

Р  
A-1459 I

TALLINNA POLÛTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
PUBLICATIONS FROM THE TALLINN INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
Seeria A nr. 24 1948

---

О. СИЛЬДЕ

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ



ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“

ESTICA

6073  
I 604

P  
A-1459 I

TALLINNA POLÜTEHNILISE INSTITUUDI TOIMETISED  
ТРУДЫ ТАЛЛИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
PUBLICATIONS FROM THE TALLINN INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
Seeria A nr. 24 1948

---

О. СИЛЬДЕ

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Konustuslik kontrollieksemplar



ГИЗ „НАУЧНАЯ ЛИТЕРАТУРА“

ТАРТУ, 1948

P.



21381

i 38872262

## Две теоремы теории чисел.

Теорема I. 
$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n-1}{\nu} (n-\nu)^n = \frac{(n+1)!}{2},$$

при любом натуральном числе  $n$ .

Доказательство.

Известно, что (Вандермонд)

$$(I) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{m-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^m (a_k - a_1)(a_k - a_2) \dots (a_k - a_{k-1})$$

и

$$(II) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix} = (a_1 + \dots + a_n) \prod_{k=2}^n (a_k - a_1) \dots (a_k - a_{k-1}).$$

Доказательство (I) см. напр. Л. Я. Окунев, Высшая алгебра, 1944 г. изд., стр. 36.

Для доказательства (II) напомним равенство:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (z - a_i),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

верность которого можно доказать при помощи (I) непосредственным вычислением. Если разложить определитель в числителе с левой стороны по последней строке, а с правой стороны раскрыть скобки, то, имея в виду, что коэффициенты при  $z^{n-1}$  с обеих сторон должны быть равны, получим:

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^n \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-2} & a_n^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}} = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

из чего легко получается (II).

В определителе (II) выберем элементы следующим образом:

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, \dots, a_n = n$  (при  $n > 1$ ), а величину определителя в этом случае обозначим буквою  $D$ , так что

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{n-2} & 1^n \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} & 2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-2} & n^n \end{vmatrix}.$$

Алгебраическое дополнение элемента  $n^n$  в определителе обозначим буквою  $V$ ; это дополнение является определителем Вандермонда, так что

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \dots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{k=2}^{n-1} (k-1)! = 1!2!\dots(n-2)!$$

(как следует из равенства (I)).

Алгебраическое дополнение какого-нибудь элемента  $(n-\nu)^n$  (где  $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ ) последнего столбца определителя есть также

определитель Вандермонда и по равенству (I) может быть выражено следующим образом:

$$(-1)^{\nu} 1! 2! \dots (n - \nu - 2)! \frac{(n - \nu)!}{1} \cdot \frac{(n - \nu + 1)!}{2} \dots \frac{(n - 1)!}{\nu}$$

или

$$(-1)^{\nu} \cdot V \cdot \frac{(n - \nu)(n - \nu + 1) \dots (n - 1)}{\nu!}$$

или

$$(-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} V.$$

Следовательно, при разложении определителя  $D$  по последнему столбцу получаем:

$$\begin{aligned} D &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (n - \nu)^n (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} V = \\ &= V \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} (n - \nu)^n. \end{aligned}$$

С другой стороны, из равенства (II) следует, что

$$\begin{aligned} D &= (1 + 2 + \dots + n) \cdot 1! 2! \dots (n - 2)! (n - 1)! = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} V (n - 1)! = \frac{(n+1)!}{2} V. \end{aligned}$$

Сравнивая оба выражения для  $D$ , получим:

$$V \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{\nu} \binom{n-1}{\nu} (n - \nu)^n = \frac{(n+1)!}{2} V.$$

Если  $n > 1$ , то  $V \neq 0$ , и, разделив последнее равенство на  $V$ , получим то, что и требовалось доказать.

Если  $n = 1$ , то правильность равенства доказывается непосредственным вычислением.

Теорема II. Коэффициенты  $S_{\lambda}^{(k)}$  факториального полинома  $z^{[k]}$ , определённые равенством

$$z^{[k]} = \prod_{\nu=0}^{k-1} (z - \nu) = z^k - S_1^{(k)} z^{k-1} + S_2^{(k)} z^{k-2} - \dots - (-1)^k S_{k-1}^{(k)} z,$$

выражаются через числа  $P_{k-\lambda}^{(k)}$ , данные формулой

$$P_{k-\lambda}^{(k)} = \frac{1}{(\lambda-1)!} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^\nu \binom{\lambda-1}{\nu} (\lambda-\nu)^{k-1},$$

в виде определителей:

$$S_\lambda^{(k)} = \begin{vmatrix} P_1^{(k-\lambda+1)} & P_2^{(k-\lambda+2)} & \dots & P_{\lambda-1}^{(k-1)} & P_\lambda^{(k)} \\ 1 & P_1^{(k-\lambda+2)} & \dots & P_{\lambda-2}^{(k-1)} & P_{\lambda-1}^{(k)} \\ 0 & 1 & \dots & P_{\lambda-3}^{(k-1)} & P_{\lambda-2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & P_1^{(k)} \end{vmatrix}.$$

Доказательство.

Из равенства (I) следует, что

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{m-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{m-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & m & m^2 & \dots & m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{\nu=1}^{m-1} \nu!.$$

Алгебраическое дополнение элемента последнего столбца  $t_{n-\nu}$  ( $\nu=0, 1, \dots, n-1$ ) определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{n-2} & t_1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n & n^2 & \dots & n^{n-2} & t_n \end{vmatrix}$$

равняется

$$(-1)^\nu \binom{n-1}{\nu} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{n-2} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n-1 & (n-1)^2 & \dots & (n-1)^{n-2} \end{vmatrix}.$$

(Ср. соответствующие выводы в п. I.)

Следовательно:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{\lambda-2} & 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{\lambda-2} & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{\lambda-2} & \lambda^{k-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1^{\lambda-2} \\ 1 & 2 & \dots & 2^{\lambda-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda-1 & \dots & (\lambda-1)^{\lambda-2} \end{vmatrix} \cdot \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} (-1)^\nu \binom{\lambda-1}{\nu} (\lambda-\nu)^{k-1}.$$

Из этого, имея в виду определение чисел  $P_i^{(k)}$ , ясно, что

$$(\lambda-1)! P_{k-\lambda}^{(k)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{\lambda-2} & 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{\lambda-2} & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{\lambda-2} & \lambda^{k-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{\lambda-2} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{\lambda-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda-1 & (\lambda-1)^2 & \dots & (\lambda-1)^{\lambda-2} \end{vmatrix}.$$

Из этого равенства следует, что

$$P_0^{(k)} = 1, \text{ но } P_{-1}^{(k)} = P_{-2}^{(k)} = \dots = 0.$$

Непосредственное вычисление даёт, что  $P_{i-1}^{(k)} = 1$ .

Из матрицы этих чисел

$$\begin{pmatrix} P_0^{(1)} & P_1^{(2)} & \dots & P_{k-1}^{(k)} \\ P_{-1}^{(1)} & P_0^{(2)} & \dots & P_{k-2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{-k+2}^{(1)} & P_{-k+3}^{(2)} & \dots & P_1^{(k)} \end{pmatrix},$$

закрывающей  $k-1$  строк и  $k$  столбцов, можно путём вычёркивания  $(k-\lambda)$ -го столбца получить определитель

$$\begin{vmatrix} P_0^{(1)} & P_1^{(2)} & \dots & P_{k-\lambda-2}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-1}^{(k)} \\ P_{-1}^{(1)} & P_0^{(2)} & \dots & P_{k-\lambda-3}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda-1}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{-k+2}^{(1)} & P_{-k+3}^{(2)} & \dots & P_{-\lambda}^{(k-\lambda-1)} & P_{-\lambda+2}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_1^{(k)} \end{vmatrix},$$

который сокращённо обозначаем символом  $\Delta_{\lambda}^{(k)}$ . Все элементы первой строки этого определителя имеют общий множитель  $\frac{1}{0!}$ , второй строки  $\frac{1}{1!}$ , третьей строки  $\frac{1}{2!}$ , и т. д., последней строки  $\frac{1}{(k-2)!}$ , так что можно вывести и написать перед определителем коэффициент

$$\frac{1}{1! 2! 3! \dots (k-2)!}.$$

Тогда элементами определителя будут суммы, которые заключаются в выражениях для  $P_i^{(k)}$ . В первой строке все эти элементы одночлены, именно  $1^0, 1^1, 1^2, \dots, 1^{k-\lambda-2}, 1^{k-\lambda}, \dots, 1^{k-1}$ , а во второй строке двучлены:  $2^0 - \binom{1}{1} 1^0, 2^1 - \binom{1}{1} 1^1, \dots, 2^{k-\lambda-2} - \binom{1}{1} 1^{k-\lambda-2}, 2^{k-\lambda} - \binom{1}{1} 1^{k-\lambda}, \dots, 2^{k-1} - \binom{1}{1} 1^{k-1}$ ; но эти двучлены можно сделать одночленами, если к ним прибавить соответствующие элементы первой строки, помноженные на  $\binom{1}{1}$ , после чего элементы второй строки будут равны числам  $1, 2^1, 2^2, \dots, 2^{k-\lambda-2}, 2^{k-\lambda}, \dots, 2^{k-1}$ . Элементы третьей строки имеют вид  $3^m - \binom{2}{1} 2^m + \binom{2}{2} 1^m$ . Если к ним прибавить соответствующие,  $\binom{2}{1}$  раза взятые элементы второй строки и вычесть  $\binom{2}{2}$  раза взятые элементы первой строки, то элементы третьей строки будут одночленами, а именно:  $3^0, 3^1, \dots, 3^{k-\lambda-2}, 3^{k-\lambda}, \dots, 3^{k-1}$ . Поступая таким же образом последовательно со всеми строками, т. е. прибавляя или вычитая одночленные элементы предшествующих строк, взятых с подходящими множителями, можно  $\Delta_{\lambda}^{(k)}$  представить в следующем виде:

$$\Delta_{\lambda}^{(k)} = \frac{1}{1! 2! \dots (k-2)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{k-\lambda-2} & 1^{k-\lambda} & \dots & 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{k-\lambda-2} & 2^{k-\lambda} & \dots & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \dots & (k-1)^{k-\lambda-2} & (k-1)^{k-\lambda} & \dots & (k-1)^{k-1} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, как можно доказать при помощи равенства (I):

$$z^{[k]} = z \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \dots & (k-1)^{k-1} \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^{k-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{k-2} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{k-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \dots & (k-1)^{k-2} \end{vmatrix}$$

ИЛИ

$$z^{[k]} = \frac{z}{1!2!3!\dots(k-2)!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1^2 & \dots & 1^{k-1} \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^{k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & k-1 & (k-1)^2 & \dots & (k-1)^{k-1} \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^{k-1} \end{vmatrix} = \sum_{\lambda=0}^{k-1} (-1)^\lambda \Delta_\lambda^{(k)} z^{k-\lambda}.$$

Последнее выражение получается, если разложить определитель по последней строке.

Сравнивая последнее выражение с разложением  $z^{[k]}$  по степеням  $z$  в теореме, можем сделать вывод, что

$$\Delta_\lambda^{(k)} = S_\lambda^{(k)}.$$

Следовательно:

$$S_\lambda^{(k)} = \begin{vmatrix} P_0^{(1)} & P_1^{(2)} & \dots & P_{k-\lambda-2}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda+1}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-1}^{(k)} \\ P_{-1}^{(1)} & P_0^{(2)} & \dots & P_{k-\lambda-3}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda-1}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{-k+2}^{(1)} & P_{-k+3}^{(2)} & \dots & P_{-\lambda}^{(k-\lambda-1)} & P_{-k+2}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_1^{(k)} \end{vmatrix};$$

принимая в расчёт значения  $P_i^{(k)}$  при  $i = 0$  и  $i < 0$ , можем предыдущее равенство написать в следующем виде:

$$S_\lambda^{(k)} = \begin{vmatrix} 1 & P_1^{(2)} & P_2^{(3)} & \dots & P_{k-\lambda-2}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-2}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-2}^{(k-1)} & P_{k-1}^{(k)} \\ 0 & 1 & P_1^{(3)} & \dots & P_{k-\lambda-3}^{(k-\lambda-1)} & P_{k-\lambda-1}^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{k-3}^{(k-1)} & P_{k-2}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & P_2^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_\lambda^{(k-1)} & P_{\lambda+1}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_1^{(k-\lambda+1)} & \dots & P_{\lambda-1}^{(k-1)} & P_\lambda^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & P_{\lambda-2}^{(k-1)} & P_{\lambda-1}^{(k)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & P_1^{(k)} \end{vmatrix},$$

откуда, пользуясь известными теоремами из теории определителей, получаем для  $S_{\lambda}^{(k)}$  данное в теореме выражение.

Этим теорема II доказана.

Доказанные выше положения сообщил автору действительный член Академии Наук Эстонской ССР проф. Ю. Ю. Нут, получивший эти соотношения при исследовании топологической структуры сетей.

*Vastutav toimetaja A. Humal.*

*Tehniline toimetaja H. Kohu.*

Ladumisele antud 14. IV 48. Trükkimisele antud 24. VII 48. Paberi kaust  $67 \times 95 \frac{1}{16}$ .  
Trükipoognaid  $\frac{5}{8}$ . Autoripoognaid 0,33. Arvestuspoognaid 0,33. MB 04350. Lao-  
tihedus trpg. 31 200. Tiraaž 800. Trükikoja tellimus nr. 772.

Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4.

*Hind rbl. 1.—*

TÜ RAAMATUKOGU



10300015935234

Rbl. 1.—

Per. A-1459  
-24

18 183 a