Überreicht vom Verfasser

ZUM BEWEIS DES VIERFARBENSATZES

VON

J. SARW

DORPAT 1927

ZUM BEWEIS DES VIERFARBENSATZES

VON

J. SARW

DORPAT 1927

Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis (Dorpatensis) A XIII. 1.

C. Mattiesen, Tartu (Dorpat).

1. Einleitung.

Es handelt sich um folgendes: Auf einer Kugelfläche sind Gebiete in endlicher Anzahl vorhanden. Man färbt jedes Gebiet mit einer einzelnen Farbe. Das Färben soll nur dazu dienen, dass man jedes einzelne Gebiet in seiner ganzen Ausdehnung leicht übersehen kann. Um das zu erreichen, muss man jedes andere Gebiet, das mit einem schon gefärbten Gebiet gemeinsame Grenzstücke hat, mit einer anderen Farbe färben. Man braucht nicht für jedes neue Gebiet eine neue Farbe zu nehmen. Im Gegenteil, aus ökonomischen Gründen und wegen besserer Unterscheidbarkeit ist man bestrebt, möglichst wenige neue Farben zu gebrauchen. Das Minimum oder die untere Grenze für die Anzahl der unbedingt nötigen Farben für wirklich in der Mehrzahl vorhandene Gebiete ist zwei. Zum Beispiel kann man alle in gerader Anzahl vorhandenen sphärischen Zweiecke mit zwei Farben färben. Es ist schon im vergangenen Jahrhundert folgendes Problem entstanden: man hat das Maximum oder die obere Grenze zu bestimmen für die Anzahl der unbedingt nötigen Farben bei jeder endlichen Anzahl der Gebiete und bei jeder Form des Gebietssystems.

Nach R. Baltzer[1]) ist Möbius (dank seinem Freunde Weiske) schon um das Jahr 1840 im Besitz des Satzes gewesen, dass es unmöglich ist die Kugelfläche oder ein Stück davon in fünf Teile zu teilen, von denen jeder mit jedem anderen ein Grenzstück (nicht bloss einen Punkt) gemein hat. Cayley[2]) sagt (1878): The theorem, that four colours are sufficient for any map, is mentioned somewhere by late Professor De Morgan .... I have failed to obtain a proof. Dieser De Morgansche Satz, dass

> vier Farben genügen, um alle Gebiete einer Kugelfläche und somit jeder Landkarte so zu färben, dass überall zwei

---

1) R. Baltzer, Leipziger Berichte 1885, p. 1.

2) Cayley, Proceedings of the Royal Geogr. Soc. 1 (1879), p. 259.

längs Linien aneinander grenzende Gebiete verschiedene Farben erhalten,

heisst heutzutage gewöhnlich der Vierfarbensatz.

Federic Guthrie[1]) erklärte (1880), sein Bruder Francis Guthrie habe schon um 1850 für diesen Satz einen Beweis gefunden und seinem Professor De Morgan mitgeteilt. Der erste Beweisversuch in der Literatur gehört Kempe (1879)[2]). Er beweist, dass auf der Kugelfläche jeder Gebietskomplex ein Gebiet enthält, das mit weniger als sechs anderen Gebieten in Berührung steht, d. h. Grenzstücke gemein hat. Er versuchte auch zu beweisen, dass man alle anderen Gebiete immer so färben kann, dass höchstens 5 ein und dasselbe Gebiet berührende Gebiete höchstens drei Farben erhalten. Dieser Versuch ist aber misslungen, wie Heawood[3]) zeigte (1890). Tait[4]) gab einen Beweis für den Satz (1880), aber er gebrauchte dazu einen unbewiesenen, jetzt nach ihm benannten, Satz.

Heawood[5]) beschäftigte sich mit der Frage, wie gross die der Zahl 4 auf der Kugelfläche analoge chromatische Zahl für Flächen höheren Geschlechts ist. Er fand, dass die leicht zu findenden Schranken für die chromatische Zahl eben nur für die Kugelfläche (und alle anderen Flächen vom Geschlecht 0) die chromatische Zahl unbestimmt lassen. Er setzte aber dabei voraus, dass auf jeder Fläche die Nachbargebiete, d. h. diejenigen Gebiete, von denen jedes mit jedem anderen ein Grenzstück gemein hat, in der aus der Eulerschen Formel folgenden Anzahl wirklich möglich sind. Heffter[6]) stellte (1891) wirklich die Nachbargebiete für Flächen vom Geschlecht 1, 2, 3, . . ., 6 her. Spätere Arbeiten[7]) haben weder den Vierfarbensatz zu beweisen, noch das Problem der Nachbargebiete zu lösen vermocht.

Im folgenden wird der Versuch gemacht, den Beweis des Vierfarbensatzes, von ganz allgemeinen Voraussetzungen aus-

1) F. Guthrie, Proc. Edinb. 10 (1880), p. 727.
2) A. B. Kempe, Am. Journ. of Math. 2 (1879), p. 193.
3) P. J. Heawood, Quart. Journ. 24 (1890), p. 332.
4) Tait, Proc. Edinb. 10 (1880), p. 501.
5) L. c.
6) L. Heffter, Math. Ann. 38 (1891), p. 486.
7) A. Errera, Periodico di Matematiche VII (IV), p. 20 (1927).

gehend, rein geometrisch anzubahnen. Das Haupthilfsmittel besteht im Reduzieren durch Ringe von Gebieten, d. h. vermittels Gebietsreihen, wo jedes folgende Gebiet mit dem vorhergehenden wie auch das letzte Gebiet mit dem ersten wenigstens einen Punkt gemein hat, den man nach Heawood[1]) in ein Grenzstück verwandeln kann.

2. Die Eulersche Polyederformel.

Man denke sich auf der Kugelfläche eine Kreislinie und auf dieser Kreislinie einen Punkt. Die Kreislinie zerlegt die Kugelfläche in zwei Elementarflächenstücke (die im Sinne der Topologie einer Kreisfläche oder Dreiecksfläche äquivalent sind). Der Punkt auf der Kreislinie zerlegt diese in ein Elementarlinienstück (das im Sinne der Topologie einer Strecke äquivalent ist). Man nehme die Anzahl der Elementarflächenstücke negativ (—2). Man addiere dazu die Anzahl der für diese Flächenstücke nötigen Elementarlinienstücke positiv (—2+1) und die Anzahl der für diese Linienstücke nötigen Punkte negativ (—2+1—1). Die so erhaltene Zahl

$$K = -2,$$

die Charakteristik der Kugelfläche, hängt nicht davon ab, wie man die Kugelfläche in Elementarflächenstücke und die Begrenzungen dieser Flächenstücke in Elementarlinienstücke zerlegt hat. Denn es sei die Anzahl der Elementarflächenstücke a_2, die der Linienstücke a_1 und die der Punkte a_0, und somit

$$K = -a_2 + a_1 - a_0.$$

Dann kann man annehmen, dass jedes gemeinsame Grenzstück zweier Flächenstücke aus einem einzigen Linienstück besteht. Bestände nämlich ein Grenzstück aus l Linienstücken mit $l-1$ inneren Eckpunkten, so könnte man die $l-1$ Eckpunkte fortlassen und so die l Linienstücke in ein einziges verwandeln, ohne die Charakteristik $-a_2+a_1-a_0$ zu verändern, da ja a_0 und a_1 dabei gleichzeitig um $l-1$ kleiner werden. Lässt man nun das gemeinsame Grenzstück zweier Flächenstücke fort, so verwandelt man diese zwei Flächenstücke in ein einziges, ohne die Charakteristik zu verändern, da ja a_2 und a_1 dabei gleichzeitig um eins kleiner werden. So fortfahrend, wird man auf

1) S. unten 3.

der Kugelfläche endlich zu zweien Flächenstücken gelangen mit einer einzigen gemeinsamen Grenzlinie, die nur eines einzigen Punkts bedarf, um ein Elementarlinienstück darzustellen. Also ist die Charakteristik für die Kugelfläche und für jede der Kugelfläche topologisch äquivalente Polyederfläche wirklich invariant und zwar

$$-a_2+a_1-a_0=-2.$$

Diese Formel nennt man die Eulersche Polyederformel.

3. Heawood's mittlere Anzahl der angrenzenden Gebiete.

Heawood bemerkte, dass man, ohne die obere Grenze der nötigen Farben zu erniedrigen, annehmen kann, dass in keinem Punkt mehr als drei Gebiete zusammenstossen. Denn beim Zusammenstoss mehrerer Gebiete kann man sich eins von diesen in alle anderen ein wenig erweitert denken. Dann wird auch jedes Paar von Gebieten, das einen Punkt gemein hat, ein ganzes Grenzstück gemein haben.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man mit Heawood die mittlere Anzahl der verschiedenen (mit verschiedenen anderen Gebieten gemeinsamen) Grenzstücke eines jeden Gebiets mit A_n, wo n die Anzahl aller Gebiete bedeutet. Dann hat man nach der Eulerschen Formel

$$-\frac{nA_n}{3}+\frac{nA_n}{2}-n=-2,$$

woraus folgt

$$A_n=6\left(1-\frac{2}{n}\right).$$

Hieraus ist ersichtlich, dass es auf der Kugelfläche in jedem System von in endlicher Anzahl vorhandenen und die ganze Kugelfläche bedeckenden Gebieten solche gibt, die mit weniger als sechs anderen gemeinsame Grenzstücke haben. (Nur in einem unendlichen Parkett mit sechseckigen Tafeln wäre das nicht der Fall.) Dasselbe gilt auch von jedem endlichen Gebietssystem, das nur ein elementares Stück der Kugelfläche (oder der Ebene) bedeckt. Denn das übriggebliebene Stück kann man ja auch als ein (beiseitegelassenes) Gebiet ansehen, und ist die Anzahl der (an dieses Gebiet grenzenden) Grenzgebiete m, so ergibt die Eulersche Formel

$$-\frac{nA_n}{3}-\frac{2m}{3}+\frac{nA_n}{2}+m-n-1=-2,$$

woraus folgt

$$A_n=6\left(1-\frac{m+3}{3n}\right).$$

4. Die vier ersten Hilfssätze.

Der Beweis des Vierfarbensatzes stützt sich auf die folgenden Hilfssätze, die die Reduktionsmöglichkeit der Anzahl der zu behandelnden Gebiete verbürgen.

Hilfssatz 1. *Die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben wird nicht erniedrigt, wenn man annimmt, dass kein Gebiet andere Gebiete in seinem Inneren enthält.*

Beweis. Enthält ein Gebiet G auf der Kugelfläche andere Gebiete in seinem Inneren, so teilt es die Kugelfläche in mehrere Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_n$, die keine gemeinsamen Grenzstücke haben können, so dass man in jedem von ihnen unbeschränkt dieselben Farben gebrauchen kann. Sei B_k derjenige von diesen Bereichen, wo die Anzahl der nötigen Farben nicht kleiner ist als in jedem anderen. Dann kann man, ohne die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben zu erniedrigen, alle anderen Bereiche ganz ausser Betracht lassen oder als keine eigene Farbe brauchende Teile des Gebietes G mit der Farbe dieses Gebietes gefärbt denken. Das Gebiet G zusammen mit diesen Bereichen enthält schon kein anderes Gebiet in seinem Inneren, weil es von der ganzen Kugelfläche nur einen einzigen Bereich B_k frei lässt. Damit ist der erste Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2. *Die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben wird nicht erniedrigt, wenn man annimmt, dass keine zwei Gebiete, die einen einzelnen Punkt oder ein Grenzstück gemein haben, irgendwelche weitere Punkte gemein haben.*

Beweis. Haben auf der Kugelfläche zwei Gebiete G_1 und G_2 ausser einem einzelnen Punkt oder ausser einem Grenzstück noch wenigstens einen Punkt gemein, so teilen diese zwei Gebiete zusammen die Kugelfläche in mehrere Bereiche $B_1, B_2, \ldots, B_n$, die keine gemeinsamen Grenzstücke haben können, so dass man in jedem von ihnen unbeschränkt dieselben Farben gebrauchen kann. Sei B_k derjenige von diesen Bereichen, der zusammen mit den Gebieten G_1 und G_2 nicht minder Farben braucht als irgendeines von den anderen zusammen mit G_1 und G_2. So kann man, ohne die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben zu erniedrigen, alle anderen Bereiche ganz ausser Betracht lassen oder als keine eigene Farbe brauchende Teile des Gebietes G_1 ansehen und mit der Farbe dieses Gebiets gefärbt denken. Das Gebiet G_1 zusammen mit diesen Bereichen hat mit dem Gebiete G_2 ein einziges Grenzstück gemein, weil diese zwei Gebiete zusammen von der ganzen Kugelfläche nur einen einzigen Bereich B_k frei lassen. Somit ist der zweite Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 3. *Die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben wird nicht erniedrigt, wenn man annimmt, dass keine drei Gebiete einen Ring bilden, der die Kugelfläche in zwei Bereiche teilen würde, die keine oder höchstens einzelne Punkte gemein hätten.*

Beweis. Man nehme an, es gebe auf der Kugelfläche drei Gebiete G_1, G_2 und G_3, die einen Ring bilden, der die Kugelfläche in zwei Bereiche B_1 und B_2 teilt, die höchstens einzelne Punkte gemein haben. Dann nehme man an, dass die Gebiete G_1, G_2 und G_3 drei Farben erhalten haben, wodurch die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben gewiss nicht erniedrigt wird. Sei B_k derjenige von den durch den Ring $G_1 G_2 G_3$ getrennten Bereichen, der zusammen mit dem Ring nicht minder Farben braucht als der andere zusammen mit dem Ring. Dann kann man in diesem anderen Bereich unbeschränkt dieselben Farben gebrauchen, wie im Bereich B_k, und darum, ohne die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben zu erniedrigen, alle Gebiete des anderen Bereiches ganz ausser Betracht lassen oder als keine eigene Farbe brauchenden Teile des Gebietes G_1 ansehen und mit der Farbe dieses Gebietes gefärbt denken. Somit ist der Ring beseitigt und der dritte Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 4. *Ohne die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben zu erniedrigen, kann man annehmen, dass kein Gebiet der Kugelfläche mit vier und nur mit vier anderen gemeinsame Grenzstücke hat.*

Beweis. Hat ein Gebiet G mit vier und nur mit vier anderen Gebieten G_1, G_2, G_3 und G_4 in dieser Reihenfolge gemeinsame Grenzstücke, so denke man sich die Gebiete G_1, G und G_3 in ein einziges Gebiet vereinigt. Das ist möglich, da nach dem Hilfssatz 3 die identisch gefärbt gedachten Gebiete G_1 und G_3 nicht zusammenstossen können. Wird nun das so reduziert gedachte Gebietssystem wenigstens vier Farben brauchen, so braucht das ursprüngliche System deren gewiss nicht mehr. Also kann man sich wirklich jedes Gebiet beseitigt denken, das mit vier und nur mit vier anderen gemeinsame Grenzstücke hat.

Anmerkung. Vier Farben wird man schon dann brauchen, wenn man auf der Kugelfläche nur vier Gebiete hat, die, den Tetraederflächen ähnlich, alle aneinander grenzen, also Nachbargebiete sind.

5. Der fünfte Hilfssatz.

Hilfssatz 5. *Ohne die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben zu erniedrigen, kann man annehmen, dass kein Gebiet der Kugelfläche mit mehr als vier anderen gemeinsame Grenzstücke hat.*

Beweis. Laut den Hilfssätzen 1—4 kann man das Gebietssystem so reduzieren, dass von den noch vorhandenen Gebieten, falls es deren mehr als elf gibt, ein jedes mit mehr als vier anderen gemeinsame Grenzstücke haben muss. Nach der Heawoodschen mittleren Anzahl muss es unter diesen Gebieten auch solche geben, die mit genau fünf anderen gemeinsame Grenzstücke haben. Also hat man nur zu beweisen, dass man, ohne die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben zu erniedrigen, jedes Gebiet beseitigen kann, das mit genau fünf anderen gemeinsame Grenzstücke hat.

Hat ein Gebiet G mit genau fünf anderen Gebieten G_1, G_2, . . ., G_5 in dieser Reihenfolge gemeinsame Grenzstücke, so denke man sich die Gebiete G_1, G und G_3 in ein einziges Gebiet vereinigt. Das ist möglich, da nach dem Hilfssatz 3 die identisch gefärbt gedachten Gebiete G_1 und G_3 nicht zusammenstossen können. Weiter trage man Sorge dafür, dass das Gebiet G_2 mit dem Gebiet G_4 oder G_5 endgültig identisch gefärbt werden kann. Das heisst, beim weiteren Reduzieren nach den Sätzen 4 und 5 nehme man für ein neues G_1 vorzugsweise ein früheres G_2, wenn dabei das neue G_3 mit dem bezüglichen früheren G_4 oder G_5 identisch wird, aber nimmer, wenn das neue G_3 mit dem bezüglichen früheren G_4 und G_5 nur gemeinsame Grenzstücke hätte. Das ist möglich, da es ja von dem Reduzierer abhängt, welches von den vier oder fünf Gebieten mit G_1 bezeichnet wird. Falls nun das so reduziert gedachte Gebietssystem wenigstens vier Farben braucht, so braucht das ursprüngliche System deren gewiss nicht mehr. Also kann man sich wirklich jedes Gebiet beseitigt denken, das mit fünf oder mehr anderen gemeinsame Grenzstücke hat.

Anmerkung. Die hier gesperrt gedruckten Worte machen den Beweis unstreng. Ohne die Freiheit des Reduzierens zu Hilfe zu nehmen, hätte man streng nur sagen können, dass das ursprüngliche System nicht über fünf Farben braucht, wenn das reduzierte System nicht über fünf braucht.

6. Der Vierfarbensatz.

Aus den Hilfssätzen 1—5 folgt

Der Vierfarbensatz: *Vier Farben genügen, um die in endlicher Anzahl vorhandenen Gebiete einer Kugelfläche oder einer Landkarte so zu färben, dass überall zwei längs Linien aneinander grenzende Gebiete verschiedene Farben erhalten.*

Beweis. Auf Grund der Hilfssätze 1—5 erniedrige man die Anzahl der vorhandenen Gebiete so weit wie möglich, ohne die obere Grenze für die Anzahl der nötigen Farben zu erniedrigen. Dann betrachte man irgendein übriggebliebenes Gebiet G. Nach den Hilfssätzen 4 und 5 kann dieses Gebiet mit nicht mehr als drei anderen gemeinsame Grenzstücke haben. Nach den Hilfssätzen 1—3 kann es keine weiteren Gebiete geben. Also gibt es ausser dem Gebiete G nicht über drei weitere Gebiete, die mit G zusammen die grösste Anzahl der für die Färbung aller Gebiete der Kugelfläche nötigen Farben brauchen. So genügen wirklich vier Farben, um die in endlicher Anzahl vorhandenen Gebiete einer Kugelfläche oder einer Landkarte so zu färben, dass überall zwei längs Linien aneinander grenzende Gebiete verschiedene Farben haben.