$K(w, u, t) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \overline{a}_{mnkl}\varphi_{kl}(u_1, u_2)\varphi_{kl}(t_1, t_2),$$

где $A = (\overline{a}_{mnk'})$ — треугольная матрица.

В этом случае, например, из теоремы 15 получаем следующее утверждение

Теорема 23. *Для того, чтобы двойные ряды Фурье по ограниченной системе $\{\varphi_k\}$ от непрерывных функций были в точке (u^0_1, u^0_2) абсолютно суммируемыми треугольным методом $A = (\overline{a}_{mnk})$, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

$$1^\circ \quad \int_a^b\int_a^b \Big| \sum_{m,n \in Q} \sum_{k,l=0}^{m,n} \overline{a}_{mnkl}\varphi_{kl}(u^\circ_1, u^\circ_2)\varphi_{kl}(t_1, t_2)\Big| dt_1 dt_2 = O(1)$$

равномерно относительно конечных множеств Q пар натуральных чисел;

$$2^\circ \quad \sum_{m,n} \Big| \sum_{k,l=0}^{m,n} \overline{a}_{mnkl}\varphi_{kl}(u^\circ_1, u^\circ_2) \iint_S \varphi_{kl}(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2\Big| = O(1)$$

равномерно относительно измеримых по Лебегу множеств S из квадрата $[a, b; a, b]$.

3. Пусть $T = U = (a, b)$, $W = (0, \infty) \subset R_1$, меры μ, ν и λ — суть меры Лебега, метод $A = \overline{a}(w, \tau)$ треуголен и

$$K(w, u, t) = \int_0^w \overline{\alpha}(w, \tau)\varphi(u, \tau)\overline{\varphi(t, \tau)}\,d\tau,$$

где $\varphi(u, \tau)$ — ортогональное ядро (см. определение из [2]).

При помощи теоремы 16 можно доказать следующие утверждения.

Теорема 24. *Пусть для всех $x \in V(a, b)$ (пространство функций с ограниченным изменением на (a, b)) и для некоторой $c \in (a, b)$*

$$\int_0^\infty \left| x(t) \int_c^t \int_0^w \overline{\alpha}(w, \tau)\varphi(u_0, \tau)\overline{\varphi}(\eta, \tau)\,d\tau\,d\eta \Big|_a^b \right| dw < \infty,$$

то для того, чтобы разложения всех функций с ограниченным изменением по ортогональному ядру $\varphi(\eta, \tau)$ были в точке u_0 абсолютно суммируемыми методом $A = \overline{\alpha}(w, \tau)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{vraisup}_t \int_0^\infty \left| \int_0^w \overline{\alpha}(w, \tau)\varphi(u_0, \tau) \int_c^t \varphi(\eta, \tau)\,d\eta\,d\tau \right| dw < \infty. \tag{21}$$

В случае преобразования Фурье получаем следующее утверждение.

Теорема 25. *Если треугольный метод $A = \overline{\alpha}(w, \eta)$ сохраняет ограниченность и сверх того удовлетворяет условию*

$$0 < \frac{\overline{\alpha}(w, \eta)}{\eta} \downarrow \tag{22}$$

для всех $w \in (0, \infty)$ при возрастании η, тогда преобразование Фурье функции с ограниченным изменением на $(0, \infty)$ является абсолютно суммируемым всюду методом $A = \overline{\alpha}(w, \eta)$.

Доказательство. Из теоремы 24 вытекает необходимость и достаточность условия

$$\operatorname{vraisup}_t \int_0^\infty \left| \int_0^w \overline{\alpha}(w, \eta) \frac{\sin \eta t}{\eta}\,d\eta \right| dw < \infty.$$

Покажем, что при выполнении условия (22)

$$\int_0^w \overline{\alpha}(w, \eta) \frac{\sin \eta t}{\eta}\,d\eta \geqslant 0.$$

Действительно,

$$\int_0^w \overline{\alpha}(w, \eta) \frac{\sin \eta t}{\eta}\,d\eta = \left(\int_0^{\frac{\pi}{t}} + \int_{\frac{\pi}{t}}^{\frac{2\pi}{t}} + \ldots \right) \overline{\alpha}(w, \eta) \frac{\sin \eta t}{\eta}\,d\eta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{t}} \sin \eta t \left[\frac{\bar{a}(w, \eta)}{\eta} - \frac{\bar{a}\left(w, \eta + \frac{\pi}{t}\right)}{\eta + \frac{\pi}{t}} \right] d\eta + \ldots \geqslant 0,$$

ибо $\sin \eta t > 0$, если $\eta \in (0, \frac{\pi}{t})$.

Следовательно,

$$\int_0^n \left| \int_0^w \bar{a}(w, \eta) \frac{\sin \eta t}{\eta} d\eta \right| dw = \int_0^n a(n, \eta) \frac{\sin \eta t}{\eta} d\eta,$$

где $a(n, \eta) = \int_\eta^n \bar{a}(w, \eta) dw$, что доказывает наше утверждение.

Отметим наконец, что этими примерами конечно не исчерпаны возможности применения доказанных в настоящей работе теорем. Мы привели эти примеры только потому, что они не посредственно вытекают из вышеуказанных теорем.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1961.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, Москва. 1958.
3. Mehdi, M. R., Linear transformation between the Banach spaces L^p and l^p with applications to absolute summability. London, 1959.

Поступило
12 VII 1967

ÜHEST INTEGRAALTEISENDUSE KLASSIST

H. Türnpu

Resümee

Käesolevas töös leitakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et koonduksid integraalid

$$\int_W \| \int_T K(w, u, t) x(t) \mu(dt) \| \lambda(dw),$$

$$\int_W | f \int_T K(w, u, t) x(t) \mu(dt) | \lambda(dw)$$

ja

$$\int_W | \int_T K(w, u_0, t) x(t) \mu(dt) | \lambda(dw)$$

iga $x \in L_p(T, \Sigma_T, \mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ või $x \in C(T)$ ja iga $f \in L^*_{p'}(U, \Sigma_U, \nu)$ $(1 \leqslant p' < \infty)$ või $f \in C^*(U)$ korral.

Saadud tulemusi rakendatakse Fourier' ridade absoluutse ja nõrga tingimusteta summeeruvuse uurimiseks.

ÜBER INTEGRALTRANSFORMATIONEN

H. Türnpu

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für Konvergenz folgender Integralen

$$\int_W \left\| \int_T K(w, u, t)\, x(t)\, \mu(dt) \right\| \lambda(dw),$$

$$\int_W \left| f \int_T K(w, u, t)\, x(t)\, \mu(dt) \right| \lambda(dw)$$

und

$$\int_W \left| \int_T K(w, u_0, t)\, x(t)\, \mu(dt) \right| \lambda(dw)$$

für jede $x \in L_p(T, \Sigma_T, \mu)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ (bzw. $x \in C(T)$) und für jede $f \in L^*_{p'}(U, \Sigma_U, \nu)$ $(1 \leqslant p' < \infty)$ (bzw. $x \in C(U)$) gefunden.

Diese Bedingungen werden zur Untersuchung der absoluten und schwachen unbedingten Konvergenz der Fourierreihen angewendet.

О НЕЗАВИСИМОСТИ ТАУБЕРОВЫХ УСЛОВИЙ ОТ ПОРЯДКА СУММИРУЕМОСТИ

Г. Кангро

Кафедра математического анализа

Пусть $A = (a_{nk})$ — нижняя треугольная матрица (т. е. $a_{nk} = 0$ при $k > n$). Для данного числового ряда

$$\Sigma u_n \tag{1}$$

определим величины A^α_n (α — натуральное число) индуктивно соотношениями

$$A_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} A_k^{\alpha-1}, \quad A_n^0 = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Ряд (1) будем называть *A-суммируемым порядка* α (или *A^α-суммируемым*) к сумме S, если

$$\lim_n A_n^\alpha = S.$$

Если, кроме того, $\Sigma |\Delta A^\alpha_n| < \infty$, то ряд (1) будем называть *$|A^\alpha|$-суммируемым* к S.

В ряде статей К. М. Слепенчук [5—12] и Х. Х. Меликов [3] доказали несколько тауберовых теорем (в случае обыкновенной и абсолютной суммируемостей) для некоторых конкретных методов суммирования простых и двойных последовательностей. В этих теоремах из A^α-суммируемости ($|A^\alpha|$-суммируемости) ряда (1) заключается сходимость (абсолютная сходимость) ряда (1) к той же сумме при выполнении некоторого *точного* (т. е. необходимого и достаточного) тауберова условия, не зависящего от порядка суммирования α. В настоящей заметке показывается, что в тауберовых теоремах указанного типа независимость тауберовых условий от порядка суммирования является весьма общим свойством метода A, зависящим лишь от линейности и регулярности метода A. Для этого вводится общее понятие метода суммирования как произвольного линейного оператора, действующего в произвольном векторном пространстве.

В § 1 излагается общее понятие метода суммирования и доказывается основная тауберова теорема. Соответствующее тауберово условие тривиально в случае $\alpha=1$; его значение состоит в том, что оно независимо от порядка α. Само тауберово условие изучается подробнее для матричных методов суммирования. В § 2 рассматривается случай суммирования простых последовательностей, а в § 3 — случай двойных последовательностей.

§ 1. Основная тауберова теорема

Пусть X — данное векторное пространство и L — его подпространство, на котором определен некоторый линейный оператор s со значениями в некотором векторном пространстве K, т. е. $s: L \to K$.

Каждый линейный оператор A, действующий из некоторого подпространства $D_A \subset X$ в пространство X, будем называть *методом суммирования*. Элемент $x \in D_A$ будем называть *A-суммируемым к сумме S относительно L*, если $Ax \in L$ и $S = s(Ax)$. При этом A-сумму элемента x условимся обозначать через $\bar{A}x$, т. е.

$$\bar{A}x = s(Ax).$$

Здесь $\bar{A}$ является линейным оператором, отображающим поле суммируемости метода A (т. е. множество всех A-суммируемых элементов) в пространство K. Метод A будем называть *L-регулярным*, если $A(L) \subset L$ и $\bar{A}x = sx$ при всех $x \in L$.

Пусть E — единичный оператор пространства X, т. е. $Ex = x$ при всех $x \in X$. Тогда E-суммируемость относительно L элемента x означает, что $x \in L$, причем $\bar{E}x = sx$. Тем самым метод E является L-регулярным. Поле метода E совпадает с L.

Элемент x будем называть *A-суммируемым порядка* $\alpha (\alpha = 0, 1, \ldots)$, если x суммируем оператором $A^\alpha (A^0 = E, A^1 = A)$. При регулярном методе A поле суммируемости метода A^α не может убывать при возрастании порядка α

Для A^α-суммируемости справедлива следующая основная тауберова теорема.

Теорема 1. *При L-регулярном операторе A из A^α-суммируемости относительно L элемента x следует E-суммируемость элемента x к той же сумме точно тогда, когда x является $(E - A)$-суммируемым к нулю относительно L.*

Доказательство. Необходимость. Пусть x является E-суммируемым к S, т. е. $x \in L$ и $sx = S$. Ввиду L-регулярности метода A, элемент x является A-суммируемым к S, т. е. $Ax \in L$ и $\bar{A}x = S$. Так как L — векторное пространство, то

$$(E - A)x = x - Ax \in L,$$

причем

$$\overline{E-A}x = s(E-A)x = s(x-Ax) = sx - s(Ax) = S - \bar{A}x = 0.$$

Достаточность. Пусть элемент x является A^{α}-суммируемым к S, т. е. $A^{\alpha}x \in L$, $\overline{A^{\alpha}}x = S$. Образуем операторы

$$G_{\beta} = A^{\beta} - A^{\beta+1} \quad (\beta = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Так как A^{β} является L-регулярным вместе с A, то из $\overline{E-A}x = 0$ вытекает

$$G_{\beta}x = A^{\beta}(E-A)x \in L$$

и[1]

$$\overline{G_{\beta}}x = \overline{A^{\beta}(E-A)}x = \overline{A^{\beta}}(E-A)x = 0 \quad (\beta = 0, 1, \ldots).$$

При $\beta = \alpha - 1$ из (1) получаем

$$A^{\alpha-1} = A^{\alpha} + G_{\alpha-1},$$

откуда следует $A^{\alpha-1}$-суммируемость относительно L элемента x, причем

$$\overline{A^{\alpha-1}}x = s(A^{\alpha-1}x) = s(A^{\alpha}x) + s(G_{\alpha-1}x) = \overline{A^{\alpha}}x + \overline{G_{\alpha-1}}x = S.$$

Аналогично, при $\beta = \alpha - 2$ из (1) заключаем $A^{\alpha-2}$-суммируемость относительно L элемента x, причем

$$\overline{A^{\alpha-2}}x = S.$$

Продолжая этот процесс α раз, мы при $\beta = 0$ из (1) заключаем о E-суммируемости относительно L элемента x, причем

$$\bar{E}x = S.$$

§ 2. Применение основной теоремы к матричным методам суммирования простых последовательностей

Пусть X — пространство всех последовательностей с элементами из некоторого банахова пространства K. Определим матричный метод $A = (a_{nk})$ равенством

$$Ax = \{\sum_k a_{nk}\xi_k\}_{n=0,1,\ldots}, \tag{2}$$

где $x = \{\xi_k\}$. Область определения D_A оператора A состоит из тех последовательностей $x \in X$, при которых все ряды в правой части равенства (2) сходятся.

Если L — множество всех сходящихся последовательностей в X и $sx = \lim \xi_k$, то A-суммируемость относительно L означает обычную A-суммируемость, E-суммируемость — обычную схо-

[1] Для любых методов суммирования U и V, при которых существует произведение UV, имеем

$$\overline{UV}x = s(UV)x = sU(Vx) = \overline{U}(Vx).$$

димость, а L-регулярность — обычную регулярность. При этом тауберово условие теоремы 1 гласит

$$\xi_n - \sum_n a_{nk}\xi_k = o(1). \tag{3}$$

Если L — множество всех абсолютно сходящихся последовательностей в X и $sx = \lim \xi_k$, то A-суммируемость относительно L означает абсолютную A-суммируемость, E-суммируемость — абсолютную сходимость, а L-регулярность — абсолютную регулярность. В этом случае тауберово условие теоремы 1 гласит [2]

$$\xi_n - \sum_k a_{nk}\xi_k = a(1). \tag{4}$$

Вводя обозначения

$$u_k = \bar{\Delta}\xi_k \qquad (\xi_{-1} = 0),$$

$$\alpha_{nk} = \sum_{\nu=0}^{k-1} a_{n\nu} \ (k > 0), \ \alpha_{n0} = 0, \tag{5}$$

мы при помощи преобразования Абеля находим

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk}\xi_k = \xi_n \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} - \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} u_k. \tag{6}$$

Условие (3) необходимо и достаточно для того, чтобы из A-суммируемости последовательности x (или ряда Σu_n) следовала сходимость x (или Σu_n) к той же сумме. Если метод A треуголен, то, в силу (6) и регулярности A, условие (3) равносильно условию $t_n = o(1)$, где

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} u_k. \tag{7}$$

Аналогично, в случае треугольного метода A, в силу (6) и абсолютной регулярности A, условие (4) равносильно условию $t_n = a(1)$. Тем самым доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. *Если треугольный метод $A = (a_{nk})$ регулярен, то A^α-суммируемый ряд Σu_n сходится к той же сумме точно тогда, когда*

$$t_n = o(1).$$

Теорема 3. *Если треугольный метод $A = (a_{nk})$ абсолютно регулярен, то $|A^\alpha|$-суммируемый ряд Σu_n абсолютно сходится к той же сумме точно тогда, когда*

$$t_n = a(1).$$

При $\alpha = 1$ теоремы 2 и 3 имеются у Реймерса [4].

Пусть $\lambda_n \uparrow \infty$, $\lambda_0 = 0$, $\Theta \geqslant 0$, $\varepsilon \geqslant 0$. Если

---

[2] Запись $x_n = a(1)$ означает, что $x_n = \bar{o}(1)$ и $\Sigma \|\bar{\Delta} x_n\| < \infty$, $\bar{\Delta} x_n = x_n - x_{n-1}$ $(x_{-1} = 0)$

1) $\lambda_n a_{nk} = \begin{cases} \overline{\Delta}\lambda_{k+1} & (k < n) \\ 0 & (k \geqslant n), \end{cases}$

2) $\lambda_n a_{nk} = \begin{cases} \overline{\Delta}_n\lambda_{n-k} & (k < n) \\ 0 & (k \geqslant n), \end{cases}$

3) $(\lambda_n + \Theta) a_{nk} = \begin{cases} \Delta\lambda_{k+1} & (k < n) \\ \Theta + \varepsilon & (k = n), \end{cases}$

4) $(\lambda_n + \Theta) a_{nk} = \begin{cases} \overline{\Delta}_n\lambda_{n-k} & (k < n) \\ \Theta + \varepsilon & (k = n), \end{cases}$

то из теорем 2 и 3 непосредственно вытекают основные теоремы статей [3, 5—8, 12].

Пусть $\delta_n \uparrow \infty$, $\delta_0 > 0$ и

$$b_n = \sum_{\nu=0}^{n} \delta_\nu u_\nu.$$

Исходя из формулы (7), мы при помощи преобразования Абеля находим [3]

$$t_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_{n\nu}}{\delta_\nu} \delta_\nu u_\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} \left(\Delta_\nu \frac{a_{n\nu}}{\delta_\nu} \right) b_\nu + \frac{a_{nn}}{\delta_n} b_n =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} \left[(\Delta_\nu a_{n\nu}) \beta_\nu + a_{n,\nu+1} \left(\Delta \frac{1}{\delta_\nu} \right) b_\nu \right] + a_{nn}\beta_n$$

или, в силу формулы (5),

$$t_n = \beta_n \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu} - \sum_{\nu=0}^{n} a_{n\nu}\beta_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} b_{n\nu}\beta_{\nu-1}, \tag{8}$$

где

$$\beta_\nu = \frac{b_\nu}{\delta_\nu}, \quad b_{n\nu} = a_{n\nu} \frac{\overline{\Delta}\delta_\nu}{\delta_\nu}.$$

При помощи формулы (8) из теорем 2 и 3 нетрудно вывести следующие следствия (см., например, [2]), которые в случае $\alpha = 1$ были иным путем доказаны Слепенчуком [13, 14] (без требования треугольности матрицы A).

Следствие 1. *Если регулярный треугольный метод $A = (a_{nk})$ удовлетворяет условию*

$$\delta_n |a_{nk}| \leqslant M \overline{\Delta}\delta_k,$$

то из A^α-суммируемости ряда $\sum u_n$ вытекает его сходимость к той же сумме точно тогда, когда

$$b_n = o(\delta_n).$$

---

[3] $\Delta x_n = x_n - x_{n+1}$.

Следствие 2. *Если абсолютно регулярный метод* $A = (a_{nk})$ *удовлетворяет условиям*

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} = 1, \quad \sum_{n} |\overline{\Delta}_n c_{nk}| \leqslant M,$$

где

$$c_{nk} = \sum_{\nu=k}^{n} \left(\frac{\overline{\Delta}\delta_\nu}{\delta_\nu} - a_{n\nu} \sum_{i=k}^{\nu} \frac{\overline{\Delta}\delta_i}{\delta_i} \right),$$

то из $|A^\alpha|$*-суммируемости ряда* Σu_n *вытекает его абсолютная сходимость к той же сумме точно тогда, когда*

$$b_n = a(\delta_n).$$

§ 3. Применение основной теоремы к матричным методам суммированных двойных последовательностей

Пусть X — пространство всех двойных последовательностей с элементами из некоторого банахова пространства K. Определим матричный метод $A = (a_{mnkl})$ равенством

$$Ax = \{\sum_{k,l} a_{mnkl}\xi_{kl}\}_{m,n=0,1,\ldots}, \tag{9}$$

где $x = \{\xi_{kl}\}$. Область определения D_A оператора A состоит из тех последовательностей $x \in X$, при которых все ряды в правой части равенства (9) сходятся.

Если L — множество всех ограниченно сходящихся двойных последовательностей в X и $sx = \lim\limits_{k,l\to\infty} \xi_{kl}$, то A-суммируемость относительно L означает ограниченную A-суммируемость, а если L — множество всех абсолютно сходящихся двойных последовательностей в X и $sx = \lim\limits_{k,l\to\infty} \xi_{kl}$, то A-суммируемсть относительно L означает абсолютную A-суммируемость. В этих случаях тауберово условие теоремы 1 гласит [4]

$$x_{mn} = o_b(1), \tag{10}$$

соответственно

$$x_{mn} = a(1), \tag{11}$$

где

$$x_{mn} = \xi_{mn} - \sum_{k,l} a_{mnkl}\xi_{kl}.$$

Вводя обозначения

---

[4] Запись $x_{mn} = o_b(1)$ означает, что $x_{mn} = o(1)$ и $x_{mn} = O(1)$, а запись $x_{mn} = a(1)$, что $x_{mn} = o(1)$ и $\Sigma \|\overline{\Delta} x_{mn}\| < \infty$, $\overline{\Delta} x_{mn} = \overline{\Delta}_m \overline{\Delta}_n x_{mn}$.

$$u_{kl} = \Delta \xi_{kl} \qquad (\xi_{k,-1} = \xi_{-1,l} = \xi_{-1,-1} = 0),$$

$$a_{mnkl} = \sum_{\mu,\nu=0}^{k-1,\,l-1} a_{mn\mu\nu} \quad (k, l > 0), \quad a_{mnko} = a_{mnol} = a_{mnoo} = 0,$$

мы при помощи преобразования Абеля получаем

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl}\xi_{kl} = \xi_{mn} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} a_{mn\mu\nu} - \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl}u_{kl} -$$

$$- \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnk,\,n+1}u_{kl} - \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mn,\,m+1,\,l}u_{kl}. \tag{12}$$

Условие (10) необходимо и достаточно для того, чтобы из ограниченной A-суммируемости последовательности x (или ряда Σu_{mn}) следовала ограниченная сходимость x (или Σu_{mn}) к той же сумме. Если метод A треуголен (т. е. $a_{mnkl} = 0$ при $k > m$ или $l > n$ или $k, l > m, n$), то, в силу (12) и ограниченной регулярности A, условия (10) равносильны условиям

$$t_{mn} + p_{mn} + q_{mn} = o_b(1), \tag{13}$$

где

$$t_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnkl}u_{kl}, \quad p_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mnk,\,n+1}u_{kl},$$

$$q_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mn,\,m+1,\,l}u_{kl}.$$

Аналогично, в случае треугольного метода A, в силу (12) и абсолютной регулярности A, условие (11) равносильно условию

$$t_{mn} + p_{mn} + q_{mn} = a(1). \tag{14}$$

С целью упростить условия (13) и (14), рассмотрим треугольные методы $B = (b_{mnkl})$ и $C = (c_{mnkl})$ с элементами

$$b_{mnkl} = \begin{cases} 0 & (l < n) \\ \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_{mnk\nu} & (l = n), \end{cases} \qquad c_{mnkl} = \begin{cases} 0 & (k < m) \\ \sum\limits_{\mu=0}^{m} a_{mn\mu l} & (k = m). \end{cases}$$

Нетрудно убедиться (см., например, [2]), что методы B и C ограниченно (абсолютно) регулярны, если A ограниченно (абсолютно) регулярен. При помощи преобразования Абеля простых сумм мы находим

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} b_{mnkl}\xi_{kl} = \xi_{mn} \sum_{k,\nu=0}^{m,n} a_{mnk\nu} - p_{mn},$$

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} c_{mnkl}\xi_{kl} = \xi_{mn} \sum_{\mu,l=0}^{m,n} a_{mn\mu l} - q_{mn}.$$

Отсюда следует, что для выполнения условия (10) необходимы условия

$$p_{mn} = o_b(1), \qquad q_{mn} = o_b(1),$$

а для выполнения условия (11) — условия

$$p_{mn} = a(1), \qquad q_{mn} = a(1).$$

Тем самым каждое из условий (13) и (14) распадается на три однотипные условия, и из теоремы 1 вытекают следующие теоремы.

Теорема 4. *Если треугольный метод $A = (a_{mnkl})$ ограниченно регулярен, то ряд Σu_{mn}, A^{α}-суммируемый к сумме S, ограниченно сходится к S точно тогда, когда*

$$t_{mn} = o_b(1), \qquad p_{mn} = o_b(1), \qquad q_{mn} = o_b(1).$$

Теорема 5. *Если треугольный метод $A = (a_{mnkl})$ абсолютно регулярен, то ряд Σu_{mn}, $|A^{\alpha}|$-суммируемый к сумме S, абсолютно сходится к S точно тогда, когда*

$$t_{mn} = a(1), \qquad p_{mn} = a(1), \qquad q_{mn} = a(1).$$

Из теорем 4 и 5 непосредственно вытекают основные теоремы статей [9—11].

Литература

1. Кангро Г. Ф., О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. Изв. АН Эст. ССР, 1956, сер. техн. и физ.-матем. наук, 5, 108—126.
2. Кулль И. Г., Матричные преобразования классов двойных последовательностей в банаховых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 193—208.
3. Меликов Х. Х., Теоремы тауберова типа для $C_{\varepsilon,\Theta,\alpha}$-методов суммирования. Уч. зап. Сев.-Осетинск. гос. пед. ин-т, 1966, **27**, 28—34.
4. Реймерс Э. Г., Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 43—51.
5. Сліпенчук К. М., Деякі методи підсумовування рядів. Доповіді АН УРСР, 1963, № 12, 1559—1562.
6. Сліпенчук К. М., Теорема тауберово типу для $(H^{(\alpha)}, \lambda)$-методів підсумовування подвійних рядів. Доповіді АН УРСР, 1964, № 3, 312—314.
7. Слепенчук К. М., Теоремы тауберова типа для $(C_{\Theta}^{(\alpha)}, \lambda)$-методов суммирования рядов. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1964, № 3, 131—135.
8. Слепенчук К. М., Теоремы тауберова типа для некоторых методов суммирования рядов. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1964, № 5, 100—103.
9. Слепенчук К. М., Теоремы тауберова типа для некоторых методов суммирования двойных рядов. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1964, № 6, 153—158.
10. Слепенчук К. М., Теоремы тауберова типа для суммирования двойных рядов методами Гельдера. Укр. матем. ж., 1965, **17**, № 1, 123—126.
11. Слепенчук К. М., Суммирование двойных рядов обобщенными методами Гельдера. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1965, № 4, 126—131.

12. Слепенчук К. М., Обобщение средних Гельдера и теоремы тауберова типа для этих методов. Укр. матем. ж., 1966, 18, № 1, 129—134.
13. Слепенчук К. М., Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования рядов и их приложение. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1968, № 1, 92—97.
14. Слепенчук К. М., Об одной общей теореме тауберова типа для абсолютной суммируемости рядов и ее приложение к методу Бореля. Изв. высш. учебн. заведений. Математика (в печати).

Поступило
21 VI 1967

TAUBERI TINGIMUSTE SÕLTUMATUS SUMMEERUVUSE JÄRGUST

G. Kangro

Resümee

Olgu A summeerimismenetlus. Rida nimetatakse α-järku ($\alpha = 0, 1, \ldots$) summeeruvaks menetlusega A, kui see rida on summeeruv menetlusega A^{α}. K. M. Slepentšuk [5—12] ja H. H. Melikov [3] on andnud mõnede konkreetsete menetluste A puhul tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et antud rea α-järku summeeruvusest (absoluutsest summeeruvusest) järelduks selle rea koonduvus (absoluutne koonduvus). Vastavad Tauberi tingimused on sõltumatud järgust α. Käesolevas artiklis näidatakse, et Tauberi tingimuste sõltumatus summeeruvuse järgust ülal vaadeldud Tauberi teoreemides on väga üldine summeerimismenetluste omadus, mis sõltub vaid menetluse lineaarsusest ja regulaarsusest. Selleks tõestatakse Tauberi teoreem menetluse A^{α} jaoks juhul, kui A on mingi vektorruumi suvaline regulaarne lineaarteisendus endasse. Vastavaid Tauberi tingimusi vaadeldakse üksikasjulikumalt ühe- ja kahekordsete maatriksmenetluste korral.

ON INDEPENDENCE OF TAUBERIAN CONDITIONS ON THE DEGREE OF SUMMABILITY

G. Kangro

Summary

Let A be a summability method. A series is called summable A of the degree α ($\alpha = 0, 1, \ldots$), if it is summable by A^{α}. K. M. Slepenchouk [5—12] and H. H. Melikov [3] have found neccesary and sufficient conditions for the convergence (absolute convergence) of a series, if the summability (absolute summability) of the degree α of the series by some known methods is assumed. Corresponding Tauberian conditions are independent on the degree α. It is shown in the present paper that independence of the Tauberian conditions on the degree of summability in the Tauberian theorems considered above is a very general property of summability methods, depending only on the linearity and regularity of the method. For this purpose a general Tauberian theorem for A^{α} is proved corresponding to any regular linear mapping A of a vector space into himself. Corresponding Tauberian conditions are considered, in particular, for matrix methods of simple and double series.

СОВМЕСТНОСТЬ s-СХОДИМОСТИ

Э. Реймерс

Кафедра математического анализа

В настоящей работе мы покажем, что s-сходимость, введенная автором в статьях [1] и [2], обладает свойством совместности (теоремы 3 и 4). Во всей работе мы будем пользоваться обозначениями и определениями из [2], так что для чтения настоящей статьи нужно предварительно ознакомиться с § 1 из [2].

В статье [2] (см. теоремы 1.3.1 и 1.3.2) было показано, что при $Q = L$ последовательность $x = \{x_k\}$ s-сходится ($\bar{s}$-сходится) тогда и только тогда, когда последовательность x почти ограничена (соответственно ограничена). При $Q \subset L$ эти условия только необходимы, так как тогда может s-сходиться уже только часть ограниченных или почти ограниченных последовательностей. В [2] (см. теоремы 1.4.1 и 1.4.2) мы получили при произвольном Q необходимые и достаточные условия для s-сходимости q-последовательностей $x = \{x_k(q)\}$, которые определены в той же статье [2]. Эти условия в частности применимы и к обычным ограниченным последовательностям $x = \{x_k\}$. Ниже (следующая теорема) мы дадим еще одно необходимое и достаточное условие для s-сходимости на Q ограниченной последовательности.

Выведем сперва одно неравенство. Пусть дано множество Q и пусть $x = \{x_k\} \in m$. При каждой системе разложений $q = \{q^m{}_n\}$ с $q^m{}_0 = \{\omega_\nu\}^m{}_{\nu=0}$ составим q-последовательность $\eta = \{\eta_k\}$, где в каждой части $\eta\omega_\nu$ члены η_{ν_k} определим равенством

$$\eta_{\nu_k} = \sup_{i \geq k} x_{\nu_i} - \inf_{i \geq k} x_{\nu_i}. \tag{1}$$

Для любой части $x\omega'_\mu$ последовательности $x = \{x_k\}$ мы имеем

$$\inf_{i \geq k} x_{\mu_i} \leqslant x_{\mu_k} \leqslant \sup_{i \geq k} x_{\mu_i} \tag{2}$$

При $n \geqslant k$ для любой части $x\omega_\nu$, где $\omega_\nu \leqslant \omega'_\mu$, будет также

$$\inf_{i \geq k} x_{\mu_i} \leqslant x_{\nu_n} \leqslant \sup_{i \geq k} x_{\mu_i}. \tag{3}$$

Из этих неравенств (2) и (3) следует, что имеет место

$$\left|x_{\nu_n} - x_{\mu_k}\right| \leqslant \sup_{i \geqslant k} x_{\mu_i} - \inf_{i \geqslant k} x_{\mu_i},$$

т. е.

$$\left|x_{\nu_n} - x_{\mu_k}\right| \leqslant \eta_{\mu_k}. \tag{4}$$

Учитывая примечание 1.2.4 из [2], мы можем теперь для разложений $\bar{q}^m{}_n$ и $\bar{q}^l{}_k$ с $q^m{}_0 = \{\omega_\nu\}^m{}_{\nu=0}$ и $q^l{}_0 = \{\omega'_\mu\}^l{}_{\mu=0}$ написать

$$s(x, q^m{}_n) = \sum_{\nu=0}^{m} x_{\nu_n} s(\omega_\nu) = \sum_{\mu=0}^{l} \sum_{\nu \in V_\mu} x_{\nu_n} s(\omega_\nu),$$

$$s(x, q^l{}_k) = \sum_{\mu=0}^{l} x_{\mu_k} s(\omega'_\mu) = \sum_{\mu=0}^{l} x_{\mu_k} s\Big(\sum_{\nu \in V_\mu} \omega_\nu\Big) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{l} \sum_{\nu \in V_\mu} x_{\mu_k} s(\omega_\nu).$$

Поэтому, из неравенства (4) будет

$$\left|s(x, \bar{q}^m{}_n) - s(x, \bar{q}^l{}_k)\right| \leqslant \sum_{\mu=0}^{l} \sum_{\nu \in V_\mu} \left|x_{\nu_n} - x_{\mu_k}\right| s(\omega_\nu) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\mu=0}^{l} \sum_{\nu \in V_\mu} \eta_{\mu_k} s(\omega_\nu) = \sum_{\mu=0}^{l} \eta_{\mu_k} s\Big(\sum_{\nu \in V_\mu} \omega_\nu\Big) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{l} \eta_{\mu_k} s(\omega'_\mu).$$

Следовательно,

$$\left|s(x, \bar{q}^m{}_n) - s(x, \bar{q}^l{}_k)\right| \leqslant s(\eta, \bar{q}^l{}_k). \tag{5}$$

Последнее неравенство (5) справедливо для любого $x = \{x_k\} \in m$ при каждом $q^l{}_k$ и для всех $\bar{q}^m{}_n \geqslant \bar{q}^l{}_k$.

Докажем еще одну вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Если последовательность $x = \{x_k\}$ $\bar{s}$-сходится на Q, то она ограничена.*

Доказательство. По определению 1.2.1 из [2] имеем $q_0 = \{e\} \in Q$. Для системы $q = \{q_n\}$ с $q_0 = \{e\}$ будет

$$s(|x|, q_n) = |x_n|.$$

Утверждение следует из определения $\bar{s}$-сходимости (см. определение 1.3.3 из [2]).

Теорема 1. *Последовательность $x = \{x_k\}$ s-сходится на Q тогда и только тогда, когда последовательность $\eta = \{\eta_k\}$ $\bar{s}$-сходится на Q к сумме $s(\eta) = 0$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $x=\{x_k\}$ s-сходится на Q. По лемме 1 будет $x\in m$. Ввиду теоремы 1.4.4 из [2] при каждом $\varepsilon>0$ существует такое разложение $q_\varepsilon\in Q$ и число N, что

$$\sum_{\nu=0}^{m}\left|x_{\nu_n}-x_{\nu_k}\right|s(\omega_\nu)<\varepsilon \tag{6}$$

для всех разложений $\bar q^m=\{\omega_\nu\}^m{}_{\nu=0}\geqslant q_\varepsilon$, где $\bar q^m\in Q$, при каждом $n,\ k\geqslant N$. Так как неравенство (6) справедливо при всех $n,\ k\geqslant N$, то справедливо будет и следующее неравенство

$$\sum_{\nu=0}^{m}\eta_{\nu_k}s(\omega_\nu)\leqslant\varepsilon$$

при $k\geqslant N$, где η_{ν_k} определены равенством (1). Таким образом,

$$s(\eta,\bar q^m{}_k)\leqslant\varepsilon \tag{7}$$

при всех $\bar q^m{}_k\geqslant q_\varepsilon$, т. е. последовательность $\eta=\{\eta_k(q)\}$ $\bar s$-сходится на Q к нулю.

Достаточность. Если $\eta=\{\eta_k\}$ $\bar s$-сходится на Q к нулю, то при каждом $\varepsilon>0$ существует такое разложение $\bar q^l{}_k$, что будет выполняться неравенство (7). Учитывая неравенство (5) и теорему 1.4.2 из [2], видим, что $x=\{x_k\}$ $\bar s$-сходится на Q. Теорема доказана.

Примечание 1. Для s-сходимости q-последовательности $\eta=\{\eta_k\}$ на Q необходимо и достаточно, чтобы при каждом $\varepsilon>0$ существовало такое разложение $\bar q^l{}_k\in Q$, что

$$s(\eta,\ \bar q^l{}_k)<\varepsilon.$$

Это следует из того, что для всех разложений $\bar q^m{}_n\geqslant\bar q^l{}_k$ будет

$$s(\eta,\bar q^m{}_n)\leqslant s(\eta,\bar q^l{}_k).$$

Теорема 2. *Из $\bar s$-сходимости последовательности $x=\{x_k\}$ на Q к сумме $s(x)$ следует ее $\bar s$-сходимость на L к той же сумме $s(x)$.*

Доказательство. Пусть последовательность $x=\{x_k\}$ $\bar s$-сходится на Q, тогда она по лемме 1 ограничена и, следовательно, по теореме 1.3.2 из [2] она также $\bar s$-сходится на L. Обозначим сумму последовательности $x=\{x_k\}$ на Q через $a(x)$, а на L через $s(x)$. Нужно показать, что $s(x)=a(x)$. Для этого рассмотрим разность

$$\begin{aligned}s(x)-a(x)=s(x)&-s(x,\bar q^m{}_n)+\\&+s(x,\bar q^m{}_n)-s(x,\bar q^l{}_k)+\\&+s(x,\bar q^l{}_k)-a(x)=\\&=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}.\end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное число. Из-за $\bar s$-сходимости последовательности $x=\{x_k\}$ на Q мы можем выбрать такое разложение $\bar q^l{}_k\in Q$, что $|\mathrm{III}|<\varepsilon$ и

$$s(\eta, \bar{q}^l_k) < \varepsilon.$$

Последовательность $x = \{x_k\}$, как мы показали в начале доказательства, s-сходится на L. Поэтому можно выбрать такое разложение $\bar{q}^m_n$, что $|\mathrm{I}| < \varepsilon$. Учитывая примечание 1. 4. 3 из [2], мы можем предположить, что $\bar{q}^m_n \geqslant \bar{q}^l_k$. Ввиду неравенства (5) мы теперь имеем

$$|\mathrm{II}| \leqslant s(\eta, \bar{q}^l_k) < \varepsilon.$$

Следовательно, при каждом $\varepsilon > 0$ будет

$$|s(x) - a(x)| < 3\varepsilon,$$

т. е. $s(x) = a(x)$. Теорема доказана.

Теорему 2 можно получить также из неравенства (5) при предельном переходе.

Теорема 3. *Если последовательность $x = \{x_k\}$ s-сходится на Q_1 к сумме $s_1(x)$ и на Q_2 к сумме $s_2(x)$, то $s_1(x) = s_2(x)$, т. е. $\bar{s}$-сходимость совместна.*

Доказательство. По лемме 1 будет $x \in m$ и по теореме 1. 3. 2 из [2] последовательность x s-сходится на L к $s(x)$. По теореме 2 мы имеем $s_1(x) = s(x)$ и $s_2(x) = s(x)$, т. е. $s_1(x) = s_2(x)$. Теорема доказана.

Такая же теорема имеет место и для почти ограниченных последовательностей $x = \{x_k\}$, т. е. для s-сходимости, так как члены x_{ν_k} неограниченной части $x\omega_\nu$ из-за $s(\omega_\nu) = 0$ исчезают из суммы $s(x, q_n)$, и мы можем из последовательности $\eta = \{\eta_k\}$ также исключить (т. е. заменить нулями) часть $\eta\omega_\nu$, элементы которой не определяются равенством (1). Поэтому доказательство теоремы 1 применимо и для почти ограниченных последовательностей. Следовательно имеет место

Теорема 4. *Если последовательность $x = \{x_k\}$ s-сходится на Q_1 к сумме $s_1(x)$ и на Q_2 к сумме $s_2(x)$, то $s_1(x) = s_2(x)$, т. е. s-сходимость совместна.*

Совместность s-сходимости и $\bar{s}$-сходимости для q-последовательностей мы рассмотрим в одной из следующих статей.

Литература

1. Реймерс Э., Новые общие методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, **129**, 119—154.
2. Реймерс Э., Континуальные методы суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 50—89.

Поступило
5 VI 1968

KOOSKÕLA s-KOONDUVUSE KORRAL

E. Reimers

Resümee

Artiklis näidatakse, et s-koonduvusel, mis on sisse toodud töödes [1, 2], on kooskõla omadus, s. t., kui jada $x = \{x_k\}$ on s-koonduv hulgal Q_1 summaks $s_1(x)$ ja hulgal Q_2 summaks $s_2(x)$, siis $s_1(x) = s_2(x)$. Sama kehtib ka tõkestatud s-koonduvuse korral. Antakse tarvilikud ja piisavad tingimused jada s-koonduvuseks mingil hulgal Q.

CONSISTENCY OF s-CONVERGENCE

E. Reimers

Summary

In the article it is shown that s-convergence introduced in the papers [1, 2] possesses a property of consistency, that is if the sequence $x = \{x_k\}$ is s-convergent on the set Q_1 to the sum $s_1(x)$ and on the set Q_2 to the sum $s_2(x)$ then $s_1(x) = s_2(x)$. The same is valid also for the bounded s-convergence. The necessary and sufficient conditions for the sequence $x = \{x_k\}$ to be s-convergent on any set Q are given.

МНОЖИТЕЛИ АБСОЛЮТНОЙ ОБОБЩЕННОЙ ЧЕЗАРО-СУММИРУЕМОСТИ

Э. Кольк

Кружок СНО при кафедре математического анализа

§ 1. Введение

Пусть $\{\varphi_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел. Ряд [1]

$$\Sigma\, u_n \tag{1}$$

называем *φ-$|C^\alpha|_p$-суммируемым* при $p \geqslant 1$, если последовательность $\{\varphi_n u'_n\}$, где

$$u'_0 = u_0, \quad u'_n = \frac{1}{nA_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu u_\nu \qquad (n \geqslant 1)$$

принадлежит к пространству последовательностей l^p, т. е.

$$\Sigma\, \varphi^p{}_n |u'_n|^p < \infty.$$

При $p = 1$ получаем φ-$|C^\alpha|$-суммируемость (см. [4], стр. 277, или [1], стр. 92), при $p = 1$ с $\varphi_n = 1$ — обыкновенную абсолютную Чезаро-суммируемость порядка α.

Комплексные числа ε_n называются [2] *множителями суммируемости типа* (φ-$|C^\alpha|_p$, C^β) (соответственно (φ-$|C^\alpha|_p$, $C^\beta{}_O$) или (φ-$|C^\alpha|_p$, $|C^\beta|$)), если при любом φ-$|C^\alpha|_p$-суммируемым ряде (1) ряд

$$\Sigma\, \varepsilon_n u_n$$

является C^β-суммируемым (соответственно C^β-ограниченным или $|C^\beta|$-суммируемым).

Отметим, что Мехди [11, 12] исследовал множители суммируемости типов (φ-$|C^\alpha|_p$, C^β) и (φ-$|C^\alpha|_p$, $|C^\beta|$) при возрастающей

[1] Если пределы изменения индексов у знака Σ не указаны, то они имеют все целочисленные значения от 0 до $+\infty$.

[2] Здесь не излагается история развития множителей суммируемости при $p = 1$, так как это подробно изложено в статьях [2], стр. 47—50 (случай $\varphi_n = 1$) и [1], стр. 93.

последовательности[3] $\varphi_n = n^{\frac{1}{q}}$. Такое определение φ-$|C^\alpha|_p$-суммируемости впервые рассматривал Флетт [8].

В настоящей статье найдем (теоремы 1 и 2) эффективные необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типов (φ-$|C^\alpha|_p$, C^β), (φ-$|C^\alpha|_p$, $C^\beta{}_O$) и (φ-$|C^\alpha|_p$, $|C^\beta|$) при целых $\alpha, \beta \geqslant 0$. При этом будем пользоваться обозначением

$$\Delta^\sigma x_n = \sum_{\rho=n}^{\infty} A_{\rho-n}^{-\sigma-1} x_\rho \tag{2}$$

если ряд (2) сходится при любом n.

§ 2. Некоторые леммы

Лемма 1. *Из условий*

$$\varepsilon_n = O(1), \tag{A}$$

$$\sum n^{(\alpha+1)q} \varphi^{-q}{}_n |\Delta^\alpha (n^{-1}\varepsilon_n)|^q < \infty \tag{B'}$$

при $\alpha \geqslant 0$, $q > 1$ *для всех* $\sigma = 0, 1, \ldots, \alpha$ *следует*

$$\sum n^{(\sigma+1)q} \varphi^{-q}{}_n |\Delta^\sigma (n^{-1}\varepsilon_n)|^q < \infty.$$

Доказательство проведем по индукции. Положив

$$\mu_n = n^{-1}\varepsilon_n,$$

лемма будет доказана, если при любом $\varkappa = 1, 2, \ldots, \alpha$ условие

$$\sum n^{(\varkappa+1)q} \varphi^{-q}{}_n |\Delta^\varkappa \mu_n|^q < \infty$$

повлечет за собой

$$\sum n^{\varkappa q} \varphi^{-q}{}_n |\Delta^{\varkappa-1} \mu_n|^q < \infty.$$

Действительно, так как

$$\sum_{\nu=n}^{n+r-1} \Delta^\varkappa \mu_\nu = \Delta^{\varkappa-1}\mu_n - \Delta^{\varkappa-1}\mu_{n+r},$$

то

$$|\Delta^{\varkappa-1}\mu_{n+r} - \Delta^{\varkappa-1}\mu_n| \leqslant \sum_{\nu=n}^{n+r-1} \nu\, |\Delta^\varkappa \mu_\nu|\, \nu^{-1}.$$

Поэтому, учитывая, что $\varkappa \geqslant 1$, $p > 1$, в силу неравенства Гёльдера получаем (см. также [6], стр. 284)

$$|\Delta^{\varkappa-1}\mu_{n+r} - \Delta^{\varkappa-1}\mu_n| = O(n^{-\frac{1}{q}}) \left(\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^q |\Delta^\varkappa \mu_\nu|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

---

[3] Во всей статье числа p и q связаны равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Отсюда, так как $\mu_n = o(1)$ по условию (A), выводим

$$|\Delta^{\varkappa-1}\mu_n| = O(n^{-\frac{1}{q}}) (\sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^q |\Delta^{\varkappa}\mu_\nu|^q)^{\frac{1}{q}},$$

или

$$|\Delta^{\varkappa-1}\mu_n|^q = O(n^{-1}) \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^q |\Delta^{\varkappa}\mu_\nu|^q.$$

Так как $\varkappa q > 0$, и φ_n не возрастает, то в итоге

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\varkappa q}\varphi^{-q}{}_n |\Delta^{\varkappa-1}\mu_n|^q = O(1) \sum_{n=1}^{\infty} n^{\varkappa q-1}\varphi^{-q}{}_n \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^q |\Delta^{\varkappa}\mu_\nu|^q =$$

$$= O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^q\varphi^{-q}{}_\nu |\Delta^{\varkappa}\mu_\nu|^q \sum_{n=1}^{\nu} n^{\varkappa q-1} =$$

$$= O(1) \sum \nu^{(\varkappa+1)q}\varphi^{-q}{}_\nu |\Delta^{\varkappa}\mu_\nu|^q < \infty.$$

Лемма 2. *При* $\alpha \geqslant 1$, $q > 1$ *из условий* (A) *и*

$$\sum n^{\alpha q}\varphi^{-q}{}_n |\Delta^{\alpha}\varepsilon_n|^q < \infty \tag{B}$$

для всех $\sigma = 1, 2, \ldots, \alpha$ *следует*

$$\sum n^{\sigma q}\varphi^{-q}{}_n |\Delta^{\sigma}\varepsilon_n|^q < \infty.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1, если только заметить, что ввиду соотношения (3) (положив в нем $\mu_n = \varepsilon_n$) по критерию Коши при $\varkappa \geqslant 2$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \Delta^{\varkappa-1}\varepsilon_n = l,$$

причем $l = 0$, так как в противном случае

$$\Delta^{\varkappa-2}\varepsilon_0 - \Delta^{\varkappa-2}\varepsilon_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} \Delta^{\varkappa-1}\varepsilon_\nu \to \infty$$

в то же время, как вместе с ε_n ограничены и $\Delta^{\varkappa-2}\varepsilon_n$ (ср. [10], стр. 72).

Лемма 3. *При* $\alpha \geqslant 0$, $q > 1$ *из условий* (A) *и* (B′) *следует условие* (B).

Доказательство. При помощи леммы 1, применяя неравенство Минковского и вытекающее из условия (A) соотношение

$$\Delta^{\alpha}\varepsilon_n = (n+\alpha)\Delta^{\alpha}(n^{-1}\varepsilon_n) - \alpha\Delta^{\alpha-1}(n^{-1}\varepsilon_n)$$

(см. [7], стр. 77), из условий (A) и (B′) выводим условие (B), ибо

$$(\sum n^{\alpha q}\varphi^{-q}{}_n |\Delta^{\alpha}\varepsilon_n|^q)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum n^{\alpha q}\varphi^{-q}{}_n (n+\alpha)^q |\Delta^\alpha (n^{-1}\varepsilon_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \alpha \left(\sum n^{\alpha q}\varphi^{-q}{}_n |\Delta^{\alpha-1}(n^{-1}\varepsilon_n)|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Лемма 4. *Матричное преобразование*

$$u'_n = \sum_k \overline{a}_{nk} u_k \tag{4}$$

ряда в ряд при $1 < p < \infty$ *переводит пространство* l^p *в себя, если выполнены условия*

$$\sum_k |\overline{a}_{nk}| = O(1),$$

$$\sum_n |\overline{a}_{nk}| = O(1).$$

Доказательство см. [11], стр. 55—56.

Лемма 5. *При* $p > 1$, $-1 < \alpha < \beta$ *имеет место включение*

$$\varphi\text{-}|C^\alpha|_p \subset \varphi\text{-}|C^\beta|_p.$$

Доказательство. С помощью обратной матрицы метода Чезаро (см. [3], стр. 82) сводим проблему включения к исследованию матричного преобразования (4) ряда в ряд, где

$$\overline{a}_{nk} = \frac{k A_k^{\alpha} A_{n-k}^{\beta-\alpha-1}}{n A_n^{\beta}}. \tag{5}$$

Применяя к (5) лемму 4 и учитывая, что $\beta - \alpha > 0$, получаем требуемое по формулам (15.12) и (15.18) из книги [3].

§ 3. Множители суммируемости типов $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p, C^\beta)$ и $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p, C^\beta{}_O)$

Теорема 1. *Для того, чтобы числа* ε_n *при* $p > 1$ *были множителями суммируемости типа* $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p, C^\beta)$ *или* $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p, C^\beta{}_O)$ *в случае* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ *необходимо и достаточно выполнение условий* (B′) *и*

$$\varepsilon_n = O(\varphi_n n^{\beta-\alpha}), \tag{D}$$

а в случае $\beta > \alpha \geqslant 0$ *— условий* (B′) *и*

$$\varepsilon_n = O(\varphi_n). \tag{D′}$$

Доказательство. Сведя (при помощи обратной матрицы (см. [3], формула (15.27))) проблему нахождения множителей суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p, C^\beta{}_O)$ к исследованию некоторого матричного преобразования ряда в последовательность (ср. [2], выражение (2)) и применяя к этому преобразованию теорему XIIIa из статьи [9] (или теорему A из статьи [13]), непосредственно получаем, что

Числа ε_n *являются множителями суммируемости типа* φ-$|C^\alpha|_p$, $C^\beta{}_O$) *тогда и только тогда, если*

$$\sum_k \varphi^{-q}{}_k (kA_k^\alpha)^q \left| \sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-\alpha-1} \frac{A_{n-\nu}^\beta}{A_n^\beta} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \right|^q = O(1). \qquad (6)$$

Необходимость условия (D) вытекает из соотношения (6), если положить в нем $k=n$. Положив $\alpha=0$ в условии (6), и учитывая вытекающее из леммы 5 включение φ-$|C^0|_p \subset \varphi$-$|C^\alpha|_p$, получаем необходимость условия

$$\frac{A_{n-k}^\beta}{A_n^\beta} \varepsilon_k = O(\varphi_k),$$

откуда в процессе $n \to \infty$ вытекает условие (D′). Отсюда, так как последовательность φ_n не возрастает, в свою очередь вытекает условие (A). Необходимость условия (B′) следует в силу условия (A) из соотношения (6) (ср. [3], стр. 13, замечание 1.1).

Достаточность. Сведя проблему нахождения множителей суммируемости типа (φ-$|C^\alpha|_p$, C^β) к исследованию некоторого матричного преобразования ряда в последовательность и применяя к этому преобразованию теорему XIIIb из статьи [9] (или теорему (10.6, III) из книги [5]), легко доказать, что

Числа ε_n *являются множителями суммируемости типа* (φ-$|C^\alpha|_p$, C^β) *тогда и только тогда, если выполнены условия* (D′) *и* (6).

Пусть сначала $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. При помощи формулы разности произведения (см. [3], стр. 158) и неравенства Минковского получаем

$$\left[\frac{1}{(A_n^\beta)^q} \sum_{k=0}^{n} \varphi^{-q}{}_k (kA_k^\alpha)^q \left| \sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-\alpha-1} A_{n-\nu}^\beta \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \right|^q \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{i} (B_i)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$B_i = \frac{1}{(A_n)^q} \sum_{k=0}^{n} \varphi^{-q}{}_k (kA_k^\alpha)^q \left| A_{n-k}^{i+\beta-\alpha} \Delta^i (k^{-1}\varepsilon_k) \right|^q.$$

Следовательно, вместо соотношения (6) можем из условий (D) и (B′) выводить следующие соотношения

$$B_i = O(1) \quad (i=0, 1, \ldots, \alpha). \qquad (7)$$

Для этого нам придется в зависимости от поведения чисел $A_{n-k}^{i+\beta-\alpha}$ в выражениях (7), отдельно исследовать два случая.

1. Так как при $i=0, 1, \ldots, \alpha-\beta-1$ числа $|A_{n-k}^{i+\beta-\alpha}|$ являются членами сходящегося ряда, то из условия (D) вытекает

$$B_i = O(1) \sum_{k=0}^{n} |A_{n-k}^{i+\beta-\alpha}|^q = O(1).$$

2. Для $i=\alpha-\beta, \ldots, \alpha$ имеем $\alpha-i \geqslant 0$, $i+\beta-\alpha \geqslant 0$, и, значит, $A_k^{\alpha-i} A_{n-k}^{i+\beta-\alpha} = O(A_n^{\beta})$, так что в силу леммы 1 из условий (D) и (B′) выводим

$$B_i = O(1) \sum_{k=0}^{n} \varphi^{-q}{}_k k^{(i+1)q} |\Delta^i(k^{-1}\varepsilon_k)|^q = O(1).$$

Пусть теперь $\beta > \alpha \geqslant 0$. Этот случай следует из доказанного ввиду включения $C^\alpha \subset C^\beta$, ибо условия (D′) и (B′) достаточны для множителей суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p,\ C^\beta)$ при $\beta=\alpha$.

Замечание. Отметим, что в теореме 1 условие (B′) можно заменить условиями (B) и

$$\sum \varphi^{-q}{}_n |\varepsilon_n|^q < \infty. \tag{M′}$$

§ 4. Множители суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p,\ |C^\beta|)$

Теорема 2. *Для того, чтобы числа ε_n при $p>1$ были множителями суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p,\ |C^\beta|)$, в случае $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ необходимо и достаточно выполнение условий* (B) *и*

$$\sum n^{(\alpha-\beta)q} \varphi^{-q}{}_n |\varepsilon_n|^q < \infty, \tag{M}$$

а в случае $\beta > \alpha \geqslant 0$ — условий (B) *и* (M′).

Доказательство. Сведя проблему нахождения множителей суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p,\ |C^\beta|)$ к исследованию некоторого матричного преобразования ряда в ряд и применяя к этому преобразованию теорему C из статьи [13], непосредственно получаем, что

Числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(\varphi\text{-}|C^\alpha|_p,\ |C^\beta|)$ тогда и только тогда, если

$$\sum_k \varphi^{-q}{}_k (kA_k^{\alpha})^q \left| \sum_{n\in\mathfrak{N}} \frac{1}{nA_n^{\beta}} \sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-\alpha-1} A_{n-\nu}^{\beta-1} \varepsilon_\nu \right|^q = O(1), \tag{8}$$

где $\mathfrak{N}$ — всевозможные конечные подмножества последовательности неотрицательных целых чисел.

Необходимость условия (M) непосредственно следует из леммы 12 на стр. 136 работы [11]. При $\mathfrak{N}=\{0, 1, \ldots, m\}$ соотношение (8) принимает вид

$$\sum_k \varphi^{-q}{}_k (kA_k^{\alpha})^q \left| \sum_{n=k}^{m} \frac{1}{nA_n^{\beta}} \sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-\alpha-1} A_{n-\nu}^{\beta-1} \varepsilon_\nu \right|^q = O(1). \tag{9}$$

Так как, применяя вытекающее из условия (M) необходимое условие (A), формулу (2) и формулу Чжоу (см. [3], формула (15.18)), находим

$$\sum k^{(\alpha+1)q}\varphi^{-q}{}_k\,|\Delta^\alpha(k^{-1}\varepsilon_k)|^q =$$

$$= O(1)\sum \varphi^{-q}{}_k(kA_k^\alpha)^q \left|\sum_{\nu=k}^{\infty} A_{\nu-k}^{-\alpha-1}\varepsilon_\nu \sum_{n=\nu}^{\infty}\frac{A_{n-\nu}^{\beta-1}}{nA_n^\beta}\right|^q =$$

$$= O(1)\sum \varphi^{-q}{}_k(kA_k^\alpha)^q \left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{nA_n^\beta}\sum_{\nu=k}^{n} A_{\nu-k}^{-\alpha-1}A_{n-\nu}^{\beta-1}\varepsilon_\nu\right|^q,$$

то в процессе $m\to\infty$ из равенства (9) следует необходимость условия (B′). Из условий (A) и (B′) по лемме 3 получаем необходимость условия (B). Необходимость условия (M′) вытекает ввиду включения $|C^\beta|\subset C^\beta$ из теоремы 1.

Достаточность. Рассмотрим сначала случай $0\leqslant\beta\leqslant\alpha$. Очевидно соотношение (8) вытекает из

$$\sum \varphi^{-q}{}_k(kA_k^\alpha)^q\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{nA_n^\beta}\left|\sum_{\nu=k}^{n}A_{\nu-k}^{-\alpha-1}A_{n-\nu}^{\beta-1}\varepsilon_\nu\right|\right)^q = O(1). \qquad (10)$$

Учитывая неравенство Минковского, в силу формулы разности произведения имеем

$$\left[\sum \varphi^{-q}{}_k(kA_k^\alpha)^q\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{nA_n^\beta}\left|\sum_{\nu=k}^{n}A_{\nu-k}^{-\alpha-1}A_{n-\nu}^{\beta-1}\varepsilon_\nu\right|\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{i}(D_i)^{\frac{1}{q}},$$

где

$$D_i = \sum \varphi^{-q}{}_k(kA_k^\alpha)^q|\Delta^i\varepsilon_k|^q\left(\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{nA_n^\beta}\left|A_{n-k}^{i+\beta-\alpha-1}\right|\right)^q,$$

так что для доказательства теоремы 1 остается из условий (B) и (M) вывести соотношения

$$D_i = O(1) \qquad (i=0,1,\ldots,\alpha). \qquad (11)$$

При доказательстве последнего нам придется в зависимости от поведения чисел $A_{n-k}^{i+\beta-\alpha-1}$ в выражениях (11), отдельно исследовать два случая.

1. Пусть $i=0,1,\ldots,\alpha-\beta$. Пользуясь неравенством Минковского и формулой (2), в силу условия (M) имеем

$$\left(\sum k^{(\alpha-\beta)q}\varphi^{-q}{}_k|\Delta^i\varepsilon_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sum k^{(\alpha-\beta)q}\varphi^{-q}_k \Big|\sum_{\nu=0}^{i} A_\nu^{-i-1}\varepsilon_{\nu+k}\Big|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{i} |A_\nu^{-i-1}| \Big(\sum k^{(\alpha-\beta)q}\varphi^{-q}_k |\varepsilon_{\nu+k}|^q\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Поэтому, так как числа $|A^{i+\beta-\alpha-1}_{n-k}|$ являются членами сходящегося ряда, получаем

$$D_i = O(1) \sum k^{(\alpha-\beta)q}\varphi^{-q}_k |\Delta^i\varepsilon_k|^q \Big(\sum_{n=k}^{\infty}|A_{n-k}^{i+\beta-\alpha-1}|\Big)^q =$$

$$= O(1) \sum k^{(\alpha-\beta)q}\varphi^{-q}_k |\Delta^i\varepsilon_k|^q < \infty.$$

2. При $i = \alpha - \beta + 1, \ldots, \alpha$ имеем $i + \beta - \alpha - 1 \geqslant 0$, $\alpha - i + 1 > 0$. Следовательно, по формуле Чжоу в силу леммы 2 из условий (B) и (M) выводим

$$D_i = O(1) \sum k^{iq}\varphi_k^{-q} |\Delta^i\varepsilon_k|^q < \infty.$$

Случай $\beta > \alpha \geqslant 0$ нашей теоремы вытекает из доказанного ввиду включения $|C^\alpha| \subset |C^\beta|$. Теорема 2 доказана.

В заключение отметим, что, так как $q = \infty$ при $p = 1$, то условия теоремы 1 статьи [2] непосредственно не следуют из наших теорем при $p = 1$ с $\varphi_n = 1$. Все-таки это так, если, следуя Мехди [11] и Сардженту [13], при $q = \infty$ определить

$$\Big(\sum |x_n|^q\Big)^{\frac{1}{q}} = \sup_{n \geqslant 0} |x_n|.$$

Литература

1. Абель М., Множители суммируемости для метода Чезаро комплексного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 92—105.
2. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960, **9**, 47—68.
3. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
4. Барон С., Паллум С., Петерсон М., О двух теоремах Чжоу и их обобщениях на двойные ряды. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1962, **11**, 277—287.
5. Кук Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, 1960.
6. Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Москва, 1966.
7. Bosanquet, L. S., Chow, H. C., Some remarks on convergence and summability faktors. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 73—82.
8. Flett, T. M., On an extension of absolute summability and some theorems of Littlewood and Paley. Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, 113—141.
9. Hahn, H., Über Folgen linearer Operationen. Monatsch. Math. und Phys., 1922, **32**, 3—88.

10. K n o p p, K., Beweis eines von I. Schur in der Theorie der C-Summierbarkeit aufgestellten Satzes. J. reine und angew. Math., 1950, **187**, 70—74.
11. M e h d i, M. R., Linear trasformations between the Banach spaces L^p l^p with applications to absolute summability. London, 1959.
12. M e h d i, M. R., Summability factors for generalized absolute summability. Proc. London Math. Soc., 1960, **10**, 180—200.
13. S a r g e n t, W. L. C., Some sequence spaces related to the l^p spaces. J. London Math. Soc., 1960, 35, 161—171.

Поступило
12 V 1967

SUMMEERUVUSTEGURID ÜLDISTATUD ABSOLUUTSE CESÀRO-SUMMEERUVUSE JAOKS

E. Kolk

R e s ü m e e

Olgu $\{\varphi_n\}$ mittekasvav positiivsete arvude jada. Rida (1) nimetame φ-$|C\alpha|_p$-summeeruvaks mistahes reaalarvu $p \geqslant 1$ korral, kui $\Sigma \varphi^p{}_n |u'_n|^p < \infty$, kus

$$u'_0 = u_0, \qquad u'_n = \frac{1}{nA_n} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu u_\nu \qquad (n \geqslant 1).$$

Kompleksarve ε_n nimetatakse $(\varphi$-$|C\alpha|_p, C\beta)$ (vastavalt $(\varphi$-$|C\alpha|_p, C\beta_O)$ või $(\varphi$-$|C\alpha|_p, |C\beta|))$ tüüpi summeeruvusteguriteks, kui iga φ-$|C\alpha|_p$-summeeruva rea (1) korral on rida

$$\Sigma \varepsilon_n u_n$$

$C\beta$-summeeruv (vastavalt $C\beta$-tõkestatud või $|C\beta|$-summeeruv).

Käesolevas artiklis leitakse efektiivsed tarvilikud ja piisavad tingimused nimetatud tüüpi summeeruvustegurite jaoks täisarvuliste α, $\beta \geqslant 0$ korral.

SUMMIERBARKEITSFAKTOREN FÜR VERALLGEMEINTE ABSOLUTE C-SUMMIERBARKEIT

E. Kolk

Z u s a m m e n f a s s u n g

Es sei $\{\varphi_n\}$ eine nichtwachsende positive Zahlenfolge. Wir nennen die Reihe (1) φ-$|C\alpha|_p$-summierbar bei reellen $p \geqslant 1$, wenn $\Sigma \varphi^p{}_n |u'_n|^p < \infty$, wo

$$u'_0 = u_0, \qquad u'_n = \frac{1}{nA_n^\alpha} \sum_{\nu=1}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} \nu u_\nu \qquad (n \geqslant 1).$$

Komplexe Zahlen ε_n nennt man Summierbarkeitsfaktoren des Typus $(\varphi$-$|C\alpha|_p, C\beta)$ (entsprechend $(\varphi$-$|C\alpha|_p, C\beta_O)$ oder $(\varphi$-$|C\alpha|_p, |C\beta|))$, wenn für alle φ-$|C\alpha|_p$-summierbaren Reihen (1) stets die Reihe

$$\Sigma \varepsilon_n u_n$$

$C\beta$-summierbar (entsprechend $C\beta$-beschränkt oder $|C\beta|$-summierbar) ist.

Im vorliegenden Aufsatz werden effektive notwendige und hinreichende Bedingungen für Summierbarkeitsfaktoren des benannten Typus bei vollzähligen α, $\beta \geqslant 0$ gefunden.

МНОЖИТЕЛИ СУММИРУЕМОСТИ ПЕРВОГО РОДА ДЛЯ МЕТОДОВ ЧЕЗАРО КОМПЛЕКСНОГО ПОРЯДКА

М. Абель

Кружок СНО при кафедре математического анализа

§ 1. Введение

Пусть $\{\varphi_n\}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел.

Последовательность

$$\{U_n\} \tag{1}$$

называется *φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-суммируемой* (или *φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-ограниченной*), если последовательность

$$\{\varphi_n U'_n\}, \tag{2}$$

где

$$U'_n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} U_k \quad \text{и} \quad a_{nk} = \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}$$

сходится (соответственно ограничена).

Последовательность (1) называется *абсолютно φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-суммируемой*, коротко, *φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$-суммируемой*, если ряд[1]

$$\Sigma\, \varphi_n u_n,$$

где[2]

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{\Delta}_n a_{nk} U_k$$

абсолютно сходится.

Комплексные числа ε_n называются *множителями суммируемости типа* $(\varphi\text{-}\mathfrak{A}, B)$, если при любой φ-$\mathfrak{A}$-суммируемой[3] последовательности (1) ряд

---

[1] Если пределы изменения индексов у знака Σ не указаны, то индекс суммирования пробегает все значения 0, 1, 2, ...

[2] Здесь $\overline{\Delta}_n a_{nk} = a_{nk} - a_{n-1,k}$.

[3] Здесь φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_0$-суммируемость означает φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-ограниченности

$$\Sigma \varepsilon_n U_n \tag{3}$$

является B-суммируемым, где $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_0$ и $B = C^\beta$, $|C^\beta|$.

Множители суммируемости типа (φ-$|\mathfrak{C}^\alpha|$, C^β) определяются аналогично.

Определенные выше множители суммируемости обычно называются *множителями суммируемости первого рода.*

Множители суммируемости типов[4] (φ-$\mathfrak{A}$, $|C^\beta|$), где $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_0$ и $\alpha \geqslant 0$, $\beta > -1$, рассмотрел С. Барон в [3], теорема 24.3 при $\varphi_n = 1$, и в [4], теорема 2, а множители суммируемости типа ($\mathfrak{C}^\alpha, B$) с $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ — А. Пейеримхофф в [8] при произвольном B. Множители первого рода при произвольном B для методов взвешенных средних Рисса и их обобщении рассмотрели Г. Кангро в [5] и Х. Тюрнпу в [6].

В настоящей статье рассмотрим все вышеназванные типы множителей первого рода в случаях 1) $\alpha = 0, 1, \ldots$ и β — произвольное комплексное число с $\mathrm{Re}\,\beta \geqslant 0$ и в случаях 2) α и β — произвольные комплексные числа с $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant 0$ и $-1 < \mathrm{Re}\,\beta < 0$ или $\beta = 0$.

§ 2. Некоторые леммы

Лемма 1. *Из условий*

$$\varepsilon_n = O(1) \tag{4}$$

и

$$\sum (n+1)^\alpha \varphi^{-1}{}_n |\Delta^\alpha \varepsilon_n| < \infty \tag{5}$$

при всех $0 < \sigma \leqslant \alpha$ *следует*

$$\sum (n+1)^\sigma \varphi^{-1}{}_n |\Delta^\sigma \varepsilon_n| \leqslant \sum (n+1)^\alpha \varphi^{-1}{}_n |\Delta^\alpha \varepsilon_n|.$$

Доказательство следует из леммы 3 статьи [7], если в ней положить $\mu_n = (n+1)\varphi^{-1}{}_n$.

Лемма 2. *Из условий* (4) *и* (5), *при всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha - 1$, *следует*

$$\Delta^\sigma \varepsilon_n = o(\varphi_n n^{-\sigma-1}).$$

Доказательство следует из леммы 3 статьи [1], если в ней φ_n заменить на $n^{-1}\varphi_n$.

Лемма 3. *Из условий* (5) *и*

$$\sum \varphi^{-1}{}_n |\varepsilon_n| < \infty \tag{6}$$

для всех $1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha$ *следует*

$$\sum (n+1)^{\sigma-1} \varphi^{-1}{}_n |\Delta^\sigma \omega_n| < \infty,$$

где $\omega_n = n\varepsilon_n$.

Доказательство. Так как последовательность $\{\varphi_n\}$ не возрастает, из условия (6) следует

$$\sum |\varepsilon_n| < \infty. \tag{7}$$

[4] Если $\varphi_n = 1$, то вместо φ-$\mathfrak{C}$-суммируемости коротко пишем $\mathfrak{C}$-суммируемость.

В силу (7) для всех $\sigma \geqslant 1$ имеем[5]

$$\Delta^{\sigma}\omega_n = (n+\sigma)\Delta^{\sigma}\varepsilon_n - \sigma\Delta^{\sigma-1}\varepsilon_n. \tag{8}$$

Из леммы 1, в силу (8), вытекает, что для всех $1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha$

$$\sum (n+1)^{\sigma-1}\varphi^{-1}{}_n |\Delta^{\sigma}\omega_n| = O(1) \sum (n+1)^{\sigma}\varphi^{-1}{}_n |\Delta^{\sigma}\varepsilon_n| +$$
$$+ \sigma \sum (n+1)^{\sigma-1}\varphi^{-1}{}_n |\Delta^{\sigma-1}\varepsilon_n| < \infty.$$

Лемма 4. *Пусть $\alpha \geqslant 1$. Для множителей суммируемости типа $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}, C^{\beta})$ необходимо выполнение условия*

$$n\varepsilon_n = O(\varphi_n). \tag{9}$$

Доказательство. В силу включения $\varphi\text{-}|\mathfrak{C}^0| \subset \varphi\text{-}|\mathfrak{C}^1| \subset \subset \varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}$, все условия, необходимые для множителей суммируемости типов $(\varphi\text{-}|\mathfrak{C}^0|, C^{\beta})$ и $(\varphi\text{-}|\mathfrak{C}^1|, C^{\beta})$, необходимы и для множителей суммируемости типа $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}, C^{\beta})$.

Аналогично тому, как в [1], стр. 95 или в [2], стр. 279, можно доказать, что

Числа ε_n являются множителями суммируемости типа $(\varphi\text{-}|\mathfrak{C}^{\alpha}|, C^{\beta})$ тогда и только тогда, когда[6]

$$\lim a_{nk} = a_k \tag{10}$$

и

$$a_{nk} = O(1), \tag{11}$$

где

$$A^{\beta}_n a_{nk} = \varphi_k^{-1}\left[\sum_{s=0}^{n} A^{\beta}_{n-s}\varepsilon_s - \sum_{s=0}^{k-1} A^{\alpha}_s \sum_{m=s}^{n} A^{\beta}_{n-m} A^{-\alpha-1}_{m-s}\varepsilon_m\right].$$

Если $\alpha = 0$, то в силу условия (10), получаем

$$\lim a_{nk} = \varphi^{-1}{}_k \left[\lim (A^{\beta}{}_n)^{-1} \sum_{s=0}^{n} A^{\beta}{}_{n-s}\varepsilon_s - \sum_{s=0}^{k-1} \varepsilon_s\right] = a^0{}_k$$

и если $\alpha = 1$, то

$$\lim a_{nk} = \varphi^{-1}{}_k \left[\lim (A^{\beta}{}_n)^{-1} \sum_{s=0}^{n} A^{\beta}{}_{n-s}\varepsilon_s - \sum_{s=0}^{k-1} (s+1)\Delta\varepsilon_s\right] = a^1{}_k.$$

Так как

$$\sum_{s=0}^{k-1} (s+1)\Delta\varepsilon_s = \sum_{s=0}^{k-1} \varepsilon_s - k\varepsilon_k,$$

то

$$a^1{}_k = a^0{}_k + \varphi^{-1}{}_k k\varepsilon_k.$$

Из последнего, в силу условий (10) и (11), при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, следует необходимость условия (9).

---

[5] См. [2], стр. 60 или [3], стр. 172—173.

[6] Под $\lim s_n$ мы понимаем $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, а под $\lim s_{nk}$ — $\lim\limits_{n\to\infty} s_{nk}$, где свободные индексы принимают все значения 0, 1, 2, ...

§ 3. Множители суммируемости типа (φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, C^β)

Теорема 1. *Пусть $\alpha = 1, 2, \ldots$. Для того, чтобы числа ε_n были множителями суммируемости типа (φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, C^β) при*[7] *мнимом β с $\operatorname{Re}\beta = b = 0, 1, \ldots, \alpha-1$, необходимо и достаточно выполнение условий* (5),

C^β-суммируемость ряда $\sum \varepsilon_n \Delta^\alpha (A^\alpha{}_n \varphi^{-1}{}_n)$, $\qquad$ (12)

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^\alpha \varphi^{-1}{}_k (n-k+1)^{-1} |\Delta^{\alpha-b-1}\varepsilon_k| = O(n^b) \tag{13}$$

и

$$\varepsilon_n = O(\varphi_n n^{\operatorname{Re}\beta-\alpha}); \tag{14}$$

при других β с $0 \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant \alpha - 1$ — условий (5), (12), (14); *а при $\operatorname{Re}\beta > \alpha - 1$ — выполнение условий* (5), (9) *и* (12).

Доказательство. Аналогично тому, как в [1], стр. 96, можно доказать, что

Числа ε_n являются множителями суммируемости типа (φ-$\mathfrak{C}^\alpha$, C^β) тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\lim a_{nk} = a_k, \tag{15}$$

$$\lim \sum_{k=0}^{n} a_{nk} = a \tag{16}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{nk}| = O(1). \tag{17}$$

где

$$A^\beta_n a_{nk} = A^\alpha_k \varphi_k^{-1} \sum_{s=k}^{n} A^{-\alpha-1}_{s-k} A^\beta_{n-s} \varepsilon_s. \tag{18}$$

При $\alpha \geqslant 0$, $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$, в силу условия (4), условие (15) выполнено и

$$a_k = A^\alpha{}_k \varphi^{-1}{}_k \Delta^\alpha \varepsilon_k. \tag{19}$$

Условие (12) равносильно условию (16).

Достаточность. Остается доказать выполнение условия (17). Аналогично тому, как в теореме 2 статьи [1] из условий (4), (5), (12), (13) и (14) по леммам 1 и 2 следует выполнение условия (17), если там везде, кроме в $A^\alpha{}_k$ число $\alpha+1$ заменить на α. Если $\beta = b$, то доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы, при $\operatorname{Re}\beta \neq b$.

Необходимость условия[8] (14) вытекает из (17), по-

---

[7] Здесь и всюду дальнейшем $b = [\operatorname{Re}\beta]$.

Если $\beta = b$, то условие (13) является лишним.

[8] Если α — мнимое с $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$, то непосредственно получаем необходимость условия

$$\varepsilon_n = O(\varphi_n n^{\operatorname{Re}(\alpha-\beta)}).$$

ложив в нем $k = n$. Необходимость условия (9) следует из леммы 4. Так как последовательность $\{\varphi_n\}$ не возрастает, то из условия (9) следует необходимость условия (4). Из условий (15) и (17), в силу необходимости условия (4), следует необходимость условия (5).

Доказательство необходимости условия (13) таково же, как доказательство необходимости условия (Δ) на стр. 98 статьи [1], если там везде, кроме в A^{α}_{k}, числа α заменить на $\alpha - 1$.

Теорема 1а. *Пусть* $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$. *Для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типа* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^0, C^{\beta})$ *необходимо и достаточно выполнение условий* (6) *и*

C^{β}*-суммируемость ряда* $\sum \varphi^{-1}{}_n \varepsilon_n$. (20)

Доказательство. При $\alpha = 0$, $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$ условие (15) выполнено и

$$a_k = \varphi^{-1}{}_k \varepsilon_k.$$

Условие[9] (20) равносильно условию (16). Из условия (6) непосредственно вытекает выполнение условия (17). Необходимость условия (6) следует из условий (15) и (17).

§ 4. Множители суммируемости типа $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}{}_O, C^{\beta})$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha = 1, 2, \ldots$. *Для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типа* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}{}_O, C^{\beta})$ *при*[10] *мнимом* β *с* $\operatorname{Re}\beta = b = 0, 1, \ldots, \alpha - 1$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (5),

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha} \varphi^{-1}{}_k (n-k+1)^{-1} |\Delta^{\alpha-b-1} \varepsilon_k| = o(n^b) \tag{21}$$

и

$$\varepsilon_n = o(\varphi_n n^{\operatorname{Re}\beta - \alpha}); \tag{22}$$

при других β *с* $0 \leqslant \operatorname{Re}\beta \leqslant \alpha - 1$ — *условий* (5), (21);
а при $\operatorname{Re}\beta > \alpha - 1$ *достаточно выполнение условий* (5), (22) *и*

$$n\varepsilon_n = o(\varphi_n). \tag{23}$$

Если $\varphi_n = 1$, *то при* $\operatorname{Re}\beta > \alpha - 1$ *необходимо и достаточно выполнение условий* (5), (22) *и* (23).

Доказательство. Достаточность условий (5), (21), (22) и (23), по леммам 1 и 2, доказывается аналогично тому, как в теореме 3 статьи [1], если в ней везде, кроме в $A^{\alpha}{}_k$, число $\alpha + 1$ заменить на α.

Если $\beta = b$, то доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы при $\operatorname{Re}\beta \neq b$.

---

[9] Если числа ε_n множители сходимости, т. е. $\beta = 0$, то, в силу условия (6), условие (20) автоматически выполняется.

[10] Если $\beta = b$, то условие (21) является лишним.

Необходимость. В силу включения $\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha} \subset \varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}{}_{O}$, из теоремы 1 следует необходимость условий (4) и (5). Положив $k=n$ в равенстве (18), то, в силу того, что из условий (15) и (17) следует необходимость условия

$$a_k = o(1),$$

непосредственно получаем необходимость условия[11] (22). Доказательство необходимости условия (21) такого же, как на стр. 99—100 статьи [1] доказательство необходимости условия (Π), если там везде, кроме в $A^{\alpha}{}_{k}$, число α заменить на $\alpha-1$.

Пусть $\varphi_n = 1$, тогда, в силу включения $\mathfrak{C}^{\alpha}{}_{O} \subset \mathfrak{C}^{\alpha+1}{}_{O}$, из условия (21) из [1] и соотношений (18) и (19), при $\alpha=0$ и $\alpha=1$, следует, что

$$\lim \sum_{k=0}^{n} (\beta_{nk}\varepsilon_k - \varepsilon_k) = 0 \tag{24}$$

и

$$\lim \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left[\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k) - \Delta\varepsilon_k\right] = 0, \tag{25}$$

где

$$A^{\beta}{}_{n}\beta_{nk} = A^{\beta}{}_{n-k}.$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)\left[\Delta(\beta_{nk}\varepsilon_k) - \Delta\varepsilon_k\right] = \sum_{k=0}^{n} (\beta_{nk}\varepsilon_k - \varepsilon_k) + n\varepsilon_n(1-\beta_{nn})$$

и

$$\lim (1-\beta_{nn}) = 1 \tag{26}$$

при $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$, то в силу (24) и (25) следует необходимость условия (23).

Теорема 2а. *Пусть* $\operatorname{Re}\beta \geqslant 0$. *Для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типа* ($\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{0}{}_{O}$, C^{β}) *необходимо и достаточно выполнение условия* (6).

Доказательство. В силу включения $\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{0} \subset \varphi\text{-}\mathfrak{C}^{0}{}_{O}$, из теоремы 1а получаем необходимость условия (6). Аналогично тому, как на стр. 98—99 статьи [1], в силу теоремы 1а, остается доказать выполнение условия

$$\lim \sum_{k=0}^{n} \varphi^{-1}{}_{k} \left|\varepsilon_k(\beta_{nk}-1)\right| = 0. \tag{27}$$

Выполнение условия (27) следует из условия (6) и того, что

$$\lim \beta_{nk} = 1.$$

[11] Если α — мнимое с $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$, то непосредственно получаем необходимость условия

$$\varepsilon_n = o(\varphi_n n^{\operatorname{Re}(\beta-\alpha)}).$$

§ 5. Множители суммируемости типов $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}, |C^{\beta}|)$ и $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}{}_{O}, |C^{\beta}|)$

Теорема 3. *Пусть* $\alpha = 1, 2, \ldots$. *Для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типов* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}, |C^{\beta}|)$ *и* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}{}_{O}, |C^{\beta}|)$ *при* $0 \leqslant \operatorname{Re}\beta < \alpha - 1$ *с* $\operatorname{Re}\beta \neq b$ *или* $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha - 1$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (5) *и*

$$\sum (n+1)^{\alpha - \operatorname{Re}\beta} \varphi^{-1}{}_{n} |\varepsilon_n| < \infty, \tag{28}$$

а при $\operatorname{Re}\beta > \alpha - 1$ *с* $\operatorname{Re}\beta \neq b$ *или* $\beta > \alpha - 1$ — *условий* (5) *и* (6).

Доказательство. Аналогично тому, как на стр. 100 статьи [1], можно доказать, что

Числа ε_n *являются множителями суммируемости типов* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}, |C^{\beta}|)$ *и* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^{\alpha}{}_{O}, |C^{\beta}|)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum \Big| \sum_{n \in N} \overline{a}_{nk} \Big| = O(1), \tag{29}$$

где

$$nA^{\beta}_{n} \overline{a}_{nk} = A^{\alpha}_{k} \varphi^{-1}_{k} \sum_{s=k}^{n} A^{-\alpha-1}_{s-k} A^{\beta-1}_{n-s} \omega_s, \tag{30}$$

$\omega_s = s\varepsilon_s$ *и* N — *всевозможные конечные подмножества последовательности неотрицательных целых чисел.*

Достаточность. Для доказательства теоремы 3, надо из условий теоремы вывести выполнение условия (29). Для этого достаточно доказать, что из условий (5), (6) и (28) вытекают, при $i = 0, 1, \ldots, \alpha$, следующие соотношения:

$$\sum A^{\alpha}_{k} \varphi^{-1}_{k} |\Delta^{i} \omega_k| \sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{A^{i+\beta-\alpha-1}_{n-k-i}}{nA^{\beta}_{n}} \right| < \infty. \tag{31}$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда $0 \leqslant \operatorname{Re}\beta < \alpha - 1$ и когда $\operatorname{Re}\beta > \alpha - 1$ с $\operatorname{Re}\beta \neq b$. Аналогично тому, как в теореме 4 статьи [1], из условий (5), (6) и (28), по лемме 3, следует выполнение условия (31), если там везде число $\alpha + 1$ заменить на α и числа ε_n — на $n\varepsilon_n$.

Если $\beta = b$, то выполнение условия (31) доказывается аналогично тому, как при $\operatorname{Re}\beta \neq b$.

Необходимость условия (28) непосредственно вытекает из условия (29), положив в нем $k = n$, что допустимо по теореме 1 статьи [9] или по следствию 5.1 книги [3].

Положив в условии (29) множество $N = \{0, 1, \ldots, p\}$, где p произвольное целое число, приходим к условию

$$\sum \Big| \sum_{n=0}^{p} \overline{a}_{nk} \Big| = O(1),$$

откуда для любого $m = 0, 1, \ldots$ вытекает

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \Big| \sum_{n=k}^{p} \overline{a}_{nk} \Big| = \sum_{k=0}^{m} \Big| \sum_{n=k}^{\infty} \overline{a}_{nk} \Big| = O(1),$$

что равносильно условию

$$\sum A_k^{\alpha} \varphi_k^{-1} \Big| \sum_{n=k}^{\infty} (nA_n^{\beta})^{-1} \sum_{s=k}^{n} A_{s-k}^{-\alpha-1} A_{n-s}^{\beta-1} s\varepsilon_s \Big| < \infty. \tag{32}$$

Положив в (32) порядок $\alpha = 0$, в силу невозрастания последовательности $\{\varphi_n\}$ и включения $\mathfrak{C}^0 \subset \varphi\text{-}\mathfrak{C}^\alpha$, при помощи формулы (15. 18) из [3], получаем необходимость условия (7). Ввиду необходимости условия (7), в (32) допустима перестановка порядка суммирования, вследствие чего (32) превращает в условие (5). В силу включения $\varphi\text{-}\mathfrak{C}^0 \subset \varphi\text{-}\mathfrak{C}^\alpha$ из условия (5) следует необходимость условия (6).

Теорема 3а. *Пусть* $\operatorname{Re}\beta > -1$ *с* $\operatorname{Re}\beta \neq 0$ *или* $\beta = 0$. *Для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типов* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^0, |C^\beta|)$ *и* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^0{}_O, |C^\beta|)$, *необходимо и достаточно выполнение условия* (6).

Доказательство. Необходимость условия (6) доказывается так же, как в теореме 3. В силу условия (6) и формулы (15. 19) из [3], непосредственно получаем выполнение условия (30).

Теорема 3б. *Пусть* $\operatorname{Re}\alpha \geqslant 0$ *и* $-1 < \operatorname{Re}\beta < 0$ *или* $\beta = 0$. *Для того, чтобы числа* ε_n *были множителями суммируемости типов* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^\alpha, |C^\beta|)$ *и* $(\varphi\text{-}\mathfrak{C}^\alpha{}_O, |C^\beta|)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum (n+1)^{\operatorname{Re}(\alpha-\beta)} \varphi^{-1}{}_n |\varepsilon_n| < \infty. \tag{33}$$

Доказательство. Необходимость условия (33) получаем так же, как необходимость условия (28). В силу того, что $\{\varphi_n\}$ — невозрастающая последовательность, из условия (33) следует необходимость условия (7). Аналогично тому, как в теореме 4 статьи [1], из условий (7) и (33) и формулы (15. 18) из [3], следует выполнение условия (29), если там число $\alpha + 1$ заменить на α и числа ε_n — на $n\varepsilon_n$.

При $\alpha \geqslant 0$, $\beta > -1$, $\varphi_n = 1$, получаем теорему 24. 3 из [3], в несколько ином виде.

Литература

1. Абель М., Множители суммируемости для методов Чезаро комплексного порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, **177**, 92—105.
2. Барон С., Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1960. **9**, 47—68.
3. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966

4. Барон С., Паллум С., Петерсон М., О двух теоремах Чжоу и их обобщении на двойные ряды. Изв. АН Эст. ССР, сер. техн. и физ.-матем. наук, 1962, 11, 277—287.
5. Кангро Г., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1955, 37, 191—232.
6. Тюрнпу Х., Некоторые типы множителей суммируемости для метода Рисса второго порядка. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129, 253—263.
7. Dikshit, G. D., On the absolute summability factors of infinite series. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1959, A25, 191—200.
8. Peyerimhoff, A., Konvergenz- und Summierbarkeitsfaktoren. Math. Z., 1953, 57, 265—290.
9. Peyerimhoff, A., Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow. J. London Math. Soc., 1957, 32, 33—36.

Поступило
17 IX 1966

ESIMEST LIIKI SUMMEERUVUSTEGURID KOMPLEKSSET JÄRKU CESÀRO MENETLUSTE KORRAL

M. Abel

Resümee

Olgu $\{\varphi_n\}$ mittekasvav positiivsete arvude jada. Jada (1) nimetatakse φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-summeeruvaks (φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-tõkestatuks), kui jada (2) on koonduv (on tõkestatud).

Kompleksarve ε_n nimetatakse esimest liiki (φ-$\mathfrak{A}$, B) tüüpi summeeruvusteguriteks, kui iga φ-$\mathfrak{A}$-summeeruva jada (1) korral rida (3) on B-summeeruv, kus $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_O$ ja $B = C^\beta$, $|C^\beta|$ (φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_O$-summeeruvuse all mõistame φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-tõkestatust).

Käesolevas artiklis vaadeldakse ülalnimetatud tüüpi summeeruvustegureid, juhul kui $\alpha = 0, 1, \ldots$ või α on suvaline kompleksarv, millel $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant 0$ ja β on suvaline kompleksarv, millel $\mathrm{Re}\,\beta \geqslant 0$ või $\mathrm{Re}\,\beta > -1$ (teoreemis 3 eeldatakse lisaks, et $\mathrm{Re}\,\beta \neq 0, 1, \ldots$).

SUMMABILITY FACTORS OF FIRST TYPE FOR COMPLEX ORDER CESÀRO'S SUMMATION METHODS

M. Abel

Summary

Let $\{\varphi_n\}$ be the non-increasing sequence of positive numbers. The sequence (1) is said to be φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-summable (to be φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-bounded), if the sequence (2) is convergent (resp. is bounded).

The complex numbers ε_n are said to be the summability factors of (φ-$\mathfrak{A}$, B)-type, if for any φ-$\mathfrak{A}$-summable sequence (1), series (2) is B-summable, where $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}^\alpha$, $\mathfrak{C}^\alpha{}_O$ and $B = C^\beta$, $|C^\beta|$ (where under φ-$\mathfrak{C}^\alpha{}_O$-summability we think φ-$\mathfrak{C}^\alpha$-boundedness).

In the present paper we have considered all types of above-mentioned summability factors, when $\alpha = 0, 1, \ldots$ is an integer or α is any complex number with $\mathrm{Re}\,\alpha \geqslant 0$ and β — any complex number with $\mathrm{Re}\,\beta \geqslant 0$ or $\mathrm{Re}\,\beta > -1$. In theorem 3 we additionally assume that $\mathrm{Re}\,\beta \neq 0, 1, \ldots$.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ БИОРТОНОРМАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Х. Тюрнпу

Кафедра математического анализа

§ 1. Введение

Пусть на отрезке $[a, b]$ определены системы функций $\{\varphi_k(t)\}$ и $\{\psi_k(t)\}$, удовлетворяющие условию

$$\int_a^b \varphi_k(t)\psi_l(t)\,dt = \delta_{kl}.$$

Система $\{\varphi_k, \psi_k\}$ образует тогда биортонормальную систему (см. определение из [4]), а ряд[1]

$$\Sigma\, c_k\varphi_k(t),$$

где

$$c_k = \int_a^b x(t)\psi_k(t)\,dt,$$

является биортонормальным разложением функции $x(t)$ по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$. Пусть задан треугольный метод суммирования $A = (\overline{a}_{nk})$.

Определение 1. *Биортонормальное разложение функции $x(t)$ по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ называется A-суммируемым (соответственно $|A|$-суммируемым) в точке t_0, если сходится (соответственно абсолютно сходится) ряд*

$$\Sigma\, F_n(t_0), \tag{1}$$

где

$$F_n(t_0) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{nk} c_k \varphi_k(t_0).$$

В настоящей работе мы, в основном, исследуем $|A|$-суммируемость биортонормальных разложений непрерывных функций по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ всюду на отрезке $[a, b]$. В общем случае

[1] Мы обозначаем через $\Sigma\, a_k$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

$|A|$-суммируемость биортонормальных разложений непрерывных функций всюду на отрезке $[a, b]$ сравнительно мало изучено. Отмечаем следующие работы [6; 8; 9; 10; 12; 13; 14; 15; 16; 17], где рассматриваются либо конкретные системы, либо конкретные методы суммирования, либо, отличные от непрерывных, классы функций.

Приведем ниже результаты, используемые нами, которые опубликованы в редком издании [11].

Лемма 1. *Если для всех $n \geqslant 0$ функционалы f_n являются непрерывными и линейными в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$, то для того, чтобы для каждого $x \in \mathfrak{X}$*

$$\Sigma |f_n x| < \infty,$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\| \sum_{n \in \sigma} f_n \| = O(1)$$

равномерно относительно конечных множеств σ натуральных чисел.

Лемма 2. *Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и*

$$v_n = \int_a^b K_n(t) u(t)\, dt,$$

то для того, чтобы $v = \{v_n\} \in l$ для всех $u \in L^p$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_a^b | \sum_{n \in \sigma} K_n(t) |^q dt = O(1)$$

равномерно относительно конечных множеств σ натуральных чисел.

Лемма 3. *Если $1 \leqslant p < \infty$, то для того, чтобы $v \in l^p$ для всех $u \in L^\infty$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum | \int_S K_n(t)\, dt |^p = O(1)$$

равномерно относительно измеримых множеств S из $[a, b]$.

Лемма 4. *Для того, чтобы $v \in l$ для всех $u \in L$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\operatorname{vraisup}_{a \leqslant t \leqslant b} \sum |K_n(t)| < \infty.$$

Лемма 5. *Пусть*

$$p \geqslant 1,\ k \geqslant 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$$

и

$$y_m(t) = \sum_{k=0}^{m} K_n(t) d_n.$$

Следующие утверждения равносильны.

1° $v \in l^p$ *для всех* $u \in L^k$;

2° $y_m(t)$ *сходится сильно в метрике* L^l *для всех*

$$d = \{d_n\} \in l^q (p > 1) \text{ и}$$

$y_m(t)$ *сходится сильно в метрике* L^l *для всех* $d \in c_0 (p = 1)$;

3° $y_m(t)$ *сходится слабо в метрике* L^l *для всех* $d \in l^q$;

4° $y_m(t)$ *сходится по мере к функции* $y(t) \in L^l$ *для всех* $d \in l^l$.

При помощи интегрирования по частям из леммы 4 получаем следующее утверждение.

Лемма 6. *Если для всех* $u \in V$ *и некоторого* $c \in [a, b]$

$$\sum \Big| \int_c^t K_n(z)\, dz\, u(t) \Big|_a^b \Big| < \infty,$$

то для того, чтобы $v \in l$ *для всех* $u \in V$ *необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\operatorname*{vraisup}_{a \leqslant t \leqslant b} \sum \Big| \int_c^t K_n(z)\, dz \Big| < \infty.$$

Наконец, в силу [2] получаем следующее видоизменение теоремы 5.2.5 из [4].

Лемма 7. *Если система* $\{\varphi_k, \psi_k\}$ *ограничена в совокупности и система* $\{\varphi_k\}$ *полна в* L, *тогда существует множество положительной меры* $E \subset [a, b]$ *такое, что для каждой* $t_0 \in E$ *найдется существенно ограниченная функция, биортонормальное разложение которой не суммируемо в точке* t_0 *методом, удовлетворяющим условию*

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=k}^{\infty} \bar{a}_{nk} \neq 0. \tag{2}$$

§ 2. $|A|$-суммируемость биортонормальных разложений непрерывных функций

По определению 1 для исследования $|A|$-суммируемости биортонормальных разложений мы должны исследовать абсолютную сходимость ряда (1). Так как для каждой фиксированной $t_0 \in [a, b]$ $F_n(t_0)$ являются непрерывными линейными функционалами, то по лемме 1 имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Для того, чтобы биортонормальные разложения непрерывных функций по системе* $\{\varphi_k, \psi_k\}$ *были в точке* t_0 $|A|$-*суммируемыми, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_a^b \Big| \sum_{n \in \sigma} \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} \varphi_k(t_0) \psi_k(t) \Big| \, dt = O(1)$$

равномерно относительно конечных множеств σ натуральных чисел.

Из леммы 2 вытекает

Теорема 2. *Для того, чтобы биортонормальные разложения непрерывных функций по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ были в точке t_0 $|A|$-суммируемыми, необходимо и достаточно, чтобы этим свойством обладали биортонормальные разложения существенно ограниченных функций по этой же системе в точке t_0.*

Из теоремы 2 и леммы 3 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Для того, чтобы биортонормальные разложения непрерывных функций по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ были в точке t_0 $|A|$-суммируемыми, необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\sum_n \Big| \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} \varphi_k(t_0) \int_S \psi_k(t)\, dt \Big| = O(1) \tag{4}$$

равномерно относительно измеримых множеств S из $[a, b]$.

Из леммы 5 и теоремы 2 вытекает

Теорема 4. *Для того, чтобы биортонормальные разложения непрерывных функций по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ были в точке t_0 $|A|$-суммируемыми, необходимо и достаточно выполнение одного из следующих условий:*

последовательность

$$y_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=k}^{m} \bar{a}_{nk} d_n \varphi_k(t_0) \psi_k(t)$$

1° *сильно сходится в метрике L для всех $\{d_n\} \in c_0$;*

2° *слабо сходится в метрике L для всех $\{d_n\} \in m$;*

3° *сходится по мере к существенно ограниченной функции для всех $\{d_n\} \in m$.*

Равносильные утверждения теорем 1—4, хотя для проверки неэффективны, служат нам источником ряда полезных следствий, которыми мы займемся ниже.

Из леммы 7 и теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Если система $\{\varphi_k, \psi_k\}$ ограничена в совокупности и система $\{\varphi_k\}$ полна в L, то ни один метод суммирования, удовлетворяющий условию* (2) *не суммирует всех биортонормальных разложений непрерывных функций по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ всюду на отрезке $[a, b]$.*

Следствие 1. *Если выполнено одно из условий теорем 1—4 и система $\{\varphi_k, \psi_k\}$ удовлетворяет условиям теоремы 5, то метод A — конулевой метод суммирования* (см. определение из [3]).

Применание 1. *Для тригонометрической системы условия* (3) *и* (4) *имеют соответственно следующий вид:*

$$\int_0^{\pi} \Big| \sum_{n \in \sigma} \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_{nk} \cos kt \Big|\, dt = O(1)$$

равномерно относительно конечных множеств σ натуральных чисел;

$$\sum_n \left|\sum_{k=0}^n \overline{a}_{nk} \int_S \cos kt\, dt\right| = O(1)$$

равномерно относительно измеримых множеств S из $[0, \pi]$.

§ 3. $|A|$-суммируемость биортонормальных разложений со степенью $p > 1$

Определение 2. *Мы скажем, что биортонормальное разложение функции x по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ является в точке t_0 $|A|$-суммируемым со степенью p или $|A|^p$-суммируемым, если*

$$\Sigma |F_n(t_0)|^p < \infty.$$

Из леммы 3 мы получаем, что имеет место следующая

Теорема 6. *Для того, чтобы биортонормальные разложения существенно ограниченных функций были в точке t_0 $|A|^p$-суммируемыми, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_n \left|\sum_{k=0}^n \overline{a}_{nk}\varphi_k(t_0) \int_S \psi_k(t)\, dt\right|^p = O(1) \tag{5}$$

равномерно относительно измеримых множеств $S \subset [a, b]$.

Мы покажем, что для $p > 1$ условие (5) всегда не влечет за собой, что метод A — конулевой метод. Именно покажем, что имеет место следующее утверждение.

Теорема 7. *Если для биортонормальной системы $\{\varphi_k, \psi_k\}$ существует метод A, удовлетворяющий условию*

$$\int_a^b \left|\sum_{k=0}^n a_{nk}\varphi_k(t_0)\psi_k(t)\right| dt = O(\ln n), \tag{6}$$

то существует и регулярный метод B такой, что биортонормальные разложения существенно ограниченных функций по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ являются $|B|^p$-суммируемыми в точке t_0.

Доказательство. Из условия (6) следует, что имеет место оценка

$$\left|\sum_{k=0}^n a_{nk}c_k\varphi_k(t_0)\right| \leqslant M\, \|x\|_{L^\infty} \ln n.$$

Обозначая левую часть неравенства через $\tau_n(x, t_0)$, замечаем, что для $|PA|^p$-суммируемости биортонормального разложения функции x достаточно, чтобы последовательность $\tau_n(x, t_0)$ была $|P|^p$-суммируемой (см. определение из [3]).

Последовательность $\tau_n(x, t_0)$ называется $|P|^p$-суммируемой, если

$$\sum_n \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{k=0}^n p_k \tau_k(x, t_0) - \frac{p_n}{P_n}\tau_n(x, t_0)\right|^p < \infty.$$

Пусть $p_n = \frac{1}{n}$, тогда $P_n \sim \ln n$, и мы имеем

$$\left\{ \sum_n \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} p_k \tau_k(x, t_0) - \frac{p_n}{P_n} \tau_n(x, t_0) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_n \left| \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} p_k \tau_k(x, t_0) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left\{ \sum_n \left| \frac{p_n}{P_n} \tau_n(x, t_0) \right|^p \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant M \|x\|_{L^\infty} \left\{ \sum \frac{1}{n^p} \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

если только $p > 1$. Если PA обозначать через B, то и получим наше утверждение.

Для тригонометрической системы имеем следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть метод P удовлетворяет условию*

$$\sum \left| \frac{p_n}{P_n} \ln n \right|^p < \infty,$$

тогда ряд Фурье и сопряженный ему ряд от функции $x \in L^\infty$ являются $|P|^p$-суммируемыми всюду на отрезке $[0, 2\pi]$.

Доказательство приводим так, как и у теоремы 7, взяв только $a_{nk} \equiv 1$ и воспользуемся известными оценками

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^n \cos kt \right| dt = O(\ln n);$$

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^n \sin kt \right| dt = O(\ln n).$$

§ 4. $|A|$-суммируемости биортонормальных разложений функции с ограниченным изменением

Из леммы 6 получаем следующее утверждение.

Теорема 9. *Если для всех $x \in V$ и некоторого $c \in [a, b]$*

$$\sum_n \left| x(t) \int_c^t \sum_{k=0}^{\pi} \bar{a}_{nk} \varphi_k(t_0) \psi_k(u)\, du \right|_b^a \bigg| < \infty,$$

то для того, чтобы биортонормальные разложения функций с ограниченным изменением по системе $\{\varphi_k, \psi_k\}$ были в точке t_0 $|A|$-суммируемыми, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\sum_n \left| \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_{nk}\varphi_k(t_0) \int_c^t \psi_k(u)\,du \right| = O(1)$$

почти всюду на $[a, b]$.

Для тригонометрической системы имеет место

Теорема 10. *Для того, чтобы ряды Фурье от* 2π*-периодичных функций с ограниченным изменением были всюду* $|A|$*-суммируемы, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_n \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{a}_{nk}}{k} \sin kt \right| = O(1)$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$.

В частности, если $0 < \frac{\overline{a}_{nk}}{k} \downarrow$ для всех $n \geqslant 0$, то $\sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{a}_{nk}}{k} \sin kt \geqslant 0$ всюду (см. [1], стр. 668), и, следовательно,

$$\sum_{n=0}^{m} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{a}_{nk}}{k} \sin kt \right| = \sum_{k=0}^{m} a_{mk} \frac{\sin kt}{k} = O(1),$$

если метод A сохраняет ограниченность.

Итак, нами доказана

Теорема 11. *Если метод* A *сохраняет ограниченность и* $0 < \frac{\overline{a}_{nk}}{k} \downarrow$ *для всех* $n \geqslant 0$, *то ряды Фурье функций с ограниченным изменением являются* $|A|$*-суммируемыми всюду.*

Следствие 2. *Если* $0 < \frac{P_{k-1}}{k} \downarrow$ *и* $p_k \geqslant 0$, *то ряды Фурье функции с ограниченным изменением* $|P|$*-суммируемы.*

§ 5. Абсолютная суммируемость биортонормальных разложений методами Рисса

В этом параграфе мы изучим $|P^\alpha|$-суммируемость (см. определение из [7]) биортонормальных разложений при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, причем для упрощения выкладок предполагаем, что $p_k \geqslant 0$ (или же $p_k \leqslant 0$).

Теорема 12. *Если* $p_k \geqslant 0$ *и* $p_k = O(p_{k-1})$, *то из сходимости ряда*

$$\sum \frac{p_n}{P_n} \tau_k(t_0),$$

где

$$\tau_k(t_0) = \frac{1}{P_k} \sum_{\nu=0}^{k} p_\nu \left| \sum_{i=0}^{\nu} c_i\varphi_i(t_0) - x(t_0) \right|,$$

следует $|P|$-суммируемость биортонормального разложения функции $x(t)$ в точке t_0.

Доказательство.. Для метода P имеет место неравенство

$$\sum_{n=0}^{m}\left|\sum_{k=0}^{n}\bar{a}_{nk}c_k\varphi_k(t_0)\right| \leqslant |x(t_0)|\sum_{n=0}^{m}|\bar{a}_{n0}| +$$

$$+\sum_{n=0}^{m}\left|\frac{p_n}{P_n}\left(S_n(t_0)-x(t_0)\right)\right| +$$

$$+\sum_{n=}^{m}\left|\frac{p_n}{P_n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k}{P_{n-1}}\left(S_n(t_0)-x(t_0)\right)\right|,$$

где

$$S_n(t_0)=\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(t_0).$$

Так как $a_{n0}\equiv 0$,

$$\sum_{n=0}^{m}\left|\frac{p_n}{P_n}\left(S_n(t_0)-x(t_0)\right)\right| \leqslant \frac{1}{P_m}\sum_{n=0}^{m}p_n\left|S_n(t_0)-x(t_0)\right| +$$

$$+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{p_n}{P_nP_{n+1}}\sum_{k=0}^{n}p_k\left|S_n(t_0)-x(t_0)\right| =$$

$$=\tau_m(t_0)+\sum_{n=0}^{m-1}\frac{p_n}{P_{n+1}}\tau_n(t_0)\leqslant$$

$$\leqslant \tau_m(t_0)+O(1)\sum_{n=0}^{m-1}\frac{p_n}{P_n}\tau_n(t_0)$$

и

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{p_n}{P_n}\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k}{P_{n-1}}\left[S_k(t_0)-x(t_0)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{m}\frac{p_n}{P_n}\tau_{n-1}(t_0)=O(1)\sum_{n=0}^{m-1}\frac{p_n}{P_n}\tau_n(t_0),$$

тем самым и справедливость теоремы 12 установлена.

Для тригонометрических рядов Фурье имеет место следующее утверждение.

Теорема 13. *Если метод P удовлетворяет условиям $p_k\geqslant 0$ и $p_k=O(p_{k-1})$, то из сходимости ряда*

$$\sum\frac{p_k}{P_k}\tau_k(t_0)$$

где $\tau_k(t_0)=\frac{1}{P_k}\sum_{\nu=0}^{k} p_\nu \left|S_\nu(t_0)-x(t)\right|$ *и* $S_k(t)$ *— частичные суммы ряда Фурье функции* $x(t)$*, вытекает* $|P|$*-суммируемость ряда Фурье функции* $x(t)$.

Для тригонометрической системы имеем еще следующее утверждение.

Теорема 14. *Пусть* $p_k \downarrow 0$ *и* $P_k \to \infty$.
Если сходится ряд

$$\sum \frac{p_k}{P_{k-1}} E_k(x)$$

где $E_k(x)$ *наилучшее приближение функции* $x(t)$ *в метрике* C, *то ряд Фурье функции* $x(t)$ *является* $|P^2|$*-суммируемым всюду.*

Доказательство. Так как для P^2 имеем

$$\sum_{n=0}^{m}\left|\sum_{k=0}^{n}\bar{\alpha}_{nk}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\right|=\sum_{n=0}^{m}\frac{p_n}{P_{n-1}}\left|\tau_n^1-\tau_n^2\right|,$$

где

$$\tau_n^1=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{P_{k-1}}{P_n}\right)(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$$

и

$$\tau_n^2=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{P_{k-1}}{P_n}\right)\left(1-\frac{P_{k-1}}{P_{n+1}}\right)(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

а, в силу [5],

$$\left|\tau_n^1-x\right|\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k}{P_n}E_k(x)$$

и

$$\left|\tau_n^2-x\right|\leqslant 2\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k}{P_n}E_k(x),$$

то

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{p_n}{P_{n-1}}\left|\tau_n^1-\tau_n^2\right|\leqslant 3\sum_{k=0}^{m}p_kE_k(x)\sum_{n=k}^{m}\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\leqslant$$

$$\leqslant 3\sum_{k=0}^{m}\frac{p_k}{P_{k-1}}E_k(x),$$

что и завершает доказательство.

Следствие 3. *Для каждой непрерывной функции* $x(t)$ *найдется регулярный метод* P^2*, который суммирует абсолютно и равномерно ряд Фурье от* $x(t)$ *на отрезке* $[-\pi, \pi]$.

§ 6. О множителях суммируемости

В этом параграфе мы применяем полученные результаты для изучения множителей абсолютной суммируемости для рядов Фурье.

Определение 3. *Последовательность $\{\varepsilon_k\}$ называется последовательностью множителей суммируемости типа $(F, |A|)$, если ряд*

$$\sum \varepsilon_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

является $|A|$-суммируемым всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ для всех рядов Фурье

$$\sum a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

от функции x из класса F.

Если $A = E$ — метод сходимости, то мы получаем определение множителей абсолютной сходимости для рядов Фурье относительно класса функции F. Пусть сперва $F = L^p$. По лемме 2 имеет место следующее утверждение.

Теорема 15. *Если $\overline{a}_{nk} \geqslant 0$ и метод A — треуголен, то для того, чтобы числа ε_k были множителями суммируемости типа $(L^p, |A|)$ при $p > 2$, достаточно, а при $p = 2$ и необходимо, выполнение следующего условия*

$$\sum_{k=0}^{m} |\varepsilon_k|^p k^{p-2} |a_{mk}|^p = O(1)$$

независимо от m.

Доказательство. По лемме 2, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{n \in \sigma} \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \overline{a}_{nk} \cos kt \Big|^p dt = O(1),$$

которое равносильно следующему условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big| \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k \sum_{n=k}^{m} \overline{a}_{nk}\, d_n \cos kt \Big|^p dt = O(1)$$

независимо от m и $\{d_n\}$, где d_n принимает только значения 0 или 1. На основе теоремы 6. 3. 2 из [4] вытекает, что для этого достаточно (а для $p = 2$ и необходимо), чтобы

$$\sum_{k=0}^{m} |\varepsilon_k|^p k^{p-2} \Big| \sum_{n=k}^{m} \overline{a}_{nk}\, d_n \Big|^p = O(1).$$

Но так как $\overline{a}_{nk} \geqslant 0$, то $\sum_{n=k}^{m} \overline{a}_{nk} d_n \leqslant \sum_{n=k}^{m} \overline{a}_{nk} = a_{mk}$, причем $\sum_{n=k}^{m} a_{nk} d_n = a_{mk}$, если $d_n = 1$ при $n \leqslant m$ и $d_n = 0$ при $n > m$, и из предыдущего условия и вытекает утверждение теоремы 17.

Изучим теперь множители суммируемости типа $(C\ |E|)$.

Из теоремы 1 и теорем 6.9.2 и 6.9.4 из [4] выводим следующее утверждение.

Теорема 16. *Для того, чтобы числа $\varepsilon_k > 0$ были множителями суммируемости типа $(C, |E|)$, необходимо и достаточно выполнение одного из условий:*

1° $\sum \varepsilon^2_k < \infty$,

2° $\sum \varepsilon_k |c_k| < \infty$

для всех коэффициентов Фурье c_k от $x \in L^\infty$.

Теорема 17. *Для того, чтобы числа ε_k были множителями суммируемости типа $(C, |E|)$, необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum d_k \varepsilon_k \cos kt$$

либо а) *сильно сходился в метрике L для всех $\{d_k\} \in c_0$, либо* б) *слабо сходился в метрике L для всех $\{d_k\} \in m$, либо* в) *сходился по мере к существенно ограниченной функции для всех $\{d_k\} \in m$.*

Доказательство немедленно вытекает из леммы 5, если учесть, что теперь

$$y_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon_k d_k \cos kt.$$

Рассматриваем, наконец, множители суммируемости типа $(V, |E|)$.

Теорема 18. *Для того, чтобы ε_k были множителями суммируемости типа $(V, |E|)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum \frac{|\varepsilon_k|}{k} < \infty.$$

Доказательство. По теореме 10 для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum \left| \frac{\varepsilon_k}{k} \sin kt \right| = O(1)$$

почти всюду. Учитывая теорему Лузина—Данжуа, последнее условие является равносильным условию из теоремы 18.

Литература

1. Бари Н. К., Тригонометрические ряды. Москва, 1961.
2. Гринблюм И. М., Биортогональные системы в простанстве Банаха Докл. АН СССР, 1945, 57, 79—82.
3. Кангро Г. Ф., О множителях суммируемости. Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1955, 37, 191—232.

4. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва. 1958.
5. Ковальчук Р. Н., Об одной задаче С. Б. Стечкина. В сб. «Вопр матем. физ. и теории функций», Киев, 1964, № 1, 51—56.
6. Тиман М. Ф., Об абсолютной сходимости и суммируемости рядов Фурье. Сообщ. АН ГрузССР, 1961, **26**, 57—83.
7. Тюрнпу Х. А., Множители суммируемости для методов Рисса. Уч зап. Тартуск. ун-та, 1967, **206**, 90—105.
8. Bosanquet, L. S., Note on the absolute summability (C) of a Fourier series. J. London Math. Soc., 1936, **11**, 11—15.
9. Hirokawa, H., On the absolute Cesàro summability of Fourier series Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, 236—243.
10. Lal, S. N., On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. Arch. Math., 1964, **15**, 214—221.
11. Mehdi, M. R., Linear transformations between the Banach spaces L^p and l^p with applications to absolute summability. London, 1959.
12. Pati, T., On the absolute Nörlund summability of the conjugate series of a Fourier series. à. London Math. Soc., 1963, **38**, 204—213.
13. Pati, T., On the absolute summabilty of Fourier series by Nörlund means. Math. Z., 1965, 88, 244—249.
14. Shah, S. M., On the absolute harmonic summability of Fourier series. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, 244—250.
15. Varshney, O. P., On the absolute harmonic summability of Fourier series. Proc. Amer. Math. Soc., 1960, **11**, 588—595.
16. Varshney, O. P., On the absolute Nörlund summability of a Fourier series. Math. Z., 1964, **83**, 18—24.

Поступило
I VII 1967

BIORTONORMAALRIDADE ABSOLUUTNE SUMMEERUVUS

H. Türnpu

Resümee

Selles töös uuritakse pidevate funktsioonide biortonormaalridade absoluutset summeeruvust kolmnurksete maatriksmenetlustega. Töös näidatakse muuhulgas, et ei leidu regulaarset kolmnurkset maatriksmenetlust, mis summeeriks absoluutselt iga pideva funktsiooni Fouerier' rea kõikjal.

ABSOLUTE SUMMIERBARKEIT BIORTHONORMALENTWICKLUNGEN

H. Türnpu

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für absolute Summierbarkeit den Biorthogonalentwicklungen stetiger Funktionen gefunden. Wir beweisen, daß kein regulares dreieckiges Matrixverfahren existiert, welchs die Biorthonormalentwicklungen aller stetigen Funktionen absolut summiert.

ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ДЛЯ СУММИРУЕМОСТИ ДВОЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

С. Барон

Кафедра математического анализа

Как известно [11, 19], для метода суммирования взвешенных средних Рисса неубывающая мажоранта функций Лебега является множителем Вейля для суммируемости ортогонального ряда. Через эту мажоранту выражается также оценка роста риссовских средних ортогонального ряда. В настоящей статье эти утверждения обобщаются для вполне суммируемости двойных ортогональных рядов методом P взвешенных средних Рисса. Если двойная ортонормированная система факторизируема, то признаки типа Вейля двойных ортогональных рядов получаем при самых общих предположениях относительно метода P. Для общих ортонормированных двойных систем признаки типа Вейля получаются при ограничениях относительно P и мажоранты функций Лебега. В конце статьи показывается, что неубывающая мажоранта функций Лебега не всегда является множителем Вейля для суммируемости двойного ортогонального ряда. Попутно даются обобщения на двойные последовательности теоремы Леви и доказывается существование всюду расходящегося нефакторизируемого двойного ортогонального ряда из L^2_μ.

§ 1. Определения и основные леммы

Пусть $\mu = \mu(x_1, x_2)$ — положительная ограниченная функция двух переменных x_1, x_2 на конечном прямоугольнике $Q = [a, b; c, d]$, и $\mu = \mu(X)$ — соответствующая ей аддитивная функция ([12], стр. 101) множества X, определенная на борелевской алгебре Σ подмножеств прямоугольника Q. Пусть μ для любого сегмента $I = [x'_1, x''_1; x'_2, x''_2] \in \Sigma$ удовлетворяет условию

$$\mu(I) = \mu(x'_1, x'_2) - \mu(x'_1, x''_2) - \mu(x''_1, x'_2) + \mu(x''_1, x''_2) \geqslant 0,$$

т. е. $\mu(I)$ монотонна ([9], стр. 66—71). В этом случае почти всюду на Q (в смысле меры Лебега) функция множества $\mu(X)$ имеет обобщенную производную $D\mu(X)$ (см. [12], стр. 97, 162—163 и 176), причем $D\mu(X) \geqslant 0$. Предположим, что $D\mu(X) = 0$ лишь на множестве, мера Лебега которого равна нулю.

В частности, перечисленным условиям удовлетворяет функция

$$\mu(x_1, x_2) = \mu_1(x_1)\mu_2(x_2), \qquad (1)$$

если $\mu_1(x_1)$ на отрезке $[a, b]$ и $\mu_2(x_2)$ на отрезке $[c, d]$ положительны, ограничены и монотонно возрастают, причем их производные обращаются в нуль только на множествах с мерой нуль в смысле Лебега. Действительно, мера Лебега топологического произведения двух множеств лебеговы меры нуль равна нулю (см. [9], стр. 72). В дальнейшем, говоря об условии (1), будем считать, что $\mu_1(x_1)$ и $\mu_2(x_2)$ удовлетворяют перечисленным условиям.

Определим понятие орготональности с помощью интеграла Лебега—Стилтьеса, аналогично, как в книге Алексича [1].

Вещественная функция $f(x_1, x_2)$ двух переменных называется L^2_μ-интегрируемой на множестве $E \subset Q$, коротко $f(x_1, x_2) \in L^2_\mu$, если она μ-измерима на E и двойной интеграл Лебега—Стилтьеса

$$\int_E f^2(x_1, x_2)\, d\mu(X) = \iint_E f^2(x_1, x_2)\, d\mu(x_1, x_2) < \infty.$$

Двойная система L^2_μ-интегрируемых функций[1] $\{\varphi_{mn}(x_1, x_2)\}$ называется ортонормированной, если

$$\int_Q \varphi_{mn}(x_1, x_2)\varphi_{kl}(x_1, x_2)\, d\mu(X) = \delta_{mk}\delta_{nl}. \qquad (2)$$

Пусть $\{c_{mn}\}$ — двойная последовательность вещественных чисел, а $\{\varphi_{mn}(x_1, x_2)\}$ — двойная ортонормированная система. Двойной ряд[2]

$$\sum_{m,n} c_{mn}\varphi_{mn}(x_1, x_2) \qquad (3)$$

называется двойным ортогональным рядом по системе $\{\varphi_{mn}(x_1, x_2)\}$.

В дальнейшем точки из Q будем обозначать через $x = (x_1, x_2)$, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ и $w = (w_1, w_2)$, а соответствующие им множества из Σ — через X, U, V и W.

В теории двойных ортогональных рядов существенную роль играют следующие леммы — обобщения теорем Леви.

---

[1] Во всей статье свободные индексы принимают все значения 0, 1, ...

[2] Если у знака суммы пределы индексов суммирования опущены, то суммирование происходит по всем целочисленным значениям индексов от 0 до ∞. Под знаком предела указание $\to \infty$ всюду опущено.

Лемма 1. *Если все функции двойной последовательности $\{u_{mn}(x)\}$ являются L_μ-интегрируемыми на множестве $E \subset Q$ и*

$$\sum_{m,n} \int_E |u_{mn}(x)|\, d\mu(X) < \infty,$$

то двойной ряд $\sum_{m,n} u_{mn}(x)$ абсолютно сходится почти всюду на E.

Доказательство см. [2], стр. 174.

Лемма 2. *Пусть функция μ удовлетворяет условию* (1). *Если $\{f_{mn}(x)\}$ — неубывающая*[3] *двойная последовательность L_μ-интегрируемых функций таких, что*

$$\int_E f_{mn}(x)\, d\mu(X) = O(1),$$

то предельная функция

$$f(x) = \lim_{m,n} f_{mn}(x)$$

почти всюду на E конечна и L_μ-интегрируема.

Доказательство. Известно (см., например, [4], стр. 39), что для неубывающей двойной последовательности двойной и оба повторных предела одновременно существуют и равны между собой. Так как по условию всегда $f_{mn}(x) - f_{00}(x) \geqslant 0$, то пусть $f_{mn}(x) \geqslant 0$. Если $E \neq Q$, то доопределим все функции $f_{mn}(x)$, положив $f_{mn}(x) = 0$ на $Q \setminus E$, не изменяя их обозначения. Так как $\{f_{mn}(x)\}$ не убывает, то существуют все пределы

$$F_m(x) = \lim_n f_{mn}(x),$$

причем последовательность $\{F_m(x)\}$ также не убывает. Следовательно, существует последовательность интегралов

$$I_m(x_1) = \int_c^d F_m(x)\, d\mu_2(x_2),$$

причем

$$\lim_m I_m(x_1) = \int_c^d \lim_m F_m(x)\, d\mu_2(x_2) = \int_c^d f(x)\, d\mu_2(x_2)$$

(см. [9], стр. 173, теорема m), ибо последовательность $\{I_m(x_1)\}$ также не убывает ([9], стр. 209, теорема g). Пользуясь, далее, теоремой Фубини ([9], стр. 221), учитывая, что двойная последовательность

$$\int_c^d f_{mn}(x)\, d\mu_2(x_2)$$

не убывает, получаем

---

[3] Монотонность двойной последовательности означает ее монотонность по каждому индексу при фиксированном другом.

$$\lim_{n}\int_{Q} f_{mn}(x)\,d\mu(X) = \lim_{n}\int_{a}^{b} d\mu_1(x_1)\int_{c}^{d} f_{mn}(x)\,d\mu_2(x_2) =$$

$$= \int_{a}^{b} d\mu_1(x_1)\lim_{n}\int_{c}^{d} f_{mn}(x)\,d\mu_2(x_2) =$$

$$= \int_{a}^{b} I_m(x_1)\,d\mu_1(x_1).$$

Отсюда по тем же теоремам

$$\lim_{m}\lim_{n}\int_{Q} f_{mn}(x)\,d\mu(X) = \int_{a}^{b}\lim_{m} I_m(x_1)\,d\mu_1(x_1) =$$

$$= \int_{a}^{b} d\mu_1(x_1)\int_{c}^{d} f(x)\,d\mu_2(x_2),$$

или

$$\int_{Q} f(x)\,d\mu(X) = \lim_{m}\lim_{n}\int_{Q} f_{mn}(x)\,d\mu(X) = O(1),$$

причем ([9], стр. 212, теорема m) функция $f(x) \in L_\mu$ и ([9], стр. 199, теорема 0) конечна μ-почти всюду на E. Отсюда при наших предположениях относительно функции μ следует ([2], стр. 175), что $f(x)$ конечна почти всюду на E. Лемма доказана.

Для дальнейшего нам также нужно неравенство Буняковского—Шварца

$$\left\{\int_{E} |f(x)g(x)|\,d\mu(X)\right\}^2 \leqslant \int_{E} f^2(x)\,d\mu(X)\cdot\int_{E} g^2(x)\,d\mu(X), \tag{4}$$

имеющее место для любых $f(x)$, $g(x) \in L^2_\mu$ (см. [9], стр. 271).

§ 2. Функции Лебега

Пусть T — некоторый треугольный метод суммирования двойных рядов с матрицей $(t_{mnk'})$ в виде преобразования последовательности в последовательность и с матрицей (τ_{mnkl}) в виде преобразования ряда в последовательность.

Частичные суммы ряда (3) можно кратко записать в виде

$$s_{mn}(x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} c_{kl}\varphi_{kl}(x),$$

а T-средние ряда (3) — в виде

$$\sigma_{mn}(x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \tau_{mnkl}c_{kl}\varphi_{kl}(x).$$

Функции

$$D_{mn}(u, x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \varphi_{kl}(u)\varphi_{kl}(x),$$

$$K_{mn}(u, x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \tau_{mnkl}\varphi_{kl}(u)\varphi_{kl}(x),$$

симметричные относительно u и x, называются соответственно ядрами методов сходимости и T.

При помощи преобразования Абеля—Харди, ввиду равенства

$$t_{mnkl} = \Delta_{kl}\tau_{mnkl}, \tag{5}$$

для ядра метода T получаем выражение

$$K_{mn}(u, x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} t_{mnkl}D_{kl}(u, x). \tag{6}$$

Покажем, что *для T-средних ряда* (3) *при $\varkappa, \lambda \leqslant m, n$ имеет место формула*

$$\sigma_{\varkappa\lambda}(x) = \int_Q s_{mn}(u)K_{\varkappa\lambda}(u, x)d\mu(U). \tag{7}$$

Действительно, так как при $0 \leqslant k, l \leqslant m, n$ ввиду (2) имеем

$$\int_Q s_{mn}(u)\varphi_{kl}(u)d\mu(U) = c_{kl}\int_Q \varphi^2_{kl}(u)d\mu(U) = c_{kl},$$

то

$$\sigma_{\varkappa\lambda}(x) = \sum_{k,l=0}^{\varkappa,\lambda} \tau_{\varkappa\lambda kl}\varphi_{kl}(x) \int_Q s_{mn}(u)\varphi_{kl}(u)d\mu(U),$$

откуда равенство (7) вытекает непосредственно.

В вопросах T-суммируемости рядов (3) важную роль играют следующие функции Лебега метода T:

$$L_{mn}(x) = \int_Q |K_{mn}(u, x)|\, d\mu(U),$$

$$H_{mn}(u_1, x_2) = \int_Q |K_{mn}(u, x)|\, d\mu_1(x_1)d\mu_2(u_2).$$

§ 3. Оценка роста риссовских средних ортогонального ряда

Факторизируемый метод взвешенных средних Рисса

$$P = A \odot B = (R,\ p_{mn})$$

определяется матрицами[4]

---

[4] Здесь и всюду в дальнейшем обозначаем

$$P_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} p_{kl}, \quad A_m = \sum_{k=0}^{m} a_k, \quad B_n = \sum_{l=0}^{n} b_l,$$

причем a_k и b_l считаем вещественными числами и предполагаем $p_{kl} \neq 0$, $P_{mn} \neq 0$. Выражения с отрицательными индексами считаем равными нулю.

$$t_{mnkl} = a_{mk} b_{nl} = \frac{p_{kl}}{P_{mn}} = \frac{a_k b_l}{A_m B_n},$$

$$\tau_{mnkl} = \alpha_{mk} \beta_{nl} = \left(1 - \frac{A_{k-1}}{A_m}\right)\left(1 - \frac{B_{l-1}}{B_n}\right).$$

Теперь может быть доказана

Теорема 1. *Пусть функция* μ *удовлетворяет условию* (1). *Пусть метод P удовлетворяет условию*[5]

$$\sum_{k,l=0}^{m\ n} |p_{kl}| = O(P_{mn}). \tag{8}$$

Пусть, далее, $\{\lambda_{mn}\}$ — *неубывающая двойная последовательность положительных чисел таких, что на множестве* $E \subset Q$ *функции Лебега метода P удовлетворяют оценкам*

$$L_{mn}(x) = O(\lambda_{mn}), \tag{9}$$

$$H_{mn}(u_1, x_2) = O(\lambda_{mn}). \tag{10}$$

Тогда, если двойной ортогональный ряд (3) *удовлетворяет условию*

$$\sum_{m,n} c^2_{mn} < \infty, \tag{11}$$

то для P-средних ряда (3) *почти всюду на E имеет место оценка*[6]

$$\sigma_{mn}(x) = O_x(\sqrt{\lambda_{mn}}).$$

Доказательство. Следуя Жижиашвили ([6], стр. 259; [7], стр. 118), рассмотрим две неотрицательные измеримые функции

$$i = i(x_1), \quad j = j(x_2), \tag{12}$$

где $a \leqslant x_1 \leqslant b$, $c \leqslant x_2 \leqslant d$, принимающие только целые значения, причем ограниченные сверху соответственно целыми числами m и n.

Пусть

$$s = s(m, x_1), \quad t = t(n, x_2)$$

— наименьшие индексы, не превосходящие соответственно m и n, при которых достигается равенство

$$g_{mn}(x) = \sup_{0 \leqslant i, j \leqslant m, n} \frac{\sigma_{ij}(x)}{\sqrt{\lambda_{ij}}} = \frac{\sigma_{st}(x)}{\sqrt{\lambda_{st}}},$$

где верхняя грань берется по всем функциям (12).

---

[5] Из теоремы Кожима—Шура следует, что условие (8) выполнено, когда методы A и B сохраняют сходимость.

[6] Запись $f_{mn}(x) = O_x(h_{mn})$ означает существование функции $S(x)$ такой, что $|f_{mn}(x)| \leqslant |S(x) h_{mn}|$.

Применяя (7) и теорему Фубини, находим

$$I_{mn} = \int_E g_{mn}(x)\,d\mu(X) =$$

$$= \int_Q s_{mn}(u)\,d\mu(U) \int_E \frac{K_{st}(u, x)}{\sqrt{\lambda_{st}}}\,d\mu(X),$$

откуда при помощи (4) и (2) выводим

$$I^2_{mn} \leqslant \int_Q s^2_{mn}(u)\,d\mu(U) \cdot \int_Q \left[\int_E \frac{K_{st}(u, x)}{\sqrt{\lambda_{st}}}\,d\mu(X)\right]^2 d\mu(U) =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{m,n} c^2_{kl} \int_Q d\mu(U) \left[\int_E \frac{K_{\alpha\beta}(u, v)}{\sqrt{\lambda_{\alpha\beta}}}\,d\mu(V) \cdot \int_E \frac{K_{\gamma\delta}(u, w)}{\sqrt{\lambda_{\gamma\delta}}}\,d\mu(W)\right],$$

причем

$$\alpha = s(m, v_1), \quad \beta = t(n, v_2), \quad \gamma = s(m, w_1), \quad \delta = t(n, w_2). \tag{13}$$

Теперь ввиду условия (11), применяя теорему Фубини, заключаем

$$I^2_{mn} = O(1)\,J_{mn}, \tag{14}$$

где

$$J_{mn} = \int_E \int_E \int_Q \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\alpha\beta}\lambda_{\gamma\delta}}} K_{\alpha\beta}(u, v)\,K_{\gamma\delta}(u, w)\,d\mu(U)\,d\mu(V)\,d\mu(W).$$

Далее, обозначив

$$q = \min(\alpha, \gamma) = q(m, v_1, w_1), \qquad r = \min(\beta, \delta) = r(n, v_2, w_2),$$

учитывая (2), можем писать

$$J_{mn} \leqslant \int_E \int_E \frac{1}{\lambda_{qr}} |\Phi_{qr}(v, w)|\,d\mu(V)\,d\mu(W), \tag{15}$$

где

$$\Phi_{qr} = \Phi_{qr}(v, w) =$$

$$= \int_Q K_{\alpha\beta}(u, v)\,K_{\gamma\delta}(u, w)\,d\mu(U) =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{q,r} \tau_{\alpha\beta kl}\tau_{\gamma\delta kl}\varphi_{kl}(v)\,\varphi_{kl}(w).$$

Применяя преобразование Абеля—Харди, в силу треугольности метода P получаем

$$\Phi_{qr} = \sum_{k,l=0}^{q,r} \Psi_{kl} p_{kl} D_{kl}(v, w),$$

причем

$$\Psi_{kl} p_{kl} = \Delta_{kl}(\tau_{\alpha\beta kl}\tau_{\gamma\delta kl}).$$

При помощи формулы для разности произведения, учитывая (5), находим

$$\Psi_{kl}=\left(1-\frac{A_{k-1}}{A_\alpha}\right)\left(1-\frac{B_{l-1}}{B_\beta}\right)\frac{1}{P_{\gamma\delta}}+$$
$$+\left(1-\frac{A_{k-1}}{A_\alpha}\right)\left(1-\frac{B_l}{B_\delta}\right)\frac{1}{P_{\gamma\beta}}+$$
$$+\left(1-\frac{A_k}{A_\gamma}\right)\left(1-\frac{B_{l-1}}{B_\beta}\right)\frac{1}{P_{\alpha\delta}}+$$
$$+\left(1-\frac{A_k}{A_\gamma}\right)\left(1-\frac{B_l}{B_\delta}\right)\frac{1}{P_{\alpha\beta}}.$$

Далее, так как для ядра метода P ввиду (6) имеем

$$P_{mn}K_{mn}(u, x)=\sum_{k,\,l=0}^{m,\,n}p_{kl}D_{kl}(u, x),$$

то применяя к Φ_{qr} еще раз преобразование Абеля—Харди, получаем

$$\Phi_{qr}=\sum_{k,l=0}^{q-1,r-1}(\Delta_{kl}\Psi_{kl})P_{kl}K_{kl}(v, w)+\sum_{k=0}^{q-1}(\Delta_k\Psi_{kr})P_{kr}K_{kr}(v, w)+$$
$$+\sum_{l=0}^{r-1}(\Delta_l\Psi_{ql})P_{ql}K_{ql}(v, w)+\Psi_{qr}P_{qr}K_{qr}(v, w).$$

Поэтому, учитывая вытекающее из (8) при $0\leqslant k, l\leqslant m, n$ соотношение $P_{kl}=O(P_{mn})$, получаем

$$|\Phi_{qr}|=O(1)\{|P_{qr}|^{-1}\sum_{k,l=0}^{q-1,r-1}|p_{kl}+p_{k,l+1}+p_{k+1,l}+p_{k+1,l+1}|\,|K_{kl}(v, w)|+$$
$$+|A_q|^{-1}\sum_{k=0}^{q-1}(|a_k|+|a_{k+1}|)|K_{kr}(v, w)|+$$
$$+|B_r|^{-1}\sum_{l=0}^{r-1}(|b_l|+|b_{l+1}|)|K_{ql}(v, w)|+$$
$$+|K_{qr}(v, w)|\}. \tag{16}$$

Теперь можем, используя (15), доказать оценку

$$J_{mn}=O(1). \tag{17}$$

Для этого, ввиду (13), нам надо множество $E\times E$ разделить на четыре части

$$M_1=\{(v, w): \alpha\geqslant\gamma,\ \beta\geqslant\delta\},$$
$$M_2=\{(v, w): \alpha<\gamma,\ \beta\geqslant\delta\},$$
$$M_3=\{(v, w): \alpha\geqslant\gamma,\ \beta<\delta\},$$
$$M_4=\{(v, w): \alpha<\gamma,\ \beta<\delta\}$$

и соответственно этому четырехмерный интеграл в неравенстве (15) разделить на четыре интеграла.

На множестве M_1 индекс $q=\gamma$ и индекс $r=\delta$. Поэтому верхние пределы сумм в (16), и индексы ядра, ввиду (13), не зависят от v, вследствие чего, пользуясь теоремой Фубини, можем писать

$$\iint\limits_{M_1} \frac{1}{\lambda_{qr}} |\Phi_{qr}|\, d\mu(V)\, d\mu(W) \leqslant \int\limits_Q \frac{1}{\lambda_{\gamma\delta}}\, d\mu(W) \int\limits_Q |\Phi_{\gamma\delta}|\, d\mu(V) = O(1),$$

так как, применяя (9) и (8), находим, например,

$$\int\limits_Q \frac{1}{\lambda_{\gamma\delta}} |P_{\gamma\delta}|^{-1} \sum_{k,l=0}^{\gamma-1,\delta-1} |p_{kl}|\, L_{kl}(w)\, d\mu(W) =$$

$$= O(1) \int\limits_Q |P_{\gamma\delta}|^{-1} \sum_{k,\ =0}^{\gamma-1,\delta-1} |p_{kl}|\, d\mu(W) = O(1).$$

Интеграл по множеству M_4 оценивается аналогично.

На множестве M_2 индекс $q=\alpha$ и индекс $r=\delta$. Поэтому верхние пределы сумм в (16) не зависят от v_2 и w_1. Ввиду этого, учитывая (1) и применяя теорему Фубини, получаем

$$\iint\limits_{M_2} \frac{1}{\lambda_{qr}} |\Phi_{qr}|\, d\mu(V)\, d\mu(W) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_Q \frac{1}{\lambda_{\alpha\delta}}\, d\mu_1(v_1)\, d\mu_2(w_2) \int\limits_Q |\Phi_{\alpha\delta}|\, d\mu_1(w_1)\, d\mu_2(v_2) = O(1),$$

так как, применяя (10) и (8), находим, например,

$$\int\limits_Q \frac{1}{\lambda_{\alpha\delta}} |P_{\alpha\delta}|^{-1} \sum_{k,\,l=0}^{\alpha-1,\,\delta-1} |p_{kl}|\, H_{kl}(v_1, w_2)\, d\mu_1(v_1)\, d\mu_2(w_2) = O(1),$$

$$\int\limits_Q \frac{1}{\lambda_{\alpha\delta}} |A_\alpha|^{-1} \sum_{k=0}^{\alpha-1} |a_k|\, H_{k\delta}(v_1, w_2)\, d\mu_1(v_1)\, d\mu_2(w_2) = O(1).$$

Интеграл по множеству M_3 оценивается аналогично при помощи условия (10), причем, ввиду симметричности ядра относительно v и w, оправдано применение оценки

$$H_{mn}(w_1, v_2) = O(\lambda_{mn}).$$

Оценка (17) доказана, и, ввиду (14), имеем

$$I_{mn} = O(1).$$

Отсюда, так как последовательность $\{g_{mn}(x)\}$ не убывает, по лемме 2 предельная функция

$$S_1(x) = \lim_{m,n} g_{mn}(x)$$

конечна почти всюду на E, причем

$$\sigma_{mn}(x) \leqslant \sqrt{\lambda_{mn}}\, S_1(x).$$

Заменяя во всем доказательстве $\{\sigma_{mn}(x)\}$ на последовательность $\{-\sigma_{mn}(x)\}$, мы убеждаемся в существовании почти всюду на E конечной функции $S_2(x)$, удовлетворяющей неравенству

$$-\sigma_{mn}(x) \leqslant \sqrt{\lambda_{mn}}\, S_2(x).$$

Объединяя эти неравенства, заключаем,

$$|\sigma_{mn}(x)| \leqslant \sqrt{\lambda_{mn}}\, (|S_1(x)| + |S_2(x)|)$$

почти всюду на E, что и требовалось доказать.

Теорема 1 для (R, a_m)-средних простых ортогональных рядов при $a_m > 0$ доказана Суноути ([19], стр. 325; см. также [17], стр. 409), для арифметических средних, т. е. при $a_m = 1$ — еще Качмажом ([10], стр. 244), а для логарифмических средних, т. е при $a_m = (m+1)^{-1}$ — Медером ([18], стр. 24). Метод доказательства всех этих теорем разработан Колмогоровым, Селиверстовым и Плеснером (см., например, Алексич [1], стр. 182).

Пусть E — метод сходимости (простых рядов). Рассмотрим методы суммирования

$$P' = A \odot E \quad \text{и} \quad P'' = E \odot B.$$

Обозначая[7] через $\sigma'_{mn}(x)$ и $\sigma''_{mn}(x)$ соответственно P'- и P''-средние ряда (3), из теоремы 1 выводим

Следствие 1. *Пусть метод P удовлетворяет условию* (8). *Пусть, далее, $\{\varkappa'_{mn}\}$ и $\{\varkappa''_{mn}\}$ — неубывающие двойные последовательности положительных чисел таких, что на множестве $E \subset Q$ функции Лебега метода P' удовлетворяют оценкам*

$$L'_{mn}(x) = O(\varkappa'_{mn}), \tag{18}$$

$$H'_{mn}(u_1, x_2) = O(\varkappa'_{mn}), \tag{19}$$

а функции Лебега метода P'' — оценкам

$$L''_{mn}(x) = O(\varkappa''_{mn}), \tag{20}$$

$$H''_{mn}(u_1, x_2) = O(\varkappa''_{mn}). \tag{21}$$

Тогда, если двойной ортогональный ряд (3) *удовлетворяет условию* (11), *то почти всюду на E имеют место оценки*

$$\sigma'_{mn}(x) = O_x(\sqrt{\varkappa'_{mn}}), \tag{22}$$

$$\sigma''_{mn}(x) = O_x(\sqrt{\varkappa''_{mn}}). \tag{23}$$

Доказательство достаточно провести лишь для оценки (22). Покажем, что последнее можем получить из теоремы 1, положив в ней $B \sim E$, т. е. (ср. [3], стр. 116) считая

$$B_n = O(b_n). \tag{24}$$

---

[7] Такие же значки вверху будем ставить и для других величин, относящихся к P' и P''.

Действительно, при условии (24), из (9) вытекает (18), так как (см. [3], стр. 108)

$$K'_{mn}(u,x)=\frac{B_n}{b_n}K_{mn}(u,x)-\frac{B_{n-1}}{b_n}K_{m,n-1}(u,x),$$

откуда

$$L'_{mn}(x)=O(1)[L_{mn}(x)+L_{m,n-1}(x)]=O(\lambda_{mn}).$$

Кроме того, (24) и (10) влекут за собой (19).

Обратно, при условии (8) из (18) и (19) следует соответственно (9) и (10), так как

$$K_{mn}(u,x)=\sum_{l=0}^{n}b_{nl}K'_{ml}(u,x),$$

откуда

$$L_{mn}(x)\leqslant\sum_{l=0}^{n}|b_{nl}|L'_{ml}(x)=O(\varkappa'_{mn})\sum_{l=0}^{n}|b_{nl}|=O(\varkappa'_{mn}).$$

Таким образом, мы доказали, что оценки функций Лебега метода P' получаем из оценок функций Лебега для P, если B удовлетворяет условию (24), например, если $b_n=2^n$. По теореме 1 имеет место оценка, которая в нашем случае переходит в (22). Оценка (23) выводится аналогично из (20) и (21).

§ 4. Некоторые элементарные леммы о рядах

Предварительно нам нужны следующие леммы.

Лемма 3. *Для всякого двойного сходящегося ряда*

$$\sum_{m,n}u_{mn} \tag{25}$$

с $u_{mn}\geqslant 0$ существуют положительные последовательности $\xi_m\uparrow\infty$ и $\eta_n\uparrow\infty$ такие, что

$$\sum_{m,n}u_{mn}\xi_m\eta_n<\infty.$$

Доказательство см. Качмаж [16], стр. 94.

Лемма 4. *Если двойная последовательность $\{\lambda_{mn}\}$ не убывает и*

$$\Delta_{mn}(1/\sqrt{\lambda_{mn}})\geqslant 0, \tag{26}$$

то для любых $0<\xi_m\uparrow$ и $0<\eta_n\uparrow$ имеем

$$\Delta_{mn}\gamma^{-1}_{mn}\geqslant 0,$$

где обозначено

$$\gamma_{mn}=(\lambda_{mn}\xi_m\eta_n)^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

Доказательство получаем применением формулы разности произведения. Действительно,

$$\Delta_{mn}\frac{1}{\gamma_{mn}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}}\Delta_{mn}\frac{1}{\sqrt{\xi_m\eta_n}} + \Delta_n\frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}}\cdot\Delta_m\frac{1}{\sqrt{\xi_m\eta_{n+1}}} +$$

$$+ \Delta_m\frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}}\cdot\Delta_n\frac{1}{\sqrt{\xi_{m+1}\eta_n}} + \Delta_{mn}\frac{1}{\sqrt{\lambda_{mn}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\xi_{m+1}\eta_{n+1}}} \geqslant 0.$$

Имеет место следующий аналог теоремы Кронекера.

Лемма 5. *Если* $u_{mn} \geqslant 0$ *и ряд* $\sum_{m,n}\xi_m\eta_n u_{mn}$ *сходится при* $\xi_m \downarrow 0$ *и* $\eta_n \downarrow 0$, *то*[8]

$$r\text{-}\lim_{m,n} U_{mn} = 0,$$

где

$$U_{mn} = \xi_m\eta_n \sum_{k,l=0}^{m,n} u_{kl}.$$

Доказательство. По теореме Кронекера ([1], стр. 78) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$ такое, что при всех $n > N$

$$s_n = \sum_{l=0}^{n}\sum_{k}\xi_k u_{kl} < \varepsilon/\eta_n.$$

Далее, ввиду неравенства

$$\xi_m \sum_{k,l=0}^{m,n} u_{kl} \leqslant \sum_{k,l=0}^{m,n}\xi_k u_{kl} \leqslant s_n,$$

для $n > N$ и даже всех m выводим

$$U_{mn} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_n U_{mn} = \lim_{m,n} U_{mn} = 0.$$

Равенства $\lim_m U_{mn} = 0$ доказываются аналогично.

Лемма 6. *Пусть* $\{\gamma_{mn}\}$ — *произвольная двойная числовая последовательность. Тогда для P-средних ряда* (3) *имеет место формула*

---

[8] Последовательность $\{x_{mn}\}$ называется вполне сходящейся, коротко r-сходящейся, если существуют все

$$\lim_m x_{mn}, \quad \lim_n x_{mn} \quad \text{и} \quad \lim_{m,n} x_{mn}.$$

Запись $r\text{-}\lim_{m,n} x_{mn} = 0$ означает, что

$$\lim_m x_{mn} = \lim_n x_{mn} = \lim_{m,n} x_{mn} = 0.$$

$$\sigma_{mn}(x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \tau_{mnkl} s_{kl}(\gamma, x) \Delta_{kl} \frac{1}{\gamma_{kl}} +$$
$$+ \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mk} \frac{B_l}{B_n} \sigma''_{kl}(\gamma, x) \Delta_{kl} \frac{1}{\gamma_{k,l+1}} +$$
$$+ \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{A_k}{A_m} \beta_{nl} \sigma'_{kl}(\gamma, x) \Delta_{kl} \frac{1}{\gamma_{k+1,l}} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m} a_{mk} \sigma''_{kn}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k,n+2}} +$$
$$+ \sum_{l=0}^{n} \beta_{nl} \sigma'_{ml}(\gamma, x) \Delta_l \frac{1}{\gamma_{m+2,l}} +$$
$$+ \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{P_{kl}}{P_{mn}} \sigma_{kl}(\gamma, x) \Delta_{kl} \frac{1}{\gamma_{k+1,l+1}} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{m} \frac{A_k}{A_m} \sigma_{kn}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k+1,n+2}} +$$
$$+ \sum_{l=0}^{n} \frac{B_l}{B_n} \sigma_{ml}(\gamma, x) \Delta_l \frac{1}{\gamma_{m+2,l+1}} +$$
$$+ \frac{1}{\gamma_{m+2,n+2}} \sigma_{mn}(\gamma, x), \tag{28}$$

где $s_{mn}(\gamma, x)$ — *частичные суммы ряда*

$$\sum_{m,n} c_{mn} \gamma_{mn} \varphi_{mn}(x), \tag{29}$$

$\sigma_{mn}(\gamma, x)$ — *его P-средние,* $\sigma'_{mn}(\gamma, x)$ *и* $\sigma''_{mn}(\gamma, x)$ — *соответственно P′- и P″-средние ряда* (29).

Доказательство. Применяя преобразование Абеля—Харди, учитывая треугольность метода P, получаем

$$\sigma_{mn}(x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{\tau_{mnkl}}{\gamma_{kl}} c_{kl} \gamma_{kl} \varphi_{kl}(x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \left(\Delta_{kl} \frac{\tau_{mnkl}}{\gamma_{kl}} \right) s_{kl}(\gamma, x).$$

Отсюда при помощи формулы для разности произведения выводим

$$\sigma_{mn}(x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \tau_{mnkl} s_{kl}(\gamma, x) \Delta_{kl} \frac{1}{\gamma_{kl}} + \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mk} b_{nl} s_{kl}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k,l+1}} +$$
$$+ \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mk} \beta_{nl} s_{kl}(\gamma, x) \Delta_l \frac{1}{\gamma_{k+1,l}} + \sum_{k,l=0}^{m,n} t_{mnkl} s_{kl}(\gamma, x) \frac{1}{\gamma_{k+1,l+1}}.$$

Применяя здесь ко второй сумме преобразование Абеля, учитывая, что для метода P при $0 \leqslant \mu, \nu \leqslant k,\ l \leqslant m, n$

$$t_{mn\mu\nu} = t_{kl\mu\nu} P_{kl} / P_{mn},$$

находим

$$\sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mk} b_{nl} s_{kl}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k,l+1}} = \sum_{k=0}^{m} a_{mk} \left\{ \sum_{l=0}^{n} \frac{B_l}{B_n} \sigma''_{kl}(\gamma, x) \Delta_{kl} \frac{1}{\gamma_{k,l+1}} + \right.$$

$$\left. + \sigma''_{kn}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k,n+2}} \right\}$$

Аналогично преобразовываем третью сумму. Наконец, применение преобразования Абеля—Харди к четвертой сумме приводит к формуле (28).

Лемма 7. *Пусть метод P удовлетворяет условию* (8). *Если двойные ряды* (25) *с* $u_{mn} \geqslant 0$ *и*

$$\sum_{m,n} c^2_{mn} \gamma^2_{mn} \tag{30}$$

сходятся, то двойные ряды

$$\sum_{m,n} s_{mn}(\gamma, x) u_{mn}, \qquad \sum_{m,n} \sigma_{mn}(\gamma, x) u_{mn},$$

$$\sum_{m,n} \sigma'_{mn}(\gamma, x) u_{mn}, \qquad \sum_{m,n} \sigma''_{mn}(\gamma, x) u_{mn}$$

сходятся абсолютно на некотором множестве $Q_0 \subset Q$ *с* $\operatorname{mes} Q_0 = \operatorname{mes} Q$.

Доказательство проведем лишь для последнего ряда, так как для других доказательство аналогично. Действительно, так как

$$\sigma''_{mn}(\gamma, x) = \sum_{l=0}^{n} b_{nl} s_{ml}(\gamma, x) = \sum_{k,l=0}^{m,n} \beta_{nl} c_{kl} \gamma_{kl} \varphi_{kl}(x),$$

а из условия (8) вытекает, что $\beta_{nl} = O(1)$, то, применяя неравенство (4) и теорему 2 из [9], стр. 202, ввиду (2) и сходимости ряда (30) находим

$$\int_Q |\sigma''_{mn}(\gamma, x)|\, d\mu(X) \leqslant \left\{ \int_Q d\mu(X) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_Q [\sigma''_{mn}(\gamma, x)]^2 d\mu(X) \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= O(1) \left(\sum_{k,l=0}^{m,n} \beta^2_{nl} c^2_{kl} \gamma^2_{kl} \right)^{\frac{1}{2}} = O(1). \tag{31}$$

Отсюда, учитывая сходимость ряда (25), по лемме 1 получаем, что почти всюду на Q двойной ряд $\sum_{m,n} \sigma''_{mn}(\gamma, x) u_{mn}$ сходится абсолютно.

Теперь может быть доказана

Теорема 2. *Пусть функция* μ *удовлетворяет условию* (1), *а метод*[9] P — *условиям* (8) *и*

$$\exists \lim_m A_m^{-1}, \quad \exists \lim_n B_n^{-1}. \tag{32}$$

Пусть, далее, $\{\lambda_{mn}\}$ — *неубывающая двойная последовательность положительных чисел таких, что имеют место* (26),

$$\sum_m |a_{mm}| / \sqrt{\lambda_{m0}} < \infty, \quad \sum_n |b_{nn}| / \sqrt{\lambda_{0n}} < \infty, \tag{33}$$

и на множестве $E \subset Q$ *функции Лебега метода* P *удовлетворяют оценкам* (9) *и* (10). *Тогда, если*

$$\sum_{m,n} c^2_{mn} \lambda_{mn} < \infty, \tag{34}$$

то двойной ортогональный ряд (3) *вполне* P*-суммируем почти всюду на* E.

Доказательство. Заметим, что по лемме 3 условие (34) обеспечивает существование последовательностей $\xi_m \uparrow \infty$ и $\eta_n \uparrow \infty$ положительных чисел таких, что сходится двойной ряд (30) с γ_{mn}, заданными равенством (27). Ввиду (27) для последнего члена формулы (28) леммы 6 по теореме 1 заключаем, что

$$r\text{-}\lim_{m,n} \frac{\sigma_{mn}(\gamma, x)}{\gamma_{m+2,n+2}} = r\text{-}\lim_{m,n} \frac{O_x(\sqrt{\lambda_{mn}})}{\gamma_{m+2,n+2}} = 0$$

почти всюду на E, ибо сходимость ряда (30) является для ряда (29) условием (11) теоремы 1.

Остается доказать r-сходимость почти всюду на E восьми остальных сумм равенства (28) леммы 6. Мы докажем это для всех $x \in Q_0$.

Действительно, по лемме 4 из условия (26) выводим

$$\sum_{k,l} \Delta_{kl} \frac{1}{\gamma_{kl}} < \infty.$$

Поэтому, учитывая (32) и то, что условие (8) влечет за собой

$$\tau_{mnkl} = O(1), \quad P_{kl} = O(P_{mn}),$$

то по лемме 7 первая, вторая, третья и шестая суммы равенства (28) сходятся равномерно по m, n и отдельно по каждому из индексов m и n, а, следовательно, и r-сходятся для всех $x \in Q_0$.

---

[9] Выполнение условий (8) и (32) необходимо и достаточно для того, чтобы факторы A и B сохраняли сходимость.

До сих пор мы еще не применяли условия (33). Эти условия нам придется применить для оценки четырех оставшихся (простых) сумм формулы (28).

Обратимся к оценке четвертой суммы в формуле (28) леммы 6. Для этого заметим, что второе из условий (33) дает

$$\sum_{k,l} |b_{ll}| \Delta_k \frac{1}{\gamma_{kl}} < \infty,$$

так как

$$\sum_l |b_{ll}| \sum_k \Delta_k \frac{1}{\gamma_{kl}} = \sum_l |b_{ll}| \left(\frac{1}{\gamma_{0l}} - \lim_k \frac{1}{\gamma_{kl}} \right) = \sum_l |b_{ll}| \frac{1}{\gamma_{0l}} < \infty.$$

Поэтому по лемме 7 получаем, что ряд

$$\sum_{k,l} s_{kl}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{kl}} b_{ll}$$

сходится абсолютно на Q_0. Отсюда, ввиду тождества

$$\sum_{k=0}^{m} a_{mk} \sigma''_{kn}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k,n+2}} = \sum_{k,l=0}^{m,n} a_{mk} b_{nl} s_{kl}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k,n+2}}$$

и вытекающей из (8) оценки

$$b_{nl} = O(b_{ll}),$$

получаем r-сходимость четвертой суммы формулы (28). Аналогично устанавливается r-сходимость пятой суммы формулы (28). Такими же рассуждениями обнаруживаем r-сходимость седьмой и восьмой сумм формулы (28), если учесть тождество

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{A_k}{A_m} \sigma_{kn}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k+1,n+2}} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{A_k}{A_m} b_{nl} \sigma'_{kl}(\gamma, x) \Delta_k \frac{1}{\gamma_{k+1,n+2}}.$$

Теорема 2 является обобщением на двойные ортогональные ряды теоремы Суноути ([19], стр. 322, см. также [17], стр. 405) о (R, a_m)-суммируемости при $a_m > 0$ простых ортогональных рядов, распространенную Осиленкером ([11], стр. 176) на произвольные $a_m \neq 0$. Такая теорема для метода логарифмических средних доказана Медером ([18], стр. 30), а для методов сходимости и арифметических средних — уже Качмажом ([10], стр. 205 и 225).

Прослеживая доказательство теоремы 2, мы можем усмотреть более простое доказательство теоремы Суноути, так как в аналоге формулы (28) для простых рядов остаются лишь аналоги первого, шестого и девятого членов. При этом теорема Суноути получается для более общего случая, когда ортогональность определяется интегралом Лебега — Стилтьеса, причем без требования $a_m > 0$.

Отметим, что из-за ограничений (33) теорема 2 дает слишком грубые признаки суммируемости ортогональных рядов (ср. [15], теорема 2), особенно в случае $\lambda_{mn}=O(1)$ и в случае факторизируемой ортонормированной системы

$$\varphi_{mn}(x_1, x_2)=\varphi_m(x_1)\psi_n(x_2) \tag{35}$$

(ср. [2], стр. 172 и 178). Поэтому для этих двух случаев дадим следующие теоремы 3 и 4.

Теорема 3. *Пусть функция* μ *удовлетворяет условию* (1), *а метод* P — *условиям* (8) *и* (32). *Пусть, далее, на множестве* $E\subset Q$ *функции Лебега методов* P' *и* P'' *удовлетворяют оценкам*

$$L'_{mn}(x)=O(1),\ H'_{mn}(u_1, x_2)=O(1);$$
$$L''_{mn}(x)=O(1),\ H''_{mn}(u_1, x_2)=O(1).$$

Тогда, если выполнено условие (11), *то двойной ортогональный ряд* (3)-*вполне* P-*суммируем почти всюду на* E.

Доказательство. По лемме 3 из условия (11) следует существование последовательностей $\xi_m\uparrow\infty$ и $\eta_n\uparrow\infty$ положительных чисел таких, что сходится ряд (30) с $\gamma^2_{mn}=\xi_m\eta_n$. Тогда, учитывая доказательство теоремы 2, нам надо рассматривать лишь четвертую, пятую, седьмую и восьмую суммы формулы (28) леммы 6. Остановимся лишь на оценке четвертой суммы леммы 6, так как пятая сумма оценивается аналогично, а оценки седьмой и восьмой сумм очевидны, потому что по следствию 1 из (8) заключаем, что почти всюду на E

$$\sigma_{mn}(\gamma, x)=\sum_{k=0}^{m}a_{mk}\sigma''_{kn}(\gamma, x)=O_x(1)\sum_{k=0}^{m}|a_{mk}|=O_x(1).$$

Для четвертой суммы формулы (28) непосредственно из следствия 1 и условия (8) выводим, что

$$\sum_{k=0}^{m}a_{mk}\sigma''_{kn}(\gamma, x)\Delta_k\frac{1}{\gamma_{k,n+2}}=\frac{O_x(1)}{\sqrt{\eta_n}}\sum_{k}\Delta_k\frac{1}{\sqrt{\xi_k}}=\frac{O_x(1)}{\sqrt{\eta_n}}$$

r-сходится почти всюду на E.

Теорема 4. *Пусть функция* μ *удовлетворяет условию* (1), *а метод* P — *условиям* (8) *и* (32). *Пусть, далее,*

$$\lambda_{mn}=\lambda'_m\lambda''_n, \tag{36}$$

где $\{\lambda'_m\}$ *и* $\{\lambda''_n\}$ — *неубывающие последовательности положительных чисел, и на множестве* $E\subset Q$ *функции Лебега метода* P *факторизируемой ортогональной системы* (35) *удовлетворяют неравенству* (9). *Тогда, если выполнено условие* (34), *то двойной ортогональный ряд* (3) *вполне* P-*суммируем почти всюду на* E.

Доказательство. Из (1), (9) и (35) заключаем, что

$$H_{mn}(u_1, x_2)=L_{mn}(u_1, x_2)=O(\lambda_{mn}),$$

а из (36) вытекает, что условие (26) леммы 4 выполнено. Поэтому можем как и в доказательстве теоремы 3 начать с оценки четвертой суммы формулы (28) с γ_{mn} из (27).

Для этого, по аналогии с доказательством теоремы 1 положим

$$h_{mn}(x) = \sup_{0\leqslant i,\ j\leqslant m,n} \tau_{ij}(x) = \tau_{st}(x),$$

где

$$\tau_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{i} a_{ik}\sigma''_{kj}(\gamma, x)\Delta_k \frac{1}{\gamma_{k0}},$$

причем верхняя грань берется по всем функциям (12). Теперь,

$$\int_Q h_{mn}(x)d\mu(X) = \int_Q \tau_{st}(x)d\mu(X) =$$

$$= O(1)\sum_k \int_Q |\sigma''_{kt}(\gamma, x)|\, d\mu(X)\Delta_k \frac{1}{\gamma_{k0}} = O(1),$$

ибо, как и в доказательстве леммы 7, ввиду неравенства $t \leqslant n$ и сходимости ряда (30) мы вправе писать

$$\{\int_Q |\sigma''_{kt}(\gamma, x)|\, d\mu(X)\}^2 = O(1)\int_Q \sum_{\varkappa,\lambda=0}^{k,t} \beta^2_{t\lambda}c^2_{\varkappa\lambda}\gamma^2_{\varkappa\lambda}\varphi^2_{\varkappa\lambda}(x)d\mu(X) =$$

$$= O(1)\sum_{\varkappa,\lambda=0}^{k,n} c^2_{\varkappa\lambda}\gamma^2_{\varkappa\lambda} = O(1),$$

а ввиду (1), (2) и (35), учитывая, что $t = t(n, x_2)$, имеем

$$\int_Q \sum_{\varkappa,\lambda<\pi,\rho} \beta_{t\lambda}\beta_{t\rho}c_{\varkappa\lambda}c_{\pi\rho}\varphi_{\varkappa\lambda}(x)\varphi_{\pi\rho}(x)d\mu(X) =$$

$$= \int_c^d \sum_{\lambda<\rho} \beta_{t\lambda}\beta_{t\rho}\psi_\lambda(x_2)\psi_\rho(x_2)\sum_{\varkappa<\pi} c_{\varkappa\lambda}c_{\pi\rho}d\mu_2(x_2)\int_a^b \varphi_\varkappa(x_1)\varphi_\pi(x_1)d\mu_1(x_1) = 0.$$

Следовательно, по лемме 2 почти всюду на Q

$$\tau_{mn}(x) = O_x(1).$$

Отсюда и из (36), так как $\eta_n \to \infty$, получаем стремление к нулю почти всюду на Q четвертой суммы формулы (28) в процессах $n \to \infty$ и $m, n \to \infty$. Что касается сходимости этой суммы почти всюду на Q в процессе $m \to \infty$, то это налицо даже без требования выполнения (35), ввиду условий (8) и (32) и неравенства (31), так как лемма 1 имеет место и для простых рядов (см. [2], стр. 174—175). Аналогично устанавливается r-сходимость почти всюду на Q пятой, седьмой и восьмой сумм в формуле (28) леммы 6.

Ввиду следствия 1, теоремы 2 и 4 имеют место и для P'- и P''-суммируемости двойных ортогональных рядов.

Из теорем 2, 3 и 4 можем получить теоремы о множителях суммируемости двойных ортогональных рядов (ср. [2], стр. 172, 177—179).

Из теоремы 4, например, при $p_{mn}=2^{m+n}$ и $\mu=x_1x_2$, учитывая следствие 1, вытекает теорема Жижиашвили ([6], стр. 258), которую неубедительным рассуждением доказал Качмаж [16]. Действительно, так как (см., например, [16], стр. 93) для тригонометрической системы функции Лебега метода сходимости

$$L_{mn}(x)=O[\ln(m+2)\ln(n+2)],$$

то из теоремы 4 получаем

Следствие 2. *Если*

$$\sum_{m,n}\lambda^2_{mn}(a^2_{mn}+b^2_{mn}+c^2_{mn}+d^2_{mn})\ln(m+2)\ln(n+2)<\infty,$$

то двойной тригонометрический ряд

$$\sum_{m,n}\lambda_{mn}(a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\sin mx\cos ny+$$
$$+c_{mn}\cos mx\sin ny+d_{mn}\sin mx\sin ny)$$

почти всюду вполне сходится.

Аналогичный результат имеет место и для вполне сходимости ряда (3) по ортонормированной системе (35). Для этого надо в теореме 4 положить, например, $p_{mn}=2^{m+n}$.

Если в следствии 2 тригонометрический ряд является рядом Фурье функции $f(x_1,x_2)\in L^2(R)$, где $R=[-\pi,\pi;\ -\pi,\pi]$, то, ввиду равенства двойного и повторных пределов r-сходящейся последовательности, получаем частный случай $\alpha=\beta=0$ теоремы 9 статьи [8], т. е. r-сходимость к $f(x_1,x_2)$ почти всюду на R двойного тригонометрического ряда Фурье—Лебега.

§ 6. Об отсутствии тесной связи между функциями Лебега и суммируемостью двойных ортогональных рядов

В статье [5] Ефимов показал, что существуют ортонормированные системы и регулярные методы суммирования, для которых неубывающая мажоранта (даже в любой степени $\alpha\geqslant 1$) функций Лебега не является множителем Вейля для суммируемости ортогонального ряда этим методом. Очень простое доказательство теоремы Ефимова нашел Ульянов ([14], стр. 35—36). Это доказательство легко переносится на двойные ряды (3).

Предварительно нам нужны следующие леммы.

Лемма 8. *Если* $\sum\limits_{m,n}\xi_m\eta_n<\infty$ *при* $\xi_m\downarrow 0$ *и* $\eta_n\downarrow 0$, *то для любой ортонормированной системы* $\{\varphi_{mn}(x)\}$ *функции Лебега метода сходимости почти всюду на* Q *удовлетворяют равенствам*

$$r\text{-}\lim_{m,n}(\xi_m\eta_n)^{\frac{1}{2}}L_{mn}(x)=0, \tag{37}$$

$$r\text{-}\lim_{m,n}(\xi_m\eta_n)^{\frac{1}{2}}H_{mn}(u_1,x_2)=0. \tag{38}$$

Доказательство проведем лишь для (38), потому что (37) доказывается аналогично как для простых рядов (см. [10], стр. 202). Для этого, обозначив

$$M_{kl}(u_1, x_2) = \int\limits_Q [\varphi_{kl}(x)\varphi_{kl}(u)]^2 d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(u_2),$$

ввиду (1) и (2) находим

$$\sum_{m,n} \xi_m \eta_n \int\limits_Q M_{mn}(u_1, x_2)\, d\mu_1(u_1)\, d\mu_2(x_2) = \sum_{m,n} \xi_m \eta_n < \infty.$$

Отсюда по лемме 1 ряд

$$\sum_{m,n} \xi_m \eta_n M_{mn}(u_1, x_2)$$

сходится почти всюду на Q. Следовательно, на основании леммы 5 почти всюду на Q

$$r\text{-}\lim_{m,n} \xi_m \eta_n \sum_{k,l=0}^{m,n} M_{kl}(u_1, x_2) = 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает (38), поскольку неравенство (4) дает

$$[H_{mn}(u_1, x_2)]^2 \leqslant \mu(Q) \sum_{k,l=0}^{m,n} M_{kl}(u_1, x_2) \quad .$$

Лемма 9. *Существует нефакторизируемый двойной ряд вида* (3), *расходящийся*[10] *всюду на* Q, *коэффициенты которого удовлетворяют условию* (11).

Доказательство. Как показал Ульянов ([13], стр. 91, 101 и 104) существуют ортогональные ряды класса L^2 такие, которые всюду на $[0, 1]$ расходятся ограниченно, и такие, которые расходятся неограниченно. Отсюда, после соответствующих замен переменных можно указать ортогональный ряд

$$\sum_m c_m \varphi_m(x_1) \tag{39}$$

ограниченно расходящийся всюду на $[a, b]$, и ортогональный ряд

$$\sum_n d_n \psi_n(x_2)$$

неограниченно расходящийся всюду на $[c, d]$, хотя

$$\sum_m c^2{}_m \omega^2{}_m < \infty, \quad \sum_n d^2{}_n < \infty, \tag{40}$$

где $\sup\limits_{x_2} \psi_l(x_2) < \infty$ и $\omega_m \uparrow \infty$. Отсюда следует, что ряд

$$\sum_m c_m \omega_m \varphi_m(x_1)$$

---

[10] В смысле Прингсхейма.

расходится неограниченно всюду на $[a, b]$, ибо в противном случае по признаку Дирихле сходился бы ряд (39). Выберем теперь числа $\xi_n \to 0$ так, чтобы

$$\sup_n \left|\sum_{l=0}^{n} d_l \xi_l \psi_l(x_2)\right| < \infty,$$

и рассмотрим нефакторизируемый двойной ортогональный ряд

$$\sum_{m,n} c_{mn}\varphi_{mn}(x) = \sum_{m,n} c_m d_n (\omega_m + \xi_n)\varphi_m(x_1)\psi_n(x_2). \tag{41}$$

Покажем, что этот ряд является искомым. Действительно, его коэффициенты, как видно из (40), удовлетворяют условию (11). Кроме того, для частичных сумм $s_{mn}(x)$ ряда (41) имеем

$$s_{mn}(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k \omega_k \varphi_k(x_1) \sum_{l=0}^{n} d_l \psi_l(x_2) + O_x(1) \neq O_x(1),$$

так что ряд (41) неограниченно расходится всюду на Q.

Теперь может быть доказана

Теорема 5. *Для всякой функции $0 < f(z) \uparrow \infty$ одной переменной z при $z \to +\infty$ существуют треугольный факторизируемый метод $T = T_1 \odot T_2$ с регулярными факторами T_1 и T_2, монотонно возрастающая к ∞ последовательность $\{\lambda_{mn}\}$ и ортонормированная система $\{\varphi_{mn}(x)\}$ такие, что почти всюду на Q функции Лебега метода T удовлетворяют оценкам*

$$L_{mn}(x) = O(\lambda_{mn}), \qquad H_{mn}(u_1, x_2) = O(\lambda_{mn}), \tag{42}$$

и в то же время некоторый ряд (3) *не суммируем методом T почти всюду на Q, хотя*

$$\sum_{m,n} c^2_{mn} F(m, n) < \infty,$$

где

$$F(m, n) = f(\lambda_{mn}).$$

Доказательство. Учитывая лемму 9, можем выбрать некоторые систему $\{\varphi_{mn}(x)\}$ и последовательность $\{c_{mn}\}$ такими, чтобы ряд (3) расходился[10] на Q, но имело бы место (11). По лемме 3 из условия (11) следует сходимость ряда (30) для некоторой последовательности

$$\gamma^2_{mn} = \xi_m \eta_n$$

с $\xi_m \uparrow \infty$ и $\eta_n \uparrow \infty$. По лемме 8 для любой ортонормированной системы $\{\varphi_{mn}(x)\}$ функции Лебега метода сходимости почти всюду на Q удовлетворяют оценкам

$$\left.\begin{aligned} L_{mn}(x) &= O[(m+1)(n+1)],\\ H_{mn}(u_1, x_2) &= O[(m+1)(n+1)]. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Поскольку $F(m, n)$ и γ_{mn} возрастают, то можем найти[11]

---

[11] Если $f(z)$ натуральнозначна, то можно положить $f(m_i n_j) = [\xi_i \eta_j]$, начиная с $i, j \geq \rho$.

неубывающие последовательности $\{m_i\}$ и $\{n_j\}$ целых чисел, принимающие все натуральные значения, таких, что $m_i \leqslant i+1$ и $n_j \leqslant j+1$, причем

$$f(m_i n_j) \leqslant A\xi_i\eta_j \tag{44}$$

для всех $i, j \geqslant \rho$, где A и $\rho \geqslant 1$ — некоторые постоянные.

Положим

$$\lambda_{ij} = (m_i+1)(n_j+1) \tag{45}$$

и

$$\tau_{mnkl} = \begin{cases} 1 & \text{при } k, l \leqslant m_i,\ n_j \leqslant m, n, \\ 0 & \text{при } k > m_i \text{ или } l > n_j. \end{cases}$$

Тогда метод $T = (\tau_{mnkl})$ имеет регулярные факторы T_1 и T_2, а из (43) выводим, что почти всюду на Q имеют место (42), ибо, например,

$$L_{ij}(x) = \int_Q \Big|\sum_{k,l=0}^{m_i,n_j} \varphi_{kl}(x)\varphi_{kl}(u)\Big|\, d\mu(U) = O(\lambda_{ij}).$$

С другой стороны, так как по нашему предположению ряд (3) расходится всюду на Q, а m_i и n_j принимают все натуральные значения, то последовательность $\{s_{m_i n_j}(x)\}$ частичных сумм ряда (3) также расходится всюду на Q. Это означает, что ряд (3) не суммируем методом T всюду на Q. Наконец, ввиду (30), (44) и (45) имеем

$$\sum_{i,j} c^2_{ij}F(i, j) =$$

$$= O(1) + \Big(\sum_{i,j=\rho,0}^{\infty,\rho} + \sum_{i,j=0,\rho}^{\rho,\infty}\Big) c^2_{ij}F(i, j) + A\sum_{i,j=\rho}^{\infty} c^2_{ij}\gamma^2_{ij} < \infty,$$

ибо, например,

$$\sum_{i,j=\rho,0}^{\infty,\rho} c^2_{ij}F(i, j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{\rho}\sum_{i=\rho}^{\infty} c^2_{ij}f(\lambda_{i\rho}) \leqslant A\eta_\rho \sum_{j=0}^{\rho}\sum_{i=\rho}^{\infty} c^2_{ij}\xi_i = O(1).$$

Взяв в теореме 8 функцию $f(z) = z^\alpha$ при $\alpha \geqslant 1$, получаем, что для любой возрастающей неограниченной $\{\lambda_{mn}\}$ найдется метод T с регулярными факторами такой, что двойная последовательность $\{\lambda^\alpha_{mn}\}$ ни при каком $\alpha \geqslant 1$ не является множителем Вейля для T-суммируемости рядов (3), несмотря на выполнение условий (42).

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Барон С., О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, **150**, 165—181.
3. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1966.
4. Винер Н., Интеграл Фурье и некоторые его приложения. Москва, 1963.
5. Ефимов А. В., О несуммируемых линейными методами ортогональных рядах. Докл. АН СССР, 1963, **152**, 31—34.
6. Жижиашвили Л. В., О сходимости двойных рядов Фурье—Лебега и двойных преобразованиях Гильберта. Сообщ. АН ГрузССР, 1963, **30**, 257—264.
7. Жижиашвили Л. В., Некоторые вопросы теории рядов Фурье и сопряженных к ним тригонометрических рядов. Тбилиси, 1965.
8. Жижиашвили Л. В., О некоторых свойствах чезаровских средних рядов Фурье. Тр. Моск. матем. о-ва, 1966, **15**, 145—180.
9. Камке Э., Интеграл Лебега—Стилтьеса. Москва, 1959.
10. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
11. Осиленкер Б. П., О множителях Вейля для суммирования ортогональных рядов. Успехи матем. наук, 1967, **22**, № 5, 175—176.
12. Сакс С., Теория интеграла. Москва, 1949.
13. Ульянов П. Л., Расходящиеся ряды Фурье. Успехи матем. наук, 1961, **16**, № 3, 61—142.
14. Ульянов П. Л., Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов. Успехи матем. наук, 1964, **19**, № 1, 3—69.
15. Федулов В. С., О $(C, 1, 1)$-суммируемости двойного ортогонального ряда. Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 4, 433—442.
16. Kaczmarz, S., Zur Theorie der Fourierschen Doppelreihen. Studia math., 1930, **2**, 91—96.
17. Leindler, L., Über die sehr starke Riesz-Summierbarkeit der Orthogonalreihen und Konvergenz-Lückenhafter Orthogonalreihen. Acta math. Acad. scient. hung., 1962, **13**, 401—414.
18. Meder, J., On the summability almost everywhere of orthonormal series by the method of first logarithmic means. Rozpr. mat., 1959, **17**, 1—34.
19. Sunouchi, G., On the Riesz summability of Fourier series. Tôhoku Math. J., (2), 1959, **11**, 321—326.

Поступило
29 XII 1967

KAHEKORDSETE ORTOGONAALRIDADE LEBESGUE'I FUNKTSIOONID SUMMEERUVUSE PUHUL

S. Baron

Resümee

Olgu $\{\lambda_{mn}\}$ — Rieszi kaalutud keskmiste menetluse P Lebesgue'i funktsioonide mittekahanev majorant. Käesolevas artiklis näidatakse, et eeldusel (11) kahekordse ortogonaalrea (3) jaoks P-keskmised $\sigma_{mn}(x_1, x_2) = O_x(\sqrt{\lambda_{mn}})$ peaaegu kõikjal hulgal $E \subset [a, b; c, d]$. Samuti uuritakse, millal tingimusest (34) järeldub kahekordse rea (3) regulaarne P-summeeruvus

peaaegu kõikjal hulgal E. Veel antakse B. Levi teoreemi üldistus kahekordsetele funktsionaaljadadele ning tõestatakse ristkülikul $[a, b; c, d]$ kõikjal hajuva mittefaktoriseeruva kahekordse ortogonaalrea olemasolu ruumis L^2_μ. Kahekordsetele ortogonaalridadele üldistatakse ka A. Jefimovi [5] tuntud teoreem tiheda seose puudumisest Lebesgue'i funktsioonide ja ortogonaalrea summeeruvuse vahel.

DIE LEBESGUESCHEN FUNKTIONEN BEI DER SUMMIERBARKEIT DER ORTHOGONALEN DOPPELREIHEN

S. Baron

Zusammenfassung

Es sei $\{\lambda_{mn}\}$ — die nicht-abnehmende Majorante der Lebesgueschen Funktionen bei der P-Summierbarkeit, wo mit P das Verfahren der bewichteten Mittel von Riesz für Doppelreihen bezeichnet ist. In diesem Artikel wird bewiesen, daß für die P-Mittel der orthogonalen Doppelreihe (3) unter der Bedingung (11) die Abschätzung $\sigma_{mn}(x_1, x_2) = O_x(\sqrt{\lambda_{mn}})$ fast überall auf $E \subset [a, b; c, d]$ gilt. Zugleich wird untersucht, wann die Bedingung (34) die reguläre P-Summierbarkeit der orthogonalen Doppelreihe (3) fast überall auf E nach sich zieht. Auch wird der Satz von B. Levi auf funktionale Doppelfolgen verallgemeinert und in L^2_μ die Existenz einer nichtfaktorisierbaren orthogonalen Doppelreihe bewiesen, welche überall auf dem Rechteck $[a, b; c, d]$ divergiert. Auf orthogonalen Doppelreihen wird auch der bekannte Satz von A. Jefimov [5] wegen Abwesenheit der engen Beziehung zwischen den Lebesgueschen Funktionen und der Summierbarkeit der orthogonalen Reihen verallgemeinert.

КОМПАКТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОПЕРАТОРАМИ В ФАКТОРПРОСТРАНСТВАХ

Г. Вайникко

Кафедра математического анализа

Введение

Изучение сходимости приближенных методов приводит во многих случаях к вопросу о близости данного оператора к операторам, действующим в факторпространствах исходного пространства. В работах Н. Н. Гудовича [3] и С. Г. Крейна [7] с этой точки зрения был рассмотрен метод конечных разностей решения дифференциальных уравнений. Поясним сказанное на другом примере — методе механических квадратур решения интегральных уравнений. Этот метод будет и в дальнейшем рассмотрен в качестве иллюстрации развиваемой абстрактной теории.

Пусть D — компакт (компактное метрическое пространство), ν — конечно- или счетно-аддитивная функция множества, определенная на некоторой алгебре или σ-алгебре Σ подмножеств D. Предполагается, что Σ содержит все открытые подмножества D и что ν имеет ограниченную вариацию [1] (см. [4]) на D. Тогда каждая непрерывная на D функция ν-интегрируема, и имеет смысл рассмотреть интегральное уравнение

$$x(t) = \int_D K(t, s)x(s)\nu(ds) + f(t), \tag{0.1}$$

где $K(t, s)$ и $f(t)$ — заданные функции, определенные и непрерывные соответственно на $D \times D$ и D, а $x(t)$ — искомая функция. Беря в основу какую-нибудь квадратурную формулу

$$\int_D z(s)\nu(ds) = \sum_{j=1}^{n} a_{jn}z(s_{jn}) + \varphi_n(z) \qquad (a_{jn} \neq 0, \ s_{jn} \in D), \tag{0.2}$$

---

[1] Перечисленным требованиям удовлетворяет, например, мера Лебега на замкнутой ограниченной области $D \subset R^m$.

заменим интегральное уравнение (0.1) системой алгебраических уравнений

$$\xi_{in} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K(s_{in}, s_{jn}) \xi_{jn} + f(s_{in}) \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (0.3)$$

относительно приближенных значений $\xi_{in} \approx x_\infty(s_{in})$ решения $x_\infty(t)$ уравнения (0.1) в узлах s_{in} $(i=1, \ldots, n)$. Эта система получается из уравнения (0.1), заменив интеграл квадратурой (0.2) (дополнительный член $\varphi_n(z)$ отбрасывается) и придавая затем переменной t последовательно значения $s_{1n}, \ldots, s_{nn}$.

Интегральное уравнение (0.1) рассмотрим как операторное уравнение

$$x = Tx + f \qquad (0.4)$$

в банаховом пространстве $E = C(D)$ непрерывных на D функций $z(t)$, $\|z\| = \max_{t \in D} |z(t)|$. Линейный оператор

$$(Tx)(t) = \int_D K(t, s) x(s) \nu(ds) : E \to E \qquad (0.5)$$

вполне непрерывен.

Обозначим через E_n замкнутое подпространство пространства $E = C(D)$, состоящее из аннулирующихся в узлах $s_{1n}, \ldots, s_{nn}$ функций. Факторпространство E/E_n состоит из классов непрерывных функций, имеющих одинаковые значения в узлах $s_{1n}, \ldots, s_{nn}$, и оно отождествимо с n-мерным векторным пространством. Каноническое отображение $p_n : E \to E/E_n$ ставит функции $z(t) \in E$ в соответствие вектор ее значений в узлах, т. е.

$$p_n z = (z(s_{1n}), \ldots, z(s_{nn})) \in E/E_n.$$

Систему уравнений (0.3) можно рассматривать как операторное уравнение

$$x^*_n = T_n x^*_n + p_n f \qquad (0.6)$$

в факторпространстве E/E_n для нахождения $x^*_n \approx p_n x_\infty$. Оператор $T_n : E/E_n \to E/E_n$ ставит вектору $z^*_n = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in E/E_n$ в соответствие вектор

$$T_n z^*_n = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K(s_{1n}, s_{jn}) \zeta_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jn} K(s_{nn}, s_{jn}) \zeta_j\right). \qquad (0.7)$$

Представляет интерес развить абстрактную теорию для уравнений типа (0.4) и (0.6) с произвольным вполне непрерывным оператором T, действующим в произвольном банаховом пространстве E, и вполне непрерывными операторами T_n $(n = 1, 2, \ldots)$, действующими в факторпространствах пространства E. Основой такой теории является приводимое в § 1 определение компактной аппроксимации линейных вполне непрерывных операторов операторами в факторпространствах.

В § 2 изучаются уравнения второго рода, а в § 3 спектры и корневые подпространства аппроксимирующих и аппроксимируемого операторов. В § 4 эти результаты переносятся на некоторые более общие уравнения.

§ 1. Компактная аппроксимация линейных вполне непрерывных операторов

1. Пусть E и F — банаховы пространства, $\{E_n\}_1^\infty$ и $\{F_n\}_1^\infty$ — последовательности замкнутых подпространств E и F соответственно. В факторпространствах E/E_n и F/F_n введем (так называемые естественные) нормы

$$\|x^*_n\| = \inf_{x_n \in x^*_n} \|x_n\|_E \quad (x^*_n = x_n + E_n \in E/E_n),$$

$$\|y^*_n\| = \inf_{y_n \in y^*_n} \|y_n\|_F \quad (y^*_n = y_n + F_n \in F/F_n).$$

Тем самым эти факторпространства превращаются в банаховы пространства (см., например, [5]). Обозначим через p_n и q_n канонические отображения E и F соответственно в E/E_n и F/F_n:

$$p_n x = x + E_n \in E/E_n, \; q_n y = y + F_n \in F/F_n \quad (x \in E, \; y \in F).$$

Имеем

$$\|p_n\| = 1, \quad \|q_n\| = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.1}$$

Всюду в дальнейшем предполагаем, не оговаривая этого особо, что

$$\|p_n x\| \to \|x\|, \; \|q_n y\| \to \|y\| \text{ при } n \to \infty$$
$$\text{для всех } x \in E, \; y \in F. \tag{1.2}$$

Определение 1. *Последовательность линейных вполне непрерывных операторов* $T_n : E/E_n \to F/F_n$ *компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор* $T : E \to F$, *если выполнены следующие два условия:*

а) $\|q_n Tx - T_n p_n x\| \to 0$ *при* $n \to \infty$ *для любого* $x \in E$;

б) *для любых* $x^*_n \in E/E_n$, $\|x^*_n\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *существуют такие* $y_n \in T_n x^*_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что последовательность $\{y_n\}$ *компактна в* F.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1. *Пусть последовательность линейных вполне непрерывных операторов* $T_n : E/E_n \to F/F_n$ *компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор* $T : E \to F$. *Пусть линейные непрерывные операторы* $S : F \to E$ *и* $S_n : F/F_n \to E/E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *таковы, что*

$$\|p_n Sy - S_n q_n y\| \to 0 \text{ при } n \to \infty \text{ для каждого } y \in F. \tag{1.3}$$

Тогда последовательность линейных вполне непрерывных операторов $S_nT_n : E/E_n \to E/E_n$ компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор $ST : E \to E$.

Доказательство. Из (1.2) и (1.3) вытекает, что

$$\sup_n \|S_n q_n y\| < \infty$$

для любого $y \in F$. С помощью принципа равномерной ограниченности отсюда легко вывести (см. [7]), что

$$\|S_n\| = \|S_n q_n\| \leqslant c = \text{const} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.4}$$

Для любого $x \in E$ имеем

$$p_nSTx - S_nT_np_nx = (p_nSy - S_nq_ny) + \\ + S_n(q_nTx - T_np_nx),$$

где $y = Tx \in F$. Отсюда с помощью (1.3), (1.4) и условия а) определения 1 находим, что $\|p_nSTx - S_nT_np_nx\| \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. для операторов ST и S_nT_n тоже выполнено условие а) определения 1.

Пусть $x^*_n \in E/E_n$, $\|x^*_n\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По условию б) определения 1 найдутся такие $y_n \in T_nx^*_n$, что последовательность y_n компактна в F. Из (1.3), (1.4), (1.1) и компактности $\{y_n\}$ вытекает, что $\|p_nSy_n - S_nq_ny_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, или, так как $q_ny_n = T_nx^*_n$,

$$\|p_nSy_n - S_nT_nx^*_n\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Это позволяет выбрать $u_n \in S_nT_nx^*_n - p_nSy_n$, так, что $\|u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Последовательность $z_n = u_n + Sy_n \in S_nT_nx^*_n$ компактна в E, т. е. для операторов ST и S_nT_n выполнено условие б) определения 1. Лемма 1 доказана.

2. Вернемся к примеру, рассмотренному во введении. Естественная норма в E/E_n имеет вид

$$\|z^*_n\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\zeta_i| \text{ для } z^*_n = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in E/E_n,$$

т. е. E/E_n отождествимо с векторным пространством m_n. Условие (1.2) будет выполнено, если узлы $s_{1n}, \ldots, s_{nn}$ распологаются в D «предельно плотно», т. е. если

$$\sup_{s \in D} \varrho(s, \mathfrak{S}_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty, \text{ где } \mathfrak{S}_n = \{s_{jn}\}^n_{j=1}. \tag{1.5}$$

Лемма 2. *Пусть квадратурный процесс* (0.2) *сходится, т. е. $\varphi_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ для любой непрерывной на компакте D функции $z(t)$. Пусть выполнено условие* (1.5).

Тогда последовательность операторов (0.7) *компактно аппроксимирует оператор* (0.5).

Доказательство. Отметим два следствия из сходимости квадратурного процесса (0.2). Во-первых (см., например, [6])

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{jn}| \leqslant c = \text{const} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.6}$$

Во-вторых, для любого компактного в $E = C(D)$ множества M имеем

$$\sup_{z \in M}|\varphi_n(z)| = \sup_{z \in M}\left|\int_D z(s)\nu(ds) - \sum_{j=1}^{n} a_{jn}z(s_{jn})\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{1.7}$$

Последнее вытекает из того, что $\varphi_n(z)$ — линейный непрерывный функционал над E, — поэтому поточечная сходимость $\varphi_n(z) \to 0$ равномерна на каждом компактном подмножестве $M \subset E$.

Для любого $x \in E = C(D)$ имеем

$$\begin{aligned} \|p_n Tx - T_n p_n x\| &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\left|\int_D K(s_{in}, s)x(s)\nu(ds) - \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^{n} a_{jn}K(s_{in}, s_{jn})x(s_{jn})\right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b}\left|\int_D K(t, s)x(s)\nu(ds) - \right. \\ &\left. - \sum_{j=1}^{n} a_{jn}K(t, s_{jn})x(s_{jn})\right| \to 0 \text{ при } n \to \infty \end{aligned}$$

в силу (1.7) и компактности семейства $\{z_t(s) = K(t, s)x(s)\}_{t \in [a, b]}$ в $C(D)$. Таким образом, условие а) определения 1 выполнено.

Пусть $z^*_n = (\zeta_{1n}, \ldots, \zeta_{nn}) \in E/E_n$, $\|z^*_n\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Используя (1.6) и равномерную непрерывность и ограниченность функции $K(t, s)$ на $D \times D$, с помощью теоремы Арцела легко убедиться, что последовательность

$$y_n(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{jn}K(t, s_{jn})\zeta_{jn} \in T_n z^*_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

компактна в E, т. е. выполнено и условие б) определения 1. Лемма 2 доказана.

§ 2. Линейное неоднородное уравнение

1. Рассмотрим уравнения второго рода

$$x = Tx + f \tag{2.1}$$

и

$$x^*_n = T_n x^*_n + p_n f, \tag{2.2}$$

где $T: E \to E$ и $T_n: E/E_n \to E/E_n$ линейные вполне непрерывные операторы.

Лемма 3. *Пусть последовательность линейных вполне непрерывных операторов $T_n: E/E_n \to E/E_n$ компактно аппроксимирует* *линейный вполне непрерывный оператор $T : E \to E$, и пусть уравнение $x = Tx$ имеет лишь нулевое решение.*

Тогда операторы $I - T_n : E/E_n \to E/E_n$ обратимы при достаточно больших n, и

$$\|(I - T_n)^{-1}\| \leqslant c = \text{const} \quad (n = n_0,\ n_0 + 1,\ \ldots). \tag{2.3}$$

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что существуют $z^*_n \in E/E_n$, $\|z^*_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, для которых

$$\|z^*_n - T_n z^*_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.4}$$

В силу условия б) определения 1 найдутся такие $y_n \in T_n z^*_n$, что последовательность y_n компактна в E. Соотношение (2.4) дает возможность выбрать $u_n \in z^*_n - T_n z^*_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ так, что $\|u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для $z_n = y_n + u_n$ имеем $z_n \in z^*_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и последовательность $\{z_n\}$ компактна в E. Отсюда на основании условия а) определения 1 заключаем, что

$$\|p_n T z_n - T_n z^*_n\| = \|p_n T z_n - T_n p_n z_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Совместно с (2.4) это дает

$$\|p_n(z_n - Tz_n)\| = \|z^*_n - p_n T z_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.5}$$

Пусть z — предельная точка компактной последовательности z_n. Тогда $\|z\| \geqslant 1$, т. е. $z \neq 0$; из (2.5) получаем, что $\|p_n(z - Tz)\| \to 0$ при $n \to \infty$. Из (1.2) теперь заключаем, что $z - Tz = 0$, т. е. z — ненулевое решение уравнения $x = Tx$. Это противоречит условиям леммы, и лемма 3 доказана.

Теорема 1. *Пусть последовательность линейных вполне непрерывных операторов $T_n : E/E_n \to E/E_n$ компаткно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор $T : E \to E$, и пусть уравнение (2.1) имеет единственное решение x_∞.*

Тогда уравнение (2.2) при достаточно больших n имеет единственное решение $x^*_n \in E/E_n$, и $\|x^*_n - p_n x_\infty\| \to 0$ при $n \to \infty$. Справедлива оценка $(c_1, c_2 = \text{const} > 0)$

$$c_1 \|p_n T x_\infty - T_n p_n x_\infty\| \leqslant \|x^*_n - p_n x_\infty\| \leqslant c_2 \|p_n T x_\infty - T_n p_n x_\infty\|. \tag{2.6}$$

Доказательство. Существование единственного решения x^*_n уравнения (2.2) вытекает из леммы 3. Из равенства

$$(I - T_n)(x^*_n - p_n x_\infty) = T_n p_n x_\infty - p_n T x_\infty$$

и неравенств (2.3) получаем оценку (2.6) сверху; чтобы получить оценку снизу, нужно воспользоваться тем, что нормы $\|I - T_n\|$ тоже ограничены в совокупности. Сходимость $\|x^*_n - p_n x_\infty\| \to 0$ при $n \to \infty$ вытекает из (2.6) и условия а) определения 1. Теорема 1 доказана.

2. Из леммы 2 и теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2. *Пусть интегральное уравнение* (0.1) *имеет един-*

ственное решение $x_\infty(t)$. Пусть квадратурный процесс (0.2) *сходится, и пусть выполнено условие*[2] (1.5).

Тогда система (0.3) *имеет при достаточно больших n единственное решение $x^*_n = (\xi_{1n}, \ldots, \xi_{nn})$, и имеет место сходимость*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_{in} - x_\infty(s_{in})| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty \tag{2.7}$$

с оценкой

$$c_1\varepsilon_n \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_{in} - x_\infty(s_{in})| \leqslant c_2\varepsilon_n \quad (c_1, c_2 = \text{const} > 0), \tag{2.8}$$

где

$$\varepsilon_n = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\varphi_n(z_{in})|, \quad z_{in}(s) = K(s_{in}, s)x_\infty(s), \tag{2.9}$$

$\varphi_n(z)$ — *дополнительной член квадратурной формулы* (0.2).

В случае, когда ν — мера Лебега на $D\subset R^m$, сходимость (2.7) установлена в [1, 8]. В [1] выведена также оценка {(2.8), (2.9)}; рассмотрения проводятся для интегральных уравнений, не обязательно линейных.

§ 3. Спектры и корневые подпространства аппроксимирующих и аппроксимируемого операторов

1. Банахово пространство E будем теперь считать комплексным. Через $\sigma(T)$, $\varrho(T)$, $R(\lambda; T) = (\lambda I - T)^{-1}$ обозначаем соответственно спектр, резольвентное множество и резольвенту оператора $T: E\to E$. Аналогичный смысл имеют обозначения $\sigma(T_n)$, $\varrho(T_n)$ и т. д.

Лемма 4. *Пусть последовательность линейных вполне непрерывных операторов $T_n: E/E_n \to E/E_n$ компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор $T: E\to E$. Пусть $\Lambda\subset\varrho(T)$ — компакт*[3], $0\overline{\in}\Lambda$.

Тогда $\Lambda\subset\varrho(T_n)$ при достаточно больших n, и

$$\sup_{\lambda\in\Lambda} \|R(\lambda; T_n)\| \leqslant c = \text{const} \quad (n = n_0, n_0+1, \ldots).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о строится от противного и сводится к доказательству утверждения, аналогичного лемме 3.

Лемма 5. *Пусть последовательность линейных вполне непрерывных операторов $T_n: E/E_n \to E/E_n$ компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор $T: E\to E$. Пусть*

---

[2] Если $|\nu|(A) > 0$ для любого $A\in\Sigma$ с непустой внутренностью ($|\nu|$ — полная вариация меры ν), то (1.5) вытекает из сходимости квадратурного процесса (0.2).

[3] Если T не является конечномерным оператором, то условие $0\overline{\in}\Lambda$ вытекает из условия $\Lambda\subset\varrho(T)$.

$\lambda_\infty (\lambda_\infty \neq 0)$ — собственное значение оператора T, единственное в круге $|\lambda - \lambda_\infty| \leqslant \delta$, где $\delta = \text{const}$, $0 < \delta < |\lambda_\infty|$.

Тогда последовательность линейных вполне непрерывных операторов

$$Q_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_\infty|=\delta} R(\lambda; T_n)\, d\lambda : E/E_n \to E/E_n \tag{3.1}$$

компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор

$$Q_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_\infty|=\delta} R(\lambda; T)\, d\lambda : E \to E. \tag{3.2}$$

Доказательство. Заметим, прежде всего, что окружность $\Lambda_\delta = \{\lambda : |\lambda - \lambda_\infty| = \delta\}$ содержится в $\varrho(T)$, и, по лемме 4, $\Lambda_\delta \subset \varrho(T_n)$ при достаточно больших n. При указанных n действительно можно определить оператор Q_n формулой (3.1).

С помощью равенств

$$R(\lambda; T_n) = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} R(\lambda; T_n) T_n, \quad R(\lambda; T) = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda} R(\lambda; T) T$$

преобразуем (3.1) и (3.2) к виду

$$Q_n = S_n T_n, \quad Q_\infty = ST,$$

где

$$S_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_\infty|=\delta} \frac{1}{\lambda} R(\lambda; T_n)\, d\lambda : E/E_n \to E/E_n,$$

$$S = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda-\lambda_\infty|=\delta} \frac{1}{\lambda} R(\lambda; T)\, d\lambda : E \to E.$$

Здесь мы учли, что интеграл от $\varphi(\lambda) = 1/\lambda$ по окружности $|\lambda - \lambda_\infty| = \delta$ равен нулю. Для доказательства леммы 5, в силу леммы 1, достаточно установить, что для каждого $y \in E$

$$\|p_n S y - S_n p_n y\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Последнее соотношение будет выполнено, если

$$\sup_{\lambda : |\lambda-\lambda_\infty|=\delta} \|p_n R(\lambda; T) y - R(\lambda; T_n) p_n y\| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Из тождеств Гильберта

$$R(\lambda; T) - R(\lambda'; T) = (\lambda' - \lambda) R(\lambda; T) R(\lambda'; T),$$

$$R(\lambda; T_n) - R(\lambda'; T_n) = (\lambda' - \lambda) R(\lambda; T_n) R(\lambda'; T_n)$$

и равномерной по λ и n ограниченности норм $\|R(\lambda; T)\|$ и $\|R(\lambda; T_n)\|$ на окружности Λ_δ (см. лемму 4) вытекает, что векторные функции $p_n R(\lambda; T) y$ и $R(\lambda; T_n) p_n y$ $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$ равностепенно непрерывны по $\lambda \in \Lambda_\delta$, и (3.3) будет установлено, если аналогичное соотношение установлено для каждого $\lambda \in \Lambda_\delta$ в отдельности. Итак, остается убедиться, что для каждого фиксированного $\lambda \in \Lambda_\delta$ и каждого $y \in E$ имеет место соотношение

$$\|p_n R(\lambda; T) y - R(\lambda; T_n) p_n y\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.4}$$

Элементы $x_\infty = R(\lambda; T) y$ и $x^*_n = R(\lambda; T_n) p_n y$ являются решениями уравнений $\lambda x = Tx + y$ и $\lambda x^*_n = T_n x^*_n + p_n y$. По теореме 1 имеет место сходимость $\|x^*_n - p_n x_\infty\| \to 0$ при $n \to \infty$, что и есть соотношение (3.4). Лемма 5 доказана.

Теорема 3. *Пусть последовательность линейных вполне непрерывных операторов $T_n : E/E_n \to E/E_n$ компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор $T : E \to E$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Каждое собственное значение $\lambda_\infty \neq 0$ оператора T является пределом при $n \to \infty$ собственных значений λ_n операторов T_n.*

2) *Точки сгущения любой последовательности $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат $\sigma(T)$.*

3) *При $n \to \infty$ имеет место сходимость*

$$\sup_{x^*_n \in X^*_n, \|x^*_n\| = 1} \varrho(x^*_n, p_n X_\infty) \to 0, \tag{3.5}$$

$$\sup_{x_\infty \in X_\infty, \|x_\infty\| = 1} \varrho(p_n x_\infty, X^*_n) \to 0, \tag{3.6}$$

где X_∞ — корневое подпространство оператора T, соответствующее собственному значению $\lambda_\infty \neq 0$, а X^*_n — линейная оболочка тех корневых подпространств оператора T_n, которые соответствуют близким к λ_∞ собственным значениям оператора T_n.

4) *Справедливы оценки*

$$|\lambda_n - \lambda_\infty| \leqslant c\varepsilon_n^{1/l}, \tag{3.7}$$

$$\sup_{x^*_n \in X^*_n, \|x^*_n\| = 1} \varrho(x^*_n, p_n X_\infty) \leqslant c\varepsilon_n, \tag{3.8}$$

где $c = \mathrm{const}$; l — ранг собственного значения[4] $\lambda_\infty \in \sigma(T)$; $\lambda_n \in \sigma(T_n)$ $(\lambda_n \to \lambda_\infty$ *при* $n \to \infty)$;

$$\varepsilon_n = \sup_{x_\infty \in X_\infty, \|x_\infty\| = 1} \|p_n T x_\infty - T_n p_n x_\infty\|. \tag{3.9}$$

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $0 \neq \lambda_\infty \in \sigma(T)$ и $\lambda_\infty x_\infty = T x_\infty$ $(\|x_\infty\| = 1)$. Используя условие а) определения 1, получаем, что $\|\lambda_\infty p_n x_\infty - T_n p_n x_\infty\| \to 0$ при $n \to \infty$ и, следовательно,

---

[4] Т. е. $X^{(l-1)}_\infty \neq X^{(l)}_\infty$ и $X^{(i)}_\infty = X^{(l)}_\infty = X_\infty$ при $i \geqslant l$, где $X^{(i)}_\infty = \{x_\infty \in E : (\lambda_\infty I - T)^i x_\infty = 0\}$.

$$\inf_{z^*_n \in E/E_n, \|z^*_n\| = 1} \|\lambda_\infty z^*_n - T_n z^*_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{3.10}$$

Возьмем произвольное δ, $0 < \delta < |\lambda_\infty|$, так, чтобы в круге $|\lambda - \lambda_\infty| \leqslant \delta$ не было других точек $\sigma(T)$, кроме λ_∞. По лемме 4 имеем

$$\sup_{\lambda: |\lambda - \lambda_\infty| = \delta} \|R(\lambda; T_n)\| \leqslant c = \text{const} \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Если бы T_n не имело в круге $|\lambda - \lambda_\infty| \leqslant \delta$ собственных значений, то последняя оценка была бы верной для всех λ из этого круга, в частности, для $\lambda = \lambda_\infty$. Это, однако, несовместимо с (3.10). Следовательно, при достаточно больших n в круге $|\lambda - \lambda_\infty| \leqslant \delta$ содержится хотя бы одно собственное значение λ_n оператора T_n. Ввиду произвольности $\delta > 0$ это равносильно утверждению 1).

Докажем утверждение 2). Нормы $\|T_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены в совокупности. Пусть $\|T\|$, $\|T_n\| < c$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Возьмем сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и образуем компакт Λ_ε, получаемый из круга $|\lambda| \leqslant c$ удалением $\sigma(T)$ вместе с его ε-окрестностью. Тогда $\Lambda_\varepsilon \subset \varrho(T)$ и, по лемме 4, $\Lambda_\varepsilon \subset \varrho(T_n)$ при достаточно больших n, т. е. $\sigma(T_n)$ расположено в выделенной ε-окрестности $\sigma(T)$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ это равносильно 2).

Докажем утверждение 3). Определенные в (3.1) и (3.2) операторы Q_n и Q_∞ являются (см. [4]) проекторами, проектирующими E/E_n и E соответственно на X^*_n и X_∞. По лемме 5

$$\|p_n Q_\infty x - Q_n p_n x\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{для каждого} \quad x \in E. \tag{3.11}$$

Возьмем произвольную последовательность $x^*_n \in X^*_n$ $(\|x^*_n\| = 1)$ и покажем, что $\varrho(x^*_n, p_n X_\infty) \to 0$ при $n \to \infty$. Соотношение (3.5) тем самым будет доказано. Из равенства $x^*_n = Q_n x^*_n$ на основании леммы 5 делаем заключение о существовании таких $x_n \in Q_n x^*_n = x^*_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что последовательность x_n компактна в E. Совместно с (3.11) это влечет за собой соотношение $\|p_n Q_\infty x_n - Q_n p_n x_n\| \to 0$, или, так как $Q_n p_n x_n = Q_n x^*_n = x^*_n$, то $\|x^*_n - p_n Q_\infty x_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Но $Q_\infty x_n \in X_\infty$, и тем самым нами установлено нужное соотношение $\varrho(x^*_n, p_n X_\infty) \to 0$ при $n \to \infty$.

Возьмем теперь произвольное $x_\infty \in X_\infty$. Используя (3.11) и равенство $x_\infty = Q_\infty x_\infty$, находим, что

$$\|p_n x_\infty - Q_n p_n x_\infty\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Но $Q_n p_n x_\infty \in X^*_n$, поэтому $\varrho(p_n x_\infty, X^*_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Ввиду конечномерности X_∞ это доказывает (3.6).

Перейдем к доказательству утверждения 4). Покажем сперва, что

$$\sup_{x_\infty \in X_\infty, \|x_\infty\| = 1} \|(\lambda_\infty I - T_n)^i p_n x_\infty\| \leqslant c_i \varepsilon_n \quad (i \geqslant l), \tag{3.12}$$

где $c_i = \mathrm{const}$, а ε_n определено в (3.9). Действительно, при $i \geqslant l$ для $x_\infty \in X_\infty$ имеем $(\lambda_\infty I - T)^i x_\infty = 0$ и

$$(\lambda_\infty I - T_n)^i p_n x_\infty = (\lambda_\infty I - T_n)^i p_n x_\infty - p_n(\lambda_\infty I - T)^i x_\infty =$$
$$= \sum_{k=1}^{i} (-1)^k \binom{i}{k} \lambda_\infty^{i-k} (T^k{}_n p_n x_\infty - p_n T^k x_\infty).$$

Индукцией по k легко устанавливается, что

$$T^k{}_n p_n x_\infty - p_n T^k x_\infty = \sum_{j=0}^{k-1} T^j{}_n (T_n p_n - p_n T) T^{k-1-j} x_\infty,$$

и для вывода (3.12) остается заметить, что $TX_\infty \subset X_\infty$ и что нормы $\|T_n\|$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничены в совокупности.

Докажем оценку (3.7). Пусть f_n — нормированный собственный вектор сопряженного к T_n оператора $T'_n: (E/E_n)' \to \to (E/E_n)'$, соответствующий собственному значению λ_n, т. е.

$$\lambda_n f_n = T'_n f_n, \quad \|f_n\| = 1 \quad (n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Имеем

$$f_n(\lambda_\infty I - T_n) = f_n(\lambda_n I - T_n) + (\lambda_\infty - \lambda_n) f_n =$$
$$= (\lambda_n I - T'_n) f_n + (\lambda_\infty - \lambda_n) f_n = (\lambda_\infty - \lambda_n) f_n.$$

Повторно используя это равенство, находим

$$f_n(\lambda_\infty I - T_n)^l = (\lambda_\infty - \lambda_n)^l f_n.$$

Таким образом, для любого $x_\infty \in X_\infty$ с $\|x_\infty\| = 1$ имеем

$$(\lambda_\infty - \lambda_n)^l f_n(p_n x_\infty) = f_n(\lambda_\infty I - T_n)^l p_n x_\infty.$$

Принимая во внимание (3.12), получаем

$$|\lambda_n - \lambda_\infty|^l |f_n(p_n x_\infty)| \leqslant c_l \varepsilon_n.$$

Для вывода оценки (3.7) остается убедиться, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sup_{x_\infty \in X_\infty, \|x_\infty\| = 1} |f_n(p_n x_\infty)| > 0. \tag{3.13}$$

Так как

$$\sup_{x^*_n \in X^*_n, \|x^*_n\| = 1} |f_n(x^*_n)| \geqslant \frac{1}{\|Q_n\|}, \tag{3.14}$$

а из леммы 5 вытекает, что $\|Q_n\| \leqslant \mathrm{const}$ $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$, то из (3.5) получаем (3.13).

Докажем оценку (3.8). Ее достаточно установить для корневых векторов x^*_n оператора T_n, соответствующих попавшим в круг $|\lambda - \lambda_\infty| \leqslant \delta$ собственным значениям, где $\delta > 0$ достаточно мало. Каждое из таких собственных значений λ_n имеет ранг, который при достаточно больших n не превышает корневой кратности $m = \dim X_\infty$ собственного значения $\lambda_\infty \in \sigma(T)$. Таким образом, оценку (3.8) достаточно установить для тех $x^*_n \in E/E_n$, которые удовлетворяют уравнению

$$(\lambda_n I - T_n)^m x^*_n = 0 \quad (\|x^*_n\| = 1;\ n = n_0, n_0 + 1, \ldots). \tag{3.15}$$

Имеем

$$(\lambda_\infty I - T_n)^{m+l} x^*_n = [(\lambda_\infty - \lambda_n) I + (\lambda_n I - T_n)]^{m+l} x^*_n =$$
$$= \sum_{i=0}^{m+l} \binom{m+l}{i} (\lambda_\infty - \lambda_n)^{m+l-i} (\lambda_n I - T_n)^i x^*_n.$$

При $i \geqslant m$ соответствующее слагаемое в последней сумме равно нулю в силу (3.15), поэтому $\lambda_\infty - \lambda_n$ в этой сумме встречается только в степенях, превышающих l. Ввиду оценки (3.7)

$$\| (\lambda_\infty I - T_n)^{m+l} x^*_n \| = o(\varepsilon_n).$$

Совместно с (3.12) это дает

$$\sup_{x_\infty \in X_\infty, \|x_\infty\| \leqslant 2} \| (\lambda_\infty I - T_n)^{m+l} (x^*_n - p_n x_\infty) \| \leqslant c\varepsilon_n. \quad (3.16)$$

Пусть U_n — сужение T_n на инвариантное подпространство $\mathcal{Y}_n = (I - Q_n)(E/E_n)$. Оператор $U_n : \mathcal{Y}_n \to \mathcal{Y}_n$ не имеет в круге $|\lambda - \lambda_\infty| \leqslant \delta$ точек спектра, поэтому

$$\| (\lambda_\infty I - U_n)^{-1} \|_{Y_n \to Y_n} \leqslant \sup_{|\lambda - \lambda_\infty| = \delta} \| (\lambda I - U_n)^{-1} \|_{Y_n \to Y_n} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{|\lambda - \lambda_\infty| = \delta} \| (\lambda I - T_n)^{-1} \|_{E/E_n \to E/E_n} \leqslant c = \text{const}; \quad (3.17)$$

обратимость $\lambda I - T_n$ на окружности $|\lambda - \lambda_\infty| = \delta$ и равномерная по λ и n ограниченность норм обратных операторов вытекает из леммы 4.

Из (3.16) и (3.17) очевидным образом получим оценку (3.8), выбрав при каждом n вектор $x_\infty = x_\infty(n) \in X_\infty$ так, что $x^*_n - p_n x_\infty(n) \in \mathcal{Y}_n$ и $\|x_\infty(n)\| \to 1$ при $n \to \infty$. Возможность такого выбора легко обосновывается с помощью (1.2) и (3.6). Теорема 3 доказана.

2. Из леммы 2 вытекает, что для операторов (0.5) и (0.7) справедлива теорема 3, если квадратурный процесс (0.2) сходится и выполнено условие (1.5). Определенная в (3.9) величина в данном случае имеет вид

$$\varepsilon_n = \sup_{x_\infty \in X_\infty, \|x_\infty\| = 1} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\varphi_n(K(s_{in}, s) x_\infty(s))|. \quad (3.18)$$

В случае, когда $D = [a, b]$, ν — мера Лебега, оценки {(3.7), (3.8), (3.18)} были другим путем выведены Г. М. Вайникко и А. М. Дементьевой [2].

§ 4. Приложение к уравнениям более общего типа

1. Рассмотрим уравнения

$$Ax = Bx + f \quad (4.1)$$

и

$$A_n x^*_n = B_n x^*_n + q_n f, \tag{4.2}$$

где $A, B: E \to F$ и $A_n, B_n: E/E_n \to F/F_n$ линейные непрерывные операторы. Введем следующие условия:

1° операторы $B: E \to F$ и $B_n: E/E_n \to F/F_n$ вполне непрерывны и последовательность операторов B_n компактно аппроксимирует оператор B;

2° операторы $A: E \to F$ и $A_n: E/E_n \to F/F_n$ имеют ограниченные обратные, причем $\|A^{-1}_n\| \leqslant c = \text{const}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

3° $\|q_n A x - A_n p_n x\| \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого $x \in E$.

Лемма 6. *Пусть выполнены условия* 1°—3°. *Тогда последовательность линейных вполне непрерывных операторов* $A^{-1}_n B_n: E/E_n \to E/E_n$ *компактно аппроксимирует линейный вполне непрерывный оператор* $A^{-1}B: E \to E$.

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно показать, что для каждого $y \in F$

$$\|p_n A^{-1} y - A^{-1}_n q_n y\| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{4.3}$$

Имеем

$$A_n(p_n A^{-1} y - A^{-1}_n q_n y) = A_n p_n x - q_n A x,$$

где $x = A^{-1} y \in E$. Используя 2° и 3°, получаем (4.3). Лемма 6 доказана.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* 1°—3°, *и пусть уравнение* (4.1) *имеет единственное решение* x_∞.

Тогда уравнение (4.2) *имеет при достаточно больших* n *единственное решение* x^*_n, *и* $\|x^*_n - p_n x_\infty\| \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Справедлива оценка*

$$c_1 \varepsilon_n \leqslant \|x^*_n - p_n x_\infty\| \leqslant c_2 \varepsilon_n, \tag{4.4}$$

где $c_1, c_2 = \text{const} > 0$,

$$\varepsilon_n = \|(q_n A x_\infty - A_n p_n x_\infty) - (q_n B x_\infty - B_n p_n x_\infty)\|. \tag{4.5}$$

Доказательство. Уравнение $x = A^{-1} B x$ имеет лишь нулевое решение. В силу лемм 3 и 6 операторы $I - A^{-1}_n B_n$ обратимы при достаточно больших n и их нормы и нормы обратных операторов ограничены в совокупности. Это равносильно тому, что при достаточно больших n обратимы операторы $A_n - B_n: E/E_n \to F/F_n$ и

$$\|A_n - B_n\| \leqslant \frac{1}{c_1} = \text{const}, \quad \|(A_n - B_n)^{-1}\| \leqslant c_2 = \text{const}$$

$$(n = n_0, n_0 + 1, \ldots).$$

Теперь из равенств $(n \geqslant n_0)$

$$(A_n - B_n)(x_n - p_n x_\infty) = q_n(A x_\infty - B x_\infty) - A_n p_n x_\infty + B_n p_n x_\infty$$

получаем оценку (4.4)—(4.5). Из этой оценки вытекает сходимость $\|x^*_n - p_n x_\infty\| \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема 4 доказана.

2. Уравнения $Ax=\mu Bx$ и $A_n x^*_n = \mu B_n x^*_n$ равносильны соответственно уравнениям $\lambda x = Tx$ и $\lambda x^*_n = T_n x^*_n$, где $\lambda = 1/\mu$, а $T = A^{-1}B : E \to E$ и $T_n = A^{-1}{}_n B_n : E/E_n \to E/E_n$ — линейные вполне непрерывные операторы. В силу леммы 6 теорема 3 допускает переформулировку непосредственно для уравнений $Ax = \mu Bx$ и $A_n x^*_n = \mu B_n x^*_n$. Ввиду ее очевидности, полной формулировки не приводим. Отметим лишь, что для определенной в (3.9) величины ε_n справедлива оценка

$$\varepsilon_n \leqslant c \sup_{x_\infty \in X_\infty, \|x_\infty\| = 1} [\|q_n A x_\infty - A_n p_n x_\infty\| + \|q_n B x_\infty - B_n p_n x_\infty\|].$$

Она вытекает из легко проверяемого равенства

$$p_n T x_\infty - T_n p_n x_\infty = A^{-1}{}_n [(A_n p_n \tilde{x}_\infty - q_n A \tilde{x}_\infty) + (q_n B x_\infty - B_n p_n x_\infty)],$$

где $\tilde{x}_\infty = Tx_\infty$; из $x_\infty \in X_\infty$ вытекает $\tilde{x}_\infty \in X_\infty$.

Литература

1. Вайникко Г. М., Возмущенный метод Галеркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений. Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1967, 7, № 4, 723—751.
2. Вайникко Г. М., Дементьева А. М., О сходимости метода механических квадратур в проблеме собственных значений. Ж. вычисл матем. и матем. физ., 1968, 8, № 5, 1105—1110.
3. Гудович Н. Н., Об абстрактной схеме разностного метода. Ж. вычисл матем. и матем. физ., 1966, 6, № 5, 916—920.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. Общая теория Москва, 1962.
5. Иосида К., Функциональный анализ. Москва, 1967.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
7. Крейн С. Г., Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Москва, 1967.
8. Мысовских И. П., О сходимости метода механических кубатур для решения интегральных уравнений. В сб. «Методы вычислений», № 4, Ленинград. ун-т, 1967, 63—72.

Поступило
5 VI 1968

LINEAARSETE TÄIELIKULT PIDEVATE OPERAATORITE KOMPAKTNE APROKSIMEERIMINE OPERAATORITEGA FAKTORRUUMIDES

G. Vainikko

Resümee

Olgu E Banachi ruum, $\{E_n\}$ kinniste alamruumide jada temas, p_n — ruumi E kanooniline teisendus faktorruumi E/E_n.

Definitsioon. *Täielikult pidevate lineaarsete operaatorite jada* $T_n : E/E_n \to E/E_n$ *aproksimeerib kompaktselt täielikult pidevat lineaarset operaatorit* $T : E \to E$, *kui on täidetud järgmised tingimused:*

a) $\|p_n Tx - T_n p_n x\| \to 0$ *iga* $x \in E$ *korral* $(n \to \infty)$;

b) *kui* $x^*_n \in E/E_n$, $\|x^*_n\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *siis leiduvad sellised esindajad* $y_n \in T_n x^*_n$, *et jada* $\{y_n\}$ *on kompaktne ruumis* E.

Uuritakse võrrandite (2.1) ja (2.2) lahendite lähedust, samuti operaatorite T ja T_n omaväärtuste ja oma- ning peavektorite lähedust. Põhilised tulemused on ära toodud teoreemides 1 ja 3.

COMPACT APPROXIMATION OF LINEAR COMPLETELY CONTINUOUS OPERATORS BY OPERATORS IN FACTOR SPACES

G. Vainikko

Summary

Let E be a Banach space, $\{E_n\}$ a sequence of closed subspaces in E, p_n canonical transformation E into factor space E/E_n. It is assumed that $\|p_n x\| \to \|x\|$ for each $x \in E$.

Definition. *The sequence of completely continuous linear operators* $T_n : E/E_n \to E/E_n$ *approximates compactly a completely continuous linear operator* $T : E \to E$ *if the following conditions are satisfied:*

a) $\|p_n Tx - T_n p_n x\| \to 0$ *for each* $x \in E$ $(n \to \infty)$;

b) *if* $x^*_n \in E/E_n$, $\|x^*_n\| \leqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *then there exist* $y_n \in T_n x^*_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *so that the sequence* $\{y_n\}$ *is compact in* E.

The solutions of equations (2.1) and (2.2) and the eigenvalues, eigenvectors and principal vectors of operators T and T_n are investigated. The main results are contained in theorems 1 and 3.

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Р. Юргенсон

Кафедра вычислительной математики

В статье рассматривается приближенное решение краевой задачи $\{(1), (2)\}$ методом конечных разностей $\{(3), (4)\}$. Для решения системы $\{(3), (4)\}$ в первом параграфе дается итерационный процесс (10), использующий т. н. дискретную функцию Грина. Условия сходимости этого процесса изучаются в § 2. В третьем параграфе исследуется сходимость решения разностной задачи $\{(3), (4)\}$ к решению краевой задачи $\{(1), (2)\}$ и выводятся соответствующие оценки погрешности. В § 4 результаты статьи применяются к разностной задаче $\{(22), (23)\}$ для решения краевой задачи $\{(24), (25)\}$.

Результаты статьи являются аналогами соответствующих результатов И. Шредера ([6, 7], см. также [1]), полученных для случая уравнений второго порядка.

§ 1. Приближенное решение краевой задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{\mathrm{IV}} = f(x, y, y^{\mathrm{I}}, y^{\mathrm{II}}, y^{\mathrm{III}}) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$U_j(y) \equiv \sum_{k=0}^{3} [a_{jk}y^{(k)}(a) + b_{jk}y^{(k)}(b)] = c_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Предположим, что краевая задача $\{(1), (2)\}$ имеет на отрезке $x \in [a-h, b+h]$, где $h > 0$, единственное решение $y(x)$.

Для приближенного решения задачи $\{(1), (2)\}$ разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $nh = b - a$, и аппроксимируем уравнение (1) в точках x_i соотношениями

$$\delta^4 y_i = f(x_i, \delta^0 y_i, \delta^1 y_i, \delta^2 y_i, \delta^3 y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3}$$

где

$$\delta^0 y_i = y_i, \quad \delta^1 y_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad \delta^2 y_i = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

$$\delta^3 y_i = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3},$$

$$\delta^4 y_i = \frac{y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}}{h^4},$$

и краевые условия (2) соотношениями

$$U_j^h(y_i) \equiv \sum_{k=0}^{3} [a_{jk}\bar{\delta}^k y_0 + b_{jk}\bar{\delta}^k y_n] = c_j \quad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{4}$$

где $\bar{\delta}^k y_s = \delta^k y_s$ при $s = 0, n$; $k + 0, 1, 2$, а $\bar{\delta}^3 y_0$ и $\bar{\delta}^3 y_n$ — некоторые линейные выражения относительно y_i, аппроксирующие производные $y^{III}(a)$ и $y^{III}(b)$ соответственно.

В дальнейшем для краткости записи будем использовать обозначение

$$f(\delta^j y_i) = f(x_i, \delta^0 y_i, \delta^1 y_i, \delta^2 y_i, \delta^3 y_i).$$

Систему $\{(3), (4)\}$ мы будем решать методом последовательных приближений

$$\delta^4 y_i^{(m+1)} = f(\delta^j y_i^{(m)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{5}$$

$$U_j^h(y_i^{(m+1)}) = c_i \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

На каждом итерационном шагу система $\{(5), (6)\}$ представляет собой линейную систему относительно $y_i^{(m+1)}$. Мы представим решение этой системы в явном виде. Для этого преобразуем, прежде всего, систему $\{(5), (6)\}$ заменой переменной

$$y_i^{(m+1)} = u_i + v_i, \tag{7}$$

где v_i удовлетворяет условиям

$$h^4\delta^4 v_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$U_j^h(v_i) = c_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

в систему с однородными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} &\delta^4 u_i = f(\delta^j y_i^{(m)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ &U_j^h(u_i) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Решение полученной системы найдем с помощью дискретной функции Грина. Под *дискретной функцией Грина* системы (8) мы подразумеваем $(n+3) \times (n-1)$-мерную матрицу, элементы g_{ik} которой удовлетворяют условиям:

1° g_{ik} как функция от i при каждом $k (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ удовлетворяет условиям

$$h^4\delta^4 g_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k; \end{cases}$$

2° при каждом k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$U_j^h(g_{ik}) = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Непосредственно проверяется, что с помощью дискретной функции Грина можно задать решение u_i системы (8) в виде

$$u_i = h^4 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ik} f(\delta^j y_k^{(m)}) \quad (i = -1, 0, 1, \ldots, n+1). \tag{9}$$

Таким образом, в силу соотношений (7) и (9), мы можем заменить итерационный процесс {(5), (6)} эквивалентным ему процессом, где последовательные приближения находятся по формуле

$$y_i^{(m+1)} = v_i + h^4 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ik} f(\delta^j y_k^{(m)}) \tag{10}$$

$$(i = -1, 0, 1, \ldots, n+1; \; m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Величины v_i и g_{ik} не зависят от функции f. Поэтому, в случае конкретных краевых условий, мы можем их вычислить раз навсегда (для некоторых задач они найдены в работе [3], см. также [4]).

§ 2. Изучение сходимости итерационного процесса

Введем обозначения

$$\max_{i=p,\, p+1,\, \ldots,\, q} h^4 \sum_{k=1}^{n-1} |\delta^j g_{ik}| \leqslant \mu_j \quad (j = 0, 1, 2, 3),$$

где $p = -1$, $q = n+1$ для $j = 0$; $p = 0$, $q = n$ для $j = 1, 2$ и $p = 1$, $q = n-1$ для $j = 3$.

Условия сходимости итерационного процесса (10) дает следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1° *функция $f(x, z_0, z_1, z_2, z_3)$ в области D точек $(x_i, \delta^0 y_i^{(m)}, \delta^1 y_i^{(m)}, \delta^2 y_i^{(m)}, \delta^3 y_i^{(m)})$, отвечающих найденным формулой* (10) *последовательным приближениям $y_i^{(m)}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, удовлетворяет условию Липшица по переменным z_j $(j = 0, 1, 2, 3)$*

$$|f(x, z_0, z_1, z_2, z_3) - f(x, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)| \leqslant \sum_{j=0}^{3} L_j |z_j - \bar{z}_j|$$

для всех (x, z_0, z_1, z_2, z_3), $(x, \bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3) \in D$;

2° $\mu = \sum_{j=0}^{3} \mu_j L_j < 1.$

Тогда задача $\{(3), (4)\}$ *имеет в области* D *единственное решение* $\{y_i\}$, *к которому сходится последовательность приближений, найденных формулой* (10), *начиная с произвольного начального приближения* $\{y_i^{(0)}\}$, *для которого* $(x_i, \delta^0 y_i, \delta^1 y_i, \delta^2 y_i, \delta^3 y_i) \in D$, *со скоростью*

$$\left|y_i^{(m)} - y_i\right| \leqslant \frac{\mu^m}{1-\mu} \cdot \varrho(\{y_i^{(1)}\}, \{y_i^{(0)}\}) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (11)$$

где $\varrho\{y_i^{(1)}\}, \{y_i^{(0)}\}$ *определяется равенством* (12).

Доказательство. Используем принцип неподвижной точки (см., например, [2], гл. XVI).

Превращаем множество R_{n+3} последовательностей $n+3$ чисел $\{u_i\} = \{u_{-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ в метрическое пространство, определяя расстояние между последовательностями $\{u_i\}$ и $\{v_i\}$ следующим образом

$$\varrho(\{u_i\}, \{v_i\}) = \sum_{j=0}^{3} L_j \max_{i=p,\, p+1, \ldots, q} \left|\delta^j u_i - \delta^j v_i\right|, \qquad (12)$$

где $p = -1$, $q = n+1$ при $j = 0$; $p = 0$, $q = n$ при $j = 1, 2$; $p = 1$, $q = n - 1$ при $j = 3$.

В этом метрическом пространстве выделяем множество G совокупностей $\{y_i\}$, в случае которых $(x_i, \delta^0 y_i, \delta^1 y_i, \delta^2 y_i, \delta^3 y_i) \in D$. Для таких совокупностей формула (10) определяет некоторый оператор F, переводящий, в силу условия 1° теоремы, множество G в себя. Остается доказать, что оператор F удовлетворяет в области D условию Липшица с постоянной, меньшей единице.

Пусть даны две совокупности $\{y_i\}$ и $\{z_i\}$, принадлежащие G. Тогда и $\{\bar{y}_i\} = F(\{y_i\})$ и $\{\bar{z}_i\} = F(\{z_i\})$ принадлежат G. Найдем оценки

$$|\bar{y}_i - \bar{z}_i| = h^4 \left|\sum_{k=1}^{n-1} g_{ik}[f(\delta^j y_k) - f(\delta^j z_k)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{i=-1, 0, 1, \ldots, n+1} h^4 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ik}| \cdot \max_{k=1, 2, \ldots, n-1} |f(\delta^j y_k) - f(\delta^j z_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \mu_0 \cdot \varrho(\{y_k\}, \{z_k\}) \qquad (i = -1, 0, 1, \ldots, n+1),$$

$$|\delta^1 \bar{y}_i - \delta^1 \bar{z}_i| \leqslant \mu_1 \cdot \varrho(\{y_k\}, \{z_k\}),$$

$$|\delta^2 \bar{y}_i - \delta^2 \bar{z}_i| \leqslant \mu_2 \cdot \varrho(\{y_k\}, \{z_k\}) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$|\delta^3 \bar{y}_i - \delta^3 \bar{z}_i| \leqslant \mu_3 \cdot \varrho(\{y_k\}, \{z_k\}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

откуда

$$\varrho(\{\bar{y}_k\}, \{\bar{z}_k\}) \leqslant \mu \cdot \varrho(\{y_k\}, \{z_k\}).$$

В силу предположения 2°, оператор F является оператором сжатия.

Оценка (11) вытекает из оценки

$$\varrho(\{y_i^{(m)}\}, \{y_i\}) \leqslant \frac{\mu^m}{1-\mu} \cdot \varrho(\{y_i^{(1)}\}, \{y_i^{(0)}\}),$$

следующей из соответствующей оценки для операторных уравнений (см. [2], гл. XVI).

Теорема доказана.

Примечание. Для облегчения практической проверки принадлежности точек, отвечающих последовательным приближениям $\{y_i^{(m)}\}$, к области D, фиксируем область D с помощью условий:

1° к области D принадлежит точка, отвечающая начальному приближению $\{y_i^{(0)}\}$;

2° к области D принадлежат все точки $\{u_i\}$, для которых

$$\varrho(\{y_i^{(0)}\}, \{y_i\}) \leqslant \frac{1}{1-\mu} \cdot \varrho(\{y_i^{(1)}\}, \{y_i^{(0)}\}).$$

Легко доказать, что эти условия обеспечивают принадлежность к D всех точек, отвечающих последовательным приближениям, полученным формулой (10).

§ 3. Изучение сходимости конечноразностного метода и оценка погрешности

Для упрощения рассуждений будем рассматривать случай, когда в краевых условиях (2) имеем $a_{j3} = b_{j3} = 0$, $b_{j1} = -a_{j1}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Предположим, что выполнены условия:

1° краевая задача $\{(1), (2)\}$ имеет на отрезке $x \in [a-h, b+h]$, где $h > 0$, решение, имеющее на том же отрезке непрерывные производные до шестого порядка включительно;

2° задача $\{(3), (4)\}$ имеет решение $\{y_i\}$;

3° функция $f(x, z_0, z_1, z_2, z_3)$ удовлетворяет в области, отвечающей решениям $y(x)$ и $\{y_i\}$, условию Липшица по переменным z_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ с постоянными L_j $(j = 0, 1, 2, 3)$.

Для краткости записи пользуемся обозначением

$$f(\delta^j u_i + v_{ji}) = f(x_i, \delta^0 u_i + v_{0i}, \delta^1 u_i + v_{1i}, \delta^2 u_i + v_{2i}, \delta^3 u_i + v_{3i}).$$

Выпишем систему, которой удовлетворяет значение точного решения $y(x_i)$ задачи $\{(1), (2)\}$ в точке x_i:

$$\delta^4 y(x_i) = f(\delta^j y(x_i) + R_{ji}) + R_{4i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где (см., например, [5], гл. 11)

$$R_{0i} = 0, \quad R_{1i} = -\frac{h^2}{6} y^{\mathrm{III}}(\xi_{1i}), \quad R_{2i} = -\frac{h^2}{12} y^{\mathrm{IV}}(\xi_{2i})$$

$$(x_{i-1} \leqslant \xi_{1i}, \ \xi_{2i} \leqslant x_{i+1}),$$

$$R_{3i} = -\frac{h^2}{4} y^{\mathrm{V}}(\xi_{3i}), \quad R_{4i} = -\frac{h^2}{6} y^{\mathrm{VI}}(\xi_{4i})$$

$$(x_{i-2} \leqslant \xi_{3i}, \ \xi_{4i} \leqslant x_{i+2}),$$

$$U_j^h(y(x_i)) = c_j + R_j^{(\text{кр.})} \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$R_j^{(\text{кр.})} = \sum_{j=0}^{2} [a_{jk}R_{k0} + b_{jk}R_{kn}].$$

Вычитая из этой системы систему $\{(3), (4)\}$, получим систему для погрешностей $\varepsilon_i = y(x_i) - y_i$:

$$\delta^4\varepsilon_i = f[\delta^j(\varepsilon_i + y_i) + \mathrm{R}_{ji}] - f(\delta^j y_i) + R_{4i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$U_j^h(\varepsilon_i) = R_j^{(\text{кр.})} \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

Для оценки погрешности преобразуем, прежде всего, эту систему заменой переменной

$$\varepsilon_i = u_i + t_i, \tag{13}$$

где t_i удовлетворяет условиям

$$h^4\delta^4 t_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{14}$$

$$U_j^h(t_i) = R_j^{(\text{кр.})} \quad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{15}$$

в систему с однородными краевыми условиями

$$\delta^4 u_i = f[\delta^j(u_i + t_i + y_i) + R_{ji}] - \\ - f(\delta^j y_i) + R_{4i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{16}$$

$$U_j^h(u_i) = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{17}$$

Обозначим

$$\delta^4 u_i = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{18}$$

Рассматривая это отношение как систему уравнений относительно u_i, мы можем ее решение u_i представить в виде

$$u_i = h^4 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ik}\eta_k \qquad (i = -1, 0, 1, \ldots, n+1), \tag{19}$$

где g_{ik} дискретная функция Грина задачи $\{(16), (17)\}$.
Найдем также

$$\delta^j u_i = h^4 \sum_{k=1}^{n-1} \delta^j g_{ik}\eta_k \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Используя полученные формулы, перепишем уравнение (16) в виде

$$\eta_i = f[\delta^j(h^4 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ik}\eta_k + t_i + y_i) + R_{ji}] - \\ - f(\delta^j y_i) + R_{4i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Оценим η_i, имея в виду предположение 3°,

$$|\eta_i| \leqslant \sum_{j=0}^{3} L_j \max_{i=1,2,\ldots,n-1} |\delta^j(h^4 \sum_{k=1}^{n-1} g_{ik}\eta_k + t_i) + R_{ji}| + |R_{4i}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{3}\Big(\max_{i=1,2,\ldots,n-1} h^4 \sum_{k=1}^{n-1} |\delta^j g_{ik}| \cdot \max_{k=1,2,\ldots,n-1} |\eta_k| +$$

$$+ \max_{i=1,2,\ldots,n-1} |\delta^j t_i| + \max_{i=1,2,\ldots,n-1} |R_{ji}|\Big) + \max_{i=1,2,\ldots,n-1} |R_{4i}| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{k=1,2,\ldots,n-1} |\eta_k| \cdot \sum_{j=0}^{3} L_j \bar{\mu}_j + R^*,$$

где

$$\max_{i=1,2,\ldots,n-1} h^4 \sum_{k=1}^{n-1} |\delta^j g_{ik}| \leqslant \bar{\mu}_j \qquad (j = 0, 1, 2, 3),$$

$$\sum_{j=0}^{3} L_j \Big(\max_{i=1,2,\ldots,n-1} |\delta^j t_i| + \max_{i=1,2,\ldots,n-1} |R_{ij}|\Big) + \tag{20}$$

$$+ \max_{i=1,2,\ldots,n-1} |R_{4i}| \leqslant R^*.$$

Из найденной оценки, в предположении

$$\bar{\mu} = \sum_{j=0}^{3} L_j \bar{\mu}_j < 1,$$

получается неравенство

$$\max_{i=1,2,\ldots,n-1} |\eta_i| \leqslant \frac{R^*}{1-\bar{\mu}}$$

откуда, на основании соотношений (13) и (19), следует окончательная оценка погрешности

$$|\varepsilon_i| = |y(x_i) - y_i| \leqslant |t_i| + h^4 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ik}| \cdot \frac{R^*}{1-\bar{\mu}}$$

$$(i = -1, 0, 1, \ldots, n+1), \tag{21}$$

имеющая место в предположениях 1°, 2°, 3° и $\bar{\mu} < 1$.

Аналогичным образом можно получить оценки

$$|y^{(j)}(x_i) - \delta^j y_i| \leqslant |\delta^j t_i| + h^4 \sum_{k=1}^{n-1} |\delta^j g_{ik}| \cdot \frac{R^*}{1-\bar{\mu}} \qquad (j = 1, 2, 3).$$

На основе неравенства (21) можно исследовать вопрос о сходимости решения y_i системы {(3), (4)} к решению $y(x_i)$ задачи {(1), (2)}.

Так как $h^4 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ik}| \leqslant \bar{\mu}_0 = \mathrm{const}$, и R_{ji} имеют второй порядок малости относительно h, т. е. $R_{ji} = O(h^2)$, то порядок точности решений y_i будет зависеть от порядка малости величин $\delta^j(t_i)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$.

Покажем, что $\delta^j t_i = O(h^2)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$.

Линейно-независимыми решениями системы (14) являются $1, i, i^2, i^3$. Поэтому ищем t_i в виде

$$t_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + c_3 i^3.$$

Неизвестные c_j $(j = 0, 1, 2, 3)$ определяем из условий (15), т. е. из условий

$$\sum_{k=0}^{2} [a_{jk}\delta^k t_0 + b_{jk}\delta^k t_n] = R_j^{(\text{кр.})} \qquad (j = 1, 2, 3, 4),$$

где $R_j^{(\text{кр.})} = h^2 r_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, причем r_j — некоторые постоянные.

Подставляя сюда выражения для t_i, имеем

$$a_{j0}c_0 + \frac{a_{j1}}{h}(c_1 + c_3) + \frac{2a_{j2}}{h^2}c_2 + b_{j0}(c_0 + nc_1 + n^2c_2 + n^3c_3) +$$

$$+ b_{j1}(c_1 + 2nc_2 + (3n^2 + 1)c_3) + \frac{2b_{j2}}{h^2}(c_2 + 3nc_3) =$$

$$= h^2 r_j \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

откуда, группируя члены в левой части равенства по неизвестным c_j, умножая обе части равенства на h^2, а также учитывая предположение $b_{j1} = -a_{j1}$ и соотношение $h = \frac{b-a}{n}$, получим

$$c_0 h^2 r_{j0} + c_1 h r_{j1} + c_2 r_{j2} + \frac{c_3}{h} r_{j3} = h^2 r_j \quad (j = 1, 2, 3, 4),$$

где r_{jk} выражаются через заданные постоянные величины

$$r_{j0} = a_{j0}, \quad r_{j1} = a_{j1} + (b-a)b_{j0},$$
$$r_{j2} = 2a_{j2} + (b-a)^2 b_{j0} + 2(b-a)b_{j1} + 2b_{j2},$$
$$r_{j3} = (b-a)^2 b_{j0} + 3b_{j1} + 6b_{j2}.$$

Легко видеть, что решения этой системы следующие

$$c_0 = O(h^2), \quad c_1 = O(h^3), \quad c_2 = O(h^4), \quad c_3 = O(h^5).$$

Итак,

$$|t_i| \leqslant |c_0| + i|c_1| + i^2|c_2| + i^3|c_3| \leqslant$$
$$\leqslant O(h^2) + nO(h^3) + n^2O(h^4) + n^3O(h^5) = O(h^2)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, n),$$

$$|\delta^1 t_i| = \frac{1}{h}|c_1 + 2ic_2 + (3i^2 + 1)c_3| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{h}[O(h^3) + 2nO(h^4) + (3n^2 + 1)O(h^5)] = O(h^2),$$

$$|\delta^2 t_i| = \frac{1}{h^2}|2c_2 + 6ic_3| \leqslant \frac{1}{h^2}[2O(h^4) + 6nO(h^5)] = O(h^2),$$

$$|\delta^3 t_i| = \frac{1}{h^3} 6 |c_3| = O(h^2) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Следовательно,

$$y(x_i) - y_i = O(h^2),$$

т. е. в описанном случае решение y_i системы $\{(3), (4)\}$ сходится при $h \to 0$ к решению $y(x)$ краевой задачи $\{(1), (2)\}$ со скоростью, пропорциональной h^2.

Сформулируем полученные в этом параграфе результаты в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения* 1°, 2°, 3° *и*

$$\bar{\mu} = \sum_{j=0}^{3} L_j \bar{\mu}_j < 1.$$

Тогда при $a_{i3} = b_{i3} = 0$, $b_{i1} = -a_{i1}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ *решение* y_i *системы* $\{(3), (4)\}$ *сходится к решению* $y(x)$ *краевой задачи* $\{(1), (2)\}$ *со скоростью, пропорциональной* h^2, *причем имеет место оценка погрешности* (21), *где* t_i — *решение системы* $\{(14), (15)\}$, g_{ik} — *дискретная функция Грина системы* $\{(16), (17)\}$, *а* R^* *и* $\bar{\mu}_j$ *определяются неравенствами* (20).

§ 4. Пример

Рассмотрим применение результатов предыдущих параграфов к разностной краевой задаче

$$\delta^4 y_i = f(x_i, y_i, \delta^2 y_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{22}$$

$$y_0 = 0, \ \delta^2 y_0 = \alpha, \ y_n = 0, \ \delta^2 y_n = \beta, \tag{23}$$

для решения краевой задачи

$$y^{\text{IV}} = f(x, y, y^{\text{II}}), \tag{24}$$

$$y(0) = 0, \ y^{\text{II}}(0) = \alpha, \ y(1) = 0, \ y^{\text{II}}(1) = \beta. \tag{25}$$

Найдем, прежде всего, элементы

$$v_i = c_0 + c_1 i + c_2 i^2 + c_3 i^3,$$

удовлетворяющие условиям

$$v_0 = v_n = 0, \ \delta^2 v_0 = \alpha, \ \delta^2 v_n = \beta.$$

Подставляя выражения для v_i в эти условия, получим

$$c_0 = 0,$$

$$c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3 = 0,$$

$$\frac{1}{h^2} 2c_2 = \alpha,$$

$$\frac{1}{h^2}(2c_2 + 6nc_3) = \beta.$$

откуда $c_0=0,\ c_1=-\frac{h}{6}(\beta+2\alpha),\ c_2=\frac{h^2}{2}\alpha,\ c_3=\frac{h^3}{6}(\beta-\alpha)$ и

$$v_i=-\frac{h}{6}(\beta+2\alpha)i+\frac{h^2}{2}\alpha i^2+\frac{h^3}{6}(\beta-\alpha)i^3.$$

Функция Грина в нашем случае имеет вид (см. [4])

$$g_{ik}=\frac{1}{6n}\cdot\begin{cases}(k-n)i^3+(2kn^2+k^3-k-3k^2n+n)i & \text{при } i\leqslant k,\\ (i-n)k^3+(2in^2+i^3-i-3i^2n+n)k & \text{при } i\geqslant k\end{cases}$$

$$(i=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),$$

а

$$h^4\sum_{k=1}^{n-1}|g_{ik}|=\frac{h^4}{24n}(ni^4-ni^2-2n^2i^3+n^2i+n^4i)$$

$$(i=-1\ 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1),$$

$$\mu_0=\overline{\mu}_0=\frac{5}{384}+\frac{h^2}{96},\quad \mu_2=\overline{\mu}_2=\frac{1}{8}.$$

Предполагая, что функция $f(x,\ y,\ y^{\mathrm{II}})$ удовлетворяет условию Липшица в области D, описанной в условии 1° теоремы в § 2, мы можем утверждать, что при

$$\mu=\left(\frac{5}{384}+\frac{h^2}{96}\right)L_0+\frac{1}{8}L_2<1$$

итерационный процесс приближенного решения задачи $\{(22),\ (23)\}$

$$y_i^{(m+1)}=-\frac{h}{6}(\beta+2\alpha)i+\frac{h^2}{2}\alpha i^2+\frac{h^3}{6}(\beta-\alpha)i^3+$$

$$+h^4\sum_{k=1}^{k-1}g_{ik}f(x_k,\ y_k^{(m)},\ \delta^2y_k^{(m)})\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

сходится при каждом $y_i^{(0)}$ из D.

Для оценки погрешности решения y_i задачи $\{(22),\ (23)\}$ найдем еще элементы t_i. Сравнивая определения элемнтов t_i и v_i, мы увидим, что t_i можно найти из полученного выражения для v_i, взяв в последнем

$$\alpha=\frac{h^2}{12}y^{\mathrm{IV}}(\xi_{20}),\quad \beta=\frac{h^2}{12}y^{\mathrm{IV}}(\xi_{2n}).$$

Итак,

$$t_i=\frac{h^5}{72}[y^{\mathrm{IV}}(\xi_{2n})-y^{\mathrm{IV}}(\xi_{20})]+\frac{h^4}{24}y^{\mathrm{IV}}(\xi_{20})-$$

$$-\frac{h^3}{72}[2y^{\mathrm{IV}}(\xi_{20})+y^{\mathrm{IV}}(\xi_{2n})]i.$$

Пользуясь обозначениями

$$\max_{-h\leqslant x\leqslant 1+h} |y^{(k)}(x)| \leqslant M_k \ (k = 4{,}6),$$

найдем оценки

$$\max_{i=0,\,1,\,\ldots,\,n} |t_i| \leqslant \frac{h^2}{9} M_4, \qquad \max_{i=1,\,2,\,\ldots,\,n-1} |\delta^2 t_i| \leqslant \frac{h^2}{4} M_4,$$

$$R^* = \frac{h^2}{9} M_4 L_0 + \left(\frac{h^2}{4} M_4 + \frac{h^2}{12} M_4 \right) L_2 + \frac{h^2}{6} M_6 =$$

$$= \frac{h^2}{18} \left[(2L_0 + 6L_2) M_4 + 3M_6 \right].$$

Теперь у нас найдены все необходимые величины для оценки погрешности. На основе теоремы 2, в случае $\mu < 1$, разностный метод {(22), (23)} сходится, причем для оценки погрешности можем использовать неравенство (21) с $|t_i|$, $h^4 \sum_{k=1}^{n-1} |g_{ik}|$, R^* и μ, найденные для нашей конкретной задачи. Взяв в этом неравенстве максимальное значение от первой части по i, получим более простую, но менее точную оценку

$$|\varepsilon_i| \leqslant \frac{h^2}{9} M_4 + \frac{\frac{h^2}{18} \left(\frac{5}{384} + \frac{h^2}{96} \right) \left[(2L_0 + 6L_2) M_4 + 3M_6 \right]}{1 - \left(\frac{5}{384} + \frac{h^2}{96} \right) L_0 - \frac{1}{8} L_2}.$$

Литература

1. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. II. Москва, 1962.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах. Москва, 1959.
3. Юргенсон Р., Об оценке погрешности приближенных методов при решении дифференциальных уравнений. Диссертация, Тарту, 1963.
4. Юргенсон Р., Об оценке погрешности метода конечных разностей решения краевых задач. Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭстССР, 1963, **24**, 36—47.
5. Levin, M., Ulm, S., Arvutusmeetodite käsiraamat. Tallinn, 1966.
6. Schröder, J., Über die Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben I. Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, 319—331.
7. Schröder, J., Über die Differenzenverfahren bei nichtlinearen Randwertaufgaben II. Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, 443—455.

Поступило
14 II 1967

NELJANDAT JÄRKU MITTELINEAARSETE DIFERENTSIAALVÕRRANDITE RAJAÜLESANNETE LAHENDAMISEST DIFERENTSMEETODIGA

R. Jürgenson

Resümee

Käesolevas artiklis aproksimeeritakse rajaülesanne {(1), (2)} algebralise võrrandisüsteemiga {(3), (4)}. Viimase lahendamiseks esitatakse iteratsiooni-meetod (10) ja antakse selle jaoks piisavad koondumistingimused. Samuti tuletatakse diferentsmeetodi {(3), (4)} vea hinnangud ja näidatakse selle meetodi koondumine.

ÜBER DIE LÖSUNG DER RANDWERTAUFGABEN VON NICHTLINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VIERTER ORDNUNG MITTELS DIFFERENZENVERFAHREN

R. Jürgenson

Zusammenfassung

In dem vorliegenden Aufsatz wird die Randwertaufgabe {(1), (2)} mit dem algebraischen Gleichungssystem {(3), (4)} aproximiert. Für die Lösung des Letzten wird die Iterationsmethode (10) dargeboten und für diese werden die hinreichenden Konvergenzbedingungen gegeben. Ebenso werden die Fehlerabschätzungen zum Differenzenverfahren {(3), (4)} gezogen und die Konvergenz dieser Verfahren gezeigt.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ СЖАТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Э. Сакков

Кафедра теоретической механики

Решение геометрически и физически нелинейных задач теории пластин и оболочек математически сложно и осуществимо в точной постановке лишь при помощи электронно-вычислительных машин. Поэтому во всех имеющихся до сих пор решениях исходят из упрощающих предположений. Один путь, значительно упрощающий решение задачи, основан на предположении, что все зависимости между усилиями и деформациями, моментами и кривизнами, имеющие место до потери устойчивости, действительны и после выпучивания оболочки. Этот путь впервые указан в работе Ли и Адеса [1]. Дальнейшее развитие этот подход получил в работах А. Н. Божинского [2] и И. В. Кнетса [3]. В работе Ю. Р. Лепика и автора [4] была сделана попытка дать решение рассматриваемой задачи, не используя вышеупомянутой гипотезы Ли—Адеса. При этом предполагалось, что разгрузка начинается с критических значений напряжений и деформаций (гипотеза Пфлюгера [5]).

Чтобы избежать применения этой гипотезы, эту же задачу в данной работе рекомендуется решить методом последовательного нагружения. Как известно, применение методов Ритца и Галеркина связано с значительными затруднениями в вычислениях. Предложенный метод, который по существу является модификацией метода Л. М. Качанова [6], позволяет решать нелинейные задачи при помощи линейной аппаратуры.

1. Связи между приращениями напряжений и деформаций при плоском напряженном состоянии. Пусть тонкая оболочка находится под действием сил, приложенных в ее срединной плоскости (x, y). В таком случае компоненты напряжений X_z, Y_z, Z_z малы сравнительно с X_x, Y_y, X_y. Допустим, что материал оболочки несжимаем. При выводе основных уравнений проблемы исходим из теории малых упруго-пластических деформаций.

В некотором сечении по нормали в оболочке могут одновременно встречаться зоны нагружения, разгрузки и вторичных пластических деформаций.

В зоне нагрузки имеем:

$$
\begin{aligned}
X_x &= \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}\left(e_{xx}+\frac{1}{2}e_{yy}\right),\\
Y_y &= \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}\left(e_{yy}+\frac{1}{2}e_{xx}\right),\\
X_y &= \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}e_{xy},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

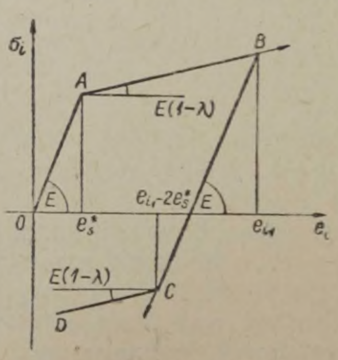
где X_x, Y_y, X_y, e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} — напряжения и деформации, σ_i, e_i — интенсивности напряжений и деформаций.

Обозначим через X_{x1}, Y_{y1}, X_{y1}, e_{xx1}, e_{yy1}, e_{xy1} те значения напряжений и деформаций, при которых в данной точке оболочки начинается разгрузка. Введя еще напряжения и деформации некоторого фиктивного состояния формулами $X^0{}_x = X_{x1} - X_x$, $Y^0{}_y = Y_{y1} - Y_y$, $X^0{}_y = X_{y1} - X_y$, $e^0{}_{xx} = e_{xx1} - e_{xx}$, $e^0{}_{yy} - e_{yy1} - e_{yy}$, $e^0{}_{xy} = e_{xy1} - e_{xy}$, получим для зоны разгрузки и вторичных пластических деформаций соотношения

$$
\begin{aligned}
X^0{}_x &= \frac{4}{3}\frac{\sigma^0{}_i}{e^{v}{}_i}\left(e^0{}_{xx}+\frac{1}{2}e^0{}_{yy}\right),\\
Y^0{}_y &= \frac{4}{3}\frac{\sigma^0{}_i}{e^0{}_i}\left(e^0{}_{yy}+\frac{1}{2}e^0{}_{xx}\right),\\
X^0{}_y &= \frac{1}{3}\frac{\sigma^0{}_i}{e^0{}_i}e^0{}_{xy},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где $\sigma^0{}_i$, $e^0{}_i$ — интенсивности напряжений и деформаций фиктивного состояния (в зоне упругой разгрузки имеем $\frac{\sigma_i{}^0}{e_i{}^0} = E$).

В дальнейшем будем считать, что материал оболочки имеет линейное упрочнение и подчиняется идеальному эффекту Бау-



Фиг. 1

шингера (фиг. 1). Символами e^*_s и e_1 обозначим соответственно интенсивности деформаций на пределе текучести и в момент начала разгрузки. Интенсивности напряжений и деформаций связаны между собой следующим образом (см. фиг. 1):

$$
\begin{aligned}
&\sigma_i = Ee_i && \text{на отрезке } OA,\\
&\sigma_i = E[e_i(1-\lambda) + \lambda e^*_s] && \text{на отрезке } AB,\\
&\sigma^0_i = Ee^0_i && \text{на отрезке } BC,\\
&\sigma^0_i = E[e^0_i(1-\lambda) + 2\lambda e^*_s] && \text{на отрезке } CD.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Значительные трудности представляет определение величин X_{x1}, Y_{y1}, X_{y1}, e_{xx1}, e_{yy1}, e_{xy1}, e_{i1}, так как в каждой точке они имеют различные значения. Избежать эти трудности позволяет ниже предлагаемый метод последовательного нагружения.

Будем исходить из некоторого известного напряженного состояния оболочки (все величины e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}, e_i и т. д. будем считать известными). На следующем этапе вычисляем приращения напряжений и деформаций, соответствующие некоторому малому приращению нагрузки $\dot{P}$. Складывая эти приращения данным значениям напряжений и деформаций, получаем некоторое новое напряженное состояние, которое считаем исходным для дальнейших вычислений. На каждом этапе нагружения вычисляется в каждой точке оболочки интенсивность деформаций и производится ее сравнение с значением интенсивности деформаций, вычисленной на предыдущем этапе. Если интенсивность деформаций в рассматриваемой точке превышает ее значение на предыдущем этапе, то в этой точке мы имеем дело с активным нагружением, и вычисления производятся по формулам типа (1.2). Момент, когда в данной точке впервые будет нарушено неравенство $e_i > e_{i1}$ (здесь e_{i1} — интенсивность деформаций на предыдущем этапе), будем считать началом разгружения, и вычисления производятся по формулам типа (1.2). Величины e_{xx1}, e_{yy1}, e_{xy1}, e_{i1} сохраняются в памяти электронно-вычислительной машины.

Для реализации предложенного метода перепишем уравнения (1.1) и (1.2) в дифференциальном виде. Дифференцирование производится по некоторому неубывающему параметру, например по времени. Сделав это, получим:

$$\frac{3}{4}\dot{X}_x = E(1-\omega)\left(\dot{e}_{xx} + \frac{1}{2}\dot{e}_{yy}\right) - \frac{E(\lambda-\omega)}{e_i}\dot{e}_i\left(e_{xx} + \frac{1}{2}e_{yy}\right),$$

$$\frac{3}{4}\dot{Y}_y = E(1-\omega)\left(\dot{e}_{yy} + \frac{1}{2}\dot{e}_{xx}\right) - \frac{E(\lambda-\omega)}{e_i}\dot{e}_i\left(e_{yy} + \frac{1}{2}e_{xx}\right),$$

$$3\dot{X}_y = E(1-\omega)\dot{e}_{xy} - \frac{E(\lambda-\omega)}{e_i}\dot{e}_i e_{xy}; \tag{1.4}$$

$$\frac{3}{4}\dot{X}_x = E(1-\omega^0)\left(\dot{e}_{xx} + \frac{1}{2}\dot{e}_{yy}\right) +$$

$$+\frac{E(\lambda-\omega^0)}{e^0{}_i}\dot{e}^0{}_i\left(e^0{}_{xx} + \frac{1}{2}\dot{e}^0{}_{yy}\right),$$

$$\frac{3}{4}\dot{Y}_y = E(1-\omega^0)\left(\dot{e}_{yy} + \frac{1}{2}\dot{e}_{xx}\right) +$$

$$+\frac{E(\lambda-\omega^0)}{e^0{}_i}\dot{e}^0{}_i\left(e^0{}_{yy} + \frac{1}{2}e^0{}_{xx}\right),$$

$$3\dot{X}_y = E(1-\omega^0)\dot{e}_{xy} + \frac{E(\lambda-\omega^0)}{e^0{}_i}\dot{e}^0{}_i e^0{}_{xy}; \tag{1.5}$$

где ω, ω^0 — параметры пластичности,

$$\omega = \lambda\left(1 - \frac{e^*{}_s}{e_i}\right); \quad \omega^0 = \lambda\left(1 - \frac{2e^*{}_s}{e^0{}_i}\right). \tag{1.6}$$

Принимаем в дальнейшем за аппроксимацию действительной формулам:

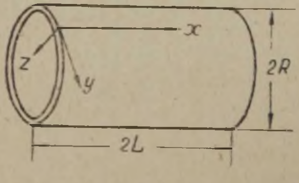
$$\dot{T}_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \dot{X}_x dz, \quad \dot{T}_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \dot{Y}_y dz, \quad \dot{T}_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \dot{X}_y dz,$$

$$\dot{M}_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \dot{X}_x z dz, \quad \dot{M}_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \dot{Y}_y z dz, \quad \dot{M}_{12} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \dot{X}_y z dz, \tag{1.7}$$

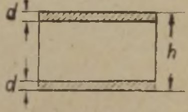
где символом h обозначена толщина оболочки.

2. Осесимметричная деформация цилиндрической оболочки. Рассмотрим цилиндрическую оболочку с постоянной толщиной h, радиусом R и длинной $2L$. Поместим координатные оси так, как показано на фиг. 2. Предположим, что к оболочке приложена сжимающая сила T_1, из-за которой осуществляется осесимметричный прогиб цилиндра.

Принимаем в дальнейшем за апроксимацию действительной оболочки идеализированную двухслойную модель, что существенно упрощает интегрирование по z (фиг. 3). В принципе воз-



Фиг. 2



Фиг. 3

можно решение и для однородной оболочки. В таком случае интегралы по z вычисляют численно, но так как основные формулы довольно длинны, они здесь представлены не будут. Обозначим все величины в внешнем слое оболочки через знак «—» и в внутреннем через «+». Тогда получаем для приращений усилий $\dot{T}_1$ и $\dot{T}_2$ и момента $\dot{M}_1$ следующие формулы:

$$\dot{T}_1 = (\dot{X}^+{}_x + \dot{X}^-{}_x)\,d, \quad \dot{T}_2 = (\dot{Y}^+{}_y + \dot{Y}^-{}_y)\,d,$$

$$\dot{M}_1 = \frac{1}{2}\,(\dot{X}^+{}_x - \dot{X}^-{}_x)\,hd. \tag{2.1}$$

Дадим теперь формулы для определения величин $e_i(\pm)$, $e^0{}_i(\pm)$, $\dot{e}_i(\pm)$, $\dot{e}^0{}_i(\pm)$. По гипотезе Кирхгофа имеем:

$$e_{xx}(\pm) = \varepsilon^*{}_1 \pm \frac{h}{2}\,\varkappa^*{}_1, \quad e_{yy}(\pm) = \varepsilon^*{}_2, \tag{2.2}$$

где $\varepsilon^*{}_1$, $\varepsilon^*{}_2$, $\varkappa^*{}_1$ — деформации и искривление срединной поверхности. Введя безразмерные величины $\varepsilon_1 = \frac{R}{h}\,\varepsilon^*{}_1$, $\varepsilon_2 = \frac{R}{h}\,\varepsilon^*{}_2$, $\varkappa_1 = \frac{R}{2}\,\varkappa^*{}_1$, $e_s = \frac{R}{h}\,e^*{}_s$, получаем:

$$e_{xx}(\pm) = \frac{h}{R}\,(\varepsilon_1 \pm \varkappa_1), \quad e_{yy}(\pm) = \frac{h}{R}\,\varepsilon_2. \tag{2.3}$$

На основании этих формул получаем:

$$e_i(\pm) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{h}{R}\sqrt{\varepsilon^2{}_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon^2{}_2 \pm 2\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2\right)\varkappa_1 + \varkappa^2{}_1},$$

$$(2.4)$$

$$e^0{}_i(\pm) = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{h}{R}\sqrt{\varepsilon^{0^2}{}_1 + \varepsilon^0{}_1\varepsilon^0{}_2 + \varepsilon^{0^2}{}_2 \pm 2\left(\varepsilon^0{}_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^0{}_2\right)\varkappa^0{}_1 + \varkappa^{0^2}{}_1},$$

где $\varepsilon^0{}_1 = \varepsilon'{}_1 - \varepsilon_1$, $\varepsilon^0{}_2 = \varepsilon^1{}_2 - \varepsilon_2$, $\varkappa^0{}_1 = \varkappa^1{}_1 - \varkappa_1$, причем $\varepsilon^1{}_1$; $\varepsilon^1{}_2$, $\varkappa^1{}_1$ компоненты деформаций и искривлений в начале разгрузки. Дифференцированием формул (2.4) получаем:

$$\dot{e}_i(\pm) = \frac{4}{3}\,\frac{h^2}{R^2}\Bigg[\left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 \pm \varkappa_1\right)\dot{\varepsilon}_1 + \bigg(\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_1 \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\,\varkappa_1\bigg)\,\dot{\varepsilon}_2 \pm \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2 \pm \varkappa_1\right)\dot{\varkappa}_1\Bigg]\,[e_i(\pm)]^{-1},$$

$$(2.5)$$

$$\dot{e}^0{}_i(\pm) = -\frac{4}{3}\,\frac{h^2}{R^2}\Bigg[\left(\varepsilon^0{}_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^0{}_2 \pm \varkappa^0{}_1\right)\dot{\varepsilon}_1 + \bigg(\varepsilon^0{}_2 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^0{}_1 \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\,\varkappa^0{}_1\bigg)\,\dot{\varepsilon}_2 \pm \left(\varepsilon^0{}_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^0{}_2 \pm \varkappa^0{}_1\right)\dot{\varkappa}_1\Bigg]\,[e^0{}_i(\pm)]^{-1}.$$

Подставляя теперь величины $\dot{X}_x(\pm)$, $\dot{Y}_y(\pm)$ в формулы (2.1) и учитывая зависимости (2.2)—(2.5), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{3R}{4Ehd}\dot{T}_1 &= A\dot{\varepsilon}_1 + B\dot{\varepsilon}_2 + C\dot{\varkappa}_1, \\ \frac{3R}{4Ehd}\dot{T}_2 &= B\dot{\varepsilon}_1 + D\dot{\varepsilon}_2 + F\dot{\varkappa}_1, \\ \frac{3R}{2Eh^2d}\dot{M}_1 &= C\dot{\varepsilon}_1 + F\dot{\varepsilon}_2 + A\dot{\varkappa}_1, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$A = A(+) + A(-),\ C = A(+) - A(-),\ B = B(+) + B(-),$$
$$F = B(+) - B(-),\ D = C(+) + C(-), \tag{2.7}$$

$$A(\pm) = \left| \begin{array}{l} 1 - \omega(\pm) - \dfrac{4}{3}\dfrac{(\lambda - \omega(\pm))^3}{\lambda^2 e^2_s}\left(\varepsilon_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_2 \pm \varkappa_1\right)^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } e_i > e_{i1}, \\ 1, \qquad\qquad \text{если } e_i \leqslant e^*_s \text{ или } e_{i1} - 2e^*_s < e_i < e_{i1}, \\ 1 - \omega^0(\pm) - \dfrac{1}{3}\dfrac{(\lambda - \omega^0(\pm))^3}{\lambda^2 e^2_s}\left(\varepsilon^0_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon^0_2 \pm \varkappa^0_1\right)^2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } e_i < e_{i1} - 2e^*_s, \end{array} \right. \tag{2.8}$$

$$B(\pm) = \left| \begin{array}{l} \dfrac{1}{2}(1 - \omega(\pm)) - \dfrac{4}{3}\dfrac{(\lambda - \omega(\pm))^3}{\lambda^2 e^2_s}\left(\varepsilon_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_2 \pm \varkappa_1\right) \times \\ \qquad\qquad \times \left(\varepsilon_2 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_1 \pm \dfrac{1}{2}\varkappa_1\right), \\ \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{2}(1 - \omega^0(\pm)) - \dfrac{1}{3\lambda^2 e^2_s}(\lambda - \omega^0(\pm))^3\left(\varepsilon^0_1 + \dfrac{1}{2}\varepsilon^0_2 \pm \varkappa^0_1\right) \times \\ \qquad\qquad \times \left(\varepsilon^0_2 + \dfrac{1}{2}\varepsilon^0_1 \pm \dfrac{1}{2}\varkappa^0_1\right), \end{array} \right. \tag{2.9}$$

$$C(\pm) = \left| \begin{array}{l} 1 - \omega(\pm) - \dfrac{4}{3}\dfrac{(\lambda - \omega(\pm))^3}{\lambda^2 e^2_s}\left(\varepsilon_2 + \dfrac{1}{2}\varepsilon_1 \pm \dfrac{1}{2}\varkappa_1\right)^2, \\ 1, \\ 1 - \omega^0(\pm) - \dfrac{1}{3}\dfrac{(\lambda - \omega^0(\pm))^3}{\lambda^2 e^2_s}\left(\varepsilon^0_2 + \dfrac{1}{2}\varepsilon^0_1 \pm \dfrac{1}{2}\varkappa^0_1\right)^2. \end{array} \right. \tag{2.10}$$

Все величины $A(\pm)$, $B(\pm)$, $C(\pm)$ считаем известными, вычисленными на предыдущем этапе. Как видно, система (2.6) является линейной в отношении приращений деформаций и кривизны.

Система уравнений равновесия цилиндрической оболочки имеет вид:

$$\dot{T}_1 = \text{const}, \quad \frac{d^2\dot{M}_1}{dx^2} + \dot{T}_1\frac{d^2 w}{dx^2} + T_1\frac{d^2\dot{w}}{dx^2} + \frac{\dot{T}_2}{R} = 0. \qquad (2.11)$$

Это уравнение интегрируем при следующих граничных условиях:

1) свободное опирание:

$$\dot{w}(0) = \dot{w}(2L) = \dot{M}_1(0) = \dot{M}_1(2L) = 0,$$

2) жесткое закрепление:

$$\dot{w}(0) = \dot{w}(2L) = \left.\frac{d\dot{w}}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d\dot{w}}{dx}\right|_{x=2L} = 0.$$

В сечении $x = L$ должны быть удовлетворены следующие условия симметрии:

$$\left.\frac{d\dot{w}}{dx}\right|_{x=L} = \left.\frac{d^3\dot{w}}{dx^3}\right|_{x=L} = 0.$$

Уравнение (2.11) интегрируем методом Бубнова—Галеркина, выбирая за $\dot{w}$ выражение $\dot{w} = \sum\limits_{i=1}^{k}\dot{A}_i w_i$, где w_i — координатные функции, $\dot{A}_i$ — определяемые параметры.

Переходя к безразмерным величинам

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad W = \frac{w}{h}, \quad a = \frac{L}{\sqrt{Rh}}, \quad P = -\frac{3L^2}{4Eh^2d}$$

и учитывая, что в случае осесимметричной деформации цилиндрической оболочки $\dot{\varepsilon}_2 = -\dot{W}$, $\dot{\varkappa}_1 = -\frac{1}{2a^2}\dot{W}''$ (штрихами обозначены производные по ξ), получаем после несложных преобразований и интегрирования по частям следующую систему алгебраических уравнений:

$$\int\limits_0^1 \Bigg\{\Bigg[\frac{a^2}{2}\left(\frac{BC}{A} - F\right)\dot{W}'' - P\dot{W}'' + a^4\left(\frac{B^2}{A} - D\right)\dot{W} - \left(a^2\frac{B}{A} + W''\right)\dot{P}\Bigg]W_i + \Bigg[\frac{1}{4}\left(\frac{C^2}{A} - A\right)\dot{W}'' + \frac{a^2}{2}\left(\frac{BC}{A} - F\right)\dot{W} - \frac{1}{2}\frac{C}{A}\dot{P}\Bigg]W''_i\Bigg\}d\xi = 0 \qquad (2.12)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Эту систему можно привести к виду

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\dot{A}_j + b_i\dot{P} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{2.13}$$

где

$$a_{ij} = \int_0^1 \left\{ \left[\frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{BC}{A} - F \right) W''_j - PW''_j + \alpha^4 \left(\frac{B^2}{A} - D \right) W_j \right] W_i + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{c^2}{A} - A \right) W''_j + \frac{\alpha^2}{2} \left(\frac{BC}{A} - F \right) W_j \right] W''_i \right\} d\xi,$$

$$b_i = - \int_0^1 \left[\left(\alpha^2 \frac{B}{A} + W'' \right) W_i + \frac{1}{2} \frac{C}{A} W''_i \right] d\xi, \tag{2.14}$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, k).$$

Так как величины A, B, ... вычисляются в ходе вычислений, эти интегралы необходимо найти численно.

Литература

1. Божиньский О. М., Стійкість та післякритичный стан циліндричных оболонок і пластинок за границею пружності. Прикл. механіка, 1963, 9, № 1, 39—46.
2. Качанов Л. М., Вариационные методы в теории пластичности. Механика твердого тела. Труды II Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике, 1966, 177—190.
3. Кнетс И. В., Устойчивость цилиндрических оболочек с учетом сложного нагружения материала в момент выпучивания. Автореферат дисс., Рига, 1965.
4. Лепик Ю. Р., Сакков Э. Э., Исследование послекритической стадии пластин, потерявших устойчивость за пределом упругости. V Всесоюзная конференция по теории пластин и оболочек, Аннотация докладов. Москва, 1965.
5. Lee, L., Ades, C., Plastic torsional buckling strength of cylinders including the effects of imperfections. J. Aeron. Sci., 1957, 24, № 4.
6. Plüger, A., Zur plastischen Knickung gerader Stäbe. Ingr-Arch., 1952, 20, № 5, 84—99.

Поступило
21 VI 1967

SURUTUD SILINDRILISTE KOORIKUTE PÄRASTKRIITILISE STAADIUMI ANALÜÜS

E. Sakkov

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse ühtlaselt surutud silindriliste koorikute käitumist pärastkriitilises staadiumis, juhul kui stabiilsuse kadu toimub elastsuspiiri taga. Püstitatud ülesanne soovitatakse lahendada järkjärgulise koormamise meetodiga. Lähtutakse väikeste elastsete plastsete deformatsioonide teooriast. Kooriku materjal loetakse kokkusurumatuks ja lineaarselt kalestuvaks.

Tasakaalu diferentsiaalvõrrand rahuldatakse Galerkini variatsioonmeetodil

ANALYSIS OF THE POSTCRITICAL STAGE OF CYLINDRICAL SHELLS

E. Sakkov

Summary

The behaviour of a cylindrical shell that has lost its stability beyond the elastic limit is discussed. The problem is solved by the method of step-by-step loading. The theory of small elastic-plastic deformations is used. The material of the shell is regarded as being noncompressible and having linear strain-hardening.

The differential equation of equilibrium has been solved by means of the method of Galerkin.

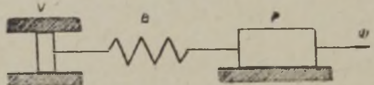
О ДЕФОРМИРОВАНИИ ПЛАСТИЧЕСКИ-УПРУГО-ВЯЗКИХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

И. Вайникко

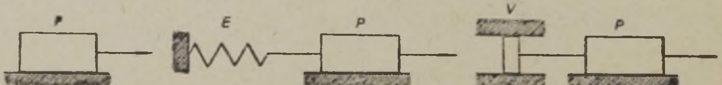
Кафедра теоретической механики

В настоящей работе рассматривается поведение пластин и оболочек при первоначальном условии пластичности Треска с учетом релаксации. Соответствующая модель пластически-упруго-вязкого материала и соотношения между напряжениями и деформациями предложены в работе [1]. Следуя идеям работы [2], принят закон деформирования материала после достижения предела текучести. В качестве примера рассматривается деформирование кольцевой пластины и слоистой цилиндрической оболочки.

1. Поведения пластически-упруго-вязкого материала описывает модель, представленная на фиг. 1, где E — упругий эле-



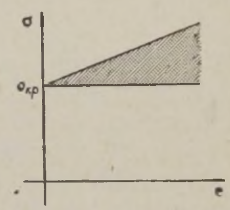
Фиг. 1



а) б) в)

Фиг. 2

мент (пружина), P — пластический элемент (механизм сухого трения), V — вязкий элемент (поршень, двигающийся в цилиндре с вязкой жидкостью). Поведение материала будет зависеть от скорости нагружения, так как в модели есть элемент вязкости. Если скорость нагружения бесконечно мала, то релаксационные процессы происходят в полной мере и элемент вязкости не сопротивляется усилиям (коэффициент вязкости мал), и получится модель идеально пластического тела (фиг. 2а). Если скорость нагружения бесконечно велика (мгновенное нагружение), то элемент вязкости ведет себя, как жесткая связь (коэффициент вязкости сколь угодно большой), и имеет место модель анизотропно упрочняющегося пластического материала (фиг. 2б). С неограниченным ростом коэффициента жесткости упругой пружины связь между элементом вязкости и пластичности становится жесткой и имеет место модель вязко-пластического тела, так называемое тело Бингама—Шведова (фиг. 2в). На фиг. 3 приведена область зависимости $\sigma - e$, соответствующая описываемой модели.



Фиг. 3

Рассматриваемый материал является жестко-пластическим, поэтому деформации появляются лишь после того, как будет достигнут предел текучести. Пусть σ_{ij} — тензор действительных напряжений, e_{ij} — тензор соответствующих деформаций, s_{ij} — тензор микронапряжений, которые возникают вследствие релаксации (на модели это соответствует усилию в упругой пружине), η_{ij} — тензор микродеформаций. Тогда условие текучести можно записать в виде

$$f(\sigma_{ij} - s_{ij}) = 0. \tag{1.1}$$

Пусть справедлив и ассоциированный закон течения

$$de_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\lambda \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Связь между микронапряжениями, микродеформациями и действительными деформациями дадим в виде

$$s'_{ij} = c(e'_{ij} - \eta'_{ij}), \quad s'_{ij} = = \mu \dot{\eta}_{ij}, \quad e_{ii} = \eta_{ii} = 0,$$
$$c, \mu = \text{const}. \tag{1.3}$$

Здесь μ — коэффициент вязкости, c — коэффициент жесткости, а штрих вверху означает, что берутся компоненты девиатора соответствующих тензоров, точка сверху означает дифференцирование по времени.

Из соотношений (1.3) можно исключить тензор микродеформаций и получить связь между тензорами микронапряжений и скоростей действительных деформаций в следующем виде:

$$\dot{s}_{ij} + \frac{e}{\mu} s_{ij} - c\varepsilon_{ij} = 0, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{ij} = \dot{e}_{ij}.$$

Решим это уравнение в предположении, что s_{ij} в начальный момент времени ($t=0$) равняется s^0_{ij}. Получим

$$s_{ij}=\left[c\int_0^t \varepsilon_{ij}\exp\left(\frac{c}{\mu}\tau\right)d\tau+s^0_{ij}\right]\exp\left(-\frac{c}{\mu}t\right). \qquad (1.4)$$

В предельном случае, когда $\mu\to\infty$, из второго соотношения (1.3) получим $\dot{\eta}'_{ij}=0$, отсюда $\eta'_{ij}=\mathrm{const}$. Итак, для анизотропно упрочняющегося материала из первого соотношения (1.3) получим

$$ds'_{ij}=cde'_{ij}, \qquad e_{ii}=0, \qquad (1.5)$$

как это предложил Прагер [3]. Для вязко-пластического тела, когда $c\to\infty$, имеем $e_{ij}=\eta_{ij}$, и из (1.3) получим

$$s'_{ij}=\mu\varepsilon'_{ij}, \qquad \varepsilon_{ii}=0. \qquad (1.6)$$

2. Рассмотрим деформирование пластин и оболочек вращения, изготовленных из пластически-упруго-вязкого материала, поведение которого полностью определяется соотношениями (1.1)—(1.3). Как обычно, при расчете тонкостенных конструкций пренебрегаем нормальным напряжением, направленным перпендикулярно к срединной поверхности оболочки, и напряженное состояние, возникающее в конструкции, считаем плоским. Деформации в материале возникают лишь после того, как будет выполнено условие пластичности Треска (фиг. 4)

$$\max|\sigma_i-\sigma_j|=k \qquad (i\neq j=1,2,3). \qquad (2.1)$$

Здесь k — предел текучести материала при простом растяжении, σ_i — главные напряжения. При дальнейшем деформировании условие текучести (1.1) принимается в следующем виде:

$$\max|\sigma_i-\sigma_j)-(s_i-s_j)|=k \qquad (i\neq j=1,2,3),$$
$$\sigma_3=0, \qquad s_1+s_2+s_3=0, \qquad (2.2)$$

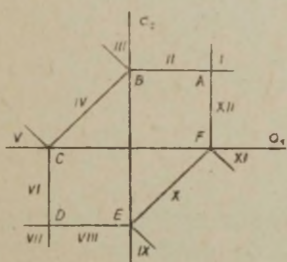
где s_i — главные микронапряжения.

Рассмотрим процесс нагружения (предположим, что в нашей конструкции не происходит ни разгрузки, ни нейтрального нагружения). Из формул (1.4)—(1.6) можно сделать вывод, что микронапряжения пропорциональны действительным деформациям. На плоскости $\sigma_1\sigma_2$ уравнение (2.2) определяет шестиугольник, изменяющийся с изменением скоростей деформаций. Так как справедлив ассоциированный закон течения, а микронапряжения s_i пропорциональны главным скоростям деформаций ε_i, то условие (2.2) можно переписать для каждой зоны, изображенной на фиг. 4, следующим образом:

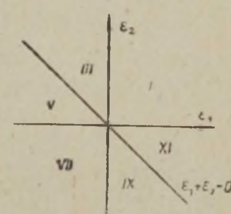
I $\sigma_1=k+2s_1+s_2, \qquad \sigma_2=k+s_1+2s_2;$
II $\sigma_2=k+2s_2;$
III $\sigma_1=2s_1+s_2, \qquad \sigma_2=k+s_1+2s_2;$
IV $\sigma_2-\sigma_1=k-s_1+s_2;$

$$
\begin{array}{rll}
\mathrm{V} & \sigma_1 = -k + 2s_1 + s_2, & \sigma_2 = s_1 + 2s_2; \\
\mathrm{VI} & \sigma_1 = -k + 2s_1; & \\
\mathrm{VII} & \sigma_1 = -k + 2s_1 + s_2, & \sigma_2 = -k + s_1 + 2s_2; \\
\mathrm{VIII} & \sigma_2 = -k + 2s_2; & \\
\mathrm{IX} & \sigma_1 = 2s_1 + s_2, & \sigma_2 = -k + s_1 + 2s_2; \\
\mathrm{X} & \sigma_1 - \sigma_2 = k + s_1 - s_2; & \\
\mathrm{XI} & \sigma_1 = k + 2s_1 + s_2, & \sigma_2 = s_1 + 2s_2; \\
\mathrm{XII} & \sigma_1 = k + 2s_1. &
\end{array} \qquad (2.3)
$$

Вектор скоростей деформаций определяет, какая из зон I—XII соответствует деформированию в данной точке, и, следовательно, определяет, какая из зависимостей (2.3) должна выполняться в данной точке.



Фиг. 4



Фиг. 5

3. Рассмотрим осесимметричный изгиб круглых пластин толщины h. Для скоростей деформаций имеем

$$\varepsilon_1 = \varkappa_1 z, \qquad \varepsilon_2 = \varkappa_2 z, \tag{3.1}$$

где z — расстояние слоя до срединной поверхности пластины и $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — скорости срединной поверхности. На плоскости $\varepsilon_1\varepsilon_2$ (фиг. 5) уравнение (3.1) при изменении z от $-h/2$ до $h/2$ определяет отрезок прямой линии MN, проходящей через начало координат. Линии, определяемые уравнениями

$$\varepsilon_1 = 0, \qquad \varepsilon_2 = 0, \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0, \tag{3.2}$$

соответствуют граням шестиугольника текучести. Вся плоскость соответствует угловым точкам. (Соответствующие зоны обозначены одинаково на фиг. 4 и 5). В зависимости от того, через какие зоны будет проходить отрезок MN, в пластине будут осуществляться различные напряженные состояния (2.3). Учитывая соотношения (1.4), получим связь между моментами и микронапряжениями в следующем виде:

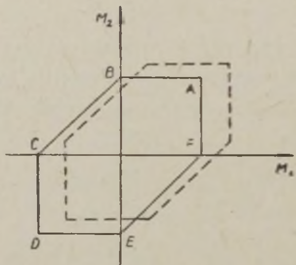
$$\max\left| M_i - \frac{h^3}{12}\zeta_i - M_j + \frac{h^3}{12}\zeta_j \right| = \frac{kh^2}{4}$$

$$(i \neq j = 1, 2, 3, \quad M_3 = 0, \quad \varkappa_3 = -\varkappa_1 - \varkappa_2), \tag{3.3}$$

где

$$\zeta_i = \left[\int_0^t c\varkappa_i \exp\left(\frac{c}{\mu}\tau\right) d\tau + \zeta_i^0 \right] \exp\left(-\frac{c}{\mu}t\right).$$

На плоскости M_1M_2 уравнение (3.3) описывает шестиугольник, смещающийся с увеличением микронапряжений (фиг. 6).



Фиг. 6

Рассмотрим в качестве примера кольцевую пластину, свободно опертую по внешнему краю, со свободной внутренней кромкой под действием равномерной нагрузки с интенсивностью P. Внутренний радиус пластины обозначим через R_0, внешний — R, текущий радиус через r, прогиб — W. Введем безразмерные величины

$$\varrho = \frac{r}{R}, \quad \varrho_0 = \frac{R_0}{R}, \quad w = \frac{W}{R}, \quad m_i = \frac{4M_i}{kh^2},$$

$$p = \frac{4PR^2}{kh^2}, \quad k_i = \varkappa_i R \quad (i = 1, 2).$$

Уравнение равновесия в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial m_1}{\partial \varrho} + \frac{m_1 - m_2}{\varrho} = -\frac{p}{2}\varrho + \frac{p}{2}\frac{\varrho_0^2}{\varrho}. \qquad (3.4)$$

Для безразмерных скоростей кривизн имеем

$$\dot{k}_1 = -\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \varrho^2}, \quad \dot{k}_2 = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \dot{w}}{\partial \varrho}, \qquad (3.5)$$

где точка наверху означает дифференцирование по времени.

Так как на свободно опертом крае ($\varrho = 1$) момент $m_1 = 0$, то предположим, что в пластине имеет место состояние AB (фиг. 6), для которого из (3.3) следует

$$m_2 = 1 + \nu\bar{\zeta}_2, \quad \text{где} \quad \nu = \frac{2h}{3kR},$$

$$\bar{\zeta}_2 = \left[c \int_0^t \dot{k}_2 \exp\left(\frac{c}{\mu}\tau\right) d\tau + \bar{\zeta}_2^0 \right] \exp\left(-\frac{c}{\mu}t\right). \qquad (3.6)$$

Чтобы определить величину $\bar{\zeta}_2^0$, предполагаем, что в начальный момент времени материал ведет себя, как в случае с анизотропным упрочнением. В данном случае

$$k_1^0 = 0, \quad k_2^0 = \bar{\zeta}_2^0.$$

Соотношения (3.5) дают, что прогиб в начальный момент времени имеет вид

$$w = w_1(1 - \varrho),$$

и момент

$$m_2 = 1 + \frac{\nu w_1}{\varrho}.$$

Подставляя это в уравнение равновесия и учитывая условие $m_1 = 0$ при $\varrho = 1$, получим

$$m_1 = 1 - \frac{1}{\varrho} + \frac{\nu w_1}{\varrho} \ln \varrho - \frac{p_0}{6}\left(\varrho^2 - \frac{1}{\varrho}\right) + \frac{p_0 \varrho_0^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\varrho}\right),$$

где $p_0 = p(0)$. Из условия $m_1 = 0$ при $\varrho = \varrho_0$ получим

$$k_2^0 = \frac{(\varrho_0 - 1)}{\nu \varrho \ln \varrho_0}\left(\frac{p_0}{p_0^T} - 1\right), \tag{3.7}$$

где

$$p_0^T = \frac{6}{(1 - \varrho_0)(2\varrho_0 + 1)}.$$

Из формулы (3.7) вытекает, что $k_2^0 = 0$ только в случае $p_0 = p_0^T$. Значение p_0^T совпадает с величиной предельной нагрузки для жестко-пластических пластин.

Теперь рассмотрим, как пластина прогибается при $t > 0$. Из ассоциированного закона течения $\dot{k}_1 = 0$, поэтому

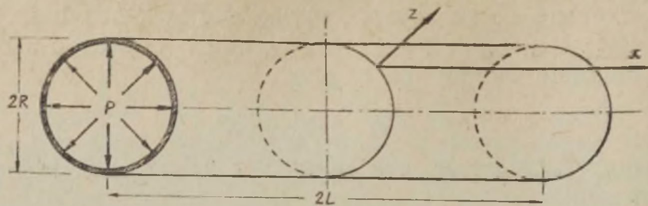
$$\dot{w} = w_0(1 - \varrho). \tag{3.8}$$

Подставим (3.8) в выражение (3.6), учитывая (3.7), и решим уравнение равновесия при условии, что $m_1 = 0$ при $\varrho = \varrho_0$, $\varrho = 1$. Так найдем связь между скоростью прогиба и нагрузкой:

$$\dot{w} = \frac{1 - \varrho_0}{c\nu \ln \varrho_0}\left[\frac{c}{\mu} - \frac{1}{p_0^1}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{c}{\mu} p\right)\right](1 - \varrho). \tag{3.9}$$

Если $p = \text{const}$, получим результат, совпадающий с результатом [2] для вязко-пластического материала.

4. Рассмотрим слоистую цилиндрическую оболочку длины $2L$, опертую по торцам и нагруженную равномерно распределенным внутренним давлением P. Обозначения и координаты даны на фиг. 7. Оболочка толщины $2H$ состоит из двух несущих слоев толщины δ, работающих как мембраны и разделенных заполнителем, передающим сдвиговые усилия. Так как толщина слоев δ принимается малой, изменением деформаций и



Фиг. 7

напряжений по толщине слоев можно пренебречь. Отметим величины во внутреннем и наружном слоях соответственно индексами «+» и «—», тогда для деформаций имеем

$$e_1^{\pm} = e_{10} \pm \varkappa_1 H, \quad e_2^{\pm} = e_{20}, \tag{4.1}$$

где e_{10}, e_{20} — главные удлинения срединной поверхности, $\varkappa_1$ — кривизна. Связь между обобщенными усилиями и главными напряжениями будет следующей:

$$\sigma_i^{+} = \frac{1}{2\delta H}(N_i H + M_i),$$

$$\sigma_i^{-} = \frac{1}{2\delta H}(N_i H - M_i) \quad (i = 1, 2). \tag{4.2}$$

Соотношения (2.3) должны выполняться в обеих слоях. Введем безразмерные величины

$$m_1 = \frac{M_1}{2k\delta H}, \quad m_2 = \frac{N_2}{2k\delta}, \quad k_i = \frac{\varkappa_i H}{2} \quad (i = 1, 2).$$

Подставим в (2.3) вместо микронапряжений их значения, вычисленные по формулам (1.4). Учитывая формулы (4.1) и соотношения (4.2), получим связь между обобщенными усилиями и главными скоростями деформаций срединной поверхности в различных зонах (на фиг. 4), соответственно деформированию во внутреннем (верхний знак) и наружном слоях, например:

$$\text{I} \quad n_1 \pm m_1 = 1 + \frac{1}{k}(2s_{10} + s_{20} \pm 2\bar{\zeta}_1 \pm \bar{\zeta}_2),$$

$$n_2 \pm m_2 = 1 + \frac{1}{k}(2s_{20} + s_{10} \pm 2\bar{\zeta}_2 \pm \bar{\zeta}_1);$$

$$\text{II} \quad n_2 \pm m_2 = 1 + \frac{2}{k}(s_{20} \pm \bar{\zeta}_2);$$

$$\text{III} \quad n_1 \pm m_2 = \frac{1}{k}(2s_{10} + s_{20} \pm 2\bar{\zeta}_1 \pm \bar{\zeta}_2),$$

$$n_2 \pm m_2 = 1 + \frac{1}{k}(2s_{20} + s_{10} \pm 2\bar{\zeta}_2 \pm \bar{\zeta}_1);$$

где

$$s_{i0} = \left[c\int_0^t \dot e_{i0} \exp\left(\frac{c}{\mu}\tau \right) d\tau + s_{i0}{}^0 \right] \exp\left(-\frac{c}{\mu} t \right),$$

$$\bar\zeta_i = 2\left[c\int_0^t \dot k_i \exp\left(\frac{e}{\mu}\tau \right) d\tau + \bar\zeta_i{}^0 \right] \exp\left(-\frac{c}{\mu} t \right) \quad (i=1,2). \quad (4.3)$$

Уравнение равновесия цилиндрической оболочки можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2} + \omega^2 (n_2 - p) = 0, \qquad (4.4)$$

где $p = \dfrac{PR}{2k\delta}$, $x = \dfrac{X}{L}$, $\omega^2 = \dfrac{L^2}{RH}$.

Связь между деформациями и прогибом принимается в виде

$$e_{20} = -w, \quad k_1 = -\frac{1}{2\omega^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \qquad (4.5)$$

Из граничных условий $n_1 = 0$, $m_1 = 0$ при $x = \pm 1$ следует, что торцы оболочки могут находиться только в напряженном состоянии, соответствующем точке B на фиг. 4. Предполагаем, что оболочка достаточно длинная и напряженное состояние соответствует точке B в верхнем и нижнем слоях всюду в оболочке. Учитывая, что $n_1 \equiv 0$ для обобщенных усилий, получаем из (4.3)

$$m_1 = \frac{1}{k} \exp\left(-\frac{c}{\mu} t \right) [c \int_0^t (\pm 2\dot e_{10} \pm \dot e_{20} +$$

$$+ 4\dot k_1) \exp\left(\frac{c}{\mu}\tau \right) d\tau \pm 2s_{10}{}^0 \pm s_{20}{}^0 + 4\bar\zeta_1{}^0],$$

$$n_2 = 1 + \frac{1}{k} \exp\left(-\frac{c}{\mu} t \right) [c \int_0^t (2\dot e_{20} + \dot e_{10} \pm$$

$$\pm 2\dot k_1) \exp\left(\frac{c}{\mu}\tau \right) d\tau + 2s_{20}{}^0 + s_{10}{}^0 \pm 2\bar\zeta_1{}^0]. \qquad (4.6)$$

Допустим, что в начальный момент времени $\zeta_1{}^0 = k_1{}^0$, $s_{10}{}^0 = e_{10}{}^0$, $s_{20}{}^0 = e_{20}{}^0$. Тогда из (4.6)

$$m_1 = \frac{4}{k} k_1{}^0, \quad n_2 = 1 + \frac{3}{2k} e_{20}{}^0, \qquad (4.7)$$

так как на ребре $n_1 - 2n_2 + m_1 = 0$ по ассоциированному закону $\dot e_{20} = -2\dot e_{10}$. Из соотношений (4.4), (4.5) и (4.7) получаем уравнение для определения прогиба w, интегрирование которого дает

$$w = \frac{2k(1-p_0)}{3}(1 - K \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x - L \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x), \qquad (4.8)$$

где

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3}{16}\omega},$$

$$K = \frac{\operatorname{sh}\beta \sin\beta}{\operatorname{sh}^2\beta \sin^2\beta + \operatorname{ch}^2\beta\cos^2\beta}, \quad L = \frac{\operatorname{ch}\beta\cos\beta}{\operatorname{sh}^2\beta\sin^2\beta + \operatorname{ch}^2\beta\cos^2\beta},$$

причем учтено, что $w(\pm 1) = 0$, $w''(\pm 1) = 0$.

Начальные микронапряжения выражаются по формулам

$$\bar{\varsigma}_1^0 = -\frac{\sqrt{3}k}{6}(1-p_0)(L \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x - K \operatorname{ch}\beta x\cos\beta x),$$

$$s_{20}^0 = -\frac{2}{3\nu}(1-p_0)(1 - K\operatorname{sh}\beta x\sin\beta x - L\operatorname{ch}\beta x\cos\beta x). \qquad (4.9)$$

При $t > 0$ уравнение равновесия (4. 4) в силу (4.5), (4.6) и (4. 9) имеет вид

$$\int_0^t \frac{\partial^4\dot{w}}{\partial x^4}\exp\left(\frac{c}{\mu}\tau\right)d\tau + 4\beta^4\int_0^t \dot{w}\exp\left(\frac{c}{\mu}\tau\right)d\tau =$$

$$= \frac{8\beta^4 k}{3c}\left[\exp\left(\frac{c}{\mu}t\right)(1-p) - (1-p_0)\right].$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$\dot{w} = \frac{2k}{3c}\left[\frac{c}{\mu}(1-p) - \frac{\partial p}{\partial t}\right] \times$$

$$\times (1 - K\operatorname{sh}\beta x\sin\beta x - L\operatorname{ch}\beta x\cos\beta x).$$

Литература

1. Берсжной И. А., Ивлев Д. Д., О влиянии вязкости на механическое поведение пластических сред. Докл. АН СССР, 1965, **163**, № 3, 595—598.
2. Быковцев Г. И., Семыкина Т. Д., О вязко-пластическом течении круглых пластин и оболочек вращения. Изв. АН СССР, Механ. и машиностр., 1964, № 4, 68—76.
3. Prager W., The Theory of Plasticity — A Survey of Recent Achievements (James Clayton Lecture). Proc. Inst. Mech. Eng., 1955, **169**, 41.

Поступило
15 II 1968

PLASTSETE-ELASTSETE-VISKOOSSETE PLAATIDE JA KOORIKUTE DEFORMEERUMISEST

I. Vainikko

Resümee

Käesolevas töös vaadeldakse plaatide ja koorikute käitumist Tresca plastsustingimusel, võttes arvesse pinge relaksatsiooni. Aluseks on võetud töös [1] esitatud plastse-elastse-viskoosse materjali mudel ja vastavad seosed pingete ja deformatsioonide vahel. Näitena on vaadeldud rõngasplaati ühtlase koormuse all ja kihilist silindrilist koorikut.

THE DEFORMATION OF PLASTIC-ELASTIC-VISCOUS PLATES AND SHELLS

I. Vainikko

Summary

The paper deals with plates and shells in Tresca's yield condition with the influence of relaxation. The basic problem concerns the model of plastic-elastic-viscous material and the relations between stresses and deformations. Annular plate under uniform load and sandwich sylindrical shell have been studied in the example.

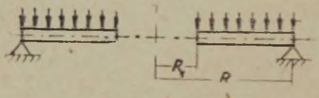
ДИНАМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИЧЕСКИ-УПРУГО-ВЯЗКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

И. Вайникко

Кафедра теоретической механики

В настоящей работе рассматриваются динамические задачи о свободно опертой кольцевой пластине и слоистой цилиндрической оболочке, подвергнутых действию равномерно распределенной нагрузки, изменяющейся с течением времени. Материал конструкции берется пластически-упруго-вязким, соответствующие соотношения даны в работе [1]. При отсутствии прогиба и скорости прогиба в момент времени $t = 0$, начальные микронапряжения считаем нулевыми.

1. Рассмотрим кольцевую пластину с внешним радиусом R и внутренним радиусом R_1, свободно опертую по внешнему контуру (фиг. 1) и нагруженную равномерным давлением $P(t)$,



Фиг. 1

обеспечивающим догрузку. Аналогичная задача для жестко-вязко-пластического материала конструкции была рассмотрена в [2].

В дальнейшем принимаются следующие обозначения:

$$\varrho_0 = \frac{R_1}{R}, \quad \varrho = \frac{r}{R}, \quad w = \frac{W}{R}, \quad M_0 = \frac{1}{4} kh^2, \quad m_i = \frac{M_i}{M_0},$$

$$q = \frac{PR^2}{M_0}, \quad \gamma = \frac{GR^3}{M_0},$$

где r — текущий радиус, G — масса единицы площади пластины, W — прогиб, h — толщина пластины, t — время.

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ давление $q(0)=q_0$ превышает критическую нагрузку p_0, при которой впервые становится возможным возникновение деформаций пластинки:

$$q_0 \geqslant p_0 = 6[(1-\varrho_0)(1+2\varrho_0)]^{-1}. \tag{1.1}$$

При $t=0$ пластина является плоской и находится в покое. Таким образом,

$$w(\varrho,\ 0)=\dot{w}(\varrho,\ 0)=0, \tag{1.2}$$

где точка означает дифференцирования по времени t. Связь между моментами и скоростями деформаций берем в виде

$$\max\left|m_i-\frac{\nu}{2}\zeta_i-m_j+\frac{\nu}{2}\zeta_j\right|=1,$$

$$(i\neq j=1,\ 2,\ 3;\quad m_3=0,\quad \dot{k}_3=-\dot{k}_1-\dot{k}_2), \tag{1.3}$$

где

$$\zeta_i=c\exp\left(-\frac{c}{\mu}\mathrm{t}\right)\int_0^t\dot{k}_i\exp\left(\frac{c}{\mu}\eta\right)d\eta,\quad \nu=\frac{2h}{3kR}.$$

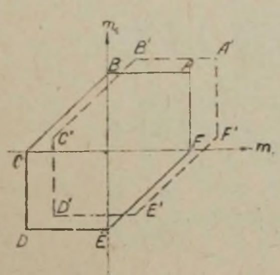
Соотношение (1.3) описывает шестиугольник в плоскости m_1m_2 (в начальный момент времени это и есть условие Треска), который изменяется при $t>0$ в зависимости от скоростей кривизн $\dot{k}_i(i=1,\ 2)$:

$$\dot{k}_1=-\frac{\partial^2\dot{w}}{\partial\varrho^2},\quad \dot{k}_2=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\dot{w}}{\partial\varrho}. \tag{1.4}$$

Для кольцевой пластины при заданных условиях выбираем режим AB первоначального условия пластичности (фиг. 2), для которого (1.3) примет вид

$$m_2=1+\nu\zeta_2. \tag{1.5}$$

Ассоциированный закон течения в данном случае дает, что $\dot{k}_1=0$, из которого следует на основе соотношения (1.4) и начальных условий, что



Фиг. 2

$$\dot{w} = \dot{w}_1(1-\varrho), \tag{1.6}$$

где $\dot{w}_1$ есть функция от времени t.

Уравнение движения элемента пластины имеет вид

$$\frac{\partial m_1}{\partial \varrho} + \frac{m_1 - m_2}{\varrho} = -\frac{1}{\varrho}\int\limits_{\rho_0}^{\rho} [q(t) + \gamma\ddot{w}]\varrho d\varrho. \tag{1.7}$$

Подставим в уравнение (1.7) значения момента m_2 и ускорения прогиба $\ddot{w}$, получаемые из соотношений (1.5) и (1.6). Получим дифференциальное уравнение для вычисления момента m_1, решение которого

$$m_1 = \frac{1}{\varrho}\Big\{\varrho - 1 + c\nu \exp\left(-\frac{c}{\mu}t\right)\ln\varrho\int\limits_0^t \dot{w}_1 \exp\left(\frac{c}{\mu}\eta\right)d\eta +$$

$$+\frac{q}{6}(1-\varrho^3+3\varrho\varrho_0^2-3\varrho_0^3)+$$

$$+\frac{\gamma\ddot{w}_1}{12}(1-\varrho)(\varrho^3-\varrho^2-\varrho-1-4\varrho_0^3+6\varrho_0^2)\Big\}, \tag{1.8}$$

где учтено, что $m_1=0$ при $\varrho=1$. Условие $m_1=0$ при $\varrho=\varrho_0$ дает уравнение для определения функции $\dot{w}_1(t)$ в виде

$$\dddot{w}_1 + \frac{c}{\mu}\ddot{w}_1 + \frac{cB}{A}\dot{w}_1 = \frac{1}{Ap_0}\left(\frac{c}{\mu}q - \frac{\partial q}{\partial t}\right) - \frac{c}{A\mu}, \tag{1.9}$$

где

$$A = \frac{1}{12}\gamma(1-\varrho_0)^2(1+3\varrho_0), \qquad B = -\frac{\nu\ln\varrho_0}{1-\varrho_0}.$$

Дифференциальное уравнение (1.9) надо решать при начальных условиях $\dot{w}_1(0)=0$ и $\ddot{w}_1(0)=(1/A)(q/p_0-1)$. Вид решения уравнения (1.9) зависит от параметров материала, т. е., от знака величины $(c/\mu)^2 - 4cB/A$.

А. При

$$\lambda^2 = \left(\frac{c}{\mu}\right)^2 - 4\frac{cB}{A} > 0:$$

$$\dot{w}_1(t) = \frac{1}{A\lambda}\Big\{\left(\frac{q}{p_0}-1\right)\Big[\exp\left(\frac{t}{2}\left(-\frac{c}{\mu}+\lambda\right)\right) -$$

$$-\exp\left(\frac{t}{2}\left(-\frac{c}{\mu}-\lambda\right)\right)\Big]+$$

$$+2\int\limits_0^t\Big[\frac{1}{p_0}\left(\frac{c}{\mu}q(\eta)+\frac{\partial q}{\partial\eta}\right)-$$

$$-\frac{c}{\mu}\Big]\exp\left(\frac{c}{2\mu}(\eta-t)\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\lambda}{2}(t-\eta)\right)d\eta\Big\}. \tag{1.10a}$$

Б. При

$$\lambda^2 = 4\frac{cB}{A} - \left(\frac{c}{\mu}\right)^2 > 0:$$

$$\dot{w}_1(t) = \frac{2}{A\lambda}\left\{\left(\frac{q}{p_0} - 1\right)\exp\left(-\frac{c}{2\mu}t\right) + \right.$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{1}{p_0}\left(\frac{c}{\mu}q(\eta) + \frac{\partial q}{\partial \eta}\right) - \frac{c}{\mu}\right]\exp\left(\frac{c}{2\mu}(\eta - t)\right)\cdot$$

$$\left.\cdot \sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-\eta)\right)d\eta\right\}. \qquad (1.10б)$$

В. При

$$4\frac{cB}{A} = \left(\frac{c}{\mu}\right)^2:$$

$$\dot{w}_1(t) = \frac{1}{A}\left\{\left(\frac{q}{p_0} - 1\right)\exp\left(-\frac{c}{2\mu}t\right) + \right.$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{1}{p_0}\left(\frac{c}{\mu}q(\eta) + \frac{\partial q}{\partial \eta}\right) - \frac{c}{\mu}\right]\cdot$$

$$\left.\cdot (t-\eta)\exp\left(\frac{c}{2\mu}(\eta - t)\right)d\eta\right\}. \qquad (1.10в)$$

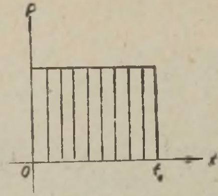
Если нагрузка q начнет уменьшаться, то движение пластины прекратится в момент времени $t = t_1$, при котором $\dot{w}_1(t_1) = 0$. Прогиб пластины определяется интегрированием соотношений (1.6) и (1.10) при условии, что $w(\varrho, 0) = 0$, остаточный прогиб задается величиной прогиба в момент времени $t = t_1$.

Если в некоторый момент времени $t_0 < t_1$ нагрузка снимается, то необходимо рассматривать два промежутка времени: 1) $q = q(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$, 2) $q = 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В первой фазе справедливы решения (1.6), (1.8) и (1.10), во второй фазе интегралы, входящие в соотношения (1.10), переходят в определенные с верхним пределом $t = t_1$.

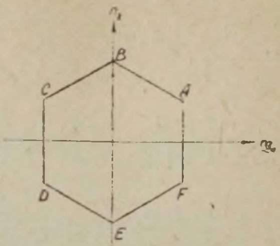
Полученное решение справедливо только при условии, что напряженное состояние в пластине нигде в конечной области не соответствует режиму A фиг. 2.

2. Рассмотрим слоистую цилиндрическую оболочку радиуса R и длины $2L$, опертую по торцам и нагруженную внутренним давлением $P = \text{const}$ при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ и $P = 0$ при $t > t_0$ (фиг. 3). Оболочка толщины $2H$ состоит из двух несущих слоев толщины δ. Примем, что напряжения и деформации не меняются по толщине слоев. Введем безразмерные величины:

$$p = \frac{PR}{2k\delta}, \quad m_i = \frac{M_i}{kH\delta}, \quad n_i = \frac{N_i}{2k\delta}, \quad x = \frac{X}{L},$$



Фиг. 3



Фиг. 4

$$\omega^2 = \frac{L^2}{RH}, \qquad w = \frac{W}{R}, \qquad a = \frac{GR^2}{2k\delta}, \qquad (i = 1, 2),$$

где X — координата вдоль оболочки, W — прогиб, G — масса элемента с единичной площадью срединной поверхности.

Пусть на оболочку действует внутреннее давление $p > 1$, при котором возникает пластическое течение. Определяющие уравнения запишутся в виде

$$n_1 = 0, \qquad \frac{1}{2\omega^2}\frac{\partial^2 m_1}{\partial x^2} + n_2 - p - a\ddot{w} = 0. \tag{2.1}$$

В данном случае получаем первоначальное условие текучести на плоскости $m_1 n_2$ в виде шестиугольника $ABCDEF$ (фиг. 4), так как $n_1 \equiv 0$ (см. [1]). Предположим, что напряженное состояние соответствует точке B (на фиг. 4) в верхнем и нижнем слоях оболочки (это справедливо для достаточно длинной оболочки). Соответствующие соотношения между обобщенными напряжениями и деформациями примут вид

$$n_2 = 1 + \frac{3}{2}\nu \exp\left(-\frac{c}{\mu}t\right)\int_0^t \dot{e}_{20} \exp\left(\frac{c}{\mu}\eta\right) d\eta,$$

$$m_1 = 8\nu \exp\left(-\frac{c}{\mu}t\right)\int_0^t \dot{k}_1 \exp\left(\frac{c}{\mu}\eta\right) d\eta, \tag{2.2}$$

где

$$\dot{e}_{20} = -\dot{w}, \quad \dot{k}_1 = -\frac{1}{2\omega^2}\frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial k^2}, \quad \nu = \frac{2k}{3c}.$$

После подстановки (2.2) в (2.1) получаем интегро-дифференциальное уравнение для определения скорости прогиба:

$$\int_0^t \frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial x^4} \exp\left(\frac{c}{\mu}\eta\right) d\eta + 4\beta^4 \int_0^t \dot{w} \exp\left(\frac{c}{\mu}\eta\right) d\eta =$$

$$= 4\beta^4 (1 - p - a\ddot{w}) \nu \exp\left(\frac{c}{\mu} t\right), \tag{2.3}$$

где $4\beta^4 = \frac{3}{4}\omega^4$. Дифференцируя обе части уравнения (2.3), получим

$$\frac{\partial^4 \dot{w}}{\partial x^4} + 4\beta^4 \dot{w} = 4\beta^4 \frac{\nu c}{\mu} (1 - p - a\ddot{w}) - 4\beta^4 \nu a \dddot{w} \tag{2.4}$$

и условие, что $\ddot{w} = (1 - p)/a$ при $t = 0$. Решение этого динамического уравнения ищем в виде

$$\dot{w} = \dot{w}_1 + \dot{w}_2, \tag{2.5}$$

где $\dot{w}_1$ — решение статического уравнения равновесия, $\dot{w}_2$ — решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^4 \dot{w}_2}{\partial x^4} + 4\beta^4 \dot{w}_2 + 4\beta^4 \nu a \left(\frac{c}{\mu} \ddot{w}_2 + \dddot{w}_2\right) = 0. \tag{2.6}$$

Для нашей задачи имеем [1]

$$\dot{w}_1 = \nu \frac{c}{\mu} (1 - p)(1 - K \operatorname{sh} \beta x \sin \beta x - L \operatorname{ch} \beta x \cos \beta x), \tag{2.7}$$

где

$$K = \frac{\operatorname{sh} \beta \sin \beta}{\operatorname{sh}^2 \beta \sin^2 \beta + \operatorname{ch}^2 \beta \cos^2 \beta}, \quad L = \frac{\operatorname{ch} \beta \cos \beta}{\operatorname{sh}^2 \beta \sin^2 \beta + \operatorname{ch}^2 \beta \cos^2 \beta}.$$

Решение уравнения (2.6) найдем при условии, что

$$\dot{w}_2(\pm 1, t) = 0, \qquad \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(\pm 1, t) = 0,$$

$$\dot{w}_2(x, 0) = -\dot{w}_2(x, 0), \qquad \ddot{w}_2(x, 0) = \frac{1 - p}{a}. \tag{2.8}$$

Решение уравнения (2.6) определяется методом разделения переменных:

$$\dot{w}_2 = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t).$$

Получаем систему из двух уравнений

$$\frac{\partial^4 X}{\partial x^4} + 4\beta^4 X = \lambda X,$$

$$\ddot{T} + \frac{c}{\mu} \dot{T} + \frac{\lambda}{4\beta^4 \nu a} T = 0. \tag{2.9}$$

Решение первого уравнения (2.9) имеет вид

$$X_n(x) = \sin n\pi \frac{x+1}{2}, \quad n = 1, 2 \ \ldots, \tag{2.10}$$

которое удовлетворяет и граничным условиям

$$X(\pm 1) = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(\pm 1) = 0.$$

Из (2.10) и (2.9) можем определить λ:

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^4 + 4\beta^4. \tag{2.11}$$

Решение уравнения (2.9), с учетом (2.11), зависит от знака величины

$$\xi_n = \frac{c^2}{4\mu^2} - \frac{1}{\nu a}\left(\frac{n^4\pi^4}{64\beta^4} + 1\right).$$

Рассмотрим случай, когда величина $\xi_n < 0$. Тогда решение второго уравнения (2.9) имеет вид

$$T_n = \exp\left(-\frac{c}{2\mu}t\right)(C_n \cos a_n t + D_n \sin a_n t),$$

где

$$a_n i = \sqrt{\frac{c^2}{4\mu^2} - \frac{1}{\nu a}\left(\frac{n^4\pi^4}{64\beta^4} + 1\right)}.$$

Величины C_n и D_n определяются из условий (2.8):

$$C_n = \mathcal{E}_n(p-1),$$

$$D_n = \mathcal{E}_n \frac{p-1}{\lambda a_n}\left(a_n^2 - \frac{c^2}{4\mu^2}\right), \tag{2.12}$$

где

$$\mathcal{E}_n = \frac{4\nu c}{\mu n\pi}\left(\frac{n^4\pi^4}{64\beta^4} + 1\right)^{-1} \sin\frac{n\pi}{2}.$$

Таким образом, скорость прогиба имеет вид

$$\dot{w} = \nu\frac{c}{\mu}(1-p)(1 - K \operatorname{sh}\beta x \sin\beta x - L \operatorname{ch}\beta x \cos\beta x) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi\frac{x+1}{2}\right)\exp\left(-\frac{c}{2\mu}t\right)(C_n \cos a_n t + D_n \sin a_n t). \tag{2.13}$$

После снятия нагрузки в момент времени $t = t_0$ в уравнениях движения (2.1) необходимо положить $p = 0$. Начальные условия для полученного уравнения задаются выражением скорости прогиба (2.13), вычисленным при $t = t_0$. Скорость прогиба оболочки при $t > t_0$ получаем в следующем виде:

$$\dot{w} = v\frac{c}{\mu}(1 - K\,\mathrm{sh}\,\beta x \sin\beta x - L\,\mathrm{ch}\,\beta x \cos\beta x) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi\frac{x+1}{2}\right)\exp\left(-\frac{c}{2\mu}t\right)(C_n'\cos a_n t + D_n'\sin a_n t), \quad (2.14)$$

где

$$C_n' = C_n + \mathscr{E}_n \frac{p}{a_n}\exp\left(\frac{c}{2\mu}t_0\right)\left(\frac{c}{2\mu}\sin a_n t_0 - a_n\cos a_n t_0\right),$$

$$D_n' = D_n - \mathscr{E}_n \frac{p}{a_n}\exp\left(\frac{c}{2\mu}t_0\right)\left(a_n\sin a_n t_0 + \frac{c}{2\mu}\cos a_n t_0\right).$$

Движение оболочки прекратится в момент времени t_1, при котором скорость прогиба (2.14) станет равной нулю. Остаточный прогиб оболочки дается величиной прогиба в момент времени $t = t_1$.

Литература

1. Вайникко И., О деформировании пластически-упруго-вязких пластин и оболочек. Настоящий сборник, стр. 226—235.
2. Семыкина Т. Д., Некоторые задачи теории деформирования конструкций из вязко-пластического материала. Автореферат дисс., Воронеж, 1965.

Поступило
14 V 1968

PLASTSETE-ELASTSETE-VISKOOSSETE RÕNGASPLAATIDE JA SILINDRILISTE KOORIKUTE DÜNAAMILINE PAINE

I. Vainikko

Resümee

Käesolevas artiklis vaadeldakse vabalt toetatud rõngasplaati ühtlaselt jaotatud ajas muutuva koormuse all ja kihilist silindrilist koorikut ühtlasel siserõhul, mis mõjub koorikule teatud ajavahemikus $0 \leqslant t \leqslant t_0$, kui konstruktsiooni materjali käitumist iseloomustab plastne-elastne-viskoosne mudel [1].

THE DYNAMICAL BENDING OF PLASTIC-ELASTIC-VISCOUS ANNULAR PLATES AND CYLINDRICAL SHELLS

I. Vainikko

Summary

The paper deals with a simply supported annular plate under uniform load, which varies in time, and sandwich cylindrical shell under uniform pressure that remains constant during the time interval $0 \leqslant t \leqslant t_0$. Material of the constructions is plastic-elastic-viscous [1].

СОДЕРЖАНИЕ — SISUKORD

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ
VIII
На русском языке
Резюме на эстонском, немецком и английском языках
Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18

Ответственный редактор С. Барон
Корректоры Л. Аболдуева. А. Норберг, Г. Лийв и Ф. Киббермани

Сдано в набор 20/II 1968 г. Подписано к печати 26/IX 1958 г. Бумага фабрики «Кохила», типографская № 1. 60 × 90. 1/16. Печ. листов 15,5
Учетно-издат. листов 17,5. Тираж 500 экз.
МВ-06560. Заказ № 1474.
Типография им. Ханса Хейдеманна, ЭССР.
г. Тарту, ул. Юликооли 17/19. II

Цена 1 руб 20 коп