



TARTU RIIKLIK ÜLICOOL

---

E. Tamme, G. Vainikko

MATEMAATILISE FÜÜSIKA  
VÕRRANDID

1

TARTU 1973

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

Arvutusmatemaatika kateeder

E.Tamme, G.Vainikko

MATEMAATILISE FÜÜSIKA  
VÕRRANDID

I

TARTU 1973

Kinnitatud Matemaatikateaduskonna nõukogus 23. märtsil 1973.

## SISUKORD

KESSÕNA .....	7
I. MATEMAATILISE FÜÜSIKA ÜLESANNETE KLASSIFIKATSIOON .....	9
§ 1. Mõningad tüüpilised matemaatilise füüsika võrrandid .....	9
1. Keele võnkumise võrrand .....	9
2. Membraani võnkumise võrrand .....	13
3. Akustika võrrand .....	13
4. Üldine lainevõrrand .....	13
5. Soojustjuhtivuse võrrand .....	14
6. Laplace'i ja Poissoni võrrandid .....	18
§ 2. Teist järku võrrandite klassifikatsioon .....	19
1. Lineaarsed ja kvaasilineaarsed võrrandid .....	19
2. Kahe sõltumatu muutujaga võrrandite klassifikatsioon .....	21
3. Klassifikatsioon $n$ sõltumatu muutuja korral .....	28
4. Karakteristlikud pinnad .....	33
5. Esimest järku võrranditest moodustatud süsteemide klassifikatsioon .....	36
§ 3. Matemaatilise füüsika ülesannete seade..	39
1. Cauchy ülesanne, rajaülesanne ja segaülesanne .....	39
2. Ülesande seade korrektsus .....	46
3. Näide. Lõpmatu keele võnkumise ülesande seade korrektsus .....	47
4. Kovalevskaja teoreem .....	50
5. Näide mittekorrektsest seatud ülesande kohta .....	51

II. DISTRIBUTSIOONID .....	53
§ 4. Distributsioonid ja üldistatud tuletised .....	53
1. Põhifunktsioonide ruum $\mathcal{D}$ .....	53
2. Distributsioonide ruum $\mathcal{D}'$ .....	58
3. Distributsiooni ja funktsiooni korrutis .....	62
4. Distributsioonide tuletised .....	64
§ 5. Distributsioonide struktuurist .....	68
1. Finiitse distributsiooni esitus regulaarsete distributsioonide tuletiste summana .....	68
2. Distributsioonide lokaalselt lõplikud read .....	73
3. Suvalise distributsiooni esitus regulaarsete distributsioonide tuletiste summana .....	75
4. Ühepunktilise kandjaga distributsiooni struktuur .....	77
§ 6. Distributsioonide tensorkorrutis ja konvolutsioon .....	78
1. Distributsioonide tensorkorrutis ...	78
2. Tensorkorrutise omadusi .....	80
3. Funktsioonide konvolutsioon .....	82
4. Distributsioonide konvolutsioon ....	85
5. Finiitse distributsiooni juhtum ....	87
6. Üldisem piisav tingimus konvolutsiooni eksisteerimiseks .....	89
§ 7. Aeglaselt kasvavad distributsioonid ...	93
1. Põhifunktsioonide ruum $\mathcal{Y}$ .....	93
2. Distributsioonide ruum $\mathcal{Y}'$ .....	95
3. Aeglaselt kasvavate distributsioonide struktuurist .....	98
4. Aeglaselt kasvavate distributsioonide tensorkorrutis .....	101
5. Aeglaselt kasvavate distributsioonide konvolutsioon .....	103

§ 8. Fourier' teisendus .....	105
1. Kiirelt kahanevate funktsioonide Fourier' teisendus .....	105
2. Näide (funktsiooni $e^{-a^2 \ x\ ^2}$ Fourier' teisendus) .....	107
3. Fourier' pöördteisendus .....	109
4. Aeglaselt kasvavate distributsiooni- de Fourier' teisendus ja pöördteisen- dus .....	112
5. Fourier' teisenduse omadusi .....	114
6. Finiitsete distributsioonide Fourier' teisendus .....	116
7. Konvolutsiooni Fourier' teisendus..	117
8. Näiteid Fourier' teisenduse arvuta- mise kohta .....	118
III. CAUCHY ÜLESANNE .....	123
§ 9. Lineaarse diferentsiaaloperaatori fun- damentaallahend .....	123
1. Diferentsiaalvõrrandi üldistatud lahend .....	123
2. Konstantsete kordajatega diferentsi- aaloperaatori fundamentaallahend ..	125
3. Hariliku diferentsiaaloperaatori fundamentaallahend .....	128
4. Soojusjuhtivuse operaatori fundamen- taallahend .....	130
5. Laineoperaatori fundamentaallahend	131
§ 10. Cauchy ülesanne soojusjuhtivuse võrran- di jaoks .....	133
1. Soojusjuhtivuse operaatori fundamen- taallahendi omadusi .....	133
2. Cauchy ülesande lahendamine hariliku diferentsiaalvõrrandi korral .....	136
3. Üleminek Cauchy ülesandelt üldistatud Cauchy ülesandele .....	139
4. Üldistatud Cauchy ülesande lahendami- ne .....	142
5. Soojuspotentsiaal V .....	144

6. Soojuspotentsiaal $v^{(0)}$ .....	147
7. Üldistatud Cauchy ülesande seade korrektsus .....	150
8. Klassikalise Cauchy ülesande seade korrektsusest .....	151
§ 11. Cauchy ülesanne lainevõrrandi jaoks ...	155
1. Üleminek Cauchy ülesandelt üldistatud Cauchy ülesandele .....	155
2. Üldistatud Cauchy ülesande korrektsus	156
3. Potentsiaal $V$ .....	160
4. Potentsiaalid $v^{(0)}$ ja $v^{(1)}$ .....	164
5. Klassikalise Cauchy ülesande seade korrektsus ( $n=3$ ) .....	168
6. Poissoni valem .....	171
7. D'Alemberti valem .....	173
8. Aja pööratavus lainevõrrandis .....	175
9. Lainete levimine .....	175
KIRJANDUS .....	183
1. Õpikud matemaatilise füüsika võrrandite kohta .....	183
2. Täiendav kirjandus osatuletistega võrrandite kohta .....	183
3. Ülesannete kogud .....	184
4. Muud viited .....	184
AINEREGISTER .....	185

## EESÕNA

Matemaatilise füüsika eesmärgiks on mitmesuguste füüsikaliste protsesside kirjeldamine diferentsiaalvõrrandite abil, nende võrrandite täpne või ligikaudne lahendamine ning lahendite omaduste uurimine ja füüsikaline interpreteerimine. On kujunenud tavaks lülitada matemaatilise füüsika võrrandite hulka vaid osatuletistega diferentsiaalvõrrandeid ja mitte lülitada sinna harilikke diferentsiaalvõrrandeid. Niisiis võib matemaatilise füüsika võrrandite kursust vaadelda kui osatuletistega diferentsiaalvõrrandite teooria osa, milles asetatakse pearõhk konkreetsete, füüsikalisi protsesse kirjeldavate võrrandite uurimisele.

Kaheosaline loengukonspekt, mille esimese osa lugeja praegu avas, sisaldab põhilise osa matemaatilise füüsika võrrandite kursuse materjalist, mida NSVL ülikoolides kehtiv õppeprogramm näeb selles aines ette puht- ja rakendusmatemaatikutele. Mõned küsimused, näiteks distributsioonide teooria, on programmi nõuetega võrreldes leidnud põhjalikuma käsitluse.

Mõni sõna muust kirjandusest matemaatilise füüsika võrrandite kohta (vt. kirjanduse loetelu konspekti lõpus). Eestikeelne E.Reimersi loengukonspekt [9] sisaldab kehtivate

programmidega võrreldes vähe materjali. Venekeelsetest õpikutest soovitame lugejale eriti A.N.Tihhonovi ja A.A.Samarski õpikut [8], milles on palju huvitavat materjali konkreetsete võrrandite ning nende füüsikalise tagapõhja kohta. Käesolev konspekti esimene osa vastab kõige enam V.S.Vladimirovi õpiku [1] vaimule. Konspektis ei leia käsitlust matemaatilise füüsika võrrandite ligikaudsed lahendusmeetodid. Nendes küsimustes soovitame pöörduda E.Tamme õpiku [22] poole. Monograafiatest [10], [12], [13] võib leida osatuletistega võrrandite üldise teooria käsitluse; monograafiates [11] ja [15] tugineb käsitus funktsionaalanalüüsile.

Hoiatame lugejat, et käesolev konspekt ei järgi sageli loengute järjekorda ega mahtu. Päris kindlasti osutub konspekt ülejõukäivaks hurraa-üliõpilasele, kes pole aasta jooksul regulaarselt külastanud loenguid ega töötanud ka iseseisvalt, vaid loodab ainult eksamieelsetele nädalatele.

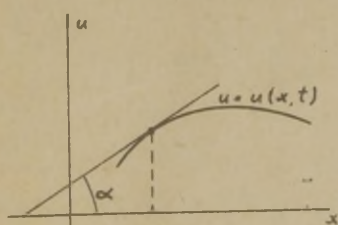
Mõningad vähem olulised märkused ja raskemad tõestused on konspektis eraldatud märkidega [•] ja [•]. Laisem lugeja võib vastava osa materjalist vahele jätta, ilma et see kahjustaks edaspidist arusaamist.

**I. MATEMAATILISE FÜÜSIKA ÜLESANNETE  
KLASSIFIKATSIOON**

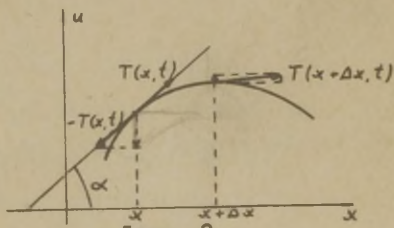
§ 1. Mõningad tüüpilised matemaatilise füüsika võrrandid

1. Keele võnkumise võrrand. Keele all mõistame elastset painduvat niiti. Tuletame keele ristvõnkumise võrrandi.

Olgu pinguletõmmatud keele tasakaaluasendiks  $x$ -telg. Oletame, et keel on mingite väliste jõududega tasakaaluasendist välja viidud ja võngub  $xu$ -tasandis; tähistagu  $u(x,t)$  keele punkti  $x$  kõrvalekallet tasakaaluasendist ajamomendil  $t$  (vt. joon. 1). Me piirdume vaid keele väikeste ristvõnkumiste



Joon. 1.



Joon. 2.

käsitlemisega, heites tuletuskäigus kõrvale liikmed, mis on teist ja kõrgemat järku  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$  suhtes (vt. joon. 1), s.t. loeme

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = u_x^2 \approx 0. \quad (1)$$

Vaatleme keele osakest vahemikus  $(x, x+\Delta x)$ . Keele osakese pikkus

$$\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_x^2} dx \approx \int_x^{x+\Delta x} dx = \Delta x$$

jääb (1) tõttu võnkumisel konstantseks (ei sõltu ajast).

Hooke'i seaduse põhjal on siis ka keele suvalises punktis  $x$  mõjuva pingvektori  $T(x, t)$  pikkus sõltumatu ajast  $t$  ja kohast  $x$ :

$$|T(x, t)| = T_0 = \text{const.}$$

Keele elastsuse tõttu on pingejõud  $T(x, t)$  summatud piki keele puutujat. Keele osakesele mõjub summaarne pingejõud (vt. joon. 2)

$$T(x+\Delta x, t) - T(x, t).$$

Risti  $x$ -teljega mõjub pingejõu komponent (vt. joon. 2)

$$\bar{T}_0 \sin \alpha \Big|_{x+\Delta x} - T_0 \sin \alpha \Big|_x \approx T_0 [u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)].$$

Viimase ligikaudse võrduse tuletamisel kasutasime seost (vt. (1))

$$\sin \alpha = \frac{\text{tg } \alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2 \alpha}} \approx \text{tg } \alpha = u_x.$$

Piki  $x$ -telge mõjuva komponendi

$$T_0 \cos \alpha \Big|_{x+\Delta x} - T_0 \cos \alpha \Big|_x \approx 1 - 1 = 0$$

võime jätta arvestamata, sest (vt. (1))

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2 \alpha}} \approx 1.$$

Peale pingejõudude võivad keelele mõjuda välisjõud. Mõjugu

välisjõud risti  $x$ -teljega ja olgu nende tiheduseks  $F(x,t)$ . Keele osakesele mõjub siis välisjõud  $F(x,t)\Delta x$ , osakesele mõjuvaks summaarseks jõuks aga on

$$T_0 [u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)] + F(x, t)\Delta x$$

ning see mõjub risti  $x$ -teljega.

Newtoni II seaduse põhjal on keele osakesele mõjuv resultantjõud võrdne keele osakese massi ja kiirenduse korru-tisega. Olgu  $\rho(x)$  keele lineaarne tihedus, siis keele osa-kese massiks on  $\rho(x)\Delta x$ . Keele osakese kiirenduseks on  $u_{tt}(x, t)$ . Seega saame Newtoni II seaduse põhjal

$$T_0 [u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t)] + F(x, t)\Delta x = \rho(x)\Delta x \cdot u_{tt}(x, t).$$

Jagades võrduse mõlemad pooled läbi suurusega  $\Delta x$  ja minnes seejärel piirile  $\Delta x \rightarrow 0$ , leiame

$$T_0 u_{xx} + F(x, t) = \rho(x)u_{tt}$$

ehk

$$u_{tt} = k(x)u_{xx} + f(x, t), \quad (2)$$

kus

$$k(x) = \frac{T_0}{\rho(x)} > 0, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho(x)}.$$

Võrrandit (2) nimetatakse keele väikeste ristvõnkumiste võrrandiks, lühemalt keele võnkumise võrrandiks. Kui keel on homogeenne, siis  $\rho(x) = \rho = \text{const}$  ja võrrand (2) lihtsustub kujule

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (3)$$

kus  $a^2 = \frac{T_0}{\rho} = \text{const}$ . Kui  $f(x, t) \equiv 0$ , kirjeldavad võrrandid (2) ja (3) keele vaba võnkumist (keelele mõjuvad välisjõud puuduvad). Kui  $f(x, t) \neq 0$ , kõneldakse sundvõnkumistest.

Vaatleme keele vaba võnkumise võrrandit

$$u_{tt} = k(x)u_{xx}. \quad (4)$$

Seda võrrandit rahuldab keele hälve  $u(x,t)$ , kui me viime keele tasakaaluasendist mingisse algasendisse

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (5)$$

ja, andnud keelele mingid algkiirused

$$u_t(x,0) = u_1(x), \quad (6)$$

laseme ta lahti. Võrrand (4) ja algtingimused (5), (6) ei võimalda üldiselt funktsiooni  $u(x,t)$  üheselt määrata. Et lahend oleks ühene, on vaja fikseerida veel režiim keele otspunktides. Näiteks, kui keel on kinnitatud punktides  $x=0$  ja  $x=1$ , lisanduvad algtingimustele (5) ja (6) veel nn. rajatingimused

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0. \quad (7)$$

Lõpmatu keele korral (keel katab kogu  $x$ -telje) rajatingimusi ei ole vaja esitada. Kui keel on poollõpmatu (katab  $x$ -telje positiivse osa), tuleb esitada vaid üks rajatingimus punktis  $x=0$ .

Samasugused alg- ja rajatingimused võivad kaasneda ka sundvõnkumise võrrandiga (2) või (3).

Märgime, et tuletatud võrrandid kirjeldavad keele võnkumist vaid ligikaudselt (ja seda täpsemalt, mida väiksemad need võnkumised on - vt. eeldust (1)). Seetõttu ei või me füüsikalisi kaalutlusi lahendi olemasolu ja ühesuse kohta automaatselt üle kanda vastavat protsessi kirjeldavatele võrranditele. Näiteks on füüsikaliste kaalutluste põhjal alust

arvata, et ülesandel  $\{(4), (5), (6), (7)\}$  on ühene lahend, kuid selline väide vajab siiski ranget matemaatilist põhjendust.

2. Membraani võnkumise võrrand. Membraani väikesi ristvõnkumisi kirjeldab võrrand

$$\rho u_{tt} = T_0(u_{xx} + u_{yy}) + F. \quad (8)$$

Suuruste  $u = u(x, y, t)$ ,  $\rho = \rho(x, y)$ ,  $T_0 = \text{const}$  ja  $F = F(x, y, t)$  tähendus on küllalt selge analoogia põhjal võnkumise keele juhuga. Ka võrrandi (8) tuletus on analoogiline keele võnkumise võrrandi tuletusega ja me ei peatu sellel.

Kui  $\rho(x, y) = \text{const}$  (homogeenne membraan), omandab võrrand (8) kuju

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, t), \quad (9)$$

kus  $a^2 = \frac{T_0}{\rho} = \text{const}$ .

3. Akustika võrrand. Tähistagu  $u = u(x, y, z, t)$  gaasi tihedust (või rõhku) punktis  $(x, y, z)$  ajamomendil  $t$ . Osutub, et teatud lihtsustavatel eeldustel rahuldab funktsioon  $u$  võrrandit

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad (10)$$

kus  $a^2 = \text{const}$ . Seda võrrandit nimetatakse sageli akustika võrrandiks. Tema tuletusel me ei peatu; tuletuse võib leida õpikust [8].

4. Üldine lainevõrrand. Võrrandid (3), (9) ja (10) on vastavalt ühe-, kahe- ja kolmemõõtmelised erijuhud nn. lainevõrrandist

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n}) + f(x_1, x_2, \dots, x_n, t). \quad (11)$$

Lainevõrrandi lühemaks kirjutusviisiks on

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f,$$

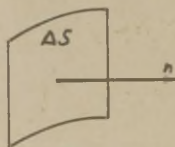
kus

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x_1^2} + \frac{\partial}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n^2}$$

on Laplace'i operaator.

5. Soojusjuhtivuse võrrand. Tuletame soojusjuhtivuse võrrandi isotroopse tahke keha jaoks. Keha isotroopsus tähendab antud juhul, et keha juhib soojust kõikides suundades ühtemoodi.

Olgu  $u(x, y, z, t)$  keha temperatuur punktis  $(x, y, z)$  ajamomendil  $t$ . Kui keha eri osade temperatuur on erinev, siis hakkab soojus levima kuumematelt osadelt külmematele. Vaatleme kehas mingit pinnaelementi, mille pindala olgu  $\Delta S$  ja normaal  $n$  (joon. 3). Soojusjuhtivuse teoorias on aluseks seadus, mille kohaselt pinnatükikest aja  $\Delta t$  jooksul läbinud soojushulk  $\Delta Q$  on võrdeline pindalaga  $\Delta S$ , ajaga  $\Delta t$  ja temperatuurivälja muutumise kiirusega  $\frac{\partial u}{\partial n}$  suunas  $n$  (peetakse silmas "ruumilist" muutumist fikseeritud  $t$  korral):



Joon. 3.

$$\Delta Q = -k \cdot \Delta S \cdot \Delta t \cdot \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Võrdetegur  $k = k(x, y, z) > 0$  kannab soojusjuhtivuse kordaja nime; tänu keha isotroopsusele ei sõltu  $k$  suunast  $n$ . Kuna soojus levib keha jahedamate osade suunas, siis positiivse  $\Delta Q$  korral on  $\frac{\partial u}{\partial n} < 0$  - sellega on seletatav miinusmärk esitatud valemis.

Olgu keha osa  $V$  piiratud (kinnise) pinnaga  $S$ . Ajavahemikus  $(t_1, t_2)$  siseneb sellesse soojushulk

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n_S} dS = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k \frac{\partial u}{\partial n} dS,$$

kus  $n_S$  on pinna  $S$  sisenormaal,  $n$  aga välisnormaal. Ostrogradski valemi abil teisendame viimase avaldise kujule

$$Q_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (ku_x) + \frac{\partial}{\partial y} (ku_y) + \frac{\partial}{\partial z} (ku_z) \right\} dV.$$

Peale selle võib keha saada juurde soojust või neelata soojust sisemiste soojusallikate arvel. Olgu  $F(x, y, z, t)$  "soojusallikate tihedus": ajavahemikus  $(t_1, t_2)$  eraldub keha osasse  $V$  soojushulk

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F(x, y, z, t) dV;$$

funktsioon  $F$  võib olla ka negatiivne - sel juhul on tegemist soojuse neelamisega.

Kokku siseneb ajavahemikus  $(t_1, t_2)$  keha osasse  $V$  soojushulk  $Q = Q_1 + Q_2$ . Selle tagajärjel muutub temperatuur  $\Delta u = u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)$  ühiku võrra. Temperatuuri muutuseks kulunud soojushulga  $Q$  arvutame nüüd veel teisel viisil, lähtudes keha soojusmahtuvusest  $\gamma(x, y, z)$  ja tihedusest  $\rho(x, y, z)$ . Kui  $\Delta V$  on keha väikese osakese ruumala, siis  $\rho \Delta V$  on osakese mass ning osakese temperatuuri muutmiseks  $\Delta u$  ühiku võrra kulub soojushulk

$$\Delta Q = \gamma \cdot \Delta u \cdot \rho \Delta V.$$

Seega

$$Q = \iiint_V \gamma [u(x, y, z, t_2) - u(x, y, z, t_1)] \rho dV$$

ehk Newton-Leibnitzi valemi põhjal

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \gamma \rho u_t \, dV.$$

Võrdusest  $Q - Q_1 - Q_2 = 0$  saame nüüd

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \left\{ \gamma \rho u_t - \frac{\partial}{\partial x} (k u_x) - \frac{\partial}{\partial y} (k u_y) - \frac{\partial}{\partial z} (k u_z) - F \right\} dV = 0.$$

Keha osa  $V$  ja ajavahemiku  $(t_1, t_2)$  suvalisuse tõttu on integraalialune funktsioon võrdne nulliga, s.t.

$$\gamma \rho u_t = \frac{\partial}{\partial x} (k u_x) + \frac{\partial}{\partial y} (k u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (k u_z) + F. \quad (12)$$

Võrrandit (12) nimetatakse soojusjuhtivuse võrrandiks.

Homogeense keha korral  $\gamma = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $k = \text{const}$  ning võrrand lihtsustub kujule

$$u_t = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \quad (13)$$

kus

$$a^2 = \frac{k}{\gamma \rho} = \text{const}, \quad f(x, y, z, t) = \frac{F(x, y, z, t)}{\gamma \rho}.$$

Selleks, et võrrandist (12). või (13) üheselt määrata temperatuuri  $u(x, y, z, t)$  mistahes ajamomendil  $t > 0$ , on vaja teada temperatuuri algjaotust kehas (algtingimust):

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z). \quad (14)$$

Peale selle on vaja teada temperatuurirežiimi keha rajapinnal  $S$ . Igale režiimile vastab oma rajatingimus. Vaatleme mõningaid tüüpilisi režiime.

1. Keha rajal hoitakse etteantud temperatuuri:

$$u|_S = \psi_1, \quad (15)$$

kus  $\psi_1 = \psi_1(x, y, z, t)$  on etteantud funktsioon, mille argumentideks on pinna  $S$  punktid ja aeg  $t$ .

2. Keha rajal antakse ette nn. soojusvoog:

$$-k \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S = \psi_2, \quad (16)$$

kus  $n$  on pinna  $S$  välisnormaal.

3. Keha rajal toimub soojusvahetus ümbritseva keskkonnaga:

$$\left[ k \frac{\partial u}{\partial n} + hu \right]_S = \psi_3, \quad (17)$$

kus  $h = h(x, y, z) > 0$  on nn. soojusvahetuse kordaja. Raja-tingimuse (17) tuletuse võib leida õpikust [8].

Kui vaatluse all on temperatuuride jaotus kogu  $xyz$ -ruumi täitvas kehas, siis antakse ette vaid algtingimus (14).

Peatume veel soojusjuhtivuse võrrandi erijuhtudel õhukele plaadile ja peene varda korral. Valime teljestiku nii, et  $z$ -telg on risti plaadile põhjadega. Kui plaat on küllalt õhuke, on temperatuuri muutused  $z$ -telje suunas väikesed, mistõttu võime lugeda, et temperatuur  $u = u(x, y, t)$  ei sõltu argumentidest  $y$  ja  $z$ . Võrrand (13) omandab sel juhul kuju

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t). \quad (18)$$

Peene varda korral võime lugeda, et  $u = u(x, t)$  ja soojusjuhtivuse võrrand võtab kuju

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t). \quad (19)$$

Võrrand (18) ei võimalda arvestada soojusvahetust plaadile põhjade ja väliskeskkonna vahel. Sama puudus on ka võrrandil (19) - ta ei arvesta soojusvahetust varda külgsellega ja väliskeskkonna vahel.

Võrrandid (13), (18) ja (19) on vastavalt kolme-, kahe- ja ühemõõtmelised erijuhud soojusjuhtivuse võrrandist

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n}) + f(x_1, \dots, x_n, t). \quad (20)$$

6. Laplace'i ja Poissoni võrrandid. Pöördume veel kord soojusjuhtivuse võrrandi (12) juurde. Kui kehas olevate soojusallikate tihedus  $F(x, y, z)$  ei sõltu ajast  $t$  ning kui ka keha rajal hoitav režiim ei sõltu ajast, siis  $t$  kasvades läheneb temperatuurijaotus  $u(x, y, z, t)$  mingile statsionaarsele (ajast sõltumatule) jaotusele  $u(x, y, z)$ . Viimane rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial}{\partial x} (ku_x) + \frac{\partial}{\partial y} (ku_y) + \frac{\partial}{\partial z} (ku_z) + F(x, y, z) = 0. \quad (21)$$

Homogeense keha korral ( $k = \text{const}$ ) võime selle võrrandi kirjutada pisut lihtsamal kujul

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z) \quad (22)$$

(Poissoni võrrand). Kui kehas pole soojusallikaid, lihtsustub võrrand veelgi:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (23)$$

(Laplace'i võrrand). Ka võrrandite (22) ja (23)  $n$ -mõõtmelisi analooge nimetatakse vastavalt Poissoni ja Laplace'i võrranditeks.

.Statsionaarse temperatuurijaotuse  $u(x, y, z)$  üheseks määramiseks võrrandist (21) tuleb keha piiraval rajapinnal  $S$  anda ette rajatingimus, mis kirjeldab (statsionaarset) soojusrežiimi rajal. Tüüpilisteks rajatingimusteks on taas (15), (16) ja (17), ainult selle erinevusega, et funktsioonid  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  ei tohi nüüd sõltuda ajast  $t$  (soojusrežiimi statsionaarsus).

## § 2. Teist järku võrrandite klassifikatsioon

1. Lineaarsed ja kvaasilineaarsed võrrandid. Teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandi üldkujuks kahe sõltumatu muutuja  $x$  ja  $y$  korral on

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Nii üldisi võrrandeid me edaspidi ei vaatle. Meie käsitlus piirdub peaaegu eranditult lineaarsete võrranditega - võrranditega, mis on lineaarsed otsitava funktsiooni  $u$  ja selle tuletiste suhtes. Lineaarse võrrandi üldkujuks kahe sõltumatu muutuja korral on

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y).$$

Erijuhul võivad võrrandi kordajad olla ka konstandid (sel juhul kõneldakse lineaarsest konstantsete kordajatega võrrandist). Kui  $f(x, y) \equiv 0$ , nimetatakse lineaarset võrrandit homogeenseks, vastasel korral aga mittehomogeenseks. Lineaarse võrrandi pealiikmeteks nimetatakse kõrgemat järku tuletistega liikmeid, nende summat

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy}$$

aga võrrandi peaosaks.

Teist järku võrrandit kujul

$$a_{11}(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + a_{22}(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

nimetatakse kvaasilineaarseks võrrandiks. Ta on lineaarne

teist järku tuletiste suhtes, kusjuures kordajad võivad peale argumentide  $x$  ja  $y$  sõltuda veel otsitavast funktsioonist  $u$  ning selle madalamat järku tuletistest  $u_x$  ja  $u_y$ .

Lineaarse võrrandi üldkujuks  $n$  sõltumatu muutuja

$x_1, \dots, x_n$  korral on

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) u_{x_i} + c(x_1, \dots, x_n) u = f(x_1, \dots, x_n).$$

Siinjuures võib üldisust kitsendamata eeldada, et võrrandi pealiikmete kordajad rahuldavad tingimust

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i, j=1, \dots, n).$$

Tõepoolest, segatuletiste  $u_{x_i x_j}$  ja  $u_{x_j x_i}$  pidevuse korral on need omavahel võrdsed, mistõttu

$$a_{ij} u_{x_i x_j} + a_{ji} u_{x_j x_i} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} u_{x_i x_j} + \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} u_{x_j x_i}$$

ja me võime võrrandi ümber kirjutada nii, et püstitatud tingimus oleks rahuldatud (uuteks kordajateks tulevad  $\bar{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \bar{a}_{ji}$ ).

Kvaasilineaarse võrrandi üldkujuks  $n$  sõltumatu muutu-

ja korral on

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) u_{x_i x_j} = f(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}).$$

Käesolevas paragrahvis võtame vaatluse alla võrrandi kujul

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} = f(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}),$$

mis on lineaarne vaid pealikkmete osas (sealjuures kordajad ei sõltu otsitavast funktsioonist ega selle tuletistest). Viimane võrrand on midagi vahepealset lineaarse ja kvaasi-lineaarse võrrandi vahel, teda nimetatakse sageli peaaegu lineaarseks võrrandiks.

2. Kahe sõltumatu muutujaga võrrandite klassifikatsioon. Vaatleme teist järku võrrandit

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1)$$

milles kordajad  $a_{11}$ ,  $a_{12}$  ja  $a_{22}$  on muutujate  $x, y$  reaalsed funktsioonid. Olgu meid huvitavas piirkonnas kordajad pidevalt diferentseeruvad, kusjuures igas punktis  $(x, y)$  vähemalt üks kordajatest erineb nullist.

Analüüsimise kõigepealt võrrandi (1) lihtsustamise võimalusi, tuues  $x, y$  asemel sisse uued sõltumatud muutujad sobivalt valitud teisendusega

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \quad (2)$$

kus  $\varphi$  ja  $\psi$  on kaks korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid. Teisenduse (2) kohta püstitame nõude, et meid huvitavas piirkonnas oleks teisenduse jakobiaan erinev nullist:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

See garanteerib teisenduse (2) pööratavuse: muutujaid  $x, y$  on võimalik üheselt avaldada  $\xi, \eta$  kaudu.

Pärast muutujate vahetust muutub  $u$  argumentide  $\xi, \eta$  funktsiooniks; arvestades, et  $\xi, \eta$  on omakorda  $x, y$  funktsioonid, leiame võrrandis (1) esinevate tuletiste jaoks järgmised avaldised:

$$u_x = u_{\xi} \xi_x + u_{\eta} \eta_x,$$

$$u_y = u_{\xi} \xi_y + u_{\eta} \eta_y,$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_{\xi} \xi_{xx} + u_{\eta} \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_{\xi} \xi_{xy} + u_{\eta} \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_{\xi} \xi_{yy} + u_{\eta} \eta_{yy}.$$

Asetades need osatuletised võrrandisse (1), teiseneb see kujule

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} = \bar{f}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}), \quad (1')$$

milles

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2,$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y,$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2.$$

Muutujate vahetuse (2) püüame valida nii, et võrrandis (1') oleks võimalikult palju kordajaid võrdsed nulliga. Näiteks,  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$ , kui valime funktsioonid  $\xi = \varphi(x, y)$  ja  $\eta = \psi(x, y)$  nii, et

$$a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 = 0$$

ja

$$a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2 = 0.$$

Viimased tingimused on rahuldatud, kui  $z = \xi(x, y)$  ja  $w = \eta(x, y)$  on osatuletistega võrrandi

$$a_{11} z_x^2 + 2a_{12} z_x z_y + a_{22} z_y^2 = 0 \quad (3)$$

lahenditeks. Sellega oleme taandanud võrrandi (1) lihtsustamise esimest järku osatuletistega võrrandi (3) lahendamisele.

Lahendades võrrandi (3) kui ruutvõrrandi  $z_x$  suhtes<sup>\*)</sup>, lahutame võrrandi (3) kaheks iseseisvaks lineaarseks homogeeneks osatuletistega võrrandiks

$$a_{11} z_x + (a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}) z_y = 0. \quad (3')$$

Meenutame ühte väidet harilike diferentsiaalvõrrandite teooriast. Nimelt, funktsioon  $z = \varphi(x, y)$  on lineaarse homogeense esimest järku osatuletistega võrrandi

$$P(x, y) z_x + Q(x, y) z_y = 0$$

mittekonstantseks lahendiks parajasti siis, kui  $\varphi(x, y) = c$  on vastava sümmeetrilise diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$$

esimeseks integraaliks (vt. [21]). Antud juhul koosneb diferentsiaalvõrrandite süsteem vaid ühest võrrandist

$$P(x, y) dy - Q(x, y) dx = 0$$

ja selle esimene integraal  $\varphi(x, y) = c$  esitab üldlahendi.

Moodustame võrranditele (3') vastavad harilikud diferentsiaalvõrrandid

$$a_{11} dy - (a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}) dx = 0. \quad (4)$$

---

<sup>\*)</sup> Me võime üldisust kitsendamata eeldada, et vaadeldavas punktis  $a_{11} \neq 0$ . Kui  $a_{11} = 0$ ,  $a_{22} \neq 0$ , on olukord sümmeetriline. Kui  $a_{11} = a_{22} = 0$ , siis  $a_{12} \neq 0$  ja me teeme võrrandis (1) eelnevalt muutujate vahetuse  $x' = x+y$ ,  $y' = x-y$ . Teisendatud võrrandis on  $u_{x', x'}$  kordaja nullist erinev (põhjendada!) ja selle võrrandi võtamegi vaatluse alla (1) asemel.

Leidnud viimaste üldlahendid  $\varphi(x,y) = c$  ja  $\psi(x,y) = c$ , on võrrandi (3) mittekonstantseteks lahenditeks  $z = \varphi(x,y)$  ja  $z = \psi(x,y)$ . Koostades leitud funktsioonide abil muutujate vahetuse (2), saame teisendatud võrrandis (1') kordajateks  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$ . Need arutlused on kahjuks korrektsed vaid juhul, kui  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ . Kui  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \equiv 0$ , langevad võrrandid (4) kokku ja meil õnnestub leida vaid üks võrrandi (3) lahend  $z = \varphi(x,y)$ , koos sellega õnnestub nulliks muuta vaid üks kordajatest  $\bar{a}_{11}$  ja  $\bar{a}_{22}$ . Veelgi selgusetum on olukord  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0$  korral. Nende küsimuste juurde me pöördume peagi tagasi.

Definitsioon. Üeldakse, et võrrand (1) on punktis  $(x,y)$ :

hüperboolset tüüpi, kui  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$  selles punktis;  
paraboolset tüüpi, kui  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$  selles punktis;  
elliptilist tüüpi, kui  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0$  selles punktis.

Üeldakse, et võrrand (1) on hüperboolset, paraboolset või elliptilist tüüpi mingis piirkonnas, kui ta on vastavat tüüpi selle piirkonna igas punktis.

Paneme tähele, et muutujate vahetus (2) ei muuda võrrandi tüüpi. See järeldeb võrdusest

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11} \bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) \Delta^2, \quad (5)$$

kus  $\Delta$  on muutujate vahetuse jakobiaan. Seose (5) tõestuseks tähistame

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

ja paneme tähele, et eespool esitatud uute kordajate  $\bar{a}_{ij}$

avaldised võib kokku võtta maatriksite võrduseks

$$\bar{A} = DAD',$$

kus prim tähendab transponeerimist. Järelikult

$$\det \bar{A} = \det A \cdot (\det D)^2,$$

millest saamegi võrduse (5).

Definitsioon. Harilikke diferentsiaalvõrrandeid (4) nimetatakse osatuletistega võrrandi (1) karakteristlikeks võrranditeks, võrrandite (4) lahendeid aga võrrandi (1) karakteristikuteks. (Seega karakteristikud on teatavad kõverad  $xy$ -tasandil.)

Hüperboolset tüüpi võrrandil on kaks parve karakteristikuid, paraboolset tüüpi võrrandil üks parv, elliptilist tüüpi võrrandil aga (reaalsed) karakteristikud puuduvad.

Muide, karakteristiklike võrrandite paari (4) võime ühendada üheks (karakteristlikuks) võrrandiks

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0. \quad (4')$$

See kuju on hõlpsam meelespidamiseks; võrrandite (4) saamiseks tuleb siit ilmutada  $dy$ .

Võrrandite (3) ja (4') lahendite vahetõlke silmas pidades võime öelda ka, et karakteristikuteks on kõverad  $\omega(x,y) = c$ , kus  $z = \omega(x,y)$  on võrrandi (3) suvaline mittekonstantne lahend.

Pöördume nüüd tagasi võrrandi (1) lihtsustamise küsimuse juurde. Käsitleme eraldi juhtumeid, kui võrrand (1) on vaadeldavas piirkonnas hüperboolne, paraboolne või elliptiline.

a) Võrrand on hüperboolne, s.t. vaadeldavas piirkonnas  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ . See juhtum on eespool juba üsna põhjalikult käsitletud. Nimelt on sel juhul kummalgi võrranditest (4) olemas (reaalsed) üldlahendid  $\varphi(x,y) = c$  ja  $\psi(x,y) = c$  ning vastav muutujate vahetus (2) garanteerib, et võrrandis (1') tulevad  $\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} = 0$ . Veendume, et muutujate vahetuse jakobiaan erineb nullist. Tõepoolest, kõverate  $\varphi(x,y) = c$  punktides on  $\varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$  ehk  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$ , võrrandi (4) põhjal siis aga

$$-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}{a_{11}};$$

analoogiliselt

$$-\frac{\psi_x}{\psi_y} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}{a_{11}}.$$

Viimastest võrdustest järeldame, et  $\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \neq \frac{\psi_x}{\psi_y}$  ehk

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Niisiis taandub võrrand (1) kujule

$$2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} = \bar{f}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta})$$

ehk, tähistades  $\varphi = \frac{\bar{f}}{2\bar{a}_{12}}$ .

$$u_{\xi\eta} = \varphi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}). \quad (6)$$

Võrrandit kujul (6) nimetatakse hüperboolset tüüpi võrrandi I kanooniliseks kujuks.

Kui võrrandis (6) teha muutujate vahetus

$$\alpha = \xi + \eta, \quad \beta = \xi - \eta,$$

taandub see kujule

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \Phi_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta), \quad (6')$$

mis kannab hüperboolset tüüpi võrrandi II kanoonilise kuju nime.

b) Võrrand on paraboolne, s.t. vaadeldavas piirkonnas  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$ . Sel juhul langevad karakteristikud võrrandid (4) omavahel kokku, tegemist on ainsa võrrandiga  $a_{11} dy - a_{12} dx = 0$ . Leidnud selle üldlahendi  $\varphi(x, y) = c$ , teeme muutujate vahetuse (2), milles teise funktsiooni  $\psi(x, y)$  valime suvaliselt nii, et  $\Delta \neq 0$ . Sellega saame võrrandi (1')  $\bar{a}_{11} = 0$ . Kuid võrdusest (5) järeldame siis, et ka  $\bar{a}_{12} = 0$ , sest võrduse (5) parem pool võrdub antud juhul nulliga. Niisiis taandub võrrand (1) kujule

$$\bar{a}_{22} u_{\eta\eta} = \bar{f}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$$

ehk tähistades  $\Phi_2 = \frac{\bar{f}}{\bar{a}_{22}}$ ,

$$u_{\eta\eta} = \Phi_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

See on paraboolset tüüpi võrrandi kanooniline kuju.

c) Võrrand on elliptiline, s.t. vaadeldavas piirkonnas  $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0$ . Sellisel juhul ei ole võrranditel (4) reaalseid lahendeid. Kui eeldada, et kordajad  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  on analüütilised, siis need funktsioonid on üheselt jätkatavad kompleksmuutujate analüütilisteks funktsioonideks, võrrandite paaril (4) aga on olemas kompleksed lahendid  $\varphi(x, y) = c$  ja  $\psi(x, y) = c$ . Ei ole raske näidata (tõestusel me ei peatu), et kui  $\varphi(x, y) = c$  on esimese võrrandi üldlahendiks, siis teise võrrandi üldlahendiks on  $\psi(x, y) = c$  (kriips tähendab siin kaaskompleksi võtmist). Seega me või-

me võtta  $\psi(x, y) = \overline{\varphi(x, y)}$ . Moodustame nende funktsioonide  $\varphi(x, y)$  ja  $\psi(x, y) = \overline{\varphi(x, y)}$  põhjal muutujate vahetuse (2). Võrrand (1) taandub siis nagu hüperboolselgi juhul kujule (6):

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}). \quad (6'')$$

Kuigi see kuju on lihtne, ei rahulda ta meid, sest muutujad  $\xi, \eta$  on komplekssed. Arvestades, et  $\xi$  ja  $\eta$  on kaaskompleksid, teeme ühe muutujate vahetuse

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta).$$

Siis  $\alpha$  ja  $\beta$  on reaalmuutujad,

$$u_{\xi} = u_{\alpha} \cdot \frac{1}{2} + u_{\beta} \left(\frac{1}{2i}\right).$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} \cdot \frac{1}{4} + u_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{4i}\right) + u_{\beta\alpha} \left(\frac{1}{4i}\right) + u_{\beta\beta} \left(-\frac{1}{4i^2}\right) = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta})$$

ja võrrand (6'') teiseneb kujule

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi_3(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta}).$$

See on elliptilist tüüpi võrrandi kanooniline kuju.

Märgime, et läbiviidud kaks muutujate vahetust võib ühendada üheks muutujate vahetuseks

$$\alpha = \operatorname{Re} \varphi(x, y), \quad \beta = \operatorname{Im} \varphi(x, y).$$

3. Klassifikatsioon n sõltumatu muutuja korral. Vaatleme võrrandit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} = f(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad (7)$$

milles kordajad  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j=1, \dots, n$ ) on muutujate  $x_1, \dots, x_n$  reaalsed funktsioonid. Toome sisse uued sõltumatud muutujad  $\xi_1, \dots, \xi_n$  seostega

$$\xi_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, \dots, n) \quad (8)$$

ni, et meid huvitavas piirkonnas oleks teisenduse (8) jaoks erinev nullist. Siis

$$u'_x = u'_a \cdot a'_x$$

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^n u_{f_k} \alpha_{ik}, \quad \text{kus } \alpha_{ik} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i},$$

$$u_{x_i x_j} = \sum_{k, l=1}^n u_{f_k f_l} \alpha_{ik} \alpha_{jl} + \sum_{k=1}^n u_{f_k} \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Võrrand (7) teiseneb kujule

$$\sum_{k, l=1}^n \bar{a}_{kl} u_{f_k f_l} = \bar{F}(f_1, \dots, f_n, u, u_{f_1}, \dots, u_{f_n}), \quad (9)$$

milles

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i, j=1}^n a_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}. \quad (10)$$

Vaatleme nüüd ruutvormi

$$\sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) y_i y_j, \quad (7')$$

mille kordajateks  $a_{ij}^0 = a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0)$  on võrrandi (7) kordajad fikseeritud punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Lineaarne muutujate vahetus

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} \eta_k \quad (y_j = \sum_{l=1}^n \alpha_{jl} \eta_l) \quad (8')$$

viib ruutvormi (7') kujule

$$\sum_{k, l=1}^n \bar{a}_{kl}^0 \eta_k \eta_l, \quad (9')$$

milles

$$\bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i, j=1}^n a_{ij}^0 \alpha_{ik} \alpha_{jl}. \quad (10')$$

Paneme tähele, et ruutvormi kordajad teisenesid sama seaduse järgi, nagu võrrandi (7) kordajad muutuja vahetust (8) tehes (võrdle (10) ja (10')).

Teatavasti (vt. [19]) saab ruutvormi (7') sobiva lineaarteisenduse (8') abil viia diagonaalkujule

$$\sum_{k=1}^r \eta_k^2 - \sum_{k=r+1}^m \eta_k^2 \quad (m \leq n); \quad (9'')$$

milles kõik kordajad on 0, 1 või -1, kusjuures nullist erinevaid kordajaid on vaid peadiagonaalil. Sealjuures võib mõne teise lineaarteisendusega viia ruutvormi küll mõnevõrra erinevale diagonaalkujule, kuid nullist erinevate diagonaalelementide arv  $m$ , positiivsete diagonaalelementide arv  $r$  ja negatiivsete diagonaalelementide arv  $m-r$  jääb muutmatuks (ruutvormide inerts'i seadus).

Kui lineaarteisendus (8') viib ruutvormi (7') diagonaalkujule (9''), siis vastav muutujate vahetus (8) teisendab diferentsiaalvõrrandi (7) punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  kujule (nn. kaanonilisele kujule)

$$\sum_{k=1}^r u_{j_k j_k} - \sum_{k=r+1}^m u_{j_k j_k} = \bar{f}.$$

Definitsioon. Üeldakse, et diferentsiaalvõrrand (7) on punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ :

elliptilist tüüpi, kui  $m = n$  ning kõik liikmed ruutvormi (7') diagonaalkujus on sama märgiga;

hüperboolset tüüpi, kui  $m = n$  ning  $n - 1$  liiget ruutvormi (7') diagonaalkujus on sama märgiga, üks liige aga vastupidise märgiga;

paraboolset tüüpi, kui  $m = n - 1$  ning kõik  $n - 1$  liiget ruutvormi (7') diagonaalkujus on sama märgiga.

Üeldakse, et võrrand (7) on elliptilist, hüperboolset või paraboolset tüüpi piirkonnas, kui ta on vastavat tüüpi

piirkonna igas punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ .

Esitatud klassifikatsioon pole täielik - välja jäi näiteks juhtum  $m = n$ ,  $2 \leq r \leq n - 2$  (võrrandid (7) nimetatakse sel juhul ultrahüperboolseks) ning rida teisi juhtumeid. Need juhud pole rakenduste seisukohalt huvipakkuvad.

Elliptilist tüüpi võrrandid kirjeldavad statsionaarseid protsesse ning nende korral tähendavad kõik  $n$  muutujat  $x_1, \dots, x_n$  ruumipunkti koordinaate. Hüperboolset ja parabolset tüüpi võrrandites tähendavad  $n - 1$  sõltumatut muutujat enamasti ruumipunkti koordinaate, üks sõltumatu muutuja aga aega. Just aja ühedimensionaalsusega võib seletada, miks klassifikatsioonis on olulised just vaadeldud erijuhud.

Elliptilisuse definitsiooni võib anda ka ruutvormi diagonaalkuju kasutamata. Nimelt on  $m = n$  ja kõik liikmed ruutvormi diagonaalkujus ühe märgiga parajasti siis, kui ruutvorm on (positiivselt või negatiivselt) määratud. Seega võrrand (7) on punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  elliptilist tüüpi parajasti siis, kui ruutvorm (7') on (positiivselt või negatiivselt) määratud. Ruutvormi (7') positiivne määratus tähendab, et iga  $(y_1, \dots, y_n) \in R^n$  korral kehtib võrratus

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1^0, \dots, x_n^0) y_i y_j \geq \delta \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad (10)$$

kus  $\delta$  on mingi positiivne konstant. Kui võrratus (10) kehtib iga  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  korral mingist piirkonnast, on võrrand (7) elliptiline selles piirkonnas. Sealjuures võib  $\delta > 0$  üldiselt sõltuda punktist  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ ; kui  $\delta > 0$  ei sõltu piirkonna punktist, kõneldakse ühtlasest elliptilisusest vastavas piirkonnas.

Definitsioonist järeldub, et elliptilist tüüpi võrrandi kanooniliseks kujuks on

$$u_{f_1 f_1} + \dots + u_{f_n f_n} = \bar{F}(f_1, \dots, f_n, u, u_{f_1}, \dots, u_{f_n}),$$

hüperboolset tüüpi võrrandi kanooniliseks kujuks

$$u_{f_1 f_1} = u_{f_2 f_2} + \dots + u_{f_n f_n} + \bar{F}(f_1, \dots, f_n, u, u_{f_1}, \dots, u_{f_n})$$

ning parabolset tüüpi võrrandi kanooniliseks kujuks

$$u_{f_1 f_1} + \dots + u_{f_{n-1} f_{n-1}} = \bar{F}(f_1, \dots, f_n, u, u_{f_1}, \dots, u_{f_n}).$$

Märgime, et võrrandit (7) võib fikseeritud punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  viia kanoonilisele kujule sobivalt valitud lineaarse muutujate vahetusega

$$f_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} x_j \quad (k=1, \dots, n). \quad (11)$$

Siis  $\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \alpha_{jk}$  ( $i, k=1, \dots, n$ ), ning kui kordajad  $\alpha_{ik}$  valida nii, et lineaarteisendus (8') viiks ruutvormi (7') diagonalkujule, siis lineaarne muutujate vahetus (11) viibki võrrandi (7) kanoonilisele kujule punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ . Kui võrrandi (7) kordajad on konstandid, siis on diagonalkujule taandamine teostatav ühe ja sama lineaarse muutujate vahetusega (11) kogu piirkonnas.

Tekib küsimus, kas on võimalik valida sellist (mitte-lineaarset) muutujate vahetust (8), mis taandaks võrrandi (7) kanoonilisele kujule mitte ainult fikseeritud punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ , vaid vähemalt ka selle punkti mingis ümbruses. Eelnevast teame, et  $n = 2$  korral on vastus jaatav. Kahjuks osutub  $n > 2$  korral vastus üldiselt eitavaks. Selles on lihtne veenduda järgmise arutluse teel. Võrrandi (7) taandami-

seks kanoonilisele kujule tuleb rahuldada tingimused

$$\begin{aligned}\bar{a}_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) \\ \bar{a}_{ii} &= \sigma_i \bar{a}_{11} \quad (i=2, \dots, n),\end{aligned}$$

kus  $\sigma_i = \pm 1$  või  $\sigma_i = 0$ . Arvestades, et  $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ji}$ , saame

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} + n-1$$

tingimust. Nende rahuldamiseks on meie käsutuses  $n$  funktsiooni muutujate vahetuses (8). Seega on suvalise võrrandi (7) taandamiseks kanoonilisele kujule tarvilik, et

$$\frac{n(n-1)}{2} + n-1 \leq n, \quad \text{s.t. } n \leq 2.$$

Soovitame lugejal iseseisvalt veenduda, et  $n = 2$  korral langevad punktis 2 esitatud elliptilisuse, hüperboolsuse ja paraboolisuse mõisted kokku vastavate mõistetega käesolevas punktis.

Eelmises paragrahvis tuletatud võrranditest on Poissoni võrrand  $\Delta u = f$  ja Laplace'i võrrand  $\Delta u = 0$  elliptilist tüüpi, lainevõrrand  $u_{tt} = a^2 \Delta u + f$  hüperboolset tüüpi ning soojusjuhtivuse võrrand  $u_t = a^2 \Delta u + f$  paraboolset tüüpi (kahes viimases võrrandis on  $n+1$  sõltumatut muutujat  $t, x_1, \dots, x_n$ ).

✱ 4. Karakteristlikud pinnad. Vaatleme taas võrrandit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = f(x, u, \text{grad } u), \quad (12)$$

kus oleme kasutanud lühendatud tähistusviisi

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad \text{grad } u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n}).$$

Definitsioon. Pinda  $\varphi(x) = 0$  nimetatakse võrrandi (12) karakteristlikuks pinnaks (ehk karakteristikuks), kui selle

pinna punktides grad  $\varphi(x) \neq 0$  ja

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} = 0. \quad (13)$$

Rõhutame, et tingimus (13) peab olema rahuldatud vaid pinna  $\varphi(x) = 0$  punktides. Kui me vaatleme tingimust (13) esimest järku diferentsiaalvõrrandina  $\varphi(x)$  suhtes, nõudes võrrandi (13) rahuldamist muutujate  $x_1, \dots, x_n$  mingis piirkonnas, siis selle võrrandi igale mittekonstantsele lahendile  $\varphi(x)$  vastab terve karakteristikute parv  $\varphi(x) - c = 0$ . Kuid selliselt ei ole võimalik leida kõiki karakteristikuid.

Näiteks lainevõrrandi  $u_{tt} = a^2 \Delta u$  korral peab karakteristliku pinna  $\varphi(x, t) = 0$  punktides kehtima võrdus

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 - a^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0. \quad (14)$$

Karakteristlikeks pindadeks on näiteks

$$a(t - t_0) - \sum_{i=1}^n b_i(x_i - x_i^0) = 0 \quad (15)$$

ja

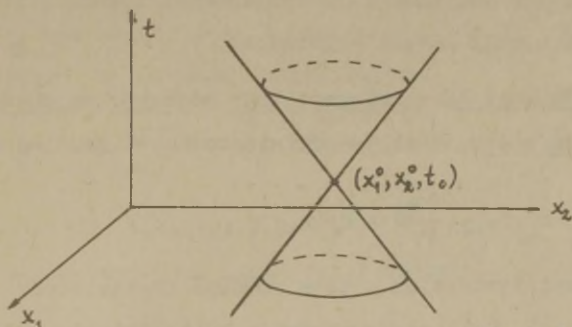
$$a^2(t - t_0)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2 = 0, \quad (16)$$

kus  $t_0, x_1^0, \dots, x_n^0$  on suvalised fikseeritud arvud ning arvud  $b_1, \dots, b_n$  on sellised, et  $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 1$ . Pinna (15) vasakul pool olev funktsioon rahuldab võrrandit (14) mistahes  $(x, t)$  korral, pinna (16) vasakul pool olev funktsioon aga vaid pinna punktides. Pinda (16) nimetatakse lainevõrrandi karakteristlikuks koonuseks tipuga aeg-ruumi punktis  $(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0)$ , vt. joon. 4. Pinnad (15) kujutavad endast puutujatasandeid karakteristlikule koonusele.

Soojusjuhtivuse võrrandi  $u_t = a^2 \Delta u$  karakteristliku pinna  $\varphi(x, t) = 0$  punktides kehtib võrdus

$$a^2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right)^2 = 0.$$

Ilmselt on tasandid  $t = c$  karakteristlikeks pindadeks ja teisi karakteristlikke pindu pole olemas.



Joon. 4.

Elliptilist tüüpi võrranditel pole karakteristlikke pindu. Tõepoolest, elliptilisuse tingimusest (10) järeldub, et tingimus (13) saab olla täidetud vaid  $\text{grad } \varphi(x) = 0$  korral ning ükski pind  $\varphi(x) = 0$  ei saa seetõttu olla karakteristlikuks.

Kohandame siin esitatud karakteristiku mõistet kahe sõltumatu muutuja juhule. Kõver  $\varphi(x, y) - c = 0$  on võrrandi

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$$

karakteristikuks, kui kõvera punktides  $\varphi_x \neq 0$  või  $\varphi_y \neq 0$  ning

$$a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2 = 0 \quad (17)$$

(võrdle võrrandiga (3)). Kui nõuame võrrandi (17) rahulda-

mist muutujate  $x, y$  mingis piirkonnas (ja mitte ainult kõvera punktides), siis  $\varphi(x, y)$  leidmine on samaväärne hariliku diferentsiaalvõrrandi (4') lahendamisega:  $\varphi(x, y) = c$  on võrrandi (4') lahendiks parajasti siis, kui  $z = \varphi(x, y)$  rahuldab võrrandit (17). Seega vastab punktis 2 esitatud karakteristiku mõiste sellisele erijuhule äsja esitatud üldisemast mõistest, kui võrrandi (17) rahuldamist nõuame piirkonnas (ja mitte ainult kõvera punktides). \*]

5. Esimest järku võrranditest moodustatud süsteemide klassifikatsioon. Vaatleme diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, y) \frac{\partial u_j}{\partial y} + f_i(x, y, u_1, \dots, u_m) \quad (i=1, \dots, m), \quad (18)$$

milles otsitavateks on  $m$  kahe muutuja funktsiooni

$u_i = u_i(x, y)$ . Selliste süsteemide käsitlemisel on mugav kasutada vektorsümboolikat. Tähistades

$$u = (u_1, \dots, u_m), \quad f = (f_1, \dots, f_m),$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

kirjutame süsteemi (18) ümber kujul

$$u_x = A(x, y)u_y + f(x, y, u). \quad (18')$$

Püüame lineaarteisenduse abil lihtsustada seda süsteemi. Toome sisse uue otsitava vektorfunktsiooni  $v$  seosega

$$u = Pv, \quad (19)$$

kus  $P = P(x, y)$  on mingi regulaarne ( $\det P \neq 0$ ) matriksfunktsioon. Uute otsitavate suhtes võtab süsteem (18') kuju

$$P_x v + P v_x = A(P_y v + P v_y) + f(x, y, P v)$$

ehk

$$v_x = P^{-1} A(x, y) P v_y + \bar{f}(x, y, v), \quad (20)$$

milles

$$\bar{f}(x, y, v) = P^{-1} [f(x, y, P v) - P_x v + A P_y v].$$

Teisenduse (19) püüame muidugi valida nii, et maatriks  $P^{-1} A P$  süsteemis (20) oleks võimalikult lihtsa struktuuriga. Me võime näiteks valida  $P$  selliselt, et  $P^{-1} A P = J$  oleks maatriksi  $A$  Jordani normaalkujuks:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

on kastdiagonaalmaatriks, mille iga kastikese

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

peadiagonaalil on maatriksi  $A$  mingi omaväärtus  $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$ , kõrvaldiagonaalil üks, mujal nullid.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi (18) nimetatakse punktis  $(x_0, y_0)$ :

hüperboolseks, kui maatriksi  $A(x_0, y_0)$  omaväärtused on reaalsed ning  $J(x_0, y_0)$  on diagonaalmaatriks, s.t. kui kastikesed  $J_i$  on esimest järku;

hüperboolseks kitsamas mõttes, kui maatriksi  $A(x_0, y_0)$  omaväärtused on reaalsed ja paarikaupa erinevad;

elliptiliseks, kui maatriksil  $A(x_0, y_0)$  pole reaalseid omaväärtusi.

Diferentsiaalvõrrandite süsteemi (18) nimetatakse hüperboolseks, hüperboolseks kitsamas mõttes või elliptiliseks piirkonnas  $\Omega$ , kui ta on vastavat tüüpi igas punktis  $(x_0, y_0) \in \Omega$ .

Olgu süsteem (18) hüperboolne piirkonnas  $\Omega$ . Süsteemiks (20) on sel juhul

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \lambda_i(x, y) \frac{\partial v_i}{\partial y} + \bar{f}_i(x, y, v_1, \dots, v_m) \quad (i=1, \dots, m), \quad (21)$$

kus  $\lambda_i(x, y)$  on matriksi  $A$  omaväärtused. See on hüperboolse süsteemi kanooniline kuju. Sobiv teisendusmatriks  $P$ , mis teisendab hüperboolse süsteemi (18) kanoonilisele kujule (21), on reaalne. Selle leidmine on samaväärne matriksi  $A = A(x, y)$  omaväärtuste  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  (nende hulgas võib olla omavahel võrdseid) ja neile vastavate lineaarselt sõltumatute omavektorite  $p_1, \dots, p_m$  leidmisega; vektorid  $p_1, \dots, p_m$  ongi matriksi  $P$  veeruvektoriteks. Sealjuures peame hoolitsema muidugi selle eest, et vektorite  $p_i$  sõltuvus argumentidest  $x$  ja  $y$  oleks küllalt sile. Saab näidata, et omaväärtused  $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$  on nii mitu korda diferentseeruvad, kui mitu korda on diferentseeruvad kordajad  $a_{ij}(x, y)$ , ning on võimalik selline omavektorite  $p_i = p_i(x, y)$  valik, et ka viimased oleksid sama arv kordi diferentseeruvad.

§ 3. M a t e m a a t i l i s e f ü ü s i k a  
ü l e s a n n e t e s e a d e

1. Cauchy ülesanne, rajaülesanne ja segaülesanne. Diferentsiaalvõrrandi lahendi üheseks määramiseks tuleb ülesande füüsikalisesest süsust lähtudes anda ette veel lisatingimusi - algtingimusi e. Cauchy tingimusi, rajatingimusi või mõlemaid. Vastavalt lisatingimuste iseloomule liigitatakse matemaatilise füüsika ülesandeid Cauchy ülesanneteks, rajaülesanneteks ja segaülesanneteks.

a) Cauchy ülesanne e. algtingimustega ülesanne esineb tavaliselt hüperboolset ja paraboolset tüüpi võrrandite korral. Olgu võrrand

$$u_{tt} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} u_{x_i t} + f(x, t, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_t) \quad (1)$$

hüperboolset tüüpi, võrrand

$$u_t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + f(x, t, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) \quad (2)$$

aga paraboolset tüüpi.

Cauchy ülesanne võrrandi (1) jaoks seisneb järgnevas: leida kinnisel hulgal  $R^n \times [0, T]$  määratud küllalt sile funktsioon  $u(x, t)$ , mis lahtisel hulgal  $R^n \times (0, T)$  rahuldab võrrandit (1),  $t = 0$  korral aga algtingimusi

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (x \in R^n), \quad (3)$$

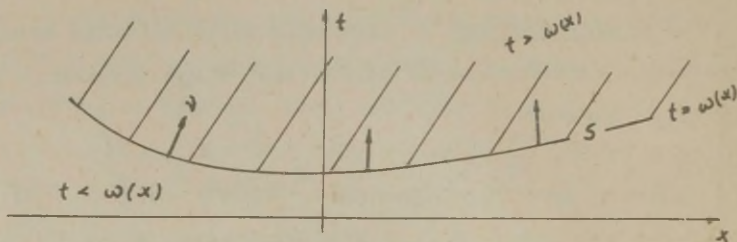
kus  $u_0(x)$  ja  $u_1(x)$  on mingid etteantud funktsioonid.

Funktsiooni "küllaldase sileduse" all mõistame antud

juhul järgmist:  $u(x, t)$  on pidev ja tal on olemas pidev osatuletis  $u_t(x, t)$  kinnisel hulgal  $R^n \times [0, T]$  (et oleks võimalik rääkida nende funktsioonide väärtustest  $t = 0$  korral); lahtisel hulgal  $R^n \times (0, T)$  on olemas ja pidevad ka kõik ülejäänud võrrandid (1) esinevad tuletised. Rõhutame, et võrrandi (1) rahuldamist  $t = 0$  korral ei nõuta.

Lõppmoment  $T$  võib olla ka lõpmatu ( $T = \infty$ ).

Mõnevõrra üldisema Cauchy ülesande seadeni jõuame, kui anname algtingimused ette mitte tasandil  $t = 0$ , vaid mingil üldisemal pinnal  $S$  (vt. joon. 5). Olgu  $t = \omega(x)$  pinna



Joon. 5.

$S$  võrrand. Funktsioon  $u(x, t)$  peab  $t > \omega(x)$  korral rahuldama võrrandit (1),  $t = \omega(x)$  korral (s.t. pinnal  $S$ ) aga algtingimusi

$$u|_S = v_0(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_S = v_1(x, t), \quad (4)$$

kus  $\nu = \nu(x, t)$  on pinna  $S$  punktides etteantud suund, mis ei asu pinna puutujatasandis ning on suunatud piirkonna  $t > \omega(x)$  poole,  $v_0$  ja  $v_1$  aga on etteantud funktsioonid, mis on määratud pinnal  $S$ . Erijuhul võib suunaks  $\nu$  olla pinna  $S$  normaal (joon. 5).

✱ Kui pind  $S$  ei puutu üheski punktis võrrandi (1) karak-

teristlikke pindu, siis muutujate vahetuse abil on võimalik Cauchy ülesandelt (1), (4) minna üle Cauchy ülesandele kujul (1), (3). Tõepoolest, teeme muutujate vahetuse

$$\tau = \varphi(x_1, \dots, x_n, t) = t - \omega(x),$$

$$\xi_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n, t),$$

milles funktsioonid  $\varphi_k$  valime suvaliselt, pidades silmas vaid, et muutujate vahetuse jakobiaan erineks nullist. Pind S läheb sellega üle pinnaks  $\tau = 0$ ; võrrand (1) läheb üle võrrandiks kujul

$$\bar{a}_{00} u_{\tau\tau} = \sum_{k,l=1}^n \bar{a}_{kl} u_{\xi_k \xi_l} + \sum_{k=1}^n \bar{a}_{k0} u_{\xi_k \tau} + \bar{f}(\xi, \tau, u, u_{\xi_1}, \dots, u_{\xi_n}, u_{\tau}), \quad (1')$$

milles

$$\bar{a}_{00} = 1 - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_{i0} \frac{\partial \omega}{\partial x_i};$$

tingimused (4) lähevad üle tingimusteks kujul

$$u(\xi, 0) = \bar{v}_0(\xi), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \bar{v}} \right|_{\tau=0} = \bar{v}_1(\xi), \quad (4')$$

milles  $\bar{v} = \bar{v}(\xi)$  on mingi suund, mis ei asu tasandis  $\tau = 0$ . Paneme tähele, et võrrandiga  $t - \omega(x) = 0$  määratud pind S on karakteristikuks pinnaks võrrandi (1) jaoks parajasti siis, kui  $\bar{a}_{00} \equiv 0$  pinnal S (vt. karakteristiku definitsiooni § 2, p. 4). Kuna tehtud eelduse kohaselt pind S ei ole karakteristik ning ta isegi ei puutu üheski punktis karakteristiklike pindadega, siis  $\bar{a}_{00} \neq 0$  pinnal S ehk pinnal  $\tau = 0$ , seega ka pinna teatavas ümbruses. Me võime võrrandi (1') kordajaga  $\bar{a}_{00}$  läbi jagada ning jõuame võrrandini, mis on analoogiline võrrandiga (1). Algtingimusi (4') aga on

võimalik teisendada kujule

$$u(\xi, 0) = \bar{u}_0(\xi), \quad u_\tau(\xi, 0) = \bar{u}_1(\xi). \quad (3')$$

Tõepoolest, tingimustega (4') teame me  $u$  osatuletiste väärtusi

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \bar{v}_0}{\partial \xi_i} \quad (i=1, \dots, n), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = \bar{v}_1,$$

pinnal  $\tau = 0$ , nende abil aga on juba lihtne avaldada ka  $u_\tau(\xi, 0)$ .

Sellega olemegi taandanud Cauchy ülesande (1), (4) Cauchy ülesandele (1'), (3'), milles algtingimused antakse ette tasandil  $\tau = 0$ . Märgime põhjendamata, et kui  $S$  on võrrandi (1) karakteristikuks pinnaks, siis ülesandel (1), (4) üldiselt lahend puudub, mõningate "eriliste" algväärtuste  $v_0$  ja  $v_1$  korral aga on lahendeid lõpmata palju. \*

Cauchy ülesanne parabolset tüüpi võrrandi (2) jaoks seisneb järgnevas: leida kinnisel hulgal  $R^n \times [0, T]$  määratud küllalt sile funktsioon  $u(x, t)$ , mis lahtisel hulgal  $R^n \times (0, T)$  rahuldab võrrandit (2),  $t = 0$  korral aga algtingimust

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

kus  $u_0(x)$  on mingi etteantud funktsioon. Seekord sisaldab "küllaldase sileduse" nõue vaid  $u(x, t)$  pidevust hulgal  $R^n \times [0, T]$  ja võrrandis esinevate tuletiste olemasolu ja pidevust hulgal  $R^n \times (0, T)$ .

Mõningate näidetega Cauchy ülesannetest oleme me tegelikult juba tutvunud. Näiteks Cauchy ülesanne

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x)$$

kirjeldab lõpmatu keele vabavõnkumisi etteantud algasendi ja algkiiruste korral; Cauchy ülesanne

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}), \quad u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z)$$

kirjeldab soojuse levimist kogu xyz-ruumi täitvas homogeenses soojusallikateta kehas etteantud algtemperatuuri korral.

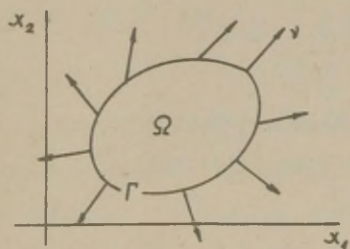
b) Rajaülesanne esineb elliptilist tüüpi võrrandite korral. Olgu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  lahtine tõkestatud piirkond,  $\Gamma$  selle raja (rajapind),  $\bar{\Omega}$  sulund. Vaatleme võrrandit

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} = f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad (5)$$

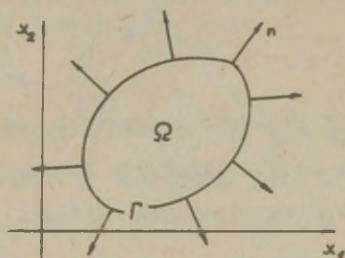
mis olgu piirkonnas  $\Omega$  elliptilist tüüpi. Rajaülesanne selle võrrandi jaoks seisneb järgnevas: leida kinnises piirkonnas  $\bar{\Omega}$  määratud küllalt sile funktsioon  $u(x)$ , mis lahtises piirkonnas  $\Omega$  rahuldab võrrandit (5), piirkonna rajal aga rajatingimust

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} = \delta, \quad (6)$$

kus  $\alpha, \beta$  ja  $\delta$  on mingid etteantud funktsioonid rajal  $\Gamma$ ;



Joon. 6.



Joon. 7.

$\nu = \nu(x_1, \dots, x_n)$  on raja  $\Gamma$  punktides etteantud suund, mis

ei asu  $\Gamma$  puutuatasandis (vt. joon. 6). Kõige sagedamini esineb ülesandeid, kus suund  $\nu$  on määratud pinna  $\Gamma$  välisnormaaliga  $n$  (joon. 7).

Eristatakse järgmisi rajatingimuse (6) erijuhte:

$$u|_{\Gamma} = \delta \text{ (esimest liiki e. Dirichlet' rajatingimus);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = \delta \text{ (teist liiki e. Neumanni rajatingimus);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u|_{\Gamma} = \delta \text{ (kolmandat liiki rajatingimus).}$$

Vastavaid rajaülesandeid nimetatakse esimest, teist ja kolmandat liiki rajaülesanneteks. Esimest ja teist liiki rajaülesandeid nimetatakse ka Dirichlet' ja Neumanni rajaülesanneteks.

Märgime, et Dirichlet' rajaülesande seades tähendab otsitava funktsiooni  $u(x,t)$  "küllaldase sileduse" nõue vaid pidevust kinnises piirkonnas  $\bar{\Omega}$  ja võrrandites esinevate tuletiste olemasolu ja pidevust lahtises piirkonnas  $\Omega$ ; ülejäänud rajaülesannete tüüpide korral on lisaks vaja nõuda  $u(x,t)$  pidevat diferentseeruvust kinnises piirkonnas  $\bar{\Omega}$ .

Näiteks rajaülesanne

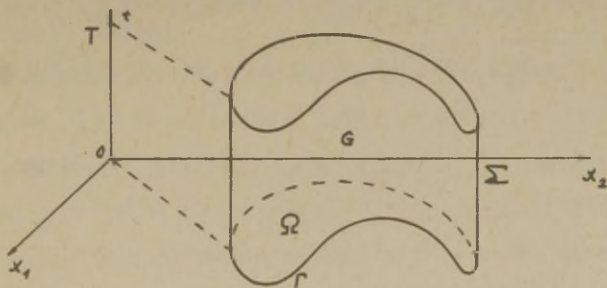
$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= 0 & (x \in \Omega), \\ u|_{\Gamma} &= \delta \end{aligned}$$

kirjeldab statsionaarset temperatuuride jaotust homogeeneses soojusallikateta kehas, kui keha rajal hoitakse etteantud temperatuuri  $\delta(x,y,z)$ .

c) Segaülesanne esineb hüperboolset ja paraboolset tüüpi võrrandite korral, kui ruumimuutujate  $x_1, \dots, x_n$  muutmispiirkonnaks on mingi tõkestatud lahtine piirkond

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (mitte aga kogu  $\mathbb{R}^n$ , nagu Cauchy ülesande korral).

Olgu  $\Gamma$  taas piirkonna  $\Omega$  raja,  $\bar{\Omega}$  sulund; tähistame  $G = \Omega \times (0, T)$ ,  $\bar{G} = \bar{\Omega} \times [0, T]$ ,  $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$  (vt. joon. 8).  
Segaülesanne hüperboolset tüüpi võrrandi (1) jaoks seisneb



Joon. 8.

järgnevas: leida kinnises silindris  $\bar{G} = \bar{\Omega} \times [0, T]$  määratud küllalt sile funktsioon  $u(x, t)$ , mis lahtises silindris  $G = \Omega \times (0, T)$  rahuldab võrrandit (1), silindri alumisel põhjal ( $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t = 0$ ) rahuldab algtingimusi

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (x \in \bar{\Omega}),$$

silindri külgpinnal  $\Sigma = \Gamma \times [0, T]$  aga rajatingimust

$$\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = \delta.$$

Siin on  $u_0(x)$  ja  $u_1(x)$  mingid hulgal  $\bar{\Omega}$  etteantud funktsioonid,  $\alpha$ ,  $\beta$  ja  $\delta$  aga mingid hulgal  $\Sigma$  etteantud funktsioonid; suund  $\nu = \nu(x, t)$  ei tohi asuda  $\Sigma$  puutujatasandis.

Näiteks fikseeritud otspunktidega keele vabavõnkumine on kirjeldatav segaülesandega

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (0 \leq x \leq 1),$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty).$$

Paraboolset tüüpi võrrandi (2) korral on segaülesande seade analoogiline esitatuga (kahe algtingimuse asemel on üks). Jätame üksikasjalise sõnastuse lugeja hooleks. Näiteks, segaülesanne

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \quad ((x, y, z) \in \Omega, \quad 0 < t < T),$$

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in \bar{\Omega}),$$

$$u|_{\Sigma} = \delta'$$

kirjeldab soojuse levimist homogeenses soojusallikateta kehas, mille temperatuuri algjaotus  $u_0(x, y, z)$  on teada ja mille rajal  $\Gamma$  hoitakse etteantud temperatuuri  $\delta'(x, y, z, t)$ .

Eespool tähendas "küllaldane siledus" alati nõuet, et funktsioonil oleksid olemas vajalikud tuletised klassikalises mõttes. Hiljem tutvume me tuletise mõiste olulise üldistusega. See võimaldab anda uue sisu ka otsitava funktsiooni "küllaldase sileduse" nõudele ning laiendada lahendi mõistet.

2. Ülesande seade korrektsus. Matemaatilise füüsika ülesanne on seatud korrektselt, kui on rahuldatud järgmised kolm tingimust:

- 1) lahend eksisteerib mingis funktsioonide klassis  $M_1$  ;
- 2) lahend on ühene mingis funktsioonide klassis  $M_2$  ;
- 3) lahend sõltub pidevalt ülesande lähteandmetest nn. korrektsuse klassis  $M_1 \cap M_2$ . Pidev sõltuvus mingist lähteandmest  $\psi$  (alg- või rajaväärtusest, võrrandi vabaliikmest või kordajatest) tähendab järgmist. Muudame lähteannet  $\psi$ , andes talle väärtusi  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k, \dots$  nii et  $\psi_k \rightarrow \psi$  (mingi koondumise mõttes); olgu  $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$

ja  $u$  ülesande vastavad lahendid. Kui koondumine  $\psi_k \rightarrow \psi$  toob kaasa lahendite koondumise  $u_k \rightarrow u$  (teatud koondumise mõttes), siis öeldaksegi, et lahend sõltub pidevalt algandmest  $\psi$  vastavate koondumiste (või koondumisi määravate topoloogiate) mõttes.

Lahendi pideva sõltuvuse nõue ülesande lähteandmetest on tingitud asjaolust, et need lähteandmed määratakse sageli eksperimendist mõõtmiste teel ja nad pole enamasti absoluutselt täpsed. Kui väike viga lähteandmetes toob kaasa suure vea ülesande lahendis, siis pole matemaatiline ülesanne küllalt heas kooskõlas kirjeldatava füüsikalise protsessiga. Sellisel juhul püütakse leida ja kirjeldada füüsikalise protsessi uusi (seni mitteolulistena tundunud) külgi ja formuleerida ülesanne ümber nii, et see osutuks korrektselt seatuks.

3. Näide. Lõpmatu keele võnkumise ülesande seade korrektsus. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty), \quad (7)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) \quad (-\infty < x < \infty), \quad (8)$$

mis kirjeldab homogeense lõpmatu keele vabavõnkumisi.

Võrrand (7) on hüperboolset tüüpi. Leiame tema I kaanonilise kuju. Karakteristlik võrrand

$$dx^2 = a^2 dt^2$$

laguneb kaheks võrrandiks

$$dx + adt = 0, \quad dx - adt = 0,$$

mille üldlahenditeks on vastavalt

$$x + at = c, \quad x - at = c.$$

### Muutujate vahetus

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

viib võrrandi (7) kujule (teha üksikasjalikult läbi!)

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Seda võrrandit on lihtne lahendada, lahenditeks on

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

kus  $f_1(\xi)$  ja  $f_2(\eta)$  on suvalised funktsioonid. Pöördudes tagasi vanade muutujate  $x$  ja  $t$  juurde, saame, et võrrandi (7) lahendid avalduvad kujul

$$u = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (9)$$

(pidevad tuletised  $u_{xx}$  ja  $u_{tt}$  on olemas, kui  $f_1$  ja  $f_2$  on kaks korda pidevalt diferentseeruvad).

Määrame nüüd funktsioonid  $f_1$  ja  $f_2$  nii, et funktsioon (9) rahuldaks ka algtingimusi (8):

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = u_0(x),$$

$$u_t(x, 0) = a f_1'(x) - a f_2'(x) = u_1(x).$$

Integreerime teist tingimust rajades ( $x_0, x$ ):

$$a f_1(x) - a f_2(x) = \int_{x_0}^x u_1(\xi) d\xi + c.$$

Niisiis

$$f_1(x) + f_2(x) = u_0(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x u_1(\xi) d\xi + \frac{c}{a},$$

millest

$$f_1(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x u_1(\xi) d\xi + \frac{c}{2a},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}u_0(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x u_1(\xi) d\xi - \frac{c}{2a}.$$

(10)

Asendades leitud avaldised valemisse (9), saame Cauchy ülesande (7), (8) lahendiks

$$u(x, t) = \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} u_1(\xi) d\xi - \int_{x_0}^{x-at} u_1(\xi) d\xi \right\}$$

ehk

$$u(x, t) = \frac{u_0(x+at) + u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Tulemus kannab d'Alembert'i valemi nime.

Olgu funktsioon  $u_0(x)$  kaks korda ja funktsioon  $u_1(x)$  üks kord pidevalt diferentseeruv. Siis seostega (10) antud funktsioonid  $f_1$  ja  $f_2$  on kaks korda pidevalt diferentseeruvad ning eelnenud arutlustest järeldub nii lahendi olemasolu kui ka ühesus ülesande  $\{(7), (8)\}$  jaoks. Lihtne on ka vahetu kontrolli abil veenduda, et d'Alembert'i valemiga defineeritud funktsioon  $u(x, t)$  on Cauchy ülesande  $\{(7), (8)\}$  lahendiks.

Uurime lahendi sõltuvust algväärtustest  $u_0(x)$  ja  $u_1(x)$ . Valemist (11) järeldame, et

$$|u(x, t)| \leq \sup_{-\infty < \xi < \infty} |u_0(\xi)| + t \sup_{-\infty < \xi < \infty} |u_1(\xi)|. \quad (12)$$

Kui  $\bar{u}(x, t)$  on võrrandi (7) lahendiks mingite muude algväärtuste  $\bar{u}_0(x)$  ja  $\bar{u}_1(x)$  korral, siis  $\bar{u}(x, t) - u(x, t)$  on võrrandi (7) lahendiks algväärtuste  $\bar{u}_0(x) - u_0(x)$  ja  $\bar{u}_1(x) - u_1(x)$  korral; võrratus (12) võtab viimase lahendi jaoks kuju

$$|\bar{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \sup_{-\infty < \xi < \infty} |\bar{u}_0(\xi) - u_0(\xi)| + t \sup_{-\infty < \xi < \infty} |\bar{u}_1(\xi) - u_1(\xi)|.$$

Kui nüüd

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |\bar{u}_0(x) - u_0(x)| < \varepsilon, \quad \sup_{-\infty < x < \infty} |\bar{u}_1(x) - u_1(x)| < \varepsilon',$$

siis iga  $T > 0$  korral

$$\sup_{\substack{-\infty < x < \infty \\ 0 \leq t \leq T}} |\bar{u}(x,t) - u(x,t)| \leq \varepsilon + T\varepsilon',$$

s.t. ülesande  $\{(7), (8)\}$  lahendi sõltuvus algväärtustest  $u_0(x)$  ja  $u_1(x)$  on pidev. Täpsemalt, lahendi sõltuvus algväärtustest on pidev, kui algväärtuste hulgal kasutame ühtlase koondumise topoloogiat reaalteljel  $-\infty < x < \infty$ , lahendite hulgal aga ühtlase koondumise topoloogiat "ribadel"  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq t \leq T$ .

Kokkuvõttes, Cauchy ülesanne  $\{(7), (8)\}$  on seatud korrektselt.

4. Kovalevskaja teoreem. Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f(x_1, \dots, x_n, t, u, \dots, \frac{\partial^1 u}{\partial t}, \frac{\partial^1 u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^1 u}{\partial x_n}, \dots), \quad (13)$$

mille paremal pool ei ületa ühegi tuletise järk arvu  $k$ , aja  $t$  järgi osatuletiste järgud aga ei ületa  $k-1$ :

$$i_0 + i_1 + \dots + i_n = i \leq k, \quad i_0 \leq k-1.$$

Cauchy ülesanne võrrandi (13) jaoks seisneb sellise lahendi leidmises, mis rahuldab  $k$  algtingimust

$$\left. \frac{\partial^j u}{\partial t^j} \right|_{t=t_0} = u_j(x_1, \dots, x_n) \quad (j=0, 1, \dots, k-1), \quad (14)$$

kus  $u_j$  on etteantud funktsioonid.

Kovalevskaja teoreem. Kui funktsioonid  $u_j$  ( $j=0, \dots, k-1$ ) on analüütilised punkti  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$  ümbruses, võrrandi (13)

parem pool  $f$  aga analüütiline punkti

$$(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0, u_0(x_1^0, \dots, x_n^0), \dots, \frac{\partial^{i_0-1} u_{i_0}(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}}, \dots)$$

ümbruses, siis Cauchy ülesandel  $\{(13), (14)\}$  on olemas punkti  $(x_1^0, \dots, x_n^0, t_0)$  mingis ümbruses analüütiline lahend ja see lahend on ühene analüütiliste funktsioonide klassis.

Teoreemi tõestus on tehniliselt üsna komplitseeritud ja me ei esita seda. Tõestuse idee on järgmine. Lahendit otsitakse astmereana

$$\sum c_{i_0 i_1 \dots i_n} (t - t_0)^{i_0} (x_1 - x_1^0)^{i_1} \dots (x_n - x_n^0)^{i_n}.$$

Rea kordajaid on võimalik üksteise järel leida algtingimustest ja võrrandist nende diferentseerimisel. Rea ühtlast koondumist õnnestub näidata majorantrea moodustamisega. Lahendi ühesus analüütiliste funktsioonide klassis järeldub analüütilise funktsiooni ühesuse teoreemist.

Kovalevskaja teoreemi üksikasjalise tõestuse võib leida õpikust [4] või monograafiast [12].

5. Näide mittekorrektsest seatud ülesande kohta. Tekib küsimus, kas Kovalevskaja teoreemi eelduste täidetuse korral on Cauchy ülesanne  $\{(13), (14)\}$  seatud korrektsest. Kuna lahendi olemasolu ja ühesus on garanteeritud Kovalevskaja teoreemiga, siis jääb selgitada, kas lahend sõltub pidevalt algväärtustest. Vastus on eitav, milles meid veenab allpool esitatav Hadamard'i näide.

Vaatleme Cauchy ülesannet

$$u_{tt} = -u_{xx} \quad (\text{Laplace'i võrrand}),$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \frac{1}{k} \sin kx.$$

(Kovalevskaja teoreemi eeldused on täidetud.) Selle ülesande lahendiks on

$$u_k(x,t) = \frac{1}{k^2} \operatorname{sh} kt \sin kx.$$

Kui  $k \rightarrow \infty$ , siis algväärtuste jada  $\psi_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx$  koondub ühtlaselt nulliks, kuid jada  $u_k(x,t)$  pole ühegi punkti  $(x,t)$  ümbruses isegi tõkestatud. Seega lahend ei sõltu algväärtustest pidevalt (vähemalt ühtlase koondumise mõttes) ja Cauchy ülesanne on Laplace'i võrrandi jaoks mittekorrektne. Sama ebameeldivus tabab meid Cauchy ülesande käsitlemisel ka üldisemate elliptilist tüüpi võrrandite korral.

Rakendustes (näiteks geoloogias) kerkib siiski üsna sageli ülesandeid, kus Cauchy ülesanne tuleb lahendada nimelt elliptilist tüüpi võrrandite jaoks. See asjaolu on viimasel ajal tinginud mittekorrektsete ülesannete teooria kiire arengu. Üks lähenemisviis mittekorrektsete ülesannete käsitlemisel seisneb sellise ülesande lülitamises korrektsete ülesannete perre, nii et vaadeldav mittekorrektne ülesanne oleks piirjuht korrektsetest. Seejärel lahendatakse ära küllalt lähedane korrektne ülesanne. Lähemalt võib mittekorrektsete ülesannete teooriaga tutvuda spetsiaalsete monograafiate vahendusel (vt. näiteks [14]).

## II. DISTRIBUTSIOONID

Kaasaegne diferentsiaalvõrrandite teooria tugineb funktsiooni mõiste laiendile - distributsiooni ehk üldistatud funktsiooni mõistele. Distributsioonid võeti kõigepealt rakendusse füüsikas, matemaatilise teooria alused andsid S.L.Sobolev (1936) ja eriti L.Schwartz (1950).

### § 4. Distributsioonid ja üldistatud tuletised

1. Põhifunktsioonide ruum  $\mathcal{D}$ . Distributsiooni mõiste tuuakse sisse järgmiselt: defineeritakse teatav funktsioonide ruum (nn. põhifunktsioonide ruum), selle kaasruumi elemente (s.t. pidevaid lineaarseid funktsionaale põhifunktsioonide ruumil) nimetataksegi distributsioonideks. Erinevatele põhifunktsioonide ruumidele vastavad erinevad distributsioonide klassid. Allpool käsitleme põhifunktsioonide ruumi  $\mathcal{D}$  ja vastavat distributsioonide ruumi  $\mathcal{D}'$ . Viimane on kasutuselolevatest distributsioonide ruumidest kõige üldisem. Hiljem käsitleme veel ühte põhifunktsioonide ruumi ning vastavat distributsioonide ruumi.

Meenutame kõigepealt mõningaid funktsioonidega seotud mõisteid. Olgu  $\varphi(x)$  mingi ruumil  $R^n$  defineeritud pidev funktsioon. Punktihulga

$$\{x \in R^n : \varphi(x) \neq 0\}$$

sulundit tähistame  $\text{supp } \varphi$  ja nimetame funktsiooni  $\varphi(x)$

kandjaks. Funktsiooni  $\varphi(x)$  nimetatakse finiitseks, kui tema kandja on tõkestatud, s.t. kui  $\varphi(x) = 0$  väljaspool mingit ruumi  $R^n$  kera  $\|x\| < r$ . Siin ja edaspidi kasutame ruumi  $R^n$  normi  $\|x\| = \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^{1/2}$ . Sümboliga  $C^m = C^m(R^n)$  tähistame ruumil  $R^n$  määratud ja  $m$  korda ( $0 \leq m < \infty$ ) pidevalt diferentseeruvate funktsioonide hulka. Tuletiste tähistamiseks kasutame enamasti lühendatud kirjutusviisi. Olgu  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  multiindeks, s.t. naturaalarvuliste koordinaatidega vektor ( $0 \leq \alpha_i < \infty$ ),  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$  selle koordinaatide summa. Tähistame

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Põhifunktsioonide ruumi  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(R^n)$  elementideks võtame kõik finiitsed funktsioonid hulgast  $C^\infty(R^n)$ . Defineerime põhifunktsioonide summa ja skalaariga korrutise tavalisel viisil:

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), \quad (\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x).$$

Sellega muutub  $\mathcal{D}$  lineaarseks ruumiks e. vektorruumiks (vektorruumi definitsiooni vt. [20]). Defineerime ruumis  $\mathcal{D}$  ka koondumise mõiste. Jada  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k, \dots$  koondub ruumis  $\mathcal{D}$  funktsiooniks  $\varphi$  ( $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}$ ), kui on täidetud kaks tingimust: 1) leidub selline tõkestatud hulk  $U < R^n$ , et  $\text{supp } \varphi_k < U$  ( $k=1, 2, \dots$ ); 2) iga multiindeksi  $\alpha$  korral  $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$  ühtlaselt  $x \in R^n$  suhtes.

Olgu  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  suvaline multiindeks. Diferentseerimise operaator  $D^\beta$  on ruumis  $\mathcal{D}$  pidev. Tõepoolest, kui  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{D}$ , siis ka  $D^\beta \varphi_k \rightarrow D^\beta \varphi$  ruumis  $\mathcal{D}$ , milles on

lihtne veenduda, kontrollides jada koondumise tingimusi 1) ja 2).

Funktsiooniga  $a(x)$  korrutamise operaator on ruumis pidev eeldusel, et  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  (põhjustada!).

Olgu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mingi lahtine piirkond. Sümboliga  $\mathcal{D}(\Omega)$  tähistame ruumi  $\mathcal{D}$  (vektor-)alamruumi

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \varphi \subset \Omega \}.$$

\* Koondumine ruumis  $\mathcal{D}(\Omega)$  defineeritakse järgmiselt.

Jada  $\varphi_k$  koondub ruumis  $\mathcal{D}(\Omega)$  funktsiooniks  $\varphi$ , kui on täidetud kaks tingimust: 1') leidub selline tõkestatud hulk  $U$ , et sulund  $\bar{U} \subset \Omega$  ja  $\text{supp } \varphi_k \subset U$  ( $k=1,2,\dots$ ); 2') iga multiindeksi  $\alpha$  korral  $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$  ühtlaselt  $x \in \Omega$  suhtes. Ilmselt

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D};$$

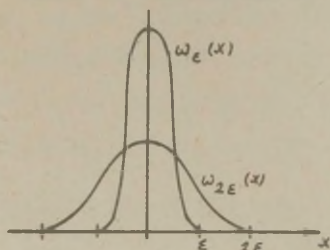
vastupidine väide ei kehti ka juhul, kui  $\varphi_k, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , milles on lihtne veenduda tingimusi 1) ja 1') võrreldes. Paneme tähele ka, et  $\Omega = \mathbb{R}^n$  korral langevad tingimused 1') ja 2') kokku vastavalt tingimustega 1) ja 2). Seega võib ruumi  $\mathcal{D}$  vaadelda erijuhuna ruumist  $\mathcal{D}(\Omega)$ , kui  $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

Ruumis  $\mathcal{D}(\Omega)$  on võimalik defineerida lokaalselt kumer topoloogia nii, et jada koondumine selle topoloogia mõttes on samaväärne eespool defineeritud koondumisega. Ruum  $\mathcal{D}(\Omega)$  ei ole metriseeritav, kuid tal on rida teisi häid omadusi: ta on täielik refleksiivne lokaalselt kumer topoloogiline ruum, tünnruum, bornoloogiline ruum, Freshet' ruumide induktiivne piir jm. Viimaste mõistetega võib tutvuda suurepäraselt kirjutatud monograafia [15] vahendusel. Mainitud monograafiast leiab lugeja ka distributsioonide teooria selge

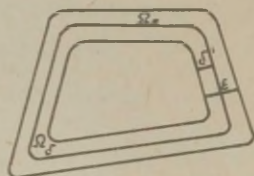
ja järjekindla esituse lineaarsete topoloogiliste ruumide raamides. Oma käsitluses oleme sunnitud topoloogilise külje kõrvale jätma, sest see viiks meid kõrvale põhieesmärgist.

Ruumi  $\mathcal{D}$  kuuluvad funktsioonid ei ole analüütilised (välja arvatud nullfunktsioon). Tõepoolest, iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  on võrdne nulliga väljaspool teatavat kera  $\|x\| \leq r$ , ning kui on lisaks veel analüütiline, siis analüütilise funktsiooni ühesuse teoreemi kohaselt  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Ruumi  $\mathcal{D}$  elementideks on näiteks funktsioonid (vt. joon.9)



Joon. 9.



Joon. 10.

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - \|x\|^2}}, & \text{kui } \|x\| < \varepsilon, \\ 0, & \text{kui } \|x\| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

kus  $\varepsilon > 0$  ja normeerimistegur  $C_\varepsilon$  on valitud nii, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Ilmselt on funktsioon  $\omega_\varepsilon$  finiidne; jätame lugeja põhjendada, et  $\omega_\varepsilon \in C^\infty$ .

Teoreem 1. Iga tõkestatud piirkonna  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ja iga  $\varepsilon > 0$  korral leidub funktsioon  $a \in \mathcal{D}$ , millel on järgmised omadused:  $0 \leq a(x) \leq 1$  iga  $x \in \mathbb{R}^n$  korral,  $a(x) = 1$  piirkonnas  $\Omega$  ja  $a(x) = 0$  nende  $x \in \mathbb{R}^n$  korral, mille kaugus piirkonnani  $\Omega$

on suurem kui  $\varepsilon$ .

**T ö e s t u s.** Nõutud omadused on funktsioonil

$$a(x) = \int_{\Omega_f} \omega_f(x-y) dy,$$

kus  $\Omega_f$  on hulga  $\Omega$   $\delta$ -ümbrus (iga punkt  $x \in \Omega$  on võetud koos selle  $\delta$ -ümbrusega),  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$  (vt. joon. 10). Tõepoolest, omadusest  $\omega_f \in C^\infty$  järeldeb, et  $a \in C^\infty$  (diferentseerimist võib teostada integraali märgi all). Iga  $x \in \mathbb{R}^n$  korral

$$0 \leq a(x) = \int_{\Omega_f} \omega_f(x-y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \omega_f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_f(z) dz = 1$$

funktsiooni  $\omega_f$  mittenegatiivsuse tõttu. Iga  $x \in \Omega$  korral

$$a(x) = \int_{\Omega_f} \omega_f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_f(x-y) dy = 1,$$

sest  $x \in \Omega$ ,  $y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega_f$  korral  $\|x-y\| > \delta$  ja  $\omega_f(x-y) = 0$ .

Lõpuks,  $x \notin \Omega_\varepsilon$  korral

$$a(x) = \int_{\Omega_f} \omega_f(x-y) dy = 0,$$

sest  $x \notin \Omega_\varepsilon$ ,  $y \in \Omega_f$  korral  $\|x-y\| \geq \varepsilon - \delta \geq \delta$  ja  $\omega_f(x-y) = 0$ .

Siit järeldeb ka, et funktsioon  $a$  on finiidne.

Teoreem 1 on tõestatud.

**Teoreem 2.** Olgu  $\varphi \in \mathcal{D}$  kandja kaetud lõpliku arvu ümbrustega

$$U(x_k, r_k) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-x_k\| < r_k, \quad x_k \in \mathbb{R}^n\}, \quad k=1, \dots, N.$$

Siis leiduvad sellised  $\varphi_k \in \mathcal{D}$ , et

$$\text{supp } \varphi_k \subset U(x_k, r_k) \quad (k=1, \dots, N)$$

ja

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Tõestus. Kandja  $\text{supp } \varphi$  on kaetud ka mõnevõrra väiksemate ümbruste  $U(x_k, r_k - 2\varepsilon)$  ( $k=1, \dots, N$ ) poolt, kus  $\varepsilon > 0$  on küllalt väike arv. Teoreemi 1 põhjal leiduvad sellised funktsioonid  $a_k \in \mathcal{D}$ , et  $a_k(x) = 1$  kera  $U(x_k, r_k - 2\varepsilon)$  ning  $a_k(x) = 0$  väljaspool kera  $U(x_k, r_k - \varepsilon)$ . Funktsioonid

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \frac{a_k(x)\varphi(x)}{\sum_{i=1}^N a_i(x)}, & \text{kui } x \in \text{supp } \varphi, \\ 0, & \text{kui } x \notin \text{supp } \varphi \end{cases}$$

rahuldavadki teoreemi nõudeid.

Teoreem 2 on tõestatud.

2. Distributsioonide ruum  $\mathcal{D}'$ . Distributsioonideks e. üldistatud funktsioonideks nimetatakse pidevaid lineaarseid funktsionaale põhifunktsioonide ruumil  $\mathcal{D}$ . Seega distributsioonid on ruumi  $\mathcal{D}$  kaasruumi  $\mathcal{D}'$  elemendid. Funktsionaali  $f \in \mathcal{D}'$  väärtust elemendil  $\varphi \in \mathcal{D}$  märgime

$$\langle f, \varphi \rangle$$

(traditsioonilise  $f(\varphi)$  asemel). Suvaliste põhifunktsioonide  $\varphi$  ja  $\psi$ , skalaaride  $\lambda$  ja  $\mu$  ning distributsiooni  $f$  korral kehtib võrdus

$$\langle f, \lambda\varphi + \mu\psi \rangle = \lambda \langle f, \varphi \rangle + \mu \langle f, \psi \rangle$$

(funktsionaali  $f \in \mathcal{D}'$  lineaarsus). Kehtib ka implikatsioon

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D} \Rightarrow \langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$$

(funktsionaali  $f \in \mathcal{D}'$  pidevus).

Distributsioonide ruum  $\mathcal{D}'$  on lineaarne ruum. Defineerime temas koondumise kui nõrga koondumise: distributsioonide jada  $f_1, f_2, \dots, f_k, \dots$  koondub distributsiooniks  $f$  ruu-

mis  $\mathcal{D}'$ , kui iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral

$$\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle.$$

Igale ruumil  $\mathbb{R}^n$  pidevale funktsioonile  $f(x)$  võime vastavusse seada distributsiooni  $f$  seosega

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx = \int_{\text{supp } \varphi} f(x)\varphi(x)dx$$

(selliselt defineeritud funktsionaal  $f$  on ilmselt lineaarne ja pidev, s.t.  $f \in \mathcal{D}'$ ). Samal viisil võime distributsiooni  $f$  seada vastavusse ka igale lokaalselt integreeruvale funktsioonile  $f(x)$ , s.t. funktsioonile, mis on integreeruv (Lebesque'i mõttes) igas tõikestatud piirkonnas  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Distributsioone, mis on määratud lokaalselt integreeruvate funktsioonidega, nimetatakse regulaarseteks distributsioonideks. Sageli me samastame regulaarseid distributsioone neid määravate funktsioonidega. Selles mõttes võime me kirjutada näiteks, et  $C^m \subset \mathcal{D}'$  ( $0 \leq m < \infty$ ).

Distributsioone, mis ei ole regulaarsed, nimetatakse singulaarseteks distributsioonideks. Singulaarse distributsiooni lihtsalmaks näiteks on nn. Dirac'i delta-funktsioon  $\delta$ , mis igale  $\varphi \in \mathcal{D}$  seab vastavusse arvu

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

(kontrollida funktsionaali  $\delta$  lineaarsust ja pidevust!).

Distributsiooni  $f$  korral kasutatakse sageli ka märkimisviisi  $f(x)$ , rõhutades sellega, et funktsionaali  $f$  rakedame argumendi  $x$  funktsioonidele  $\varphi(x)$ ,  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Õeldakse, et distributsioon  $f$  on piirkonnas  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  võrdne nulliga, kui  $\langle f, \varphi \rangle = 0$  iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  korral. Distributsiooni  $f$  kandjaks  $\text{supp } f$  nimetatakse nende  $x \in \mathbb{R}^n$  hul-

ka, mille üheski ümbruses distributsioon  $f$  ei võrdu nulliga. Kandja  $\text{supp } f$  on kinnine hulk. Tõepoolest, kui  $x_0 \notin \text{supp } f$ , siis  $f(x) = 0$  punkti  $x_0$  küllalt väikeses ümbruses

$$U(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\},$$

s.t.

$$\text{supp } \psi \subset U(x_0, \delta) \Rightarrow \langle f, \psi \rangle = 0.$$

Vaatleme suvalist punkti  $x_1 \in U(x_0, \frac{\delta}{2})$ . Ilmselt

$$\text{supp } \psi \subset U(x_1, \frac{\delta}{2}) \Rightarrow \text{supp } \psi \subset U(x_0, \delta) \Rightarrow \langle f, \psi \rangle = 0,$$

s.t.  $f(x) = 0$  ka punkti  $x_1$  küllalt väikeses ümbruses. Seega  $x_1 \notin \text{supp } f$  ning punkti  $x_0$  ümbruses  $U(x_0, \frac{\delta}{2})$  pole  $\text{supp } f$  punkte. Sellega oleme näidanud, et  $\text{supp } f$  täiendhulk on lahtine,  $\text{supp } f$  ise aga kinnine.

Teoreem 3. Kui  $\text{supp } \psi \cap \text{supp } f = \emptyset$  ( $\psi \in \mathcal{D}$ ,  $f \in \mathcal{D}'$ ), siis  $\langle f, \psi \rangle = 0$ .

**T õ e s t u s.** Vaatleme suvalist punkti  $x' \in \text{supp } \varphi$ . Tingimuse  $\text{supp } \varphi \cap \text{supp } f = \emptyset$  tõttu  $x' \notin \text{supp } f$ , s.t.  $x'$  mingis küllalt väikeses ümbruses  $U(x', r')$  on  $f(x) = 0$  (raadius  $r'$  sõltub punktist  $x'$ ). Hulkade süsteem

$$\{U(x', r')\} \quad x' \in \text{supp } \varphi$$

on lõpmatuks lahtiseks kattteks hulgale  $\text{supp } \varphi$ . Kuna hulk  $\text{supp } \varphi$  on kinnine ja tõkestatud (seega ka kompaktne), saab mainitud lõpmatust kattest eraldada lõplikku katte  $U(x_k, r_k)$ ,  $k=1, \dots, N$ . Niisiis

$$\text{supp } \varphi \subset \bigcup_{k=1}^N U(x_k, r_k)$$

ning

$$f(x) = 0 \text{ piirkonnas } U(x_k, r_k), \quad k=1, \dots, N. \quad (1)$$

Teoreemi 2 tulemust kasutades esitame  $\varphi$  kujul  $\varphi = \sum_{k=1}^N \varphi_k$ , kus

$$\varphi_k \in \mathcal{D}, \quad \text{supp } \varphi_k \subset U(x_k, r_k), \quad k=1, \dots, N. \quad (2)$$

Kuna tingimustest (1) ja (2) järeldub, et  $\langle f, \varphi_k \rangle = 0$ , siis ka

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \sum_{k=1}^N \varphi_k \rangle = \sum_{k=1}^N \langle f, \varphi_k \rangle = 0, \quad \text{m.o.t.t.}$$

Teoreem 3 on tõestatud.

Hulk  $N_f = \mathbb{R}^n \setminus \text{supp } f$  on maksimaalne (lahtine) hulk, millel  $f(x) = 0$ .

Klassi  $C^m$  ( $0 \leq m \leq \infty$ ) kuuluva (regulaarse) distributsiooni kandja langeb kokku teda määrava funktsiooni kandjaga.

Distributsiooni nimetatakse finiitseks, kui tema kandja on tõkestatud. Näiteks Dirac'i delta-funktsioon  $\delta(x)$  on finiidne, tema kandjaks on ühepunktiline hulk  $\{0\}$ .

Ainsaks distributsiooniks, mille kandjaks on tühi hulk, on nulldistributsioon (nullfunktsionaal).

Ülesanne 1. Kui  $f$  on regulaarne distributsioon ja

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = 0$$

iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral, siis  $f(x) = 0$  peaaegu kõikjal. Põhjendada!

Ülesanne 2. Näidata, et Dirac'i delta-funktsioon  $\delta(x)$  on singulaarne distributsioon.

Ülesanne 3. Näidata, et  $\varepsilon \rightarrow +0$  korral  $\omega_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$  ruumis  $\mathcal{D}'$  (funktsioonid  $\omega_\varepsilon(x)$  on defineeritud punktis 1).

Annane füüsikalise interpretatsiooni ülesande 3 väitele. Vaatleme funktsiooni  $\omega_\varepsilon(x)$  massi tihedusena: piirkonnas  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  asub mass  $\int_{\Omega} \omega_\varepsilon(x) dx$ . Kuna  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x) dx = 1$  ning  $\omega_\varepsilon(x) = 0$  väljaspool nullpunkti  $\varepsilon$ -ümbrust, siis  $\omega_\varepsilon(x)$  kujutab endast nullpunkti  $\varepsilon$ -ümbrusesse koondatud ühikmassi tihedust. Dirac'i delta-funktsiooni

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_\varepsilon(x)$$

võib siis vaadelda massi „tihedusena“, kui ühikmass on koondatud ühte punkti - nullpunkti. Selline interpretatsioon võib tunduda lugejale üsna harjumatu ja vastuvõetamatu, sest tihedust oleme harjunud mõistma funktsioonina, nüüd aga on tiheduseks üldistatud funktsioon e. distributsioon. Ometi on taoline füüsikaline interpretatsioon kasulik.

3. Distributsiooni ja funktsiooni korrutis. Olgu antud funktsioon  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ja distributsioon  $f \in \mathcal{D}'$ . Defineerime distributsiooni  $a(x)f(x)$ , mis igale põhifunktsioonile  $\varphi \in \mathcal{D}$  seab vastavusse arvu

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle.$$

Paneme tähele, et

$$\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow a\varphi \in \mathcal{D},$$

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D} \Rightarrow a\varphi_k \rightarrow a\varphi \text{ ruumis } \mathcal{D} \Rightarrow \langle f, a\varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, a\varphi \rangle,$$

s.t. funktsionaal  $af$  on pidev; tema lineaarsus on ilmne. See-  
ga  $af \in \mathcal{D}'$  ja  $af$  on tõepoolest distributsioon.

Teoreem 4. Kui  $a \in C^\infty$  ja  $f \in \mathcal{D}'$  on sellised, et  $\text{supp } f$

mingis ümbruses  $a(x) = 1$ , siis  $af = f$ .

Tõestus. Paneme kõigepealt tähele, et iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral

$$\text{supp} [(a-1)\varphi] \cap \text{supp } f = \emptyset.$$

Teoreemi 3 põhjal

$$\langle af-f, \varphi \rangle = \langle (a-1)f, \varphi \rangle = \langle f, (a-1)\varphi \rangle = 0 \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}),$$

s.t.  $af - f = 0$  (nullfunktsionaal) ja  $af = f$ , m.o.t.t.

Teoreem 4 on tõestatud.

Teoreem 5. Suvaliste  $a \in C^\infty$  ja  $f \in \mathcal{D}'$  korral

$$\text{supp} (af) \subset \text{supp } a \cap \text{supp } f.$$

Muuhulgas  $af = 0$ , kui  $a$  ja  $f$  kandjad ei lõiku.

Tõestus. Piisab näidata, et

$$x_0 \notin \text{supp } a \Rightarrow x_0 \notin \text{supp} (af),$$

$$x_0 \notin \text{supp } f \Rightarrow x_0 \notin \text{supp} (af).$$

Kui  $x_0 \notin \text{supp } a$ , siis  $a(x) = 0$  punkti  $x_0$  küllalt väikeses ümbruses  $U(x_0, \delta)$ , ning  $\text{supp } \varphi \subset U(x_0, \delta)$  korral on  $a\varphi$  nullfunktsioon. Seetõttu

$$\text{supp } \varphi \subset U(x_0, \delta) \Rightarrow \langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle = \langle f, 0 \rangle = 0,$$

s.t. ka  $af = 0$  punkti  $x_0$  ümbruses ja  $x_0 \notin \text{supp} (af)$ , m.o.t.t.

Kui  $x_0 \notin \text{supp } f$ , siis  $f = 0$  punkti  $x_0$  mingis ümbruses  $U(x_0, \delta)$  ning

$$\text{supp } \varphi \subset U(x_0, \delta) \Rightarrow \text{supp} (a\varphi) \subset U(x_0, \delta) \Rightarrow \langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle = 0,$$

s.t. ka  $af = 0$  punkti  $x_0$  ümbruses ja  $x_0 \notin \text{supp} (af)$ , m.o.t.t.

Teoreem 5 on tõestatud.

Ülesanne 4. Näidata, et  $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ .

Ülesanne 5. Olgu antud  $a \in C^\infty$ . Näidata, et operaator

$f \in \mathcal{D}' \mapsto af \in \mathcal{D}'$  on pidev ruumis  $\mathcal{D}'$ , s.t.

$$f_k \rightarrow f \text{ ruumis } \mathcal{D}' \Rightarrow af_k \rightarrow af \text{ ruumis } \mathcal{D}'.$$

4. Distributsioonide tuletised. Olgu antud distributsioon  $f \in \mathcal{D}'$  ja multiindeks  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . Defineerime distributsiooni  $D^\alpha f$ , mis igale põhifunktsioonile  $\varphi \in \mathcal{D}$  seab vastavusse arvu

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Kuna

$$\varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow D^\alpha \varphi \in \mathcal{D},$$

$$\begin{aligned} \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D} &\Rightarrow D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle f, D^\alpha \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, D^\alpha \varphi \rangle, \end{aligned}$$

siis  $D^\alpha f$  on pidev funktsionaal ruumil  $\mathcal{D}$ ; tema lineaarsus on ilmne. Seega  $D^\alpha f \in \mathcal{D}'$ , s.t.  $D^\alpha f$  on tõepoolest distributsioon.

Distributsiooni  $D^\alpha f$  nimetatakse distributsiooni  $f$  ( ldistatud) tuletiseks. Me nägime, et distributsioonidel on olemas mistahes järku tuletised, teiste sõnadega, distributsioonid on lõpmata diferentseeruvad. Näiteks Dirac'i delta-funktsiooni  $\delta(x)$  tuletis  $D^\alpha \delta$  on selline distributsioon, et iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral

$$\langle D^\alpha \delta, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left. \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|_{x=0}$$

Ka iga lokaalselt integreeruv funktsioon kui (regulaarne) distributsioon on lõpmata diferentseeruv, ainult et tuletised ei pruugi olla lokaalselt integreeruvad funktsioonid, vaid võivad olla (singulaarsed) distributsioonid.

Üldistatud tuletise mõiste on klassikalise tuletise mõiste laiendiks järgmises mõttes: kui distributsioon  $f$  on regulaarne ja kuulub klassi  $C^m$ , siis  $|\alpha| \leq m$  korral on ka distributsioon  $D^\alpha f$  regulaarne ning üldistatud tuletis  $D^\alpha f$  langeb kokku funktsiooni  $f(x)$  vastava klassikalise tuletisega. Tõepoolest, iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx.$$

Kuna  $f \in C^m$  ja  $|\alpha| \leq m$ , võime viimases integraalis ositi integreerimise teel kanda osatuletised funktsioonilt  $\varphi(x)$  üle funktsioonile  $f(x)$ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x) dx;$$

siin arvestasime asjaolu, et integreerimine toimub tegelikult mööda piirkonda  $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^n$ , mille rajal on  $\varphi(x)$  ja selle tuletised võrdsed nulliga. Niisiis

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi(x) dx,$$

s.t.  $D^\alpha f$  on regulaarne distributsioon ning on määratud funktsiooni  $f(x)$  klassikalise tuletise  $D^\alpha f$  poolt, m.o.t.t.

Katkevate funktsioonide korral ei pruugi üldistatud tuletis klassikalise tuletisega kokku langeda. Vaatleme näiteks funktsiooni

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x \geq 0, \\ 0, & \text{kui } x < 0 \end{cases}$$

(selles näites on  $n = 1$ , s.t.  $x$  on ühemõõtmeline). Funktsiooni  $\theta(x)$  klassikaline tuletis eksisteerib ja on võrdne nulli-

ga kõikjal, välja arvatud punktis  $x = 0$ , milles tuletis puudub. Arvutame ka üldistatud tuletise  $\theta'(x)$ . Iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral

$$\begin{aligned} \langle \theta', \varphi \rangle &= - \langle \theta, \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \\ &= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

s.t. üldistatud tuletiseks on Dirac'i delta-funktsioon:

$$D \theta(x) = \delta(x). \quad (3)$$

Näitame, et iga  $f \in \mathcal{D}'$  ja iga multiindeksi  $\alpha$  korral

$$\text{supp } (D^\alpha f) \subset \text{supp } f. \quad (4)$$

Tõepoolest, kui  $x_0 \notin \text{supp } f$ , siis leidub selline  $x_0$  ümbrus  $U(x_0, \delta)$ , et

$$\text{supp } \varphi \subset U(x_0, \delta) \Rightarrow \langle f, \varphi \rangle = 0.$$

Kuna siledate funktsioonide korral on sisalduvus (4) ilmne, siis

$$\begin{aligned} \text{supp } \varphi \subset U(x_0, \delta) &\Rightarrow \text{supp } (D^\alpha \varphi) \subset U(x_0, \delta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \langle f, D^\alpha \varphi \rangle = 0 \Rightarrow \langle D^\alpha f, \varphi \rangle = 0 \end{aligned}$$

ning  $x_0 \notin \text{supp } (D^\alpha f)$ . Sellega on sisalduvus (4) näidatud.

Veendume, et diferentseerimise operaatorid on pidevad ruumis  $\mathcal{D}'$ : iga multiindeksi  $\alpha$  korral

$$f_k \rightarrow f \text{ ruumis } \mathcal{D}' \Rightarrow D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f \text{ ruumis } \mathcal{D}'.$$

Koondumise definitsiooni kohaselt ruumis  $\mathcal{D}'$  peame näitama, et

$$\begin{aligned} \langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \langle D^\alpha f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle D^\alpha f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Viimane implikatsioon on lihtsalt kontrollitav:

$$\langle D^\alpha f_k, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f_k, D^\alpha \varphi \rangle \rightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle = \langle D^\alpha f, \varphi \rangle.$$

Ülesanne 6. Näidata, et diferentseerimise tulemus ei sõltu diferentseerimise järjekorrast:

$$D^\alpha(D^\beta f) = D^\beta(D^\alpha f) = D^{\alpha+\beta}f \quad (\forall f \in \mathcal{D}').$$

Ülesanne 7. Näidata, et  $a \in C^\infty$  ja  $f \in \mathcal{D}'$  korrutise  $af \in \mathcal{D}'$  jaoks kehtib Leibnitzi valem korrutise tuletise kohta, näiteks

$$\frac{\partial(af)}{\partial x_j} = \frac{\partial a}{\partial x_j} f + a \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

## § 5. Distributsioonide struktuurist

1. Finiitse distributsiooni esitus regulaarsete distributsioonide tuletiste summana. Tuletame meelde, et distributsiooni  $f \in \mathcal{D}'$  nimetatakse finiitseks, kui tema kandja  $\text{supp } f \subset \mathbb{R}^n$  on tõekestatud.

Teoreem 1. Olgu distributsiooni  $f \in \mathcal{D}'$  kandja  $K = \text{supp } f$  tõekestatud. Siis  $f$  on esitatav teatava lõpliku summana

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha, \quad (1)$$

kus  $f_\alpha$  on regulaarsed distributsioonid; iga  $\varepsilon > 0$  korral saab funktsioone  $f_\alpha(x)$  valida nii, et

$$\text{supp } f_\alpha \subset K_\varepsilon,$$

kus  $K_\varepsilon$  on hulga  $K = \text{supp } f$   $\varepsilon$ -ümbrus, s.t.  $K_\varepsilon = \bigcup_{x \in K} U(x, \varepsilon)$ .

\* Tõestus. a) Defineerime ruumi  $C_0^\infty(K_\varepsilon)$ , mille elementideks on funktsioonid  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  kandjatega  $\text{supp } \varphi \subset K_\varepsilon$ . Ilmselt on  $C_0^\infty(K_\varepsilon)$  lineaarne ruum; toome temas sisse loenduva hulga norme

$$\|\varphi\|_p = \sum_{|\alpha| \leq p} \max_{x \in K_\varepsilon} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad p=0,1,2,\dots$$

Nende normide abil defineerime koondumise:  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $C_0^\infty(K_\varepsilon)$ , kui

$$\|\varphi_k - \varphi\|_p \rightarrow 0 \quad (\forall p=0,1,2,\dots).$$

Seega koondumine ruumis  $C_0^\infty(K_\varepsilon)$  tähendab funktsioonide ja nende kõikvõimalike tuletiste ühtlast koondumist.

Näitame, et ruumil  $C_0^\infty(K_\epsilon)$  määratud lineaarne funktsionaal  $g$  on pidev parajasti siis, kui ta rahuldab võrratust

$$|\langle g, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_p \quad (\forall \varphi \in C_0^\infty(K_\epsilon)), \quad (2)$$

kus  $c$  on mingi (küllalt suur) konstant ja  $p$  mingi (küllalt suur) naturaalarv<sup>\*</sup>. Tingimuse (2) piisavus on ilmne, tõestame tarvilikkuse (mis on järgnevas väga oluline). Niisiis olgu  $g$  pidev lineaarne funktsionaal ruumil  $C_0^\infty(K_\epsilon)$ , peame näitama võrratuse (2) kehtivust mingite  $c$  ja  $p$  korral. Tee- me väitevastase oletuse, et (2) ei kehti. Siis iga naturaalarvu  $k$  korral leidub selline  $\varphi_k \in C_0^\infty(K_\epsilon)$ , et

$$|\langle g, \varphi_k \rangle| > k \|\varphi_k\|_k. \quad (2')$$

Moodustame jada

$$\psi_k = \frac{\varphi_k}{k \|\varphi_k\|_k} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Kuna  $k \gg p$  korral

$$\|\psi_k\|_p = \frac{\|\varphi_k\|_p}{k \|\varphi_k\|_k} \leq \frac{1}{k},$$

siis  $k \rightarrow \infty$  korral

$$\|\psi_k\|_p \rightarrow 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots),$$

s.t. jada  $\psi_k$  koondub ruumis  $C_0^\infty(K_\epsilon)$  nulliks. Funktsionaali

$g$  pidevuse tõttu peab siis aset leidma ka koondumine

$\langle g, \psi_k \rangle \rightarrow 0$ , kuid võrratusest (2') saame, et

$$|\langle g, \psi_k \rangle| = \frac{|\langle g, \varphi_k \rangle|}{k \|\varphi_k\|_k} > 1 \quad (k=1, 2, \dots).$$

Tekkinud vastuolu tõestabki võrratuse (2).

---

<sup>\*</sup>) Lineaarsete topoloogiliste ruumide teooriaga kursisolevale lugejale on selline väide tuttav ja ta võib järgneva tõestuse vahele jätta.

b) Vaatleme distributsiooni  $f \in \mathcal{D}'$ , millest on juttu tõestatavas teoreemis. Kuna  $C_0^\infty(K_\epsilon) \subset \mathcal{D}$ , siis me võime funktsionaali  $f \in \mathcal{D}'$  vaadelda ka lineaarse funktsionaalina ruumil  $C_0^\infty(K_\epsilon)$ ; kuna

$$\begin{aligned} \psi_k \rightarrow \psi \text{ ruumis } C_0^\infty(K_\epsilon) &\rightarrow \psi_k \rightarrow \psi \text{ ruumis } \mathcal{D} \rightarrow \\ &\Rightarrow \langle f, \psi_k \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle, \end{aligned}$$

siis  $f$  on pidev lineaarne funktsionaal ruumil  $C_0^\infty(K_\epsilon)$ . Eespool tõestatu põhjal (vt. (2)) leiduvad sellised  $c > 0$  ja naturaalarv  $p$ , et

$$|\langle f, \psi \rangle| \leq c \|\psi\|_p \quad (\forall \psi \in C_0^\infty(K_\epsilon)). \quad (3)$$

Olgu  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  selline funktsioon, et  $a(x) = 1$  hulgal  $K_{\epsilon/2}$  ja  $\text{supp } a \subset K_\epsilon$  (§ 4 teoreemi 1 kohaselt selline funktsioon leidub). Kuna hulga  $K = \text{supp } f$  ümbruses  $K_{\epsilon/2}$  on  $a(x) = 1$ , siis  $af = f$  (§ 4, teoreem 4) ja

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}).$$

Paneme tähele, et  $a\varphi \in C_0^\infty(K_\epsilon)$ , kui  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Võrratuse (3) põhjal

$$|\langle f, \varphi \rangle| = |\langle f, a\varphi \rangle| \leq c \|a\varphi\|_p,$$

s.t.

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq p} \max_{x \in K_\epsilon} |D^\alpha [a(x)\varphi(x)]| \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}). \quad (4)$$

Veendume, et  $\psi \in C_0^\infty(K_\epsilon)$  korral

$$\max_{x \in K_\epsilon} |\psi(x)| \leq \|D^{(1, \dots, 1)} \psi\|_{L_1(K_\epsilon)} = \int_{K_\epsilon} |D^{(1, \dots, 1)} \psi(x)| dx. \quad (5)$$

Tõepoolest,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\partial^n \psi(x)}{\partial x_1 \dots \partial x_n} dx_1 \dots dx_n,$$

millest saamegi võrratuse (5):

$$|\psi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D^{(1, \dots, 1)} \psi(x)| dx = \int_{K_\varepsilon} |D^{(1, \dots, 1)} \psi(x)| dx.$$

Kuna funktsioonid  $\psi_\alpha(x) = D^{\alpha} [a(x)\psi(x)] \in C_0^\infty(K_\varepsilon)$ , siis võrratustest (4) ja (5) järeldub

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}(a\varphi)\|_{L_1(K_\varepsilon)} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}),$$

kus  $m = p+n$ . Korrutist  $a\varphi$  diferentseerides leiame siit, et

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c' \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} \varphi\|_{L_1(K_\varepsilon)} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}) \quad (6)$$

mingi uue kordajaga  $c'$ .

c) Olgu  $s$  selliste paarikaupa erinevate multiindeksite  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  arv, et  $|\alpha| \leq m$ . Defineerime Banachi ruumi

$$E = \underbrace{L_1(K_\varepsilon) \times L_1(K_\varepsilon) \times \dots \times L_1(K_\varepsilon)}_{s \text{ korda}}, \quad \|v\|_E = \sum_{|\alpha| \leq m} \|v_\alpha\|_{L_1(K_\varepsilon)}$$

ja lineaarse operaatori  $J : \mathcal{D} \rightarrow E$  valemiga

$$J\varphi = (D^{\alpha} \varphi)_{|\alpha| \leq m}.$$

Ruumi  $E$  alamruumil  $J\mathcal{D}$  defineerime funktsionaali  $f^\#$  valemiga

$$\langle f^\#, J\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Et veenduda selle definitsiooni korrektsuses, on vaja näidata, et

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}, J\varphi_1 = J\varphi_2 \Rightarrow \langle f, \varphi_1 \rangle = \langle f, \varphi_2 \rangle$$

ehk

$$\varphi \in \mathcal{D}, J\varphi = 0 \Rightarrow \langle f, \varphi \rangle = 0.$$

Viimane aga on ilmne: kui  $J\varphi = 0$ , siis  $\text{supp } \varphi$  ei lõiku hulgaga  $\text{supp } f = K \subset K_\varepsilon$ , mistõttu  $\langle f, \varphi \rangle = 0$  (§ 4, teoreem 3).

Võrratus (6) tähendab, et

$$|\langle f^\#, J\varphi \rangle| = |\langle f, \varphi \rangle| \leq c' \|J\varphi\|_{\mathbb{E}},$$

s.t.  $f^\#$  on pidev lineaarne funktsionaal Banachi ruumi  $\mathbb{E}$  alamruumil  $J\mathcal{D}$ . Hahn-Banachi teoreemi põhjal on funktsionaal  $f^\#$  jätkatav pidevaks lineaarseks funktsionaaliks kogu ruumil  $\mathbb{E}$ . Kuid iga pidev lineaarne funktsionaal ruumil  $\mathbb{E}$  kui ruumide  $L_1(K_\epsilon)$  otsekorrutisel avaldub teatavasti kujul

$$\langle f^\#, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{K_\epsilon} f_\alpha(x) v_\alpha(x) dx, \quad (7)$$

kus  $f_\alpha(x)$  on mingid mõõtuavad tõkestatud funktsioonid hulgal  $K_\epsilon$  (kordajad  $(-1)^{|\alpha|}$  integraalide ees ei oma printsiipiaalset tähtsust). Muuhulgas

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f^\#, J\varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{K_\epsilon} f_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

ehk, jätkates funktsioone  $f_\alpha(x)$  väljaspoole  $K_\epsilon$  nulliga,

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle f_\alpha, D^\alpha \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha f_\alpha, \varphi \rangle = \\ &= \left\langle \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha, \varphi \right\rangle \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}). \end{aligned}$$

Seega

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha f_\alpha,$$

kusjuures  $f_\alpha$  on regulaarsed distributsioonid ning  $\text{supp } f_\alpha \subset \bar{K}_\epsilon$ , kus  $\bar{K}_\epsilon$  on  $K_\epsilon$  sulund. Sellega on teoreemi 1 väited tõestatud, ainult  $\text{supp } f_\alpha \subset K_\epsilon$  asemel saime pisut nõrgema väite  $\text{supp } f_\alpha \subset \bar{K}_\epsilon$ . Kuid arvestades  $\epsilon > 0$  suvalisust meie arutlustes, võime leida ka sellise esituse (1), et  $\text{supp } f_\alpha \subset \bar{K}_{\epsilon/2} \subset K_\epsilon$ .

Teoreem 1 on täielikult tõestatud.

Teoreemi 1 väidet võib tugevdada:

Ülesanne 1. Näidata, et iga finiidne distributsioon  $f \in \mathcal{D}'$  on esitatav kujul  $f = D^{\alpha} h$ , kus  $h(x)$  on pidev funktsioon. (Vt. § 7 teoreemi 1 tõestuse viimast osa d.) \*

2. Distributsioonide lokaalselt lõplikud read. Distributsioonidest  $g_i \in \mathcal{D}'$  ( $i=1,2,\dots$ ) moodustatud rida  $\sum_1 g_i$  nimetatakse lokaalselt lõplikuks, kui iga tõkestatud hulk  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  lõikub ülimalt lõpliku arvuga kandjatest  $\text{supp } g_i$  ( $i=1,2,\dots$ ). Lokaalselt lõplik rida  $\sum_1 g_i$  defineerib teatava distributsiooni  $f$  (rea summa  $f = \sum_1 g_i$ ), mis suvalisele  $\varphi \in \mathcal{D}$  seab vastavusse arvu

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_1 \langle g_i, \varphi \rangle. \quad (8)$$

Paneme tähele, et arvreas  $\sum_1 \langle g_i, \varphi \rangle$  on nullist erinevaid liikmeid vaid lõplik arv - see järeldub  $\text{supp } \varphi$  tõkestatusest ja rea  $\sum_1 g_i$  lokaalsest lõplikkusest:  $\text{supp } g_i \cap \text{supp } \varphi = \emptyset$  küllalt suurte  $i$  korral ja  $\langle g_i, \varphi \rangle = 0$  nende  $i$ -de korral (vt. § 4 teoreemi 3). Lihtne on näha, et funktsionaal  $f$  on lineaarne; näitame tema pidevust. Kui  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{D}$ , siis leidub selline tõkestatud hulk  $U \subset \mathbb{R}^n$ , et

$$\text{supp } \varphi_k \subset U \quad (k=1,2,\dots), \quad \text{supp } \varphi \subset U;$$

vastavalt hulgale  $U$  leidub selline  $N = N(U)$ , et

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \sum_{i=1}^N \langle g_i, \varphi_k \rangle, \quad \langle f, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^N \langle g_i, \varphi \rangle.$$

Nüüd saame funktsionaalide  $g_i$  pidevusest, et

$$\langle f, \varphi_k \rangle = \sum_{i=1}^N \langle g_i, \varphi_k \rangle \rightarrow \sum_{i=1}^N \langle g_i, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \text{m.o.t.t.}$$

Seega valemiga (8) defineeritud funktsionaal  $f$  on tõepoo-

poolest lineaarne ja pidev, s.t.  $f \in \mathcal{D}'$

Lemma. Iga distributsioon  $f \in \mathcal{D}'$  on esitatav finiiitsete distributsioonide lokaalselt lõpliku rea summana.

**Tõestus.** Konstrueerime ühe sellistest esitustest. Olgu  $a_i \in \mathcal{D}$  ( $i=1,2,\dots$ ) sellised funktsioonid, et  $a_i(x) = 1$  rõngas  $i - 1 < \|x\| < i$  ja  $a_i(x) = 0$  väljaspool selle rõnga  $\varepsilon$ -ümbrust ( $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ). Siis

$$\sum_1 a_i(x) \geq 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n),$$

kusjuures iga  $x \in \mathbb{R}^n$  korral on selles reas vaid üks või kaks nullist erinevat liiget. Funktsioonid

$$b_i(x) = \frac{a_i(x)}{\sum_k a_k(x)} \quad (i=1,2,\dots)$$

kuuluvad samuti ruumi  $\mathcal{D}$  ning

$$\sum_1 b_i(x) = 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Olgu antud  $f \in \mathcal{D}'$ . Suvalise  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \sum_1 b_i \varphi \rangle = \sum_1 \langle f, b_i \varphi \rangle = \langle \sum_1 b_i f, \varphi \rangle$$

kusjuures supp  $\varphi$  tõkestatuse tõttu vaid lõplik arv funktsioonidest  $b_i \varphi$  ja arvudest  $\langle b_i f, \varphi \rangle$  erinevad nullist. Sellega olemegi esitanud  $f$  lokaalselt lõpliku rea summana finiiitsetest distributsioonidest:

$$f = \sum_1 b_i f, \quad \text{supp}(b_i f) \subset \text{supp } b_i = \text{supp } a_i.$$

Lemma on tõestatud.

Edaspidi tuleb meil vaadelda ka kordseid lokaalseid lõplikke ridu kujul

$$f = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \varepsilon_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$$

(tänu lokaalsele lõplikkusele ei olene rea summa summeerimi-

se järjekorrast). Iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral on vaid lõplik hulk arvudest  $\langle \varepsilon_\alpha, \varphi \rangle$  nullist erinevad ning leidub selline  $m = m(\varphi)$ , et

$$\langle f, \varphi \rangle = \sum_{\alpha} \langle \varepsilon_\alpha, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \varepsilon_\alpha, \varphi \rangle = \langle \sum_{|\alpha| \leq m} \varepsilon_\alpha, \varphi \rangle.$$

Ülesanne 2. Näidata, et lokaalselt lõpliku rea  $\sum_1 \varepsilon_1$  osasummade jada  $f_k = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$  ( $k=1, 2, \dots$ ) koondub ruumis  $\mathcal{D}'$  rea summaks.

3. Suvalise distributsiooni esitus regulaarsete distributsioonide tuletiste summana. Siin me üldistame teoreemi 1 juhule, kui distributsioon  $f \in \mathcal{D}'$  ei pruugi olla finiidne.

Teoreem 2. Iga distributsioon  $f \in \mathcal{D}'$  on esitatav kujul

$$f = \sum_{\alpha} D^{\alpha} f_{\alpha}, \quad (9)$$

kus  $f_{\alpha}$  on regulaarsed distributsioonid ja rida on lokaalselt lõplik.

\* T ö e s t u s. Toetudes eelmises punktis tõestatud lemmale, esitame  $f$  kõigepealt lokaalselt lõpliku rea summana

$$f = \sum_1 \varepsilon_i, \quad (10)$$

milles  $\varepsilon_i \in \mathcal{D}'$  on finiidtsed distributsioonid. Seejärel, toetudes teoreemile 1, esitame iga  $\varepsilon_i$  kujul

$$\varepsilon_i = \sum_{|\alpha| \leq m_i} D^{\alpha} f_{i, \alpha}. \quad (11)$$

kus  $f_{i, \alpha}$  on regulaarsed distributsioonid ja  $\text{supp } f_{i, \alpha}$  sisalduvad  $\text{supp } \varepsilon_i$   $\varepsilon$ -ümbruses. Seega

$$f = \sum_1 \sum_{|\alpha| \leq m_i} D^{\alpha} f_{i, \alpha}. \quad (12)$$

Defineerides  $f_{i, \alpha} = 0$ , kui  $|\alpha| > m_i$ , kirjutame  $f$  avaldise

ümbert kujul

$$f = \sum_i \sum_{\alpha} D^{\alpha} f_{i, \alpha} = \sum_{\alpha} D^{\alpha} \left( \sum_i f_{i, \alpha} \right) = \sum_{\alpha} D^{\alpha} f_{\alpha}.$$

Siin iga  $f_{\alpha} = \sum_i f_{i, \alpha}$  kujutab endast lokaalselt lõpliku rea summat. Allpool näitame, et rida  $\sum_{\alpha} D^{\alpha} f_{\alpha}$  on samuti lokaalselt lõplik. Kahe viimatimainitud rea lokaalsest lõplikkusest järeldub ka äsja läbi viidud summeerimise järjekorra muutmise seaduslikkus. Soovitame lugejal selles küsimuses järele mõelda.

Niisiis jääb näidata, et rida  $\sum_{\alpha} D^{\alpha} f_{\alpha}$  on lokaalselt lõplik. Üldisust kitsendamata võime lugeda, et avaldises (12) on  $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ . Olgu  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  suvaline tõkestatud hulk. Kuna  $\text{supp } D^{\alpha} f_{\alpha} \subset \text{supp } f_{\alpha}$ , siis piisab näidata, et vaid lõplik arv funktsioonide  $f_{\alpha}$  kandjatest lõikub hulga  $\Omega$ . Kui  $\Omega \cap \text{supp } f_{\alpha} \neq \emptyset$ , siis  $f_{\alpha} = \sum_i f_{i, \alpha}$  tõttu on mingi  $i = i_{\alpha}$  korral ka

$$\Omega \cap \text{supp } f_{i_{\alpha}, \alpha} \neq \emptyset,$$

kusjuures

$$|\alpha| \leq m_{i_{\alpha}}$$

(vt. (12);  $\alpha > m_{i_{\alpha}}$  korral on  $f_{i_{\alpha}, \alpha} \equiv 0$ ). Edasi, kuna  $\text{supp } f_{i_{\alpha}, \alpha}$  sisaldub  $\text{supp } g_{i_{\alpha}}$   $\epsilon$ -ümbruses (vt. (11)), siis

$$\Omega_{\epsilon} \cap \text{supp } g_{i_{\alpha}} \neq \emptyset,$$

kus  $\Omega_{\epsilon}$  on  $\Omega$   $\epsilon$ -ümbrus. Rea (10) lokaalse lõplikkuse tõttu leidub selline  $N$ , et  $i > N$  korral  $\Omega_{\epsilon} \cap \text{supp } g_i = \emptyset$ . Järelikult  $i_{\alpha} \leq N$  ja

$$|\alpha| \leq m_{i_{\alpha}} \leq m_N.$$

Kokkuvõttes, kui  $\Omega \cap \text{supp } f_{\alpha} \neq \emptyset$ , siis  $|\alpha| \leq m_N$ , s.t. vaid lõplik arv funktsioonide  $f_{\alpha}$  kandjatest lõikub hulga-

ga  $\Omega$  , m.o.t.t.

Teoreem 2 on tõestatud. \*

4. Ühepunktilise kandjaga distributsiooni struktuur.

Järgmise teoreemi tõestust me ei esita, tõestuse võib leida õpikust [1].

Teoreem 3. Kui distributsiooni  $f \in \mathcal{D}'$  kandjaks on ühepunktiline hulk  $\{0\}$ , siis ta on ühesel viisil esitatav lõp-liku summana

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha \delta ,$$

kus  $c_\alpha$  on mingid konstandid ja  $\delta$  on Dirac'i delta-funktsioon.

Kui  $f \in \mathcal{D}'$  kandjaks on mingi muu punkt  $\{x_0\}$ , siis esitus on analoogiline, ainult  $\delta(x)$  asendub distributsiooniga  $\delta(x - x_0)$ , mis toimib põhifunktsioonidele järgmiselt:

$$\langle \delta(x - x_0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x_0).$$

§ 6. D i s t r i b u t s i o o n i d e  
t e n s o r k o r r u t i s  
j a k o n v o l u t s i o o n

1. Distributsioonide tensorkorrutis. Distributsioonide  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  tensorkorrutiseks nimetatakse distributsiooni  $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , mis igale põhifunktsioonile  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  seab vastavusse arvu

$$\langle f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle. \quad (1)$$

Allpool näitame selle definitsiooni korrektsust. Me peame näitama, et iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  korral

$$\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (2)$$

(vastasel korral pole sellele funktsioonile võimalik rakendada funktsionaali  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ). Peale selle on vaja näidata, et valemiga (1) defineeritud funktsionaal  $f(x) \cdot g(y)$  on tõepoolest distributsioon, s.t. pidev lineaarne funktsionaal ruumil  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ ; kuna lineaarsus on ilmne, on vaja näidata vaid pidevust, s.t. implikatsiooni

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \Rightarrow \langle f(x) \cdot g(y), \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f(x) \cdot g(y), \varphi \rangle \quad (3)$$

Esitame distributsiooni  $g$  lokaalselt lõpliku summana

$$g = \sum_{\beta} D^{\beta} g_{\beta},$$

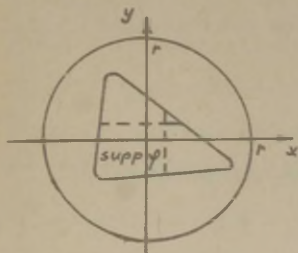
milles  $g_{\beta}$  on regulaarsed distributsioonid (vt. § 5, teoreem 2). Sisaldugu  $\text{supp } \varphi(x, y)$  keras  $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq r^2$ , siis  $\varphi(x, y)$  kui  $y$  funktsiooni kandja sisaldub keras  $\|y\| \leq r$  (vt. joon. 11). Kera  $\|y\| \leq r$  lõikub vaid lõpliku arvuga funktsioonide  $g_{\beta}(y)$  kandjatest ( $|\beta| \leq m$ ), seega

$$\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle = \sum_{|\beta| \leq m} \langle D^\beta g_\beta(y), \varphi(x, y) \rangle =$$

$$= \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \langle g_\beta(y), D_y^\beta \varphi(x, y) \rangle =$$

$$= \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \int_{\mathbb{R}^m} g_\beta(y) D_y^\beta \varphi(x, y) dy =$$

$$= \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \int_{|y| \leq r} g_\beta(y) D_y^\beta \varphi(x, y) dy.$$



Joon. 11. 1

Viimaseid integraale võib x jär-  
gi diferentseerida kuitahes pal-  
ju kordi. Seega  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ja

$$D^\alpha \psi(x) = \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^{|\beta|} \int_{|y| \leq r} g_\beta(y) D_x^\alpha D_y^\beta \varphi(x, y) dy; \quad (4)$$

viies eelnevad teisendused läbi vastupidises järjekorras,  
saame

$$D^\alpha \psi(x) = \langle g(y), D^\alpha \varphi(x, y) \rangle.$$

Veendume, et  $\psi(x)$  on finiidne. Tõepoolest,  $\|x\| \geq r$   
korral  $\varphi(x, y) = 0$  ja

$$\psi(x) = \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle = \langle g(y), 0 \rangle = 0,$$

s.t.  $\text{supp } \psi$  sisaldub kerask  $\|x\| \leq r$ . Sellega oleme näidanud,  
et valemiga (2) defineeritud funktsioon  $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .

Implikatsiooni (3) tõestamiseks näitame kõigepealt, et

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m}) \Rightarrow \psi_k(x) \rightarrow \psi(x) \text{ ruumis } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (5)$$

kus  $\psi_k(x) = \langle g(y), \varphi_k(x, y) \rangle$ . Kuna funktsioonide  $\varphi_k(x, y)$   
kandjad sisalduvad mingis kerask  $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq r^2$ , siis, nagu  
me äsja nägime, funktsioonide  $\psi_k(x)$  kandjad sisalduvad vas-  
tavas kerask  $\|x\| \leq r$ . On vaja veel näidata, et iga diferent-  
seerimisoperaatori  $D^\alpha$  korral

$$D^\alpha \psi_k(x) \rightarrow D^\alpha \psi(x)$$

ühtlaselt ruumis  $R^n$ . Korrates arutlusi, mille viisime läbi valemi (4) tuletamisel (või rakendades kohe valemit (4)), saame

$$D^\alpha [\psi_k(x) - \psi(x)] = \sum_{|j| \leq m} (-1)^{|j|} \int_{|y| \leq r} g_j(y) D_x^\alpha D_y^j [\psi_k(x,y) - \psi(x,y)] dy \rightarrow 0$$

ühtlaselt  $x \in R^n$  suhtes, sest  $D_x^\alpha D_y^j (\psi_k - \psi) \rightarrow 0$  ühtlaselt  $x$  ja  $y$  suhtes. Implikatsioon (5) on põhjendatud.

Nüüd ei valmista ka implikatsiooni (3) põhjendamine enam raskusi:

$$\psi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D}(R^{n+m}) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{(5)} \langle g(y), \psi_k(x,y) \rangle \rightarrow \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle \text{ ruumis } \mathcal{D}(R^n) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{f \text{ p.i.d.}} \langle f(x), \langle g(y), \psi_k(x,y) \rangle \rangle \rightarrow \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{def. (f)}} \langle f(x) \cdot g(y), \psi_k \rangle \rightarrow \langle f(x) \cdot g(y), \varphi \rangle, \text{ m.o.t.t.}$$

Kui distributsioonid  $f(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$  ja  $g(y) \in \mathcal{D}'(R^m)$  on regulaarsed, siis ka  $f(x) \cdot g(y)$  on regulaarne,

$$\langle f(x) \cdot g(y), \varphi \rangle = \int_{R^{n+m}} f(x) g(y) \varphi(x,y) dx dy.$$

2. Tensorkorrutise omadusi. a) Tensorkorrutis on kommutatiivne:  $f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x)$  mistahes  $f(x) \in \mathcal{D}'(R^n)$ ,  $g(y) \in \mathcal{D}'(R^m)$  korral. Teiste sõnadega, iga  $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+m})$  korral

$$\langle f(x), \langle g(y), \varphi(x,y) \rangle \rangle = \langle g(y), \langle f(x), \varphi(x,y) \rangle \rangle. \quad (6)$$

Tõepoolest, esitades distributsioonid  $f$  ja  $g$  lokaalselt lõplike summadena

$$f(x) = \sum_{\alpha} D^\alpha f_\alpha(x), \quad g(y) = \sum_{\beta} D^\beta g_\beta(y),$$

taandub võrduse (6) põhjendamine analoogiliste võrduste põhjendamisele regulaarsete distributsioonide  $f(x)$  ja  $g(y)$  jaoks. Regulaarsete distributsioonide korral järeldub võrdus (6) Fubini teoreemist integreerimise järjekorra muutmise kohta. Jätame tõestuse üksikasjad lugeja hooleks.

b) Tensorkorrutis on pidev kummagi teguri suhtes eraldi: kui  $f_k(x) \rightarrow f(x)$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , siis  $f_k(x) \cdot g(y) \rightarrow f(x) \cdot g(y)$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$  ja analoogiliselt teise teguri suhtes. Tõepoolest, iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  korral

$$\begin{aligned} \langle f_k(x) \cdot g(y), \varphi(x, y) \rangle &= \langle f_k(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle f_k(x), \psi(x) \rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \langle f(x), \psi(x) \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y) \rangle, \end{aligned}$$

m.o.t.t. Me kasutasime siin eelmises punktis tõestatud omadust (2). Pidevus teise teguri suhtes järeldub tensorkorrutise kommutatiivsusest.

c)  $D_x^\alpha(f(x) \cdot g(y)) = D_x^\alpha f(x) \cdot g(y)$ . Tõepoolest, iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  korral

$$\begin{aligned} \langle D_x^\alpha(f(x) \cdot g(y)), \varphi(x, y) \rangle &= \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f(x) \cdot g(y), D_x^\alpha \varphi(x, y) \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle g(y), \langle f(x), D_x^\alpha \varphi(x, y) \rangle \rangle = \\ &= \langle g(y), \langle D_x^\alpha f(x), \varphi(x, y) \rangle \rangle = \\ &= \langle D_x^\alpha f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y) \rangle, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

$$d) a(x)(f(x) \cdot g(y)) = a(x)f(x) \cdot g(y) \quad (a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

Tõestus on analoogiline eelmise omaduse tõestusega ja jääb lugeja hooleks.

Ülesanne 1. Näidata, et distributsioonide tensorkorruta-

tis on assotsiatiivne:  $f(x) \cdot (g(y) \cdot h(z)) = (f(x) \cdot g(y)) \cdot h(z)$   
 mistahes  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ ,  $h(z) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^k)$  korral.

3. Funktsioonide konvolutsioon. Olgu  $f(x)$  ja  $g(x)$  sel-  
 lised ruumil  $\mathbb{R}^n$  määratud lokaalselt integreeruvad funktsioo-  
 nid, et peaaegu iga  $x \in \mathbb{R}^n$  korral eksisteerib integraal

$$(f * g)(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy. \quad (7)$$

Funktsiooni  $f * g$  nimetatakse sellisel juhul funktsioonide  $f$   
 ja  $g$  konvolutsiooniks. Muutujate vahetusega  $x - y = z$  saa-  
 me

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x - z)f(z)dz = (g * f)(x),$$

s. t.  $f * g = g * f$ .

Piisav tingimus konvolutsiooni  $f * g$  eksisteerimiseks on  
 funktsiooni

$$h(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)g(y)| dy \quad (8)$$

lokaalne integreeruvus. Kui see tingimus on täidetud, siis  
 ka  $f * g$  on lokaalselt integreeruv.

Kui üks funktsioonidest  $f(x)$  ja  $g(x)$  on finiidne, siis  
 konvolutsioon  $f * g$  eksisteerib. Tõepoolest, kui näiteks

$$\text{supp } g \subset U_{r_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r_0\},$$

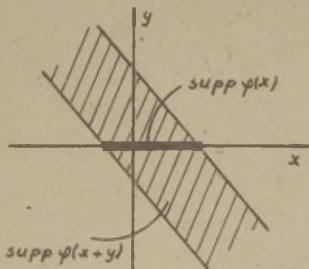
siis iga kera  $U_r \subset \mathbb{R}^n$  korral

$$\begin{aligned} \int_{U_r} h(x)dx &= \int_{U_r} \int_{U_{r_0}} |f(x - y)| |g(y)| dy dx = \\ &= \int_{U_{r_0}} |g(y)| \int_{U_r} |f(x - y)| dx dy \leq \\ &\leq \int_{U_{r_0}} |g(y)| dy \int_{U_{r+r_0}} |f(z)| dz < \infty, \end{aligned}$$

s.t.  $h(x)$  on lokaalselt integreeruv, m.o.t.t.

Ülesanne 2. Näidata, et  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$  korral konvolutsioon  $f * g$  eksisteerib ja  $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ .

Kui valemiga (8) defineeritud funktsioon  $h(x)$  on lokaalselt integreeruv, siis, nagu juba mainitud, on ka  $f * g$  lokaalselt integreeruv ning me võime vaadelda konvolutsiooni  $f * g$  regulaarse distributsioonina: iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  korral



Joon. 12.

$$\begin{aligned} \langle f * g, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) (f * g)(\xi) d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi - y) g(y) dy d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x + y) f(x) g(y) dx dy. \quad (9) \end{aligned}$$

Viimane integraal meenutab distributsioonide  $f(x)$  ja  $g(y)$  tensorsorkorrutist  $f(x) \cdot g(y)$  rakenda-

tuna funktsioonile  $\varphi(x+y)$ . Kuid funktsioon  $\varphi(x+y)$  ei kuulu ruumi  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ , sest tema kandja pole tõkestatud (vt. joon. 12), seega tensorsorkorrutisega siin siiski tegemist ei ole.

Olgu antud jada  $e_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $k=1, 2, \dots$ . Me ütleme, et  $e_k \rightarrow 1$  ruumis  $\mathbb{R}^n$ , kui  $e_k(x) = 1$  keras  $\|x\| \leq k$ , kusjuures jada  $e_k(x)$  ning selle kõikvõimalikest tuletistest moodustatud jadad on ühtlaselt tõkestatud:

$$|D^\alpha e_k(x)| \leq c_\alpha \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad k=1, 2, \dots).$$

Selliseks jadaks on näiteks  $e_k(x) = e^{-\frac{x^2}{k}}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , kus  $e \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ja  $e(x) = 1$  keras  $\|x\| \leq 1$ .

Näitame, et võrdust (9) saab esitada kujul

$$\langle f \circ g, \varphi \rangle = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e_k(x, y) \varphi(x+y) f(x) g(y) dx dy, \quad (9')$$

kus  $e_k(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  on suvaline selline jada, et  $e_k \rightarrow 1$  ruumis  $\mathbb{R}^{2n}$ . Tõepoolest,

$$e_k(x, y) \varphi(x+y) f(x) g(y) \rightarrow \varphi(x+y) f(x) g(y)$$

peaaegu kõikjal ruumis  $\mathbb{R}^{2n}$  ning

$$|e_k(x, y) \varphi(x+y) f(x) g(y)| \leq c_0 |\varphi(x+y) f(x) g(y)| \quad (k=1, 2, \dots),$$

kusjuures (vt. (9) ja (8)) majoreeriv funktsioon on integreeruv:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x+y) f(x) g(y)| dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(\xi-y) g(y)| dy d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)| |h(\xi)| d\xi = \int_{\text{supp } \varphi} |\varphi(\xi)| |h(\xi)| d\xi < \infty \end{aligned}$$

funktsiooni  $h(\xi)$  lokaalse integreeruvuse ja funktsiooni  $\varphi \in \mathcal{D}$  finitiivsuse tõttu. Nüüd võime Lebesgue'i teoreemi põhjal minna piirile integraali märgi all:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e_k(x, y) \varphi(x+y) f(x) g(y) dx dy &\rightarrow \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y) f(x) g(y) dx dy, \quad \text{m.o.t.t.} \end{aligned}$$

Funktsioonide  $e_k(x, y) \varphi(x, y)$  kandjad on tõkestatud, seega need funktsioonid kuuluvad ruumi  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$  ja me võime kirjutada võrduse (9') ümber tensorsorkorrutise mõistet kasutades:

$$\langle f \circ g, \varphi \rangle = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \langle f(x) \cdot g(y), e_k(x, y) \varphi(x+y) \rangle. \quad (9'')$$

Kokkuvõttes, kui  $h(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) g(y)| dy$  on lokaalselt integreeruv, siis iga ruumis  $\mathbb{R}^{2n}$  koonduva jada  $e_k(x, y) \rightarrow 1$  ja iga  $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  korral avaldub  $\langle f \circ g, \varphi \rangle$  kujul (9''). See oma-

dus võetakse aluseks konvolutsiooni mõiste laiendamisel distributsioonide jaoks.

4. Distributsioonide konvolutsioon. Oletame, et distributsioonid  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  on sellised, et iga  $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ja iga ruumis  $\mathbb{R}^{2n}$  koonduva jada  $e_k(x, y) \rightarrow 1$  ( $e_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ ) korral eksisteerib piirväärtus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x) \cdot g(y), e_k(x, y) \varphi(x+y) \rangle$$

ning see piirväärtus ei sõltu jada  $e_k$  ( $e_k \rightarrow 1$ ) valikust. Distributsioonide  $f$  ja  $g$  konvolutsiooniks nimetatakse siis funktsionaali  $f * g$ , mis seab igale  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  vastavusse mainitud piirväärtuse:

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f(x) \cdot g(y), e_k(x, y) \varphi(x+y) \rangle. \quad (10)$$

Ilmselt on selliselt defineeritud funktsionaal lineaarne; saab näidata, et ta on ka pidev (see järeldub ruumi  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  täielikkusest, mida me ei ole tõestanud). Seega, kui distributsioonide  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  konvolutsioon  $f * g$  eksisteerib, siis ka  $f * g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

Esitame konvolutsiooni olulisemaid omadusi.

a) Kui eksisteerib distributsioonide  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  konvolutsioon  $f * g$ , siis eksisteerib ka konvolutsioon  $g * f$  ja

$$f * g = g * f$$

(konvolutsiooni kommutatiivsus). See väide järeldub vahetult tensorsorrutise kommutatiivsusest ja konvolutsiooni definitioonist (10).

b) Kui eksisteerib konvolutsioon  $f * g$ , siis eksisteeri-

vad ka konvolutsioonid  $D^\alpha f \cdot g$  ja  $f \cdot D^\alpha g$ , kusjuures

$$D^\alpha f \cdot g = D^\alpha(f \cdot g) = f \cdot D^\alpha g. \quad (11)$$

Seda väidet on piisav tõestada esimest järku tuletiste  $\frac{\partial}{\partial x_j}$  ( $j=1, \dots, n$ ) jaoks. Olgu antud mingi jada  $e_k \in \mathcal{D}(R^{2n})$ ,  $e_k(x, y) \rightarrow 1$  ruumis  $R^{2n}$ . Me peame eelkõige näitama, et iga  $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$  korral eksisteerib piirväärtus

$$\left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot g, \varphi \right\rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot g(y), e_k(x, y) \varphi(x+y) \right\rangle$$

ja et see piirväärtus ei sõltu jada  $e_k$  ( $e_k \rightarrow 1$ ) valikust.

Teisendame piirväärtuse märgi all olevat suurust:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot g(y), e_k(x, y) \varphi(x+y) \right\rangle &= \\ &= - \left\langle f(x) \cdot g(y), \frac{\partial}{\partial x_j} [e_k(x, y) \varphi(x+y)] \right\rangle = \\ &= - \left\langle f(x) \cdot g(y), \left[ \frac{\partial e_k(x, y)}{\partial x_j} + e_k(x, y) \right] \varphi(x+y) \right\rangle + \\ &\quad + \left\langle f(x) \cdot g(y), e_k(x, y) \left[ \varphi(x+y) - \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right] \right\rangle. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et koondumisest  $e_k \rightarrow 1$  ruumis  $R^{2n}$  järeldub, et ka  $\frac{\partial e_k}{\partial x_j} + e_k \rightarrow 1$  ruumis  $R^{2n}$ . Meid huvitava piirväärtuse olemasolu ja sõltumatus jadast  $e_k$  ( $e_k \rightarrow 1$ ) järeldub nüüd konvolutsiooni  $f \cdot g$  eksisteerimisest:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot g, \varphi \right\rangle &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle f(x) \cdot g(y), \left[ \frac{\partial e_k(x, y)}{\partial x_j} + e_k(x, y) \right] \varphi(x+y) \right\rangle + \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle f(x) \cdot g(y), e_k(x, y) \left[ \varphi(x, y) - \frac{\partial \varphi(x+y)}{\partial x_j} \right] \right\rangle = \\ &= - \langle f \cdot g, \varphi \rangle + \left\langle f \cdot g, \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = \\ &= - \langle f \cdot g, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} (f \cdot g), \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Võrduste ahela äärmistest osadest näeme, et

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g;$$

konvolutsiooni kommutatiivsust arvestades saame siit ka

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (f \cdot g) = \frac{\partial}{\partial x_j} (g \cdot f) = \frac{\partial g}{\partial x_j} \cdot f = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Kokkuvõttes saime valemi (11) esimest järku tuletiste jaoks:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot g = \frac{\partial}{\partial x_j} (f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

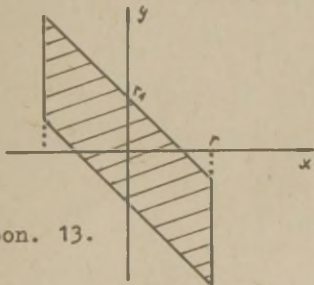
5. Finiitse distributsiooni juhtum. Näitame, et konvolutsioon  $f \cdot g$  eksisteerib, kui vähemalt üks distributsioonidest  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  on finiidne. Olgu näiteks  $f$  finiidne. Vaatleme mingit funktsiooni  $a(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , mis supp  $f$  mingis ümbruses omandab väärtuse  $a(x) = 1$ . Siis

$$a(x)(f(x) \cdot g(y)) = a(x)f(x) \cdot g(y) = f(x) \cdot g(y)$$

ja (vt. konvolutsiooni definitsiooni (10))

$$\begin{aligned} \langle f(x) \cdot g(y), e_k(x, y) \varphi(x+y) \rangle &= \\ &= \langle a(x)(f(x) \cdot g(y)), e_k(x, y) \varphi(x+y) \rangle = \\ &= \langle f(x) \cdot g(y), e_k(x, y) a(x) \varphi(x+y) \rangle. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et  $a(x) \varphi(x+y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ . Tõepoolest, selle



Joon. 13.

funktsiooni lõpmatu diferentseeruvus on selge, kandja aga sisaldub tõkestatud hulgas (vt. joon.

13)

$$\begin{aligned} \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \\ : \|x\| \leq r, \|x+y\| \leq r_1 \}, \end{aligned}$$

kus  $r$  ja  $r_1$  on sellised (küllalt suured arvud), et

$$\text{supp } a(x) \subset U_r, \quad \text{supp } \varphi(x) \subset U_{r_1}.$$

Kuna  $e_k(x, y) = 1$  keras  $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq k^2$ , siis küllalt suure  $k$  korral  $e_k(x, y)a(x)\varphi(x+y) = a(x)\varphi(x+y)$  ja

$$\langle f(x) \cdot g(y), e_k(x, y)\varphi(x+y) \rangle = \langle f(x) \cdot g(y), a(x)\varphi(x+y) \rangle.$$

Seega konvolutsioon  $f \cdot g$  eksisteerib ja

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f(x) \cdot g(y), a(x)\varphi(x+y) \rangle. \quad (12)$$

Antud juhul on lihtne näidata ka funktsionaali  $f \cdot g$  pidevust, kasutamata ruumi  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  täielikkust. Tõepoolest,

$$\varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ ruumis } \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \implies$$

$$\implies a(x)\varphi_k(x+y) \rightarrow a(x)\varphi(x+y) \text{ ruumis } \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}) \implies$$

$$\xrightarrow{f \cdot g \in \mathcal{D}'} \langle f(x) \cdot g(y), a(x)\varphi_k(x+y) \rangle \rightarrow \langle f(x) \cdot g(y), a(x)\varphi(x+y) \rangle \implies$$

$$\xrightarrow{(12)} \langle f \cdot g, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f \cdot g, \varphi \rangle, \text{ m.o.t.t.}$$

Valemist (12) ja otsekorrutise pidevast sõltuvusest oma teguritest teeme veel järgmised järeldused: 1) kui  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  on finiidne ja  $g_k \rightarrow g$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , siis  $f \cdot g_k \rightarrow f \cdot g$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ; 2) kui  $\text{supp } f_k \subset U_r$  ( $k=1, 2, \dots$ ) ja  $f_k \rightarrow f$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , siis  $f_k \cdot g \rightarrow f \cdot g$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Teises järelduses kindlustab nõue  $\text{supp } f_k \subset U_r$  ( $k=1, 2, \dots$ ) sellise funktsiooni  $a(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  olemasolu, et  $a(x) = 1$  korraga kõigi kandjate  $\text{supp } f_k$  ümbruses.

Kuna Dirac'i delta-funktsioon  $\delta(x)$  on finiidne distributsioon, siis konvolutsioon  $g \cdot \delta = \delta \cdot g$  eksisteerib iga  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  korral. Veendume, et

$$g \cdot \delta = \delta \cdot g = g. \quad (13)$$

Tõepoolest, (12) põhjal

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}^\alpha g, \varphi \rangle &= \langle \mathcal{D}^\alpha(x) \cdot g(y), a(x)\varphi(x+y) \rangle = \\ &= \langle g(y), \langle \mathcal{D}^\alpha(x), a(x)\varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle g(y), \varphi(y) \rangle, \end{aligned}$$

sest  $a(x) = 1$  punkti  $\{0\} = \text{supp } \mathcal{D}$  ümbruses, muuhulgas  $a(0) = 1$ .

Valemitest (11) ja (13) järeldub, et

$$D^\alpha g = D^\alpha(\mathcal{D}^\alpha g) = D^\alpha \mathcal{D}^\alpha g = \mathcal{D}^\alpha D^\alpha g. \quad (14)$$

Ülesanne 3. Näidata, et  $\omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ja  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  korral

$$(\omega * g)(x) = \langle g(y), \omega(x-y) \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Ülesanne 4. Näidata, et  $\varepsilon \rightarrow +0$  korral  $\omega_\varepsilon * g \rightarrow g$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , kus  $\omega_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  on § 4 punktis 1 defineeritud funktsioon. (Kasutada § 4 ül. 3 tulemust.)

Ülesanne 5. Näidata, et  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  on ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  tihe, s.t. iga  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  jaoks leiduvad sellised  $g_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , et  $\varepsilon \rightarrow 0$  korral  $g_\varepsilon \rightarrow g$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

6. Üldisem piisav tingimus konvolutsiooni eksisteerimiseks. Näitame, et distributsioonide  $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  konvolutsioon  $f * g$  eksisteerib, kui iga (kui tahes suure)  $c > 0$  korral on hulk

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x+y\| \leq c\} \cap \{\text{supp } f(x) \times \text{supp } g(y)\} \subset \mathbb{R}^{2n}$  tõkestatud. Kirjutiste lühendamiseks tähistame

$$S_f = \text{supp } f, \quad S_g = \text{supp } g,$$

$$\Omega_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x+y\| \leq c\}.$$

Uutes tähistustes näeb tehtud eeldus välja nii: hulk

$$\Omega_c \cap \{S_f \times S_g\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

on tõkestatud iga  $c > 0$  korral.

Veendume kõigepealt, et iga  $c > 0$  ja  $\varepsilon > 0$  korral osutub tõkestatuks ka hulk

$$\Omega_c \cap \{S_f^\varepsilon \times S_g^\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

kus  $S_f^\varepsilon$  ja  $S_g^\varepsilon$  on hulkade  $S_f$  ja  $S_g$   $\varepsilon$ -ümbrused. Tõepoolest, vastasel korral leidub tõkestamata jada

$$(x_k, y_k) \in \Omega_c \cap \{S_f^\varepsilon \times S_g^\varepsilon\} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Valime sellised  $(x_k^i, y_k^i) \in S_f \times S_g$ , et  $\|x_k^i - x_k\| < \varepsilon$ ,  $\|y_k^i - y_k\| < \varepsilon$ . Siis ka jada  $(x_k^i, y_k^i)$  on tõkestamata. Sisaldumise  $(x_k, y_k) \in \Omega_c$  tõttu  $(x_k^i, y_k^i) \in \Omega_{c+2\varepsilon}$ :

$$\|x_k^i + y_k^i\| < \|x_k^i - x_k\| + \|y_k^i - y_k\| + \|x_k + y_k\| < 2\varepsilon + c.$$

Seega

$$(x_k^i, y_k^i) \in \Omega_{c+2\varepsilon} \cap \{S_f \times S_g\} \quad (k=1, 2, \dots).$$

Kuna tehtud eelduse kohaselt on hulk  $\Omega_{c+2\varepsilon} \cap \{S_f \times S_g\}$  tõkestatud, siis peab ka jada  $(x_k^i, y_k^i)$  olema tõkestatud, mis on aga vastuolus eespool öelduga.

Olgu  $a(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ja  $b(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  sellised funktsioonid, et  $a(x) = 1$  hulgal  $S_f^{\varepsilon/2}$ ,  $b(y) = 1$  hulgal  $S_g^{\varepsilon/2}$  ning iga  $c$  korral on hulk

$$\Omega_c \cap \{\text{supp } a(x) \times \text{supp } b(y)\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

tõkestatud (eespool tõestatu põhjal on viimane tingimus täidetud, kui näiteks  $\text{supp } a \subset S_f^\varepsilon$ ,  $\text{supp } b \subset S_g^\varepsilon$ ). Siis

$$a(x)b(y)[f(x) \cdot g(y)] = a(x)f(x) \cdot b(y)g(y) = f(x) \cdot g(y).$$

Konvolutsiooni  $f \cdot g$  eksisteerimise tõestamiseks peame näitama piirväärtuse (10) olemasolu ja sõltumatust jadast  $e_k(x, y)$  ( $e_k \rightarrow 1$  ruumis  $\mathbb{R}^{2n}$ ). Vaatleme suvalist põhifunktsiooni

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ; tema kandja sisaldub mingis kera  $\|x\| \leq r$ . Teisendame avaldist piirväärtuses (10):

$$\begin{aligned} \langle f(x) \cdot g(y), e_k(x,y)\varphi(x+y) \rangle &= \\ &= \langle a(x)b(y)[f(x) \cdot g(y)], e_k(x,y)\varphi(x+y) \rangle = \\ &= \langle f(x) \cdot g(y), e_k(x,y)\varphi(x+y)a(x)b(y) \rangle. \end{aligned}$$

Paneme tähele, et

$$\text{supp}[\varphi(x+y)a(x)b(y)] \subset \Omega_r \cap \{\text{supp } a(x) \times \text{supp } b(y)\},$$

kusjuures paremal pool olev hulk on tõkestatud funktsioonide  $a(x)$  ja  $b(y)$  valiku kohaselt. Seega

$$\varphi(x+y)a(x)b(y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n}).$$

Kuna  $e_k(x,y) = 1$  kera  $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq k^2$ , siis küllalt suurte  $k$  korral

$$e_k(x,y)\varphi(x+y)a(x)b(y) = \varphi(x+y)a(x)b(y)$$

ja

$$\begin{aligned} \langle f(x) \cdot g(y), e_k(x,y)\varphi(x+y)a(x)b(y) \rangle &= \\ &= \langle f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)a(x)b(y) \rangle. \end{aligned}$$

Seega piirväärtus (10) eksisteerib ja ei sõltu jada  $e_k(x,y)$  valikust, s.t. eksisteerib konvolutsioon  $f \cdot g$ , kusjuures

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f(x) \cdot g(y), a(x)b(y)\varphi(x+y) \rangle.$$

Viimasele valemile toetudes on lihtne näidata funktsionaali  $f \cdot g$  pidevust, kasutamata ruumi  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  täielikkust.

Võtame tõestatud tulemused kokku teoreemiks.

Teoreem 1. Kui hulk

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x+y\| \leq c\} \cap \{\text{supp } f(x) \times \text{supp } g(y)\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

on iga  $c > 0$  korral tõkestatud, siis distributsioonide  $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  konvolutsioon  $f \cdot g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  eksisteerib ja avaldub kujul

$$\langle f \cdot g, \varphi \rangle = \langle f(x) \cdot g(y), a(x)b(y)\varphi(x+y) \rangle, \quad (15)$$

kus  $a(x)$  ja  $b(y)$  on suvalised lõpmata diferentseeruvad funktsioonid, sellised, et: 1)  $a(x) = 1$  hulga  $\text{supp } f$  mingis ümbruses ja  $b(y) = 1$  hulga  $\text{supp } g$  mingis ümbruses; 2) hulk

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x+y\| \leq c\} \cap \{\text{supp } a(x) \times \text{supp } b(y)\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

on tõkestatud iga  $c > 0$  korral.

Ülesanne 6. Olgu  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  ja  $g(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  sellised, et  $\text{supp } f(x)$  ja  $\text{supp } g(x)$  sisalduvad poolteljel  $x \geq 0$ . Näidata, et konvolutsioon  $f \cdot g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$  eksisteerib, kusjuures  $\text{supp } (f \cdot g)$  sisaldub samuti poolteljel  $x \geq 0$ .

Ülesanne 7. Näidata, et teoreemi 1 tingimused on täidetud, kui üks distributsioonidest  $f, g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  on finiidne. Tuletada valem (12) valemist (15).

Ülesanne 8. Näidata, et teoreemi 1 tingimustel sõltub  $f \cdot g$  pidevalt kummastki tegurist eraldi: kui iga  $k$  korral sisaldub  $\text{supp } f_k$  hulga  $\text{supp } f$  mingis  $\varepsilon$ -ümbruses ning  $f_k \rightarrow f$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , siis  $f_k \cdot g \rightarrow f \cdot g$  ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ; analoogiline väide teise teguri kohta.

§ 7. A e g l a s e l t k a s v a v a d  
d i s t r i b u t s i o o n i d

1. Põhifunktsioonide ruum  $\mathcal{S}$ . Defineerime põhifunktsioonide ruumi  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(R^n)$ , mille elementideks on sellised funktsioonid  $\varphi \in C^\infty(R^n)$ , mis iga multiindeksite paari  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ja  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  korral rahuldavad tingimust

$$\sup_{x \in R^n} |x^\beta D^\alpha \varphi(x)| < \infty. \quad (1)$$

Siin kasutasime lühendatud tähistusviisi  $x^\beta = x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$ , mis on analoogiline tuletiste tähistusviisiga. Arvestades  $\alpha$  ja  $\beta$  suvalisust, on tingimus (1) samaväärne sellega, et  $\|x\| \rightarrow \infty$  korral funktsioon  $\varphi(x)$  ja selle kõik tuletised lähevad nullile kiiremini kui  $\|x\|^{-1}$  mistahes aste. Funktsioone  $\varphi \in \mathcal{S}$  nimetatakse kiirelt kahanevateks funktsioonideks.

Ruum  $\mathcal{S}$  on lineaarne. Defineerime temas koondumise järgmiselt:  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{S}$ , kui iga  $\alpha$  ja  $\beta$  korral

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow x^\beta D^\alpha \varphi(x)$$

ühtlaselt ruumis  $R^n$ . Koondumist ruumis  $\mathcal{S}$  võib iseloomustada normide

$$\|\varphi\|_p = \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in R^n} (1 + \|x\|^2)^p |D^\alpha \varphi(x)| \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

abil<sup>\*</sup>). Nimelt on lihtne näha, et  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{S}$  para-

---

<sup>\*</sup>) Ruum  $\mathcal{S}$  on Freshet' ruum normide (2) poolt defineeritud topoloogia mõttes.

jasti siis, kui  $\|\varphi_k - \varphi\|_p \rightarrow 0$  iga  $p=0,1,2,\dots$  korral.

Ilmselt  $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$ . Sealjuures koondumisest  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{D}$  järeljub koondumine  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{Y}$ . Tõepoolest, koondumine  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{D}$  tähendab, et  $\text{supp } \varphi_k$  ( $k=1,2,\dots$ ) asuvad ühes fikseeritud tõiestatunud hulgas  $U \subset \mathbb{R}^n$ , kusjuures  $D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi$  ühtlaselt iga  $\alpha$  korral. Kuna  $x^\beta$  on tõiestatunud funktsioon hulgal  $U$ , siis ka  $x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow x^\beta D^\alpha \varphi(x)$  ühtlaselt, s.t.  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{Y}$ , m.o.t.t.

Diferentseerimise operaatorid  $D^\alpha$  on pidevad ruumis  $\mathcal{Y}$ :

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y} \Rightarrow D^\alpha \varphi_k \rightarrow D^\alpha \varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y}.$$

Selles on lihtne veenduda, kasutades jada koondumise definitsiooni ruumis  $\mathcal{Y}$ .

Funktsioonidega  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  korrutamine võib ruumist välja viia. Näiteks, funktsioon  $e^{-\|x\|^2} \in \mathcal{Y}$ ,  $e^{\|x\|^2} \in C^\infty$ , aga nende korrutis  $e^{-\|x\|^2} e^{\|x\|^2} = 1 \notin \mathcal{Y}$ . Tähistame sümboliga  $C_p^\infty = C_p^\infty(\mathbb{R}^n)$  nende funktsioonide  $a \in C^\infty$  hulga, mille kõik tuletised (ja muuhulgas nulljärku tuletised - funktsioonid ise) kasvavad  $\|x\| \rightarrow \infty$  korral mitte kiiremini kui mingid polünoomid:

$$|D^\alpha a(x)| \leq c_\alpha (1 + \|x\|^2)^{m_\alpha}.$$

Funktsioonidega  $a \in C_p^\infty$  korrutamise operaator on pidev ruumis (põhjendada!):

$$a \in C_p^\infty, \varphi \in \mathcal{Y} \Rightarrow a\varphi \in \mathcal{Y};$$

$$a \in C_p^\infty, \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y} \Rightarrow a\varphi_k \rightarrow a\varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y}.$$

Ülesanne 1. Näidata, et ruum  $\mathcal{D}$  on tihe ruumis  $\mathcal{Y}$ : iga  $\varphi \in \mathcal{Y}$  jaoks leidub selline jada  $\varphi_k \in \mathcal{D}$  ( $k=1,2,\dots$ ), et  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{Y}$ . Mainitud jadaks sobib näiteks (põhjen-

dada!)  $\varphi_k(x) = a\left(\frac{x}{k}\right)\varphi(x)$ , kus  $a \in \mathcal{D}$ ,  $a(x) = 1$  kera  $\|x\| \leq 1$ .

2. Distributsioonide ruum  $\mathcal{Y}'$ . Pidevaid lineaarseid funktsionaale ruumil  $\mathcal{Y}$ , s.t. ruumi  $\mathcal{Y}$  kaasruumi  $\mathcal{Y}'$  elemente, nimetatakse aeglaselt kasvavateks distributsioonideks. Aeglaselt kasvavate distributsioonide ruumis  $\mathcal{Y}'$  defineerime koondumise kui nõrga koondumise:  $f_k \rightarrow f$  ruumis  $\mathcal{Y}'$ , kui iga  $\varphi \in \mathcal{Y}$  korral  $\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle$ .

Aeglaselt kasvavad distributsioonid on distributsioonideks ka § 4 mõttes, s.t.  $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{D}'$ . Tõepoolest,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$  tõttu on iga funktsionaal  $f \in \mathcal{Y}'$  rakendatav muuhulgas ka elementidele  $\varphi \in \mathcal{D}$ ; tähistame ajutiselt  $\tilde{f} = f|_{\mathcal{D}}$  ( $f$  kitsend hulgale  $\mathcal{D}$ ).

Kuna

$$\begin{aligned} \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{D} &\Rightarrow \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle &\Rightarrow \langle \tilde{f}, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle \tilde{f}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

siis on  $\tilde{f}$  pidev lineaarne funktsionaal ruumil  $\mathcal{D}$ , s.t.  $\tilde{f} \in \mathcal{D}'$ . Erinevatele  $f_1, f_2 \in \mathcal{Y}'$  vastavad sealjuures erinevad  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathcal{D}'$ . Selles veendumiseks piisab tähele panna, et  $f \in \mathcal{Y}'$ ,  $f \neq 0$  korral ka  $\tilde{f} \neq 0$  (allpool on see väide formuleeritud ülesandena 2). Üeldu võimaldab samastada elemente  $f \in \mathcal{Y}'$  vastavate elementidega  $\tilde{f} \in \mathcal{D}'$ . Sellist samastamist silmas pidades võimegi kirjutada, et  $\mathcal{Y}' \subset \mathcal{D}'$ .

Lihtne on näha, et koondumisest  $f_k \rightarrow f$  ruumis  $\mathcal{Y}'$  järel tuleb koondumine  $f_k \rightarrow f$  ruumis  $\mathcal{D}'$  (võrdle vastavaid definitsioone!). Arvestades ka eelmise punkti tulemusi, võime konstateerida, et

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y}' \subset \mathcal{D}'$$

hulgateoreetilises ja topoloogilises mõttes<sup>\*</sup>).

Toome näiteid aeglaselt kasvavate distributsioonide kohta.

1) Olgu  $f \in \mathcal{D}'$  finiidne distributsioon,  $a \in \mathcal{D}$  selline funktsioon, et  $a(x) = 1$  kandja supp  $f$  mingis ümbruses. Siis (vt. § 4, teoreem 4)  $af = f$  ja

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in \mathcal{D}).$$

Paneme tähele, et  $\varphi \in \mathcal{Y} \Rightarrow a\varphi \in \mathcal{D}$  ning valemiga

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in \mathcal{Y}) \quad (3)$$

on distributsioon  $f \in \mathcal{D}'$  laiendatav lineaarseks funktsionaaliks ruumil  $\mathcal{Y}$ . Laiendamisel saadud funktsionaal (me märgime teda endiselt  $f$ ) on pidev ruumil  $\mathcal{Y}$ , sest

$$\begin{aligned} \varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y} &\stackrel{a \in \mathcal{D}}{\Rightarrow} a\varphi_k \rightarrow a\varphi \text{ ruumis } \mathcal{D} \Rightarrow \\ &\stackrel{f \in \mathcal{D}'}{\Rightarrow} \langle f, a\varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, a\varphi \rangle \stackrel{(3)}{\Rightarrow} \langle f, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Seega  $f \in \mathcal{Y}'$ , s.t. iga finiidne distributsioon  $f \in \mathcal{D}'$  on laiendatav distributsiooniks  $f \in \mathcal{Y}'$ . See laiend on üheselt määratud (vt. ül. 3 allpool).

2) Vaatleme regulaarset distributsiooni  $f \in \mathcal{D}'$ ,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx. \quad (4)$$

Kui lokaalselt integreeruv funktsioon  $f(x)$  on selline, et mingi  $m > 0$  korral

$$c \doteq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{-m} |f(x)| dx < \infty, \quad (5)$$

---

<sup>\*</sup>) Öeldakse, et sisalduvus on topoloogiline, kui koondumisest kitsamas ruumis järeldub koondumine laiemas ruumis.

siis  $f \in \mathcal{Y}'$ . Tõepoolest, suvalise  $\varphi \in \mathcal{Y}$  korral

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi \rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)| dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^{-m} |f(x)| \cdot (1+\|x\|^2)^m |\varphi(x)| dx \leq c \|\varphi\|_m, \end{aligned}$$

millest järeldamegi, et  $f$  on pidev funktsionaal ruumil  $\mathcal{Y}$  (lineaarsus on ilmne). Lokaalselt integreeruvat funktsiooni  $f(x)$ , mis mingi  $m > 0$  korral rahuldab võrratust (5), nimetatakse aeglaselt kasvavaks funktsiooniks. Niisiis, iga aeglaselt kasvav funktsioon defineerib regulaarse aeglaselt kasvava distributsiooni (mida me edaspidi samastame vastava funktsiooniga). Muuhulgas, iga  $\varphi \in \mathcal{Y}$  rahuldab tingimust (5) ja mainitud samastamist silmas pidades võime kirjutada, et  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}'$ . Lihtne on näha, et see sisalduvus on topoloogiline. Arvestades ka eespool põhjendatud sisalduvusi saame topoloogiliste sisalduvuste ahela

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}' \subset \mathcal{D}'.$$

Distributsiooni  $f \in \mathcal{Y}'$  tuletise  $D^\alpha f$  defineerime taas valemiga (võrdle § 4)

$$\langle D^\alpha f, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha \varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in \mathcal{Y}).$$

Sellest, et  $D^\alpha : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  on pidev lineaarne operaator, järeldub, et ka  $D^\alpha : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}'$  on pidev lineaarne operaator (põhjendada!).

Funktsiooni  $a \in C_P^\infty$  ja aeglaselt kasvava distributsiooni  $f \in \mathcal{Y}'$  korrutise  $af \in \mathcal{Y}'$  defineerime valemiga (võrdle § 4)

$$\langle af, \varphi \rangle = \langle f, a\varphi \rangle.$$

Sellest, et operaator  $\varphi \in \mathcal{Y} \mapsto a\varphi \in \mathcal{Y}$  on  $a \in C_p^\infty$  korral pidev ruumis  $\mathcal{Y}$ , järeldub, et operaator  $f \in \mathcal{Y}' \mapsto af \in \mathcal{Y}'$  on pidev ka ruumis  $\mathcal{Y}'$ .

Ülesanne 2. Näidata, et kui  $f \in \mathcal{Y}'$  ja  $\langle f, \varphi \rangle \neq 0$  mingi  $\varphi \in \mathcal{Y}$  korral, siis  $\langle f, \varphi \rangle \neq 0$  ka mingi  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral. (Kasutada ülesande 1 tulemust.)

Ülesanne 3. Näidata, et iga  $f \in \mathcal{Y}'$  on üheselt määratud oma väärtustega hulgal  $\mathcal{D} \subset \mathcal{Y}$  (Kasutada ülesande 1 tulemust.)

Ülesanne 4. Näidata, et kehtivad topoloogilised sisalduvused  $\mathcal{Y} \subset L_2 \subset \mathcal{Y}'$  kus  $L_2 = L_2(\mathbb{R}^n)$  on integreeruva ruuduga funktsioonide ruum  $\|u\|_{L_2} = \left[ \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right]^{1/2}$ .

### 3. Aeglaselt kasvavate distributsioonide struktuurist.

Järgneva teoreemi tõestus on analoogiline § 5 teoreemi 1 tõestusega.

Teoreem 1. Iga  $f \in \mathcal{Y}'$  on esitatav kujul

$$f = D^\alpha h, \quad (6)$$

kus  $h(x)$  on mingi pidev aeglaselt kasvav funktsioon.

Tõestus. a) Funktsionaali  $f \in \mathcal{Y}'$  pidevusest järeldub selliste  $c > 0$  ja  $p \geq 0$  olemasolu, et iga  $\varphi \in \mathcal{Y}$  korral

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \|\varphi\|_p = c \sum_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Selle väite tõestus on täiesti analoogiline vastava väite tõestusega §-s 5.

b) Analoogiliselt nagu §-s 5 veendume, et iga  $\varphi \in \mathcal{Y}$  korral

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\psi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |D^{(1, \dots, 1)} \psi(x)| dx.$$

Kuna  $\psi_{p, \alpha}(x) \doteq (1 + \|x\|^2)^p D^\alpha \varphi(x) \in \mathcal{Y}$ , siis kahest viimasest võrratusest saame

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq p} \int_{\mathbb{R}^n} |D^{(1, \dots, 1)} [(1 + \|x\|^2)^p D^\alpha \varphi(x)]| dx$$

ehk

$$|\langle f, \varphi \rangle| \leq c' \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^m |D^\alpha \varphi(x)| dx \quad (\forall \varphi \in \mathcal{Y}), \quad (7)$$

kus  $m = p+n$  ja  $c'$  on mingi uus konstant.

c) Olgu  $s$  selliste paarikaupa erinevate multiindeksite  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  arv, et  $|\alpha| \leq m$ . Defineerime Banachi ruumi

$$E = \underbrace{L_1(\mathbb{R}^n) \times L_1(\mathbb{R}^n) \times \dots \times L_1(\mathbb{R}^n)}_{s \text{ korda}}, \quad \|v\|_E = \sum_{|\alpha| \leq m} \|v_\alpha\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$$

ja lineaarse operaatori  $J : \mathcal{Y} \rightarrow E$  valemiga

$$J\varphi = \{(1 + \|x\|^2)^m D^\alpha \varphi(x)\}_{|\alpha| \leq m}$$

Ruumi  $E$  alamruumil  $J\mathcal{Y}$  defineerime funktsionaali  $f^\#$  valemiga

$$\langle f^\#, J\varphi \rangle \doteq \langle f, \varphi \rangle.$$

Võrratus (7) tähendab, et

$$|\langle f^\#, J\varphi \rangle| = |\langle f, \varphi \rangle| \leq c' \|J\varphi\|_E,$$

s.t.  $f^\#$  on pidev lineaarne funktsionaal Banachi ruumi  $E$  alamruumil  $J\mathcal{Y}$ . Hahn-Banachi teoreemi põhjal on funktsionaal  $f$  jätkatav pidevaks lineaarseks funktsionaaliks kogu ruumil  $E$ . Kuid iga pidev lineaarne funktsionaal ruumil  $E$  kui ruumide  $L_1(\mathbb{R}^n)$  otsekorrutisel avaldub kujul

$$\langle f^\#, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f_\alpha(x) v_\alpha(x) dx,$$

kus  $f_\alpha(x)$  on mingid mõõduvad tõkestatud funktsioonid ruumil  $R^n$ . Muuhulgas

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &= \langle f^\#, J\varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \int_{R^n} f_\alpha(x) (1 + \|x\|^2)^m D^\alpha \varphi(x) dx = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \langle (1 + \|x\|^2)^m f_\alpha, D^\alpha \varphi \rangle = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha ((1 + \|x\|^2)^m f_\alpha), \varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}), \end{aligned}$$

mistõttu

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha ((1 + \|x\|^2)^m f_\alpha). \quad (8)$$

d) Võrduse (8) kirjutame ümber kujul

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha D^{(1, \dots, 1)} g_\alpha, \quad (9)$$

kus

$$g_\alpha(x) = \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} (1 + \|x\|^2)^m f_\alpha(x) dx_1 \dots dx_n.$$

Funktsioonide  $f_\alpha(x)$  tõkestatusest järeldub, et funktsioonid  $g_\alpha(x)$  on pidevad. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} |g_\alpha(x') - g_\alpha(x'')| &= \left| \int_0^{x'_1} \dots \int_0^{x'_n} (1 + \|x\|^2)^m f_\alpha(x) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{x''_1} \dots \int_0^{x''_n} (1 + \|x\|^2)^m f_\alpha(x) dx \right| \leq \\ &\leq \int_{\Omega(x', x'')} (1 + \|x\|^2)^m |f_\alpha(x)| dx, \end{aligned}$$

kus  $\Omega(x', x'') \subset R^n$  on teatav risttahukate summa järgmise omadusega: kui  $x' \rightarrow x''$ , siis mes  $\Omega(x', x'') \rightarrow 0$ . Seega  $x' \rightarrow x''$  korral  $g_\alpha(x') \rightarrow g_\alpha(x'')$ , s.t.  $g_\alpha(x)$  on pidev.

Funktsioonide  $f_\alpha(x)$  tõkestatusest järeldub veel, et funktsioonid  $g_\alpha(x)$  rahuldavad võrratust

$$|g_\alpha(x)| \leq c_\alpha |x_1| \dots |x_n| (1 + \|x\|^2)^m \leq c_\alpha (1 + \|x\|^2)^{m+n} \quad (10)$$

Asendame avaldises (9) funktsioonid  $g_\alpha(x)$  sobivate tuletistega  $D^{\beta_\alpha} h_\alpha = g_\alpha$ , nii et  $f$  avaldises tuleksid kõik tuletised ühesuguse multiindeksiga:

$$f = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha D^{(1, \dots, 1)} D^{\beta_\alpha} h_\alpha = \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha h_\alpha = D^\alpha h,$$

kus

$$h = \sum_{|\alpha| \leq m} h_\alpha.$$

Funktsioonid  $h_\alpha$  võime leida, integreerides funktsioone  $g_\alpha$  rajades  $(0, x_1)$ ,  $i=1, \dots, n$ , vajalik arv kordi. Funktsioonide  $g_\alpha(x)$  pidevusest järeldub  $h_\alpha(x)$  pidevus; võrratustest (10) järelduvad analoogilised võrratused  $h_\alpha(x)$  jaoks, seega  $h_\alpha(x)$  on aeglaselt kasvavad funktsioonid. Pidev ja aeglaselt kasvav on ka funktsioonide  $h_\alpha(x)$  summa  $h(x)$ . Sellega ongi distributsiooni  $f \in \mathcal{D}'$  nõutav esitus (6) konstrueeritud.

Teoreem 1 on tõestatud. \*

#### 4. Aeglaselt kasvavate distributsioonide tensorkorrutus.

Distributsioonide  $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$  tensorkorrutiseks nimetatakse distributsiooni  $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , mis igale põhifunktsioonile  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  seab vastavusse arvu

$$\langle f(x) \cdot g(y), \varphi \rangle = \langle f(x), \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \rangle. \quad (11)$$

See definitsioon on täiesti analoogiline § 6-s toodud definitsiooniga. Ka definitsiooni korrektsuse näitamine on analoogiline eelnevaga. Me peame näitama, et iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$  korral

$$\psi(x) \doteq \langle g(y), \varphi(x, y) \rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

ja et funktsionaal  $f(x) \cdot g(y)$  on pidev ruumil  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$ . Toetudes teoreemile 1, esitame  $g \in \mathcal{D}'$  kujul  $g = D^\beta h$ , kus  $h$  on

pidev aeglaselt kasvav funktsioon. Sellega

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \langle D^{\beta} h(y), \varphi(x, y) \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle h(y), D_y^{\beta} \varphi(x, y) \rangle = \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{R^m} h(y) D_y^{\beta} \varphi(x, y) dy.\end{aligned}\quad (12)$$

Siit on suhteliselt lihtne näha, et  $\psi \in \mathcal{Y}(R^n)$ . Tõepoolest, suvaliste multiindeksite paari  $\alpha, \beta$  korral

$$\begin{aligned}x^{\beta} D^{\alpha} \psi(x) &= (-1)^{|\beta|} \int_{R^m} h(y) x^{\beta} D_x^{\alpha} D_y^{\beta} \varphi(x, y) dy = \\ &= (-1)^{|\beta|} \int_{R^m} (1 + \|y\|^2)^{-m} h(y) \cdot \{(1 + \|y\|^2)^m x^{\beta} D_x^{\alpha} D_y^{\beta} \varphi(x, y)\} dy.\end{aligned}\quad (13)$$

Me valisime siin naturaalarvu  $m$  nii suure, et

$$c_1 = \int_{R^m} (1 + \|y\|^2)^{-m} |h(y)| dy < \infty$$

(vt. aeglaselt kasvava funktsiooni definitsiooni); tingimuse  $\varphi \in \mathcal{Y}(R^{n+m})$  tõttu

$$c_2 = \sup_{(x, y) \in R^{n+m}} |(1 + \|y\|^2)^m x^{\beta} D_x^{\alpha} D_y^{\beta} \varphi(x, y)| < \infty$$

(vt. kiirelt kahaneva funktsiooni definitsiooni). Seega

$$\sup_{x \in R^n} |x^{\beta} D^{\alpha} \psi(x)| \leq c_1 c_2 < \infty, \text{ m.o.t.t.}$$

Veendume, et

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y}(R^{n+m}) \Rightarrow \psi_k \rightarrow \psi \text{ ruumis } \mathcal{Y}(R^n), \quad (14)$$

kus  $\psi_k(x) = \langle g(y), \varphi_k(x, y) \rangle$ . Tõepoolest, iga multiindeksite paari  $\alpha$  ja  $\beta$  korral (vt. (13))

$$\begin{aligned}x^{\beta} D^{\alpha} [\psi_k(x) - \psi(x)] &= (-1)^{|\beta|} \int_{R^m} (1 + \|y\|^2)^{-m} h(y) \times \\ &\times \{(1 + \|y\|^2)^m x^{\beta} D_x^{\alpha} D_y^{\beta} [\varphi_k(x, y) - \varphi(x, y)]\} dy \rightarrow 0\end{aligned}$$

ühtlaselt  $x \in R^n$  suhtes, sest loogelistes sulgudes olev avaldis koondub nulliks ühtlaselt  $(x, y) \in R^{n+m}$  suhtes (vt.

koondumise definitsiooni ruumis  $\mathcal{Y}$ ).

Näitame, et  $f(x) \cdot g(y)$  on pidev ruumil  $\mathcal{Y}(R^{n+m})$ :

$\mathcal{Y}_k \rightarrow \mathcal{Y}$  ruumis  $\mathcal{Y}(R^{n+m}) \Rightarrow$

$\xrightarrow{(14)} \mathcal{Y}_k \rightarrow \mathcal{Y}$  ruumis  $\mathcal{Y}(R^m) \Rightarrow$

$\xrightarrow{f \in \mathcal{Y}'} \langle f, \mathcal{Y}_k \rangle \rightarrow \langle f, \mathcal{Y} \rangle \Rightarrow$

$\xrightarrow{(11)} \langle f(x) \cdot g(y), \mathcal{Y}_k \rangle \rightarrow \langle f(x) \cdot g(y), \mathcal{Y} \rangle, \text{ m.o.t.t.}$

Sellega oleme põhjendanud tensorkorrutise definitsiooni

(11) korrektsust.

Märgime mõningaid tensorkorrutise omadusi.

a) Tensorkorrutis on kommutatiivne:  $f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x)$  suvaliste  $f(x) \in \mathcal{Y}'(R^n)$ ,  $g(y) \in \mathcal{Y}'(R^m)$  korral.

b) Tensorkorrutis on pidev kummagi teguri suhtes eraldi, näiteks kui  $g_k(y) \rightarrow g(y)$  ruumis  $\mathcal{Y}'(R^m)$ , siis  $f(x) \cdot g_k(y) \rightarrow f(x) \cdot g(y)$  ruumis  $\mathcal{Y}'(R^{n+m})$ .

c)  $D_x^\alpha (f(x) \cdot g(y)) = D^\alpha f(x) \cdot g(y)$ .

d)  $a(x)(f(x) \cdot g(y)) = a(x)f(x) \cdot g(y)$  ( $a \in C_p^\infty$ ).

Nende väidete tõestused on analoogilised § 6-s esitatuga.

Ülesanne 5. Näidata, et tensorkorrutis on assotsiatiivne.

5. Aeglaselt kasvavate distributsioonide konvolutsioon.

Me teame (vt. § 6), et konvolutsioon  $f * g \in \mathcal{D}'$  eksisteerib, kui üks distributsioonidest  $f, g \in \mathcal{D}'$  on finiidne. Siin näitame, et  $f * g \in \mathcal{Y}'$ , kui üks distributsioonidest  $f$  ja  $g$  on finiidne, teine aga aeglaselt kasvav (kuulub ruumi  $\mathcal{Y}'$ ). Olgu näiteks  $f$  finiidne ja  $g \in \mathcal{Y}'$ .

Iga  $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$  korral (vt. § 6, valem (12))

$$\langle f \circ g, \varphi \rangle = \langle f(x) \cdot g(y), a(x)\varphi(x+y) \rangle, \quad (15)$$

kus  $a \in \mathcal{D}$  on suvaline funktsioon omadusega:  $a(x) = 1$  kandja supp  $f$  mingis ümbruses. Võrduse (15) parem pool omab mõtet ka iga  $\varphi \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$  korral, sest  $f(x) \cdot g(y) \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^{2n})$  ja  $a(x)\varphi(x+y) \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{2n})$  (põhjendada!). Võrduse (15) abil laiendamegi funktsionaali  $f \circ g$  ruumilt  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ruumile  $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$ . Tuleb näidata, et laiendamisel saame pideva lineaarse funktsionaali ruumil  $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$ , s.t.  $f \circ g \in \mathcal{Y}'(\mathbb{R}^n)$ . Kuna lineaarsus on ilmne, jääb üle vaid näidata  $f \circ g$  pidevust ruumil  $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$ . See järeldub järgmistest implikatsioonidest, millest esimese üksikasjalisem põhjendus jäägu lugeja hooleks:

$$\begin{aligned} & \varphi_k(x) \rightarrow \varphi(x) \text{ ruumis } \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n) \implies \\ & \implies a(x)\varphi_k(x+y) \rightarrow a(x)\varphi(x+y) \text{ ruumis } \mathcal{Y}(\mathbb{R}^{2n}) \implies \\ & \implies \langle f(x) \cdot g(y), a(x)\varphi_k(x+y) \rangle \rightarrow \langle f(x) \cdot g(y), a(x)\varphi(x+y) \rangle \implies \\ & \xrightarrow{f \circ g \in \mathcal{Y}'} \xrightarrow{(15)} \langle f \circ g, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle f \circ g, \varphi \rangle, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

## § 8. Fourier' teisendus

### 1. Kiirelt kahanevate funktsioonide Fourier' teisendus.

Eespool vaadeldud küsimuste käsitlemisel oli ükskõik, kas ruumid  $\mathcal{D}$  ja  $\mathcal{Y}$  (seega ka  $\mathcal{D}'$  ja  $\mathcal{Y}'$ ) on reaalsed või kompleksed. Fourier' teisenduse käsitlemisel on sobivam kasutada kompleksseid ruume. Kompleksse ruumi  $\mathcal{Y}$  elementideks on funktsioonid kujul  $\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$ , kus  $\varphi_1(x)$  ja  $\varphi_2(x)$  on reaalsed kiirelt kahanevad funktsioonid,  $i$  on imaginaarühik.

Funktsiooni  $\varphi(x) \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^n)$  Fourier' teisenduseks  $F\varphi$  nimetatakse funktsiooni -

$$(F\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi, \quad (1)$$

kus  $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ . Kuna  $|e^{ix \cdot \xi}| = 1$ , funktsioon  $\varphi \in \mathcal{Y}$  aga on absoluutselt integreeruv, siis integraal (1) koondub ja  $F\varphi$  on ruumil  $\mathbb{R}^n$  määratud tõkestatud funktsioon. Sageli kasutame funktsiooni  $\varphi$  teisenduse  $F\varphi$  märkimiseks ka tähist  $\hat{\varphi}: \hat{\varphi} = F\varphi$ .

Näitame, et F teisendab ruumi  $\mathcal{Y}$  endasse:  $F\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$ . Vastavalt ruumi  $\mathcal{Y}$  definitsioonile peame näitama, et  $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , kusjuures iga multiindeksite paari  $\alpha$  ja  $\beta$  korral

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \hat{\varphi}(x)| < \infty. \quad (2)$$

Valemis (1) oleva integraali formaalsel diferentseerimisel parameetri  $x$  järgi leiame, et \*)

\*) Siin  $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} (i\xi_2)^{\alpha_2} \dots (i\xi_n)^{\alpha_n} = i^{|\alpha|} \xi^\alpha$

$$D^\alpha \hat{\varphi}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (i\xi)^\alpha e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi;$$

kuna  $\|\xi\| \rightarrow \infty$  korral  $\varphi(\xi) \rightarrow 0$  kiiremini  $\|\xi\|^{-1}$  igast ast-  
 mest, siis diferentseerimisel saadud integraal koondub abso-  
 luutselt ja integraali diferentseerimine oli seaduslik. Üht-  
 lasi näeme, et  $D^\alpha \hat{\varphi}(x)$  on pidev iga multiindeksi  $\alpha$  korral.  
 Seega  $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ; võrreldes  $D^\alpha \hat{\varphi}$  avaldist Fourier' teisendu-  
 se definitsiooniga (1), paneme tähele, et  $D^\alpha \hat{\varphi}(x)$  on funkt-  
 siooni  $(ix)^\alpha \varphi(x)$  Fourier' teisenduseks:

$$D^\alpha F\varphi = F((ix)^\alpha \varphi(x)). \quad (3)$$

Koos funktsiooniga  $\varphi \in \mathcal{Y}$  on ruumi  $\mathcal{Y}$  elemendiks ka te-  
 ma tuletis  $D^\beta \varphi$ ; moodustame selle Fourier' teisenduse

$$(FD^\beta \varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} D^\beta \varphi(\xi) d\xi.$$

Ositi integreerimise teel leiame siit, et

$$(F D^\beta \varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix)^\beta e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi$$

ehk

$$FD^\beta \varphi = (-ix)^\beta F\varphi. \quad (4)$$

Valemite (3) ja (4) põhjal

$$(-ix)^\beta D^\alpha \hat{\varphi}(x) = (-ix)^\beta F((ix)^\alpha \varphi(x)) = F(D^\alpha((ix)^\alpha \varphi(x))). \quad (5)$$

Siit saamegi võrratuse (2), sest funktsioon  $D^\alpha((ix)^\alpha \varphi(x))$   
 kuulub ruumi  $\mathcal{Y}$  ning tema Fourier' teisendus on tõkestatud.

Niisiis  $F\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}$ . Ilmselt on  $F$  lineaarne operaator. Näi-  
 tame, et operaator  $F$  on pidev ruumis  $\mathcal{Y}$ , s.t. et koondumi-  
 sest  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  ruumis  $\mathcal{Y}$  järeljub koondumine  $F\varphi_k \rightarrow F\varphi$  ruu-  
 mis  $\mathcal{Y}$ . Vastavalt koondumise definitsioonile ruumis  $\mathcal{Y}$  peame

näitama, et iga multiindeksite paari  $\alpha$  ja  $\beta$  korral

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha [\hat{\psi}_k(x) - \hat{\psi}(x)]| \rightarrow 0. \quad (6)$$

Valemi (5) kohaselt

$$\begin{aligned} (-ix)^\beta D^\alpha [\hat{\psi}_k(x) - \hat{\psi}(x)] &= F(D^\beta((ix)^\alpha [\psi_k(x) - \psi(x)])) = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} D^\alpha((i\xi)^\alpha [\psi_k(\xi) - \psi(\xi)]) d\xi. \end{aligned}$$

Siit

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha [\hat{\psi}_k(x) - \hat{\psi}(x)]| &\leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha((i\xi)^\alpha [\psi_k(\xi) - \\ &- \psi(\xi)])| (1 + \|\xi\|^2)^m \cdot (1 + \|\xi\|^2)^{-m} d\xi \leq \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \cdot \epsilon_k \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^{-m} d\xi, \end{aligned}$$

kus  $m$  valisime nii suure, et  $\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^{-m} d\xi < \infty$  (s.t.  $m > \frac{n}{2}$ )

ning

$$\epsilon_k = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^m |D^\beta((i\xi)^\alpha [\psi_k(\xi) - \psi(\xi)])|.$$

Paneme tähele, et koondumisest  $\psi_k \rightarrow \psi$  ruumis  $\mathcal{D}$  järeltub koondumine  $\epsilon_k \rightarrow 0$ . Sellega ongi (6) põhjendatud.

## 2. Näide (funktsiooni $e^{-a^2 \|x\|^2}$ Fourier' teisendus). Ol-

gu algul  $n = 1$ . Valemi (1) kohaselt

$$\begin{aligned} F e^{-a^2 x^2} &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix \cdot \xi} e^{-a^2 \xi^2} \cdot d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi - a^2 \xi^2} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2 + \frac{ixs}{a}} ds = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \frac{1}{a} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s - \frac{ix}{2a})^2} ds. \quad (7) \end{aligned}$$

Näitame, et iga  $b = \text{const}$  korral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s+ib)^2} ds = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds \quad (8)$$

( $b = \text{const}$  tähendab antud juhul, et  $b$  ei sõltu muutujast  $s$ ).

Tõepoolest, vaatleme

kompleksmuutuja  $z = s+it$

funktsiooni  $e^{-z^2}$  ning

joonisel 14 kujutatud

kinnist kõverat  $\Gamma$ , mis

koosneb neljast lülist.

Funktsiooni  $e^{-z^2}$  analüütilisuse tõttu

$$\int_{\Gamma} e^{-z^2} dz = 0$$

ehk

$$\int_{-c}^c e^{-s^2} ds + \int_0^b e^{-(c+it)^2} dt + \\ + \int_c^{-c} e^{-(s+ib)^2} ds + \int_b^0 e^{-(-c+it)^2} dt = 0.$$

Piirprotsessis  $c \rightarrow \infty$  läheneb teine ja neljas integraal nullile (põhjendada integraalialuste funktsioonide ühtlast koon- dumist nulliks vastavatel lülide!), seega

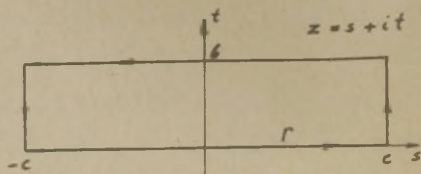
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds + \int_{\infty}^{-\infty} e^{-(s+ib)^2} ds = 0.$$

Muutes viimases integraalis integreerimise suuna vastupidiseks, jõuamegi võrduseni (8).

Teatavasti (vt. näit. [20], lk. 246)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}. \quad (9)$$

Võrdustest (7), (8) ja (9) saame



Joon. 14.

$$F e^{-a^2 x^2} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \quad (n=1). \quad (10)$$

Olgu nüüd  $n$  suvaline. Valemi (1) kohaselt

$$\begin{aligned} F e^{-a^2 \|x\|^2} &= (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} e^{-a^2 (\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2)} d\xi = \\ &= \prod_{j=1}^n (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_j \xi_j} e^{-a^2 \xi_j^2} d\xi_j = \\ &= \prod_{j=1}^n F e^{-a^2 x_j^2} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{x_j^2}{4a^2}} = \frac{1}{(\sqrt{2a})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2}}. \end{aligned}$$

Niisiis

$$F e^{-a^2 \|x\|^2} = \frac{1}{(\sqrt{2a})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2}}. \quad (10')$$

Muuhulgas  $a = 1/\sqrt{2}$  korral saame siit

$$F e^{-\|x\|^2/2} = e^{-\|x\|^2/2}, \quad (10'')$$

s.t. funktsioon  $e^{-\|x\|^2/2}$  langeb kokku oma Fourier' teisen-  
dusega.

3. Fourier' pöördteisendus. Funktsiooni  $\psi \in \mathcal{V}(R^n)$

Fourier' pöördteisenduseks  $F^{-1}\psi$  nimetatakse funktsiooni

$$(F^{-1}\psi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-ix \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Pöördteisendus erineb teisendusest (1) vaid märgi poolest e  
astmenäitajas.\*) Täpselt samuti nagu eelmises punktis näi-

\*) Kumba teisendustest (1) ja (11) lugeda pöördteisenduseks, on suhteline. Sageli kasutatakse terminoloogiat, mis on vastupidine esitatuga.

datakse, et  $F^{-1}\varphi \in \mathcal{S}$  ja et  $F^{-1}$  on pidev lineaarne operaator ruumis  $\mathcal{S}$ . Muide, neid väiteid võib lihtsalt järeldada ka analoogilistest väidetest  $F$  kohta, kui paneme tähele, et

$$(F^{-1}\varphi)(x) = (F\varphi)(-x).$$

Meie eesmärk on näidata, et operaator  $F^{-1}$  on operaatori  $F$  pöördoperaatoriks (see asjaolu on kajastatud ka sümboolikas). Selleks näitame kõigepealt, et suvaliste  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$  korral

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y) \hat{\psi}(y) dy. \quad (12)$$

Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) d\xi &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot z} \varphi(z) dz \right\} \psi(\xi) d\xi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(z-x) \cdot \xi} \psi(\xi) d\xi \right\} \varphi(z) dz = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(z-x) \varphi(z) dz = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(y) \varphi(x+y) dy, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

(integreerimise järjekorra muutmine oli seaduslik, sest integraalide all olev funktsioon on absoluutselt integreeruv).

Rakendame valemit (12) funktsioonile  $\psi_\varepsilon(\xi) = \psi(\varepsilon\xi)$ , kus  $\varepsilon > 0$ . Kuna

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_\varepsilon(y) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iy \cdot \xi} \psi(\varepsilon\xi) d\xi \stackrel{\varepsilon\xi = \eta}{=} \\ &= \varepsilon^{-n} (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \frac{y \cdot \eta}{\varepsilon}} \psi(\eta) d\eta = \varepsilon^{-n} \hat{\psi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right), \end{aligned}$$

siis valemi (12) rakendamisel saame

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\varepsilon \xi) d\xi = \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+y) \hat{\psi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) dy$$

ehk (tehes viimases integraalis muutujate vahetuse  $\frac{y}{\varepsilon} = z$ )

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\varepsilon \xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x+\varepsilon z) \hat{\psi}(z) dz.$$

Piiril  $\varepsilon \rightarrow 0$  leiame siit

$$\psi(0) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(z) dz; \quad (13)$$

piirile minek integraali all on põhjendatav Lebesgue'i teoreemi abil (teha läbi!).

Valem (13) kehtib iga  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$  korral. Valime  $\psi(x) = e^{-\|x\|^2/2}$ . Siis  $\psi(0) = 1$  ja (vt. (10"))

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\psi}(z) dz &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|z\|^2/2} dz = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|^2} d\xi = (2\pi)^{n/2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Valem (13) võtab kuju

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \hat{\varphi}(\xi) d\xi = (2\pi)^{n/2} \varphi(x)$$

ehk

$$F^{-1} F \varphi = \varphi \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}).$$

Analoogiliselt näidatakse, et

$$F F^{-1} \varphi = \varphi \quad (\forall \varphi \in \mathcal{S}).$$

Viimase võrduse võime lihtsalt saada ka eelnevast võrdusest, arvestades seost  $(F^{-1} \varphi)(x) = (F \varphi)(-x)$ .

Sellega ongi näidatud, et  $F^{-1}$  ja  $F$  on teineteise pöörd-

operaatoriteks. Võttes arvesse ka eespool (punktis 1) saadud tulemusi, oleme tõestanud järgmise teoreemi.

Teoreem 1. Fourier' operaatorid  $F$  ja  $F^{-1}$  on lineaarsed ja pidevad ruumis  $\mathcal{S}$  ning on teineteise pöördoperaatoriteks.

Sellest teoreemist järeldub muuhulgas, et  $F$  ja  $F^{-1}$  teisendavad ruumi  $\mathcal{S}$  kogu ruumiks  $\mathcal{S}$ .

Ülesanne 1. Näidata, et iga  $\varphi \in \mathcal{S}$  korral

$$F\bar{\varphi} = F^{-1}\varphi, \quad F^{-1}\bar{\varphi} = F\varphi,$$

kus kriips tähendab kaaskompleksi võtmist.

Ülesanne 2. Näidata, et kehtib nn. Parsevali võrdus

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \bar{\chi}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \bar{\hat{\chi}}(\xi) d\xi \quad (\forall \varphi, \chi \in \mathcal{S}).$$

(Võtta valemis (12)  $x = 0$  ning kasutada ülesande 1 tulemust ja teoreemi 1.)

4. Aeglaselt kasvavate distributsioonide Fourier' teisendus ja pöördteisendus. Võttes valemis (12)  $x = 0$ , saame

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \hat{\psi}(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \psi(\xi) d\xi \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{S})$$

ehk, vaadeldes funktsiooni  $\psi$  (regulaarse) distributsioonina,

$$\langle F\psi, \varphi \rangle = \langle \psi, F\varphi \rangle.$$

Selle seose võtame aluseks suvalise distributsiooni  $f \in \mathcal{S}'$  Fourier' teisenduse defineerimisel.

Distributsiooni  $f \in \mathcal{S}'$  Fourier' teisenduseks nimetatakse distributsiooni  $Ff \in \mathcal{S}'$ , mis igale  $\varphi \in \mathcal{S}$  seab vastavusse arvu

$$\langle Ff, \varphi \rangle = \langle f, F\varphi \rangle. \quad (14)$$

Distributsiooni  $f \in \mathcal{S}'$  Fourier' pöördteisenduseks nimetatakse distributsiooni  $F^{-1}f \in \mathcal{S}'$ , mis igale  $\varphi \in \mathcal{S}$  seab vastavusse arvu

$$\langle F^{-1}f, \varphi \rangle = \langle f, F^{-1}\varphi \rangle. \quad (15)$$

Kontrollime nende definitsioonide korrektsust. On vaja näidata, et  $Ff$  ja  $F^{-1}f$  on pidevad lineaarsed funktsionaalid ruumil  $\mathcal{Y}$ , s.t. et tőepoolset  $Ff \in \mathcal{Y}'$ ,  $F^{-1}f \in \mathcal{Y}'$ . Lineaarsus on ilmne, pidevus aga järeldub järgmisest implikatsioonide ahelast:

$$\varphi_k \rightarrow \varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y} \xrightarrow{F: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y} \text{ pid.}} F\varphi_k \rightarrow F\varphi \text{ ruumis } \mathcal{Y} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{f \in \mathcal{Y}'} \langle f, F\varphi_k \rangle \rightarrow \langle f, F\varphi \rangle \xrightarrow{(14)} \langle Ff, \varphi_k \rangle \rightarrow \langle Ff, \varphi \rangle$$

(funktsionaali  $F^{-1}f$  pidevuse näitamine on analoogiline).

Niisiis  $F\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}'$ ,  $F^{-1}\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}'$ . Järgmisest teoreemist järeldub muuhulgas, et  $F$  ja  $F^{-1}$  teisendavad ruumi  $\mathcal{Y}'$  üksüheselt kogu ruumiks  $\mathcal{Y}'$ .

Teoreem 2. Operaatorid  $F$  ja  $F^{-1}$  on lineaarsed ja pidevad ruumis  $\mathcal{Y}'$  ning on teineteise pöördoperaatoriteks.

**T ö e s t u s.** Operaatori  $F: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}'$  pidevus järeldub järgmisest implikatsioonide ahelast:

$$f_k \rightarrow f \text{ ruumis } \mathcal{Y}' \xrightarrow{\text{def.}} \langle f_k, \psi \rangle \rightarrow \langle f, \psi \rangle \quad (\forall \psi \in \mathcal{Y}) \implies$$

$$\implies \langle f_k, F\varphi \rangle \rightarrow \langle f, F\varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in \mathcal{Y}) \xrightarrow{(14)}$$

$$\implies \langle Ff_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle Ff, \varphi \rangle \quad (\forall \varphi \in \mathcal{Y}) \xrightarrow{\text{def.}} Ff_k \rightarrow Ff \text{ ruumis } \mathcal{Y}'$$

m.o.t.t. Analoogiliselt näidatakse operaatori  $F^{-1}: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}'$  pidevust; operaatorite  $F$  ja  $F^{-1}$  lineaarsus on ilmne.

Näitame, et  $F: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}'$  ja  $F^{-1}: \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}'$  on teineteise pöördoperaatoriteks. Tőepoolset, iga  $\varphi \in \mathcal{Y}$  ja  $f \in \mathcal{Y}'$  korral

$$\langle F^{-1}Ff, \varphi \rangle = \langle Ff, F^{-1}\varphi \rangle = \langle f, FF^{-1}\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle,$$

$$\langle FF^{-1}f, \varphi \rangle = \langle F^{-1}f, F\varphi \rangle = \langle f, F^{-1}F\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

s.t.  $F^{-1}Ff = f$ ,  $FF^{-1}f = f$ , m.o.t.t.

Ülesanne 3. Näidata, et  $L_2(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $FL_2 \subset L_2$ ,  $F^{-1}L_2 \subset L_2$  ning et operaatorid  $F$  ja  $F^{-1}$  on isomeetrilised ruumis  $L_2$ , s.t.  $\|Ff\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$ ,  $\|F^{-1}f\|_{L_2} = \|f\|_{L_2}$  ( $\forall f \in L_2$ ).  
(Kasutada ülesande 2 tulemust ja hulga  $\mathcal{S}$  tihedust ruumis  $L_2$ .)

5. Fourier' teisenduse omadusi. Kõigepealt näitame, et valemid (3) ja (4) Fourier' teisenduse tuletise ja tuletise Fourier' teisenduse kohta jäävad kehtima ka distributsioonide  $f \in \mathcal{S}'$  jaoks.

a) Fourier' teisenduse tuletis. Iga  $f \in \mathcal{S}'$  korral

$$D^\alpha Ff = F((ix)^\alpha f). \quad (16)$$

Tõepoolest, iga  $\varphi \in \mathcal{S}$  korral

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha Ff, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle Ff, D^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, FD^\alpha \varphi \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f, (-ix)^\alpha F\varphi \rangle = \langle f, (ix)^\alpha F\varphi \rangle = \\ &= \langle (ix)^\alpha f, F\varphi \rangle = \langle F((ix)^\alpha f), \varphi \rangle, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

b) Tuletise Fourier' teisendus. Iga  $f \in \mathcal{S}'$  korral

$$FD^\alpha f = (-ix)^\alpha Ff. \quad (17)$$

Tõepoolest, iga  $\varphi \in \mathcal{S}$  korral

$$\begin{aligned} \langle FD^\alpha f, \varphi \rangle &= \langle D^\alpha f, F\varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle f, D^\alpha F\varphi \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle f, F((ix)^\alpha \varphi) \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle Ff, (ix)^\alpha \varphi \rangle = \\ &= \langle Ff, (-ix)^\alpha \varphi \rangle = \langle (-ix)^\alpha Ff, \varphi \rangle, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

c) Tensorkorrutise Fourier' teisendus. Iga  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$  korral

$$F[f(x) \cdot g(y)] = (Ff)(x) \cdot (Fg)(y). \quad (18)$$

Veendume kõigepealt, et iga  $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^{n+m})$  korral

$$F\varphi = F_x F_y \varphi = F_y F_x \varphi.$$

Tähistades

$$z = (x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

$$\xi = (\xi, \eta) = (\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_m),$$

võime kirjutada

$$\begin{aligned} (F\varphi)(z) &= (2\pi)^{-\frac{n+m}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} e^{iz \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi = \\ &= (2\pi)^{-\frac{n+m}{2}} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} e^{ix \cdot \xi + iy \cdot \eta} \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \left\{ (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbb{R}^m} e^{iy \cdot \eta} \varphi(\xi, \eta) d\eta \right\} d\xi = F_x F_y \varphi, \end{aligned}$$

s.t.  $F\varphi = F_x F_y \varphi$ ; teise võrduse põhjendus on analoogiline.

Tõestame nüüd võrduse (18). Iga  $\varphi \in \mathcal{V}(\mathbb{R}^{n+m})$  korral

$$\begin{aligned} \langle F[f(x) \cdot g(y)], \varphi \rangle &= \langle f(x) \cdot g(y), F\varphi \rangle = \langle f(x) \cdot g(y), F_y F_x \varphi \rangle = \\ &= \langle f(x), \langle g(y), F_y F_x \varphi \rangle \rangle = \langle f(x), \langle (Fg)(y), F_x \varphi \rangle \rangle = \\ &= \langle f(x) \cdot (Fg)(y), F_x \varphi \rangle = \langle (Fg)(y) \cdot f(x), F_x \varphi \rangle = \\ &= \langle (Fg)(y), \langle f(x), F_x \varphi \rangle \rangle = \langle (Fg)(y), \langle (Ff)(x), \varphi \rangle \rangle = \\ &= \langle (Fg)(y) \cdot (Ff)(x), \varphi \rangle = \langle (Ff)(x) \cdot (Fg)(y), \varphi \rangle, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

Ülesanne 4. Defineerida  $f(x, y) \in \mathcal{V}'(\mathbb{R}^{n+m})$  osalised

Fourier' teisendused  $F_x f$  ja  $F_y f$  ning näidata, et

$$Ff = F_x F_y f = F_y F_x f.$$

Ülesanne 5. Näidata, et iga  $f \in \mathcal{V}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in \mathcal{V}'(\mathbb{R}^m)$  korral

$$F[f(x) \cdot g(y)] = F_x [f(x) \cdot (Fg)(y)] = F_y [(Ff)(x) \cdot g(y)].$$

## 6. Finitsete distributsioonide Fourier' teisendus.

Siin me näitame, et finitse distributsiooni Fourier' teisendus kuulub funktsioonide klassi  $C_P^\infty$  (vt. § 7). Seejärel anname mugavama eeskirja Fourier' teisenduse leidmiseks.

Olgu  $f$  finitne distributsioon ja  $a \in \mathcal{D}$  selline funktsioon, et  $\text{supp } f$  mingis ümbruses  $a(x) = 1$ . Siis  $af = f$  ning iga  $\varphi \in \mathcal{V}$  ja multiindeksi  $\alpha$  korral

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha f f, \varphi \rangle &= \langle F((ix)^\alpha f), \varphi \rangle = \langle f, (ix)^\alpha F\varphi \rangle = \\ &= \langle af, (ix)^\alpha F\varphi \rangle = \langle f, a(x)(ix)^\alpha F\varphi \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \langle f(x), \int_{R^n} a(x)(ix)^\alpha e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Toetudes § 7 teoreemile 1, esitame  $f$  kujul  $f = D^r h$ , kus  $h(x)$  on aeglaselt kasvav pidev funktsioon. Eelnevast võrduste ahelast saame

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha f f, \varphi \rangle &= (2\pi)^{-n/2} \langle D^r h(x), \int_{R^n} a(x)(ix)^\alpha e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n/2} (-1)^{|r|} \langle h(x), D_x^r \int_{R^n} a(x)(ix)^\alpha e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n/2} (-1)^{|r|} \int_{R^n} h(x) \left\{ \int_{R^n} D_x^r [a(x)(ix)^\alpha e^{ix \cdot \xi}] \varphi(\xi) d\xi \right\} dx. \end{aligned}$$

Integraalide all olev funktsioon on absoluutselt integreeruv ning Fubini teoreemi kohaselt võib integreerimise järjekorda muuta:

$$\langle D^\alpha f f, \varphi \rangle = (2\pi)^{-n/2} (-1)^{|r|} \int_{R^n} \left\{ \int_{R^n} h(x) D_x^r [a(x)(ix)^\alpha e^{ix \cdot \xi}] dx \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Seega

$$(D^\alpha f f)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} (-1)^{|r|} \int_{R^n} h(x) D_x^r [a(x)(ix)^\alpha e^{ix \cdot \xi}] dx \quad (19)$$

(integreerimise üle  $R^n$  võib asendada integreerimisega üle  $t\delta$ -

kestatud hulga supp  $a$ ). Siit järeldame, et  $D^\alpha Ff$  on pidev funktsioon ja

$$|(D^\alpha Ff)(\xi)| \leq c_\alpha \|\xi\|^{|\alpha|}.$$

Multiindeksi  $\alpha$  suvalisuse tõttu saamegi siit, et  $Ff \in C_p^\infty$ .

Tuletame nüüd mugavama valemi  $Ff$  arvutamiseks. Valemi

(19) kohaselt (võttes  $\alpha = (0, 0, \dots, 0)$ )

$$\begin{aligned} (Ff)(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} (-1)^{|\alpha|} \langle h(x), D_x^\alpha [a(x) e^{ix \cdot \xi}] \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \langle D^\alpha h(x), a(x) e^{ix \cdot \xi} \rangle = (2\pi)^{-n/2} \langle f(x), a(x) e^{ix \cdot \xi} \rangle. \end{aligned}$$

Seega

$$(Ff)(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \langle f(x), a(x) e^{ix \cdot \xi} \rangle \quad (20)$$

ehk

$$(Ff)(x) = (2\pi)^{-n/2} \langle f(\xi), a(\xi) e^{ix \cdot \xi} \rangle. \quad (20')$$

Näiteks, Dirac'i delta-funktsiooni  $\delta(x)$  Fourier' teisenduseks on valemi (20') kohaselt

$$\begin{aligned} (F\delta)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \langle \delta(\xi), a(\xi) e^{ix \cdot \xi} \rangle = \\ &= (2\pi)^{-n/2} a(0) e^{ix \cdot 0} = (2\pi)^{-n/2}, \end{aligned}$$

s.t.

$$F\delta = (2\pi)^{-n/2}. \quad (21)$$

7. Konvolutsiooni Fourier' teisendus. Kui  $f, g \in \mathcal{Y}'$  ja  $f$  on finiitne, siis  $f * g \in \mathcal{Y}'$  (vt. § 7). Näitame, et sel juhul

$$F(f * g) = (2\pi)^{n/2} (Ff)(Fg). \quad (22)$$

Eelmises punktis tõestatu põhjal  $\hat{f} = Ff \in C_p^\infty$ , mistõttu tema korrutis distributsiooniga  $Fg \in \mathcal{Y}'$  omab mõtet.

\* Olgu  $a \in \mathcal{D}$  taas selline funktsioon, et supp  $f$  ümbruses  $a(x) = 1$ . Iga  $\varphi \in \mathcal{Y}$  korral

$$\begin{aligned}
\langle F(f \circ g), \varphi \rangle &= \langle f \circ g, \hat{\varphi} \rangle \stackrel{(15) \S 7}{=} \langle f(x) \cdot g(y), a(x) \hat{\varphi}(x+y) \rangle = \\
&\stackrel{(1)}{=} (2\pi)^{-n/2} \langle g(y) \cdot f(x), \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{i(x+y) \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \\
&\stackrel{(*)}{=} (2\pi)^{-n/2} \langle g(y), \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(x), a(x) e^{ix \cdot \xi} \rangle e^{iy \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \\
&\stackrel{(20)}{=} \langle g(y), \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{iy \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \\
&\stackrel{(1)}{=} (2\pi)^{n/2} \langle g, F(\hat{f}\varphi) \rangle = (2\pi)^{n/2} \langle Fg, \hat{f}\varphi \rangle = \\
&= (2\pi)^{n/2} \langle \hat{f}Fg, \varphi \rangle = (2\pi)^{n/2} \langle (Ff)(Fg), \varphi \rangle,
\end{aligned}$$

mistõttu  $F(f \circ g) = (2\pi)^{n/2} (Ff)(Fg)$ , m.o.t.t. Esitatud võrratuste ahelas on võrduse (\*) põhjendamiseks vaja näidata, et

$$\langle f(x), \int_{\mathbb{R}^n} a(x) e^{ix \cdot \xi} \varphi(\xi) d\xi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle f(x), a(x) e^{ix \cdot \xi} \rangle \varphi(\xi) d\xi.$$

Selle võrduse tõestust võib läbi viia eelmise punkti arutelu-dega analoogiliselt: esitada  $f$  kujul  $f = D^k h$ , kus  $h(x)$  on aeglaselt kasvav pidev funktsioon, kanda diferentseerimisope-raator  $D^k$  üle teisele liikmele, esitada  $h(x)$  rakendamine in-tegreerimisena, muuta integreerimise järjekorda ning tuua di-ferentseerimisoperaator  $D^k$  tagasi  $h(x)$  juurde. Tulemuseks ongi nõutav võrdus. \*

8. Näiteid Fourier' teisenduse arvutamise kohta. Eespool oleme leidnud funktsiooni  $e^{-a^2 \|x\|^2}$  ja Dirac'i delta-funktsi-ooni Fourier' teisendused. Need ja allpool käsitletavat näi-ted leiavad rakenduse järgmises peatükis.

Finiitse distributsiooni  $f(x)$  Fourier' teisendus aval-  
dub valemi (20') kohaselt kujul

$$(Ff)(x) = (2\pi)^{-n/2} \langle f(\xi), a(\xi) e^{ix \cdot \xi} \rangle, \quad (23)$$

kus  $a \in \mathcal{D}$  on suvaline funktsioon, selline et supp  $f$  mingis ümbruses  $a(x) = 1$ . Kui  $f(x)$  on lisaks veel regulaarne, võtab see valem kuju (võrdle valemiga (1))

$$(Ff)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(\xi) d\xi; \quad (24)$$

me võtsime arvesse, et supp  $f$  ümbruses  $a(x) = 1$ .

Meenutame funktsiooni  $\theta(t)$  definitsiooni:

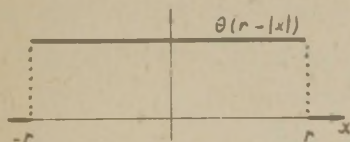
$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t > 0 \\ 0, & \text{kui } t \leq 0. \end{cases}$$

Olgu  $r > 0$  mingi fikseeritud reaalarv.

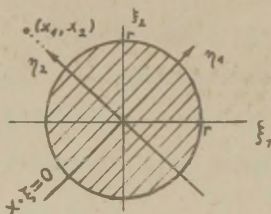
1) Näitame, et

$$F\theta(r-|x|) = 2(2\pi)^{-1/2} \frac{\sin r|x|}{|x|} \quad (n=1).$$

Tõepoolest, funktsioon  $\theta(r-|x|)$  on finitne (vt. joon. 15)



Joon. 15.



Joon. 16.

ning valemi (24) kohaselt

$$\begin{aligned} F\theta(r-|x|) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \theta(r-|\xi|) d\xi = (2\pi)^{-1/2} \int_{-r}^r e^{ix\xi} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1/2} \frac{e^{ix\xi}}{ix} \Big|_{\xi=-r}^{\xi=r} = 2(2\pi)^{-1/2} \frac{1}{x} \frac{e^{irx} - e^{-irx}}{2i} = \\ &= 2(2\pi)^{-1/2} \frac{\sin rx}{x} = 2(2\pi)^{-1/2} \frac{\sin r|x|}{|x|}, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

2) Näitame, et

$$F \frac{\theta(r-\|x\|)}{\sqrt{r^2-\|x\|^2}} = \frac{\sin r\|x\|}{\|x\|} \quad (n=2).$$

Selles näites on taas tegemist regulaarse distributsiooniga; kandjaks on ring  $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ . Valemi (24) kohaselt

$$\begin{aligned} F \frac{\theta(r-\|x\|)}{\sqrt{r^2-\|x\|^2}} &= (2\pi)^{-1} \int_{R^2} e^{ix \cdot \xi} \frac{\theta(r-\|\xi\|)}{\sqrt{r^2-\|\xi\|^2}} d\xi = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{\|\xi\| < r} \frac{e^{ix \cdot \xi}}{\sqrt{r^2-\|\xi\|^2}} d\xi = (2\pi)^{-1} \int_{\|\eta\| < r} \frac{e^{i\|x\|\eta_2}}{\sqrt{r^2-\|\eta\|^2}} d\eta. \end{aligned}$$

Me läksime Cartesiuse ristkoordinaadistikust  $\xi_1, \xi_2$  üle uuele ristkoordinaadistikule  $\eta_1, \eta_2$ , valides telje  $\eta_1$  sirgel  $x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0$  (vt. joon. 16) ning suunates  $\eta_2$  punkti  $(x_1, x_2)$  poole; sellega

$$x \cdot \xi = \|x\|\eta_2, \quad \|\xi\| = \|\eta\|, \quad d\xi = d\eta$$

(üleminek muutujatelt  $\xi_1, \xi_2$  muutujatele  $\eta_1, \eta_2$  toimub ortogonaalteisenduse abil, mis ei muuda vektorite pikkusi ja pinnaelementide pindalasid). Nüüd on meid huvitav Fourier' teisendus juba elementaarselt arvutatav:

$$\begin{aligned} F \frac{\theta(r-\|x\|)}{\sqrt{r^2-\|x\|^2}} &= (2\pi)^{-1} \int_{-r}^r e^{i\|x\|\eta_2} \int_{-\sqrt{r^2-\eta_2^2}}^{\sqrt{r^2-\eta_2^2}} \frac{d\eta_1}{\sqrt{r^2-\eta_2^2}-\eta_1^2} d\eta_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r e^{i\|x\|\eta_2} \left[ \arcsin \frac{\eta_1}{\sqrt{r^2-\eta_2^2}} \right]_{\eta_1=-\sqrt{r^2-\eta_2^2}}^{\eta_1=\sqrt{r^2-\eta_2^2}} d\eta_2 = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-r}^r e^{i\|x\|\eta_2} d\eta_2 = \frac{\sin r\|x\|}{\|x\|}, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

(viimasel sammul kasutasime arvutusi esimesest näitest).

3) Defineerime singulaarse distributsiooni  $\delta_{S_R}$  :

$$\langle \delta_{S_R}, \varphi \rangle = \iint_{S_R} \varphi \, dS \quad (\forall \varphi \in \mathcal{Y}(\mathbb{R}^3))$$

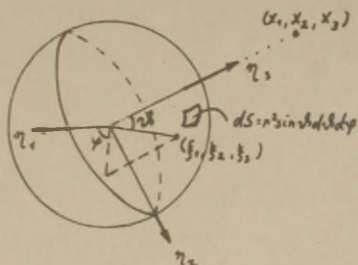
(pindintegraal üle sfääri  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ ). Näitame, et

$$F \delta_{S_R} = 2(2\pi)^{-1/2} r \frac{\sin r|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} \quad (n=3).$$

Tegemist on finitise distributsiooniga, mille kandjaks on sfäär  $S_R$ . Valemi (23) kohaselt

$$\begin{aligned} (F \delta_{S_R})(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2} \langle \delta_{S_R}(\xi), a(\xi) e^{i\mathbf{x} \cdot \xi} \rangle = \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int_{S_R} e^{i\mathbf{x} \cdot \xi} \, dS_{\xi}. \end{aligned}$$

Valides teljestiku ja sfäärilised koordinaadid joonisel 17



Joon. 17.

näidatud viisil, saame  $\mathbf{x} \cdot \xi = |\mathbf{x}| r \cos \vartheta$  ning

$$\begin{aligned} (F \delta_{S_R})(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-3/2} r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} e^{i|\mathbf{x}|r \cos \vartheta} \sin \vartheta \, d\vartheta = \\ &= (2\pi)^{-3/2} r^2 2\pi \int_{-1}^1 e^{i|\mathbf{x}|r \rho} \, d\rho = \\ &= 2(2\pi)^{-1/2} r \frac{\sin r|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}, \text{ m.o.t.t.} \end{aligned}$$

Kolmes näites leitud Fourier' teisendused on omavahel sarnased - kõik nad avalduvad kujul  $c_n \frac{\sin r|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|}$ , kus  $c_n$  on konstant ( $c_1 = 2(2\pi)^{-1/2}$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_3 = 2(2\pi)^{-1/2} r$ ). Arvestades, et  $F^{-1}Ff = f$ , saame

$$F^{-1} \frac{\sin r|\mathbf{x}|}{|\mathbf{x}|} = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2} \theta(r-|\mathbf{x}|), & \text{kui } n=1; \\ \frac{\theta(r-|\mathbf{x}|)}{\sqrt{r^2-|\mathbf{x}|^2}}, & \text{kui } n=2; \\ \frac{1}{2r}(2\pi)^{1/2} \delta_{S_r}, & \text{kui } n=3. \end{cases} \quad (25)$$

Märgime lõpuks, et Fourier' teisenduste kohta on koostatud ulatuslikke tabeleid.

### III. CAUCHY ÜLESANNE

#### § 9. Lineaarse diferentsiaal- operaatori fundamentaal- lahend

1. Diferentsiaalvõrrandi üldistatud lahend. Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$\sum_{|\alpha| \in \mathbb{N}} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = f(x), \quad (1)$$

milles kordajad  $a_{\alpha} \in C^{\infty}(R^n)$  ja vabaliige  $f \in \mathcal{D}'(R^n)$ . Diferentsiaalvõrrandi (1) üldistatud lahenditeks nimetatakse seda võrrandit rahuldavaid distributsioone. Seega  $u \in \mathcal{D}'(R^n)$  on võrrandi (1) üldistatud lahendiks, kui iga  $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$  korral

$$\left\langle \sum_{|\alpha| \in \mathbb{N}} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u, \varphi \right\rangle = \langle f, \varphi \rangle. \quad (2)$$

Üeldakse, et  $u \in \mathcal{D}'$  on võrrandi (1) üldistatud lahendiks piirkonnas  $\Omega \subset R^n$ , kui  $u$  rahuldab võrrandit piirkonnas  $\Omega$ , s.t. kui võrdus (2) kehtib iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  korral. (Meenutame, et  $\mathcal{D}(\Omega)$  koosneb sellistest funktsioonidest  $\varphi \in \mathcal{D}$ , mille korral  $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ .)

Võrrandi (1) klassikaliseks lahendiks piirkonnas  $\Omega$  nimetatakse funktsiooni  $u$ , mis on piirkonnas  $\Omega$   $m$  korda pidevalt diferentseeruv ja rahuldab võrrandit. Ilmselt on klassikaline lahend ka üldistatud lahendiks. Vastupidine üldiselt

ei kehti, sest üldistatud lahend ei pruugi olla üldse funktsioon (regulaarne distributsioon). Kui aga üldistatud lahend osutub küllalt siledaks funktsiooniks, siis on ta ka klassikaliseks lahendiks. Täpsemalt, kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 1. Kui  $u \in \mathcal{D}$  on võrrandi (1) üldistatud lahendiks piirkonnas  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , kusjuures  $u \in C^m(\Omega)$  ja  $f \in C(\Omega)$ , siis on  $u$  võrrandi (1) klassikaliseks lahendiks piirkonnas  $\Omega$ .

Tõestus. Kuna  $u \in C^m(\Omega)$ , siis  $|\alpha| \leq m$  korral langevad üldistatud tuletised  $D^\alpha u$  kokku klassikaliste tuletistega, kusjuures  $D^\alpha u$  on regulaarsed distributsioonid. Tingimuse (2) kohaselt

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) \right\} \varphi(x) dx = 0$$
 iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  korral. Siit järeldame, et

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) - f(x) = 0$$
 piirkonnas  $\Omega$ .

Teoreem 1 on tõestatud.

Toetudes teoreemile 1, võib klassikalise lahendi olemasolu tõestada järgmise skeemi alusel: algul näidata üldistatud lahendi olemasolu, seejärel mingile täiendavale informatsioonile tuginedes näidata, et üldistatud lahend kuulub klassi  $C^m$ .

Sageli kasutatakse veel nn. nõrga ja tugeva lahendi mõisteid, mis üldisuse astme poolest on vahepealsed klassikalise ja üldistatud lahendi mõistete vahel. Tähistame

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

(võrrandis (1) esinev diferentsiaaloperaator) ja

$$P^*(x, D)\varphi = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha(x)\varphi) \quad (\varphi \in \mathcal{D}).$$

Oletame, et  $f \in L_2(\Omega)$ . Võrrandi (1) nõrgaks lahendiks piirkonnas  $\Omega$  nimetatakse funktsiooni  $u \in L_2(\Omega)$ , mis iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  korral rahuldab tingimust

$$\langle u, P^*(x, D)\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Võrrandi (1) tugevaks lahendiks piirkonnas  $\Omega$  nimetatakse funktsiooni  $u \in L_2(\Omega)$ , mille korral ka  $D^\alpha u \in L_2(\Omega)$  ( $|\alpha| \leq m$ ) ning mis rahuldab võrrandit (1) peaaegu igas punktis  $x \in \Omega$ .

Ülesanne 1. Näidata, et: 1) tugev lahend on ka nõrgaks lahendiks; 2) nõrk lahend on ka üldistatud lahendiks.

2. Konstantsete kordajatega diferentsiaaloperaatori fundamentaallahend. Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$P(D)u = f, \tag{3}$$

milles diferentsiaaloperaatori

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$$

kordajad  $a_\alpha$  on konstantsed. Diferentsiaaloperaatori  $P(D)$  fundamentaallahendiks ehk mõjufunktsiooniks nimetatakse distributsiooni  $\xi \in \mathcal{D}'$ , mis rahuldab (ruumis  $R^n$ ) võrrandit

$$P(D)\xi = \delta(x). \tag{4}$$

Kui  $\xi$  on operaatori  $P(D)$  fundamentaallahend,  $\xi_0$  aga homogeense võrrandi  $P(D)u = 0$  lahend, siis ka  $\xi + \xi_0$  on operaatori  $P(D)$  fundamentaallahendiks, sest

$$P(D)(\xi + \xi_0) = P(D)\xi + P(D)\xi_0 = \delta(x) + 0 = \delta(x).$$

Teoreem 2. Olgu  $\xi$  diferentsiaaloperaatori  $P(D)$  fundamentaallahend. Olgu võrrandi (3) vabaliige  $f \in \mathcal{D}'$  selline, et konvolutsioon  $\xi * f$  eksisteerib ruumis  $\mathcal{D}'$ . Siis  $u = \xi * f \in \mathcal{D}'$  on võrrandi (3) üldistatud lahendiks ning ei leidu kahte erinevat üldistatud lahendit  $u_1 \in \mathcal{D}'$  ja  $u_2 \in \mathcal{D}'$ , mille korral eksisteerivad konvolutsioonid  $\xi * u_1 \in \mathcal{D}'$  ja  $\xi * u_2 \in \mathcal{D}'$ .

Tõestus. Kuna (vt. § 6, valemid (13) ja (14))  $D^\alpha(\xi * f) = D^\alpha \xi * f$  ja  $\mathcal{D} * f = f$ , siis

$$P(D)(\xi * f) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha(\xi * f) = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \xi \right) * f = \mathcal{D} * f = f,$$
 ja  $u = \xi * f$  on tõepoolest võrrandi (3) üldistatud lahendiks.

Kui  $P(D)u_1 = f$ ,  $P(D)u_2 = f$  ning eksisteerivad konvolutsioonid  $\xi * u_1 \in \mathcal{D}'$  ja  $\xi * u_2 \in \mathcal{D}'$ , siis

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \mathcal{D} * (u_1 - u_2) = P(D)\xi * (u_1 - u_2) = \\ &= \xi * P(D)(u_1 - u_2) = \xi * (f - f) = \xi * 0 = 0, \end{aligned}$$

s.t.  $u_1 = u_2$ .

Teoreem 2 on tõestatud.

Fundamentaallahendi leidmiseks on sageli otstarbekohane kasutada Fourier' teisendust. Arvestades operaatori  $F : \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$  üksühesust, on võrrand (4) samaväärne võrrandiga

$$FP(D)\xi = F\mathcal{D}.$$

Et aga (vt. § 8, valemid (17) ja (21))

$$\begin{aligned} FP(D)\xi &= F\left( \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha \xi \right) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha F D^\alpha \xi = \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha (-ix)^\alpha F \xi = P(-ix)\hat{\xi}, \\ F\mathcal{D} &= (2\pi)^{-n/2}, \end{aligned}$$

siis võrrand (4) on samaväärne võrrandiga

$$P(-ix)\hat{\xi}(x) = (2\pi)^{-n/2}, \quad (5)$$

kus  $\hat{\xi} = F\xi$  on distributsiooni  $\xi$  Fourier' teisendus ja

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha} x^{\alpha}$$

on polünoom. Kui õnnestub leida võrrandi (5) mingi lahend

$\hat{\xi} \in \mathcal{Y}'$ , siis Fourier' pöördteisendust rakendades saame kätte ka operaatori  $P(D)$  fundamentaallahendi

$$\xi = F^{-1}\hat{\xi} \in \mathcal{Y}' \subset \mathcal{D}'.$$

Kui  $P(-ix) \neq 0$  iga  $x \in \mathbb{R}^n$  korral, siis  $\hat{\xi}(x)$  on võrrandist (5) üheselt määratav, kusjuures

$$\hat{\xi}(x) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{P(-ix)} \in \mathcal{Y}'$$

on aeglaselt kasvav funktsioon. Selline olukord on siiski kaunis erandlik. Tavaliselt pole nullkohtade hulk

$$N_P = \{x \in \mathbb{R}^n : P(-ix) = 0\}$$

tühi ning  $\hat{\xi}(x)$  leidmine võrrandist (5) on siis märksa keerulisem. 1958.a. tõestas L.Hörmander, et suvalise konstantsete kordajatega diferentsiaaloperaatori  $P(D)$  korral on võrrandil (5) olemas lahend  $\hat{\xi} \in \mathcal{Y}'$ , seega fundamentaallahend  $\xi = F^{-1}\hat{\xi}$  eksisteerib\*). Muide, lahend  $\hat{\xi} \in \mathcal{Y}'$  pole  $N_P \neq \emptyset$  korral üheselt määratud, kusjuures suvalise kahe lahendi vaheks on distributsioon, mille kandja sisaldub hulgas  $N_P$ . Igas

---

\*) Tõestuse võib leida monograafiast [15].

Märgime, et pole teada, kas ka igal  $x$ -st sõltuval operaatoril  $P(x, D)$  on olemas fundamentaallahend. See probleem pole lahendatud isegi teist järku elliptilist tüüpi võrrandite jaoks.

piirkonnas  $\Omega$ , mis ei sisalda  $N_p$  punkti, langevad võrrandi (5) lahendid kokku funktsiooniga (regulaarse distributsiooniga)  $\frac{(2\pi)^{-n/2}}{P(-ix)}$ .

\* Toome näite. Diferentsiaaloperaatori  $P(D) = D$  ( $n=1$ ) korral näeb võrrand (5) välja nii:

$$-ix\hat{\xi}(x) = (2\pi)^{-1/2};$$

saab näidata, et selle võrrandi üldlahendiks on

$$\hat{\xi}(x) = i(2\pi)^{-1/2} \operatorname{reg} \frac{1}{x} + c\delta(x),$$

kus  $c$  on suvaline konstant ja  $\operatorname{reg} \frac{1}{x} \in \mathcal{Y}'$  on defineeritud valemiga

$$\langle \operatorname{reg} \frac{1}{x}, \psi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\infty} \right) \frac{\psi(x)}{x} dx \quad (\psi \in \mathcal{Y}(R^1)).$$

Antud juhul  $N_p = \{0\}$ . Igas vahemikus  $(a, b)$ , mis ei sisalda nulli, langevad distributsioonid  $\hat{\xi}(x)$  kokku funktsiooniga  $i(2\pi)^{-1/2} \frac{1}{x}$ . \*

Peab märkima, et sageli osutub fundamentaallahendi  $\mathcal{E} = F^{-1}\hat{\xi}$  praktiline leidmine võrrandi (5) abil üsna komplitseerituks. Soojusjuhtivuse võrrandi ja lainevõrrandi fundamentaallahendi leidmiseks kasutame allpool meetodit, kus Fourier' teisendust rakendatakse vaid ruumimuutujate suhtes.

### 3. Hariliku diferentsiaaloperaatori fundamentaallahend.

Olgu  $n = 1$ ; tähistame sõltumatut muutujat  $t$ . Vaatleme konstantsete kordajatega diferentsiaaloperaatorit

$$L(D) = \frac{d^m}{dt^m} + a_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{d}{dt} + a_m.$$

Näitame, et tema fundamentaallahendiks on lokaalselt integ-

## reeruv funktsioon

$$\xi(t) \doteq \theta(t)U(t),$$

kus

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t > 0 \\ 0, & \text{kui } t \leq 0 \end{cases}$$

ja  $U(t)$  on võrrandi  $L(D)u = 0$  lahend algtingimustel

$$U(0) = 0, U'(0) = 0, \dots, U^{(m-2)}(0) = 0, U^{(m-1)}(0) = 1.$$

Tõepoolest,  $\theta'(t) = \delta(t)$ ,  $U(t)\delta(t) = U(0)\delta(t)$  (vt.

§ 4.3, 4.4) ning

$$\begin{aligned} \xi'(t) &= \theta'(t)U(t) + \theta(t)U'(t) = \delta(t)U(t) + \theta(t)U'(t) = \\ &= \delta(t)U(0) + \theta(t)U'(t) = \theta(t)U'(t). \end{aligned}$$

Jätkates diferentseerimist ja kasutades algtingimusi, leiame

$$\xi^{(i)}(t) = \theta(t)U^{(i)}(t) \quad (i=0,1,\dots,m-1)$$

ja

$$\begin{aligned} \xi^{(m)}(t) &= \frac{d}{dt} [\theta(t)U^{(m-1)}(t)] = \\ &= \theta'(t)U^{(m-1)}(t) + \theta(t)U^{(m)}(t) = \\ &= \delta(t) + \theta(t)U^{(m)}(t). \end{aligned}$$

Seega

$$L(D)\xi = \delta(t) + \theta(t)U^{(m)}(t) + a_1\theta(t)U^{(m-1)}(t) + \dots$$

$$\dots + a_m\theta(t)U(t) = \delta(t) + \theta(t)[L(D)U] = \delta(t), \text{ m.o.t.t.}$$

Järgnevas pakuvad meile huvi kaks lihtsat erijuhtu.

1) Diferentsiaaloperaatori  $\frac{d}{dt} + b$  korral  $U(t) = e^{-bt}$  ja fundamentaallahendiks on  $\xi(t) = \theta(t)e^{-bt}$ .

2) Diferentsiaaloperaatori  $\frac{d^2}{dt^2} + b^2$  korral  $U(t) = \frac{\sin bt}{b}$  ja fundamentaallahendiks on  $\xi(t) = \theta(t) \frac{\sin bt}{b}$ .

4. Soojusjuhtivuse operaatori fundamentaallahend. Soo-

jusjuhtivuse operaatori  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$  fundamentaallahend  $\varepsilon(x, t)$  tuleb leida võrrandi

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - a^2 \Delta \varepsilon = f(x, t) \quad (6)$$

lahendina. Rakendame võrrandi mõlemale poolele Fourier' teisendust  $F_x$  ruumimuutujate suhtes. Kõigepealt paneme tähele,

et  $F_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} F_x \varepsilon$ , sest iga  $\varphi(x, t) \in \mathcal{Y}$  korral

$$\begin{aligned} \langle F_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \varphi \rangle &= \langle \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, F_x \varphi \rangle = - \langle \varepsilon, \frac{\partial}{\partial t} F_x \varphi \rangle = - \langle \varepsilon, F_x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle = \\ &= - \langle F_x \varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial t} F_x \varepsilon, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Arvestades veel, et

$$F_x \Delta \varepsilon = F_x \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} \right) = \sum_{j=1}^n (-ix_j)^2 F_x \varepsilon = - \|x\|^2 F_x \varepsilon,$$

$$F_x f(x, t) = F_x [f(x) \cdot f(t)] = F_x f(x) \cdot f(t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot f(t),$$

saame võrrandist (6) võrrandi

$$\frac{\partial \hat{\varepsilon}(x, t)}{\partial t} + a^2 \|x\|^2 \hat{\varepsilon}(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot f(t), \quad (6')$$

milles kasutasime tähist  $\hat{\varepsilon} = F_x \varepsilon$ . Võrrand (6') kujutab endast fundamentaallahendi leidmise ülesannet harilikule diferentsiaaloperaatorile  $\frac{d}{dt} + b$ , milles  $b = a^2 \|x\|^2$ . Eelmise punkti tulemuste põhjal

$$\hat{\varepsilon}(x, t) = (2\pi)^{-n/2} \theta(t) e^{-a^2 \|x\|^2 t}.$$

Nagu näha, on  $\hat{\varepsilon}(x, t)$  tõkestatud funktsioon, kusjuures fikseeritud  $t$  korral on  $\hat{\varepsilon}(x, t)$  kui argumendi  $x$  funktsioon ruumi  $\mathcal{Y}(R^n)$  element. Pöördteisendust rakendades leiame  $\varepsilon = F_x^{-1} \hat{\varepsilon}$ :

$$\begin{aligned} \xi(\mathbf{x}, t) &= (2\pi)^{-n/2} \theta(t) F_{\mathbf{x}}^{-1} e^{-a^2 \|\mathbf{x}\|^2 t} = (2\pi)^{-n/2} \theta(t) F_{\mathbf{x}} e^{-a^2 \|\mathbf{x}\|^2 t} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \theta(t) \frac{1}{(\sqrt{2t} a)^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4a^2 t}} = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

(10') §8

Me võtsime siin arvesse, et

$$\psi(-\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow F^{-1}\psi = F\psi$$

(põhjendada!).

Niisiis, soojusjuhtivuse operaatori  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$  fundamentaallahendiks on

$$\xi(\mathbf{x}, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4a^2 t}}. \quad (7)$$

5. Laineoperaatori fundamentaallahend. Lainevõrrandis esineva diferentsiaaloperaatori  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$  fundamentaallahend  $\xi(\mathbf{x}, t)$  tuleb leida võrrandi

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \Delta \xi = f(\mathbf{x}, t)$$

lahendina. Toimides samal viisil nagu eelmises punktis, leiame, et  $\hat{\xi} = F_{\mathbf{x}} \xi$  rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial^2 \hat{\xi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + a^2 \|\mathbf{x}\|^2 \hat{\xi}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n/2} \cdot f(t)$$

ja avaldub kujul (vt. teist näidet punktis 3)

$$\hat{\xi}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n/2} \theta(t) \frac{\sin a \|\mathbf{x}\| t}{a \|\mathbf{x}\|}.$$

Seega

$$\xi(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n/2} \frac{\theta(t)}{a} \cdot F_{\mathbf{x}}^{-1} \frac{\sin a t \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}. \quad (8)$$

Teguri  $\theta(t)$  tõttu piisab leida  $F_{\mathbf{x}}^{-1} \frac{\sin a t \|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$  vaid  $t > 0$  kor-

ral. Rakendades § 8 valemit (25)  $r=at$  korral, saame

$$F_x^{-1} \frac{\sin at\|x\|}{\|x\|} = \begin{cases} \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2} \theta(at - \|x\|), & \text{kui } n=1; \\ \frac{\theta(at - \|x\|)}{\sqrt{a^2t^2 - \|x\|^2}}, & \text{kui } n=2; \\ \frac{1}{2at} (2\pi)^{1/2} \delta_{S_{at}}, & \text{kui } n=3. \end{cases} \quad (9)$$

Siin  $\delta_{S_{at}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$  on finiidne distributsioon, mis toimib pöhfunktsioonidele järgmiselt:

$$\langle \delta_{S_{at}}, \psi \rangle = \iint_{S_{at}} \psi \, ds \quad (10)$$

(pindintegraal üle sfääri  $S_{at}$  keskpunktiga koordinaatide alguses ja raadiusega  $at$ ).

Valemitest (8) ja (9) saame, et laineoperaatori

$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta$  fundamentaallahendiks on

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \theta(at - \|x\|), & \text{kui } n=1; \\ \frac{1}{2\pi a} \frac{\theta(at - \|x\|)}{\sqrt{a^2t^2 - \|x\|^2}}, & \text{kui } n=2; \\ \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x), & \text{kui } n=3. \end{cases} \quad (11)$$

Me võtsime arvesse, et  $\theta(t)\theta(at - \|x\|) = \theta(at - \|x\|)$ .

§ 10. Cauchy ülesanne soojus-  
juhtivuse võrrandi jaoks

1. Soojusjuhtivuse operaatori fundamentaallahendi oma-  
dusi. Soojusjuhtivuse operaatori fundamentaallahendi

$$\xi(x, t) = \frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2 t}} \quad (1)$$

me leidsime (vt. § 9.4) kui võrrandit

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - a^2 \Delta \xi = \delta(x) \cdot \delta(t) \quad (2)$$

rahuldava distributsiooni. Funktsioon  $\xi(x, t)$  on positiivne, lokaalselt integreeruv,  $(x, t) \neq (0, 0)$  korral koguni lõpmata diferentseeruv klassikalises mõttes. Näitame, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \xi(x, t) dx = 1 \quad (0 < t < \infty). \quad (3)$$

Tõepoolest,  $t > 0$  korral  $\theta(t) = 1$  ja

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x, t) dx &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2 t}} dx \stackrel{x=2a\sqrt{t} \xi}{=} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\xi\|^2} d\xi = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_i^2} d\xi_i = 1. \quad (3') \end{aligned}$$

Näitame veel, et

$$\xi(x, t) \rightarrow \delta(x) \text{ ruumis } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), \text{ kui } t \rightarrow +0, \quad (4)$$

s.t. iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  korral

$$\int_{\mathbb{R}^n} \xi(x, t) \varphi(x) dx \rightarrow \varphi(0), \text{ kui } t \rightarrow +0. \quad (4')$$

Tõepoolest, võrduse (3) põhjal

$$\int_{\mathbb{R}^n} \xi(x, t) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \varphi(0)$$

ning koondumise (4') näitamiseks piisab veenduda, et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \xi(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \rightarrow 0, \text{ kui } t \rightarrow +0. \quad (5)$$

Olgu antud kuitahes väike  $\varepsilon > 0$ . Toetudes funktsiooni  $\varphi(x)$  pidevusele punktis  $x = 0$ , leiame sellise  $\delta > 0$ , et

$$\|x\| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0)| < \varepsilon. \quad (6)$$

Siis

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x, t) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq \\ & \leq \int_{\|x\| < \delta} \xi(x, t) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx + \int_{\|x\| \geq \delta} \xi(x, t) |\varphi(x) - \varphi(0)| dx < \\ & < \varepsilon + c \int_{\|x\| \geq \delta} \xi(x, t) dx \quad (0 < t < \infty), \end{aligned} \quad (6), (3)$$

kus  $c = \text{const}$  on funktsiooni  $|\varphi(x) - \varphi(0)|$  tõke. Viimane integraal läheneb  $t \rightarrow +0$  korral nullile:

$$\begin{aligned} \int_{\|x\| \geq \delta} \xi(x, t) dx &= \frac{1}{(2a\sqrt{t})^n} \int_{\|x\| \geq \delta} e^{-\frac{\|x\|^2}{4a^2t}} dx = \int_{x=2a\sqrt{t} \xi} e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\|\xi\| \geq \frac{\delta}{2a\sqrt{t}}} e^{-\|\xi\|^2} d\xi \rightarrow 0 \end{aligned}$$

( $t \rightarrow +0$  korral integreerimise piirkond kahaneb). Seega küllalt väikeste  $t > 0$  korral

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} [\varphi(x) - \varphi(0)] \xi(x, t) dx \right| < 2\varepsilon$$

ning  $\varepsilon > 0$  suvalisuse tõttu on see samaväärne koondumisega (5). Koondumine (4) on sellega näidatud.

Märgime, et koondumise (4') näitamisel me kasutasime

vaid järgmise funktsiooni  $\varphi(x)$  omadusi: tõekestatust ruumis  $R^n$  ning pidevust punktis  $x = 0$ . Seega koondumine (4') leiab aset mitte ainult funktsioonide  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral, vaid ka suvalise tõekestatud, punktis  $x = 0$  pideva funktsiooni  $\varphi$  korral. Seda märkust läheb meil edaspidises vaja.

Peatume fundamentaallahendi  $\xi(x, t)$  füüsikalisel interpretatsioonil. Soojusjuhtivuse võrrandi  $u_t = a^2 \Delta u + f(x, t)$  vabaliige kujutab endast konstantse teguri täpsuseni soojusallikate tihedust kehas (vt. § 1.5). Võrrandi (2) vabaliiget  $\delta(x) \cdot \delta(t)$  võib interpreteerida kui punktis  $x = 0$  paikneva soojusallika "tihedust", kui see punkt-allikas kiirgab ajamomendil  $t = 0$  ümbritsevasse ruumi ühiku soojust. Fundamentaallahend  $\xi(x, t)$  kui soojusjuhtivuse võrrandi (2) lahend kujutab endast keha temperatuuri punktis  $x$  ajamomendil  $t$ , mille on põhjustanud punkt-allikas. Võrdus (3) tähendab, et igal ajamomendil  $t > 0$  on summaarne soojushulk kehas jääv. Koondumist (4) võib interpreteerida nii:  $t \rightarrow +0$  korral läheneb soojusväli  $\xi(x, t)$  soojusväljale ajamomendil  $t = 0$ .

Kuna  $\xi(x, t) > 0$  iga  $t > 0$  korral, ajamomendil  $t = 0$  aga on temperatuur punktis  $x \neq 0$  võrdne 0-ga, siis soojus levib kehas lõpmatu kiirusega. See on vastuolus tänapäeva kujutlustega energia levimisest - energia levimise kiirus on alati tõekestatud (ei ületa valguse levimise kiirust). Niisiis teooria seisukohalt ei kirjelda soojusjuhtivuse võrrand soojuse levimist küllaldase täpsusega. Tehniliste jt. praktiliste rakenduste seisukohalt on aga täpsus osutunud küllaldaseks. Energia levimise kiiruse lõplikkuse arvestamisel jõuaksime nn. ülekandevõrrandini. Viimane kirjel-

dab eelkõige lühilainelise kiirguse (valguse) ja elementaarosakeste levimist keskkonnas, olles sellega atmosfääri- ja tuumafüüsika ühes põhiliseks võrrandiks. Ülekandevõrrandi tuletamisega võib tutvuda õpikus [1].

2. Cauchy ülesande lahendamine hariliku diferentsiaalvõrrandi korral. Siin selgitame soojusjuhtivuse võrrandi lahendamisel kasutatava meetodi ideed lihtsama võrrandi näjal. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$\frac{du}{dt} + bu = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad (7)$$

milles vabaliige  $f(t)$  on määratud ja pidev poolteljel  $t \geq 0$  ning lahendit  $u = u(t)$  otsime samuti poolteljel  $t \geq 0$ .

Jätkame funktsiooni  $u(t)$  ja  $f(t)$  nullväärtustega piirkonda  $t < 0$ :

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), & \text{kui } t \geq 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0, \end{cases} \quad \tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & \text{kui } t \geq 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0. \end{cases}$$

Vaadeldes funktsiooni  $\tilde{u}$  (regulaarse) distributsioonina, leiame tema üldistatud tuletise  $D\tilde{u} \in \mathcal{D}'$ . Kuna iga  $\varphi \in \mathcal{D}$  korral

$$\begin{aligned} \langle D\tilde{u}, \varphi \rangle &= - \langle \tilde{u}, D\varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^{\infty} u(t) \varphi'(t) dt = \\ &= - [u(t)\varphi(t)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} u'(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)u(0) + \int_0^{\infty} u'(t) \varphi(t) dt = \\ &= u(0) \langle \delta, \varphi \rangle + \langle \tilde{u}', \varphi \rangle, \end{aligned}$$

siis

$$D\tilde{u} = u(0)\delta(t) + \tilde{u}', \quad (8)$$

kus

$$\tilde{u}'(t) = \begin{cases} u'(t), & \text{kui } t > 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0 \end{cases}$$

on  $t \neq 0$  korral funktsiooni  $\tilde{u}(t)$  klassikaline tuletis.

Võrdusest (8) teeme järgmise järelduse: kui  $u(t)$  on Cauchy ülesande (7) klassikaline lahend, siis distributsioon  $\tilde{u}(t)$  rahuldab võrrandit

$$D\tilde{u} + b\tilde{u} = \tilde{f}(t) + u_0 \delta(t). \quad (7')$$

Tõepoolest, iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$  korral

$$\langle D\tilde{u} + b\tilde{u}, \varphi \rangle \stackrel{(8)}{=} \langle \tilde{u}' + b\tilde{u} + u(0)\delta, \varphi \rangle \stackrel{(7)}{=} \langle \tilde{f} + u_0 \delta, \varphi \rangle, \text{ m.o.t.t.}$$

Võrrandil (7') on lõpmata palju lahendeid: liites mingile lahendile vastava homogeense võrrandi suvalise lahendi, saame taas võrrandi (7') lahendi. Kuid meid huvitavad ainult sellised lahendid  $\tilde{u} \in \mathcal{D}'$ , mille kandjad sisalduvad poolteljel  $t \geq 0$ . Allpool näitame, et selliseid lahendeid on võrrandil (7') parajasti üks (ning järelikult on toleleks ainsaks lahendiks lahend  $\tilde{u}(t)$ , mille saime Cauchy ülesande (7) lahendi  $u(t)$  jätkamisel nullväärtustega piirkonda  $t < 0$ ).

Operaatori  $D + b$  fundamentaallahendiks on (vt. § 9.3)

$$\xi_0(t) = \theta(t)e^{-bt};$$

§ 9 teoreemi 2 kohaselt on

$$\tilde{u} = \xi_0 * (\tilde{f} + u_0 \delta)$$

võrrandi (7') lahendiks, kui vaid see konvolutsioon eksisteerib. Konvolutsioon  $\xi_0 * \delta$  eksisteerib, kusjuures

$$\xi_0 * \delta = \xi_0$$

(vt. § 6.5). Me väidame, et eksisteerib ka konvolutsioon  $\xi_0 * \tilde{f}$ . See järeldub näiteks § 6.6 ülesande 6 tulemusest (supp  $\xi_0$  ja supp  $\tilde{f}$  sisalduvad poolteljel  $t \geq 0$ ). Esitame

siiski ka vahetu tõestuse, tuletades ühtlasi valemi  $\xi_0 \cdot \tilde{f}$  jaoks. Konvolutsiooni  $\xi_0 \cdot \tilde{f}$  eksisteerimiseks ja lokaalseks integreeruvuseks piisab (vt. § 6.3), et funktsioon

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi_0(t - \tau) \tilde{f}(\tau)| d\tau$$

oleks lokaalselt integreeruv. Funktsiooni  $\tilde{f}(t)$  definitsiooni kohaselt

$$h(t) = \int_0^{\infty} |\xi_0(t - \tau) f(\tau)| d\tau;$$

arvestades, et  $\tau > t$  korral  $\xi_0(t - \tau) = 0$ , saame

$$h(t) = \begin{cases} \int_0^t |\xi_0(t - \tau) f(\tau)| d\tau, & \text{kui } t \geq 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0. \end{cases}$$

See funktsioon on ilmselt lokaalselt integreeruv (ja isegi pidev). Seega konvolutsioon  $\xi_0 \cdot \tilde{f}$  eksisteerib, kusjuures

$$(\xi_0 \cdot \tilde{f})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi_0(t - \tau) \tilde{f}(\tau) d\tau = \begin{cases} \int_0^t e^{-b(t-\tau)} f(\tau) d\tau, & \text{kui } t \geq 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0. \end{cases}$$

Niisiis on

$$\tilde{u} = \xi_0 \cdot \tilde{f} + u_0 \xi_0$$

vorrandi (7') lahendiks, mille kandja sisaldub poolteljel  $t \geq 0$ ; §9 teoreemi 2 põhjal pole olemas kahte erinevat lahendit  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \in \mathcal{D}'$ , mille kandjad sisalduvad poolteljel  $t \geq 0$ , sest selliste lahendite korral eksisteerivad konvolutsioonid  $\xi_0 \cdot u_1, \xi_0 \cdot u_2$  (vt. § 6.6, ülesanne 6).

Teeme kokkuvõtte. Cauchy ülesande (7) asendasime järgmise ülesandega: leida vorrandi (7') ldistatud lahendid, mis  $t < 0$  korral võrduvad nulliga. Viimane ülesanne on ühe-

selt lahenduv, lahendiks on funktsioon  $\tilde{u} = \xi_0 \cdot \tilde{f} + u_0 \xi_0$ ;  
 Cauchy ülesande (7) lahendi  $u(t)$  saame, kitsendades funktsiooni  $\tilde{u}(t)$  määramispiirkonda poolteljele  $t > 0$ :

$$u(t) = \int_0^t e^{-b(t-\tau)} f(\tau) d\tau + u_0 e^{-bt}.$$

Põhimõtteliselt samasugust meetodit kasutame allpool Cauchy ülesande lahendamiseks soojusjuhtivuse võrrandi korral, järgnevas paragrahvis aga ka lainevõrrandi korral.

### 3. Üleminek Cauchy ülesandelt üldistatud Cauchy ülesandele. Vaatleme Cauchy ülesannet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad (9)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (10)$$

Oletame, et vabaliige  $f(x, t)$  ja algväärtus  $u_0(x)$  on pidevad  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  korral ning et ülesandel on olemas klassikaline lahend  $u(x, t)$ , s.t.  $u(x, t)$  on pidev  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  korral ning rahuldab algtingimust (10),  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  korral aga eksisteerivad ja on pidevad ka võrrandis (9) esinevad tuletised ning võrrand on  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  korral rahuldatud. Jätkame funktsioone  $u(x, t)$  ja  $f(x, t)$  nullväärtustega piirkonda  $x \in R^n$ ,  $t < 0$ :

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & \text{kui } t > 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0, \end{cases} \quad \tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{kui } t > 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0. \end{cases}$$

Funktsiooni  $\tilde{u}(x, t)$  vaatleme distributsioonina ja leiame tema (üldistatud) tuletised. Kuna  $\tilde{u}(x, t)$  on katkev funktsioon, siis on oodata, et klassikalised tuletised erinevad üldistatud tuletistest. Segaduste ärahoidmiseks kasutame

kirjutusviisi  $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2}$  üldistatud tuletiste tähistamiseks,

kirjutusviisi  $\tilde{u}_t, \tilde{u}_{x_1 x_1}$  aga klassikaliste tuletiste tähistamiseks, s.t.

$$\tilde{u}_t = \begin{cases} u_t, & \text{kui } t > 0 \\ 0, & \text{kui } t < 0 \end{cases}, \quad \tilde{u}_{x_1 x_1} = \begin{cases} u_{x_1 x_1}, & \text{kui } t > 0 \\ 0, & \text{kui } t < 0 \end{cases}$$

( $t = 0$  korral pole klassikalisi tuletisi olemas).

Iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  korral

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \varphi \rangle &= - \langle \tilde{u}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(x, t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} dt dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{\infty} u(x, t) \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} dt dx = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ [u(x, t) \varphi(x, t)]_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} u_t(x, t) \varphi(x, t) dt \right\} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ u_0(x) \varphi(x, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_t(x, t) \varphi(x, t) dt \right\} dx = \\ &= \langle u_0(x), \langle \delta(t), \varphi(x, t) \rangle \rangle + \langle \tilde{u}_t(x, t), \varphi(x, t) \rangle = \\ &= \langle u_0(x) \cdot \delta(t) + \tilde{u}_t(x, t), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2}, \varphi \rangle &= \langle \tilde{u}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x, t) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x_1^2} dx dt = \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x_1^2} dx dt \quad (= \text{ositi}) \\ &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_{x_1 x_1}(x, t) \varphi(x, t) dx dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}_{x_1 x_1}(x, t) \varphi(x, t) dx dt = \langle \tilde{u}_{x_1 x_1}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Seega

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = u_0(x) \cdot \delta(t) + \tilde{u}_t, \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} = \tilde{u}_{x_1 x_1} \quad (i=1, \dots, n). \quad (11)$$

Muuhulgas me näeme, et ruumimuutujate  $x_1$  suhtes võetud üldistatud tuletised langevad kokku klassikaliste tuletistega. Seetõttu võime tähist  $\Delta$  kasutada nii klassikaliste kui üldistatud tuletiste mõttes.

Valemitest (11) teeme järgmise järelduse: kui  $u(x, t)$  on Cauchy ülesande  $\{(9), (10)\}$  lahend, siis nullväärtustega jätkamisel saadud distributsioon  $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{u} + \tilde{f}(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t). \quad (12)$$

Tõepoolest, iga  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  korral

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - a^2 \Delta \tilde{u}, \varphi \right\rangle = \left\langle u_0(x) \cdot \delta(t) + \tilde{u}_t - a^2 \Delta \tilde{u}, \varphi \right\rangle. \quad (11)$$

Funktsioon  $\tilde{u}_t - a^2 \Delta \tilde{u}$  on lokaalselt integreeruv ning pea-aegu kõikjal (konkreetselt,  $t \neq 0$  korral)

$$\tilde{u}_t - a^2 \Delta \tilde{u} = \tilde{f}$$

(vaadelda eraldi punkti, kus  $t > 0$  ja  $t < 0$ !). Seega

$$\left\langle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - a^2 \Delta \tilde{u}, \varphi \right\rangle = \left\langle u_0(x) \cdot \delta(t) + \tilde{f}, \varphi \right\rangle, \quad \text{m.o.t.t.}$$

Üldistatud Cauchy ülesandeks soojusjuhtivuse võrrandi jaoks nimetame järgmist ülesannet: leida distributsioon  $\tilde{u}(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , mis on võrdne nulliga  $t < 0$  korral ja rahuldab võrrandit (12);  $u_0(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $\tilde{f}(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  on etteantud distributsioonid, kusjuures  $t < 0$  korral  $\tilde{f}(x, t) = 0$ .

Paneme tähele, et viimane tingimus  $\tilde{f}(x, t)$  kohta on üldistatud Cauchy ülesande lahenduvuseks tarvilik. Tõepoolest, kui lahend  $\tilde{u}$  eksisteerib, siis  $t < 0$  korral  $\tilde{u}(x, t) = 0$  (lahendi definitsiooni kohaselt), siit aga järele-

dub, et  $t < 0$  korral võrduvad nulliga ka  $\tilde{u}$  üldistatud tuletised. Kuna  $t < 0$  korral ka  $\delta(t) = 0$ , siis võrrandist (12) saamegi, et  $t < 0$  korral  $\tilde{f}(x, t) = 0$ .

Käesoleva punkti põhitulemused võib kokku võtta järgmiseks lauseks: kui  $u(x, t)$  on Cauchy ülesande  $\{(9), (10)\}$  klassikaliseks lahendiks, siis nullväärtustega jätkamisel saadud funktsioon  $\tilde{u}(x, t)$  on üldistatud Cauchy ülesande (12) lahendiks (milles  $\tilde{f}$  on saadud vabaliikme  $f(x, t)$  nullväärtustega jätkamisel).

4. Üldistatud Cauchy ülesande lahendamine. Vaatleme üldistatud Cauchy ülesannet: leida distributsioon  $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , mis  $t < 0$  korral võrdub nulliga ning mis  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $-\infty < t < \infty$  korral rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t), \quad (13)$$

kus  $u_0(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $f(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  on etteantud distributsioonid,  $t < 0$  korral  $f(x, t) = 0$ .

Võtame kasutusele soojusjuhtivuse operaatori  $\frac{\partial}{\partial t} - a^2 \Delta$  fundamentaallahendi  $\xi(x, t)$ , vt. valemit (1). § 9 teoreemi 2 põhjal on üheks võrrandi (13) lahendiks

$$u = \xi(x, t) * [f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t)], \quad (14)$$

kui vaid see konvolutsioon eksisteerib ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ . Osutub, et valemiga (14) defineeritud distributsioon ongi siis üldistatud Cauchy ülesande lahendiks, s.t. lisaks võrrandi (13) rahuldamisele on täidetud veel tingimus:  $t < 0$  korral  $u(x, t) = 0$ . Viimane järeldub järgmisest lemmast, kui võtame arvesse, et  $t < 0$  korral  $\xi(x, t) = 0$ ,  $f(x, t) = 0$ ,  $\delta(t) = 0$ .

Lemma 1. Olgu distributsioonid  $g(x,t)$  ja  $h(x,t)$  sellised, et  $t < 0$  korral  $g(x,t) = 0$  ja  $h(x,t) = 0$ . Kui nende distributsioonide konvolutsioon eksisteerib, siis  $t < 0$  korral ka  $(g \cdot h)(x,t) = 0$ .

Tõestus. Me peame näitama, et  $\langle g \cdot h, \varphi \rangle = 0$ , kui

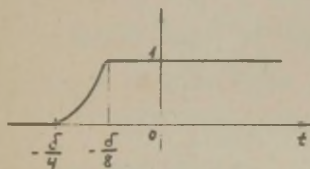
$$\text{supp } \varphi \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t < 0\}.$$

Viimasest sisalduvusest järeldub sellise  $\delta = \delta(\varphi) > 0$  olemasolu, et

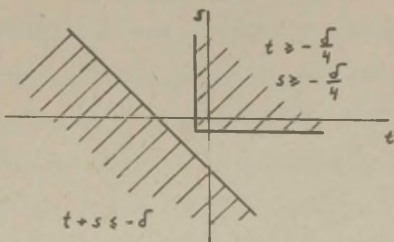
$$\text{supp } \varphi \subset \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \mathbb{R}^n, t \leq -\delta\}.$$

Olgu  $a(t) \in C^\infty$  selline funktsioon, et  $t \leq -\frac{\delta}{4}$  korral  $a(t) = 0$  ja  $t \geq -\frac{\delta}{8}$  korral  $a(t) = 1$  (joon. 18). Siis

$$a(t)g(x,t) = g(x,t), \quad a(t)h(x,t) = h(x,t). \quad (15)$$



Joon. 18.



Joon. 19.

Konvolutsiooni definitsiooni kohaselt

$$\langle g \cdot h, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle g(x,t) \cdot h(y,s), e_k(x,y,t,s) \varphi(x+y, t+s) \rangle,$$

kus  $e_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n+2})$  on suvaline jada,  $e_k \rightarrow 1$  ruumis  $\mathbb{R}^{2n+2}$ . Võrduste (15) põhjal

$$\langle g \cdot h, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle a(t)g(x,t) \cdot a(s)h(y,s), e_k \varphi(x+y, t+s) \rangle =$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle g(x,t) \cdot h(y,s), e_k a(t)a(s)\varphi(x+y, t+s) \rangle.$$

Paneme tähele, et funktsiooni  $a(t)a(s)\varphi(x+y, t+s)$  kandja sisaldub hulgas

$$\{(x,y,t,s) \in \mathbb{R}^{2n+2}; x,y \in \mathbb{R}^n, t \geq -\frac{\delta}{4}, s \geq -\frac{\delta}{4}, t+s \leq -\delta\},$$

mis viimase kolme võrratuse tõttu on tühi (joon. 19). Seega  $a(t)a(s)\varphi(x+y, t+s) \equiv 0$  ja  $\langle g \cdot h, \varphi \rangle = 0$ .

Lemma 1 on tõestatud.

Niisiis, konvolutsioonide

$$V(x,t) = \xi(x,t) \cdot f(x,t), \quad v^{(0)}(x,t) = \xi(x,t) \cdot [u_0(x) \cdot \delta(t)]$$

eksisteerimise korral on üldistatud Cauchy ülesandel olemas lahend  $u = V + v^{(0)}$ . Distributsioone  $V$  ja  $v^{(0)}$  nimetatakse soojuspotentsiaalideks. Soojuspotentsiaal  $V$  on tekitatud kehas olevate soojusallikate poolt (soojusallikate tiheduseks on  $f(x,t)$ ); soojuspotentsiaal  $v^{(0)}$  on tekitatud küll algväärtuste  $u_0(x)$  poolt, kuid nende mõju on samasugune, nagu soojusallikatel "tihedusega"  $u_0(x) \cdot \delta(t)$ .

Soojuspotentsiaalid  $V$  ja  $v^{(0)}$  eksisteerivad näiteks, kui  $f(x,t)$  ja  $u_0(x)$  on finiitsed. Järgmistes punktides anname veel mõned olulised piisavad tingimused soojuspotentsiaalide eksisteerimiseks.

5. Soojuspotentsiaal  $V$ . Tähistame sümbeliga  $M$  järgmiste omadustega mõõtuvate funktsioonide  $f(x,t)$  hulga:  $t < 0$  korral  $f(x,t) = 0$ ; igas ribas  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 \leq t \leq T$  on  $f(x,t)$  tõkestatud.

Teoreem 1. Kui  $f \in M$ , siis soojuspotentsiaal  $V = \xi \cdot f$  eksisteerib,  $V \in M$  ning avaldub kujul

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-\xi\|^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{f(\xi, \tau)}{[2a\sqrt{t-\tau}]^n} d\xi d\tau \quad (t > 0). \quad (16)$$

Kehtib võrratus

$$|V(x, t)| \leq t \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \tau \leq t} |f(\xi, \tau)| \quad (t > 0). \quad (17)$$

Tõestus. Funktsioonid  $\xi(x, t)$  ja  $f(x, t)$  on lokaalselt integreeruvad. Veendume, et funktsioon

$$h(x, t) \doteq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(x-\xi, t-\tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi d\tau$$

kuulub klassi  $M$  ning on seega samuti lokaalselt integreeruv. Tõepoolest,  $\tau < 0$  korral  $f(\xi, \tau) = 0$ ;  $t - \tau < 0$  korral  $\xi(x - \xi, t - \tau) = 0$ . Siit on lihtne näha, et  $t \leq 0$  korral  $h(x, t) = 0$ ,  $t > 0$  korral aga

$$\begin{aligned} h(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\xi(x-\xi, t-\tau)| |f(\xi, \tau)| d\xi d\tau \leq \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \tau \leq t} |f(\xi, \tau)| \cdot \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x-\xi, t-\tau) d\xi d\tau = \\ &= t \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \tau \leq t} |f(\xi, \tau)|. \end{aligned} \quad (18)$$

Sellest võrratusest saamegi, et  $h \in M$ .

Funktsiooni  $h(x, t)$  lokaalsest integreeruvusest järeldub (vt. § 6.3), et funktsioonide  $\xi$  ja  $f$  konvolutsioon

$$\begin{aligned} (\xi * f)(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \xi(x-\xi, t-\tau) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \end{aligned}$$

eksisteerib ja on lokaalselt integreeruv funktsioon. Asenda-

des siin  $\xi(x, t)$  tema avaldisega (1), saame valemi (16).

Kuna  $h \in M$  ja

$$|V(x, t)| = |(\xi \circ f)(x, t)| \leq h(x, t),$$

siis ka  $V \in M$ . Võrratus (17) järeldub viimasest võrratusest ja võrratusest (18).

Teoreem on tõestatud.

Potentsiaali  $V = \xi \circ f = f \circ \xi$  võib kirja panna ka valemiga (16) samaväärsel kujul

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(x-\xi, t-\tau) \frac{1}{[2a\sqrt{\tau}]^n} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a^2\tau}} d\xi d\tau \quad (t > 0). \quad (16')$$

Ülesanne 1. Näidata, et  $V(x, t)$  on pidev igas punktis  $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , kui  $f \in M$  on pidev  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  korral<sup>\*)</sup>.

Ülesanne 2. Näidata, et funktsioonil  $V(x, t)$  on olemas pidevad osatuletised ruumimuutujate  $x$  suhtes, kui funktsioonil  $f \in M$  on olemas vastavad pidevad osatuletised  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  korral ning need osatuletised on tõkestatud igas ribas  $0 \leq t \leq T$ .

Esitame veel ühe ülesande formuleeringu; lahendamisele soovitame asuda pärast järgmise punkti materjaliga tutvumist.

Ülesanne 3. Näidata, et funktsioonil  $V(x, t)$  on piirkonnas  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$  olemas pidev osatuleti  $\partial V / \partial t$ , kui

---

<sup>\*)</sup> Peetakse silmas  $f(x, t)$  pidevust  $t > 0$  korral, kui  $f(x, 0)$  on defineeritud parempoolse piirväärtusena  $t \rightarrow +0$  korral; vasakpoolseks piirväärtuseks on 0 (vt. funktsioonide hulga  $M$  definitsiooni) ning  $t = 0$  korral võib funktsioonil  $f(x, t)$  olla üldiselt lõplik hüpe.

Samasugune täpsustus tuleb teha ülesannete 2 ja 3 formuleeringus.

funktsioonil  $f \in M$  on selles piirkonnas olemas pidev osatuletis  $\partial f / \partial t$ , mis on tõkestatud igas ribas  $0 \leq t \leq T$ .

### 6. Soojuspotsiaali $v^{(0)}$ .

**Teoreem 2.** Kui  $u_0(x)$  on tõkestatud funktsioon ruumil  $R^n$ , siis soojuspotsiaal  $v^{(0)} = \xi \cdot [u_0(x) \cdot \delta(t)]$  eksisteerib, kuulub funktsioonide hulka  $M$  ning on tõkestatud ruumil  $R^n$ :

$$\sup_{x,t} |v^{(0)}(x,t)| \leq \sup_x |u_0(x)|. \quad (19)$$

Piirkonnas  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  on  $v^{(0)}(x,t)$  lõpmata diferentseeruv ja esitatav nn. Poissoni integraalina

$$v^{(0)}(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{R^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}} u_0(\xi) d\xi \quad (t > 0). \quad (20)$$

Kui funktsioon  $u_0(x)$  on pidev ja tõkestatud ruumil  $R^n$ , siis

$$t \rightarrow +0 \text{ korral } v^{(0)}(x,t) \rightarrow u_0(x). \quad (21)$$

**Tõestus.** Funktsioon  $f_0(x,t) = u_0(x) \cdot \theta(t)$  on tõkestatud ruumis  $R^{n+1}$  ja võrdne nulliga  $t < 0$  korral, mistõttu  $f_0 \in M$ . Teoreemi 1 põhjal eksisteerib konvolutsioon  $\xi \cdot f_0 \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$ . Kuna

$\frac{\partial}{\partial t} (\xi \cdot f_0) = \xi \cdot \frac{\partial}{\partial t} f_0 = \xi \cdot [u_0(x) \cdot \theta'(t)] = \xi \cdot [u_0(x) \cdot \delta(t)]$ ,  
siis eksisteerib ka konvolutsioon  $v^{(0)} = \xi \cdot [u_0(x) \cdot \delta(t)] \in \mathcal{D}'(R^{n+1})$  ning

$$v^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} (\xi \cdot f_0).$$

Funktsioon  $\xi \cdot f_0 = \xi \cdot u_0(x) \theta(t) \in M$  avaldub valemi (16') kohaselt kujul

$$(\varepsilon \cdot f_0)(x, t) = \begin{cases} \int_0^t \int_{R^n} u_0(x-\xi) \frac{1}{(2a\sqrt{\tau})^n} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a^2\tau}} d\xi d\tau, & \text{kui } t > 0, \\ 0, & \text{kui } t < 0, \end{cases}$$

millest näeme, et ta on pidevalt diferentseeruv  $t$  järgi  $t > 0$  ning  $t < 0$  korral. Kuna selle funktsiooni ühepoolsed piirväärtused  $t \rightarrow +0$  ja  $t \rightarrow -0$  korral langevad kokku (võrduvad nulliga; vt. (17)), siis üldistatud tuletis  $\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \cdot f_0)$  on lokaalselt integreeruv ning langeb kokku klassikalise tuletisega:

$$v^{(0)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \cdot f_0)(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2a\sqrt{t})^n} \int_{R^n} u_0(x-\xi) e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a^2t}} d\xi, & \text{kui } t > 0 \\ 0, & \text{kui } t < 0. \end{cases} \quad (20')$$

Teades, et funktsioon  $v^{(0)}(x, t)$  on lokaalselt integreeruv, võib tema puuduolevaid väärtusi  $t = 0$  korral defineerida suvaliselt, näiteks kasutades ühepoolseid piirväärtusi  $t \rightarrow \pm 0$  korral, kui viimased eksisteerivad. Muide, mainitud ühepoolsed piirväärtused on üldiselt erinevad - see järeldub koondumisest (21), mille peagi tõestame. Oletame, et  $v^{(0)}(x, 0)$  on mingil viisil defineeritud,  $|v^{(0)}(x, 0)| \leq |u_0(x)|$ .

Võrduse (20') põhjal iga  $x \in R^n$ ,  $-\infty < t < \infty$  korral

$$|v^{(0)}(x, t)| \leq \sup_{x \in R^n} |u_0(x)| \cdot \frac{1}{(2a\sqrt{t})^n} \int_{R^n} e^{-\frac{\|\xi\|^2}{4a^2t}} d\xi = \quad (3)$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u_0(x)|,$$

millega on tõestatud funktsiooni  $v^{(0)}(x, t)$  tõkestatus ja võrratus (19). Siit järeldame ka, et  $v^{(0)} \in M$ .

Valemi (20) saame valemist (20') muutujate vahetuse teel. Muide, kasutades funktsioonide konvolutsiooni muutuja  $x$  suhtes, võime iga  $t > 0$  korral kirjutada valemi (20) kujul  $v^{(0)} = \xi * u_0$ , valemi (20') aga kujul  $v^{(0)} = u_0 * \xi$ , ning valemite (20) ja (20') samaväärsus järeldub konvolutsiooni kommutatiivsusest.

Valemile (20) toetudes on lihtne näidata, et  $t > 0$  korral on funktsioonil  $v^{(0)}(x, t)$  olemas ja pidevad kõikvõimalikud tuletised  $x$  ja  $t$  järgi. Jätame tõestuse üksikasjad lugeja hooleks.

Jääb veel näidata, et pideva ja tõkestatud funktsiooni  $u_0(x)$  korral leiab aset koondumine (21). Piirprotsessis  $t \rightarrow +0$

$$v^{(0)}(x, t) \underset{(1), (20')}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(x-\xi) \xi(\xi, t) d\xi \underset{(4')}{\rightarrow} u_0(x-\xi) \Big|_{\xi=0} = u_0(x),$$

m.o.t.t. Meenutame siinjuures, et koondumiseks (4') piisas vastava funktsiooni  $\varphi$  (antud juhul  $u_0$ ) pidevusest ja tõkestatusest.

Teoreem 2 on tõestatud.

Märkus. Teoreemi väidet (21) võib mõnevõrra tugevdada:

$$x_n \rightarrow x, t \rightarrow +0 \text{ korral } v^{(0)}(x_n, t) \rightarrow u_0(x). (21')$$

Seega, defineerides  $v^{(0)}(x, 0) = u_0(x)$ , saab  $v^{(0)}$  pidevaks kinnises piirkonnas  $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ .

Ülesanne 4. Olgu  $u_0(x)$  tõkestatud ruumis  $\mathbb{R}^n$  ning pi-

dev punktis  $x' \in R^n$  (ülejääänud punktides võib ta olla katkev). Näidata, et  $t \rightarrow +0$  korral  $v^{(0)}(x', t) \rightarrow u_0(x')$ .

7. Üldistatud Cauchy ülesande seade korrektsus. Resümeeerime nüüd punktides 4 - 6 saadud tulemused.

Teoreem 3. Kui  $f \in M$  ja  $u_0(x)$  on tõkestatud funktsioon ruumis  $R^n$ , siis üldistatud Cauchy ülesandel (13) on funktsioonide klassis  $M$  olemas parajasti üks lahend ning see avaldub kujul

$$u(x, t) = v^{(0)}(x, t) + V(x, t),$$

kus  $V$  ja  $v^{(0)}$  on valemitega (16) ja (20) avalduvad funktsioonid (soojuspotentsiaalid). Lahend sõltub ülesande lähteandmetest pidevalt järgmises mõttes: kui

$$|f(x, t) - \bar{f}(x, t)| < \varepsilon, \quad |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| < \varepsilon_0 \quad (x \in R^n, 0 \leq t < \infty),$$

siis vastavad lahendid  $u$  ja  $\bar{u}$  rahuldavad igas ribas  $x \in R^n, 0 \leq t \leq T$  võrratust

$$|u(x, t) - \bar{u}(x, t)| \leq T\varepsilon + \varepsilon_0. \quad (22)$$

Kui  $u_0(x)$  on pidev ja tõkestatud ruumis  $R^n$ , siis

$$t \rightarrow +0 \text{ korral } u(x, t) \rightarrow u_0(x). \quad (23)$$

**T ö e s t u s.** Teoreemide 1 ja 2 kohaselt eksisteerivad soojuspotentsiaalid  $V = \xi * f$  ja  $v^{(0)} = \xi * [u_0(x) \cdot d(t)]$ , need kuuluvad funktsioonide klassi  $M$  ja avalduvad valemitega (16) ja (20). Seega üldistatud Cauchy lahend  $u = v^{(0)} + V$  eksisteerib klassis  $M$ . Veendume, et see lahend on ainus klassis  $M$ . Tõepoolest, kui  $u_1, u_2 \in M$  on lahendid, siis teoreemi 1 põhjal eksisteerivad konvolutsioonid  $\xi * u_1$ ,

$\xi \cdot u_2$  ning § 9 teoreemi 2 põhjal  $u_1 = u_2$ .

Võrratus (22) järeldub võrratustest (17) ja (19), mida rakendame funktsioonidele  $f - \bar{f}$  ja  $u_0 - \bar{u}_0$  vastavatele soojuspotentsiaalidele.

Koondumine (23) järeldub koondumisest (21) ja võrratusest (17), mille kohaselt  $V(x, t) \rightarrow 0$ , kui  $t \rightarrow +\infty$ .

Teoreem 3 on tõestatud.

### 8. Klassikalise Cauchy ülesande seade korrektsusest.

Vaatleme klassikalist Cauchy ülesannet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (24)$$

ja temale vastavat üldistatud Cauchy ülesannet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta(t), \quad (25)$$

kus  $f(x, t)$  on piirkonda  $x \in R^n$ ,  $t < 0$  jätkatud nullväärtustega. Belmises punktis tõestasime teoreemi üldistatud Cauchy ülesande korrektsusest. Teatud lisaeldustel osutub üldistatud Cauchy ülesande lahend ka klassikalise Cauchy ülesande lahendiks. Need lisaeldused peavad garanteerima lahendi sellise sileduse, et see võiks pretendeerida klassikaliseks lahendiks.

a) Olgu  $f(x, t) \equiv 0$  ning olgu  $u_0(x)$  pidev ja tõkestatud ruumis  $R^n$ . Üldistatud Cauchy ülesande (25) lahendiks on sel juhul  $v^{(0)}(x, t)$ . Teoreemi 2 kohaselt on  $v^{(0)}(x, t)$  lõpmata diferentseeruv  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  korral ning pidev  $x \in R^n$ ,  $t \geq 0$  korral, kusjuures

$$v^{(0)}(x, 0) = \lim_{t \rightarrow +0} v^{(0)}(x, t) = u_0(x);$$

§ 9 teoreemi 1 põhjal on  $v^{(0)}(x, t)$  võrrandi  $u_t = a^2 \Delta u$

klassikaliseks lahendiks piirkonnas  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  (paneme tähele, et mainitud piirkonnas  $u_0(x) \cdot f(t) = 0$ ; tuletame ka meelde, et me käsitleme juhtu, kui  $f(x, t) \equiv 0$ ). Seega  $u = v^{(0)}(x, t)$  osutus klassikalise Cauchy ülesande

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

lahendiks.

b) Olgu  $u_0(x) \equiv 0$  ning olgu funktsioonil  $f(x, t)$  piirkonnas  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  olemas pidevad osatuletised  $\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ , kusjuures  $f$  ise ning tema mainitud tuletised kuulugu klassi  $M$  (pärast nullväärtustega jätkamist piirkonda  $t < 0$ ). Üldistatud Cauchy ülesande (25) lahendiks on antud juhul  $V(x, t)$ . Tehtud eeldustel on  $V(x, t)$  kinnises piirkonnas  $x \in R^n$ ,  $t \geq 0$  pidev,  $V(x, 0) = 0$ , lahlikes piirkonnas  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  aga eksisteerivad ja on pidevad osatuletised  $\frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 V}{\partial x_n^2}$  (vt. teoreemi 1 ja ülesandeid 1 - 3). Siit teeme järelduse, et funktsioon  $u = V(x, t)$  on lahendiks klassikalisele Cauchy ülesandele

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad u(x, 0) = 0.$$

c) Vaatleme nüüd üldjuhtu, kui  $f(x, t)$  ja  $u_0(x)$  võivad mõlemad erineda nullist ja rahuldavad eespool püstitatud sileduse nõudeid. Siis funktsioon  $u = v^{(0)} + V \in M$  on klassikalise Cauchy ülesande (24) (klassikaliseks) lahendiks. See järeldub alajuhtudes a) ja b) saadud tulemustest.

Veendume, et ei leidu kahte klassikalist lahendit  $u_1, u_2 \in M$ . Tõepoolest, pärast nullväärtustega jätkamist piirkonda  $t < 0$  osutuvad klassikalised lahendid üldistatud

Cauchy ülesande lahenditeks (vt. punkt 3) ning teoreemi 3 põhjal  $u_1 = u_2$ .

Klassikaline lahend sõltub pidevalt lähteandmetest samal viisil nagu üldistatud Cauchy lahend, mis on kirjeldatud teoreemis 3.

Kokkuvõttes võime öelda, et klassikaline Cauchy ülesanne (24) soojusjuhtivuse võrrandi jaoks on seatud korrektselt.

Märgime matemaatiliselt põhjendamata, et Cauchy ülesanne soojusjuhtivuse võrrandi jaoks ei osutu korrektseks negatiivse aja summas. Piirdume juhuga, kui kehas puuduvad soojusallikad:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2 \Delta u \quad (x \in R^n, -T < \tau < 0), \quad u(x, 0) = u_0(x). \quad (26)$$

Sellise ülesande mittekorrektus on füüsikaliselt üsna ilmne. Tõepoolest, me võime konstrueerida sellise soojusjaotuse kehas etteantud ajamomendiks  $\tau < 0$ , mille korral keha lähedaste osade temperatuurid on küll tugevasti erinevad, kuid kompenseerivad üksteist kiiresti, nii et ajamomendiks  $\tau = 0$  on temperatuuride kõikumised kehas juba kuitahes väikesed. See näitab, et lahendi sõltuvus ülesande (26) lähteandmetest  $u_0(x)$  ei saa olla pidev: väikestele muutustele funktsioonis  $u_0(x)$  võivad vastata kuitahes suured muutused lahendis  $u(x, \tau)$ .

Ülesande (24) korrektsus ja ülesande (26) mittekorrektus on seotud soojusprotsesside mittepööratavusega: soojus levib kõrgema temperatuuriga osadelt madalama temperatuuriga osadele, aja kulgedes toimub temperatuuride ühtlustumine.

Teades temperatuuride jaotust  $u_0(x)$  algmomendil  $t = 0$ , on lihtne prognoosida keha temperatuuride jaotust mistahes ajamomendil  $t > 0$  (korrektselt seatud ülesande (24) lahendamise teel) ning väga raske leida, milline oli temperatuuride jaotus mingil ajamomendil  $\tau < 0$  - see nõuab mittekorrekttselt seatud ülesande (26) lahendamist.

§ 11. Cauchy ülesanne laine-  
võrrandi jaoks

1. Üleminek Cauchy ülesandelt üldistatud Cauchy üles-  
andele. Vaatleme Cauchy ülesannet lainevõrrandi jaoks:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u + f(x, t), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \end{aligned} \right\} (1)$$

Oletame, et vabaliige  $f(x, t)$  ja algväärtused  $u_0(x)$  ja  $u_1(x)$  on pidevad  $x \in R^n$ ,  $t \geq 0$  korral ning et ülesandel on olemas klassikaline lahend  $u(x, t)$ , s.t.  $u(x, t)$  ja  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$  on pidevad kinnises piirkonnas  $x \in R^n$ ,  $t \geq 0$  ja rahuldavad algtingimusi, lahtises piirkonnas  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  aga eksisteerivad ja on pidevad ka võrrandis esinevad teist järku osatuletised ning võrrand on selles piirkonnas rahuldatud. Jätkame funktsioone  $u(x, t)$  ja  $f(x, t)$  nullväärtustega piirkonda  $x \in R^n$ ,  $t < 0$ :

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & \text{kui } t \geq 0 \\ 0, & \text{kui } t < 0 \end{cases}, \quad \tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & \text{kui } t \geq 0 \\ 0, & \text{kui } t < 0. \end{cases}$$

Vaatleme funktsiooni  $\tilde{u}(x, t)$  distributsioonina. Tema üldistatud tuletised avalduvad kujul (vt. § 10.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} &= \tilde{u}_{x_i x_i} \quad (i=1, \dots, n), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= \tilde{u}_t + u_0(x) \cdot \delta(t), \end{aligned}$$

kus  $\tilde{u}_t, \tilde{u}_{x_i x_i}$  on klassikalised tuletised. Viimast valemit veelkord diferentseerides leiame üldistatud tuletise

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \tilde{u}_{tt} + u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t).$$

Nendest üldistatud tuletiste avaldistest järeldame, et distributsioon  $\tilde{u}$  rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = a^2 \Delta \tilde{u} + \tilde{f}(x, t) + u_1(x) \cdot \delta(t) + u_0(x) \cdot \delta'(t). \quad (1')$$

Põhjenduse üksikasjad jäävad lugeja hooleks (võrdle § 10.3).

Üldistatud Cauchy ülesandeks lainevõrrandi jaoks nimetame järgmist ülesannet: leida distributsioon  $\tilde{u}(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , mis on võrdne nulliga  $t < 0$  korral ja rahuldab võrrandit (1');  $u_0(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_1(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $\tilde{f}(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  on etteantud distributsioonid, kusjuures  $\tilde{f}(x, t) = 0$  piirkonnas  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t < 0$ .

2. Üldistatud Cauchy ülesande korrektsus. Vaatleme üldistatud Cauchy ülesannet: leida distributsioon  $u(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ , mis  $t < 0$  korral võrdub nulliga ning mis rahuldab võrrandit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \quad (2)$$

kus  $u_0(x), u_1(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ja  $f(x, t) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  on etteantud distributsioonid,  $t < 0$  korral  $f(x, t) = 0$ .

Olgu  $\xi(x, t)$  laineoperaatori  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta$  fundamentaalalahend. Tema kuju (vt. § 9.5) sõltub oluliselt dimensioonist  $n$ :

$$\xi(x, t) = \xi_n(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \theta(at - |x|), & \text{kui } n = 1, \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\theta(at - \|x\|)}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x\|^2}}, & \text{kui } n = 2, \\ \frac{\theta(t)}{4\pi a^2 t} \delta_{S_{at}}(x), & \text{kui } n = 3. \end{cases} \quad (3)$$

Funktsioonid  $\varepsilon_1(x,t)$  ja  $\varepsilon_2(x,t)$  on lokaalselt integreeruvad; distributsioon  $\varepsilon_3(x,t)$  on singulaarne ja toimib põhifunktsioonidele  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  järgmiselt:

$$\langle \varepsilon_3, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x,t) dS dt \quad (4)$$

ehk

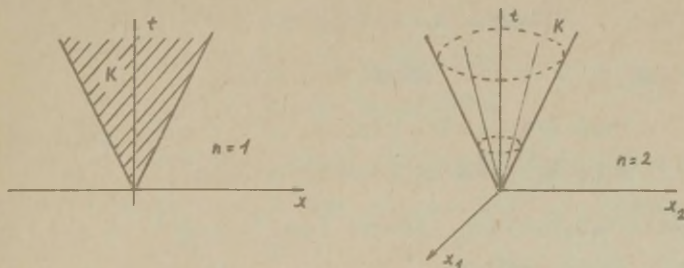
$$\langle \varepsilon_3, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, \frac{\|x\|}{a})}{\|x\|} dx. \quad (4')$$

Valemite (4) ja (4') samaväärsus järeldub järgmistest võrdustest:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{t} \int_{S_{at}} \varphi(x,t) dS dt &= \int_{at=r}^\infty \frac{1}{r} \int_{S_r} \varphi(x, \frac{r}{a}) dS_r dr = \\ &= \int_0^\infty \int_{S_r} \frac{\varphi(x, \frac{\|x\|}{a})}{\|x\|} dS_r dr = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x, \frac{\|x\|}{a})}{\|x\|} dx. \end{aligned}$$

Valemitest (3) ja (4) loeme välja, et distributsiooni  $\varepsilon(x,t)$  kandja sisaldub koonuses<sup>\*</sup>)

$$K = \{(x,t) : t \geq 0, \|x\| \leq at\},$$



Joon. 20.

<sup>\*</sup>) See väide on õige suvalise n korral (mitte ainult  $n=1,2,3$  korral).

kusjuures  $n = 1, 2$  korral on kandjaks kogu koonus,  $n = 3$  korral aga vaid koonuse rajapind. Joonisel 20 on kujutatud koonust  $K$   $n=1$  ja  $n=2$  korral.

Teoreem 1. Üldistatud Cauchy ülesanne (2) on üheselt lahenduv ning lahendiks on

$$u = \xi * [f + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}) \quad (5)$$

(konvolutsioon eksisteerib). Lahend sõltub pidevalt ülesande lähteandmetest: kui piirkonnas  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t < 0$  on  $f_k(x, t) = 0$  ning  $k \rightarrow \infty$  korral

$$f_k(x, t) \rightarrow f(x, t) \text{ ruumis } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}),$$

$$u_{0k}(x) \rightarrow u_0(x), \quad u_{1k} \rightarrow u_1(x) \text{ ruumis } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),$$

siis leiab aset ka vastavate lahendite koondumine

$$u_k(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ ruumis } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}).$$

**T ö e s t u s.** Tähistame  $h = f + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t)$ . Näitame, et konvolutsioon  $\xi * h$  eksisteerib. Vastavalt § 6 teoreemile 1 piisab näidata, et hulk

$$B_c = \{(x, t, y, s) \in \mathbb{R}^{2n+2} : \sqrt{\|x+y\|^2 + |t+s|^2} \leq c\} \cap \{\text{supp } \xi(x, t) \times \text{supp } h(y, s)\}$$

on iga  $c > 0$  korral tõkestatud. Kuna

$$\text{supp } \xi(x, t) \subset K = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \geq 0, \|x\| \leq at\},$$

$$\text{supp } h(y, s) \subset \{(y, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \geq 0\},$$

siis  $(x, t, y, s) \in B_c$  korral  $\|x+y\|^2 + |t+s|^2 \leq c^2$ ,  $\|x\| \leq at$ ,  $t \geq 0$ ,  $s \geq 0$ , millest

$$\|x+y\| \leq c, \quad t+s \leq c, \quad t \leq c, \quad s \leq c,$$

$$\|x\| \leq at \leq ac, \quad \|y\| \leq \|x+y\| + \|x\| \leq (a+1)c.$$

Seega  $(x, y, t, s) \in B_c$  korral

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 + t^2 + s^2 \leq a^2 c^2 + (a+1)^2 c^2 + c^2 + c^2$$

ning hulk  $B_c$  on tõkestatud, m.o.t.t.

Niisiis konvolutsioon  $u = \xi * h$  eksisteerib; § 9 teoreemi 2 põhjal on ta võrrandi (2) lahendiks, § 10 lemma 1 põhjal aga  $\xi * h = 0$  piirkonnas  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t < 0$ , s.t.  $\xi * h$  on üldistatud Cauchy ülesande lahendiks. Üldistatud Cauchy ülesande lahend on ühene: kui  $u$  ja  $v$  on lahendid, siis  $t < 0$  korral  $u(x, t) = 0$ ,  $v(x, t) = 0$  (lahendi definitsiooni kohaselt), järelikult eksisteerivad konvolutsioonid  $\xi * u$  ja  $\xi * v$  ning § 1 teoreemi 2 põhjal  $u = v$ . Lahendi pidev sõltuvus lähteandmetest (teoreemis mainitud mõttes) järeldub koondumisest

$$\begin{aligned} f_k(x, t) + u_{0k}(x) \cdot \delta'(t) + u_{1k}(x) \cdot \delta(t) &\rightarrow \\ \rightarrow f(x, t) + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t) \end{aligned}$$

ruumis  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$  ning konvolutsiooni pidevusest.

Teoreem on tõestatud.

Konvolutsioone

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \xi(x, t) * f(x, t), \\ v^{(0)}(x, t) &= \xi(x, t) \cdot [u_0(x) \cdot \delta'(t)], \\ v^{(1)}(x, t) &= \xi(x, t) \cdot [u_1(x) \cdot \delta(t)] \end{aligned}$$

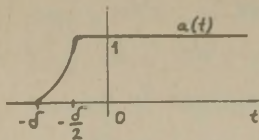
nimetatakse (hilinevateks) potentsiaalideks. Vastavalt § 6 teoreemile 1 avaldub  $\langle \xi * f, \varphi \rangle$  iga  $\varphi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  korral kujul

$$\langle \xi * f, \varphi \rangle = \langle \xi(x, t) \cdot f(y, s), \alpha(t) \alpha(a^2 t^2 - \|x\|^2) \alpha(s) \varphi(x+y, t+s) \rangle, \quad (6)$$

kus  $\alpha \in C^\infty$  on mingi lõpmatult diferentseeruv funktsioon

(vt. joon. 21), selline et  $t \leq -\delta$  korral  $\alpha(t) = 0$ ,  $t \geq -\frac{\delta}{2}$

korral  $\alpha(t) \equiv 1$ ,  $\sigma$  on mingi (kui tahes väike) positiivne arv. Tõepoolest, funktsioonid  $a(x,t) = \alpha(t)\alpha(a^2t^2 - \|x\|^2)$  ja  $b(y,s) = \alpha(s)$  rahuldavad vajalikke nõudeid:



Joon. 21.

- 1)  $a(x,t) = 1$  hulga  $\text{supp } \varepsilon(x,t)$  ümbruses ja  $b(y,s) = 1$  hulga  $\text{supp } f(y,s)$  ümbruses; 2) hulk  $\{(x,y,t,s) \in \mathbb{R}^{2n+2} : \sqrt{\|x+y\|^2 + \|t+s\|^2} \leq c\} \cap \{\text{supp } a(x,t) \times \text{supp } b(y,s)\}$  on tõkestatud iga  $c > 0$  korral. Viimase nõude kontroll

on analoogiline hulga  $B_c$  tõkestatuse näitamisega teoreemi 1 tõestuses.

3. Potentsiaal V. Olgu  $f(x,t)$  lokaalselt integreeruv,  $f(x,t) = 0$  piirkonnas  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t < 0$ . Leiame valemi potentsiaali  $V = \xi * f$  jaoks. Kuna fundamentaallahendi  $\xi = \xi_n$  kuju sõltub oluliselt dimensioonist  $n$ , tuleb juhte  $n = 1, 2, 3$  käsitleda eraldi. Peatume üksikasjaliselt juhul  $n = 3$ . Iga  $\varphi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^4)$  korral

$$\langle \xi_3 * f, \varphi \rangle = \langle f(y,s), \langle \xi_3(x,t), \alpha(t)\alpha(a^2t^2 - \|x\|^2)\alpha(s)\varphi(x+y, t+s) \rangle \rangle =$$

$$(4') \quad \frac{1}{4\pi a^2} \langle f(y,s), \alpha(s) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x+y, s + \frac{\|x\|}{a})}{\|x\|} dx \rangle =$$

$$= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(y,s) \frac{\varphi(x+y, s + \frac{\|x\|}{a})}{\|x\|} dx dy ds;$$

me võtsime arvesse, et  $\alpha(\frac{\|x\|}{a}) = 1$ ,  $\alpha(a^2(\frac{\|x\|}{a})^2 - \|x\|^2) = \alpha(0) = 1$  ja  $\alpha(s)f(y,s) = f(y,s)$ . Läheme muutujatelt  $x, y, s$

üle uutele muutujatele  $x' = x + y$ ,  $y' = x$ ,  $s' = s + \frac{\|x\|}{a} = s + \frac{\|y'\|}{a}$  :

$$\langle \varepsilon_3 * f, \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f(x'-y', s' - \frac{\|y'\|}{a}) \frac{\varphi(x', s')}{\|y'\|} dx' dy' ds'.$$

Integreerimismuutujate ümbertähistamise teel ( $x' \mapsto x$ ,  $y' \mapsto y$ ,  $s' \mapsto t$ ) kirjutame viimase võrduse ümber kujul

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_3 * f, \varphi \rangle &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x-y, t - \frac{\|y\|}{a})}{\|y\|} \varphi(x, t) dx dy dt = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \left\langle \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x-y, t - \frac{\|y\|}{a})}{\|y\|} dy, \varphi(x, t) \right\rangle = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \left\langle \int_{\|y\| < at} \frac{f(x-y, t - \frac{\|y\|}{a})}{\|y\|} dy, \varphi(x, t) \right\rangle \end{aligned}$$

( $\|y\| > at$  korral  $f(\xi, t - \frac{\|y\|}{a}) = 0$ , sest teine argument saab negatiivseks). Niisiis on  $v_3 = \varepsilon_3 * f$  regulaarne distributsioon,

$$v_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U_{at}} \frac{f(x-y, t - \frac{\|y\|}{a})}{\|y\|} dy \quad (t > 0), \quad (7)$$

kus  $U_r = U(0, r)$ ,

$$U(x, r) = U_3(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y-x\| < r\}$$

on kera keskpunktiga  $x$  ja raadiusega  $r$ .

Muutujate vahetusega  $\xi = x - y$  teiseneb valem (7) kujule

$$v_3(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x, at)} \frac{f(\xi, t - \frac{\|x-\xi\|}{a})}{\|x-\xi\|} d\xi \quad (t > 0); \quad (7')$$

muutujate vahetusega  $y = atz$  ( $dy = a^3 t^3 dz$ ) teiseneb (7)

kujule

$$v_3(x, t) = \frac{t^2}{4\pi} \int_{U_1} \frac{f(x-atz, t(1-\|z\|))}{\|z\|} dz \quad (t > 0). \quad (7'')$$

**Teoreem 2.** 1) Kui funktsioon  $f(x, t)$  on lokaalselt integreeruv ning  $t < 0$  korral  $f(x, t) = 0$ , siis samad omadused on ka konvolutsioonil  $v_3 = \xi_3 \cdot f$  (ning tema arvutamiseks võib kasutada näiteks valemit (7')). Kehtib võrratus

$$|v_3(x, t)| \leq \frac{t^2}{2} \sup_{(\xi, \tau) \in B(x, t)} |f(\xi, \tau)| \quad (x \in \mathbb{R}^n, t > 0), \quad (8)$$

kus

$$B(x, t) = B_3(x, t) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^4: 0 \leq \tau \leq t, \|\xi - x\| = a(t - \tau)\}.$$

2) Kui \*)  $f \in C^2(t \geq 0)$ , siis ka  $v_3 \in C^2(t \geq 0)$  ning

$$v_3(x, 0) \doteq \lim_{t \rightarrow +0} v_3(x, t) = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_3(x, 0)}{\partial t} \doteq \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial v_3(x, t)}{\partial t} = 0. \quad (9')$$

**T ö e s t u s.** 1) Teoreemi esimeses osas vajab tõestust vaid võrratus (8). Valemi (7'') kohaselt

$$v_3(x, t) = \frac{t^2}{2} w_3(x, t), \quad (10)$$

kus

$$w_3(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{U_1} \frac{f(x-atz, t(1-\|z\|))}{\|z\|} dz. \quad (11)$$

Paneme tähele, et viimases integraalis toimub integreerimine üle selliste  $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^4$ , mis on esitatavad kujul

---

\*) Hulk  $C^2(t \geq 0)$  koosneb funktsioonidest, mis on pidevad ja kaks korda pidevalt diferentseeruvad lahtises piirkonnas  $x \in \mathbb{R}^n, t > 0$ , kusjuures funktsioon ise ja tema esimest ja teist järku osatuletised on jätkatavad pidevateks funktsioonideks kinnises piirkonnas  $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ .

$$\xi = x - atz, \quad \tau = t(1 - \|z\|) \quad (\|z\| < 1);$$

siit  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $t - \tau = t\|z\|$ ,  $\|\xi - x\| = at\|z\| = a(t - \tau)$ , s.t.

$$(\xi, \tau) \in B(x, t).$$

Seetõttu

$$|W_3(x, t)| \leq \sup_{(\xi, \tau) \in B(x, t)} |f(\xi, \tau)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{U_1} \frac{dz}{\|z\|}.$$

Viimane integraal on lihtsalt arvutatav:

$$\int_{U_1} \frac{dz}{\|z\|} = \int_0^1 \frac{dr}{r} \int_{S_r} dS = \int_0^1 4\pi r^2 \frac{dr}{r} = 2\pi.$$

Seega

$$|W_3(x, t)| \leq \sup_{(\xi, \tau) \in B(x, t)} |f(\xi, \tau)|$$

ning võrratus (8) järeldub võrdusest (10).

2) Väide  $V_3(x, t)$  diferentseeruvuse kohta on ilmne valemist (10). Seosed (9) ja (9') järelduvad võrdustest (10) ja viimase diferentseerimisel saadavast võrdusest

$$\frac{\partial V_3(x, t)}{\partial t} = tW_3(x, t) + \frac{t^2}{2} \frac{\partial W_3(x, t)}{\partial t}.$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreemi 1 kohaselt on  $V_3 = \xi \cdot f$  üldistatud Cauchy ülesande (2) lahendiks erijuhul, kui  $u_0(x) \equiv 0$ ,  $u_1(x) \equiv 0$ . Kui  $f \in C^2(t \geq 0)$ , siis  $V_3$  on ka klassikalise Cauchy ülesande

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0$$

lahendiks. Tõepoolest,  $V_3(x, t)$  on vajalikul määral sile ning võrrandi rahuldamine piirkonnas  $x \in R^n, t > 0$  järeldub § 9 teoreemist 1, algtingimuste rahuldamine aga seostest (9) ja (9').

4. Potentsiaalid  $v^{(0)}$  ja  $v^{(1)}$ . Olgu  $u_0(x)$  ja  $u_1(x)$  pidevad funktsioonid,  $n = 3$ . Tuletame valemid potentsiaalide

$$v_3^{(0)}(x, t) = \epsilon_3(x, t) * [u_0(x) \cdot d'(t)],$$

$$v_3^{(1)}(x, t) = \epsilon_3(x, t) * [u_1(x) \cdot d(t)]$$

arvutamiseks. Kõigepealt paneme tähele, et

$$v_3^{(0)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_3 * f_0), \quad v_3^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_3 * f_1), \quad (12)$$

kus

$$f_0(x, t) = u_0(x) \cdot \theta(t), \quad f_1(x, t) = u_1(x) \cdot \theta(t)$$

on lokaalselt integreeruvad funktsioonid, mis  $t < 0$  korral võrduvad nulliga. Tõepoolest, konvolutsiooni ja tensorsorkorrutise diferentseerimise reegleid kasutades saame

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_3 * f_1) = \epsilon_3 * \frac{\partial f_1}{\partial t} = \epsilon_3 * [u_1(x) \cdot \theta'(t)] = \epsilon_3 * [u_1(x) \cdot d(t)] = v_3^{(1)},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\epsilon_3 * f_0) = \epsilon_3 * \frac{\partial^2 f_0}{\partial t^2} = \epsilon_3 * [u_0(x) \cdot \theta''(t)] = \epsilon_3 * [u_0(x) \cdot d'(t)] = v_3^{(0)},$$

m.o.t.t. Konvolutsioonid  $\epsilon_3 * f_0$  ja  $\epsilon_3 * f_1$  kujutavad endast potentsiaale, mille kohta eelmises punktis tuletasime mitu valemit. Näiteks valemi (7) rakendamisel leiame

$$\epsilon_3 * f_1 = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U_{at}} \frac{u_1(x-y)}{\|y\|} dy \quad (t > 0).$$

Võrduste (12) kohaselt

$$v_3^{(1)} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_3 * f_1) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{U_{at}} \frac{u_1(x-y)}{\|y\|} dy \quad (t > 0).$$

Viimane tuletis eksisteerib ka klassikalises mõttes:  $\Delta t \rightarrow 0$  korral

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{U_{a(t+\Delta t)}} \frac{u_1(x-y)}{\|y\|} dy - \int_{U_{at}} \frac{u_1(x-y)}{\|y\|} dy \right\} = \\ & = a \frac{1}{\Delta t} \int_{at \leq \|y\| \leq a(t+\Delta t)} \frac{u_1(x-y)}{\|y\|} dy \rightarrow a \int_{S_{at}} \frac{u_1(x-y)}{\|y\|} dS_y = \\ & = \frac{1}{t} \int_{S_{at}} u_1(x-y) dS_y = \frac{1}{t} \int_{S(x, at)} u_1(\xi) dS_\xi, \end{aligned}$$

kus

$$S(x, r) = \{ \xi \in R^3 : \|\xi - x\| = r \}$$

on sfäär keskpunktiga  $x$  ja raadiusega  $r$ ,  $S_r = S(0, r)$  ning viimased integraalid on pindintegraalid. Niisiis<sup>\*</sup>)

$$V_3^{(1)}(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} u_1(x-y) dS_y \quad (t > 0) \quad (13)$$

ehk

$$V_3^{(1)}(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_1(\xi) dS_\xi \quad (t > 0); \quad (13')$$

muutujate vahetusega  $y = atz$  ( $dS_y = a^2 t^2 dS_z$ ) võtab valem (13) kuju

$$V_3^{(1)}(x, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} u_1(x-atz) dS_z \quad (t > 0). \quad (13'')$$

Arvestades, et  $V_3^{(0)}$  avaldis (12) sisaldab ühe võrra kõrgemat järku tuletist kui  $V_3^{(1)}$  avaldis, võime analoogiale toetudes välja kirjutada ka järgmised valemid:

---

<sup>\*</sup>) Me leidsime  $V_3^{(1)}$  arvutamisel üldistatud tuletise  $\frac{\partial}{\partial t} (\xi_3 \cdot f_1)$  asemel klassikalise tuletise. See samm on õigustatud, sest mainitud tuletis osutub pidevaks (vt. valemit (13'') allpool või teoreemi 3).

$$v_3^{(0)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S_{at}} u_0(x-y) dS_y \quad (t > 0), \quad (14)$$

$$v_3^{(0)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_0(\xi) dS_\xi \quad (t > 0), \quad (14')$$

$$v_3^{(0)}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{t}{4\pi} \int_{S_1} u_0(x-atz) dS_z \quad (t > 0). \quad (14'')$$

Vilmastes valemities esinev esatuletis  $\frac{\partial}{\partial t}$  eksisteerib ka klassikalises mõttes, kui  $u_0(x)$  on pidevalt diferentseeruv funktsioon. Tõepoolest, valemist (14'') saame

$$v_3^{(0)}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} u_0(x-atz) dS_z - \frac{at}{4\pi} \int_{S_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_0(x-atz)}{\partial x_i} z_i dS_z. \quad (14''')$$

Teoreem 3. 1) Kui  $u_0 \in C^1(R^3)$ ,  $u_1 \in C^0(R^3)$ , siis potentsiaalid  $v_3^{(0)}(x, t)$  ja  $v_3^{(1)}(x, t)$  on pidevad  $x \in R^n, t \geq 0$  korral (nende arvutamiseks võib kasutada näiteks valemid (13') ja (14')). Kehtivad võrratused

$$|v_3^{(0)}(x, t)| \leq \max_{\xi \in S(x, at)} |u_0(\xi)| + at \max_{\xi \in S(x, at)} \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u_0(\xi)}{\partial \xi_i} \right|, \quad (15)$$

$$|v_3^{(1)}(x, t)| \leq t \max_{\xi \in S(x, at)} |u_1(\xi)| \quad (x \in R^n, t \geq 0). \quad (16)$$

2) Kui  $u_0 \in C^3(R^3)$ ,  $u_1 \in C^2(R^3)$ , siis  $v_3^{(0)} \in C^2(t > 0)$ ,  $v_3^{(1)} \in C^2(t > 0)$  ning

$$v_3^{(0)}(x, 0) \doteq \lim_{t \rightarrow +0} v_3^{(0)}(x, t) = u_0(x), \quad (17)$$

$$\frac{\partial v_3^{(0)}(x, 0)}{\partial t} \doteq \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial v_3^{(0)}(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (17')$$

$$v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,0) \doteq \lim_{t \rightarrow +0} v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,t) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,0)}{\partial t} \doteq \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,t)}{\partial t} = u_1(x). \quad (18')$$

T ö e s t u s. 1) Funktsioonide  $v_{\frac{1}{3}}^{(0)}(x,t)$  ja  $v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,t)$  pidevus järeldeb vahetult valemitest (13'') ja (14''') ning funktsioonide  $u_0(x)$ ,  $\partial u_0(x)/\partial x_1$  ja  $u_1(x)$  pidevusest. Võrratus (16) järeldeb valemist (13''):

$$|v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,t)| \leq t \max_{\xi \in S(x,at)} |u_1(\xi)| \cdot \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} dS = t \max_{\xi \in S(x,at)} |u_1(\xi)|.$$

Võrratus (15) järeldeb samal viisil võrratusest (14''').

2) Väide funktsioonide  $v_{\frac{1}{3}}^{(0)}$  ja  $v_{\frac{1}{3}}^{(1)}$  diferentseeruvuse kohta järeldeb vahetult valemitest (13'') ja (14''') ning tingimusest  $u_0 \in C^3$ ,  $u_1 \in C^2$ . Piiril  $t \rightarrow +0$  saame valemist (13'') ja (14''') seosed (17) ja (18):

$$v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,t) \rightarrow 0, \quad v_{\frac{1}{3}}^{(0)}(x,t) \rightarrow \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} u_0(x) dS_z = u_0(x).$$

Valemist (13'') leiame

$$\frac{\partial v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} u_1(x-atz) dS_z - \frac{at}{4\pi} \int_{S_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_1(x-atz)}{\partial x_i} z_i dS_z,$$

millest järeldeb seos (18'):

$$\frac{\partial v_{\frac{1}{3}}^{(1)}(x,t)}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} u_1(x) dS_z = u_1(x), \text{ kui } t \rightarrow +0.$$

Valemist (14''') leiame

$$\frac{\partial v_{\frac{1}{3}}^{(0)}(x,t)}{\partial t} = -\frac{2a}{4\pi} \int_{S_1} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_0(x-atz)}{\partial x_i} z_i dS_z +$$

$$+ \frac{a^2 t}{4\pi} \int_{S_1} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 u_0(x-atz)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j dS_z.$$

Piiril  $t \rightarrow +0$  saame siit seose (17'):

$$\frac{\partial v_3^{(0)}(x,t)}{\partial t} \rightarrow - \frac{2a}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} \underbrace{\int_{S_1} z_i dS_z}_0 = 0.$$

Teoreem on tõestatud.

Teoreemi 1 kohaselt on  $v_3^{(0)}$  üldistatud Cauchy ülesande (2) lahendiks erijuhul, kui  $f(x,t) \equiv 0$ ,  $u_1(x) \equiv 0$ . Kui  $u_0 \in C^3$ , siis on  $v_3^{(0)}$  ka klassikalise Cauchy ülesande

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0$$

lahendiks. Tõepoolest,  $v_3^{(0)}$  on vajalikul määral sile ning võrrandi rahuldamine piirkonnas  $x \in R^n$ ,  $t > 0$  järeldub § 9 teoreemist 1, algtingimuste rahuldamine aga seostest (17) ja (17'). Analoogiliselt saame, et  $u_1 \in C^2$  korral on  $v_3^{(1)}$  klassikalise Cauchy ülesande

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u, \quad u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = u_1(x)$$

lahendiks.

### 5. Klassikalise Cauchy ülesande korrektsus ( $n = 3$ ).

Kirchhoffi valem. Pöördume tagasi klassikalise Cauchy ülesande juurde:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x,t), \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

**Teoreem 4.** Kui  $f \in C^2(t > 0)$ ,  $u_0 \in C^3$ ,  $u_1 \in C^2$ , siis Cauchy ülesandel (19) on olemas parajasti üks lahend  $u(x, t)$  ning see lahend avaldub kujul

$$u = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U(x, at)} \frac{f(\xi, t - \frac{\|x-\xi\|}{a})}{\|x-\xi\|} d\xi + \quad (20)$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_1(\xi) dS + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_0(\xi) dS \quad (t > 0)$$

(Kirchhoffi valem). Lahend sõltub pidevalt ülesande lähteandmetest: kui

$$|f(x, t) - \check{f}(x, t)| < \varepsilon \quad (x \in R^3, t > 0),$$

$$|u_0(x) - \check{u}_0(x)| < \varepsilon_0, \quad \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \check{u}_0(x)}{\partial x_i} \right| < \varepsilon'_0 \quad (x \in R^3),$$

$$|u_1(x) - \check{u}_1(x)| < \varepsilon_1 \quad (x \in R^3),$$

siis vastavad lahendid  $u(x, t)$  ja  $\check{u}(x, t)$  rahuldavad igas ribas  $x \in R^n$ ,  $0 \leq t \leq T$  võrratust

$$|u(x, t) - \check{u}(x, t)| \leq \frac{T^2}{2} \varepsilon + \varepsilon_0 + aT \varepsilon'_0 + T\varepsilon_1. \quad (21)$$

**T ö e s t u s.** Teoreemi 1 kohaselt on üldistatud Cauchy ülesandel (2) olemas parajasti üks lahend

$$u = v + v^{(0)} + v^{(1)} = \xi * f + \xi * [u_0(x) \cdot \delta^1(t)] + \xi * [u_1(x) \cdot \delta(t)].$$

Teoreemide 2 ja 3 kohaselt  $v, v^{(0)}, v^{(1)} \in C^2(t > 0)$  ning nende summa  $u = v + v^{(0)} + v^{(1)}$  rahuldab ülesande (19) algtingimusi

$$u(x, 0) = v(x, 0) + v^{(0)}(x, 0) + v^{(1)}(x, 0) = u_0(x),$$

$$u_t(x, 0) = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} + \frac{\partial v^{(0)}(x, 0)}{\partial t} + \frac{\partial v^{(1)}(x, 0)}{\partial t} = u_1(x)$$

(vt. (9), (9'), (17), (17'), (18), (18')). § 9 teoreemi 1

põhjal rahuldab  $u = v + v^{(0)} + v^{(1)}$  piirkonnas  $x \in R^3$ ,  $t > 0$  võrrandit (2) ka klassikalises mõttes, s.t.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \equiv a^2 \Delta u + f(x, t) \quad (t > 0)$$

(piirkonnas  $t > 0$  on  $\delta(t) = 0$ ,  $\delta'(t) = 0$ ). Sellega oleme näidanud, et klassikalisel Cauchy ülesandel (19) on olemas lahend  $u = v + v^{(0)} + v^{(1)}$ ; see lahend on ainus, sest igale klassikalise Cauchy ülesande lahendile  $u$  vastab üldistatud Cauchy ülesande lahend (mille saame  $u$  jätkamisel nullväärtustega piirkonda  $t < 0$ , vt. punkt 1), viimane aga on teoreemi 1 kohaselt ainus. Lahendi  $u = v + v^{(0)} + v^{(1)}$  esitus kujul (20) järeldub valemitest (7'), (13'), (14').

Võrratuse (21) tuletamiseks paneme tähele, et

$$u - \tilde{u} = (v - \tilde{v}) + (v^{(0)} - \tilde{v}^{(0)}) + (v^{(1)} - \tilde{v}^{(1)}),$$

kus

$$v - \tilde{v} = \varepsilon \cdot (f - \tilde{f}),$$

$$v^{(0)} - \tilde{v}^{(0)} = \varepsilon \cdot \{ [u_0(x) - \tilde{u}_0(x)] \cdot \delta'(t) \},$$

$$v^{(1)} - \tilde{v}^{(1)} = \varepsilon \cdot \{ [u_1(x) - \tilde{u}_1(x)] \cdot \delta(t) \}.$$

Rakendades viimastele potentsiaalidele võrratusi (8), (15) ja (16), jõuamegi võrratuseni (21).

Teoreem on tõestatud.

Kirchhoffi valem (20) kehtib ka märksa üldisematel eeldustel kui teoreemi 4 eeldused. Näiteks  $f \in C(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in C$ ,  $u_1 \in C^1$  korral valem (20) kehtib ja esitab pidevat funktsiooni. See funktsioon on (pärast nullväärtustega jätkamist) üldistatud Cauchy ülesande lahendiks ning teda on loomulik käsitleda kui Cauchy ülesande (19) üldistatud la-

hendit.

6. Poisson'i valem. Eespool uurisime üksikasjaliselt potentsiaale  $V$ ,  $V^{(0)}$  ja  $V^{(1)}$  ning Cauchy ülesande korrekt-sust lainevõrrandi jaoks juhul, kui ruumimuutujate arv  $n=3$ . Kui  $n=2$  või  $n=1$ , on võimalik läbi viia analoogilised arut-lused (enamasti lihtsustuvad need tunduvalt) ning tuletada Cauchy ülesande lahendusvalemid nendel juhtudel. On olemas aga veel teine võimalus, nn. laskumismeetod, mis võimaldab kiiremini saada tulemusi juhtude  $n=2$  ja  $n=1$  jaoks, lähtudes teadaolevatest tulemustest  $n=3$  korral.

Vaatlemegi kahedimensionaalset ülesannet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f(x_1, x_2, t), \quad (22)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), \quad u_t(x_1, x_2, 0) = u_1(x_1, x_2).$$

Vaatleme nüüd rööbiti ülesandega (22) kolmedimensionaalset ülesannet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f(x_1, x_2, t), \quad (22')$$

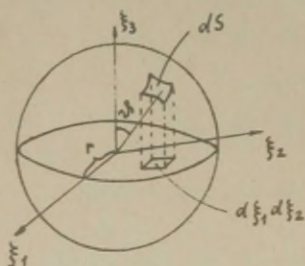
$$u(x, 0) = u_0(x_1, x_2), \quad u_t(x, 0) = u_1(x_1, x_2),$$

milles vabaliige  $f(x, t)$  ning algväärtused  $u_0(x_1, x_2)$  ja  $u_1(x_1, x_2)$  ei sõltu ruumimuutujast  $x_3$ . Intuitsiivselt on selge, et siis võrrandi (22') lahend ei sõltu samuti ruumimuu-tujast  $x_3$  ning langeb kokku võrrandi (22) lahendiga (sest  $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ ). Meie intuitsioon leiab allpool kinnitust.

Kui  $f \in C^2(t > 0)$ ,  $u_0 \in C^3$ ,  $u_1 \in C^2$ , siis teoreemi 4 koha-selt on Cauchy ülesandel (22') olemas parajasti üks lahend ning see avaldub Kirchhoffi valemiga

$$u = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{U_3(x, at)} \frac{r(\xi, t - \frac{\|x-\xi\|}{a})}{\|x-\xi\|} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_1(\xi) dS + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_0(\xi) dS. \quad (23)$$

Teisendame seda avaldist. Vaatleme üksikasjaliselt teise integraali teisendamist. Kui sfääri raadius on  $r = at$ , keskpunktiks  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , siis (vt. joon. 22)



Joon. 22.

$$dS = \frac{d\xi_1 d\xi_2}{|\cos \varphi|},$$

$$|\cos \varphi| = \frac{|\xi_3 - x_3|}{r} = \frac{\sqrt{r^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}{r},$$

seega

$$dS = \frac{at d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{a^2 t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}}.$$

Arvestades, et  $u_1(\xi)$  ei sõltu argumentidest  $\xi_3$ , saame

$$\int_{S(x, at)} u_1(\xi_1, \xi_2) dS_\xi = 2at \int_{U_2(x, at)} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x - \xi\|^2}};$$

siin  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ; kordaja 2 tekkis seetõttu, et kasutatud teisendus on üksühene ülemise poolsfääri ja ringi  $U_2(x, at)$  vahel, pindintegraalid üle ülemise ja alumise poolsfääride aga on võrdsed.

Samal viisil teiseneb kolmas integraal avaldises (23). Esimese integraali teisendamiseks paneme kõigepealt tähele, et

$$\int_{U_3(x, at)} \frac{f(\xi, t - \frac{\|x-\xi\|}{a})}{\|x-\xi\|} d\xi = \int_0^t \frac{1}{t-\tau} \int_{S(x, a(t-\tau))} f(\xi, \tau) dS_\xi d\tau,$$

ning teisendame pindintegraali samal viisil nagu eespool.

Kokkuvõttes saame valemist (23) nn. Poissoni valemi

$$u = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \int_{U_2(x, a(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau) d\xi d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \|x-\xi\|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int_{U_2(x, at)} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x-\xi\|^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi a} \int_{U_2(x, at)} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x-\xi\|^2}}, \quad (24)$$

milles  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  ning

$$U_2(x, r) = \{ \xi \in R^2: \|x-\xi\|^2 = (x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2 < r^2 \}$$

on ring keskpunktiga  $x$  ja raadiusega  $r$ . Nagu näha, ei sõltu ülesande (22') lahend (24) muutujast  $x_3$  ning on järelkult klassikalise Cauchy ülesande (22) ainsaks lahendiks (lahendi ühesus järeldub üldistatud Cauchy ülesande lahendi ühesusest, vt. teoreemi 1).

Sellega oleme kahedimensionaalse ülesande (22) jaoks põhjendanud tulemuse Cauchy ülesande korrektsuse kohta, mis on täiesti analoogiline teoreemiga 4 (lahend avaldub nüüd muidugi mitte Kirchhoffi, vaid Poissoni valemi abil). Jätame üksikasjaliku formuleeringu lugeja hooleks.

7. D'Alemberti valem. Vaatleme nüüd ühe ruumimuutujaga ülesannet

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \quad (25)$$

Kasutades laskumismeetodit või leides vahetult potentsiaalid  $v$ ,  $v^{(0)}$  ja  $v^{(1)}$ , on lihtne jõuda järgmise lahendusvalemini Cauchy ülesande (25) jaoks:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \int_0^{x-a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)] \quad (26)$$

(D'Alembert'i valem). Jätame tõestusmeetodi valiku ning üksikasjalise põhjenduse lugeja hooleks. Olgu märgitud, et §-s 3.3 me tuletasime D'Alembert'i valemi kolmandal viisil erijuhul, kui  $f(x, t) \equiv 0$ .

Muidugi kehtib ka nüüd teoreemiga 4 analoogiline tulemus. Kuid tingimusi  $f$ ,  $u_0$  ja  $u_1$  sileduse kohta võib antud juhul lihtsustada.

Ülesanne 1. Näidata, et klassikalisel Cauchy ülesandel (25) on parajasti üks lahend (ning see avaldub D'Alembert'i valemiga), kui  $f \in C^1(t \geq 0)$ ,  $u_0 \in C^2$ ,  $u_1 \in C^1$ .

Ülesanne 2. Näidata ülesande (25) lahendi pidevat sõltuvust ülesande lähteandmetest järgmises mõttes: kui

$$|f(x, t) - \tilde{f}(x, t)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty, t \geq 0),$$

$$|u_0(x) - \tilde{u}_0(x)| < \varepsilon_0, \quad |u_1(x) - \tilde{u}_1(x)| < \varepsilon_1 \quad (-\infty < x < \infty),$$

siis vastavad lahendid  $u(x, t)$  ja  $\tilde{u}(x, t)$  rahuldavad igas riibas  $0 \leq t \leq T$  võrratust

$$|u(x, t) - \tilde{u}(x, t)| \leq \frac{T^2}{2} \varepsilon + T\varepsilon_1 + \varepsilon_0.$$

8. Aja pööratavus lainevõrrandis. Vaatleme Cauchy ülesannet lainevõrrandi jaoks negatiivse aja suunas:

$$\left. \begin{aligned} u_{\tau\tau} &= a^2 \Delta u + f(x, \tau) & (x \in \mathbb{R}^n, -\infty < \tau < 0), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_\tau(x, 0) = \psi(x). \end{aligned} \right\} (27)$$

Teeme muutuja vahetuse  $\tau = -t$ , s. t. muudame aja kulgemise suuna vastupidiseks. Kuna

$$u_t = -u_\tau, \quad u_{tt} = u_{\tau\tau},$$

siis Cauchy ülesanne (27) läheb üle Cauchy ülesandeks

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u + f(x, -t) & (x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < \infty), \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = -\psi(x). \end{aligned} \right\} (28)$$

Cauchy ülesanne (28) on, nagu me eelnevast teame, seatud korrektselt. Siit järeldame, et ka Cauchy ülesanne (27) on seatud korrektselt. Niisiis on Cauchy ülesanne lainevõrrandi jaoks seatud korrektselt nii positiivse kui ka negatiivse aja suunas. Võrdluseks meenutame, et Cauchy ülesanne soojusjuhtivuse võrrandi jaoks on seatud korrektselt vaid positiivse aja suunas.

9. Lainete levimine. Anname füüsikalise interpretatsiooni lainevõrrandi  $u_{tt} = a^2 \Delta u$  lahendile; me piirdume juhuga kui välisjõud puuduvad:  $f(x, t) \equiv 0$ . Kuna lainevõrrandi lahendi kuju sõltub oluliselt dimensioonist  $n$ , peame juhte  $n=1, 2, 3$  käsitlema eraldi. Eriti huvitab meid küsimus, kuidas hakkab häiritus levima, kui algmomendil  $t = 0$  on häiritud (tasakaalust välja viidud) vaid teatav osa keelest, membraanist või elastsest kehast. Häirituse levimist võib

vaadelda kui laine liikumist.

On otstarbekohane käsitleda ka ideaalset juhtu, kui ajamomendil  $t = 0$  on häiritus kontsentreeritud vaid ühte punkti - punkti  $x = 0$ , s.t. kui tegemist on punkt-häiritusega  $\delta(x) \cdot \delta(t)$ . Kõrvalekallet tasakaaluasendist mistahes punktis  $x$  mistahes ajamomendil  $t > 0$  iseloomustab sel juhul laineoperaatori fundamentaallahend  $\mathcal{E}_n(x, t)$ .

a) Lainete levimine ruumis ( $n = 3$ ). Laineoperaatori fundamentaallahendiks on  $n = 3$  korral

$$\mathcal{E}_3(x, t) = \frac{\theta(t)}{4 a^2 t} \delta_{S_{at}}(x).$$

Kuna  $\delta_{S_{at}}(x)$  kandjaks on sfäär  $\|x\| = at$ , siis igal ajamomendil  $t > 0$  on häiritus lokaliseeritud sfääril  $\|x\| = at$ . Seega alghäiritus  $\delta(x)$  tekitab sfäärilise laine ümber punkti  $x = 0$ , see levib (sfääri raadius kasvab) kiirusega  $a$ . Iga punkt  $x \neq 0$  on tasakaalus kuni ajamomendini  $t_1 = \|x\|/a$  ajamomendil  $t_1 = \|x\|/a$  läbib teda laine, ning kohe taastub jälle tasakaal.

Vaatleme nüüd reaalsemat olukorda, kui algmomendil  $t = 0$  on regulaarne häiritus lokaliseeritud mingis tõkestatud piirkonnas  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Sel juhul on meil tegemist Cauchy ülesande

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x)$$

lahendiga, kusjuures  $\text{supp } u_0 \subset \bar{\Omega}$ ,  $\text{supp } u_1 \subset \bar{\Omega}$ ,  $\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 = \bar{\Omega}$ . Lahendiks on Kirchhoffi valemi kohaselt

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_1(\xi) dS + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{S(x, at)} u_0(\xi) dS. \quad (29)$$

Fikseerime suvalise punkti  $x \notin \bar{\Omega}$  ja vaatleme häiritust  $u(x,t)$  temas. Olgu  $r_1$  kaugus  $x$ -st lähima punktini  $x_1 \in \bar{\Omega}$  ning  $r_2$  kaugus  $x$ -st kõige kaugema punktini  $x_2 \in \bar{\Omega}$  (vt. joon. 23). Tähistame

$$t_1 = \frac{r_1}{a}, \quad t_2 = \frac{r_2}{a}.$$



Joon. 23.

Ajamoendini  $t_1$  ei löiku sfäär  $S(x,at)$  hulgaga  $\bar{\Omega}$  ning valemist (29) näeme, et

$$u(x,t) = 0, \text{ kui } 0 \leq t < t_1,$$

s.t. häiritus pole punktini  $x$  veel jõudnud. Ajavahemikus  $(t_1, t_2)$  on punkt  $x$  häiritud olukorras, häirituse suurus

mistahes ajamoendil  $t$  sellest ajavahemikust on määratud  $u_0(\xi)$  ja  $u_1(\xi)$  väärtustega hulgal  $\bar{\Omega} \cap S(x,at)$  vastavalt valemile (29). Kui  $t > t_2$ , ei löiku sfäär  $S(x,at)$  taas hulgaga  $\bar{\Omega}$  ning valemist (29) näeme, et

$$u(x,t) = 0, \text{ kui } t_2 < t < \infty.$$

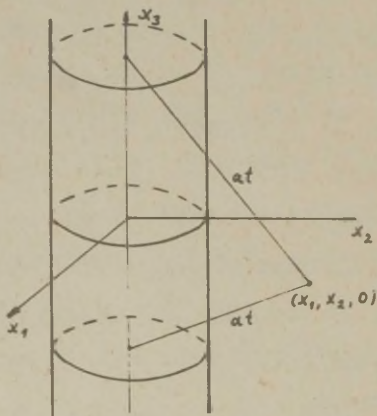
Seega pärast lainete läbimist taastub punktis  $x$  tasakaal. Sellisel juhul kõneldakse, et on täidetud Huygensi printsiip. Niisiis lainete levimisel (kolmemõõtmelises) ruumis on täidetud Heugensi printsiip.

b) Lainete levimine tasandil ( $n = 2$ ). Laineoperaatori fundamentaallahendiks on  $n = 2$  korral

$$\mathcal{E}_2(x,t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\theta(at - \|x\|)}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x\|^2}}.$$

Iga punkt  $x \neq 0$  on tasakaalus ajamomendini  $t_1 = \|x\|/a$ ; ajamomendil  $t_1 = \|x\|/a$  jõuab temani kiirusega  $a$  liikuva laine front, kuid erinevalt kolmemõõtmelisest juhust ei taastu seejärel tasakaal, vaid punkt jääb igavesti häiritud olukorda (tõsi küll, häirituse suurus läheneb  $t \rightarrow \infty$  korral nullile). Sellisel juhul kõneldakse, et leiab aset lainete difusioon; Huygensi printsiipt ei leia kahemõõtmelisel juhul aset, lainel puudub tagumine front.

Sama olukorda on võimalik analüüsida ka kolmemõõtmelises interpretatsioonis. Alghäiritusele  $\delta(x_1, x_2)$  vastab kolmemõõtmelises ruumis kogu  $x_3$ -telje häiritus. Telje igast punkti hakkab levima ühesugune sfääriline laine, millede koosmõjuna tekib kiirusega  $a$  liikuv silindriline laine ümber  $x_3$ -telje (vt. joon. 24). Selles interpretatsioonis

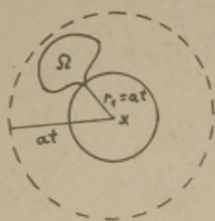


Joon. 24.

leiab lihtsa selgituse ka difusiooni nähe: küllalt suure  $t > 0$  korral asub mistahes punkt  $(x_1, x_2, 0)$   $x_3$ -telje teatavast punktist sobival kaugusel  $r=at$  (vt. joon. 24), olles mõjutatud sealt algava sfäärilise laine poolt - seetõttu häiritus punktis  $(x_1, x_2, 0)$  ei

kao iialgi.

Analüüsime ka olukorda, kui algmomendil  $t = 0$  on regulaarne häiritus lokaliseeritud mingis tõekestatud piirkonnas  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Häirituse suuruse  $u(x, t)$  mistahes punktis  $x \in \mathbb{R}^2$  mistahes ajamomendil  $t > 0$  saame Poissoni valemit



Joon. 25.

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{U_2(x, at)} \frac{u_1(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x - \xi\|^2}} + \frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{U_2(x, at)} \frac{u_0(\xi) d\xi}{\sqrt{a^2 t^2 - \|x - \xi\|^2}}.$$

Vaatleme suvalist punkti  $x \notin \bar{\Omega}$

Olgu  $r_1$  tema kaugus piirkonnani  $\bar{\Omega}$  (vt. joon. 25). Ajamomendini  $t_1 = r_1/a$  ei löiku

ring  $U_2(x, at)$  hulgaga  $\bar{\Omega}$  ning  $u(x, t) = 0$ , kui  $0 \leq t < t_1$ . Häiritus jõuab punktini  $x$  ajamomendil  $t_1 = r_1/a$  ning jääb püsima igavesti (lainete difusioon), kusjuures  $t \rightarrow \infty$  korral läheneb häiritus nullile.

c) Lainete levimine sirgel ( $n = 1$ ). Laineoperaatori fundamentaallahendiks on  $n = 1$  korral

$$\mathcal{E}_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Seega algmomendil  $t = 0$  mõjuv punkthäiritus  $\delta(x)$  tekitab laine, mille kõrgus  $\frac{1}{2a}$  on konstantne ning mis liigub kahele poole punktist  $x = 0$  kiirusega  $a$ . Iga punktini  $x \neq 0$  jõuab häiritus ajamomendil  $t_1 = |x|/a$  ning häiritus suurusega  $\frac{1}{2a}$  jääb püsima igavesti. Seega leiab aset

lainete difusiooni nähe, kusjuures isegi  $t \rightarrow \infty$  korral tasakaal ei taastu, vaid jääb püsima nn. jääknihe suurusega  $\frac{1}{2a}$ .

Vaatleme sama häiritust ka kolmemõõtmelises interpretatsioonis. Alghäiritusele  $\delta(x_1)$  vastab kolmemõõtmelises ruumis kogu  $x_2x_3$ -tasandi häiritus. Tasandi igast punktist hakkab levima ühesugune sfääriline laine, millede koosmõju tekib kaks tasandilist lainet, mis eemalduvad  $x_2x_3$ -tasandist kiirusega  $a$ .

Pöördume tagasi ühemõõtmelise interpretatsiooni juurde. Olgu alghäiritus regulaarne. Sellisel juhul saame häirituse arvutada d'Alembert'i valemist

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)].$$

Vaatleme algul juhtu, kui  $u_1(x) \equiv 0$  ning  $u_0(x) = 0$  kõikjal, välja arvatud vahemik  $\Omega = (x_1, x_2)$ , milles  $u_0(x) \neq 0$ . Häiritus

$$u = \frac{1}{2} [u_0(x+at) + u_0(x-at)]$$

koosneb sellisel juhul kahest poollainest  $\frac{1}{2}u_0(x-at)$  ja  $\frac{1}{2}u_0(x+at)$ , nn. otselainest ja pöördlainest, mis liiguvad vastandsuundades kiirusega  $a$  (vt. joon. 26). Iga punkti  $x \notin [x_1, x_2]$  läbib üks nendest poollainetest ning seejärel saabub taas tasakaal. Me näeme, et alghäirituse  $u_0(x)$  tekitatud lained alluvad Huygensi printsibile.

Vaatleme nüüd vastupidist juhtu, kui  $u_0(x) \equiv 0$  ning  $u_1(x) = 0$  kõikjal, välja arvatud vahemik  $\Omega = (x_1, x_2)$ , milles  $u_1(x) \neq 0$ . D'Alembert'i valemist saame sellisel ju-

juhul

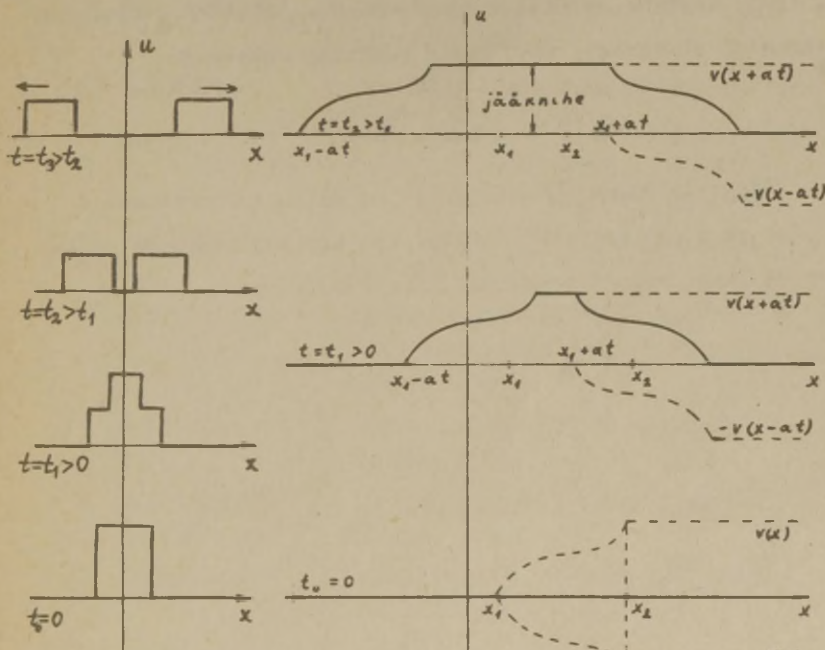
$$u = v(x + at) - v(x - at),$$

kus

$$v(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_1}^x u_1(\xi) d\xi.$$

Ilmselt  $x \leq x_1$  korral  $v(x) = 0$  ning  $x > x_2$  korral

$$v(x) = v(x_2) = \text{const.}$$



Joon. 26.

Joon. 27.

Häirituse  $u(x,t)$  kuju mitmesugustel ajamomentidel on illustreeritud joonisel 27. Funktsiooni  $u(x,t)$  graafiku

leidmiseks fikseeritud ajamomendil  $t > 0$  tuleb  $v(x)$  graafikut nihutada vasakule at võrra ning  $-v(x)$  graafikut sama palju paremale ning liita saadud funktsioonid. Laine levimist võimegi kujutleda nii:  $v(x)$  graafik liigub vasakule kiirusega  $a$  ning  $-v(x)$  graafik paremale sama kiirusega, kusjuures häiritus  $u(x,t)$  on igal ajamomendil nende graafikutega määratud funktsioonide summa. Häiritus  $u(x,t)$  liigub vasakule ja paremale kiirusega  $a$ , läbitud piirkonnas tasakaal ei taastu, vaid tekib jääknihe suurusega

$$v(x_2) = \frac{1}{2a} \int_{x_1}^{x_2} u_1(\xi) d\xi .$$

Kui vahemikus  $\Omega = (x_1, x_2)$  on mõlemad funktsioonid  $u_0(x)$  ja  $u_1(x)$  erinevad nullist, on häiritus  $u(x,t)$  määratud kahe eespool vaadeldud häirituse summana.

## KIRJANDUS

### 1. Õpikuid matemaatilise füüsika võrrandite kohta

1. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. Москва, 1971.
2. С.К.Годунов. Уравнения математической физики. Москва, 1971.
3. С.Г.Михлин. Курс математической физики. Москва, 1968.
4. И.Г.Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва, 1961.
5. В.И.Смирнов. Курс высшей математики, том IV. Москва, 1957.
6. М.М.Смирнов. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Москва, 1964.
7. С.Д.Соболев. Уравнения математической физики. Москва, 1966.
8. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. Москва, 1972.
9. E.Reimers. Matemaatilise füüsika võrrandid. TRÜ rotaprint, 1960.

### 2. Täiendav kirjandus osatuletistega võrrandite kohta

- I0. А.Берс, Ф.Джон, М.Шехтер. Уравнения с частными производными. Москва, 1966.
- II. К.Иосида. Функциональный анализ. Москва, 1967.

12. Р.Курант. Уравнения с частными производными. Москва, 1964.
13. Р.Курант, Д.Гильберт. Методы математической физики, том I,II. Москва, 1951.
14. Р.Латтес, К.-Л.Джонс. Метод квазиобращения и его приложения. Москва, 1970.
15. Р.Эдвардс. Функциональный анализ. Теория и приложения. Москва, 1969.

### 3. Ülesannete kogud

16. Б.М.Будак, А.А.Самарский, А.Н.Тихонов. Сборник задач по математической физике. Москва, 1972.
17. Д.С.Очан. Сборник задач по методам математической физики. Москва, 1967.
18. М.М.Смирнов. Задачи по уравнениям математической физики. Москва, 1968.

### 4. Muud viited

19. G.Kangro. Kõrgem algebra. Tallinn, 1962.
20. G.Kangro. Matemaatilise analüüs II. Tallinn, 1968.
21. T.Sõrmus, G.Vainikko. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tallinn, 1972.
22. E.Tamme. Arvutusmeetodid II. Tallinn, 1973.

## AINEREGISTER

- |  |   |
|--|---|
| <p>aeglaselt kasvav distributsioon 95</p> <p>- - funktsioon 97</p> <p>akustika võrrand 13</p> <p>Cauchy ülesanne 39,42</p> <p>d'Alembert'i valem 49,174</p> <p>Dirac'i delta-funktsioon 59</p> <p>Dirichlet' rajatingimus 44</p> <p>- rajaülesanne 44</p> <p>distributsioon 58</p> <p>distributsiooni Fourier' teisendus 112</p> <p>- - pöördteisendus 112</p> <p>- kandja 59</p> <p>- korrutis funktsiooniga 62</p> <p>- tuletis 64</p> <p>distributsioonide konvolutsioon 85</p> <p>- ruum <math>\mathcal{D}'</math> 58</p> <p>- ruum <math>\mathcal{F}'</math> 95</p> <p>- tensorsorrutis 78,101</p> <p>elliptilist tüüpi võrrand 24,30</p> <p>- - võrrandi kanooniline kuju 28,32</p> <p>- - võrrandisüsteem 37</p> <p>finiitne distributsioon 61</p> <p>- funktsioon 54</p> <p>Fourier' teisendus 105,112</p> | <p>Fourier' pöördteisendus 109,112</p> <p>fundamentaallahend 125</p> <p>funktsiooni kandja 53</p> <p>funktsioonide konvolutsioon 82</p> <p>Hadamard'i näide 51</p> <p>Huygensi printsiip 177</p> <p>hüperboolset tüüpi võrrand 24,30</p> <p>- - võrrandi kanooniline kuju 26,27,32</p> <p>- - võrrandisüsteem 37</p> <p>jääknihe 180</p> <p>karakteristik 25,33</p> <p>karakteristlik koonus 34</p> <p>- pind 33</p> <p>- võrrand 25</p> <p>keele võnkumise võrrand 11,12</p> <p>kiirelt kahanev funktsioon 93</p> <p>Kirchhoffi valem 169</p> <p>klassikaline lahend 123</p> <p>konvolutsioon 82,85</p> <p>koondumine ruumis <math>\mathcal{D}</math> 54, 55</p> <p>- - <math>\mathcal{D}'</math> 58</p> <p>- - <math>\mathcal{F}</math> 93</p> <p>- - <math>\mathcal{F}'</math> 95</p> <p>- <math>e_k \rightarrow 1</math> ruumis <math>R^n</math> 83</p> |
|--|---|

- korrektsuse klass 46  
 Kovalevskaja teoreem 50  
 kvaasilineaarne võrrand  
   19,20  
 laineoperaatori fundamen-  
   taallahend 132  
 lainete difusioon 178  
 lainevõrrand 13  
 Laplace'i võrrand 18  
 laskumismeetod 171  
 lineaarne võrrand 19,20  
 - homogeenne võrrand 19  
 - mittehomogeenne võr-  
   rand 19  
 lokaalselt lõplik rida 73  
 membraani võnkumise võr-  
   rand 13  
 multiindeks 54  
 mõjufunktsioon 125  
 Neumanni rajatingimus 44  
 - rajaülesanne 44  
 nõrk lahend 125  
 paraboolset tüüpi võr-  
   rand 24,30  
 - - võrrandi kanoonili-  
   ne kuju 27,32  
 Parsevali võrdus 112  
 Poissoni valem 173  
 Poissoni võrrand 18  
 potentsiaal  $V$  159,161  
 -  $v^{(0)}$  159,166  
 -  $v^{(1)}$  159,165  
 rajaülesanne 43  
 regulaarne distributsioon 59  
 segaülesanne 44  
 singulaarne distributsioon 59  
 soojusjuhtivuse võrrand 16  
 - operaatori fundamentaal-  
   lahend 131  
 soojuspotentsiaal  $V$  144  
 -  $v^{(0)}$  144,147  
 tensorkorrutis 78,101  
 tugev lahend 125  
 üldistatud Cauchy ülesanne  
   141,156  
 - funktsioon 58  
 - lahend 123,170  
 - tuletis 64  
 ühtlane elliptilisus 31  
 ülekandevõrrand 135  
 ülesande seade korrektsus 46

Э. Тамме, Г. Вайнико

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

I

На эстонском языке

Тартуский государственный университет  
ЭССР, г. Тарту, ул. Длинноли, 18

Vastutav toimetaja I. Saarnit  
Korrektor L. Uba

---

Paljundamisele antud 12. IX 1973. Trükipaber nr.2,  
30 x 42. 1/4. Trükipoognaid 11,75. Tingtrükipoog-  
naid 10,93. Arvestuspoognaid 8,44. Trükiarv 600.

MB 06140. Tell. nr. 853.

Hind 30 kop.