MÉMOIRES
DE
L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE ST.-PÉTERSBOURG, VII^e SÉRIE.
Tome V, N° 1.

BEITRÄGE
ZUR
INTEGRATION DER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
ERSTER ORDNUNG
ZWISCHEN
ZWEI VERÄNDERLICHEN GRÖSSEN.

VON

Dr. **Ferd. Minding,**
Professor an der Universität zu Dorpat.

Der Akademie vorgelegt am 4. October 1861.

St. PETERSBURG, 1862.
Commissionäre der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften:
in St. Petersburg Eggers et Comp., in Riga Samuel Schmidt, in Leipzig Leopold Voss.
Preis: 75 Kop. = 25 Ngr.

Gedruckt auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

Im April 1862. K. Vesselofski, beständiger Secretär.

Buchdruckerei der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

EINLEITUNG.

> Si Euleri scripta perfectissimis inventis redundant, non minore in pretio habenda sunt quae ipse imperfecta aliorumque curis expolienda reliquit.
>
> Jacobi in Crelle's Journal Bd. 24. (1842).

Bei allen Fortschritten, welche in der Integralrechnung den vielseitigen und eifrigen Bemühungen neuester Zeit gelungen sind, ist die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung fast leer ausgegangen. Noch gegenwärtig bleiben Euler's *Institutiones calculi integralis* die reichste, ja fast die einzige Fundgrube von Beispielen solcher Integrationen, welche über die seitdem beständig nur wiederholten Regeln für homogene und für lineare Differentialgleichungen hinausgehen. Will man namentlich sich nicht bloss mit dem allgemeinen Nachweise und den einfachsten Anwendungen des integrirenden Faktors begnügen, so sieht man sich auf jenes Werk verwiesen, wo allein von diesem Faktor ein wirklicher Gebrauch gemacht und dadurch manche beachtenswerthe Integration gewonnen wird.

Dass diese Arbeiten Euler's so wenig Eingang in die neueren Lehrbücher gefunden haben, mag in mancherlei Ursachen begründet sein, hat indessen doch einige Entschuldigung für sich, in so fern sie zwar auf sehr bemerkenswerthe, aber nur vereinzelt stehende Beispiele führen, welche bei oft beträchtlichem Aufwande von Rechnung doch kein Gesetz irgend einer Art erkennen lassen und daher für die Methode nur geringe Ausbeute gewähren.

Hiermit stimmt auch das Urtheil, welches Jacobi in den oben vorangestellten Worten einer Abhandlung ausgesprochen hat, die vorzüglich geeignet war, die Aufmerksamkeit der Mathematiker von neuem auf jene Arbeiten Euler's zu lenken, indem sie eines der merkwürdigsten Beispiele des letzteren in erweiterter und zugleich vereinfachter Gestalt kennen lehrte.

Durch das Studium dieser Arbeiten Euler's und Jacobi's gelangte der Verfasser vorliegender Schrift dahin, einen kürzeren und leichteren Weg zu demselben Ziele zu finden, worüber er in einem Aufsatze Rechenschaft gab, der im vierten Bande des *Bulletin de l'Académie de St.-Pétersbourg* (1845, p. 375) erschienen und später in Crelle's Journal f. M. (Bd. 40, S. 361) übergegangen ist. Er glaubte damit eine neue Anregung für diese

Art von Untersuchungen gegeben zu haben, liess sie aber damals als ihm einstweilen fernliegend fallen, in der Hoffnung, dass das einfachere Verfahren sich Geltung verschaffen und der eröffnete Weg von Anderen weiter verfolgt werden würde. — Nachdem er aber in neueren Schriften, so viele hierher gehörige er zu sehen Gelegenheit hatte, überall nur das Gegentheil seiner Erwartung bestätigt gefunden, nämlich überall nur die alten Methoden wiederholt und des Späteren mit keinem Worte gedacht —; so ist ihm bei weiterem Nachdenken mehr und mehr die Nothwendigkeit klar geworden, nochmals auf die Sache zurückzukommen und das früher nur Angefangene durch eine umfassendere Untersuchung mehr zu ergründen und zu erweitern.

Das Ergebniss seiner Bemühungen legt der Verfasser hiermit dem mathematischen Publikum in Gestalt eines abgesonderten Heftes vor, welches er als eine Beilage zu den Lehrbüchern der Integralrechnung betrachtet zu sehen wünscht, indem er glaubt, dass die hier mitgetheilte Methode, abgesehen von ihrem nächsten wissenschaftlichen Zwecke, auch als eine reichhaltige Quelle sehr lohnender Uebungsbeispiele dem Unterrichte gute Dienste leisten kann. Um dem Bedürfnisse Studirender so weit als nöthig war entgegen zu kommen, hat der Verf. es nicht an Erläuterungen fehlen lassen, die unter anderen Umständen zum Theil entbehrlich gewesen wären; doch wird als bekannt vorausgesetzt, was die Lehrbücher über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung vorzutragen pflegen.

Bei den linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung lässt sich bekanntlich das allgemeine oder vollständige Integral aus unvollständigen Lösungen (particularen Integralen) durch blosse Addition bilden. Bei nicht linearen Gleichungen kann ein Gebrauch unvollständiger Lösungen für die Integration, wenn überhaupt, doch nur in ganz anderer, von den besonderen Umständen abhängiger Weise gedacht werden; auch ist ein solcher nur selten vorgekommen, aber er ist nicht ganz unbekannt. Im vierten Capitel sagt Euler darüber folgendes: *Saepenumero quidem cognitio integralis particularis ad inventionem completi viam patefacit, quemadmodum in hoc exemplo usu venit* cet. — *Interdum autem integrale particulare parum iuvat ad completum investigandum, veluti si habeatur haec aequatio* cet. — So unleugbar der zweite Satz ist, so würde Euler doch auch auf den ersten grösseres Gewicht gelegt haben, wenn ihm der entschiedene Vortheil nicht entgangen wäre, welchen die Benutzung unvollständiger Lösungen bei seinen eigenen Beispielen gewährt.

Von dieser Thatsache ausgehend habe ich in vorliegender Schrift näher untersucht, unter welchen Umständen der integrirende Faktor — oder vielmehr eine seiner unzähligen Formen — aus unvollständigen Lösungen, die ich in Rücksicht auf ihren Gebrauch für das Integral auch gern vorläufige nenne, sich bilden lässt. Es hat sich dadurch eine ausgedehnte Classe von Differentialgleichungen ergeben, welcher eine bestimmte, aber viel umfassende Form des integrirenden Faktors entspricht und deren Integration durch die Benutzung vorläufiger Lösungen zwar nicht von jeder Schwierigkeit befreit, aber doch in hohem Grade erleichtert wird. Wenn auch in einzelnen Fällen solche Gleichungen ohne jenes Hülfsmittel integrirt werden konnten, allgemein wird es sich durch keine Art von

Substitutionen und Transformationen ersetzen lassen, sondern für diese Classe von Gleichungen unentbehrlich bleiben.

Die Aufgabe, den integrirenden Faktor einer Differentialgleichung aus ihr selbst zu finden, bezeichnet Lagrange in der 13. Vorlesung als eine solche, von welcher keine allgemeine Lösung zu hoffen sei; gewiss mit vollem Recht. — Dann aber stellt sich als Ziel heraus, wenigstens die Fälle, in welchen sich der integrirende Faktor durch die bekannten Elementarformen vollständig darstellen lässt, von allen andern zu scheiden und zur Erledigung zu bringen. Dazu hofft der Verfasser durch vorliegende Arbeit einen annähernden Schritt gethan zu haben.

Dorpat, im März 1860.

Erste Abtheilung,

enthaltend allgemeine Sätze.

§ 1. Um dem Leser sogleich die erste und zunächstliegende Art zu zeigen, wie vorläufige Lösungen sich zur Integration von Differentialgleichungen — unter geeigneten Umständen — benutzen lassen, beginne ich mit der einfachsten Differentialgleichung, welche weder homogen noch linear ist, noch die Trennung der veränderlichen Grössen etwa durch blosse Umstellung gestattet, nämlich mit der Gleichung

$$(a + a_1 x + a_2 y)\,dx + (b + b_1 x + b_2 y)\,dy = 0,$$

welche ich auch zur Abkürzung mit $Mdx + Ndy = 0$ bezeichne, so dass

$$M = a + a_1 x + a_2 y, \quad N = b + b_1 x + b_2 y \text{ ist.}$$

So allgemein bekannt das Integral dieser Gleichung ist, so hat man es doch bisher niemals, so viel ich weiss, auf andere Weise hergeleitet, als durch Einführung neuer veränderlicher Grössen, welche die Gleichung in eine homogene verwandeln. Es wird daher in Hinsicht auf die Methode von einigem Belange sein, zu zeigen, wie es bei einem andern Gange der Betrachtung ganz entbehrlich wird, neue veränderliche Grössen einzuführen.

Um gewissen scheinbaren Ausnahmefällen zu entgehen, setze ich voraus, dass in obiger Gleichung b_2 nicht $= 0$ ist. Denn gesetzt auch, es wäre anfänglich $b_2 = 0$, so brauchte man nur x mit y zu vertauschen, um an der Stelle von $b_2 y dy$ in obiger Gleichung $a_1 y dy$ zu erhalten. Diese Aenderung würde erfolglos bleiben, wenn auch noch $a_1 = 0$ wäre; allein die Annahme: $b_2 = 0$ und $a_1 = 0$, würde augenscheinlich die ganze Aufgabe vernichten und daher unstatthaft sein.

Versucht man zunächst der gegebenen Gleichung auf irgend eine Weise zu genügen, so ergiebt sich leicht, dass dies geschehen kann durch die Form: $y = \alpha x + \beta$, welche man bekanntlich eine lineare zu nennen pflegt. Wird nämlich dieser Werth von y in die Gleichung eingesetzt, und das hieraus entstehende Polynom nach x geordnet, so kommt:

$$a + a_2\beta + (b + b_2\beta)\alpha + [a_1 + a_2\alpha + (b_1 + b_2\alpha)\alpha]x = 0$$

und dieser Bedingung geschieht unabhängig von x durch α und β Genüge, wenn gesetzt wird:

$$a + a_2\beta + (b + b_2\beta)\alpha = 0$$
$$a_1 + a_2\alpha + (b_1 + b_2\alpha)\alpha = 0.$$

Die zweite dieser Formeln giebt für α eine Gleichung zweiten Grades:

$$b_2\alpha^2 + (a_2 + b_1)\alpha + a_1 = 0;$$

aus der ersten folgt sodann für β der Werth:

$$\beta = -\frac{a + b\alpha}{a_2 + b_2\alpha},$$

welcher sich auf folgende Gestalt bringen lässt, wenn mittels der vorhergehenden Gleichung α aus dem Nenner weggeschafft wird:

$$\beta = \frac{ab_1 - a_1 b + (ab_2 - a_2 b)\alpha}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Die vorliegende Gleichung bietet daher zwei lineare Lösungen dar, nämlich $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$, $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$, wenn durch α_1 und α_2 die beiden Wurzeln der Gleichung für α und durch β_1 und β_2 die jenen zugehörigen β bezeichnet werden. Es sei noch $M_1 = a + a_1 x + a_2 y_1$ und $N_1 = b + b_1 x + b_2 y_1$, d. h. es seien M_1 und N_1 die aus der Annahme $y = y_1$ hervorgehenden Werthe von M und N, und ebenso M_2 und N_2 die zu $y = y_2$ gehörigen M und N; ferner sei $\psi = (y - y_1)(y - y_2)$ und der Werth von $\frac{d\psi}{dy}$ für $y = y_1$ werde bezeichnet durch $\psi' y_1$, so dass $\psi' y_1 = y_1 - y_2$, also auch $\psi' y_2 = y_2 - y_1$; so ergiebt sich durch Zerlegung in einfache Brüche, unter Voraussetzung, dass y_1 von y_2 verschieden ist:

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = \frac{M_1 dx + N_1 dy}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \frac{M_2 dx + N_2 dy}{\psi' y_2 (y - y_2)}.$$

Hieraus können mit Hülfe der Gleichungen $M_1 dx + N_1 dy_1 = 0$ und $M_2 dx + N_2 dy_2 = 0$, M_1 und M_2 weggeschafft werden, wodurch erhalten wird;

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = \frac{N_1 d(y - y_1)}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \frac{N_2 d(y - y_2)}{\psi' y_2 (y - y_2)}.$$

Die Voraussetzung, dass y_1 von y_2 verschieden sei, wird bestehen, wenn α_1 von α_2 verschieden ist, was ich für die nächstfolgende Betrachtung annehme, welche die Brüche $\frac{N_1}{\psi' y_1} = Q_1$, $\frac{N_2}{\psi' y_2} = Q_2$ betrifft.

Einige Aufmerksamkeit auf diese Brüche führt leicht zu dem Schlusse, dass beide unabhängig von x sein müssen. Denn es ist $N_1 = b + b_1 x + b_2(\alpha_1 x + \beta_1)$ ein Polynom ersten Grades nach x; dasselbe gilt von $\psi' y_1 = y_1 - y_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)x + \beta_1 - \beta_2$; also sind

Zähler und Nenner von gleichen Graden. Ferner ist $M_1 dx + N_1 dy_1 = 0$, oder, da $dy_1 = \alpha_1 dx$, $M_1 + N_1\alpha_1 = 0$ und ebenso $M_2 + N_2\alpha_2 = 0$, für jeden Werth von x. Bezeichnet nun x' den Werth von x, für welchen $y_1 = y_2$ wird, also den Werth $x' = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_1 - \alpha_2}$, so ist klar, dass dieser Werth von x, indem er $y_1 = y_2$ macht, auch die Gleichheit von M_1 mit M_2 und die von N_1 mit N_2 herbeiführt, da M_2, N_2 aus M_1, N_1 hervorgehen, wenn y_2 für y_1 gesetzt wird. Es ist also für $x = x'$:

$$M_1 + N_1\alpha_1 = 0,\ M_2 + N_2\alpha_2 = 0,\ M_1 = M_2,\ N_1 = N_2,$$

oder es ist für $x = x'$:

$$M_1 + N_1\alpha_1 = 0 \text{ und } M_1 + N_1\alpha_2 = 0;$$

mithin $N_1(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, und da nach der Annahme $\alpha_1 - \alpha_2$ nicht $= 0$, so ist für $x = x'$, $N_1 = 0$ und zugleich $M_1 = 0$. Folglich ist N_1 theilbar durch $x - x'$ und mithin auch durch $\psi' y_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)(x - x')$; also ist, da $N_1 = (b_1 + b_2\alpha_1)x + b + b_2\beta_1$,

$$Q_1 = \frac{N_1}{\psi' y_1} = \frac{b_1 + b_2\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2} = q_1$$

eine von x unabhängige Grösse, wie behauptet wurde. Auf gleiche Weise ergiebt sich

$$Q_2 = \frac{b_1 + b_2\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} = q_2$$

daher erhält man schliesslich:

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = q_1 \cdot \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2 \cdot \frac{d(y - y_2)}{y - y_2} = d\Omega,$$

wobei ich ein für allemal bemerke, dass das oft wiederkehrende Zeichen $d\Omega$ überall nichts anderes besagen soll, als dass der ihm gleichgesetzte Ausdruck ein vollständiges Differential ist. Sind q_1 und q_2 reell, so ergiebt sich hieraus das Integral:

$$\Omega = \log[(y - y_1)^{q_1}(y - y_2)^{q_2}];$$

wären aber unter Voraussetzung reeller a und b, die Wurzeln α_1 und α_2 complexe Grössen, nämlich $\alpha_1 = g + hi$, $\alpha_2 = g - hi$, $i = \sqrt{-1}$, so ergäbe sich hieraus $\beta_1 = m + ni$, $\beta_2 = m - ni$, $q_1 = r + ti$, $q_2 = r - ti$.

Setzt man nun $y - gx - m = U\cos\varphi$, $hx + n = U\sin\varphi$, so wird

$$\frac{d(y - y_1)}{y - y_1} = \frac{dU}{U} - id\varphi,$$

und man erhält

$$d\Omega = r\frac{dU}{U} + td\varphi$$

oder:

$$\Omega = r\log(y - gx - m) + t \operatorname{arctg}\frac{hx + n}{y - gx - m}.$$

Solche Umgestaltungen werde ich jedoch später als genugsam bekannt übergehen.

Der wichtigste Schritt in vorstehender Integration besteht in dem Beweise, dass die mit Q_1 und Q_2 bezeichneten Grössen unabhängig von x sein müssen. Obgleich dieser Beweis keinen Zweifel zulässt, wenn nur α_2 von α_1 verschieden ist, so wird es doch dem Leser vielleicht willkommen sein, denselben Schluss auch durch die wirklich ausgeführte Division noch nachträglich bestätigt zu sehen.

Mit dem obigen Werthe von β in α findet man:

$$b + b_2\beta = \frac{(ab_2 - a_2 b)(b_1 + b_2\alpha)}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

und hiermit sofort:

$$N_1 = (b_1 + b_2\alpha_1)\left(x + \frac{ab_2 - a_2 b}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\right)$$

sowie

$$y_1 - y_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)\left(x + \frac{ab_2 - a_2 b}{a_1 b_2 - a_2 b_1}\right),$$

also geht in der That $y_1 - y_2$ in N_1 auf, wie als nothwendig schon erkannt war. Dem Vorstehenden zufolge ist $\frac{1}{\psi}$ ein integrirender Faktor, oder

$$\psi = C(y - \alpha_1 x - \beta_1)(y - \alpha_2 x - \beta_2)$$

ein integrirender Divisor der vorgelegten Gleichung. Die Constante C ist beigefügt, um nachher einen Nenner fortzuschaffen. Entwickelt man das Produkt mit Hülfe der Werthe der symmetrischen Funktionen von α_1 und α_2 und setzt zur Abkürzung

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = A,\ ab_1 - a_1 b = B_1,\ ab_2 - a_2 b = B_2$$

so wird erhalten

$$b_2 A^2 (y - \alpha_1 x - \beta_1)(y - \alpha_2 x - \beta_2) = b_2 [Ay - B_1]^2 + (b_1 + a_2)(Ax + B_2)(Ay - B_1) + a_1 [Ax + B_2]^2.$$

Hierbei ist noch zu bemerken, dass $b_2 B_1^2 - (b_1 + a_2) B_1 B_2 + a_1 B_2^2$ durch A theilbar ist, nämlich $= (aB_2 - bB_1) A$; daher hat auch das vorstehende Polynom zweiten Grades den Faktor A und man erhält schliesslich den integrirenden Divisor von jedem überflüssigen Faktor befreit in folgender Gestalt:

$$\psi = A[b_2 y^2 + (b_1 + a_2) xy + a_1 x^2] + [(b_1 + a_2) B_2 - 2 b_2 B_1] y + [2 a_1 B_2 - (b_1 + a_2) B_1] x + aB_2 - bB_1.$$

Diesen integrirenden Divisor hat auch Euler in § 486 der *Instit.* vollständig entwickelt, aber ausgehend von der Verwandlung der Gleichung in eine homogene und ohne zu bemerken, dass jener Divisor in zwei Faktoren ersten Grades zerlegbar ist, welche als lineare Lösungen leicht aus der Differentialgleichung selbst gefunden werden und auf dem geradesten Wege zur Erledigung der Aufgabe führen.

Die Herleitung des integrirenden Divisors gründete sich auf die Annahme, dass α_1 nicht $= \alpha_2$ und $a_1 b_2 - a_2 b_1$ nicht $= 0$ war, insofern dieser Ausdruck als Nenner von β auftrat. Es verdient jedoch bemerkt zu werden, dass der gefundene integrirende Divisor in allen Fällen ohne Ausnahme richtig bleibt und bleiben muss, nachdem seine Theile von

jedem gemeinsamen constanten Faktor befreit sind, welcher $= 0$ gesetzt den Divisor ψ selbst untauglich machen würde. Aber während der Ausdruck

$$\frac{(a + a_1 x + a_2 y)\,dx + (b + b_1 x + b_2 y)\,dy}{\psi}$$

die Eigenschaft eines vollständigen Differentials behält, welche Werthe den $a, a_1 \ldots\ldots b_2$ auch beigelegt werden mögen, so ändert sich in gewissen Fällen die Form seines Integrals, worüber, um nichts Erhebliches zu übergehen, noch Folgendes beigebracht werden mag: Wenn $\alpha_1 = \alpha_2$ ist, so erhält man

$$\alpha_1 = -\frac{b_1 + a_2}{2 b_2} = \alpha,$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{bb_1 + ba_2 - 2ab_2}{b_2(a_2 - b_1)} = \beta,$$

$$y_1 = y_2 = \alpha x + \beta,\ (b_1 + a_2)^2 = 4 a_1 b_2,\ b_2 \alpha^2 = a_1.$$

Alsdann ist $(y - y_1)^2$ der integrirende Divisor und das Integral erhält die in nachstehender Gleichung angegebene Form, von deren Richtigkeit man sich leicht durch eine kurze Rechnung überzeugen kann, nämlich:

$$\frac{(a + a_1 x + a_2 y)\,dx + (b + b_1 x + b_2 y)\,dy}{(y - \alpha x - \beta)^2} = -d\left(\frac{b + b_1 x + b_2(\alpha x + \beta)}{y - \alpha x - \beta}\right) + b_2 \frac{d(y - \alpha x)}{y - \alpha x - \beta}.$$

Wenn ferner $a_2 b_1 - a_1 b_2 = 0$ ist, so sei $a_1 = k a_2$, $b_1 = k b_2$; die gegebene Gleichung wird dann folgende:

$$[a + a_2(kx + y)]\,dx + [b + b_2(kx + y)]\,dy = 0.$$

Sie bietet nur eine lineare Lösung dar, nämlich

$$y_1 = -kx - c \text{ für } c = \frac{a - bk}{a_2 - b_2 k}.$$

Geht man nun auf die früher entwickelte Formel für α zurück, so würde die zweite Lösung gegeben werden durch $a_2 + b_2\alpha = 0$, $\beta = -\frac{a + b\alpha}{a_2 + b_2\alpha}$, woraus kein endlicher Werth von β gefunden wird, wenn nicht etwa noch $a + b\alpha = 0$ sein sollte, was nur ein höchst vereinzelter, und, wie sogleich zu erkennen ist, ganz unerheblicher Fall sein würde.

Es besteht also jetzt eine lineare Lösung und sie allein bildet auch den integrirenden Divisor, mit welchem sogleich gefunden wird:

$$\frac{[a + a_2(kx + y)]\,dx + [b + b_2(kx + y)]\,dy}{y + kx + c} = a_2\,dx + b_2\,dy + \frac{(a_2 b - ab_2)\,d(y + kx)}{y + kx + c}.$$

In Uebereinstimmung hiermit geht auch der allgemeine integrirende Divisor in dem gegenwärtigen Falle, da $A = 0$ ist, in eine lineare Form über. Ueberhaupt aber wurde dieser Ausnahmefälle deshalb besonders erwähnt, um darauf hinzuweisen, dass in jedem Falle der integrirende Divisor nur aus den eben vorhandenen linearen Lösungen gebildet wird.

§ 2. Es ist einleuchtend, dass die vorhin gebrauchte Schlussfolge eine nicht bloss auf jenes Beispiel eingeschränkte Bedeutung hat. Sind M und N ganze Polynome in Bezug auf y und denkt man sich, dass durch eine vorangegangene Untersuchung gewisse Funktionen von x, nämlich $y_1, y_2, y_3 \ldots y_\mu$ als eben so viele unvollständige Lösungen der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$ ermittelt sind; so wird sich auf dem schon durch das vorige Beispiel angedeuteten Wege das Integral jener Gleichung in dem Falle leicht finden lassen, wenn es in folgender Form darstellbar ist, in welcher U ein ganzes Polynom nach y anzeigen soll, nämlich in der Form:

$$e^U (y - y_1)^{q_1} (y - y_2)^{q_2} \ldots\ldots (y - y_\mu)^{q_\mu} = \text{Const.}$$

Denn zuvörderst ist klar, dass $y_1, y_2 \ldots y_\mu$ unvollständige Lösungen der vorliegenden Differentialgleichung sind, den Werthen 0 oder ∞ der Constante entsprechend, wenn, wie ich jetzt annehme, das Integral in der That die obige Form hat. Unter dieser Voraussetzung ist also

$$M_1 dx + N_1 dy_1 = 0,\ M_2 dx + N_2 dy_2 = 0,\ \text{u. s. w. bis } M_\mu dx + N_\mu dy_\mu = 0.$$

Es sei noch $\psi = (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_\mu)$, und da M und N ganze Polynome in y sind, auch die Funktionen $y_1, y_2 \ldots y_\mu$ hier nicht anders als jede von jeder anderen verschieden gedacht werden können, so erhält man durch Zerlegung in einfache Brüche, die ungebrochenen Theile mit G und H bezeichnend,

$$\frac{M}{\psi} = G + \frac{M_1}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{M_\mu}{\psi' y_\mu (y - y_\mu)},\quad \frac{N}{\psi} = H + \frac{N_1}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots$$

daher

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = Gdx + Hdy + \frac{M_1 dx + N_1 dy}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{M_\mu dx + N_\mu dy}{\psi' y_\mu (y - y_\mu)}.$$

Da ferner $M_1 dx + N_1 dy_1 = 0$, u. s. w. so ergiebt sich durch Wegschaffung der $M_1\ M_2 \ldots$

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = Gdx + Hdy + \frac{N_1}{\psi' y_1} \cdot \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + \ldots + \frac{N_\mu}{\psi' y_\mu} \cdot \frac{d(y - y_\mu)}{y - y_\mu}.$$

Der Ausdruck rechter Hand, gleich Null gesetzt, ist also die gegebene Differentialgleichung selbst, in etwas veränderter Gestalt, in der Form:

$$dU + q_1 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + \ldots + q_\mu \frac{d(y - y_\mu)}{y - y_\mu} = 0$$!

und da beide Formen mit einander übereinstimmen müssen, so folgt, wenn noch zur Abkürzung ~~die~~ Zeichen $\frac{N_1}{\psi' y_1} = Q_1,\ \frac{N_2}{\psi' y_2} = Q_2, \ldots$ gesetzt wird und ein Faktor X eingeführt wird, der bloss von x abhängen darf:

der

$$Gdx + Hdy = XdU,\ q_1 X = Q_1,\ q_2 X = Q_2 \ldots q_\mu X = Q_\mu.$$

Unter den gegenwärtigen Voraussetzungen müssen also die Grössen $Q_1, Q_2 \ldots Q_\mu$ Produkte aus Constanten in eine und dieselbe Funktion von x sein, und ob dies wirklich der Fall

ist, wird durch die Rechnung sofort entschieden; ferner muss $\frac{Gdx + Hdy}{X}$ ein vollständiges Differential sein, worüber ebenfalls leicht entschieden wird.

Durch den hiermit genugsam bezeichneten Gang der Rechnung wird die Schwierigkeit der Integration einer Gleichung, deren Integral die oben vorausgesetzte Form in der That besitzt, zwar nicht ganz gehoben, aber doch lediglich auf die Ermittelung der vorläufigen Lösungen zurückgeführt, welche in das Integral eingehen. Denn sobald diese und zwar alle gefunden sind, so führt die weitere Rechnung ganz sicher zum Ziele, wofern dieses überhaupt erreichbar ist, d. h. wofern das Integral die obige Form wirklich hat. Indem ich für jetzt bei dieser Voraussetzung beharre, welche übrigens bei sehr vielen der bisher untersuchten Gleichungen, z. B. der Euler'schen, zutrifft und also der Brauchbarkeit nicht ermangelt, darf ich noch bemerken, dass die Schwierigkeit, die nöthigen vorläufigen Lösungen zu finden, kaum jemals unüberwindlich sein möchte. Entschieden ist sie viel geringer als die, wirksame Substitutionen zu entdecken, ich möchte sagen zu errathen, wofür gar kein Princip vorhanden ist und was auch bei einer grösseren Anzahl der erforderlichen Lösungen, wenn deren Formen nicht sehr einfach sind, überhaupt gar nicht mehr gelingen kann.

Die Lösungen, welche im vorliegenden Falle in das Integral eingehen, sind — wie schon oben gesagt wurde — unvollständige (particulare) Integrale, zu den Werthen 0 oder ∞ der Constante gehörend; sie werden daher in der Regel vor anderen Lösungen, welchen andere Werthe der Constante entsprechen, eine gewisse Einfachheit der Form voraus haben, wie ein Blick auf die Integralgleichung sofort erkennen lässt. Möglich ist es freilich, dass auch sehr einfache Lösungen, welche sich vorfinden, doch nicht in den Ausdruck des Integrals eintreten; wofern jedoch alle für das Integral erforderliche Lösungen gefunden sind, so können die noch ausserdem gefundenen Lösungen den Erfolg nicht vereiteln, in sofern es bei näherer Prüfung möglich sein wird sie auszuschliessen.

Ohne diese Betrachtungen weiter fortzusetzen, hoffe ich gezeigt zu haben, dass durch die vorgezeichnete Methode ein zwar — wie alle andern — sehr beschränktes, aber innerhalb seiner Grenzen wirksames und nicht leicht ersetzbares Hülfsmittel zur Integration gegeben ist.

§ 3. Einen ganz besonderen Werth aber gewinnt dieses Mittel da, wo es möglich ist, aus der Form der Differentialgleichung und der gefundenen Lösungen zu beweisen, dass die Grössen $Q_1, Q_2 \ldots$ zu einander in constanten Verhältnissen stehen müssen.

Es seien M und N ganze Polynome nicht allein nach y, sondern auch nach x, und die gefundenen Lösungen $y_1, y_2 \ldots y_\mu$ seien ebenfalls ganze Polynome nach x. Man setze $y_1 = y_2$, so erhält man eine Gleichung in x, von welcher r irgend eine Wurzel sei. Nach der Voraussetzung ist für jedes x, $M_1 + N_1 \frac{dy_1}{dx} = 0$, $M_2 + N_2 \frac{dy_2}{dx} = 0$; für $x = r$ aber wird wegen $y_1 = y_2$ auch $M_1 = M_2$, $N_1 = N_2$; es seien ferner der Kürze wegen z_1 und z_2 die Werthe von $\frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{dy_2}{dx}$ für $x = r$.

Man erhält also für $x = r$, $M_1 + N_1 z_1 = 0$ und $M_1 + N_1 z_2 = 0$, daher wenn z_1 nicht $= z_2$ ist, $M_1 = 0$ und $N_1 = 0$ für $x = r$.

Wenn aber das ganze Polynom $y_1 - y_2$ nur durch $x - r$, nicht aber durch dessen Quadrat theilbar ist, so ist

$$\frac{d(y_1 - y_2)}{dx} \text{ für } x = r \text{ nicht } = 0$$

also auch z_1 nicht $= z_2$; also folgt, dass unter dieser Voraussetzung das ganze Polynom N_1 durch $x - r$ theilbar ist, wo r eine Wurzel von $y_1 - y_2 = 0$ ist, und da derselbe Schluss von jeder Wurzel dieser Gleichung gilt, auch alle Wurzeln von einander verschieden sein sollen, so ist N_1 durch $y_1 - y_2$ theilbar. Bezeichnet y_3 eine dritte Lösung, ebenfalls ein ganzes Polynom, so folgt auf gleiche Weise, dass N_1 durch $y_1 - y_3$ theilbar ist, wenn alle Wurzeln der Gleichung $y_1 - y_3 = 0$ von einander verschieden sind, und hieraus ist weiter zu schliessen, dass N_1 durch das Produkt $(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)$ theilbar sein muss, wenn zu den vorigen Bedingungen noch die hinzutritt, dass keine Wurzel von $y_1 - y_2 = 0$ irgend einer von $y_1 - y_3 = 0$ gleichkomme. Also wird überhaupt N_1 durch $(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)$ theilbar sein, wenn die Gleichung $(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) = 0$ keine gleiche Wurzeln hat. Nimmt man die noch übrigen Lösungen nach und nach hinzu, so ergiebt sich, dass das ganze Polynom N_1 durch $(y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots . (y_1 - y_\mu) = \psi' y_1$ theilbar sein muss, wenn die Gleichung $\psi' y_1 = 0$, $[\psi = (y - y_1)(y - y_2) \ldots . (y - y_\mu)$ gesetzt wie früher] keine gleiche Wurzeln hat. Ebenso muss N_2 durch $\psi' y_2 = (y_2 - y_1)(y_2 - y_3) \ldots . (y_2 - y_\mu)$ theilbar sein, wenn die Gleichung $\psi' y_2 = 0$ nur ungleiche Wurzeln hat, u. s. w. Sind also die ganzen Polynome $y_1, y_2 \ldots . y_\mu$, welche als Lösungen der obigen Gleichung angenommen waren, so beschaffen, dass keine der Gleichungen $\psi' y_1 = 0$, $\psi' y_2 = 0 \ldots . \psi' y_\mu = 0$ irgend zwei gleiche Wurzeln darbietet, so müssen die ganzen Polynome $N_1, N_2 \ldots . N_\mu$ der Reihe nach durch $\psi' y_1$, $\psi' y_2$, u. s. w. theilbar sein.

Wenn daher N_1 und $\psi' y_1$ von gleichen Graden sind, so ist ihr Quotient Q_1 constant, und unter den entsprechenden Bedingungen sind es $Q_2, Q_3 \ldots . Q_\mu$ ebenfalls. Allgemein sind aber diese $Q_1, Q_2 \ldots . Q_\mu$ im gegenwärtigen Falle, wie bewiesen ist, ganze Polynome; es kann sich nun treffen, dass diese sämmtlich nur durch constante Faktoren von einander abweichen, so dass man hat: $Q_1 = q_1 X$, $Q_2 = q_2 X, \ldots . Q_\mu = q_\mu X$, wo X ein ganzes Polynom; dividirt man alsdann mit X, so bleibt nur noch zu untersuchen, ob der in Hinsicht auf y ungebrochene Theil der verwandelten Differentialgleichung, nämlich ob $\frac{Gdx + Hdy}{X}$ ein vollständiges Differential ist oder nicht.

In Anwendungen findet sich nicht selten $G = 0$, $H = 0$, oder $H = 0$ und $G = f(x)$; in diesen Fällen ist die Frage sogleich erledigt; oder es findet sich überhaupt, dass $\frac{Gdx + Hdy}{X}$ ein genaues Differential ist $= dU$; alsdann ist auch das Integral der Gleichung gefunden; man erhält nämlich

$$d\Omega = dU + q_1 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + \ldots . + q_\mu \frac{d(y - y_\mu)}{y - y_\mu}.$$

Die Bedingungen, unter welchen der angedeutete Gang Erfolg haben kann, betreffen theils die Anzahl und die Grade der hier als ganze Polynome gedachten vorläufigen Lösungen, theils die Beschaffenheit der mit Q bezeichneten Quotienten, und ob sie erfüllt werden oder nicht, ist daher in jedem vorgelegten Falle leicht, oft schon durch den blossen Anblick der Ausdrücke zu entscheiden. Man wird daher diesen Weg nur betreten, wenn ein vorläufiger Ueberblick ihn nicht von vorn herein als ungangbar ausweist, wie es offenbar gewöhnlich geschehen wird. In solchem Falle gelangt man wenigstens zu der Erkenntniss, dass das gesuchte Integral der vorausgesetzten Form, welche sich zunächst durch das Dasein einiger einfacher Lösungen als möglich dargestellt hatte, in der That nicht fähig ist.

Wenn übrigens alle diese Betrachtungen sich auf viele Annahmen stützen, die bei einer ganz willkürlich gebildeten Differentialgleichung gewöhnlich nicht zutreffen werden, so ist damit gesagt, dass sie — wie alle bekannten Regeln — nur für eine gewisse Classe von Differentialgleichungen gelten. Es ist auch wirklich ganz unmöglich, allgemeine Regeln für die Integration jeder Differentialgleichung zu geben, wenn nicht von Annäherungen durch Reihen u. dgl. die Rede ist, welche hierher nicht gehören. Der Umfang der hier angezeigten Mittel übertrifft jedoch nicht wenig den der bisher bekannten, da sowohl die Regel der homogenen als auch die der linearen Gleichungen als sehr eingeschränkte Fälle den obigen Betrachtungen untergeordnet werden können, die erstere wenigstens insoweit, als sie sich auf rationale Formen der M und N bezieht; wobei noch gelegentlich bemerkt werden mag, dass die Bedingung, wonach M und N ganze Polynome in y sein sollten, hier überall nur der Klarheit und Einfachheit wegen gestellt, keineswegs aber durchaus nothwendig ist. Da jedoch diese Untersuchungen allerdings nur unter vielen Einschränkungen auf anderweitige Formen ausgedehnt werden könnten, so habe ich es vorgezogen, in gegenwärtiger Schrift bei der Annahme stehen zu bleiben, dass in Bezug auf y, M und N ganze Polynome sind.

Die merkwürdigste unter den vorhin aufgestellten Bedingungen für die vorausgesetzte Form des Integrals ist die, dass von den durch $\psi' y_1$, $\psi' y_2, \ldots . \psi' y_\mu$ bezeichneten Produkten keines durch ein Quadrat theilbar sein darf. Wenn diese Bedingung, welche bloss von der Beschaffenheit der vorläufigen Lösungen abhängt, nicht erfüllt wird, so ist klar, dass damit nicht gesagt ist, es könne das gesuchte Integral nicht dennoch in der angenommenen Form bestehen; vielmehr lassen sich offenbar Gleichungen von dieser Form, in welcher eben $\psi' y_1$ u. s. w. durch ein oder auch durch mehrere Quadrate theilbar sind, ganz leicht absichtlich bilden. Aber wenn die obige Bedingung nicht erfüllt ist, so fällt der Beweis weg, dass N_1 durch $\psi' y_1$ theilbar ist und es kann nur durch die Ausführung der Division oder überhaupt auf irgend eine andere Weise entschieden werden, ob diese Theilbarkeit stattfindet oder nicht. Wenn sie nicht stattfindet, so werden spätere Beispiele zeigen, dass dann in gewissen Fällen der integrirende Faktor eine andere Gestalt annimmt, welche aber doch auf das engste an die vorläufigen Lösungen geknüpft ist.

*

§ 4. Eine Art von Differentialgleichungen, für welche die obigen Voraussetzungen sämmtlich zutreffen und deren Integration sich daher durch sehr einfache Betrachtungen bewirken lässt, ergiebt sich wie folgt.

Es seien M oder N ganze Polynome sowohl nach x als nach y und zwar vom n^{ten} Grade in dem Sinne, dass die höchste Summe der in M oder N — im Allgemeinen, aber nicht nothwendig, in beiden — vorkommenden, demselben Gliede zugehörigen Exponenten von x und y gleich n sei, und die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ habe $n+1$ lineare Lösungen $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1, \ldots . y_{n+1} = \alpha_{n+1} x + \beta_{n+1}$. Dass dies möglich ist sieht man leicht. Denn wird in der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, $y = \alpha x + \beta$ gesetzt, so erhält man eine kein y enthaltende Gleichung, — sie werde durch $(M) + (N)\alpha = 0$ bezeichnet — worin x auf den n^{ten} Grad steigt. Soll diese für jedes x bestehen, so ergeben sich $n+1$ Bedingungen zwischen den Vorzahlen in M und N, da die Faktoren der verschiedenen Potenzen von x verschwinden müssen. Mit Ausnahme besonderer Fälle, welche zu beachten dem augenblicklichen Zwecke fremd sein würde, enthält die erste dieser Gleichungen, von der höchsten (n^{ten}) Potenz von x angefangen, kein β und ist in Bezug auf α vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade. Die zweite giebt für jedes α den Werth von β als eine rationale Funktion von α, welche sich auch in die Form einer ganzen Funktion von α bringen lässt, nämlich

$$\beta = A + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \ldots . + A_n\alpha^n,$$

wo die A sämmtlich bekannt, d. h. durch die Vorzahlen der M und N gegeben sind. Hiermit erhält man $n+1$ Paare zusammen gehöriger α und β, deren jedes den noch übrigen $n-1$ Bedingungsgleichungen genügen muss. Es bestehen also zwischen den Vorzahlen der M und N, deren Anzahl $(n+1)(n+2)$ ist, wenn jene als vollständige Polynome n^{ten} Grades gedacht werden, $(n+1)(n+2)$ Bedingungen, so dass noch $3n+3$ Vorzahlen in M und N willkürlich bleiben, oder vielmehr nur $3n+2$, da immer eine derselben als Einheit angesetzt werden kann.

Da M und N nach der Voraussetzung in Hinsicht auf y den n^{ten} Grad nicht überschreiten, während $\psi = (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_{n+1})$ vom $(n+1)^{\text{ten}}$ Grade ist, so sind in $\frac{M}{\psi}$ und $\frac{N}{\psi}$ ungebrochene Theile nicht enthalten, oder man hat, den früheren Bezeichnungen gemäss, $G = 0$, $H = 0$. Ferner ist N_1 ein Polynom n^{ten} Grades und $\psi' y_1$ ist es auch unter der Voraussetzung, dass alle α von einander verschieden sind. Wenn also noch $\psi' y_1$ durch kein Quadrat theilbar ist, so wird die frühere Schlussweise sofort gültig und man hat $Q_1 =$ const. $= q_1$ und ebenso, wenn $\psi' y_2$ durch kein Quadrat theilbar ist, hat man $Q_2 = q_2$ u. s. w.

Daher folgt der Lehrsatz:

Wenn M und N ganze Polynome nach x und y sind, welche den n^{ten} Grad nicht überschreiten, von der Beschaffenheit, dass die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, $n+1$ lineare Lösungen hat, wie $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$, u. s. w.; wenn in diesen jedes α von jedem andern α verschieden ist; wenn nach Bildung des Produktes $\psi = (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_{n+1})$ keines der daraus abgeleiteten ganzen Polynome $\psi' y_1 [=(y_1-y_2)(y_1-y_3)\ldots(y_1-y_{n+1})]$, $\psi' y_2 \ldots \psi' y_{n+1}$ durch ein Quadrat [d. h. einen Ausdruck von der Form $(x+\delta)^2$] theilbar ist — so ist jenes Produkt ψ der integrirende Divisor der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ und zwar hat man:

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = q_1 \frac{d(y-y_1)}{y-y_1} + \ldots . + q_{n+1} \frac{d(y-y_{n+1})}{y-y_{n+1}}.$$

Die Werthe von $q_1, q_2 \ldots .$ ergeben sich leicht. Es sei, nach Potenzen von x entwickelt, $N_1 = C_1 x^n + C' x^{n-1} + C'' x^{n-2} + \ldots .$, so folgt:

$$q_1 = \frac{C_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots.(\alpha_1-\alpha_{n+1})},$$

und ebenso die übrigen q.

Wenn die zuletzt aufgestellte Bedingung in Betreff der $\psi' y_1, \psi' y_2 \ldots \ldots$ nicht erfüllt wird, so kann die obige Form des Integrals dennoch bestehen, aber es ist auch möglich, dass sie nicht zulässig ist, wie bereits am Schlusse des vorigen § bemerkt wurde.

Zusätzlich ist hier noch zu bemerken:

Die allgemeine Form einer linearen Lösung ist $\lambda y = \alpha x + \beta$, wofür $y = \alpha x + \beta$ gesetzt werden kann, wenn λ nicht $= 0$ ist. Es kann aber der Fall eintreten, dass die obige Gleichung $n+1$ lineare Lösungen hat, darunter aber μ solche mit $\lambda = 0$; seien diese $x = \gamma_1$, $x = \gamma_2, \ldots . x = \gamma_\mu$, die übrigen aber von der früheren Art, nämlich

$$y_1 = \alpha_1 x + \beta_1, \ldots . y_{n+1-\mu} = \alpha_{n+1-\mu} x + \beta_{n+1-\mu},$$

wobei angenommen bleibt, dass alle α von einander verschieden sind und ebenso jedes γ von jedem andern γ. Auch in diesem Fall gilt der obige Satz; wird nämlich

$$\psi = (y-y_1)(y-y_2)\ldots.(y-y_{n+1-\mu})$$

gesetzt und

$$X = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\ldots.(x-\gamma_\mu),$$

so ist $X.\psi$ der integrirende Divisor der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, wie folgendermassen zu beweisen ist.

Da der Gleichung durch $x = \gamma_1$ Genüge geschieht, so muss für $x = \gamma_1$, $N = 0$, also N durch $x - \gamma_1$ theilbar sein; ebenso durch $x - \gamma_2$ u. s. w., also muss N durch X theilbar sein oder

$$N = X.\Phi,$$

wo Φ ein ganzes Polynom in x und y ist, welches nach beiden zusammen nur vom $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Grade sein darf, da X vom μ^{ten} und N vom n^{ten} Grade sein soll. Da ferner $M + N\alpha = 0$ wird für $y = \alpha x + \beta$, und da die hieraus entspringende Gleichung für α nur vom $(n+1-\mu)^{\text{ten}}$ Grade ist, indem sie nur ebenso viele Werthe von α nach der Voraussetzung darbietet, so darf auch M in Bezug auf y den $(n+1-\mu)^{\text{ten}}$ Grad nicht überschreiten. Daher sind M

und ψ in Bezug auf y von gleichen Graden oder wenigstens M nicht von höherem Grade als ψ; zerlegt man also in einfache Brüche, so kommt

$$\frac{M}{\psi} = G + \frac{M_1}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots\ldots,$$

wo der ungebrochene Theil G von x allein abhängt. Weil M vom n^{ten} Grade ist, so kann die höchste darin vorkommende Potenz von y_1, nämlich die $(n+1-\mu)^{\text{te}}$ nur mit einem Polynom vom $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grade in x multiplicirt sein; also ist G im Allgemeinen und höchstens vom $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Grade in x. Ferner ist $\frac{N}{\psi}$ oder $\frac{X\Phi}{\psi}$ in Betreff des y ein ächter Bruch, da Φ nach y den $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Grad nicht überschreitet, während ψ den $(n+1-\mu)^{\text{ten}}$ erreicht; daher giebt die Zerlegung:

$$\frac{N}{\psi} = X\left(\frac{\Phi_1}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots + \frac{\Phi_{n+1-\mu}}{\psi' y_{n+1-\mu} (y - y_{n+1-\mu})}\right).$$

Mit Hülfe der Gleichungen $M_1 dx + N_1 dy = 0, \ldots\ldots$ folgt hieraus:

$$\frac{Mdx + Ndy}{X \cdot \psi} = \frac{Gdx}{X} + \frac{\Phi_1 d(y - y_1)}{\psi' y_1 (y - y_1)} + \ldots.$$

Nun ist $\frac{G}{X}$ ein ächter Bruch, zerlegbar in die Summe $\frac{k_1}{x - \gamma_1} + \ldots + \frac{k_\mu}{x - \gamma_\mu}$ und in Betreff der $\frac{\Phi_1}{\psi' y_1} = Q_1$ u. s. w. gelten die obigen Schlüsse, wonach $Q_1 = q_1$, $Q_2 = q_2, \ldots$ alle constant sind. Da nämlich jedes α von jedem andern α verschieden ist, so ist $\psi' y_1$ vom $(n-\mu)^{\text{ten}}$ Grade, wie Φ_1 auch. Ferner wird für den Werth x' von x, welcher $y_1 = y_2$ macht, $M_1 = M_2$ und $N_1 = N_2$, also $M_1 + N_1 \alpha_1 = 0$ und $M_1 + N_1 \alpha_2 = 0$; also $N_1 = 0$, $M_1 = 0$ für $x = x'$. Da nun $N_1 = X . \Phi_1 = 0$ für $x = x'$, so folgt $\Phi_1 = 0$ für $x = x'$. Es könnte freilich auch für $x = x'$, $X = 0$ werden, wenn zufällig eines der γ dem x' gleich käme; allein da die Grössen γ ganz beliebig gegeben sind, so würde ein solches Zusammentreffen hier ohne Bedeutung sein und könnte durch eine unendlich kleine Aenderung der γ sofort getilgt werden. Es ist also Φ_1 durch $x - x'$ theilbar und ebenso durch die übrigen Faktoren von $\psi' y_1$, nämlich $x - x''$, $x - x'''$, $\ldots x - x^{n-\mu}$, welche nach der Voraussetzung sämmtlich von einander verschieden sind. Demnach wird $Q_1 = q_1$, u. s. f.; mithin schliesslich:

$$\frac{Mdx + Ndy}{X \cdot \psi} = \frac{k_1 dx}{x - \gamma_1} + \ldots + \frac{k_\mu dx}{x - \gamma_\mu} + \frac{q_1 d(y - y_1)}{y - y_1} + \ldots + \frac{q_{n+1-\mu} d(y - y_{n+1-\mu})}{y - y_{n+1-\mu}}.$$

§ 5. Die bisherige Untersuchung ging davon aus, dass zuerst gewisse vorläufige Lösungen der Differentialgleichungen als gegeben gedacht wurden, nämlich y_1, y_2 u. s. f., und beantwortete dann die Frage, unter welchen Umständen sich der integrirende Divisor in der Form $X(y - y_1)(y - y_2) \ldots = X . \psi$ aus jenen Lösungen bilden liess. Es zeigte sich, dass dies zuweilen mit aller Sicherheit geschehen konnte. Um aber die Beziehungen, welche zwischen gewissen Formen des integrirenden Divisors und einigen vorläufigen Lösungen bestehen, vollständiger zu ergründen, wird es nützlich sein die vorige Untersuchung in umgekehrter Richtung aufzunehmen, wodurch folgender Lehrsatz gewonnen wird:

Wenn der integrirende Divisor die Form $X . \psi$ — wie oben — hat, so sind die $y_1, y_2 \ldots$ sämmtlich Lösungen der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$.

Hierbei wird wie überall angenommen, dass M und N ganze Polynome in y, so wie die von x abhängigen Grössen $y_1, y_2 \ldots$ alle von einander verschieden sind. Auch dürfen nicht M und N beide durch einen der Faktoren von ψ, z. B. durch $y - y_1$, theilbar sein.

Da derselbe Satz später für eine viel allgemeinere Form des integrirenden Faktors bewiesen werden wird, so hätte der gegenwärtige, als ein besonders einfacher Fall, jenem umfassenderen untergeordnet und dadurch einige Wiederholung vermieden werden können. Es gestatten jedoch die einfachen Fälle, welche hier zunächst hervorgehoben werden, eine Darstellung, wodurch nicht allein der obige Satz leicht bewiesen, sondern auch das Integral in vollständig entwickelter Gestalt sofort gefunden wird, wie es bei der späteren allgemeineren Form des integrirenden Faktors nicht mehr angeht. Unter diesen Umständen wird die Wiederholung, wie ich hoffe, kaum fühlbar und gewiss nicht störend sein.

Es seien demnach $\psi = (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_\nu)$ und $\frac{Mdx + Ndy}{X . \psi}$ ein vollständiges Differential. Der von y unabhängige Faktor $\frac{1}{X}$ kann dem M und N einverleibt gedacht, also für $\frac{M}{X}$ und $\frac{N}{X}$ bloss M und N geschrieben werden, wonach man hat:

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = d\Omega.$$

Durch Zerlegung in einfache Brüche wird erhalten:

$$\frac{M}{\psi} = G + \frac{P_1}{y - y_1} + \ldots + \frac{P_\nu}{y - y_\nu}, \quad \frac{N}{\psi} = H + \frac{Q_1}{y - y_1} + \ldots + \frac{Q_\nu}{y - y_\nu},$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$P_1 = \frac{M_1}{\psi' y_1}, \quad Q_1 = \frac{N_1}{\psi' y_1}, \text{ u. s. f.}$$

Demnach ist gegeben:

$$d\Omega = Gdx + Hdy + \frac{P_1 dx + Q_1 dy}{y - y_1} + \ldots + \frac{P_\nu dx + Q_\nu dy}{y - y_\nu};$$

daher:

$$\frac{d\Omega}{dx} = G + \frac{P_1}{y - y_1} + \ldots, \quad \frac{d\Omega}{dy} = H + \frac{Q_1}{y - y_1} + \ldots.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2\Omega}{dx\,dy} = \frac{dG}{dy} - \frac{P_1}{(y - y_1)^2} - \ldots - \frac{P_\nu}{(y - y_\nu)^2}$$

$$\frac{d^2\Omega}{dy\,dx} = \frac{dH}{dx} + \frac{Q_1 \frac{dy_1}{dx}}{(y - y_1)^2} + \ldots + \frac{Q_\nu \frac{dy_\nu}{dx}}{(y - y_\nu)^2} + \frac{dQ_1}{(y - y_1)\,dx} + \ldots + \frac{dQ_\nu}{(y - y_\nu)\,dx};$$

also muss identisch folgende Gleichung bestehn:

$$0=\frac{dH}{dx}-\frac{dG}{dy}+\frac{P_1+Q_1\frac{dy_1}{dx}}{(y-y_1)^2}+\ldots+\frac{P_\nu+Q_\nu\frac{dy_\nu}{dx}}{(y-y_\nu)^2}+\frac{dQ_1}{(y-y_1)\,dx}+\ldots+\frac{dQ_\nu}{(y-y_\nu)\,dx}.$$

Diese Gleichung kann nicht anders für jeden Werth sowohl von x als von y richtig bleiben, als wenn die rechter Hand vorkommenden positiven Potenzen von y (einschliesslich der 0^{ten}) durch das Verschwinden ihrer Faktoren alle wegfallen, was darauf hinauskommt, dass identisch $\frac{dH}{dx}-\frac{dG}{dy}=0$ sein muss und wenn ferner die Zähler der auf jene Glieder folgenden Brüche, jeder einzeln, gleich Null sind. Denn es können weder die Brüche, welche eine Potenz von $y-y_1$ zum Nenner haben, andere aufheben, deren Nenner Potenzen von $y-y_2$, $y-y_3$, ... sind, da nach der Voraussetzung unter den Grössen $y_1, y_2, y_3, \ldots$ gleiche nicht vorkommen; noch können solche Glieder, welche verschiedene Potenzen von $y-y_1$ zum Nenner haben, einander tilgen, wie leicht zu sehen oder auf nahe liegende Weise darzuthun ist, wenn man nur festhält, dass alle Zähler von y unabhängig sind. Demnach hat man $P_1+Q_1\frac{dy_1}{dx}=0$, d. h. $M_1+N_1\frac{dy_1}{dx}=0$; also ist y_1 eine Lösung der Gleichung $Mdx+Ndy=0$, und ebenso sind es $y_2, y_3, \ldots y_\nu$, wie im Lehrsatze behauptet wurde.

Ueberdem folgt aber noch aus dem Gange der obigen Rechnung, dass auch $\frac{dQ_1}{dx}=0$, also Q_1 constant sein muss; ebenso die übrigen Q; diese Constanten mögen wie bisher durch $q_1, q_2 \ldots q_\nu$ bezeichnet werden, so dass z. B. ist:

$$\frac{N_1}{\psi' y_1}=q_1, \text{ u. s. f.}$$

Es war aber oben M für $\frac{M}{X}$, N für $\frac{N}{X}$ gesetzt worden; stellt man also jetzt die M und N in ihrer ursprünglichen Bedeutung wieder her, so wird $\frac{N_1}{X.\psi' y_1}=q_1$, u. s. f. und

$$\frac{Mdx+Ndy}{X.\psi}=\frac{Gdx+Hdy}{X}+q_1\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}+\ldots+q_\nu\frac{d(y-y_\nu)}{y-y_\nu}.$$

Hier ist für die obigen G und H, $\frac{G}{X}$ und $\frac{H}{X}$ geschrieben, damit G und H die in den Brüchen $\frac{M}{\psi}$, $\frac{N}{\psi}$ enthaltenen ganzen Polynome bleiben, auch wenn M und N jetzt wieder in ihrer ursprünglichen Geltung genommen werden. Die obige Gleichung $\frac{dG}{dy}=\frac{dH}{dx}$ muss daher jetzt geschrieben werden:

$$\frac{d\left(\frac{G}{X}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{H}{X}\right)}{dx};$$

also ist $\frac{Gdx+Hdy}{X}$ ein vollständiges Differential $=dU$, und man erhält für die Form des Integrals der gegebenen Differentialgleichung, deren integrirender Faktor $\frac{1}{X.\psi}$ war,

$$\frac{Mdx+Ndy}{X.\psi}=d\Omega=dU+q_1\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}+\ldots+q_\nu\frac{d(y-y_\nu)}{y-y_\nu}.$$

§ 6. Es ist vorauszusehen, dass der vorige Satz auch gültig bleiben wird, wenn mehrere Faktoren von ψ einander gleich sind; aber es ist auch wichtig, diesen Fall näher zu betrachten, um die dabei bestehende Form des Integrals kennen zu lernen.

Sei demnach $\psi=(y-y_1)^{\lambda_1}(y-y_2)^{\lambda_2}\ldots(y-y_\nu)^{\lambda_\nu}$; die von x allein abhängigen $y_1, y_2 \ldots y_\nu$ alle von einander verschieden, die Exponenten λ sämmtlich positive ganze Zahlen, keiner $=0$ und wenigstens nicht alle $=1$. Auch dürfen, wie früher, die M und N nicht beide zugleich durch $y-y_1$ oder $y-y_2$ u. s. w. theilbar sein. Mit diesem ψ sei nun $\frac{Mdx+Ndy}{X.\psi}$ als vollständiges Differential gegeben, oder wenn wieder der bloss von x abhängige Divisor X den M und N einverleibt gedacht wird, so sei gegeben:

$$\frac{Mdx+Ndy}{\psi}=d\Omega.$$

Für die Zerlegung in einfache Brüche genügt es, nur die $y-y_1$ im Nenner enthaltenden Brüche zu entwickeln, da die übrigen Glieder denselben Gesetzen folgen; daher wird für jetzt auch bloss λ statt λ_1 geschrieben werden dürfen. Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{M_1}{(y_1-y_2)^{\lambda_2}(y_1-y_3)^{\lambda_3}\ldots(y_1-y_\nu)^{\lambda_\nu}}=F(y_1),\quad \frac{N_1}{(y_1-y_2)^{\lambda_2}\ldots(y_1-y_\nu)^{\lambda_\nu}}=\Phi(y_1)$$

oder was dasselbe ist, setzt man:

$$\frac{\lambda!\,M_1}{\psi^\lambda y_1}=F(y_1),\quad \frac{\lambda!\,N_1}{\psi^\lambda y_1}=\Phi(y_1)$$

so wird erhalten:

$$\frac{M}{\psi}=G+\frac{F(y_1)}{(y-y_1)^\lambda}+\frac{F'(y_1)}{(y-y_1)^{\lambda-1}}+\frac{F''(y_1)}{2!(y-y_1)^{\lambda-2}}+\ldots+\frac{F^{\lambda-1}(y_1)}{(\lambda-1)!(y-y_1)}+\ldots$$

$$\frac{N}{\psi}=H+\frac{\Phi(y_1)}{(y-y_1)^\lambda}+\frac{\Phi'(y_1)}{(y-y_1)^{\lambda-1}}+\frac{\Phi''(y_1)}{2!(y-y_1)^{\lambda-2}}+\ldots+\frac{\Phi^{\lambda-1}(y_1)}{(\lambda-1)!(y-y_1)}+\ldots$$

G und H sind die in den Quotienten enthaltenen ganzen Polynome; die den übrigen Faktoren von ψ, nämlich $y-y_2$, $y-y_3$ u. s. f. zugehörigen Theilbrüche sind nach Anleitung der zu $y-y_1$ gehörigen ergänzend beizufügen.

Es wird keine Dunkelheit verursachen, wenn hier noch kürzer für $F(y_1)$ und $\Phi(y_1)$ nur F und Φ gesetzt werden; ferner ist $\frac{M}{\psi}=\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{N}{\psi}=\frac{d\Omega}{dy}$; daher erhält man, die zu $y_2, y_3\ldots$ gehörigen Glieder von nun an weglassend:

$$\frac{d\Omega}{dx}=G+\sum\frac{F^{(\mu)}}{\mu!(y-y_1)^{\lambda-\mu}}$$

$$\frac{d\Omega}{dy}=H+\sum\frac{\Phi^{(\mu)}}{\mu!(y-y_1)^{\lambda-\mu}}.$$

Die Summation erstreckt sich von $\mu=0$ bis $\mu=\lambda-1$.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{d^2\Omega}{dx\,dy} = \frac{dG}{dy} - \sum \frac{(\lambda-\mu)\,F^{(\mu)}}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu+1}}$$

und aus der zweiten:

$$\frac{d^2\Omega}{dy\,dx} = \frac{dH}{dx} + \frac{dy_1}{dx}\sum \frac{(\lambda-\mu)\,\Phi^{(\mu)}}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu+1}} + \sum \frac{\frac{d\Phi^{\mu}}{dx}}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu}}.$$

Hier ist $\frac{d\Phi^{(\mu)}}{dx}$ die vollständige Ableitung nach x von $\Phi^{(\mu)}$, sowohl nach y_1 als nach dem in $\Phi^{(\mu)}$ noch anderweitig vorkommenden x zu nehmen. In der vorstehenden zweiten Summe schreibe man $\mu-1$ für μ, so erstreckt sich die Summation von $\mu=1$ bis $\mu=\lambda$, und wenn das zu $\mu=\lambda$ gehörige Glied abgesondert wird, so kann jene Summe ersetzt werden durch den Ausdruck:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda-1} \frac{\frac{d\Phi^{(\mu-1)}}{dx}}{(\mu-1)\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu+1}} + \frac{\frac{d\Phi^{(\lambda-1)}}{dx}}{(\lambda-1)\,!\,(y-y_1)}.$$

Wird hier noch $\frac{1}{(\mu-1)\,!}$ durch $\frac{\mu}{\mu\,!}$ ersetzt, so kann die unmittelbar vorstehende Summation auch auf $\mu=0$ ausgedehnt werden, da $\frac{\mu}{\mu\,!}$ mit μ zugleich Null wird; dadurch verwandelt sich der vorliegende Ausdruck in folgenden:

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{\mu\,\frac{d\Phi^{(\mu-1)}}{dx}}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu+1}} + \frac{\frac{d\Phi^{(\lambda-1)}}{dx}}{(\lambda-1)\,!\,(y-y_1)},$$

welcher in dem obigen Werthe von $\frac{d^2\Omega}{dy\,dx}$ an die Stelle der zweiten darin vorkommenden Summe zu setzen ist, wodurch erhalten wird:

$$\frac{d^2\Omega}{dy\,dx} = \frac{dH}{dx} + \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{(\lambda-\mu)\,\Phi^{(\mu)}.\frac{dy_1}{dx} + \mu\,\frac{d\Phi^{(\mu-1)}}{dx}}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu+1}} + \frac{\frac{d\Phi^{(\lambda-1)}}{dx}}{(\lambda-1)\,!\,(y-y_1)}.$$

Die Gleichheit der entwickelten beiden Werthe von $\frac{d^2\Omega}{dx\,dy}$ giebt folgende Bedingungsgleichung, welche identisch bestehen muss, wenn mit dem gegenwärtigen Werthe von ψ, $\frac{Mdx+Ndy}{\psi}$ ein vollständiges Differential sein soll, nämlich:

$$0 = \frac{dH}{dx} - \frac{dG}{dy} + \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1} \frac{(\lambda-\mu)\left(F^{(\mu)} + \Phi^{(\mu)}\frac{dy_1}{dx}\right) + \mu\,\frac{d\Phi^{(\mu-1)}}{dx}}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu+1}} + \frac{\frac{d\Phi^{(\lambda-1)}}{dx}}{(\lambda-1)\,!\,(y-y_1)}$$

$+$ die zu $y_2, y_3, \ldots y_\nu$ gehörigen Glieder.

Diese Bedingung kann nicht anders erfüllt werden, als durch das Verschwinden der einzelnen Summanden; es müssen also folgende Gleichungen bestehen:

$$\frac{dH}{dx} - \frac{dG}{dy} = 0;$$

$$(\lambda-\mu)\left(F^{(\mu)} + \Phi^{(\mu)}\frac{dy_1}{dx}\right) + \mu\,\frac{d\Phi^{(\mu-1)}}{dx} = 0, \text{ für } \mu = 0, 1, 2 \ldots. \text{ bis } \lambda-1,$$

endlich

$$\frac{d\Phi^{(\lambda-1)}}{dx} = 0,$$

weil dieses Glied das einzige ist, das die erste Potenz von $y-y_1$ im Nenner hat. Dass zu den vorstehenden Gleichungen noch die entsprechenden für $y_2, y_3 \ldots. y_\nu$ hinzutreten, versteht sich von selbst. Für $\mu=0$ giebt die mittlere unter den vorstehenden Gleichungen $F+\Phi\frac{dy_1}{dx}=0$, d. h. $M_1 dx + N_1 dy_1 = 0$; folglich ist y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $Mdx+Ndy=0$, was zu beweisen war. Dasselbe gilt von $y_2, y_3 \ldots. y_\nu$.

Unter der Voraussetzung, dass die soeben aufgestellten Bedingungen sämmtlich erfüllt sind, ist nun noch die Form des Integrals Ω zu finden. Es war

$$d\Omega = Gdx + Hdy + \sum \frac{F^{(\mu)}dx + \Phi^{(\mu)}dy}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu}} + \text{die zu } y_2, y_3 \ldots. \text{ gehörenden Glieder.}$$

Setzt man hier für $F^{(\mu)}$ den aus der obigen Gleichung folgenden Werth:

$$F^{(\mu)} = -\Phi^{(\mu)}.\frac{dy_1}{dx} - \frac{\mu}{\lambda-\mu}\cdot\frac{d\Phi^{(\mu-1)}}{dx}$$

so folgt:

$$d\Omega = Gdx + Hdy + \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-1}\left(\frac{\Phi^{(\mu)}\,d(y-y_1)}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu}} - \frac{\mu\,d\Phi^{(\mu-1)}}{\mu\,!\,(\lambda-\mu)\,(y-y_1)^{\lambda-\mu}}\right) + \ldots.$$

oder:

$$d\Omega = Gdx + Hdy + \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-2}\frac{\Phi^{(\mu)}\,d(y-y_1)}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu}} - \sum_{\mu=1}^{\mu=\lambda-1}\frac{d\Phi^{(\mu-1)}}{(\mu-1)\,!\,(\lambda-\mu)\,(y-y_1)^{\lambda-\mu}} + \frac{q_1}{(\lambda-1)!}\cdot\frac{d(y-y_1)}{y-y_1} + \ldots.$$

wo $\Phi^{(\lambda-1)} = q_1$ gesetzt ist, da dieser Werth zufolge der letzten Bedingungsgleichung constant sein muss. In der zweiten der vorstehenden Summen schreibe man nun $\mu+1$ für μ, um die Grenzwerthe von μ auf 0 und $\lambda-2$ zu bringen, so kommt:

$$d\Omega = Gdx + Hdy + \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-2}\left(\frac{\Phi^{(\mu)}\,d(y-y_1)}{\mu\,!\,(y-y_1)^{\lambda-\mu}} - \frac{d\Phi^{(\mu)}}{\mu\,!\,(\lambda-\mu-1)\,(y-y_1)^{\lambda-\mu-1}}\right) + \frac{q_1\,d(y-y_1)}{(\lambda-1)\,!\,(y-y_1)} + \ldots..$$

wo sich der Ausdruck unter dem Σ sogleich als vollständiges Differential zu erkennen giebt und mithin erhalten wird:

$$d\Omega = Gdx + Hdy - \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-2} d\left(\frac{\Phi^{(\mu)}}{\mu\,!\,(\lambda-\mu-1)(y-y_1)^{\lambda-\mu-1}}\right) + \frac{q_1\,d(y-y_1)}{(\lambda-1)\,!\,(y-y_1)} + \ldots.$$

*

Da nun auch vermöge der ersten Bedingung $Gdx + Hdy$ ein vollständiges Differential ist, so ist hiermit die Integration erledigt. Der Deutlichkeit wegen mag noch bemerkt werden, dass $\Phi^{(\mu)}$ folgenden Werth hat:

$$\Phi^{(\mu)} = \frac{d^\mu \Phi(y_1)}{dy_1{}^\mu}, \quad \Phi(y_1) = \frac{\lambda!\, N_1}{\psi^\lambda(y_1)} = \frac{N_1}{(y_1 - y_2)^{\lambda_2} \ldots (y_1 - y_\nu)^{\lambda_\nu}}.$$

Ferner ist $\Phi^{(\lambda-1)} = q_1 =$ constans, eine Bedingung, welche die Funktion N_1 erfüllen muss, und ähnliche Bedingungen gelten für N_2, $N_3 \ldots . N_\nu$. Es darf daher auch das Polynom N nicht gänzlich willkürlich gewählt werden; seine nothwendige Form ergiebt sich aber sogleich, wenn man die obige Zerlegung von $\frac{N}{\psi}$ in Betracht zieht, wonach war:

$$N = H\psi + \left(\Phi(y_1) + \Phi'(y_1)(y - y_1) + \ldots . + \Phi^{(\lambda-1)}(y_1) \frac{(y-y_1)^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}\right) \frac{\psi}{(y-y_1)^\lambda} + \ldots \ldots$$

d. h. da $\Phi^{(\lambda-1)}(y_1) = q_1$ ist, also constant:

$$N = H\psi + \Phi(y_1 + y - y_1) \cdot \frac{\psi}{(y-y_1)^\lambda} + \ldots \ldots . = H\psi + \Phi y \cdot \frac{\psi}{(y-y_1)^\lambda} + \ldots \ldots$$

Φy kann jedes ganze Polynom nach y vom $(\lambda - 1)^{\text{ten}}$ Grade sein, wofern nur die höchste Potenz von y einen constanten Faktor hat; es ist also allgemein zu setzen:

$$\Phi y = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots . + A_{\lambda-2} y^{\lambda-2} + \frac{q \cdot y^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$$

wobei die A beliebige Funktionen von x sind.

Es sei z. B. $\psi = (y - y_1)^{\lambda_1} (y - y_2)^{\lambda_2} (y - y_3)^{\lambda_3}$ und man bezeichne mit A_0, $A_1 \ldots$, B_0, $B_1 \ldots$, C_0, $C_1 \ldots$ beliebige Funktionen von x, so ist die hierhergehörige allgemeine Form von N folgende:

$$\begin{aligned} N = {} & \left(A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots . + A_{\lambda_1-2} y^{\lambda_1-2} + \frac{q_1 \cdot y^{\lambda_1-1}}{(\lambda_1-1)!}\right)(y - y_2)^{\lambda_2} (y - y_3)^{\lambda_3} \\ & + \left(B_0 + B_1 y + \ldots \ldots \ldots . + B_{\lambda_2-2} y^{\lambda_2-2} + \frac{q_2 \cdot y^{\lambda_2-1}}{(\lambda_2-1)!}\right)(y - y_1)^{\lambda_1} (y - y_3)^{\lambda_3} \\ & + \left(C_0 + C_1 y + \ldots \ldots \ldots . + C_{\lambda_3-2} y^{\lambda_3-2} + \frac{q_3 \cdot y^{\lambda_3-1}}{(\lambda_3-1)!}\right)(y - y_1)^{\lambda_1} (y - y_2)^{\lambda_2} + H . \psi; \end{aligned}$$

H ist ein ganzes Polynom in y, beliebig nach x.

Sind nun ψ und N gegeben und soll $\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = d\Omega$ sein, so findet sich Ω sofort aus der vorstehenden Entwickelung, wobei nur noch zu bemerken ist, dass dann für G der Werth

$$G = \int \frac{dH}{dx} dy + \xi$$

genommen werden muss; das beigefügte ξ ist eine beliebige Funktion von x; dadurch wird

$$Gdx + Hdy = \xi dx + d(\int Hdy) = dU, \quad \text{also} \quad U = \int Hdy + \int \xi dx;$$

es versteht sich, dass die Integration in $\int Hdy$ sich auf y allein bezieht. Mit Hülfe des gefundenen Ω ergiebt sich dann sofort

$$M = \frac{d\Omega}{dx} \cdot \psi.$$

Es sei z. B. $\psi = (y - y_1)^\lambda$, $N = A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots . + A_{\lambda-2} y^{\lambda-2} + \frac{q \cdot y^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!}$, und der Kürze wegen $H = 0$. Alsdann ist $\Phi(y_1) = N_1$ und

$$\frac{Mdx + Ndy}{(y-y_1)^\lambda} = d\Omega = Gdx - \sum_{\mu=0}^{\mu=\lambda-2} d\left(\frac{\frac{d^\mu N_1}{dy_1{}^\mu}}{\mu!(\lambda-\mu-1)(y-y_1)^{\lambda-\mu-1}}\right) + \frac{qd(y-y_1)}{(\lambda-1)!(y-y_1)};$$

G hängt allein von x ab.

Einige einfache Beispiele mögen zur Erläuterung dienen. Es sei

$$\psi = y^3, \quad N = A_0 + A_1 y + ky^2$$

und

$$\frac{Mdx + Ndy}{y^3} = d\Omega;$$

so folgt, wenn G eine beliebige Funktion von x ist:

$$d\Omega = Gdx - d\left(\frac{A_0}{2y^2}\right) - d\left(\frac{A_1}{y}\right) + k\frac{dy}{y}$$

$$M = Gy^3 - \tfrac{1}{2}\frac{dA_0}{dx} y - \frac{dA_1}{dx} y^2;$$

es ist also, wenn A_0, A_1 und G beliebig in x gegeben sind:

$$\frac{\left(Gy^3 - \frac{1}{2}\frac{dA_0}{dx} y - \frac{dA_1}{dx} y^2\right) dx + (A_0 + A_1 y + ky^2)\, dy}{y^3} = d\Omega$$

und

$$\Omega = \int Gdx - \frac{A_0}{2y^2} - \frac{A_1}{y} + k \log y.$$

Es sei $N = x^3 - y^3 - 1$, $\psi = (y - x)^4$ und $\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = d\Omega$, so findet man nach obiger Regel:

$$d\Omega = Gdx + \tfrac{1}{3} d\left(\frac{1}{(y-x)^3}\right) + \tfrac{3}{2} d\left(\frac{x^2}{(y-x)^2}\right) + 3d\left(\frac{x}{(y-x)}\right) - \frac{d(y-x)}{y-x},$$

G eine beliebige Funktion von x. Hieraus folgt:

$$M = 1 + 3x^2(y - x) + 6x(y - x)^2 + 4(y - x)^3 + G(y - x)^4.$$

Es sei

$$N = (\tfrac{1}{2} q_1 y^2 + X_1 y + X_0)(y - y_2)^2 + (q_2 y + \xi)(y - y_1)^3$$

und $\psi = (y - y_1)^3 (y - y_2)^2$; y_1, y_2, X_1, X_0, ξ, G beliebige Funktionen von x; so wird

$$\frac{Mdx + Ndy}{(y-y_1)^3 (y-y_2)^2} = d\Omega = Gdx - d\left(\frac{\frac{1}{2} q_1 y_1^2 + X_1 y_1 + X_0}{2(y-y_1)^2}\right)$$

$$- d\left(\frac{q_1 y_1 + X_1}{y - y_1}\right) + \tfrac{1}{2} q_1 \frac{d(y-y_1)}{y-y_1}$$

$$- d\left(\frac{q_2 y_2 + \xi}{y - y_2}\right) + q_2 \frac{d(y-y_2)}{y-y_2};$$

woraus sich dann $M = \frac{d\Omega}{dx} \cdot \psi$ ergiebt.

Man kann auf diese Weise mit einem innerhalb gewisser Schranken willkürlich gegebenen N beliebig Differentialgleichungen bilden, deren integrirender Faktor die obige Form hat, und zugleich ihr Integral augenblicklich hinschreiben.

§ 7. Im dritten Capitel des zweiten Abschnittes der *Institutiones calculi integralis* beschäftigt sich Euler damit, Differentialgleichungen aufzusuchen, welche durch Multiplicatoren von gegebener Form integrabel werden. Dass die Lösung solcher Aufgaben durch die hier entwickelten Hülfsmittel nicht unerheblich vereinfacht und erleichtert wird, will ich jetzt an einigen Beispielen zeigen.

Die erste Aufgabe lautet: die Funktionen P und Q von x so zu bestimmen, dass die Gleichung $Pydx + (y + Q)dy = 0$ durch den Multiplicator $\frac{1}{y^3 + My^2 + Ny}$, worin M und N Funktionen von x sind, integrabel werde.

Auflösung. Zufolge der Aufgabe soll sein:

$$\frac{Pydx + (Q+y)dy}{y(y-y_1)(y-y_2)} = d\Omega.$$

Wenn nun y_1 von y_2 und beide von Null verschieden sind, so muss sich $d\Omega$ auf folgende Gestalt bringen lassen, wie in § 5 gezeigt worden ist, nämlich:

$$d\Omega = q_1 \frac{d(y-y_1)}{y-y_1} + q_2 \frac{d(y-y_2)}{y-y_2} + q_3 \frac{dy}{y}.$$

Die Faktoren q_1, q_2, q_3 bedeuten Constanten. Diese Form mit der gegebenen verglichen giebt sofort, wenn man einen constanten Faktor f zu Hülfe nimmt:

$$f(Q+y) = q_1 y(y-y_2) + q_2 y(y-y_1) + q_3(y-y_1)(y-y_2)$$

$$fPydx = -q_1 y(y-y_2)dy_1 - q_2 y(y-y_1)dy_2,$$

woraus folgende Bedingungen fliessen:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0, \quad q_1 y_1 + q_2 y_2 = f, \quad q_3 y_1 y_2 = fQ$$

$$q_1 dy_1 + q_2 dy_2 = 0, \quad q_1 y_2 dy_1 + q_2 y_1 dy_2 = fPdx,$$

deren vierte eine Folge der zweiten ist. Werden nun y_1 und die Constanten q_1, q_2, f beliebig angenommen, so folgt aus der ersten Gleichung q_3, aus der zweiten y_2, aus der dritten Q,

aus der letzten P, womit die Aufgabe gelöst ist. Euler giebt der gefundenen Gleichung die Form:

$$\frac{-\beta xydx + (\alpha - x + \beta x^2 + y)dy}{y[y^2 + (2\alpha - x)y + \alpha^2 - \alpha x + \alpha\beta x^2]} = d\Omega.$$

Um zu dieser zu gelangen, muss man zuerst bemerken, dass der eingeklammerte Faktor des Nenners in zwei lineare Faktoren zerlegbar ist; es ist nämlich für $\delta = \sqrt{1 - 4\alpha\beta}$:

$$y^2 + (2\alpha - x)y + \alpha^2 - \alpha x + \alpha\beta x^2 = \left(y - \frac{1+\delta}{2}x + \alpha\right)\left(y - \frac{1-\delta}{2}x + \alpha\right).$$

Diese Thatsache, welche in Euler's Darstellung gar nicht zu Tage kommt, enthält dennoch das, was aus dieser Untersuchung eigentlich zu lernen war, nämlich dass die vorliegende Aufgabe nur dann, dann aber immer lösbar ist, wenn y_1 von y_2 linear abhängt, also $y_2 = my_1 + n$ ist. Dabei bleibt zwar y_1 noch eine willkürliche Funktion von x, allein dies ist ganz unwesentlich, da in der Differentialgleichung die ursprüngliche Veränderliche x nur in dem Produkte $\frac{dy_1}{dx} \cdot dx$, also in der That gar nicht vorkommt, vielmehr y_1 als solche angesehen und sofort durch x ersetzt werden kann.

Um jedoch sogleich auf die Euler'sche Form zu kommen, setze man in den oben gefundenen Gleichungen

$$y_1 = \gamma_1 x - \alpha, \; y_2 = \gamma_2 x - \alpha, \; \gamma_1 = \frac{1+\delta}{2}, \; \gamma_2 = \frac{1-\delta}{2}; \; \gamma_1 + \gamma_2 = 1, \; \gamma_1\gamma_2 = \alpha\beta;$$

so folgt:

$$q_1\gamma_1 + q_2\gamma_2 = 0, \; (q_1 + q_2)\alpha + f = 0 \text{ oder } q_3\alpha = f;$$

$$\alpha Q = y_1 y_2 = \alpha\beta x^2 - \alpha x + \alpha^2, \text{ also } Q = \alpha - x + \beta x^2;$$

$$fP = q_1\gamma_1(\gamma_2 x - \alpha) + q_2\gamma_2(\gamma_1 x - \alpha) = (q_1 + q_2)\alpha\beta x = -f\beta x;$$

daher $P = -\beta x$; wodurch die gewünschte Uebereinstimmung mit der Euler'schen Form hergestellt ist.

Will man noch die bisher ausgeschlossene Annahme $y_1 = y_2$ in Betracht ziehen, so ist zu bemerken, dass dadurch nur die Form des Integrals geändert wird, während der gefundene Werth von $d\Omega$ auch für $y_1 = y_2$ ein vollständiges Differential bleibt. Aus

$$\frac{Pydx + (Q+y)dy}{y(y-y_1)^2} = d\Omega$$

erhält man nach § 6 sofort:

$$d\Omega = -d\left(\frac{y_1 + Q}{y_1(y-y_1)}\right) - q\frac{d(y-y_1)}{y-y_1} + q\frac{dy}{y}$$

$$q = \frac{Q}{y_1^2} = \text{const.}$$

Dies giebt $Q = qy_1^2$ und $P = -(1 + qy_1)$; also

$$d\Omega = \frac{-(1+qy_1)ydy_1 + (qy_1^2 + y)dy}{y(y-y_1)^2}.$$

Die Euler'sche Form wird im gegenwärtigen Falle, da $y_1 = y_2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{2}$, $\delta = 0$, $\beta = \frac{1}{4\alpha}$, $Q = \alpha - x + \frac{x^2}{4\alpha}$ oder $\alpha Q = \left(\frac{x}{2} - \alpha\right)^2$ ist:

$$d\Omega = \frac{-\frac{xy}{4\alpha}dx + \left[\frac{1}{\alpha}\left(\frac{x}{2} - \alpha\right)^2 + y\right]dy}{y\left(y - \frac{x}{2} + \alpha\right)^2},$$

womit die vorige in Uebereinstimmung gebracht wird durch die Annahme $q = \frac{1}{\alpha}$ und die Einführung von $\frac{x}{2} - \alpha$ für y_1. Hiermit findet sich

$$\alpha d\Omega = -d\left(\frac{x}{2y - x + 2\alpha}\right) - \frac{d(2y - x)}{2y - x + 2\alpha} + \frac{dy}{y}$$

oder

$$\alpha\Omega = \log\frac{y}{2y - x + 2\alpha} - \frac{x}{2y - x + 2\alpha}.$$

§ 8. Die nächstfolgende Aufgabe Euler's fordert: P, Q, M, N in x so zu bestimmen, dass für einen beliebigen positiven ganzen Werth von n sei:

$$\frac{Py^n dx + (Q + y)\,y^{n-1}\,dy}{y^2 + My + N} = d\Omega.$$

Diese Aufgabe (§ 497 der *Instit.*) wird jedoch dort nur für $n = 2$ gelöst, da die allein angewandte Methode der unbestimmten Coefficienten auf allzu verwickelte Differentialgleichungen führt, welche sich nur für $n = 2$ vereinfachen. Mit den gegenwärtigen Mitteln löst sich aber die Aufgabe leicht, wie sogleich gezeigt werden soll.

Gegeben ist
$$\frac{Py^n dx + (y + Q)y^{n-1}\,dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = d\Omega.$$

Hieraus folgt wenn y_1 von y_2 verschieden ist, wie ich annehme:

$$Py_1 dx + (y_1 + Q)\,dy_1 = 0, \quad Py_2 dx + (y_2 + Q)\,dy_2 = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{a)}$$

Zerlegt man ferner in einfache Brüche, so wird

$$d\Omega = Gdx + Hdy + q_1\frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2\frac{d(y - y_2)}{y - y_2}$$

$$\frac{(y_1 + Q)\,y_1^{n-1}}{y_1 - y_2} = q_1, \quad \frac{(y_2 + Q)\,y_2^{n-1}}{y_2 - y_1} = q_2; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{b)}$$

q_1 und q_2 müssen constant sein. Zwischen den fünf Grössen P, Q, y_1, y_2 und x sind demnach vier Bedingungen **a** und **b** gegeben, bei näherer Betrachtung zeigt sich aber, dass eine davon in den drei andern enthalten ist. Aus den Gleichungen **b** folgt durch Wegschaffung von Q:

$$\frac{q_1}{y_1^{n-1}} + \frac{q_2}{y_2^{n-1}} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{c)}$$

sowie aus **a**:

$$Py_1^n dx + q_1(y_1 - y_2)\,dy_1 = 0, \quad Py_2^n dx + q_2(y_2 - y_1)\,dy_2 = 0,$$

und wenn P hieraus weggeschafft wird:

$$\frac{q_1 dy_1}{y_1^n} + \frac{q_2 dy_2}{y_2^n} = 0,$$

welche Gleichung schon in **c** enthalten ist. Es besteht also zwischen y_1 und y_2 nur die eine Beziehung **c**; dabei hat man

$$Q = \frac{q_1}{y_1^{n-1}}(y_1 - y_2) - y_1 = \frac{q_2}{y_2^{n-1}}(y_2 - y_1) - y_2,$$

$$P = \frac{q_1(y_2 - y_1)}{y_1^n}\cdot\frac{dy_1}{dx} = \frac{q_2(y_1 - y_2)}{y_2^n}\cdot\frac{dy_2}{dx}.$$

Man könnte, ohne die Auflösung einzuschränken, $y_1 = x$ setzen; ich ziehe es jedoch vor y_1 beizubehalten, um nicht die Symmetrie der folgenden Ausdrücke zu stören. Es bleiben noch G und H zu bestimmen. Man hat:

$$\frac{Py^n}{(y - y_1)(y - y_2)} = \frac{Py^n}{(y_1 - y_2)(y - y_1)} - \frac{Py^n}{(y_1 - y_2)(y - y_2)}$$

$$\frac{y^n + Qy^{n-1}}{(y - y_1)(y - y_2)} = \frac{y^n + Qy^{n-1}}{(y_1 - y_2)(y - y_1)} - \frac{y^n + Qy^{n-1}}{(y_1 - y_2)(y - y_2)};$$

daher

$$G = \frac{P}{y_1 - y_2}\left(\frac{y^n - y_1^n}{y - y_1} - \frac{y^n - y_2^n}{y - y_2}\right) = \frac{-q_1}{y_1^n}\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{y^n - y_1^n}{y - y_1} - \frac{q_2}{y_2^n}\frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{y^n - y_2^n}{y - y_2}$$

$$H = \frac{1}{y_1 - y_2}\left(\frac{y^n - y_1^n}{y - y_1} - \frac{y^n - y_2^n}{y - y_2}\right) + \frac{Q}{y_1 - y_2}\left(\frac{y^{n-1} - y_1^{n-1}}{y - y_1} - \frac{y^{n-1} - y_2^{n-1}}{y - y_2}\right).$$

Mit Hülfe der obigen Ausdrücke für Q lässt sich der Werth von H also schreiben:

$$H = \frac{y^n - y_1^n + \left(\frac{q_1}{y_1^{n-1}}(y_1 - y_2) - y_1\right)(y^{n-1} - y_1^{n-1})}{(y_1 - y_2)(y - y_1)}$$

$$+ \frac{y^n - y_2^n + \left(\frac{q_2}{y_2^{n-1}}(y_2 - y_1) - y_2\right)(y^{n-1} - y_2^{n-1})}{(y_2 - y_1)(y - y_2)},$$

d. i.

$$H = \frac{q_1(y^{n-1} - y_1^{n-1})}{y_1^{n-1}(y - y_1)} + \frac{q_2(y^{n-1} - y_2^{n-1})}{y_2^{n-1}(y - y_2)},$$

da die übrigen Glieder einander tilgen, weil

$$\frac{y^n - y_1 y^{n-1}}{(y_1 - y_2)(y - y_1)} + \frac{y^n - y_2 y^{n-1}}{(y_2 - y_1)(y - y_2)} = \frac{y^{n-1}}{y_1 - y_2} + \frac{y^{n-1}}{y_2 - y_1} = 0;$$

demnach wird

$$Gdx + Hdy = \frac{q_1}{y_1^n}\left(\frac{(y^{n-1} - y_1^{n-1})\,y_1 dy - (y^n - y_1^n)\,dy_1}{y - y_1}\right) + \frac{q_2}{y_2^n}\left(\frac{(y^{n-1} - y_2^{n-1})\,y_2 dy - (y^n - y_2^n)\,dy_2}{y - y_2}\right).$$

Man betrachte jetzt den in q_1 multiplicirten Theil allein; ich nenne ihn (q_1). Vollzieht man die Division mit $y - y_1$, so wird, $n > 1$ vorausgesetzt:

$$\frac{y^{n-1} - y_1^{n-1}}{y - y_1} y_1 = \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} y^{n-\mu-1} \cdot y_1^{\mu}, \quad \frac{y^n - y_1^n}{y - y_1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} (y^{n-\mu} \cdot y_1^{\mu-1}) + y_1^{n-1},$$

daher:

$$(q_1) = q_1 \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} \left(\frac{y^{n-\mu-1}\, dy}{y_1^{n-\mu}} - \frac{y^{n-\mu}\, dy_1}{y_1^{n-\mu+1}} \right) - q_1 \frac{dy_1}{y_1},$$

d. i.

$$(q_1) = q_1 \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} d\left(\frac{y^{n-\mu}}{(n-\mu)\, y_1^{n-\mu}} \right) - q_1 \frac{dy_1}{y_1};$$

daher ist (q_1) ein vollständiges Differential und ebenso ist es (q_2). Setzt man demnach $Gdx + Hdy = dU$, so folgt sofort:

$$U = \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} \left(\frac{q_1}{y_1^{n-\mu}} + \frac{q_2}{y_2^{n-\mu}} \right) \frac{y^{n-\mu}}{n-\mu} - q_1 \log y_1 - q_2 \log y_2.$$

Hiermit ergiebt sich folgende Auflösung der vorliegenden Aufgabe:

Sind y_1 und y_2 Funktionen von x, verbunden durch die Gleichung $\frac{q_1}{y_1^{n-1}} + \frac{q_2}{y_2^{n-1}} = 1$, so ist:

$$\frac{\frac{q_1 (y_2 - y_1)}{y_1^n} y^n dy_1 + \left(y - y_1 + \frac{q_1 (y_1 - y_2)}{y_1^{n-1}} \right) y^{n-1} dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = d\Omega.$$

Mit Rücksicht auf die zwischen y_1 und y_2 bestehende Beziehung kann $d\Omega$ auch auf folgende mehr symmetrische Form gebracht werden:

$$\frac{\left(y + \frac{q_1}{y_1^{n-2}} + \frac{q_2}{y_2^{n-2}} - y_1 - y_2 \right) y^{n-1} dy - \left(\frac{q_1 dy_1}{y_1^{n-1}} + \frac{q_2 dy_2}{y_2^{n-1}} \right) y^n}{(y - y_1)(y - y_2)} = d\Omega.$$

Der Werth von Ω ist:

$$\Omega = \sum_{\mu=1}^{\mu=n-1} \left(\frac{q_1}{y_1^{n-\mu}} + \frac{q_2}{y_2^{n-\mu}} \right) \frac{y^{n-\mu}}{n-\mu} + q_1 \log \frac{y - y_1}{y_1} + q_2 \log \frac{y - y_2}{y_2}.$$

Der Fall $n = 1$ muss noch besonders betrachtet werden. Geht man auf die im Anfange dieses § aufgestellten Grundgleichungen zurück, so folgt für $n = 1$:

$$\frac{Py dx + (y + Q)\, dy}{(y - y_1)(y - y_2)} = d\Omega,$$

$$Py_1 dx + (y_1 + Q)\, dy_1 = 0, \quad Py_2 dx + (y_2 + Q)\, dy_2 = 0;$$

ferner durch Zerlegung:

$$G = 0, \quad H = 0, \quad d\Omega = q_1 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2 \frac{d(y - y_2)}{y - y_2}; \quad \frac{y_1 + Q}{y_1 - y_2} = q_1, \quad \frac{y_2 + Q}{y_2 - y_1} = q_2;$$

daher

$$q_1 + q_2 = 1; \quad Py_1 dx + q_1 (y_1 - y_2)\, dy_1 = 0, \quad Py_2 dx + q_2 (y_2 - y_1)\, dy_2 = 0,$$

folglich

$$\frac{q_1 dy_1}{y_1} + \frac{q_2 dy_2}{y_2} = 0; \quad Pdx = -q_1 dy_1 - q_2 dy_2, \quad y_1^{q_1} \cdot y_2^{q_2} = c = \text{const.}$$

und

$$Q = -q_1 y_2 - q_2 y_1.$$

Man erhält daher für $n = 1$:

$$\frac{(y - q_1 y_2 - q_2 y_1)\, dy - y\,(q_1 dy_1 + q_2 dy_2)}{(y - y_1)(y - y_2)} = d\Omega,$$

wobei die Bedingungen: $q_1 + q_2 = 1$ und $y_1^{q_1} \cdot y_2^{q_2} = c$ bestehen müssen. Alsdann ist

$$d\Omega = q_1 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2 \frac{d(y - y_2)}{y - y_2}.$$

Wünscht man der Vollständigkeit wegen dieselbe Aufgabe auch unter der Annahme der Gleichheit von y_1 mit y_2 zu lösen, so ist zu setzen:

$$\frac{Py^n dx + (y + Q)\, y^{n-1} dy}{(y - y_1)^2} = d\Omega.$$

Hier kann jedoch y_1 ohne Weiteres als unabhängig veränderliche Grösse angesehen und durch x ersetzt werden; also sei:

$$\frac{Py^n dx + (y + Q)\, y^{n-1} dy}{(y - x)^2} = d\Omega.$$

Wenn diese Voraussetzung bestehen soll, so muss der Zähler links für $y = x$ verschwinden; dies giebt:

$$Px + x + Q = 0.$$

Ferner muss $\frac{d(y^n + Qy^{n-1})}{dy} = ny^{n-1} + (n-1)\, Qy^{n-2}$ für $y = x$ constant sein; also:

$$nx^{n-1} + (n-1)\, Qx^{n-2} = q.$$

Sind noch G und H die in $\frac{Py^n}{(y-x)^2}$ und $\frac{y^n + Qy^{n-1}}{(y-x)^2}$ enthaltenen ganzen Polynome, nämlich:

$$G = P \frac{y^n - nx^{n-1} y + (n-1)\, x^n}{(y - x)^2}$$

$$H = \frac{y^n - nx^{n-1} y + (n-1)\, x^n + Q\,(y^{n-1} - (n-1)\, x^{n-2} y + (n-2)\, x^{n-1})}{(y - x)^2},$$

in welchen Ausdrücken der Nenner in den Zählern aufgeht, — jedoch muss n wenigstens $= 2$ sein — so erhält man:

$$Q = \frac{q}{(n-1)x^{n-2}} - \frac{nx}{n-1}, \quad P = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{q}{x^{n-1}}\right)$$

und mit diesen Werthen von P und Q

$$d\Omega = Gdx + Hdy - d\left(\frac{x^n + Qx^{n-1}}{y-x}\right) + q\,\frac{d(y-x)}{y-x}.$$

Hier bleibt noch zu beweisen, dass $Gdx + Hdy$ ein vollständiges Differential ist; dies wird aber sogleich dargethan sein, wenn die obigen Werthe von P und Q den Ausdruck

$$\frac{Py^n dx + (y+Q)\,y^{n-1}dy}{(y-x)^2}$$

in der That zu einem vollständigen Differential machen, wozu nur nöthig ist:

$$\frac{d\left(\frac{Py^n}{(y-x)^2}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{y^n + Qy^{n-1}}{(y-x)^2}\right)}{dx}$$

oder

$$\left(nPy^{n-1} - \frac{dQ}{dx}\,y^{n-1}\right)(y-x) = 2Py^n + 2(y^n + Qy^{n-1})$$

d. i.

$$\left(nP - \frac{dQ}{dx}\right)(y-x) = (2P+2)\,y + 2Q;$$

also

$$(n-2)\,P = \frac{dQ}{dx} + 2 \text{ und } 2Q + nPx - x\,\frac{dQ}{dx} = 0.$$

Nun ist

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{(n-2)\,q}{(n-1)\,x^{n-1}} - \frac{n}{n-1};$$

daher in der That

$$\frac{dQ}{dx} + 2 = \frac{n-2}{n-1} - \frac{(n-2)\,q}{(n-1)\,x^{n-1}} = (n-2)\,P;$$

ferner findet man:

$$2Q + nPx = -\frac{nx}{n-1} - \frac{(n-2)\,q}{(n-1)\,x^{n-2}} = x\,\frac{dQ}{dx};$$

es sind also die Bedingungen der Integrabilität erfüllt und man hat in der That, wie verlangt wurde:

$$\frac{\left(1 - \frac{q}{x^{n-1}}\right)\frac{y^n}{n-1}\,dx + \left(y + \frac{q}{(n-1)\,x^{n-2}} - \frac{nx}{n-1}\right)y^{n-1}\,dy}{(y-x)^2} = d\Omega,$$

nämlich

$$d\Omega = Gdx + Hdy + \frac{1}{n-1}\,d\left(\frac{x^n - qx}{y-x}\right) + q\,\frac{d(y-x)}{y-x},$$

wo nunmehr auch $Gdx + Hdy$ als ein vollständiges Differential erwiesen ist, dessen Entwickelung ich jedoch unterlasse, da sie mit obigen Werthen von G und H leicht vollzogen wird.

Man erhält z. B. für $n = 2$, $G = P$, $H = 1$ und

$$\frac{\left(1 - \frac{q}{x}\right)y^2dx + (y+q-2x)\,ydy}{(y-x)^2} = \left(1 - \frac{q}{x}\right)dx + dy + d\left(\frac{x^2 - qx}{y-x}\right) + q\,\frac{d(y-x)}{y-x};$$

für $n = 3$ wird $G = P(y + 2y_1)$, $H = y + 2y_1 + Q$,

$$\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{q}{x^2}\right)y^3\,dx + \left(y + \frac{q}{2x} - \frac{3}{2}x\right)y^2dy}{(y-x)^2} = dU + \frac{1}{2}\,d\left(\frac{x^3 - qx}{y-x}\right) + q\,\frac{d(y-x)}{y-x}$$

und

$$U = \frac{1}{2}y^2 + \left(x + \frac{q}{2x}\right)\frac{y}{2} + \frac{1}{2}x^2 - q\log x;$$

für $n = 4$ wird

$$\frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{q}{x^3}\right)y^4dx + \left(y + \frac{q}{3x^2} - \frac{4}{3}x\right)y^3\,dy}{(y-x)^2} = dU + \frac{1}{3}\,d\left(\frac{x^4 - qx}{y-x}\right) + q\,\frac{d(y-x)}{y-x}$$

und

$$U = \frac{1}{3}y^3 + \left(x + \frac{q}{2x^2}\right)\frac{y^2}{3} + \left(x^2 + \frac{q}{2x}\right)\frac{y}{3} + \frac{1}{3}x^3 - q\log x.$$

U. s. w.

Für $n = 1$ wird $G = 0$, $H = 0$ und $q = 1$; daher

$$\frac{Pydx + (y+Q)\,dy}{(y-x)^2} = -d\left(\frac{x+Q}{y-x}\right) + \frac{d(y-x)}{y-x},$$

und

$$Px + x + Q = 0.$$

Wird ferner rechterhand differentiirt und mit der linken Seite verglichen, so ergiebt sich für Q die Bedingung:

$$Qdx - x(dx + dQ) = 0;$$

daher mit der Constante k: $Q = kx - x\log x$, und $P = \log x - k - 1$. Also schliesslich:

$$\frac{(\log x - k - 1)\,ydx + (y + kx - x\log x)\,dy}{(y-x)^2} = d\Omega$$

$$\Omega = \frac{x\log x - (k+1)\,x}{y-x} + \log(y-x).$$

§ 9. Wenn der integrirende Divisor die bisher allein betrachtete Form hat, nämlich $\psi = (y - y_1)^{\lambda_1} \colon \ldots\ldots (y - y_\nu)^{\lambda_\nu}$, in welcher alle Exponenten positive ganze Zahlen sind, so kann mit Hülfe vorstehender Entwickelungen das Integral sofort dargestellt werden; dies wird aber im Allgemeinen nicht mehr zu erreichen sein, wenn jene Exponenten beliebige Zahlenwerthe erhalten. Die Eigenschaft aber, worauf es hier hauptsächlich ankommt, dass die in ψ vorkommenden Funktionen von x, nämlich $y_1, y_2 \ldots\ldots y_\nu$, sämmtlich Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung sein müssen, bleibt auch für beliebige Werthe jener Exponenten gültig. Mit dieser Erweiterung ist jedoch noch nicht die allgemeinste Form des integrirenden Faktors gegeben, welche sich aus vorläufigen Lösungen bilden lässt; es sind vielmehr dazu noch Glieder von anderer Form erforderlich.

Die Voraussetzung, dass M und N in Bezug auf y ganze Polynome sind, auch für die Folge festhaltend, gehe ich jetzt zur Untersuchung der allgemeinsten Form des integrirenden Faktors über, welche ich aus vorläufigen Lösungen habe bilden können.

Es sei $Mdx + Ndy = 0$ die vorgelegte Differentialgleichung, e^{-W} ihr integrirender Faktor; also

$$e^{-W}(Mdx + Ndy) = d\Omega.$$

Die Funktion W bestehe aus mehreren Theilen; der erste V sei ein ganzes Polynom in Bezug auf y, beliebig nach x. Der zweite Theil T_1 sei mittels der gegebenen Funktionen $y_1, D_1', D_2' \ldots D'_{\mu_1}$ von x und der Constante ε_1 folgendermassen gebildet:

$$T_1 = \frac{D_1'}{y-y_1} + \frac{D_2'}{(y-y_1)^2} + \ldots + \frac{D'_{\mu_1}}{(y-y_1)^{\mu_1}} + \varepsilon_1 \log(y-y_1).$$

Solcher Theile wie T_1 enthalte W eine bestimmte Anzahl, etwa ν, aus den Funktionen $y_1, y_2 \ldots y_\nu$ nebst den zugehörigen Faktoren D nach demselben Gesetze gebildet wie T_1 aus seinen Elementen; es ist also

$$T_2 = \frac{D_1''}{y-y_2} + \frac{D_2''}{(y-y_2)^2} + \ldots + \frac{D''_{\mu_2}}{(y-y_2)^{\mu_2}} + \varepsilon_2 \log(y-y_2);$$

und

$$W = V + T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_\nu.$$

Es wird angenommen, dass jede der Funktionen $y_1, y_2 \ldots \ldots y_\nu$ von jeder andern verschieden ist.

Die Polynome M und N können mit gemeinschaftlichen Faktoren behaftet sein; sollte jedoch eine der Differenzen $y-y_1, y-y_2, \ldots\ldots y-y_\nu$ in beiden aufgehen, oder ein gemeinsamer Faktor von der Form $(y-y_1)^n$ vorhanden sein, so wäre ein solcher in $e^{n\log(y-y_1)}$ zu verwandeln und der Exponent dem logarithmischen Theile von W beizufügen, so dass schliesslich keine jener Differenzen als gemeinsamer Theiler von M und N sich vorfinde.

Unter diesen Voraussetzungen gilt nun folgender

Lehrsatz. Wenn $e^{-W}(Mdx + Ndy)$ ein vollständiges Differential ist, so sind die Funktionen $y_1, y_2 \ldots\ldots y_\nu$ eben so viele Lösungen der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, oder es ist

$$M_1 dx + N_1 dy_1 = 0,\ M_2 dx + N_2 dy_2 = 0, \ldots\ldots M_\nu dx + N_\nu dy_\nu = 0.$$

Beweis. Da

$$e^{-W}(Mdx + Ndy) = d\Omega,$$

so ist

$$\frac{d(e^{-W}M)}{dy} = \frac{d(e^{-W}N)}{dx}$$

oder

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = M\frac{dW}{dy} - N\frac{dW}{dx},$$

d. i.

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = M\frac{dV}{dy} - N\frac{dV}{dx} + \sum_{i=1}^{i=\nu}\left(M\frac{dT_i}{dy} - N\frac{dT_i}{dx}\right).$$

Um die Formen auf der rechten Seite genauer zu entwickeln, genügt es ein T allein, es sei T_1, näher in Betracht zu ziehen, da für die übrigen dasselbe Gesetz gilt; ich setze daher, zur Erleichterung des Druckes alle für jetzt entbehrlichen Zeiger weglassend:

$$T_1 = T = \frac{D_1}{y-y_1} + \frac{D_2}{(y-y_1)^2} + \ldots + \frac{D_\mu}{(y-y_1)^\mu} + \varepsilon \log(y-y_1).$$

Hieraus erhält man

$$M\frac{dT}{dy} - N\frac{dT}{dx} = R\left(M + N\frac{dy_1}{dx}\right) + SN,$$

wo

$$R = \frac{\varepsilon}{y-y_1} - \frac{D_1}{(y-y_1)^2} - \frac{2D_2}{(y-y_1)^3} - \ldots - \frac{\mu D_\mu}{(y-y_1)^{\mu+1}}$$

$$S = -\frac{1}{y-y_1}\cdot\frac{dD_1}{dx} - \frac{1}{(y-y_1)^2}\cdot\frac{dD_2}{dx} - \ldots - \frac{1}{(y-y_1)^\mu}\cdot\frac{dD_\mu}{dx}$$

zur Abkürzung gesetzt ist.

Man denke sich nun die Polynome M und N nach Potenzen von $y-y_1$ entwickelt, also in folgende Formen gebracht:

$$M = M_1 + C_1(y-y_1) + C_2(y-y_1)^2 + \ldots + C_m(y-y_1)^m$$
$$N = N_1 + E_1(y-y_1) + E_2(y-y_1)^2 + \ldots + E_n(y-y_1)^n$$

und führe mit diesen Ausdrücken die Multiplicationen aus, überall die ganzen Polynome von den algebraischen Brüchen trennend, so ergiebt sich Folgendes:

Es ist

$$M\frac{dT}{dy} - N\frac{dT}{dx} = R\left(M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx}\right) + SN_1 + R(M - M_1) + \left(R\frac{dy_1}{dx} + S\right)(N - N_1).$$

Der erste Theil $R\left(M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx}\right)$ ist in Bezug auf y ein ächter algebraischer Bruch, in dessen Nenner $y-y_1$ auf die $(\mu+1)^{\text{te}}$ Potenz steigt. Der zweite Theil SN_1 ist ebenfalls ein ächter Bruch, in dessen Nenner $y-y_1$ nur auf die μ^{te} Potenz steigt. Der dritte Theil $R(M-M_1)$ zerfällt in ein ganzes Polynom und in einen ächten Bruch, dessen Nenner nur die μ^{te} Potenz von $y-y_1$ ist, da $M - M_1$ den Faktor $y-y_1$ wenigstens einmal enthält. Der vierte Theil $\left(R\frac{dy_1}{dx} + S\right)(N - N_1)$ zerfällt ebenfalls in ein ganzes Polynom und einen ächten Bruch, in dessen Nenner $y-y_1$ nur auf die μ^{te} Potenz steigt, da $N - N_1$ durch $y-y_1$ theilbar ist.

Folglich enthält $M\frac{dT}{dy} - N\frac{dT}{dx}$ einen ungebrochenen Theil P_1 und eine Summe von ächten Brüchen, in welcher neben dem Gliede

$$\frac{\mu D_\mu\left(M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx}\right)}{(y-y_1)^{\mu+1}}$$

nur noch solche auftreten, in deren Nenner $y - y_1$ höchstens auf der μ^{ten} Potenz erscheint. Seien $U_1, U_2 \dots U_\mu$ die Zähler dieser letzteren, welche bloss von x abhängen, so hat man:

$$M\frac{dT_1}{dy} - N\frac{dT_1}{dx} = P_1 + \frac{U_1}{y-y_1} + \frac{U_2}{(y-y_1)^2} + \dots + \frac{U_\mu}{(y-y_1)^\mu} + \frac{\mu D_\mu\left(M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx}\right)}{(y-y_1)^{\mu+1}}.$$

Diese Entwickelung gilt für alle T. Bezeichnet man also mit P die Summe aller hierher gehörigen ganzen Polynome, mit Einschluss des von V herrührenden Theiles $M\frac{dV}{dy} - N\frac{dV}{dx}$, so hat man:

$$M\frac{dW}{dy} - N\frac{dW}{dx} = P + \frac{U'_1}{y-y_1} + \frac{U'_2}{(y-y_1)^2} + \dots + \frac{U'_{\mu_1}}{(y-y_1)^{\mu_1}} + \frac{\mu_1 D'_{\mu_1}\left(M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx}\right)}{(y-y_1)^{\mu_1+1}}$$

$$+ \frac{U''_1}{y-y_2} + \dots\dots\dots\dots + \frac{U''_{\mu_2}}{(y-y_2)^{\mu_2}} + \frac{\mu_2 D''_{\mu_2}\left(M_2 + N_2\frac{dy_2}{dx}\right)}{(y-y_2)^{\mu_2+1}}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

und dieser Ausdruck soll für jeden Werth von x und y dem ganzen Polynom $\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}$ gleich sein. Diese Gleichheit kann nicht anders bestehen als wenn

$$P = \frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}$$

und alle Zähler der vorstehenden Brüche, jeder für sich allein, Null sind, da ein gegenseitiges Aufheben der hier unterschiedenen Brüche unmöglich ist. Demnach sind nicht allein die obigen U, jedes einzeln, gleich Null, sondern es verschwinden auch die Zähler, welche oben durch die $(\mu_1 + 1)^{te}$ Potenz von $y - y_1$, die $(\mu_2 + 1)^{te}$ von $y - y_2$, u. s. f. dividirt wurden, jeder für sich. In Betreff dieser Zähler ist noch zu bemerken, dass sie eine andere Gestalt annehmen, wenn alle $D' = 0$ sind, also z. B. T_1 bloss das Glied $\varepsilon_1 \log(y - y_1)$ enthält; wo aber ε_1 nun nicht mehr $= 0$ gedacht werden darf, da diese Annahme überhaupt das Glied T_1 in W ganz vernichten würde. In diesem Falle sind die obigen Ausdrücke $U_1', U_2', \dots U'_{\mu_1}$ sämmtlich gleich Null, oder es ist $\mu_1 = 0$ zu setzen; der zuletzt stehende Theilbruch erhält aber die Form:

$$\frac{\varepsilon_1\left(M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx}\right)}{y - y_1}$$

und muss für sich allein verschwinden.

Da also unter allen Umständen $M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx}$ als Faktor eines Produkts auftritt, welches gleich Null sein muss, dessen zweiter Faktor aber nicht $= 0$ ist, so folgt: $M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx} = 0$ oder $M_1dx + N_1dy_1 = 0$, d. h. y_1 muss eine Lösung der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ sein; und dasselbe gilt von den anderen Funktionen $y_2, y_3, \dots y_\nu$; w. z. b. w.

§ 10. Der vorstehende Satz weist auf eine reichhaltige Classe von Differentialgleichungen hin, welche sich mit Hülfe vorläufiger Lösungen integriren lassen. Den früher entwickelten Fällen schliesst sich jetzt als zunächst liegend und besondere Beachtung verdienend derjenige an, welcher aus der Annahme entspringt, dass W nur aus einem ganzen Polynome V und einem logarithmischen Theile besteht, während der algebraisch gebrochene Theil ganz verschwindet. Es seien also alle D gleich Null und

$$W = V + \varepsilon_1\log(y - y_1) + \varepsilon_2\log(y - y_2) + \dots + \varepsilon_\nu\log(y - y_\nu);$$

so finden, wenn $e^{-W}(Mdx + Ndy) = d\Omega$ ist, nach dem vorigen Lehrsatze folgende Gleichungen statt:

$$M_1dx + N_1dy_1 = 0, \dots M_\nu dx + N_\nu dy_\nu = 0.$$

Setzt man ferner $\psi = (y - y_1)^{\varepsilon_1}(y - y_2)^{\varepsilon_2}\dots(y - y_\nu)^{\varepsilon_\nu}$, mithin

$$\frac{Mdx + Ndy}{e^V.\psi} = d\Omega,$$

so muss sein:

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = M\frac{dV}{dy} - N\frac{dV}{dx} + \frac{M}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dy} - \frac{N}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx},$$

und weil

$$\frac{1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dy} = \frac{\varepsilon_1}{y - y_1} + \frac{\varepsilon_2}{y - y_2} + \dots, \quad \frac{1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx} = \frac{-\varepsilon_1\frac{dy_1}{dx}}{y - y_1} - \frac{\varepsilon_2\frac{dy_2}{dx}}{y - y_2} - \dots$$

so wird:

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = M\frac{dV}{dy} - N\frac{dV}{dx} + \varepsilon_1\frac{M + N\frac{dy_1}{dx}}{y - y_1} + \varepsilon_2\frac{M + N\frac{dy_2}{dx}}{y - y_2} + \dots$$

Nun sei $\frac{M - M_1}{y - y_1} = G_1$, $\frac{N - N_1}{y - y_1} = H_1$, also G_1 und H_1 die in $\frac{M}{y - y_1}$ und $\frac{N}{y - y_1}$ enthaltenen ganzen Polynome, so wird wegen $M_1dx + N_1dy_1 = 0$,

$$\frac{M + N\frac{dy_1}{dx}}{y - y_1} = G_1 + H_1\frac{dy_1}{dx},$$

also erhält man, wenn G_2, H_2 auf dieselbe Weise zu y_2 gehören, wie G_1, H_1 zu y_1, u. s. f.

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = M\frac{dV}{dy} - N\frac{dV}{dx} + \varepsilon_1\left(G_1 + H_1\frac{dy_1}{dx}\right) + \varepsilon_2\left(G_2 + H_2\frac{dy_2}{dx}\right) + \dots + \varepsilon_\nu\left(G_\nu + H_\nu\frac{dy_\nu}{dx}\right).$$

Diese Gleichung, welche schon in der allgemeinen Gleichung des vorigen § enthalten war, hier jedoch der leichteren Uebersicht wegen unabhängig von jener entwickelt worden ist, giebt die Bedingungen, welche noch erfüllt werden müssen, wenn $y_1, y_2, \dots y_\nu$ Lösungen von $Mdx + Ndy = 0$ sind, damit letztere Gleichung durch den Divisor $e^V.\psi$ integrabel werde.

§ 11. Um sogleich eine Anwendung zu machen, sei die Frage: Wie müssen die Funktionen P, P_1, Q, Q_1 von x beschaffen sein, wenn

$$\frac{(P+P_1 y)\,dx+(Q+Q_1 y)\,dy}{(y-y_1)^{\varepsilon_1}(y-y_2)^{\varepsilon_2}}=d\Omega,$$

d. h. wenn der Ausdruck linkerhand ein vollständiges Differential sein soll?

Nach § 9 erhält man erstens die Gleichungen:

$$P+P_1 y_1+(Q+Q_1 y_1)\frac{dy_1}{dx}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{a)}$$

$$P+P_1 y_2+(Q+Q_1 y_2)\frac{dy_2}{dx}=0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{b)}$$

Ferner, da hier $G_1=G_2=P_1$, $H_1=H_2=Q_1$ ist, muss sein:

$$P_1-\frac{dQ}{dx}-\frac{dQ_1}{dx}y=\varepsilon_1\left(P_1+Q_1\frac{dy_1}{dx}\right)+\varepsilon_2\left(P_2+Q_2\frac{dy_2}{dx}\right);$$

daher

$$\frac{dQ_1}{dx}=0,\ Q_1=\text{const.}=k,$$

und wenn zur Abkürzung $\varepsilon_1 y_1+\varepsilon_2 y_2=u$ gesetzt wird, so wie $\varepsilon_1+\varepsilon_2-1=\alpha$,

$$0=\frac{dQ}{dx}+\alpha P_1+k\frac{du}{dx} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textbf{c)}$$

Wird nun mittels der Gleichungen **a** und **b** (worin $Q_1=k$), P und P_1 durch Q ausgedrückt, und der Werth von P_1 in **c** eingesetzt, so ergiebt sich eine lineare Differentialgleichung für Q, durch deren Integration Q und damit auch P und P_1 vollständig bestimmt werden, womit die Aufgabe erledigt ist.

Um überall weitläufigeren Formeln auszuweichen, will ich nur $y_1=0$ und $y_2=x$ setzen, was um so mehr zulässig ist, als überhaupt durch einen Wechsel der veränderlichen Grössen die gegenwärtige Aufgabe immer auf diese einfachere Form zurückgeführt werden kann. Man erhält alsdann nach einigen ganz leichten Umrechnungen folgende Gleichung, in welcher noch $1+\delta_1$ für ε_1 und $1+\delta_2$ für ε_2 gesetzt ist, nämlich:

$$\frac{(k\delta_2+c.x^{\delta_1+\delta_2})\,y\,dx+[k\delta_1 x-(\delta_1+\delta_2)\,ky-c.x^{\delta_1+\delta_2+1}]\,dy}{y^{1+\delta_1}.(y-x)^{1+\delta_2}}=d\Omega,$$

und hieraus findet sich das Integral

$$\Omega=\frac{k}{y^{\delta_1}(y-x)^{\delta_2}}+c\int d\left(\frac{y}{y-x}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{\delta_1+1}\left(\frac{x}{y-x}\right)^{\delta_2-1};$$

wo das zweite Glied augenscheinlich ein vollständiges Differential ist.

Hierher gehört eine der merkwürdigsten Gleichungen Euler's (cap. 2, exempl. 4, art. 490); sie ist folgende:

$$y\,dx-x\,dy+ax^n\sqrt[n]{x^n+b}\,.\,y\,dy=0.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch $y=0$, wie sogleich erhellet, aber auch durch $y=y_1=-\frac{x}{ab\sqrt[n]{x^n+b}}$. Denn es ist:

$$(-ab)^n\,.\,y_1^{\,n}=\frac{x^n}{x^n+b},$$

daher:

$$\frac{dy_1}{y_1}=\frac{dx}{x}-\frac{x^{n-1}dx}{x^n+b}=\frac{b\,dx}{x(x^n+b)};$$

also

$$y_1 dx-x\,dy_1=\frac{x^n y_1 dx}{x^n+b},$$

$$ax^n\sqrt[n]{x^n+b}\,.\,y_1 dy_1=-\frac{x^{n+1}}{b}\cdot\frac{by_1 dx}{x(x^n+b)}=-\frac{x^n y_1 dx}{x^n+b},$$

folglich:

$$y_1 dx-x\,dy_1+ax^n\sqrt[n]{x^n+b}\,.\,y_1 dy_1=0.$$

Da die Gleichung die beiden Lösungen $y=0$ und $y=y_1$ hat, so ist Grund zu versuchen, ob sie durch Division mit

$$X(y-y_1)^{\varepsilon_1}y^{\varepsilon_2}$$

integrabel wird. Setzt man $X=e^{-V}$ wie bisher, und

$$\frac{y\,dx+(Qy-x)\,dy}{e^V(y-y_1)^{\varepsilon_1}y^{\varepsilon_2}}=d\Omega,$$

so erhält man:

$$2-\frac{dQ}{dx}y=-N\frac{dV}{dx}+\varepsilon_1\left(1+Q\frac{dy_1}{dx}\right)+\varepsilon_2$$

oder:

$$2-\frac{dQ}{dx}y=-Q\frac{dV}{dx}y+x\frac{dV}{dx}+\varepsilon_1 Q\frac{dy_1}{dx}+\varepsilon_1+\varepsilon_2;$$

daher

$$2-\varepsilon_1-\varepsilon_2=x\frac{dV}{dx}+\varepsilon_1 Q\frac{dy_1}{dx}$$

und

$$\frac{dQ}{dx}=Q\frac{dV}{dx},$$

also $Q=\text{const.}\times e^V$, d. i. $e^V=Q$, da die Constante hier ohne Einfluss ist.

Die andere Gleichung wird nunmehr:

$$2-\varepsilon_1-\varepsilon_2=x\frac{dQ}{Q\,dx}+\varepsilon_1 Q\frac{dy_1}{dx}.$$

Nun ist $Q=ax^n\sqrt[n]{x^n+b}$, daher wird

$$Q\frac{dy_1}{dx}=-\frac{x^n}{x^n+b}\ \text{und}\ x\frac{dQ}{Q\,dx}=n+\frac{x^n}{x^n+b},$$

folglich wird die zweite Gleichung:

$$2-\varepsilon_1-\varepsilon_2-n=\frac{x^n}{x^n+b}(1-\varepsilon_1);$$

sie wird erfüllt durch $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 1 - n$, und mithin ist

$$\frac{ydx - xdy + ax^n \sqrt[n]{x^n + b}\,.\,ydy}{x^n (x + aby \sqrt[n]{x^n + b})\, y^{1-n}} = d\Omega,$$

wie auch Euler gefunden hat. Uebrigens ist dieses Beispiel schon in der obigen allgemeinen Formel enthalten; wenn nämlich in dieser $\delta_2 = 0$, $\delta_1 = -n$, $x = -\frac{u}{ab\sqrt[n]{u^n + b}}$ und $c = -\frac{nk}{(-ab)^n}$ gesetzt wird, so folgt genau das Vorstehende. Auch die schliessliche Form des Integrals ist durch die obige Formel sofort gegeben; ich will jedoch ihre Entwickelung dem Leser anheim stellen.

§ 12. Aufgabe. Man verlangt die P und Q so zu bestimmen, dass für gegebene y_1, y_2, y_3 die in nachstehender Gleichung ausgedrückte Forderung erfüllt werde, nämlich:

$$\frac{(P + P_1 y + P_2 y^2 + P_3 y^3)\, dx + (Q + Q_1 y + Q_2 y^2)\, dy}{(y - y_1)^{\varepsilon_1} (y - y_2)^{\varepsilon_2} (y - y_3)^{\varepsilon_3}} = d\Omega.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - 3 = \alpha,\quad \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 y_2 + \varepsilon_3 y_3 = u,\quad \varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + \varepsilon_3 y_3^2 = 2v,$$

und bemerkt, dass

$$G_1 = P_1 + P_2 (y + y_1) + P_3 (y^2 + y_1 y + y_1^2)$$
$$H_1 = Q_1 + Q_2 (y + y_1),$$
u. s. w.

so folgt nach den Entwickelungen in § 10:

$$\alpha P_3 + \frac{dQ_2}{dx} = 0$$

$$\frac{dQ_1}{dx} + (\alpha + 1) P_2 + u P_3 + \frac{du}{dx} Q_2 = 0$$

$$\frac{dQ}{dx} + (\alpha + 2) P_1 + u P_2 + 2v P_3 + \frac{du}{dx} Q_1 + \frac{dv}{dx} Q_2 = 0.$$

Ferner erhält man drei Gleichungen, aus deren erster

$$P + P_1 y_1 + P_2 y_1^2 + P_3 y_1^3 + (Q + Q_1 y_1 + Q_2 y_1^2) \frac{dy_1}{dx} = 0$$

die beiden andern sich durch Vertauschung von y_1 mit y_2 und y_3 ergeben; also überhaupt 6 Gleichungen zwischen den 7 Funktionen P und Q. Wird nun eines der Q, es sei Q_2, willkürlich angenommen und werden aus den 6 Gleichungen die vier Grössen P, P_1, P_2, P_3 weggeschafft, so ergeben sich zwei lineare Differentialgleichungen für Q und Q_1, nämlich:

$$\frac{dQ}{dx} + gQ + g_1 Q_1 + g_2 = 0$$

$$\frac{dQ_1}{dx} + hQ + h_1 Q_1 + h_2 = 0,$$

worin die g und h bekannte Funktionen von x sind. Multiplicirt man die erste mit f, die zweite mit f_1, und setzt

$$fg + f_1 h = \frac{df}{dx}$$

$$fg_1 + f_1 h_1 = \frac{df_1}{dx}$$

so kommt:

$$d(fQ) + d(f_1 Q_1) + (fg_2 + f_1 h_2)\, dx = 0$$

oder

$$fQ + f_1 Q_1 + \int (fg_2 + f_1 h_2)\, dx = \text{const.}$$

Hiermit würden Q und Q_1 bestimmt sein, wenn es gelänge f und f_1 aus den vorhergehenden Gleichungen zu finden.

Diese geben, wenn $f_1 = f.r$ gesetzt wird:

$$f(g + hr) = \frac{df}{dx},\quad f(g_1 + h_1 r) = r\frac{df}{dx} + f\frac{dr}{dx},$$

daher

$$g_1 + h_1 r - (g + hr) r = \frac{dr}{dx}$$

oder

$$dr = [g_1 + (h_1 - g) r - hr^2]\, dx.$$

Wenn man von dieser Gleichung eine einzige Lösung besitzt, sie sei $r = r_1$, so kann man daraus, wie Euler gezeigt hat, ihr vollständiges Integral herleiten. Da nämlich

$$dr_1 = [g_1 + (h_1 - g) r_1 - hr_1^2]\, dx,$$

so folgt

$$d(r - r_1) = (h_1 - g - hr_1 - hr)(r - r_1)\, dx$$

oder

$$d(r - r_1) = [h_1 - g - 2hr_1 - h(r - r_1)](r - r_1)\, dx.$$

Dividirt man nun mit $(r - r_1)^2$ und setzt $z = \frac{1}{r - r_1}$, so folgt

$$dz + [(h_1 - g - 2hr_1) z - h]\, dx = 0;$$

eine lineare Gleichung, welche z und damit r giebt, woraus dann f, f_1 leicht gefunden werden.

Die Schwierigkeit vorliegende Aufgabe allgemein zu lösen, kommt also darauf zurück, der obigen Differentialgleichung zwischen r und x auf irgend eine Weise zu genügen, was nicht allgemein angeht.

Wenn man aber auf vollständige Allgemeinheit verzichtend annimmt, dass $\alpha = 0$, d. h. $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3$ sei, so lässt sich die Auflösung durchführen. Nämlich es wird zuerst $\frac{dQ_2}{dx} = 0$, also $Q_2 = \text{const.} = k$; alsdann bleiben noch 5 Gleichungen zwischen P, P_1, P_2, P_3, Q, Q_1. Wird nun Q_1 beliebig angenommen, und schafft man alle P weg, so folgt eine lineare Differentialgleichung in Q, durch deren Integration die Aufgabe erledigt wird.

Der Gang der Rechnung ist also folgender. Setzt man $y_3 = 0$, $y_2 = x$, so wird sofort $P = 0$ und zur Bestimmung von P_1, P_2, P_3, Q hat man folgende vier Gleichungen, worin Q_1 und y_1 als gegeben betrachtet werden können, auch zur Abkürzung einstweilen z für $\frac{dy_1}{dx}$ geschrieben ist:

$$P_1 x + P_2 x^2 + P_3 x^3 + Q + Q_1 x + k x^2 = 0$$

$$P_1 y_1 + P_2 y_1^2 + P_3 y_1^3 + Qz + Q_1 y_1 z + k y_1^2 z = 0$$

$$2P_1 + P_2 u + 2P_3 v + \frac{dQ}{dx} + Q_1 \frac{du}{dx} + k\frac{dv}{dx} = 0$$

$$P_2 + P_3 u + \cdot + \frac{dQ_1}{dx} + k\frac{du}{dx} = 0.$$

Werden nun die Faktoren f, f_1, f_2, f_3, oder vielmehr ihre Verhältnisse, aus folgenden Gleichungen bestimmt:

$$fx + f_1 y_1 + 2f_2 = 0$$

$$fx^2 + f_1 y_1^2 + f_2 u + f_3 = 0$$

$$fx^3 + f_1 y_1^3 + 2f_2 v + f_3 u = 0,$$

so erhält man für Q folgende lineare Differentialgleichung:

$$(f + f_1 z)Q + f_2 \frac{dQ}{dx} + \left(fx + f_1 z y_1 + f_2 \frac{du}{dx}\right) Q_1 + f_3 \frac{dQ_1}{dx} + k\left(fx^2 + f_1 z y_1^2 + f_2 \frac{dv}{dx} + f_3 \frac{du}{dx}\right) = 0,$$

nach deren Integration sich dann auch P_1, P_2, P_3 leicht ergeben, jedoch nicht ohne weitläufige Formeln, auf die ich nicht eingehen will.

Einen einfacheren Fall bietet die Aufgabe, wenn Q_1 und $Q_2 = 0$ gesetzt werden und

$$\frac{(P + P_1 y + P_2 y^2 + P_3 y^3)\, dx + dy}{e^V . (y - y_1)^{\varepsilon_1} (y - x)^{\varepsilon_2} y^{\varepsilon_3}} = d\Omega,$$

dabei $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 3$ und V nur von x abhängig sein soll. Wird die vorstehende Gleichung in folgende Form umgestaltet:

$$\frac{[P_3 y (y - x)(y - y_1) + R_1 y + R_2 y^2]\, dx + dy}{e^V (y - y_1)^{\varepsilon_1} (y - x)^{\varepsilon_2} y^{\varepsilon_3}} = d\Omega,$$

so hat man:

$$P_2 = R_2 - P_3(x + y_1), \quad P_1 = R_1 + P_3 x y_1$$

und

$$R_1 x + R_2 x^2 + 1 = 0, \quad R_1 y_1 + R_2 y_1^2 + z = 0 \quad \left(\text{wo } z = \frac{dy_1}{dx}\right);$$

daher

$$R_1 = \frac{x^2 z - y_1^2}{x y_1 (y_1 - x)}, \quad R_2 = \frac{y_1 - xz}{x y_1 (y_1 - x)};$$

die noch übrigen Bedingungsgleichungen sind:

$$P_2 + u P_3 = 0$$

$$2P_1 + u P_2 + 2 v P_3 = \frac{dV}{dx}.$$

Aus der ersten erhält man $R_2 = P_3(x + y_1 - u)$ oder, da $u = \varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 x$,

$$P_3 = \frac{R_2}{(1 - \varepsilon_1) y_1 + (1 - \varepsilon_2) x},$$

und hiermit sind durch die bekannten R_1 und R_2 die Funktionen P_1, P_2, P_3 völlig bestimmt, woraus endlich durch die vorstehende zweite Bedingungsgleichung $\frac{dV}{dx}$ und damit V bestimmt wird, so dass nunmehr ist:

$$\frac{[P_3 y (y - x)(y - y_1) + R_1 y + R_2 y^2]\, dx + dy}{e^V . (y - y_1)^{\varepsilon_1} (y - x)^{\varepsilon_2} . y^{3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}} = d\Omega,$$

oder mehr entwickelt:

$$\frac{\left[R_2\left(\frac{y(y - x)(y - y_1)}{(1 - \varepsilon_1) y_1 + (1 - \varepsilon_2) x} + y^2\right) + R_1 y\right] dx + dy}{e^V (y - y_1)^{\varepsilon_1} (y - x)^{\varepsilon_2} y^{3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}} = d\Omega;$$

R_1 und R_2 wie oben;

$$\frac{dV}{dx} = 2R_1 + (\varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 x) R_2 + \frac{[\varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 x^2 - (x + y_1)(\varepsilon_1 y_1 + \varepsilon_2 x) + 2 x y_1]\, R_2}{(1 - \varepsilon_1) y_1 + (1 - \varepsilon_2) x},$$

oder

$$\frac{dV}{dx} = 2R_1 + \frac{\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1) y_1^2 + 2(1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) x y_1 + \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_2) x^2}{(1 - \varepsilon_1) y_1 + (1 - \varepsilon_2) x} \cdot R_2.$$

§ 13. Wenn $e^{-W}(Mdx + Ndy) = d\Omega$ sein und W die folgende Form haben soll:

$$W = V + \frac{D_1}{y - y_1} + \varepsilon_1 \log(y - y_1) + \frac{D_2}{y - y_2} + \varepsilon_2 \log(y - y_2),$$

so müssen nicht allein die Gleichungen $M_1 dx + N_1 dy_1 = 0$, $M_2 dx + N_2 dy_2 = 0$ bestehen, sondern auch noch folgende Bedingungen, welche sich auf dem in § 9 bezeichneten Wege ergeben, nämlich:

Es sei

$$\frac{M}{y - y_1} = G_1 + \frac{M_1}{y - y_1}, \quad \frac{G_1}{y - y_1} = \Gamma_1 + \frac{\Delta_1}{y - y_1},$$

also

$$\frac{M}{(y - y_1)^2} = \Gamma_1 + \frac{\Delta_1}{y - y_1} + \frac{M_1}{(y - y_1)^2};$$

desgleichen sei

$$\frac{N}{y - y_1} = H_1 + \frac{N_1}{y - y_1}, \quad \frac{H_1}{y - y_1} = \mathrm{K}_1 + \frac{\Lambda_1}{y - y_1}$$

und

$$\frac{N}{(y - y_1)^2} = \mathrm{K}_1 + \frac{\Lambda_1}{y - y_1} + \frac{N_1}{(y - y_1)^2};$$

so nimmt die Bedingung

$$\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}=\varepsilon_1\frac{M+N\frac{dy_1}{dx}}{y-y_1}-D_1\frac{M+N\frac{dy_1}{dx}}{(y-y_1)^2}-\frac{N\frac{dD_1}{dx}}{y-y_1}+\varepsilon_2\frac{M+N\frac{dy_2}{dx}}{y-y_2}-\ldots\ldots,$$

nach Angabe des § 9 verwandelt, folgende Gestalt an:

$$\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}=\varepsilon_1\left(G_1+H_1\frac{dy_1}{dx}\right)-D_1\left(\Gamma_1+\mathrm{K}_1\frac{dy_1}{dx}\right)-H_1\frac{dD_1}{dx}$$

$$+\varepsilon_2\left(G_2+H_2\frac{dy_2}{dx}\right)-D_2\left(\Gamma_2+\mathrm{K}_2\frac{dy_2}{dx}\right)-H_2\frac{dD_2}{dx}.$$

$$D_1\left(\Delta_1+\Lambda_1\frac{dy_1}{dx}\right)+N_1\frac{dD_1}{dx}=0$$

$$D_2\left(\Delta_2+\Lambda_2\frac{dy_2}{dx}\right)+N_2\frac{dD_2}{dx}=0.$$

Es sei

$$M=P+P_1y+P_2y^2,\qquad N=Q+y;$$

so wird:

$$M_1=P+P_1y_1+P_2y_1^2\qquad N_1=Q+y_1$$

$$G_1=P_1+P_2y_1+P_2y\qquad H_1=1$$

$$\Gamma_1=P_2\qquad \mathrm{K}_1=0$$

$$\Delta_1=P_1+2P_2y_1\qquad \Lambda_1=1$$

woraus sich auch G_2, H_2.... durch Vertauschung von y_1 mit y_2 sogleich ergeben. Daher wird:

$$2P_2y+P_1-\frac{dQ}{dx}=\varepsilon_1\left(P_1+P_2y_1+P_2y+\frac{dy_1}{dx}\right)-D_1P_2-\frac{dD_1}{dx}$$

$$+\varepsilon_2\left(P_1+P_2y_2+P_2y+\frac{dy_2}{dx}\right)-D_2P_2-\frac{dD_2}{dx}.$$

$$D_1\left(P_1+2P_2y_1+\frac{dy_1}{dx}\right)+(Q+y_1)\frac{dD_1}{dx}=0$$

$$D_2\left(P_1+2P_2y_2+\frac{dy_2}{dx}\right)+(Q+y_2)\frac{dD_2}{dx}=0.$$

Hierzu treten noch die Bedingungen:

$$P+P_1y_1+P_2y_1^2+(Q+y_1)\frac{dy_1}{dx}=0$$

$$P+P_1y_2+P_2y_2^2+(Q+y_2)\frac{dy_2}{dx}=0.$$

Die erste Gleichung giebt $\varepsilon_1+\varepsilon_2=2$. Setzt man ferner zur Vereinfachung $y_1=0$ und $y_2=x$, so folgt:

$$P_1-\frac{dQ}{dx}=2P_1+\varepsilon_2(P_2x+1)-D_1P_2-D_2P_2-\frac{dD_1}{dx}-\frac{dD_2}{dx}.$$

$$D_1P_1+Q\frac{dD_1}{dx}=0.\qquad D_2(P_1+2P_2x+1)+(Q+x)\frac{dD_2}{dx}=0.$$

$$P=0.\qquad P_1x+P_2x^2+Q+x=0.$$

Zur Bestimmung der fünf Grössen P_1, P_2, Q, D_1, D_2 sind demnach vier Gleichungen gegeben; ich will jedoch nur einige einfache Beispiele entwickeln.

Setzt man $D_2=0$, so wird die vorletzte Gleichung erledigt; nimmt man nun noch D_1 willkürlich an, so lassen sich mittels der zweiten und vierten Gleichung P_1 und P_2 durch Q ausdrücken, und diese Werthe, in die erste gesetzt, geben für Q eine lineare Differentialgleichung, woraus Q sofort gefunden und die Aufgabe gelöst wird. Es sei z. B. $D_1=ax^2$, so folgt

$$P_1x+2Q=0,\qquad P_1x+P_2x^2+Q+x=0;$$

daher

$$P_1=-\frac{2Q}{x},\qquad P_2=\frac{Q}{x^2}-\frac{1}{x}$$

und

$$\frac{dQ}{dx}-\frac{2Q}{x}+\frac{\varepsilon Q}{x}-aQ-ax=0,$$

wo für ε_2 bloss ε gesetzt ist, oder

$$\frac{dQ}{dx}+\left(\frac{\varepsilon-2}{x}-a\right)Q=ax,$$

also

$$Q=x^{2-\varepsilon}e^{ax}\left(C+a\int x^{\varepsilon-1}e^{-ax}\,dx\right)$$

und mit diesem Werthe von Q:

$$\frac{\left[\left(\frac{Q}{x}-1\right)y-2Q\right]\frac{y}{x}\,dx+(Q+y)\,dy}{e^{\frac{ax^2}{y}}\cdot y^{2-\varepsilon}\cdot(y-x)^{\varepsilon}}=d\Omega.$$

Sei, um obigen Bedingungen noch auf eine andere Weise zu genügen, $D_1=0$, $D_2=a$, so hat man

$$P_1+2P_2x+1=0,\qquad P_1x+P_2x^2+Q+x=0,$$

$$\frac{dQ}{dx}+P_1+(\varepsilon x-a)P_2+\varepsilon=0;$$

daher

$$P_2=\frac{Q}{x^2},\quad P_1=-1-\frac{2Q}{x}\text{ und }\frac{dQ}{dx}+\left(\frac{\varepsilon-2}{x}-\frac{a}{x^2}\right)Q-1+\varepsilon=0;$$

folglich

$$Q=(1-\varepsilon)x^{2-\varepsilon}e^{-\frac{a}{x}}\left(C+\int x^{\varepsilon-2}e^{\frac{a}{x}}\,dx\right),$$

und mit diesem Werthe von Q:

$$\frac{\left(\frac{Qy}{x^2}-1-\frac{2Q}{x}\right)ydx+(Q+y)\,dy}{e^{\frac{a}{y-x}}\cdot y^{2-\varepsilon}\,(y-x)^{\varepsilon}}=d\Omega.$$

Das einzige Beispiel dieser Art, welches ich bei anderen Schriftstellern habe finden können, steht in einem Aufsatze von Abel, über die Differentialgleichung $(y+s)\,dy+(p+qy+ry^2)\,dx=0$ (*oeuvres posth. t. II, p. 241*). Die Aufgabe ist diese:

$$e^{-\frac{x}{y}}[P_1ydx+(y+Q)\,dy]=d\Omega.$$

Hier ist also, mit den obigen Formeln verglichen, $\varepsilon_1=\varepsilon_2=0$, $D_2=0$, $D_1=x$, $P_2=0$. Um P_1 und Q zu finden, erhält man aus den allgemeinen Entwickelungen sofort:

$$P_1x+Q=0,\quad P_1-\frac{dQ}{dx}+1=0,$$

daher mit der willkürlichen Constante a:

$$Q=\frac{1}{2}x+\frac{a}{x},\quad P_1=-\frac{a}{x^2}-\frac{1}{2}$$

und

$$e^{-\frac{x}{y}}\left[\left(y+\frac{a}{x}+\frac{x}{2}\right)dy-\left(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{2}\right)ydx\right]=d\Omega.$$

Wird hier $y+\frac{a}{x}+\frac{x}{2}=z$ gesetzt, so kommt:

$$e^{\left(\frac{x}{\frac{a}{x}+\frac{x}{2}-z}\right)}\left[zdz+\left(\frac{a^2}{x^3}+\frac{a}{x}+\frac{x}{4}-z\right)dx\right]=d\Omega$$

und wenn für $-z$ wieder y geschrieben wird, so folgt genau die Abel'sche Form, nämlich:

$$e^{\left(\frac{1}{\frac{y}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{2}}\right)}\left[ydy+\left(\frac{a^2}{x^3}+\frac{a}{x}+\frac{x}{4}+y\right)dx\right]=d\Omega.$$

Setzt man hier den Nenner im Exponenten gleich Null, so folgt $y=-\frac{a}{x}-\frac{x}{2}$ und dieser Werth von y muss der Gleichung $d\Omega=0$ Genüge thun, wie auch die Rechnung sogleich bestätigt.

§ 14. Durch das bisherige ist der Nutzen, welchen vorläufige Lösungen für die Integration gewähren können, hinreichend dargethan. Wenn nämlich M und N ganze Polynome in y sind und der Logarithmus des integrirenden Faktors von $Mdx+Ndy=0$ aus einem algebraisch-rationalen und einem logarithmischen Theile (immer in Bezug auf y) besteht, so haben vorläufige Lösungen eine wesentliche Bedeutung für den logarithmischen und den gebrochenen Theil des rationalen Theils, dagegen keine für den rationalen unge-

brochenen Theil. Es wird also in einem solchen Falle die Aufsuchung vorläufiger Lösungen immer der erste unumgängliche Schritt sein, um den integrirenden Faktor zu finden, und es ist klar, dass dieses Mittel im Allgemeinen, mit Ausnahme einfacher Fälle, durch keine Substitution zu ersetzen ist. Wenn jedoch der integrirende Faktor bloss die Form e^{-V} hat, so leisten, wie gesagt, unvollständige Lösungen für die Integration keine Dienste. Die nähere Betrachtung dieses Falles gehört daher auch nicht zu der eigentlichen Aufgabe gegenwärtiger Schrift; ich will ihn jedoch der Vollständigkeit wegen nicht ganz unerwähnt lassen. Sei also V ein ganzes Polynom in y und

$$e^{-V}(Mdx+Ndy)=d\Omega,$$

so ist:

$$\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}=M\frac{dV}{dy}-N\frac{dV}{dx}.$$

Nun sei z. B. $M=1+P_1y+P_2y^2+P_3y^3$, $N=Q+Q_1y+Q_2y^2$, $V=X+X_1y+X_2y^2$; so ergiebt sich aus vorstehender Gleichung die folgende:

$$\begin{aligned}3P_3y^2+2P_2y+P_1-\frac{dQ_2}{dx}y^2-\frac{dQ_1}{dx}y-\frac{dQ}{dx}&=(1+P_1y+P_2y^2+P_3y^3)(X_1+2X_2y)\\&\quad-(Q+Q_1y+Q_2y^2)\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dX_1}{dx}y+\frac{dX_2}{dx}y^2\right),\end{aligned}$$

und hieraus nach den verschiedenen Potenzen von y:

$$2P_3X_2-Q_2\frac{dX_2}{dx}=0$$

$$2P_2X_2+P_3X_1-Q_1\frac{dX_2}{dx}-Q_2\frac{dX_1}{dx}=0$$

$$2P_1X_2+P_2X_1\quad.\quad-Q\frac{dX_2}{dx}-Q_1\frac{dX_1}{dx}-Q_2\frac{dX}{dx}=3P_3-\frac{dQ_2}{dx}$$

$$2X_2+P_1X_1\quad.\quad.\quad.\quad-Q\frac{dX_1}{dx}-Q_1\frac{dX}{dx}=2P_2-\frac{dQ_1}{dx}$$

$$P_1-\frac{dQ}{dx}=X_1-Q\frac{dX}{dx}.$$

Sind nun P_3, P_2, Q_2, Q_1 als Funktionen von x beliebig gegeben, so findet man aus der ersten der vorstehenden Bedingungen sofort X_2; alsdann ergiebt die zweite für X_1 eine lineare Differentialgleichung, mittels deren X_1 durch bekannte Funktionen dargestellt werden kann. In den beiden folgenden Gleichungen finden sich dann nur die Unbekannten P_1 und $\frac{dX}{dx}$, da alles übrige darin bekannt ist; multiplicirt man also die dritte mit X_1, die vierte mit $2X_2$ und subtrahirt, so ist P_1 weggeschafft und $\frac{dX}{dx}$, also auch X, gefunden. Und vollzieht man ebenso die durch 3) Q_1 — 4) Q_2 angedeutete Operation, so erhält man P_1. Schliesslich giebt die fünfte Bedingung Q durch Integration einer linearen Gleichung.

*

§ 15. Ehe ich zur Anwendung des Vorstehenden auf einige besondere Fälle übergehe, habe ich noch eines Satzes zu erwähnen, der eine Erweiterung der bekannten Regel für die Integration homogener Gleichungen enthält. Sind nämlich M, N, Q homogene Funktionen von x und y, die beiden ersten von gleichen Graden n, die dritte von einem beliebigen Grade q, so besteht der Satz darin, dass die Gleichung

$$Mdx + Ndy + Q(xdy - ydx) = 0$$

sich nach Art der homogenen Differentialgleichungen durch Einsetzung von tx für y integriren lässt.

Denn es wird für $y = tx$

$$M = x^n f(t),\quad N = x^n F(t),\quad Q = x^q \Phi(t),\quad xdy - ydx = x^2 dt,$$

daher geht obige Gleichung über in:

$$x^n(ft + t.Ft)\,dx + x^{n+1}.Ft.dt + x^{q+2}.\Phi t.dt = 0$$

oder in folgende:

$$x^{n-q-2}(ft + t.Ft)\,dx + x^{n-q-1}.Ft.dt + \Phi t.dt = 0,$$

welche augenscheinlich nach x^{n-q-1} linear ist und in nachstehende Gestalt gebracht werden kann:

$$\frac{(ft + t.Ft)\,d(x^{n-q-1})}{n-q-1} + Ft.x^{n-q-1}dt + \Phi t.dt = 0.$$

Setzt man nun

$$e^{\int\frac{(n-q-1)Ft.dt}{ft+t.Ft}} = J,$$

und multiplicirt obige Gleichung mit

$$\frac{n-q-1}{ft+t.Ft}.J,$$

so erhält man das Integral

$$J.x^{n-q-1} + (n-q-1)\int\frac{J.\Phi t.dt}{ft+t.Ft} = \text{Const.}$$

Wünscht man den integrirenden Faktor der vorgelegten Gleichung ohne Einführung neuer veränderlicher Grössen in seiner einfachsten Gestalt darzustellen, so setze man

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{dP}{P};$$

alsdann ist dieser Faktor:

$$\frac{P^{n-q-1}}{Mx+Ny}$$

und man erhält sofort:

$$\frac{P^{n-q-1}[Mdx + Ndy + Q(xdy - ydx)]}{Mx+Ny} = P^{n-q-2}dP + \frac{P^{n-q-1}.Q(xdy-ydx)}{Mx+Ny} = d\Omega.$$

Setzt man nämlich $y = tx$, so findet sich sogleich

$$P = xe^{\int\frac{Ft.dt}{ft+t.Ft}};$$

ferner ist $Q = x^q.\Phi t$, $xdy - ydx = x^2 dt$, $Mx + Ny = x^{n+1}(ft + t.Ft)$; daher wird das zweite Glied in vorstehender Formel, nämlich

$$\frac{P^{n-q-1}.Q(xdy-ydx)}{Mx+Ny} = \frac{x^{n-q-1}.e^{(n-q-1)\int\frac{Ft.dt}{ft+t.Ft}}.x^q.\Phi t.x^2dt}{x^{n+1}(ft+t.Ft)} = \frac{e^{(n-q-1)\int\frac{Ft.dt}{ft+t.Ft}}.\Phi t.dt}{ft+t.Ft}$$

ein vollständiges Differential.

Es sei z. B. Q eine beliebige ~~homogene~~ Funktion von $\frac{y}{x}$, also eine homogene Funktion vom Grade $q = 0$, so ist:

$$\frac{P^{n-1}[Mdx + Ndy + Q(xdy - ydx)]}{Mx+Ny} = d\Omega.$$

Es sei $M = ax^2 + bxy + cy^2$, $N = a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2$, also $n = 2$, dabei der Grad q der homogenen Funktion Q beliebig, so wird

$$\log P = \log x + \int\frac{a_1 + b_1t + c_1t^2}{a + (b+a_1)t + (c+b_1)t^2 + c_1t^3}.dt.$$

Angenommen, der Nenner unter dem Integralzeichen zerfalle in drei ungleiche Faktoren, sei also $= c_1(t-\mu_1)(t-\mu_2)(t-\mu_3)$, so folgt durch Zerlegung in einfache Brüche

$$\log P = \log x + \gamma_1\log(t-\mu_1) + \gamma_2\log(t-\mu_2) + \gamma_3\log(t-\mu_3)$$

und zugleich ist:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1;$$

daher wird

$$P = (y-\mu_1x)^{\gamma_1}(y-\mu_2x)^{\gamma_2}(y-\mu_3x)^{\gamma_3},$$

so wie auch

$$Mx + Ny = c_1(y-\mu_1x)(y-\mu_2x)(y-\mu_3x).$$

Hiermit ergiebt sich:

$$\frac{(ax^2+bxy+cy^2)\,dx + (a_1x^2+b_1xy+c_1y^2)\,dy + Q(xdy-ydx)}{(y-\mu_1x)^{1-\gamma_1+q\gamma_1}.(y-\mu_2x)^{1-\gamma_2+q\gamma_2}.(y-\mu_3x)^{1-\gamma_3+q\gamma_3}} = d\Omega,$$

wo Q eine beliebige homogene Funktion vom Grade q bedeutet. Ein im Folgenden vorkommender Fall ist der, dass $Q = \text{const.} = g$ ist, also $q = 0$. Man hat demnach

$$\frac{(ax^2+bxy+cy^2)\,dx + (a_1x^2+b_1xy+c_1y^2)\,dy + g(xdy-ydx)}{c_1(y-\mu_1x)^{1-\gamma_1}(y-\mu_2x)^{1-\gamma_2}(y-\mu_3x)^{1-\gamma_3}} = d\Omega,$$

und zwar ist

$$\Omega = (y-\mu_1x)^{\gamma_1}(y-\mu_2x)^{\gamma_2}(y-\mu_3x)^{\gamma_3} + \frac{g}{c_1}\int(y-\mu_1x)^{\gamma_1-1}(y-\mu_2x)^{\gamma_2-1}(y-\mu_3x)^{\gamma_3-1}(xdy-ydx),$$

wo das letzte Glied für $y = tx$ übergeht in $\int (t-\mu_1)^{\gamma_1-1}(t-\mu_2)^{\gamma_2-1}(t-\mu_3)^{\gamma_3-1}dt$, also ein vollständiges Integral ist. Ueberhaupt ist die Form des Integrals für alle Gleichungen dieser Art schon oben gegeben.

Anmerkung. Ueber die Darstellung des Integrals Ω mag Folgendes hier noch im Allgemeinen bemerkt werden. Wenn $\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = d\Omega$ gegeben ist, so wird die Quadratur, wofern nicht besondere Vereinfachungen sich darbieten, am besten vollzogen nach der von Jacobi in Crelle's Journal, Band 23, S. 92, mitgetheilten Weise. Nämlich man nimmt für eine der Grössen x oder y einen beliebigen passenden Werth an, er sei $x = c$, und integrirt zuerst nach x von c bis x, setzt hierauf c für x in $\frac{N}{\psi}$ ein und integrirt diesen, nunmehr bloss y enthaltenden, Ausdruck nach y; so erhält man:

$$\Omega = \int_c^x \frac{M}{\psi}\, dx + \int^y \left(\frac{N}{\psi}\right)_{x=c} dy.$$

In der That folgt hieraus

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{M}{\psi}\, dx + dy \int_c^x \frac{d\left(\frac{M}{\psi}\right)}{dy}\, dx + \left(\frac{N}{\psi}\right)_{x=c} dy \\ &= \frac{M}{\psi}\, dx + dy \int_c^x \frac{d\left(\frac{N}{\psi}\right)}{dx}\, dx + \left(\frac{N}{\psi}\right)_{x=c} dy \\ &= \frac{M}{\psi}\, dx + \frac{N}{\psi}\, dy - \left(\frac{N}{\psi}\right)_{x=c} dy + \left(\frac{N}{\psi}\right)_{x=c} dy \\ &= \frac{Mdx + Ndy}{\psi}, \end{aligned}$$

wie verlangt wurde. Ebenso auch, wenn ein passender Werth k für y gewählt ist, hat man

$$\Omega = \int_k^y \frac{N}{\psi}\, dy + \int^x \left(\frac{M}{\psi}\right)_{y=k} dx.$$

Doch bieten sich nicht selten andere Wege dar, um die wahre und einfachste Gestalt des Integrals zu entdecken, und es bleibt immer nöthig solche aufzusuchen.

Zweite Abtheilung,

enthaltend Anwendungen.

§ 16. Es seien M und N nach x und y ganze Polynome vom zweiten Grade, ohne gemeinsamen Faktor; also

$$M = a + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

$$N = b + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2$$

und

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Auch wird angenommen, dass die Vorzahl von y^2 in N, also b_5, nicht gleich Null ist; denn wäre in der ursprünglich gegebenen Gleichung $b_5 = 0$, so bedürfte es nur einer linearen Substitution, um in die verwandelte Gleichung das Glied $y'^2 dy'$ mit einer gültigen Vorzahl einzuführen. Durch die Annahme, dass b_5 von Null verschieden sei, entgeht man der Nothwendigkeit einige besondere Fälle zu betrachten, welche mehr scheinbare als wirkliche Ausnahmen bilden. Eine wirkliche Ausnahme ist jedoch in der That vorhanden, denn in einem gewissen Falle bleibt b_5 bei jeder linearen Substitution gleich Null; diese wird also für jetzt ausgeschlossen und später untersucht werden.

Wenn die vorgelegte Gleichung so beschaffen ist, dass ihr durch $y = \alpha x + \beta$ Genüge geschieht, so muss für jedes x sein:

$$\begin{aligned} & a + a_1 x + a_2(\alpha x + \beta) + a_3 x^2 + a_4 x(\alpha x + \beta) + a_5(\alpha x + \beta)^2 \\ & + [b + b_1 x + b_2(\alpha x + \beta) + b_3 x^2 + b_4 x(\alpha x + \beta) + b_5(\alpha x + \beta)^2]\,\alpha = 0; \end{aligned}$$

folglich:

$$a_3 + a_4\alpha + a_5\alpha^2 + (b_3 + b_4\alpha + b_5\alpha^2)\,\alpha = 0$$

$$a_1 + a_2\alpha + a_4\beta + 2a_5\alpha\beta + (b_1 + b_2\alpha + b_4\beta + 2b_5\alpha\beta)\,\alpha = 0$$

$$a + a_2\beta + a_5\beta^2 + (b + b_2\beta + b_5\beta^2)\,\alpha = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen, nämlich:

$$b_5\alpha^3 + (b_4 + a_5)\,\alpha^2 + (b_3 + a_4)\,\alpha + a_3 = 0$$

giebt drei Werthe für α; sie seien α_1, α_2, α_3. Die zweite Gleichung bestimmt das jedem α zugeordnete β; es ist:

$$-\beta = \frac{b_2\alpha^2 + (b_1 + a_2)\,\alpha + a_1}{2b_5\alpha^2 + (b_4 + 2a_5)\,\alpha + a_4},$$

woraus für $\alpha = \alpha_1$, β_1, für $\alpha = \alpha_2$, β_2 u. s. f. gefunden wird. Endlich giebt die dritte

Gleichung, da sie für jedes Paar zusammengehöriger Werthe von α und β bestehen muss, folgende drei Bedingungen:

$$a + b\alpha_1 + a_2\beta_1 + b_2\alpha_1\beta_1 + a_5\beta_1^2 + b_5\alpha_1\beta_1^2 = 0$$
$$a + b\alpha_2 + a_2\beta_2 + b_2\alpha_2\beta_2 + a_5\beta_2^2 + b_5\alpha_2\beta_2^2 = 0$$
$$a + b\alpha_3 + a_2\beta_3 + b_2\alpha_3\beta_3 + a_5\beta_3^2 + b_5\alpha_3\beta_3^2 = 0,$$

welche erfüllt werden müssen, wenn die Differentialgleichung drei lineare Lösungen wirklich darbieten soll.

Werden nun a, b, a_2, b_1 als unbekannt, alle übrigen a und b aber nebst der Summe $a_2 + b_1 = c$ als gegeben betrachtet, so ist leicht zu sehen, dass in den obigen Gleichungen α und β nur durch bekannte Grössen ausgedrückt werden, da namentlich b_1 und a_2 nicht einzeln, sondern nur in der Summe $b_1 + a_2$ im Zähler von β vorkommen und diese Summe $= c$ gegeben ist. Es sind demnach für die unbekannten a, b, a_2, b_1 vier Gleichungen ersten Grades gegeben, nämlich die vorstehenden drei Bedingungen $a + b\alpha_1 + a_2\beta_1 + \ldots = 0, \ldots$ und $a_2 + b_1 = c$. Da in jenen Bedingungen b_1 nicht vorkommt, so findet man durch ihre Auflösung a, b, a_2 und dann $b_1 = c - a_2$. Dabei ergiebt sich als gemeinschaftlicher Nenner der Werthe von a, b, a_2:

$$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$$
$$= (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_3) - (\alpha_1 - \alpha_3)(\beta_1 - \beta_2);$$

man erhält also immer bestimmte Werthe, wenn nicht $\Delta = 0$ ist.

Werden nun, wie früher, die linearen Lösungen durch y_1, y_2, y_3 bezeichnet, so dass $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$ u. s. w. und wird $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = \psi$ gesetzt, so macht es einen wesentlichen Unterschied, ob keines der Produkte $\psi'(y_1) = (y_1 - y_2)(y_1 - y_3)$, $\psi' y_2$, $\psi' y_3$ ein Quadrat ist oder ob diese Bedingung nicht erfüllt wird. Im letzteren Falle, wenn also wenigstens eines jener Produkte ein Quadrat ist, sieht man sogleich, dass es alle drei sein müssen. Denn es sei $y_1 - y_2 = m_2(x + \delta)$, $y_1 - y_3 = m_3(x + \delta)$, also $\psi' y_1 = m_2 m_3 (x + \delta)^2$; so ist auch $y_2 - y_3$ durch $x + \delta$ theilbar, folglich sind auch $\psi' y_2 = (y_2 - y_1)(y_2 - y_3)$ und $\psi' y_3 = (y_3 - y_1)(y_3 - y_2)$ Quadrate. Also ist entweder keines jener Produkte ein Quadrat oder sie sind es alle drei zugleich, und zwar findet, wie leicht zu sehen, der erstere oder der letztere Fall statt, je nachdem Δ nicht gleich Null oder $\Delta = 0$ ist. Denn es sei:

$$y_1 - y_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)(x + \delta_2),\quad y_1 - y_3 = (\alpha_1 - \alpha_3)(x + \delta_3),$$

mithin

$$\delta_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2},\quad \delta_3 = \frac{\beta_1 - \beta_3}{\alpha_1 - \alpha_3},$$

so wird für $\Delta = 0$ auch $\delta_2 = \delta_3$ und mithin $\psi' y_1$ ein Quadrat; wenn aber Δ von Null verschieden ist, so ist auch δ_2 von δ_3 verschieden, also $\psi' y_1$ kein Quadrat, und überhaupt keines jener Produkte ein Quadrat.

Daher folgt: wenn die drei Wurzeln α_1, α_2, α_3 sämmtlich von einander verschieden sind und Δ nicht gleich Null ist, so sind die Quotienten $\frac{N_1}{\psi' y_1} = q_1$, $\frac{N_2}{\psi' y_2} = q_2$, $\frac{N_3}{\psi' y_3} = q_3$ nothwendig constant und man hat:

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = d\Omega = q_1 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2 \frac{d(y - y_2)}{y - y_2} + q_3 \frac{d(y - y_3)}{y - y_3}.$$

Der Werth von q_1 ist:

$$q_1 = \frac{b_5\alpha_1^2 + b_4\alpha_1 + b_3}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)}$$

und durch Vertauschung von α_1 mit α_2 und mit α_3 ergeben sich q_2 und q_3.

Wenn hingegen die vorgelegte Gleichung zwar drei lineare Lösungen mit drei ungleichen α hat, aber von solcher Beschaffenheit, dass $\Delta = 0$ ist, so nimmt ihr integrirender Faktor eine andere Gestalt an, die jedoch immer mit jenen Lösungen in unmittelbarem Zusammenhang steht. Um die Rechnung möglichst zu vereinfachen, ist es zweckmässig eine Substitution anzuwenden, wodurch die vorhandenen Lösungen auf die Form $y_1 = 0$, $y_2 = x$, $y_3 = \alpha x + \beta$ gebracht werden. Da nämlich nach der Voraussetzung folgende drei Lösungen stattfanden: $y_1 = \alpha_1 x + \beta_1$, $y_2 = \alpha_2 x + \beta_2$, $y_3 = \alpha_3 x + \beta_3$, und da keine der Differenzen $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$, $\alpha_2 - \alpha_3$ gleich Null war, so denke man sich in die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ die neuen Argumente u und v eingeführt mittels der Gleichungen:

$$y = \gamma v + y_1,\quad x = u + \delta$$

oder

$$x = u + \delta,\quad y = \alpha_1 u + \gamma v + \alpha_1\delta + \beta_1,$$

und zwar sei

$$\gamma = \alpha_2 - \alpha_1,\quad \delta = -\frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1},$$

also

$$x = u + \delta,\quad y = \alpha_1 u + \gamma v + \frac{\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1}{\gamma}.$$

Nun sei für $y = y_1$, $v = v_1$; für $y = y_2$, $v = v_2$; für $y = y_3$, $v = v_3$; so erhält man sofort:

$$v_1 = 0,$$
$$\gamma v_2 = y_2 - y_1 = (\alpha_2 - \alpha_1)x + \beta_2 - \beta_1 = \gamma(x - \delta) = \gamma u,$$

also

$$v_2 = u;$$
$$\gamma v_3 = y_3 - y_1 = (\alpha_3 - \alpha_1)u + (\alpha_3 - \alpha_1)\delta + \beta_3 - \beta_1,$$

oder wenn gesetzt wird:

$$\frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \alpha,\quad (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_3 - \beta_1) - (\alpha_3 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1) = \Delta$$

wie oben, endlich

$$\frac{\Delta}{(\alpha_2 - \alpha_1)^2} = \beta,$$

so folgt:

$$v_3 = \alpha u + \beta.$$

Die also umgestaltete Gleichung, worin die Grade der M und N nicht verändert sind, hat nunmehr, wenn u und v wieder durch x und y ersetzt werden, die Lösungen $y_1 = 0$, $y_2 = x$, $y_3 = \alpha x + \beta$, wo α weder gleich Null noch $= 1$ sein wird, da α_2 von α_3 nach der Voraussetzung verschieden war. Sei nun, wie bisher, $Mdx + Ndy = 0$ die Differentialgleichung, und zwar:

$$M = a + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

$$N = b + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + y^2,$$

also zur Abkürzung $b_5 = 1$ angenommen, da der Fall $b_5 = 0$ ausgeschlossen bleibt, so müssen die Vorzahlen a und b folgende Bedingungen erfüllen, damit die obigen drei Lösungen bestehen, nämlich: weil $y = 0$ der Differentialgleichung genügen soll, so muss sein: $a = 0$, $a_1 = 0$, $a_3 = 0$. Weil $y = x$ ebenfalls genügen soll, so ist

$$b = 0, \quad a_2 + b_1 + b_2 = 0, \quad a_4 + a_5 + b_3 + b_4 + 1 = 0.$$

Endlich weil auch $y = \alpha x + \beta$ eine Lösung sein soll, so folgt zuerst:

$$\alpha^2 + (b_4 + a_5)\alpha + b_3 + a_4 = 0,$$

und da $\alpha = 1$ eine Wurzel dieser Gleichung ist, so ergiebt sich für die andere:

$$\alpha + 1 + b_4 + a_5 = 0; \text{ daher auch } \alpha = a_4 + b_3.$$

Sodann muss sein:

$$\beta = -\frac{b_2 \alpha^2 + (b_1 + a_2)\alpha}{2\alpha^2 + (b_4 + 2a_5)\alpha + a_4},$$

oder wenn für $b_1 + a_2$ vermöge der entsprechenden obigen Gleichung $-b_2$ gesetzt und α aus dem Nenner weggeschafft wird:

$$\beta = \frac{b_2 \alpha (1 - \alpha)}{B},$$

wo zur Abkürzung eingeführt ist:

$$B = (1 + b_4)(1 + b_4 + a_5) - b_3.$$

Endlich muss y_3 auch noch die dritte Bedingung erfüllen, welche, da jetzt $a = 0$ und $b = 0$, nachstehende Gestalt annimmt:

$$(a_2 + a_5 \beta + b_2 \alpha + \alpha\beta)\beta = 0.$$

Die verwandelte Differentialgleichung ist daher folgende:

$$Mdx + Ndy = 0,$$

$$M = (a_2 + a_4 x + a_5 y) y, \quad N = b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2,$$

und zwar:

$$a_2 = -b_1 - b_2, \quad a_4 = -1 - b_3 - b_4 - a_5,$$

wozu noch die für die dritte Lösung geltende Bedingung kommt, dass nämlich für

$$\alpha = a_4 + b_3, \quad \beta = \frac{b_2 \alpha (1 - \alpha)}{B}$$

sein muss:

$$(a_2 + a_5 \beta + b_2 \alpha + \alpha\beta)\beta = 0.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass der integrirende Divisor dieser Gleichung unter allen Umständen durch $\psi = y^{\varepsilon_1} (y - x)^{\varepsilon_2} (y - \alpha x - \beta)^{\varepsilon_3}$ dargestellt werden kann. Dies wird erwiesen sein, wenn es möglich ist, der am Schlusse des § 10 entwickelten Bedingungsgleichung, worin $V = 0$ zu setzen ist, also der Gleichung:

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \varepsilon_1 \left(G_1 + H_1 \frac{dy_1}{dx}\right) + \varepsilon_2 \left(G_2 + H_2 \frac{dy_2}{dx}\right) + \varepsilon_3 \left(G_3 + H_3 \frac{dy_3}{dx}\right)$$

durch constante Werthe der ε zu genügen.

Man findet: $G_1 = a_5 y + a_5 y_1 + a_4 x + a_2$, $H_1 = y + y_1 + b_4 x + b_2$, woraus G_2, G_3, H_2, H_3 durch Vertauschung von y_1 mit y_2, y_3 hervorgehen. Ferner ist $y_1 = 0$, $y_2 = x$, $y_3 = \alpha x + \beta$; daher wird obige Gleichung:

$$\begin{aligned}(2a_5 - b_4) y + (a_4 - 2b_3) x + a_2 - b_1 = {} & [a_5 \varepsilon_1 + (a_5 + 1)\varepsilon_2 + (a_5 + \alpha)\varepsilon_3] y \\ & + [a_4 \varepsilon_1 + (a_4 + a_5 + b_4 + 1)\varepsilon_2 + (a_5 \alpha + a_4 + b_4 \alpha + \alpha^2)\varepsilon_3] x \\ & + a_2 \varepsilon_1 + (a_2 + b_2)\varepsilon_2 + (a_2 + b_2 \alpha + a_5 \beta + \alpha\beta)\varepsilon_3.\end{aligned}$$

Diese Gleichung kürzt sich nicht unerheblich ab, wenn man für ε, $1 + \delta$ setzt, also $\varepsilon_1 = 1 + \delta_1$ u. s. f. Vergleicht man sodann die in y multiplicirten Glieder beider Seiten mit einander, ebenso die in x multiplicirten und die dann noch übrigen, so ergeben sich für die δ folgende Gleichungen:

$$0 = b_4 + a_5 + \alpha + 1 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) a_5 + \delta_2 + \delta_3 \alpha$$

$$\begin{aligned}0 = {} & 2b_3 + 2a_4 + a_5 + b_4 + 1 + a_5 \alpha + b_4 \alpha + \alpha^2 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) a_4 \\ & + (\delta_2 + \delta_3 \alpha)(a_5 + b_4) + \delta_2 + \delta_3 \alpha^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 = {} & b_1 + 2a_2 + b_2 + b_4 \alpha + a_5 \beta + \alpha\beta + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) a_2 \\ & + (\delta_2 + \delta_3 \alpha) b_2 + \delta_3 \beta (a_5 + \alpha).\end{aligned}$$

Nun ist $1 + \alpha + b_4 + a_5 = 0$; daher wird die erste Gleichung:

$$a_5 (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + \delta_2 + \delta_3 \alpha = 0.$$

Ferner ist $(a_5 + b_4 + \alpha)\alpha = -\alpha$, $2a_4 + 2b_3 + a_5 + b_4 + 1 - \alpha = (a_4 + a_5 + b_3 + b_4 + 1) + (a_4 + b_3 - \alpha) = 0$; daher die zweite Gleichung:

$$a_4(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + (a_5 + b_4)(\delta_2 + \delta_3\alpha) + \delta_2 + \delta_3\alpha^2 = 0.$$

Bei der dritten Gleichung kommt es darauf an, ob $\beta = 0$ ist oder nicht. Es sei β nicht $= 0$, so ist vermöge der zuletzt gestellten Bedingung für die dritte Lösung:

$$a_2 + b_2\alpha + a_5\beta + \alpha\beta = 0,$$

daher:

$$2a_2 + b_1 + b_2 + b_2\alpha + a_5\beta + \alpha\beta = a_2 + b_1 + b_2 = 0;$$

mithin wird die dritte Gleichung, wenn β nicht Null ist,

$$a_2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) + b_2(\delta_2 + \delta_3\alpha) + (a_5 + \alpha)\beta\delta_3 = 0.$$

Wenn dagegen $\beta = \frac{b_2\alpha(1-\alpha)}{B} = 0$ ist, so folgt, da nach der Voraussetzung α von 0 und von 1 verschieden ist, $b_2 = 0$, daher $a_2 + b_1 = 0$, und die dritte Gleichung wird: $a_2 + a_2(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) = 0$ oder: $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -1$, indem die Annahme $a_2 = 0$ unbeachtet bleiben kann, weil sie mit $b_1 = 0$ und $b_2 = 0$ die Differentialgleichung homogen machen würde.

Wenn demnach β (und mithin auch das obige Δ, welches jetzt mit β zusammenfällt, weil $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 0$, $\alpha_3 = \alpha$, $\beta_3 = \beta$ ist) nicht verschwindet, so erhält man $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$, d. h. den integrirenden Divisor $y(y-x)(y-\alpha x-\beta)$, wie schon vorher auf anderem Wege gefunden war.

Wenn aber $\beta = \Delta = 0$ ist, so ist der integrirende Divisor:

$$\psi = y^{1+\delta_1}.(y-x)^{1+\delta_2}.(y-\alpha x)^{1+\delta_3}$$

und zwar:

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = -1,\ \delta_2 + \alpha\delta_3 = a_5,\ \delta_2 + \alpha^2\delta_3 + a_5(a_5 + b_4) = a_4$$

oder weil

$$\alpha + 1 + a_5 + b_4 = 0 \text{ ist},\ \delta_2 + \alpha^2\delta_3 = a_4 + a_5 + \alpha a_5;$$

daher:

$$\delta_1 = \frac{a_4 - \alpha}{\alpha},\ \delta_2 = \frac{a_4 + a_5}{1-\alpha},\ \delta_3 = \frac{-a_4 - \alpha a_5}{\alpha(1-\alpha)}.$$

Mit diesen Werthen ist also:

$$\frac{(a_2 + a_4x + a_5y)\,y\,dx + (b_3x^2 + b_4xy + y^2 - a_2x)\,dy}{y^{1+\delta_1}.(y-x)^{1+\delta_2}.(y-\alpha x)^{1+\delta_3}} = d\Omega.$$

Dabei ist zu bemerken, dass die Werthe der δ nothwendig endlich sind, weil α von Null wie von 1 verschieden gedacht werden muss.

Uebrigens bedarf das vorstehende vollständige Differential keiner besonderen Entwickelung, da es unmittelbar unter den in § 15 aufgestellten Satz fällt.

Aus der bisherigen Untersuchung ergiebt sich, dass die Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, $M = a + a_1x + \ldots\ldots + a_5y^2$, $N = b + b_1x + \ldots\ldots + y^2$, wenn sie drei lineare Lösungen, $y_1 = \alpha_1x + \beta_1$, u. s. f. mit drei verschiedenen α hat, immer durch Multiplication mit $(y-y_1)^{-\varepsilon_1}.(y-y_2)^{-\varepsilon_2}.(y-y_3)^{-\varepsilon_3}$ integrabel wird; und zwar sind alle ε der positiven Einheit gleich, wenn $\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \ldots\ldots$ von Null verschieden ist; für $\Delta = 0$ aber erhalten sie andere, jedoch immer bestimmte endliche Werthe.

Im Vorstehenden lag überall die Annahme zu Grunde, dass die gegebene Differentialgleichung drei lineare Lösungen mit drei verschiedenen α darbot; es bleibt also noch zu untersuchen, was erfolgt, wenn zwar drei verschiedene lineare Lösungen bestehen, aber nicht alle drei α von einander verschieden sind. Man überzeugt sich jedoch leicht, dass, wenn alle drei α einander gleich sein sollten, also $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, die Differentialgleichung auf die Form $d(y-\alpha x) = 0$ zurückkommen müsste, in so fern nämlich, wie hier festgehalten werden muss, die ganzen Polynome M und N den zweiten Grad nicht übersteigen dürfen. Es bleibt also noch der Fall zu erwägen, dass $\alpha_1 = \alpha_2$, aber von α_3 verschieden ist, so wie auch β_1 von β_2 verschieden sein muss, damit drei verschiedene Lösungen stattfinden.

Sei also $y_1 = \alpha_1x + \beta_1$, $y_2 = \alpha_1x + \beta_2$, $y_3 = \alpha_3x + \beta_3$ und β_2 verschieden von β_1, so wie α_3 von α_1. Setzt man $y - y_1 = v$, $(\alpha_3 - \alpha_1)x + \beta_3 - \beta_1 = u$, so verwandelt sich die Gleichung in eine andere, welche als Lösungen $v_1 = 0$, $v_2 = \beta_3 - \beta_1 = \beta$, $v_3 = u$ darbietet, und worin β von Null verschieden ist. Eine Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, welcher durch $y_1 = 0$, $y_2 = \beta$, $y_3 = x$ genügt wird, während die ganzen Polynome M und N nur vom zweiten Grade sind, muss folgende Gestalt haben:

$$y(y-\beta)\,dx + [(py + qx + m\beta)(y-x) - x(x-\beta)]\,dy = 0;$$

p, q, m sind willkürliche Constanten.

Sei $\psi = y^{\varepsilon_1}.(y-\beta)^{\varepsilon_2}.(y-x)^{\varepsilon_3}$, so findet man nach § 10, dass diese Form in der That den integrirenden Fàktor giebt, und zwar wird:

$$\varepsilon_1 = m,\ \varepsilon_2 = -m - p - q,\ \varepsilon_3 = 2;$$

also:

$$\frac{y(y-\beta)\,dx + [(py + qx + m\beta)(y-x) - x(x-\beta)]\,dy}{y^m.(y-\beta)^{-m-p-q}.(y-x)^2} = d\Omega.$$

Von der Richtigkeit dieses Ergebnisses kann man sich auch so überzeugen:

Es sei:

$$M = \frac{y(y-\beta)}{\psi},\ N = \frac{(py + qx + m\beta)(y-x) - x(x-\beta)}{\psi};$$

daher:

$$\frac{dM}{dy} = M\left(\frac{1-m}{y} + \frac{1+m+p+q}{y-\beta} - \frac{2}{y-x}\right)$$

$$\frac{dN}{dx} = N\left(\frac{(q-p)y - (2q+2)x + (1-m)\beta}{(py + qx + m\beta)(y-x) - x(x-\beta)} + \frac{2}{y-x}\right).$$

Die Gleichsetzung dieser Werthe giebt:

$$(1-m)(y-\beta)+(1+m+p+q)y-\frac{2y(y-\beta)}{y-x}=(q-p)y-(2q+2)x$$
$$+(1-m)\beta+2py+2qx+2m\beta-\frac{2x(x-\beta)}{y-x},$$

und wegen $\frac{2y(y-\beta)-2x(x-\beta)}{y-x}=2y+2x-2\beta$:

$$(2+p+q)y-(1-m)\beta=(q-p)y-(2q+2)x+(1-m)\beta$$
$$+2py+2qx+2m\beta$$
$$+2y+2x-2\beta\text{: identisch richtig.}$$

Das Integral Ω findet sich auf bekannte Weise. Es ist

$$\Omega=\frac{y^{1-m}.(y-\beta)^{1+m+p+q}}{y-x}-(1+q)\int\frac{dy.(y-\beta)^{m+p+q}}{y^m}.$$

Alles zusammengenommen folgt schliesslich, dass die Gleichung $Mdx+Ndy=0$. $M=a+a_1x+\ldots\ldots+a_5y^2$, $N=b+b_1x+\ldots\ldots+y^2$, wenn sie drei lineare Lösungen y_1, y_2, y_3 hat, deren jede von jeder andern verschieden ist, immer durch Division mit einem Ausdrucke von der Form $(y-y_1)^{\varepsilon_1}(y-y_2)^{\varepsilon_2}(y-y_3)^{\varepsilon_3}$ integrabel wird.

Wenn aber die im Eingange dieses Paragraphen entwickelten Bedingungen für das Bestehen dreier linearer Lösungen so beschaffen sind, dass z. B. $\alpha_1=\alpha_2$ und $\beta_1=\beta_2$ gefunden wird, so hat man in der That nur zwei Lösungen. Diese reichen zwar in gewissen besonderen, übrigens gar nicht schwierigen Fällen zur Bildung des integrirenden Faktors hin, wie z. B. auch die so eben vollzogene Integration für $\beta=0$ noch gilt; allgemein aber sind sie nicht ausreichend.

§ 17. Die im Vorigen festgehaltene Voraussetzung: b_5 nicht $=0$, erleidet eine Ausnahme, welche jedoch nur dann eintreten kann, wenn schon in der ursprünglichen Differentialgleichung nicht allein b_5, sondern auch a_3 gleich Null war. Alsdann erhält man, $\alpha u+\beta v$ für x und $\gamma u+\delta v$ für y setzend:

$$(a_4xy+a_5y^2)dx+(b_3x^2+b_4xy)dy=(a_3'u^2+a_4'uv+a_5'v^2)du$$
$$+(b_3'u^2+b_4'uv+b_5'v^2)dv$$

und findet:

$$a_3'=(a_4+b_3)\alpha^2\gamma+(a_5+b_4)\alpha\gamma^2,\quad b_5'=(a_4+b_3)\beta^2\delta+(a_5+b_4)\beta\delta^2.$$

War also neben $a_3=0$, $b_5=0$ auch noch $a_4+b_3=0$ und $a_5+b_4=0$, so behalten a_3 und b_5 bei jeder linearen Substitution den Werth Null und es stellt sich als einzig mögliche hierher gehörige Ausnahme die von Jacobi untersuchte Gleichung dar, nämlich $Mdx+Ndy=0$:

$$M=a+a_1x+a_2y-b_3xy-b_4y^2,\quad N=b+b_1x+b_2y+b_3x^2+b_4xy,$$

welche sich auch also schreiben lässt:

$$(a+a_1x+a_2y)dx+(b+b_1x+b_2y)dy+(b_3x+b_4y)(xdy-ydx)=0.$$

Wird hier $y=\alpha x+\beta$ eingesetzt, so braucht man nur auf die im Anfange des vorigen Paragraphen allgemein entwickelten Formeln zurückzublicken, um zu ersehen, dass durch das Verschwinden von a_3, b_5, a_4+b_3, a_5+b_4 die Gleichung für α sich unmittelbar erledigt und nur die beiden andern übrig bleiben, nämlich:

$$a_1+(a_2+b_1)\alpha+b_2\alpha^2-b_3\beta-b_4\alpha\beta=0$$
$$a+a_2\beta+b\alpha+b_2\alpha\beta-b_4\beta^2=0.$$

Aus ersterer folgt:

$$\beta=\frac{b_2\alpha^2+(a_2+b_1)\alpha+a_1}{b_3+b_4\alpha},$$

und dieser Werth in die zweite gesetzt giebt für α die Gleichung:

$$(a+b\alpha)(b_3+b_4\alpha)^2+(a_2+b_2\alpha)(b_3+b_4\alpha)[a_1+(a_2+b_1)\alpha+b_2\alpha^2]$$
$$=b_4[a_1+(a_2+b_1)\alpha+b_2\alpha^2]^2,$$

welche vom dritten Grade ist, da die Glieder in α^4 einander tilgen. Sind $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ihre Wurzeln, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ die jenen zugehörigen β, und setzt man:

$$\psi=C(y-\alpha_1x-\beta_1)(y-\alpha_2x-\beta_2)(y-\alpha_3x-\beta_3),$$

so wird nach Entwickelung der symmetrischen Funktionen und passender Bestimmung der Constante C, ψ gefunden als eine rationale ganze Funktion der sämmtlichen a und b, welche unter allen Umständen den integrirenden Divisor darstellt, so dass man hat: $\frac{Mdx+Ndy}{\psi}=d\Omega$. Dieses $d\Omega$ verwandelt sich in $d\Omega=q_1\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}+q_2\frac{d(y-y_2)}{y-y_2}+q_3\frac{d(y-y_3)}{y-y_3}$, wenn überhaupt jede der drei Lösungen y_1, y_2, y_3 von jeder andern verschieden ist. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem sich unter den α zwei gleiche befinden oder nicht. Sind gleiche α nicht vorhanden, so erhält man:

$$q_1=\frac{b_3+b_4\alpha_1}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)},\quad q_2=\frac{b_3+b_4\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)},\quad q_3=\frac{b_3+b_4\alpha_3}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)};$$

es ist jedoch zu bemerken, dass es nur auf die Verhältnisse zwischen den q, nicht aber auf die Werthe dieser Grössen selbst ankommt.

Sollen zwei α einander gleich, aber die zugehörigen β von einander verschieden sein, so kann dieser Fall nur dann eintreten, wenn der Nenner $b_3+b_4\alpha$ von β im Zähler (ohne Rest) aufgeht. Alsdann erhält man: $\alpha_1=\alpha_2=-\frac{b_3}{b_4}$ und für die zugehörigen β eine Gleichung zweiten Grades; zugleich aber verschwinden in diesem Falle die in x^2 multiplicirten Glieder von N_1 und N_2, so dass beide Polynome nur den ersten Grad erreichen und man erhält:

$$q_1 = \frac{N_1}{\psi' y_1} = \frac{b + b_2\beta_1 + (b_1 + b_2\alpha_1 + b_4\beta_1)x}{(\beta_1 - \beta_2)[(\alpha_1 - \alpha_3)x + \beta_1 - \beta_3]} = \frac{b_1 + b_2\alpha_1 + b_4\beta_1}{(\beta_1 - \beta_2)(\alpha_1 - \alpha_3)},$$

ebenso

$$q_2 = \frac{b_1 + b_2\alpha_1 + b_4\beta_2}{(\beta_2 - \beta_1)(\alpha_1 - \alpha_3)};\quad q_3 = \frac{b_3 + b_4\alpha_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)^2};$$

dabei ist stets

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{N_1}{\psi' y_1} + \frac{N_2}{\psi' y_2} + \frac{N_3}{\psi' y_3} = 0.$$

Fallen dagegen zwei Lösungen y_1 und y_2 gänzlich zusammen, oder mit anderen Worten, sind zwei Faktoren von ψ einander gleich, so bleibt zwar der integrirende Divisor ψ immer gültig, aber die Form des Integrals wird eine andere. Man findet in diesem Falle nach den früheren allgemeinen Entwickelungen sofort:

$$\frac{Mdx + Ndy}{(y - y_1)^2 (y - y_3)} = -d\left(\frac{N_1}{(y_1 - y_3)(y - y_1)}\right) + q_3 \frac{d(y - y_3)}{y - y_3} - q_3 \frac{d(y - y_1)}{y - y_1};$$

$$q_3 = \frac{b_3 + b_4\alpha_3}{(\alpha_3 - \alpha_1)^2}.$$

Sind alle drei Faktoren von ψ einander gleich, so wird:

$$\frac{Mdx + Ndy}{(y - y_1)^3} = -\frac{1}{2} d\left(\frac{N_1}{(y - y_1)^2}\right) - d\left(\frac{\frac{dN_1}{dy_1}}{y - y_1}\right).$$

Um diesen Fall etwas weiter zu verfolgen, genügt es $y_1 = 0$ anzunehmen. Setzt man noch $N = b + 2b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy$, wo $2b_1$ für b_1 geschrieben ist, so wird $N_1 = b + 2b_1x + b_3x^2$, $\frac{dN_1}{dy_1} = b_2 + b_4x$ und man findet $M = -(b_1 + b_3x + b_4y)y$, so dass sich folgendes Differential mit dem integrirenden Divisor y^3 ergiebt, nämlich:

$$\frac{(b + b_1x + b_2y)\,dy + (b_1 + b_3x + b_4y)(xdy - ydx)}{y^3} = d\Omega,$$

$$\Omega = -\frac{1}{2}\,\frac{b + 2b_1x + b_3x^2}{y^2} - \frac{b_2 + b_4x}{y}.$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass die allgemeine Methode, auf das vorstehende Differential angewandt, nicht y^3, sondern einen andern integrirenden Divisor herbeiführt. Setzt man nämlich $y = \alpha x + \beta$ in die Gleichung $(b + b_1x + b_2y)\,dy + (b_1 + b_3x + b_4y)(xdy - ydx) = 0$, so erhält man:

$$(b + b_2\beta)\alpha = (b_1 + b_4\beta)\beta$$

$$(b_1 + b_2\alpha)\alpha = (b_3 + b_4\alpha)\beta,$$

daher nach Wegschaffung von β:

$$(bb_4^2 + b_3b_2^2 - 2b_1b_2b_4)\alpha^3 + 2b_4(bb_3 - b_1^2)\alpha^2 + b_3(bb_3 - b_1^2)\alpha = 0.$$

Diese Gleichung kommt nur dann auf $\alpha^3 = 0$ zurück, wenn $bb_3 = b_1^2$ ist; aber wenn diese Gleichheit auch nicht besteht, so bleibt der integrirende Divisor y^3 dennoch richtig; zugleich aber muss auch

$$\psi' = y(y - \alpha_1x - \beta_1)(y - \alpha_2x - \beta_2)$$

ein integrirender Divisor sein, wenn α_1 und α_2 nebst $\alpha_3 = 0$ die Wurzeln der vorstehenden Gleichung und $\beta_1, \beta_2, \beta_3 = 0$ die dazu gehörigen β sind. Es folgt hieraus, dass $y_1 = \alpha_1x + \beta_1$ eine Lösung der Differentialgleichung sein muss, und man kann fragen, zu welchem Werthe der Constanten des Integrals sie gehört. Setzt man $\Omega = C$, so hat man nach dem Obigen das Integral

$$2Cy^2 + 2(b_2 + b_4x)y + b + 2b_1x + b_3x^2 = 0.$$

Dieser Gleichung muss $y = \alpha x + \beta$ genügen, wenn α eine der Wurzeln α_1 oder α_2 ist und C gehörig bestimmt wird. Daher muss sein:

$$2C\alpha^2 + 2b_4\alpha + b_3 = 0$$

$$4C\alpha\beta + 2(b_2\alpha + b_4\beta) + 2b_1 = 0$$

$$2C\beta^2 + 2b_2\beta + b = 0.$$

Die erste Gleichung, verglichen mit der obigen für α, giebt sofort:

$$2C = \frac{bb_4^2 + b_3b_2^2 - 2b_1b_2b_4}{bb_3 - b_1^2}$$

als den Werth der Constante C, welchem die beiden obigen linearen Lösungen zugehören, womit auch die folgenden stimmen; es ist klar, dass die dritte Lösung $y = 0$ einem unendlich grossen C entspricht.

Wenn man das Integral der obigen Gleichung mit Hülfe des Divisors ψ' entwickelt, so ergiebt sich mit der Constante A:

$$Ay^2 = (y - \alpha_1x - \beta_1)(y - \alpha_2x - \beta_2).$$

Mit dem Divisor ψ wurde gefunden:

$$2Cy^2 + 2(b_2 + b_4x)y + b + 2b_1x + b_3x^2 = 0.$$

Es ist aber, wenn C' den obigen bestimmten Werth der Constante C andeutet:

$$2C'(y - \alpha_1x - \beta_1)(y - \alpha_2x - \beta_2) = 2C'y^2 + 2(b_2 + b_4x)y + b + 2b_1x + b_3x^2,$$

daher verwandelt sich die erstere Form in

$$2C'Ay^2 = 2C'y^2 + 2(b_2 + b_4x)y + b + 2b_1x + b_3x^2,$$

welche für $2C' - 2C'A = 2C$ in die zweite übergeht.

Es mögen jetzt noch einige Zahlenbeispiele folgen, die Sonderfälle der vorliegenden Differentialgleichung betreffend, jedoch ohne weitere Erläuterungen.

1) ...... $\dfrac{(1-3x-7y)\,dx+(1+11x+7y)\,dy+(6x+2y)(xdy-ydx)}{(y-x-1)^2(y+x)}=d\Omega.$

$$d\Omega=-4\,d\left(\frac{x+2}{y-x-1}\right)+\frac{d(y+x)}{y+x}-\frac{d(y-x)}{y-x-1}.$$

2) .... $\dfrac{(1+x-2y)\,dx+(x+y)\,dy+x\,.\,(xdy-ydx)}{(y-x-1)^3}=d\Omega.$

$$\Omega=-\tfrac{1}{2}\frac{(x+1)^2}{(y-x-1)^2}-\frac{1}{y-x-1}.$$

3) .... $\dfrac{(1+3x-2y+xy+y^2)\,dx+(1+x)(2-x-y)\,dy}{(y-\alpha_1x-\beta_1)(y-\alpha_2x-\beta_2)(x+1)}=d\Omega.$

$$d\Omega=\frac{dx}{x+1}+\frac{1+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\cdot\frac{d(y-\alpha_1x)}{y-\alpha_1x-\beta_1}+\frac{1+\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\frac{d(y-\alpha_2x)}{y-\alpha_2x-\beta_2};$$

α_1 und α_2 sind die Wurzeln der Gleichung $2\alpha^2-5\alpha-16=0$,

$$\beta_1=\frac{7+\alpha_1}{3},\quad \beta_2=\frac{7+\alpha_2}{3};$$

$2(y-\alpha_1x-\beta_1)(y-\alpha_2x-\beta_2)=2y^2-5xy-16x^2-11y+x+13.$

4) .... $\dfrac{(4y-x)\,dx+(6y-3x+2)\,dy+(2y+x)(xdy-ydx)}{[(4y+2x-1)^2+7](10y-3x+1)}=d\Omega.$

$$d\Omega=\tfrac{1}{64}\frac{d(10y-3x)}{10y-3x+1}-\frac{7+11\,.\sqrt{-7}}{7\,.\,128}\cdot\frac{d(4y+2x)}{4y+2x-1-\sqrt{-7}}-\frac{7-11\sqrt{-7}}{7\,.\,128}\cdot\frac{d(4y+2x)}{4y+2x-1+\sqrt{-7}}.$$

5) .... $\dfrac{ydx+(b+x+y)\,dy+(2x+y)(ydx-xdy)}{y[(2y+4x-1)^2-8b-1]}=d\Omega.$

Sei $\sqrt{8b+1}=m$, so ist

$$d\Omega=\frac{3+m}{16m}\cdot\frac{d(2y+4x)}{2y+4x-m-1}+\frac{m-3}{16m}\cdot\frac{d(2y+4x)}{2y+4x+m-1}-\tfrac{1}{8}\frac{dy}{y}.$$

Die beiden letzten Beispiele sind solche, in welchen zu zwei gleichen α ungleiche β gehören.

§ 18. Beispiele zu § 16:

1) .... $M=-\frac{18}{25}+x-\frac{7}{5}y-x^2-y^2,\ N=\frac{2}{25}+x+y+xy+y^2$:

$$Mdx+Ndy=0.$$

Diese Gleichung hat drei lineare Lösungen, nämlich wenn α eine Wurzel der Gleichung $\alpha^2+\alpha+1=0$ bedeutet, so ist

$$y_1=\alpha x-\frac{3+2\alpha}{5},\ y_2=\alpha^2x-\frac{3+2\alpha^2}{5},\ y_3=x-\frac{3}{5};$$

daher

$$y_1-y_2=(1+2\alpha)\left(x-\tfrac{2}{5}\right),\ y_3-y_1=(1-\alpha)\left(x-\frac{4+\alpha}{5}\right);$$

$$y_3-y_2=(2+\alpha)\left(x-\frac{3-\alpha}{5}\right).$$

Folglich sind nicht allein die Vorzahlen von x in y_1, y_2, y_3 (nämlich α, α^2, 1) alle von einander verschieden, sondern es sind auch die Produkte $\psi'y_1$, $\psi'y_2$, $\psi'y_3$ [wo $\psi=(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)$, wie bisher] keine Quadrate; daher sind $\frac{N_1}{\psi'y_1}=q_1$ u. s. f. constant und man erhält sofort $q_1=\frac{\alpha^2+\alpha}{(1+2\alpha)(\alpha-1)}=-\frac{\alpha}{3}$, $q_2=-\frac{\alpha^2}{3}=\frac{1+\alpha}{3}$, $q_3=\frac{2}{3}$,

$$\frac{Mdx+Ndy}{\psi}=-\frac{\alpha}{3}\frac{d(y-y_1)}{y-y_1}+\frac{1+\alpha}{3}\frac{d(y-y_2)}{y-y_2}+\frac{2}{3}\frac{d(y-y_3)}{y-y_3}.$$

2) Sei dagegen $M=-1+x-\frac{7}{4}y-x^2-y^2$, $N=\frac{1}{16}+x+y+xy+y^2$; $Mdx+Ndy=0$, so hat man folgende lineare Lösungen:

$$y_1=\alpha x-\frac{3+2\alpha}{4},\ y_2=\alpha^2x-\frac{3+2\alpha^2}{4},\ y_3=x-\frac{5}{4};\ \alpha \text{ dasselbe wie vorhin};$$

daher

$$y_1-y_2=(1+2\alpha)(x-\tfrac{1}{2}),\ y_3-y_1=(1-\alpha)(x-\tfrac{1}{2}),\ y_3-y_2=(2+\alpha)(x-\tfrac{1}{2});$$

Die Produkte $\psi'y_1$, ... sind also Quadrate und die Integration geschieht nach der andern oder zweiten Art. Setzt man

$$\psi=(y-y_1)^{\varepsilon_1}\,.\,(y-y_2)^{\varepsilon_2}(y-y_3)^{\varepsilon_3},$$

und zufolge § 10

$$\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}=\varepsilon_1(G_1+H_1\alpha)+\varepsilon_2(G_2+H_2\alpha^2)+\varepsilon_3(G_3+H_3)$$

$$G_1=-y-\alpha x+\frac{\alpha}{2}-1,\quad H_1=y+(1+\alpha)x-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}$$

$$G_2=-y-\alpha^2x+\frac{\alpha^2}{2}-1,\quad H_2=y+(1+\alpha^2)x-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{1}{4}$$

$$G_3=y+2x-\frac{1}{4},\qquad H_3=-y-x-\frac{1}{2},$$

so erhält man folgende Bedingung:

$$\begin{aligned}-3y-\tfrac{11}{4}=\ &\varepsilon_1\left((\alpha-1)y-(\alpha+1)x+\tfrac{5}{4}\alpha-\tfrac{1}{2}\right)\\ &+\varepsilon_2\left((\alpha^2-1)y-(\alpha^2+1)x+\tfrac{5}{4}\alpha^2-\tfrac{1}{2}\right)\\ &+\varepsilon_3\left(x-\tfrac{3}{4}\right),\end{aligned}$$

oder $\varepsilon_1 = 1 + \delta_1$, $\varepsilon_2 = 1 + \delta_2$, $\varepsilon_3 = 1 + \delta_3$ setzend:

$$+\tfrac{1}{4} = \delta_1\left((\alpha - 1)y - (\alpha + 1)x + \tfrac{5}{4}\alpha - \tfrac{1}{2}\right)$$
$$+ \delta_2\left((\alpha^2 - 1)y - (\alpha^2 + 1)x + \tfrac{5}{4}\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\right) + \delta_3\left(x - \tfrac{3}{4}\right);$$

daher:

$$\delta_1(\alpha - 1) + \delta_2(\alpha^2 - 1) = 0$$
$$-\delta_1(\alpha + 1) - \delta_2(\alpha^2 + 1) + \delta_3 = 0$$
$$\delta_1\left(\tfrac{5}{4}\alpha - \tfrac{1}{2}\right) + \delta_2\left(\tfrac{5}{4}\alpha^2 - \tfrac{1}{2}\right) - \tfrac{3}{4}\delta_3 = \tfrac{1}{4}.$$

Durch Einführung der Grössen $\sigma = \delta_1 + \delta_2$, $\sigma_1 = \delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2$, werden vorstehende Gleichungen in folgende verwandelt:

$$\sigma = \sigma_1,\ \sigma + \sigma_1 = \delta_3,\ 5\sigma_1 = 1 + 2\sigma + 3\delta_3,$$

woraus hervorgeht:

$$\sigma = \sigma_1 = -\tfrac{1}{3},\ \delta_3 = -\tfrac{2}{3},$$

und schliesslich:

$$\delta_1 = \tfrac{\alpha}{3},\ \delta_2 = \tfrac{\alpha^2}{3},\ \delta_3 = -\tfrac{2}{3},$$

$$\varepsilon_1 = 1 + \tfrac{\alpha}{3},\ \varepsilon_2 = 1 + \tfrac{\alpha^2}{3},\ \varepsilon_3 = \tfrac{1}{3}.$$

Hiermit ergiebt sich das vollständige Differential:

$$\frac{\left(-1 + x - \frac{7}{4}y - x^2 - y^2\right)dx + \left(\frac{1}{16} + x + y + xy + y^2\right)dy}{\left(y - \alpha x + \frac{3 + 2\alpha}{4}\right)^{1+\frac{\alpha}{3}}\left(y - \alpha^2 x + \frac{3 + 2\alpha^2}{4}\right)^{1+\frac{\alpha^2}{3}}\left(y - x + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} = d\Omega,$$

oder nach Vereinigung der complexen Faktoren:

$$\frac{\left(-1 + x - \frac{7}{4}y - x^2 - y^2\right)dx + \left(\frac{1}{16} + x + y + xy + y^2\right)dy}{\left(y^2 + xy + x^2 + y - \frac{x}{4} + \frac{7}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\left(y - x + \frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot e^{\varphi\sqrt{3}} = d\Omega,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\operatorname{arctg}\frac{(1 - 2x)\sqrt{3}}{4y + 2x + 2} = \varphi.$$

3). . . . $M = -\frac{17}{25} + \frac{14}{5}y - x^2 - y^2$. $N = \frac{53}{25} + x - 2y + xy + x^2$.

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Die drei Lösungen sind:

$$y_1 = \alpha x + \frac{11 + 4\alpha}{5},\ y_2 = \alpha^2 x + \frac{11 + 4\alpha^2}{5},\ y_3 = x - \tfrac{9}{5};$$

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, wie in den vorigen Beispielen.

Daher:

$$y_1 - y_2 = (1 + 2\alpha)\left(x + \tfrac{4}{5}\right),\ y_3 - y_1 = (1 - \alpha)\left(x - \frac{12 + 8\alpha}{5}\right),\ y_3 - y_2 = (2 + \alpha)\left(x - \frac{4 - 8\alpha}{5}\right).$$

Also sind die Quotienten $\frac{N_1}{\psi' y_1}, \ldots$ constant; man findet:

$$q_1 = -\tfrac{\alpha}{3},\ q_2 = -\tfrac{\alpha^2}{3} = \tfrac{1 + \alpha}{3},\ q_3 = \tfrac{2}{3};$$

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = -\frac{\alpha}{3}\,\frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + \frac{1 + \alpha}{3}\,\frac{d(y - y_2)}{y - y_2} + \frac{2}{3}\,\frac{d(y - y_3)}{y - y_3}.$$

4). . . . . $M = 1 - x^2 - y^2$. $N = 1 + x - 2y + xy + y^2$.

$$Mdx + Ndy = 0.$$

$$y_1 = \alpha x + 1,\ y_2 = \alpha^2 x + 1,\ y_3 = x + 1.\quad \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Die Gleichung gehört also zur zweiten Art. Man findet:

$$G_1 = -y - y_1,\quad H_1 = y + y_1 + x - 2,$$
$$G_1 + H_1\alpha = (\alpha - 1)y + \alpha^2 x + \alpha^2,$$
$$G_2 + H_2\alpha^2 = (\alpha^2 - 1)y + \alpha x + \alpha,$$
$$G_3 + H_3 = x - 2;$$

daher:

$$-3y - 1 = -3y - 3 + \delta_1[(\alpha - 1)y + \alpha^2 x + \alpha^2] + \delta_2[(\alpha^2 - 1)y + \alpha x + \alpha] + \delta_3(x - 2);$$

also:

$$\delta_1(\alpha - 1) + \delta_2(\alpha^2 - 1) = 0$$
$$\delta_1\alpha^2 + \delta_2\alpha + \delta_3 = 0$$
$$\delta_1\alpha^2 + \delta_2\alpha - 2\delta_3 = 2,$$

oder für $\delta_1 + \delta_2 = \sigma$, $\delta_1\alpha + \delta_2\alpha^2 = \sigma_1$:

$$\sigma = \sigma_1,\ \sigma + \sigma_1 = \delta_3,\ \sigma + \sigma_1 + 2\delta_3 + 2 = 0;$$

$$\delta_3 = -\tfrac{2}{3},\ \sigma = \sigma_1 = -\tfrac{1}{3};$$

$$\delta_1 = \tfrac{\alpha}{3},\ \delta_2 = \tfrac{\alpha^2}{3},\ \delta_3 = -\tfrac{2}{3};$$

folglich $\varepsilon_1 = 1 + \frac{\alpha}{3}$, $\varepsilon_2 = 1 + \frac{\alpha^2}{3}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}$ und damit:

$$\frac{(1 - x^2 - y^2)\,dx + (1 + x - 2y + xy + y^2)\,dy}{(y - \alpha x - 1)^{1+\frac{\alpha}{3}}(y - \alpha^2 x - 1)^{1+\frac{\alpha^2}{3}}(y - x - 1)^{\frac{1}{3}}} = d\Omega,$$

oder nach Wegschaffung der complexen Faktoren:

$$\frac{(1 - x^2 - y^2)\,dx + (1 + x - 2y + xy + y^2)\,dy}{(y^2 + xy + x^2 - 2y - x + 1)^{\frac{5}{6}} \,.\, (y - x - 1)^{\frac{1}{3}}} \cdot e^{-\frac{1}{3}\varphi\sqrt{3}} = d\Omega.$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{2y + x - 2}.$$

Das Integral lässt sich in folgende Form bringen:

$$\Omega = y + \int_0^x \frac{(1 - x^2 - y^2)\,dx \,.\, e^{-\frac{1}{3}\varphi\sqrt{3}}}{(y^2 + xy + x^2 - 2y - x + 1)^{\frac{5}{6}}(y - x - 1)^{\frac{1}{3}}},$$

wo die Integration sich allein auf x bezieht und φ den so eben angezeigten Werth hat.

Da an Ausdrücken wie das vorstehende $d\Omega$ die Eigenschaft eines vollständigen Differentials nicht ohne eine etwas umständliche Rechnung erkannt werden kann, so wird es vielleicht dem Leser willkommen sein, an diesem Beispiele den Gang einer solchen zur nachträglichen Prüfung und Bestätigung dienenden Rechnung noch kurz angedeutet zu finden. Ausgehend von der Formel

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = \frac{M}{\psi}\frac{d\psi}{dy} - \frac{N}{\psi}\frac{d\psi}{dx},$$

und zur Abkürzung setzend $P = y^2 + (x - 2)y + x^2 - x + 1$, hat man im gegenwärtigen Falle:

$$0 = 3y + 1 - (y^2 + x^2 - 1)\frac{1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dy} - [y^2 + (x - 2)y + x + 1]\frac{1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx}.$$

Nun ist $\psi = P^{\frac{5}{6}} \,.\, (y - x - 1)^{\frac{1}{3}} \,.\, e^{\frac{1}{3}\varphi\sqrt{3}}$; daher:

$$\frac{1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dy} = \frac{5}{6}\cdot\frac{2y + x - 2}{P} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y - x - 1} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{d\varphi}{dy};$$

$$\frac{1}{\psi}\cdot\frac{d\psi}{dx} = \frac{5}{6}\cdot\frac{y + 2x - 1}{P} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y - x - 1} + \frac{1}{3}\sqrt{3}\cdot\frac{d\varphi}{dx};$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = -\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,x}{P}, \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}\,.\,(y - 1)}{P},$$

und hiermit:

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dy} = \frac{5y + x - 5}{3P} + \frac{1}{3(y - x - 1)} = \frac{2y^2 - (x + 4)y + x + 2}{P(y - x - 1)}$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx} = \frac{4y + 5x - 4}{3P} - \frac{1}{3(y - x - 1)} = \frac{y^2 - 2y - 2x^2 + 1}{P(y - x - 1)};$$

wodurch schliesslich folgende Gleichung entsteht:

$$0 = (3y + 1)(y - x - 1)[y^2 + (x - 2)y + x^2 - x + 1]$$
$$- (y^2 + x^2 - 1)[2y^2 - (x + 4)y + x + 2]$$
$$- [y^2 + (x - 2)y + x + 1](y^2 - 2y - 2x^2 + 1),$$

welche der Leser identisch richtig finden wird.

Auch möchte es zweckmässig sein, nochmals auf die im § 16 behandelte allgemeine Gleichung zurückzukommen, um sie in ihrer vereinfachten Gestalt vollständig zu entwickeln. Sind nämlich drei lineare Lösungen vorhanden von solcher Beschaffenheit, dass der früher mit Δ bezeichnete Ausdruck von Null verschieden ist, so lässt sich die Differentialgleichung durch eine lineare Substitution in eine andere verwandeln, welche folgende Lösungen hat: $y_1 = 0$, $y_2 = x$, $y_3 = \alpha x + \beta$, so dass α und β endliche bestimmte Grössen sind, beide verschieden von Null und α auch noch verschieden von 1. Dieser erste (allgemeine) Fall der vorliegenden Gleichung verdient noch näher betrachtet zu werden. Damit er bestehe, müssen M und N folgende Form haben:

$$M = -(b_1 + b_2)y - (a_5 + b_3 + b_4 + b_5)xy + a_5 y^2$$

$$N = b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2.$$

Hier sind b_2, b_3, b_4, b_5, a_5 willkürlich, jedoch weder b_5 noch $b_2 = 0$; b_1 aber ist bedingt durch die Gleichung

$$b_1 = \frac{b_2 b_3 (b_4 + 2b_5 + a_5)}{B},$$

wo $B = (b_4 + b_5)(b_4 + b_5 + a_5) - b_3 b_5$ von Null verschieden sein muss. Ferner ist

$$b_5\alpha = -(b_4 + b_5 + a_5), \quad \beta = \frac{b_2 b_5 \alpha(1 - \alpha)}{B};$$

alles den Entwickelungen des § 16 gemäss. Alsdann sind die oftgenannten Quotienten q_1, q_2, q_3 constant, und zwar erkennt man sogleich ihre Werthe, nämlich:

$$q_1 = \frac{b_3}{\alpha}, \quad q_2 = \frac{b_3 + b_4 + b_5}{1 - \alpha}, \quad q_3 = \frac{b_3 + b_4\alpha + b_5\alpha^2}{\alpha(\alpha - 1)}.$$

Wünscht man jedoch den aus anderweitigen Gründen gezogenen Schluss, dass jene Quotienten unabhängig von x sein müssen, durch die Rechnung noch nachträglich bestätigt zu sehen — und solchem Wunsche entgegen zu kommen ist der Zweck dieser Anmerkung —; so hat man:

$$N_1 = (b_1 + b_3 x)x, \qquad \psi' y_1 = (\alpha x + \beta)x,$$

$$N_2 = [b_1 + b_2 + (b_3 + b_4 + b_5)x]x, \qquad \psi' y_2 = (1 - \alpha)x - \beta.$$

$$N_3 = b_1 x + b_2(\alpha x + \beta) + b_3 x^2 + b_4 x(\alpha x + \beta) + b_5(\alpha x + \beta)^2.$$

$$\psi' y_3 = (\alpha x + \beta)[(\alpha - 1)x + \beta].$$

Folglich ist

$$q_1 = \frac{b_3 x + b_1}{\alpha x + \beta} = \frac{b_3}{\alpha}$$

und es muss sein:

$$\frac{b_1}{b_3} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ferner ist

$$q_2 = \frac{b_1 + b_2 + (b_3 + b_4 + b_5)x}{(1-\alpha)x - \beta} = \frac{b_3 + b_4 + b_5}{1-\alpha}$$

und es muss sein:

$$\frac{b_1 + b_2}{b_3 + b_4 + b_5} = \frac{\beta}{\alpha - 1}.$$

Auf die obigen Werthe von b_1, α, β zurückgehend, findet man sogleich:

$$\beta = \frac{b_2 \alpha (b_4 + 2b_5 + a_5)}{B} = \frac{b_1 \alpha}{b_3};\ \text{also}\ \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b_1}{b_3},\ \text{wie erforderlich.}$$

Ferner ist auch:

$$\beta = \frac{b_2(b_4 + b_5 + a_5)(\alpha - 1)}{B};$$

zugleich aber ist:

$$\frac{b_1 + b_2}{b_3 + b_4 + b_5} = \frac{b_2[B + b_3(b_4 + 2b_5 + a_5)]}{B(b_3 + b_4 + b_5)}$$

$$= \frac{b_2[(b_4 + b_5)(b_4 + b_5 + a_5) - b_3 b_5 + b_3(b_4 + 2b_5 + a_5)]}{B(b_3 + b_4 + b_5)}$$

$$= \frac{b_2(b_4 + b_5 + a_5)}{B} = \frac{\beta}{\alpha - 1},\ \text{wie verlangt wurde.}$$

Endlich soll noch N_3 durch $\psi' y_3$ theilbar sein. Um auch dies sogleich zu bestätigen, darf man nur bemerken, dass für $\alpha x + \beta = 0$ oder $x = -\frac{\beta}{\alpha}$, $N_3 = (b_3\beta - b_1\alpha)\frac{\beta}{\alpha^2}$, also $N_3 = 0$ wird, da $b_3\beta - b_1\alpha = 0$ gefunden ist. Für $(\alpha - 1)x + \beta = 0$ oder $\alpha x + \beta = x = \frac{\beta}{1-\alpha}$ wird $N_3 = [(b_3 + b_4 + b_5)\beta - (b_1 + b_2)(\alpha - 1)]\frac{\beta}{(\alpha-1)^2}$ und es ist oben gezeigt, dass der eingeklammerte Faktor verschwindet; also ist auch für diesen Werth von x, $N_3 = 0$. Dass aber diese beiden Werthe von x einander nicht gleich sein können, folgt aus den hier geltenden Voraussetzungen, dass β nicht $= 0$, α nicht gleich 0 und nicht $= 1$, beide aber endliche Grössen sein sollen.

Als Zahlenbeispiel diene noch die Gleichung:

$$\frac{\left(-\frac{39}{20} - 11x + 7y\right)dx + \left(-\frac{21}{20}x + 3y - 2x^2 + 5xy + y^2\right)dy}{y(y-x)\left(y + 13x + \frac{273}{40}\right)} = d\Omega:$$

$$d\Omega = \frac{2}{13}\frac{dy}{y} + \frac{2}{7}\frac{d(y-x)}{y-x} + \frac{51}{91}\frac{d(y+13x)}{y + 13x + \frac{273}{40}}.$$

§ 19. Um einen einfachen Fall anzugeben, dessen vorläufige Lösungen nicht mehr linear sind, sei:

$$M = a + bx + cx^2 + fx^3 + (g + hx)y$$

$$N = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + g_1 y;$$

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Diese Gleichung kann zwei Lösungen haben von der Form:

$$y = \gamma x^2 + \beta x + \alpha;$$

damit solches stattfinde, müssen folgende Bedingungen bestehen:

$$2g_1\gamma^2 + (h + 2c_1)\gamma + f = 0$$

$$c + (2b_1 + g)\gamma + (h + c_1 + 3g_1\gamma)\beta = 0$$

$$b + (b_1 + g)\beta + g_1\beta^2 + 2a_1\gamma + (h + 2g_1\gamma)\alpha = 0$$

$$a + a_1\beta + (g + g_1\beta)\alpha = 0.$$

Die erste Gleichung giebt zwei Werthe von γ, da man die Annahme $g_1 = 0$ von vorn herein ausschliessen kann, weil durch sie die Gleichung nach y linear werden würde; es könnte daher auch ohne Nachtheil sofort $g_1 = 1$ gesetzt werden. Die zweite Gleichung giebt β durch γ und die dritte α durch β und γ; endlich muss die vierte für beide γ und ihre zugehörigen β und α erfüllt werden. Man erhält also:

$$y_1 = \gamma_1 x^2 + \beta_1 x + \alpha_1,\quad y_2 = \gamma_2 x^2 + \beta_2 x + \alpha_2$$

nebst den Bedingungen:

$$a + a_1\beta_1 + (g + g_1\beta_1)\alpha_1 = 0,\quad a + a_1\beta_2 + (g + g_1\beta_2)\alpha_2 = 0.$$

In den obigen vier Gleichungen füge man den γ, β, α zuerst überall den Zeiger 1 und sodann den Zeiger 2 bei und ziehe jede zu 2 gehörige oder zweite Gleichung von der entsprechenden ersten ab, so folgt:

$$0 = (\gamma_1 - \gamma_2)g + (\beta_1 - \beta_2)h \quad . \quad + 2(\gamma_1 - \gamma_2)b_1 + (\beta_1 - \beta_2)c_1 + 3(\gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2)g_1$$

$$0 = \quad . \quad + (\gamma_1 - \gamma_2)h \quad . \quad . \quad + 2(\gamma_1 - \gamma_2)c_1 + 2(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\,g_1$$

$$0 = (\beta_1 - \beta_2)g + (\alpha_1 - \alpha_2)h + 2(\gamma_1 - \gamma_2)a_1 + (\beta_1 - \beta_2)b_1 \quad . \quad + (\beta_1^2 - \beta_2^2 + 2\alpha_1\gamma_1 - 2\alpha_2\gamma_2)g_1$$

$$0 = (\alpha_1 - \alpha_2)g \quad . \quad + (\beta_1 - \beta_2)a_1 \quad . \quad . \quad + (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)g_1$$

Diese Gleichungen multiplicire man der Reihe nach von oben an beziehungsweise mit den Faktoren

$$f_1 = -2(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \gamma_2)$$
$$f_2 = +\ (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)$$
$$f_3 = +\ (\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2)$$
$$f_4 = -2(\gamma_1 - \gamma_2)^2$$

und addire die Produkte, so kommt:

$$0 = (\gamma_1 - \gamma_2)[(\beta_1 - \beta_2)^2 - 4(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \gamma_2)]\,[g + b_1 + (\beta_1 + \beta_2)g_1].$$

Dieses bemerkenswerthe Ergebniss bedarf nur in Betreff der g_1 enthaltenden Glieder noch eines näheren Nachweises. Die Summe dieser Glieder ist, wenn $(\gamma_1 - \gamma_2)g_1$ als Gemeintheiler gestrichen wird, folgende:

$$-6(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1\beta_1 - \gamma_2\beta_2) + 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)(\gamma_1 + \gamma_2)$$
$$+ (\beta_1^2 - \beta_2^2)(\beta_1 - \beta_2) + 2(\alpha_1\gamma_1 - \alpha_2\gamma_2)(\beta_1 - \beta_2)$$
$$- 2(\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2)(\gamma_1 - \gamma_2).$$

Die beiden ersten Glieder vereinigt geben:

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 - 2\beta_1\gamma_1 + 2\beta_2\gamma_2);$$

die beiden letzten:

$$2\alpha_1[(\beta_1 - \beta_2)\gamma_1 - \beta_1(\gamma_1 - \gamma_2)] - 2\alpha_2[(\beta_1 - \beta_2)\gamma_2 - \beta_2(\gamma_1 - \gamma_2)] = 2(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1);$$

also geben diese vier Glieder zusammen:

$$2(\alpha_1 - \alpha_2)(2\beta_1\gamma_2 - 2\beta_2\gamma_1 - 2\beta_1\gamma_1 + 2\beta_2\gamma_2) = 4(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_2 - \gamma_1)(\beta_1 + \beta_2);$$

dazu das fünfte Glied:

$$(\beta_1^2 - \beta_2^2)(\beta_1 - \beta_2) = (\beta_1 - \beta_2)^2(\beta_1 + \beta_2);$$

so erhält man die obige Summe

$$= [(\beta_1 - \beta_2)^2 - 4(\alpha_1 - \alpha_2)(\gamma_1 - \gamma_2)](\beta_1 + \beta_2),$$

wie behauptet wurde.

Die gefundene Gleichung zerfällt in drei Faktoren, von denen wenigstens einer gleich Null sein muss, wenn die vorausgesetzten beiden Lösungen wirklich stattfinden sollen. Der erste Faktor verschwindet, wenn $\gamma_1 = \gamma_2$, der zweite, wenn $y_1 - y_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)x^2 + (\beta_1 - \beta_2)x + \alpha_1 - \alpha_2$ ein Quadrat ist; also folgt:

Wenn die gegebene Differentialgleichung zwei Lösungen von der angenommenen Form hat, worin γ_1 von γ_2 verschieden ist, und wenn zugleich der Unterschied jener beiden Lösungen $y_1 - y_2$ kein Quadrat ist, so ist nothwendig:

$$g + b_1 + (\beta_1 + \beta_2)g_1 = 0.$$

Unter diesen Voraussetzungen lässt sich sogleich die in § 3 im Allgemeinen bezeichnete Schlussweise anwenden. Es sei $\psi = (y - y_1)(y - y_2)$, so wird durch Zerlegung der $\frac{M}{\psi}$ und $\frac{N}{\psi}$ in einfache Brüche der Ausdruck $\frac{Mdx + Ndy}{\psi}$ verwandelt in die Form:

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = \frac{N_1}{y_1 - y_2} \cdot \frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + \frac{N_2}{y_2 - y_1} \cdot \frac{d(y - y_2)}{y - y_2}.$$

Nun ist leicht zu sehen, dass $\frac{N_1}{y_1 - y_2}$ und $\frac{N_2}{y_2 - y_1}$ constant sind. Denn es ist $y_1 - y_2$ ein Polynom zweiten Grades und kein Quadrat; setzt man also $y_1 - y_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)(x - x')(x - x'')$, so ist x' verschieden von x''; auch ist $\gamma_1 - \gamma_2$ nicht gleich Null, nach der Voraussetzung. Ferner wird für $x = x'$, $y_1 = y_2$, mithin auch $M_1 = M_2$ und $N_1 = N_2$; daher hat man für $x = x'$:

$$M_1 + N_1\frac{dy_1}{dx} = 0 \text{ und } M_1 + N_1\frac{dy_2}{dx} = 0$$

d. h.

$$M_1 + N_1(2\gamma_1 x' + \beta_1) = 0 \text{ und } M_1 + N_1(2\gamma_2 x' + \beta_2) = 0.$$

Da aber $y_1 - y_2$ kein Quadrat ist, so sind auch die Werthe von $\frac{dy_1}{dx}$ und $\frac{dy_2}{dx}$ für $x = x'$ sicherlich von einander verschieden; denn es ist bekannt, dass ein Polynom zweiten Grades wie $y_1 - y_2$ ein Quadrat sein müsste, wenn für $x = x'$ mit ihm zugleich seine Ableitung verschwinden sollte; folglich ist $2\gamma_1 x' + \beta_1$ von $2\gamma_2 x' + \beta_2$ verschieden und es ergiebt sich daher sofort: $M_1 = 0$, $N_1 = 0$ für $x = x'$. Da derselbe Schluss auch für $x = x''$ gilt, und da x'' von x' verschieden ist, so ist N_1 theilbar durch das Produkt $(x - x')(x - x'')$, und da $N_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + g_1 y_1 = a_1 + \alpha_1 + (b_1 + g_1\beta_1)x + (c_1 + g_1\gamma_1)x^2$ den zweiten Grad nicht überschreitet, so ist der Quotient $\frac{N_1}{(x - x')(x - x'')}$ constant, oder es ist $\frac{N_1}{y_1 - y_2} = q_1$, und zwar $q_1 = \frac{c_1 + g_1\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}$, wie sogleich ersichtlich ist; und ebenso ist $\frac{N_2}{y_2 - y_1} = q_2 = \frac{c_1 + g_1\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1}$; also schliesslich:

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = q_1\frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + q_2\frac{d(y - y_2)}{y - y_2}.$$

§ 20. Wenn dagegen zwar γ_1 verschieden von γ_2, aber $y_1 - y_2$ ein Quadrat ist, so kommt die Aufgabe gänzlich auf die des § 11 zurück, wo sich der integrirende Faktor und das Integral selbst schon angegeben finden. Wird in den dortigen Ausdrücken für $d\Omega$ und Ω, x^2 anstatt x und noch q für c geschrieben, so hat man:

$$\frac{2(k\delta_2 x + qx^{2\delta_1 + 2\delta_2 + 1})\,y\,dx + [k\delta_1 x^2 - (\delta_1 + \delta_2)ky - qx^{2\delta_1 + 2\delta_2 + 2}]\,dy}{y^{1+\delta_1}(y - x^2)^{1+\delta_2}} = d\Omega,$$

$$\Omega = k\,.\,y^{-\delta_1}(y - x^2)^{-\delta_2} + q\int d\left(\frac{y}{y - x^2}\right)\cdot\left(\frac{x^2}{y}\right)^{1+\delta_1}\cdot\left(\frac{x^2}{y - x^2}\right)^{\delta_2 - 1}$$

oder

$$\Omega = k\,.\,y^{-\delta_1}(y - x^2)^{-\delta_2} - q\int\frac{dt}{t^{1+\delta_1}(t - 1)^{1+\delta_2}} \text{ für } t = \frac{y}{x^2}.$$

*

Um nun auf die gegenwärtige Aufgabe zu kommen, setze man:

$$2\delta_1 + 2\delta_2 + 1 = 0$$

oder

$$\delta_1 = -\tfrac{1}{2} - r, \quad \delta_2 = r,$$

so folgt, wenn noch der Faktor 2 beigefügt wird:

$$\frac{(4rkx + 4q)\,ydx + [ky - (1+2r)\,kx^2 - 2qx]\,dy}{y^{\frac{1}{2}-r}\cdot(y-x^2)^{1+r}} = d\Omega.$$

$$\Omega = 2ky^{\frac{1}{2}+r}(y - x^2)^{-r} - 2q\int\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}-r}(t-1)^{1+r}}; \quad t = \frac{y}{x^2}.$$

Wenn man in die vorgelegte Gleichung:

$$[a + bx + cx^2 + fx^3 + (g + hx)\,y]\,dx + (a_1 + b_1x + c_1x^2 + g_1y)\,dy = 0,$$

welche nach der Voraussetzung folgende Lösungen hat:

$$y_1 = \gamma_1x^2 + \beta_1x + \alpha_1, \quad y_2 = \gamma_2x^2 + \beta_2x + \alpha_2 = y_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)(x+\lambda)^2,$$

die Argumente u und v einführt, nämlich:

$$u = x + \lambda, \quad v = \frac{y - y_1}{\gamma_2 - \gamma_1},$$

so behält die verwandelte Gleichung genau die ursprüngliche Form, indem höhere Potenzen von u, als vorher von x vorkamen, dadurch nicht herbeigeführt werden, ungeachtet die Substitution nicht linear ist. Da der verwandelten Gleichung $\mathfrak{M}du + \mathfrak{N}dv = 0$ genügt wird durch $v_1 = 0$, $v_2 = u^2$, so nimmt sie folgende einfachere Gestalt an, wie leicht gefunden wird:

$$(2G + 2Hu)\,vdu + [2G_1v - Gu - (H + 2G_1)\,u^2]\,dv = 0$$

und diese trifft ganz mit der vorigen Form zusammen, wenn gesetzt wird:

$$G = 2q, \quad H = 2rk, \quad 2G_1 = k, \quad u = x, \quad v = y.$$

Geht man nun durch Herstellung von $x + \lambda$ für u und $\frac{y-y_1}{\gamma_2-\gamma_1}$ für v wieder auf die ursprüngliche Gleichung zurück, so erhält man auch zugleich deren Integral; es ist nämlich unter den hier bestehenden Bedingungen:

$$\frac{[a + bx + cx^2 + fx^3 + (g + hx)\,y]\,dx + (a_1 + b_1x + c_1x^2 + g_1y)\,dy}{(y - y_1)^{\frac{1}{2}-r}(y - y_2)^{1+r}} = d\Omega,$$

wobei besonders festzuhalten, dass $y_2 = y_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)(x + \lambda)^2$ vorausgesetzt wird; ferner ergiebt sich:

$$\Omega = k\,(y - y_1)^{\frac{1}{2}+r}(y - y_2)^{-r} + p\int\frac{dt}{t^{\frac{1}{2}-r}\cdot(t-\rho)^{1+r}}$$

für

$$t = \frac{y - y_1}{(x+\lambda)^2}, \quad \rho = \gamma_2 - \gamma_1.$$

Um die Constanten r, k, p zu bestimmen, darf man nur einige Glieder des Differentials von Ω mit den gegebenen vergleichen. Man findet:

$$d\Omega = \frac{k\,(r+\frac{1}{2})\,(y-y_2)\,(dy - dy_1) - kr\,(y-y_1)\,(dy - dy_2) + p\,(x+\lambda)\,(dy - dy_1) - 2p\,(y - y_1)\,dx}{(y - y_1)^{\frac{1}{2}-r}(y - y_2)^{1+r}}.$$

Zieht man nun die mit dy und die mit ydx multiplicirten Glieder, so weit es nöthig, in Betracht, so kommt:

$$g_1 = \tfrac{k}{2}, \quad c_1 = kr\gamma_1 - k(r+\tfrac{1}{2})\gamma_2, \quad b_1 = kr\beta_1 - k(r+\tfrac{1}{2})\beta_2 + p,$$

$$g = kr\beta_2 - k(r+\tfrac{1}{2})\beta_1 - 2p, \quad h = 2kr\gamma_2 - k(2r+1)\gamma_1;$$

also

$$k = 2g_1, \quad b_1 = 2g_1r\beta_1 - g_1(2r+1)\beta_2 + p$$

$$g = 2g_1r\beta_2 - g_1(2r+1)\beta_1 - 2p$$

$$b_1 + g = -g_1\beta_1 - g_2\beta_2 - p,$$

also

$$p = -(g + b_1) + g_1(\beta_1 + \beta_2):$$

$$h = 4gr\gamma_2 - 2g(2r+1)\gamma_1 = 4g_1(\gamma_2 - \gamma_1)\,r - 2g\gamma_1:$$

demnach:

$$r = \frac{h + 2g_1\gamma_1}{4g_1\rho}.$$

Das Integral der vorgelegten Gleichung ist daher folgendes:

$$\Omega = 2g_1(y - y_1)^{m_1}(y - y_2)^{m_2} - (g + b_1 + g_1\beta_1 + g_1\beta_2)\int t^{m_1-1}(t - \rho)^{m_2-1}\,dt,$$

wo

$$t = \frac{(y - y_1)}{(x+\lambda)^2}, \quad y_1 = \gamma_1x^2 + \beta_1x + \alpha_1, \quad y_2 = \gamma_2x^2 + \beta_2x + \alpha_2 = y_1 + (\gamma_2 - \gamma_1)(x+\lambda)^2$$

und

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \rho;$$

die Exponenten m sind:

$$m_1 = \frac{h + 2g_1\gamma_2}{4g_1(\gamma_2 - \gamma_1)} = \tfrac{1}{2} + r, \quad m_2 = \frac{h + 2g_1\gamma_1}{4g_1(\gamma_1 - \gamma_2)} = -r.$$

Der Vollständigkeit wegen wäre noch die Annahme $\gamma_1 = \gamma_2$ zu prüfen. Sie führt aber mittels der Substitution $v = y - y_1$ auf eine Gleichung von der Form der gegebenen zurück, welcher durch $v_1 = 0$ und $v_2 = \beta x + \alpha$ genuggethan wird und die desshalb folgende Gestalt haben muss:

$$gvdx + (a_1 + b_1x + g_1v)\,dv = 0.$$

Diese Gleichung ist nach x linear, oder sie kann auch nach dem Verfahren in § 1 integrirt werden und bedarf hier keiner Untersuchung.

§ 21. Beispiele zu § 19 und 20:

1) . . . $M = a + x + 3x^2 + 2x^3 - (2 + 6x)y$, $N = a_1 + x + 3x^2 + y$,

$$Mdx + Ndy = 0. \qquad \text{Bedingung: } 8a + 4a_1 = 1.$$

Setzt man

$$y = \gamma x^2 + \beta x + \alpha,$$

so folgt:

$$\gamma^2 + 1 = 0,\ 1 - \beta + \beta\gamma = 0,\ 1 - 6\alpha - \beta + \beta^2 + 2a_1\gamma + 2\alpha\gamma = 0;\ a - 2\alpha + a_1\beta + \alpha\beta = 0.$$

Daher:

$$\gamma_1 = \sqrt{-1} = i,\ \beta_1 = \frac{1+i}{2},\ 40\alpha_1 = 3 - 4a_1 + (12a_1 + 1)i.$$

Mit diesen Werthen giebt die vierte Gleichung

$$80a + 40(1+i)a_1 = (3-i)[3 - 4a_1 + (12a_1 + 1)i]$$

oder

$$80a + 40a_1 + 40a_1 i = 10 + 40a_1 i,$$

also $8a + 4a_1 = 1$, wie oben angegeben.

Durch Vertauschung von i mit $-i$ erhält man γ_2, β_2, α_2, aber keine neue Bedingung. Es sei zur Abkürzung

$$\frac{3 - 4a_1}{40} = \lambda,\quad \frac{12a_1 + 1}{40} = \mu,$$

daher

$$y_1 = x^2 i + \frac{1+i}{2}x + \lambda + \mu i = \frac{x}{2} + \lambda + \left(x^2 + \frac{x}{2} + \mu\right)i,\ y_2 = \frac{x}{2} + \lambda - \left(x^2 + \frac{x}{2} + \mu\right)i;$$

woraus zu ersehen, dass $y_1 - y_2$ kein Quadrat ist, wenn nicht etwa $\mu = \frac{1}{4}$; jedoch auch dann bleibt $g + b_1 + g_1(\beta_1 + \beta_2) = -2 + 1 + 1 = 0$; also sind die Quotienten $\frac{N_1}{y_1 - y_2} = q_1$ und $q_2 = \ldots.$ nothwendig constant. Man findet auch sofort:

$$N_1 = a_1 + x + 3x^2 + y_1 = (3+i)\left(x^2 + \frac{x}{2} + \mu\right);$$

folglich

$$q_1 = \frac{3+i}{2i} = \frac{1-3i}{2} \text{ und } q_2 = \frac{1+3i}{2};$$

$$\frac{Mdx + Ndy}{(y-y_1)(y-y_2)} = \frac{1-3i}{2}\frac{d(y-y_1)}{y-y_1} + \frac{1+3i}{2}\frac{d(y-y_2)}{y-y_2}.$$

Setzt man $y - \frac{x}{2} - \lambda = Q\cos\varphi$, $x^2 + \frac{x}{2} + \mu = Q\sin\varphi$, so wird das Integral:

$$Q = C.e^{3\varphi} \text{ (C die Constante).}$$

2) . . . $M = a + 2x + 2x^2 + (g + 2x)y$, $N = a_1 + (g+k)x + x^2 + y$;

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Bedingungen:

$$54a = 4 + 54g - 12k - 27g^2 + 8k^2$$

$$36a_1 = 48 - 36g - 24k + 9g^2 + 18gk + 8k^2.$$

Diese Gleichung hat folgende Lösungen:

$$y_1 = \alpha_1 - \frac{2}{3}x,\ y_2 = \alpha_2 + \frac{2 - 6g - 4k}{3}x - 2x^2,$$

wo

$$\alpha_1 = \frac{6g + 3k - 11}{9},\ \alpha_2 = \frac{-26 + 24g + 14k - 9g^2 - 12gk - 4k^2}{18}.$$

Demnach ist $y_1 - y_2 = 2\left(x + \frac{3g + 2k - 2}{6}\right)^2$, also $y_1 - y_2$ ein Quadrat. Da hier $\gamma_1 = 0$. $\gamma_2 = -2$, $\rho = -2$, $\lambda = \frac{1}{2}g + \frac{1}{3}k - \frac{1}{3}$, $y_2 = y_1 - 2(x+\lambda)^2$, $p = -\left(2g + k - \frac{6g + 4k}{3}\right)$ oder $p = \frac{k}{3}$, $r = -\frac{1}{4}$, so wird zufolge der vorausgeschickten Erläuterungen:

$$\frac{Mdx + Ndy}{(y-y_1)^{\frac{3}{4}}(y-y_2)^{\frac{3}{4}}} = d\Omega;$$

$$\Omega = 2(y - y_1)^{\frac{1}{4}}(y - y_2)^{\frac{1}{4}} + \frac{k}{3}\int\frac{dt}{(t^2 + 2t)^{\frac{3}{4}}} \text{ für } t = \frac{y - y_1}{(x+\lambda)^2}.$$

3) Das Integral der Gleichung

$$[a + bx - x^2 + (1 - 3x)y]dx + (a + x + 2x^2 + y)dy = 0$$

ist

$$\left(y + x - \frac{b-1}{3}\right)^4 = C\left(y + \frac{x^2}{2} + x + \frac{a - b + 1}{4}\right)^3. \text{ (C die Constante).}$$

§ 22. In Betreff der Anwendungen auf höhere Grade der M und N werde ich mich hier nur auf einen Fall beschränken, welcher innerhalb des dritten Grades dieselbe Stellung einnimmt, wie die Jacobi'sche Gleichung für den zweiten.

Es sei

$$(A) = a + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$

$$(B) = b + b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy$$

$$(C) = c_3 x^2 + c_4 xy$$

$$M = (A) + (C)y,\ N = (B) - (C)x,$$

$$(A)dx + (B)dy + (C)(ydx - xdy) = 0 \text{ oder } Mdx + Ndy = 0.$$

Dem (C) hätten auch noch die Glieder $c + c_1 x + c_2 y$ beigefügt werden können, doch hätte deren Produkt mit $ydx - xdy$ nur Bestandtheile ergeben, welche sich mit den gleichartigen in $(A)dx$ und $(B)dy$ vereinigten und also einer gesonderten Darstellung nicht bedurften.

Damit vorstehender Gleichung durch $y = \alpha x + \beta$ genügt werde, müssen folgende Bedingungen bestehen:

$$a_5\alpha^2 + a_4\alpha + a_3 + b_4\alpha^2 + b_3\alpha + c_4\alpha\beta + c_3\beta = 0$$
$$2a_5\alpha\beta + a_4\beta + a_2\alpha + a_1 + b_4\alpha\beta + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + c_4\beta^2 = 0$$
$$a_5\beta^2 + a_2\beta + a + b_2\alpha\beta + b\alpha = 0,$$

oder nach Potenzen von α und β geordnet:

$$(a_5 + b_4)\alpha^2 + c_4\alpha\beta + (a_4 + b_3)\alpha + c_3\beta + a_3 = 0$$
$$b_2\alpha^2 + (2a_5 + b_4)\alpha\beta + c_4\beta^2 + (a_2 + b_1)\alpha + a_4\beta + a_1 = 0$$
$$+ b_2\alpha\beta + a_5\beta^2 + b\alpha + a_2\beta + a = 0.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen von oben an mit -1, die zweite mit μ, die dritte mit λ, und setzt die Summe der Produkte identisch oder unabhängig von α und β gleich Null, so ergeben sich nachstehende Bedingungen:

$$a_3 = \lambda a + \mu a_1 \qquad 0 = \lambda a_5 + \mu c_4$$
$$c_3 = \lambda a_2 + \mu a_4 \qquad c_4 = \lambda b_2 + \mu(2a_5 + b_4)$$
$$a_4 + b_3 = \lambda b + \mu(a_2 + b_1) \qquad a_5 + b_4 = \mu b_2,$$

deren Erfüllung jede der obigen Gleichungen zu einer Folge der beiden andern macht und denen genügt wird, wenn man die sechs Grössen a_3, a_4, a_5, b_4, c_3, c_4 durch die 9 übrigen Grössen a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, b_3, λ, μ ausdrückt wie folgt:

$$a_3 = \lambda a + \mu a_1, \quad a_4 = \lambda b + \mu(b_1 + a_2) - b_3, \quad a_5 = -\mu b_2$$
$$b_4 = 2\mu b_2, \quad c_3 = \lambda a_2 - \mu b_3 + \mu(\lambda b + \mu a_2 + \mu b_1), \quad c_4 = \lambda b_2.$$

Mit diesen Werthen erhält man:

$$M = a + a_1x + a_2y + (\lambda a + \mu a_1)x^2 + (\lambda b + \mu a_2 + \mu b_1 - b_3)xy$$
$$- \mu b_2y^2 + [\lambda(a_2 + \mu b_{\cancel{2}}\cancel{)} + \mu(\mu a_2 + \mu b_1 - b_3)]x^2y + \lambda b_2xy^2,$$
$$N = b + b_1x + b_2y + b_3x^2 + 2\mu b_2xy$$
$$- [\lambda(a_2 + \mu b_{\cancel{2}}\cancel{)} + \mu(\mu a_2 + \mu b_1 - b_3)]x^3 - \lambda b_2x^2y,$$

und die hieraus gebildete Gleichung $Mdx + Ndy = 0$ hat vier lineare Lösungen, welche aus folgenden Bedingungen gefunden werden:

$$(a_5 + b_4)\alpha^2 + c_4\alpha\beta + (a_4 + b_3)\alpha + c_3\beta + a_3 = 0$$
$$a_5\beta^2 + b_2\alpha\beta + b\alpha + a_2\beta + a = 0.$$

Die erste giebt

$$-\beta = \frac{(a_5 + b_4)\alpha^2 + (a_4 + b_3)\alpha + a_3}{c_4\alpha + c_3}$$

und dieser Werth in die zweite gesetzt führt auf folgende Gleichung vierten Grades für α:

$$a_5[(a_5 + b_4)\alpha^2 + (a_4 + b_3)\alpha + a_3]^2 - (b_2\alpha + a_2)[(a_5 + b_4)\alpha^2 + (a_4 + b_3)\alpha + a_3](c_4\alpha + c_3)$$
$$+ (b\alpha + a)(c_4\alpha + c_3)^2 = 0,$$

worin noch a_3, a_4, a_5, b_4, c_3, c_5 durch ihre obigen Werthe auszudrücken sind.

Nun sei $\psi = k(y - \alpha_1x - \beta_1)(y - \alpha_2x - \beta_2)(y - \alpha_3x - \beta_3)(y - \alpha_4x - \beta_4)$, so treten in ψ die vier Wurzeln der Gleichung in α symmetrisch auf und es ist daher ψ eine rationale Funktion der sämmtlichen in der Differentialgleichung vorkommenden Constanten, welche durch Multiplication mit einem passenden Faktor k in eine ganze Funktion jener Constanten übergeht. Es ist nun aus dem Früheren genugsam bekannt, dass unter den gegenwärtigen Umständen die Quotienten $\frac{N_1}{\psi' y_1}$ u. s. w. im Allgemeinen constant sein müssen, nämlich so lange die vier Wurzeln α sämmtlich von einander verschieden sind und keines der Produkte $\psi' y_1 \ldots.$ durch ein Quadrat theilbar ist. Daher ist ψ der integrirende Divisor der Gleichung und das Integral erhält die bekannte Form; nämlich es wird:

$$\frac{Mdx + Ndy}{\psi} = d\Omega = q_1\frac{d(y - y_1)}{y - y_1} + \ldots. + q_4\frac{d(y - y_4)}{y - y_4}.$$

Allein auch in den angedeuteten Ausnahmefällen bleibt dennoch ψ ein integrirender Divisor und die Ausnahme bezieht sich nur auf die Form des Integrals, welche in solchen Fällen eine andere wird. Denn es findet hier ein stetiger Uebergang zwischen den beiden unterschiedenen Fällen statt, indem eine unendlich kleine Aenderung an den ganz willkürlichen und von einander unabhängigen Constanten der gegebenen Gleichung hinreichen würde, um eine bestehende Besonderheit auszutilgen und den allgemeinen Fall herzustellen, wodurch der angegebene integrirende Divisor ψ wieder herbeigeführt werden würde. Dieser ist also ohne Ausnahme gültig, ebenso wie in den ähnlichen Aufgaben § 1 und § 17.

Im Allgemeinen erhält man also $\frac{N_1}{\psi' y_1} = \text{const.} = q_1$ u. s. f. Da N in Bezug auf y nur vom ersten, ψ aber vom vierten Grade ist, so folgt aus der identischen Gleichung $\frac{N}{\psi} = \frac{q_1}{y - y_1} + \frac{q_2}{y - y_2} + \frac{q_3}{y - y_3} + \frac{q_4}{y - y_4}$, dass $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$ ist, so wie $q_1y_1 + \ldots. + q_4y_4 = 0$; daher hat man:

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0$$
$$q_1\alpha_1 + q_2\alpha_2 + q_3\alpha_3 + q_4\alpha_4 = 0$$
$$q_1\beta_1 + q_2\beta_2 + q_3\beta_3 + q_4\beta_4 = 0.$$

Die Differentialgleichung enthält 9 beliebig gegebene Constanten a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, b_3, λ, μ, von welchen jedoch eine aus den a oder b als Einheit angesetzt werden kann, also 8 beliebig gegebene Grössen. Demnach enthält auch das Integral Ω nur acht von einander unabhängige constante Zahlenwerthe, wofür die vier Paare der α und β zu nehmen sind; durch diese werden die drei Verhältnisse zwischen den Exponenten q_1, q_2, q_3, q_4 mittels vorstehender Gleichungen bestimmt, eines der q aber bleibt ganz unbestimmt, weil es, wie die Form der Gleichung $q_1 \frac{d(y-y_1)}{y-y_1} + \ldots + q_4 \frac{d(y-y_4)}{y-y_4} = 0$ zeigt, eben nur auf die Verhältnisse zwischen den q ankommt.

Bezeichnet man die oben aufgestellte Gleichung für α durch

$$C(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)(\alpha-\alpha_4) = C.\varphi\alpha = 0,$$

so ist C der dortige Faktor von α^4, oder:

$$C = (a_5 + b_4)[a_5(a_5 + b_4) - b_2 c_4].$$

Ferner ist $N_1 = b + b_1 x + b_2 y_1 + b_3 x^2 + b_4 x y_1 - c_3 x^3 - c_4 x^2 y_1$, oder wenn für y_1 dessen Werth $\alpha_1 x + \beta_1$ eingesetzt und nach Potenzen von x geordnet wird:

$$N_1 = -(c_3 + c_4\alpha_1)x^3 + (b_3 + b_4\alpha_1 - c_4\beta_1)x^2 + (b_1 + b_2\alpha_1 + b_4\beta_1)x + b + b_2\beta_1.$$

Da dieses Polynom theilbar ist durch $\psi' y_1$, d. h. durch

$$[(\alpha_1-\alpha_2)x + \beta_1 - \beta_2][(\alpha_1-\alpha_3)x + \beta_1 - \beta_3][(\alpha_1-\alpha_4)x + \beta_1 - \beta_4] = \psi' y_1,$$

so wird:

$$q_1 = \frac{-(c_3 + c_4\alpha_1)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4)} = \frac{-(c_3 + c_4\alpha_1)}{\varphi'\alpha_1}.$$

Nun ist $\frac{1}{\varphi\alpha} = \frac{1}{\varphi'\alpha_1(\alpha-\alpha_1)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'\alpha_4(\alpha-\alpha_4)}$, und $\varphi\alpha$ vom vierten Grade; daher:

$$\frac{1}{\varphi'\alpha_1} + \ldots + \frac{1}{\varphi'\alpha_4} = 0, \quad \frac{\alpha_1}{\varphi'\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\varphi'\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{\varphi'\alpha_3} + \frac{\alpha_4}{\varphi'\alpha_4} = 0,$$

$$\frac{\alpha_1^2}{\varphi'\alpha_1} + \frac{\alpha_2^2}{\varphi'\alpha_2} + \frac{\alpha_3^2}{\varphi'\alpha_3} + \frac{\alpha_4^2}{\varphi'\alpha_4} = 0;$$

dagegen

$$\frac{\alpha_1^3}{\varphi'\alpha_1} + \frac{\alpha_2^3}{\varphi'\alpha_2} + \frac{\alpha_3^3}{\varphi'\alpha_3} + \frac{\alpha_4^3}{\varphi'\alpha_4} = 1.$$

Hieraus ergeben sich wieder die obigen Gleichungen: $q_1 + \ldots = 0$, $q_1\alpha_1 + \ldots = 0$; die dritte aber, nämlich $q_1\beta_1 + \ldots + q_4\beta_4 = 0$ führt auf eine neue Eigenschaft. Denn es sei β nach Potenzen von α entwickelt in die Form:

$$\beta = h + h_1\alpha + h_2\alpha^2 + h_3\alpha^3,$$

so folgt aus der unmittelbar vorhergehenden Gleichung:

$$q_1(h_2\alpha_1^2 + h_3\alpha_1^3) + q_2(h_2\alpha_2^2 + h_3\alpha_2^3) + q_3(h_2\alpha_3^2 + h_3\alpha_3^3) + q_4(h_2\alpha_4^2 + h_3\alpha_4^3) = 0.$$

Wird nun für q_1 der obige Werth $-\frac{c_3 + c_4\alpha_1}{\varphi'\alpha_1}$ gesetzt, so kommt:

$$(c_3 + c_4\alpha_1)(h_2\alpha_1^2 + h_3\alpha_1^3) = c_3 h_2\alpha_1^2 + (c_4 h_2 + c_3 h_3)\alpha_1^3 + c_4 h_3 \alpha_1^4,$$

und wenn hieraus mittels der Gleichung

$$\varphi\alpha = \alpha^4 + E_3\alpha^3 + E_2\alpha^2 + E_1\alpha + E = 0$$

die vierte Potenz von α weggeschafft wird, so erhält die rechte Seite die Form

$$D_0 + D_1\alpha_1 + D_2\alpha_1^2 + D_3\alpha_1^3.$$

Demnach wird:

$$\frac{D_0 + D_1\alpha_1 + D_2\alpha_1^2 + D_3\alpha_1^3}{\varphi'\alpha_1} + \ldots + \frac{D_0 + D_1\alpha_4 + D_2\alpha_4^2 + D_3\alpha_4^3}{\varphi'\alpha_4} = 0,$$

also mit Weglassung aller schon als ungültig bekannten Theile:

$$D_3\left(\frac{\alpha_1^3}{\varphi'\alpha_1} + \ldots + \frac{\alpha_4^3}{\varphi'\alpha_4}\right) = 0,$$

oder da der eingeklammerte Faktor $= 1$ ist, $D_3 = 0$, d. h. es ist:

$$c_4 h_2 + c_3 h_3 - c_4 h_3 E_3 = 0.$$

Da ψ immer ein integrirender Divisor der vorliegenden Gleichung ist, so folgt, dass die allgemeine Form des Integrals so lange gültig bleibt, als ψ in vier von einander verschiedene Faktoren zerfällt, also namentlich auch noch dann, wenn zwar gleiche α vorhanden sind, zu denen aber ungleiche β gehören. Dieser Fall kann nur eintreten, wenn der Zähler von β durch den Nenner $c_3 + c_4\alpha$ theilbar ist. Wenn aber dieser Umstand nicht stattfindet, so gehören zu gleichen α auch gleiche β und die Form des Integrals erleidet dann Aenderungen, welche schon früher genugsam erörtert sind.

§ 23. Beispiele. Es seien $a_1 = b_3 = 2$, alle übrigen a und $b = 1$, auch $\lambda = \mu = 1$, so wird:

$$M = 1 + 2x + y + 3x^2 + xy - y^2 + 2x^2y + xy^2$$

$$N = 1 + x + y + 2x^2 + 2xy - 2x^3 - x^2y,$$

$$Mdx + Ndy = 0,$$

$$3 + 3\alpha + 2\beta + \alpha\beta + \alpha^2 = 0$$

$$1 + \beta - \beta^2 + (1+\beta)\alpha = 0,$$

daher

$$2\alpha^4 + 11\alpha^3 + 24\alpha^2 + 25\alpha + 11 = 2.\varphi\alpha = 0,$$

$$\beta = -\frac{3 + 3\alpha + \alpha^2}{2 + \alpha} = 4 + 9\alpha + 7\alpha^2 + 2\alpha^3;$$

auch hat man

$$2\beta^4 + 3\beta^3 + 4\beta^2 + 3\beta + 1 = 0.$$

Die vier Wurzeln α sind mit den zugehörigen β folgende:

$$\alpha_1 = -1.72129 + 0.48360 \,.\, i, \qquad \beta_1 = -0.17384 + 1.06907 \,.\, i$$
$$\alpha_2 = -1.72129 - 0.48360 \,.\, i, \qquad \beta_2 = -0.17384 - 1.06907 \,.\, i$$
$$\alpha_3 = -1.02871 - 0.81380 \,.\, i, \qquad \beta_3 = -0.57615 + 0.30693 \,.\, i$$
$$\alpha_4 = -1.02871 + 0.81380 \,.\, i, \qquad \beta_4 = -0.57615 - 0.30693 \,.\, i.$$

Hiermit lassen sich $q_1 = -\frac{2+\alpha_1}{\varphi'\alpha_1} = -\frac{4+2\alpha_1}{8\alpha_1^3 + 33\alpha_1^2 + 48\alpha_1 + 25}$ und eben so q_2, q_3, q_4 berechnen, wobei ich jedoch nicht verweile.

Da gegenwärtig:

$$c_3 = a_2 - b_3 + b + a_2 + b_1 = 1 - 2 + 3 = 2, \; c_4 = b_2 = 1, \; h_2 = 7, \; h_3 = 2;$$
$$\varphi\alpha = \alpha^4 + \tfrac{11}{2}\alpha^3 + 12\alpha^2 + \tfrac{25}{2}\alpha + \tfrac{11}{2}, \text{ daher } E_3 = \tfrac{11}{2},$$

so findet sich $c_4 h_2 + c_3 h_3 - c_4 h_3 E_3 = 7 + 4 - 11 = 0$, der obigen Bemerkung gemäss. Die Form des Integrals ist die bekannte.

Um noch ein zweites und leichter durchzurechnendes Beispiel zu geben, seien alle a und b gleich 1, dagegen $\mu = 2$ und $\lambda = -2$. Hiermit wird:

$$M = 1 + x + y + xy - 2y^2 - 2xy^2, \quad N = 1 + x + y + x^2 + 4xy + 2x^2y,$$
$$Mdx + Ndy = 0.$$

Wird $\alpha x + \beta$ für y eingesetzt, so erhält man:

$$1 + \alpha + \beta \quad . \quad + \alpha\beta - 2\beta^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{1)}$$
$$1 + 2\alpha + \beta + \alpha^2 \quad . \quad - 2\beta^2 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{2)}$$
$$. + 2\alpha \quad . \quad + 2\alpha^2 - 2\alpha\beta \quad . \quad = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{3)}$$

Daher **1)**. $2 +$ **2)**. $(-2) +$ **3)**. $1 = 0$; es bestehen also nur die beiden Bedingungen:

$$\alpha + \alpha^2 - \alpha\beta = 0, \quad 1 + 2\alpha + \alpha^2 + \beta - 2\beta^2 = 0.$$

Sei einstweilen $\alpha + \alpha^2 - \alpha\beta = u$, also $\beta = \frac{\alpha^2 + \alpha - u}{\alpha}$, so giebt die zweite Gleichung:

$$(1 + \alpha)^2 \alpha^2 + (\alpha^2 + \alpha + u)\,\alpha = 2\,(\alpha^2 + \alpha + u)^2;$$

daher für $u = 0$:

$$(1 + \alpha)^2 \alpha^2 + (1 + \alpha)\,\alpha^2 = 2\alpha^2 (1 + \alpha)^2$$

oder

$$\alpha^2 (1 + \alpha)^2 = \alpha^2 (1 + \alpha), \text{ d. i. } \alpha^2 (1 + \alpha)(1 + \alpha - 1) = 0, \text{ also } \alpha^3 (\alpha + 1) = 0.$$

Die Gleichung in α ist folglich vom vierten Grade mit der dreifachen Wurzel $\alpha = 0$. Für $\alpha = 0$ ergiebt sich nun $1 + \beta - 2\beta^2 = 0$, also $\beta = 1$ und $\beta = -\frac{1}{2}$; für $\alpha = -1$ wird $\beta = 0$. Da hiermit nur drei Werthe von β gefunden sind, so muss einer davon doppelt zählen. Entwickelt man die Gleichung für β, so hat man zunächst $\alpha = \frac{2\beta^2}{1+\beta} - 1$, und hiermit wegen $\alpha + \alpha^2 - \alpha\beta = 0$:

$$(2\beta^2 - \beta - 1)\left(1 - \beta + \frac{2\beta^2}{1+\beta} - 1\right) = 0$$

oder

$$(2\beta^2 - \beta - 1)(\beta^2 - \beta) = 0, \text{ d. i. } (\beta - 1)^2 (2\beta + 1)\beta = 0.$$

Demnach ist

$$\alpha_1 = 0, \; \beta_1 = 1; \; \alpha_2 = 0, \; \beta_2 = 1; \; \alpha_3 = 0, \; \beta_3 = -\tfrac{1}{2}; \; \alpha_4 = -1, \; \beta_4 = 0,$$

oder

$$y_1 = y_2 = 1, \; y_3 = -\tfrac{1}{2}, \; y_4 = -x \text{ und } \psi = (y - 1)^2 (y + \tfrac{1}{2})(y + x).$$

Da das obige M sich auch also schreiben lässt:

$$M = (1 + x)(1 - y)(1 + 2y),$$

so erhält man:

$$\frac{(1 + x)(1 - y)(1 + 2y)\,dx + (1 + x + y + x^2 + 4xy + 2x^2y)\,dy}{(y - 1)^2 (y + \frac{1}{2})(y + x)} = d\Omega.$$

Zur Darstellung von Ω entwickele man:

$$\frac{N}{\psi} = \frac{26 + 18x - 14y}{9(y - 1)^2} + \frac{14y - 4x + 9}{9(y + \frac{1}{2})(y + x)} = \frac{26 + 18x - 14y}{9(y - 1)^2} + R$$

und setze demnach:

$$\frac{N}{(y + \frac{1}{2})(y + x)} = \Phi(y) = \frac{26 + 18x - 14y}{9} + R(y - 1)^2,$$

so wird

$$\Phi' y = -\tfrac{14}{9} + \left(2R + \frac{dR}{dy}(y - 1)\right)(y - 1),$$

also für $y = y_1 = 1$:

$$\Phi y_1 = \frac{4 + 6x}{3}, \; \Phi' y_1 = -\frac{14}{9};$$

daher wird schliesslich:

$$d\Omega = -d\left(\frac{6x + 4}{3y - 3}\right) - \frac{14}{9} \cdot \frac{dy}{y - 1} - \frac{4}{9} \cdot \frac{dy}{y + \frac{1}{2}} + 2\,\frac{d\,(y + x)}{y + x}.$$

Um noch ein Beispiel zu entwickeln, sei $\mu = 0$, also die erste der im Eingange des § 22 aufgestellten Gleichungen zwischen α, β und den gegebenen a und b mit der dritten identisch. Man erhält für $\mu = 0$:

$$M = a + a_1 x + a_2 y + \lambda a x^2 + (\lambda b - b_3)\,xy + \lambda a_2 x^2 y + \lambda b_2 x y^2$$
$$N = b + b_1 x + b_2 y + b_3 x - \lambda a_2 x^3 - \lambda b_2 x^2 y;$$
$$(b_2 \alpha + a_2)\,\beta + b\alpha + a = 0$$
$$b_2 \alpha^2 + (a_2 + b_1)\,\alpha + \lambda b_2 \beta^2 + (\lambda b - b_3)\,\beta + a_1 = 0;$$

daher nach Wegschaffung von β:

$$[b_2\alpha^2 + (a_2 + b_1)\alpha + a_1](b_2\alpha + a_2)^2 + \lambda b_2(b\alpha + a)^2 + (b_3 - \lambda b)(b\alpha + a)(b_2\alpha + a_2) = 0.$$

Eine noch weiter gehende Vereinfachung wird erlangt, wenn man annimmt, dass $b\alpha + a$ durch $b_2\alpha + a_2$ theilbar ist. Es sei $b = gb_2$ und $a = ga_2$, so wird:

$$M = ga_2 + a_1x + a_2y + \lambda ga_2x^2 + (\lambda gb_2 - b_3)xy + \lambda a_2x^2y + \lambda b_2xy^2$$

$$N = gb_2 + b_1x + b_2y + b_3x^2 - \lambda a_2x^3 - \lambda b_2x^2y;$$

$$(b_2\alpha + a_2)(\beta + g) = 0$$

$$b_2\alpha^2 + (a_2 + b_1)\alpha + \lambda b_2\beta^2 + (\lambda gb_2 - b_3)\beta + a_1 = 0.$$

Da nunmehr a und b in vorstehenden Gleichungen gar nicht mehr vorkommen, so kann der Zeiger 2 bei a_2 und b_2 weggelassen und dafür nur a und b gesetzt werden. Schreibt man noch c für b_3 und l für λ, so ist

$$M = ga + a_1x + ay + lgax^2 + (lgb - c)xy + lax^2y + lbxy^2$$

$$N = gb + b_1x + by + cx^2 - lax^3 - lbx^2y;$$

$$(b\alpha + a)(\beta + g) = 0$$

$$(b\alpha + a)\alpha + b_1\alpha + a_1 + lb\beta^2 + (lgb - c)\beta = 0.$$

Wird nun zuerst $b\alpha + a = 0$ gesetzt, so ergiebt sich für β:

$$lb^2\beta^2 + (lgb - c)b\beta + a_1b - ab_1 = 0;$$

daher zu $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{a}{b}$ die Wurzeln vorstehender Gleichung β_1 und β_2 gehören. Wird sodann $\beta = -g$ gesetzt, so folgt für α die Gleichung

$$b\alpha^2 + (a + b_1)\alpha + a_1 + gc = 0;$$

seien α_3 und α_4 ihre Wurzeln, so ist $\beta_3 = \beta_4 = -g$.

Hiermit folgt:

$$lb^2(y - \alpha_1x - \beta_1)(y - \alpha_2x - \beta_2) = A,$$

$$A = l(by + ax)^2 + (lgb - c)(by + ax) + a_1b - ab_1;$$

ferner

$$b(y - \alpha_3x + g)(y - \alpha_4x + g) = B,$$

$$B = b(y + g)^2 + (a + b_1)x(y + g) + (a_1 + gc)x^2$$

und

$$\psi = A\,.\,B,\quad \frac{Mdx + Ndy}{\psi} = d\Omega,$$

oder mit etwas veränderter Anordnung der Glieder:

$$\frac{[a_1x + a(y + g)]\,dx + [b_1x + b(y + g)]\,dy + gl(ax + by)\,xdx + [l(ax + by) - c]\,x(ydx - xdy)}{[l(ax + by)^2 + (bgl - c)(ax + by) + a_1b - ab_1]\,[(a_1 + gc)x^2 + (a + b_1)\,x(y + g) + b(y + g)^2]} = d\Omega,$$

wo alle Constanten ganz beliebige Grössen sind.

Sei z. B. $a = 4$, $a_1 = 0$, $b = 1$, $b_1 = 0$, $c = 2$, $g = 2$, $l = 1$, so erhält man:

$$\frac{(8 + 4y + 8x^2 + 4x^2y + xy^2)\,dx + (2 + y + 2x^2 - 4x^3 - x^2y)\,dy}{(4x + y)^2(2x + y + 2)^2} = d\Omega;$$

$$\Omega = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2x + y + 2} - \frac{1}{4x + y}\right) + \frac{1}{4}\log\frac{2x + y + 2}{4x + y}.$$

Die vorstehende Formel ergab sich aus der Annahme, dass der Zähler von β (im vorigen §) durch den Nenner theilbar und zugleich $\mu = 0$ war. Lässt man die Beschränkung des Werthes von μ fallen, so findet man eine umfassendere, aber auch weitläufigere Formel, deren hier noch kurz erwähnt werden mag.

Wenn der Nenner von β, nämlich $c_4\alpha + c_3$, im Zähler aufgeht, so ist zu setzen:

$$c_4^2[(a_5 + b_4)\alpha^2 + (a_4 + b_3)\alpha + a_3] = (c_4\alpha + c_3)(q\alpha + k)$$

und für $c_4\alpha = -c_3$ wird:

$$(a_5 + b_4)c_3^2 - (a_4 + b_3)c_3c_4 + a_3c_4^2 = 0.$$

Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab und dividirt den Unterschied durch $c_4\alpha + c_3$, so folgt:

$$(a_5 + b_4)(c_4\alpha - c_3) + (a_4 + b_3)c_4 = q\alpha + k;$$

daher ergeben sich

$$q = (a_5 + b_4)c_4,\quad k = (a_4 + b_3)c_4 - (a_5 + b_4)c_3.$$

Unter diesen Umständen hangen α und β von folgenden Gleichungen ab:

$$(c_4\alpha + c_3)(\beta + q\alpha + k) = 0$$

$$a_5\beta^2 + b_2\alpha\beta + b\alpha + a_2\beta + a = 0.$$

Sei nun erstens $c_4\alpha + c_3 = 0$, so folgt für β die Gleichung:

$$a_5c_4\beta^2 + (a_2c_4 - b_2c_3)\beta + ac_4 - bc_3 = 0,$$

deren Wurzeln β_1 und β_2 zu $\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{c_3}{c_4}$ gehören. Hieraus bilde man das Produkt:

$$a_5c_4^2(y - \alpha_1x - \beta_1)(y - \alpha_2x - \beta_2)$$

$$= a_5(c_4y + c_3x)^2 + (a_2c_4 - b_2c_3)(c_4y + c_3x) + (ac_4 - bc_3)c_4 = A.$$

Sei zweitens $\beta + q\alpha + k = 0$, so findet sich für α:

$$a_5(q\alpha + k)^2 - (b_2\alpha + a_2)(q\alpha + k) + b\alpha + a = 0$$

oder

$$(a_5 q - b_2) q\alpha^2 + (b - b_2 k - a_2 q + 2a_5 qk)\alpha + a - a_2 k + a_5 k^2 = 0,$$

und sind α_3, α_4 die Wurzeln dieser Gleichung, so folgt:

$$\beta_3 = -q\alpha_3 - k, \quad \beta_4 = -q\alpha_4 - k.$$

Hieraus bilde man das zweite Produkt:

$$(a_5 q - b_2) q (y - \alpha_3 x - \beta_3)(y - \alpha_4 x - \beta_4)$$
$$= (a_5 q - b_2) q [y + k + \alpha_3(q - x)] [y + k + \alpha_4(q - x)]$$
$$= (a_5 q - b_2)\, q\, (y + k)^2 + (a_2 q + b_2 k - b - 2a_5 qk)(q - x)(y + k) + (a - a_2 k + a_5 k^2)(q - x)^2 = B,$$

so ist $A . B$ der integrirende Divisor des vorgelegten Differentials $Mdx + Ndy$, oder es ist:

$$\frac{Mdx + Ndy}{A . B} = d\Omega.$$

In diesem Ausdrucke haben M und N dieselbe Bedeutung wie in § 22, nur mit dem Unterschiede, dass hier die Bedingungsgleichung $(a_5 + b_4)c_3^2 - (a_4 + b_3)c_3 c_4 + a_3 c_4^2 = 0$ erfüllt sein muss und mithin eine der früheren unabhängigen Constanten durch die übrigen bestimmt wird. Setzt man für die abhängigen Constanten a_3, a_4, a_5, b_4, c_3, c_4 ihre Werthe aus § 22 ein, so verwandelt sich die vorstehende Gleichung in folgende:

$$\mu(\lambda a_2 - \mu b_3 + \mu\lambda b + \mu^2 a_2 + \mu^2 b_1)^2$$
$$- \lambda(\lambda b + \mu b_1 + \mu a_2)(\lambda a_2 - \mu b_3 + \mu\lambda b + \mu^2 a_2 + \mu^2 b_1) + (\lambda a + \mu a_1)\lambda^2 b_2 = 0,$$

woraus im Allgemeinen am bequemsten der Werth von a entnommen wird, wenn alles übrige beliebig gegeben ist. Zugleich wird

$$q = \lambda\mu . b_2^2, \quad k = [(\lambda - \mu^2)(\lambda b + \mu b_1) - \mu^3 a_2 + \mu^2 b_3]\, b_2.$$

Es mögen noch zwei leichte Zahlenbeispiele folgen.

Sei $a_1 = a_2 = b = b_1 = b_2 = b_3 = \lambda = \mu = 1$, so wird vermöge obiger Bedingungsgleichung $a = -1$; ferner wird $q = 1$, $k = 0$ und man erhält:

$$\frac{(-1 + x + y + 2xy - y^2 + 3x^2 y + xy^2)\, dx + (1 + x + y + x^2 + 2xy - 3x^3 - x^2 y)\, dy}{[(y + 3x + 1)^2 + 3]\,[2y^2 + (x - 1)^2]} = d\Omega.$$

Sei $a_1 = a_2 = b_1 = b_3 = 0$, $b = b_2 = \lambda = \mu = 1$, so wird $a = 0$, $q = 1$, $k = 0$ und hiermit:

$$\frac{(xy - y^2 + x^2 y + xy^2)\, dx + (1 + y + 2xy - x^3 - x^2 y)\, dy}{[(y + x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}]\,(2y - x + 1)\, y} = d\Omega.$$

Die allgemeine Formel in vollständig entwickelter Gestalt hier niederzuschreiben, wie es im vorangegangenen Falle (für $\mu = 0$) geschehen ist, würde zu viel Raum erfordern.

So vielen Stoff nun auch der Fortgang zu höheren Graden der Polynome M und N noch darbieten würde, so genügt doch das Vorangegangene, um den Nutzen nachzuweisen, welchen die Aufsuchung vorläufiger Lösungen für die Integration einer ausgedehnten Classe von Differentialgleichungen gewährt, deren erschöpfende Behandlung zukünftigen Arbeiten vorbehalten bleiben muss.

---

§ 24. Zum Schlusse mögen hier noch einige Bemerkungen folgen über die Integration der Gleichung $Mdx + Ndy = 0$, wenn M und N nach x und y ganze Polynome zweiten Grades mit beliebigen Vorzahlen sind. Denn nachdem im Obigen so verschiedene besondere Fälle dieser Form ihre Erledigung gefunden haben, ist es kaum möglich der Frage nach dem allgemeinen Integrale dieser Gleichung auszuweichen, worüber nirgends eine Auskunft gegeben worden ist. Gewiss ist dieses Integral eine sehr verwickelte und durch die bekannten Formen nur in Reihen darstellbare Funktion; ich gebe hier, da ich eine so wichtige und naheliegende Aufgabe nicht ganz mit Stillschweigen übergehen mochte, die einfachste Reduction, welche ich habe finden können, ohne ihre Unvollkommenheit zu verkennen.

Durch Einführung von $x + k$ für x und $y + h$ für y denke man sich die Polynome M und N von ihren constanten Gliedern a und b befreit; es sei also:

$$M = a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2$$
$$N = b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 xy + b_5 y^2,$$

auch sei b_5 nicht $= 0$; denn wäre $b_5 = 0$ und bliebe es trotz jeder linearen Substitution, so hätte man die Jacobi'sche Gleichung (§ 17).

Für $y = tx$ und wenn noch der Kürze wegen gesetzt wird:

$$a_3 + a_4 t + a_5 t^2 + (b_3 + b_4 t + b_5 t^2)\, t = F(t) = F$$
$$a_1 + a_2 t + (b_1 + b_2 t)\, t = f(t) = f$$
$$b_3 + b_4 t + b_5 t^2 = \varphi(t) = \varphi, \quad b_1 + b_2 t = \psi(t) = \psi,$$

erhält man

$$Mdx + Ndy = (F . x^2 + f . x)\, dx + (\varphi . x^3 + \psi . x^2)\, dt$$

oder

$$\frac{Mdx + Ndy}{x^2 . F} = dx + \frac{\varphi . xdt}{F} + \frac{\psi dt}{F} + \frac{f}{F} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Nun sei $\int \frac{\varphi . dt}{F} = \log T$, so folgt:

$$\frac{T . (Mdx + Ndy)}{x^2 . F} = d(T . x) + \frac{T\psi\, dt}{F} + \frac{Tf}{F} \cdot \frac{dx}{x}$$

oder für $Tx = z$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z} - \frac{dT}{T}$:

$$\frac{T.(Mdx + Ndy)}{x^2.F} = dz + \frac{T\psi dt - fdT}{F} + \frac{Tf}{F}\cdot\frac{dz}{z}.$$

Sei endlich $\frac{T\psi dt - fdT}{F} = \theta dt = du$, $\frac{Tf}{F} = Q$, so wird:

$$\frac{T(Mdx + Ndy)}{x^2.F} = dz + du + Q\frac{dz}{z},$$

wodurch die Aufgabe auf eine möglichst einfache Grundform zurückgeführt ist, welche im Allgemeinen keine weitere Reduction zulässt.

Will man auf die ursprünglichen Grössen zurückgehen, so war

$$y = tx, \quad F = b_5 t^3 + (b_4 + a_5) t^2 + \ldots\ldots = b_5 (t - \alpha_1)(t - \alpha_2)(t - \alpha_3);$$

daher — die drei α als ungleich vorausgesetzt —:

$$\frac{\varphi}{F} = \frac{b_5 t^2 + b_4 t + b_3}{F} = \frac{\gamma_1}{t - \alpha_1} + \frac{\gamma_2}{t - \alpha_2} + \frac{\gamma_3}{t - \alpha_3}, \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1;$$

$$T = (t - \alpha_1)^{\gamma_1} (t - \alpha_2)^{\gamma_2} (t - \alpha_3)^{\gamma_3},$$

$$z = Tx = (y - \alpha_1 x)^{\gamma_1} (y - \alpha_2 x)^{\gamma_2} (y - \alpha_3 x)^{\gamma_3};$$

$$b_5 Q = (t - \alpha_1)^{\gamma_1 - 1} (t - \alpha_2)^{\gamma_2 - 1} (t - \alpha_3)^{\gamma_3 - 1} [b_2 t^2 + (b_1 + a_2) t + a_1]$$

$$du = \frac{T(b_2 t + b_1)\,dt - [b_2 t^2 + (b_1 + a_2)\,t + a_1]\,dT}{b_5 (t - \alpha_1)(t - \alpha_2)(t - \alpha_3)} = \theta dt.$$

Für $f = 0$, d. h. $b_2 = 0$, $b_1 + a_2 = 0$, $a_1 = 0$ wird $Q = 0$ und das Integral $\Omega = z + u$; auf diesen besonderen Fall, dessen in § 15 erwähnt worden, weist also die vorstehende Transformation zurück.

Sei $\Omega = \text{const.}$ das Integral von $dz + du + Q\frac{dz}{z} = 0$, so ist

$$z\frac{d\Omega}{dz} = (Q + z)\frac{d\Omega}{du}$$

eine partielle Differentialgleichung, mittels deren Ω in Reihen entwickelt werden kann. Setzt man

$$\Omega = \log z + \int\frac{du}{Q} + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \ldots.$$

so kommt:

$$1 + A_1 z + 2A_2 z^2 + 3A_3 z^3 + \ldots. = (Q + z)\left(\frac{1}{Q} + z\frac{dA_1}{du} + z^2\frac{dA_2}{du} + \ldots.\right)$$

daher:

$$A_1 = Q\frac{dA_1}{du} + \frac{1}{Q}$$

$$2A_2 = Q\frac{dA_2}{du} + \frac{dA_1}{du}$$

$$3A_3 = Q\frac{dA_3}{du} + \frac{dA_2}{du}, \text{ u. s. w.},$$

Es sei noch

$$\frac{du}{Q} = -\frac{dv}{v} \text{ oder } v = e^{-\int\frac{du}{Q}},$$

so verwandeln sich vorstehende Gleichungen in folgende:

$$A_1 + v\frac{dA_1}{dv} = \frac{1}{Q}, \text{ d. i. } d(A_1 v) = \frac{dv}{Q};$$

$$2A_2 + v\frac{dA_2}{dv} + v\frac{dA_1}{Qdv} = 0 \text{ oder } d(A_2 v^2) + \frac{v^2 dA_1}{Q} = 0;$$

eben so erhält man:

$$d(A_3 v^3) + \frac{v^3 dA_2}{Q} = 0; \text{ u. s. w.}$$

Also ist

$$A_1 v = \int\frac{dv}{Q}, \quad A_2 v^2 = -\int\frac{v^2 dA_1}{Q}, \text{ u. s. f.}$$

Diesen Integrationen liegt als unabhängig veränderliche Grösse t zu Grunde; nimmt man daher einen bestimmten Werth t_0 von t als untere Grenze an, so verschwinden für $t = t_0$ sämmtliche A in obiger Reihe. Soll nun für $t = t_0$ (wofür auch $u = 0$ wird, wenn man $u = \int_{t_0}^{t}\theta dt$ setzt) $z = z_0$ werden, so hat man das Integral:

$$0 = \log\frac{z}{z_0} + \int_{t_0}^{t}\frac{\theta dt}{Q} + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots.$$

Hier sind für $A_1, A_2 \ldots.$ die obigen Integrale zu setzen, welche für $t = t_0$ alle verschwinden. Dabei ist vorausgesetzt, dass die gegebenen Werthe z_0 und t_0 nicht wegen der Form der Funktionen unzulässig sind, wie es z. B. $z_0 = 0$ hier sein würde.

Man kann auch Ω nach fallenden Potenzen von z entwickeln; die gedrungenste Darstellung ergiebt sich aber, wie ich finde, durch Entwickelung nach fallenden Potenzen von $z + u$, wenn $u = \int_{t_0}^{t}\theta dt$, also $u = 0$ für $t = t_0$, wie vorhin.

Sei nämlich $\Omega = \log(z + u) + \frac{B_2}{(z+u)^2} + \frac{B_3}{(z+u)^3} + \frac{B_4}{(z+u)^4} + \ldots.$, so wird:

$$\frac{d\Omega}{dz} = \frac{1}{z+u} - \frac{2B_2}{(z+u)^3} - \frac{3B_3}{(z+u)^4} - \ldots.$$

$$\frac{d\Omega}{du} = \frac{d\Omega}{dz} + \frac{1}{(z+u)^2}\cdot\frac{dB_2}{du} + \frac{1}{(z+u)^3}\cdot\frac{dB_3}{du} + \ldots.$$

und diese Werthe in die Gleichung $z\frac{d\Omega}{dz} = (Q + z)\frac{d\Omega}{du}$ eingeführt geben:

$$0 = Q\frac{d\Omega}{dz} + (Q + z)\left(\frac{1}{(z+u)^2}\cdot\frac{dB_2}{du} + \frac{1}{(z+u)^3}\cdot\frac{dB_3}{du} + \ldots.\right)$$

*

oder wenn mit $z + u$ multiplicirt wird:

$$0 = Q\left(1 - \frac{2B_2}{(z+u)^2} - \frac{3B_3}{(z+u)^3} - \dots\right)$$
$$+ (Q - u)\left(\frac{1}{z+u} \cdot \frac{dB_2}{du} + \frac{1}{(z+u)^2} \cdot \frac{dB_3}{du} + \dots\right)$$
$$+ \frac{dB_2}{du} + \frac{1}{z+u} \cdot \frac{dB_3}{du} + \frac{1}{(z+u)^2} \cdot \frac{dB_4}{du} + \dots$$

also:

$$0 = Q + \frac{dB_2}{du}, \quad 0 = (Q - u)\frac{dB_2}{du} + \frac{dB_3}{du},$$
$$0 = -2B_2 Q + (Q - u)\frac{dB_3}{du} + \frac{dB_4}{du}$$
$$0 = -3B_3 Q + (Q - u)\frac{dB_4}{du} + \frac{dB_5}{du}; \text{ u. s. w.}$$

daher

$$B_2 = -\int_0^u Q\,du, \quad B_3 = \int_0^u (Q - u)\,Q\,du, \quad B_4 = -\int_0^u (Q - u)^2 Q\,du - \left(\int_0^u Q\,du\right)^2. \text{ U. s. w.}$$

Demnach wird folgende Reihe erhalten:

$$\Omega = \log(z + u) - \frac{\int Q\,du}{(z+u)^2} + \frac{\int (Q-u)\,Q\,du}{(z+u)^3} - \frac{\int (Q-u)^2\,Q\,du + (\int Q\,du)^2}{(z+u)^4} + \dots,$$

in welcher alle Integrale von $t = t_0$ oder $u = 0$ anfangen.

Anstatt die Integralfunktion Ω zu suchen, ist es da, wo es sich um Zahlenwerthe handelt, zweckmässiger die gesuchte Grösse z durch eine Reihe in u darzustellen. Schreibt man hQ für Q, so kann nach Umständen zur Ermittelung von z aus $dz + du + hQ\frac{dz}{z} = 0$ eine nach Potenzen von h fortschreitende Reihe brauchbar sein. Um eine solche zu entwickeln, sei

$$z = U_0 + hU_1 + h^2U_2 + h^3U_3 + h^4U_4 + \dots$$
$$\log z = V_0 + hV_1 + h^2V_2 + h^3V_3 + \dots$$

also $V_0 = \log U_0$, ferner wenn nach h differentiirt wird:

$$\frac{U_1 + 2hU_2 + 3h^2U_3 + \dots}{U_0 + hU_1 + h^2U_2 + \dots} = V_1 + 2hV_2 + 3h^2V_3 + \dots;$$

daher

$$U_0V_1 = U_1, \quad 2U_0V_2 + U_1V_1 = 2U_2$$
$$3U_0V_3 + 2U_1V_2 + U_2V_1 = 3U_3, \text{ u. s. w.}$$

Aus der Differentialgleichung aber folgt:

$$du + dU_0 + hdU_1 + h^2dU_2 + \dots + hQ(dV_0 + hdV_1 + h^2dV_2 + \dots) = 0;$$

d. h.

$$dU_0 + du = 0, \quad dU_1 + QdV_0 = 0, \quad dU_2 + QdV_1 = 0, \text{ u. s. f.}$$

Soll nun für den gegebenen Werth t_0 von t, welchem $u = 0$ entspricht, z einen gegebenen Werth haben, so muss dieser als von der Constante h abhängig gedacht werden, also $z_0 = \varphi(h)$ sein, und da hier überhaupt z durch eine Reihe nach Potenzen von h ausgedrückt werden soll, so muss auch z_0 diese Form zulassen; also sei:

$$z_0 = \varphi(h) = k_0 + k_1h + k_2h^2 + \dots$$

Alsdann ergiebt sich:

$$z - \varphi(h) = U_0 - k_0 + h(U_1 - k_1) + h^2(U_2 - k_2) + \dots$$

und die Differenzen $U_0 - k_0$, $U_1 - k_1$, ... müssen für $u = 0$ alle verschwinden. Daher wird

$$U_0 = k_0 - u, \qquad V_0 = \log(k_0 - u);$$
$$U_1 = k_1 + \int_0^u Q\,dV_0, \quad V_1 = \frac{U_1}{U_0};$$
$$U_2 = k_2 + \int_0^u Q\,dV_1, \quad V_2 = \frac{2U_2 - U_1V_1}{2U_0}, \text{ u. s. w.}$$

wodurch nach und nach beliebig viele Glieder der verlangten Reihe bestimmt werden.

§ 25. Schliesslich mag noch eines Beispiels von Integration durch Reihen erwähnt werden, welches in so fern belehrend ist, als es zeigt, wie viel dabei auf die Wahl des Arguments der Reihe ankommt. In § 174 des Lehrbuches der Integralrechnung von Moigno wird die Aufgabe gestellt, aus der Gleichung

$$dy = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})\,dx$$

den Werth von y für $x = 1$ zu finden, unter der Voraussetzung, dass für $x = 0$ auch $y = 0$ sei. Durch eine ziemlich mühsame Anwendung des Restausdruckes der Taylorschen Reihe wird dann gefunden, dass der gesuchte Werth von y zwischen 1.18879 und 1.37687 liegt.

Es scheint der Mühe nicht unwerth, der dortigen Betrachtungsweise eine Reihe für y zur Vergleichung gegenüber zu stellen; doch hat die vorliegende Aufgabe das Eigenthümliche, dass sie die Entwickelung von y nach ganzen Potenzen von x nicht erlaubt, wenn mit x zugleich y verschwinden soll. Diese Schwierigkeit fällt aber gänzlich weg und es ergiebt sich eine sehr wohl convergirende Reihe, wenn nach Potenzen der vierten Wurzel von x entwickelt wird. Sei $u = \sqrt[4]{x}$, $x = u^4$ und demnach die vorgelegte Gleichung

$$dy = 4(u^2 + y^{\frac{1}{2}})\,u^3du.$$

Setzt man nun, da für $u = 0$, $y = 0$ sein soll:

$$y = \frac{2}{3}u^6(1 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3 + \dots)$$
$$\sqrt{y} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,.\,u^3(1 + c_1u + c_2u^2 + c_3u^3 + \dots),$$

so wird:

$$c_1 = \frac{1}{2}a_1,\ c_2 = \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{8}a_1^2,\ c_3 = \frac{1}{2}a_3 - \frac{1}{4}a_1a_2 + \frac{1}{16}a_1^3,$$

$$c_4 = \frac{1}{2}a_4 - \frac{a_2^2 + 2a_1a_3}{8} + \frac{3a_1^2a_2}{16} - \frac{5a_1^4}{128},$$

$$c_5 = \frac{1}{2}a_5 - \frac{a_1a_4 + a_2a_3}{4} + \frac{3(a_1a_2^2 + a_1^2a_3)}{16} - \frac{5a_1^3a_2}{32} + \frac{7a_1^5}{256};\ \text{u. s. w.}$$

Hiermit findet sich:

$$y = \frac{2}{3}u^6(1 + a_1u + a_2u^2 + \ldots) = \frac{2}{3}u^6 + 4\int_0^u \sqrt{y}\,.\,u^3du,$$

oder wenn für $\sqrt{y}$ obige Reihe gesetzt wird:

$$\frac{2}{3}u^6(1 + a_1u + a_2u^2 + \ldots) = \frac{2}{3}u^6 + \frac{4\sqrt{6}}{3}\left(\frac{u^7}{7} + \frac{c_1u^8}{8} + \frac{c_2u^9}{9} + \ldots\right);$$

folglich ist $a_1 = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, daher $c_1 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{\sqrt{6}}{7}$; ferner $a_2 = \frac{1}{4}\sqrt{6}\,.\,c_1 = \frac{3}{14}$, $c_2 = \frac{9}{2^2\,.\,7^2}$; $a_3 = \frac{\sqrt{6}}{2\,.\,7^2}$, $c_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2\,.\,7^3}$; $a_4 = -\frac{3}{5\,.\,7^3}$, $c_4 = -\frac{29\,.\,9}{2^5\,.\,5\,.\,7^4}$; $a_5 = -\frac{29\,.\,9\,.\,\sqrt{6}}{2^4\,.\,5\,.\,7^4\,.\,11}$, u. s. w.

Die Werthe der Vorzahlen a lassen sich auch so schreiben:

$$a_2 = \frac{7}{2^4}a_1^2,\ a_3 = \frac{7}{2^5\,.\,3}a_1^3,\ a_4 = -\frac{7}{2^6\,.\,3\,.\,5}a_1^4,\ a_5 = -\frac{29\,.\,7}{2^{11}\,.\,5\,.\,11}a_1^5,\ \text{u. s. w.}$$

Demnach erhält man für y die Reihe:

$$y = \frac{2}{3}u^6\left(1 + a_1u + \frac{7}{2^4}(a_1u)^2 + \frac{7}{2^5\,.\,3}(a_1u)^3 - \frac{7}{2^6\,.\,3\,.\,5}\cdot(a_1u)^4 - \frac{29\,.\,7}{2^{11}\,.\,5\,.\,11}(a_1u)^5 \ldots\right)$$

worin $a_1 = \frac{2}{7}\sqrt{6}$ und welche schnell convergirt, so lange a_1u ein ächter Bruch ist. Wird für a_1 dessen Werth gesetzt, so kommt:

$$y = \frac{2}{3}u^6\left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{7}u + \frac{3}{2\,.\,7}u^2 + \frac{\sqrt{6}}{2\,.\,7^2}u^3 - \frac{3}{5\,.\,7^3}u^4 - \frac{9\,.\,29\sqrt{6}}{2^4\,.\,5\,.\,7^4\,.\,11}u^5 \ldots\right),$$

also für $u = 1$:
$$y' = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{7} + \frac{3}{14} + \frac{\sqrt{6}}{98} - \frac{3}{1715} - \frac{261\,.\,\sqrt{6}}{2112880} \ldots\right).$$

Nimmt man die ersten fünf Glieder zusammen, so ergiebt sich $y' = 1.291590$ und fügt man noch das sechste hinzu, so kommt $y' = 1.291388$; es sind daher schon mit diesen wenigen Gliedern mindestens die drei ersten Decimalstellen gesichert und einer genaueren Annäherung würde keine Schwierigkeit entgegenstehen.

Schliesslich bitte ich die Bemerkungen der beiden letzten §§ nur als gelegentliche zu betrachten, da Untersuchungen über Integration durch Reihen der eigentlichen Aufgabe dieser Schrift fern lagen.

Anhang.

Während meine Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen etc. etc. gegenwärtig auf Verfügung der Kaiserlichen Akademie gedruckt werden, habe ich mich mit der bisher ganz unberührt gelassenen Frage beschäftigt: welche Anwendung die dort benutzten Mittel bei Differentialgleichungen höherer Ordnungen, oder auch bei der ersten Ordnung, aber mehr als zwei veränderlichen Grössen, finden könnten. War diese Anwendung schon im einfachsten Falle von sehr beschränktem Umfange, so wird sie weiterhin verhältnissmässig noch viel seltener möglich sein; dessen ungeachtet ist sie gewiss nicht unfruchtbar, ja sie eröffnet vielmehr künftigen Untersuchungen ein ausgedehntes Gebiet. So viel ich bis jetzt ersehen konnte, scheint der Versuch unvollständige Lösungen für die Integration zu benutzen, bei Differentialgleichungen höherer Ordnungen weniger unmittelbaren Erfolg zu versprechen, als bei Systemen erster Ordnung mit drei oder mehr veränderlichen Grössen, welche ich hier zum Gegenstande einiger Betrachtungen machen will.

Allem zuvor ist eine Verständigung darüber nöthig, in welchem Sinne bei Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung von unvollständigen Lösungen die Rede sein kann. Sind $P, P_1, P_2, \ldots P_n$ beliebige Funktionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$, so ist bekannt, dass die Integration der n Gleichungen

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = P : P_1 : P_2 : \ldots : P_n$$

zusammenfällt mit der Aufgabe: n verschiedene Funktionen Ω zu finden, welche der folgenden partiellen Differentialgleichung genugthun, nämlich:

$$P\frac{d\Omega}{dx} + P_1\frac{d\Omega}{dx_1} + P_2\frac{d\Omega}{dx_2} + \ldots + P_n\frac{d\Omega}{dx_n} = 0.$$

Sind $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n$ diese Funktionen und $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ eben so viele willkürliche Constanten, so stellen die Gleichungen $\Omega_1 = \gamma_1, \Omega_2 = \gamma_2, \ldots \Omega_n = \gamma_n$ das vollständige System der verlangten Integrale dar. Mittels irgend einer dieser Gleichungen — sei sie $\Omega = \gamma$ — lässt sich x durch $x_1, x_2, \ldots x_n$ und die Constante γ ausdrücken; daher ist auch $\frac{d\Omega}{dx}\cdot\frac{dx}{dx_1} + \frac{d\Omega}{dx_1} = 0$, u. s. w.; folglich genügt der aus $\Omega = \gamma$ entspringende Werth von x der partiellen Differentialgleichung:

$$P = P_1 \frac{dx}{dx_1} + P_2 \frac{dx}{dx_2} + \dots + P_n \frac{dx}{dx_n},$$

in so fern nämlich in den verschiedenen P jener Werth für x eingesetzt wird. Legt man nun der Constante γ irgend einen bestimmten Werth γ' bei, so ist $\Omega = \gamma'$ eine *unvollständige Lösung* der vorstehenden partiellen Differentialgleichung.

Jede Lösung mit einer willkürlichen Constante steht zu den ursprünglichen Differentialgleichungen in solcher Beziehung, dass sich aus diesen mit Hülfe gewisser integrirender Faktoren $f_1, f_2, \dots f_n$ eine Summe bilden lässt, welche dem vollständigen Differentiale $d\Omega$ gleichkommt, so dass man hat:

$$f_1(P_1 dx - P dx_1) + f_2(P_2 dx - P dx_2) + \dots + f_n(P_n dx - P dx_n) = d\Omega,$$

oder wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$f_1 P_1 + f_2 P_2 + \dots + f_n P_n = Q$$

$$-f_1 P = Q_1, \quad -f_2 P = Q_2, \dots, \quad -f_n P = Q_n,$$

so ist

$$Q dx + Q_1 dx_1 + Q_2 dx_2 + \dots + Q_n dx_n = d\Omega.$$

Da nämlich Ω als gegeben gedacht wird, so werden auch die unbekannten f sofort gefunden aus den Gleichungen:

$$-f_1 P = \frac{d\Omega}{dx_1}, \quad -f_2 P = \frac{d\Omega}{dx_2}, \dots, \quad -f_n P = \frac{d\Omega}{dx_n}.$$

Die hiermit ebenfalls gefundenen Q genügen stets der Bedingung:

$$PQ + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \dots + P_n Q_n = 0.$$

Wird die Gleichung $\Omega = \gamma$ nach x aufgelöst und der Werth von x in $d\Omega = Q dx + Q_1 dx_1 + \dots + Q_n dx_n$ eingesetzt, so folgt, da $d\Omega = 0$:

$$Q dx + Q_1 dx_1 + \dots + Q_n dx_n = 0.$$

Diese Folgerung ist unabhängig von dem Werthe der Constante γ und gilt also auch für jede unvollständige Lösung $\Omega = \gamma'$; eine solche giebt daher, wenn die Q durch die f ausgedrückt werden:

$$f_1(P_1 dx - P dx_1) + f_2(P_2 dx - P dx_2) + \dots + f_n(P_n dx - P dx_n) = 0.$$

Hiermit ist der Zusammenhang einer unvollständigen Lösung mit den ursprünglichen Differentialgleichungen dargelegt; sie gestattet nämlich ein der vorstehenden Gleichung genügendes System der f zu finden. In Rücksicht dieses Zusammenhanges kann die unvollständige Lösung, welche zunächst nur der partiellen Differentialgleichung in x angehörte, auch eine unvollständige Lösung des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen, wenigstens der Kürze des Ausdrucks wegen, genannt werden.

Der in § 9 aufgestellte Satz über gewisse Formen des integrirenden Faktors kehrt hier in folgender Gestalt wieder. Angenommen, die obigen f haben alle einen gemeinsamen Faktor e^W und seien demgemäss jetzt bezeichnet durch

$$e^W . f_1, \quad e^W . f_2, \dots e^W . f_n;$$

auch sei mit den gegenwärtigen f

$$-f_1 P = Q_1, \quad -f_2 P = Q_2, \dots -f_n P = Q_n, \quad f_1 P_1 + f_2 P_2 + \dots + f_n P_n = Q;$$

so ist wie oben:

$$PQ + P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + \dots + P_n Q_n = 0$$

und man hat:

$$e^W (Q dx + Q_1 dx_1 + Q_2 dx_2 + \dots + Q_n dx_n) = d\Omega.$$

Wird nun vorausgesetzt, dass die Q ganze Polynome in Bezug auf x sind, frei von jedem allen gemeinschaftlichen Faktor, deren Glieder übrigens in beliebige Funktionen von x_1, $x_2, \dots x_n$ multiplicirt sein können; dass ferner W folgende Gestalt hat:

$$W = V + T + T_1 + T_2 + \dots + T_\nu,$$

wo V ein ganzes Polynom in x ist; ferner:

$$T = \frac{U}{(x-y)^k} + \varepsilon \log(x-y)$$

$$T_1 = \frac{U_1}{(x-y_1)^{k_1}} + \varepsilon_1 \log(x-y_1)$$

u. s. w. für alle T;

$y, y_1, y_2 \dots y_\nu$ beliebige Funktionen von $x_1, x_2 \dots\dots x_\nu$, jede von jeder anderen verschieden;

$U, U_1, U_2 \dots U_\nu$ ganze Polynome nach x, die Grade der zugehörigen Nenner nicht erreichend und keinen Faktor mit ihnen gemein habend, übrigens beliebig in Bezug auf $x_1, x_2 \dots x_n$;

$\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_\nu$ Constanten;

$k, k_1, k_2 \dots k_\nu$ positive ganze Zahlen oder auch Null;

alles dieses vorausgesetzt, so sind $x = y$, $x = y_1, \dots x = y_\nu$ eben so viele unvollständige Lösungen des vorgelegten Systems von Differentialgleichungen.

Beweis. Der Werth von $d\Omega$ fordert zunächst die Gleichheit von $\frac{d(e^W Q)}{dx_1}$ mit $\frac{d(e^W Q_1)}{dx}$, d. i.

$$\frac{dQ}{dx_1} - \frac{dQ_1}{dx} = Q_1 \frac{dW}{dx} - Q \frac{dW}{dx_1}.$$

Nach dem Obigen ist

$$\frac{dT}{dx} = \frac{dU}{dx} \cdot \frac{1}{(x-y)^k} - \frac{kU}{(x-y)^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{x-y}, \quad \frac{dT}{dx_1} = \frac{dU}{dx_1} \cdot \frac{1}{(x-y)^k} + \frac{kU}{(x-y)^{k+1}} \frac{dy}{dx_1} - \frac{\varepsilon}{x-y} \cdot \frac{dy}{dx_1}.$$

Mit diesen Werthen ergeben sich in $Q_1 \frac{dW}{dx} - Q\frac{dW}{dx_1}$ folgende mit der höchsten $[(k+1)^{\text{ten}}]$ Potenz von $x-y$ im Nenner behaftete Glieder:

$$-\left(Q_1^0 + Q^0 \frac{dy}{dx_1}\right)\frac{kU^0}{(x-y)^{k+1}}, \text{ wenn } k=1 \text{ oder } > 1,$$

hingegen, wenn $k=0$, also ε nicht $=0$ ist, $\left(Q_1^0+Q^0\frac{dy}{dx_1}\right)\frac{\varepsilon}{x-y}$. Der beigefügte Zeiger 0 bezeichnet die zu $x=y$ gehörigen Werthe von U und Q. Da nun besagte Glieder für sich allein verschwinden müssen; da ferner U^0 nicht Null ist, wenn $k=1$ oder >1, dagegen für $k=0$, ε nicht $=0$ ist, so folgt unter allen Umständen:

$$Q_1^0 + Q^0\frac{dy}{dx_1} = 0.$$

Auf gleiche Weise entspringt aus $\frac{d(e^W Q)}{dx_2} = \frac{d(e^W Q_2)}{dx}$:

$$Q_2^0 + Q^0 \frac{dy}{dx_2} = 0, \text{ u. s. w. für } x_3,\ x_4 \ldots x_n.$$

Die anderen Bedingungen der Integrabilität, worin keine partiellen Ableitungen nach x, sondern nur solche nach x_1, $x_2 \ldots x_n$ auftreten, kommen hier nicht in Betracht.

Verbindet man diese Gleichungen mit $P^0Q^0 + P_1^0Q_1^0 + \ldots + P_n^0 Q_n^0 = 0$, so folgt:

$$Q^0\left(P_1^0\frac{dy}{dx_1} + P_2^0\frac{dy}{dx_2} + \ldots + P_n^0\frac{dy}{dx_n} - P^0\right) = 0.$$

Es ist aber Q^0 nicht $=0$; denn da die Gleichungen wie $Q_1^0+Q^0\frac{dy}{dx}=0$ unter allen Umständen bestehen müssen, so würden mit Q^0 auch Q_1^0, $Q_2^0 \ldots Q_n^0$ sämmtlich $=0$ sein; alsdann wären alle Q durch $x-y$ theilbar, was unstatthaft ist. Folglich ist die eingeklammerte Summe $=0$, d. h. $x=y$ ist eine unvollständige Lösung; und eben so sind es y_1, $y_2 \ldots y_\nu$; w. z. b. w.

Anwendung. Seien die P ganze Polynome ersten Grades hinsichtlich aller Argumente x, x_1, $x_2 \ldots x_n$, also:

$$\begin{aligned}
P &= ax + bx_1 + cx_2 + \ldots + kx_n + h \\
P_1 &= a_1x + b_1x_1 + c_1x_2 + \ldots + k_1x_n + h_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_n &= a_nx + b_nx_1 + c_nx_2 + \ldots + k_nx_n + h_n;
\end{aligned}$$

man verlangt die Integration des Systems:

$$dx : dx_1 : dx_2 \ldots : dx_n = P : P_1 : P_2 \ldots : P_n$$

oder der Gleichung

$$P = P_1\frac{dx}{dx_1} + P_2\frac{dx}{dx_2}+\ldots+P_n\frac{dx}{dx_n}.$$

Man setze als unvollständige und vorläufige Lösung, worin die μ Constanten anzeigen:

$$x+\mu_1x_1+\mu_2x_2+\ldots+\mu_nx_n+\mu_0=0,$$

so folgt

$$P+\mu_1P_1+\mu_2P_2+\ldots+\mu_nP_n=0.$$

Zur Abkürzung sei:

$$\begin{aligned}
a+\mu_1a_1+\mu_2a_2+\ldots+\mu_na_n &= A \\
b+\mu_1b_1+\mu_2b_2+\ldots+\mu_nb_n &= B \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k+\mu_1k_1+\mu_2k_2+\ldots+\mu_nk_n &= K \\
h+\mu_1h_1+\mu_2h_2+\ldots+\mu_nh_n &= H,
\end{aligned}$$

so verwandelt sich $P+\mu_1P_1+\ldots=0$ in

$$Ax+Bx_1+Cx_2+\ldots+Kx_n+H=0.$$

Hiervon abgezogen $A(x+\mu_1x_1+\ldots+\mu_nx_n+\mu_0)=0$ giebt:

$$(B-A\mu_1)x_1+(C-A\mu_2)x_2+\ldots+(K-A\mu_n)x_n+H-A\mu_0=0.$$

Damit diese Gleichung unabhängig von x_1, $x_2\ldots x_n$ bestehe, muss sein:

$$B-A\mu_1=0,\quad C-A\mu_2=0,\quad\ldots\quad K-A\mu_n=0,\quad H-A\mu_0=0.$$

Es ist aber $B-A\mu_1 = b+(b_1-A)\mu_1+b_2\mu_2+\ldots+b_n\mu_n$; daher erhält man, um zunächst die μ alle durch A auszudrücken:

$$\begin{aligned}
b+(b_1-A)\mu_1+b_2\mu_2+\ldots+b_n\mu_n &= 0 \\
c+c_1\mu_1+(c_2-A)\mu_2+\ldots+c_n\mu_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k+k_1\mu_1+k_2\mu_2+\ldots+(k_n-A)\mu_n &= 0,
\end{aligned}$$

wozu noch die Gleichung $A\mu_0=H$ kommt, welche μ_0 bestimmt, sobald μ_1, $\mu_2\ldots\mu_n$ gefunden sind.

Es seien $\mu_1=\frac{M_1}{M}$, $\mu_2=\frac{M_2}{M}$, ... $\mu_n=\frac{M_n}{M}$ die Werthe der μ aus vorstehenden Gleichungen, so ist ihr gemeinschaftlicher Nenner M in Bezug auf A vom n^{ten} Grade, während die Zähler nur den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad erreichen; folglich erhält man durch Einsetzung dieser Werthe in $a-A+\mu_1a_1+\ldots+\mu_na_n=0$ für A die Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades, welche die wesentliche Grundlage für die Integration gewährt, nämlich:

$$Z=(a-A)M+a_1M_1+a_2M_2+\ldots+a_nM_n=0.$$

Diese Gleichung bleibt dieselbe bei jeder linearen Substitution, wodurch das vorliegende System von Differentialgleichungen in ein anderes von ähnlicher Gestalt verwandelt werden kann. Jede ihrer Wurzeln giebt eine vorläufige Lösung; setzt man

$$X = A(Mx + M_1 x_1 + \ldots + M_n x_n) + MH$$
$$= M(Ax + h) + M_1(Ax_1 + h_1) + M_2(Ax_2 + h_2) + \ldots + M_n(Ax_n + h_n)$$
$$= MP + M_1 P_1 + M_2 P_2 + \ldots + M_n P_n,$$

so ist $X = 0$ die allgemeine Form solcher zur Wurzel A gehöriger Lösung. Werden nun mit $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$ die verschiedenen Wurzeln A der Gleichung $Z = 0$ bezeichnet, die ihnen zugehörigen X der Reihe nach mit $X, X_1, X_2 \ldots\ldots X_n$, so erhält man sofort das Integral

$$\Omega = q \log X + q_1 \log X_1 + q_2 \log X_2 + \ldots + q_n \log X_n,$$

wo die q Constanten sind. In der That folgt hieraus, wenn die zu $\mathfrak{A}$ gehörigen M durch $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots$, die zu $\mathfrak{A}_1$ gehörigen durch $\mathfrak{M}', \mathfrak{M}_1', \mathfrak{M}_2' \ldots$ u. s. f. bezeichnet werden:

$$d\Omega = \frac{q\mathfrak{A}(\mathfrak{M}\,dx + \mathfrak{M}_1 dx_1 + \ldots + \mathfrak{M}_n dx_n)}{X} + \frac{q_1\mathfrak{A}_1(\mathfrak{M}' dx + \mathfrak{M}_1' dx_1 + \ldots + \mathfrak{M}'_n dx_n)}{X_1} + \ldots$$

Setzt man hier P für dx, P_1 für $dx_1, \ldots P_n$ für dx_n, so muss der vorstehende Ausdruck in Null übergehen, wenn Ω wirklich ein Integral ist; es ist aber klar, dass dies geschieht, weil $\mathfrak{M}P + \mathfrak{M}_1 P_1 + \ldots + \mathfrak{M}_n P_n = X$, $\mathfrak{M}'P + \mathfrak{M}_1' P_1 + \ldots + \mathfrak{M}'_n P_n = X_1$, u. s. w., sobald nur die q der nachstehenden Bedingung unterworfen werden:

$$S = \mathfrak{A}q + \mathfrak{A}_1 q_1 + \mathfrak{A}_2 q_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n q_n = 0.$$

Es stellt aber die hiermit gefundene Gleichung

$$X^q . X_1^{q_1} . X_2^{q_2} \ldots X_n^{q_n} = \text{Const. mit der Bedingung } S = 0$$

oder

$$\mathfrak{A}q + \mathfrak{A}_1 q_1 + \mathfrak{A}_2 q_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n q_n = 0$$

nicht bloss ein Integral, sondern vielmehr alle Integrale der Aufgabe auf einmal dar, mit Ausnahme gewisser besonderer Fälle, die ich für jetzt bei Seite lasse. Im Allgemeinen sind die Wurzeln $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_n$ alle von einander verschieden, keine gleich Null und für keine geschieht es, dass alle dazu gehörigen $\mathfrak{M}$ gleich Null werden, wodurch das entsprechende X in eine blosse Constante oder in Null übergehen und seine Bedeutung als Lösung verlieren würde. Unter diesen im Allgemeinen zutreffenden Voraussetzungen lässt sich der Bedingung $S = 0$ immer auf n und nicht mehr verschiedene oder von einander unabhängige Arten genugthun; am einfachsten geschieht es durch die Annahmen: $q = 1$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}_m q_m = 0$, alle übrigen $q = 0$; wo m nach und nach $= 1, 2, 3 \ldots n$ zu setzen ist. Hiermit ergeben sich folgende n verschiedene Integrale mit eben so vielen willkürlichen Constanten:

$$X . X_1^{q_1} = C_1,\; X . X_2^{q_2} = C_2, \ldots X . X_n^{q_n} = C_n$$

oder wenn man für die $q_1, q_2 \ldots$ ihre Werthe setzt:

$$X^{\mathfrak{A}_1} = \mathfrak{C}_1 X_1^{\mathfrak{A}},\; X^{\mathfrak{A}_2} = \mathfrak{C}_2 X_2^{\mathfrak{A}}, \ldots X^{\mathfrak{A}_n} = \mathfrak{C}_n X_n^{\mathfrak{A}}.$$

Jedes andere Integral folgt aus diesen.

Eine durchgreifende Behandlung der vorhin angedeuteten Ausnahmefälle ist nicht ohne Umständlichkeit möglich und mag daher einer künftigen Gelegenheit vorbehalten bleiben. Wie die Gestalt des Integrals sich verwandelt, wenn die Gleichung $Z = 0$ gleiche Wurzeln hat, die jedoch nicht Null sind, — dies ergiebt sich leicht aus der allgemeinen Form durch Variation der Constanten. Ist $\mathfrak{A} = 0$ eine Wurzel jener Grundgleichung Z, so lässt sich durch eine lineare Substitution die ursprüngliche Anzahl der in den P befindlichen Argumente $x, x_1 \ldots x_n$ wenigstens um eine Einheit erniedrigen, wodurch die Aufgabe auf die Integration eines Systems von $n - 1$ Gleichungen vorliegender Art mit n Argumenten zurückgeführt wird. Sind die $n - 1$ Integrale dieses Systems bekannt, so erhält man das noch fehlende n^{te} Integral durch eine Quadratur, welche übrigens schon in den einfachsten Fällen sowohl wegen der dazu nöthigen Eliminationen als der Integration selbst die Macht der Analysis weit übersteigt. Wenn der Ausdruck Z sich in das Produkt zweier oder mehrerer von einander unabhängiger Determinanten zerlegen lässt, so zerfallen die gegebenen Differentialgleichungen in eben so viele getrennte Gruppen, deren jede für sich allein integrabel ist; die nach Integration dieser Gruppen noch fehlenden Integrale werden ebenfalls durch Quadraturen gegeben. Es bestehen noch andere Ausnahmefälle; ich begnüge mich aber hier nur noch einige Beispiele folgen zu lassen.

Merkwürdig einfach ist die Integration des Systems:

$$\frac{dx}{x_1} = \frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_3} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{x_n} = \frac{dx_n}{x}.$$

Man findet $Z = A^{n+1} - 1 = 0$ und hiermit n Integrale von folgender Form:

$$C(x + x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = (x + rx_1 + r^2 x_2 + r^3 x_3 + \ldots + r^n x_n)^r$$

wo für r nach und nach die verschiedenen $(n + 1)^{ten}$ Wurzeln der Einheit, mit Ausnahme der Wurzel 1, zu setzen sind. Die Richtigkeit dieser Integration wird auch ganz leicht durch Differentiation unmittelbar bewiesen. — Es seien z. B. nur zwei Gleichungen dieser Art gegeben, nämlich $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$, so kann man die Integrale zu folgenden, von $\sqrt{-1}$ befreiten Formen verbinden:

$$C_1(x + y + z) = (x + ry + r^2 z)^r + (x + r^2 y + rz)^{r^2};\quad (r^2 + r + 1 = 0)$$
$$C_2(x + y + z)^2 = (x + ry + r^2 z)^r \;.\; (x + r^2 y + rz)^{r^2}.$$

Ueberhaupt wenn die Gleichung Z complexe Wurzeln hat, so ist klar, dass es immer möglich ist, durch zweckmässige Verbindung der Integrale das Imaginäre auszuscheiden, sobald nur die in den P befindlichen Constanten alle reell sind.

Wird aus $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x}$ z weggeschafft, so erhält man die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$d\left(\frac{y\,dy}{dx}\right) = \frac{x\,dx}{y} \text{ oder } \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x}{y^2},$$

deren Integral also gefunden wird durch Elimination von z aus den beiden Gleichungen:

$$x+y+z=C(x+ry+r^2z)^r=C'(x+r^2y+rz)^{r^2};\quad (r^2+r+1=0);$$

wird hier für z gesetzt: $\frac{ydy}{dx}$, so ergeben sich die beiden ersten Integrale.

Als zweites Zahlenbeispiel sei vorgelegt:

$$P=x-4y+3z+h,\ P_1=2x+y+3z+h_1,\ P_2=x-y+2z+h_2;\ \frac{dx}{P}=\frac{dy}{P_1}=\frac{dz}{P_2}.$$

Die Gleichung Z wird hier $(\mathfrak{A}^2-4\mathfrak{A}+13)\mathfrak{A}=0$; die Wurzel $\mathfrak{A}=0$ führt darauf, die x, y, z in den P durch nur zwei Argumente u und v zu ersetzen; dies geschieht durch $u=x+\frac{5}{3}z$, $v=y-\frac{1}{3}z$; dadurch wird $P=u-4v+h$, $P_1=2u+v+h_1$, $P_2=u-v+h_2$. Ohne indess von dieser Substitution Gebrauch zu machen, kann man aus der allgemeinen Formel sogleich zwei Lösungen herleiten. Man findet nämlich nach einigen Reductionen, wenn $\mathfrak{A}$ eine Wurzel der Gleichung $\mathfrak{A}^2-4\mathfrak{A}+13=0$ bedeutet, $\mathfrak{M}=\mathfrak{A}-8$, $\mathfrak{M}_1=5-4\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}_2=3\mathfrak{A}-15$; sei noch der Kürze wegen $H=\mathfrak{A}(h-4h_1+3h_2)-8h+5h_1-15h_2$; so wird nach der allgemeinen Formel für X:

$$X=\mathfrak{A}[(\mathfrak{A}-8)x+(5-4\mathfrak{A})y+(3\mathfrak{A}-15)z]+H=\mathfrak{A}[\mathfrak{A}(u-4v)-8u+5v]+H,$$

d. i.

$$X=-(4\mathfrak{A}+13)u+(52-11\mathfrak{A})v+H.$$

Sind nun X_1 und X_2 die zu $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gehörigen X, so folgt sofort das Integral

$$X_1^{\mathfrak{A}_2}=C\,.\,X_2^{\mathfrak{A}_1},$$

also eine Gleichung zwischen u und v. Führt man jetzt diese Grössen in die Differentialgleichungen ein, so erhält man leicht: $\frac{3du}{3P+5P_2}=\frac{dz}{P}$, d. i. $dz=\frac{3(u-4v+h)du}{8u-17v+3h+5h_2}$, wo v mittels der gefundenen endlichen Gleichung durch u auszudrücken, einzusetzen und dann die Quadratur nach u zu bewirken ist.

Noch ein leichtes Beispiel, worin gleiche Wurzeln vorkommen, ist folgendes: $P=2x+z+1$, $P_1=2y+2z$, $P_2=x-y$; $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{P_1}=\frac{dz}{P_2}$. Die Gleichung Z wird $(\mathfrak{A}-1)^2(\mathfrak{A}-2)=0$; hieraus ergeben sich zwei Lösungen: $X=2x-y+1$, $X_1=x-y-z+1$. Das Integral ist in folgender Form enthalten:

$$\Omega=X^q X_1^{q_1} e^{\frac{-(2q+q_1)(z-1)}{X_1}},$$

wo die q ganz beliebig sind, nur nicht beide zugleich Null. Nimmt man erst $2q+q_1=0$ und dann $q_1=0$, so hat man die beiden Integrale:

$$X=C\,.\,X_1^2,\quad X=C_1\,.\,e^{\frac{2z-2}{X_1}}.$$

Minding.

Dorpat den 18. (30.) Januar 1862.

Inhalt.

Druckfehler.

S.	7	Z. 11	v. u.	statt	höher l. früher.
»	7	» 7	» »	»	jetzt eine l. jetzt nur eine
»	8	» 4	» »	»	das Zeichen l. der Zeichen
»	9	» 15	v. o.	»	wenn l. oder wenn
»	11	» 8	v. u.	»	in welcher eben l. in welcher aber
»	12	» 15	» »	»	$(n+1)(n+2)$ l. $(n-1)(n+1)$
»	15	» 16	v. o.	»	seien l. sei